TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les nombreuses contributions de l'analyse p-adique à la théorie des nombres ont motivé le développement d'une géométrie analytique sur $\mathbb{Q}_p$, analogue à la géométrie analytique complexe. Mais les corps non-archimédiens étant totalement discontinus, ils admettent trop de fonctions localement développables en série entière pour que l'approche naïve d'une telle théorie soit fructueuse. Afin de palier à ce problème, de nombreuses théories ont vu le jour : les fibres génériques de schémas formels de A. Grothendieck et M. Raynaud ([Gro60], [Ray74]), les espaces analytiques rigides de J. Tate ([Tat71]), les espaces adique de R. Huber ([Hub93], [Hub94]), les espaces analytiques de V. Berkovich ([Ber90]), etc. Cette dernière, à laquelle on doit de nombreuses applications, notamment dans le programme de Langlands, en théorie de Hodge p-adique et en dynamique, est riche de bonnes propriétés topologiques : les espaces y sont localement compacts, localement connexes par arc et localement contractiles. C'est aussi dans ce cadre qu'est définie pour la première fois une notion de topologie étale analytique sur $\mathbb{Q}_p$ ([Ber93]), motivée par une conjecture de Carayol et Drinfeld concernant le programme de Langlands ([Car90]). Notons que cette conjecture a été démontrée *via* ces outils, de même que l'a été une conjecture de Deligne sur les cycles évanescents ([Ber94]).

De plus, la géométrie de Berkovich présente un autre intérêt : les espaces analytiques, communément définis sur des corps complets non-archimédiens, peuvent en fait être définis sur n'importe quel anneau de Banach. En particulier, on peut construire des espaces analytiques sur les anneaux $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Z}$, tous deux munis de la valeur absolue usuelle. Dans le premier cas, on retrouve exactement les espaces analytiques complexes tandis que, dans le second cas, on obtient des espaces fibrés en espaces analytiques complexes et p-adiques. Bien que ces exemples soient donnés dans le premier chapitre de [Ber90], les espaces analytiques sur $\mathbb{Z}$ ne sont pas plus étudiés dans cet ouvrage. La première description approfondie d'un tel espace est celle, due à J. Poineau, présentée dans [Poi10] et qui traite le cas de la droite affine.

Dans cette thèse, on se propose d'étudier la topologie étale des espaces analytiques sur $\mathbb{Z}$ ou sur un autre anneau d'entiers de corps de nombres. Pour ce faire, on développe d'abord la théorie des morphismes étales entre de tels espaces, induisant un isomorphisme local entre les fibres complexes et un morphisme étale au sens de [Ber93] entre les fibres p-adiques. On traite ces deux cas de façon unifiée. Ensuite, on étudie la structure « étale locale » de différentes classes de morphismes ainsi que le groupe fondamental étale. Les méthodes utilisées permettent d'obtenir les résultats sur une classe d'anneaux plus générale, comprenant les corps valués complets et les anneaux de valuation discrète.

Dans le premier chapitre, on démontre des propriétés générales des espaces analytiques. Les deux premières sections contiennent principalement des résultats issus de travaux antérieurs dus à Berkovich, Lemanissier et Poineau : la première section est consacrée aux espaces sur un anneau de Banach quelconque tandis que la deuxième section traite d'espaces sur des classes d'anneaux plus restreintes (*anneaux de base géométrique*, définition 1.2.5 et *anneaux de Dedekind analytique*, définition 1.2.19). Soit S un espace analytique sur un anneau de base géométrique. Dans la troisième section, on étudie la notion d'espaces analytiques relatifs, au-dessus de S. On y trouvera notamment la propriété universelle des espaces affines (proposition 1.3.3) ainsi que la caractérisation suivante des morphismes finis :

***Théorème* (Théorème 1.3.14).** — *Un morphisme $f : X \to S$ d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques est fini si et seulement si le faisceau de $\mathcal{O}_S$-algèbres $f_*\mathcal{O}_X$ est cohérent.*

La quatrième section est consacrée aux propriétés essentielles des morphismes *rigides épais* qui sont au cœur de la démonstration du théorème 2.1.3. Dans la cinquième et dernière section, on étudie la dimension de Krull des anneaux locaux en certains points particuliers ; ces résultats sont utilisés afin de démontrer le corollaire 2.2.5.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des morphismes plats, non ramifiés, étales et lisses. Dans la première section, on établit des critères par fibres et par analytification pour les morphismes plats. On note l'utilisation centrale du théorème 2.1.3. La deuxième section se concentre sur le critère de ramification par fibres et ses corollaires, notamment le critère de ramification par analytification. Les résultats concernant la structure locale des morphismes non ramifiés se trouvent dans la troisième section, dont on notera le critère suivant :

***Proposition* (Proposition 2.3.6). —** *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $x \in X$. Alors $f : X \to S$ est non ramifié en x si et seulement si le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_S X$ est un isomorphisme local en x.*

C'est aussi dans cette section que l'on trouvera la définition de morphisme étale, dont l'étude systématique est faite dans la section 4. Outre les critères par fibres et par analytification, on notera la description locale suivante :

***Proposition* (Corollaire 2.4.5). —** *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Alors f est étale en x si et seulement si on dispose d'un polynôme unitaire $P(T) \in \mathcal{O}_s[T]$ dont l'image dans $\kappa(s)[T]$ est irréductible et séparable et tel que f induise un isomorphisme :*

$$\mathcal{O}_s[T] \Big/ (P(T)) \cong \mathcal{O}_x.$$

Dans la cinquième et dernière section de ce chapitre, on applique les résultats des sections précédentes afin d'étudier les morphismes lisses.

Le troisième chapitre adopte un point de vue plus topologique, au sens de la topologie étale. Dans la première section, on étudie le caractère local au but des morphismes non ramifiés et étales ainsi que leur structure locale pour cette topologie :

***Proposition* (Corollaire 3.1.11). —** *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $s \in S$. On suppose que f est non ramifié (resp. étale) et fini. Il existe alors un voisinage étale $(U, \bar{s}) \to (S, s)$ de s ainsi qu'une décomposition finie*

$$X_U = \coprod_i W_i$$

de sorte que $W_i \to U$ est une immersion fermée (resp. un isomorphisme).

L'objectif de la seconde section est d'établir l'existence et les premières propriétés du groupe fondamental étale d'un espace analytique en utilisant le formalisme des catégories galoisiennes. En particulier, on obtient :

***Théorème* (Corollaire 3.2.12). —** *Soient S un espace $\mathcal{A}$-analytique et $\bar{s}$ un point géométrique de S. Alors la catégorie des revêtements étales de S est équivalente à la catégories des $\pi_1^{\text{ét}}(S, \bar{s})$-ensembles finis.*

CHAPITRE 1

ESPACES ANALYTIQUES

L'objectif de ce chapitre est de démontrer certaines propriétés générales des espaces analytiques. On y rappelle la définition d'espaces analytiques sur un anneau de Banach $\mathcal{A}$ puis celle d'*anneau de base géométrique*, à laquelle on restreindra notre base $\mathcal{A}$ pour toute la suite du document. De plus, une partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des espaces analytiques au-dessus d'une base S elle-même analytique sur $\mathcal{A}$. Parmi ces résultats, on peut noter ceux concernant les morphismes *rigides épais* qui constituent un outil central dans la stratégie de démonstration des critères par fibres dans le chapitre 2.

1.1. Espaces $\mathcal{A}$-analytiques

L'objectif de cette section est de rappeler la définition d'espace analytique sur un anneau de Banach quelconque présentée dans le premier chapitre de [Ber90]. Le lecteur trouvera une référence plus précise en [LP20], notamment dans les chapitres 1 et 2.

Dans cette section, $n \in \mathbb{N}$ et $(\mathcal{A}, \|.\|_{\mathcal{A}})$ désigne un anneau de Banach, c'est-à-dire un anneau normé et complet pour cette norme.

Définition 1.1.1. — Une application $|.| : \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathbb{R}_+$ est une *semi-norme multiplicative sur* $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ *bornée sur* $\mathcal{A}$ si, pour tout $P, Q \in \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ et pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a :
- $|0| = 0$,
- $|1| = 1$,
- $|P + Q| \leq |P| + |Q|$,
- $|PQ| = |P||Q|$,
- $|a| \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$.

Définition 1.1.2. — On appelle *espace affine analytique de dimension* n *sur* $\mathcal{A}$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ bornées sur $\mathcal{A}$. Cet ensemble est noté $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. On pose $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathbb{A}^0_{\mathcal{A}}$.

On munit $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ de la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire la topologie la plus grossière telle que les applications d'évaluations $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}_+$, $|.| \mapsto |P|$ soient continues pour $P \in \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$.

Proposition 1.1.3 **([Poi13, Corollaire 6.8]).** — *Le morphisme naturel* $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ *est ouvert.*

On pensera aux éléments de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ comme aux points d'un espace et, si $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, on notera $|.|_x : \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathbb{R}_+$ la semi-norme associée. On cherche à présent à construire un faisceau structural sur $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$.

Définition 1.1.4. — Soit $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. L'idéal $\ker(|.|_x) \subset \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ est premier et $|.|_x$ induit une valeur absolue sur

$$\mathrm{Frac}\left(\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \big/ \ker(|.|_x)\right).$$

Le complété de ce corps est appelé *corps résiduel complété en* x et noté $\mathcal{H}(x)$.

On note $\mathrm{ev}_x : \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{H}(x)$ l'application $f \mapsto |f|_x$. Si $f \in \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$, $\mathrm{ev}_x(f)$ est noté $f(x)$.

Définition 1.1.5. — Soit $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ une partie compacte. Le localisé de $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ en $\{f \in \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \mid \forall x \in V, f(x) \neq 0\}$ est appelé *anneau des fractions rationnelles sans pôles sur* V et noté $\mathcal{K}(V)$. L'application $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathbb{R}_+$, $P \mapsto \max_{x \in V}(|P|_x)$ s'étend en une semi-norme sur $\mathcal{K}(V)$, appelée *semi-norme uniforme sur* V et notée $\|.\|_V$.

Définition 1.1.6. — Soit $U \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ un ouvert. L'ensemble des applications $f : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{H}(x)$ vérifiant, pour tout $x \in U$:
- $f(x) \in \mathcal{H}(x)$
- il existe un voisinage compact V de x dans U et une suite d'éléments de $\mathcal{K}(V)$ qui converge vers $f|_V$ pour la semi-norme uniforme sur V.

est noté $\mathcal{O}(U)$.

Pour tout $x \in U$, l'application d'évaluation ev_x s'étend à $\mathcal{O}(U)$ et, si $f \in \mathcal{O}(U)$, $\mathrm{ev}_x(f)$ est encore noté $f(x)$.

Le foncteur contravariant $V \mapsto \mathcal{O}(V)$ est un faisceau munissant $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ d'une structure d'espace localement annelé. Si x est un point de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, le corps résiduel de $\mathcal{O}_x$ est appelé *corps résiduel en* x et noté $\kappa(x)$. On définit à présent les notions d'espace $\mathcal{A}$-analytique et de morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques.

Définition 1.1.7. — Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $U \subset \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$ et $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ des ouverts. Un morphisme d'espaces localement annelés $(f, f^\sharp) : (U, \mathcal{O}_U) \to (V, \mathcal{O}_V)$ est un *morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques* si, pour tout $x \in U$, le morphisme $f^\sharp_x$ induit un plongement isométrique de corps $\kappa(f(x)) \to \kappa(x)$.

Définition 1.1.8. — Soit $U \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ un ouvert. Un *fermé analytique de U* est un espace localement annelé de la forme $(\mathrm{Supp}\,(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}), \iota^{-1}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}))$ où $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_U$ est un faisceau cohérent d'idéaux et $\iota : \mathrm{Supp}\,(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}) \hookrightarrow U$ est l'inclusion canonique. Dans ce cas, on dit que ι est une *immersion fermée.*

Un fermé analytique d'un ouvert de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est appelé *modèle local d'espace $\mathcal{A}$-analytique.* Un morphisme entre modèles locaux d'espace $\mathcal{A}$-analytique est un *morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques* s'il provient localement d'un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques entre ouverts d'espaces affines.

Remarque 1.1.9. — Une immersion fermée est un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques.

Définition 1.1.10. — Un *espace $\mathcal{A}$-analytique* est un espace localement annelé localement isomorphe à un modèle local d'espace $\mathcal{A}$-analytique. Les notions de *morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques* et d'*immersion fermée* se prolongent naturellement aux morphismes entre espaces $\mathcal{A}$-analytiques.

Si x est un point d'un espace $\mathcal{A}$-analytique, le corps résiduel de l'anneau local $\mathcal{O}_x$ sera encore noté $\kappa(x)$.

Remarque 1.1.11. — Contrairement à la construction des espaces analytiques sur un corps ultramétrique complet présentée dans [Ber90], les disques fermés ne sont pas des espaces $\mathcal{A}$-analytiques en général.

Définition 1.1.12. — Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques $X \to S$ est une *immersion ouverte* s'il induit un isomorphisme entre X et un ouvert de S.

Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques est une *immersion* s'il s'écrit comme la composée à gauche d'une immersion ouverte par une immersion fermée.

Proposition 1.1.13 **([LP20, Proposition 2.3.7]).** — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $\iota : Y \to S$ une immersion fermée induisant un isomorphisme $Y \cong \mathrm{Supp}\,(\mathcal{O}_S/\mathcal{I})$ où $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_S$ est un faisceau cohérent d'idéaux. Alors f se factorise par ι si et seulement si $f^*\mathcal{I} = 0$. Dans ce cas, cette factorisation est unique.*

Proposition 1.1.14 **([Poi13, Corollaire 5.3]).** — *Soient X un espace $\mathcal{A}$-analytique et $x \in X$. Alors le corps $\kappa(x)$ est hensélien.*

Corollaire 1.1.15. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$

ii) $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$

Démonstration. — D'après la proposition 1.1.14, $\kappa(s)$ est hensélien. Or, $\mathcal{H}(x)$ est le complété de $\kappa(x)$ et $\mathcal{H}(s)$ est celui de $\kappa(s)$. On obtient donc le résultat d'après [Ber93, Proposition 2.4.1]. □

1.2. Anneaux de base géométriques

On rappelle la définition, issue de [LP20], d'une classe d'anneaux contenant $\mathbb{Z}$ et possédant de bonnes propriétés permettant d'approfondir l'étude des espaces analytiques sur ceux-ci. Parmi les résultats principaux, on notera la cohérence du faisceau structural (théorème 1.2.7), l'existence de produits fibrés finis et d'un foncteur d'analytification des schémas (théorème 1.2.10) ainsi que des analogues du théorème de l'application finie (théorème 1.2.16) et du Nullstellensatz de Rückert (théorème 1.2.18).

Dans cette section, $\mathcal{A}$ désigne un anneau de Banach.

Définition 1.2.1. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ une partie compacte. On note $\mathcal{B}(V)$ le séparé complété de $\mathcal{K}(V)$ pour la semi-norme uniforme sur V. Le morphisme naturel $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \to \mathcal{B}(V)$ induit un morphisme d'espaces localement annelés $f_V : \mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. On dit que V est *spectralement convexe* si f_V induit un homéomorphisme $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \to V$ ainsi qu'un isomorphisme d'espaces localement annelés $f_V^{-1}(\mathring{V}) \to \mathring{V}$.

On notera qu'il est démontré dans [Poi10] que tout point de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ admet un système fondamental de voisinages compacts et spectralement convexes.

Définition 1.2.2. — Soient X un espace topologique et $x \in X$. Un système fondamental $\mathcal{V}_x$ de voisinages de x est *fin* s'il contient un système fondamental de voisinages de chacun de ses éléments.

Définition 1.2.3. — Soient $m, n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{V}_x$ un système fondamental fin de voisinages compacts spectralement convexes de x. On dit que $\mathcal{O}_x$ est *fortement régulier de dimension n relativement à $\mathcal{V}_x$* si $\mathcal{O}_x$ est noethérien de dimension n et s'il existe des éléments $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{m}_x$ vérifiant :

— pour tous $V \in \mathcal{V}_x$ et $i \in [\![1, \dots, n]\!]$, f_i appartient à l'image du morphisme naturel $\mathcal{B}(V) \to \mathcal{O}_x$,

— pour tout voisinage compact U de x, on dispose d'une famille de réels strictement positifs $(C_V)_{V \in \mathcal{V}_x}$ telle que, pour tout $f \in \mathfrak{m}_x$ appartenant à l'image du morphisme naturel $\mathcal{B}(U) \to \mathcal{O}_x$ et tout élément $V \in \mathcal{V}_x$ contenu dans $\mathring{U}$, on dispose de $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{B}(V)$ vérifiant, pour tout $i \in [\![1, \ldots, n]\!]$, $\|a_i\|_V \leq C_V \|f\|_U$ et $f = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$.

Définition 1.2.4. — Soient X un espace localement annelé et $x \in X$. Alors X *satisfait le principe du prolongement analytique en* x si, pour tout $f \in \mathcal{O}_x$ non nul, on dispose d'un voisinage ouvert $U \subset X$ de x tel que, pour tout $t \in U$, l'image de f dans $\mathcal{O}_t$ est non nulle. On dit que X *satisfait le principe du prolongement analytique* si c'est le cas en tout point.

Définition 1.2.5. — Un anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|.\|_{\mathcal{A}})$ est appelé *un anneau de base géométrique* si $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ satisfait le principe du prolongement analytique et si tout $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ admet un système fondamental $\mathcal{V}_x$ de voisinages d'intérieur connexe et vérifiant :

— $\mathcal{O}_x$ est fortement régulier de dimension ≤ 1 relativement à $\mathcal{V}_x$,

— Si $\mathcal{H}(x)$ est trivialement valué et de caractéristique positive alors, pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}_x$, il existe un fermé fini $\Gamma \subset V$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{B}(V)$, $\|f\|_\Gamma = \|f\|_V$ et tout point d'un tel voisinage V correspond à une semi-norme ultramétrique.

Exemple 1.2.6. — Les exemples suivants sont des anneaux de base géométriques :

— les corps valués complets,

— les anneaux d'entiers de corps de nombres $\mathcal{A}$ munis de la valeur absolue $\max_\sigma(|\sigma(.)|_\infty)$ où σ parcourt l'ensemble des plongements complexes de $\mathrm{Frac}(\mathcal{A})$ et $|.|_\infty$ désigne la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{C}$,

— les corps hybrides au sens de [LP20, Exemple 1.1.15],

— les anneaux de valuation discrète,

— les anneaux de Dedekind trivialement valués.

Dans la suite de cet article, $\mathcal{A}$ désignera un anneau de base géométrique.

***Théorème 1.2.7* ([Poi13, Théorème 11.9]).** — *Le faisceau structural d'un espace $\mathcal{A}$-analytique est cohérent.*

Lemme 1.2.8. — *Soient $\iota : X \hookrightarrow Y$ une immersion d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $x \in X$. Alors ι est plat en x si et seulement si c'est un isomorphisme local en x.*

Démonstration. — Si ι est une immersion alors on dispose d'un idéal $I \subset \mathcal{O}_y$ vérifiant $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_y/I$. On suppose que $\iota_x^\sharp : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ est plat. Comme $\mathcal{O}_y$ est noethérien, on déduit de [Stacks, Tag 05KK] que I est engendré par un idempotent

$e \in \mathcal{O}_y$. Or, $e \neq 1$ car $\mathcal{O}_y/I \neq 0$. L'anneau $\mathcal{O}_y$ étant local et donc connexe, on obtient $e = 0$. Cela signifie que $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_y$ et ι est un isomorphisme local en x. La réciproque est immédiate. □

Lemme 1.2.9. — *Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $y = f(x)$. Si $f_x^\sharp : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ est surjectif alors il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x tel que $f|_U$ soit une immersion.*

Démonstration. — L'idéal $I = \ker(f_x^\sharp) \subset \mathcal{O}_y$ est de type fini car $\mathcal{O}_y$ est noethérien et on choisit donc une famille génératrice finie d'éléments de I. Soit $V \subset Y$ un voisinage ouvert de y sur lequel ces générateurs sont définis et $U = f^{-1}(V)$. Ils engendrent alors un faisceau d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_V$ vérifiant $\mathcal{I}_y = I$ et $\left(f^*(\mathcal{I})\right)_x = 0$ et qui est cohérent d'après le théorème 1.2.7. Quitte à rétrécir U, on peut supposer $f^*(\mathcal{I}) = 0$. Alors, d'après la proposition 1.1.13, $f|_U : U \to V$ se factorise par l'immersion fermée $\iota : \mathrm{Supp}\,(\mathcal{O}_V/\mathcal{I}) \hookrightarrow V$. On note $g : U \to \mathrm{Supp}\,(\mathcal{O}_V/\mathcal{I})$ le morphisme obtenu. Comme $f_x^\sharp$ est surjectif, le morphisme $g_x^\sharp : \mathcal{O}_{g(x)} \cong \mathcal{O}_y/I \to \mathcal{O}_x$ est un isomorphisme, g est un isomorphisme local en x et $f|_U : U \to V$ est une immersion fermée. □

Théorème 1.2.10 **([LP20, Théorèmes 4.1.13 et 4.3.8])**
La catégorie des espaces $\mathcal{A}$-analytiques admet des produits fibrés finis ainsi qu'un foncteur d'analytification $\mathscr{X} \mapsto \mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ depuis la catégorie des $\mathcal{A}$-schémas localement de présentation finie.

Si $\mathscr{X}$ est un $\mathcal{A}$-schéma localement de présentation finie, on note $\rho : \mathscr{X}^{\mathrm{an}} \to \mathscr{X}$ le morphisme canonique.

Lemme 1.2.11 **(Preuve de [LP20, Lemme 6.5.2])**
Soient $f : \mathscr{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme entre $\mathcal{A}$-schémas localement de présentation finie et $s \in \mathscr{S}^{\mathrm{an}}$. On a alors un isomorphisme canonique :

$$\left(\mathscr{X}_{\rho(s)} \otimes_{\kappa(\rho(s))} \mathcal{H}(s)\right)^{\mathrm{an}} \cong \left(\mathscr{X}^{\mathrm{an}}\right)_s.$$

Lemme 1.2.12. — *Soient S un espace $\mathcal{A}$-analytique, X et Y des espaces au-dessus de S, $s \in S$ et $x \in X$ un point au-dessus de s tel que $\mathcal{H}(x)$ soit une extension séparable de $\mathcal{H}(s)$ de degré d. On note p_X et p_Y les projections $X \times_S Y \to X$ et $X \times_S Y \to Y$. Alors, pour tout point $y \in Y$, l'ensemble $p_X^{-1}(\{x\}) \cap p_Y^{-1}(\{y\})$ est fini et de cardinal inférieur à d. De plus, si $\mathcal{H}(y)$ contient $\mathcal{H}(x)$, alors $p_X^{-1}(\{x\}) \cap p_Y^{-1}(\{y\})$ est de cardinal d.*

Démonstration. — Soit $y \in Y$. On commence par remarquer que si y ne s'envoie pas sur s alors $p_X^{-1}(\{x\}) \cap p_Y^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. On peut donc supposer que $y \in Y_s$ et que les produits fibrés se font sur $\mathcal{H}(s)$. On pose $\{x\} \times_S \{y\} = p_X^{-1}(\{x\}) \cap p_Y^{-1}(\{y\})$.

Soient $n, m \in \mathbb{N}$, U (respectivement V) un voisinage ouvert de x (respectivement y) et $i : U \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathcal{H}(s)}$ et $j : V \hookrightarrow \mathbb{A}^m_{\mathcal{H}(s)}$ des immersions. Comme i et j induisent une immersion $X \times_{\mathcal{H}(s)} Y \hookrightarrow \mathbb{A}^{n+m}_{\mathcal{H}(s)}$ puis une bijection $\{x\} \times_{\mathcal{H}(s)} \{y\} \hookrightarrow \{i(x)\} \times_{\mathcal{H}(s)} \{j(y)\}$, on se ramène au cas $X = \mathbb{A}^n_{\mathcal{H}(s)}$ et $Y = \mathbb{A}^m_{\mathcal{H}(s)}$.

On sait que $\{x\}$ (respectivement $\{y\}$) est une partie compacte spectralement convexe de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{H}(s)}$ (respectivement $\mathbb{A}^m_{\mathcal{H}(s)}$). Donc, d'après la proposition [LP20, Proposition 4.4.9], on a $\mathcal{B}(\{x\} \times_{\mathcal{H}(s)} \{y\}) \cong \mathcal{B}(\{x\})\widehat{\otimes}^{\mathrm{sp}}_{\mathcal{H}(s)}\mathcal{B}(\{y\}) \cong \mathcal{H}(x)\widehat{\otimes}^{\mathrm{sp}}_{\mathcal{H}(s)}\mathcal{H}(y)$ qui s'écrit $\prod_{i=1}^{r} K_i$ où les K_i sont des extensions de $\mathcal{H}(s)$ et $r \leq d$ d'après [Wei95, Proposition III.2.2]. On en déduit que $\{x\} \times_{\mathcal{H}(s)} \{y\}$ est homéomorphe à $\mathcal{M}(\prod_{i=1}^{r} K_i)$ qui est composé de r points.

Pour conclure, il suffit de remarquer que, dans le cas où $\mathcal{H}(y)$ contient $\mathcal{H}(x)$, on a $\mathcal{H}(x)\widehat{\otimes}^{\mathrm{sp}}_{\mathcal{H}(s)}\mathcal{H}(y) \cong \prod_{d} \mathcal{H}(y)$. □

Proposition 1.2.13 **([LP20, Proposition 4.5.7]).** — *Soient S un espace $\mathcal{A}$-analytiques et $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques au-dessus de S. Alors le graphe $\Gamma_f : X \to X \times_S Y$ est une immersion.*

Définition 1.2.14. — Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques est *fini* s'il est fini au sens topologique, c'est-à-dire s'il est fermé à fibres finies.

Proposition 1.2.15 **([LP20, Proposition 5.1.8]).** — *Soient $f : X \to S$ un morphisme fini d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules et $s \in S$. Alors le morphisme naturel*

$$(f_*\mathcal{F})_s \longrightarrow \prod_{x \in X_s} \mathcal{F}_x$$

est un isomorphisme de $\mathcal{O}_s$-modules.

Théorème 1.2.16 **([LP20, Théorème 5.2.6]).** — *Soient $f : X \to S$ un morphisme fini d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors $f_*\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur S.*

Corollaire 1.2.17. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Si f est fini en x alors $\mathcal{O}_x$ est un $\mathcal{O}_s$-module de présentation finie.*

Démonstration. — On applique le théorème 1.2.16 au faisceau structural $\mathcal{O}_X$ et on en déduit que $\mathcal{O}_x$ est de type fini sur $\mathcal{O}_s$. De plus, $\mathcal{O}_s$ étant noethérien, on en déduit que $\mathcal{O}_x$ est de présentation finie. □

Théorème 1.2.18 **(Nullstellensatz de Rückert, [LP20, Théorème 5.5.5])** *Soient X un espace $\mathcal{A}$-analytique, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et $f \in \mathcal{O}(X)$. On suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Supp}\,(\mathcal{F})$. Alors, pour tout $x \in X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n \mathcal{F}_x = 0$.*

Même si la plupart des résultats de cet article traitent des espaces analytiques sur un anneau de base géométrique quelconque, certaines propriétés d'analytification ne sont établies que sur une classe plus restreinte d'anneaux que l'on définit maintenant.

Définition 1.2.19. — Un anneau de base géométrique $\mathcal{A}$ est un *anneau de Dedekind analytique* si :

— $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind,

— le morphisme $\rho : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ est surjectif,

— si $\xi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ est tel que $\mathcal{O}_\xi$ soit un corps alors, pour tout $x \in \rho^{-1}(\xi)$, $\mathcal{O}_x$ est un corps,

— si $\xi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ est tel que $\mathcal{O}_\xi$ soit un anneau de valuation discrète alors, pour tout $x \in \rho^{-1}(\xi)$, $\mathcal{O}_x$ est un anneau de valuation discrète et $\rho_x^\sharp : \mathcal{O}_\xi \to \mathcal{O}_x$ est le morphisme de complétion.

Exemple 1.2.20. — Les exemples 1.2.6 sont tous des anneaux de Dedekind analytiques.

Théorème 1.2.21 **([LP20, Théorème 6.6.4]).** — *On suppose que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique. Soit $\mathscr{X}$ un $\mathcal{A}$-schéma localement de présentation finie. Alors le morphisme d'analytification $\rho : \mathscr{X}^{\mathrm{an}} \to \mathscr{X}$ est plat.*

Corollaire 1.2.22. — *On suppose que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique. Soient $f : \mathscr{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme entre $\mathcal{A}$-schémas localement de présentation finie et $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{an}}$. Si f^{an} est plat en x alors f est plat en $\rho(x)$.*

Démonstration. — On note $\xi = \rho(x)$, $s = f^{\mathrm{an}}(x)$ et $\sigma = \rho(s) = f(\xi)$. D'après le théorème 1.2.21, les morphismes $\mathcal{O}_\xi \to \mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_\sigma \to \mathcal{O}_s$ sont plats. En particulier, $\mathcal{O}_x$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_s$ et $\mathcal{O}_\xi$ et on conclut par [Stacks, Tag 039V]. □

1.3. Espaces S-analytiques

Soient $\mathcal{A}$ un anneau de base géométrique et S un espace $\mathcal{A}$-analytique.

Définition 1.3.1. — On appellera *espace S-analytique* tout espace $\mathcal{A}$-analytique muni d'un morphisme vers S, appelé *projection sur S*. Si X et Y sont deux espaces S-analytiques, un *morphisme d'espaces S-analytiques $X \to Y$* est un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques qui commute aux projections vers S. On note $\mathrm{An}_{\mathcal{A}}$ la catégorie des espaces $\mathcal{A}$-analytiques et An_S la catégorie des espaces S-analytiques.

Si n est un entier, on appellera *espace affine S-analytique de dimension n* et on notera $\mathbb{A}^n_S$ le produit fibré $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \times_{\mathcal{A}} S$ et $\pi_S : \mathbb{A}^n_S \to S$ la projection sur S. On appellera alors *coordonnées de* $\mathbb{A}^n_S$ les relevées des coordonnées de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ par la projection $\mathbb{A}^n_S \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Si U est un sous-espace $\mathcal{A}$-analytique de $\mathbb{A}^n_S$ muni de la projection vers S induite par π_S, on dira que c'est un *modèle local d'espace S-analytique.*

Si $\mathscr{S}$ est un schéma et $n \in \mathbb{N}$, on notera encore $\mathbb{A}^n_{\mathscr{S}}$ l'espace affine schématique de dimension n au-dessus de $\mathscr{S}$. Afin d'alléger l'écriture, $\mathbb{A}^n_{\mathrm{Spec}(\mathcal{A})}$ sera noté $\mathbb{A}^{n,\mathrm{sch}}_{\mathcal{A}}$.

Lemme 1.3.2. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques. Alors X admet un recouvrement par des modèles locaux d'espace S-analytique et l'inclusion d'un tel modèle local dans X est un morphisme d'espaces S-analytiques.*

Démonstration. — Soient $U \subset X$ un modèle local d'espace $\mathcal{A}$-analytique, $n \in \mathbb{N}$ et $\iota : U \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ une immersion. D'après la proposition 1.2.13, le graphe $\Gamma_f : U \hookrightarrow U \times_{\mathcal{A}} S$ de $f|_U$ est une immersion. En la composant avec $\iota \times \mathrm{Id}_S : U \times_{\mathcal{A}} S \hookrightarrow \mathbb{A}^n_S$, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, hook, "\Gamma"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{A}^n_S \arrow[dl, "\pi_S"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

où Γ désigne $(\iota \times \mathrm{Id}_S) \circ \Gamma_f : U \hookrightarrow \mathbb{A}^n_S$. Comme Γ est une immersion, on en déduit que U est un modèle local d'espace S-analytique. On peut effectuer ce raisonnement pour un recouvrement de X par des modèles locaux d'espace $\mathcal{A}$-analytique et on en déduit le résultat. $\square$

Proposition 1.3.3. — *Soit $n \in \mathbb{N}$. Le préfaisceau sur An_S qui, à un espace S-analytique X, associe l'ensemble $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$ est représentable par $\mathbb{A}^n_S$. De plus, en notant $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées de $\mathbb{A}^n_S$, une transformation naturelle*

$$\mathrm{Hom}_S(X, \mathbb{A}^n_S) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$$

est donnée par $f \mapsto \Big(f^\sharp(T_1), \dots, f^\sharp(T_n)\Big)$.

Démonstration. — On suppose tout d'abord que S est un modèle local d'espace $\mathcal{A}$-analytique. On dispose alors de $m \in \mathbb{N}$ et d'une immersion $\iota : S \hookrightarrow \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$. Soient $\pi : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $(f_1, \dots, f_n) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$. On note $S_1, \dots, S_m$ les coordonnées de $\mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$ et $h_1, \dots, h_m \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ leurs relevés par ι. D'après [LP20, Proposition 4.1.1], on dispose d'un unique morphisme $g : X \to \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$ tel que, en notant encore $S_1, \ldots, S_m, T_1, \ldots, T_n$ les coordonnées de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$, on a $g^\sharp(S_i) = \pi^\sharp(h_i)$ pour $i \in [\![1, \ldots, m]\!]$ et $g^\sharp(T_j) = f_j$ pour $j \in [\![1, \ldots, n]\!]$. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_n} \\ S & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m} \end{array}.$$

Alors, en notant $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux définissant ι sur un certain ouvert de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m}$, on a $g^*(\pi_n^*(\mathcal{I})) = \pi^*(\iota^*(\mathcal{I})) = 0$ et, d'après [LP20, Proposition 2.3.7], g se factorise de façon unique par l'immersion $\mathrm{Id}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n} \times_{\mathcal{A}} \iota : \mathbb{A}_S^n \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$ définie par $\pi_n^*(\mathcal{I})$. On note $\varphi_{f_1,\ldots,f_n} : X \to \mathbb{A}_S^n$ le morphisme résultant de cette factorisation et on a ainsi construit une application $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n \to \mathrm{Hom}_S(X, \mathbb{A}_S^n)$, $(f_1, \ldots, f_n) \mapsto \varphi_{f_1,\ldots,f_n}$. De plus, on a bien $\varphi_{f_1,\ldots,f_n}^\sharp(T_j) = f_j$ pour tout $j \in [\![1, \ldots, n]\!]$ car $g^\sharp(T_j) = f_j$ par définition, et il reste à montrer que, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_S(X, \mathbb{A}_S^n)$, $\varphi_{f^\sharp(T_1),\ldots,f^\sharp(T_n)} = f$. Par construction, cela revient à montrer que $g = \widetilde{f}$, où $\widetilde{f}$ désigne la composée $(\mathrm{Id}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n} \times_{\mathcal{A}} \iota) \circ f$. Or, en notant $p : \mathbb{A}_S^n \to S$ la projection naturelle, on a

$$\widetilde{f}^\sharp(S_i) = f^\sharp(p^\sharp(h_i)) = \pi^\sharp(h_i) = g^\sharp(S_i)$$

pour tout $i \in [\![1, \ldots, m]\!]$ et $\widetilde{f}^\sharp(T_j) = f^\sharp(T_j) = g^\sharp(T_j)$ pour tout $j \in [\![1, \ldots, n]\!]$. On conclut par [LP20, Proposition 4.1.1].

On traite à présent le cas général. Soient $\pi : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $(f_1, \ldots, f_n) \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$. On pose $\{U_i\}_i$ un recouvrement de S par des modèles locaux d'espace $\mathcal{A}$-analytique et, pour tout i, $X_i = \pi^{-1}(U_i)$ et $\psi_i : \mathbb{A}_{U_i}^n \hookrightarrow \mathbb{A}_S^n$ l'immersion induite par $U_i \hookrightarrow S$. D'après le cas précédent, on dispose pour tout i d'un unique morphisme d'espaces S-analytiques $\varphi_i : X_i \to \mathbb{A}_{U_i}^n$ vérifiant $\varphi_i^\sharp(T_j) = f_j$ pour tout $j \in [\![1, \ldots, n]\!]$. L'existence d'un unique morphisme d'espaces S-analytiques $\varphi : X \to \mathbb{A}_S^n$ coïncidant avec $\psi_i \circ \varphi_i$ sur X_i pour tout i est alors assurée par [LP20, Proposition 2.1.23 i)]. De plus, pour $j \in [\![1, \ldots, n]\!]$, on a $\varphi^\sharp(T_j) = f_j$ car $\varphi_i^\sharp(\psi_i^\sharp(T_j)) = f_j$ pour tout i. Il reste donc à montrer que, si $f \in \mathrm{Hom}_S(X, \mathbb{A}_S^n)$ et si $f_j = f^\sharp(T_j)$ pour tout j, alors $\varphi = f$. Par construction, cela équivaut à montrer que f coïncide avec $\psi_i \circ \varphi_i$ sur X_i pour tout i, ce qui se déduit de la propriété universelle de φ_i. Cela conclut la démonstration. □

Pour $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}^+$ et V une partie de S, on note $D_V(r)$ le disque fermé $\{x \in \mathbb{A}_V^n \mid \forall i, |T_i(x)| \leq r\}$ et $D(r) = D_S(r)$.

Proposition 1.3.4. — *Tout point $s \in S$ admet un voisinage compact $V \subset S$ tel que, pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, le disque fermé $D_V(r)$ est compact. En particulier, pour tout disque $D(r)$, l'application $\pi_{|D(r)} : D(r) \to S$ est propre.*

Démonstration. — Soit $s \in S$. D'après [Poi22, Lemme 2.1], on dispose d'un voisinage compact V de s, d'une $\mathcal{A}$-algèbre de Banach $\mathcal{B}$ et d'un homéomorphisme $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}} \to \mathbb{A}^n_V$ dont on vérifie qu'il identifie $D_{\mathcal{B}}(r) = \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{B}} \mid \forall i, |T_i(x)| \leq r\}$ à $D_V(r)$. On déduit alors de [Poi10, Proposition 1.1.11] que $D_V(r)$ est compact. La deuxième assertion découle de [LP20, Lemme 4.4.5 ii)]. □

Corollaire 1.3.5. — *Soient $P \in \mathcal{O}(S)[T]$ un polynôme unitaire non constant et $X = \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_S}/P(T)\right)$. Alors le morphisme naturel $X \to S$ est fini.*

Démonstration. — Pour $s \in S$, la fibre X_s s'identifie à l'ensemble des orbites sous l'action galoisienne des racines de $P(T)$ et est donc finie. Il suffit alors de montrer que le morphisme $f : X \to S$ est propre. Soit $s \in S$. On note $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{A}^1_S$ l'immersion fermée naturelle. D'après la proposition 1.3.4, on dispose d'un voisinage compact $V \subset S$ de s tel que tout disque fermé $D_V(r)$ est compact. On note $W = \iota(f^{-1}(V))$, qui est un fermé de $\mathbb{A}^1_S$. Par le même raisonnement que dans la preuve de [Poi10, Corollaire 1.1.12], on peut trouver un rayon $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $W \subset D_V(r)$. Alors W est compact, ainsi que $f^{-1}(V)$, et on conclut par [LP20, Lemme 4.4.5 ii)]. □

Proposition 1.3.6. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques fini en un point $x \in X$ et $s = f(x)$. On dispose alors de voisinages ouverts $U \subset X$ de x et $V \subset S$ de s, de $n \in \mathbb{N}$ et de $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{O}_S(V)[T]$ unitaires et non constants de sorte que U soit un fermé analytique de*

$$\mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_V} \Big/ P_1(T_1), \ldots, P_n(T_n)\right).$$

Démonstration. — Comme f est fini en x, on dispose d'un voisinage U de x vérifiant $f^{-1}_{|U}(s) = \{x\}$. Alors, d'après [LP20, Lemme 5.2.3] et quitte à restreindre U, on dispose d'un voisinage ouvert V de s, de $n, l \in \mathbb{N}$, d'ouverts $U' \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et $V' \subset \mathbb{A}^l_{\mathcal{A}}$, et d'immersions fermées $V \hookrightarrow V'$ et $U \hookrightarrow U' \times_{\mathcal{A}} V'$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ U' \times_{\mathcal{A}} V' \arrow[r] & V' \end{tikzcd}.$$

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\pi_i : \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ la projection sur la coordonnée T_i et $U_i = \pi_i(U)$. Alors, d'après [LP20, Lemme 5.2.4] et quitte à restreindre V' et les

U_i, on dispose pour tout i de polynômes unitaires et non constants $P_i \in \mathcal{O}(V')[T]$ de sorte que U_i soit un fermé analytique de $\mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{V'}} \big/ P_i(T_i)\right)$. En particulier, en notant $Z = \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{V'}} \big/ P_1(T_1), \dots, P_n(T_n)\right)$, U s'identifie à $U \times_{\mathbb{A}^n_{V'}} Z$ et on note $\iota : U \hookrightarrow Z$ l'immersion obtenue par changement de base de $U \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{V'}$ par $Z \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{V'}$. D'après [LP20, Proposition 2.3.9], on dispose d'un voisinage ouvert W de $\iota(x)$ tel que $\iota^{-1}(W) \to W$ soit une immersion fermée. D'après le corollaire 1.3.5, la projection $Z \to V'$ est finie et donc, quitte à restreindre V' et W, on peut supposer que Z s'écrit $W \coprod Z'$. Alors W est un fermé analytique de Z et, quitte à restreindre U à $\iota^{-1}(W)$, on en déduit que U est aussi un fermé analytique de Z. On conclut en remarquant que U est un fermé analytique de $U \times_{V'} V$. □

Proposition 1.3.7. — *Soient $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Alors le morphisme naturel*

$$\mathcal{O}_s[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}(D_s(r))$$

induit un isomorphisme entre les complétés $(T_1, \dots, T_n)$-adiques.

Démonstration. — Un raisonnement standard ainsi qu'une récurrence simple permettent de se ramener au cas $S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $n = 1$. Pour V un voisinage compact de b dans S et $t > 0$, on note $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t\rangle$ l'algèbre des séries $\Sigma a_n T^n$ où $(a_n) \in \mathcal{B}(V)^{\mathbb{N}}$ est telle que $\sum \|a_n\|_V t^n$ converge. D'après [Poi13, Corollaire 2.7], le morphisme naturel

$$\varinjlim_{V \ni s, t > r} \mathcal{B}(V)\langle | T | \leq t\rangle \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_S}(D_s(r))$$

est un isomorphisme. Par exactitude à droite de $\varinjlim$, on a donc, pour tout $l \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_S}(D_s(r)) \big/ T^l &\cong \left(\varinjlim_{V \ni s, t > r} \mathcal{B}(V)\langle | T | \leq t\rangle\right) \big/ T^l \\
&\cong \varinjlim_{V \ni s, t > r} \mathcal{B}(V)\langle | T | \leq t\rangle \big/ T^l \\
&\cong \varinjlim_{V \ni s, t > r} \mathcal{B}(V)[T] \big/ T^l \\
&\cong \left(\varinjlim_{V \ni s} \mathcal{B}(V)[T]\right) \big/ T^l \\
&\cong \mathcal{O}_s[T] \big/ T^l
\end{aligned}$$

et on en conclut le résultat. □

Corollaire 1.3.8. — *Soient $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$ et $0_s \in \mathbb{A}^n_S$ le point 0 de la fibre au-dessus de s. Alors le morphisme naturel*

$$\mathcal{O}_s[T_1, \ldots, T_n] \longrightarrow \mathcal{O}_{0_s}$$

induit un isomorphisme entre les complétés $(T_1, \ldots, T_n)$-adiques.

Démonstration. — C'est la proposition 1.3.7 avec $r = 0$. □

Lemme 1.3.9. — *Soient $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$ et $\pi : \mathbb{A}^n_S \to S$ la projection naturelle. Alors le morphisme naturel*

$$\mathcal{O}_s[T_1, \ldots, T_n] \longrightarrow \left(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}\right)_s$$

induit un isomorphisme entre les complétés $(T_1, \ldots, T_n)$-adiques.

Démonstration. — On a, pour tout voisinage compact V de s et tout $t > 0$, un monomorphisme naturel $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t\rangle \hookrightarrow \mathcal{O}_s[\![T]\!]$. Cela induit, par une récurrence simple et [Poi13, Corollaire 2.7], un monomorphisme $\mathcal{O}(D(r)) \hookrightarrow \mathcal{O}_s[\![T_1, \ldots, T_n]\!]$ pour tout $r \geq 0$. De plus, si $r, r' \in \mathbb{R}^+$ vérifient $r' \geq r$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}(D_s(r')) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_s[\![T_1, \ldots, T_n]\!] \\ \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}(D_s(r)) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

est commutatif et, en particulier, $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}(D_s(r')) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}(D_s(r))$ est un monomorphisme. On déduit par un passage à $\varprojlim_r$ que $\left(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}\right)_s \longrightarrow \mathcal{O}_s[\![T_1, \ldots, T_n]\!]$ est aussi un monomorphisme. Il suffit alors de montrer que la suite $\mathcal{O}_s[T_1, \ldots, T_n] \longrightarrow \left(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}\right)_s \longrightarrow \mathcal{O}_s[\![T_1, \ldots, T_n]\!]$ induit des monomorphismes après complétion $(T_1, \ldots, T_n)$-adique. Afin de simplifier l'écriture, on note $\mathbf{T} = \{T_1, \ldots, T_n\}$. En remarquant qu'il est possible d'écrire, pour tout $l \geq 1$,

$$\mathbf{T}^l \mathcal{O}_s[\mathbf{T}] = \mathcal{O}_s[\mathbf{T}] \cap \mathbf{T}^l \left(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}\right)_s$$

et

$$\mathbf{T}^l \left(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}\right)_s = \left(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}\right)_s \cap \mathbf{T}^l \mathcal{O}_s[\![\mathbf{T}]\!],$$

les morphismes $\mathcal{O}_s[\![\mathbf{T}]\!] \longrightarrow \widehat{\left(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}\right)_s}$ et $\widehat{\left(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}\right)_s} \longrightarrow \mathcal{O}_s[\![\mathbf{T}]\!]$ s'obtiennent comme $\varprojlim_l$ des monomorphismes

$$\mathcal{O}_s[\mathbf{T}] \Big/ \mathcal{O}_s[\mathbf{T}] \cap \mathbf{T}^l \left(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}\right)_s \longrightarrow \left(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}\right)_s \Big/ \mathbf{T}^l \left(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}\right)_s$$

et

$$\left(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}\right)_s \Big/ \left(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}\right)_s \cap \mathbf{T}^l \mathcal{O}_s[\![T]\!] \longrightarrow \mathcal{O}_s[\![T]\!] \Big/ \mathbf{T}^l \mathcal{O}_s[\![T]\!]$$

et sont donc aussi des monomorphismes. □

Si X est un espace S-analytique, on notera encore X le préfaisceau sur An_S représentable par X.

Définition 1.3.10. — Soit $\mathcal{F}$ un faisceau d'algèbres sur S. Le *spectre relatif de $\mathcal{F}$ au-dessus de S*, noté $\underline{\mathrm{Spec}}_S(\mathcal{F})$, est le préfaisceau sur An_S qui associe à un morphisme $f : T \to S$ d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques l'ensemble des rétractions $\varphi : f^*\mathcal{F} \to \mathcal{O}_T$ du morphisme de $\mathcal{O}_T$-algèbres structural $\mathcal{O}_T \to f^*\mathcal{F}$.

Remarque 1.3.11. — La construction donnée à la définition 1.3.10 est fonctorielle. Plus précisément, si $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme entre faisceaux d'algèbres sur S, on définit un morphisme $\underline{\mathrm{Spec}}_S(\theta)$ de préfaisceaux sur An_S de la façon suivante : à tout morphisme $g : T \to S$, on associe $\underline{\mathrm{Spec}}_S(\mathcal{G})(T) \to \underline{\mathrm{Spec}}_S(\mathcal{F})(T)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ g^*\theta$.

On désigne à présent par $\underline{\mathrm{Spec}}_S$ le foncteur de la catégorie des faisceaux d'algèbres sur S vers la catégorie des préfaisceaux sur An_S ainsi défini.

Remarque 1.3.12. — Soit $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques. On dispose alors d'un morphisme naturel $X \to \underline{\mathrm{Spec}}_S(f_*\mathcal{O}_X)$ défini de la façon suivante : pour $T \in \mathrm{An}_S$, l'application $\mathrm{Hom}_S(T, X) \to \underline{\mathrm{Spec}}_S(f_*\mathcal{O}_X)(T)$ envoie h sur $h^*\epsilon$, où $\epsilon : f^*f_*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ est la co-unité de l'adjonction de f^* et f_*.

Lemme 1.3.13. — *Soient $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(S)[T_1, \ldots, T_n]$. On dispose d'un isomorphisme :*

$$\mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S} \Big/ (f_1, \ldots, f_m)\right) \longrightarrow \underline{\mathrm{Spec}}_S\left(\mathcal{O}_S[T_1, \ldots, T_n] \Big/ (f_1, \ldots, f_m)\right).$$

Démonstration. — On pose $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(S)[t_1, \ldots, t_n]$ et

$$q : \mathcal{O}_S[t_1, \ldots, t_n] \longrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{O}_S[t_1, \ldots, t_n] \Big/ (f_1, \ldots, f_m)$$

le morphisme quotient. Par souci de précision, on distinguera $t_1, \ldots, t_n$ des coordonnées $T_1, \ldots, T_n$ de $\mathbb{A}^n_S$. On note $\pi : \mathbb{A}^n_S \to S$ la projection naturelle,

$$\mathcal{I} = \pi^*(f_1, \ldots, f_m) \Big/ (T_1 - t_1, \ldots, T_n - t_n) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S},$$

$\theta : \pi^*\mathcal{F} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}/\mathcal{I}$ le quotient par les $T_i - t_i$, $X = \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}/\mathcal{I}\right)$, $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{A}^n_S$ l'immersion naturelle et $f = \pi \circ \iota$.

On remarque que l'image par le foncteur ι^* du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}[t_1, \dots, t_n] \arrow[r, "t_i \mapsto T_i"] \arrow[d, "\pi^* q"] & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S} \arrow[d] \\ \pi^*\mathcal{F} \arrow[r, "\theta"] & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S} \big/ \mathcal{I} \end{tikzcd}$$

s'écrit

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X[t_1, \dots, t_n] \arrow[r] \arrow[d, "f^* q"] & \mathcal{O}_X \arrow[d] \\ f^*\mathcal{F} \arrow[r, "\iota^*\theta"] & \mathcal{O}_X \otimes_{\iota^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}} \mathcal{O}_X \end{tikzcd}$$

et on en déduit $(\iota^*\theta \circ f^*q)(t_i) = \iota^\sharp(T_i) \otimes 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors, en notant $\psi : f^*\mathcal{F} \to \mathcal{O}_X$ la composée de $\iota^*\theta$ par la multiplication $\mathcal{O}_X \otimes_{\iota^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_S}} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$, on a $(\psi \circ f^*q)(t_i) = \iota^\sharp(T_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

On note $\Phi : X \to \underline{\mathrm{Spec}}_S(\mathcal{F})$ le morphisme défini de la façon suivante : pour tout $T \in \mathrm{An}_S$, $\Phi_T : \mathrm{Hom}_S(T, X) \to \underline{\mathrm{Spec}}_S(\mathcal{F})(T)$ envoie $h \in \mathrm{Hom}_S(T, X)$ sur $h^*\psi$ et on cherche à montrer que Φ est un isomorphisme. Soient $g : T \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $\varphi : g^*\mathcal{F} \to \mathcal{O}_T \in \underline{\mathrm{Spec}}_S(\mathcal{F})(T)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $h_i = (\varphi \circ g^*q)(t_i) \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$. D'après la proposition 1.3.3, on dispose d'un unique morphisme d'espaces S-analytiques $\widetilde{h} : T \to \mathbb{A}^n_S$ vérifiant $\widetilde{h}^\sharp(T_i) = h_i$. Alors, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, on a $\widetilde{h}^\sharp(f_j(T_1, \dots, T_n)) = f_j(h_1, \dots, h_n) = \varphi(g^*q(f_j)) = 0$ et on en déduit que $\widetilde{h}^*(\mathcal{I}) = 0$. Donc, d'après [LP20, Proposition 2.3.7], le morphisme $\widetilde{h}$ se factorise de façon unique par ι :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\widetilde{h}"'] & X \arrow[d, "\iota"] \\ & \mathbb{A}^n_S \end{tikzcd} .$$

De cette manière, on associe à tout $\varphi \in \underline{\mathrm{Spec}}_S(\mathcal{F})(T)$ un unique $h \in \mathrm{Hom}_S(T, X)$ et on définit alors un morphisme $H : \underline{\mathrm{Spec}}_S(\mathcal{F}) \to X$. Il reste à vérifier que H est l'inverse de Φ.

On commence par vérifier que $\Phi \circ H = \mathrm{Id}$. Soient $g : T \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $\varphi \in \underline{\mathrm{Spec}}_S(\mathcal{F})(T)$, $h = H_T(\varphi)$ et $\widetilde{h} = \iota \circ h$. Comme $g^*\mathcal{F}$ est engendré par les $(g^*q)(t_i)$, il suffit de montrer que φ et $\Phi_T(h)$ coïncident sur ces générateurs. Or, on a :

$$\varphi(g^*q(t_i)) = \widetilde{h}^\sharp(T_i) = (h^\sharp \circ \iota^\sharp)(T_i) = (h^*(\psi \circ f^*q))(t_i) = \Phi_T(h)(g^*q(t_i))$$

et donc $\Phi \circ H = \mathrm{Id}$. On vérifie à présent que $H \circ \Phi = \mathrm{Id}$. Soient $g : T \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $h \in \mathrm{Hom}_S(T, X)$ et $\varphi = \Phi_T(h)$. Par construction, il suffit de montrer que $h^\sharp$ et $H_T(\varphi)^\sharp$ coïncident sur les $\iota^\sharp(T_i)$. Or, on a :

$$H_T(\varphi)^\sharp(\iota^\sharp(T_i)) = (\varphi \circ g^*q)(t_i) = (h^*(\psi \circ f^*q))(t_i) = h^\sharp(\iota^\sharp(T_i))$$

et donc $H \circ \Phi = \mathrm{Id}$. □

On note à présent Fin_S la catégorie des morphismes finis d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques vers S et $\mathrm{Coh}(S)$ la catégorie des faisceaux d'algèbres cohérents sur S. On rappelle que, si $f : X \to S$ est un morphisme fini, alors $f_*\mathcal{O}_X$ est cohérent d'après [Poi13, Théorème 11.9] et [LP20, Théorème 5.2.6].

Théorème 1.3.14. — *Le foncteur* $\mathrm{Fin}_S \to \mathrm{Coh}(S)$ *qui associe à un morphisme* $f : X \to S$ *le faisceau* $f_*\mathcal{O}_X$ *est une anti-équivalence de catégories dont un quasi-inverse est donné par* $\underline{\mathrm{Spec}}_S$.

Démonstration. — Soient $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(S)$. D'après [Stacks, Tag 04TN], le préfaisceau $\underline{\mathrm{Spec}}_S(\mathcal{F})$ est de nature locale au sens de [SHC11, Définition 5.4]. Comme la finitude est une notion locale au but et d'après [SHC11, Proposition 5.6], il suffit de montrer le résultat au voisinage de tout point $s \in S$. Notons que [SHC11, Proposition 5.6] est démontrée dans un cadre différent du nôtre mais pourrait être recopiée *verbatim et literatim.* Soit $s \in S$. Le $\mathcal{O}_s$-module $\mathcal{F}_s$ est de type fini, engendré par des éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ entiers sur $\mathcal{O}_s$. Soient $F_1(T), \dots, F_n(T) \in \mathcal{O}_s[T]$ des polynômes unitaires vérifiant $F_i(\sigma_i) = 0$ et $V \subset S$ un voisinage de s sur lequel les σ_i et les coefficients des F_i sont définis. Quitte à restreindre V, on peut supposer que $\mathcal{F}_{|V}$ est engendré par les σ_i et est quotient de

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}_V[T_1, \dots, T_n] \Big/ (F_1(T_1), \dots, F_n(T_n)).$$

Alors, d'après le lemme 1.3.13, $\underline{\mathrm{Spec}}_V(\mathcal{F}_{|V})$ et $\underline{\mathrm{Spec}}_V(\mathcal{G})$ sont représentables et on dispose d'une immersion fermée $\underline{\mathrm{Spec}}_V(\mathcal{F}_{|V}) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Spec}}_V(\mathcal{G})$. Or, on a

$$\underline{\mathrm{Spec}}_V(\mathcal{G}) \cong \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_V} \Big/ F_1(T)\right) \times_V \cdots \times_V \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_V} \Big/ F_n(T)\right)$$

et on déduit du corollaire 1.3.5 que $\underline{\mathrm{Spec}}_V(\mathcal{G})$ et $\underline{\mathrm{Spec}}_V(\mathcal{F}_{|V})$ sont finis sur V. De plus, en notant $f : \underline{\mathrm{Spec}}_V(\mathcal{F}_{|V}) \to V$ et $g : \underline{\mathrm{Spec}}_V(\mathcal{G}) \to V$ les projections naturelles et d'après le lemme 1.3.9, on a bien $g_*\mathcal{O}_{\underline{\mathrm{Spec}}_V(\mathcal{G})} \cong \mathcal{G}$ et donc $f_*\mathcal{O}_{\underline{\mathrm{Spec}}_V(\mathcal{F}_{|V})} \cong \mathcal{F}_{|V}$.

Soient $f : X \to S$ un morphisme fini, $x \in X$ et $s = f(x)$. Alors, d'après la proposition 1.3.6, on dispose de voisinages ouverts $U \subset X$ de x et $V \subset S$ de s, de $n \in \mathbb{N}$ et de $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{O}_S(V)[T]$ unitaires et non constants de sorte que U soit un fermé analytique de

$$Z = \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_V} \big/ P_1(T_1), \dots, P_n(T_n)\right).$$

On note $\iota : U \to Z$ l'immersion fermée, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}(Z)$ l'idéal cohérent la définissant et $p : Z \to V$ la projection naturelle. Alors

$$p_*\mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_V[T_1, \dots, T_n] \big/ (P_1(T_1), \dots, P_n(T_n))$$

d'après le lemme 1.3.9 et on a $p_*\mathcal{O}_Z/p_*\mathcal{I} \cong f_*\mathcal{O}_U$. On déduit alors du lemme 1.3.13 que $Z \cong \underline{\mathrm{Spec}}_V(p_*\mathcal{O}_Z)$ puis que $U \cong \underline{\mathrm{Spec}}_V(f_*\mathcal{O}_U)$. □

1.4. Morphismes rigides épais

Soit $\mathcal{A}$ un anneau de base géométrique.

Dans cette section, on définit les morphismes d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques rigides épais et on démontre certaines de leurs propriétés, notamment la relation entre $\mathfrak{m}_x$ et $\mathfrak{m}_{X_s,x}$ énoncée en introduction. Cette étude est motivée par le fait suivant : si un morphisme f est non ramifié en un point x au sens de la définition 2.2.1 alors il est rigide épais en x.

Définition 1.4.1. — Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $x \in X$. On dit que f est *rigide épais en* x si $\kappa(x)$ est une extension finie de $\kappa(f(x))$.

Remarque 1.4.2. — On écrira « x est rigide épais au-dessus de $f(x)$ » ou simplement « x est rigide épais » sans préciser le morphisme lorsque le contexte le permettra.

Lemme 1.4.3. — *Soient S un espace $\mathcal{A}$-analytique, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{A}^n_S$, $s = \pi_S(x)$ et 0_s le point 0 de la fibre au-dessus de s. On suppose que $\mathbb{A}^n_S \to S$ est rigide épais en x. On dispose alors de polynômes $P_1 \in \mathcal{O}_{0_s}[S_1], P_2 \in \mathcal{O}_{0_s}[S_1, S_2], \dots, P_n \in \mathcal{O}_{0_s}[S_1, \dots, S_n]$ tels que, en notant $T_1, \dots, T_n$ les coordonnées de $\mathbb{A}^n_S$, on ait un isomorphisme :*

$$\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{0_s}[S_1, \dots, S_n] \big/ (P_1(S_1) - T_1, \dots, P_n(S_1, \dots, S_n) - T_n).$$

Cet isomorphisme reste vérifié dans la fibre au-dessus de s.

Démonstration. — On montre la propriété par récurrence sur n.

Si $n = 0$ alors $\mathbb{A}^n_S = S$, $\pi_S = \mathrm{Id}_S$ et donc $x = 0_s$. On a donc bien $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{0_s}$.

On suppose maintenant la propriété vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et on la montre pour $n+1$. Soient $x \in \mathbb{A}^{n+1}_S$ et $x_1 \in \mathbb{A}^1_S$ sa projection sur la première coordonnée T_1. Soient $m \in \mathbb{N}$, $U \subset S$ un voisinage ouvert de s, $\iota : U \hookrightarrow \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$ une immersion et $\eta = \iota \times_{\mathcal{A}} \mathrm{Id}_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}} : \mathbb{A}^1_U \hookrightarrow \mathbb{A}^{m+1}_{\mathcal{A}}$ l'immersion induite sur $\mathbb{A}^1_U$ de coordonnée T_1. On note $s' = \iota(s)$, $x'_1 = \eta(x_1)$, $0_{s'} \in \mathbb{A}^{m+n+1}_{\mathcal{A}}$ le point 0 de la fibre au-dessus de s' et $0_{x'_1} \in \mathbb{A}^{m+n+1}_{\mathcal{A}}$ le point 0 de la fibre au-dessus de x'_1. Alors x'_1 est rigide épais au-dessus de s' et on note $P_1 \in \kappa(s')[S_1]$ son polynôme minimal. On commence par montrer l'isomorphisme :

$$\mathcal{O}_{0_{x'_1}} \cong \mathcal{O}_{0_{s'}}[S_1] \Big/ (P_1(S_1) - T_1). \tag{1}$$

Soit $V \subset \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$ un voisinage compact spectralement convexe de s' tel que les coefficients de P_1 appartiennent à $\mathcal{B}(V)$. La propriété recherchée étant locale, on peut se restreindre à la démontrer sur $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{B}(V)}$. D'après [Poi13, Corollaire 8.10], P_1 induit un morphisme $\varphi : \mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{B}(V)} \to \mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{B}(V)}$ de sorte que $\varphi^{-1}(0_{s'}) = 0_{x'_1}$ et on a bien l'isomorphisme (1). On dispose à présent d'un voisinage ouvert $W \subset V$ de s' ainsi que d'un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_W$ vérifiant $\mathcal{O}_s \cong \mathcal{O}_{s'} \Big/ \mathcal{I}_{s'}$. De plus, on a $\mathcal{O}_{0_{x_1}} \cong \mathcal{O}_{0_{x'_1}} \Big/ \mathcal{I}_{s'}\mathcal{O}_{0_{x'_1}}$ et $\mathcal{O}_{0_s} \cong \mathcal{O}_{0_{s'}} \Big/ \mathcal{I}_{s'}\mathcal{O}_{s'}$. On obtient donc par un passage au quotient de (1) :

$$\mathcal{O}_{0_{x_1}} \cong \mathcal{O}_{0_s}[S_1] \Big/ (P_1(S_1) - T_1).$$

L'hypothèse de récurrence appliquée au point $x \in \mathbb{A}^{n+1}_S$ au-dessus de $x_1 \in \mathbb{A}^1_S$ assure l'existence de polynômes $P_2 \in \mathcal{O}_{0_{x_1}}[S_2], P_3 \in \mathcal{O}_{0_{x_1}}[S_2, S_3], \ldots, P_{n+1} \in \mathcal{O}_{0_{x_1}}[S_2, \ldots, S_{n+1}]$ vérifiant :

$$\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{0_{x_1}}[S_2, \ldots, S_{n+1}] \Big/ (P_2(S_2) - T_2, \ldots, P_{n+1}(S_2, \ldots, S_{n+1}) - T_{n+1})$$

et on en déduit :

$$\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{0_s}[S_1, \ldots, S_{n+1}] \Big/ (P_1(S_1) - T_1, \ldots, P_{n+1}(S_1, \ldots, S_{n+1}) - T_{n+1}).$$

Cela conclut la démonstration. □

Proposition 1.4.4. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. On suppose que f est rigide épais en x. On a alors :*

$$\mathfrak{m}_{X_s,x} = \sqrt{\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X_s,x}}.$$

On commence par démontrer le cas particulier des espaces affines sur $\mathcal{A}$.

Lemme 1.4.5. — *Soient $m, n \in \mathbb{N}$, $\pi : \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n} \to \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m}$ la projection sur les m premières coordonnées, $y_n \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$ et $y_0 = \pi(y_n)$. On suppose que π est rigide épais en y_n. On a alors :*

$$\mathfrak{m}_{\pi^{-1}(y_0),y_n} = \sqrt{\mathfrak{m}_{y_n}\mathcal{O}_{\pi^{-1}(y_0),y_n}}.$$

Démonstration. — On fixe l'entier m et on procède par récurrence sur n.

Si $n = 0$ alors $\pi = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}^m}$, $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(y_0),y_n} = \mathcal{H}(y_0)$ et on a donc bien $\mathfrak{m}_{\pi^{-1}(y_0),y_n} = 0 = \sqrt{\mathfrak{m}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m,y_n}\mathcal{O}_{\pi^{-1}(y_0),y_n}}$.

Supposons à présent la propriété vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$. On note S la dernière coordonnée de $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n+1}$ ainsi que $\pi_{+1} : \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n+1} \to \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m}$ la projection sur les m premières coordonnées. Soient $y_{n+1} \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n+1}$ un point rigide épais au-dessus de $\pi_{+1}(y_{n+1})$ et $y_n \in \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$ sa projection sur les $m+n$ premières coordonnées. Soient $P \in \kappa(y_n)[S]$ le polynôme minimal de y_{n+1} et $V \subset \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n}$ un voisinage compact spectralement convexe de y_n tel que les coefficients de P soient définis sur $\mathcal{B}(V)$. La propriété recherchée étant locale, on peut se restreindre à la démontrer sur $\mathbb{A}_{\mathcal{B}(V)}^1$. D'après [Poi13, Théorème 8.8], P induit un morphisme $\varphi_P : \mathbb{A}_{\mathcal{B}(V)}^1 \to \mathbb{A}_{\mathcal{B}(V)}^1$ de sorte que $\varphi_P(y_{n+1})$ soit le point 0 au-dessus de y_n, noté 0_{y_n}, et φ_P induit un isomorphisme :

$$\mathcal{O}_{y_{n+1}} \cong \mathcal{O}_{0_{y_n}}[S] \Big/ (P(S) - T) \tag{2}$$

où T désigne la coordonnée de $\mathbb{A}_{\mathcal{B}(V)}^1$ au but de φ_P. D'après le corollaire 1.3.8, une fonction $f \in \mathcal{O}_{0_{y_n}}$ s'écrit $f = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i T^i$ où les a_i sont des éléments de $\mathcal{O}_{y_n}$. On a donc $f(0_{y_n}) = 0$ si et seulement si $a_0(y_n) = 0$ et on en déduit que :

$$\mathfrak{m}_{0_{y_n}} = \mathfrak{m}_{y_n}\mathcal{O}_{0_{y_n}} + T\mathcal{O}_{0_{y_n}}. \tag{3}$$

De même, on a $\mathfrak{m}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}} = \mathfrak{m}_{\pi^{-1}(y_0),y_n}\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}} + T\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\mathfrak{m}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}} = \sqrt{\mathfrak{m}_{y_n}\mathcal{O}_{\pi^{-1}(y_0),y_n}}\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}} + T\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}}.$$

L'idéal $T\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}}$ étant radiciel, on peut écrire :

$$\mathfrak{m}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}} \subset \sqrt{\mathfrak{m}_{y_n}\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}} + T\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}}}.$$

Cela donne bien l'inclusion $\mathfrak{m}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}} \subset \sqrt{\mathfrak{m}_{0_{y_n}}\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}}}$ d'après (3). L'inclusion réciproque étant triviale, l'égalité :

$$m_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}} = \sqrt{\mathfrak{m}_{0_{y_n}}\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}}} \tag{4}$$

en découle.

On remarque à présent que, sous l'isomorphisme (2), l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{y_{n+1}}$ est engendré par $\mathfrak{m}_{0_{y_n}}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{O}_{0_{y_n}}[S]/(P(S)-T)\right)\Big/(\mathfrak{m}_{0_{y_n}}) &\cong \kappa(0_{y_n})[S]\Big/(P(S)-T)\\ &\cong \kappa(y_n)[S]\Big/(P(S))\\ &\cong \kappa(y_{n+1}).\end{aligned}$$

On en déduit que la préimage de l'idéal $\sqrt{\mathfrak{m}_{y_{n+1}}\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),y_{n+1}}}$ par la surjection $\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}}[S] \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),y_{n+1}}$ est

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{m}_{0_{y_n}}\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}}[S] + (P(S)-T)\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}}[S]}.$$

De plus, comme 0_{y_n} est rigide dans sa fibre, le corps résiduel de l'anneau $\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}}$ vaut $\mathcal{H}(0_{y_n})$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),y_{n+1}}\Big/\sqrt{\mathfrak{m}_{y_{n+1}}\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),y_{n+1}}} &\cong \mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),0_{y_n}}[S]\Big/\mathfrak{m}\\ &\cong \mathcal{H}(0_{y_n})[S]\Big/\sqrt{P(S)-T}\end{aligned}$$

d'après 4.

En écrivant $\mathcal{H}(0_{y_n})$ comme le quotient de $\mathcal{H}(y_n)[T]$ par (T), on déduit :

$$\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),y_{n+1}}\Big/\sqrt{\mathfrak{m}_{y_{n+1}}\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),y_{n+1}}} \cong \mathcal{H}(y_n)[S]\Big/\sqrt{P(S)}.$$

Or, d'après [LP20, Lemme 1.6.23], l'idéal $\sqrt{P(S)} \subset \mathcal{H}(y_n)[S]$ est engendré par $\mu_{y_{n+1}}(S)$, polynôme minimal de y_{n+1} à coefficients dans $\mathcal{H}(y_n)$. On a donc à présent :

$$\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),y_{n+1}}\Big/\sqrt{\mathfrak{m}_{y_{n+1}}\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),y_{n+1}}} \cong \mathcal{H}(y_n)[S]\Big/(\mu_{y_{n+1}}(S)) \cong \mathcal{H}(y_{n+1}).$$

On en déduit que $\sqrt{\mathfrak{m}_{y_{n+1}}\mathcal{O}_{\pi_{+1}^{-1}(y_0),y_{n+1}}}$ est bien maximal, ce qui conclut la récurrence. □

Démonstration de la proposition 1.4.4. — La propriété énoncée étant locale, on peut supposer que S est un modèle local d'espace $\mathcal{A}$-analytique et on dispose de $m \in \mathbb{N}$ et $\iota : S \hookrightarrow \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$ une immersion. Alors la propriété énoncée est vérifiée pour f si et seulement si elle l'est pour $\iota \circ f$ et on se ramène au cas où $S = \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$.

D'après le lemme 1.3.2 et quitte à restreindre X, on peut supposer que X est un modèle local d'espace S-analytique. On dispose à présent de $n \in \mathbb{N}$ et de $\Gamma : X \hookrightarrow \mathbb{A}^n_S \cong \mathbb{A}^{m+n}_{\mathcal{A}}$ une immersion d'espaces S-analytiques :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "\Gamma"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{A}^{m+n}_{\mathcal{A}} \arrow[dl, "\pi_S"] \\ & \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}} & \end{tikzcd}.$$

D'après le lemme 1.4.5, on a $\mathfrak{m}_{\pi_S^{-1}(s),\Gamma(x)} = \sqrt{\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^{m+n}_{\mathcal{A}},\Gamma(x)}\mathcal{O}_{\pi_S^{-1}(s),\Gamma(x)}}$. Soient $U \subset \mathbb{A}^{m+n}_{\mathcal{A}}$ un voisinage ouvert de $\Gamma(x)$ et $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_U$ un faisceau cohérent d'idéaux vérifiant $X = \mathrm{Supp}\,(\mathcal{O}_U/\mathcal{I})$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_{X_s,x} &= \mathfrak{m}_{\pi_S^{-1}(s),\Gamma(x)} \big/ \mathcal{I}_{\Gamma(x)} \\ &= \sqrt{\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^{m+n}_{\mathcal{A}},\Gamma(x)}\mathcal{O}_{\pi_S^{-1}(s),\Gamma(x)}} \Big/ \mathcal{I}_{\Gamma(x)} \\ &= \sqrt{\mathfrak{m}_{\mathbb{A}^{m+n}_{\mathcal{A}},\Gamma(x)}\mathcal{O}_{\pi_S^{-1}(s),\Gamma(x)} \Big/ \mathcal{I}_{\Gamma(x)}} \\ &= \sqrt{\mathfrak{m}_{X,x}\mathcal{O}_{X_s,x}}. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.4.6. — Si les polynômes $P(S)$ et $\mu_{y_{n+1}}(S)$ engendraient le même idéal de $\mathcal{H}(y_n)[S]$, la preuve du lemme 1.4.5 pourrait être écrite sans les radicaux. C'est le cas lorsque $\kappa(x)$ est une extension séparable de $\kappa(s)$ par [Ber93, Proposition 2.4.1]. Sous cette hypothèse, on a donc $\mathfrak{m}_{X_s,x} = \mathfrak{m}_x\mathcal{O}_{X_s,x}$.

Lemme 1.4.7. — *Soient S un espace $\mathcal{A}$-analytique, $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces S-analytiques, $x \in X$, $y = f(x)$ et $s \in S$ l'image de x. Soit $I \subset \mathcal{O}_y$ un idéal. On suppose que f est rigide épais en x. Si $\mathcal{O}_y/I\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_{Y_s,y}/I\mathcal{O}_{Y_s,y}$ est plat alors $\mathcal{O}_x/I\mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_{X_s,x}/I\mathcal{O}_{X_s,x}$ est plat.*

Démonstration. — Cette propriété étant locale, on peut supposer que X est un modèle local d'espace Y-analytique et on dispose alors de $n \in \mathbb{N}$ et d'une immersion d'espaces Y-analytiques $\Gamma : X \hookrightarrow \mathbb{A}^n_Y$. Comme Γ est une immersion, il suffit de montrer la propriété pour $\pi_Y : \mathbb{A}^n_Y \to Y$. On suppose donc $X = \mathbb{A}^n_Y$ et $f = \pi_Y$.

On note 0_y le point 0 de la fibre de X au-dessus de y. D'après le lemme 1.4.3, on dispose de polynômes $P_1 \in \mathcal{O}_{0_y}[S_1], P_2 \in \mathcal{O}_{0_y}[S_1, S_2], \ldots, P_n \in \mathcal{O}_{0_y}[S_1, \ldots, S_n]$ tels que, en notant $T_1, \ldots, T_n$ les coordonnées de $X = \mathbb{A}^n_Y$, on ait un isomorphisme :

$$\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{0_y}[S_1, \ldots, S_n] \Big/ (P_1(S_1) - T_1, \ldots, P_n(S_1, \ldots, S_n) - T_n).$$

Il suffit de donc de montrer le résultat dans le cas où $x = 0_y$. Afin de simplifier l'écriture, on note $\mathbf{T} = \{T_1, \ldots, T_n\}$.

D'après le critère local de platitude [SGA1, Exposé IV, Proposition 5.6], le morphisme

$$\mathcal{O}_x \big/ I\mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X_s,x} \big/ I\mathcal{O}_{X_s,x}$$

est plat si et seulement si le morphisme induit

$$\mathcal{O}_x \Big/ \left(I + (\mathbf{T})^l\right) \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X_s,x} \Big/ \left(I + (\mathbf{T})^l\right) \mathcal{O}_{X_s,x}$$

est plat pour tout $l \geq 1$. Or, d'après le corollaire 1.3.8, ce dernier est égal au morphisme

$$\left(\mathcal{O}_y \big/ I\mathcal{O}_y\right) [\mathbf{T}] \Big/ (\mathbf{T})^l \longrightarrow \left(\mathcal{O}_{Y_s,y} \big/ I\mathcal{O}_{Y_s,y}\right) [\mathbf{T}] \Big/ (\mathbf{T})^l$$

induit par $\mathcal{O}_y/I\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_{Y_s,y}/I\mathcal{O}_{Y_s,y}$ qui est plat par hypothèse. Ceci conclut la démonstration. $\square$

Définition 1.4.8. — Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. On dit que f est *purement localement transcendant* en x si $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$.

Remarque 1.4.9. — Cette définition coïncide avec [Poi13, Définition 9.9] dans le cas du morphisme $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ d'après [LP20, Théorème 1.6.26].

Proposition 1.4.10. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. On suppose que f est rigide épais en x. Alors l'anneau $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est un corps si et seulement si f est purement localement transcendant en x.*

Démonstration. — D'après le lemme 1.4.7 appliqué à $Y = S$ et $I = \mathfrak{m}_s$, le morphisme $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_{X_s,x}$ est plat et

$$\mathcal{O}_{X_s,x} \bigotimes_{\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_s \longleftrightarrow \mathcal{O}_{X_s,x} \bigotimes_{\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{X_s,x}$$

est donc une injection. Son image coïncide avec $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_s)\mathcal{O}_{X_s,x} \cong \mathfrak{m}_x\mathcal{O}_{X_s,x}$. Donc, si $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est un corps, $\mathcal{O}_{X_s,x} \bigotimes_{\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_s = 0$ et donc $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_s = 0$ par fidèle platitude. Dans ce cas, $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$ est bien un corps. Réciproquement, si $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$ est un corps, alors $\mathfrak{m}_x\mathcal{O}_{X_s,x} = 0$ et $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est un corps d'après 1.4.4. $\square$

Remarque 1.4.11. — Le théorème 2.1.3 montre que le sens direct de la proposition 1.4.10 est en fait vérifié pour tout morphisme.

1.5. Dimension algébrique

Dans cette section, on établit des résultats sur la dimension de Krull des anneaux locaux en certains points. On notera que la stratégie de démonstration de la proposition 1.5.5 et du corollaire 1.5.6 est la même que celle présentée dans [GR84] dans le cadre de la géométrie analytique complexe.

Définition 1.5.1. — Soit X un espace $\mathcal{A}$-analytique. Un point $x \in X$ sera dit *défini par des équations* s'il existe une immersion $\{x\} \hookrightarrow X$, c'est-à-dire que l'on dispose d'un voisinage ouvert $U \subset X$ de x et de fonctions $f_1, \ldots, f_d \in \mathcal{O}_X(U)$ tels que $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \ldots, f_d)) = \{x\}$.

Remarque 1.5.2. — Soient X un espace $\mathcal{A}$-analytique, $x \in X$ un point défini par des équations et $g_1, \ldots, g_l$ des fonctions définies sur un voisinage de x et vérifiant $(g_1, \ldots, g_l)\mathcal{O}_x = \mathfrak{m}_x$. Par définition, on dispose d'un ouvert $U \subset X$ et de fonctions $f_1, \ldots, f_d \in \mathcal{O}(U)$ tels que $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \ldots, f_d)) = \{x\}$. Alors $(f_1, \ldots, f_d)\mathcal{O}_x \subset (g_1, \ldots, g_l)\mathcal{O}_x$ et donc, quitte à restreindre U, on a

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \ldots, f_d)) \supset \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1, \ldots, g_l)).$$

On en déduit que $\{x\} = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1, \ldots, g_l))$.

Lemme 1.5.3. — *Soient k un corps valué complet et X un espace k-analytique. Alors tous les points rigides de X sont définis par des équations.*

Démonstration. — Soit $x \in X$ un point rigide. Les propriétés énoncées étant locales, on peut supposer que X est un modèle local d'espace k-analytique. Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier et $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{A}^n_k$ une immersion. Alors $\iota(x)$ est rigide et, s'il est défini par des équations, alors x l'est aussi. On se ramène donc au cas où $X = \mathbb{A}^n_k$. Le point $\xi = \rho(x) \in \mathbb{A}^{n,\mathrm{sch}}_k$ est associé à un idéal premier $I \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ égal au noyau du morphisme d'évaluation $k[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{H}(x)$. Comme x est rigide, $\mathcal{H}(x)$ est entier sur k et donc sur son sous-anneau $k[T_1, \ldots, T_n]/I$. Donc, d'après [Bos13, Remarque 3.1.2], $k[T_1, \ldots, T_n]/I$ est un corps, I est maximal et ξ est un point fermé. Pour tout point $y \in \rho^{-1}(\xi)$, on a $\mathcal{H}(y) = \widehat{k[T_1, \ldots, T_n]/I} = \widehat{\kappa(\xi)}$. Comme $\kappa(\xi)$ est fini sur k, on en déduit que $\kappa(\xi)$ est complet et égal à $\mathcal{H}(y)$. On peut donc associer à y un unique diagramme commutatif comme suit :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\kappa(\xi)) \arrow[r, "\rho_{\kappa(\xi)}"] \arrow[dr, dotted, "y"'] & \mathrm{Spec}(\kappa(\xi)) \arrow[r, "\xi"] & \mathbb{A}^{n,\mathrm{sch}}_k \\
& \mathbb{A}^n_k \arrow[ur, bend right, "\rho"'] &
\end{tikzcd}.$$

L'unicité de la flèche en pointillés étant assurée par la propriété universelle de l'analytification, on en déduit que $y = x$ et donc $\rho^{-1}(\xi) = \{x\}$. Pour finir, on sait que I vérifie $\{\xi\} = V(I) \subset \mathbb{A}_k^{n,\mathrm{sch}}$ et engendre un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n}$ vérifiant $\rho^{-1}(\xi) = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n}/\mathcal{I})$. On en déduit que $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n}/\mathcal{I}) = \{x\}$ et x est donc bien défini par des équations. □

Remarque 1.5.4. — Il semble difficile de caractériser algébriquement les points définis par des équations lorsque l'anneau de base n'est pas un corps valué complet. On peut noter l'exemple de $\mathcal{M}(\mathbb{C}^{\mathrm{hyb}})$ dont aucun point n'est défini par des équations malgré leurs bonnes propriétés algébriques : $\mathcal{M}(\mathbb{C}^{\mathrm{hyb}})$ s'écrit comme l'analytifié du schéma $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}^{\mathrm{hyb}})$ et, pour tout $x \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^{\mathrm{hyb}})$, $\rho(x) \in \mathrm{Spec}(\mathbb{C}^{\mathrm{hyb}})$ est un point fermé vérifiant $\kappa(\rho(x)) = \mathcal{H}(x)$.

Proposition 1.5.5. — *Soient X un espace $\mathcal{A}$-analytique, $x \in X$ un point défini par des équations, $U \subset X$ un voisinage ouvert de x et $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(U)$. Alors x est isolé dans* $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \ldots, f_n))$ *si et seulement si l'anneau* $\mathcal{O}_x/(f_1, \ldots, f_n)\mathcal{O}_x$ *est artinien.*

Démonstration. — Quitte à restreindre U, on peut choisir des fonctions $g_1, \ldots, g_l$ dans $\mathcal{O}(U)$ telles que $\mathfrak{m}_x = (g_1, \ldots, g_l)\mathcal{O}_x$.

On suppose tout d'abord que x est isolé dans $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \ldots, f_n))$. Alors, d'après la remarque 1.5.2, on peut restreindre U pour avoir

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \ldots, f_n)) = \{x\} = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1, \ldots, g_l)).$$

Donc, d'après le théorème 1.2.18, on a $\mathrm{rad}\,((f_1, \ldots, f_n)\mathcal{O}_U) = \mathrm{rad}\,((g_1, \ldots, g_l)\mathcal{O}_U)$. On en déduit que $\mathrm{rad}\,((f_1, \ldots, f_n)\mathcal{O}_x) = \mathfrak{m}_x$ et donc que $\mathcal{O}_x/(f_1, \ldots, f_n)\mathcal{O}_x$ est artinien.

Réciproquement, on suppose à présent que $\mathcal{O}_x/(f_1, \ldots, f_n)\mathcal{O}_x$ est artinien. Alors $\mathrm{rad}\,((f_1, \ldots, f_n)\mathcal{O}_x) = \mathfrak{m}_x = (g_1, \ldots, g_l)\mathcal{O}_x$ et on dispose d'un entier $s \in \mathbb{N}$ tel que $(g_1^s, \ldots, g_l^s)\mathcal{O}_x \subset (f_1, \ldots, f_n)\mathcal{O}_x$. Donc, quitte à restreindre U, on a $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1^s, \ldots, g_l^s)) \supset \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \ldots, f_n))$. Or, $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1^s, \ldots, g_l^s))$ est en bijection avec $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1, \ldots, g_l))$ qui est simplement réduit à $\{x\}$ d'après la remarque 1.5.2. On en déduit que $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \ldots, f_n)) = \{x\}$. □

Corollaire 1.5.6. — *Soient X un espace $\mathcal{A}$-analytique et $x \in X$ un point défini par des équations. Alors* $\dim(\mathcal{O}_x) \leq n$ *si et seulement s'il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x et des fonctions $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ tels que x soit isolé dans* $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1, \ldots, f_n))$.

Démonstration. — On pose $d = \dim(\mathcal{O}_x)$ et n l'entier minimal tel qu'il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x et des fonctions $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ vérifiant

$\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(f_1,\ldots,f_n)) = \{x\}$. Quitte à rétrécir U, la proposition 1.5.5 assure l'existence de fonctions $g_1,\ldots,g_d \in \mathcal{O}(U)$ vérifiant $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/(g_1,\ldots,g_d)) = \{x\}$, ce qui implique que $n \leq d$. Le même lemme assure que $\mathcal{O}_x/(f_1,\ldots,f_n)\mathcal{O}_x$ est un anneau artinien, ce qui implique que $d \leq n$. On en déduit le résultat. $\square$

CHAPITRE 2

MORPHISMES ÉTALES

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les morphismes plats, non ramifiés et étales. Une étape cruciale de cette étude est la démonstration des critères par fibres pour ces morphismes (corollaire 2.1.4, propositions 2.2.4 et 2.4.2), qui repose sur le théorème 2.1.3. Parmi les résultats notables, on note aussi ceux traitant de la structure locale de ces morphismes ainsi que de critères par analytification. Dans la dernière section, ces résultats sont appliqués à l'étude des morphismes lisses.

2.1. Morphismes plats

Cette section est consacrée à la démonstration ainsi qu'aux corollaires du théorème 2.1.3. Elle se fonde sur des résultats de la section 1.3.

Commençons par rappeler la définition de morphisme plat entre espaces $\mathcal{A}$-analytiques.

Définition 2.1.1. — Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques $f : X \to S$ est *plat* en $x \in X$ si $f_x^\sharp : \mathcal{O}_s \to \mathcal{O}_x$ est plat avec $s = f(x)$. Un morphisme $f : X \to S$ est *plat* s'il l'est en tout point de X.

Lemme 2.1.2. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. On dispose de voisinages $U \subset X$ de x et $V \subset S$ de s et de $n \in \mathbb{N}$ tels que $f(U) \subset V$, $f|_U$ se factorise par $\pi_V : \mathbb{A}^n_V \to V$ et, en notant $y \in \mathbb{A}^n_V$ l'image de x, π_V est purement localement transcendant en y et $U \to \mathbb{A}^n_V$ est rigide épais en x.*

Démonstration. — D'après le lemme 1.3.2, on dispose de $V \subset S$ un voisinage de s qui est un modèle local d'espace $\mathcal{A}$-analytique et $U \subset f^{-1}(V)$ un voisinage de x qui est un modèle local d'espace V-analytique. On dispose alors de $m, l \in \mathbb{N}$ et d'immersions $V \hookrightarrow \mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$ et $U \hookrightarrow \mathbb{A}^{m+l}_{\mathcal{A}}$. On note s' (resp. x') l'image de s (resp. x)

dans $\mathbb{A}^m_{\mathcal{A}}$ (resp. $\mathbb{A}^{m+l}_{\mathcal{A}}$). D'après [LP20, Remarque 1.6.20] et quitte à permuter les l dernières coordonnées de $\mathbb{A}^{m+l}_{\mathcal{A}}$, on dispose de $n \leq l$ tel que la projection y' de x' dans $\mathbb{A}^{m+n}_{\mathcal{A}}$ soit purement localement transcendante au-dessus de s' et que x' soit rigide épais au-dessus de y'. On note $y \in \mathbb{A}^n_S$ l'unique point d'image $y' \in \mathbb{A}^{m+n}_{\mathcal{A}}$. Alors y est purement localement transcendant au-dessus de s et x est rigide épais au-dessus de y. □

Théorème 2.1.3. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Alors le morphisme*

$$\mathcal{O}_x \big/ \mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X_s,x}$$

est plat.

Démonstration. — D'après le lemme 2.1.2 et quitte à restreindre X et S, on dispose de $n \in \mathbb{N}$ tel que f se factorise par $\pi_S : \mathbb{A}^n_S \to S$ et, en notant $y \in \mathbb{A}^n_S$ l'image de x, y est purement localement transcendant au-dessus de s et x est rigide épais au-dessus de y. On en déduit que $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_y$ est un corps et le morphisme $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_{Y_s,y}$ est donc plat. Comme x est rigide épais au-dessus de y, on peut appliquer le lemme 1.4.7 et on en conclut que le morphisme $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_{X_s,x}$ est plat. □

***Corollaire 2.1.4* (Critère de platitude par fibres)**

Soient S un espace $\mathcal{A}$-analytique, $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces S-analytiques, $x \in X$, $y = f(x)$ et $s \in S$ l'image de x. On suppose que $X \to S$ est plat en x. Si $f_s : X_s \to Y_s$ est plat en x alors $f : X \to Y$ est plat en x et $Y \to S$ est plat en y.

Démonstration. — D'après le théorème 2.1.3, les morphismes $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s \to \mathcal{O}_{X_s,x}$ et $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_s \to \mathcal{O}_{Y_s,y}$ sont plats. En composant ce dernier par le morphisme $\mathcal{O}_{Y_s,y} \to \mathcal{O}_{X_s,x}$, plat par hypothèse, on en déduit que $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est plat sur $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_s$. Ces morphismes étant locaux, ils sont fidèlement plats. D'après [Stacks, Tag 039V], on en conclut que $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_s \to \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s$ est plat et donc, d'après [Stacks, Tag 00MP], $\mathcal{O}_s \to \mathcal{O}_y$ et $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ sont plats. Ceci conclut la démonstration. □

Corollaire 2.1.5. — *Soient $\mathscr{S}$, $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ des $\mathcal{A}$-schémas localement de présentation finie, $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme de $\mathcal{A}$-schémas au-dessus de $\mathscr{S}$ et S un espace $\mathcal{A}$-analytique au-dessus de $\mathscr{S}^{\mathrm{an}}$. On note $\mathscr{X}_S = \mathscr{X}^{\mathrm{an}} \times_{\mathscr{S}^{\mathrm{an}}} S$ et $\mathscr{Y}_S = \mathscr{Y}^{\mathrm{an}} \times_{\mathscr{S}^{\mathrm{an}}} S$ et on suppose que $\mathscr{X}_S \to S$ est plat en un point $\widetilde{x} \in \mathscr{X}_S$. On pose $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ et $\widetilde{y} \in \mathscr{Y}_S$ les images de $\widetilde{x}$. Si $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est plat en $\rho(x)$ alors $f_S : \mathscr{X}_S \to \mathscr{Y}_S$ est plat en $\widetilde{x}$ et $\mathscr{Y}_S \to S$ est plat en $\widetilde{y}$.*

Remarque 2.1.6. — — Soit $\mathscr{X}$ un $\mathbb{R}$-schéma localement de présentation finie. Alors
$$(\mathscr{X} \times_{\mathbb{R}} \mathrm{Spec}(\mathbb{C}))^{\mathrm{an}} \cong \mathscr{X}^{\mathrm{an}} \times_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(\mathbb{C})$$
par propriété universelle.

— Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces $\mathbb{R}$-analytiques et $x \in X$. Si $f_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ est plat en tout point de $p_X^{-1}(x)$, alors f est plat en x. En effet, cela implique que le morphisme $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \Pi_{z \in p_X^{-1}(x)} \mathcal{O}_z \to \mathcal{O}_y \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \Pi_{z \in p_X^{-1}(x)} \mathcal{O}_{f(z)}$ est plat et on conclut par [Stacks, Tag 00HJ].

Démonstration. — On pose $s \in S$ l'image de $\widetilde{x}$. Comme $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est plat en $\rho(x)$, $f \times_{\mathscr{S}} \mathrm{Spec}(\mathcal{H}(s)) : \mathscr{X} \times_{\mathscr{S}} \mathrm{Spec}(\mathcal{H}(s)) \longrightarrow \mathscr{Y} \times_{\mathscr{S}} \mathrm{Spec}(\mathcal{H}(s))$ est plat en tout point au-dessus de $\rho(x)$. Si $\mathcal{H}(s)$ est archimédien, on peut supposer $\mathcal{H}(s) \cong \mathbb{C}$ d'après la remarque 2.1.6 et on déduit de [SGA1, Exposé XII, Proposition 3.1] que $(f \times_{\mathscr{S}} \mathrm{Spec}(\mathcal{H}(s)))^{\mathrm{an}} : (\mathscr{X} \times_{\mathscr{S}} \mathrm{Spec}(\mathcal{H}(s)))^{\mathrm{an}} \longrightarrow (\mathscr{Y} \times_{\mathscr{S}} \mathrm{Spec}(\mathcal{H}(s)))^{\mathrm{an}}$ est plat en tout point au-dessus de $\rho(x)$. Si $\mathcal{H}(s)$ est non-archimédien, on obtient le même résultat par [Ber90, Proposition 3.4.6]. Or, par propriété universelle, on a $(\mathscr{X} \times_{\mathscr{S}} \mathrm{Spec}(\mathcal{H}(s)))^{\mathrm{an}} \cong (\mathscr{X}_S)_s$ et $(\mathscr{Y} \times_{\mathscr{S}} \mathrm{Spec}(\mathcal{H}(s)))^{\mathrm{an}} \cong (\mathscr{Y}_S)_s$. On en déduit que le morphisme $\mathcal{O}_{(\mathscr{Y}_S)_s, \widetilde{y}} \longrightarrow \mathcal{O}_{(\mathscr{X}_S)_s, \widetilde{x}}$ est plat. Par le corollaire 2.1.4, on conclut que $\mathcal{O}_{\mathscr{Y}_S, \widetilde{y}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathscr{X}_S, \widetilde{x}}$ et $\mathcal{O}_s \to \mathcal{O}_{\mathscr{Y}_S, \widetilde{y}}$ sont plats. □

Si $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique alors [LP20, Proposition 6.6.7] s'applique et on déduit des corollaires 1.2.22 et 2.1.5 le critère suivant :

Corollaire 2.1.7. — *Soient $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ des $\mathcal{A}$-schémas localement de présentation finie, $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme de $\mathcal{A}$-schémas et $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{an}}$. On suppose que $\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ est plat en $\rho(x)$. Alors $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est plat en $\rho(x)$ si et seulement si $f^{\mathrm{an}} : \mathscr{X}^{\mathrm{an}} \to \mathscr{Y}^{\mathrm{an}}$ est plat en x.*

Corollaire 2.1.8. — *Soient S un espace $\mathcal{A}$-analytique et $n \in \mathbb{N}$. Le morphisme de projection $\pi_S : \mathbb{A}^n_S \to S$ est plat.*

Démonstration. — On commence par montrer que $\pi : \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est plat. Soient $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ et $s = \pi(x)$. On montre que π est plat en x. Si $\mathcal{O}_s$ est un corps alors le résultat est immédiat et on se ramène donc au cas où $\mathcal{O}_s$ est un anneau de valuation discrète dont on notera ϖ une uniformisante. Il suffit de montrer que $\mathcal{O}_x$ est sans ϖ-torsion. Comme $\mathcal{O}_x$ est intègre, cela revient à montrer $\pi_x^\sharp(\varpi) \neq 0$. Soit $U \subset \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ un voisinage ouvert de x. Alors, d'après la proposition 1.1.3, $\pi(U)$ est un voisinage ouvert de s. Si ϖ s'annulait en tout point de $\pi(U)$, alors on déduirait du théorème 1.2.18 que ϖ est nilpotent dans $\mathcal{O}_s$, ce qui est faux. On dispose alors de $t \in \pi(U)$ vérifiant $\varpi(t) \neq 0$ et il existe $z \in U_t$ tel que $\varpi(z) = \varpi(t) \neq 0$. On en déduit que $\pi_x^\sharp(\varpi) \neq 0$ et que π est plat en x.

On revient à présent sur le cas général. Soient $x \in \mathbb{A}_S^n$ et $s = \pi_S(x)$. On montre que π_S est plat en x. La propriété recherchée étant locale, on peut supposer que S est un modèle local d'espace $\mathcal{A}$-analytique et on dispose alors de $m \in \mathbb{N}$ et d'un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m}$ vérifiant $S \cong \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m}/\mathcal{I}\right)$ et $\mathbb{A}_S^n \cong \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+m}}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+m}}\right)$. En notant s' (resp. x') l'image de s (resp. x) dans $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$ (resp. $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+m}$), on obtient $\mathcal{O}_s \cong \mathcal{O}_{s'}/\mathcal{I}_{s'}$ et $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_{x'}/\mathcal{I}_{s'}\mathcal{O}_{x'}$ et on se ramène donc au cas où $S = \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^m$. Comme cela a été démontré ci-dessus, le morphisme $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m+n} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est plat et on obtient alors le résultat en appliquant le corollaire 2.1.5 au morphisme $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n+m,\mathrm{sch}} \to \mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{m,\mathrm{sch}}$. □

2.2. Morphismes non ramifiés : critère par fibres

Dans cette section, on étudie les morphismes d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques non ramifiés et on démontre un critère de ramification par fibres, répondant au passage à une conjecture énoncée dans [LS19, (2.2.9)]. On ne développe pas de théorie des différentielles de Kähler.

Définition 2.2.1. — Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques $f : X \to S$ est *non ramifié* en $x \in X$ si $f_x^\sharp : \mathcal{O}_s \to \mathcal{O}_x$ est non ramifié avec $s = f(x)$, c'est-à-dire $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$ et $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$. Un morphisme $f : X \to S$ est *non ramifié* s'il l'est en tout point de X.

On rappelle que le corollaire 1.1.15 indique que $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$ si et seulement si $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$.

Remarque 2.2.2. — Si f est non ramifié en x alors f est rigide épais et purement localement transcendant en x.

Proposition 2.2.3. — *Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $y = f(x)$. Alors :*

i) Si f est une immersion alors f est non ramifié.

ii) Si f est non ramifié en x et g est non ramifié en y alors $g \circ f$ est non ramifié en x.

Démonstration. — i) Si f est une immersion alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est un quotient de $\mathcal{O}_{Y,y}$. On en déduit le résultat.

ii) Immédiat.

□

Proposition 2.2.4. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Alors f est non ramifié en x si et seulement si le morphisme $f_s : X_s \to \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié en x.*

Démonstration. — Le corollaire 1.1.15 assure que $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$ si et seulement si $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$. En particulier, on peut supposer que x est rigide épais.

Il reste à montrer que $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$ si et seulement si $\mathfrak{m}_{X_s,x} = \mathfrak{m}_{\mathcal{M}(\mathcal{H}(s)),s}\mathcal{O}_{X_s,x}$. Comme $\mathfrak{m}_{\mathcal{M}(\mathcal{H}(s)),s} = 0$, cela revient à montrer que $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$ est un corps si et seulement si $\mathcal{O}_{X_s,x}$ en est un. C'est une conséquence de la proposition 1.4.10. □

Corollaire 2.2.5. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Si f est non ramifié en x alors x est isolé dans X_s. De plus, $f : X \to S$ est fini en x.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.2.4, on sait que $f_s : X_s \to \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié en x et on en déduit que $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est un corps. Comme x est rigide dans X_s, on déduit du lemme 1.5.3 qu'il est défini par des équations et du corollaire 1.5.6 qu'il est isolé.

On en déduit que f est fini en x par [LP20, Théorème 5.2.8]. □

Corollaire 2.2.6. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Si f est non ramifié en x alors $\mathcal{O}_x$ est un $\mathcal{O}_s$-module de présentation finie.*

Démonstration. — C'est une conséquence des corollaires 2.2.5 et 1.2.17. □

Corollaire 2.2.7. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques. Alors f est non ramifié si et seulement si, pour tout point $s \in S$, la fibre X_s s'écrit $\coprod_i \mathcal{M}(K_i)$ où les K_i sont des extensions finies séparables de $\mathcal{H}(s)$.*

Démonstration. — On suppose tout d'abord que $f : X \to S$ est non ramifié. Soit $s \in S$. D'après la proposition 2.2.4, $f_s : X_s \to \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié et on déduit du corollaire 2.2.5 que X_s est discret et s'écrit donc comme une union disjointe de points. Il suffit à présent de traiter le cas $X_s = \{x\}$. Comme $f_s : X_s \to \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié en x, on a $\mathfrak{m}_{X_s,x} = 0$ et $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est un corps. Le point x étant rigide dans X_s, on en déduit que $\mathcal{O}_{X_s,x} \cong \mathcal{H}(x)$. On a donc bien $X_s \cong \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$ et $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$ car $f_s : X_s \to \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié.

Réciproquement, on suppose que pour tout point $s \in S$, la fibre X_s s'écrit $\coprod_i \mathcal{M}(K_i)$ où les K_i sont des extensions finies séparables de $\mathcal{H}(s)$. Alors, pour tout $x \in X_s$, $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est l'un de ces K_i. On en déduit que $f_s : X_s \to \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié puis que $f : X \to S$ est non ramifié par la proposition 2.2.4. □

Corollaire 2.2.8. — *Soient $f : \mathscr{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme entre $\mathcal{A}$-schémas localement de présentation finie et $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{an}}$. Si f est non ramifié en $\rho(x)$ alors f^{an} est non ramifié en x.*

On suppose de plus que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique. Alors f est non ramifié en $\rho(x)$ si et seulement si f^{an} est non ramifié en x.

Démonstration. — On suppose tout d'abord que f est non ramifié en $\rho(x)$. Soient $s = f^{\mathrm{an}}(x) \in \mathscr{S}^{\mathrm{an}}$ et $\sigma = \rho_{\mathscr{S}}(s) \in \mathscr{S}$. Quitte à restreindre $\mathscr{X}$, on a $\mathscr{X}_\sigma \cong \coprod_i \mathrm{Spec}(K_i)$ où les K_i sont des extensions finies séparables de $\kappa(\sigma)$ d'après [Bos13, Corollaire 8.4.4]. Pour tout i, on note $\prod_j K_{i,j}$ le produit tensoriel $K_i \otimes_{\kappa(\sigma)} \mathcal{H}(s)$ où les $K_{i,j}$ sont des extensions finies séparables de $\mathcal{H}(s)$ d'après [Wei95, Proposition III.2.2]. On obtient :

$$\mathscr{X}_\sigma \otimes_{\kappa(\sigma)} \mathcal{H}(s) \cong \coprod_{i,j} \mathrm{Spec}(K_{i,j}).$$

Or, d'après le lemme 1.2.11, on a $(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})_s \cong (\mathscr{X}_\sigma \otimes_{\kappa(\sigma)} \mathcal{H}(s))^{\mathrm{an}}$ et on en déduit :

$$(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})_s \cong \coprod_{i,j} \mathcal{M}(K_{i,j}).$$

Ceci permet de conclure d'après le corollaire 2.2.7.

On suppose à présent que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique et que f^{an} est non ramifié en x. Alors $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$. On note $\widetilde{\xi}$ l'image de x dans $\mathscr{X}_\sigma \otimes_{\kappa(\sigma)} \mathcal{H}(s)$. Comme x est rigide dans $(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})_s$, on a $\kappa(\widetilde{\xi}) \cong \mathcal{H}(x)$ et $\kappa(\widetilde{\xi})$ est donc une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$. De plus, d'après le théorème 1.2.21, le morphisme $\mathcal{O}_{\widetilde{\xi}} \longrightarrow \mathcal{O}_{(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})_s,x}$ est plat. Le morphisme naturel $\mathcal{O}_{(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})_s,x} \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{\xi}}} \mathfrak{m}_{\widetilde{\xi}} \longrightarrow \mathcal{O}_{(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})_s,x}$ est donc une injection d'image $\mathfrak{m}_{\widetilde{\xi}} \mathcal{O}_{(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})_s,x}$. Comme $\mathcal{O}_{(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})_s,x}$ est un corps, on a $\mathfrak{m}_{\widetilde{\xi}} \mathcal{O}_{(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})_s,x} = 0$ et donc $\mathcal{O}_{(\mathscr{X}^{\mathrm{an}})_s,x} \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{\xi}}} \mathfrak{m}_{\widetilde{\xi}} = 0$. Par fidèle platitude, on en déduit $\mathfrak{m}_{\widetilde{\xi}} = 0$ et le morphisme $\mathscr{X}_\sigma \otimes_{\kappa(\sigma)} \mathcal{H}(s) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{H}(s))$ est donc non ramifié en $\widetilde{\xi}$. On en conclut que f_σ est non ramifié en ξ par [Bos13, Proposition 8.1.11] et donc que f est non ramifié en ξ. □

Remarque 2.2.9. — Sans supposer que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique, on peut montrer que, si f^{an} est non ramifié en tout point de $(f^{\mathrm{an}})^{-1}(f^{\mathrm{an}}(x))$, alors f est non ramifié en $\rho(x)$ par le corollaire 2.2.7.

Corollaire 2.2.10. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et S' un espace S-analytique. Si $f : X \to S$ est non ramifié alors $f_{S'} : X \times_S S' \to S'$ est non ramifié.*

Démonstration. — Soient $s' \in S'$ et $s \in S$ l'image de s'. D'après le corollaire 2.2.7, X_s s'écrit $\coprod_i \mathcal{M}(K_i)$ où les K_i sont des extensions finies séparables de $\mathcal{H}(s)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} f_{S'}^{-1}(s') &\cong (X \times_S S') \times_{S'} \mathcal{M}(\mathcal{H}(s')) \\ &\cong X \times_S \mathcal{M}(\mathcal{H}(s')) \\ &\cong (X \times_S \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))) \times_{\mathcal{M}(\mathcal{H}(s))} \mathcal{M}(\mathcal{H}(s')) \\ &\cong X_s \times_{\mathcal{M}(\mathcal{H}(s))} \mathcal{M}(\mathcal{H}(s')) \\ &\cong \coprod_i \mathcal{M}(K_i) \times_{\mathcal{M}(\mathcal{H}(s))} \mathcal{M}(\mathcal{H}(s')) \\ &\cong \coprod_i \mathcal{M}(K_i \widehat{\otimes}_{\mathcal{H}(s)} \mathcal{H}(s')) \\ &\cong \coprod_i \mathcal{M}(K_i \otimes_{\mathcal{H}(s)} \mathcal{H}(s')) \end{aligned}$$

où le dernier isomorphisme vient du fait que les K_i sont finis sur $\mathcal{H}(s)$. On déduit alors de [Wei95, Proposition III.2.2] que $f_{S'}^{-1}(s')$ s'écrit $\coprod_{i,j} \mathcal{M}(K_{i,j})$ où les $K_{i,j}$ sont des extensions finies séparables de $\mathcal{H}(s')$. On conclut par le corollaire 2.2.7. □

2.3. Morphismes non ramifiés : structure locale

Cette section est consacrée à l'étude de la structure locale des morphismes non ramifiés.

Définition 2.3.1. — Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques $f : X \to S$ est *étale* en $x \in X$ si $f_x^\sharp : \mathcal{O}_s \to \mathcal{O}_x$ est étale avec $s = f(x)$. C'est-à-dire $f_x^\sharp : \mathcal{O}_s \to \mathcal{O}_x$ est plat et non ramifié.

Un morphisme $f : X \to S$ est *étale* s'il l'est en tout point de X.

Proposition 2.3.2. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. On suppose que f est non ramifié en x. On dispose alors de voisinages ouverts $U \subset X$ de x et $V \subset S$ de s avec $f(U) \subset V$ et d'un polynôme unitaire $P \in \mathcal{O}(V)[T]$ de sorte que, en notant $Y = \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_V}/(P(T))\right)$, $f : U \to V$ se factorise par la projection naturelle $p : Y \to V$:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ & V \end{tikzcd}$$

et on a :

— $\kappa(x) \cong {}^{\kappa(s)[T]}\big/_{(P(T))}$

— $Y_s \cong \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$

— $p : Y \to V$ *est étale en* $\widetilde{f}(x)$

— $\widetilde{f} : U \to Y$ *est une immersion*

Démonstration. — On commence par noter que, d'après le corollaire 2.2.6, $\mathcal{O}_x$ est un $\mathcal{O}_s$-module de type fini. D'après le théorème de l'élément primitif, on dispose de $\bar{u} \in \kappa(x)$ non nul vérifiant $\kappa(x) \cong \kappa(s)[\bar{u}]$. On note $u \in \mathcal{O}_x$ un relevé de $\bar{u}$, $\bar{P} \in \kappa(s)[T]$ le polynôme minimal de $\bar{u}$ et $d = \deg(\bar{P})$. La famille d'éléments $1, \bar{u}, \ldots, \bar{u}^{d-1}$ est génératrice de $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x \cong \kappa(x)$ sur $\mathcal{O}_s$ et, d'après le lemme de Nakayama, $\mathcal{O}_x$ est engendré sur $\mathcal{O}_s$ par $1, u, \ldots, u^{d-1}$. On dispose donc de $P \in \mathcal{O}_s[T]$ unitaire de degré d vérifiant $P(u) = 0$ dans $\mathcal{O}_x$ et l'image de P dans $\kappa(s)[T]$ s'identifie à $\bar{P}$. On a donc bien $\kappa(x) \cong \kappa(s)[T]/(P(T))$. Soient $V \subset S$ un voisinage ouvert de s tel que les coefficients de P soient définis sur $\mathcal{O}(V)$ et $U = f^{-1}(V)$. D'après le corollaire 2.2.5, f est fini en x et donc, quitte à restreindre U, on peut supposer que $U_s = \{x\}$. D'après [LP20, Lemme 5.1.3] et quitte à rétrécir une nouvelle fois U et V, on peut donc supposer $u \in \mathcal{O}(U)$ et $P(u) = 0$ dans $\mathcal{O}(U)$. D'après la proposition 1.3.3, on dispose d'un unique morphisme $\widetilde{g} : U \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ vérifiant $\widetilde{g}^\sharp(T) = u$. On note $p_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}} : \mathbb{A}^1_V \to \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}$ et $p_V : \mathbb{A}^1_V \to V$ les projections naturelles. On considère $g : U \to \mathbb{A}^1_V$ l'unique morphisme vérifiant $p_{\mathbb{A}^1_{\mathcal{A}}} \circ g = \widetilde{g}$ et $p_V \circ g = f$, comme sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, dotted, "g"] \arrow[drr, bend left, "\widetilde{g}"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\ & \mathbb{A}^1_V \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1_{\mathcal{A}} \arrow[d] \\ & V \arrow[r] & \mathcal{M}(\mathcal{A}) \end{tikzcd} .$$

On pose maintenant $Y = \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_V}/(P(T))\right)$. On a $g^\sharp(P(T)) = P(u) = 0$ et on déduit donc de la proposition 1.1.13 que $g : U \to \mathbb{A}^1_V$ se factorise de façon unique par l'immersion fermée $Y \hookrightarrow \mathbb{A}^1_V$. Le morphisme $\widetilde{f} : U \to Y$ obtenu est celui recherché.

On note $y = \widetilde{f}(x)$. D'après la proposition 1.1.14, $\kappa(s)$ est hensélien et on déduit donc de [Ber93, Proposition 2.4.1] que

$$\mathcal{H}(x) \cong \kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \mathcal{H}(s) \cong \mathcal{H}(s)[T] \big/ (P(T)).$$

On en conclut que $Y_s \cong \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$ et donc, d'après la proposition 2.2.4, $p : Y \to V$ est non ramifié en y. Ce morphisme étant plat car $P(T)$ est unitaire, on en déduit qu'il est étale en y.

On montre à présent que, quitte à restreindre U, $\widetilde{f} : U \to Y$ est une immersion. D'après le lemme 1.2.9, il suffit de montrer que $\widetilde{f}^\sharp_x : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ est surjectif. Comme Y_s est réduit à un point, on déduit de la proposition 1.2.15 que $\mathcal{O}_y \cong \mathcal{O}_s[T]/(P(T))$. On pose $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_s[u]$ l'image réciproque de $\mathfrak{m}_x$ par l'injection $\mathcal{O}_s[u] \hookrightarrow \mathcal{O}_x$. L'inclusion $\mathcal{O}_s[u]/\mathfrak{m} \hookrightarrow \kappa(x)$ définissant $\kappa(x)$ comme un $\mathcal{O}_s[u]/\mathfrak{m}$-module de type fini, on déduit de [Bos13, Remarque 3.1.2] que $\mathcal{O}_s[u]/\mathfrak{m}$ est un corps et $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_s[u]$ est donc un idéal maximal. Alors l'image réciproque de $\mathfrak{m}$ par la surjection $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_s[u]$ est $\mathfrak{m}_y$ et $\mathcal{O}_y \to (\mathcal{O}_s[u])_\mathfrak{m}$ est donc encore surjectif. Or, d'après [Fu11, Lemme 2.3.4], $\mathcal{O}_x \cong (\mathcal{O}_s[u])_\mathfrak{m}$ et on en déduit que $\widetilde{f}^\sharp_x : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ est surjectif et que, quitte à restreindre U, $\widetilde{f} : U \to Y$ est une immersion. □

Corollaire 2.3.3. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $x \in X$. Alors f est non ramifié en x si et seulement si on dispose d'un voisinage ouvert $U \subset X$ de x tel que $f|_U$ se factorise en $U \hookrightarrow Y \to S$ où $U \hookrightarrow Y$ est une immersion fermée et $Y \to S$ est étale en l'image en x.*

Démonstration. — On suppose que $f : X \to S$ est non ramifié. Alors, d'après la proposition 2.3.2, on dispose d'un voisinage ouvert $U \subset X$ de x, d'un morphisme $p : Y \to S$ étale en l'image de x et d'une immersion $\widetilde{f} : U \hookrightarrow Y$ tels que $f = p \circ \widetilde{f}$. Quitte à restreindre Y, on peut supposer que $\widetilde{f}$ est une immersion fermée. La réciproque découle de la proposition 2.2.3. □

Lemme 2.3.4. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Soient maintenant K une extension finie de $\mathcal{H}(s)$ et $x_1, \ldots, x_n \in X_K = X \times_S \mathcal{M}(K)$ les points au-dessus de x. On suppose que le morphisme structural $X_K \to \mathcal{M}(K)$ est non ramifié en $x_1, \ldots, x_n$. Alors $f : X \to S$ est non ramifié en x.*

Démonstration. — D'après la proposition 1.2.15, on a :

$$\mathcal{O}_{X_s,x} \otimes_{\mathcal{H}(s)} K \cong \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{X_K,x_i}.$$

Or, d'après le corollaire 2.2.7, les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X_K,x_i}$ sont des extensions finies séparables de K. On déduit alors de [Bos13, Lemme 8.4.7] que $\mathcal{O}_{X_s,x}$ s'écrit comme produit d'extensions finies séparables de $\mathcal{H}(s)$. Un tel produit ne pouvant être un anneau local que s'il comporte un unique facteur, on obtient que $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est un corps ainsi qu'une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$ et donc que $f_s : X_s \to \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ est non ramifié en x. La proposition 2.2.4 permet donc de conclure. □

Lemme 2.3.5. — *Soient k un corps valué complet et X un espace k-analytique vérifiant :*

i) $X = \{x\}$,

ii) $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie et séparable de k,

iii) le morphisme diagonal $\Delta : X \to X \times_k X$ est un isomorphisme.

Alors $X \cong \mathcal{M}(k)$.

Démonstration. — On note $p_1, p_2 : X \times_k X \rightrightarrows X$ les projections naturelles. L'immersion fermée $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \cong X^{\mathrm{red}} \hookrightarrow X$ définie par $\mathfrak{m}_x$ induit une immersion fermée

$$X \times_k \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \longleftrightarrow X \times_k X \cong X$$

définie par $p_2^*\mathfrak{m}_x$. On en déduit que $X \times_k \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$ ne contient qu'un point et, par le lemme 1.2.12, on a donc $\mathcal{H}(x) \cong k$. L'immersion ci-dessus est donc un isomorphisme et donc $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_x/p_2^*\mathfrak{m}_x$ et $p_2^\sharp(\mathfrak{m}_x) = p_2^*\mathfrak{m}_x = 0$. On en conclut $\mathfrak{m}_x = \Delta^\sharp(p_2^\sharp(\mathfrak{m}_x)) = 0$ et on a bien $X \cong \mathcal{M}(k)$. □

Proposition 2.3.6. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $x \in X$. Alors $f : X \to S$ est non ramifié en x si et seulement si le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_S X$ est un isomorphisme local en x.*

Démonstration. — On suppose que f est non ramifié en x. D'après la proposition 2.3.2 et quitte à restreindre X, on a $f = \widetilde{f} \circ \iota$ avec $\iota : X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée d'espaces S-analytiques et $\widetilde{f} : Y \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques étale en $y = \iota(x)$ et vérifiant $Y_s \cong \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$. Comme $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$, [Wei95, Proposition III.2.2] assure que $\mathcal{H}(x) \otimes_{\mathcal{H}(s)} \mathcal{H}(x) \cong \prod_i K_i$ où les K_i sont des extensions finies séparables de $\mathcal{H}(x)$. On en déduit que $Y_s \times_{\mathcal{H}(s)} Y_s \cong \coprod_i \mathcal{M}(K_i)$. Comme $\Delta_{\widetilde{f_s}} : Y_s \to Y_s \times_{\mathcal{H}(s)} Y_s$ est une immersion d'après la proposition 1.2.13, $\mathcal{H}(\Delta_{\widetilde{f_s}}(y)) = \mathcal{H}(y)$ et donc $\mathcal{O}_{\Delta_{\widetilde{f_s}}(y)} \cong \mathcal{H}(y) \cong \mathcal{O}_y$. On obtient que $\Delta_{\widetilde{f_s}} = (\Delta_{\widetilde{f}})_s$ est un isomorphisme local en y et, en particulier, est plat en y. On déduit donc du corollaire 2.1.4 que $\Delta_{\widetilde{f}}$ est plat en y et du lemme 1.2.8 que, quitte à restreindre Y, $\Delta_{\widetilde{f}}$ est un isomorphisme. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X \arrow[r, "\Gamma_\iota \times_Y \mathrm{Id}_X"] \arrow[d, "\iota \times_Y \mathrm{Id}_X"'] & X \times_S Y \times_Y X \arrow[d, "\iota \times_S \mathrm{Id}_Y \times_Y \mathrm{Id}_X"] \\ Y \times_Y X \arrow[r, "\Delta_{\tilde{f}} \times_Y \mathrm{Id}_X"] & Y \times_S Y \times_Y X \end{tikzcd}$$

étant cartésien, on obtient que $\Gamma_\iota \times_Y \mathrm{Id}_X$ est un isomorphisme. De plus, Δ_ι est un isomorphisme local en x car ι coïncide avec l'immersion composée $X \hookrightarrow X \times_Y X \hookrightarrow Y \times_Y Y \cong Y$. On en conclut que Δ_f, étant égal au morphisme composé

$$X \xrightarrow{\Delta_\iota} X \times_Y X \xrightarrow{\Gamma_\iota \times_Y \mathrm{Id}_X} X \times_S Y \times_Y X \xrightarrow{\sim} X \times_S X \ ,$$

est un isomorphisme local en x.

Réciproquement, on suppose que Δ_f est un isomorphisme local en x. D'après la proposition 1.2.13, Δ_f est une immersion donc, quitte à rétrécir X, on peut supposer que c'est une immersion ouverte. De plus, d'après la proposition 2.2.4 et quitte à remplacer X par X_s et S par $\mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$, on peut supposer que $S = \mathcal{M}(k)$ où k est un corps valué complet. On commence par montrer qu'il est possible de se ramener au cas où X est réduit à un point rationnel.

On suppose tout d'abord que la valeur absolue sur k n'est pas triviale. Dans ce cas, les points rigides sont denses dans X et donc, par connexité locale de X, on dispose d'un point rigide x_{rig} dans la composante connexe de x. Soient $x_1, \ldots, x_n \in X \times_k \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$ les points au-dessus de x. Par propriété universelle du produit fibré, la composante connexe de x_i contient un point au-dessus de x_{rig} qui est rationnel pour tout $i \in [\![1, \ldots, n]\!]$. D'après le lemme 2.3.4, on peut donc supposer x_{rig} rationnel et on note $\widetilde{x_{\mathrm{rig}}}$ la section de f induite. On note maintenant p_1 et p_2 les projections $X \times_k X \rightrightarrows X$ et on considère le morphisme $h : X \to X \times_k X$ vérifiant $p_1 \circ h = \mathrm{Id}$ et $p_2 \circ h$ est la composition de $\widetilde{x_{\mathrm{rig}}}$ et du morphisme structural de X, comme sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{Id}"'] & \mathcal{M}(k) \arrow[dr, bend left, "\widetilde{x_{\mathrm{rig}}}"] & \\ & X \times_k X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & X \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & \mathcal{M}(k) \end{tikzcd} .$$

On a $h^{-1}(\Delta_f(X)) = \{x_{\mathrm{rig}}\}$. Comme Δ_f est une immersion ouverte, on en déduit que $\{x_{\mathrm{rig}}\}$ est isolé. On en conclut que $x = x_{\mathrm{rig}}$ est un point rationnel isolé de X.

On suppose à présent que la valeur absolue sur k est triviale. Soit K une extension complète non trivialement valuée de k. Alors on peut appliquer le raisonnement ci-dessus en un point $x_K \in X_K$ au-dessus de x et on en déduit que x_K est un point rigide isolé de X_K. D'après [Duc07, Lemme 1.21], on a $\dim_{K,x_K} X_K = 0$. On en déduit par [Duc07, Proposition 1.22] que $\dim_{k,x} X = 0$ et donc x est un point rigide isolé dans X que l'on peut de nouveau supposer rationnel par le lemme 2.3.4.

On peut donc se ramener au cas où X est réduit à un point rationnel x. D'après le lemme 1.2.12, $X \times_k X$ est aussi réduit à un point et Δ_f induit donc un isomorphisme $X \cong X \times_k X$. On déduit donc du lemme 2.3.5 que $X \cong \mathcal{M}(k)$ et on en conclut que $f : X \to \mathcal{M}(k)$ est bien non ramifié. $\square$

Remarque 2.3.7. — La proposition 2.3.6 a pour conséquence que la condition ii) du lemme 2.3.5 est inutile, étant impliquée par la condition iii).

Corollaire 2.3.8. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques. Alors l'ensemble $\{x \in X \mid f \text{ est non ramifié en } x\}$ est ouvert dans X.*

Démonstration. — Ce résultat découle directement de la proposition 2.3.6. $\square$

Corollaire 2.3.9. — *Soient S un espace $\mathcal{A}$-analytique, $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces S-analytiques et $x \in X$. On suppose que $Y \to S$ est non ramifié en $f(x)$. Alors le graphe $\Gamma_f : X \to X \times_S Y$ est un isomorphisme local en x.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.3.6, on dispose d'un voisinage ouvert $V \subset Y$ de $f(x)$ tel que Δ soit un isomorphisme $V \to V \times_S V$. On pose $U = f^{-1}(V)$. Le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\Gamma_f"] \arrow[d, "f"] & U \times_S V \arrow[d, "f \times \mathrm{Id}_V"] \\ V \arrow[r, "\Delta"] & V \times_S V \end{tikzcd}$$

étant cartésien, on en déduit que $\Gamma_f : U \to U \times_S V$ est aussi un isomorphisme. $\square$

Corollaire 2.3.10. — *Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $y = f(x)$. On suppose que $g \circ f$ est fini et plat en x et que g est non ramifié en y. Alors f est fini et plat en x.*

Démonstration. — D'après le corollaire 2.3.9, le graphe $\Gamma_f : X \to X \times_Z Y$ est un isomorphisme local en x. Or, d'après [LP20, Proposition 5.6.5], $p_Y : X \times_Z Y \to Y$ est fini et plat en tout point au-dessus de x. Donc $f = p_Y \circ \Gamma_f$ est fini et plat en x. $\square$

Corollaire 2.3.11. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme non ramifié d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques. Alors toute section $\sigma : Y \to X$ de f est une immersion ouverte.*

Démonstration. — On commence par remarquer que toutes les sections sont des immersions. En effet, si σ est une section de f alors c'est un morphisme au-dessus de Y et il coïncide avec son graphe $\Gamma_\sigma : Y \to X \times_Y Y \cong X$. On déduit donc de la proposition 1.2.13 que σ est une immersion.

On suppose maintenant que f est non ramifié. Comme $f \circ \sigma = \mathrm{Id}_Y$, on déduit du corollaire 2.3.10 que σ est plat puis du lemme 1.2.8 que c'est une immersion ouverte. □

2.4. Morphismes étales

On étudie ici les morphismes étales d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, comme définis en 2.3.1. On présente des résultats semblables à ceux des morphismes de schémas, avec quelques différences dans le cas de la proposition 2.4.3 et de son corollaire 2.4.5.

Proposition 2.4.1. — *Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Y' \to Y$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $y = f(x)$. Alors :*

i) Si f est étale en x et g est étale en y alors $g \circ f$ est étale en x.

ii) Si f est étale en x alors $f_{Y'} : X \times_Y Y' \to Y'$ est étale en tout point au-dessus de x.

iii) Si $g \circ f$ est étale en x et g est non ramifié en y alors f est étale en x.

iv) Si f et h sont étales alors tout morphisme $X \to Y'$ au-dessus de Y est étale.

Démonstration. — i) est immédiat.

ii) Soit $x' \in X \times_Y Y'$ un point au-dessus de x. D'après le corollaire 2.2.10, il suffit de vérifier que $f_{Y'} : X \times_Y Y' \to Y'$ est plat en x'. Le corollaire 2.2.5 assure que, quitte à rétrécir X, on peut supposer f fini. On peut donc conclure par [LP20, Proposition 5.6.5].

iii) D'après le corollaire 2.3.9 et le lemme 1.2.8, le graphe $\Gamma_f : X \to X \times_Z Y$ est étale en x. Or, d'après ii), $p_Y : X \times_Z Y \to Y$ est étale en tout point au-dessus de x. Donc $f = p_Y \circ \Gamma_f$ est étale en x par i).

iv) C'est une conséquence de [Stacks, Tag 00U7]

□

Proposition 2.4.2. — *Soient S un espace $\mathcal{A}$-analytique, $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces S-analytiques, $x \in X$, $y = f(x)$ et $s \in S$ l'image de x. On* *suppose que $X \to S$ est plat en x. Si $f_s : X_s \to Y_s$ est étale en x alors $f : X \to Y$ est étale en x.*

Démonstration. — D'après le corollaire 2.1.4, f est plat en x et il reste à montrer que ce morphisme est non ramifié en x. Comme f_s est non ramifié en x et $f_s^{-1}(y) = f^{-1}(y)$, on conclut par la proposition 2.2.4. $\square$

Proposition 2.4.3. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. On suppose que f est étale en x. On dispose alors de voisinages ouverts $U \subset X$ de x et $V \subset S$ de s avec $f(U) \subset V$ et d'un polynôme unitaire $P \in \mathcal{O}(V)[T]$ de sorte que, en notant $Y = \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_V}/(P(T))\right)$, $f : U \to V$ se factorise par la projection naturelle $p : Y \to V$:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ & V \end{tikzcd}$$

et on a :
- $\kappa(x) \cong \kappa(s)[T] \big/ (P(T))$
- $Y_s \cong \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$
- *$\widetilde{f} : U \to Y$ est un isomorphisme local en x*

Démonstration. — C'est une conséquence des propositions 2.3.2 et 2.4.1 iii) et du lemme 1.2.8. $\square$

Remarque 2.4.4. — La proposition 2.4.3 ne peut être écrite *mutatis mutandis* dans le cadre schématique qu'au prix du fait que la fibre Y_s est réduite à un point. Ce résultat a effectivement des conséquences pouvant étonner le lecteur accoutumé à la théorie des schémas (voir notamment le corollaire 2.4.5). On peut considérer l'exemple suivant : soient $\mathscr{S} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, $\mathscr{X} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[i])$, $f : \mathscr{X} \to \mathscr{S}$ le morphisme structural, $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ le point extrême de la branche $(1+2i)$-adique, $s = f^{\mathrm{an}}(x)$, $\xi = \rho(x)$ et $\sigma = f(\xi)$. Le polynôme $Q(T) = T^2+1$ est irréductible dans $\mathcal{O}_\sigma[T] \cong \mathbb{Z}_{(5)}[T]$ et tout voisinage de ξ se plonge bien dans $\mathscr{X} \cong V(Q(T)) \subset \mathbb{A}^{1,\mathrm{sch}}_{\mathbb{Z}}$. Dans ce cas, $\mathscr{X}_\sigma$ contient deux points distincts. Par contre, $Q(T)$ est scindé dans $\mathcal{O}_s[T] \cong \mathbb{Z}_5[T]$ et ses facteurs irréductibles sont définis sur un voisinage de s homéomorphe à un voisinage de x.

Corollaire 2.4.5. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Alors f est étale en x si et seulement si on dispose d'un polynôme unitaire $P(T) \in \mathcal{O}_s[T]$ dont l'image dans $\kappa(s)[T]$ est irréductible et séparable* *et tel que f induise un isomorphisme :*

$$\mathcal{O}_s[T] \Big/ (P(T)) \cong \mathcal{O}_x.$$

Démonstration. — On suppose tout d'abord que $f : X \to S$ est étale en x. D'après la proposition 2.4.3 et quitte à restreindre X et S, on dispose d'un polynôme unitaire $P(T) \in \mathcal{O}(S)[T]$ vérifiant $\kappa(x) \cong \kappa(s)[T]/(P(T))$ et d'un isomorphisme local $X \to Y = \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_S}/(P(T))\right)$ en x. En particulier, $\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_y$ où y désigne l'image de x dans Y. D'après ce même lemme, Y_s est réduit à un point et on déduit donc de la proposition 1.2.15 que $\mathcal{O}_y \cong \mathcal{O}_s[T]/(P(T))$. L'image de $P(T)$ dans $\kappa(s)[T]$ est bien irréductible et séparable car f est non ramifié en x et $\kappa(x) \cong \kappa(s)[T]/(P(T))$.

Réciproquement, on suppose l'existence d'un polynôme unitaire $P(T) \in \mathcal{O}_s[T]$ dont l'image dans $\kappa(s)[T]$ est irréductible et séparable de sorte que $f : X \to S$ induise un isomorphisme $\mathcal{O}_s[T] \Big/ (P(T)) \cong \mathcal{O}_x$. Alors f est plat en x car $P(T)$ est unitaire. On montre que f est non ramifié en x. On a :

$$\kappa(s)[T] \Big/ (P(T)) \cong \mathcal{O}_x \Big/ \mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x.$$

L'image de $P(T)$ dans $\kappa(s)[T]$ étant irréductible, on en déduit que $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$ est un corps et donc que $\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x = \mathfrak{m}_x$. De plus, ce polynôme étant séparable, on en conclut que $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$ et $f : X \to S$ est non ramifié en x et donc étale en x. □

Corollaire 2.4.6. — *Soit $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques. Alors l'ensemble $\{x \in X \mid f \text{ est étale en } x\}$ est ouvert dans X.*

Démonstration. — Soit $x \in X$. On suppose que f est étale en x. D'après le corollaire 2.3.8, il suffit de montrer l'existence d'un voisinage ouvert $U \subset X$ de x tel que le morphisme $U \to S$ soit plat. D'après la proposition 2.4.3 et quitte à restreindre X et S, on dispose d'un espace $\mathcal{A}$-analytique Y plat sur S et localement isomorphe à X au voisinage de x. Il convient alors de prendre U isomorphe à un ouvert de Y. □

Corollaire 2.4.7. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $x \in X$. Si f est étale en x alors f est ouvert en x.*

Démonstration. — On note $s = f(x)$. D'après la proposition 2.4.3, on peut supposer $X \cong \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_S}/(P(T))\right)$ où $P(T) \in \mathcal{O}(S)[T]$ est unitaire et X_s est réduit à un point. Soit $U \subset X$ un voisinage ouvert de x. Alors U est un voisinage de X_s et, d'après [LP20, Lemme 5.1.3], on dispose d'un voisinage ouvert $V \subset S$ de

s vérifiant $f^{-1}(V) \subset U$. On sait que l'image de $P(T)$ dans $\mathcal{H}(s)[T]$ est de degré strictement positif car $x \in \operatorname{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_S}/(P(T))\right)$. Or, $P(T)$ est unitaire et, en particulier, son coefficient dominant ne s'annule en aucun point. On en déduit que, pour tout $t \in S$, l'image de $P(T)$ dans $\mathcal{H}(t)[T]$ est de degré strictement positif et donc le morphisme $f^{-1}(V) \to V$ induit par f est surjectif. Alors $V \subset f(f^{-1}(V)) \subset f(U)$ et on en conclut que f est ouvert en x. □

Proposition 2.4.8. — *Soient $f : \mathscr{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme entre $\mathcal{A}$-schémas localement de présentation finie et $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{an}}$. Si f est étale en $\rho(x)$ alors f^{an} est étale en x.*

On suppose de plus que $\mathcal{A}$ est un anneau de Dedekind analytique. Alors f est étale en $\rho(x)$ si et seulement si f^{an} est étale en x.

Démonstration. — On suppose tout d'abord que f est étale en $\rho(x)$. D'après le corollaire 2.2.8, f^{an} est non ramifié en x et il suffit de montrer qu'il est plat en x. Quitte à restreindre $\mathscr{S}$ et d'après [Fu11, Théorème 2.3.5], on dispose d'un polynôme $P(T) \in \mathcal{O}(\mathscr{S})[T]$ de sorte que f se factorise en :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{X} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathscr{Y} = \operatorname{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathscr{S}}} \big/ P(T)\right) \arrow[d, "\pi_{\mathscr{S}}"] \\ & \mathscr{S} \end{tikzcd}$$

où $\widetilde{f}$ est un isomorphisme local en $\rho(x)$. Alors $\mathscr{Y}$ est localement de présentation finie sur $\mathcal{A}$ et $f^{\mathrm{an}} = \widetilde{f}^{\mathrm{an}} \circ (\pi_{\mathscr{S}})^{\mathrm{an}}$. Or, $\widetilde{f}^{\mathrm{an}}$ est un isomorphisme local en x d'après [LP20, Proposition 6.5.3] et $(\pi_{\mathscr{S}})^{\mathrm{an}}$ est plat en $\widetilde{f}^{\mathrm{an}}(x)$ car $P(T)$ est unitaire. On en conclut que f^{an} est plat en x et donc étale en x.

La seconde partie de l'énoncé découle des corollaires 1.2.22 et 2.2.8. □

Proposition 2.4.9. — *Soient S un espace $\mathcal{A}$-analytique et $S_0 \hookrightarrow S$ un fermé analytique ayant le même espace topologique sous-jacent que S. Le foncteur $X \mapsto X \times_S S_0$ définit une équivalence entre la catégorie des espaces $\mathcal{A}$-analytiques étales sur S et la catégorie des espaces $\mathcal{A}$-analytiques étales sur S_0.*

Démonstration. — Ce foncteur est bien défini d'après la proposition 2.4.1 i). On commence par montrer qu'il est pleinement fidèle. Soient X et Y des espaces $\mathcal{A}$-analytiques étales sur S. On souhaite montrer que l'application naturelle $\operatorname{Hom}_S(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{S_0}(X \times_S S_0, Y \times_S S_0)$ est une bijection. On note $X_0 = X \times_S S_0$ et $Y_0 = Y \times_S S_0$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_S(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X, X\times_S Y) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{S_0}(X_0,Y_0) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{X_0}(X_0, X_0\times_{S_0} Y_0)
\end{array}$$

où les flèches horizontales sont définies par $f \mapsto \Gamma_f$ et ont pour réciproque la composition à gauche par la projection sur Y (resp. Y_0). Il suffit donc de montrer que la flèche de droite, correspondant au changement de base $X_0 \to X$, est bijective. On note que, d'après le corollaire 2.3.9, tout élément de $\mathrm{Hom}_X(X, X\times_S Y)$ est une immersion ouverte.

On renomme à présent X en S, $X \times_S Y$ en X, X_0 en S_0 et $X_0 \times_{S_0} Y_0$ en X_0 et on note $f : X \to S$ la projection sur S et $f_0 : X_0 \to S_0$ la projection sur S_0. Soit $\sigma \in \mathrm{Hom}_S(S, X)$. Comme σ est une immersion ouverte, son image $X' \subset X$ est un ouvert pour lequel $\sigma : S \to X'$ est un isomorphisme de réciproque $f_{|X'}$. Réciproquement, si on choisit un ouvert X' de X sur lequel f induit un isomorphisme, la réciproque de $f_{|X'}$ induit bien une section de f qui est une immersion ouverte d'après le corollaire 2.3.11. On en déduit que $\mathrm{Hom}_S(S, X)$ est en bijection avec l'ensemble des ouverts de X sur lesquels f induit un isomorphisme. De la même façon, $\mathrm{Hom}_{S_0}(S_0, X_0)$ est en bijection avec l'ensemble des ouverts de X_0 sur lesquels f_0 induit un isomorphisme. Comme X et X_0 ont le même espace topologique sous-jacent, les ouverts de X sont en bijection avec ceux de X_0 via le foncteur $X' \mapsto X' \times_S S_0$ et on se ramène donc à montrer que, si $X' \subset X$ est un ouvert et $X'_0 = X' \times_S S_0$, $f_{|X'}$ est un isomorphisme si et seulement si $f_{0|X'_0}$ en est un. Soient $x_0 \in X'_0$, $s_0 = f_0(x_0)$, $x \in X'$ l'image de x_0 et $s = f(x)$. On dispose alors d'un idéal $I \subset \mathcal{O}_s$ vérifiant $\mathcal{O}_{s_0} \cong \mathcal{O}_s/I$ et $\mathcal{O}_{x_0} \cong \mathcal{O}_x/I$. Comme f est étale et d'après le corollaire 2.2.6, $\mathcal{O}_x$ est de présentation finie et plat sur $\mathcal{O}_s$. On en déduit que $\mathcal{O}_x$ est libre sur $\mathcal{O}_s$ d'après [Stacks, Tag 00NZ] et on note n l'entier vérifiant $\mathcal{O}_x \cong (\mathcal{O}_s)^n$. Comme $\mathcal{O}_x/I\mathcal{O}_x \cong (\mathcal{O}_s/I)^n$ est non nul, on a bien :

$$f \text{ est un isomorphisme en } x \Leftrightarrow n = 1 \Leftrightarrow f_0 \text{ est un isomorphisme en } x_0.$$

On en conclut que le foncteur $X \mapsto X \times_S S_0$ est bien pleinement fidèle.

On montre à présent que ce foncteur est essentiellement surjectif. Soient $f : X_0 \to S_0$ un morphisme étale d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $x \in X_0$. D'après la proposition 2.4.3, on dispose d'un ouvert $S' \subset S$, de $S'_0 = S' \times_S S_0$, d'un voisinage ouvert $U_{0,x}$ de x et d'un polynôme unitaire $P_0 \in \mathcal{O}(S'_0)[T]$ de sorte que $U_{0,x}$ soit isomorphe à un ouvert $V_{0,x}$ de $\mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{S'_0}}/(P_0(T))\right)$. Quitte à restreindre S', on dispose de $P(T) \in \mathcal{O}(S')[T]$ un relevé unitaire de $P_0(T)$. Alors

$\mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{S_0'}}/(P_0(T))\right)$ est isomorphe à $\mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{S'}}/(P(T))\right) \times_{S'} S_0'$ qui est un fermé analytique de $\mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{S'}}/(P(T))\right)$. On note $V_{0,x}^{\mathrm{c}}$ le complémentaire de $V_{0,x}$ dans $\mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{S_0'}}/(P_0(T))\right)$. Alors l'image de $V_{0,x}^{\mathrm{c}}$ dans $\mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{S'}}/(P(T))\right)$ est fermée et on note V_x son complémentaire. On obtient :

$$U_{0,x} \cong V_{0,x} \cong V_x \times_{S'} S_0' \cong V_x \times_S S_0.$$

On vérifie à présent que l'on peut recoller les V_x. Soient $x, y \in X_0$ et V_{xy} (resp. V_{yx}) l'image de $U_{0,x} \cap U_{0,y}$ dans V_x (resp. V_y). On a alors :

$$V_{xy} \times_S S_0 \cong U_{0,x} \cap U_{0,y} \cong V_{yx} \times_S S_0$$

et, le foncteur $X \mapsto X \times_S S_0$ étant pleinement fidèle, on dispose d'un isomorphisme $\varphi_{xy} : V_{xy} \to V_{yx}$. On considère à présent un troisième point $z \in X_0$. En remarquant :

$$(U_{0,y} \cap U_{0,x}) \cap (U_{0,y} \cap U_{0,z}) \cong (U_{0,x} \cap U_{0,y}) \cap (U_{0,x} \cap U_{0,z}),$$

on déduit :

$$(V_{yx} \cap V_{yz}) \times_S S_0 \cong (V_{xy} \cap V_{xz}) \times_S S_0$$

et donc, par pleine fidélité de $X \mapsto X \times_S S_0$, on a :

$$\varphi_{xy}^{-1}(V_{yx} \cap V_{yz}) = V_{xy} \cap V_{xz}.$$

De plus, l'image du diagramme :

$$\begin{tikzcd} V_{xy} \cap V_{xz} \arrow[rr, "\varphi_{xy}"] \arrow[dr, "\varphi_{xz}"'] & & V_{yx} \cap V_{yz} \arrow[dl, "\varphi_{yz}"] \\ & V_{zx} \cap V_{zy} & \end{tikzcd}$$

par le foncteur pleinement fidèle $X \mapsto X \times_S S_0$ étant commutative, ce diagramme est lui-même commutatif. D'après [Stacks, Tag 01JB], on dispose alors d'un espace localement annelé X admettant un recouvrement par des ouverts isomorphes aux $V_x, x \in X_0$. On en déduit que X est un espace $\mathcal{A}$-analytique étale sur S et $X_0 \cong X \times_S S_0$. On en conclut que le foncteur $X \mapsto X \times_S S_0$ est bien essentiellement surjectif. $\square$

2.5. Morphismes lisses

L'objectif de cette section est d'introduire la notion de morphisme lisse d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et de déduire certaines de ses propriétés des résultats des sections précédentes.

Lemme 2.5.1. — *Soient S un espace $\mathcal{A}$-analytique, $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to \mathbb{A}^n_S$ un morphisme d'espaces S-analytiques, $s \in S$ et $x \in X$ un point rigide épais au-dessus de s. Si f est étale en x alors $n = \dim(\mathcal{O}_x) - \dim(\mathcal{O}_s)$.*

Démonstration. — On pose $y = f(x)$. Alors y est rigide épais au-dessus de s et on déduit de [Poi13, Théorème 9.17] que $\dim(\mathcal{O}_y) = n + \dim(\mathcal{O}_s)$. Comme $f^\sharp_x : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ est étale, on a $\dim(\mathcal{O}_x) = \dim(\mathcal{O}_y) = n + \dim(\mathcal{O}_s)$ et on en déduit le résultat. $\square$

Définition 2.5.2. — Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques $f : X \to S$ est *lisse* en $x \in X$ si on dispose de $n \in \mathbb{N}$ et d'un voisinage ouvert $U \subset X$ de x de sorte que $f|_U$ se factorise en :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{A}^n_S \arrow[d, "\pi_S"] \\ & S \end{tikzcd}$$

où $\widetilde{f}$ est étale en x. L'entier n vérifiant cette propriété est noté $\dim_x f$ et appelé *dimension relative de* f en x.

Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques $f : X \to S$ est *lisse* s'il l'est en tout point de X.

Remarque 2.5.3. — Dans le cadre de la définition 2.5.2, $\dim_x f$ est unique. En effet, la propriété universelle du produit fibré implique l'existence d'un $\mathcal{H}(x)$-point $\widetilde{x}$ dans $U \times_S \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$. Alors le morphisme étale $\widetilde{f} \times_S \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) : U \times_S \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \to \mathbb{A}^n_{\mathcal{H}(x)}$ est rigide épais en $\widetilde{x}$ et on déduit du lemme 2.5.1 :

$$\dim_x f = \dim(\mathcal{O}_{\widetilde{x}}) - \dim(\mathcal{H}(x)) = \dim(\mathcal{O}_{\widetilde{x}}).$$

Proposition 2.5.4. — *Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Y' \to Y$ des morphismes d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $y = f(x)$. Alors :*

i) Si f est lisse en x et g est lisse en y alors $g \circ f$ est lisse en x et $\dim_x(g \circ f) = \dim_y g + \dim_x f$.

ii) Si f est lisse en x alors $f_{Y'} : X \times_Y Y' \to Y'$ est lisse de dimension relative $\dim_x f$ en tout point au-dessus de x.

iii) Si $g \circ f$ est lisse en x et g est non ramifié en y alors f est lisse en x et $\dim_x f = \dim_x(g \circ f)$.

Démonstration. — i) On dispose d'un voisinage $U \subset X$ de x (resp. $V \subset Y$ de y), d'un entier n (resp. m) et d'un morphisme $\widetilde{f} : U \to \mathbb{A}^n_Y$ (resp. $\widetilde{g} : V \to \mathbb{A}^m_Z$) au-dessus de f (resp. g) étale en x (resp. y). D'après la proposition 2.4.1

ii), $\mathbb{A}^n_{\widetilde{g}} : \mathbb{A}^n_V \to \mathbb{A}^{m+n}_Z$ est étale en $\widetilde{f}(x)$. Quitte à restreindre U, on peut supposer $U \subset \widetilde{f}^{-1}(\mathbb{A}^n_V)$ et on obtient, d'après la proposition 2.4.1 i), que $\mathbb{A}^n_{\widetilde{g}} \circ \widetilde{f} : U \to \mathbb{A}^{m+n}_Z$ est étale en x. On en conclut que $g \circ f = \pi_Z \circ \mathbb{A}^n_{\widetilde{g}} \circ \widetilde{f}$ est lisse en x.

ii) C'est une conséquence de la proposition 2.4.1 ii).

iii) D'après le corollaire 2.3.9, $\Gamma_f : X \to X \times_Z Y$ est un isomorphisme local en x et est donc lisse en x. De plus, d'après ii), $p_Y : X \times_Z Y$ est lisse en $\Gamma_f(x)$. On déduit donc de i) que $f = p_Y \circ \Gamma_f$ est lisse en x.

□

Proposition 2.5.5. — *Soient $f : \mathscr{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme entre $\mathcal{A}$-schémas localement de présentation finie et $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{an}}$. Si f est lisse en $\rho(x)$ alors f^{an} est lisse en x.*

Démonstration. — Cela découle de la proposition 2.4.8 et du fait que $(\mathbb{A}^n_{\mathscr{S}})^{\mathrm{an}} = \mathbb{A}^n_{\mathscr{S}^{\mathrm{an}}}$. □

Proposition 2.5.6. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $n \in \mathbb{N}$. Alors l'ensemble*

$$\{x \in X \mid \ f \textit{ est lisse en } x \textit{ de dimension relative } n\}$$

est ouvert dans X.

Démonstration. — Soit $x \in X$ un point en lequel f est lisse de dimension relative n. On dispose d'un voisinage $U \subset X$ de x et d'un morphisme $\widetilde{f} : U \to \mathbb{A}^n_S$ étale en x et vérifiant $f = \pi_S \circ \widetilde{f}$. D'après le corollaire 2.4.6 et quitte à restreindre U, on peut supposer que $\widetilde{f}$ est étale. Alors f est lisse et $\dim_x f = n$ en tout point de U. □

Proposition 2.5.7. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $x \in X$. Si f est lisse en x alors f est plat en x.*

Démonstration. — Quitte à restreindre X, on dispose de $n \in \mathbb{N}$ et d'un morphisme $\widetilde{f} : X \to \mathbb{A}^n_S$ étale en x vérifiant $f = \pi_S \circ \widetilde{f}$. Alors $\widetilde{f}$ est plat en x et π_S est plat en $\widetilde{f}(x)$ d'après le corollaire 2.1.8. On en conclut que f est plat en x. □

Corollaire 2.5.8. — *Un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques est étale en un point si et seulement s'il est lisse et non ramifié en ce point.*

Démonstration. — Le sens direct est immédiat. La réciproque découle du fait que les morphismes lisses sont plats, qui est une conséquence de la proposition 2.5.7.

□

CHAPITRE 3

TOPOLOGIE ÉTALE

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer les résultats du chapitre précédent afin d'étudier la structure locale de certains morphismes pour la topologie étale. Cette étude permet ensuite de démontrer l'existence et les premières propriétés du groupe fondamental étale d'un espace $\mathcal{A}$-analytique. Pour ce faire, on utilisera le formalisme des catégories galoisiennes.

3.1. Structure locale de morphismes

Soient $\mathcal{A}$ un anneau de base géométrique et S un espace $\mathcal{A}$-analytique.

Définition 3.1.1. — Un *recouvrement étale* de S est une famille surjective de morphismes étales vers S.

Les recouvrements étales forment une prétopologie sur $\mathrm{An}_{\mathcal{A}}$.

Définition 3.1.2. — On note $(\mathrm{An}/\mathcal{A})_{\text{Ét}}$ le site formé par la catégorie $\mathrm{An}_{\mathcal{A}}$ munie de la topologie induite par les recouvrements étales. Le localisé de $(\mathrm{An}/\mathcal{A})_{\text{Ét}}$ en S est noté $(\mathrm{An}/S)_{\text{Ét}}$.

Remarque 3.1.3. — Comme les immersions ouvertes sont étales, la topologie de $(\mathrm{An}/\mathcal{A})_{\text{Ét}}$ est plus fine que celle induite par les recouvrements ouverts.

On commence par étudier la structure locale des morphismes rigides épais, non ramifiés et étales pour la topologie étale.

Définition 3.1.4. — Un espace S-analytique U est un *revêtement étale* de S si $U \to S$ est fini et étale. Si $s \in S$, un *voisinage étale* $(U, \bar{s}) \longrightarrow (S, s)$ de s est la donnée d'un revêtement étale $U \longrightarrow S$ et d'un point $\bar{s} \in U$ au-dessus de s.

Si $X \in \mathrm{An}_S$ et $(U, \bar{s}) \to (S, s)$ est un voisinage étale d'un point $s \in S$, on notera X_U le produit fibré $X \times_S U$.

Lemme 3.1.5. — *Soient $s \in S$ et k une extension finie séparable de $\kappa(s)$. Il existe un voisinage étale $(U, \bar{s}) \longrightarrow (S, s)$ de s vérifiant $\kappa(\bar{s}) \cong k$.*

Démonstration. — D'après le théorème de l'élément primitif, on dispose de $u \in k$ tel que $\kappa(s)[u] \cong k$. Soient $\bar{P}(T) \in \kappa(s)[T]$ le polynôme minimal de u et $P(T) \in \mathcal{O}_s[T]$ un relevé unitaire de $\bar{P}(T)$. On pose $A = \mathcal{O}_s[T]/(P(T))$. Soient $V \subset S$ un voisinage ouvert de s sur lequel les coefficients de $P(T)$ sont définis, $U = \operatorname{Supp}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_V}/(P(T))\right)$ et $f : U \to S$ le morphisme induit par la projection $\mathbb{A}^1_V \to V$. Alors f est fini et on a donc $A \cong \prod_{z \in f^{-1}(s)} \mathcal{O}_z$. Or, $\mathfrak{m}_s A \subset A$ est un idéal maximal car $A/\mathfrak{m}_s A \cong k$ et on dispose donc de $\bar{s} \in f^{-1}(s)$ vérifiant $(A)_{\mathfrak{m}_s A} \cong \mathcal{O}_{\bar{s}}$. On a alors $\kappa(\bar{s}) \cong k$ et $\mathfrak{m}_{\bar{s}} = \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{\bar{s}}$ et, en particulier, f est non ramifié en $\bar{s}$. De plus, f est plat, et donc étale, en $\bar{s}$ car $P(T)$ est unitaire. Quitte à restreindre U, on peut supposer que f est étale. □

Proposition 3.1.6. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. On suppose que f est rigide épais en x. Il existe alors un voisinage étale $(U, \bar{s}) \to (S, s)$ de s tel que, pour tout $\bar{x} \in X_U$ au-dessus de x et $\bar{s}$, $\kappa(\bar{x})$ est une extension finie radicielle de $\kappa(\bar{s})$.*

Démonstration. — Soit k une clôture galoisienne de $\kappa(s)$ contenant la fermeture séparable de $\kappa(s)$ dans $\kappa(x)$. D'après le lemme 3.1.5, on dispose d'un voisinage étale $(U, \bar{s}) \to (S, s)$ de s tel que $\kappa(\bar{s}) \cong k$.

D'après le lemme 1.2.12, les points de X_U au-dessus de x et $\bar{s}$ sont en nombre fini. Notons les $y_1, \ldots, y_n$. On cherche à montrer que $\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(\bar{s}) \cong \prod_i \kappa(y_i)$. Comme $U \to S$ est purement localement transcendant en $\bar{s}$, on a $\kappa(\bar{s}) \cong \kappa(s) \otimes_{\mathcal{O}_s} \mathcal{O}_{\bar{s}}$ et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(\bar{s}) &\cong \kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s) \otimes_{\mathcal{O}_s} \mathcal{O}_{\bar{s}} \\
&\cong \kappa(x) \otimes_{\mathcal{O}_s} \mathcal{O}_{\bar{s}} \\
&\cong \kappa(x) \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_s} \mathcal{O}_{\bar{s}}.
\end{aligned}$$

D'après la preuve de [LP20, Théorème 5.4.8], on a $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_s} \mathcal{O}_{\bar{s}} \cong \prod_i \mathcal{O}_{y_i}$ et donc :

$$\begin{aligned}
\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(\bar{s}) &\cong \kappa(x) \otimes_{\mathcal{O}_x} \prod_i \mathcal{O}_{y_i} \\
&\cong \prod_i \left(\kappa(x) \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_{y_i}\right).
\end{aligned}$$

Or, $X_U \to X$ est étale en les y_i et, en particulier, $\kappa(x) \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_{y_i} \cong \kappa(y_i)$ pour tout i. On en déduit bien que $\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(\bar{s}) \cong \prod_i \kappa(y_i)$. En particulier, les $\kappa(y_i)$ sont des extensions finies radicielles de $\kappa(\bar{s})$. □

Le corollaire 3.1.7 est un exemple d'application de la proposition 3.1.6.

Corollaire 3.1.7. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. Il existe alors un morphisme lisse $U \to S$ ainsi qu'un point $\bar{s} \in U$ au-dessus de s vérifiant :*

- *$U \to S$ est purement localement transcendant en $\bar{s}$,*
- *si $\bar{x} \in X \times_S U$ est un point au-dessus de x et $\bar{s}$ alors $\kappa(\bar{x})$ est une extension finie radicielle de $\kappa(\bar{s})$.*

Démonstration. — D'après le lemme 2.1.2, on dispose d'un voisinage ouvert $X' \subset X$ de x, d'un ouvert $S' \subset S$ contenant $f(X')$ et d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{A}^n_{S'} \arrow[dl, "\pi_V"] \\ & S' & \end{tikzcd}$$

où, en notant $y = \widetilde{f}(x)$, $\widetilde{f}$ est rigide épais en x et π_V est purement localement transcendant en y. En appliquant la proposition 3.1.6 au morphisme $\widetilde{f} : X' \to \mathbb{A}^n_{S'}$ et au point x, on déduit l'existence d'un voisinage étale $(U, \bar{s}) \to (\mathbb{A}^n_{S'}, y)$ de y tel que, pour tout $\bar{x} \in X'_U$ au-dessus de x et $\bar{s}$, $\kappa(\bar{x})$ est une extension finie radicielle de $\kappa(\bar{s})$. Alors $(U, \bar{s}) \to (S, s)$ est un voisinage lisse de s et, comme $U \to \mathbb{A}^n_{S'}$ est non ramifié en y, on a $\mathfrak{m}_{\bar{s}} = \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{\bar{s}} = \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{\bar{s}}$. On conclut en remarquant que tout point $\bar{x} \in X_U$ au-dessus de x et $\bar{s}$ est dans X'_U et vérifie donc la propriété escomptée. □

Lemme 3.1.8. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $x \in X$. Si f est non ramifié en x et $\kappa(x)$ est une extension radicielle de $\kappa(s)$ alors il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x tel que $f|_U$ soit une immersion.*

Démonstration. — Comme f est non ramifié en x, $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$. On en déduit $\kappa(x) \cong \kappa(s)$ et donc $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x \cong \kappa(x) \cong \mathcal{O}_s/\mathfrak{m}_s$. D'après le corollaire 2.2.6, $\mathcal{O}_x$ est de présentation finie sur $\mathcal{O}_s$ et on déduit donc du lemme de Nakayama que $f^\sharp_x : \mathcal{O}_s \to \mathcal{O}_x$ est surjectif. On conclut par le lemme 1.2.9. □

Corollaire 3.1.9. — *Un morphisme non ramifié est localement une immersion fermée pour la topologie étale. Plus précisément :*

Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. On suppose que f est non ramifié en x. On dispose alors d'un voisinage étale $(U, \bar{s}) \to (S, s)$ de s vérifiant : pour tout $\bar{x} \in X_U$ au-dessus de x et $\bar{s}$, il existe un voisinage ouvert $V \subset X_U$ de $\bar{x}$ tel que $V \to U$ est une immersion fermée.

Démonstration. — En appliquant la proposition 3.1.6, on dispose d'un voisinage étale $(U, \bar{s}) \to (S, s)$ de s tel que, en choisissant $\bar{x} \in X_U$ au-dessus de x et $\bar{s}$, $\kappa(\bar{x})$ est une extension finie radicielle de $\kappa(\bar{s})$. Or, $X_U \to U$ est non ramifié en $\bar{x}$ et, d'après le lemme 3.1.8, on dispose d'un voisinage ouvert $V \subset X_U$ de $\bar{x}$ tel que $V \to U$ est une immersion. Quitte à restreindre U, on peut supposer que c'est une immersion fermée. □

Corollaire 3.1.10. — *Un morphisme étale est localement un isomorphisme pour la topologie étale. Plus précisément :*

Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. On suppose que f est étale en x. On dispose alors d'un voisinage étale $(U, \bar{s}) \to (S, s)$ de s vérifiant : pour tout $\bar{x} \in X_U$ au-dessus de x et $\bar{s}$, il existe un voisinage ouvert $V \subset X_U$ de $\bar{x}$ tel que $V \to U$ est un isomorphisme.

Démonstration. — En appliquant le corollaire 3.1.9, on dispose d'un voisinage étale $(U, \bar{s}) \to (S, s)$ de s de sorte que, en choisissant $\bar{x} \in X_U$ au-dessus de x et $\bar{s}$, il existe un voisinage ouvert $V \subset X_U$ de $\bar{x}$ tel que $V \to U$ est une immersion fermée. Or, $V \to U$ est étale, et donc plat. Donc $V \to U$ est une immersion ouverte d'après le lemme 1.2.8 et, quitte à restreindre U, on peut supposer que c'est un isomorphisme. □

Corollaire 3.1.11. — *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $s \in S$. On suppose que f est non ramifié (resp. étale) et fini. Il existe alors un voisinage étale $(U, \bar{s}) \to (S, s)$ de s ainsi qu'une décomposition finie*

$$X_U = \coprod_i W_i$$

de sorte que $W_i \to U$ est une immersion fermée (resp. un isomorphisme).

Démonstration. — On suppose tout d'abord que f est non ramifié et on note $x_1, \ldots, x_n \in X$ les points au-dessus de s. Pour tout $i \in [\![1, \ldots, n]\!]$, le corollaire 3.1.9 assure l'existence d'un voisinage étale $(U_i, \bar{s}_i) \to (S, s)$ de s tel que, en notant $\{\bar{x}_{i,j} \in X_{U_i}\}_j$ les points au-dessus de x_i et $\bar{s}_i$, on dispose pour tout j d'un voisinage ouvert $V_{i,j} \subset X_{U_i}$ de $\bar{x}_{i,j}$ de sorte que $V_{i,j} \to U_i$ soit une immersion fermée. On pose alors $U = U_1 \times_S \cdots \times_S U_n$, $\bar{s} \in U$ un point au-dessus de $\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n$ et, pour tous i, j, $W_{i,j}$ l'image réciproque de $V_{i,j}$ par le morphisme $X_U \to X_{U_i}$. On note que $(U, \bar{s}) \to (S, s)$ est bien un voisinage étale de s. Alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} W_{i,j} & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_{i,j} & \longrightarrow & U_i \end{array}$$

est cartésien et $W_{i,j} \to U$ est donc une immersion fermée. Chaque $W_{i,j}$ contient un unique point au-dessus de $\bar{s}$ qu'on notera $y_{i,j}$. Si $y_{i,j} = y_{i',j'}$ pour $i \neq i'$, $j \neq j'$, on supprime (i', j') de l'ensemble des indices. Comme $X_U \to U$ est fini, et donc fermé, on peut supposer, quitte à les restreindre, que les $W_{i,j}$ sont en union disjointe et on pose X'_U le complémentaire de $\coprod_{i,j} W_{i,j}$ dans X_U. Alors l'image de X'_U dans U est un fermé ne contenant pas $\bar{s}$ et on conclut en l'enlevant de U. Le cas étale se démontre de façon similaire. □

Proposition 3.1.12. — *Les notions de morphisme quasi-fini, ouvert, fermé, fini, plat, non ramifié et étale sont locales au but pour la topologie étale. Plus précisément :*

Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques et $U \to S$ un revêtement étale surjectif. Si $f_U : X_U \to U$ est quasi-fini (resp. ouvert, resp. fermé, resp. fini, resp. plat, resp. non ramifié, resp. étale) alors f est quasi-fini (resp. ouvert, resp. fermé, resp. fini, resp. plat, resp. non ramifié, resp. étale).

Démonstration. — On commence par remarquer que $X_U \to X$ est fini étale, étant issu du changement de base de $U \to S$ par f.

Supposons que f_U est quasi-fini. Alors $X_U \to S$ est quasi-fini et on en déduit que f l'est aussi.

Supposons que f_U est ouvert et soit V un ouvert de X. Alors $f(V)$ est l'image par $X_U \to S$ d'un ouvert de X_U, image réciproque de V par $X_U \to X$. Comme f_U et $U \to S$ sont ouverts, on en conclut que $f(V)$ est ouvert. On procède de la même façon dans le cas des morphismes fermés.

Supposons que f_U est plat et soient $x \in X$, $\bar{x} \in X_U$ au-dessus de x et $s = f(x)$. Alors $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_s$ et on déduit de [Stacks, Tag 039V] que f est plat en x.

Supposons que f_U est non ramifié et soient $x \in X$, $\bar{x} \in X_U$ au-dessus de x et $s = f(x)$. Alors $\kappa(\bar{x})$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$ contenant $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$. On déduit alors de [Bos13, Remarque 3.1.2] que $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x \cong \kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$ et donc f est non ramifié en x.

On déduit les cas des morphismes finis et étales des cas précédents. □

3.2. Groupe fondamental

On étudie à présent les revêtements étales d'un point de vue catégorique.

On note Fin la catégorie des ensembles finis.

***Définition 3.2.1* ([Stacks, Tag 0BMY]).** — Soit C une catégorie munie d'un foncteur $F : C \to \mathrm{Fin}$. On dit d'un objet X de C qu'il est *connexe* si tout sous-objet de X est initial ou isomorphe à X. On dit de plus que C est une *catégorie galoisienne* si :

i) C admet toutes les limites et colimites finies,
ii) tout objet de C s'écrit comme coproduit fini d'objets connexes,
iii) F est exact et reflète les isomorphismes.

Définition 3.2.2. — On note $\mathrm{Ét}_S$ la sous-catégorie pleine de An_S constituée des revêtements étales de S.

Lemme 3.2.3. — *Les morphismes de $\mathrm{Ét}_S$ sont finis étales.*

Démonstration. — Les morphismes de $\mathrm{Ét}_S$ sont étales d'après la proposition 2.4.1 iv) et il reste à montrer qu'ils sont finis. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathrm{Ét}_S$. Comme $X \to S$ est séparé, on déduit de [LP20, Proposition 4.5.7] que le graphe $\Gamma_f : X \to X \times_S Y$ est une immersion fermée, donc un morphisme fini. De plus, $p : X \times_S Y \to Y$ est fini d'après [LP20, Proposition 5.3.1 ii)]. Le morphisme $f = p \circ \Gamma_f$ est donc bien fini. □

Définition 3.2.4. — Un *point géométrique de S* est un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques $\bar{s} : \mathcal{M}(k) \to S$, où k désigne un corps valué complet algébriquement clos. Ce corps k sera noté $\mathcal{H}(\bar{s})$.

Pour $X \in \mathrm{An}_S$ et $\bar{s}$ un point géométrique de S, $X_{\bar{s}}$ désigne $X \times_S \mathcal{M}(\mathcal{H}(\bar{s}))$.

Remarque 3.2.5. — Soient $\bar{s}$ un point géométrique de S et $X \in \mathrm{Ét}_S$. Alors, d'après le corollaire 2.2.7, $X_{\bar{s}}$ est une union disjointe finie de copies de $\mathcal{M}(\mathcal{H}(\bar{s}))$.

Pour $X \in \mathrm{An}_{\mathcal{A}}$, on note $|X|$ l'ensemble sous-jacent à X.

Définition 3.2.6. — Si $\bar{s}$ est un point géométrique de S, on appelle *foncteur fibre associé à $\bar{s}$* et on note $F_{\bar{s}}$ le foncteur $\mathrm{Ét}_S \to \mathrm{Fin}$ qui, à un revêtement étale X, associe l'ensemble fini $|X_{\bar{s}}|$.

On remarque que tout espace $S' \in \mathrm{An}_S$ induit un foncteur de changement de base $\_ \times_S S' : \mathrm{Ét}_S \to \mathrm{Ét}_{S'}$.

Lemme 3.2.7. — *La catégorie* Ét_S *admet toutes les limites et colimites finies et, pour tout* $S' \in \text{An}_S$ *et tout point géométrique* $\bar{s}$ *de* S*, les foncteurs* $\_ \times_S S'$ *et* $F_{\bar{s}}$ *sont exacts.*

Démonstration. — La catégorie Ét_S admet S pour objet final, ainsi que des produits fibrés d'après 2.4.1 i) et ii). De plus, les foncteurs de l'énoncé commutent avec ces opérations et on déduit alors de [Stacks, Tag 002O] et [Stacks, Tag 0035] que Ét_S admet des limites finies et que ces foncteurs sont exacts à gauche. De plus, Ét_S admet des coproduits finis qui commutent avec $\_ \times_S S'$ et $F_{\bar{s}}$ et, d'après [Stacks, Tag 002Q] et [Stacks, Tag 0GMN], il reste à montrer qu'il en est de même pour les coégaliseurs.

Soient $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes dans Ét_S. D'après le théorème 1.3.14, on dispose de faisceaux d'algèbres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ cohérents sur S tels que $X \cong \underline{\text{Spec}}_S(\mathcal{F})$ et $Y \cong \underline{\text{Spec}}_S(\mathcal{G})$. On note $\mathcal{E}$ l'égaliseur de $f^\sharp, g^\sharp : \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{F}$. Alors $\mathcal{E}$ est cohérent et $Z = \underline{\text{Spec}}_S(\mathcal{E})$ est donc un espace fini sur S, qui est le coégaliseur de f et g dans Fin_S. Il suffit alors de montrer que $Z \to S$ est étale. D'après le corollaire 3.1.11, on dispose de revêtements étales U_1 et U_2 de S vérifiant $X_{U_1} \cong \coprod_m U_1$ et $Y_{U_2} \cong \coprod_n U_2$. Alors, en posant $U = U_1 \times_S U_2$, on a $X_U \cong \coprod_m U$ et $Y_U \cong \coprod_n U$. On en déduit que, Z_U étant le coégaliseur de $X_U \rightrightarrows Y_U$, il est de la forme $\coprod U$ et est donc étale sur U. Alors Z est étale sur S d'après la proposition 3.1.12.

On note t le morphisme $S \to S'$. Afin de vérifier que $Z \times_S S'$ est bien le coégaliseur de $X \times_S S' \rightrightarrows Y \times_S S'$, il suffit de montrer que $t^*\mathcal{E}$ est l'égaliseur de $t^*\mathcal{G} \rightrightarrows t^*\mathcal{F}$. Comme t^{-1} est exact, cela revient à dire que $\text{Tor}_1^{t^{-1}\mathcal{O}_S}(t^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{O}_{S'}) = 0$. Or, on déduit du lemme 1.3.13 et de la proposition 2.4.3 que $\mathcal{F}$ est localement libre. Donc $t^{-1}\mathcal{F}$ est localement libre, donc plat, et donc $\text{Tor}_1^{t^{-1}\mathcal{O}_S}(t^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{O}_{S'}) = 0$. On procède de la même façon pour montrer que $F_{\bar{s}}$ commute avec les coégaliseurs. $\square$

Lemme 3.2.8. — *Les monomorphismes ouverts de* An_S *sont les immersions ouvertes.*

Démonstration. — Soit $f : X \to Y$ un monomorphisme ouvert de An_S. L'image $f(X)$ de f est une partie ouverte de Y et, quitte à restreindre Y, on peut supposer que f est surjectif. Sous cette hypothèse, on cherche à montrer que f est un isomorphisme. On déduit de [Stacks, Tag 08LR] que $X \times_Y X \cong X$ et de le proposition 2.3.6 que f est non ramifié. Soit $y \in Y$. Les monomorphismes étant stables par changement de base, f restreint à la fibre $f_y : X_y \to \mathcal{M}(\mathcal{H}(y))$ est un monomorphisme. En particulier, f_y est injectif et X_y contient donc au plus un point. Or, comme f est supposé surjectif, X_y contient exactement un point x et, comme $X_y \times_{\mathcal{H}(y)} X_y \cong X_y$, on déduit du lemme 2.3.5 que $X_y \cong \mathcal{M}(\mathcal{H}(y))$. En particulier,

$\mathcal{H}(x) \cong \mathcal{H}(y)$ et, $\kappa(y)$ étant hensélien et $\kappa(x)$ étant une extension finie séparable de $\kappa(y)$, on déduit de [Ber93, Proposition 2.4.1] que $\kappa(x) \cong \kappa(y)$. Alors, d'après le lemme 3.1.8, on dispose d'un voisinage ouvert $U \subset X$ de x tel que $f_{|U}$ soit une immersion. De plus, comme $f_{|U}$ est ouvert, c'est une immersion ouverte et donc un isomorphisme sur son image. Ce raisonnement étant valable pour tout point $y \in Y$, on en déduit que f est un isomorphisme local. Or, f étant une bijection ouverte, c'est un homéomorphisme. On en conclut que c'est un isomorphisme. □

Lemme 3.2.9. — *Les objets connexes de $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}_S$ sont les revêtements étales connexes de S.*

Démonstration. — Soit $f : X \to Y$ un monomorphisme dans $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}_S$. D'après le lemme 3.2.3, f est fini étale, et donc ouvert et fermé. Or, f est un monomorphisme dans An_S car les produits fibrés dans $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}_S$ coïncident avec ceux dans An_S. On déduit alors du lemme 3.2.8 que f est une immersion ouverte et fermée. Les objets connexes de $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}_S$ sont donc bien les revêtements étales connexes de S. □

On suppose à présent que S est connexe.

Théorème 3.2.10. — *Pour tout point géométrique $\bar{s}$ de S, le foncteur fibre $F_{\bar{s}}$ munit $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}_S$ d'une structure de catégorie galoisienne.*

Démonstration. — D'après le lemme 3.2.7, $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}_S$ admet toutes les limites et colimites finies et $F_{\bar{s}}$ est exact. D'après le lemme 3.2.9, les objets connexes de $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}_S$ sont les revêtements étales connexes de S et tout objet de $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}_S$ s'écrit alors comme coproduit d'objets connexes. Comme S est connexe et que tout revêtement étale de S est fini sur S, ces coproduits sont bien finis. Il reste à montrer que $F_{\bar{s}}$ reflète les isomorphismes. Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}_S$. Comme Y possède un nombre fini de composantes connexes, on peut supposer qu'il est connexe. On note $s \in S$ le point image de $\bar{s}$ et on fixe $y \in Y$ au-dessus de s. Pour tout élément x_i dans $f^{-1}(y)$, on note encore d_i le degré de l'extension $\mathcal{H}(y) \to \mathcal{H}(x_i)$. Comme $\mathcal{H}(\bar{s})$ contient chaque $\mathcal{H}(x_i)$, on déduit du lemme 1.2.12 :

$$\mathrm{card} F_{\bar{s}}(X) = \mathrm{card} F_{\bar{s}}(Y) \times \sum_i d_i.$$

Donc, si $F_{\bar{s}}(X) \cong F_{\bar{s}}(Y)$, il en découle qu'il existe un seul point x dans $f^{-1}(y)$ et $\mathcal{H}(x) \cong \mathcal{H}(y)$. Comme $\kappa(y)$ est hensélien et $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(y)$, on déduit de [Ber93, Proposition 2.4.1] que $\kappa(x)$ et $\kappa(y)$ sont isomorphes. Alors, d'après le lemme 3.1.8, on dispose d'un voisinage ouvert $U \subset X$ de x tel que $f_{|U}$ soit une immersion. En particulier, le degré de f en x (au sens de [Poi22, Définition 3.15]) vaut 1 et, Y étant connexe, on a $\deg(f) = 1$ et f est donc bien un isomorphisme. □

Définition 3.2.11. — Pour $\bar{s}$ un point géométrique de S, on appellera *groupe fondamental étale de S en $\bar{s}$* et on notera $\pi_1^{\text{ét}}(S,\bar{s})$ le groupe $\mathrm{Aut}(F_{\bar{s}})$. C'est un groupe profini d'après [Stacks, Tag 0BMR].

Si G est un groupe topologique, on note $G-\mathrm{Fin}$ la catégorie des G-ensembles finis. Un morphisme entre deux groupes topologiques sera toujours supposé continu.

Corollaire 3.2.12. — *Soient $\bar{s}$ et $\bar{s}'$ des points géométriques de S, X un espace S-analytique connexe, $f : X \to S$ un morphisme et $\bar{x}$ un point géométrique de X vérifiant $\bar{s} = f \circ \bar{x}$. On a alors :*

i) le foncteur fibre $F_{\bar{s}}$ induit une équivalence entre les catégories $\acute{E}t_S$ et $\pi_1^{\acute{e}t}(S,\bar{s}) - \mathrm{Fin}$;

ii) on dispose d'un isomorphisme $t : F_{\bar{s}} \longrightarrow F_{\bar{s}'}$ induisant un isomorphisme $\pi_1^{\acute{e}t}(S,\bar{s}) \longrightarrow \pi_1^{\acute{e}t}(S,\bar{s}')$ indépendant de t à automorphisme intérieur près et compatible avec l'équivalence i) ;

iii) on dispose d'un morphisme $\pi_1^{\acute{e}t}(X,\bar{x}) \longrightarrow \pi_1^{\acute{e}t}(S,\bar{s})$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \acute{E}t_S \arrow[r] \arrow[d, "F_{\bar{s}}"] & \acute{E}t_X \arrow[d] \\ \pi_1^{\acute{e}t}(S,\bar{s}) - \mathrm{Fin} \arrow[r] & \pi_1^{\acute{e}t}(X,\bar{x}) - \mathrm{Fin} \end{tikzcd}$$

commute.

Démonstration. — C'est une conséquence du théorème 3.2.10 et de [Stacks, Tag 0BN4 et Tag 0BN5]. □

Exemple 3.2.13. — Soient k un corps valué complet et $\bar{s}$ un point géométrique de $\mathcal{M}(k)$. Alors $\pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{M}(k),\bar{s}) \cong \mathrm{Gal}\left(k^{\text{sép}}/k\right)$. En effet, d'après le corollaire 2.2.7, on a $\mathrm{\acute{E}t}_{\mathrm{Spec}(k)} \cong \mathrm{\acute{E}t}_{\mathcal{M}(k)}$.

Définition 3.2.14. — Soit $\bar{s}$ un point géométrique de S. Un revêtement étale X de S est dit *galoisien* si l'action de $\mathrm{Aut}_S(X)$ sur $F_{\bar{s}}(X)$ est transitive.

Remarque 3.2.15. — D'après le corollaire 3.2.12 ii), cette notion ne dépend pas du choix de $\bar{s}$.

Proposition 3.2.16. — *Soit X un revêtement étale connexe de S. Il existe un revêtement étale galoisien de S au-dessus de X.*

Démonstration. — C'est une conséquence de [Stacks, Tag 0BN2]. □

BIBLIOGRAPHIE

[Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1990.

[Ber93] Vladimir G. Berkovich. « Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces ». *Publications mathématiques de l'IHÉS* 78 (1993).

[Ber94] Vladimir G. Berkovich. « Vanishing cycles for formal schemes ». *Inventiones Mathematicae* 115 (déc. 1994), p. 539-571. issn : 0020-9910, 1432-1297. doi : `10.1007/BF01231772`. url : `http://link.springer.com/10.1007/BF01231772`.

[Bos13] S. Bosch. *Algebraic geometry and commutative algebra*. Universitext. Springer, 2013.

[Car90] H. Carayol. *Non-abelian Lubin-Tate theory*. Perspectives in mathematics. Publication Title : Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions : proceedings of a conference held at the University of Michigan, Ann Arbor, July 6-16, 1988 . Volume II. Academic Press, 1990. isbn : 0-12-176651-9.

[Duc07] Antoine Ducros. « Variation de la dimension relative en géométrie analytique p -adique ». *Compositio Mathematica* 143 (2007).

[Fu11] Lei Fu. *Etale cohomology theory*. Nankai tracts in mathematics v. 13. World Scientific, 2011.

[GR84] Hans Grauert et Reinhold Remmert. *Coherent Analytic Sheaves*. T. 265. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 1984.

[Gro60] Alexander Grothendieck. « Géométrie formelle et géométrie algébrique ». *Séminaire Bourbaki* 182 (1960), p. 29.

[Hub93] R. Huber. « Continuous valuations ». *Mathematische Zeitschrift* 212 (1993).

[Hub94] R. Huber. « A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties. » *Mathematische Zeitschrift* 217 (1994).

[LP20] Thibaud LEMANISSIER et Jérôme POINEAU. *Espaces de Berkovich sur* **Z** *: catégorie, topologie, cohomologie*. 2020.

[LS19] Thibaud LEMANISSIER et Matthew STEVENSON. « Topology of Hybrid Analytifications » (2019).

[Poi10] Jérôme POINEAU. *La droite de Berkovich sur* **Z**. 2010.

[Poi13] Jérôme POINEAU. « Espaces de Berkovich sur **Z** : étude locale ». *Inventiones mathematicae* 194 (2013).

[Poi22] Jérôme POINEAU. « Dynamique analytique sur **Z**. I : Mesures d'équilibre sur une droite projective relative ». fr. *arXiv :2201.08480 [math]* (jan. 2022). arXiv : 2201.08480. URL : `http://arxiv.org/abs/2201.08480`.

[Ray74] Michel RAYNAUD. « Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl... » *Mémoires de la Société mathématique de France* 1 (1974).

[SGA1] Alexander GROTHENDIECK. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1) : Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960-61*. EDP Sciences, 2003.

[SHC11] Alexander GROTHENDIECK. « Techniques de construction en géométrie analytique. IV. Formalisme général des foncteurs représentables ». fr. *Séminaire Henri Cartan* (1961).

[Stacks] Stacks Project AUTHORS. *Stacks Project*. 2021. URL : `https://stacks.math.columbia.edu`.

[Tat71] John TATE. « Rigid analytic spaces ». *Inventiones Mathematicae* 12 (1971).

[Wei95] André WEIL. *Basic number theory*. 1995.