

# Table des matières

|                                                                                                                                                                    |             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>Table des figures</b>                                                                                                                                           | <b>iv</b>   |
| <b>Liste des tableaux</b>                                                                                                                                          | <b>viii</b> |
| <b>Liste des abréviations</b>                                                                                                                                      | <b>x</b>    |
| <b>Symboles</b>                                                                                                                                                    | <b>xi</b>   |
| <b>Introduction</b>                                                                                                                                                | <b>1</b>    |
| <b>1 État de l’art</b>                                                                                                                                             | <b>7</b>    |
| 1.1 La voie ferrée . . . . .                                                                                                                                       | 7           |
| 1.1.1 Constitution de la voie ferrée . . . . .                                                                                                                     | 8           |
| 1.1.2 Caractérisation de la raideur de la voie . . . . .                                                                                                           | 13          |
| 1.1.3 Défauts de géométrie de la voie . . . . .                                                                                                                    | 20          |
| 1.2 Résistance de la voie aux sollicitations du véhicule . . . . .                                                                                                 | 22          |
| 1.2.1 Les efforts verticaux . . . . .                                                                                                                              | 23          |
| 1.2.1.1 Les efforts statiques . . . . .                                                                                                                            | 23          |
| 1.2.1.2 Les efforts verticaux quasi-statiques . . . . .                                                                                                            | 23          |
| 1.2.1.3 Les surcharges dynamiques verticales . . . . .                                                                                                             | 25          |
| 1.2.2 Les efforts latéraux . . . . .                                                                                                                               | 26          |
| 1.2.2.1 Les efforts latéraux quasi-statiques . . . . .                                                                                                             | 29          |
| 1.2.2.2 Les surcharges dynamiques latérales . . . . .                                                                                                              | 29          |
| 1.3 Origine des règles de calcul des conditions de circulation . . . . .                                                                                           | 29          |
| 1.3.1 Classement des voies du réseau . . . . .                                                                                                                     | 30          |
| 1.3.2 Classement des matériels roulants . . . . .                                                                                                                  | 31          |
| 1.3.3 Conditions de circulation des matériels roulants établies par la commission DE-<br>MAUX . . . . .                                                            | 35          |
| 1.4 Démarche en vigueur pour l’admission des matériels roulants sur le RFN . . . . .                                                                               | 35          |
| 1.5 Bilan . . . . .                                                                                                                                                | 37          |
| <b>2 Modélisation du système ferroviaire</b>                                                                                                                       | <b>38</b>   |
| 2.1 Modèle de la voie ferrée . . . . .                                                                                                                             | 39          |
| 2.1.1 Développement du modèle éléments finis 2D de la voie du type poutre repo-<br>sant sur un milieu multi-couches : caractérisation du comportement vertical . . | 43          |

|          |                                                                                                                                                                  |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.1.2    | Extension vers un modèle éléments finis 3D de la voie du type poutres reposant sur un milieu multi-couches : caractérisation du comportement vertical et latéral | 45         |
| 2.2      | Estimation des coefficients de rigidité et d'amortissement dans le modèle de la voie                                                                             | 48         |
| 2.2.1    | Rigidité et amortissement de la semelle                                                                                                                          | 48         |
| 2.2.2    | Rigidité et amortissement de la couche {ballast + sous-structure}                                                                                                | 50         |
| 2.3      | Génération des défauts de géométrie de la voie                                                                                                                   | 57         |
| 2.4      | Modèle du véhicule ferroviaire                                                                                                                                   | 59         |
| 2.4.1    | Développement du modèle multi-corps 2D du véhicule                                                                                                               | 60         |
| 2.4.2    | Extension vers un modèle multi-corps 3D du véhicule                                                                                                              | 63         |
| 2.5      | Hypothèses de calcul                                                                                                                                             | 69         |
| 2.6      | Validation de l'outil                                                                                                                                            | 70         |
| 2.6.1    | Validation du modèle de la voie                                                                                                                                  | 70         |
| 2.6.1.1  | Modèle 2D de la voie                                                                                                                                             | 70         |
| 2.6.1.2  | Modèle 3D de la voie                                                                                                                                             | 75         |
| 2.6.2    | Validation du modèle du véhicule                                                                                                                                 | 77         |
| 2.7      | Bilan                                                                                                                                                            | 81         |
| <b>3</b> | <b>Évaluation de la fatigue dans le rail</b>                                                                                                                     | <b>83</b>  |
| 3.1      | Calcul du champ de contraintes dans le rail                                                                                                                      | 84         |
| 3.1.1    | Essai de torsion                                                                                                                                                 | 87         |
| 3.1.2    | Essai de flexion simple avec un effort appliqué selon $\vec{z}$                                                                                                  | 87         |
| 3.1.3    | Essai de flexion simple avec un effort appliqué selon $\vec{y}$                                                                                                  | 88         |
| 3.1.4    | Conclusion                                                                                                                                                       | 89         |
| 3.2      | Introduction au phénomène de fatigue                                                                                                                             | 89         |
| 3.3      | Critères de fatigue multiaxiaux                                                                                                                                  | 91         |
| 3.3.1    | Paramètres de contraintes utilisés en fatigue multiaxiale                                                                                                        | 92         |
| 3.3.2    | Revue bibliographique de quelques critères de fatigue                                                                                                            | 94         |
| 3.3.2.1  | Approche fondée sur le calcul des invariants des contraintes                                                                                                     | 94         |
| 3.3.2.2  | Approche intégrale                                                                                                                                               | 95         |
| 3.3.2.3  | Approche des plans critiques                                                                                                                                     | 97         |
| 3.3.3    | Choix d'un critère de fatigue                                                                                                                                    | 98         |
| 3.3.4    | Le critère de Dang Van                                                                                                                                           | 103        |
| 3.3.4.1  | Algorithme des combinaisons des points                                                                                                                           | 107        |
| 3.3.4.2  | Résolution du problème d'optimisation par la méthode ADA                                                                                                         | 109        |
| 3.4      | Implémentation du critère de fatigue                                                                                                                             | 113        |
| 3.4.1    | Premier exemple                                                                                                                                                  | 113        |
| 3.4.2    | Deuxième exemple                                                                                                                                                 | 115        |
| 3.5      | Bilan                                                                                                                                                            | 117        |
| <b>4</b> | <b>Réponse de la voie au passage du véhicule</b>                                                                                                                 | <b>119</b> |
| 4.1      | Admission d'une voiture remorquée                                                                                                                                | 121        |

|       |                                                                                  |     |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1.1 | Chargement généré par la voiture sur les voies . . . . .                         | 122 |
| 4.1.2 | Comparaison de la réponse statique et dynamique de la voie . . . . .             | 124 |
| 4.1.3 | Contraintes normales et contraintes de cisaillement dans le rail . . . . .       | 126 |
| 4.1.4 | État de fatigue généré dans le rail : confrontation du référentiel . . . . .     | 127 |
| 4.2   | Admission d'une motrice . . . . .                                                | 129 |
| 4.2.1 | Chargement généré par la motrice sur les voies . . . . .                         | 130 |
| 4.2.2 | Comparaison de la réponse statique et dynamique de la voie . . . . .             | 131 |
| 4.2.3 | État de fatigue généré dans le rail : confrontation du référentiel . . . . .     | 132 |
| 4.3   | Admission d'un wagon . . . . .                                                   | 132 |
| 4.3.1 | Chargement généré par le wagon sur les voies . . . . .                           | 133 |
| 4.3.2 | Comparaison de la réponse statique et dynamique de la voie . . . . .             | 134 |
| 4.3.3 | État de fatigue généré dans le rail : confrontation du référentiel . . . . .     | 136 |
| 4.4   | Bilan . . . . .                                                                  | 136 |
| 5     | Conclusion et perspectives                                                       | 138 |
| A     | Rappel de la théorie des éléments finis : élément poutre de Timoshenko à 2 nœuds | 141 |
| B     | Méthode d'intégration de Newmark                                                 | 143 |
| C     | Véhicules et voies modélisés au chapitre 4                                       | 145 |
|       | Bibliographie                                                                    | 155 |

# Table des figures

|      |                                                                                                                                                                                    |    |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Composition d'une ligne classique. . . . .                                                                                                                                         | 8  |
| 1.2  | Différents types de rails. . . . .                                                                                                                                                 | 9  |
| 1.3  | Différents types de traverses. . . . .                                                                                                                                             | 9  |
| 1.4  | Types de traverses en béton. . . . .                                                                                                                                               | 10 |
| 1.5  | Semelle cannelée. . . . .                                                                                                                                                          | 10 |
| 1.6  | Selle pour les voies équipées de traverses en bois. . . . .                                                                                                                        | 11 |
| 1.7  | Exemples d'attaches. . . . .                                                                                                                                                       | 11 |
| 1.8  | Grains de ballast. . . . .                                                                                                                                                         | 12 |
| 1.9  | Bourreuse mécanique. . . . .                                                                                                                                                       | 13 |
| 1.10 | Dispositif MRAIL pour la mesure de la déflexion du rail. . . . .                                                                                                                   | 14 |
| 1.11 | La méthode STPT (Single Tie Push Test). . . . .                                                                                                                                    | 15 |
| 1.12 | Essai d'impact au marteau. . . . .                                                                                                                                                 | 15 |
| 1.13 | Courbe de réceptance d'une voie ballastée. Trait continu : entre deux traverses. Trait discontinu : sur une traverse. . . . .                                                      | 16 |
| 1.14 | Forme des ondes associées aux pics de résonance. . . . .                                                                                                                           | 17 |
| 1.15 | Essai en laboratoire pour mesurer la rigidité de la semelle en fonction de la fréquence d'excitation $\omega$ . . . . .                                                            | 18 |
| 1.16 | Pénétromètre dynamique léger PANDA. . . . .                                                                                                                                        | 18 |
| 1.17 | Illustration des défauts de géométrie de la voie. . . . .                                                                                                                          | 21 |
| 1.18 | La voiture MAUZIN. . . . .                                                                                                                                                         | 21 |
| 1.19 | Illustration du dévers théorique dans la voie. . . . .                                                                                                                             | 23 |
| 1.20 | Densité spectrale de puissance du défaut de nivellement longitudinal de la voie. . . . .                                                                                           | 25 |
| 1.21 | Dispositif expérimental : Couplage avec un wagon tombereau. . . . .                                                                                                                | 27 |
| 1.22 | Évolution du déplacement latéral résiduel de la voie avec le nombre de passages . . . . .                                                                                          | 28 |
| 1.23 | Flexion d'une poutre sur deux appuis . . . . .                                                                                                                                     | 30 |
| 1.24 | Chargement de la poutre sur fondation élastique et conditions aux limites. . . . .                                                                                                 | 31 |
| 1.25 | Illustration de l'oscillation du véhicule autour de l'axe vertical sur voie en courbe. . . . .                                                                                     | 34 |
| 1.26 | Illustration du jeu sur la roue entre la position du point de contact pour une voie en alignement sans défauts et la position du point de contact pour une voie en courbe. . . . . | 34 |
| 1.27 | Démarche de calcul des conditions de circulation d'un matériel roulant. . . . .                                                                                                    | 36 |
| 2.1  | Hypothèse des déformations planes pour passer d'un modèle volumique 3D vers un modèle surfacique 2D. . . . .                                                                       | 42 |



|      |                                                                                                                                                                                                                 |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.2  | Représentation de la voie comme une structure périodique basée sur la répétition d'une cellule générique. . . . .                                                                                               | 42 |
| 2.3  | Modèle éléments finis 2D de la voie. . . . .                                                                                                                                                                    | 43 |
| 2.4  | Degrés de liberté d'un élément poutre de Timoshenko. . . . .                                                                                                                                                    | 44 |
| 2.5  | Coupe transversale du modèle 3D de la voie. . . . .                                                                                                                                                             | 46 |
| 2.6  | Modèle de distribution des efforts dans les couches du ballast sain, ballast colmaté, couche intermédiaire et sol support. . . . .                                                                              | 51 |
| 2.7  | Illustration du recouvrement des pyramides relatifs à la transmission des efforts de la traverses vers les couches de ballast et de la sous-structure de la voie. . . . .                                       | 53 |
| 2.8  | Densité de probabilité du module de Young $E$ pour les différentes couches formant la ligne classique. . . . .                                                                                                  | 55 |
| 2.9  | Répartition des groupes UIC dans un groupe DEMAUX donné. . . . .                                                                                                                                                | 56 |
| 2.10 | Modèle multi-corps 2D du véhicule. . . . .                                                                                                                                                                      | 61 |
| 2.11 | Modèle multi-corps 3D du véhicule. . . . .                                                                                                                                                                      | 64 |
| 2.12 | Projection des efforts exercés par le véhicule dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de la voie. . . . .                                                                                                   | 68 |
| 2.13 | Répartition du chargement sur les traverses adjacentes à une traverse sur laquelle une charge ponctuelle est appliquée. . . . .                                                                                 | 71 |
| 2.14 | Force d'impact appliquée sur le rail. . . . .                                                                                                                                                                   | 71 |
| 2.15 | Comparaison des courbes de réceptance relatives à l'application d'un impact pour le modèle de la voie développé et le modèle de référence (XIE et IWNICKI, 2008). . . . .                                       | 72 |
| 2.16 | Paramètres de la simulation. . . . .                                                                                                                                                                            | 74 |
| 2.17 | Amplitudes des ondes réfléchies dans la zone d'étude ZE à l'instant final pour différentes longueurs de la zone tampon. . . . .                                                                                 | 75 |
| 2.18 | Choix de la longueur du véhicule qui permet de fixer une longueur $L_{ZT_2}$ pour la zone tampon. . . . .                                                                                                       | 75 |
| 2.20 | Moment de torsion dans les deux files de rail (zone ZE) pour le modèle 3D à l'instant où les efforts atteignent le milieu de la voie. . . . .                                                                   | 77 |
| 2.21 | Déplacements latéraux et verticaux dans les deux files de rail dans la zone ZE à l'instant où les efforts atteignent le milieu de la voie. . . . .                                                              | 77 |
| 2.22 | Défaut de nivellement longitudinal sinusoïdal d'une longueur d'onde de 50 m. . . . .                                                                                                                            | 78 |
| 2.23 | Accélération verticale de la caisse pour le défaut de nivellement longitudinal de longueur d'onde $\lambda = 50$ m. . . . .                                                                                     | 78 |
| 2.24 | Effort vertical exercé sur la roue droite de l'essieu avant 1 pour le défaut de nivellement longitudinal de longueur d'onde $\lambda = 50$ m. . . . .                                                           | 79 |
| 2.25 | Défaut de dressage sinusoïdal d'une longueur d'onde de 50 m. . . . .                                                                                                                                            | 79 |
| 2.26 | Accélération latérale de la caisse pour le défaut de dressage de longueur d'onde $\lambda = 50$ m. . . . .                                                                                                      | 80 |
| 2.27 | Équilibre du véhicule en courbe en régime permanent. . . . .                                                                                                                                                    | 81 |
| 2.28 | Efforts Exercés par l'essieu avant 1 sur les deux files de rail dans le cas d'un véhicule qui franchit une courbe sans défaut de rayon $R = 940$ m et un dévers $d = 160$ mm à une vitesse de 100 km/h. . . . . | 81 |

|      |                                                                                                                                                                      |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1  | Vitesses moyennes de circulation sur les différents groupes Demaux. . . . .                                                                                          | 84  |
| 3.2  | Illustration du repère principal $(G, \vec{y}, \vec{z})$ de la section du rail et de la normale extérieure à son contour. . . . .                                    | 85  |
| 3.3  | Poutre de section rectangulaire encastree-libre. . . . .                                                                                                             | 86  |
| 3.4  | Calcul de la contrainte de cisaillement $\mathcal{T}$ en MPa sous CAST3M pour le problème exposé en Figure 3.3 lorsqu'un moment de torsion $C_t$ est exercé. . . . . | 87  |
| 3.5  | Calcul de la contrainte de cisaillement $\mathcal{T}$ en MPa sous CAST3M pour le problème exposé en Figure 3.3 lorsqu'un effort vertical $Q$ est exercé. . . . .     | 88  |
| 3.6  | Calcul de la contrainte de cisaillement $\mathcal{T}$ en MPa sous CAST3M pour le problème exposé en Figure 3.3 lorsqu'un effort latéral $Y$ est exercé. . . . .      | 88  |
| 3.7  | Sollicitation cyclique uniaxiale à amplitude constante. . . . .                                                                                                      | 90  |
| 3.8  | Courbes de Wöhler. . . . .                                                                                                                                           | 90  |
| 3.9  | Classification des critères de fatigue multiaxiaux. . . . .                                                                                                          | 92  |
| 3.10 | Projection du tenseur des contraintes dans le plan $\pi$ de repère $(M, \vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ . . . . .                                                        | 93  |
| 3.11 | Définition des termes relatifs au vecteur contrainte tangentielle $\mathcal{T}_n(t)$ . . . . .                                                                       | 94  |
| 3.12 | Représentation du huitième de la sphère de rayon unité pour balayer tous les plans physiques possibles. . . . .                                                      | 96  |
| 3.13 | Allures possibles des écarts de validité issus du post-traitement des résultats de validation des critères. . . . .                                                  | 100 |
| 3.14 | Répartition des essais en fonction des écarts de validité pour le critère de Crossland. . . . .                                                                      | 100 |
| 3.15 | Répartition des essais en fonction des écarts de validité pour les critères appartenant à l'approche intégrale. . . . .                                              | 101 |
| 3.16 | Répartition des essais en fonction des écarts de validité pour les critères du type plan critique. . . . .                                                           | 101 |
| 3.17 | Échelles macroscopique et mésoscopique d'un métal polycristallin. . . . .                                                                                            | 103 |
| 3.18 | Écart entre le trajet de chargement réel et le trajet de chargement discret. . . . .                                                                                 | 107 |
| 3.19 | Procédure pour le calcul du plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement PPCC. . . . .                                                                      | 108 |
| 3.20 | Évolution temporelle des composantes $\Sigma_{xx}$ et $\Sigma_{yy}$ du chargement sur une période de temps $T$ . . . . .                                             | 114 |
| 3.21 | Trajet de chargement $\mathcal{T}$ sur le plan $\pi$ . . . . .                                                                                                       | 115 |
| 3.22 | Chargement de la voie engendré par l'excitation du véhicule à la suite du passage sur un défaut de nivellement longitudinal. . . . .                                 | 116 |
| 3.23 | Calcul du contour du critère de Dang Van dans la section du rail qui se trouve dans le milieu de la voie entre deux traverses. . . . .                               | 117 |
| 4.1  | Défauts de géométrie affectés aux voies présentées au Tableau 4.1. . . . .                                                                                           | 120 |
| 4.2  | Efforts exercés par chaque essieu de la voiture sur la voie appartenant au groupe DE-MAUX 1. . . . .                                                                 | 122 |
| 4.3  | Efforts exercés par chaque essieu de la voiture sur la voie appartenant au groupe DE-MAUX 3 haut. . . . .                                                            | 122 |

|      |                                                                                                                                                                                                                           |     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.4  | Efforts exercés par chaque essieu de la voiture sur la voie appartenant au groupe DEMAUX 5. . . . .                                                                                                                       | 123 |
| 4.5  | Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAUX 1 à l'instant où la voiture atteint le milieu de la voie. . . . .                                                                        | 124 |
| 4.6  | Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAUX 3 haut à l'instant où la voiture atteint le milieu de la voie. . . . .                                                                   | 125 |
| 4.7  | Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAUX 5 à l'instant où la voiture atteint le milieu de la voie. . . . .                                                                        | 125 |
| 4.8  | Champ des contraintes en MPa dans les sections centrales des deux files de rail. . . . .                                                                                                                                  | 126 |
| 4.9  | Comparaison du contour du critère de Dang Van sur la section la plus critique de la voie du groupe DEMAUX 1 dans le cas d'une résolution en dynamique et d'une résolution en statique du comportement de la voie. . . . . | 127 |
| 4.10 | Comparaison du contour du critère de Dang Van sur la section la plus critique des voies du groupe DEMAUX 1 et 5. . . . .                                                                                                  | 127 |
| 4.11 | Maximum de la fonction de fatigue du critère de Dang Van sur les sections étudiées. . . . .                                                                                                                               | 128 |
| 4.12 | Efforts exercés par chaque essieu de la motrice sur la voie appartenant au groupe DEMAUX 1. . . . .                                                                                                                       | 130 |
| 4.13 | Efforts exercés par chaque essieu de la motrice sur la voie appartenant au groupe DEMAUX 2. . . . .                                                                                                                       | 130 |
| 4.14 | Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAUX 1 à l'instant où la motrice atteint le milieu de la voie. . . . .                                                                        | 131 |
| 4.15 | Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAUX 2 à l'instant où la motrice atteint le milieu de la voie. . . . .                                                                        | 132 |
| 4.16 | Efforts exercés par chaque essieu du wagon sur la voie appartenant au groupe DEMAUX 1. . . . .                                                                                                                            | 134 |
| 4.17 | Efforts exercés par chaque essieu du wagon sur la voie appartenant au groupe DEMAUX 4 haut. . . . .                                                                                                                       | 134 |
| 4.18 | Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAUX 1 à l'instant où le wagon atteint le milieu de la voie. . . . .                                                                          | 135 |
| 4.19 | Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAUX 2 à l'instant où le wagon atteint le milieu de la voie. . . . .                                                                          | 135 |

# Liste des tableaux

|     |                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.1 | Détermination de la limite de la résistance latérale de la voie à partir d'essais . . . . .                                                                                                                                          | 28  |
| 1.2 | Définition des cinq groupes DEMAUX. . . . .                                                                                                                                                                                          | 30  |
| 1.3 | Estimation des coefficients $\kappa^4$ et $v^4$ pour quelques configurations de voie. . . . .                                                                                                                                        | 33  |
| 1.4 | Conditions de circulation d'une machine à vapeur ou électrique. . . . .                                                                                                                                                              | 35  |
| 2.1 | Valeurs numériques des coefficients de rigidité ( $k_{s,l}, k_{s,v}$ ) et d'amortissement ( $c_{s,l}, c_{s,v}$ ) respectivement dans la direction latérale et verticale adoptés dans la littérature. . . . .                         | 49  |
| 2.2 | Nombre de mesures PANDA réalisées pour chaque couche. . . . .                                                                                                                                                                        | 54  |
| 2.3 | Profondeur de la couche de ballast sain en fonction de la vitesse. . . . .                                                                                                                                                           | 54  |
| 2.4 | Profondeur de la couche de ballast sain adoptée pour chaque groupe DEMAUX. . . . .                                                                                                                                                   | 55  |
| 2.5 | Valeurs numériques des coefficients de rigidité ( $k_{b+s-str,l}, k_{b+s-str,v}$ ) et d'amortissement ( $c_{b+s-str,l}, c_{b+s-str,v}$ ) respectivement dans la direction latérale et verticale adoptés dans la littérature. . . . . | 57  |
| 2.6 | Paramètres d'entrée du modèle 2D de la voie. . . . .                                                                                                                                                                                 | 70  |
| 2.7 | Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAUX 1 pour une modélisation en 2D. . . . .                                                                                                                                            | 73  |
| 3.1 | Écarts relatifs entre la contrainte de cisaillement de référence et la contrainte de cisaillement obtenue par le calcul éléments finis pour les 3 essais exposés en section 3.1.1, section 3.1.2 et section 3.1.3. . . . .           | 89  |
| 3.2 | Caractérisation des critères de fatigue du point de vue de la justesse. . . . .                                                                                                                                                      | 102 |
| 3.3 | Répartition des essais et caractérisation des critères de fatigue pour des chargements non proportionnels. . . . .                                                                                                                   | 102 |
| 3.4 | Répartition des essais et caractérisation des critères de fatigue pour des chargements proportionnels. . . . .                                                                                                                       | 102 |
| 3.5 | Comparaison des algorithmes d'optimisation en termes d'efficacité et de précision des résultats. . . . .                                                                                                                             | 106 |
| 3.6 | Comparaison de l'algorithme des combinaisons des points et de l'algorithme ADA en termes d'efficacité et de précision des résultats. . . . .                                                                                         | 115 |
| 4.1 | Armement des voies modélisées. . . . .                                                                                                                                                                                               | 120 |
| 4.2 | Conditions de circulation d'une voiture remorquée ayant une charge à l'essieu maximale de 10 t. . . . .                                                                                                                              | 121 |
| 4.3 | Maximum du contour du critère de Dang Van sur les 7 voies modélisées dans le cas de la circulation de la voiture. . . . .                                                                                                            | 129 |
| 4.4 | Conditions de circulation d'une motrice ayant une charge à l'essieu maximale de 20 t. . . . .                                                                                                                                        | 129 |

|      |                                                                                                                           |     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.5  | Maximum du contour du critère de Dang Van sur les 7 voies modélisées dans le cas de la circulation de la motrice. . . . . | 133 |
| 4.6  | Conditions de circulation d'un wagon ayant une charge à l'essieu maximale de 17 t. . .                                    | 133 |
| 4.7  | Maximum du contour du critère de Dang Van sur les 7 voies modélisées dans le cas de la circulation du wagon. . . . .      | 136 |
| C.1  | Paramètres du modèle multi-corps 3D du véhicule : véhicule du type voiture remorquée.                                     | 145 |
| C.2  | Paramètres du modèle multi-corps 3D du véhicule : véhicule du type motrice. . . . .                                       | 146 |
| C.3  | Paramètres du modèle multi-corps 3D du véhicule : véhicule du type wagon. . . . .                                         | 147 |
| C.4  | Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAUX 1 pour une modélisation en 3D.                                         | 148 |
| C.5  | Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAUX 2 pour une modélisation en 3D.                                         | 149 |
| C.6  | Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAUX 3 bas pour une modélisation en 3D. . . . .                             | 150 |
| C.7  | Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAUX 3 haut pour une modélisation en 3D. . . . .                            | 151 |
| C.8  | Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAUX 4 bas pour une modélisation en 3D. . . . .                             | 152 |
| C.9  | Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAUX 4 haut pour une modélisation en 3D. . . . .                            | 153 |
| C.10 | Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAUX 5 pour une modélisation en 3D.                                         | 154 |

# Liste des abréviations

|       |                                                                   |
|-------|-------------------------------------------------------------------|
| ADA   | Algorithme des Directions Alternées                               |
| AV    | Avec Voyageurs                                                    |
| EF    | Entreprise Ferroviaire                                            |
| ESV   | Engin de Surveillance des Voies                                   |
| LGV   | Ligne à Grande Vitesse                                            |
| PANDA | Pénétrromètre Autonome Numérique Dynamique Assisté par ordinateur |
| RFN   | Réseau Ferré National                                             |
| SIM   | Surveillance, Inspection et Mesure                                |
| STI   | Spécification Technique d'Interopérabilité                        |
| SV    | Sans Voyageurs                                                    |
| TFD   | Transformée de Fourier Discrète                                   |
| TGV   | Train à Grande Vitesse                                            |
| VA    | Valeur d'Alerte                                                   |
| VI    | Valeur d'Intervention                                             |
| VO    | Valeur Objectif                                                   |
| VR    | Valeur de Ralentissement                                          |
| ZE    | Zone d'Étude                                                      |
| ZT    | Zone Tampon                                                       |

# Symboles

|                                       |                                                                                             |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\underline{\underline{A}}$           | tenseur de localisation des contraintes                                                     |
| $a$                                   | mi-distance latérale entre les suspensions primaires du véhicule                            |
| $\alpha_d$                            | angle d'inclinaison de la voie relatif au dévers réel                                       |
| $\alpha_{d,th}$                       | angle d'inclinaison de la voie relatif au dévers théorique                                  |
| $\alpha_{DV}$ et $\beta_{DV}$         | constantes établies à partir de limites de fatigue du matériau                              |
| $B$                                   | écartement de la voie                                                                       |
| $b$                                   | mi-distance latérale entre les suspensions secondaires du véhicule                          |
| $\beta$                               | paramètre de pénalité                                                                       |
| $C$                                   | trajet de chargement                                                                        |
| $\underline{\underline{C}}_v$         | matrice d'amortissement du véhicule                                                         |
| $\underline{\underline{c}}^*$         | centre de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement                   |
| $\underline{c}^*$                     | vecteur obtenu par projection de $\underline{\underline{c}}^*$ dans l'espace des déviateurs |
| $c_{1,l}$                             | amortissement latéral de la suspension primaire du véhicule                                 |
| $c_{2,l}$                             | amortissement latéral de la suspension secondaire du véhicule                               |
| $c_{1,v}$                             | amortissement vertical de la suspension primaire du véhicule                                |
| $c_{2,v}$                             | amortissement vertical de la suspension secondaire du véhicule                              |
| $c_{s,l}$                             | amortissement latéral de la semelle                                                         |
| $c_{b+s-str,l}$                       | amortissement latéral de la couche de {ballast + sous-structure}                            |
| $c_{s,v}$                             | amortissement vertical de la semelle                                                        |
| $c_{b+s-str,v}$                       | amortissement vertical de la couche de {ballast + sous-structure}                           |
| $d$                                   | dévers réel                                                                                 |
| $d_{th}$                              | dévers théorique                                                                            |
| $d_b$                                 | distance latérale entre les centres des bogies                                              |
| $d_e$                                 | empattement des essieux                                                                     |
| $dt$                                  | pas de temps                                                                                |
| $dx$                                  | taille d'un élément poutre                                                                  |
| $\delta$                              | paramètre de relaxation                                                                     |
| $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ | tenseur des déformations macroscopiques                                                     |
| $E_{DV}$                              | fonction de fatigue du critère de Dang Van                                                  |
| $E_n$                                 | indicateur d'endommagement                                                                  |
| $E_r$                                 | module de Young du rail                                                                     |
| $E_t$                                 | module de Young de la traverse                                                              |
| $\underline{\underline{\varepsilon}}$ | tenseur des déformations mésoscopiques                                                      |

|                               |                                                                                     |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $\epsilon$                    | écart relatif                                                                       |
| $F_0(N)$                      | limite de fatigue à N cycles en flexion répétée symétrique                          |
| $F_{-1}(N)$                   | limite de fatigue à N cycles en flexion alternée symétrique                         |
| $F_{y_1}$                     | effort exercé sur la file de rail 1 dans la direction latérale (repère de la voie)  |
| $F_{y_2}$                     | effort exercé sur la file de rail 2 dans la direction latérale (repère de la voie)  |
| $F_{z,stat}^e$                | charge statique à l'essieu                                                          |
| $F_{z,stat}^r$                | charge statique à la roue                                                           |
| $F_{z_1}$                     | effort exercé sur la file de rail 1 dans la direction verticale (repère de la voie) |
| $F_{z_2}$                     | effort exercé sur la file de rail 2 dans la direction verticale (repère de la voie) |
| $g$                           | accélération de pesanteur                                                           |
| $g_y$                         | fonction de gauchissement associée à $T_y$                                          |
| $g_z$                         | fonction de gauchissement associée à $T_z$                                          |
| $\gamma$                      | accélération centrifuge                                                             |
| $h_1$                         | distance entre le centre de la caisse et la suspension secondaire du véhicule       |
| $h_2$                         | distance entre le centre du bogie et la suspension secondaire du véhicule           |
| $h_3$                         | distance entre le centre du bogie et la suspension primaire du véhicule             |
| $h_v$                         | hauteur entre le centre de gravité du véhicule                                      |
| $I$                           | insuffisance/excès de dévers                                                        |
| $I_{r,y}$                     | moment quadratique du rail par rapport à l'axe latéral                              |
| $I_{r,z}$                     | moment quadratique du rail par rapport à l'axe vertical                             |
| $I_{t,x}$                     | moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe longitudinal                  |
| $I_{t,z}$                     | moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe vertical                      |
| $J_X^b$                       | moment d'inertie du bogie dans la direction $\vec{X}$                               |
| $J_Y^b$                       | moment d'inertie du bogie dans la direction $\vec{Y}$                               |
| $J_Z^b$                       | moment d'inertie du bogie dans la direction $\vec{Z}$                               |
| $J_X^c$                       | moment d'inertie de la caisse dans la direction $\vec{X}$                           |
| $J_Y^c$                       | moment d'inertie de la caisse dans la direction $\vec{Y}$                           |
| $J_Z^c$                       | moment d'inertie de la caisse dans la direction $\vec{Z}$                           |
| $J_X^e$                       | moment d'inertie de l'essieu dans la direction $\vec{X}$                            |
| $J_x^r$                       | moment quadratique de torsion du rail                                               |
| $J_y^t$                       | moment quadratique de torsion de la traverse                                        |
| $k_{1,l}$                     | raideur latérale de la suspension primaire du véhicule                              |
| $k_{2,l}$                     | raideur latérale de la suspension secondaire du véhicule                            |
| $k_{1,v}$                     | raideur verticale de la suspension primaire du véhicule                             |
| $k_{2,v}$                     | raideur verticale de la suspension secondaire du véhicule                           |
| $k_{s,l}$                     | raideur latérale de la semelle                                                      |
| $k_{b+s-str,l}$               | raideur latérale de la couche de {ballast + sous-structure}                         |
| $k_{s,v}$                     | raideur verticale de la semelle                                                     |
| $k_{b+s-str,v}$               | raideur verticale de la couche de {ballast + sous-structure}                        |
| $\underline{\underline{K}}_v$ | matrice de rigidité du véhicule                                                     |
| $\mathcal{L}$                 | fonction du Lagrangien augmenté                                                     |



|                                  |                                                                                           |
|----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $l$                              | espacement entre les traverses                                                            |
| $\lambda$                        | longueur d'onde                                                                           |
| $\underline{\lambda}_m$          | vecteur multiplicateur de Lagrange                                                        |
| $M_c$                            | masse de la caisse                                                                        |
| $M_b$                            | masse du bogie                                                                            |
| $M_e$                            | masse de l'essieu                                                                         |
| $m_r$                            | masse linéique du rail                                                                    |
| $M_v$                            | masse du véhicule                                                                         |
| $M_x$                            | moment de torsion dans la direction $\vec{x}$                                             |
| $M_y$                            | moment fléchissant dans la direction $\vec{y}$                                            |
| $M_z$                            | moment fléchissant dans la direction $\vec{z}$                                            |
| $\nu_r$                          | coefficient de Poisson du rail                                                            |
| $\nu_t$                          | coefficient de Poisson de la traverse                                                     |
| $P$                              | pression hydrostatique                                                                    |
| $p$                              | variable scalaire d'optimisation                                                          |
| $\phi^b$                         | rotation du bogie dans la direction $\vec{X}$                                             |
| $\psi^b$                         | rotation du bogie dans la direction $\vec{Z}$                                             |
| $\phi^c$                         | rotation de la caisse dans la direction $\vec{X}$                                         |
| $\psi^c$                         | rotation de la caisse dans la direction $\vec{Z}$                                         |
| $\phi^e$                         | rotation de l'essieu dans la direction $\vec{X}$                                          |
| $\phi^r$                         | rotation du rail dans la direction $\vec{x}$                                              |
| $\psi^r$                         | rotation du rail dans la direction $\vec{z}$                                              |
| $R$                              | rayon de la courbe                                                                        |
| $r$                              | rayon de la roue                                                                          |
| $r_d(x)$                         | défait de géométrie de la voie                                                            |
| $\underline{\rho}$               | champ des contraintes résiduelles mésoscopiques                                           |
| $\underline{\rho}^*$             | champ des contraintes résiduelles mésoscopiques à l'état adapté                           |
| $\rho_r$                         | masse volumique du rail                                                                   |
| $\rho_t^*$                       | masse volumique modifiée de la traverse                                                   |
| $\underline{\underline{S}}$      | déviateur du tenseur des contraintes macroscopiques                                       |
| $\underline{S}$                  | vecteur obtenu par projection de $\underline{\underline{S}}$ dans l'espace des déviateurs |
| $S_r$                            | section du rail                                                                           |
| $\underline{\sigma}$             | tenseur des contraintes à l'échelle mésoscopique                                          |
| $\underline{\underline{\Sigma}}$ | tenseur des contraintes à l'échelle macroscopique                                         |
| $\Sigma_0(N)$                    | limite de fatigue à N cycles en traction répétée                                          |
| $\Sigma_{-1}(N)$                 | limite de fatigue à N cycles en traction-compression alternée                             |
| $\underline{\Sigma}_n$           | vecteur contrainte agissant sur le plan physique $\pi$ de normale $\vec{n}$               |
| $\underline{\Sigma}_{nn}$        | vecteur contrainte normale                                                                |
| $\Sigma_{xx}$                    | contrainte normale                                                                        |
| $\tau$                           | cisaillement maximal                                                                      |

|                                   |                                                                                |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{T}$                     | l'amplitude du cisaillement                                                    |
| $\mathcal{T}_{-1}(N)$             | limite de fatigue à N cycles en traction-compression alternée                  |
| $\underline{\mathcal{T}}_n$       | vecteur contrainte tangentielle                                                |
| $\underline{\mathcal{T}}_{na}(t)$ | vecteur contrainte tangentielle alternée                                       |
| $\underline{\mathcal{T}}_{nm}$    | vecteur contrainte tangentielle moyenne                                        |
| $\underline{\mathcal{T}}_{un}$    | projection du vecteur contrainte tangentielle sur $\vec{u}$ dans le plan $\pi$ |
| $\underline{\mathcal{T}}_{vn}$    | projection du vecteur contrainte tangentielle sur $\vec{v}$ dans le plan $\pi$ |
| $\theta^b$                        | rotation du bogie dans la direction $\vec{Y}$                                  |
| $\theta^c$                        | rotation de la caisse dans la direction $\vec{Y}$                              |
| $\theta^r$                        | rotation du rail dans la direction $\vec{y}$                                   |
| $T_y$                             | effort tranchant dans la direction $\vec{y}$                                   |
| $T_z$                             | effort tranchant dans la direction $\vec{z}$                                   |
| $u_Y^b$                           | déplacement latéral du bogie                                                   |
| $u_Z^b$                           | déplacement vertical du bogie                                                  |
| $u_Y^c$                           | déplacement latéral de la caisse                                               |
| $u_Z^c$                           | déplacement vertical de la caisse                                              |
| $u_Y^e$                           | déplacement latéral de l'essieu                                                |
| $u_Z^e$                           | déplacement vertical de l'essieu                                               |
| $u_y^r$                           | déplacement latéral du rail                                                    |
| $u_z^r$                           | déplacement vertical du rail                                                   |
| $V$                               | vitesse du véhicule                                                            |
| $v$                               | distance entre la fibre neutre et la fibre la plus éloignée du rail            |
| $w$                               | fonction de gauchissement associée à $M_x$                                     |
| $\underline{y}$                   | variable primale                                                               |
| $\underline{z}$                   | variable primale                                                               |

# Introduction

## Contexte

La Société Nationale des Chemins de Fer français (SNCF) a été créée en 1938 à la suite de la fusion des cinq compagnies ferroviaires de l'époque. Ces compagnies étaient indépendantes les unes des autres et appliquaient chacune leurs propres règles de conception sur leurs réseaux ferroviaires, ce qui implique par exemple des utilisations de profils de rails et de types de traverses différents. Cela a donc eu une conséquence sur la résistance mécanique de la voie qui variait d'un réseau à un autre. La fusion de ces compagnies est de ce fait à l'origine du caractère fortement hétérogène des lignes classiques du réseau ferré français en termes de résistance mécanique de la voie. Face à cette diversité du comportement mécanique des voies, la commission DEMAUX a été créée en 1944 afin de classer les voies du réseau selon la qualité de leurs armements (ensemble formé par les rails, les traverses et les systèmes d'attache) et définir les conditions d'admission d'un matériel roulant sur chaque groupe de voie. La classification des voies du réseau a été réalisée en fonction du rapport  $\frac{I_{r,y}}{v \cdot l}$  (SNCF, 1944). Dans cette formule,  $I_{r,y}$  est le moment quadratique du rail par rapport à l'axe latéral. La distance entre la fibre neutre et la fibre la plus éloignée du rail est donnée par le paramètre  $v$ . Enfin, la distance  $l$  représente l'espacement entre deux traverses consécutives. Cinq groupes de voies ont alors été mis en évidence avec des rapports variant de 100 à plus de 350 mm<sup>2</sup>. Par ailleurs, il est important de souligner que dans les travaux de la commission DEMAUX le rail est supposé être à demi usure. L'idée était de prendre en compte l'état réel des rails qui pouvaient être usés suite aux circulations des différents matériels roulants. Un moyen simplifié de prendre en compte l'usure était de considérer que le champignon du rail (i.e. tête du rail) est raboté dans le sens vertical d'une hauteur qui correspond à la moitié de l'usure verticale nécessitant un changement de rail selon les normes de maintenance de la SNCF.

Les groupes de voies ont par la suite été confrontés aux différents types de matériels roulants (véhicules) afin d'évaluer la possibilité d'admission de ces véhicules ainsi que les vitesses maximales permises en fonction des groupes de voies. Ceci a ainsi donné naissance aux règles de conditions de circulation. Le but était de proposer une démarche d'admission des matériels roulants du point de vue de leurs compatibilités avec la voie. Ces règles de calcul des conditions de circulation découlent essentiellement de travaux analytiques simplifiés. De nos jours, les conditions de circulation sont toujours d'actualité. Dans le cas des lignes à grandes vitesses ces conditions sont uniformes. Néanmoins, pour les lignes classiques qui sont hétérogènes et qui sont limitées par des vitesses de 220 km/h, elles font l'objet d'un référentiel exhaustif. Le référentiel en vigueur reste fondé sur les règles DEMAUX mais a intégré le retour d'expérience pour être en phase avec l'évolution de la structure des voies ferrées au fil des années.

Bien que ces règles soient en adéquation avec le besoin au sein de la SNCF, une optimisation de la démarche actuelle paraît envisageable afin de limiter les restrictions de vitesse et pour faire face à l'interopérabilité européenne. De plus, suite à l'entrée en vigueur du règlement européen du quatrième paquet ferroviaire<sup>1</sup> en juin 2019, les entreprises ferroviaires sont désormais responsables de l'étude d'admission de leurs matériels roulants. Le changement de politique de gestion a donc motivé le lancement de ce projet de recherche. En effet, la base empirique sur laquelle sont fondées les règles de calcul des conditions de circulation en vigueur sont pertinentes pour le besoin actuel, mais la question se pose sur la manière d'adapter ces règles à de nouveaux matériels roulants qui peuvent présenter des caractéristiques différentes par rapport aux classes de véhicules définies dans le référentiel. La densification des circulations et le besoin d'augmenter la performance d'exploitation du réseau ferroviaire des lignes classiques requièrent aussi de se pencher sur la question d'une optimisation potentielle des conditions de circulation. Enfin, pour assurer une exploitation optimale du réseau tout en assurant l'aspect sécurité, il est primordial de fournir une réponse rapide quant à la prise de décision sur l'admission du nouveau matériel roulant.

## Objectif de la thèse

L'objectif de la thèse est donc de proposer une méthodologie efficace qui soit fondée sur des arguments scientifiques pour permettre de juger rapidement de l'admission d'un matériel roulant quelconque sur une portion de voie donnée. L'idée est aussi de construire à terme de nouvelles règles de calcul des conditions de circulation dans une optique d'optimisation de l'existant. Pour allier précision et rapidité, la méthodologie qu'on propose s'appuie sur la modélisation numérique. Cette nouvelle approche est cohérente avec les évolutions des vingt dernières années dans le domaine ferroviaire qui donnent une place plus importante à l'utilisation des outils numériques grâce à l'avantage économique qu'ils présentent en comparaison aux campagnes expérimentales. Par exemple, l'homologation virtuelle des matériels roulants par l'utilisation d'une simulation numérique est désormais envisageable dans le cas où le matériel roulant n'a subi que quelques modifications (AFNOR, 2016).

Dans le cadre de cette thèse, la fatigue du rail est choisie comme étant le critère essentiel et dimensionnant permettant de valider l'admission d'un matériel roulant. Par ailleurs, l'intérêt est porté aux lignes classiques qui représentent plus de 90% de l'ensemble des lignes du réseau. Ces lignes classiques sont parfois équipées de profils de rails anciens pour lesquels les mécanismes de fatigue ont pour origine les contraintes de cisaillement, de torsion et de flexion (i.e. fatigue polycyclique). Le référentiel actuellement utilisé par SNCF RÉSEAU, le gestionnaire de l'infrastructure, s'appuie sur des indicateurs représentatifs des contraintes de flexion verticale et de flexion latérale dans les rails qui sont les effets des forces latérales et verticales quasi-statiques exercées par le véhicule (SNCF, 2019). Dans ce référentiel, l'état de contraintes locales généré par les efforts de contact roue-rail ne sont pas pris en compte. Ceci motive donc de se concentrer sur la fatigue structurelle dans le rail par rapport à la fatigue de contact. L'étude vise donc la caractérisation de la fatigue structurelle dans

---

1. L'objectif du quatrième paquet ferroviaire est d'installer un espace ferroviaire unique européen en uniformisant les normes de sécurité et en facilitant l'accès pour les exploitants ferroviaires.

le rail engendrée par les contraintes de flexion mais aussi l'intégration de l'effet des contraintes de cisaillement et de torsion dans l'expression du critère de fatigue.

La prédiction de l'état de fatigue dans le rail requiert une estimation précise de la réponse de la voie sous le chargement du véhicule. D'un autre côté, il est impératif de livrer des résultats dans des délais raisonnables. En effet, le projet est destiné à une exploitation industrielle. Le but est donc d'avoir une bonne prédiction de la réponse du rail tout en ayant des temps de calcul raisonnables sur des ordinateurs standards. Dans ce sens, l'outil englobera :

- un modèle du comportement vertical et latéral de la voie. Il s'agit d'un modèle éléments finis 3D léger à développer sous CAST3M (CEA, 2020). La voie y sera assimilée à un modèle de poutres reposant sur des appuis discrets représentés par des associations de {ressorts, amortisseurs}. Les deux files de rail seront chacune modélisées par deux poutres de Timoshenko. Une première couche de {ressorts, amortisseurs} sera disposée au dessous du rail dans les directions verticale et latérale. Elle modélisera la semelle sous rail dont le rôle est d'atténuer les vibrations et les chocs susceptibles de fissurer la traverse. La traverse, dont le rôle est de transférer les efforts du rail vers la couche de ballast, sera modélisée par une poutre de Bernoulli reliant les deux files de rail. La deuxième couche de {ressorts, amortisseurs} modélisera la couche de ballast et les différentes couches de la sous-structure de la voie qui supportent l'ensemble {rail, semelle, traverse}. Un premier modèle de la voie 2D sera tout d'abord créé pour étudier sa réponse verticale. Le modèle 2D sera de ce fait une étape intermédiaire au modèle final. Dans ce cas, la traverse sera assimilée à une masse ponctuelle et les {ressorts, amortisseurs} seront disposés dans la direction verticale. Le modèle 2D permettra par ailleurs de valider le modèle 3D dans la direction verticale. Le développement du modèle de la voie (2D ou 3D) permettra de calculer le déplacement du rail ainsi que les efforts généralisés (i.e. moment de torsion, moments de flexion et efforts tranchants);
- un modèle multi-corps léger du véhicule ferroviaire combiné à des défauts de géométrie de la voie permettant de calculer les surcharges dynamiques appliquées par le véhicule. Ces surcharges seront déterminées en supposant que les roues du véhicule suivent parfaitement les défauts de la voie. Par ailleurs, la déformation de la voie sera supposée négligeable devant l'amplitude des défauts. Les défauts de géométrie seront générés aléatoirement à partir de mesures réalisées sur la voie. Plus en détail, le contenu fréquentiel des tronçons de voies mesurés sera analysé de sorte à associer à chaque fréquence la plus grande amplitude spectrale parmi l'ensemble des échantillons. Les phases uniformément distribuées seront associées aux amplitudes spectrales extraites conférant ainsi le caractère aléatoire au signal généré. Une transformation inverse de Fourier permettra de passer du signal fréquentiel vers le signal temporel du défaut;
- une partie post-traitement permettant d'estimer la fatigue dans le rail après un nombre de cycles déterminé. Une première étape consistera à calculer les contraintes de flexion et les contraintes de cisaillement engendrées par les efforts tranchants et le moment de torsion. Les contraintes tangentielles nécessitent le calcul des fonctions de gauchissement qui ne dépendent que de la section du rail qui est complexe. De ce fait, elles seront calculées par la méthode des éléments finis en discrétisant la section du rail. La deuxième étape consistera à

implémenter le critère de fatigue de Dang Van (VAN, 1973; VAN, LE DOUARON et LIEURADE, 1984).

Historiquement, les règles de calcul des conditions de circulation ont été définies d'un strict point de vue de l'armement de la voie. Par exemple le rapport  $\frac{I_{r,y}}{v l}$  a été déterminé par le calcul de la contrainte de flexion maximale d'une poutre sur deux appuis simples soumise à une force ponctuelle en son milieu. Cette contrainte de flexion est en effet plus importante dès que le rapport  $\frac{I_{r,y}}{v l}$  diminue (i.e. l'armement de la voie est plus faible). Toutefois, il convient de noter que le tracé de la voie est pris en compte dans le processus de détermination de la vitesse admissible du matériel roulant. Dans l'outil à proposer, en plus des effets du tracé, on rajoutera l'effet des défauts de géométrie de la voie pour avoir une bonne estimation des surcharges dynamiques générées par le matériel roulant sur la voie. Les défauts qui seront considérés ont une longueur d'onde minimale de 3 m et ont un impact sur la sécurité de circulation des matériels roulants. Le couple {longueur d'onde, vitesse} pilote donc le domaine fréquentiel d'intérêt qui sera de l'ordre de [0 ; 20 Hz]. Cette observation justifie les hypothèses d'une excitation dynamique du véhicule principalement engendrée par les défauts de la voie et d'un véhicule qui suit parfaitement ces défauts. En effet, d'après (KNOTHE et GRASSIE, 1993), les forces d'inertie de la voie sont négligeables devant les forces d'inertie du véhicule. La dynamique de la voie pilote plutôt l'interaction roue/rail dans le domaine des hautes fréquences (XIE et IWNICKI, 2008) et ses fréquences de résonance sont beaucoup plus importantes que le domaine fréquentiel d'intérêt dans le cadre de la thèse. Ces hypothèses permettent donc de découpler la simulation du système véhicule-voie. Premièrement, le modèle du véhicule et le défaut généré seront utilisés pour calculer les surcharges dynamiques appliquées par le véhicule. La somme des surcharges dynamiques avec le chargement statique du véhicule constituera alors le chargement total appliqué au rail par le véhicule. Ce chargement sera par la suite intégré dans le modèle éléments finis de la voie sous forme de quatre efforts mobiles<sup>2</sup> ayant des amplitudes variables au cours du temps. Ainsi, les efforts généralisés et les contraintes dans le rail seront calculés et permettront d'appliquer le critère de Dang Van. L'implémentation du critère de fatigue sera par ailleurs réalisée en tenant compte de la condition sur les coûts de calcul. Le calcul de la fonction de fatigue du critère nécessite avant tout la détermination de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement<sup>3</sup> qui est l'étape la plus délicate. Le centre de cette hypersphère peut être obtenu par résolution d'un problème d'optimisation Min-Max. Le recours à cette méthode permet un gain en temps de calcul par rapport aux algorithmes classiques de combinaisons des points où la recherche du plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement se fait en balayant tous les plans physiques<sup>4</sup> liés à un point de la structure.

À long terme, l'outil sera conçu de manière à ce que l'utilisateur puisse préciser la catégorie du véhicule étudié ainsi que la zone d'intérêt sur la ligne ferroviaire considérée. En sortie, l'outil renseignera sur la possibilité d'admission du matériel roulant et sur la vitesse maximale de circulation en s'appuyant sur des calculs en fatigue.

2. les véhicules modélisés sont à quatre essieux, d'où les quatre efforts mobiles appliqués à la voie.

3. le trajet obtenu par projection du tenseur des contraintes dans l'espace des déviateurs.

4. plan fictif associé à un point de la structure et définit par sa normale  $\vec{h}$  sur lequel le tenseur des contraintes est projeté.

## Organisation du mémoire

Ce manuscrit s'articule autour de quatre chapitres. Le [chapitre 1](#) donne une description détaillée des différents constituants de la voie ballastée. Quelques techniques existantes sont aussi exposées pour caractériser la raideur de la voie car celles-ci permettent d'alimenter le modèle de la voie avec des données en rigidité réalistes. Ensuite, les défauts de géométrie qui affectent la voie sont présentés. Ils ont une longueur d'onde minimale de 3 m qui fixe ainsi la fréquence maximale d'étude à 20 Hz dans le cadre de la thèse. Les techniques d'auscultation de la géométrie de la voie déployées par la SNCF RÉSEAU sont aussi exposées car les mesures obtenues sont à la base de la méthode proposée pour générer les défauts. Ensuite, les sollicitations subies par la voie sont introduites. Pour terminer, on détaille la méthodologie actuelle pour l'admission des matériels roulants sur la voie et son origine, soit les règles proposées par la commission DEMAUX.

Le [chapitre 2](#) est dédié à la modélisation du système {voie, matériel roulant, défauts géométriques}. Les modèles de voies qui existent dans la littérature sont tout d'abord présentés car ils permettent de positionner le modèle développé dans le cadre de la thèse. Une première version du modèle de la voie est construite en 2D. Il s'agit d'une poutre de Timoshenko reposant sur deux couches de {ressorts, amortisseurs} séparées par des masses ponctuelles qui représentent les traverses. La première couche modélise les semelles et la deuxième couche modélise l'ensemble de la couche de ballast et des couches de la sous-structure. Dans le reste de la thèse cette couche du modèle sera appelée couche de {ballast + sous-structure}. Une évolution du modèle vers un modèle poutre 3D est effectuée pour étudier le comportement vertical et latéral de la voie. Par conséquent, le modèle inclut deux poutres (i.e. deux files de rail) et la traverse est assimilée à une poutre de Bernoulli. Le choix des coefficients de rigidité et d'amortissement de la semelle sous rail et de la couche de {ballast + sous-structure} est par la suite présenté. Par exemple, la rigidité verticale de la couche de {ballast + sous-structure} peut en effet être déterminée en supposant que la transmission des efforts de la traverse vers le ballast se fait à travers une pyramide fictive où la distribution de la pression est uniforme. Quant au coefficient d'amortissement, son estimation s'effectue en assimilant la couche de ballast à un oscillateur harmonique amorti. La méthode de génération des défauts géométriques de la voie est aussi décrite. Elle s'appuie sur des mesures de voies réelles sur lesquelles une méthode est appliquée afin d'en extraire un défaut représentatif dont le contenu fréquentiel permet de majorer l'ensemble des défauts. Enfin, le modèle multi-corps du véhicule complète l'outil. Les degrés de liberté des deux bogies et de la caisse sont par ailleurs calculés via le schéma d'intégration de Newmark (NEWMARK, 1959) et la connaissance du déplacement des roues permet alors de déterminer les efforts exercés par le véhicule sur le rail. Tout comme la voie, un modèle 2D du véhicule est d'abord développé suivi d'un modèle 3D. Le modèle du véhicule associé au défaut de géométrie de la voie permet ainsi de calculer les surcharges dynamiques appliquées par le véhicule. Le chargement imposé par le véhicule à la voie est injecté dans un second temps dans le modèle de la voie permettant ainsi de récupérer les efforts généralisés dans le rail. Le chapitre se termine par la validation des modèles du véhicule et de la voie.

Dans le [chapitre 3](#), les problématiques de fatigue sont abordées. En premier lieu, le champ des contraintes vu par le rail est calculé à partir des efforts généralisés obtenus par le modèle de la voie

et après calcul des fonctions de gauchissement dans la section du rail par la méthode des éléments finis. Après une étude des critères existants, le critère de Dang Van est implémenté (VAN, 1973). Face au critère de fatigue, l'admission du matériel roulant se fera en supposant que sa circulation n'amorce pas de fissures au bout de 2 millions de cycles, où un cycle correspond à un passage du véhicule. Ce nombre de cycles marque la limite basse d'une durée de vie infinie du point de vue du dimensionnement de la voie (HASAN, 2015; KANG et al., 2020). Afin de calculer la fonction de fatigue du critère, il est nécessaire de connaître le centre de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement. L'algorithme des combinaisons des points (PAPADOPOULOS, 1998; WEBER, 1999) est tout d'abord implémenté. Sur un nœud de la structure, les plans physiques sont parcourus. Sur chaque plan physique, le tenseur des contraintes est projeté. Le plus petit cercle qui englobe tous les points du chargement est déterminé en parcourant tous les points du trajet. Le plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement sera le cercle de plus petit rayon. Cette méthode engendre des résultats précis mais dans le cas de problèmes de tailles importantes, les temps de calcul deviennent trop conséquents. Une deuxième approche est d'assimiler le problème à un problème d'optimisation. L'algorithme des directions alternées ADA (SCALET, 2018) est dans ce sens implémenté. Il permet un gain considérable en temps de calcul tout en gardant une bonne précision des résultats obtenus. Un cas élémentaire de chargement proportionnel de traction-compression biaxiale est présenté pour valider l'algorithme ADA et l'algorithme des combinaisons des points. Par la suite, l'écart en temps de calcul est souligné sur un cas plus complexe d'une voie soumise à un chargement vertical.

Enfin, les résultats générés par l'outil sont présentés au [chapitre 4](#). Pour trois types de matériels roulants, l'outil est confronté au référentiel en vigueur. Cela implique l'analyse de voies appartenant chacune à un groupe DEMAUX différent. À travers ces simulations, le comportement statique de la voie est comparé à son comportement dynamique. L'ordre de grandeur des contraintes de cisaillement est mesuré par rapport aux contraintes normales. Enfin, l'effet des défauts sur l'état de fatigue dans le rail est souligné en étudiant plusieurs sections de la voie et en effectuant des simulations sur des voies sans défauts.



# Chapitre 1

## État de l'art

Les travaux de cette thèse ont pour objectif de proposer un outil numérique qui soit capable de prédire l'état de fatigue dans le rail et qui soit utilisé à terme dans le cadre du processus d'admission des matériels roulants sur le réseau ferré national français (RFN). Cela nécessite une bonne représentation des éléments de la voie pour être le plus fidèle possible à son comportement réel, mais aussi un outil de simulation capable de fournir des résultats fiables dans un délai conforme aux contraintes industrielles. Ainsi, le modèle doit être un compromis entre rapidité et précision. Il est donc nécessaire de bien connaître la voie et son environnement pour développer un modèle "au juste coût". Dans ce sens, une description de la voie ferrée et de ses constituants est donnée en [section 1.1](#). Les moyens de mesure de la raideur de la voie sont par ailleurs détaillés dans la [section 1.1.2](#) et les défauts de géométrie qu'on observe typiquement sur une voie sont décrits dans la [section 1.1.3](#).

Les différentes sollicitations exercées par le véhicule sur la voie sont également expliquées dans la [section 1.2](#). Ils sont entre autres dus aux défauts de géométrie sur la voie et à son tracé.

La connaissance et la compréhension des conditions de circulation actuelles est essentielle dans le cadre des travaux de la thèse. Comme le retour d'expérience fait partie intégrante de la définition des conditions de circulation, un travail bibliographique est nécessaire pour comprendre les hypothèses scientifiques qui sont à l'origine de la procédure en vigueur. L'origine des règles de calcul des conditions de circulation est de ce fait expliquée dans la [section 1.3](#). Elle permet d'explicitier les hypothèses sur lesquelles sont fondées les règles en vigueur et qui sont détaillées dans la [section 1.4](#).

### 1.1 La voie ferrée

Le réseau ferré national français (RFN) est constitué aujourd'hui 28000 km de voies. Il se compose de lignes à grandes vitesses (LGV) (2700 km) et de lignes dites classiques qui constituent la grande majorité du réseau. De conception, les lignes classiques sont limitées à une vitesse de 220 km/h. Elles ont la particularité d'être très disparates en termes de comportement dans le sens où elles intègrent des rails et des traverses différentes, etc. Cette disparité comme il est expliqué en [section 1.3](#) a pour origine la fusion des compagnies ferroviaires de l'époque lors de la création de la SNCF. La première LGV a été ouverte à la circulation en 1981 avec une vitesse maximale de 300 km/h. Les LGV les plus récentes sont exploitées jusqu'à une vitesse de 320 km/h. Les composants de la voie sur les LGV sont uniformes comparé aux lignes classiques, ce qui les rend plus facile à caractériser. Dans le cadre de la thèse, l'intérêt est porté aux lignes classiques qui représentent plus de 90% du réseau. La [Figure 1.1](#)

donne un schéma des composants principaux d'une ligne classique dont chacun remplit une fonction spécifique pour assurer la sécurité des circulations. Elle se compose de plusieurs éléments qui ont des fonctions différentes.

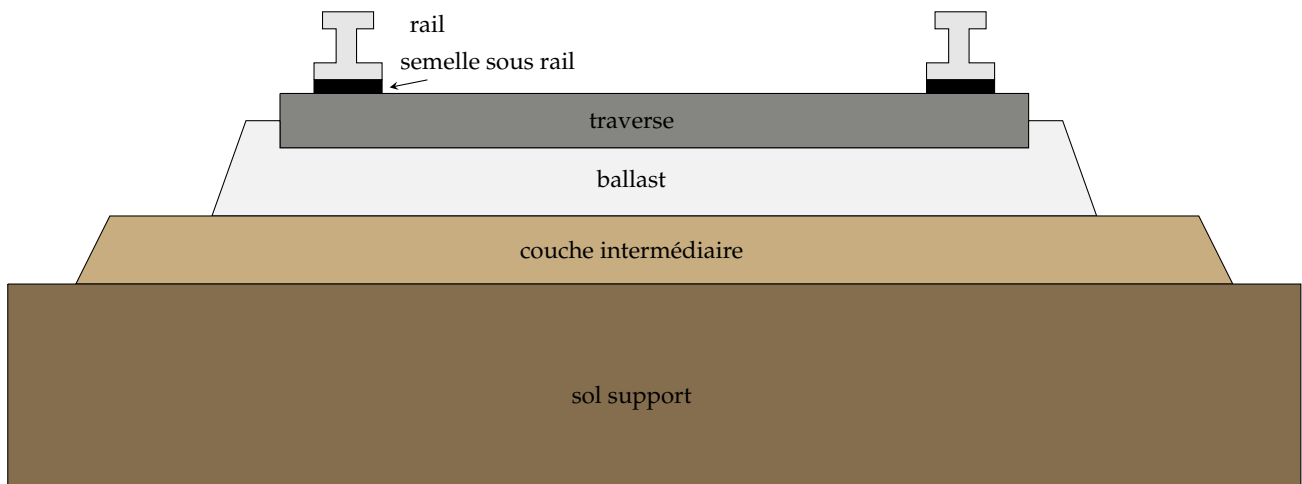


FIGURE 1.1 – Composition d'une ligne classique.

### 1.1.1 Constitution de la voie ferrée

On distingue deux sous systèmes qui forment la voie ballastée :

- la superstructure de la voie qui est constituée du rail, de la traverse, du système d'attache et du ballast. Il s'agit de la partie visible de la voie ;
- la sous-structure qui englobe dans le cas d'une ligne classique la couche intermédiaire et le sol support. Pour les voies de conception nouvelle, la couche intermédiaire est remplacée par deux couches appelées sous-couche et couche de forme. Elles permettent une meilleure stabilité de la voie .

#### Le rail

Le rail permet de guider le matériel roulant dans la voie et supporte ainsi les efforts latéraux et verticaux qu'il exerce tout en assurant leur distribution vers la traverse et par conséquent vers les autres éléments de la voie (DAHLBERG, 2006). Étant fabriqué en alliage d'acier, il assure aussi un rôle de conducteur électrique pour les systèmes de signalisation. Il existe deux types de profils de rails sur le RFN. Le rail double champignon (Figure 1.2a) qui équipe les voies plus anciennes n'est plus fabriqué (SNCF, 2016). L'intérêt était de pouvoir le retourner après usure du champignon supérieur et donc d'augmenter la durée de vie du rail. Néanmoins, cette solution a été rapidement abandonnée à cause de la difficulté à fixer le champignon inférieur dans les coussinets<sup>1</sup>. Le rail Vignole, apparu en 1835 est de ce fait beaucoup plus répandu sur le RFN. Comme le montre la Figure 1.2b, il est composé d'un champignon qui assure le contact roue-rail, une âme présentant une épaisseur réduite et un patin par lequel les efforts sont transférés à la traverse.

Les profils de rails les plus fréquemment utilisés lors des renouvellements de voies sur les lignes classiques sont les profils 60E1 et 50E6 présentant respectivement des masses linéiques de 60 et 50

1. dispositif en fonte qui est fixé à la traverse et qui loge le champignon inférieur du rail double champignon.

kg/m Le profil le plus fréquemment utilisé dans les voies renouvelées les plus circulées est le 60E1 où 60 réfère à la masse linéique du rail en kg/m. Pour optimiser le contact roue-rail sur les lignes du RFN, le rail est incliné au  $1/20$  vers l'intérieur de la voie.



(a) Rail double champignon

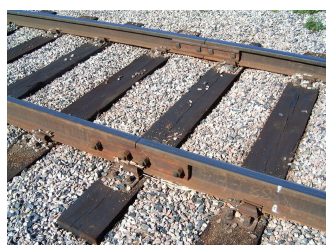


(b) Rail vignole

FIGURE 1.2 – Différents types de rails. Source : <https://boowiki.info/art/1-infrastructure-ferroviaire/voie-ferree.html> et <http://www.patry.fr/rails-vignole.html>.

### La traverse

La traverse permet de supporter les deux files de rails tout en maintenant un écartement de 1435 mm pour les voies à écartement standard du RFN. Elle joue également un rôle important dans la répartition des efforts du rail vers la couche de ballast et assure par ailleurs une isolation électrique entre les deux files de rails. En tenant compte du matériau de conception, trois familles de traverses peuvent être distinguées sur le RFN : les traverses en bois (Figure 1.3a), les traverses métalliques (Figure 1.3b) et les traverses en béton. Historiquement, la traverse était fabriquée de préférence en bois. De nombreuses voies comportent encore ce type de traverse dont la grande élasticité permet une répartition assez uniforme des efforts vers la couche de ballast. Néanmoins elle a une durée de vie relativement faible en comparaison à la traverses en béton. De plus, sa faible masse engendre une moins bonne résistance latérale de la voie par rapport à la traverse en béton. La traverse métallique qui est obtenue par laminage est très peu répandue sur le RFN et n'est plus posée depuis des décennies car elle ne permet l'isolation électrique des deux files de rail qu'à travers des dispositifs d'isolation spéciaux. De plus, la pose des rails en LRS<sup>2</sup> est rendue difficile du fait de la faible masse de cette traverse.



(a) Voie équipée d'une traverse en bois. Source : <https://fr.wikipedia.org>



(b) Voie équipée d'une traverse métallique (TREVIN, 2010)

FIGURE 1.3 – Différents types de traverses.

2. les tronçons de rails obtenus par laminage sont soudés entre eux sur plusieurs kilomètres.

L'utilisation de la traverse en béton s'est généralisée depuis une cinquantaine d'années sur les lignes du RFN. Elle a une durée de vie d'environ 50 ans en moyenne (TREVIN, 2010) et a l'avantage d'être moins coûteuse que les autres types de traverses en termes de maintenance. Il existe deux types de traverses en béton :

- la traverse monobloc est composée d'un seul bloc de béton (Figure 1.4a) ;
- la traverse bibloc est composée de deux blocs en béton appelés blochets qui sont reliés entre eux par une tige métallique appelée entretoise (Figure 1.4b).

Les traverses monobloc sont plus chères à fabriquer mais répartissent la charge de manière plus équilibrée (PINAULT, 2020). Une semelle souple en polymère est disposée entre le rail et la traverse afin d'amortir les efforts transmis au passage des matériels roulants. Cette semelle s'accompagne d'une attache qui permet de maintenir le rail sur la traverse. Le dispositif est appelé "système d'attache".



FIGURE 1.4 – Types de traverses en béton. Source : <http://www.stradal-ferroviare.fr/gamme-ferroviare-urbain/ferroviare/>.

### Le système d'attache

Le système d'attache est un dispositif doté d'une semelle et d'une attache rails-traverse. La semelle est un matériau viscoélastique d'une épaisseur d'environ 9 mm (Figure 1.5). Elle apporte de l'élasticité à la voie et a pour rôle d'atténuer les vibrations qui peuvent contribuer à la fissuration des traverses en bétons. Sur le RFN, une valeur typique de la raideur de la semelle est de 120 MN/m sur les lignes classiques (FERNANDES, 2014) et 90 MN/m sur les LGV (PINAULT, 2020). La raideur de la semelle est néanmoins particulièrement dépendante de la fréquence du chargement mais aussi de la valeur de pré-charge. Par exemple, plus la fréquence du chargement ou la pré-charge augmente, plus la raideur dynamique de la semelle augmente (SOL-SÁNCHEZ, MORENO-NAVARRO et RUBIO-GÁMEZ, 2015).



FIGURE 1.5 – Semelle cannelée. Source : <https://www.rail-europe-solutions.com/materiel-ferroviare/>.

Dans le cas des traverses en bois, des selles sont le plus souvent disposées entre le rail et la traverse (Figure 1.6). Il est toutefois possible de poser des semelles. Dans (THOMPSON et VERHEIJ, 1997), une semelle d'une épaisseur de 4,5 mm est étudiée.



FIGURE 1.6 – Selle pour les voies équipées de traverses en bois. Source : <https://www.rail-europe-solutions.com/materiel-ferroviaire/>.

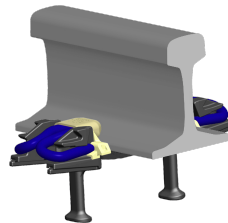
L'attache a pour rôle de positionner et de maintenir le rail sur la traverse. Sur la Figure 1.7, quelques exemples d'attaches sont donnés.



(a) Attache Nabla



(b) Attache Vossloh



(c) Attache Pandrol Fastclip

FIGURE 1.7 – Exemples d'attaches. Source : <http://www.bsrailway.com/rail-fastening> et <https://www.pandrol.com/fr/product/re-system/>.

## Le ballast

Le ballast représenté sur la Figure 1.8 est un granulat sur lequel repose la traverse. Il constitue le dernier élément de la superstructure. Il a pour rôle de (SAUSSINE, 2004) :

- répartir et transmettre les efforts dus aux circulations des véhicules de la traverse vers la couche intermédiaire;
- amortir les vibrations mécaniques et acoustiques engendrées par le passage des matériels roulants;
- ancrer l'armement de la voie dans la direction longitudinale et latérale;
- assurer le drainage des eaux pluviales.

L'épaisseur de la couche de ballast varie typiquement sur les lignes classiques entre 15 cm et 30 cm selon le groupe UIC et le type de traverse en place dans la superstructure (SNCF, 2010). La classification UIC est une classification des lignes du réseau en fonction du tonnage journalier supporté par la voie. Le groupe UIC 1 correspond à des lignes très chargées et le groupe UIC 9 correspond à des lignes peu chargées. Les mentions AV et SV correspondent respectivement à des lignes avec voyageurs et sans voyageurs. Elles sont associées aux lignes des groupes UIC 7, 8 et 9 et précisent que la ligne comporte des trains transportant des voyageurs ou non.

Pour assurer ses fonctions, le ballast doit répondre à certains critères de qualité selon la norme (AFNOR, 2003) :

- la taille des grains est comprise entre 31,5 mm et 50 mm. Ces tailles sont assurées par passage des grains dans des tamis ;
- un coefficient de dureté global est défini à partir de l'essai Deval qui détermine la résistance à l'attrition du ballast et de l'essai Los Angeles qui détermine la fragilité aux chocs du ballast (QUEZADA, 2012). Ce coefficient de dureté global doit être supérieur à 16 pour les lignes rapides et chargées selon (SÉNAC, 1983) ;
- les grains de ballast ont une forme polyédrique avec des arrêtes vives. Il est possible que certains grains aient une forme plate ou en aiguille. La proportion des grains de ballast en forme d'aiguilles ne doit pas dépasser 7% de la masse totale passant au tamis de 50 mm et la proportion des grains de ballast plats ne doit pas excéder 12%. Enfin, la notion d'homogénéité du ballast est définie. Elle correspond à la proportion d'éléments friables ou altérés qui ne doit pas dépasser 3% de la masse totale ;
- les grains de ballast doivent être nettoyés du sable, des poussières et des débris qui peuvent influencer la rugosité et donc le frottement entre les grains.



FIGURE 1.8 – Grains de ballast (QUEZADA, 2012).

Pendant la durée de vie de la voie, les grains de ballast peuvent se briser et s'effriter à cause du passage des trains et des opérations de maintenance. De fines particules peuvent aussi émigrer de la couche intermédiaire vers le ballast. Une deuxième couche formée de grains de ballast de plus petite taille est donc formée. Elle est appelée couche de ballast colmaté. La couche de ballast qui répond aux exigences de (AFNOR, 2003) est appelée ballast sain.

L'apparition de la couche de ballast colmaté s'accompagne du tassement du ballast qui est à l'origine des défauts de géométrie de la voie. Un véhicule appelé bourreuse (Figure 1.9) assure le maintien de la voie dans son état nominal. La bourreuse est pourvue de tiges métalliques qui, après le soulèvement des traverses, sont enfoncées dans le ballast et excitées à une fréquence de 35 Hz. Les tiges permettent de compacter le ballast sous les traverses jusqu'à ce que le rail atteigne la hauteur voulue (PINAULT, 2020). Ce type d'opération est réalisé au besoin lorsque la qualité géométrique de la voie est dégradée.

Après le bourrage, les circulations se font à vitesse réduite jusqu'à ce que les propriétés de la voie soient stabilisées. Le renouvellement complet du ballast a lieu en moyenne tous les 30 à 50 ans (PINAULT, 2020).





FIGURE 1.9 – Bourreuse mécanique (PINAULT, 2020).

### La couche intermédiaire

Il s'agit d'une couche formée d'un mélange de matériaux granulaires comme les résidus de ballast ou de sable. La granulométrie de cette couche est nettement inférieure à celle du ballast.

### Le sol support

Le sol support se trouve sous la couche intermédiaire. Sa qualité, qui est variable d'un site à un autre, dépend de sa granulométrie, des conditions hydrologiques et du pourcentage de roche par rapport à la terre. Le module d'élasticité dans cette couche varie de 10 MPa pour un sol de mauvaise qualité à 100 MPa pour un sol de bonne qualité (PINAULT, 2020).

Les différences de qualité de la sous-structure et le large panel des rails, traverses et semelles, confèrent à la voie des raideurs assez disparates. C'est pourquoi, les moyens de mesure de la raideur de la voie sont essentiels pour prédire son comportement.

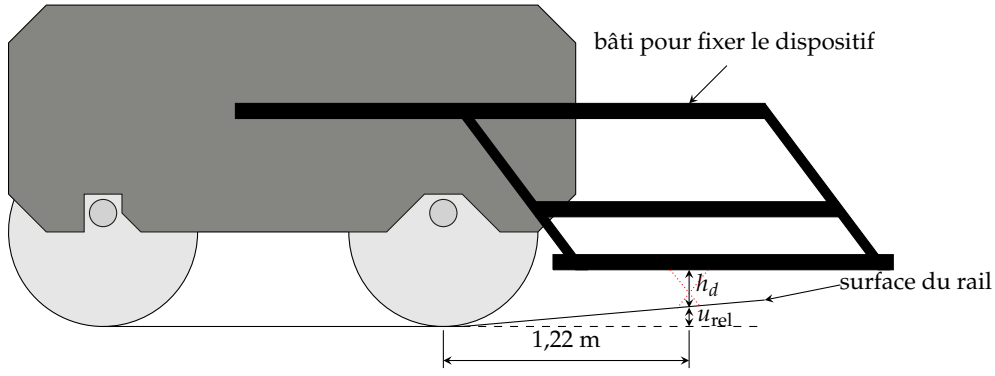
#### 1.1.2 Caractérisation de la raideur de la voie

Plusieurs techniques existent pour caractériser la raideur de la voie. Certaines permettent de dégager une raideur globale de la voie qui inclue la rigidité de la semelle, du ballast ainsi que celles des couches de la sous-structure. D'autres ciblent plutôt des éléments spécifiques de la voie. Dans la catégorie des méthodes globales, on cite la méthode des déflexions qui est fondée sur l'équilibre des forces verticales agissant sur le rail (SELIG et LI, 1994). Les mesures étant ponctuelles, le module d'élasticité  $k$  de la voie en  $[N/m^2]$  peut être déduit par :

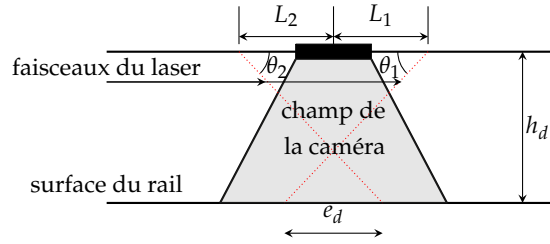
$$k = \frac{\sum_i Q_i}{l \sum_j u_{z,j}^r} \quad (1.1)$$

où  $Q_i$  est l'effort appliqué par la roue  $i$  du véhicule et  $u_z^r$  représente la déflexion verticale du rail. L'incrément  $j$  correspond à un point de mesure sur le rail. On rappelle que  $l$  est l'espacement entre deux traverses. Cette méthode est fastidieuse et difficile à mettre en place sans perturbation du trafic surtout lorsque plusieurs points de mesure sont requis.

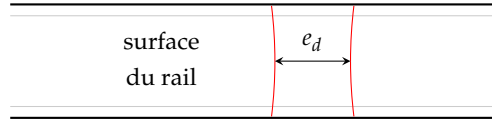
D'autres systèmes de mesure permettent de mesurer la déflexion du rail sur de plus longs linéaires de voie car ils se montent directement sur les trains, ce qui permet de couvrir plusieurs points de mesure.



(a) Montage du dispositif sur le châssis du bogie



(b) Illustration du système de mesure



(c) Projection des faisceaux du laser sur la surface du rail

FIGURE 1.10 – Dispositif MRail pour la mesure de la déflexion du rail. D'après (LU, 2008).

Par exemple, le système de mesure MRail (LU et FARRITOR, 2014) permet de mesurer la déflexion relative du rail entre le point de contact roue-rail et la surface du rail à une distance de 1,22 m de la roue la plus proche du capteur. Le dispositif se monte sur le châssis du bogie (Figure 1.10a). Il consiste en deux capteurs laser et une caméra (Figure 1.10b). Le système de deux lasers projette deux courbes sur la surface du rail. Ces deux courbes sont distantes d'une distance  $e_d$  (Figure 1.10c) qui est mesurée par la caméra. Elle permet de calculer la distance  $h_d$  entre la caméra et la surface du rail :

$$h_d = \frac{(e_d + L_1 + L_2) \tan(\theta_1) \tan(\theta_2)}{\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2)} \quad (1.2)$$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont les distances des capteurs laser à la caméra.  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les angles entre les lasers et le plan horizontal. Enfin, la déflexion relative  $u_{\text{rel}}$  est calculée par :

$$u_{\text{rel}} = H - h_d \quad (1.3)$$

où  $H$  est la distance entre la caméra et la surface du rail au niveau du contact roue-rail.

Les méthodes citées plus haut s'intéressent surtout à la raideur verticale de la voie. Pour caractériser la résistance latérale de la voie, on peut opter pour la méthode STPT (Single Tie Push Test) qui



permet d'obtenir des courbes force-déplacement de la voie. L'essai correspondant à cette méthode consiste à imposer un déplacement latéral à une traverse puis à mesurer les efforts de résistance du ballast. La traverse en question est déconnectée du rail. Il n'y a alors plus de systèmes d'attache qui maintiennent le rail à la traverse. Comme le montre la [Figure 1.11](#), la traverse est déplacée dans la direction latérale grâce à un actionneur dont le corps est fixé sur la traverse tandis que le piston appuie sur le rail qui est fixe.



FIGURE 1.11 – La méthode STPT (Single Tie Push Test) (PUCILLO et al., 2018).

Un autre moyen de caractériser les paramètres de rigidité de la voie est l'analyse de la courbe de réceptance. Les essais consistent à mesurer le déplacement du rail sous l'impact d'un marteau ([Figure 1.12](#)). Ils permettent ainsi d'avoir des informations sur la réponse dynamique de la voie pour une gamme de fréquence donnée et de renseigner sur ses points de résonance (ARLAUD, 2016).

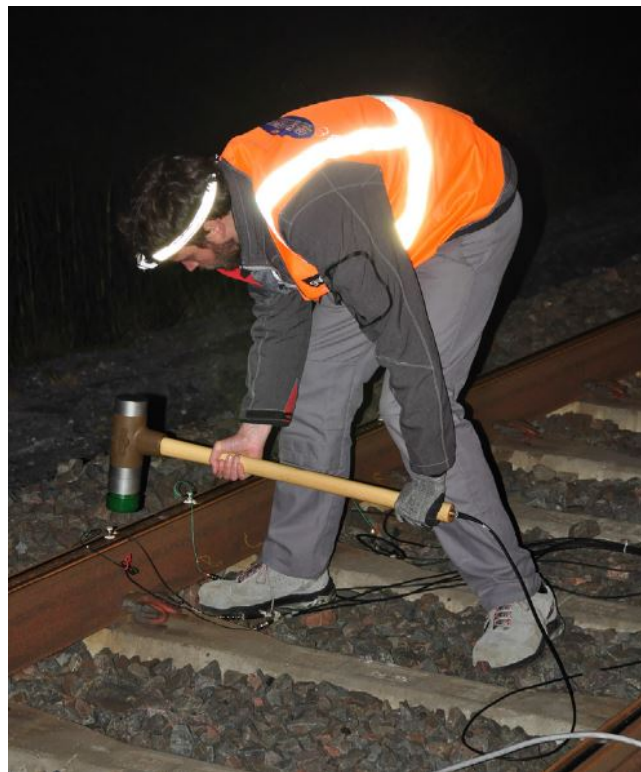


FIGURE 1.12 – Essai d'impact au marteau (ARLAUD, D'AGUIAR et BALMES, 2016).

La fonction de réceptance  $H_{uF}$  s'écrit :

$$H_{uF} = \sqrt{\frac{S_{uu}}{S_{FF}}} \quad (1.4)$$

où  $S_{uu}$  est la densité spectrale de puissance du déplacement et  $S_{FF}$  est la densité spectrale de puissance de la force appliquée. Une courbe de réceptance typique relative au comportement vertical de la voie présente trois pics (DAHLBERG, 2006) comme le montre la Figure 1.13 :

- une première résonance se produit dans l'intervalle [50; 300 Hz]. L'ensemble {rail, traverse} est assimilé à une masse vibrante sur le ballast qui est assimilé à un ressort comme est illustré sur la Figure 1.14a. Sur la Figure 1.13, la résonance se situe à une fréquence de 100 Hz. L'amortissement élevé dans la couche de ballast atténue l'amplitude du pic;
- une deuxième résonance se produit dans l'intervalle [200; 600 Hz]. Elle se caractérise par le mouvement déphasé du rail par rapport à la traverse comme le montre la Figure 1.14b. La semelle joue alors le rôle d'un ressort disposé entre le rail et la traverse. Cette résonance dépend de la rigidité de la semelle;
- un troisième pic peu amorti se produit dans le domaine des hautes fréquences aux alentours de 1000 Hz. Il s'agit de la fréquence du "pin-pin" où le rail vibre autour des supports ({semelle, traverse}) qui deviennent assimilés à des articulations rigides. La forme de l'onde associée à ce pic est représentée sur la Figure 1.14c. Lorsque l'effort est appliqué sur une traverse, le phénomène d'anti-résonance se produit (courbe en trait discontinu sur la Figure 1.13).

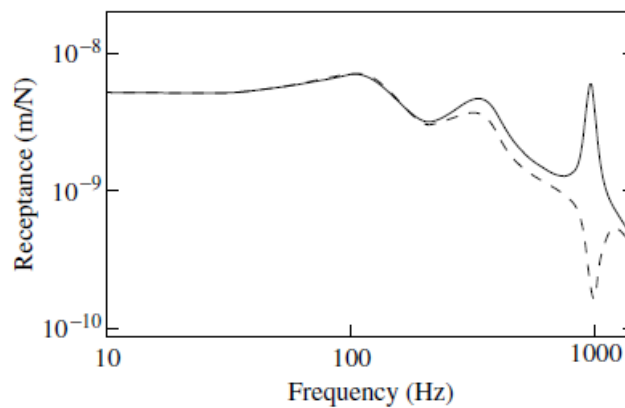


FIGURE 1.13 – Courbe de réceptance d'une voie ballastée (DAHLBERG, 2006). Trait continu : entre deux traverses. Trait discontinu : sur une traverse.

Une résonance dans le domaine fréquentiel [20; 40 Hz] peut se produire. Néanmoins, son amplitude reste faible du fait de l'amortissement dans le sol support. L'ensemble { rail, traverse, ballast, couche intermédiaire} vibre sur le sol support.

Une courbe de réceptance permet de calibrer les paramètres de rigidité et d'amortissement de la voie en ajustant la courbe de réceptance calculée par rapport à celle mesurée. Les paramètres certains de la voie (i.e. masse linéique du rail, rigidité en flexion du rail, masse de la traverse, espacement entre traverses) sont connus et n'entrent pas en jeu dans le processus de calage du modèle.

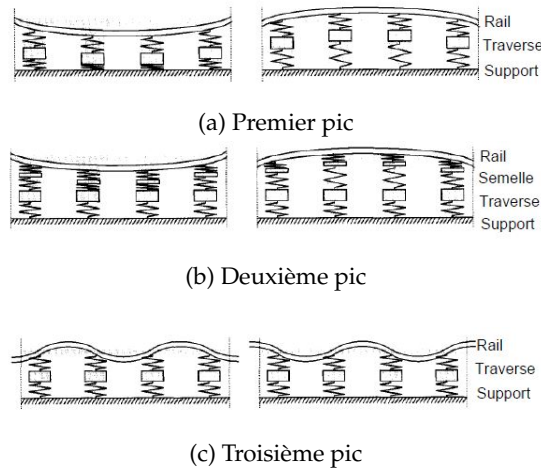


FIGURE 1.14 – Forme des ondes associées aux pics de résonance (DE MAN et al., 2002).

Les paramètres de rigidité et d'amortissement sont donc incrémentés jusqu'à l'obtention d'une courbe de réceptance qui coïncide avec la courbe mesurée. D'après (FERRARA, 2013), l'augmentation de la rigidité du ballast engendre la translation du premier pic de résonance vers des fréquences plus élevées. L'augmentation du coefficient d'amortissement contribue à atténuer l'amplitude du pic. De la même manière, l'augmentation de la rigidité de la semelle engendre l'augmentation de la fréquence de résonance du deuxième pic. Le pic est d'autant plus atténué que le coefficient d'amortissement de la semelle est important. Le troisième pic de résonance reste inchangé vis-à-vis des paramètres de rigidité et d'amortissement de la semelle et du ballast. En effet, l'amplitude du pic dépend de l'espacement entre les traverses. Plus cet espacement est grand, plus le pic de résonance est important. La fréquence du pic de résonance dépend de la rigidité en flexion du rail (i.e. module de Young). Une rigidification du rail entraîne l'augmentation de la fréquence de résonance du troisième pic. Dans ce cas, il est possible d'estimer des rigidités et des coefficients d'amortissement pour chaque élément de la voie.

Toujours dans la gamme des essais qui visent à caractériser des éléments particuliers de la voie, certains tests en laboratoire permettent de mesurer la rigidité de la semelle et notamment sa rigidité verticale. L'essai décrit dans (FENANDER, 1997) consiste en deux blocs d'acier entre lesquels est placée la semelle à tester (Figure 1.15a). La masse du bloc inférieur est très supérieure à la masse du bloc supérieur. Par ailleurs, le bloc inférieur est monté sur des ressorts qui ont pour rôle d'isoler le dispositif. Un pré-chargement statique peut être appliqué par un vérin hydraulique sur le bloc supérieur via un ressort. Deux pots électrodynamiques sont positionnés symétriquement sur le bloc supérieur. Ils représentent la source d'excitation dynamique du dispositif. Les accélérations des deux blocs sont mesurées et sont utilisées pour calculer la rigidité de la semelle. En effet, le dispositif peut être modélisé par le système masses-ressorts de la Figure 1.15b. L'équilibre dynamique des deux blocs se résume alors à :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 + k_{s,v} u_1 - k_{s,v} u_2 = F \\ m_2 \ddot{u}_2 + k_2 u_2 + k_{s,v} u_2 - k_{s,v} u_1 = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $m_1$  et  $m_2$  sont les masses respectives du bloc supérieur et du bloc inférieur.  $k_1$  et  $k_2$  sont les raideurs respectives du ressort supérieur et du ressort inférieur.  $k_{s,v}$  représente la raideur de la semelle dans la

direction verticale. Dans le cas d'une excitation harmonique de fréquence  $\omega$ , la fonction de transfert s'écrit :

$$\frac{u_2}{u_1 - u_2} = \frac{k_{s,v}}{-m_2 \omega^2 + k_2 + k_{s,v}} \quad (1.6)$$

De ce fait, la rigidité de la semelle s'écrit en fonction de la fréquence :

$$k_{s,v} = \frac{u_2}{u_1 - u_2} (k_2 - m_2 \omega^2) \quad (1.7)$$

Dans le cas d'un effort purement statique, on obtient une rigidité statique de la semelle :

$$k_{s,v} = \frac{u_2}{u_1 - u_2} k_2 \quad (1.8)$$

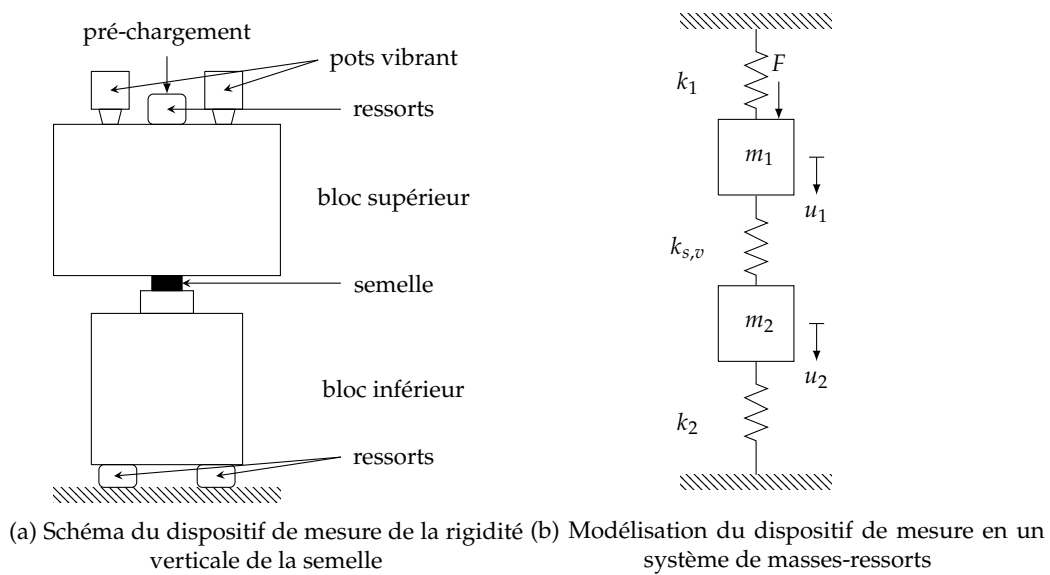


FIGURE 1.15 – Essai en laboratoire pour mesurer la rigidité de la semelle en fonction de la fréquence d'excitation  $\omega$ . D'après (FENANDER, 1997).

Pour terminer, la caractérisation des couches de la sous-structure de la voie à travers des essais de pénétration est un moyen d'estimer le module d'élasticité des différentes couches constituant la voie. Il s'agit d'enfoncer dans le sol une tige munie d'une pointe conique. En France, le pénétromètre dynamique léger PANDA est très répandu (BENZ-NAVARRETE, 2009).

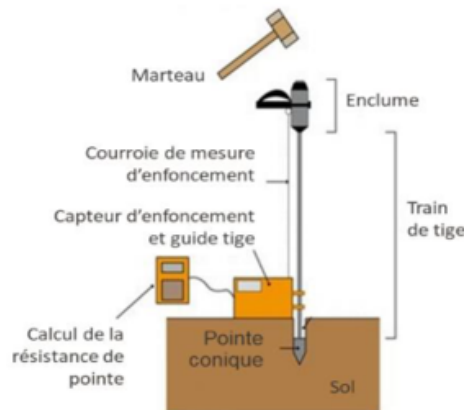


FIGURE 1.16 – Pénétromètre dynamique léger PANDA (SNCF, 2020).

Il consiste à enfoncer dans le sol une tige munie d'une pointe conique par battage manuel à l'aide d'un marteau (Figure 1.16). Des capteurs mesurent la vitesse du marteau au moment de l'impact, ce qui permet d'en déduire l'énergie cinétique du battage. D'autres capteurs mesurent en même temps l'enfoncement de la pointe après l'impact. Le boîtier calculateur du pénétromètre reçoit ainsi les informations de la vitesse du marteau et de l'enfoncement afin d'en déduire la résistance dynamique de pointe  $q_d$  selon la formule de Hollandais (GONIN, 1999) :

$$q_d = \frac{U_c}{S_c e_p} \frac{M}{M + P} \quad [\text{MPa}] \quad (1.9)$$

où  $U_c$  est l'énergie cinétique fournie par la frappe du marteau,  $S_c$  est la section transversale du cône,  $e_p$  est l'enfoncement de la pointe.  $M$  représente la masse du marteau (i.e. masse frappante) et  $P$  représente la masse de la tige, de l'enclume et de la pointe (i.e. masse frappée).

La vitesse d'impact est déterminée en mesurant le temps de passage entre deux cellules d'un capteur à effet Hall espacées d'une distance  $dl$ . Ces deux cellules sont disposées verticalement sur le corps de l'enclume immobile. Le piston mobile de l'enclume est quant à lui équipé d'un aimant. À l'instant  $t_1$ , l'aimant passe face à la première cellule et à l'instant  $t_2$  l'aimant passe face à la deuxième cellule. La vitesse d'impact du marteau  $v_m$  s'écrit alors :

$$v_m = \frac{dl}{t_2 - t_1} \quad (1.10)$$

La puissance de pénétration est suffisante pour traverser les couches de sol ayant des résistances de pointe inférieures à 50 MPa et pour des sondages d'environ 6 m de profondeur. À partir de la résistance de pointe  $q_d$ , il est possible de déterminer les modules d'élasticité des couches (FERNANDES, 2014) :

- pour les graviers ou pierres concassées :

$$E_{\text{couche}} = 67,8 q_d^{0,55} \quad [\text{MPa}] \quad (1.11)$$

- pour le sable :

$$E_{\text{couche}} = \begin{cases} 4 q_d & \forall q_d \leq 10 \quad [\text{MPa}] \\ 2 q_d + 20 & \forall 10 \leq q_d \leq 50 \quad [\text{MPa}] \end{cases} \quad (1.12)$$

La technique de géoendoscopie peut compléter les essais PANDA. Il s'agit d'introduire un vidéo-endoscope dans le forage réalisé par le sondage PANDA pour récolter des images in-situ. Ces images sont analysées par la suite pour caractériser les différents matériaux et déterminer éventuellement l'épaisseur et l'état des couches traversées. Le couplage du PANDA avec les analyses géoendoscopiques est largement utilisé comme méthode d'auscultation des voies pour la détection des couches constituant la voie ballastée ainsi que pour le renouvellement des voies du RFN. Les informations récoltées permettent en effet la prise de décision dans le processus de conception des voies.

En ce qui concerne la couche de ballast, l'utilisation du pénétromètre dynamique léger PANDA est mitigée à cause de la taille moyenne des grains qui est de l'ordre de 3,75 cm en diamètre contre une section transversale de la pointe de 2 cm<sup>2</sup>. La pointe de la tige ne peut donc entrer en contact qu'avec

un ou deux grains pour un enfoncement. Dans les travaux de (QUEZADA, 2012), la pertinence de l'essai est évaluée à travers des études paramétriques via des simulations par éléments discrets. Il en ressort que pour une caractérisation représentative de l'état du ballast il faut environ 10 essais pour avoir une résistance de pointe moyenne bien définie et qu'il faut à peu près 50 points de mesure par sondage. La caractérisation de la couche de ballast est donc possible mais il faut prévoir plusieurs essais et points de mesure pour atteindre une résistance de pointe  $q_d$  stabilisée.

### 1.1.3 Défauts de géométrie de la voie

La circulation répétée des trains génère des sollicitations de la voie qui se traduisent par une dégradation de sa qualité au cours de son exploitation. Les défauts générés concernent ainsi l'ensemble des composants de la voie. Pour les défauts impactant localement la zone d'interaction véhicule-voie, on peut par exemple citer l'usure ondulatoire qui se présente par des ondulations le long de la surface du rail en contact avec la roue. Ces usures ont généralement une longueur d'onde comprise entre 20 et 1500 mm (MAI, 2011). L'occurrence de l'usure ondulatoire est relativement faible en comparaison aux défauts de géométrie de la voie. Ces défauts de longueurs d'onde supérieures à 3 m ont une influence sur la sécurité des circulations et le confort des voyageurs (CALON, 2016). On distingue cinq défauts de géométrie de la voie (Figure 1.17) :

- le nivellement longitudinal est défini pour chaque file de rail. Il correspond à la déviation verticale de la file de rail par rapport à son profil en long initial et résulte du tassement vertical du ballast ;
- le dressage est défini pour chaque file de rail. Il correspond à la déviation latérale de la voie par rapport à sa position de référence ;
- l'écartement est défini par la différence entre l'écart de référence (1435 mm en France) des deux files de rail et celui mesuré ;
- l'écart de dévers est défini par la différence entre le dévers<sup>3</sup> défini sur la voie en courbe et le dévers mesuré. Il est mesuré en relevant la différence de dévers entre un point de la voie et la moyenne de dévers des deux points situés à 5 m de part et d'autre du point considéré ;
- le gauche ou la torsion de la voie est caractérisé en considérant 4 points qui forment un rectangle. Chaque couple de deux points est associé à une file de rail. Le gauche consiste en la distance verticale entre un point et le plan formé par les trois autres points. Une amplitude du défaut excessive peut engendrer le déraillement d'un train (PADERNO, 2010).

Le nivellement transversal est l'association du défaut de gauche et d'écart du dévers (GUERIN, 1996 ; PADERNO, 2010).

Des mesures périodiques de l'état de dégradation de la géométrie de la voie sont réalisées sur les lignes classiques du RFN par des engins dédiés tels que la voiture MAUZIN, l'engin ESV ou le wagon SIM. La voiture MAUZIN, qui est le premier engin développé chez SNCF pour le besoin de la mesure de la géométrie, peut atteindre une vitesse de 200 km/h (TREVIN, 2010). Comme le montre la Figure 1.18, elle se compose de trois bogies et d'une caisse très rigide qui sert de plan de référence lors des mesures.

---

3. élévation de la file de rail extérieure par rapport à la file de rail intérieure pour diminuer les effets des forces centrifuges lors du passage du véhicule en courbe.





FIGURE 1.17 – Illustration des défauts de géométrie de la voie. (Images internes SNCF).



FIGURE 1.18 – La voiture MAUZIN (TREVIN, 2010).

Le bogie central comprend quatre essieux et les bogies extrêmes comprennent deux essieux chacun. Huit points de mesures sont contenus dans le plan vertical, notamment pour enregistrer le défaut de nivellement longitudinal. Trois points de mesures s'ajoutent également dans le plan transversal pour enregistrer par exemple le défaut de dressage. On note que les signaux enregistrés tiennent compte des défauts de tracé et des mouvements propres de l'engin. De ce fait, un premier traitement en temps réel est effectué pour éliminer les mouvements propres du véhicules (GUERIN, 1996).

Pour l'enregistrement du nivellement longitudinal, les huit roues sont utilisées en calculant la différence d'altitude entre l'une des roues dite "roue de référence" et l'altitude moyenne des huit roues. Le nivellement longitudinal est donc mesuré sur une base de 12,2 m qui correspond à la distance séparant les deux essieux extrêmes du véhicule. L'écart de dévers, qui est la différence entre le dévers d'un essieu dit "essieu de référence" et la moyenne du dévers sur les quatre essieux des bogies extrêmes, est mesuré sur une base de 10 m. Le gauche, qui est mesuré sur une base de 2,75 m, correspond à l'empattement du bogie<sup>4</sup> considéré pour la mesure. Ce paramètre de géométrie correspond à la différence d'altitude entre l'une des quatre roues du bogie par rapport au plan formé par les trois autres roues. Le dressage quant à lui est déterminé en mesurant la flèche sur chaque file de rail (i.e. écart entre la position latérale du rail et la position idéale en alignement) qui est lue au point central d'un cordeau de 10 m. Pour cela la voiture MAUZIN dispose de trois galets qui s'appuient sur la face interne d'un rail. La flèche est la différence entre la position du galet central et la moyenne des positions des galets extrêmes. Enfin, l'écartement est mesuré grâce à des palpeurs en contact permanent avec les côtés intérieurs des deux files de rails. L'enregistrement MAUZIN dit MAUZIN synthétique consiste à calculer les indicateurs tels que NL pour le nivellement longitudinal, NT pour le nivellement transversal et D pour le dressage, etc. Ces indicateurs sont les écarts types

4. distance entre les deux essieux du bogie.

des mesures enregistrées avec une valeur moyenne  $\mu$  sur une distance de 200 m. Les enregistrements sur base allongée font apparaître des défauts de plus grandes longueurs d'onde. Par exemple, dans le cas du dressage, la bande de longueurs d'onde est de [13 ; 65 m] (GUERIN, 1996).

Lorsque l'amplitude des défauts dépasse les seuils définis dans (SNCF, 2003) en fonction de la vitesse et du classement UIC des voies, des opérations de maintenance ou des réductions de vitesse peuvent être nécessaires afin d'assurer la sécurité des circulations. Quatre niveaux de seuils sont définis pour le classement des valeurs des paramètres de géométrie :

- la Valeur d'Objectif VO est le niveau de qualité recherché après la pose d'une voie neuve ou après des travaux de maintenance sur cette voie ;
- la Valeur d'Alerte VA impose une surveillance particulière de la zone identifiée ;
- la Valeur d'Intervention VI nécessite une intervention à court terme afin d'éviter l'atteinte d'une valeur mettant en cause la sécurité des circulations ;
- la Limite d'Action Immédiate LAI nécessite la prise de mesure immédiate pour garantir la sécurité des circulations (restriction de vitesse, etc).

## 1.2 Résistance de la voie aux sollicitations du véhicule

Les efforts générés par les véhicules doivent être nécessairement pris en compte pour la conception et la maintenance vu qu'ils sont majoritairement à l'origine des contraintes observées dans les différents composants de la voie. Les amplitudes de ces efforts ont une influence directe sur la dégradation de la voie. On peut distinguer trois types d'efforts en tenant compte de leurs directions d'application :

- les efforts verticaux incluent les efforts statiques dus au poids du véhicule et les surcharges dynamiques dans la direction verticale qui sont causés par la présence de défauts, un changement brutal de raideur de la voie ;
- les efforts latéraux incluent les efforts dus aux efforts centrifuges dans les courbes ou à la présence de défauts dans la direction latérale ;
- les efforts longitudinaux dus aux efforts de freinage et de traction des véhicules.

Les études menées dans le cadre de la thèse ne s'intéressent qu'aux efforts verticaux et latéraux. Dans ce sens, les travaux de Prud'Homme ont fortement contribué à la compréhension de la résistance de la voie et donnent les premiers résultats quant à la problématique du relèvement de vitesse tout en assurant la stabilité du véhicule pour garantir la sécurité des circulations et le confort des voyageurs. En 1966, des circulations de l'ordre de 200 km/h ont été atteintes mais sur des portions de voie très restreintes car l'infrastructure des voies de l'époque n'était pas adaptée à ce niveau de vitesse en régime commercial. En 1970, la résistance verticale et latérale de la voie a été étudiée en se penchant sur les oscillations verticales des masses suspendues (i.e. caisse), des masses semi-suspendues (i.e. bogies) et des masses non suspendues (i.e. essieux). Les oscillations latérales du véhicule et les défauts de géométrie de la voie ont également été étudiés (PRUD'HOMME, 1970). L'étude menée dans le cadre de ces essais avait pour objectif de se prononcer sur la possibilité d'augmenter la vitesse jusqu'à 300 km/h sur le RFN.



## 1.2.1 Les efforts verticaux

### 1.2.1.1 Les efforts statiques

Les efforts statiques peuvent être déduits en réalisant un simple calcul de résistance des matériaux en considérant une sollicitation de la voie par la charge à l'essieu du véhicule considéré<sup>5</sup>. Cette approche permet d'avoir une idée générale des paramètres à améliorer afin d'avoir une bonne résistance à la flexion de la voie (ALIAS et GENTIL, 1984). Dans ce sens, le modèle de Winkler (WINKLER, 1867) détaillé en section 1.3.2 et qui est représenté par une poutre (i.e. le rail) en appui sur une fondation élastique a été adopté par la SNCF notamment pour évaluer les réactions aux traverses ainsi que les déplacements du rail suite à l'application de la charge à l'essieu.

### 1.2.1.2 Les efforts verticaux quasi-statiques

Les efforts quasi-statiques sont dus aux reports de charge entre les roues d'un essieu quand il franchit une courbe. On introduit pour cela les notions d'insuffisance de dévers.

Un véhicule qui franchit une courbe est soumis à l'accélération de gravité  $g$  et à l'accélération latérale centrifuge  $\gamma = \frac{V^2}{R}$  (MOLINARI, 1999).

L'accélération totale  $\Gamma$  exercée sur ce véhicule est alors donnée par l'expression :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\gamma} + \vec{g} \quad (1.13)$$

Pour compenser la force centrifuge, les voies sont inclinées en relevant la file de rail extérieure à la courbe par rapport à la file de rail intérieure. Cette différence d'altitude entre les deux files de rail correspond au dévers qui est exprimé généralement en mm. Par définition, le dévers théorique (Figure 1.19) est le dévers qui permet d'obtenir une accélération totale  $\Gamma$  perpendiculaire au plan de la voie inclinée ainsi que des efforts verticaux identiques sur les deux rails et des efforts latéraux nuls (MOLINARI, 1999). L'accélération latérale centrifuge est alors entièrement compensée.

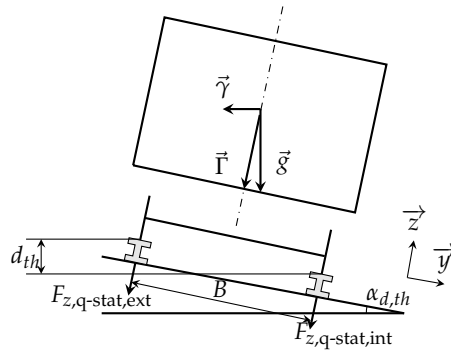


FIGURE 1.19 – Illustration du dévers théorique dans la voie.

En supposant que l'angle d'inclinaison  $\alpha_{d,th}$  de la voie est faible, il est possible d'exprimer le dévers théorique  $d_{th}$  en fonction de la vitesse  $V$ , du rayon de la courbe  $R$  et de l'écartement de la voie  $B$  :

$$d_{th} = \frac{V^2 B}{R g} \quad (1.14)$$

5. la charge à l'essieu correspond, dans la majorité des cas, au poids du véhicule reporté à un essieu.

En considérant une portion de voie posée en courbe où la valeur du rayon est fixe, l'expression (1.14) montre qu'il existe une unique valeur du dévers théorique pour une vitesse de circulation donnée. Or sur une portion de voie posée en courbe, le dévers est fixé et plusieurs véhicules circulent à des vitesses différentes. Il en résulte donc l'impossibilité de compenser l'accélération centrifuge pour l'ensemble des véhicules à la fois. La différence entre le dévers théorique et le dévers réel  $d$  de la voie permet de définir les deux notions suivantes :

- l'insuffisance de dévers  $I$  comptée positive et qui correspond au cas où le dévers réel est inférieur au dévers théorique. Cette configuration d'insuffisance de dévers est d'autant plus soulignée quand les vitesses de circulations augmentent. Dans ce cas la file de rail extérieure est plus chargée que la file de rail intérieure ;
- l'excès de dévers  $E$  compté négatif et qui correspond au cas où le dévers réel est supérieur au dévers théorique. Cette configuration est observée pour des faibles vitesses de circulation et dans ce cas, la file de rail intérieure est la plus chargée.

L'insuffisance de dévers s'exprime en fonction du dévers théorique et du dévers réel à travers la relation (MOLINARI, 1999) :

$$\begin{cases} d_{th} &= d + I \\ I &= \frac{V^2 B}{R g} - d \end{cases} \quad (1.15)$$

L'accélération latérale non compensée peut alors s'exprimer comme la différence entre l'accélération latérale centrifuge et l'accélération compensée grâce au dévers réel appliqué à la voie :

$$\gamma_{nc} = \frac{V^2}{R} - g \frac{d}{B} \quad (1.16)$$

Dans le cas où une portion de voie en courbe est posée avec un dévers différent du dévers théorique, les efforts quasi-statiques exercés sur les deux files de rails ne sont pas identiques. Par exemple, dans le cas d'une insuffisance de dévers, la file de rail extérieure sera davantage chargée que la file de rail intérieure :

$$\begin{cases} F_{z,q-stat,ext} &= F_{z,stat}^r + \Delta F_z \\ F_{z,q-stat,int} &= F_{z,stat}^r - \Delta F_z \end{cases} \quad (1.17)$$

où  $F_{z,stat}^r$  est la charge statique à la roue.  $\Delta F_z$  est l'effort reporté entre les deux files de rail lorsque le véhicule franchit une courbe où un dévers  $d \neq d_{th}$  est appliqué. L'équation du moment sur le véhicule (1.18) ainsi que la formule de l'accélération non compensée (1.16) permettent de déterminer  $\Delta F_z$  dans l'équation (1.20).

$$M_v/4 h_v \gamma_{nc} + \frac{B}{2} (F_{z,stat}^r + \Delta F_z) - \frac{B}{2} (F_{z,stat}^r - \Delta F_z) = 0 \quad (1.18)$$

$$|\Delta F_z| = \frac{M_v/4 h_v g I}{B^2} \quad (1.19)$$

Où  $h_v$  est la hauteur du centre de gravité du véhicule par rapport au plan de roulement et  $M_v$  correspond à la masse du véhicule.

### 1.2.1.3 Les surcharges dynamiques verticales

Les surcharges dynamiques dans la direction verticale sont principalement causés par les défauts de géométrie de la voie, notamment les défauts de nivellement longitudinal ou de nivellement transversal. Ces défauts sont particulièrement dangereux dans le cas où leurs fréquences correspondent sous une certaine vitesse de circulation à l'une des fréquences propres du véhicule, induisant ainsi un phénomène de résonance (ALIAS et GENTIL, 1984). Dans les travaux de (PRUD'HOMME, 1970), l'analyse du spectre du défaut de nivellement longitudinal représenté en Figure 1.20 a permis de remonter aux surcharges dynamiques induites sur la voie. Les mesures ont été réalisées avec la voiture MAUZIN circulant sur une voie équipée de rails de profil U36 d'une masse linéique de 50 Kg/m posés sur des traverses en bois. La courbe de la densité spectrale de puissance du défaut a alors été approchée par une formule empirique (PRUD'HOMME, 1970) :

$$S(\Omega) = \frac{A_c}{(B_c + \Omega)^3} \quad (1.20)$$

Où  $\Omega = \frac{2\pi}{\lambda}$  correspond à la pulsation spatiale relative à la longueur d'onde  $\lambda$ . L'amplitude des défauts augmente donc avec la longueur d'onde. Pour réduire l'amplitude des défauts à grande longueur d'onde, les travaux d'entretien du nivellement longitudinal sont efficaces. Leur impact se traduirait potentiellement par l'augmentation du coefficient  $B_c$ . Pour les très courtes longueurs d'onde, le meulage des rails est la solution efficace afin de supprimer les défauts de surface des rails (PRUD'HOMME, 1970).

Les défauts de voie excitent la dynamique des véhicules et ont donc une influence sur les mouvements des masses non suspendues (i.e. essieux), des masses suspendues (i.e. caisses) et les masses semi-suspendues (i.e. bogies).

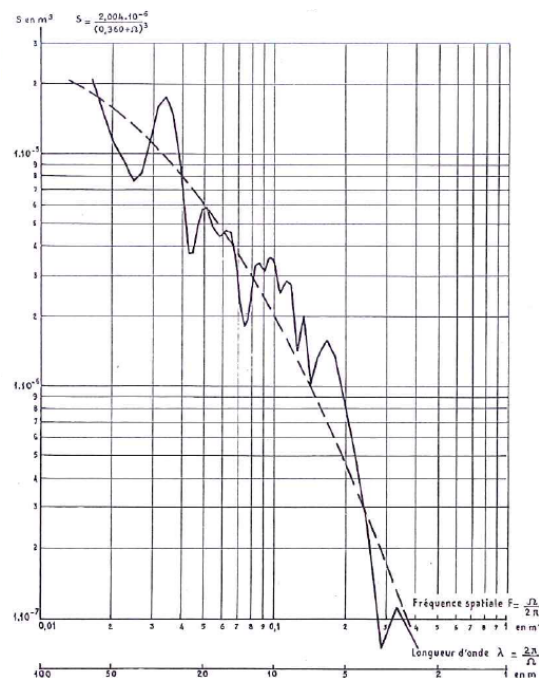


FIGURE 1.20 – Densité spectrale de puissance du défaut de nivellement longitudinal de la voie (PRUD'HOMME, 1970).

## Mouvement des masses non suspendues

Il est démontré que les surcharges dynamiques augmentent proportionnellement avec la vitesse, l'amplitude des défauts et avec la racine carrée de la masse et de la rigidité verticale de la voie comme le montre l'expression de la moyenne quadratique des efforts exercés sur la voie (MOLINARI, 1999) :

$$F_{z,dyn} = c V \sqrt{M_e K} \quad (1.21)$$

Où  $c$  est un coefficient lié à la qualité géométrique de la voie. Dans le cadre des travaux de (PRUD'HOMME, 1970) pour des défauts de plus faibles longueurs d'onde (i.e.  $\Omega$  très grand) ce coefficient vaut  $\sqrt{\frac{4 A_c}{\pi}}$ .  $V$  est la vitesse de circulation du véhicule.  $M_e$  et  $K$  représentent respectivement la masse non suspendue en kg et la rigidité verticale de la voie en N/m.

Ainsi, pour limiter les surcharges dynamiques tout en permettant une augmentation de la vitesse, une approche intéressante consiste à réduire les masses non suspendues des véhicules.

## Mouvement des masses suspendues et des masses semi-suspendues

En ce qui concerne l'oscillation des masses suspendues (i.e. caisse), les travaux de Prud'Homme ont montré que les accélérations verticales dues à la géométrie de la voie augmentaient avec la vitesse. Cette augmentation des accélérations de la caisse est d'autant plus notable que la fréquence propre d'oscillation verticale des masses suspendues est grande, d'où l'intérêt à la réduire. En effet, une réduction relativement modeste de cette fréquence propre peut annuler l'effet du relèvement de vitesse (PRUD'HOMME, 1970). Une amélioration de la qualité géométrique de la voie est aussi bénéfique pour réduire l'accélération verticale de la caisse mais son effet s'atténue au-delà d'une certaine vitesse qui est d'autant plus basse que la fréquence propre d'oscillation de la caisse est basse. Dans ce cas, l'efficacité des travaux de correction de la géométrie de la voie est limitée. La solution optimale pour réduire les accélérations verticales des masses suspendues tout en permettant une vitesse d'exploitation importante est de réduire la fréquence propre d'oscillation verticale des masses suspendues. À titre d'exemple, des essais jusqu'à 250 km/h ont été effectués par (PRUD'HOMME, 1970). Il a été constaté que le confort dans les voitures modernes ayant une fréquence d'oscillation de la caisse d'1 Hz était nettement meilleur que celui ressenti dans des voitures anciennes. Ces voitures anciennes ont une fréquence propre plus importante et circulent à des vitesses beaucoup plus basses.

Les masses semi-suspendues (i.e. bogies) ont quant à elles une fréquence propre d'oscillation verticale plus élevée que celle de la caisse. L'augmentation des accélérations de ces masses avec la vitesse est donc plus rapide que celle des masses suspendues. Il est alors primordial de réduire les masses semi-suspendues, de les concentrer pour augmenter le rayon de giration dans le cas des bogies moteurs et d'augmenter l'élasticité et l'amortissement de la suspension primaire (PRUD'HOMME, 1970).

### 1.2.2 Les efforts latéraux

Pour caractériser la résistance de la voie aux efforts latéraux, des essais ont été réalisés dans le cadre des travaux de (PRUD'HOMME, 1967). L'objectif était de définir une formule caractérisant la limite admissible pour l'effort latéral pouvant être supporté par la voie sans déripage, c'est à dire

une déformation latérale irréversible. À cet effet, un wagon "dérailleur" dont l'essieu médian permet d'exercer des efforts latéraux et verticaux variables a été utilisé. La charge statique à l'essieu étant limitée à 12 t, un wagon de grande longueur et lourdement chargé a été couplé à un wagon "tombe-reau" comme le montre la Figure 1.21. Ce wagon tombereau dispose de deux essieux espacés de 4,5

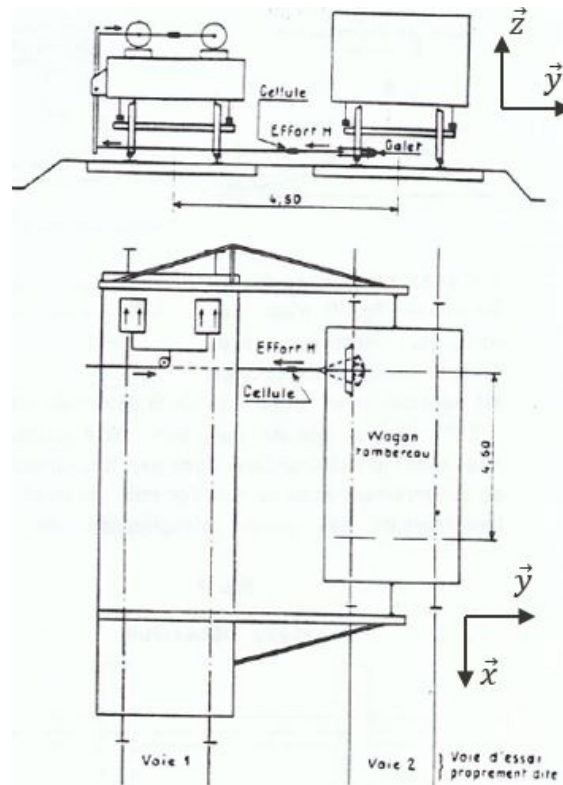


FIGURE 1.21 – Dispositif expérimental : Couplage avec un wagon tombe-reau (PRUD'HOMME, 1967).

m et l'effort latéral est exercé via son essieu arrière. En effet, le wagon de grande longueur dispose de deux cylindres à air alimentés par la locomotive de traction, ce qui permet d'exercer un effort latéral à l'aide de pistons et de poulies de transmissions sur un galet de roulement qui vient s'appuyer sur la partie inférieure de la roue du wagon tombereau. Il est possible d'enregistrer les efforts latéraux exercés à l'aide d'une cellule quartz placée dans le dispositif de transmission. Ainsi, il a été possible en utilisant ce dispositif expérimental de passer jusqu'à des valeurs de 17 t pour la charge à l'essieu. La voie d'essai d'une longueur de 200 m et d'un rayon de courbure de 800 m comportait deux rails d'une masse linéique de 46 kg/m posés sur des traverses en bois. L'autre voie nécessaire au couplage a été placée parallèlement à la première voie à un entraxe de 4,5 m. Il convient de noter que la voie d'essai en question est une voie neuve non stabilisée<sup>6</sup>. Deux processus expérimentaux ont été réalisés :

- la voie est équipée dans la direction longitudinale de deux points de mesure espacés de 6 m. L'essieu arrière du wagon "tombe-reau" est placé au niveau du premier point de mesure. Le véhicule est ensuite mis en marche avec l'application d'un effort latéral  $F_y$  imposé. L'opération est répétée plusieurs fois dans la même zone de la voie avec une augmentation progressive de l'effort  $F_y$  à chaque passage ;

6. les grains de ballast sont susceptibles de bouger dans le vide créé entre les grains.

- L'essieu actif exerce un effort latéral  $F_y$  connu. Plusieurs passages  $n$  du wagon sont effectués avec ce même effort  $F_y$  et le déplacement résiduel  $\delta_r$  de la voie est mesuré sur une vingtaine de points de mesure. La courbe  $\delta_r = f(n)$  est par la suite tracée comme présenté sur la Figure 1.22. Lorsque l'effort exercé est faible, on obtient les courbes  $A_1$  et  $A_2$  où le déplacement résiduel a tendance à se stabiliser. En augmentant l'effort au delà d'une certaine valeur, le déplacement devient plus important et aucune stabilisation n'est observée (courbes  $B_1$  et  $B_2$ ). La valeur de  $F_y$  au-delà de laquelle le déplacement  $\delta_r$  n'est plus stabilisée définit la limite de résistance de la voie  $L$ .

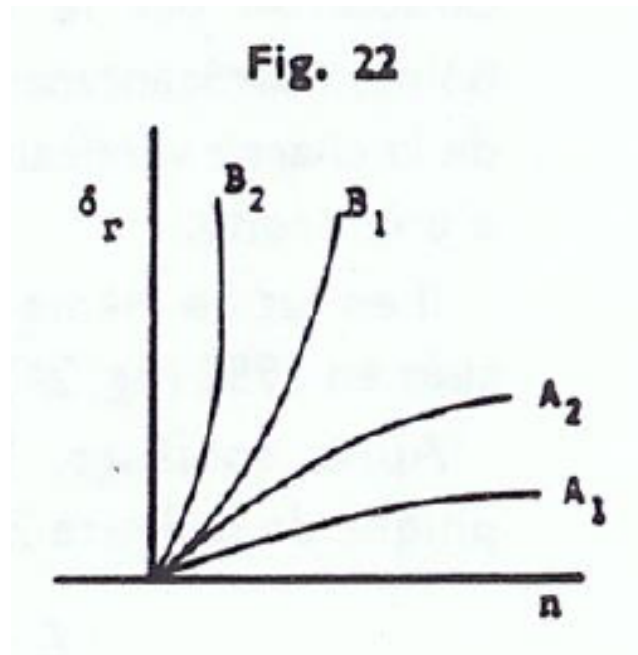


FIGURE 1.22 – Évolution du déplacement latéral résiduel de la voie avec le nombre de passages (PRUD'HOMME, 1967)

Les résultats des essais sont donnés dans le Tableau 1.1 où  $F_{z,stat}^e$  est la charge statique à l'essieu.

|                                                                                                                     |                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| Premier processus expérimental<br>Augmentation de $H$ par palier de 2500 N sur chaque passage                       | $L = 1 + 0,3 F_{z,stat}^e$  |
| Premier processus expérimental<br>Augmentation de $H$ par palier de 10000 N après 10 répétitions sur chaque passage | $L = 1 + 0,25 F_{z,stat}^e$ |
| Deuxième processus expérimental                                                                                     | $L = 1 + 0,3 F_{z,stat}^e$  |

TABLEAU 1.1 – Détermination de la limite de la résistance latérale de la voie à partir d'essais (PRUD'HOMME, 1967)

L'influence de l'armement de la voie et du type de ballast sur la limite de résistance latérale  $L$  a également été analysée (PRUD'HOMME, 1967) :

- l'augmentation de l'inertie du rail engendre l'augmentation de la limite de résistance latérale ;
- les traverses en bois donnent des limites de résistance moins élevées que les traverses en béton ou en acier ;
- une taille plus importante des grains de ballast engendre une légère augmentation de la limite de résistance latérale de la voie ;

- la nature du ballast a une grande influence sur la résistance latérale de la voie : la pierre cassée donne de meilleurs résultats que le gravillon.

La formule actuellement en vigueur pour évaluer la limite de la résistance latérale de la voie s'écrit (TREVIN, 2010) :

$$L = 10 + \frac{F_{z,stat}^e}{3} \quad (1.22)$$

où  $F_{z,stat}^e$  et  $L$  s'expriment en kN.

Les efforts latéraux exercés sur la voie comprenant des composantes quasi-statique et dynamique doivent rester inférieurs à la limite  $L$  de résistance latérale de la voie. Autrement le déripage de la voie se produit.

### 1.2.2.1 Les efforts latéraux quasi-statiques

L'effort latéral quasi-statique exercé par l'essieu sur la voie est dû à la part non compensée de la force centrifuge (i.e. présence de l'insuffisance de dévers ou de l'excès de dévers). Dans le cas d'une insuffisance de dévers, cet effort est proportionnel à la charge à l'essieu  $F_{z,stat}^e$  et à l'insuffisance de dévers :

$$F_{y,q-stat} = \frac{F_{z,stat}^e I}{B} \quad (1.23)$$

### 1.2.2.2 Les surcharges dynamiques latérales

La contribution dynamique de l'effort latéral dépend des caractéristiques du véhicule, de la qualité géométrique de la voie notamment en dressage et écartement et des propriétés mécaniques de la voie (MOLINARI, 1999). Une formule empirique permet d'approcher cet effort dynamique :

$$F_{y,dyn} = \frac{F_{z,stat}^e V}{1000} \quad (1.24)$$

où  $V$  est exprimée en km/h.

## 1.3 Origine des règles de calcul des conditions de circulation

La fusion des compagnies ferroviaire de l'époque en 1938 pour créer la SNCF est à l'origine du caractère fortement hétérogène du réseau ferré français. En effet, chaque compagnie appliquait ses propres règles de conception d'armement de voie qui pouvaient être très différentes des autres.

Face à cette disparité, la commission DEMAUX a proposé en 1944 une classification des voies du réseau en fonction du rapport  $\frac{I_{r,y}}{vI}$  (SNCF, 1944) et a cherché également à caractériser les paramètres du matériel roulant dits "agressifs" du point de vue de la voie. La commission DEMAUX a ainsi défini en 1944 les règles initiales des conditions de circulation des matériels roulants sur le réseau ferré français.

Dans cette section, une analyse du rapport de la commission DEMAUX est donnée. Un travail a été réalisé dans le cadre de cette thèse pour expliciter clairement les hypothèses qui sont à l'origine des choix établis par la commission DEMAUX, ce qui à notre connaissance n'a jamais été fait.



### 1.3.1 Classement des voies du réseau

Le classement des voies a été proposé en fonction du rapport ci-dessous :

$$\frac{I_{r,y}}{v l} \quad (1.25)$$

En sachant que :

- $I_{r,y}$  [mm<sup>4</sup>] est le moment quadratique du rail par rapport à l'axe latéral  $\vec{y}$  ;
- $v$  [mm] est la distance verticale qui sépare la fibre neutre du rail à sa fibre la plus éloignée ;
- $l$  [mm] représente l'espacement entre deux traverses successives.

Ce paramètre est défini pour un rail dit à "demi usure" dans la direction verticale. Il s'agit d'une définition purement théorique de l'usure qui permet d'approcher l'état réel du rail. Il s'agit donc de considérer que le champignon du rail est raboté verticalement d'une distance  $h_u$  correspondant à la moitié de l'usure totale admise par les normes internes SNCF RÉSEAU. Ce rapport présente l'avantage de définir une approche industrielle relativement simple mais ne tient pas compte de l'état de la plateforme, de l'influence des courbes et de l'état d'entretien de la voie. De plus, les effets dynamiques du rail et du véhicule n'ont pas été pris en considération dans sa définition.

De par cette démarche, cinq groupes de voies ont été dégagés comme il est montré dans le [Tableau 1.2](#).

| Armement de voie                         | très léger  | léger       | moyen       | fort        | très fort |
|------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------|
| $\frac{I_{r,y}}{v l}$ [mm <sup>2</sup> ] | [100 ; 140] | [141 ; 179] | [180 ; 235] | [236 ; 350] | >350      |

TABLEAU 1.2 – Définition des cinq groupes DEMAUX (SNCF, 1944).

Le paramètre retenu pour la voie découle des calculs en résistance du rail à une sollicitation en flexion verticale. Le rail est dans ce cas assimilé à une poutre de Bernoulli élastique sur deux appuis simples et est soumis à une force ponctuelle  $Q$  comme le montre la [Figure 1.23](#).

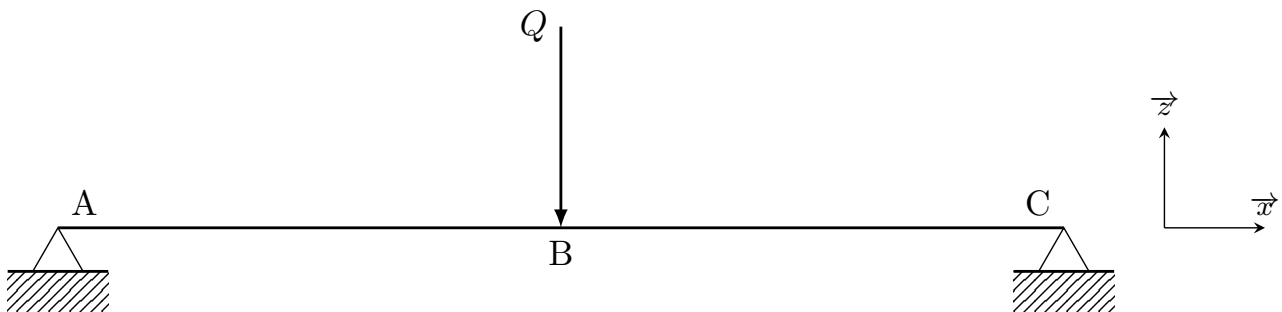


FIGURE 1.23 – Flexion d'une poutre sur deux appuis

En supposant que cet effort s'exerce au milieu de la poutre, on obtient un moment maximal  $M_{y,\max}$  et par conséquent une contrainte normale  $\Sigma_{xx}$  à la section de la forme :

$$\begin{cases} M_{y,\max} = \frac{Ql}{4} \\ \Sigma_{xx} = \frac{M_y z_{\max}}{I_{r,y}} = \frac{M_{y,\max} v}{I_{r,y}} = \frac{Q}{4} \left( \frac{I_{r,y}}{v l} \right) \end{cases} \quad (1.26)$$

L'expression met en évidence la diminution de la contrainte  $\Sigma_{xx}$  lorsque le rapport  $\frac{I_{r,y}}{v l}$  augmente. Ainsi, les voies appartenant aux groupes DEMAUX les plus hauts sont plus résistants à la flexion.

### 1.3.2 Classement des matériels roulants

La commission DEMAUX a retenu deux caractéristiques principales d'agressivité des matériels roulants :

- la charge statique maximale à l'essieu  $F_{z,stat}^e$  ;
- un facteur d'agressivité  $\frac{C P L_v^2 V^2}{D}$  qui prend en compte le poids total de la machine  $P$ , la vitesse  $V$  du véhicule et les caractéristiques géométriques du matériel roulant, soit la longueur  $L_v$  du matériel roulant et l'empattement total  $D$  qui est la distance entre les deux essieux extrêmes du matériel roulant.  $C$  est un coefficient qui fait intervenir le rôle des bissels<sup>7</sup> et des bogies lorsque le véhicule s'inscrit en courbe. En cas de présence de bogie, ce coefficient vaut entre 0,5 et 0,6. En cas de présence de bissel, il vaut entre 0,7 et 0,8. Enfin, en cas d'absence de bogie ou de bissel, il vaut 1. Cette capacité à s'inscrire dans une courbe modifie les efforts appliqués à la voie. L'architecture des véhicules a donc une influence qui est prise en compte par ce coefficient.

#### Choix de la charge maximale à l'essieu $F_{z,stat}^e$ comme paramètre dimensionnant du point de vue de l'armement de la voie

Le choix de la charge à l'essieu comme un paramètre d'agressivité du matériel roulant découle de l'équation de mouvement d'une poutre sur une fondation élastique continue (WINKLER, 1867) comme le montre la Figure 1.24. La voie est en effet considérée comme une poutre (i.e. rail) reposant sur une fondation élastique continue qui englobe l'ensemble {semelle, traverse, couches de la sous structure}.

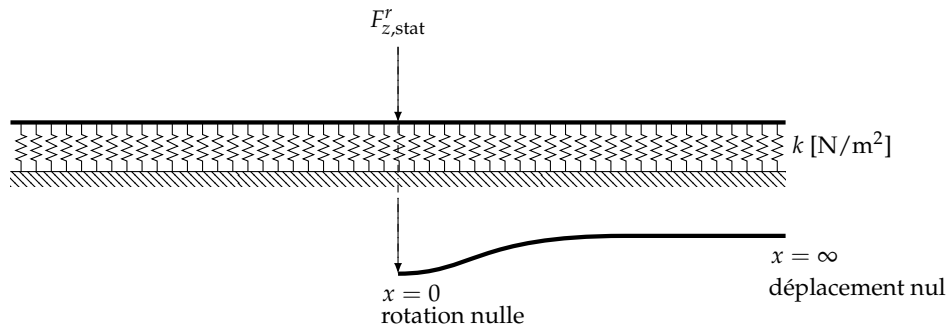


FIGURE 1.24 – Chargement de la poutre sur fondation élastique et conditions aux limites.

Dans un premier temps, il s'agit de considérer l'équation de vibration de la poutre (i.e. une file de rail) qui s'écrit :

$$E_r I_{r,y} \frac{\partial^4 u_z^r}{\partial x^4} - \rho_r I_{r,y} \frac{\partial^4 u_z^r}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho_r S_r \frac{\partial^2 u_z^r}{\partial t^2} + k u_z^r = \frac{F_{z,stat}^e}{2} \delta(x) = F_{z,stat}^r \delta(x) \quad (1.27)$$

7. essieu porteur qui a pour rôle de compléter les essieux moteurs pour répartir la masse d'une locomotive vapeur sur les rails. Le bissel est monté sur son châssis qui est capable de s'orienter par rapport au châssis de la locomotive pour faciliter son inscription dans les courbes.

où  $u_r$  est le déplacement vertical du rail et  $F_{z,stat}^r$  est la charge à la roue.  $E_r$ ,  $\rho_r$  et  $S_r$  sont respectivement le module de Young, la masse volumique et la section du rail. Enfin,  $k$  est la raideur linéique de la fondation en  $[N/m^2]$ . Un changement de variable a été effectué. Il s'agit de remplacer  $\frac{x}{l}$  par la vitesse  $V$  dans l'équation différentielle (1.27). Elle s'exprime alors dans le repère mobile avec la charge :

$$(E_r - \rho_r V^2) I_{r,y} \frac{\partial^4 u_z^r}{\partial x^4} + \rho_r S_r V^2 \frac{\partial^2 u_z^r}{\partial x^2} + k u_z^r = F_{z,stat}^r \delta(x) \quad (1.28)$$

Il est commode de négliger le terme d'inertie de rotation  $\rho_r I_{r,y} \frac{\partial^4 u_z^r}{\partial x^2 \partial t^2}$ , en raison de la rotation faible de la section de la poutre, ce qui est commun dans les problèmes de vibration en flexion des poutres. À l'aide de ces hypothèses, l'équation (1.28) n'est plus qu'une équation de quatrième ordre. On la résout à l'aide de l'équation caractéristique suivante (sans second membre) :

$$E_r I_{r,y} r^4 + \rho_r S_r V^2 r^2 + k = 0 \quad (1.29)$$

ou dans une autre écriture :

$$\begin{cases} X^2 + \kappa^2 X + v^4 &= 0 \quad \text{tel que :} \\ X &= r^2 \\ \kappa^2 &= \frac{\rho_r S_r V^2}{E_r I_{r,y}} \\ v^4 &= \frac{k}{E_r I_{r,y}} \end{cases} \quad (1.30)$$

Le discriminant a la forme :

$$\Delta = \kappa^4 - 4 v^4 \quad (1.31)$$

Le signe de  $\Delta$  est en général négatif. Dans le [Tableau 1.3](#), sont données les valeurs de  $\kappa^4$  et  $v^4$  pour trois configurations de voie et en prenant la vitesse maximale admise sur les lignes classiques qui est de l'ordre de 220 km/h :

- voie 1 : un rail 60E1 est posé sur une traverse béton. Une semelle de 9 mm d'épaisseur est disposée entre le rail et la traverse. L'espacement entre les traverses est de 60 cm. Le ballast a une épaisseur de 30 cm et la plateforme est en bon état ;
- voie 2 : un rail 50E6 d'une masse linéique de 50 kg/m est posé sur une traverse en béton. Entre les deux est placée une semelle d'épaisseur 4,5 mm. L'espacement entre les traverses est de 60 cm. Le ballast a une épaisseur de 25 cm et la plateforme est en bon état ;
- voie 3 : un rail 46E1 d'une masse linéique 46 kg/m est disposé sur une traverse en bois. La voie ne présente pas de semelle sous le rail. L'espacement entre les traverses est de 65 cm. Le ballast a une épaisseur de 17 cm et la plateforme est en bon état.

En supposant que :

- le déplacement  $u_z^r$  est nul à l'infini ;
- la rotation de la poutre est nulle au niveau du point d'application de la force (par symétrie) ;
- il y a équilibre des forces suivant l'axe vertical :  $\int_{-\infty}^{+\infty} k u_z^r dx = F_{z,stat}^r$ .

| voie | $\kappa^4$ [m <sup>-4</sup> ] | $v^4$ [m <sup>-4</sup> ] |
|------|-------------------------------|--------------------------|
| 1    | 0,00122                       | 6,62636                  |
| 2    | 0,00200                       | 12,04802                 |
| 3    | 0,00268                       | 16,32984                 |

TABLEAU 1.3 – Estimation des coefficients  $\kappa^4$  et  $v^4$  pour quelques configurations de voie (TREVIN, 2010).

la solution finale de cette équation peut s'écrire comme suit :

$$u_z^r(x = V t) = \frac{F_{z,\text{stat}}^r \sqrt[4]{4 v^4 - \kappa^4}}{8 k} e^{(-\frac{1}{2} \sqrt[4]{4 v^4 - \kappa^4} x)} \left( \cos \left( \frac{1}{2} \sqrt[4]{4 v^4 - \kappa^4} x \right) + \sin \left( \frac{1}{2} \sqrt[4]{4 v^4 - \kappa^4} x \right) \right) \quad (1.32)$$

Dans le rapport de la commission DEMAUX, seul le cas de chargement statique de la voie est considéré, soit l'équation différentielle (1.33) :

$$E_r I_{r,y} \frac{\partial^4 u_z^r}{\partial x^4} + k u_z^r = F_{z,\text{stat}}^r \delta(x) \quad (1.33)$$

Réduisant ainsi l'écriture du déplacement à :

$$u_z^r = \frac{F_{z,\text{stat}}^r \sqrt[4]{\frac{k}{4 E_r I_{r,y}}}}{4 k} e^{(-\sqrt[4]{\frac{k}{4 E_r I_{r,y}}} x)} \left( \cos \left( \sqrt[4]{\frac{k}{4 E_r I_{r,y}}} x \right) + \sin \left( \sqrt[4]{\frac{k}{4 E_r I_{r,y}}} x \right) \right) \quad (1.34)$$

On retrouve donc un déplacement dans le rail proportionnel à la charge exercée par la roue. D'où le choix de ce paramètre comme l'un des paramètres du matériel roulant qui est dimensionnant du point de vue de la résistance de l'armement de la voie.

#### Origine du facteur d'agressivité $\frac{C P L_v^2 V^2}{D}$

Cette caractéristique traduit les effets d'oscillation du matériel roulant autour de l'axe vertical générant les efforts latéraux  $Y$  qui sollicitent la voie (Figure 1.25). Pour remonter à ce facteur, l'équation du moment dynamique autour de l'axe vertical  $\vec{z}$  est considérée pour un véhicule qui décrit un mouvement oscillatoire d'angle  $\alpha(t)$  le long d'une courbe de rayon  $R$ . Cet angle décrit une sinusoïde de pulsation  $\omega$ . En sachant que  $e_c$  correspond à la distance latérale entre le point de contact si la voie est en alignement (sans défaut) et le point de contact extrême lors de l'inscription dans une courbe (Figure 1.26), on écrit :

$$\begin{cases} M_{dyn,z} &= J_z^v \ddot{\alpha} &= D Y \quad \text{tel que :} \\ \alpha(t) &= \frac{e_c}{D} \sin(\omega t) \end{cases} \quad (1.35)$$

$M_{dyn,z}$  est la somme des moments externes qui s'exercent sur le véhicule autour de l'axe  $\vec{z}$ . Pour la détermination du moment d'inertie  $J_z^v$  autour de l'axe  $\vec{z}$ , le véhicule est considéré comme étant un parallélépipède.

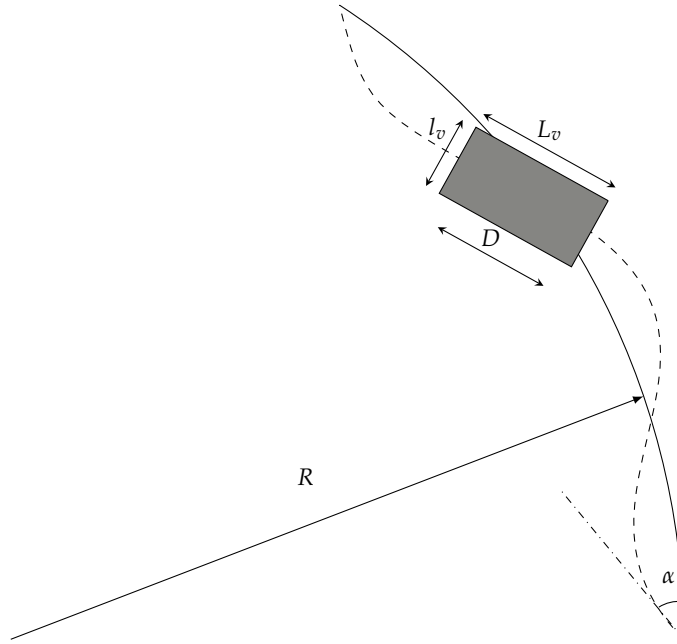


FIGURE 1.25 – Illustration de l'oscillation du véhicule autour de l'axe vertical sur voie en courbe.

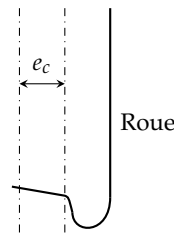


FIGURE 1.26 – Illustration du jeu sur la roue entre la position du point de contact pour une voie en alignement sans défauts et la position du point de contact pour une voie en courbe.

En vue de dessus, il est assimilé à un rectangle mince, c'est à dire si  $L_v$  désigne sa longueur et  $l_v$  sa largeur, on aura  $l_v \ll L_v$ . Par la suite, on peut écrire :

$$\begin{cases} J_z^v &= \frac{1}{12} M_v (l_v^2 + L_v^2) \approx \frac{1}{12} M_v L_v^2 \quad \text{tel que :} \\ M_v &= \frac{P}{g} \end{cases} \quad (1.36)$$

où  $M_v$  est la masse totale de l'essieu et  $g$  est l'accélération de pesanteur. Les développements ci-haut permettent de calculer le moment dynamique :

$$M_{dyn,z} = \frac{P L_v^2}{12 g} \frac{e_c}{D} \omega^2 \sin(\omega t) \quad (1.37)$$

La pulsation définissant l'angle d'oscillation du véhicule peut s'exprimer par une longueur d'onde équivalente  $\lambda$  :

$$\omega = \frac{2 \pi V}{\lambda} \quad (1.38)$$

où  $V$  correspond à la vitesse du véhicule. L'équation (1.37) est réécrite comme suit :

$$|M_{dyn,z}| = \frac{P L_v^2}{12 g} \frac{e_c}{D} \frac{4 \pi^2 V^2}{\lambda^2} \left| \sin\left(\frac{2 \pi V}{\lambda} t\right) \right| \quad (1.39)$$

Le moment dynamique maximal exercé sur le véhicule est donc écrit :

$$M_{\max} = \frac{4 \pi^2 e_c}{12 g \lambda^2} \frac{P L_v^2 V^2}{D} \quad (1.40)$$

On retrouve ainsi, la forme du coefficient d'agressivité du matériel roulant  $\frac{C P L_v^2 V^2}{D}$ .

Avec le développement mené dans ce mémoire, on arrive à justifier la forme du coefficient  $C$  dont les valeurs sont choisies empiriquement dans les travaux de la commission DEMAUX.

### 1.3.3 Conditions de circulation des matériels roulants établies par la commission DEMAUX

En couplant le paramètre de résistance de la voie  $\frac{I_{r,y}}{v l}$  avec les paramètres d'agressivité de la voie, les premières conditions de circulation des matériels roulants sur le réseau ferrée ont été définies comme suit par la commission DEMAUX :

| Voies      |                                          | Groupe DEMAUX | Machines autorisées à circuler |                                                                       |
|------------|------------------------------------------|---------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Armement   | $\frac{I_{r,y}}{v l}$ [mm <sup>2</sup> ] |               | $F_{z,stat}^c$ [T]             | $\frac{C P L_v^2 V^2}{1000 D}$                                        |
| Très léger | [100; 140]                               | 1             | 17                             | 3500                                                                  |
| Léger      | [141; 179]                               | 2             | 18                             | 5500                                                                  |
| Moyen      | [180; 235]                               | 3             | 20                             | 9300                                                                  |
| Fort       | [236; 350]                               | 4             | 21,6                           | 15500                                                                 |
| Très fort  | >350                                     | 5             | 23                             | À déterminer lors de la création des types de machines correspondants |

TABLEAU 1.4 – Conditions de circulation d'une machine à vapeur ou électrique (SNCF, 1944).

## 1.4 Démarche en vigueur pour l'admission des matériels roulants sur le RFN

Les conditions de circulation en vigueur à SNCF RÉSEAU ont pour origine les travaux de la commission DEMAUX (SNCF, 1944). Elles ont toutefois intégré le retour d'expérience pour faire face à l'évolution des circulations. Les conditions de circulation permettent de cadrer les circulations du point de vue de la résistance à la flexion de l'armement de la voie. Cela est réalisé par la définition d'une vitesse maximale du véhicule  $V_{\max}$  sur une voie appartenant à un groupe DEMAUX donné ainsi que de l'insuffisance de dévers maximale  $I_{\max}$  à autoriser sur la voie si elle est en courbe.

La démarche pour déterminer les conditions de circulation est explicitée en Figure 1.27. La première étape consiste à déterminer le rapport  $\frac{I_{r,y}}{v l}$ . Ce rapport permet d'évaluer la résistance à la flexion de la voie et par extension, son groupe DEMAUX. Une fois le classement de la voie connu, il convient de déterminer celui du matériel roulant étudié.

Le type de véhicule considéré permet de déduire le tableau du référentiel (SNCF, 2019) à consulter. Ce dernier permet de déterminer les valeurs maximales de la vitesse et de l'insuffisance de dévers accessibles au matériel roulant.

Les véhicules sont catégorisés en trois familles : les locomotives et motrices, les wagons de fret et les véhicules voyageurs. Dans chaque famille, le classement des véhicules dépend de la charge à l'essieu, de la masse linéaire du véhicule mais aussi du nombre de bogies et du nombre d'essieux par bogies.

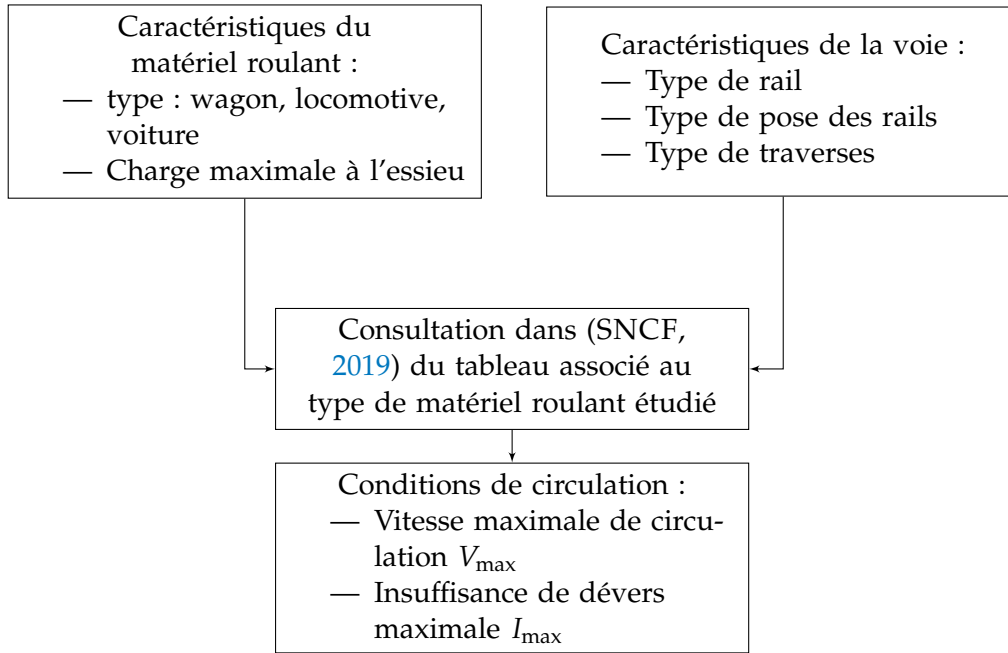


FIGURE 1.27 – Démarche de calcul des conditions de circulation d'un matériel roulant (SNCF, 2019).

À titre d'exemple, la circulation d'un train T composé d'une locomotive L et d'un wagon W dépend des conditions de circulation du matériel roulant le plus contraignant en termes de valeurs maximales de vitesse et d'insuffisance de dévers comme le formule l'équation (1.41).

$$\begin{cases} V_{\max,T,DEMAUX} = \min(V_{\max,L,DEMAUX}, V_{\max,W,DEMAUX}) \\ I_{\max,T,DEMAUX} = \min(I_{\max,L,DEMAUX}, I_{\max,W,DEMAUX}) \end{cases} \quad (1.41)$$

La norme utilisée en interne SNCF RÉSEAU donne les valeurs de la vitesse maximale et de l'insuffisance du seul point de vue de l'armement de la voie. Une étude complémentaire est donc réalisée pour prendre en compte le tracé de la voie, à savoir la présence de courbes de rayon  $R$  et de dévers réel  $d$ . On calcule donc à partir de l'insuffisance de dévers  $I_{\max,T,DEMAUX}$  obtenue par le référentiel, une vitesse dite vitesse potentielle de tracé  $V_{T,\text{tracé}}$  en utilisant la relation (1.15) et dont l'expression finale est donnée par l'équation (2.34).

$$V_{T,\text{tracé}} = \sqrt{\frac{R g (I_{\max,T,DEMAUX} + d)}{B}} \quad (1.42)$$

Finalement, la vitesse retenue pour la circulation du train sera la vitesse minimale entre la vitesse qui tient compte du tracé de la voie et la vitesse maximale directement fournie par le tableau adéquat



issu de (SNCF, 2019) :

$$V_T = \min(V_{\max,T,DEMAUX}, V_{T,\text{tracé}}) \quad (1.43)$$

### Spécificités de la démarche

Dans les procédures des conditions de circulation, on distingue le cas des armements forts ( $\frac{I_{r,N}}{v_l} \geq 271 \text{ mm}^2$ ) et des armements faibles ( $\frac{I_{r,N}}{v_l} < 271 \text{ mm}^2$ ). Pour le premier cas, les conditions de circulation ne tiennent explicitement compte que des sollicitations verticales exercées par le véhicule sur la voie. Pour les voies de faibles armements, des déformations latérales sont susceptibles d'apparaître dans les zones en courbes à faibles rayons. Un indicateur  $B_{qst}$  issu des résultats d'essais d'homologation de la norme EN 14363 (AFNOR, 2016) permet de mieux prendre en compte la sollicitation de la voie. Cet indicateur tient compte de l'effet des contraintes de flexion dans le rail dues aux forces latérales et verticales exercées par le véhicule.

## 1.5 Bilan

Dans ce chapitre, la description de la voie ferrée a été donnée. Ses différents constituants permettent une transmission progressive des efforts appliqués par les circulations ferroviaires du rail jusqu'au sol support. La complexité du système de la voie justifie des opérations d'auscultation très fréquentes. C'est dans ce cadre, qu'on a introduit dans ce chapitre les méthodes qui permettent de caractériser la raideur de la voie comme des dispositifs fondés sur les mesures de déflexion du rail ou les moyens mis en place pour surveiller les défauts de géométrie de la voie. Les défauts de géométrie sont en effet très importants à considérer car ils engagent la sécurité des circulations. Ces défauts sont par ailleurs induits par la circulation répétée des véhicules ferroviaires. De ce fait les mécanismes de chargement de la voie par le véhicule ont été présentés. Ils permettent de comprendre la démarche en vigueur pour l'admission des matériels roulants qui permet de dégager une vitesse maximale de circulation et une insuffisance de dévers maximale en fonction du type de la voie et du type de matériel roulant. Cette démarche découle des travaux de la commission DEMAUX en 1944 qui a proposé une classification des voies du réseau et des matériels roulants de l'époque.

La démarche tel qu'elle est définie actuellement assure une bonne gestion des circulations du point de vue de la voie. Néanmoins, l'entrée en vigueur du quatrième paquet ferroviaire implique la circulation de nouveaux trains sur le RFN. Les caractéristiques de ces trains peuvent être très différentes des trains actuels. La question se pose alors quant à la possibilité d'un train à circuler sur une voie surtout si elle ne répond pas à la spécification technique d'interopérabilité (STI)<sup>8</sup>. Un outil scientifique est donc nécessaire pour pouvoir trancher quant à la possibilité de circulation de nouveaux types de trains. La modélisation numérique est par ailleurs une excellente approche pour répondre à cette problématique. Il s'agit donc de construire un modèle numérique du système ferroviaire qui assure un compromis précision/coût de calcul et qui permet de prédire le comportement de la voie à la circulation d'un véhicule en se basant sur un contenu scientifique et des hypothèses maîtrisées.

8. exigences à ce que le réseau soit conforme aux normes européennes.

## Chapitre 2

# Modélisation du système ferroviaire

Les outils de modélisation du système ferroviaire se sont démocratisés au fil des ans. Le besoin a émergé du fait de l'avantage économique qu'ils présentent par rapport aux campagnes expérimentales. La transition vers les outils numériques est d'autant plus justifiée de nos jours à cause de la densification des circulations qui rend la planification de ces campagnes expérimentales plus difficile. De plus, dans le cadre de l'interopérabilité, de nouveaux trains sont amenés à circuler sur le réseau ferré national RFN engendrant de nouveaux chargements sur la voie. Ces nouveaux chargements ne sont pas forcément répertoriés dans les référentiels existants. L'utilisation d'outils numériques est donc un moyen d'avoir des informations sur le comportement du système ferroviaire. Les modèles numériques permettent aussi de comprendre certains phénomènes isolés ou même de réaliser des études de faisabilité au préalable. Bien évidemment, le retour d'expérience ainsi que les campagnes expérimentales restent importantes pour valider les résultats de simulation mais aussi pour alimenter les modèles avec des paramètres réalistes. À titre d'exemple, une bonne estimation des rigidités de la semelle, du ballast et de la sous-structure est indispensable à la prédiction des déformations dans la voie.

L'objectif est de proposer un outil à l'aide duquel les conditions de circulation sont établies d'un point de vue de la fatigue du rail. Pour cela, dans ce chapitre, on présente les modèles développés : soit le modèle léger de la voie, le modèle multi-corps du véhicule et la méthode pour générer les défauts géométriques aléatoires de la voie. En [section 2.1](#), les modèles de voies proposés dans la littérature sont tout d'abord exposés. Le modèle développé dans cette thèse est par ailleurs positionné par rapport à ces modèles existants. Une première étape du développement est de construire un modèle 2D qui ne prend en compte que les sollicitations verticales. Il s'agit d'un modèle de type poutre reposant sur un milieu multi-couches. Le modèle est ensuite enrichi pour prendre en compte les sollicitations latérales vues par la voie. Le modèle final de la voie est donc un modèle 3D, toujours de type poutres reposant sur un milieu multi-couches. En [section 2.2](#), le choix des paramètres de rigidité et d'amortissement des constituants de la voie est donné. La raideur et l'amortissement verticaux dans la couche englobant le ballast et la sous-structure sont par ailleurs déterminés suivant la méthode d'(AHLBECK, MEACHAM et PRAUSE, 1978). Dans la [section 2.3](#), l'intérêt est porté aux défauts de géométrie qui ont un effet considérable sur l'amplitude et les fréquences du chargement vu par la voie (LESTOILLE, 2015 ; PANUNZIO et al., 2017) et par conséquent sur la fatigue dans le rail. La méthode pour générer des défauts aléatoires est de ce fait présentée. La [section 2.4](#) est dédiée au développement du modèle multi-corps du véhicule. Tout comme le modèle de la voie, un modèle

2D est d'abord construit. Ensuite, une extension vers un modèle 3D est réalisée. Pour terminer, les hypothèses de calcul sont présentées en [section 2.5](#) et des cas test sont exposés en [section 2.6](#) dans le but de valider les différents modèles de l'outil.

## 2.1 Modèle de la voie ferrée

Un large panel de modèles existe dans la littérature pour caractériser le comportement statique ou dynamique de la voie. On distingue les modèles légers du type poutres sur un milieu multi-couches {masses, ressorts, amortisseurs}, les modèles volumiques (éléments finis volumiques 3D) et les modèles intermédiaires comme des modèles surfaciques (i.e. éléments finis 2D avec hypothèse des déformations planes) ou encore des modèles réduits. Ces modèles de différents niveaux de complexité se concentrent sur différents aspects et constituants de la voie.

### Modèles légers du type poutres sur un milieu multi-couches

Le modèle historique est celui proposé par (WINKLER, 1867) (voir [section 1.3.2](#)). On rappelle alors que la voie est ici considérée comme une poutre (i.e. rail) reposant sur une fondation élastique continue qui englobe l'ensemble {semelle, traverse, ballast, couches de la sous-structure}. La déflexion du rail sous charge statique peut facilement être calculée analytiquement. Ce modèle peu coûteux peut être intéressant dans le cas d'études préliminaires qui tendent à donner des ordres de grandeur du déplacement du rail en fonction de la qualité de la voie. Néanmoins, il reste limité à des études statiques et l'effet des composants comme la semelle, la traverse ou le ballast est noyé à travers la prise en compte d'une rigidité globale de la voie. On note tout de même que plusieurs référentiels s'appuient sur ce modèle (PINAULT, 2020), comme par exemple dans les travaux de la commission DEMAUX pour justifier le choix du chargement vertical comme premier paramètre d'agressivité du matériel roulant ([section 1.3.2](#)).

Plusieurs travaux ont par la suite émergé pour prendre en compte la dynamique de la voie. Dans le cas d'une poutre sur fondation élastique soumise à une charge mobile d'amplitude constante, l'équation aux dérivées partielles relative au problème s'écrit :

$$E_r I_{r,y} \frac{\partial^4 u_z^r(x,t)}{\partial x^4} + k u_z^r(x,t) + m_r \frac{\partial^2 u_z^r(x,t)}{\partial t^2} = F_{z,stat}^r \delta(x - V t) \quad (2.1)$$

où  $u_z^r$  est le déplacement vertical du rail.  $E_r$ ,  $I_{r,y}$  et  $m_r$  sont respectivement les modules de Young, le moment d'inertie dans la direction  $\vec{y}$  et la masse linéique du rail.  $k$  est la rigidité de la fondation en  $[N/m^2]$ . Enfin,  $F_{z,stat}^r$  représente la charge à la roue qui se déplace à une vitesse  $V$ .

(FRÛBA, 1999) a résolu le problème (2.1) en ajoutant un terme d'amortissement et pour un état quasi stationnaire. De ce fait, la résolution se fait dans un référentiel mobile de même vitesse que la charge mobile. Par ailleurs, l'effet de l'amortissement, de la vitesse de la charge et de la rigidité de la fondation sur le déplacement dans la poutre sont explicités. La vibration du rail sur fondation élastique est aussi étudiée dans les travaux de (MALLIK, CHANDRA et SINGH, 2006) ou de (DIMITROVOVÁ et VARANDAS, 2009) où l'effet de changement brutal de rigidité de la fondation est abordé. Des travaux similaires ont été réalisés au sein de la SNCF. Pour comprendre l'effet de la

vitesse des véhicules sur la vibration des voies, (NGUYEN, 2002) a modélisé la voie par des modèles semi-analytiques 1D où les éléments {semelle, traverse, ballast et couches de la sous-structure} sont représentés chacun par une couche continue dans la direction longitudinale. L'auteur a introduit de la non linéarité dans la couche de ballast car elle influence le mécanisme de propagation des ondes dans la structure.

Une première sophistication de ces modèles a été de prendre en compte la discontinuité des appuis de la voie. Les semelles, les traverses et le ballast (ou les constituants de la sous-structure) sont notamment représentés par des couches discontinues pour introduire l'effet du travelage<sup>1</sup>. Ils permettent en effet une meilleure représentation du comportement dynamique de la voie dans les plus hautes fréquences puisque la résonance "pin-pin" (voir section 1.1.2) peut être représentée. De plus, l'effet de chaque élément peut être étudié séparément. (KNOTHE et GRASSIE, 1993) ont proposé un recensement de ces modèles existants à cette époque. Depuis, ces modèles sont toujours d'actualité. Dans leur modèle éléments finis de la voie, (LEI et NODA, 2002) ont représenté les semelles, les traverses et le ballast par des couches distinctes du milieu multi-couches. Les efforts d'interaction entre le rail et la roue sont calculés en fonction de défauts de géométrie de la voie générés aléatoirement. (SUN et DHANASEKAR, 2002) se sont intéressés quant à eux à des défauts comme les plats aux roues. Leur modèle inclut en plus la couche intermédiaire et le sol dans le milieu multi-couches. Ils sont modélisés par des ressorts et amortisseurs et la continuité du ballast est assurée par la connexion longitudinale entre les éléments du ballast (i.e. ressort dans la direction longitudinale). Plus tard, (WANG, ZHANG et OUYANG, 2017; XU, ZHAI et GAO, 2017) ont étudié l'interaction véhicule/voie via des modèles poutres sur un milieu multi-couches 3D. (XIE et IWNICKI, 2008) se sont intéressés à travers un modèle de rail sur {semelles, traverses, ballast} à l'interaction roue/rail usé à haute fréquence. Les efforts d'interaction calculés ont servi à alimenter un modèle d'usure de rail et le nouveau profil d'usure a pu être ré-implémenté dans le modèle de la voie et ainsi de suite. La même stratégie a été adoptée par (KOUROUSSIS et al., 2015) pour comprendre les phénomènes vibratoires qui se propagent dans le sol et qui sont liés aux circulations ferroviaires et à la présence de défauts localisés sur la voie. le modèle d'interaction voie/véhicule a permis d'alimenter le modèle volumique 3D du sol auquel il était découplé. (HELENO et al., 2021) ont utilisé ce type de modèles de voie pour calculer les efforts d'interaction véhicule/voie en fonction de différentes configurations de vitesses de vent qui exercent un chargement sur le véhicule.

Bien que simples, les modèles de voies discrets donnent des résultats satisfaisants quand l'intérêt est porté sur les éléments de l'armement<sup>2</sup> et ce même pour des hautes fréquences. Dans le cas où l'intérêt est porté aux couches du ballast ou de la sous-structure, des modèles plus complexes sont réalisés. On cite notamment les modèles éléments finis 3D qui utilisent des éléments volumiques. Des lois de comportement non linéaires sont par ailleurs choisies pour les couches de ballast et de la sous-structure.

### Les modèles volumiques

Comme mentionné plus haut, les modèles volumiques permettent une représentation plus détaillée

---

1. espacement entre les traverses.

2. {rail + traverse + semelle et attache}

des couches du ballast et de la sous-structure. (SAYEED et SHAHIN, 2016) ont cherché la vitesse critique de la voie en fonction de différentes vitesses du véhicule et différents états de la voie. La couche de ballast avait dans ce cas une loi de comportement élasto-plastique (critère de Mohr-Coulomb). (MEI et al., 2019) se sont intéressés à l'impact des défauts de nivellement vertical et du passage des matériels roulants sur l'amplitude des contraintes dynamiques dans le sol support ayant une loi de comportement élasto-plastique. Une étude statistique a été par ailleurs menée pour dégager une loi de distribution normale pour le pic des contraintes dynamiques. En constatant que les zones de transition vers les ouvrages d'art ont des performances médiocres à long terme, (PAIXÃO et al., 2018) ont proposé un modèle volumique de la voie pour comprendre l'effet des semelles sous traverses sur le comportement dynamique des zones de transition. (VARANDAS et al., 2020) ont voulu prédire le comportement de la voie à long terme via un modèle volumique de la voie où les couches granulaires (i.e. du ballast au sol support) sont élastiques non linéaires. Un modèle d'accumulation des déformations après un grand nombre de cycles de passage de véhicules a été également rajouté (i.e. plasticité observée après plusieurs cycles). Les logiciels commerciaux comme Abaqus ou Ansys sont souvent utilisés pour modéliser la voie, notamment dans les travaux de (CONNOLLY et al., 2014; SANCHIS et al., 2021).

L'inconvénient principal des modèles volumiques est le temps de calcul très important qu'ils nécessitent. Ils sont de ce fait peu adaptés à une utilisation industrielle. Par exemple, (JU et LI, 2011) ont mentionné un calcul d'interaction véhicule-voie qui requiert 6,5 Go pour une durée de 9 jours sur une machine personnelle. Le modèle utilisé avait une longueur de 2145 m, une largeur de 235 m et une profondeur de 97 m, soit environ 13 millions de degrés de liberté et 4000 pas de temps simulés pour un pas de temps de 0,005 s.

Pour remédier à cette problématique, plusieurs auteurs ont proposé des modèles intermédiaires pour réduire le temps de calcul. Plusieurs travaux ont émergé dans ce sens à la SNCF.

### Les modèles intermédiaires

Pour diminuer le temps de calcul, plusieurs auteurs ont proposé des stratégies simplificatrices. On cite à ce titre (RHAYMA, 2010) qui a proposé une modélisation éléments finis 2D (surfactive) stochastique de la voie en formulant le problème sous l'hypothèse des contraintes planes. Le plan considéré est la plan contenant la direction longitudinale de la voie (i.e. sens de la circulation) et la direction verticale. L'étude s'inscrit dans une optique de compréhension du comportement de la voie et des mécanismes de dégradation qui ont pour origine la variabilité du ballast et des éléments de la sous-structure. De ce fait, l'étude a été axée sur les couches de ballast et de la sous-structure. Les éléments de l'armement de la voie ont été considérés élastiques linéaires avec des propriétés déterministes alors qu'une loi de comportement élasto-plastique a été choisie pour les couches du ballast et de la sous-structure. Des incertitudes ont aussi été introduites dans la définition de leurs propriétés. (FERNANDES, 2014) a plutôt utilisé l'hypothèse des déformations planes (Figure 2.1). Le but de ces travaux était d'étudier l'influence de la variabilité des couches du ballast et de la sous-structure sur la raideur de la voie. Les propriétés de l'armement de la voie ont été considérées comme déterministes.

Un inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite des modèles 3D pour valider le modèle surfactive 2D qui cache une hypothèse sur la largeur de la voie. Par exemple, (FERNANDES, 2014) a

choisi les dimensions du modèle en faisant coïncider la déformation verticale du modèle surfacique 2D avec celle du modèle volumique 3D.

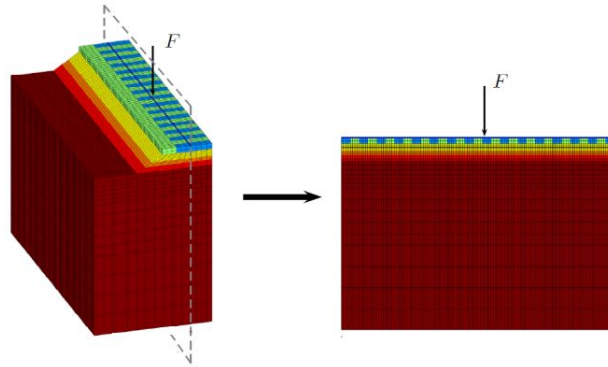


FIGURE 2.1 – Hypothèse des déformations planes pour passer d'un modèle volumique 3D vers un modèle surfacique 2D (FERNANDES, 2014).

Une autre méthode pour réduire la taille du modèle est de profiter de la périodicité de la voie dans la direction longitudinale (i.e. sens des circulations). Le problème dynamique est donc résolu dans le domaine fréquentiel sur une seule cellule de la voie (CHEBLI, CLOUTEAU et SCHMITT, 2008; ARLAUD, 2016). En répétant le motif de la cellule on aboutit à la voie complète comme représenté en Figure 2.2. Par ailleurs, (ARLAUD, 2016) a utilisé une technique de réduction modale pour réduire le nombre de degrés de liberté dans la cellule de la voie.

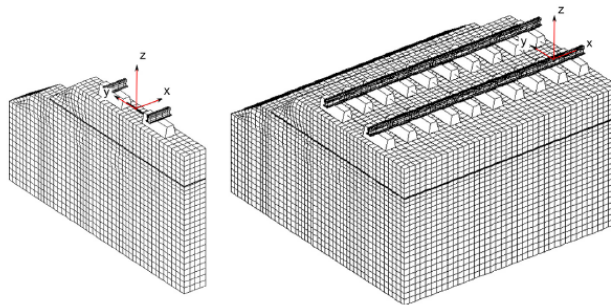


FIGURE 2.2 – Représentation de la voie comme une structure périodique basée sur la répétition d'une cellule générique (ARLAUD, 2016).

Dans ce cas, il est évident que des défauts de la voie non périodiques ne peuvent pas être implémentés.

Autres que les modèles analytiques ou éléments finis, la modélisation par éléments discrets est souvent utilisée pour prendre en compte l'hétérogénéité dans la couche de ballast. Les études sont dans ce cas dédiées à la caractérisation du comportement mécanique de la couche de ballast. Plusieurs travaux sur le ballast ont été menés à la SNCF. On cite (SAUSSINE, 2004; QUEZADA, 2012; OUHBI, 2017).

L'outil développé dans le cadre de cette thèse est dédié à une utilisation industrielle. Des temps de calcul importants ne sont donc pas envisageables. C'est pourquoi les modèles volumiques 3D sont écartés. Entre les modèles intermédiaires et les modèles du type poutres sur un milieu multi-couches, le choix se porte sur la deuxième famille. En effet, des modèles surfaciques s'appuyant sur des hypothèses de contraintes ou déformations planes ne permettent pas de modéliser le comportement



latéral de la voie. En ce qui concerne les modèles périodiques (i.e. modélisation d'une cellule de la voie), des défauts de la voie non périodiques ne peuvent pas être implémentés et le cas d'une voie en courbe ne semble pas être envisageable.

### 2.1.1 Développement du modèle éléments finis 2D de la voie du type poutre reposant sur un milieu multi-couches : caractérisation du comportement vertical

La première version du modèle est un modèle éléments finis 2D du type poutre reposant sur un milieu multi-couches. Pour des raisons de simplicité il est nommé modèle 2D. Il est développé sous CAST3M (CEA, 2020) et permet d'étudier la réponse verticale de la voie à une sollicitation. En raison de la symétrie de la voie par rapport à la direction longitudinale, seule la moitié de la voie est représentée (i.e. une seule file de rail). Comme le montre la Figure 2.3, le modèle décrit un rail discrètement supporté par une première couche représentant l'ensemble des systèmes {semelle + attache}. Les traverses sur lesquelles sont posées les semelles et les attaches reposent à leurs tours sur une deuxième couche qui représente les différentes couches du ballast et de la sous-structure; soit le ballast, la couche intermédiaire et le sol support. Dans le modèle qu'on introduit, le système {semelle, attache} est appelé tout simplement semelle et la couche qui modélise le ballast, la couche intermédiaire et le sol support est appelée couche de {ballast + sous-structure}.

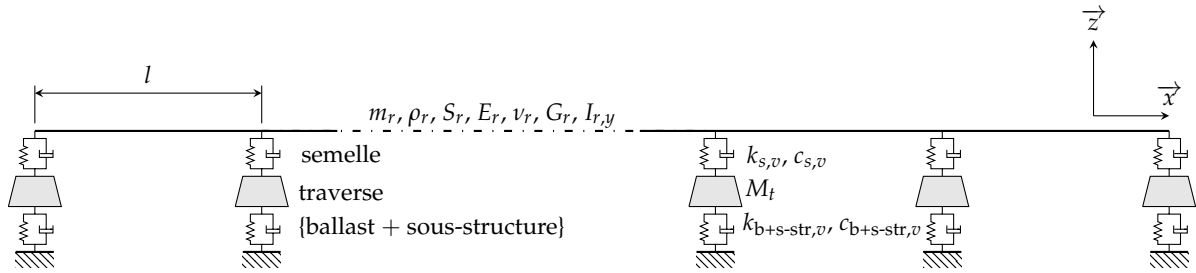


FIGURE 2.3 – Modèle éléments finis 2D de la voie.

Le déplacement longitudinal de la voie étant négligé, le rail est discrétisé par des éléments poutre de Timoshenko à deux nœuds. En effet, le modèle de Bernoulli néglige les déformations de cisaillement dans le rail. Or la hauteur moyenne d'un rail est de l'ordre 0,15 m. Elle n'est pas assez faible par rapport à l'espacement entre deux traverses successives qui est de l'ordre de 0,6-0,8 m. De ce fait les effets du cisaillement doivent être pris en considération d'où le recours au modèle de Timoshenko.

Chaque nœud a deux degrés de liberté : le déplacement vertical  $u_{z,i}^r$  et la rotation  $\theta_i^r$  dans la direction  $\vec{y}$  (Figure 2.4). Le rail est supposé être un milieu homogène, isotrope qui suit une loi de comportement élastique. Il est par ailleurs caractérisé par sa masse linéique  $m_r$ , son module de cisaillement  $G_r$ , son module de Young  $E_r$ , sa section  $S_r$  et son moment quadratique  $I_{r,y}$  par rapport à l'axe latéral  $\vec{y}$ . Les traverses ne présentent qu'un déplacement vertical  $u_{z,j}^t$ . Elles sont modélisées par des masses ponctuelles rigides  $M_t$  qui représentent la masse de la traverse sous une file de rail. Chacune d'entre elles est connectée à un nœud du rail via un couple de {ressort/amortisseur} en parallèle qui représente le comportement de la semelle entre le rail et la traverse. La couche de {ballast + sous-structure} est également modélisée par des couples de {ressort/amortisseur}. Les coefficients de

rigidité des semelles et de la couche de {ballast + sous-structure} sont respectivement  $k_{s,v}$  et  $k_{b+s-str,v}$  et les coefficients d'amortissement sont respectivement  $c_{s,v}$  et  $c_{b+s-str,v}$ .

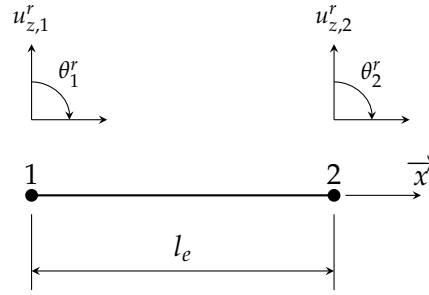


FIGURE 2.4 – Degrés de liberté d'un élément poutre de Timoshenko.

Nous rappelons également que le caractère léger du modèle vient du fait que le modèle de la voie est une association de masses, ressorts et amortisseurs avec un modèle de poutre. La méthode des éléments finis pour calculer les degrés de liberté du rail est rappelée en [annexe A](#).

En ce qui concerne les conditions aux limites, la voie est supposée être un milieu infini à cause de sa longueur très importante. Le modèle numérique réalisé ne peut donc être qu'une portion du milieu infini. Les conditions aux limites suivantes sont retenues :

- blocage du déplacement longitudinal  $u'_x$  d'un des nœuds extrêmes de la poutre (i.e. rail), en l'occurrence le premier nœud ;
- encastrement des nœuds de la couche du sol support ;
- blocage des mouvements de rotation  $\theta_y^t$  et de déplacements longitudinaux  $u'_x$  pour les nœuds des traverses. Seul le déplacement vertical est autorisé car on s'intéresse au comportement vertical de la structure.

En ce qui concerne le maillage de la structure, il est impératif qu'il respecte les conditions du maillage pour une résolution en dynamique. En effet, en dynamique, les célérités  $v_L$  des ondes de compression (i.e. longitudinales) et  $v_T$  des ondes de cisaillement (i.e. transversales) impliquent l'existence d'une longueur caractéristique  $l_c = \frac{v_L}{f}$  ou  $l_c = \frac{v_T}{f}$  indépendante de la structure en question (BONNET et FRANGI, 2007). Dans ces équations,  $f$  représente la fréquence maximale de l'étude qui est de l'ordre de 20 Hz dans les travaux de la thèse. En considérant que :

$$v_T < v_L \quad (2.2)$$

et le fait que 10 éléments suffisent pour la description d'une longueur d'onde, la taille maximale de la maille s'écrit :

$$\begin{aligned} dx_{\max} &= \frac{v_T}{10f} \\ &= \frac{1}{10f} \sqrt{\frac{E_r}{2\rho_r(1+\nu)}} \\ &\approx 16 \text{ m} \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $E_r = 210000 \text{ MPa}$  est le module de Young du rail,  $\rho_r = 7850 \text{ kg/m}^3$  est sa masse volumique et  $\nu_r = 0,3$  son coefficient de Poisson.

Dans le modèle, la plus petite grandeur caractéristique de la structure correspond à l'espacement entre traverses  $l$ . On choisit de la discrétiser par 10 éléments pour décrire la longueur d'onde en



question :

$$dx = \frac{l}{10} \quad (2.4)$$

L'espacement maximal entre deux traverses étant de 1 m, la taille du maillage maximale est alors de 0,1 m. La taille du maillage choisie respecte donc les conditions du maillage pour une résolution en dynamique.

### 2.1.2 Extension vers un modèle éléments finis 3D de la voie du type poutres reposant sur un milieu multi-couches : caractérisation du comportement vertical et latéral

L'extension du modèle de la voie vers un modèle 3D (i.e. modèle 3D du type poutres reposant sur un milieu multi-couches) a pour but d'étudier le comportement latéral de la voie, chose qui n'est pas possible avec le modèle 2D qui est limité à l'étude du comportement vertical de la voie. L'évolution du modèle permet entre autres d'intégrer dans l'outil l'effet du tracé de la voie sur le chargement qu'elle subit. De plus, des défauts de géométrie latéraux comme le dressage ou des défauts hors plan comme le nivellement transversal peuvent être modélisés.

La base du modèle reste identique. Il s'agit d'un modèle de poutres élastiques reposant sur des couches de {ressorts, amortisseurs}. Les deux files de rail sont représentées en tant que poutres de Timoshenko. En dessous, les semelles sont modélisées par un ensemble de {ressorts, amortisseurs} qui interviennent respectivement dans la direction verticale et latérale. Comme le montre la [Figure 2.5](#), la raideur et l'amortissement de la semelle dans la direction verticale sont apportés par deux {ressorts, amortisseurs} positionnés aux extrémités des patins et reliés à la traverse. Cette disposition réaliste des ressorts permet de reprendre le moment qui serait engendré par l'application d'efforts latéraux sur le champignon du rail. Une modélisation à partir d'un seul ressort vertical et d'un ressort de torsion aurait pu être mise en place de façon équivalente. De la même manière, la raideur et l'amortissement dans la direction latérale sont apportés par deux {ressorts, amortisseurs} positionnés aux extrémités des patins et reliés à la traverse. Les coefficients de rigidité et d'amortissement de chacun des {ressorts, amortisseurs} ont les expressions suivantes :

$$\begin{cases} k'_{s,v} &= \frac{1}{2} k_{s,v} \\ c'_{s,v} &= \frac{1}{2} c_{s,v} \\ k'_{s,l} &= \frac{1}{2} k_{s,l} \\ c'_{s,l} &= \frac{1}{2} c_{s,l} \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $k_{s,v}$ ,  $c_{s,v}$ ,  $k_{s,l}$  et  $c_{s,l}$  sont respectivement les coefficients de rigidité et d'amortissement globaux dans les directions verticales et latérales. La traverse qui était modélisée en tant que masse ponctuelle dans le modèle 2D est désormais associée à un élément poutre de Bernoulli (i.e. deux nœuds) dans la direction latérale avec une loi de comportement élastique. En effet, d'après (DAHLBERG, 2006), la traverse peut être modélisée par une poutre de Bernoulli jusqu'à une fréquence de l'ordre de 300 ou 400 Hz. Par ailleurs, le choix d'une poutre à un élément pour la traverse est motivé par le fait que le premier mode élastique d'une traverse béton placée dans une voie qui est un mode de flexion est de l'ordre de 130 Hz. Le fait de rigidifier la poutre en ne considérant qu'un seul élément n'aura donc

des conséquences que pour les hautes fréquences. Or dans le cadre de ces travaux, on rappelle que le domaine fréquentiel d'intérêt est de  $[0; 20 \text{ Hz}]$ .

Pour terminer, la traverse repose au niveau de ses extrémités sur des {ressorts, amortisseurs} qui agissent également dans la direction verticale et latérale. Cette couche représente la couche de {ballast + sous-structure}. Le couple {ressort, amortisseur} est noté  $(k_{b+s-str,v}, c_{b+s-str,v})$  pour la direction verticale et  $(k_{b+s-str,l}, c_{b+s-str,l})$  pour la direction latérale.

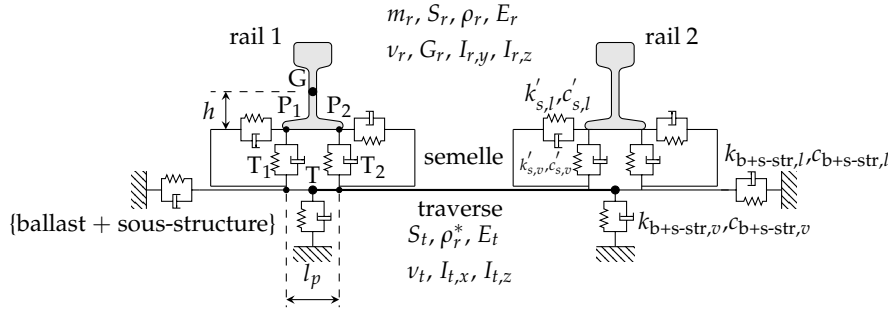


FIGURE 2.5 – Coupe transversale du modèle 3D de la voie.

Chaque nœud  $i$  d'un rail  $k \in \{1; 2\}$  a désormais cinq degrés de liberté : le déplacement latéral  $u_{y,i}^{r_k}$ , le déplacement vertical  $u_{z,i}^{r_k}$  et les rotations  $\phi_i^{r_k}$ ,  $\theta_i^{r_k}$  et  $\psi_i^{r_k}$  dans les directions  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . Le déplacement longitudinal est quant à lui toujours négligé. De nouveaux paramètres s'ajoutent pour pouvoir alimenter le modèle. En effet, il faut renseigner le moment quadratique du rail  $I_{r,z}$  par rapport à l'axe  $\vec{z}$ . La traverse est maintenant caractérisée par sa section  $S_t$ , ses moments quadratiques  $I_{t,x}$  et  $I_{t,z}$  par rapport aux axes  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ . Les paramètres d'élasticité  $E_t$  et  $\nu_t$  sont aussi définis. Une masse volumique modifiée  $\rho_t^*$  est attribuée à la traverse. En effet, la longueur réelle de la traverse  $l_a$  dépasse la longueur de la traverse modélisée  $l_a^*$  qui est définie entre les deux points de connexion avec le rail (i.e. l'écartement entre les lignes moyennes des deux rails). Par conséquent, la masse volumique modifiée (2.6) qui s'exprime en fonction de la masse volumique réelle  $\rho_t$  permet alors de garder la masse de la traverse intacte même si son volume a été changé.

$$\rho_t^* = \frac{l_a \rho_t}{l_a^*} \quad (2.6)$$

Les conditions aux limites du modèle de la voie sont comme suit :

- les déplacements longitudinaux  $u_{x,1}^{r_1}$  et  $u_{x,1}^{r_2}$  du premier nœud de la file de rail gauche et du premier nœud de la file de rail droite sont bloqués.  $r_1$  et  $r_2$  font allusion au rail gauche 1 et droit 2;
- les nœuds placés sous la couche de {ballast + sous-structure} (i.e. face inférieure du sol support) sont encastrés;
- le déplacement longitudinal de chaque traverse est bloqué car la voie n'est pas sollicitée par une force longitudinale. Ceci engendre le blocage de la rotation de la traverse selon la direction  $\vec{z}$ ;
- le ressort modélisant la semelle ne transmet pas de moment sur  $\vec{y}$ . On impose alors l'égalité des rotations entre chaque nœud de la traverse et le nœud du rail correspondant pour éviter

le mouvement de rotation libre. Ceci se traduit par :  $\theta_I^{r1} = \theta_1^{t,j}$  et  $\theta_I^{r2} = \theta_2^{t,j}$  où  $j$  est le numéro de l'appui ou de la traverse et  $I$  le numéro du nœud du rail associé.

Comme le montre la [Figure 2.5](#), les liaisons des couples {ressorts, amortisseurs} dans la direction verticale ou latérale se font entre :

- le point  $P_1$  qui se trouve à l'extrémité gauche du patin du rail et le point analogue  $T_1$  de la traverse;
- le point  $P_2$  qui se trouve à l'extrémité droite du patin du rail et le point analogue  $T_2$  de la traverse.

Or dans le modèle de la voie, le rail est représenté par sa ligne moyenne. De plus, la poutre de la traverse est définie par ses deux nœuds dont le nœud T. Avec cette logique toute liaison qui se fait avec le rail, se produit au niveau du centre de gravité G du rail et toute liaison avec la traverse se fait au niveau du nœud T. Cette constatation impose donc la modification de la matrice de rigidité qui lie le nœud du rail au nœud de la traverse. On émet alors pour la modification de la matrice de rigidité que la section droite du rail reste rigide. De ce fait, les déplacements des points  $P_1, P_2$  d'un rail peuvent être exprimés en fonction du déplacement du nœud G et les déplacements des points  $T_1$  et  $T_2$  peuvent être exprimés en fonction du déplacement du nœud T :

$$\begin{cases} \vec{\delta}_{P_i} = \vec{\delta}_G + \vec{P_iG} \wedge \vec{R}^i \\ \vec{\delta}_{T_i} = \vec{\delta}_T + \vec{T_iT} \wedge \vec{R}^i \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $i \in \{1; 2\}$ .  $\vec{R}^i = (\phi_G \ \theta_G \ \psi_G)^T$  est le vecteur rotation de la section du rail qui est le même pour tout point de la section. De la même manière,  $\vec{R}^i = (\phi_T \ \theta_T \ \psi_T)^T$  est le vecteur rotation de la section de la traverse. Ainsi, le système ci-dessous est écrit :

$$\begin{cases} u_{x,P_i}^r = u_{x,G}^r - h \theta_G + (-1)^i \psi_G \frac{l_p}{2} \\ u_{y,P_i}^r = u_{y,G}^r + h \phi_G \\ u_{z,P_i}^r = u_{z,G}^r - (-1)^i \phi_G \frac{l_p}{2} \\ u_{x,T_i}^t = u_{x,T}^t + (-1)^i \psi_T \frac{l_p}{2} \\ u_{y,T_i}^t = u_{y,T}^t \\ u_{z,T_i}^t = u_{z,T}^t - (-1)^i \phi_T \frac{l_p}{2} \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $h$  est la distance verticale entre le nœud G et les points  $P_i$  et  $l_p$  est la largeur du patin du rail. On rappelle que le déplacement longitudinal est négligé. L'énergie de déformation de l'ensemble des ressorts de la semelle s'écrit donc :

$$\begin{aligned} U_d &= \frac{1}{2} \left( \frac{k_{s,l}}{2} (u_{y,P_1}^r - u_{y,T_1}^t)^2 + \frac{k_{s,l}}{2} (u_{y,P_2}^r - u_{y,T_2}^t)^2 + \frac{k_{s,v}}{2} (u_{z,P_1}^r - u_{z,T_1}^t)^2 + \frac{k_{s,v}}{2} (u_{z,P_2}^r - u_{z,T_2}^t)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( k_{s,l} (u_{y,G}^r - u_{y,T}^t + \phi_G h)^2 + k_{s,v} \left( (u_{z,G}^r - u_{z,T}^t)^2 + \left(\frac{l_p}{2}\right)^2 (\phi_G - \phi_T)^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

La matrice de rigidité représentative de la semelle a par la suite la forme suivante :

$$\underline{\underline{K}}_s = \begin{pmatrix} k_{s,l} & 0 & h k_{s,l} & 0 & 0 & -k_{s,l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{s,v} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{s,v} & 0 & 0 & 0 \\ h k_{s,l} & 0 & \left(h^2 k_{s,l} + \frac{l_p^2}{4} k_{s,v}\right) & 0 & 0 & -h k_{s,l} & 0 & -\frac{l_p^2}{4} k_{s,v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{s,l} & 0 & -h k_{s,l} & 0 & 0 & k_{s,l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{s,v} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{s,v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l_p^2}{4} k_{s,v} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_p^2}{4} k_{s,v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

pour un vecteur des déplacements nodaux ordonné comme suit :

$$u = \left( u_{y,G}^{r_k} \quad u_{z,G}^{r_k} \quad \phi_G^{r_k} \quad \theta_G^{r_k} \quad \psi_G^{r_k} \quad u_{y,T}^t \quad u_{z,T}^t \quad \phi_T^t \quad \theta_T^t \quad \psi_T^t \right)^T \quad (2.11)$$

La matrice de rigidité qui lie la traverse et la face inférieure du sol garde la forme habituelle :

$$\underline{\underline{K}}_{b+s-str} = \begin{pmatrix} k_{b+s-str,l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{b+s-str,l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{b+s-str,v} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{b+s-str,v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{b+s-str,l} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{b+s-str,l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{b+s-str,v} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{b+s-str,v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Les matrices d'amortissement ont bien évidemment la même forme que les matrices  $\underline{\underline{K}}_s$  et  $\underline{\underline{K}}_{b+s-str}$ . Les coefficients  $k_{b+s-str,v}$  et  $c_{b+s-str,v}$  sont déterminés conformément à la méthode d' (AHLBECK, MEACHAM et PRAUSE, 1978) présentée en section 2.2.2. Les coefficients  $k_{s,v}$  et  $c_{s,v}$  ainsi que les rigidités et amortissements latéraux ( $k_{s,l}, c_{s,l}$ ) et ( $k_{b+s-str,l}, c_{b+s-str,l}$ ) sont quant à eux tirés de la littérature.

## 2.2 Estimation des coefficients de rigidité et d'amortissement dans le modèle de la voie

### 2.2.1 Rigidité et amortissement de la semelle

Les propriétés de la semelle qu'on utilise dans le modèle développé de la voie sont tirés de la littérature. Plusieurs valeurs de la rigidité et du coefficient d'amortissement ont été attribués dans la

littérature. (FERRARA, 2013) a répertorié certaines d'entre elles en fonction de la masse linéique du rail. Dans les travaux de (MARTÍNEZ-RODRIGO et al., 2020), on retrouve plutôt une revue bibliographique de ces valeurs pour des espacement entre traverses de l'ordre de 0,6 m.

L'estimation de ces valeurs est assez complexe. En effet, dans les travaux de (SOL-SÁNCHEZ, MORENO-NAVARRO et RUBIO-GÁMEZ, 2015), il est rapporté que la rigidité de la semelle dépend de plusieurs paramètres. Par exemple, un chargement dynamique de la semelle a tendance à augmenter sa rigidité. Dans ces mêmes travaux, le champ d'application de la semelle est présenté en fonction de sa raideur. Des semelles plus souples sont par exemple à privilégier pour réduire l'endommagement des traverses. Pour réduire le déplacement et la vibration du rail et assurer une durée de vie plus importante des systèmes d'attache, des semelles plus rigides seront à privilégier. Par ailleurs, une classification des semelles est présentée en fonction de leurs raideurs dans la direction verticale :

- semelle souple :  $k_{s,v} < 80$  MN/m ;
- semelle moyennement souple :  $80 < k_{s,v} < 150$  MN/m ;
- semelle rigide :  $k_{s,v} > 150$  MN/m.

La surface d'appui des semelles placées sous un rail du type 54E1<sup>3</sup> fait en général  $180 \times 140$  mm<sup>2</sup> et la surface de celles placées sous un rail du type 60E1<sup>4</sup> fait en général  $180 \times 148$  mm<sup>2</sup>. (FERNANDES, 2014) utilise plutôt une rigidité  $k_{s,v} = 120$  MN/m de la semelle conforme à ce qui est utilisé sur les lignes classiques du réseau ferré national français. Comme le modèle développé s'intéresse au comportement du rail, des coefficients de rigidité moyennement souples à rigides sont choisis pour solliciter davantage le rail et se placer dans des configurations moins optimales du point de vue du rail, tout en intégrant les caractéristiques du réseau français.

En ce qui concerne la rigidité et l'amortissement de la semelle dans la direction latérale, des valeurs ont été proposées dans la littérature. On expose certaines dans le [Tableau 2.1](#) tout en présentant les valeurs des paramètres dans la direction verticale.

| référence                     | particularités de l'armement de voie | $k_{s,l}$ [MN/m] | $k_{s,v}$ [MN/m] | $c_{s,l}$ [kN s/m] | $c_{s,v}$ [kN s/m] |
|-------------------------------|--------------------------------------|------------------|------------------|--------------------|--------------------|
| (PEIXER et al., 2021)         | ligne LGV                            | 20               | 500              | 50                 | 200                |
| (ZHAI, WANG et CAI, 2009)     | $m_r = 60$ kg/m et $l = 0,545$ m     | 20               | 65               | 50                 | 75                 |
| (COSTA et al., 2021)          | $m_r = 60$ kg/m                      | 50               | 250              | 30                 | 30                 |
| (WANG, ZHANG et OUYANG, 2017) | $m_r = 60$ kg/m et $l = 0,545$ m     | 14,7             | 78               | 26                 | 50                 |
| (ZHANG et al., 2019)          | $m_r = 56$ kg/m et $l = 0,78$ m      | 30               | 400              | -                  | -                  |
| (ZHANG et al., 2019)          | $m_r = 56$ kg/m et $l = 0,65$ m      | 45               | 90               | -                  | -                  |

TABLEAU 2.1 – Valeurs numériques des coefficients de rigidité ( $k_{s,l}, k_{s,v}$ ) et d'amortissement ( $c_{s,l}, c_{s,v}$ ) respectivement dans la direction latérale et verticale adoptés dans la littérature.

On remarque qu'il est difficile de dégager une loi entre les paramètres de rigidité ou d'amortissement latéraux et les paramètres verticaux. Tout ce qui peut être constaté est le fait que les valeurs

3. rail dont la masse linéique est d'environ 54 kg/m.

4. rail dont la masse linéique est d'environ 60 kg/m.

des paramètres verticaux sont plus importantes que celles des paramètres latéraux. Le rapport entre la rigidité verticale et latérale  $k_{s,v}/k_{s,l}$  pour les différentes références du [Tableau 2.1](#) atteint des valeurs dans  $\{2; 3,25; 5; 13; 25\}$ . De même, le rapport  $c_{s,v}/c_{s,l} \in \{1; 1,5; 2; 4\}$ .

Dans le cadre de ces travaux, la rigidité latérale de la semelle sera obtenue en divisant la valeur de la rigidité verticale par 5 et le coefficient d'amortissement latéral sera obtenu en divisant l'amortissement vertical par 2. L'idée étant d'avoir un ordre de grandeur de la raideur et l'amortissement de la semelle.

## 2.2.2 Rigidité et amortissement de la couche {ballast + sous-structure}

### Dans la direction verticale

Parmi les méthodes citées en [section 1.1.2](#) pour caractériser la raideur verticale de la voie, la méthode des déflexions ou le système de mesure MRAIL donnent une raideur verticale globale de la voie à travers le calcul du déplacement vertical du rail. Le calage des courbes de réceptance est un bon moyen d'estimer les rigidités et les coefficients d'amortissement des composantes de la voie. Néanmoins, les essais d'impact à la SNCF ne se font que pour les LGV. Or les travaux de la thèse sont portés sur les lignes classiques. De ce fait, l'essai du pénétromètre dynamique léger PANDA couplé avec une analyse géoendoscopique est retenu. Il permet la détermination de la profondeur et le module de Young des couches du ballast et de la sous-structure.

(AHLBECK, MEACHAM et PRAUSE, 1978) ont proposé un modèle simplifié pour le calcul de la rigidité verticale en fonction du module de Young. La transmission de l'effort de la traverse vers la couche de ballast puis les couches de la sous-structure se fait à travers des pyramides imaginaires où la distribution de la pression est uniforme. À l'extérieur de cette pyramide, le matériau n'est pas sollicité alors qu'à l'intérieur il est soumis à de la compression verticale.

L'inclinaison des faces de la pyramide par rapport à la verticale représente les angles de friction interne. Il s'agit d'une propriété utilisée en mécanique des sols pour caractériser le cisaillement dans les sols qui sont un empilement de grains (KEATON et PONNABOYINA, 2014).

La [Figure 2.6](#) représente le modèle de distribution des efforts dans les couches de ballast au sol support.  $h_{bs}$ ,  $h_{bc}$  et  $h_{ci}$  représentent les hauteurs de la couche de ballast sain, de la couche de ballast colmaté et de la couche intermédiaire. Les angles  $\alpha_{bs}$ ,  $\alpha_{bc}$  et  $\alpha_{ci}$  sont les angles de friction interne de ces trois couches.

$l_a$  et  $l_b$  sont les dimensions de la surface de contact entre la traverse et la couche de ballast. Elles sont prises respectivement comme étant la longueur et la largeur de la traverse pour une traverse monobloc.

Le calcul de la rigidité de la couche de ballast sain est développé ci-dessous. La force  $F_z$  transmise au ballast s'écrit comme le produit de la pression  $p_z$  sur la section  $S_z$  définie sur une profondeur  $z \in [0; h_{bs}]$  de la pyramide :

$$\begin{aligned} F_z &= p_z S_z \\ &= p_z (l_b + 2z \tan(\alpha_{bs})) (l_a + 2z \tan(\alpha_{bs})) \end{aligned} \quad (2.13)$$

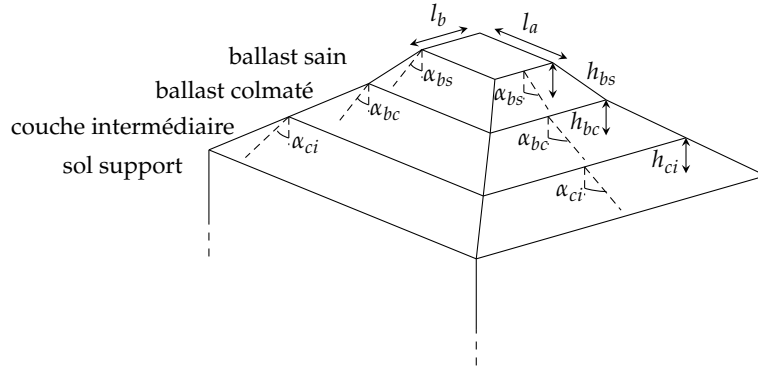


FIGURE 2.6 – Modèle de distribution des efforts dans les couches du ballast sain, ballast colmaté, couche intermédiaire et sol support.

D'une autre part l'effort  $F_z$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} F_z &= k_{bs,v} \Delta u \\ &= k_{bs,v} \int_0^{h_{bs}} \epsilon_z dz \end{aligned} \quad (2.14)$$

où  $k_{bs,v}$  est la rigidité de la couche de ballast sain et  $\epsilon_z$  est la déformation à une profondeur  $z$ . La loi de Hook permet d'exprimer la pression en fonction de la déformation comme suit :

$$p_z = E_{bs} \epsilon_z \quad (2.15)$$

$E_{bs}$  représente dans l'équation (2.15) le module de Young de la couche de ballast sain. Ainsi, la rigidité s'écrit :

$$\begin{aligned} k_{bs,v} &= \frac{E_{bs}}{\int_0^{h_{bs}} \frac{dz}{(l_b + 2z \tan(\alpha_{bs})) (l_a + 2z \tan(\alpha_{bs}))}} \\ &= \frac{E_{bs} (l_a - l_b)}{\int_0^{h_{bs}} \frac{dz}{l_b + 2z \tan(\alpha_{bs})} - \int_0^{h_{bs}} \frac{dz}{l_a + 2z \tan(\alpha_{bs})}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Les changements de variables  $l_a + 2z \tan(\alpha_{bs}) \mapsto u_1$  et  $l_b + 2z \tan(\alpha_{bs}) \mapsto u_2$  permettent de résoudre les deux intégrales obtenant ainsi l'expression finale de la rigidité  $k_{bs,v}$  de la couche de ballast sain :

$$k_{bs,v} = \frac{2 \tan(\alpha_{bs}) E_{bs} (l_a - l_b)}{\ln \left( \frac{l_a}{l_b} \cdot \frac{l_b + 2 h_{bs} \tan(\alpha_{bs})}{l_a + 2 h_{bs} \tan(\alpha_{bs})} \right)} \quad (2.17)$$

Dans le même sens, les rigidités de la couche de ballast colmaté et de la couche intermédiaire sont calculés respectivement par les équations (2.18) et (2.19) .

$$k_{bc,v} = \frac{2 \tan(\alpha_{bc}) E_{bc} (l_a - l_b)}{\ln \left( \frac{l_a + 2 \tan(\alpha_{bs}) h_{bs}}{l_b + 2 \tan(\alpha_{bs}) h_{bs}} \cdot \frac{l_b + 2 h_{bs} \tan(\alpha_{bs}) + 2 h_{bc} \tan(\alpha_{bc})}{l_a + 2 h_{bs} \tan(\alpha_{bs}) + 2 h_{bc} \tan(\alpha_{bc})} \right)} \quad (2.18)$$

$$k_{ci,v} = \frac{2 \tan(\alpha_{ci}) E_{ci} (l_a - l_b)}{\ln \left( \frac{l_a + 2 \tan(\alpha_{bs}) h_{bs} + 2 \tan(\alpha_{bc}) h_{bc}}{l_b + 2 \tan(\alpha_{bs}) h_{bs} + 2 \tan(\alpha_{bc}) h_{bc}} \cdot \frac{l_b + 2 h_{bs} \tan(\alpha_{bs}) + 2 h_{bc} \tan(\alpha_{bc}) + 2 h_{ci} \tan(\alpha_{ci})}{l_a + 2 h_{bs} \tan(\alpha_{bs}) + 2 h_{bc} \tan(\alpha_{bc}) + 2 h_{ci} \tan(\alpha_{ci})} \right)} \quad (2.19)$$



où  $E_{bc}$  et  $E_{ci}$  sont les modules de Young de la couche de ballast colmaté et de la couche intermédiaire. La rigidité du sol se calcule à partir du module de réaction du sol  $K_{30}$  en  $[N/m^3]$  :

$$k_{sg,v} = \frac{(l_a + 2h_{bs} \tan(\alpha_{bs}) + 2h_{bc} \tan(\alpha_{bc}) + 2h_{ci} \tan(\alpha_{ci}))}{(l_b + 2h_{bs} \tan(\alpha_{bs}) + 2h_{bc} \tan(\alpha_{bc}) + 2h_{ci} \tan(\alpha_{ci}))} K_{30} \quad (2.20)$$

La rigidité équivalente dite rigidité de la couche de {ballast + sous-structure} dans le modèle présenté en [section 2.1.1](#) est alors déterminée :

$$k_{b+s-str,v} = \frac{1}{2 \left( \frac{1}{k_{bs,v}} + \frac{1}{k_{bc,v}} + \frac{1}{k_{ci,v}} + \frac{1}{k_{sg,v}} \right)} \quad (2.21)$$

où  $k_{bs,v}$ ,  $k_{bc,v}$ ,  $k_{ci,v}$  et  $k_{sg,v}$  sont respectivement les rigidités de la couche de ballast sain, de la couche de ballast colmaté, de la couche intermédiaire et du sol support en  $[N/m]$ . Le facteur  $\frac{1}{2}$  est justifié par le fait que les raideurs sont déterminées sous une seule file de rail.

Les masses vibrantes des deux couches du ballast sain et colmaté  $M_{bs}$  et  $M_{bc}$  ainsi que de la couche intermédiaire  $M_{ci}$  s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} M_{bs} &= \rho_{bs} \int_0^{h_{bs}} (l_a + 2 \tan(\alpha_{bs}) z) (l_b + 2 \tan(\alpha_{bs}) z) dz \\ M_{bc} &= \rho_{bc} \int_0^{h_{bc}} (l_a + 2 \tan(\alpha_{bs}) h_{bs} + 2 \tan(\alpha_{bc}) z) (l_b + 2 \tan(\alpha_{bs}) h_{bs} + 2 \tan(\alpha_{bc}) z) dz \\ M_{ci} &= \rho_{ci} \int_0^{h_{ci}} (l_a + 2 \tan(\alpha_{bs}) h_{bs} + 2 \tan(\alpha_{bc}) h_{bc} + 2 \tan(\alpha_{ci}) z) (l_b + 2 \tan(\alpha_{bs}) h_{bs} + 2 \tan(\alpha_{bc}) h_{bc} + 2 \tan(\alpha_{ci}) z) dz \end{cases} \quad (2.22)$$

où  $\rho_{bs}$ ,  $\rho_{bc}$  et  $\rho_{ci}$  sont respectivement les masses volumiques du ballast sain, du ballast colmaté et de la couche intermédiaire. Le calcul des masses vibrantes permet alors d'estimer les coefficients d'amortissement des différentes couches. En effet, la détermination des coefficients d'amortissement dans les couches du ballast et les couches de la sous-structure est assez complexe. (SUN et DHANASEKAR, 2002) les ont calculé comme étant le coefficient d'amortissement correspondant à un taux d'amortissement  $\zeta = 0,4$ . Dans les travaux de (NGUYEN, GOICOLEA et GALBADON, 2014), un coefficient d'amortissement  $\zeta = 0,1$  a été choisi. Chaque couche y est alors assimilée à un oscillateur harmonique amorti :

$$\begin{cases} c_{bs,v} &= 2 \zeta \sqrt{k_{bs,v} (2 M_t)} \\ c_{bc,v} &= 2 \zeta \sqrt{k_{bc,v} M_{bs}} \\ c_{ci,v} &= 2 \zeta \sqrt{k_{ci,v} M_{bc}} \\ c_{sg,v} &= 2 \zeta \sqrt{k_{sg,v} M_{ci}} \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $M_t$  a été définie comme la demie-masse de la traverse. Le coefficient d'amortissement global est alors calculé :

$$c_{b+s-str,v} = \frac{1}{2 \left( \frac{1}{c_{bs,v}} + \frac{1}{c_{bc,v}} + \frac{1}{c_{ci,v}} + \frac{1}{c_{sg,v}} \right)} \quad (2.24)$$

Les équations (2.17) – (2.22) reposent sur l'hypothèse qu'il n'y a pas de recouvrement entre les pyramides le long de la voie. Or dans le cas d'angles de friction importants, d'épaisseurs de couches

considérables ainsi qu'un espacement entre traverses réduit, il est possible qu'il y ait un recouvrement entre les pyramides adjacentes (ZHAI, WANG et LIN, 2004). L'expression des masses vibrantes et des rigidités doit alors être modifiée pour ne pas surestimer la masse du système ainsi que sa raideur. Pour illustrer cette remarque, on suppose qu'il y a un recouvrement entre les pyramides commençant au niveau de la couche de ballast sain (Figure 2.7).

Dans ce cas, les rigidités des couches s'expriment par les équations (2.25) – (2.28).

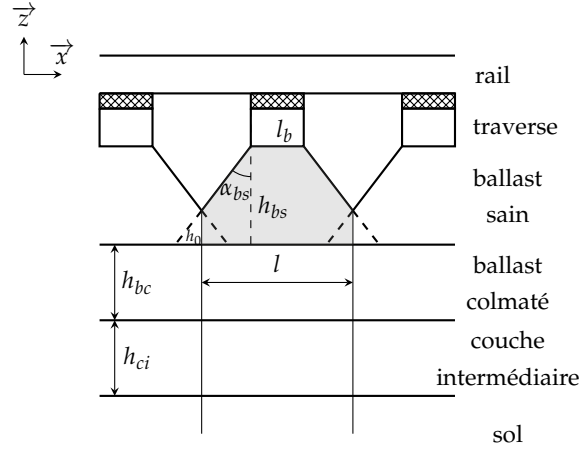


FIGURE 2.7 – Illustration du recouvrement des pyramides relatifs à la transmission des efforts de la traverses vers les couches de ballast et de la sous-structure de la voie. D'après (ZHAI, WANG et LIN, 2004).

$$\begin{cases} k_{bs1,v} = \frac{2 E_{bs} \tan(\alpha_{bs}) (l_a - l_b)}{\ln\left(\frac{l_a l}{l_b (l_a + l - l_b)}\right)} \\ k_{bs2,v} = \frac{2 E_{bs} \tan(\alpha_{bs}) l (l_a + l - l_b)}{l_b - l + 2 h_{bs} \tan(\alpha_{bs})} \\ k_{bs,v} = \frac{k_{bs1} k_{bs2}}{k_{bs1} + k_{bs2}} \end{cases} \quad (2.25)$$

$$k_{bc,v} = \frac{E_{bc} l (l_a + l - l_b)}{h_{bc}} \quad (2.26)$$

$$k_{ci,v} = \frac{E_{ci} l (l_a + l - l_b)}{h_{ci}} \quad (2.27)$$

$$k_{sg,v} = K_{30} l (l_a + l - l_b) \quad (2.28)$$

L'expression des masses vibrantes change également :

$$\begin{cases} M_{bs} = \rho_{bs} \int_0^{h_{bs}-h_0} (l_a + 2 \tan(\alpha_{bs}) z) (l_b + 2 \tan(\alpha_{bs}) z) dz + \rho_{bs} l (l_a + l - l_b) h_0 \\ M_{bc} = \rho_{bc} l (l_a + l - l_b) h_{bc} \\ M_{ci} = \rho_{ci} l (l_a + l - l_b) h_{ci} \end{cases} \quad (2.29)$$

$h_0 = h_{bs} - \frac{l-l_b}{2 \tan(\alpha_{bs})}$  est la hauteur de la zone de ballast sain où il y a recouvrement.

Dans les travaux de (FERNANDES, 2014), 60 km de voie d'une ligne classique du réseau ferré national français ont été analysés à l'aide d'un essai PANDA couplé à un test géoendoscopique. Ainsi, le module d'élasticité et la profondeur des couches du ballast sain, ballast colmaté, couche intermédiaire et sol support sont donnés. Le nombre de mesures réalisé est reporté au Tableau 2.2.

| Couche               | Nombre de mesures |
|----------------------|-------------------|
| Ballast sain         | 146               |
| Ballast colmaté      | 128               |
| Couche intermédiaire | 45                |
| Sol                  | 112               |

TABLEAU 2.2 – Nombre de mesures PANDA réalisées pour chaque couche (FERNANDES, 2014).

Les épaisseurs moyennes des couches constituant la ligne ont été obtenues comme suit :

- 25 cm pour la couche de ballast sain ;
- 15 cm pour la couche de ballast colmaté ;
- 20 cm pour la couche intermédiaire.

La profondeur du sol support ne peut pas être déterminée car l’essai PANDA est en général limité à 6 m de profondeur. Par ailleurs, pour une étude interne (SNCF, 2020), la longueur maximale de pénétration a été fixée à 1,30 m de profondeur.

Une analyse statistique des résultats de mesure a été réalisée. Il en est dégagé une forte variabilité des résultats surtout pour la couche de ballast sain. Les modules d’élasticité sont par ailleurs calculés en utilisant les relations (1.11) et (1.12). La distribution des modules d’élasticité est donnée en Figure 2.8.

Dans cette thèse, on s’intéresse à des lignes classiques qui peuvent parfois être vieillissantes et présenter des traverses en bois. La profondeur du ballast sain à obtenir lors de renouvellement de voies ou de remaniements d’installations est donnée dans le référentiel (SNCF, 2010). Dans le Tableau 2.3, on reporte les valeurs relatives aux lignes classiques.

| Traverse | $160 < V \leq 220$ km/h | $V \leq 160$ km/h |                    |                |
|----------|-------------------------|-------------------|--------------------|----------------|
|          | tout groupe UIC         | 1-2-3-4           | 5-6-7 AV-8 AV-9 AV | 7 SV-8 SV-9 SV |
| Bois     | 0,25 m                  | 0,2 m             | 0,15 m             | 0,15 m         |
| Béton    | 0,30 m                  | 0,25 m            | 0,20 m             | 0,15 m         |

TABLEAU 2.3 – Profondeur de la couche de ballast sain en fonction de la vitesse (SNCF, 2010).

En consultant le référentiel (SNCF, 2019), on remarque que pour les groupes DEMAUX de 1 à 3, les véhicules circulent rarement avec des vitesses supérieures à 220 km/h. Par ailleurs, une étude de correspondance entre groupes DEMAUX et groupes UIC est réalisée. On dégage ainsi le pourcentage des groupes UIC appartenant à un groupe DEMAUX donné (Figure 2.9). À partir du Tableau 2.3 et de la Figure 2.9, on dégage la profondeur de la couche de ballast sain pour chaque groupe DEMAUX à

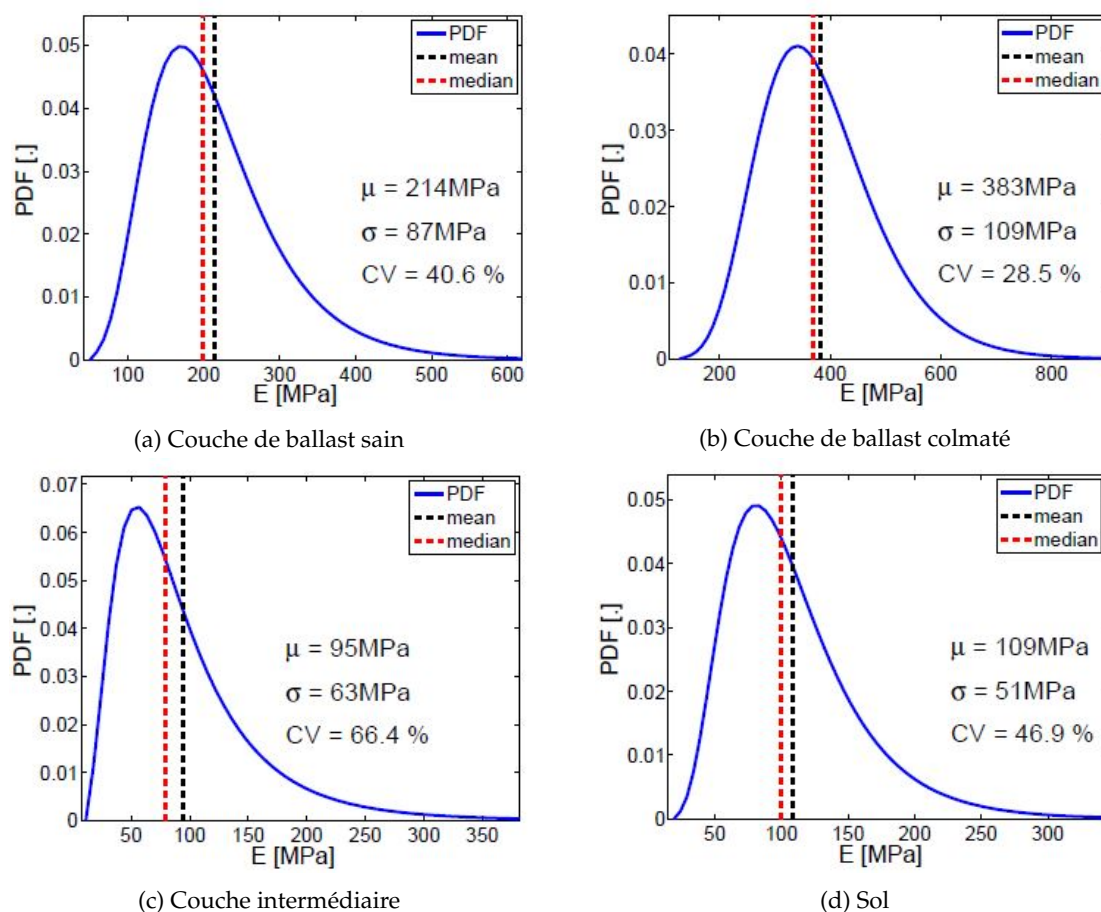


FIGURE 2.8 – Densité de probabilité du module de Young  $E$  pour les différentes couches formant la ligne classique (FERNANDES, 2014).

travers une moyenne pondérée. Les profondeurs relatives aux groupes 4 et 5 sont tirées directement du [Tableau 2.3](#) pour des vitesses  $160 < V \leq 220$  km/h. Les profondeurs du ballast sain adoptées pour chaque groupe DEMAUX sont reportées dans le [Tableau 2.4](#).

|                      | Traverse en bois | Traverse en béton |
|----------------------|------------------|-------------------|
| Groupe DEMAUX 1      | 15 cm            | 16 cm             |
| Groupe DEMAUX 2      | 15 cm            | 17 cm             |
| Groupe DEMAUX 3 bas  | 15 cm            | 17 cm             |
| Groupe DEMAUX 3 haut | 15 cm            | 17 cm             |
| Groupe DEMAUX 4 bas  | 25 cm            | 30 cm             |
| Groupe DEMAUX 4 haut | 25 cm            | 30 cm             |
| Groupe DEMAUX 5      | 25 cm            | 30 cm             |

TABLEAU 2.4 – Profondeur de la couche de ballast sain adoptée pour chaque groupe DEMAUX.

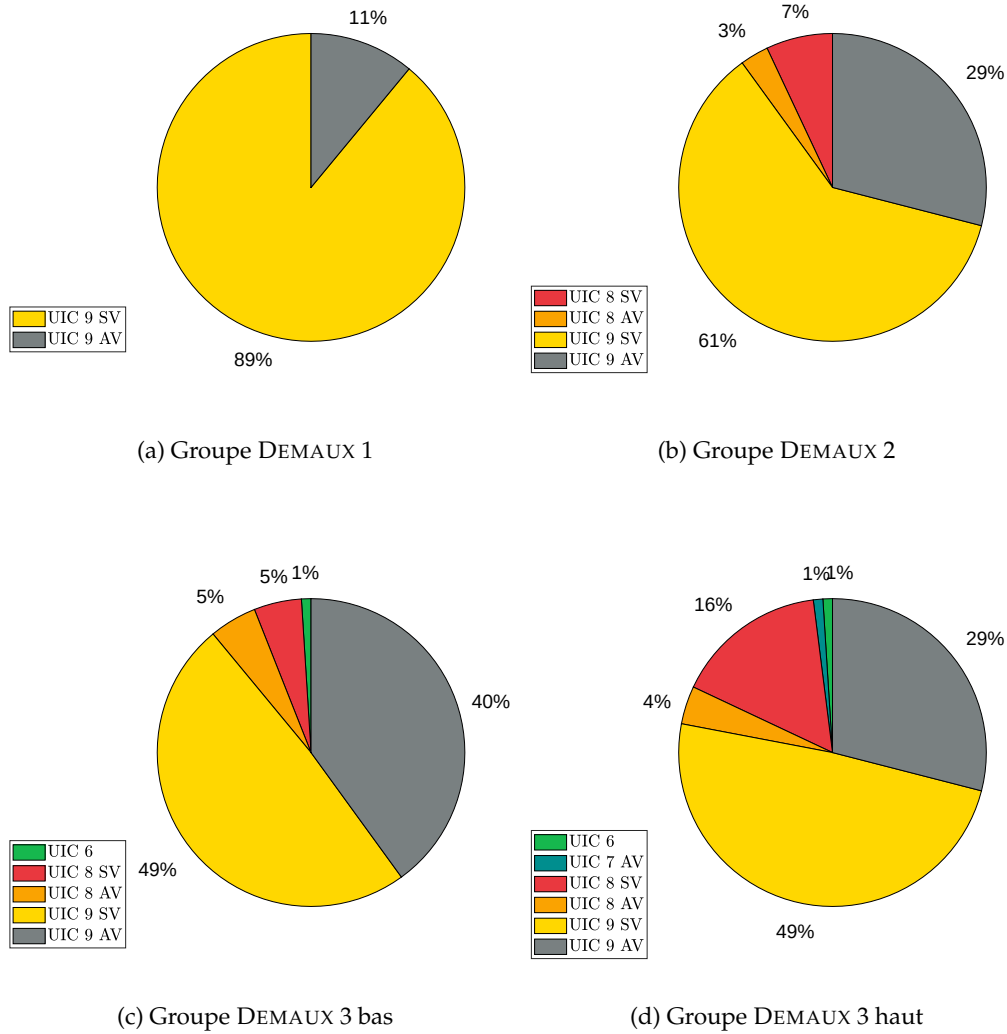


FIGURE 2.9 – Répartition des groupes UIC dans un groupe DEMAUX donné.

Les profondeurs de la couche de ballast colmaté et de la couche intermédiaire adoptées dans ces travaux sont celles proposées par (FERNANDES, 2014). On utilise aussi les valeurs de Modules de Young qu'il a déterminé pour les couches du ballast sain, du ballast colmaté et de la couche intermédiaire. Le module de réaction  $K_{30}$  est tiré des travaux de (ZHAI, WANG et LIN, 2004) et est pris égal à  $9 \cdot 10^7 \text{ N/m}^3$ .

Concernant les angles de friction, on choisit des angles  $\alpha_{bs} = 40^\circ$  et  $\alpha_{ci} = 25^\circ$  selon les considérations de (LI et al., 2015). Le coefficient de friction du ballast colmaté est pris égal à  $35^\circ$  car le ballast colmaté est caractérisé par des tailles de grains plus petites et que d'après (SWETA et HUSSAINI, 2019) l'angle de friction diminue lorsque les grains de ballast se brisent (i.e. diminution du diamètre des grains).

Ainsi, il est possible d'estimer la rigidité et le coefficient d'amortissement de chaque constituant de la couche de {ballast + sous-structure}. Les coefficients globaux  $k_{b+s-str,v}$  et  $c_{b+s-str,v}$  constituent les coefficients de rigidité et d'amortissement de la couche de {ballast + sous-structure} du modèle développé en section 2.1.1. Les valeurs numériques des paramètres de rigidité et d'amortissement verticaux du ballast dépendront alors de la dimension de la traverse et de l'espacement choisi entre les traverses. Le type de traverse utilisé entre indirectement en jeu car il fixe la profondeur du ballast

sain à adopter.

### Dans la direction latérale

De la même manière que pour la semelle, les paramètres de rigidité et d'amortissement de la couche de {ballast + sous-structure} sont très disparates dans la littérature. Quelques valeurs sont exposées dans le [Tableau 2.5](#).

| référence                     | particularités de l'armement de voie            | $k_{b+s-str,l}$ [MN/m] | $k_{b+s-str,v}$ [MN/m] | $c_{b+s-str,l}$ [kN s/m] | $c_{b+s-str,v}$ [kN s/m] |
|-------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------|------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (COSTA et al., 2021)          | $m_r = 60$ kg/m                                 | 10                     | 61,9                   | 29,4                     | 29,4                     |
| (WANG, ZHANG et OUYANG, 2017) | $m_r = 60$ kg/m et $l = 0,545$ m                | 50                     | 51,2                   | 40                       | 20,3                     |
| (ZHANG et al., 2019)*         | $m_r = 56$ kg/m et $l = 0,78$ m                 | 160                    | 260                    | 392                      | 95                       |
| (ZHANG et al., 2019)*         | $m_r = 56$ kg/m et $l = 0,65$ m                 | 120                    | 170                    | 95                       | 55                       |
| (PEIXER et al., 2021)*        | ligne LGV                                       | 4,5                    | 60                     | 30                       | 30                       |
| (JONES et THOMPSON, 2003)     | $m_r = 60$ kg/m, traverse monobloc, $l = 0,6$ m | 35                     | 50                     | -                        | -                        |

\* valeurs données en MN/m<sup>2</sup> (resp. kN s/m<sup>2</sup>) et converties dans la table en MN/m (resp. kN s/m) par multiplication de la rigidité en MN/m<sup>2</sup> (resp. amortissement kN s/m<sup>2</sup>) à la longueur de l'espacement entre traverses.

TABLEAU 2.5 – Valeurs numériques des coefficients de rigidité ( $k_{b+s-str,l}, k_{b+s-str,v}$ ) et d'amortissement ( $c_{b+s-str,l}, c_{b+s-str,v}$ ) respectivement dans la direction latérale et verticale adoptés dans la littérature.

Le rapport entre la rigidité verticale et latérale  $k_{b+s-str,v}/k_{b+s-str,l}$  pour ces différentes références atteint des valeurs dans  $\{1; 1,41; 1,43; 1,625; 6,19; 13,33\}$ . En ce qui concerne les valeurs d'amortissement, on constate des valeurs égales à plus importantes latéralement que verticalement. En regard de ce qui est proposé dans la littérature, la rigidité latérale du ballast sera obtenue en divisant la valeur de la rigidité verticale par 2 et le coefficient d'amortissement latéral sera égal à l'amortissement vertical. Dans le cas de voies appartenant aux groupes DEMAUX 1 à 3, on choisira une rigidité latérale égale à la rigidité verticale.

## 2.3 Génération des défauts de géométrie de la voie

Les défauts de géométrie de la voie présentés en [section 1.1.3](#) sont très souvent considérés et modélisés car ils excitent la dynamique du véhicule et engendrent par conséquent un chargement plus intense de la voie. Il semble donc être naturel de considérer l'effet des défauts de géométrie de la voie dans l'outil qu'on développe dans cette thèse. Leur effet n'est pas pris en compte explicitement dans la procédure actuelle pour l'admission des matériels roulants. Dans la littérature, des défauts théoriques ont été considérés. (GUERIN, 1996) a proposé un défaut initial de nivellement vertical sinusoïdal à amplitude constante et caractérisé par une seule longueur d'onde pour étudier l'évolution de ce défaut en fonction de la loi de tassement du ballast. Pour des études d'interactions entre le véhicule et la voie, (LEI et NODA, 2002; MEI et al., 2019; AU, WANG et CHEUNG, 2002) ont considéré

quant à eux qu'un défaut de nivellement vertical pouvait être assimilé à un processus aléatoire stationnaire<sup>5</sup> ergodique<sup>6</sup> gaussien<sup>7</sup> en espace et qu'il pouvait être défini par une densité spectrale de puissance  $S(\omega)$ . Par exemple la densité spectrale de puissance proposée par (LEI et NODA, 2002) s'écrit :

$$S(\omega) = \frac{\alpha A_v \omega_c}{\omega (\omega^2 + \omega_c^2)} \quad (2.30)$$

où  $A_v$  et  $\omega_c$  sont des paramètres liés à l'état de la voie considérée.  $\alpha$  est une constante égale généralement à 0,25. L'échantillon de la géométrie de voie  $r_d(x)$  est modélisé dans ce cas en une série trigonométrique :

$$r_d(x) = \sum_{k=1}^{N_f} \sqrt{4 S(\omega_k) \Delta\omega} \sin(\omega_k x + \varphi_k) \quad (2.31)$$

où  $\varphi_k$  est une phase aléatoire uniformément distribuée dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$ . La densité spectrale de puissance  $S$  est définie dans le domaine fréquentiel  $[\omega_{\min}; \omega_{\max}]$  et est considérée nulle à l'extérieur de ce domaine.  $N_f$  est le nombre d'incrémentes pris dans l'intervalle  $[\omega_{\min}; \omega_{\max}]$ . L'incrément de pulsation ainsi qu'une pulsation  $\omega_k \in [\omega_{\min}; \omega_{\max}]$  s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{N_f} \\ \omega_k &= \omega_{\min} + (k - \frac{1}{2}) \Delta\omega \quad k \in [1; N_f] \end{aligned} \quad (2.32)$$

Cette méthode est simple et offre une première représentation des défauts. Néanmoins, les défauts générés restent peu représentatifs des mesures de géométrie des voies du réseau national français. La génération de défauts à partir d'une densité spectrale de puissance suppose par exemple que la voie est en alignement. De plus, d'après (PERRIN, 2013) les défauts de la voie ne suivent en réalité ni un processus gaussien ni un processus stationnaire. Par ailleurs, les travaux de (PERRIN, 2013; LESTOILLE, 2015) au sein de la SNCF se sont intéressés au développement d'un modèle stochastique des défauts de la voie à partir de données de mesure de lignes à grandes vitesses LGV en utilisant la théorie du chaos polynomial. La variabilité des défauts de géométrie de la voie a été par la suite propagée dans le modèle dynamique du train pour donner en sortie du calcul stochastique un champ aléatoire de la réponse dynamique du train.

Dans le cadre de cette thèse, on propose une méthode pour générer des défauts de géométrie de voie aléatoires à partir de mesures de géométrie de voies réalisées sur les lignes classiques. On s'intéresse par ailleurs à la génération de trois types de défauts : le défaut de nivellement vertical, le défaut de dressage et le défaut de nivellement transversal. Le défaut d'écartement n'est pas considéré car on suppose l'écartement de la voie constant au cours des simulations.

Cette méthode permet de créer des échantillons représentatifs de défauts réels rencontrés sur des tronçons de lignes classiques. Un défaut généré pourrait alors être caractérisé de défaut majorant car il sera le plus riche parmi tous les tronçons mesurés en termes de largeur de la bande fréquentielle et d'amplitude spectrale. La procédure consiste pour chaque défaut pris séparément en les étapes suivantes :

- 
- 5. les propriétés statistiques du processus sont indépendantes du temps.
  - 6. les propriétés statistiques du processus peuvent être déterminées par une seule réalisation suffisamment longue.
  - 7. loi de distribution normale des variables aléatoires.



1. soit  $r_{d,\text{mes}}(x)$  un signal de géométrie de la voie mesuré. Dans le cas d'une voie modélisée en alignement, les portions de voie mesurées en courbe sont supprimées. De la même manière, si la voie est modélisée en courbe, les portions de voie mesurées en alignement sont supprimées du signal mesuré.  $N_p$  représente alors le nombre total de portions de voie en alignement (ou dans le cas contraire en courbe);
2. pour chaque portion de voie, une transformation de Fourier discrète (TFD)  $H_{d,\text{mes}}$  du signal mesuré  $r_{d,\text{mes}}(x)$  est réalisée. La technique de complétion de zéros (zero padding en anglais) est utilisée pour être certain que les signaux fréquentiels de toutes les portions de voie présentent le même nombre de points car les tronçons stockés n'ont pas la même longueur.  $N_f$  est donc la taille du signal le plus long.  $f_n$  représente la fréquence et  $i$  le nombre imaginaire :

$$H_{d,\text{mes}}(f_n) = \sum_{k=0}^{N_f-1} r_{d,\text{mes}}(x(k)) e^{\frac{-2\pi i}{N_f} k n} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N_f - 1 \quad (2.33)$$

3. à chaque composante de fréquence  $f_n$  entre 0 et la fréquence de Nyquist qui est la moitié de la fréquence d'échantillonnage, l'amplitude maximale de la TFD  $H_{d,\text{mes}}$  parmi les  $N_p$  signaux mesurés est extraite :

$$|H_d(f_n)| = \max_{1 \leq \alpha \leq N_p} |H_{d,\text{mes}}(f_n)|_\alpha \quad (2.34)$$

4. en créant des phases uniformément distribuées  $\varphi_n = \varphi(f_n)$  dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$  à chaque composante fréquentielle, il est possible de construire le signal fréquentiel dans le domaine des fréquences positives :

$$H_d(f_n) = |H_d(f_n)| e^{-i \varphi_n} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq \frac{N_f}{2} \quad (2.35)$$

Le signal dans le domaine fréquentiel négatif est calculé comme étant le conjugué du signal dans le domaine positif. De ce fait, la TFD  $H_d$  du nouveau signal aléatoire  $r_d(x)$  est construite;

5. le défaut  $r_d(x)$  est rétabli par transformation de Fourier inverse :

$$r_d(x(n)) = \frac{1}{N_f} \sum_{k=0}^{N_f-1} H_d(f_k) e^{\frac{2\pi i}{N_f} k n} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N_f - 1 \quad (2.36)$$

## 2.4 Modèle du véhicule ferroviaire

Il est très commun de modéliser le véhicule ferroviaire en tant que système multi-corps. On retrouve plusieurs niveaux de complexité pour la représentation du véhicule. Les plus simples représentent le véhicule comme un assemblage de corps rigides (i.e. caisse, bogies, essieux) caractérisés par leurs masses, inerties et les positions de leurs centres de gravité. Ils sont reliés entre eux par les suspensions primaires et secondaires modélisés par des {ressorts, amortisseurs} en parallèle. Les modèles de véhicules obtenus sont alors purement linéaires. Ils sont souvent couplés à des modèles éléments finis de la voie du type poutre reposant sur plusieurs couches de supports continus ou discrets comme dans les travaux de (SUN et DHANASEKAR, 2002; LEI et NODA, 2002; HOU, KALOUSEK

et DONG, 2003 ; FERRARA, 2013). Le modèle de contact choisi pour l'interaction roue-rail est en général le contact de Hertz.

Des modèles plus complexes ont également été implémentés notamment dans des codes commerciaux comme VOCO, VAMPIRE ou SIMPACK. Ces outils sont dédiés à l'étude du comportement dynamique du véhicule selon différentes configurations des défauts de la voie. Le véhicule est aussi représenté par un ensemble de corps non déformables. Les corps sont ici liés entre eux par des éléments de transmission ou de dissipation d'efforts qui représentent les composants des éléments de suspension du véhicule comme les roulements, les ressorts hélicoïdaux, les butées, etc (BEZIN, 2008). La modélisation de la voie dans ces codes commerciaux, n'est pas adaptée pour une étude de son comportement car les rails sont en général des corps rigides. Dans ces outils, il est possible de prendre en compte la non linéarité des éléments des suspensions. De plus, un grand intérêt est porté à l'interaction roue-rail. La géométrie du profil de la roue et du rail sont intégrés et la surface de contact est calculée à chaque pas de temps.

Le modèle du véhicule décrit est limité à une fréquence de l'ordre de 20 Hz. Il y a tout de même la possibilité d'intégrer des corps élastiques par couplage avec la méthode des éléments finis (POLACH, BERG et IWNICKI, 2006) pour étudier entre autres des phénomènes à plus hautes fréquences. Par exemple, pour une meilleure représentation des efforts de contact, les essieux peuvent être modélisés en tant que corps élastiques. Pour des études destinées au confort des passagers, la caisse a une loi de comportement élastique.

L'intérêt du modèle du véhicule dans ces travaux de thèse est de pouvoir générer un chargement sur la voie qui tienne compte du comportement dynamique du véhicule en question sans pour autant être précis au niveau du comportement de la caisse et des bogies. Un modèle sophistiqué n'est donc pas nécessaire vu que l'attention est d'autant plus portée sur le comportement de la voie. Dans ce sens, un modèle léger multi-corps 2D est tout d'abord développé pour pouvoir étudier le comportement vertical de la voie. Dans un deuxième temps, le modèle est réalisé en 3D pour pouvoir prendre en compte le comportement latéral du véhicule et pouvoir ainsi déterminer les efforts latéraux exercés par les essieux sur la voie.

### 2.4.1 Développement du modèle multi-corps 2D du véhicule

Le modèle 2D du véhicule est proposé dans la Figure 2.10. Seule la moitié d'un véhicule est modélisée pour être conforme au modèle 2D de la voie qui est symétrique par rapport au plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ . On ajoute par ailleurs que le nivellement vertical est le défaut qui excite uniquement le comportement dynamique verticale du véhicule. De ce fait, il est combiné avec le modèle 2D. Le système a six degrés de liberté. Le mouvement de la caisse est représenté par un mouvement vertical  $u_z^c$  et une rotation  $\theta^c$  dans la direction  $\vec{y}$ . La caisse est caractérisée par sa masse  $\frac{M_c}{2}$  et par son moment d'inertie  $\frac{J_y^c}{2}$  dans la direction  $\vec{y}$ . Le facteur  $\frac{1}{2}$  est justifié par le fait que la moitié du véhicule est modélisée. De même, chaque bogie peut avoir un déplacement vertical  $u_z^{b_i}$  et une rotation  $\theta^{b_i}$  dans la direction  $\vec{y}$ . Les deux bogies sont caractérisés par leurs masses  $\frac{M_b}{2}$  et par leurs moments d'inertie  $\frac{J_y^b}{2}$  dans la direction  $\vec{y}$ . La caisse est suspendue sur les deux bogies à travers la suspension secondaire qui est modélisée par deux systèmes de {ressort, amortisseur} en parallèle placés entre la caisse et chacun des deux bogies.

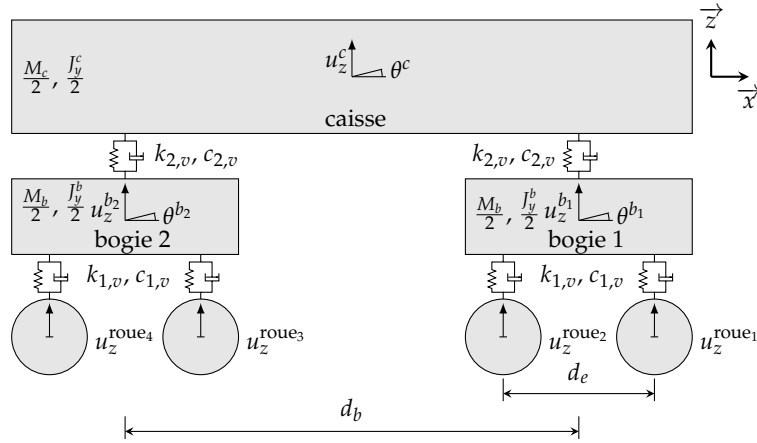


FIGURE 2.10 – Modèle multi-corps 2D du véhicule.

Les bogies sont à leurs tours suspendus sur les roues à travers les éléments de la suspension primaire qui est également modélisée par un système {ressort, amortisseur} en parallèle placé entre chaque roue et le bogie associé.

Les roues du véhicule sont supposées suivre les défauts de la voie. De ce fait, le déplacement vertical de chaque roue  $u_z^{\text{roue}_i}$  peut être écrit en fonction de l'amplitude du défaut  $r$  sous la roue :

$$\begin{cases} u_z^{\text{roue}_1} &= r(Vt) \\ u_z^{\text{roue}_2} &= r(Vt - d_e) \\ u_z^{\text{roue}_3} &= r(Vt - d_b) \\ u_z^{\text{roue}_4} &= r(Vt - (d_e + d_b)) \end{cases} \quad (2.37)$$

où  $V$  est la vitesse du véhicule supposée constante.  $d_e$  et  $d_b$  sont respectivement la distance longitudinale entre deux essieux d'un même bogie et la distance longitudinale entre les centres de gravité des bogies. Les équations d'équilibre dynamique du véhicule peuvent s'écrire en forme matricielle (système (2.38)). On considère qu'à l'instant initial ( $t = 0$ ), le véhicule a une vitesse nulle et que la configuration est donnée par l'équilibre statique.

On obtient alors le problème à résoudre :

$$\begin{cases} \underline{\underline{M}}_v \ddot{\underline{u}}_v + \underline{\underline{C}}_v \dot{\underline{u}}_v + \underline{\underline{K}}_v \underline{u}_v &= \underline{F} \\ \underline{u}_v(t=0) &= \underline{\underline{K}}_v^{-1} \underline{F}(t=0) \\ \dot{\underline{u}}_v(t=0) &= \underline{0} \end{cases} \quad (2.38)$$

Le vecteur des degrés de liberté  $\underline{u}_v$  à déterminer ainsi que le vecteur force  $\underline{F}$  sont exprimés ci-dessous :

$$\underline{u}_v = \begin{pmatrix} u_z^c & \theta^c & u_z^{b_1} & \theta^{b_1} & u_z^{b_2} & \theta^{b_2} \end{pmatrix}^T$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} -\frac{M_c}{2} g \\ 0 \\ -\frac{M_b}{2} g + c_{1,v} (\dot{u}_z^{\text{roue1}} + \dot{u}_z^{\text{roue2}}) + k_{1,v} (u_z^{\text{roue1}} + u_z^{\text{roue2}}) \\ -c_{1,v} \frac{d_e}{2} (\dot{u}_z^{\text{roue1}} - \dot{u}_z^{\text{roue2}}) - k_{1,v} \frac{d_e}{2} (u_z^{\text{roue1}} - u_z^{\text{roue2}}) \\ -\frac{M_b}{2} g + c_{1,v} (\dot{u}_z^{\text{roue3}} + \dot{u}_z^{\text{roue4}}) + k_{1,v} (u_z^{\text{roue3}} + u_z^{\text{roue4}}) \\ -c_{1,v} \frac{d_e}{2} (\dot{u}_z^{\text{roue3}} - \dot{u}_z^{\text{roue4}}) - k_{1,v} \frac{d_e}{2} (u_z^{\text{roue3}} - u_z^{\text{roue4}}) \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

où  $g$  est l'accélération de pesanteur. Les matrices de rigidité et d'amortissement sont formulées comme suit :

$$\underline{\underline{K}}_v = \begin{pmatrix} 2k_{2,v} & 0 & -k_{2,v} & 0 & -k_{2,v} & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{d_b}{2}\right)^2 k_{2,v} & \frac{d_b}{2} k_{2,v} & 0 & -\frac{d_b}{2} k_{2,v} & 0 \\ -k_{2,v} & \frac{d_b}{2} k_{2,v} & 2k_{1,v} + k_{2,v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{d_e}{2}\right)^2 k_{1,v} & 0 & 0 \\ -k_{2,v} & -\frac{d_b}{2} k_{2,v} & 0 & 0 & 2k_{1,v} + k_{2,v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{d_e}{2}\right)^2 k_{z1} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

$$\underline{\underline{C}}_v = \begin{pmatrix} 2c_{2,v} & 0 & -c_{2,v} & 0 & -c_{2,v} & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{d_b}{2}\right)^2 c_{2,v} & \frac{d_b}{2} c_{2,v} & 0 & -\frac{d_b}{2} c_{2,v} & 0 \\ -c_{2,v} & \frac{d_b}{2} c_{2,v} & 2c_{1,v} + c_{2,v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{d_e}{2}\right)^2 c_{1,v} & 0 & 0 \\ -c_{2,v} & -\frac{d_b}{2} c_{2,v} & 0 & 0 & 2c_{1,v} + c_{2,v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{d_e}{2}\right)^2 c_{z1} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

La matrice masse s'écrit :

$$\underline{\underline{M}}_v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_y^c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_y^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_y^b \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Le système est résolu par la méthode d'intégration de Newmark (i.e. le schéma de l'accélération

moyenne) détaillée en [annexe B](#). La résolution du système dynamique (2.38) permet ainsi de déterminer l'évolution temporelle des six degrés de liberté du véhicule au cours du temps. En les injectant dans les équations d'équilibre dynamique des roues (2.43), il est possible de calculer les efforts verticaux  $F_{z1,j}$ <sup>8</sup> tel que  $j \in \{1; 2; 3; 4\}$  exercés par chaque roue sur la voie. Ces efforts comprennent la charge statique de la roue et la surcharge dynamique engendrée par l'excitation dynamique du véhicule par le défaut de la voie où  $M_{\text{roue}}$  est la masse d'une roue.

$$F_{z1,j} = -M_r g - M_r \ddot{u}_z^{\text{roue}j} - c_{1,v} \left( \dot{u}_z^{\text{roue}j} - \dot{u}_z^{b_i} + \epsilon \frac{d_e}{2} \dot{\theta}^{b_i} \right) - k_{1,v} \left( u_z^{\text{roue}j} - u_z^{b_i} + \epsilon \frac{d_e}{2} \theta^{b_i} \right) \quad (2.43)$$

Si  $j \in \{1; 2\}$ , alors  $i = 1$  et si  $j \in \{3; 4\}$ , alors  $i = 2$ .  $\epsilon = 1$  quand  $j \in \{1; 3\}$  et  $\epsilon = -1$  quand  $j \in \{2; 4\}$ .

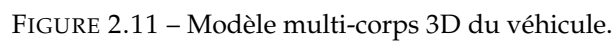
## 2.4.2 Extension vers un modèle multi-corps 3D du véhicule

Le modèle multi-corps 3D du véhicule permet de calculer les surcharges dynamiques verticales engendrées par un défaut de nivellement vertical mais aussi les surcharges dynamiques latérales engendrées par un défaut de dressage et/ou de nivellement transversal qui nécessitent de représenter les deux files de rail. Les efforts engendrés par un véhicule en pleine courbe sont également calculés. Désormais, le véhicule comporte un total de 15 degrés de liberté à déterminer. Les degrés de liberté du véhicule sont déterminés dans une base fixe  $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  qui diffère de la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  de la voie, spécialement quand le franchissement d'une courbe est modélisé.

La caisse a un mouvement de translation vertical  $u_Z^c$  et un mouvement de translation latéral  $u_Y^c$ . Les rotations  $\phi^c, \theta^c$  et  $\psi^c$  de la caisse dans les directions  $\vec{X}, \vec{Y}$  et  $\vec{Z}$  sont possibles. De même, chaque bogie est défini par un déplacement vertical  $u_Z^{b_i}$ , un déplacement latéral  $u_Y^{b_i}$  et les trois mouvements de rotation  $\phi^{b_i}, \theta^{b_i}$  et  $\psi^{b_i}$  dans les directions  $\vec{X}, \vec{Y}$  et  $\vec{Z}$ . Chaque essieu a 3 degrés de liberté possibles : un déplacement vertical  $u_Z^{e_j}$ , un déplacement latéral  $u_Y^{e_j}$  et une rotation  $\phi^{e_j}$  dans la direction  $\vec{X}$ . Les degrés de liberté des essieux sont connus car on suppose comme pour le modèle 2D que les roues des essieux suivent la géométrie de la voie. La courbure de la voie (i.e. présence d'un dévers dans la voie) ainsi que le défaut de nivellement transversal pilotent la rotation des essieux. Les défauts de nivellement vertical et de dressage pilotent quant à eux le déplacement vertical de l'essieu et son déplacement latéral. Les déplacements longitudinaux des différents corps rigides ainsi que les efforts longitudinaux exercés par le véhicule sont négligés car on ne s'intéresse pas au chargement longitudinal de la voie.

Comme le montre la [Figure 2.11](#), la caisse est caractérisée par sa masse  $M_c$  et ses moments d'inertie  $J_X^c, J_Y^c$  et  $J_Z^c$  dans les directions  $\vec{X}, \vec{Y}$  et  $\vec{Z}$ . Les deux bogies ont la même masse  $M_b$  et les mêmes moments d'inertie  $J_X^b, J_Y^b$  et  $J_Z^b$ . Contrairement au modèle 2D, les suspensions intègrent une raideur et un amortissement dans la direction latérale à travers des systèmes de {ressort, amortisseur} en parallèle. Le couple {ressort, amortisseur} latéral de la suspension secondaire est défini par sa rigidité  $k_{2,l}$  et son amortissement  $c_{2,l}$  et celui de la suspension primaire est défini par sa rigidité  $k_{1,l}$  et son amortissement  $c_{1,l}$ .

8. la voie en 2D ne fait intervenir qu'une seule file de rail qu'on suppose être le rail 1 d'où l'indice 1 dans  $F_{z1,j}$ .


$$\underline{u}_v = \begin{pmatrix} \underline{u}^c \\ \underline{u}^{b_1} \\ \underline{u}^{b_2} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

où

$$\begin{cases} \underline{u}^c = \begin{pmatrix} u_Y^c & u_Z^c & \phi^c & \theta^c & \psi^c \end{pmatrix}^T \\ \underline{u}^{b_1} = \begin{pmatrix} u_Y^{b_1} & u_Z^{b_1} & \phi^{b_1} & \theta^{b_1} & \psi^{b_1} \end{pmatrix}^T \\ \underline{u}^{b_2} = \begin{pmatrix} u_Y^{b_2} & u_Z^{b_2} & \phi^{b_2} & \theta^{b_2} & \psi^{b_2} \end{pmatrix}^T \end{cases} \quad (2.45)$$

Les équations d'équilibre dynamique du véhicule sont écrites sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}_{cc} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{M}}_{b_1 b_1} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{M}}_{b_2 b_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_c \\ \ddot{u}_{b_1} \\ \ddot{u}_{b_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}_{cc} & \underline{\underline{C}}_{b_1 c} & \underline{\underline{C}}_{b_2 c} \\ \underline{\underline{C}}_{b_1 c}^T & \underline{\underline{C}}_{b_1 b_1} & 0 \\ \underline{\underline{C}}_{b_2 c}^T & 0 & \underline{\underline{C}}_{b_2 b_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{u}_{b_1} \\ \dot{u}_{b_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{cc} & \underline{\underline{K}}_{b_1 c} & \underline{\underline{K}}_{b_2 c} \\ \underline{\underline{K}}_{b_1 c}^T & \underline{\underline{K}}_{b_1 b_1} & 0 \\ \underline{\underline{K}}_{b_2 c}^T & 0 & \underline{\underline{K}}_{b_2 b_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u_{b_1} \\ u_{b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_c \\ F_{b_1} \\ F_{b_2} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Les sous-matrices de masse sont des matrices diagonales exprimées par les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \underline{\underline{M}}_{cc} = \text{diag} \begin{pmatrix} M_c & M_c & J_X^c & J_Y^c & J_Z^c \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{M}}_{b_i b_i} = \text{diag} \begin{pmatrix} M_b & M_b & J_X^b & J_Y^b & J_Z^b \end{pmatrix} \quad ; i=\{1;2\} \end{cases} \quad (2.47)$$

Les sous-matrices de rigidité et d'amortissement sont écrites ci-après :

$$\underline{\underline{K}}_{cc} = \begin{pmatrix} 4k_{2,l} & 0 & 4h_1 k_{2,l} & 0 & 0 \\ 0 & 4k_{2,v} & 0 & 0 & 0 \\ 4h_1 k_{2,l} & 0 & 4(h_1^2 k_{2,l} + b^2 k_{2,v}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\left(\frac{d_b}{2}\right)^2 k_{2,v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\left(\frac{d_b}{2}\right)^2 k_{2,l} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{b_i b_i} = \begin{pmatrix} (2k_{2,l} + 4k_{1,l}) & 0 & (4h_3 k_{1,l} - 2h_2 k_{2,l}) & 0 & 0 \\ 0 & (2k_{2,v} + 4k_{1,v}) & 0 & 0 & 0 \\ (4h_3 k_{1,l} - 2h_2 k_{2,l}) & 0 & (4a^2 k_{1,v} + 2h_2^2 k_{2,l} + 4h_3^2 k_{1,l} + 2b^2 k_{2,v}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\left(\frac{d_e}{2}\right)^2 k_{1,v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\left(\frac{d_e}{2}\right)^2 k_{1,l} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_{b_1 c} = \begin{pmatrix} -2k_{2,l} & 0 & 2h_2 k_{2,l} & 0 & 0 \\ 0 & -2k_{2,v} & 0 & 0 & 0 \\ -2h_1 k_{2,l} & 0 & 2(h_1 h_2 k_{2,l} - b^2 k_{2,v}) & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{d_b}{2} k_{2,v} & 0 & 0 & 0 \\ -2\frac{d_b}{2} k_{2,l} & 0 & 2\frac{d_b}{2} h_2 k_{2,l} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\underline{\underline{K}}_{b_2c} = \begin{pmatrix} -2k_{2,l} & 0 & 2h_2k_{2,l} & 0 & 0 \\ 0 & -2k_{2,v} & 0 & 0 & 0 \\ -2h_1k_{2,l} & 0 & 2(h_1h_2k_{2,l} - b^2k_{2,v}) & 0 & 0 \\ 0 & -2\frac{d_b}{2}k_{2,v} & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{d_b}{2}k_{2,l} & 0 & -2\frac{d_b}{2}h_2k_{2,l} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$\underline{\underline{C}}_{cc} = \begin{pmatrix} 4c_{2,l} & 0 & 4h_1c_{2,l} & 0 & 0 \\ 0 & 4c_{2,v} & 0 & 0 & 0 \\ 4h_1c_{2,l} & 0 & 4(h_1^2c_{2,l} + b^2c_{2,v}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\left(\frac{d_b}{2}\right)^2c_{2,v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\left(\frac{d_b}{2}\right)^2c_{2,l} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}_{b_ib_i} = \begin{pmatrix} (2c_{2,l} + 4c_{1,l}) & 0 & (4h_3c_{1,l} - 2h_2c_{2,l}) & 0 & 0 \\ 0 & (2c_{2,v} + 4c_{1,v}) & 0 & 0 & 0 \\ (4h_3c_{1,l} - 2h_2c_{2,l}) & 0 & (4a^2c_{1,v} + 2h_2^2c_{2,l} + 4h_3^2c_{1,l} + 2b^2c_{2,v}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\left(\frac{d_e}{2}\right)^2c_{1,v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\left(\frac{d_e}{2}\right)^2c_{1,l} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}_{b_1c} = \begin{pmatrix} -2c_{2,l} & 0 & 2h_2c_{2,l} & 0 & 0 \\ 0 & -2c_{2,v} & 0 & 0 & 0 \\ -2h_1c_{2,l} & 0 & 2(h_1h_2c_{2,l} - b^2c_{2,v}) & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{d_b}{2}c_{2,v} & 0 & 0 & 0 \\ -2\frac{d_b}{2}c_{2,l} & 0 & 2\frac{d_b}{2}h_2c_{2,l} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}_{b_2c} = \begin{pmatrix} -2c_{2,l} & 0 & 2h_2c_{2,l} & 0 & 0 \\ 0 & -2c_{2,v} & 0 & 0 & 0 \\ -2h_1c_{2,l} & 0 & 2(h_1h_2c_{2,l} - b^2c_{2,v}) & 0 & 0 \\ 0 & -2\frac{d_b}{2}c_{2,v} & 0 & 0 & 0 \\ 2\frac{d_b}{2}c_{2,l} & 0 & -2\frac{d_b}{2}h_2c_{2,l} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Le vecteur force est quant à lui exprimé par :

$$\underline{F}_c = \begin{pmatrix} F_{c,1} \\ -M_c g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

$$F_{b1} = \begin{pmatrix} F_{c,2} + 2 \sum_{j=1}^2 c_{1,l} \dot{u}_Y^{e_j} + k_{1,l} u_Y^{e_j} \\ -M_b g + 2 \sum_{j=1}^2 c_{1,v} \dot{u}_Z^{e_j} + k_{1,v} u_Z^{e_j} \\ 2 \sum_{j=1}^2 h_3 c_{1,l} \dot{u}_Y^{e_j} + h_3 k_{1,l} u_Y^{e_j} + a^2 c_{1,v} \dot{\phi}^{e_j} + a^2 k_{1,v} \phi^{e_j} \\ 2 \frac{d_e}{2} \sum_{j=1}^2 (-1)^j (c_{1,v} \dot{u}_Z^{e_j} + k_{1,v} u_Z^{e_j}) \\ -2 \frac{d_e}{2} \sum_{j=1}^2 (-1)^i (c_{1,l} \dot{u}_Y^{e_j} + k_{1,l} u_Y^{e_j}) \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

$$F_{b2} = \begin{pmatrix} F_{c,3} + 2 \sum_{j=3}^4 c_{1,l} \dot{u}_Y^{e_j} + k_{1,l} u_Y^{e_j} \\ -M_b g + 2 \sum_{j=3}^4 c_{1,v} \dot{u}_Z^{e_j} + k_{1,v} u_Z^{e_j} \\ 2 \sum_{j=3}^4 h_3 c_{1,l} \dot{u}_Y^{e_j} + h_3 k_{1,l} u_Y^{e_j} + a^2 c_{1,v} \dot{\phi}^{e_j} + a^2 k_{1,v} \phi^{e_j} \\ 2 \frac{d_e}{2} \sum_{j=3}^4 (-1)^j (c_{1,v} \dot{u}_Z^{e_j} + k_{1,v} u_Z^{e_j}) \\ -2 \frac{d_e}{2} \sum_{j=3}^4 (-1)^j (c_{1,l} \dot{u}_Y^{e_j} + k_{1,l} u_Y^{e_j}) \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Les termes  $F_{c,1}$ ,  $F_{c,2}$ ,  $F_{c,3}$  correspondent aux forces centrifuges exercées respectivement sur la caisse et les deux bogies. Ils sont donc nuls lorsque la voie est en alignement. Sinon, lorsque la voie est en courbe les efforts prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} F_{c,1} &= -\text{signe}(d) M_c \frac{V^2}{R} \\ F_{c,2} &= -\text{signe}(d) M_b \frac{V^2}{R} \\ F_{c,3} &= -\text{signe}(d) M_b \frac{V^2}{R} \end{cases} \quad (2.53)$$

où  $R$  est le rayon de la courbe,  $V$  est la vitesse du véhicule et  $d$  le dévers appliqué à la voie. Le dévers est compté positif si la file de rail 1 (gauche) est élevée par rapport à la file de rail 2 (droite). Dans ce cas, la file de rail 1 est la file extérieure à la courbe. Il est compté négatif si la file de rail 2 est élevée par rapport à la file de rail 1. La file 2 est alors considérée comme la file de rail extérieure à la courbe.

Les degrés de liberté du système calculés sont par la suite injectés dans les équations d'équilibre dynamique des roues (2.54) pour calculer les efforts  $F_{Y,j}$  et  $F_{Z,j}$  et le moment  $M_{X,j}$  exercés par chaque essieu sur la voie. Ces efforts comprennent bien entendu la charge statique de l'essieu et la surcharge dynamique engendrée par l'excitation dynamique du véhicule par le défaut de la voie. Le point d'application de ces efforts est pour l'instant le centre de gravité de l'essieu  $j$ .

$$\begin{cases} F_{Y,j} &= -M_e \ddot{u}_Y^{e_j} - 2 c_{1,l} \dot{u}_Y^{e_j} + 2 c_{1,l} \dot{u}_Y^{b_i} + 2 h_3 c_{1,l} \dot{\phi}^{b_i} + \epsilon 2 \frac{d_e}{2} c_{1,l} \dot{\psi}^{b_i} - 2 k_{1,l} u_Y^{e_j} + 2 k_{1,l} u_Y^{b_i} \\ &\quad + 2 h_3 k_{1,l} \phi^{b_i} + \epsilon 2 \frac{d_e}{2} k_{1,l} \psi^{b_i} \\ F_{Z,j} &= -M_e g - M_e \ddot{u}_Z^{e_j} + 2 c_{1,v} \dot{u}_Z^{b_i} - \epsilon 2 \frac{d_e}{2} c_{1,v} \dot{\theta}^{b_i} - 2 c_{1,v} \dot{u}_Z^{e_j} + 2 k_{1,v} u_Z^{b_i} - \epsilon 2 \frac{d_e}{2} k_{1,v} \theta^{b_i} - 2 k_{1,v} u_Z^{e_j} \\ M_{X,j} &= -J_X^e \ddot{\phi}^{e_j} + 2 a^2 c_{1,v} \dot{\phi}^{b_i} - 2 a^2 c_{1,v} \dot{\phi}^{e_j} + 2 a^2 k_{1,v} \phi^{b_i} - 2 a^2 k_{1,v} \phi^{e_j} + \frac{r_0}{\cos(\alpha_d)} F_{Y,j} \end{cases} \quad (2.54)$$

où  $M_e$  est la masse d'un essieu et  $J_X^e$  est le moment d'inertie dans la direction  $\vec{X}$ . Pour  $j \in \{1; 2\}$ ,  $i = 1$  et  $j \in \{3; 4\}$ ,  $i = 2$ . Enfin,  $\epsilon$  prend la valeur 1 si  $j \in \{1; 3\}$  et  $-1$  si  $j \in \{2; 4\}$ . Bien évidemment l'expression de l'effort  $F_{Y,j}$  dans l'équation (2.54) correspond à un cas de voie en alignement. Si la voie est en courbe un terme de l'effort centrifuge  $F_{c,4} = -\text{signe}(d) M_e \frac{V^2}{R}$  doit être rajouté. Le terme  $\frac{r_0}{\cos(\alpha_d)} F_{Y,j}$  est rajouté à l'expression du moment car réellement, l'effort  $F_{Y,j}$  est excentré verticalement

de la position du centre de gravité. L'effort est plutôt exercé dans le plan de contact roue/rail.  $r_0$  est donc le rayon de la roue de l'essieu et  $\alpha_d$  est l'angle d'inclinaison de la voie dans le cas d'un éventuel dévers.

Les efforts  $F_{Y,j}$  et  $F_{Z,j}$  sont par la suite projetés dans la base liée à la voie  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  comme le montre la Figure 2.12. Cette base ne coïncide avec la base fixe du véhicule que lorsque la voie est en alignement et sans défaut de nivellement transversal. Autrement, elle est obtenue par rotation du repère fixe d'un angle  $\alpha_d$  autour de l'axe  $\vec{X} = \vec{x}$ . Par ailleurs, les efforts  $F_{y,j}$  et  $F_{z,j}$  sont obtenus en

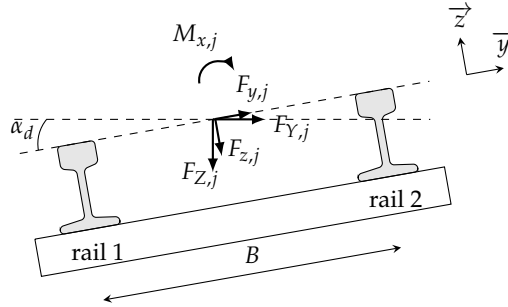


FIGURE 2.12 – Projection des efforts exercés par le véhicule dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  de la voie.

fonction de  $F_{Y,j}$  et  $F_{Z,j}$  par les relations suivantes :

$$\begin{cases} F_{y,j} = \cos(\alpha_d) F_{Y,j} - \sin(\alpha_d) F_{Z,j} \\ F_{z,j} = \sin(\alpha_d) F_{Y,j} + \cos(\alpha_d) F_{Z,j} \end{cases} \quad (2.55)$$

Les efforts sont maintenant rapportés au plan de roulement. Ceci engendre une légère modification du moment  $M_x$ .

$$M_x = M_{X,j} - r_0 F_{y,j} \quad (2.56)$$

Les efforts verticaux sur chaque file de rail sont par la suite obtenus par les relations suivantes :

$$\begin{cases} F_{z1,j} = \frac{F_{z,j}}{2} - \text{coef} \frac{M_{x,j}}{B} \\ F_{z2,j} = \frac{F_{z,j}}{2} + \text{coef} \frac{M_{x,j}}{B} \end{cases} \quad (2.57)$$

Lorsque la voie est en alignement le coefficient coef prend la valeur 1. Lorsque la voie est en courbe,  $\text{coef} = \text{signe} \left( \frac{V^2 B}{Rg} - |d| \right)$ . Nous rappelons que  $d$  est le dévers appliqué à la voie et que  $\frac{V^2 B}{Rg}$  est le dévers théorique qui annule les effets centrifuges dues à la circulation du véhicule à une vitesse  $V$  sur la voie en courbe de rayon  $R$ .  $B$  représente l'écartement entre les files de rail. Un signe positif du coefficient renseigne sur une insuffisance de dévers. Dans ce cas, la file de rail extérieure est la plus chargée. Un signe négatif du coefficient renseigne quant à lui sur un excès de dévers. Cela se produit en général lorsque le véhicule franchit la courbe à des vitesses plus faibles. Dans ce cas, la file de rail intérieure est plus chargée que la file de rail extérieure.

L'estimation des efforts latéraux sur les deux files de rail est plus complexe à cause par exemple des mécanismes de frottement qui se produisent entre le rail et la roue. Dans le cadre de ces travaux, on suppose que la présence du dévers ou des défauts de nivellement transversal et de dressage

engendre l'appui du boudin<sup>9</sup> d'une des deux roues sur un rail. Le boudin de l'autre roue n'est pas en contact avec le second rail. Ainsi, la première file de rail reçoit tout le chargement  $F_{y,j}$  exercé par l'essieu. Plus particulièrement, dans le cas général, le signe de l'effort  $F_{y,j}$  détermine la file de rail qui est chargée. Par exemple si  $F_{y,j} > 0$  alors :

$$\begin{cases} F_{y1,j} &= 0 \\ F_{y2,j} &= F_{y,j} \end{cases} \quad (2.58)$$

Sinon :

$$\begin{cases} F_{y1,j} &= F_{y,j} \\ F_{y2,j} &= 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

## 2.5 Hypothèses de calcul

Dans le cadre du développement de l'outil de simulation du système ferroviaire, deux hypothèses principales sont faites :

- la source principale de l'excitation dynamique du véhicule est l'amplitude des défauts de géométrie de la voie : l'impact de la composante dynamique de la voie est négligeable devant l'amplitude des défauts. De ce fait, le comportement dynamique de la voie n'influence pas le comportement dynamique du véhicule ;
- on suppose également que le véhicule suit les défauts de la voie et ne se sépare jamais de celle-ci. De ce fait, le déplacement d'une roue est égal à l'amplitude du défaut sous cette même roue. Le déplacement de la roue est alors connu.

Comme mentionné en [section 1.1.3](#), la longueur d'onde minimale des défauts de géométrie de la voie est de 3 m. Sur des lignes classiques limitées à des vitesses de 220 km/h, la fréquence d'étude maximale est donc de l'ordre de 20 Hz. La première hypothèse est supportée d'une part par les travaux de (KNOTHE et GRASSIE, 1993) où il est montré que les forces d'inertie de la voie sont négligeables devant les forces d'inertie du véhicule. Les fréquences propres du véhicule sont dans l'intervalle [0; 20 Hz]. D'autre part, dans (XIE et IWNICKI, 2008), il est montré que la dynamique de la voie pilote plutôt l'interaction roue/rail dans le domaine des hautes fréquences et ses fréquences de résonance sont beaucoup plus importantes que le domaine fréquentiel d'intérêt. Concernant la deuxième hypothèse d'un véhicule qui suit parfaitement les défauts, elle est partiellement appuyée par la première hypothèse en raison d'une composante dynamique de la voie négligeable qui ne peut pas affecter le comportement dynamique du véhicule. À ce stade, seuls les défauts et la périodicité des appuis sur la voie peuvent affecter le comportement dynamique du véhicule. Or, en combinant l'espacement des traverses (de l'ordre de 0,6 à 0,8 m) à des vitesses moyennes de 100 km/h, on obtient des fréquences de l'ordre de 35 à 45 Hz qui ne sont pas susceptibles d'exciter la dynamique du véhicule. Ainsi, il en est déduit que les défauts sont la seule source d'excitation du véhicule.

Ces hypothèses permettent donc de découpler le modèle du véhicule et de la voie. Concrètement, le modèle dynamique du véhicule est chargé par les défauts de géométrie de la voie et permet de

9. partie intérieure de la roue qui assure le guidage de l'essieu en courbe.

calculer les efforts de réaction du véhicule sur la voie. Ce chargement est par la suite injecté dans le modèle de la voie sous la forme de charges ponctuelles qui se déplacent à la vitesse  $V$  du véhicule.

## 2.6 Validation de l'outil

Dans cette section, il est question de valider chaque modèle constituant l'outil développé. Pour cela, des cas de simulation simples sont présentés.

### 2.6.1 Validation du modèle de la voie

#### 2.6.1.1 Modèle 2D de la voie

Une première voie est étudiée. Ses paramètres sont tirés des travaux de (XIE et IWNICKI, 2008) et listés dans le [Tableau 2.6](#). Une validation du modèle est réalisée tout d'abord en statique.

| Paramètres                                                        | Notation        | Valeur numérique                    |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------|-------------------------------------|
| densité du rail                                                   | $\rho_r$        | $7850 \text{ kg m}^{-3}$            |
| module de Young du rail                                           | $E_r$           | $210 \times 10^3 \text{ MPa}$       |
| section du rail                                                   | $S_r$           | $7,67 \times 10^{-3} \text{ m}^2$   |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{y}$          | $I_{r,y}$       | $3,0383 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| rigidité verticale de la semelle                                  | $k_{s,v}$       | $350 \text{ MN m}^{-1}$             |
| amortissement vertical de la semelle                              | $c_{s,v}$       | $50 \text{ kN s m}^{-1}$            |
| demie-masse de la traverse                                        | $M_t$           | $162 \text{ kg}$                    |
| espacement entre traverses                                        | $l$             | $0,6 \text{ m}$                     |
| rigidité verticale de la couche de {ballast + sous-structure}     | $k_{b+s-str,v}$ | $50 \text{ MN m}^{-1}$              |
| amortissement vertical de la couche de {ballast + sous-structure} | $c_{b+s-str,v}$ | $100 \text{ kN s m}^{-1}$           |

TABLEAU 2.6 – Paramètres d'entrée du modèle 2D de la voie (XIE et IWNICKI, 2008).

Il s'agit d'appliquer une charge équivalente à la charge d'une roue sur le rail au niveau d'une traverse. Les déformations et contraintes sont ensuite mesurées au dessus de la traverse en question et des deux traverses adjacentes de part et d'autre. La mesure des contraintes et des analyses par la méthode des éléments finis ont démontré la répartition des charges suivante (SAUVAGE, 1993) :

- la traverse au dessous de la charge supporte 40% de la charge appliquée;
- les deux premières traverses voisines supportent 23% de la charge;
- les deuxièmes traverses adjacentes supportent 7% de la charge.

La [Figure 2.13](#) compare le modèle de la voie développé sous CAST3M par rapport à la référence de (SAUVAGE, 1993). Dans ce cas, la charge ponctuelle (i.e. modélisation d'une roue) est appliquée sur la traverse  $n^o 0$ . Les résultats obtenus sont proches de la référence avec un écart maximal de 2,6%. Le modèle est ensuite validé en dynamique. Pour cela, la courbe de réceptance de la voie est tracée.

L'essai d'impact au marteau qui permet de remonter aux courbes de réceptance est expliqué en [section 1.1.2](#). La courbe de réceptance du modèle de la voie pour une force d'impact ([Figure 2.14](#))

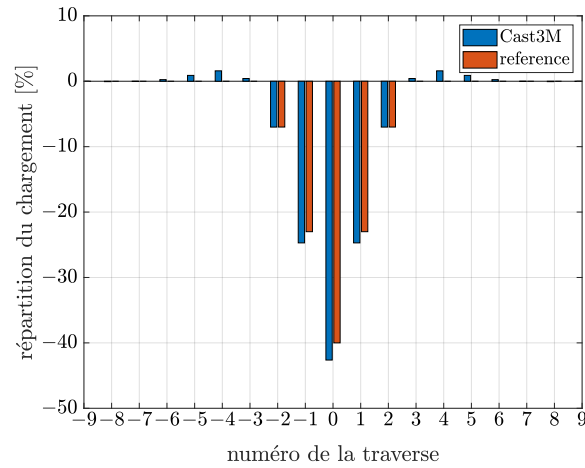


FIGURE 2.13 – Répartition du chargement sur les traverses adjacentes à une traverse sur laquelle une charge ponctuelle est appliquée.

appliquée en milieu de voie est donc comparée au modèle de référence proposé par (XIE et IWNICKI, 2008) sur la Figure 2.15. Il est rappelé que les deux modèles ont les mêmes paramètres.

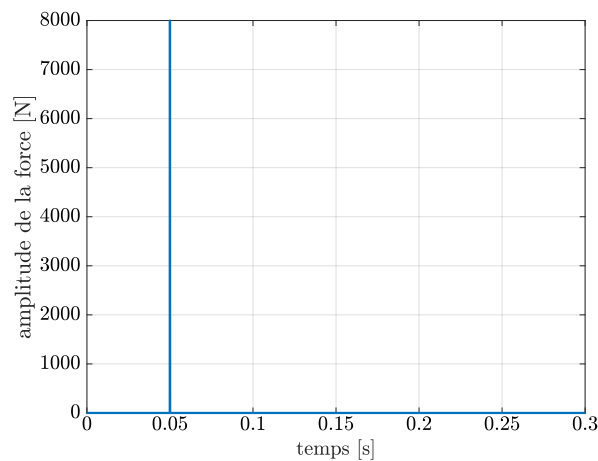


FIGURE 2.14 – Force d'impact appliquée sur le rail.

Les deux courbes sont pratiquement identiques en termes d'amplitude et de fréquences excitées, ce qui permet la validation du modèle de la voie. Par ailleurs, le modèle est capable de reproduire le troisième pic de résonance connu sous le nom "pin-pin", résonance qui se produit aux alentours de 1000 Hz.

Le comportement dynamique de la voie est donc validé. Néanmoins, ces résultats satisfaisants ne concernent à priori que la zone centrale de la voie. En effet, la voie peut être considérée comme un milieu infini du fait de la longueur très importante du système. De ce fait une onde qui se propage dans la voie ne sera jamais réfléchi. Or, dans le cas de l'analyse du comportement dynamique de la voie, la longueur finie du modèle engendre des difficultés à bien représenter le phénomène de propagation d'ondes dans le rail à cause de la réflexion des ondes au niveau des frontières du modèle. Les problématiques de réflexion d'onde provoquent une mauvaise estimation des déplacements dans le système et par conséquent des efforts généralisés et des contraintes. Pour remédier à cela, des auteurs comme (NGUYEN, 2002) ont proposé d'ajouter des conditions aux limites absorbantes.

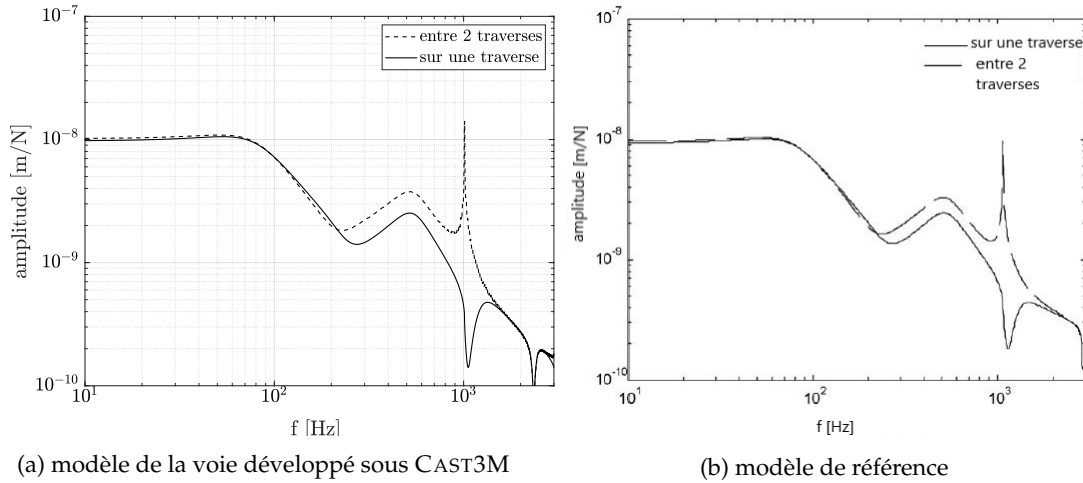


FIGURE 2.15 – Comparaison des courbes de réceptance relatives à l'application d'un impact pour le modèle de la voie développé et le modèle de référence (XIE et IWICKI, 2008).

L'idée consiste à introduire des éléments ayant un amortissement important au niveau des frontières du modèle pour éviter au maximum la réflexion d'onde. L'amortissement y est par ailleurs augmenté de façon progressive et continue sur ces éléments. Le modèle de "Perfectly matched layer" (PML) initialement introduit par (BERINGER, 1994) dans le cadre de l'électromagnétisme, a été implémenté dans les travaux de (PINAULT et al., 2019) pour une meilleure représentation du phénomène de radiation des ondes élastiques dans le sol. Il s'agit d'une couche absorbante qui absorbe parfaitement les ondes qui se propagent sous n'importe quel angle d'incidence et à toute fréquence. Une autre méthode consiste à étendre significativement le domaine initial de simulation (i.e. zone d'étude) de manière à ce que les ondes soient atténuées avant qu'elles n'atteignent les frontières du domaine. De ce fait, une zone tampon est rajoutée de part et d'autre de la zone d'étude. Cette dernière méthode peut être coûteuse et inappropriée dans le cas de modèles éléments finis à grand nombre de degrés de liberté. Elle peut être néanmoins privilégiée quand l'amortissement dans la structure est relativement important. Le modèle développé dans le cadre de la thèse a l'avantage d'être léger avec un nombre limité de degrés de liberté. De plus l'amortissement dans la direction verticale de la voie a l'avantage d'être considérable. Par conséquent, la seconde stratégie est utilisée dans ces travaux. Une étude de sensibilité est présentée ci-dessous pour déterminer la longueur optimale de la zone tampon qui permettra l'atténuation des ondes.

### Longueur optimale de la zone tampon

Pour la détermination de la longueur nécessaire de la zone tampon, une simulation du comportement dynamique d'une voie dans le domaine temporel est présentée. La résolution du problème dynamique dans CAST3M se fait avec le schéma HHT (i.e. schéma de l'accélération moyenne avec amortissement) qui est détaillé en annexe B. L'intérêt de ce schéma est d'introduire un amortissement numérique de sorte à ce que les hautes fréquences qui peuvent être la source d'instabilités numériques soient atténuées par le calcul. Les paramètres du schéma de l'accélération moyenne classique sont de ce fait dépendants d'un troisième paramètre  $\alpha_s \in [0; \frac{1}{3}]$ . Le schéma introduit une erreur

sur la période :

$$\frac{\Delta T}{T} = \left( \frac{1}{12} + \frac{\alpha_s^2}{4} \right) \omega_{\max}^2 dt^2 \quad (2.60)$$

Le choix du pas de temps pour les calculs dynamiques à mener se fait sur la base d'une erreur maximale  $\varepsilon_{\max}$  égale à 1%. En sachant qu'un minimum de 3 pas de temps est choisi pour parcourir la distance entre deux nœuds. En se fixant une fréquence maximale de 50 Hz pour s'assurer que le domaine  $[0; 20 \text{ Hz}]$  soit bien représenté et un paramètre  $\alpha_s = -0,1$ , le pas de temps a pour expression :

$$\begin{cases} dt = \frac{dx}{n_p V} \text{ tel que :} \\ n_p = \min\left\{3, \left\lceil \frac{dx}{V \frac{1}{2\pi f_{\max}} \sqrt{\frac{12\varepsilon_{\max}}{1+3\alpha_s^2}}} \right\rceil \right\} \end{cases} \quad (2.61)$$

La voie simulée est une voie du groupe DEMAUX 1 qui figure parmi les voies les moins résistantes (i.e. armement faible). Le rail est un rail appelé 30kg état. Cette appellation fait référence à la masse linéique du rail qui est approximativement de 30 kg/m. Le rail est usé et il est posé sur une traverse en bois. Il est à noter que l'usure définie correspond à une usure verticale purement théorique qui est conforme à la notion de demi-usure introduite par les travaux de la commission Demaux. Le rail est donc tout simplement rogné verticalement d'une distance  $h_u$ . Les propriétés de la voie sont reportées dans le [Tableau 2.7](#).

| Paramètres                                                                     | Notation        | Valeur numérique                       |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|----------------------------------------|
| densité du rail                                                                | $\rho_r$        | 7850 kg m <sup>-3</sup>                |
| coefficient de Poisson du rail                                                 | $\nu_r$         | 0,3                                    |
| module de Young du rail                                                        | $E_r$           | 210 × 10 <sup>3</sup> MPa              |
| section du rail                                                                | $S_r$           | 3,8 × 10 <sup>-3</sup> m <sup>2</sup>  |
| section réduite a l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{z}$                   | $S_{r,z}$       | 1,45 × 10 <sup>-3</sup> m <sup>2</sup> |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{y}$                       | $I_{r,y}$       | 7,15 × 10 <sup>-6</sup> m <sup>4</sup> |
| rigidité verticale de la semelle <sup>a</sup>                                  | $k_{s,v}$       | 265 MN m <sup>-1</sup>                 |
| amortissement vertical de la semelle <sup>a</sup>                              | $c_{s,v}$       | 40 kN s m <sup>-1</sup>                |
| demie-masse de la traverse                                                     | $M_t$           | 37,5 kg                                |
| espacement entre traverses                                                     | $l$             | 0,83 m                                 |
| rigidité verticale de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup>     | $k_{b+s-str,v}$ | 83,65 MN m <sup>-1</sup>               |
| amortissement vertical de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup> | $c_{b+s-str,v}$ | 13,5 kN s m <sup>-1</sup>              |

<sup>a</sup> valeurs tirées de (FERNANDES, 2014).

<sup>b</sup> valeurs calculées selon la méthode de la [section 2.2.2](#).

TABLEAU 2.7 – Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAUX 1 pour une modélisation en 2D : rail 30kg état à demi-usure posé sur des traverses en bois espacées de 0,83 m.

La voie est supposée sans défaut et elle est chargée par 4 efforts mobiles qui modélisent les charges statiques à la roue d'un véhicule. On choisit de solliciter la voie par un chargement extrême pour que les résultats obtenus puissent s'appliquer à toute voie : soit une vitesse de parcours des efforts de



220 km/h et une charge à la roue  $F_{z,j}$  tel que  $j \in [1; 4]$  de 10 t. Ce chargement n'est pas forcément représentatif du chargement réel de cette voie. Concrètement, à chaque pas de temps l'effort  $F_{z,j}$  se déplace d'une distance  $V dt$  où  $dt = 4.527 \cdot 10^{-4}$  s. Si la position atteinte  $x_k$  se trouve entre deux nœuds du rail  $P_i$  et  $P_{i+1}$  de positions  $x_i$  et  $x_{i+1}$ , l'effort est alors fractionné en deux efforts qui s'appliquent respectivement sur les nœuds  $P_i$  et  $P_{i+1}$  :

$$\begin{cases} F_{z,j}^{P_i} &= \frac{x_{i+1}-x_k}{dx} F_{z,j} \\ F_{z,j}^{P_{i+1}} &= \frac{x_k-x_i}{dx} F_{z,j} \end{cases} \quad (2.62)$$

où  $dx = \frac{l}{10}$  correspond à la longueur d'une maille de la poutre (rail) définie en fonction de l'espacement entre les traverses  $l$ .

Le but de cette simulation est de déterminer la longueur optimale de la zone tampon qui assurera l'atténuation des ondes dans la zone d'étude qui a une longueur de 60,59 m (i.e. 74 traverses) et où les résultats y seront analysés. La Figure 2.16 récapitule la simulation à mener.

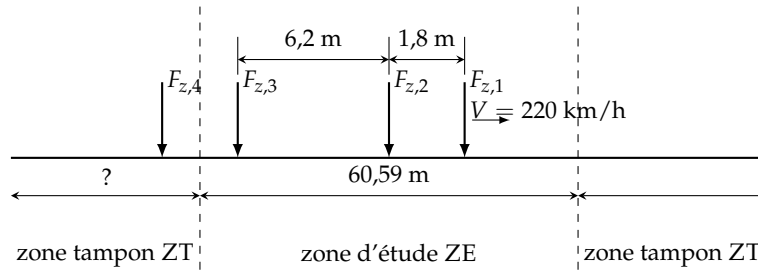


FIGURE 2.16 – Paramètres de la simulation.

On représente dans la Figure 2.17 le déplacement vertical du rail dans la zone d'étude ZE pour plusieurs longueurs de la zone tampon. L'instant final est choisi. Il s'agit de l'instant où la roue avant atteint l'extrémité de la voie (i.e.  $x_{\text{roue}_1} = 2 L_{\text{ZT}} + L_{\text{ZE}}$ ). Un choix optimal de la longueur de la zone tampon  $L_{\text{ZT}_1}$  est une longueur qui donne un déplacement nul dans la zone ZE. Ceci reflète que les ondes réfléchies ont été complètement atténuées dans la zone tampon ZT. 4 longueurs de zone tampon sont considérées :

- $L_{\text{ZT}_1}$  : distance entre la première roue et la quatrième roue ;
- $L_{\text{ZT}_2}$  : deux fois la distance entre la première roue et la quatrième roue ;
- $L_{\text{ZT}_3}$  : trois fois la distance entre la première roue et la quatrième roue ;
- $L_{\text{ZT}_4}$  : cinq fois la distance entre la première roue et la quatrième roue.

On remarque que l'amplitude des ondes réfléchies reste faible pour toutes les longueurs choisies de la zone tampon. À partir de  $L_{\text{ZT}_3}$ , elle est considérée négligeable car elle atteint une amplitude maximale de  $5 \cdot 10^{-6}$  mm. Le choix se porte donc sur une longueur  $L_{\text{ZT}_3}$  de la zone tampon qui permet de minimiser considérablement la réflexion de l'onde sans pour autant trop augmenter le temps de calcul. Dans les simulations menées, la longueur du véhicule (i.e. distance entre la première et la dernière roue) est de 9,8 m et appartient à la fourchette basse des longueurs de véhicules existantes. Une étude de sensibilité est donc réalisée pour savoir si une longueur  $L_{\text{ZT}_2}$  de la zone tampon est suffisante pour les véhicules plus longs (Figure 2.18).

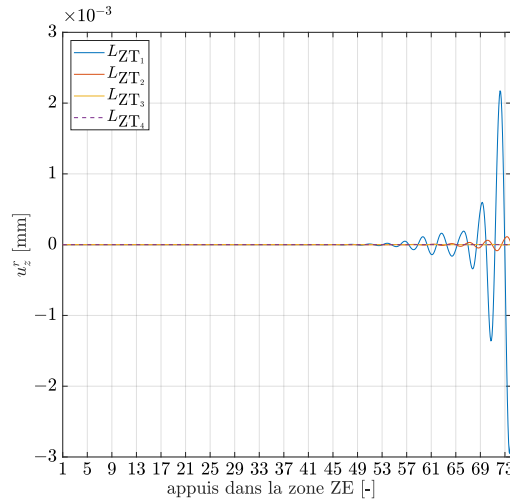


FIGURE 2.17 – Amplitudes des ondes réfléchies dans la zone d'étude ZE à l'instant final pour différentes longueurs de la zone tampon.

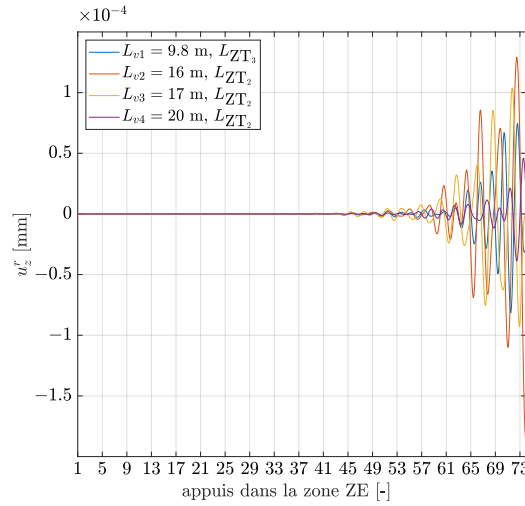


FIGURE 2.18 – Choix de la longueur du véhicule qui permet de fixer une longueur  $L_{ZT_2}$  pour la zone tampon.

On remarque qu'à partir d'une longueur du véhicule de 17 m, il est possible de réduire la longueur de la zone tampon à  $L_{ZT_2}$  car on obtient des amplitudes d'ondes à peu près du même ordre de grandeur que celle choisies pour le véhicule de longueur 9,8 m avec le choix  $L_{ZT_3}$ .

### 2.6.1.2 Modèle 3D de la voie

On s'intéresse à des chargements simples de la voie dans le but de valider le modèle 3D :

- le premier chargement de la voie est purement vertical. On suppose que la voie est sans défaut et qu'elle est chargée par 4 efforts mobiles sur chaque file de rail qui modélisent les charges statiques à la roue d'un véhicule. La distance entre les points d'application des efforts  $F_{z,1}$  et  $F_{z,2}$  est de 1,8 m et la distance entre les points d'application des efforts  $F_{z,2}$  et  $F_{z,3}$  est de 6,2 m. Par contre, la charge verticale à la roue  $F_{z,j}$  tel que  $j \in [1,4]$  est de 8 t et la vitesse de parcours est de 80 km/h, conformément aux référentiels. Le modèle 2D de la voie précédemment validé

est par ailleurs utilisé comme référence et on vérifie que les déplacements verticaux dans les deux files de rail sont égaux ;

- le deuxième chargement de la voie est purement latéral. Il s'agit de 4 efforts latéraux sur chaque file de rail qui parcourent la voie avec une vitesse de 80 km/h et qui sont appliqués au niveau de la ligne moyenne. L'amplitude de ces efforts est de 2 t chacun. Le but de cette simulation est seulement de vérifier que les déplacements latéraux dans les deux files de rail sont égaux car en réalité un chargement latéral de la voie est toujours accompagné par un chargement vertical (i.e. action du véhicule). De plus, les efforts latéraux sur la voie en alignement ne sont observés en réalité qu'en présence d'un défaut de la voie.

La voie modélisée est celle introduite plus haut et dont les paramètres relatifs au modèle 2D sont donnés dans le [Tableau 2.7](#). La longueur de la zone tampon retenue est de  $L_{ZT_3}$  car le véhicule est court. Les paramètres donnés dans le [Tableau C.4](#) de l'[annexe C](#) sont nécessaires pour alimenter le modèle 3D de la voie.

### Chargement purement vertical de la voie

La [Figure 2.19a](#) représente les courbes du déplacement vertical du rail  $u_z'$  à l'instant où les efforts atteignent le milieu de la zone d'étude. On remarque que le déplacement sur la file de rail droite est identique au déplacement de la file de rail gauche. Ils concordent par ailleurs avec le déplacement vertical obtenu par le modèle 2D. De ce fait, les efforts généralisés  $M_y$  et  $T_z$  sont identiques entre les deux files de rail et concordent avec le résultat du modèle 2D.

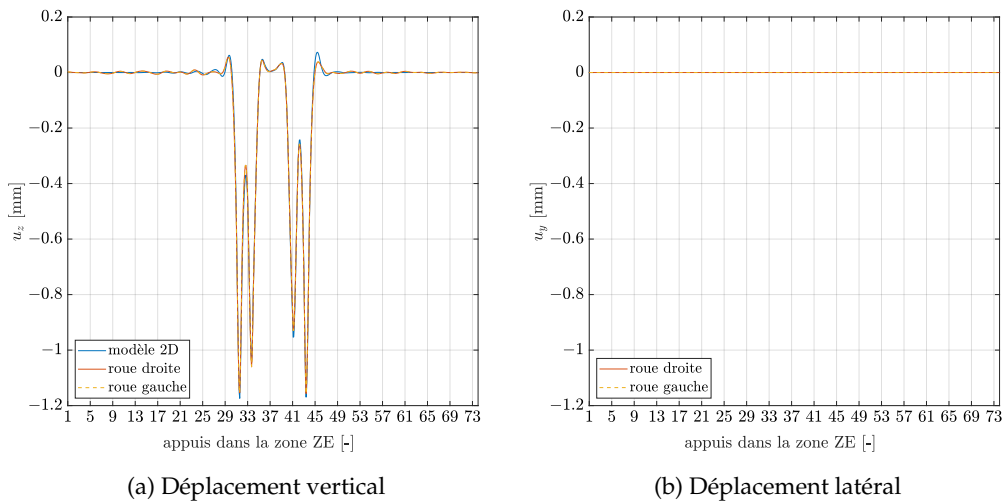


FIGURE 2.19 – Comparaison des déplacements verticaux des deux files de rail du modèle 3D avec le déplacement du rail dans le modèle 2D dans la zone ZE à l'instant où les efforts atteignent le milieu de la voie et représentation des déplacements latéraux des deux files de rail du modèle 3D au même instant.

Par ailleurs le déplacement latéral des deux files de rail dans le modèle 3D est nul ([Figure 2.19b](#)), ce qui est prévisible du fait que la voie n'est pas sollicitée latéralement. De ce fait les efforts généralisés  $M_z$ ,  $T_y$  sont aussi nuls. le moment de torsion  $M_x$  est également nul comme représenté en [Figure 2.20](#). Ceci est logique car le moment de torsion est techniquement engendré par le fait que le point d'application de l'effort latéral se trouve au niveau du champignon du rail et non au niveau

du centre de gravité du rail. Or comme la voie n'est pas chargée latéralement, ce moment doit être impérativement nul.

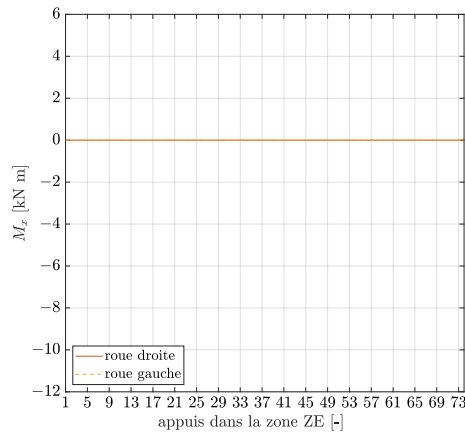


FIGURE 2.20 – Moment de torsion dans les deux files de rail (zone ZE) pour le modèle 3D à l'instant où les efforts atteignent le milieu de la voie.

### Chargement purement latéral de la voie

La Figure 2.21a montre que le déplacement latéral au niveau de la ligne moyenne dans les deux files rail sont égaux. L'instant est fixé à l'instant où les efforts atteignent le milieu de la zone d'étude. On retrouve aussi dans la Figure 2.21b que le déplacement vertical dans les deux files de rail est nul.

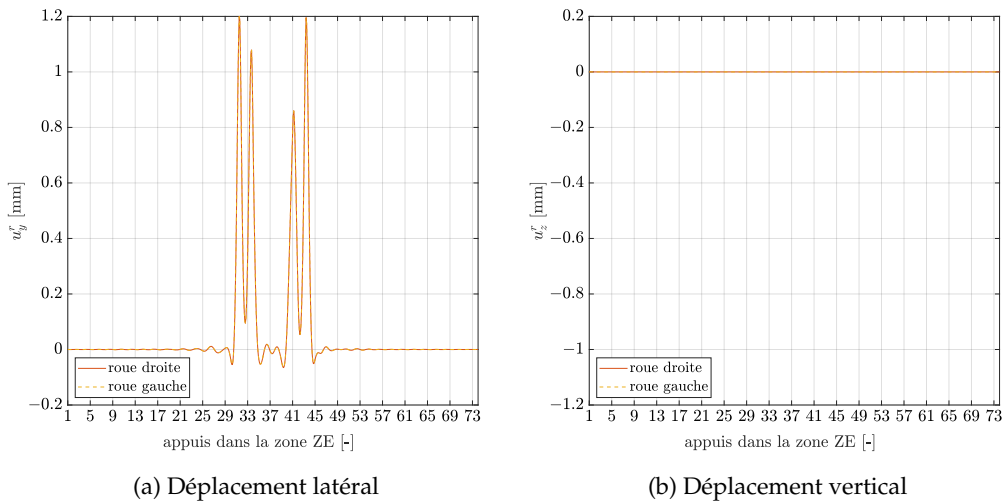


FIGURE 2.21 – Déplacements latéraux et verticaux dans les deux files de rail dans la zone ZE à l'instant où les efforts atteignent le milieu de la voie.

## 2.6.2 Validation du modèle du véhicule

### Cas d'un véhicule en alignement

Le modèle du véhicule est validé par rapport à la littérature. Les paramètres du véhicule qui est une voiture remorquée sont en effet tirés de (WANG, ZHANG et OUYANG, 2017) et sont exposés dans le Tableau C.1 de l'annexe C. On suppose dans un premier temps que le véhicule est excité par un

défaut de nivellement longitudinal sinusoïdal périodique d'une longueur d'onde  $\lambda=50$  m, comme le montre la Figure 2.22.

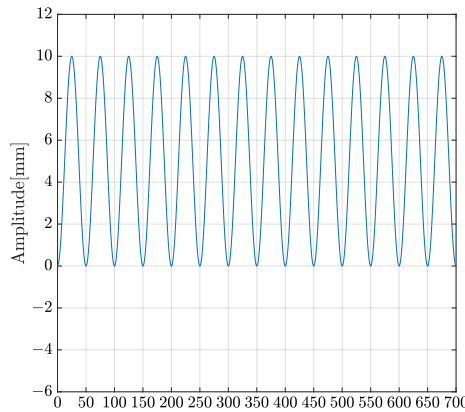


FIGURE 2.22 – Défaut de nivellement longitudinal sinusoïdal d'une longueur d'onde de 50 m.

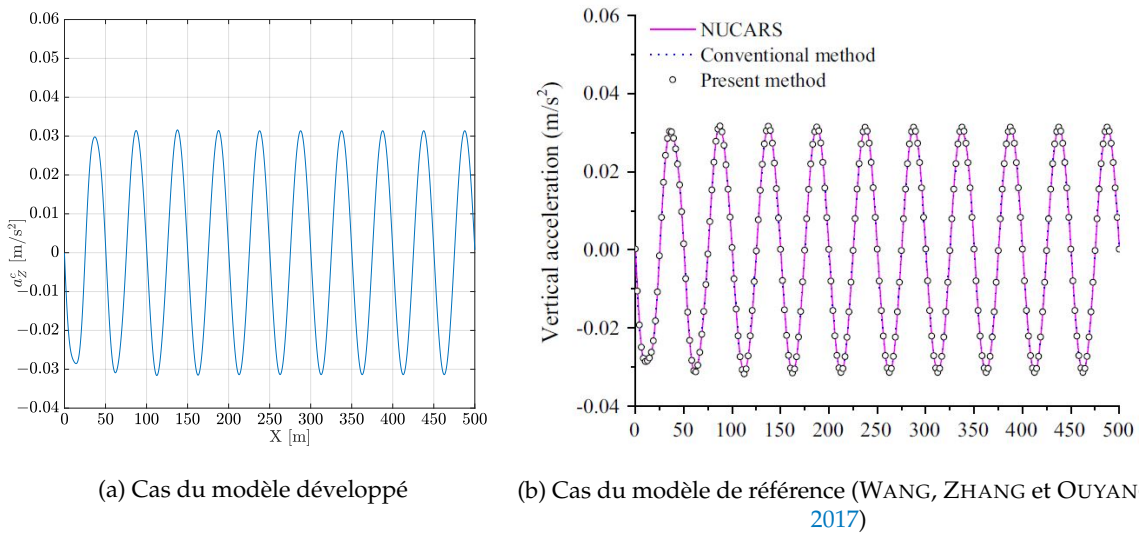


FIGURE 2.23 – Accélération verticale de la caisse pour le défaut de nivellement longitudinal de longueur d'onde  $\lambda = 50$  m.

Les roues gauches et droites des essieux sont excitées par le même nivellement longitudinal. La vitesse de circulation du véhicule est de 100 km/h. Sur la Figure 2.23, l'accélération verticale de la caisse en régime permanent est tracée pour le cas du défaut de nivellement longitudinal. Le résultat en régime transitoire relatif au début de franchissement du défaut est donc retiré du tracé. L'accélération obtenue par le modèle développé est quasi identique à celle de la référence.

De même la comparaison de l'effort vertical exercé sur la roue droite de l'essieu avant dans la Figure 2.24 montre que le modèle développé est fidèle à la référence. La différence de signe sur l'effort est due au fait que dans le modèle de référence l'axe  $\vec{Z}$  est dirigé vers le bas alors qu'il est dirigé vers le haut dans le modèle développé.

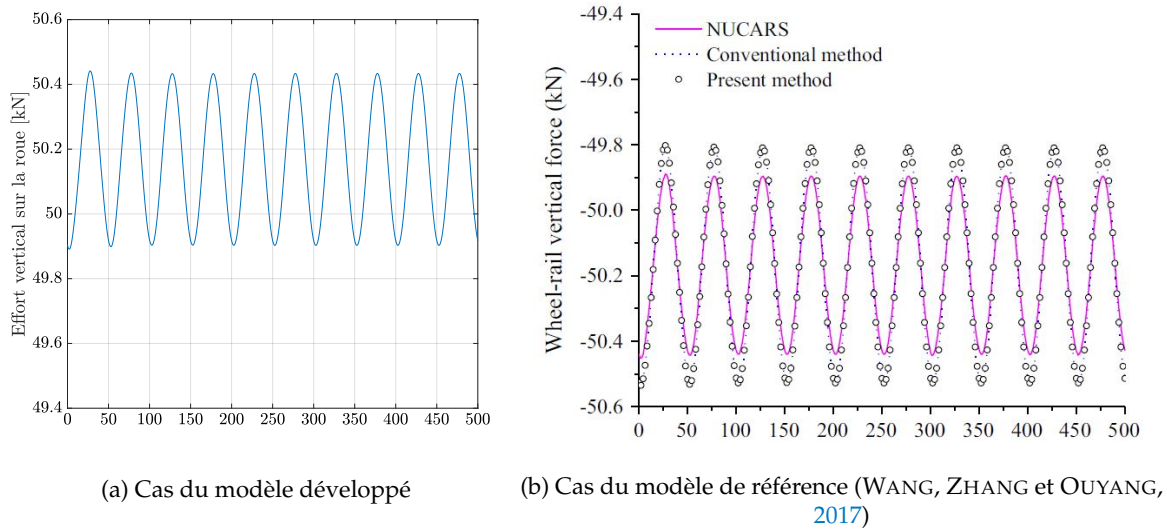


FIGURE 2.24 – Effort vertical exercé sur la roue droite de l'essieu avant 1 pour le défaut de nivellement longitudinal de longueur d'onde  $\lambda = 50$  m.

Par ailleurs, le modèle de référence qui utilise une méthode itérative pour la prédiction des efforts de contact roue-rail est validé par rapport aux résultats d'un logiciel commercial de modélisation multi-corps NUCARS et par rapport à la méthode dite conventionnelle qui est aussi une méthode itérative pour la prédiction des efforts de contact roue-rail. La différence entre la méthode conventionnelle et le modèle de référence est le choix de la valeur initiale de l'effort dans la procédure itérative.

Contrairement au modèle de référence, dans l'outil qu'on développe, il y a découplage des modèles du véhicule et de la voie. Or les efforts verticaux prédits pour ce défaut d'une longueur d'onde de 50 m sont très proches de la référence. Cette longueur d'onde correspond à une fréquence de 0,56 Hz quand la vitesse de circulation est de 100 km/h. L'équivalence des deux résultats montre donc que le découplage entre la voie et le véhicule est justifié dans le cas des basses fréquences.

Dans un deuxième temps, le véhicule est excité par le défaut latéral de la Figure 2.25 qui est aussi sinusoïdal et périodique d'une longueur d'onde  $\lambda = 50$  m.

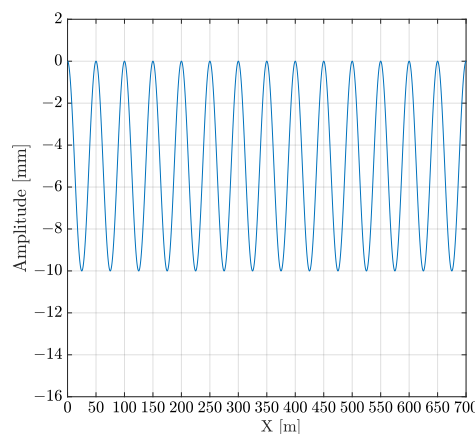


FIGURE 2.25 – Défaut de dressage sinusoïdal d'une longueur d'onde de 50 m.

De la même manière, on compare l'accélération latérale de la caisse obtenue par le modèle développé par rapport au modèle de référence (Figure 2.26). Les résultats sont par ailleurs tracés lorsque le régime permanent est atteint. Tout comme pour le comportement vertical, on remarque que les deux accélérations sont identiques. Ce qui permet de valider le comportement du véhicule lorsqu'il est en alignement.

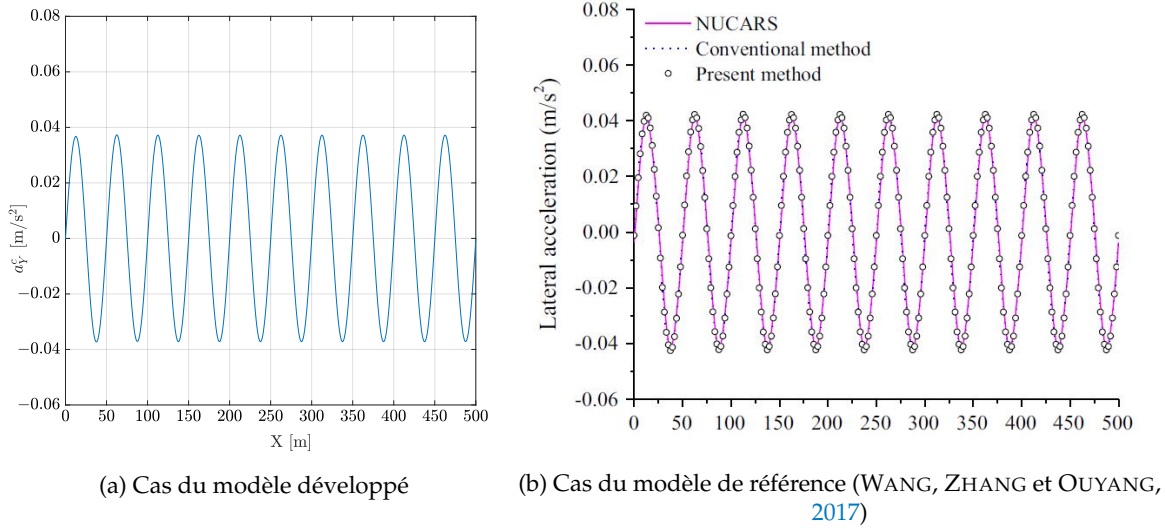


FIGURE 2.26 – Accélération latérale de la caisse pour le défaut de dressage de longueur d'onde  $\lambda = 50$  m.

### Cas d'un véhicule en courbe

Pour cet exemple, on suppose que le véhicule franchit une voie sans défaut en courbe avec une vitesse de 100 km/h. Les paramètres du véhicule sont toujours ceux listés dans le Tableau C.1 et les paramètres de la courbe sont :

- un rayon  $R = 940$  m ;
- un dévers  $d = 160$  mm.

L'équilibre du véhicule en régime permanent (Figure 2.27) peut être calculé analytiquement et permet de donner un ordre de grandeur des efforts exercés par le véhicule sur chaque file de rail dans le repère lié à la voie :

$$\left\{ \begin{array}{l} / y : F_{y1,j} \\ / y : \sin(\alpha_d) \frac{M_v}{4} g - \cos(\alpha_d) \frac{M_v}{4} \frac{V^2}{R} - F_{y2,j} \\ / z : -\cos(\alpha_d) \frac{M_v}{4} g - \sin(\alpha_d) \frac{M_v}{4} \frac{V^2}{R} - F_{z2,j} - F_{z1,j} \\ \text{moment} / x \text{ en } G : -h_v F_{y2,j} + \frac{B}{2} F_{z1,j} - \frac{B}{2} F_{z2,j} \end{array} \right. = 0 \quad (2.63)$$

où  $h_v = 1.3$  m est la distance entre le centre de gravité du véhicule et le plan de roulement.  $B$  est l'écartement entre les deux files de rails,  $M_v$  est la masse du véhicule.

Le franchissement de la courbe par le véhicule à une vitesse de 100 km/h donne un dévers théorique  $d_{th} = \frac{V^2 B}{R g} = 125$  mm. Or le dévers appliqué  $d$  est de 160 mm. Ce qui veut dire qu'il y a un excès de dévers. Dans ce cas, la file de rail intérieure, soit la file de rail 2, sera la plus chargée. Les

résultats obtenus vont dans ce sens. La Figure 2.28a montre que le modèle prédit que la file de rail 2 est chargée latéralement. Par ailleurs, l'effort  $F_{y_{2,j}}$  obtenu via le modèle donne les mêmes résultats que le calcul analytique. En ce qui concerne les efforts verticaux, la Figure 2.28b montre que le modèle prédit bel et bien que la file de rail 2 est plus chargée que la file de rail 1. Les efforts obtenus sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus analytiquement.

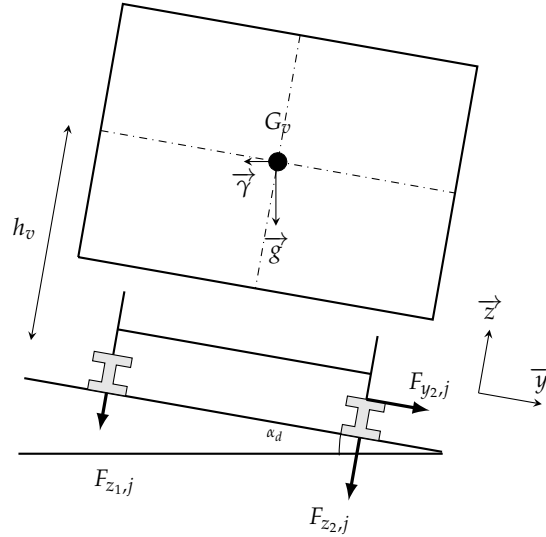


FIGURE 2.27 – Équilibre du véhicule en courbe en régime permanent.

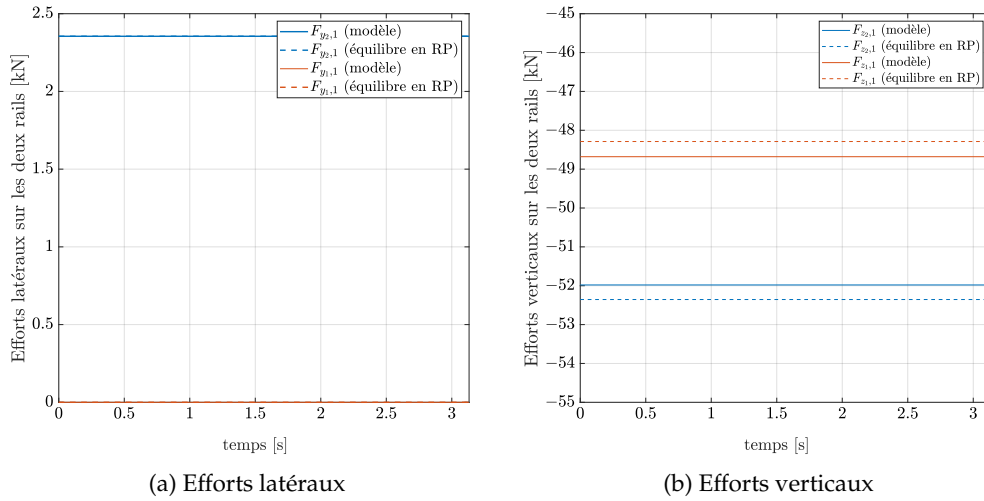


FIGURE 2.28 – Efforts Exercés sur les deux files de rail dans le cas d'un véhicule qui franchit une courbe sans défaut de rayon  $R = 940$  m et un dévers  $d = 160$  mm à une vitesse de 100 km/h.

## 2.7 Bilan

L'outil numérique développé pour modéliser le système ferroviaire a été présenté dans ce chapitre. Comme il est destiné à une utilisation industrielle, le choix s'est porté sur la construction de modèles légers. Ainsi, le modèle de la voie consiste en un modèle éléments finis 3D de type poutre



reposant sur un milieu multi-couches de {ressorts/amortisseurs} : les deux files de rails sont modélisées par des poutres de Timoshenko. Chacune d'entre elles est discrètement supportée par une première couche de {ressorts,amortisseurs} qui représentent les semelles. Les traverses sur lesquelles sont placées les semelles sont modélisées par des poutres de Bernoulli. Elles permettent de relier latéralement les deux files de rail et reposent à leurs tours sur une deuxième couche de {ressorts amortisseurs} qui représentent la couche de {ballast + sous-structure} de la voie. Le modèle tel qu'il a été conçu permet d'étudier le comportement vertical et latéral de la voie. Une première version du modèle a tout d'abord été réalisée en 2D pour l'étude du comportement vertical. Elle a par ailleurs été utilisée pour valider le modèle 3D lorsqu'un chargement vertical est imposé. Pour une bonne estimation du déplacement et des efforts généralisés dans le rail, il est important d'affecter à la voie une raideur réaliste. C'est dans ce sens que la méthode d'(AHLBECK, MEACHAM et PRAUSE, 1978) a été utilisée pour définir le coefficient de rigidité vertical de la couche de {ballast + sous-structure} en fonction du module de Young en supposant que la transmission des efforts de la traverse vers les couches de ballast puis vers la sous-structure se fait à travers des pyramides imaginaires.

Le modèle du véhicule développé a été associé à des défauts de géométrie car ils génèrent des surcharges dynamiques du véhicule qui affectent par la suite le niveau de contraintes dans le rail. Les défauts ont donc été générés à partir de mesures de géométrie réelles. Plus particulièrement, le tronçon de voie affecté par un défaut est construit de façon aléatoire en supposant, pour chaque longueur d'onde, son amplitude spectrale comme étant le maximum parmi plusieurs signaux mesurés. L'association de phases aléatoires à l'amplitude spectrale donne le défaut dans le domaine fréquentiel. Une transformée de Fourier inverse permet finalement de retrouver le défaut dans le domaine spatial.

Le modèle du véhicule consiste quant à lui en un modèle multi-corps léger où les bogies et la caisse admettent chacun 5 degrés de liberté : les rotations dans les 3 directions, le déplacement vertical et le déplacement latéral. Les degrés de liberté des essieux ont été déterminés en supposant que le véhicule suit parfaitement les défauts de la voie.

Une des particularités de l'outil est que les modèles du véhicule et de la voie sont découplés. En effet, on a supposé que la principale source d'excitation dynamique du véhicule était l'amplitude des défauts de la voie et que le véhicule suivait ces défauts. Cette hypothèse est valable dans le cadre des basses fréquences où l'inertie du véhicule est prépondérante. Les efforts exercés par le véhicule sur la voie sont d'abord calculés grâce au modèle du véhicule associé aux défauts de géométrie. Ces efforts sont par la suite injectés dans le modèle de la voie pour calculer les efforts généralisés dans le rail. Ces quantités servent de données d'entrée pour la détermination du tenseur des contraintes et l'évaluation de la fatigue dans le rail dans le chapitre suivant.

## Chapitre 3

# Évaluation de la fatigue dans le rail

Les problématiques de fatigue dans le domaine du transport ferroviaire ont toujours été au cœur des préoccupations. Plusieurs accidents sont la conséquence du phénomène de fatigue (TARAF, 2008) :

- le déraillement du train Paris Versailles en 1842 suite à la rupture de l’essieu de la locomotive par fatigue ;
- le déraillement de l’Inner City Express Allemand en 1998 à la suite de la rupture d’une roue par fatigue de contact de roulement ;
- plus récemment, le déraillement d’un train britannique en 2000 à cause de la rupture par fatigue du rail.

Dans l’optique d’optimiser la politique de maintenance, plusieurs travaux ont émergé au sein de la SNCF. On cite :

- l’étude de l’endommagement par fatigue de contact de roulement d’une roue ferroviaire (TARAF, 2008). Il s’agissait d’étudier numériquement l’influence des défauts sur une roue sur sa durée de vie. Dans le modèle qu’il a proposé, la roue est soumise à un chargement en mouvement sur sa surface qui représente la pression de contact hertzien ;
- la simulation multi-échelles de la propagation des fissures de fatigue dans les rails (TROLLÉ, 2014). Le but de ces travaux était d’estimer la criticité d’une zone fissurée du rail et de simuler numériquement la propagation de fissures par fatigue à l’aide de critères de chargements multiaxiaux.

Ces travaux ne se concentrent cependant que sur la fatigue de contact. En effet, l’amélioration des procédés de fabrication des rails a contribué à diminuer la fatigue structurelle liée aux contraintes de cisaillement, de torsion et de flexion dans le rail. De plus, le développement massif des lignes à grandes vitesses (LGV), l’augmentation du trafic ferroviaire et des vitesses vues par le rail ont entraîné une hausse des défauts de fatigue de contact. Néanmoins, dans les travaux de cette thèse, l’attention est portée à la fatigue structurelle du rail. On rappelle, d’une part, que les conditions de circulations concernent les lignes classiques qui sont limitées à des vitesses de 220km/h. D’autre part, la classification des voies selon le critère de Demaux au [chapitre 1](#) montre la présence de voies à armements faibles et moyens (i.e. groupes Demaux 1, 2 et 3). Sur ces voies, les vitesses de circulation sont relativement faibles ([Figure 3.1](#)) à cause des travelages moins élevés et des rails moins robustes (i.e. inerties moins élevées). De ce fait, il est naturel de penser que la fatigue structurelle ne peut être négligée, voire être prépondérante sur ces lignes. Une dernière raison est que le référentiel en vigueur pour les conditions de circulation repose sur des paramètres de résistance à la flexion du rail.

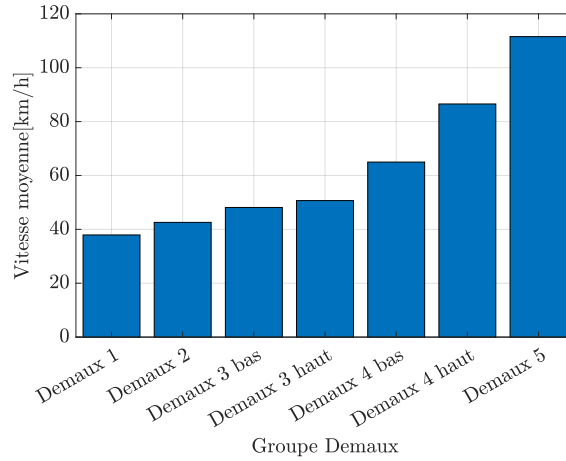


FIGURE 3.1 – Vitesses moyennes de circulation sur les différents groupes Demaux.

L'outil est donc un moyen de justifier l'approche de résistance à la flexion et d'améliorer l'existant en intégrant des notions de fatigue.

L'évaluation de la fatigue dans le rail nécessite une bonne approximation de l'état des contraintes. Dans ce chapitre, la méthodologie pour le calcul des contraintes dans le rail à partir des efforts généralisés est donc introduite en [section 3.1](#). Une brève introduction au phénomène de la fatigue est donnée en [section 3.2](#). Ensuite, le critère de fatigue multiaxial de Dang Van est situé par rapport aux autres critères existants en [section 3.3](#). Plus particulièrement, les deux formulations du critère sont abordées. Enfin, en [section 3.4](#), les deux algorithmes permettant de calculer le critère sont comparés entre eux.

### 3.1 Calcul du champ de contraintes dans le rail

Le modèle de la voie introduit en [chapitre 2](#) permet de calculer les efforts généralisés dans le rail qui est modélisé en tant que poutre de Timoshenko dans la direction  $\vec{x}$ . Le torseur des efforts internes est exprimé au niveau du centre de gravité  $G$  de la section dans le repère principal de la section  $(G, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\mathcal{F}_{\text{int}} = \begin{Bmatrix} N & M_x \\ T_y & M_y \\ T_z & M_z \end{Bmatrix}_{(G, \vec{y}, \vec{z})} \quad (3.1)$$

où  $N(x, t)$  représente l'effort normal,  $T_y(x, t)$  et  $T_z(x, t)$  sont respectivement les efforts tranchants dans les directions  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ .  $M_x(x, t)$  est le moment de torsion.  $M_y(x, t)$  et  $M_z(x, t)$  sont respectivement les moments fléchissants dans les directions  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . Les efforts dans la direction longitudinale étant négligés, l'effort normal  $N$  est considéré comme nul.

En un point  $M(y, z)$  de la section du rail, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(M, t) = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \Sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

La contrainte normale  $\Sigma_{xx}$  est calculée directement après la détermination des efforts généralisés par l'équation suivante :

$$\Sigma_{xx}(x,y,z,t) = z \frac{M_y(x,t)}{I_{r,y}} - y \frac{M_z(x,t)}{I_{r,z}} \quad (3.3)$$

où  $I_{r,y}$  et  $I_{r,z}$  sont les moments quadratiques de la section du rail par rapport aux directions  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ .

Par contre la détermination des contraintes tangentielles nécessite la connaissance au préalable des fonctions de gauchissement  $w$ ,  $g_y$  et  $g_z$  associées respectivement à  $M_x$ ,  $T_y$  et  $T_z$ , comme le montrent les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Sigma_{xy}(x,y,z,t) &= \frac{M_x(x,t)}{J_{r,x}} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - z \right) + \frac{T_y(x,t)}{S_r} \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{T_z(x,t)}{S_r} \frac{\partial g_z}{\partial y} \\ \Sigma_{xz}(x,y,z,t) &= \frac{M_x(x,t)}{J_{r,x}} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + y \right) + \frac{T_y(x,t)}{S_r} \frac{\partial g_y}{\partial z} + \frac{T_z(x,t)}{S_r} \frac{\partial g_z}{\partial z} \end{cases} \quad (3.4)$$

$S_r$  représente la section du rail et  $J_{r,x}$  est sa constante de torsion. Les fonctions de gauchissement ne dépendent que de la section et sont indépendantes des efforts généralisés. L'amplitude du cisaillement  $\mathcal{T}$  s'exprime en fonction des contraintes tangentielles comme suit :

$$\mathcal{T} = \sqrt{\Sigma_{xy}^2 + \Sigma_{xz}^2} \quad (3.5)$$

Classiquement, la fonction de gauchissement due à la torsion  $w(y,z)$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta w(y,z) &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} n_y^\Gamma + \frac{\partial w}{\partial z} n_z^\Gamma &= z n_y^\Gamma - y n_z^\Gamma \\ \int_{S_r} w dS &= 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $n_y^\Gamma = \frac{\langle \vec{n}^\Gamma, \vec{y} \rangle}{\|\vec{n}^\Gamma\|}$  et  $n_z^\Gamma = \frac{\langle \vec{n}^\Gamma, \vec{z} \rangle}{\|\vec{n}^\Gamma\|}$  sont les cosinus directeurs de la normale extérieure  $\vec{n}^\Gamma$  au contour  $\Gamma$  de la section (Figure 3.2).

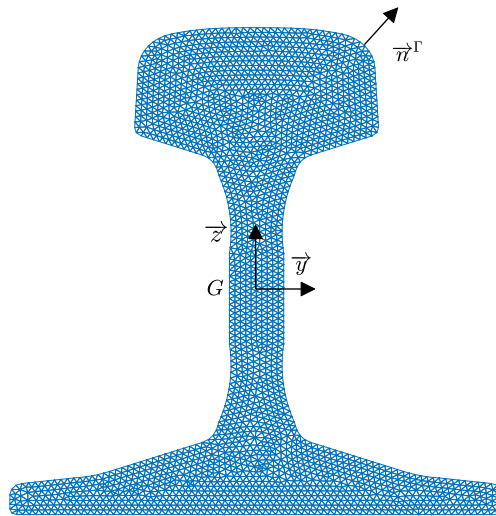


FIGURE 3.2 – Illustration du repère principal  $(G, \vec{y}, \vec{z})$  de la section du rail et de la normale extérieure à son contour.

Les fonctions de gauchissement  $g_y(y,z)$  et  $g_z(y,z)$  dues aux efforts tranchants  $T_y$  et  $T_z$  sont solutions des problèmes (3.7) et (3.8) respectivement.

$$\begin{cases} \Delta g_y(y,z) &= -\frac{S_r}{I_{r,z}} y \\ \frac{\partial g_y}{\partial y} n_y^\Gamma + \frac{\partial g_y}{\partial z} n_z^\Gamma &= 0 \\ \int_{S_r} g_y dS &= 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \Delta g_z(y,z) &= -\frac{S_r}{I_{r,y}} z \\ \frac{\partial g_z}{\partial y} n_y^\Gamma + \frac{\partial g_z}{\partial z} n_z^\Gamma &= 0 \\ \int_{S_r} g_z dS &= 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Le calcul analytique des fonctions de gauchissement pour des sections complexes comme celle du rail n'est pas possible. Dans ces travaux elles sont donc calculées par la méthode des éléments finis. La section du rail est discrétisée par des éléments triangle linéaires et les systèmes (3.6), (3.7) et (3.8) sont résolus en tenant compte de l'analogie qu'ils présentent avec les équations de la chaleur, ce qui est simple à traiter dans CAST3M. Pour valider le calcul par la méthode des éléments finis des fonctions de gauchissement, on présente le cas simple d'une poutre encastree à son extrémité gauche et libre à son extrémité droite (Figure 3.3). La poutre est de longueur  $L = 1$  m. Elle présente une section rectangulaire de hauteur  $h_s = 5$  cm et de largeur  $e = 2,5$  cm. Trois sollicitations simples sont modélisées :

- la torsion : l'extrémité de la poutre est soumise à un couple de torsion  $C_t = 1200$  N·m. De ce fait, le torseur des efforts internes  $\mathcal{F}_{\text{int}}$  ne fait intervenir que le moment de torsion  $M_x$ . La fonction de gauchissement à calculer est donc  $w$  ;
- la flexion simple due à un effort vertical : l'extrémité de la poutre est soumise à un effort ponctuel  $Q = -10$  kN selon  $\vec{z}$ . Le torseur des efforts internes  $\mathcal{F}_{\text{int}}$  ne fait intervenir que le moment fléchissant  $M_y$  et l'effort tranchant  $T_z$ . La contrainte de cisaillement est calculée à partir de la fonction de gauchissement  $g_z$  due à l'effort tranchant  $T_z$  ;
- la flexion simple due à un effort latéral : l'extrémité de la poutre est soumise à un effort ponctuel  $Y = 10$  kN selon  $\vec{y}$ . Le torseur des efforts internes  $\mathcal{F}_{\text{int}}$  ne fait intervenir que le moment fléchissant  $M_z$  et l'effort tranchant  $T_y$ . La contrainte de cisaillement est calculée à partir de la fonction de gauchissement  $g_y$  due à l'effort tranchant  $T_y$ .

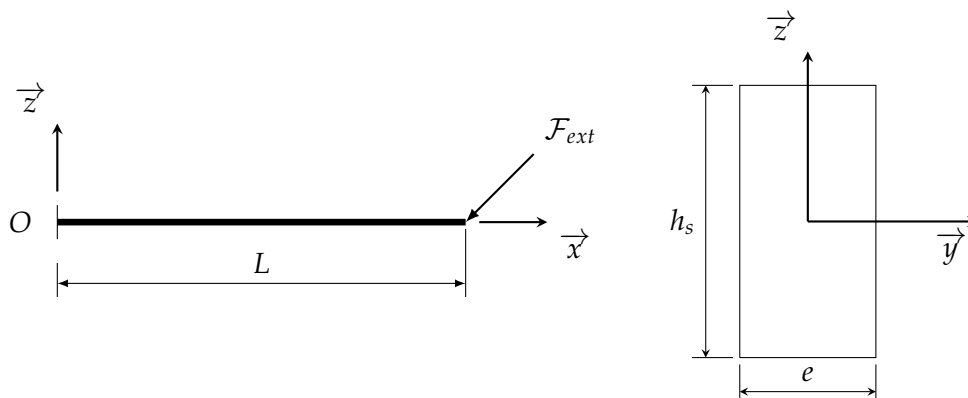


FIGURE 3.3 – Poutre de section rectangulaire encastree-libre.

### 3.1.1 Essai de torsion

Dans cet essai, le moment de torsion  $M_x$  est constant et est égal au couple de torsion appliqué. De ce fait, toutes les sections de la poutre ont le même champ de contrainte de cisaillement. La Figure 3.4 montre bien que le cisaillement maximal est situé au milieu du grand côté de la section soit au niveau des points de coordonnées  $(-\frac{e}{2}; 0)$  et  $(\frac{e}{2}; 0)$ . Des abaques permettent de déterminer la valeur de la

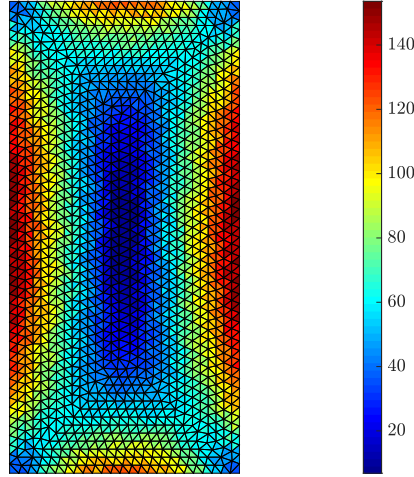


FIGURE 3.4 – Calcul de la contrainte de cisaillement  $\mathcal{T}$  en MPa sous CAST3M pour le problème exposé en Figure 3.3 lorsqu'un moment de torsion  $C_t$  est exercé.

contrainte maximale (DELAPLACE, GATUINGT et RAGUENEAU, 2015) :

$$\mathcal{T}_{\max, \text{ref}} = \frac{M_x}{k_1 h_s e^2} \quad (3.9)$$

où le coefficient  $k_1$  dépend du rapport  $\frac{h_s}{e}$ . Dans l'exemple donné  $\frac{h_s}{e} = 2$ , ce qui donne d'après les abaques un coefficient  $k_1 = 0,246$ .

Le calcul éléments finis donne une contrainte de cisaillement maximale  $\mathcal{T}_{\max, \text{FEM}} = 153,6$  MPa alors que les abaques donnent une contrainte de cisaillement maximale  $\mathcal{T}_{\max, \text{ref}} = 156$  MPa.

### 3.1.2 Essai de flexion simple avec un effort appliqué selon $\vec{z}$

L'effort étant appliqué à l'extrémité droite de la poutre, l'effort tranchant est donc constant le long de la direction longitudinale et a la même amplitude que l'effort appliqué. Toutes les sections sont donc sollicitées de la même façon en cisaillement. L'expression de la contrainte de cisaillement est donnée par (DELAPLACE, GATUINGT et RAGUENEAU, 2015) :

$$\mathcal{T}_{\max, \text{ref}} = \frac{3 T_z}{2 e h_s} \quad (3.10)$$

De plus, la contrainte de cisaillement est maximale proche de la ligne moyenne. Elle est nulle sur les bords  $z = \frac{h_s}{2}$  et  $z = -\frac{h_s}{2}$ . La Figure 3.5 est conforme aux résultats attendus.

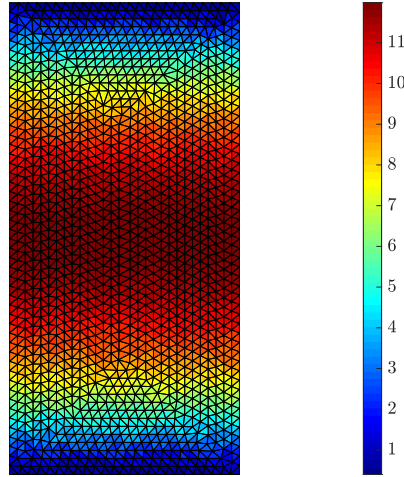


FIGURE 3.5 – Calcul de la contrainte de cisaillement  $\mathcal{T}$  en MPa sous CAST3M pour le problème exposé en [Figure 3.3](#) lorsqu'un effort vertical  $Q$  est exercé.

La comparaison des contraintes maximales donne une contrainte de cisaillement  $\mathcal{T}_{\max, \text{FEM}} = 11,98 \text{ MPa}$  pour le calcul éléments finis et  $\mathcal{T}_{\max, \text{ref}} = 12 \text{ MPa}$  pour la référence.

### 3.1.3 Essai de flexion simple avec un effort appliqué selon $\vec{y}$

De la même manière, la contrainte de cisaillement maximale s'écrit :

$$\mathcal{T}_{\max, \text{ref}} = \frac{3 T_y}{2 e h_s} \quad (3.11)$$

Contrairement à la [section 3.1.2](#), la contrainte de cisaillement est nulle sur les bords  $y = \frac{e}{2}$  et  $y = -\frac{e}{2}$ . Elle est maximale au niveau de la ligne moyenne. Ceci est vérifié sur la [Figure 3.6](#).

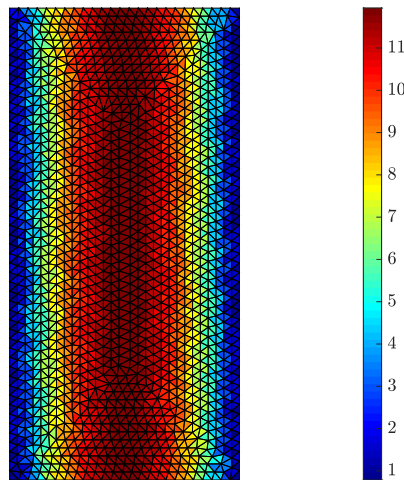


FIGURE 3.6 – Calcul de la contrainte de cisaillement  $\mathcal{T}$  en MPa sous CAST3M pour le problème exposé en [Figure 3.3](#) lorsqu'un effort latéral  $Y$  est exercé.



La comparaison des contraintes maximales donne une contrainte de cisaillement  $\mathcal{T}_{\max, \text{FEM}} = 11,94 \text{ MPa}$  pour le calcul éléments finis et  $\mathcal{T}_{\max, \text{ref}} = 12 \text{ MPa}$  pour la référence.

### 3.1.4 Conclusion

Le [Tableau 3.1](#) récapitule les écarts observés entre la contrainte maximale des abaques et celle obtenue par calcul éléments finis pour chaque essai. L'écart relatif a pour expression :

$$\epsilon = 100 \frac{|\mathcal{T}_{\max, \text{FEM}} - \mathcal{T}_{\max, \text{ref}}|}{\mathcal{T}_{\max, \text{ref}}} \quad (3.12)$$

Les écarts relatifs négligeables entre les solutions de référence et les solutions numériques permettent donc de valider la méthode de calcul par éléments finis des fonctions de gauchissement.

|                      | Essai de torsion | Essai de flexion simple avec un effort appliqué selon $\vec{x}$ | Essai de flexion simple avec un effort appliqué selon $\vec{y}$ |
|----------------------|------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Écart $\epsilon$ [%] | 1,6              | 0,17                                                            | 0,5                                                             |

TABLEAU 3.1 – Écarts relatifs entre la contrainte de cisaillement de référence et la contrainte de cisaillement obtenue par le calcul éléments finis pour les 3 essais exposés en [section 3.1.1](#), [section 3.1.2](#) et [section 3.1.3](#).

## 3.2 Introduction au phénomène de fatigue

Une structure sollicitée par des contraintes cycliques, répétées, alternées subit une dégradation progressive qu'on caractérise par endommagement à la fatigue et qui peut conduire à la rupture de la structure. En effet, une première phase d'amorçage de la fissure se manifeste par l'écrouissage qui entraîne l'apparition de microfissures. Ensuite, on constate une phase de propagation lente ou rapide de ces microfissures qui conduit à leur coalescence jusqu'à la rupture finale de la structure. Dans le domaine ferroviaire, on constate que la phase d'amorçage est en général plus longue que la phase de propagation qui, elle, est une étape critique et difficile à évaluer (TARAF, 2008).

Des approches expérimentales ont été proposées pour déterminer la résistance à la fatigue d'un matériau. On cite les travaux de Wöhler (WÖHLER, 1870) où des essais sous sollicitations cycliques uniaxiales ont été réalisés pour plusieurs amplitudes de chargement. Le nombre de cycles à la rupture de la pièce a ainsi été déterminé. Un exemple de chargement cyclique uniaxial à amplitude constante est donné sur la [Figure 3.7](#). On peut en dégager deux paramètres principaux :

- l'amplitude du cycle définie par  $\Sigma_a = \frac{\Sigma_{\max} - \Sigma_{\min}}{2}$  ;
- la valeur moyenne du cycle définie par  $\Sigma_m = \frac{\Sigma_{\max} + \Sigma_{\min}}{2}$ .

Ces essais représentés par des courbes dites de Wöhler ([Figure 3.8](#)) constituent la plus ancienne méthode pour caractériser la tenue mécanique de la pièce. Il peut s'agir d'essais de traction-compression, des essais de flexion ou des essais de torsion cyclique. Le diagramme représente l'amplitude de la contrainte  $\Sigma_a$  en fonction du nombre de cycles à la rupture  $N$  pour une contrainte moyenne  $\Sigma_m$  donnée. Sur le diagramme de Wöhler, on distingue deux domaines (MAITOURNAM, 2015) :



- **le domaine oligocyclique** : il s'agit d'une fatigue à faible nombre de cycles où le comportement asymptotique est élastoplastique. Le nombre de cycles à la rupture varie de quelques dizaines à des centaines de milliers de cycles selon la nature du matériau métallique ;
- **le domaine polycyclique** : la fatigue se produit à grand nombre de cycles. En général, il est divisé en deux sous domaines :
  1. un domaine d'endurance limitée où le chargement de la pièce engendre une fissuration par fatigue après un certain nombre de cycles qui est de l'ordre de plusieurs centaines de milliers de cycles pour les métaux ;
  2. un domaine d'endurance illimitée où le matériau ne fatigue pas en dessous de la limite de fatigue  $\Sigma_D$ . Il apparaît typiquement pour les aciers.

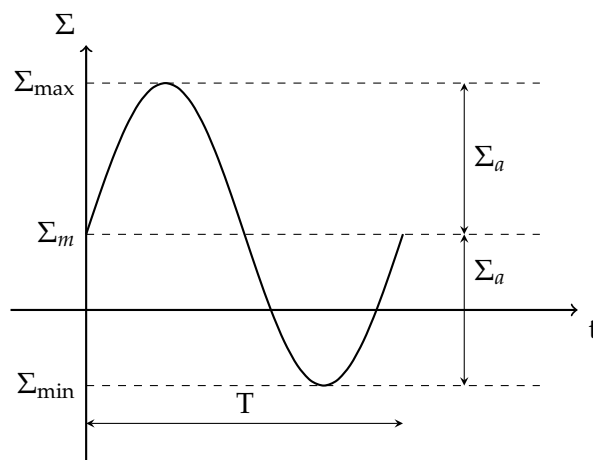


FIGURE 3.7 – Sollicitation cyclique uniaxiale à amplitude constante.

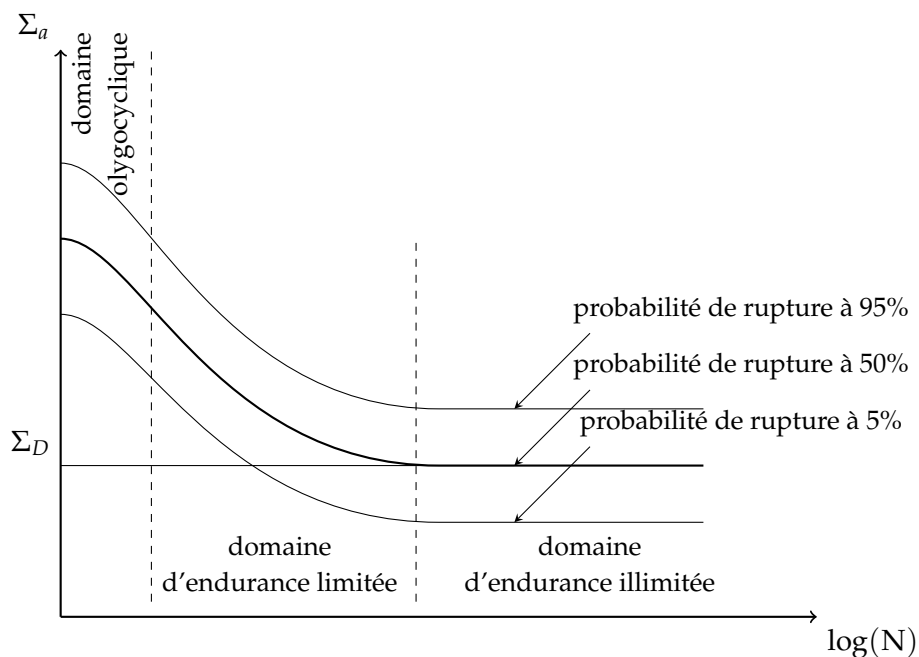


FIGURE 3.8 – Courbes de Wöhler. D'après (MAITOURNAM, 2015).

En réalité, les structures ont des géométries qui peuvent être complexes et sont souvent soumises à des chargements multiaxiaux quelconques. La caractérisation de la zone critique devient alors très délicate. C'est dans ce sens que plusieurs critères de fatigue multiaxiaux ont vu le jour.

### 3.3 Critères de fatigue multiaxiaux

Par analogie avec un critère de résistance (Tresca, VonMises, etc), un critère de fatigue multiaxial permet de situer un cycle multiaxial de contraintes par rapport à la limite de fatigue à N cycles du matériau. Il s'agit en d'autres termes de déterminer un cycle uniaxial équivalent à un cycle multiaxial en termes de durée de vie (WEBER, 1999). Un critère de fatigue peut être formulé par une fonction de fatigue qui est égale à l'unité quand la limite de fatigue du matériau est atteinte :

$$E([\Sigma_{ij}(t)]_T, \Sigma_{-1}(N), \Sigma_0(N), F_{-1}(N), F_0(N), \mathcal{T}_{-1}(N), \dots) = 1 \quad (3.13)$$

Ce critère fait intervenir les composantes du tenseur des contraintes  $[\Sigma_{ij}(t)]_T$  sur une période T et les limites d'endurance pour plusieurs modes de sollicitations simples :

- $\Sigma_0(N)$  et  $\Sigma_{-1}(N)$  sont respectivement les limites de fatigue à N cycles en traction répétée et en traction-compression alternée symétrique ;
- $\mathcal{T}_{-1}(N)$  est la limite de fatigue à N cycles en torsion alternée symétrique ;
- $F_0(N)$  et  $F_{-1}(N)$  sont respectivement les limites de fatigue à N cycles en flexion répétée et en flexion alternée symétrique.

Ainsi à l'aide de la fonction de fatigue E, le critère de fatigue permet de situer tout cycle multiaxial de contraintes  $[\Sigma_{ij}(t)]_T$  par rapport à la limite de fatigue du matériau. Le caractère plus ou moins endommageant du cycle appliqué est de ce fait évalué. En effet pour un nombre N de cycles, si :

- $E < 1$ , l'amorçage d'une fissure se produit au delà des N cycles ;
- $E > 1$ , l'apparition d'une fissure se produit avant l'application des N cycles ;
- $E = 1$ , la durée de vie du matériau soumis au cycle multiaxial coïncide avec les N cycles.

Plusieurs critères de fatigue ont été développés. des revues bibliographiques de ces critères sont proposées dans (WEBER, 1999 ; NADJITONON, 2010). La Figure 3.9 met en évidence trois approches différentes (WEBER, 1999 ; NADJITONON, 2010) :

- l'approche empirique dont la formulation du critère de fatigue résulte d'essais expérimentaux sur un matériau soumis à des sollicitations multiaxiales du type traction-torsion ou flexion-torsion. Ces critères font intervenir les amplitudes et les valeurs moyennes du tenseur des contraintes pour chaque sollicitation (traction, flexion, torsion) ainsi que les limites d'endurance. Ils permettent une bonne représentation du domaine d'endurance limitée de la pièce. Par contre, ils ne sont adaptés qu'à des formes simples de sollicitations. Or dans le milieu industriel, les pièces sont généralement soumises à des chargements multiaxiaux quelconques ;
- l'approche globale comprend deux familles de critères : on retrouve les critères se basant sur les invariants du tenseur des contraintes. Ils font intervenir les invariants du tenseur des contraintes ou du déviateur. Ensuite, il y a les critères intégraux. Ils prennent en compte la

- contribution de l'ensemble des plans physiques<sup>1</sup> liés à un point de la structure. Cette contribution se traduit par l'intégration des indicateurs de d'endommagement par plan sur une sphère virtuelle qui permet de parcourir tous les plans physiques possibles ;
- l'approche du type plan critique est fondée sur la recherche d'un plan physique critique lié à un point de la structure qui maximiserait la fonction de fatigue  $E$ . Le plan critique en question dépend du cycle multiaxial considéré.

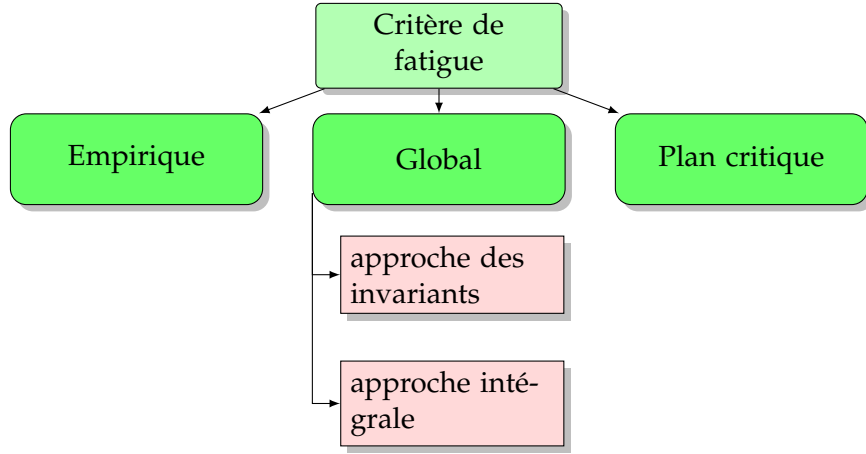


FIGURE 3.9 – Classification des critères de fatigue multiaxiaux (NADJITONON, 2010).

### 3.3.1 Paramètres de contraintes utilisés en fatigue multiaxiale

L'approche intégrale et l'approche des plans critiques définissent un indicateur d'endommagement  $E_n$  par plan. En effet, à chaque point  $M$  de la structure, une infinité de plans physiques peut

être définie. Un plan  $\pi$  est orienté par sa normale  $\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin(\gamma) \cos(\varphi) \\ \sin(\gamma) \sin(\varphi) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix}$  qui est exprimée dans la

base où sont calculées les contraintes  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Les angles d'Euler  $\gamma$  et  $\varphi$  correspondent respectivement aux angles  $(\widehat{\vec{z}}, \vec{n})$  et  $(\vec{x}, \widehat{\sin(\gamma)} \vec{n})$  (Figure 3.10a). On note que la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$  liée au plan physique est une base orthonormée. Les termes de contraintes utilisés dans les critères intégraux et de types plan critique sont les composantes normales et tangentielles des contraintes agissant sur le plan  $\pi$  durant le cycle multiaxial. On les obtient par projection du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$  sur le plan  $\pi$  à chaque instant  $t$  du cycle conduisant ainsi à la courbe de la Figure 3.10b appelée communément trajet de chargement  $\mathcal{T}$ .

Le vecteur contrainte  $\underline{\Sigma}_n(t)$  qui agit sur le plan  $\pi$  s'écrit comme :

$$\underline{\Sigma}_n(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t) \vec{n} \quad (3.14)$$

1. plan fictif associé à un point de la structure et défini par sa normale  $\vec{n}$  sur lequel le tenseur des contraintes est projeté.

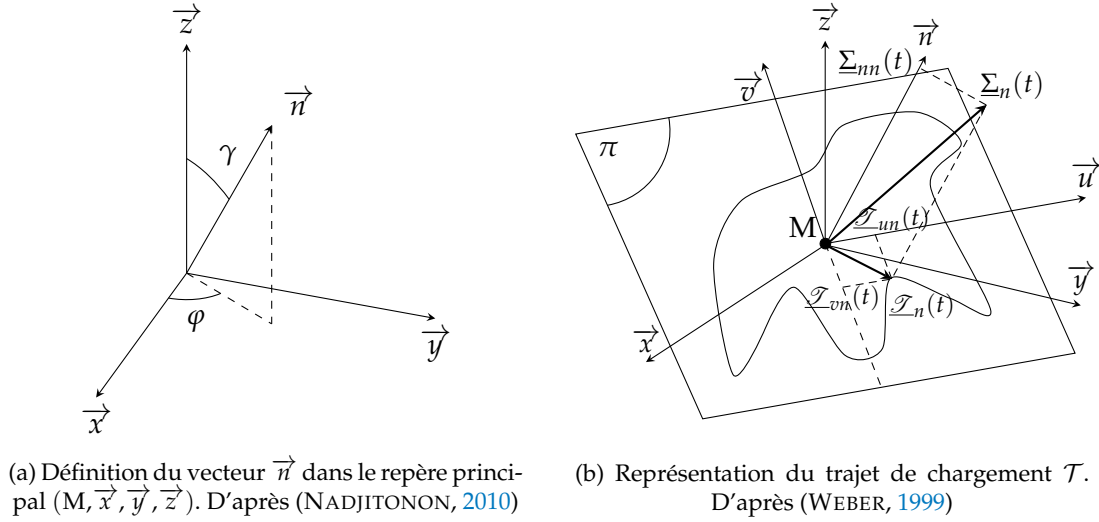


FIGURE 3.10 – Projection du tenseur des contraintes dans le plan  $\pi$  de repère  $(M, \vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ .

Le vecteur contrainte se décompose alors en une contrainte normale  $\Sigma_{nn}(t)$  et une contrainte tangentielle  $\mathcal{T}_n(t)$  :

$$\begin{cases} \Sigma_{nn}(t) &= \vec{n}^T \underline{\Sigma}(t) \vec{n} \\ \mathcal{T}_n(t) &= \sqrt{\mathcal{T}_{un}^2(t) + \mathcal{T}_{vn}^2(t)} \end{cases} \quad (3.15)$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{un}(t) &= \vec{u}^T \underline{\Sigma}(t) \vec{n} \\ \mathcal{T}_{vn}(t) &= \vec{v}^T \underline{\Sigma}(t) \vec{n} \end{cases} \quad (3.16)$$

Les différents critères adoptent dans l'expression des indicateurs d'endommagement des quantités relatives à l'évolution de la contrainte normale sur le plan  $\pi$  :

- la contrainte normale moyenne  $\Sigma_{nnm} = \frac{\Sigma_{nn \max} + \Sigma_{nn \min}}{2}$  où  $\Sigma_{nn \min}$  et  $\Sigma_{nn \max}$  sont respectivement les contraintes normales minimale et maximale ;
- l'amplitude de la contrainte normale  $\Sigma_{nna} = \frac{\Sigma_{nn \max} - \Sigma_{nn \min}}{2}$  ;
- la partie alternée de la contrainte normale à l'instant  $t$   $\Sigma_{nna}(t) = \Sigma_{nn}(t) - \Sigma_{nnm}$ .

Le vecteur contrainte tangentielle  $\mathcal{T}_n(t)$  qui agit sur le plan  $\pi$  décrit le trajet de chargement  $\mathcal{T}$  (Figure 3.11) qui est une courbe fermée pendant un cycle.

Il est possible de décomposer le vecteur  $\mathcal{T}_n(t)$  en un vecteur contrainte tangentielle moyenne  $\mathcal{T}_{nm}$  et un vecteur contrainte tangentielle alternée  $\mathcal{T}_{na}(t)$  :

$$\mathcal{T}_n(t) = \mathcal{T}_{na}(t) + \mathcal{T}_{nm} \quad (3.17)$$

Le calcul de la contrainte tangentielle est plus complexe que la détermination de la contrainte normale. En effet, la détermination de l'amplitude  $\mathcal{T}_{na}$ , de la partie alternée de la contrainte tangentielle  $\mathcal{T}_{na}(t)$  ainsi que la valeur moyenne de la contrainte tangentielle  $\mathcal{T}_{nm}$  requièrent la construction du plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement  $\mathcal{T}$  (WEBER, 1999). La Figure 3.11 montre que la valeur moyenne de la contrainte tangentielle correspond au vecteur  $\vec{MO}$  où  $M$  est le point matériel auquel est lié le plan physique  $\pi$  et  $O$  est le centre du plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement. L'amplitude de la contrainte tangentielle  $\mathcal{T}_{na}$  n'est autre que le rayon de ce cercle.

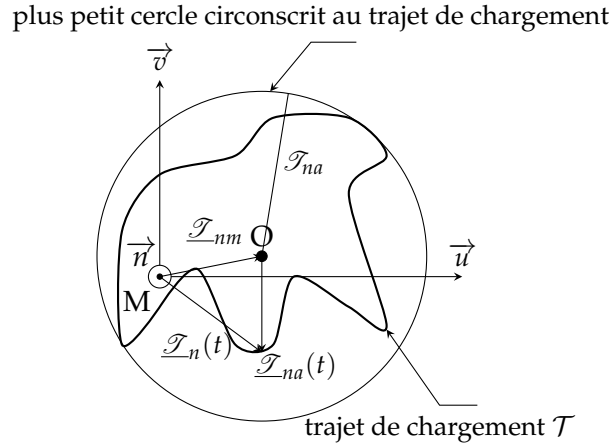


FIGURE 3.11 – Définition des termes relatifs au vecteur contrainte tangentielle  $\mathcal{T}_n(t)$ .  
D'après (WEBER, 1999).

### 3.3.2 Revue bibliographique de quelques critères de fatigue

L'idée de cette section est de rappeler quelques critères de fatigue. On décide de balayer quelques critères appartenant aux approches fondées sur la détermination des invariants des contraintes, puis aux approches intégrales et enfin aux approches de types plan critique. Une revue bibliographique plus complète a déjà été proposée par (WEBER, 1999).

#### 3.3.2.1 Approche fondée sur le calcul des invariants des contraintes

Les critères appartenant à cette famille font intervenir les invariants des contraintes :

- $I_{1\min}$  et  $I_{1\max}$  sont respectivement la valeur minimale et maximale du premier invariant du tenseur des contraintes au cours d'un cycle;
- $I_{1m} = \frac{I_{1\min} + I_{1\max}}{2}$  est la valeur moyenne du premier invariant du tenseur des contraintes;
- $I_{1a} = \frac{I_{1\max} - I_{1\min}}{2}$  est l'amplitude du premier invariant du tenseur des contraintes;
- $P_m = \frac{I_{1m}}{3}$  est la pression hydrostatique moyenne;
- $P_a = \frac{I_{1a}}{3}$  est l'amplitude de la pression hydrostatique;
- $I_2$  est le deuxième invariant du tenseur des contraintes;
- $J_{2a}$  est l'amplitude du deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes;
- $J_{2m}$  est la valeur moyenne du deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes moyennes.

#### Le critère de Marin (MARIN, 1956)

La fonction de fatigue s'écrit :

$$E_{MA} = \left( \frac{\sqrt{3} J_{2a}}{\Sigma_{-1}} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3} J_{2m}}{R_m} \right)^2 \quad (3.18)$$

Le critère compare la partie alternée des contraintes par rapport à la limite de fatigue en traction alternée symétrique ainsi que la partie moyenne des contraintes par rapport à la limite de rupture. La contrainte équivalente est donnée au sens de von Mises.

**Le critère de Crossland (CROSSLAND, 1956)**

Le critère propose d'utiliser la valeur maximale du premier invariant des contraintes.

$$\begin{cases} E_{CR} &= \frac{\sqrt{J_{2a}} + B_{CR} I_{1\max}}{A_{CR}} \\ A_{CR} &= \mathcal{T}_{-1} \\ B_{CR} &= \frac{\mathcal{T}_{-1}}{\Sigma_{-1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (3.19)$$

Les constantes  $A_{CR}$  et  $B_{CR}$  du critère s'expriment en fonction des limites de fatigue du matériau en torsion alternée symétrique et en traction-compression alternée symétrique.

**3.3.2.2 Approche intégrale**

Dans cette approche, la fonction de fatigue est obtenue par intégration de l'indicateur d'endommagement par plan sur une sphère imaginaire de rayon unité qui permet de prendre en considération toutes les orientations de plans possibles. Cette intégration est un moyen de prendre en considération la contribution de l'ensemble des plans physiques. Il est possible de ne considérer qu'une demie sphère car le plan  $(M, \vec{x}, \vec{z})$  est un plan de symétrie.

Il s'agit de faire varier la normale  $\vec{n}$  à l'aide des angles  $\gamma$  et  $\varphi$  de manière à décrire une demie sphère et décrire tous les plans possibles. Or, le nombre de ces plans physiques est infini. Il faut donc faire un choix pour faire un compromis entre le nombre de plans physiques retenu qui correspond à la finesse du maillage de la demie sphère et un temps de calcul raisonnable. En effet, un critère de fatigue traite de manière séparée chaque point matériel. De ce fait, l'opération de balayage des plans physiques est répétée pour chaque point matériel.

L'idée est donc de diviser la surface de la demie sphère de rayon unité en facettes d'égales surfaces repérées par leurs normales  $\vec{n}$  :

$$dS = \sin(\gamma) d\gamma d\varphi \quad (3.20)$$

d'après (TRAN, 2013), pour avoir un bon compromis entre le nombre de plans retenu et le temps de calcul, il faut choisir un total de 209 facettes. Il s'agit de considérer un pas de variation de l'angle  $\gamma$  de 10 degrés et un pas de variation de  $\varphi$  qui varie selon l'angle  $\gamma$ .

Pour des raisons de lisibilité, la Figure 3.12 représente un huitième de la sphère. On y voit que pour des angles  $\gamma$  proches de zéro, le pas de variation  $\Delta\varphi$  est grand pour garder une aire de facette relativement constante. Au contraire, lorsque  $\gamma$  s'approche de 90 degrés, le pas  $\Delta\varphi$  est le plus petit.

**Le critère de Fogue (FOGUE, 1987)**

L'indicateur d'endommagement par plan  $E_n$  est pris comme une combinaison linéaire de l'amplitude de la contrainte tangentielle, l'amplitude de la contrainte normale et sa moyenne.

$$E_n = \frac{a_{FG} \mathcal{T}_{na} + b_{FG} \Sigma_{nna} + c_{FG} \Sigma_{nnm}}{\Sigma_{-1}} \quad (3.21)$$

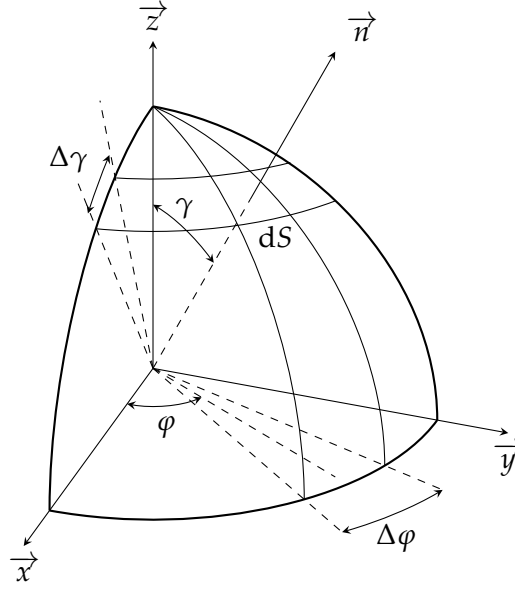


FIGURE 3.12 – Représentation du huitième de la sphère de rayon unité pour balayer tous les plans physiques possibles. D'après (NADJITONON, 2010).

les constantes  $a_{FG}$ ,  $b_{FG}$  et  $c_{FG}$  sont déterminées à partir des trois limites de fatigue  $\Sigma_{-1}$ ,  $\Sigma_0$  et  $\mathcal{T}_{-1}$ .

$$\begin{cases} a_{FG} = \sqrt{\frac{15 - \sqrt{9(25 - 8\left(\left(\frac{\Sigma_{-1}}{\mathcal{T}_{-1}}\right)^2 - 3)}^2}{2}} \\ b_{FG} = \sqrt{\frac{12\left(\frac{\Sigma_{-1}}{\mathcal{T}_{-1}}\right)^2 - 21 + b_{FG}^2}{2}} \\ c_{FG} = \frac{1}{3} \left( (-3b_{FG} + 2a_{FG}) + \sqrt{(-3b_{FG} + 2a_{FG})^2 + 45\left(4\left(\frac{\Sigma_{-1}}{\mathcal{T}_{-1}}\right)^2 - 1\right)} \right) \end{cases} \quad (3.22)$$

La fonction de fatigue sur un point matériel M est obtenue en réalisant une moyenne quadratique de tous les indicateurs d'endommagement par plan liés à ce point :

$$E_{FG} = \sqrt{\frac{1}{S} \int_S E_n^2 dS} \quad (3.23)$$

#### Le critère de Zenner (ZENNER, SIMBÜRGER et LIU, 2000)

L'indicateur d'endommagement par plan est défini par l'expression :

$$E_n = a_{ZN} \mathcal{T}_{na}^2 (1 + m_{ZN} \mathcal{T}_{nm}^2) + b_{ZN} \Sigma_{na}^2 (1 + n_{ZN} \Sigma_{nm}) \quad (3.24)$$

Les constantes du critère s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{ZN} & = & \frac{1}{5} \left( 3 \left( \frac{\Sigma_{-1}}{\mathcal{T}_{-1}} \right)^2 - 4 \right) \\ b_{ZN} & = & \frac{1}{5} \left( 6 - 2 \left( \frac{\Sigma_{-1}}{\mathcal{T}_{-1}} \right)^2 \right) \\ a_{ZN} m_{ZN} & = & \frac{\Sigma_{-1}^2 - \left( \frac{\mathcal{T}_0}{2} \right)^2 \left( \frac{\Sigma_{-1}}{\mathcal{T}_{-1}} \right)^2}{\frac{12}{7} \left( \frac{\mathcal{T}_0}{2} \right)^4} \\ b_{ZN} n_{ZN} & = & \frac{\Sigma_{-1}^2 - \left( \frac{\Sigma_0}{2} \right)^2 - \frac{4}{21} a_{ZN} m_{ZN} \left( \frac{\Sigma_0}{2} \right)^4}{\frac{15}{14} \left( \frac{\Sigma_0}{2} \right)^3} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

où  $\mathcal{T}_0$  est la limite de fatigue en torsion répétée, elle peut être déduite à partir des limites en fatigue  $\Sigma_0, \Sigma_{-1}$  et  $\mathcal{T}_{-1}$ .

$$\mathcal{T}_0 = \frac{4\mathcal{T}_{-1}}{\frac{2\Sigma_{-1}}{\Sigma_0} + 1} \quad (3.26)$$

La fonction de fatigue est déterminée par une moyenne de l'indicateur par plan  $E_n$  sur tous les plans physiques :

$$E_{ZN} = \frac{1}{\Sigma_{-1}} \sqrt{\frac{1}{S} \int_S E_n^2 dS} \quad (3.27)$$

### 3.3.2.3 Approche des plans critiques

Comme mentionné précédemment, le principe des critères du type plan critique est de déterminer pour chaque point matériel M, le plan physique dit plan critique qui décrit un endommagement maximal. Tout comme les critères appartenant à l'approche intégrale, ils font intervenir les composantes des contraintes qui agissent sur chaque plan physique.

#### Le critère de Dang Van 1 (VAN, 1973)

Le critère est justifié par des considérations à l'échelle mésoscopique (i.e. taille du grain). Dans sa première formulation, l'indicateur d'endommagement est une maximisation sur le temps de la combinaison linéaire de la partie alternée de la contrainte de cisaillement  $\mathcal{T}_{na}(t)$  et de la pression hydrostatique  $P(t)$ .

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E_n & = & \max_t \left\{ \frac{\mathcal{T}_{na}(t) + \alpha_{DV} P(t)}{\beta_{DV}} \right\} \\ P(t) & = & \frac{tr(\underline{\Sigma}(t))}{3} \end{array} \right. \quad (3.28)$$

où  $\alpha_{DV}$  et  $\beta_{DV}$  sont les constantes établies à partir des limites de fatigue  $\mathcal{T}_{-1}$  et  $\Sigma_{-1}$ . Elles sont définies par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_{DV} & = & 3 \left( \frac{\mathcal{T}_{-1}}{\Sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \\ \beta_{DV} & = & \mathcal{T}_{-1} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Comme mentionné en [section 3.3.1](#), la partie alternée de la contrainte de cisaillement sur un plan physique nécessite la détermination du plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement sur ce même plan. La fonction de fatigue est donc une maximisation de l'indicateur d'endommagement sur les plans physiques :

$$E_{DV} = \max_n E_n \quad (3.30)$$



**Le critère de Dang Van 2 (VAN, LE DOUARON et LIEURADE, 1984)**

Dans l'objectif de réduire les temps de calcul, une deuxième version est proposée. Elle évite de balayer l'ensemble des plans physiques pour la détermination du plan critique. En effet, les relations de passage de l'échelle macroscopique vers l'échelle mésoscopique permettent de remonter aux contraintes à l'échelle mésoscopique  $\underline{\sigma}$  qui tiennent compte d'une plastification locale même si l'état macroscopique est élastique. Cet état de contrainte à l'échelle mésoscopique est obtenu après détermination de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement dans l'espace du tenseur déviateur des contraintes. La fonction de fatigue s'écrit alors :

$$\begin{cases} E_{DV} = \max_t \frac{\tau(t) + \alpha_{DV} P(t)}{\beta_{DV}} \\ \tau(t) = \frac{1}{2} \max(|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|) \end{cases} \quad (3.31)$$

où  $\tau(t)$  est le cisaillement maximal obtenu par application du critère de Tresca sur le tenseur des contraintes mésoscopiques.  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$  sont donc les valeurs principales du tenseur des contraintes mésoscopiques.

**Le critère de Robert (ROBERT, 1992)**

Le critère fait intervenir séparément les influences de la partie alternée de la contrainte de cisaillement  $\mathcal{T}_{na}(t)$ , de la partie alternée de la contrainte normale  $\Sigma_{nna}(t)$  et de la contrainte normale moyenne  $\Sigma_{nmm}$  :

$$E_h = \frac{\mathcal{T}_{na}(t) + \alpha_{RB} \Sigma_{nna}(t) + \beta_{RB} \Sigma_{nmm}}{\theta_{RB}} \quad (3.32)$$

Les constantes  $\alpha_{RB}$ ,  $\theta_{RB}$  et  $\beta_{RB}$  sont déterminées à partir des limites de fatigue  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_{-1}$  et  $\mathcal{T}_{-1}$ .

$$\begin{cases} \alpha_{RB} = \frac{\frac{2\mathcal{T}_{-1}}{\Sigma_{-1}} - 1}{\sqrt{\frac{2\mathcal{T}_{-1}}{\Sigma_{-1}} \left(2 - \frac{2\mathcal{T}_{-1}}{\Sigma_{-1}}\right)}} \\ \theta_{RB} = \mathcal{T}_{-1} \sqrt{\alpha_{RB}^2 + 1} \\ \beta_{RB} = \frac{2\theta_{RB}}{\Sigma_0} - \frac{\Sigma_0}{8\theta_{RB}} - \alpha_{RB} \end{cases} \quad (3.33)$$

La fonction de fatigue est une maximisation de l'indicateur d'endommagement sur les plans physiques :

$$E_{RB} = \max_n E_n \quad (3.34)$$

**3.3.3 Choix d'un critère de fatigue**

Plusieurs critères de fatigue ont été confrontés à une banque de données d'essais de fatigue multiaxiaux. La banque de données regroupe plusieurs séries rassemblant un total de 259 essais (NADJITONON, 2010). Ce sont des essais représentatifs des cas de sollicitations pouvant être observés, soit des essais à états de contraintes proportionnels (i.e. directions principales constantes et ratios des contraintes principales constants au cours du temps) et non proportionnels (i.e. déphasage entre les composantes des contraintes). Dans chaque série, on retrouve des informations relatives aux caractéristiques mécaniques du matériau, les caractéristiques de fatigue du matériau (i.e.  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_{-1}$ ,  $\mathcal{T}_{-1}$ , etc.) et la caractérisation de l'essai. Ces essais sont une occasion de dégager les effets du déphasage, de

la contrainte moyenne et de la biaxialité des états de contraintes. Par ailleurs les cycles multiaxiaux sont décrits par des fonctions sinusoïdales. Une composante  $\Sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes s'écrit alors comme :

$$\Sigma_{ij} = \Sigma_{ijm} + \Sigma_{ija} \sin(\omega t - \Psi_{ij}) \quad (3.35)$$

où  $\Sigma_{ijm}$  et  $\Sigma_{ija}$  représentent respectivement la valeur moyenne de la contrainte et son amplitude.  $\Psi_{ij}$  représente le déphasage relatif à l'instant initial et  $\omega$  est la pulsation.

Les critères sont par la suite comparés entre eux de façon indirecte en les prenant un par un et les validant sur un ensemble conséquent de résultats d'essais. Pour chaque critère considéré, la fonction de fatigue  $E_{\text{critère}}$  est calculée. Il est rappelé qu'elle est égale à l'unité lorsque la limite de fatigue du matériau est atteinte. Chaque série d'essais correspond à la limite de fatigue du matériau pour un nombre de cycles  $N$ . On suppose donc que la durée de vie réelle du matériau est de  $N$  cycles. De ce fait :

- si  $E_{\text{critère}} < 1$ , le critère prévoit l'amorçage d'une fissure au delà des  $N$  cycles. Le critère est alors dit non conservatif en regard du cycle multiaxial considéré ;
- lorsque  $E_{\text{critère}} = 1$ , le critère prévoit l'amorçage de la fissure au  $N^{\text{ème}}$  cycle. Le critère est exact car il est fidèle aux résultats expérimentaux ;
- si  $E_{\text{critère}} > 1$ , le critère prévoit l'amorçage d'une fissure avant l'application des  $N$  cycles. Le critère est donc conservatif en regard du cycle multiaxial considéré.

Les fonctions de fatigue ainsi obtenues pour chaque critère permettent de quantifier la précision du critère. Elle est estimée grâce à l'écart de validité  $\Delta l$  qui est déterminé en faisant la différence entre la fonction de fatigue du critère et l'unité représentant un critère parfait conforme aux essais expérimentaux :

$$\Delta l = E_{\text{critère}} - 1 \quad (3.36)$$

Si  $\Delta l$  est proche de zéro, on parle d'un critère précis. Un écart  $\Delta l$  positif renvoie vers un critère conservatif. Par contre, un écart  $\Delta l$  négatif renvoie vers un critère non conservatif. Dans la thèse de Weber (WEBER, 1999) puis dans celle de Nadjitonon (NADJITONON, 2010), les résultats sont post-traités selon des représentations graphiques comme le montre la Figure 3.13. Les nombres d'essais et les classes d'appartenance de l'écart sont respectivement disposés en ordonnée et en abscisse. Plus la moyenne est centrée et l'écart type est faible, plus le critère étudié est fiable. La répartition des essais est donnée sur la Figure 3.14 pour le critère de Crossland représentatif des critères fondés sur le calcul des invariants des contraintes. Pour les critères de l'approche intégrale, la répartition des essais est donnée en Figure 3.15. Enfin, la Figure 3.16 représente la répartition des essais pour les critères appartenant à l'approche du type plan critique. Les deux versions du critère de Dang Van donnent exactement les mêmes résultats (WEBER, 1999).

La Figure 3.14 montre que le critère de Crossland est trop conservatif du fait que l'histogramme est décalé vers la droite. Les autres critères montrent des diagrammes plus centrés autour d'une moyenne nulle. Les résultats sont donc reportés dans le Tableau 3.2 pour quantifier les essais étant dans l'intervalle  $[-5\%; 5\%]$  et qui permettent de juger quant à la justesse du critère.

Le Tableau 3.2 confirme le caractère conservatif du critère de Crossland avec 76% des essais présentant un écart de validité  $\Delta l > 5\%$ .

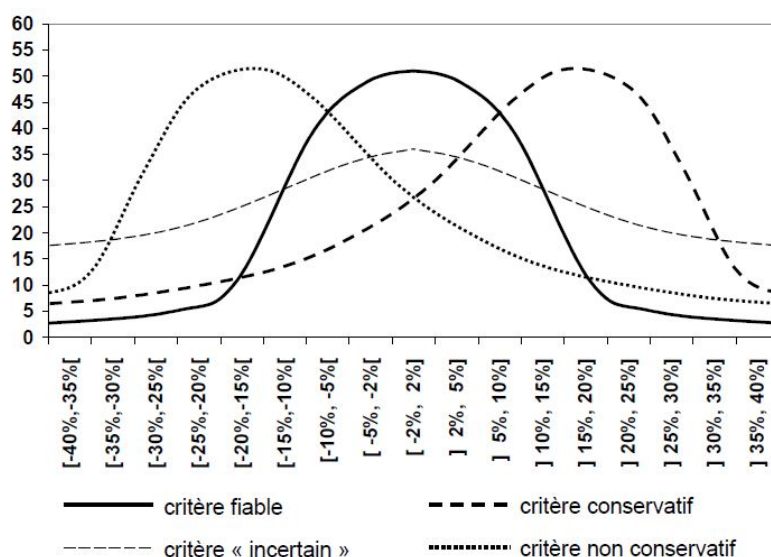


FIGURE 3.13 – Allures possibles des écarts de validité issus du post-traitement des résultats de validation des critères (WEBER, 1999).

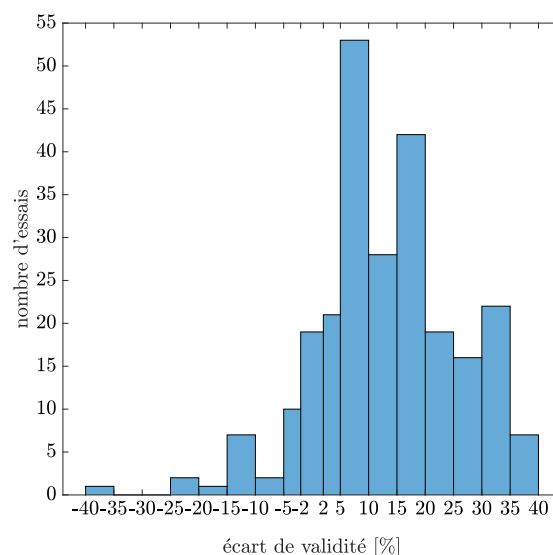


FIGURE 3.14 – Répartition des essais en fonction des écarts de validité pour le critère de Crossland. D'après (NADJITONON, 2010).

Cette comparaison à caractère global montre que les critères de l'approche intégrale sont légèrement plus justes que les critères du type plan critique. Par exemple, le critère de Zenner donne 43% des essais dans l'intervalle  $[-5\%; 5\%]$  contre 32% et 37% respectivement pour le critère de Dang Van et de Robert. Une étude complémentaire sur l'effet de la partie moyenne des contraintes et du déphasage a été menée dans (NADJITONON, 2010). Plus particulièrement les critères de Dang Van et de Fogue ont été confrontés. Les deux critères prennent en compte l'effet néfaste d'une contrainte moyenne en traction. la fonction de fatigue pour le critère de Dang Van passe de 0,76 à 1,015 respectivement pour un essai sans et avec contraintes moyennes. Le critère de Fogue est légèrement plus sensible à l'effet des contraintes moyennes en passant de 0,6 à 1,063. Globalement le critère de Dang Van est alors satisfaisant. Néanmoins, dans le cas de sollicitations non proportionnelles, il est possible que la structure admette plusieurs plans critiques selon les critères du type plan critique.

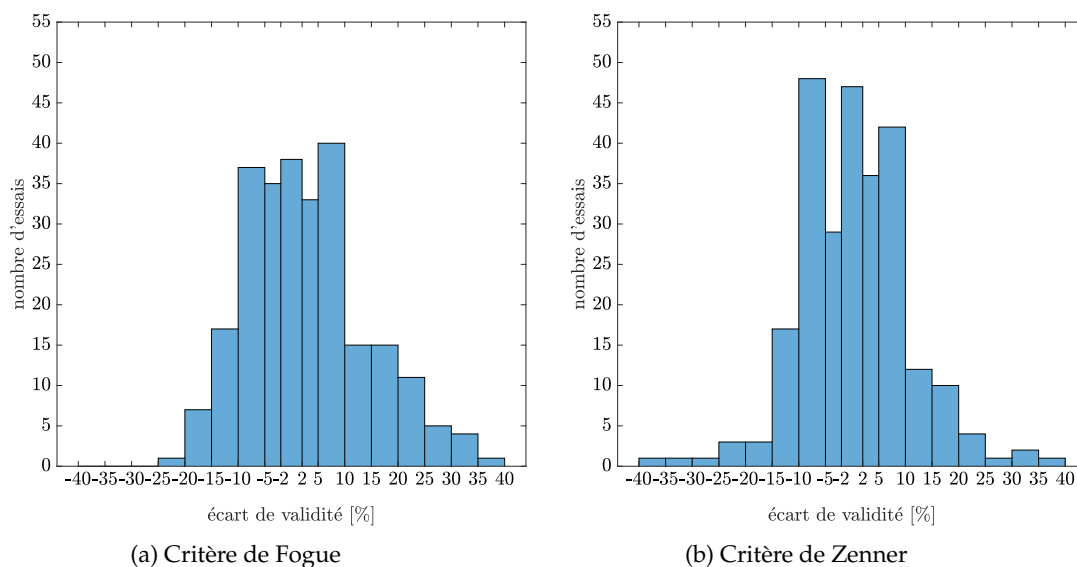


FIGURE 3.15 – Répartition des essais en fonction des écarts de validité pour les critères appartenant à l'approche intégrale. D'après (NADJITONON, 2010).

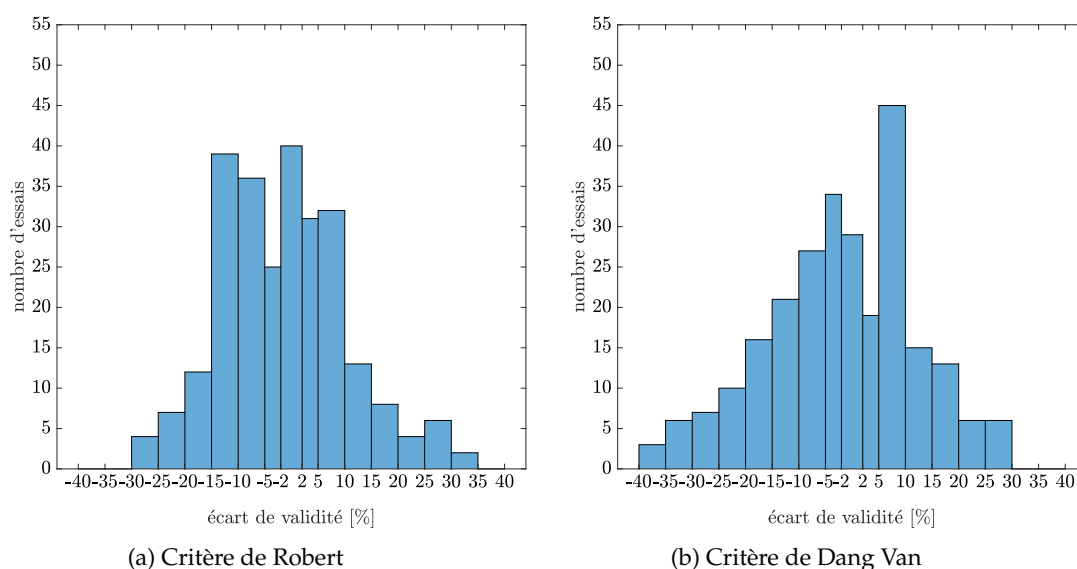


FIGURE 3.16 – Répartition des essais en fonction des écarts de validité pour les critères du type plan critique. D'après (NADJITONON, 2010).

La question du plan réellement le plus endommageant se pose alors. De plus, en isolant parmi les 259 essais, les essais avec états de contraintes proportionnels et non proportionnels, on remarque que contrairement aux critères de l'approche intégrale, le critère de Dang Van perd considérablement en justesse (Tableau 3.3). Lorsque le chargement est proportionnel les critères de Dang Van, Zenner et Fogue sont pratiquement équivalents (Tableau 3.4).

Pour résumer, les critères de Dang Van (plan critique), Zenner et Fogue (approche intégrale) sont plutôt satisfaisants globalement. Néanmoins, lorsqu'il s'agit de chargements non proportionnels, les critères appartenant à l'approche intégrale sont plus performants.

| Critères  | Non conservatif   |             | Juste                   |             | Conservatif      |             |
|-----------|-------------------|-------------|-------------------------|-------------|------------------|-------------|
|           | $\Delta I < -5\%$ |             | $-5\% < \Delta I < 5\%$ |             | $\Delta I > 5\%$ |             |
|           | Nombre            | Pourcentage | Nombre                  | Pourcentage | Nombre           | Pourcentage |
| Crossland | 13                | 5%          | 50                      | 19%         | 196              | 76%         |
| Fogues    | 62                | 24%         | 106                     | 41%         | 91               | 35%         |
| Zenner    | 74                | 29%         | 112                     | 43%         | 73               | 28%         |
| Robert    | 98                | 38%         | 96                      | 37%         | 65               | 25%         |
| Dang Van  | 91                | 35%         | 82                      | 32%         | 86               | 33%         |

TABLEAU 3.2 – Caractérisation des critères de fatigue du point de vue de la justesse. Inspiré de (NADJITONON, 2010).

| Critères | Non conservatif   |             | Juste                   |             | Conservatif      |             |
|----------|-------------------|-------------|-------------------------|-------------|------------------|-------------|
|          | $\Delta I < -5\%$ |             | $-5\% < \Delta I < 5\%$ |             | $\Delta I > 5\%$ |             |
|          | Nombre            | Pourcentage | Nombre                  | Pourcentage | Nombre           | Pourcentage |
| Fogues   | 23                | 24%         | 43                      | 45%         | 30               | 31%         |
| Zenner   | 30                | 31%         | 38                      | 40%         | 28               | 29%         |
| Dang Van | 30                | 31%         | 24                      | 25%         | 42               | 44%         |

TABLEAU 3.3 – Répartition des essais et caractérisation des critères de fatigue pour des chargements non proportionnels. Inspiré de (NADJITONON, 2010).

| Critères | Non conservatif   |             | Juste                   |             | Conservatif      |             |
|----------|-------------------|-------------|-------------------------|-------------|------------------|-------------|
|          | $\Delta I < -5\%$ |             | $-5\% < \Delta I < 5\%$ |             | $\Delta I > 5\%$ |             |
|          | Nombre            | Pourcentage | Nombre                  | Pourcentage | Nombre           | Pourcentage |
| Fogues   | 39                | 24%         | 63                      | 39%         | 61               | 37%         |
| Zenner   | 44                | 27%         | 74                      | 45%         | 45               | 28%         |
| Dang Van | 61                | 37%         | 58                      | 36%         | 44               | 27%         |

TABLEAU 3.4 – Répartition des essais et caractérisation des critères de fatigue pour des chargements proportionnels. Inspiré de (NADJITONON, 2010).

Il faut tout de même garder en tête que les critères de l'approche intégrale tout comme la première version du critère de Dang Van nécessitent de parcourir l'ensemble des plans physiques pour calculer la fonction de fatigue. Or, la démarche de cette thèse est d'explorer le comportement en fatigue

structurale du rail. Pour cela, il est pertinent d'étudier la fatigue de plusieurs sections du rail. Enfin, l'utilisation industrielle de l'outil développé nécessite des temps de calcul relativement faibles. La deuxième version du critère de Dang Van répond au mieux au besoin industriel. Elle évite de parcourir les plans physiques engendrant ainsi un gain considérable au niveau du temps de calcul. C'est pourquoi, dans ce qui suit le critère de Dang Van est choisi et est développé. D'ailleurs, il s'agit d'un des critères les plus utilisés en France et notamment à la SNCF comme on peut le remarquer dans les travaux de (MAC-LAN et al., 2016).

### 3.3.4 Le critère de Dang Van

Le critère de Dang Van a été initié en 1973. L'idée était de proposer un modèle de fatigue multiaxial en s'appuyant sur ce qui se passe à l'échelle du grain (VAN, 1973). Dans le cadre de la fatigue à grand nombres de cycles, le champ des contraintes à l'échelle macroscopique est élastique. Par contre, à l'échelle mésoscopique, le matériau, qui est constitué de cristaux aléatoirement orientés, est anisotrope et hétérogène. Dang Van a émis l'hypothèse que les grains obéissent aux lois d'écrouissage isotrope et cinématique (VAN, LE DOUARON et LIEURADE, 1984). De ce fait, des contraintes résiduelles mésoscopiques sont observées et de la plasticité peut être observée par apparition de bandes de glissement localisées dans les grains les plus défavorablement orientés. Un mécanisme d'adaptation se met en place localement. Il s'agit de déformations plastiques et un écrouissage qui tendent vers des valeurs constantes après un temps  $t$  suffisamment grand (MAITOURNAM, 2015). Ce n'est qu'à partir de ce moment que des micro-fissures apparaissent dans le grain le plus défavorablement orienté. Ces micro-fissures fusionnent entre elles pour former des fissures détectables à l'échelle macroscopique et qui se propagent ensuite jusqu'à la rupture de la structure (BALLARD et al., 1995).

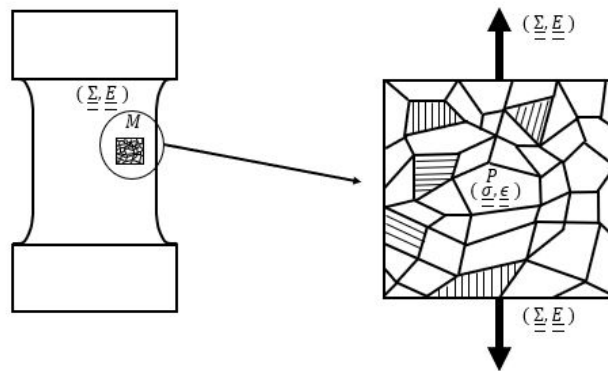


FIGURE 3.17 – Échelles macroscopique et mésoscopique d'un métal polycristallin.  
D'après (MAITOURNAM, 2015).

Comme le montre la Figure 3.17, autour de tout point M de la structure, un volume élémentaire représentatif  $V(M)$  est défini. C'est un milieu homogène et isotrope ayant à peu près la taille d'une maille éléments finis. Dans ce volume, le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}(M,t)$  et le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}(M,t)$  macroscopiques sont définis. Il s'agit de l'échelle macroscopique. Dans le cas des métaux, le volume  $V(M)$  est constitué de plusieurs grains de différentes formes et orientations. Leurs

comportements mécaniques sont définis par des contraintes mésoscopiques  $\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{m}, t)$  et des déformations mésoscopiques  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{m}, t)$  où le point  $\mathbf{m}$  désigne la position du grain dans le volume  $V(\mathbf{M})$ . Par ailleurs, l'échelle du grain est appelée échelle mésoscopique. La relation de passage vers l'échelle mésoscopique est donnée par l'équation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{m}, t) = \underline{\underline{\mathcal{A}}}(\mathbf{M}, \mathbf{m}) : \underline{\underline{\Sigma}}(\mathbf{M}, t) + \underline{\underline{\rho}}(\mathbf{m}, t) \quad (3.37)$$

elle fait intervenir le tenseur de localisation des contraintes  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}(\mathbf{M}, \mathbf{m})$  qui associe à la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}(\mathbf{M}, t)$ , la partie élastique de la contrainte mésoscopique (équation (3.38)).  $\underline{\underline{\rho}}$  désigne le champ des contraintes résiduelles mésoscopiques.

$$\underline{\underline{\sigma}}^e(\mathbf{m}, t) = \underline{\underline{\mathcal{A}}}(\mathbf{M}, \mathbf{m}) : \underline{\underline{\Sigma}}(\mathbf{M}, t) \quad (3.38)$$

La détermination de la contrainte mésoscopique nécessite donc la connaissance de  $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$  et de  $\underline{\underline{\rho}}$ . Dans le cas de la fatigue polycyclique (i.e. à grand nombres de cycles), les hypothèses du modèle de Lin-Taylor introduites dans (BALLARD et al., 1995 ; MAITOURNAM, 2015) et listées ci-dessous permettent d'évaluer ces grandeurs :

- la déformation du grain est la même que la déformation de la matrice qui l'entoure (i.e. volume élémentaire  $V(\mathbf{M})$ ), les exposants  $^e$  et  $^p$  font respectivement référence aux quantités élastiques et plastiques ;

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}}^e + \underline{\underline{\mathcal{E}}}^p = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (3.39)$$

- la déformation macroscopique de la structure est purement élastique ;

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}} = \underline{\underline{\mathcal{E}}}^e = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (3.40)$$

- le grain et la matrice sont isotropes et possèdent les mêmes coefficients élastiques (i.e. les coefficients de Lamé  $\mu$  et  $\lambda$ ).  $\underline{\underline{L}}$  et  $\underline{\underline{l}}$  sont les tenseurs d'élasticité macroscopique et mésoscopique.

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{l}} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \quad (3.41)$$

En ajoutant à la dernière hypothèse que le tenseur des déformations plastiques mésoscopiques est déviatorique (i.e. déformations sans changement de volume), l'équation ci-dessous est écrite.

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\mathcal{E}}}^e = \underline{\underline{l}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + 2 \mu \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (3.42)$$

Or les contributions élastiques et plastiques du tenseur des déformations sont définies par le système suivant :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^p(\mathbf{m}, t) &= \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{m}, t) - \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{m}, t) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\mathbf{m}, t) &= \underline{\underline{l}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{m}, t) \end{cases} \quad (3.43)$$

Il est donc possible d'écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}} - 2 \mu \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (3.44)$$

La comparaison des relations (3.37) et (3.44) permet de quantifier le tenseur de localisation  $\underline{\underline{A}}$  et la contrainte résiduelle  $\underline{\underline{\rho}}$  :

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}}(M,m) &= \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{\rho}}(m,t) &= -2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}^p \end{cases} \quad (3.45)$$

La détermination du comportement à l'échelle mésoscopique revient donc au calcul de la contrainte résiduelle mésoscopique  $\underline{\underline{\rho}}$ .

D'après Dang Van et al. (VAN, LE DOUARON et LIEURADE, 1984), localement le grain s'adapte avant de fatiguer. Dans ce sens, le théorème de Melan stipule qu'après un certain temps  $t_1$ , il existe un champ des contraintes résiduelles mésoscopiques  $\underline{\underline{\rho}}^*$  indépendant du temps. Il est connu sous le nom de champ de contraintes résiduelles mésoscopiques à l'état adapté tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}}(m,t) = \underline{\underline{\Sigma}}(M,t) + \underline{\underline{\rho}}^*(m) \quad (3.46)$$

La détermination du tenseur des contraintes mésoscopiques revient donc à déterminer  $\underline{\underline{\rho}}^*$  qui n'est autre que l'opposé<sup>2</sup> du centre de l'hypersphère  $\underline{\underline{c}}^*$  circonscrite au trajet de chargement dans l'espace des déviateurs de dimension 5. Cet espace est caractérisé par sa surface de charge qui est convexe. La surface de charge est en général visualisée dans le repère principal des contraintes, on cite comme exemples les surfaces du critère de von Mises ou de Tresca. On rappelle que l'état des contraintes est élastique à l'intérieur de la surface. Lorsqu'il atteint la surface de charge, la loi de comportement du matériau devient plastique.

La projection des états de contraintes à chaque instant du cycle dans l'espace des déviateurs constitue le trajet de chargement. le centre de l'hypersphère étant connu, il est possible de remonter au cisaillement maximal  $\tau(t)$  calculé par l'équation (3.31).

On rappelle que le critère de Dang Van est alors exprimé par la fonction de fatigue  $E_{DV}$  :

$$E_{DV} = \max_t \frac{\tau(t) + \alpha_{DV} P(t)}{\beta_{DV}} \quad (3.47)$$

La pression hydrostatique macroscopique  $P(t)$  est égale à pression mésoscopique  $p(t)$ . En effet, les déformations plastiques se font sans changement de volume ce qui engendre un tenseur déviatorique des contraintes résiduelles  $\underline{\underline{\rho}}^*$  de trace nulle.

$$P(t) = \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{\Sigma}}) = \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{\sigma}}) = p(t) \quad (3.48)$$

La détermination du centre de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement  $\underline{\underline{c}}^*$  se fait par la résolution d'un problème Min-Max :

$$\underline{\underline{c}}^* = \underset{\underline{\underline{c}}}{\operatorname{argmin}} \max_t \|\underline{\underline{S}}(t) - \underline{\underline{c}}\|_2 \quad (3.49)$$

Plusieurs algorithmes ont été développés dans la littérature pour la recherche de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement. Les premières contributions ont été apportées par Dang

---

2.  $\underline{\underline{\rho}}^* = -\underline{\underline{c}}^*$ .



Van (VAN, 1973) et Papadopoulos (PAPADOPOULOS, 1987) en proposant un algorithme de combinaison des points. Dang Van (VAN, GRIVEAU et MESSAGE, 1989) ont ensuite présenté une méthode incrémentale qui est justifiée par des considérations physiques. Ultérieurement, des algorithmes de résolution du problème d'optimisation Min-Max ont été proposés pour résoudre le problème Min-Max (3.49). On cite la méthode d'optimisation quadratique successive (ZHOU et TITS, 1993) ou la méthode similaire minimax de Bernasconi (BERNASCONI, 2002).

Parmi les algorithmes listés, il est difficile d'allier efficacité et précision des calculs. Par exemple, les algorithmes de combinaison des points peuvent engendrer des temps de calcul importants pour des problèmes de tailles conséquentes. La précision de la méthode incrémentale et des méthodes d'optimisation dépend des tolérances de convergence ainsi que des paramètres des algorithmes. Pour une meilleure précision des calculs et lorsque le trajet de chargement présente un nombre important de points (i.e. pas de temps plus fins), Bernasconi (BERNASCONI, 2002) recommande l'utilisation des méthodes d'optimisation minimax par rapport à la méthode incrémentale.

Scalet (SCALET, 2018) a adapté l'algorithme des directions alternées ADA pour des problématiques de fatigue multiaxiale. La motivation majeure de ces travaux était de proposer un algorithme efficace et facile à implémenter mais qui offre tout de même des résultats précis pour un large panel de problèmes.

Une comparaison de ces méthodes est proposée dans (SCALET, 2018) sur le cas d'un problème de fatigue de contact. L'algorithme ADA est comparé aux algorithmes quadprog (i.e. méthodes des points intérieurs) et fminimax disponibles dans Matlab (MATLAB, 2021). La solution de référence est prise comme étant celle de (BERNASCONI, 2002) et les termes  $\underline{c}_i^*$  sont les coordonnées du centre de l'hypersphère dans l'espace des déviateurs.

Les résultats du Tableau 3.5 montrent que l'algorithme ADA donne des résultats très proches de ceux donnés par les algorithmes fminimax et quadprog et avec un temps de calcul nettement moins important, ce qui en fait un excellent candidat pour la résolution du problème (3.49).

|                     | Solution de référence | Algorithme fminimax | Algorithme quadprog | Algorithme ADA  |
|---------------------|-----------------------|---------------------|---------------------|-----------------|
| $\underline{c}_1^*$ | -0,58890E + 02        | -0,585271E + 02     | -0,585271E + 02     | -0,585271E + 02 |
| $\underline{c}_2^*$ | -0,67874E + 01        | -0,656440E + 01     | -0,656473E + 01     | -0,656474E + 01 |
| $\underline{c}_3^*$ | -0,77106E - 01        | -0,856729E + 00     | -0,856589E + 00     | -0,856588E + 00 |
| $\underline{c}_4^*$ | 0,13718E - 02         | 0,459378E - 01      | 0,460000E - 01      | 0,459999E - 01  |
| $\underline{c}_5^*$ | 0,21096E + 00         | 0,157066E + 00      | 0,156950E + 00      | 0,156950E + 00  |
| Temps de calcul [s] | -                     | 0,3584              | 0,2353              | 0,0138          |

TABLEAU 3.5 – Comparaison des algorithmes d'optimisation en termes d'efficacité et de précision des résultats (SCALET, 2018).

Ainsi, on introduit d'abord l'algorithme de combinaison des points à l'aide duquel la première version du critère de Dang Van est calculée. Puis, la résolution du problème d'optimisation par la

méthode ADA est présentée. Elle permet d'utiliser la deuxième version du critère de Dang Van. L'idée est de comparer les deux algorithmes en termes de précision et d'efficacité.

### 3.3.4.1 Algorithme des combinaisons des points

C'est l'une des méthodes utilisées pour chercher le plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement sur un plan physique donné. Ce cercle existe et est unique par définition (MAITOURNAM, 2015).

Un algorithme a été proposé par (PAPADOPOULOS, 1998). Dans un premier temps, tous les cercles ayant pour diamètre le segment joignant deux points quelconques du trajet de chargement sont construits. Dans un deuxième temps, chaque cercle circonscrit à un triangle formé de trois points quelconques du trajet de chargement est construit. Le nombre de cercles construits est de  $n_D + n_T$  où  $n_D = \frac{N(N-1)}{2}$  et  $n_T = \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$  sont respectivement le nombre de combinaisons de deux points et de trois points parmi les  $N$  points constituant le trajet de chargement. En effet, à l'exception de quelques cas où l'état de contraintes peut être calculé de manière analytique, l'état de contrainte est très souvent déterminé de manière discrète sur plusieurs instants (i.e. modélisation éléments finis). À chaque instant discret  $t_j$ , l'état de contraintes est donc connu. De ce fait, le trajet de chargement obtenu sur un plan physique par projection de l'état de contraintes est une approximation du trajet réel. Ce trajet de chargement est d'autant plus fidèle au trajet de chargement réel que le nombre de pas de temps est important. La Figure 3.18 illustre l'écart entre le trajet de chargement réel et le trajet de chargement discret.

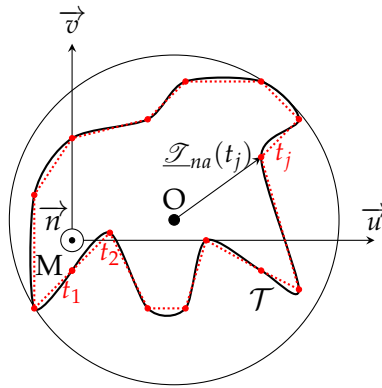


FIGURE 3.18 – Écart entre le trajet de chargement réel et le trajet de chargement discret.

Lorsque les cercles sont tracés, on vérifie pour chaque cercle si tous les points du chargement y sont contenus. Plusieurs cercles peuvent vérifier cette condition. Le cercle retenu est celui de plus petit rayon. Il est appelé plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement. L'avantage de cette méthode est qu'elle donne des résultats exactes sous réserve d'une bonne discrétisation temporelle. Par contre, le nombre de cercles examinés devient rapidement important. On rappelle que cette procédure de recherche du plus petit cercle est à réaliser sur plusieurs plans physiques liés à un point matériel  $M$  de la structure. Ce point matériel représente très souvent un nœud du maillage. Le temps de calcul peut donc très vite devenir important.

Une procédure plus rapide a été ensuite proposée dans (WEBER et al., 1999). Ces étapes sont résumées dans la Figure 3.19.

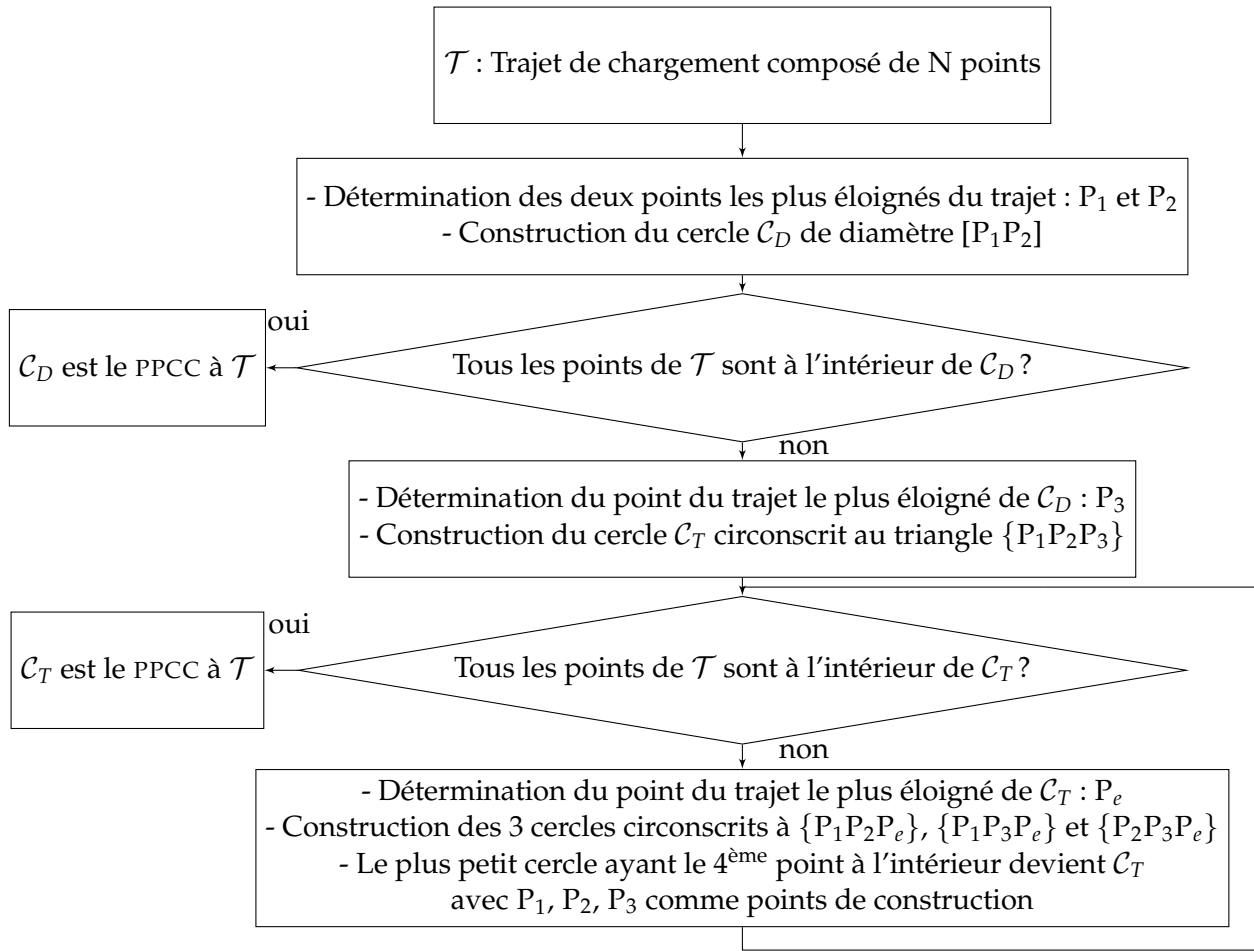


FIGURE 3.19 – Procédure pour le calcul du plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement PPCC (WEBER et al., 1999).

La première étape consiste à trouver parmi tous les points du trajet de chargement, les deux points les plus éloignés l'un de l'autre  $P_1$  et  $P_2$ . Le cercle  $\mathcal{C}_D$  de diamètre  $[P_1 P_2]$  est ensuite construit. Le centre  $O_D$  de  $\mathcal{C}_D$  est bien évidemment le milieu du segment  $[P_1 P_2]$ . Dans le cas où plusieurs paires de points sont éloignés de la même distance maximale, la procédure traite la première paire rencontrée. La deuxième étape est de vérifier si tous les points du trajet de chargement sont inclus dans le cercle  $\mathcal{C}_D$ . Pour cela, la condition suivante doit être respectée :

$$O_D P_j \leq R_D \quad \text{pour } j \in [1; N] \quad (3.50)$$

où  $P_j$  est un point quelconque du trajet de chargement et  $R_D$  est le rayon du cercle  $\mathcal{C}_D$ . Si tous les points du trajet de chargement appartiennent au cercle  $\mathcal{C}_D$  alors ils s'agit du plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement. Si ce n'est pas le cas, le point  $P_3$  est considéré il s'agit du point du trajet le plus éloigné du cercle  $\mathcal{C}_D$  ou en terme équivalent du centre  $O_D$ . La troisième étape est alors de construire le cercle  $\mathcal{C}_T$  circonscrit au triangle  $\{P_1 P_2 P_3\}$ . Le centre  $O_t$  de ce cercle est défini comme étant l'intersection des trois médiatrices du triangle  $\{P_1 P_2 P_3\}$ . Le cercle  $\mathcal{C}_T$  étant complètement défini, il faut vérifier si tous les points du trajet de chargement sont inclus dans le cercle. La condition suivante est donc vérifiée :

$$O_T P_j \leq R_T \quad \text{pour } j \in [1; N] \quad (3.51)$$

$R_T$  est le rayon du cercle  $\mathcal{C}_T$ . Si tous les points du trajet de chargement appartiennent au cercle  $\mathcal{C}_T$  alors il s'agit du plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement. Sinon, le point  $P_e$  est défini. Il s'agit du point du trajet de chargement le plus éloigné du cercle  $\mathcal{C}_T$  et donc de son centre  $O_T$ .

À ce stade, quatre points du trajet constituent le set  $S = \{P_1, P_2, P_3, P_e\}$ . Quatre combinaisons de triangle peuvent en être tirées. Ce sont les triangles  $\{P_1 P_2 P_3\}$ ,  $\{P_1 P_2 P_e\}$ ,  $\{P_2 P_3 P_e\}$  et  $\{P_1 P_3 P_e\}$ . La dernière étape consiste à construire pour chaque triangle son cercle circonscrit. L'idée est de trouver le plus petit cercle d'entre eux qui contient le quatrième point complétant le set  $S$  (i.e.  $P_e$  pour  $\{P_1 P_2 P_3\}$ ,  $P_3$  pour  $\{P_1 P_2 P_e\}$ ,  $P_1$  pour  $\{P_2 P_3 P_e\}$  et  $P_2$  pour  $\{P_1 P_3 P_e\}$ ). Le premier cercle circonscrit au triangle  $\{P_1 P_2 P_3\}$  n'est autre que le cercle  $\mathcal{C}_T$  qui a déjà été étudié. Il est donc écarté.

L'existence de la solution est assurée parmi les trois cercles passant par  $\{P_1 P_2 P_e\}$ ,  $\{P_2 P_3 P_e\}$  et  $\{P_1 P_3 P_e\}$ . Le plus petit cercle d'entre eux vérifiant l'appartenance du quatrième point est appelé  $\mathcal{C}'_T$ . On vérifie donc si tous les points du chargement sont inclus dans ce cercle. Si c'est le cas, alors le cercle  $\mathcal{C}'_T$  est le plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement. Autrement, la dernière étape est répétée. Le cercle  $\mathcal{C}'_T$  redevient le cercle  $\mathcal{C}_T$  et les points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  reçoivent les points du triangle qui formaient le triangle  $\mathcal{C}'_T$ . Le nouveau point  $P_e$  du trajet de chargement qui est le plus éloigné du cercle  $\mathcal{C}_T$  est considéré et un nouveau set  $S$  est formé pour chercher parmi les trois cercles circonscrits aux triangles du set, le plus petit d'entre eux incluant le quatrième point. Pour ce dernier cercle, on vérifie que l'ensemble des points du trajet de chargement y sont inclus. La procédure est stoppée dès que l'ensemble des points du trajet de chargement sont inclus dans le cercle  $\mathcal{C}_T = \mathcal{C}'_T$ . La convergence de la solution est assurée par le fait que le nombre de points constituant le trajet de chargement est fini.

Bien que cette méthode soit plus rapide que la méthode de Papadopoulos, elle reste encore peu adaptée pour une utilisation industrielle car elle nécessite à chaque boucle d'examiner tous les points du trajet de chargement. En combinant cela avec la considération de plusieurs plans physiques, les temps de calcul peuvent devenir importants.

### 3.3.4.2 Résolution du problème d'optimisation par la méthode ADA

L'algorithme ADA exploite les méthodes du Lagrangien augmenté et il est généralement utilisé dans des problèmes d'optimisation convexes. Le problème d'optimisation (3.49) peut être simplifié en projetant le déviateur du tenseur des contraintes macroscopiques  $\underline{S}$  dans l'espace des déviateurs. Le vecteur  $\underline{S}$  de dimension 5 peut être défini comme (BERNASCONI, 2002) :

$$\underline{S} = \left( \frac{1}{2} (S_{xx} - S_{yy}) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} (S_{xx} + S_{yy}) \quad S_{xy} \quad S_{xz} \quad S_{yz} \right)^T \quad (3.52)$$

ainsi le problème (3.49) se ramène à la définition suivante :

$$\underline{c}^* = \underset{\underline{c}}{\operatorname{argmin}} \max_t \|\underline{S}(t) - \underline{c}\|_2 \quad (3.53)$$

ou encore :

$$\begin{cases} \underline{c}^* &= \underset{\underline{c}}{\operatorname{argmin}} F(\underline{c}) \\ f(\underline{c}) &= \frac{1}{2} \max_t \|\underline{S}(t) - \underline{c}\|_2^2 \end{cases} \quad (3.54)$$

La fonction  $f(\underline{c}) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction quadratique, strictement convexe et coercive pour tout  $\underline{S} \in \mathbb{R}^5$ . Elle admet donc une solution unique (SCALET, 2018), ce qui veut dire que la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement est unique. La fonction  $f(\underline{c})$  peut être développée davantage :

$$\begin{aligned} f(\underline{c}) &= \max_{j \in [1; N]} \frac{1}{2} \|\underline{S}_j - \underline{c}\|_2^2 \\ &= \max_{j \in [1; N]} \left\{ \frac{1}{2} \|\underline{c}\|_2^2 - \langle \underline{S}_j, \underline{c} \rangle + \frac{1}{2} \|\underline{S}_j\|_2^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \|\underline{c}\|_2^2 + \max_{j \in [1; N]} \left\{ -\langle \underline{S}_j, \underline{c} \rangle + \frac{1}{2} \|\underline{S}_j\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

où  $N$  représente le nombre de pas de temps dans une période. Une variable scalaire d'optimisation  $p \in \mathbb{R}$  est introduite pour traduire le problème non contraint (3.54), (3.55) en un problème équivalent de minimisation contraint :

$$\begin{aligned} (\underline{c}^*, p^*) &= \underset{\underline{c} \in \mathbb{R}^5, p \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \|\underline{c}\|_2^2 + p \right\} \\ \text{tel que } p &\geq -\langle \underline{S}_j, \underline{c} \rangle + \frac{1}{2} \|\underline{S}_j\|_2^2 \quad \text{pour } j \in [1; N] \end{aligned} \quad (3.56)$$

L'intérêt de cette transformation est de découpler la fonction  $f(\underline{c})$  en deux parties qui dépendent de deux variables différentes. De plus, la méthode ADA traite des problèmes de minimisation contraints.

En introduisant le vecteur  $\underline{y} = (\underline{c}, p) \in \mathbb{R}^6$ , le problème (3.56) peut s'écrire sous une forme générale :

$$\underline{y}^* = \underset{\underline{y} \in \mathbb{R}^6}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \underline{y}^T \underline{H} \underline{y} + \underline{q}^T \underline{y} \right\} \quad \text{tel que } \underline{A} \underline{y} \leq \underline{b} \quad (3.57)$$

La matrice Hessienne  $\underline{H} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ , le vecteur  $\underline{q} \in \mathbb{R}^6$ , la matrice  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{N \times 6}$  et le vecteur  $\underline{b} \in \mathbb{R}^N$  sont définis par :

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = - \begin{pmatrix} \underline{S}_1^T & 1 \\ \underline{S}_2^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{S}_N^T & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \|\underline{S}_1\|_2^2 \\ \|\underline{S}_2\|_2^2 \\ \vdots \\ \|\underline{S}_N\|_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

L'algorithme basé sur la méthode ADA a pour but de résoudre le problème décrit par les équations (3.57) et (3.58) en divisant le problème avec contraintes en une suite de sous problèmes sans contraintes résolus chacun en minimisant la fonction du Lagrangien augmenté associée.

Comme la méthode du Lagrangien augmenté ne traite que les problèmes avec contraintes d'égalité, le problème (3.57) à (3.58) est réécrit en transformant la contrainte d'inégalité en contrainte d'égalité

par introduction d'une variable  $\underline{z} \in \mathbb{R}^N$  :

$$\begin{cases} \{\underline{y}^*, \underline{z}^*\} &= \underset{\underline{y} \in \mathbb{R}^6, \underline{z} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \{ \frac{1}{2} \underline{y}^T \underline{H} \underline{y} + \underline{q}^T \underline{y} + l_{\mathcal{Z}}(\underline{z}) \} \quad \text{tel que} \quad \underline{z} = \underline{A} \underline{y} \\ \mathcal{Z} &= \{ \underline{z} \in \mathbb{R}^N ; \underline{z} \leq \underline{b} \} \end{cases} \quad (3.59)$$

La fonction  $l_{\mathcal{Z}} : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est la fonction indicatrice définie par :

$$l_{\mathcal{Z}}(\underline{z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{z} \in \mathcal{Z} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.60)$$

La méthode du Lagrangien augmenté résout le problème ci-dessous équivalent au problème (3.59) :

$$\begin{cases} \{\underline{y}^*, \underline{z}^*\} &= \underset{\underline{y} \in \mathbb{R}^6, \underline{z} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(\underline{y}, \underline{z}, \underline{\lambda}_m) \quad \text{sachant que :} \\ \mathcal{L}(\underline{y}, \underline{z}, \underline{\lambda}_m) &= \frac{1}{2} \underline{y}^T \underline{H} \underline{y} + \underline{q}^T \underline{y} + l_{\mathcal{Z}}(\underline{z}) - \langle \underline{\lambda}_m, \underline{z} - \underline{A} \underline{y} \rangle + \frac{\beta}{2} \|\underline{z} - \underline{A} \underline{y}\|_2^2 \end{cases} \quad (3.61)$$

$\beta > 0$  est appelé paramètre de pénalité et  $\underline{\lambda}_m \in \mathbb{R}^N$  est la variable duale ou le vecteur multiplicateur de Lagrange.

La minimisation de la fonction du Lagrangien augmenté se fait de manière itérative puis séquentielle à chaque itération. L'algorithme se décompose en 4 étapes présentées ci-dessous :

1.  $\underline{\lambda}_m^{(k)}$  et  $\underline{y}^{(k)}$  sont connus de l'itération précédente ;
2. minimiser  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\underline{z}$  en fixant  $\underline{y}$  et  $\underline{\lambda}_m$  :

$$\begin{aligned} \underline{z}^{(k+1)} &= \underset{\underline{z} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(\underline{y}^{(k)}, \underline{z}, \underline{\lambda}_m^{(k)}) \\ &= \underset{\underline{z} \in \mathcal{Z}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \underline{y}^{(k)T} \underline{H} \underline{y}^{(k)} + \underline{q}^T \underline{y}^{(k)} + l_{\mathcal{Z}}(\underline{z}) - \langle \underline{\lambda}_m^{(k)}, \underline{z} - \underline{A} \underline{y}^{(k)} \rangle + \frac{\beta}{2} \|\underline{z} - \underline{A} \underline{y}^{(k)}\|_2^2 \right\} \\ &= \underset{\underline{z} \in \mathcal{Z}}{\operatorname{argmin}} \left\{ l_{\mathcal{Z}}(\underline{z}) - \langle \underline{\lambda}_m^{(k)}, \underline{z} - \underline{A} \underline{y}^{(k)} \rangle + \frac{\beta}{2} \|\underline{z} - \underline{A} \underline{y}^{(k)}\|_2^2 \right\} \\ &= \underset{\underline{z} \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\beta}{2} \left\| \underline{z} - \left( \underline{A} \underline{y}^{(k)} + \frac{1}{\beta} \underline{\lambda}_m^{(k)} \right) \right\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.62)$$

L'équation (3.62) combinée avec l'équation (3.59) traduit la distance minimale du vecteur  $\left( \underline{A} \underline{y}^{(k)} + \frac{1}{\beta} \underline{\lambda}_m^{(k)} \right)$  de l'ensemble  $\mathcal{Z}$ . Elle peut être remplacée par l'expression :

$$\underline{z}^{(k+1)} = \min \left\{ \underline{A} \underline{y}^{(k)} + \frac{1}{\beta} \underline{\lambda}_m^{(k)}, \underline{b} \right\} \quad (3.63)$$

3. minimiser  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\underline{y}$  en fixant  $\underline{z}$  et  $\underline{\lambda}_m$  :

$$\begin{aligned}\underline{y}^{(k+1)} &= \underset{\underline{y} \in \mathbb{R}^6}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L} \left( \underline{y}, \underline{z}^{(k+1)}, \underline{\lambda}_m^{(k)} \right) \\ &= \underset{\underline{y} \in \mathbb{R}^6}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \underline{y}^T \underline{H} \underline{y} + \underline{q}^T \underline{y} + l_z \left( \underline{z}^{(k+1)} \right) - \langle \underline{\lambda}_m^{(k)}, \underline{z}^{(k+1)} - \underline{A} \underline{y} \rangle + \frac{\beta}{2} \|\underline{z}^{(k+1)} - \underline{A} \underline{y}\|_2^2 \right\} \\ &= \underset{\underline{y} \in \mathbb{R}^6}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \underline{y}^T \underline{H} \underline{y} + \underline{q}^T \underline{y} + \langle \underline{\lambda}_m^{(k)}, \underline{A} \underline{y} \rangle + \frac{\beta}{2} \|\underline{z}^{(k+1)} - \underline{A} \underline{y}\|_2^2 \right\}\end{aligned}\quad (3.64)$$

L'équation (3.64) admet une condition d'optimalité de premier ordre (SCALET, 2018), soit une dérivée par rapport à  $\underline{y}$  nulle. Il en découle la relation suivante :

$$\begin{cases} \underline{y}^{(k+1)} &= \underline{G}^{-1} \underline{A}^T \left( \underline{z}^{(k+1)} - \frac{1}{\beta} \underline{\lambda}_m^{(k)} \right) - \frac{1}{\beta} \underline{G}^{-1} \underline{q} \\ \underline{G} &= \underline{A}^T \underline{A} + \frac{1}{\beta} \underline{H} \end{cases}\quad (3.65)$$

L'unicité de la solution (3.65) est assurée par le fait que  $\underline{G} \in \mathbb{R}^6$  est une matrice symétrique définie positive.

4. actualiser la variable duale  $\underline{\lambda}_m$  :

$$\underline{\lambda}_m^{(k+1)} = \underline{\lambda}_m^{(k)} - \delta \beta \left( \underline{z}^{(k+1)} - \underline{A} \underline{y}^{(k+1)} \right)\quad (3.66)$$

Le paramètre  $\delta \geq 1$  est un paramètre de relaxation qui est utilisé pour améliorer la convergence. Il prend en général des valeurs de l'intervalle  $[1,5; 1,8]$  (SCALET, 2018). Les itérations se poursuivent jusqu'à ce que la condition de convergence soit satisfaite. Le paramètre  $\epsilon$  est donc défini :

$$\epsilon = \frac{\|\underline{y}^{(k+1)} - \underline{y}^{(k)}\|_2}{\|\underline{y}^{(k)}\|_2} < \epsilon^{\text{ADA}}\quad (3.67)$$

Des valeurs  $\beta$  positives assurent la convergence de la méthode ADA. Par contre, le choix du paramètre  $\beta$  est très important car il pilote la vitesse de convergence (SCALET, 2018).

Le schéma de l'algorithme qui s'appuie sur la méthode ADA est proposée ci-dessous.

Le centre de la plus petite hypersphère  $\underline{c}^* = \underline{y}^*(1 : 5)$  étant calculé, on remonte à son équivalent tensoriel :

$$\begin{cases} c_{xx}^* &= c_1^* + c_2^* / \sqrt{3} \\ c_{yy}^* &= -c_1^* + c_2^* / \sqrt{3} \\ c_{zz}^* &= -\left( c_{xx}^* + c_{yy}^* \right) \\ c_{xy}^* &= c_3^* \\ c_{xz}^* &= c_4^* \\ c_{yz}^* &= c_5^* \end{cases}\quad (3.68)$$

puis à la contrainte résiduelle  $\rho^*$  :

$$\underline{\underline{c}}^* = -\underline{\underline{\rho}}^*\quad (3.69)$$

L'évaluation du critère se fait par les équations du système (3.31) après avoir déterminé le tenseur des contraintes mésoscopiques par l'équation (3.46).

---

**Algorithme 1** : Schéma de l'algorithme ADA (SCALET, 2018) pour la détermination du centre de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement.

---

**Entrées** : vecteur des contraintes déviatoriques macroscopiques  $\underline{S}_j \in \mathbb{R}^5, j \in [1; N]$

**Sorties** : Approximation de la solution  $\underline{y}^* \in \mathbb{R}^6$  du problème (3.57) et (3.58)

**Paramètres** : paramètre de pénalité  $\beta$

paramètre de relaxation  $\delta$

initialisation :  $c_i^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \max_{1 \leq j \leq N} S_{i,j} + \min_{1 \leq j \leq N} S_{i,j} \right)$  tel que  $i \in [1; 5]$  ;

$p^{(0)} = \max_{1 \leq j \leq N} \{ -\underline{S}_j^T \underline{c}^{(0)} + \|\underline{S}_j\|_2^2 \}$  ;

$\underline{\lambda}_m^{(0)} = \underline{0}$  ;

**tant que**  $\epsilon > \epsilon^{\text{ADA}}$  **faire**

    actualisation de la variable primale  $\underline{z} : \underline{z}^{(k+1)} = \min \{ \underline{A} \underline{y}^{(k)} + \frac{1}{\beta} \underline{\lambda}_m^{(k)}, \underline{b} \}$  ;

    actualisation de la variable primale  $\underline{y} : \underline{y}^{(k+1)} = \underline{G}^{-1} \underline{A}^T \left( \underline{z}^{(k+1)} - \frac{1}{\beta} \underline{\lambda}_m^{(k)} \right) - \frac{1}{\beta} \underline{G}^{-1} \underline{q}$  ;

    actualisation de la variable duale  $\underline{\lambda}_m : \underline{\lambda}_m^{(k+1)} = \underline{\lambda}_m^{(k)} - \delta \beta \left( \underline{z}^{(k+1)} - \underline{A} \underline{y}^{(k+1)} \right)$  ;

    vérification de la condition de convergence :  $\frac{\|\underline{y}^{(k+1)} - \underline{y}^{(k)}\|_2}{\|\underline{y}^{(k)}\|_2} < \epsilon^{\text{ADA}}$  ;

**fin**

---

### 3.4 Implémentation du critère de fatigue

On considère dans cette partie deux exemples. Le premier est un cas de chargement proportionnel de traction-compression biaxiale tiré des travaux de (PAPADOPOULOS, 1998). Le but de ce premier cas élémentaire est de valider l'algorithme des combinaisons des points et l'algorithme d'optimisation ADA. Le deuxième exemple présenté a pour but d'illustrer l'avantage que présente la méthode ADA par rapport à l'algorithme des combinaisons des points en termes de temps de résolution.

#### 3.4.1 Premier exemple

Le chargement proportionnel de traction-compression biaxiale tiré des travaux de (PAPADOPOULOS, 1998) a pour état de contraintes  $\underline{\Sigma}$  :

$$\underline{\Sigma}(t) = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

Les deux composantes du tenseur sont données en Figure 3.20 sur un cycle. L'avantage de ce chargement simple est qu'il présente un trajet de chargement affine sur un plan physique donné. À travers cet exemple, l'algorithme ADA qui a été implémenté sur MATLAB est confronté à l'algorithme des combinaisons des points qui a été implémenté sur CAST3M. Pour cela, le plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement est recherché dans le plan physique  $\pi$  défini par les angles  $\varphi = 45^\circ$  et  $\gamma = 30^\circ$ .



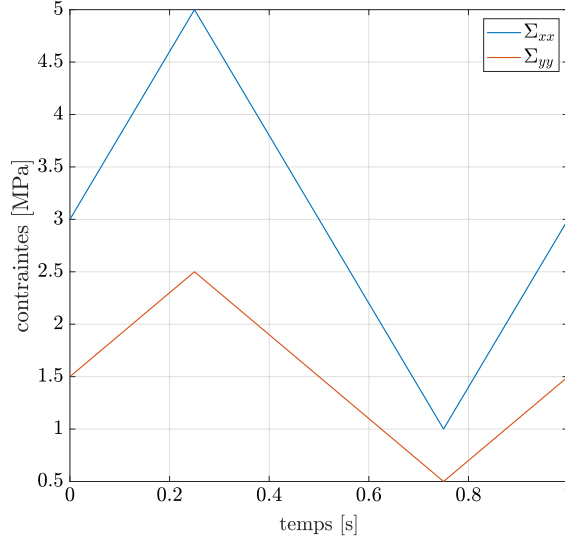


FIGURE 3.20 – Évolution temporelle des composantes  $\Sigma_{xx}$  et  $\Sigma_{yy}$  du chargement sur une période de temps  $T$ .

Les résultats sont par ailleurs validés par rapport aux résultats de référence (PAPADOPOULOS, 1998). Les contraintes tangentielles sur le plan  $\pi$  de normale  $\vec{n} = (\sin(\gamma) \cos(\varphi) \quad \sin(\gamma) \sin(\varphi) \quad \cos(\gamma))^T = (\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \frac{\sqrt{3}}{2})^T$  sont déterminées par projection du tenseur  $\underline{\underline{\Sigma}}$  selon les équations (3.76). On obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{un}(t) &= -\cos(\varphi) \sin(\varphi) \sin(\gamma) \Sigma_{xx}(t) + \cos(\varphi) \sin(\varphi) \sin(\gamma) \Sigma_{yy}(t) \\ &= -\frac{1}{4} (\Sigma_{xx}(t) - \Sigma_{yy}(t)) \\ \mathcal{T}_{vn}(t) &= -\cos^2(\varphi) \cos(\gamma) \sin(\gamma) \Sigma_{xx}(t) - \sin^2(\varphi) \cos(\gamma) \sin(\gamma) \Sigma_{yy}(t) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} (\Sigma_{xx}(t) + \Sigma_{yy}(t)) \end{cases} \quad (3.71)$$

L'algorithme ADA est adapté à ce problème de dimension 2 et le vecteur  $\underline{S}_j \in \mathbb{R}^2$  et s'écrit à chaque instant  $t_j$  :

$$\underline{S}_j = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{un}(t_j) \\ \mathcal{T}_{vn}(t_j) \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

La matrice  $\underline{\underline{H}}$  ainsi que le vecteur  $\underline{q}$  du problème (3.58) sont alors définis par :

$$\underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

On choisit des paramètres  $\beta = 10$  et  $\epsilon^{\text{ADA}} = 10^{-8}$ . Par ailleurs après avoir calculé le centre du plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement, il est possible de remonter au rayon de ce cercle par l'équation :

$$R = \max_{j \in [1; N]} \|\underline{S}_j - \underline{c}^*\|_2 \quad (3.74)$$

Le trajet de chargement calculé sur le plan  $\pi$  est représenté sur la Figure 3.21. Il est clair que le centre du plus petit cercle circonscrit à  $\mathcal{T}$  est le milieu du segment représentant le trajet.

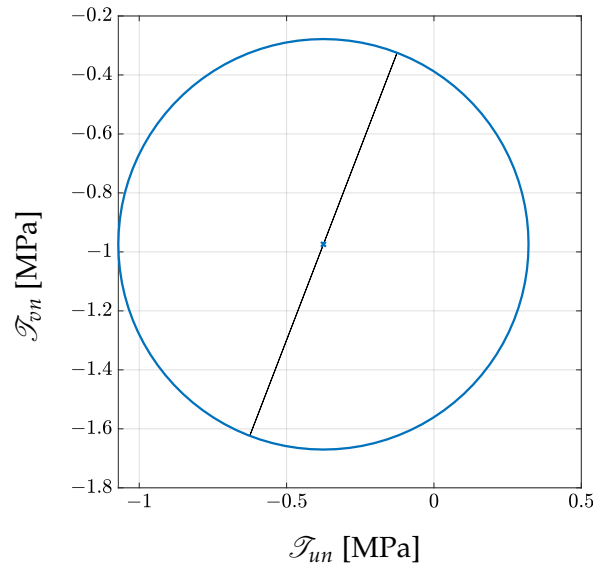


FIGURE 3.21 – Trajet de chargement  $\mathcal{T}$  sur le plan  $\pi$ .

Le Tableau 3.6 donne les résultats relatifs aux deux algorithmes implémentés. Il montre que les deux méthodes implémentées donnent des résultats (coordonnées du centre et rayon du cercle) fidèles à la référence. Sur ce cas simple, les temps de calcul des deux méthodes sont assez équivalents. C'est pourquoi un deuxième exemple d'un chargement de rail plus complexe est implémenté.

|                       | Solution de référence                              | Algorithme des combinaisons des points | Algorithme ADA                 |
|-----------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------|
| Rayon $R$             | $\frac{\sqrt{31}}{8}$                              | 0,69597                                | 0,695970545353753              |
| Coordonnées du centre | $\left(-\frac{3}{8}; -9\frac{\sqrt{3}}{16}\right)$ | $(-0,375; -0,97428)$                   | $(-0,375; -0,974278579257357)$ |

TABLEAU 3.6 – Comparaison de l'algorithme des combinaisons des points et de l'algorithme ADA en termes de précision des résultats.

### 3.4.2 Deuxième exemple

Dans cet exemple, on suppose une voie en alignement pourvue d'un défaut de nivellement longitudinal (i.e. défaut vertical) identique sur la zone d'étude des deux files de rails. Il est défini selon la méthode introduite en section 2.3 pour générer des défauts aléatoires. Un véhicule circule sur cette voie avec une vitesse  $V = 100$  km/h. Ses propriétés sont données dans le Tableau C.1. En ce qui concerne la voie, on considère la voie définie dans le Tableau 2.7. Dans cet exemple, on admet que le rail est un rail neuf. Le modèle de la voie utilisé dans ce cas est le modèle 2D car le défaut n'excite pas le comportement latéral du véhicule. Par conséquent, la voie n'est pas chargée latéralement. Le nivellement vertical introduit dans la Figure 3.22a permet de calculer les efforts exercés par le véhicule sur la voie (Figure 3.22b) selon les hypothèses introduites en section 2.5. On se concentre ici sur la section du rail qui se trouve au milieu de la voie et plus particulièrement entre deux traverses.

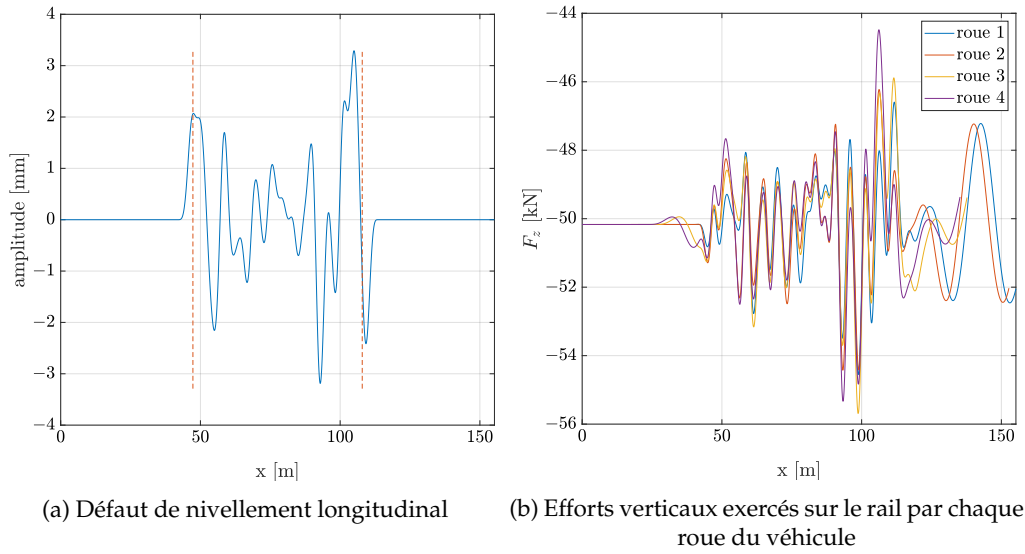


FIGURE 3.22 – Chargement de la voie engendré par l’excitation du véhicule à la suite du passage sur un défaut de nivellement longitudinal.

On rappelle que chaque nœud  $M$  de cette section voit un champ de contrainte  $\underline{\underline{\Sigma}}$  de la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(M,t) = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} & \Sigma_{xz} \\ \Sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \Sigma_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Le chargement étant purement vertical, les expressions des contraintes sont simplifiées comme suit :

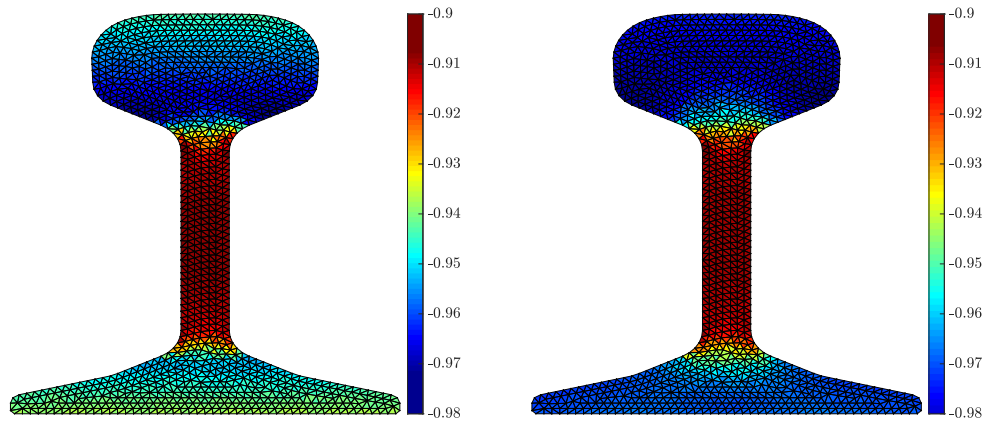
$$\begin{cases} \Sigma_{xx}(x,y,z,t) &= z \frac{M_y(x,t)}{I_{r,y}} \\ \Sigma_{xy}(x,y,z,t) &= \frac{T_z(x,t)}{S_r} \frac{\partial h}{\partial y(x,t)} \\ \Sigma_{xz}(x,y,z,t) &= \frac{T_z(x,t)}{S_r} \frac{\partial h}{\partial z} \end{cases} \quad (3.76)$$

Le calcul des quantités  $T_z$  et  $M_y$  via le modèle de la voie et des fonctions de gauchissement permet de calculer l’évolution temporelle du champ de contraintes vu par un nœud de la section. Ce champ de contraintes est le point d’entrée pour le calcul du critère de fatigue de Dang Van. Le contour du critère de Dang Van obtenu sur la section étudiée est donné pour les deux méthodes dans la [Figure 3.23](#). L’expression de la fonction de fatigue est ici légèrement modifiée par rapport à l’expression (3.47) mais y reste équivalente :

$$E_{DV} = \max_t \frac{\tau(t) + \alpha_{DV} P(t) - \beta_{DV}}{\beta_{DV}} \quad (3.77)$$

Ainsi, l’amorçage d’une fissure se produit quand la fonction atteint la valeur 0. Les deux résultats sont très proches. On remarque aussi que pour ce chargement, la zone la plus critique est l’âme du rail mais la limite de fatigue n’est pas atteinte pour les deux millions de cycles<sup>3</sup> qu’on considère comme étant la durée de vie du rail. L’écart observé est dû au choix du paramètre  $\epsilon^{ADA}$  qui définit la condition de convergence.

3. un cycle correspond à un passage du véhicule.



(a) Algorithme des combinaisons des points

(b) Algorithme ADA

FIGURE 3.23 – Calcul du contour du critère de Dang Van dans la section du rail qui se trouve dans le milieu de la voie entre deux traverses.

Des valeurs relativement grandes de ce paramètre engendreraient des résultats peu précis et un temps de calcul très faible alors que des valeurs faibles engendreraient des valeurs précises mais avec un temps de calcul très important. Dans cet exemple, le paramètre  $\epsilon^{ADA}$  est de  $10^{-10}$ . Il en découle un écart maximal de 3% entre les deux méthodes. Par ailleurs, le paramètre  $\beta$  est fixé à  $10^{-5}$ .

En termes de temps de calcul, la méthode des combinaisons des points donne des résultats au bout de 20 heures alors que la méthode d'optimisation ADA les donne après 115 secondes sur une machine de processeur i5 (4 cœurs, 1,6 GHz). En sachant que ce calcul est à mener pour plusieurs sections de la zone d'étude du modèle de la voie, le temps de calcul engendré par la méthode des combinaisons des points devient trop important et donc non convenable pour une utilisation industrielle. C'est pourquoi l'algorithme d'optimisation ADA est à privilégier pour la suite.

### 3.5 Bilan

Dans ce chapitre, les bases nécessaires pour évaluer l'état de fatigue dans le rail ont été exposées. Une bonne estimation de la fatigue requiert la connaissance de l'état des contraintes dans le rail de façon précise. Par conséquent, les fonctions de gauchissement dues au moment de torsion et aux efforts tranchants ont été calculées par la méthode des éléments finis en discrétisant la section du rail, rigoureusement représentée au préalable, par des éléments triangle. Ces fonctions permettent en effet de remonter aux contraintes de cisaillement dans la section.

Ensuite, quelques critères de fatigue multiaxiaux ont été présentés. Sur la base des travaux de (WEBER, 1999; NADJITONON, 2010), les différents critères ont été comparés entre eux en fonction d'un écart de validité qui juge du caractère conservatif ou non conservatif du critère. Le critère de fatigue de Dang Van a finalement été choisi car sa deuxième version développée en 1984 permet un gain en temps de calcul considérable par rapport aux autres critères. Ceci le rend plus adéquat pour une exploitation industrielle. La formulation du critère s'appuie notamment sur le phénomène

d'adaptation locale qui se produit à l'échelle du grain. Les deux versions du critère de Dang Van ont été introduits dans ce chapitre :

- la première version s'appuie sur l'algorithme des combinaisons des points. La méthode consiste à associer à chaque nœud de la structure un ensemble de plans physiques sur lequel le tenseur des contraintes macroscopiques est projeté constituant ainsi le trajet de chargement. Sur chaque plan physique, l'algorithme des combinaisons des points permet de retrouver le plus petit cercle circonscrit au trajet de chargement en parcourant l'ensemble des points du trajet. De ce fait, l'indicateur d'endommagement est déduit sur chaque plan physique. La fonction de fatigue du critère n'est autre que le maximum des indicateurs d'endommagement. Cet algorithme a l'avantage d'être précis quand le trajet de chargement présente plusieurs points mais il engendre des temps de calcul importants ;
- dans la deuxième version du critère, la fonction de fatigue est obtenue après calcul du tenseur des contraintes résiduelles mésoscopiques (i.e. à l'échelle du grain) ou de façon équivalente à la recherche de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement. Cette méthode s'appuie sur l'algorithme d'optimisation ADA pour la résolution du problème d'optimisation auquel est ramenée la recherche de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement. Elle offre des temps de calcul plus réduits que la méthode des combinaisons des points.

L'implémentation de ces deux algorithmes a été testée sur un premier exemple de chargement proportionnel de traction-compression biaxiale. Les deux méthodes ont ainsi donné les mêmes résultats que la solution de référence de (PAPADOPOULOS, 1998). Ensuite, un deuxième exemple de chargement d'une voie ferrée a été proposé. Il a permis de souligner l'écart important en temps de calcul : 20 heures pour l'algorithme des combinaisons des points contre 115 secondes pour l'algorithme d'optimisation ADA sur une machine de processeur i5 (4 cœurs, 1,6 GHz).

Le critère de Dang Van implémenté et notamment l'algorithme d'optimisation ADA seront utilisés dans le chapitre suivant pour confronter les tableaux du référentiel en vigueur (SNCF, 2019) pour l'admission des matériels roulants.

## Chapitre 4

# Réponse de la voie au passage du véhicule

Dans ce chapitre, l'outil développé est confronté au référentiel en vigueur à SNCF RÉSEAU. Le principe est de réaliser des simulations de circulations de véhicules sur des voies aux vitesses maximales préconisées par les tableaux du référentiel (SNCF, 2019) tout en tenant compte du tracé de la voie comme il est expliqué en [section 1.4](#) du [chapitre 1](#). La comparaison est réalisée en analysant l'état de fatigue structurelle dans la section du rail au bout de deux millions de cycles qui marquent la limite basse d'une durée de vie infinie du point de vue du dimensionnement de la voie selon (HASAN, 2015 ; KANG et al., 2020). Un cycle correspond ici à un passage du véhicule. 3 circulations de véhicules sont ainsi simulées :

- la circulation d'une voiture remorquée dont le rôle est de transporter des voyageurs (voir [section 4.1](#)). Ses paramètres sont exposés dans le [Tableau C.1](#) de l'[annexe C](#). Il est évident qu'en réalité la voiture est toujours accompagnée de la motrice. Néanmoins, on se concentre sur le chargement généré par la voiture seule sur la voie. De ce fait, la motrice qui doit l'accompagner n'est pas représentée dans ces simulations ;
- la circulation d'une motrice en [section 4.2](#). Il s'agit d'un véhicule de traction dont le rôle est de remorquer des voitures. Ses propriétés sont données dans le [Tableau C.2](#) de l'[annexe C](#) ;
- la circulation d'un wagon en [section 4.3](#) dont les propriétés sont listées dans le [Tableau C.3](#) de l'[annexe C](#). De la même manière, un wagon doit être remorqué à une locomotive pour pouvoir se déplacer. Comme l'intérêt est porté au wagon et au chargement qu'il génère sur la voie, seul le wagon est représenté.

Chaque véhicule est associé à 7 configurations de voies. Elles permettent de balayer l'ensemble des groupes DEMAUX <sup>1</sup>. Le [Tableau 4.1](#) renseigne sur les armements des différentes voies modélisées. Sur ces voies, les rails sont considérés comme étant à demi-usure pour respecter les règles DEMAUX. Il s'agit de considérer que le dessus du rail est raboté. Pour davantage d'informations sur les propriétés des voies, le lecteur est amené à consulter les [Tableau C.4](#), [Tableau C.5–Tableau C.10](#).

Pour prendre en compte l'effet des efforts latéraux sur la voie, on modélise les voies en pleine courbe. De ce fait, les modèles 3D de la voie et du véhicule sont utilisés. La courbe est pourvue d'un rayon  $R$  de 940 m qui est considéré comme étant un rayon d'ordre moyen par rapport aux rayons observés sur le réseau d'après (UIC, 2009). Le dévers de la courbe  $d$  est fixé à 160 mm. On rappelle qu'il s'agit de relever la file de rail extérieure 1 par rapport à la file de rail intérieure 2.

---

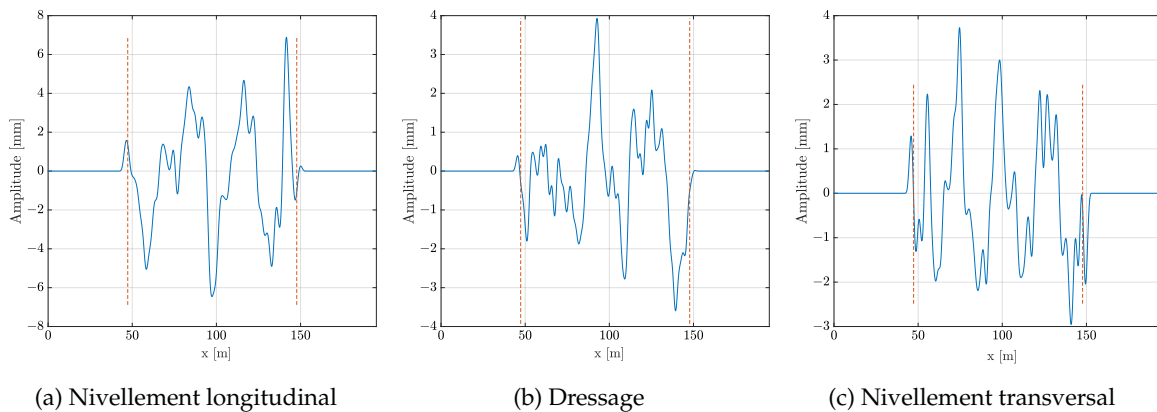
1. il existe 5 groupes DEMAUX mais dans les groupes 3 et 4 on distingue deux sous groupes.

| Voie | Groupe DEMAUX | Armement de la voie |                        |                                        | $\frac{I_{r,v}}{v l}$ [mm <sup>2</sup> ] à demi-usure |
|------|---------------|---------------------|------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------------|
|      |               | Rail                | Traverse               | Espacement entre les traverses $l$ [m] |                                                       |
| 1    | 1             | 30 kg état          | traverse en bois       | 0,83                                   | 137,1                                                 |
| 2    | 2             | 36E2                | traverse en bois       | 0,83                                   | 169,88                                                |
| 3    | 3 bas         | 30 kg état          | traverse en bois       | 0,6                                    | 189,67                                                |
| 4    | 3 haut        | 36E2                | traverse en bois       | 0,6                                    | 235                                                   |
| 5    | 4 bas         | 46E2                | traverse en béton M260 | 0,67                                   | 269,85                                                |
| 6    | 4 haut        | 50E6                | traverse en béton M450 | 0,64                                   | 349,84                                                |
| 7    | 5             | 60E1                | traverse en béton M450 | 0,6                                    | 460,67                                                |

TABLEAU 4.1 – Armement des voies modélisées.

On suppose également que toutes les voies modélisées comportent des défauts de géométrie définis conformément à la méthode présentée dans la [section 2.3](#). Ces défauts sont localisés dans la zone d'étude ZE qui a une longueur d'environ 100 m<sup>2</sup>. On rappelle qu'il s'agit d'un défaut de nivellement vertical, un défaut de dressage qui sont identiques sur les deux files de rail et un défaut de nivellement transversal (voir [Figure 4.1](#)). Les trois défauts admettent des longueurs d'onde  $\lambda \in [3; 70]$  m]. La longueur de la zone tampon ZT est définie conformément à la [section 2.6.1.1](#). Elle est de :

- trois fois la longueur du véhicule (i.e. distance longitudinale entre le premier et le dernier essieu) pour la motrice et le wagon;
- deux fois la longueur du véhicule pour la voiture.

FIGURE 4.1 – Défauts de géométrie affectés aux voies présentées au [Tableau 4.1](#) et ayant des longueurs d'onde  $\lambda \in [3; 70]$  m].

Pour la circulation des trois véhicules, la réponse statique de la voie est comparée à la réponse dynamique de la voie. En effet, dans le domaine des basses fréquences qui concerne cette étude, l'inertie de la voie est supposée négligeable devant l'inertie du véhicule selon (KNOTHE et GRASSIE, 1993). L'idée est donc d'approfondir le raisonnement pour vérifier si le comportement statique de la voie est suffisant pour prédire l'état de fatigue dans le rail, ce qui réduirait davantage les temps de calcul.

2.  $L_{ZE} = l \left( E \left( \frac{100}{l} \right) + 1 \right)$  où  $l$  est l'espacement entre les traverses.

Dans une démarche exploratoire plusieurs sections du rail sont analysées pour la fatigue. Sur 40 m de rail localisés aux alentours du milieu de la voie, les sections au dessus des traverses et entre les traverses sont considérées. Par ailleurs, pour étudier l'impact des défauts de la voie sur la réponse en fatigue du rail, des cas de circulation de la voiture sur des voies sans défaut sont modélisés. On rappelle brièvement que la condition de non amorçage de la fissure s'écrit :

$$E_{DV} = \max_t \frac{\tau(t) + \alpha_{DV} P(t) - \beta_{DV}}{\beta_{DV}} \leq 0 \quad (4.1)$$

les coefficients  $\alpha_{DV}$  et  $\beta_{DV}$  ont respectivement pour valeur 0,2321 et 216,1 MPa, selon la courbe de Wöhler en torsion alternée symétrique pour l'acier à rail.

## 4.1 Admission d'une voiture remorquée

La voiture modélisée possède une charge à l'essieu de 10 t. Les tableaux du référentiel relatifs aux véhicules voyageurs font intervenir en plus du rapport  $\frac{I_{r,y}}{v l}$ , la masse linéique du rail et le type de la traverse en place. Le [Tableau 4.2](#) reporte les vitesses et les insuffisances de dévers à adopter d'un point de vue de la résistance de l'armement de la voie pour chaque voie modélisée.

| Voie | Groupes DEMAUX |                             | Conditions de circulation          |                                                 |
|------|----------------|-----------------------------|------------------------------------|-------------------------------------------------|
|      | N°             | $\frac{I_{r,y}}{v l}$ [mm²] | Vitesse maximale $V_{\max}$ [km/h] | Insuffisance de dévers maximale $I_{\max}$ [mm] |
| 1    | 1              | [100 ; 140]                 | 80                                 | 110                                             |
| 2    | 2              | [141 ; 179]                 | 90                                 | 120                                             |
| 3    | 3 bas          | [180 ; 219]                 | 100                                | 140                                             |
| 4    | 3 haut         | [220 ; 235]                 | 100                                | 140                                             |
| 5    | 4 bas          | [236 ; 300]                 | 115                                | 150                                             |
| 6    | 4 haut         | [301 ; 350]                 | 130                                | 150                                             |
| 7    | 5              | > 350                       | 220                                | 160                                             |

TABLEAU 4.2 – Conditions de circulation d'une voiture remorquée ayant une charge à l'essieu maximale de 10 t (SNCF, 2019).

On rappelle que les tableaux du référentiel définissent la vitesse et l'insuffisance de dévers du seul point de vue de la résistance de l'armement de la voie. Or pour respecter les conditions sur l'insuffisance de dévers, il faut forcément intervenir sur la vitesse. La vitesse potentielle de tracé permet dans ce sens de tenir compte du tracé de la voie et de respecter les conditions sur l'insuffisance de dévers. Il s'agit de la vitesse de circulation à choisir dans le cas où elle est inférieure à celle du [Tableau 4.2](#), conformément à la procédure d'admission en vigueur. On rappelle l'expression de la vitesse potentielle de tracé :

$$V_{\text{tracé}} = \sqrt{\frac{R g (I_{\max} + d)}{B}} \quad (4.2)$$

où  $g$  est l'accélération de pesanteur et  $B$  est l'écartement entre les deux files de rail.



Cette vitesse prend les valeurs de 147 km/h à 160 km/h pour des insuffisances de dévers allant de 110 à 160 mm. On remarque que pour les six premières voies, les vitesses les plus contraignantes sont celles relatives à la résistance de l'armement de la voie et définies par le référentiel (SNCF, 2019) dans le [Tableau 4.2](#). Elles sont donc choisies pour les simulations à réaliser. Pour la voie du groupe DEMAUX 5, la vitesse de circulation choisie est de 220 km/h, soit la vitesse maximale de circulation sur les lignes classiques. Elle permettra de mettre en évidence et de souligner l'impact des défauts de la voie associés à une vitesse de circulation importante sur les surcharges dynamiques du véhicule et l'état de fatigue du rail.

#### 4.1.1 Chargement généré par la voiture sur les voies

Dans les [Figure 4.2–Figure 4.4](#), le chargement subi par les voies du groupe DEMAUX 1, DEMAUX 3 haut et DEMAUX 5 sont représentés dans le repère de la voie. Ces trois voies sont respectivement une voie d'armement faible, une voie d'armement moyen et une voie d'armement fort.

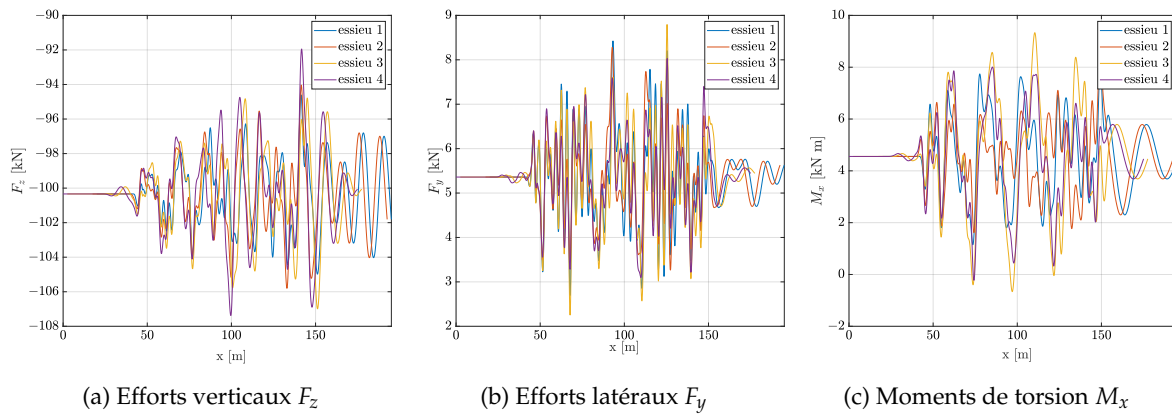


FIGURE 4.2 – Efforts exercés par chaque essieu de la voiture sur la voie appartenant au groupe DEMAUX 1 : efforts représentés dans le repère de la voie.

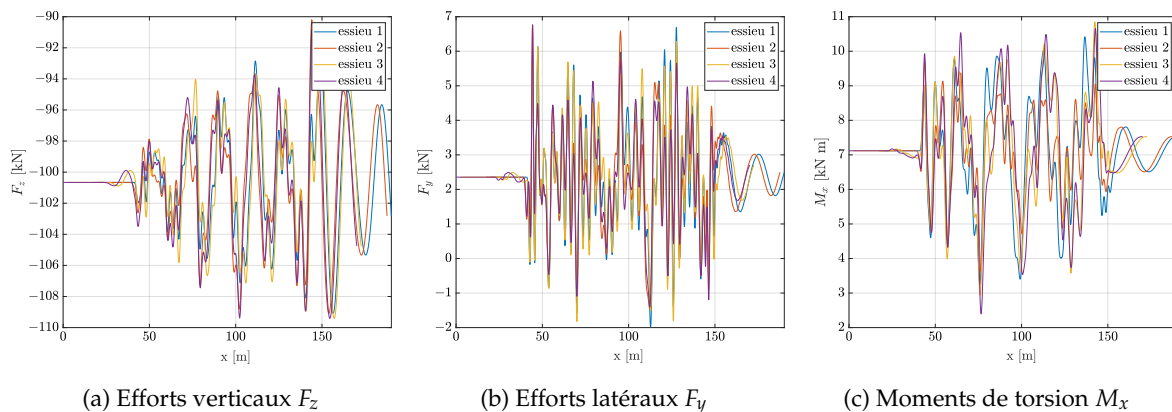


FIGURE 4.3 – Efforts exercés par chaque essieu de la voiture sur la voie appartenant au groupe DEMAUX 3 haut : efforts représentés dans le repère de la voie.

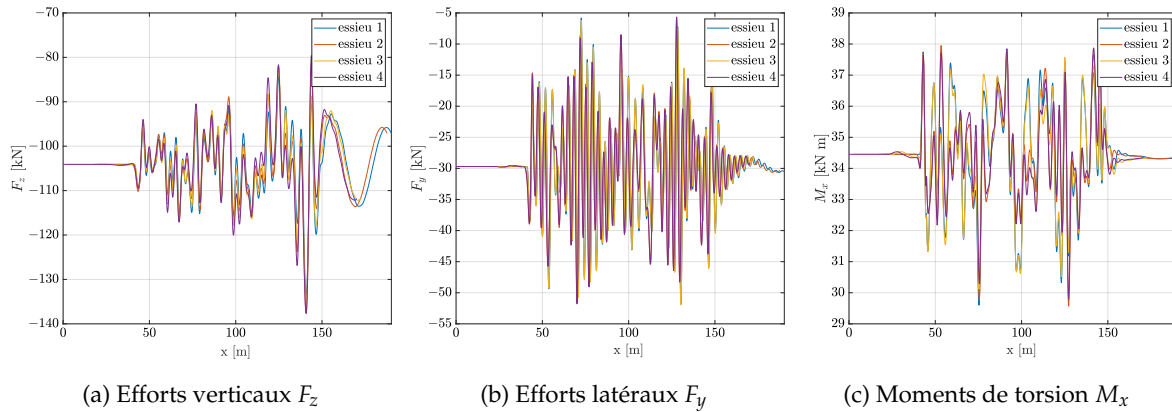


FIGURE 4.4 – Efforts exercés par chaque essieu de la voiture sur la voie appartenant au groupe DEMAUX 5 : efforts représentés dans le repère de la voie.

On remarque que l'augmentation de la vitesse du véhicule de 80 km/h pour la simulation sur la voie du groupe DEMAUX 1 à 220 km/h pour la simulation sur la voie du groupe DEMAUX 5 s'accompagne naturellement de l'augmentation des surcharges dynamiques. En ce qui concerne les efforts latéraux et les moments de torsion sur la voie, on remarque que :

- les efforts latéraux changent de signe lorsque la vitesse de la voiture augmente. Ces efforts deviennent plus importants en valeur absolue avec l'augmentation de la vitesse ;
- les moments de torsion augmentent quand la vitesse de circulation augmente.

En effet, Au fur et à mesure que la vitesse augmente, le dévers théorique<sup>3</sup> qui permet d'annuler l'effet des efforts centrifuges vu par la voie change et on passe de la configuration d'excès de dévers<sup>4</sup> à la configuration d'insuffisance de dévers<sup>5</sup> car le dévers réel appliqué à la voie est, lui, fixe et indépendant de la vitesse. Concrètement, l'excès de dévers se traduit par un chargement vertical et latéral plus important de la file de rail intérieure 2 comme il est illustré dans la Figure 2.27 de la section 2.6.2. De ce fait, le chargement latéral sur la voie est orienté vers le rail 2 et prend un signe positif dans la base de la voie. Il s'agit par exemple de la simulation menée sur la voie du groupe DEMAUX 1. Lorsque la vitesse de circulation augmente, une configuration d'insuffisance de dévers est alors observée. Dans ce cas, la file de rail extérieure 1 est plus chargée. L'effort latéral devient négatif et est orienté vers le rail 1. De plus, le moment de torsion sur la voie augmente car la part du moment engendré par l'effort vertical sur la file de rail 1 devient plus importante. Il s'agit typiquement de la simulation menée sur la voie du groupe DEMAUX 5. Le cas intermédiaire est très bien expliqué par la simulation sur la voie du groupe DEMAUX 3 haut. Dans ce cas, les effets de la force centrifuge sont amoindris car l'excès du dévers est relativement faible et que le dévers appliqué à la voie est proche du dévers théorique. Ainsi, l'effet des défauts de dressage et de nivellement transversal ont plus d'influence sur la réponse du chargement latéral de la voie.

3. le dévers théorique ou d'équilibre prend l'expression :  $d_{th} = \frac{V^2 B}{R g}$ .

4. le dévers réel appliqué à la voie est supérieur au dévers d'équilibre défini en fonction de la vitesse de circulation :  $I = d_{th} - d < 0$

5. le dévers réel appliqué à la voie est inférieur au dévers d'équilibre défini en fonction de la vitesse de circulation :  $I = d_{th} - d > 0$

### 4.1.2 Comparaison de la réponse statique et dynamique de la voie

Les simulations sur les groupes DEMAUX 1, 3 haut et 5 sont repris. Les réponses en déplacement vertical et latéral sont représentés dans la zone d'étude ZE à l'instant où le véhicule atteint la zone centrale de la voie dans les Figure 4.5–Figure 4.7.

Les résultats énoncés en section 4.1.1 sont confirmés. On retrouve le fait que la file de rail droite est plus chargée que la file de rail gauche pour la voie du groupe DEMAUX 1 et que la la file de rail gauche est la plus chargée dans le cas de la voie du groupe DEMAUX 5. On remarque, ensuite, que la réponse statique et dynamique de la voie sont très proches voire pratiquement identiques pour les voies du groupe DEMAUX 3 haut et 5. En effet, l'amortissement élevé de la semelle et de la couche de {ballast + sous-structure} au niveau d'un appui ou l'amortissement global plus élevé causé par un espacement entre traverses plus réduit engendre des résultats en dynamique et en statique équivalents pour les voies du groupe DEMAUX 3 haut et 5. En ce qui concerne la voie du groupe 1, on admet tout de même que les résultats en dynamique sont équivalents à ceux en statique car seul le déplacement dynamique latéral sur la file de rail gauche présente un léger écart par rapport au déplacement statique. L'analyse du moment fléchissant  $M_z$  dans la direction  $\vec{z}$  et de l'effort tranchant  $T_y$  dans la direction  $\vec{y}$ , qui sont fonctions des gradients du déplacement latéral, montre également des oscillations dynamiques négligeables. D'autant plus que leurs amplitudes sont très faibles le rail gauche. De ce fait, les contraintes induites sur cette file de rail seront forcément négligeables. Ces résultats justifient, pour la suite, la considération des grandeurs statiques pour traiter la fatigue.

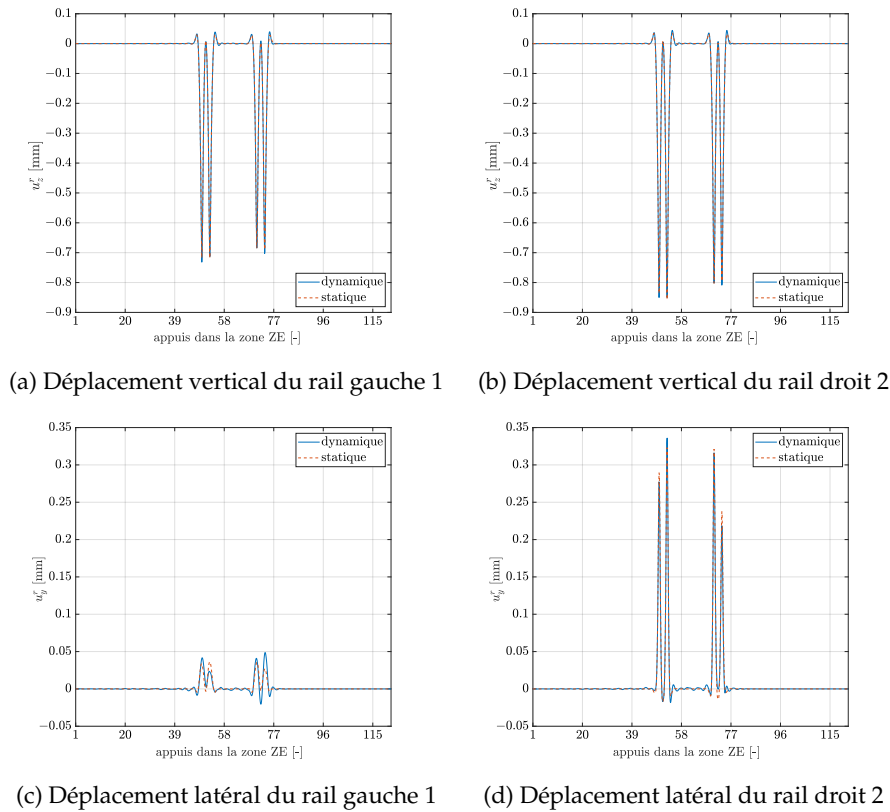


FIGURE 4.5 – Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAUX 1 à l'instant où la voiture atteint le milieu de la voie.

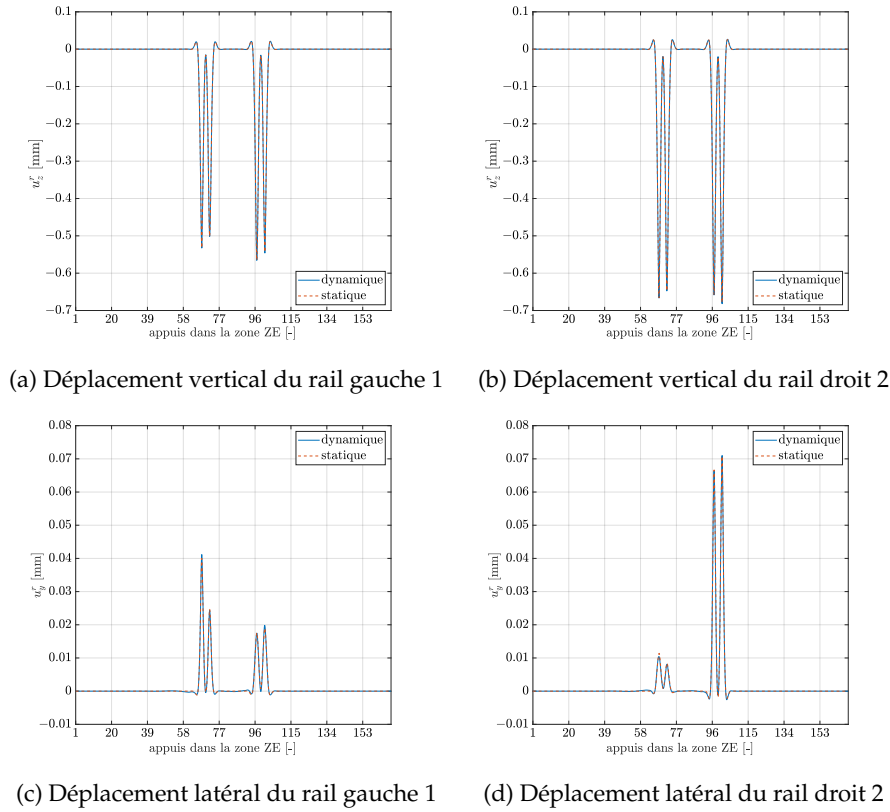


FIGURE 4.6 – Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAX 3 haut à l'instant où la voiture atteint le milieu de la voie.

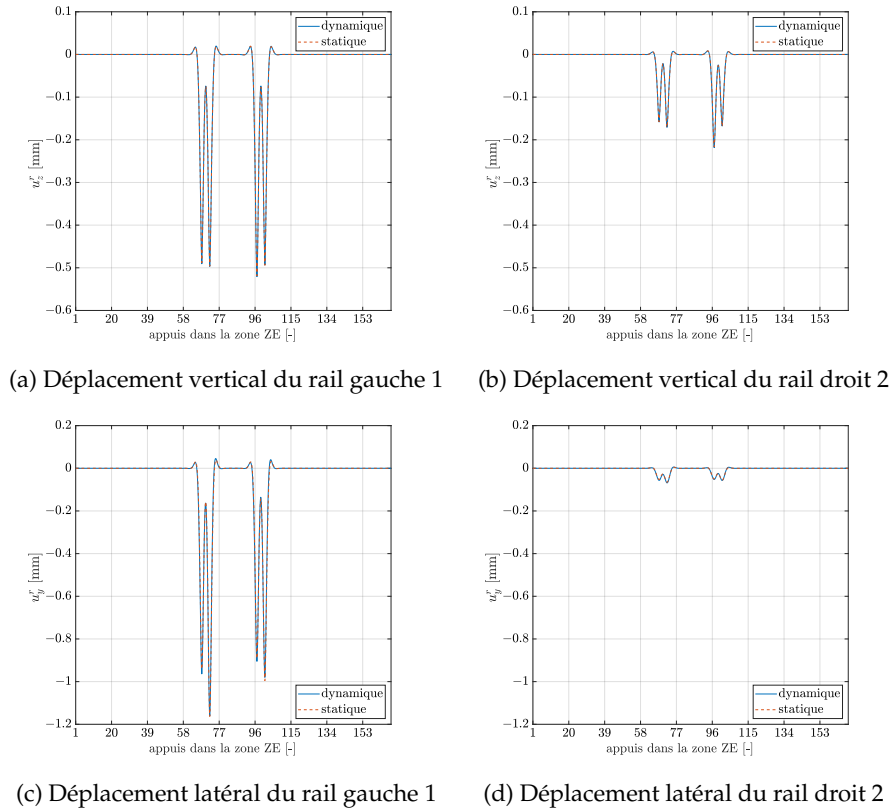
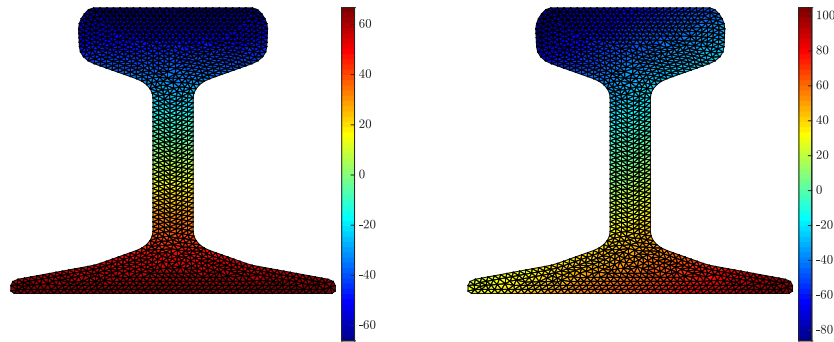


FIGURE 4.7 – Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAX 5 à l'instant où la voiture atteint le milieu de la voie.

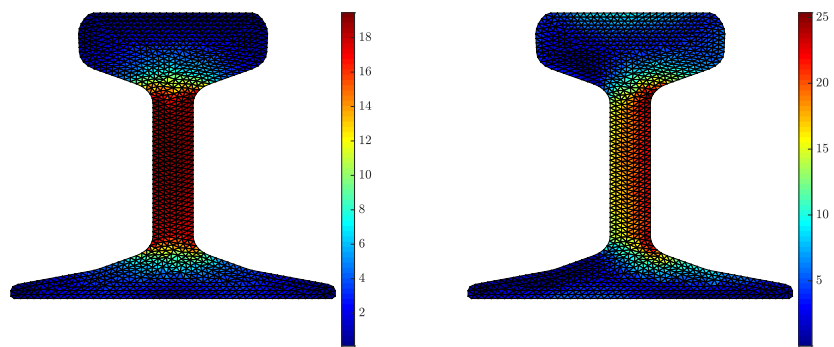
### 4.1.3 Contraintes normales et contraintes de cisaillement dans le rail

Dans le cas de la simulation sur la voie du groupe DEMAUX 1, les contraintes normales et les contraintes de cisaillement dans les sections centrales des deux files de rail<sup>6</sup> sont représentées sur la Figure 4.8 à l'instant où elles sont maximales quand le quatrième essieu atteint le milieu de la voie.

Sur chaque file de rail, la section considérée est une section qui se situe entre deux traverses. De ce fait, les contraintes normales sont plus importantes que les contraintes de cisaillement. Néanmoins, elles ont le même ordre de grandeur. Dans le cas de la section gauche, on retrouve par ailleurs une allure du champ des contraintes typique d'une sollicitation verticale car les sollicitations latérales sont négligeables devant les sollicitations verticales sur cette file de rail. Dans ce cas, le cisaillement est maximal au niveau de l'âme du rail et les zones critiques sont le patin et la champignon du rail pour les contraintes normales. Dans le cas de la section de la file de rail droite, la part des contraintes engendrée par les sollicitations latérales devient plus importante, d'où l'allure légèrement différente des champs des contraintes.



(a) Contrainte normale  $\Sigma_{xx}$  sur la file de rail gauche 1 (b) Contrainte normale  $\Sigma_{xx}$  sur la file de rail droite 2



(c) Contrainte de cisaillement  $\mathcal{T}$  sur la file de rail gauche 1 (d) Contrainte de cisaillement  $\mathcal{T}$  sur la file de rail droite 2

FIGURE 4.8 – Champ des contraintes dans les sections centrales des deux files de rail.

6. les sections qui sont situées au milieu de la voie.

#### 4.1.4 État de fatigue généré dans le rail : confrontation du référentiel

Pour appuyer le choix du modèle statique de la voie, la [Figure 4.9](#) montre bel et bien pour la simulation menée sur la voie du groupe DEMAUX 1 que le contour du critère de Dang Van (i.e. valeur de la fonction de fatigue du critère) est identique dans le cas d'une modélisation en dynamique et d'une modélisation en statique. Il s'agit par ailleurs de la représentation de la section la plus chargée qui est située sur la file de rail droite.

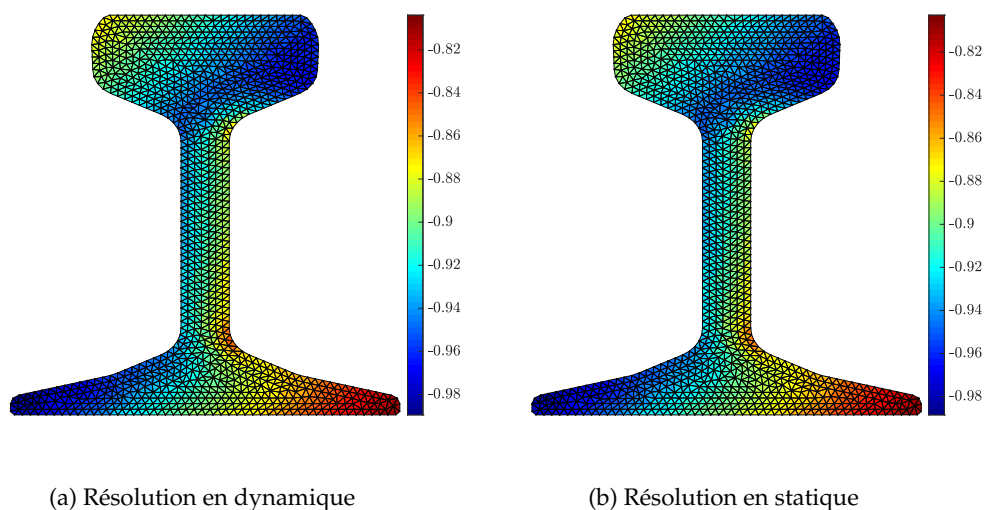


FIGURE 4.9 – Comparaison du contour du critère de Dang Van sur la section la plus critique de la voie du groupe DEMAUX 1 dans le cas d'une résolution en dynamique et d'une résolution en statique du comportement de la voie.

Le contour du critère de Dang Van sur la section critique de la voie du groupe DEMAUX 1 est par la suite comparé à celui de la section critique de la voie du groupe DEMAUX 5. La [Figure 4.10](#) montre ainsi que la voie du groupe DEMAUX 5 est plus critique vis à vis du critère de Dang Van. Contrairement à la voie du groupe DEMAUX 1 qui présente une zone critique au niveau du patin, les

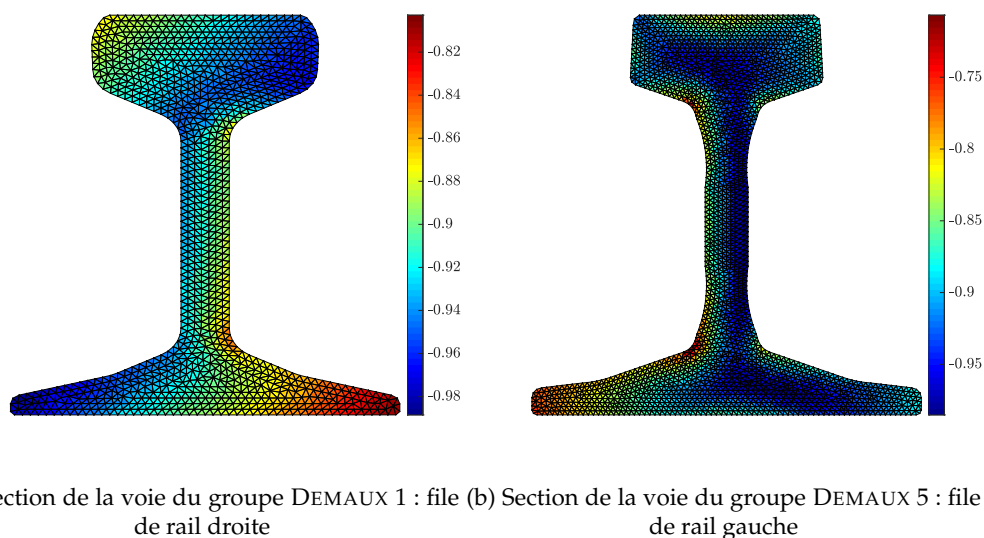


FIGURE 4.10 – Comparaison du contour du critère de Dang Van sur la section la plus critique des voies du groupe DEMAUX 1 et 5.



zones des congés de raccordement âme-champignon et âme-patin sont les plus sujettes à la rupture dans le cas de la voie du groupe DEMAUX 5. Par ailleurs, l'augmentation de la fonction de fatigue sur la voie du groupe 5 est expliquée par le fait que la vitesse de circulation est beaucoup plus importante (80 km/h pour la voie du groupe 1 contre 220 km/h pour la voie du groupe 5). De ce fait, l'amplitude des surcharges dynamiques exercées par le véhicule sur la voie devient plus importante. On note par exemple, que ces surcharges atteignent environ  $-107$  kN pour la simulation sur la voie du groupe DEMAUX 1 et environ  $-135$  kN pour la simulation sur la voie du groupe DEMAUX 5. De plus, le chargement latéral (en valeur absolue) et le chargement en torsion deviennent plus conséquents. Ainsi, des contraintes plus importantes sont observées sur la voie du groupe 5. Elles conduisent à un état de fatigue plus important.

Sur la Figure 4.11, le maximum du contour du critère de Dang Van sur chaque section des deux files de rail est représenté pour les voies du groupe DEMAUX 1, 3 haut et 5. Les résultats relatifs aux simulations sur les voies sans défaut sont également exposés. Dans le cas des simulations sur les voies sans défaut, on remarque que des paliers se forment avec des valeurs de fonctions de fatigue constantes sur chaque file de rail la voie. Lorsqu'il y a un espacement entre les traverses important (cas pour la voie du groupe DEMAUX 1), deux paliers se distinguent pour une seule file de rail. Ceci est dû au fait qu'on étudie les sections au dessus des traverses et entre les traverses. Par ailleurs, les sections les plus critiques sont celles situées entre les traverses. Elles ont des fonctions de fatigue plus proches de zéro. L'écart en fonction de fatigue entre deux sections successives relativement à la fonction de fatigue moyenne est de l'ordre de 5% sur le rail droit de la voie du groupe DEMAUX 1. Cet écart de la fonction de fatigue est minimisé dans le cas d'espacements entre les traverses plus petits (0,25% pour la voie du groupe DEMAUX 3 haut et 0,4% pour la voie du groupe DEMAUX 5). Dans la continuité des résultats précédents, la présence de la courbe dans la voie engendre un état de fatigue plus important dans un rail par rapport à l'autre : pour la voie du groupe 1, il s'agit de la file de rail droite à cause d'un excès de dévers. Alors que pour la voie du groupe 5, il s'agit de la file de rail gauche à cause de l'insuffisance de dévers. Concernant l'effet des défauts, on remarque que la fonction de fatigue est sensible à leur présence. L'effet des défauts est notamment plus visible dans le cas de la voie du groupe DEMAUX 5 où la vitesse de circulation est plus importante.

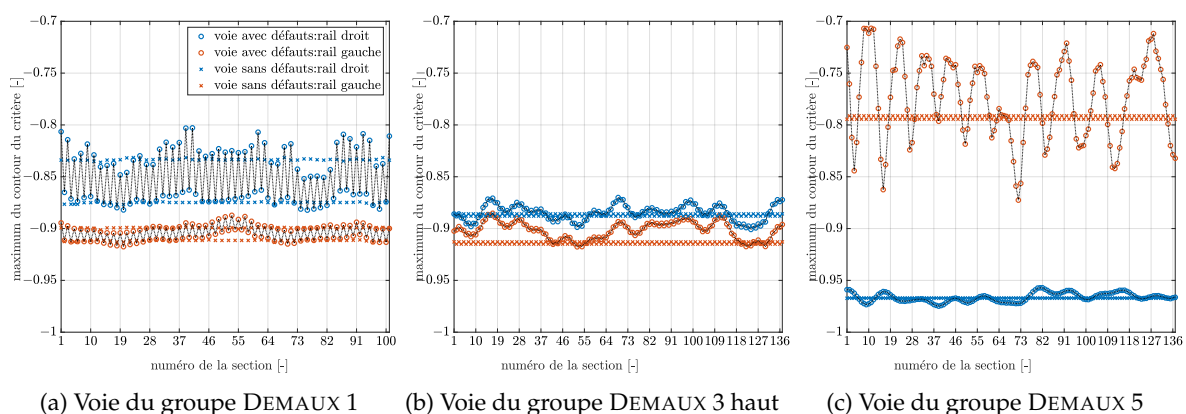


FIGURE 4.11 – Maximum de la fonction de fatigue du critère de Dang Van sur les sections étudiées : cas de voies sans défauts et voies avec défauts.

Par exemple, une augmentation de la fonction de fatigue d'environ 12% est observée. Enfin, le [Tableau 4.3](#) donne le maximum du contour (i.e. maximum de la fonction de fatigue) obtenu parmi toutes les sections et ce pour les simulations sur toutes les voies. On y voit que la limite de fatigue n'est pas atteinte du fait que les valeurs sont négatives. Ceci implique que les résultats prédits par l'outil vis à vis de la fatigue du rail vont dans le même sens que le référentiel.

| Voie | Groupe DEMAUX | Maximum du contour du critère |
|------|---------------|-------------------------------|
| 1    | 1             | -0,80                         |
| 2    | 2             | -0,87                         |
| 3    | 3 bas         | -0,84                         |
| 4    | 3 haut        | -0,87                         |
| 5    | 4 bas         | -0,90                         |
| 6    | 4 haut        | -0,92                         |
| 7    | 5             | -0,71                         |

TABLEAU 4.3 – Maximum du contour du critère de Dang Van sur les 7 voies modélisées dans le cas de la circulation de la voiture.

## 4.2 Admission d'une motrice

La motrice consiste en un véhicule à deux bogies de deux essieux qui présente une charge à l'essieu de  $19,5 \text{ t} \leq 20 \text{ t}$ , beaucoup plus importante que celle de la voiture. Le tableau du référentiel relatif aux motrices et locomotives qui ont une masse maximale à l'essieu de 20 t est reporté dans le [Tableau 4.4](#). Le véhicule étant une motrice de TGV, sa vitesse maximale est donc de 220 km/h. Elle

| Groupes DEMAUX |                                        | Conditions de circulation          |                                                 |
|----------------|----------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------------------|
| N°             | $\frac{I_{xy}}{vl}$ [mm <sup>2</sup> ] | Vitesse maximale $V_{\max}$ [km/h] | Insuffisance de dévers maximale $I_{\max}$ [mm] |
| 1              | [100 ; 140]                            | 30                                 | –                                               |
| 2              | [141 ; 179]                            | vitesse maximale du véhicule       | 110                                             |
| 3 bas          | [180 ; 219]                            | vitesse maximale du véhicule       | 120                                             |
| 3 haut         | [220 ; 235]                            | vitesse maximale du véhicule       | –                                               |
| 4 bas          | [236 ; 300]                            | vitesse maximale du véhicule       | –                                               |
| 4 haut         | [301 ; 350]                            | vitesse maximale du véhicule       | –                                               |
| 5              | > 350                                  | vitesse maximale du véhicule       | –                                               |

TABLEAU 4.4 – Conditions de circulation d'une motrice ayant une charge à l'essieu maximale de 20 t (SNCF, [2019](#)).



correspond à la vitesse maximale admise sur les lignes classiques. Lorsque l'insuffisance de dévers n'est pas spécifiée, on choisit une valeur de 165 mm qui est la valeur admissible dans le cas des TGV.

De la même manière que pour la voiture, la vitesse potentielle de tracé est définie toujours sur la base de la courbe de rayon  $R = 940$  m et de dévers  $d = 160$  mm, en fonction des insuffisances de dévers reportées au [Tableau 4.4](#) :

- 147 km/h pour une insuffisance de dévers de 110 mm ;
- 149 km/h pour une insuffisance de dévers de 120 mm ;
- 161 km/h pour une insuffisance de dévers de 165 mm.

Par conséquent, pour les voies du groupe DEMAUX 2 à 5, la vitesse maximale de circulation correspond à la vitesse potentielle de tracé alors que pour la voie du groupe DEMAUX 1, la vitesse du [Tableau 4.4](#) est choisie.

#### 4.2.1 Chargement généré par la motrice sur les voies

Contrairement à la circulation de la voiture où l'augmentation des vitesses se fait progressivement, les vitesses préconisées par le référentiel passent de 30 km/h pour les voies du groupe DEMAUX 1 à 147 km/h pour les voies du groupe DEMAUX 2.

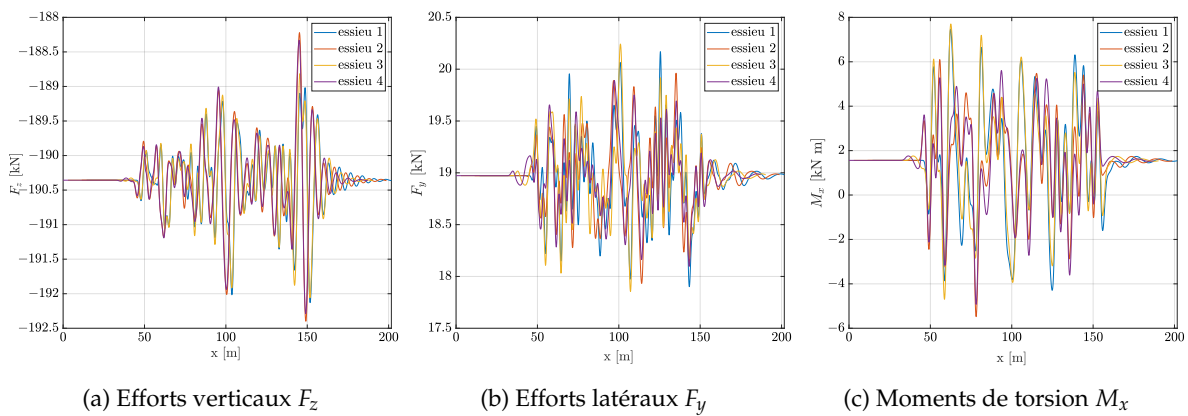


FIGURE 4.12 – Efforts exercés par chaque essieu de la motrice sur la voie appartenant au groupe DEMAUX 1 : efforts représentés dans le repère de la voie.

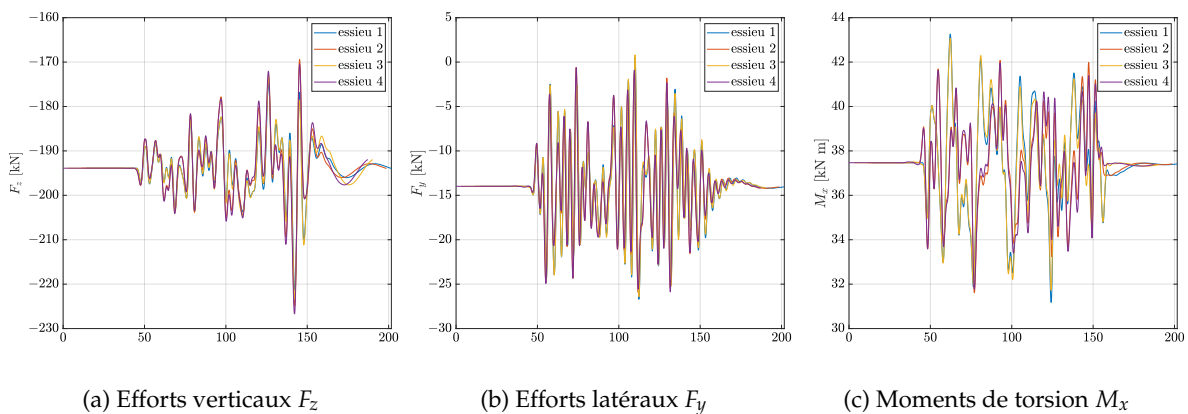


FIGURE 4.13 – Efforts exercés par chaque essieu de la motrice sur la voie appartenant au groupe DEMAUX 2 : efforts représentés dans le repère de la voie.

La Figure 4.12 et Figure 4.13 présentent le chargement subi par les voies du groupe DEMAUX 1 et 2. Il est exprimé dans le repère de la voie.

La variation des efforts verticaux et latéraux de pic à pic passe de 4 kN à 60 kN et de 2 kN à environ 25 kN respectivement pour la voie du groupe 1 et celle du groupe 2. La motrice roule par ailleurs en excès de dévers sur la voie du groupe DEMAUX 1, puis en insuffisance de dévers sur la deuxième voie, d'où l'inversion du signe des efforts latéraux.

#### 4.2.2 Comparaison de la réponse statique et dynamique de la voie

Sur la Figure 4.14 et Figure 4.15, les déplacements des files de rail sur la zone d'étude ZE des voies du groupe DEMAUX 1 et 2 sont représentés. L'augmentation considérable de la charge à l'essieu engendre notamment des déplacements verticaux plus importants que dans le cas de la circulation de la voiture. Les déplacements latéraux sont importants du fait des valeurs d'insuffisance ou d'excès de dévers importantes qui traduisent le fait que l'effet des efforts centrifuges vu par la voie n'est que très peu réduit par le dévers.

Dans le cas de la voie du groupe DEMAUX 1, la réponse statique et dynamique se superposent du fait de la vitesse de circulation autorisée très faible. La vitesse de circulation sur la voie du groupe DEMAUX 2 est beaucoup plus importante. Or, les deux voies sont considérées comme des voies d'armement faible. De ce fait, des oscillations sont observées mais elles restent négligeables devant l'allure de la réponse statique de la voie. Par conséquent, la réponse statique est retenue pour le développement en fatigue.

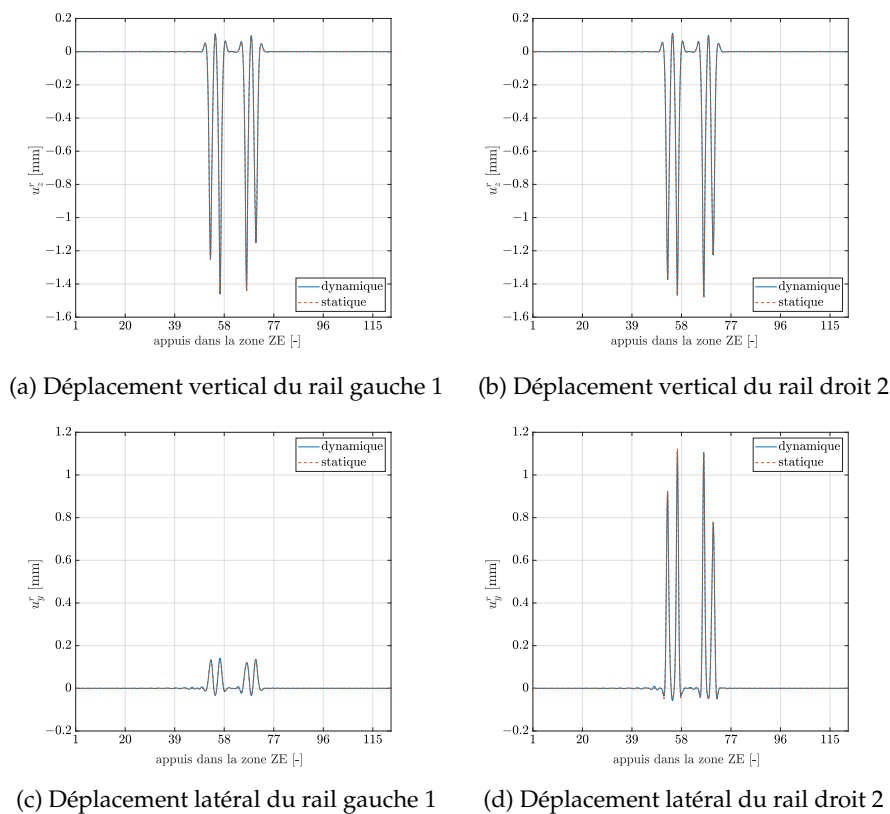


FIGURE 4.14 – Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAUX 1 à l'instant où la motrice atteint le milieu de la voie.

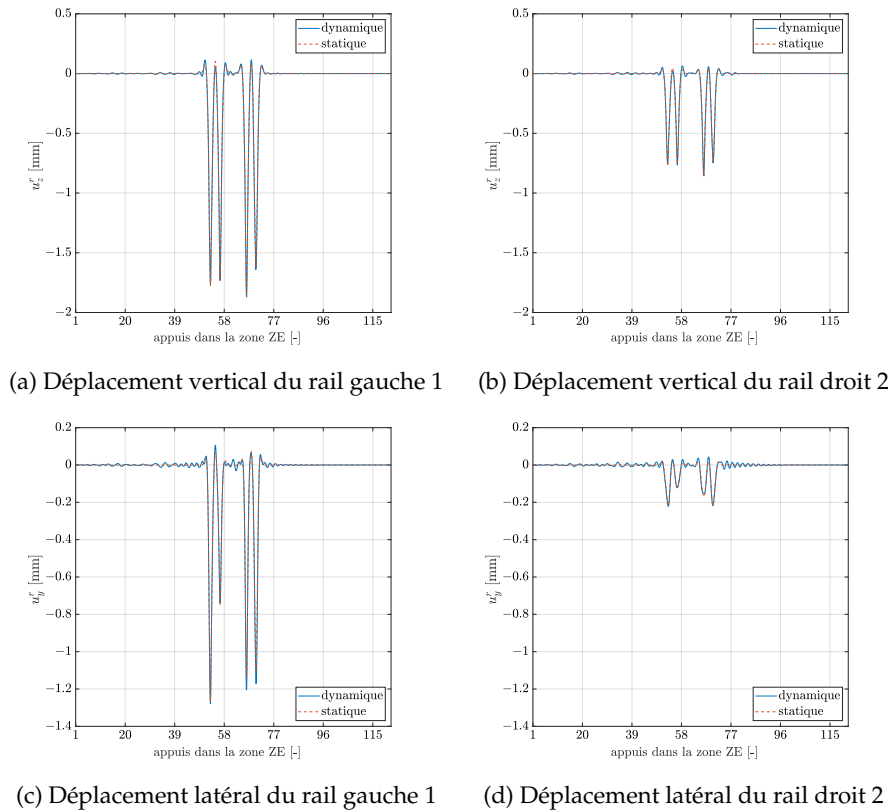


FIGURE 4.15 – Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAUX 2 à l’instant où la motrice atteint le milieu de la voie.

Les déplacements statiques et dynamiques des voies du groupe DEMAUX 3 bas à 5 ne sont pas représentés. Naturellement, les réponses se superposent car l’amortissement global dans ces voies est plus important que l’amortissement dans les voies du groupe DEMAUX 1 et 2. Ceci est notamment dû à un plus grand nombre d’appuis pour une même longueur de voie (i.e. un plus petit espacement entre traverses).

### 4.2.3 État de fatigue généré dans le rail : confrontation du référentiel

Pareillement que pour la circulation de la voiture, le [Tableau 4.5](#) donne le maximum du contour du critère de Dang Van sur toutes les sections étudiées des 7 voies. Tous les maximums obtenus sont négatifs. De ce fait, la limite de fatigue pour les deux millions de cycles considérés n’est pas atteinte. Ainsi, les résultats de l’outil numérique développé vis à vis de la fatigue du rail est conforme au référentiel.

## 4.3 Admission d’un wagon

Pour connaître les conditions d’admission du wagon, il faut consulter les tableaux du référentiel (SNCF, [2019](#)) en rapport avec la circulation des matériels roulants Fret. Le choix du tableau à consulter se fait en fonction de la charge à l’essieu du wagon. Dans le cas du wagon modélisé, la charge à l’essieu est de 17 t. Ces tableaux du référentiel font intervenir une condition supplémentaire sur le tonnage mensuel qui est pour notre cas une information non connue.

| Voie | Groupe DEMAUX | Maximum du contour du critère |
|------|---------------|-------------------------------|
| 1    | 1             | −0,57                         |
| 2    | 2             | −0,42                         |
| 3    | 3 bas         | −0,25                         |
| 4    | 3 haut        | −0,40                         |
| 5    | 4 bas         | −0,51                         |
| 6    | 4 haut        | −0,58                         |
| 7    | 5             | −0,59                         |

TABLEAU 4.5 – Maximum du contour du critère de Dang Van sur les 7 voies modélisées dans le cas de la circulation de la motrice.

Le [Tableau 4.6](#) donne les vitesses et les insuffisances de dévers à adopter d'un point de vue de la résistance de l'armement de la voie pour chaque voie modélisée. Les vitesses potentielles de tracé

| Voie | Groupes DEMAUX |                                       | Conditions de circulation          |                                                 |
|------|----------------|---------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------------------|
|      | N°             | $\frac{I_{ry}}{v}$ [mm <sup>2</sup> ] | Vitesse maximale $V_{\max}$ [km/h] | Insuffisance de dévers maximale $I_{\max}$ [mm] |
| 1    | 1              | [100; 140]                            | 50                                 | 70                                              |
| 2    | 2              | [141; 179]                            | 50                                 | 100                                             |
| 3    | 3 bas          | [180; 219]                            | 50                                 | 110                                             |
| 4    | 3 haut         | [220; 235]                            | 60                                 | 110                                             |
| 5    | 4 bas          | [236; 300]                            | 70                                 | 110                                             |
| 6    | 4 haut         | [301; 350]                            | 110                                | 110                                             |
| 7    | 5              | > 350                                 | 120                                | 110                                             |

TABLEAU 4.6 – Conditions de circulation d'un wagon ayant une charge à l'essieu maximale de 17 t (SNCF, [2019](#)).

sont quant à elles de :

- 135 km/h pour une insuffisance de dévers de 70 mm ;
- 144 km/h pour une insuffisance de dévers de 100 mm ;
- 147 km/h pour une insuffisance de dévers de 110 mm.

Ceci veut dire que les vitesses à adopter dans les simulations sont celles du [Tableau 4.6](#).

#### 4.3.1 Chargement généré par le wagon sur les voies

Contrairement à la motrice, les vitesses de circulation sont basses. Ceci induit une amplitude des surcharges moins importantes que dans le cas précédent. Par ailleurs pour presque toutes les voies, le véhicule franchit la courbe en excès de dévers. Comme l'interaction roue/rail n'est pas considérée. Les voies du groupe DEMAUX 1, 2 et 3 bas voient le même chargement car elles sont pourvues des

mêmes défauts et que la vitesse de circulation du wagon est la même. La Figure 4.16 représente donc le chargement sur la voie du groupe DEMAUX 1. Dans le cas des voies du groupe DEMAUX 4 haut et 5, le dévers d'équilibre est pratiquement atteint. L'effet des efforts centrifuges vu par la voie est de ce fait annulé. On retrouve ainsi des efforts latéraux quasistatiques proches de zéro comme le montre la Figure 4.17 pour la voie du groupe DEMAUX 4 haut.

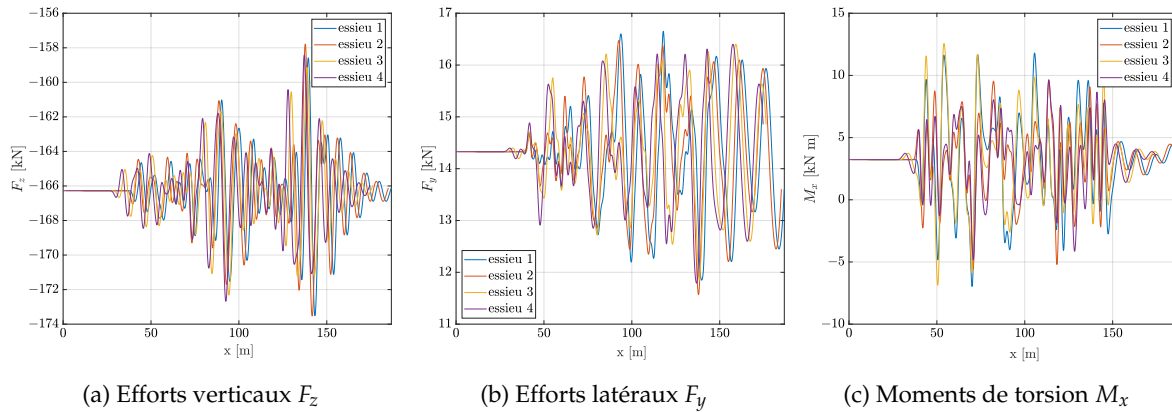


FIGURE 4.16 – Efforts exercés par chaque essieu du wagon sur la voie appartenant au groupe DEMAUX 1 : efforts représentés dans le repère de la voie.

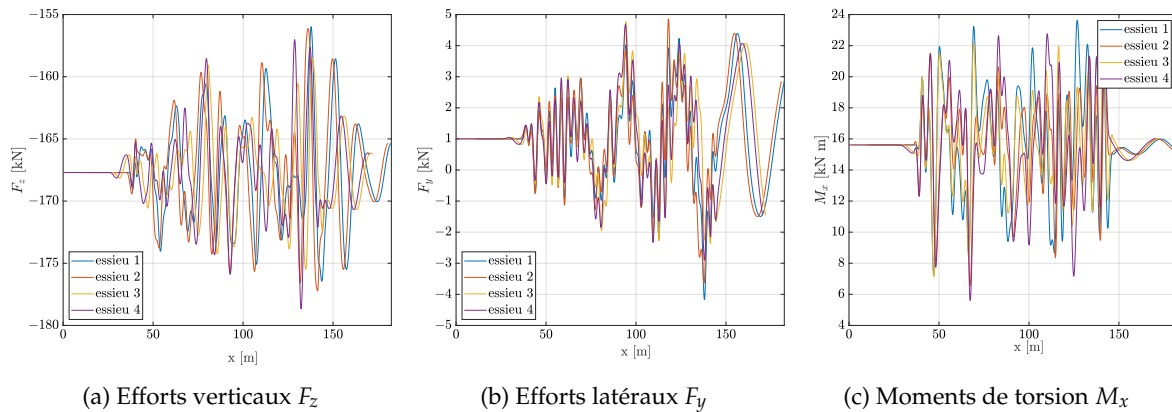


FIGURE 4.17 – Efforts exercés par chaque essieu du wagon sur la voie appartenant au groupe DEMAUX 4 haut : efforts représentés dans le repère de la voie.

### 4.3.2 Comparaison de la réponse statique et dynamique de la voie

Dans le cas du wagon, les déplacements statiques et dynamiques des rails sur les voies du groupe DEMAUX 1 et 2 sont montrés sur les Figure 4.18 et Figure 4.19. Tout comme les autres simulations, les déplacements statiques et dynamiques des deux files de rail sont quasiment identiques. Seules de légères oscillations, qu'on considère négligeables, se présentent pour le déplacement latéral. D'ailleurs, ces oscillations diminuent considérablement sur la voie du groupe DEMAUX 2, qui a un armement de voie légèrement plus fort que la voie du groupe DEMAUX 1, à cause d'une plus grande raideur et d'un plus grand amortissement dans la voie.

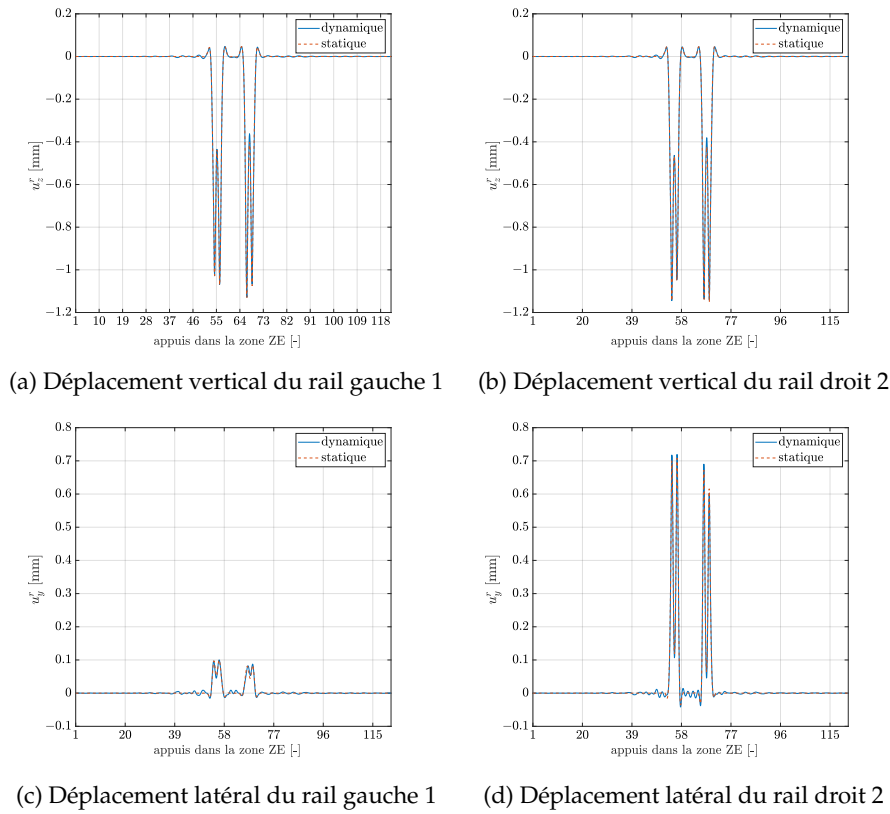


FIGURE 4.18 – Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAUX 1 à l’instant où le wagon atteint le milieu de la voie.

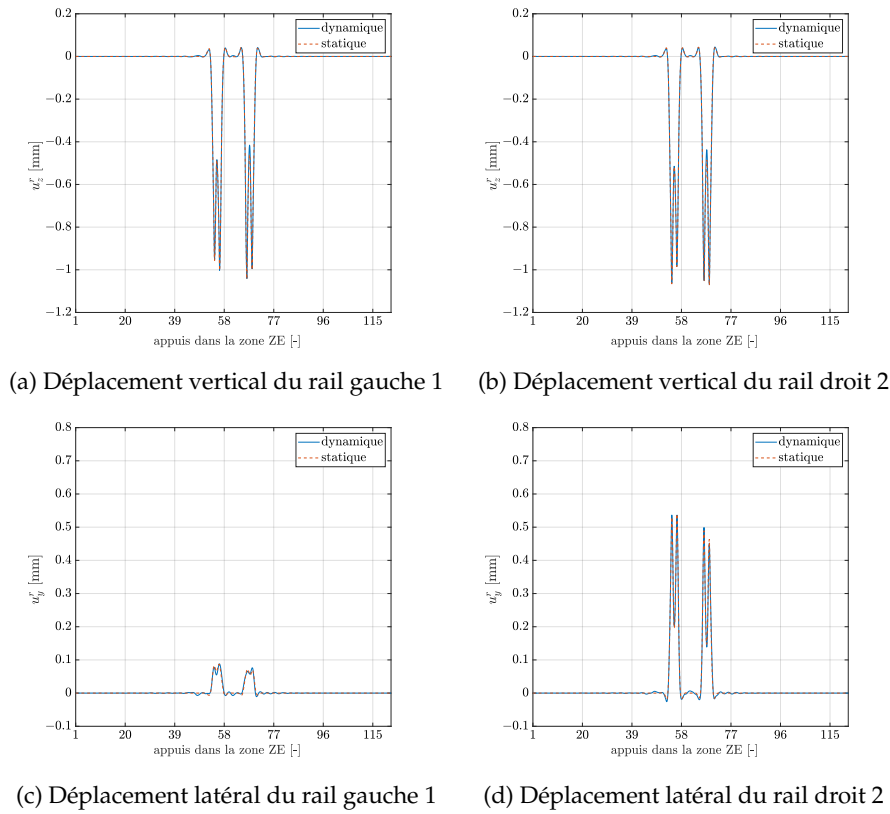


FIGURE 4.19 – Déplacements dynamiques et statiques dans la zone ZE de la voie du groupe DEMAUX 2 à l’instant où le wagon atteint le milieu de la voie.

Concernant les voies du groupe DEMAUX 3 bas à 5 qui ne sont pas représentées, les mêmes réponses statiques et dynamiques sont également observées du fait des amortissements importants dans ces voies.

Les résultats en fatigue sont donc déterminés sur la base du comportement statique de la voie.

### 4.3.3 État de fatigue généré dans le rail : confrontation du référentiel

Pour la circulation du wagon, le maximum du contour du critère de Dang Van reste négatif. De ce fait, il n'y a pas d'amorçage de fissures sur les rails après 2 millions de cycles. Les résultats obtenus viennent appuyer les choix présentés dans le référentiel (SNCF, 2019).

| Voie | Groupe DEMAUX | Maximum du contour du critère |
|------|---------------|-------------------------------|
| 1    | 1             | -0,70                         |
| 2    | 2             | -0,71                         |
| 3    | 3 bas         | -0,73                         |
| 4    | 3 haut        | -0,75                         |
| 5    | 4 bas         | -0,80                         |
| 6    | 4 haut        | -0,86                         |
| 7    | 5             | -0,88                         |

TABLEAU 4.7 – Maximum du contour du critère de Dang Van sur les 7 voies modélisées dans le cas de la circulation du wagon.

## 4.4 Bilan

Dans ce chapitre, des cas de circulation plus réalistes ont été présentés. Trois types de matériels roulants ont été choisis : une voiture remorquée, une motrice et un wagon. Le but de ces simulations était de confronter les résultats de la modélisation aux tableaux du référentiel (SNCF, 2019).

Au cours de ces simulations, la réponse statique de la voie a été comparée à sa réponse dynamique. Il a été montré que la réponse statique de la voie était confondue à sa réponse dynamique à cause de l'amortissement conséquent de la voie. Ce résultat a permis ainsi de réduire le temps de calcul en s'affranchissant de simulations dynamiques pour la voie. L'analyse des contraintes dans le rail a montré que les contraintes tangentielles étaient du même ordre de grandeur que les contraintes normales, ce qui justifie le choix d'une cinématique de Timoshenko pour le rail. Le chargement engendré par ces circulations est notamment sensible à la charge à l'essieu mais aussi à la vitesse de parcours qui accentue l'effet néfaste des défauts de géométrie de la voie. Cette vitesse de parcours détermine également le type de la circulation en excès ou en insuffisance de dévers et de ce fait le rail le plus chargé par le véhicule. L'analyse de la fatigue a été approfondie sur les voies parcourues par la voiture. Les zones critiques du rail sont notamment situées au niveau des congés de raccordement et sur le patin du rail. De plus, l'étude menée sur l'effet des défauts sur l'état de fatigue dans le rail

a démontré que l'écart de la fonction de fatigue entre une voie sans défaut et une voie avec défaut est d'autant plus remarquable que la vitesse augmente. Logiquement, l'augmentation de la charge à l'essieu engendre aussi des fonctions de fatigue du critère plus proches de zéro, ce qui est le cas de la motrice.

Cette comparaison avec le référentiel permet de se positionner par rapport aux conditions de circulation actuelles pour vérifier si l'outil numérique va dans le même sens que le référentiel en termes de possibilité d'admission de ces matériels roulants. Les fonctions de fatigue pour 2 millions de cycles n'approchent que très rarement de zéro. Ce qui pourrait dire que la définition des conditions de circulation dans le référentiel se base sur des coefficients de sécurité importants. Pour confirmer cela et dans une optique d'augmenter les vitesses de circulation, davantage d'analyses doivent être réalisées. L'idée serait de déterminer l'historique des circulations sur la voie. Ensuite, il faudrait déterminer pour chaque véhicule le nombre de cycles nécessaires pour amorcer une fissure (i.e. fonction de fatigue nulle). Cette étape est à itérer jusqu'à ce que la vitesse de circulation maximale des véhicules soit atteinte selon le plan des circulations défini par l'historique des circulations. Une notion du cumul d'endommagement (exemple : loi de Miner) pourrait être introduite pour vérifier que l'ensemble des véhicules qui parcourent la voie ne provoquent pas d'amorçage de fissures.

La finalité de ces simulations est d'obtenir des tableaux ayant la même forme que ceux du référentiel. Par exemple, pour l'admission des locomotives :

- une lecture en ligne permet de sélectionner le groupe DEMAUX auquel appartient la voie étudiée ;
- une lecture en colonne permet de sélectionner la charge à l'essieu du véhicule considéré ;
- l'intersection de la ligne et de la colonne donne les valeurs de la vitesse admissible et de l'insuffisance de dévers maximale.



## Chapitre 5

# Conclusion et perspectives

Le travail de cette thèse constitue un enjeu majeur dans le cadre de l'interopérabilité ferroviaire. De nouveaux trains européens sont amenés à circuler sur le réseau ferré français et peuvent présenter des architectures très différentes des trains déjà admis à circuler. Il est alors essentiel de compléter l'approche actuelle d'admission des matériels roulants définie dans les référentiels SNCF. Scientifiquement, la thèse s'inscrit également dans une optique de compréhension du comportement complexe de la voie à travers une modélisation numérique de ses différents composants. Un outil numérique de calcul a donc été proposé pour prédire le comportement de la voie. Il englobe un modèle de la voie ferrée, un modèle multi-corps du véhicule et un modèle de génération de défauts de géométrie de la voie. Dans ces travaux, l'accent a été mis sur l'armement de la voie est notamment sur le rail qui est directement sollicité par les matériels roulants. La prédiction de l'état de fatigue dans le rail a ainsi été réalisée en tenant compte des circulations des matériels roulants et des défauts géométriques de la voie.

L'utilisation industrielle de l'outil a motivé le choix de modèles légers peu coûteux en temps de calcul. Une étude bibliographique a permis de retenir un modèle 3D du type poutres reposant sur un milieu multi-couches de ressorts et amortisseurs pour la voie qui permet d'explorer son comportement vertical mais aussi latéral. Un modèle multi-corps léger linéaire a été choisi pour le véhicule car l'intérêt est porté à l'étude de la voie. Afin de compléter la procédure actuelle d'admission des matériels roulants, les défauts de géométrie de la voie sont pris en compte. En effet, lorsqu'un véhicule franchit une zone pourvue de défauts, les accélérations des composants du véhicule provoquent des surcharges dynamiques qui seront exercées par le véhicule sur la voie et qui augmenteront le niveau de contraintes vu par le rail. Une procédure a dans ce sens été implémentée pour générer des défauts aléatoires à partir de mesures de géométrie réelles. En ce qui concerne l'évaluation de la fatigue, une étude bibliographique a permis de comparer différents critères afin de finalement sélectionner le critère de Dang Van pour le besoin de la thèse. La même approche de réduction du temps de calcul a été mise en place grâce à l'implémentation de l'algorithme des directions alternées qui utilise des notions d'optimisation min-max. Cette technique a été choisie pour son efficacité à fournir des résultats fiables dans un temps réduit.

Les voies visées dans ces travaux sont des voies appartenant à des lignes classiques qui ont la particularité d'être limitées à des vitesses de circulation de 220 km/h. En conjuguant cette vitesse avec les longueurs d'onde minimales de 3 m des défauts de géométrie, on obtient un domaine fréquentiel d'étude de  $[0; 20 \text{ Hz}]$ . Dans ce domaine, la dynamique du véhicule est prépondérante par

rapport à la dynamique de la voie, ce qui permet de découpler les modèles. Ainsi, la première étape de calcul dans l'outil est d'associer le défaut de géométrie au modèle du véhicule pour calculer le chargement total exercé par le véhicule sur la voie. Dans un deuxième temps, ces efforts sont injectés dans le modèle éléments finis de la voie qui permet de déterminer les efforts généralisés dans les deux files de rail. Ces efforts sont les données d'entrée pour le calcul en fatigue. Le maximum de la fonction de fatigue pour 2 millions de cycles permet ainsi de juger quand à la possibilité d'admission du véhicule sur la voie.

L'outil développé a été confronté au référentiel pour pouvoir le positionner par rapport à la procédure en vigueur pour l'admission des matériels roulants. Les résultats en fatigue ont montré une cohérence avec le référentiel. En effet, les vitesses et les insuffisances de dévers préconisées par le référentiel n'engendrent pas d'amorçage de fissures dans le rail. À travers trois types de circulation différents, il a été démontré que le comportement statique de la voie au passage du véhicule était identique à son comportement dynamique, ce qui est logique du fait de l'amortissement conséquent de la voie. L'analyse de la réponse du rail a montré que les contraintes tangentielles étaient du même ordre de grandeur que la contrainte normale. Ceci renseigne sur la part non négligeable des mécanismes de torsion et de cisaillement dans la voie. Enfin concernant l'étude de la fatigue, il a été démontré que les zones critiques du rail sont situées au niveau des congés de raccordement et sur le patin du rail. Les écarts des fonctions de fatigue entre une voie sans défauts et une voie avec défauts a souligné les effets non négligeables des défauts de géométrie de la voie sur son comportement en fatigue, surtout lorsque les vitesses de circulation augmentent. Des charges à l'essieu plus importantes favorisent également l'amorçage des fissures.

## Perspectives

Une période non négligeable de la thèse a été destinée au développement de l'outil et à sa validation. Les résultats obtenus sont encourageants quant à la prédiction de l'état de fatigue dans le rail qui est conforme aux préconisations du référentiel. À court terme, la stratégie est de réaliser des études de sensibilité pour quantifier l'effet des rigidités de la semelle et de la couche de {ballast + sous-structure} sur l'état de fatigue dans le rail. La méthode FAST<sup>1</sup> (SALTELLI, TARANTOLA et CHAN, 1999) qui est adapté aux cas des variables aléatoires indépendantes, peut être utilisée. La méthode consiste à assigner à chaque variable aléatoire une fréquence et une fonction de recherche qui permet d'explorer et d'échantillonner le domaine paramétrique qu'on assimile à un hypercube unitaire. Chaque paramètre  $p_i$  oscille ainsi à la fréquence  $\omega_i$ . Un nombre  $N$  de simulations est nécessaire pour avoir des résultats pertinents. Par exemple, (FERNANDES, 2014) choisit 350 simulations pour un total de 4 paramètres. À chaque simulation, la sortie du modèle qu'on choisit comme étant le maximum de la fonction de fatigue du critère sera sous la forme d'une série de Fourier. Les indices de sensibilité du premier ordre pour chaque paramètre sont définis comme étant le rapport entre la variance partielle attribuée à l'effet du paramètre  $p_i$  et la variance totale de la sortie du modèle. Le paramètre le plus influent sur la fatigue sera celui ayant le plus grand indice de sensibilité. Cette méthode globale permet de faire varier les paramètres en même temps et présente l'avantage d'être moins coûteuse que

---

1. Fourier amplitude sensitivity test.

des méthodes comme ANOVA<sup>2</sup> (MESGOUEZ et al., 2017). Concernant le véhicule, certains développements sont à prévoir. En effet, dans le modèle actuel, les paramètres de rigidité et d'amortissement sont tirés de la littérature. Or ces paramètres ne font pas l'objet d'une littérature conséquente surtout quand il s'agit de modèles 3D. L'idée est donc de développer un algorithme d'optimisation qui permette d'itérer sur les paramètres non connus du modèle du véhicule jusqu'à faire coïncider la réponse du modèle avec la réponse de référence qui peut être issue de données de mesures. Avec ce développement, il sera possible de proposer un modèle multi-corps simplifié pour tout véhicule souhaité.

À moyen terme, l'industrialisation de l'outil paraît indispensable. Comme précisé au dernier chapitre, une stratégie d'amélioration des règles de calcul des conditions de circulation est maintenant envisageable grâce à l'outil. En effet, les valeurs assez éloignées de la limite de fatigue incitent à penser que d'importants coefficients de sécurité sont utilisés dans les règles actuelles. Il serait donc possible d'autoriser des vitesses de circulation plus importantes. Pour cela, il faudrait dans un premier temps déterminer l'historique des circulations sur les voies. Dans un second temps, il faudrait déterminer pour chaque véhicule le nombre de cycles nécessaires pour amorcer une fissure. Comme le nombre de cycles pour un même véhicule dépend de la vitesse, plusieurs itérations sont nécessaires jusqu'à l'obtention de la vitesse maximale supportée par la voie tout en respectant le nombre de circulations vu par la voie. La notion de cumul d'endommagement doit être introduite pour vérifier que l'ensemble des véhicules qui parcourent la voie ne provoquent pas d'amorçage de fissures.

À long terme, il serait intéressant d'étendre l'utilisation de l'outil à des fréquences plus importantes. Ceci se traduit par la considération de défauts de courtes longueurs d'onde comme l'usure ondulatoire et la considération de vitesses plus importantes dans le cas des LGV du réseau ferré national. Dans ce cas, quelques changements doivent être réalisés. L'hypothèse qui permettait de découpler les modèles de la voie n'est plus valable car, à plus hautes fréquences, la dynamique de la voie n'est plus négligeable devant la dynamique du véhicule. Ainsi, les efforts d'interaction doivent être représentés et le modèle du véhicule doit être couplé à celui de la voie. L'implémentation du critère de fatigue doit être modifiée pour prendre en compte la fatigue de contact qui devient prépondérante pour des fréquences plus importantes.

---

2. Analysis of variance methods.

## Annexe A

# Rappel de la théorie des éléments finis : élément poutre de Timoshenko à 2 nœuds

La théorie des éléments finis permet d'interpoler le déplacement vertical et la rotation dans un élément grâce aux fonctions de forme  $N_i(x)$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_z^r(x) \\ \theta^r(x) \end{pmatrix} &= \underline{\underline{N}} \begin{pmatrix} u_{z,1}^r \\ \theta_1^r \\ u_{z,2}^r \\ \theta_2^r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N_1(x) & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & N_3(x) & 0 & N_4(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{z,1}^r \\ \theta_1^r \\ u_{z,2}^r \\ \theta_2^r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 - x/l_e) & 0 & x/l_e & 0 \\ 0 & (1 - x/l_e) & 0 & x/l_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{z,1}^r \\ \theta_1^r \\ u_{z,2}^r \\ \theta_2^r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

où  $l_e$  est la longueur de l'élément. Les déformations  $\epsilon_{xx}$  et  $\gamma_{xz}$  sont exprimées par :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= -z \frac{\partial \theta^r}{\partial x} = -z \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{z,1}^r \\ \theta_1^r \\ u_{z,2}^r \\ \theta_2^r \end{pmatrix} = -z \underline{\underline{B}}_F \begin{pmatrix} u_{z,1}^r \\ \theta_1^r \\ u_{z,2}^r \\ \theta_2^r \end{pmatrix} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_z^r}{\partial x} - \theta^r = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & -N_3 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & -N_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{z,1}^r \\ \theta_1^r \\ u_{z,2}^r \\ \theta_2^r \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}}_S \begin{pmatrix} u_{z,1}^r \\ \theta_1^r \\ u_{z,2}^r \\ \theta_2^r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Pour un élément poutre de Timoshenko, la matrice de rigidité élémentaire est une contribution du cisaillement et de la flexion :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_r^e &= E_r I_{r,y} \int_0^{l_e} \underline{\underline{B}}_F^T \underline{\underline{B}}_F dx + G_r \kappa_z S_r \int_0^{l_e} \underline{\underline{B}}_S^T \underline{\underline{B}}_S dx \\ &= \frac{E_r I_{r,y}}{l_e} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{G_r \kappa_z S_r}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & l_e/2 & -1 & l_e/2 \\ l_e/2 & l_e^2/3 & -l_e/2 & l_e^2/6 \\ -1 & -l_e/2 & 1 & -l_e/2 \\ l_e/2 & l_e^2/6 & -l_e/2 & l_e^3/3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où  $\kappa_z$  est le coefficient de cisaillement. La matrice masse d'un élément du rail est exprimée par l'équation suivante :

$$\underline{\underline{M}}_r^e = m_r S_r \int_0^{l_e} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{N}} dx = m_r S_r \begin{pmatrix} -l_e/3 & -l_e/3 & l_e/6 & l_e/6 \\ -l_e/3 & -l_e/3 & l_e/6 & l_e/6 \\ l_e/6 & l_e/6 & l_e/3 & l_e/3 \\ l_e/6 & l_e/6 & l_e/3 & l_e/3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Les matrices de masse et de rigidité globales du rail sont obtenues par assemblage des matrices élémentaires. Certains nœuds du rail sont connectés aux traverses via une connexion verticale ressort/amortisseur. Les traverses sont elles mêmes liées au sol via une autre connexion verticale ressort/amortisseur. Les matrices de rigidité, amortissement et masse du support {semelle, traverse, ballast } sont alors écrites :

$$\underline{\underline{K}}_{\text{sup}} = \begin{pmatrix} k_{s,v} & -k_{s,v} \\ -k_{s,v} & k_{b,v} + k_{s,v} \end{pmatrix}; \underline{\underline{C}}_{\text{sup}} = \begin{pmatrix} c_{s,v} & -c_{s,v} \\ -c_{s,v} & c_{b,v} + c_{s,v} \end{pmatrix}; \underline{\underline{M}}_{\text{sup}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_t \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

où  $M_t$  est la masse d'une moitié de traverse car le modèle de la voie ne représente qu'une seule file de rail.

## Annexe B

# Méthode d'intégration de Newmark

Pour résoudre les équations d'équilibre dynamique d'un système, deux approches peuvent être utilisées (GÉRADIN et RIXEN, 2014) :

- la technique de superposition modale. Elle est fondée sur les résultats issus de l'analyse modale linéaire et consiste à exprimer la réponse dynamique du système de la forme :

$$u = \sum_{k=1}^{N_m} \phi_k(x) U_k(t) \quad (\text{B.1})$$

où  $N_m$  est le nombre de modes propres choisis pour constituer la base modale.  $\phi_k$  et  $U_k$  sont respectivement les modes propres et les déplacements modaux ;

- la technique d'intégration temporelle qui est plus appropriée que la technique de superposition modale lorsque le spectre fréquentiel inclue un grand nombre de modes. De plus, elle peut être étendue à des analyses non linéaires. Elle est fondée sur un échantillonnage de l'intervalle du temps pour l'intégration des équations différentielles relative à l'équilibre dynamique du système.

Il existe plusieurs schémas numériques pour l'intégration temporelle des équations de la dynamique. Certains sont abordés dans (COMBESURE, 2006). Dans cette thèse, l'accent est mis sur la méthode de Newmark (NEWMARK, 1959) qui est utilisée dans le cadre ferroviaire (ARLAUD, 2016).

Le schéma de Newmark dépend de deux paramètres dont le choix régit sa stabilité et sa précision. Les matrices de rigidité  $\underline{K}$ , d'amortissement  $\underline{C}$  et de masse  $\underline{M}$  sont connues. On émet également des hypothèses pour le déplacement initial  $\underline{u}_0$  et la vitesse initiale  $\underline{\dot{u}}_0$  à l'instant  $t_0$ . Les étapes de l'algorithme sont présentées ci-dessous :

1. l'accélération initiale est calculée comme étant :

$$\underline{\ddot{u}}_0 = \underline{M}^{-1} \left( \underline{F}_0 - \underline{C} \underline{\dot{u}}_0 - \underline{K} \underline{u}_0 \right) \quad (\text{B.2})$$

où  $\underline{F}_0$  est le vecteur des forces extérieures à l'instant  $t_0$  ;

2. les champs du déplacement, de vitesse et d'accélération sont prédits à l'instant  $t_{n+1}$  à partir des champs calculés à l'instant  $t_n$  :

$$\begin{cases} \underline{\dot{u}}_{n+1}^* &= \underline{\dot{u}}_n + (1 - \gamma) \, dt \, \underline{\ddot{u}}_n \\ \underline{u}_{n+1}^* &= \underline{u}_n + dt \, \underline{\dot{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) dt^2 \, \underline{\ddot{u}}_n \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

où  $dt$  est le pas de temps ;

3. le champ de l'accélération est par la suite évalué :

$$\begin{cases} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\ddot{u}}}_{n+1} &= \underline{\underline{F}}_{n+1} - \underline{\underline{C}} \underline{\dot{u}}_{n+1}^* - \underline{\underline{K}} \underline{u}_{n+1}^* \quad \text{tel que} \\ \underline{\underline{S}} &= \underline{\underline{M}} + \gamma dt \underline{\underline{C}} + \beta dt^2 \underline{\underline{K}} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

4. les champs du déplacement et de la vitesse sont corrigés comme suit :

$$\begin{cases} \underline{\dot{u}}_{n+1} &= \underline{\dot{u}}_{n+1}^* + \gamma dt \underline{\ddot{u}}_{n+1} \\ \underline{u}_{n+1} &= \underline{u}_{n+1}^* + \beta dt^2 \underline{\ddot{u}}_{n+1} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

5. le temps est incrémenté et on passe à l'étape 2.

Dans le cas où  $\beta = 0,25$  et  $\gamma = 0,5$ , on parle du schéma de l'accélération moyenne qui inconditionnellement stable.

Pour réduire les sources d'instabilités numériques, l'algorithme HHT développé par (HILBER, HUGHES et TAYLOR, 1977) permet d'introduire un amortissement numérique de sorte à ce que les hautes fréquences soient atténuées. Cette méthode est une variante de la méthode de Newmark. On utilise par ailleurs les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  qui dépendent maintenant d'un nouveau paramètre  $\alpha_s \in [0, \frac{1}{3}]$  :

$$\begin{cases} \beta &= \frac{1}{4} (1 + \alpha_s)^2 \\ \gamma &= \frac{1}{2} + \alpha_s \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Les champs du déplacement et de la vitesse sont identiques à ceux de la méthode de Newmark. La différence réside dans l'incrémentation de l'accélération. La matrice  $\underline{\underline{S}}$  est maintenant définie par :

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{M}} - (1 - \alpha_s) \gamma dt \underline{\underline{C}} + (1 - \alpha_s) \beta dt^2 \underline{\underline{K}} \quad (\text{B.7})$$

et l'accélération au pas de temps  $n + 1$  s'exprime par :

$$\underline{\underline{S}} \underline{\underline{\ddot{u}}}_{n+1} = (1 - \alpha_s) \underline{\underline{F}}_{n+1} + \alpha_s \underline{\underline{F}}_n - (1 - \alpha_s) \underline{\underline{C}} \underline{\dot{u}}_{n+1}^* - (1 - \alpha_s) \underline{\underline{K}} \underline{u}_{n+1}^* - \alpha_s \underline{\underline{C}} \underline{\dot{u}}_n - \alpha_s \underline{\underline{K}} \underline{u}_n \quad (\text{B.8})$$

## Annexe C

# Véhicules et voies modélisés au chapitre 4

| Paramètres                                                                  | Notation  | Valeur numérique          |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|---------------------------|
| Masse de la caisse                                                          | $M_c$     | 28800 kg                  |
| Moment d'inertie de la caisse dans la direction $\vec{X}$                   | $J_X^c$   | 93312 kg m <sup>2</sup>   |
| Moment d'inertie de la caisse dans la direction $\vec{Y}$                   | $J_Y^c$   | 1411200 kg m <sup>2</sup> |
| Moment d'inertie de la caisse dans la direction $\vec{Z}$                   | $J_Z^c$   | 1331712 kg m <sup>2</sup> |
| Masse du bogie                                                              | $M_b$     | 2600 kg                   |
| Moment d'inertie du bogie dans la direction $\vec{X}$                       | $J_X^b$   | 2106 kg m <sup>2</sup>    |
| Moment d'inertie du bogie dans la direction $\vec{Y}$                       | $J_Y^b$   | 1424 kg m <sup>2</sup>    |
| Moment d'inertie du bogie dans la direction $\vec{Z}$                       | $J_Z^b$   | 2600 kg m <sup>2</sup>    |
| Masse de l'essieu                                                           | $M_e$     | 1728 kg                   |
| Moment d'inertie de l'essieu dans la direction $\vec{X}$                    | $J_X^e$   | 740 kg m <sup>2</sup>     |
| Raideur verticale de la suspension secondaire                               | $k_{2,v}$ | 990,8 kN/m                |
| Amortissement vertical de la suspension secondaire                          | $c_{2,v}$ | 9,8 kN s/m                |
| Raideur latérale de la suspension secondaire                                | $k_{2,l}$ | 159,7 kN/m                |
| Amortissement latéral de la suspension secondaire                           | $c_{2,l}$ | 58,8 kN s/m               |
| Raideur verticale de la suspension primaire                                 | $k_{1,v}$ | 1244 kN/m                 |
| Amortissement vertical de la suspension primaire                            | $c_{1,v}$ | 19,6 kN s/m               |
| Raideur latérale de la suspension primaire                                  | $k_{1,l}$ | 5490 kN/m                 |
| Amortissement latéral de la suspension primaire                             | $c_{1,l}$ | 5,49 kN s/m               |
| Distance longitudinale entre les centres des bogies                         | $d_b$     | 17,5 m                    |
| Distance longitudinale entre les essieux d'un bogie                         | $d_e$     | 2,5 m                     |
| Mi-distance latérale entre les suspensions secondaires                      | $b$       | 1,23 m                    |
| Mi-distance latérale entre les suspensions primaires                        | $a$       | 1 m                       |
| Distance verticale entre le centre de la caisse et la suspension secondaire | $h_1$     | 0,62 m                    |
| Distance verticale entre le centre du bogie et la suspension secondaire     | $h_2$     | 0,49 m                    |
| Distance verticale entre le centre du bogie et la suspension primaire       | $h_3$     | 0,08 m                    |
| Rayon de la roue                                                            | $r$       | 0,43 m                    |

TABLEAU C.1 – Paramètres du modèle multi-corps 3D du véhicule (WANG, ZHANG et OUYANG, 2017) : véhicule du type voiture remorquée.



| Paramètres                                                                    | Notation  | Valeur numérique          |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|---------------------------|
| Masse de la caisse                                                            | $M_c$     | 59364,2 kg                |
| Moment d'inertie de la caisse dans la direction $\vec{X}$                     | $J_X^c$   | 130500 kg m <sup>2</sup>  |
| Moment d'inertie de la caisse dans la direction $\vec{Y}$                     | $J_Y^c$   | 1723000 kg m <sup>2</sup> |
| Moment d'inertie de la caisse dans la direction $\vec{Z}$                     | $J_Z^c$   | 1796000 kg m <sup>2</sup> |
| Masse du bogie                                                                | $M_b$     | 5630,8 kg                 |
| Moment d'inertie du bogie dans la direction $\vec{X}$                         | $J_X^b$   | 2202 kg m <sup>2</sup>    |
| Moment d'inertie du bogie dans la direction $\vec{Y}$                         | $J_Y^b$   | 9487 kg m <sup>2</sup>    |
| Moment d'inertie du bogie dans la direction $\vec{Z}$                         | $J_Z^b$   | 11233 kg m <sup>2</sup>   |
| Masse de l'essieu                                                             | $M_e$     | 1843,5 kg                 |
| Moment d'inertie de l'essieu dans la direction $\vec{X}$                      | $J_X^e$   | 1263 kg m <sup>2</sup>    |
| Raideur verticale de la suspension secondaire                                 | $k_{2,v}$ | 885,8 kN/m                |
| Amortissement vertical de la suspension secondaire                            | $c_{2,v}$ | 45 kN s/m                 |
| Raideur latérale de la suspension secondaire                                  | $k_{2,l}$ | 315,6 kN/m                |
| Amortissement latéral de la suspension secondaire                             | $c_{2,l}$ | 50 kN s/m                 |
| Raideur verticale de la suspension primaire                                   | $k_{1,v}$ | 2399,6 kN/m               |
| Amortissement vertical de la suspension primaire                              | $c_{1,v}$ | 30 kN s/m                 |
| Raideur latérale de la suspension primaire                                    | $k_{1,l}$ | 4878 kN/m                 |
| Amortissement latéral de la suspension primaire *                             | $c_{1,l}$ | 15 kN s/m                 |
| Distance longitudinale entre les centres des bogies                           | $d_b$     | 11,46 m                   |
| Distance longitudinale entre les essieux d'un bogie                           | $d_e$     | 3 m                       |
| Mi-distance latérale entre les suspensions secondaires *                      | $b$       | 1,12 m                    |
| Mi-distance latérale entre les suspensions primaires *                        | $a$       | 0,98 m                    |
| Distance verticale entre le centre de la caisse et la suspension secondaire * | $h_1$     | 0,98 m                    |
| Distance verticale entre le centre du bogie et la suspension secondaire *     | $h_2$     | 0,36 m                    |
| Distance verticale entre le centre du bogie et la suspension primaire *       | $h_3$     | 0,07 m                    |
| Rayon de la roue                                                              | $r$       | 0,525 m                   |

\* valeurs tirées de (XIA, XU et CHAN, 2000).

TABLEAU C.2 – Paramètres du modèle multi-corps 3D du véhicule (ZHAI, WANG et CAI, 2009) : véhicule du type motrice.

| Paramètres                                                                  | Notation  | Valeur numérique         |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|--------------------------|
| Masse de la caisse                                                          | $M_c$     | 61000 kg                 |
| Moment d'inertie de la caisse dans la direction $\vec{X}$                   | $J_X^c$   | 86576 kg m <sup>2</sup>  |
| Moment d'inertie de la caisse dans la direction $\vec{Y}$                   | $J_Y^c$   | 647182 kg m <sup>2</sup> |
| Moment d'inertie de la caisse dans la direction $\vec{Z}$                   | $J_Z^c$   | 652982 kg m <sup>2</sup> |
| Masse du bogie                                                              | $M_b$     | 1277,5 kg                |
| Moment d'inertie du bogie dans la direction $\vec{X}$                       | $J_X^b$   | 412,4 kg m <sup>2</sup>  |
| Moment d'inertie du bogie dans la direction $\vec{Y}$                       | $J_Y^b$   | 115,6 kg m <sup>2</sup>  |
| Moment d'inertie du bogie dans la direction $\vec{Z}$                       | $J_Z^b$   | 429,6 kg m <sup>2</sup>  |
| Masse de l'essieu                                                           | $M_e$     | 1120 kg                  |
| Moment d'inertie de l'essieu dans la direction $\vec{X}$                    | $J_X^e$   | 420,1 kg m <sup>2</sup>  |
| Raideur verticale de la suspension secondaire                               | $k_{2,v}$ | 2555 kN/m                |
| Amortissement vertical de la suspension secondaire                          | $c_{2,v}$ | 44,24 kN s/m             |
| Raideur latérale de la suspension secondaire                                | $k_{2,l}$ | 230 kN/m                 |
| Amortissement latéral de la suspension secondaire                           | $c_{2,l}$ | 0,1388 kN s/m            |
| Raideur verticale de la suspension primaire **                              | $k_{1,v}$ | 6500 kN/m                |
| Amortissement vertical de la suspension primaire **                         | $c_{1,v}$ | 100 kN s/m               |
| Raideur latérale de la suspension primaire **                               | $k_{1,l}$ | 6500 kN/m                |
| Amortissement latéral de la suspension primaire **                          | $c_{1,l}$ | 100 kN s/m               |
| Distance longitudinale entre les centres des bogies                         | $d_b$     | 10,36 m                  |
| Distance longitudinale entre les essieux d'un bogie                         | $d_e$     | 1,675 m                  |
| Mi-distance latérale entre les suspensions secondaires                      | $b$       | 0,8001 m                 |
| Mi-distance latérale entre les suspensions primaires                        | $a$       | 0,8001 m                 |
| Distance verticale entre le centre de la caisse et la suspension secondaire | $h_1$     | 0,8 m                    |
| Distance verticale entre le centre du bogie et la suspension secondaire     | $h_2$     | 0,1786 m                 |
| Distance verticale entre le centre du bogie et la suspension primaire       | $h_3$     | 0,05 m                   |
| Rayon de la roue                                                            | $r$       | 0,425 m                  |

\*\* valeurs tirées de (SUN, DHANASEKAR et ROACH, 2002).

TABEAU C.3 – Paramètres du modèle multi-corps 3D du véhicule (SUN, DHANASEKAR et al., 2002) : véhicule du type wagon.

| Paramètres                                                                     | Notation        | Valeur numérique                  |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------------------------|
| densité du rail                                                                | $\rho_r$        | $7850 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson du rail                                                 | $\nu_r$         | 0,3                               |
| module de Young du rail                                                        | $E_r$           | $210 \times 10^3 \text{ MPa}$     |
| section du rail                                                                | $S_r$           | $3,8 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{y}$                   | $S_{r,y}$       | $2,22 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{z}$                   | $S_{r,z}$       | $1,45 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{y}$                       | $I_{r,y}$       | $7,15 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{z}$                       | $I_{r,z}$       | $1,01 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de torsion du rail                                          | $J_{r,x}$       | $5,08 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ |
| rigidité verticale de la semelle <sup>a</sup>                                  | $k_{s,v}$       | $265 \text{ MN m}^{-1}$           |
| amortissement vertical de la semelle <sup>a</sup>                              | $c_{s,v}$       | $40 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| rigidité latérale de la semelle                                                | $k_{s,l}$       | $53 \text{ MN m}^{-1}$            |
| amortissement latéral de la semelle                                            | $c_{s,l}$       | $20 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| densité modifiée de la traverse                                                | $\rho_t^*$      | $1282 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson de la traverse                                          | $\nu_t$         | 0,34                              |
| module de Young de la traverse                                                 | $E_t$           | $12,5 \text{ GPa}$                |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{x}$                | $I_{t,x}$       | $7,32 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{z}$                | $I_{t,z}$       | $2,2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$  |
| moment quadratique de torsion de la traverse                                   | $J_{t,y}$       | $1,87 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ |
| espacement entre traverses                                                     | $l$             | 0,83 m                            |
| rigidité verticale de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup>     | $k_{b+s-str,v}$ | $83,65 \text{ MN m}^{-1}$         |
| amortissement vertical de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup> | $c_{b+s-str,v}$ | $13,5 \text{ kN s m}^{-1}$        |
| rigidité latérale de la couche de {ballast + sous-structure}                   | $k_{b+s-str,l}$ | $41,825 \text{ MN m}^{-1}$        |
| amortissement latéral de la couche de {ballast + sous-structure}               | $c_{b+s-str,l}$ | $13,5 \text{ kN s m}^{-1}$        |

<sup>a</sup> valeurs tirées de (FERRARA, 2013).

<sup>b</sup> valeurs calculées selon la méthode de la section 2.2.2.

TABLEAU C.4 – Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAX 1 pour une modélisation en 3D : superstructure formée par deux rails 30kg état à demi-usure et des traverses en bois espacées de 0,83 m.

| Paramètres                                                                     | Notation        | Valeur numérique                  |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------------------------|
| densité du rail                                                                | $\rho_r$        | $7850 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson du rail                                                 | $\nu_r$         | 0,3                               |
| module de Young du rail                                                        | $E_r$           | $210 \times 10^3 \text{ MPa}$     |
| section du rail                                                                | $S_r$           | $4,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{y}$                   | $S_{r,y}$       | $2,62 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{z}$                   | $S_{r,z}$       | $1,59 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{y}$                       | $I_{r,y}$       | $9,27 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{z}$                       | $I_{r,z}$       | $1,95 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de torsion du rail                                          | $J_{r,x}$       | $6,87 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ |
| rigidité verticale de la semelle <sup>a</sup>                                  | $k_{s,v}$       | $265 \text{ MN m}^{-1}$           |
| amortissement vertical de la semelle <sup>a</sup>                              | $c_{s,v}$       | $40 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| rigidité latérale de la semelle                                                | $k_{s,l}$       | $53 \text{ MN m}^{-1}$            |
| amortissement latéral de la semelle                                            | $c_{s,l}$       | $20 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| densité modifiée de la traverse                                                | $\rho_t^*$      | $1282 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson de la traverse                                          | $\nu_t$         | 0,34                              |
| module de Young de la traverse                                                 | $E_t$           | 12.5 GPa                          |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{x}$                | $I_{t,x}$       | $7,32 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{z}$                | $I_{t,z}$       | $2,2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$  |
| moment quadratique de torsion de la traverse                                   | $J_{t,y}$       | $1,87 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ |
| espacement entre traverses                                                     | $l$             | 0,83 m                            |
| rigidité verticale de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup>     | $k_{b+s-str,v}$ | $83,65 \text{ MN m}^{-1}$         |
| amortissement vertical de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup> | $c_{b+s-str,v}$ | $13,5 \text{ kN s m}^{-1}$        |
| rigidité latérale de la couche de {ballast + sous-structure}                   | $k_{b+s-str,l}$ | $41,825 \text{ MN m}^{-1}$        |
| amortissement latéral de la couche de {ballast + sous-structure}               | $c_{b+s-str,l}$ | $13,5 \text{ kN s m}^{-1}$        |

<sup>a</sup> valeurs tirées de (FERRARA, 2013).

<sup>b</sup> valeurs calculées selon la méthode de la section 2.2.2.

TABLEAU C.5 – Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAX 2 pour une modélisation en 3D : superstructure formée par deux rails 36E2 à demi-usure et des traverses en bois espacées de 0,83 m.

| Paramètres                                                                     | Notation        | Valeur numérique                  |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------------------------|
| densité du rail                                                                | $\rho_r$        | $7850 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson du rail                                                 | $\nu_r$         | 0,3                               |
| module de Young du rail                                                        | $E_r$           | $210 \times 10^3 \text{ MPa}$     |
| section du rail                                                                | $S_r$           | $3,6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{y}$                   | $S_{r,y}$       | $2,22 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{z}$                   | $S_{r,z}$       | $1,45 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{y}$                       | $I_{r,y}$       | $7,15 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{z}$                       | $I_{r,z}$       | $1,01 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de torsion du rail                                          | $J_{r,x}$       | $5,08 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ |
| rigidité verticale de la semelle <sup>a</sup>                                  | $k_{s,v}$       | $265 \text{ MN m}^{-1}$           |
| amortissement vertical de la semelle <sup>a</sup>                              | $c_{s,v}$       | $40 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| rigidité latérale de la semelle                                                | $k_{s,l}$       | $53 \text{ MN m}^{-1}$            |
| amortissement latéral de la semelle                                            | $c_{s,l}$       | $20 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| densité modifiée de la traverse                                                | $\rho_t^*$      | $1282 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson de la traverse                                          | $\nu_t$         | 0,34                              |
| module de Young de la traverse                                                 | $E_t$           | 12.5 GPa                          |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{x}$                | $I_{t,x}$       | $7,32 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{z}$                | $I_{t,z}$       | $2,2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$  |
| moment quadratique de torsion de la traverse                                   | $J_{t,y}$       | $1,87 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ |
| espacement entre traverses                                                     | $l$             | 0,6 m                             |
| rigidité verticale de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup>     | $k_{b+s-str,v}$ | $59,4 \text{ MN m}^{-1}$          |
| amortissement vertical de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup> | $c_{b+s-str,v}$ | $11,5 \text{ kN s m}^{-1}$        |
| rigidité latérale de la couche de {ballast + sous-structure}                   | $k_{b+s-str,l}$ | $29,7 \text{ MN m}^{-1}$          |
| amortissement latéral de la couche de {ballast + sous-structure}               | $c_{b+s-str,l}$ | $11,5 \text{ kN s m}^{-1}$        |

<sup>a</sup> valeurs tirées de (FERRARA, 2013).

<sup>b</sup> valeurs calculées selon la méthode de la section 2.2.2.

TABLEAU C.6 – Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAX 3 bas pour une modélisation en 3D : superstructure formée par deux rails 30kg état à demi-usure et des traverses en bois espacées de 0,6 m.

| Paramètres                                                                     | Notation        | Valeur numérique                  |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------------------------|
| densité du rail                                                                | $\rho_r$        | $7850 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson du rail                                                 | $\nu_r$         | 0,3                               |
| module de Young du rail                                                        | $E_r$           | $210 \times 10^3 \text{ MPa}$     |
| section du rail                                                                | $S_r$           | $4,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{y}$                   | $S_{r,y}$       | $2,62 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{z}$                   | $S_{r,z}$       | $1,59 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{y}$                       | $I_{r,y}$       | $9,27 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{z}$                       | $I_{r,z}$       | $1,95 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de torsion du rail                                          | $J_{r,x}$       | $6,87 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ |
| rigidité verticale de la semelle <sup>a</sup>                                  | $k_{s,v}$       | $265 \text{ MN m}^{-1}$           |
| amortissement vertical de la semelle <sup>a</sup>                              | $c_{s,v}$       | $40 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| rigidité latérale de la semelle                                                | $k_{s,l}$       | $53 \text{ MN m}^{-1}$            |
| amortissement latéral de la semelle                                            | $c_{s,l}$       | $20 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| densité modifiée de la traverse                                                | $\rho_t^*$      | $1282 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson de la traverse                                          | $\nu_t$         | 0,34                              |
| module de Young de la traverse                                                 | $E_t$           | $12,5 \text{ GPa}$                |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{x}$                | $I_{t,x}$       | $7,32 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{z}$                | $I_{t,z}$       | $2,2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$  |
| moment quadratique de torsion de la traverse                                   | $J_{t,y}$       | $1,87 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ |
| espacement entre traverses                                                     | $l$             | 0,6 m                             |
| rigidité verticale de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup>     | $k_{b+s-str,v}$ | $59,4 \text{ MN m}^{-1}$          |
| amortissement vertical de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup> | $c_{b+s-str,v}$ | $11,5 \text{ kN s m}^{-1}$        |
| rigidité latérale de la couche de {ballast + sous-structure}                   | $k_{b+s-str,l}$ | $29,7 \text{ MN m}^{-1}$          |
| amortissement latéral de la couche de {ballast + sous-structure}               | $c_{b+s-str,l}$ | $11,5 \text{ kN s m}^{-1}$        |

<sup>a</sup> valeurs tirées de (FERRARA, 2013).

<sup>b</sup> valeurs calculées selon la méthode de la section 2.2.2.

TABLEAU C.7 – Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAUX 3 haut pour une modélisation en 3D : superstructure formée par deux rails 36E2 à demi-usure et des traverses en bois espacées de 0,6 m.

| Paramètres                                                                     | Notation        | Valeur numérique                  |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------------------------|
| densité du rail                                                                | $\rho_r$        | $7850 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson du rail                                                 | $\nu_r$         | 0,3                               |
| module de Young du rail                                                        | $E_r$           | $210 \times 10^3 \text{ MPa}$     |
| section du rail                                                                | $S_r$           | $5.5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{y}$                   | $S_{r,y}$       | $3,09 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{z}$                   | $S_{r,z}$       | $2,02 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{y}$                       | $I_{r,y}$       | $1,41 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{z}$                       | $I_{r,z}$       | $3,11 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de torsion du rail                                          | $J_{r,x}$       | $1,05 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| rigidité verticale de la semelle <sup>c</sup>                                  | $k_{s,v}$       | $120 \text{ MN m}^{-1}$           |
| amortissement vertical de la semelle <sup>d</sup>                              | $c_{s,v}$       | $50 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| rigidité latérale de la semelle                                                | $k_{s,l}$       | $24 \text{ MN m}^{-1}$            |
| amortissement latéral de la semelle                                            | $c_{s,l}$       | $25 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| densité modifiée de la traverse                                                | $\rho_t^*$      | $4016 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson de la traverse                                          | $\nu_t$         | 0,25                              |
| module de Young de la traverse                                                 | $E_t$           | 30 GPa                            |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{x}$                | $I_{t,x}$       | $1,24 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{z}$                | $I_{t,z}$       | $2,12 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de torsion de la traverse                                   | $J_{t,y}$       | $2,56 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ |
| espacement entre traverses                                                     | $l$             | 0,67 m                            |
| rigidité verticale de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup>     | $k_{b+s-str,v}$ | $213,6 \text{ MN m}^{-1}$         |
| amortissement vertical de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup> | $c_{b+s-str,v}$ | $24,6 \text{ kN s m}^{-1}$        |
| rigidité latérale de la couche de {ballast + sous-structure}                   | $k_{b+s-str,l}$ | $106,8 \text{ MN m}^{-1}$         |
| amortissement latéral de la couche de {ballast + sous-structure}               | $c_{b+s-str,l}$ | $24,6 \text{ kN s m}^{-1}$        |

<sup>b</sup> valeurs calculées selon la méthode de la [section 2.2.2](#).

<sup>c</sup> valeurs tirées de (FERNANDES, 2014).

<sup>d</sup> valeurs tirées de (KNOTHE et GRASSIE, 1993).

TABLEAU C.8 – Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAX 4 bas pour une modélisation en 3D : superstructure formée par deux rails 46E2 à demi-usure et des traverses en béton M260 espacées de 0,67 m.

| Paramètres                                                                     | Notation        | Valeur numérique                  |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------------------------|
| densité du rail                                                                | $\rho_r$        | $7850 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson du rail                                                 | $\nu_r$         | 0,3                               |
| module de Young du rail                                                        | $E_r$           | $210 \times 10^3 \text{ MPa}$     |
| section du rail                                                                | $S_r$           | $6,04 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{y}$                   | $S_{r,y}$       | $3,39 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{z}$                   | $S_{r,z}$       | $2,24 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{y}$                       | $I_{r,y}$       | $1,75 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{z}$                       | $I_{r,z}$       | $3,74 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de torsion du rail                                          | $J_{r,x}$       | $1,29 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| rigidité verticale de la semelle <sup>c</sup>                                  | $k_{s,v}$       | $120 \text{ MN m}^{-1}$           |
| amortissement vertical de la semelle <sup>d</sup>                              | $c_{s,v}$       | $50 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| rigidité latérale de la semelle                                                | $k_{s,l}$       | $24 \text{ MN m}^{-1}$            |
| amortissement latéral de la semelle                                            | $c_{s,l}$       | $25 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| densité modifiée de la traverse                                                | $\rho_t^*$      | $3875 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson de la traverse                                          | $\nu_t$         | 0,25                              |
| module de Young de la traverse                                                 | $E_t$           | 30 GPa                            |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{x}$                | $I_{t,x}$       | $2,04 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{z}$                | $I_{t,z}$       | $2,51 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de torsion de la traverse                                   | $J_{t,y}$       | $3,67 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ |
| espacement entre traverses                                                     | $l$             | 0.64 m                            |
| rigidité verticale de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup>     | $k_{b+s-str,v}$ | $199,5 \text{ MN m}^{-1}$         |
| amortissement vertical de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup> | $c_{b+s-str,v}$ | $24,04 \text{ kN s m}^{-1}$       |
| rigidité latérale de la couche de {ballast + sous-structure}                   | $k_{b+s-str,l}$ | $99,75 \text{ MN m}^{-1}$         |
| amortissement latéral de la couche de {ballast + sous-structure}               | $c_{b+s-str,l}$ | $24,04 \text{ kN s m}^{-1}$       |

<sup>b</sup> valeurs calculées selon la méthode de la [section 2.2.2](#).

<sup>c</sup> valeurs tirées de (FERNANDES, 2014).

<sup>d</sup> valeurs tirées de (KNOTHE et GRASSIE, 1993).

TABLEAU C.9 – Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAUX 4 haut pour une modélisation en 3D : superstructure formée par deux rails 50E6 à demi-usure et des traverses en béton M450 espacées de 0,64 m.



| Paramètres                                                                     | Notation        | Valeur numérique                  |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------------------------|
| densité du rail                                                                | $\rho_r$        | $7850 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson du rail                                                 | $\nu_r$         | 0,3                               |
| module de Young du rail                                                        | $E_r$           | $210 \times 10^3 \text{ MPa}$     |
| section du rail                                                                | $S_r$           | $7 \times 10^{-3} \text{ m}^2$    |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{y}$                   | $S_{r,y}$       | $3,97 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| section réduite à l'effort tranchant suivant l'axe $\vec{z}$                   | $S_{r,z}$       | $2,72 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{y}$                       | $I_{r,y}$       | $2,56 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique du rail par rapport à l'axe $\vec{z}$                       | $I_{r,z}$       | $4,84 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de torsion du rail                                          | $J_{r,x}$       | $1,63 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ |
| rigidité verticale de la semelle <sup>c</sup>                                  | $k_{s,v}$       | $120 \text{ MN m}^{-1}$           |
| amortissement vertical de la semelle <sup>d</sup>                              | $c_{s,v}$       | $50 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| rigidité latérale de la semelle                                                | $k_{s,l}$       | $24 \text{ MN m}^{-1}$            |
| amortissement latéral de la semelle                                            | $c_{s,l}$       | $25 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| densité modifiée de la traverse                                                | $\rho_t^*$      | $3875 \text{ kg m}^{-3}$          |
| coefficient de Poisson de la traverse                                          | $\nu_t$         | 0,25                              |
| module de Young de la traverse                                                 | $E_t$           | 30 GPa                            |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{x}$                | $I_{t,x}$       | $2,04 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de la traverse par rapport à l'axe $\vec{z}$                | $I_{t,z}$       | $2,51 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ |
| moment quadratique de torsion de la traverse                                   | $J_{t,y}$       | $3,67 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ |
| espacement entre traverses                                                     | $l$             | 0,6 m                             |
| rigidité verticale de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup>     | $k_{b+s-str,v}$ | $190 \text{ MN m}^{-1}$           |
| amortissement vertical de la couche de {ballast + sous-structure} <sup>b</sup> | $c_{b+s-str,v}$ | $23 \text{ kN s m}^{-1}$          |
| rigidité latérale de la couche de {ballast + sous-structure}                   | $k_{b+s-str,l}$ | $95 \text{ MN m}^{-1}$            |
| amortissement latéral de la couche de {ballast + sous-structure}               | $c_{b+s-str,l}$ | $23 \text{ kN s m}^{-1}$          |

<sup>b</sup> valeurs calculées selon la méthode de la [section 2.2.2](#).

<sup>c</sup> valeurs tirées de (FERNANDES, 2014).

<sup>d</sup> valeurs tirées de (KNOTHE et GRASSIE, 1993).

TABLEAU C.10 – Paramètres de la voie appartenant au groupe DEMAUX 5 pour une modélisation en 3D : superstructure formée par deux rails 60E1 à demi-usure et des traverses en béton M450 espacées de 0,6 m.

# Bibliographie

- AFNOR (2003). *NF EN 13450*. Granulats pour ballast de voies ferrées.
- AFNOR (2016). *NF EN 14363*. Applications ferroviaires–Essais et simulations en vue de l’homologation des caractéristiques dynamiques des véhicules ferroviaires–Comportement dynamique et essais stationnaires. partie E : Railway applications–Testing and Simulation for the acceptance of running characteristics of railway vehicles–Running behaviour and stationary tests.
- AHLBECK, DR, HC MEACHAM et RH PRAUSE (1978). « The development of analytical models for railroad track dynamics ». Dans : *Railroad track mechanics and technology*. Elsevier, p. 239-263.
- ALIAS, Jean et P GENTIL (1984). *La voie ferrée : techniques de construction et d’entretien*. Eyrolles.
- ARLAUD, Elodie (2016). « Modèles dynamiques réduits de milieux périodiques par morceaux : application aux voies ferroviaires ». Thèse de doct. Paris, ENSAM.
- ARLAUD, Elodie, S Costa D’AGUIAR et Etienne BALMES (2016). « Receptance of railway tracks at low frequency : Numerical and experimental approaches ». Dans : *Transportation Geotechnics 9*, p. 1-16.
- AU, FTK, JJ WANG et YK CHEUNG (2002). « Impact study of cable-stayed railway bridges with random rail irregularities ». Dans : *Engineering Structures 24.5*, p. 529-541.
- BALLARD, P et al. (1995). « High cycle fatigue and a finite element analysis ». Dans : *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures 18.3*, p. 397-411.
- BENZ-NAVARRETE, Miguel-Angel (2009). « Mesures dynamiques lors du battage du pénétromètre PANDA 2 ». Thèse de doct. Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II.
- BERENGER, Jean-Pierre (1994). « A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves ». Dans : *Journal of computational physics 114.2*, p. 185-200.
- BERNASCONI, Andrea (2002). « Efficient algorithms for calculation of shear stress amplitude and amplitude of the second invariant of the stress deviator in fatigue criteria applications ». Dans : *International journal of fatigue 24.6*, p. 649-657.
- BEZIN, Yann (2008). « An Integrated Flexible Track System Model for Railway Vehicle Dynamics ». Thèse de doct. The Manchester Metropolitan University.
- BONNET, de Marc et Attilio FRANGI (2007). « Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis ». Dans : *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique 16.5*, p. 667-668.
- CALON, Nicolas (2016). « Rôle de la couche intermédiaire dans le potentiel de la voie ferrée ». Thèse de doct. Paris Est.
- CEA (2020). *Cast3M website*. <http://www-cast3m.cea.fr>.
- CHEBLI, Hamid, Didier CLOUTEAU et L SCHMITT (2008). « Dynamic response of high-speed ballasted railway tracks : 3D periodic model and in situ measurements ». Dans : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering 28.2*, p. 118-131.

- COMBESCURE, Didier (2006). « Eléments de dynamique des structures Illustrations à l'aide de CAST3M ». Dans : *support de cours, www-cast3m. cea. fr*.
- CONNOLLY, DP et al. (2014). « Assessment of railway vibrations using an efficient scoping model ». Dans : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 58, p. 37-47.
- COSTA, JN et al. (2021). « A finite element methodology to model flexible tracks with arbitrary geometry for railway dynamics applications ». Dans : *Computers & Structures* 254, p. 106519.
- CROSSLAND, Bernard (1956). « Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel ». Dans : *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*. T. 138. Institution of Mechanical Engineers London, p. 12-12.
- DAHLBERG, Tore (2006). « Track issues ». Dans : *Handbook of railway vehicle dynamics*, p. 143-179.
- DE MAN, Amnon Pieter et al. (2002). « A survey of dynamic railway track properties and their quality ». Dans : *Delft University of Technology, TU Delft*.
- DEPLACE, Arnaud, Fabrice GATUINGT et Frédéric RAGUENEAU (2015). *Aide-mémoire Mécanique des structures-2e éd. : IUT-Licence-Master*. Dunod.
- DIMITROVOVÁ, Z et JN VARANDAS (2009). « Critical velocity of a load moving on a beam with a sudden change of foundation stiffness : Applications to high-speed trains ». Dans : *Computers & Structures* 87.19-20, p. 1224-1232.
- FENANDER, Åsa (1997). « Frequency dependent stiffness and damping of railpads ». Dans : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F : Journal of rail and rapid transit* 211.1, p. 51-62.
- FERNANDES, Vinicius Alves (2014). « Numerical analysis of nonlinear soil behavior and heterogeneity effects on railway track response ». Thèse de doct.
- FERRARA, Riccardo (2013). « A numerical model to predict train induced vibrations and dynamic overloads ». Thèse de doct. Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc.
- FOGUE, Médard (1987). « Critère de fatigue à longue durée de vie pour des états multiaxiaux de contraintes sinusoïdales en phase et hors phase ». Thèse de doct.
- FRÝBA, Ladislav (1999). *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads*. Thomas Telford.
- GÉRADIN, Michel et Daniel J RIXEN (2014). *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics*. John Wiley & Sons.
- GONIN, H (1999). « La formule des Hollandais ou le conformisme dans l'enseignement ». Dans : *Revue française de géotechnique* 87, p. 35-42.
- GUERIN, Nathalie (1996). « Approche expérimentale et numérique du comportement du ballast des voies ferrées ». Thèse de doct. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- HASAN, Nazmul (2015). « Allowable bending fatigue stress of rails ». Dans : *Practice Periodical on Structural Design and Construction* 20.2, p. 04014033.
- HELENO, R et al. (2021). « Influence of the railway vehicle properties in the running safety against crosswinds ». Dans : *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 217, p. 104732.
- HILBER, Hans M, Thomas JR HUGHES et Robert L TAYLOR (1977). « Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics ». Dans : *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 5.3, p. 283-292.
- HOU, K, J KALOUSEK et R DONG (2003). « A dynamic model for an asymmetrical vehicle/track system ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 267.3, p. 591-604.

- JONES, CJC et DJ THOMPSON (2003). « Extended validation of a theoretical model for railway rolling noise using novel wheel and track designs ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 267.3, p. 509-522.
- JU, Shen-Haw et HC LI (2011). « Dynamic interaction analysis of trains moving on embankments during earthquakes ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 330.22, p. 5322-5332.
- KANG, Chongjie et al. (2020). « Experimental investigation on rail fatigue resistance of track/bridge interaction ». Dans : *Engineering Structures* 216, p. 110747.
- KEATON, Jeffrey R et Hari PONNABOYINA (2014). « Selection of geotechnical parameters using the statistics of small samples ». Dans : *Geo-Congress 2014 : Geo-characterization and Modeling for Sustainability*, p. 1532-1541.
- KNOTHE, KL et SL GRASSIE (1993). « Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies ». Dans : *Vehicle system dynamics* 22.3-4, p. 209-262.
- KOUROUSSIS, Georges et al. (2015). « The effect of railway local irregularities on ground vibration ». Dans : *Transportation Research Part D : Transport and Environment* 39, p. 17-30.
- LEI, Xiaoyan et N-A NODA (2002). « Analyses of dynamic response of vehicle and track coupling system with random irregularity of track vertical profile ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 258.1, p. 147-165.
- LESTOILLE, Nicolas (2015). « Stochastic model of high-speed train dynamics for the prediction of long-time evolution of the track irregularities ». Thèse de doct. Paris Est.
- LI, Dingqing et al. (2015). *Railway geotechnics*. CRC Press.
- LU, S et S FARRITOR (2014). « Rail deflection measurements by MRail, inc ». Dans : *Personal communication*.
- LU, Sheng (2008). *Real-time vertical track deflection measurement system*. The University of Nebraska-Lincoln.
- MAC-LAN, Nguyen-Tajan T et al. (2016). « An overall innovative numerical method for the simulation of the fatigue crack initiation and propagation in rails for their maintenance optimization ». Dans.
- MAI, Si Hai (2011). « Etude de dégradation des voies ferrées urbaines ». Thèse de doct. Université Paris-Est.
- MAITOURNAM, H (2015). Dans : *Fatigue des structures*. 828, boulevard des Maréchaux-91762 Palaiseau Cedex-France, p. 83-106.
- MALLIK, Ashok Kumar, Sarvesh CHANDRA et Avinash B SINGH (2006). « Steady-state response of an elastically supported infinite beam to a moving load ». Dans : *Journal of sound and vibration* 291.3-5, p. 1148-1169.
- MARIN, JOSEPH (1956). « Interpretation of fatigue strengths for combined stresses ». Dans : *Proceedings of International Conference on Fatigue of Metals*, p. 184-194.
- MARTÍNEZ-RODRIGO, María D et al. (2020). « Rail-bridge interaction effects in single-track multi-span bridges. Experimental results versus numerical predictions under operating conditions ». Dans.
- MATLAB, Starting (2021). « Matlab ». Dans : *The Mathworks, Natick, MA*.

- MEI, Huihao et al. (2019). « Random distribution characteristics of peak dynamic stress on the subgrade surface of heavy-haul railways considering track irregularities ». Dans : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 116, p. 205-214.
- MESGOUEZ, Arnaud et al. (2017). « Use of global sensitivity analysis to assess the soil poroelastic parameter influence ». Dans : *Wave Motion* 72, p. 377-394.
- MOLINARI, Jacques (1999). « ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE FERROVIAIRE : Relations entre paramètres de voie, sécurité et vitesses de circulation ». Dans.
- NADJITONON, Ngarmaim (2010). « Contribution à la modélisation de l'endommagement par fatigue ». Thèse de doct. Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II.
- NEWMARK, Nathan M (1959). « A method of computation for structural dynamics ». Dans : *Journal of the engineering mechanics division* 85.3, p. 67-94.
- NGUYEN, K, JM GOICOLEA et F GALBADON (2014). « Comparison of dynamic effects of high-speed traffic load on ballasted track using a simplified two-dimensional and full three-dimensional model ». Dans : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F : Journal of Rail and Rapid Transit* 228.2, p. 128-142.
- NGUYEN, Vu-Hieu (2002). « Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles ». Thèse de doct. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- OUHBI, Noura (2017). « Une description morphologique précise des grains pour l'étude numérique des propriétés mécaniques du ballast ferroviaire ». Thèse de doct. Paris Est.
- PADERNO, Chiara (2010). *Comportement du ballast sous l'action du bourrage et du trafic ferroviaire*. Rapp. tech. EPFL.
- PAIXÃO, André et al. (2018). « Numerical simulations to improve the use of under sleeper pads at transition zones to railway bridges ». Dans : *Engineering structures* 164, p. 169-182.
- PANUNZIO, Alfonso M et al. (2017). « Construction of a stochastic model of track geometry irregularities and validation through experimental measurements of dynamic loading ». Dans : *Vehicle System Dynamics* 55.3, p. 399-426.
- PAPADOPOULOS, Ioannis V (1998). « Critical plane approaches in high-cycle fatigue : on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane ». Dans : *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 21.3, p. 269-285.
- PAPADOPOULOS, Ioannis Vassileiou (1987). « Fatigue polycyclique des métaux : une nouvelle approche ». Thèse de doct.
- PEIXER, MA et al. (2021). « Running safety evaluation of a train moving over a high-speed railway viaduct under different track conditions ». Dans : *Engineering Failure Analysis* 121, p. 105133.
- PERRIN, Guillaume (2013). « Champs aléatoires et problèmes statistiques inverses associés pour la quantification des incertitudes : application à la modélisation de la géométrie des voies ferrées pour l'évaluation de la réponse dynamique des trains à grande vitesse et l'analyse ». Thèse de doct. Université Paris-Est.
- PINAULT, Hadrien (2020). « Réduction par apprentissage multi-nombres d'onde pour les guides d'ondes ouverts ou hétérogènes : application à la dynamique de la voie ferrée ». Thèse de doct. HESAM Université.

- PINAULT, Hadrien et al. (2019). « Impact of the radiation of elastic waves in the soil in a periodic railway track model ». Dans.
- POLACH, Oldrich, Mats BERG et Simon IWNICKI (2006). *Handbook of railway vehicle dynamics, chapter simulation*.
- PRUD'HOMME, A (1967). « La résistance de la voie aux efforts transversaux exercés par le material roulant ». Dans : *Revue générale des chemins de fer*.
- PRUD'HOMME, A (1970). *La Voie Revue Generale des Chemins de Fer*.
- PUCILLO, Giovanni Pio et al. (2018). « On the lateral stability of the sleeper-ballast system ». Dans : *Procedia Structural Integrity* 12, p. 553-560.
- QUEZADA, Juan Carlos (2012). « Mécanismes de tassement du ballast et sa variabilité ». Thèse de doct. Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc.
- RHAYMA, Noureddine (2010). « Contribution à l'évolution des méthodologies de caractérisation et d'amélioration des voies ferrées ». Thèse de doct.
- ROBERT, Jean-Louis (1992). « Contribution à l'étude de la fatigue multi axiale sous sollicitations périodiques ou aléatoires ». Thèse de doct. Lyon, INSA.
- SALTELLI, Andrea, Stefano TARANTOLA et KP-S CHAN (1999). « A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output ». Dans : *Technometrics* 41.1, p. 39-56.
- SANCHIS, Ignacio Villalba et al. (2021). « Experimental and numerical investigations of dual gauge railway track behaviour ». Dans : *Construction and Building Materials* 299, p. 123943.
- SAUSSINE, Gilles (2004). « Contribution à la modélisation de granulats tridimensionnels : application au ballast. » Thèse de doct. Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc.
- SAUVAGE, G (1993). « Railway track vertical static behaviour ». Dans : *INRETS/LTN*.
- SAYEED, Md Abu et Mohamed A SHAHIN (2016). « Three-dimensional numerical modelling of ballasted railway track foundations for high-speed trains with special reference to critical speed ». Dans : *Transportation Geotechnics* 6, p. 55-65.
- SCALET, Guilia (2018). « An efficient algorithm for the solution of min-max problems in multiaxial fatigue ». Dans : *International Journal of Fatigue* 112, p. 117-129.
- SELIG, Ernest T et Dingqing LI (1994). « Track modulus : Its meaning and factors influencing it ». Dans : *Transportation Research Record* 1470.
- SÉNAC, G (1983). « Le relèvement des vitesses sur les lignes existantes ». Dans : *Revue générale des chemins de fer* (1924) 102, p. 617-625.
- SNCF (1944). *Rapport de la commission Demaux*. Rapp. tech. Commission de circulation des machines.
- SNCF (2003). *Normes de maintenance de la géométrie et d'écartement pour lignes classiques, LGV parcourues à  $V \leq 220$  km/h et vois de service avec circulations de matières dangereuses ou situées dans un environnement particulier*. Rapp. tech. Direction de l'infrastructure.
- SNCF (2010). *Mise en oeuvre du ballast pour voie ferrée*. Rapp. tech. Direction de l'ingénierie.
- SNCF (2016). *Catalogue des rails*. Rapp. tech. SNCF Réseau-I & P-LVE.
- SNCF (2019). *Règles d'admission des matériels roulants sur le RFN en fonction de la sollicitation de la voie*. Rapp. tech. DGII DTR VA.
- SNCF (2020). *Analyse des sensibilités des conceptions de voie aux données d'entrée*. Rapp. tech.

- SOL-SÁNCHEZ, Miguel, Fernando MORENO-NAVARRO et M<sup>a</sup> Carmen RUBIO-GÁMEZ (2015). « The use of elastic elements in railway tracks : A state of the art review ». Dans : *Construction and building materials* 75, p. 293-305.
- SUN, Yan Quan et Manicka DHANASEKAR (2002). « A dynamic model for the vertical interaction of the rail track and wagon system ». Dans : *International Journal of Solids and Structures* 39.5, p. 1337-1359.
- SUN, YQ, M DHANASEKAR et D ROACH (2002). « A 3D model for the lateral and vertical dynamics of wagon-track systems ». Dans : *Rail and Rapid Transit* 217.1.
- SUN, YQ, M DHANASEKAR et al. (2002). « Influence of the railway track parameters to the vertical and lateral impact ». Dans : *Conference on Railway Engineering, Wollongong*, p. 10-13.
- SWETA, Kumari et Syed Khaja Karimullah HUSSAINI (2019). « Behavior evaluation of geogrid-reinforced ballast-subballast interface under shear condition ». Dans : *Geotextiles and Geomembranes* 47.1, p. 23-31.
- TARAF, M (2008). « Endommagement par fatigue de contact de roulement d'une roue ferroviaire : étude numérique par éléments finis ». Thèse de doct. Thèse doctorale N : 2008061S.
- THOMPSON, DJ et JW VERHEIJ (1997). « The dynamic behaviour of rail fasteners at high frequencies ». Dans : *Applied Acoustics* 52.1, p. 1-17.
- TRAN, Van Xuan (2013). *Critères multi-axiaux d'amorçage en fatigue*. Code\_Aster.
- TREVIN, Jean-Marie (2010). *Manuel de la voie ferrée*. Interne SNCF.
- TROLLÉ, Benoit (2014). « Simulation multi-échelles de la propagation des fissures de fatigue dans les rails ». Thèse de doct.
- UIC (2009). *Essais et homologation de véhicules ferroviaires du point de vue du comportement dynamique-Sécurité-Fatigue de la voie-Qualité de marche*. Rapp. tech.
- VAN, K Dang (1973). « Sur la résistance à la fatigue des métaux ». Dans : *Sciences et techniques de l'armement* 47, p. 641-722.
- VAN, K Dang, B GRIVEAU et O MESSAGE (1989). « On a new multiaxial fatigue limit criterion- Theory and application ». Dans : *Biaxial and multiaxial fatigue(A 90-16739 05-39)*. London, Mechanical Engineering Publications, Ltd., 1989, p. 479-496.
- VAN, K Dang, A LE DOUARON et HP LIEURADE (1984). « Multiaxial fatigue limit : a new approach ». Dans : *Fracture* 84. Elsevier, p. 1879-1885.
- VARANDAS, JN et al. (2020). « Long-term deformation of railway tracks considering train-track interaction and non-linear resilient behaviour of aggregates—a 3D FEM implementation ». Dans : *Computers and Geotechnics* 126, p. 103712.
- WANG, Wei, Yahui ZHANG et Huajiang OUYANG (2017). « An iterative method for solving the dynamic response of railway vehicle-track coupled systems based on prediction of wheel-rail forces ». Dans : *Engineering Structures* 151, p. 297-311.
- WEBER, B et al. (1999). « Improvements of multiaxial fatigue criteria computation for a strong reduction of calculation duration ». Dans : *Computational materials science* 15.4, p. 381-399.
- WEBER, Bastien (1999). « Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque ». Thèse de doct. Lyon, INSA.

- WINKLER, Emil (1867). *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit : mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik für polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architekten, etc.* T. 1. Dominicus.
- WÖHLER, Alfred (1870). *Über die festigkeitsversuche mit eisen und stahl*. Ernst & Korn.
- XIA, He, You Lin XU et Tommy HT CHAN (2000). « Dynamic interaction of long suspension bridges with running trains ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 237.2, p. 263-280.
- XIE, Gang et Simon D IWICKI (2008). « Simulation of wear on a rough rail using a time-domain wheel-track interaction model ». Dans : *Wear* 265.11-12, p. 1572-1583.
- XU, Lei, Wanming ZHAI et Jianmin GAO (2017). « Extended applications of track irregularity probabilistic model and vehicle-slab track coupled model on dynamics of railway systems ». Dans : *Vehicle System Dynamics* 55.11, p. 1686-1706.
- ZENNER, Harald, Armin SIMBÜRGER et Jiping LIU (2000). « On the fatigue limit of ductile metals under complex multiaxial loading ». Dans : *International Journal of Fatigue* 22.2, p. 137-145.
- ZHAI, Wanming, Kaiyun WANG et Chengbiao CAI (2009). « Fundamentals of vehicle-track coupled dynamics ». Dans : *Vehicle System Dynamics* 47.11, p. 1349-1376.
- ZHAI, WM, KY WANG et JH LIN (2004). « Modelling and experiment of railway ballast vibrations ». Dans : *Journal of sound and vibration* 270.4-5, p. 673-683.
- ZHANG, Xianying et al. (2019). « A model of a discretely supported railway track based on a 2.5 D finite element approach ». Dans : *Journal of Sound and Vibration* 438, p. 153-174.
- ZHOU, Jian et AL TITS (1993). « Nonmonotone line search for minimax problems ». Dans : *Journal of Optimization theory and Applications* 76.3, p. 455-476.