

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	5
CHAPITRE I LES SYSTÈMES DE LOCALISATION MAGNÉTIQUES	9
Introduction	9
1. Limitation des systèmes électromagnétiques	9
1.1 Mise en évidence des phénomènes	10
1.1.1 Objectifs	10
1.1.2 Principe	10
1.1.3 Présentation des mesures	13
1.2 Problème de précision globale : un état de l'art	23
2. La localisation par systèmes magnétiques	25
2.1 La localisation	25
2.2 Notions d'électromagnétisme	26
2.2.1 Moment magnétique	26
2.2.2 Expression du champ magnétique	27
2.2.3 Approximation dipolaire	27
2.2.4 Notion de flux magnétique	28
2.2.5 Positions de Gauss	29
2.2.6 Accès à l'information magnétique	30
2.3 Mise en œuvre d'un système de localisation	31
2.3.1 Principe général	31
2.3.2 Complexité du système – répartition des capteurs et des sources	32
2.4 Etat de l'art industriel	37
3. Perturbations électromagnétiques	41
3.1 Effets sur le champ magnétique	42
3.2 Spécification des paramètres de l'étude	46
Conclusion	47
CHAPITRE II MODELISATION	49
Introduction	49

1. Contexte physique	50
1.1 Caractérisation des sources et des matériaux	50
1.2 Phénomènes électromagnétiques	50
1.2.1 Induction électromagnétique	51
1.2.2 Aimantation	51
2. Équations de l'induction	52
2.1 Équations de Maxwell	52
2.2 Relations constitutives des milieux	53
2.3 Bilan des courants	54
2.4 Équation de Helmholtz	55
2.5 Conditions aux limites	55
2.5.1 Conditions aux interfaces	55
2.5.2 Conditions aux limites	56
3. Modèle numérique de l'induction	57
3.1 Formulations physico-mathématiques	57
3.1.1 Présentation des potentiels électromagnétiques	57
3.1.2 Choix de la formulation	60
3.2 Méthodes numériques de résolution	61
3.2.1 État de l'art	61
3.2.2 La méthode des éléments finis	63
3.2.3 Présentation du logiciel FluxExpert	65
3.3 Modèle polynomial	66
3.3.1 Système linéaire	66
3.3.2 Interpolation et projection	67
3.3.3 Domaine de validité	68
3.4 Modèle analytique	68
3.4.1 Présentation	68
3.4.2 Loi de décroissance dans la profondeur	69
3.4.3 Adaptation des fonctions d'interpolation et de projection	70
3.4.4 Calcul des intégrants	71
Conclusion	74
CHAPITRE III VALIDATION	75
Introduction	75
1. Validation qualitative	75
1.1 Génération des maillages	76
1.1.1 Scénario 1	76
1.1.2 Scénario 2	77
1.1.3 Scénario 3	78
1.2 Propriétés physiques	79
1.3 Conditions aux limites	79
1.4 Résultats obtenus	79
1.4.1 Scénario 1	80

1.4.2	Scénario 2	84
1.4.3	Scénario 3	86
2.	Validation quantitative	87
2.1	Objectifs du dispositif	87
2.2	Précision du modèle éléments finis	87
2.2.1	Sources d'erreur pour la modélisation	88
2.2.2	Quantification de l'erreur	90
2.3	Confrontation expérimentale	91
2.3.1	Dispositif expérimental	91
2.3.2	Mise en oeuvre de la modélisation	99
2.3.3	Résultats obtenus	102
3.	Domaine de validité des modèles	124
3.1	Problématique	124
3.2	Comparaison des deux types de modèles	124
3.2.1	Définition de la géométrie	124
3.2.2	Résultats obtenus	126
Conclusion		130
CONCLUSION		133
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES		137

INTRODUCTION

La localisation d'objets en mouvement présente un enjeu réel pour de nombreux domaines. Parmi ceux-ci, la chirurgie assistée par ordinateur, domaine datant d'une vingtaine d'années, nécessite fréquemment l'utilisation de localisateurs. L'émergence ces dernières années des gestes médico-chirurgicaux assistés par ordinateur (GMCAO) a permis de mettre en évidence le besoin d'outils de localisation spécifiques, nécessaires par exemple au guidage de geste lors de la manipulation d'outils chirurgicaux. Cette étude s'inscrit dans le cadre de la localisation et de la poursuite en six dimensions (position et orientation) d'instruments chirurgicaux.

Un certain nombre de systèmes de localisation sont déjà utilisés cliniquement et offrent de nouvelles perspectives aux chirurgiens. Plusieurs modalités sont adoptées pour réaliser ce genre d'appareils. Ces différentes méthodes sont basées sur des principes physiques distincts. On distingue entre autres les modalités mécanique, optique et électromagnétique. On trouve également des descriptions de dispositifs qui mettent en œuvre des techniques hybrides [ASCENSION96] s'appuyant sur plusieurs modalités pour parvenir à un meilleur résultat.

Les systèmes mécaniques [KOSUGI88], [POYET96], [MARMULLA97] sont utilisés essentiellement pour des applications nécessitant un positionnement avec une excellente précision. La précision atteinte est sub-millimétrique pour les modèles les plus performants. Ils permettent de mesurer les six degrés de liberté (position et orientation). Cette technologie utilise une liaison mécanique rigide entre la cible à localiser et le dispositif de mesure. Cette liaison mécanique est contraignante et ne permet pas de suivre un déplacement en temps réel sans de fortes contraintes sur la trajectoire.

Les systèmes les plus précis disponibles sur le marché sont ceux basés sur une modalité optique [CROUCH90], [TIMC92]. Ils sont généralement employés pour la localisation d'instruments chirurgicaux rigides dont une partie reste visible. Le principe consiste à utiliser des caméras et des marqueurs, ceux-ci pouvant être actifs ou passifs. Les marqueurs passifs permettent d'instrumenter la cible à localiser. Ils reflètent une lumière de longueur d'onde donnée. Le volume de capture, dans lequel la cible peut être amenée à se déplacer, est illuminé par une source lumineuse à cette longueur d'onde. Dans le cas de marqueurs actifs, le principe est dual : ce sont les marqueurs qui émettent un signal et celui-ci est capté par les caméras. Les marqueurs sont ensuite localisés par des techniques de triangulation. Cependant, de par leur mode de fonctionnement, ces systèmes sont sensibles aux phénomènes d'occlusion. En effet, lorsqu'un obstacle est placé entre la source lumineuse et le récepteur, il est alors impossible de déterminer les paramètres relatifs à la position de la cible, faute de mesure. Cet inconvénient exclut toute utilisation intra-corporelle.

Les systèmes magnétiques de localisation spatiale ne souffrent pas de ces problèmes d'occlusion. Seuls les systèmes basés sur ce procédé magnétique sont donc applicables à la localisation de sondes intra-corporelles. Les mesures dans de bonnes conditions sont en général précises, de l'ordre du millimètre pour les systèmes les plus performants. Les localisateurs magnétiques présentent donc l'avantage de permettre une localisation à travers les tissus mous et même au travers d'obstacles plus rigides. Le principe généralement employé consiste à remplir le volume de capture où la cible à localiser est susceptible de se déplacer par un champ magnétique dont la forme mathématique est connue. La bonne connaissance du champ magnétique généré par la source conditionne fortement les performances des systèmes magnétiques. Le fonctionnement optimal de ces localisateurs formule également l'hypothèse que la source et le capteur sont parfaits et placés dans le vide. En pratique, un certain nombre de phénomènes viennent perturber la précision et le fonctionnement des dispositifs basés sur ce principe physique. La présence dans le champ opératoire d'outils métalliques ou générateurs de perturbations électromagnétiques tels des perceuses peut entraîner des imprécisions de plusieurs millimètres. Ces imprécisions dégradent fortement les performances des systèmes magnétiques de localisation spatiale et représentent le critère limitatif de ces systèmes.

Notre travail se situe dans le domaine de la localisation spatiale par systèmes magnétiques appliquée aux GMCAO. Nous nous intéresserons plus particulièrement au cours de cette étude au problème de précision globale des localisateurs magnétiques lorsqu'ils sont utilisés dans un environnement électromagnétique bruité.

Dans ce contexte général, notre étude se focalise sur les perturbations statiques induites par la présence de matériaux métalliques dans le champ opératoire des localisateurs magnétiques.

Nous débuterons notre étude en nous plaçant du point de vue de l'utilisateur d'un système magnétique de localisation spatiale. Nous mettrons en évidence dans cette première partie les imprécisions engendrées par la présence d'outils chirurgicaux métalliques dans le champ opératoire d'un localisateur magnétique. Nous présenterons ensuite les bases globales de la localisation spatiale et plus particulièrement les paramètres à déterminer pour localiser une cible dans un espace tridimensionnel. Le principe général de fonctionnement des systèmes électromagnétiques sera également énoncé ainsi que les différentes méthodes utilisées pour la mise en œuvre de ces systèmes. Nous établirons enfin un rapide état de l'art des systèmes existants ou procédés innovants. A la suite de cet état de l'art, nous présenterons les paramètres définissant les axes de notre étude.

Le second chapitre s'articule autour des phénomènes physiques à l'origine des perturbations observées sur le champ source et de leur mise en équations en vue de leur modélisation. Ce chapitre débute par une description du contexte physique. Les sources, les matériaux et les phénomènes seront caractérisés. Nous présenterons ensuite le système d'équations formulé pour décrire les phénomènes d'induction à partir des équations de Maxwell et des relations constitutives des milieux. La formulation mathématique retenue ainsi que les hypothèses simplificatrices utilisées seront également présentées. Enfin, le modèle numérique développé pour la résolution des équations de l'induction électromagnétique par la méthode des éléments finis est décrit en fin de chapitre. Nous verrons que ce modèle est notamment basé sur la prise en compte de manière analytique de l'effet de peau dans les conducteurs.

Le troisième et dernier chapitre est consacré à la validation du modèle numérique développé. Ce chapitre débute par une présentation des résultats obtenus lors de la phase de validation qualitative de notre modèle numérique. Les différentes grandeurs électromagnétiques actrices des phénomènes d'induction sont notamment calculées et leur comportement évalué sur des géométries synthétiques. Les résultats du modèle développé sont ensuite confrontés à des mesures magnétiques réelles. Le dispositif expérimental mis en place pour acquérir ces mesures et les résultats de cette confrontation seront détaillés. Nous concluons en présentant la précision obtenue avec le modèle numérique et les domaines de validité des modélisations.

CHAPITRE I

LES SYSTÈMES DE LOCALISATION MAGNÉTIQUES

Introduction

Les systèmes électromagnétiques de localisation spatiale sont les seuls systèmes à permettre une localisation intra-corporelle. Ces systèmes souffrent cependant d'un problème global de précision et sont plus particulièrement sensibles à l'environnement électromagnétique dans lequel ils sont utilisés. Nous présenterons au cours de ce premier chapitre le principe général de fonctionnement des systèmes électromagnétiques et leur problème de précision globale.

Dans une première partie, nous mettrons en évidence l'influence effective de l'environnement électromagnétique sur le fonctionnement de ces systèmes de localisation spatiale basés sur un procédé magnétique. A partir de la présentation de différentes mesures effectuées avec le localisateur électromagnétique *miniBird™* commercialisé par la société américaine *Ascension Technology*, nous verrons que les résultats obtenus sont particulièrement sensibles aux perturbations engendrées par la présence d'outils métalliques dans le champ opératoire.

Nous présenterons dans une seconde partie les bases globales de la localisation spatiale. Le principe général de fonctionnement des localisateurs électromagnétiques y sera notamment expliqué. Nous terminerons cette partie en établissant un état de l'art industriel des systèmes existants.

Enfin la troisième et dernière partie sera consacrée à la spécification du problème traité au cours notre étude.

1. Limitation des systèmes électromagnétiques

Les localisateurs magnétiques actuels satisfont au cahier des charges de certaines applications cliniques. Ils sont essentiellement utilisés en chirurgie ORL [FRIED95], [GUNKEL95], [KLIMEK96], [SCHMERBER97] ou en cardiologie [SHPUN97] où leurs performances sont satisfaisantes. La localisation spatiale par systèmes magnétiques permet principalement d'envisager la localisation de sondes intra-corporelles. Cet aspect représente en effet l'atout

majeur de ces systèmes magnétiques. Cette technologie présente cependant un inconvénient notable : à l'utilisation, dans les conditions standards de mise en œuvre (salle d'opération, par exemple), la mesure est souvent erronée et les spécifications du constructeur ne sont plus respectées. Effectivement, comme nous l'expliquerons plus loin dans notre étude, les localisateurs magnétiques sont sensibles à l'introduction dans le champ opératoire d'outils métalliques ou générateurs de perturbations électromagnétiques tels des perceuses ou autres outils de même nature [NIXON98], [BIRKFELLNER98], [BRYSON92]. Des imprécisions de plusieurs millimètres ne sont pas rares, ce qui empêche toute utilisation clinique de cette technologie pour des applications chirurgicales nécessitant une précision plus pointue, généralement millimétrique voire sub-millimétrique. Dans ce contexte, toute erreur de manipulation peut en effet entraîner de graves conséquences pour le patient.

1.1 Mise en évidence des phénomènes

Nous allons mettre en évidence au cours de ce paragraphe, les effets produits par la présence d'outils chirurgicaux métalliques dans le volume de capture sur les résultats fournis par un localisateur magnétique.

1.1.1 Objectifs

Nous débutons notre étude en nous plaçant comme utilisateur d'un système magnétique de localisation spatiale. Nous voulons observer le fonctionnement d'un localisateur magnétique, utilisé dans l'environnement électromagnétique classique d'un laboratoire situé en milieu urbain, en présence d'outils métalliques représentatifs d'une situation opérationnelle.

Le système de localisation magnétique utilisé est le système *miniBird*TM commercialisé par la société *Ascension Technology*. Le procédé de calcul qui y est implémenté est présenté comme permettant la réduction des effets perturbateurs dus aux courants de Foucault. Par ailleurs, ce système est disponible au laboratoire.

Nous avons utilisé en parallèle le système de localisation optique *Polaris*TM développé par la société *Northern Digital*, comme outil de contrôle, afin de nous assurer que les effets observés sont uniquement dus aux phénomènes électromagnétiques créés par la présence des éléments métalliques. Nous pouvons ainsi vérifier que la position du capteur magnétique n'évolue pas au cours des différentes séries de mesures. Nous ne cherchons pas à caractériser le localisateur magnétique utilisé mais uniquement à observer toute variation engendrée sur les données fournies par le système par la présence des outils chirurgicaux métalliques disposés dans le champ opératoire.

1.1.2 Principe

Le produit *miniBird*TM se compose d'un générateur de champ magnétique trois axes, formé de trois bobines imbriquées, associé à une antenne. Un jeu de trois bobines réceptrices assure la mesure du champ au point de réception, générant ainsi neuf grandeurs qui permettent ensuite, via une algorithmie de calculer les trois coordonnées d'espace et les trois angles d'orientation. Les calculs sont réalisés par un processeur sur la carte électronique associée. Le signal résultat est fourni par une ligne RS232 à un PC hôte.

Les mesures effectuées sont des mesures statiques, c'est à dire que le capteur et la source sont fixes. Elles ont été réalisées pour deux valeurs de la distance source/capteur.

La précision statique de ce système de localisation spatiale est égale à 1.8 mm RMS pour la position et 0.5° RMS pour l'orientation du capteur. Les résolutions statiques en position et en orientation sont respectivement égales à 0.5 mm et à 0.1° à 30.5 cm. Les performances du *miniBird*TM sont fournies et ont été vérifiées par le constructeur sur une plage d'utilisation allant de 20.3 cm à 76.2 cm. Nous avons donc placé le capteur à environ 40 cm (au voisinage du centre de la plage de fonctionnement optimal) puis à environ 70 cm de la source (en limite du domaine de validité des performances fournies par le constructeur).

Le dispositif mis en oeuvre est schématisé sur la figure suivante.

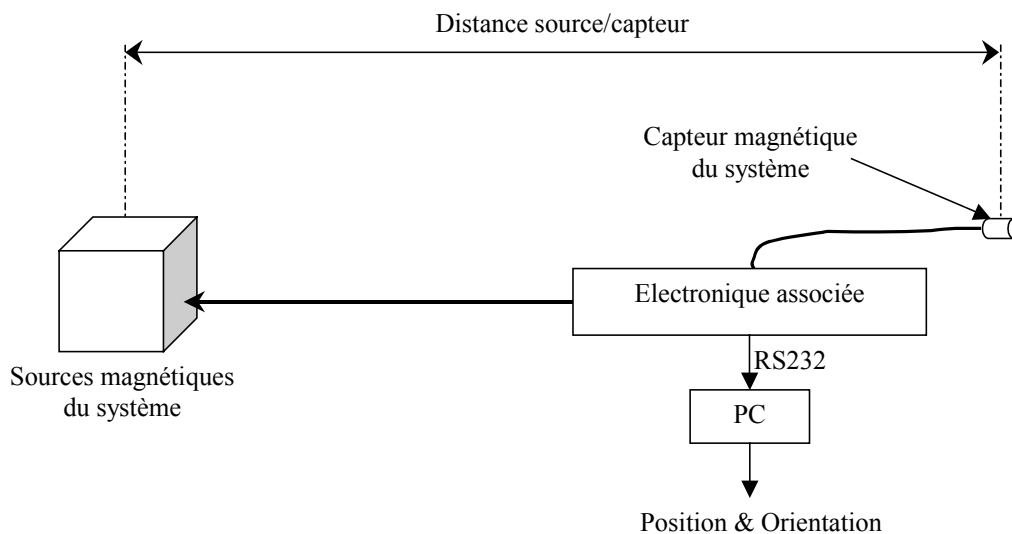
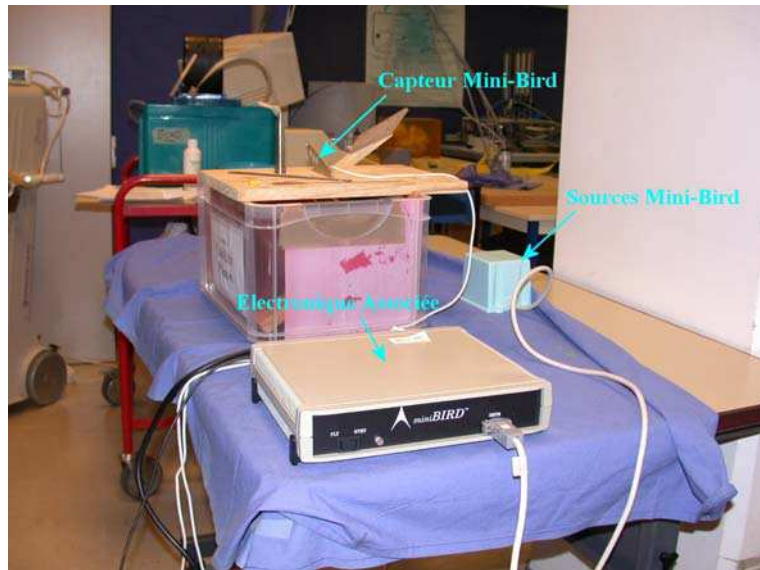
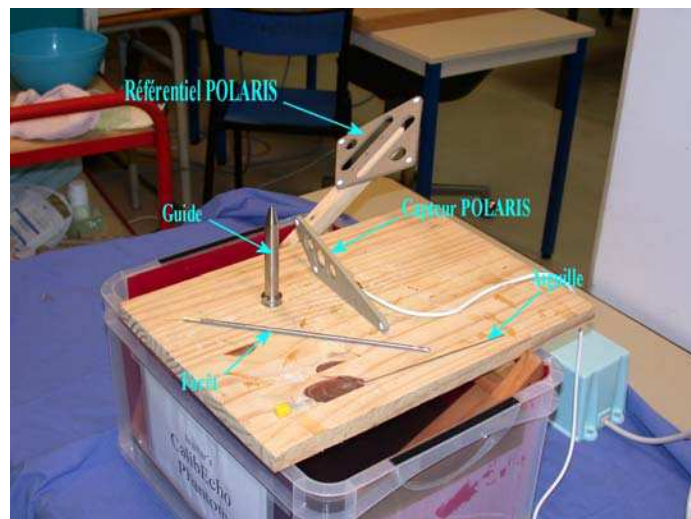


Figure 1 : Schéma descriptif du dispositif expérimental

Le capteur, la source et les différents outils utilisés sont immobiles. La source est posée sur une table a priori possiblement conductrice et magnétique et l'ensemble *capteur-outils* est posé sur un support en bois, amagnétique et non-conducteur. Le dispositif est présenté sur la première photo de la **Figure 2**. Aucun élément n'est en mouvement au voisinage du volume de capture. La position et l'orientation du capteur sont constantes. Les outils chirurgicaux utilisés, au nombre de trois : un guide, un foret et une aiguille à biopsie sont disposés à proximité de la source dans un premier temps puis au voisinage du capteur dans un second temps. Pour chacune des deux distances source/capteur, nous avons effectué au préalable une mesure de la position du capteur en absence de perturbateur afin de disposer de la position de référence. Les différents outils et la configuration spatiale du dispositif expérimental mis en œuvre sont présentés sur les photos ci-après.



a) Configuration spatiale du dispositif de mesures



b) Outils utilisés

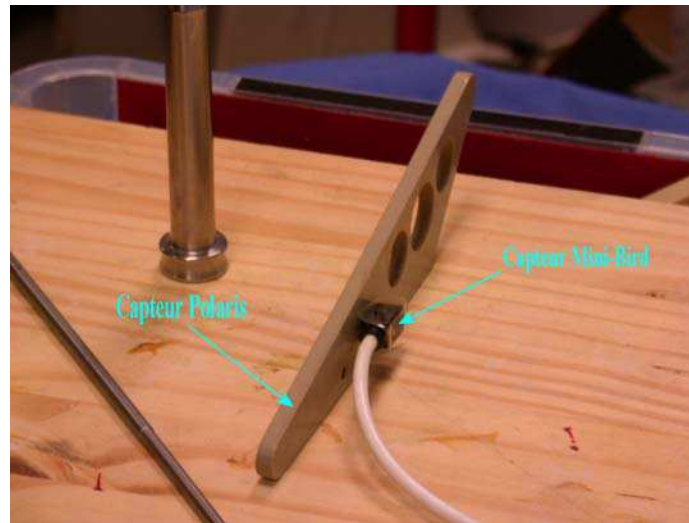
c) Fixation du capteur *miniBird*TM

Figure 2 : Dispositif expérimental mis en œuvre à partir du système magnétique de localisation spatiale *miniBird*TM. On présente en a) la configuration spatiale du dispositif et en b) les outils chirurgicaux utilisés. En c), on distingue les deux capteurs fixés de manière solide.

Le capteur *miniBird*TM est rigidement fixé au capteur du système optique *Polaris*TM utilisé comme référence pour vérifier que seules des déviations engendrées par la présence d'outils métalliques sont observées. Le capteur optique est « transparent » et ne perturbe pas la mesure du système magnétique.

De manière à pouvoir observer et comparer de manière objective les perturbations engendrées sur les mesures, nous avons calculé pour chaque position et chaque outil utilisé (y compris lors de la mesure à vide), les valeurs moyennes et les écart-types des données fournies par le système magnétique *miniBird*TM. Le capteur et la source sont immobiles. La position du capteur dans le référentiel des sources ne varie donc pas et la position moyenne fournie par le système ne doit pas changer. Le système délivre les données de position et d'orientation de manière continue, à raison de 100 mesures par seconde. Nous avons donc procédé à l'enregistrement d'un nombre suffisamment important d'échantillons pour pouvoir effectuer ces calculs statistiques.

1.1.3 Présentation des mesures

Les résultats obtenus sont exposés de la manière suivante : pour chacune des configurations (distance source/capteur ; position de l'outil), nous disposons de six figures sur lesquelles nous présentons les données fournies par le système *miniBird*TM. Sur les trois figures de gauche sont présentées les données correspondant aux variables de position (x , y et z) et sur les trois figures de droite, les paramètres d'orientation du capteur (*roulis*, *tangage*, *lacet*). Chacune des figures comporte les positions mesurées à vide et celles mesurées en présence des différents outils.

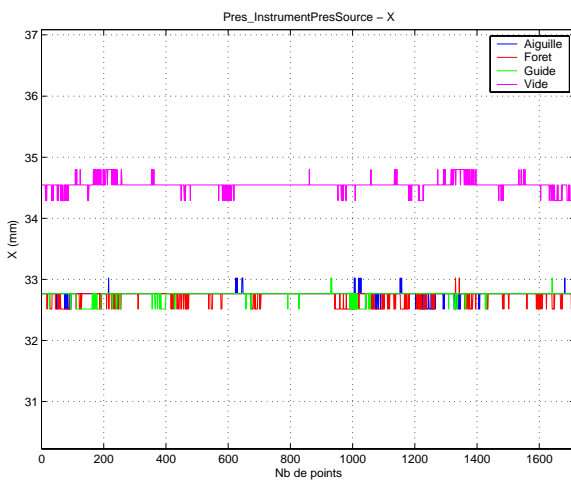
a) Résultats obtenus au centre de la plage de fonctionnement optimal

Pour cette première série de mesures, le capteur est placé à environ quarante centimètres des sources magnétiques. Cette disposition permet a priori d'obtenir un bon rapport signal à bruit puisque la mesure est effectuée au voisinage du centre de la plage d'utilisation optimale du système.

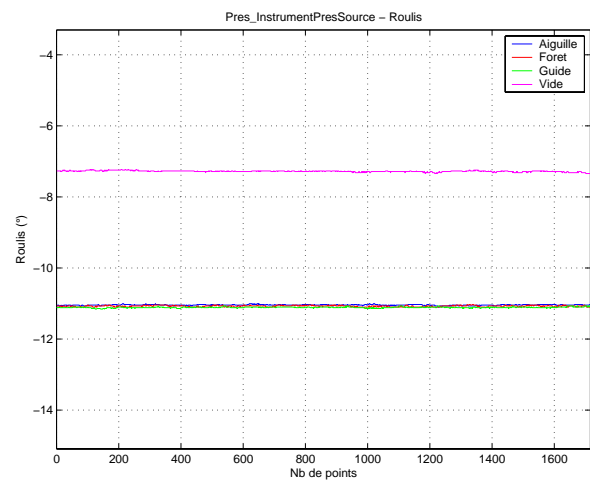
Outils près de la source :

Les outils sont disposés au voisinage des sources magnétiques avant le lancement de chaque acquisition des données fournies par le système. Ils sont placés de manière quelconque, leur positionnement ne revêt aucun caractère important, seuls les effets qu'ils peuvent engendrer par leur présence sur les données du système nous intéressent ici. Ils sont cependant disposés au même endroit avec la même orientation. Nous ne cherchons pas à quantifier ces effets mais à les mettre en évidence. Il en sera de même dans toute cette phase expérimentale. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures suivantes.

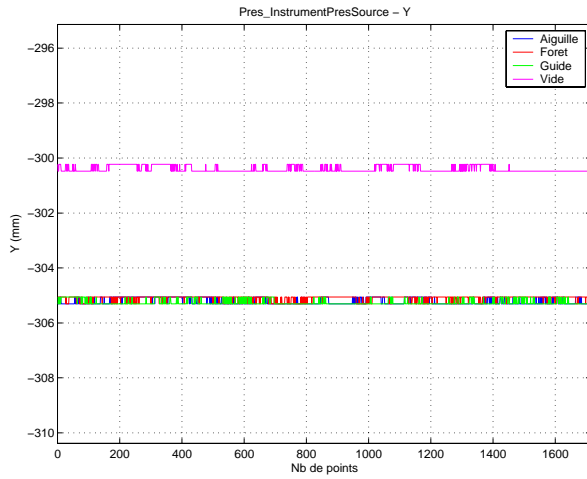
Nous constatons que l'introduction des différents outils engendre une évolution notable des valeurs données par le *miniBird™*. De plus, il apparaît clairement que les effets causés par chacun des outils sont très semblables.



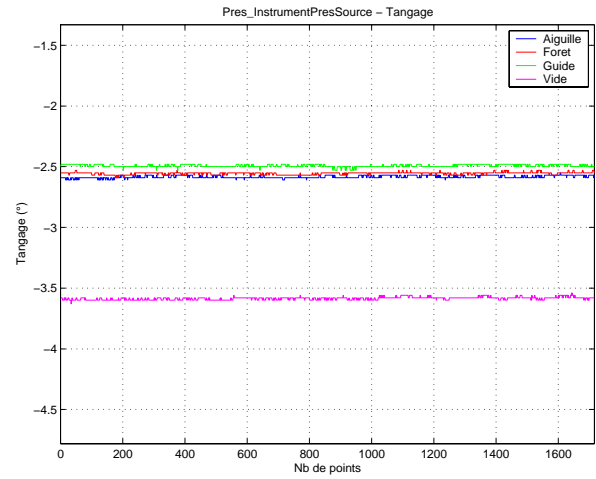
a) Coordonnée X



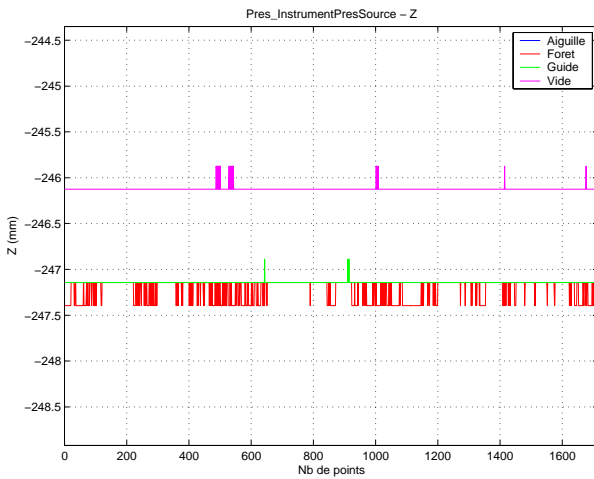
d) Roulis



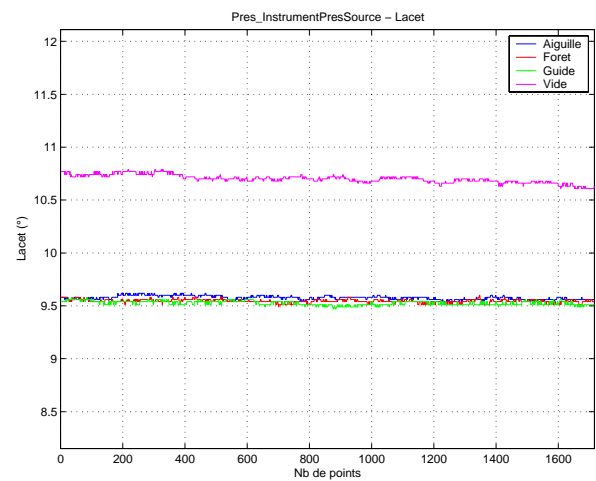
b) Coordonnée Y



e) Tangage



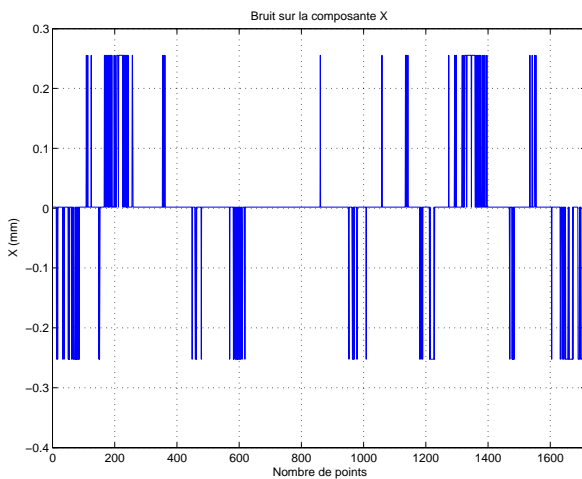
c) Coordonnée Z



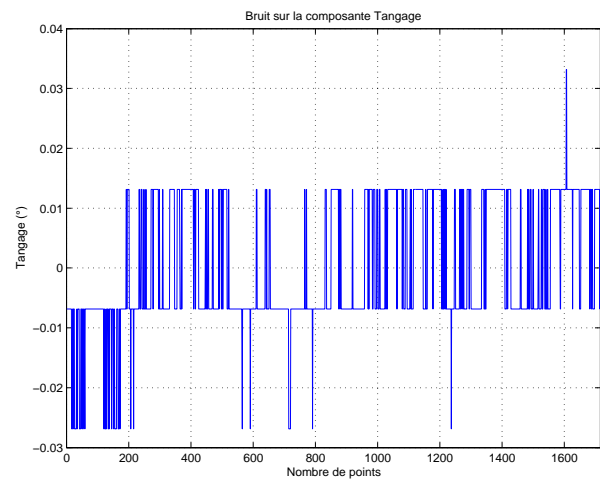
f) Lacet

Figure 3 : Mesures des six paramètres de position et d'orientation du *miniBird*TM

Les signaux obtenus sont très peu bruités du fait du bon rapport signal à bruit obtenu dans cette configuration. Le bruit subsistant, observable notamment sur les données relatives aux variables de position, est le bruit de quantification dont la valeur *crête* est égale à 0.5 mm, valeur numérique qui correspond à la résolution statique en position du système. Ce qui implique que quelle qu'en soit l'origine nous ne pouvons observer une variation de position inférieure à cette valeur. Le bruit présent sur cette série de mesures, constitué exclusivement du bruit de quantification, est présenté sur les figures ci-après.



a) Bruit de quantification sur les coordonnées



b) Bruit de quantification sur les angles de rotation

Figure 4 : Bruit de quantification

La valeur du bruit de quantification présent sur les angles de rotation est égal à 0.02° , ce qui comme nous l'avons expliqué précédemment, constitue la plus petite variation observable sur les données du système.

Le **Tableau 1** contient les valeurs statistiques calculées à partir des échantillons fournis par le système *Ascension*. Les valeurs moyennes nous permettent d'évaluer l'erreur engendrée sur la position initiale, donnée par le système et mesurée « à vide ».

	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)	Roulis (°)	Tangage (°)	Lacet (°)
Moyenne :						
A vide	34.54	-300.4	-246.12	-7.28	-3.59	10.7
Aiguille	32.76	-305.19	-247.16	-11.04	-2.58	9.58
Foret	32.71	-305.11	-247.22	-11.08	-2.55	9.54
Guide	32.74	-305.26	-247.14	-11.11	-2.49	9.53
Écart-type :						
A vide	0.096	0.153	0.155	0.156	0.157	0.161
Aiguille	0.084	0.355	0.481	0.481	0.482	0.495
Foret	0.107	0.148	0.189	0.189	0.190	0.191
Guide	0.077	0.126	0.126	0.127	0.128	0.129

Tableau 1 : Valeurs statistiques des données fournies par le système *miniBird*TM

Les erreurs de positionnement résultantes, présentées dans le tableau ci-dessous, confirment la similitude entre les effets engendrés par les différents outils. Cette similitude avait pu être observée sur la **Figure 3**.

	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)	Roulis (°)	Tangage (°)	Lacet (°)
Erreurs :						
Aiguille	1.78	4.79	1.04	3.76	-1.00	1.12
Foret	1.83	4.71	1.10	3.80	-1.03	1.16
Guide	1.80	4.86	1.02	3.83	-1.09	1.17

Tableau 2 : Erreurs occasionnées

Les erreurs occasionnées par les perturbations induites par la présence des outils sont globalement importantes dans cette configuration, puisque toutes supérieures au millimètre, notamment lors du calcul de la composante Y .

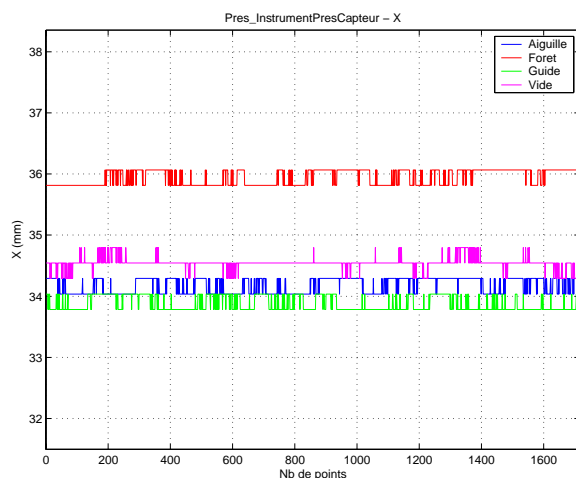
Cette série de mesures a été effectuée en disposant les outils à proximité des sources. Une première interprétation physique conduit à noter que, dans cette région, le champ ambiant est important. La perturbation créée par chacun des outils est essentiellement locale mais son amplitude peut être conséquente du fait de la proximité des sources magnétiques. Le capteur est positionné approximativement au centre de la plage de fonctionnement optimal du système magnétique, dans une zone où l'amplitude du champ ambiant a déjà fortement diminué. Il est situé à la même distance des sources magnétiques du système et des perturbations produites par les outils perturbateurs qui peuvent être considérées comme des sources parasites ou de bruit. En première analyse, au point de mesure, les perturbations produites par les outils chirurgicaux sont, apparemment et malgré la distance, suffisamment importantes pour être mesurées par le capteur, provoquant ainsi les erreurs constatées sur les données du système.

La similitude entre les effets engendrés par les différents outils est très frappante. La précision annoncée avec ce système est de 1.8 mm et la résolution égale à 0.5 mm. Les erreurs observées lors de cette série de mesures détériorent de manière significative les performances du système puisque ces erreurs sont globalement supérieures au millimètre. Il apparaît donc clairement, au vue des mesures effectuées, que ces déviations nuisent à l'utilisation des systèmes magnétiques et empêchent leur utilisation pour de nombreuses applications cliniques dont la précision requise est de l'ordre du millimètre.

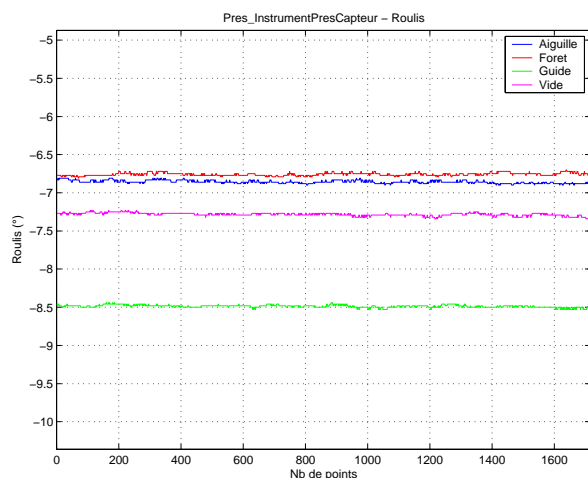
Outils près du capteur :

Pour cette série de mesures, les positions de la source et du capteur magnétiques qui constituent le système *miniBird™* restent inchangées mais les outils sont cette fois-ci déposés à proximité du capteur. Les résultats sont présentés sur les figures suivantes de la même manière que précédemment.

Les mesures effectuées en plaçant les différents outils près du capteur donnent des résultats plus disparates. Les effets observés varient en effet d'un outil à l'autre et leur amplitude est globalement moindre.



a) Coordonnée X



d) Roulis

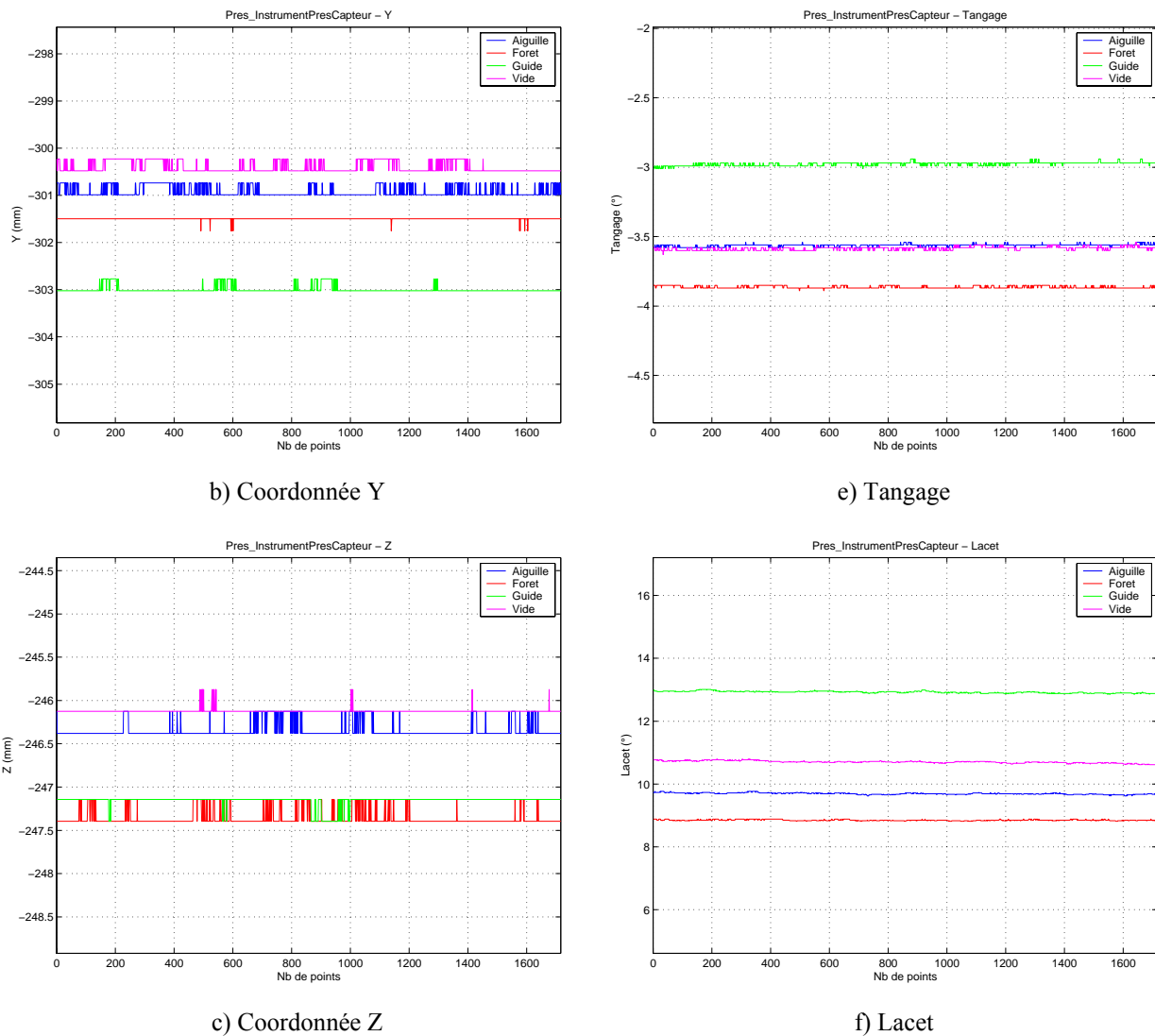


Figure 5 : Mesures des six paramètres de position et d'orientation du *miniBird™*. Les coordonnées cartésiennes du capteur sont présentées sur les graphes a), b), et c). Les paramètres d'orientation du capteur sont présentés en d), e) et f).

Le rapport signal à bruit n'a pas changé puisque la distance qui sépare la source du capteur n'a pas été modifiée. Nous pouvons une nouvelle fois observer le bruit de quantification plus apparent sur les coordonnées cartésiennes que sur les angles de rotation du fait de l'échelle utilisée pour la représentation.

Les valeurs moyennes des paramètres de localisation ont une nouvelle fois été calculées à partir des échantillons fournis par le système *miniBird™* (plus de 1000 échantillons par mesure) et sont présentées dans le **Tableau 3**.

	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)	Roulis (°)	Tangage (°)	Lacet (°)
Moyenne :						
A vide	34.54	-300.4	-246.12	-7.28	-3.59	10.7
Aiguille	34.18	-300.92	-246.34	-6.86	-3.56	9.69
Foret	35.94	-301.5	-247.36	-6.76	-3.86	8.85
Guide	33.87	-303.0	-247.16	-8.49	-2.98	12.92
Écart-type :						
A vide	0.096	0.153	0.155	0.156	0.156	0.161
Aiguille	0.127	0.170	0.194	0.195	0.195	0.197
Foret	0.127	0.128	0.156	0.157	0.158	0.158
Guide	0.121	0.143	0.155	0.156	0.156	0.159

Tableau 3 : Valeurs statistiques des données fournies par le système *miniBird™*

A partir de ces valeurs moyennes nous pouvons vérifier que des erreurs ont été engendrées par la présence des outils sur le calcul de la position et de l'orientation du capteur. Les erreurs induites par la présence des outils dans cette configuration sont moins importantes et plus hétérogènes que celles observées lors de la série de mesures effectuée précédemment. Les effets engendrés par la présence des outils perturbent cependant les résultats du système magnétique. Ces erreurs sont répertoriées dans le **Tableau 4**.

	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)	Roulis (°)	Tangage (°)	Lacet (°)
Erreurs :						
Aiguille	0.36	0.52	0.22	-0.42	-0.03	1.01
Foret	-1.40	1.10	1.24	-0.52	0.27	1.85
Guide	0.66	2.60	1.04	1.21	-0.61	-2.22

Tableau 4 : Erreurs occasionnées

La présence de l'aiguille n'engendre qu'une très faible déviation de la position moyenne calculée. Par contre, les erreurs produites par la présence du foret et du guide sont toujours observables bien que moins importantes et perturbent encore de manière significative les performances du système de localisation spatiale. Une première interprétation physique conduit à penser que leur forme géométrique et la quantité de métal dont ils sont constitués sont plus importantes que celle de l'aiguille et offre donc un meilleur couplage magnétique avec la source. Ceci permet la création de perturbations plus élevées.

Cette série de mesures a été effectuée en disposant les outils au voisinage du capteur. Le capteur est toujours positionné approximativement au centre de la plage d'utilisation optimale du système magnétique, dans une zone où l'amplitude du champ ambiant a déjà fortement diminué. Une première analyse conduit à proposer le raisonnement suivant : les perturbations produites localement par la présence des outils métalliques sont moins importantes dans cette disposition du fait de leur éloignement des sources de champ magnétique. Cependant, ces perturbations sont situées dans le voisinage immédiat du capteur et sont donc pleinement mesurées, provoquant ainsi les erreurs constatées sur les données du système. Les outils chirurgicaux, générateurs de perturbations électromagnétiques, ont été rapprochés du capteur mais ceci a contribué à les éloigner des sources magnétiques. Le champ exciteur est moins important et les perturbations induites moindres également. Leur influence sur la mesure n'est pas prépondérante et les erreurs occasionnées sont donc moins importantes.

Les erreurs constatées dans cette configuration, bien que moins élevées que celles observées précédemment, occasionnent cependant des imprécisions supérieures ou égales au millimètre. Ces imprécisions dégradent les performances du système et il apparaît donc clairement que toute utilisation pour des applications médicales dont la précision requise est de l'ordre du millimètre ne peut être envisagée avec ce type de système.

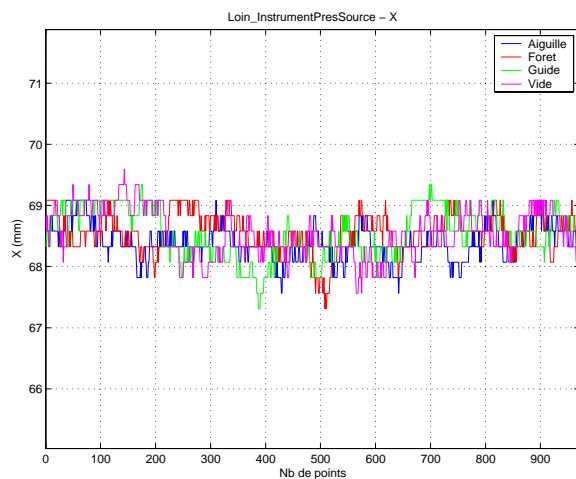
Nous avons pu mettre en évidence les perturbations engendrées par la présence de divers outils dans le champ opératoire sur le fonctionnement du localisateur magnétique lorsque le capteur est placé au centre de la plage de fonctionnement optimal du système. Nous allons maintenant nous intéresser au comportement de ce système, en présence des mêmes outils, lorsque le capteur est placé en limite de la plage d'utilisation définie par le constructeur.

b) Résultats obtenus en limite de la sphère de fonctionnement

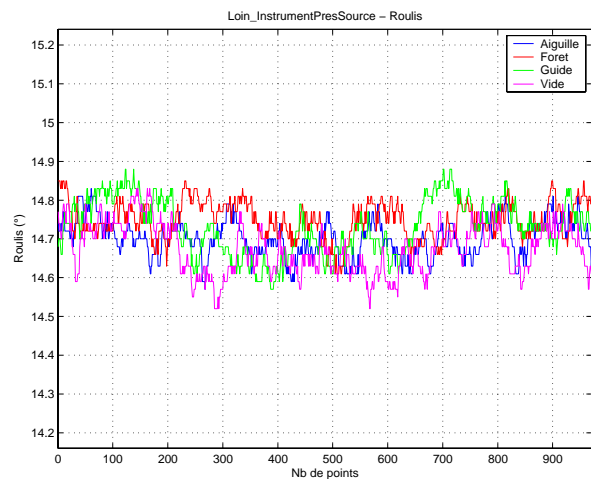
Le capteur est placé à environ 70 cm des sources magnétiques. La position du capteur est très proche de la limite du domaine couvert par le système (76.2 cm). Nous allons effectuer les mêmes mesures que précédemment et observer le comportement du système magnétique en présence d'outils chirurgicaux métalliques lorsque le système est utilisé en limite de validité des performances annoncées par le constructeur.

Outils près de la source :

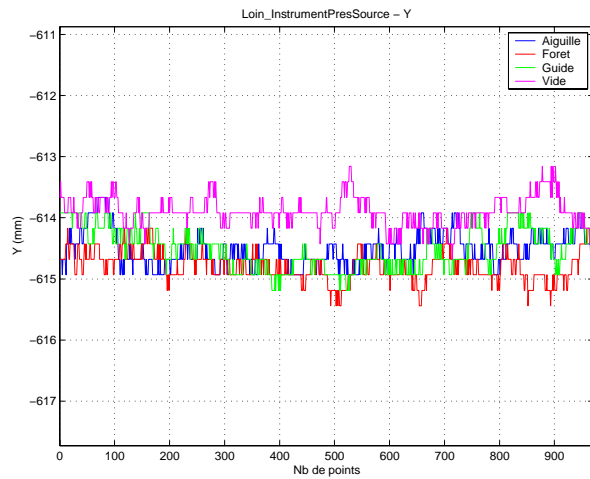
Les outils sont, dans un premier temps et comme précédemment, placés à proximité de la source de champ magnétique. Les mesures de position et d'orientation du capteur effectuées avec le système *miniBird™*, à vide et en présence de chacun des trois outils, sont présentées sur les figures suivantes.



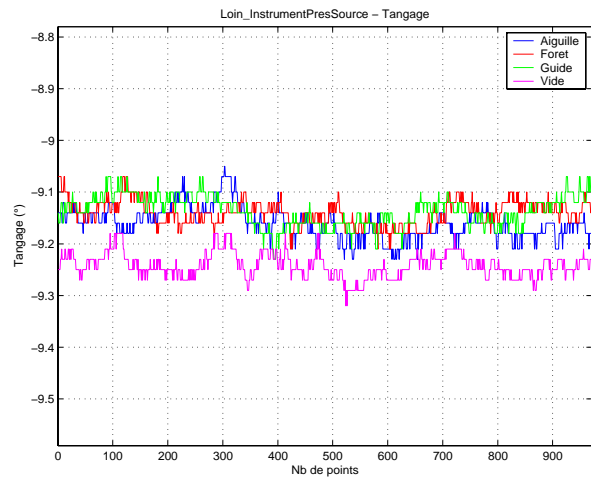
a) Coordonnée X



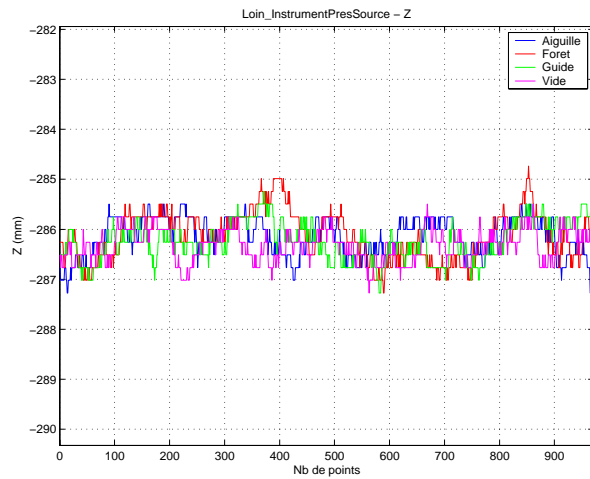
d) Roulis



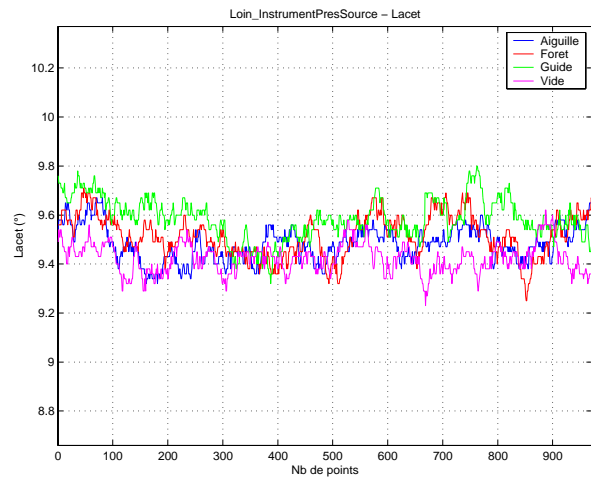
b) Coordonnée Y



e) Tangage



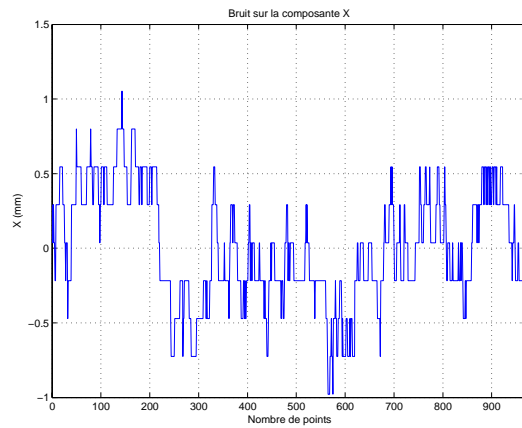
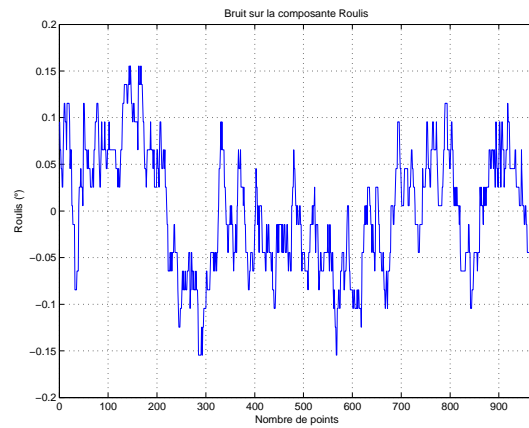
c) Coordonnée Z



f) Lacet

Figure 6 : Mesures des six paramètres de position et d'orientation du système *miniBird*TM. Les coordonnées cartésiennes du capteur sont présentées sur les graphes a), b), et c). Les paramètres d'orientation du capteur sont présentés en d), e) et f).

Comme nous pouvons le constater sur les graphes de la **Figure 6**, les mesures effectuées à cette distance sont globalement plus bruitées. La figure suivante illustre, à titre d'exemple, le bruit présent lors de la mesure à vide sur la composante d'axe *X* et sur la composante *roulis* du système *miniBird*TM.

a) Bruit sur la composante d'axe X b) Bruit sur la composante *Roulis***Figure 7 :** Bruit mesuré sur les données de position et d'orientation du capteur à vide.

La valeur *crête* du bruit présent sur les mesures effectuées en présence des différents outils avec le système magnétique sont élevées, globalement supérieures au millimètre et sont répertoriées dans le tableau suivant.

Bruit crête-crête (mm) :						
	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)	Roulis (°)	Tangage (°)	Lacet (°)
A vide	2.03	1.52	1.78	0.31	0.14	0.39
Aiguille	1.54	1.27	2.03	0.26	0.18	0.35
Foret	1.78	1.52	2.54	0.24	0.14	0.46
Guide	2.03	1.27	2.03	0.31	0.16	0.48

Tableau 5 : Valeurs crêtes du bruit sur les paramètres de position et d'orientation du capteur.

Il apparaît donc clairement que la présence de ce bruit sur les paramètres relatifs à la position et à l'orientation du capteur calculés par le *miniBird™* ne nous permet pas de distinguer de changement de comportement du localisateur magnétique en présence des différents outils chirurgicaux considérés. Les effets occasionnés par la présence de ces outils sont trop faibles à cette distance pour être observés distinctement, ils sont de plus couverts par les valeurs de bruit élevées.

Il est cependant intéressant de constater que les performances du système magnétique sont très vite dégradées pour des points de calcul situés en limite de la plage de fonctionnement optimal spécifiée par le constructeur. Ce paramètre de distance prépondérant contribue également à perturber le fonctionnement des systèmes électromagnétiques de localisation spatiale dont la sensibilité à la présence d'éléments métalliques a déjà été démontrée et peut conduire à des imprécisions importantes. Ces imprécisions rendent délicate toute utilisation clinique pour des applications exigeantes en terme de précision.

Les mesures effectuées en disposant les outils perturbateurs au voisinage du capteur sont sensiblement identiques et ne sont donc pas présentées du fait de leur manque de pertinence. La faible valeur du rapport signal à bruit obtenu à cette distance des sources ne nous permet toujours pas de distinguer de changement de comportement du système magnétique en présence des outils utilisés.

Nous nous sommes positionnés au cours de ce paragraphe en tant qu'utilisateur d'un système magnétique de localisation spatiale. Nous avons pu mettre en évidence les différents critères limitatifs de ces systèmes magnétiques. Nous avons notamment pu constater que ces systèmes sont sensibles à la présence d'outils métalliques dans le voisinage du champ opératoire. Ces outils métalliques dégradent les performances du système et peuvent générer des imprécisions importantes, supérieures à la précision requise par de nombreuses applications chirurgicales. Nous avons également pu observer la dégradation des performances du système lorsque celui-ci est utilisé en limite de la plage de fonctionnement définie par le constructeur. Le bruit présent sur les paramètres de localisation augmente et contribue à dégrader significativement les performances du système.

1.2 Problème de précision globale : un état de l'art

Les sources d'imprécision mises en évidence au cours du paragraphe précédent représentent le critère limitatif des systèmes électromagnétiques de localisation spatiale et restreignent leur utilisation clinique. Cette technologie présente cependant le précieux avantage de pouvoir localiser à travers des tissus mous ou même des obstacles plus solides et donc d'envisager la localisation de sondes intra-corporelles. Les systèmes basés sur ce principe physique sont les seuls systèmes à autoriser ces applications. Cette potentialité a généré de nombreuses études relatives au problème de précision globale de ces systèmes. Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre de cette étude du problème de précision. Nous nous intéresserons en effet aux distorsions engendrées par la présence de matériaux métalliques dans le champ opératoire d'un système magnétique de localisation spatiale.

Nous présentons ici quelques travaux menés jusqu'à ce jour sur les systèmes magnétiques de localisation spatiale et plus particulièrement sur leurs performances et leurs imprécisions qui illustrent l'intérêt porté à ces systèmes.

Dans [CLEARY03], les auteurs s'intéressent plus particulièrement à la précision obtenue, au centre de la sphère de fonctionnement du système, sur l'orientation d'une cible fournie par le localisateur magnétique *Aurora™* commercialisé par la société *Northern Digital*. Cet appareil est utilisé dans le cadre du développement d'un système de placement assisté par ordinateur d'aiguilles destinées à des interventions abdominales. Les résultats obtenus lors des tests effectués en conditions opérationnelles avec ce localisateur sont concluants puisque la plus mauvaise précision obtenue au centre de la plage optimale d'utilisation du système sur l'orientation d'une cible est de 0.7° . Cette précision est acceptable pour l'application clinique envisagée.

[MILNE96] évaluent les performances effectives du système de localisation *Flock of Birds™* commercialisé par la société *Ascension Technology*. La plage d'utilisation optimale de ce localisateur est spécifiée et les interférences occasionnées par la présence de plusieurs alliages orthopédiques sont estimées. La plage d'utilisation optimale déterminée par les auteurs suite aux différents tests effectués est obtenue lorsque la distance source/capteur est comprise dans la plage [22.5-64] cm. Les erreurs relatives sur la position et sur l'orientation constatées dans cette plage sont inférieures à 2 %. La résolution obtenue sur la précision et sur l'orientation est respectivement égale à 0.25 mm et à 0.1° . Les performances du système, combinées à son insensibilité à la présence de plusieurs alliages orthopédiques, rendent possible son utilisation pour une multitude d'applications dans ce domaine chirurgical.

Certains fabricants ont cherché à résoudre, en partie, ce problème d'imprécisions engendrées par la présence de métal dans le champ opératoire en fournissant des outils spécialement adaptés à ce type de localisateur [TRAXTAL]. Cette solution n'est toutefois pas entièrement satisfaisante car elle ne permet pas de s'affranchir des perturbations engendrées par la présence éventuelle d'autres éléments métalliques dans le champ opératoire et peut également influencer sur l'expérience du chirurgien.

Il existe également des méthodes de calibration élaborées pour compenser certaines perturbations comme celles engendrées par la présence d'objets métalliques statiques dans l'environnement proche du système magnétique. Le principe de ces méthodes de calibration consiste à mesurer les positions des points d'une grille 3D englobant le volume de capture. La grille tridimensionnelle obtenue, déformée par la présence des sources de perturbations, est alors combinée à des polynômes d'interpolation pour obtenir la grille authentique dont la cartographie exacte est réalisée parallèlement par un localisateur auxiliaire dont la précision est conforme aux exigences de cette opération. Les données fournies par le localisateur magnétique, entachées des erreurs occasionnées par la présence des différents sources de perturbation, sont corrigées à l'aide des polynômes d'interpolation identifiés grâce à la connaissance exacte des points de la grille. Cependant, toute modification de l'environnement électromagnétique dans lequel le système est en fonctionnement nécessite d'effectuer une nouvelle cartographie de l'environnement modifié. Cette méthode offre de bons résultats mais la cartographie préalable est une opération pointue qui doit être effectuée à chaque modification de l'environnement magnétique du localisateur. Dans [TIAN99], les auteurs présentent une méthode de calibration originale qui permet de s'affranchir des distorsions quasi-statiques créées par des objets métalliques en mouvement mais fixés solidairement au capteur. Cette méthode est mise en œuvre en utilisant le système *Flock of Birds*TM de la société *Ascension Technology* dont le *miniBird*TM utilisé précédemment est le module de base. Les résultats obtenus sont très bons puisque les auteurs annoncent que les erreurs de position rencontrées peuvent être diminuées d'environ 80 %. L'effet de la compensation sur les erreurs d'orientation est moins significatif et ne permet l'élimination que d'environ 40 % des erreurs constatées.

Le problème de précision globale de ces systèmes magnétiques de localisation spatiale limite à ce jour leurs utilisations cliniques. Les performances des localisateurs magnétiques existant permettent néanmoins leur utilisation pour certaines applications peu exigeantes en terme de précision. Certaines solutions commencent à émerger et même si elles ne permettent pas de s'affranchir totalement des imprécisions constatées, elles permettent tout de même d'en corriger quelques-unes. A partir d'une description de différents systèmes développés par la société *Polhemus*, [MURRY02] met en avant la nécessité de discussions complémentaires entre les spécialistes de la technologie magnétique et la communauté médicale pour mieux comprendre les besoins des praticiens et parvenir à développer des localisateurs mieux adaptés et donc plus performants.

Nous avons débuté notre étude en nous plaçant comme utilisateur d'un système magnétique de localisation spatiale pour mettre en évidence le critère limitatif de ces systèmes. Nous avons non seulement pu observer leur sensibilité à la présence de matériaux métalliques dans le champ opératoire mais aussi la corrélation entre les performances annoncées et la distance source/capteur. Nous avons également souligné l'intérêt grandissant porté aux localisateurs magnétiques et à leur problème de précision. Cette technologie est en effet la seule à

permettre une localisation intra-corporelle. Nous allons maintenant exposer les bases globales de la localisation spatiale et le principe de fonctionnement des localisateurs magnétiques.

2. La localisation par systèmes magnétiques

2.1 La localisation

Localiser un élément consiste à déterminer sa position par rapport à une référence. Dans le cas d'un espace tridimensionnel, un point est localisé par la connaissance de trois informations. Dans un repère cartésien par exemple, ces trois informations sont l'abscisse, l'ordonnée et l'altitude ou cote.

Nous nous intéressons en fait, dans le cadre applicatif des localisateurs magnétiques, à la localisation non plus de points mais de solides indéformables. Pour localiser par exemple un outil chirurgical, il faut connaître sa position mais également son orientation. La position d'un corps rigide est définie par convention comme étant celle d'un point connu de celui-ci – *son centre de gravité, par exemple* – par rapport à un référentiel absolu. A partir de ce point, on définit un repère associé à la cible. L'orientation de la cible est définie, par exemple, par la valeur des trois angles de rotations (*roulis, tangage, lacet*) permettant de passer du référentiel absolu à celui de la cible.

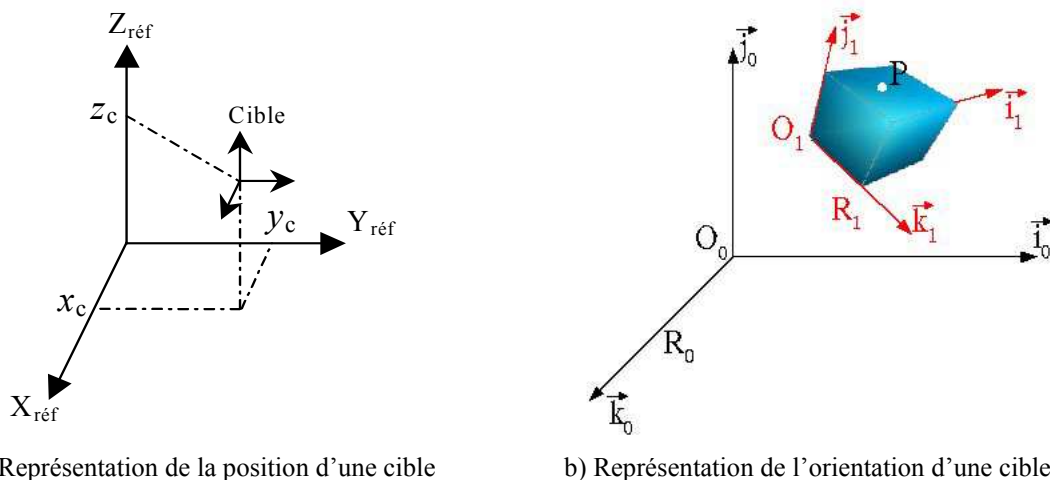


Figure 8 : Illustration des paramètres de position et d'attitude d'une cible dans un référentiel fixe. En a) sont présentés les paramètres caractérisant la position d'une cible dans un repère cartésien. L'orientation du repère associé à la cible est présenté en b).

La localisation d'un solide indéformable en six dimensions (6D) est la mesure de la matrice de passage du référentiel absolu à celui associé à la cible. La mesure de cette matrice procure trois composantes en translation caractérisant la position de la cible et trois composantes en rotation caractérisant son orientation. Il s'agit donc de résoudre un problème à six paramètres variables dans le temps.

Les systèmes de localisation spatiale comportent généralement deux parties distinctes : une source et un capteur. En fonction de sa position, la source fournit au capteur une information

différente. L'interprétation de la mesure du capteur donne une information sur la position de la source. Il est important de remarquer qu'en général un seul couple source/capteur ne suffit pas pour obtenir une localisation en six dimensions. Augmenter par exemple le nombre de capteurs peut suffire à résoudre le problème de la non-unicité des positions de la cible. Cet aspect sera abordé ultérieurement au cours de ce chapitre.

Dans la solution technique magnétique, le repère et la cible sont instrumentés par des sources magnétiques calibrées et par des capteurs magnétiques. Dans les paragraphes suivants, nous proposons d'introduire les notions de champ magnétique.

2.2 Notions d'électromagnétisme

Nous présentons ici quelques éléments d'électromagnétisme utiles à la bonne compréhension du principe de fonctionnement des systèmes de localisation basés sur un procédé magnétique. Les éléments introduits ci-après seront réutilisés dans la suite de l'étude.

2.2.1 Moment magnétique

Le champ magnétique est généré par le déplacement de charges électriques (ou courant) et par les mouvements magnétiques permanents de certaines particules ou molécules constituant les matériaux magnétiques. Ce champ magnétique se matérialise par des lignes de force ou lignes de champ comme le montre la **Figure 9**.

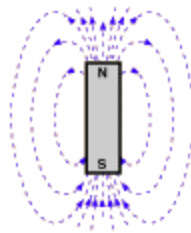


Figure 9 : Représentation des lignes de champ d'une source magnétique

La boucle de courant constitue en électromagnétisme l'élément de base de tous les calculs de champ magnétique. En effet, les sources de champ peuvent, à grande distance, toutes être approximées par la formule de la boucle de courant.

Considérons donc un circuit filiforme fermé de centre O , de rayon R et parcouru par un courant I . On associe au contour C formé par le circuit un vecteur \vec{S} appelé vecteur surface. On définit alors le moment magnétique, de la manière suivante :

$$\vec{M} = I \cdot \vec{S} \quad (1.1)$$

L'unité du moment magnétique est l'ampère mètre-carré ($A.m^2$).

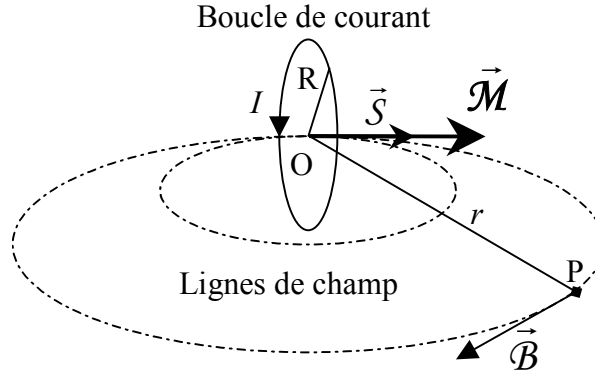


Figure 10 : Moment magnétique et vecteur induction créés par une boucle de courant

Le circuit magnétique, illustré par la **Figure 10**, définit une source magnétique comportant une face nord et une face sud. Le moment magnétique et le courant I sont liés par la règle du « tire-bouchon » : le sens de circulation de l'intensité est prise comme le sens d'un vissage virtuel et le moment magnétique est orienté dans le sens du déplacement de la vis associée. Le vecteur moment magnétique indique le sens du flot vectoriel magnétique qui sort de la face nord. Le vecteur \vec{B} est l'induction magnétique créée au point P par la boucle de courant. Il est tangent en tout point de l'espace aux lignes de champ définies précédemment. Un courant alternatif génère un champ magnétique oscillant à la même fréquence que le courant qui lui donne naissance.

Tout corps magnétique complexe, considéré à grande distance, peut être décomposé en une distribution de boucles de courant élémentaires. Le moment magnétique résultant est obtenu, en accord avec le théorème de superposition, en additionnant la contribution magnétique de chacune des boucles élémentaires.

2.2.2 Expression du champ magnétique

La loi de Biot et Savart, énoncée ci-dessous, donne l'expression de l'induction magnétique créée en tout point de l'espace par un circuit filiforme parcouru par un courant I comme celui proposé sur la **Figure 10**.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1.1)$$

où \vec{r} représente le vecteur dont l'origine est celle du vecteur élémentaire $d\vec{l}$ (où la charge est en mouvement) et l'extrémité le point de mesure P et μ_0 la perméabilité magnétique du vide égale à $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. Il est important de remarquer que la valeur du vecteur d'induction magnétique au point de mesure ne dépend que de la distance à la source.

2.2.3 Approximation dipolaire

Un dipôle électromagnétique est une entité imaginaire qui constitue une approximation de tout objet magnétique en le réduisant à un seul vecteur moment magnétique. Cette approximation consiste à considérer que cet objet est ponctuel et à lui affecter un moment magnétique. Si la plus grande dimension du circuit ou de l'objet considéré est petite en regard de la distance qui le sépare du point de mesure, l'expression complète du champ magnétique au point P peut se développer en série de Taylor selon la variable $1/r$. Les trois premiers

ordres de ce développement sont respectivement appelés composantes dipolaire, quadripolaire et octopolaire (on pourra voir [BLANPAIN80] ou [CARITU96], par exemple, et les travaux précédents). Si le point de mesure est suffisamment éloigné de la source, en pratique deux ou trois fois la plus grande dimension du circuit magnétique considéré, la composante dipolaire représente la contribution écrasante du champ d'induction magnétique. L'approximation dipolaire, lorsqu'elle est valide, permet de s'affranchir totalement de la notion de géométrie tridimensionnelle de la source lors du calcul du champ et permet de se ramener à un problème de source ponctuelle définie uniquement par ses coordonnées et son orientation. Elle s'exprime de la manière suivante :

$$\vec{B}_d(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r^3} \right) \quad (1.2)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide exprimée en mkg/C² et r représente la distance du dipôle au point de mesure P .

Une des spécificités importante des champs magnétiques est que leur module décroît en $1/r^3$. L'influence magnétique d'un corps est donc très localisée autour de lui. Cette spécificité entraîne une très grande dynamique des signaux magnétiques. L'amplitude du champ décroît par exemple d'un facteur 8 lorsque l'on double la distance entre le corps magnétique et le point de mesure.

L'intérêt de l'approximation dipolaire réside dans la simplicité de l'expression analytique du champ magnétique créé au point considéré. La formulation analytique n'est cependant pas toujours disponible. Il existe d'autres formulations du champ magnétique comme par exemple celles développées dans [DURAND68] pour exprimer plus précisément le champ créé par une boucle de courant ou comme d'autres formulations numériques plus complexes utilisées par exemple pour simuler des objets polyédriques uniformément aimantés [OKABE79]. Ces formulations numériques permettent de modéliser plus finement la source étudiée, notamment à plus courte distance.

2.2.4 Notion de flux magnétique

Le flux magnétique Φ est la mesure du flux d'induction magnétique \mathbf{B} à travers une surface plane S limitée par un contour orienté. Le flux est donné par la relation suivante :

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B.S.\cos\theta \quad (1.3)$$

où le flux Φ est exprimée en Weber (Wb), le champ magnétique \mathbf{B} en Tesla (T) et la surface S en mètre-carré (m²). La notion de flux est illustrée sur la figure ci-dessous.

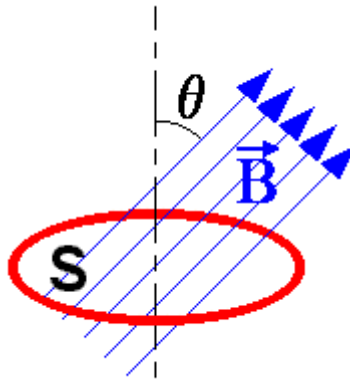


Figure 11 : Flux magnétique à travers une surface

Une variation de la valeur du flux à travers la surface S d'un circuit électrique telle une spire entraîne en accord avec la loi de Lenz l'apparition d'une force électromotrice d'induction. L'expression de cette tension induite est la suivante :

$$e = - \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.4)$$

où e est exprimée en Volt (V) et Φ en Weber (Wb).

Toute variation du champ magnétique sur la surface du circuit considéré ou de la surface elle-même entraîne une variation du flux magnétique.

2.2.5 Positions de Gauss

Notons également que pour l'expression du champ dipolaire, il existe deux positions pour lesquelles l'expression du champ magnétique est simple et singulière.

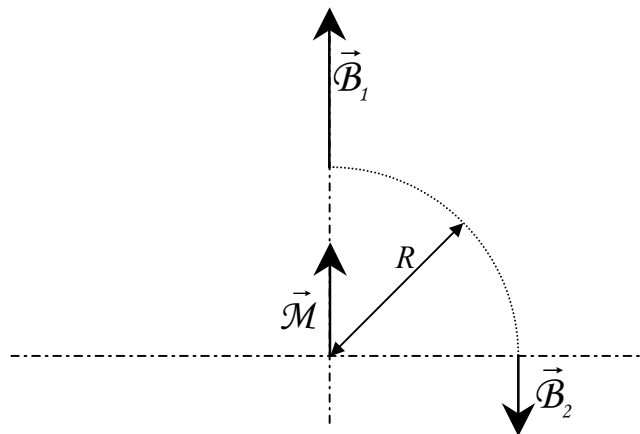


Figure 12 : Première et seconde position de Gauss

Pour une distance R donnée, le champ magnétique est maximal sur l'axe du dipôle (première position de Gauss notée \mathcal{B}_1) et minimal sur l'axe perpendiculaire à l'axe du dipôle (seconde position de Gauss notée \mathcal{B}_2).

Ces valeurs particulières ont pour expression :

$$\left\| \vec{\mathcal{B}}_1 \right\| = \frac{\mu_0 \cdot \left\| \vec{\mathcal{M}} \right\|}{2\pi R^3} \quad (1.5)$$

$$\left\| \vec{\mathcal{B}}_2 \right\| = \frac{\mu_0 \cdot \left\| \vec{\mathcal{M}} \right\|}{4\pi R^3} \quad (1.6)$$

Ces expressions permettent d'obtenir rapidement des ordres de grandeurs exploitables.

2.2.6 Accès à l'information magnétique

Le champ généré par une source magnétique est un champ de vecteurs. Différentes méthodes permettent de sonder cet environnement électromagnétique. Nous distinguons notamment la mesure vectorielle et la mesure scalaire du champ magnétique, respectivement assurées par les capteurs vectoriels et les capteurs à champ total. Il est également possible de mesurer les variations du flux magnétique. Plusieurs types d'instruments pour la mesure magnétique sont détaillés dans [JACOBS89] et [LENZ90].

Nous ne nous cherchons pas à présenter les différentes technologies de mesure mais à énoncer les différentes composantes mesurables du champ magnétique.

Le caractère vectoriel du champ magnétique implique que seuls les capteurs vectoriels permettent d'accéder à l'information vectorielle complète des champs magnétiques.

La mesure scalaire assurée par les capteurs à champ total ne mesure que le module du champ magnétique. Cet aspect scalaire de la mesure d'une grandeur originellement vectorielle est l'inconvénient majeur de cette méthode puisque l'information mesurée est incomplète. Notons cependant que pour certaines applications de type géophysique ou militaire, le capteur est embarqué à bord d'un porteur (avion ou véhicule). Le principe d'un capteur scalaire présente alors un avantage majeur sur les capteurs vectoriels, puisque la mesure ne dépend pas de l'orientation du porteur dans l'espace.

Les capteurs de flux tels les bobines, dont le principe de fonctionnement est basé sur la loi de Lenz, permettent de mesurer une variation du flux magnétique. L'information magnétique disponible est une nouvelle fois incomplète et ne fournit que des informations restreintes sur le champ magnétique mesuré (dérivée temporelle d'une composante de champ).

Il arrive en pratique qu'une mesure différentielle s'impose, que ce soit pour des considérations de réduction de bruit ou pour extraire l'information de la variation locale du champ. Cette mesure est la mesure en mode gradient. Il faut cependant faire la distinction entre une simple mesure différentielle et la mesure du gradient. Dans le premier cas, il s'agit de la différence de deux mesures de champ telles que l'espacement entre les capteurs soit inférieur à la longueur d'onde de cohérence du bruit. Pour le gradient, on utilise une notion de dérivée. Il faut donc que l'espacement des capteurs soit très petit devant la distance à la source. En gradient, on a une décroissance plus rapide ($1/r^4$ au lieu de $1/r^3$) qui se traduit donc par une diminution de portée.

Nous avons introduit au cours des paragraphes précédents la notion de champ magnétique. Nous avons vu que différentes formulations simplificatrices sont disponibles pour décrire une source magnétique. Il existe néanmoins d'autres formulations plus complètes permettant de modéliser finement la source étudiée. Le champ créé par une source magnétique est un champ de vecteurs et seuls les capteurs vectoriels permettent d'accéder à l'information magnétique vectorielle complète. Maintenant que ces éléments ont été introduits, nous allons présenter les principes de base régissant la mise en œuvre et le fonctionnement des systèmes magnétiques de localisation spatiale.

2.3 Mise en œuvre d'un système de localisation

Pour répondre à un problème de localisation spatiale de solides indéformables, nous avons vu précédemment que six paramètres variables dans le temps sont à déterminer. Six mesures indépendantes liées à ces paramètres sont donc au minimum nécessaires pour parvenir à localiser la cible. Pour obtenir ces six mesures indépendantes, plusieurs configurations sont possibles. Nous allons présenter au cours des paragraphes suivants le principe de fonctionnement des systèmes magnétiques de localisation spatiale et les techniques utilisées pour leur mise en œuvre.

2.3.1 Principe général

Le principe employé par les localisateurs magnétiques consiste à « remplir » le volume de capture à l'intérieur duquel on cherche à localiser une cible instrumentée par un champ magnétique dont l'expression est parfaitement connue.

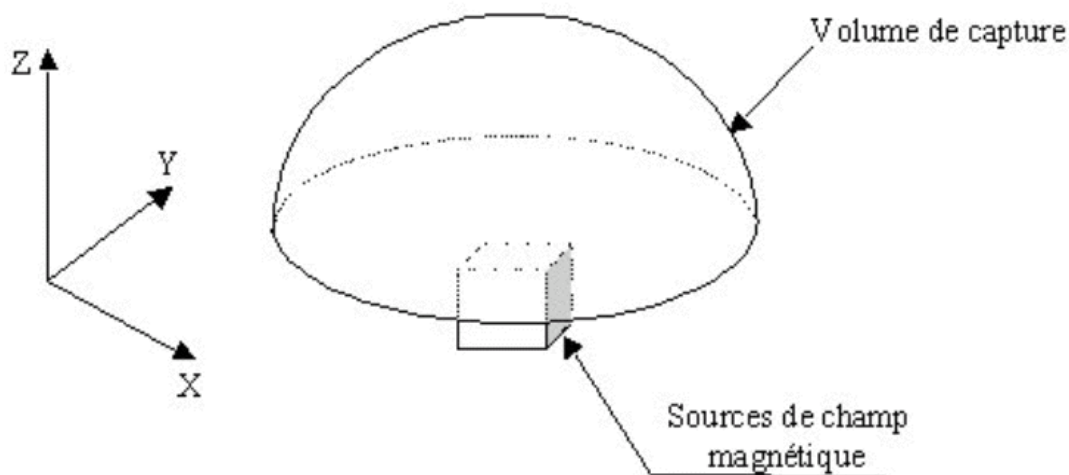


Figure 13 : Illustration du principe général de fonctionnement des systèmes magnétiques de localisation spatiale. Le principe employé consiste à « remplir » le volume de capture par un champ magnétique dont l'expression est parfaitement connue.

Le champ magnétique utilisé doit permettre de « coder » l'espace en établissant un lien bijectif entre les six paramètres de localisation et les valeurs du champ magnétique générées par la source. Cet aspect est primordial puisqu'à une mesure de champ ne doit correspondre qu'une et une seule position de l'espace.

L'expression du champ créé par une source magnétique en un point de l'espace est une fonction de la position relative source/point. En fonction de sa position, la source fournit donc au capteur une information différente. L'interprétation de la mesure du capteur donne une information sur la position de la source. Avec suffisamment de mesures indépendantes, il est alors possible par exemple, connaissant les paramètres de la source et la fonction qui donne l'expression du champ magnétique, de déterminer les paramètres de localisation du capteur. L'expression du champ généré par la source utilisée doit être parfaitement connue et réaliste (formulation analytique, numérique ou tabulée) pour tout point de l'espace. Cette fonction doit en outre rester valide dans tout le volume où la fonctionnalité localisation est souhaitée puisqu'elle sert de support à la phase d'inversion qui permet de déterminer les paramètres de localisation à partir des mesures. La connaissance précise et la stabilité de cette relation conditionnent la précision et la fiabilité des localisateurs magnétiques. Toute perturbation qui modifie les valeurs du champ provoque donc un écart entre la formulation théorique et la réalité du champ généré et contribue ainsi à dégrader le fonctionnement et les performances du système de localisation.

Nous savons que la source fournit au capteur une information différente suivant sa position. Si une mesure donne une équation, il faut alors disposer d'un minimum de six mesures indépendantes pour déterminer les six paramètres de localisation. Les moyens mis en oeuvre pour acquérir ces mesures indépendantes sont présentés au cours des paragraphes suivants.

2.3.2 Complexité du système – répartition des capteurs et des sources

Dans la solution technique magnétique, le repère et la cible sont instrumentés par des sources magnétiques calibrées et par des capteurs magnétiques. Un couple (une source ; une mesure) donne une équation. Pour inverser la fonction qui donne l'expression du champ en fonction de la position et déterminer ainsi les six paramètres de localisation, il faut disposer d'au moins six mesures indépendantes. La définition de la configuration spatiale du système magnétique et plus particulièrement le choix du nombre de sources et de capteurs utilisés permettent d'acquérir les mesures nécessaires. Le choix de la configuration spatiale dépend cependant du contexte d'utilisation et des contraintes imposées par le cahier des charges de l'application envisagée.

a) Configuration spatiale

Pour mettre en oeuvre un système magnétique il est possible d'instrumenter l'objet à localiser par un capteur de champ et le référentiel choisi par une source magnétique ou inversement, d'équiper le point mobile de la source et d'instrumenter le repère dans lequel on désire réaliser la localisation avec les capteurs magnétiques. Il est également possible de mixer les deux approches. Pour répondre au critère d'intégration – *prépondérant pour de nombreuses applications* – et pour conserver à la cible à localiser son caractère mobile, on préfère réserver la partie « lourde » pour le repère dans lequel on cherche à localiser puisque celui est fixe.

L'objectif est d'obtenir au moins six mesures indépendantes, il faut donc au minimum que le nombre de sources multiplié par le nombre de capteurs soit supérieur ou égal à six. En se basant sur l'utilisation de magnétomètres vectoriels, ces derniers sont les seuls à mesurer l'information magnétique vectorielle complète, le nombre de sources magnétiques utilisées peut être limité. La figure suivante présente un exemple de configuration source/capteur qui

permet d'acquérir les mesures nécessaires tout en minimisant l'encombrement du système. En effet, en utilisant par exemple trois sources magnétiques et un magnétomètre vectoriel biaxe (deux axes de mesure), nous obtenons bien les six mesures nécessaires et suffisantes à la détermination des six paramètres de position et d'orientation de la cible instrumentée par le capteur de champ (sous réserve de l'indépendance de ces mesures).

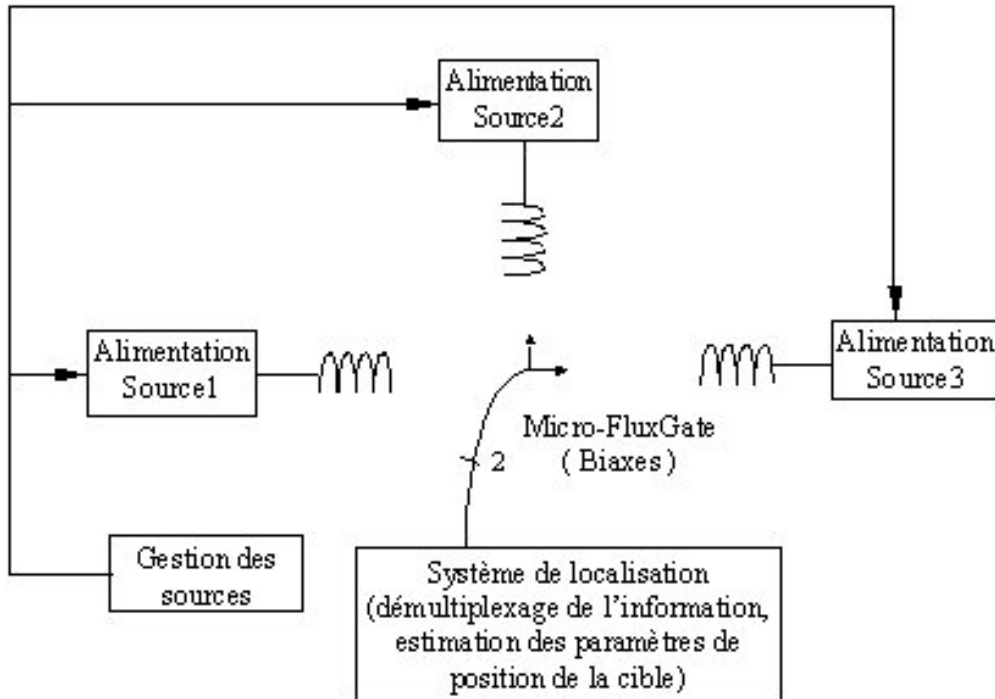


Figure 14 : Exemple de report de la complexité

Les trois sources peuvent être disposées de manière à former un trièdre direct et servir ainsi de référentiel fixe pour la localisation de la cible instrumentée à l'aide du capteur de champ magnétique. Nous disposons donc bien dans cette configuration de six mesures qui permettent d'inverser le problème et déterminer ainsi la position et l'orientation du capteur dans l'espace. Il faut cependant que les mesures soient indépendantes.

Un aspect important lors de la définition de la configuration spatiale du système magnétique est le choix de la position des sources. Afin de tenir compte de la dynamique importante des signaux magnétiques à l'intérieur du volume de capture – *on rappelle que le module du champ magnétique décroît en $1/r^3$* – plusieurs configurations spatiales sont mises en oeuvre : les sources peuvent être disposées soit à la base du volume de capture, soit à plus grande distance de manière à obtenir une dynamique moins importante sur les signaux mesurés à l'intérieur de la sphère de fonctionnement du système. Ce problème de dynamique a été mis en évidence en début de chapitre avec le système magnétique *Ascension* lorsque celui-ci est utilisé en limite de la sphère de fonctionnement définie par le constructeur. L'illustration de ce phénomène est proposée sur la **Figure 15**.

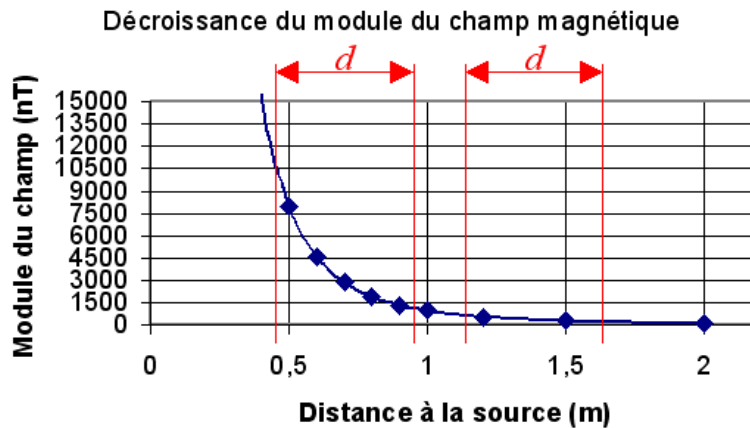


Figure 15 : Variation du module du champ magnétique en fonction de la distance à la source

La figure ci-dessus représente la décroissance du module du champ d'induction magnétique en fonction de la distance à la source. La source magnétique considérée est une source dipolaire dont le moment magnétique est égal à 10 A.m^2 . Les valeurs du module sont calculées en première position de Gauss. La distance d matérialisée en rouge représente le rayon de la demi-sphère de fonctionnement du système imagé. Il apparaît clairement que l'écart entre les valeurs minimales et maximales du champ source est très important lorsque la plage de fonctionnement est située proche des sources dans une zone de haute énergie. Cette dynamique sur les signaux magnétiques dans la zone d'intérêt décroît très rapidement lorsque la distance à la source augmente.

Les valeurs du module du champ sont répertoriées dans le tableau ci-dessous.

Distance à la source (m)	0.1	0.3	0.5	0.8	1	1.2	1.5
Module du champ (nT)	10^6	37037	8000	1953	1000	578.7	296.3

Tableau 6 : Valeurs du module du champ en fonction de la distance à la source

Si les sources sont placées à 30 cm du volume de capture et que ce dernier est, par exemple une sphère dont le rayon est de 50 cm, la dynamique occasionnée sur les valeurs du champ aux extrémités du domaine est de 35000 nT. Alors que lorsque les sources sont disposées à 1 m de la zone de fonctionnement, la dynamique sur les valeurs du champ n'est plus que de 700 nT.

La dynamique des signaux magnétiques peut revêtir une grande importance par exemple lors de l'étape de conversion analogique/numérique effectuée sur les signaux magnétiques en vue des différents traitements ultérieurs. Cette dynamique importante conditionne le nombre de bits nécessaires pour la numérisation des signaux analogiques et la valeur du LSB, donc la résolution du système. Par ailleurs, selon la technologie employée le capteur magnétique peut lui même être rapidement saturé s'il est utilisé trop près des sources du fait des valeurs de champ importantes générées au voisinage de la source.

Notons que la société *Biosense* propose une solution intéressante pour le cas où un seul point doit être localisé : la puissance d'alimentation peut être adaptée en temps réel selon le rapport signal à bruit reçu par le capteur. On obtient ainsi en tout point du volume de capture, une valeur de champ suffisamment élevée pour obtenir un rapport signal à bruit adapté aux

traitements envisagés. Cette technique est décrite dans [ACKER95]. Notons qu'une partie de la difficulté de gestion de la dynamique est alors reporté sur la gestion du courant d'alimentation de la source.

La configuration spatiale du système est spécifiée de manière à disposer de suffisamment de mesures pour déterminer les six paramètres de localisation. Pour ce faire, nous avons supposé que le nombre d'informations disponibles était égal (si la géométrie des sources et des capteurs est bien choisie) au produit nombre de sources par nombre de capteurs. Ceci implique qu'il doit être possible, à partir d'une seule mesure capteur de déterminer quelle est la contribution de chaque source.

Pour ce faire, plusieurs méthodes d'alimentation des sources sont généralement employées lors de la mise en œuvre des localisateurs magnétiques. Ces méthodes sont présentées dans les paragraphes suivants.

b) Méthodes d'alimentation

Il existe différentes méthodes d'alimentation pouvant être utilisées pour générer des champs magnétiques indépendants et multiplexer l'information fournie par les sources magnétiques. On distingue principalement deux modes d'alimentation des sources de champ. Il est intéressant de noter que ces méthodes ont un impact important sur les effets perturbateurs qui font l'objet de notre étude, notamment via la loi de Lenz.

Alimentation temporelle (Time Division Multiple Access)

Dans le mode TDMA, l'alimentation des sources magnétiques est effectuée de manière séquentielle. Chacune des sources est alimentée l'une après l'autre suivant un cycle bien défini.

Le courant source utilisé pour l'excitation des bobines peut être continu ou alternatif, de manière à générer un champ pulsant à une fréquence unique. Cette méthode est très facile à mettre en œuvre puisqu'elle ne nécessite aucun traitement lourd pour identifier et analyser séparément la contribution de chacune des sources utilisées. L'excitation alternative nécessite toutefois l'utilisation d'un étage de détection synchrone, relativement simple à mettre en œuvre dans un cas mono-fréquentiel.

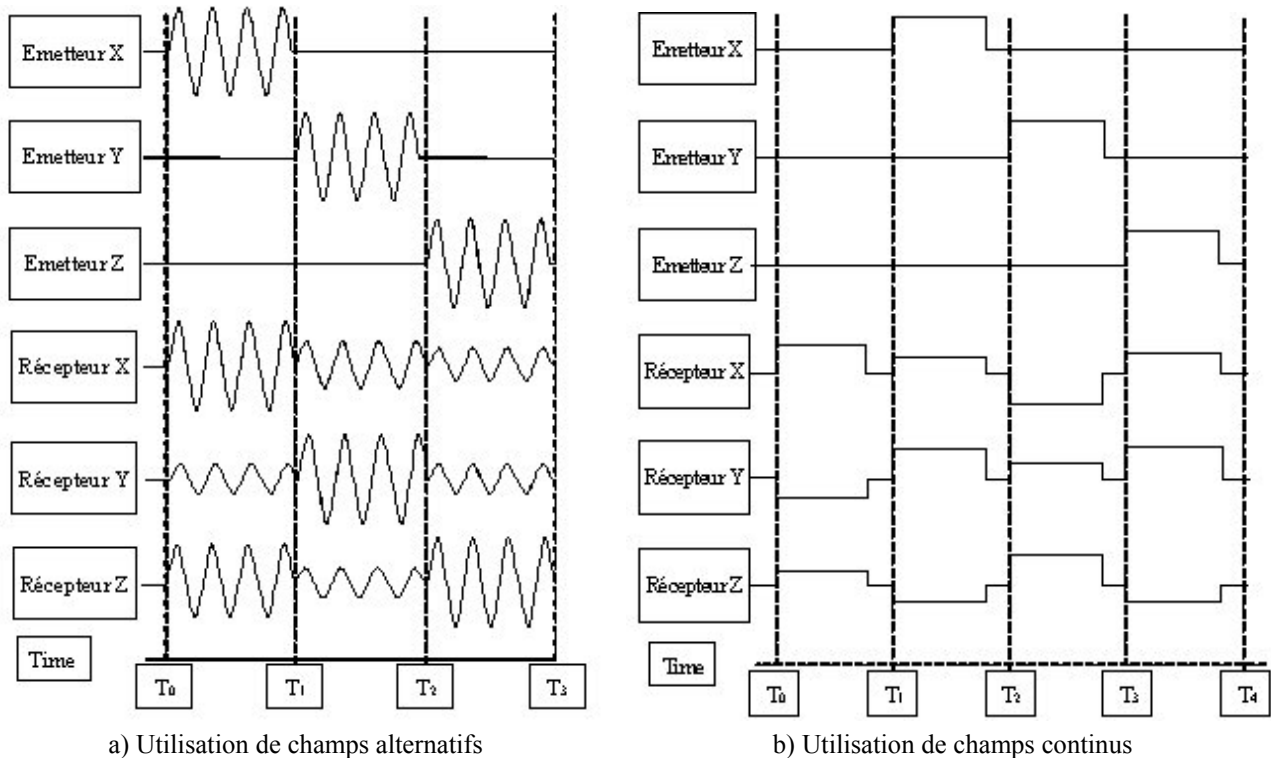


Figure 16 : Alimentation temporelle des sources magnétiques. Les sources sont alimentées de manière séquentielle suivant un cycle prédéfini. L'excitation peut être alternative en a) ou continue en b).

Les graphes de la **Figure 16** illustrent le fonctionnement de la méthode temporelle dans les cas où l'excitation est alternative en a) et continue en b).

Dans le cadre de l'utilisation de courants continus, une étape supplémentaire est nécessaire au cours du cycle d'alimentation. Il faut en effet pouvoir disposer d'un laps de temps pendant lequel aucune des sources n'est alimentée afin de mesurer la contribution de la composante continue du champ ambiant qui vient se superposer au champ généré par la source.

Alimentation fréquentielle (Frequency Division Multiple Access)

Dans le mode FDMA, les sources magnétiques sont alimentées simultanément. Chacune des sources est alimentée par un courant sinusoïdal dont la fréquence de pulsation varie d'une source à l'autre. Le capteur magnétique mesure donc une valeur de champ globale constituée des différentes composantes fréquentielles issues de chacune des sources magnétiques. Les fréquences d'excitation utilisées doivent être suffisamment distinctes pour être séparées par exemple par détection synchrone au sein d'une même voie de mesure.

Cette méthode nécessite un traitement supplémentaire par rapport à la technique temporelle. Il faut en effet pouvoir séparer les contributions de chacune des sources magnétiques utilisées afin de traiter séparément l'information relative à chacune des sources. Il convient de choisir des fréquences « libres » des perturbations que l'on peut rencontrer dans les environnements d'utilisation du système (courant électrique, ordinateurs, moteurs électriques, etc.).

Nous avons développé au cours des paragraphes précédents le principe de fonctionnement des systèmes magnétiques de localisation spatiale et les techniques employées pour leur mise en

œuvre. Nous allons maintenant présenter différents localisateurs magnétiques actuels, utilisés ou susceptibles d'être utilisés pour des applications médicales.

2.4 Etat de l'art industriel

Nous présentons ici une liste non exhaustive de systèmes commercialisés et d'articles relatifs aux localisateurs magnétiques. Nous nous intéresserons principalement aux systèmes dont les champs d'application sont liés à la médecine ou la chirurgie et qui peuvent donc être utilisés pour localiser ou positionner des instruments chirurgicaux. Nous synthétiserons notamment les performances des différents localisateurs magnétiques classiquement utilisés que nous pourrions comparer à la précision généralement requise en chirurgie et les dimensions du système prépondérantes pour le critère d'intégration.

Les premières descriptions des systèmes magnétiques les plus anciens datent de plus d'une vingtaine d'années [POLHEMUS75], [BLANPAIN79].

Dans [RAAB79] est décrit un système de localisation électromagnétique basé sur l'utilisation d'une source tri-axiale de champ dipolaire et d'un capteur tri-axe constitué de trois bobines orthogonales. Ce système est un système alternatif et les trois bobines émettrices sont alimentées simultanément. La mesure effectuée par les trois bobines réceptrices est constituée de neuf valeurs et permet donc de disposer d'informations suffisantes pour déterminer la position et l'orientation du capteur relativement aux sources, disposées de manière à former un trièdre et utilisée comme référentiel fixe. Le système décrit dans cet article sert de base aux appareils de localisation commercialisés par la société *Polhemus*. Le produit phare de cette société est actuellement le système *Fastrak*TM. Ce système est un localisateur 6D basé sur l'utilisation de champs magnétiques alternatifs et donné pour être le système le plus précis du marché. Le tableau ci-après résume les spécifications de ce système.

TECHNIQUES	
Plage en translation :	± 76.2 cm dans chaque direction
Plage en rotation :	Toute rotation
Précision statique :	Position : 0.762 mm RMS Orientation : 0.15° RMS
Résolution statique :	Position : 0.005 mm par tranche de 2.54 cm de séparation Orientation : 0.025°
Fréquence d'échantillonnage :	120 mesures/seconde dépendant du nombre de capteurs
DIMENSIONS	
Émetteur :	5.8 cm x 5.6 cm x 5.6 cm (L x l x H)
Capteur :	2.3 cm x 2.8 cm x 1.5 cm (L x l x H)
Électronique associée :	27.9 cm x 28.9 cm x 9.1 cm (L l W x H)
Environnement :	De grands objets métalliques, tels que des bureaux ou des placards, peuvent rapidement dégrader les performances du système.

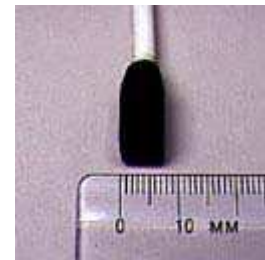
Tableau 7 : Spécifications du système *Fastrak*TM

Le second système présenté est le système *miniBird*TM [ASCENSION] utilisé au début de notre étude pour illustrer les imprécisions occasionnées par la présence d'outils métalliques dans le champ opératoire sur les résultats d'un localisateur magnétique. Ce système,

développé par la société *Ascension Technology*, utilise une méthode temporelle pour l'alimentation des sources de champ magnétique. Le système fournit à l'utilisateur la position et l'orientation d'un capteur relativement à une source magnétique constituée de trois bobines émettrices disposées concentriquement suivant un trièdre direct, formant ainsi un référentiel fixe. Le capteur est un magnétomètre de type fluxgate, utilisé pour son aptitude à effectuer une mesure de champ magnétique dans le continu et composé de trois axes de mesure. L'alimentation des sources s'effectue de manière séquentielle suivant un cycle défini comme suit : dans un premier temps, aucune des bobines n'est alimentée et le capteur mesure uniquement la composante continue du champ terrestre sur ses 3 axes. Puis les bobines sont alimentées tour à tour par un courant d'excitation continu. L'amplitude des signaux mesurés ne dépend que de la position et de l'orientation relative du capteur par rapport à la source magnétique. Ce principe suppose que le mouvement est lent devant la séquence de champ. L'information fournie par la source active est alors extraite des signaux magnétiques mesurés en soustrayant la valeur de la composante continue du champ terrestre. La mesure du champ magnétique est effectuée lorsque le champ émis par la source a atteint son régime permanent. Ce procédé permet, selon ses inventeurs, de s'affranchir des problèmes engendrés par la présence de courants induits à l'établissement du champ dans des structures métalliques voisines. Les figures ci-après présentent les différents éléments constituant le système *miniBird™*. Il existe deux versions de ce système qui permettent d'effectuer des mesures à l'intérieur de volumes de dimensions variées.



a) Capteurs, sources et électronique associée



b) Capteur utilisé pour le modèle 800

Figure 17 : Système magnétique *miniBird™* de la société *Ascension Technology*. On distingue en a) le système complet, composé de deux capteurs, du bloc contenant les sources et de l'électronique associée. En b) sont illustrées les dimensions du capteur utilisé par le modèle large champ.

Les performances du système, annoncées par le constructeur, sont synthétisées dans le tableau ci-après.

TECHNIQUES	
Plage en translation :	Model 800 : ± 76.2 cm dans chaque direction Model 500 : ± 45.7 cm dans chaque direction
Plage en rotation :	Toute rotation
Précision statique :	Position : 1.8 mm RMS Orientation : 0.5° RMS
Résolution statique :	Position : 0.5 mm Orientation : 0.1° @ 30.5cm
Fréquence d'échantillonnage :	Jusqu'à 120 mesures/seconde quelque soit le nombre de capteurs
DIMENSIONS	
Émetteur :	Cube de 9.6 cm de côté avec 3 m de câble
Capteur :	18 mm x 8 mm x 8 mm (L x l x H) avec 3 mètres de câble pour le Modèle 800 ; 10 mm x 5 mm x 5 mm pour le Modèle 500
Électronique associée :	24 cm x 29 cm x 6.6 cm (Modèle standard) 24 cm x 11.6 cm x 19.05 cm (Carte ISA)
Environnement :	Des objets métalliques et des champs magnétiques extérieurs au voisinage du volume opératoire dégraderont les performances du système.

Tableau 8 : Spécifications du système *miniBird*TM

Une nouvelle technique de localisation a été développée pour le suivi du déplacement d'une tumeur induit par le mouvement des organes lors de séances de radiothérapie. Cette technique, présentée dans [KIRSCH00], est basée sur une approche sensiblement différente des autres systèmes. La source de champ magnétique utilisée pour « coder » le volume de capture est constituée de six bobines différentielles montées le long des arêtes d'un support tétraédrique. Chaque bobine différentielle est en fait constituée de deux bobines dont les polarisations sont opposées montées concentriquement l'une derrière l'autre. Une telle source permet de générer un champ magnétique dont la contribution de la composante quadripolaire est prépondérante. Les bobines émettrices sont alimentées de manière séquentielle et le cycle d'alimentation a une durée totale de 20 ms. Le capteur de champ utilisé est également une bobine qui mesure les six tensions induites à ses bornes lors d'un cycle de fonctionnement par le champ quadripolaire généré par chacune des six bobines émettrices.

Pour localiser dans l'espace un capteur de type bobine, seuls cinq paramètres sont à déterminer. En effet, les paramètres de localisation d'une spire (atome de base de la bobine) sont les coordonnées cartésiennes de son centre, associées aux deux angles de rotation de la normale à la spire, comme le montre la **Figure 18**. C'est la localisation 5D. Ce système permet cependant d'effectuer également une localisation 6D.

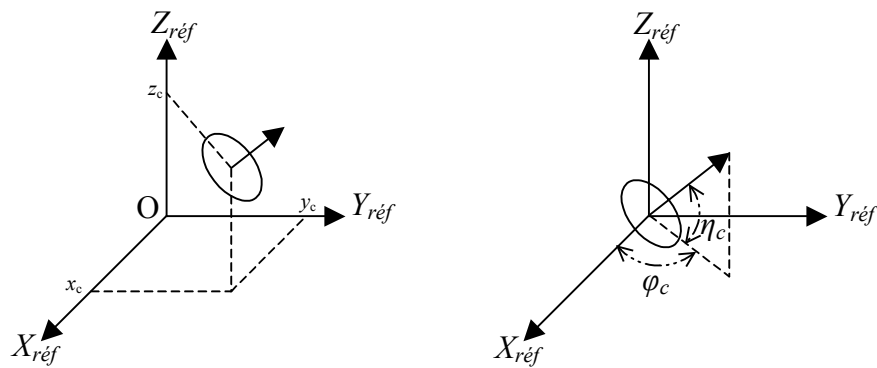


Figure 18 : Définition des paramètres de localisation et d'orientation d'une spire

La méthode de résolution du problème inverse est inspirée des travaux de [WYNN 75]. Les cinq paramètres définissant la position et l'orientation du capteur sont alors déterminés par un algorithme itératif de type Levenberg-Marquart. Cette technique a fait l'objet d'un dépôt de brevet (PCT/CH97/00132 et WO97/36192) par la société *Mednetix AG* (société suisse issue du Paul Scherrer Institut) puis a été mise en œuvre, dans le cadre d'un partenariat avec la société *Nothern Digital*, lors de la conception du localisateur *Aurora™*.



Figure 19 : Générateur de champ du système *Aurora™*

Voici les spécifications du localisateur magnétique *Aurora™* :

TECHNIQUES	
Plage en translation :	Cube de 500 mm de côté, décalé d'environ 50 mm des sources
Plage en rotation :	Toute rotation
Précision statique :	Position : 1 – 2 mm RMS Orientation : 0.5 – 1° RMS
Résolution statique :	Position : 0.7 mm RMS Orientation : 0.025°
Fréquence d'échantillonnage :	
DIMENSIONS	
Émetteur :	220 mm x 220 mm x 170 mm
Capteur :	8.0 mm x 0.8 mm
Électronique associée :	295 mm x 235 mm x 88 mm
Environnement :	Les données ont été collectées dans un environnement sans perturbations électromagnétiques. La précision du système dépend de la présence d'éléments métalliques

Tableau 9 : Spécifications du système *Aurora™*

Le problème de la dynamique importante des champs magnétiques à l'intérieur de la sphère de fonctionnement du système, liée à la décroissance en $1/r^3$ de l'amplitude du champ,

a été astucieusement résolu par la société *Biosense* (voir [ACKER95] pour la description du mode d'alimentation et [BIOSENSE94] pour le système général). Cette étude s'inscrit dans le cadre de la localisation de cathéter à l'intérieur du corps humain. Le brevet déposé par cette société décrit un système capable de contrôler l'alimentation des sources de champ magnétique de manière à asservir la puissance d'alimentation et obtenir ainsi un rapport signal à bruit constant dans tout l'espace de travail. Le système utilise une source de champ magnétique constituée de trois bobines dont les axes sont parallèles, alimentées de manière séquentielle et réparties de telle sorte que l'ensemble du volume de capture soit « rempli » de manière homogène. Le cathéter à localiser est instrumenté à l'aide de trois bobines réceptrices disposées orthogonalement et placées à l'intérieur de l'objet. Le système dispose ainsi de neuf mesures indépendantes et est alors en mesure d'inverser le problème pour déterminer les paramètres de position et d'orientation du cathéter à localiser.

Les systèmes magnétiques de localisation spatiale présentés dans les paragraphes précédents utilisent des sources magnétiques actives qui nécessitent d'être alimentées. Il existe toutefois d'autres méthodes qui utilisent des sources passives comme des aimants. Ces systèmes peuvent être potentiellement intéressants notamment pour les applications médicales requérant la localisation d'une cible intra-corporelle, dans la mesure où la cible à localiser est libérée de toute liaison électrique. Un système de ce genre est exposé dans [YABUKAMI00]. Les auteurs utilisent un (ou deux) aimant(s) comme cible à localiser et deux (ou quatre) capteurs vectoriels de type fluxgate suivant la configuration retenue. L'approximation dipolaire est retenue pour modéliser le champ généré par le marqueur magnétique. Une mesure du champ ambiant est effectuée au préalable sans la présence des aimants. Le problème inverse est résolu en comparant la valeur de champ mesurée à la valeur calculée, en utilisant la méthode de Powell décrite dans [POWELL64]. La précision obtenue en position est d'environ 3 mm pour un marqueur situé à 150 mm.

Les performances des systèmes magnétiques de localisation spatiale présentés au cours des paragraphes précédents diffèrent selon la technique utilisée pour la mise en œuvre du système. Les systèmes magnétiques les plus performants affichent une précision légèrement inférieure au millimètre, comme le localisateur alternatif *Fastrak™* développé par la société *Polhemus*, mais la précision obtenue avec la majorité des localisateurs magnétiques est de l'ordre du millimètre, voire supérieure. Ces résultats permettent néanmoins d'envisager leur utilisation clinique pour certaines applications médicales dont la précision requise est compatible avec les performances annoncées. Mais il est cependant assez systématique qu'en pratique des imprécisions dégradent considérablement les performances de ces systèmes. Les imprécisions les plus manifestes sont occasionnées par la présence d'objets métalliques dans le champ opératoire du localisateur magnétique. Nous avons pu observer l'impact de ces phénomènes sur les données du système en début de chapitre, nous allons maintenant examiner les effets engendrés sur le champ magnétique généré par la source.

3. Perturbations électromagnétiques

La présence d'éléments métalliques dans le champ opératoire d'un système magnétique de localisation spatiale engendre des imprécisions sur les données du système. Ce fait a pu être vérifié en début de chapitre sur les résultats du système à courant continu *miniBird™* obtenus en présence de différents outils métalliques utilisés cliniquement. En première hypothèse,

nous avons avancé que la présence de l'élément métallique engendre une perturbation qui modifie localement les valeurs du champ émis par la source. La conséquence est que le champ électromagnétique réel présent dans le volume de capture diffère notablement de l'expression théorique employée dans le calcul et entraîne les imprécisions constatées sur la position. Nous allons donc au cours des paragraphes suivants nous intéresser aux effets occasionnés par un élément métallique sur la répartition théorique du champ magnétique généré par la source.

3.1 Effets sur le champ magnétique

Nous nous plaçons cette fois non plus du seul point de vue de l'utilisateur comme en début de chapitre mais cherchons à évaluer physiquement le phénomène en mesurant le comportement du champ magnétique généré par la source, en présence ou en absence de perturbateur.

Nous allons examiner au cours de ces essais les effets engendrés par la présence d'une plaque d'aluminium dans le volume de capture en mesurant une composante du champ magnétique ambiant à l'aide d'un capteur magnétique de type micro-fluxgate. Le système magnétique de localisation spatiale utilisé est une nouvelle fois et pour les mêmes raisons que précédemment le système *miniBird™* de la société *Ascension Technology*. Les dimensions de la plaque métallique utilisée sont les suivantes : 500 mm × 500 mm × 4 mm ($L \times l \times e$). Le schéma descriptif du dispositif expérimental mis en œuvre est présenté sur la **Figure 20**.

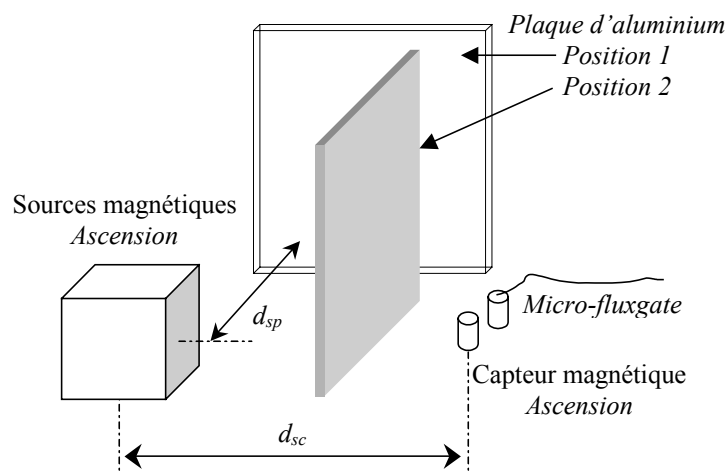


Figure 20 : Schéma descriptif du dispositif expérimental

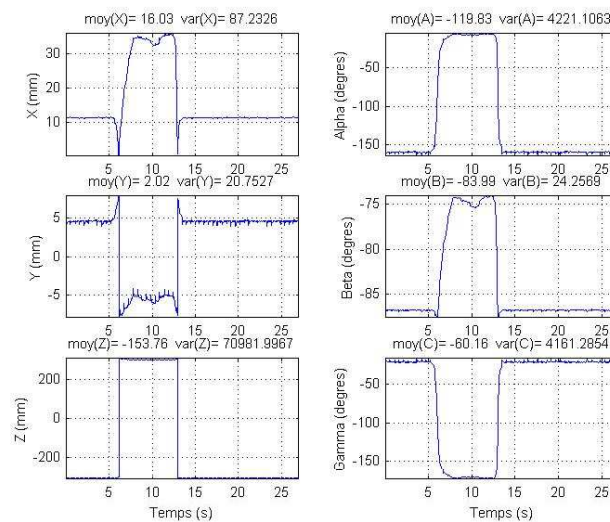
Dans un premier temps, la plaque est positionnée latéralement à environ 200 mm (d_{sp}) du système. Elle est maintenue dans cette position « à la main » puis retirée. La plaque est ensuite disposée entre les source magnétiques du système et les capteurs où elle est une nouvelle fois maintenue « à la main » puis retirée. La distance source/capteurs (d_{sc}) est égale à 300 mm.

Les sources magnétiques du système sont alimentées de manière séquentielle par des courants continus. Ces mesures sont destinées à mettre en évidence la déformation importante des séquences du champ en présence de fort conducteur. Durant la période de fonctionnement du système *miniBird™*, le capteur de type micro-fluxgate mesure une composante du champ magnétique ambiant.

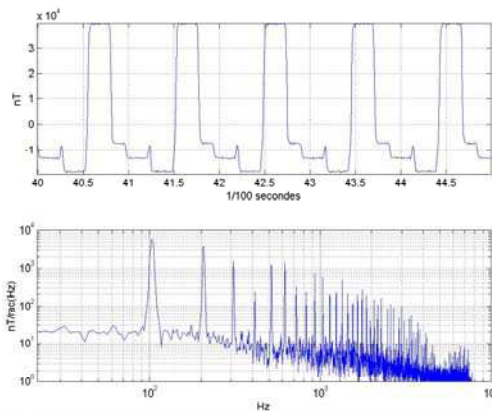
Le champ magnétique ambiant mesuré par le micro-fluxgate est présenté sur les figures suivantes. Les mesures de position ont été effectuées pour les deux positions distinctes de la plaque d'aluminium utilisée pour perturber les séquences du champ généré par les sources magnétiques.

La plaque est dans un premier temps positionnée latéralement à 20 cm environ du système entre les instants $t = 6$ s et $t = 13$ s, puis retirée. Les enregistrements du *miniBird*TM sont présentés en a). Les graphes b) c) et d) représentent des tranches temporelles de durée 5/100 de seconde du signal magnétique généré par la source et enregistré à 20 kHz à l'aide du micro-fluxgate Leti. On distingue en b) la séquence « normale » du champ magnétique généré par les sources du système *miniBird*TM lorsque la plaque d'aluminium est « loin ». La séquence d'alimentation est constituée des quatre étapes suivantes : les sources sont alimentées l'une après l'autre (trois premières étapes) puis aucune source n'est alimentée durant la quatrième et dernière étape nécessaire à la mesure du champ ambiant.

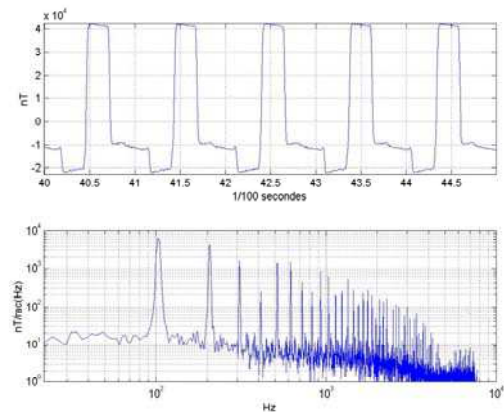
En c) nous pouvons constater une déformation du champ due à la présence de la plaque. Les transitions sont moins nettes et les amplitudes sont perturbées (en valeur et stabilité). La forme générale reste néanmoins « correcte » et permet le calcul. Les données fournies par le système deviennent fausses entre les instants $t = 6$ s et $t = 13$ s (cf a). En d) la plaque est à nouveau « loin » et le système retrouve une séquence similaire à celle de b) et les mesures de position reviennent à leur valeur initiale.



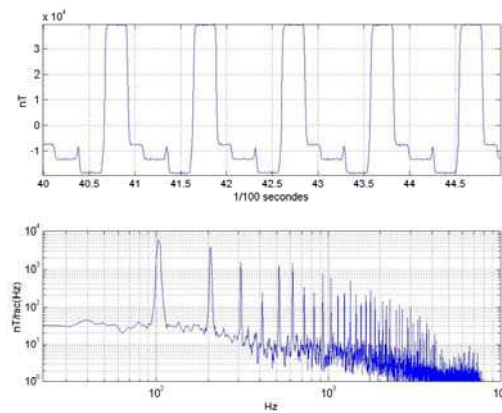
a) Enregistrements calculés par le *miniBird*TM



b) Extrait de la 2nd seconde d'essai



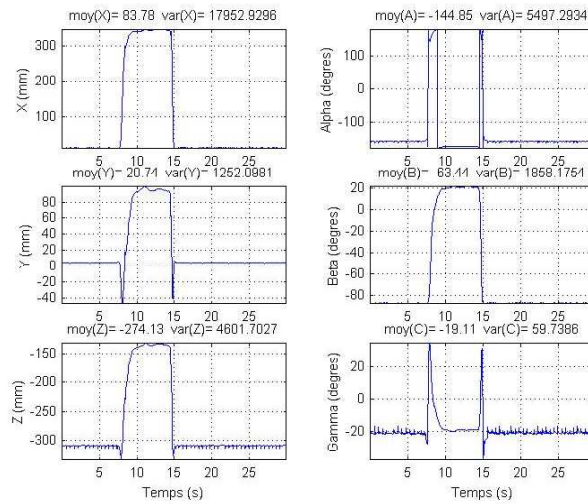
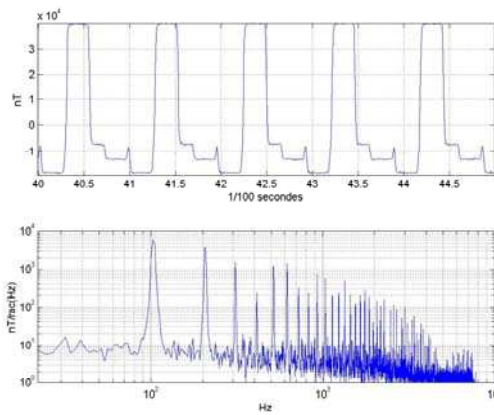
c) Extrait de la 10ème seconde d'essai



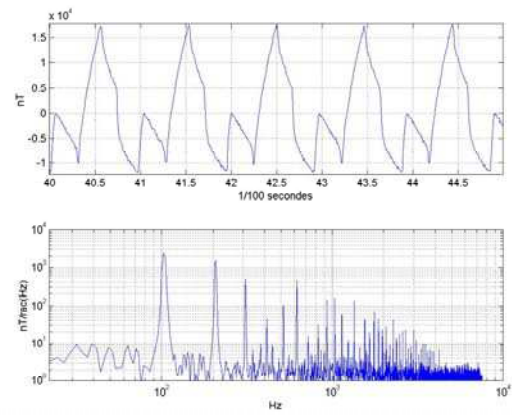
d) Extrait de la 16ème seconde d'essai

Figure 21 : Essai plaque aluminium à 20 cm.

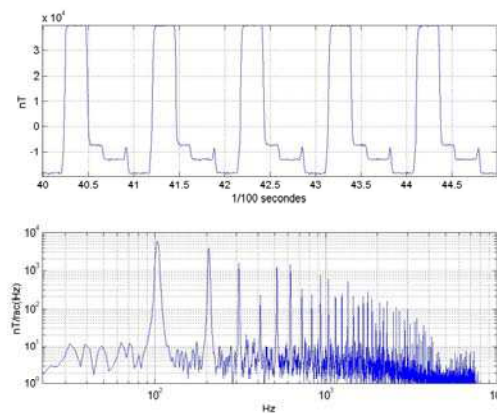
Dans un second temps, la plaque est positionnée entre la source et les capteurs entre les instant $t = 7$ s et $t = 16$ s, puis retirée. Les enregistrements du *miniBird*TM sont présentés en a). Les graphes b) c) et d) représentent des tranches temporelles de durée 5/100 de seconde du signal magnétique enregistré à 20 kHz à l'aide d'un micro magnétomètre Leti. On distingue en b) la séquence « normale » du champ magnétique généré par les sources du système *Ascension*, lorsque la plaque d'aluminium est « loin ». En c) on constate la déformation extrême du champ due à la présence de la plaque. Les transitions sont complètement déformées et les amplitudes ne sont plus calculables. La forme générale n'est plus correcte. Les données fournies par le système sont complètement fausses (cf a)). En d) la plaque est à nouveau « loin » et le système retrouve une séquence similaire à celle de b).


 a) Enregistrements calculés par le *miniBird™*


b) Extrait de la 3ème seconde de mesure



c) Extrait de la 13ème seconde de mesure



d) Extrait de la 20ème seconde de mesure

Figure 22 : Essai plaque aluminium entre la source et le capteur.

Notons que l'utilisateur n'a accès à aucun indice de validité du calcul fourni par le système.

Les déformations observées en présence de la plaque métallique sur les séquences du champ généré par les sources magnétiques sont importantes. Nous avons mis en évidence le fait que

la présence d'éléments métalliques crée un champ électromagnétique perturbateur dans la zone de fonctionnement du localisateur et modifie les valeurs du champ généré par la source. De ces modifications des valeurs du champ découlent les imprécisions constatées sur les données fournies par le système.

Le problème de précision inhérent à ces systèmes magnétiques de localisation spatiale résulte de leur sensibilité à la présence de champs locaux qui créent des distorsions sur le champ magnétique généré par la source. En pratique, ces distorsions sont généralement induites par la présence d'outils métalliques ou générateurs de perturbations électromagnétiques (écran, perceuse, etc.) dans la zone de fonctionnement du système. Les perturbations engendrées peuvent être de deux sortes : dynamiques ou statiques. Les perturbations dynamiques évoluent au cours du temps et sont le plus souvent occasionnées par des appareils électriques. Les perturbations statiques demeurent constantes au cours du temps et sont le plus souvent créées par la présence d'objets métalliques statiques dans le champ opératoire. Ces phénomènes sont détaillés dans [NIXON98]. Les auteurs présentent dans cet article une étude des effets engendrés par la présence de champs locaux et d'éléments métalliques dans l'environnement de deux systèmes magnétiques de localisation spatiale : un localisateur alternatif, le système *Fastrak*TM de la société *Polhemus* et un système à courants continus, le système *Flock Of Birds*TM de la société *Ascension Technology*. Ces travaux font apparaître que les erreurs dues aux distorsions créées par les champs locaux augmentent en fonction de $(d_{sc})^4$ où d_{sc} est la distance source/capteur. Il apparaît également que les deux systèmes magnétiques ne réagissent pas de la même manière en présence des phénomènes considérés. Le système alternatif s'est montré particulièrement insensible aux perturbations engendrées par les appareils électriques mais vulnérable en présence de matériaux conducteurs et magnétiques. Le système à courants continus s'est montré relativement sensible aux perturbations créées par la présence d'appareils électriques. Il a toutefois révélé une robustesse remarquable à la présence de matériaux ne possédant aucune propriété magnétique et s'est montré moins sensible que le système alternatif à la présence de matériaux magnétiques et conducteurs. Il est intéressant de constater que les deux systèmes testés ne réagissent pas de la même manière face aux différentes sources de perturbations considérées. Leur sensibilité à ces phénomènes dépend en effet de la méthode d'alimentation choisie lors de la mise en œuvre du localisateur magnétique. Ce critère peut ainsi être décisif dans le choix d'un système magnétique pour une application donnée.

Nous avons pu observer, au cours des paragraphes précédents, les déformations importantes engendrées sur le champ créé par une source magnétique en présence d'éléments métalliques et plus précisément d'une plaque conductrice en aluminium. Les notions de perturbations statiques et dynamiques ont été introduites. Il est également intéressant de noter la corrélation entre la méthode d'alimentation utilisée lors de la mise en œuvre du système considéré et sa sensibilité aux différentes sources de perturbations. Après avoir introduit ces éléments, nous allons maintenant spécifier les paramètres de notre étude.

3.2 Spécification des paramètres de l'étude

Nous avons présenté au cours de ce premier chapitre le principe général de fonctionnement des systèmes magnétiques de localisation spatiale et les méthodes fréquemment employées pour leur mise en œuvre. Les localisateurs magnétiques peuvent être répartis en deux catégories, selon le mode d'alimentation des sources magnétiques retenu. Cette distinction

répertoire notamment les systèmes à courants continus et les systèmes alternatifs. Cependant, tout phénomène même transitoire implique une répartition spectrale qui n'est pas réduite au continu. Ces systèmes peuvent donc également être étudiés via une décomposition en série de Fourier avec une démarche harmonique. Nous nous limiterons donc à l'étude des perturbations engendrées par des sources sinusoïdales puisque, comme nous venons de le souligner, ceci ne restreint pas la généralité de notre étude.

Nous avons mis en évidence les déformations importantes des séquences du champ source en présence d'éléments métalliques. Nous avons vu que ces déformations sont dues à la présence de perturbations électromagnétiques qui modifient la répartition théorique du champ généré par les sources du système. Ces perturbations sont de deux sortes. On distingue notamment les perturbations dynamiques et statiques. Nous nous intéresserons principalement au cours de cette étude aux perturbations statiques engendrées par la présence de matériaux métalliques dans le champ opératoire. Les matériaux métalliques peuvent être des milieux conducteurs et/ou magnétiques. Cette distinction est nécessaire puisque ces matériaux présentent des propriétés physiques distinctes et engendrent des phénomènes différents, comme nous le verrons au cours du second chapitre.

Les paramètres spécifiant le problème traité au cours de notre étude sont donc les suivants : la source magnétique considérée est sinusoïdale et les perturbations étudiées sont celles induites au sein de matériaux métalliques statiques situés au voisinage de l'ensemble source/capteur.

Conclusion

Nous avons présenté au cours de ce chapitre le principe de fonctionnement des systèmes de localisation basés sur une modalité électromagnétique. L'atout majeur des localisateurs basés sur ce principe physique est de permettre la localisation de sondes intra-corporelles.

Différentes méthodes sont utilisées pour la mise en œuvre de ces systèmes. Ces méthodes ont également été présentées au cours de ce premier chapitre. Pour notre étude, la différenciation principale réside dans le mode d'alimentation des sources magnétiques. On distingue d'une part les systèmes alternatifs et d'autre part les systèmes à courants continus. Chaque méthode procure ses avantages et ses inconvénients. Les performances obtenues avec les différents localisateurs magnétiques disponibles permettent leur utilisation pour certaines applications cliniques peu exigeantes en terme de précision. Cependant, ces systèmes sont par construction sensibles à l'environnement électromagnétique dans lequel ils sont utilisés. La présence de champs locaux, engendrés par des sources magnétiques parasites, occasionne des distorsions sur la répartition théorique du champ généré par les sources du localisateur. Ces modifications des valeurs du champ créé par la source magnétique du système entraînent les imprécisions constatées sur les données fournies par le localisateur qui se base sur un champ théorique calculé en l'absence de perturbateur.

Ces imprécisions représentent le critère limitatif des systèmes magnétiques de localisation spatiale et restreignent leurs utilisations cliniques malgré cette aptitude de permettre la localisation de cibles à travers à des tissus mous et même des obstacles plus solides. La résolution des problèmes d'imprécision constatés sur le fonctionnement des localisateurs magnétiques passe par une meilleure compréhension des phénomènes. Partant de ce constat,

ce travail de thèse se veut être une contribution à l'étude des sources d'imprécision qui dégradent considérablement les performances des systèmes magnétiques de localisation spatiale. Notre objectif est le développement d'un outil de simulation des phénomènes électromagnétiques induits par une source sinusoïdale au sein de matériaux métalliques conducteurs et/ou magnétiques statiques dans le champ opératoire. Ces phénomènes et la mise en équations aboutissant à leur modélisation sont présentés dans le prochain chapitre.

CHAPITRE II

MODELISATION

Introduction

Le phénomène d'induction électromagnétique consiste en l'apparition d'un champ électrique, donc d'une force électromotrice induite, lorsque le champ magnétique \mathbf{B} dans lequel est immergé le circuit considéré est variable dans le temps ou qu'il existe une déformation et/ou un déplacement relatif du circuit dans un champ statique. Dans le cadre de notre étude, où l'élément de base utilisé est une source sinusoïdale de champ magnétique, nous nous intéresserons donc essentiellement aux phénomènes dus à une variation temporelle du champ excitateur. Nous allons étudier dans ce chapitre, les hypothèses qui vont nous permettre de relier ce phénomène aux équations du système de Helmholtz, issues des équations de Maxwell et des relations constitutives des milieux. Nous verrons que les phénomènes de diffusion sont largement prépondérants dans la gamme de fréquence qui nous intéresse et plus particulièrement lorsque les matériaux étudiés ont une conductivité électrique élevée. Ceci nous permettra de négliger les phénomènes de propagation grâce à l'utilisation de l'hypothèse quasi-statique.

Nous verrons ensuite quelles sont les méthodes numériques disponibles pour la résolution du système d'équations obtenu. Nous présenterons plus particulièrement la méthode des éléments finis, employée au cours de cette étude de modélisation des phénomènes d'induction électromagnétiques et fréquemment utilisée pour le calcul numérique des courants de Foucault dans les conducteurs. Cette méthode est parfaitement adaptée à la description fine des géométries. Notre modèle, implanté sous le logiciel FluxExpert, est basé sur une approche utilisant une formulation en quadrivecteur potentiel $(\mathbf{A}, V-\mathbf{A})$ et s'inscrit à la suite de nombreux développements. En effet, depuis 1981, le calcul numérique des courants de Foucault utilisant ce type de formulation fait l'objet d'un nombre grandissant de recherches au sein de la communauté internationale des analystes numériques [RENHART88], [AL-DIN97], [LUONG97].

1. Contexte physique

1.1 Caractérisation des sources et des matériaux

Les sources de champ utilisées sont des sources sinusoïdales. Les fréquences d'excitation des courants sources sont comprises dans la plage [100 – 10k] Hz. Il est également envisagé de pouvoir utiliser des sources magnétiques statiques telles que des aimants. Cette éventualité devra être prise en compte lors du développement du modèle numérique.

Dans le cadre de notre étude des perturbations subies par les systèmes de localisation, nous allons nous intéresser à des matériaux métalliques présentant des propriétés de conduction électrique et/ou des propriétés magnétiques susceptibles d'être le siège de l'apparition de phénomènes d'induction électromagnétiques. Tous les milieux considérés seront supposés linéaires, isotropes et homogènes. Il nous faut cependant pouvoir prendre en compte les discontinuités ou sauts de chacune des deux propriétés électromagnétiques aux interfaces entre les différents milieux. Le tableau ci-dessous présente les propriétés physiques de quelques matériaux susceptibles d'être rencontrés dans l'environnement effectif d'utilisation des systèmes magnétiques de localisation spatiale et qu'il nous faut pourvoir intégrer aux diverses simulations.

Matériaux	Perméabilité relative	Permittivité relative	Conductivité (S/m)
Fonte	100 à 10000	1	$1 \cdot 10^7$
Acier	2	1	$0.75 \cdot 10^7$
Aluminium	1	1	$3.54 \cdot 10^7$
Argent	1	1	$6.67 \cdot 10^7$
Cuivre	1	1	$6.25 \cdot 10^7$
Fer	5	1	$1 \cdot 10^7$
Nickel	600	1	$0.8 \cdot 10^7$
Plomb	1	1	$0.5 \cdot 10^7$

Tableau 10 : Propriétés électromagnétiques de quelques métaux

1.2 Phénomènes électromagnétiques

Les perturbations provoquées par l'environnement électromagnétique pénalisent fortement le fonctionnement des systèmes électromagnétiques de localisation spatiale.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement au cours de cette étude aux perturbations engendrées par la présence de matériaux métalliques à l'intérieur du volume de capture. Les perturbations occasionnées par ce type de matériau sont essentiellement issues de deux types de phénomènes d'induction qui dépendent de la nature des matériaux considérés.

Nous proposons au cours de ce paragraphe une introduction théorique des phénomènes physiques qui régissent le comportement des champs dans les matériaux métalliques pour en présenter les différents acteurs. Les équations qui régissent le comportement de ces champs seront présentées ultérieurement au cours de ce chapitre.

1.2.1 Induction électromagnétique

Le phénomène d'induction électromagnétique consiste en l'apparition d'un champ électrique E , donc d'une force électromotrice induite, dans un circuit placé dans un champ magnétique d'induction B lorsque ce circuit est en déplacement relatif par rapport aux lignes de champ créées par la source (cas dit de « Lorentz ») ou lorsque ce champ d'induction B varie au cours du temps (cas dit de « Neumann »). Ce phénomène apparaît dès lors que le flux d'induction à travers le circuit varie.

La présence d'un champ électromoteur d'induction dans un circuit volumique conducteur tel qu'un élément métallique entraîne l'apparition, suivant la loi d'Ohm, de courants induits : les courants de Foucault. En accord avec la loi de Lenz, ces courants tendent à s'opposer au phénomène qui leur a donné naissance. Ils génèrent à leur tour un champ magnétique qui va s'opposer au champ magnétique créé par la source.

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous nous intéresserons uniquement aux phénomènes d'induction produits par une variation temporelle du champ magnétique car les objets en présence sont supposés immobiles ou lentement mobiles. De plus nous ne considérons que des sources sinusoïdales. Ceci ne représente pas une limitation car une source alternative d'un autre type peut être décomposée en série de Fourier et être résolue de manière « fréquentielle ». La saturation de la perméabilité magnétique pouvant être négligée car les champs mis en œuvre sont très faibles.

1.2.2 Aimantation

Il apparaît que tous les matériaux démontrent des effets magnétiques mais la plupart de ces effets sont si faibles qu'un grand nombre de milieux sont considérés comme des matériaux non-magnétiques. En général, les matériaux sont classés suivant leur comportement magnétique en trois grands groupes. On peut notamment distinguer les matériaux diamagnétiques, paramagnétiques et ferromagnétiques. Ces milieux possèdent la propriété de s'aimer si on les place dans un champ magnétique. Sous l'action d'un champ extérieur, il apparaît en effet au sein de ces matériaux un moment magnétique.

Pour la plupart des substances, l'aimantation cesse lorsque disparaît le champ magnétique qui lui a donné naissance. C'est le cas des substances dites diamagnétiques ou paramagnétiques. Dans un champ magnétique extérieur un matériau diamagnétique acquiert un moment magnétique orienté en sens inverse du champ qui lui a donné naissance. Dans un milieu paramagnétique l'aimantation est orientée dans le sens du champ extérieur.

Un petit nombre de substances conservent cependant leur aimantation lorsque cesse le champ extérieur et l'aimantation devient alors permanente. Elles sont appelées ferromagnétiques car elles possèdent des propriétés identiques à celles du fer. Sous l'influence d'une faible induction magnétique extérieure, les matériaux ferromagnétiques acquièrent une aimantation induite qui peut être considérablement plus importante que l'aimantation acquise par les substances paramagnétiques. La susceptibilité magnétique désigne la capacité d'un matériau à s'aimer en

présence d'un champ magnétique extérieur. Pour comparaison, alors que la susceptibilité magnétique est de l'ordre de 10^{-3} pour les matériaux paramagnétiques, on observe des valeurs pouvant atteindre 10^6 pour des matériaux ferromagnétiques. Cette aimantation se traduit par l'apparition d'un moment magnétique qui engendre des distorsions sur les lignes de champ créées par la source magnétique.

Le comportement des champs dans un milieu métallique dépend des propriétés physiques du milieu considéré. Il faut distinguer les milieux conducteurs de ceux présentant des propriétés magnétiques, les effets engendrés n'ont pas la même origine. Nous avons présenté au cours de ce paragraphe les différents acteurs des deux phénomènes physiques précédemment définis : l'induction électromagnétique et l'aimantation. Les champs et les paramètres qui régissent leur comportement dans le milieu ont notamment été introduits. Nous allons maintenant nous intéresser aux équations qui permettent de décrire ces phénomènes électromagnétiques.

2. Équations de l'induction

Nous présentons, au cours des paragraphes suivants, les différentes équations qui régissent le comportement des champs électromagnétiques et les relations qui permettent de les relier aux caractéristiques physiques des milieux considérés. L'objectif est d'aboutir à un système d'équations dont les champs sont solutions.

2.1 Équations de Maxwell

La mise en équations de l'induction électromagnétique est obtenue à partir des équations de Maxwell. Ces équations peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

- Loi d'induction de Faraday :

$$\nabla \times \vec{E}(r,t) = -\frac{\partial \vec{B}(r,t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

- Théorème d'Ampère généralisé :

$$\nabla \times \vec{H}(r,t) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}(r,t)}{\partial t} \quad (2.2)$$

- Théorème de Gauss électrique :

$$\nabla \cdot \vec{D}(r,t) = \rho(t) \quad (2.3)$$

- Théorème de Gauss magnétique :

$$\nabla \cdot \vec{B}(r,t) = 0 \quad (2.4)$$

Le champ électrique \vec{E} est exprimé en V/m, l'induction magnétique \vec{B} en T, le champ magnétique \vec{H} en A/m, l'induction ou le déplacement électrique \vec{D} en C/m², la densité de courant \vec{J} en A/m² et la densité de charges électriques ρ en C/m³. L'opérateur *Nabla* est défini de la manière suivante :

$$\nabla = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \quad (2.5)$$

Ces relations peuvent être complétées par la loi de conservation des charges :

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0 \quad (2.6)$$

Cette loi est directement issue du théorème d'Ampère généralisé (2.2), dans la mesure où, mathématiquement, la divergence d'un rotationnel est nulle.

2.2 Relations constitutives des milieux

Ces relations permettent de relier les caractéristiques des milieux considérés aux grandeurs électromagnétiques précédemment définies, mais également de les coupler entre elles. Ces relations sont les suivantes :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.7)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (2.8)$$

et la loi d'Ohm :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.9)$$

Les vecteurs **P** et **M** désignent respectivement la polarisation électrique, exprimée en C/m² et la polarisation magnétique, exprimée en A/m. Dans les milieux linéaires, isotropes et homogènes, le vecteur **P** est parallèle et proportionnel au vecteur **E** et le vecteur **M** est parallèle et proportionnel à **H**.

On peut alors écrire les relations suivantes :

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (2.10)$$

où χ_e et χ_m sont les susceptibilités électrique et magnétique du milieu à caractériser.

En réécrivant les relations (2.7) et (2.8) avec les expressions de **P** et de **M**, on obtient :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \cdot \vec{E} \quad (2.11)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \cdot \vec{H} \quad (2.12)$$

Finalement, en écrivant :

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (2.13)$$

avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m et $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ F/m

on arrive aux relations suivantes :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.14)$$

Les variables ε , μ et σ désignent respectivement la permittivité électrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du milieu considéré. Dans le cas le plus général, ces trois grandeurs sont des tenseurs, dont les éléments sont complexes et qui dépendent, entre autres, de la fréquence. Ils peuvent également varier en fonction de la position, de la température, de la pression, du champ électrique ou magnétique, etc.

Les milieux étudiés sont considérés linéaires, isotropes et homogènes. Les grandeurs caractéristiques des milieux sont alors des tenseurs scalaires. La permittivité et la conductivité électriques sont des fonctions complexes de la fréquence alors que la perméabilité magnétique est réelle et ne dépend que de la valeur du champ exciteur. Dans le cadre de notre étude de modélisation, les matériaux utilisés – à savoir *l'air et différents métaux* – présenteront des propriétés électromagnétiques invariables.

2.3 Bilan des courants

Dans le contexte de notre étude consacrée aux perturbations électromagnétiques qui dégradent les performances des système magnétiques de localisation spatiale, les courants électriques circulant au voisinage du capteur sont principalement de deux natures distinctes :

- les courants de déplacement, dont le concept a été introduit par James Clerk Maxwell pour justifier l'existence d'un champ magnétique dans un espace dépourvu de charge électrique et dont l'expression est donnée par la relation suivante :

$$\vec{J}_{\text{Déplacement}} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.15)$$

- les courants de conduction engendrés par la migration des charges sous l'effet d'un champ électrique appliqué dans un conducteur et dont l'expression est la suivante :

$$\vec{J}_{\text{Conduction}} = \sigma \vec{E} \quad (2.16)$$

Une hypothèse primordiale dans le cadre de notre étude de modélisation consiste à négliger, au sein des matériaux conducteurs, les courants de déplacement par rapport aux courants de conduction et par conséquent les phénomènes de propagation par rapport aux phénomènes de diffusion. Cette hypothèse est l'approximation quasi-statique. Elle est justifiée par la valeur du rapport suivant :

$$\frac{|\vec{J}_{\text{Conduction}}|}{|\vec{J}_{\text{Déplacement}}|} = \frac{|\sigma \vec{E}|}{|\varepsilon \cdot \partial \vec{E} / \partial t|} = \frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \quad (2.17)$$

en régime harmonique, où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation exprimée en radian/seconde.

Suivant la manière dont l'énergie est transmise dans le milieu considéré, en accord avec l'hypothèse quasi-statique, on distingue deux modes physiques :

- Si $\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \gg 1$, les courants de conduction dominent, c'est le mode de diffusion

- Si $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \ll 1$, les courants de déplacement dominant, c'est le mode de propagation

Dans le contexte de notre étude, si l'on se place dans le cas le « moins favorable » en prenant l'exemple d'une fréquence d'excitation de 10 kHz et d'un matériau dont la conductivité électrique est de l'ordre de 10^6 S/m, la valeur du rapport (2.17) est d'environ 10^{12} ; l'approximation quasi-statique est donc parfaitement justifiée.

De plus, si l'on compare les dimensions caractéristiques de la zone à l'intérieur de laquelle nous effectuons notre étude (de l'ordre du mètre ou de quelques mètres) à la valeur de la longueur d'onde des signaux électromagnétiques générés (à 10 kHz, $\lambda = 30$ km), nous constatons que le fait de négliger les phénomènes de propagation est complètement justifié.

2.4 Équation de Helmholtz

Dans le cas général, les champs électrique et magnétique sont solutions dans un milieu homogène du système suivant :

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \times \vec{J}_s \end{cases} \quad (2.18)$$

Ce système est obtenu à partir des équations de Maxwell et des lois constitutives des milieux. Le terme \vec{J}_s représente les sources volumiques de courant électrique.

Dans le cadre de l'hypothèse quasi-statique, les termes de propagation disparaissent et les champs sont alors solutions de l'équation de Helmholtz :

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} \quad \text{et} \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \times \vec{J}_s \quad (2.19)$$

2.5 Conditions aux limites

Dans le cadre de notre étude de modélisation numérique, nous cherchons à résoudre les équations du système de Maxwell à l'intérieur d'un domaine fini, dans lequel apparaissent plusieurs milieux homogènes. Les conditions aux limites sont alors de deux types :

- aux interfaces entre les différents matériaux présents au sein du domaine d'étude,
- aux limites extérieures du domaine.

2.5.1 Conditions aux interfaces

Les conditions de passage que doivent respecter les composantes des champs électrique et magnétique sont issues des quatre équations de Maxwell par intégration sur un volume élémentaire et passage à la limite. On examine séparément les composantes tangentielles et normales des champs à la frontière entre les deux différents milieux. On considère que l'on franchit la frontière entre deux milieux 1 et 2 : si \vec{n}_{12} est le vecteur unitaire de la normale dirigé de 1 vers 2 et si \vec{E}_1 et \vec{E}_2

désignent respectivement la limite du vecteur champ électrique \vec{E} quand on tend vers la frontière, tout en restant dans le milieu 1 ou le milieu 2.

On sait que la composante tangentielle du champ électrique est toujours continue à l'interface entre les milieux 1 et 2. Ceci est directement issu de la loi de Faraday et se traduit par :

$$\vec{E}_{t2} = \vec{E}_{t1} \quad (2.20)$$

En présence de courants surfaciques, la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue à l'interface. Dans le cadre de notre étude dans les conducteurs, les seuls courants présents sont les courants de Foucault qui sont des courants volumiques. Nous avons donc continuité de la composante tangentielle du champ. Cette condition est donnée par le théorème d'Ampère généralisé. On a donc,

$$\vec{H}_{t1} = \vec{H}_{t2} \quad (2.21)$$

S'il n'y a pas de charge superficielle à l'interface entre les deux milieux, en accord avec le théorème de Gauss électrique, la composante normale de l'induction électrique est continue à l'interface. Ce qui nous donne,

$$\vec{D}_{n2} = \vec{D}_{n1} \quad (2.22)$$

Quels que soient les milieux considérés, en accord avec le théorème de Gauss magnétique, la composante normale de l'induction magnétique est continue à l'interface entre ces deux milieux. C'est à dire,

$$\vec{B}_{n2} = \vec{B}_{n1} \quad (2.23)$$

Enfin, la composante normale de la densité de courant est également continue à l'interface. D'où,

$$\vec{J}_{n2} = \vec{J}_{n1} \quad (2.24)$$

On constate que l'on a continuité de la composante tangentielle du champ électrique et de la composante normale de l'induction magnétique. On observe également, qu'en absence de courants superficiels, la composante tangentielle du champ magnétique est finalement continue.

2.5.2 Conditions aux limites

Les phénomènes physiques mis en équations dans ce chapitre s'inscrivent dans un cadre global et il nous faut désormais déterminer le comportement des champs aux limites du domaine de modélisation. En effet, les différentes géométries qui serviront de bases aux simulations destinées à étudier les effets engendrés par ces phénomènes sur la mesure du champ magnétique auront des dimensions finies et relativement restreintes du fait des contraintes numériques. Il est donc nécessaire de définir les conditions de passage entre la description globale des phénomènes physiques à analyser et leur comportement local, à l'intérieur du domaine d'étude. On peut donc distinguer trois types de conditions :

- lorsque l'un des champs est perpendiculaire à l'un des plans délimitant le volume à l'intérieur duquel on effectue les calculs,

- lorsque l'un des champs est, au contraire, tangent à l'un de ces plans,
- lorsque les champs sont nuls, cas de l'infini.

La prise en compte de ce type de conditions sera abordée de manière plus détaillée dans la suite de cet exposé. Nous présenterons alors les différentes géométries utilisées et la formulation mathématique retenue pour résoudre les équations de l'induction, sachant que le comportement des grandeurs électromagnétiques aux frontières du domaine dépend essentiellement de la géométrie et de la formulation utilisée.

3. Modèle numérique de l'induction

Le système d'équations défini précédemment peut être résolu en utilisant les grandeurs physiques \mathbf{E} et \mathbf{H} ou \mathbf{D} et \mathbf{B} comme inconnues. La précision numérique obtenue est maximale sur les champs mais cela revient à déterminer six composantes en chaque point du maillage ce qui représente un coût en terme de calculs relativement élevé. De plus, nous avons vu précédemment que certaines des grandeurs physiques sont discontinues aux frontières entre les différents milieux. Il existe plusieurs formulations utilisant des potentiels qui vont nous permettre de simplifier considérablement le système d'équations à résoudre et d'en réduire le nombre d'inconnues en vue de sa résolution numérique.

3.1 Formulations physico-mathématiques

3.1.1 Présentation des potentiels électromagnétiques

Le choix d'une formulation basée sur des potentiels électromagnétiques doit permettre de simplifier le système d'équations précédemment défini et de réduire le nombre d'inconnues à déterminer. Dans le cadre de l'étude des courants de Foucault au sein de matériaux conducteurs, plusieurs formulations utilisant le potentiel vecteur magnétique sont disponibles comme celles exposées par exemple dans [BIDDLECOMBE82], [MORISUE82] et [KAMEARI88]. Ces approches faisant appel au potentiel vecteur sont très fréquemment employées, mais l'introduction d'autres types de potentiels, notamment des potentiels électriques, scalaires ou vectoriels, peut être utile pour accéder aux différentes grandeurs électromagnétiques dans les conducteurs [BIRO89a], [BIRO90]. Un aperçu de ces différentes formulations apparaît dans [MASSÉ97]. Pour chaque formulation, on exprime les équations aux dérivées partielles et les conditions aux limites en fonction des potentiels électromagnétiques qui caractérisent la formulation considérée.

a) Formulation $(\mathbf{A}, V - \mathbf{A})$

Dans la formulation en quadrivecteur potentiel $(\mathbf{A}, V - \mathbf{A})$ le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} est défini sur l'ensemble du domaine, alors que le potentiel scalaire électrique V n'est défini que dans les milieux conducteurs. Cette formulation autorise les sauts de conductivité électrique et de perméabilité magnétique. De plus, les éléments conducteurs placés à l'intérieur du volume à modéliser peuvent être non simplement connexes puisqu'ils peuvent comporter des trous. Les variables électromagnétiques sont obtenues à partir des potentiels par l'intermédiaire des relations suivantes :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (2.25)$$

Ce type de formulation permet également de prendre en compte une perméabilité non linéaire ou anisotrope.

En règle générale, l'unicité du potentiel vecteur magnétique est assurée par l'utilisation d'une condition de jauge (par exemple la jauge de Coulomb, $\text{div } \vec{A} = 0$). Cependant, cette condition est rarement suffisante et il faut également utiliser des conditions aux limites particulières sur le potentiel vecteur \vec{A} de manière à forcer son unicité à l'intérieur de la région traitée. Le potentiel scalaire électrique est lui défini à une constante près et il suffit donc d'en imposer une valeur en un point de l'espace.

b) Formulation ($\vec{A}, V - \psi$)

De manière à réduire les coûts en terme de puissance de calcul nécessaire à la résolution du système d'équations, la formulation précédente peut être réécrite en introduisant le potentiel scalaire magnétique *réduit* Φ , défini dans les régions non conductrices [BIRO89b]. Il est nécessaire d'établir une frontière Γ au sein de la région non-conductrice telle que tous les conducteurs se trouvent à l'intérieur du domaine ainsi formé. Les potentiels \vec{A} et V sont définis uniquement dans ce domaine suivant les mêmes règles que pour la formulation en quadrivecteur potentiel. Le potentiel Φ n'existe qu'à l'extérieur de ce domaine. Dans ces conditions, il est alors intéressant de séparer le champ magnétique en deux termes comme suit :

$$\vec{H} = \vec{H}_S - \nabla \Phi \quad (2.26)$$

où \vec{H}_S représente le champ magnétique issu des sources volumiques de courant et qui satisfait les relations suivantes :

$$\nabla \times \vec{H}_S = \vec{J}_S \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \vec{H}_S = 0 \quad (2.27)$$

où \vec{J}_S désigne la densité des courants sources. Le champ \vec{H}_S peut être calculé en utilisant la loi de Biot et Savart.

Pour les régions non-conductrices et dépourvues de courants sources, situées à l'extérieur du domaine délimité par la frontière Γ , le champ magnétique peut être dérivé du potentiel scalaire magnétique *total* de la manière suivante :

$$\vec{H} = -\nabla \psi \quad (2.28)$$

Il faut réaliser sur la frontière Γ le couplage entre le potentiel vecteur \vec{A} et le potentiel scalaire ψ . Le principal inconvénient de cette méthode est que les termes de couplage sur la frontière complexifient la résolution du système d'équations.

L'unicité des potentiels est assurée de la même manière que pour la formulation en quadrivecteur potentiel. Il suffit notamment d'imposer une valeur pour chacun des potentiels scalaires en un point de l'espace puisque ceux-ci sont définis à une constante près. En ce qui concerne le potentiel vecteur, l'utilisation d'une condition de jauge agrémentée de conditions adaptées sur les frontières des régions présentes au sein du volume d'étude permet d'en assurer l'unicité.

c) *Formulation (T - ψ)*

La condition de conservation du courant, traduite par $\text{div } \mathbf{J} = 0$, permet d'introduire dans la formulation un potentiel vecteur électrique défini par la relation :

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{T} \quad (2.29)$$

Le potentiel vecteur électrique, dont l'utilisation est développée dans [BIRO93], est défini uniquement dans les régions conductrices. Le théorème d'Ampère généralisé (2.2) permet d'exprimer le champ magnétique \mathbf{H} à l'aide de la relation :

$$\vec{H} = \vec{T} - \nabla \psi \quad (2.30)$$

où ψ désigne le potentiel scalaire magnétique, défini dans tout le domaine d'étude.

Cette formulation autorise les sauts de perméabilité magnétique et de conductivité électrique. De plus, comme ψ existe dans toutes les régions, qu'elles soient conductrices ou non, il n'y a pas de terme spécifique de couplage aux frontières. Mais l'inconvénient majeur de cette formulation est que ce potentiel magnétique n'a pas une valeur unique dans les zones où les conducteurs ne sont pas simplement connexes. Il faut donc créer des coupures qui complexifient le maillage.

L'unicité du potentiel vecteur électrique est assurée en utilisant une condition de jauge. En ce qui concerne le potentiel magnétique scalaire, défini à une constante près, son unicité est assurée en imposant une valeur en un point de l'espace dans les régions où il est défini.

d) *Formulation (H - ψ)*

Cette formulation utilise le champ magnétique \mathbf{H} comme variable d'état dans les conducteurs et le potentiel scalaire magnétique ψ dans les régions non conductrices. Il faut donc effectuer un couplage entre les grandeurs magnétiques sur la frontière des régions conductrices. Les sauts de conductivité électrique sont autorisés, mais les sauts de perméabilité magnétique ne sont pas naturels et nécessitent un traitement particulier en utilisant soit des éléments d'arêtes, soit des éléments interfaciaux.

Comme précédemment, le potentiel scalaire magnétique n'a pas une valeur unique dans les zones où les conducteurs ne sont pas simplement connexes. Il faut également créer des coupures qui complexifient grandement le maillage.

e) *Formulation (A^* - ψ)*

La formulation (A^* - ψ) utilise le potentiel scalaire magnétique ψ comme variable d'état dans les régions non-conductrices et le potentiel vecteur magnétique *modifié* dans les régions conductrices. Le potentiel vecteur magnétique est donné par la relation suivante :

$$A^* = -\int E \cdot dt \quad (2.31)$$

Le couplage entre les deux potentiels se fait aux frontières des régions conductrices. Les sauts de perméabilité magnétique sont autorisés mais les sauts de conductivité électrique ne sont pas naturels et nécessitent un traitement particulier utilisant des éléments interfaciaux ou des éléments d'arêtes.

Une nouvelle fois, le potentiel scalaire magnétique n'a pas une valeur unique dans les zones où les conducteurs ne sont pas simplement connexes, ce qui nécessite la création de coupures.

3.1.2 Choix de la formulation

Le choix d'une formulation est lié aux exigences du problème à résoudre. Dans le cadre de notre étude, nous avons à traiter des sauts de conductivité électrique et des sauts de perméabilité magnétique. De plus, les régions conductrices présentes au cours de nos travaux doivent pouvoir être non simplement connexes puisqu'elles peuvent comporter des trous. L'ensemble de ces considérations nous ont amené à choisir la formulation en quadrivecteur potentiel $(\vec{A}, V - \vec{A})$, d'une part pour son domaine de validation en adéquation avec les différentes contraintes liées à notre étude et d'autre part pour sa grande simplicité de mise en œuvre.

a) Définition

D'après le théorème de Gauss magnétique (2.4), qui traduit le fait que l'induction magnétique est à flux conservatif et dans la mesure où la divergence d'un rotationnel est nulle, on peut écrire l'induction magnétique \vec{B} sous la forme :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.32)$$

où \vec{A} est le potentiel vecteur magnétique exprimé en T.m.

On peut alors exprimer la loi d'induction de Faraday (2.1) de la manière suivante :

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.33)$$

En utilisant une autre propriété du rotationnel, qui stipule que le rotationnel d'un gradient est nul, il existe donc un potentiel scalaire V tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (2.34)$$

où V est le potentiel scalaire électrique exprimé en V.

On peut alors formuler les champs électromagnétiques \vec{E} et \vec{B} à l'aide des relations suivantes :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (2.35)$$

b) Unicité des potentiels

Les potentiels \vec{A} et V ne sont pas définis de manière unique. En effet, toute transformation de la forme :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f \quad \text{et} \quad V' = V - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.36)$$

laisse les champs \vec{E} et \vec{B} inchangés.

Le potentiel scalaire électrique V n'est fixé que par son gradient, il est donc déterminé à une constante près et on peut en assurer l'unicité en imposant une valeur en un point de l'espace.

Le potentiel vecteur magnétique \vec{A} n'est fixé que par son rotationnel, il est donc défini à un gradient près. On peut alors choisir d'imposer une condition sur sa divergence, appelée condition de jauge, pour en assurer l'unicité. Deux conditions de jauge sont notamment comparées dans [MORISUE93].

La jauge de Lorentz permet d'exprimer la divergence du potentiel vecteur en fonction des variations temporelles du potentiel scalaire de la manière suivante :

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.37)$$

Elle assure l'unicité du potentiel vecteur si on impose également la référence du potentiel scalaire, indépendamment du temps.

La jauge de Coulomb, couramment utilisée, est plus simple à utiliser et s'exprime sous la forme :

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.38)$$

Elle assure ainsi l'unicité du potentiel vecteur, si on fixe en plus sa référence à l'infini. Dans le cadre de notre étude, nous choisissons d'utiliser la jauge de Coulomb.

c) Continuité des potentiels

La continuité de la composante normale de l'induction magnétique (2.23) s'exprime par la relation suivante :

$$\nabla \times \vec{A}_1 \cdot \vec{n}_{12} = \nabla \times \vec{A}_2 \cdot \vec{n}_{12} \quad (2.39)$$

Cette condition est compatible avec le choix d'un potentiel vecteur continu.

La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique (2.21) devient :

$$\frac{1}{\mu_1} (\nabla \times \vec{A}_1) \times \vec{n}_{12} = \frac{1}{\mu_2} (\nabla \times \vec{A}_2) \times \vec{n}_{12} \quad (2.40)$$

Cette condition impose le choix d'un potentiel vecteur à dérivées discontinues.

Considérons une frontière entre deux milieux de conductivités électriques différentes. En l'absence de courant surfacique et dans le cas d'un contact électrique supposé parfait, on doit vérifier la continuité de la composante normale de la densité de courant (2.24).

$$\sigma_1 \left(\frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} + \nabla V_1 \right) \cdot \vec{n}_{12} = \sigma_2 \left(\frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} + \nabla V_2 \right) \cdot \vec{n}_{12} \quad (2.41)$$

Comme d'autre part la composante tangentielle du champ électrique doit demeurer continue (2.20) et que le potentiel vecteur est continu, on en déduit que le potentiel scalaire V doit être continu à l'interface et à dérivées discontinues.

3.2 Méthodes numériques de résolution

3.2.1 État de l'art

La mise en équations des phénomènes électromagnétiques en vue de leur modélisation numérique conduit à un système d'équations aux dérivées partielles, généralement difficile à résoudre de manière analytique, notamment en raison des conditions aux limites qui doivent être respectées. Différentes méthodes numériques pour la résolution des équations de l'électromagnétisme ont été développées, mais leur adéquation aux problèmes à résoudre dépend fortement de la configuration des problèmes. Leur principe est sensiblement le même. Elles consistent à discrétiser ou à mailler le domaine dans lequel on cherche à résoudre le système d'équations à l'aide d'éléments – *simples* –

sur lesquels on peut effectuer une approximation des inconnues à déterminer. Les principales méthodes utilisées sont : les différences finies, les méthodes intégrales et les éléments finis.

a) Différences finies

La méthode des différences finies consiste en une discrétisation du domaine en une grille de points, sur chacun desquels on effectue une approximation des dérivées de la variable par leur développement en série de Taylor. La complexité d'une telle méthode dépend de l'ordre du développement, pour lequel on se limite souvent au premier. Un traitement similaire est employé pour les dérivées temporelles.

Le report des formules approchées des dérivées dans les équations du système à résoudre conduit à un système d'équations algébriques liant les valeurs de l'inconnue aux points de la grille, le système ayant la linéarité du problème physique. Des formules spécifiques sont développées sur les limites du domaine de résolution afin de tenir compte des conditions aux limites.

Le principal défaut de cette méthode est qu'elle impose l'utilisation d'une grille souvent incompatible avec la description de formes complexes.

b) Méthodes intégrales

La méthode des intégrales de frontière consiste à exprimer la variable d'état à déterminer en fonction d'une quantité intégrale portant principalement sur le contour du domaine. La discrétisation de ce contour ramène le problème à la résolution d'un système linéaire.

La méthode est pseudo-analytique car il est nécessaire de calculer au préalable la fonction de Green associée à la formulation adjointe. Son utilisation est généralement restreinte aux cas où il est possible de déterminer analytiquement cette fonction. Les problèmes comportant des non-linéarités et des sources volumiques de courant nécessitent des traitements particuliers. De plus, les intégrales à calculer sont singulières et requièrent l'utilisation de méthodes numériques adaptées.

c) Éléments finis

La méthode des éléments finis, initialement développée pour résoudre des problèmes dans le domaine de la mécanique, est très largement employée en électromagnétisme. De nombreuses études ont contribué au développement de cette méthode, notamment à Grenoble avec les logiciels Flux2D et Flux3D du Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble (LEG) [COULOMB81] et FluxExpert du laboratoire *Madylam* [MASSÉ83, MASSÉ84].

Le principe de la méthode est basé sur une formulation intégrale des équations aux dérivées partielles. Le domaine est discrétisé à l'aide d'éléments de taille variable mais finie sur lesquels on cherche à approximer l'inconnue par une fonction polynomiale. Ce traitement permet de construire un système linéaire d'équations où les inconnues sont, par exemple, les variables aux nœuds des éléments, définissant ainsi la méthode des éléments finis nodaux.

La méthode des éléments finis ne permet pas dans sa forme classique (éléments nodaux) de prendre en compte les discontinuités de la variable d'état du système à résoudre car c'est un des principes de base de cette méthode que d'assurer la continuité de celle-ci d'un élément à l'autre par contre elle

permet le saut de la composante normale du gradient de l'inconnue. De plus, elle permet d'avoir accès à la variable d'état en un point quelconque du domaine d'étude puisque la solution est fournie sous une forme analytique locale dépendant des valeurs de l'inconnue en chaque point de l'élément concerné. En contrepartie, l'utilisation de cette méthode conduit généralement à la résolution de problèmes de taille importante puisqu'elle nécessite le maillage de tout le volume d'étude.

C'est cette méthode, à travers le logiciel FluxExpert – *utilisé au laboratoire* – que nous avons choisi d'utiliser pour modéliser les phénomènes d'induction électromagnétiques dans le but d'étudier les effets engendrés par la présence de milieux métalliques sur la mesure du champ magnétique. Ce logiciel est très fréquemment utilisé pour résoudre des problèmes d'électromagnétisme.

3.2.2 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre dans un domaine tridimensionnel un problème défini par une équation locale différentielle portant sur une grandeur vectorielle ou scalaire. Le principe de la méthode repose sur une approche variationnelle des problèmes d'équations aux dérivées partielles, qui utilise soit un principe de minimisation de la fonctionnelle associée à l'équation à résoudre, soit un principe de projection de l'équation à résoudre sur un espace de fonctions de pondération. On construit un système algébrique dont les termes sont des expressions intégrales et font intervenir les propriétés électromagnétiques et les fonctions de projection utilisées pour interpoler la géométrie et la variable. Afin que le problème ait une solution unique, il convient de préciser les conditions aux limites du domaine. L'application de la méthode des éléments finis est généralement constituée d'une étape de discrétisation du domaine, suivie de l'interpolation de la variable d'état et de la géométrie puis de l'étape de résolution. Différentes formulations utilisées en électromagnétisme sont disponibles dans [EMSON91].

a) Décomposition en éléments

Le domaine d'étude est décomposé en N éléments, c'est le maillage. Cette décomposition est a priori quelconque, mais les frontières réelles délimitant le domaine doivent correspondre aux frontières des éléments. Les éléments les plus couramment utilisés sont le segment de droite en 1D, les triangles et les quadrilatères en 2D et les tétraèdres, pentaèdres et hexaèdres en 3D. L'ordre des éléments utilisés est défini par l'ordre du polynôme d'interpolation qui lui est associé. Les éléments du premier ordre ne comportent des nœuds que sur leurs sommets géométriques, alors que ceux du second ordre en comptent également sur les milieux de leurs arêtes et éventuellement de leurs faces. L'avantage d'utiliser des éléments du second ordre est de disposer d'une meilleure précision notamment sur le gradient des inconnues.

b) Projection et interpolation des variables

Un système physique est généralement décrit par une ou plusieurs équations aux dérivées partielles exprimées sur un domaine tridimensionnel, avec des conditions aux limites sur la frontière de ce domaine :

$$L[u(x)] = f(x) \quad (2.42)$$

où $u(x)$ est l'inconnue, x est la variable d'espace, L un opérateur différentiel d'ordre n sur le domaine et f est une fonction du domaine.

La méthode des éléments finis consiste à exprimer ces équations aux dérivées partielles sous une forme intégrale. Cette forme intégrale peut être obtenue soit par des méthodes projectives, soit par des méthodes de minimisation d'une fonctionnelle associée aux équations à résoudre, telle que la méthode de Ritz. On peut définir, dans l'espace vectoriel des fonctions n fois différentiables, le produit scalaire de deux fonctions u_1 et u_2 par la relation suivante :

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \iiint_{\Omega} u_1 \cdot u_2 dx \quad (2.43)$$

La projection de la quantité $L[u(x)] - f(x)$, appelée résidu de l'équation (2.42), sur un ensemble de fonctions $\beta_i(x)$, appelées fonctions de pondération, s'écrit :

$$\iiint_{\Omega} \beta_i(x) \cdot (L[u(x)] - f(x)) dx \quad (2.44)$$

Si l'ensemble des fonctions $\beta_i(x)$ forme un système générateur de l'espace des fonctions n fois différentiables, la résolution du système physique (2.42) est mathématiquement équivalente à la recherche des fonctions $u(x)$ qui annulent l'expression (2.44).

L'utilisation du maillage précédemment défini permet d'exprimer la variable d'état sur chacun des nœuds à l'aide d'une fonction d'interpolation par une relation du type :

$$u(x) \approx u^*(x) = \sum_{j=1}^N u_j \alpha_j(x) \quad (2.45)$$

où u_j représente la valeur de la variable au point j et $\alpha_j(x)$ la fonction d'interpolation, qui est sans dimension et continue. En général, on impose :

$$\alpha_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_i(x_j) = 0, \quad (i \neq j) \quad (2.46)$$

La fonction d'interpolation est construite sur chaque élément en ne faisant intervenir que les valeurs prises sur les nœuds de cet élément. Les fonctions approchées sur chaque élément satisfont des conditions de continuité entre les différents éléments du domaine, ce qui implique que les valeurs soient partagées par tous les éléments ayant en commun le nœud considéré. Sur un élément, l'interpolation est souvent obtenue à l'aide d'une somme de polynômes. Il est possible de construire une base de fonctions, à partir de ces polynômes d'interpolation, qui engendre un espace vectoriel au sein duquel on cherche la représentation de la variable d'état : c'est l'espace d'approximation de cette variable. Selon le comportement physique de l'inconnue, notamment les conditions de continuité qui lui sont associées, on peut choisir différentes familles de fonctions d'interpolation. Les polynômes les plus utilisés sont essentiellement les polynômes d'Hermite utilisés pour l'interpolation de grandeurs continues à dérivées continues ou les polynômes de Lagrange pour interpoler une grandeur continue à dérivées discontinues. Dans le cadre de notre étude de modélisation, nous avons choisi d'utiliser les polynômes de Lagrange au second ordre. Leurs formules, ainsi que celles de leurs dérivées, sont connues au premier et au second ordre sur un certain nombre de simplexes géométriques utilisés pour définir les éléments finis, tels que le point, le segment de droite, le triangle ou le quadrilatère. Il est donc nécessaire, pour chaque élément, de se ramener à ces éléments de référence en effectuant un changement de repère.

L'espace de projection peut tout à fait être construit de la même manière que l'espace d'interpolation, c'est à dire à l'aide de polynômes. De plus, lorsque l'opérateur différentiel L est linéaire, u et $L[u]$ appartiennent au même espace vectoriel. Il est alors possible de choisir le même

espace pour l'interpolation et la projection. Dans cette situation, les fonctions β_i sont construites localement à l'aide des fonctions α_j et la méthode de projection est appelée projection de Galerkin. L'assemblage de toutes les équations obtenues sur chacun des éléments conduit à un système algébrique à N inconnues et N équations, N étant le nombre de nœuds du maillage. On peut alors écrire, sur chaque nœud i , la relation suivante :

$$\iiint_{\Omega} \beta_i(x) L \left[\sum_{j=1}^N u_j \alpha_j(x) \right] dx = \iiint_{\Omega} \beta_i(x) f(x) dx \quad (2.47)$$

La linéarité de l'opérateur différentiel L nous permet d'écrire une équation matricielle du type :

$$[M_{ij}][u_j] = [S_i] \quad (2.48)$$

où les $[M_{ij}]$ sont appelés intégrants matriciels et les $[S_i]$ intégrants vectoriels. La matrice $[M_{ij}]$ est en fait très creuse puisque les termes qui la constituent ne sont non nuls que si les nœuds i et j appartiennent à au moins un même élément.

c) Intégration numérique

Les intégrales volumiques, surfaciques et linéiques qui constituent le système linéaire précédemment établi doivent être évaluées sur chacun des nœuds des éléments finis. On utilise alors des méthodes d'intégration numérique, car il n'existe que très rarement des formules analytiques disponibles. La méthode de Gauss - Legendre est la plus adaptée car les tables des points et des poids d'intégration sont connues pour les simplexes géométriques que nous avons énoncés précédemment. On procède donc au calcul de l'intégrale sur l'élément de référence correspondant en effectuant un changement de variable par calcul du Jacobien de la transformation.

d) Résolution du système

Le système carré est ensuite résolu par des méthodes numériques adéquates. De plus, la taille de la matrice dépend directement du nombre total de nœuds et donc du nombre d'éléments utilisés pour discrétiser géométriquement le domaine. Le choix de la méthode de résolution est lié au conditionnement des matrices obtenues.

3.2.3 Présentation du logiciel FluxExpert

Il existe de nombreux outils logiciels qui permettent de résoudre des problèmes physiques en utilisant la méthode des éléments finis. Mais ceux-ci sont en général dédiés à une application spécifique. Les équations à résoudre sont programmées dans le logiciel et l'utilisateur définit la géométrie de son problème et les conditions aux limites du domaine et affecte finalement les propriétés physiques qui figurent dans les équations représentatives des phénomènes étudiés. La philosophie de FluxExpert est sensiblement différente. Le logiciel est un outil général qui est capable de résoudre des équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis. La structure du logiciel comprend également un module générateur qui permet de décrire une équation dans le formalisme des éléments finis en utilisant une base de données évolutive, contenant des intégrants, des propriétés physiques, divers opérateurs, des polynômes d'interpolation et de projection, des algorithmes, etc.

Pour l'utilisateur courant dont les besoins ne correspondent généralement qu'à l'utilisation de l'existant pour résoudre un système d'équations aux dérivées partielles, les étapes de la modélisation d'un problème physique sont les mêmes que pour tout autre logiciel. La première phase est la description géométrique du problème à traiter, généralement effectuée à l'aide d'un module appelé *mailleur*. S'ensuit la construction du problème qui correspond à la mise en relation de la géométrie du problème et des différentes propriétés physiques intervenant dans l'équation à résoudre, ainsi que la définition des conditions aux limites du domaine et le choix de l'algorithme de résolution. Il ne reste alors que l'assemblage du système faisant intervenir les intégrales volumiques, surfaciques et éventuellement linéiques, les propriétés électromagnétiques et la variable d'état à déterminer. Le système complet est ensuite pris en charge par le module de résolution. L'exploitation des résultats et le calcul de grandeurs électromagnétiques secondaires sont réalisés grâce à un module de *post-processing* qui permet d'effectuer ces calculs à partir des valeurs aux nœuds de la variable d'état.

La possibilité offerte par FluxExpert de générer des équations, d'enrichir la base de données et de développer de nouvelles fonctionnalités est un atout important. De plus, la structure informatique du logiciel permet d'associer facilement les développements personnels et le noyau de calcul existant.

3.3 Modèle polynomial

Nous rappelons que notre étude de modélisation ne correspond pas à une avancée dans le domaine de la modélisation tridimensionnelle des courants de Foucault mais au développement d'un outil de simulation capable de fournir des résultats réalistes.

Le but de cette étude est de simuler les phénomènes électromagnétiques dans le contexte d'un problème de capture de mouvement. On dispose d'une bobine source sinusoïdale et d'un capteur de champ mobile dans un environnement tridimensionnel. On cherche à identifier l'effet des courants de Foucault générés par la source dans une plaque conductrice sur la mesure du champ effectuée par le capteur. On veut notamment vérifier le fait que ces courants de Foucault perturbent la mesure en créant un champ déphasé par rapport à la source, du fait du temps de diffusion à l'intérieur de l'épaisseur de peau dans un conducteur massif.

3.3.1 Système linéaire

Les phénomènes sont linéaires et les sources externes varient de manière sinusoïdale dans le temps, ce qui nous permet d'exprimer les grandeurs réelles à l'aide de nombres complexes. La dépendance temporelle est alors exprimée par le terme $e^{j\omega t}$ et la dérivation des grandeurs par rapport au temps est équivalente à la multiplication par $j\omega$.

En reportant les potentiels A et V dans l'expression du théorème d'Ampère généralisé (2.2) et dans le cadre de l'approximation quasi-statique, on obtient :

$$\nabla \times \nu \nabla \times \vec{A} = -\sigma j\omega \vec{A} - \sigma \nabla V + \vec{J}_s \quad (2.49)$$

où ν est définie par la relation :

$$\nu = \frac{1}{\mu}$$

On peut de manière tout à fait explicite introduire la condition de jauge dans la relation précédente. Ceci nous donne la relation suivante :

$$\nabla \times \nu \nabla \times \vec{A} - \nabla(P \nabla \cdot \vec{A}) = -\sigma j \omega \vec{A} - \sigma \nabla V + \vec{J}_s \quad (2.50)$$

P est un terme scalaire qui désigne le terme de pénalité et permet d'introduire la condition de jauge de Coulomb dans l'expression (2.49). Ce terme permet aussi d'assurer l'unicité du potentiel vecteur mais également d'améliorer le conditionnement du système en ne forçant pas complètement la jauge à zéro d'un point de vue numérique.

A cette équation, il faut rajouter l'équation de conservation du courant, car celle-ci n'est plus implicitement contenue dans la relation (2.50) du fait de l'introduction du terme relatif à la condition de jauge :

$$\nabla \cdot (-\sigma j \omega \vec{A} - \sigma \nabla V) = 0 \quad (2.51)$$

Afin de rendre la matrice symétrique, on effectue un changement de variable **[BIRO89a]** en utilisant lors de la résolution la grandeur W définie par la relation :

$$V = \frac{\partial W}{\partial t} \quad (2.52)$$

3.3.2 Interpolation et projection

Le système d'équations à résoudre, exprimé à l'aide des potentiels électromagnétiques issus de la formulation en quadrivecteur potentiel, est le suivant :

$$\begin{cases} \nabla \times \nu \nabla \times \vec{A} - \nabla(P \nabla \cdot \vec{A}) + \sigma j \omega \vec{A} + \sigma j \omega \nabla W = \vec{J}_s \\ \nabla \cdot (-\sigma j \omega \vec{A} - \sigma j \omega \nabla W) = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

En utilisant la méthode de Galerkin, on projette ce système d'équations aux dérivées partielles sur une base de fonctions indépendantes, ici les polynômes de Lagrange d'ordre 2. On obtient alors une formulation intégrale appelée forme forte. La forme forte de l'équation issue du théorème d'Ampère est la suivante :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \vec{\beta}_j \cdot \nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) d\Omega - \iiint_{\Omega} \vec{\beta}_j \cdot \nabla (P \nabla \cdot \vec{A}) d\Omega \\ & + \iiint_{\Omega} \sigma j \omega \vec{\beta}_j \cdot \vec{A} d\Omega + \iiint_{\Omega} \vec{\beta}_j \cdot \sigma \nabla (j \omega W) d\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{\beta}_j \cdot \vec{J}_s d\Omega \end{aligned} \quad (2.54)$$

où les $\vec{\beta}_j$ sont des fonctions de projection vectorielles.

La forme forte de la loi de conservation du courant s'écrit :

$$\iiint_{\Omega} \vec{\beta}_j \cdot \nabla \cdot (-\sigma j \omega \vec{A} - \sigma j \omega \nabla W) d\Omega = 0 \quad (2.55)$$

Après intégration par partie des intégrales triples, la formule obtenue est équivalente à celle issue d'une méthode de minimisation de l'énergie. On voit apparaître des intégrales doubles qui correspondent, sur les frontières du domaine, aux conditions aux limites (Neumann homogène). De plus, les relations d'analyse vectorielle nous permettent d'aboutir à la forme faible qui s'écrit :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \nu \nabla \times \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{\beta}_j d\Omega - \iint_S \vec{\beta}_j \cdot (\nu \nabla \times \vec{A}) \times \vec{n} dS \\ & + \iiint_{\Omega} P \nabla \cdot \vec{A} \nabla \cdot \vec{\beta}_j d\Omega - \iint_S \vec{n} \cdot \vec{\beta}_j P \nabla \cdot \vec{A} dS \\ & + \iiint_{\Omega} \sigma j \omega \vec{\beta}_j \cdot \vec{A} d\Omega + \iiint_{\Omega} j \omega \sigma \vec{\beta}_j \cdot \nabla W d\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{\beta}_j \cdot \vec{J}_s d\Omega \end{aligned} \quad (2.56)$$

Aux sauts de conductivité électrique (σ) ou de perméabilité magnétique (μ), les intégrales doubles s'annulent deux à deux.

De la même manière, l'équation de conservation du courant s'écrit sous la forme faible suivante :

$$\begin{aligned} & -\iint_S \vec{n} \cdot (j\omega\sigma \vec{A} \cdot \vec{\beta}_j) dS - \iint_S \vec{n} \cdot (j\omega\sigma \nabla W \cdot \vec{\beta}_j) dS \\ & + \iiint_{\Omega} j\omega\sigma \vec{A} \cdot \nabla \vec{\beta}_j d\Omega + \iiint_{\Omega} j\omega\sigma \nabla W \cdot \nabla \vec{\beta}_j d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique ($\mathbf{H}_t = 0$), l'utilisation de la jauge de Coulomb ($\text{div } \mathbf{A} = 0$) et l'application d'une condition de Neumann homogène sur le potentiel scalaire assurent que les intégrales doubles dans les deux relations précédentes sont toujours nulles ou disparaissent deux à deux sur un saut de la conductivité électrique.

Nous aboutissons ainsi à une formulation classique en quadrivecteur potentiel des grandeurs électromagnétiques dans le cadre de l'approximation quasi-statique.

3.3.3 Domaine de validité

Il faut alors s'assurer lors du maillage des milieux volumiques conducteurs, qu'il y ait un minimum de deux ou trois éléments dans les zones où le champ varie fortement pour assurer une bonne interpolation des grandeurs électromagnétiques. Cette exigence peut devenir problématique lorsque les conditions d'utilisation – *fréquence d'excitation de la source et conductivité électrique du matériau considéré* – impliquent que la zone de variation devienne très petite devant l'épaisseur du matériau voire trop petite pour être maillée convenablement. La formulation classique ne permet plus dans ces conditions le calcul des grandeurs qui nous intéressent.

3.4 Modèle analytique

La formulation présentée ici est basée sur la prise en compte analytique de la brusque variation locale du champ en frontière des conducteurs. Elle permet la modélisation des phénomènes électromagnétiques en présence de conducteurs dans le cas où la variation des champs est si rapide que la zone de variation est trop fine par rapport à la dimension caractéristique du domaine d'étude pour être maillée.

3.4.1 Présentation

On montre que dans le cas où :

- l'espace est divisé en deux milieux semi-infinis, l'un conducteur et l'autre pas, par une frontière plane,
- le champ inducteur est uniforme dans le milieu non-conducteur,
- le champ inducteur varie sinusoïdalement dans le temps,

on peut modéliser le comportement des grandeurs à calculer et des fonctions de projection par une même fonction analytique connue qui correspond à une décroissance en exponentielle des champs dans la profondeur [GUÉRIN02].

3.4.2 Loi de décroissance dans la profondeur

Dans le cas élémentaire d'un modèle à deux milieux : le vide et un milieu conducteur de conductivité électrique σ , si nous considérons une onde plane à la fréquence f qui se propage verticalement suivant la direction z vers le milieu conducteur, nous obtenons le phénomène classique de l'induction électromagnétique. Dans le milieu conducteur, cette onde plane incidente provoque l'apparition de courants électriques induits horizontaux. Dans un bon conducteur, le courant varie dans la profondeur selon la loi :

$$J = J_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(-\frac{z}{\delta} + \omega t)} \quad (2.58)$$

Le module de ces courants varie exponentiellement suivant le rapport $(-z/\delta)$ et la phase linéairement en fonction de δ où δ désigne la profondeur de pénétration définie ci-après. On en déduit la loi de variation du module :

Profondeur	0	δ	2δ	3δ
Module	J_0	$\frac{J_0}{e}$	$\frac{J_0}{e^2}$	$\frac{J_0}{e^3}$

Tableau 11 : Variation du module des courants induits en fonction de δ

A titre d'exemple, on peut noter que le module du courant est atténué à 95 % de sa valeur initiale lorsque la profondeur est égale à 3δ . On définit la profondeur de pénétration, ou épaisseur de peau, comme étant la profondeur à laquelle le module a subi une atténuation d'un facteur e (atténuation de l'ordre de 67 %) par rapport à sa valeur à la surface. Pour un bon conducteur [KRAUS91], l'épaisseur de peau δ – *exprimée en mètre* – est donnée par la formule suivante :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}} \quad (2.59)$$

La définition de la profondeur de pénétration traduit parfaitement l'influence des deux paramètres cités précédemment : la fréquence d'excitation des sources de champ et la conductivité électrique du milieu considéré. Cette épaisseur de peau décroît très rapidement lorsque la fréquence du champ d'excitation primaire augmente. Sa valeur est également d'autant plus petite que la conductivité électrique du milieu considéré est grande.

Voici quelques exemples numériques qui illustrent la variation de l'épaisseur de peau calculée avec les propriétés électromagnétiques caractéristiques de l'aluminium pour des valeurs croissantes de la fréquence d'excitation du champ magnétique généré par la source.

Avec $\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m et $\sigma = 3,54 \cdot 10^7$ S/m, on obtient :

Fréquence (Hz)	50	10^3	10^4	10^6
Epaisseur de peau (mm)	12	2.67	0.846	0.267

Tableau 12 : Variation de l'épaisseur de peau en fonction de la fréquence

Nous pouvons constater que les valeurs obtenues deviennent rapidement très petites. Lorsque la valeur de la profondeur de pénétration est très faible, les champs ne pénètrent quasiment pas dans le milieu considéré car leur valeur est rapidement atténuée. Les effets sont alors essentiellement locaux.

3.4.3 Adaptation des fonctions d'interpolation et de projection

On exprime les inconnues dans le repère (u, v, w) tel que (u, v) appartiennent à la surface et que w corresponde à la profondeur.

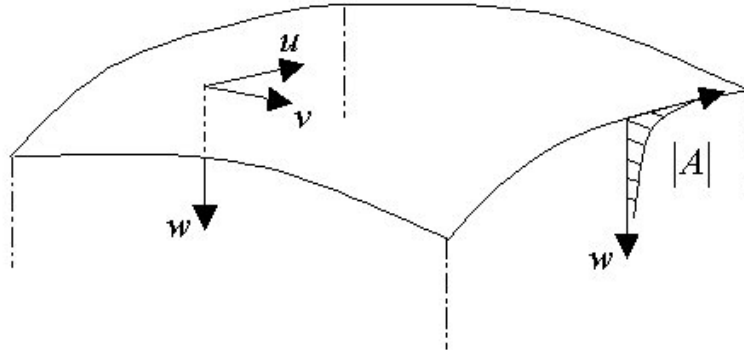


Figure 23 : Variation des fonctions de projection dans la profondeur

Les fonctions d'interpolation α_i et les fonctions de projection β_j s'écrivent alors de la manière suivante :

$$\alpha(u, v, w) = |\alpha|(u, v) e^{j\omega t} e^{-\frac{w}{\delta}(1+j)} \quad (2.60)$$

où $\alpha(u, v)$ est le polynôme d'interpolation classique des éléments finis nodaux et où le terme $\exp(-w/\delta(1+j))$ prend en compte la décroissance exponentielle.

Cette relation traduit une décroissance exponentielle du module et une décroissance linéaire de la phase à partir de la surface du conducteur.

L'épaisseur de peau doit être très petite devant celle du conducteur et devant la courbure des matériaux (les coins seront d'autant plus mal simulés que la peau sera épaisse).

Lorsque le rapport entre l'épaisseur du matériau et la profondeur de pénétration est suffisamment grand, on peut considérer que la décroissance est si rapide que tout se passe comme si les champs ne pénétraient pas dans le matériau. Dans ces conditions, les milieux conducteurs sont alors considérés comme des régions surfaciques, leur épaisseur est traitée de manière analytique lors du calcul dans la profondeur et les valeurs des potentiels en surface sont calculées analytiquement à partir de la loi de variation définie précédemment.

Cette modélisation donne de bons résultats pour des points de calculs éloignés des surfaces idéalisées mais interdit un calcul de champ à proximité des surfaces des conducteurs. Cet aspect n'est cependant pas une limitation car nous nous intéresserons essentiellement dans le cadre de ce travail de thèse aux zones de « haute » énergie et non aux zones situées au voisinage immédiat des éléments perturbateurs.

Les hypothèses effectuées pour utiliser cette loi de variation analytique dans la profondeur nous conduisent à définir un domaine de validité situé plutôt dans les « hautes » fréquences pour lesquelles la peau est fine.

3.4.4 Calcul des intégrants

On considère le système obtenu à l'aide de la formulation classique en quadrivecteur potentiel précédemment défini auquel on ajoute les intégrants correspondant à l'intégration analytique dans le milieu conducteur.

La forme faible de la première équation ($rot \mathbf{H} = \mathbf{J}$) du système à résoudre contient deux intégrants à modifier. Ces termes correspondent au calcul des courants induits dans un milieu conducteur.

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \nu \nabla \times \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{\beta}_j d\Omega + \iiint_{\Omega} P \nabla \cdot \vec{A} \nabla \cdot \vec{\beta}_j d\Omega \\ & + \iiint_{\Omega} \sigma j \omega \vec{\beta}_j \cdot \vec{A} d\Omega + \iiint_{\Omega} j \omega \sigma \vec{\beta}_j \cdot \nabla W d\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{\beta}_j \cdot \vec{J}_s d\Omega \end{aligned} \quad (2.61)$$

On applique la loi de variation dans la profondeur aux fonctions d'interpolation ainsi qu'aux potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique.

Le premier intégrant concerné s'écrit alors :

$$\begin{aligned} j \omega \iiint_{\Omega} \sigma \vec{A} \cdot \vec{\beta}_j d\Omega &= j \omega \iiint \sigma \vec{A}(u, v) e^{-\frac{w}{\delta}(1+j)} \cdot \vec{\beta}_j(u, v) e^{-\frac{w}{\delta}(1+j)} dudvdw \\ &= j \omega \iint \sigma \vec{A}(u, v) \cdot \vec{\beta}_j(u, v) dudv \int_0^{Ep} e^{-\frac{2w}{\delta}(1+j)} dw \end{aligned} \quad (2.62)$$

On calcule ensuite de manière analytique l'intégrale traduisant la décroissance exponentielle dans la profondeur – *supposée infinie* – du milieu conducteur.

$$\begin{aligned} j \omega \iiint_{\Omega} \sigma \vec{A} \cdot \vec{\beta}_j d\Omega &= j \omega \iint \sigma \vec{A}(u, v) \cdot \vec{\beta}_j(u, v) dudv \int_0^{Ep} e^{-\frac{2w}{\delta}(1+j)} dw \\ &= j \omega \iint \sigma \vec{A}(u, v) \cdot \vec{\beta}_j(u, v) dudv \cdot \left[-\frac{\delta}{2(1+j)} e^{-\frac{2w}{\delta}(1+j)} \right]_0^{Ep=+\infty} \\ &= j \omega \iint \sigma \vec{A}(u, v) \cdot \vec{\beta}_j(u, v) dudv \cdot \left(\frac{\delta}{2(1+j)} \right) \\ &= j \omega \frac{\delta(1-j)}{4} \iint \sigma \vec{A}(u, v) \cdot \vec{\beta}_j(u, v) dudv \end{aligned} \quad (2.63)$$

La modification effectuée sur le premier terme concerné par la prise en compte de la loi de variation dans la profondeur fait ainsi apparaître les deux nouveaux intégrants surfaciques suivants :

$$\begin{aligned} j \omega \iiint_{\Omega} \sigma \vec{A} \cdot \vec{\beta}_j d\Omega &= \omega \frac{\delta}{4} \iint \sigma \vec{A}(u, v) \cdot \vec{\beta}_j(u, v) dudv \\ &+ j \omega \frac{\delta}{4} \iint \sigma \vec{A}(u, v) \cdot \vec{\beta}_j(u, v) dudv \end{aligned} \quad (2.64)$$

La même démarche est maintenant suivie pour modifier le second terme de l'équation en lui appliquant également la loi de variation analytique dans la profondeur. Cet intégrant s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
j\omega \iiint_{\Omega} \sigma \vec{\beta}_j \cdot \nabla W d\Omega &= j\omega \iint \sigma \vec{\beta}_j(u, v) \cdot C_1 \cdot \frac{\partial W(u, v)}{\partial u} dudv \int_0^{Ep} e^{-\frac{2w}{\delta}(1+j)} dw \\
&+ j\omega \iint \sigma \vec{\beta}_j(u, v) \cdot C_2 \cdot \frac{\partial W(u, v)}{\partial u} dudv \int_0^{Ep} e^{-\frac{2w}{\delta}(1+j)} dw
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Les deux intégrales obtenues correspondant à la décroissance exponentielle dans la profondeur sont à nouveau calculées de manière analytique. Le calcul de ces intégrales est identique à celui effectué lors de la modification du premier intégrant et fournit le même coefficient multiplicatif.

$$\begin{aligned}
j\omega \iiint_{\Omega} \sigma \vec{\beta}_j \cdot \nabla W d\Omega &= j\omega \frac{\delta(1-j)}{4} \iint \sigma \vec{\beta}_j(u, v) \cdot C_1 \cdot \frac{\partial W(u, v)}{\partial u} dudv \\
&+ j\omega \frac{\delta(1-j)}{4} \iint \sigma \vec{\beta}_j(u, v) \cdot C_2 \cdot \frac{\partial W(u, v)}{\partial u} dudv
\end{aligned} \tag{2.66}$$

On obtient finalement les quatre nouveaux intégrants surfaciques présentés ci-après, pour lesquels le gradient du potentiel scalaire modifié W est défini aux constantes C_i près :

$$\begin{aligned}
j\omega \iiint_{\Omega} \sigma \vec{\beta}_j \cdot \nabla W d\Omega &= \omega \frac{\delta}{4} \cdot \iint_s \sigma \beta_j(u, v) \frac{\partial W(u, v)}{\partial u} C_1 dudv \\
&+ j\omega \frac{\delta}{4} \cdot \iint_s \sigma \beta_j(u, v) \frac{\partial W(u, v)}{\partial u} C_1 dudv \\
&+ \omega \frac{\delta}{4} \cdot \iint_s \sigma \beta_j(u, v) \frac{\partial W(u, v)}{\partial v} C_2 dudv \\
&+ j\omega \frac{\delta}{4} \cdot \iint_s \sigma \beta_j(u, v) \frac{\partial W(u, v)}{\partial v} C_2 dudv
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Ces intégrants surfaciques sont alors placés dans les matrices constituant le système linéaire à résoudre.

La seconde équation du système à résoudre, relative à la conservation du courant électrique ($\text{div } \mathbf{J} = 0$), contient également deux termes à modifier. Nous rappelons que la forme faible de cette équation s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& - \iint_s \vec{n} \cdot (j\omega \sigma \vec{A} \cdot \vec{\beta}_j) dS - \iint_s \vec{n} \cdot (j\omega \sigma \nabla W \cdot \vec{\beta}_j) dS \\
& + \iiint_{\Omega} j\omega \sigma \vec{A} \cdot \nabla \vec{\beta}_j d\Omega + \iiint_{\Omega} j\omega \sigma \nabla W \cdot \nabla \vec{\beta}_j d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{2.68}$$

On applique la loi de variation dans la profondeur aux potentiels comme lors de la modification des termes de la première équation. Le premier intégrant concerné s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
j\omega \iiint_{\Omega} \sigma \vec{A} \cdot \nabla \vec{\beta}_j d\Omega &= j\omega \iint_s \sigma \vec{A}(u, v) \frac{\partial \vec{\beta}_j(u, v)}{\partial u} C_1 dudv \int_0^{Ep} e^{-\frac{2w}{\delta}(1+j)} dw \\
&+ j\omega \iint_s \sigma \vec{A}(u, v) \frac{\partial \vec{\beta}_j(u, v)}{\partial v} C_2 dudv \int_0^{Ep} e^{-\frac{2w}{\delta}(1+j)} dw
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Le résultat de l'intégration analytique dans la profondeur est identique aux cas précédents. Les mêmes coefficients multiplicatifs sont affectés aux nouveaux intégrants surfaciques obtenus.

$$\begin{aligned}
j\omega \iiint_{\Omega} \sigma \vec{A} \cdot \nabla \vec{\beta}_j d\Omega &= j\omega \frac{\delta(1-j)}{4} \iint_s \sigma \vec{A}(u,v) \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial u} C_1 dudv \\
&+ j\omega \frac{\delta(1-j)}{4} \iint_s \sigma \vec{A}(u,v) \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial v} C_2 dudv
\end{aligned} \tag{2.70}$$

On obtient finalement les quatre nouveaux termes suivants :

$$\begin{aligned}
j\omega \iiint_{\Omega} \sigma \vec{A} \cdot \nabla \vec{\beta}_j d\Omega &= \omega \frac{\delta}{4} \iint_s \sigma \vec{A}(u,v) \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial u} C_1 dudv \\
&+ j\omega \frac{\delta}{4} \iint_s \sigma \vec{A}(u,v) \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial u} C_1 dudv \\
&+ \omega \frac{\delta}{4} \iint_s \sigma \vec{A}(u,v) \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial v} C_2 dudv \\
&+ j\omega \frac{\delta}{4} \iint_s \sigma \vec{A}(u,v) \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial v} C_2 dudv
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Les gradients des potentiels sont toujours définis aux constantes C_i près.

En suivant une nouvelle fois la démarche exposée précédemment, nous appliquons la loi de variation dans la profondeur aux potentiels du second terme à modifier.

$$\begin{aligned}
j\omega \iiint_{\Omega} \sigma \nabla W \cdot \nabla \vec{\beta}_j d\Omega &= j\omega \iint_s \sigma \frac{\partial W(u,v)}{\partial u} \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial u} C_1 dudv \int_0^{Ep} e^{-\frac{2w}{\delta}(1+j)} dw \\
&+ j\omega \iint_s \sigma \frac{\partial W(u,v)}{\partial v} \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial v} C_2 dudv \int_0^{Ep} e^{-\frac{2w}{\delta}(1+j)} dw
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Le résultat de l'intégration analytique dans la profondeur est identique aux cas précédents. Les mêmes coefficients multiplicatifs sont affectés aux nouveaux intégrants surfaciques obtenus.

$$\begin{aligned}
j\omega \iiint_{\Omega} \sigma \nabla W \cdot \nabla \vec{\beta}_j d\Omega &= j\omega \frac{\delta(1-j)}{4} \iint_s \sigma \frac{\partial W(u,v)}{\partial u} \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial u} C_1 dudv \\
&+ j\omega \frac{\delta(1-j)}{4} \iint_s \sigma \frac{\partial W(u,v)}{\partial v} \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial v} C_2 dudv
\end{aligned} \tag{2.73}$$

On obtient finalement, à partir du dernier terme à modifier, ces quatre intégrants surfaciques :

$$\begin{aligned}
j\omega \iiint_{\Omega} \sigma \nabla W \cdot \nabla \vec{\beta}_j d\Omega &= \omega \frac{\delta}{4} \iint_s \sigma \frac{\partial W(u,v)}{\partial u} \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial u} C_1 dudv \\
&+ j\omega \frac{\delta}{4} \iint_s \sigma \frac{\partial W(u,v)}{\partial u} \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial u} C_1 dudv \\
&+ \omega \frac{\delta}{4} \iint_s \sigma \frac{\partial W(u,v)}{\partial v} \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial v} C_2 dudv \\
&+ j\omega \frac{\delta}{4} \iint_s \sigma \frac{\partial W(u,v)}{\partial v} \frac{\partial \vec{\beta}_j(u,v)}{\partial v} C_2 dudv
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Les gradients des potentiels sont toujours définis aux constantes C_i près.

En ajoutant ces nouveaux intégrants correspondant à l'intégration analytique de l'effet de peau dans les milieux conducteurs, nous obtenons un modèle mixte numérique/analytique local dont le domaine de validité étendu par la complémentarité des deux formulations utilisées reste à valider.

La loi de variation analytique suivant une exponentielle décroissante des potentiels dans la profondeur nous permet d'observer leur variation lorsque celle-ci est rendue très rapide par la faible valeur de l'épaisseur de peau.

Lorsque que l'épaisseur du conducteur est grande devant l'épaisseur de peau, la variation des potentiels est si rapide que les effets se produisant dans la profondeur peuvent être considérés comme des phénomènes locaux. Ceci nous permet de ne plus mailler l'intégralité du volume correspondant au milieu conducteur et de ne considérer que sa surface.

Conclusion

La mise en équations des phénomènes d'induction électromagnétique est directement issue des équations de Maxwell et des relations constitutives des milieux. L'utilisation de l'approximation quasi-statique est parfaitement justifiée pour les conducteurs utilisés dans le cadre de cette étude et nous permet de simplifier la formulation en négligeant les phénomènes de propagation. Les propriétés physiques des milieux considérés, à savoir la perméabilité magnétique et la conductivité électrique, sont constantes et ne dépendent pas des champs.

L'utilisation des potentiels électromagnétiques (vecteur magnétique et scalaire électrique) est liée à la réduction du nombre d'inconnues par rapport à une formulation en champs, à la simplification de sa mise en œuvre à cause de la continuité des potentiels et à sa généralité qui nous permet de prendre en compte les sauts de conductivité électrique et de perméabilité magnétique.

La linéarité des équations obtenues permet la séparation des variables d'espace et de temps et la résolution en régime harmonique pour des sources sinusoïdales ou périodiques.

La formulation en quadrivecteur potentiel a été mise en œuvre dans le cadre de la méthode des éléments finis que nous avons utilisée à travers le logiciel FluxExpert. Le modèle développé permet la modélisation des phénomènes d'induction dans les milieux métalliques conducteurs ou présentant des propriétés magnétiques.

La modélisation de ces phénomènes d'induction nécessite la prise en compte de plusieurs paramètres : nature et fréquence d'excitation du courant source, propriétés électromagnétiques des milieux considérés, sauts de ces propriétés électriques et magnétiques. Le modèle numérique que nous avons développé prend en compte ces différents paramètres et permet une modélisation fine des géométries tridimensionnelles notamment dans les cas où l'épaisseur de peau est trop fine pour être maillée de manière traditionnelle.

Nous allons maintenant nous attacher à étudier la validité des résultats fournis par notre modèle mixte à travers une phase de confrontation expérimentale.

CHAPITRE III

VALIDATION

Introduction

Nous avons présenté au cours du chapitre précédent le modèle numérique développé pour modéliser les phénomènes électromagnétiques induits au sein d'éléments métalliques présents dans la zone de fonctionnement des systèmes magnétiques de localisation spatiale. De manière à évaluer la validité des résultats de notre modèle, basé sur l'utilisation conjointe des deux formulations définies au cours de ce même chapitre, plusieurs contrôles ont été menés par l'intermédiaire de confrontations théorique et expérimentale.

Nous présenterons dans un premier temps les résultats obtenus à l'aide du modèle analytique local sur des géométries synthétiques destinées à évaluer qualitativement la pertinence de ces premiers résultats.

La seconde étape de cette phase de validation est dédiée à la confrontation expérimentale des résultats de notre modèle numérique. La mise en œuvre du modèle éléments finis sur des géométries réelles est en effet l'objectif principal de cette étape de validation.

Enfin, nous comparerons les résultats obtenus avec chacune des deux formulations qui constituent le modèle mixte développé pour conclure sur la précision et le domaine de validité des modélisations numériques.

1. Validation qualitative

L'ensemble des simulations effectuées lors de ces tests doit permettre de vérifier la pertinence qualitative des résultats obtenus à l'aide du modèle analytique, en observant notamment le comportement et la répartition des grandeurs électromagnétiques produites dans diverses conditions. L'épaisseur des bons conducteurs modélisés est prise en compte de manière analytique. Les conducteurs massifs présents à l'intérieur du domaine d'étude sont en effet modélisés comme nous l'avons vu précédemment par des régions surfaciques et non plus volumiques. Les différents éléments constituant l'espace à modéliser sont placés à l'intérieur d'un objet tridimensionnel de forme cubique, sorte de « sur-boîte » dont les frontières représentent les limites du domaine et par extension, l'infini. On peut alors imposer sur ces

frontières des conditions aux limites permettant d'annuler une ou plusieurs composantes des grandeurs électromagnétiques et/ou de leurs gradients.

1.1 Génération des maillages

La génération des maillages tridimensionnels a été effectuée à l'aide du logiciel *Preflu*, module de maillage du logiciel Flux3D. Nous allons chercher à évaluer le comportement des grandeurs électromagnétiques en utilisant trois géométries synthétiques simplifiées illustrant chacune une situation différente. Pour chacune des trois configurations, la source de champ magnétique est une simple boucle de courant disposée au centre du domaine tridimensionnel. Pour des raisons de simplicité d'utilisation et de rapidité de mise en œuvre, cette source de champ est une spire carrée. Cette différence géométrique par rapport à une réalité physique n'a en fait que peu d'incidence sur la valeur du champ généré. Les valeurs numériques sont très sensiblement identiques, seule la répartition spatiale du champ diffère légèrement. Cependant, les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants et répondent parfaitement aux attentes de cette phase de validation qualitative.

1.1.1 Scénario 1

La première simulation réalisée est basée sur l'utilisation de la géométrie suivante : une boucle de courant est disposée horizontalement au-dessus de deux conducteurs massifs représentés ici par des régions surfaciques, comme le montre la figure ci-dessous.

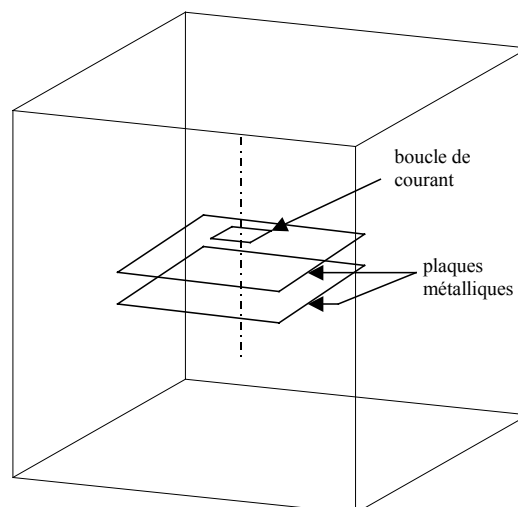


Figure 24 : Géométrie classique utilisée pour la première phase

A partir de cette géométrie, nous avons considéré trois cas distincts lors de l'affectation des propriétés électromagnétiques. En effet, en affectant différentes valeurs de conductivité électrique aux deux régions surfaciques, nous pouvons considérer la présence ou non de milieux conducteurs au voisinage de la source de champ magnétique.

- Dans un premier temps, les deux régions surfaciques sont considérées comme des éléments conducteurs, c'est-à-dire qu'on leur affecte une conductivité électrique non nulle. La plaque supérieure doit en théorie être le siège de l'apparition de courants induits – *les courants de Foucault* – qui vont, en accord avec la loi de Lenz, s'opposer au champ magnétique qui les a créés. Cette plaque va par conséquent jouer un rôle

d'écran vis-à-vis de la plaque inférieure. Le champ magnétique devrait être complètement atténué par la première plaque dont l'épaisseur de peau a été rendue très inférieure à l'épaisseur de la plaque par les conditions imposées. Le champ magnétique et par extension les courants induits doivent donc être nuls au niveau de la seconde plaque conductrice.

- Nous avons ensuite « retiré » l'élément conducteur inférieur du domaine en lui affectant une conductivité électrique nulle. Ceci revient à considérer cet élément comme une « plaque d'air » complètement transparente pour le champ magnétique produit par la boucle de courant. Cette nuance doit permettre d'observer la présence ou non d'une éventuelle interaction entre les plaques inférieure et supérieure. Le premier élément jouant toujours un rôle d'écran, le champ existant sur la plaque inférieure – *constituée d'air* – devrait en théorie être complètement atténué.
- Pour cette troisième et dernière variante du problème physique à résoudre, nous nous intéressons uniquement au champ magnétique produit par la source. Les deux régions surfaciques sont considérées comme des éléments non-conducteurs, ce qui nous permet d'observer la répartition du champ magnétique en l'absence de conducteurs et de disposer de valeurs de référence pour une première évaluation des effets engendrés par les courants de Foucault induits lorsque les plaques sont conductrices.

1.1.2 Scénario 2

La seconde géométrie synthétique réalisée, illustrée par la figure ci-après, doit nous permettre d'observer l'évolution et la répartition spatiale des courants induits dans une plaque en présence d'un obstacle matérialisé par une zone de conductivité électrique nulle. Pour ce faire, nous disposons toujours de la même source de champ magnétique, à savoir une boucle de courant disposée de manière horizontale au-dessus d'une plaque conductrice. La région surfacique symbolisant le milieu conducteur comporte désormais une entaille. Les courants circulant sur la plaque doivent être déviés de manière à contourner cet obstacle où règne un saut de conductivité important. Nous observerons donc la répartition spatiale des courants induits à la surface de la plaque conductrice et plus particulièrement au voisinage de l'entaille créée dans la plaque.

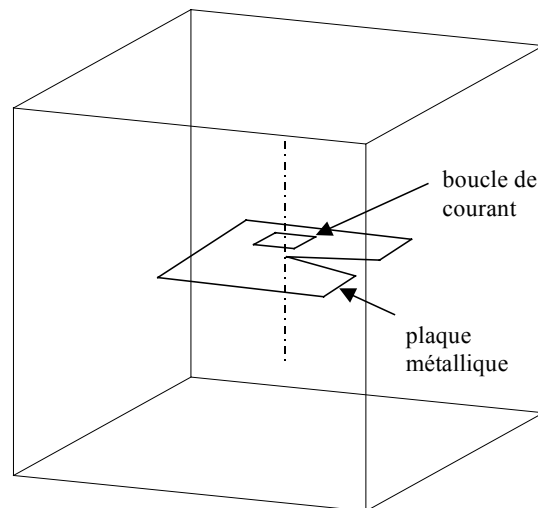


Figure 25 : Géométrie avec entaille pour vérifier la déviation occasionnée sur la circulation des courants induits

1.1.3 Scénario 3

La dernière étape de cette phase de validation qualitative destinée à évaluer la réalité physique des résultats issus du modèle développé sous FluxExpert nous conduit à observer la distribution d'une nappe de courants arrivant sur un bord de plaque. Nous nous attacherons à vérifier le fait que les courants de Foucault arrivant sur le bord d'une plaque sont effectivement arrêtés par le gradient de potentiel qui règne à l'interface entre les deux milieux et contraints à changer de direction tout en restant à l'intérieur de la région conductrice. Pour ce faire, nous utiliserons la géométrie présentée sur la **Figure 26**. La source de champ est, cette fois, disposée de manière verticale, de telle sorte que la normale à la boucle appartienne à un plan parallèle à celui de la plaque. De plus, la bobine est placée à cheval sur un bord, afin que les courants soient bien « poussés » vers l'extérieur de la plaque.

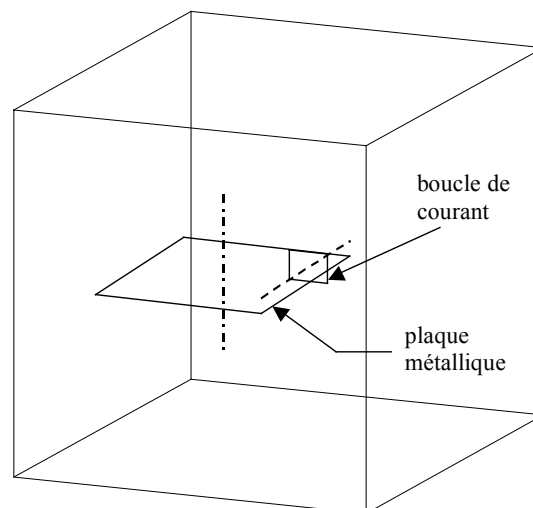


Figure 26 : Géométrie destinée à observer l'évolution des courants induits en présence d'un fort gradient de potentiel électrique

1.2 Propriétés physiques

Nous avons vu au cours du premier chapitre que les phénomènes d'induction avaient deux origines distinctes. Une grande partie de notre étude sera consacrée à l'étude des courants induits dans des milieux conducteurs par les variations temporelles du champ magnétique généré par une bobine de courant. Nous nous attacherons donc principalement à considérer la présence de matériaux dont la conductivité est élevée dans l'environnement de la source.

Les propriétés physiques des matériaux qui nous intéressent dans le cadre de cette étude des phénomènes d'induction sont la conductivité électrique et la perméabilité magnétique. Nous considérons que les milieux modélisés sont linéaires et isotropes, ce qui implique que les propriétés électromagnétiques des matériaux sont des nombres réels constants.

La conductivité électrique affectée aux éléments situés à l'intérieur du domaine doit permettre de considérer des matériaux fortement conducteurs favorisant ainsi l'apparition de courants induits. Le milieu conducteur modélisé lors de cette phase de tests présente une conductivité électrique $\sigma = 10^7$ S/m. Nous nous intéressons ici uniquement à la répartition des courants induits dans un milieu conducteur, la perméabilité magnétique est donc partout égale à celle du vide, c'est-à-dire $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Le bon conditionnement des matrices est rendu possible grâce à l'utilisation du terme de pénalité, associée à la jauge de Coulomb qui assure l'unicité du potentiel vecteur magnétique. Pour ces tests de validité, mais aussi pour la suite de l'étude, la valeur de la pénalité est égale à la valeur de la perméabilité utilisée ce qui assure un conditionnement optimal du système linéaire à résoudre.

1.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites affectées au cours de la construction du problème numérique sont de deux types.

Les conditions à l'infini : on impose dans un premier temps des conditions sur les limites extérieures du domaine qui matérialisent l'infini. Sur ces frontières, on utilise des conditions aux limites de type Dirichlet qui permettent d'annuler la variable d'état ou indépendamment chacune de ses composantes. Dans notre cas où les limites extérieures du domaine représentent l'infini, nous avons besoin d'annuler toutes les composantes des potentiels électromagnétiques.

Le passage entre deux milieux : l'utilisation des potentiels simplifie la formulation. Ils sont continus aux interfaces et leurs dérivées (les champs) doivent assurer la continuité de \mathbf{B}_n et \mathbf{H}_t . Ces conditions sont automatiquement vérifiées par la formulation choisie. Aucune contrainte mathématique supplémentaire ne doit être imposée sur ces limites.

1.4 Résultats obtenus

La résolution numérique des différents problèmes précédemment construits est effectuée en nombres complexes. Les valeurs numériques des grandeurs nécessaires à la résolution de ces problèmes sont les suivantes : la source de champ magnétique est alimentée avec une densité

de courant $J_s = 20000 \text{ A/m}^2$ à une fréquence de travail $f = 10 \text{ kHz}$. Les fils électriques de la boucle de courant modélisant la source, ont une section $S = 10^{-6} \text{ m}^2$ et une longueur $l = 5 \text{ cm}$. L'épaisseur des plaques conductrices, qui sont modélisées par des régions surfaciques puisque l'épaisseur est prise en compte de manière analytique, est égale à 2 cm . Ces plaques sont des carrés de 30 cm de côté. Les valeurs des grandeurs présentées ici donnent une profondeur de pénétration δ d'environ 1.6 mm . La distance séparant la plaque supérieure de la source de champ magnétique est de 6 cm . Les faces « supérieures » des deux plaques conductrices du premier scénario sont elles distantes de 10 cm .

Les calculs du champ d'induction \mathbf{B} et des courants induits dans les matériaux conducteurs sont effectués d'après les valeurs des potentiels vecteur magnétique (\mathbf{A}) et scalaire électrique (V), issues de la résolution numérique et tabulées dans des fichiers de données à l'aide du post-processeur XPLOIT. Les champs électromagnétiques et les courants induits sont des grandeurs vectorielles complexes. Ce type de variables n'est pas facile à représenter de manière intuitive. Afin de disposer de grandeurs significatives et de s'affranchir des parties imaginaires, on calcule composante par composante le module et la phase de la variable complexe à analyser. A partir de ces nouvelles valeurs, on est alors en mesure de calculer les modules au sens vectoriel de ces variables. Les résultats présentés dans ce chapitre sont les modules des vecteurs électromagnétiques.

1.4.1 Scénario 1

Les deux figures suivantes montrent le champ d'induction au niveau des deux régions conductrices. La boucle de courant utilisée comme source de champ magnétique est disposée parallèlement aux plaques. Le champ magnétique généré dans ces conditions est ainsi normal aux surfaces des plaques.

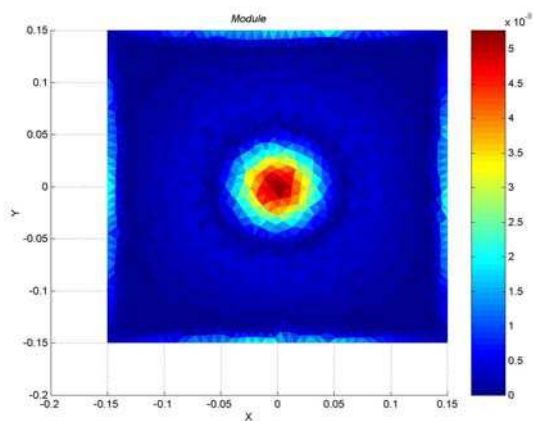


Figure 27 : Module (nT) du champ d'induction \mathbf{B} sur la plaque conductrice supérieure (m)

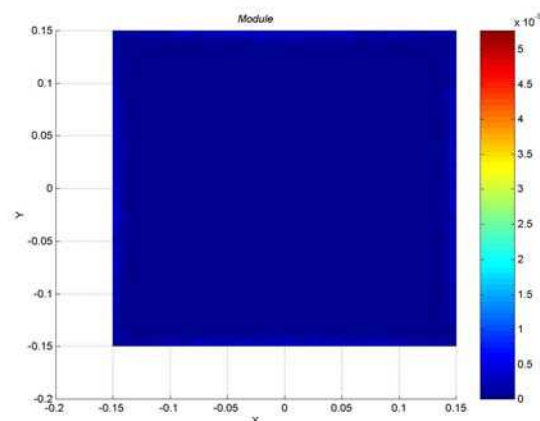


Figure 28 : Module (nT) du champ d'induction \mathbf{B} sur la plaque conductrice inférieure (m)

On constate que la distribution spatiale du champ d'induction \mathbf{B} est bien en accord avec ce que l'on pouvait attendre. Toutefois, la fonction « écran » réalisée par la première plaque n'est pas parfaite. Nous avons calculé les valeurs moyennes des champs sur chacune des deux plaques : sur la plaque supérieure, cette valeur moyenne est de $0,178 \text{ nT}$ alors qu'elle n'est plus que de $0,030 \text{ nT}$ sur la seconde plaque. Le champ d'induction, même s'il n'est pas complètement nul sur la seconde plaque a tout de même été atténué d'un facteur 6. Il apparaît cependant un phénomène de bord qui procure au champ des valeurs anormalement élevées sur les côtés des plaques conductrices.

Les deux figures ci-dessous présentent la répartition des courants de Foucault induits dans les plaques supérieure et inférieure.

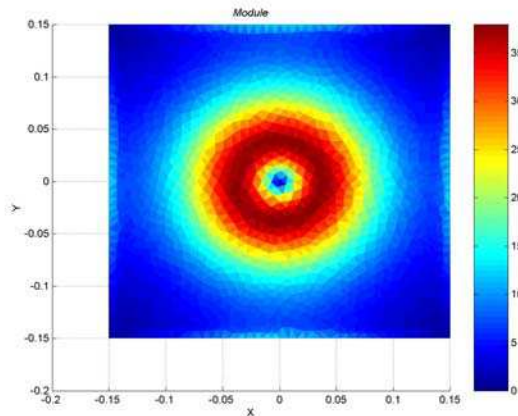


Figure 29 : Module (A/m²) des courants induits sur la plaque conductrice supérieure

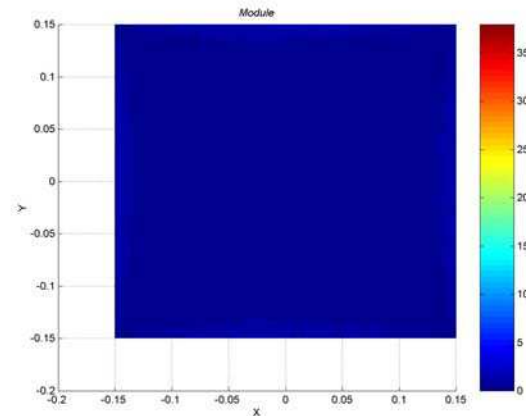


Figure 30 : Module (A/m²) des courants induits sur la plaque conductrice inférieure

La plaque supérieure est le siège de l'apparition d'une nappe de courants induits, relativement importante, située précisément à l'aplomb de la bobine. Pour les mêmes raisons que celles évoquées précédemment, les courants de Foucault induits sur la plaque inférieure sont quasiment nuls. Cette première étape a permis d'obtenir des grandeurs électromagnétiques, calculées à partir des potentiels électromagnétiques et dont la répartition spatiale et les ordres de grandeur sont réalistes. Il existe néanmoins des effets additionnels sur les bords des plaques, qui n'ont a priori pas de sens physique et qui seront abordés plus tard au cours ce chapitre.

La résolution du scénario 1b, où seule la plaque supérieure est considérée comme conductrice, permet d'évaluer l'influence de la seconde plaque métallique sur les valeurs des grandeurs électromagnétiques calculées précédemment. Ces résultats doivent notamment nous permettre de déterminer si les effets observés en bord de plaque sont dus à une éventuelle rétroaction. La **Figure 31** montre le champ d'induction B à la surface de la seule plaque conductrice et la **Figure 32** présente les courants de Foucault induits sur cette même plaque.

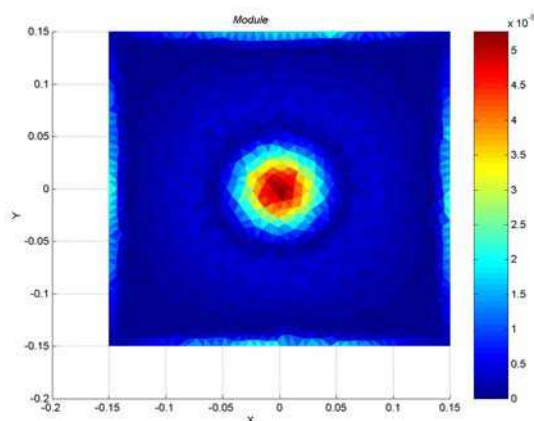


Figure 31 : Module (nT) du champ d'induction au niveau de la plaque conductrice supérieure

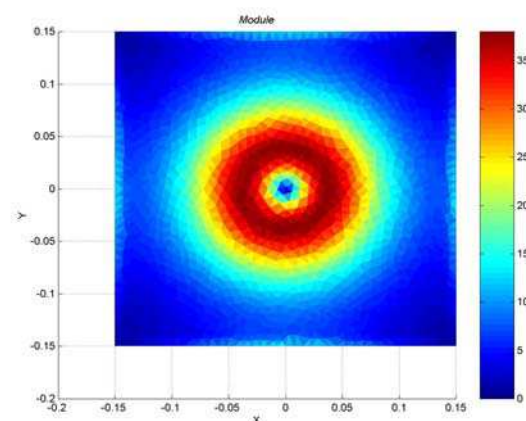


Figure 32 : Module (A/m²) des courants induits sur la plaque conductrice supérieure

On constate que le champ d'induction magnétique calculé sur la plaque supérieure ne présente aucune variation par rapport au champ calculé lorsque la plaque inférieure est conductrice

(**Figure 27**). La distribution du champ obtenue dans ces conditions est identique et la valeur moyenne obtenue sur la plaque supérieure est sensiblement la même (0,180 nT). Les effets que nous avons observés sur les bords sont toujours présents, ce qui permet de conclure que la plaque inférieure n'est pas à l'origine de ces phénomènes mis en évidence lors du calcul précédent. La même constatation est également valable en ce qui concerne le calcul des courants induits.

Les deux figures suivantes montrent le champ qui subsiste au niveau de la région où la conductivité électrique est nulle. On constate que le champ résiduel est bien inférieur au champ qui règne sur la plaque supérieure (**Figure 33**). En effet, la valeur moyenne du champ d'induction sur cet élément est de 0,120 nT ce qui correspond à une atténuation d'un facteur 1,5. La valeur du champ obtenue sur la plaque inférieure est cette fois plus élevée que lors du cas précédent. Ceci s'explique par le fait que les courants de Foucault, même s'ils étaient très faibles sur cette seconde plaque, sont désormais absents et ne s'opposent donc plus au champ principal. En ce qui concerne les courants induits, ils sont nuls car le milieu est non-conducteur.

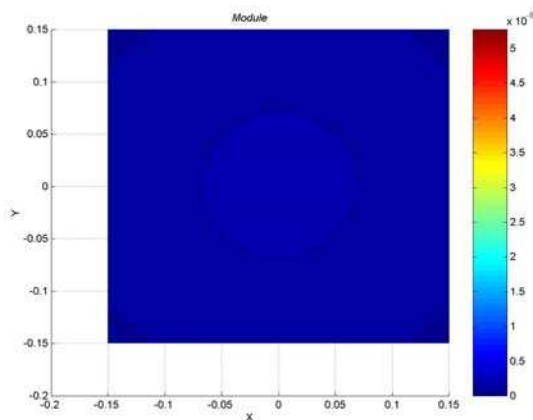


Figure 33 : Module (nT) du champ d'induction B au niveau de la plaque inférieure (non-conductrice)

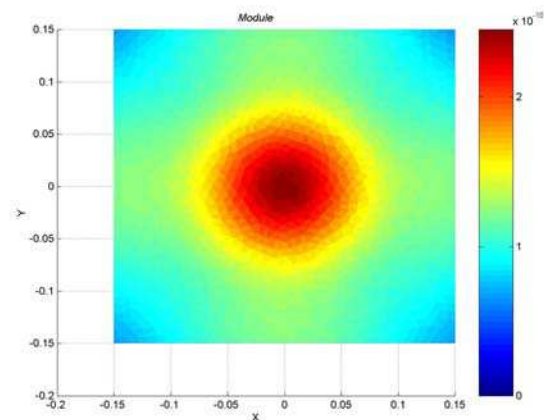


Figure 34 : Module (nT) du champ B avec une échelle adaptée

En affectant à chacune des plaques une conductivité électrique nulle, la résolution du système d'équations basée sur la première géométrie permet de comparer la distribution du champ magnétique en l'absence de matériaux conducteurs et d'obtenir ainsi des valeurs de référence dans l'air. Les phénomènes de bord observés sur les scénarios précédents ont disparu, mais il subsiste tout de même un léger effet dans les coins notamment sur la plaque supérieure. Les deux figures ci-dessous présentent le champ d'induction magnétique sur les deux régions surfaciques de conductivité électrique nulle.

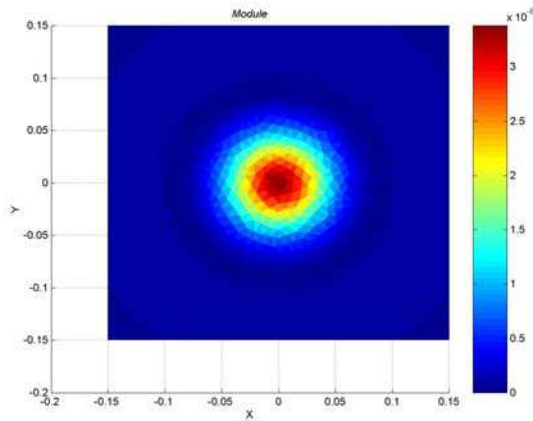


Figure 35 : Module (nT) du champ B sur la plaque non-conductrice supérieure

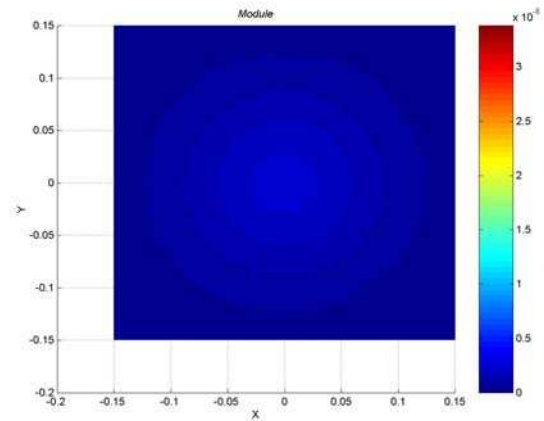


Figure 36 : Module (nT) du champ B sur la plaque non-conductrice inférieure

On observe qu'en absence de courants induits à la surface de la plaque, la répartition spatiale et le module du champ magnétique sont plus importants. En effet, les courants de Foucault créés à la surface d'un élément conducteur tendent à s'opposer au champ source qui est à l'origine de leur apparition. En conséquence, ils produisent un champ qui en se soustrayant au champ généré par la source engendre un champ d'induction magnétique global d'amplitude moindre. La valeur moyenne du module du champ d'induction magnétique, calculée sur la région surfacique supérieure est de 1.700 nT. En comparant cette valeur à celle obtenue lorsque que cette même région était conductrice (environ 0.180 nT), on peut dès maintenant évaluer l'influence des courants de Foucault sur l'évolution du champ d'induction. L'atténuation engendrée sur la valeur moyenne du champ est de 45 dB au niveau de la plaque supérieure.

Nous avons également voulu vérifier les ordres de grandeur obtenus lors du calcul du champ magnétique dans le contexte particulier du dernier scénario où les calculs sont effectués dans l'air. Pour ce faire, nous avons utilisé la loi de Biot et Savart pour valider la valeur du champ obtenue au centre de la région surfacique, point remarquable qui correspond à la première position de Gauss et procure une valeur maximale de champ. La valeur maximale fournie par simulation sur cette région et celle issue du calcul basé sur la loi de Biot et Savart sont parfaitement identiques et valent 34 nT. Ceci permet de conclure que les résultats fournis par la simulation sont absolument valides.

Lors de cette étape de validation du modèle développé, il nous faut également vérifier la condition de jauge ($\text{div } \mathbf{A} = 0$) en estimant sa valeur. En effet, lors de la mise en équations des phénomènes électromagnétiques, nous avons abouti à un système linéaire d'équations aux dérivées partielles dont l'une comporte le terme $\text{grad } (P \cdot \text{div } \mathbf{A})$ qui force cette divergence à être minimale.

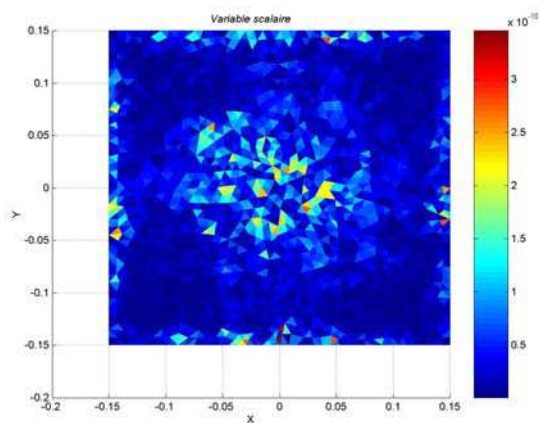


Figure 37 : Divergence de \mathbf{A} calculée sur la plaque supérieure (conductrice)

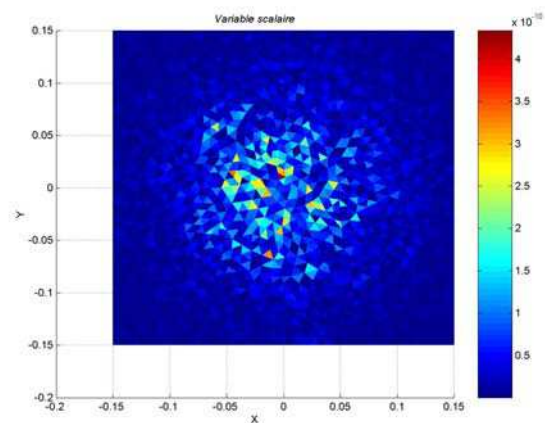


Figure 38 : Divergence de \mathbf{A} calculée sur la plaque supérieure (non-conductrice)

On peut distinguer, sur les deux figures ci-dessus, que le calcul de la divergence du potentiel vecteur sur la plaque supérieure donne un résultat plutôt hétérogène. Le résultat du calcul est identique pour les différents cas où la plaque supérieure est considérée comme un élément conducteur et présente donc une conductivité élevée. On voit bien apparaître sur la **Figure 37**, les phénomènes de bord qui ont été mis en évidence au cours du paragraphe précédent. Par contre, ces effets ont disparu comme nous pouvons le voir sur la **Figure 38**, qui présente les résultats du calcul de la divergence dans le cas où la plaque est non-conductrice.

En conclusion, on remarque que la distribution des grandeurs physiques issues des calculs basés sur cette première géométrie est tout à fait cohérente et la validité des ordres de grandeur obtenus a été démontrée. Il subsiste cependant des phénomènes d'imprécision intrinsèque sur les bords et dans les coins, essentiellement dans le cas de plaques conductrices, lors du calcul des grandeurs électromagnétiques. Les résultats observés relatifs à la conservation du courant sont acceptables, même s'il existe quelques inhomogénéités qui trouvent leur justification dans le fait que la source de champ magnétique utilisée n'est pas, elle-même, à divergence nulle puisqu'elle est constituée de coins carrés. Les effets de ces singularités demeurent confinés sur les bords et les coins de plaques et ne perturbent pas les champs à distance.

1.4.2 Scénario 2

La seconde étape de cette phase de validation du modèle consiste à observer l'évolution des courants de Foucault en présence d'un obstacle. La géométrie utilisée pour cette analyse est sensiblement la même que celle utilisée précédemment. Elle est constituée d'une plaque métallique munie d'une entaille, qui s'étend du centre de la plaque à l'un des bords, en forme de biseau. Cette fente fait donc apparaître un saut de conductivité à l'intérieur même de la surface conductrice et occasionne un gradient de potentiel qui doit faire tourner les courants circulant dans la plaque.

Les données numériques (le paramétrage) utilisées lors de la résolution sont les mêmes que celles utilisées dans le cas du premier scénario.

L'objectif de ce second volet de validation est donc de vérifier que les courants induits à la surface de la plaque conductrice sont bien stoppés par le gradient de potentiel qui règne au

niveau de la fente formée dans la plaque et déviés de manière à contourner cet obstacle. Les courants induits à la surface de l'élément conducteur sont présentés sur les figures suivantes :

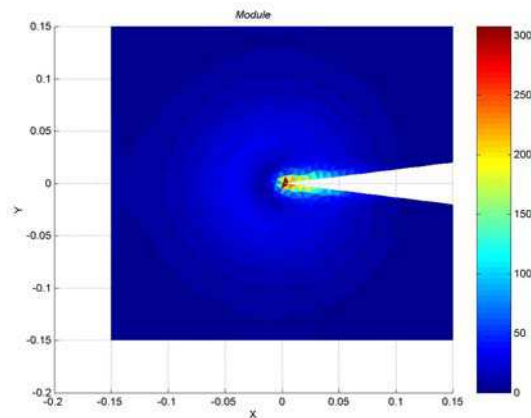


Figure 39 : Module (A/m^2) des courants induits à la surface de la plaque

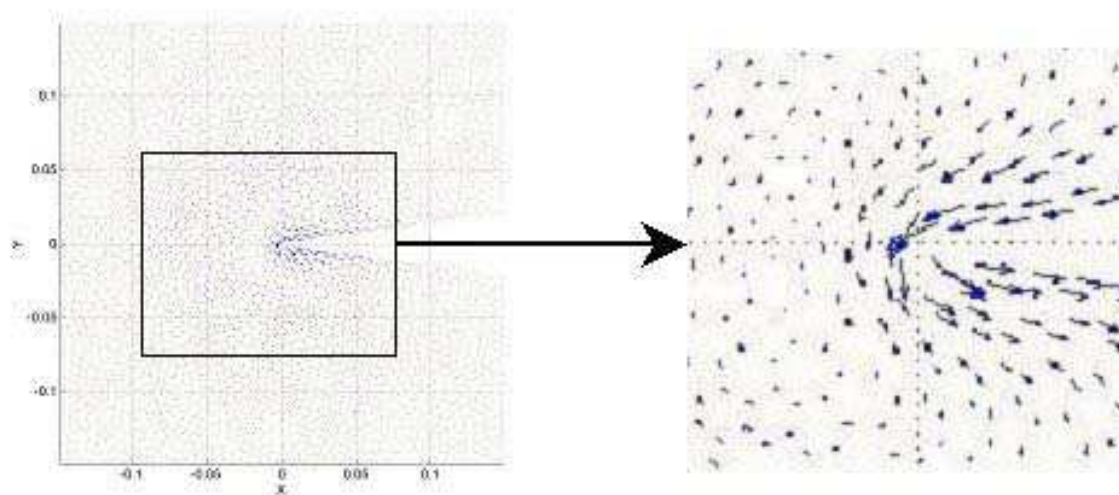


Figure 40 : Représentation vectorielle des courants de Foucault

On constate, notamment sur la représentation vectorielle, que les courants induits sont bien bloqués par le saut de conductivité au niveau de la fissure et qu'ils évoluent de manière à contourner cet obstacle.

On met à nouveau en évidence les effets produits par la singularité de l'entaille sur la valeur de la divergence du potentiel vecteur magnétique et sur la conservation des courants qui présentent des valeurs non physiques mais strictement concentrées au voisinage de cette zone.

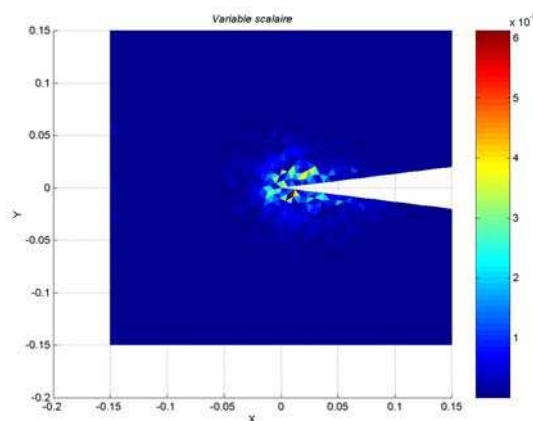


Figure 41 : Divergence de A sur la région conductrice

1.4.3 Scénario 3

La troisième et dernière étape de cette phase de validation engagée afin de tester la réalité physique des résultats fournis par le nouveau modèle numérique s'inscrit dans la continuité des observations effectuées lors de la résolution basée sur la géométrie précédente. La boucle de courant est cette fois-ci disposée de manière à créer un champ magnétique tel qu'il puisse produire, à la surface de la plaque, une nappe de courants induits se dirigeant vers un des bords. L'objectif est de vérifier le fait que les courants se déplaçant vers l'une des extrémités de cette région sont bien arrêtés à l'interface entre les deux milieux et déviés par le gradient de potentiel établi à la frontière. Ces courants doivent, en effet, être maintenus à l'intérieur de l'élément conducteur.

Les données numériques utilisées pour la résolution de ce scénario sont les mêmes que celles utilisées lors des résolutions précédentes. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures suivantes :

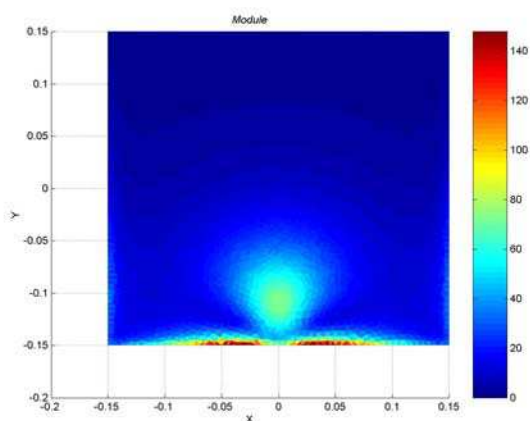


Figure 42 : Module (A/m^2) des courants induits sur la plaque

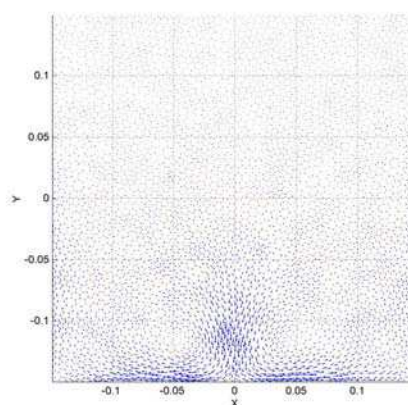


Figure 43 : Représentation vectorielle des courants induits sur la plaque

La **Figure 43** nous permet de constater que la répartition des courants induits arrivant au bord de la plaque est tout à fait cohérente. Les courants sont retenus à l'intérieur de la plaque et sont déviés comme nous l'attendions à la frontière de l'élément conducteur.

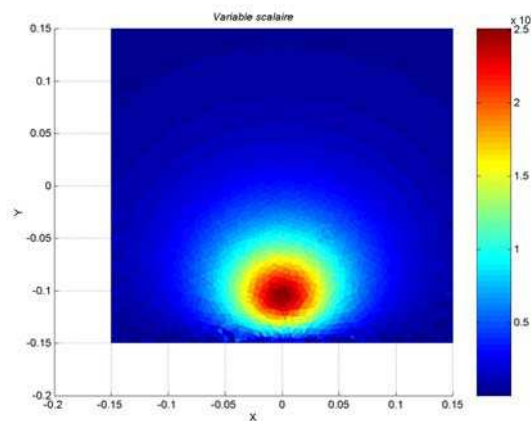


Figure 44 : Divergence du potentiel vecteur magnétique

Cependant, la figure précédente montre que le calcul de la divergence du potentiel vecteur magnétique présente toujours un résultat non homogène puisque celle-ci n'est pas parfaitement nulle sur l'ensemble de la région surfacique. Cette perturbation peut s'expliquer par le fait que le couplage entre la source de champ magnétique et l'élément conducteur est très mauvais du fait de la position relative de l'un par rapport à l'autre. De plus et comme nous l'avons déjà évoqué, la bobine simulée est de forme carrée et les courants sources sont donc par conséquent à divergence non nulle. La forme géométrique de la source peut donc expliquer la distribution des valeurs obtenues lors du calcul de la divergence. Le pic qui apparaît sur la **Figure 44** correspond notamment à la position de l'un des quatre coins de cette bobine carrée.

2. Validation quantitative

Après avoir pu observer, grâce aux simulations effectuées précédemment, la conformité des grandeurs électromagnétiques calculées par le modèle analytique local et la cohérence de la répartition spatiale des courants induits dans une plaque conductrice dans diverses situations, nous allons désormais nous intéresser à la validation quantitative de notre modèle éléments finis en comparant ses résultats à des valeurs expérimentales.

2.1 Objectifs du dispositif

Le dispositif de tests mis en place et décrit au cours de ce chapitre doit non seulement permettre la validation expérimentale des résultats obtenus avec le modèle analytique local mais également la définition du domaine de validité des modélisations numériques.

2.2 Précision du modèle éléments finis

Le développement et l'utilisation d'un modèle numérique doit nécessairement s'accompagner d'une réflexion sur la précision des résultats obtenus. Nous nous intéresserons dans un premier temps aux différentes sources d'erreur intervenant lors de cette phase de modélisation et aux différents moyens mis en œuvre pour les minimiser. Nous évaluerons ensuite la précision du modèle éléments finis en comparant la valeur maximale du champ produit par la source simulée à celle calculée à l'aide d'une formule analytique connue.

2.2.1 Sources d'erreur pour la modélisation

L'étude permettant d'aboutir au développement d'un modèle numérique est constituée de trois phases : la définition de la géométrie du problème à modéliser, la formulation des phénomènes physiques et finalement, la prise en compte des matériaux et des sources. Lors de chacune de ces trois étapes des approximations sont effectuées et ces approximations influent inévitablement sur la précision des résultats obtenus.

a) Approximations géométriques

La définition de la géométrie du problème est la première des sources d'erreur effectuées lors de l'utilisation d'un modèle numérique éléments finis. Nous cherchons en effet à reproduire finement un environnement 3D réel dans lequel interviennent les phénomènes d'induction qui nous intéressent.

A ce stade de l'étude, des incertitudes de mesure interviennent lors de la construction et du positionnement relatif des différents éléments utilisés pour construire la géométrie.

L'interpolation polynomiale des lignes, des surfaces et des volumes formant la géométrie par des polynômes du deuxième ordre permet une discrétisation spatiale de bonne qualité mais constitue toutefois une approximation. En effet, les différents éléments qui composent l'environnement 3D à reproduire sont représentés à l'aide de morceaux de parabole, ce qui entraîne des imprécisions puisque toute forme géométrique ne peut être représentée finement par des arcs de parabole, comme le cercle par exemple. De plus, de brusques variations de la géométrie seront difficilement représentées par ces polynômes du second ordre et entraîneront l'apparition de rebonds défavorables.

b) Approximations des phénomènes

Lors de la formulation du problème de l'induction électromagnétique à partir des équations de Maxwell dans des milieux conducteurs et magnétiques, nous avons négligé les phénomènes de propagation. Nous avons vu à cette occasion que l'utilisation de cette hypothèse est parfaitement justifiée et ne constitue donc pas une source d'erreur.

Dans le cadre d'une modélisation tridimensionnelle on a le choix entre la formulation en champs à six composantes, ce qui implique la gestion des discontinuités, ou la formulation en potentiels avec quatre composantes. Nous avons fait le second choix puisque l'utilisation de grandeurs continues à dérivées discontinues simplifie la formulation et permet de réduire fortement le nombre d'inconnues. Cependant, le choix de cette formulation induit une erreur importante au niveau du post-processeur puisque l'on doit dériver l'inconnue – *potentiel vecteur magnétique et potentiel scalaire électrique* – pour calculer les champs électrique et magnétique. Le calcul du champ électrique et donc des courants induits sera d'autant moins précis en bord de plaque là où le gradient du potentiel scalaire électrique est important. Pour fixer les idées, la précision typiquement obtenue pour les potentiels est de l'ordre du pourcent alors que celle obtenue pour les champs est de l'ordre de la dizaine de pourcents.

La condition de jauge utilisée, associée au terme de pénalité, ne permet pas une vérification ponctuelle de la condition de conservation du courant. La vérification est effectuée de manière quadratique. On cherche à la contrôler en vérifiant qu'elle soit minimale – *et non forcément nulle* – sur chaque élément fini.

La représentation des potentiels électromagnétiques par des nombres complexes nous permet de nous affranchir d'une approximation supplémentaire puisque nous n'avons pas de

discrétisation temporelle.

L'ordre de grandeur des valeurs maximales du champ magnétique généré par la source, de l'ordre du champ terrestre, n'entraîne pas de saturation des matériaux.

La prise en compte des conditions aux limites du domaine pour représenter l'infini est réalisée à l'aide d'une « boîte » sur les faces de laquelle nous imposons les conditions adéquates pour annuler les potentiels électromagnétiques. Les dimensions restreintes de cette boîte permettent d'alléger considérablement le maillage mais constituent une certaine imperfection pour le calcul des valeurs des champs. Cependant, une rapide évaluation comportementale des champs en fonction des dimensions de cette boîte représentant l'infini nous a permis de conclure que l'influence subie n'est pas importante. Dans d'autres cas où la modélisation de l'infini serait plus contraignante, nous utiliserions sans problème une couche d'éléments « infinis » assurant un prolongement analytique (ces éléments sont disponibles dans la version standard de FluxExpert).

En ce qui concerne la continuité des champs, elle est assurée de manière globale mais il existe cependant des anomalies concentrées dans les éléments singuliers. Leur origine est purement mathématique et résulte de singularités géométriques notamment le long des arêtes et dans les coins des plaques. Ces singularités engendrent des « fuites » non physiques. Ces erreurs sont essentiellement locales et leur influence n'est pas prépondérante car la continuité des champs électromagnétiques est assurée de manière quadratique.

c) Modélisation des matériaux et des sources

La source de champ que l'on cherche à modéliser est une bobine à air mono-couche dont les dimensions, le nombre de spires et le courant total d'excitation sont connus aux incertitudes de mesure près. Nous avons donc modélisé cette source par une nappe de courants de densité équivalente. La modélisation des sources de courant a l'avantage de ne pas comporter de singularité.

En ce qui concerne la modélisation des matériaux, l'erreur commise est quasiment négligeable. Nous avons considéré que la dérive en température est nulle lors de l'utilisation du modèle et les matériaux linéaires et isotropes. Il subsiste cependant une imprécision, ou incertitude de mesure, sur la valeur numérique de la conductivité électrique du matériau modélisé.

d) Erreurs de calcul numérique

Le principe du calcul numérique consiste en la construction d'un système algébrique dont les termes sont des intégrales triples d'expression polynomiale. A ce stade du processus, les calculs d'expression sont effectués en double précision, ce qui nous confère une précision de l'ordre de 10^{-15} en relatif pour une seule opération alors que plusieurs milliers d'opérations sont mises en œuvre au cours d'une simulation complète.

La formule d'intégration numérique est la méthode de Gauss-Legendre, réputée exacte pour les polynômes du degré que nous utilisons, ce qui assure une très bonne précision. Concernant l'exponentielle décroissante utilisée par le modèle mixte numérique/analytique local pour décrire le comportement des grandeurs électromagnétiques dans la peau, elle nous permet d'intégrer les potentiels de manière exacte.

La construction du système linéaire, qui correspond à l'assemblage des intégrales venant de chaque élément fini, est effectuée en double précision ce qui minimise les erreurs commises.

Le système linéaire est résolu en simple précision, en raison de l'utilisation de nombres

complexes, et par une méthode itérative avec un préconditionnement de la matrice. La très grande taille du système linéaire à résoudre est une contrainte importante inhérente à la méthode des éléments finis et ne permet pas d'utiliser une méthode directe. La méthode itérative permet de contrôler la précision (nous avons travaillé à une précision relative de 10^{-4}) et d'obtenir des résultats avec une précision acceptable mais peut ne pas offrir de solution lorsque l'on travaille en limite de précision de la machine. L'erreur effectuée lors de cette phase est la plus importante commise au cours de cette étude de modélisation et conditionne fortement la précision absolue du modèle numérique développé.

2.2.2 Quantification de l'erreur

Comme nous avons pu le constater lors des paragraphes précédents, les sources d'erreur intervenant au cours d'un processus de modélisation sont multiples, diverses et parfois complexes. Il est difficile d'estimer théoriquement la précision absolue du modèle éléments finis développé au cours de cette étude de modélisation.

Pour quantifier l'erreur résultante et définir ainsi une précision dite « absolue » du modèle élément fini, nous avons comparé la valeur maximale du champ magnétique produit par notre modèle numérique à celle calculée par une formule analytique connue, la loi de Biot et Savart.

Nous avons appliqué le théorème de superposition et calculé analytiquement, à l'aide de la formule énoncée ci-après, le champ maximum créé en son centre par une bobine à air à spires jointives (solénoïde) dont les caractéristiques détaillées seront présentées au cours du paragraphe suivant. Nous avons simulé cette source de champ et comparé les valeurs fournies par chacune des deux méthodes.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} (I \cdot d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3}) \quad (3.1)$$

Nous avons effectué les calculs du champ magnétique avec un vecteur élémentaire $d\vec{l}$ égal à un millièmme de la circonférence d'une spire (1000 itérations). Les mêmes opérations avec un nombre d'itérations de 10000 ont donné des résultats identiques. Le moment magnétique utilisé pour alimenter les deux sources est d'environ 1.5 A.m². Les valeurs maximales de champ, obtenues au centre de la bobine, sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Méthode utilisée	Analytique	Modèle numérique EF
Valeur du champ (nT)	669299	667960

Tableau 13 : Valeurs maximales du champ magnétique

La différence entre les deux valeurs de champ est d'environ -1300 nT, ce qui nous permet de quantifier l'erreur globale de notre modèle numérique. L'erreur commise sur la valeur du champ maximal est inférieure au pourcent et la précision absolue obtenue est de 2 ‰.

Nous avons effectué, à titre informatif, les mêmes mesures pour un point situé en première position de Gauss – *sur l'axe de la bobine* – à la base de la source.

Ces mesures sont répertoriées dans le tableau ci-après.

Méthode utilisée	Analytique	Modèle numérique EF
Valeur du champ (nT)	371160	370450

Tableau 14 : Valeurs maximales du champ magnétique

La différence entre les valeurs du champ est d'environ -700 nT, ce qui correspond à une précision relative, par rapport à la valeur du champ analytique ambiant, de 2 ‰.

2.3 Confrontation expérimentale

Au cours du paragraphe précédent, nous avons répertorié et analysé les différentes sources d'erreur qui interviennent lors de l'utilisation et du développement de notre modèle éléments finis. Nous avons vu qu'il était difficile de prévoir l'erreur commise *a priori* mais qu'une rapide analyse effectuée en comparant la valeur maximale du champ magnétique générée par notre modèle à une référence analytique connue nous a permis de quantifier la précision obtenue sur la valeur maximale du champ, précision considérée comme absolue fournie par notre modèle numérique.

Nous allons désormais nous intéresser à la validation expérimentale de notre modèle éléments finis en confrontant les résultats fournis par la simulation à des données expérimentales.

2.3.1 Dispositif expérimental

La mise en œuvre de notre modèle sur une géométrie réelle demeure l'objectif principal de cette phase de validation. Nous avons donc défini un plan d'expériences nous permettant d'acquérir des valeurs expérimentales dans des conditions similaires au contexte d'utilisation des systèmes électromagnétiques de localisation spatiale.

a) Spécifications de la source de champ magnétique

Nous présentons les spécifications de la source de champ développée pour les besoins de cette phase expérimentale. Le développement et l'utilisation d'une bobine constituée de plusieurs couches ou d'un noyau de fer nous aurait aisément permis de générer des champs importants à plus haute fréquence (nous rappelons que les fréquences d'excitation des sources magnétiques du système alternatif *Polhemus* sont de l'ordre de 10 kHz) mais pour des considérations pratiques, nous nous limiterons au cours de cette phase de confrontation expérimentale au cas le plus facilement réalisable en pratique et lors de la simulation, c'est à dire une bobine à air mono-couche.

La localisation spatiale par systèmes électromagnétiques s'effectue à l'intérieur d'un volume de capture assimilé le plus souvent à une sphère dont le rayon est généralement de l'ordre de plusieurs dizaines de centimètres (± 76 cm pour les systèmes *Ascension* et *Polhemus*). Nous envisageons donc d'effectuer des mesures de champ à l'intérieur de cette sphère *théorique* de fonctionnement pour deux valeurs de la distance source/capteur. Nous rappelons que le module du champ décroît en fonction du cube de la distance à la source. L'amplitude du champ est par exemple divisé par huit lorsque l'éloignement à la source est doublé.

La première série de mesures sera effectuée à une vingtaine de centimètres de la source. La valeur du champ produit à cette distance doit être de l'ordre de grandeur du champ terrestre

(40 000 nT), qui est également l'ordre de grandeur du champ produit par la source du système *Ascension*.

La seconde série de mesures sera effectuée à une distance d'environ cinquante centimètres de la source de champ magnétique. L'ordre de grandeur du champ mesurable à cette distance doit nous permettre d'effectuer les mesures envisagées avec un rapport signal à bruit suffisamment élevé en sortie du capteur.

La source de champ magnétique, que nous spécifions, doit donc nous permettre de générer un champ d'environ 40000 nT à une vingtaine de centimètres. A titre d'exemple, une source dont le moment magnétique est égal à 1.5 A.m² produit un champ minimal (seconde position de Gauss) d'environ 1200 nT à 50 cm de la source, ce qui nous autorise à effectuer l'ensemble des mesures prévues avec un rapport signal à bruit suffisamment élevé pour observer les effets dus aux phénomènes d'induction électromagnétiques.

La source sera alimentée par un courant source dont la fréquence d'excitation est égale à 1 kHz. L'inductance propre de cette bobine, qui dépend fortement de la fréquence choisie, doit donc permettre de générer un champ suffisamment important à cette fréquence sans que la valeur de l'impédance du circuit magnétique – *constitué de la self et d'une résistance série dédiée à la lecture du courant d'excitation* – ne devienne trop élevée et nécessite alors une tension d'alimentation démesurée.

Les caractéristiques géométriques d'une bobine à air, notamment sa longueur, le diamètre des spires et le nombre de tours dont elle est constituée, permettent de définir directement la valeur de l'inductance. Une bonne estimation de la valeur de cette inductance peut être obtenue en utilisant la formule de Nagaoka dont l'expression est la suivante :

$$L = \frac{0.1 \times d^2 \times n^2}{4 \times d + 11 \times l} \quad (3.2)$$

où L est exprimée en μH , d est le diamètre moyen d'une spire en cm, l est la longueur de la bobine en cm et n est le nombre de spires.

On peut, dans l'expression précédente, réduire le nombre de paramètres et exprimer la longueur de la bobine en fonction du nombre de tours, en faisant intervenir le diamètre du fil utilisé pour réaliser le bobinage. Le paramètre l s'écrit alors :

$$l = n \times \phi_{fil} \quad (3.3)$$

De cette manière et pour un diamètre de fil donné, il suffit de trouver le meilleur compromis entre le nombre de tours et le diamètre d'une spire pour déterminer la valeur de la self adéquate sachant que ces deux paramètres influent directement sur la valeur de l'intensité nécessaire à l'alimentation de la bobine.

Dans le cadre de la manipulation mise en œuvre, nous désirons générer un champ magnétique sinusoïdal pulsant à une fréquence d'excitation de 1 kHz et de moment magnétique d'environ 1.5 A.m². Ces spécifications, associées aux caractéristiques géométriques de la bobine, imposent la valeur du courant nécessaire pour produire ce champ magnétique. Il faut prendre garde à ce que cette intensité conserve une valeur usuelle, car la tension d'alimentation qui en découle pourrait devenir rapidement trop importante pour être obtenue facilement à l'aide du

matériel dont nous disposons. Le moment magnétique produit par une source de champ magnétique est donné par la relation suivante :

$$M = n \times I \times S \quad (3.4)$$

où M est l'amplitude du vecteur moment magnétique en $A.m^2$, n le nombre de spires, I l'intensité en Ampère et S la surface moyenne d'une spire en m^2 . Dans la mesure où l'on impose la valeur de M , il nous faut trouver le meilleur compromis entre le nombre de spires et leur diamètre pour obtenir une valeur de courant acceptable, sachant que l'inductance varie en fonction du carré du nombre de spires comme le montre la relation (3.2) et contribue ainsi à l'augmentation de l'impédance du circuit.

$$I = \frac{M}{n \times \pi \times \frac{d^2}{4}} \quad (3.5)$$

Pour la réalisation du bobinage, nous choisissons d'utiliser un fil de cuivre de 0.865 mm de diamètre, ce qui permettra une bonne circulation du courant sans entraîner d'échauffement dans la connectique du circuit magnétique. Les caractéristiques suivantes : 243 spires de 12 cm de diamètre nécessitent une intensité d'alimentation de 0.545 A pour obtenir un moment magnétique de 1.5 $A.m^2$ et imposent à la bobine une longueur de 21 cm. Nous nous étions fixé une valeur d'intensité inférieure à l'ampère car cette valeur est facile à obtenir avec le matériel dont nous disposons et n'engendrera pas de dissipation thermique excessive ni dans le bobinage ni dans la résistance de lecture. Les différentes caractéristiques géométriques précédemment définies nous permettent de calculer la valeur de l'inductance. La formule de Nagaoka nous fournit une valeur de 3.05 mH. Le calcul de la résistance du bobinage, en utilisant une valeur de $1.5 \cdot 10^{-8} \Omega.m$ pour la résistivité du cuivre, donne une résistance d'environ 3 Ω . L'impédance du circuit magnétique constitué de la self et d'une résistance de 10 Ω pour la lecture du courant source est alors de 23 Ω à 1 kHz.

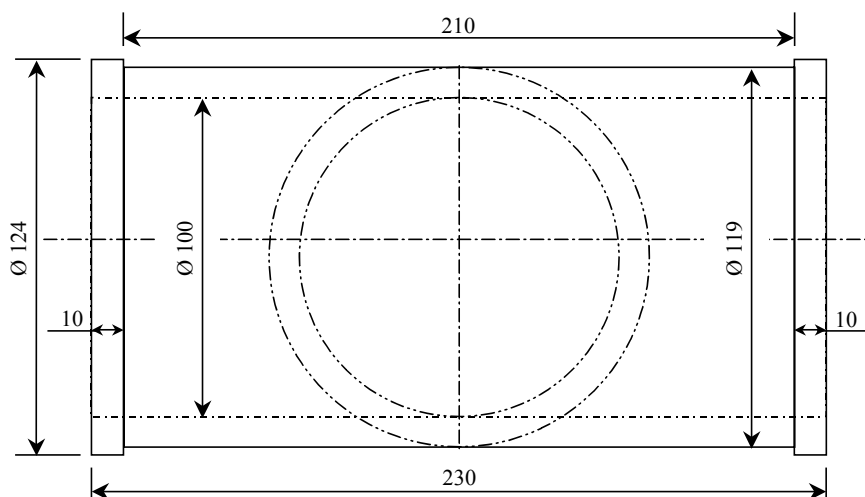


Figure 45 : Schéma du mandrin spécifié pour le bobinage de la source de champ

Les dimensions, en millimètre, définitives de la bobine conçue pour cette phase expérimentale sont détaillées sur la figure ci-dessus représentant le mandrin usiné pour réaliser le bobinage désiré. Le bobinage a été réalisé manuellement avec l'aide du fil de cuivre de 0.865 mm de diamètre.

Nous avons effectué une vérification des valeurs caractéristiques de la source de champ à l'aide d'un pont RLC , appareil utilisé pour mesurer les différentes grandeurs caractéristiques

d'une bobine en fonction de la fréquence. Ces mesures sont présentées dans le tableau ci-après et montrent la bonne correspondance entre les valeurs calculées et celles mesurées.

Fréquence (Hz)	1000
Inductance (mH)	3.243
Résistance (Ω)	3.387
Q	1.53
Z (Ω)	24.36
Φ ($^\circ$)	56.9

Tableau 15 : Caractéristiques mesurées de la source de champ

b) Présentation du capteur utilisé

Le capteur utilisé pour mesurer le champ magnétique lors de cette phase expérimentale est un micro-magnétomètre directionnel (mono-axe) de type fluxgate développé au LETI. Ce capteur est présentée sur la figure ci-dessous.



Figure 46 : Capteur magnétique utilisé et son électronique associée

Les magnétomètres de type fluxgate [PRIMDAHL79] sont des instruments très fréquemment utilisés aussi bien sur terre que dans l'espace pour la mesure des composantes vectorielles d'un champ magnétique. Leur plage typique de mesure s'étend de 0.1 nT à environ 1 mT du continu à plusieurs kHz.

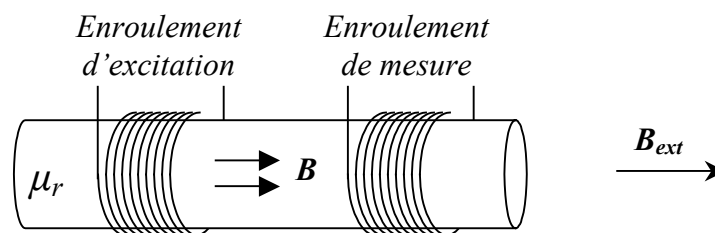


Figure 47 : Constitution traditionnelle d'un magnétomètre de type fluxgate. L'excitation permet de faire varier la perméabilité magnétique du barreau magnétique et de saturer le matériau. La tension induite par la présence d'un champ extérieur aux bornes de l'enroulement de mesure monté en opposition permet de mesurer la valeur de la composante de ce champ extérieur dans l'axe du barreau.

Un magnétomètre de type fluxgate est classiquement constitué d'un barreau ferromagnétique aisément saturable et de deux enroulements montés en opposition. Cette constitution est illustrée sur la **Figure 47**. Un enroulement d'excitation alimenté en alternatif est bobiné autour du noyau magnétique. Cette excitation crée un champ magnétique à l'intérieur du barreau. Ce champ provoque une saturation périodique alternative du matériau magnétique. Quand le noyau est saturé, sa perméabilité devient identique à celle de l'air. S'il n'y a pas de composante magnétique dans l'axe de l'enroulement de mesure, monté en opposition, la variation de flux vue par cet enroulement est nulle. Par contre, si une composante de champ

magnétique est présente dans cet axe, alors à chaque fois que le matériau magnétique passe d'un état de saturation à l'autre le flux à travers le noyau va changer. Cette variation de flux va induire une tension aux bornes du circuit de mesure proportionnelle à la variation mesurée. On mesure donc ainsi toute composante magnétique présente dans l'axe de l'enroulement de mesure.

En pratique, la géométrie et le nombre de noyaux ferromagnétiques utilisés permettent de composer des capteurs dont le nombre d'axes de mesure et les performances diffèrent.

Le magnétomètre utilisé est un micro-fluxgate. Ce micro-fluxgate, dont le circuit magnétique est présenté sur la **Figure 48**, a été réalisé en utilisant une nouvelle technologie développée récemment au LETI et qui combine des dépôts de couches ferromagnétiques, d'isolants et de bobinages en cuivre [LETI97].

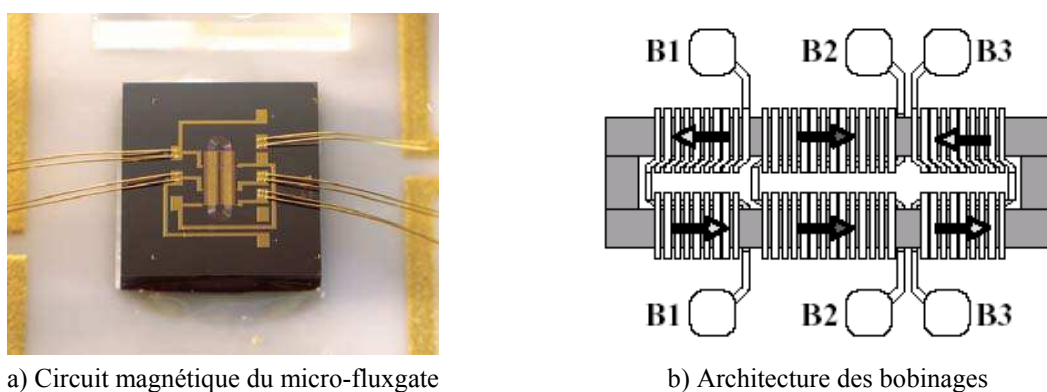


Figure 48 : Présentation du micro-fluxgate LETI. On montre en a) une photo du circuit magnétique du capteur. En b) est présentée l'architecture des bobinages formant le microcircuit magnétique.

Le circuit magnétique rectangulaire est d'une longueur voisine de 1 mm. Il est constitué de deux bobinages d'excitation – *B1* et *B3* – qui génèrent une circulation de champ dans le circuit magnétique et d'un bobinage de prélèvement – *B2* – qui permet une mesure différentielle du flux circulant dans la bobine en s'affranchissant du champ d'excitation. Le bruit capteur de ce micro-fluxgate est fonction de l'amplitude du courant d'excitation et s'améliore rapidement pour atteindre une valeur seuil équivalente à 3.2 nT/racine(Hz). La figure ci-dessous présente une densité spectrale de ce bruit sur la plage de 10 mHz à 1 kHz.

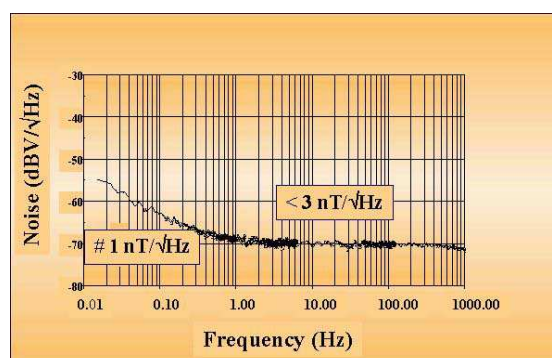


Figure 49 : DSP du bruit du micro-fluxgate sur la plage fréquentielle [10 mHz ; 1 kHz]

On retrouve le bruit plancher de 3.2 nT/racine(Hz). Le coude de remonté de bruit en basse fréquence se situe aux environs de 1 Hz. La densité de bruit est donc environ égale à 3

nT/racine(Hz) pour des fréquences supérieures au Hertz. Ces performances nous autorisent donc à envisager les mesures prévues à la fréquence d'excitation de 1 kHz avec un très bon rapport signal à bruit.

c) Mise en œuvre et principe du dispositif expérimental

Nous disposons d'une source et d'un capteur de champ magnétique. Nous cherchons à établir une cartographie bidimensionnelle du champ magnétique généré par la source en mesurant sa valeur en différents points de l'espace. Nous validerons notre modèle numérique en confrontant les résultats fournis par la modélisation à des mesures expérimentales effectuées dans un premier temps à vide, c'est à dire où seuls interviennent la source et le capteur et dans un second temps, en présence d'une plaque métallique ajoutée pour perturber le champ émis par la source.

La bobine à air, décrite précédemment et utilisée comme source de champ, est alimentée en tension, à travers un amplificateur de puissance, par un générateur de fonctions. La tension sinusoïdale de fréquence 1 kHz qui alimente le circuit magnétique est ajustée de manière à fournir la valeur d'intensité calculée (environ 530 mA) pour générer le moment magnétique attendu (environ 1.5 A.m²). Le courant d'excitation circulant dans la bobine, dont l'image est mesurée par l'intermédiaire de la résistance de lecture insérée dans le circuit magnétique, est utilisé par un appareil réalisant une détection synchrone pour extraire le module et la phase du signal délivré en sortie du capteur. La détection synchrone nous permet de ne mesurer que la composante en fréquence du champ généré par la source en s'affranchissant notamment de la valeur de la composante continue du champ terrestre. La photographie ci-après montre les différents appareils utilisés lors de cette phase expérimentale.



Figure 50 : Appareils utilisés lors de la phase expérimentale

On voit apparaître sur la gauche de la photographie, le générateur de fonctions placé au-dessus de l'amplificateur de puissance utilisés pour alimenter la source magnétique. Au centre, on distingue l'ampèremètre dédié au contrôle de la valeur du courant d'excitation posé sur le module de détection synchrone. L'analyseur spectral que l'on aperçoit à droite de la photographie nous a permis de vérifier que le rapport signal à bruit obtenu permettait d'effectuer les mesures envisagées dans de bonnes conditions en comparant la valeur du

champ source au niveau de bruit magnétique ambiant constitué, par exemple, du pic à 50 Hz du réseau électrique et de ses harmoniques.

Le principe de cette phase expérimentale consiste à mesurer le champ magnétique émis par la source en différents points de l'espace en présence ou non d'une plaque métallique. Le synoptique de la manipulation mise en œuvre pour obtenir ces cartographies est présenté sur la **Figure 51**.

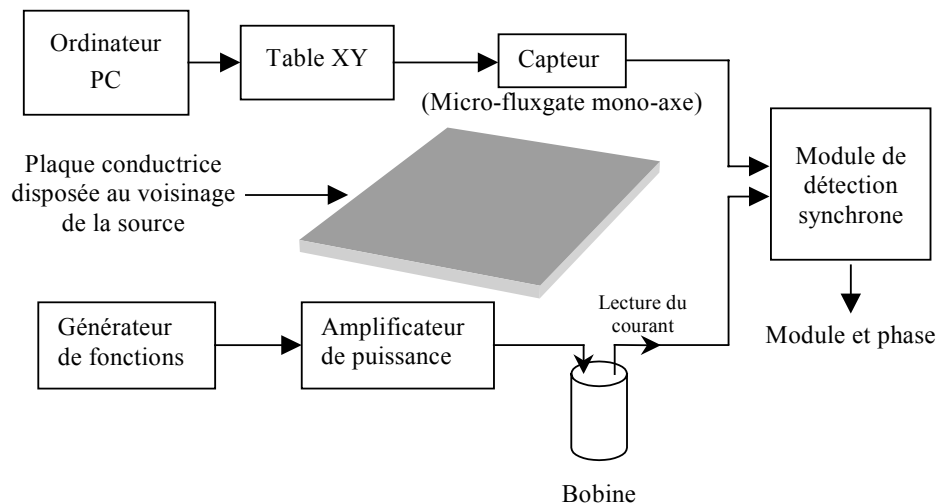


Figure 51 : Synoptique de la manipulation

Nous avons utilisé une table XY pilotée par un ordinateur PC pour positionner et déplacer le capteur de champ magnétique de type micro-fluxgate dans le plan de cartographie considéré.

La plaque métallique utilisée pour perturber le champ créé par la source est une plaque de cuivre retenue pour sa conductivité électrique élevée de l'ordre de $6.25 \cdot 10^{07}$ S/m. Les dimensions de cette plaque sont les suivantes : $0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ et 15 mm d'épaisseur. Ces caractéristiques géométriques ont été choisies de manière à pouvoir utiliser le modèle analytique local dans le contexte expérimental qui vient d'être exposé en vérifiant les hypothèses émises lors de son développement notamment sur la valeur du rapport *Epaisseur du matériau/ Epaisseur de peau*.

d) Configuration spatiale

La plaque de cuivre est fixe et disposée horizontalement. Les plans retenus pour effectuer les cartographies 2D sont deux plans parallèles aux surfaces de la plaque conductrice, situés de part et d'autre de celle-ci.

Les mesures de champ magnétique sont effectuées pour deux dispositions de la source vis-à-vis de la plaque perturbatrice comme le montre les figures ci-après.

La **Figure 52** présente la première disposition mise en œuvre que nous nommerons « champ normal ». Dans cette situation, l'axe de la bobine est placé perpendiculairement aux plans contenant les faces de la plaque conductrice. Le centre de la plaque est situé sur cet axe, où le champ magnétique est maximal, en première position de Gauss. La composante principale du champ source est la composante suivant Z, l'axe de la bobine, composante normale à la plaque.

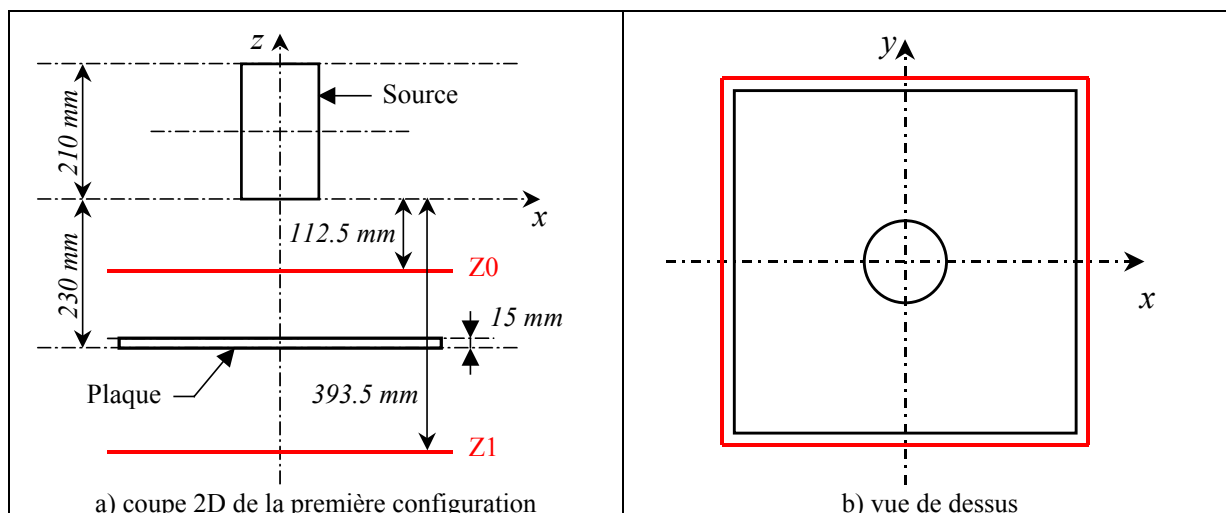


Figure 52 : Cartographie en « champ normal »

Dans la situation illustrée par la **Figure 53**, correspondant à la seconde disposition mise en œuvre, la source de champ est cette fois-ci placée de manière à ce que son axe soit positionné dans un plan parallèle aux faces de la plaque métallique. La bobine est comme précédemment centrée sur la plaque. Le centre de la plaque se situe en seconde position de Gauss, où la valeur du champ est minimale pour une distance donnée. La composante principale du champ source est la composante suivant Z, l'axe de la bobine, composante tangente à la plaque. Cette configuration spatiale sera nommée « champ tangent ».

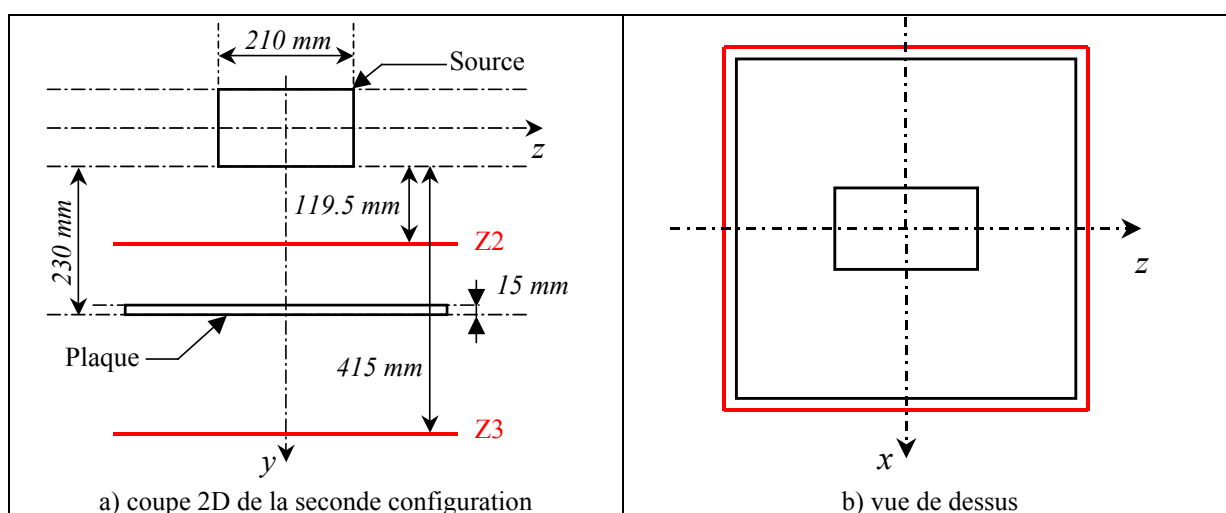


Figure 53 : Cartographie en « champ tangent »

Les contours des zones cartographiées sont représentés en rouge. Ces zones comportent 68 points dans chacune des deux directions du plan de cartographie et le pas entre chaque point est de 8 mm. Les cartographies ont été prévues de manière à pouvoir disposer de points de mesures de part et d'autre des bords de plaque.

On mesure en chacun de ces points la valeur du champ magnétique fourni par le capteur et l'intensité du courant source circulant dans la bobine pour en contrôler sa valeur. Le capteur utilisé ne disposant que d'un seul axe de mesure, nous choisissons de mesurer la composante

suivant Z du champ magnétique qui représente la composante principale du champ source au voisinage du centre de la plaque dans chacune des deux configurations précédentes.

Les mesures présentées au cours de ce paragraphe sont effectuées dans un premier temps sans la plaque conductrice – *à vide* – puis en intercalant la plaque de cuivre ajoutée pour perturber le champ produit par la source comme le montrent la **Figure 52** et la **Figure 53**.

Les altitudes, ou distances à la source, des plans cartographiés sont répertoriées dans le tableau ci-après.

Altitudes	Champ « normal »	Altitudes	Champ « tangent »
Z0	-112.5 mm	Z2	179.5 mm
Z1	-393.5 mm	Z3	475 mm

Tableau 16 : Altitudes des plans de cartographie

2.3.2 Mise en oeuvre de la modélisation

Le plan d'expérience et la configuration spatiale des différents éléments intervenant lors de la manipulation mise en œuvre ont été présentés lors du paragraphe précédent. Nous allons maintenant présenter les maillages réalisés pour modéliser finement le dispositif expérimental utilisé.

a) Description de la géométrie « champ normal »

La géométrie construite pour reproduire le dispositif expérimental mis en œuvre dans le cas particulier de la configuration où la composante B_z du champ source est normale à la plaque est présentée sur la **Figure 54**. Cette géométrie est une géométrie bidimensionnelle utilisant les deux axes de symétrie mis en évidence sur la **Figure 52**, représentant la vue de dessus de la configuration spatiale traitée.

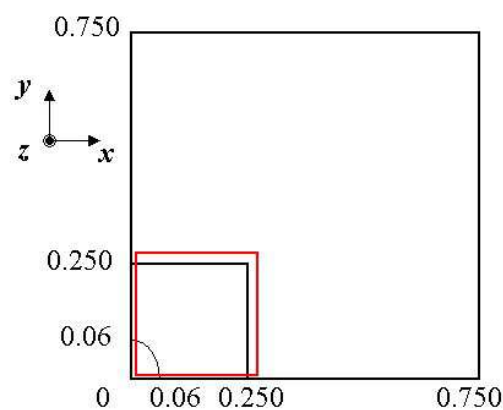


Figure 54 : Géométrie 2D – vue de dessus

La figure suivante montre une partie du maillage éléments finis utilisé pour discrétiser la région surfacique modélisant le milieu conducteur et la source dont on devine le contour.

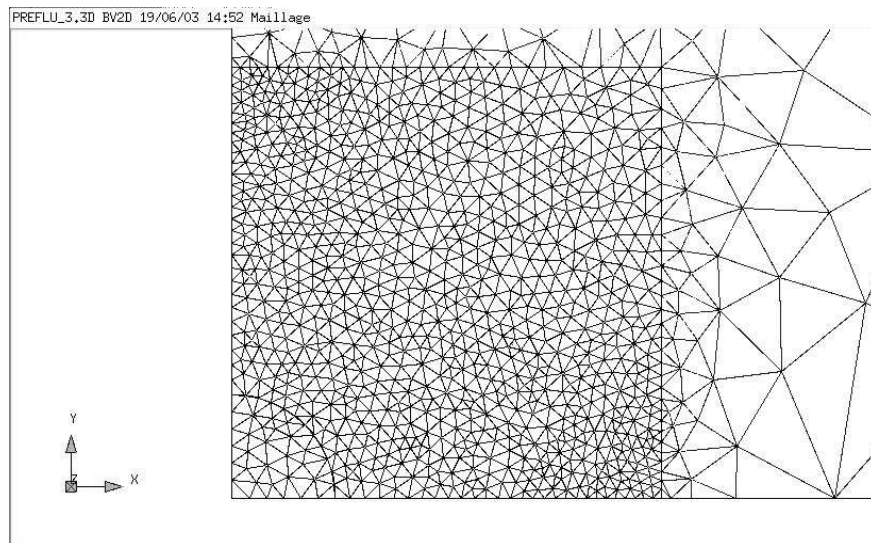


Figure 55 : Agrandissement du maillage de la région surfacique modélisant la plaque – vue de dessus

La géométrie tridimensionnelle est ensuite obtenue par élévation du maillage 2D. Ce procédé nous permet de contrôler le nombre d'éléments par couche dans la direction de l'axe Z, direction de l'élévation et d'obtenir un maillage de meilleure qualité. Lorsque la plaque métallique est utilisée, le modèle comporte deux milieux : l'atmosphère non-conductrice – *pour laquelle la conductivité électrique est nulle* – et le matériau conducteur dont la conductivité est de $6.25 \cdot 10^{07}$ S/m qui modélise le cuivre constituant la plaque métallique utilisée lors de la phase expérimentale. En l'absence de cette plaque, le seul milieu présent est l'atmosphère non-conductrice. La **Figure 56** présente une coupe 2D de la géométrie tridimensionnelle construite par élévation.

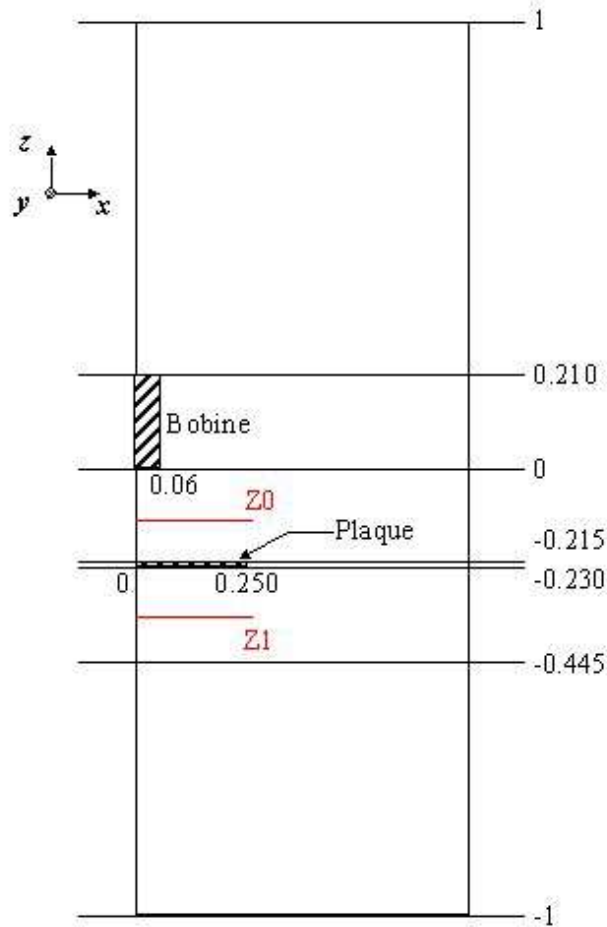


Figure 56 : Coupe 2D de la géométrie obtenue par élévation : plan (Ox,Oz)

La source utilisée pour modéliser la bobine à air est une nappe de courants de densité surfacique équivalente. La couche comportant la source magnétique est obtenue par élévation et est constituée de huit éléments dans la hauteur. Le courant total utilisé, correspondant au produit NI expérimental, est d'environ 129 A. Les calculs sont effectués pour une fréquence d'excitation des sources de 1 kHz.

L'épaisseur de la plaque conductrice, égale à 15 mm, intervient de manière analytique. La plaque métallique est modélisée par une région surfacique correspondant à la face supérieure de la plaque volumique réelle. La valeur de la profondeur de pénétration ou épaisseur de peau dans le cuivre à cette fréquence est de 2 mm (petite devant l'épaisseur de la plaque).

Les régions volumiques situées de part et d'autre de la plaque et contenant les plans de cartographie sont constituées du même nombre d'éléments finis (10 éléments dans la hauteur) de manière à s'affranchir de tout déséquilibre engendré par une dissymétrie du maillage.

b) Description de la géométrie « champ tangent »

La seconde configuration spatiale à modéliser, illustrée par la **Figure 53**, est la disposition pour laquelle la composante suivant Z du champ source est tangente aux faces de la plaque conductrice. La géométrie développée pour modéliser finement le dispositif mis en œuvre est une géométrie tridimensionnelle, présentée sur la **Figure 57**.

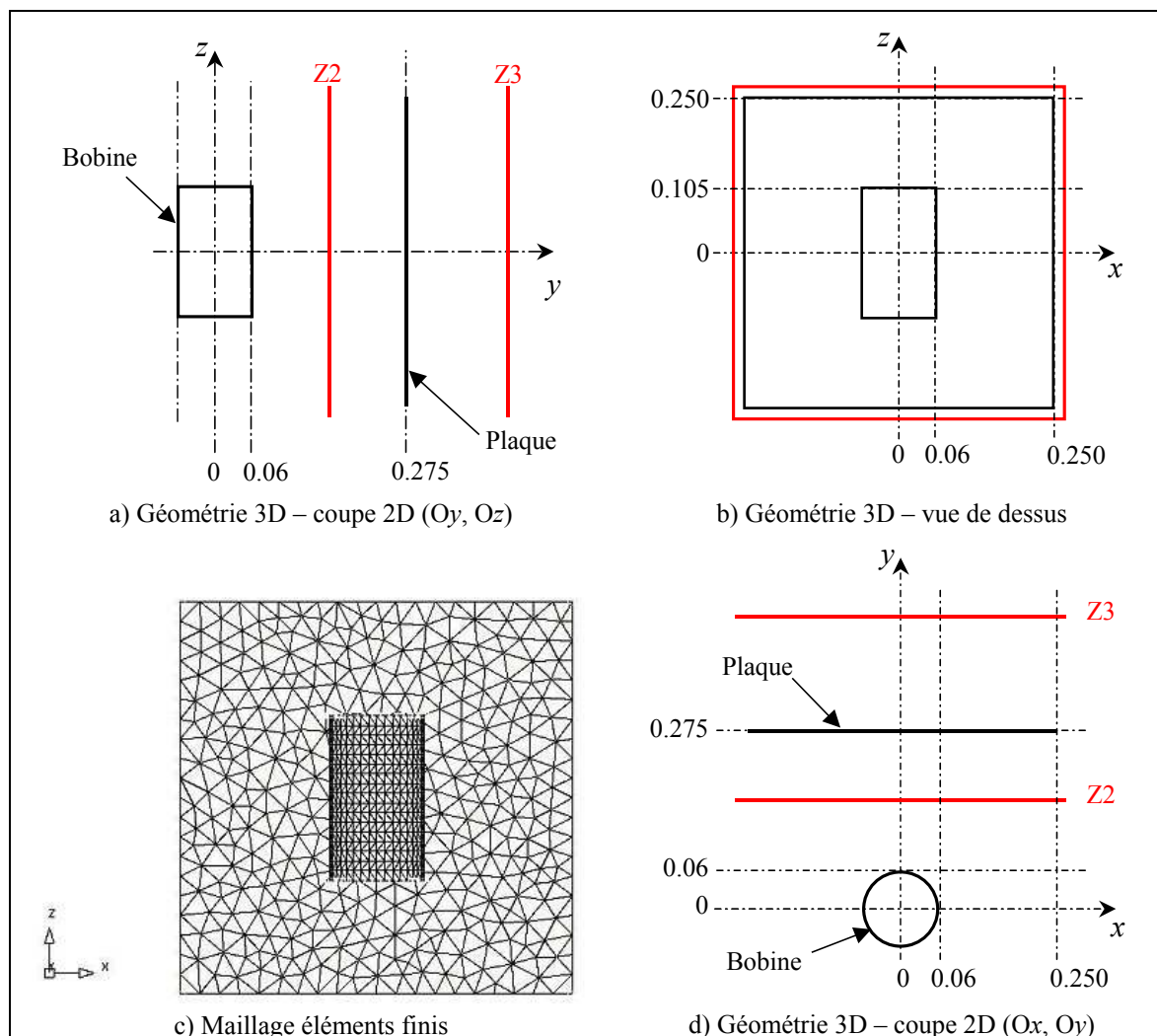


Figure 57 : Géométrie développée pour modéliser la seconde configuration de la source

Cette géométrie est construite de manière classique pour un maillage automatique.

Les conditions générales de mise en oeuvre sont les mêmes que celles énoncées précédemment et les paramètres géométriques et physiques sont donc identiques à ceux utilisés lors de la configuration précédente.

La plaque conductrice est représentée à l'aide d'une région surfacique carrée de 50 cm côté. Son épaisseur (15 mm) est prise en compte de manière analytique lors de la résolution du problème numérique traité. La conductivité électrique affectée à la région surfacique modélisant la plaque de cuivre est de $6.25 \cdot 10^{07}$ S/m.

La source de champ est une nappe de courants de densité équivalente dont le courant total est égal à 129 A. Les calculs sont effectués pour une fréquence de la source de 1 kHz.

2.3.3 Résultats obtenus

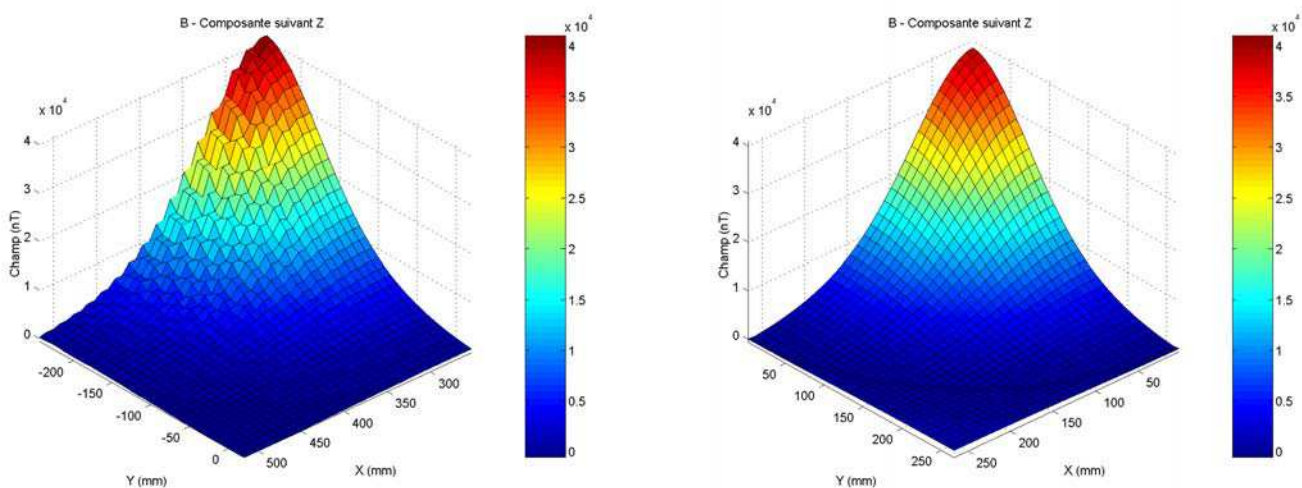
Les calculs sont d'abord effectués « à vide » en affectant à la région surfacique symbolisant la plaque de cuivre une conductivité électrique nulle puis en « insérant » la plaque conductrice en affectant cette fois-ci à cette même région une conductivité électrique de $6.25 \cdot 10^{07}$ S/m.

La précision relative utilisée lors de la résolution est de 10^{-4} . Les deux maillages obtenus sont constitués d'environ 360000 nœuds et le nombre de degrés de liberté libres est d'environ 704000. Les temps de résolution typiques sont de l'ordre de 3 heures.

Les valeurs du champ d'induction \mathbf{B} sont calculées par le post-processeur et tabulées dans un fichier de données pour être confrontées aux mesures expérimentales. Nous présentons dans un premier temps les résultats obtenus avec la géométrie « champ normal » pour les plans d'altitude $Z0$ et $Z1$ puis ceux obtenus avec la géométrie « champ tangent » pour les plans d'altitude $Z2$ et $Z3$.

a) Présentation des profils

La figure ci-dessous présente, à titre d'exemple, les cartographies 2D du champ magnétique obtenu avec la géométrie « champ normal » à l'altitude $Z0$, configuration où la composante suivant Z du champ source est normale à la plaque.



a) Cartographie expérimentale – Echelle 10^4 nT

b) Cartographie simulée – Echelle 10^4 nT

Figure 58 : Cartographie du module de la composante suivant Z du champ magnétique généré par la source sans perturbateur. Plan de cartographie d'altitude $Z0$. Les mesures expérimentales sont présentées en a) et les résultats du modèle sont présentés en b).

Les résultats présentés sont les valeurs de la composante suivant Z du champ magnétique tabulées sur le plan de cartographie d'altitude $Z0$, en absence de la plaque perturbatrice. L'accord entre le module expérimental du champ et les résultats de la modélisation apparaît bon et permet d'aller vers une confrontation plus fine, qui est difficilement possible sur ce genre de représentation des données.

Nous avons donc choisi d'extraire des cartographies du champ obtenues, les profils présentés sur les figures suivantes. Ces profils nous permettront de confronter de manière quantitative les résultats fournis par notre modèle numérique.

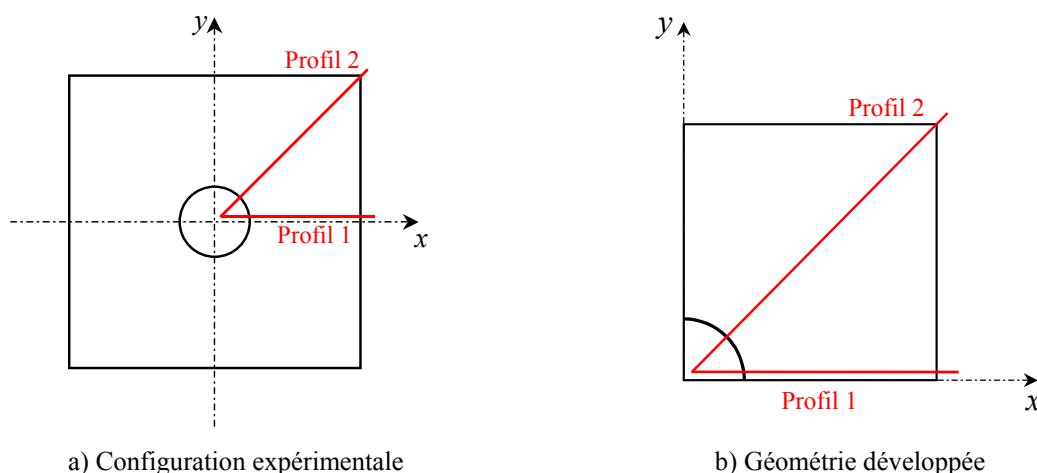


Figure 59 : Profils extraits des cartographies issues de la configuration « champ normal »

La **Figure 59** présente les profils utilisés pour confronter les valeurs expérimentales aux résultats du modèle numérique obtenus avec la géométrie « champ normal ». Dans cette situation, le problème est quasi-axisymétrique lorsque la plaque est présente et nous nous intéresserons donc à deux profils de type radial dont l'un est normal à l'un des bords de la plaque conductrice (le long de l'axe Ox) et l'autre le long d'une diagonale de la plaque.

La **Figure 60** montre les profils choisis pour la confrontation effectuée dans la configuration « champ tangent ». Nous avons retenus les profils d'axe Ox et Oz , puisque ces deux profils ne sont désormais plus symétriques et comme précédemment, un profil le long d'une diagonale de la plaque.

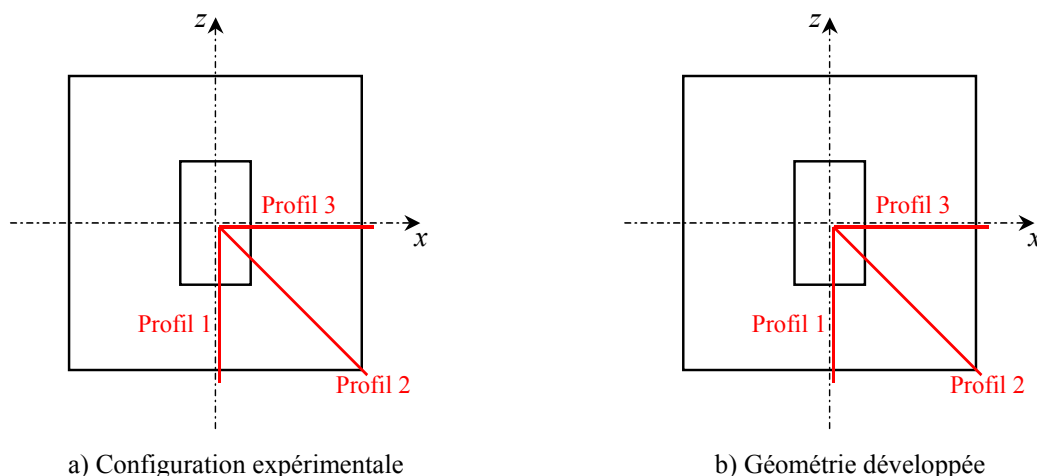


Figure 60 : Profils extraits des cartographies issues de la configuration « champ tangent »

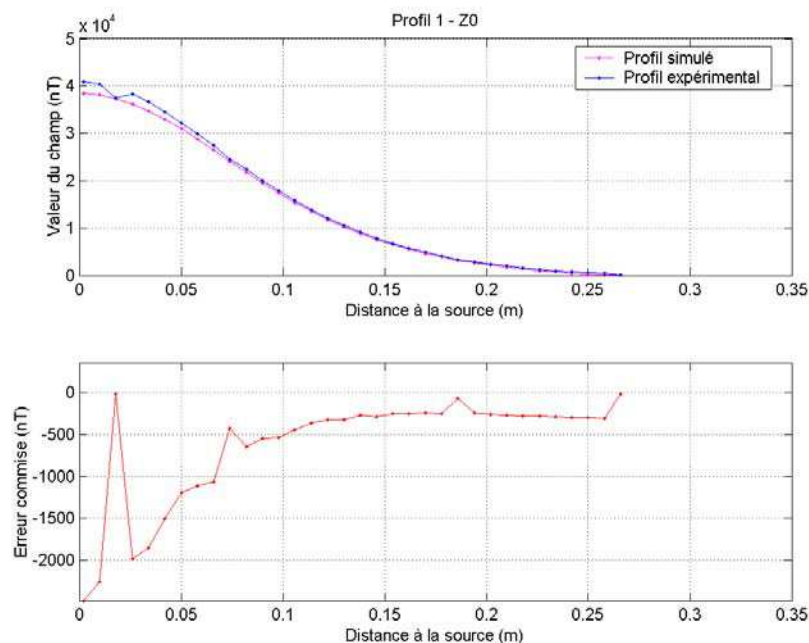
Chacun de ces profils est composé de 34 points, le pas entre deux points étant de 8 mm. Ces profils sont tous orientés du centre de la plaque vers la singularité propre à chaque profil (bord de plaque ou coin).

b) Résultats en « champ normal »

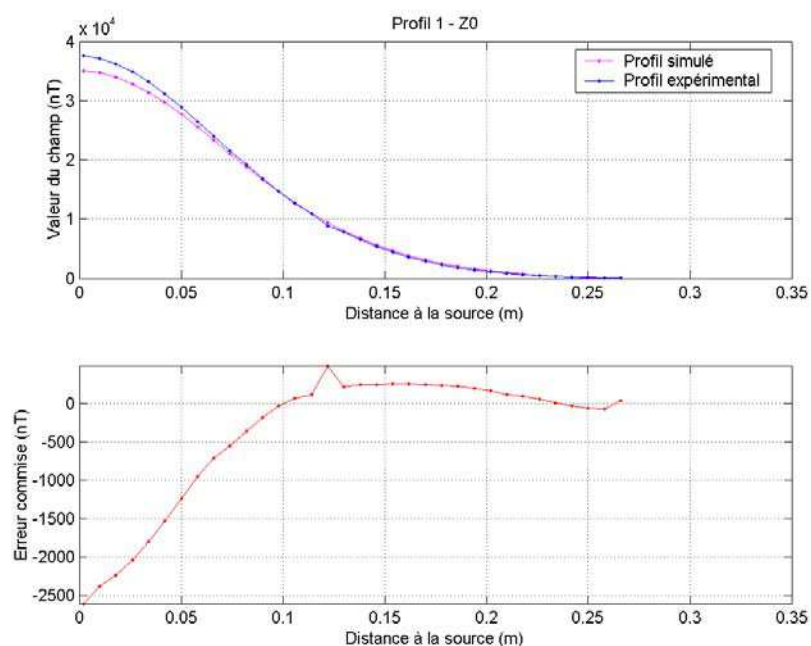
La **Figure 61** et la **Figure 62** présentent respectivement les résultats obtenus pour le module de la composante B_z du champ source le long du profil d'axe Ox et du profil diagonal à l'altitude $Z0$. Les valeurs du module du champ sont données à vide et en présence de la plaque conductrice.

La variation de l'erreur le long du profil commise à cette altitude est très semblable, quelque soit le profil considéré (propriétés de symétrie) et que la plaque conductrice soit présente ou non. Ceci s'explique par le fait qu'à cette altitude, la contribution de la source est prépondérante et que les effets produits par les courants induits dans la plaque n'ont guère d'influence à cette distance de la plaque.

L'écart entre les valeurs simulées et mesurées, ou erreur commise, est maximal à l'origine du profil là où le champ est maximal. La valeur maximale de l'erreur commise le long des deux profils examinés à cette altitude est d'environ 2500 nT. Cette valeur représente moins du pourcent (4 %) de la valeur maximale du champ produit par la source, valeur présentée au paragraphe 2.2.2, mais est néanmoins égale à deux fois la précision absolue (1300 nT) définie au cours de ce même paragraphe. En utilisant comme référence la valeur du module du champ magnétique mesurée à cet endroit, cette erreur maximale est de 6 %.

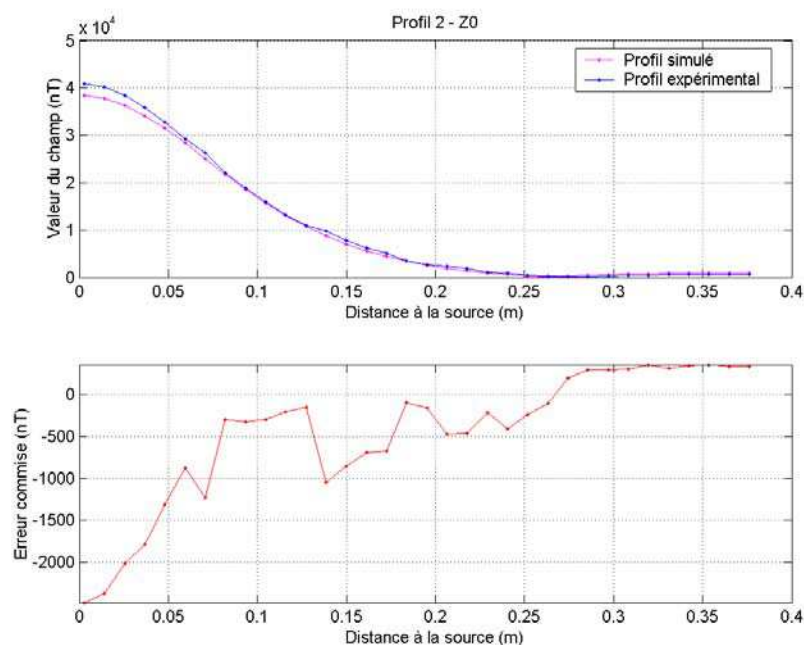


a) Mesures effectuées à vide

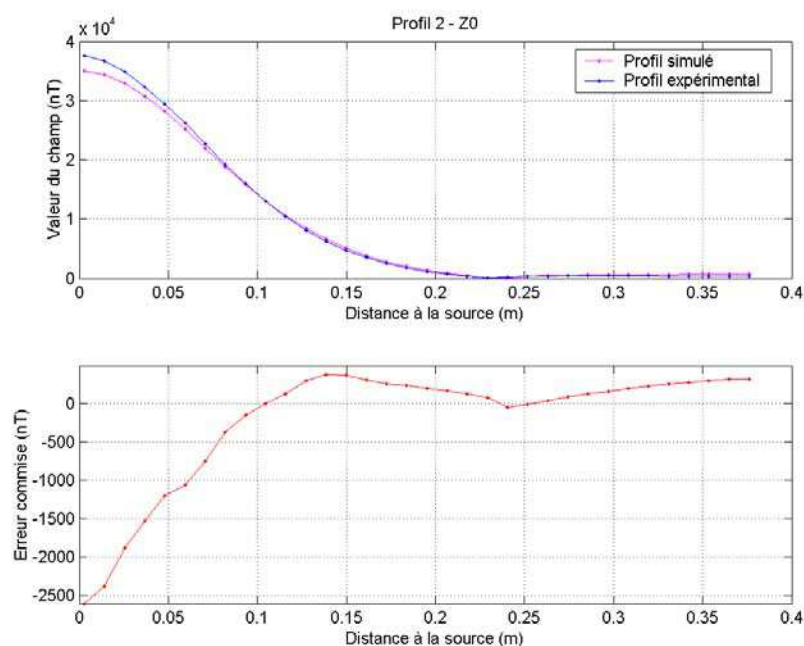


b) Mesures effectuées en présence de la plaque

Figure 61 : Composante suivant Z du champ magnétique à l'altitude Z0 le long du profil d'axe Ox. L'axe de la source est situé en $x = 0$ et le bord de plaque se trouve en $x = 0.25$ m. Confrontation entre les résultats du modèle éléments finis (*en magenta*) et les mesures expérimentales (*en bleu*). On présente sur le graphe inférieur (*en rouge*) l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées. On distingue en a) les mesures effectuées à vide et en b) celles effectuées en présence de la plaque conductrice.



a) Mesures effectuées à vide



b) Mesures effectuées en présence de la plaque

Figure 62 : Composante suivant Z du champ magnétique à l'altitude Z_0 le long du profil diagonal. L'axe de la source est situé en $x = 0$ et le coin de la plaque se situe en $x = 0.35 \text{ m}$. Confrontation entre les résultats du modèle éléments finis (*en magenta*) et les mesures expérimentales (*en bleu*). On présente sur le graphe inférieur (*en rouge*) l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées. On distingue en a) les mesures effectuées à vide et en b) celles effectuées en présence de la plaque conductrice.

Nous avons abordé, au cours du paragraphe 2.2.1, les différentes sources d'erreur intervenant lors d'un processus de modélisation numérique. Nous avons notamment évoqué les incertitudes de mesure. La connaissance que l'on a de la position du capteur de champ est une connaissance approximative entachée d'une certaine incertitude. Nous avons cherché à quantifier les variations engendrées sur la mesure du champ magnétique par une variation de la position du capteur. Ces calculs d'incertitude ont été effectués le long de chacun des profils définis précédemment à l'aide de la formule analytique de Biot et Savart déjà utilisée pour caractériser la précision absolue du modèle éléments finis. Nous avons évalué, à vide, la variation sur le module du champ engendrée par une variation de la position du capteur dans chacune des trois directions de l'espace.

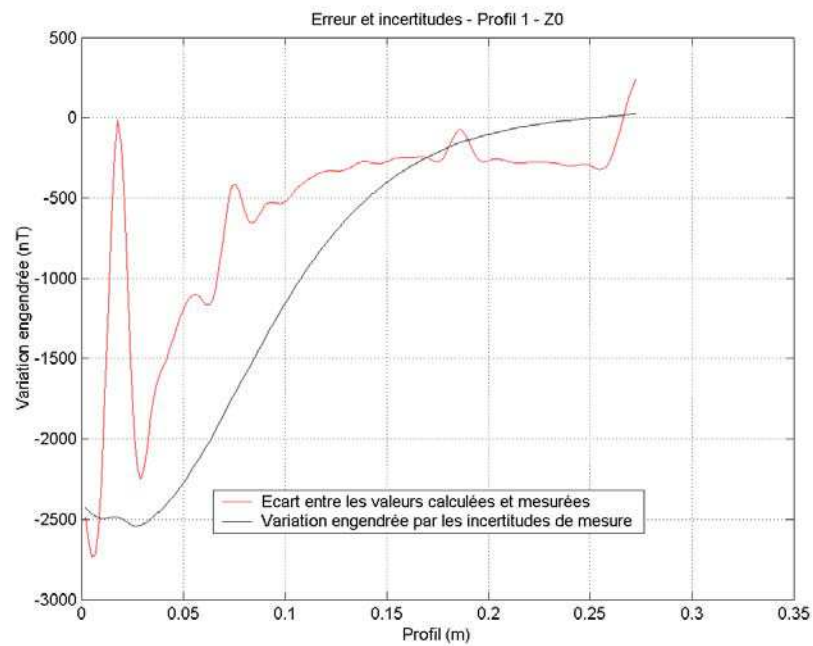
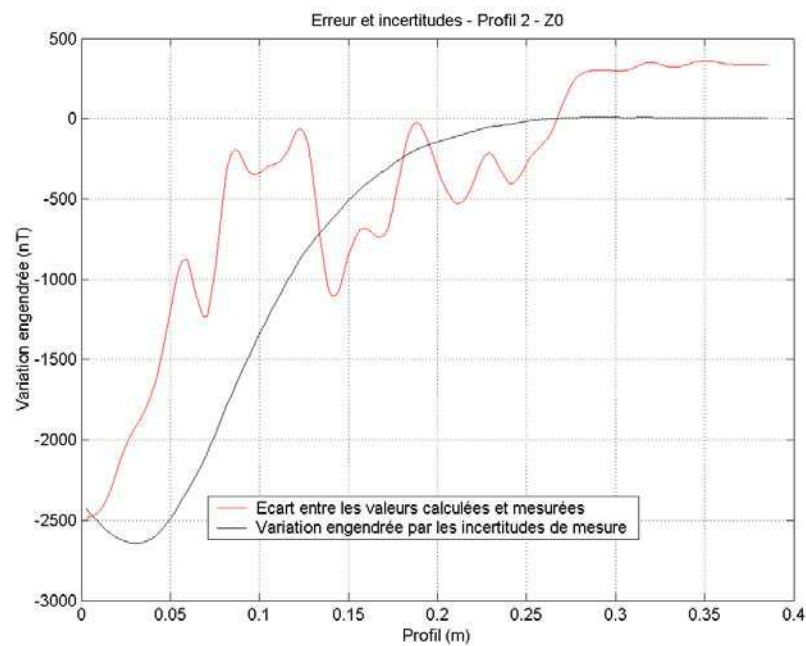
Nous avons également vérifié les variations engendrées par un défaut d'alignement du capteur le long de l'axe Z de la source. Le champ mesuré subit alors une variation engendrée par l'angle formé entre l'axe du capteur et l'axe Oz . Cette variation n'est pas très importante pour des valeurs d'angle inférieures à 10° et ne représente pas la contribution principale des variations induites par les incertitudes de mesure. Nous avons toutefois pris en compte une incertitude de mesure sur l'angle formé par l'axe du capteur et l'axe Oz de 5° .

Nous cherchons à confronter précisément les résultats de notre modèle éléments finis à des mesures expérimentales. A ce stade de la confrontation, il existe également une incertitude sur la connaissance de la valeur exacte du courant source utilisé lors de la phase expérimentale. Nous avons voulu quantifier la variation produite sur le module du champ magnétique par une

variation de la valeur du courant source. Cette incertitude sur la connaissance de la valeur du courant est composée de l'incertitude sur la connaissance du nombre de spires de la bobine et de l'écart effectif mesuré entre la valeur du courant expérimental au point de mesure considéré et la valeur du courant source utilisée lors de la modélisation. La bobine source ayant été bobinée manuellement, il existe une incertitude sur le nombre de spires effectif. Nous avons donc calculé les variations engendrées sur le module du champ par l'écart effectif entre les valeurs d'intensité utilisées et par une variation du nombre de spires de la bobine source.

Les variations engendrées par les incertitudes de position ont été calculées le long de chacun des profils examinés. Pour des raisons de temps de calcul élevé, nous n'avons chiffré ces variations que pour 10 points du profil. Les variations produites par une variation du courant source, plus simple à calculer, ont été calculées pour chacun des 34 points du profil. De manière à pouvoir combiner ces valeurs nous avons interpolé chacune des deux courbes de variation sur 170 points, plus petit commun multiple des profils des deux courbes de variation. L'interpolation effectuée a donné des résultats très satisfaisants et nous a permis de combiner ces deux calculs d'incertitude. Le calcul des incertitudes a été effectuée à vide.

La **Figure 63** présente la variation cumulée produite sur le module du champ par une incertitude de 2 mm dans chacune des trois directions de l'espace sur la position du capteur, par une incertitude sur l'alignement du capteur sur l'axe Oz de 5° et par une incertitude de 5 spires sur le nombre de spires de la bobine source. Nous comparons l'erreur commise – *écart entre la simulation et l'expérimentation* – à cette variation totale engendrée sur le module du champ par les incertitudes de mesure le long des deux profils correspondant à cette configuration spatiale. La correspondance entre la courbe de variation engendrée par les incertitudes de mesure et l'erreur commise est très bonne. Ceci nous permet de conclure que la précision obtenue à cette altitude sur les résultats du modèle numérique est excellente puisque l'erreur commise sur les profils est du même ordre de grandeur que la précision intrinsèque et incompressible due aux incertitudes de mesure qui interviennent lors de la mise en œuvre du dispositif expérimental.

a) Comparaison le long du profil d'axe Ox 

b) Comparaison le long du profil diagonal

Figure 63 : Comparaison, à l'altitude $Z0$, de l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées (*en rouge*) et de la variation engendrée sur le champ source par les incertitudes de mesure (*en noir*). Les incertitudes sont calculées pour une précision de positionnement absolue de 2 mm dans chacune des trois directions et un écart sur le nombre de spires $\Delta N = 5$. Comparaison effectuée en a) le long du profil d'axe Ox et en b) le long du profil diagonal.

Nous allons désormais nous intéresser aux profils extraits du plan de cartographie situé à l'altitude $Z1$. Ce plan de cartographie correspond à une zone de faible énergie. L'éloignement

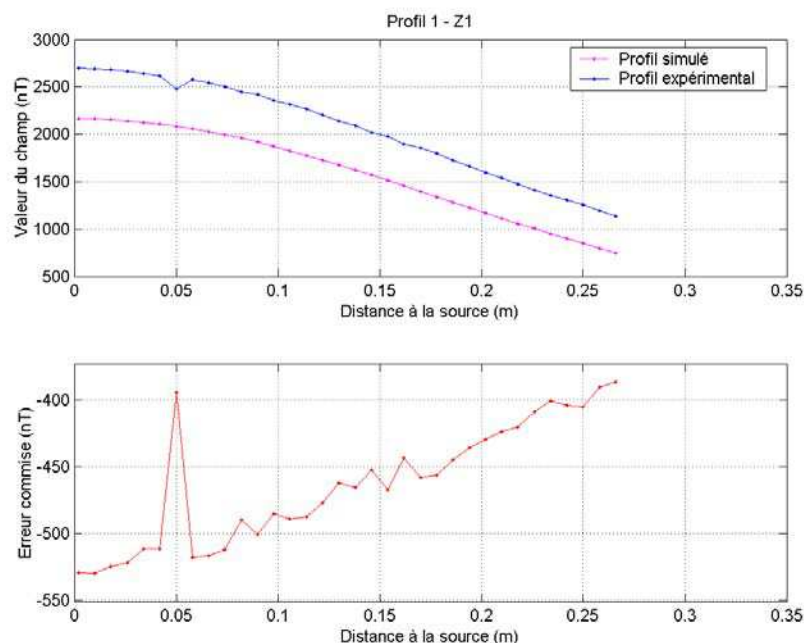
à la source est plus important et les valeurs du champ source à cette distance sont donc plus faibles. De plus, lorsque la plaque conductrice est présente, les valeurs du champ sont fortement atténuées sous l'effet de la fonction écran réalisée par la plaque.

La **Figure 64** et la **Figure 65** présentent respectivement le module de la composante B_z du champ source, calculé et mesuré, le long du profil d'axe Ox et du profil diagonal à l'altitude $Z1$. Les valeurs du module du champ magnétique sont présentées, comme précédemment, à vide et en présence de la plaque conductrice.

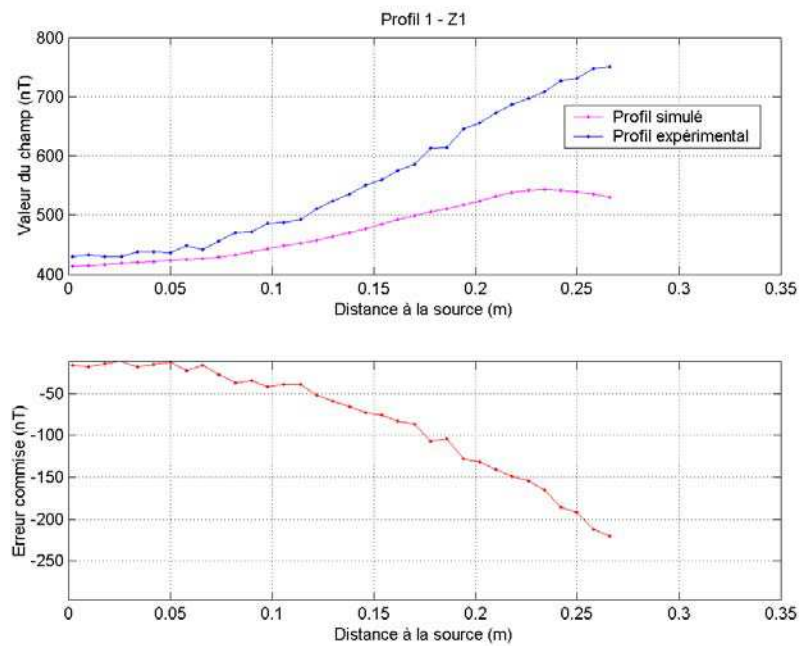
La présence de la plaque métallique, agissant ici comme un écran, modifie fortement les valeurs du module du champ source mesuré à vide le long de chacun des deux profils.

A vide, l'écart entre les valeurs expérimentales et les résultats de notre modèle numérique est comme précédemment maximal à l'origine du profil là où le champ est le plus important. La valeur de l'écart à cet endroit est inférieure à 550 nT, ce qui est très inférieur à la valeur de la précision absolue de 1300 nT définie comme valeur de référence. Cette erreur représente quand même environ 20 % de la valeur du champ expérimental mesurée à cette position. La variation du module du champ calculé par notre modèle numérique le long des deux profils considérés est très similaire à celle du module du champ expérimental. L'écart décroît à mesure que la valeur du champ local diminue, c'est à dire lorsqu'on s'éloigne de l'axe de la source.

Inversement, l'écart obtenu entre les résultats du modèle et les valeurs expérimentales lors de la confrontation en présence de la plaque conductrice augmente le long des deux profils retenus pour être maximal au voisinage des singularités de chacun des deux profils, à savoir un bord et un coin de la plaque. La valeur maximale de cet écart, environ 300 nT, est inférieure à l'écart obtenu à vide et toujours très inférieure à la précision absolue du modèle numérique mais représente cependant entre 30 % (profil 1) et 50 % (profil 2) de la valeur du champ local.

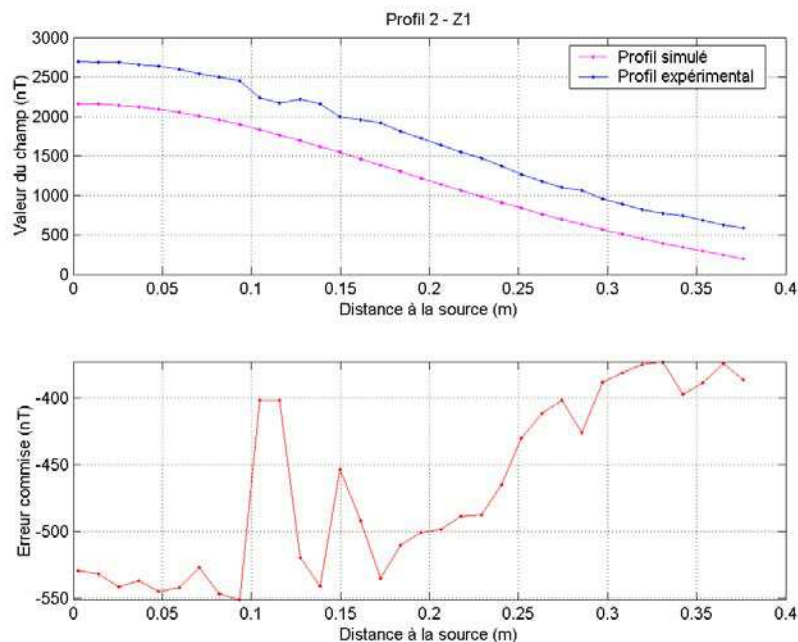


a) Mesures effectuées à vide

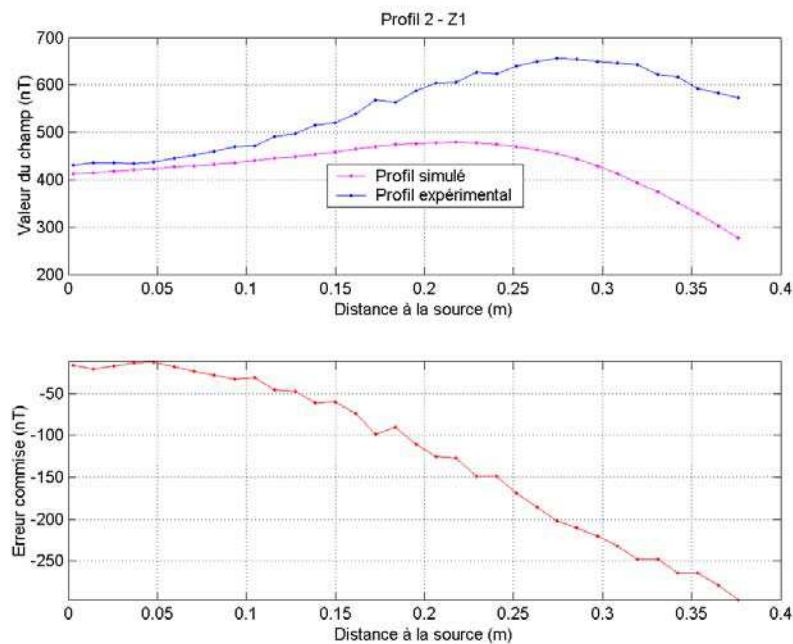


b) Mesures effectuées en présence de la plaque

Figure 64 : Composante suivant Z du champ magnétique à l'altitude Z1 le long du profil d'axe Ox. L'axe de la source est situé en $x = 0$ et le bord de plaque se trouve en $x = 0.25$ m. Confrontation entre les résultats du modèle éléments finis (*en rouge*) et les mesures expérimentales (*en bleu*). On présente sur le graphe inférieur l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées. On distingue en a) les mesures effectuées à vide et en b) celles effectuées en présence de la plaque conductrice.



a) Mesures effectuées à vide

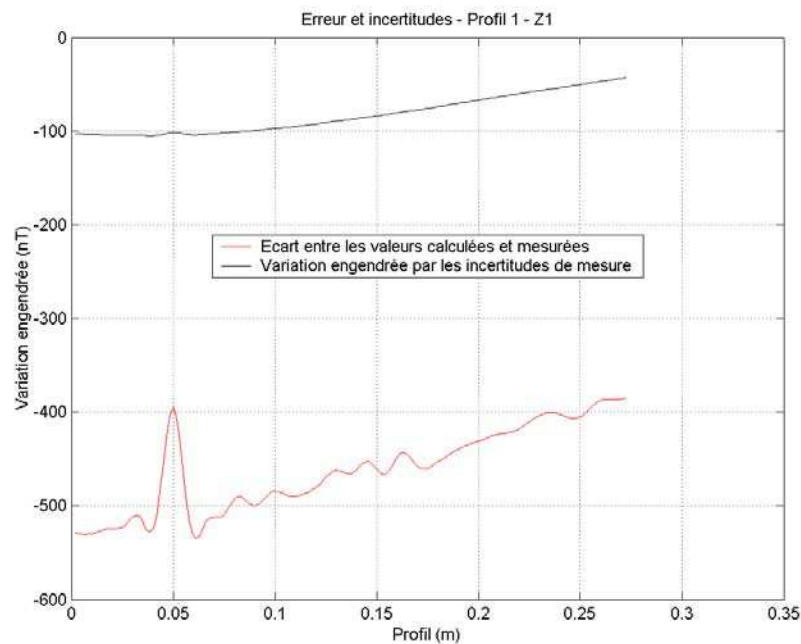
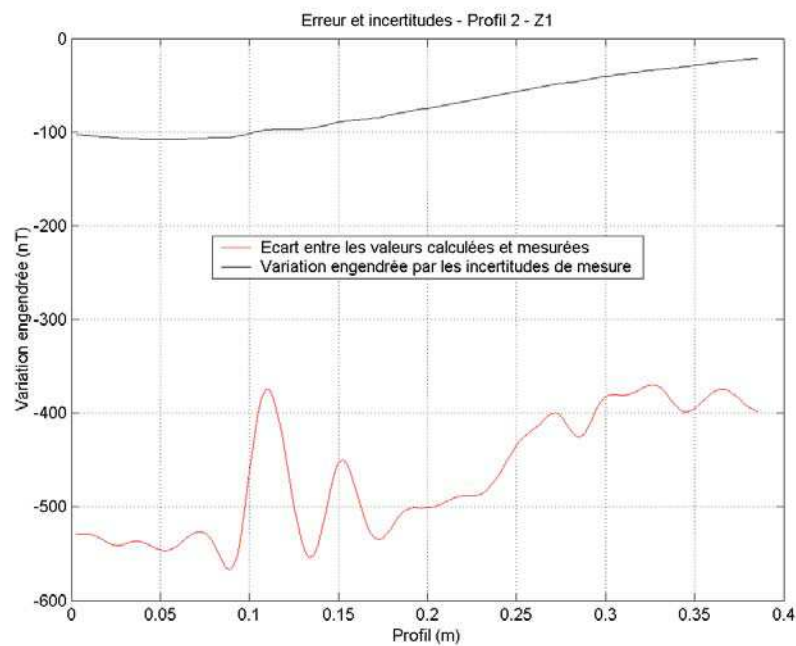


b) Mesures effectuées en présence de la plaque

Figure 65 : Composante suivant Z du champ magnétique à l'altitude $Z1$ le long du profil diagonal. L'axe de la source est situé en $x = 0$ et le coin de la plaque se situe en $x = 0.35 \text{ m}$. Confrontation entre les résultats du modèle éléments finis (*en rouge*) et les mesures expérimentales (*en bleu*). On présente sur le graphe inférieur l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées. On distingue en a) les mesures effectuées à vide et en b) celles effectuées en présence de la plaque conductrice.

Nous avons également effectué à cette altitude le calcul des incertitudes définies lors de la présentation des résultats précédents. Nous considérons toujours les incertitudes de mesure suivantes : une incertitude de 2 mm dans chacune des trois directions de l'espace pour la position du point de mesure, 5° d'inclinaison du capteur par rapport à l'axe Z et une incertitude de 5 spires sur le nombre total de spires constituant la bobine source.

Nous avons comparé à vide, le long de chacun des deux profils, l'erreur commise par le modèle numérique à la variation engendrée sur la valeur du champ par les incertitudes de mesure précédemment énoncées. Cette comparaison est illustrée par les deux graphes de la **Figure 66**.

a) Comparaison le long du profil d'axe Ox 

b) Comparaison le long du profil diagonal

Figure 66 : Comparaison, à l'altitude $Z1$, de l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées (*en rouge*) et de la variation engendrée sur le champ source par les incertitudes de mesure (*en noir*). Les incertitudes sont calculées pour une précision de positionnement absolue de 2 mm dans chacune des trois directions et un écart sur le nombre de spires $\Delta N = 5$. Comparaison effectuée en a) le long du profil d'axe Ox et en b) le long du profil diagonal.

L'évolution le long de chacun des deux profils de l'erreur engendrée par les incertitudes de mesure et de l'écart sur les valeurs fournies par le modèle numérique est très semblable. Il existe cependant un décalage, quasiment constant, entre les valeurs présentées de l'ordre de 400 nT. Cette valeur est de toute façon bien inférieure à la valeur de 1300 nT qui caractérise

la précision absolue et représente une précision de 2 % sur la valeur maximale du champ généré par la source. L'erreur commise sur les résultats du modèle numérique à cette altitude est également très inférieure à la précision absolue de 1300 nT calculée précédemment.

c) Résultats en « champ tangent »

Nous présentons au cours de ce paragraphe les résultats obtenus sur le module du champ en utilisant la seconde configuration géométrique. Dans cette situation, la composante suivant Z du champ source, composante principale au voisinage du centre de la plaque, est tangente au plan comprenant la surface supérieure de la plaque conductrice.

La **Figure 67**, la **Figure 68** et la **Figure 69** présentent respectivement les modules du champ magnétique mesurés et calculés à l'altitude Z_2 le long du profil d'axe Oz , du profil diagonal et du profil d'axe Ox . Les valeurs du module sont données à vide et en présence de la plaque conductrice.

Dans cette configuration spatiale, les profils retenus pour observer le champ magnétique ne sont plus symétriques. La valeur maximale du champ généré à cette altitude est de l'ordre de 17500 nT, ce qui représente la zone de plus haute énergie pour cette position particulière de la source. Néanmoins, les mesures obtenues sont légèrement plus bruitées que la série acquise précédemment ce qui occasionne un certain écart-type sur la valeur de l'erreur commise pas véritablement représentatif de la précision obtenue sur les résultats du modèle numérique. La confrontation le long de chacun de ces trois profils est toutefois très bonne, notamment à vide.

Les écarts obtenus à vide le long des trois profils ont en effet une valeur moyenne voisine de zéro. Les valeurs maximales de l'erreur commise relevées sur chacun des profils sont bien inférieures à la valeur de la précision absolue de 1300 nT et représentent environ 3 % de la valeur maximale du champ local.

Lorsque la plaque conductrice est ajoutée au dispositif, l'écart entre les résultats du modèle numérique et les valeurs mesurées est sensiblement plus important. Nous pouvons notamment voir apparaître cette évolution au voisinage des singularités géométriques que sont deux des bords de la plaque et un des coins. L'erreur maximale commise est cependant de l'ordre de grandeur de la précision absolue (2 %) et représente, selon le profil considéré, de 6 à 10 % des valeurs maximales du champ local.

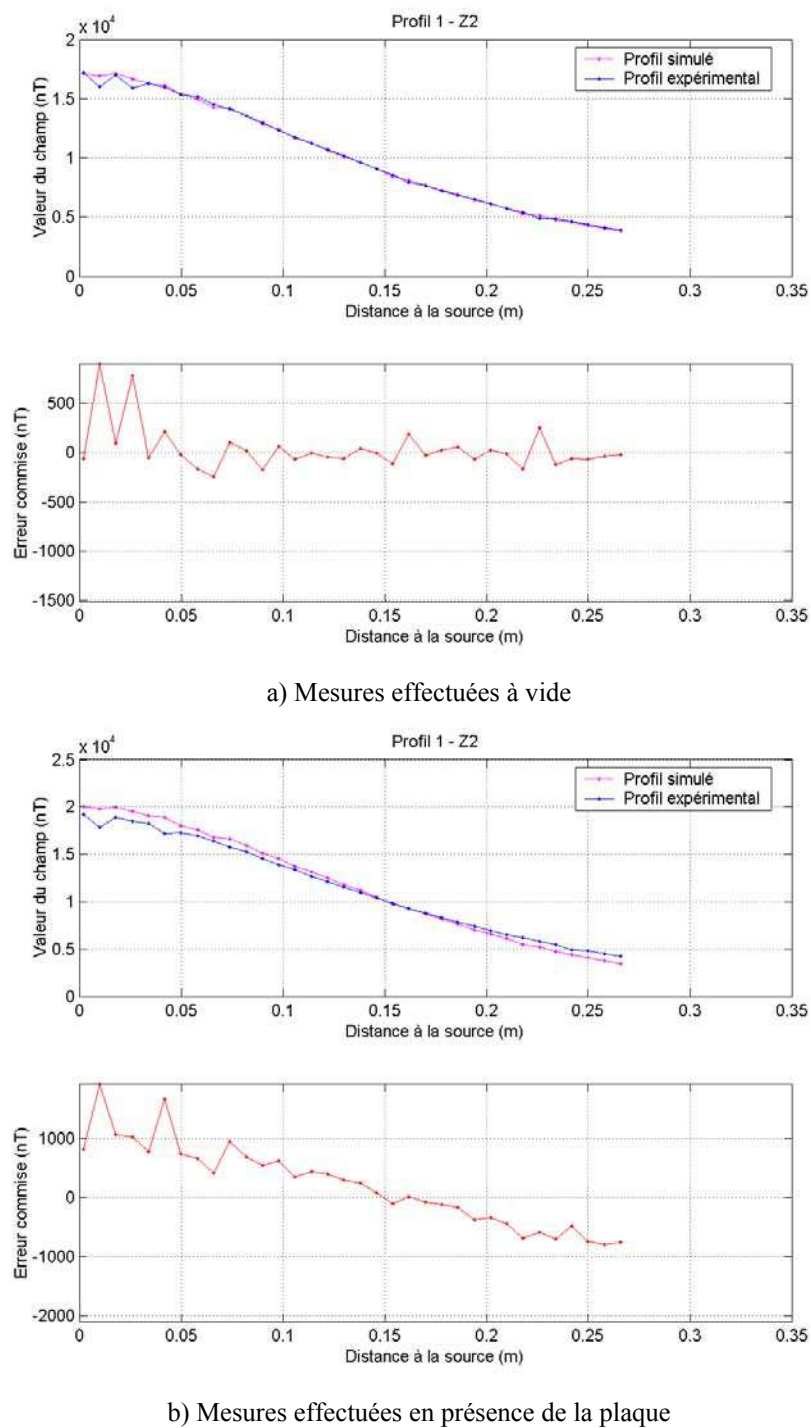


Figure 67 : Composante suivant Z du champ magnétique à l'altitude $Z2$ le long du profil d'axe Oz , axe de la bobine. Le bord de plaque se situe en $x = 0.25$ m. Confrontation entre les résultats du modèle éléments finis (en rouge) et les mesures expérimentales (en bleu). On présente sur le graphe inférieur l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées. On distingue en a) les mesures effectuées à vide et en b) celles effectuées en présence de la plaque conductrice.

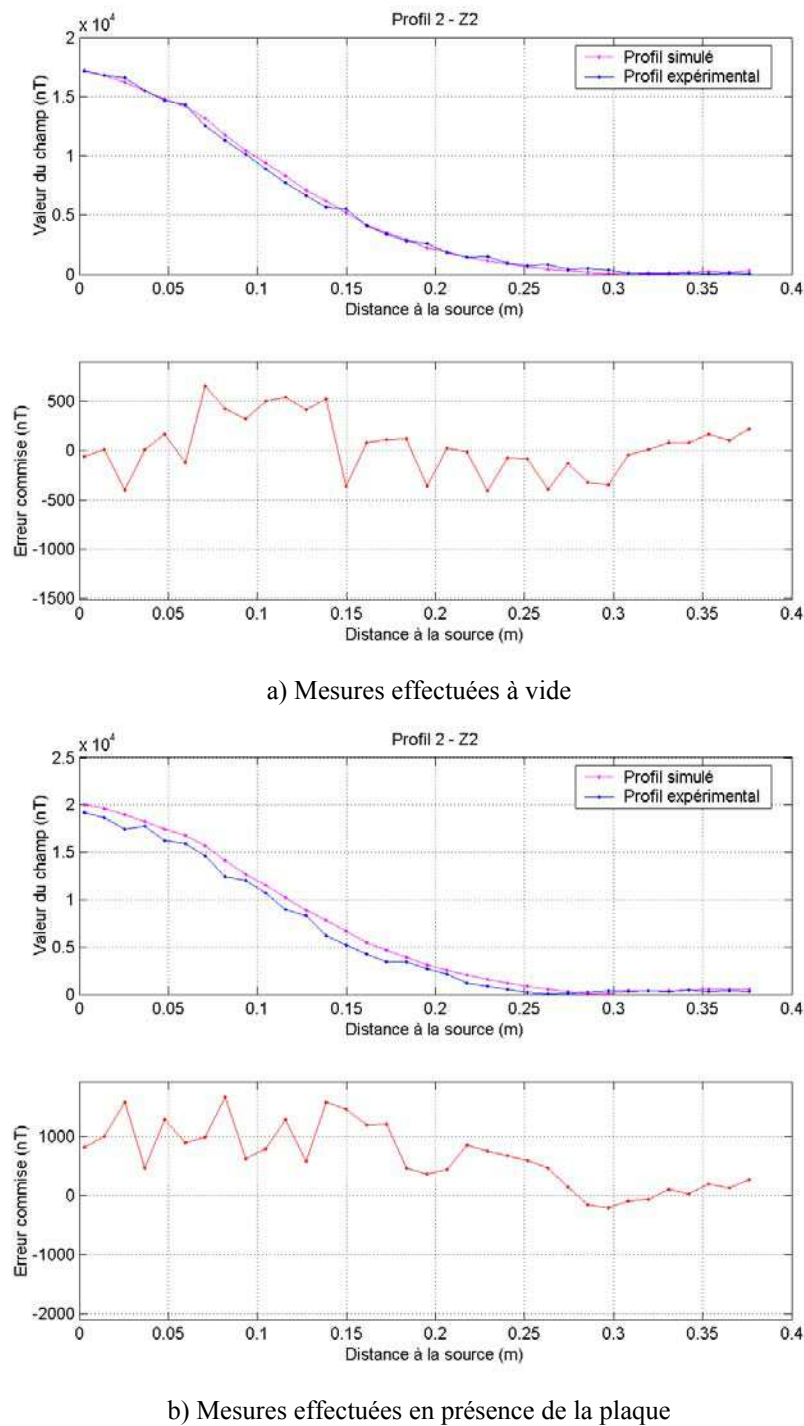


Figure 68 : Composante suivant Z du champ magnétique à l'altitude $Z2$ le long du profil diagonal. Le coin de la plaque se situe en $x = 0.35$ m. Confrontation entre les résultats du modèle éléments finis (*en rouge*) et les mesures expérimentales (*en bleu*). On présente sur le graphe inférieur l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées. On distingue en a) les mesures effectuées à vide et en b) celles effectuées en présence de la plaque conductrice.

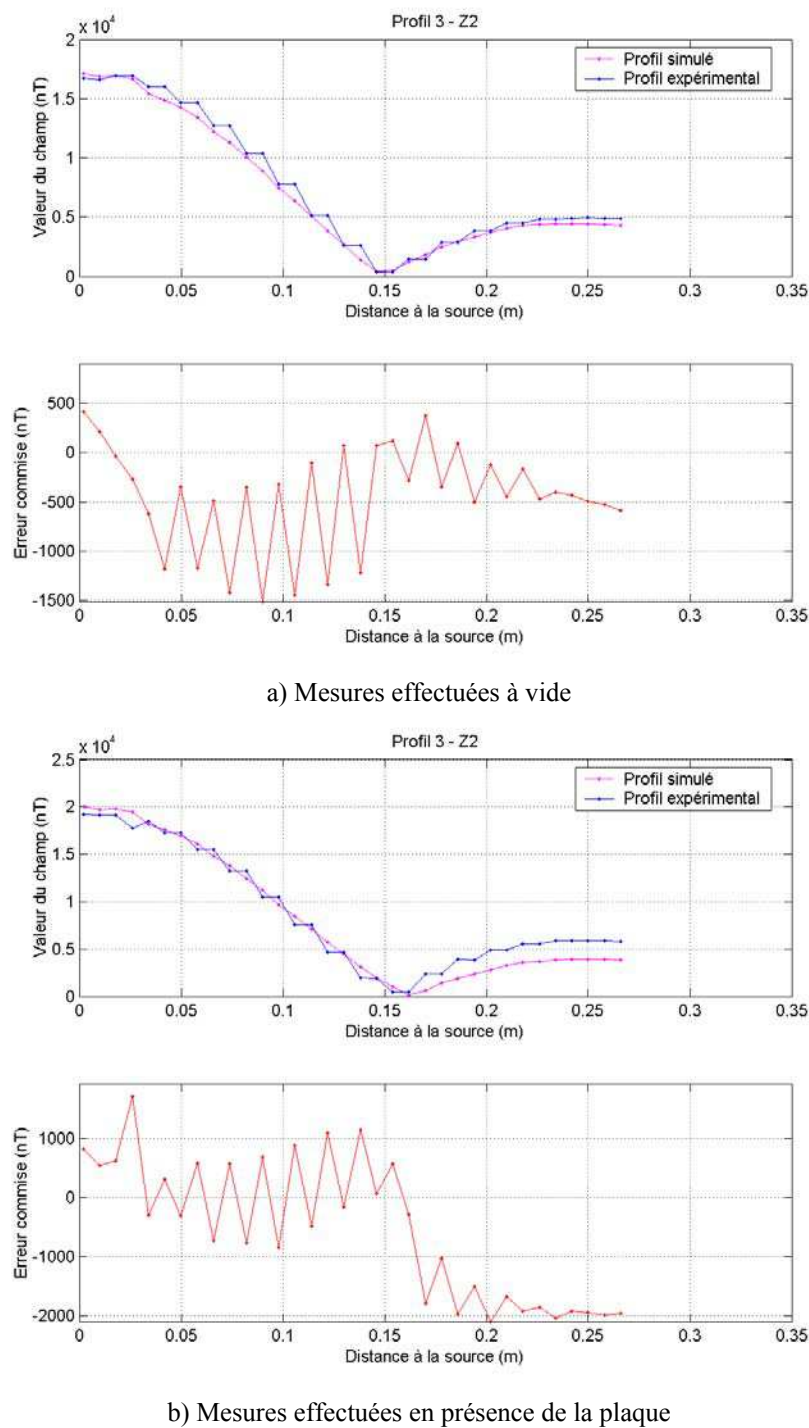
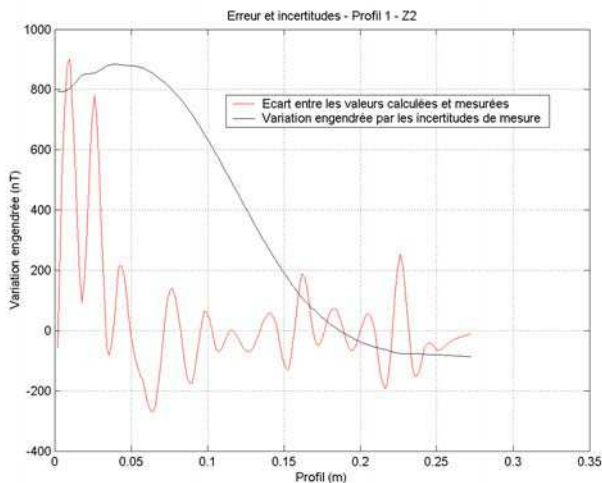


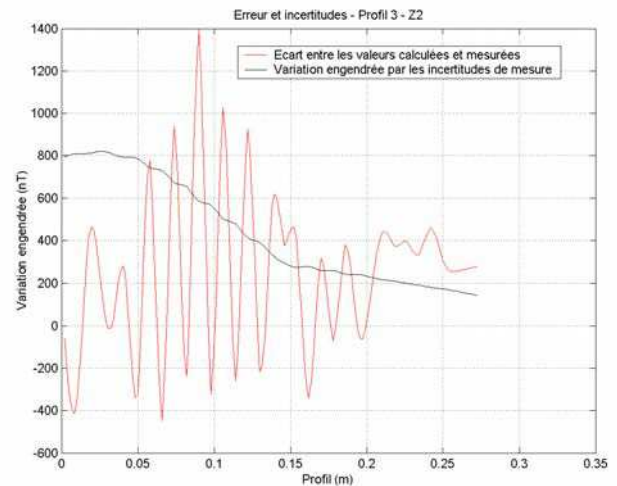
Figure 69 : Composante suivant Z du champ magnétique à l'altitude Z2 le long du profil d'axe Ox, axe normal à celui de la bobine. Le bord de plaque se situe en $x = 0.25 \text{ m}$. Confrontation entre les résultats du modèle éléments finis (en rouge) et les mesures expérimentales (en bleu). On présente sur le graphe inférieur l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées. On distingue en a) les mesures effectuées à vide et en b) celles effectuées en présence de la plaque conductrice.

Comme lors de la confrontation basée sur la première configuration spatiale, nous avons comparé la variation engendrée sur le module du champ magnétique par les incertitudes de mesures à l'erreur commise par notre modèle numérique sur chacun des trois profils à vide.

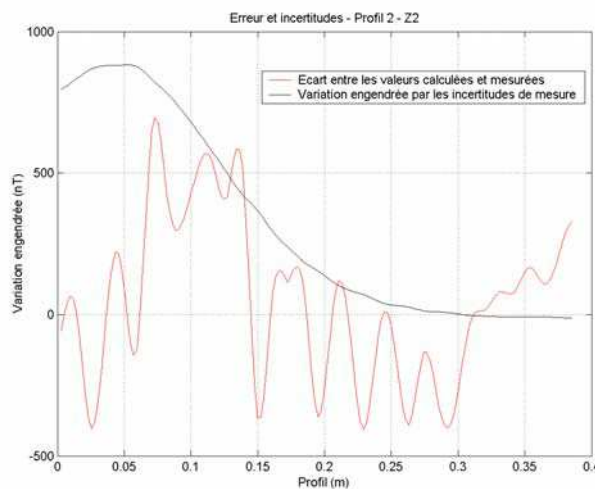
Nous considérons toujours les incertitudes de mesure suivantes : une incertitude de 2 mm dans chacune des trois directions pour la position du point de mesure, 5° d'inclinaison du capteur par rapport à l'axe Z et une incertitude de 5 spires sur le nombre total de spires constituant la bobine source. La **Figure 70** présente cette comparaison le long de chacun des trois profils.



a) Comparaison le long du profil d'axe Oz



b) Comparaison le long du profil d'axe Ox



c) Comparaison le long du profil diagonal

Figure 70 : Comparaison, à l'altitude Z2, de l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées (*en rouge*) et de la variation engendrée sur le champ source par les incertitudes de mesure (*en noir*). Les incertitudes sont calculées pour une précision de positionnement absolue de 2 mm dans chacune des trois directions et un écart sur le nombre de spires $\Delta N = 5$. Comparaison effectuée en a) le long du profil d'axe Ox et en b) le long du profil diagonal.

Les variations engendrées par les incertitudes de mesure sont du même ordre de grandeur que l'écart entre les valeurs expérimentales et les résultats du modèle numérique. Ceci nous permet de conclure que la précision obtenue à cette altitude est très bonne puisque du même ordre de grandeur que la précision inhérente au dispositif expérimental mis en œuvre.

Nous allons maintenant nous intéresser aux résultats obtenus le long des profils extraits du plan de cartographie d'altitude Z3. Cette zone est une zone où le champ source est faible car

l'éloignement à la source augmente et la plaque conductrice agit théoriquement comme un écran vis-à-vis du champ magnétique généré par la source.

La **Figure 71**, la **Figure 72** et la **Figure 73** présentent respectivement la composante suivant Z du module du champ magnétique mesurée et calculée à l'altitude $Z3$ le long du profil d'axe Oz , du profil diagonal et du profil d'axe Ox . Les valeurs du module sont données à vide et en présence de la plaque conductrice.

La présence de la plaque conductrice modifie fortement la précision obtenue à vide le long des trois profils considérés.

L'accord entre les valeurs du module expérimental et les résultats du modèle numérique est en effet relativement bon à vide. L'erreur commise le long de chacun des trois profils est de l'ordre de quelques dizaines de nanotesla, ce qui est très inférieur à la précision absolue de 1300 nT et ne représente, suivant le profil considéré, que 4 à 7 % des valeurs maximales du champ local.

Par contre, lorsque la plaque conductrice est utilisée, la concordance entre les résultats de la simulation et les valeurs expérimentales est bien moins bonne notamment à l'origine des profils là où le champ est le plus important. Les erreurs maximales enregistrées le long des trois profils n'excèdent cependant pas la valeur de 1300 nT qui nous confère une précision absolue de 2 %. Toutefois ces valeurs sont du même ordre de grandeur que le champ local.

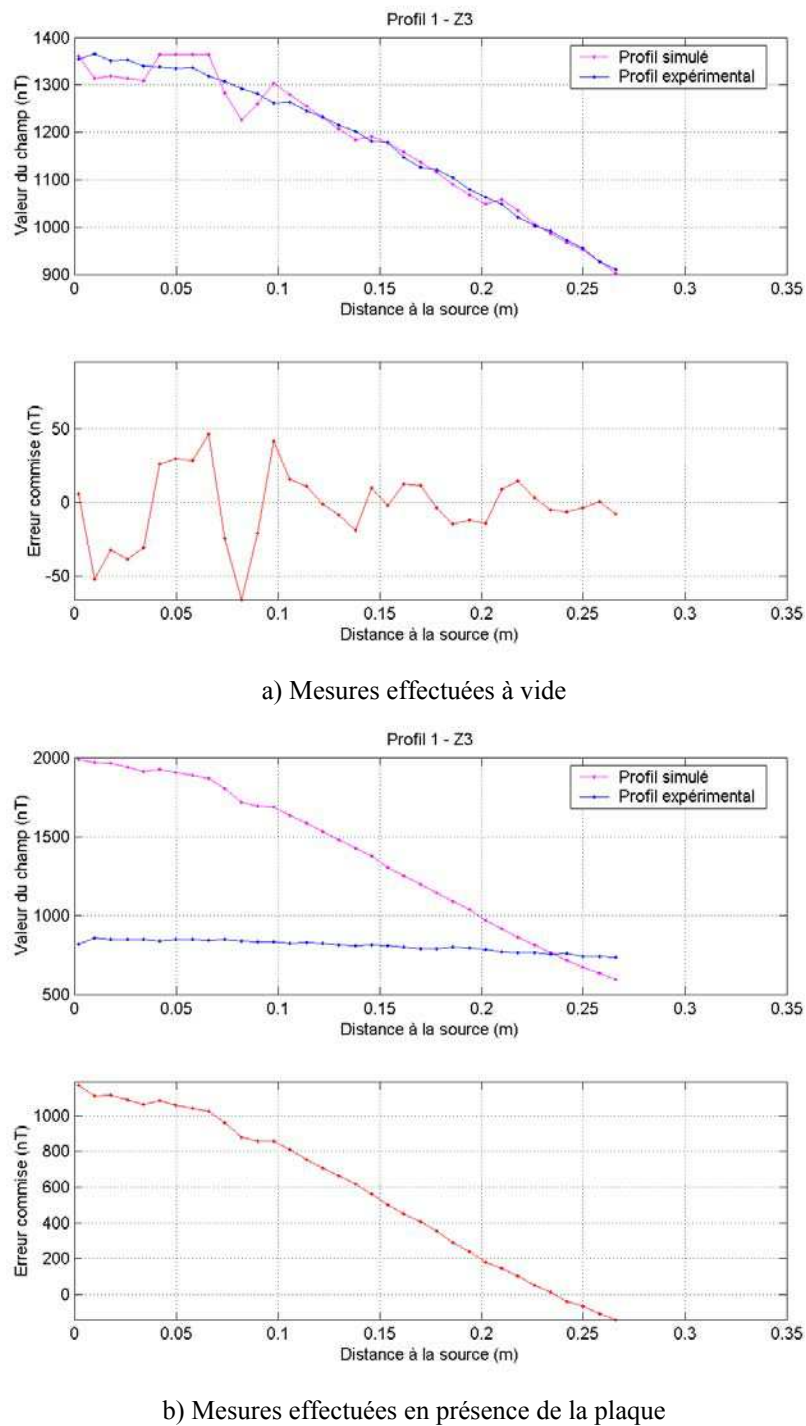
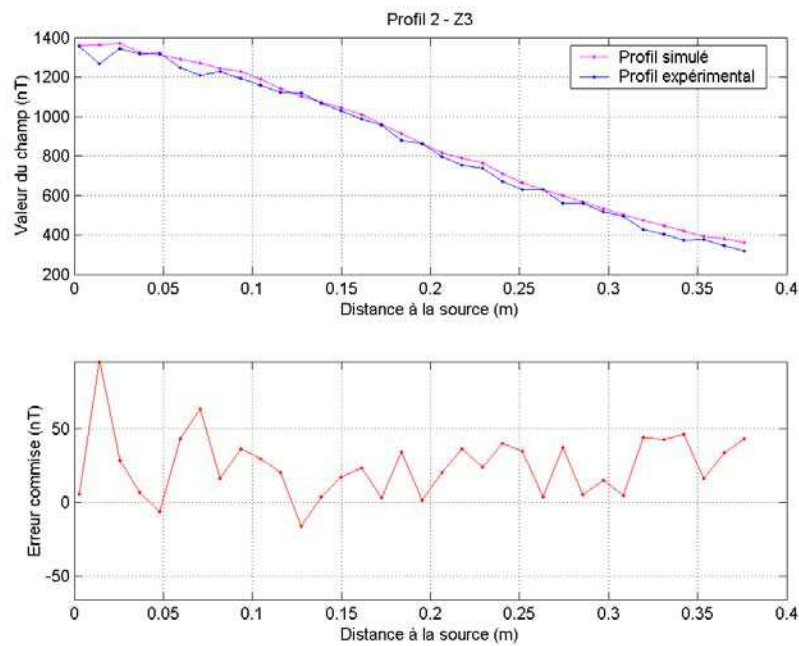
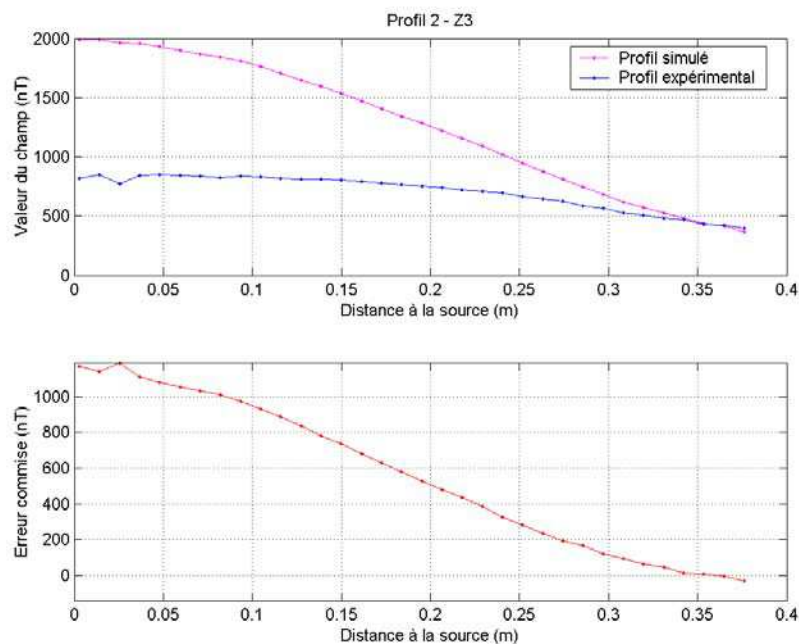


Figure 71 : Composante suivant Z du champ magnétique à l'altitude Z3 le long du profil d'axe Oz , axe de la bobine. Le bord de plaque se situe en $x = 0.25 \text{ m}$. Confrontation entre les résultats du modèle éléments finis (*en rouge*) et les mesures expérimentales (*en bleu*). On présente sur le graphe inférieur l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées. On distingue en a) les mesures effectuées à vide et en b) celles effectuées en présence de la plaque conductrice.



a) Mesures effectuées à vide



b) Mesures effectuées en présence de la plaque

Figure 72 : Composante suivant Z du champ magnétique à l'altitude Z3 le long du profil diagonal. Le coin de la plaque se situe en $x = 0.35$ m. Confrontation entre les résultats du modèle éléments finis (*en rouge*) et les mesures expérimentales (*en bleu*). On présente sur le graphe inférieur l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées. On distingue en a) les mesures effectuées à vide et en b) celles effectuées en présence de la plaque conductrice.

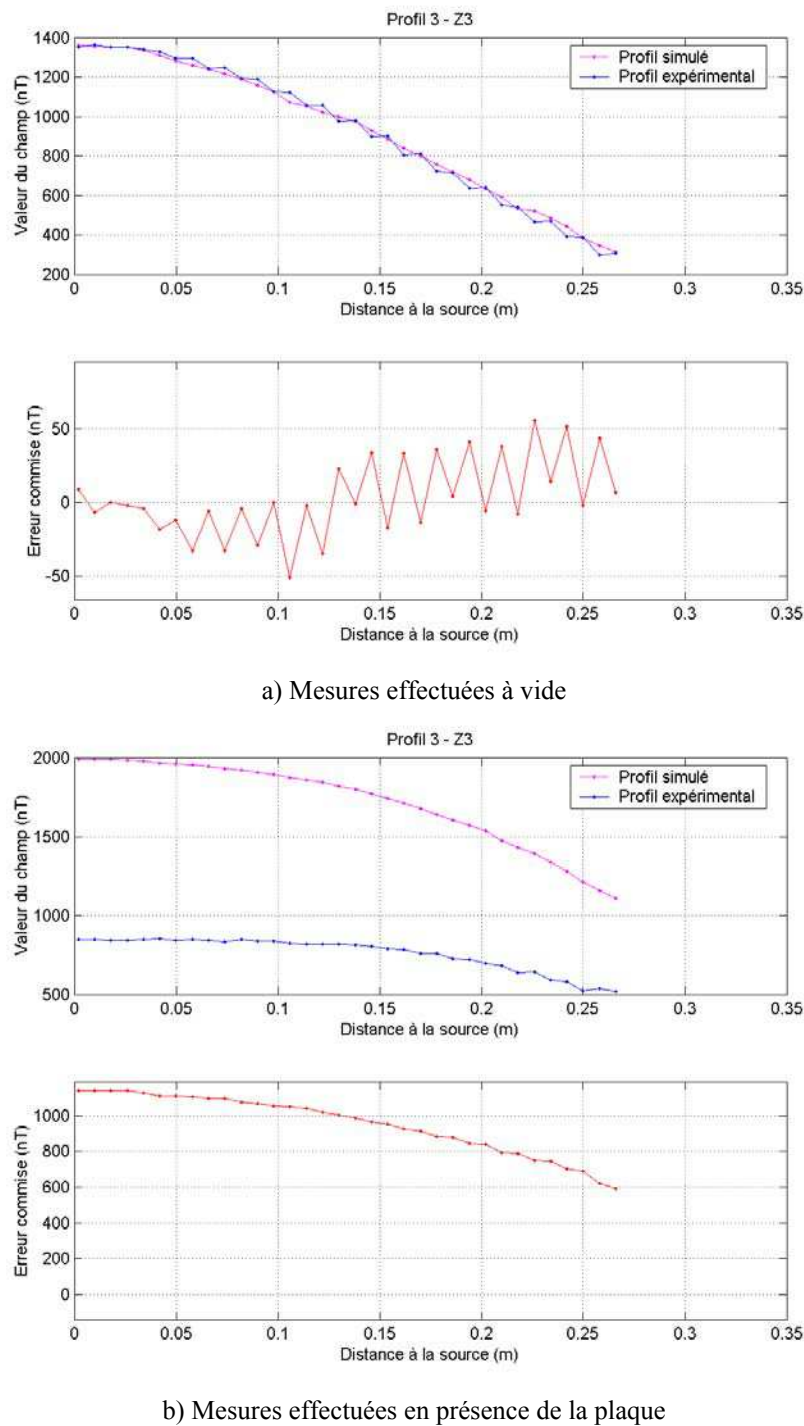


Figure 73 : Composante suivant Z du champ magnétique à l'altitude Z3 le long du profil d'axe Ox, axe normal à celui de la bobine. Le bord de plaque se situe en $x = 0.25 \text{ m}$. Confrontation entre les résultats du modèle éléments finis (*en rouge*) et les mesures expérimentales (*en bleu*). On présente sur le graphe inférieur l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées. On distingue en a) les mesures effectuées à vide et en b) celles effectuées en présence de la plaque conductrice.

Nous avons également effectué, à cette altitude, le même calcul d'incertitudes effectué lors de l'exploitation des résultats précédents. Nous considérons toujours les incertitudes de mesure suivantes : une incertitude de 2 mm dans chacune des trois directions pour la position du point

de mesure, 5° d'inclinaison du capteur par rapport à l'axe Z et une incertitude de 5 spires sur le nombre total de spires constituant la bobine source.

Nous avons comparé à vide, le long de chacun des trois profils, l'erreur commise par le modèle numérique à la variation engendrée sur la valeur du champ par les incertitudes de mesure. Cette comparaison est illustrée par les graphes de la **Figure 74**.

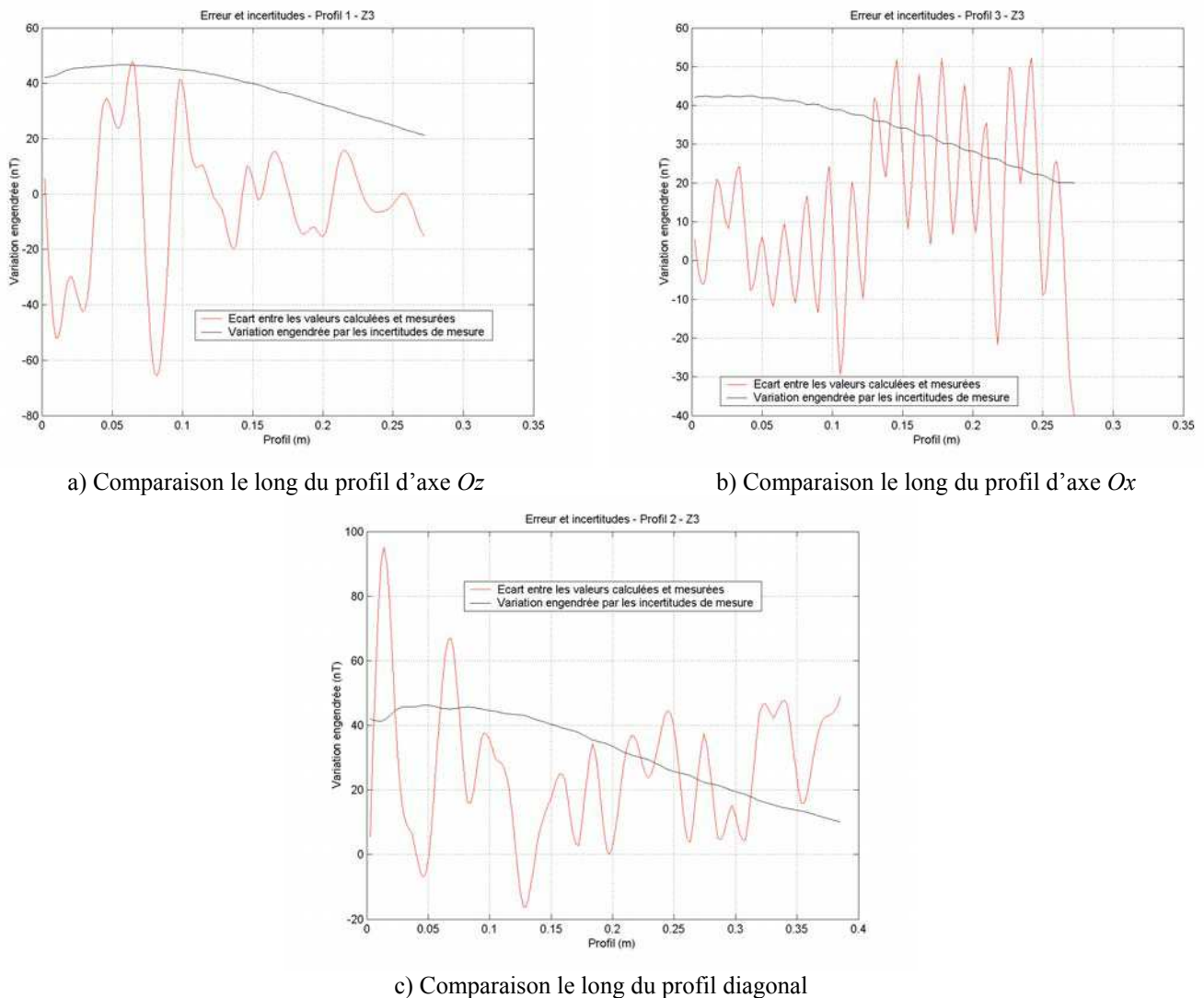


Figure 74 : Comparaison, à l'altitude Z3, de l'écart entre les valeurs expérimentales et simulées (*en bleu*) et de la variation engendrée sur le champ source par les incertitudes de mesure (*en rouge*). Les incertitudes sont calculées pour une précision de positionnement absolue de 2 mm dans chacune des trois directions et un écart sur le nombre de spires $\Delta N = 5$. Comparaison effectuée en a) le long du profil d'axe Ox et en b) le long du profil diagonal.

Comme à l'altitude précédente, les variations engendrées sur le module du champ magnétique par les incertitudes de mesure sont du même ordre de grandeur que l'écart existant entre les résultats du modèle numérique et les valeurs expérimentales du module. Ceci nous permet de conclure que la précision obtenue sur les résultats du modèle numérique est très bonne car du même ordre de grandeur que la précision obtenue avec le dispositif mis en œuvre pour obtenir ces valeurs expérimentales.

Au cours de ce paragraphe, nous avons pu confronter les résultats de notre modèle numérique à des valeurs expérimentales. La confrontation a été effectuée à vide et en présence d'une plaque métallique conductrice pour différentes configurations du dispositif expérimental. Nous avons vu que l'accord entre les valeurs du module expérimental et les résultats du modèle numérique est relativement bon pour les zones de haute énergie. Les résultats deviennent toutefois moins précis lorsque la valeur du champ local décroît, notamment lorsque les mesures sont effectuées derrière la plaque conductrice disposée pour perturber le champ magnétique généré par la source.

3. Domaine de validité des modèles

Nous allons présenter au cours de ce paragraphe la confrontation des résultats fournis par le modèle analytique local à ceux obtenus à l'aide du modèle polynomial classique en un point de fonctionnement commun aux deux domaines de validité théoriques de chacun des modèles.

3.1 Problématique

Le modèle numérique, ou modèle polynomial classique, permet de modéliser l'ensemble des phénomènes électromagnétiques présentés au cours de cette étude. Ce modèle est cependant limité par la capacité à mailler finement (limitation due à la taille mémoire) et par la capacité à converger. En effet, un maillage fin et contrasté engendre des difficultés de convergence résultant d'un mauvais conditionnement de la matrice.

Le modèle analytique local permet de diminuer considérablement la taille du maillage et a l'avantage de converger quelques soient les conditions d'utilisation. La limite d'utilisation théorique est déterminée par le rapport de dimensions entre la valeur de l'épaisseur de peau et l'épaisseur du matériau considéré. L'épaisseur du milieu conducteur supposée infinie doit être très grande devant la profondeur de pénétration.

Nous avons comparé les résultats fournis par chacun des deux modèles dans un cas où les deux domaines de validité sont poussés jusqu'à leurs limites.

3.2 Comparaison des deux types de modèles

3.2.1 Définition de la géométrie

La géométrie développée pour cette phase de comparaison des résultats fournis par les deux modèles est construite en utilisant le même principe que pour la géométrie utilisée lors de la confrontation expérimentale effectuée dans la configuration « champ normal ».

Cette géométrie, présentée sur la **Figure 75** est une géométrie bidimensionnelle utilisant les deux axes de symétrie existants. La géométrie tridimensionnelle illustrée par la **Figure 76** est ensuite obtenue par élévation, ce qui nous permet de contrôler le nombre d'éléments dans l'épaisseur de la plaque conductrice.

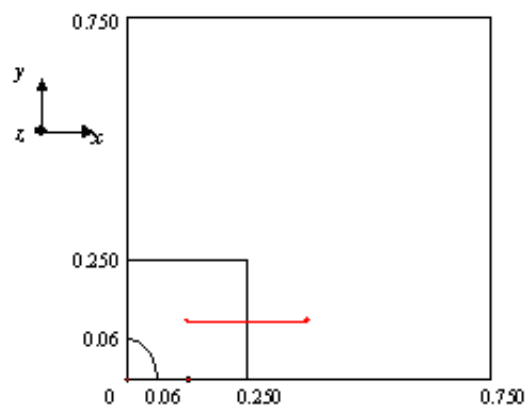


Figure 75 : Coupe 2D de la géométrie utilisée : plan (Ox,Oy)

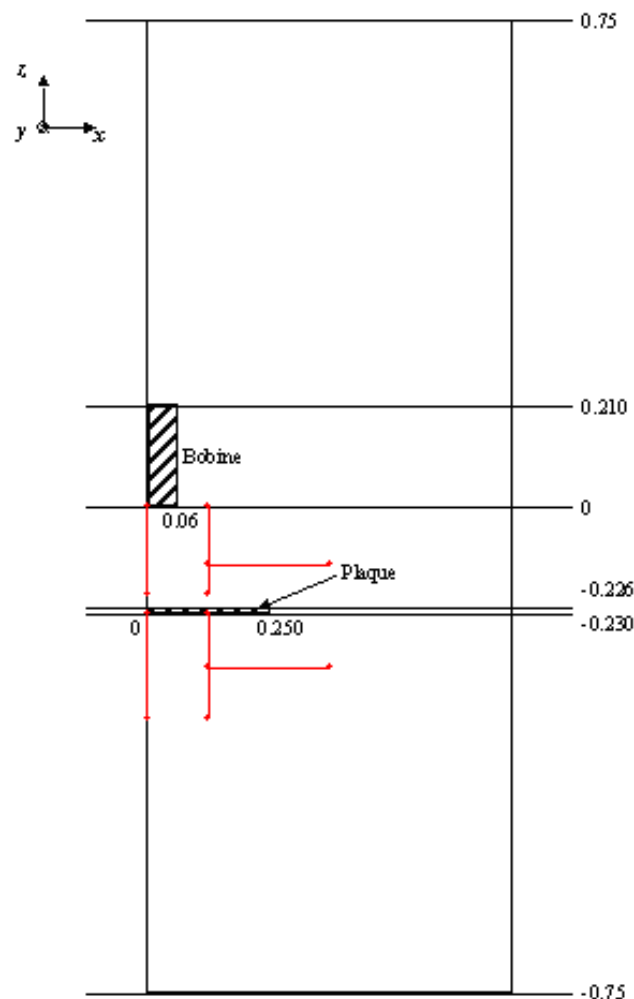


Figure 76 : Coupe 2D de la géométrie utilisée : plan (Ox,Oz).

La source de champ magnétique utilisée est identique à celle présentée lors de la définition des géométries dédiées à la confrontation expérimentale des résultats du modèle analytique local. Le courant total utilisé, correspondant au produit NI , est d'environ 129 A. Les calculs sont effectués pour une fréquence d'excitation des sources de 1 kHz.

Le milieu conducteur modélisé est la même plaque de cuivre que celle intervenant lors de la phase de confrontation expérimentale. Sa conductivité électrique est égale à $6.25 \cdot 10^{07}$ S/m. Les dimensions de cette plaque carrée sont les suivantes : 50 cm de côté et 4 mm d'épaisseur. L'épaisseur de cette plaque conductrice a été choisie de manière à se placer en un point de fonctionnement commun aux domaines de validité de chacun des deux modèles. La plaque conductrice volumique modélisée ici est constituée de huit éléments dans la profondeur ce qui nous permet de disposer de quatre éléments dans l'épaisseur de peau. Tout maillage plus fin conduit à une non-convergence de la méthode polynomiale. En ce qui concerne le modèle analytique local, l'épaisseur du milieu conducteur est deux fois plus grande que l'épaisseur de peau. Ce rapport nous place en limite des conditions optimales énoncées au cours du chapitre précédent lors de la définition de la loi de variation dans la profondeur. Pour toute plaque plus fine, ou à une fréquence plus grande, les deux modèles n'ont plus des domaines de validité recouvrants et ces cas « intermédiaires » ne peuvent pas être résolus avec une précision suffisante par nos méthodes.

Les profils retenus pour la comparaison des résultats des deux modèles sont définis sur la coupe bidimensionnelle de la géométrie présentée sur la **Figure 76**. Ces profils sont tracés en rouge sur cette figure. Nous nous intéresserons à trois profils distincts dont deux sont des profils verticaux et le dernier, un profil horizontal. Nous observerons le module du champ magnétique le long de chacun de ces trois profils et de leur symétrique par rapport à la plaque conductrice.

3.2.2 Résultats obtenus

Dans le cadre de cette comparaison des résultats fournis par chacun des deux modèles, nous nous intéressons au module de la composante suivant Z du champ magnétique. Nous comparons les valeurs de ce module le long de trois profils (et de leur symétrique par rapport à la plaque conductrice).

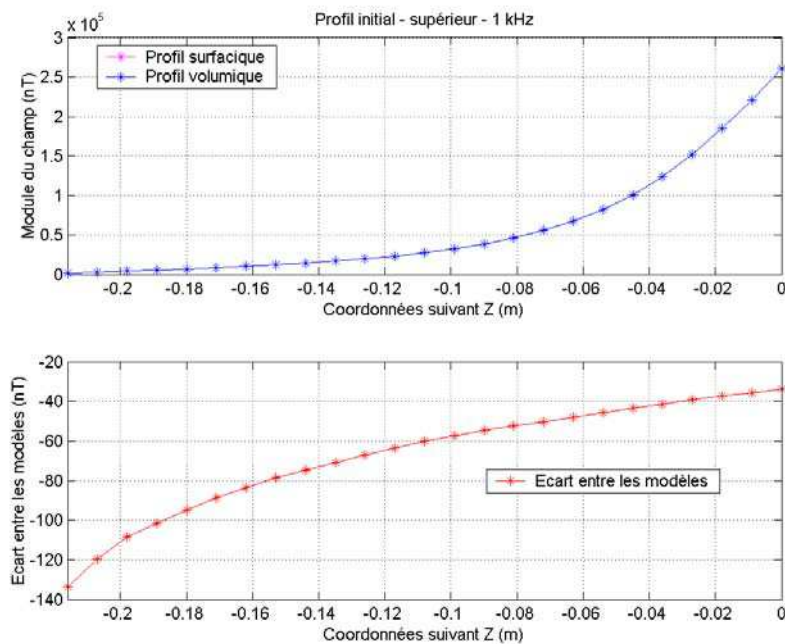
a) Profil vertical sur l'axe de la bobine

Le premier profil considéré est un profil vertical, situé sur l'axe de la bobine utilisée comme source de champ magnétique. Les résultats fournis par les deux modèles sont présentés sur la **Figure 77**.

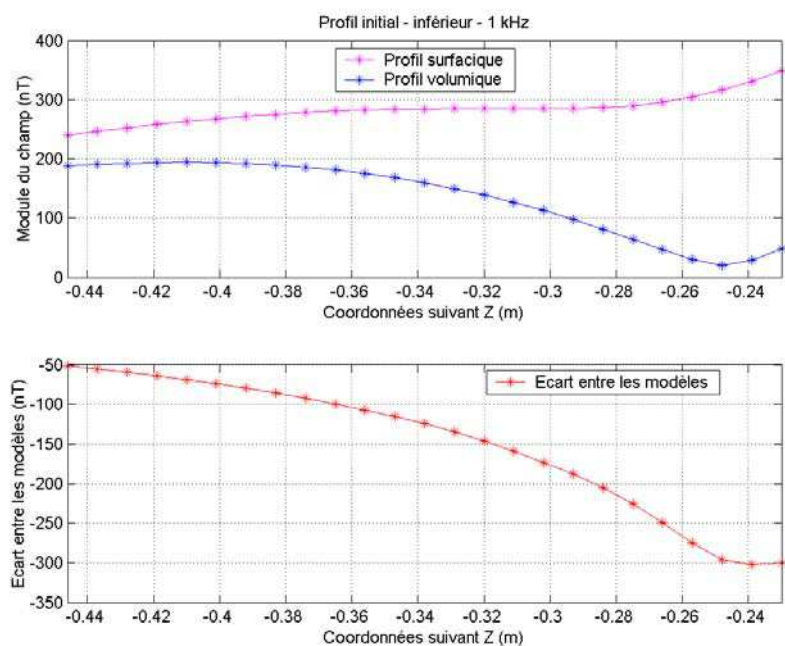
L'accord entre les valeurs du champ magnétique calculées par le modèle numérique et celles calculées grâce au modèle analytique local est bon, notamment dans le cas du profil supérieur. L'écart entre ces valeurs augmente lorsque l'on se rapproche de la plaque conductrice. Les valeurs de cet écart sont cependant très faibles, de l'ordre de la centaine de nanotesla, et représentent moins de 10 % du champ local.

Ces constatations sont également vraies dans le cas du profil inférieur. La fonction écran réalisée par la plaque conductrice atténue fortement les valeurs du champ généré par la source. Cette zone est une zone de faible énergie. L'écart est, comme précédemment, maximal à proximité de la plaque conductrice. Sa valeur est à cet endroit, du même ordre de grandeur que la valeur du champ local.

Ces écarts sont cependant très inférieurs à la valeur de la précision absolue obtenue à vide lors de la caractérisation des erreurs commises au cours de cette étude de modélisation et ne dégradent pas les résultats fournis par le modèle analytique local.



a) Profil supérieur



b) Profil inférieur

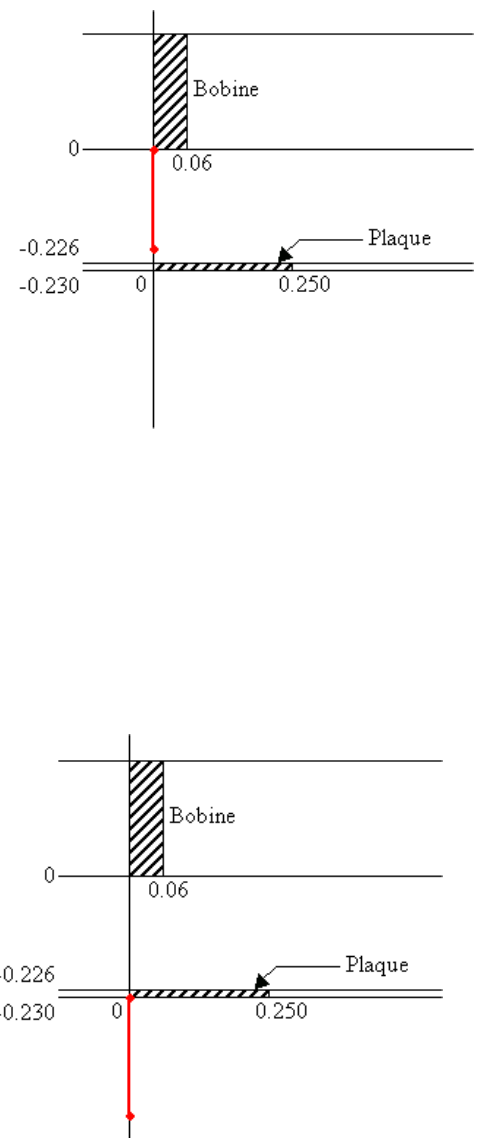
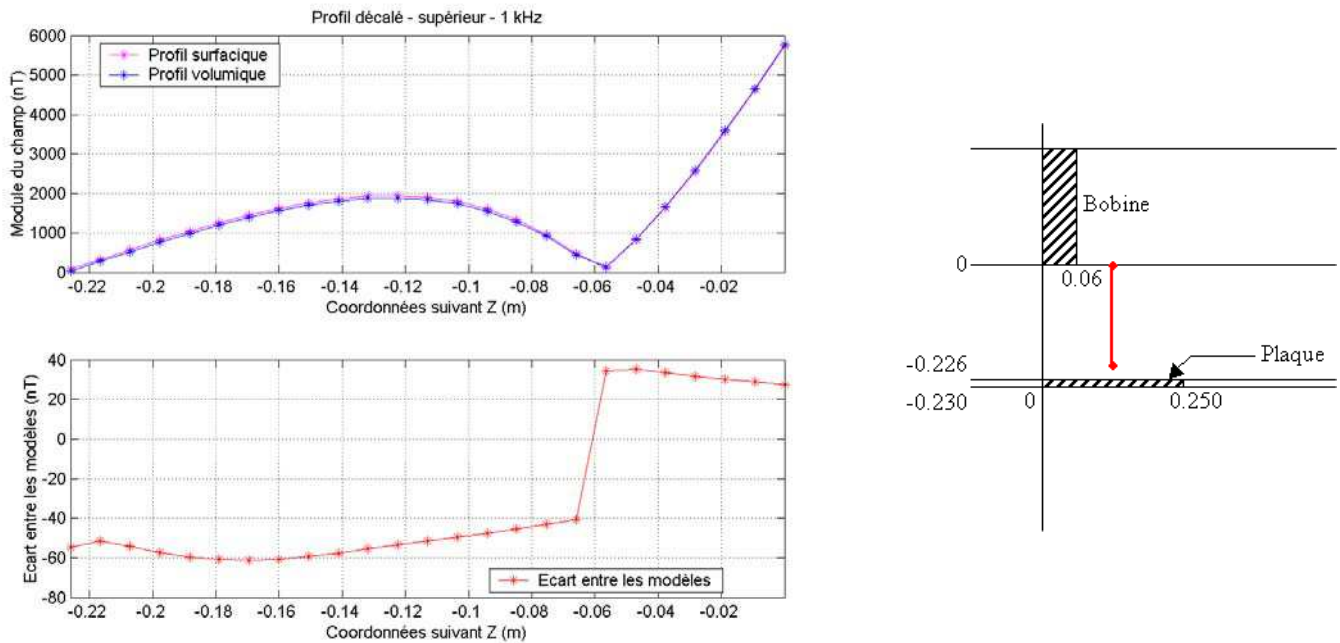


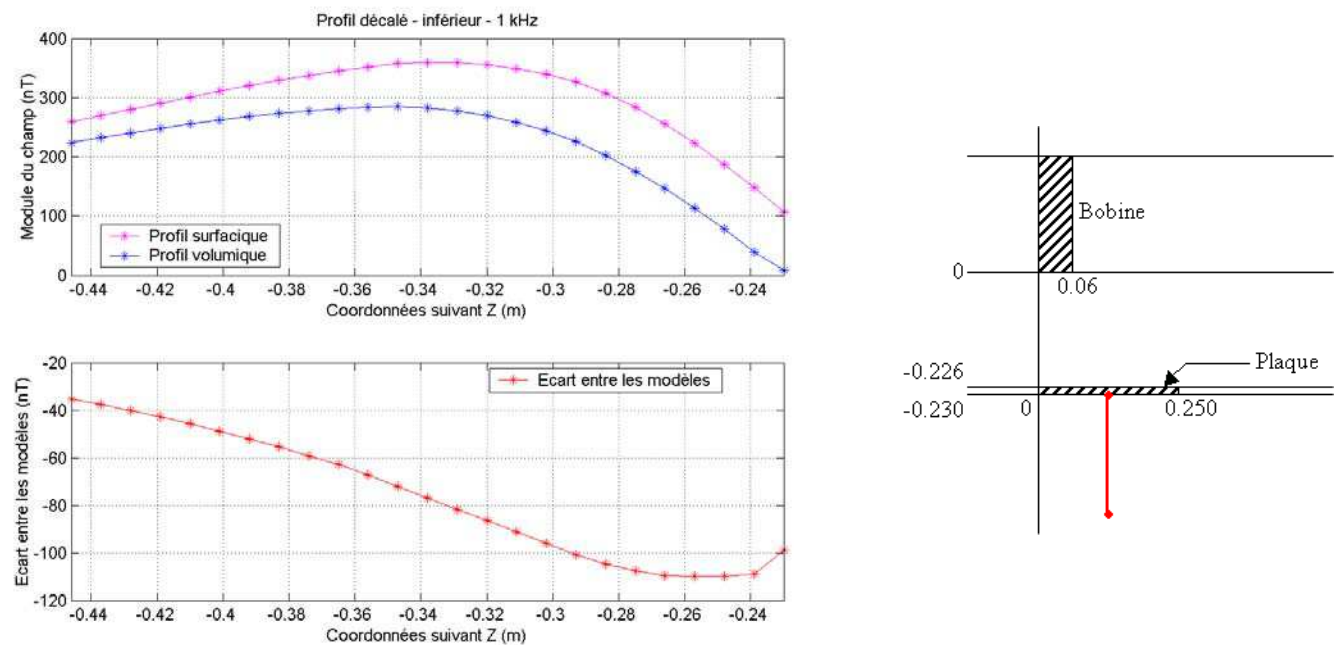
Figure 77 : Module de la composante suivant Z du champ magnétique le long du premier profil. Confrontation entre les résultats du modèle numérique (*en bleu*) et du modèle analytique local (*en violet*). On présente sur le graphe inférieur l'écart entre les valeurs des deux modèles. On distingue en a) les valeurs du module le long du profil supérieur et en b) les valeurs obtenues le long du profil inférieur.

b) Profil vertical décalé par rapport à l'axe de la bobine

Ce profil est semblable au profil précédent. C'est un profil vertical, décalé par rapport à l'axe de la bobine. La variation du module du champ est en effet observée cette fois-ci à la verticale du milieu de la demi-plaque modélisée.



a) Profil supérieur



b) Profil inférieur

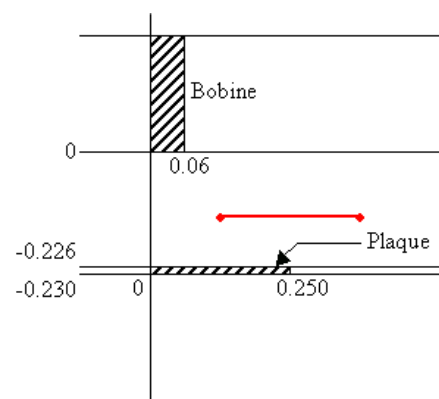
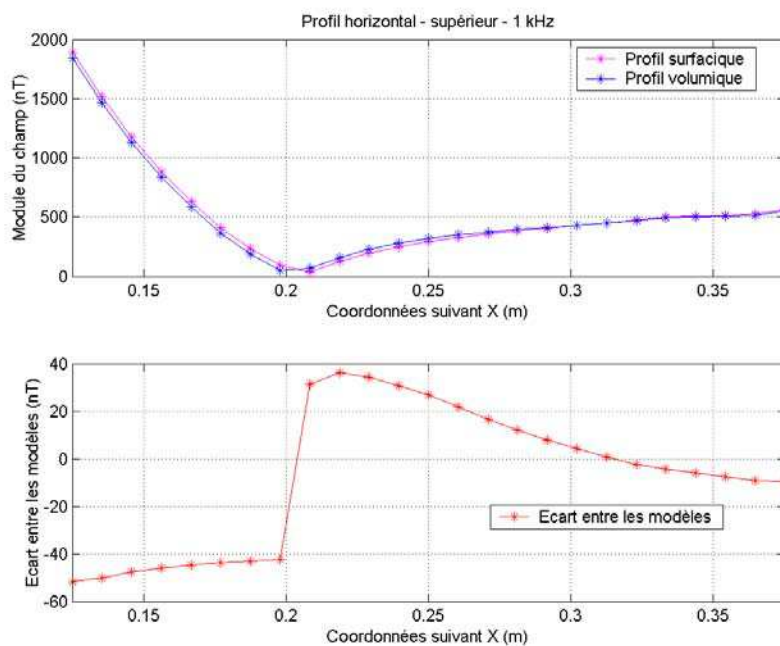
Figure 78 : Module de la composante suivant Z du champ magnétique le long du second profil. Confrontation entre les résultats du modèle numérique (*en bleu*) et du modèle analytique local (*en violet*). On présente sur le graphe inférieur l'écart entre les valeurs des deux modèles. On distingue en a) les valeurs du module le long du profil supérieur et en b) les valeurs obtenues le long du profil inférieur.

L'accord obtenu entre les valeurs des deux modèles, présentées sur la **Figure 78**, est une nouvelle fois très bon. L'écart est maximal au voisinage de la plaque conductrice. Cet écart est de l'ordre de quelques dizaines de nanotesla pour le profil supérieur et atteint la centaine de nanotesla, ordre de grandeur du champ local, à proximité de la plaque conductrice dans le cas du profil inférieur. Ces valeurs sont toujours très inférieures à la valeur de la précision absolue utilisée comme référence lors de la phase de confrontation expérimentale.

c) Profil horizontal

Ce troisième et dernier profil est un profil horizontal. L'origine de ce profil est située à la verticale du centre de la demi-plaque modélisée.

Les valeurs du module du champ magnétique calculées le long de ce profil sont représentées sur la **Figure 79**. L'accord entre les valeurs fournies par le modèle numérique et le modèle analytique local est une nouvelle fois très bon. L'écart est maximal au centre de la plaque et décroît à mesure que la distance à la plaque augmente. Ces valeurs sont cependant très faibles car inférieures à 50 nT quelque soit l'altitude du profil considéré.



a) Profil supérieur

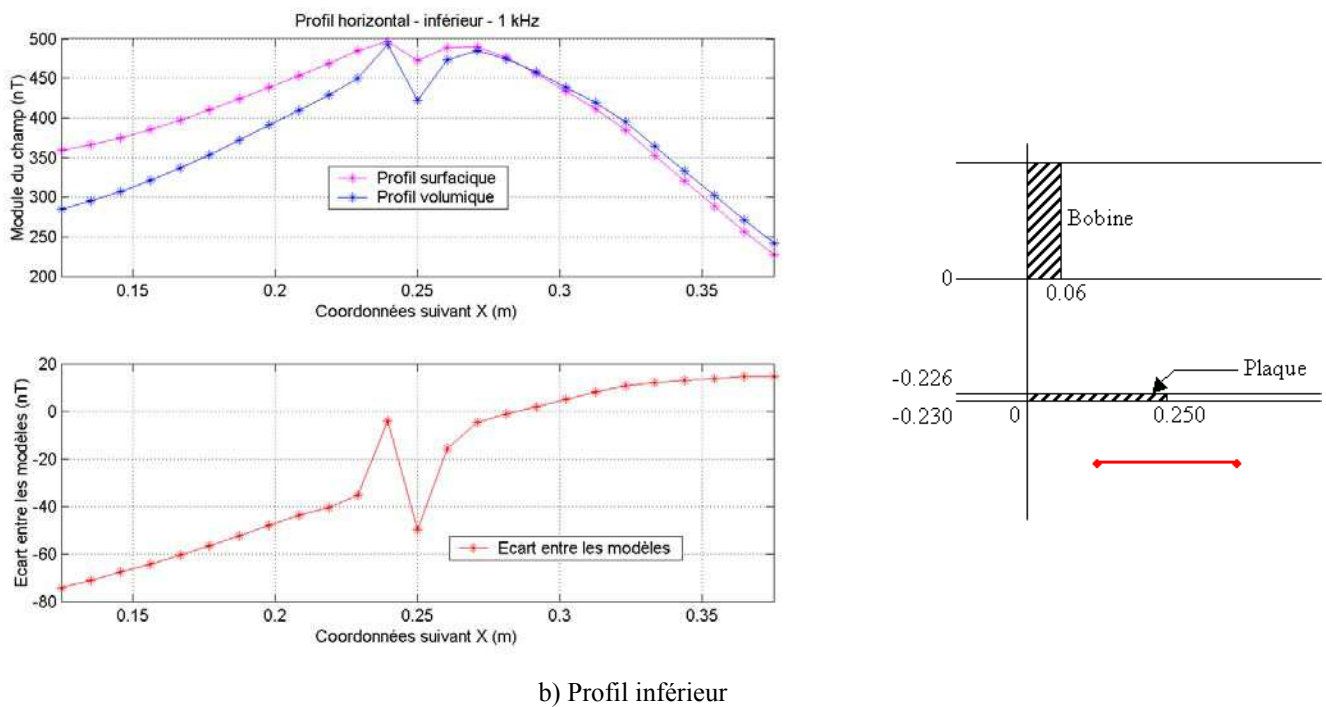


Figure 79 : Module de la composante suivant Z du champ magnétique le long du dernier profil. Confrontation entre les résultats du modèle numérique (*en bleu*) et du modèle analytique local (*en violet*). On présente sur le graphe inférieur l'écart entre les valeurs des deux modèles. On distingue en a) les valeurs du module le long du profil supérieur et en b) les valeurs obtenues le long du profil inférieur.

L'accord entre les résultats du modèle analytique local et ceux du modèle polynomial est très bon. L'écart obtenu est maximal à proximité des plaques conductrices idéalisées, notamment dans le cas des zones de faible énergie situées derrière la plaque perturbatrice. Cet écart diminue lorsque la distance à la plaque augmente.

Conclusion

Les résultats du modèle développé ont été confrontés à des mesures expérimentales pour différentes configurations spatiales. Nous avons notamment présenté des mesures acquises dans des zones de haute énergie (proche des sources) et dans des zones de plus faible énergie (points de mesure situés derrière une plaque conductrice). Cette confrontation expérimentale a permis de mettre en évidence les bons résultats obtenus notamment dans le cas des régions de plus haute énergie, qui correspondent aux zones d'intérêt principales en localisation spatiale par systèmes magnétiques. Dans les zones de champ faible, la confrontation des résultats du modèle numérique avec les données expérimentales est moins bonne. Cependant, un calcul en perturbation nous permettrait d'obtenir de meilleurs résultats mais au détriment du temps de calcul.

Au cours de cette phase expérimentale de validation de notre modèle numérique, nous avons également pu confirmer l'hypothèse suivant laquelle le modèle analytique local ne peut être utilisé au voisinage immédiat des plaques qu'il modélise. Les domaines de validité des deux

techniques numériques mises en œuvre ont été comparés et sont présentés dans le tableau ci-dessous.

	Critères		
	$E_p \ll \delta$	$E_p \sim \delta$	$E_p \gg \delta$
Modèle polynomial			
Modèle analytique local			

Tableau 17 : Domaines de validité des modélisations

Les domaines de validité de chacune des deux méthodes sont définis par le rapport de dimension entre l'épaisseur du matériau à modéliser (E_p) et la valeur de l'épaisseur de peau (δ) dans les conditions de simulation. Le modèle polynomial est limité en pratique par la capacité à converger, lorsque ces deux paramètres sont du même ordre de grandeur. Le modèle analytique local permet d'atteindre des fréquences plus élevées mais l'épaisseur du matériau considéré doit être grande devant la valeur de l'épaisseur de peau.

En première approximation, à l'aide de notre modèle, nous pouvons évaluer l'erreur engendrée sur la position du capteur par la présence d'une plaque conductrice (ce qui a notamment été confirmé à partir des mesures effectuées lors de la phase de validation expérimentale). La présence de la plaque utilisée en test engendre une variation d'environ 1300 nT sur la mesure du champ magnétique en première position de Gauss (sur l'axe de la bobine) à 20 cm de la source magnétique. Cette modification de la valeur du champ généré par la source peut susciter, par exemple, une erreur de 32 mm sur la composante d'axe Ox ou de 2-3 mm sur la composante d'axe Oz , axe de la bobine.

On voit donc tout l'intérêt d'un tel modèle si on veut calibrer un dispositif en tenant compte de son environnement électromagnétique complexe.

CONCLUSION

La localisation spatiale d'outils chirurgicaux offre de nouvelles perspectives aux praticiens. Différentes solutions technologiques ont été développées pour réaliser cette fonctionnalité. On distingue notamment trois modalités principales : les modalités mécanique, optique et magnétique.

Les localisateurs magnétiques sont les seuls systèmes à permettre une localisation à travers des tissus mous et même des obstacles plus solides. Le principe employé par ces systèmes magnétiques consiste à « remplir » le volume de capture à l'intérieur duquel on cherche à localiser une cible instrumentée par un champ magnétique dont l'expression est parfaitement connue. Le champ magnétique utilisé doit également permettre de « coder » l'espace en établissant un lien bijectif entre les six paramètres de localisation et les valeurs du champ magnétique généré par la source. L'expression du champ créé par une source magnétique en un point de l'espace est une fonction de la position relative source/point. En fonction de sa position, la source fournit donc au capteur une information différente. L'interprétation de la mesure du capteur donne une information sur la position de la source. Avec suffisamment de mesures indépendantes, il est alors possible de déterminer les paramètres de localisation du capteur. Différentes méthodes d'alimentation des sources magnétiques sont utilisées pour la mise en œuvre de ces systèmes. On distingue notamment les systèmes à courants continus et les systèmes alternatifs.

Les performances des systèmes magnétiques actuels, de l'ordre du millimètre pour les plus performants, satisfont au cahier des charges de certaines applications cliniques dont la précision requise est généralement supérieure au millimètre.

Cependant, nous avons montré que les performances de ces localisateurs magnétiques sont rapidement dégradées dans des conditions « normales » d'utilisation. Les erreurs peuvent être de l'ordre de plusieurs millimètres pour les plus significatives. Ces imprécisions ont été mises en évidence et sont notamment provoquées par la présence de matériaux métalliques dans la zone de fonctionnement du localisateur. Ces matériaux engendrent en effet des perturbations électromagnétiques qui modifient la répartition théorique du champ généré par les sources magnétiques du système de localisation spatiale.

La résolution des problèmes d'imprécision qui nuisent au fonctionnement de ces systèmes magnétiques passe par une meilleure compréhension des phénomènes électromagnétiques engendrés par la présence de matériaux métalliques dans le champ opératoire du système. De nombreux travaux relatifs au problème de précision globale des localisateurs magnétiques sont actuellement menés et les effets occasionnés par ces matériaux sont notamment évalués.

Notre étude s'inscrit dans la continuité de ces travaux antérieurs. Nous avons développé un modèle numérique des phénomènes électromagnétiques créés dans des milieux conducteurs et/ou magnétiques utilisant la méthode des éléments finis. La modélisation de ces phénomènes nécessite la prise en compte de plusieurs paramètres : nature et fréquence d'excitation du courant source, matériaux et propriétés des milieux, prise en compte des sauts des propriétés électriques et magnétiques. La formulation utilisée, tout à fait générale, permet la prise en compte de ces divers paramètres. Le modèle développé est basé sur une utilisation conjointe d'une formulation classique en quadrivecteur potentiel des phénomènes d'induction électromagnétique et d'un modèle analytique local basé sur la prise en compte analytique de l'effet de peau dans les conducteurs.

L'aspect magnétique, également nécessaire pour simuler les conditions pratiques d'utilisation des systèmes de localisation spatiale, ne pose pas de problème particulier car la formulation a déjà été contrôlée. La pertinence des résultats fournis par la méthode semi-analytique dans des conducteurs a dans un premier temps été vérifiée sur des géométries synthétiques. Le comportement de certaines grandeurs électromagnétiques et plus particulièrement des courants induits dans une plaque conductrice a notamment pu être évalué. Une analyse plus approfondie des résultats du modèle développé a dans un second temps pu être effectuée sur des géométries réelles tridimensionnelles. L'accord entre les résultats de la modélisation et les données expérimentales est notamment très bon dans les zones de haute énergie, plusieurs dizaines de milliers de nanotesla, où la précision relative obtenue est inférieure à 10 % de la valeur locale du champ ambiant. La précision absolue, définie par rapport au champ maximal généré par la source magnétique utilisée, est excellente car égale à 2 %.

Deux techniques numériques différentes (modèle polynomial/modèle analytique local) ont été mises en œuvre et comparées. Les domaines de validité ont notamment été mis en évidence, leur cohérence et leur complémentarité ont été démontrées. Le modèle polynomial classique est cependant rapidement limité en pratique par la capacité à mailler finement les zones où le champ varie brusquement et par la capacité à converger. Le modèle analytique local permet d'atteindre des fréquences beaucoup plus élevées.

L'outil de modélisation développé est opérationnel et la simulation de dispositif complet est d'ores et déjà envisageable. Cet outil peut cependant être encore amélioré. La précision des résultats obtenus pourrait par exemple être augmentée en effectuant un calcul en perturbation. L'utilisation d'une formulation analytique, gérant les discontinuités du champ d'un bord à l'autre d'une plaque conductrice d'épaisseur restreinte, permettrait d'enrichir les domaines de validité des modélisations utilisées en autorisant le calcul des phénomènes électromagnétiques lorsque l'épaisseur de peau et l'épaisseur de la plaque sont du même ordre de grandeur. La prise en compte de l'effet de peau dans des éléments de forme cylindrique contribuerait également à augmenter les domaines d'utilisation de cet outil de simulation.

Les perspectives d'utilisation de cet outil de modélisation sont nombreuses. L'exploitation ultérieure du modèle numérique développé dans cette étude est rendue possible entre autres par la généralité de la formulation et la précision des résultats obtenus. La simulation de dispositif complet de localisation spatiale permet en outre de comprendre et d'expliquer les perturbations subies en conditions opérationnelles par les systèmes magnétiques.

Le modèle développé prend tout son intérêt si on cherche à valider la fiabilité d'un dispositif existant en tenant compte de son environnement d'utilisation effectif. Il sera également très utile pour effectuer des simulations proches des situations expérimentales afin d'évaluer les diverses performances des futurs outils de contrôle qui devront être mis au point pour attester du bon fonctionnement de ces systèmes magnétiques de localisation spatiale qui doivent encore progresser dans leur fiabilité.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [AL-DIN97] M. S. N. Al-Din, A. F. Kader, J. Al-Samarai
"A new method to compute Eddy current losses by the finite element method", IEEE industry Applications Society, Annual Meeting, Paper Ref. 97301, october 1997
- [ACKER95] *"Magnetic location system with adaptative feedback control"*, PCT/US96/08411, WO96/41119, 1996
- [ASCENSION] *"Flock of birds. Six degrees-of-freedom measurement device"*, Technical description of DC magnetic trackers
- [ASCENSION96] *"Hybrid Motion tracker"*
 US 5831260, 1996
- [BIDDLECOMBE82] C. S. Biddlecombe, E. A. Heighway, J. Simkin & C. W. Trowbridge
"Methods for Eddy current computation in three dimensions", IEEE Trans. Magn., vol 18, n°2, 492-497, 1982
- [BIOSENSE94] *"Medical diagnosis, treatment and imaging system"*, WO/05768, 1994
- [BIRKFELLNER98] W. Birkfellner, F. Watzinger, F. Wanschitz, G. Eislidis, C. Kollmann, D. Rafolt, R. Nowotny, R. Ewers and H. Bergmann
"Systematic distortions in magnetic position digitizers", Medical Physics, vol 25, n°11, 2242-2248, 1998
- [BIRO89a] O. Biro, K. Preis, W. Renhart
"Finite element analysis of 3D multiply connected Eddy current problems", IEEE Trans. Magn., vol 25, n°5, 4009-4011, 1989

- [BIRO89b] O. Biro, K. Preis
"On the use of the vector magnetic potential in the finite element analysis of three-dimensional Eddy currents", IEEE Trans. Magn., vol 25, n°4, 3145-3159, 1989
- [BIRO90] O. Biro, K. Preis
"Finite element analysis of 3-D Eddy current", IEEE Trans. Magn., vol 26, n°2, 418-423, 1990
- [BIRO93] O. Biro, K. Preis, W. Renhart, G. Vrisk, K. R. Richter
"Computation of 3-D current driven skin effect problems using a current vector potential", IEEE Trans. Magn., vol 29, n°2, 1325-1328, 1993
- [BLANPAIN79] R. Blanpain,
"Traitement en temps réel du signal issu d'une sonde magnétométrie pour la détection d'anomalie magnétique",
Thèse de Docteur-Ingénieur de l'INPG, Octobre 1979.
- [BLANPAIN80] R. Blanpain, Chiron
"Développement en termes multipolaires de l'induction magnétique et caractérisation des espaces vectoriels des signaux de mesures, à proximité d'un volume de matière aimantée ou de distribution de courant", Notice technique, CENG-CEA LETI/MA n°1408, 1980.
- [BRYSON92] S. Bryson
"Measurement and calibration of static distortion of position data from 3D trackers", Technical Report RNR-92-011, NASA, 1992
- [CARITU96] Y. Caritu
"Système de détection/localisation de mobile ferromagnétique par un réseau de magnétomètres haute sensibilité",
Thèse de Doctorat, Grenoble, 1996
- [CLEARY03] K. Cleary, G. Corral, J. Tang, E. Levy and N. Glossop
"Orientation accuracy of a magnetic tracking device for image-guided interventions", CARS'03, 2003

- [COULOMB81]** J. L. Coulomb
"Analyse tridimensionnelle des champs électriques et magnétiques par la méthode des éléments finis",
 Thèse d'état, Grenoble, 1981
- [CROUCH90]** D. G. Crouch, L. Kehl and J. R. Krist
"OPTOTRAK : at last a system with resolution of 10 μm ", in J. S. Walton, editor, Mini Symposium on Image-Based Motion Measurement, SPIE, August/September 1990
- [DURAND68]** E. Durand
"Magnétostatique", Éditions Masson, 1968
- [EMSON91]** C. Emson
"Finite element methods applied to electromagnetic field problems",
 Méthodes numériques en électromagnétisme, Éditions Eyrolles, 149-274, 1991
- [FRIED95]** M. P. Fried, J. Kleefeld and R. Taylor
"A new armless image guidance system for endoscopic sinus surgery", American Academy of Otolaryngology – Head and Neck Surgery meeting, New Orleans, 1995
- [GUÉRIN02]** C. Guérin
"Modélisation des régions minces et filaires",
 Dans G. Meunier, *"Électromagnétisme et problèmes couplés"*, Hermès, 111-141, 2002
- [GUNKEL95]** A. R. Gunkel, W. Freysinger, W. F. Thumfart and M. J. Truppe
"Application of the ARTMA image-guided navigation system to endonasal sinus surgery", Computer Assisted Radiology (CAR'95), 1147-1151, Berlin, 1995
- [JACOBS89]** J. A. Jacobs
"Geomagnetism", Edited by J. A. Jacobs, Academic Press, 1989

- [KAMEARI88] A. Kameari
"Three dimensional Eddy current calculation using finite element method with A - V in conductor and Ω in vacuum", IEEE Trans. Magn., vol 24, n°1, 118-121, 1988
- [KIRSCH00] S. Kirsch, C. Schilling, P. G. Seiler, H. Blattmann, R. K. Muench
"A novel tracking technique for the continuous precise measurement of tumour positions in conformal radiotherapy", Phys. Med. Biol., vol 45, 103-110, 2000
- [KLIMEK96] L. Klimek, R. Mosges and G. Schlondorff
"Long-term experience with different types of localization systems in skull-base surgery",
In R. Taylor, S. Lavallée, G. Burdea and G. Mosges, editors,
Computer-integrated surgery : technology and clinical applications,
MIT Press, Cambridge, MA, 635-638, 1996
- [KOSUGI88] Y. Kosugi, E. Watanabe and J. Goto
"An articulated neurosurgical navigation system using MRI and CT images", IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 35(2), 147-152, 1988
- [KRAUS91] J. D. Kraus
"Electromagnetics", McGraw-Hill, 1991
- [LENZ90] J. E. Lenz
"A review of magnetic sensors", Proceedings of the IEEE, vol 78, n°6, 1990
- [LETI97] J. M. Fedeli, H. Joinsten, J. M. Leger, T. Thomas, D. Duret
"Etude de microfluxgates pour applications spatiales", Capteurs pour l'Espace (Innocap 97), LETI (CEA/Technologies Avancées), Grenoble
- [LUONG97] H. T. Luong, Y. Marechal, G. Meunier
"Computation of 3-D Eddy current problems using cutting surfaces", IEEE Trans. Magn., vol 33, n°2, 1314-1317, 1997

- [MARMULLA97] R. Marmulla, M. Hilbert and H. Niederdellmann
"Immanent precision of mechanical, infrared and laser guided navigation systems for CAS", in K. Inamura, H. U. Lemke, M. W. Vannier, editors, Proceedings of the 11th International Symposium and Exhibition, CAR'97, 863-865, 1997
- [MASSÉ83] P. Massé
"Analyse méthodologique de la modélisation numérique des équations de la physique des milieux continus à l'aide de la méthode des éléments finis. FluxExpert, un système d'aide à la conception de logiciels",
Thèse d'état, Grenoble, 1983
- [MASSÉ84] P. Massé
"Modelling of continuous media methodology and computer-aided design of finite element programs", IEEE Trans. Magn., vol 20, n°5, 1885-1890, 1984
- [MASSÉ97] P. Massé
"Les modèles physico-mathématiques de l'induction",
Document interne, LETI/DSIS/SSIT, 1997
- [MILNE96] A. D. Milne, D. G. Chess, J. A. Johnson and G. J. W. King
"Accuracy of an electromagnetic tracking device : a study of the optimal operating range and metal interference", J. Biomechanics, vol 29, n°6, 791-793, 1996
- [MORISUE82] T. Morisue
"Magnetic vector potential and electric scalar potential in three-dimensional Eddy current problem", IEEE Trans. Magn., vol 18, n°2, 531-535, 1982
- [MORISUE93] T. Morisue
"A comparison of the Coulomb gauge and Lorentz gauge, Magnetic vector potential formulations for 3D Eddy current calculations", IEEE Trans. Magn., vol 29, n°2, 1372-1375, 1993
- [MURRY03] H. F. Murry
"AC magnetic trackers for biomedical application, now and in the near future", SPIE vol. 2676, 14-20, 2003

- [NIXON98] M. A. Nixon, B. C. McCallum, W. R. Fright and N. B. Price
"The effects of metals and interfering fields on electromagnetic trackers", Presence, vol 7, n°2, 204-218, 1998
- [OKABE79] M. Okabe
"Analytical expression for gravity anomalies due to homogeneous polyhedral bodies and translation into magnetic anomalies", Geophysics, vol 44, n°4, 730-741, 1979
- [POLHEMUS75] *"Tracking and determining orientation of object using Coordinate transformation means and process"*
US 3983474, 1975
- [POWELL64] M. J. D. Powell
"An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives", The Computer Journal, vol 7, 155-162, 1964
- [POYET96] A. Poyet
"Contrôle redondant de la position d'un robot par capteurs externes, applications en milieux médical et industriel",
Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996
- [PRIMDAHL79] F. Primdahl
"The fluxgate magnetometer", J. Phys. E. Sci. Instrum., vol 12, 241-253, 1979
- [RAAB79] F. H. Raab, E. B. Blood, T. O. Steiner, H.R. Jones
"Magnetic position and orientation tracking system", IEEE Trans. Aero. And Electro., vol 15, n° 5, 709-718, 1979
- [RENHART88] W. Renhart, H. Stögner, K. Preis
"Calculation of 3D Eddy current problems by finite element method using either an electric or a magnetic vector potential", IEEE Trans. Magn., vol 24, n°1, 122-125, 1988

- [SCHMERBER97] S. Schmerber, B. Chen, S. Lavallée, J. P. Chirossel, P. Cinquin, A. Poyet, M. Coulomb and E. Reyt
“Markerless hybrid registration method for computer assisted endoscopic ENT surgery”, in H. U. Lemker et al., editors, *Computer Assisted Radiology and Surgery Proc.*, 799-806, Elsevier, Science B. V., 1997
- [SHPUN97] V. S. Shpun, L. Gepstein, G. Hayam, S. A. Ben-Haim
“Guidance of radiofrequency endocardial ablation with real-time three-dimensional magnetic navigation system”, *Circulation*, 96:2016-2021, 1997
- [TIAN99] X. Tian, K. V. Ling and W. S. Ng
“Magnetic tracker calibration for an augmented reality system for therapy”, *Proc. Instn Mech. Engrs*, vol 215, 51-59, 1999
- [TIMC92] *Northern Digital Optotrak Principles*
 Technical Report, TIMC, 1992
- [TRAXTAL] *Tools and Instruments for Computer Assisted Surgery and Image Guided Surgery*
www.traxtal.com
- [WYNN75] W. M. Wynn, C. P. Frahm, P. J. Carroll, R. H. Clark, J. Wellhoner, M. J. Wynn
“Advanced superconducting gradiometer/magnetometer arrays and a novel signal processing technique”, *IEEE Trans. Magn.*, vol 11, n°2, 701-707, 1975
- [YABUKAMI00] S. Yabukami, H. Kikuchi, M. Yamaguchi, K. I. Arai, K. Takahaschi, A. Itagaki, N. Wako
“Motion capture system of magnetic markers using three-axial magnetic field sensor”, *IEEE Trans. Magn.*, vol 36, n°5, 3646-3648, 2000

La localisation spatiale d'outils chirurgicaux par systèmes électromagnétiques alternatifs. Applications et domaines de validité des modélisations numériques

Les localisateurs magnétiques sont les seuls systèmes de localisation spatiale à permettre une localisation intra-corporelle. Cependant, les performances de ces systèmes sont fréquemment dégradées dans des conditions « normales » d'utilisation.

Les erreurs constatées, de l'ordre de plusieurs millimètres pour les plus significatives, sont notamment provoquées par la présence de matériaux métalliques dans la zone de fonctionnement du localisateur.

Ces matériaux engendrent des perturbations électromagnétiques qui modifient les valeurs du champ généré par les sources magnétiques du localisateur.

Nous présentons un modèle numérique des phénomènes d'induction électromagnétiques créés dans des milieux conducteurs et/ou magnétiques avec la méthode des éléments finis, utilisant le logiciel FluxExpert.

Deux techniques numériques différentes ont été mises en œuvre et comparées. Les résultats obtenus ont été validés. La cohérence et la complémentarité des domaines de validité ont été démontrées.

Mots-clés :

Gestes médico-chirurgicaux assistés par ordinateurs, Localisation spatiale en six dimensions, Électromagnétisme, Simulation numérique

Spatial localization of surgical tools using electromagnetic tracking devices. Applications and validity domains of numerical modellings

Magnetic tracking devices are the only systems that allow movement tracking of surgical tools inside the human body.

Nevertheless, when used in a typical working environment, these systems are usually disturbed by electromagnetic fields induced in nearby metals.

The presence of metallic objects within the working field results in measurement errors which can be important, several millimeters for the most significant.

Three-dimensional finite element modelling is presented which is performed with FluxExpert software. This model is used to study the effects of the two metal-related phenomena that impacts the performance of electromagnetic based trackers : eddy currents in conductors and ferromagnetism.

Two numerical techniques have been developed. Various controles and particularly an experimental investigation were undertaken to validate the numerical results. Precision and validity domains of the numerical modellings have also been determined.

Keywords :

Computer Assisted Surgery, Electromagnetic trackers, six dimensions localization, Numerical modelling