

---



---

# Sommaire

---



---

<b>Liste des figures .....</b>	<b>5</b>
<b>Liste des tableaux .....</b>	<b>9</b>
<b>Principales Notations .....</b>	<b>10</b>
<b>Introduction générale.....</b>	<b>12</b>
<b>Chapitre 1.État de l'art : Transmission par engrenages et principales sources d'excitations .....</b>	<b>15</b>
<b>1. Introduction .....</b>	<b>16</b>
<b>2. Transmission par engrenages.....</b>	<b>16</b>
2.1. Transmission par engrenages simple étage .....	16
2.1.1. Modèles dynamiques d'une transmission par engrenages.....	16
2.1.2. Modélisation de l'interface d'engrènement.....	18
2.1.3. Erreur de transmission.....	22
2.1.4. Equation du mouvement.....	25
2.2. Transmission par engrenage à deux étages .....	27
<b>3. Principales sources d'excitation des transmissions par engrenages .....</b>	<b>29</b>
3.1. Sources internes.....	29
3.1.1. Raideur d'engrènement .....	29
3.1.2. Considérations technologiques sur les défauts d'engrenages.....	32
3.2. Sources externes.....	36
3.2.1. Fluctuations du couple moteur .....	36
3.2.2. Fluctuations du couple de charge .....	36
3.2.3. Variation du couple aérodynamique (cas des éoliennes).....	36
<b>4. Conclusion.....</b>	<b>38</b>

<b>Chapitre 2.Méthodes de prise en compte des incertitudes.....</b>	<b>39</b>
<b>1. Introduction .....</b>	<b>41</b>
<b>2. Approche probabiliste.....</b>	<b>41</b>
2.1. Méthode de Monte Carlo (MC).....	42
2.1.1. Origine.....	42
2.1.2. Principe.....	42
2.1.3. Avantages et inconvénients .....	43
2.1.4. Conclusion.....	44
2.2. Méthode de perturbation .....	44
2.2.1. Principe.....	44
2.2.2. Formulation théorique .....	45
2.2.3. Les principales applications .....	47
2.2.4. Exemple d'application.....	48
2.2.5. Conclusion.....	50
2.3. Chaos polynomial.....	50
2.3.1. Principe.....	50
2.3.2. Formulation théorique .....	50
2.3.3. Les principales applications .....	53
2.3.4. Exemple d'application.....	54
2.3.5. Conclusion.....	56
<b>3. Méthode des plans d'expériences .....</b>	<b>56</b>
3.1. Principe.....	56
3.2. Méthode de Taguchi.....	57
3.3. Exemple d'application.....	57
<b>4. Approche possibiliste (ensembliste) .....</b>	<b>59</b>
4.1. Méthode des intervalles.....	59
4.1.1. Principe.....	59
4.1.2. Formulation théorique .....	60
4.1.3. Exemple d'application.....	61
4.1.4. Conclusion.....	63
4.2. Méthode à base de la logique floue .....	63
4.2.1. Principe.....	63
4.2.2. Exemple d'application.....	64

4.2.3. Conclusion.....	65
<b>5. Conclusion.....</b>	<b>65</b>
<b>Chapitre 3. Réponse dynamique d'une transmission par engrenage simple étage à paramètres incertains .....</b>	<b>67</b>
<b>1. Introduction .....</b>	<b>68</b>
<b>2. Simulation de Monte Carlo (MC) .....</b>	<b>68</b>
<b>3. Méthodes de perturbation .....</b>	<b>69</b>
3.1. Expansion en série de Taylor d'ordre 2.....	71
3.2. Méthode de Perturbation de Muscolino .....	73
3.3. Comportement dynamique d'une transmission d'engrenage simple étage à paramètres incertains .....	75
3.3.1. Modèle dynamique .....	75
3.3.2. Equations du mouvement .....	77
3.3.3. Simulation numérique .....	77
<b>4. Projection sur un chaos polynomial.....</b>	<b>86</b>
4.1. Formulation théorique .....	86
4.2. Comportement dynamique d'une transmission par engrenage simple étage en présence du frottement .....	89
4.2.1. Modélisation du frottement entre denture .....	89
4.2.2. Equations du mouvement .....	91
4.2.3. Simulation numérique .....	91
4.3. Analyse par le chaos polynomial.....	95
<b>5. Conclusion.....</b>	<b>98</b>
<b>Chapitre 4. Étude de cas : Robustesse d'une transmission par engrenage d'éolienne à variables aléatoires .....</b>	<b>99</b>
<b>1. Introduction .....</b>	<b>101</b>
<b>2. Modélisation du comportement dynamique d'un système d'engrenage dans une éolienne ...</b>	<b>101</b>
<b>3. Réponse dynamique d'un système d'engrenage à deux étages d'éolienne à variables incertaines .....</b>	<b>102</b>
3.1. Modèle dynamique d'une transmission d'engrenage à deux étages d'éolienne.....	102
3.1.1. Description du modèle.....	102
3.1.2. Equations de mouvement .....	103

3.2. Etude avec la méthode du chaos polynomial .....	104
3.2.1. Simulation numérique .....	104
3.2.2. Analyse de l'effet des paramètres incertains .....	105
3.2.3. Analyse de l'effet des multiples paramètres incertains .....	108
3.3. Etude avec la méthode de perturbation .....	110
3.3.1. Analyse de l'effet des paramètres incertains .....	110
3.3.2. Analyse de l'effet des multiples paramètres incertains .....	112
3.4. Comparaison entre les différentes méthodes .....	113
<b>4. Comportement dynamique d'un système d'engrenage d'éolienne avec la méthode d'analyse par intervalles .....</b>	<b>115</b>
4.1. Formulation théorique .....	115
4.1.1. Méthode d'analyse par intervalles .....	116
4.1.2. Approche probabiliste .....	117
4.2. Simulation numérique .....	119
4.2.1. Modèle dynamique .....	119
4.2.1. Analyse dynamique du système avec des paramètres déterministes .....	120
4.2.2. Comportement dynamique du système avec des paramètres incertains .....	121
<b>5. Conclusion.....</b>	<b>127</b>
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>128</b>
<b>Publications scientifiques.....</b>	<b>131</b>
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>133</b>
<b>Annexe .....</b>	<b>140</b>

---



---

# Liste des figures

---



---

## Chapitre 1

<b>Figure 1.1.</b> Modèle torsionnel à 2 degrés de liberté .....	17
<b>Figure 1. 2.</b> Modèle torsionnel à 4 degrés de liberté à paramètres concentrés.....	17
<b>Figure 1. 3.</b> Modèle dynamique à 8 degrés de liberté d'une transmission simple étage .....	18
<b>Figure 1. 4.</b> Comparaison entre la variation réelle et approximée de la fluctuation de la raideur d'engrènement $k(t)$ .....	20
<b>Figure 1. 5.</b> Définition de l'erreur de transmission .....	23
<b>Figure 1. 6.</b> Modèle torsionnel d'une transmission simple étage .....	26
<b>Figure 1. 7.</b> Description du réducteur à engrenages à deux étages .....	27
<b>Figure 1. 8.</b> Modèles dynamiques plans des transmissions à deux étages (a) quatre roues dentées (b) trois roues dentées.....	27
<b>Figure 1. 9.</b> Modèle dynamique du réducteur à engrenages à deux étages .....	28
<b>Figure 1. 10.</b> Evolution de la longueur de la ligne d'action .....	30
<b>Figure 1. 11.</b> Succession 1 paire de dents - 2 paires de dents en contact .....	31
<b>Figure 1. 12.</b> Evolution en créneau de la raideur d'engrènement pour un engrenage droit ....	31
<b>Figure 1. 13.</b> Erreur de profil.....	33
<b>Figure 1. 14.</b> Défauts d'excentricité localisés sur les roues (1) et (2) .....	34
<b>Figure 1. 15.</b> Mise en place d'un défaut d'entraxe $\Delta a$ .....	35
<b>Figure 1. 16.</b> Fissuration de denture .....	36

## Chapitre 2

<b>Figure 2. 1.</b> Poutre bi-encastree.....	48
<b>Figure 2. 2.</b> Moyenne du déplacement du milieu de la poutre .....	49
<b>Figure 2. 3.</b> Ecart type du déplacement du milieu de la poutre .....	49
<b>Figure 2. 4.</b> Système mécanique à deux degrés de liberté.....	54
<b>Figure 2. 5.</b> Module de la réponse déplacement $\sigma_c = 2\%$ .....	55
<b>Figure 2. 6.</b> Module de la réponse déplacement $\sigma_c = 5\%$ .....	55
<b>Figure 2. 7.</b> Module de la réponse déplacement $\sigma_c = 10\%$ .....	56
<b>Figure 2. 8.</b> Oscillateur linéaire étudié .....	58
<b>Figure 2. 9.</b> Ecart type du module de la réponse déplacement .....	59

<b>Figure 2. 10.</b> Modèle à deux degrés de liberté du quart de véhicule .....	62
<b>Figure 2. 11.</b> Valeur moyenne du déplacement $x_u(t)$ .....	63
<b>Figure 2. 12.</b> Portique bidimensionnel .....	64
<b>Figure 2. 13.</b> Valeur moyenne du déplacement .....	64
<b>Figure 2. 14.</b> Ecart type du déplacement .....	65

### Chapitre 3

<b>Figure 3. 1.</b> Modèle dynamique plan global d'une transmission simple étage .....	75
<b>Figure 3. 2.</b> Modélisation de la variation de la raideur d'engrènement.....	76
<b>Figure 3. 3.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $x_1(t)$ pour $\sigma_m=2\%$ .....	79
<b>Figure 3. 4.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $y_1(t)$ pour $\sigma_m=2\%$ .....	80
<b>Figure 3. 5.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $x_2(t)$ pour $\sigma_{c_x}=15\%$ .....	80
<b>Figure 3. 6.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $y_2(t)$ pour $\sigma_{c_x}=15\%$ .....	80
<b>Figure 3. 7.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $x_1(t)$ pour $\sigma_{k_x}=10\%$ .....	81
<b>Figure 3. 8.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $y_1(t)$ pour $\sigma_{k_x}=10\%$ .....	81
<b>Figure 3. 9.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $x_2(t)$ pour $\sigma_{k_0}=5\%$ .....	81
<b>Figure 3. 10.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $y_2(t)$ pour $\sigma_{k_0}=5\%$ .....	82
<b>Figure 3.12.</b> Ecart type de $x_1(t)$ considérant multiple paramètres incertains $\sigma=10\%$ .....	83
<b>Figure 3.11.</b> Ecart type de $x_1(t)$ considérant multiple paramètres incertains $\sigma=5\%$ .....	83
<b>Figure 3. 14.</b> Ecart type de $y_2(t)$ considérant multiple paramètres incertains $\sigma=5\%$ .....	83
<b>Figure 3. 13.</b> Ecart type de $y_2(t)$ considérant multiple paramètres incertains $\sigma=5\%$ .....	83
<b>Figure 3. 15.</b> Valeur moyenne instantanée de $y_1(t)$ où la masse est une variable aléatoire.....	84
<b>Figure 3. 16.</b> Valeur moyenne instantanée de $y_1(t)$ où les coefficients d'amortissement sont des variables aléatoires.....	84
<b>Figure 3. 17.</b> Valeur moyenne instantanée de $y_1(t)$ où les coefficients d'amortissement sont des variables aléatoires.....	85
<b>Figure 3. 18.</b> Valeur moyenne instantanée de $x_2(t)$ où la rigidité des arbres est une variable aléatoire .....	85
<b>Figure 3. 19.</b> Modèle dynamique en présence du frottement entre denture .....	90
<b>Figure 3. 20.</b> Evolutions des efforts de frottement dans le temps ( $\mu=0.08$ ) .....	92
<b>Figure 3. 21.</b> Fluctuations temporelles des perturbations angulaires des roues .....	92
<b>Figure 3. 22.</b> Fluctuations temporelles de la résultante des déplacements linéaires du premier palier.....	93
<b>Figure 3. 23.</b> Evolution des parties réelles des valeurs propres en fonction du coefficient de frottement .....	94
<b>Figure 3. 24.</b> Evolution des parties imaginaires des valeurs propres en fonction du coefficient de frottement .....	94
<b>Figure 3. 25.</b> Valeur moyenne instantanée et variance de $x_1(t)$ pour $\sigma_\mu=2\%$ .....	95
<b>Figure 3. 26.</b> Valeur moyenne instantanée et variance de $x_1(t)$ pour $\sigma_\mu=5\%$ .....	96

<b>Figure 3. 27.</b> Valeur moyenne instantanée et variance de $y_1(t)$ pour $\sigma_\mu=2\%$ .....	96
<b>Figure 3. 28.</b> Valeur moyenne instantanée et variance de $y_1(t)$ pour $\sigma_\mu=5\%$ .....	96
<b>Figure 3. 29.</b> Valeur moyenne instantanée et variance de $x_2(t)$ pour $\sigma_\mu=10\%$ .....	97
<b>Figure 3. 30.</b> Valeur moyenne instantanée et variance de $y_2(t)$ pour $\sigma_\mu=10\%$ .....	97

## Chapitre 4

<b>Figure 4. 1.</b> Modèle dynamique du multiplicateur à engrenages à deux étages dans une éolienne .....	102
<b>Figure 4. 2.</b> Modèle dynamique d'un système d'engrenage à deux étages dans une éolienne .....	103
<b>Figure 4. 3.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $x_1(t)$ pour $\sigma_{i_b}=2\%$ .....	106
<b>Figure 4. 4.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $x_1(t)$ pour $\sigma_{i_b}=5\%$ .....	106
<b>Figure 4. 5.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $y_1(t)$ pour $\sigma_{e_x} = \sigma_{e_y}=2\%$ .....	106
<b>Figure 4. 6.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $y_1(t)$ pour $\sigma_{e_x} = \sigma_{e_y}=5\%$ .....	107
<b>Figure 4. 7.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $x_2(t)$ pour $\sigma_{k^x} = \sigma_{k^y}=2\%$ .....	107
<b>Figure 4. 8.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $x_2(t)$ pour $\sigma_{k^x} = \sigma_{k^y}=5\%$ .....	107
<b>Figure 4. 9.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $x_3(t)$ considérant multiple paramètres incertains $\sigma=2\%$ .....	109
<b>Figure 4. 10.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $x_3(t)$ considérant multiple paramètres incertains $\sigma=5\%$ .....	109
<b>Figure 4. 11.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $x_3(t)$ considérant multiple paramètres incertains $\sigma=10\%$ .....	109
<b>Figure 4. 12.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $x_1(t)$ pour $\sigma_{i_b}=4\%$ .....	111
<b>Figure 4. 13.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $y_1(t)$ pour $\sigma_{e_x} = \sigma_{e_y}=10\%$ .....	111
<b>Figure 4. 14.</b> Valeur moyenne instantanée et l'écart type de $x_2(t)$ pour $\sigma_{k^x} = \sigma_{k^y}=8\%$ .....	112
<b>Figure 4.15.</b> Ecart type de $x_3(t)$ considérant multiple paramètres incertains $\sigma=2\%$ .....	112
<b>Figure 4.16.</b> Ecart type de $x_3(t)$ considérant multiple paramètres incertains $\sigma=8\%$ .....	112
<b>Figure 4. 19.</b> Ecart type de $x_1(t)$ considérant multiple paramètres incertains .....	113
<b>Figure 4.17.</b> Ecart type de $y_3(t)$ considérant multiple paramètres incertains $\sigma=2\%$ .....	113
<b>Figure 4.18.</b> Ecart type de $y_3(t)$ considérant multiple paramètres incertains $\sigma=8\%$ .....	113
<b>Figure 4. 20.</b> Ecart type de $x_2(t)$ considérant multiple paramètres incertains .....	114
<b>Figure 4. 21.</b> Ecart type de $x_3(t)$ considérant multiple paramètres incertains .....	114
<b>Figure 4. 22.</b> Modèle dynamique d'un système d'engrenage simple étage dans une éolienne .....	119
<b>Figure 4. 23.</b> Rapport de transmission .....	121
<b>Figure 4. 24.</b> Variation de la vitesse du vent .....	121
<b>Figure 4. 25.</b> Déplacement angulaire $\theta_{(1,1)}$ par la méthode d'intervalle .....	122
<b>Figure 4. 26.</b> Déplacement angulaire $\theta_{(1,1)}$ par l'approche probabiliste .....	122

<b>Figure 4. 27.</b> Comparaison du déplacement angulaire $\theta_{(1,1)}$ par la méthode d'intervalle et l'approche probabiliste .....	123
<b>Figure 4. 28.</b> Déplacement angulaire $\theta_{(2,2)}$ par la méthode d'intervalle .....	123
<b>Figure 4. 29.</b> Déplacement angulaire $\theta_{(2,2)}$ par l'approche probabiliste .....	123
<b>Figure 4. 30.</b> Comparaison du déplacement angulaire $\theta_{(2,2)}$ par la méthode d'intervalle et l'approche probabiliste .....	124
<b>Figure 4. 31.</b> Déplacement linéaire $x_1$ par la méthode d'intervalle .....	124
<b>Figure 4. 32.</b> Déplacement linéaire $x_1$ par l'approche probabiliste .....	125
<b>Figure 4. 33.</b> Comparaison du déplacement linéaire $x_1$ par la méthode d'intervalle et l'approche probabiliste .....	125
<b>Figure 4. 34.</b> Déplacement linéaire $y_2$ par la méthode d'intervalle .....	126
<b>Figure 4. 35.</b> Déplacement linéaire $y_2$ par l'approche probabiliste .....	126
<b>Figure 4. 36.</b> Comparaison du déplacement linéaire $y_2$ par la méthode d'intervalle et l'approche probabiliste .....	126

---

---

# Liste des tableaux

---

---

## Chapitre 1

**Tableau 1. 1.** Positions angulaires des roues en fonction de l'erreur de transmission ..... 23

## Chapitre 2

**Tableau 2. 1.** Paramètres pour le modèle quart de véhicule..... 62

## Chapitre 3

**Tableau 3. 1.** Données numériques du modèle étudié..... 78

## Chapitre 4

**Tableau 4. 1.** Données numériques du modèle étudié..... 105

---



---

## Principales Notations

---



---

$[M_T]$	: matrice masse
$[C_T]$	: matrice amortissement
$[K_T]$	: matrice raideur
$\{f_T\}$	: vecteur des forces extérieures
$k(t)$	: raideur variable au cours du temps
$k_v(t)$	: composante variable au cours du temps de la raideur d'engrènement
$c(t)$	: amortissement variable au cours du temps
$k_c$	: composante moyenne de la raideur d'engrènement
$k_j^x$	: rigidité à la flexion du palier j
$k_j^y$	: rigidité à la traction-compression du palier j
$k_j^0$	: rigidité torsionnelle de l'arbre de liaison j
$c_j^x$	: amortissement suivant x du palier j
$c_j^y$	: amortissement suivant y du palier j
$c_j^0$	: amortissement torsionnelle de l'arbre de liaison j
$x_j$ et $y_j$	: déplacements linéaires du palier j repérés dans le plan de travail
$\theta_{(j,i)}$	: fluctuation du déplacement angulaire de la roue (j,i)
$\varepsilon_\alpha$	: rapport de conduite
$\alpha_p$	: vecteur des variables aléatoires
$\psi_m(\alpha_p)$	: polynômes d'Hermite multidimensionnels
$\langle \cdot \cdot \rangle$	: produit scalaire
$\xi$	: variable aléatoire
$[\tilde{M}_T]$	: matrice masse variable
$[\tilde{C}_T]$	: matrice amortissement variable
$[\tilde{K}_T]$	: matrice raideur variable
$E(\ )$	: moyenne
$\sigma(\ )$	: Ecart type
$\text{Var}(\ )$	: variance

$P$	: nombre des variables aléatoires
$N$	: ordre du chaos polynomial
$r_{(j,i)}^b$	: rayon de base de la roue dentée (i,j)
$Te_i$	: période d'engrènement de l'étage d'engrènement i
$\mu$	: coefficient de frottement sec de Coulomb
$\mu_c$	: coefficient de frottement critique
$Cf_{ij}$	: couple du frottement appliqué sur la roue (i,j)
$F_f(t)$	: force de frottement
$F_f^0(t)$	: effort de frottement au niveau de la deuxième paire en contact
$F_f^1(t)$	: effort de frottement au niveau de la première paire en contact
$k^0(t)$	: raideur variable au niveau de la deuxième paire en contact
$k^1(t)$	: raideur variable au niveau de la première paire en contact
$\delta_i(t)$	: déflexion des dents (déplacement relatif des dents suivant la ligne d'action)
$\alpha_i$	: angle de pression de l'engrenage
$Te_i$	: période d'engrènement de l'étage d'engrènement i
$Z(j,i)$	: nombre de dents de la roue dentée (j,i)
$i$	: numéro d'étage d'engrènement
$j$	: numéro de bloc
$a$	: valeur de l'entraxe (distance entre centres des roues)
$P$	: point primitif
$\{Q\}$	: Vecteur déplacement linéaire
$Cm$	: Couple moteur
$Cr$	: Couple récepteur
$I_m$	: inertie motrice
$I_r$	: inertie réceptrice
$I_b$	: inertie des pales
$I_g$	: inertie du générateur
$k_{max}$	: valeur maximale de la raideur d'engrènement
$k_{min}$	: valeur minimale de la raideur d'engrènement
$k_{av}$	: composante moyenne de la raideur d'engrènement
$L$	: largeur de denture
$m$	: module réel de denture
$m_{(i,j)}$	: masse de la roue (i,j)
$I_{(i,j)}$	: inertie de la roue (i,j)

---

# Introduction générale

---

L'étude et l'analyse du comportement dynamique des systèmes mécaniques constituent un intérêt majeur dans le domaine industriel. Elles permettent de dépasser les domaines d'instabilités ainsi que la réduction des niveaux vibratoires. En effet, les conséquences néfastes que pourraient engendrer l'instabilité de tels systèmes imposent aux concepteurs d'établir, d'une façon rigoureuse prudente, une étude et une analyse détaillées de leurs comportements dynamiques avant d'envisager leurs implémentations réelles.

La plupart des systèmes mécaniques sont caractérisés par la présence de paramètres incertains qui affectent leur robustesse vis-à-vis des zones de stabilité et d'instabilité et des niveaux vibratoires. La méthode de prise en compte des incertitudes est classée parmi les méthodes d'optimisation permettant de juger la robustesse des systèmes. Elle est appliquée généralement pour décrire le comportement complexe des systèmes mécaniques en tenant compte de plusieurs phénomènes étroitement couplés.

En prenant l'exemple d'une transmission par engrenage, les incertitudes sont souvent dues au couplage entre raideurs d'engrènement et coefficients d'amortissement, la présence de frottement entre les pièces, les défauts de montage et de fabrication. En effet, pour un tel mécanisme, il est difficile d'identifier précisément ces paramètres d'excitation interne, par conséquent ils peuvent être considérés comme étant aléatoires.

Une des principales hypothèses dans l'étude d'une transmission d'engrenage est que le modèle est déterministe, c'est-à-dire que ses paramètres sont constants. Mais, si on procède à quelques expérimentations, on va se rendre compte des limites d'une modélisation déterministe. Car, il y a toujours des différences entre ce qu'on a calculé et ce qu'on a mesuré et ce, à cause des incertitudes sur les coefficients d'amortissement, la rigidité à la flexion, la rigidité à la traction-compression, la rigidité torsionnelle ou le coefficient du frottement entre denture qui ont une influence considérable sur le comportement dynamique du système, d'où

l'intérêt d'utiliser des méthodes numériques pour prendre en compte ces incertitudes. Parmi ces méthodes, figure celle de la simulation de Monte Carlo, qui est considérée comme référence pour l'étude stochastique d'un système d'engrenage dont les paramètres sont incertains. En revanche, d'autres méthodes reconnues efficaces et moins gourmandes en coût de calcul, telles que les méthodes de perturbation ou encore la méthode du Chaos polynomial.

Cette thèse est organisée en 4 chapitres :

Le premier chapitre présente un état de l'art articulé autour de deux axes principaux, respectivement, aux transmissions par engrenage et leurs principales sources d'excitations.

Une première étude bibliographique revient alors sur l'essentiel des travaux de recherche ayant traité des systèmes d'engrenage simple étage et double étage. Une deuxième étude bibliographique est par la suite menée autour des principales sources d'excitations propres à l'engrènement et nous nous intéressons, en particulier, aux variations de la rigidité d'engrènement, aux défauts de fabrication, défauts de montage, défauts de fonctionnement ainsi que la fluctuation du couple moteur, la fluctuation du couple de charge et la variation du couple aérodynamique dans le cas des éoliennes.

Dans le second chapitre, on a développé une étude bibliographique sur les méthodes de prise en compte des incertitudes. On a présenté dans ce chapitre les approches probabilistes, possibilistes et algébriques ainsi que les méthodes basées sur les plans d'expériences. Selon l'état de l'art effectué, des études font l'objet d'une description détaillée de chaque méthode incluant principes, avantages et inconvénients et principales applications. Tout au long de ce chapitre, quelques applications numériques dans le domaine de mécanique sont présentées.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse de la réponse dynamique d'un système d'engrenage simple étage à denture droite comportant des paramètres incertains. Nous utilisons la méthode de Newmark pour l'intégration directe des équations du mouvement. Nous appliquons les différentes méthodes probabilistes (la simulation de Monte Carlo, la méthode de perturbation, la méthode du chaos polynomial). Les méthodes proposées permettent le calcul des deux premiers moments de la réponse dynamique du système.

Le quatrième chapitre a pour objectif d'analyser le comportement dynamique d'une transmission par engrenage dans une éolienne à paramètres incertains. Ce chapitre est réparti sur deux parties. La première partie du chapitre présente une analyse du comportement dynamique du système en se basant sur la méthode de perturbation et la méthode du chaos

polynomial présentées au chapitre 3. La deuxième partie traite de l'analyse du comportement dynamique d'un système d'engrenage simple étage dans une éolienne à variables aléatoires. La réponse dynamique est obtenue par deux approches : l'approche probabiliste et l'approche ensembliste basée sur la méthode d'analyse par intervalles. L'objectif est de comparer la région de la réponse dynamique du système par les deux approches.

Une conclusion générale incluant le bilan des résultats des travaux de cette thèse ainsi que les différentes perspectives qui en découlent est énoncée à la fin de cette thèse.

## Chapitre 1.

---

---

# État de l'art : Transmission par engrenages et principales sources d'excitations

---

---

### SOMMAIRE

<b>1. Introduction</b> .....	<b>16</b>
<b>2. Transmission par engrenages</b> .....	<b>16</b>
2.1. Transmission par engrenages simple étage .....	16
2.1.1. Modèles dynamiques d'une transmission par engrenages .....	16
2.1.2. Modélisation de l'interface d'engrènement .....	18
2.1.3. Erreur de transmission .....	22
2.1.4. Equation du mouvement .....	25
2.2. Transmission par engrenage à deux étages .....	27
<b>3. Principales sources d'excitation des transmissions par engrenages</b> .....	<b>29</b>
3.1. Sources internes .....	29
3.1.1. Raideur d'engrènement .....	29
3.1.2. Considérations technologiques sur les défauts d'engrenages .....	32
3.2. Sources externes .....	36
3.2.1. Fluctuations du couple moteur .....	36
3.2.2. Fluctuations du couple de charge .....	36
3.2.3. Variation du couple aérodynamique (cas des éoliennes) .....	36
<b>4. Conclusion</b> .....	<b>38</b>

## 1. Introduction

Ce chapitre est consacré à une synthèse bibliographique sur les transmissions par engrenages et les principales sources d'excitations attribuées à l'engrènement.

Le besoin de transmettre un couple important ou d'avoir plusieurs rapports de transmission avec le même mécanisme fait appel à des variantes complexes des systèmes d'engrenages tels que la transmission par engrenage simple étage, à deux étages... Ces différents mécanismes sont illustrés à la première section de ce chapitre. Les vibrations dues au phénomène d'engrènement et à l'erreur de transmission sont les grandeurs utilisées pour caractériser les nuisances sonores et définir la qualité d'une transmission par engrenages. La deuxième partie est donc consacrée à leur définition. Nous décrivons ensuite les diverses principales sources d'excitations propres à l'engrènement et nous nous intéressons, en particulier, aux variations de la rigidité d'engrènement, aux défauts d'engrenage (défauts de fabrication, défauts de montage, défauts de fonctionnement) ainsi que la fluctuation du couple moteur, la fluctuation du couple de charge et la variation du couple aérodynamique dans le cas des éoliennes.

## 2. Transmission par engrenages

L'engrenage est l'organe de transmission de puissance par excellence. Il répond parfaitement aux exigences de rendement, de précision et de puissance spécifique imposées dans les architectures mécaniques modernes. Cette partie présente une synthèse bibliographique sur la transmission d'engrenage simple étage et à deux étages.

### 2.1. Transmission par engrenages simple étage

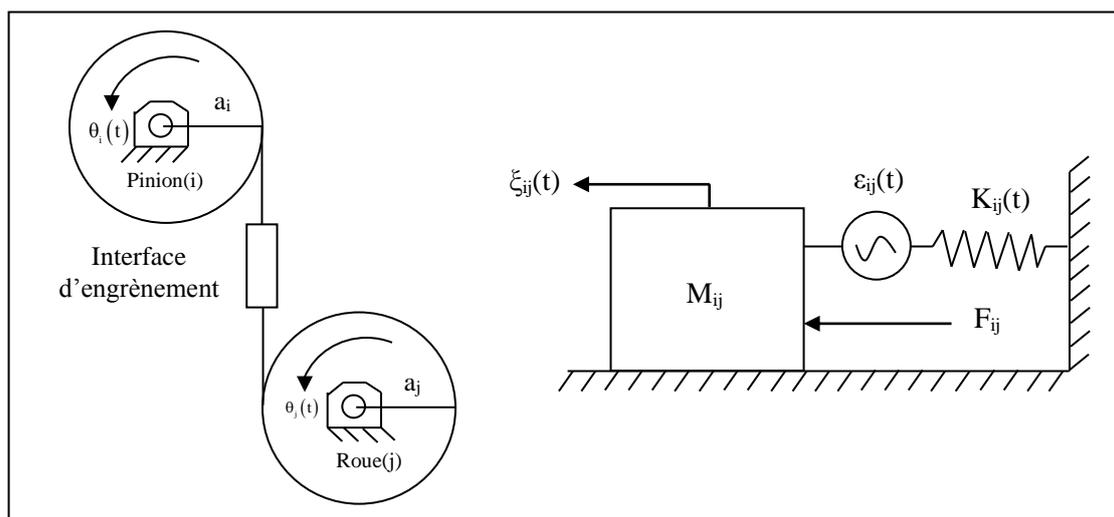
Pour étudier le comportement dynamique des transmissions par engrenages, on doit passer par la modélisation du système physique en le transformant en un modèle dynamique. La modélisation consiste à chercher la manière de prise en compte des constituants réels (roues, arbres, dents, ...) dans les équations de mouvement qui décrivent le mouvement du système.

#### 2.1.1. Modèles dynamiques d'une transmission par engrenages

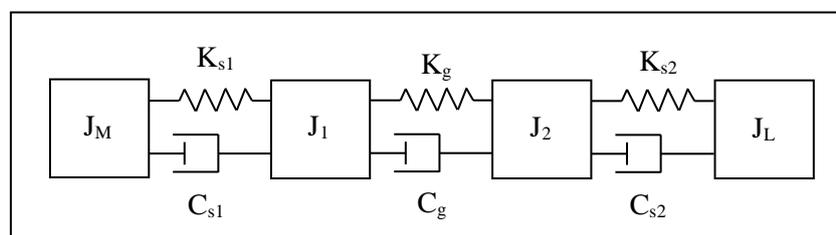
Plusieurs travaux se sont focalisés sur la modélisation des systèmes d'engrenages et sont orientés vers des modélisations à paramètres concentrés (modèle masses ressorts) dans lesquels les engrenages sont assimilés à deux cylindres rigides liés par une raideur élastique

qui représente la liaison entre dentures. Bard (Bard 1995) a étudié un modèle dynamique à deux degrés de liberté d'une transmission simple étage (Figure 1.1). L'interface d'engrènement est modélisé par une raideur fluctuante au cours du temps  $K_{ij}(t)$  et une erreur de transmission  $\varepsilon_{ij}(t)$ . Cette modélisation est très simplifiée. Par contre Lin (Lin et al. 2001) a utilisé un modèle fait intervenir les flexibilités des arbres de liaison ( $K_{s1}$ ,  $K_{s2}$ ,  $C_{s1}$  et  $C_{s2}$ ) (Figure 1.2). L'interface d'engrènement est modélisée par une raideur  $K_g$  et un amortisseur  $C_g$ . Ces travaux ont montré qu'une transmission par engrenages participe de manière notoire à la production de vibrations et de bruits par des excitations localisées au niveau du contact entre dentures.

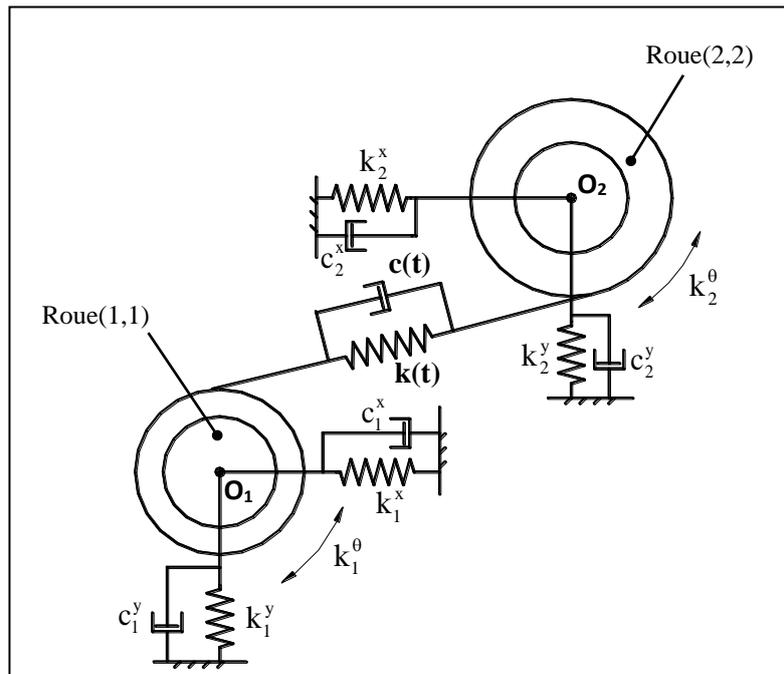
La figure 1.3 représente un modèle dynamique à huit degrés de libertés d'une transmission simple étage à denture droite étudié par Walha (Walha 2008). L'interface d'engrènement est modélisée par une raideur fluctuante au cours du temps  $k(t)$  en parallèle avec un amortisseur  $c(t)$ . Ce modèle fait intervenir les paliers de maintien et les arbres flexibles.



**Figure 1.1.** Modèle torsionnel à 2 degrés de liberté



**Figure 1. 2.**Modèle torsionnel à 4 degrés de liberté à paramètres concentrés



**Figure 1. 3.** Modèle dynamique à 8 degrés de liberté d'une transmission simple étage

### 2.1.2. Modélisation de l'interface d'engrènement

La modélisation la plus simple consiste à introduire une raideur constante, indépendante de la charge transmise. Il s'agit d'un modèle linéaire à paramètre constant. Ce modèle s'appuie sur l'hypothèse que les variations de la raideur d'engrènement sont négligeables en supposant que l'aire de contact demeure constante.

La première amélioration que l'on peut apporter au modèle précédent consiste à prendre en compte le nombre de dents en prise. Prenons le cas d'un engrenage droit où il y a une prise alternative entre une seule et deux paires de dents en prise lors de l'engrènement. Il s'agit d'un modèle linéaire et paramétrique qui est conditionné par :

- l'évolution du nombre de paires de dents en prise au cours de l'engrènement, typiquement de 1 à 2 pour des dentures droites, et 2 à 3 pour des dentures hélicoïdaux,
- l'évolution du point d'application des efforts sur chaque dent : une dent se déforme d'autant plus que le point d'application est proche de la tête.

En régime de fonctionnement stationnaire, la fluctuation de la raideur est périodique et induit ainsi une excitation paramétrique à la fréquence d'engrènement, produit du nombre de dents d'une des deux roues par sa fréquence de rotation, et ses premiers harmoniques. Ainsi, ce modèle rend compte du caractère périodique de la raideur. Lorsque le contact n'est assuré que par une paire de dents, la raideur d'engrènement est égale à la raideur d'une paire de dents en

prise tel qu'introduite dans le modèle linéaire à paramètre constant. Dans le cas où le contact est assuré par deux paires de dents, la raideur d'engrènement est alors équivalente à celle de deux raideurs en parallèle. Ainsi, la raideur d'engrènement varie dans ce cas du simple au double (Walha 2008).

La seconde amélioration consiste à prendre en compte l'influence de la charge transmise. Il s'agit d'un modèle non linéaire et paramétrique qui reproduit le caractère non linéaire et périodique de la raideur en tenant compte de la relation non linéaire entre le rapprochement entre les dents en prise et la charge transmise, ainsi que du nombre de paires de dents en prise. Plusieurs études ont été effectuées sur la relation entre le nombre de dents en contact et la rigidité globale. (Kuang et al. 1992), (Kuang et al. 2003) ont montré que l'évolution du nombre de dents en contact est également responsable de l'évolution de la rigidité globale de l'engrènement dans le temps.

Globalement, la raideur d'engrènement constitue la source principale d'excitation des systèmes à engrenages. Elle est périodique de la fréquence caractéristique d'engrènement  $f_e$ . Pour une transmission simple étage, la fréquence d'engrènement est donnée par :

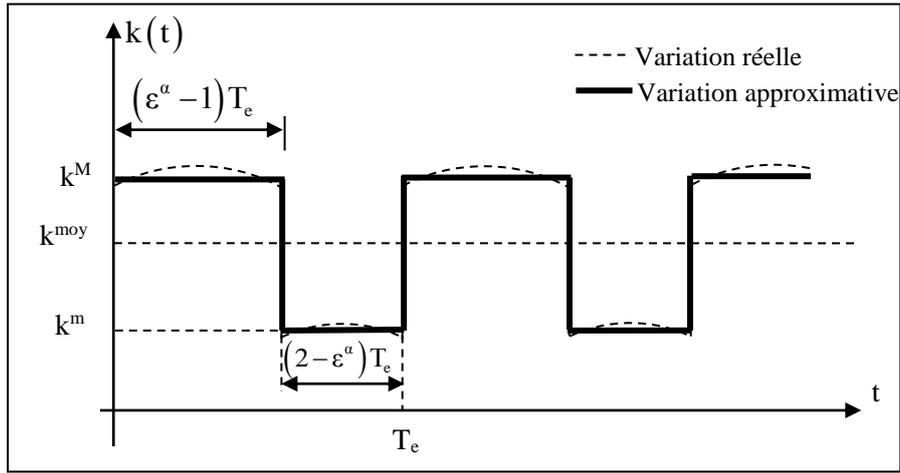
$$f_e = Z_1 f_1 = Z_2 f_2 \quad (1.1)$$

$f_1$  et  $f_2$  sont les fréquences de rotation du pignon et de la roue définies par :

$$f_1 = \frac{N_1}{60} \text{ et } f_2 = \frac{N_2}{60} \quad (1.2)$$

$Z_1$ ,  $Z_2$  et  $N_1$ ,  $N_2$  représentent respectivement les nombres de dents et les vitesses de rotation du pignon et de la roue.

D'après une synthèse bibliographique variée, il y a en général deux approches de modélisation des raideurs d'engrènement : une approche approximative et une approche réelle. (Chaari 2005), (Walha 2008) ont étudié la comparaison dans le domaine temporel entre les variations réelle et approximative de la fluctuation de la raideur d'engrènement  $k(t)$  (Figure 1.4).



**Figure 1.4.** Comparaison entre la variation réelle et approximative de la fluctuation de la raideur d'engrènement  $k(t)$

$k^M$ ,  $k^m$  et  $k^{\text{moy}}$  représentent respectivement les valeurs de rigidité maximale, minimale et moyenne.

Pour assurer la continuité d'engrènement, il faut que, lorsqu'un couple de dents cesse d'être en contact, un autre couple soit déjà en contact. Le rapport de conduite  $\varepsilon^\alpha$  est une fonction de la géométrie de denture. Il est défini par la relation :

$$\varepsilon^\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (1.3)$$

Avec :

$$\varepsilon_1 = \left(1 + \frac{1}{Z_1}\right) \left/ \left( \pi \cos \alpha \left( \frac{\sin \alpha}{2} + \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{4} + \frac{1}{Z_1^2} + \frac{1}{Z_1}} \right) \right) \right. \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_2 = \left(1 + \frac{1}{Z_2}\right) \left/ \left( \pi \cos \alpha \left( \frac{\sin \alpha}{2} + \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{4} + \frac{1}{Z_2^2} + \frac{1}{Z_2}} \right) \right) \right. \quad (1.5)$$

$\alpha$  est l'angle de pression.

### 2.1.2.1. Modélisation par une approche approximative

Henriot (Henriot 1985) a modélisé la raideur d'engrènement par une forme en créneaux décomposable en série de Fourier.

$$k(t) = k_{\text{moy}} + \frac{\Delta K}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left[ \sin 2i\pi(\varepsilon^\alpha - 1) \cos \frac{2i\pi t}{T_e} + (1 - \cos 2i\pi(\varepsilon^\alpha - 1)) \sin \frac{2i\pi t}{T_e} \right] \quad (1.6)$$

Avec :

$$k_{\text{moy}} = k_{\text{max}} (\varepsilon^\alpha - 1) + (2 - \varepsilon^\alpha) k_{\text{min}} \quad (1.7)$$

$$\Delta K = k_{\text{max}} - k_{\text{min}} \quad (1.8)$$

Si on considère que

$$k_{\text{max}} = 2 k_{\text{min}} \quad (1.9)$$

Alors :

$$k_{\text{moy}} = \varepsilon^\alpha k_{\text{min}} \quad (1.10)$$

Henriot (Henriot 1985) donne une formule empirique pour le calcul de la rigidité moyenne d'une paire de dents droites en contact. Elle est exprimée par :

$$k_{\text{moy}} = \frac{10^9 \cdot L^2}{A_1 + \frac{A_2}{Z_1} + \frac{A_3}{Z_2}} \quad (1.11)$$

Les coefficients empiriques  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  sont égaux à :

$$A_1 = 0.04723, \quad A_2 = 0.15551 \quad \text{et} \quad A_3 = 0.25791 \quad (1.12)$$

### 2.1.2.2. Modélisation par une approche réelle

Dans cette modélisation, le calcul de la rigidité découle du calcul de la déflexion des dents  $\delta(t)$ . Il est noté par déflexion des dents le déplacement relatif des deux dents projeté sur la ligne d'action. L'étude de cette déflexion sous charge a été largement prise en compte par les concepteurs afin d'estimer la capacité de transmission en charge des engrenages.

D'après les travaux de Maatar (Maatar 1995), Parker (Parker et al. 2002), Chaari (Chaari 2005) et Walha (Walha 2008), la déflexion totale que peut subir une dent au cours de l'engrènement est décomposée en trois composantes :

- la déflexion due à la flexion de la dent :  $\delta_f$
- la déflexion de la fondation de la dent et du corps de l'engrenage :  $\delta_v$
- la déflexion de contact Hertzien :  $\delta_h$

Les déflexions  $\delta_f$  et  $\delta_v$  sont déterminées en considérant la dent comme une poutre encastree à son extrémité sur laquelle est appliquée une charge définie. La rigidité équivalente  $k_d$  d'une dent en prise est donc calculée par la mise en série des rigidités de flexion  $k_f$  et du corps  $k_v$  :

$$\frac{1}{k_d} = \frac{1}{k_f} + \frac{1}{k_v} \quad (1.14)$$

$k_h$  est la raideur de contact de hertz due à l'écrasement instantané des dents au cours du fonctionnement.

La rigidité équivalente d'engrènement  $k(t)$  d'une paire de dents en contact est donnée par les mises en série des raideurs  $k_{d1}$ ,  $k_{d2}$  et  $k_h$ .  $k(t)$  est définie par l'expression :

$$\frac{1}{k(t)} = \frac{1}{k_{d1}} + \frac{1}{k_{d2}} + \frac{1}{k_h} \quad (1.15)$$

De façon générale, la raideur d'engrènement peut être supposée :

- Constante, pour des études globales ou en particulier pour la détermination des modes et vecteurs propres.
- Périodique, afin de tenir compte du changement du nombre de paires de dents en contact au cours du temps. Cette excitation paramétrique cause éventuellement l'instabilité du modèle (Parker et al. 2002).
- Non-linéaire, pour tenir compte des pertes momentanées du contact suite à des variations importantes des efforts transmis ou des défauts de surfaces et d'entraxe.

### 2.1.3. Erreur de transmission

Le point commun des recherches constitue la caractérisation de l'erreur de transmission. Cette erreur qui englobe les erreurs de fabrication, de montage et de fonctionnement associées au phénomène d'engrènement entre roues dentées est le thermomètre indiquant l'état de santé de ce type de transmissions. Elle est définie comme étant l'écart de position de la roue menée, pour une position donnée du pignon, par rapport à la position qu'elle devrait occuper si les engrenages étaient rigides et géométriquement parfaits.

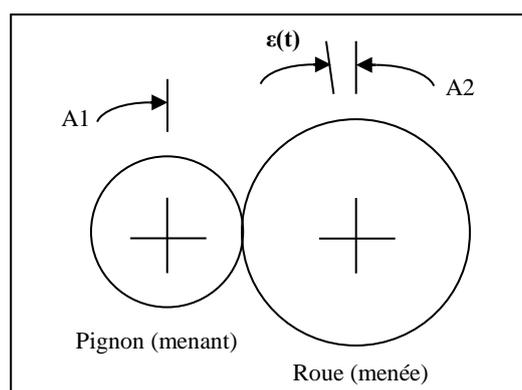
L'erreur de transmission rend compte des déformations instantanées de dentures chargées et de l'influence d'écart de forme et de montage. La majorité des engrenages possède des profils en développante de cercle dont la propriété essentielle est que la loi entrée-sortie théorique est linéaire c'est à dire que le rapport de transmission  $R_{12}$  est à chaque instant constant :

$$R_{12} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (1.16)$$

$\theta_1, \theta_2$  sont les déplacements angulaires de l'arbre d'entrée et de sortie.

Bard (Bard 1995) a étudié celle loi entrée sortie qui est perturbée par l'erreur de transmission et il observe toujours une fluctuation du rapport de transmission autour de sa valeur moyenne.

La figure 1.5 représente l'erreur de transmission angulaire  $\varepsilon(t)$  qui est définie comme l'écart angulaire entre la position réelle de la roue menée et la position idéale qu'elle devrait occuper si la transmission était parfaite et l'engrenage était infiniment rigide.



**Figure 1. 5.** Définition de l'erreur de transmission

Les positions angulaires théoriques et réelles sont définies dans le tableau 1.1.

**Tableau 1. 1.** Positions angulaires des roues en fonction de l'erreur de transmission

Pignon (1)	Roue (2)	
Position théorique (position réelle)	Position théorique	Position réelle
$A1$	$A2 = A1 \cdot \frac{Z_1}{Z_2}$	$A2' = A1 \cdot \frac{Z_1}{Z_2} + \varepsilon(t)$

L'erreur de transmission angulaire  $\varepsilon(t)$  est exprimée par la relation suivante :

$$\varepsilon(t) = \theta_2 - \frac{1}{R_{12}} \theta_1 \quad (1.17)$$

Suivant la ligne d'action, l'erreur de transmission est définie par :

$$e(t) = r_2^b \cdot \varepsilon(t) \quad (1.18)$$

Les travaux consacrés à l'analyse du comportement dynamique des réducteurs à engrenages reposent pour une large part sur la notion d'erreur de transmission introduite par Harris en 1958 (Harris, 1958). Vernay (Vernay 1999), Bourdon (Bourdon 1997) et Diab (Diab 2005) ont défini l'erreur de transmission comme une source d'excitation dans les systèmes d'engrenage. Chaari (Chaari 2005) a étudié l'effet de l'erreur de transmission sur un train épicycloïdal. En régime quasi-statique, elle fournit une bonne indication sur la qualité des transmissions et peut être utilisée comme outil de contrôle (Valex 1988), (Yakhou 1999) (Reboul 2005).

L'erreur statique de transmission est mesurée à des vitesses de fonctionnement très faibles. Pour des vitesses plus élevées, dès qu'il n'est pas possible d'exulter les phénomènes dynamiques, on parle d'erreurs dynamiques de transmission.

De façon générale, l'erreur de transmission est divisée en trois groupes :

- Erreur de transmission quasi statique sans charge (Erreur Cinématique)

Elle est encore notée erreur cinématique et représente les défauts géométriques de denture et le fait que les profils ne seront pas exactement conjugués. Elle résulte de la fabrication, du montage, de la détérioration du profil en cours d'utilisation. Cette erreur de transmission est purement géométrique et traduit des défauts sous la forme de déplacement angulaire.

- Erreur de transmission quasi statique sous charge

C'est la superposition de l'erreur de transmission quasi statique sans charge et de l'effet de déformations dues à la charge. Elle fait intervenir les effets périodiques des déformations de dentures, de corrections éventuelles de profil, et des déformations de l'ensemble du système (arbres, paliers...).

- Erreur de transmission dynamique

C'est une grandeur instantanée qui rend compte de l'ensemble des effets dynamiques du système en fonctionnement. Cette grandeur reflète la réponse dynamique des engrenages suite aux excitations internes et externes.

#### 2.1.4. Equation du mouvement

Le comportement dynamique du système autour d'un point de fonctionnement statique est supposé linéaire comportant une raideur variable et gouverné par une équation différentielle à coefficients périodiques de la forme (Bettaieb 2006), (Merzoug et al. 2001) :

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [C]\{\dot{Q}\} + [K(t)]\{Q\} = \{F(t)\} + \{E(t)\} \quad (1.19)$$

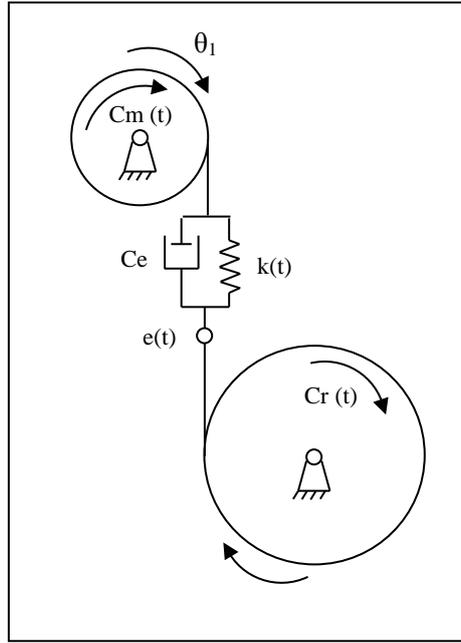
[M] étant la matrice masse ; [C] est la matrice amortissement ; [K(t)] est la matrice rigidité.

{Q} est le vecteur des degrés de liberté ; {F(t)} est le vecteur des efforts extérieurs et {E(t)} étant le vecteur des efforts d'excitation générés par les erreurs géométriques.

Chaari et al (Chaari et al. 2006) ont étudié un modèle torsionnel plan à deux degrés de liberté d'une transmission simple étage à dentures droites

Ce modèle fait intervenir les arbres flexibles et les paliers de maintien qui sont supposés rigides. Les roues dentées sont modélisées par des masses concentrées. L'interface d'engrènement est modélisée par une raideur fluctuante au cours du temps  $k(t)$ , un amortissement visqueux  $C_e$  et une erreur de transmission  $e(t)$ .

Les deux degrés de liberté  $\theta_1$  et  $\theta_2$  représentent les fluctuations angulaires de chacune des deux roues dentées. Le système est soumis à deux couples extérieurs : couple moteur  $C_m(t)$  et couple récepteur  $C_r(t)$ .



**Figure 1. 6.** Modèle torsionnel d'une transmission simple étage

La flexibilité de denture donne naissance à un déplacement relatif des dents suivant la ligne d'action qui est défini par la relation :

$$\delta(t) = r_1^b \cdot \theta_1(t) - r_2^b \cdot \theta_2(t) - e(t) \quad (1.20)$$

En passant par les équations de Lagrange, les équations différentielles décrivant le mouvement du système sont définies par :

$$I_1 \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + r_1^b \cdot Ce \cdot \frac{d\delta(t)}{dt} + r_1^b \cdot k(t) \cdot \delta(t) = Cm(t) \quad (1.21)$$

$$I_2 \frac{d^2\theta_2(t)}{dt^2} - r_2^b \cdot Ce \cdot \frac{d\delta(t)}{dt} - r_2^b \cdot k(t) \cdot \delta(t) = -Cr(t) \quad (1.22)$$

$r_1^b$ ,  $r_2^b$  et  $I_1$ ,  $I_2$  représentent respectivement les rayons de base et les inerties des roues dentées.

Les matrices  $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K(t)]$  sont définies par :

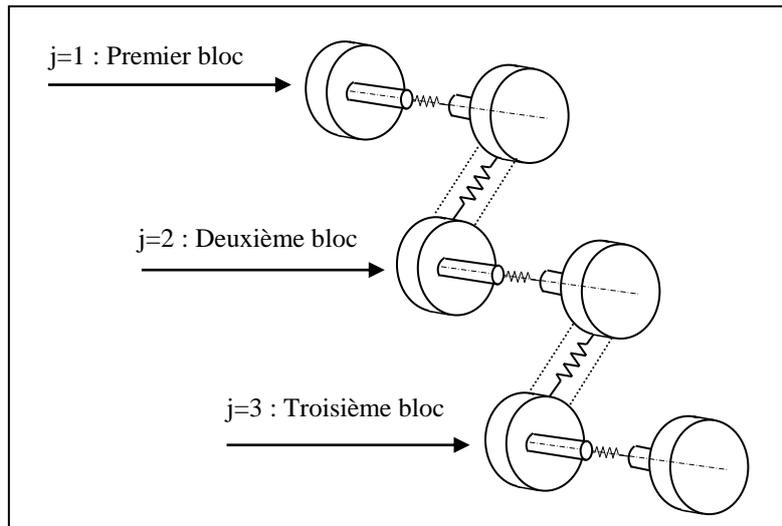
$$[M] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, [C] = Ce \cdot \begin{bmatrix} (r_1^b)^2 & -r_1^b \cdot r_2^b \\ -r_1^b \cdot r_2^b & (r_2^b)^2 \end{bmatrix} \text{ et } [K(t)] = k(t) \cdot \begin{bmatrix} (r_1^b)^2 & -r_1^b \cdot r_2^b \\ -r_1^b \cdot r_2^b & (r_2^b)^2 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Les vecteurs  $\{Q\}$ ,  $\{F(t)\}$  et  $\{E(t)\}$  sont définies par :

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} C_m(t) \\ -C_r(t) \end{Bmatrix} \text{ et } \{E(t)\} = k(t).e(t) \begin{Bmatrix} r_1^b \\ -r_2^b \end{Bmatrix} \quad (1.24)$$

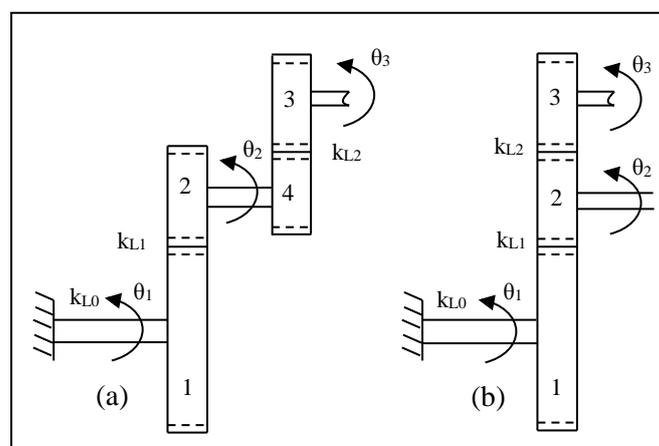
## 2.2. Transmission par engrenage à deux étages

Le réducteur à deux étages est un cas particulier d'une transmission à N étages. Ce système est composé de trois blocs ( $j=1:3$ ) et est représenté sur la figure 1.7.



**Figure 1. 7.** Description du réducteur à engrenages à deux étages

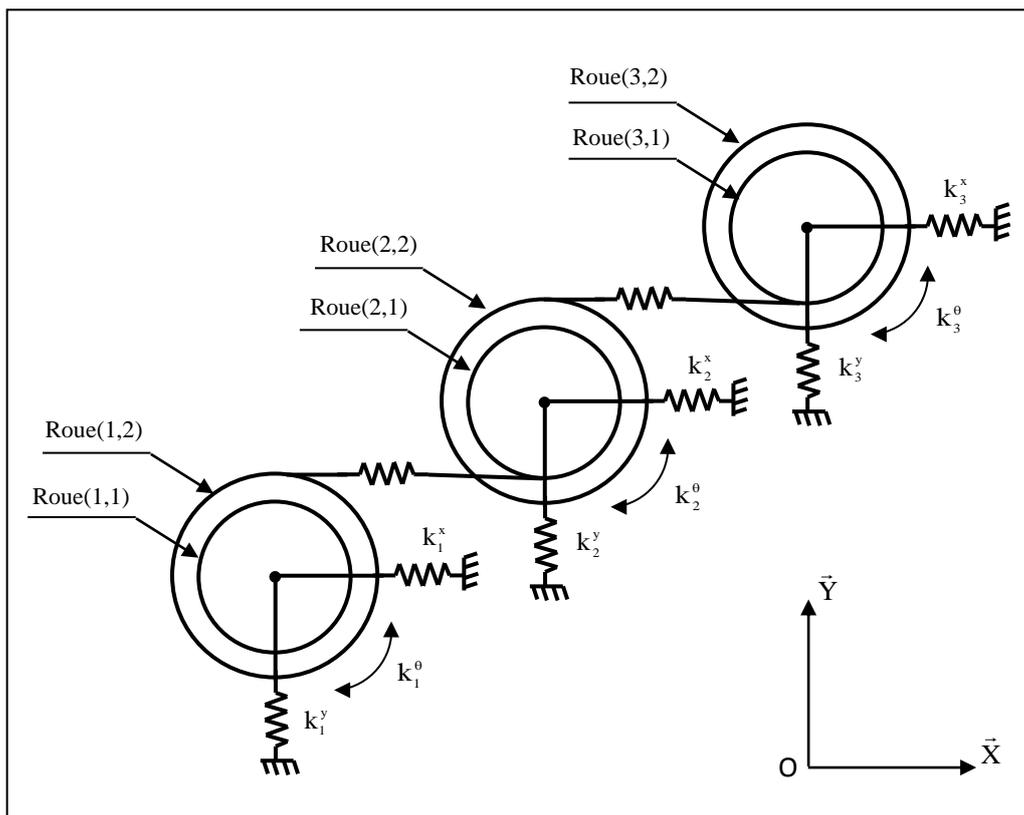
Le modèle dynamique de la transmission par engrenage à deux étages est inspiré du travail de Parker. Parker (Parker et al. 2002) a étudié deux configurations des transmissions par engrenage (Figure 1.8). Walha (Walha 2008) a étudié un modèle d'un réducteur à engrenage à deux étages. Ce modèle dynamique formulé est un modèle torsionnel.



**Figure 1. 8.** Modèles dynamiques plans des transmissions à deux étages  
(a) quatre roues dentées (b) trois roues dentées

La roue (1,1) est liée à la roue dentée (1,2) par l'intermédiaire d'un arbre (1) de faible masse et de rigidité torsionnelle  $k_1^0$ . Cet ensemble constitue le premier bloc ( $j=1$ ) et il est maintenu par le palier 1. La roue (2,1) est liée à la roue (2,2) par l'arbre (2) de rigidité torsionnelle  $k_2^0$ . Cet ensemble constitue le deuxième bloc ( $j=2$ ) et il est maintenu par le palier 2. La roue (3,1) est liée à la roue (3,2) par l'arbre (3) de rigidité torsionnelle  $k_3^0$ . Cet ensemble constitue le troisième bloc ( $j=3$ ) et il est maintenu par le palier 3. Les paliers de maintien sont flexibles de rigidités à la flexion  $k_j^x$  et de rigidités à la traction-compression  $k_j^y$ .

Le deux étages d'engrènement sont modélisés par des raideurs d'engrènement fluctuantes au cours du temps reliant respectivement les roues dentées (1,2) avec (2,1) et (2,2) avec (3,1). Les roues (1,1) et (3,2) caractérisent respectivement le côté moteur et le côté récepteur et interviennent par leurs inerties motrice  $I_m$  et réceptrice  $I_r$ . Le modèle dynamique du réducteur est représenté sur la figure 1.9 (Walha 2008).



**Figure 1. 9.** Modèle dynamique du réducteur à engrenages à deux étages

### 3. Principales sources d'excitation des transmissions par engrenages

Les forces généralisées qui engendrent la réponse vibratoire des transmissions par engrenages sont multiples. En premier lieu, on peut distinguer les excitations internes au système, c'est-à-dire celles qui sont propres au fonctionnement même de la transmission. En second lieu, on peut distinguer les excitations externes.

#### 3.1. Sources internes

Dans cette partie, on présente les différentes sources d'excitation internes des transmissions par engrenages. Parmi celles-ci, il y a celles qui résultent d'interactions fluide-solide. Il s'agit essentiellement des excitations produites par des écoulements et par des projections de lubrifiant. Parmi les excitations internes, il y a également celles qui résultent d'interactions solide-solide. Il s'agit essentiellement des fluctuations des forces de contact au niveau des dentures, des forces de contact au niveau des roulements engendrées par des défauts de roulements ou bien des forces de frottement au niveau des dentures.

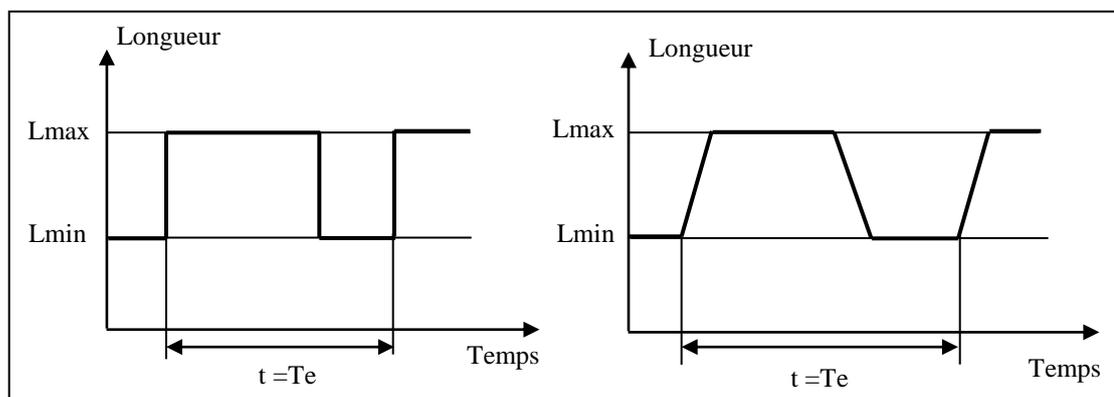
##### 3.1.1. Raideur d'engrènement

Le phénomène d'engrènement est le premier responsable de la création du bruit qui se dégage de la boîte de transmission. Ce phénomène est caractérisé par une raideur variable au cours du temps. De tels modèles locaux de la raideur variable existent mais n'ont pas encore été pleinement intégrés aux modèles globaux car ils ne tiennent pas compte de la déformabilité des arbres et du reste de la structure.

Considérons le cas d'un engrenage droit parfait où il y a prise alternative d'une ou de deux paires de dents. Lorsque le contact n'est assuré que par une paire de dents, il est évident que la raideur d'engrènement est identique à la raideur d'un seul couple de dents. Lorsque le contact est assuré par deux paires de dents, la raideur d'engrènement est alors équivalente à celle de deux raideurs en parallèle. Au cours de l'engrènement la raideur varie du simple au double.

La rigidité d'engrènement est le paramètre physique qui permet de caractériser et surtout de modéliser la liaison entre deux engrenages. Elle dépend essentiellement des caractéristiques géométriques et physiques des dentures. Il n'existe pas de méthodes suffisamment précises et fiables pour mesurer la rigidité d'engrènement. Par contre, de nombreuses méthodes analytiques et surtout numériques (éléments finis...) ont été développées pour calculer cette rigidité.

En fonctionnement, ce sont les fluctuations de la rigidité globale d'engrènement qui sont reconnues comme responsables du caractère excitateur des engrenages. En régime de fonctionnement stationnaire, cette fluctuation est périodique. On note que cette variation de raideur est associée à la fréquence d'engrènement  $f_z$ , produit du nombre de dents d'une des deux roues par sa fréquence de rotation.



A. Engrenage droit

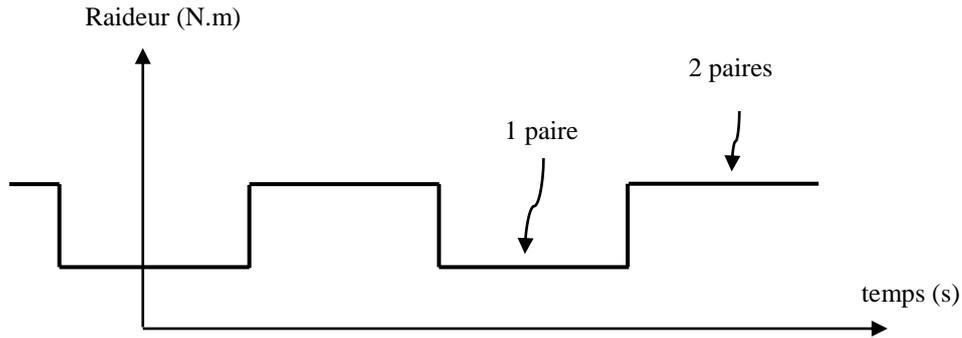
B. Engrenage hélicoïdal

**Figure 1. 10.** Evolution de la longueur de la ligne d'action

La valeur moyenne de la rigidité d'engrènement varie suivant le type d'engrenage considéré. A titre indicatif, elle se situe aux environs de  $4.10^8$  N/m. Les variations des raideurs sont dues à l'évolution du nombre instantané de dents en contact ou plus précisément de la longueur de la ligne d'action. La figure 1.10 explique clairement l'intérêt d'utiliser des engrenages cylindriques hélicoïdaux plus tôt que droits.

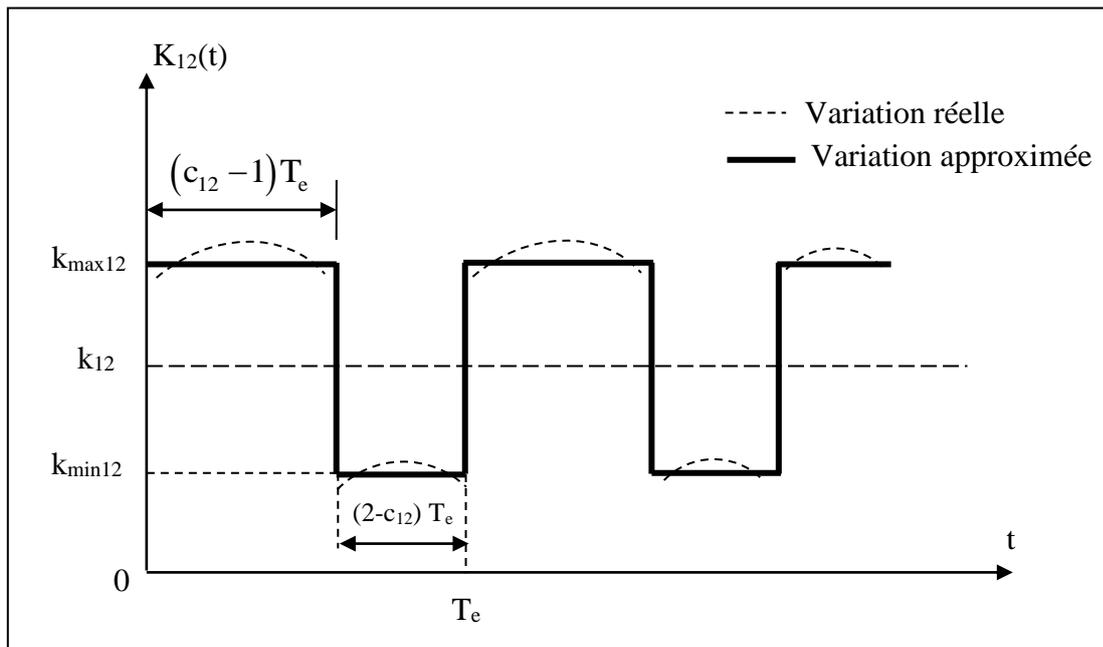
Dans le cas d'engrenages à denture droite, le nombre de paires de dents en contact est intimement lié au rapport de conduite. Dans le cas d'un rapport de conduite inférieur à 2 (Figure 1.11), on aura tantôt une raideur d'engrènement maximale correspondant à deux paires de dents en contact (longueur de contact maximale) tantôt une raideur d'engrènement minimale correspondant à une seule paire de dents en contact (longueur de contact minimale) (Velex 1988).

Plusieurs études se sont focalisées sur l'influence des défauts dans les engrenages compte tenu de la variation de la raideur d'engrènement. Walha et al. (Walha et al. 2009) présentent l'influence de la variation de la raideur d'engrènement sur une transmission d'engrenage à deux étages. La variation de la raideur d'engrènement peut être approximée par une représentation en créneau (Maatar 1995), (Lin et al. 2000a), (Lin et al. 2000b), (Lin et al. 2002), (Fakhfakh et al. 2005).



**Figure 1. 11.** Succession 1 paire de dents - 2 paires de dents en contact

La figure 1.12 représente cette fonction de raideur représentée en fonction du temps,  $c_{12}$  est le rapport de conduite de la transmission (pignon-roue),  $T_e$  est la période d'engrènement,  $k_{\max 12}$ ,  $k_{\min 12}$  et  $k_{12}$  représentent respectivement les valeurs de la rigidité maximale, minimale et moyenne.



**Figure 1. 12.** Evolution en créneau de la raideur d'engrènement pour un engrenage droit

Le développement en série de Fourier de  $K_{12}(t)$  donne :

$$K_{12}(t) = k_{12} + \frac{\Delta K}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left[ \sin 2i\pi(c_{12} - 1) \cos \frac{2i\pi t}{T_e} + (1 - \cos 2i\pi(c_{12} - 1)) \sin \frac{2i\pi t}{T_e} \right] \quad (1.25)$$

Avec,

$$k_{12} = k_{\max 12} (c_{12} - 1) + (2 - c_{12}) k_{\min 12} \quad (1.26)$$

$$\Delta K = k_{\max 12} - k_{\min 12} \quad (1.27)$$

Si on considère que :  $k_{\max 12} = 2 k_{\min 12}$  alors  $k_{12} = c_{12} k_{\min 12}$  et  $k_{12} = \frac{c_{12} k_{\max 12}}{2}$

Henriot (Henriot 1985) donne une formule empirique pour le calcul de la rigidité moyenne d'une paire de dents droites en contact. Elle est exprimée en N/μm/m par :

$$k_{12} = b / (A_1 + A_2/Z_1 + A_3/Z_2) \quad (1.28)$$

Avec  $A_1 = 0.04723$ ,  $A_2 = 0.15551$  et  $A_3 = 0.25791$ .

b étant la largeur de denture.

### 3.1.2. Considérations technologiques sur les défauts d'engrenages

Les statistiques concernant les causes de défaillances et la localisation des défauts dans les transmissions de puissance par engrenages permettent de conclure que les organes les plus sensibles sont les dents dans un premier lieu puis les roulements dans un second lieu. Les causes d'avarie sont multiples à savoir les défauts de fabrication et de montage ainsi que les défauts de fonctionnement. La détection de ces défauts est faite grâce à la maintenance préventive qui contrôle le système lors de son fonctionnement.

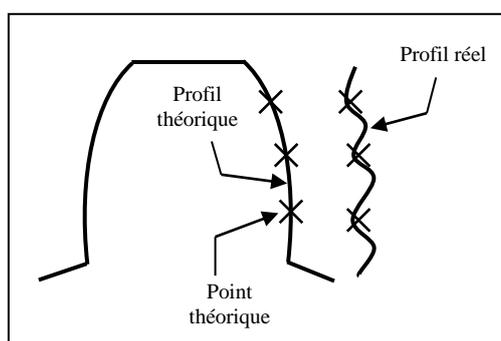
#### 3.1.2.1. Défauts de fabrication

Les défauts de fabrication, appelés aussi écarts de forme, sont liés principalement à la génération de denture (Breneur 2003), (Wojnarowski et al. 2003). Walha et al. (Walha et al. 2009) ont étudié l'effet des défauts de fabrication sur le comportement dynamique d'une transmission par engrenage à deux étages à denture hélicoïdale. Chaari et al. (Chaari et al. 2006) ont modélisé les erreurs de fabrication sur un train épicycloïdal. Les principaux défauts de fabrication sont les suivants :

### - Erreur de profil

Elle est définie comme étant l'écart entre le profil réel et le profil idéal. Cet écart étant mesuré selon la normale extérieure du profil théorique en développante de cercle. Elle est généralement liée au processus de taillage ou/et de rectification. La figure 1.13 représente cette erreur de profil.

Walha et al. (Walha et al. 2013) ont étudié l'effet de l'erreur de profil sur le comportement dynamique non linéaire d'un mécanisme à came. Chaari et al. (Chaari et al. 2006) ont modélisé les erreurs de profil sur un train épicycloïdal en utilisant un modèle plan.



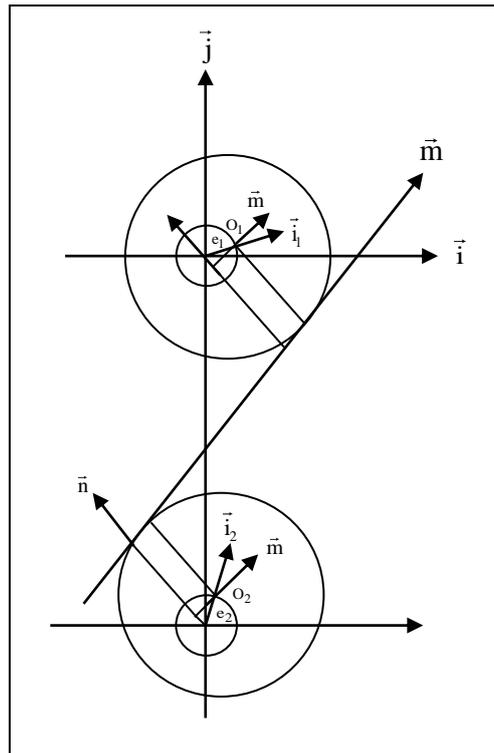
**Figure 1. 13.** Erreur de profil

### - Erreur d'excentricité

L'excentricité d'une roue est théoriquement l'écart entre l'axe géométrique de cette roue et son axe de rotation. L'excentricité ne peut pratiquement pas être déterminée isolément et ses effets sont enregistrés lors du contrôle du faux-rond.

Walha et al. (Walha et al. 2011) ont étudié le comportement dynamique non linéaire d'un système d'engrenage à deux étages à denture hélicoïdale en présence du défaut d'excentricité. L'étude des erreurs d'excentricité et leur relation avec le déplacement du centre du soleil ont été effectuées par Hidaka et al. (Hidaka et al. 1980).

La figure 1.14 représente le cas de deux excentricités de valeurs  $e_1$  et  $e_2$  localisés aux niveaux des roues dentées (1) et (2).



**Figure 1. 14.** Défauts d'excentricité localisés sur les roues (1) et (2)

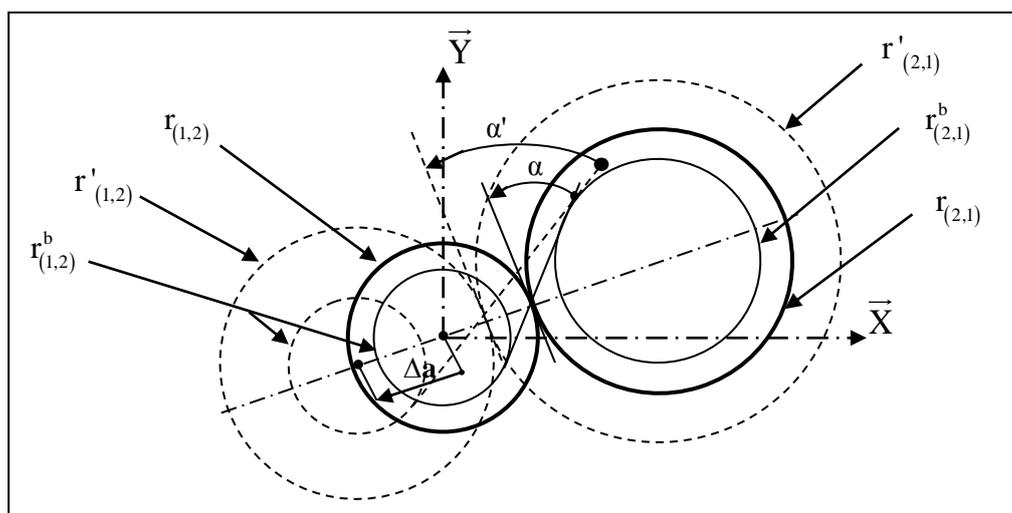
### 3.1.2.2. Défauts de montage

Les défauts de montage sont liés à la phase d'assemblage des divers composants du réducteur. Pour le cas de dentures droites, le défaut le plus rencontré est le défaut d'entraxe.

Ce type de défaut n'est pas introduit sous forme d'une force extérieure d'excitation par contre, il va provoquer un changement des paramètres d'identification du modèle. Pendant la phase de montage des différents blocs qui constituent le réducteur, on doit vérifier la condition d'entraxe définie par :

$$a = r_1 + r_2 \quad (1.29)$$

$a$  est la valeur de l'entraxe (distance entre centres des roues) et  $r_1$  et  $r_2$  représentent les rayons primitifs des roues.



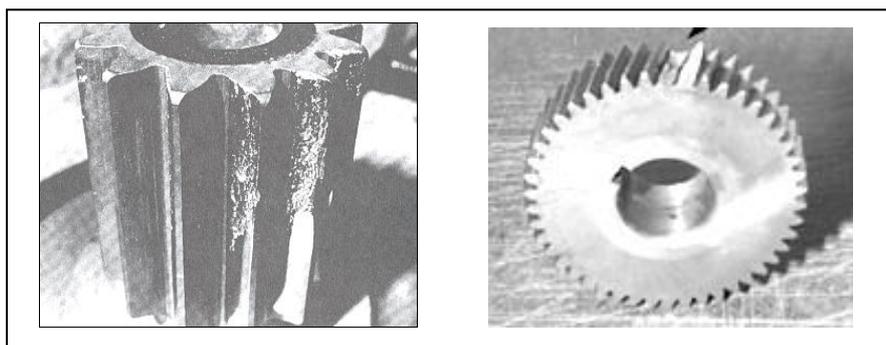
**Figure 1. 15.** Mise en place d'un défaut d'entraxe  $\Delta a$

Sur la figure 1.15, le défaut d'entraxe est représenté sous la forme d'un faible décalage de l'axe géométrique d'un bloc par rapport à sa position désirée.

L'étude et la modélisation des défauts de montage sur une transmission d'engrenage à deux étages ont été effectuées par Fakhfakh et al. (Fakhfakh et al. 2006). Chaari (Chaari 2005) a étudié le comportement dynamique d'un train épicycloïdal en présence d'un défaut d'entraxe.

### 3.1.2.3. Défauts de fonctionnement

Ce défaut est sous la forme de fissuration qui progresse à chaque mise en charge et est située en pied de dent (figure 1.16). Son apparition est due à un dépassement de la limite élastique en contrainte au pied de dent (Howard et al. 2001), (Ajmi et al. 2004). Plusieurs études se sont focalisées sur l'influence des défauts de fonctionnement dans les engrenages. Walha (Walha 2008) a modélisé les défauts de fonctionnement (fissure et écaillage) et a étudié son incidence sur le comportement dynamique d'un réducteur à engrenage double étages.



**Figure 1.16.** Fissuration de denture

### 3.2. Sources externes

Les principales sources d'excitations externes des transmissions par engrenages peuvent être associées aux fluctuations du couple moteur, aux fluctuations du couple de charge ou à la variation du couple aérodynamique dans le cas des éoliennes.

#### 3.2.1. Fluctuations du couple moteur

L'actionneur, de par ses propres défauts ou de par son mode de fonctionnement, peut engendrer des fluctuations de couple. Il est clair que ces fluctuations dépendent étroitement du type de l'organe employé. Ce que l'on peut noter, c'est que les amplitudes de ces fluctuations de couple peuvent être grandes. C'est par exemple le cas des moteurs à explosion. On peut également noter que bien souvent elles se caractérisent par des perturbations quasi-déterministes et périodiques en régime de fonctionnement stationnaire.

#### 3.2.2. Fluctuations du couple de charge

Tout comme le moteur, l'organe récepteur peut engendrer des fluctuations de couple. Ces fluctuations peuvent être de même nature que celles du moteur (par exemple, utilisation d'un moteur électrique comme frein sur un banc d'essai). On peut noter également que l'organe récepteur peut être à l'origine de perturbations aléatoires large bande de grandes amplitudes (frein à garnitures de friction, pompe...).

#### 3.2.3. Variation du couple aérodynamique (cas des éoliennes)

Le rotor est l'organe qui transforme l'énergie cinétique du vent en énergie mécanique transmise sur l'arbre à vitesse lente. Généralement, il est composé de trois pales écartées de

120°, liées par un moyeu qui abrite le système de régulation de la vitesse de rotation du rotor. Deux forces sont générées au passage du flux d'air à savoir la force de portance et celle de traînée. La première force entraîne la mise en rotation du rotor tripale. La seconde (appelée aussi force de poussée) gêne le mouvement rotatif des éoliennes de moyenne et de grande taille. En revanche, dans le cas des petites éoliennes, la force de traînée n'a pas un grand effet sur leurs rendements énergétiques.

Les caractéristiques énergétiques les plus importantes déterminant le profil d'une pale sont :

- l'angle d'attaque noté  $\alpha$ .
- le coefficient de portance noté  $C_l$ .
- le coefficient de traînée noté  $C_d$ .

Le rapport des deux coefficients aérodynamiques ( $C_l/C_d$ ) appelé finesse de la pale est maximal pour une valeur critique de l'angle d'attaque autour d'une valeur optimale  $\alpha_{opt} = 10^\circ$ . Si l'en dépasse, les filets d'air décollent et l'extrados devient le siège des tourbillons désordonnés. Ce phénomène est appelé « décrochage aérodynamique ». Il affaiblit énormément les performances énergétiques de la machine éolienne.

Le calage des pales permet de garder la valeur optimale de l'angle d'attaque autour de  $10^\circ$ . Le contrôle est basé sur un angle de calage noté  $\beta$  qui varie en respectant l'expression.

Le vent est un mouvement des masses d'air avec des vitesses différentes au cours du temps.

Localement, les spécificités géographiques entraînent cette variation en vitesse. Ces fluctuations se font autour d'une valeur moyenne qui varie lentement au cours du temps.

Afin de modéliser approximativement la vitesse du vent et pour simplifier la problématique, on a considéré que la vitesse du vent est une combinaison d'une composante constante  $V_{moy}$  et d'une composante variable périodiquement, dont la formule est (Camblong, 2003):

$$V(t) = V_{moy} \cdot [1 - 0.2 \cos(\omega_1 \cdot t) - 0.05 \cos(\omega_2 \cdot t)] \quad (1.30)$$

Avec :

( $\omega_1 = \pi$ ) et ( $\omega_2 = 4\pi$ ) sont les pulsations [rad/s].

La vitesse moyenne du vent selon laquelle la plupart des machines éoliennes sont conçues est égale à 12 m/s pour une masse volumique d'air de 1.225 Kg/m<sup>3</sup>.

Pour déterminer le couple aérodynamique appliqué sur le rotor, on doit déterminer son coefficient de performance (ou de puissance). Le coefficient de puissance est le rapport de la puissance disponible sur l'arbre primaire et la puissance du vent incident.

Plusieurs approches ont été proposées pour calculer ce coefficient. Pour une éolienne à vitesse de rotation fixe, on a adopté la relation semi- empirique.

On introduit alors le coefficient de puissance  $C_p$  dans le calcul du couple instantané produit par l'éolienne :

$$C_{aéro} = \int_0^R \frac{0.5\pi\rho_{air} V_{rel}^3 C_p(\beta, \lambda)}{\Omega} .r dr \quad (1.31)$$

Plusieurs études se sont focalisées sur l'influence du couple aérodynamique dans les engrenages. Abboudi (Abboudi 2012) a modélisé analytiquement les charges aérodynamiques non-stationnaires appliquées sur une éolienne à axe horizontal. Abboudi et al (Abboudi et al. 2012) ont étudié les effets des excitations aérodynamiques sur le comportement dynamique d'un système d'engrenage à denture hélicoïdal.

#### 4. Conclusion

A partir de cette analyse bibliographique, on conclut que le modèle global d'un système d'engrenage doit prendre en compte de manière précise la déformabilité de l'ensemble de ses éléments constitutifs à savoir les éléments de structures (arbres, paliers) et les éléments de liaison (dentures). Dans ce chapitre on a passé en revue les principaux défauts pouvant affecter les transmissions d'engrenages .Ces défauts qui affectent les systèmes d'engrenages sont soit de nature géométrique soit des défauts se développant au cours du fonctionnement.

Partant de cette étude bibliographique on s'intéresse dans la suite notre travail de recherche aux méthodes de prise en compte des incertitudes.

## Chapitre 2

---



---

# Méthodes de prise en compte des incertitudes

---



---

### SOMMAIRE

<b>1. Introduction .....</b>	<b>41</b>
<b>2. Approche probabiliste.....</b>	<b>41</b>
2.1. Méthode de Monte Carlo (MC).....	42
2.1.1. Origine.....	42
2.1.2. Principe.....	42
2.1.3. Avantages et inconvénients .....	43
2.1.4. Conclusion.....	44
2.2. Méthode de perturbation .....	44
2.2.1. Principe.....	44
2.2.2. Formulation théorique .....	45
2.2.3. Les principales applications .....	47
2.2.4. Exemple d'application.....	48
2.2.5. Conclusion.....	50
2.3. Chaos polynomial.....	50
2.3.1. Principe.....	50
2.3.2. Formulation théorique .....	50
2.3.3. Les principales applications .....	53
2.3.4. Exemple d'application.....	54
2.3.5. Conclusion.....	56
<b>3. Méthode des plans d'expériences .....</b>	<b>56</b>
3.1. Principe.....	56
3.2. Méthode de Taguchi.....	57
3.3. Exemple d'application.....	57
<b>4. Approche possibiliste (ensembliste) .....</b>	<b>59</b>

4.1. Méthode des intervalles.....	59
4.1.1. Principe.....	59
4.1.2. Formulation théorique.....	60
4.1.3. Exemple d'application.....	61
4.1.4. Conclusion.....	63
4.2. Méthode à base de la logique floue.....	63
4.2.1. Principe.....	63
4.2.2. Exemple d'application.....	64
4.2.3. Conclusion.....	65
<b>5. Conclusion.....</b>	<b>65</b>

## **1. Introduction**

Les méthodes de prise en compte des incertitudes sont nombreuses et sont d'un usage très général. Elles sont, naturellement, bien utilisées pour analyser le comportement dynamique des systèmes et structures sujets aux incertitudes. Elles sont répertoriées en littérature sous l'appellation «méthodes de propagation ou quantification d'incertitudes». Ces méthodes s'insèrent dans une démarche plus générale s'articulant autour de trois étapes fondamentales à savoir : définir le modèle approché du système physique étudié, identifier et caractériser les sources des incertitudes parmi tous les paramètres du modèle et enfin propager les incertitudes dans ce dernier. Une étape de post traitement s'en suit pour analyser et extraire les statistiques de la réponse (moment statistiques, distribution,...).

Les méthodes de propagation des incertitudes se différencient les unes des autres par rapport à la façon dont elles prennent en compte les incertitudes et donc par rapport aux outils mathématiques qu'elles utilisent. Les approches probabiliste, possibiliste et algébrique ainsi que les méthodes basées sur les plans d'expériences sont les plus développées en littérature et par conséquent sont celles qui seront présentées dans la suite de ce chapitre. D'autres approches moins répandues telle que l'approche fonctionnelle ne seront donc pas abordées.

## **2. Approche probabiliste**

L'approche probabiliste est basée sur la caractérisation probabiliste des incertitudes. Ces dernières sont modélisées par des variables aléatoires, des champs stochastiques ou par des processus stochastiques en fonction de quoi on cherche à analyser, de manière statistique et probabiliste, la variabilité de la sortie d'un système. La méthode de Monte Carlo (Rubinstein 1981, Fishman 1996), la méthode des perturbations (Kaminski 2002) et celle du chaos polynomial (Wiener 1938, Ghanem et Spanos 1991) sont très répandues. Ces méthodes qui sont les plus développées dans la littérature nécessitent toutes une caractérisation probabiliste de l'incertitude comme préalable à leur utilisation. Leurs principes ainsi que leurs principales applications sont présentés ci-dessous.

## 2.1. Méthode de Monte Carlo (MC)

### 2.1.1. Origine

L'utilisation de la méthode de MC s'est répandue essentiellement suite aux développements escomptés dans le domaine de l'informatique durant les années quarante et suite aux travaux de Van Neumann, Ulam et Fermi dans le domaine de la physique atomique.

Une première utilisation de cette technique remonte à 1930 grâce aux recherches de Fermi portant sur la caractérisation de nouvelles molécules. La méthode a été effectivement reconnue à partir de 1949 et a été attribuée à Nicholas Metropolis suite à son travail co-publié avec Ulam (Metropolis et Ulam 1949).

### 2.1.2. Principe

La méthode de Monte Carlo (MC) se dit de toute technique de calcul procédant par des résolutions successives d'un système déterministe incorporant des paramètres incertains modélisés par des variables aléatoires. Elle constitue un outil mathématique puissant et très général ce qui lui a valu un vaste champ d'applications. Une technique de MC est utilisée lorsque le problème à traiter est trop complexe pour qu'une résolution par voie analytique soit envisagée. Elle se résume à générer, pour tous les paramètres incertains et suivant leurs lois de probabilité ainsi que leurs corrélations, des tirages aléatoires (la qualité en terme de précision des générateurs aléatoires est naturellement très importante). Pour chaque tirage, un jeu de paramètres est obtenu et un calcul déterministe, suivant des modèles analytiques ou numériques bien définis, est opéré. Un travail d'analyse du jeu de réponses résultant est enfin effectué suite à quoi, une caractérisation statistique et probabiliste (moments statistiques, lois de probabilité) de la réponse du problème traité est obtenue.

On considère un système mécanique à N degrés de liberté :

$$[M_T] \{\ddot{u}_T\}(t) + [C_T] \{\dot{u}_T\}(t) + [K_T] \{u_T\}(t) = \{F\}(t) \quad (2.1)$$

Où  $[M_T]$ ,  $[C_T]$  et  $[K_T]$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité.

L'estimation des moments de la fonction  $F$  peut être obtenue par simulation de Monte Carlo (Shinozuka 1972).  $F$  est vue comme la variable aléatoire image des variables de base  $x_i$ . Les simulations consistent à construire un échantillon  $(F_1, F_2, \dots, F_n)$  de la variable aléatoire  $F$  et à

traiter cet échantillon par les techniques statistiques usuelles. Les  $n$  simulations sont effectuées de façon indépendante selon la loi de distribution du vecteur aléatoire  $x$ .

L'estimateur de la moyenne  $E(F)$  de  $F$  est :

$$E(F) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i \quad (2.2)$$

L'estimateur de la variance  $\text{var}(F)$  de  $F$  est :

$$\text{var}(F) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [F_i - E(F)]^2 \quad (2.3)$$

Les méthodes de simulation nécessitent d'autant plus de simulations que le coefficient de variation de la réponse est grand, la précision des résultats est indépendante du nombre de variables.

### 2.1.3. Avantages et inconvénients

L'avantage principal de la méthode de MC est lié essentiellement à son applicabilité. En effet, théoriquement, une telle méthode peut s'appliquer à n'importe quel système (Fishman 1996), quelle que soient sa dimension et sa complexité. Ses résultats sont exacts au sens statistique, c'est-à-dire qu'ils présentent une certaine incertitude qui diminue avec l'augmentation du nombre de tirages. Celui-ci, nécessaire pour avoir une précision et un niveau de confiance donnés, est défini par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (Sudret 2007). Une précision raisonnable nécessite un nombre suffisamment grand de tirages doit être effectué pour que l'étude statistique de la réponse converge.

Papadrakakis et Papadopoulos (Papadrakakis et Papadopoulos 1999) ont utilisé la méthode de Monte Carlo avec la méthode des éléments finis pour résoudre les méthodes de résolution parallèles. Lindsley et Beran (Lindsley et Beran 2005) ont étudié l'efficacité dans l'interrogation stochastique d'un système aéroélastique non linéaire à paramètres incertains en utilisant la méthode de Monte Carlo.

Un résultat de convergence à une dimension peut être donné par une application du théorème central limite : nous cherchons à estimer l'espérance d'une variable aléatoire  $Y$ . La méthode de Monte-Carlo pour  $n$  tirages nous donne alors une estimation de cette espérance, à l'aide de  $n$  variables aléatoires  $\{Y_k\}_{k=1,\dots,n}$  de même loi de probabilité que  $Y$ . Nous montrons alors que l'écart :

$$\varepsilon_n = Y - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \quad (2.4)$$

Entre l'espérance de  $Y$  et son estimé suit une loi normale centrée d'écart-type  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  où  $\sigma$  est l'écart-type de la variable aléatoire  $Y$ . Autrement dit, la vitesse de convergence de la moyenne de Monte-Carlo est donc de l'ordre de  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  où  $n$  est le nombre de tirages.

#### 2.1.4. Conclusion

Comme mentionné précédemment, la simplicité de la méthode de Monte Carlo a permis son exploitation dans différentes applications relevant du domaine des sciences de l'ingénieur. Ces résultats servent à valider ceux des nouvelles méthodes développées dans le cadre de la recherche fondamentale. Autrement dit, la méthode peut être retrouvée dans la majorité des études traitant des techniques de propagation d'incertitudes. Nous l'avons ainsi utilisé sous sa forme classique la plus simple dans le cadre de cette thèse comme méthode référentielle pour valider les résultats.

## 2.2. Méthode de perturbation

### 2.2.1. Principe

La méthode de perturbation définit une autre procédure permettant la propagation des incertitudes sur les systèmes (Benaroya et Rehak 1988, Kleiber et Hien 1992). Elle consiste à approximer les fonctions de variables aléatoires par leurs développements de Taylor autour de leurs valeurs moyennes. Selon l'ordre considéré du développement de Taylor, la méthode est dite du premier ordre, du second ou plus. La méthode est sujette aux conditions d'existence et de validité du développement de Taylor ce qui limite son champs d'application aux cas où les variables aléatoires ont de faibles dispersions autour de leurs valeurs moyennes, (Ghanem et Spanos 1991). Le principe de la méthode de perturbation se résume à substituer, dans l'expression du modèle, les fonctions aléatoires par leurs développements de Taylor. Les termes du même ordre sont regroupés suite à quoi un système d'équations est généré. La résolution se fait alors successivement ordre par ordre à commencer par l'ordre zéro. Le formalisme mathématique ainsi que les équations générales de résolution peuvent être trouvés dans l'étude de Sudret dans le contexte de la fiabilité des structures mécaniques (Sudret 2007).

### 2.2.2. Formulation théorique

Nous présentons dans la suite deux méthodes de perturbation développées pour résoudre des problèmes statiques linéaires. La première basée sur un développement en série de Taylor (Flores 1994) et la deuxième basée sur un développement astucieux au premier ordre (Muscolino et al. 1999).

- **Expansion en série de Taylor**

Soit l'équation d'équilibre d'un système mécanique :

$$[\mathbf{K}_T]\{\mathbf{u}_T\} = \{\mathbf{F}\} \quad (2.4)$$

$\{\mathbf{u}_T\}$  est le vecteur des déplacements nodaux de dimensions  $(N \times 1)$ .  $[\mathbf{K}_T]$  est la matrice raideur du système mécanique  $(N \times N)$ .  $\{\mathbf{F}\}$  est le vecteur des forces extérieures nodales équivalentes de dimensions  $(N \times 1)$ .

Pour un système mécanique à variables incertaines on suppose que la matrice de rigidité  $[\mathbf{K}_T]$  ainsi que le vecteur de chargement  $\{\mathbf{F}\}$  sont fonctions de vecteur des variables aléatoires  $\alpha_p$  ( $p = 1, \dots, P$ ).

On définit le vecteur des paramètres moyens  $\{\bar{\alpha}\}$ , et la quantité  $\{d\alpha\} = \{\alpha\} - \{\bar{\alpha}\}$

On adopte pour simplifier la notation suivante pour les dérivées d'une quantité B :

$$[\mathbf{B}]^0 = [\mathbf{B}]({\bar{\alpha}}), [\mathbf{B}]^n = \frac{\partial [\mathbf{B}]}{\partial \alpha_n} \Big|_{\{\bar{\alpha}\}}, [\mathbf{B}]^{np} = \frac{\partial^2 [\mathbf{B}]}{\partial \alpha_n \partial \alpha_p} \Big|_{\{\bar{\alpha}\}} \quad (2.5)$$

Le développement de la matrice  $[\mathbf{K}_T]$ , le vecteur des forces nodales extérieures  $\{\mathbf{F}\}$  et le vecteur des déplacements nodaux en séries de Taylor à l'ordre deux par rapport aux P variables aléatoires  $d\alpha_p$  au voisinage le vecteur des paramètres moyens  $\{\bar{\alpha}\}$  :

$$[\mathbf{K}_T] = [\mathbf{K}_T]^0 + [\mathbf{K}_T]^n \{d\alpha_n\} + \frac{1}{2} [\mathbf{K}_T]^{np} \{d\alpha_n\} \{d\alpha_p\} \quad (2.6)$$

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{F}]^0 + [\mathbf{F}]^n \{d\alpha_n\} + \frac{1}{2} [\mathbf{F}]^{np} \{d\alpha_n\} \{d\alpha_p\} \quad (2.7)$$

$$\{\mathbf{u}_T\} = \{\mathbf{u}_T\}^0 + \{\mathbf{u}_T\}^n \{d\alpha_n\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{u}_T\}^{np} \{d\alpha_n\} \{d\alpha_p\} \quad (2.8)$$

Avec  $[ ]^0, [ ]^n$ , et  $[ ]^{np}$  sont des matrices déterministes.

Notons que pour la notation indicielle que la répétition des indices n, p deux fois implique une sommation.

En injectant les équations (2.6), (2.7) et (2.8) dans l'équation d'équilibre (2.4) et en regroupant les termes de même ordre, nous obtenons :

$$\{u_T\}^0 = ([K_T]^0)^{-1} \{F\}^0 \quad (2.9)$$

$$\{u_T\}^n = ([K_T]^0)^{-1} (\{F\}^n - [K_T]^n \{u_T\}^0) \quad (2.10)$$

$$\{u_T\}^{np} = ([K_T]^0)^{-1} (\{F\}^{np} - [K_T]^n \{u_T\}^p - [K_T]^p \{u_T\}^n - [K_T]^{np} \{u_T\}^0) \quad (2.11)$$

Le calcul de ces trois vecteurs ne nécessite donc qu'une seule évaluation de l'inverse de la matrice raideur  $([K]^0)^{-1}$ , d'où un gain en temps de calcul non négligeable.

La valeur moyenne du vecteur des déplacements est alors :

$$E[\{u_T\}] = \{u_T\}^0 + \frac{1}{2} \{u_T\}^{np} \text{cov}(\alpha_n, \alpha_p) \quad (2.12)$$

Et sa matrice covariance :

$$\text{cov}(\{u_{Ti}\}, \{u_{Tj}\}) = \{u_{Ti}\}^n \{u_{Tj}\}^p \quad (2.13)$$

- **Méthode de perturbation de Muscolino**

Dans cette méthode les paramètres aléatoires sont supposés non corrélés (Muscolino et al. 1999).

Pour une quantité  $[B]$  on utilisera les notations suivantes :

$$[\bar{B}] = [B] \Big|_{\{\bar{\alpha}\}} + \frac{1}{2} E[\alpha_n^2] \frac{\partial^2 [B]}{\partial \alpha_n^2} \Big|_{\{\bar{\alpha}\}}, [B]^n = \frac{\partial [B]}{\partial \alpha_n} \Big|_{\{\bar{\alpha}\}} \quad (2.14)$$

Le développement des différentes quantités suivant la méthode de Muscolino :

$$[K_T] = [\bar{K}_T] + [K_T]^n \{d\alpha_n\} \quad (2.15)$$

$$\{u_T\} = \{\bar{u}_T\} + \{u_T\}^n \{d\alpha_n\} \quad (2.16)$$

$$\{\mathbf{F}\} = \{\bar{\mathbf{F}}\} + \{\mathbf{F}\}^n \{\mathbf{d}\alpha_n\} \quad (2.17)$$

Nous remplaçons les équations (2.15), (2.16) et (2.17) dans l'équation (2.4), lorsque on regroupe les termes de même ordre on obtient les équations suivantes, si l'inverse de  $[\bar{\mathbf{K}}_T]$  existe :

$$\{\bar{\mathbf{u}}_T\} = [\bar{\mathbf{K}}]^{-1} \{\bar{\mathbf{F}}\} \quad (2.18)$$

$$\{\mathbf{u}_T\}^n = [\bar{\mathbf{K}}]^{-1} \left( \{\mathbf{F}\}^n - [\mathbf{K}]^n \{\bar{\mathbf{u}}_T\} \right) \quad (2.19)$$

La valeur moyenne ou l'espérance du vecteur des déplacements nodaux est alors :

$$E[\{\mathbf{u}_T\}] = \{\bar{\mathbf{u}}_T\} \quad (2.20)$$

Et sa matrice covariance :

$$\text{cov}(\{\mathbf{u}_{T_i}\}, \{\mathbf{u}_{T_j}\}) = \{\mathbf{u}_{T_i}\}^n \{\mathbf{u}_{T_j}\}^n \text{var}(\alpha_n) \quad (2.21)$$

### 2.2.3. Les principales applications

Les applications de la méthode des perturbations sont nombreuses. La méthode a permis de résoudre différents types de problèmes relevant de la propagation des incertitudes en statique comme en dynamique, en linéaire comme en non linéaire. Elle a, cependant, offert de bons résultats uniquement dans le cas où les paramètres incertains ont des faibles dispersions, (Handa et Andersson 1981, Liu et al. 1986, Shinozuka et Yamazaki 1988, Elishakoff et al. 1995).

Dans le contexte de la modélisation du comportement vibratoire et l'analyse du comportement dynamique des systèmes, Liaw et Yang ont exploité la méthode de perturbation pour l'étude des propriétés aérodynamiques de structures élastiques sujettes à plusieurs paramètres incertains (Liaw et Yang 1993). Teigen et al. (Teigen et al. 1991a, 1991b) ont montré que les termes de second ordre n'affectent que les valeurs moyennes de la réponse d'un système mécanique et sont négligeables par rapport aux termes d'un ordre zéro et de premier ordre. Dans une autre étude, Kaminski a présenté une combinaison originale de la méthode de différence finie avec celle des perturbations pour modéliser des problèmes de vibrations dans les structures mécaniques incertaines (Kaminsky 2002). Guerine et al. (Guerine et al. 2015a,

2015b) ont utilisé la méthode de perturbation pour étudier le comportement dynamique d'une transmission par engrenage comportant des paramètres incertains.

Dans une autre étude, Muscolino a développé une méthode d'analyse dynamique pour des systèmes linéaires à paramètres incertains et à excitations déterministes (Muscolino 2000). La méthode est une amélioration de la technique de perturbation du premier ordre qui présente des limites lorsque la dispersion des paramètres incertains est importante. L'apport de la méthode est évalué, en confrontant ses résultats à ceux des méthodes de Monte Carlo et de perturbation du second ordre, sur le problème de l'analyse des deux premiers moments statistiques des vibrations d'une poutre soumise à une force mobile. Les résultats de la méthode proposée corrént bien avec les résultats référentiels.

#### 2.2.4. Exemple d'application

On considère comme exemple d'application une poutre en vibration libre dans le plan (Oxy) (Figure 2.1). La poutre a une section carrée de côté  $b$  qu'on prendra comme variable aléatoire supposée gaussienne.

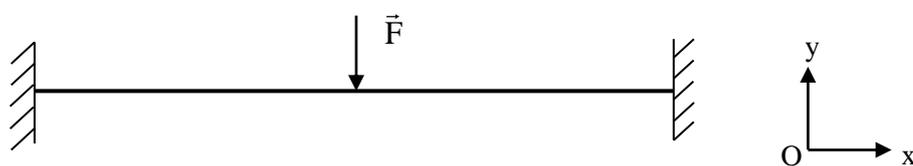
Les matrices de masse et de rigidité sont données par (Drouin et al. 1993) :

$$[M] = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22.1 & 54 & -13.1 \\ 22.1 & 4.1^2 & 13.1 & -3.1^2 \\ 54 & 13.1 & 156 & -22.1 \\ -13.1 & -3.1^2 & -22.1 & 4.1^2 \end{bmatrix}, [K] = \frac{E.I}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6.1 & -12 & 6.1 \\ 6.1 & 4.1^2 & -6.1 & 2.1^2 \\ -12 & -6.1 & 12 & -6.1 \\ 6.1 & 2.1^2 & -6.1 & 4.1^2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

La matrice de rigidité  $[K]$  peut s'écrire sous la forme suivante :

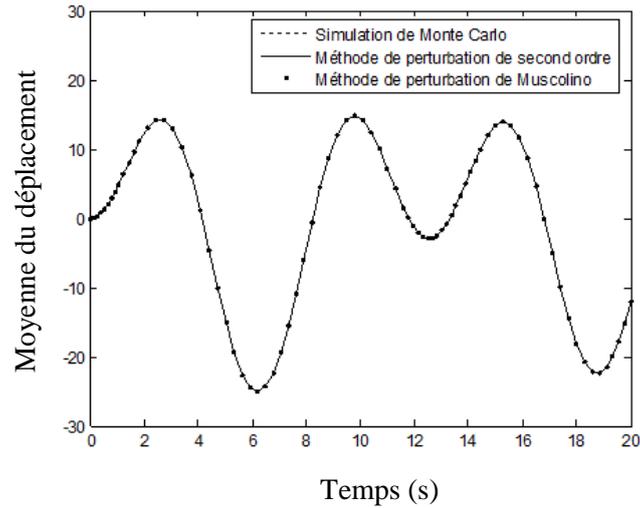
$[K] = b^4 \cdot [A]$  ;  $[A]$  est une matrice déterministe

De même la matrice masse  $[M] = b^2 \cdot [B]$  ;  $[B]$  est une matrice déterministe.

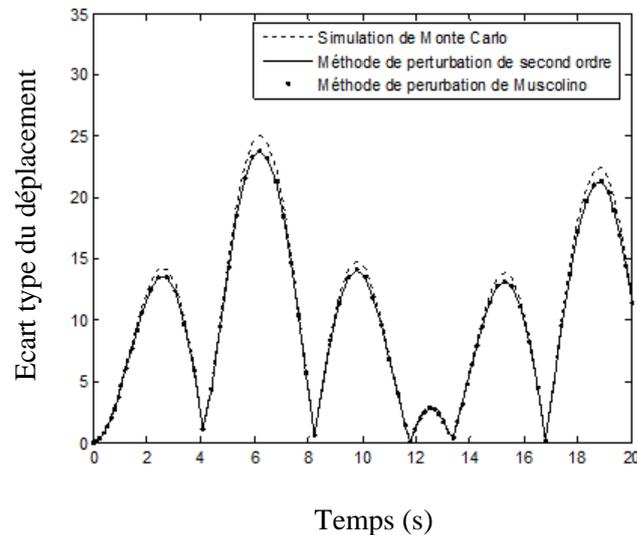


**Figure 2. 1.** Poutre bi-encastée

Nous analysons la réponse de la poutre à une force  $\vec{F} = 600 \sin(800t)$  exercée au milieu de la poutre. Notre objectif dans cette application est de mettre en œuvre les avantages de la méthode de perturbation de Muscolino pour déterminer la réponse de la poutre.



**Figure 2. 2.** Moyenne du déplacement du milieu de la poutre



**Figure 2. 3.** Ecart type du déplacement du milieu de la poutre

La valeur moyenne et l'écart type du déplacement du milieu de la poutre ont été calculés avec la méthode de perturbation de second ordre et la nouvelle méthode proposée. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux obtenus avec la technique référentielle de Monte Carlo en utilisant 10.000 simulations.

Les résultats sont représentés sur les figures 2.2 et 2.3. Ces figures montrent que les deux méthodes de perturbation restent précises surtout la méthode de perturbation de Muscolino.

### 2.2.5. Conclusion

La méthode de perturbation offre un principe d'utilisation simple basé sur l'expression de toutes les grandeurs aléatoires par leurs développements de Taylor autour de leurs valeurs moyennes. Néanmoins, son utilisation reste délicate particulièrement dans le cas des systèmes à grand nombre de degrés de liberté. De plus, la méthode ne peut être utilisée que pour les cas où les paramètres incertains ont de faibles dispersions autour de leurs valeurs moyennes, conséquence des propriétés des approximations de Taylor. Cette contrainte, peu vérifiée en pratique, constitue l'inconvénient majeur de la méthode.

## 2.3. Chaos polynomial

### 2.3.1. Principe

Le chaos polynomial formalise une séparation entre les composantes stochastiques d'une fonction aléatoire et ses composantes déterministes. C'est un outil mathématique puissant qui a été développé par Wiener dans le cadre de sa théorie sur le chaos homogène (Wiener 1938). Le chaos polynomial permet d'obtenir une expression fonctionnelle d'une réponse aléatoire en décomposant son aléa sur une base de polynômes orthogonaux. En effet, cette théorie montre que, de façon générale, un champ de variables stochastiques du second ordre peut être exprimé par un développement en série de polynômes d'Hermite. La partie déterministe est modélisée par des coefficients  $\bar{x}_j$ , appelés modes stochastiques, pondérant les fonctions polynômiales d'Hermite.

$$X(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{x}_j \phi_j(\xi) \quad (2.23)$$

La famille des polynômes  $\phi_j$  forme une base orthogonale optimale et permet une convergence au sens des moindres carrés du développement, objet du théorème de Cameron et Martin (Cameron et Martin 1947).

### 2.3.2. Formulation théorique

Les solutions stochastiques sont projetées sur une base de polynômes orthogonaux dont les variables sont des gaussiennes orthonormales (Dessombz 2000). Les propriétés de cette base de polynômes sont utilisées pour générer un système d'équations linéaires au moyen de

projection. La résolution de ce système conduit à une expansion de la solution sur la base polynomial, qu'on peut utiliser pour trouver de manière soit analytique, soit numérique la moyenne, l'écart type ou la distribution de la solution aléatoire.

Les polynômes chaotiques  $\psi_m$  correspondant aux polynômes d'Hermite multidimensionnels obtenus par :

$$\psi_m(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = (-1)^p e^{\left(\frac{1}{2} \mathbf{1}^T \{\alpha\} \{\alpha\}\right)} \frac{\partial^p e^{\left(-\frac{1}{2} \mathbf{1}^T \{\alpha\} \{\alpha\}\right)}}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_p} \quad (2.24)$$

On développe maintenant la méthode utilisée pour trouver l'expansion sur un chaos homogène de la solution d'un problème de statique linéaire dont certains paramètres sont aléatoires.

La matrice de rigidité aléatoire  $[\mathbf{K}_T]$  peut s'écrire sous la forme :

$$[\mathbf{K}_T] = [\mathbf{K}_{T0}] + [\tilde{\mathbf{K}}_T] \quad (2.25)$$

La matrice  $[\mathbf{K}_{T0}]$  est une matrice déterministe, la matrice  $[\tilde{\mathbf{K}}_T]$  correspond à la partie aléatoire de la matrice de raideur.

$[\tilde{\mathbf{K}}_T]$  est réécrites à partir d'une expansion type Karhunen-Loeve (Ghanem et al. 1991) sous la forme :

$$[\tilde{\mathbf{K}}_T] = \sum_{q=1}^Q [\mathbf{K}_{Tq}] \alpha_q \quad (2.26)$$

Où les  $\alpha_q$  sont des gaussienne centrées réduites indépendantes, qu'on peut faire correspondre aux premiers polynômes  $\psi_q$ , les matrices  $[\mathbf{K}_{Tq}]$  sont des matrices déterministes.

Nous posons  $\alpha_0 = 1$ , nous pouvons écrire la matrice  $[\mathbf{K}_T]$  à partir des équations (2.25) et (2.26) sous la forme :

$$[\mathbf{K}_T] = \sum_{q=0}^Q [\mathbf{K}_{Tq}] \alpha_q \quad (2.27)$$

Le vecteur des forces aléatoires appliquées peut s'écrire sous la forme :

$$\{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{F}_0\} + \{\tilde{\mathbf{F}}\} \quad (2.28)$$

Avec  $\{F_0\}$  est le vecteur déterministe et  $\{\tilde{F}\}$  est le vecteur force aléatoire.

A partir d'une expansion type Karhunen-Loeve le vecteur force aléatoire s'écrit sous la forme :

$$\{\tilde{F}\} = \sum_{p=1}^P \{F_p\} \alpha_p \quad (2.29)$$

Qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\{F\} = \sum_{p=0}^P \{F_p\} \alpha_p \quad (2.30)$$

Dans lequel  $\alpha_0 = 1$ .

Une décomposition du vecteur déplacement  $\{u_T\}$  sur des polynômes à  $Q$  variables aléatoires gaussiennes orthonormales est :

$$\{u_T\} = \sum_{n=0}^N \{u_{T0}\} \psi_n \left( \{\alpha_i\}_{i=1}^Q \right) \quad (2.31)$$

On remplace alors  $\{u_T\}$  par son expansion dans l'équation (2.4), et on multiplie l'équation obtenue par  $\psi_m$ . Si on fait la moyenne (intégration sur le domaine des variables aléatoires), et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des polynômes, on arrive à :

$$\sum_{q=0}^Q \sum_{n=0}^N \{u_{Tn}\} \langle \alpha_q \psi_n \psi_m \rangle [K_{Tq}] = \sum_{p=0}^P \{F_p\} \langle \psi_m \alpha_p \rangle \quad (2.32)$$

Le système (2.32) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} D^{(00)} & \dots & D^{(0N)} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & D^{(jk)} & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ D^{(N0)} & \dots & D^{(NN)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_{T0}\} \\ \cdot \\ \{u_{Tk}\} \\ \cdot \\ \{u_{TN}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ \cdot \\ f_k \\ \cdot \\ f_N \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Dans laquelle :

$$[K]^{(jk)} = \sum_{q=0}^Q \langle \alpha_q \psi_j \psi_k \rangle [K_{Tq}] \quad (2.34)$$

$$\{f_k\} = \sum_{p=0}^P \langle \alpha_p \psi_k \rangle \{F_p\} \quad (2.35)$$

Il faut noter que du fait de l'orthogonalité des polynômes, la plupart des expressions  $\langle \alpha_q \psi_n \psi_m \rangle$  sont nulles.

Une fois que les  $\{u_{T_n}\}$  sont connus, la moyenne est donnée directement par :

$$E[\{u_T\}] = \{u_{T_0}\} \quad (2.36)$$

Et la variance est égale à :

$$\text{Var}[\{u_T\}] = \sum_{n=1}^N (\{u_{T_n}\})^2 \langle \psi_n^2 \rangle \quad (2.37)$$

### 2.3.3. Les principales applications

Les premières applications du chaos polynomial remontent aux années soixante et ont porté essentiellement sur le domaine de la turbulence (Kraichnan 1963, Orszagand et Bissonnette 1967). Les limites constatées en termes de convergence du développement de Wiener-Hermite dans les problèmes non gaussiens ont fait perdre à ce dernier beaucoup de son intérêt. Le renouement avec les applications du chaos polynomial n'est dû qu'aux travaux de Ghanem et Spanos de 1991. Ces deux derniers chercheurs ont combiné le développement de Wiener-Hermite avec la méthode des éléments finis pour modéliser et propager les incertitudes dans des structures mécaniques (Ghanem et Spanos 1991). L'analyse moderne utilisant le chaos polynomial a ainsi commencé. En effet, depuis ces travaux et suite à la définition du chaos polynomial généralisé (Xiu et Karniadakis 2002), différentes applications, dans des domaines aussi variés que complexes, ont été et continuent d'être entreprises. Sandu et al. (Sandu et al. 2006a, 2006b) ont étudié le comportement des systèmes dynamiques en présence d'incertitudes. Sarsri (Sarsri et al. 2011) a utilisé la méthode du chaos polynomial avec la synthèse modale pour calculer les fréquences stochastiques d'une structure. Williams (Williams 2006) a utilisé la méthode du chaos polynomial pour résoudre les équations différentielles ordinaires et partielles. Guerine et al. (Guerine et al. 2014a, 2014b, 2015c, 2016a, 2016b, 2016c, 2016d, 2016e, 2016f, 2016g) ont utilisé une méthode basée sur une projection sur un chaos polynomial pour étudier la réponse dynamique d'une transmission par engrenage à paramètres incertains.

### 2.3.4. Exemple d'application

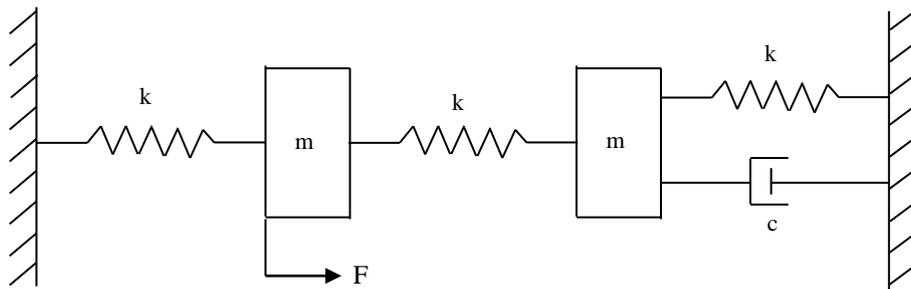
On considère comme exemple d'application un système mécanique à deux degrés de liberté (Figure 2.4). C'est un système à deux degrés de liberté en oscillation forcée soumis à une force horizontale  $F$  appliquée à la première masse.

L'équation différentielle du mouvement s'écrit:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (2.38)$$

$$\text{Où } [M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}; [K] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}; [C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}; \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \text{ et } \{F\} = \begin{Bmatrix} F \cos(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On s'intéresse à la réponse forcée en déplacement pour un effort harmonique, pour  $m=k=1$ , et plus particulièrement à la réponse de la masse où est appliqué cet effort. Le module de la réponse déplacement se calcule directement, sans analyse modale du système, et est donné par:



**Figure 2. 4.** Système mécanique à deux degrés de liberté

$$|x| = \frac{F\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{(a^2 - 1)^2 + a^2 b^2}} \quad (2.39)$$

Où  $a = 2 - \Omega^2$  et  $b = c\Omega$

La réponse forcée dépend sensiblement des valeurs de l'amortissement  $c$  qu'on prendra comme variable aléatoire supposée gaussienne et défini comme suit :

$$c = c_0 + \sigma_c \xi \quad (2.40)$$

Où  $\xi$  est une gaussienne normale centrée réduite,  $c_0$  est la valeur moyenne et  $\sigma_c$  est l'écart type du paramètre.

Pour voir l'influence de l'écart type du l'amortissement  $c$  ainsi que l'ordre du chaos polynomial sur les résultats obtenus nous faisons des calculs pour différentes valeurs de l'écart type et du l'ordre du chaos.

Le module de la réponse déplacement a été calculé à partir de la méthode de chaos polynomial. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus avec la méthode de Monte Carlo en utilisant 10.000 simulations. Les résultats sont représentés sur les figures 2.5-2.7.

On peut remarquer que les valeurs des pulsations de résonance sont  $\Omega_1 = 1$  et  $\Omega_2 = 1.732$  rad/s.

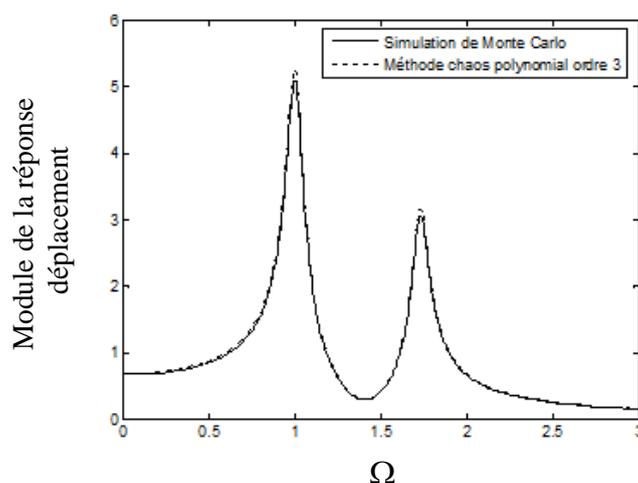


Figure 2. 5. Module de la réponse déplacement  $\sigma_c = 2\%$

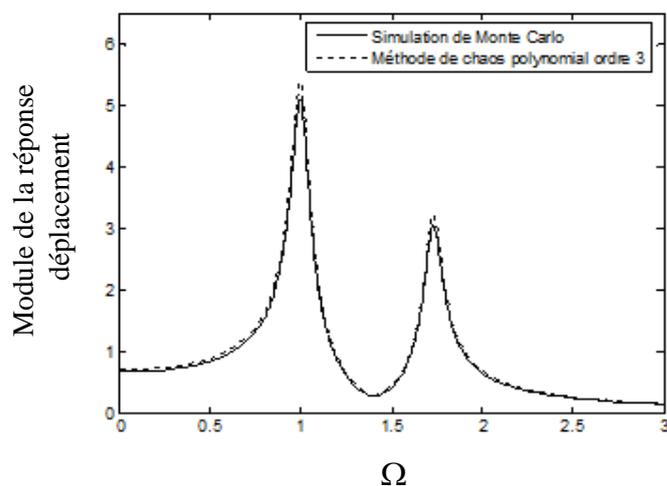
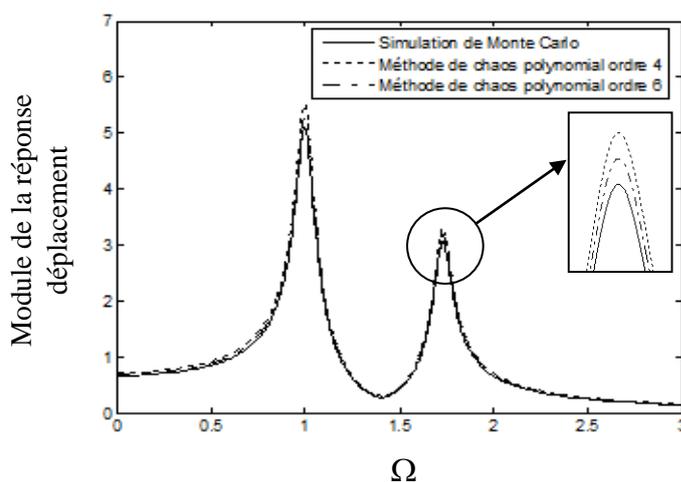


Figure 2. 6. Module de la réponse déplacement  $\sigma_c = 5\%$



**Figure 2. 7.** Module de la réponse déplacement  $\sigma_c = 10\%$

On peut noter que pour des valeurs faibles de l'écart type  $\sigma_c = 2\%$  la méthode proposée de chaos polynomial d'ordre 3 fournit de très bons résultats. Si l'écart type augmente, l'écart entre les résultats de la méthode proposée et le calcul de référence par la méthode de Monte Carlo augmente. Mais on remarque que si on augmente l'ordre de chaos polynomial cette erreur diminue (Figure 2.7).

### 2.3.5. Conclusion

Le chaos polynomial est un concept qui s'apprête bien à la modélisation des fonctions et processus aléatoires. C'est un outil qui permet la prise en compte des incertitudes et des non linéarités dans la modélisation et l'analyse de systèmes ce qui constitue un avantage considérable. Les schémas numériques d'implémentation des approches par chaos polynomial diffèrent par rapport à leur façon de faire appel au modèle sujet à la propagation des incertitudes.

## 3. Méthode des plans d'expériences

### 3.1. Principe

Les plans d'expériences définissent un outil statistique qui permet de mettre en œuvre ou de simplifier, en complexité et en coût, un protocole expérimental dont l'objectif est de déterminer les paramètres susceptibles d'influer sur la performance d'un produit industriel. Le but de l'utilisation d'une méthode à base d'un plan d'expérience est d'aider, voire, d'obtenir des conceptions vérifiant des critères d'optimalité de robustesse. Une telle méthode

caractérise un nombre d'expériences à réaliser pour déterminer l'influence de multiples paramètres sur une ou plusieurs sorties. Son applicabilité et son efficacité dépendent de la possibilité de maîtriser les valeurs à donner aux paramètres et de mesurer avec précision la ou les sorties correspondantes. Le nombre d'expériences dépend de la connaissance du système, du nombre de paramètres variables, des corrélations éventuelles entre ces paramètres ainsi que de la façon dont ces paramètres peuvent évoluer.

### 3.2. Méthode de Taguchi

Les plans d'expérience de Taguchi se distinguent par une réduction importante du nombre d'essais (Taguchi, 1986). La méthode de Taguchi procède par croisement de deux matrices de plans d'expériences : une matrice de contrôle représentant les facteurs de contrôle (paramètres de conception contrôlés) et une matrice de bruit représentant les facteurs de bruit (les paramètres incertains). Des essais sont exécutés pour chaque combinaison. Les grandeurs statistiques telles que la valeur moyenne et l'écart type sont mesurées. La méthode de Taguchi utilise le rapport signal-bruit et une fonction perte de qualité (loss function) comme critères de qualité permettant l'évaluation des résultats.

Plusieurs études se sont focalisées sur la méthode de Taguchi et sur tout dans le domaine de la conception robuste (Kackar 1985, Phadke et Madhav 1989, Singpurwalla 1990, Chatillon 2005). Rigaud (Rigaud et al. 2003) a utilisé la méthode de Taguchi dans l'analyse vibratoire. Il a étudié la robustesse du comportement d'une boîte à vitesse dont les raideurs de l'engrènement et des roulements sont incertains.

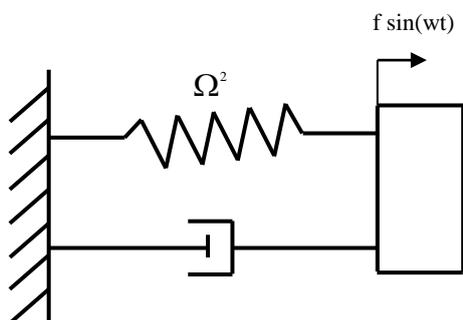
### 3.3. Exemple d'application

On considère comme exemple d'application la réponse forcée de l'oscillateur linéaire décrit figure 2.8 et régie par :

$$\ddot{x} + 2\xi\Omega\dot{x} + \Omega^2x = f \sin(\omega t) \quad (2.46)$$

Dans cet exemple, on suppose que le taux d'amortissement visqueux équivalent  $\xi$  et la pulsation propre non amortie  $\Omega$  sont des paramètres incertains décrits par des densités de probabilité gaussiennes tronquées statistiquement indépendantes. La troncature est introduite parce que les paramètres incertains possèdent des valeurs physiquement bornées. Notamment,

il convient de garantir des valeurs positives de  $\Omega$  et  $\xi$ . Pour des variables gaussiennes, la troncature se fait à plus ou moins trois fois l'écart type autour de la valeur moyenne.



**Figure 2. 8.** Oscillateur linéaire étudié

L'amortissement visqueux équivalent et la pulsation propre non amortie sont réécrits de la façon suivante:

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon \xi_1 \quad (2.47)$$

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 \quad (2.48)$$

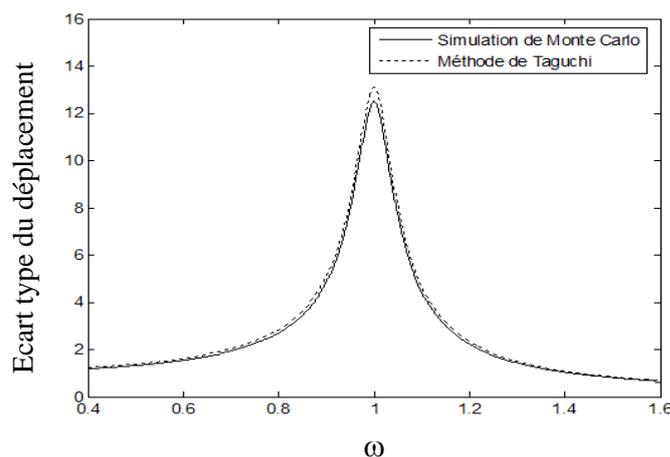
Le paramètre  $\varepsilon$  est un paramètre de perturbation que l'on suppose petit.

L'indice 0 désigne la valeur moyenne de la grandeur aléatoire alors que l'indice 1 représente la fluctuation aléatoire gaussienne centrée.

On s'intéresse à la variabilité du module de la réponse forcée en déplacement dans le cas où les paramètres sont incertains.

Le taux d'amortissement visqueux équivalent  $\xi$  et la pulsation propre non amortie  $\Omega$  ont respectivement 5 % et 1 rad/s comme valeurs moyennes et 5 % et 0.05 rad/s pour écarts types. L'écart type de la réponse a été calculé avec la méthode de Taguchi avec neuf points de discrétisation pour chaque variable aléatoire. Le résultat obtenu est comparé à celui obtenu par la méthode de Monte Carlo en utilisant 10.000 simulations.

Le résultat est présenté sur la figure 2.9. La réponse aléatoire fait apparaître un élargissement du pic de résonance déterministe et une diminution sensible du niveau de résonance. On constate un très bon comportement de la méthode Taguchi avec neuf points vis à vis de la simulation de Monte Carlo.



**Figure 2. 9.** Ecart type du module de la réponse déplacement

## 4. Approche possibiliste (ensembliste)

L'approche possibiliste a pour but de traiter des données imprécises, vagues ou définies de façon linguistique. Cette modélisation de l'incertitude est par conséquent régie par la subjectivité. Deux méthodes importantes sont classées dans cette approche. L'une est basée sur la méthode d'analyse par intervalles (Moore 1966), alors que l'autre utilise le formalisme de la logique flou (Zadeh 1965).

### 4.1. Méthode des intervalles

#### 4.1.1. Principe

Les incertitudes dans les systèmes mécaniques peuvent être traitées par une méthode probabiliste, comme dans les méthodes présentées précédemment.

Une autre méthode est possibiliste et consiste à utiliser une représentation par intervalles. Dans ce contexte, la méthode d'analyse d'intervalle a été développée, afin de prendre en compte à la fois des erreurs physiques, expérimentales et les erreurs dues aux machines de calcul. Les idées principales du calcul par intervalles sont données par Moore (Moore 1966).

Lorsque les systèmes mécaniques modélisés par éléments finis dépendent de paramètres incertains et bornés, ils peuvent être étudiés grâce à la méthode d'analyse d'intervalle. Le calcul par intervalles a des propriétés spéciales en comparaison au calcul classique (Moore 2009). De nombreuses applications sont parues, où on pourra trouver les bases du calcul par la méthode d'analyse d'intervalle, en particulier (Didrit 1997, Dessombz 2000, Shahriari

2007, Meslem et al. 2008). Neumaier (Neumaier 1990) a utilisé la méthode d'analyse par intervalles pour résoudre des systèmes d'équations. Rao et Berke (Rao et Berke 1997) ont appliqué la méthode d'analyse par intervalles à l'analyse de la réponse dynamique des structures comportant des paramètres incertains.

#### 4.1.2. Formulation théorique

On considère un système mécanique à  $n$  degrés de liberté. Les équations de mouvement décrivant la vibration forcée de ce système sont les suivantes:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (2.49)$$

Avec  $M$ ,  $C$  et  $K$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité.  $F(t)$  est le vecteur des forces extérieures.

Par analyse d'éléments finis, on sait que la matrice masse  $M$ , la matrice d'amortissement  $C$ , la matrice rigidité  $K$  et le vecteur des forces extérieures  $F(t)$  dépendent du vecteur paramètre du système mécanique  $a = (a_i)$  et peuvent être exprimés en fonction du vecteur paramètre  $a = (a_i)$  :

$$M = M(a), C = C(a), K = K(a), F(t) = F(a, t) \quad (2.50)$$

Dans l'analyse par intervalle, le paramètre incertain  $a = (a_i)$  est modélisé par un intervalle.

$$a^I = [\underline{a}, \bar{a}] \quad (2.51)$$

A partir de l'équation (2.51), la valeur nominale du vecteur paramètre  $a = (a_i)$  peut être définie comme :

$$a^c = (a_i^c) = m(a^I) = \frac{(\bar{a} + \underline{a})}{2} \quad (2.52)$$

Et l'écart d'amplitude du vecteur paramètre  $a = (a_i)$  :

$$\Delta a = (\Delta a_i) = \text{rad}(a^I) = \frac{(\bar{a} - \underline{a})}{2} \quad (2.53)$$

L'intervalle du vecteur paramètre  $a = (a_i)$  est décomposé en la somme de la valeur nominale et l'écart d'amplitude :

$$a^l = [\underline{a}, \bar{a}] = [a^c - \Delta a, a^c + \Delta a] \quad (2.54)$$

$$\text{Avec } \bar{a} = a^c + \Delta a, \underline{a} = a^c - \Delta a \quad (2.55)$$

En utilisant la série de Taylor de la réponse dynamique,  $x(a, t)$  est donné par :

$$x(a, t) = x(a^c, t) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x(a^c, t)}{\partial a_j} \Delta a_j \quad (2.56)$$

Dans lequel

$$\Delta a_j \in \Delta a_j^l = [-\Delta a_j, \Delta a_j] \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.57)$$

A partir de l'équation (2.56), on peut déterminer la borne supérieure de la réponse dynamique du système mécanique:

$$\bar{x}(a, t) = x(a^c, t) + \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial x(a^c, t)}{\partial a_j} \right| \Delta a_j \quad (2.58)$$

Et la borne inférieure de la réponse dynamique :

$$\underline{x}(a, t) = x(a^c, t) - \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial x(a^c, t)}{\partial a_j} \right| \Delta a_j \quad (2.59)$$

### 4.1.3. Exemple d'application

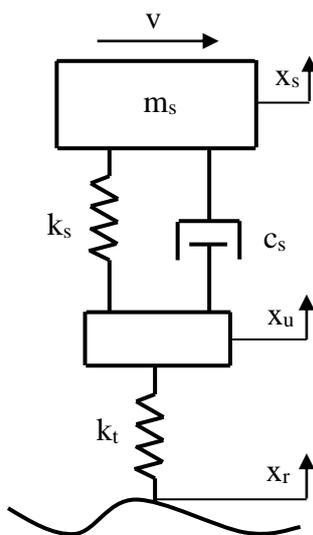
On considère comme exemple d'application le modèle du quart de véhicule à deux degrés de liberté décrit figure 2.10 et régie par :

$$\begin{cases} \dot{x}_s = v_s \\ \dot{x}_u = v_u \\ \dot{v}_s = -\frac{1}{m_s} (c_s (\dot{x}_s - \dot{x}_u) + k_s (x_s - x_u) + K_s (x_s - x_u)^3) \\ \dot{v}_u = -\frac{1}{m_u} (c_s (\dot{x}_s - \dot{x}_u) + k_s (x_s - x_u) + K_s (x_s - x_u)^3 - k_t (x_u - x_r) - K_t (x_u - x_r)^3) \end{cases} \quad (2.55)$$

Avec  $m_s$  et  $m_u$  représentent les masses,  $c_s$  représente l'amortissement,  $k_s$  et  $k_t$  représentent les rigidités linéaires,  $K_s$  et  $K_t$  représentent les rigidités cubiques. Les conditions initiales sont :

$$[x_s, x_u, v_s, v_u] \Big|_{t=0} = [0, 0, 0, 0] \tag{2.56}$$

Les paramètres  $c_s$ ,  $k_s$  et  $k_t$  sont incertains et sont modélisés par des intervalles comme indiqué dans le tableau 2.1 :



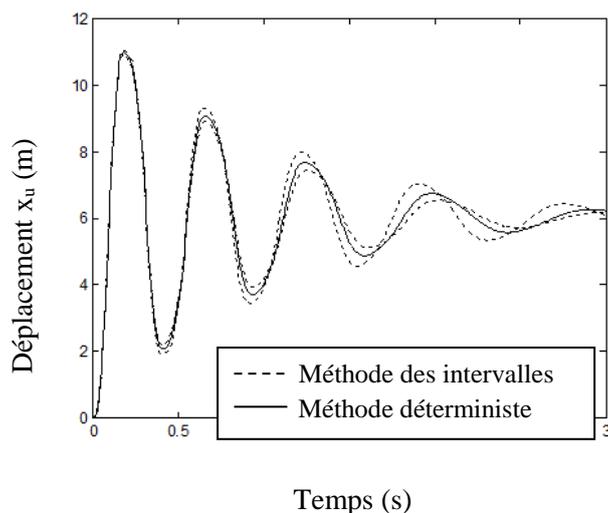
**Figure 2. 10.** Modèle à deux degrés de liberté du quart de véhicule

**Tableau 2. 1.** Paramètres pour le modèle quart de véhicule

Paramètres	$m_s$ (kg)	$c_s$ (Ns/m)	$k_s$ (Ns/m)	$k_t$ (Ns/m)	$K_s$ (N/m <sup>3</sup> )	$K_t$ (N/m <sup>3</sup> )
Valeur moyenne	375	1000	15000	200000	$1.5 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^7$
Intervalle	-	[900,1100]	[13500,16500]	$[18,22] \cdot 10^4$		

La valeur moyenne du déplacement a été calculée avec la méthode des intervalles. Le résultat obtenu est comparé à celui obtenu par la méthode déterministe.

Le résultat est présenté sur la figure 2.11. On constate que le résultat de la méthode des intervalles donne une bonne précision par rapport à la méthode déterministe.



**Figure 2. 11.** Valeur moyenne du déplacement  $x_u(t)$

#### 4.1.4. Conclusion

La méthode d'analyse d'intervalle offre l'avantage de pouvoir modéliser les incertitudes uniquement par leurs bornes physiques qui sont pour la plus part identifiables et mesurables. Aucune information sur l'évolution de l'incertitude dans son intervalle n'est nécessaire, un point qui peut poser des contraintes de lecture une fois la propagation des incertitudes est effectuée. En effet, souvent on désire quantifier l'incertitude sur la sortie d'un modèle du point de vue statistique ou probabiliste.

## 4.2. Méthode à base de la logique floue

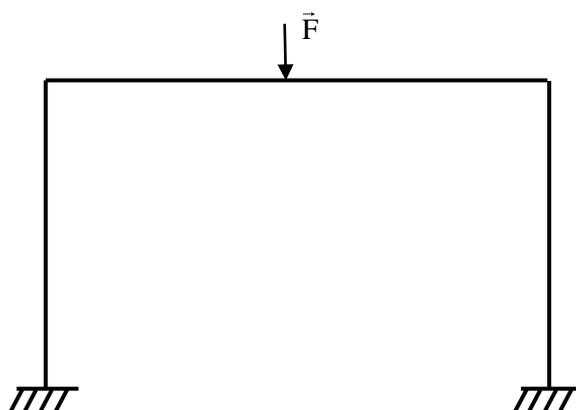
### 4.2.1. Principe

La logique floue a été proposée par (Zadeh 1965) pour résoudre le problème de surestimation des incertitudes modélisées par des intervalles sans aucune information probabiliste. Les applications de la méthode de la logique floue sont nombreuses. La théorie de l'approche floue a été appliquée par Rao et Sawyer (Rao et Sawyer 1995) en simulation numérique avec l'introduction de la méthode des éléments finis flous. Isukapalli et Georgopoulos (Isukapalli et Georgopoulos 2001) ont appliqué la méthode de la logique floue à l'analyse des systèmes où les incertitudes proviennent des imprécisions des données. Hanss (Hanss 2002) a proposé une méthode dite de transformation pour la simulation et l'analyse des systèmes avec des paramètres incertains. Tisson (Tisson et al. 2007) a appliqué la méthode de la logique floue à l'analyse de la robustesse d'une structure en utilisant la méthode des éléments finis. La

logique floue a été appliqué par Massa et al (Massa et al. 2008) pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une structure avec l'introduction de la méthode des éléments finis. Karine Ruffin-Mourier (Karine Ruffin-Mourier 2008) a utilisé la méthode de la logique floue pour déterminer la réponse dynamique des structures à paramètres imprécis.

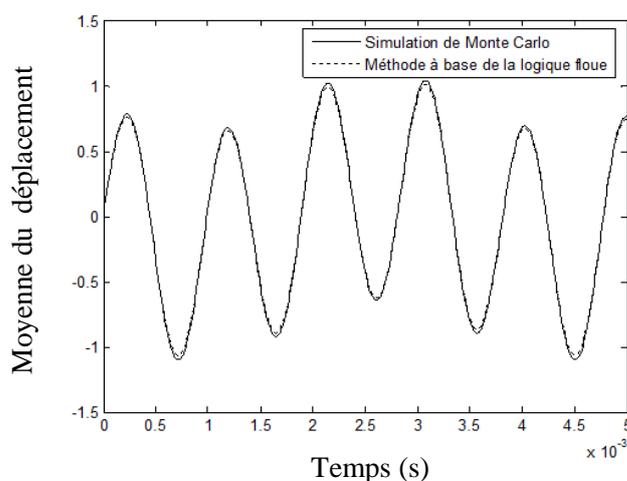
#### 4.2.2. Exemple d'application

On considère comme exemple d'application un portique bidimensionnel en vibration libre (Figure 2.12) dans le plan (OXY), constitué de trois poutres de même section carré  $a$ . On considère que le seul paramètre aléatoire est la cote  $a$ .



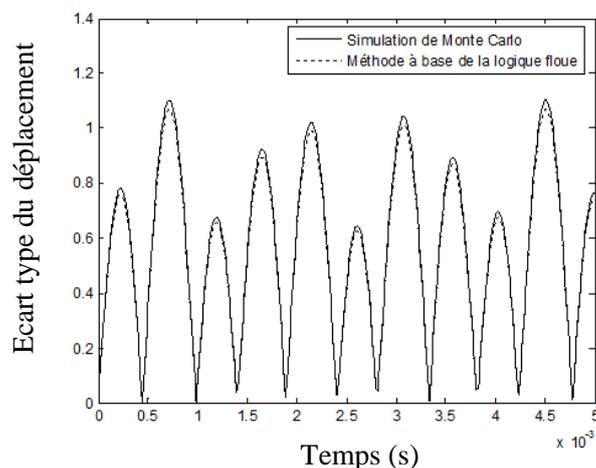
**Figure 2. 12.** Portique bidimensionnel

Notre objectif est déterminé la réponse stochastique à une excitation donné par la méthode à base de la logique floue. Dans ce cas on prend  $\vec{F} = 20 \sin(80t)$ .



**Figure 2. 13.** Valeur moyenne du déplacement

La valeur moyenne et l'écart type du déplacement ont été calculés à partir de la méthode à base de la logique floue. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus avec la méthode référentielle de Monte Carlo. Les résultats sont présentés sur les figure 2.13 et 2.14. On constate un très bon comportement de la méthode à base de la logique floue vis à vis de la simulation de Monte Carlo.



**Figure 2. 14.** Ecart type du déplacement

#### 4.2.3. Conclusion

Le formalisme flou permet de manipuler des informations vagues, imprécises ou décrites de manière linguistique. Cette incertitude est décrite par des fonctions de forme appelée fonctions d'appartenance. L'avantage principal de cette modélisation est de ne pas nécessiter des informations statistiques ou probabilistes. La détermination de la fonction d'appartenance reste par contre une difficulté considérable. En effet, elle dépend des données expérimentales dont dispose l'utilisateur ce qui rapproche sa détermination d'une démarche statistique. La représentation des nombres flous se fait alors dans plusieurs cas en fonction de la perception qu'a l'utilisateur de l'incertitude chose qui entache la représentation par un caractère assez subjectif.

## 5. Conclusion

Les approches de prise en compte des incertitudes présentées dans ce chapitre sont basées sur des formalismes différents dans la façon d'incorporer les incertitudes. L'approche probabiliste est basée sur une caractérisation des incertitudes par des modèles probabilistes. La simulation de Monte Carlo est couramment utilisée puisqu'elle garanti de très bon résultats. L'un des

principaux avantages de cette méthode est qu'elle peut s'appliquer à tous les systèmes linéaires ou non linéaires. Malgré cette garantie, la simulation de Monte Carlo pose de sérieux problèmes puisqu'elle nécessite beaucoup de tirages pour assurer une précision raisonnable. La méthode de perturbation s'avère, quant à elle, inappropriée à traiter des problèmes dont les paramètres incertains possèdent des dispersions importantes. De tous ces points de vue, la méthode basée sur une projection sur un chaos polynomial offre un intérêt indéniable puisque théoriquement, elle peut être associée, similairement à la méthode de Monte Carlo et d'analyser des comportements dynamiques des systèmes linéaires ou non linéaire. Pour leur part, les méthodes possibilistes, en particulier la méthode d'analyse par intervalles et la méthode floue, offrent l'avantage de ne pas nécessiter des connaissances sur l'évolution de l'incertitude dans ses intervalles de dispersion.

Tout au long de ce chapitre, quelques applications numériques dans le domaine de mécanique sont présentées. Ce qui nous permet de mettre en évidence les performances de chaque approche proposée. Nous allons nous concentrer dans les deux chapitres suivants sur les formulations théoriques de ces méthodes de prise en compte des incertitudes et les appliquer à l'étude du comportement dynamique d'une transmission par engrenage comportant des paramètres incertains.

## Chapitre 3

---

# Réponse dynamique d'une transmission par engrenage simple étage à paramètres incertains

---

### SOMMAIRE

<b>1. Introduction .....</b>	<b>68</b>
<b>2. Simulation de Monte Carlo (MC) .....</b>	<b>68</b>
<b>3. Méthodes de perturbation .....</b>	<b>69</b>
3.1. Expansion en série de Taylor d'ordre 2 .....	71
3.2. Méthode de Perturbation de Muscolino .....	73
3.3. Comportement dynamique d'une transmission d'engrenage simple étage à paramètres incertains .....	75
3.3.1. Modèle dynamique .....	75
3.3.2. Equations du mouvement .....	77
3.3.3. Simulation numérique .....	77
<b>4. Projection sur un chaos polynomial.....</b>	<b>86</b>
4.1. Formulation théorique .....	86
4.2. Comportement dynamique d'une transmission par engrenage simple étage en présence du frottement .....	89
4.2.1. Modélisation du frottement entre denture .....	89
4.2.2. Equations du mouvement .....	91
4.2.3. Simulation numérique .....	91
4.3. Analyse par le chaos polynomial.....	95
<b>5. Conclusion.....</b>	<b>98</b>

## 1. Introduction

La démarche classique suivie lors de l'étude d'un système d'engrenage se base sur l'hypothèse que le modèle est déterministe, c'est-à-dire que ses paramètres sont constants. Mais, si on procède à quelques expérimentations, on va se rendre compte des limites d'une modélisation déterministe. Car, il y a toujours des différences entre ce qu'on a calculé et ce qu'on a mesuré et ce, à cause des incertitudes sur les coefficients d'amortissement, la rigidité à la flexion, la rigidité à la traction-compression, la rigidité torsionnelle ou le coefficient du frottement entre denture, qui ont une influence sur le comportement dynamique d'une transmission d'engrenage. D'où l'intérêt d'utiliser des méthodes numériques pour prendre en compte ces incertitudes. Parmi ces méthodes, figure celle de Monte Carlo, qui est utilisée jusqu'à présent par la plupart des logiciels spécialisés. Toutefois, cette méthode a l'handicap d'être coûteuse en coup de calcul. En revanche, il existe d'autres méthodes efficaces et moins gourmandes en coût de calcul telles que la méthode de perturbation ou encore la méthode de Chaos polynomial. Dans le présent chapitre, on s'intéresse à présenter les formulations théoriques des méthodes de prise en compte des incertitudes et les appliquer à l'étude du comportement dynamique d'une transmission d'engrenage simple étage à denture droite comportant des paramètres incertains.

## 2. Simulation de Monte Carlo (MC)

L'estimation des moments (moyenne et variance) de la fonction de réponse en fréquence (respectivement les fréquences propres ou la réponse dynamique) d'un système mécanique peut être obtenue par la simulation de Monte Carlo (shinozuka 1972). Malgré son fort coût en temps de calcul, cette méthode classique est largement employée par les logiciels spécialisés (tel que Ansys) et sert de référence pour les calculs approchés. La fonction de réponse en fréquence  $X$  est vue comme une variable aléatoire image des variables aléatoires de base. Les simulations consistent à construire un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de la variable aléatoire  $X$  et à traiter cet échantillon par les techniques statistiques usuelles. Les  $n$  simulations sont effectuées d'une façon indépendante selon la loi de distribution des variables aléatoires de base.

La moyenne de  $X$  est donnée par :

$$E[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.1)$$

La variance de X est donnée par :

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [X_i - E(X)]^2 \quad (3.2)$$

### 3. Méthodes de perturbation

La méthode de perturbation est très largement employée dans le domaine des éléments finis stochastiques. Basée sur un développement en série de Taylor de la réponse de la structure par rapport aux variables aléatoires physiques de base, propriétés mécaniques, caractéristiques géométriques ou efforts appliqués. Les méthodes de perturbation calculent la moyenne et la variance de la réponse d'une structure mécanique à variables incertaines.

Cette méthode est utilisée dans de nombreux domaines : Liu (Liu et al. 1986) a utilisé la méthode de perturbation pour résoudre des problèmes linéaires et non linéaires, aussi bien en statique qu'en dynamique. Le calcul des deux premiers moments statistiques par un développement de Taylor de la réponse en fréquence est présenté dans (Singh et al. 1993). Contrairement à la réponse du système, les grandeurs modales (fréquences et modes propres par exemple) sont lentement variables en fonction des propriétés du système. Des approches par perturbation sur ces grandeurs ont donc été expérimentées (Kleiber et al. 1992). Muscolino (Muscolino et al. 1999) a utilisé une méthode astucieuse de perturbation au premier ordre, semble obtenir des résultats sensiblement aussi bons que par une technique au second ordre mais avec beaucoup moins de calculs pour un nombre élevé de paramètres (puisque du premier ordre).

Le développement en série de Taylor à l'ordre un, apparait comme raisonnablement suffisant pour de faibles des variables aléatoires de base. Il est efficace en terme de temps de calcul. Cette méthode a le sérieux inconvénient d'être limitée aux problèmes dont les paramètres sont faiblement variables et dont les non-linéarités par rapport aux paramètres sont trop fortes. Plus la non-linéarité de la fonction de réponse par rapport à ces variables et plus la variabilité de ces paramètres sont élevées, plus l'ordre du développement en série de Taylor doit être important.

Shinozuka (Shinozuka et al. 1988) a montré que les méthodes de perturbations d'ordre deux nécessitent plus de calcul qu'une étude de variabilité par la méthode de Monte Carlo. En effet, le calcul des dérivées d'ordre deux de la fonction de réponse par rapport aux variables

aléatoires de base est particulièrement lourd à réaliser. Par ailleurs les termes de second ordre n'influencent que les valeurs moyennes de la réponse et sont négligeables devant les termes d'ordre zéro et un (Teigen et al. 1991).

Le développement en série de Taylor de la fonction de réponse par rapport aux variables aléatoires de base nécessite le calcul des dérivées premières, à l'ordre un, ou secondes, à l'ordre deux de la fonction de réponse. La précision des résultats, moyenne et variance dans une analyse des deux premiers moments, dépend ainsi fortement du calcul de ces gradients.

Nous présentons dans la suite deux méthodes de perturbations développées pour résoudre des problèmes de dynamique linéaire. La première est basée sur un développement en série de Taylor d'ordre deux (Flores 1994). La deuxième est basée sur un développement astucieux au premier ordre (Muscolino et al. 1999) et semble obtenir des résultats sensiblement aussi bons que par une technique au second ordre mais avec beaucoup moins de calculs pour un nombre élevé de paramètres.

On considère un système mécanique à  $N$  degrés de liberté. La réponse dynamique  $\{u_T\}(t)$  de ce système subissant une excitation  $\{f_T\}(t)$  dépendante du temps  $t$  est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$[M_T] \{\ddot{u}_T\}(t) + [C_T] \{\dot{u}_T\}(t) + [K_T] \{u_T\}(t) = \{f_T\}(t) \quad (3.3)$$

Où  $[M_T]$ ,  $[C_T]$  et  $[K_T]$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité.

$[M_T]$ ,  $[C_T]$ ,  $[K_T]$  et  $\{f_T\}$  sont fonctions du vecteur des variables aléatoires  $\{\alpha\}^T = \langle \alpha_1 \dots \alpha_p \rangle$ .

On définit le vecteur des paramètres moyens  $\{\bar{\alpha}\}$  et la quantité  $\{d\alpha\}$ .

Pour simplifier l'écriture, la notation suivante est adoptée pour les dérivées d'une quantité  $A$  :

$$[A]^0 = [A]_{|\{\bar{\alpha}\}}, [A]^n = \frac{\partial [A]}{\partial \alpha_n} \Big|_{|\{\bar{\alpha}\}}, [A]^{nm} = \frac{\partial^2 [A]}{\partial \alpha_n \partial \alpha_m} \Big|_{|\{\bar{\alpha}\}} \quad (3.4)$$

Où  $(n, m) = 1, \dots, P$

$[A]^0$ ,  $[A]^n$  et  $[A]^{nm}$  sont des matrices déterministes. Et notons que la répétition des indices  $n$  et  $m$  deux fois implique une sommation.

### 3.1. Expansion en série de Taylor d'ordre 2

Le développement en série de Taylor d'ordre 2 des matrices  $[M_T]$ ,  $[C_T]$ ,  $[K_T]$  et  $\{f_T\}$  est donné par :

$$[M_T] = [M_T]^0 + [M_T]^n \{d\alpha_n\} + \frac{1}{2} [M_T]^{nm} \{d\alpha_n\} \{d\alpha_m\} \quad (3.5)$$

$$[C_T] = [C_T]^0 + [C_T]^n \{d\alpha_n\} + \frac{1}{2} [C_T]^{nm} \{d\alpha_n\} \{d\alpha_m\} \quad (3.6)$$

$$[K_T] = [K_T]^0 + [K_T]^n \{d\alpha_n\} + \frac{1}{2} [K_T]^{nm} \{d\alpha_n\} \{d\alpha_m\} \quad (3.7)$$

$$\{f_T\} = \{f_T\}^0 + \{f_T\}^n \{d\alpha_n\} + \frac{1}{2} \{f_T\}^{nm} \{d\alpha_n\} \{d\alpha_m\} \quad (3.8)$$

La méthode de Newmark présentée dans Annexe A sera utilisée pour résoudre l'équation tout en sachant que les conditions initiales sont prédéfinies.

Cette méthode consiste à résoudre l'équation suivante :

$$[K_{eq}] \{u_T\}(t + \Delta t) = \{F_{eq}\} \quad (3.9)$$

Avec :

$$[K_{eq}] = [K_T]^0 + a_0 [M_T]^0 + a_1 [C_T]^0 \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \{F_{eq}\} = & \{f_T\}^0(t + \Delta t) + [M_T]^0 (a_0 \{u_T\}^0(t) + a_2 \{\dot{u}_T\}^0(t) + a_3 \{\ddot{u}_T\}^0(t)) \\ & + [C_T]^0 (a_1 \{u_T\}^0(t) + a_4 \{\dot{u}_T\}^0(t) + a_5 \{\ddot{u}_T\}^0(t)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Le développement des vecteurs inconnus de déplacement, vitesse et accélération en série de Taylor à l'ordre deux :

$$\{u_T\} = \{u_T\}^0 + \{u_T\}^n \{d\alpha_n\} + \frac{1}{2} \{u_T\}^{nm} \{d\alpha_n\} \{d\alpha_m\} \quad (3.12)$$

$$\{\dot{u}_T\} = \{\dot{u}_T\}^0 + \{\dot{u}_T\}^n \{d\alpha_n\} + \frac{1}{2} \{\dot{u}_T\}^{nm} \{d\alpha_n\} \{d\alpha_m\} \quad (3.13)$$

$$\{\ddot{u}_T\} = \{\ddot{u}_T\}^0 + \{\ddot{u}_T\}^n \{d\alpha_n\} + \frac{1}{2} \{\ddot{u}_T\}^{nm} \{d\alpha_n\} \{d\alpha_m\} \quad (3.14)$$

Par la suite, l'équation (3.9) est développée en série de Taylor d'ordre 0, 1 puis 2. Les équations suivantes sont alors obtenues :

**Equation d'ordre zéro :**

$$[\mathbf{K}_{eq}]^0 \{\mathbf{u}_T\}^0(t + \Delta t) = \{\mathbf{F}_{eq}\}^0 \quad (3.15)$$

Avec :

$$[\mathbf{K}_{eq}]^0 = [\mathbf{K}_T]^0 + \mathbf{a}_0 [\mathbf{M}_T]^0 + \mathbf{a}_1 [\mathbf{C}_T]^0 \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}_{eq}\}^0 = & \{\mathbf{f}_T\}^0(t + \Delta t) + [\mathbf{M}_T]^0 \left( \mathbf{a}_0 \{\mathbf{u}_T\}^0(t) + \mathbf{a}_2 \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^0(t) + \mathbf{a}_3 \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^0(t) \right) \\ & + [\mathbf{C}_T]^0 \left( \mathbf{a}_1 \{\mathbf{u}_T\}^0(t) + \mathbf{a}_4 \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^0(t) + \mathbf{a}_5 \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^0(t) \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

**Equation d'ordre un :**

$$[\mathbf{K}_{eq}]^1 \{\mathbf{u}_T\}^1(t + \Delta t) = \{\mathbf{F}_{eq}\}^1 \quad (3.18)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}_{eq}\}^1 = & \{\mathbf{f}_T\}^1(t + \Delta t) + [\mathbf{M}_T]^1 \left( \mathbf{a}_0 \{\mathbf{u}_T\}^1(t) + \mathbf{a}_2 \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^1(t) + \mathbf{a}_3 \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^1(t) \right) \\ & + [\mathbf{C}_T]^1 \left( \mathbf{a}_1 \{\mathbf{u}_T\}^1(t) + \mathbf{a}_4 \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^1(t) + \mathbf{a}_5 \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^1(t) \right) \\ & - [\mathbf{M}_T]^n \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^0(t + \Delta t) - [\mathbf{C}_T]^n \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^0(t + \Delta t) - [\mathbf{K}_T]^n \{\mathbf{u}_T\}^0(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

**Equation d'ordre deux :**

$$[\mathbf{K}_{eq}]^2 \{\mathbf{u}_T\}^{2m}(t + \Delta t) = \{\mathbf{F}_{eq}\}^{2m} \quad (3.20)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}_{eq}\}^{2m} = & \{\mathbf{f}_T\}^{2m}(t + \Delta t) + [\mathbf{M}_T]^0 \left( \mathbf{a}_0 \{\mathbf{u}_T\}^{2m}(t) + \mathbf{a}_2 \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^{2m}(t) + \mathbf{a}_3 \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^{2m}(t) \right) \\ & + 2[\mathbf{M}_T]^1 \left( \mathbf{a}_0 \{\mathbf{u}_T\}^{2m}(t) + \mathbf{a}_2 \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^{2m}(t) + \mathbf{a}_3 \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^{2m}(t) \right) \\ & + [\mathbf{C}_T]^0 \left( \mathbf{a}_1 \{\mathbf{u}_T\}^{2m}(t) + \mathbf{a}_4 \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^{2m}(t) + \mathbf{a}_5 \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^{2m}(t) \right) \\ & + 2[\mathbf{C}_T]^1 \left( \mathbf{a}_1 \{\mathbf{u}_T\}^{2m}(t) + \mathbf{a}_4 \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^{2m}(t) + \mathbf{a}_5 \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^{2m}(t) \right) \\ & - [\mathbf{M}_T]^{2m} \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^0(t + \Delta t) - [\mathbf{C}_T]^{2m} \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^0(t + \Delta t) - [\mathbf{K}_T]^{2m} \{\mathbf{u}_T\}^0(t + \Delta t) \\ & - 2[\mathbf{M}_T]^1 \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^1(t + \Delta t) - 2[\mathbf{C}_T]^1 \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^1(t + \Delta t) - 2[\mathbf{K}_T]^1 \{\mathbf{u}_T\}^1(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

La solution du problème s'obtient par la résolution successive des équations suivantes :

$$\{\mathbf{u}_T\}^0(t + \Delta t) = \left( [\mathbf{K}_{eq}]^0 \right)^{-1} \{\mathbf{F}_{eq}\}^0 \quad (3.22)$$

$$\{\mathbf{u}_T\}^n(t + \Delta t) = \left( [\mathbf{K}_{eq}]^n \right)^{-1} \{\mathbf{F}_{eq}\}^n \quad (3.23)$$

$$\{\mathbf{u}_T\}^{nm}(t + \Delta t) = \left( [\mathbf{K}_{eq}]^0 \right)^{-1} \{\mathbf{F}_{eq}\}^{nm} \quad (3.24)$$

Finalemt la valeur moyenne de la réponse dynamique est donnée par :

$$E[\{\mathbf{u}_T\}(t + \Delta t)] = \{\mathbf{u}_T\}^0(t + \Delta t) + \frac{1}{2} \{\mathbf{u}_T\}^{nm}(t + \Delta t) \text{cov}(\alpha_n, \alpha_m) \quad (3.25)$$

Et la variance de la réponse dynamique est donnée par :

$$\text{Var}[\{\mathbf{u}_T\}(t + \Delta t)] = \{\mathbf{u}_T\}^n(t + \Delta t) \{\mathbf{u}_T\}^m(t + \Delta t) \text{cov}(\alpha_n, \alpha_m) \quad (3.26)$$

### 3.2. Méthode de Perturbation de Muscolino

Cette méthode est basée sur le développement en série de Taylor d'ordre un, donc elle nécessite moins de temps de calcul que celle basée sur le développement en série de Taylor d'ordre deux. Mais, Elle ne peut être utilisée que pour l'étude des systèmes mécaniques stochastiques dont les paramètres aléatoires sont indépendants.

Le développement en série de Taylor d'ordre 1 des matrices  $[\mathbf{M}_T]$ ,  $[\mathbf{C}_T]$ ,  $[\mathbf{K}_T]$  et  $\{\mathbf{f}_T\}$  est donné par :

$$[\mathbf{M}_T] = [\mathbf{M}_T]^0 + [\mathbf{M}_T]^n \{d\alpha_n\} \quad (3.27)$$

$$[\mathbf{C}_T] = [\mathbf{C}_T]^0 + [\mathbf{C}_T]^n \{d\alpha_n\} \quad (3.28)$$

$$[\mathbf{K}_T] = [\mathbf{K}_T]^0 + [\mathbf{K}_T]^n \{d\alpha_n\} \quad (3.29)$$

$$\{\mathbf{f}_T\} = \{\mathbf{f}_T\}^0 + \{\mathbf{f}_T\}^n \{d\alpha_n\} \quad (3.30)$$

Le développement des vecteurs inconnus de déplacements, vitesse et accélération en série de Taylor d'ordre 1 est donné par :

$$\{\mathbf{u}_T\} = \{\mathbf{u}_T\}^0 + \{\mathbf{u}_T\}^n \{d\alpha_n\} \quad (3.31)$$

$$\{\dot{\mathbf{u}}_T\} = \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^0 + \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^n \{d\alpha_n\} \quad (3.32)$$

$$\{\ddot{\mathbf{u}}_T\} = \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^0 + \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^n \{d\alpha_n\} \quad (3.33)$$

Par la suite, l'équation (3.9) est développée en série de Taylor d'ordre 0 puis 1. Les équations suivantes sont alors obtenues :

**Equation d'ordre zéro :**

$$[\mathbf{K}_{eq}]^0 \{\mathbf{u}_T\}^0 (t + \Delta t) = \{\mathbf{F}_{eq}\}^0 \quad (3.34)$$

Avec :

$$[\mathbf{K}_{eq}]^0 = [\mathbf{K}_T]^0 + a_0 [\mathbf{M}_T]^0 + a_1 [\mathbf{C}_T]^0 \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}_{eq}\}^0 = & \{\mathbf{f}_T\}^0 (t + \Delta t) + [\mathbf{M}_T]^0 \left( a_0 \{\mathbf{u}_T\}^0 (t) + a_2 \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^0 (t) + a_3 \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^0 (t) \right) \\ & + [\mathbf{C}_T]^0 \left( a_1 \{\mathbf{u}_T\}^0 (t) + a_4 \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^0 (t) + a_5 \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^0 (t) \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

**Equation d'ordre un :**

$$[\mathbf{K}_{eq}]^0 \{\mathbf{u}_T\}^n (t + \Delta t) = \{\mathbf{F}_{eq}\}^n \quad (3.37)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}_{eq}\}^n = & \{\mathbf{f}_T\}^n (t + \Delta t) + [\mathbf{M}_T]^0 \left( a_0 \{\mathbf{u}_T\}^n (t) + a_2 \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^n (t) + a_3 \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^n (t) \right) \\ & + [\mathbf{C}_T]^0 \left( a_1 \{\mathbf{u}_T\}^n (t) + a_4 \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^n (t) + a_5 \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^n (t) \right) \\ & - [\mathbf{M}_T]^n \{\ddot{\mathbf{u}}_T\}^0 (t + \Delta t) - [\mathbf{C}_T]^n \{\dot{\mathbf{u}}_T\}^0 (t + \Delta t) - [\mathbf{K}_T]^n \{\mathbf{u}_T\}^0 (t + \Delta t) \end{aligned} \quad (3.38)$$

La solution du problème s'obtient par la résolution successive des équations suivantes :

$$\{\mathbf{u}_T\}^0 (t + \Delta t) = \left( [\mathbf{K}_{eq}]^0 \right)^{-1} \{\mathbf{F}_{eq}\}^0 \quad (3.39)$$

$$\{\mathbf{u}_T\}^n (t + \Delta t) = \left( [\mathbf{K}_{eq}]^0 \right)^{-1} \{\mathbf{F}_{eq}\}^n \quad (3.40)$$

Finalement la valeur moyenne de la réponse dynamique est donnée par :

$$E[\{\mathbf{u}_T\}(t + \Delta t)] = \{\mathbf{u}_T\}^0 (t + \Delta t) \quad (3.41)$$

Et la variance de la réponse dynamique est donnée par :

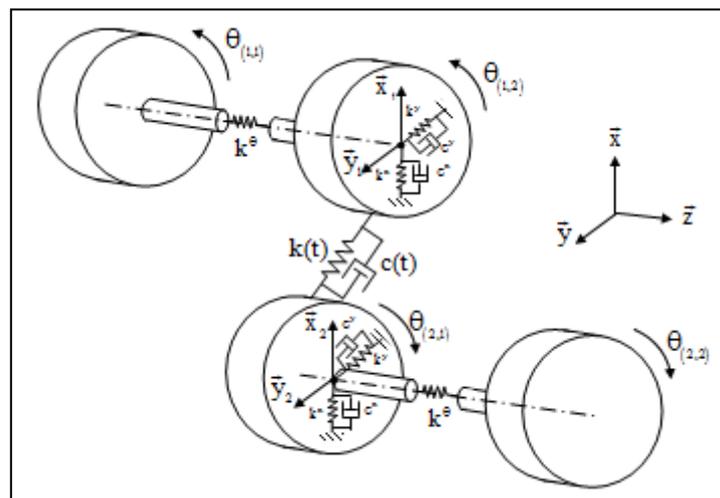
$$\text{Var}[\{\mathbf{u}_T\}(t + \Delta t)] = \left( \{\mathbf{u}_T\}^n (t + \Delta t) \right)^2 \text{Var}(\alpha_n) \quad (3.42)$$

### 3.3. Comportement dynamique d'une transmission d'engrenage simple étage à paramètres incertains

#### 3.3.1. Modèle dynamique

La figure 3.1 représente un modèle dynamique global plan d'une transmission par engrenage simple étage à denture droites. Ce modèle fait intervenir les paliers de maintien et les arbres flexibles.

L'interface d'engrènement est modélisée par une raideur fluctuante au cours du temps  $k(t)$  en parallèle avec un amortisseur  $c(t)$ .



**Figure 3. 1.** Modèle dynamique plan global d'une transmission simple étage

La roue (11) caractérisant le coté moteur est liée à la roue dentée (12) par l'intermédiaire d'un arbre (1) de faible masse et de rigidité torsionnelle  $k^\theta$ .

L'ensemble {roue (11), arbre (1), roue (12)} constitue le premier bloc ( $j=1$ ).

La roue (21) est liée d'une part à la roue (12) par l'intermédiaire de dents flexibles de raideur d'engrènement  $k(t)$  et d'autre part à la roue (22) par l'intermédiaire d'un arbre (2) de rigidité torsionnelle  $k^\theta$ .

L'ensemble {roue (21), arbre (2), roue (22)} constitue le deuxième bloc ( $j=2$ ).

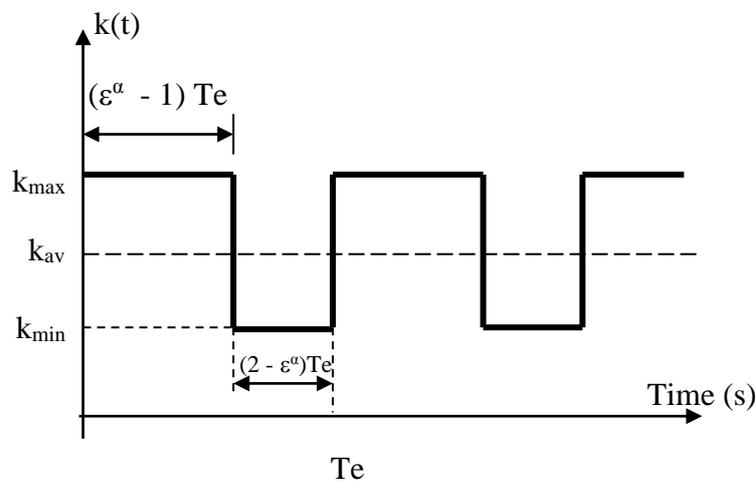
Chaque bloc  $j$  est monté sur un palier flexible de rigidités à la flexion  $k^x$  et de rigidités à la traction-compression  $k^y$ .

Les roues (11) et (22) caractérisent respectivement le coté moteur et le coté récepteur et interviennent respectivement par leurs inerties motrice  $I_m$  et réceptrice  $I_r$ . Les autres roues sont à dentures droites. Dans ce travail, on traite un modèle plan. Ce plan est parallèle aux plans des roues.

On note par  $\theta_{(i,j)}$  les déplacements angulaires des roues autour de leurs axes de rotation. Les déplacements linéaires des paliers sont notés par  $x_j$  et  $y_j$  repérés dans le plan d'engrènement perpendiculairement aux axes de rotation des roues. Dans la suite du travail,  $j=1:2$  désigne le numéro du bloc et  $i=1:2$  désigne les deux roues de chaque bloc.

La raideur d'engrènement peut être décomposée en deux composantes. La première composante est constante au cours du temps appelée encore composante moyenne notée par  $k_{av}$  qui est généralement de l'ordre de  $10^8$  N/m suivant le type des roues utilisées. A cette composante moyenne s'ajoute une deuxième composante variable au cours du temps donnée par  $k_v(t)$ .

Cette variation est due à ce qu'on a une ou deux paires de dents en contact à l'instant correspondant. La fonction  $k(t)$  est représentée sur la figure 3.2.



**Figure 3. 2.**Modélisation de la variation de la raideur d'engrènement

### 3.3.2. Equations du mouvement

Les équations différentielles décrivant le comportement dynamique du système (figure 3.1) sont obtenues en utilisant le formalisme de Lagrange. Ces équations sont représentées comme suit :

$$m \ddot{x}_1 - c^x \dot{x}_1 + \sin(\alpha) c(t) \langle L^\delta \rangle \{ \dot{Q} \} + k^x x_1 + \sin(\alpha) k(t) \langle L^\delta \rangle \{ Q \} = 0 \quad (3.43)$$

$$m \ddot{y}_1 - c^y \dot{y}_1 + \cos(\alpha) c(t) \langle L^\delta \rangle \{ \dot{Q} \} + k^y y_1 + \cos(\alpha) k(t) \langle L^\delta \rangle \{ Q \} = 0 \quad (3.44)$$

$$m \ddot{x}_2 + c^x \dot{x}_2 - \sin(\alpha) c(t) \langle L^\delta \rangle \{ \dot{Q} \} + k^x x_2 - \sin(\alpha) k(t) \langle L^\delta \rangle \{ Q \} = 0 \quad (3.45)$$

$$m \ddot{y}_2 + c^y \dot{y}_2 - \cos(\alpha) c(t) \langle L^\delta \rangle \{ \dot{Q} \} + k^y y_2 - \cos(\alpha) k(t) \langle L^\delta \rangle \{ Q \} = 0 \quad (3.46)$$

$$I_{(1,1)} \ddot{\theta}_{(1,1)} + k^0 (\theta_{(1,1)} - \theta_{(1,2)}) = Cm \quad (3.47)$$

$$I_{(2,1)} \ddot{\theta}_{(2,1)} + r_{(1,2)}^b c(t) \langle L^\delta \rangle \{ \dot{Q} \} - k^0 (\theta_{(2,1)} - \theta_{(2,2)}) - r_{(2,1)}^b k(t) \langle L^\delta \rangle \{ Q \} = 0 \quad (3.48)$$

$$I_{(2,1)} \ddot{\theta}_{(2,1)} - r_{(2,1)}^b c(t) \langle L^\delta \rangle \{ \dot{Q} \} - k^0 (\theta_{(2,1)} - \theta_{(2,2)}) - r_{(2,1)}^b k(t) \langle L^\delta \rangle \{ Q \} = 0 \quad (3.49)$$

$$I_{(2,2)} \ddot{\theta}_{(2,2)} + k^0 (\theta_{(2,1)} - \theta_{(2,2)}) = 0 \quad (3.50)$$

Où  $\langle L^\delta \rangle$  est défini par:

$$\langle L^\delta \rangle = [\sin(\alpha) \quad -\sin(\alpha) \quad \cos(\alpha) \quad -\cos(\alpha) \quad 0 \quad r_{(1,2)}^b \quad -r_{(2,1)}^b \quad 0] \quad (3.51)$$

$r_{(1,2)}^b, r_{(2,1)}^b$  représentent les rayons de base.  $\alpha$  est l'angle de pression.

$\{Q(t)\}$  étant le vecteur des coordonnées généralisés du modèle, il est sous la forme :

$$\{Q(t)\} = [x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \theta_{(1,1)} \quad \theta_{(1,2)} \quad \theta_{(2,1)} \quad \theta_{(2,2)}]^T \quad (3.52)$$

### 3.3.3. Simulation numérique

Les données numériques du modèle sont résumées dans le tableau 3.1.

**Tableau 3. 1.** Données numériques du modèle étudié

Matériau : 42CrMo4	$\rho=7860 \text{ Kg/m}^3$
Couple moteur	$C_m=200 \text{ N.m}$
Rigidités des paliers	$k^x=10^7 \text{ N/m} \quad k^y=10^7 \text{ N/m}$
Rigidités des arbres	$k^\theta=10^5 \text{ Nm/rad}$
Largeur de denture	$L=20.10^{-3}$
Nombre de dentures	$Z(1,2)=40 ; Z(2,1)=50$
Module de denture	$m=4$
Raideur moyenne	$k^{\text{moy}}=1.4.10^7 \text{ N/m}$
Rapport de conduite	$\varepsilon^\alpha=1.7341$
Angle de pression	$\alpha=20^\circ$

### 3.3.3.1. Effet de paramètres incertains en fonction du temps

La masse  $m$ , les coefficients d'amortissement  $c^x$  et  $c^y$ , la rigidité à la flexion  $k^x$ , la rigidité à la traction-compression  $k^y$  et la rigidité torsionnelle sont supposés des variables aléatoires indépendantes et définis comme suit:

$$m = m_0 + \sigma_m \xi, c^x = c^x_0 + \sigma_{c^x} \xi, c^y = c^y_0 + \sigma_{c^y} \xi, k^x = k^x_0 + \sigma_{k^x} \xi, k^y = k^y_0 + \sigma_{k^y} \xi, k^\theta = k^\theta_0 + \sigma_{k^\theta} \xi$$

$\xi$  est une gaussienne normale centrée réduite,  $m_0 = 3 \text{ kg}$ ,  $c^x_0 = 10^2 \text{ Ns/m}$ ,  $c^y_0 = 10^2 \text{ Ns/m}$ ,

$k^x_0 = 10^8 \text{ N/m}$ ,  $k^y_0 = 10^8 \text{ N/m}$  et  $k^\theta_0 = 10^6 \text{ N.m/rad}$  sont les valeurs moyennes,  $\sigma_m$ ,  $\sigma_{c^x}$ ,  $\sigma_{c^y}$ ,

$\sigma_{k^x}$ ,  $\sigma_{k^y}$  et  $\sigma_{k^\theta}$  sont les écarts-types associés.

Pour voir l'influence de l'écart type de chaque paramètre incertain sur la réponse dynamique du système. On fait des calculs pour différentes valeurs de l'écart type de chaque paramètre incertain.

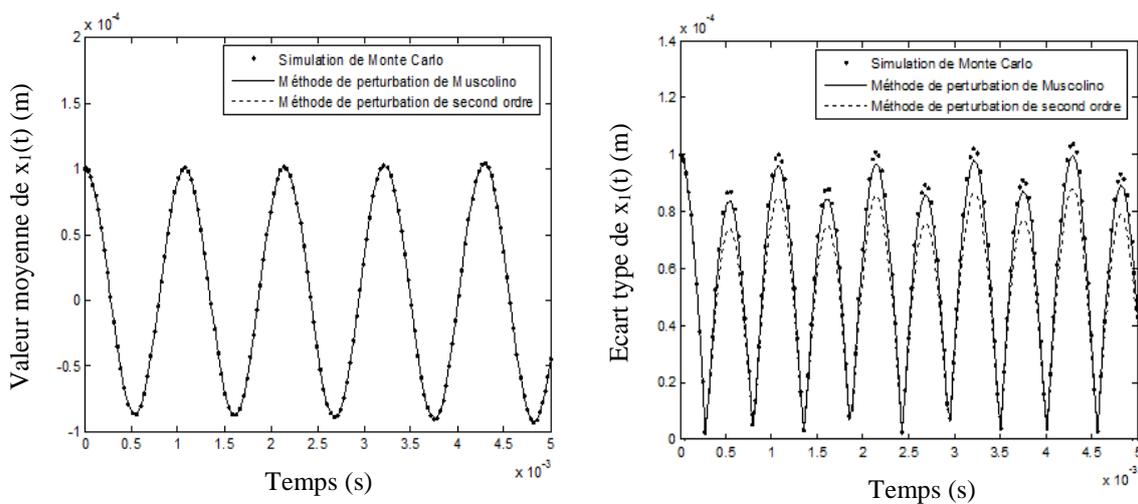
Les valeurs moyennes et les écarts type des composantes dynamiques des déplacements linéaires du premier et du deuxième palier suivant les deux directions  $x$  et  $y$  ont été calculés avec la méthode de perturbation de second ordre et la méthode proposée de Muscolino. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux obtenus avec la technique référentielle de Monte Carlo en utilisant 100.000 simulations.

Les résultats sont représentés sur les figures 3.3-3.10, pour différentes valeurs d'écart-type considérant un seul paramètre incertain à chaque fois, afin de mieux comprendre l'influence de chaque paramètre du système.

Les résultats de la réponse des valeurs moyennes sont très satisfaisants. Les valeurs moyennes instantanées des déplacements sont confondues avec les solutions référentielles de Monte Carlo. En outre, la réponse des valeurs moyennes est sensible à l'introduction de la stochasticité des différents paramètres du système, étant à peu près la même dans les différents cas. On remarque également que les valeurs moyennes des composantes dynamiques des déplacements linéaires des deux paliers suivant les deux directions x et y fluctuent autour d'une valeur zéro.

Lorsque les résultats des écarts type des déplacements sont considérés, une bonne et une grande précision de la méthode proposée de Muscolino par rapport à la méthode de perturbation de second ordre est révélée dans tous les cas étudiés. La supériorité est évidente étant donné que la méthode proposée de Muscolino, qui est une approximation de premier ordre, nécessite moins d'effort de calcul.

La limite de l'écart-type des paramètres incertains est différente pour chaque paramètre considéré. De haute incertitude du coefficient d'amortissement peut être effectué par la méthode proposée telle que représenté sur les figures 3.5 et 3.6 avec un écart-type  $\sigma_{c_x} = \sigma_{c_y} = 15\%$ . L'applicabilité de la méthode proposée de Muscolino pour le cas la rigidité torsionnelle est une variable aléatoire pour  $\sigma_{k_\theta} = 5\%$  est très satisfaisante et une bonne précision est observée comme représentée sur les figures 3.9 et 3.10.



**Figure 3. 3.** Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x_1(t)$  pour  $\sigma_m = 2\%$

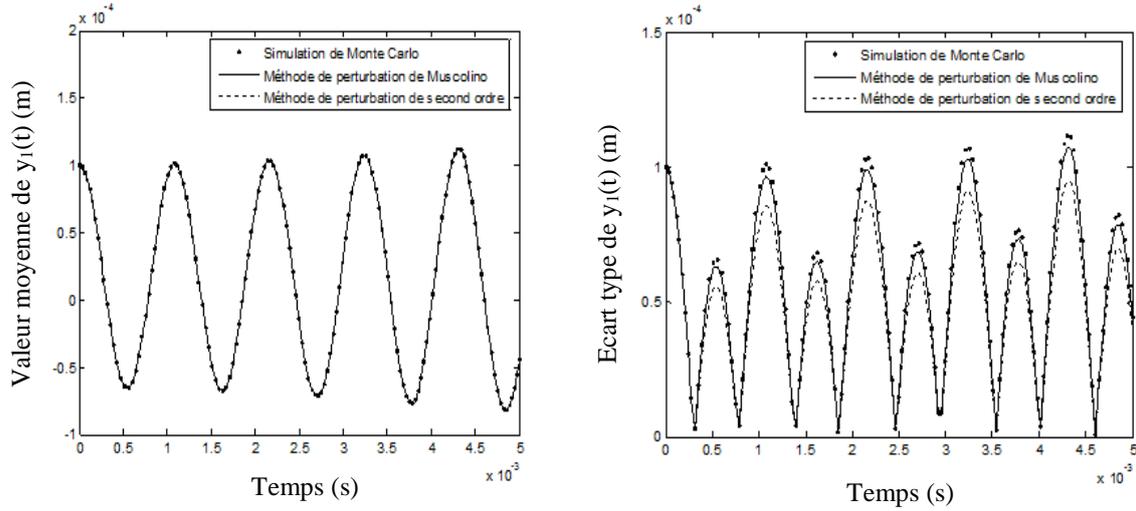


Figure 3. 4. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $y_1(t)$  pour  $\sigma_m = 2\%$

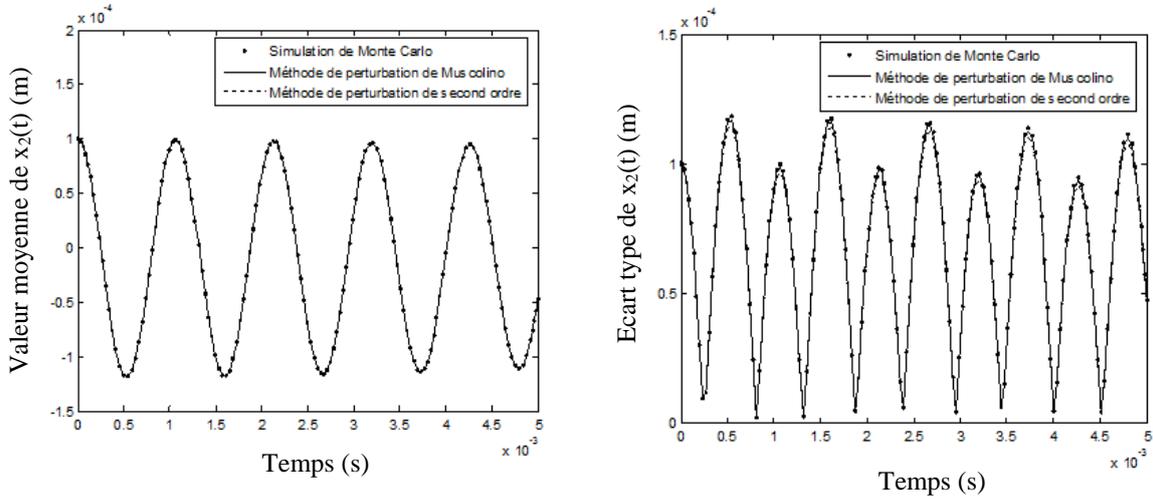


Figure 3. 5. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x_2(t)$  pour  $\sigma_c = 15\%$

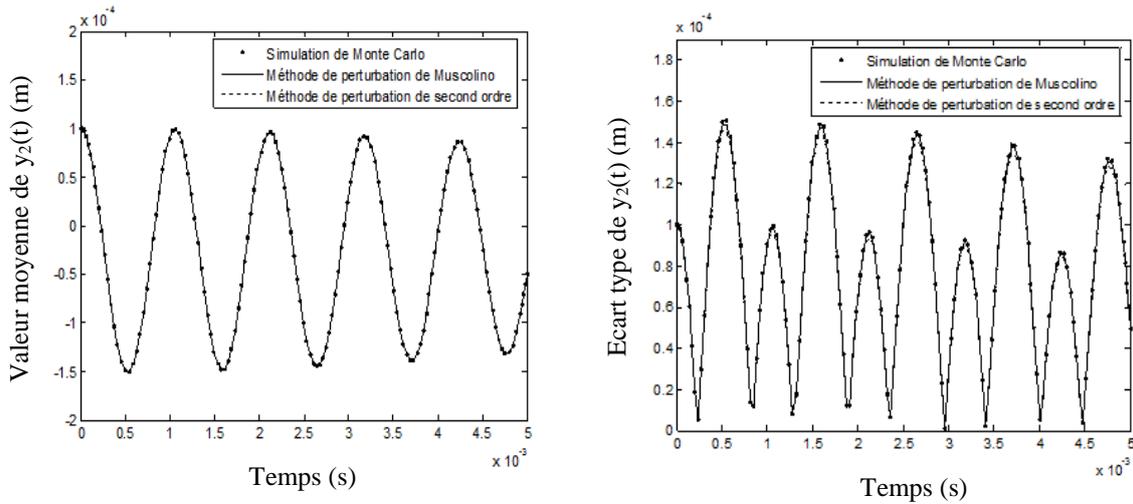


Figure 3. 6. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $y_2(t)$  pour  $\sigma_y = 15\%$

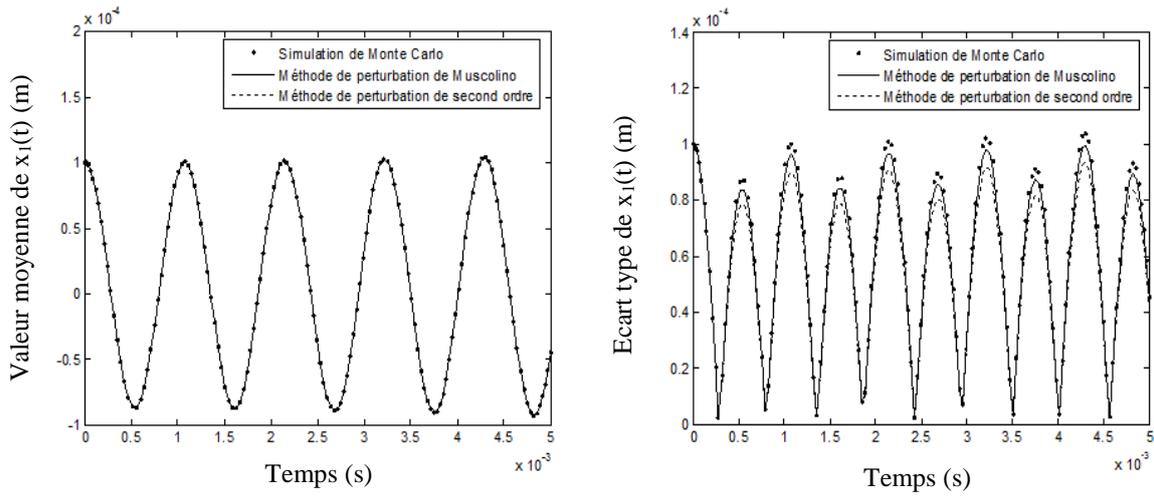


Figure 3. 7. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x_1(t)$  pour  $\sigma_{k_x} = 10\%$

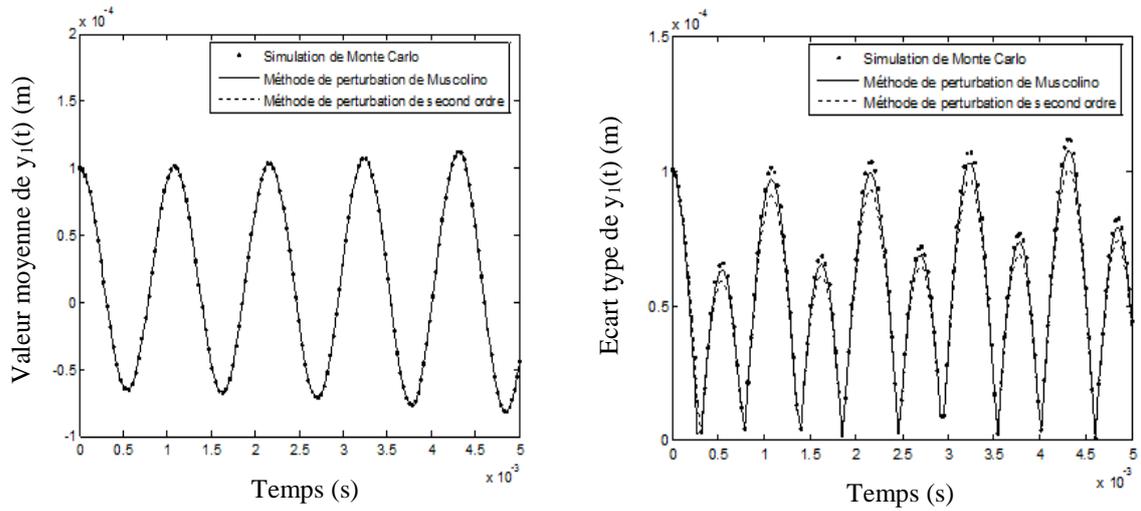


Figure 3. 8. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $y_1(t)$  pour  $\sigma_{k_y} = 10\%$

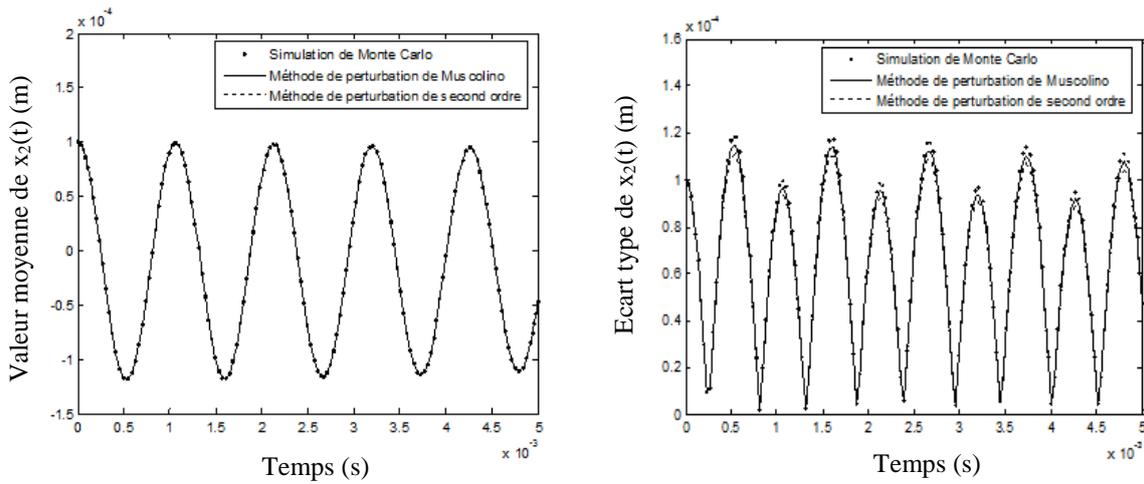
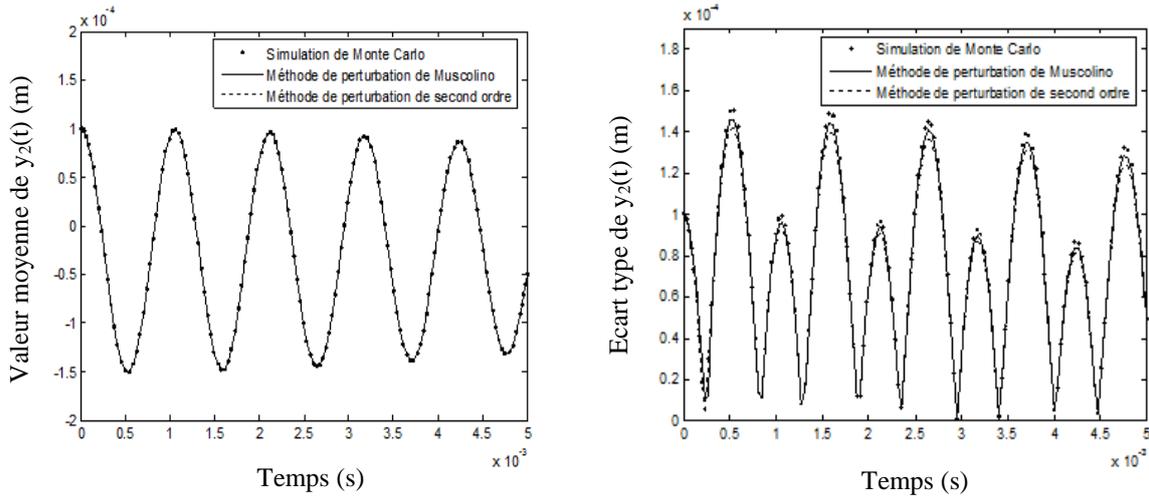


Figure 3. 9. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x_2(t)$  pour  $\sigma_{k_\theta} = 5\%$



**Figure 3. 10.** Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $y_2(t)$  pour  $\sigma_{k_0} = 5\%$

Moyenne incertitude dans la rigidité à la flexion et la rigidité à la traction-compression peut être effectuée par la méthode proposée comme représentée sur les figures 3.7 et 3.8 avec un écart type  $\sigma_{k^x} = \sigma_{k^y} = 10\%$ . L'applicabilité de la méthode proposée de Muscolino est également satisfaisante. Les erreurs sont toujours acceptables. L'augmentation de l'incertitude de la rigidité à la flexion et la rigidité à la traction-compression, la précision est rapidement perdue. D'autre part, la méthode proposée de Muscolino n'est pas bien adaptée pour le cas la masse est une variable aléatoire. Une valeur de 2% de l'écart type de la masse (figures 3.3 et 3.4) peut être considérée comme un seuil à ne pas dépasser.

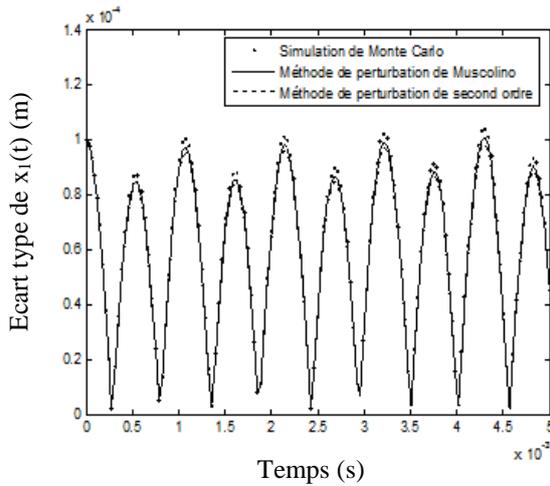
**3.3.3.2. Effet de multiples paramètres incertains**

Pour voir l'influence de multiples paramètres incertains sur la réponse dynamique d'une transmission d'engrenage simple étage. On suppose que la masse  $m$ , les coefficients d'amortissement  $c^x$  et  $c^y$ , la rigidité à la flexion  $k^x$ , la rigidité à la traction-compression  $k^y$  et la rigidité torsionnelle sont tous des paramètres incertains considérés simultanément.

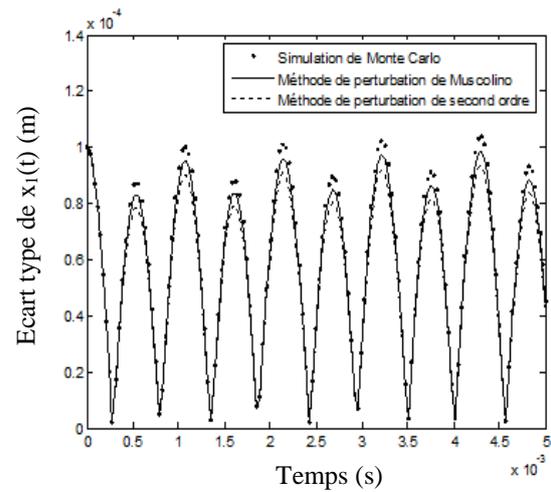
Pour  $\sigma = \sigma_m = \sigma_{c^x} = \sigma_{c^y} = \sigma_{k^x} = \sigma_{k^y} = \sigma_{k^0}$ , les écarts type des composantes dynamiques des déplacements linéaires du premier palier suivant la direction  $x$  et du deuxième palier suivant la direction  $y$  sont présentés sur les figures 3.11 et 3.13 pour  $\sigma = 5\%$  et sur les figures 3.12 et 3.14 pour  $\sigma = 10\%$ .

On peut clairement voir que pour l'écart-type  $\sigma = 5\%$ , la méthode proposée de Muscolino et la méthode de perturbation de second ordre donnent une bonne précision par rapport à la

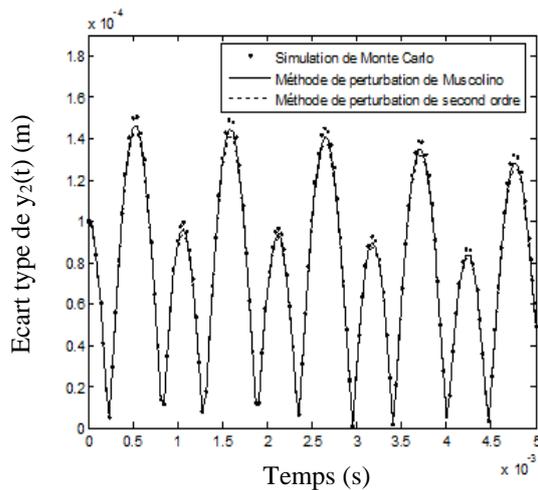
méthode référentielle de Monte Carlo. L'erreur augmente lorsque l'écart type de multiples paramètres incertains augmente.



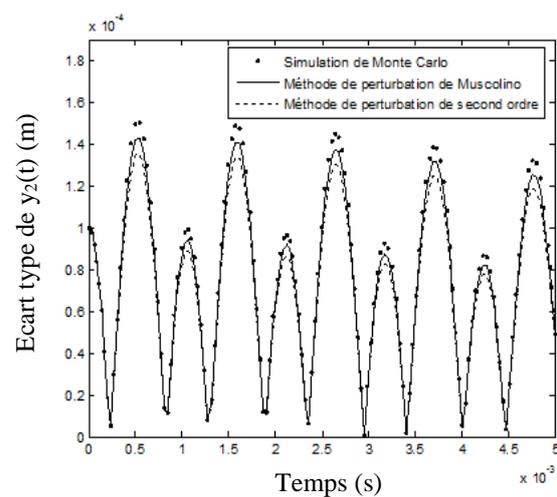
**Figure 3.12.** Ecart type de  $x_1(t)$  considérant multiple paramètres incertains  $\sigma=5\%$



**Figure 3.11.** Ecart type de  $x_1(t)$  considérant multiple paramètres incertains  $\sigma=10\%$



**Figure 3. 14.** Ecart type de  $y_2(t)$  considérant multiple paramètres incertains  $\sigma=5\%$



**Figure 3. 13.** Ecart type de  $y_2(t)$  considérant multiple paramètres incertains  $\sigma=5\%$

### 3.3.3.3. Effet de paramètres incertains en fonction de la vitesse de rotation

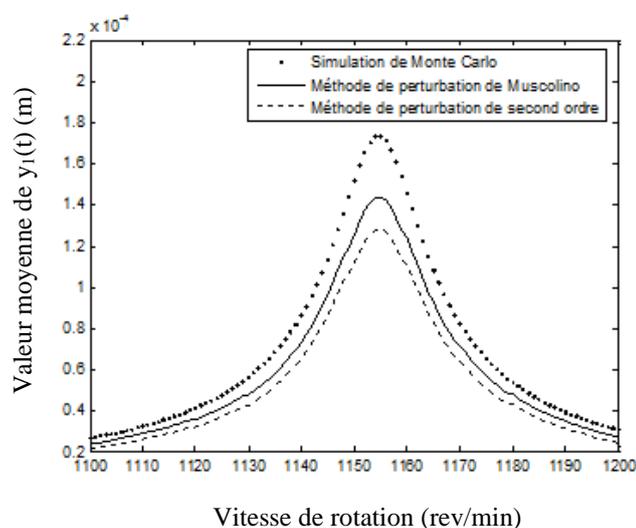
Pour voir l'influence de l'écart type de chaque paramètre incertain sur la réponse dynamique du système en fonction de la vitesse de rotation. On fait des calculs pour différentes valeurs de l'écart type de chaque paramètre incertain.

On suppose que la masse  $m$ , les coefficients d'amortissement  $c^x$  et  $c^y$ , la rigidité à la flexion  $k^x$ , la rigidité à la traction-compression  $k^y$  et la rigidité torsionnelle sont des variables aléatoires indépendantes.

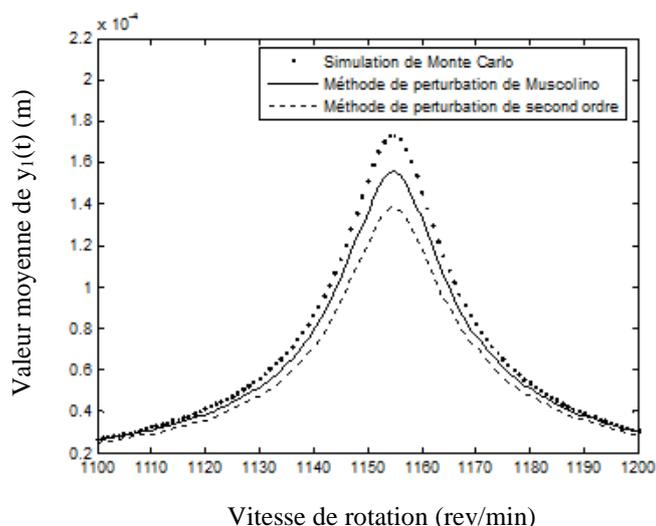
Les écarts type des composantes dynamiques des déplacements linéaires du premier palier suivant la direction y et du deuxième palier suivant la direction x sont présentés sur les figures 3.15-3.18 pour différentes valeurs de l'écart type de chaque paramètre incertain.

L'intervalle de la vitesse de rotation est 1100-1200 tr/min. Il est montré que la vitesse critique est d'environ 1155 tours/min.

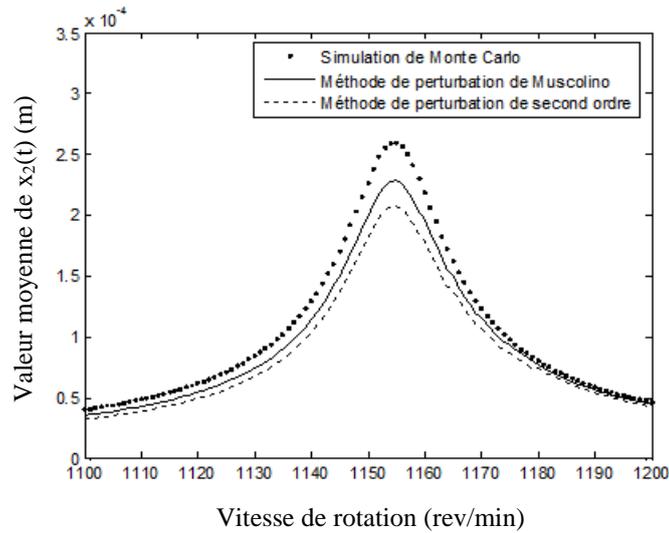
Tout d'abord, l'effet de la masse comme paramètre incertain est considéré. La valeur moyenne de la composante dynamique du déplacement linéaire du premier palier suivant la direction y est présentée sur la figure 3.15 pour  $\sigma_m = 2\%$ . Le résultat montre que la masse a une influence significative sur la réponse dynamique du système dans une large plage de vitesse de rotation.



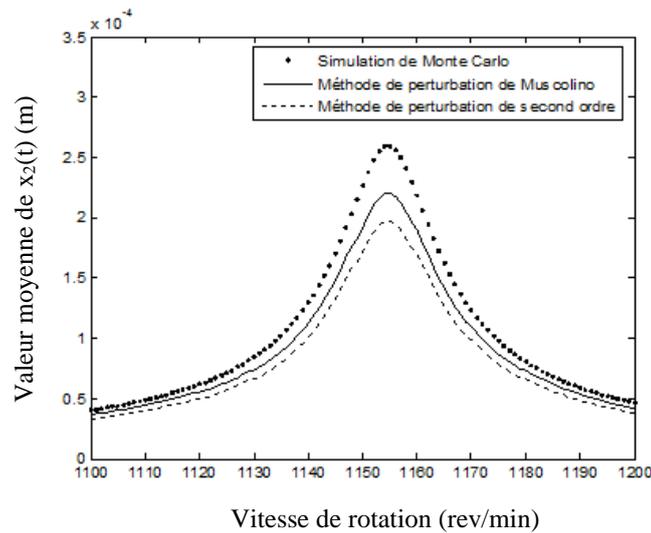
**Figure 3. 15.** Valeur moyenne instantanée de  $y_1(t)$  où la masse est une variable aléatoire



**Figure 3. 16.** Valeur moyenne instantanée de  $y_1(t)$  où les coefficients d'amortissement sont des variables aléatoires



**Figure 3. 17.** Valeur moyenne instantanée de  $y_1(t)$  où les coefficients d'amortissement sont des variables aléatoires



**Figure 3. 18.** Valeur moyenne instantanée de  $x_2(t)$  où la rigidité des arbres est une variable aléatoire

Ensuite, nous sommes intéressés à l'effet du coefficient d'amortissement comme paramètre incertain. Dans ce cas, la valeur moyenne de  $y_1$  est présentée sur la figure 3.16 avec un écart type  $\sigma_{\epsilon_x} = \sigma_{\epsilon_y} = 15\%$ . Le résultat montre que l'effet du coefficient d'amortissement se concentre sur la région de résonance (1130-1170 tours/min) et il est négligeable dans les autres plages de vitesse de rotation.

La figure 3.17 représente la valeur moyenne de la composante dynamique du déplacement linéaire du deuxième palier suivant la direction  $x$  considérant la rigidité à la flexion  $k^x$  et la rigidité à la traction-compression  $k^y$  comme des variables aléatoires avec un écart type

$\sigma_{k^x} = \sigma_{k^y} = 10\%$ . Le résultat montre clairement que l'effet de raideurs des paliers se concentre autour de la région de résonance (1120-1180 tours/min). Il est indiqué que la réponse dynamique du système autour de la région de résonance est plus sensible aux raideurs des paliers.

Enfin, l'effet de la rigidité torsionnelle comme paramètre incertain sur la réponse dynamique du système est considéré. La figure 3.18 représente la valeur moyenne de  $x_2$  considérant la rigidité torsionnelle est une variable aléatoire pour  $\sigma_{k^{\theta}} = 5\%$ . En comparant avec la figure 3.17, la rigidité torsionnelle a un effet significatif sur la réponse dynamique du système dans une large plage de vitesse de rotation.

## 4. Projection sur un chaos polynomial

### 4.1. Formulation théorique

Cette méthode consiste à projeter les solutions stochastiques recherchées sur une base de polynômes orthogonaux dont les variables sont des gaussiennes orthonormales (Dessombz 2000). Les propriétés de cette base de polynômes sont utilisées pour générer un système d'équations linéaires au moyen de projection. La résolution de ce système conduit à une expansion de la solution sur la base polynomiale, qu'on peut utiliser pour calculer les moments de la solution aléatoire et ce, de manière soit analytique, soit numérique. Avec cette méthode, on peut facilement calculer la F.R.R. ou la réponse dynamique d'un système mécanique.

Les polynômes chaotiques  $\psi_m$  correspondant aux polynômes d'Hermitte multidimensionnels obtenus par la formule (4.53) :

$$\psi_m(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = (-1)^p e^{\left(\frac{1}{2} \mathbf{T} \{\alpha\} \{\alpha\}\right)} \frac{\partial^p e^{\left(-\frac{1}{2} \mathbf{T} \{\alpha\} \{\alpha\}\right)}}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_p} \quad (3.53)$$

Où  $\{\alpha\}$  est le vecteur regroupant les variables aléatoires :

$$\{\alpha\}^T = \langle \alpha_1 \dots \alpha_p \rangle \quad (3.54)$$

Les matrices aléatoires de masse, amortissement et rigidité du système mécanique  $[\mathbf{M}_T]$ ,  $[\mathbf{C}_T]$  et  $[\mathbf{K}_T]$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$[M_T] = [M_T]_0 + [\tilde{M}_T] \quad (3.55)$$

$$[C_T] = [C_T]_0 + [\tilde{C}_T] \quad (3.56)$$

$$[K_T] = [K_T]_0 + [\tilde{K}_T] \quad (3.57)$$

Les matrices  $[M_T]_0$ ,  $[C_T]_0$  et  $[K_T]_0$  sont des matrices déterministes, les matrices  $[\tilde{M}_T]$ ,  $[\tilde{C}_T]$  et  $[\tilde{K}_T]$  correspondent à la partie aléatoire des matrices masse, amortissement et raideur.

$[\tilde{M}_T]$ ,  $[\tilde{C}_T]$  et  $[\tilde{K}_T]$  sont réécrites à partir d'une expression de type Karhunen-Loeve (Ghanem et al. 1991) sous la forme:

$$[\tilde{M}_T] = \sum_{p=1}^P [M_T]_p \alpha_p \quad (3.58)$$

$$[\tilde{C}_T] = \sum_{p=1}^P [C_T]_p \alpha_p \quad (3.59)$$

$$[\tilde{K}_T] = \sum_{p=1}^P [K_T]_p \alpha_p \quad (3.60)$$

Où les  $\alpha_p$  sont des gaussiennes centrées réduites indépendantes, qu'on peut faire correspondre aux premiers polynômes  $\psi_m$ , tandis que les matrices  $[M_T]_p$ ,  $[C_T]_p$  et  $[K_T]_p$  sont des matrices déterministes.

Nous posons  $\alpha_0 = 1$ , nous pouvons écrire alors :

$$[M_T] = \sum_{p=0}^P [M_T]_p \alpha_p \quad (3.61)$$

$$[C_T] = \sum_{p=0}^P [C_T]_p \alpha_p \quad (3.62)$$

$$[K_T] = \sum_{p=0}^P [K_T]_p \alpha_p \quad (3.63)$$

De la même manière, on peut écrire pour  $\{f_T\}$  :

$$\{f_T\} = \sum_{p=0}^P \{f_T\}_p \alpha_p \quad (3.64)$$

La réponse dynamique est obtenue par la résolution de l'équation qui suit, sachant que les conditions initiales sont prédéfinies.

$$[\mathbf{K}_{eq}] \{u_T\}(t + \Delta t) = \{F_{eq}\} \quad (3.65)$$

Avec :

$$[\mathbf{K}_{eq}] = [\mathbf{K}_T] + a_0 [\mathbf{M}_T] + a_1 [\mathbf{C}_T] \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \{F_{eq}\} = & \{f_T\}(t + \Delta t) + [\mathbf{M}_T] (a_0 \{u_T\}(t) + a_2 \{\dot{u}_T\}(t) + a_3 \{\ddot{u}_T\}(t)) \\ & + [\mathbf{C}_T] (a_1 \{u_T\}(t) + a_4 \{\dot{u}_T\}(t) + a_5 \{\ddot{u}_T\}(t)) \end{aligned} \quad (3.67)$$

$\{u_T\}(t + \Delta t)$  est décomposée sur des polynômes à P variables aléatoires gaussienne orthnormales :

$$\{u_T\}(t + \Delta t) = \sum_{n=0}^N (\{u_T\}(t + \Delta t))_n \psi_n(\{\alpha_i\}_{i=1}^P) \quad (3.68)$$

Avec N est l'ordre de polynôme du chaos.

$[\mathbf{K}_{eq}]$  et  $\{F_{eq}\}$  sont écrites sous la forme suivante :

$$[\mathbf{K}_{eq}] = \sum_{p=0}^P [\mathbf{K}_T]_p \alpha_p + a_0 \sum_{p=0}^P [\mathbf{M}_T]_p \alpha_p + a_1 \sum_{p=0}^P [\mathbf{C}_T]_p \alpha_p = \sum_{p=0}^P [\mathbf{K}_{eq2}]_p \alpha_p \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \{F_{eq}\} = & \sum_{p=0}^P (\{f_T\}(t + \Delta t))_p \alpha_p + \sum_{p=0}^P [\mathbf{M}_T]_p \alpha_p (a_0 (\{u_T\}(t))_0 + a_1 (\{\dot{u}_T\}(t))_0 + a_2 (\{\ddot{u}_T\}(t))_0) \\ & + \sum_{p=0}^P [\mathbf{C}_T]_p \alpha_p (a_1 \{u_T\}(t) + a_4 \{\dot{u}_T\}(t) + a_5 \{\ddot{u}_T\}(t)) \\ = & \sum_{p=0}^P \{F_{eq2}\}_p \alpha_p \end{aligned} \quad (3.70)$$

On remplace (3.68), (3.69) et (3.70) dans (3.65). Puis, on multiplie par  $\psi_m$  pour obtenir :

$$\sum_{p=0}^P \sum_{n=0}^N [\mathbf{K}_{eq2}]_p \{u_T\}_n \langle \alpha_p \psi_n \psi_m \rangle = \sum_{p=0}^P \{F_{eq2}\}_p \langle \alpha_p \psi_m \rangle \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (3.71)$$

De la même manière que pour les calculs des moments de la F.R.F., (3.71) est développée pour  $m = 0, \dots, N$ , le système matricielle suivant est ainsi obtenu :

$$\begin{bmatrix} [D]^{(00)} & \dots & [D]^{(0N)} \\ & \ddots & \\ \vdots & [D]^{(ij)} & \vdots \\ [D]^{(N0)} & \dots & [D]^{(NN)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\{u_r\}(t + \Delta t))_0 \\ \vdots \\ (\{u_r\}(t + \Delta t))_j \\ \vdots \\ (\{u_r\}(t + \Delta t))_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\}^{(0)} \\ \vdots \\ \{f\}^{(j)} \\ \vdots \\ \{f\}^{(N)} \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

Avec :

$$[D]^{(ij)} = \sum_{p=0}^P [K_{\text{eq}2}]_p \langle \alpha_p \ \psi_i \ \psi_j \rangle \quad (3.73)$$

$$\{f\}^{(j)} = \sum_{p=0}^P \{F_{\text{eq}2}\}_p \langle \alpha_p \ \psi_j \rangle \quad (3.74)$$

Après résolution du système (3.72), la moyenne de la réponse dynamique est donnée par :

$$E[\{u_r\}] = (\{u_r\}(t + \Delta t))_0 \quad (3.75)$$

La variance de la F.R.F. est donnée par :

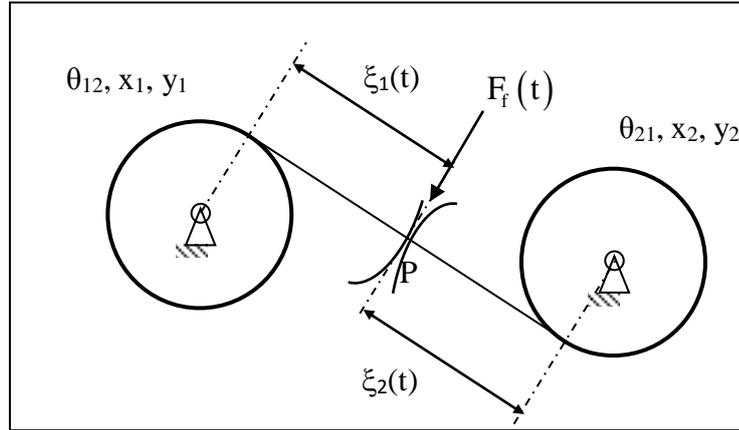
$$\text{Var}[\{u_r\}] = \sum_{n=1}^N ((\{u_r\}(t + \Delta t))_n)^2 (\psi_j)^2 \quad (3.76)$$

## 4.2. Comportement dynamique d'une transmission par engrenage simple étage en présence du frottement

Reprenons le même exemple du paragraphe 3.3.1 du ce chapitre.

### 4.2.1. Modélisation du frottement entre denture

Le coefficient du frottement est défini comme le rapport entre l'effort tangentiel sur les dents et la force normale. Dans le cas du système d'engrenage, le nombre de composantes de la force de frottement est égal au nombre de paire de dents en contact. La modélisation des efforts de friction est généralement faite sur la base de la loi de Coulomb. Selon ce modèle, le coefficient du frottement est supposé constant.



**Figure 3. 19.** Modèle dynamique en présence du frottement entre denture

Dans le modèle dynamique, la friction peut être introduite par deux couples du frottement appliquée sur les roues dentées (12) et (21) (Figure 3.19). Ces deux couples sont définis respectivement par :

$$Cf_{12}(t) = F_f(t) \cdot \xi_1(t) \quad (3.77)$$

$$Cf_{21}(t) = F_f(t) \cdot \xi_2(t) \quad (3.78)$$

$\xi_1(t)$  et  $\xi_2(t)$  sont la longueur variable entre le point primitif P et le point central de la roue dentée correspondante (12) et (21) respectivement (Figure 3.19).

La force du frottement sur le point de contact P est défini par la somme de deux composantes qui correspondent au cas d'une ou de deux paires de dents en contact suivant le temps. Ainsi, la première force du frottement correspondant à la première paire de contact est définie par:

$$F_f^1(t) = \mu \cdot k^1(t) \cdot \delta(t) \quad (3.79)$$

Alors que la seconde force à la deuxième paire de contacts est définie par:

$$F_f^0(t) = \mu \cdot k^0(t) \cdot \delta(t) \quad (3.80)$$

$\delta(t)$  est le déplacement relatif de denture, il peut être écrit par :

$$\delta(t) = \langle L^\delta \rangle \cdot \{Q(t)\} \quad (3.81)$$

$\langle L^\delta \rangle$  est défini par:

$$\langle L^\delta \rangle = [\sin(\alpha) \quad -\sin(\alpha) \quad \cos(\alpha) \quad -\cos(\alpha) \quad 0 \quad r_{(1,2)}^b \quad -r_{(2,1)}^b \quad 0] \quad (3.82)$$

$r_{(1,2)}^b, r_{(2,1)}^b$  représentent les rayons de base.  $\alpha$  est l'angle de pression égal à  $20^\circ$ .

$\{Q(t)\}$  étant le vecteur des coordonnées généralisés du modèle, il est sous la forme :

$$\{Q(t)\} = [x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \theta_{(1,1)} \quad \theta_{(1,2)} \quad \theta_{(2,1)} \quad \theta_{(2,2)}]^T \quad (3.83)$$

#### 4.2.2. Equations du mouvement

L'ensemble des équations décrivant le mouvement du modèle dynamique à huit degrés de liberté d'une transmission simple étage en présence du frottement entre dentures est défini par :

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1^x x_1 + \sin(\alpha) k(t) \langle L^\delta \rangle \{Q\} = (F_f^1 - F_f^0) \sin(\alpha) \quad (3.84)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1^y y_1 + \cos(\alpha) k(t) \langle L^\delta \rangle \{Q\} = -(F_f^1 - F_f^0) \cos(\alpha) \quad (3.85)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2^x x_2 - \sin(\alpha) k(t) \langle L^\delta \rangle \{Q\} = -(F_f^1 - F_f^0) \sin(\alpha) \quad (3.86)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2^y y_2 - \cos(\alpha) k(t) \langle L^\delta \rangle \{Q\} = (F_f^1 - F_f^0) \cos(\alpha) \quad (3.87)$$

$$I_{(1,1)} \ddot{\theta}_{(1,1)} + k_1^0 (\theta_{(1,1)} - \theta_{(1,2)}) = C_m \quad (3.88)$$

$$I_{(1,2)} \ddot{\theta}_{(1,2)} - k_1^0 (\theta_{(1,1)} - \theta_{(1,2)}) + r_{(1,2)}^b k(t) \langle L^\delta \rangle \{Q\} = Cf_{12}^1(t) - Cf_{12}^0(t) \quad (3.89)$$

$$I_{(2,1)} \ddot{\theta}_{(2,1)} + k_2^0 (\theta_{(2,1)} - \theta_{(2,2)}) - r_{(2,1)}^b k(t) \langle L^\delta \rangle \{Q\} = -Cf_{21}^1(t) + Cf_{21}^0(t) \quad (3.90)$$

$$I_{(2,2)} \ddot{\theta}_{(2,2)} + k_2^0 (\theta_{(2,1)} - \theta_{(2,2)}) = 0 \quad (3.91)$$

Avec les composantes des couples de frottement sont exprimées par :

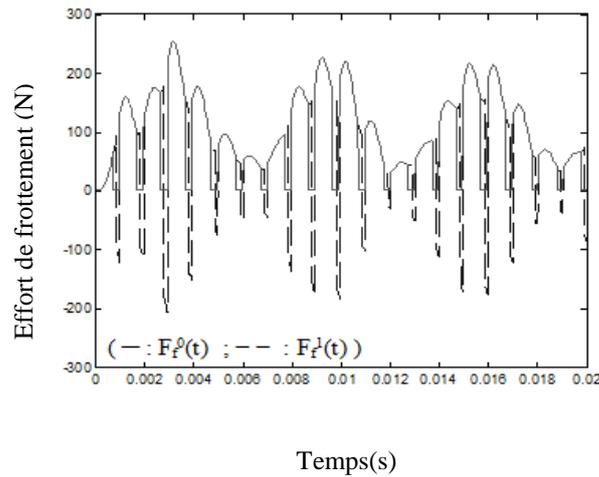
$$Cf_{12}^p(t) = \mu \cdot k^p(t) \cdot \delta(t) \cdot \xi_{11}^p(t) \quad (3.92)$$

$$Cf_{21}^p(t) = \mu \cdot k^p(t) \cdot \delta(t) \cdot \xi_{22}^p(t) \quad \text{avec } p=0,1 \quad (3.93)$$

#### 4.2.3. Simulation numérique

##### 4.2.3.1. Effort de frottement

La figure 3.20 représente les fluctuations de ces efforts relatifs à la première paire et à la deuxième paire de dents en contact.



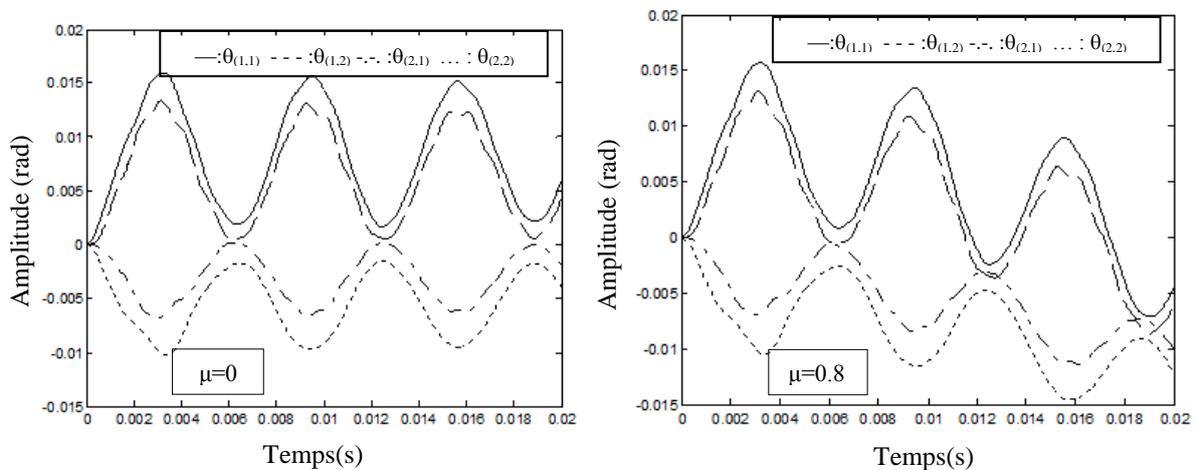
**Figure 3. 20.** Evolutions des efforts de frottement dans le temps ( $\mu=0.08$ )

$F_f^1(t)$  représente l'évolution de l'effort de frottement relatif à la paire 1, elle change de signe lorsque le point de contact passe par le point primitif P. Alors que  $F_f^0(t)$  est relative à la paire 0 en contact, elle suit l'effort  $F_f^1(t)$  et elle s'annule sur les intervalles de temps où la paire 0 sort du contact.

#### 4.2.3.2. Comportement des roues

L'introduction du frottement entre denture affecte les déplacements angulaires des roues. La figure 3.21 illustre les effets du frottement sur le comportement dynamique des roues.

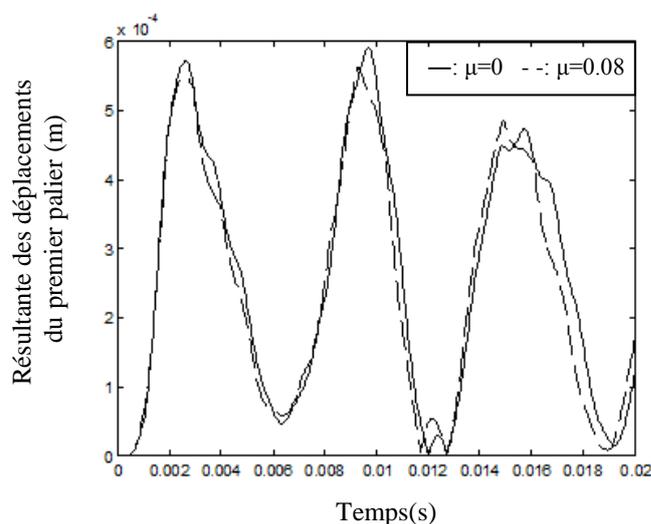
A partir de ces figures, on remarque que le frottement permet de réduire les déplacements angulaires des roues. Son effet augment au cours du temps, lorsque le déplacement permanent augment aussi.



**Figure 3. 21.** Fluctuations temporelles des perturbations angulaires des roues

### 4.2.3.3. Comportement des paliers

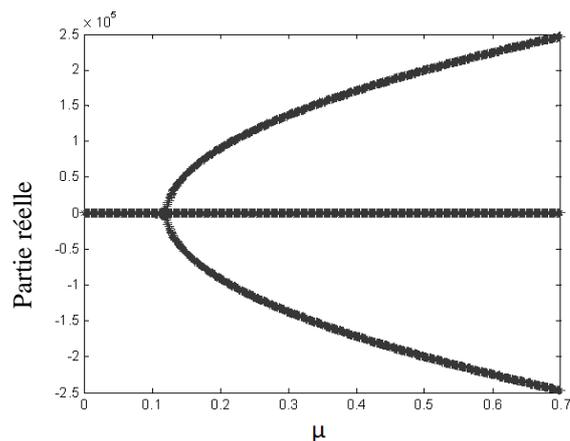
La figure 3.22 représente l'effet du frottement sur la résultante dynamique des déplacements linéaires du premier palier de maintien et elle montre qu'en présence du frottement, les amplitudes augmentent légèrement sans modifier l'allure du signal.



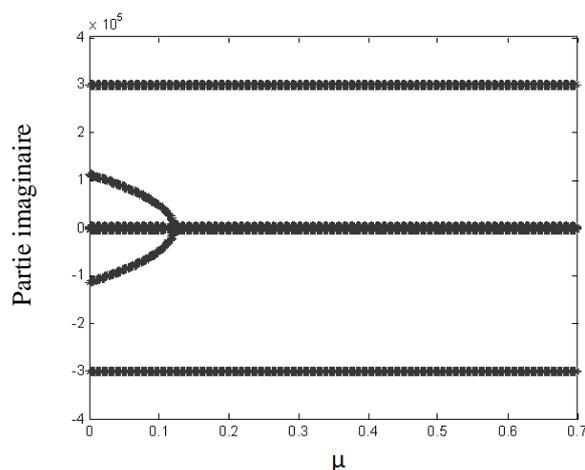
**Figure 3. 22.** Fluctuations temporelles de la résultante des déplacements linéaires du premier palier

### 4.2.3.4. Analyse de la stabilité

Pour un concepteur, l'objectif principal d'une analyse de stabilité robuste est de définir avec certitude que le système étudié est stable pendant un certain paramètre défini à l'intérieur d'un intervalle aléatoire (comme l'intervalle de coefficient de frottement de la dispersion). Cette étude paramétrique consiste à calculer les valeurs propres du système linéarisé à chaque valeur du paramètre aléatoire, alors la stabilité est analysée en testant le signe des parties réelles de valeurs propres obtenues. Ce procédé devient difficile pour les systèmes non-linéaires d'ordre plus élevé, étant donné que le calcul des valeurs propres correspondant passe par la résolution des équations caractéristiques d'ordre supérieur.



**Figure 3. 23.** Evolution des parties réelles des valeurs propres en fonction du coefficient de frottement



**Figure 3. 24.** Evolution des parties imaginaires des valeurs propres en fonction du coefficient de frottement

Les figures 3.23 et 3.24 représentent les parties réelles et imaginaires des valeurs propres du system en fonction du coefficient de frottement.

Les parties imaginaires de ces valeurs propres représentent les fréquences d'instabilité. Tant que les parties réelles de toutes les valeurs propres restent négatives, le système est stable. Si au moins une des valeurs propres a une partie réelle positive, le système est instable.

D'après la figure 3.23 pour les valeurs d'essai de  $\mu$  appartenant à  $[0, 0.109]$ , le système est stable tandis que pour la valeur supérieure à 0.109, le système est instable.

### 4.3. Analyse par le chaos polynomial

Supposons que le coefficient de frottement est une variable aléatoire et défini comme suit :

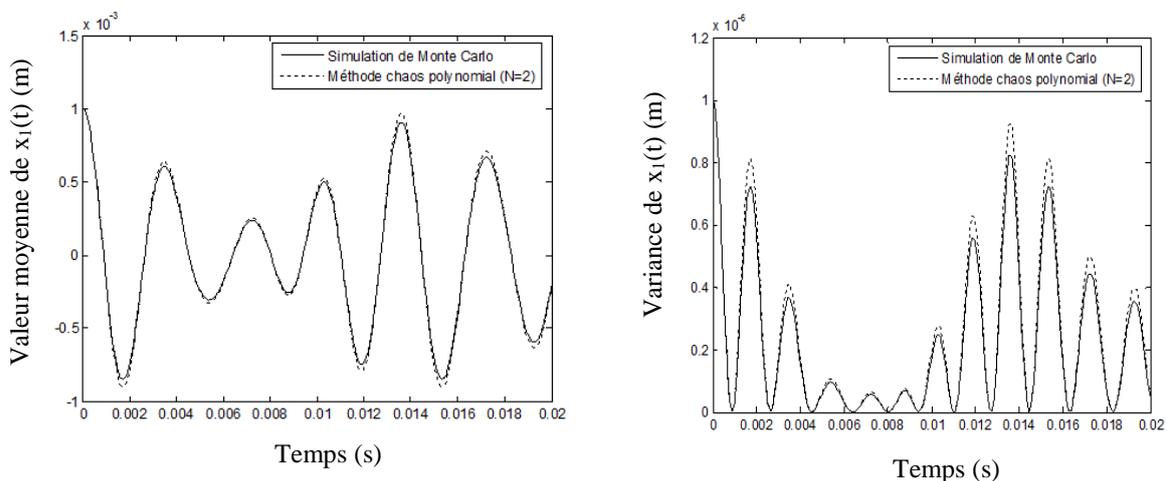
$$\mu = \mu_0 + \sigma_\mu \xi \quad (3.94)$$

Où  $\xi$  est une gaussienne normale centrée réduite,  $\mu_0$  est la valeur moyenne et  $\sigma_\mu$  est l'écart type du paramètre.

Pour voir l'influence de l'écart type du coefficient de frottement  $\mu$  ainsi que l'ordre du chaos polynomial sur les résultats obtenus nous faisons des calculs pour différentes valeurs de l'écart type et du l'ordre du chaos.

La valeur moyenne et la variance de la composante dynamique du déplacement linéaire du premier palier suivant les deux directions x et y ont été calculés à partir de la méthode du chaos polynomial. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus avec la méthode de Monte Carlo en utilisant 100.000 simulations.

Les résultats sont représentés sur les figures 3.25-3.28. Ces figures montrent que les solutions obtenues oscillent autour de la solution référentielle de Monte Carlo. On peut constater que pour des valeurs faibles de l'écart type  $\sigma_\mu = 2\%$  la méthode proposée de chaos polynomial d'ordre 2 fournit de très bons résultats. Si l'écart type augmente, l'écart entre les résultats de la méthode proposée et le calcul de référence par Monte Carlo augmente.



**Figure 3. 25.** Valeur moyenne instantanée et variance de  $x_1(t)$  pour  $\sigma_\mu = 2\%$

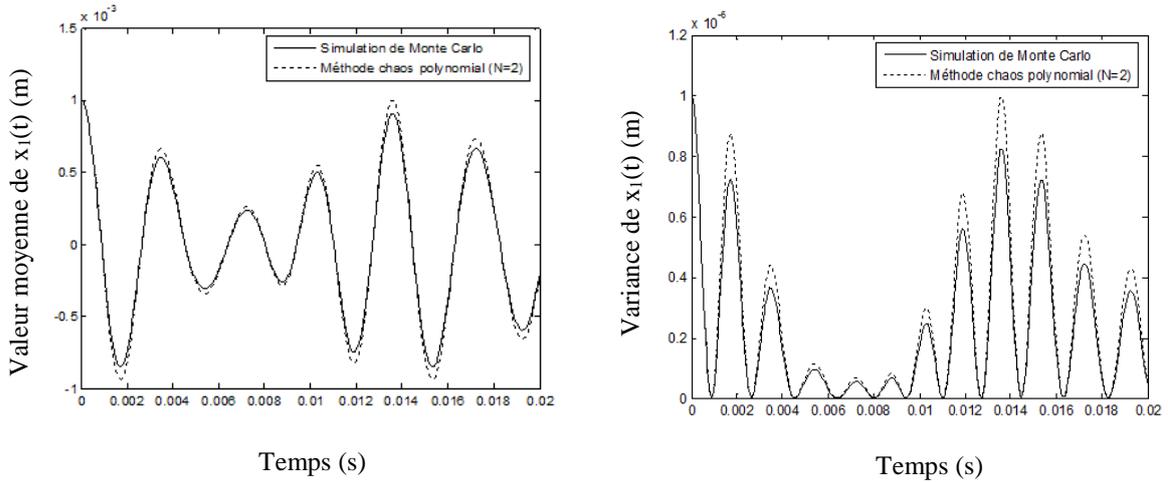


Figure 3. 26. Valeur moyenne instantanée et variance de  $x_1(t)$  pour  $\sigma_\mu = 5\%$

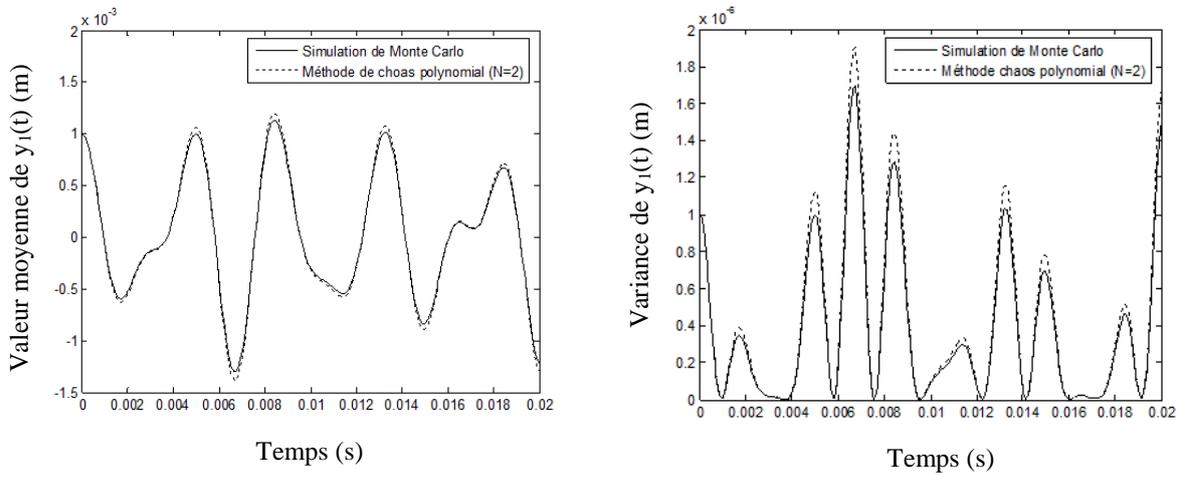


Figure 3. 27. Valeur moyenne instantanée et variance de  $y_1(t)$  pour  $\sigma_\mu = 2\%$

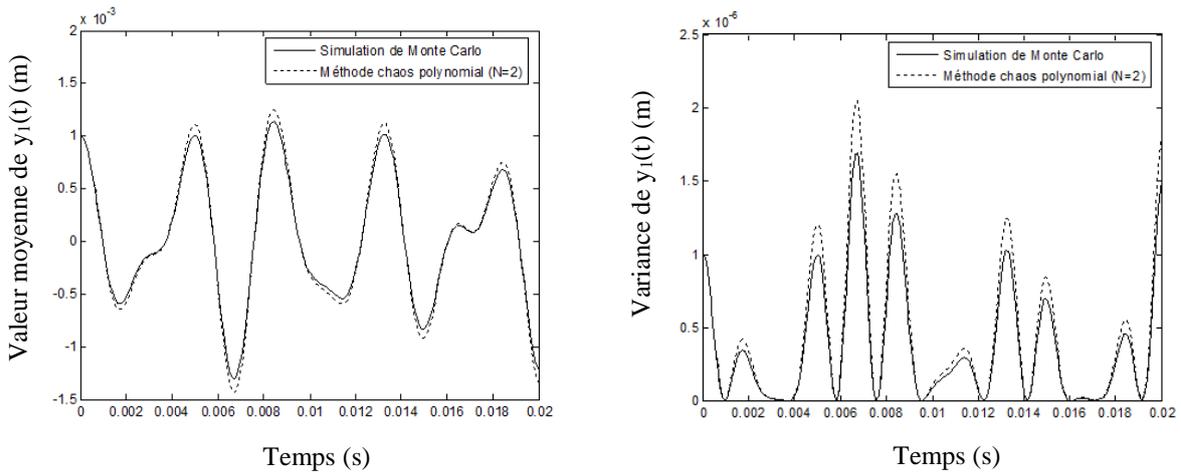
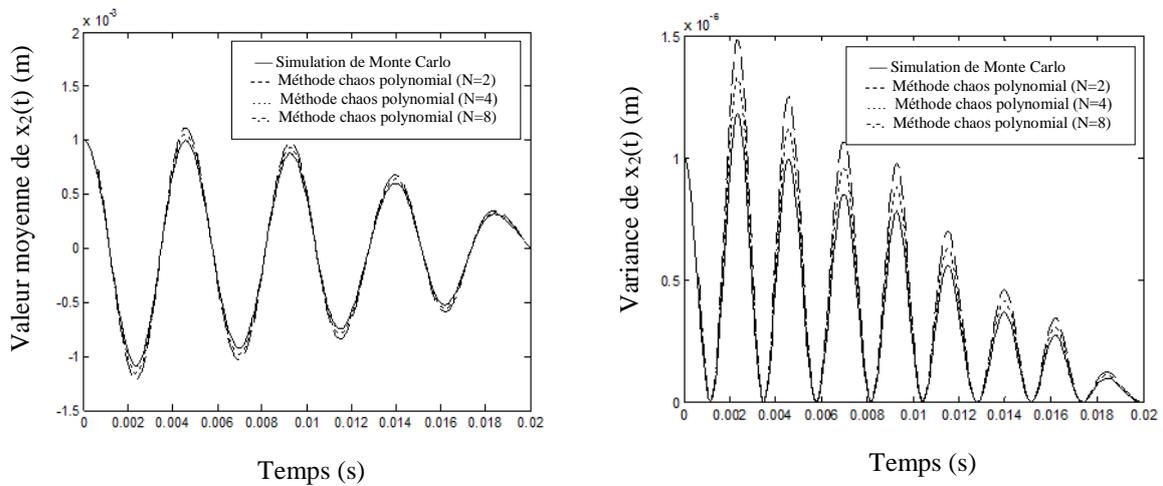


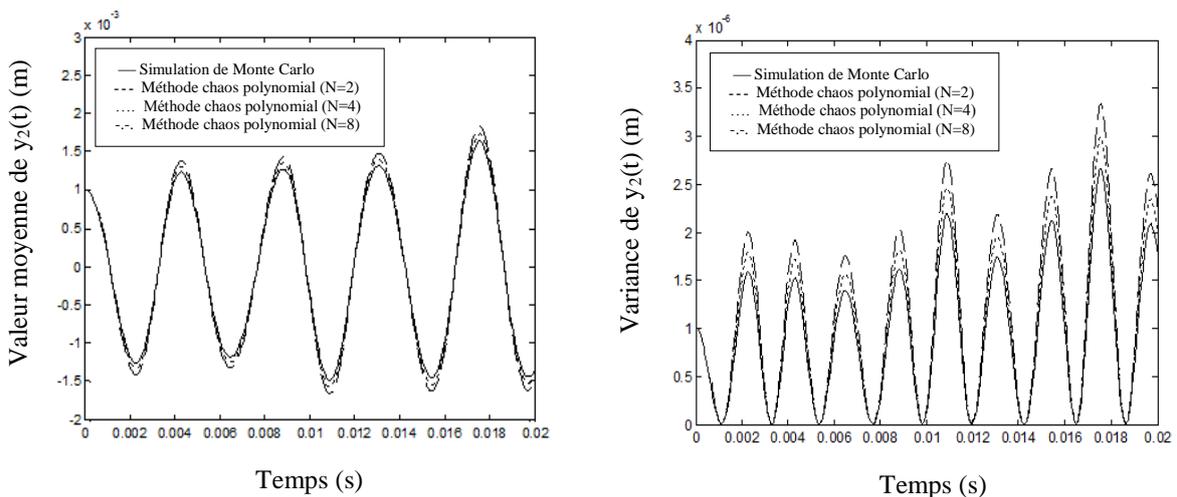
Figure 3. 28. Valeur moyenne instantanée et variance de  $y_1(t)$  pour  $\sigma_\mu = 5\%$

Les figures 3.29 et 3.30 représentent la valeur moyenne et la variance du déplacement linéaire du deuxième palier suivant les deux directions x et y qui sont calculées par la méthode proposée du chaos polynomial pour différents ordres du chaos polynomial et ceux obtenus par une simulation directe de Monte Carlo à 100.000 simulations.

On peut constater que si on augmente l'ordre du chaos polynomial, l'erreur entre les résultats de la méthode proposée et le calcul de référence par Monte Carlo diminue. Lorsque  $N=8$ , une bonne précision de la méthode proposée du chaos polynomial par rapport à la méthode de Monte Carlo.



**Figure 3. 29.** Valeur moyenne instantanée et variance de  $x_2(t)$  pour  $\sigma_\mu = 10\%$



**Figure 3. 30.** Valeur moyenne instantanée et variance de  $y_2(t)$  pour  $\sigma_\mu = 10\%$

## **5. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les formulations théoriques des méthodes de prise en compte des incertitudes. Nous avons développé la méthode de perturbation de second ordre, ainsi que la méthode proposée de Muscolino, pour déterminer la réponse dynamique d'une transmission par engrenage simple étage comportant des paramètres incertains. Ces méthodes s'avèrent efficaces en ce qui concerne l'économie en temps de calcul, surtout la méthode de perturbation de Muscolino dont les résultats approchent le mieux les résultats issus de la méthode référentielle de Monte Carlo. Ensuite nous avons présenté une méthode basée sur une projection sur un chaos polynomial. La méthode proposée a été mise en œuvre sur une transmission par engrenage en présence du frottement entre denture pour montrer son efficacité. L'ordre du chaos polynomial joue un rôle important, plus il est élevé, meilleure est la solution trouvée.

## Chapitre 4

---



---

# Étude de cas : Robustesse d'une transmission par engrenage d'éolienne à variables aléatoires

---



---

### SOMMAIRE

<b>1. Introduction .....</b>	<b>101</b>
<b>2. Modélisation du comportement dynamique d'un système d'engrenage dans une éolienne ...</b>	<b>101</b>
<b>3. Réponse dynamique d'un système d'engrenage à deux étages d'éolienne à variables incertaines .....</b>	<b>102</b>
3.1. Modèle dynamique d'une transmission d'engrenage à deux étages d'éolienne.....	102
3.1.1. Description du modèle.....	102
3.1.2. Equations de mouvement .....	103
3.2. Etude avec la méthode du chaos polynomial .....	104
3.2.1. Simulation numérique .....	104
3.2.2. Analyse de l'effet des paramètres incertains.....	105
3.2.3. Analyse de l'effet des multiples paramètres incertains.....	108
3.3. Etude avec la méthode de perturbation .....	110
3.3.1. Analyse de l'effet des paramètres incertains.....	110
3.3.2. Analyse de l'effet des multiples paramètres incertains.....	112
3.4. Comparaison entre les différentes méthodes .....	113
<b>4. Comportement dynamique d'un système d'engrenage d'éolienne avec la méthode d'analyse par intervalles .....</b>	<b>115</b>
4.1. Formulation théorique .....	115
4.1.1. Méthode d'analyse par intervalles.....	116
4.1.2. Approche probabiliste .....	117
4.2. Simulation numérique .....	119

4.2.1. Modèle dynamique .....	119
4.2.1. Analyse dynamique du système avec des paramètres déterministes .....	120
4.2.2. Comportement dynamique du système avec des paramètres incertains .....	121
<b>5. Conclusion.....</b>	<b>127</b>

## 1. Introduction

Dans ce chapitre, l'objectif est d'étudier le comportement dynamique d'une transmission par engrenage dans une éolienne comportant des paramètres incertains. La première section de ce chapitre est consacrée au développement de la méthode de perturbation et la méthode de chaos polynomial présentées dans le chapitre 3 pour calculer la réponse dynamique d'un système d'engrenage à deux étages d'éolienne à variables incertaines. Dans la deuxième section, on s'intéresse à présenter deux approches : l'approche probabiliste et l'approche ensembliste basée sur la méthode d'analyse par intervalles. Nous présentons ensuite les formulations théoriques de deux approches qui permettent d'étudier le comportement dynamique d'un système d'engrenage simple étage à paramètres incertains. Ces approches sont ensuite comparées pour en faire ressortir les avantages et inconvénients en termes de précision.

## 2. Modélisation du comportement dynamique d'un système d'engrenage dans une éolienne

Plusieurs études se sont focalisées sur la modélisation du comportement dynamique d'un système d'engrenage dans une éolienne. Les principales composantes d'une transmission par engrenage dans une éolienne ont été présentées par Walha et al. (Walha et al. 2006). Abboudi (Abboudi 2012) a modélisé le comportement dynamique d'une transmission par engrenage dans une éolienne. Il a traité deux cas : Dans le premier, il a étudié le comportement d'une éolienne à vitesse de rotation quasi-constante à multiplicateur de vitesse à engrenage droit. Dans le deuxième cas, il a étudié le comportement d'une éolienne à vitesse de rotation variable à multiplicateur de vitesse à engrenage hélicoïdal. Walha (Walha et al. 2005) a étudié le comportement dynamique d'un système d'engrenage à denture droite dans une éolienne en présence des défauts.

La figure 4.1 représente un modèle dynamique d'une éolienne à vitesse de rotation quasi-constante à multiplicateur de vitesse à engrenage droit étudié par Abboudi (Abboudi 2012). Le multiplicateur de vitesse est composé de deux trains d'engrènements. Chaque train relie deux ensembles. En totalité, on a trois ensembles ( $j=1:3$ ) représentés sur la figure ci-dessous.

- L'ensemble {aéromoteur, arbre primaire(1), roue (12)} constitue le premier bloc ( $j=1$ ).
- L'ensemble {roue (21), arbre intermédiaire (2), roue (22)} constitue le deuxième bloc ( $j=2$ ).

- L'ensemble {roue (31), arbre secondaire (3), roue représentative de la génératrice} constitue le troisième bloc ( $j=3$ ).

Les arbres intermédiaires ont des faibles masses par rapport aux autres organes mécaniques. La rigidité torsionnelle de ces arbres de transmission est notée  $k_{\theta j}$ .

Chaque bloc «  $j$  » est monté sur un palier flexible dont la rigidité flexionnelle est notée  $k_{xj}$  et celle à la traction-compression est notée  $k_{yj}$ .

Les déplacements linéaires des paliers sont désignés par  $x_j$  et  $y_j$ . Ils sont repérés dans le plan d'engrènement perpendiculairement aux axes de rotation des roues.

Chaque couple de roues est lié par l'intermédiaire de dents flexibles. Cette flexibilité fait naître des déplacements localisés dont les raideurs du contact d'engrènement varient périodiquement dans le temps selon la fonction  $k_n(t)$ .

On note par  $\theta_{ji}$  les déplacements angulaires des roues autour de leurs axes de rotation.

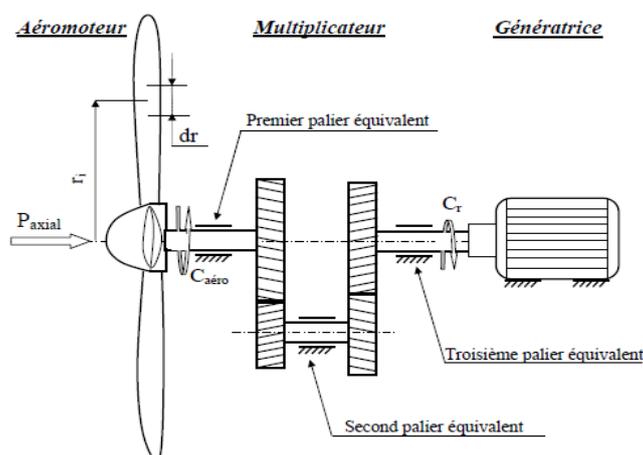


Figure 4. 1. Modèle dynamique du multiplicateur à engrenages à deux étages dans une éolienne

### 3. Réponse dynamique d'un système d'engrenage à deux étages d'éolienne à variables incertaines

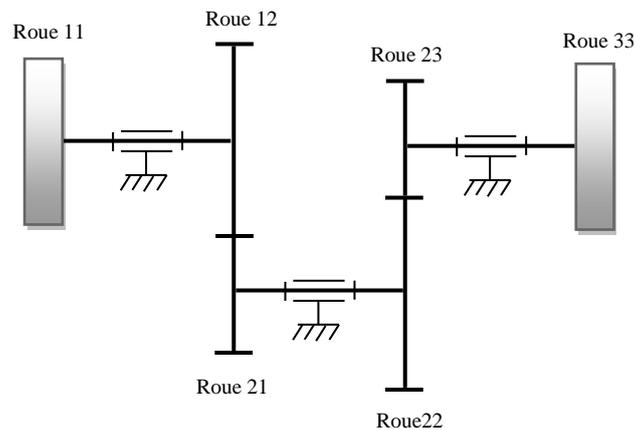
#### 3.1. Modèle dynamique d'une transmission d'engrenage à deux étages d'éolienne

##### 3.1.1. Description du modèle

La figure 4.2 représente un modèle dynamique d'un système d'engrenage à deux étages dans une éolienne.

La roue 11 est liée à la roue dentée 12 par l'intermédiaire d'un arbre (1) de faible masse et de rigidité torsionnelle  $k_1^0$ . Cet ensemble constitue le premier bloc ( $j=1$ ) et il est maintenu par le palier 1. La roue 21 est liée à la roue 22 par l'arbre (2) de rigidité torsionnelle  $k_2^0$ . Cet ensemble constitue le deuxième bloc ( $j=2$ ) et il est maintenu par le palier 2. La roue 23 est liée à la roue 33 par l'arbre (3) de rigidité torsionnelle  $k_3^0$ . Cet ensemble constitue le troisième bloc ( $j=3$ ) et il est maintenu par le palier 3. Les paliers de maintien sont flexibles de rigidités à la flexion  $k_j^x$  et de rigidités à la traction-compression  $k_j^y$ .

Les deux étages d'engrènement sont modélisés par des raideurs d'engrènement variables au cours du temps reliant respectivement les roues dentées 12 avec 21 et 22 avec 32. La roue 11 et les pales d'éolienne caractérisent le côté moteur et la roue 33 caractérise le côté récepteur.



**Figure 4. 2.** Modèle dynamique d'un système d'engrenage à deux étages dans une éolienne

### 3.1.2. Equations de mouvement

Les équations de mouvement décrivant le comportement dynamique du système (Figure 4.2) sont obtenues en utilisant le formalisme de Lagrange. Ces équations sont représentées comme suit :

$$m\ddot{x}_1 - c^x\dot{x}_1 + \sin(\alpha_1)c_1(t)\delta_1(t) + k^x x_1 - k_1(t)\delta_1(t)\sin(\alpha_1) = 0 \quad (4.1)$$

$$m\ddot{y}_1 - c^y\dot{y}_1 + \cos(\alpha_1)c_1(t)\delta_1(t) + k^y y_1 + k_1(t)\delta_1(t)\cos(\alpha_1) = 0 \quad (4.2)$$

$$m\ddot{x}_2 + c^x \dot{x}_2 - \sin(\alpha_1)c_1(t)\delta_1(t) + \sin(\alpha_2)c_2(t)\delta_2(t) + k^x x_2 - k_1(t)\delta_1(t)\sin(\alpha_1) + k_2(t)\delta_2(t)\sin(\alpha_2) = 0 \quad (4.3)$$

$$m\ddot{y}_2 + c^y \dot{y}_2 - k_1(t)\delta_1(t)\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)c_2(t)\delta_2(t) + k^y y_2 - k_1(t)\delta_1(t)\cos(\alpha_1) + k_2(t)\delta_2(t)\cos(\alpha_2) = 0 \quad (4.4)$$

$$m\ddot{x}_3 - c^x \dot{x}_3 - \sin(\alpha_2)c_2(t)\delta_2(t) + k^x x_3 - k_2(t)\delta_2(t)\sin(\alpha_2) = 0 \quad (4.5)$$

$$m\ddot{y}_3 - c^y \dot{y}_3 - \cos(\alpha_2)c_2(t)\delta_2(t) + k^y y_3 - k_2(t)\delta_2(t)\cos(\alpha_2) = 0 \quad (4.6)$$

$$I_b \ddot{\theta}_{(1,1)} + k^0 (\theta_{(1,1)} - \theta_{(1,2)}) = Cm \quad (4.7)$$

$$I_{(1,2)} \ddot{\theta}_{(1,2)} + r_{(1,2)}^b c_1(t)\delta_1(t) - k^0 (\theta_{(1,1)} - \theta_{(1,2)}) + k_1(t)r_{(1,2)}^b \delta_1(t) = 0 \quad (4.8)$$

$$I_{(2,1)} \ddot{\theta}_{(2,1)} - r_{(2,1)}^b c_1(t)\delta_1(t) + k^0 (\theta_{(2,1)} - \theta_{(2,2)}) - k_1(t)r_{(2,1)}^b \delta_1(t) = 0 \quad (4.9)$$

$$I_{(2,2)} \ddot{\theta}_{(2,2)} + r_{(2,2)}^b c_2(t)\delta_2(t) - k^0 (\theta_{(2,1)} - \theta_{(2,2)}) + k_2(t)r_{(2,2)}^b \delta_2(t) = 0 \quad (4.10)$$

$$I_{(2,3)} \ddot{\theta}_{(2,3)} - r_{(2,3)}^b c_2(t)\delta_2(t) - k^0 (\theta_{(2,3)} - \theta_{(3,3)}) - k_2(t)r_{(2,3)}^b \delta_2(t) = 0$$

(4.11)

$$I_{(3,3)} \ddot{\theta}_{(3,3)} + k^0 (\theta_{(2,3)} - \theta_{(3,3)}) = -Cr \quad (4.12)$$

Les déplacements  $\delta_1(t)$  et  $\delta_2(t)$  le long de la ligne d'action sont exprimées par:

$$\delta_1(t) = (x_1 - x_3)\sin(\alpha_1) + (y_1 - y_3)\cos(\alpha_1) + r_{(1,2)}^b \theta_{(1,2)} + r_{(2,1)}^b \theta_{(2,1)} \quad (4.13)$$

$$\delta_2(t) = (x_2 - x_3)\sin(\alpha_2) + (-y_2 - y_3)\cos(\alpha_2) + r_{(2,2)}^b \theta_{(2,2)} + r_{(2,3)}^b \theta_{(2,3)} \quad (4.14)$$

## 3.2. Etude avec la méthode du chaos polynomial

### 3.2.1. Simulation numérique

Les données numériques d'un système d'engrenage à deux étages dans une éolienne sont résumées dans le tableau 4.1.

**Tableau 4. 1.** Données numériques du modèle étudié

Matériau : 42CrMo4	$\rho=7860 \text{ Kg/m}^3$
Couple moteur	$C_m=200 \text{ N.m}$
Rigidités des paliers	$k^x=10^7 \text{ N/m} \quad k^y=10^7 \text{ N/m}$
Rigidités des arbres	$k^\theta=10^5 \text{ Nm/rad}$
Largeur de denture	$L=20.10^{-3}$
Nombre de dentures	$Z(1,2)=40 ; Z(2,1)=50 ; Z(2,2)=54 ; Z(2,3)=18$
Module de denture	$m=4$
Raideur moyenne	$k^{\text{moy}}=1.4.10^7 \text{ N/m}$
Rapport de conduite	$\varepsilon^\alpha=1.7341$
Angle de pression	$\alpha=20^\circ$

### 3.2.2. Analyse de l'effet des paramètres incertains

L'inertie des pales  $I_b$ , les coefficients d'amortissement  $c^x$  et  $c^y$ , la rigidité à la flexion  $k^x$  et la rigidité à la traction-compression  $k^y$  sont supposés des variables aléatoires indépendantes et définis comme suit:

$$I_b = I_{b_0} + \sigma_{I_b} \xi, c^x = c^x_0 + \sigma_{c^x} \xi, c^y = c^y_0 + \sigma_{c^y} \xi, k^x = k^x_0 + \sigma_{k^x} \xi, k^y = k^y_0 + \sigma_{k^y} \xi \quad (4.15)$$

$\xi$  est une gaussienne normale centrée réduite,  $I_{b_0}$ ,  $c^x_0$ ,  $c^y_0$ ,  $k^x_0$  et  $k^y_0$  sont les valeurs moyennes,  $\sigma_{I_b}$ ,  $\sigma_{c^x}$ ,  $\sigma_{c^y}$ ,  $\sigma_{k^x}$  et  $\sigma_{k^y}$  sont les écarts-types associés.

Pour voir l'influence de l'écart type du chaque paramètre incertain ainsi que l'ordre du chaos polynomial sur les résultats obtenus nous faisons des calculs pour différentes valeurs de l'écart type et du l'ordre du chaos.

Les valeurs moyennes et les écarts type des composantes dynamiques des déplacements linéaires du premier et du deuxième palier suivant les deux directions x et y ont été calculés avec la méthode du chaos polynomial en utilisant le même ordre (N=5). Les résultats obtenus sont confrontés à ceux obtenus avec la technique référentielle de Monte Carlo en utilisant 100.000 simulations.

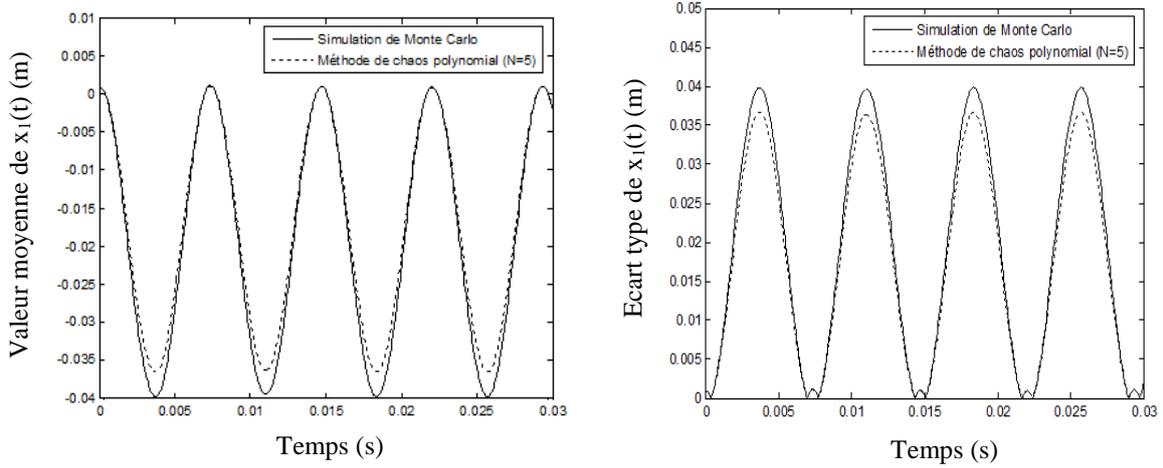


Figure 4. 3. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x_1(t)$  pour  $\sigma_{i_b} = 2\%$

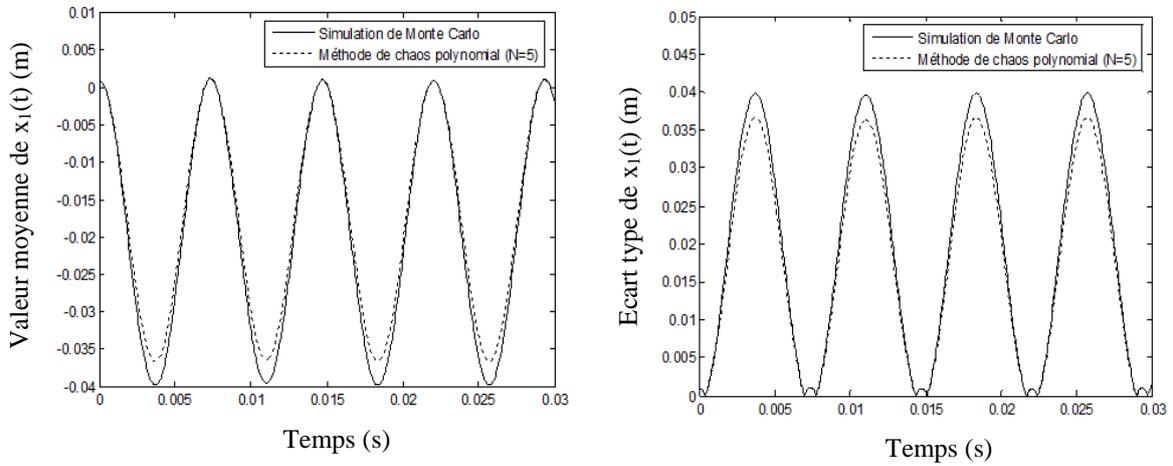


Figure 4. 4. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x_1(t)$  pour  $\sigma_{i_b} = 5\%$

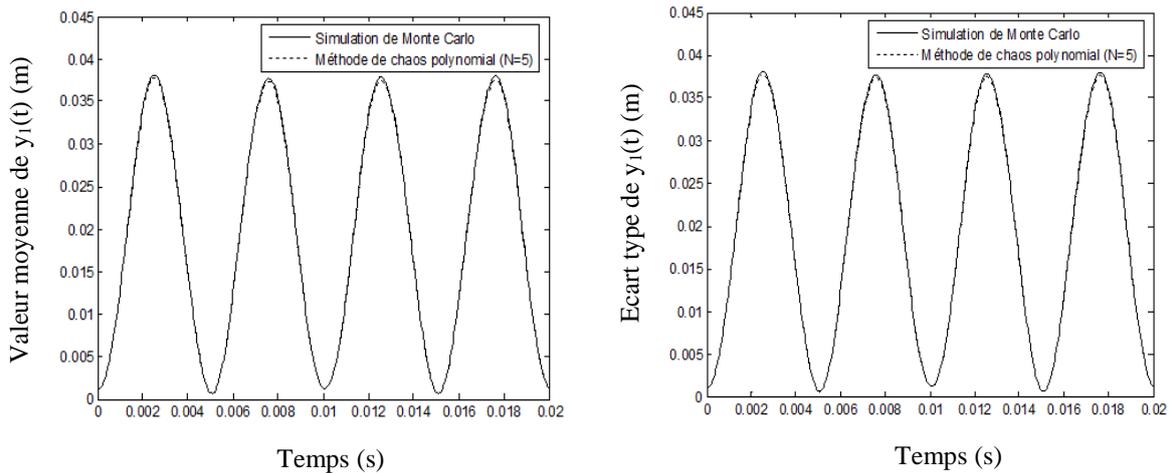


Figure 4. 5. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $y_1(t)$  pour  $\sigma_x = \sigma_y = 2\%$

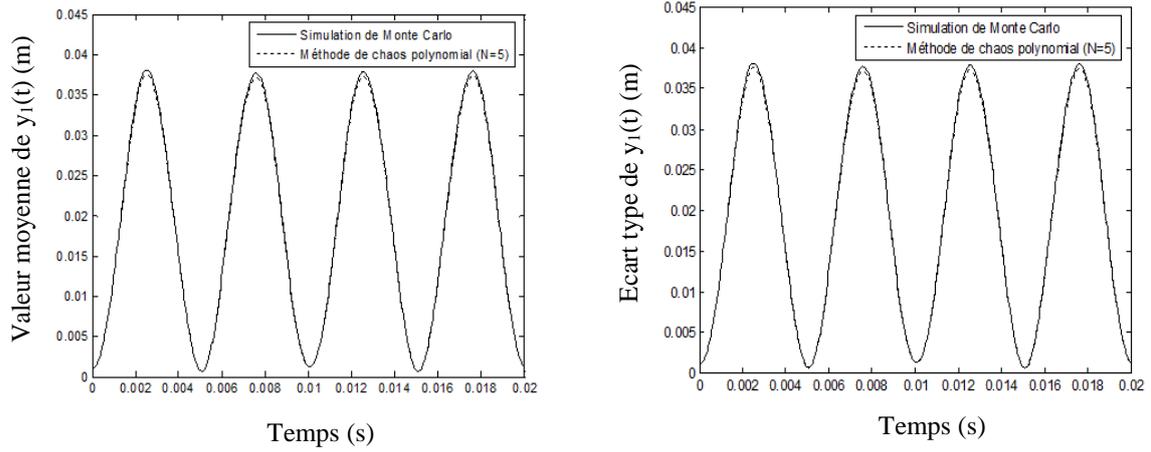


Figure 4. 6. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $y_1(t)$  pour  $\sigma_{c_x} = \sigma_{c_y} = 5\%$

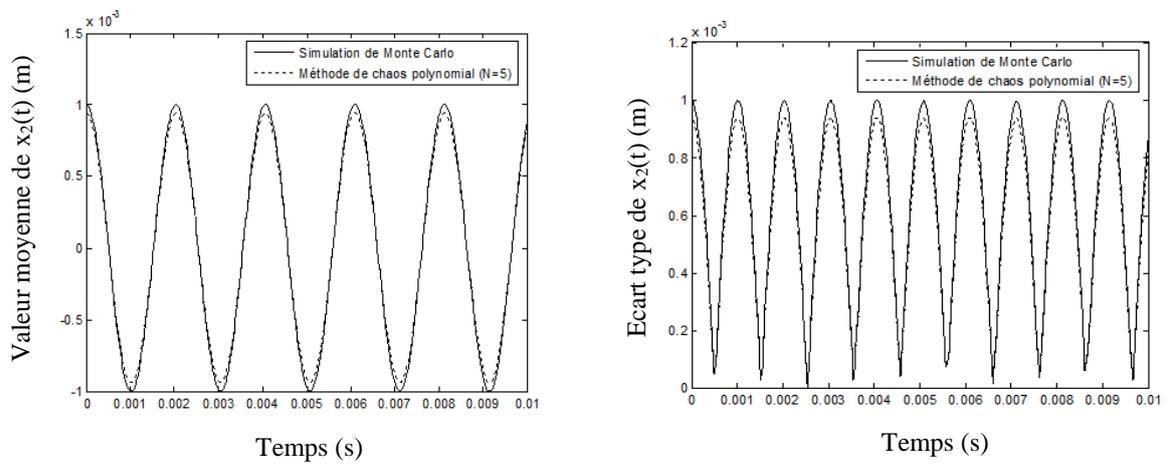


Figure 4. 7. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x_2(t)$  pour  $\sigma_{k_x} = \sigma_{k_y} = 2\%$

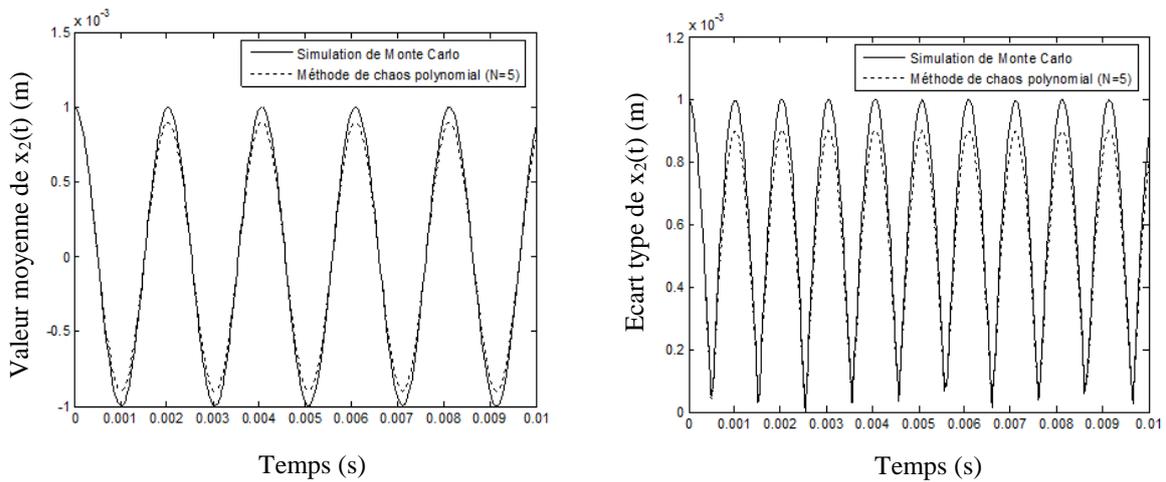


Figure 4. 8. Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x_2(t)$  pour  $\sigma_{c_x} = \sigma_{c_y} = 5\%$

Tout d'abord, l'effet de l'inertie des pales comme un paramètre incertain est considéré. La valeur moyenne et l'écart type de la composante dynamique du déplacement linéaire du premier palier suivant la direction x sont représentés sur les figures 4.3 et 4.4. Ces figures montrent que l'inertie des pales a une influence significative sur la réponse dynamique du système.

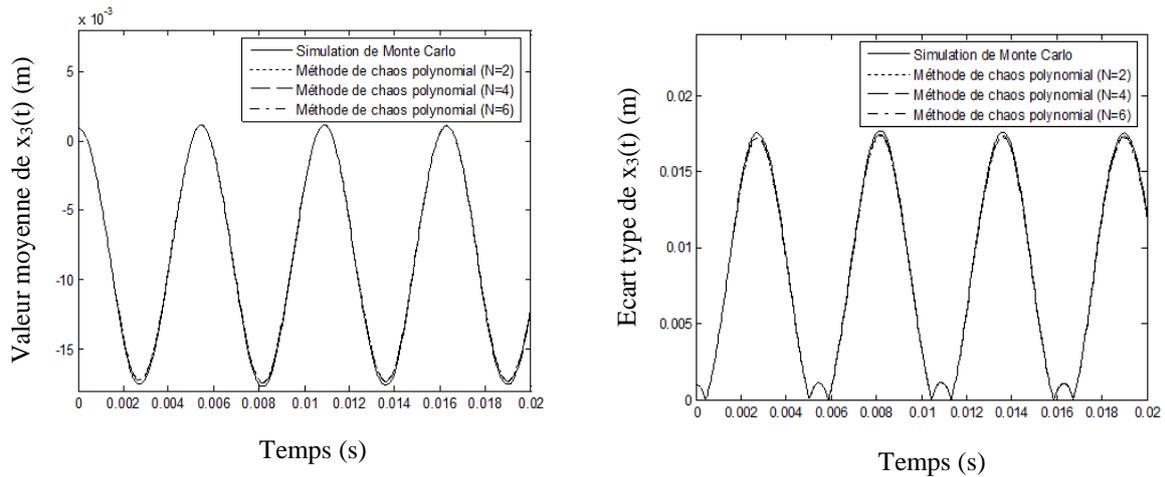
Ensuite, nous sommes intéressés à l'effet des coefficients d'amortissement comme des variables aléatoires. Les figures 4.5 et 4.6 représentent la valeur moyenne et l'écart type de la composante dynamique du déplacement linéaire du premier palier suivant la direction y. En comparant avec le cas où l'inertie des pales est un paramètre incertain, l'effet des coefficients d'amortissement est moins important. On peut constater aussi la bonne adéquation entre les résultats obtenus par la méthode de chaos polynomial et la méthode référentielle de Monte Carlo.

Les figures 4.7 et 4.8 représentent la valeur moyenne et l'écart type de la composante dynamique du déplacement linéaire du deuxième palier suivant la direction x considérant la rigidité à la flexion  $k^x$  et la rigidité à la traction-compression  $k^y$  comme des variables aléatoires. Ces résultats montrent que lorsque l'écart type des paramètres incertains augmente de  $\sigma_{k^x} = \sigma_{k^y} = 2\%$  à  $\sigma_{k^x} = \sigma_{k^y} = 5\%$ , l'erreur en utilisant le même ordre ( $N=5$ ) du chaos polynomial augmente aussi.

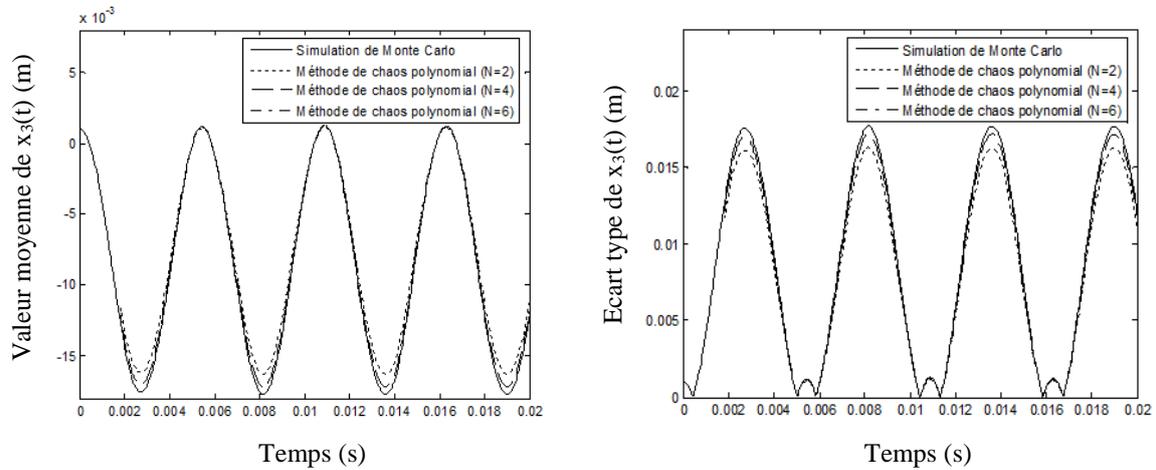
### 3.2.3. Analyse de l'effet des multiples paramètres incertains

Pour voir l'influence de multiples paramètres incertains sur la réponse dynamique d'une transmission d'engrenage dans une éolienne. On suppose que l'inertie des pales  $I_b$ , les coefficients d'amortissement  $c^x$  et  $c^y$ , la rigidité à la flexion  $k^x$  et la rigidité à la traction-compression  $k^y$  sont tous des paramètres incertains considérés simultanément.

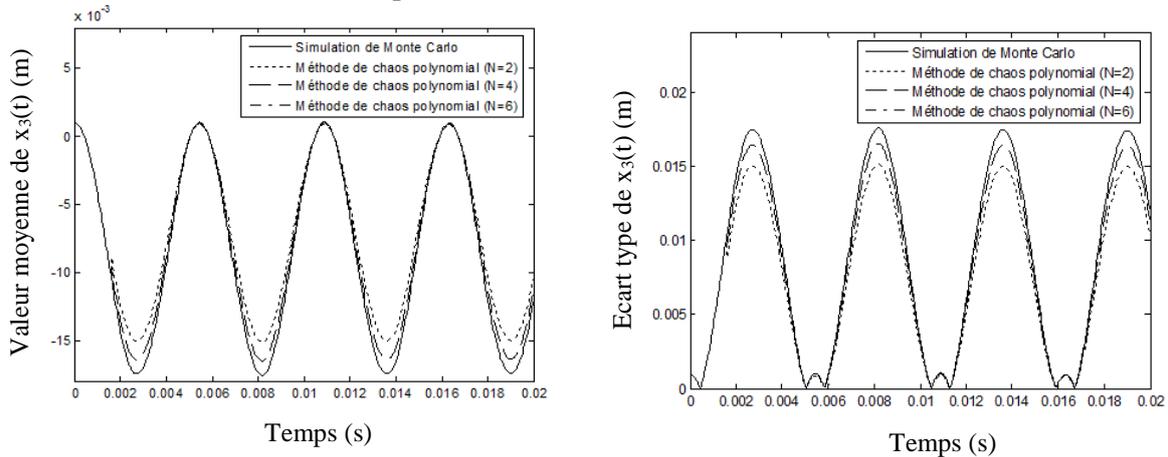
Pour  $\sigma = \sigma_{I_b} = \sigma_{c^x} = \sigma_{c^y} = \sigma_{k^x} = \sigma_{k^y}$ , la valeur moyenne et l'écart type de la composante dynamique du déplacement linéaire du troisième palier suivant la direction x sont représentés sur les figures 4.9-4.11 pour différentes valeurs de l'écart type et de l'ordre du chaos polynomial.



**Figure 4. 9.** Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x_3(t)$  considérant multiple paramètres incertains  $\sigma = 2\%$



**Figure 4. 10.** Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x_3(t)$  considérant multiple paramètres incertains  $\sigma = 5\%$



**Figure 4. 11.** Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x_3(t)$  considérant multiple paramètres incertains  $\sigma = 10\%$

On peut noter que pour des valeurs faibles de l'écart type  $\sigma = 2\%$ , la méthode proposée du chaos polynomial fournit de très bons résultats pour différents ordre du chaos polynomial.

Si l'écart type des paramètres incertains augmente, l'incertitude a un effet important sur la réponse dynamique du système et l'écart entre les résultats de la méthode proposée et le calcul de référence par Monte Carlo augmente. Lorsque  $N=6$  une bonne adéquation entre la méthode proposée et la simulation de Monte Carlo pour différentes valeurs de l'écart type des paramètres incertains.

### 3.3. Etude avec la méthode de perturbation

#### 3.3.1. Analyse de l'effet des paramètres incertains

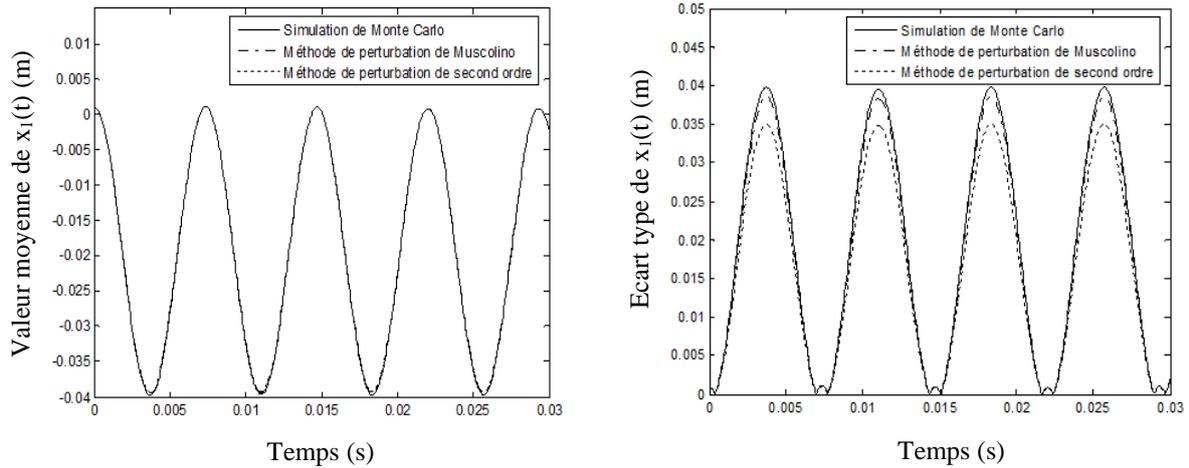
L'inertie des pales  $I_b$ , les coefficients d'amortissement  $c^x$  et  $c^y$ , la rigidité à la flexion  $k^x$  et la rigidité à la traction-compression  $k^y$  sont supposés des variables aléatoires indépendantes.

Les valeurs moyennes et les écarts type des composantes dynamiques des déplacements linéaires du premier suivant les deux directions  $x$  et  $y$  et du deuxième palier suivant la direction  $x$  ont été calculés avec la méthode de perturbation de second ordre et la méthode proposée de Muscolino. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus avec la simulation de Monte Carlo en utilisant 100.000 simulations.

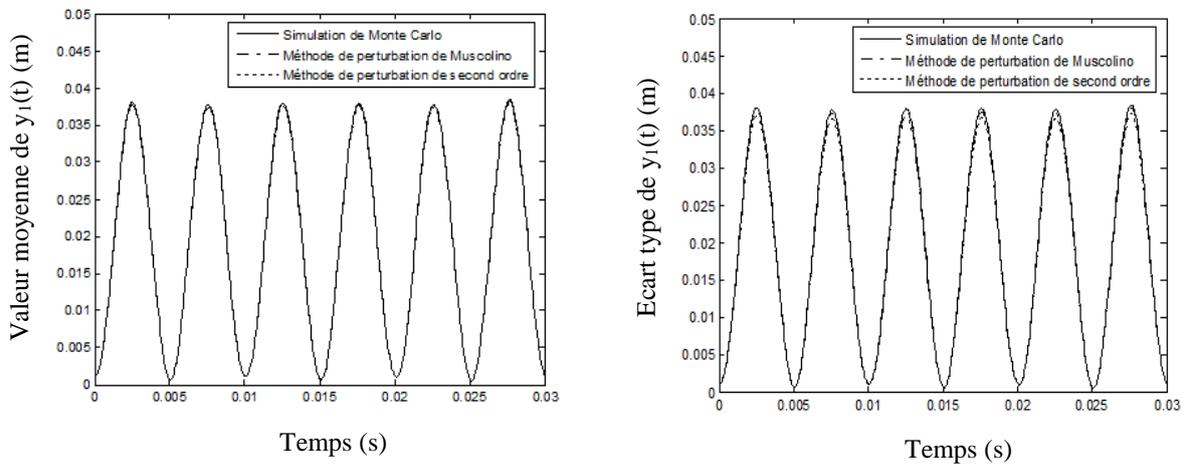
Les résultats sont représentés sur les figures 4.12-4.14, considérant un seul paramètre incertain à chaque fois, afin de mieux comprendre l'influence de chaque paramètre du système.

Les résultats de la réponse dynamique des valeurs moyennes sont très satisfaisants. Les valeurs moyennes instantanées des déplacements sont confondues avec les solutions référentielles de Monte Carlo.

Lorsque les résultats des écarts type des déplacements sont considérés, une bonne précision de la méthode proposée de Muscolino par rapport à la méthode de perturbation de second ordre est révélée dans tous les cas étudiés. La supériorité est évidente étant donné que la méthode proposée de Muscolino, qui est une approximation de premier ordre, nécessite moins d'effort de calcul.

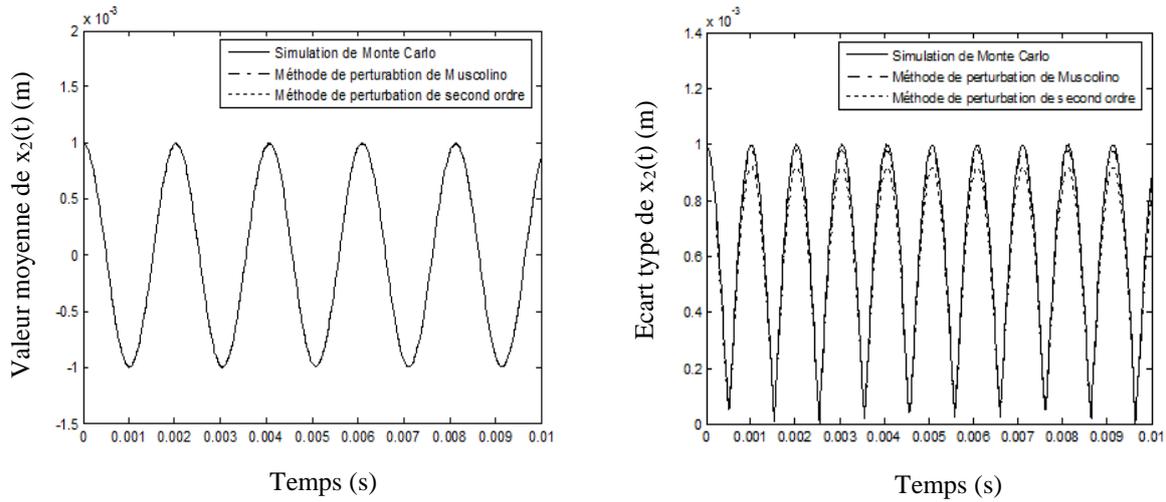


**Figure 4. 12.** Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x_1(t)$  pour  $\sigma_{I_b} = 4\%$



**Figure 4. 13.** Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $y_1(t)$  pour  $\sigma_{c_x} = \sigma_{c_y} = 10\%$

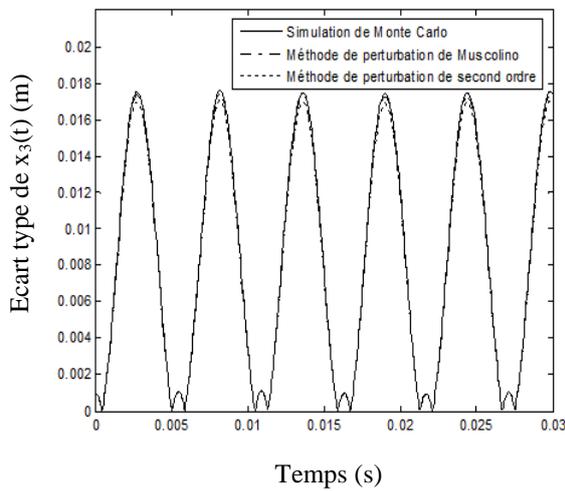
La limite de l'écart-type des paramètres incertains est différente pour chaque paramètre considéré. Haute incertitude des coefficients d'amortissement peut être effectuée par la méthode proposée telle que représentée sur la figure 4.13 avec un écart-type  $\sigma_{c_x} = \sigma_{c_y} = 10\%$ . Moyenne incertitude dans la rigidité à la flexion et la rigidité à la traction-compression peut être effectuée par la méthode proposée comme représentée sur la figure 4.14 avec un écart type  $\sigma_{k_x} = \sigma_{k_y} = 8\%$ . L'applicabilité de la méthode proposée de Muscolino est également satisfaisante. Les erreurs sont toujours acceptables. D'autre part, la méthode proposée de Muscolino n'est pas bien adaptée pour le cas l'inertie des pales est une variable aléatoire. Une valeur de 4% de l'écart type de l'inertie des pales (figure 4.12) peut être considérée comme un seuil à ne pas dépasser.



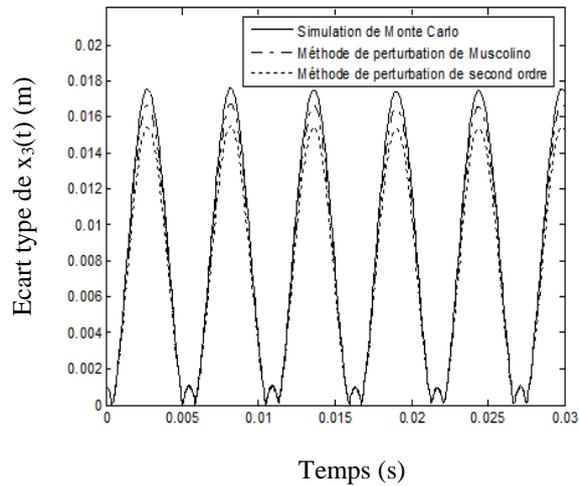
**Figure 4. 14.** Valeur moyenne instantanée et l'écart type de  $x_2(t)$  pour  $\sigma_{k^x} = \sigma_{k^y} = 8\%$

**3.3.2. Analyse de l'effet des multiples paramètres incertains**

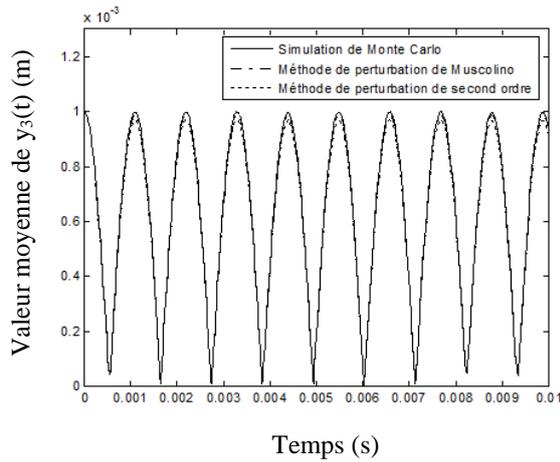
Pour voir l'influence de multiples paramètres incertains sur la réponse dynamique d'une transmission d'engrenage dans une éolienne. On suppose que l'inertie des pales  $I_b$ , les coefficients d'amortissement  $c^x$  et  $c^y$ , la rigidité à la flexion  $k^x$  et la rigidité à la traction-compression  $k^y$  sont tous des paramètres incertains considérés simultanément.



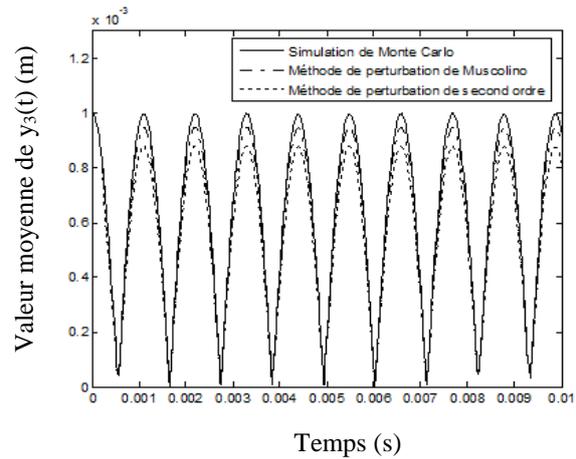
**Figure 4.15.** Ecart type de  $x_3(t)$  considérant multiple paramètres incertains  $\sigma=2\%$



**Figure 4.16.** Ecart type de  $x_3(t)$  considérant multiple paramètres incertains  $\sigma=8\%$



**Figure 4.17.** Ecart type de  $y_3(t)$  considérant multiple paramètres incertains  $\sigma=2\%$

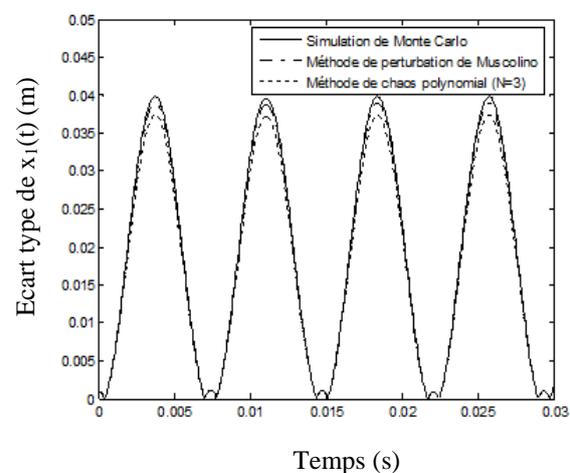
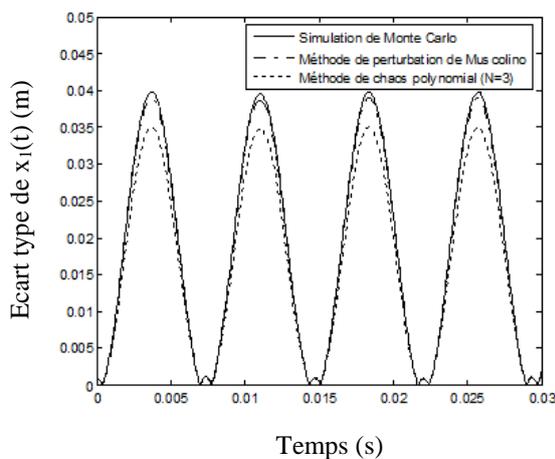


**Figure 4.18.** Ecart type de  $y_3(t)$  considérant multiple paramètres incertains  $\sigma=8\%$

Pour  $\sigma = \sigma_{I_b} = \sigma_{c_x} = \sigma_{c_y} = \sigma_{k_x} = \sigma_{k_y}$ , l'écart type de la composante dynamique du déplacement linéaire du troisième palier suivant les deux directions x et y est représenté sur les figures 4.15-4.18 pour différentes valeurs de l'écart type. On peut constater que pour une valeur faible de l'écart type  $\sigma = 2\%$ , une bonne adéquation entre la méthode proposée de Muscolino et la méthode de perturbation de second ordre par rapport à la simulation de Monte Carlo. L'erreur augmente lorsque l'écart type de multiples paramètres incertains augmente.

### 3.4. Comparaison entre les différentes méthodes

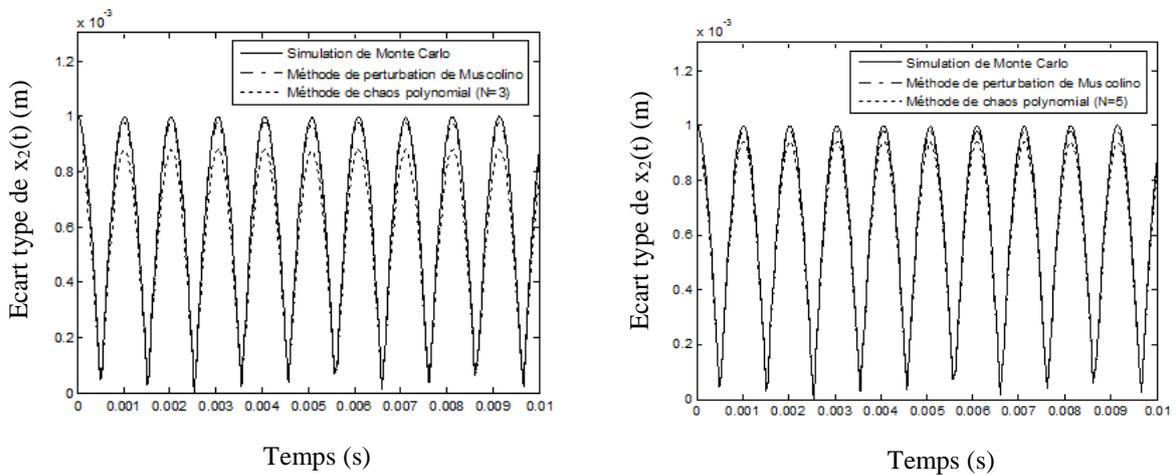
Dans cette section, les résultats obtenus avec la méthode de perturbation de Muscolino sont comparés à ceux obtenus avec la méthode de chaos polynomial et la simulation de Monte Carlo en utilisant 100.000 simulations.



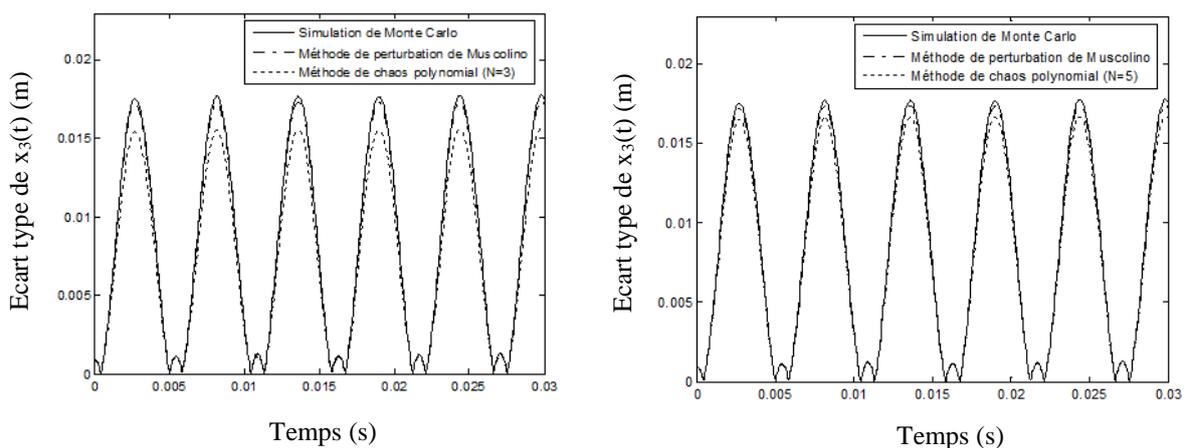
**Figure 4. 19.** Ecart type de  $x_1(t)$  considérant multiple paramètres incertains

On suppose que l'inertie des pales  $I_b$ , les coefficients d'amortissement  $c^x$  et  $c^y$ , la rigidité à la flexion  $k^x$  et la rigidité à la traction-compression  $k^y$  sont tous des paramètres incertains considérés simultanément.

Pour  $\sigma = \sigma_{I_b} = \sigma_{c^x} = \sigma_{c^y} = \sigma_{k^x} = \sigma_{k^y}$ , l'écart type de la composante dynamique du déplacement linéaire de trois paliers suivant la direction x est représenté sur les figures 4.19-4.21 pour différent ordre du chaos polynomial. Ces figures montrent que la méthode de perturbation de Muscolino est plus efficace que la méthode du chaos polynomial et surtout elle approche mieux la solution référentielle de Monte Carlo. Lorsque l'ordre du chaos polynôme augmente de  $N = 3$  à  $N = 5$ , l'erreur diminue et la méthode du chaos approche mieux la simulation de Monte Carlo.



**Figure 4. 20.** Ecart type de  $x_2(t)$  considérant multiple paramètres incertains



**Figure 4. 21.** Ecart type de  $x_3(t)$  considérant multiple paramètres incertains

## 4. Comportement dynamique d'un système d'engrenage d'éolienne avec la méthode d'analyse par intervalles

### 4.1. Formulation théorique

On considère un système mécanique à  $N$  degrés de liberté. Les équations de mouvement décrivant la vibration forcée de ce système sont les suivantes:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t) \quad (4.16)$$

Avec  $M = (m_{ij})$ ,  $C = (c_{ij})$  et  $K = (k_{ij})$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité.  $F(t) = (f_i(t))$  est le vecteur des forces extérieures.  $x(t) = (x_i(t))$ ,  $\dot{x}(t) = (\dot{x}_i(t))$  et  $\ddot{x}(t) = (\ddot{x}_i(t))$  sont les vecteurs de déplacement, de vitesse et d'accélération.

Par analyse d'éléments finis, on sait que la matrice masse  $M = (m_{ij})$ , la matrice d'amortissement  $C = (c_{ij})$ , la matrice rigidité  $K = (k_{ij})$  et le vecteur des forces extérieures  $F(t) = (f_i(t))$  dépendent du vecteur paramètre du système mécanique  $a = (a_i)$  et peuvent être exprimés en fonction du vecteur paramètre  $a = (a_i)$  :

$$M = M(a) = (m_{ij}(a)), C = C(a) = (c_{ij}(a)), K = K(a) = (k_{ij}(a)), F(t) = F(a, t) = (f_i(a, t)) \quad (4.17)$$

Avec  $a = (a_i)$  est un vecteur de dimension  $m$ . Ainsi, l'équation (4.16) peut être réécrite comme:

$$M(a)\ddot{x}(a, t) + C(a)\dot{x}(a, t) + K(a)x(a, t) = F(a, t) \quad (4.18)$$

On suppose que le vecteur paramètre  $a = (a_i)$  appartient à un vecteur intervalle borné :

$$a \in a^I = [\underline{a}, \bar{a}] = (a_i^I), \quad a_i \in a_i^I = [\underline{a}_i, \bar{a}_i] \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.19)$$

Avec  $\bar{a} = (\bar{a}_i)$  et  $\underline{a} = (\underline{a}_i)$  sont les bornes supérieures et inférieures de paramètre  $a = (a_i)$ .

A partir de la méthode d'intervalle, on sait que l'équation (4.19) décrit un système de dimension  $m$ .

La borne supérieure et inférieure de la réponse dynamique du système sont données par :

$$\mathbf{x}^l(\mathbf{a}, t) = [\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t), \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t)] = (\mathbf{x}_i^l(\mathbf{a}, t)) \quad (4.20)$$

$$\text{Avec } \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) = (\bar{x}_i(\mathbf{a}, t)) \text{ et } \underline{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) = (\underline{x}_i(\mathbf{a}, t)) \quad (4.21)$$

Avec

$$\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) = \max \{ \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) : \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) \in \mathbf{R}^n, \mathbf{M}(\mathbf{a})\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) + \mathbf{C}(\mathbf{a})\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) + \mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{x}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{a}, t), \mathbf{a} \in \mathbf{a}^l \} \quad (4.22)$$

Et

$$\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) = \min \{ \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) : \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) \in \mathbf{R}^n, \mathbf{M}(\mathbf{a})\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) + \mathbf{C}(\mathbf{a})\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t) + \mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{x}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{a}, t), \mathbf{a} \in \mathbf{a}^l \} \quad (4.23)$$

Dans la suite, notre objectif est de déterminer la réponse dynamique du système par la méthode des intervalles.

#### 4.1.1. Méthode d'analyse par intervalles

On peut définir le vecteur de valeur nominale du vecteur paramètre  $\mathbf{a}$  :

$$\mathbf{a}^c(\mathbf{a}_i^c) = m(\mathbf{a}^l) = \frac{(\bar{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}})}{2}, \mathbf{a}_i^c = m(\mathbf{a}_i^l) = \frac{(\bar{a}_i + \underline{a}_i)}{2} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.24)$$

Et l'écart d'amplitude du vecteur paramètre  $\mathbf{a}$  :

$$\Delta \mathbf{a} = (\Delta a_i) = \text{rad}(\mathbf{a}^l) = \frac{(\bar{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}})}{2}, \Delta a_i = \text{rad}(a_i^l) = \frac{(\bar{a}_i - \underline{a}_i)}{2} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.25)$$

L'intervalle du vecteur paramètre  $\mathbf{a}$  est décomposé en la somme de la valeur nominale et l'écart d'amplitude :

$$\mathbf{a}^l = [\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] = [\mathbf{a}^c - \Delta \mathbf{a}, \mathbf{a}^c + \Delta \mathbf{a}] = [\mathbf{a}^c, \mathbf{a}^c] + [-\Delta \mathbf{a}, \Delta \mathbf{a}] = \mathbf{a}^c + \Delta \mathbf{a}^l = \mathbf{a}^c + \Delta \mathbf{a} [-1, 1] = \mathbf{a}^c + \Delta \mathbf{a} \mathbf{e}_\Delta \quad (4.26)$$

$$\text{Avec } \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^c + \Delta \mathbf{a}, \underline{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^c - \Delta \mathbf{a}, \Delta \mathbf{a}^l = [-\Delta \mathbf{a}, \Delta \mathbf{a}], \mathbf{e}_\Delta = [-1, 1]$$

En termes d'expression (4.26), le vecteur paramètre  $\mathbf{a}$  peut être écrit sous la forme suivante:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^c + \delta \mathbf{a}, |\delta \mathbf{a}| \leq \Delta \mathbf{a} \quad (4.27)$$

Ou sous forme :

$$a_i = a_i^c + \delta a_i, |\delta a_i| \leq \Delta a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.28)$$

En utilisant la série de Taylor de la réponse dynamique  $x_i(a, t), i = 1, 2, \dots, n$  :

$$x_i(a, t) = x_i(a^c + \delta, t) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i(a^c, t)}{\partial a_j} \delta a_j \quad (4.29)$$

Dans lequel

$$\delta a_j \in \Delta a_j^I = [-\Delta a_j, \Delta a_j] \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.30)$$

A partir de l'expression (4.29), on peut obtenir l'intervalle de la réponse dynamique du système mécanique :

$$x_i^I(a, t) = x_i(a^c, t) + \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial x_i(a^c, t)}{\partial a_j} \right| \Delta a_j^I \quad (4.31)$$

A partir de l'équation (4.31), on peut déterminer la borne supérieure de la réponse dynamique du système mécanique:

$$\bar{x}_i(a, t) = x_i(a^c, t) + \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial x_i(a^c, t)}{\partial a_j} \right| \Delta a_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.32)$$

Et la borne inférieure :

$$\underline{x}_i(a, t) = x_i(a^c, t) - \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial x_i(a^c, t)}{\partial a_j} \right| \Delta a_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.33)$$

#### 4.1.2. Approche probabiliste

Dans cette section, on va déterminer la réponse dynamique d'un système mécanique prise en compte d'incertitudes par l'approche probabiliste.

On suppose que le vecteur paramètre  $a = (a_i)$  est une variable aléatoire. La valeur moyenne de  $a$  est :

$$E(a) = (E(a_i)) = a^E = (a_i^E) \quad (4.34)$$

Pour le vecteur paramètre  $a$ , la variance est définie par :

$$\text{Var}(\mathbf{a}) = (\text{Var}(a_i)) = \mathbf{D}(\mathbf{a}) = (\mathbf{D}(a_i)) \quad (4.35)$$

Après, l'écart type du vecteur paramètre  $\mathbf{a}$  est défini par :

$$\sigma(\mathbf{a}) = (\sigma(a_i)) = \sqrt{\mathbf{D}(\mathbf{a})} = (\sqrt{\mathbf{D}(a_i)}) \quad (4.36)$$

La valeur moyenne de la réponse dynamique est obtenue par :

$$\begin{aligned} E\{x_i(\mathbf{a}, t)\} &= E\{x_i(a^E, t)\} + E\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i(a^E, t)}{\partial a_j} \delta a_j\right) \\ &= x_i(a^E, t) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i(a^E, t)}{\partial a_j} E(a_j - a_j^E) \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.37)$$

Le terme  $E(a_j - a_j^E)$  est nul, on obtient:

$$E\{x_i(\mathbf{a}, t)\} = x_i(a^E, t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.38)$$

Pour la variance de la réponse dynamique  $x_i(\mathbf{a}, t)$ , on obtient:

$$\text{Var}(x_i(\mathbf{a}, t)) = \mathbf{D}(x_i(\mathbf{a}, t)) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial x_i(a^E, t)}{\partial a_j}\right)^2 \mathbf{D}(a_j) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial x_i(a^E, t)}{\partial a_k} \frac{\partial x_i(a^E, t)}{\partial a_l} \text{Cov}(a_k, a_l) \quad (4.39)$$

Lorsque les variables aléatoires du vecteur paramètre  $\mathbf{a}$  sont indépendantes, la variance de la réponse dynamique peut être réduite en :

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_i(\mathbf{a}, t)) &= \mathbf{D}(x_i(\mathbf{a}, t)) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial x_i(a^E, t)}{\partial a_j}\right)^2 \mathbf{D}(a_j) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial x_i(a^E, t)}{\partial a_j} \sigma(a_j)\right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial x_i(a^E, t)}{\partial a_j} \sigma_j\right)^2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

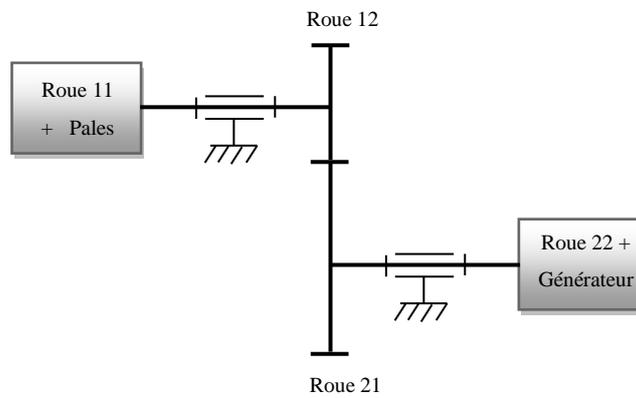
Alors l'écart-type de la réponse dynamique est :

$$\sigma(x_i(\mathbf{a}, t)) = \sqrt{\mathbf{D}(x_i(\mathbf{a}, t))} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial x_i(a^E, t)}{\partial a_j} \sigma_j\right)^2} \quad (4.41)$$

## 4.2. Simulation numérique

### 4.2.1. Modèle dynamique

La figure 4.22 représente un modèle dynamique d'un système d'engrenage simple étage dans une éolienne. La roue 11 et les pales d'éolienne caractérisent le coté moteur. La roue 22 caractérise le coté récepteur. Ce modèle fait intervenir les paliers de maintien et les arbres flexibles. L'interface d'engrènement est modélisée par une raideur fluctuante au cours du temps  $k(t)$  en parallèle avec un amortisseur  $c(t)$ .



**Figure 4. 22.** Modèle dynamique d'un système d'engrenage simple étage dans une éolienne

Les équations différentielles décrivant le comportement dynamique du système (figure 4.22) sont obtenues en utilisant le formalisme de Lagrange. Ces équations sont représentées comme suit :

$$m_1 \ddot{x}_1 - c^x \dot{x}_1 + \sin(\alpha) c(t) \langle L^\delta \rangle \{ \dot{Q} \} + k^x x_1 + \sin(\alpha) k(t) \langle L^\delta \rangle \{ Q \} = 0 \quad (4.42)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 - c^y \dot{y}_1 + \cos(\alpha) c(t) \langle L^\delta \rangle \{ \dot{Q} \} + k^y y_1 + \cos(\alpha) k(t) \langle L^\delta \rangle \{ Q \} = 0 \quad (4.43)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c^x \dot{x}_2 - \sin(\alpha) c(t) \langle L^\delta \rangle \{ \dot{Q} \} + k^x x_2 - \sin(\alpha) k(t) \langle L^\delta \rangle \{ Q \} = 0 \quad (4.44)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c^y \dot{y}_2 - \cos(\alpha) c(t) \langle L^\delta \rangle \{ \dot{Q} \} + k^y y_2 - \cos(\alpha) k(t) \langle L^\delta \rangle \{ Q \} = 0 \quad (4.45)$$

$$I_b \ddot{\theta}_{(1,1)} + k^\theta (\theta_{(1,1)} - \theta_{(1,2)}) = Cm \quad (4.46)$$

$$I_{(2,1)} \ddot{\theta}_{(2,1)} + r_{(1,2)}^b c(t) \langle L^\delta \rangle \{ \dot{Q} \} - k^\theta (\theta_{(2,1)} - \theta_{(2,2)}) - r_{(2,1)}^b k(t) \langle L^\delta \rangle \{ Q \} = 0 \quad (4.47)$$

$$\mathbf{I}_{(2,1)} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(2,1)} - \mathbf{r}_{(2,1)}^b \mathbf{c}(t) \langle \mathbf{L}^\delta \rangle \{\dot{\mathbf{Q}}\} - \mathbf{k}^0 (\boldsymbol{\theta}_{(2,1)} - \boldsymbol{\theta}_{(2,2)}) - \mathbf{r}_{(2,1)}^b \mathbf{k}(t) \langle \mathbf{L}^\delta \rangle \{\mathbf{Q}\} = 0 \quad (4.48)$$

$$\mathbf{I}_g \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{(2,2)} + \mathbf{k}^0 (\boldsymbol{\theta}_{(2,1)} - \boldsymbol{\theta}_{(2,2)}) = 0 \quad (4.49)$$

Où  $\langle \mathbf{L}^\delta \rangle$  est défini par:

$$\langle \mathbf{L}^\delta \rangle = [\sin(\alpha) \quad -\sin(\alpha) \quad \cos(\alpha) \quad -\cos(\alpha) \quad 0 \quad \mathbf{r}_{(1,2)}^b \quad -\mathbf{r}_{(2,1)}^b \quad 0] \quad (4.50)$$

$\mathbf{r}_{(1,2)}^b, \mathbf{r}_{(2,1)}^b$  représentent les rayons de base.  $\alpha$  est l'angle de pression.

$\{\mathbf{Q}(t)\}$  étant le vecteur des coordonnées généralisés du modèle, il est sous la forme :

$$\{\mathbf{Q}(t)\} = [x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \theta_{(1,1)} \quad \theta_{(1,2)} \quad \theta_{(2,1)} \quad \theta_{(2,2)}]^T \quad (4.51)$$

#### 4.2.1. Analyse dynamique du système avec des paramètres déterministes

Le rapport de transmission est l'un des caractéristiques les plus importantes qui permettent de montrer le degré de fiabilité et de stabilité du système de transmission de puissance dans une machine éolienne. Ce rapport est considéré parmi les premières consignes indiquées dans le cahier de charge du système à engrenages.

Le rapport de transmission intervient cinématiquement dans le système en reliant la vitesse de sortie à la vitesse d'entrée. Dans plusieurs travaux, ce rapport est supposé constant. En réalité, il fluctue autour d'une valeur moyenne qui caractérise le mouvement du corps rigide. La principale cause de ces fluctuations est due à la flexibilité des composants du système tels que les dents d'engrenages, les arbres intermédiaires et les paliers.

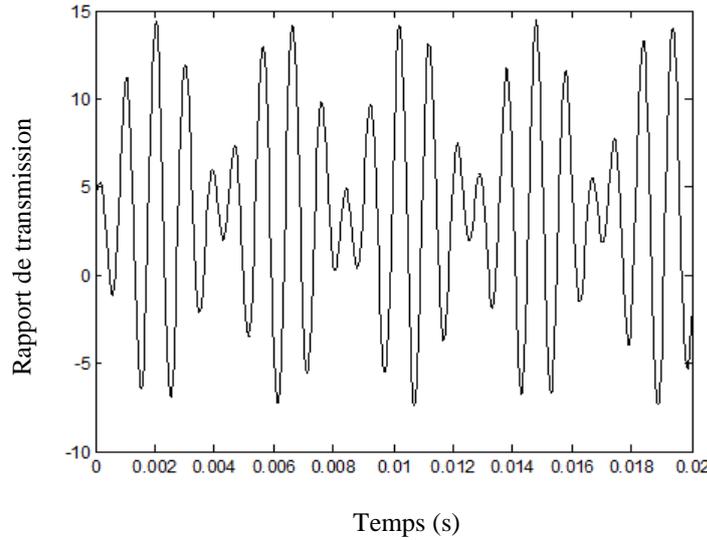
La figure 4.23 représente le rapport de transmission en fonction du temps. On peut noter que l'amplitude du rapport de transmission fluctue au tour d'une valeur positive.

Afin de modéliser approximativement la vitesse du vent et pour simplifier la problématique, on a considéré que la vitesse du vent est une combinaison d'une composante constante  $V_{\text{moy}}$  et d'une composante variable périodiquement, dont la formule est (Camblong 2003):

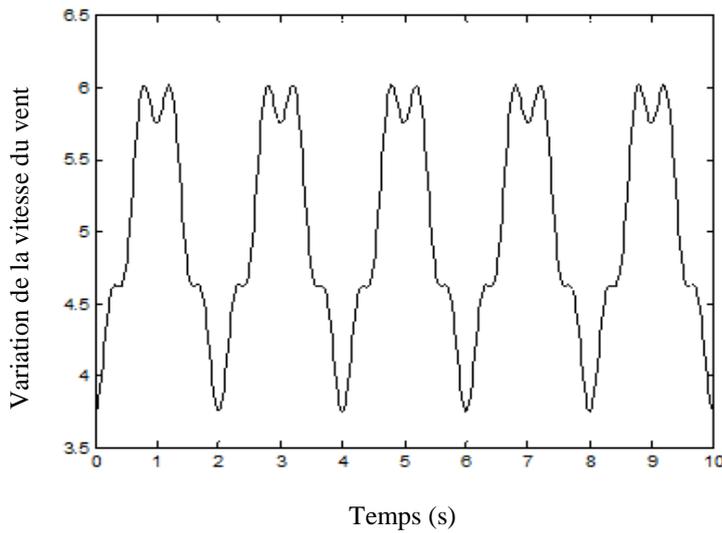
$$V(t) = V_{\text{moy}} [1 - 0.2 \cos(\omega_1 t) - 0.05 \cos(\omega_2 t)] \quad (4.52)$$

Avec  $(\omega_1 = \pi)$  et  $(\omega_2 = 4\pi)$  sont les pulsations [rad/s].

La figure 4.24 représente la variation de la vitesse du vent.



**Figure 4. 23.** Rapport de transmission



**Figure 4. 24.** Variation de la vitesse du vent

#### 4.2.2. Comportement dynamique du système avec des paramètres incertains

Les coefficients d'amortissement  $c^x$  et  $c^y$ , la rigidité à la flexion  $k^x$ , la rigidité à la traction-compression  $k^y$ , la rigidité torsionnelle  $k^\theta$  et l'inertie des pales  $I_b$  sont supposés des paramètres incertains et sont modélisés par des intervalles comme suit:  $c^x \in [97,103] \text{Ns/m}$ ,  $c^y \in [97,103] \text{Ns/m}$ ,  $k^x \in [97 \times 10^6, 103 \times 10^6] \text{N/m}$ ,  $k^y \in [97 \times 10^6, 103 \times 10^6] \text{N/m}$ ,  $k^\theta \in [97 \times 10^4, 103 \times 10^4] \text{Nm/rad}$ ,  $I_b \in [5.82 \times 10^{-3}, 6.18 \times 10^{-3}] \text{kg m}^2$ .

On suppose aussi que les coefficients d'amortissement  $c^x$  et  $c^y$ , la rigidité à la flexion  $k^x$ , la rigidité à la traction-compression  $k^y$ , la rigidité torsionnelle  $k^\theta$  et l'inertie des pales  $I_b$  sont des paramètres incertains et régis par une loi de distribution gaussienne avec les valeurs moyennes sont :  $E(c^x) = 100 \text{ Ns/m}$ ,  $E(c^y) = 100 \text{ Ns/m}$ ,  $E(k^x) = 10^8 \text{ N/m}$ ,  $E(k^y) = 10^8 \text{ N/m}$ ,  $E(k^\theta) = 10^6 \text{ Nm/rad}$ ,  $E(I_b) = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$  et les écarts types sont :  $\sigma(c^x) = 3 \text{ Ns/m}$ ,  $\sigma(c^y) = 3 \text{ Ns/m}$ ,  $\sigma(k^x) = 3 \times 10^6 \text{ N/m}$ ,  $\sigma(k^y) = 3 \times 10^6 \text{ N/m}$ ,  $\sigma(k^\theta) = 3 \times 10^4 \text{ Nm/rad}$ ,  $\sigma(I_b) = 0.18 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ .

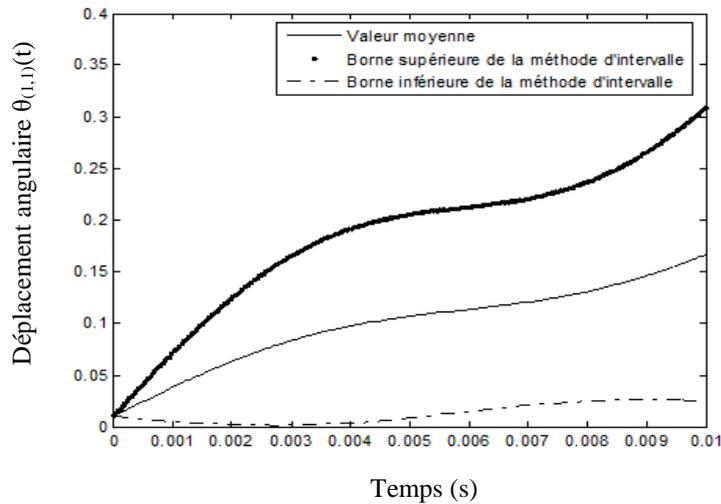


Figure 4. 25. Déplacement angulaire  $\theta_{(1,1)}$  par la méthode d'intervalle

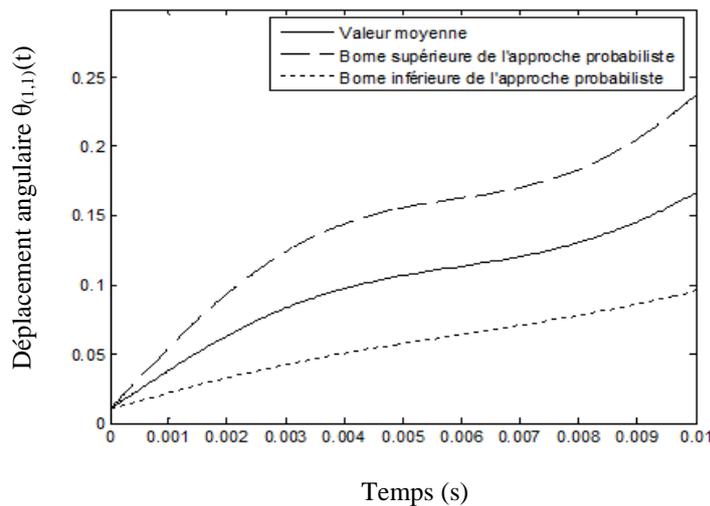
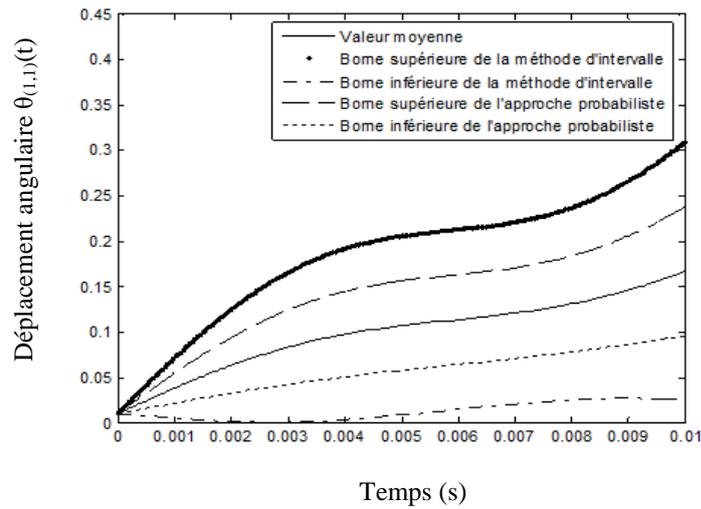
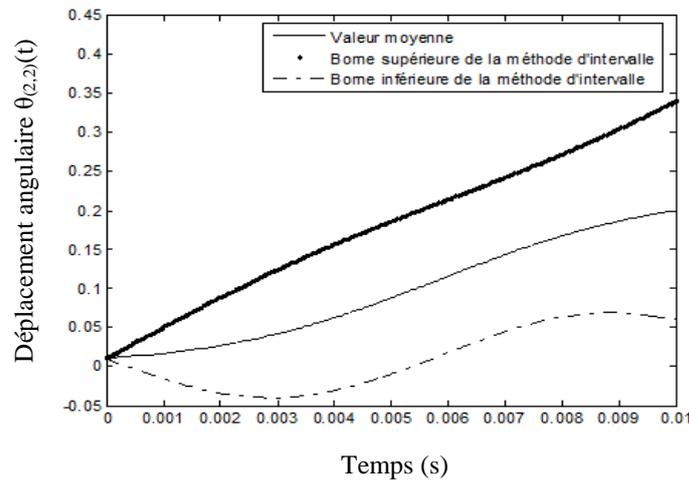


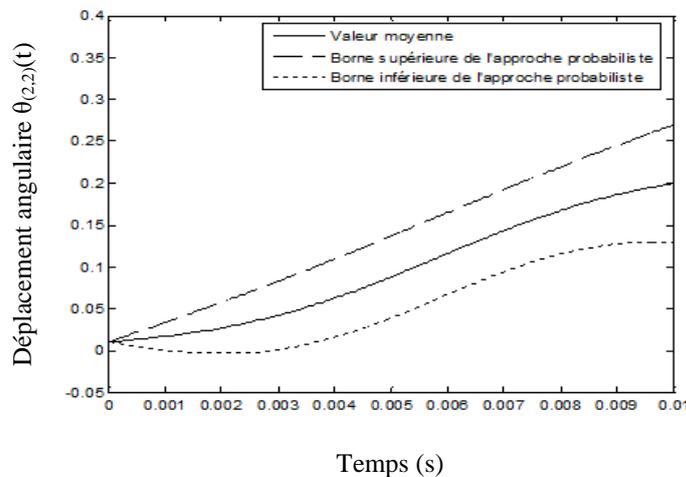
Figure 4. 26. Déplacement angulaire  $\theta_{(1,1)}$  par l'approche probabiliste



**Figure 4. 27.** Comparaison du déplacement angulaire  $\theta_{(1,1)}$  par la méthode d'intervalle et l'approche probabiliste



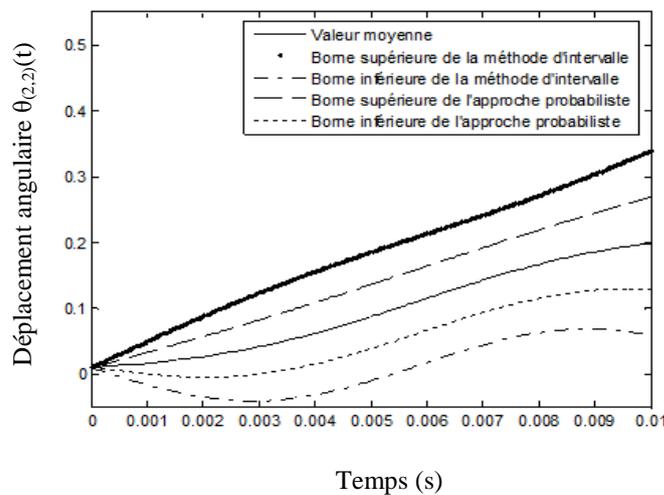
**Figure 4. 28.** Déplacement angulaire  $\theta_{(2,2)}$  par la méthode d'intervalle



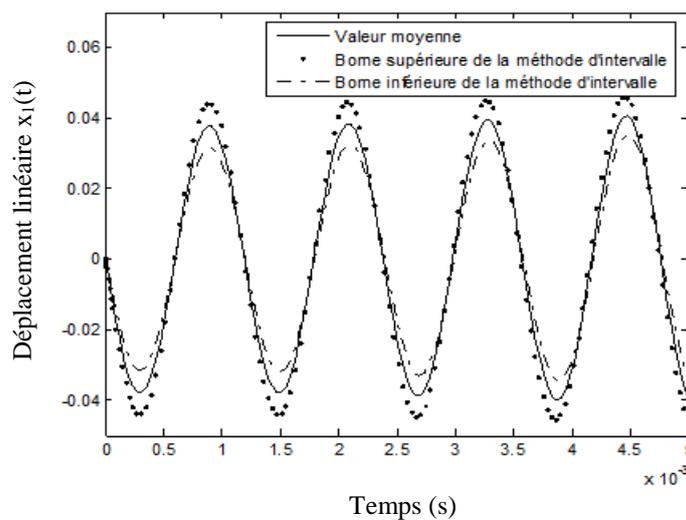
**Figure 4. 29.** Déplacement angulaire  $\theta_{(2,2)}$  par l'approche probabiliste

La région de la réponse dynamique du déplacement angulaire du premier palier  $\theta_{(1,1)}$  et du deuxième palier  $\theta_{(2,2)}$  a été calculée avec la méthode d'analyse par intervalles et l'approche probabiliste. Les résultats sont donnés sur les figures 4.25 et 4.26 pour  $\theta_{(1,1)}$  et sur les figures 4.28 et 4.29 pour  $\theta_{(2,2)}$ .

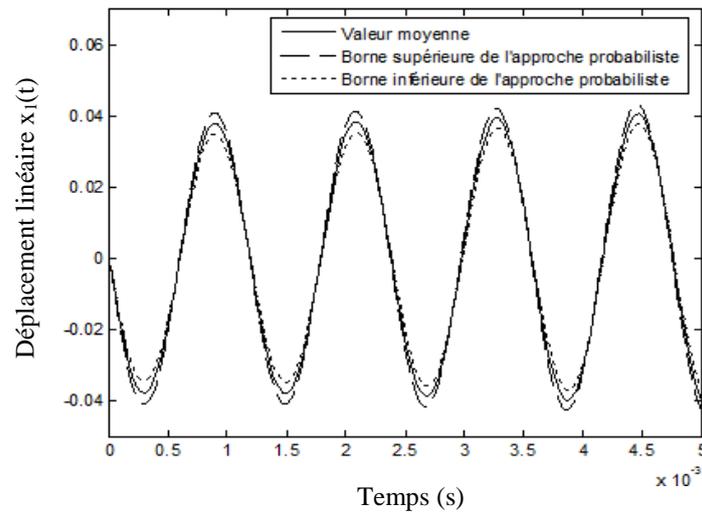
La comparaison de la région de la réponse dynamique du déplacement angulaire du premier palier  $\theta_{(1,1)}$  et du deuxième palier  $\theta_{(2,2)}$  par la méthode d'analyse par intervalles et l'approche probabiliste est présentée sur la figure 4.27 pour  $\theta_{(1,1)}$  et sur la figure 4.29 pour  $\theta_{(2,2)}$ .



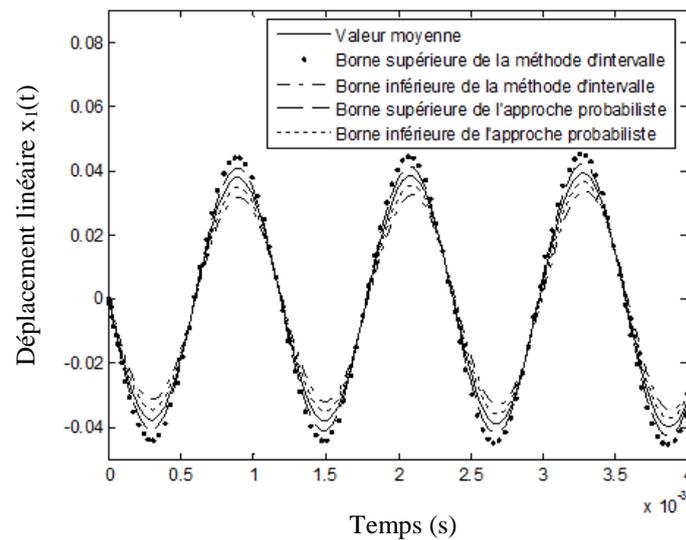
**Figure 4. 30.** Comparaison du déplacement angulaire  $\theta_{(2,2)}$  par la méthode d'intervalle et l'approche probabiliste



**Figure 4. 31.** Déplacement linéaire  $x_1$  par la méthode d'intervalle



**Figure 4. 32.** Déplacement linéaire  $x_1$  par l'approche probabiliste



**Figure 4. 33.** Comparaison du déplacement linéaire  $x_1$  par la méthode d'intervalle et l'approche probabiliste

La région de la réponse dynamique du déplacement linéaire du premier palier suivant la direction  $x$  et du deuxième palier suivant la direction  $y$  a été calculée avec la méthode d'analyse par intervalles et l'approche probabiliste. Les résultats sont donnés sur les figures 4.31 et 4.32 pour le premier palier et sur les figures 4.34 et 4.35 pour le deuxième palier.

La comparaison de la région de la réponse dynamique du déplacement linéaire du premier palier suivant la direction  $x$  et du deuxième palier suivant la direction  $y$  par la méthode d'analyse par intervalles et l'approche probabiliste est présentée sur la figure 4.33 pour le premier palier et sur la figure 4.36 pour le deuxième palier.

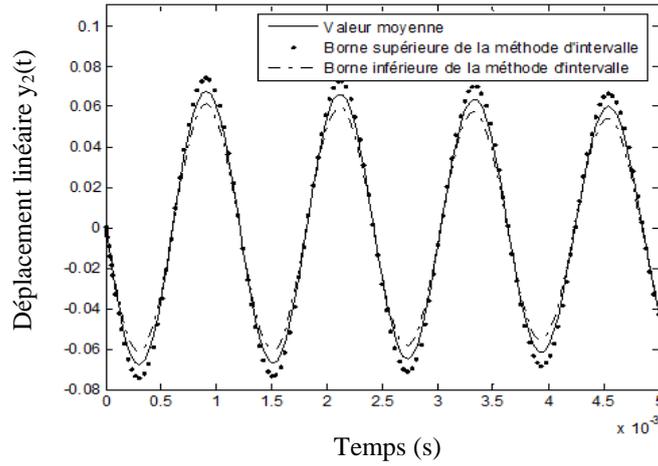


Figure 4. 34. Déplacement linéaire  $y_2$  par la méthode d'intervalle

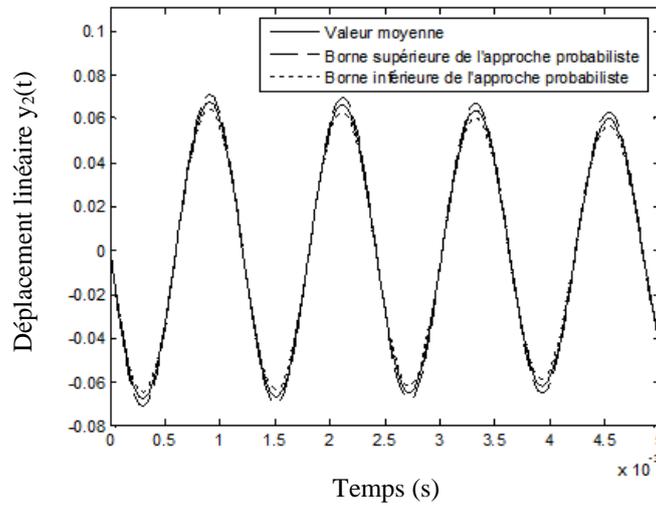


Figure 4. 35. Déplacement linéaire  $y_2$  par l'approche probabiliste

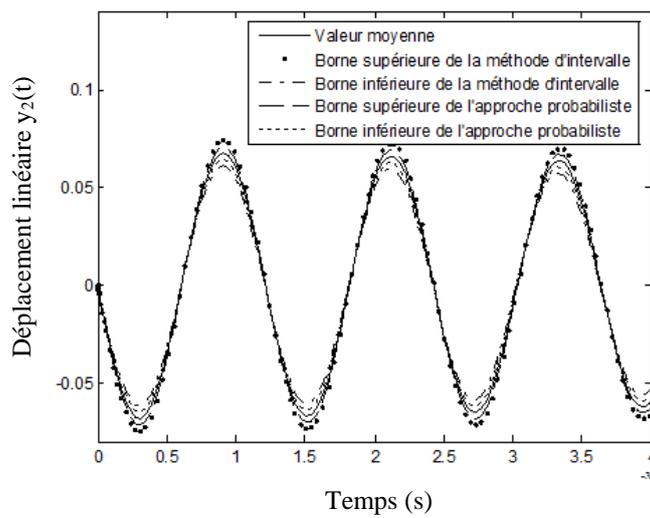


Figure 4. 36. Comparaison du déplacement linéaire  $y_2$  par la méthode d'intervalle et l'approche probabiliste

L'objectif est de déterminer la réponse dynamique d'un système d'engrenage d'éolienne dont les paramètres sont incertains et modélisés par des intervalles en utilisant l'approche probabiliste et la méthode d'analyse par intervalles afin de connaître les avantages et inconvénients en termes de précision et temps de calculs. Ces résultats montrent que la région de la réponse dynamique du système avec la méthode d'analyse par intervalles fournit des intervalles plus grands par rapport à l'approche probabiliste.

La raison qui explique la différence entre les deux approches c'est que l'approche probabiliste a besoin de générer aléatoirement chaque entrée du modèle sur son support borné. Pour l'approche probabiliste, le processus utilisé pour la propagation d'incertitude repose sur un échantillonnage aléatoire. Parce que le nombre de simulation est fini, l'approche probabiliste est incapable de prendre en compte en tirant toutes les valeurs possibles des entrées. En termes de temps de calculs, la méthode d'analyse par intervalles s'avère plus rapide que l'approche probabiliste.

## 5. Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à présenter les différentes techniques de prise en compte des incertitudes pour une transmission par engrenage dans une éolienne comportant des paramètres incertains.

La première partie de ce chapitre a été consacrée à une application de la méthode de perturbation de second ordre, la méthode de perturbation de Muscolino ainsi que la méthode du chaos polynomial pour déterminer la réponse dynamique d'une transmission par engrenage à deux étages dans une éolienne à variables aléatoires. Les résultats ont montré que ces méthodes s'avèrent efficaces en ce qui concerne l'économie en temps de calcul sur tout la méthode de perturbation de Muscolino dont les résultats approchent le mieux les résultats issus de la méthode de Monte Carlo. Dans la deuxième partie, nous avons développé deux approches : l'approche probabiliste et l'approche ensembliste basée sur la méthode d'analyse par intervalles. Les résultats obtenus par l'approche probabiliste ont été comparés à ceux obtenus par la méthode d'analyse par intervalles. En termes de temps de calcul, l'analyse par intervalles est plus rapide par rapport à l'approche probabiliste.

---

---

## **Conclusion générale**

---

---

Le travail de la présente thèse s'est articulé principalement autour de l'étude du comportement dynamique d'une transmission par engrenage comportant des paramètres incertains.

Une première partie de la thèse a été consacrée à une étude bibliographique sur les transmissions par engrenages et les principales sources d'excitations. Nous avons présenté quelques modèles à paramètres concentrés des transmissions par engrenages simple étage et à deux étages traités dans la littérature. Les vibrations dues au phénomène d'engrènement et à l'erreur de transmission sont les grandeurs utilisées pour caractériser les nuisances sonores et définir la qualité d'une transmission par engrenage. Ces différents mécanismes sont illustrés à la première section de ce chapitre. Dans la deuxième section, nous nous sommes intéressés à une synthèse sur les principales sources d'excitation dans les transmissions par engrenages et nous nous sommes intéressés, en particulier, aux variations de la rigidité d'engrènement, aux défauts d'engrenage (défauts de fabrication, défauts de montage, défauts de fonctionnement) ainsi que la fluctuation du couple moteur, la fluctuation du couple de charge et la variation du couple aérodynamique dans le cas des éoliennes.

Les approches de prise en compte des incertitudes sont basées sur des formalismes différents dans la façon d'incorporer les incertitudes, c'est la deuxième étape considérée dans cette thèse. L'approche probabiliste est basée sur une caractérisation des incertitudes par des modèles probabilistes. La simulation de Monte Carlo est couramment utilisée puisqu'elle garanti de très bon résultats. L'un des principaux avantages de cette méthode est qu'elle peut s'appliquer à tous les systèmes linéaires ou non linéaires. Malgré cette garantie, la simulation de Monte Carlo pose de sérieux problèmes puisqu'elle nécessite beaucoup de tirages pour assurer une précision raisonnable. La méthode de perturbation s'avère, quant à elle, inappropriée à traiter des problèmes dont les paramètres incertains possèdent des dispersions importantes. De tous ces points de vue, la méthode basée sur une projection sur un chaos

polynomial offre un intérêt indéniable puisque théoriquement, elle peut être associée, similairement à la méthode de Monte Carlo et d'analyser des comportements dynamiques des systèmes linéaires ou non linéaire. Pour leur part, les méthodes possibilistes, en particulier la méthode d'analyse par intervalles et la méthode floue, offrent l'avantage de ne pas nécessiter des connaissances sur l'évolution de l'incertitude dans ses intervalles de dispersion. Tout au long de ce chapitre, plusieurs applications numériques dans le domaine de mécanique ont été présentées pour illustrer les approches proposées.

Dans une troisième étape, nous nous sommes intéressés à l'étude de la réponse dynamique d'une transmission par engrenage simple étage comportant des paramètres incertains. Ces paramètres incertains ont été supposés au niveau des coefficients d'amortissement, la rigidité à la flexion, la rigidité à la traction-compression, la rigidité torsionnelle et le coefficient du frottement entre denture. Nous avons présenté les formulations théoriques des méthodes de prise en compte des incertitudes. Nous avons développé la méthode de perturbation de second ordre, la méthode proposée de Muscolino ainsi que la méthode de projection sur un chaos polynomial. Les résultats obtenus par ces méthodes ont été confrontés à la méthode référentielle de Monte Carlo. La comparaison a montré que les méthodes de perturbation s'avèrent efficaces en ce qui concerne l'économie en temps de calcul, surtout la méthode de perturbation de Muscolino dont les résultats approchent le mieux les résultats issus de la simulation de Monte Carlo. L'ordre du chaos polynomial joue un rôle important. Plus il est élevé, meilleure est la solution trouvée.

Finalement, nous nous sommes intéressés à l'étude de la réponse dynamique d'un système d'engrenage dans une éolienne à variables aléatoires. Ces variables aléatoires ont été supposés au niveau des coefficients d'amortissement, la rigidité à la flexion, la rigidité à la traction-compression, la rigidité torsionnelle et l'inertie des pales. La première partie de ce chapitre a été consacrée à une application de la méthode de perturbation de second ordre, la méthode de perturbation de Muscolino ainsi que la méthode du chaos polynomial. Les méthodes proposées ont été mises en œuvre sur une transmission par engrenage à deux étages dans une éolienne à paramètres incertains pour montrer leur efficacité. Tous les résultats obtenus ont montré, de part la précision comparé à la méthode référentielle de Monte Carlo, l'adéquation de l'utilisation de ces méthodes à l'étude et à l'analyse du comportement dynamique du système. Dans la deuxième partie, nous avons développé deux approches : l'approche probabiliste et l'approche ensembliste basée sur la méthode d'analyse par intervalles. L'objectif était de détailler les formulations théoriques de chacune de ces approches. Cela a

permis de comparer les deux approches afin de connaître les avantages et inconvénients en termes de précision et temps de calculs. Les résultats obtenus ont montré que la méthode d'analyse par intervalles fournit des intervalles plus grands par rapport à l'approche probabiliste. En termes de temps de calculs, l'analyse par intervalles s'avère plus rapide que l'approche probabiliste.

De nombreuses perspectives sont envisageables à la suite de ce travail :

Les méthodes de prise en compte des incertitudes étant évaluées sur un simple système d'engrenage, il n'a pas été possible de quantifier et de comparer les méthodes en temps de calcul même si les faibles nombre et volume de calcul relevés nous donnent déjà une forte indication sur le potentiel des méthodes considérées à permettre une diminution considérable du temps de calcul par rapport aux méthodes classiques de Monte Carlo. La première perspective qui se dégage du travail réalisé est d'appliquer les différentes méthodes développées sur un système industriel ayant un nombre de degrés de liberté beaucoup plus élevé.

Quand la variation des paramètres de conception d'un système d'engrenage n'est pas négligeable, le bon fonctionnement de ce système n'est pas assuré. Cependant, il peut être exprimé en termes de probabilité à satisfaire certains critères de performance. Dans la terminologie de l'ingénierie, cette probabilité est appelée fiabilité. Une deuxième perspective est alors d'étudier la fiabilité d'un système d'engrenage en utilisant les méthodes les plus employées telles que la simulation de Monte Carlo et les méthodes de résolution analytique : méthode d'analyse de fiabilité du premier ordre (F.O.R.M.) et du deuxième ordre (S.O.R.M.).

---

---

# Publications scientifiques

---

---

Ce travail de recherche a abouti aux publications scientifiques suivantes :

## 1. Articles

- A1. Guerine A., El Hami A., Fakhfakh T., Haddar M., A polynomial chaos method to the analysis of the dynamic behavior of spur gear system, *Structural Engineering and Mechanics, An International Journal*, vol. 53, n°4, pp. 819-831 (2015).**
- A2. Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., A perturbation approach for the dynamic analysis of one stage gear system with uncertain parameters, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 92, pp. 113-126 (2015).**
- A3. Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., A polynomial chaos method for the analysis of the dynamic behavior of uncertain gear friction system, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 59, pp. 76-84 (2016).**
- A4. Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., Dynamic response of a spur gear system with uncertain parameters, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Accepted for publication, February (2016).**
- A5. Beyaoui M., Guerine A., Walha L., El Hami A., Fakhfakh T., Haddar M., Dynamic behavior of the one stage gear system with uncertainties, *Structural Engineering and Mechanics, An International Journal*, vol. 58, n°3, pp. 443-458 (2016).**
- A6. Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., Dynamic response of a Spur gear system with uncertain friction coefficient, *Advances in Engineering Software*, doi:10.1016/j.advensoft.2016.05.009 (2016).**

## 2. Communications

- C1. Guerine A., Driss Y., Beyaoui M., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., A polynomial chaos method for the analysis of uncertain spur gear system, *Proceeding of the Second Workshop on Mechatronic System JSM 2014*, March 17-19, Mahdia-Tunisia, 2014.**

- C2. Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., Dynamic response of an assembly defect in the spur gear system with uncertainties, *Proceedings of the 2nd International Symposium on Uncertainty Quantification and stochastic Modeling Uncertainties 2014*, June 23-27, Rouen-France, 2014.**
- C3. Guerine A., Driss Y., Beyaoui M., Walha L., Fakhfakh T., El Hami A., Haddar M., Dynamic behavior of a spur gear system with uncertain friction coefficient, *International Conference Multiphysics Modelling and Simulation for Systems Design*, December 17-19, Sousse-Tunisia, 2014.**
- C4. Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., Dynamic response of a spur gear system using perturbation method, *12ème Congrès de Mécanique*, Avril 21-24, Casablanca- Maroc, 2015.**
- C5. Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., Dynamic response of gear friction system using polynomial chaos method, *ATAVI, International Conference on Acoustics and Vibration*, March 21-23, Hammamet-Tunisia, 2016.**
- C6. Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., Effect of assembly defect on the dynamic behavior of gear system under uncertainty, *6th International Symposium on Aircraft ACMA*, May 11-13, Agadir-Morocco, 2016.**
- C7. Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., Uncertainty analysis of geared transmission friction system, *International Conference on Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis*, May 23-25, Marrakech-Morocco, 2016.**

---

---

## Références bibliographiques

---

---

- Abboudi K., Contribution à l'étude et à l'analyse du comportement dynamique des éoliennes à axes horizontaux, Thèse de doctorat, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, 2012.
- Abboudi K., Walha L., Driss Y., Maatar M., Haddar M., « Effects of aerodynamic excitations on the dynamic behavior of helical gear system », *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, vol. 8, n° 2, 2012, p. 178-196.
- Ajmi M., Vex P., « A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears », *Mechanism and Machine Theory*, vol. 40, 2004, p. 173-190.
- Bard C., Modélisation du comportement dynamique des transmissions par engrenages, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1995.
- Benaroya H., Rehak M., «Finite element method in probabilistic structural analysis: A selective review», *Applied Mechanics Reviews ASME*, vol. 41, n° 5, 1988, p. 201-213.
- Bettaieb M. N., Modélisation du comportement mécanique d'engrenages. Couplages entre engrenement et éléments de structures flexibles, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2006.
- Beyaoui M., Guerine A., Walha L., El Hami A., Fakhfakh T., Haddar M., «Dynamic behavior of the one stage gear system with uncertainties», *Structural Engineering and Mechanics, An International Journal*, vol. 58, n°3, 2016c, p. 443-458.
- Bourdon A., Modélisation dynamique globale des boites de vitesses automobile, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1997.
- Breneur C., Eléments de maintenance préventive de machines tournantes dans le cas de défauts combinés d'engrenages et de roulements, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2003.
- Camblong H., Minimisation de l'impact des perturbations d'origine éolienne dans la génération d'électricité par des aérogénérateurs à vitesse variable, Thèse de doctorat, Ecole nationale supérieure d'arts et métiers centre de Bordeaux, 2003.
- Cameron H., Martin W., «The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functional», *Annals of Mathematics*, vol. 48, 1947, p. 385-392.
- Chaari F., Contribution à l'étude du comportement dynamique des trains épicycloïdaux à denture droite en présence de défauts, Thèse de doctorat, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, 2005.

- Chaari F., Fakhfakh T., Hbaieb R., Louati J., Haddar M., « Influence of manufacturing errors on the dynamic behavior of planetary gears», *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 27, n° 7, 2006, p.738-746.
- Chatillon, M-M., Méthodologie de conception robuste appliquée aux trains de véhicules de tourisme, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2005.
- Dessombz, O., Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains, Thèse de doctorat, Ecole Central de Lyon, 2000.
- Dhatt G., Touzot G., Une présentation de la méthode des éléments finis, Edition Maloine, 1984.
- Diab Y., Analyse des pertes de puissance dans les transmissions par engrenages à grande vitesse. Applications aux réducteurs industriels et aux machines textiles, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 2005.
- Didrit O., Analyse par intervalles pour l'automatique : résolution globale et garantie de problèmes non linéaires en robotique et en commande robuste, Thèse doctorat, Université de Parisud, UFR scientifique d'Orsay, 1997.
- Elishakoff I., Renet Y.J., Shinozuka M., «Improved finite element method for stochastic problems», *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 5, n° 5, 1995, p. 833–846.
- Fakhfakh T., Walha L., Louati J., Haddar M., « Effect of manufacturing and assembly defects on two-stage gear system vibration», *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* , vol. 29, n° 9, 2006, p.1008-1018.
- Fishman G.S., «Monte Carlo Concepts, Algorithms and Applications», First Ed.Springer Verlag, 1996.
- Ghanem R.G., Spanos P.D., «Stochastic Finite Elements: a Spectral Approach», Springer Verlag, 1991.
- Guerine A., Driss Y., Beyaoui M., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., «A Polynomial Chaos Method for the Analysis of Uncertain Spur Gear System», In *Mechatronic Systems: Theory and Applications*, Springer International Publishing, 2014a, p. 89-97.
- Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., «Dynamic response of an assembly defect in the spur gear system with uncertainties», *Proceedings of the 2nd International Symposium on Uncertainty Quantification and stochastic Modeling Uncertainties 2014*, June 23-27, Rouen-France, 2014b.
- Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., «A perturbation approach for the dynamic analysis of one stage gear system with uncertain parameters», *Mechanism and Machine Theory*, vol. 92, 2015a, p. 113-126.
- Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., «Dynamic response of a spur gear system using perturbation method», *12ème Congrès de Mécanique*, Avril 21-24, Casablanca- Maroc, 2015b.

- Guerine A., El Hami A., Fakhfakh T., Haddar M., «A polynomial chaos method to the analysis of the dynamic behavior of spur gear system», *Structural Engineering and Mechanics, An International Journal*, vol. 53, n°4, 2015c ,p. 819-831.
- Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., «A polynomial chaos method for the analysis of the dynamic behavior of uncertain gear friction system», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 59, 2016a, p. 76-84.
- Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., «Dynamic response of a spur gear system with uncertain parameters», *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Accepted for publication, February (2016b).
- Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., «Dynamic response of a Spur gear system with uncertain friction coefficient», *Advances in Engineering Software*, doi:10.1016/j.advengsoft.2016.05.009 (2016d).
- Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., «Dynamic response of gear friction system using polynomial chaos method», *ATAVI, International Conference on Acoustics and Vibration*, March 21-23, Hammamet-Tunisia, 2016e.
- Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., «Effect of assembly defect on the dynamic behavior of gear system under uncertainty», *6th International Symposium on Aircraft ACMA*, May 11-13, Agadir-Morocco, 2016f.
- Guerine A., El Hami A., Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., «Uncertainty analysis of geared transmission friction system», *International Conference on Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis*, May 23-25, Marrakech-Morocco, 2016g.
- Handa, K., Andersson, K., «Application of finite element methods in the statistical analysis of structures. In T. Moan and M. Shinozuka (Eds) », *Proc. 3rd Int. Conf. Struct. Safety and Reliability (ICOSSAR '81)*, Trondheim Norway, 1981, pp. 409-420.
- Harris S. L., « Dynamic Loads on the Teeth of Spur Gears», *Proc. Inst. Mech. Engrs*, vol. 172, 1958, p. 87-112.
- Henriot G., «Traité théorique et pratique des engrenages tome (2)», Edition Dunod technique, 1985.
- Hidaka T., Terauchi Y., Fuji M., « Analysis of Dynamic Tooth Load on Planetary Gear », *Bulletin of the JSME*, vol. 23, n° 176, 1980, p. 315-323.
- Howard I., Jia S., Wang J., « The dynamic modelling of a spur gear in mesh including friction and a crack », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol 15,n° 5, 2001, p. 831-853.
- Isukapalli S.S., Georgopoulos P.G., «Computational methods for sensitivity and uncertainty analysis for environmental and biological models», Research Triangle Park, NC, United States Environmental Protection Agency, Office of Research and Development, National Exposure Research Laboratory, vol. 145, 2001, pp. EPA/600/R-01-068.

- Kaminski M., «Stochastic perturbation approach to engineering structure vibrations by the finite difference method», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 251, n° 4, 2002, p. 651-670.
- Kleiber M., Hien T. D., «The Stochastic Finite Element Method: Basic Perturbation Technique and Computer Implementation», *John Wiley & Sons*, 1992, Chichester UK.
- Kraichnan R.H., «Direct-interaction approximation for a system of several interacting simple shear waves», *The Physics of Fluids*, vol. 6, n°11, 1963, p. 1603–1609.
- Kuang J.H., Yang Y.T., « An estimate of mesh stiffness and load sharing ratio of a spur gear pair », *Proceedings of the ASME 12th, International Power Transmission and Gearing Conference, ASME*, 1992, p. 1–10.
- Kuang J. H., Lin A. D., « Theoretical aspects of torque responses in spur gearing due to mesh stiffness variation », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 17, n° 2, 2003, p. 255-271.
- Lindsay N.J., Beran P.S., «Increased efficiency in the stochastic interrogation of an uncertain nonlinear aeroelastic system», *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, Munich, Germany, 2005.
- Lin J., Parker R. G., « Structured Vibration Characteristics of Planetary Gears with Unequally Spaced Planets », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 233, n°5, 2000a, p. 921-928.
- Lin J., Parker R. G., « Mesh Stiffness Variation Instabilities in Two-Stage Gear Systems », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 124, 2000b, p. 68-76.
- Lin J., Parker R., « Parametric Resonance in Two-Stage Gears from Fluctuating Mesh Stiffness », *International Journal of Gearing and Transmissions*, vol. 3, 2001, p. 127-134.
- Liu W., Belytshko T., Mani A., «Probabilistic finite elements for non linear structural dynamics», *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 56, 1986, p. 61-86.
- Maatar M., Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages simple étage : Influence des écarts de forme et des défauts de montage, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1995.
- Massa F., Ruffin K., Tisson T., Lallemand B., «A complete method for efficient fuzzy modal analysis», *Journal of sound and vibration*, vol.309, n°(1-2), p. 63-85
- Merzoug M., Miloudi A., Brahimi K., « Comportement dynamique d'une transmission par engrenages—Analyse de la stabilité », *XVème Congrès Français de Mécanique*, 2001, Nancy.
- Meslem N., Ramdani N., Candau Y., «Interval observers for uncertain nonlinear systems: Application to bioreactors», *Proceedings of the 17th World Congress IFAC Control*, 2008, July 6-11, Seoul Korea.
- Metropolis N., Ulam S., «The Monte Carlo Method», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 44, n° 247, 1949, p. 335-341.

- Moore R.E., «Interval analysis: Prentice-Hall», 1966.
- Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J., «Introduction to interval analysis», *Philadelphia: Society for Industrial Mathematics*, 2009.
- Mourier-Ruffin K., Réponse dynamique des structures mécaniques à paramètres imprécis, Thèse de doctorat, Université de Valenciennes, 2008.
- Muscolino G., Ricciardi G., Impollonia N., «Improved dynamic analysis of structures with mechanical uncertainties under deterministic input», *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 15, 2000, p. 199–212.
- Neumaier A., «Interval methods for systems of equations», Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1990.
- Orszagand S.A., Bissonnette L. R., «Dynamical properties of truncated Wiener-Hermite expansions», *The Physics of Fluids*, vol. 10, n°12, 1967, p. 2603–2613.
- Papadrakakis M. and Papadopoulos V., «Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol.168, 1999, pp. 305-320.
- Parker R., Lin J., « Mesh Stiffness Variation Instabilities in Two-stage Gear Systems », *Journal of vibration and acoustics*, vol.124, 2002, p. 68-76.
- Phadke Madhav S., «Quality Engineering Using Robust Design», A T & T Bell Laboratories, Prentice-Hall, 1989.
- Rao S.S., Berke L., «Analysis of uncertain structural systems using interval analysis», *AIAA Journal*, vol. 35, 1997, p.727-735.
- Reboul E., Vibro-acoustique des mécanismes à hautes fréquences, Application aux transmissions par engrenages, Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon, 2005.
- Remond D., Contribution à l'étude et l'analyse expérimentale du bruit d'engrènement. Développement et application de la transformée en ondelettes rapide, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1991.
- Rigaud E., Mayeux F., Driot N., Perret-Liaudet J., «Variabilité des régimes critiques d'une boîte de vitesses : Influence des pré-charges de roulements», *Mécanique et Industries*, vol. 4, 2003, p. 107-112.
- Rubinstein R.Y., «Simulation and the Monte Carlo Method», *JohnWiley and Sons*, 1981.
- Sandu A., Sandu C., Ahmadian M., «Modeling multibody dynamic systems with uncertainties. Part I: numerical application», *Multibody System Dynamic*, vol. 15, 2006a, p. 369-391.
- Sandu C., Sandu A., Ahmadian, M., «Modeling multibody dynamic systems with uncertainties. Part II: theoretical and computational aspects», *Multibody System Dynamic*, vol. 15,2006b, p. 241-262.

- Sarsri D., Azrar L., Jebbouri A., El Hami A., «Component mode synthesis and polynomial chaos expansions for stochastic frequency functions of large linear FE models», *Computers & Structures*, vol. 3-4, 2011, p. 346-356.
- Shahriari K., Analyse de sureté de procédés multi-modes par des méthodes à base d'intervalles, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2007.
- Shinozuka M., Yamazaki F., «Stochastic Structural Dynamics: Progress in Theory and Applications, Stochastic Finite Element Analysis: An Introduction», Elsevier Applied Sciences, 1988.
- Singpurwalla N. D., «Design by decision theory: A unifying perspective on Taguchi's approach to quality engineering», *In NSF Design and Manufacturing Systems Grantees Conference*, 1990, Tempe Arizona.
- Sudret B., Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models: Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods, Memoires HDR, Université Blaise Pascal, Clairemont II, 2007.
- Taguchi G., «Introduction to Quality Engineering. Asian Productivity Organization. Kackar, R. N., (1985). Off-line quality control, parameter design, and the Taguchi approach», *Journal of Quality Technology*, vol.17, n°4, 1986, p. 176-209.
- Teigen J.G., Frangopol D.M., Sture S., Felippa C.A., «Probabilistic FEM for non linear concrete structures I: Theory», *Journal of structural Engineering ASCE*, vol. 117,1991a, p. 2674-2689.
- Teigen J.G., Frangopol D.M., Sture S., Felippa C.A., «Probabilistic FEM for non linear concrete structures II: Applications», *Journal of structural Engineering ASCE*, vol. 117,1991b, p. 2690-2707.
- Tisson T., Massa F., Mourier-Ruffin K., Lallemand B., «Robust design using fuzzy finite element method», *Proceedings of the 1st International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics*, The University of Sheffield UK, p. 99-108, 2007.
- Velex P., Contribution à l'analyse du comportement dynamique des engrenages à axes parallèles. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1988.
- Vernay P., Comportement dynamique en torsion et en régime transitoire d'un démarreur de moteur d'avion, Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon, 1999.
- Walha L., Contribution a la dynamique non linéaire des réducteurs à engrenages (prise en compte des jeux fonctionnels et du frottement entre dentures), Thèse de doctorat, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, 2008.
- Walha L., Fakhfakh T., Haddar M., « Nonlinear dynamics of a two-stage gear system with mesh stiffness fluctuation, bearing flexibility and backlash», *Mechanism and Machine Theory*, vol. 44, n° 5, 2009, p.1058-1069.
- Walha L., Driss Y., Khabou MT., Fakhfakh T., Haddar M., « Effects of eccentricity defect on the nonlinear dynamic behavior of the mechanism clutch-helical two stage gear», *Mechanism and Machine Theory*, vol. 46, n° 7, 2011, p. 986-997.

- Walha L., Tounsi M., Driss Y., Chaari F., Fakhfakh T., Haddar M., « Nonlinear dynamic behaviour of a cam mechanism with oscillating roller follower in presence of profile error », *Frontiers of Mechanical Engineering*, vol. 8, n°2, 2013, p. 127–136.
- Wiener, N., (1938). «The homogeneous chaos», *American Journal of Mathematics*, vol. 60, 1938, p. 897-936.
- Williams M.M.R., «Polynomial chaos functions and stochastic differential equations», *Ann. Nucl. Energy*, vol. 33, 2006 , p.774-785.
- Wojnarowski J., Onishchenko V., « Tooth wear effects on spur gear dynamics », *Mechanism and Machine Theory*, vol. 38, 2003, p. 161–178.
- Xiu D., Karniadakis G.E, «Modeling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, 2002, p. 4927- 4948.
- Yakhou K., Validation expérimentale d'un modèle dynamique global de boite de vitesse automobile, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1999.
- Zadeh L.A., «Fuzzy sets», *Information and Control*, vol. 8, 1965, p. 338–353.

**Annexe A :**

---

---

**Méthodes de Résolution : Méthode de Newmark**

---

---

## A.1. Introduction

Les équations régissant le comportement dynamique linéaire d'un train d'engrenages sont connues sous le nom d'équations de Mathieu-Hill (Remond et al. 1991) et s'écrivent :

$$[M].\{\ddot{Q}\} + [C].\{\dot{Q}\} + [K(t)].\{Q\} = \{F_{\text{ext}}(t)\} \quad (\text{a.1})$$

$\{Q\}$  est le vecteur des degrés de liberté du modèle.  $[M]$  est la matrice masse.  $[C]$  est la matrice d'amortissement visqueux équivalent.  $[K(t)]$  est la matrice de rigidité variable.

$\{F_{\text{ext}}(t)\}$  est le vecteur des efforts extérieurs généralisés définis aux degrés de liberté du modèle.

Parmi les méthodes numériques de calcul de la réponse du système mécanique, on trouve les méthodes directes, les méthodes de perturbations, la méthode des éléments finis....

Les méthodes directes sont les plus utilisés lors la résolution de ces équations. L'idée essentielle de ces méthodes directes consiste à intégrer les équations directement à l'aide de procédures numériques pas à pas incluant les effets d'inertie et d'amortissement (Dhatt et al. 1984). Parmi ces méthodes, dans le cadre de l'étude des mécanismes de transmission de puissance, la méthode implicite de Newmark est la plus couramment utilisée (Rigaud et al., 2003) car elle assure une stabilité inconditionnelle et permet de résoudre le système à coefficients périodiques (rigidité d'engrènement). (Dhatt et al. 1984).

Le procédé itératif commence par le calcul de  $\{\ddot{Q}\}_0$  par la relation :

$$[M]\{\ddot{Q}\}_0 = \{F\}_0 - [C].\{\dot{Q}\}_0 - [K].\{Q\}_0 \quad (\text{a.2})$$

Deux variantes sont ensuite possibles, la première calcule l'accélération  $\{\ddot{Q}\}_{n+1}$  en premier lieu tandis que l'autre commence par le calcul du vecteur déplacement  $\{Q\}_{n+1}$ .

## A.2. Newmark accélération

$\{\ddot{Q}\}_{n+1}$  est calculée par la relation de récurrence:

$$[K_N]_n . \{\ddot{Q}\}_{n+1} = \{R_N\}_n \quad (\text{a.3})$$

avec

$$[K_N]_n = [M] + \lambda_N \cdot \Delta t \cdot [C] + \beta_N \cdot \Delta t^2 \cdot [K]_n \quad (\text{a.4})$$

$$\{R_N\}_n = \{F\} - [C] \cdot \left( \{\dot{Q}\}_n + (1 - \lambda_N) \cdot \Delta t \cdot \{\ddot{Q}\}_n \right) - [K]_n \cdot \left( \{Q\}_n + \Delta t \cdot \{\dot{Q}\}_n + \left( 0.5 \Delta t^2 (1 - 2 \cdot \beta_N) \cdot \{\ddot{Q}\}_n \right) \right) \quad (\text{a.5})$$

Les vecteurs de déplacement et de vitesse sont définies par :

$$\begin{cases} \{Q\}_{n+1} = \{Q\}_n + \Delta t \cdot \{\dot{Q}\}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta_N) \cdot \{\ddot{Q}\}_n + \beta_N \Delta t^2 \cdot \{\ddot{Q}\}_{n+1} \\ \{\dot{Q}\}_{n+1} = \{\dot{Q}\}_n + (1 - \lambda_N) \Delta t \cdot \{\ddot{Q}\}_n + \lambda_N \Delta t \cdot \{\ddot{Q}\}_{n+1} \end{cases} \quad (\text{a.6})$$

Les paramètres de Newmark  $\lambda_N$  et  $\beta_N$  sont choisis pour rendre la méthode convergente et stable. Dans le cas de la méthode de Newmark originelle (méthode trapézoïdale), elles sont données par :

$$\lambda_N = \frac{1}{4} \text{ et } \beta_N = \frac{1}{2} \quad (\text{a.7})$$

Ces valeurs assurent une stabilité inconditionnelle relative à une accélération moyenne constante.

### A.3. Newmark déplacement

$\{Q\}_{n+1}$  est calculée par la relation de récurrence:

$$[K_{Nd}]_n \{Q\}_{n+1} = \{R_{Nd}\}_n \quad (\text{a.8})$$

avec

$$[K_{Nd}]_n = \frac{4}{\Delta t^2} [M] + \frac{2}{\Delta t} [C] + [K]_n \quad (\text{a.9})$$

$$\{R_{Nd}\}_n = \{F\} + \left( \frac{4}{\Delta t^2} [M] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \cdot \{Q\}_n + \left( \frac{4}{\Delta t} [M] + [C] \right) \cdot \{\dot{Q}\}_n + [M] \cdot \{\ddot{Q}\}_n \quad (\text{a.10})$$

Les vecteurs de vitesse et d'accélération sont définies par :

$$\begin{cases} \{\dot{Q}\}_{n+1} = -\{\dot{Q}\}_n + \frac{2}{\Delta t} (\{Q\}_{n+1} - \{Q\}_n) \\ \{\ddot{Q}\}_{n+1} = -\{\ddot{Q}\}_n + \frac{2}{\Delta t} (\{\dot{Q}\}_{n+1} - \{\dot{Q}\}_n) \end{cases} \quad (\text{a.11})$$

Un des problèmes qui apparaît lors de l'utilisation de la méthode de Newmark est le choix de l'incrément de temps : il doit être suffisamment petit pour donner des résultats acceptables et, suffisamment grand, pour que les temps de calcul restent raisonnables.

En pratique, le choix de l'incrément de temps est imposé par la bande de fréquence à étudier. L'hypothèse classique est alors de considérer a priori que seuls les modes propres de fréquences inférieures à une fréquence  $f_0$  sont excités par le chargement et que les modes de fréquence plus élevée ont des effets négligeables,  $\Delta t$  peut être alors être défini par :

$$\Delta t \leq \frac{1}{20.f_0} \quad (\text{a.12})$$

En pratique, lors de l'utilisation de la méthode de Newmark, la valeur de  $f_0$  et la durée minimale d'intégration, sont des paramètres de calcul. La fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est alors égale à  $20.f_0$  et le nombre de points d'intégration est déterminé pour être une puissance de 2, afin d'optimiser les calculs ultérieurs des transformées de fourrier rapides.

---

---

# **CONTRIBUTION A L'ETUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN SYSTEME D'ENGRENAGE EN PRESENCE D'INCERTITUDES**

---

---

**Ahmed GUERINE**

---

---

**Résumé :** Dans le cadre de la présente thèse, on a procédé à l'étude du comportement dynamique d'un système d'engrenage comportant des paramètres incertains. Une des principales hypothèses faite dans l'utilisation des méthodes de prise en compte des incertitudes, est que le modèle est déterministe, c'est-à-dire que les paramètres utilisés dans le modèle ont une valeur définie et invariante. Par ailleurs, la connaissance du domaine de variation de la réponse dynamique du système dues aux incertitudes qui découle des coefficients d'amortissement, des raideurs d'engrènement, la présence de frottement entre les pièces, les défauts de montage et de fabrication ou l'inertie des pales dans le cas d'éolienne est essentielle. Pour cela, dans la première partie, on s'applique à décrire la réponse dynamique d'une transmission par engrenage comportant des paramètres modélisés par des variables aléatoires. Pour ce faire, nous utilisons la simulation de Monte Carlo, la méthode de perturbation et la méthode de projection sur un chaos polynomial. Dans la seconde partie, deux approches sont utilisées pour analyser le comportement dynamique d'un système d'engrenage d'éolienne : l'approche probabiliste et l'approche ensembliste basée sur la méthode d'analyse par intervalles. L'objectif consiste à comparer les deux approches pour connaître leurs avantages et inconvénients en termes de précision et temps de calcul.

**Mots clés :** simulation de Monte Carlo, système d'engrenage, méthode de perturbation, paramètres incertains, méthode de chaos polynomial, méthode d'analyse par intervalles.

**Abstract:** In the present work, the dynamic behavior of a gear system with uncertain parameters is studied. One of the principal hypotheses in the use of methods for taking into account uncertainties is that the model is deterministic, that is to say that parameters used in the model have a defined and fixed value. Furthermore, the knowledge of variation response of a gear system involving damping coefficients, mesh stiffness, friction coefficient, assembly defect, manufacturing defect or the input blades in the case of wind turbine is essential. In the first part, we investigate the dynamic response of a gear system with uncertain parameters modeled as random variables. A Monte Carlo simulation, a perturbation method and a polynomial chaos method are carried out. In the second part, two approaches are used to analyze the dynamic behavior of a wind turbine gear system: the probabilistic approach and the interval analysis method. The objective is to compare the two approaches to define their advantages and disadvantages in terms of precision and computation time.

**Key Words:** Monte Carlo simulation, gear system, perturbation method, uncertain parameters, polynomial chaos method, interval analysis method.