

Table des matières

Contexte et motivation	1
1 Introduction	6
1.1 L'intégrateur et l'éphéméride INPOP	6
1.1.1 Modèle dynamique	6
1.1.2 Repères et échelles de temps	7
1.1.3 Ajustements aux observations	7
1.2 Orbites des astéroïdes	9
1.2.1 La base de donnée Astorb	9
1.2.2 Incertitudes	10
1.2.3 Distribution spatiale	11
1.3 Masses des astéroïdes	11
1.3.1 Méthode astrométrique	12
1.3.2 Autres méthodes	13
1.3.3 Masses connues aujourd'hui et perspectives futures	15
1.4 Diamètres des astéroïdes et masses astrophysiques	16
1.4.1 Déterminations SIMPS	17
1.4.2 Déterminations supplémentaires	17
1.4.3 Compilation d'une base de diamètres	19
1.4.4 Masses astrophysiques	22
1.5 Conclusion	26
2 Expressions analytiques des perturbations	27
2.1 Perturbation d'une planète par un astéroïde	27
2.1.1 Équations de Lagrange	27
2.1.2 Perturbation à l'ordre 1 en masses	28
2.1.3 Développement de la fonction perturbatrice	30
2.1.4 Perturbations des éléments orbitaux	32
2.2 Perturbation d'une planète par un anneau solide	36
2.2.1 La fonction de perturbation moyennée	37
2.2.2 Expression des perturbations	39
2.2.3 Effet séculaire	40
2.3 Perturbation de la distance mutuelle entre deux planètes	40
2.3.1 Développement au premier ordre en masse du perturbateur	41
2.3.2 Dépendance en éléments orbitaux	44
2.3.3 Perturbation de la distance	45
2.4 Conclusion	46

3	Estimation numérique des perturbations individuelles	47
3.1	Perturbation de la distance Terre-Mars	47
3.1.1	Calculs numériques	47
3.1.2	Les astéroïdes les plus perturbateurs	48
3.2	Ajustement des conditions initiales	49
3.2.1	Variation de la date initiale des intégrations	50
3.2.2	Compensation avec les conditions initiales	51
3.2.3	Restriction de l'intervalle d'ajustement et pondération	52
3.2.4	Incertitudes sur les masses	53
3.3	Interactions mutuelles	57
3.3.1	Perturbations des orbites	57
3.3.2	Etude d'un exemple : 17 Thetis	57
3.3.3	Impact sur la distance Terre-Mars	58
3.4	Perturbations des distances Terre-planètes	59
3.4.1	Effets entre 1960 et 2020	60
3.4.2	Restriction de l'intervalle d'ajustement et pondération	61
3.4.3	Interactions mutuelles	63
3.5	Résonances	63
3.6	Conclusion	65
4	Estimation de l'effet global	67
4.1	Un anneau comme modèle de la ceinture principale	67
4.1.1	Approche analytique	68
4.1.2	Modèle test de la ceinture principale	68
4.1.3	L'efficacité de l'anneau comme modèle d'astéroïdes	68
4.1.4	Application à la sélection de modèle	69
4.1.5	Remarques sur les librairies CPLEX	69
4.2	Mise à jour du modèle test	83
4.2.1	Estimation des masses aléatoires	83
4.2.2	Distributions des diamètres, des volumes et des masses	83
4.2.3	Comparaison avec l'ancien modèle	84
4.3	Estimation de l'effet global avec le nouveau modèle	86
4.3.1	Sans ajustement des conditions initiales	86
4.3.2	Effet global sur les mesures de la distance Terre-Mars	87
4.3.3	Effet sur l'ensemble des mesures disponibles	90
4.3.4	Nouvelle liste d'astéroïdes	90
4.4	Conclusion	91
5	Vers un nouveau modèle d'astéroïdes	93
5.1	Définition d'un cas d'étude	93
5.1.1	Conventions	93
5.1.2	Hypothèse simplificatrice	94
5.2	Ajustement par moindres carrés	94
5.2.1	Erreurs aléatoires	95
5.2.2	Erreurs systématiques	96
5.2.3	Estimation des masses	96
5.2.4	Colinéarités	97
5.3	Régularisation à partir d'une analyse bayésienne	100
5.3.1	Un nouveau point de vue	100
5.3.2	Distributions à priori	101

5.3.3	Calcul des distributions à posteriori	102
5.3.4	Régularisation de Tikhonov	103
5.3.5	Contraintes de boîte	106
5.4	Modèles sans hypothèse simplificatrice	106
5.4.1	Approximation des distributions bimodales	107
5.4.2	Ajustement	108
5.4.3	Un deuxième modèle	111
5.5	Conclusion	113
Effets des astéroïdes sur le voisinage du point de Lagrange L_2		114
6	Trajectoires quasi-périodiques autour de L_2	116
6.1	Le problème circulaire restreint à trois corps	116
6.1.1	Formulation hamiltonienne	117
6.1.2	Position du point d'équilibre L_2	117
6.2	Développement du hamiltonien au voisinage de L_2	118
6.2.1	Solution du hamiltonien à l'ordre 2	119
6.2.2	Stabilité numérique	120
6.2.3	Réduction à la variété centrale	121
6.3	Méthode du multiple shooting	124
6.3.1	Principe de la méthode	124
6.3.2	Application à l'orbite type	125
6.4	Orbites de Herschel et Planck affinées pour INPOP	128
6.5	Conclusion	130
7	Étude de la perturbation d'une trajectoire	131
7.1	Le problème restreint à quatre corps	131
7.1.1	Formulation hamiltonienne	132
7.1.2	Repérage par rapport à L_2	134
7.2	Le problème quasi-bicirculaire	135
7.2.1	Perturbation de l'orbite de la Terre	135
7.2.2	Perturbation d'une orbite au voisinage de L_2	138
7.3	Perturbation d'une orbite sur la variété centrale du PCR3C	141
7.3.1	Approche perturbative	141
7.3.2	Résolution formelle	142
7.3.3	Calcul de l'amplitude de la perturbation	146
7.4	Application à Herschel et Planck	149
7.5	Conclusion	155
8	Estimations des perturbations avec un modèle numérique	156
8.1	Effets au cours des premiers mois des missions	156
8.1.1	Orbites des astéroïdes	156
8.1.2	Calcul des perturbations	156
8.2	Majoration des perturbations	158
8.2.1	Recherche des rencontres proches	159
8.2.2	Passage au repère du PQBCR4C	159
8.2.3	Evaluation des perturbations	162
8.3	Conclusion	163
Conclusion et perspectives		164

9 Annexes	167
9.1 Masses d'astéroïdes	167
9.2 Compilation Astdata	169
9.3 Partie directe de la fonction de perturbation	175
9.4 Effets des astéroïdes entre 1960 et 2020	177
9.5 Effets des astéroïdes sur les données de INPOP	180
9.6 Astéroïdes exclus de l'effet global	184
9.7 Sélection d'objets pour un nouveau modèle d'astéroïdes	186
9.8 Passage en forme normale à l'ordre 4	189
9.9 Polynômes $P_{q_1}, P_{q_2}, P_{q_3}, P_{p_1}, P_{p_2}$ et P_{p_3}	191
9.10 Rencontres proches des astéroïdes avec L_2	192
Acronymes	193
Bibliographie	195

Contexte et motivation

Aspect historique Une éphéméride planétaire est un outil qui permet de prédire, en fonction du temps, les positions des corps du Système solaire. Selon Evans (1998), on dispose déjà d'une éphéméride de Vénus construite vers 1600 avant notre ère. Le texte d'origine Babylonienne compile les levers et les couchers de la planète sur une période de 21 ans et décrit une méthodologie destinée à les prédire. La prédiction du mouvement des astres est donc un problème ancien datant du début de l'astronomie. A l'origine, la motivation à étudier ce problème est liée à la construction d'un calendrier ainsi qu'à des besoins de nature religieuse et astrologique.

Avec le temps, la quantité et la qualité d'observations astronomiques augmentent. L'évolution est accompagnée d'un progrès dans les prévisions basées sur des modèles de plus en plus complexes. Ces modèles sont en général fondés sur des théories cinématiques et notamment sur les notions d'épicycle et de déférent introduites vers le début de notre ère (Simon *et al.*, 1998).

Pour pouvoir baser les éphémérides sur un modèle dynamique, il faut attendre le 17ème siècle et la théorie de la gravitation. A cette époque le rôle des éphémérides reste toujours lié au maintien d'un calendrier, néanmoins l'ancienne motivation astrologique disparaît au profit d'une motivation scientifique. L'étude précise du mouvement des astres joue un rôle primordial en navigation maritime. Ainsi à partir de 1767, des éphémérides sont publiées régulièrement dans le "Nautical Almanac" par l'Observatoire Royal de Greenwich. A Paris en 1795 est fondé le Bureau Des Longitudes (BDL) avec comme objectif principal de "reprenre la maîtrise des mers aux Anglais"¹ en améliorant la détermination de la longitude en mer. A sa création, le BDL est responsable de l'Observatoire de Paris et publie annuellement des éphémérides planétaires sous le nom de "Connaissance des Temps".

Les éphémérides du BDL s'appuient initialement sur les travaux analytiques de Lagrange et Laplace. Des théories planétaires sont progressivement développées par Le Verrier, Gaillot et Newcomb. Entre 1983 et 2006, les éphémérides de la "Connaissance des Temps" sont basées sur la théorie analytique VSOP82 construite par Bretagnon (Simon *et al.*, 1998).

Depuis l'édition de 2007, les éphémérides de l'ouvrage proviennent de l'intégration numérique INPOP (Intégration Numérique Planétaire de l'Observatoire de Paris, Fienga *et al.*, 2008).

Éphémérides modernes Jusque dans les années 1960, les seules mesures disponibles pour contraindre les modèles dynamiques des éphémérides sont les observations optiques. La situation change alors avec les mesures des distances Terre-planètes rendues possibles grâce aux observations radar et aux suivis des sondes spatiales. A partir des années 1960, ces nouvelles mesures commencent à compléter les observations optiques. Avec une précision qui peut atteindre quelques mètres, elles entament une vraie révolution dans les éphémérides en améliorant la précision des positions des planètes de plusieurs ordres de grandeur (Newhall *et al.*, 1983).

Selon Fienga *et al.* (2008), la précision intrinsèque des théories analytiques les plus récentes serait d'environ 100 m sur 30 ans. Pour pouvoir exploiter entièrement la précision des observations modernes, une éphéméride ne peut plus être basée sur une théorie analytique mais sur

1. L'histoire de la fondation du Bureau des Longitudes est disponible sur www.bureau-des-longitudes.fr.

une intégration numérique des équations de mouvements. L'IMCCE² commence ainsi en 2003 le développement de l'éphéméride numérique INPOP dont la version la plus récente est INPOP10a (Fienga *et al.*, 2010). La solution étant achevée en août 2010, l'ensemble de la thèse fera référence à la version précédente INPOP08 (Fienga *et al.*, 2009). En plus de l'IMCCE, deux autres centres de recherche développent des éphémérides numériques. Il s'agit du Jet Propulsion Laboratory aux États-Unis et de l'Institut d'Astronomie Appliquée de l'Académie des Sciences Russe. Les solutions les plus récentes sont DE423 (Folkner, 2010) et EPM2008 (Pitjeva, 2010) respectivement.

Aujourd'hui le champ d'application des éphémérides est très large : depuis la conception pratique des missions spatiales, en passant par la détermination des paramètres physiques du Système solaire et jusqu'à l'utilisation des éphémérides pour tester les alternatives à la théorie de relativité générale (Fienga *et al.*, 2010).

Modélisation des astéroïdes Les perturbations induites par les astéroïdes sur les planètes peuvent atteindre plusieurs kilomètres, par conséquent les modèles dynamiques des éphémérides modernes contiennent en général en plus des 8 planètes environ 300 astéroïdes.

Williams (1984) détermine les astéroïdes dont la perturbation de l'orbite de Mars pourrait être détectable sur les mesures de distance Terre-Mars fournies par les sondes Viking posées sur la planète. La sélection se base sur les amplitudes des perturbations induites sur la longitude moyenne de Mars, estimées analytiquement. Plus de trente astéroïdes dont les amplitudes sont supérieures à l'incertitude des données sont ainsi identifiés. Williams (1984) distingue deux catégories de perturbations. Les perturbations dont la période est longue et les perturbations dont la période est courte par rapport aux 6 ans de données disponibles. Cette distinction permet d'identifier les masses qui pourront être ajustées comme paramètres du modèle dynamique, car elles laisseront une empreinte caractéristique sur les données. Williams (1984) prédit ainsi la possibilité d'ajuster à partir des données Viking, les masses de Ceres, Pallas et Vesta. Les effets de périodes longues seront a priori difficiles ou impossibles à dissocier. L'approche de Williams a été récemment reprise par Mouret *et al.* (2009) pour répertorier les astéroïdes induisant des perturbations significatives sur la longitude moyenne et sur le demi-grand axe de Mars avec des périodes inférieures à 50 ans.

La méthode analytique de Williams est utilisée en 1995 pour déterminer une liste de 300 objets à implémenter dans le modèle dynamique des éphémérides DE403. La liste en question est diffusée dans la communauté des éphémérides, néanmoins elle n'est pas publiée. En 1995 les données les plus précises disponibles sur Mars sont toujours les données Viking, ainsi les masses d'astéroïdes ajustées dans DE403 sont seulement celles des trois astéroïdes prévus par Williams (1984). Le reste des 297 masses est obtenu en attribuant à chaque astéroïde une classe de densité parmi trois possibles. Les valeurs des 3 densités sont ensuite ajustées au même titre que les masses de Ceres, Pallas et Vesta (Standish *et al.*, 1995).

La liste de DE403 est reprise en 2003 pour les premières versions de INPOP. Il existe alors des mesures supplémentaires de la distance Terre-Mars fournies notamment par les missions Mars Global Surveyor (MGS) et Mars Odyssey (MO). Par conséquent la construction de INPOP06 permet l'ajustement supplémentaire des masses de 7 Iris et 324 Bamberga (Fienga *et al.*, 2008). La modélisation des astéroïdes de INPOP06 est complétée par un anneau solide centré au Soleil et dont la masse est également ajustée. L'anneau a été suggéré par Krasinsky *et al.* (2002) comme moyen de représenter dans le modèle dynamique les objets de la ceinture principale autres que les 300 astéroïdes déjà pris en compte.

Grâce à des données précises disponibles sur des intervalles de temps de plus en plus long,

2. L'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides (IMCCE) remplace à partir de 1998 le Service des calculs et de mécanique céleste du BDL

les dernières versions des éphémérides planétaires permettent l'ajustement de plusieurs dizaines d'astéroïdes. Ainsi INPOP08, DE423 et EPM2008 ajustent respectivement 34, 21 et 10 masses d'astéroïdes. La sélection d'astéroïdes présents individuellement dans les modèles dynamiques a également évolué, passant à 303 pour INPOP08 et à 342 dans DE423 (Folkner, 2010; Konopliv *et al.*, 2010). Les nouvelles sélections d'astéroïdes ne sont plus basées sur l'approche analytique de Williams mais sur des estimations numériques. La perturbation induite par un astéroïde sur la distance Terre-Mars est obtenue en comparant deux intégrations du Système solaire avec et sans l'astéroïde. Un réajustement des conditions initiales des planètes absorbe les termes de longues périodes et permet d'obtenir une estimation de la perturbation effectivement induite sur les données (voir par exemple Konopliv *et al.*, 2006). Bien que basées sur des perturbations estimées numériquement, les sélections d'astéroïdes restent assez empiriques (Folkner *et al.*, 2008). En pratique, une sélection est retenue si elle permet un ajustement des paramètres à des valeurs réalistes ou si elle conduit à une bonne extrapolation de l'éphéméride. On décide également de manière plutôt empirique quelles masses d'astéroïdes du modèle dynamique doivent être ajustées individuellement et lesquelles doivent être déterminées à partir des trois densités attribuées en fonction de la taxonomie.

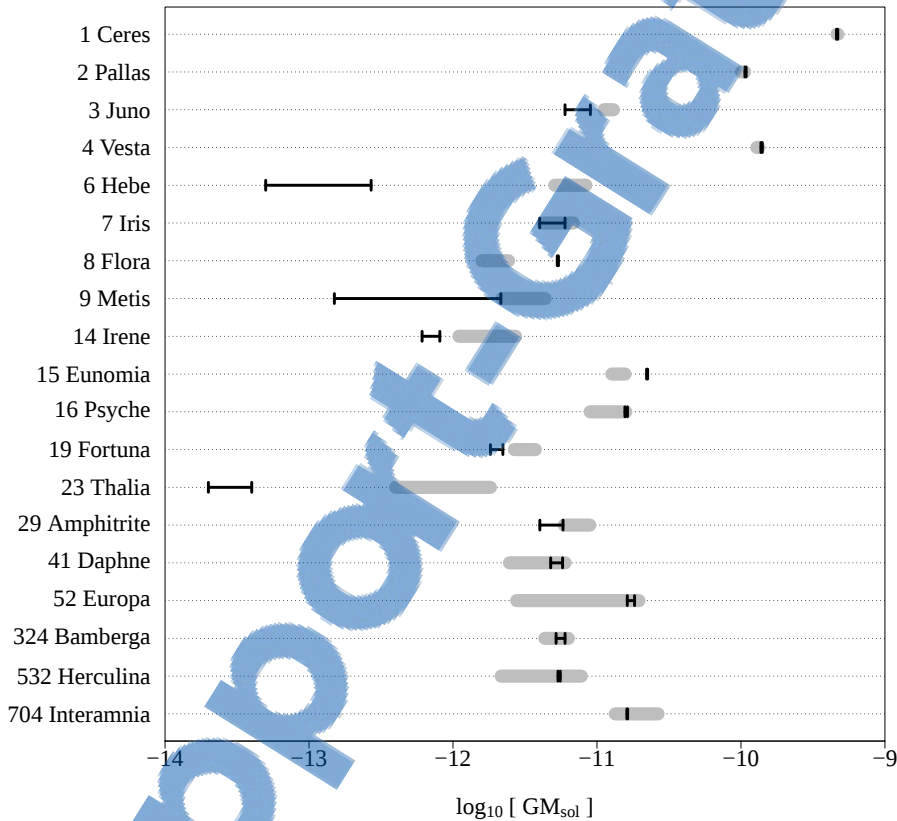


FIGURE 1 – Comparaison entre les intervalles d'incertitudes des masses d'astéroïdes déterminées dans INPOP08 en noir et dans DE423 en gris (Fienga *et al.*, 2009; Konopliv *et al.*, 2010).

Énoncé du problème et objectif Les modèles dynamiques des éphémérides planétaires montrent que les observations disponibles peuvent être décrites en ajustant un modèle d'astéroïdes avec une trentaine de paramètres alors que le nombre d'astéroïdes ayant un effet significatif sur les données est un ordre de grandeur plus élevé. La situation est caractéristique des modèles contenant un nombre élevé de paramètres corrélés. Les paramètres ajustés souffrent alors d'er-

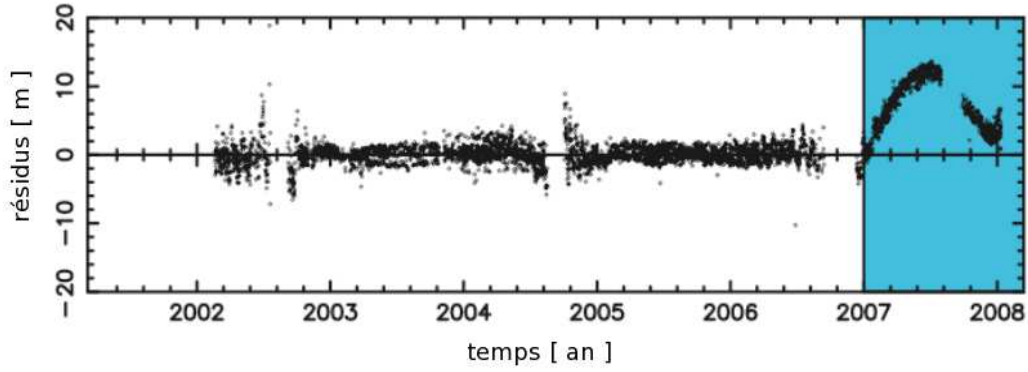


FIGURE 2 – Extrapolation sur 1 an en terme de distance Terre-Mars d’une éphéméride ajustée uniquement jusqu’en 2007 (Folkner *et al.*, 2008).

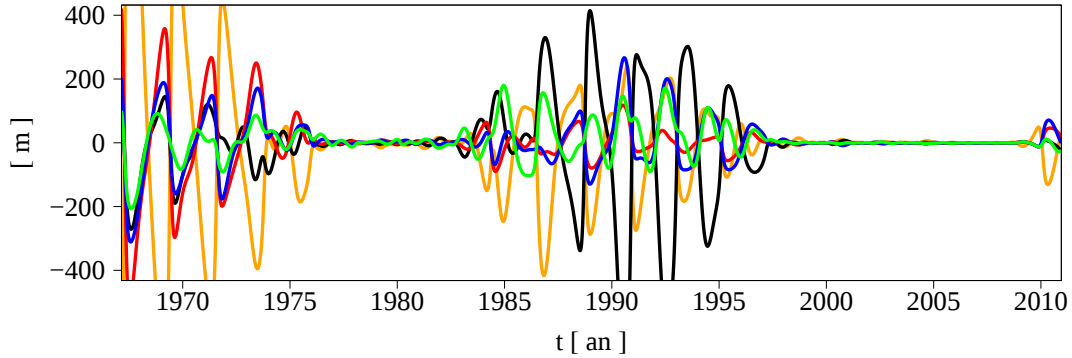


FIGURE 3 – Différences entre des évolutions de la distance Terre-Mars provenant de 5 ajustements³ différents de INPOP et une évolution moyenne (Fienga et Manche, 2010).

reurs aléatoires et systématiques importantes. Ces erreurs peuvent se répercuter de manière plus ou moins forte sur les autres paramètres physiques ajustés lors de la construction de l’éphéméride. D’autre part si la corrélation entre les effets des astéroïdes varie avec le temps, les erreurs des déterminations de masses d’astéroïdes limitent la capacité d’extrapolation du modèle. Celle-ci est pourtant déterminante lors de la préparation de mission spatiales. La difficulté à modéliser les astéroïdes dans une éphéméride est illustrée par les figures 1 et 2.

La figure 1 compare les incertitudes des déterminations des masses pour les 19 astéroïdes ajustés individuellement aussi bien dans INPOP08 que dans DE423. On observe qu’à l’exception de quelques objets (dont Ceres, Pallas et Vesta), les incertitudes peuvent s’étaler sur presque un ordre de grandeur. On observe également que les intervalles des incertitudes ne se recouvrent pas nécessairement ce qui indique des erreurs systématiques au moins aussi importantes que les erreurs aléatoires.

La figure 2 est adaptée de Folkner *et al.* (2008) et représente la différence entre des observations de la distance Terre-Mars sur l’intervalle 2002-2008 et la prévision d’une éphéméride ajustée à des observations ne dépassant pas 2007. Au delà de la dernière date utilisée pour construire l’éphéméride, on observe une nette dégradation en terme de qualité de prévision. La difficulté à modéliser les astéroïdes apparaît également en comparant différentes éphémérides entre elles. Le tracé de la figure 3 est adaptée de Fienga et Manche (2010) et compare les évolutions des

distances Terre-Mars dans 5 ajustements³ aux observations de INPOP. Les ajustements diffèrent par des pondérations des données ou encore par la méthode utilisée pour ajuster le modèle des astéroïdes. On observe que les évolutions sont proches seulement sur les intervalles 1976-1983 et 1999-2009, où des observations précises de la distance Terre-Mars sont disponibles. A l'extérieur de ces intervalles, les distances diffèrent de plusieurs centaines de mètres.

Pour résumer, la difficulté à modéliser les astéroïdes consiste à tenir compte dans le modèle dynamique d'un nombre élevé de paramètres très peu connus et corrélés. Une amélioration du modèle peut être jugée par une meilleure extrapolation de l'éphéméride ou par la réduction d'erreurs sur les paramètres ajustés. La thèse s'inscrit dans le développement et l'amélioration de l'éphéméride INPOP. Son objectif est une étude systématique des effets des astéroïdes sur les mouvements planétaires de sorte à contribuer à une meilleure modélisation d'astéroïdes dans INPOP et dans les éphémérides en général.

Effets des astéroïdes sur les sondes en orbite autour du point de Lagrange L_2 Les derniers chapitres de la thèse résument le travail réalisé en réponse à une offre du Centre National d'Études Spatiales (CNES). L'objectif de l'étude est d'évaluer l'effet des astéroïdes sur un objet placé au voisinage du point de Lagrange L_2 du système Terre-Soleil. Un intérêt particulier est porté aux perturbations qui pourraient être induites sur les satellites de l'agence spatiale européenne, Herschel et Planck actuellement en orbite autour de L_2 . En effet si les perturbations induites par les astéroïdes sont significatives, le suivi des sondes pourrait permettre l'ajustement des masses des astéroïdes les plus perturbateurs au même titre que cela est possible en éphémérides planétaires. L'étude devait être initialement basée sur des orbites de Herschel et Planck fournies par le CNES. Néanmoins à cause de divers problèmes, celles-ci n'ont pas pu être utilisées dans INPOP. Ainsi une partie importante de l'étude reprend le calcul des orbites de Lissajous en s'appuyant sur des travaux antérieurs réalisés par l'équipe Astronomie et Systèmes Dynamiques de l'IMCCE. Une introduction proprement dite à la partie concernant les orbites quasi-périodiques autour du point L_2 précède le chapitre 6.

3. Il s'agit de 5 versions de travail récentes : I1_AB080310a, I2_AB270410a , I3_AA250610a, I4_BB280610a et I2_AA140710a. Sur la figure 3 les versions correspondent respectivement aux couleurs orange, noir, rouge, bleu et vert.

Chapitre 1

Introduction

L'ensemble de cette thèse s'appuie sur INPOP, l'Intégration Numérique Planétaire de l'Observatoire de Paris. On commence ainsi par une présentation de cet outil en insistant sur les points particulièrement importants pour ce travail. On décrit ensuite une méthodologie utilisée pour obtenir une base des conditions initiales, directement utilisables avec INPOP, pour l'ensemble des orbites des astéroïdes connus. Dans une troisième section on résume l'état actuel des connaissances sur les masses des astéroïdes. Enfin selon diverses données disponibles, on attribue à l'ensemble des astéroïdes des diamètres et des masses approchées. L'attribution de masses, même très approximative, est en effet nécessaire aux calculs des perturbations que chacun des astéroïdes induit sur les mouvements planétaires.

1.1 L'intégrateur et l'éphéméride INPOP

La description détaillée de INPOP est disponible dans Fienga *et al.* (2008, 2009) et Manche (2010). L'éphéméride est en évolution constante, mais on peut distinguer trois versions associées respectivement aux éphémérides INPOP05, INPOP06 et INPOP08.

1.1.1 Modèle dynamique

Le modèle dynamique d'INPOP05 a été construit de sorte à être le plus proche possible du modèle de l'éphéméride américaine DE405 (Standish, 1998). Il tient compte des mouvements du Soleil, des huit planètes, de la Lune et de Pluton. Pluton est considéré dans INPOP comme planète et par conséquent dans cette thèse on ne le comptera pas parmi les astéroïdes. Le modèle dynamique contient 300 astéroïdes intégrés individuellement au même titre que les planètes. A l'exception de 1 Ceres, 2 Pallas et 4 Vesta, les astéroïdes n'interagissent pas les uns avec les autres. Tous les corps du modèle dynamique sont considérés comme des masses ponctuelles à part le Soleil, la Terre et la Lune. Les orientations et les déformations dues aux effets de marées sont intégrées pour la Terre et la Lune. Le modèle tient compte de l'aplatissement solaire, cependant l'orientation et la forme du Soleil sont maintenues fixes. Les effets relativistes sont pris en compte dans les équations du mouvement par les équations d'Einstein-Infeld-Hoffman selon Moyer (1971). Le modèle dynamique d'INPOP05 sert de base aux modèles dynamiques des versions ultérieures. On retrace par la suite les principales évolutions introduites avec INPOP06 et INPOP08.

INPOP06 (Fienga *et al.*, 2008) contient en plus des 300 astéroïdes un anneau solide implémenté comme une force supplémentaire agissant dans les plans écliptiques des planètes. Le groupe des astéroïdes interagissant avec d'autres astéroïdes est élargi à 7 Iris et 324 Bamberga. Le rebond post-glaciaire est pris en compte avec une variation séculaire de l'aplatissement de la Terre. INPOP06 apporte une amélioration dans la modélisation de l'orientation de la Terre.

Celle-ci est calculée de manière cohérente à partir du mouvement des planètes d'INPOP06 et non plus à partir d'une autre éphéméride comme c'était le cas dans INPOP05 ou DE405.

Dans cette thèse on va s'appuyer sur la version INPOP08 (Fienga *et al.*, 2009), concrètement sur la version intermédiaire 08a. Le modèle dynamique d'INPOP08 bénéficie d'une implémentation plus réaliste de l'anneau qui est désormais considéré comme un objet à part entière. L'anneau interagit avec les planètes et son orientation est un paramètre intégré du modèle qui évolue avec le temps. Par rapport à INPOP06, l'ensemble des astéroïdes implémentés individuellement a été augmenté à 303 (voir Fienga *et al.*, 2009). Une particularité de INPOP08 est de fournir à l'utilisateur la différence entre le Temps Terrestre (TT) et le Temps Dynamique Barycentrique (TDB). Cette différence qui dépend du mouvement barycentrique de la Terre permet de relier le temps TDB utilisé dans INPOP au temps TT nécessaire à la réduction des observations dans un cadre relativiste.

Dans INPOP en général, l'intégration des équations du mouvement est effectuée en précision étendue avec un intégrateur Adams et un pas de 0.055 jours. On rappelle que la précision étendue correspond approximativement à 19 chiffres significatifs en notation décimale. Le pas est choisi en fonction de l'intégration de la Lune de sorte à ce que la précision numérique obtenue soit du même ordre que la précision étendue.

1.1.2 Repères et échelles de temps

Le repère dans lequel sont effectuées les intégrations INPOP est l'International Celestial Reference Frame (ICRF). Ce repère inertiel est défini grâce à des observations de radiosources compactes extragalactiques dont le mouvement propre observable est supposé nul (voir McCarthy et Petit, 2003). L'ICRF est proche d'un repère défini par l'équateur et l'équinoxe dynamiques de l'époque J2000. Le temps utilisé par INPOP est le TDB ainsi qu'il a été défini par la résolution de l'IAU (2006). Ce temps est proportionnel au temps utilisé pour dériver les équations relativistes d'INPOP dans le repère ICRF centré au barycentre du Système solaire. Comme le précise Fienga *et al.* (2009), la relation exacte entre TT et TDB dépend des éphémérides, néanmoins la différence entre les deux échelles est inférieure à 2 ms. On rappelle que TT est relié au Temps Atomique International (TAI) par

$$TT = TAI + 32.184s$$

Le Temps Universel Coordonné (UTC) servant de base au temps civil diffère du TAI par un nombre entier de secondes intercalaires. Actuellement la relation entre l'UTC et TAI est

$$UTC = TAI - 34s$$

Selon l'International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS)¹, cette relation restera inchangée au moins jusqu'au 1er décembre 2010.

1.1.3 Ajustements aux observations

Les paramètres du modèle dynamique, notamment les positions et vitesses des planètes à l'époque J2000, sont ajustés par la méthode des moindres carrés de sorte à obtenir une différence minimum entre l'éphéméride et les observations. Les observations disponibles présentent des incertitudes différentes. Les observations sont ainsi pondérées par leurs incertitudes respectives. Comme la dépendance entre les paramètres n'est pas parfaitement linéaire, la procédure d'ajustement est itérée jusqu'à convergence.

INPOP et les éphémérides en général sont ajustées à deux types d'observations. D'une part les mesures des distances mutuelles entre une planète et la Terre et d'autre part des positions

1. Les bulletins de l'IERS sont disponibles sur www.iers.org.



FIGURE 1.1 – Exemples de radiotélescopes du Deep Space Network (NASA) et de l'European Space Tracking Network (ESA).

angulaires des planètes par rapport à la Terre dans le repère ICRF. Les mesures peuvent être obtenues par différentes méthodes dont on donne ici un bref aperçu.

Les observations radar sont un premier moyen de mesure de la distance mutuelle Terre-planète. Le principe de la méthode consiste à faire réfléchir sur la planète un signal radar émis depuis un radiotélescope. L'analyse de l'écho permet de déduire la distance entre l'antenne et la surface de la planète. L'incertitude de la mesure dépend du traitement appliqué pour éliminer les effets dus aux irrégularités de surface de la planète observée (Standish, 1990). Dans INPOP les observations radar sont utilisées uniquement pour Mercure et Vénus. La précision des mesures est estimée à quelques km (Fienga *et al.*, 2008).

La manière la plus précise pour obtenir une mesure de la distance mutuelle Terre-planète est l'exploitation de données issues de sondes spatiales. Ces données sont naturellement disponibles à partir du suivi d'une sonde par l'équipe de navigation. La liaison radio avec la sonde donne accès à la mesure de la distance Terre-sonde (à partir du temps aller-retour d'un signal) ainsi qu'à la mesure de la vitesse de variation de cette distance (à partir du décalage Doppler d'un signal). L'équipe de navigation utilise ces mesures pour la détermination de l'orbite de la sonde en utilisant une éphéméride planétaire, en général DE405. Les résidus de l'ajustement contiennent une signature provenant d'une prévision imparfaite des mouvements planétaires : les résidus peuvent être interprétés comme des corrections à appliquer à l'éphéméride de base (Fienga *et al.*, 2009). Les équipes de navigation mettent à disposition ces corrections sous une forme analogue à des observations d'une distance antenne-planète ou Terre-planète. La plupart des données est disponible à partir de sondes en orbite autour d'une planète, mais des observations peuvent également être calculées à l'occasion de survols (flybys). Pour des sondes comme Viking ou Pathfinder posées à la surface de Mars, l'obtention de la distance Terre-planète ne fait pas intervenir un ajustement d'orbite mais plutôt la détermination de la position de la sonde à la surface de la planète. Les mesures de la distance Terre-planète à partir de sondes spatiales sont exploitées dans INPOP08 pour Vénus, Mars et Saturne. Les incertitudes de ces mesures sont de l'ordre du mètre. Dans un futur proche des données sur Mercure devraient être disponibles avec la mission MESSENGER partie en août 2004 et la mission BepiColombo actuellement prévue pour 2014. Les observations des sondes au moyen de la Very Large Baseline Interferometry

(VLBI) permettent d’obtenir avec précision la position de la sonde relativement aux radiosources lointaines qui définissent l’ICRF. Ces mesures combinées avec le processus de détermination d’orbite de la sonde conduisent à des données analogues aux observations de la direction Terre-planète dans l’ICRF. La précision des mesures est de l’ordre de quelques mas (Fienga *et al.*, 2008). On note que les mesures VLBI constituent non seulement des observations différentes de la distance Terre-planète mais elles permettent de relier en pratique le repère de l’éphéméride à l’ICRF. Dans INPOP, les positions angulaires obtenues à partir d’observations VLBI de sondes sont disponibles pour Vénus, Mars, Jupiter et Saturne.

Le plus souvent, les observations des planètes extérieures proviennent d’observations optiques. Elles fournissent les positions apparentes des planètes vues depuis une station d’observation, et après réduction elles fournissent une mesure de la position angulaire de la direction Terre-planète. Ces mesures sont disponibles depuis 1914 et couvrent un arc suffisamment important pour ajuster correctement les orbites des planètes les plus lointaines comme Uranus ou Neptune. La précision des mesures est de l’ordre de quelques centaines de mas.

Les différentes méthodes d’observation que l’on vient de décrire demandent des moyens de réduction très complexes dont la description sort entièrement du cadre de cette thèse. Notamment les mesures de distances se présentent comme des mesures de temps et leur traduction en distances nécessite entre autres la prise en compte d’effets relativistes, d’effets induits par la couronne solaire et d’effets introduits par la traversée de l’atmosphère terrestre par les ondes radio (voir Fienga *et al.*, 2009).

Les mesures les plus précises exploitées dans les éphémérides proviennent de radiotélescopes. La figure 1.1 est une image de radiotélescopes utilisés par l’agence spatiale américaine et l’agence européenne pour le suivi de sondes spatiales. Un résumé graphique des données utilisées dans l’ajustement de INPOP08 est représenté sur la figure 1.2. Pour chaque type d’observation, la figure affiche l’écart-type des résidus obtenus dans l’ajustement d’INPOP08 de Fienga *et al.* (2009). Ces écart-types peuvent être interprétés comme des estimations d’incertitudes des données. La figure ne contient pas les données optiques utilisées pour l’ensemble des planètes extérieures et dont les incertitudes sont de l’ordre de 300 mas. On note que l’ajustement d’INPOP s’appuie sur une grande variété de missions spatiales : Magellan et Venus Express (VEX) pour Vénus, les missions Viking, Phobos, Pathfinder, Mars Global Surveyor (MGS), Mars Odyssey (MO) et Mars Express (MEX) pour Mars et les missions Galileo et Cassini pour Jupiter et Saturne. Sur l’ensemble de ces données, les plus contraignantes notamment pour les orbites des planètes intérieures sont les observations récentes de la distance Terre-Mars (Konopliv *et al.*, 2006). Il s’agit donc des suivis MGS, MO et MEX. La majorité des astéroïdes se situe dans la ceinture principale placée juste au delà de l’orbite de Mars. Ainsi les données les plus sensibles aux effets des astéroïdes seront les mesures de la distance Terre-Mars. On peut s’attendre à ce que les perturbations induites par les astéroïdes soient également significatives sur Jupiter, mais ces effets seront plus difficilement détectables à cause du peu de données précises disponibles.

1.2 Orbites des astéroïdes

1.2.1 La base de donnée Astorb

Pour obtenir les orbites des astéroïdes, on s’appuie sur le catalogue Astorb (Bowell *et al.*, 1994) qui est mis à jour régulièrement². Le catalogue fournit dans un repère écliptique les orbites de tous les astéroïdes connus calculées à partir d’observations astrométriques stockées par le Minor Planet Center. Ce calcul tient compte avec l’éphéméride DE405 des interactions avec les huit planètes, la Lune et une dizaine d’astéroïdes individuels. La date pour laquelle les orbites sont

2. Un historique des évolutions est disponible sur ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb_landmarks.html.

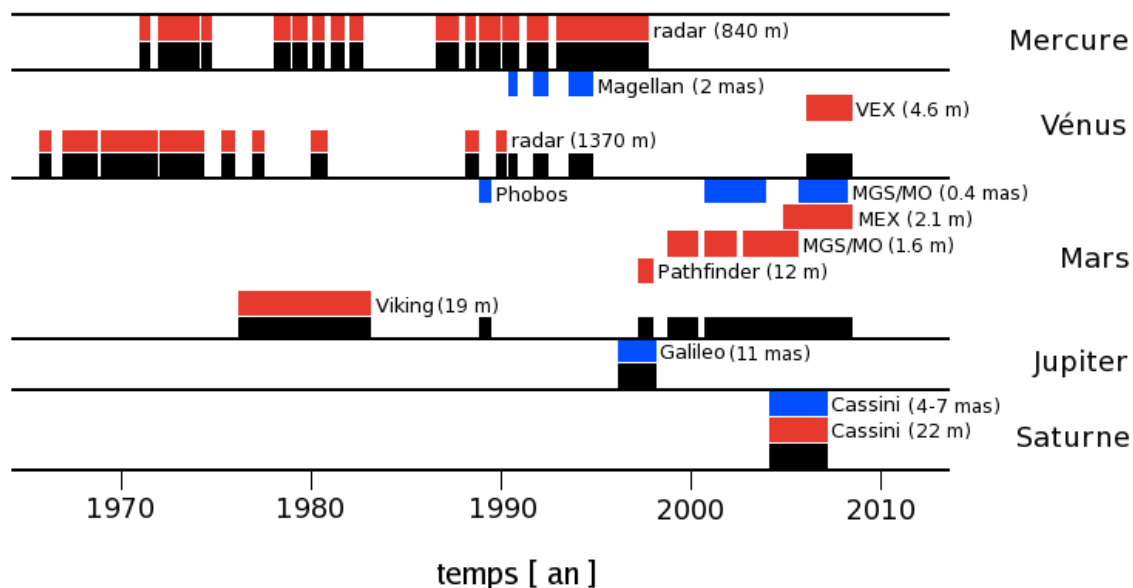


FIGURE 1.2 – Représentation schématique des données utilisées dans INPOP08 pour Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne (les données optiques ne sont pas représentées). En noir, répartition dans le temps de l'ensemble des données. En rouge, les mesures de la distance Terre-planète, en bleu les mesures des positions angulaires.

calculées évolue au fur et à mesure que le catalogue est mis à jour. Dans notre cas elle correspond au 26 septembre 2009. Les intégrations INPOP ont pour conditions initiales l'époque J2000, ainsi l'ensemble du catalogue doit être ramené à cette date. L'opération est réalisée avec INPOP08 en intégrant simultanément tous les astéroïdes depuis 2009 jusqu'à J2000. Parmi tous les objets répertoriés, on ne tient compte que des 219017 astéroïdes ayant une orbite confirmée et donc un numéro placé devant leur nom ou leur appellation provisionnelle. Au cours de l'intégration, les masses des astéroïdes sont supposées nulles sauf pour les 303 individus déjà présents dans le modèle dynamique. Par ailleurs, ces 303 objets sont intégrés à partir des orbites du catalogue et non à partir des orbites d'INPOP08. Ce changement correspond en terme de distance Terre-Mars à un effet de l'ordre du millimètre. On note que les orbites du catalogue sont fournies dans un repère écliptique. Pour passer les orbites dans le repère équatorial de INPOP, on utilise la valeur de l'obliquité de McCarthy et Petit (2003) ($\varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21''.406$).

1.2.2 Incertitudes

Le catalogue fournit pour chaque astéroïde l'incertitude de la position apparente de l'objet sur la sphère céleste. Ces incertitudes sont représentées sur la figure 1.3 en fonction des magnitudes absolues des astéroïdes. On rappelle que la magnitude absolue est reliée à la taille des objets. Les magnitudes élevées correspondent à des objets de taille faibles, inversement les magnitudes faibles correspondent aux objets les plus grands. La figure montre que pour la majorité des astéroïdes, les orbites sont connues avec une précision d'environ 100 mas. Selon Muinonen et Bowell (1993), l'incertitude provient surtout de la détermination imparfaite des moyens mouvements et donc des demi-grands axes des orbites. Une erreur sur le moyen mouvement se propage linéairement avec le temps, ainsi l'incertitude des orbites en J2000 est en réalité plus élevée que celle fournie dans le catalogue pour la date du 26 septembre 2009. L'époque des orbites de Astorb évolue par pas de 100 jours et les incertitudes sont à priori données pour cet intervalle de temps. Ainsi les incertitudes des orbites à l'époque J2000 sont donc environ $3556/100 \sim 35$ fois plus importantes

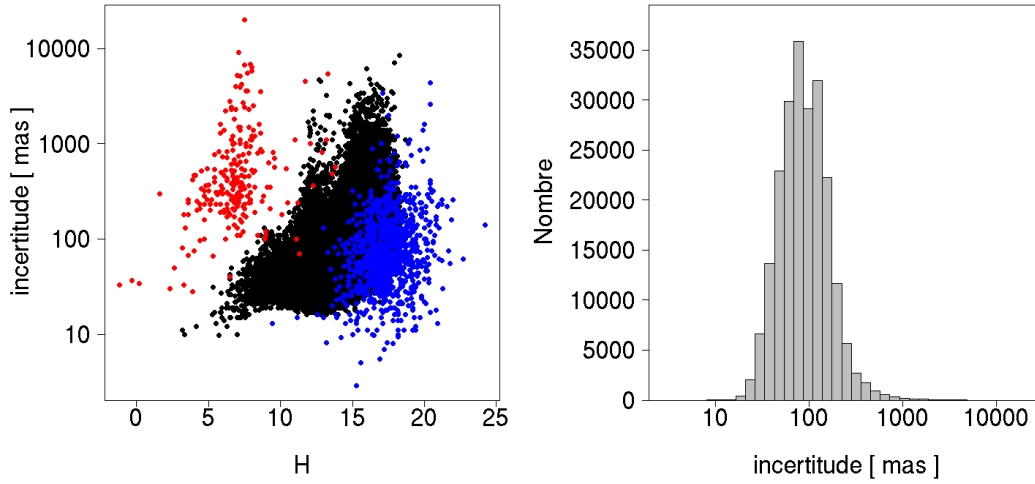


FIGURE 1.3 – À gauche, incertitudes sur les orbites des astéroïdes tracées en fonction de la magnitude absolue. En rouge, objets ayant un demi-grand axe supérieur à 6 UA, en bleu sont représentés les astéroïdes géocroiseurs (périhélie inférieur à 1.3 UA). À droite, histogramme représentant le nombre d'objets par tranche d'incertitude.

que les incertitudes tracées sur la figure 1.3. On conclut que l'incertitude de la majorité des orbites obtenues en intégrant Astorb à l'époque J2000 est de l'ordre de la seconde d'arc. Pour une distance Terre-astéroïde de 1 UA, ceci correspond à une erreur sur la position de ~ 1000 km.

1.2.3 Distribution spatiale

La figure 1.4 donne les positions en J2000 de tous les astéroïdes dont le demi-grand axe est inférieur à 6 UA, ce qui correspond à 99.9 % des 219017 objets considérés. Le repère de la figure est héliocentrique avec le plan XY parallèle au plan invariant du Système solaire. On distingue sur la figure les Troyens de Jupiter situés au niveau des points de Lagrange L_4 et L_5 . L'ensemble des astéroïdes est contenu dans un tore dont l'épaisseur vaut environ 1 UA. Les figures 1.5 et 1.6 correspondent aux tracés des positions en coordonnées elliptiques. Sur la figure 1.5, on distingue différents groupes d'astéroïdes (voir Zellner *et al.*, 1985). On remarque notamment le groupe des Hungarias situé en dessous de 2 UA et le groupe des Hildas situé vers 4 UA. La ceinture principale s'étend sur l'intervalle de 2 UA à 3.8 UA. On rappelle que la notion de groupe d'astéroïdes est différente de la notion de famille dynamique. Les astéroïdes d'un même groupe partagent simplement des éléments orbitaux similaires, alors que les astéroïdes d'une même famille ont une origine commune et possèdent entre autres des propriétés spectrales proches. Selon Murray et Dermott (1999), le taux de précession des périhélies des astéroïdes est à son minimum au niveau du périhélie de Jupiter et à son maximum dans la direction opposée. Ceci a pour conséquence sur la figure 1.6, la tendance apparente des longitudes des périhélies à s'accumuler dans la direction du périhélie de Jupiter. Le phénomène interviendra dans le chapitre 4 lors de la modélisation de la ceinture des astéroïdes par un anneau.

1.3 Masses des astéroïdes

Les masses des astéroïdes sont actuellement très peu connues. Contrairement aux orbites, elles ne peuvent pas être directement observées mais doivent être déduites des perturbations sur d'autres astéroïdes, sur les planètes ou sur des sondes spatiales. Cette approche, que l'on appellera

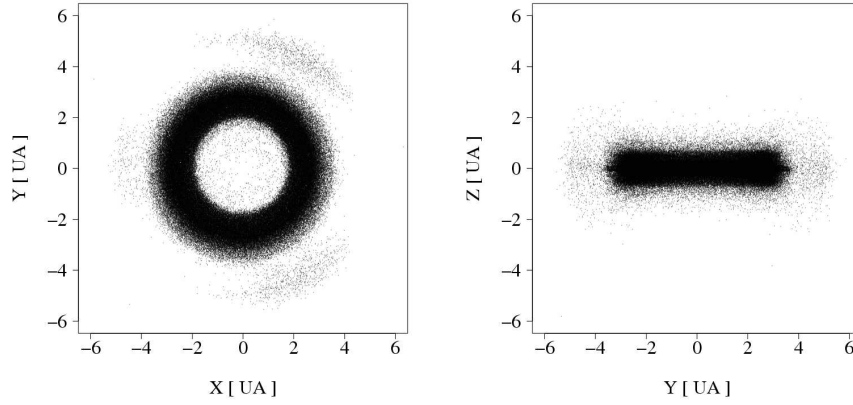


FIGURE 1.4 – Positions des astéroïdes pour la date J2000. Le repère correspond au plan invariant du Système solaire avec l’axe des abscisses orienté selon la direction Soleil-Jupiter.

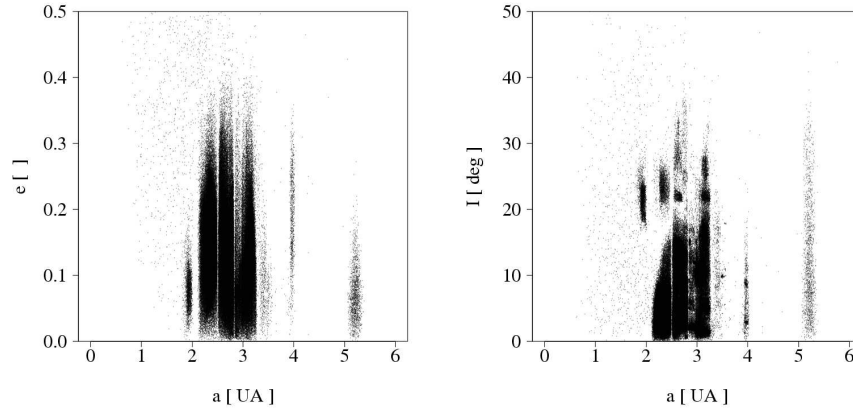


FIGURE 1.5 – Tracé des éléments orbitaux des astéroïdes dans le repère de la figure 1.4. A gauche, tracé des excentricités en fonction des demi-grands axes, à droite tracé des inclinaisons en fonction des demi-grands axes.

approche dynamique, permet dans certains cas des déterminations de masses très précises. En cas d’absence de mesures, les masses doivent être estimées de manière très approximative à partir des diamètres ou même des magnitudes absolues des astéroïdes.

1.3.1 Méthode astrométrique

Chronologiquement, la première méthode de détermination de masse est la méthode dite astrométrique qui s’appuie sur la rencontre proche d’un astéroïde massif avec un astéroïde test de masse négligeable (Hilton, 2002). A partir d’observations de l’astéroïde test effectuées avant et après la rencontre, il est possible d’ajuster simultanément la masse de l’astéroïde perturbateur et l’orbite de l’astéroïde test. Bien que l’ajustement fasse intervenir seulement 7 paramètres, il est opéré dans un modèle complet du Système solaire tenant compte des planètes et des astéroïdes les plus massifs. Hilton (2002) mentionne que les incertitudes sur les masses des astéroïdes du modèle introduisent des erreurs systématiques importantes. La méthode astrométrique serait ainsi limitée par une incertitude de l’ordre de $10^{-11} M_{\odot}$. Les travaux de Baer et Chesley (2008) suivi de Baer *et al.* (2008) rassemblent plus de vingt masses d’astéroïdes déterminées de manière cohérente avec

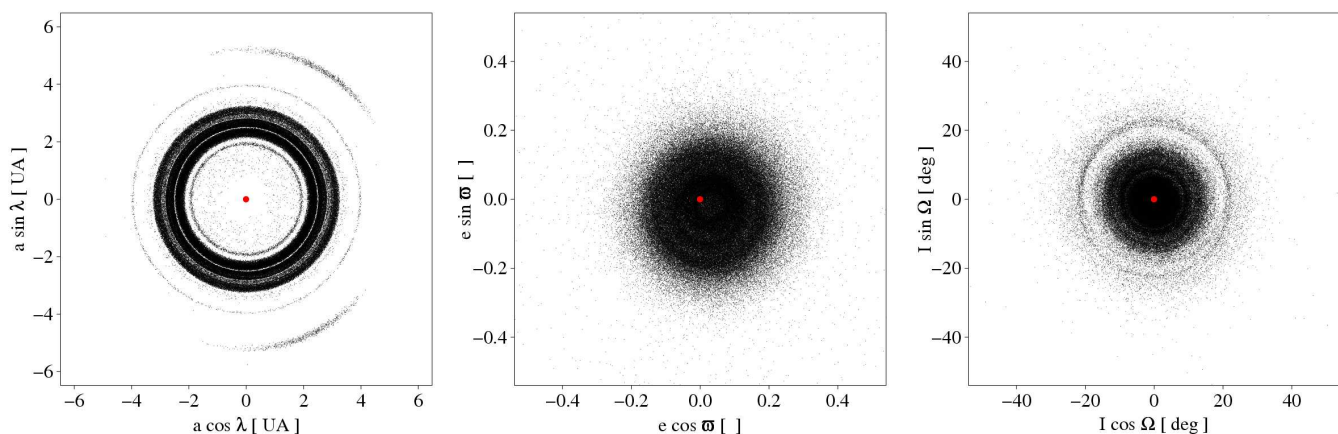


FIGURE 1.6 – Tracé des éléments orbitaux des astéroïdes en coordonnées polaires dans le repère de la figure 1.4. À gauche, tracé des demi-grand axes a et des longitudes moyennes λ ; au milieu, tracé des excentricités e et des longitudes des périhélie ϖ ; à droite, tracé des inclinaisons I et des noeuds Ω . Les points rouges marquent les origines des repères.

la méthode astrométrique. Les auteurs s'appuient sur les intégrations d'un modèle dynamique similaire à DE405 dans lequel tous les astéroïdes interagissent les uns avec les autres. Sur les 300 astéroïdes du modèle, 21 masses sont ajustées à partir de 102 rencontres proches avec des astéroïdes tests. Les orbites des 300 astéroïdes sont redéterminées en tenant compte des nouvelles masses et le processus est itéré. Le modèle dynamique tient compte en plus des 300 astéroïdes d'un certain nombre d'astéroïdes supplémentaires susceptibles d'avoir un effet significatif sur les astéroïdes tests. Les erreurs systématiques mentionnées par Hilton (2002) persistent chez Baer et Chesley (2008) car le modèle dynamique contient au moins 279 masses non ajustées. Néanmoins ces erreurs sont inférieures à $10^{-11} M_{\odot}$. En effet cette valeur provenait chez (Hilton, 2002) surtout des incertitudes sur les masses de Ceres, Pallas et Vesta qui depuis 2002 ont été nettement diminuées grâce aux ajustements des éphémérides planétaires à de nouvelles observations. La valeur de $10^{-11} M_{\odot}$ correspond approximativement à 10% des masses de Ceres, Pallas ou Vesta. En supposant que l'incertitude réelle des déterminations astrométriques correspond à 10% des masses les plus importantes après Ceres, Pallas, Vesta, les estimations de Baer et Chesley (2008) contiennent des erreurs systématiques de l'ordre de $10^{-12} M_{\odot}$. Il existe d'autres déterminations astrométriques de masses que celles de Baer et Chesley (2008), les plus récentes ayant été publiées par Ivantsov (2008). Néanmoins Baer et Chesley (2008) fournissent le plus de valeurs obtenues de manière cohérente.

1.3.2 Autres méthodes

L'ajustement des éphémérides planétaires aux observations constitue un deuxième moyen d'accès aux masses des astéroïdes. Les masses sont alors déduites des perturbations exercées par les astéroïdes sur les planètes. Fienga *et al.* (2009) déterminent avec INPOP08 plus de 30 masses. L'ajustement aux données planétaires présente a priori quelques avantages par rapport à la méthode astrométrique. Toutes les masses des astéroïdes sont ajustées simultanément et non une par une. L'ajustement se base sur des données extrêmement précises, de l'ordre du mètre sur la distance Terre-Mars. Les effets des interactions inter-astéroïdes sont d'ordre 2 en masses sur les mouvements planétaires. Ces effets, difficiles à modéliser à cause des incertitudes sur les masses, interviennent dès l'ordre 1 dans la méthode astrométrique. L'inconvénient principal de l'approche planétaire est que les effets des astéroïdes sont très fortement corrélés. L'imperfection du modèle

TABLE 1.1 – Masses des astéroïdes 45 Eugenia et 87 Sylvia déterminées par la méthode astrométrique et par observation de satellites.

	méthode astrométrique (Ivantsov, 2008)	observation de satellites (Marchis <i>et al.</i> , 2008a, 2005)
masse de 45 Eugenia [$M_{\odot}^{-11}$]	0.9 ± 0.3	0.286 ± 0.006
masse de 87 Sylvia [$M_{\odot}^{-11}$]	2.6 ± 1.1	0.743 ± 0.003



FIGURE 1.7 – Images des astéroïdes Eros (à gauche) et Mathilde (à droite) prises par la sonde NEAR-Shoemaker.

des astéroïdes dans l'éphéméride introduit des erreurs systématiques qui sont amplifiées par les corrélations entre les différents effets. Ainsi sans précaution particulière, l'ajustement des masses dans les éphémérides n'est susceptible de fournir des valeurs précises que pour les quelques plus grands perturbateurs dont Ceres, Pallas et Vesta.

Le moyen le plus sûr pour déterminer la masse d'un astéroïde est l'observation d'un satellite. Actuellement on dénombre plus de 100 systèmes³ binaires ou multiples parmi les astéroïdes. La masse du système s'obtient à partir de la troisième loi de Kepler et des paramètres orbitaux du satellite. Ainsi l'obtention de la masse demande non seulement la détection d'un satellite, mais également l'ajustement de son orbite. Selon Marchis *et al.* (2005), cette méthode fournit les mesures des masses les plus précises et les moins entachées d'erreurs systématiques. Il s'agit également du seul moyen d'accéder aux masses des astéroïdes moins massifs dont les effets sur les planètes ou sur d'autres astéroïdes sont faibles. La comparaison des masses obtenues à partir de systèmes multiples avec des masses déterminées à partir de rencontres proches permet d'estimer correctement l'erreur systématique de la méthode astrométrique. Ivantsov (2008) estime à partir de rencontres proches avec plusieurs astéroïdes tests, les masses des systèmes multiples 45 Eugenia et 87 Sylvia. Les observations des satellites des deux astéroïdes ont permis par ailleurs de déterminer les masses sans ambiguïté. Le tableau 1.1, compare les valeurs obtenues par les deux méthodes. On estime ainsi l'erreur systématique de la méthode astrométrique à environ $10^{-11}M_{\odot}$. Cette valeur est cohérente avec la prévision de Hilton (2002), en effet Ivantsov (2008) se base sur des masses de Ceres, Pallas et Vesta provenant de DE405 et donc datant de 1998. Baer et Chesley (2008) ne donnent malheureusement aucune estimation de masse d'un système multiple.

3. Le MPC maintient à jour une liste des astéroïdes ayant des satellites. La liste est disponible sur www.cfa.harvard.edu/iau/minorsats.html.

L'estimation de la masse d'un astéroïde directement à partir d'une sonde reste rare. Au début des années 90, la sonde Galileo a effectué des survols de 951 Gaspra et 243 Ida, néanmoins le suivi de la sonde n'a pas permis de déterminer leurs masses. La sonde NEAR-Shoemaker a effectué en 1997 le survol de l'astéroïde 253 Mathilde. En 2000, elle a été placée en orbite autour de 433 Eros sur lequel elle a fini par se poser. Les masses des deux astéroïdes ont pu être déterminées avec précision (Yeomans *et al.*, 1997, 2000). La figure 1.7 correspond aux images des deux astéroïdes retransmises par NEAR-Shoemaker. En 2005, la sonde Hayabusa s'est posée sur l'astéroïde 25143 Itokawa dont on connaît désormais la masse (Fujiwara *et al.*, 2006). On pourrait mentionner encore Deep Space 1, Stardust et Rosetta qui ont effectué des survols des astéroïdes 9969 Braille, 5535 Annefrank et 2867 Steins respectivement. Néanmoins il semble que les survols n'ont pas permis de déterminations de masses. Très récemment, le 10 juillet 2010, Rosetta a également survolé l'astéroïde 21 Lutetia. Une des images de l'astéroïde prise au cours du survol est reproduite sur la figure 1.8.

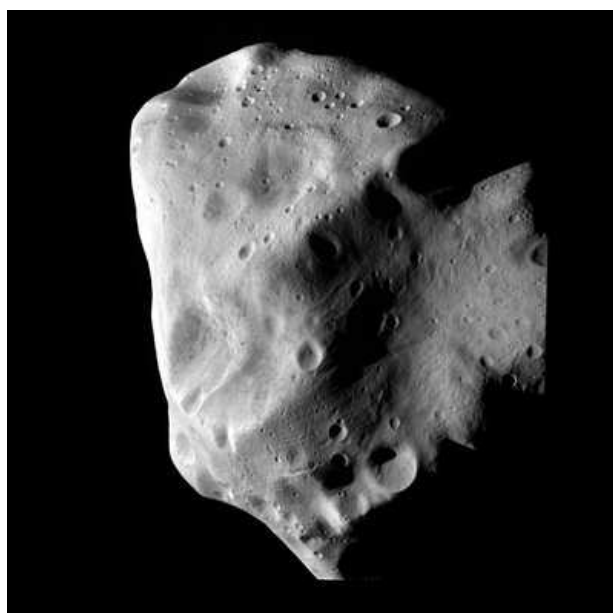


FIGURE 1.8 – Astéroïde Lutetia vu par la sonde Rosetta à une distance d'environ 3200 km.

1.3.3 Masses connues aujourd'hui et perspectives futures

Le tableau de l'annexe 9.1 rassemble 45 astéroïdes dont les masses ont pu être déterminées par divers auteurs. On a retenu un minimum de déterminations provenant des ajustements aux données planétaires car les erreurs systématiques de ces déterminations ne sont pas bien connues. Leur estimation est par contre un des objectifs de cette thèse. On souligne que Fienga *et al.* (2009) déterminent une trentaine de masses dont 17 qui ne sont pas présentes dans l'annexe 9.1.

De nouvelles masses seront déterminées avec de nouvelles données disponibles dans le futur. Dans le cas d'INPOP, le paramètre le plus sensible aux effets des astéroïdes est la distance Terre-Mars. Sa mesure précise se poursuivra avec la mission MEX, prévue au moins jusqu'à la fin 2012⁴. Les déterminations astrométriques continueront également de bénéficier des observations en cours. La précision des observations utilisées actuellement est en moyenne de l'ordre de la seconde d'arc. En 2012 la construction des quatre télescopes du projet Pan-STARRS devrait être achevée à Hawaï. Selon Baer et Chesley (2008), le projet observera plusieurs millions

4. Cette décision a été prise par l'ESA, à l'occasion du 126ème meeting du Science Programme Committee (voir sci.esa.int). La décision concerne également VEX

d'astéroïdes avec une précision de l'ordre de 100 mas. Les observations permettront de nouvelles déterminations astrométriques. Selon Marchis *et al.* (2008a), Pan-STARRS devrait contribuer aux observations de systèmes multiples parmi les astéroïdes. De nouvelles masses pourront ainsi être déterminées avec précision. En 2011 et en 2016 les masses de Ceres et Vesta seront déterminées avec une précision sans précédent grâce à la mission Dawn qui visitera les deux objets. Enfin, la mission GAIA devrait observer environ 350000 astéroïdes avec une précision inférieure à 1 mas. Mouret *et al.* (2007) estiment que grâce à ces données, au moins 150 déterminations de masses par la méthode astrométrique pourront être obtenues avec une erreur inférieure à 50 %.

1.4 Diamètres des astéroïdes et masses astrophysiques

Pour la majorité des astéroïdes, la masse n'est pas connue et doit donc être estimée. L'approche généralement adoptée consiste à déduire la masse d'un astéroïde à partir d'une densité moyenne et d'une estimation ou mesure de son diamètre. Par opposition à la méthode dynamique décrite précédemment, on parlera de méthode astrophysique de détermination de masse (Kochetova, 2004). L'objectif de cette section est d'attribuer selon les données disponibles et les connaissances actuelles, des diamètres et ensuite des masses à l'ensemble des 219017 astéroïdes. Une compilation de diamètres est nécessaire à l'estimation des effets des astéroïdes sur les mouvements planétaires. Il est aussi important d'estimer les diamètres que d'estimer les incertitudes correspondantes. Par la suite on s'efforcera à n'exploiter que les données dont l'incertitude peut être estimée sans trop d'ambiguïté.

Les figures 1.7 et 1.8 illustrent le fait que les astéroïdes peuvent avoir des formes non-sphériques. Par conséquent lorsqu'on leur attribue un diamètre, il s'agit en général d'un diamètre effectif (Tedesco, 1994; Drummond *et al.*, 2009) défini pour un ellipsoïde de demi-grands axes a, b, c . En notant D le diamètre, on a

$$D = 2(abc)^{1/3}$$

Cette définition assure que le volume obtenu avec le diamètre efficace est égal au volume de l'ellipsoïde correspondant. Tedesco (1994) ou plus récemment Hilton (2002) résument les nombreuses techniques permettant de mesurer les diamètres et plus généralement les formes des astéroïdes.

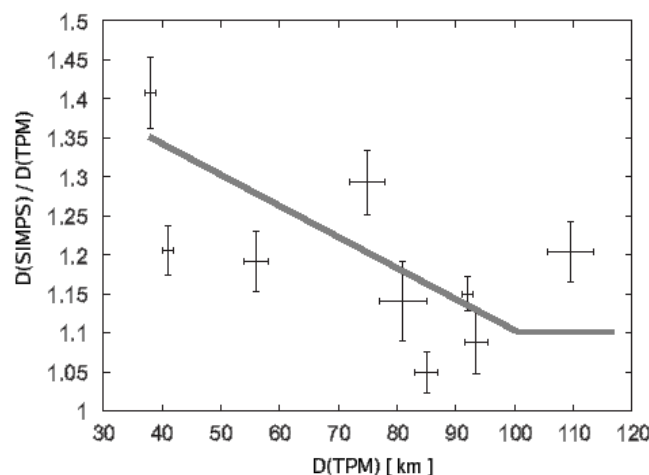


FIGURE 1.9 – Figure reproduite depuis Delbo et Tanga (2009). Pour chaque rapport $D(\text{SIMPS})/D(\text{TPM})$ sont affichées les barres d'erreur correspondantes. Le trait représente l'incertitude que l'on adoptera pour les données SIMPS.

1.4.1 Déterminations SIMPS

La majorité des diamètres disponibles actuellement a été déterminée avec la méthode radiométrique à partir d’observations infrarouges du satellite IRAS. L’exploitation des observations par Tedesco *et al.* (2002b) dans le cadre du Supplemental IRAS Minor Planet Survey (SIMPS) a permis la détermination de 2228 diamètres. Avant de donner une brève description de la méthode, quelques rappels sont nécessaires. On note par H la magnitude absolue d’un astéroïde. Par définition, la magnitude absolue correspond à la magnitude apparente de l’astéroïde placé à 1 UA du Soleil et observé depuis le Soleil. La valeur de H se déduit de l’évolution de la magnitude apparente en fonction des positions mutuelles entre l’astéroïde, la Terre et le Soleil. Bowell *et al.* (1989) donne le détail du calcul et définit ainsi le système de magnitude H - G actuellement utilisé pour les astéroïdes. Pour chacun des 219017 astéroïdes considérés ici, une valeur de H est fournie dans le catalogue Astorb. Le diamètre d’un objet est relié à l’albédo et à la magnitude absolue par (Tedesco *et al.*, 2005) :

$$\log_{10} D = 3.1236 - 0.2H - 0.5 \log_{10} \rho$$

où D correspond au diamètre exprimé en kilomètres et ρ à l’albédo. La relation provient d’une part des définitions de la magnitude absolue et de l’albédo. D’autre part elle s’appuie sur une estimation expérimentale du flux lumineux émis par le Soleil (voir par exemple Gehrels, 1986). On peut la réécrire comme

$$D = \frac{1329}{\sqrt{\rho}} 10^{-0.2H} \quad (1.1)$$

La magnitude absolue seule ne permet pas d’obtenir la taille d’un objet car pour une même magnitude, l’objet peut être sombre et donc grand ou bien clair et donc petit. Pour trancher, la méthode radiométrique s’appuie sur des observations du rayonnement thermique émis par l’astéroïde. Qualitativement, un objet sombre va accumuler plus de chaleur et son rayonnement thermique sera plus important que celui d’un objet clair. Une estimation quantitative nécessite l’ajustement de l’albédo et du diamètre aux observations infrarouges grâce à un modèle de répartition de chaleur sur la surface de l’astéroïde. Dans SIMPS, l’ajustement des diamètres et des albédos s’appuie sur 4 fenêtres observées par le satellite IRAS à différentes longueurs d’ondes (12 μm , 25 μm , 60 μm , 100 μm). Le modèle utilisé pour ajuster les albédos et diamètres est le modèle thermique standard qui se base sur l’hypothèse d’astéroïdes sphériques en équilibre thermique instantané avec le rayonnement solaire (Lebofsky et Spencer, 1989). En comparant les diamètres SIMPS avec des diamètres effectifs obtenus avec une méthode non radiométrique, Tedesco *et al.* (2002b) estime que l’incertitude des valeurs SIMPS est de l’ordre de 10 % pour des diamètres supérieurs à 100 km. Delbo et Tanga (2009) utilisent un modèle thermique tenant compte de la forme des astéroïdes et des effets dus à l’inertie pour dériver à partir des observations IRAS une dizaine de diamètres entre 30 km et 100 km. En notant par $D(\text{SIMPS})$ les diamètres SIMPS et par $D(\text{TPM})$ les diamètres dérivés par Delbo et Tanga (2009) avec un modèle plus complet, la figure 1.9 représente le rapport $D(\text{SIMPS})/D(\text{TPM})$ en fonction du diamètre $D(\text{TPM})$. On observe que les diamètres SIMPS ont tendance à être sur-estimés. La figure suggère qu’en dessous d’un diamètre de 100 km l’erreur augmente linéairement et atteint environ 35% pour les diamètres de l’ordre de 40 km.

1.4.2 Déterminations supplémentaires

Le satellite MSX a effectué des observations infrarouges complémentaires des observations IRAS, en particulier le satellite a observé les parties du ciel non couvertes par IRAS. L’exploitation des observations a conduit à la détermination de 168 diamètres par Tedesco *et al.* (2002a) dans le cadre de la MSX Infrared Minor Planet Survey (MIMPS). L’étude s’appuyait sur

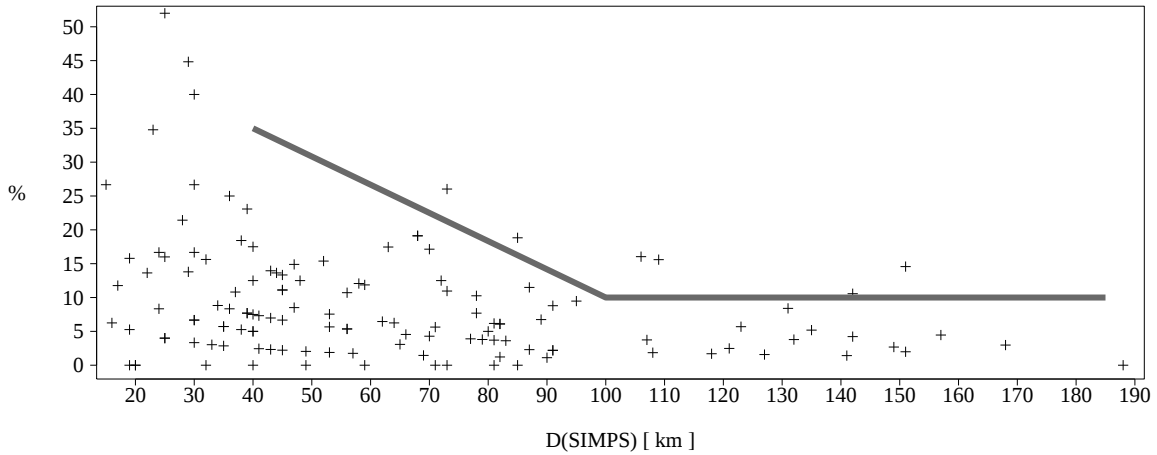


FIGURE 1.10 – Différences relatives entre les diamètres SIMPS et les diamètres MIMPS en fonction de la taille des objets. Le trait correspond à l’incertitude que l’on adopte pour les données SIMPS.

les mêmes outils et modèles que SIMPS et par conséquent les incertitudes des déterminations MIMPS peuvent être considérées identiques aux incertitudes SIMPS. Parmi les 168 diamètres déterminés, 137 ont déjà été obtenus dans SIMPS. Les différences entre les deux études, représentées figure 1.10, donnent un aperçu de l’incertitude des déterminations. Il apparaît que la précision des déterminations est effectivement de l’ordre de 10% avec une dégradation linéaire à partir d’un diamètre égal à 100 km. On note que cette même tendance est suggérée par le tracé de la figure 1.9. On estime que l’erreur atteint 35% pour un diamètre de 40 km. Cette estimation de l’incertitude que l’on va adopter pour les données SIMPS/MIMPS est représentée sur les deux figures par un trait rouge.

Les données infrarouges des satellites IRAS et MSX ont été acquises respectivement en 1983 et 1997. De nouvelles données sont disponibles depuis, notamment avec le satellite Spitzer qui a achevé sa mission principale en 2009. Trilling *et al.* (2008) a annoncé la compilation d’un catalogue d’albédos et de diamètres à partir des observations Spitzer pour environ 100000 astéroïdes. Une telle quantité de déterminations éclipsa complètement les données IRAS. La publication du catalogue peut néanmoins être retardée jusqu’à l’arrivée des données Pan-STARRS. En effet, Trilling *et al.* (2008) mentionne des sources d’erreur importantes dues aux incertitudes sur les magnitudes apparentes des astéroïdes ainsi que sur leurs orbites. Avec Pan-STARRS puis GAIA cette incertitude sera nettement diminuée. Selon Delbo et Tanga (2009), il faudra attendre les projets comme Pan-STARRS pour pouvoir dériver les formes et les rotations des astéroïdes et pouvoir ainsi exploiter les données Spitzer avec des modèles thermiques adaptés aux diamètres inférieurs à 100 km.

Dans la littérature, il existe des dizaines de publications concernant l’estimation des diamètres par radiométrie ou par d’autres méthodes. Elles contiennent que très peu de diamètres supplémentaires par rapport à SIMPS et MIMPS. La contribution la plus importante est l’étude de Stansberry *et al.* (2008) qui déterminent par la méthode radiométrique 39 nouveaux diamètres d’objets trans-Neptuniens. Shevchenko et Tedesco (2006) listent 57 diamètres obtenus à partir d’occultations stellaires. Cette méthode consiste à observer l’occultation d’une étoile par un astéroïde à partir de différents points de la Terre. L’observation du phénomène par différents observateurs permet d’obtenir une projection de la forme de l’astéroïde avec une précision de quelques kilomètres. Mais parmi les déterminations de Shevchenko et Tedesco (2006), seulement

un seul objet n'est pas présent dans SIMPS/MIMPS. De plus selon les auteurs, son diamètre n'est probablement pas déterminé correctement. Les diamètres de certains astéroïdes peuvent être obtenus directement à partir d'observations optiques. Une cinquantaine d'astéroïdes a pu être résolue et on renvoie le lecteur à l'introduction de Drummond *et al.* (2009) pour des références bibliographiques concrètes. Il semble que seulement trois objets ne font pas partie de SIMPS ou MIMPS. Il s'agit d'une part de 19 Fortuna et de 624 Hektor observés par le télescope Hubble (Storrs *et al.*, 2005) et d'autre part de 129 Antigone résolu par optique adaptative depuis un des télescopes Keck (Drummond *et al.*, 2009). Parmi les méthodes permettant l'estimation de la taille d'un astéroïde, on doit mentionner encore les observations radar ou bien les mesures polarimétriques. Néanmoins leurs contributions aux diamètres SIMPS/MIMPS sont comparables avec les méthodes d'occultation et d'observation directe.

1.4.3 Compilation d'une base de diamètres

Pour assigner un diamètre à l'ensemble des 219017 astéroïdes, on commence par attribuer les 2228 diamètres SIMPS disponibles. On complète avec les 31 diamètres supplémentaires MIMPS, les 39 diamètres de Stansberry *et al.* (2008) et les diamètres des trois astéroïdes individuels mentionnés précédemment. On définit trois catégories d'incertitudes de diamètres : la catégorie I correspondant à des incertitudes inférieures à 10%, la catégorie II correspondant à des incertitudes de moins de 35% et enfin la catégorie III pour les incertitudes plus élevées. Les incertitudes des données SIMPS et MIMPS ont déjà été estimées. Quant aux diamètres de Stansberry *et al.* (2008) et des deux autres auteurs, on va se fier aux incertitudes formelles. Pour estimer les diamètres de la majorité des objets restants, on suit l'exemple donné par Tedesco *et al.* (2005) ou plus récemment par Warner *et al.* (2009) et on considère l'exploitation des données d'appartenance à une classe taxonomique, à une famille dynamique ou tout simplement d'appartenance à un groupe orbital au sein de la ceinture d'astéroïdes.

Taxonomies

Les taxonomies les plus utilisées actuellement sont les taxonomies de Tholen et la taxonomie SMASSII (Tholen et Barucci, 1989; Bus et Binzel, 2002). Dans les deux cas, les astéroïdes sont répartis en classes selon des critères spectraux, dans la classification de Tholen les classes M,E,P sont attribuées selon l'albédo. Comme certaines classes se caractérisent par des albédos regroupés autour d'une valeur d'albédo moyenne, la taxonomie est une information utile pour attribuer un diamètre. Paradoxalement les classes de Tholen M,E,P ne sont pas utiles pour compléter notre base de diamètres. En effet leurs membres ont déjà des albédos connus et donc des diamètres bien déterminés. On distingue en général deux superclasses ou complexes dénotés C et S qui regroupent les taxonomies dont les membres présentent respectivement des albédos faibles et des albédos modérés. Dans la classification de Tholen, le complexe C est constitué des classes B,C,D,F,G,T et de leurs combinaisons, le complexe S est représenté uniquement par la classe S. Dans la taxonomie SMASSII, le complexe d'albédo faible est constitué par les classes B,C,Cb,Cg,Cgh,Ch. Le complexe S comprend quant à lui les classes S,Sa,Sk,Sl,Sq,Sr. Ces regroupements sont résumés par le tableau 1.2. Avec les données taxonomiques disponibles, on est en mesure d'attribuer à plus de 1300 astéroïdes une classe d'albédo C ou S. Lorsque les données se recoupent, on donne là priorité à la classification SMASSII qui est plus récente. Désormais en parlant de classes C ou S, on ne se réfère plus aux taxonomies mais on entend systématiquement une des deux classes d'albédo ainsi que l'on vient de les définir. La distribution des albédos au sein des deux classes est représentée par les graphes de la figure 1.11. Ces histogrammes se basent sur presque 700 objets appartenant à une des deux classes et bénéficiant déjà d'une estimation de diamètre de catégorie I ou II, donc meilleure que 35 %. On rappelle que la formule (1.1) établit

TABLE 1.2 – Regroupement des taxonomies en classes d'albédo.

catégorie C/S	Tholen	SMASSII
C	B, C, D, F, G, T	B, C, Cb, Cg, Cgh, Ch
S	S	S, Sa, Sk, Sl, Sq, Sr

une équivalence entre albédo et diamètre. Les données taxonomiques permettent d'attribuer des albédos moyens et par conséquent des diamètres à plus de 600 objets dont les diamètres n'étaient pas attribués jusqu'à maintenant en fixant un albédo moyen de 0.05 pour la classe C et un albédo moyen de 0.2 pour la classe S. On estime l'erreur des diamètres issus des taxonomies à moins de 35%. En effet en notant par D_r le diamètre réel d'un astéroïde et par D_e son diamètre estimé, on déduit de la relation (1.1) et de la figure 1.11 que pour un astéroïde de classe C on aura

$$\sqrt{\frac{0.025}{0.05}} \leq \frac{D_e}{D_r} \leq \sqrt{\frac{0.1}{0.05}} \quad \equiv \quad 0.7 \leq \frac{D_e}{D_r} \leq 1.4$$

Ainsi l'erreur relative de l'estimation se situe entre 30% et 40%. Les bornes contraignant le diamètre réel sont

$$0.7D_e \leq D_r \leq 1.4D_e$$

Sur la figure 1.11 on remarque que dans des cas exceptionnels un astéroïde de classe C peut avoir un albédo aussi grand que 0.34. Le diamètre réel est alors surestimé par un facteur supérieur à 2 et on a

$$0.4D_e \leq D_r \leq 1.4D_e$$

De manière analogue pour un astéroïde de classe S on obtient

$$\sqrt{\frac{0.1}{0.2}} \leq \frac{D_e}{D_r} \leq \sqrt{\frac{0.3}{0.2}} \quad \equiv \quad 0.7 \leq \frac{D_e}{D_r} \leq 1.2$$

Le diamètre est donc estimé à 30% ou mieux. En tenant compte des quelques cas rares de la figure 1.11, le diamètre réel est contraint par

$$0.6D_e \leq D_r \leq 2D_e$$

On conclut que dans la très grande majorité des cas, les diamètres attribués à partir de données taxonomiques font partie de la catégorie d'incertitude II. Dans des cas rares, probablement dus à une attribution de taxonomie erronée, on retient que le diamètre réel peut être sous-estimé ou surestimé par un facteur environ égal à 2 :

$$0.5D_e \leq D_r \leq 2D_e$$

En se basant sur les données ayant servi à tracer les histogrammes 1.11, on estime à 10% la proportion des astéroïdes de taxonomies C et S dont les albédos se situent à l'extérieur des fourchettes 0.025 - 0.1 et 0.1 - 0.3 respectivement. On obtient ainsi une estimation de la proportion des cas rares où l'erreur sur le diamètre atteint un facteur 2.

Familles dynamiques et groupes orbitaux

Selon Parker *et al.* (2008), la moitié des astéroïdes connus appartiendrait à une famille dynamique. Les membres d'une famille dynamiques sont à priori issus d'un même corps détruit par

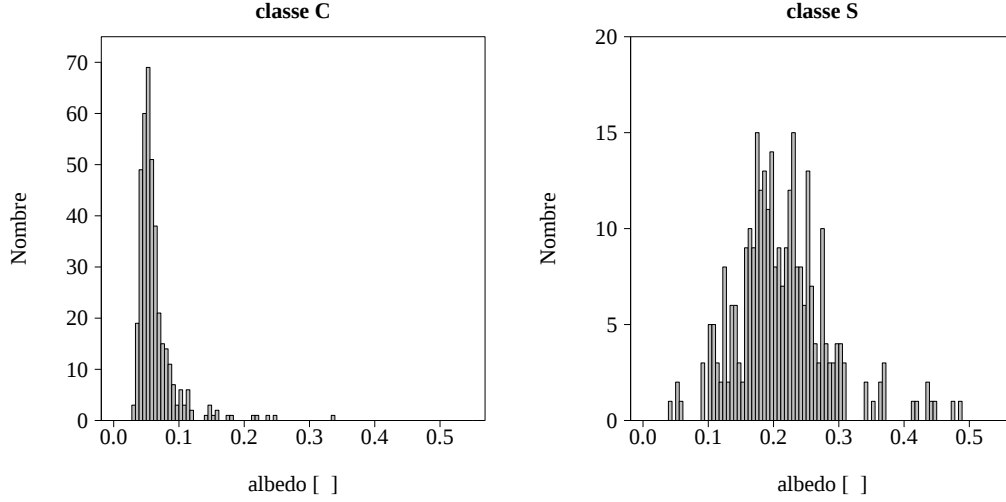


FIGURE 1.11 – Histogrammes représentant le nombre d’astéroïdes en fonction de différentes tranches d’albédos pour les deux classes C et S.

collision. Ainsi l’appartenance à une famille peut permettre l’attribution d’un albédo moyen au même titre que la taxonomie. Nesvorný *et al.* (2005) attribuent une famille dynamique à presque 40000 objets parmi un ensemble initial de plus de 100000 astéroïdes. Ces attributions ne semblent pas être disponibles publiquement et l’on est obligé de se tourner vers des travaux plus anciens comme ceux de Zappala *et al.* (1997) où moins de 2000 objets ont été répartis selon environ 15 familles dynamiques. L’analyse des distributions des albédos au sein des familles montre que pour certaines, la distribution est assez étroite (Tedesco *et al.*, 2005). La situation est illustrée par la figure 1.12 pour deux familles nombreuses que sont Eos et Themis. Comme précédemment, les histogrammes sont tracés uniquement pour les astéroïdes appartenant aux catégories d’incertitude I ou II. L’attribution d’albédos moyens selon les familles dynamiques permettrait à priori la détermination de plus de 1000 diamètres supplémentaires. Néanmoins avec le peu de données disponibles dans Zappala *et al.* (1997), il n’est pas aisé d’estimer de manière sûre la largeur des distributions au sein de chaque famille car la moitié des familles ne possède pas plus de dix membres dont on connaîtrait l’albédo. De plus, comme les diamètres que l’on pourrait attribuer ne concernent que des objets de tailles assez faibles (en moyenne de l’ordre de 15 km), on décide de ne pas exploiter les familles dans notre compilation de diamètres.

Warner *et al.* (2009) attribuent des albédos moyens aux astéroïdes en fonction de leur appartenance à différents groupes orbitaux (voir 1.2.3). L’appartenance à ces groupes est définie uniquement en fonction des éléments orbitaux des astéroïdes et par conséquent la majorité des 219017 astéroïdes peut être répartie sans difficulté entre ces groupes. La figure 1.13 retrace la figure 1.5 pour les astéroïdes dont le diamètre est connu (catégorie I ou II). En marquant les objets dont les albédos sont inférieurs à 0.125, il apparaît une nette variation des valeurs des albédos avec le demi-grand axe. On peut également remarquer sur la figure des légères variations d’albédo en fonction de l’excentricité ou de l’inclinaison. Plutôt que de chercher à estimer les distributions des albédos au sein des différents groupes orbitaux, on va simplement considérer deux zones définies uniquement à partir des demi-grands axes. La première zone comprend l’ensemble des astéroïdes situés en dessous de 2.3 UA, la deuxième zone englobe les astéroïdes situés entre 3.03 UA et 6 UA. On note que la limite de 6 UA est choisie de manière arbitraire, alors que les valeurs de 2.3 UA et 3.03 UA correspondent aux frontières définies par Zellner *et al.* (1985). La figure 1.14 représente les distributions des albédos au sein des deux zones pour les astéroïdes dont les albédos sont connus. Le pic au niveau de l’albédo égal à 0.2 que l’on observe sur le pre-

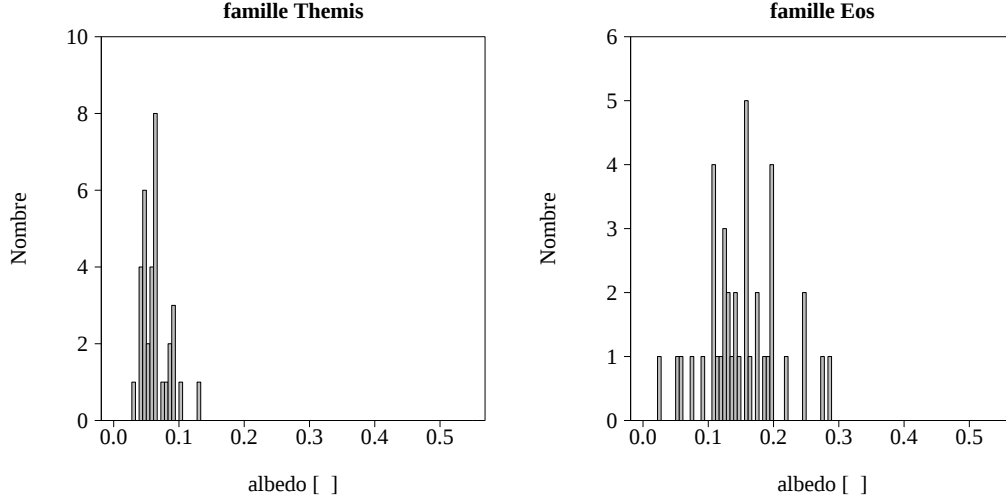


FIGURE 1.12 – À gauche, histogramme des albédos de la famille Themis. À droite, histogramme de la famille Eos.

mier histogramme indique que la majorité des albédos connus de la première zone provient d’une estimation basée sur la taxonomie S. La distribution des albédos au sein de la deuxième zone est très similaire à la distribution au sein de la classe C de la figure 1.11. Par conséquent on attribue aux astéroïdes des deux zones, n’ayant pas encore de diamètres, les diamètres des classes C et S. On considère que la qualité de l’estimation est à priori la même que pour les diamètres attribués en fonction des taxonomies. Comme pour les taxonomies, il existe un danger de sous-estimer ou de surestimer dans certains cas le diamètre par un facteur 2. Contrairement aux taxonomies, l’attribution des albédos en fonction des zones n’est basée sur aucune mesure et par conséquent les cas où le diamètre est sous-estimé ou surestimé pourraient être plus nombreux.

Astéroïdes restants

Pour terminer la compilation de diamètres, on attribue un albédo moyen de 0.125 à tous les astéroïdes restant encore sans diamètre ainsi qu’à tous les astéroïdes dont l’estimation est de qualité III. En estimant que la majorité des astéroïdes possède des albédos dont les valeurs varient entre 0.025 et 0.5, on a

$$\sqrt{\frac{0.025}{0.125}} \leq \frac{D_e}{D_r} \leq \sqrt{\frac{0.5}{0.125}} \quad \equiv \quad 0.4 \leq \frac{D_e}{D_r} \leq 2$$

L’erreur des estimations de qualité III correspond donc à une surestimation ou à une sous-estimation du diamètre réel par environ un facteur 2. Au sein des déterminations SIMPS, environ 2% des albédos se situent à l’extérieur de la fourchette 0.025 - 0.5. Les valeurs minimales et maximales des albédos étant respectivement 0.01 et 0.7, on a

$$0.4D_e \leq D_r \leq 3.5D_e$$

Pour simplifier, on retient que certains diamètres peuvent être sous-estimés ou surestimés d’un facteur 3.

1.4.4 Masses astrophysiques

On vient d’attribuer un diamètre à l’ensemble des 219017 astéroïdes. Les diamètres des astéroïdes de taille importante sont assez bien déterminés. En ne considérant que les objets dont

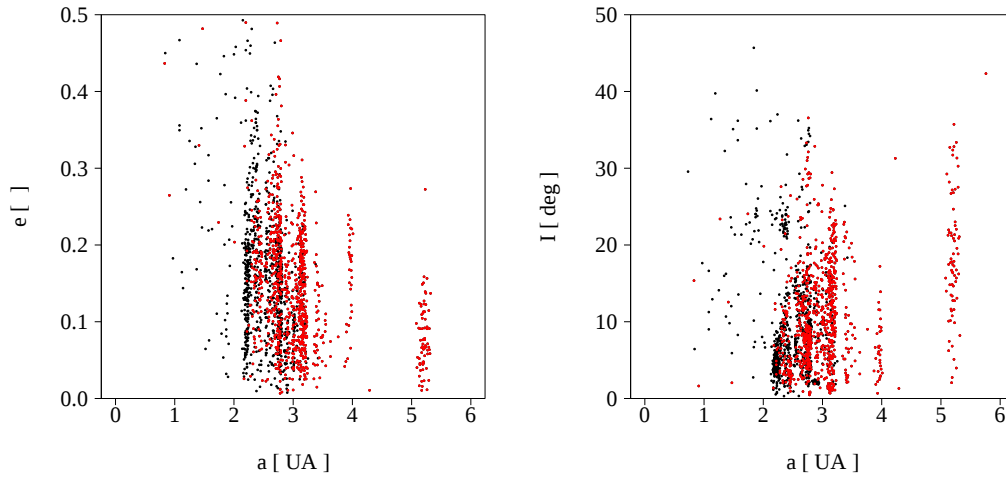


FIGURE 1.13 – Distributions en fonction des éléments orbitaux des astéroïdes dont les diamètres sont connus. En rouge, les objets dont les albédos sont inférieurs à la valeur de 0.125.

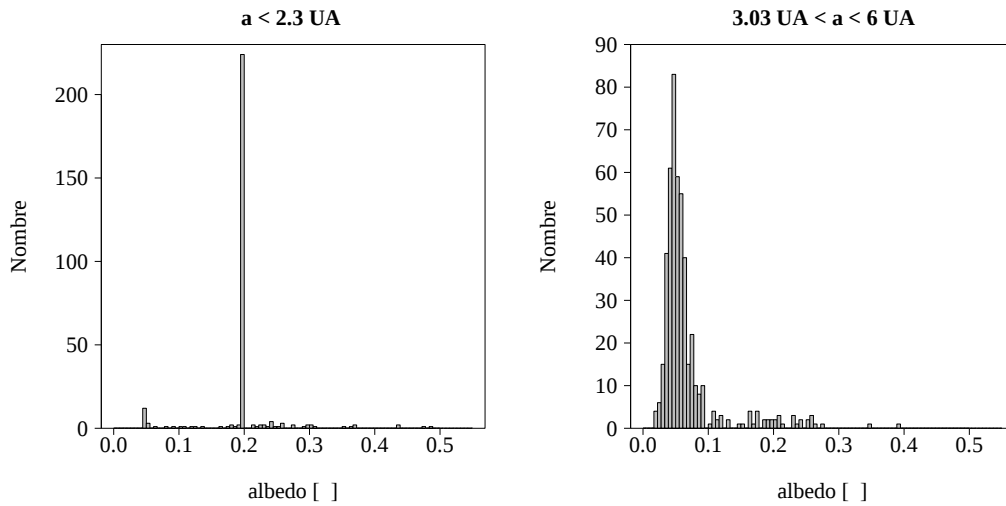


FIGURE 1.14 – A gauche, histogramme des albédos des astéroïdes dont les demi-grands axes sont inférieurs à 2.3 UA. A droite, histogramme des albédos pour les astéroïdes situés au delà de 3.03 UA.

le demi-grand axe est inférieur à 6 UA, le diamètre de qualité III le plus grand vaut à peine 60 km. L'ensemble des 353 astéroïdes dont les diamètres sont supérieurs à 60 km est déterminé avec une incertitude meilleure que 35%. Sur les 353 objets, il y en a même 220 qui sont déterminés à mieux de 10%. Les masses astrophysiques correspondantes sont beaucoup plus incertaines car elles sont proportionnelles au cube du diamètre et à une densité inconnue. La figure 1.15 représente les densités des masses de l'annexe 9.1 pour les objets qui possèdent un diamètre de catégorie I. Les barres d'erreur prennent en compte l'incertitude sur la masse donnée pour chaque astéroïde par l'annexe ainsi qu'une incertitude de 10% sur le diamètre et donc de 30% sur le volume. Les densités évoluent entre approximativement 1 g cm^{-3} et 4 g cm^{-3} ce qui correspond environ à l'intervalle que l'on retrouve dans la compilation de Britt *et al.* (2002). On note sur la figure que les barres d'incertitudes sont larges malgré le fait que l'on ait utilisé les meilleures données

disponibles. La densité de l'astéroïde Antiope est estimée avec un diamètre de 120 km provenant de SIMPS. L'astéroïde est en réalité un système binaire dont les deux composantes sont de tailles identiques et égales à environ 80 km de diamètre. L'erreur que l'on commet sur le volume de cet objet est donc certainement supérieure à 10%. En pratique il est impossible, sans procéder au cas par cas, d'attribuer de manière totalement sûre à chaque astéroïde un diamètre et une incertitude. En estimant les diamètres, on a préféré se baser sur un nombre limité de sources de sorte à pouvoir maîtriser simplement les incertitudes. Comme on l'a déjà signalé, il existe dans la littérature des dizaines de déterminations individuelles supplémentaires.

Sur la figure 1.15 on observe que les objets de classe S ont une tendance à être plus dense que les objets de la classe C. Les incertitudes sur les densités sont néanmoins tellement importantes que l'on va préférer adopter une seule densité. La moyenne des densités de la figure 1.15 vaut 2.5 g cm^{-3} . Cette valeur est légèrement supérieure aux densités moyennes de 1.5 g cm^{-3} et 2 g cm^{-3} obtenues par Fienga *et al.* (2009) pour les taxonomies C et S en ajustant INPOP08 aux observations. On attribue à chacun des 219017 astéroïdes une masse à partir du diamètre et d'une densité de 2.5 g cm^{-3} :

$$M = \frac{d\pi}{6} D^3$$

où M correspond à la masse et d à la densité. On appellera par la suite la masse attribuée, la masse standard. Pour les astéroïdes Ceres, Pallas et Vesta on adopte pour masses standards les valeurs ajustées dans INPOP08. Comme le montre l'annexe 9.1, les masses de Ceres, Pallas et Vesta sont déterminées à 1% près. Les incertitudes des autres masses dépendent des incertitudes sur les diamètres. En supposant que les densités varient entre 1 g cm^{-3} et 4 g cm^{-3} , la densité moyenne de 2.5 g cm^{-3} peut être erronée d'un facteur approximativement 2. On note avec d_e la densité estimée et avec d_r la densité réelle c'est à dire la densité qui avec un diamètre effectif correct conduit à la masse d'un astéroïde. On a donc

$$0.5d_e \leq d_r \leq 2d_e$$

Pour un diamètre de la catégorie I, cette incertitude est largement supérieure à l'incertitude sur le diamètre. Avec M_e , M_r les masses standards et les masses réelles, on a pour les objets de catégorie I

$$0.5M_e \leq M_r \leq 2M_e$$

On a vu que pour les diamètres de catégorie II on avait

$$0.7D_e \leq D_r \leq 1.4D_e$$

En passant au cube et en combinant avec l'incertitude sur la densité on obtient

$$0.2M_e \leq M_r \leq 5M_e$$

Dans une optique plus pessimiste les diamètres de catégorie II peuvent être erronés même d'un facteur 2. L'erreur sur les masses atteint alors un facteur 16 :

$$0.06M_e \leq M_r \leq 16M_e$$

Le même raisonnement s'applique sur les objets de catégorie III où les incertitudes sur les masses sont en moyenne de l'ordre d'un facteur 16 et dans des cas particuliers de l'ordre d'un facteur 50. Les incertitudes moyennes et maximales pour les trois catégories sont résumées dans le tableau 1.3. On rappelle que les proportions des cas où les incertitudes sont à leurs valeurs maximales sont de 10% pour la catégorie II et de 3% pour la catégorie III.

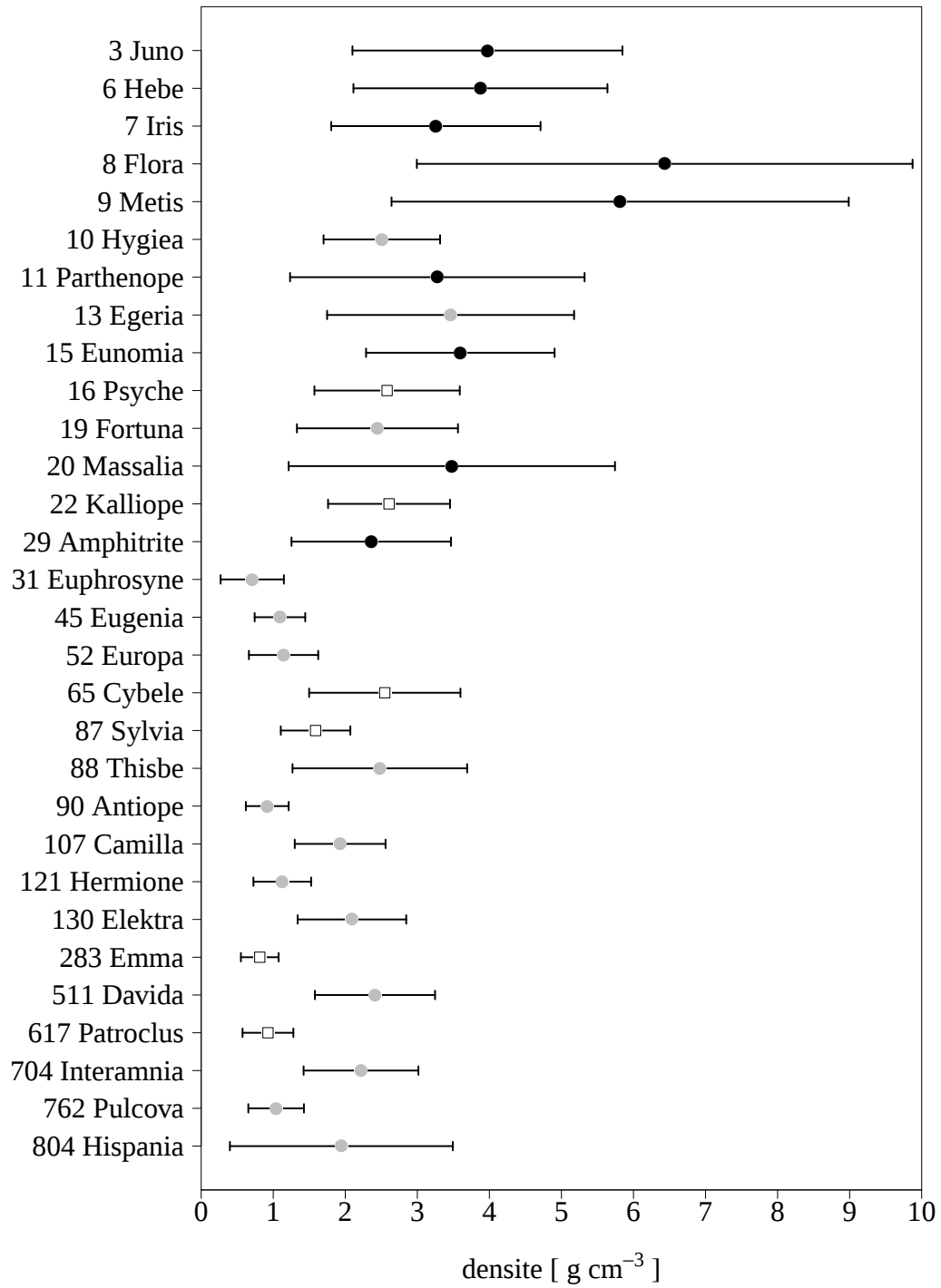


FIGURE 1.15 – Densités calculées à partir des masses de l’annexe 9.1 pour les objets dont le diamètre est connu à mieux de 10%. En gris et en noir, les membres des classes C et S respectivement. Les carrés vides correspondent aux objets sans données taxonomiques. Les barres d’erreur sont données en tenant compte des incertitudes sur les volumes ainsi que sur les masses.

TABLE 1.3 – Incertitudes sur les masses et diamètres. Pour les incertitudes proches de 100% on donne le facteur qui, multiplié par la valeur du diamètre ou de la masse estimée, détermine la borne supérieure de la valeur réelle. L'inverse du facteur détermine la borne inférieure.

	catégorie I	catégorie II	catégorie III
nombre d'objets	228	69832	148957
incertitude sur le diamètre	10%	35%	×2
incertitude maximale	10%	×2	×3
incertitude sur la masse	×2	×5	×16
incertitude maximale	×2	×16	×50

Les masses standards, les diamètres ainsi que d'autres données comme les classes taxonomiques ou les éléments orbitaux des astéroïdes ont été rassemblés dans un fichier appelé Astdata décrit dans l'annexe 9.2. Dans l'annexe, les différentes données sont rassemblées sous forme de tableau pour tous les astéroïdes mentionnés à un moment ou un autre de la thèse.

Un facteur qui n'a pas été pris en compte dans l'estimation des erreurs est l'incertitude de la magnitude absolue fournie par la catalogue Astorb. Parker *et al.* (2008) comparent les magnitudes absolues de Astorb et les magnitudes absolues recalculées à partir du relevé SDSS. Les auteurs mettent en évidence un décalage systématique de l'ordre de 0.3 impliquant des magnitudes de Astorb systématiquement plus faibles. Avec la formule (1.1), on déduit que nos diamètres seraient donc sur-estimés d'environ 15%. A l'erreur systématique s'ajoute une erreur aléatoire de 0.2 provenant des variations de magnitude avec la rotation des corps. Dans certains cas exceptionnels cette erreur peut dépasser la valeur 1. L'incertitude sur les magnitudes absolues introduit donc une erreur d'environ 30% sur les diamètres. Ceci ne modifie pas vraiment les incertitudes du tableau (1.3). En effet les astéroïdes de catégorie I ont leur incertitude estimée indépendamment des magnitudes absolues par comparaison avec des mesures d'occultations. Quant aux incertitudes des catégories II et III, elles sont de toute manière plus élevées que 30%.

1.5 Conclusion

En limitant notre étude aux objets dont les orbites sont bien déterminées, on se retrouve actuellement avec 219017 astéroïdes à considérer. A partir du catalogue Astorb, on a calculé pour l'ensemble de ces astéroïdes leurs positions et vitesses à l'époque J2000 dans le repère de INPOP. On a également attribué à chacun des objets une masse selon les connaissances actuelles et les données à notre disposition. L'ensemble des astéroïdes est ainsi prêt pour être exploité et étudié avec INPOP. Dès à présent, il apparaît que la principale difficulté pour étudier les effets des astéroïdes sur les mouvements planétaires sera la mauvaise connaissance des masses des astéroïdes. En effet les masses que l'on a estimées peuvent différer des masses réelles par un facteur 2 pour les 228 astéroïdes possédant des mesures de diamètres. La différence peut monter jusqu'à un facteur 50 pour la majorité des objets.

Chapitre 2

Expressions analytiques des perturbations

Les données les plus précises disponibles pour les éphémérides sont des mesures de distances mutuelles entre planètes. Ainsi dans ce chapitre on va étudier comment les perturbations des différents éléments orbitaux de deux planètes se traduisent en terme d'une perturbation de la distance mutuelle. En plus de considérer les perturbations induites par des astéroïdes individuels, on va également considérer l'effet induit par un groupe d'astéroïdes dont les éléments orbitaux sont similaires et dont la distribution en longitude moyenne est homogène. Un tel groupe d'objet induit une perturbation dont la description est relativement simple et qui est identique à une perturbation induite par anneau solide. Les méthodes qui seront mises en oeuvre dans ce chapitre comme le développement de la fonction perturbatrice ou l'approximation des équations du mouvement au premier ordre en masse sont classiques. Ces approches ont été progressivement introduites depuis les travaux de Lagrange en 1781. On renvoie le lecteur à Laskar (1985) pour un bref historique et l'application des méthodes analytiques au développement d'une théorie planétaire générale. L'objectif est ici plus modeste, il s'agit de poser un cadre analytique simple au problème des astéroïdes et à la perturbation des distances mutuelles entre les planètes. Ce cadre permettra par la suite de mieux appréhender la modélisation des astéroïdes dans INPOP.

2.1 Perturbation d'une planète par un astéroïde

Le développement des équations de mouvement au premier ordre en masses permet de dériver les équations régissant la perturbation induite par un astéroïde sur une planète. En s'appuyant de plus sur un développement des équations en excentricités et inclinaisons, il est possible de dériver une expression analytique approchée de la perturbation.

2.1.1 Équations de Lagrange

Dans les sections suivantes, on utilise les notations de Laskar et Robutel (1995). Considérons N planètes notées $P_1, \dots, P_N$ en rotation autour du Soleil noté P_0 . Les équations qui régissent l'évolution du système se dérivent de la force Newtonienne et de la conservation du centre de masse. En notant par m_i et $\mathbf{r}_i$ respectivement les masses et les positions héliocentriques des N corps, on a

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{grad}_{\mathbf{r}_i} \left(\frac{G(m_0 + m_i)}{r_i} + R_i \right) \quad (2.1)$$

où i est un entier compris entre 1 et N . Les paramètres G et m_0 correspondent respectivement à la constante gravitationnelle et à la masse du Soleil. Le mouvement est donc décrit par un

système de $3N$ équations du deuxième ordre. La fonction R_i est en général appelée la fonction de perturbation. Elle s'écrit

$$R_i = \sum_{j \neq i} Gm_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (2.2)$$

où $\Delta_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ correspond à la distance mutuelle entre les corps i et j . Les équations (2.1) peuvent être réécrites comme des perturbations de N problèmes képlériens, qui dans le cas non perturbé évoluent selon

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -\frac{G(m_0 + m_i)}{r_i^3} \mathbf{r}_i$$

On note pour un corps quelconque ses éléments osculateurs héliocentriques par $(a, \lambda, e, \varpi, I, \Omega)$ et son moyen mouvement par n . Le moyen mouvement est donc donné par

$$n = \sqrt{\frac{G(m_0 + m_i)}{a^3}}$$

Pour rester cohérent avec les notations précédentes, ces variables devraient être indexées par i . L'indice est néanmoins omis afin de faciliter la lecture. Par la suite la position héliocentrique $\mathbf{r}_i$ sera également notée $\mathbf{r}$. L'évolution des éléments orbitaux dans le cas perturbé est donnée pour chacun des N corps par les équations de Lagrange (Brouwer et Clemence, 1961),

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \\ \frac{d\lambda}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan I/2}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan I/2}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I} \\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{\tan I/2}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial R}{\partial I} \end{aligned} \quad (2.3)$$

où R correspond à la fonction de perturbation donnée par (2.2).

2.1.2 Perturbation à l'ordre 1 en masses

On s'intéresse ici à la perturbation induite par un corps supplémentaire P' de masse m' rajouté au système considéré précédemment. La position héliocentrique de ce nouveau corps est notée par $\mathbf{r}'$ et les éléments orbitaux associés par $(a', \lambda', e', \varpi', I', \Omega')$. On définit de manière générale la perturbation ΔX d'une variable X comme la différence

$$\Delta X = X^* - X \quad (2.4)$$

où X^* correspond à l'évolution de la variable dans le cas perturbé et X correspond à l'évolution dans le cas non perturbé. Pour la fonction perturbatrice R , on vérifie que l'on a

$$\Delta R = R^* - R = Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3} \right) \quad \text{où} \quad \Delta = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

Avec les équations (2.3), on peut écrire la dérivée de la perturbation induite par P' sur le demi-grand axe d'une planète :

$$\frac{d\Delta a}{dt} = \frac{da^*}{dt} - \frac{da}{dt} = \frac{2}{n^*a^*} \frac{\partial R^*}{\partial \lambda} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda}$$

On adopte la masse du Soleil comme unité de masse. Avec les notations des équations (2.1), on a donc $m_0 = 1$ et $m_i \ll 1$ pour le reste des corps du Système solaire.

A partir de maintenant, on considère le développement du problème au premier ordre en masses des corps $P_1, \dots, P_n$ et P' . Avec (2.2), on remarque que les fonctions de perturbation sont au moins d'ordre 1 en masses. Par conséquent, dans la relation précédente n^* , a^* , n et a peuvent être remplacés par leurs développements à l'ordre 0. On peut donc écrire

$$\frac{d\Delta a}{dt} = \frac{2}{n_{\text{kep}} a_{\text{kep}}} \frac{\partial \Delta R}{\partial \lambda}$$

où les indices $_{\text{kep}}$ indiquent des variables qui correspondent au cas d'ordre 0 en masses, donc au cas keplérien. En ne gardant dans l'expression de ΔR que l'ordre 1 en masses, on obtient

$$\Delta R = Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{r}_{\text{kep}} \cdot \mathbf{r}'_{\text{kep}}}{r_{\text{kep}}^3} \right) \quad \text{et} \quad \Delta = |\mathbf{r}_{\text{kep}} - \mathbf{r}'_{\text{kep}}| \quad (2.5)$$

Le raisonnement que l'on vient d'appliquer pour Δa est appliqué à l'ensemble des équations (2.3). On dérive ainsi l'expression des perturbations induites par P' sur l'ensemble des éléments orbitaux d'un corps quelconque :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta a}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial \Delta R}{\partial \lambda} \\ \frac{d\Delta \lambda}{dt} &= \Delta n - \frac{2}{na} \frac{\partial \Delta R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2 e} \frac{\partial \Delta R}{\partial e} + \frac{\tan I/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Delta R}{\partial I} \\ \frac{d\Delta e}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2 e} \frac{\partial \Delta R}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \Delta R}{\partial \varpi} \\ \frac{d\Delta \varpi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \Delta R}{\partial e} + \frac{\tan I/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Delta R}{\partial I} \\ \frac{d\Delta I}{dt} &= -\frac{\tan I/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial \Delta R}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Delta R}{\partial \varpi} \right) - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \Delta R}{\partial \Omega} \\ \frac{d\Delta \Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \Delta R}{\partial I} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les éléments orbitaux qui interviennent dans les facteurs multiplicatifs ainsi que dans les dérivées de ΔR , correspondent au cas keplérien et devraient donc être notés avec l'indice $_{\text{kep}}$. Dans les équations (2.6), l'indice est omis. Par souci de clarté, il sera en général omis par la suite. Les équations font intervenir la perturbation $\Delta n = n^* - n$. Avec la définition donnée pour le moyen mouvement, on vérifie qu'au premier ordre en masses on a

$$\Delta n = -\frac{3n_{\text{kep}}}{2a_{\text{kep}}} \Delta a \quad (2.7)$$

Les équations (2.6) semblent donner l'évolution des éléments orbitaux d'un objet dans le problème restreint à 3 corps où une masse, en orbite autour du Soleil, est perturbée par un troisième corps en orbite keplérienne fixe. Les équations sont néanmoins différentes car l'évolution de la perturbation en longitude moyenne fait intervenir Δn . Dans le problème restreint à 3 corps, l'évolution de la longitude moyenne ferait intervenir n .

2.1.3 Développement de la fonction perturbatrice

Le développement de la fonction de perturbation en excentricités et inclinaisons permet d'obtenir explicitement les expressions des perturbations en fonction des éléments orbitaux du corps perturbé et du corps perturbateur. Ce développement est donné explicitement jusqu'à l'ordre 4 par Brouwer et Clemence (1961). L'expression est assez volumineuse, ainsi pour éviter des erreurs il est souhaitable de calculer les dérivées intervenant dans (2.6) par ordinateur. Plutôt que de prendre l'expression de Brouwer et Clemence (1961), on préfère ici la dériver à partir de Laskar et Robutel (1995). Le développement pourra ainsi être obtenu à n'importe quel ordre en excentricités et inclinaisons. Un autre avantage est que l'expression sera obtenue directement dans le manipulateur algébrique TRIP (Gastineau et Laskar, 2009) et pourra par la suite être traitée par le même logiciel pour obtenir les expressions des perturbations.

On suit ici les calculs de Laskar et Robutel (1995). On va supposer que l'orbite du corps perturbateur est extérieure à celle du corps perturbé, ainsi on a $a/a' < 1$. On rappelle qu'avec les notations utilisées jusqu'à maintenant, les éléments osculateurs et les variables en général du corps perturbé sont notées sans prime alors que pour le perturbateur elles sont notées avec un prime.

La fonction de perturbation est donnée par (2.5). On sépare l'expression en partie directe R_D et indirecte R_E . En notant $\alpha = a/a'$ on a

$$\Delta R = \frac{Gm'}{a'} (R_D + \alpha R_E) \quad \text{avec} \quad R_D = \frac{a'}{\Delta} \quad \text{et} \quad R_E = -\frac{a'^2}{a} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r'^3}$$

On s'intéresse d'abord au développement de la partie directe. En notant S l'angle entre $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$, on a

$$\Delta^2 = \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2rr' \cos S$$

Avec $\rho = r/r'$, on vérifie que

$$\frac{a'}{\Delta} = \frac{a'}{r'} (1 + \rho^2 - 2\rho \cos S)^{-1/2} = \frac{a'}{r'} (A + V)^{-1/2}$$

où

$$\begin{aligned} A &= 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\lambda - \lambda') \\ V &= \alpha^2 \left(\left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^2 - 1 \right) + 2\alpha \left(\cos(\lambda - \lambda') - \frac{\rho}{\alpha} \cos S \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dans le cas où les deux orbites $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ sont circulaires et coplanaires, V est nul. Ainsi pour des inclinaisons et excentricités suffisamment faibles, $\frac{a'}{\Delta}$ peut être développé en puissances de V . L'expression de V contient des termes dont les degrés les plus bas en excentricités et inclinaisons sont respectivement 1 et 2 (voir Laskar et Robutel, 1995). Le développement peut donc être tronqué en fonction du degré final que l'on souhaite pour l'expression de la fonction de perturbation. Par exemple pour le degré 2, on peut écrire

$$R_D = \left(\frac{a'}{r'} A^{-1/2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \frac{a'}{r'} A^{-3/2} \right) V + \left(\frac{3}{8} \frac{a'}{r'} A^{-5/2} \right) V^2 \quad (2.9)$$

Les termes en $A^{-1/2}$, $A^{-3/2}$, etc. peuvent être développés en séries de Fourier. On a

$$A^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_s^{(k)}(\alpha) e^{ik(\lambda - \lambda')} \quad (2.10)$$

où les $b_s^{(k)}$ sont des fonctions de α appelées coefficients de Laplace. Ces coefficients possèdent plusieurs propriétés particulières discutées dans Laskar et Robutel (1995). Ainsi on a

$$b_s^{(-k)} = b_s^{(k)}$$

La dérivée d'un coefficient de Laplace par rapport à α est donnée par

$$\frac{db_s^{(k)}}{d\alpha} = s \left(b_{s+1}^{(k-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(k)} + b_{s+1}^{(k+1)} \right) \quad (2.11)$$

Également les coefficients de Laplace sont liés par les deux relations de récurrence

$$\begin{aligned} b_{s+1}^{(k)} &= \frac{s+k}{s} \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} b_s^{(k)} - \frac{2(k-s+1)}{s} \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2} b_s^{(k+1)} \\ b_{s+1}^{(k+1)} &= \frac{k}{k-s} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) b_{s+1}^{(k)} - \frac{k+s}{k-s} b_{s+1}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ces relations permettent pour un k donné d'exprimer n'importe quel coefficient $b_s^{(k)}$ uniquement en fonction de deux coefficients de référence, par exemple $b_{3/2}^{(0)}$ et $b_{3/2}^{(1)}$. Enfin, on rappelle que le développement d'un coefficient de Laplace $b_s^{(k)}$ en puissances de α est au moins de degré k en α . Cette propriété permet en pratique de tronquer les sommes (2.10) à un ordre en α suffisamment élevé et de travailler ainsi avec un nombre de termes fini.

A l'exception de la fonction $\cos S$, le développement de l'expression (2.9) fait intervenir uniquement les développements en excentricités et longitudes moyennes de $\frac{a}{r}$, $\frac{r}{a}$ et de leurs analogues primés. Ces développements sont classiques et on renvoie le lecteur à Brouwer et Clemence (1961) pour plus de détails. Le développement de $\cos S$ s'obtient avec la relation suivante dérivée par Laskar et Robutel (1995) :

$$\begin{aligned} \cos S &= \Re e \left\{ e^{i(w+w')} \left(\sin(I/2) \cos(I'/2) e^{-i\Omega} - \sin(I'/2) \cos(I/2) e^{-i\Omega'} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + e^{i(w-w')} \left(\cos I/2 \cos(I'/2) + \sin(I'/2) \sin(I/2) e^{i(\Omega'-\Omega)} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

où les angles w et w' sont les longitudes vraies du corps perturbé et du corps perturbateur. Les développements de w et w' en excentricités et longitudes moyennes sont décrits dans Brouwer et Clemence (1961). En codant les expressions (2.13) et (2.9) dans TRIP on est en mesure de dériver le développement en excentricités et inclinaisons de la partie directe. A ce stade l'expression de la partie indirecte de la fonction de perturbation s'obtient immédiatement. En effet on a

$$R_E = - \left(\frac{r}{a} \right) \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \cos S$$

où tous les termes ont déjà été obtenus lors du calcul de la partie directe.

Le développement de la fonction perturbatrice a été codé dans TRIP. Pour vérifier notre implémentation, on calcule le développement à l'ordre 2 des parties directes et indirectes. Pour la partie indirecte on retrouve directement l'expression de Brouwer et Clemence (1961),

$$\begin{aligned} R_E &= (-1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e'^2 + s^2 + s'^2) \cos(\lambda - \lambda') - \frac{1}{2}e \cos(2\lambda - \lambda' - \varpi) \\ &\quad + \frac{3}{2}e \cos(\lambda' - \varpi) - 2e' \cos(\lambda - 2\lambda' + \varpi') - \frac{3}{8}e^2 \cos(3\lambda - \lambda' - 2\varpi) \\ &\quad - \frac{1}{8}e^2 \cos(\lambda + \lambda' - 2\varpi) - \frac{1}{8}e'^2 \cos(\lambda + \lambda' - 2\varpi') - \frac{27}{8}e'^2 \cos(\lambda - 3\lambda' + 2\varpi') \\ &\quad - ee' \cos(2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi') + 3ee' \cos(2\lambda' - \varpi - \varpi') - s^2 \cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega) \\ &\quad - s'^2 \cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega') + 2ss' \cos(\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega') - 2ss' \cos(\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega') \end{aligned} \quad (2.14)$$

où s et s' correspondent respectivement à $\sin(I/2)$ et $\sin(I'/2)$. L'expression de la partie directe s'écrit,

$$\begin{aligned}
R_D = & \left(C_1^{(k)} + (e^2 + e'^2)C_2^{(k)} + (s^2 + s'^2)C_3^{(k)} \right) \cos(k\lambda - k\lambda') \\
& + eC_4^{(k)} \cos((1-k)\lambda + k\lambda' - \varpi) + e'C_5^{(k)} \cos((1-k)\lambda + k\lambda' - \varpi') \\
& + ee'C_6^{(k)} \cos(k\lambda - k\lambda' - \varpi' + \varpi) + ee'C_7^{(k)} \cos((2-k)\lambda + k\lambda' - \varpi' - \varpi) \\
& + e^2C_8^{(k)} \cos((2-k)\lambda + k\lambda' - 2\varpi) + e'^2C_9^{(k)} \cos((2-k)\lambda + k\lambda' - 2\varpi') \\
& + ss'C_{10}^{(k)} \cos(k\lambda - k\lambda' + \Omega - \Omega') + ss'C_{11}^{(k)} \cos((2-k)\lambda + k\lambda' - \Omega - \Omega') \\
& + s^2C_{12}^{(k)} \cos((2-k)\lambda + k\lambda' - 2\Omega) + s'^2C_{12}^{(k)} \cos((2-k)\lambda + k\lambda' - 2\Omega')
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Le développement (2.10) fait que les coefficients $C_i^{(k)}$ dépendent des coefficients de Laplace $b_s^{(k)}$. Les expressions des coefficients obtenues avec notre implémentation TRIP sont en apparence différentes de celles données par Brouwer et Clemence (1961). Avec les relations de récurrence (2.12), il est néanmoins possible d'exprimer les $C_i^{(k)}$ obtenus avec TRIP et ceux de Brouwer et Clemence (1961) sous une forme standard faisant intervenir uniquement $b_{3/2}^{(k)}$ et $b_{3/2}^{(k)}$. On vérifie alors que les expressions sont en réalité équivalentes ce qui valide notre implémentation du développement. L'annexe 9.3 donne différentes expressions possibles des coefficients $C_i^{(k)}$.

Selon Duriez (1989), l'expression générale du développement de la fonction de perturbation à un ordre quelconque se présente comme une série réelle de termes en

$$\begin{aligned}
C(\alpha)e^{\eta+\bar{\eta}}s^{\nu+\bar{\nu}}(e')^{\eta'+\bar{\eta}'}(s')^{\nu'+\bar{\nu}'} \\
\times \cos(k\lambda - k'\lambda' + (\eta - \bar{\eta})\varpi + (\eta' - \bar{\eta}')\varpi' + (\nu - \bar{\nu})\Omega + (\nu' - \bar{\nu}')\Omega')
\end{aligned} \tag{2.16}$$

où $C(\alpha)$ est un coefficient qui dépend uniquement de α , les paramètres $(\eta, \bar{\eta}, \nu, \bar{\nu})$ sont des entiers positifs ou nuls et k, k' sont des entiers relatifs.

2.1.4 Perturbations des éléments orbitaux

Avec le développement de la fonction perturbatrice, on est en mesure de dériver les expressions des perturbations induites par un astéroïde sur les éléments orbitaux d'une planète. D'après (2.6), on a

$$\frac{d\Delta a}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \Delta R}{\partial \lambda}$$

Pour un développement au premier ordre en masses, les éléments orbitaux du corps perturbé et du corps perturbateur dont dépendent les équations (2.6) sont pris dans le cas képlérien. Les paramètres $a, n, e, \varpi, I, \Omega$ et leurs analogues primés sont donc constants. Les longitudes moyennes varient linéairement avec le temps. En notant avec l'indice $_0$ la valeur à l'instant initial, on a $\lambda = nt + \lambda_0$ et $\lambda' = n't + \lambda'_0$. En supposant la perturbation nulle à l'instant initial, on a

$$\Delta a = \int_0^t \frac{d\Delta a}{dt}(\tau) d\tau$$

Avec l'expression générale de la fonction perturbatrice (2.16), on déduit que la perturbation induite sur le demi-grand axe est la somme d'une fonction quasi-périodique et d'un terme constant. Dans le cas résonant, la perturbation contient en plus un terme linéairement croissant. En effet en cas de résonance, la fonction perturbatrice contient un terme où

$$kn - k'n' = 0$$

TABLE 2.1 – Elements orbitaux des planètes intérieures dans le repère Jup2000.

	a [UA]	λ [deg]	e []	ϖ [deg]	I [deg]	Ω [deg]
Mercure	0.387	-143.975	0.206	41.229	6.289	2.658
Venus	0.723	145.706	0.007	95.591	2.263	26.943
Terre	1.000	64.174	0.017	66.629	1.305	-115.800
Mars	1.524	-40.817	0.093	-60.173	1.443	-31.303

TABLE 2.2 – Elements orbitaux de Ceres, Polana et Quaoar dans le repère Jup2000.

	a [UA]	λ [deg]	e []	ϖ [deg]	I [deg]	Ω [deg]
1 Ceres	2.766	124.346	0.078	118.170	9.368	41.505
142 Polana	2.418	180.774	0.137	-172.721	3.528	-108.895
50000 Quaoar	43.132	-144.558	0.040	-43.497	8.078	162.021

Avec p un entier, on peut écrire $k' = k + p$ et la résonance se traduit par

$$\frac{n'}{n} = \frac{k}{k + p}$$

On rappelle que la règle de d'Alembert impose que les termes résonants dans la fonction de perturbation soient au moins d'ordre p en excentricité/inclinaison (Duriez, 1989).

En notant par σ un élément osculateur quelconque, la perturbation $\Delta\sigma$ s'obtient à partir de (2.6) par

$$\Delta\sigma = \int_0^t \frac{d\Delta\sigma}{dt}(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

On vérifie que pour l'ensemble des éléments osculateurs à part le demi-grand axe, $\Delta\sigma$ est une somme d'une fonction quasi-périodique, d'un terme linéaire et d'une constante. Dans le cas résonant $\Delta\lambda$ contient en plus un terme quadratique en temps provenant de l'intégration de Δn (proportionnel à Δa).

Pour illustrer cette discussion, on va calculer analytiquement et numériquement les effets de quelques astéroïdes induits sur les orbites de Mars et de la Terre. Le calcul analytique se base sur l'intégration des équations (2.6) avec la fonction perturbatrice développée à l'ordre 8 en excentricités et inclinaisons. On se place dans un repère défini par l'écliptique de Jupiter. L'axe des abscisses est donné par la position héliocentrique de Jupiter à l'époque J2000. Le repère est proche du plan invariant du Système solaire et dans la suite il sera appelé Jup2000. Pour tous les astéroïdes on adopte les masses standards définies dans le chapitre précédent. Le tableau 2.1 rassemble les éléments orbitaux des planètes intérieures. Les paramètres de quelques astéroïdes types sont donnés dans le tableau 2.2.

La figure 2.1 compare la perturbation induite par Ceres sur Mars prévue analytiquement avec son analogue obtenu numériquement en intégrant dans INPOP le Système solaire avec et sans Ceres. La prévision analytique est en accord avec le numérique sur l'ensemble de l'intervalle de temps qui s'étend à ± 50 ans depuis J2000.

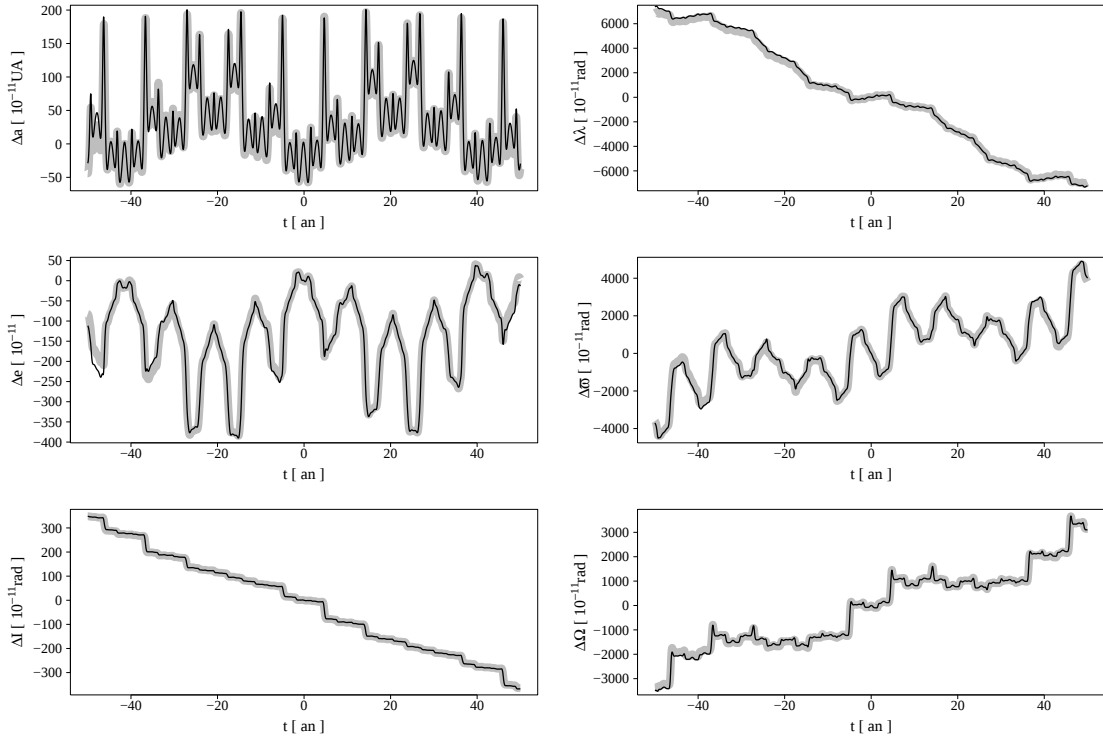


FIGURE 2.1 – Effet de Ceres sur les éléments osculateurs de Mars. En gris, perturbations obtenues numériquement. En noir, perturbations obtenues analytiquement. L'abscisse est donnée en années avec l'instant initial en J2000.

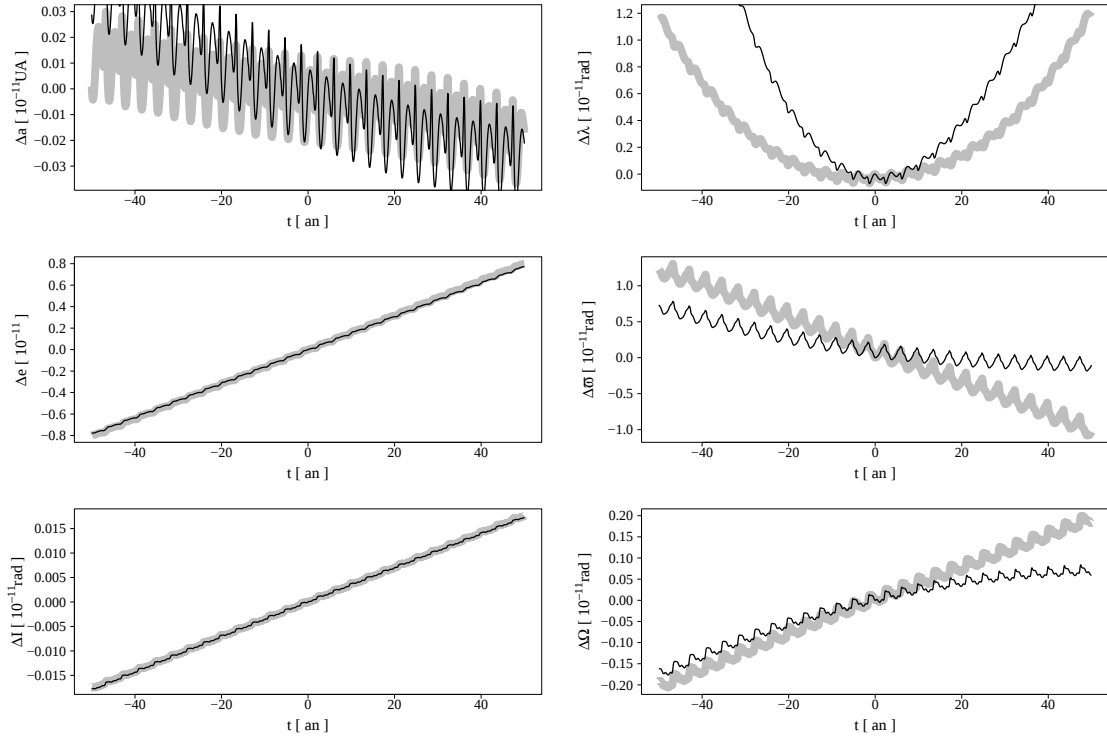


FIGURE 2.2 – Effet de Polana sur les éléments osculateurs de Mars. En gris, perturbations obtenues numériquement. En noir, perturbations obtenues analytiquement.

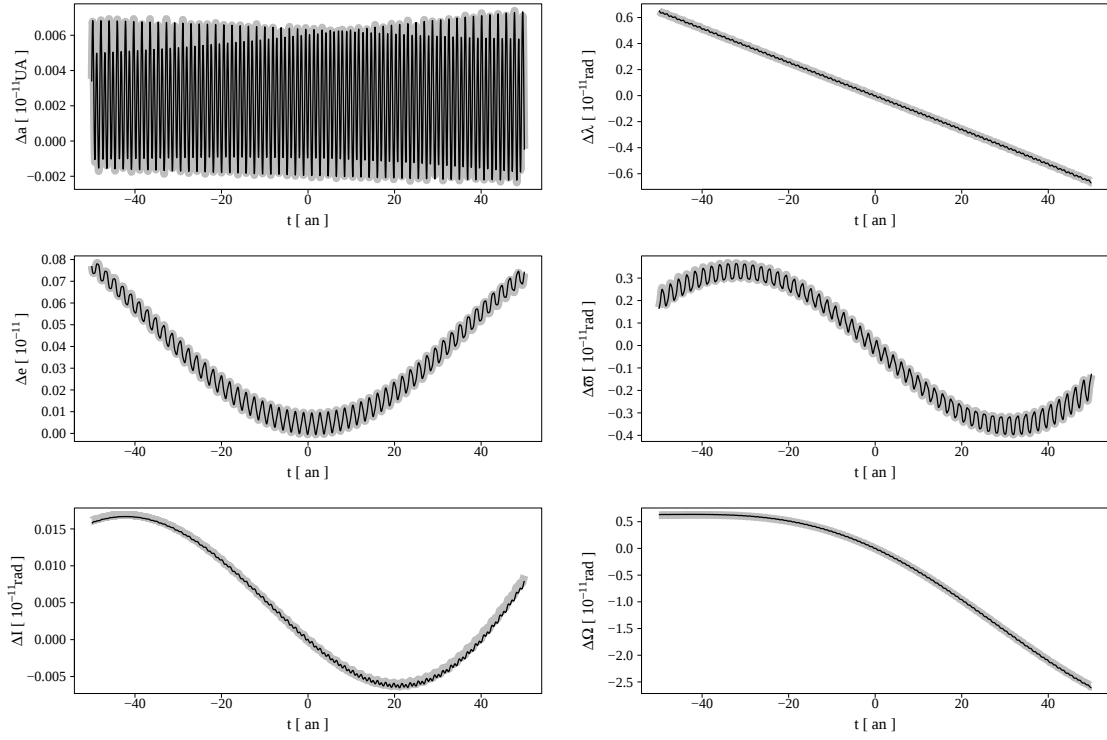


FIGURE 2.3 – Effet de Quaoar sur les éléments osculateurs de Mars. En gris, perturbations obtenues numériquement. En noir, perturbations obtenues analytiquement.

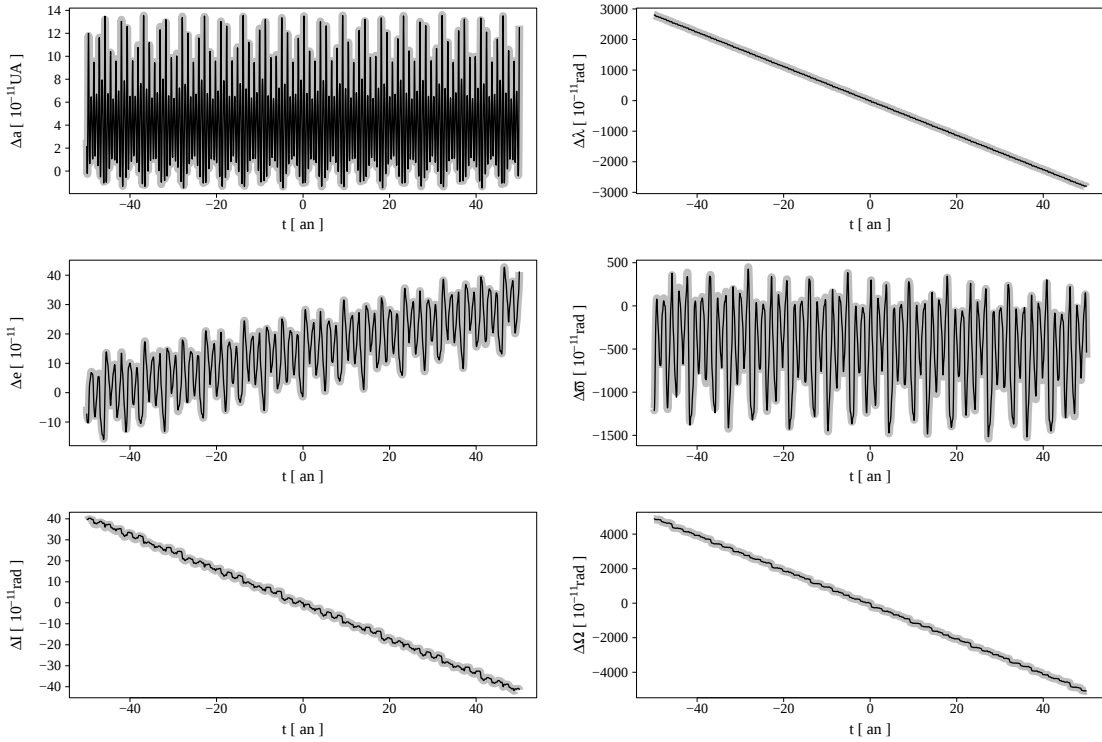


FIGURE 2.4 – Effet de Ceres sur les éléments osculateurs de la Terre. En gris, perturbations obtenues numériquement. En noir, perturbations obtenues analytiquement.

La légère différence entre l'analytique et le numérique que l'on distingue vers les bords de l'intervalle est due au développement au premier ordre en masses de la perturbation. L'effet correspond probablement à la perturbation de Jupiter induite sur l'astéroïde qui se répercute à son tour sur Mars. En superposant la prévision analytique avec un calcul numérique obtenu dans un système constitué uniquement du Soleil, de Mars et de l'astéroïde, la différence entre l'analytique et le numérique disparaît. On note sur la figure que chacune des perturbations peut être décrite comme une somme d'une fonction quasi-périodique et d'une fonction linéaire. L'évolution de Δa est purement quasi-périodique. La figure 2.2 représente l'effet induit sur les éléments orbitaux de Mars par l'astéroïde 142 Polana. Cet astéroïde est en résonance 1 : 2 avec Mars et on observe effectivement sur la figure une évolution quadratique de la longitude moyenne. On note que la prévision analytique est assez mauvaise. En effet, dans le cas résonant la fonction de perturbation devrait être développée à des ordres beaucoup plus élevés que l'ordre 8 et l'implémentation du développement n'est pas optimisée pour ce type d'opération. Il est intéressant d'estimer l'effet induit sur Mars par un objet trans-Neptunien. L'effet obtenu analytiquement et numériquement pour l'objet 50000 Quaoar est tracé sur la figure 2.3.

On a choisi Quaoar car contrairement à la majorité des objets trans-Neptuniens son inclinaison et son excentricité sont modérées, ainsi il n'est pas nécessaire de poursuivre le développement de la fonction perturbatrice à un ordre plus élevé que 8. On distingue nettement deux échelles de temps dans les fréquences des perturbations. Une rapide qui correspond aux multiples du moyen mouvement de Mars et une lente qui correspond aux multiples du moyen mouvement de l'astéroïde.

Les figures 2.4 et 2.5 comparent les effets numériques et analytiques de Ceres et Polana sur la Terre. Polana n'est pas en résonance avec la Terre et par conséquent l'effet de Polana sur la longitude est linéaire et non quadratique. On ne montre pas l'effet de Quaoar sur la Terre car il est analogue à l'effet sur Mars ainsi qu'il apparaît sur la figure 2.3.

Le développement au premier ordre en masses est une bonne approximation des effets induits par les astéroïdes sur les planètes. On a montré que hors résonance, une perturbation d'un élément orbital différent du demi-grand axe se présente comme fonction quasi-périodique à laquelle s'ajoute un terme évoluant linéairement avec le temps. L'évolution linéaire est appelée également séculaire et elle s'obtient en moyennant la fonction de perturbation dans le temps. Bien que sur les exemples traités l'évolution séculaire apparaît clairement, seule elle ne suffit en général pas pour décrire l'effet induit par un astéroïde.

Il est tentant de s'appuyer sur la fonction perturbatrice développée à l'ordre 2 et dont l'expression est donnée par (2.14) et (2.15) pour dériver des expressions littérales de Δa , $\Delta \lambda$, Δe , $\Delta \varpi$, ΔI et $\Delta \Omega$. Malheureusement l'ordre 2 n'est pas suffisant pour rendre compte, même de manière très approchée, des évolutions. La figure 2.6 représente la prévision analytique des perturbations induites par Ceres sur Mars obtenues avec l'ordre 2. On observe que pour la dérive en longitude moyenne, les prévisions de l'ordre 2 ne sont valides que sur ± 5 ans autour de l'origine. Dériver des expressions littérales à partir du développement de la fonction perturbatrice à l'ordre 4 conduit à des expressions trop volumineuses pour être exploitées en pratique dans le cadre de cette thèse.

2.2 Perturbation d'une planète par un anneau solide

Considérons un groupe d'objets pour lequel la distribution en longitude moyenne est homogène et au sein duquel les autres paramètres orbitaux ainsi que les masses varient peu. On va montrer que les perturbations induites par l'ensemble du groupe sur l'orbite d'une planète peuvent être calculées analytiquement et que les expressions approchées de ces perturbations sont relativement simples.

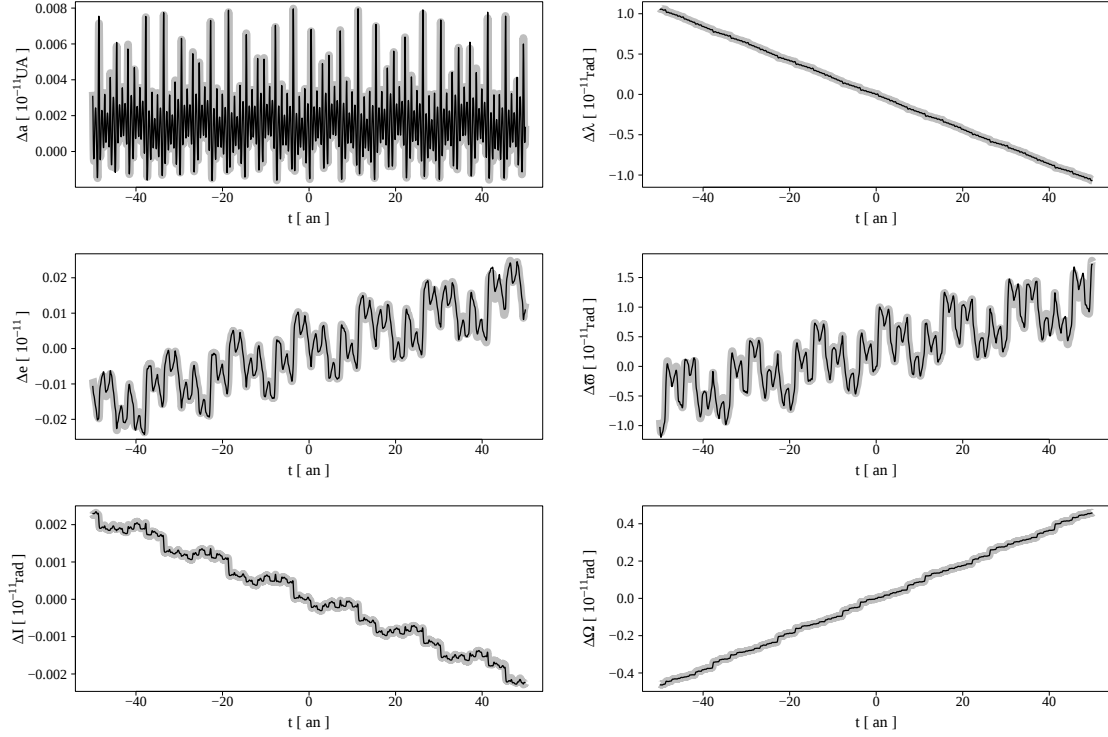


FIGURE 2.5 – Effet de Polana sur les éléments osculateurs de la Terre. En gris, perturbations obtenues numériquement. En noir, perturbations obtenues analytiquement.

2.2.1 La fonction de perturbation moyennée

Soient $a', \lambda', e', \varpi', I', \Omega'$ les éléments orbitaux d'un groupe de N objets de masses identiques. A l'exception de $\lambda' = n't + \lambda'_0$, on suppose que les éléments orbitaux sont les mêmes pour l'ensemble du groupe. Pour un objet particulier, la perturbation induite sur une planète est donnée par les équations de Lagrange (2.6). La perturbation totale, au premier ordre en masses, s'obtient en sommant les effets induits par chacun des astéroïdes. Ainsi en notant avec σ un élément orbital quelconque d'une planète, on peut écrire

$$\Delta\sigma_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \Delta\sigma_i$$

où $\Delta\sigma_{\text{tot}}$ correspond à la perturbation totale induite sur la planète. Les $\Delta\sigma_i$ correspondent aux perturbations individuelles données par les équations de Lagrange et les développements (2.14) et (2.15). Avec un N suffisamment élevé et une répartition d'objets homogène en λ'_0 , la perturbation totale peut s'exprimer sous forme de somme continue. On vérifie que

$$\Delta\sigma_{\text{tot}} = \int_0^{2\pi} \frac{\Delta\sigma}{2\pi} d\lambda'_0$$

où $\Delta\sigma$ correspond à une perturbation induite par un astéroïde fictif qui partage son orbite avec les astéroïdes du groupe et dont la masse m' est égale à la masse totale du groupe.

La dépendance de $\Delta\sigma$ en λ'_0 provient uniquement de la fonction de perturbation. D'après (2.14), on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{R_E}{2\pi} d\lambda'_0 = 0$$

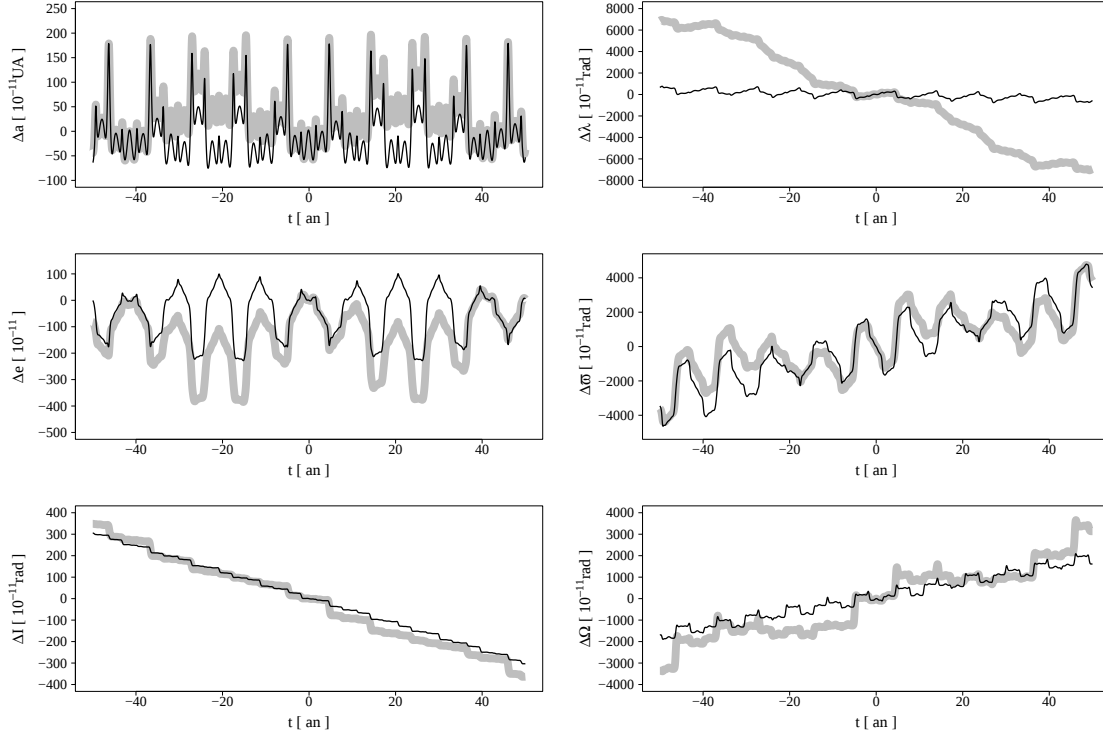


FIGURE 2.6 – Effet de Ceres sur les éléments osculateurs de Mars. En gris, perturbations obtenues numériquement. En noir, solution analytique à l'ordre 2.

En intégrant (2.15) on obtient

$$\begin{aligned}
\langle R_D \rangle_{\lambda'} &= \int_0^{2\pi} \frac{R_D}{2\pi} d\lambda'_0 \\
&= \left(C_1^{(0)} + (e^2 + e'^2)C_2^{(0)} + (s^2 + s'^2)C_3^{(0)} \right) \\
&\quad + eC_4^{(0)} \cos(\lambda - \varpi) + e'C_5^{(0)} \cos(\lambda - \varpi') \\
&\quad + ee'C_6^{(0)} \cos(\varpi - \varpi') + ee'C_7^{(0)} \cos(2\lambda - \varpi' - \varpi) \\
&\quad + e^2C_8^{(0)} \cos(2\lambda - 2\varpi) + e'^2C_9^{(0)} \cos(2\lambda - 2\varpi') \\
&\quad + ss'C_{10}^{(0)} \cos(\Omega - \Omega') + ss'C_{11}^{(0)} \cos(2\lambda - \Omega - \Omega') \\
&\quad + s^2C_{12}^{(0)} \cos(2\lambda - 2\Omega) + s'^2C_{12}^{(0)} \cos(2\lambda - 2\Omega')
\end{aligned} \tag{2.18}$$

La fonction de perturbation intégrée sur λ'_0 s'écrit donc comme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Delta R}{2\pi} d\lambda'_0 = \int_0^{2\pi} \frac{Gm'}{a'} \frac{R_D}{2\pi} d\lambda'_0 = \frac{Gm'}{a'} \langle R_D \rangle_{\lambda'}$$

En injectant (2.18) dans les équations (2.6), on obtient les perturbations induites par le groupe d'astéroïdes sur les éléments orbitaux d'une planète. On remarque que l'intégration élimine de la fonction de perturbation tous les termes faisant intervenir la longitude moyenne λ'_0 . Cette opération élimine donc tous les termes qui pourraient être résonants.

2.2.2 Expression des perturbations

On va par la suite chercher à exprimer les parties séculaires et non séculaires des perturbations aux ordres les plus bas en excentricités et inclinaisons. Avec l'approximation

$$Gm' = n^2 a^3 \frac{m'}{m_\odot}$$

la perturbation du demi-grand axe s'écrit

$$\frac{d\Delta a}{dt} = -2n\alpha a \frac{m'}{m_\odot} \left(eC_4^{(0)} \sin(\lambda - \varpi) + e'C_5^{(0)} \sin(\lambda - \varpi') \right)$$

En intégrant, on obtient

$$\Delta a = 2a\alpha \frac{m'}{m_\odot} \left(eC_4^{(0)} (\cos(\lambda - \varpi) - \cos(\lambda_0 - \varpi)) + e'C_5^{(0)} (\cos(\lambda - \varpi') - \cos(\lambda_0 - \varpi')) \right)$$

Pour la longitude moyenne on obtient donc

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = \alpha \frac{m'}{m_\odot} & \left(\left(3eC_4^{(0)} \cos(\lambda_0 - \varpi) + 3e'C_5^{(0)} \cos(\lambda_0 - \varpi') - 2\alpha DC_1^{(0)} \right) \times nt \right. \\ & \left. - \left(\frac{5}{2}C_4^{(0)} + 2\alpha DC_4^{(0)} \right) e \sin(\lambda - \varpi) - \left(3C_5^{(0)} + 2\alpha DC_5^{(0)} \right) e' \sin(\lambda - \varpi') \right) \end{aligned}$$

où l'opérateur D correspond à la dérivée par rapport à α . Ci-dessus, on a omis la constante qui assure qu'à l'instant initial on a $\Delta\lambda = 0$. Pour simplifier les formules on omettra cette constante également par la suite. Pour les éléments orbitaux restants on vérifie que

$$\begin{aligned} \Delta e &= \alpha \frac{m'}{m_\odot} \left(e'C_6^{(0)} \sin(\varpi - \varpi') \times nt + C_4^{(0)} \cos(\lambda - \varpi) \right) \\ \Delta\varpi &= \alpha \frac{m'}{m_\odot} \left(\left(2C_2^{(0)} + \frac{e'}{e}C_6^{(0)} \cos(\varpi - \varpi') \right) \times nt + \frac{C_4^{(0)}}{e} \sin(\lambda - \varpi) \right) \\ \Delta I &= \alpha \frac{m'}{m_\odot} \left(\frac{s'}{2}C_{10}^{(0)} \sin(\Omega - \Omega') \times nt + \frac{s'}{4}C_{11}^{(0)} \cos(2\lambda - \Omega - \Omega') + \frac{s}{2}C_{12}^{(0)} \cos(2\lambda - 2\Omega) \right) \\ \Delta\Omega &= \alpha \frac{m'}{m_\odot} \left(\left(\frac{C_3^{(0)}}{2} + \frac{s'}{4s}C_{10}^{(0)} \cos(\Omega - \Omega') \right) \times nt + \frac{C_{12}^{(0)}}{4} \sin(2\lambda - 2\Omega) + \frac{C_{11}^{(0)}s'}{8s} \sin(2\lambda - \Omega - \Omega') \right) \end{aligned}$$

La figure 2.7 compare l'effet induit sur l'orbite de Mars par cent objets répartis uniformément sur l'orbite de Polana avec les perturbations prévues par les expressions ci-dessus. L'effet des 100 objets a été obtenu avec INPOP en faisant évoluer les objets sur des orbites keplériennes fixes avec des masses égales au centième de la masse de Polana. On observe que la prévision analytique correspond approximativement au calcul numérique. La différence provient essentiellement de l'ordre faible des expressions analytiques. La partie non séculaire des perturbations fait intervenir uniquement des périodes faibles en comparaison avec l'intervalle de temps considéré. Par conséquent la contribution de la partie séculaire est largement dominante. On note que l'effet en longitude est linéaire. Comme prévu dans la section 2.2.1, le caractère résonant de Polana de la figure 2.2 a disparu.

Le modèle dynamique de INPOP08 contient un anneau circulaire situé près du plan invariant du Système solaire. On note que contrairement à la figure 2.7, dans INPOP08 l'anneau n'est pas implémenté par un nombre discret d'objets mais par une répartition linéique de masse. L'interaction de l'anneau avec les corps ponctuels du modèle est donnée par l'expression de la force dérivée dans Kuchynka *et al.* (2010).

2.2.3 Effet séculaire

L'effet séculaire d'un anneau s'obtient immédiatement à partir des expressions des perturbations dérivées dans la section 2.2.2. On obtient l'effet séculaire non seulement d'un anneau mais de n'importe quel astéroïde individuel. Néanmoins pour un astéroïde individuel, la description des perturbations par des dérivées linéaires est en général trop approximative pour donner une idée de l'effet réel. En ne gardant que les dérivées linéaires dans les expressions de la section 2.2.2, on obtient pour la longitude moyenne,

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \alpha^2 n \frac{m'}{m_\odot} (\alpha b_{3/2}^{(0)} - b_{3/2}^{(1)}) \times t \\ &+ \alpha^2 n \frac{3m'}{2m_\odot} \left(e(\alpha b_{3/2}^{(0)} - b_{3/2}^{(1)}) \cos(\lambda_0 - \varpi) - e'(3b_{3/2}^{(0)} - (\alpha + \frac{2}{\alpha})b_{3/2}^{(1)}) \cos(\lambda_0 - \varpi') \right) \times t\end{aligned}\quad (2.19)$$

et pour les autres éléments orbitaux :

$$\begin{aligned}\Delta a &= 0 \\ \Delta e &= \alpha^2 n \frac{m'}{4m_\odot} e' \left(3b_{3/2}^{(0)} - 2(\alpha + \frac{1}{\alpha})b_{3/2}^{(1)} \right) \sin(\varpi - \varpi') \times t \\ \Delta \varpi &= \alpha^2 n \frac{m'}{4m_\odot} \left(b_{3/2}^{(1)} + \frac{e'}{e} (3b_{3/2}^{(0)} - 2(\alpha + \frac{1}{\alpha})b_{3/2}^{(1)}) \right) \times t \\ \Delta I &= \alpha^2 n \frac{m'}{4m_\odot} I' b_{3/2}^{(1)} \sin(\Omega - \Omega') \times t \\ \Delta \Omega &= -\alpha^2 n \frac{m'}{4m_\odot} \left(1 - \frac{I'}{I} \cos(\Omega - \Omega') \right) \times t\end{aligned}\quad (2.20)$$

Ici les coefficients $C_i^{(0)}$ ont été exprimés en fonction de $b_{3/2}^{(0)}$ et $b_{3/2}^{(1)}$ grâce aux expressions de l'annexe 9.3. Les équations (2.20) correspondent aux formules dérivées avec le formalisme hamiltonien dans Kuchynka *et al.* (2010). L'expression de la longitude moyenne (2.19) obtenue ici est différente car elle tient compte de la contribution non séculaire de Δa . Selon les relations ci-dessus, un anneau circulaire situé dans le plan de référence induit des perturbations Δe et ΔI nulles. En s'appuyant sur le développement de la fonction perturbatrice à l'ordre 4, on peut montrer qu'en réalité l'effet séculaire en Δe et ΔI est non nul et s'écrit à l'ordre le plus bas comme (Kuchynka *et al.*, 2010) :

$$\begin{aligned}\Delta e &= n\alpha^2 \frac{m'}{m_\odot} I^2 e \sin(2\varpi - 2\Omega) \left(-\frac{15}{32} \alpha b_{5/2}^{(0)} + \frac{9 + 3\alpha^2}{16} b_{5/2}^{(1)} \right) \times t \\ \Delta I &= -n\alpha^2 \frac{m'}{m_\odot} I e^2 \sin(2\varpi - 2\Omega) \left(-\frac{15}{32} \alpha b_{5/2}^{(0)} + \frac{9 + 3\alpha^2}{16} b_{5/2}^{(1)} \right) \times t\end{aligned}$$

2.3 Perturbation de la distance mutuelle entre deux planètes

L'effet d'un astéroïde sur une planète se traduit par la perturbation des éléments orbitaux de la planète. Ces effets ne sont pas directement mesurables, néanmoins ils se traduisent par exemple en perturbations des distances entre planètes qui elles sont mesurables. On rappelle que les observations des distances Terre-planète, notamment les observations de la distance Terre-Mars, constituent aujourd'hui les mesures les plus contraignantes pour les paramètres d'une éphéméride. L'objectif est ici de prévoir l'effet induit par un astéroïde sur la distance mutuelle entre deux planètes à partir des perturbations induites sur les éléments orbitaux des deux planètes.

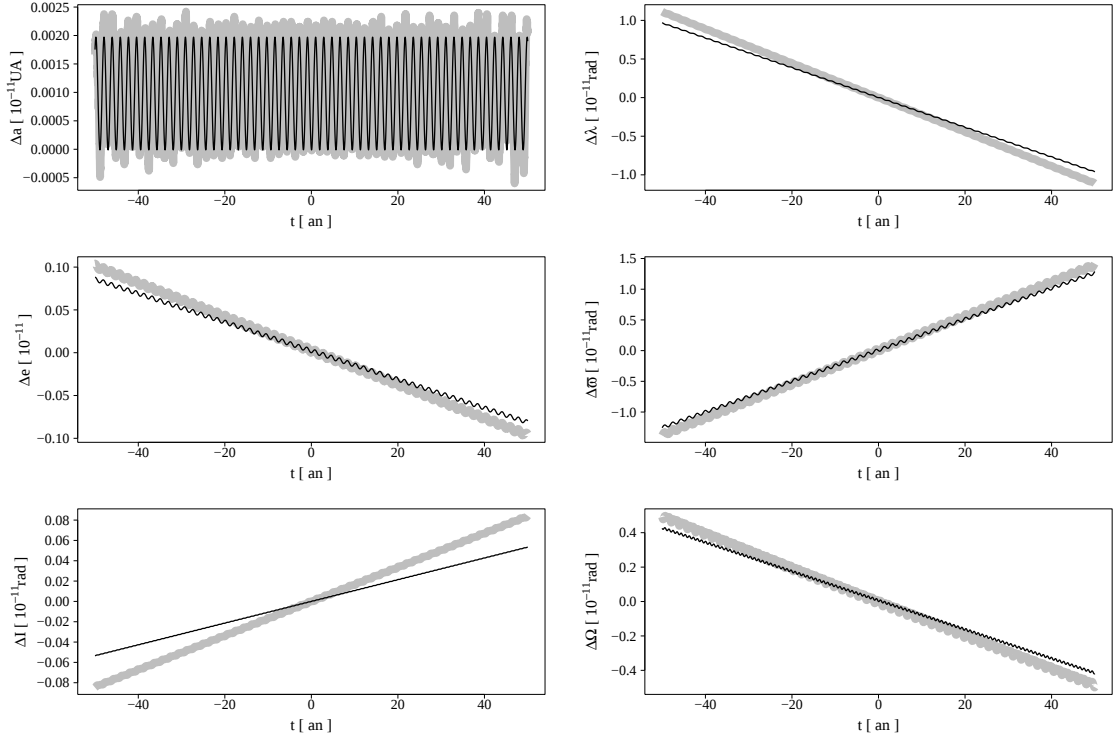


FIGURE 2.7 – Effet induit sur Mars par un anneau d’astéroïdes répartis sur l’orbite de Polana. En gris, perturbations obtenues numériquement. En noir, perturbations calculées analytiquement aux ordres les plus bas en excentricités et inclinaisons.

2.3.1 Développement au premier ordre en masse du perturbateur

On considère deux planètes P_1 et P_2 . Dans la suite on suppose que le demi-grand axe de P_2 est supérieur à celui de P_1 . Comme la notation Δ sera utilisée pour désigner la perturbation d’un élément, on va noter la distance mutuelle entre les deux corps avec D . En notant avec des indices 1 et 2 les éléments orbitaux de chacune des planètes, on peut écrire la dépendance de D en termes des 12 éléments orbitaux comme

$$D = D(a_1, \lambda_1, e_1, \varpi_1, I_1, \Omega_1, a_2, \lambda_2, e_2, \varpi_2, I_2, \Omega_2)$$

Avec les notations de la relation (2.4), la perturbation de la distance D s’écrit

$$\Delta D = D^* - D$$

où D correspond à la distance mutuelle dans le cas non perturbé,

$$D = D(a_1, \dots, \Omega_1, a_2, \dots, \Omega_2)$$

et D^* correspond à la distance dans le cas perturbé :

$$D^* = D(a_1^*, \dots, \Omega_1^*, a_2^*, \dots, \Omega_2^*) = D(a_1 + \Delta a_1, \dots, \Omega_1 + \Delta \Omega_1, a_2 + \Delta a_2, \dots, \Omega_2 + \Delta \Omega_2)$$

En développant D^* au premier ordre des perturbations, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta D = & \frac{\partial D}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial D}{\partial \lambda_1} \Delta \lambda_1 + \frac{\partial D}{\partial e_1} \Delta e_1 + \frac{\partial D}{\partial \varpi_1} \Delta \varpi_1 + \frac{\partial D}{\partial I_1} \Delta I_1 + \frac{\partial D}{\partial \Omega_1} \Delta \Omega_1 \\ & + \frac{\partial D}{\partial a_2} \Delta a_2 + \frac{\partial D}{\partial \lambda_2} \Delta \lambda_2 + \frac{\partial D}{\partial e_2} \Delta e_2 + \frac{\partial D}{\partial \varpi_2} \Delta \varpi_2 + \frac{\partial D}{\partial I_2} \Delta I_2 + \frac{\partial D}{\partial \Omega_2} \Delta \Omega_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

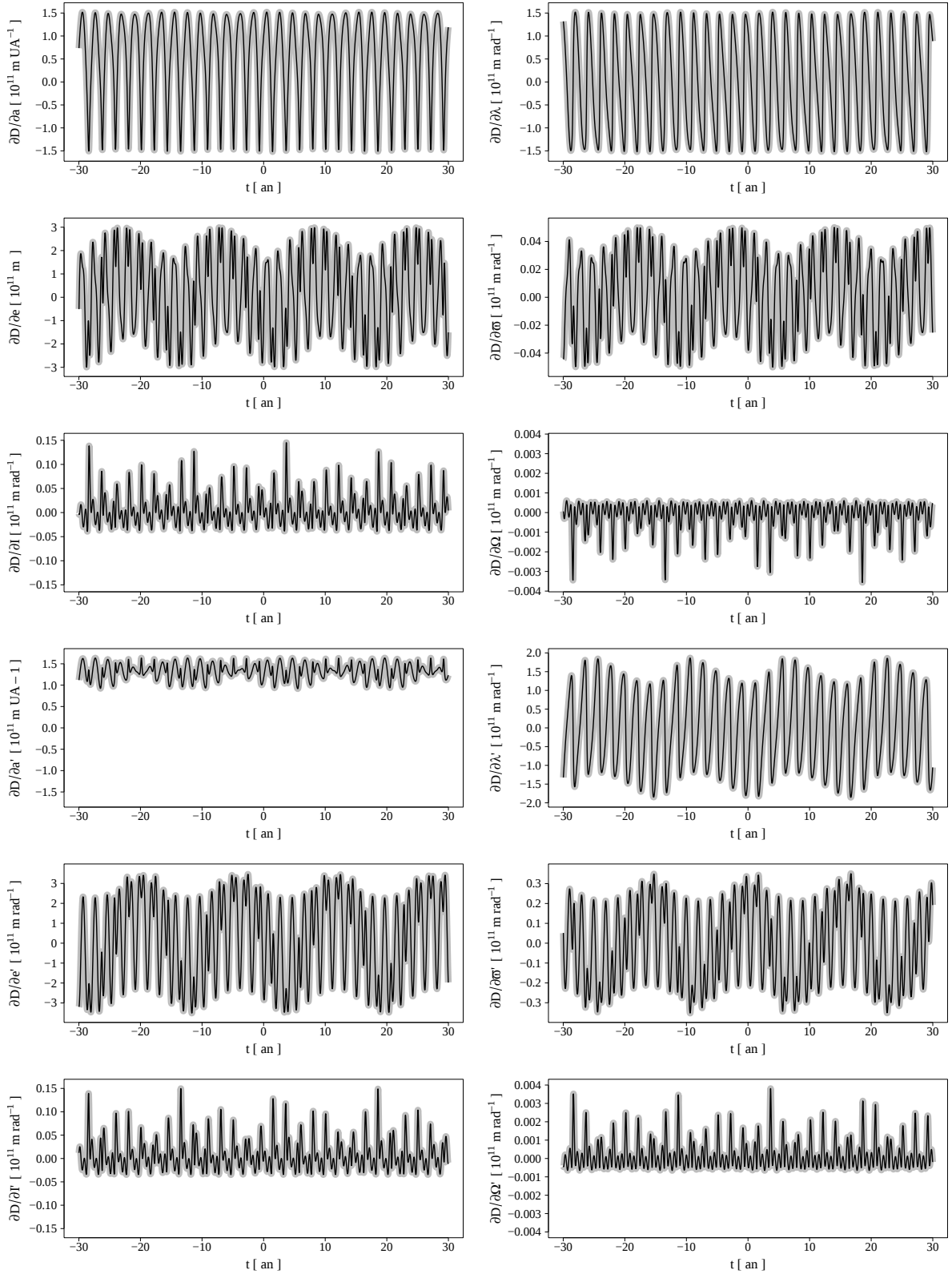


FIGURE 2.8 – Evolution des dérivées de la distance Terre-Mars en fonction du temps (en années). Les éléments orbitaux primés correspondent à la planète extérieure, donc à Mars. En noir les dérivées obtenues à l'ordre 1 en masses, en gris sans développement en masses.

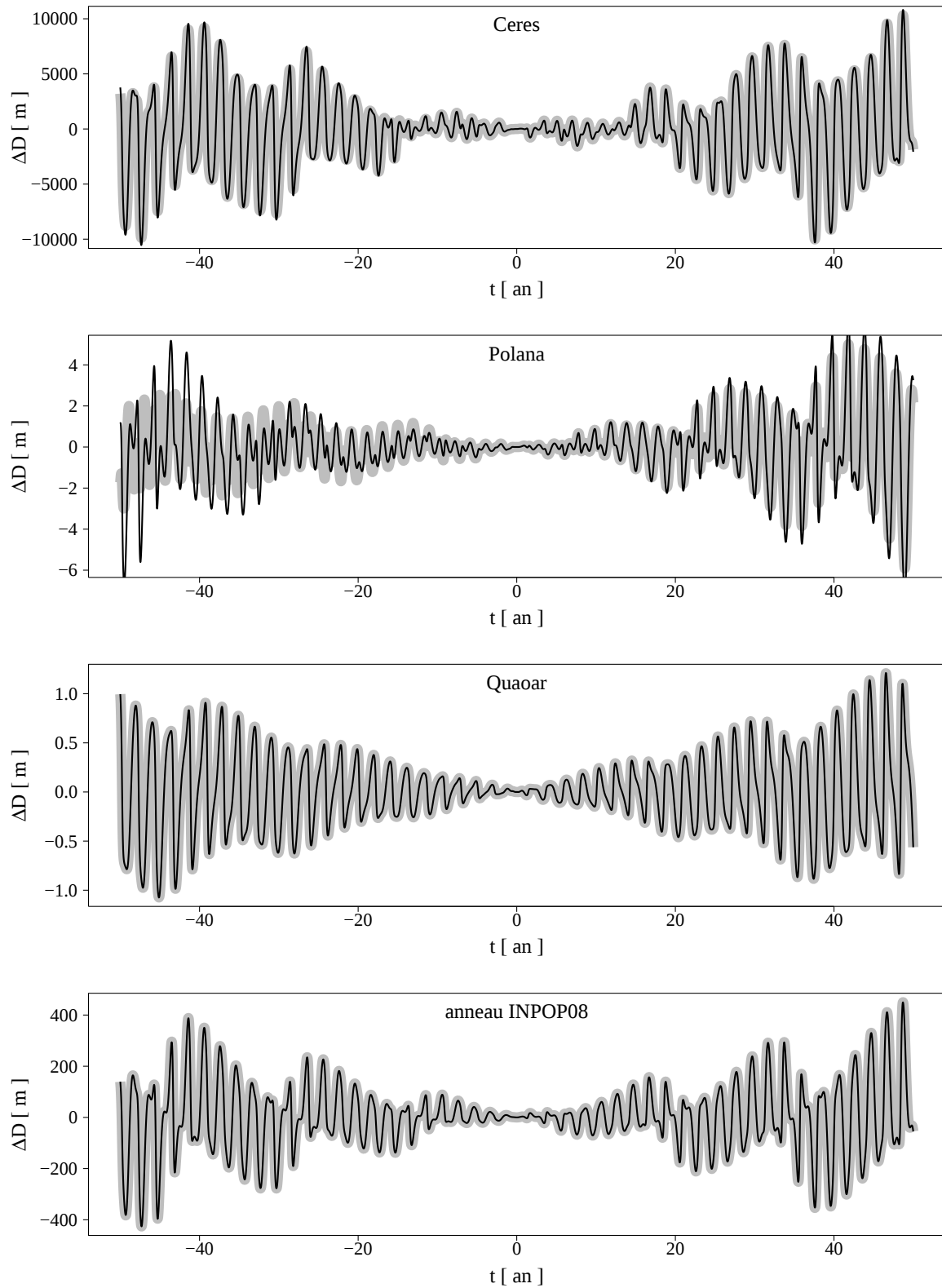


FIGURE 2.9 – Effets induits sur la distance Terre-Mars par Ceres, Polana, Quaoar et l’anneau de INPOP08. Les effets sont tracés sur ± 50 ans. En noir, les tracés correspondent à des prévisions analytiques, en gris à des résultats numériques.

La perturbation induite par un astéroïde sur la distance mutuelle entre deux planètes s'obtient donc directement à partir de la perturbation des différents éléments orbitaux. Ces perturbations sont au moins d'ordre 1 en masse de l'astéroïde perturbateur. Le développement ci-dessus peut donc être considéré comme un développement au premier ordre en masse du perturbateur.

2.3.2 Dépendance en éléments orbitaux

La distance entre deux corps peut être exprimée en fonction des 12 éléments orbitaux dont elle dépend en la développant en excentricités et inclinaisons. Le développement s'obtient de manière analogue au développement de la partie directe de la fonction de perturbation. En effet par analogie avec les développements de la section 2.1.3, on peut écrire

$$\frac{D}{a'} = \frac{r'}{a'}(A + V)^{1/2}$$

où A et V sont donnés par (2.8). Dans ces notations les paramètres de la planète extérieure P_2 sont notés avec des primes et les paramètres de P_1 sont notés sans primes. Le développement à l'ordre 2 en excentricités et inclinaisons conduit à

$$\frac{D}{a'} = \left(\frac{r'}{a'} A^{1/2} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{r'}{a'} A^{-1/2} \right) V + \left(-\frac{1}{8} \frac{r'}{a'} A^{-3/2} \right) V^2$$

La distance mutuelle se présente donc comme une série quasi-périodique qui dans le cas circulaire s'écrit simplement comme

$$D = \frac{a'}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{-1/2}^{(k)} e^{ik(\lambda-\lambda')} \quad (2.22)$$

On peut vérifier qu'à l'ordre 2, l'expression de D est exactement identique à l'expression (2.15) obtenue pour R_D mais avec des coefficients $C_i^{(k)}$ différents. Les dérivées de D par rapport aux éléments orbitaux s'obtiennent sans difficulté en adaptant les routines TRIP implémentées dans la section 2.1.3 pour le développement de la fonction perturbatrice. On affiche sur la figure 2.8 l'évolution sur ± 30 ans des 12 dérivées de la distance Terre-Mars par rapport aux éléments orbitaux de la Terre et de Mars. La figure a été obtenue à partir d'un développement de D en excentricités/inclinaisons à l'ordre 8. Les éléments orbitaux dans le développement sont considérés comme constants à l'exception des longitudes moyennes qui évoluent linéairement. Les dérivées de la distance Terre-Mars sont donc obtenues au premier ordre en masses de l'ensemble des planètes du Système solaire. On rappelle que le repère adapté est toujours le repère Jup2000. La figure donne également les évolutions des dérivées obtenues avec des éléments orbitaux non keplériens provenant d'une intégration INPOP du Système solaire.

La figure 2.8 montre que les dérivées se présentent approximativement comme des oscillations rapides d'amplitudes constantes. Les dérivées par rapport aux inclinaisons et aux noeuds sont très faibles, la distance est par conséquent peu sensible aux variations de ces paramètres. On note également que l'excentricité plus importante de Mars fait que la distance Terre-Mars est plus sensible aux perturbations du périhélie de Mars que du périhélie de la Terre. Le comportement particulier observé pour la dérivée par rapport au demi-grand axe de Mars s'explique à partir de la relation (2.22). En effet à l'ordre zéro en excentricités et inclinaisons, on a

$$\frac{\partial D}{\partial a'} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(b_{-1/2}^{(k)} - \alpha \frac{db_{-1/2}^{(k)}}{d\alpha} \right) e^{ik(\lambda-\lambda')}$$

et on vérifie que pour $\alpha \sim 0.66$, le terme constant $k = 0$ est environ 20 fois plus grand que le premier terme variable $k = \pm 1$. Enfin on remarque que les dérivées par rapport aux longitudes

moyennes sont environ égales moyennant un changement de signe. Cette propriété se vérifie directement sur l'expression de D à l'ordre zéro (2.22).

Le tableau 2.3 rassemble les maximums atteints par les dérivées des distances Terre-Mercure, Terre-Venus et Terre-Mars par rapport aux différents éléments orbitaux. Les sensibilités des distances aux perturbations des différents éléments orbitaux sont approximativement similaires. Pour les trois distances, les paramètres les plus déterminants sont le demi-grand axe, la longitude moyenne et l'excentricité. Le tableau permet de prédire l'effet de Ceres sur la distance mutuelle Terre-Mars. En effet sur les figures 2.4 et 2.1 on voit que la perturbation de la distance sera dominée par les perturbations des longitudes moyennes. Ces effets atteignent pour la Terre et Mars respectivement 3 km et 7 km en 50 ans. Avec le tableau on déduit qu'en terme de distance Terre-Mars ceci se traduit par un effet de $|3 \times 1.521 - 7 \times 1.864| \sim 8$ km.

TABLE 2.3 – Valeurs maximales atteintes par les dérivées des distances Terre-planètes par rapport aux éléments orbitaux. Pour chaque distance mutuelle, les deux colonnes correspondent respectivement aux dérivées par rapport aux orbites de la Terre et de la planète.

	Terre - Mercure		Terre - Venus		Terre - Mars		unités $\times 10^{11}$
$\max \left \frac{\partial D}{\partial a} \right $	1.521	1.798	1.520	1.505	1.521	1.635	[m UA ⁻¹]
$\max \left \frac{\partial D}{\partial \lambda} \right $	0.676	0.699	1.116	1.087	1.521	1.864	[m rad ⁻¹]
$\max \left \frac{\partial D}{\partial e} \right $	1.882	1.165	2.399	2.160	2.992	3.509	[m]
$\max \left \frac{\partial D}{\partial \varpi} \right $	0.032	0.248	0.040	0.015	0.050	0.352	[m rad ⁻¹]
$\max \left \frac{\partial D}{\partial I} \right $	0.103	0.133	0.217	0.222	0.145	0.150	[m rad ⁻¹]
$\max \left \frac{\partial D}{\partial \Omega} \right $	0.003	0.008	0.004	0.006	0.004	0.004	[m rad ⁻¹]

2.3.3 Perturbation de la distance

Avec le développement (2.21), il est possible de calculer analytiquement les effets induits par un astéroïde sur la distance mutuelle entre deux planètes. En s'appuyant sur les perturbations des éléments orbitaux de Terre et Mars obtenues analytiquement dans la section 2.1.4 et sur les dérivées obtenues dans la section précédente, on calcule pour Ceres et Quaoar l'effet induit sur la distance Terre-Mars. La figure 2.9 compare les prévisions analytiques au premier ordre en masses et à l'ordre 8 en excentricités/inclinaisons avec des perturbations obtenues numériquement en intégrant le Système solaire avec et sans chacun des astéroïdes. On affiche également sur la figure l'effet induit par l'anneau de INPOP08 et l'astéroïde résonant Polana. La prévision analytique de la perturbation pour Polana est mauvaise à cause du caractère résonant de l'astéroïde (voir section 2.1.4). La masse et le rayon de l'anneau sont respectivement $1.01 \times 10^{-10} M_{\odot}$ et 3.15 UA (Fienga *et al.*, 2009).

Sur les figures 2.1 à 2.5 on note que les effets induits par chacun des astéroïdes sur les orbites de la Terre et de Mars sont très différents. Pourtant sur la figure 2.9 ces effets se traduisent en termes des perturbations de la distance Terre-Mars par des signaux de formes très similaires. Ce phénomène provient du fait que la perturbation de la distance est dominée par les dérives en longitudes moyennes et ces dérives sont dans la plupart des cas linéaires. Les dérivées de ΔD par rapport aux longitudes moyennes font que les signaux de la figure 2.9 sont modulés surtout par la fréquence synodique Terre-Mars.

2.4 Conclusion

On a montré que l'effet induit par un astéroïde sur les éléments orbitaux d'une planète s'exprimait en fonction du temps comme la somme d'une fonction quasi-périodique et d'une fonction linéaire. L'exception à cette règle est la perturbation du demi-grand axe, qui ne contient une dérive linéaire qu'en cas de résonance en moyen mouvement. Le modèle analytique développé au premier ordre en masses, reproduit très bien les perturbations de tous les éléments orbitaux sur un intervalle de ± 50 ans. Vers la fin de cet intervalle les effets dus aux ordres supérieurs commencent à apparaître. On note, que le modèle au premier ordre en masse implique automatiquement que toute perturbation est proportionnelle à la masse du corps perturbateur.

Nous avons montré qu'un grand nombre d'astéroïdes sur des orbites similaires et répartis de manière homogène en longitudes moyennes induisait sur une planète un effet beaucoup plus simple que chacun des astéroïdes pris individuellement. La perturbation induite par le groupe agit surtout à travers un effet séculaire. L'effet se traduit par des dérives linéaires des différents éléments orbitaux de la planète perturbée. Cette observation suggère la modélisation des effets de la majorité des astéroïdes de la ceinture principale par un anneau. Enfin, on a montré qu'une perturbation induite sur la distance mutuelle entre deux planètes se présentait comme produits des perturbations des différents éléments orbitaux avec des fonctions quasi-périodiques. Ces fonctions quasi-périodiques étant identiques pour tous les perturbateurs, les effets sur la distance mutuelle entre deux planètes induits par des astéroïdes différents sont en apparence assez similaires.

Chapitre 3

Estimation numérique des perturbations individuelles

Dans ce chapitre on estime numériquement les perturbations induites par chaque astéroïde sur les distances Terre-planètes. L'objectif est de pouvoir déterminer les astéroïdes dont l'effet individuel sur les planètes pourrait être détectable avec INPOP. On commence dans un premier temps par étudier les perturbations induites sur la distance Terre-Mars qui est la mesure actuellement la plus contraignante pour le modèle dynamique. Les effets induits par les astéroïdes sur les distances entre la Terre et les autres planètes seront étudiés par la suite.

3.1 Perturbation de la distance Terre-Mars

Pour estimer les effets individuels des astéroïdes, on procède de la même manière qu'au chapitre précédant. Avec la définition générale (2.4) donnée pour la perturbation d'un paramètre quelconque, la perturbation ΔD de la distance Terre-Mars due à un astéroïde s'écrit

$$\Delta D = D^* - D$$

où D et D^* représentent respectivement les évolutions de la distance dans un cas de référence et un cas perturbé. On choisit comme référence l'intégration INPOP d'un modèle dynamique constitué uniquement des planètes et du Soleil. Contrairement à INPOP08, le modèle dynamique ne contient pas d'astéroïdes et pas d'anneau. Le cas perturbé s'obtient en rajoutant au modèle de référence un astéroïde avec sa masse standard ainsi qu'on la définit dans la section 1.4.4. On choisit comme intervalle de temps des intégrations, la période entre 1960 et 2020. L'intervalle contient avec une marge d'environ 10 ans les mesures des distances Terre-planètes actuellement disponibles (voir le schéma 1.2).

3.1.1 Calculs numériques

On a vu que la perturbation ΔD était surtout modulée par la fréquence synodique Terre-planète. Afin d'exploiter les mêmes intégrations INPOP pour le calcul de l'ensemble des distances Terre-planètes, et pas seulement pour la distance Terre-Mars, le pas de sortie de l'intégrateur doit être choisi en fonction de la fréquence synodique Terre-planète la plus élevée. Le pas de sortie a donc été fixé à 10 jours, environ le dixième de la période synodique Terre-Mercure.

Les positions des planètes calculées par INPOP pour l'intervalle 1960-2020 occupent environ 5Mb. Les intégrations des 219017 astéroïdes présents dans Astorb occuperaient donc plus d'un terabyte. Pour avoir à manipuler une quantité de données plus raisonnable, on va limiter l'estimation des perturbations aux objets dont la magnitude absolue H est inférieure à 14. Avec

l'hypothèse d'un albédo moyen de 0.125 et d'un albédo minimum de 0.05, la formule (1.1) indique que le critère $H < 14$ concerne en moyenne les astéroïdes de diamètre supérieur à 6 km et tous les astéroïdes de diamètre supérieur à 10 km. Il est intéressant de noter qu'au sein de la ceinture principale, l'ensemble de ces objets a déjà été recensé (voir Jedicke *et al.*, 2002). Le nombre d'astéroïdes sélectionnés parmi les 219017 objets s'élève à 27142¹.

Les intégrations de chacun des 27142 astéroïdes entre 1960 et 2020, parallélisées sur 10 processeurs 1.4 Ghz, demandent environ 35 heures de calcul. La figure 3.1 donne un exemple de perturbation ainsi obtenue. Il s'agit de l'effet induit par Ceres sur la distance Terre-Mars. Moyennant un intervalle de temps différent, l'évolution est exactement la même que celle de la figure 2.9.

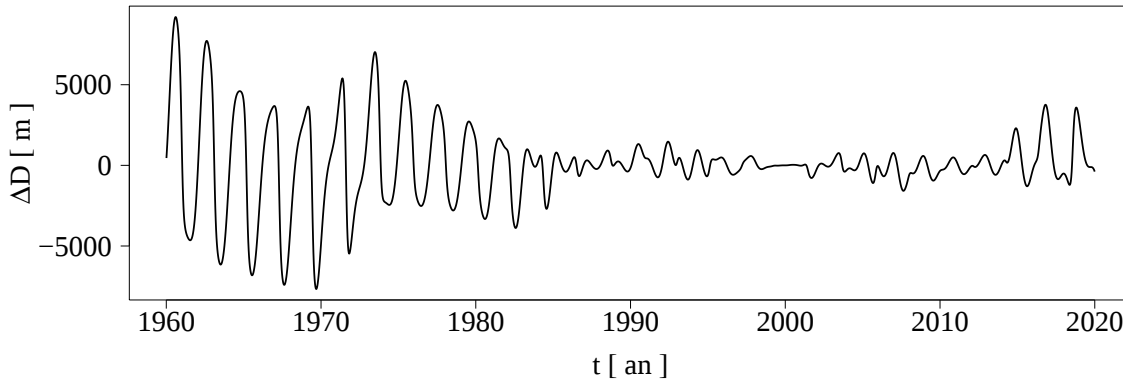


FIGURE 3.1 – Perturbation de la distance Terre-Mars induite par Ceres. Le tracé est obtenu à partir d'intégrations avec et sans Ceres en partant de conditions initiales à l'époque J2000.

3.1.2 Les astéroïdes les plus perturbateurs

Pour comparer les amplitudes des perturbations induites par les différents astéroïdes, on attribue à chaque fonction ΔD sa norme $\| \cdot \|_{\infty}$, c'est à dire la valeur maximale atteinte par $|\Delta D|$ sur l'intervalle d'intégration. On confondra par la suite l'amplitude d'une perturbation et le maximum atteint par la perturbation.

La distribution des amplitudes des perturbations induites entre 1960 et 2020 sur la distance Terre-Mars est représentée par l'histogramme de la figure 3.2. La première dizaine des plus grands perturbateurs est rassemblée dans le tableau 3.1. Seulement 4 individus induisent un effet de l'ordre de 10 km. Il s'agit de Ceres et des astéroïdes 2 Pallas, 4 Vesta et 324 Bamberga. Une dizaine d'astéroïdes induit des effets de l'ordre du kilomètre. Le nombre d'astéroïdes augmente ensuite continûment au fur et à mesure que l'on considère des effets de plus en plus faibles. On remarque que pour des effets inférieurs à 0.01 m, le nombre de perturbateurs se met à diminuer. Le phénomène peut être attribué aux astéroïdes dont les orbites se situent au delà de la ceinture principale et qui ne sont pas recensés jusqu'à une magnitude absolue égale à 14.

L'absence de limite nette entre objets induisant des effets importants et objets induisant des effets faibles complique la modélisation des astéroïdes dans INPOP. En effet, il apparaît que la prise en compte des astéroïdes ne pourra pas simplement consister à implémenter dans le modèle dynamique les objets les plus perturbateurs et considérer les astéroïdes restants comme négligeables.

1. Avec la base de donnée Astdata du chapitre 1, le nombre d'objets tels que $H < 14$ s'élève en réalité à 27203. La différence provient d'une mise à jour des magnitudes absolues dans le catalogue Astorb entre la date de compilation de Astdata et la date plus ancienne du lancement des intégrations INPOP décrites dans cette section.

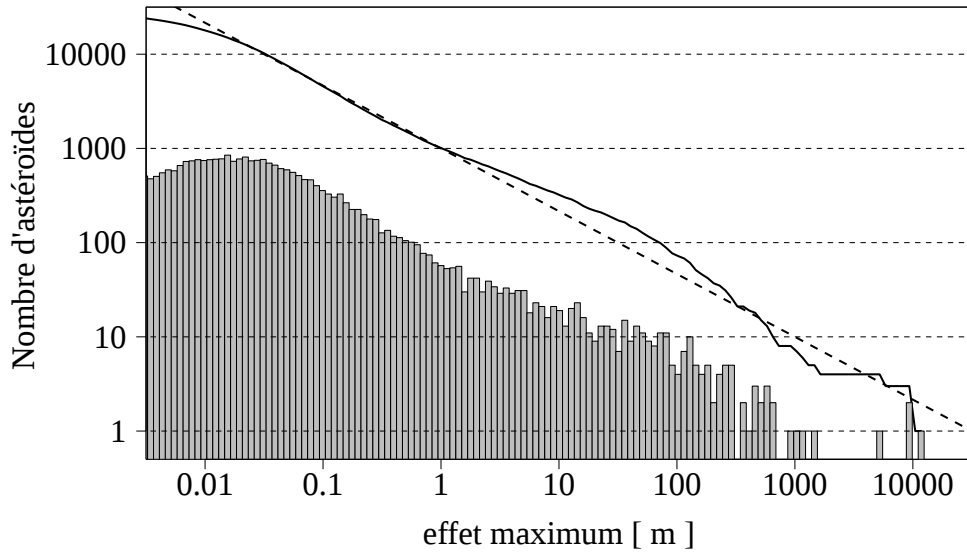


FIGURE 3.2 – Histogramme représentant le nombre d’astéroïdes en fonction du maximum atteint par leur perturbation de la distance Terre-Mars entre 1960 et 2020. Le trait noir donne le nombre d’objets dont les perturbations se situent au dessus du seuil indiqué par l’abscisse. Le trait interrompu représente la loi empirique (3.1).

TABLE 3.1 – Amplitudes des astéroïdes les plus perturbateurs calculées sur l’intervalle 1960-2020.

astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]
4 Vesta	12391	6 Hebe	1169	52 Europa	610
2 Pallas	9262	10 Hygiea	1044	24 Themis	587
1 Ceres	9199	532 Herculina	961	7 Iris	563
324 Bamberga	5036	31 Euphrosyne	633	654 Zelinda	521
19 Fortuna	1476	139 Juewa	628	747 Winchester	507

En notant par y le nombre d’astéroïdes dont l’effet est inférieur à une limite x donnée, la figure montre que la variable y suit approximativement une loi exponentielle. Avec x en mètres, on estime la loi comme

$$y \sim 1000 \times x^{-2/3} \quad (3.1)$$

Environ 1000 objets ont un effet supérieur à 1 m. On rappelle que les mesures modernes de la distance Terre-Mars ont une précision de l’ordre du mètre (voir section 1.1.3). Par conséquent, sur les 27142 astéroïdes considérés, plus 95% induisent un effet indécélable.

3.2 Ajustement des conditions initiales

Les amplitudes des perturbations déterminées précédemment ne donnent qu’une idée approximative de l’importance réelle des différents astéroïdes dans une éphéméride planétaire. En effet l’amplitude d’une perturbation obtenue directement à partir d’intégrations avec et sans astéroïdes dépend fortement de l’instant initial des intégrations.

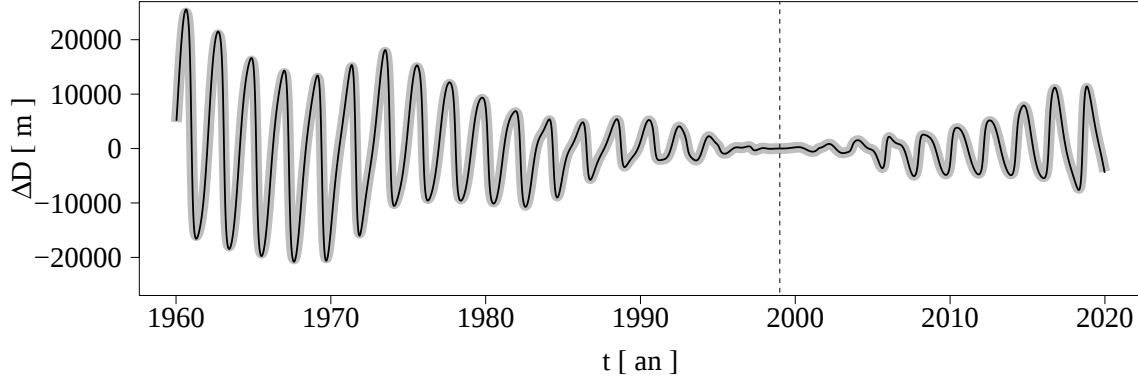


FIGURE 3.3 – Perturbation de la distance Terre-Mars induite par Ceres. En noir, estimation obtenue numériquement en comparant des intégrations avec et sans astéroïde à partir de la date 1999. En gris, tracé analogue obtenu avec les formules (3.2) et (3.3). Le trait pointillé indique la date 1999 sur l’axe des abscisses.

3.2.1 Variation de la date initiale des intégrations

La figure 3.3 représente la perturbation induite par Ceres obtenue à partir d’intégrations ayant pour point de départ l’année 1999. La figure a donc été obtenue de la même manière que la figure 3.1 à l’exception du fait que les intégrations avec et sans astéroïdes partent toutes les deux de 1999 et non plus de 2000. Les conditions initiales des planètes et de Ceres pour l’année 1999, nécessaires au tracé, proviennent de la solution INPOP08. On observe que la perturbation estimée pour Ceres à partir de 1999 atteint 22 km entre 1960 et 2020 tandis que sur le tracé de la figure 3.1 l’effet de Ceres ne dépassait pas 10 km.

Le phénomène peut être expliqué en s’appuyant sur différents résultats du chapitre 2. Selon (2.17), la perturbation d’un élément osculateur σ quelconque s’écrit

$$\Delta\sigma = \int_0^t \frac{d\Delta\sigma}{dt}(\tau) d\tau$$

où la dérivée de $\Delta\sigma$ est une fonction quasi-périodique. Si σ représente la longitude moyenne, la dérivée de $\Delta\sigma$ contient un terme constant (on écarte ici le cas résonant). Avec cette relation on peut écrire pour tout élément osculateur différent de la longitude moyenne, l’égalité suivante

$$\Delta\sigma^{1999} = \Delta\sigma^{2000} - \Delta\sigma_{(1999)}^{2000} \quad (3.2)$$

Ici les exposants indiquent l’instant initial servant à calculer les perturbations et $\Delta\sigma_{(1999)}^{2000}$ représente la valeur de $\Delta\sigma^{2000}$ à la date 1999. Le terme constant de $\Delta\lambda$ fait que l’expression pour la longitude moyenne s’écrit

$$\begin{aligned} \Delta\lambda^{1999} &= \Delta\lambda^{2000} - \Delta\lambda_{(1999)}^{2000} - \Delta n_{(1999)}^{2000} \times (t - t_{(1999)}) \\ &= \Delta\lambda^{2000} - \Delta\lambda_{(1999)}^{2000} + \frac{3n}{2a} \Delta a_{(1999)}^{2000} \times (t - t_{(1999)}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ci-dessus, $t_{(1999)}$ représente la date 1999. Ainsi en 1999, l’expression de $\Delta\lambda^{1999}$ est bien nulle. En estimant numériquement les évolutions $\Delta\sigma^{2000}$, on peut utiliser le développement (2.21) et déduire avec (3.2) et (3.3) l’évolution de $\Delta\sigma^{1999}$. Celle-ci est représentée sur la figure 3.3 où elle suit exactement le tracé de son analogue numérique.

La différence d’amplitude induite par le choix de l’année 1999 comme point de départ est due surtout au terme $\Delta n_{(1999)}^{2000} \times (t - t_{(1999)})$. En examinant en particulier l’évolution de la perturbation

du demi-grand axe de Mars sur la figure 2.1, on voit que le décalage vers 1999 induit un décalage constant $\Delta a_{(1999)}^{2000}$ de presque 50×10^{-11} UA. Cette valeur double la pente de la longitude moyenne et contribue ainsi à doubler l'amplitude totale de la perturbation.

La figure 3.4 représente l'évolution de l'amplitude des perturbations induites sur la distance Terre-Mars en fonction du choix de la date de départ des intégrations avec et sans Ceres. Le tracé a été obtenu en appliquant les formules (3.2) et (3.3). Il apparaît que l'amplitude de la perturbation est en général très sensible à la date de départ. En effet, le rapport des amplitudes estimées à deux dates différentes peut atteindre jusqu'à un facteur 10. On note que les points du tracé sont espacés d'une année. Le graphe est donc très sous-échantillonné par rapport aux fréquences intervenant dans les perturbations des demi-grands axes de Terre et Mars des figures 2.4 et 2.1.

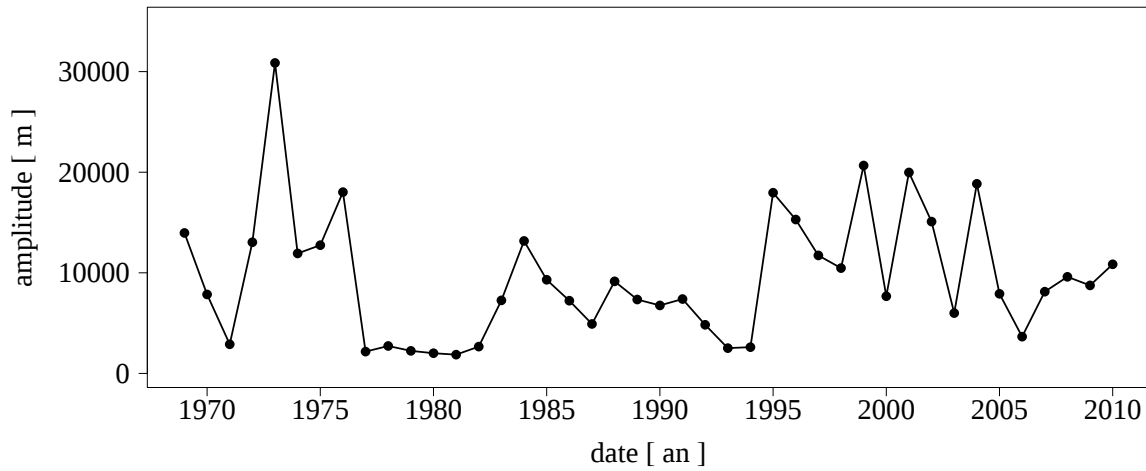


FIGURE 3.4 – Evolution de l'amplitude des perturbations induites par Ceres entre 1960 et 2020 sur la distance Terre-Mars en fonction du choix de la date initiale.

3.2.2 Compensation avec les conditions initiales

Au cours de la construction d'une éphéméride planétaire, les conditions initiales des planètes sont redéterminées dans le cadre de l'ajustement du modèle dynamique aux observations. Cette opération est capable d'absorber une grande partie des perturbations induites par les astéroïdes et doit donc être prise en compte lors de l'estimation des perturbations.

En terme de distance Terre-Mars, le changement des conditions initiales de la Terre et de Mars se traduit par une perturbation ΔD dont l'expression s'obtient à partir du développement (2.21). Ainsi, en notant respectivement avec les indices 1 et 2 les éléments de la Terre et de Mars, la perturbation induite sur la distance Terre-Mars par un changement de conditions initiales s'exprime comme

$$\begin{aligned} \Delta D = & \frac{\partial D}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial D}{\partial \lambda_1} \left(\Delta \lambda_1 - \frac{3n_1}{2a_1} \Delta a_1 \times t \right) + \frac{\partial D}{\partial e_1} \Delta e_1 + \frac{\partial D}{\partial \varpi_1} \Delta \varpi_1 + \frac{\partial D}{\partial I_1} \Delta I_1 + \frac{\partial D}{\partial \Omega_1} \Delta \Omega_1 \\ & + \frac{\partial D}{\partial a_2} \Delta a_2 + \frac{\partial D}{\partial \lambda_2} \left(\Delta \lambda_2 - \frac{3n_2}{2a_2} \Delta a_2 \times t \right) + \frac{\partial D}{\partial e_2} \Delta e_2 + \frac{\partial D}{\partial \varpi_2} \Delta \varpi_2 + \frac{\partial D}{\partial I_2} \Delta I_2 + \frac{\partial D}{\partial \Omega_2} \Delta \Omega_2 \end{aligned}$$

Les $\Delta \sigma$ correspondent ici à des constantes dont les valeurs sont déterminées par le changement des conditions initiales. Les termes linéaires en temps du développement proviennent du fait

qu'un changement constant de demi-grand axe d'une planète induit une évolution linéaire de la longitude moyenne.

L'ajustement des demi-grands axes des deux planètes permet en particulier d'absorber dans une perturbation induite par un astéroïde les dérives linéaires en longitudes moyennes. Comme on a déjà pu le voir, ces dérives représentent souvent une très grande partie de la perturbation. La figure 3.5 montre que l'ajustement des conditions initiales permet en pratique de diminuer fortement l'amplitude d'une perturbation. Le tracé est obtenu en ajustant les amplitudes des 12 fonctions

$$\frac{\partial D}{\partial a_1} - \frac{3n_1}{2a_1} \frac{\partial D}{\partial \lambda_1} \times t, \quad \frac{\partial D}{\partial \lambda_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial D}{\partial \Omega_1}, \quad \frac{\partial D}{\partial a_2} - \frac{3n_2}{2a_2} \frac{\partial D}{\partial \lambda_2} \times t, \quad \frac{\partial D}{\partial \lambda_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial D}{\partial \Omega_2} \quad (3.4)$$

de sorte à minimiser par moindres carrés la perturbation de la figure 3.1. Les 12 fonctions s'obtiennent directement à partir des résultats de la section 2.3.2. Après ajustement, l'effet induit par Ceres atteint seulement 2 km contrairement aux 9 km estimés dans le tableau 3.1.

Les opérations représentées par les équations (3.2) et (3.3) peuvent être reproduites par l'ajustement des conditions initiales. Par conséquent quel que soit l'instant initial choisi pour estimer la perturbation, l'ajustement des conditions initiales des planètes conduit systématiquement à la même fonction. Les amplitudes des perturbations les plus importantes induites entre 1960 et 2020 sur la distance Terre-Mars et calculées après ajustement des conditions initiales sont disponibles dans l'annexe 9.4.

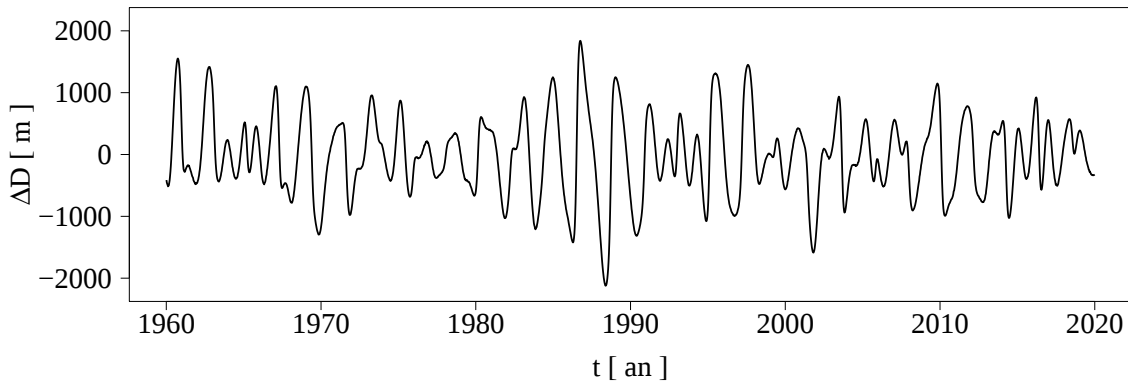


FIGURE 3.5 – Perturbation de la distance Terre-Mars induite par Ceres après ajustement des conditions initiales de la Terre et de Mars.

3.2.3 Restriction de l'intervalle d'ajustement et pondération

La figure 3.5 suggère que la perturbation effective induite par Ceres est de l'ordre de 2 km. On dispose en pratique des mesures de la distance Terre-Mars uniquement sur les intervalles 1976-1983 et 1999-2010 (voir Fienga *et al.*, 2008). Ainsi pour estimer de la manière la plus réaliste l'amplitude des perturbations détectables avec INPOP, il faut se restreindre à ces deux intervalles. Sur les deux intervalles les données ont des précisions de 20 m et 2 m respectivement, on introduit donc une pondération correspondante à ces précisions lors de l'ajustement des conditions initiales.

On note par $\mathbf{X}$, le vecteur représentant l'évolution de la perturbation ΔD obtenue simplement en comparant deux intégrations avec et sans astéroïdes sur l'intervalle 1960-2020. D'après la section 3.1.1, le pas de sortie des intégrations est de 10 jours. Ainsi en pratique $\mathbf{X}$ possède environ 2300 composantes. Soit M la matrice dont les colonnes correspondent aux 12 fonctions données par (3.4). Enfin, soit $\boldsymbol{\beta}$ le vecteur des 12 conditions initiales $\Delta\sigma$ à ajuster. On rappelle qu'un

ajustement par moindres carrés consiste à chercher les composantes de β de sorte à minimiser la norme euclidienne

$$\| \mathbf{X} - M\beta \|_2$$

La solution du problème est donnée par la relation (voir par exemple Aster *et al.*, 2005) :

$$\beta = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{X}$$

Pour tenir compte des intervalles et des précisions des données, on définit un vecteur de pondération ayant autant de composantes que $\mathbf{X}$. Le vecteur est nul sauf sur les intervalles 1976-1983 et 1999-2010 où il vaut respectivement 1/20 et 1/2. En notant par P la matrice diagonale dont les éléments non nuls sont donnés par le vecteur de pondération, l'ajustement pondéré consiste à chercher β de sorte à minimiser

$$\| P\mathbf{X} - PM\beta \|_2$$

La solution s'obtient alors avec

$$\beta = (M^T P^2 M)^{-1} M^T P^2 \mathbf{X}$$

Sur la figure 3.6, on affiche la perturbation de la distance Terre-Mars induite par Ceres après ajustement pondéré des conditions initiales sur les deux intervalles. L'effet atteint un peu plus de 1 km. Les amplitudes des perturbations induites entre 1999 et 2010, après ajustement pondéré sur les deux intervalles, sont représentées par le premier histogramme de la figure 3.7. Tous les astéroïdes ayant une amplitude supérieure à 20 m sur l'intervalle 1976-1983 ont une amplitude supérieure à 2 m sur 1999-2010. L'histogramme donne ainsi une idée du nombre d'astéroïdes pouvant induire un effet détectable sur l'ensemble des mesures de la distance Terre-Mars. Le tableau 3.2 rassemble les amplitudes des perturbations les plus importantes. De manière générale le rapport entre l'amplitude d'une perturbation et l'incertitude des données est systématiquement plus élevé sur l'intervalle moderne que sur l'intervalle Viking. Parmi les 27142 astéroïdes seulement 710 font exception à cette règle. Les données modernes comme MGS et MO ont une importance dominante par rapport aux données Viking plus anciennes.

Le nombre total d'objets induisant un effet supérieur à 2 m sur l'intervalle moderne s'élève à 156 (parmi ces astéroïdes, 94 ont un effet supérieur à 20 m sur l'intervalle Viking). En comparant l'histogramme avec celui de la figure 3.2, on note que le nombre d'astéroïdes induisant une perturbation dont l'amplitude est supérieure à l'ordre du mètre a baissé d'environ un ordre de grandeur.

3.2.4 Incertitudes sur les masses

Une perturbation de la distance Terre-Mars ΔD dépend de la masse de l'astéroïde perturbateur. En considérant le développement de la perturbation en puissance de cette masse, la dépendance est à priori polynomiale de degré minimum égal à 1. Au chapitre précédent on a montré qu'un modèle analytique développé au premier ordre en masses représentait correctement les perturbations obtenues numériquement (voir par exemple la figure 2.9). Il est ainsi raisonnable de considérer que les perturbations discutées dans les sections précédentes sont en pratique proportionnelles aux masses des astéroïdes. Pour illustrer cette situation, on compare la perturbation ΔD induite par Ceres avec son analogue obtenu avec une masse de Ceres 10 fois plus grande. Sur l'intervalle 1960-2020, la différence entre la deuxième perturbation divisée par 10 et la première ne dépasse pas 12 millimètres. Si l'expérience est répétée avec une masse de Ceres 1000 fois plus grande, la différence des deux perturbations est de l'ordre du mètre.

La proportionnalité des perturbations et des masses des astéroïdes fait que les incertitudes des amplitudes de l'histogramme 3.7 sont les mêmes que les incertitudes sur les masses des astéroïdes

TABLE 3.2 – Perturbations les plus importantes après ajustement des conditions initiales sur les intervalles 1976-1983 et 1999-2010. Le classement est déterminé par l'intervalle moderne.

astéroïde	ampli. [m] 1976-1983	ampli. [m] 1999-2010	astéroïde	ampli. [m] 1976-1983	ampli. [m] 1999-2010
4 Vesta	7252	1199	532 Herculina	186	33
1 Ceres	1376	794	9 Metis	259	30
2 Pallas	1791	146	7 Iris	283	28
324 Bamberga	1223	94	29 Amphitrite	123	27
10 Hygiea	503	77	24 Themis	167	26
19 Fortuna	386	59	31 Euphrosyne	138	23
3 Juno	338	56	13 Egeria	41	22
704 Interamnia	100	34	15 Eunomia	59	22

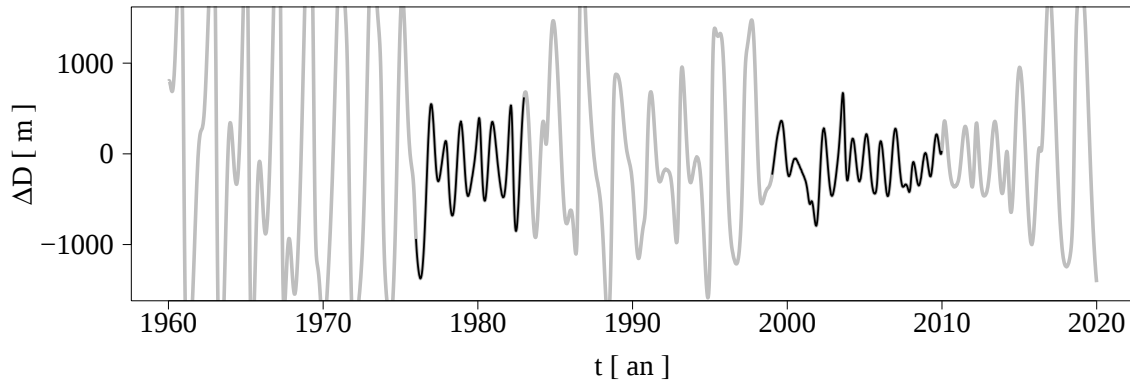


FIGURE 3.6 – Perturbation de la distance Terre-Mars induite par Ceres après ajustement pondéré des conditions initiales de la Terre et de Mars sur les deux intervalles 1976-1983 et 1999-2010. En gris, évolution de la perturbation au delà des intervalles d'ajustement.

correspondants. On adopte pour les 27142 astéroïdes, les incertitudes conservatives du tableau 1.3. Ainsi les astéroïdes des trois catégories, I, II et III peuvent avoir leurs masses sur-estimées ou sous-estimées par des facteurs 2, 5, et 16 respectivement. En considérant que les masses des astéroïdes sont à leurs bornes supérieures, jusqu'à 367 objets induisent une perturbation dont l'amplitude dépasse 2 m entre 1999 et 2010. Seulement 2 astéroïdes, induisent un effet supérieur à 20 m sur l'intervalle Viking mais ne sont pas compris dans les 367 individus. Leurs amplitudes sur l'intervalle moderne sont néanmoins proches de 2 m. Si les masses des astéroïdes sont fixées à leurs valeurs inférieures, il reste 71 objets dont l'effet est supérieur à 2 m sur l'intervalle des données modernes. Les distributions d'amplitudes au sein des catégories d'incertitude sont représentées sur la figure 3.7. Comme pour le premier histogramme, il s'agit d'amplitudes calculées sur l'intervalle des données modernes pour les masses standards. Le fait de prendre en compte les incertitudes consiste à décaler les histogrammes des trois catégories au plus de 3, 7 et 12 graduations respectivement. On note qu'avec une masse standard, aucun astéroïde de la catégorie III n'a d'effet significatif sur la distance Terre-Mars.

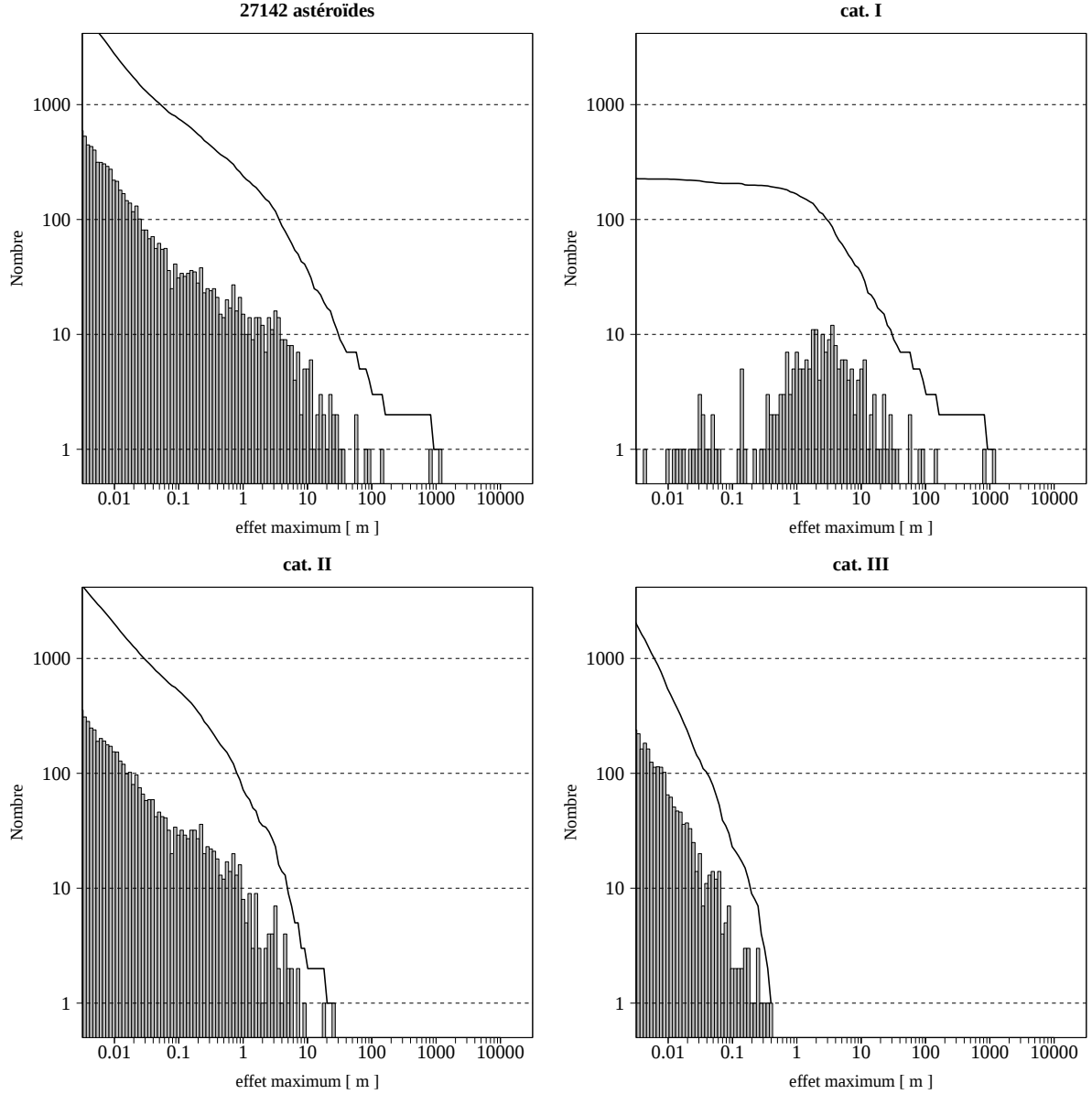


FIGURE 3.7 – Distributions des amplitudes obtenues sur l’intervalle 1999-2010 après ajustement des conditions initiales avec pondération. L’histogramme en haut à gauche est basé sur l’ensemble des 27142 astéroïdes. Les histogrammes restants ne sont tracés que pour les membres des différentes catégories d’incertitudes de masse (voir section 3.2.4). Les traits noirs donnent le nombre d’objets dont les perturbations se situent au dessus du seuil indiqué par l’abscisse.

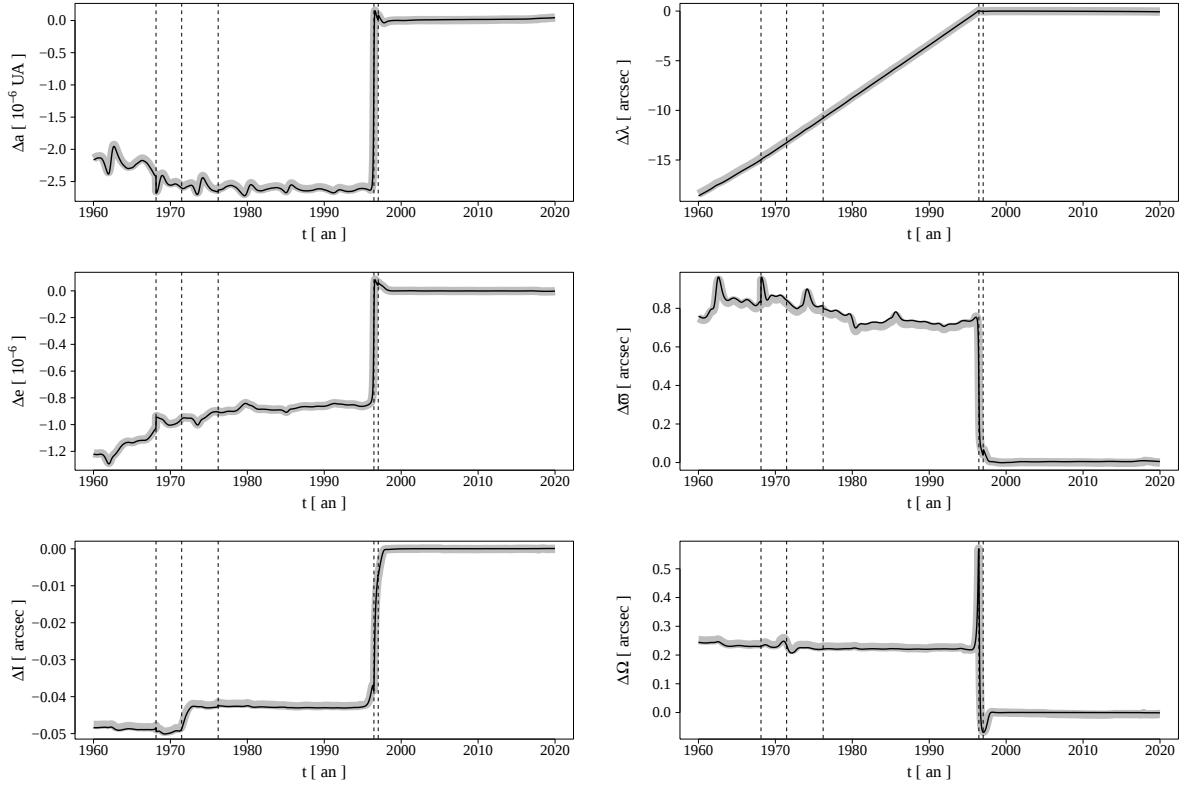


FIGURE 3.8 – Perturbations des éléments osculateurs de Thetis sous l’effet des interactions avec les autres astéroïdes. En gris, effet obtenu en comparant deux intégrations avec 367 astéroïdes en interaction. En noir, effet obtenu avec uniquement Thetis et les astéroïdes du tableau 3.4. Les traits verticaux marquent les dates des rencontres proches données par le tableau.

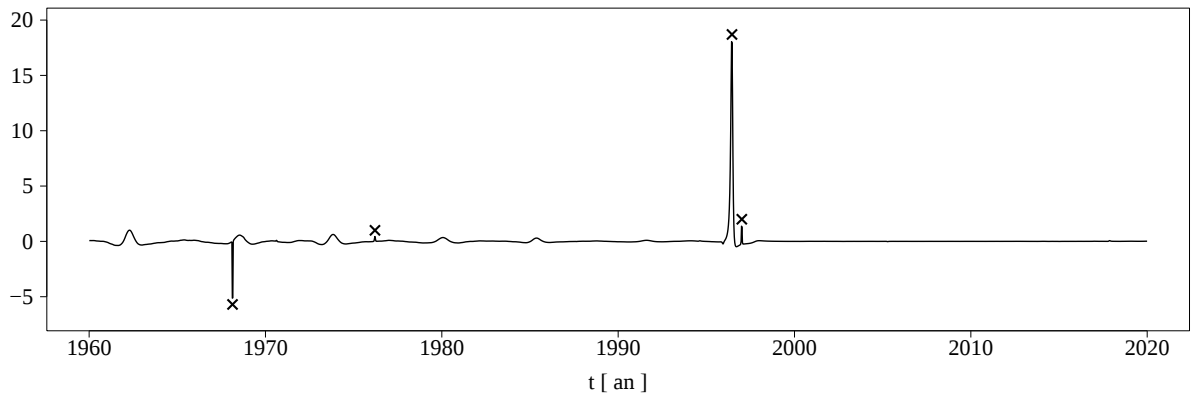


FIGURE 3.9 – Dérivée, en unités arbitraires, de la perturbation en demi-grand axe de Thetis. Les croix marquent les 4 pics visibles aux dates 1968.131, 1976.209, 1996.455 et 1997.012.

3.3 Interactions mutuelles

Les perturbations des astéroïdes se basent à chaque fois sur l'évolution d'un seul astéroïde en absence des autres. Par conséquent les perturbations de la distance Terre-Mars sont obtenues en négligeant les éventuelles interactions entre astéroïdes. L'objectif de cette section est de montrer par des arguments numériques que les effets induits par les interactions entre astéroïdes sur la distance Terre-Mars sont négligeables.

3.3.1 Perturbations des orbites

Dans INPOP il est possible de tenir compte ou non des interactions entre astéroïdes. D'ailleurs le modèle dynamique de INPOP08 contient 303 astéroïdes dont seulement 5 interagissent avec l'ensemble des autres astéroïdes. Le reste des 303 objets interagit uniquement avec les planètes (voir section 1.1.1). Pour estimer la variation des orbites des astéroïdes sous l'effet des interactions mutuelles, on compare une intégration du Système solaire où les interactions astéroïde-astéroïde sont prises en compte avec une intégration où elles ne le sont pas. Les astéroïdes intégrés sont les 367 objets déterminés précédemment comme pouvant induire un effet significatif sur la distance Terre-Mars. Il est difficile de considérer l'ensemble des 27142 objets. En effet, environ une heure est nécessaire pour intégrer entre 1960 et 2020 les 367 astéroïdes en interaction mutuelle. Sachant que le temps d'intégration évolue comme le carré du nombre d'objets en interaction, l'intégration des 27142 astéroïdes prendrait plusieurs mois.

En comparant les évolutions des 367 objets dans les intégrations avec interactions et sans, on obtient les perturbations induites sur les éléments orbitaux de chacun des astéroïdes. Le tableau 3.3 fournit les amplitudes maximales et moyennes des perturbations calculées sur l'ensemble des 367 astéroïdes. Comme pour les perturbations des distances Terre-Mars, ces amplitudes correspondent aux maxima des perturbations entre 1960 et 2020. Dans la section 1.2.2, on a estimé l'incertitude des conditions initiales des astéroïdes à environ 1 arcsec. L'estimation a été obtenue en propageant les incertitudes sur la longitude moyenne fournie par le catalogue Astorb depuis septembre 2009 jusqu'à l'époque J2000. En propageant l'incertitude jusqu'en 1960, on obtient une incertitude de l'ordre de la dizaine de secondes d'arc. Cette valeur correspond à l'amplitude maximum du tableau 3.3, par conséquent les perturbations mutuelles ne semblent pas introduire de variations dans les orbites des astéroïdes beaucoup plus importantes que les incertitudes provenant de toute manière du catalogue Astorb.

TABLE 3.3 – Amplitudes des perturbations provenant des interactions mutuelles astéroïde-astéroïde. Le tableau donne les valeurs maximales et moyennes des distributions d'amplitudes sur l'ensemble des 367 astéroïdes.

	Δa [UA]	$\Delta \lambda$ [arcsec]	Δe []	$\Delta \varpi$ [arcsec]	ΔI [arcsec]	$\Delta \Omega$ [arcsec]
max.	2.693×10^{-6}	18.422	1.286×10^{-6}	1.598	0.086	2.024
moy.	0.226×10^{-6}	0.581	0.056×10^{-6}	0.120	0.005	0.064

3.3.2 Etude d'un exemple : 17 Thetis

Parmi les 367 objets dont on a pu estimer les perturbations d'orbites, l'astéroïde 17 Thetis est le plus touché en terme de perturbation de la longitude moyenne. La figure 3.8 représente les perturbations de Thetis obtenues en comparant son orbite dans les deux intégrations des 367 astéroïdes avec et sans interactions mutuelles. On observe un certain nombre de discontinuités

sur les différentes évolutions. La figure 3.9 représente la dérivée numérique de la perturbation en demi-grand axe. Les 4 pics correspondent à 4 rencontres proches de Thetis avec d'autres astéroïdes.

A chacun des 366 astéroïdes, on peut attribuer la date pour laquelle la distance astéroïde-Thetis est minimum. Pour une meilleure estimation des dates, le pas de sortie de INPOP a été exceptionnellement fixé à 1 jour au lieu de 10 jours. En comparant ces dates avec les dates des pics de la figure 3.9, il est possible de constituer la liste des principaux responsables des perturbations de Thetis. Le tableau 3.4 rassemble ces astéroïdes avec les dates des rencontres proches et les distances d'approche minimum. Le tableau contient également Ceres qui ne génère pas de discontinuité en demi-grand axe mais un saut en inclinaison. Ce saut est clairement visible vers 1976. L'identification des astéroïdes peut être confirmée en s'appuyant sur les astéroïdes du tableau pour retrouver les perturbations de Thetis. Les évolutions obtenues en intégrant Thetis uniquement en présence des 5 astéroïdes sont affichées en gris sur la figure 3.8, elles se superposent bien avec les perturbations obtenues à partir des 367 objets.

Les quelques bosses non associées à des rencontres proches de la figure proviennent de la rencontre principale de Thetis avec Vesta. La perturbation induite par cette rencontre est amplifiée environ tous les 6 ans, à chaque fois que Thetis se rapproche de Jupiter.

Le cas de Thetis illustre le fait que les perturbations d'une orbite dues aux interactions mutuelles entre astéroïdes s'expliquent par une série de rencontre proches. L'efficacité de ces rencontres est à priori difficile de prédire car elle dépend de la masse de l'astéroïde perturbateur et de la configuration de la rencontre.

TABLE 3.4 – Astéroïdes exerçant une perturbation significative sur Thetis. Le tableau donne la distance minimale d'approche avec Thetis ainsi que la date correspondante.

astéroïde	11 Parthenope	1 Ceres	29 Amphitrite	4 Vesta	89 Julia
distance min. [UA]	0.002	0.306	0.019	0.019	0.102
date	1968.131	1971.466	1976.209	1996.455	1997.012

3.3.3 Impact sur la distance Terre-Mars

La perturbation de l'orbite d'un astéroïde due aux rencontres proches avec d'autres objets se traduit par un changement dans la perturbation ΔD induite par l'astéroïde sur la distance Terre-Mars. Les interactions astéroïde-astéroïde interviennent dans ΔD au moins à l'ordre deux en masses. Par conséquent on peut s'attendre à ce que l'effet soit négligeable. Dans le cas de Thetis étudié précédemment, les interactions avec les 5 astéroïdes du tableau 3.4 modifient le ΔD induit par Thetis de quelques millimètres.

Pour un astéroïde quelconque, l'effet des interactions mutuelles s'obtient en comparant le ΔD de la section 3.1.1 avec le ΔD calculé à partir de deux intégrations de respectivement 367 et 366 astéroïdes. Ainsi l'évaluation pour chacun des 366 objets, autres que Thetis, de l'impact des interactions mutuelles nécessite à priori 366 intégrations de 366 astéroïdes en interactions. Afin d'éviter des temps de calcul considérables, on propose de procéder différemment. On note par ΔD_{tot} la perturbation induite sur la distance Terre-Mars par l'ensemble de 367 objets en interaction. Les perturbations individuelles des 367 astéroïdes obtenues dans la section 3.1.1 et les masses des astéroïdes sont par la suite notées $\Delta D_1, \dots, \Delta D_{367}$ et $M_1, \dots, M_{367}$. Le développement

à l'ordre 2 en masses des astéroïdes de la perturbation D_{tot} s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta D_{\text{tot}}(M_1, \dots, M_{367}) &= M_1 \times \partial_1 \Delta D_{\text{tot}} + \dots + M_{367} \times \partial_{367} \Delta D_{\text{tot}} \\ &+ M_1^2 \times \partial_{1,1} \Delta D_{\text{tot}} + \dots + M_1 M_{367} \times \partial_{1,367} \Delta D_{\text{tot}} \\ &+ \dots + M_{367} M_1 \times \partial_{1,367} \Delta D_{\text{tot}} + \dots + M_{367}^2 \times \partial_{367,367} \Delta D_{\text{tot}}\end{aligned}$$

où pour i, j entiers on a

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial M_i} \quad , \quad \partial_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial M_i \partial M_j}$$

Ces dérivées sont évaluées pour des masses d'astéroïdes nulles. Dans la section 3.2.4, on a discuté l'hypothèse que les perturbations individuelles $\Delta D_1, \dots, \Delta D_{367}$ étaient approximativement proportionnelles aux masses. Cette hypothèse permet d'écrire

$$\begin{aligned}\Delta D_{\text{tot}}(M_1, \dots, M_{367}) &\sim \Delta D_1 + \dots + \Delta D_{367} \\ &+ M_1 M_2 \times \partial_{1,2} \Delta D_{\text{tot}} + \dots + M_1 M_{367} \times \partial_{1,367} \Delta D_{\text{tot}} \\ &+ \dots + M_{367} M_1 \times \partial_{367,1} \Delta D_{\text{tot}} + \dots + M_{367} M_{366} \times \partial_{367,366} \Delta D_{\text{tot}}\end{aligned}$$

Dans le cas où les interactions entre astéroïdes sont négligeables, on a tout simplement

$$\Delta D_{\text{tot}}(M_1, \dots, M_{367}) \sim \Delta D_1 + \dots + \Delta D_{367} \quad (3.5)$$

La figure 3.10 représente la différence entre la perturbation ΔD_{tot} obtenue numériquement en intégrant simultanément les 367 astéroïdes et son analogue obtenu avec la formule (3.5). En ne tenant pas compte des interactions mutuelles, la différence correspond à du bruit qui atteint sur l'intervalle 1960-2020 quelques centimètres. En tenant compte des interactions mutuelles, l'erreur commise avec l'approximation (3.5) correspond à un signal dont l'amplitude reste du même ordre de grandeur. Il apparaît ainsi que les perturbations individuelles sont proportionnelles aux masses et que les interactions mutuelles sont négligeables.

Notons que ce résultat ne concerne que les 367 astéroïdes pouvant avoir un effet significatif sur la distance Terre-Mars. Il est a priori possible qu'un astéroïde sans effet sur la distance Terre-Mars puisse modifier significativement les orbites des 367 astéroïdes. De même un astéroïde sans importance pour la distance Terre-Mars pourrait devenir un perturbateur significatif, suite à une rencontre proche. Ces possibilités n'ont pas été écartées, elles sont néanmoins peu probables.

La figure 3.11 représente les mêmes évolutions que la figure 3.10, mais obtenues en considérant à la place des 367 astéroïdes seulement les 4 perturbateurs les plus importants de la distance Terre-Mars : Ceres, Pallas, Vesta et Bamberg. En faisant abstraction du bruit, les deux figures sont similaires. Les interactions mutuelles dominantes, en terme de l'effet sur la distance Terre-Mars, sont les interactions entre les plus gros perturbateurs et ne sont donc pas dues aux rencontres proches. La figure 3.11 montre que même sans interactions mutuelles, la formule (3.5) ne représente pas parfaitement la perturbation totale. Même sans interactions directes, les astéroïdes interagissent en perturbant le Soleil ou les autres planètes. En terme d'effet sur la distance Terre-Mars, ces interactions indirectes sont d'ordre 3 en masses. Une exception est l'interaction faisant intervenir le Soleil qui est d'ordre 2 en masses, donc du même ordre qu'une interaction directe.

3.4 Perturbations des distances Terre-planètes

On étend l'étude des perturbations induites individuellement par les astéroïdes sur l'ensemble des distances Terre-planètes.

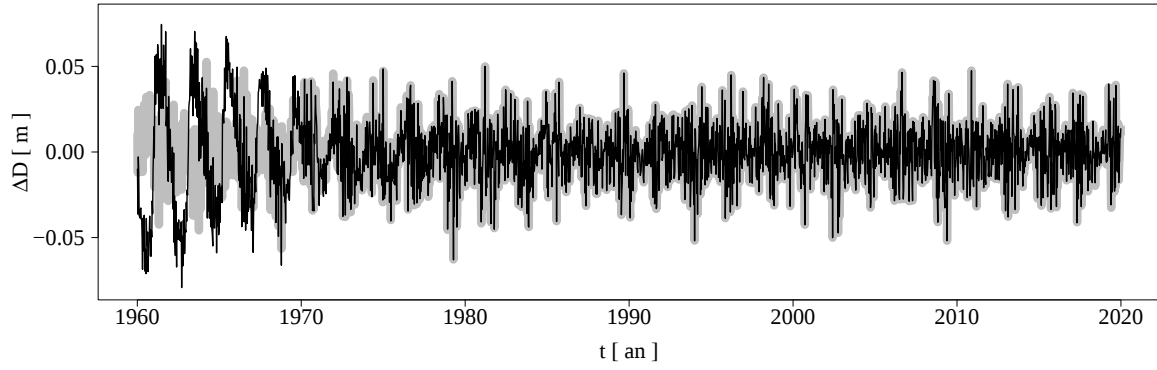


FIGURE 3.10 – Comparaison entre la perturbation sur la distance Terre-Mars ΔD_{tot} obtenue en intégrant simultanément 367 astéroïdes et la perturbation obtenue en sommant les $\Delta D_1, \dots, \Delta D_{367}$ individuels. En gris, l'intégration numérique ne tient pas compte des interactions entre astéroïdes. En noir, les interactions sont prises en compte.

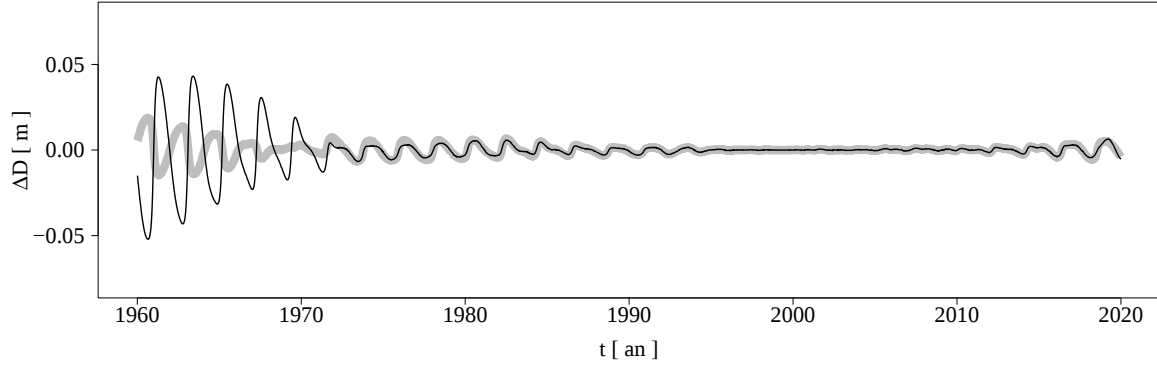


FIGURE 3.11 – Comparaison entre la perturbation sur la distance Terre-Mars ΔD_{tot} obtenue en intégrant simultanément 4 astéroïdes (Ceres, Pallas, Vesta, Bamberga) et la perturbation obtenue en sommant les $\Delta D_1, \dots, \Delta D_4$ individuels. En gris, l'intégration numérique ne tient pas compte des interactions entre astéroïdes. En noir, les interactions sont prises en compte.

3.4.1 Effets entre 1960 et 2020

Les perturbations induites entre 1960 et 2020 sur les distances Terre-planètes sont estimées pour chacun des 27142 astéroïdes. On détermine les amplitudes des perturbations après ajustement des 12 conditions initiales de la Terre et de la planète. Les amplitudes ainsi obtenues servent à compiler pour chaque planète, les listes des astéroïdes les plus perturbateurs (voir annexe 9.4).

On observe que les perturbations induites sur les distances Terre-Mercure et Terre-Vénus sont faibles. Seulement une poignée d'objets a un effet supérieur à quelques mètres. En terme de distance Terre-Mars, 87 astéroïdes induisent un effet supérieur à 20 m. Pour Jupiter le nombre d'objets dont l'amplitude dépasserait cette limite diminue à 53 objets. Le minimum est atteint pour Saturne où seulement 10 amplitudes sont supérieures à 20 m. Pour Uranus et Neptune, le nombre d'astéroïdes exerçant des effets supérieurs à 20 m augmente à environ 30. La majorité des perturbateurs sont alors des objets trans-Neptuniens.

Il est intéressant de noter, qu'à part Ceres, Pallas et Vesta, les astéroïdes 18 Melpomene et 654 Zelinda apparaissent dans tous les tableaux de l'annexe 9.4. Ceci est dû au fait que Melpomene ainsi que Zelinda perturbent significativement la Terre, effet qui se retrouve par la suite dans

toutes les perturbations Terre-planète. On attribue la perturbation importante de la Terre aux demi-grands axes des deux astéroïdes proches de la résonance 2 : 7 en moyen mouvement.

3.4.2 Restriction de l'intervalle d'ajustement et pondération

Pour déterminer quels astéroïdes ont un effet significatif sur les données disponibles dans INPOP, on estime les perturbations induites non plus entre 1960 et 2020 mais sur des intervalles de temps restreints et adaptés aux données disponibles sur chaque planète. Comme dans la section 3.2.3, on considère l'ensemble des intervalles simultanément. En un premier temps, les perturbations sur les différentes planètes seront par contre estimées séparément.

Les planètes considérées une à une

Précédemment, on a défini deux intervalles pour la distance Terre-Mars correspondant respectivement aux données Viking et aux données modernes. De manière analogue on définit des intervalles pour les autres planètes à partir des dates fournies par Fienga *et al.* (2008). Les perturbations induites par les astéroïdes sur les distances Terre-planète sont ensuite estimées en ajustant avec pondérations les conditions initiales de la Terre et de la planète concernée. Le tableau 3.5 résume les définitions des intervalles et les pondérations déterminées à partir des incertitudes des données. Les valeurs du tableau peuvent être comparées avec les intervalles et incertitudes de la figure 1.2.

TABLE 3.5 – Intervalles correspondant aux données disponibles dans INPOP et pondérations déterminées par les incertitudes des données.

planètes	données	intervalle(s)	pondération
Mercure	radar	1971.3 - 1974.5	1/840
		1978.3 - 1982.5	
		1986.9 - 1997.6	
Vénus	radar	1966.0 - 1977.3	1/1400
		1980.3 - 1980.6	
		1988.4 - 1990.1	
	VEX	2006.3 - 2010.0	1/5
Mars	Viking	1976.0 - 1983.0	1/20
	MGS/MO/MEX	1999.0 - 2010.0	1/2
Saturne	Cassini	2004.5 - 2007.0	1/22

Les effets induits par les astéroïdes sur les différentes données, en considérant les planètes une à une, sont négligeables à l'exception de la distance Terre-Mars. Aucun astéroïde n'induit de perturbation supérieure à 840 m sur la distance Terre-Mercure. Ceci n'a rien de surprenant si on consulte les amplitudes de l'annexe 9.4 estimées entre 1960 et 2020. De la même manière en terme de distance Terre-Vénus aucun astéroïde ne perturbe les données radar. Les seuls objets à induire un effet supérieur aux incertitudes des données VEX sont Ceres, Pallas et Vesta. Sur Mars on retrouve le résultat de la section 3.2.3. Ainsi 156 astéroïdes induisent un effet au dessus de 2 m sur les données modernes. Parmi les 156 objets, 94 induisent un effet supérieur à 20 m sur les

données Viking. Aucun astéroïde ne perturbe de manière significative la distance Terre-Saturne sur l'intervalle de temps des données Cassini.

Ajustement global

Une estimation plus réaliste des effets sur les différentes données est obtenue en considérant simultanément les perturbations sur l'ensemble des planètes. Ainsi pour chaque astéroïde on ajuste les conditions initiales des 5 planètes de sorte à réduire la perturbation induite sur l'ensemble des intervalles et des planètes en adoptant les pondérations du tableau 3.5. Les résultats de ces ajustements sont résumés dans le tableau 3.6 qui donne pour chaque type de données, le nombre d'astéroïdes ayant un effet supérieur à l'amplitude du bruit. Le tableau contient en plus des estimations obtenues pour des masses d'astéroïdes standards, les estimations correspondant à des masses minimales et maximales.

TABLE 3.6 – Nombre d'astéroïdes ayant un effet significatif sur les différentes données. Les nombres max. et min. correspondent respectivement à des perturbations obtenues pour des masses d'astéroïdes maximales et minimales, la première ligne correspond aux masses standards.

données	radar (Mercure)	radar (Vénus)	VEX	Viking	MGS/MO/MEX	Cassini
nombre d'astéroïdes	0	0	17	94	157	3
nombre max.	2	0	44	233	367	7
nombre min.	0	0	7	39	71	2

On observe que les effets des astéroïdes restent modestes sur l'ensemble des distances Terre-planète à l'exception de la distance Terre-Mars. Sur celle-ci, on retrouve quasiment les mêmes résultats que dans les sections 3.2.3 et 3.2.4. Tout astéroïde ayant un effet significatif sur une des planètes, est inclus dans les astéroïdes ayant un effet sur les données modernes Terre-Mars.

L'ajustement simultané de toutes les données ne modifie que de très peu les amplitudes des perturbations induites sur Mars. On vérifie que les différences relatives avec les amplitudes de la section 3.2 ne dépassent pas 5% et 2% sur les données Viking et les données modernes respectivement. Ainsi on peut considérer que les histogrammes de la figure 3.7 représentent aussi les perturbations induites sur Mars dans un ajustement global.

La liste des 157 astéroïdes ayant un effet significatif sur Mars est disponible dans l'annexe 9.5. Chacun des 157 astéroïdes possèdent un demi-grand axe compris entre 2.1 UA et 3.6 UA et une masse de catégorie I ou II. Les 367 astéroïdes pouvant induire un effet sur les données modernes, si leurs masses sont prises à leurs bornes supérieures, ont leurs demi-grands axes compris entre 2.1 UA et 5.3 UA. Ainsi parmi les astéroïdes pouvant avoir un effet significatif, on ne retrouve pas d'objets trans-Neptuniens ni d'objets géocroiseurs.

Depuis le début de ce chapitre, on travaille avec des perturbations estimées à des intervalles réguliers de 10 jours. En réalité, les données utilisées par INPOP ne sont pas réparties régulièrement. La situation est illustrée par la figure 3.12 qui représente la distribution des données MEX exploitées dans INPOP08. La lacune au milieu des données correspond à une conjonction solaire (Fienga *et al.*, 2009). Même sans tenir compte de cette lacune, la distribution des données n'est pas uniforme. Le nombre de points d'observations est également très différents entre les différentes missions. Par exemple la mission Cassini a fourni une trentaine de points tandis que sur presque le même intervalle de temps les données MEX et VEX en fournissent plusieurs milliers (voir Fienga *et al.*, 2009). Ces inhomogénéités dans les distributions des observations

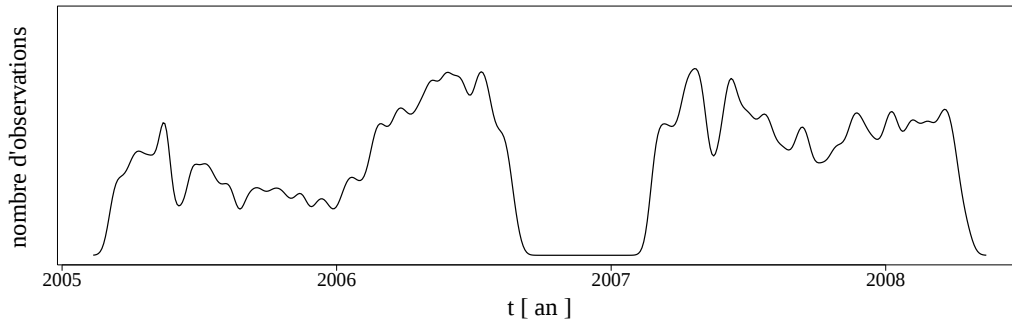


FIGURE 3.12 – Représentation schématique de la densité des observations disponibles à partir de la sonde MEX.

rendent en pratique particulièrement difficile la détermination des pondérations à appliquer lors de l’ajustement de INPOP.

3.4.3 Interactions mutuelles

La section 3.3.3 a permis de montrer qu’en considérant uniquement les 367 astéroïdes pouvant avoir un effet significatif sur les données modernes, les interactions entre astéroïdes étaient négligeables en terme de distance Terre-Mars. On vérifie que pour l’ensemble des perturbations induites sur les distances Terre-planètes entre 1960 et 2020, la perturbation totale provenant des 367 objets en interaction et la perturbation reconstruite avec la relation (3.5) sont identiques au mètre près. Les interactions astéroïde-astéroïde sont donc négligeables sur l’ensemble des distances Terre-planètes.

3.5 Résonances

Les résonances en moyen mouvement sont traditionnellement considérées comme un facteur amplifiant l’effet des astéroïdes sur les données des éphémérides (Williams, 1984). Une résonance induit sur une planète, au premier ordre en masses, une dérive du demi-grand-axe linéaire. La dérive est donc quadratique en longitude moyenne. Un exemple d’une telle évolution est donnée par la figure 2.2 pour l’astéroïde Polana. Cette dérive quadratique ne pouvant pas être absorbée par l’ajustement du demi-grand axe de la planète, la perturbation effective induite par l’astéroïde résonant croît de manière quadratique même après ajustement des conditions initiales.

Avec k et p entiers, une résonance en moyen mouvement a lieu lorsque

$$\frac{n'}{n} = \frac{k}{k+p}$$

On adopte ici les notations du deuxième chapitre, ainsi n' et n correspondent respectivement aux moyens mouvements d’un astéroïde et d’une planète. En terme de demi-grands axes, une résonance correspond à

$$a' \sim a \left(\frac{k}{k+p} \right)^{-2/3} \quad (3.6)$$

Les figures 3.13 et 3.14 superposent, pour la Terre et Mars, la distribution des astéroïdes au sein de la ceinture principale avec les valeurs des demi-grands axes résonants pour l’ensemble des résonances d’ordre supérieur ou égal à 8.

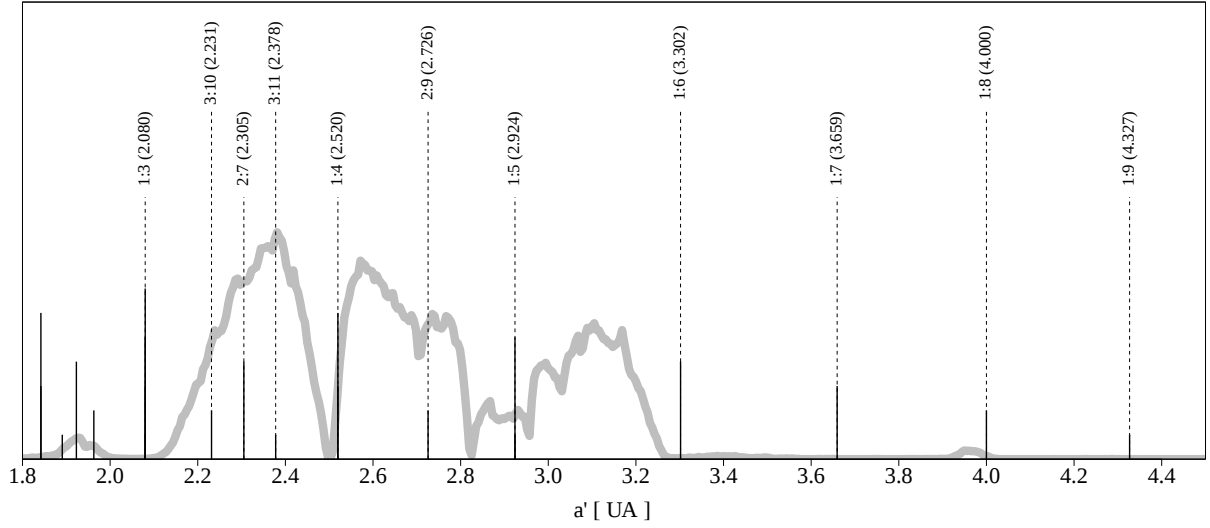


FIGURE 3.13 – Zones de résonances en moyen mouvement avec la Terre tracées jusqu'à l'ordre 8, les barres continues sont d'autant plus grandes que les ordres des résonances sont faibles. Les annotations donnent pour $a' > 2$, les rapports $k : (k + p)$ ainsi que les valeurs des demi-grands axes calculées avec la relation (3.6). En gris, distribution des astéroïdes dans la ceinture principale.

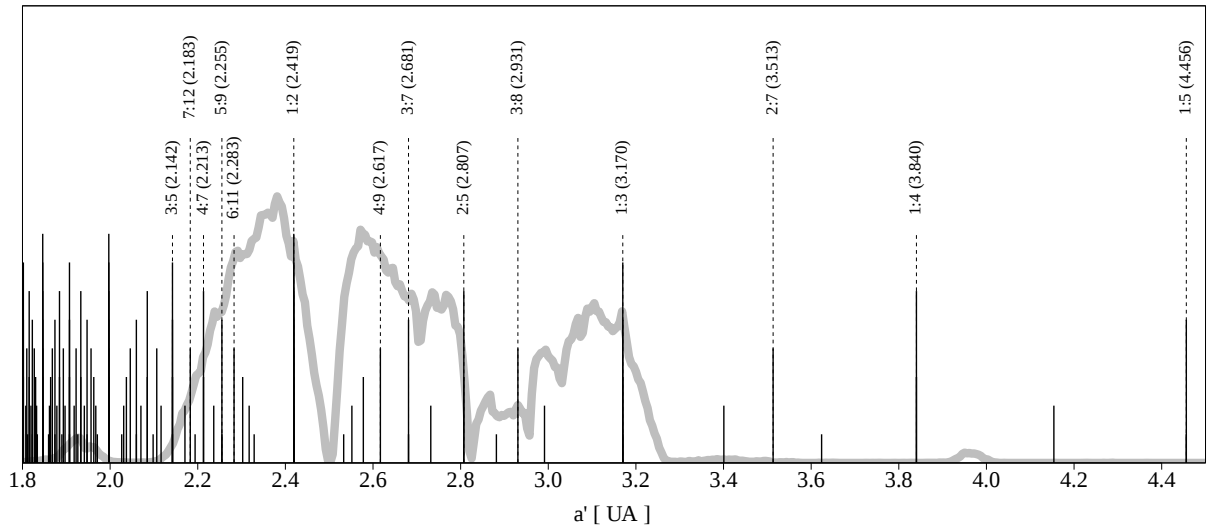


FIGURE 3.14 – Analogue de la figure 3.13, tracé pour Mars. Seulement les résonances pour lesquelles $a' > 2.12$ et d'ordre inférieur ou égale à 5 sont annotées.

On observe que la résonance avec la Terre d'ordre le plus bas est la résonance 1 : 3. Néanmoins en tenant compte de la distribution des astéroïdes, il est peu probable que cette zone soit occupée par un objet de masse importante. La résonance la plus significative en terme de perturbations de l'orbite de la Terre est la résonance 2 : 7 car elle se confond avec la densité d'astéroïdes la plus élevée.

La figure 3.14 suggère une dizaine de résonances en moyen mouvement, entre autres 1 : 2 et 1 : 3, pouvant contribuer à amplifier de manière significative les perturbations de l'orbite de Mars. On a déterminé précédemment 157 astéroïdes dont l'effet pourrait être détectable sur les données de INPOP. De sorte à estimer le comportement résonant ou pas de chacun des 157 astéroïdes, on cherchera à déterminer dans quelle mesure la perturbation Δa induite sur le demi-grand axe de la Terre ou de Mars est dominée par un comportement séculaire. Une manière de procéder est d'effectuer une analyse en fréquence de la perturbation Δa (Laskar, 1993). Une fréquence particulièrement lente contenue dans la perturbation indique une résonance. La résonance peut être ensuite identifiée en cherchant la combinaison linéaire entre les moyens mouvements de la planète et de l'astéroïde égale à la fréquence lente de la perturbation. On a pu ainsi confirmer que l'astéroïde Zelinda mentionné au paragraphe 3.4.1 est bien en résonance 2 : 7 avec la Terre. La procédure nécessite néanmoins le calcul de Δa sur plusieurs centaines d'années. Pour pouvoir estimer le comportement séculaire d'une perturbation Δa sans avoir recours à des intégrations autres que celles déjà effectuées dans la section 3.1.1, on procèdera différemment.

Pour chaque astéroïde, la perturbation Δa induite sur Mars ou la Terre est approchée par une droite sur l'ensemble de l'intervalle 1960 - 2020. On définit ensuite le coefficient r comme le rapport entre l'écart type du résidu obtenu en approximant Δa par la droite et l'écart-type de Δa . Avec d la droite ajustée à Δa , on a donc

$$r^2 = \frac{\text{Var}(\Delta a - d)}{\text{Var}(\Delta a)}$$

où Var correspond à la variance. Si le rapport est proche de zéro, alors l'évolution de la perturbation est dominée par un comportement séculaire (sur l'intervalle de temps considéré). Si au contraire le rapport est égal à 1, l'évolution est quasipériodique. La figure 3.15, représente les valeurs de r calculées à partir des perturbations de la Terre et de Mars pour l'ensemble des 157 astéroïdes. Il apparaît que parmi les 157 astéroïdes, un nombre important d'astéroïdes présente un comportement séculaire. Ces comportements peuvent être attribués aux résonances 1 : 2, 3 : 7 et 1 : 3. Les perturbations séculaires du demi-grand axe de la Terre sont plus rares. Elles sont observées surtout pour deux astéroïdes dont les demi-grands axes se situent dans la zone de résonance 2 : 7. Il s'agit des astéroïdes Zelinda et Melpomene mentionnés au paragraphe 3.4.1.

Il est intéressant de noter qu'environ 85% des astéroïdes parmi les 157 induisent sur le demi-grand axe de Mars une perturbation dont l'évolution n'est pas purement quasipériodique car elle vérifie $r < 0.9$. La proportion d'astéroïdes parmi les 157, induisant des perturbations telles que $r < 0.5$ et $r < 0.1$ est respectivement de 41% et 15%. En comparaison parmi l'ensemble des 27142 objets considérés, les critères $r < 0.9$, $r < 0.5$ et $r < 0.1$ sont satisfaits par respectivement 47%, 18% et 4% des individus. On en déduit que les résonances en moyen mouvement contribuent effectivement aux perturbations significatives induites sur la distance Terre-Mars par les 157 astéroïdes.

3.6 Conclusion

Les perturbations des astéroïdes induites sur les planètes ont été étudiées en terme des distances Terre-planètes. Ces distances sont mesurées avec une précision de l'ordre du mètre et sont ainsi le principal moyen disponible pour contraindre INPOP. On a pu montrer que les effets induits par les astéroïdes sur la distance Terre-Mars peuvent atteindre plusieurs kilomètres

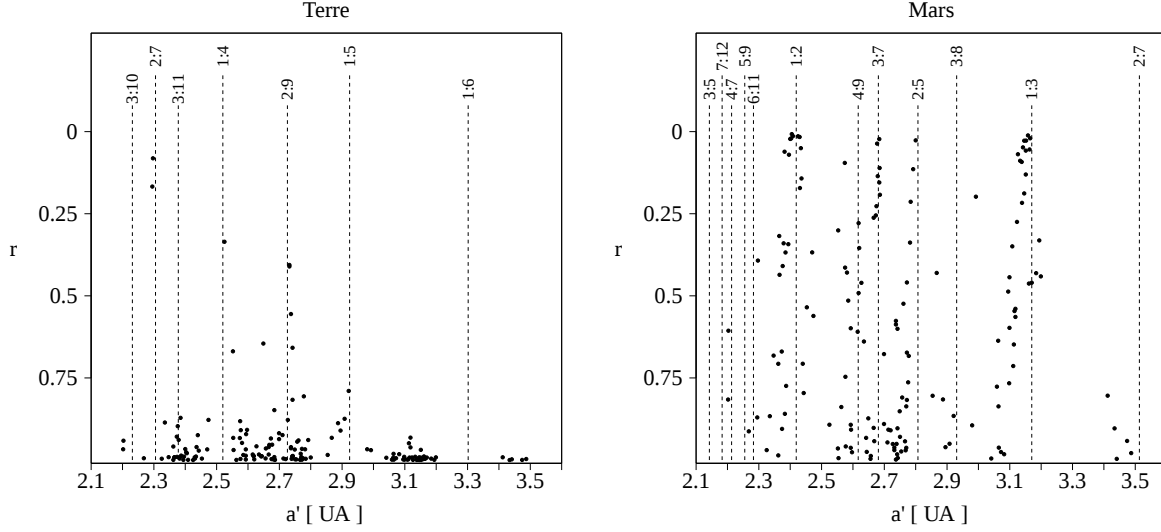


FIGURE 3.15 – Tracé des rapports r calculés pour l'ensemble des 157 astéroïdes à partir des perturbations induites sur la Terre et Mars. Les traits verticaux représentent l'ensemble des résonances d'ordre ≤ 8 et d'ordre ≤ 5 pour Terre et Mars respectivement.

entre 1960 et 2020. Ces valeurs basées sur la comparaison de deux intégrations du Système solaire avec et sans astéroïde dépendent très fortement de la date initiale des deux intégrations. En estimant les perturbations après ajustement des conditions initiales des planètes, on évite cette dépendance. On obtient également une estimation plus fidèle des contributions des astéroïdes à la perturbation des mouvement planétaire dans INPOP puisque lors de la construction de l'éphéméride les conditions initiales sont systématiquement ajustées. Après ajustement des conditions initiales, les perturbations les plus fortes sont induites sur les distances Terre-Mars et Terre-Jupiter, les amplitudes maximales étant de l'ordre du kilomètre sur l'intervalle 1960 - 2020. Les effets sont plus faibles sur les autres planètes, de l'ordre de la centaine de mètres sur les planètes extérieures et de l'ordre de la dizaine de mètres sur les planètes intérieures. Afin de déterminer au mieux les astéroïdes dont l'effet individuel peut être détectable sur les données INPOP, une estimation des perturbations a été effectuée uniquement sur les intervalles de temps où des mesures sont disponibles. On a construit une liste de 157 objets (annexe 9.5), dont l'effet induit sur les différentes données dépasse le seuil de bruit lorsque les masses des objets sont à leurs valeurs standards. En général les objets de la liste induisent une perturbation significative sur les mesures modernes de la distance Terre-Mars, sans influencer vraiment sur les autres mesures. En considérant les masses des astéroïdes à leurs estimations maximales, la liste précédente pourrait contenir jusqu'à 367 individus. Dans ce chapitre on a également pu montrer que les perturbations mutuelles astéroïde-astéroïde étaient négligeables en terme de distances Terre-planètes. Cette propriété sera particulièrement utile au chapitre suivant car elle permet de dériver la perturbation induite simultanément par plusieurs objets en sommant simplement les perturbations individuelles. Finalement on a montré qu'une partie importante des astéroïdes ayant un effet significatif sur les données INPOP induisait une perturbation séculaire sur le demi-grand axe de Mars à cause de résonances en moyen mouvement avec la planète.

Chapitre 4

Estimation de l'effet global

Le chapitre précédent était consacré aux perturbations individuelles induites par les astéroïdes sur les planètes. Ces perturbations, considérées non individuellement mais simultanément, peuvent à priori se compenser ou se compléter et donner lieu à des effets plus ou moins forts. La perturbation induite simultanément par un grand nombre d'astéroïdes peut en particulier être importante même si les perturbations induites individuellement par les astéroïdes sont négligeables. L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'effet dit "global", induit simultanément par l'ensemble des astéroïdes du Système solaire à l'exception d'un nombre restreint d'individus. Il s'agit donc d'une part de compléter l'estimation des effets individuels réalisée précédemment. Car si la perturbation globale est importante, elle doit être prise en compte dans le modèle dynamique au même titre que les perturbations individuelles. D'autre part, ce chapitre permet d'aborder le problème de la modélisation des astéroïdes dans INPOP avec une nouvelle perspective : au lieu de chercher les astéroïdes dont l'effet sur les planètes est important, on pourra chercher les astéroïdes qui ne font pas partie d'un effet global. Si les perturbations individuelles ont tendance à se compenser et se fondre en une perturbation modélisable par exemple avec un anneau, l'approche pourrait fournir une liste plus restreinte d'astéroïdes à modéliser que la liste de l'annexe 9.5.

Le chapitre prend pour point de départ Kuchynka *et al.* (2010), publié au cours de la thèse.

4.1 Un anneau comme modèle de la ceinture principale

La modélisation de la perturbation globale induite par la ceinture principale, avec un anneau solide centré au Soleil est une idée qui date du début des éphémérides précises. Selon Hilton (2009), un anneau était déjà présent dans l'éphéméride PEP (Planetary Ephemeris Program) développée vers la fin des années 60. Aujourd'hui, l'anneau fait partie des modèles dynamiques de INPOP06 et INPOP08, il est également présent dans l'éphéméride russe EPM et dans certaines versions de l'éphéméride américaine comme DE414 (voir Fienga *et al.*, 2008, 2009). Bien que le modèle de l'anneau est assez souvent utilisé, son efficacité à représenter un effet global est en pratique difficile à établir. La difficulté provient du fait que les astéroïdes responsables de l'effet global ne sont à priori pas connus, par conséquent il n'est pas possible d'évaluer la perturbation globale et de la comparer à la perturbation induite par un anneau. Pour pallier au problème, il est nécessaire de donner une définition pratique des astéroïdes qui font partie de l'effet global. Cette définition ne peut pas consister à dire que les astéroïdes constituant l'effet global sont les astéroïdes qui ne sont pas pris en compte individuellement dans une éphéméride particulière. En effet un des intérêt à étudier l'effet global est justement de pouvoir affiner la sélection des astéroïdes à implémenter individuellement dans un modèle dynamique.

Dans Kuchynka *et al.* (2010), on a défini les astéroïdes responsables de l'effet global comme les astéroïdes dont la perturbation totale induite sur les planètes est proportionnelle à la pertur-

bation induite par un anneau. Cette définition est non seulement suffisante pour étudier l'effet global mais également elle conduit à un nombre relativement faible d'objets à considérer individuellement dans INPOP. Par la suite on résume les principales sections de Kuchynka *et al.* (2010), certaines traitent de sujets déjà étudiés dans les chapitres précédents. L'article est ensuite reproduit dans sa totalité.

4.1.1 Approche analytique

L'article commence par une partie analytique. On dérive les expressions à l'ordre 2 en excentricités et inclinaisons des perturbations séculaires induites sur une planète par un astéroïde. La dérivation suppose que l'astéroïde partage son orbite avec d'autres objets de masses similaires et répartis de manière homogène en longitude moyenne. Les expressions ainsi obtenues sont en fait les mêmes que pour une perturbation induite par un anneau (voir 2.2.3). On note que la distribution homogène est une hypothèse raisonnable pour la majorité des objets de la ceinture. Néanmoins l'hypothèse n'est pas valide pour des astéroïdes de masses particulièrement élevées ou pour des astéroïdes sur des orbites atypiques. En s'appuyant sur la distribution des astéroïdes au sein de la ceinture, les expressions analytiques dérivées permettent d'obtenir la perturbation globale induite sur une planète par la quasi-totalité des astéroïdes de la ceinture. On montre qu'à l'ordre 2 en excentricités et inclinaisons, la perturbation globale peut être représentée exactement par un anneau de rayon ~ 2.8 UA centré au Soleil. La masse de l'anneau est égale à la masse totale de la ceinture principale et l'anneau est légèrement excentrique à cause de la distribution non homogène des périhélies des astéroïdes (voir section 1.2.3).

4.1.2 Modèle test de la ceinture principale

Un modèle test de la ceinture principale est construit à partir d'environ 25000 astéroïdes. Pour chaque astéroïde une masse standard est calculée. Ces masses peuvent être différentes des masses déterminées dans le chapitre 1, néanmoins la méthodologie utilisée est approximativement la même. On attribue également à chaque astéroïde, des masses aléatoires calculées de sorte à refléter l'incertitude des masses standards.

Les perturbations individuelles ΔD induites par chaque astéroïde sur les distances Terre-Mars sont obtenues à partir d'intégrations avec et sans astéroïdes du Système solaire entre 1969 et 2010. La formule (3.5) est ensuite établie. On est ainsi en mesure d'estimer simplement les effets induits par des groupes d'astéroïdes sans avoir recours à des intégrations supplémentaires. Les perturbations étant proportionnelles aux masses des astéroïdes, la formule permet d'obtenir la perturbation globale non seulement pour les masses standards utilisées dans les intégrations, mais également pour les masses aléatoires.

4.1.3 Capacité de l'anneau à représenter un grand nombre d'astéroïdes

La section 5 de l'article compare la perturbation induite par un anneau aux perturbations induites par différents sous-ensembles du modèle test. Dans un premier temps on considère l'effet global induit sur la distance Terre-Mars par l'ensemble des astéroïdes à l'exception de N astéroïdes dont les amplitudes des perturbations sont les plus importantes. Cet effet global est noté $\Delta D_{\text{glob}}(N)$. La comparaison avec l'anneau est effectuée pour différentes valeurs de N et pour différentes masses des astéroïdes choisies parmi les masses aléatoires générées précédemment. On observe que la capacité de l'anneau à modéliser l'effet global est maximale pour N supérieur à environ 150. Alors plus de 80% de l'effet global peut être représenté par l'anneau. Pour $N = 300$, l'amplitude de la perturbation globale est de 246 m en moyenne. Quant à la perturbation non modélisée par l'anneau, elle atteint en moyenne 38 m.

Dans une deuxième partie, on propose une nouvelle définition de l'effet global, noté par la suite et dans l'ensemble de ce chapitre par $\Delta D_{\text{glob}^*}(N)$. L'effet est défini comme la perturbation induite par tous les astéroïdes à l'exception d'une sélection contenant au plus N individus. Ces individus sont choisis parmi les N astéroïdes les plus perturbateurs. La sélection est néanmoins opérée de sorte à ce que l'effet global résultant soit le plus proche de l'effet induit par un anneau. On note par $\Delta D_1, \dots, \Delta D_N$ les perturbations induites sur la distance Terre-Mars par les N objets les plus perturbateurs. En notant par ΔD_{ring} la perturbation induite par un anneau, la sélection consiste à minimiser

$$|\alpha_1 \Delta D_1 + \dots + \alpha_N \Delta D_N + \alpha_{N+1} \Delta D_{\text{ring}} - \Delta D_{\text{glob}^*}(N)|^2 \quad (4.1)$$

pour des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ entiers et binaires (égaux à 1 ou 0) et pour un α_{N+1} réel mais positif. On montre qu'avec la nouvelle définition, l'anneau est en mesure de représenter plus de 99% de l'effet global $\Delta D_{\text{glob}^*}(N)$ pour $N \geq 300$. L'amplitude de la perturbation non modélisée par l'anneau est alors en moyenne de l'ordre de 4 m. Le résultat peut être obtenu pour les masses standards des astéroïdes, mais aussi pour les masses aléatoires. On retrouve également des résultats similaires en ne considérant plus seulement la perturbation de la distance Terre-Mars mais en considérant simultanément les perturbations des distances Terre-Mercure, Terre-Vénus et Terre-Mars entre 1969 et 2010.

4.1.4 Application à la sélection de modèle

Les expériences Monte-Carlo de l'article consistant à minimiser (4.1) pour différents ensembles de masses aléatoires, permettent d'estimer pour chaque astéroïde du modèle test la probabilité que l'astéroïde ne fasse pas partie d'un effet global. En prenant $N = 300$ comme limite pour laquelle la modélisation de la perturbation globale par l'anneau est satisfaisante, seulement 523 astéroïdes ont une probabilité non nulle de ne pas être pris en compte par l'anneau. L'article suggère que les 287 objets pour lesquels la probabilité est supérieure à 25%, devraient être implémentés individuellement dans le modèle dynamique de INPOP et compléter ainsi la modélisation de la ceinture principale par l'anneau.

La principale limitation de Kuchynka *et al.* (2010) est que l'étude ne considère pas la possibilité d'ajustement des conditions initiales des planètes. Au chapitre 3 on a vu que cet ajustement était pourtant important pour obtenir une estimation précise de l'impact d'une perturbation sur les données disponibles dans une éphéméride. De la même manière, les intervalles de temps sur lesquels les amplitudes des perturbations sont estimées dans l'article ne reflètent pas les intervalles où les données sont effectivement disponibles.

4.1.5 Remarques sur les librairies CPLEX

La minimisation de (4.1) pour $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ binaires et α_{N+1} réel s'obtient dans l'article avec les librairies d'optimisation CPLEX¹. L'algorithme employé s'appuie sur l'approche "branch and cut" décrite par exemple dans Mitchell (2000).

De manière très simplifiée, l'approche consiste à chercher d'abord une solution quelconque qui satisfait les contraintes du problème. Cette solution devient alors la meilleure solution connue à ce stade. Une borne minimum sur la fonction objectif (4.1) est ensuite obtenue en relaxant le problème et en cherchant une solution pour laquelle $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ sont compris entre 0 et 1, mais ne sont pas nécessairement entiers (étape "bound"). Cette borne peut être affinée en imposant aux coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ des contraintes supplémentaires sous forme d'inégalités. Les contraintes sont choisies de telle sorte qu'elles éliminent des régions importantes de l'espace des phases où

1. Les librairies du logiciel commercial CPLEX sont librement disponibles pour la communauté scientifique grâce à la IBM academic initiative : www.ibm.com/developerworks/university/academicinitiative.

$\alpha_1, \dots, \alpha_N$ ne sont pas entiers (étape "cut"). La borne et la valeur de la fonction objectif de la meilleur solution du moment sont alors comparées. Si la différence relative est inférieure à 0.01%, l'algorithme est arrêté. Sinon, l'espace des phases est coupé en deux sous-espaces où des α_i particuliers sont fixés à 0 dans un cas et à 1 dans l'autre (étape "branch"). Sur chacun des sous-espaces on cherche une solution de manière empirique et on opère à nouveau les 3 étapes. Le processus est itéré, par conséquent le problème se découpe progressivement en un grand nombre de sous-problèmes. Rapidement, les bornes de certains sous-espaces deviennent supérieures à la meilleur solution du moment et les sous-espaces entiers peuvent ainsi être éliminés du problème. Notons que sans l'étape "cut", l'approche revient à la méthode dite "branch and bound". L'implémentation efficace des trois étapes permet d'obtenir dans un temps raisonnable une solution où la fonction objectif diffère à moins de 0.01% de la meilleur valeur que l'on puisse espérer obtenir. Pour $N < 50$, l'algorithme vérifie souvent que la solution obtenue est la meilleur possible.

Kuchynka *et al.* (2010) prévoit une perturbation non modélisée par l'anneau de 4 m sur l'intervalle 1969-2010. Les 4 m correspondent à l'amplitude maximum atteinte sur l'intervalle. La perturbation est en général de moyenne proche de zéro et d'écart-type environ 3 fois plus faible que l'amplitude. Sachant que dans l'article les perturbations individuelles ΔD_i contiennent environ 1000 points, on estime à $(4/3)^2 \times 1000 \sim 1690 \text{ m}^2$ la valeur de la fonction objectif associée aux résidus de 4 m. On vérifie que diminuer cette valeur de 0.01% correspond à diminuer la partie non modélisée par l'anneau de 4 m à 3.996 m. De manière plus générale les 0.01% sur la fonction objectif correspondent environ à une erreur de 0.1% sur l'amplitude des résidus après ajustement de l'anneau à l'effet global. Ainsi les solutions fournies par CPLEX sont largement proches des solutions optimales minimisant (4.1) de sorte à pouvoir estimer correctement l'effet global et la capacité de l'anneau à le modéliser.

A ring as a model of the main belt in planetary ephemerides[★]

P. Kuchynka¹, J. Laskar¹, A. Fienga^{1,2}, and H. Manche¹

¹ Astronomie et Systèmes Dynamiques, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, UPMC, 77 avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
 e-mail: kuchynka@imcce.fr

² Observatoire de Besançon-CNRS UMR6213, 41 bis avenue de l'Observatoire, 25000 Besançon, France

Received 24 September 2009 / Accepted 4 February 2010

ABSTRACT

Aims. We assess the ability of a solid ring to model a global perturbation induced by several thousands of main-belt asteroids.

Methods. The ring is first studied in an analytical framework that provides an estimate of all the ring's parameters excepting mass. In the second part, numerically estimated perturbations on the Earth-Mars, Earth-Venus, and Earth-Mercury distances induced by various subsets of the main-belt population are compared with perturbations induced by a ring. To account for large uncertainties in the asteroid masses, we obtain results from Monte Carlo experiments based on asteroid masses randomly generated according to available data and the statistical asteroid model.

Results. The radius of the ring is analytically estimated at 2.8 AU. A systematic comparison of the ring with subsets of the main belt shows that, after removing the 300 most perturbing asteroids, the total main-belt perturbation of the Earth-Mars distance reaches on average 246 m on the 1969–2010 time interval. A ring with appropriate mass is able to reduce this effect to 38 m. We show that, by removing from the main belt ~240 asteroids that are not necessarily the most perturbing ones, the corresponding total perturbation reaches on average 472 m, but the ring is able to reduce it down to a few meters, thus accounting for more than 99% of the total effect.

Key words. celestial mechanics – ephemerides – minor planets, asteroids: general

1. Introduction

Asteroid perturbations are considered the major obstacle for achieving a satisfactory prediction accuracy in planetary ephemerides. The asteroid problem persists despite the ephemerides being fitted to a variety of highly accurate observations available over almost 40 years. The most constraining observations are tracking data from spacecraft orbiting Mars, which over the past 8 years are available with metric precision. Despite this accuracy, today's ephemerides are unable to extrapolate the Mars ranging data one year into the future with a precision better than 15 m (see [Folkner et al. 2008](#); [Fienga et al. 2009](#)). The obstacle to improving the situation is to correctly account for a large number of similar asteroid effects without any accurate knowledge of the asteroid masses. In modern ephemerides, usually about 300 asteroids are modeled individually and the rest of the main-belt is represented by a circular ring. Our objective in this study is to estimate the ability of a ring to model large numbers of asteroids.

In Sect. 2 we set a simple analytical framework and show that a ring is in fact a first-order representation of the main-belt perturbation. Section 3 describes a new implementation of the ring in the INPOP ephemeris (see [Fienga et al. 2009](#)). To evaluate the ring model, we chose to compare the perturbation induced by the ring on the Earth-Mars distance with the perturbations induced by a test model containing thousands of asteroids. Section 4 describes the chosen test model that consists of 24635 asteroids assigned each according to the available data with reasonable random mass values. In Sect. 5 the effect of the ring is compared with the perturbation induced by the test model after removing

various asteroid subsets. The comparison is repeated for different asteroid masses in Monte-Carlo-like experiments. We are thus able to estimate the number of asteroids that need to be individualized in the asteroid model so the ring is able to satisfactorily represent the remaining global perturbation. We also derive estimates for the amplitude of the global perturbation, together with the corresponding mass of the ring and the amplitude of the residual perturbation unmodeled by the ring. The perturbations on the Earth-Mercury and Earth-Venus distances are considered at the end of the section. Some applications of the obtained results are discussed in Sect. 6.

2. Analytical approach

2.1. Averaging the main belt

The perturbation induced on a planet by the main belt is the sum of the perturbations induced by the asteroids within the belt. Accounting in a model for each asteroid individually involves dealing with a very large number of unknown and highly correlated parameters. In consequence, it is not possible to implement all the individual main-belt asteroids in the model. We show that with some hypotheses the asteroid model can actually be reduced to the average effect of a single object.

Let us consider a main-belt asteroid of mass m' on a fixed orbit perturbing a planet of mass m . We denote the classical orbital elements with $(a, \lambda, e, \varpi, I, \Omega)$. In this whole section we use the convention of marking the variables related to the asteroid with a prime and the variables related to the planet without a prime. We assume that in the main-belt the considered asteroid is not alone on its orbit, but many other objects with similar masses are spread uniformly in terms of mean longitude on similar orbits. It is then possible to average the perturbation of the

[★] Table A.1 is only available in electronic form at <http://www.aanda.org>

considered asteroid over the mean longitude λ' without losing any part of the asteroid's contribution to the main-belt perturbation. For the sake of simplicity, we also average the perturbation over the mean longitude of the planet. We are thus left only with a secular effect.

Laskar & Robutel (1995) provide the secular Hamiltonian of the three-body problem expanded in eccentricity and inclination. In the case where the semi-major axis of the asteroid is always greater than the semi-major axis of the planet, the Hamiltonian can be rewritten up to the second degree as

$$F(\Lambda, \lambda, H, h, Z, \zeta) = -\frac{Gmm'}{a'} \left(\frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)} + \frac{\alpha}{4} b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{H-Z}{\Lambda} + \frac{H'-Z'}{\Lambda'} \right) \right) \\ + \frac{\alpha}{2} b_{3/2}^{(1)} \sqrt{\frac{ZZ'}{\Lambda\Lambda'}} \cos(\zeta - \zeta') \\ + \left(\frac{3\alpha}{2} b_{3/2}^{(0)} - (\alpha^2 + 1) b_{3/2}^{(1)} \right) \sqrt{\frac{HH'}{\Lambda\Lambda'}} \cos(h - h')$$

where $b_{1/2}^{(0)}, b_{3/2}^{(0)}, b_{3/2}^{(1)}$ are Laplace coefficients depending on the semi-major axis ratio $\alpha = a/a' < 1$. The canonical variables $(\Lambda, \lambda, H, h, Z, \zeta)$ are obtained by a linear transformation from the variables of Delaunay:

$$\Lambda = m \sqrt{\mu a}$$

$$H = m \sqrt{\mu a} (1 - \sqrt{1 - e^2})$$

$$Z = m \sqrt{\mu a (1 - e^2)} (1 - \cos I)$$

$$h = -\varpi, \zeta = -\Omega.$$

We can calculate the perturbation induced on the planet by the asteroid from Hamilton's equations. By only keeping the lowest order terms in eccentricity and inclination, we get

$$\dot{a} = 0$$

$$\dot{\lambda} = n\alpha^2 \frac{m'}{m_\odot} (\alpha b_{3/2}^{(0)} - b_{3/2}^{(1)})$$

$$\dot{e} = n\alpha^2 \frac{m'}{4m_\odot} e' \left(3b_{3/2}^{(0)} - 2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) b_{3/2}^{(1)} \right) \sin(\varpi - \varpi')$$

$$\dot{\varpi} = n\alpha^2 \frac{m'}{4m_\odot} \left(b_{3/2}^{(1)} + \left(\frac{e'}{e} \right) \left(3b_{3/2}^{(0)} - 2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) b_{3/2}^{(1)} \right) \cos(\varpi - \varpi') \right)$$

$$\dot{I} = n\alpha^2 \frac{m'}{4m_\odot} I' b_{3/2}^{(1)} \sin(\Omega - \Omega')$$

$$\dot{\Omega} = -n\alpha^2 \frac{m'}{4m_\odot} b_{3/2}^{(1)} \left(1 - \left(\frac{I'}{I} \right) \cos(\Omega - \Omega') \right). \quad (1)$$

To obtain the perturbation induced by the entire main belt, the above equations have to be summed over all the asteroids. For $\dot{\lambda}$ we can write

$$\dot{\lambda}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N_m} \dot{\lambda}_i = N_m \left\langle n\alpha^2 \frac{m'}{m_\odot} (\alpha b_{3/2}^{(0)} - b_{3/2}^{(1)}) \right\rangle$$

where $\langle \rangle$ represent the average over all the asteroids, and N_m denotes the total number of modeled objects. If we assume that

Table 1. Parameters of an averaged orbit representing the main-belt perturbation as determined from the perturbation on the inner planets.

Planet	a' [AU]	e'	ϖ' [°]	I' [°]	Ω' [°]
Mars	2.71	0.04	-1.30	0.96	-60.34
Earth	2.74	0.04	-4.88	0.89	-50.31
Venus	2.75	0.04	-4.03	0.89	-51.08
Mercury	2.75	0.04	-5.71	0.88	-50.67

there is no correlation between mass and orbital elements we obtain

$$\dot{\lambda}_{\text{tot}} = N_m \langle m' \rangle \left\langle \frac{n\alpha^2}{m_\odot} (\alpha b_{3/2}^{(0)} - b_{3/2}^{(1)}) \right\rangle \\ = m'_{\text{tot}} \left\langle \frac{n\alpha^2}{m_\odot} (\alpha b_{3/2}^{(0)} - b_{3/2}^{(1)}) \right\rangle.$$

Thus $\dot{\lambda}_{\text{tot}}$ can be obtained by averaging the $\dot{\lambda}$ term with $m' = 1$ in Eqs. (1) and multiplying the result by the total mass of all the main-belt asteroids denoted here by m'_{tot} . The orbits of the asteroids are determined fairly well. We use asteroid orbits available in the ASTORB¹ database to calculate

$$\frac{\dot{\lambda}_{\text{tot}}}{m'_{\text{tot}}} = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \frac{n\alpha^2}{m_\odot} (\alpha b_{3/2}^{(0)} - b_{3/2}^{(1)})$$

numerically for all the inner planets. We consider in the catalog only those asteroids with absolute magnitude below 14 and semi-major axis below 3.5 AU. Thus the estimation is based on a total of 24634 orbits. There are actually 24635 asteroids that satisfy these criteria. We eliminated 433 Eros from the selection because its semi-major axis is lower than the semi-major axis of Mars and thus Eqs. (1) do not apply.

The method described to calculate $\dot{\lambda}_{\text{tot}}/m'_{\text{tot}}$ is applied also to the other orbital parameters. We thus obtain the numerical values of $\dot{e}_{\text{tot}}/m'_{\text{tot}}$, $\dot{\varpi}_{\text{tot}}/m'_{\text{tot}}$, $\dot{I}_{\text{tot}}/m'_{\text{tot}}$ and $\dot{\Omega}_{\text{tot}}/m'_{\text{tot}}$. For each inner planet, we can find an average equivalent orbit that will perfectly fit all the calculated total perturbations. Because $\dot{\lambda}$ is a monotonously decreasing function of α , the value of $\dot{\lambda}_{\text{tot}}/m'_{\text{tot}}$ determines the semi-major axis of the equivalent orbit unambiguously. Once the semi-major axis is determined, the calculated values of $\dot{e}_{\text{tot}}/m'_{\text{tot}}$, $\dot{\varpi}_{\text{tot}}/m'_{\text{tot}}$ determine the eccentricity and perihelion. Similarly $\dot{I}_{\text{tot}}/m'_{\text{tot}}$, $\dot{\Omega}_{\text{tot}}/m'_{\text{tot}}$ determine the inclination and node. Table 1 summarizes the orbital parameters of the equivalent orbit obtained on all the inner planets by averaging the 24634 asteroid orbits. The chosen reference frame is a nominal invariable plane defined by an inclination of $23^\circ 00' 32''$ and a node at $3^\circ 51' 9''$ with respect to the International Celestial Reference Frame. Equations (1) contain only first-order terms in eccentricities and inclinations. Because of this approximation, the parameters in Table 1 vary from one planet to another.

The effects of an orbit averaged over its mean longitude are entirely equivalent to the effects induced by a solid ring. This equivalence has been known since the works of Gauss (see for example Hill 1882) and is valid in both the secular and non-secular cases. For practical purposes, we refer in the following more often to a ring than to the effect of an averaged orbit, but the reader has to bear in mind that both are equivalent.

Although we observe non-zero eccentricity values in Table 1, in this work we study the modeling of the main belt with a circular ring. The non-zero eccentricities are a consequence of the

¹ The asteroid orbits are calculated for the 27 October 2007.

tendency of asteroid perihelia to accumulate close to the longitude of the perihelium of Jupiter. The precession rate of an asteroid perihelion is in fact at its lowest when close to the perihelium of Jupiter. The asteroid perihelia thus spend more time in this region, which explains their apparent accumulation (see Murray & Dermott 1999). For the remainder of this paper we fix the radius of the ring at 2.8 AU. This value is within 0.1 AU of all the radii in Table 1, and it is also the value of the radius of the ring adopted in INPOP06 (Fienga et al. 2008). The initial inclination of the ring with respect to the invariable plane is chosen at zero. This fixes all the ring's geometrical parameters. The only parameter of the main-belt model that is left undetermined is the mass of the ring or equivalently the total mass of the modeled asteroids.

2.2. Perturbation of the orbital elements

We use Eqs. (1) to obtain analytical expressions of the secular perturbation induced by a ring on a planet. We stress that, although the analytical results are presented in the secular case, it is merely for convenience and the objective in this study is to assess the ring model in the general non-secular case. By setting e' and I' at zero one obtains

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \dot{e} = \dot{I} = 0 \\ \dot{\lambda} &= n\alpha^2 \frac{m'_{\text{tot}}}{m_{\odot}} (\alpha b_{3/2}^{(0)} - b_{3/2}^{(1)}) \\ \dot{\varpi} &= n\alpha^2 \frac{m'_{\text{tot}}}{4m_{\odot}} b_{3/2}^{(1)} \\ \dot{\Omega} &= -n\alpha^2 \frac{m'_{\text{tot}}}{4m_{\odot}} b_{3/2}^{(1)}. \end{aligned} \quad (2)$$

The ring induces linear drifts in the mean, perihelion, and node longitudes of the planet. There is no secular effect on the semi-major axis because, in the secular case, the Hamiltonian is independent of λ . The presence of the ring may change the mean semi-major axis by a small constant value Δa_0 . This small value would translate as a shift in the mean motion $\Delta n_0 (= -3n\Delta a_0/2a)$ that should be accounted for in $\dot{\lambda}$. Equations (2) predict no perturbation of eccentricity or inclination for the second-degree Hamiltonian. To estimate the effect on these parameters, we need to consider at least a Hamiltonian of degree 4. With Laskar & Robutel (1995) we then obtain

$$\begin{aligned} \dot{e} &= n\alpha^2 \frac{m'_{\text{tot}}}{m_{\odot}} I^2 e \sin(2\varpi - 2\Omega) \left(-\frac{15}{32} \alpha b_{5/2}^{(0)} + \frac{9 + 3\alpha^2}{16} b_{5/2}^{(1)} \right) \\ \dot{I} &= -n\alpha^2 \frac{m'_{\text{tot}}}{m_{\odot}} I e^2 \sin(2\varpi - 2\Omega) \left(-\frac{15}{32} \alpha b_{5/2}^{(0)} + \frac{9 + 3\alpha^2}{16} b_{5/2}^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

In Table 2, we use Eqs. (2) and (3) to quantitatively estimate the effect induced on Earth and Mars by a ring with radius at 2.8 AU and a mass of $0.34 \times 10^{-10} M_{\odot}$. These are parameters of the asteroid model in INPOP06 where the ring represents all the main-belt asteroids except for a selection of 300 individuals. The table shows that the secular effects on the eccentricities and inclinations are clearly negligible.

2.3. Perturbation of the Earth-Mars distance

In this work we focus on the Earth-Mars mutual distance, which today is the most accurately observed parameter. Indeed Mars

Table 2. Secular effect of a ring, with INPOP06 parameters, on the orbital elements of the Earth and Mars.

	Earth	Mars	units $\times 10^{11}$
$\dot{\lambda}$	-1.13	-2.69	rad yr ⁻¹
$\dot{e}$	-0.7×10^{-5}	-0.7×10^{-3}	yr ⁻¹
$\dot{\varpi}$	0.94	2.65	rad yr ⁻¹
$\dot{I}$	0.4×10^{-5}	2.3×10^{-3}	rad yr ⁻¹
$\dot{\Omega}$	-0.94	-2.65	rad yr ⁻¹

has been a target for many missions. These provide highly accurate ranging data with accuracies varying from roughly 20 m for the Viking data to accuracies of about 1 m for more recent missions like Mars Global Surveyor, Mars Orbiter, or the ongoing Mars Express mission. We limit our study of the asteroid perturbations to the interval between years 1969 and 2010. This corresponds roughly to the interval spanned by the available ranging data.

Let us denote with ΔD any perturbation induced on the Earth-Mars distance. We have

$$\Delta D = D - D_0,$$

where D and D_0 are the Earth-Mars distances in the perturbed and unperturbed cases respectively. D and D_0 each depend on the perturbed and unperturbed orbital elements of Earth and Mars. By writing a first-order Taylor expansion of D in terms of the perturbations of the individual orbital elements, we obtain

$$\begin{aligned} \Delta D &= \frac{\partial D}{\partial a_M} \Delta a_M + \frac{\partial D}{\partial e_M} \Delta e_M + \frac{\partial D}{\partial i_M} \Delta i_M \\ &+ \frac{\partial D}{\partial \lambda_M} \Delta \lambda_M + \frac{\partial D}{\partial \varpi_M} \Delta \varpi_M + \frac{\partial D}{\partial \Omega_M} \Delta \Omega_M \\ &+ \frac{\partial D}{\partial a_E} \Delta a_E + \frac{\partial D}{\partial e_E} \Delta e_E + \frac{\partial D}{\partial i_E} \Delta i_E \\ &+ \frac{\partial D}{\partial \lambda_E} \Delta \lambda_E + \frac{\partial D}{\partial \varpi_E} \Delta \varpi_E + \frac{\partial D}{\partial \Omega_E} \Delta \Omega_E. \end{aligned} \quad (4)$$

The indexes E and M refer to the Earth and Mars. In the expansion, $(\Delta a, \Delta \lambda, \dots, \Delta \Omega)$ represents the perturbations of the planetary orbital elements. We have, for example, for the perturbation in mean longitude

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$$

where λ and λ_0 are the evolutions of the mean longitude in the perturbed and unperturbed cases, respectively. In an analogous way, we can define the perturbations of the other orbital elements.

We calculated estimates of the partial derivatives by differentiating a second-degree eccentricity and inclination expansion of the Earth-Mars distance. The resulting estimates are functions of approximately constant amplitude oscillating with frequencies close to the Earth-Mars synodic frequency. Table 3 lists the amplitudes of all the partial derivatives. The significant differences among the amplitudes of the partial derivatives stem from the various orders in eccentricity and inclination.

The general expression (4) can be used to estimate the effect induced on the Earth-Mars distance by the ring with INPOP06 parameters. With Table 3 and the values of the secular perturbations calculated in Table 2, we find that the perturbation will reach approximately 5 m over one year, mainly because of the drift in the mean longitude of Mars.

Table 3. The Earth-Mars distance dependence on the orbital elements.

	Earth	Mars	Units $\times 10^{-11}$
max $\left \frac{\partial D}{\partial a} \right $	1.52	1.63	m AU ⁻¹
max $\left \frac{\partial D}{\partial \lambda} \right $	1.52	1.87	m rad ⁻¹
max $\left \frac{\partial D}{\partial e} \right $	3.03	3.56	m
max $\left \frac{\partial D}{\partial \varpi} \right $	0.05	0.35	m rad ⁻¹
max $\left \frac{\partial D}{\partial i} \right $	0.15	0.14	m rad ⁻¹
max $\left \frac{\partial D}{\partial \Omega} \right $	0.00	0.01	m rad ⁻¹

3. Numerical integrations

3.1. The implementation of the ring in INPOP

In Krasinsky et al. (2002) the ring was numerically implemented as a perturbing acceleration in the ecliptic plane of each planet, and this implementation has been adopted in INPOP06 as well. Fienga et al. (2009) show that in long-term integrations the ring causes a slight drift in the Solar System barycenter of approximately 10 m over a century. Indeed with the ring modeled as an exterior force, the system's total linear momentum is not conserved. The existence of this drift motivated a more realistic implementation of the ring adopted since in INPOP08.

The ring is treated as a solid rotating body, which fully interacts with the planets. Although its initial orientation is taken to be parallel to the system's invariable plane, the orientation of the ring is an integrated parameter that evolves with time under the influence of the planetary perturbations. The angular momentum of the ring is constant in amplitude and determined by the radius of the ring and Kepler's law. The linear and angular momenta of the system are thus conserved, which eliminates the barycenter drift occurring in the previous implementation. Because the averaged orbit is bound to the Sun by gravitation, in INPOP we fix the center of the ring to the barycenter of the Sun. We note that a free floating ring centered on the Sun or on the barycenter of the Solar System is actually unstable and would gradually drift away from its initial position. The expression for the force exerted by a ring on a particle is given in Appendix A.

3.2. Comparison with the analytical expressions

We used INPOP to numerically estimate the effects of a ring with INPOP06 parameters on the Earth and Mars. These effects can be isolated from the perturbations induced by other objects in the INPOP model by comparing a Solar System integration with the ring and a reference integration in which the ring is absent. The difference between the evolutions of orbital elements in both integrations provides the perturbation induced exclusively by the ring. Results obtained with this method on the 1969–2010 interval are shown in Fig. 1. Because integrations both with and without the ring start from identical initial conditions at J2000, all the perturbations are at zero for this date. A linear regression provides values for the numerically observed secular drifts:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_E &= -1.15 \times 10^{-11} \text{ rad yr}^{-1}, \quad \dot{\lambda}_M = -3.11 \times 10^{-11} \text{ rad yr}^{-1} \\ \dot{\varpi}_E &= 0.95 \times 10^{-11} \text{ rad yr}^{-1}, \quad \dot{\varpi}_M = 2.65 \times 10^{-11} \text{ rad yr}^{-1} \\ \dot{\Omega}_E &= -0.94 \times 10^{-11} \text{ rad yr}^{-1}, \quad \dot{\Omega}_M = -2.69 \times 10^{-11} \text{ rad yr}^{-1}. \end{aligned}$$

With the exception of the mean longitude of Mars, the observed drifts agree well with the analytical predictions of Table 2. For Mars, the discordance with the predicted drift in mean longitude is due to the non zero mean value of the perturbation of

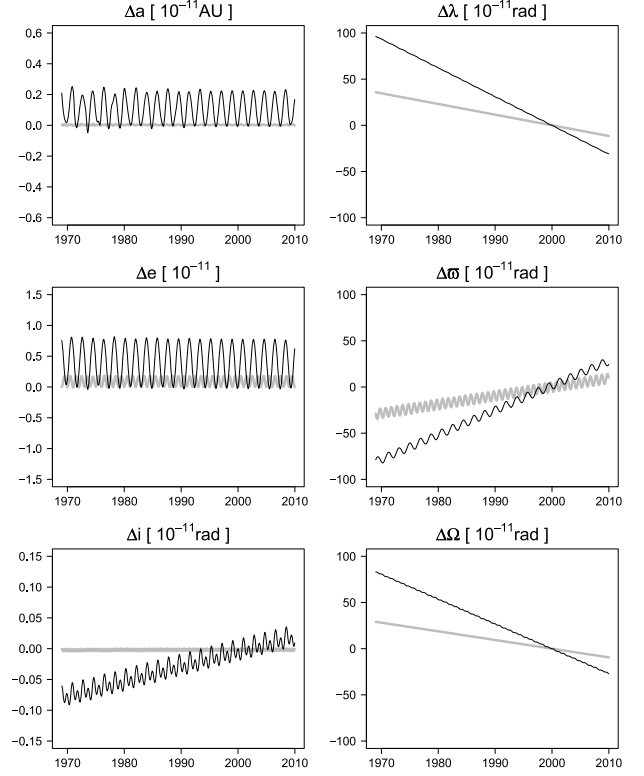


Fig. 1. Perturbation induced on the orbital elements of Earth (in gray) and Mars by a ring with INPOP06 parameters.

the semi-major axis of Mars. A constant shift in the semi-major axis corresponds to a shift in mean motion Δn_0 . We can estimate Δn_0 directly from the mean value of the semi-major axis in Fig. 1. Adding the estimated Δn_0 to the drift in the mean longitude of Mars calculated in Table 2 leads to a corrected estimation $\dot{\lambda}_M = -3.05 \times 10^{-11} \text{ rad yr}^{-1}$. The numerically observed drift in the inclination of Mars is $\dot{i}_M = 0.0024 \times 10^{-11} \text{ rad yr}^{-1}$. The interval 1969–2010 is too short to correctly estimate the secular drift in the inclination of Earth. Similarly, for both planets it is impossible to estimate the secular drifts in eccentricities.

We estimate the perturbation induced by the ring on the Earth-Mars distance by comparing two integrations with and without the ring. Figure 2 shows that with INPOP06 parameters the effect of the ring reaches approximately 150 m. This perturbation results from secular drifts in the various orbital elements, thus the 150 m reached over 31 years between 1969 and 2000 can be translated as approximately 5 m per year. This is in good agreement with the prediction made at the end of Sect. 2.3.

4. A test model of the main belt

From the analytical standpoint the ring appears as a first-order representation of the main belt. Nevertheless, it is rather difficult to evaluate its effective capacity to model a multitude of objects. One possible solution is to test the ring against a test model containing large numbers of individual asteroids assigned with particular masses. The ring can be tested against many different asteroid models each built with a different set of masses. Such Monte Carlo (MC) experiments can provide an estimate of the number of asteroids that have to be modeled individually in ephemerides. If the asteroid masses are individually inaccurate

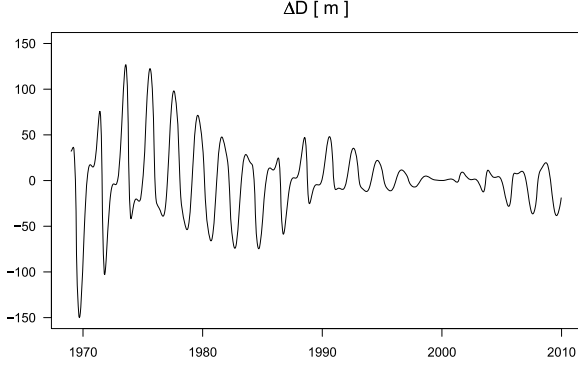


Fig. 2. Perturbation of the Earth-Mars distance induced by a ring with INPOP06 parameters.

but globally reasonable, the MC experiments can also estimate the ring’s mass.

4.1. Asteroid selection

We select for our test model all the asteroids in the ASTORB catalog that have an absolute magnitude brighter than 14 and are situated in terms of semi-major axis within 3.5 AU. These criteria are the same as in Sect. 2.1. The absolute magnitude limit of 14 corresponds to the estimated completeness limit of the main-belt and NEO populations as reported by Jedicke et al. (2002). The value also leads to a relatively large but still reasonable number of objects to work with, 24635 asteroids in total. Absolute magnitude can be converted to diameter with the following formula (Bowell et al. 1989):

$$D_{(\text{km})} = \frac{1329}{\sqrt{\rho}} 10^{-0.2H}$$

where D is the diameter in kilometers, H the absolute magnitude, and ρ the albedo of the asteroid. With a value for a minimum possible albedo within the asteroid population, the formula sets an upper bound on the diameter of asteroids that are not included in our model. Tedesco et al. (2005) estimate the mean albedo of the lowest albedo class at approximately 0.05. With this estimate, the maximum diameter of an asteroid not included in our test model is 10 km.

4.2. Asteroid masses

Today the total number of accurately measured asteroid masses amounts to only a few tens. Besides the case of binary objects, asteroid mass determinations are in general susceptible to systematic errors, which are hard to estimate. To assign all the selected asteroids with at least reasonable masses, we devise a simple algorithm inspired by the statistical asteroid model (Tedesco et al. 2005). The algorithm processes family membership, taxonomy, and SIMPS survey data² and assigns accordingly each asteroid with an albedo ρ and corresponding uncertainty $\Delta\rho$. Among the 24635 asteroids, more than two thousand asteroids have values of ρ and $\Delta\rho$ directly available from SIMPS, objects with family or taxonomy data have their ρ and $\Delta\rho$ attributed with data obtained in the statistical asteroid model and reproduced in Table 4. In cases where information overlaps, SIMPS is preferred to taxonomies and families. Taxonomy data is preferred to families, which helps to eliminate interlopers in

Table 4. Albedo and corresponding uncertainty for objects with known taxonomy or belonging to a dynamical family.

Family data		
Family	ρ	$\Delta\rho$
Adeona	0.0734	0.0205
Dora	0.0603	0.0160
Eos	0.1359	0.0426
Erigone	0.0569	0.0123
Eunomia	0.1494	0.0864
Flora	0.2113	0.0905
Gefion	0.0824	0.0738
Hygiea	0.0515	0.0141
Koronis	0.2094	0.0603
Maria	0.2224	0.0525
Massalia	0.2096	0.0603
Merxia	0.2207	0.0603
Themis	0.0834	0.0338
Veritas	0.0693	0.0150
Vesta	0.2870	0.0795
Taxonomy data		
Class	ρ	$\Delta\rho$
Low albedo (C,G,B,F,P,T,D)	0.0545	0.0345
Intermediate albedo (M)	0.1005	0.0155
Moderate albedo (S,Q)	0.2335	0.1215
High albedo (E,V,R)	0.4305	0.0955

Notes. Values reproduced from Tedesco et al. (2005), Tables 1 and 7.

the family data. In general at least some information is available for 10% of the selected objects. For the remaining majority of asteroids, they are randomly assigned an albedo class with probabilities adopted from Tedesco et al. (2005) (56% low albedo, 7% intermediate albedo, 34% moderate albedo, and 3% high albedo). Table 4 defines ρ and $\Delta\rho$ for each albedo class.

Asteroid diameters are calculated from corresponding ρ to which a random error within $\pm\Delta\rho$ is added. For SIMPS data, the algorithm ignores the formal $\Delta\rho$ and applies instead a more realistic 10% uncertainty directly on the diameter. As potential systematic errors in absolute magnitudes are reported by various authors (Jurić et al. 2002), we account for them with a ± 0.5 random uncertainty added to absolute magnitude. With the lower part of Table 4, we can use each asteroid’s mean albedo ρ to assign the asteroid with a density class: C (low albedo), S (moderate albedo), and M (intermediate and high albedos merged). We stress that these density classes are attributed according to albedo. Therefore, for some objects, the density classes may not coincide with taxonomy data. Bulk porosity is expected to vary among the asteroids (see Britt et al. 2002), so we adopt the following intervals for the class densities: [0.5, 2.5] (C), [1.6, 3.8] (S) and [1, 5] (M). The density of an asteroid is chosen randomly within the corresponding class interval and together with the previously calculated diameter provides a mass. The masses of six asteroids are kept constant and equal to their published values. We fix $4.756 \times 10^{-10} M_{\odot}$, $1.025 \times 10^{-10} M_{\odot}$, $1.348 \times 10^{-10} M_{\odot}$ for 1 Ceres, 2 Pallas, 4 Vesta (Fienga et al. 2008), $0.45 \times 10^{-10} M_{\odot}$ for 10 Hygiea (Chesley et al. 2005), $0.03 \times 10^{-10} M_{\odot}$ for 22 Kalliope (Merline et al. 1999), and $0.037 \times 10^{-10} M_{\odot}$ for 45 Eugenia (Margot & Brown 2005).

We used the algorithm to generate for each asteroid a set of 100 random masses. A standard mass set is generated without any random choices. In this standard mass set, $\Delta\rho$ is put to zero and densities are maintained at INPOP06 values: 1.56 (C), 2.18 (S), and 4.26 (M). Objects without any available data are

² The databases are maintained in NASA’s PDS Asteroid Archive.

automatically considered as belonging to the C taxonomy class in the standard mass set.

4.3. Individual perturbations and the global effect

As in Sect. 3, the perturbation of the Earth-Mars distance is denoted with ΔD . To evaluate the perturbations ΔD_i ($1 \leq i \leq 24\,635$) induced by each individual asteroid of the test model, we performed extensive integrations with INPOP. Each ΔD_i was obtained by comparing on the 1969–2010 interval a Solar System integration with the particular asteroid and a reference integration in which the asteroid is absent.

For a given set of asteroid masses, we can rank the asteroids according to the decreasing amplitude of their individual perturbations. Here and in the following, the amplitude of a perturbation is estimated by the maximum of $|\Delta D|$ reached on the 1969–2010 interval. Each ΔD_i is proportional to the mass M_i of the perturbing asteroid, in consequence, we have

$$\Delta D_i = \frac{\partial \Delta D_i}{\partial M_i} M_i. \quad (5)$$

Equation (5) can be rewritten as

$$\Delta D_i = \frac{\partial D}{\partial M_i} M_i$$

where D is the Earth-Mars distance. This is the analog of Eq. (4), but instead of considering the perturbation of the Earth-Mars distance as depending on the perturbations of the planetary orbits, we consider it as depending on the mass of the perturbing asteroid. The first-order Taylor expansion of D in terms of all the asteroid masses leads to

$$D(M_1, \dots, M_{24\,635}) = D(0, \dots, 0) + \frac{\partial D}{\partial M_1} M_1 + \dots + \frac{\partial D}{\partial M_{24\,635}} M_{24\,635}.$$

We can thus approximate to first-order the perturbation caused by a particular set of asteroid masses by the sum of the already calculated individual asteroid contributions:

$$\Delta D = \Delta D_1 + \dots + \Delta D_{24\,635}. \quad (6)$$

Although initially the ΔD_i are obtained with INPOP for the standard mass set defined in Sect. 4.2, the proportionality relation (5) provides the individual perturbations for any set of asteroid masses. In the next section we will use the expansion (6) to study how the resemblance between the ring, and the test model evolves with the number of asteroids removed from the test model and between different mass sets. Indeed, INPOP integrations of the Solar System with thousands of asteroids take several hours, and it is impossible to explore the parameter space by reintegrating the test model each time with new parameters. We refer to the perturbation induced by the test model after removing a selection of individuals as to the global perturbation.

To test the development (6), we can compare the global perturbation obtained from a simultaneous INPOP integration of all the asteroids, but the N most perturbing ones with the same perturbation obtained from the development. We choose N at 300 here because it corresponds to the number of asteroids usually considered individually in modern ephemerides. Figure 3 shows the difference between the two perturbations for the standard mass set. This difference is on the order of 1 m, which is less than 1% of the perturbation's amplitude. In consequence, we consider the development (6) as satisfactory. It should be noted, that in the simultaneous integration, the mutual perturbations of the asteroids were not taken into account.

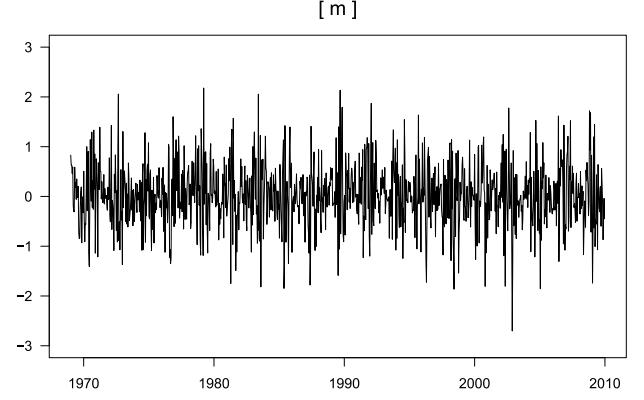


Fig. 3. Difference between the ΔD obtained from expansion (6) and the ΔD obtained from a simultaneous INPOP integration of the asteroids.

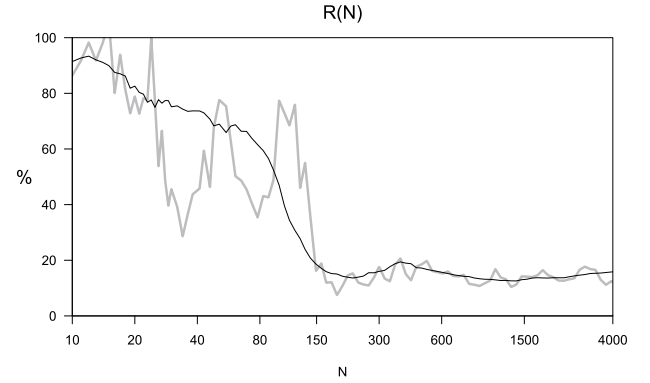


Fig. 4. Evolution of $R(N)$ for the standard set of masses (in gray) and an average over 100 different sets.

5. Testing the capacity of the ring to model large numbers of asteroids

5.1. Selection based on amplitude

We denote with $\Delta D_{\text{glob}}(N)$ the global perturbation induced on the Earth-Mars distance by the test model after removing from the test model the N most perturbing asteroids. Similarly we denote with ΔD_{ring} the perturbation induced by a ring. To evaluate the capacity of the ring to represent the global perturbation, we fit for different values of N the amplitude of ΔD_{ring} so as to minimize

$$|\Delta D_{\text{ring}} - \Delta D_{\text{glob}}(N)|.$$

Because ΔD_{ring} is proportional to the mass of the ring, fitting the amplitude is actually equivalent to fitting the mass of the ring. Let us denote by $R(N)$ the percentage of the amplitude of the global perturbation left after fitting the ring. We thus have

$$R(N) = \frac{\max |\Delta D_{\text{ring}} - \Delta D_{\text{glob}}(N)|}{\max |\Delta D_{\text{glob}}(N)|}.$$

Figure 4 shows the evolution of $R(N)$ for the standard set of masses, as well as an average of $R(N)$ over the 100 different mass sets defined in Sect. 4.2. For values of N greater than 200, the ability of the ring to model a global effect has reached its maximum and remains constant. At its best, the ring is thus able to represent more than 80% of the total perturbation amplitude.

We show in Fig. 5 the effect induced on the planetary orbital elements by the test model after removing from the test model

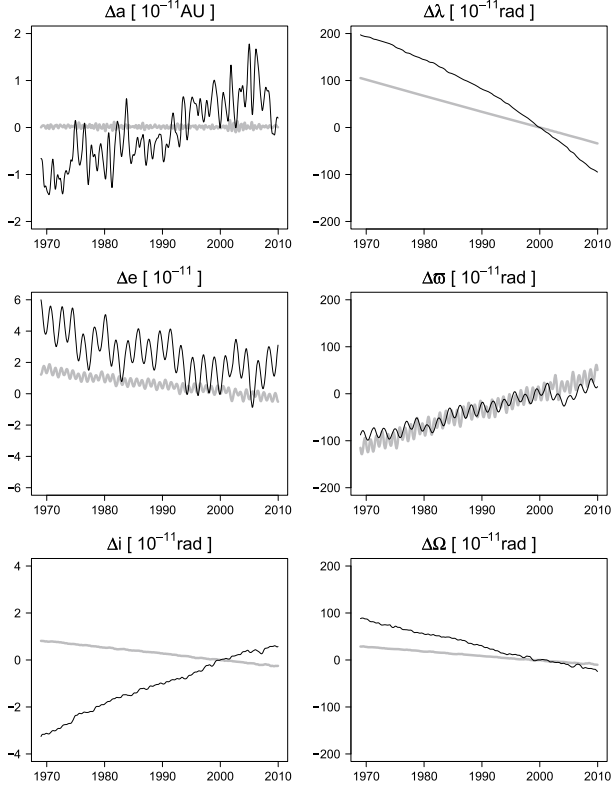


Fig. 5. Perturbation induced on the orbital elements of Earth (in gray) and Mars by the test model after removing from the test model the 300 most important perturbators.

the 300 most perturbing asteroids (for the standard mass set). The observed effects are indeed rather smooth and similar to the drifts induced by a ring. For comparison, Fig. 6 shows the effect induced on the planetary orbital elements by all the asteroids of the test model.

It is possible to calculate the average mass of the ring after removing the 300 most perturbing asteroids by minimizing

$$|\Delta D_{\text{ring}} - \Delta D_{\text{glob}}(300)|.$$

With the 100 different sets of asteroid masses, the mass of the ring is estimated at $M_{\text{ring}} = 0.6 \pm 0.2 \times 10^{-10} M_{\odot}$. In a similar way, we can estimate the average maximum reached by ΔD_{glob} at 246 m and the average maximum reached by the residuals after fitting the ring at 38 m. The obtained value of M_{ring} is approximately twice as high as the mass of the ring fitted in INPOP06. Contrary to INPOP06 where parameters are fitted to observations, here the value of M_{ring} is obtained solely from the test model. Figure 7 shows the variations with N of the amplitude of the global perturbation and the amplitude of the residuals. The evolution of the mass of the ring is not shown because it follows proportionally the amplitude of the global perturbation.

The calculated residuals for $N = 300$ correspond to approximately 10 m over the 2000–2010 time interval. This is an order of magnitude above the residuals obtained today for the most accurate Mars ranging data. The limiting factor of the ring model is the inability to reproduce the quadratic evolution in the mean longitude of Mars (see Fig. 5). This quadratic evolution is in fact a consequence of the linear drift of the semi-major axis of Mars that persists in the test model for all values of N .

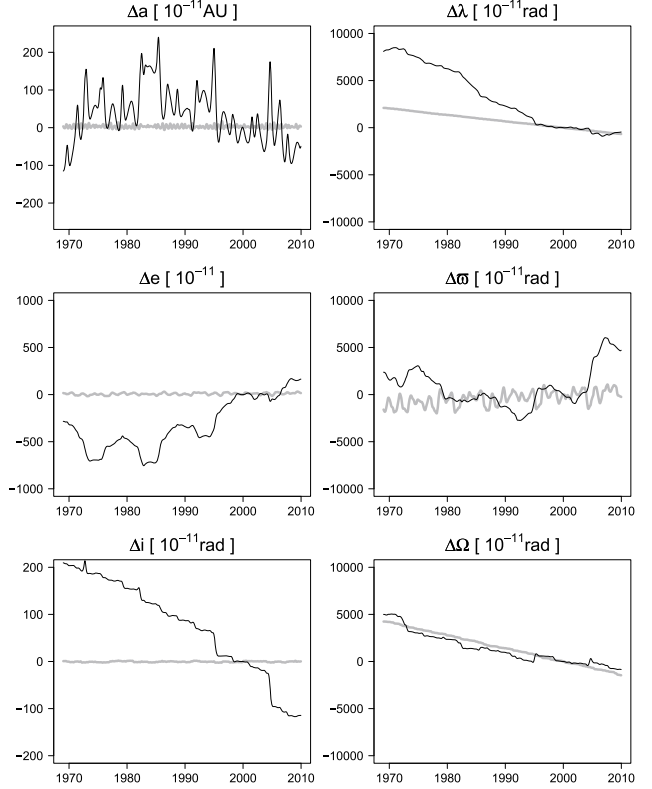


Fig. 6. Perturbation induced on the orbital elements of Earth (in gray) and Mars by the entire test model.

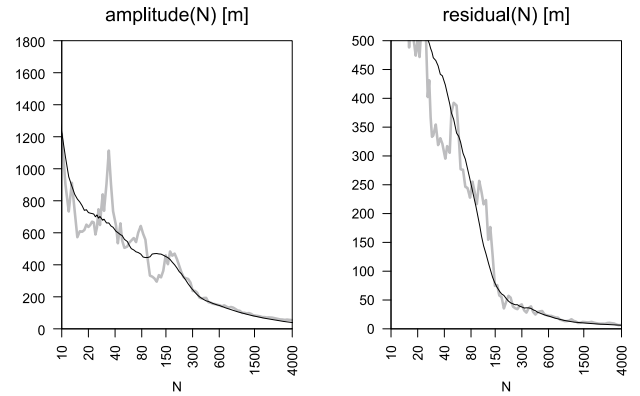


Fig. 7. Evolution of the amplitude of ΔD_{glob} and the amplitude of the residuals after fitting a ring for the standard set of masses (in gray) and corresponding averages computed over 100 random mass sets.

5.2. The selection as a mixed integer quadratic problem

The progressive removal of asteroids from the test model can be understood as a selection of individual asteroids that should be modeled individually in an ephemeris. The selection scheme based on the amplitude of the individual asteroid perturbations on the Earth-Mars distance is not optimal. Indeed for each state N , it is possible to slightly modify the set of the removed asteroids in order to eliminate the linear drift in the semi-major axis of Mars responsible for the quadratic evolution of the mean longitude in Fig. 5. The modification consists of removing from the test model a few additional asteroids that induce a positive slope in the perturbation of the semi-major axis of Mars

and adding the same number of already removed objects with a negative slope. Such changes improve the average residuals from the previous 38 m to 20 m.

A more systematic approach is to use a combinatorial optimization algorithm to select among the N most perturbing asteroids those that should be removed from the test model in order to maximize the modeling capacity of the ring. The problem can be stated formally for a particular mass set and a given N as the search for $N + 1$ parameters α_i that minimize

$$|\alpha_1 \Delta D_1 + \dots + \alpha_N \Delta D_N + \alpha_{N+1} \Delta D_{\text{ring}} + \Delta D_{\text{glob}}(N)|$$

with the constraint that α_{N+1} is real positive and all the other α_i are binary (equal to 1 or 0). The problem falls into the category of mixed integer quadratic problems (MIQP). In this particular case, a direct search for a solution involves testing 2^N combinations and becomes very difficult for any useful value of N . The exact solution can nevertheless be found with various methods, Gueye & Michelon (2009) provide a short literature review on the subject. One method of solving the MIQP is to linearize it and solve the linear formulation with the simplex algorithm provided for example in the GNU Linear Programming Kit (GLPK). A classical linearization is Glover's linearization (see Gueye & Michelon 2009), which involves N additional variables and $2N$ additional linear constraints. Unfortunately its implementation and the subsequent solution with GLPK does not lead to a solution within any reasonable time. Experiments with the commercial optimization package CPLEX³, on the other hand, showed an ability to solve the quadratic problem within seconds for N below 120 and within minutes for N below 200. For higher values, the time taken to solve the problem becomes too large to be of practical use in our MC experiments.

Figure 8 gives the analog of $R(N)$ obtained with a new selection scheme using the MIQP formulation, we denote the global effect corresponding to this new scheme with $\Delta D_{\text{glob}}^*(N)$. Because the calculations are relatively time consuming, only values of N below 500 are considered. For each N the algorithm uses CPLEX to select among the N most perturbing asteroids, those that should be removed from the test model to obtain an optimal fit with a ring. For N greater than 200, only the 200 least perturbing asteroids among the N most perturbing ones are considered by CPLEX. The remaining $(N-200)$ are removed from the test model automatically. In Fig. 8 we observe that the ring's modeling capacity is greatly improved when compared with the selection scheme based on amplitude. Not only does $R(N)$ drop almost to zero, but the maximum modeling capacity is also reached earlier. Figure 9 shows the evolution of the average maximum reached by the global perturbation and of the corresponding residuals after fitting the ring. Although the amplitude of the global effect is almost twice as large as in Fig. 7, the residuals are greatly improved. The performance reached after removing the 300 most perturbing asteroids from the test model is obtained with the MIQP approach for $N = 50$. The average residuals after fitting the ring are 4 m for $N = 300$. This corresponds to approximately 1.3 m over 10 years. The unmodeled part of the global perturbation is thus below the one sigma residuals of the MGS/MO and MEX data obtained in INPOP08. The average maximum reached by the global effect is 472 m, which corresponds in terms of the ring's mass to $M_{\text{ring}} = 1.1 \pm 0.2 \times 10^{-10} M_{\odot}$.

We show in Fig. 10, the perturbation induced on the orbital elements of Earth and Mars by the global effect obtained

³ The software solves a hierarchy of linear subproblems in a branch-and-bound approach, see www.ilog.com/products/cplex for more details on the package.

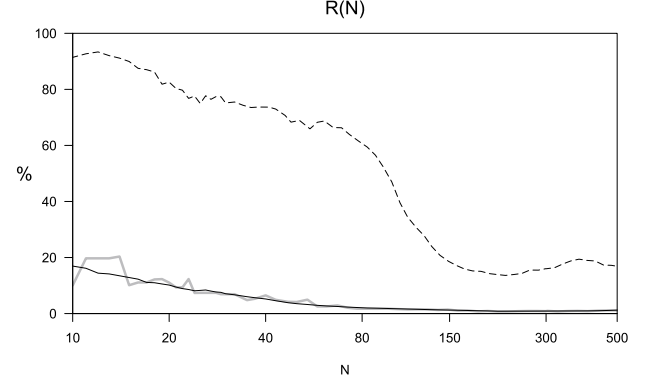


Fig. 8. Evolution of $R(N)$ with the MIQP selection for the standard set of masses (in gray) and an average over 100 different sets. The dashed line represents the average $R(N)$ obtained with the selection based on amplitude.

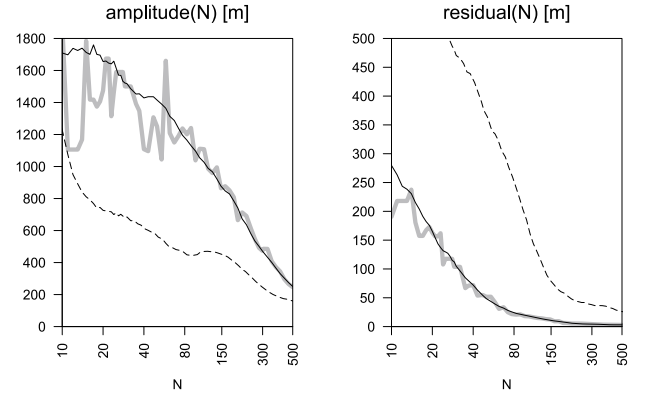


Fig. 9. Evolution with the MIQP selection of the amplitude of ΔD_{glob}^* and the amplitude of the residuals after fitting a ring for the standard set of masses (in gray) and corresponding averages computed over 100 random mass sets. The dashed lines represent the average amplitudes and residuals obtained with selection based on amplitude.

with the MIQP selection ($N = 300$) and the standard set of asteroid masses. The quadratic evolution of the mean longitude of Mars from Fig. 5 is straightened up. This explains why the corresponding global effect on the Earth-Mars distance has increased in amplitude. The MIQP approach in general improves the resemblance between the effect on the orbital elements induced by the global perturbation and the ring. A comparison between Figs. 1, 5, and 10 shows that beside improvements in the semi-major axis and mean longitude perturbations, the new selection also improves the eccentricity and perihelion perturbations. There are still some discrepancies, most importantly in the perturbations induced on the inclinations and nodes as well as on the perihelium of the Earth; however, these discrepancies are not surprising as the asteroid selection is based only on the Earth-Mars distance, which according to Table 3 is not very sensitive to these parameters.

5.3. Accounting for all the inner planets

Today ephemerides are being fitted to accurate Venus ranging observations from the ongoing VEX mission (see Fienga et al. 2009). According to Ashby et al. (2007), Mercury ranging could become available within a few years with missions like Messenger or BepiColombo. To evaluate the ability of the ring

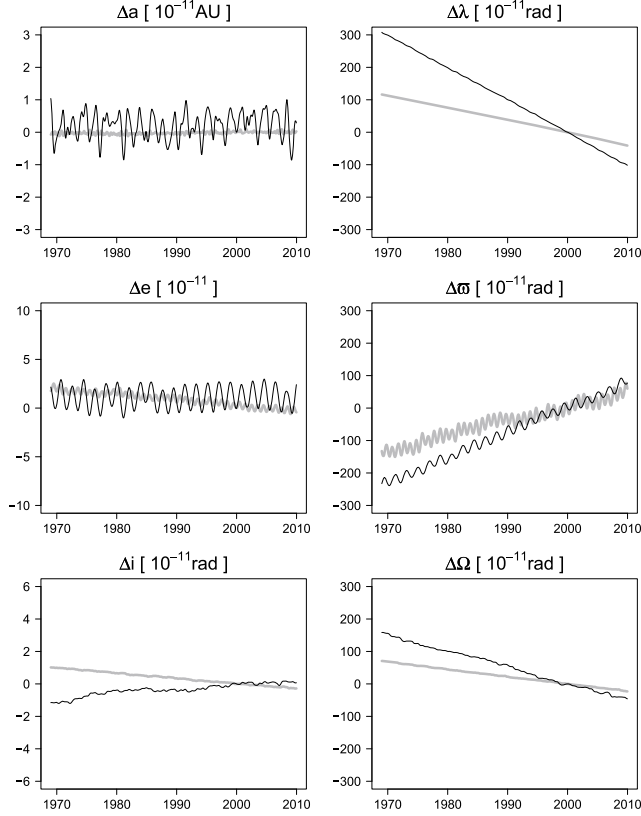


Fig. 10. Perturbation induced on the orbital elements of Earth (in gray) and Mars by the test model after removing from the test model at most 300 asteroids with the MIQP selection.

to model the global effect on all the inner planets, we repeated the MC experiment made with the MIQP selection scheme in Sect. 5.2. Instead of fitting only the Earth-Mars distance, we simultaneously fit the effects on distances to Mercury, Venus, and Mars. Figure 11 shows the evolution of residuals for all the planets in the simultaneous fit. For comparison the figure shows the residuals that can be obtained by fitting the distance to each planet separately. For $N = 300$, the ring is able to represent the global effect simultaneously on all the inner planets with an average accuracy better than 1.6 m over a 10 years time interval. Fitting all the planets together for $N = 300$ leads to the same amplitude of the global perturbation as in Sect. 5.2, and hence to the same estimate of the ring's mass. When considering separately Mercury or Venus, Fig. 11 shows that residuals well below 1 m per year can be reached by removing merely 1 Ceres, 2 Pallas and 4 Vesta from the main belt.

6. Applications

6.1. Model selection

To model the global effect correctly with respect to the accuracy of available data, a reasonable choice according to Fig. 11 is to account for fewer than 300 individual objects. By examining asteroids that were removed from the test model during the MC experiments, we can compile a list of objects that should be modeled individually in an ephemeris. For $N = 300$ in the simultaneous fit of Sect. 5.3, a total of 523 asteroids were removed at least once from the test model during the 100 MC runs, and the average number of removed objects was approximately 240. In

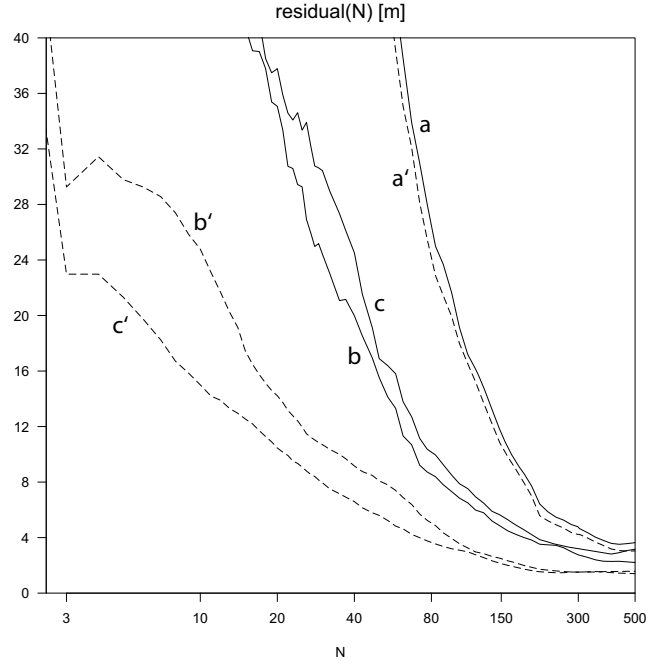


Fig. 11. Average residuals computed with the MIQP selection over 100 random mass sets for the Earth-Mars (a and a'), Earth-Venus (b and b'), and Earth-Mercury distances (c and c'). The continuous lines represent residuals obtained from a simultaneous fit of the ring to the ΔD_{glob} of the three planets, and the dashed lines represent the residuals obtained by fitting only one ΔD_{glob} at a time as in Sect. 5.2.

an ephemeris with an idealized asteroid model we should therefore fit these 523 asteroid masses with the option of putting more than a half of the fitted values to zero. Among the 523 asteroids, there are 72 individuals removed from the test model on each run and 60 asteroids removed only once during the 100 runs. The distinction between asteroids having a high chance of removal and a low one is not clear, it is however possible to define an arbitrary limit above which the probability of being removed from the test model is reasonably high. Fixing this limit at 25% leads to a total of 287 objects, which are listed in Table A.1 of the supplementary online material. The table provides for each asteroid the probability of being selected as well as its maximum effects on the Earth-Mars, Earth-Venus, and Earth-Mercury distances during the 1969–2010 time interval (for the standard mass set). It is interesting to note the existence of asteroids with relatively small effects on the Earth-Mars distance but with very high probabilities of being included in the individual part of the asteroid model: for example, 758 Mancunia induces a perturbation of approximately 10 m, but it is removed on each of the 100 runs. A part of Table A.1 of the supplementary online material is reproduced in Table 5.

6.2. Systematic error estimation

It is possible to use the results obtained in Fig. 11 to estimate systematic errors that will be induced by the residuals of the global perturbation during future missions like BepiColombo. These systematic errors can have a significant impact on the planned determinations of physical parameters from the ranging data. An extensive study of this problem is presented in Ashby et al. (2007).

Table 5. Asteroids with an effect on the Earth-Mars distance greater than 100 m.

Asteroid name	Diameter [km]	Density class	Earth-Mars [m]	Earth-Venus [m]	Earth-Mercury [m]	Prob. [%]
4 Vesta	468.30	S	11455.34	164.42	323.36	100
1 Ceres	848.40	S	7829.72	2656.87	935.08	100
2 Pallas	498.06	S	6612.41	977.16	379.08	100
324 Bamberga	229.44	C	1820.88	17.04	19.46	100
10 Hygiea	407.12	C	806.70	132.18	61.95	100
6 Hebe	185.18	S	691.70	54.66	21.15	100
532 Herculina	222.38	S	660.82	24.04	6.53	100
19 Fortuna	213.47	C	572.41	18.53	9.37	100
51 Nemausa	147.86	M	504.89	33.92	12.06	100
7 Iris	199.84	S	489.73	37.20	12.85	100
9 Metis	152.70	S	364.56	4.82	1.87	100
20 Massalia	145.50	S	285.84	20.90	7.31	100
139 Juewa	156.60	C	281.71	5.07	2.78	100
31 Euphrosyne	255.90	C	279.07	18.07	7.00	100
16 Psyche	253.16	S	264.08	38.66	13.92	100
52 Europa	302.50	C	252.60	43.76	15.93	100
24 Themis	218.44	C	234.96	2.07	1.25	100
63 Ausonia	103.14	S	234.40	4.15	1.44	100
747 Winchester	171.72	C	222.34	27.55	13.06	100
60 Echo	60.20	S	165.80	0.15	0.15	100
78 Diana	120.60	C	157.41	1.49	0.41	100
354 Eleonora	155.16	S	152.73	0.37	1.88	100
41 Daphne	174.00	C	149.44	6.11	4.25	100
3 Juno	233.92	S	145.29	15.88	5.58	100
654 Zelinda	127.40	C	142.71	21.79	13.53	100
5 Astraea	119.06	S	139.25	10.29	3.93	100
18 Melpomene	140.56	S	130.84	18.96	14.11	100
128 Nemesis	188.16	C	128.69	17.32	7.71	100
192 Nausikaa	103.26	S	128.46	0.67	2.26	100
11 Parthenope	153.34	S	115.67	5.73	3.86	100
106 Dione	146.60	M	114.27	4.99	1.58	100
105 Artemis	119.08	C	113.20	1.33	0.59	100
23 Thalia	107.54	S	112.92	1.05	0.56	100
372 Palma	188.62	C	112.84	3.79	1.58	100
29 Amphitrite	212.22	S	106.71	43.13	13.78	100
419 Aurelia	129.00	C	106.21	3.20	1.23	100
15 Eunomia	255.34	S	105.99	32.23	14.74	100
14 Irene	151.30	S	105.39	17.53	5.98	100
48 Doris	221.80	C	105.34	1.58	0.65	98
488 Kreusa	150.12	C	101.99	2.48	1.18	100

Notes. The last column of the table corresponds for each asteroid to the probability of being removed from the test model during the Monte Carlo experiments. The density classes are assigned according to albedo and do not always correspond to taxonomies.

The BepiColombo mission is expected to generate ranging data to Mercury accurate down to 4.5 cm (see [Ashby et al. 2007](#)). Figure 11 shows that 4.5 cm per year is relatively close to the best possible residuals reached for the Earth-Mercury distance. To take full advantage of this accuracy, the asteroid model used to process the ranging data will have to correctly account for approximately 200 individual asteroids. This is a relatively high number because obtaining accurate estimates of 200 asteroid masses may still be difficult in the near future. If we estimate at 50 the number of asteroids that we are actually able to model with the highest accuracy, we can use Fig. 11 to obtain an estimate of the systematic error for the BepiColombo mission if it took place today. For $N = 50$, fitting only the Earth-Mercury

distance leads to residuals of approximately 6 m equivalent to a systematic error of 15 cm over a one year period.

7. Discussion

It was shown that with an appropriate selection scheme a ring is able to effectively reduce the amplitude of a perturbation induced by thousands of asteroids from an average 472 m to only 4 m. The ring thus represents more than 99% of the global perturbation, which clearly makes it a very suitable model. The value of 99% was obtained with 100 MC experiments, so it can be considered as quite robust. Also, this percentage does not depend on choices made for attributing asteroids with masses in

the test model. The estimations of the amplitude of the residuals, the amplitude of the global perturbation and the mass of the ring are, on the other hand, proportional to the mass of the test model and in consequence strongly dependent on the choices made in the attribution of asteroid masses. If for example in Sect. 4.2 the interval used for the C density class were centered on 1 instead of 1.5, all the previous parameters would have been approximately one third smaller. We are reasonably confident in the realism of the asteroid masses in our model because the mass of the ring obtained after removing the 300 most perturbing asteroids in Sect. 5.1 is relatively close to the value of $0.34 \pm 0.15 \times 10^{-10} M_{\odot}$ obtained in INPOP06.

The objective in this work was to show that the ring is a first-order model of a main-belt global effect and that it is able to represent large numbers of objects in practice. The difficulty of fitting its mass with other highly correlated parameters is an important problem not considered here. In particular, the initial conditions of the planets were maintained fixed throughout our study, whereas they are fitted in an ephemeris. Because the global effect acts mostly through linear drifts in mean-longitudes, a large part can be absorbed by changes of a few meters in the initial semi-major axes of the planets. The mass of the ring can be correlated with other parameters as well, like the individual asteroid masses or for example solar oblateness as shown by [Fienga et al. \(2009\)](#). These correlations can be considered as so important that the ring is eventually not implemented in the model (the case in DE421) or its mass is fixed to a certain value (the case for INPOP08). The major arguments for keeping the ring in the model are its 99% modeling capacity and that, without the ring, systematic errors can reach several hundreds of meters.

In Sect. 2.1 we fixed the radius of the ring to 2.8 AU and always considered mass as the only parameter. We have briefly investigated the possibility of fitting the radius and mass together. We find out that, when considering only the Earth-Mars distance, any change in mass can effectively be compensated for by a change in radius. In terms of the residuals on the Earth-Mars distance, moving the ring from 2.8 AU to 2.4 AU is equivalent to doubling the ring's mass. Similarly moving the ring to 3.4 AU is equivalent to dividing the mass of the ring by two. The same residuals can be obtained no matter the radius. Nevertheless according to Sect. 2.1, the mass of a ring with radius 2.8 AU indeed corresponds to the total mass of the represented asteroids (it is not the case for other radii).

Throughout this paper, we estimated the amplitudes of perturbations with the maximum reached on the 1969–2010 interval. This corresponds to the maximum norm $\| \cdot \|_{\infty}$. Measuring perturbations in terms of the root mean square (equivalent to the norm $\| \cdot \|_2$) would divide all our amplitude estimations by approximately three. This would lead to much more relaxed demands on the asteroid models. In particular an accuracy below 2 m over 10 years would be reached in Fig. 11 for $N = 100$ instead of $N = 300$. Similarly, the final systematic error for BepiColombo with a correct $N = 50$ asteroid model would drop from 15 cm per year to 5 cm per year. We showed that the number of asteroids that need to be accounted for individually is no more than 300, if in a more optimistic perspective all our amplitude estimations can be divided by a factor of three, the number of asteroids to account for individually could be as low as 100.

This study was restricted to the main-belt perturbations. Other Solar System objects potentially have impacts on the ephemerides that should be estimated and possibly accounted for. We can mention trans-Neptunian objects already implemented in the EPM ephemeris or the Trojan asteroids whose

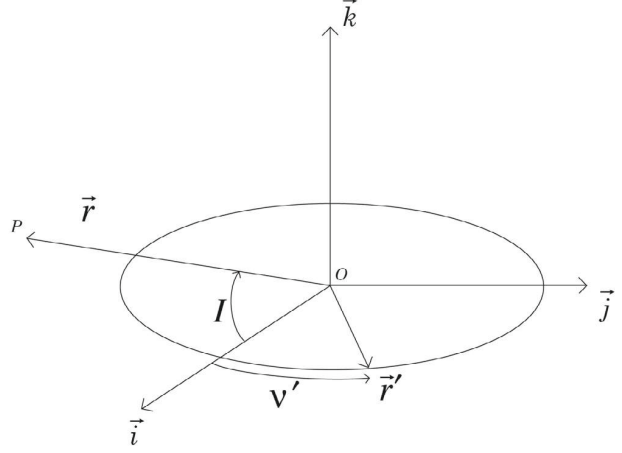


Fig. A.1. The reference frame.

effect could be significant and which are certainly not accounted for by a ring. Also we only considered effects on the inner planets because they provide the majority of accurate data today. The effect of asteroids on the outer planets can be non-negligible and should be considered in future studies; especially, effects on Jupiter can be significant because of the various resonances with the main belt. However, such studies for the outer planets will have an impact on data only when accurate observations of the outer planets are available over a sufficient time span.

8. Conclusion

A ring is an implementation of an averaged orbit, which is a very good model of the perturbation induced by the main-belt asteroids. After removing less than 300 objects from the main-belt, the ring is able to account for more than 99% of the remaining perturbation on all the inner planets. Since the amplitude of the global effect can reach several hundreds of meters in terms of the Earth-Mars distance, it is advisable to keep the ring in an ephemeris model of the Solar System.

Appendix A: 3D perturbing force of an asteroid ring

We derive here the expression of the gravitational force exerted by a ring of center O , radius r' , and mass m on a point P of mass M . The chosen reference frame is (O, i, j, k) , with k orthogonal to the ring's plane and i the unit vector in the direction of the projection of $r = \overrightarrow{OP}$ on the ring's plane. We denote with r' the radius vector of a point on the ring. The longitude angle of r' with origin at i is denoted v' (see Fig. A.1). The potential exerted by the ring on P is

$$V(r) = -\frac{GmM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dv'}{\|r' - r\|}.$$

By defining I as the angle of r with the plane of the ring, the potential can be rewritten as

$$V(r) = -\frac{GmM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dv'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos I \cos v')^{1/2}}.$$

With

$$\alpha = \frac{2rr' \cos I}{r^2 + r'^2},$$

we obtain

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dv'}{(1 - \alpha \cos v')^{1/2}}.$$

The above expression can be rewritten as

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{\sqrt{\Gamma}} \frac{2}{\pi} \mathcal{K}(\beta),$$

where $\mathcal{K}(\beta)$ is the complete elliptical integral⁴ of the first kind, and β and Γ are defined as

$$\beta = \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \quad \Gamma = r^2 + r'^2 + 2r'r \cos I.$$

The force exerted on P is $\mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{r}} V$. If

$$\nabla_{\mathbf{r}}(\Gamma) = 2\mathbf{r} + 2r'\mathbf{i} \quad \nabla_{\mathbf{r}}(\beta) = -\frac{8r'r \cos I}{\Gamma^2} \mathbf{r} + 4r' \frac{r^2 + r'^2}{\Gamma^2} \mathbf{i},$$

we obtain, after straightforward computation, the expression of $\mathbf{F}$ in terms of the complete elliptical integral of first ($\mathcal{K}$) and second ($\mathcal{E}$) kind:

$$\mathbf{F} = -\frac{2GmM}{\pi\alpha(1-\beta)\Gamma^{3/2}} \left[\alpha\mathcal{E}(\beta)\mathbf{r} + ((1-\alpha)\mathcal{K}(\beta) - \mathcal{E}(\beta))r'\mathbf{i} \right].$$

This expression is valid for an internal or external body P with $r \neq r'$. Indeed in this case we always have $0 \leq \alpha < 1$, hence also $0 \leq \beta < 1$, so the elliptical integrals are well defined by their hypergeometric series, although one may use approximation formulas for a fast evaluation. When the problem is planar ($I = 0$), these expressions become equivalent to the expressions given in Krasinsky et al. (2002) or Fienga et al. (2008).

Acknowledgements. The first author wishes to acknowledge interesting discussions with James Hilton (US Naval Observatory). This work was done with the financial support of the CNES and the French Ministry of Education.

References

- Ashby, N., Bender, P. L., & Wahr, J. M. 2007, *Phys. Rev. D*, 75
 Bowell, E., Hapke, B., Lumme, K., & Harris, A. W. 1989, in *Asteroids II* (Univ. Arizona Press), 549
 Britt, D. T., Yeomans, D., Housen, K., & Consolmagno, G. 2002, in *Asteroids III* (Univ. Arizona Press), 485
 Chesley, S. R., Owen, W. M., Hayne, E. W., et al. 2005, *Bull. Am. Astron. Soc.*, 37, 524
 Fienga, A., Manche, H., Laskar, J., & Gastineau, M. 2008, *A&A*, 477, 315
 Fienga, A., Laskar, J., Manche, H., et al. 2009, *Relativity in Fundamental Astronomy: Dynamics, Reference Frames and Data analysis*, Proc. IAU Symp., 261
 Fienga, A., Laskar, J., Morley, T., et al. 2009, *A&A*, 507, 1675
 Folkner, W. M., Williams, J. G., & Boggs, D. H. 2008, JPL IOM 343R-08-003
 Gueye, S., & Michelon, P. 2009, *Discrete Applied Mathematics*, 157
 Hill, G. W. 1882, *Astronomical papers prepared for the use of the American Ephemeris*, I
 Jedicke, R., Larsen, J., & Spahr, T. 2002, in *Asteroids III* (Univ. Arizona Press), 98
 Jurić, M., Ivezić, Ž., Lupton, R. H., et al. 2002, *AJ*, 124, 1776
 Krasinsky, G. A., Pitjeva, E. V., Vasilyev, M. V., & Yagudina, E. I. 2002, *Icarus*, 158, 98
 Laskar, J., & Robutel, P. 1995, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62, 193
 Margot, J. L., & Brown, M. E. 2005, *Science*, 300, 1939
 Merline, W. J., Close, L. M., Dumas, C., et al. 1999, *Nature*, 401, 565
 Murray, C. D., & Dermott, S. F. 1999, in *Solar System dynamics* (Cambridge University Press), 225
 Tedesco, E. F., Cellino, A., & Zappala, V. 2005, *AJ*, 129, 2869
 Whittaker, E. T., & Watson, G. N. 1927, in *A course of Modern Analysis* (Cambridge University Press)

⁴ The elliptical integral of first ($\mathcal{K}$) and second ($\mathcal{E}$) kind are defined as (Whittaker & Watson 1927):

$$\mathcal{K}(\beta) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta \sin^2 x}} dx; \quad \mathcal{E}(\beta) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \beta \sin^2 x} dx.$$

4.2 Mise à jour du modèle test

Pour pouvoir déterminer au mieux les astéroïdes à modéliser individuellement dans INPOP, on va répéter les expériences numériques de Kuchynka *et al.* (2010) en se limitant aux intervalles de temps des données disponibles et en tenant compte de l'ajustement des conditions initiales des planètes. Plutôt que de se baser sur le modèle de la ceinture principale de l'article, on préfère construire un nouveau modèle plus cohérent avec les résultats des chapitres précédents.

Par la suite la masse standard d'un astéroïde sera notée M_e , on notera le diamètre et le volume correspondant par D_e et V_e . De manière générale dans cette section, les masses, diamètres et volumes seront notés par M , D et V .

4.2.1 Estimation des masses aléatoires

Le nouveau modèle test est construit à partir de l'ensemble des 27142 astéroïdes considérés au chapitre 3. On rappelle que cette sélection contient tous les objets de magnitude absolue supérieure à 14. Contrairement à Kuchynka *et al.* (2010), la sélection ne se limite donc pas aux astéroïdes de la ceinture principale.

Pour chaque astéroïde du modèle, on calcule 100 masses aléatoires distribuées autour de la masse standard en fonction des incertitudes déterminées au chapitre 1. Pour les objets de catégorie I, on choisit un diamètre de manière aléatoire dans l'intervalle compris entre $0.9D_e$ et $1.1D_e$. La masse est alors obtenue à partir d'une densité prise au hasard entre 1 g cm^{-3} et 4 g cm^{-3} . Les masses aléatoires de Ceres, Pallas et Vesta sont déterminées directement à partir de valeurs choisies au hasard entre $0.99M_e$ et $1.01M_e$.

On procède de manière analogue pour les astéroïdes de catégories II et III. Les diamètres correspondant sont ainsi choisis dans les intervalles $0.7D_e - 1.4D_e$ et $0.5D_e - 2D_e$. Dans la section 1.4.3, on a estimé des incertitudes maximales pouvant respectivement intervenir dans 10% et 2% des cas sur les masses de catégorie II et III. Afin de tenir compte de ces cas exceptionnels, la majorité des astéroïdes de catégorie II a 10 des 100 masses aléatoires recalculées avec des diamètres choisis au hasard entre $0.5D_e$ et $2D_e$. Les cas où l'erreur est effectivement maximale concerne en fait les astéroïdes dont la taxonomie est mal estimée. Les masses sont donc recalculées seulement pour les objets dont les masses standards se basent sur une taxonomie ou sur la valeur du demi-grand axe. Pour chaque astéroïde de catégorie III, on recalcule deux masses aléatoires à partir de diamètres compris entre $0.33D_e$ et $3D_e$.

4.2.2 Distributions des diamètres, des volumes et des masses

Cellino (2000) et Tedesco *et al.* (2005) suggèrent des distributions log-normales des albédos au sein des classes C et S (distributions gaussiennes des logarithmes d'albédos). Cette tendance peut d'ailleurs être observée sur les figures 1.11, notamment pour la classe C. Une distribution log-normale en albédo implique avec la formule (1.1) une distribution log-normale en diamètres. Par conséquent lors de la construction des masses aléatoires du nouveau modèle test, les diamètres sont pris au hasard dans les intervalles définis précédemment avec une densité de probabilité log-uniforme. La densité de probabilité est non constante pour les diamètres, mais constante pour les logarithmes des diamètres. Il s'agit d'une approche différente de l'article où les masses aléatoires se basent sur des distributions uniformes d'albédos.

Soit Y une variable définie à partir d'une variable aléatoire X par $Y = g(X)$ où g est une fonction croissante. Si f_X est la densité de probabilité de X , alors la densité de probabilité f_Y de Y est donnée par

$$f_Y(Y) = \frac{f_X(g^{-1}(Y))}{g'(g^{-1}(Y))} \quad (4.2)$$

La relation provient simplement du fait que la probabilité de choisir X dans un intervalle $[a; b]$ doit être égale à la probabilité de choisir Y dans l'intervalle $[g(a); g(b)]$. Une distribution log-uniforme en diamètre entre les bornes $\log(aD_e)$ et $\log(bD_e)$ se traduit donc par une densité de probabilité des diamètres f_D définie par

$$f_D(D) = \frac{1}{D} \quad \text{où} \quad D \in [aD_e; bD_e]$$

On omet dans l'expression la constante multiplicative qui assure $\int_0^\infty f_D dD = 1$. De manière analogue on vérifie que pour une distribution log-uniforme en diamètre entre les bornes $\log(aD_e)$ et $\log(bD_e)$, la densité de probabilité des volumes f_V est donnée par

$$f_V(V) = \frac{1}{V} \quad \text{où} \quad V \in [a^3V_e; b^3V_e]$$

Le calcul de la distribution en masse est plus compliqué. Si la densité est choisie de manière uniforme entre 1 g cm^{-3} et 4 g cm^{-3} , alors la densité de probabilité f_M associée à la masse est donnée par (Glen *et al.*, 2004) :

$$\begin{aligned} f_M(M) &= \frac{2.5}{a^3M_e} - \frac{1}{M} \quad \text{pour} \quad M \in [0.4a^3M_e; 1.6a^3M_e] \\ f_M(M) &= \frac{3}{M} \quad \text{pour} \quad M \in [1.6a^3M_e; 0.4b^3M_e] \\ f_M(M) &= \frac{4}{M} - \frac{2.5}{b^3M_e} \quad \text{pour} \quad M \in [0.4b^3M_e; 1.6b^3M_e] \end{aligned} \quad (4.3)$$

La formule n'est valable que pour $b/a > 1.6$, on assure ainsi que les trois intervalles ne se recoupent pas. Avec les intervalles des diamètres aléatoires définis précédemment, on vérifie que la formule est valable uniquement pour les masses des catégories II et III. Au sein de la catégorie I, l'incertitude sur le diamètre est faible et la distribution en masse peut être approximativement considérée comme uniforme sur $[V_e; 4V_e]$ ou de manière équivalente sur $[0.4M_e; 1.6M_e]$. Glen *et al.* (2004) permet d'obtenir la distribution analytique exacte.

Les figures 4.1, 4.2 et 4.3 représentent les densités de probabilités pour les trois catégories d'incertitude. Celles-ci sont données pour les diamètres, ainsi que pour les volumes et les masses. Sur les figures, les distributions théoriques se superposent avec des distributions estimées numériquement à partir de 10^6 masses aléatoires. On note que la probabilité pour une masse de catégorie II ou III de se situer à sa valeur maximale est extrêmement faible.

4.2.3 Comparaison avec l'ancien modèle

Dans Kuchynka *et al.* (2010) les masses aléatoires sont calculées à partir de distributions d'albédo uniformes. Avec les relations (1.1) et (4.2), on peut alors déduire que les densités de probabilité des diamètres et des volumes sont nulles ou bien elles évoluent comme

$$f_D(D) = \frac{1}{D^3} \quad \text{et} \quad f_V(V) = \frac{1}{V^{5/3}}$$

Avec une distribution uniforme des densités massiques des astéroïdes, la distribution des masses est donnée par des expressions analogues à (4.3). Mais au lieu de faire intervenir M^{-1} , les expressions dépendent de $M^{-5/3}$. Les distributions des diamètres, volumes et masses de l'article ressemblent donc approximativement à celles des figures 4.1 à 4.3. La tendance des probabilités à diminuer pour des valeurs importantes est néanmoins plus prononcée.

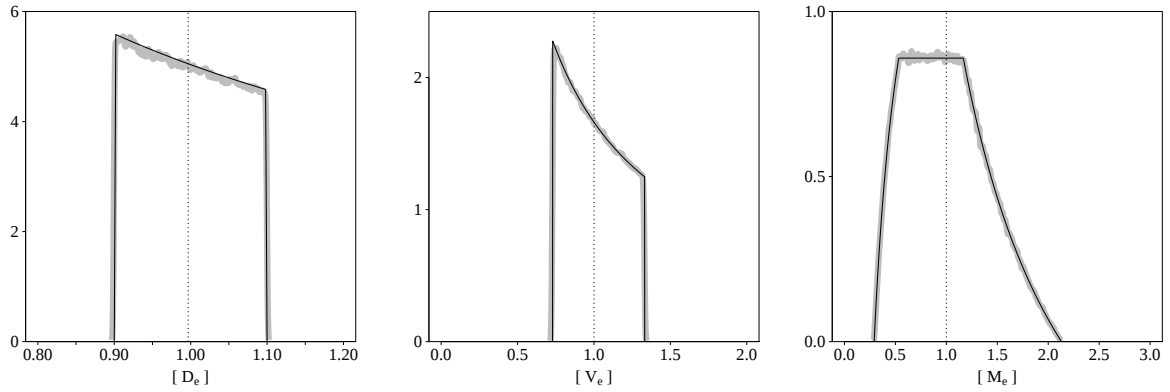


FIGURE 4.1 – Les figures représentent les densités de probabilité des diamètres, volumes et masses aléatoires calculés dans la section 4.2.1 pour les astéroïdes appartenant à la catégorie d’incertitude I. L’abscisse de chaque tracé est donné en diamètres, volumes et masses standards. En noir les distributions théoriques, en gris distributions calculées numériquement. Le trait vertical de chaque tracé indique les valeurs moyennes des distributions.

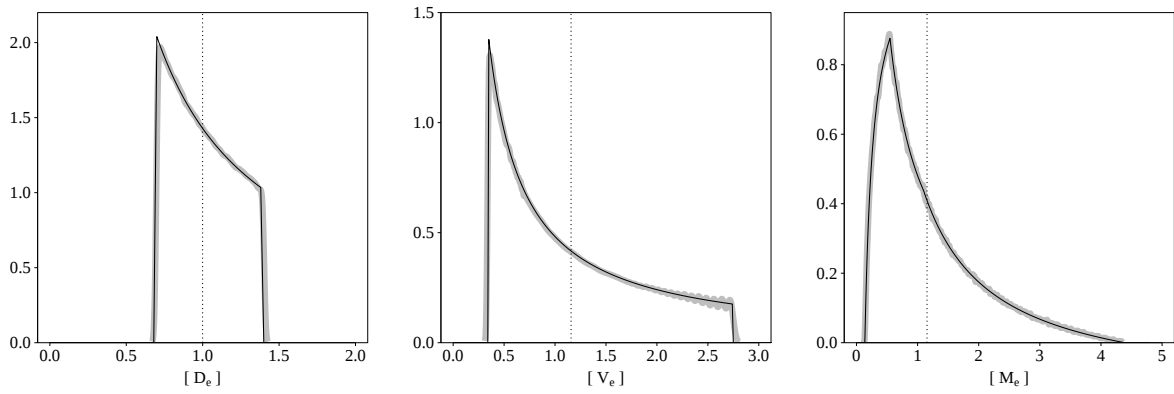


FIGURE 4.2 – Analogue de la figure 4.2 tracé pour la catégorie d’incertitude II.

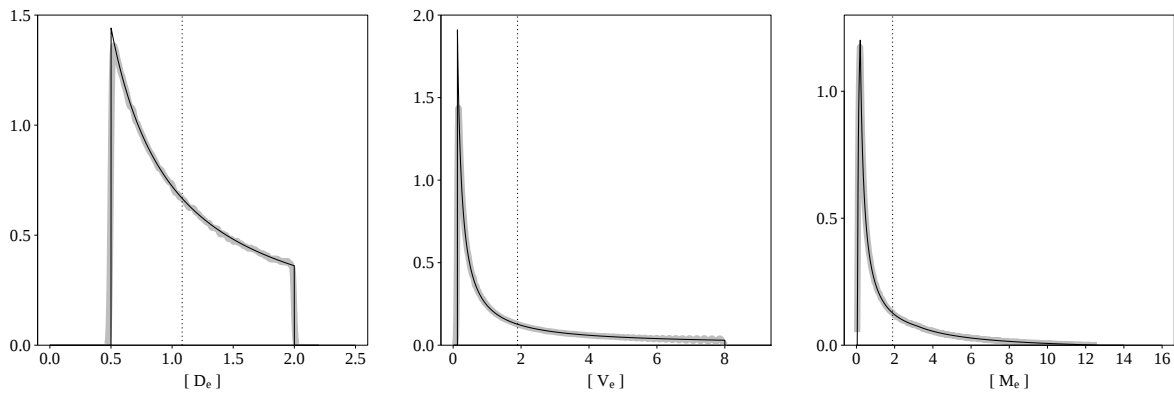


FIGURE 4.3 – Analogue de la figure 4.2 tracé pour la catégorie d’incertitude III.

TABLE 4.1 – Estimation de l’effet global induit par les astéroïdes de chaque catégorie d’incertitude dans le nouveau modèle test des astéroïdes ainsi que dans l’ancien. Ceres, Pallas et Vesta sont omis de la catégorie I.

	catégorie I	catégorie II	catégorie III
amplitude [m] (nouveau modèle)	207 ± 50	47 ± 48	6 ± 3
amplitude [m] (ancien modèle)	131 ± 28	19 ± 8	2 ± 1

Les valeurs des extrémités des distributions dans les deux modèles sont également différentes. Dans le nouveau modèle, les masses aléatoires des astéroïdes de catégorie I auront tendance à être plus lourdes. Elles sont déterminées à partir d’une densité moyenne de 2.5 g cm^{-3} , tandis que dans l’article les densités moyennes des taxonomies C et S sont de 1.5 g cm^{-3} et 2.7 g cm^{-3} . La comparaison des modèles en termes des masses aléatoires de catégorie II et III est moins simple.

Le tableau 4.1 rassemble pour les deux modèles les amplitudes moyennes des perturbations induites sur la distance Terre-Mars par l’ensemble des astéroïdes de chacune des trois catégories d’incertitude. Les différentes perturbations sont fournies par la formule (3.5) et un ajustement pondéré des conditions initiales sur l’intervalle des mesures modernes de la distance Terre-Mars. Il s’agit donc d’une estimation des perturbations identique à celle de la section 3.4.2. Les moyennes sont obtenues à partir de 100 estimations d’un effet global basées sur les 100 masses aléatoires générées dans chaque modèle pour chaque astéroïde. Les intervalles de confiance correspondent aux écart-types des distributions d’amplitudes.

Le tableau montre que le nouveau modèle test est environ deux fois plus lourd que le modèle de Kuchynka *et al.* (2010). Pour la catégorie III, ceci peut paraître surprenant car dans le nouveau modèle les masses sont calculées avec un albédo moyen de 0.125, tandis que dans l’article plus de la moitié des masses se base sur un albédo de 0.054. On attribue l’amplitude moyenne plus importante de la catégorie III à la distribution plus large des masses aléatoires dans le nouveau modèle. En effet comme le montrent les figures 4.1 à 4.3, une distribution large augmente sensiblement la valeur moyenne des masses aléatoires. On remarque sur le tableau que l’ensemble des astéroïdes de catégorie III induit un effet dont l’amplitude est de l’ordre de grandeur du bruit des données disponibles. Cette remarque a déjà été suggérée dans la section 3.2.4.

4.3 Estimation de l’effet global avec le nouveau modèle

On utilise le nouveau modèle test pour estimer l’effet global, d’abord de manière identique à celle de Kuchynka *et al.* (2010), puis en tenant compte des mesures disponibles de la distance Terre-Mars et enfin en tenant compte de l’ensemble des données disponibles dans INPOP.

4.3.1 Sans ajustement des conditions initiales

On reprend les expériences Monte-Carlo de l’article. Ainsi pour les 100 ensembles de masses aléatoires et pour $10 \leq N \leq 500$, on cherche avec CPLEX à minimiser la fonction (4.1) en imposant $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ binaires et α_{N+1} réel positif. Contrairement à Kuchynka *et al.* (2010), on n’attend pas que CPLEX trouve une solution pour laquelle la fonction objective diffère de la valeur à l’optimum de moins de 0.01%. La meilleure solution que CPLEX trouve au bout d’une minute est utilisée, on gagne ainsi un temps de calcul considérable sans pour autant dégrader l’estimation de l’effet global.

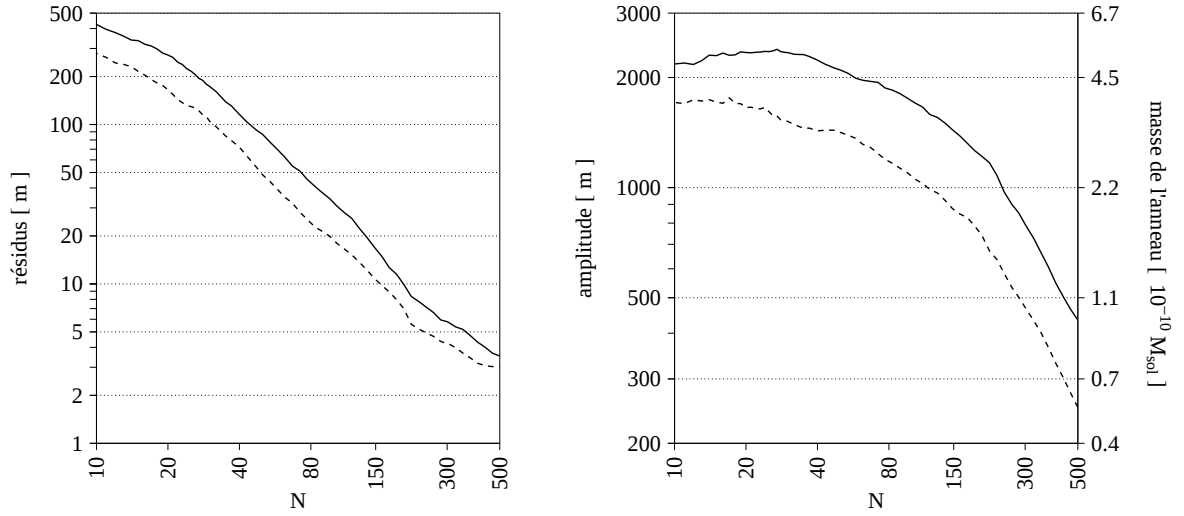


FIGURE 4.4 – À gauche, amplitudes moyennes des résidus de la perturbation globale induite sur la distance Terre-Mars entre 1969 et 2010 après ajustement de l’anneau. À droite, amplitude moyenne de la perturbation globale. Les tracés continus et discontinus correspondent respectivement au nouveau modèle test et au modèle de Kuchynka *et al.* (2010).

Les évolutions moyennes des amplitudes de l’effet global ΔD_{glob^*} et des résidus après ajustement de l’anneau sont représentées sur la figure 4.4 pour les deux modèles tests. Le tracé de l’effet global possède deux ordonnées pour suivre en plus de l’amplitude de l’effet, l’évolution proportionnelle de la masse de l’anneau. Comme dans l’article, l’anneau est circulaire de rayon égal à 2.8 UA et l’intervalle de temps considéré s’étend entre 1969 et 2010.

Sur la figure, les amplitudes obtenues avec le nouveau modèle sont environ 1.6 fois plus importantes que les amplitudes obtenues dans l’article. Les évolutions fournies par les deux modèles sont sinon quasiment identiques. Pour $N = 300$, l’amplitude de l’effet global induit par le nouveau modèle est de l’ordre de 800 m. L’ajustement de l’anneau réduit cet effet à environ 6 m. L’anneau modélise ainsi plus de 99% de l’effet global. On retrouve le résultat de Kuchynka *et al.* (2010).

4.3.2 Effet global sur les mesures de la distance Terre-Mars

L’estimation de l’effet global sur les mesures de la distance Terre-Mars consiste à considérer les perturbations des astéroïdes uniquement sur les intervalles 1976 - 1983 et 1999 - 2010. Pour tenir compte de l’ajustement des conditions initiales des planètes opéré lors de la construction de l’éphéméride, les dérivées (3.4) de la distance Terre-Mars par rapport aux éléments osculateurs des deux planètes doivent être incorporées dans la fonction objectif (4.1) au même titre que la perturbation induite par l’anneau. L’optimisation des astéroïdes faisant partie de l’effet global consiste donc à chercher $N + 1 + 12$ coefficients de sorte à minimiser

$$|\alpha_1 \Delta D_1 + \dots + \alpha_N \Delta D_N + \alpha_{N+1} \Delta D_{\text{ring}} + M\beta - \Delta D_{\text{glob}}(N)|^2 \quad (4.4)$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ binaires, α_{N+1} réel positif et β un vecteur de 12 composantes réelles. La matrice M possède 12 colonnes dont chacune correspond à une des 12 dérivées de la distance Terre-Mars. Pour respecter la différence de précision des mesures Viking et des mesures modernes, les vecteurs de (4.4) doivent en plus être pondérés par les incertitudes des mesures avant de chercher les coefficients qui minimisent la fonction.

Plutôt que d'optimiser les coefficients de (4.4), on va chercher à minimiser (4.1) en remplaçant les perturbations induites par les astéroïdes et l'anneau par leurs analogues après ajustement pondéré des 12 conditions initiales. On rappelle que pour les astéroïdes, ces perturbations ont déjà été calculées dans la section 3.2.3. Pour distinguer une perturbation ΔD de son analogue obtenu après ajustement des conditions initiales, on note par $\widehat{\Delta D}$ la perturbation après ajustement. $\widehat{\Delta D}$ correspond donc à la projection de ΔD sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de M . Avec

$$\widetilde{\Delta D} = \Delta D - \widehat{\Delta D},$$

la fonction (4.4) peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} & |\alpha_1 \widehat{\Delta D}_1 + \dots + \alpha_N \widehat{\Delta D}_N + \alpha_{N+1} \widehat{\Delta D}_{\text{ring}} - \widehat{\Delta D}_{\text{glob}}(N) \\ & + \alpha_1 \widetilde{\Delta D}_1 + \dots + \alpha_N \widetilde{\Delta D}_N + \alpha_{N+1} \widetilde{\Delta D}_{\text{ring}} - \widetilde{\Delta D}_{\text{glob}}(N) + M\beta|^2 \end{aligned}$$

Cette expression est égale à

$$\begin{aligned} & |\alpha_1 \widehat{\Delta D}_1 + \dots + \alpha_N \widehat{\Delta D}_N + \alpha_{N+1} \widehat{\Delta D}_{\text{ring}} - \widehat{\Delta D}_{\text{glob}}(N)|^2 \\ & + |\alpha_1 \widetilde{\Delta D}_1 + \dots + \alpha_N \widetilde{\Delta D}_N + \alpha_{N+1} \widetilde{\Delta D}_{\text{ring}} - \widetilde{\Delta D}_{\text{glob}}(N) + M\beta|^2 \end{aligned}$$

On vérifie ainsi que le minimum de (4.4) est atteint pour les valeurs de $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ et α_{N+1} qui minimisent également

$$|\alpha_1 \widehat{\Delta D}_1 + \dots + \alpha_N \widehat{\Delta D}_N + \alpha_{N+1} \widehat{\Delta D}_{\text{ring}} - \widehat{\Delta D}_{\text{glob}}(N)|^2 \quad (4.5)$$

L'estimation de l'effet global sur les mesures de la distance Terre-Mars peut donc être faite en appliquant directement la méthodologie de la section 4.3.1. Les perturbations considérées sont désormais les perturbations $\widehat{\Delta D}$ obtenues après ajustement pondéré des conditions initiales sur les deux intervalles 1976 - 1983 et 1999 - 2010.

L'évolution de l'amplitude moyenne de l'effet global $\widehat{\Delta D}_{\text{glob}^*}$, estimée sur chacun des deux intervalles, est représentée sur la figure 4.5. La figure donne également l'évolution moyenne des résidus après ajustement de l'anneau. On observe qu'à partir de $N = 110$, les résidus descendent en dessous des seuils de bruit aussi bien pour les données modernes (2 m) que pour les données Viking (20 m). Les amplitudes correspondantes de la perturbation globale sur les deux intervalles sont alors de 20 m et 100 m respectivement. Ainsi l'efficacité de l'anneau à modéliser la perturbation globale après ajustement des conditions initiales est de 80% à 90%. L'abscisse $N = 110$ sera marqué dans l'ensemble des figures de cette section par un trait vertical.

La figure 4.6 représente l'évolution du pourcentage de l'effet global non modélisé par l'anneau. Il s'agit des rapports entre l'amplitude du résidu et l'amplitude de l'effet total estimés pour chaque intervalle de temps. En comparant avec la figure 8 de l'article, on note que la capacité de l'anneau à modéliser l'effet global est de manière générale plus faible lorsqu'elle est estimée après ajustement des conditions initiales. La figure donne aussi l'évolution moyenne de la masse de l'anneau. Pour $N = 110$, la masse moyenne de l'anneau vaut $3 \pm 1 \times 10^{-10} M_{\odot}$.

La figure 4.6 donne enfin l'évolution du nombre moyen des astéroïdes exclus de l'effet global. En effet, on rappelle que pour un N donné, l'optimisation avec CPLEX construit l'effet global en éliminant du modèle test une sélection d'astéroïdes choisis parmi les N les plus perturbateurs. Le tracé contient également les évolutions des nombres d'astéroïdes sélectionnés, d'une part à chaque fois au cours des 100 estimations de l'effet global pour un N donné, et d'autre part sélectionnés seulement une fois. Pour $N = 110$, le nombre d'objets étant éliminés au moins une fois s'élève à 256, le nombre d'objets éliminés avec une chance supérieure à 10% est de 146. Le nombre d'objets exclus en moyenne s'élève seulement à 74.

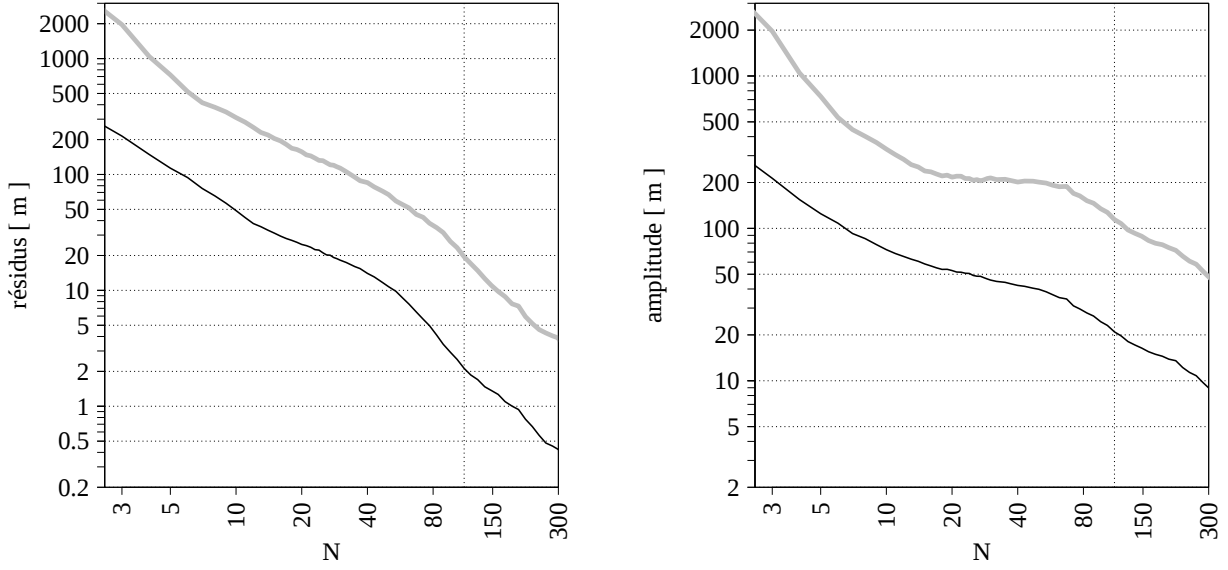


FIGURE 4.5 – À gauche, amplitudes moyennes des résidus de la perturbation globale obtenus avec un ajustement pondéré de l’anneau et des conditions initiales. À droite, amplitude moyenne de la perturbation globale $\widehat{\Delta D_{\text{glob}^*}}$. En noir et gris les amplitudes estimées sur les intervalles 1976 - 1983 et 1999 - 2010 respectivement. Le trait vertical correspond à l’abscisse $N = 110$.

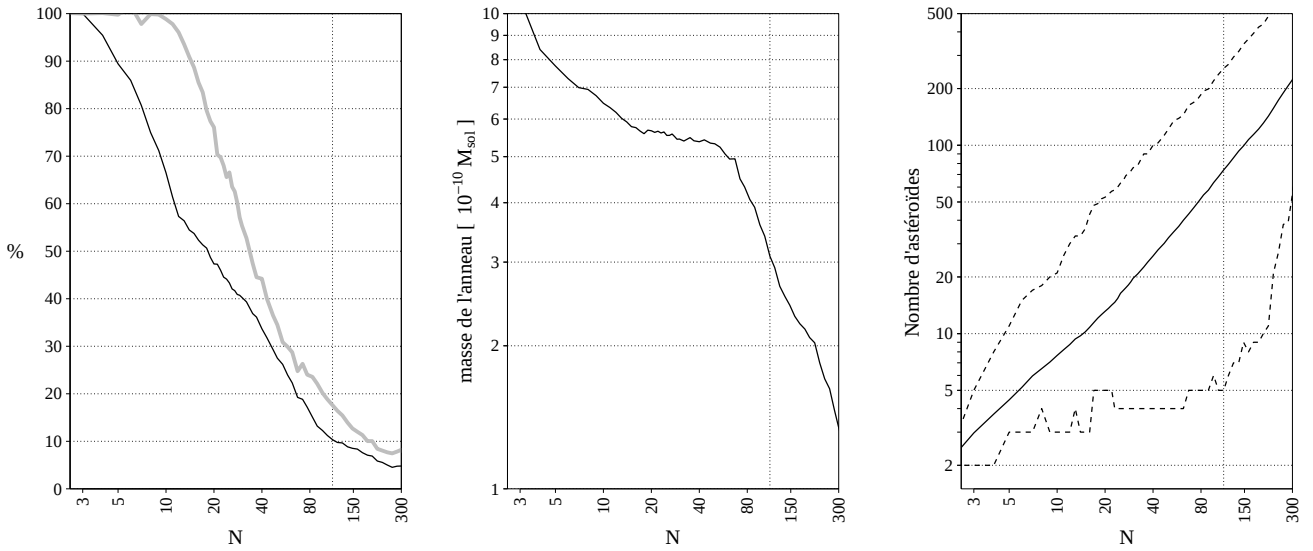


FIGURE 4.6 – À gauche, pourcentage moyen de l’effet global $\widehat{\Delta D_{\text{glob}^*}}$ non modélisé par un anneau (en noir estimation sur l’intervalle des données modernes, en gris estimation sur l’intervalle Viking). Le tracé du milieu donne l’évolution moyenne de la masse de l’anneau. À droite, évolution du nombre moyen d’astéroïdes exclus de l’effet global. Les deux courbes en pointillé représentent respectivement les nombres d’astéroïdes ayant des chances d’être exclus à 100% et à plus de 1%.

4.3.3 Effet sur l'ensemble des mesures disponibles

De la même manière que l'on a étudié la perturbation globale sur les mesures de la distance Terre-Mars, on étudie ici la perturbation globale induite sur l'ensemble des observations disponibles dans INPOP. L'effet global est ainsi obtenu en cherchant à minimiser (4.5) où les vecteurs $\widehat{\Delta D}$ correspondent aux perturbations de l'ensemble des mesures disponibles calculées après ajustement pondéré des conditions initiales. Les perturbations $\widehat{\Delta D}$ en question ont déjà été obtenues lors de l'ajustement global décrit à la fin de la section 3.4.2, par conséquent elles n'ont pas à être recalculées.

La figure 4.7 donne les évolutions des amplitudes de l'effet global sur les différentes mesures ainsi que les évolutions des résidus après ajustement de l'anneau. On rappelle qu'en termes d'amplitudes de l'effet induit sur la distance Terre-Mars, un ajustement des conditions initiales des deux planètes aux perturbations de la distance Terre-Mars ne diffère que de 2% à 5% d'un ajustement global de toutes les planètes à l'ensemble des mesures disponibles (voir section 3.4.2). Il n'est donc pas surprenant qu'en terme de distance Terre-Mars les tracés de la figure 4.7 sont identiques aux évolutions de la figure 4.5. Pour $N = 110$, on vérifie que la partie de la perturbation globale non modélisée par l'anneau induit un effet dont l'impact sur l'ensemble des différentes données est inférieur à l'amplitude du bruit.

En terme des observations disponibles sur Mercure, l'effet global est au fait trop faible pour être détectable quelque soit N . Grâce aux données VEX, la perturbation globale de la distance Terre-Vénus est significative tant que $N \leq 17$. La perturbation est détectable sur les observations de Mars pour $N \leq 110$, sur les données Cassini seulement pour $N \leq 3$. A l'exception de Mars, ces valeurs limites de N correspondent aux valeurs du tableau 3.6 qui rassemble en fonction des différentes données les nombres d'astéroïdes pouvant induire un effet individuel significatif.

Le tableau 4.2 résume les amplitudes moyennes de l'effet global pour $N = 110$. On note que la perturbation de 20.69 m des données MGS/MO/MEX place l'effet global dans le classement des astéroïdes les plus perturbateurs de l'annexe 9.5 à la 16ème position.

TABLE 4.2 – Amplitudes de la perturbation globale $\widehat{\Delta D}_{\text{glob}^*}(N = 110)$ calculées sur les différentes données de INPOP après ajustement pondéré des conditions initiales sur l'ensemble des planètes.

	radar Mer.	radar Ven.	VEX	Viking	MGS/MO/MEX	Cassini
	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]
effet global	44.78	54.06	7.16	114.19	20.69	5.94

4.3.4 Nouvelle liste d'astéroïdes

Le fait de considérer simultanément l'ensemble des données ne modifie quasiment pas les évolutions de la figure 4.6. Ainsi même lorsque toutes les données disponibles sont considérées, il y a en moyenne 74 astéroïdes qui ne font pas partie de l'effet global pour $N = 110$. Le nombre d'objets étant éliminés au moins une fois de l'effet global en considérant l'ensemble des données s'élève à 250. Le nombre d'objets éliminés avec une chance supérieure à 10% est de 144.

La liste de ces 144 astéroïdes est reproduite dans l'annexe 9.6. On donne pour chaque objet la probabilité d'être exclu de l'effet global et les amplitudes des perturbations individuelles induites sur les différentes données. La liste est assez similaire à celle de l'annexe 9.5, en effet 138 des 144 astéroïdes de la nouvelle liste sont inclus dans l'ancienne. Les 6 astéroïdes restants ont des probabilités inférieures à 25 % d'être exclus de l'effet global. Les listes contiennent ainsi

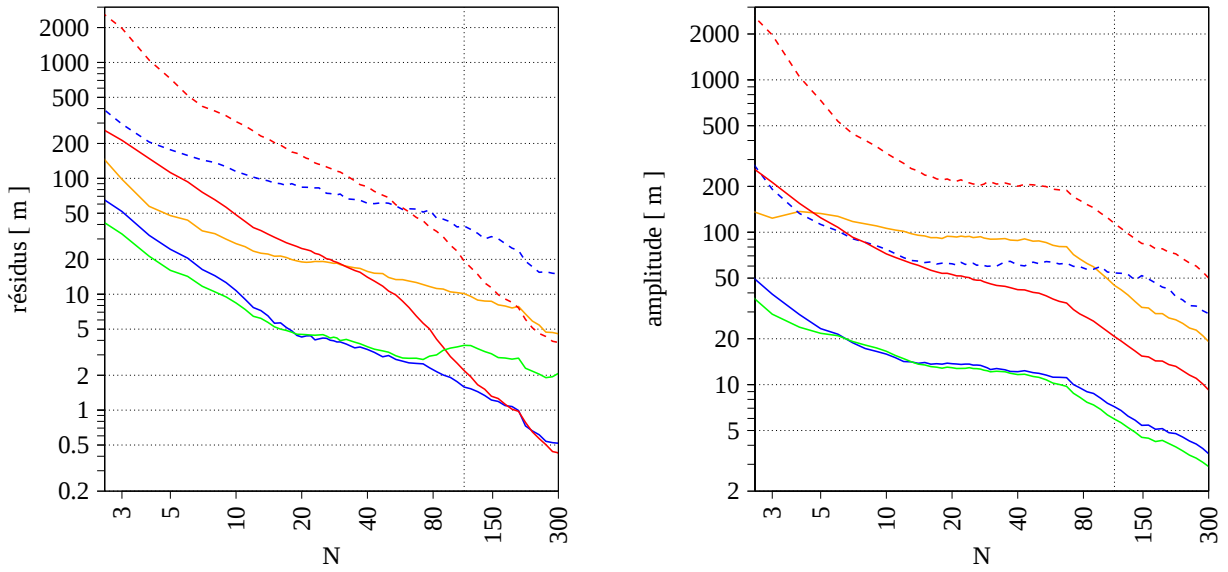


FIGURE 4.7 – Analogue de la figure 4.5 obtenu pour des perturbations induites non plus uniquement sur la distance Terre-Mars, mais sur l’ensemble des mesures disponibles dans INPOP : mesures radar de la distance Terre-Mercure (orange), mesures radar de la distance Terre-Vénus (bleu discontinu), données VEX (bleu), données Viking (rouge discontinu), données MGS/MO/MEX (rouge) et données Cassini (vert).

approximativement les mêmes astéroïdes. L’avantage par rapport à la situation de la fin du chapitre 3, est que l’on sait désormais que parmi les astéroïdes des listes seulement ~ 70 objets induisent un effet qui ne se fond pas dans une perturbation globale.

On vérifie que sur les 144 astéroïdes de l’annexe 9.6, aucun ne possède une masse de catégorie d’incertitude III et seulement 34 objets appartiennent à la catégorie II. On peut donc conclure que les diamètres de l’ensemble des astéroïdes à modéliser individuellement sont plutôt bien connus. Sachant que la ceinture principale s’étend en termes de demi-grands axes environ entre 2 UA et 3.8 UA (voir 1.2.3), la nouvelle liste ne contient que des objets de la ceinture principale. L’astéroïde 190 Ismene est une exception car son demi-grand axe de 3.985 UA et son excentricité de 0.167 le placent au delà de la ceinture dans le groupe des Hildas.

4.4 Conclusion

L’effet global est défini comme la perturbation totale induite sur les planètes par tous les astéroïdes du Système solaire à l’exception d’un nombre restreint d’objets dont les perturbations individuelles sont importantes ou particulières. Dans Kuchynka *et al.* (2010) on a montré qu’un anneau était une représentation naturelle de la perturbation globale. En effet, en supposant au sein de la ceinture principale une répartition homogène de masses en longitudes moyennes, la perturbation induite par la ceinture est à l’ordre le plus bas en excentricités et inclinaisons exactement égale à la perturbation induite par un anneau.

En construisant un modèle test des astéroïdes du Système solaire, on a pu montrer par des expériences du type Monte-Carlo qu’il suffit d’enlever du modèle en moyenne 74 astéroïdes de la ceinture principale pour que la perturbation globale induite par les astéroïdes restant soit entièrement représentée par un anneau. Le nombre d’objets à modéliser individuellement dans le modèle dynamique de INPOP est ainsi divisé par deux par rapport au nombre suggéré à la

fin du chapitre 3. L'amplitude de la perturbation globale induite sur les mesures modernes de la distance Terre-Mars après ajustement pondéré des conditions initiales a été estimée à 20 m. Un anneau réduit cette perturbation à seulement 2 m. On peut donc conclure que l'ajustement d'un anneau dans le modèle dynamique de INPOP est fondamental. Pour un rayon de 2.8 UA, la masse de l'anneau a été estimée à $3 \pm 1 \times 10^{-10} M_{\odot}$. Cette estimation est néanmoins approximative car elle se base uniquement sur le modèle test des astéroïdes et sur l'attribution des masses aléatoires dans les expériences Monte-Carlo.

L'annexe 9.6 contient une liste de 144 objets pour lesquels la probabilité de ne pas faire partie de l'effet global est supérieure à 10%. La liste contient à priori les ~ 70 objets à implémenter individuellement dans le modèle dynamique de INPOP.

Chapitre 5

Vers un nouveau modèle d'astéroïdes

Aujourd'hui le modèle d'astéroïdes dans INPOP s'appuie sur des déterminations de masses individuelles et sur l'hypothèse de densités constantes au sein de trois classes taxonomiques. L'objectif de ce dernier chapitre est d'étudier dans quelle mesure cette situation pourrait être améliorée, notamment en termes d'un meilleur ajustement des paramètres du modèle et d'une meilleure extrapolation sur des observations futures.

On étudiera sur un exemple simplifié comment les observations disponibles peuvent contraindre les masses individuelles des astéroïdes. Le raisonnement bayésien offre un cadre intéressant pour aborder ce problème car il permet d'exploiter naturellement les distributions de masses calculées au chapitre 4. Pour se donner les moyens d'aborder le problème de manière systématique et rigoureuse, on n'hésitera pas à reprendre en détails certains points des méthodes classiques comme les moindres carrés ou l'inférence bayésienne. A la fin du chapitre, on propose un nouveau modèle d'astéroïdes pour INPOP. L'intérêt de ce nouveau modèle n'est pas tant de fournir une alternative définitive au modèle d'astéroïdes actuel, mais d'ouvrir des perspectives au travail présenté dans cette thèse.

5.1 Définition d'un cas d'étude

Afin d'étudier les difficultés qui interviennent lors des estimations de masses d'astéroïdes, on construit un cas d'étude simple basé sur le modèle test du chapitre 4.

5.1.1 Conventions

La masse de chacun des 27142 astéroïdes du modèle test est fixée à sa valeur standard. Le chapitre 3 a montré que parmi les différentes observations disponibles, l'effet des astéroïdes était de loin le plus fort sur les mesures de la distance Terre-Mars. On va restreindre l'étude uniquement à ce type de données. Toute perturbation ΔD considérée par la suite correspondra au résidu $\widehat{\Delta D}$ obtenu après ajustement pondéré des conditions initiales de la Terre et de Mars. On élimine ainsi les composantes des perturbations qui de toute manière sont parfaitement représentées par des ajustements des conditions initiales et n'apportent pas d'informations utiles. Chaque perturbation sera également automatiquement pondérée par 2 m et 20 m sur les intervalles de temps des données modernes et Viking. Les perturbations induites sur les mesures deviennent ainsi adimensionnelles. D'autre part l'écart-type du bruit des mesures, noté σ_ε , pourra être considéré sur les deux intervalles de temps comme constant et égal à 1.

On désigne par $\mathbf{X}$, le vecteur dont les composantes contiennent l'évolution avec le temps de la perturbation induite par l'ensemble des 27142 astéroïdes du modèle. On rappelle que cette perturbation correspond simplement à la somme de toutes les perturbations individuelles. Le nombre de composantes de $\mathbf{X}$ est noté n et vaut environ 2300 (voir 3.2.3). L'objectif des sections

suivantes sera de retrouver à partir de $\mathbf{X}$ un maximum d'informations concernant les masses des astéroïdes.

5.1.2 Hypothèse simplificatrice

Grâce au chapitre 4, on sait que $\mathbf{X}$ est équivalent à une perturbation induite par environ 70 astéroïdes et un anneau. On supposera par la suite que la liste exacte de ces astéroïdes peut être déterminée. Il s'agit d'une hypothèse qui en pratique n'est pas vérifiée car la connaissance des astéroïdes exclus de l'effet global nécessite la connaissance des masses de tous les astéroïdes contribuant à $\mathbf{X}$.

La minimisation de (4.5) avec CPLEX fournit 76 astéroïdes ne faisant pas partie de l'effet global et une masse d'anneau égale à $3.26 \times 10^{-10} M_\odot$. Cette masse sera appelée masse standard de l'anneau. On note par M la matrice dont les colonnes rassemblent les perturbations induites par les 76 astéroïdes et l'anneau pour des masses standards. En remplaçant les 27142 astéroïdes par 77 objets, on commet une erreur de modèle $\mathbf{X}_m$ donnée par

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{X} - M\boldsymbol{\beta}_0 \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\beta}_0 = (1, \dots, 1)^T$$

Le vecteur $\boldsymbol{\beta}_0$ rassemble les masses des astéroïdes et de l'anneau en unités de masses standards. Grâce au choix optimisé des astéroïdes, l'erreur de modèle reste inférieure à 1 sur l'ensemble des données. On définit σ_m par

$$\sigma_m = \frac{\|\mathbf{X}_m\|_2}{\sqrt{n}}$$

Dans le cas des modèles fournis par CPLEX, $\mathbf{X}_m$ est en général de moyenne nulle et d'amplitude environ trois fois plus grande que σ_m . Comme l'amplitude de $\mathbf{X}_m$ est inférieure à 1, on déduit que $\sigma_\varepsilon < \sigma_m$. Notons que l'erreur de modèle est parfois appelée erreur systématique.

5.2 Ajustement par moindres carrés

Traditionnellement pour ajuster les paramètres d'une éphéméride, on a recours à la méthode des moindres carrés. La méthode est donc la première qui vient à l'esprit pour retrouver à partir de $\mathbf{X}$ les valeurs des 77 masses du modèle construit. Afin de comprendre les limites de l'approche, on développe certains points de la méthode.

Les masses $\boldsymbol{\beta}^*$ qui minimisent le résidu $\|\mathbf{X} - M\boldsymbol{\beta}\|_2$ s'expriment classiquement comme

$$\boldsymbol{\beta}^* = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{X} \tag{5.1}$$

Si la perturbation $\mathbf{X}$ ne contient aucune erreur, c'est à dire si $\mathbf{X} = M\boldsymbol{\beta}_0$, alors la formule permet de retrouver exactement les 77 masses :

$$\boldsymbol{\beta}^* = \boldsymbol{\beta}_0$$

En réalité $\mathbf{X}$ contient l'erreur de modèle $\mathbf{X}_m$ et éventuellement une erreur dû au bruit des mesures. La perturbation s'écrit donc

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_\varepsilon + \mathbf{X}_m$$

où les indices 0 , ε et m indiquent respectivement une mesure parfaite de l'effet induit par les 77 paramètres recherchés, l'erreur aléatoire et l'erreur de modèle. Ainsi la formule (5.1) conduit en pratique à

$$\boldsymbol{\beta}^* = \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\beta}_\varepsilon + \boldsymbol{\beta}_m$$

avec

$$\begin{aligned}\beta_0 &= (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{X}_0 \\ \beta_\varepsilon &= (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{X}_\varepsilon \\ \beta_m &= (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{X}_m\end{aligned}\tag{5.2}$$

Les indices ε et m désignent ici les erreurs aléatoires et systématiques commises sur les paramètres.

5.2.1 Erreurs aléatoires

La somme de deux variables aléatoires distribuées selon des lois normales suit une loi normale (voir par exemple Aster *et al.*, 2005). La propriété peut être généralisée à toute combinaison linéaire. Ainsi en supposant que les composantes de $\mathbf{X}_\varepsilon$ dans (5.2) sont choisies selon des lois normales, il en est de même pour les composantes de β_ε . Notons de plus que si les composantes de $\mathbf{X}_\varepsilon$ suivent des lois de moyennes nulles, il en est de même pour β_ε . Pour une matrice A quelconque telle que $\beta_\varepsilon = A\mathbf{X}_\varepsilon$, la relation entre les matrices de covariances des deux vecteurs est donnée par (Aster *et al.*, 2005)

$$\text{Cov}(\beta_\varepsilon) = A \text{Cov}(\mathbf{X}_\varepsilon) A^T$$

En supposant que les erreurs $\mathbf{X}_\varepsilon$ sont indépendantes et d'écarts-types égaux à σ_ε , on a

$$\text{Cov}(\mathbf{X}_\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 I$$

Avec $A = (M^T M)^{-1} M^T$, on obtient la relation classique

$$\text{Cov}(\beta_\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 (M^T M)^{-1}\tag{5.3}$$

Les composantes de β_ε sont donc de moyennes nulles et suivent chacune une loi normale dont la variance (écart-type au carré) est donnée par la diagonale de la matrice de covariance (5.3). Notons que les composantes de β_ε ne sont à priori pas indépendantes car la matrice $(M^T M)^{-1}$ n'est pas nécessairement diagonale.

L'erreur aléatoire commise sur un paramètre particulier est souvent donnée par (5.3). L'erreur peut néanmoins être exprimée de manière plus explicite. En notant avec A, B, C et D les blocs d'une matrice quelconque, on vérifie que l'inverse de la matrice en question peut s'écrire comme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} S^{-1} & -S^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CS^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CS^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}\tag{5.4}$$

où

$$S = A - BD^{-1}C$$

L'expression n'est bien sûr valide que si D et S sont inversibles. La matrice S est appelée complément de Schur du bloc D (Dahlquist et Björck, 2008). Soit M_1 la première colonne de la matrice M . En notant le reste des 76 colonnes par M_c , on peut écrire

$$M = (M_1 M_c)$$

Avec (5.4) et (5.3), il est possible de dériver l'expression du premier terme diagonal de $\text{Cov}(\beta_\varepsilon)$. En notant le terme par $\Delta_\varepsilon^2 \beta_1$, on obtient après calculs

$$\Delta_\varepsilon^2 \beta_1 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{M_1^T M_1 - M_1^T M_c (M_c^T M_c)^{-1} M_c^T M_1}$$

Aster *et al.* (2005) donne une présentation rapide de la décomposition en valeurs singulières. Avec la décomposition appliquée à M_c , on vérifie que $M_1^T M_c (M_c^T M_c)^{-1} M_c^T M_1$ correspond en fait à la norme au carré de M_1 après projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de M_c . On a ainsi

$$\Delta_\varepsilon \beta_1 = \frac{\pm \sigma_\varepsilon}{|M_1| \sqrt{1 - c^2}} \quad (5.5)$$

où c correspond à la norme de la projection de M_1 , normalisé, sur le sous-espace engendré par M_c . L'erreur aléatoire sur la première masse est inversement proportionnelle à la norme de M_1 . L'erreur est ensuite d'autant plus grande que le vecteur M_1 est proche du sous-espace engendré par le reste des vecteurs.

La relation dérivée ici pour la première colonne de M peut être obtenue pour une colonne quelconque M_i . Notons que le module d'un vecteur M_i dépend du nombre n de composantes de $\mathbf{X}$. Si chaque mesure de la distance Terre-Mars contenue dans $\mathbf{X}$ est disponible non une seule fois mais N fois, le module de M_i est multiplié par $\sqrt{N}$. L'erreur aléatoire décroît proportionnellement.

5.2.2 Erreurs systématiques

Il est possible de dériver une formule analogue à (5.5) pour l'erreur systématique. Grâce à l'inversion par blocs (5.4) et la définition (5.2) de β_m , on montre que la première composante de β_m est en fait égale à

$$\frac{M_1^T \mathbf{X}_m - M_1^T M_c (M_c^T M_c)^{-1} M_c^T \mathbf{X}_m}{M_1^T M_1 - M_1^T M_c (M_c^T M_c)^{-1} M_c^T M_1}$$

En notant la première composante par $\Delta_m \beta_1$, l'expression peut être réécrite comme

$$\Delta_m \beta_1 = \frac{|\mathbf{X}_m| c'}{|M_1| (1 - c^2)} \quad (5.6)$$

où c' désigne le produit scalaire entre M_1 et $\mathbf{X}_m$ après normalisation et projection dans le complémentaire du sous-espace vectoriel engendré par M_c . La définition de c est identique à la définition du coefficient dans (5.5).

L'erreur systématique commise sur la première masse est donc proportionnelle au rapport entre les normes de $\mathbf{X}_m$ et M_1 . Comme pour l'erreur aléatoire, l'erreur systématique est amplifiée si M_1 est proche du sous-espace vectoriel engendré par M_c . Enfin l'erreur est d'autant plus grande que les directions de M_1 et $\mathbf{X}_m$ sont proches. Des expressions analogues à (5.6) peuvent être dérivées pour l'ensemble des composantes de β_m . On vérifie que l'erreur systématique reste constante si le nombre n d'observations est modifié.

5.2.3 Estimation des masses

La figure 5.1 représente, en valeurs absolues, les erreurs aléatoires β_ε et systématiques β_m qui interviennent lors de la détermination des 77 masses par moindres carrés. Les 77 paramètres de la figure sont ordonnés selon les normes des colonnes de M . Les erreurs aléatoires correspondent aux écart-types obtenus avec (5.3). On utilise la définition (5.2) de $\mathbf{X}_m$ pour l'estimation des erreurs systématiques. Des résultats identiques seraient obtenus avec (5.5) et (5.6).

On estime par la suite un ajustement comme correct si l'erreur correspondante est inférieure à 30%. Avec les unités adoptées, les valeurs réelles des masses β_0 sont égales à 1. Par conséquent les erreurs β_ε et β_m peuvent être interprétées sans calcul supplémentaire comme des erreurs relatives. La figure montre que la méthode des moindres carrés est capable d'ajuster uniquement les masses de Ceres et Vesta. Pour le reste des paramètres, les erreurs aléatoires dépassent toujours 100%. Les erreurs systématiques sont plus faibles. Néanmoins pour la majorité des astéroïdes elles empêchent une détermination correcte de masse même en absence du bruit de mesure.

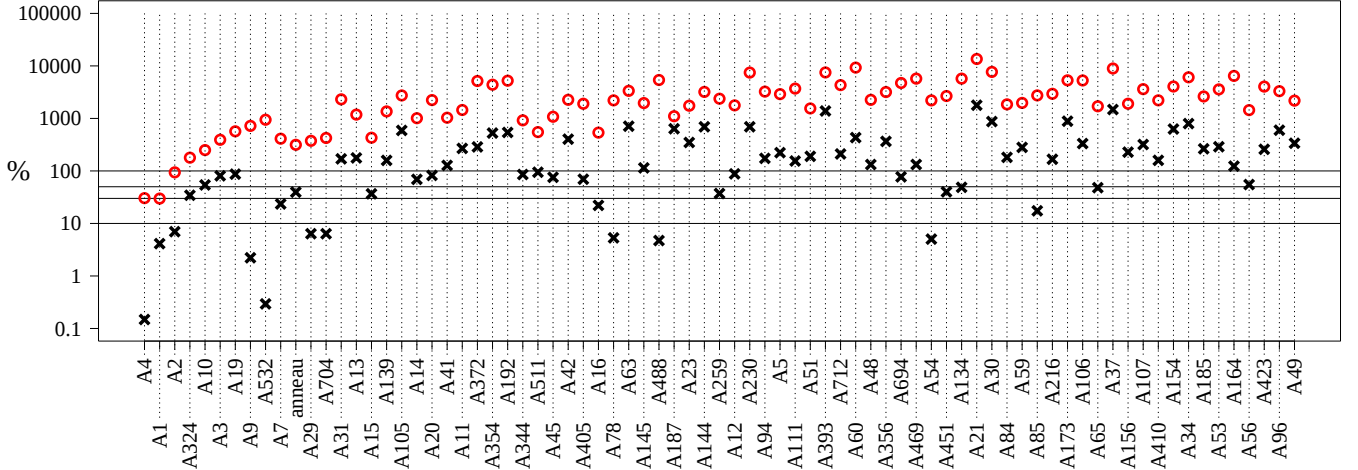


FIGURE 5.1 – Tracé des erreurs aléatoires (points rouges) et systématiques (croix) lors d’un ajustement des 77 paramètres par moindres carrés aux mesures de la distance Terre-Mars. Les erreurs sont données en pourcentage des masses réelles. Les 4 traits horizontaux indiquent les limites à 10%, 30%, 50% et 100%.

Avec les expressions (5.5) et (5.6), on vérifie que les erreurs aléatoires et systématiques des 77 paramètres seraient respectivement inférieures à 7% et 0.005% si c était nul. Les erreurs particulièrement importantes que l’on observe sur la figure, ne sont donc pas dues à des amplitudes faibles des perturbations contenues dans M ou à un nombre de mesures insuffisant. Les erreurs proviennent clairement du fait que les vecteurs de M sont très proches d’un espace vectoriel dont la dimension est inférieure à 77.

5.2.4 Colinéarités

On définit le coefficient de corrélation $c_{i,j}$ entre deux vecteurs M_i et M_j comme le produit scalaire des deux vecteurs normalisés. Ainsi

$$c_{i,j} = \frac{M_i \cdot M_j}{|M_i| \times |M_j|}$$

La figure 5.2 représente, en valeurs absolues, les coefficients de corrélation pour l’ensemble des 77 vecteurs de M . L’ordre des colonnes de M suit ici le même ordre que dans la figure 5.1.

On observe sur la figure un groupe d’astéroïdes dont les effets sont quasiment proportionnels. Le groupe forme un carré rouge sur la diagonale dans la partie supérieure gauche de la figure. Ce groupe est en fait beaucoup plus large et peut être mis en évidence en changeant l’ordre des astéroïdes dans M . L’algorithme ARSA¹ développé par Brusco *et al.* (2008), basé sur le principe de recuit simulé permet de réordonner les astéroïdes de sorte à regrouper les coefficients de corrélations élevés. Les corrélations réordonnées sont affichées sur la figure 5.3. On met en évidence un groupe d’environ 30 astéroïdes dont les effets sont approximativement proportionnels. Le changement de masse d’un de ces astéroïdes peut être facilement compensé en terme de perturbation par le changement de masse d’un autre astéroïde du groupe. On note qu’un tracé similaire à celui de la figure 5.3 a été utilisé lors de la construction du modèle d’astéroïdes de INPOP10a. Au sein du groupe d’objets fortement corrélés, plusieurs astéroïdes possèdent des masses déterminées à partir de rencontres proches avec des objets tests.

1. L’algorithme est disponible dans la librairie `seriation` du logiciel R (www.r-project.org).

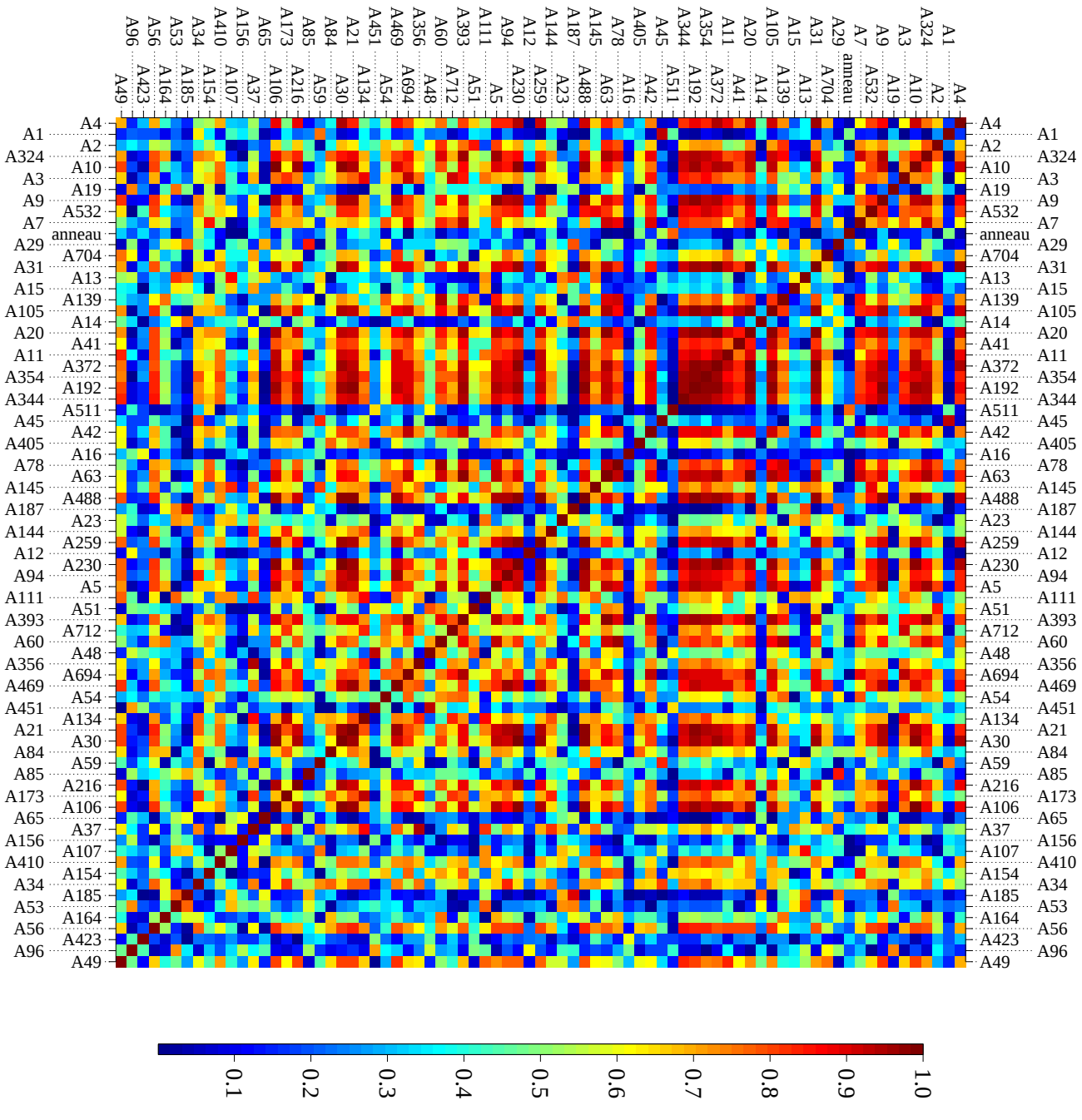


FIGURE 5.2 – Représentation graphique des coefficients de corrélations de M (en valeurs absolues). Des coefficients proches de 1 correspondant à des perturbations presque colinéaires. Les numéros précédés de la lettre A indiquent les numéros IAU des astéroïdes.

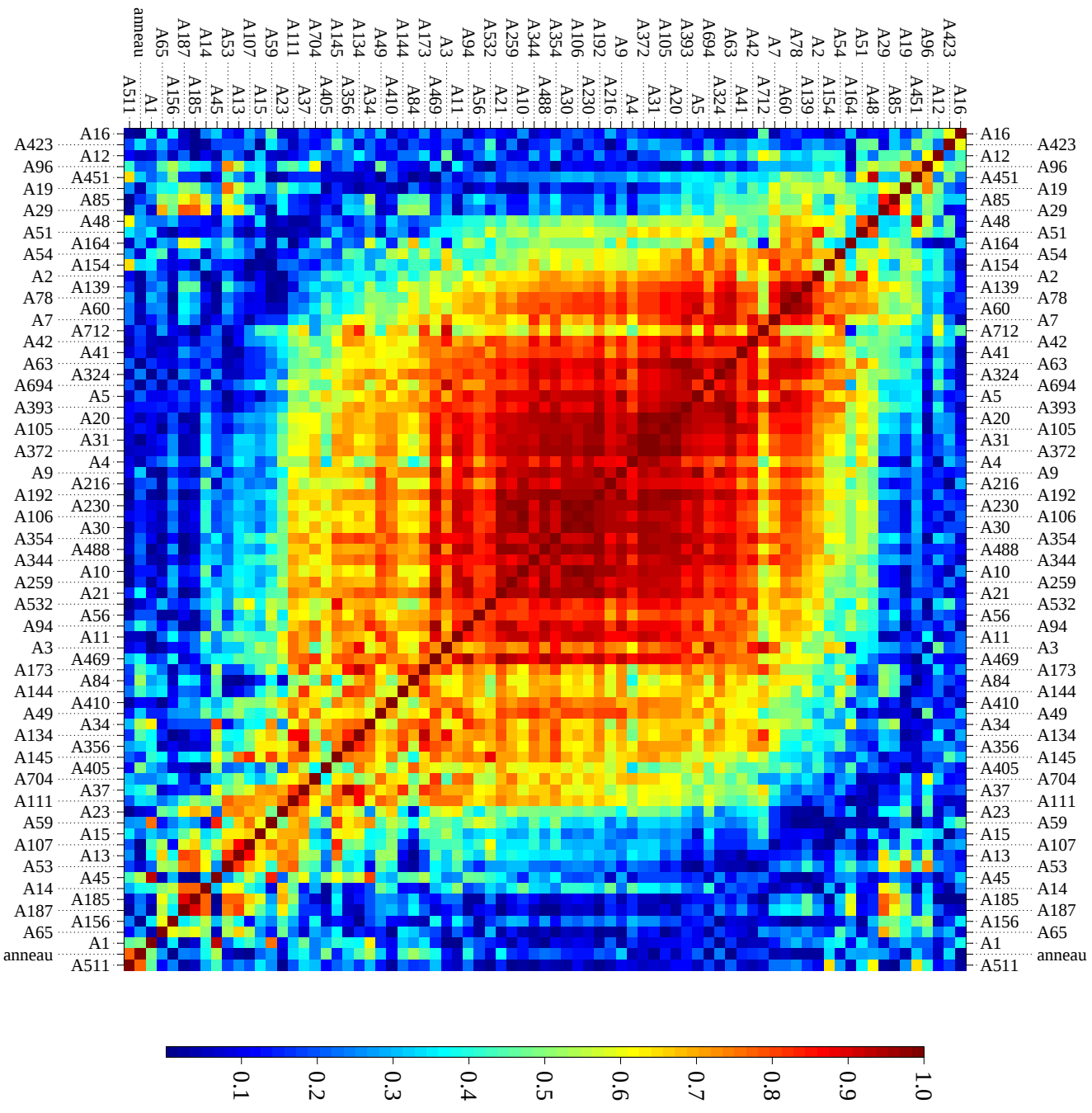


FIGURE 5.3 – Représentation des corrélations obtenues à partir de la figure 5.2 en permutant l'ordre des paramètres avec un algorithme de recuit simulé.

Ainsi que le mentionne Fienga *et al.* (2010), ces déterminations ont été utilisées pour fixer dans INPOP10a les masses d'environ 15 astéroïdes dont les ajustements seraient de toute manière entachés par de fortes erreurs aléatoires dues aux corrélations.

Les colinéarités observées sur la figure 5.3 sont un cas particulier du phénomène de multicolinéarité. Le fait que les colonnes de M engendrent un espace de dimension faible indique qu'il existe un certain nombre de relations linéaires telles que

$$\sum_{i=1}^{77} \alpha_i M_i \sim 0 \quad (5.7)$$

où α_i sont des coefficients réels et les M_i désignent les colonnes de M . Dans le cas simple de colinéarité, les relations impliquent uniquement deux vecteurs.

La multicolinéarité pourrait être étudiée en s'appuyant sur la décomposition en valeurs singulières de M . On se restreint ici simplement à remarquer que les relations du type (5.7) qui existent entre les colonnes de M , empêchent l'ajustement correct des paramètres. En effet, les composantes du vecteur β peuvent prendre des valeurs très différentes sans pour autant induire des variations significatives du résidu $\| \mathbf{X} - M\beta \|_2$.

5.3 Régularisation à partir d'une analyse bayésienne

La méthode des moindres carrés appliquée telle quelle ne permet pas de retrouver les masses des astéroïdes et de l'anneau à partir des perturbations induites sur la distance Terre-Mars. Il faut donc chercher à modifier la méthode ou se tourner vers un autre type d'ajustement. Afin d'aborder cette démarche de manière systématique, on a recours au raisonnement bayésien. Celui-ci est présenté par exemple dans Aster *et al.* (2005) ou plus en détails dans Parent et Bernier (2007).

5.3.1 Un nouveau point de vue

On suit ici l'exposé de Aster *et al.* (2005). La densité de probabilité d'une variable quelconque x sera notée $[x]$, on notera la densité de probabilité de x connaissant la valeur de y par $[x|y]$. Pour des variables multidimensionnelles $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, la formule de Bayes s'écrit

$$[\mathbf{x}|\mathbf{y}] = \alpha \times [\mathbf{y}|\mathbf{x}] \times [\mathbf{x}] \quad (5.8)$$

Comme on le verra plus loin, $\mathbf{x}$ correspond typiquement à des paramètres que l'on cherche à contraindre en s'appuyant sur les mesures $\mathbf{x}$. La constante de normalisation α assure que

$$\int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p} [\mathbf{x}|\mathbf{y}] d\mathbf{x} = 1$$

Par la suite, les constantes de normalisation seront omises. Si on connaît une distribution à priori $[\mathbf{x}]$, la formule (5.8) permet de calculer comment cette distribution est modifiée par l'information contenue dans les données $\mathbf{y}$. La nouvelle distribution est appelée distribution à posteriori.

Dans le cas d'étude défini dans 5.1, on s'intéresse à la distribution à posteriori des masses β connaissant les mesures $\mathbf{X}$ de la distance Terre-Mars. On suppose que l'on n'a aucune information à priori sur les masses. Par conséquent pour la distribution à priori $[\mathbf{x}]$, on adopte une densité de probabilité uniforme sur un intervalle très large qui tend vers $[-\infty; +\infty]$. De la même manière, on aurait pu adopter une densité gaussienne d'écart-type tendant vers l'infini. En omettant la constante de normalisation, la formule (5.8) donne alors

$$[\beta|\mathbf{X}] = [\mathbf{X}|\beta]$$

Pour des erreurs de mesures indépendantes, on a

$$[\boldsymbol{\beta}|\mathbf{X}] = [X_1|\boldsymbol{\beta}] \times [X_2|\boldsymbol{\beta}] \times \dots \times [X_n|\boldsymbol{\beta}]$$

où X_i désignent les différentes composantes de $\mathbf{X}$ et n correspond au nombre de données. On met de côté les erreurs de modèle pour ne considérer uniquement que les erreurs aléatoires. Les erreurs qui interviennent sur les composantes de $\mathbf{X}$ sont donc distribuées de manière normale avec un écart-type σ_ε . On peut écrire

$$[X_i|\boldsymbol{\beta}] = \exp\left(-\frac{(X_i - (M\boldsymbol{\beta})_i)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

avec $(M\boldsymbol{\beta})_i$ la i ème composante du vecteur $M\boldsymbol{\beta}$. L'expression de $[\boldsymbol{\beta}|\mathbf{X}]$ s'écrit finalement comme

$$[\boldsymbol{\beta}|\mathbf{X}] = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{X} - M\boldsymbol{\beta}\|_2^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right) \quad (5.9)$$

Les valeurs les plus probables des masses $\boldsymbol{\beta}$ sont les valeurs pour lesquelles la densité $[\boldsymbol{\beta}|\mathbf{X}]$ est maximale. On remarque que maximiser (5.9) revient à minimiser

$$\|\mathbf{X} - M\boldsymbol{\beta}\|_2^2$$

Le $\boldsymbol{\beta}$ le plus probable est donc celui fourni par les moindres carrés. Aster *et al.* (2005) montre que les distributions à posteriori des paramètres autour des valeurs les plus probables suivent des lois gaussiennes dont les écarts-types sont données par la diagonale de (5.3).

Il apparaît ainsi que la méthode des moindres carrés exploite au mieux les données disponibles et fournit les valeurs de $\boldsymbol{\beta}$ les plus probables. Les valeurs de $\boldsymbol{\beta}$ sont malheureusement très peu contraintes par les données. Par conséquent les masses fournies par les moindres carrés sont très incertaines. Comme on l'a déjà mentionné, les composantes de $\boldsymbol{\beta}$ peuvent varier de manière très importante sans pour autant induire des variations importantes sur les résidus.

Pour espérer obtenir un meilleur ajustement des masses à partir des observations, il est nécessaire d'introduire dans la procédure d'ajustement des informations supplémentaires. L'approche est en général appelée régularisation du problème (Aster *et al.*, 2005). Il est important d'insister sur le fait que l'introduction d'informations supplémentaires incorrectes se traduira par une diminution de l'erreur aléatoire mais une augmentation très importante d'erreurs de modèles.

5.3.2 Distributions à priori

Dans les éphémérides, l'information supplémentaire qui permet de régulariser l'ajustement consiste à répartir la majorité des astéroïdes du modèle dynamique en trois groupes en fonction de leurs taxonomies. Les densités des membres au sein des groupes sont ensuite supposées égales à une même valeur (voir la partie "Contexte et motivation" du début de la thèse). On propose une approche alternative consistant à exploiter les distributions de masses définies au chapitre 4.

Dans la section 4.3.4, on a montré que les astéroïdes ne faisant pas partie de l'effet global appartiennent en général à la catégorie d'incertitude I ou II. En particulier pour les 76 astéroïdes du cas d'étude, 68 sont de catégorie I et 8 de catégorie II. Par conséquent, il est suffisant de considérer ici uniquement les distributions de masses au sein des catégories I et II données par les figures 4.1 et 4.2.

On reprend la formule (5.8). En supposant les erreurs sur les masses indépendantes et en notant les composantes de $\boldsymbol{\beta}$ par β_i , on a

$$[\boldsymbol{\beta}|\mathbf{X}] = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{X} - M\boldsymbol{\beta}\|_2^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right) \times [\beta_1] \times [\beta_2] \times \dots \times [\beta_{77}] \quad (5.10)$$

TABLE 5.1 – Paramètres des lois normales approximant les distributions des masses de l’anneau et des astéroïdes au sein des catégories I et II.

	catégorie I	catégorie II	anneau
moyenne [masses standards]	0.85	0.7	0.92
écart-type [masses standards]	0.5	1.7	0.31

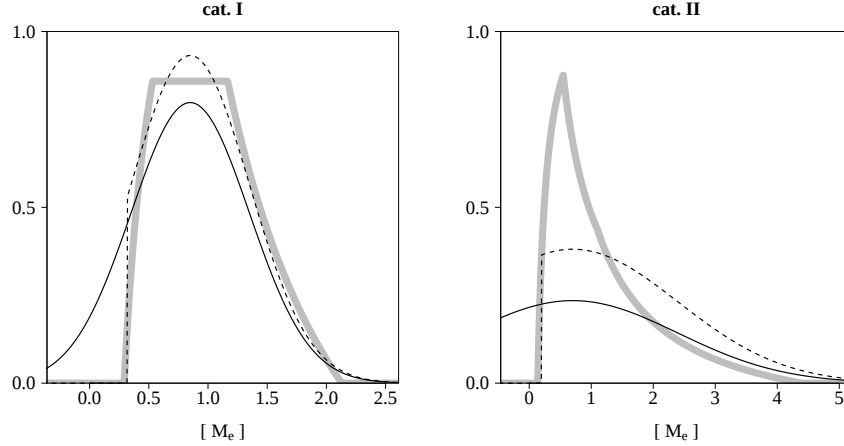


FIGURE 5.4 – Distributions des masses d’astéroïdes en unités de masses standards au sein des catégories d’incertitudes I et II. En gris les distributions reprises du chapitre 4, en noir les approximations gaussiennes. En trait interrompu, distributions gaussiennes tronquées.

Les densités de probabilités $[\beta_i]$ sont choisies en fonction des catégories d’incertitudes. Pour l’anneau, on adopte une distribution gaussienne de moyenne 0.92 et d’écart-type 0.31 en unité de masse standard de l’anneau. Les deux valeurs sont basées sur l’estimation de masse de l’anneau à $3 \pm 1 \times 10^{-10} M_{\odot}$ obtenue au chapitre 4. On approxime les distributions de masses au sein des deux catégories également par des gaussiennes. Les moyennes et écart-types correspondants sont donnés dans le tableau 5.1.

La figure 5.4 compare les distributions initiales avec leurs analogues gaussiens. La figure affiche également des distributions tronquées obtenues en imposant aux gaussiennes une probabilité nulle pour des valeurs inférieures à 0.35 et à 0.2 pour les catégories I et II respectivement. Comme les intégrales des distributions entre $-\infty$ et $+\infty$ doivent être égales à 1, l’opération augmente les valeurs des densités de probabilités non nulles. Les nouvelles distributions correspondent à la situation où la connaissance a priori gaussienne a été affinée par une information supplémentaire indiquant que la masse ne peut être inférieure à une certaine valeur. Pour la catégorie I, cette distribution affinée suit de près la distribution obtenue au chapitre 4. Afin d’obtenir une telle correspondance pour la catégorie II, il faudrait encore introduire une information diminuant la probabilité pour les masses fortes. Les approximations gaussiennes des distributions de masses correspondent donc à une exploitation partielle de l’information fournie par les distributions initiales.

5.3.3 Calcul des distributions à posteriori

En statistique bayésienne, les distributions à posteriori peuvent être obtenues numériquement grâce à des algorithmes basés sur la méthode Monte Carlo par chaînes de Markov. La méthode

est exposée dans Parent et Bernier (2007). Elle consiste à générer une marche aléatoire discrète dans l'espace des composantes de $\boldsymbol{\beta}$ où la probabilité de la direction prise par le pas suivant dépend uniquement du pas actuel et d'un certain nombre de paramètres fixes. L'espace où $[\boldsymbol{\beta}|\mathbf{X}]$ affiche des valeurs non négligeables peut alors être parcouru de manière très efficace. Notons qu'une partie de (5.10) est donnée par

$$\exp\left(-\frac{\|\mathbf{X} - M\boldsymbol{\beta}\|_2^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

La densité de probabilité définit un ellipsoïde à 77 dimensions dans lequel se trouvent confinées avec une très grande probabilité les composantes de $\boldsymbol{\beta}$. Il s'agit de l'ellipsoïde d'incertitude classique qui permet de décrire géométriquement la distribution des erreurs aléatoires des moindres carrés (voir par exemple Aster *et al.*, 2005). La deuxième partie de (5.10) s'écrit

$$[\beta_1] \times [\beta_2] \times \dots \times [\beta_{77}]$$

L'expression est non nulle au sein d'un cube de 77 dimensions. Ainsi l'espace à explorer par la marche aléatoire correspond à l'intersection d'un ellipsoïde avec un cube. Parent et Bernier (2007) décrivent la construction de différents algorithmes pour lesquels la densité des points visités tend rapidement vers la densité de probabilité voulue. Pour estimer $[\boldsymbol{\beta}|\mathbf{X}]$, on se borne à utiliser une implémentation particulière de l'échantionneur de Gibbs² adaptée à des à priori gaussiens sur l'ensemble des composantes de $\boldsymbol{\beta}$. Notons que selon Tarantola (2005), les à priori gaussiens conduiront automatiquement à des distributions à posteriori gaussiennes. Avec les approximations de la section 5.3.2, il est alors possible de déterminer comment l'observation de la distance Terre-Mars $\mathbf{X}$ modifie notre connaissance des masses d'astéroïdes et de l'anneau. On néglige toujours l'erreur systématique, ainsi les observations de la distance Terre-Mars utilisées ne proviennent pas de $\mathbf{X}$ mais de $\mathbf{X} - \mathbf{X}_m$. Pour tester dans quelle mesure l'algorithme est sensible au bruit on rajoute aux observations une erreur aléatoire d'écart-type $\sigma_\varepsilon = 1$.

L'algorithme de Gibbs fournit des distributions à posteriori dont les moyennes et écart-types sont représentés sur la figure 5.5. On interprète ces paramètres comme des estimations de masses et des incertitudes respectives. Pour un certain nombre d'objets les incertitudes sur les estimations de masses sont inférieures à 30%. Pour d'autres, la distribution à posteriori ne diffère quasiment pas de la distribution initiale. Indépendamment du fait que les masses soient bien ou mal déterminées, on note que les incertitudes fournies par la méthode sont en bon accord avec les différences entre les paramètres estimés et leurs valeurs réelles. La figure est tracée en unités de masses standards, ainsi les valeurs réelles valent 1.

5.3.4 Régularisation de Tikhonov

Une propriété remarquable des distributions à priori gaussiennes est que la solution fournie avec l'algorithme stochastique de Gibbs peut être retrouvée analytiquement. Tarantola (2005) montre que les moyennes des distributions gaussiennes à posteriori correspondent aux composantes de $\boldsymbol{\beta}$ qui minimisent

$$\left\| \begin{bmatrix} M \\ \sigma_\varepsilon C_\beta^{-1/2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} - \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \sigma_\varepsilon C_\beta^{-1/2} \boldsymbol{\beta}_{\text{pr}} \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|M\boldsymbol{\beta} - \mathbf{X}\|_2^2 + \sigma_\varepsilon^2 \|C_\beta^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_{\text{pr}})\|_2^2 \quad (5.11)$$

Dans l'expression, le vecteur $\boldsymbol{\beta}_{\text{pr}}$ représente les moyennes des distributions à priori et C_β désigne la matrice de covariance des distributions à priori. La matrice est donc diagonale, ses composantes sont données par le tableau 5.1. On vérifie que le minimum de (5.11) est obtenu pour

$$\boldsymbol{\beta}^+ = (M^T M + \sigma_\varepsilon^2 C_\beta^{-1})^{-1} (M^T \mathbf{X} + \sigma_\varepsilon^2 C_\beta^{-1} \boldsymbol{\beta}_{\text{pr}}) \quad (5.12)$$

2. L'algorithme fait partie de la librairie **MCMCpack** disponible sur mcmcpack.wustl.edu.

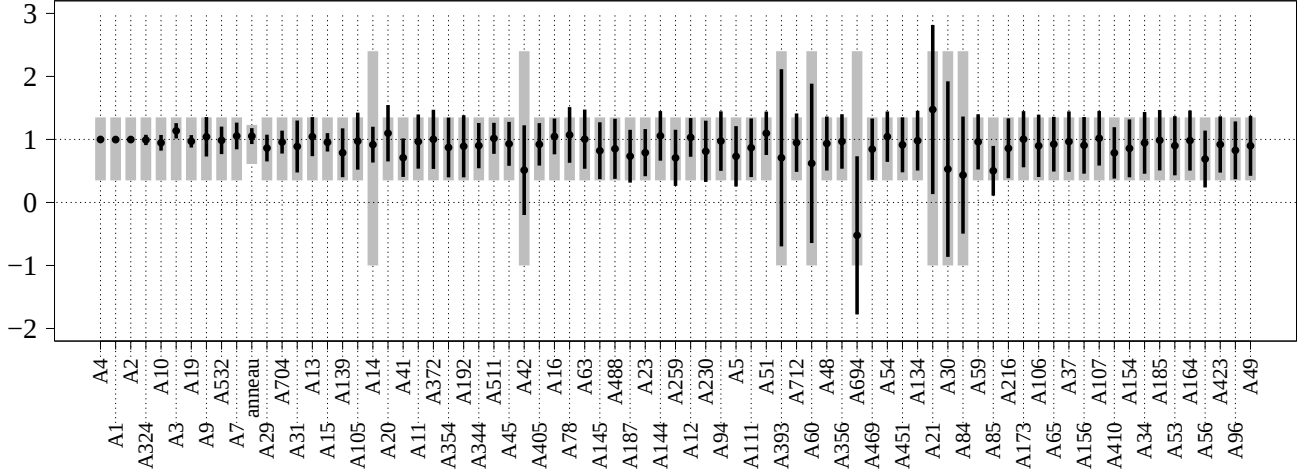


FIGURE 5.5 – Distributions à posteriori des 77 paramètres de β obtenues par l'algorithme de Gibbs (en unités de masses standards). Les points indiquent pour chaque variable la valeur à posteriori moyenne, les traits verticaux représentent ± 1 écart-type autour de cette moyenne. En gris sont représentées de la même façon les distributions à priori.

Selon Tarantola (2005), les variances des distributions à posteriori sont données par la diagonale de

$$\sigma_\varepsilon^2 (M^T M + \sigma_\varepsilon^2 C_\beta^{-1})^{-1} \quad (5.13)$$

Le calcul analytique de la distribution (5.10) n'est donc pas plus compliqué que l'application de la méthode des moindres carrés. Notons que pour des à priori très larges, C_β tend vers zéro et la distribution à posteriori est donnée par les moindres carrés de la section 5.2.

La relation (5.11) montre que la recherche du β optimal consiste à réduire le résidu $\|M\beta - \mathbf{X}\|_2$ tout en pénalisant les solutions pour lesquelles les composantes de β s'éloignent trop des moyennes β_{pr} . Ce type de régularisation qui s'appuie sur une pénalité définie avec une norme 2 s'appelle régularisation de Tikhonov, ou encore en anglais "ridge regression" (Aster *et al.*, 2005).

Avec (5.12) et (5.13), il est possible de calculer les erreurs aléatoires et systématiques d'une solution régularisée. Les deux types d'erreurs sont représentés figure 5.6. On vérifie que l'erreur systématique induite sur les paramètres ajustés s'exprime comme

$$\beta_m = (M^T M + \sigma_\varepsilon^2 C_\beta^{-1})^{-1} (M^T \mathbf{X}_m + \sigma_\varepsilon^2 C_\beta^{-1} (\beta_{\text{pr}} - \beta_0))$$

L'erreur dépend non seulement de l'erreur de modèle $\mathbf{X}_m$, mais aussi de la différence entre les paramètres réels β_0 et les estimations à priori β_{pr} . Sur la figure, on observe que les deux types d'erreurs restent inférieurs à environ 100% pour l'ensemble des 77 paramètres. Pour 13 astéroïdes l'erreur d'ajustement est de 30 %. Mais dans l'ensemble, les incertitudes à posteriori restent proches des écart-types à priori. Une comparaison avec la figure 5.1 montre que la régularisation constitue une nette amélioration par rapport à l'ajustement non régularisé.

Il est intéressant de mentionner que la régularisation de Tikhonov peut être interprétée non seulement comme l'exploitation d'une connaissance à priori sur les paramètres recherchés mais également comme un filtre sur les valeurs propres de M (Aster *et al.*, 2005). On définit les trois vecteurs suivants

$$\beta_c = \beta - \beta_{\text{pr}} \quad , \quad \mathbf{X}_c = \mathbf{X} - M\beta_{\text{pr}} \quad , \quad \beta_c^+ = \beta^+ - \beta_{\text{pr}}$$

Avec ces définitions, la relation (5.12) peut être réécrite comme

$$\beta_c^+ = (M^T M + \sigma_\varepsilon^2 C_\beta^{-1})^{-1} M^T \mathbf{X}_c \quad (5.14)$$

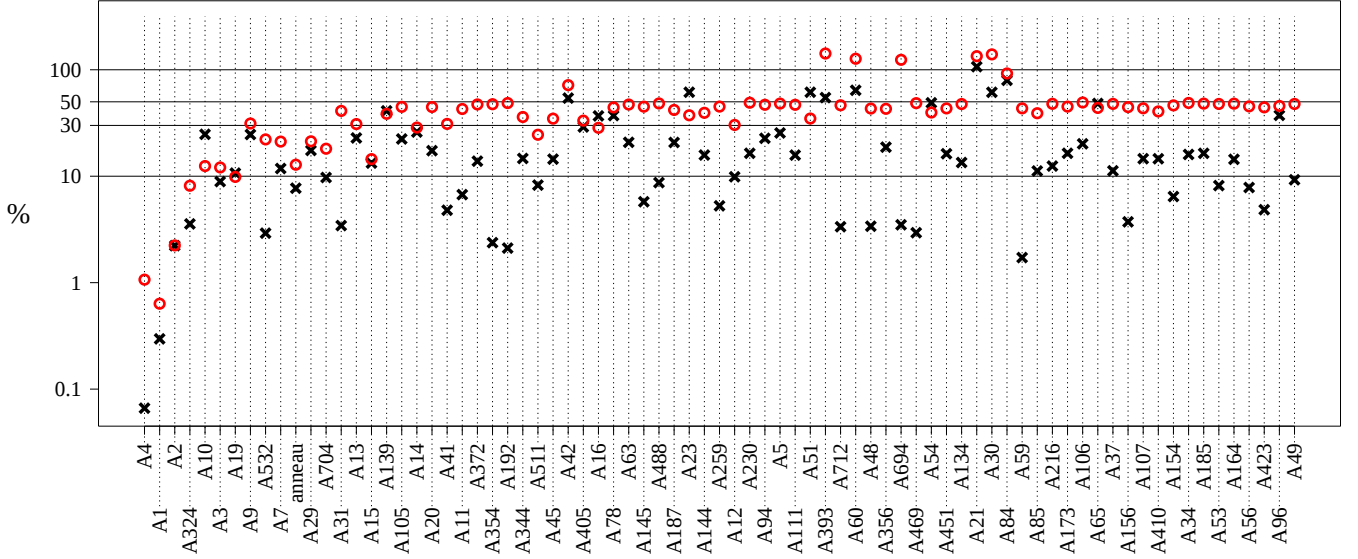


FIGURE 5.6 – Tracé des erreurs aléatoires (points rouges) et systématiques (croix) lors d'un ajustement régularisé des 77 paramètres aux mesures de la distance Terre-Mars. Le tracé est analogue à celui de la figure 5.1.

Ajuster les paramètres β ou les paramètres centrés β_c revient bien sûr au même car il s'agit d'un simple changement de notation. La décomposition de M en valeurs singulières est donnée par

$$M = U\Sigma V$$

où U et V sont des matrices carrées orthonormales et Σ une matrice diagonale de n lignes et 77 colonnes. Les éléments diagonaux de Σ , notés par la suite σ_i , correspondent aux valeurs propres de M . Si les distributions à priori sont infiniment larges, la relation (5.14) se simplifie en l'expression classique des moindres carrés, on a alors

$$\beta_c^+ = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{X}_c = V^T \Sigma^{-1} U^T \mathbf{X}_c \quad (5.15)$$

Aster *et al.* (2005) considère un cas simplifié où les éléments diagonaux de $\sigma_\epsilon^2 C_\beta^{-1}$ sont tous égaux à une constante notée α^2 . On vérifie que dans ce cas l'expression (5.14) peut être réécrite comme

$$\beta_c^+ = (M'^T M')^{-1} M'^T \mathbf{X}_c = V^T \Sigma'^{-1} U^T \mathbf{X}_c \quad (5.16)$$

où la matrice M' est obtenue en remplaçant les valeurs propres σ_i de M par (Aster *et al.*, 2005)

$$\sigma'_i = f_i \times \sigma_i \quad \text{avec} \quad f_i = \frac{\sigma_i^2 + \alpha^2}{\sigma_i^2}$$

La solution régularisée (5.16) est donc analogue à une solution non régularisée (5.15) où la contribution des valeurs propres de M plus faibles que α a été atténuée. Le filtrage des valeurs propres diminue la multicollinéarité au sein de M et réduit automatiquement les erreurs aléatoires et systématiques de l'ajustement (voir section 5.2.4). Notons que c'est les inverses des valeurs propres qui interviennent dans les solutions (5.15) et (5.16). Ainsi pour $\sigma_i \ll \alpha$, la valeur de $\sigma_i'^{-1}$ tend vers zéro, tandis que pour $\sigma_i \gg \alpha$ on a $f_i \sim 1$ et la valeur singulière correspondante reste inchangée.

Le cas d'étude peut être ramené au cas simplifié par un changement d'unités. En effet, les éléments de $\sigma_\varepsilon^2 C_\beta^{-1}$ sont presque tous égaux à

$$\alpha^2 = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_{\text{pr}}^2$$

avec σ_{pr}^2 l'écart-type à priori de la catégorie I. Pour se ramener au cas où tous les éléments sont égaux, il suffit de changer dans la matrice M les unités des quelques perturbations induites par l'anneau et les astéroïdes de catégorie II.

5.3.5 Contraintes de boîte

La figure 5.4 montre que les distributions de masses d'astéroïdes sont mieux représentées par des lois gaussiennes tronquées que par des gaussiennes simples. Avec des à priori gaussiens, les valeurs les plus probables de la distribution à posteriori sont données par la régularisation de Tikhonov. Dans le cas des lois tronquées, les valeurs à posteriori les plus probables peuvent encore être obtenues sans avoir nécessairement recours à une méthode stochastique du type échantillonneur de Gibbs.

Par la suite, le terme "loi normale" désigne une distribution normale multidimensionnelle. Le calcul de la distribution à posteriori (5.10) consiste à évaluer le produit d'une loi normale confinée dans un ellipsoïde et d'une distribution complexe confinée dans un cube. Dans le cas des à priori gaussiens, la densité au sein du cube est approximée par une loi normale. Sachant que la distribution à posteriori est donnée par la régularisation de Tikhonov et revient donc à un ajustement par moindres carrés, le produit des distributions normales conduit lui même à une loi normale. Tronquer les à priori équivaut à multiplier cette nouvelle distribution par une distribution uniforme dont les bornes définissent la troncature. Géométriquement, il s'agit de garder dans l'ellipsoïde fourni par la régularisation de Tikhonov uniquement la partie confondue avec l'intérieur d'un cube. La densité la plus forte au sein du volume commun au cube et à l'ellipsoïde correspond alors à la valeur de β qui minimise (5.11) tout en respectant les contraintes

$$\mathbf{l} \leq \beta \leq \mathbf{u}$$

où $\mathbf{l}$ et $\mathbf{u}$ sont des vecteurs (avec autant de composantes que β) qui définissent les bornes du cube. La minimisation d'une fonction quadratique comme (5.11) avec contraintes de boîtes peut être obtenue grâce à un algorithme dédié. On utilisera les routines BVLS (Bounded Variable Least Squares) développées par Stark et Parker (1995).

La figure 5.7 compare les 77 masses du cas d'étude ajustées par régularisation de Tikhonov et leurs analogues calculés par régularisation de Tikhonov avec contraintes. On fixe $\mathbf{l} = 0$ et $\mathbf{u} \sim \infty$. Les ajustements s'appuient sur des observations $\mathbf{X} - \mathbf{X}_m$ auxquelles on a rajouté le même bruit aléatoire que dans la section 5.3.3. La comparaison avec la figure 5.5 montre que la régularisation sans contraintes conduit aux mêmes valeurs que celles obtenues avec l'échantillonneur de Gibbs. De manière générale le recours à BVLS modifie peu l'ajustement fourni avec la régularisation sans contraintes. L'effet principal est que la masse de 694 Eckard est mise à zéro, tandis que sans BVLS elle s'ajuste à une valeur négative. Sur la figure, uniquement les à posteriori du cas sans contraintes sont représentés. Ces distributions sont plus larges et donc plus conservatives que les distributions à posteriori du cas avec contraintes. On renvoie à O'Leary et Rust (1986) pour une discussion sur l'estimation des intervalles d'incertitude dans le cas avec contraintes.

5.4 Modèles sans hypothèse simplificatrice

On propose ici une nouvelle modélisation d'astéroïdes pour INPOP basée sur la discussion précédente. Afin d'être utilisable en pratique, le modèle doit se dispenser de l'hypothèse simplificatrice de la section 5.2. On ne va donc plus considérer une liste exacte d'astéroïdes à modéliser

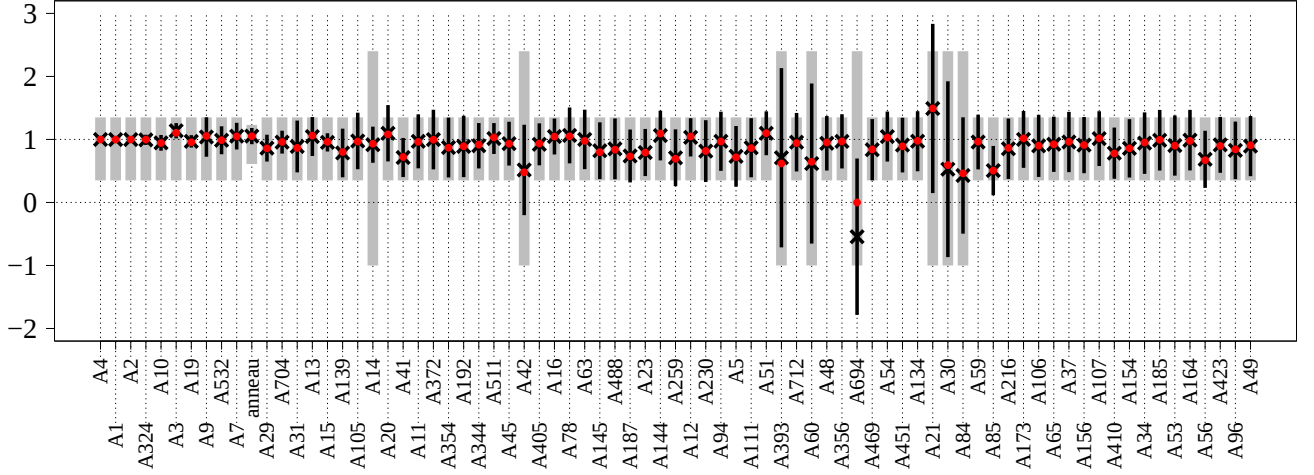


FIGURE 5.7 – Ajustement par régularisation de Tikhonov simple (croix) et par régularisation avec contraintes (points rouges). Les traits verticaux représentent les incertitudes des à priori gaussiens (en gris) et les incertitude à posteriori de l’ajustement sans contraintes (en noir).

individuellement mais une liste incertaine comme la liste de l’annexe 9.6 où l’exclusion d’un objet de l’effet global est déterminée par une probabilité. Dans les sections suivantes, le terme "modèle" désignera un ensemble constitué de 100 à 500 objets destinés à représenter les effets des astéroïdes dans INPOP. L’ensemble des 27142 astéroïdes utilisés pour les expériences Monte Carlo du chapitre 4 sera appelé modèle test.

5.4.1 Approximation des distributions bimodales

On désigne par M la variable aléatoire associée à la masse d’un astéroïde. La notation est légèrement différente par rapport à la section 4.2.2 pour ne pas confondre M avec la matrice M qui définit la relation linéaire entre les paramètres d’un modèle et les observations. On définit la probabilité d’exclusion p_g comme la probabilité qu’un astéroïde ne fasse pas partie de l’effet global. La liste de l’annexe 9.6 fournit 144 astéroïdes pour lesquels cette probabilité d’exclusion a été estimée. Avec un anneau, les astéroïdes de la liste constituent ce que l’on appellera le modèle A, un premier modèle d’astéroïdes qui ne s’appuie pas sur l’hypothèse simplificatrice de la section 5.2. Dans le modèle, la distribution de masse d’un astéroïde est donnée par la distribution de la variable aléatoire

$$P \times M \quad (5.17)$$

où P vaut 1 avec une probabilité p_g et 0 avec une probabilité $(1 - p_g)$. La variable M suit une des distributions définies au chapitre 4 en fonction de la catégorie d’incertitude de l’astéroïde. La densité de probabilité de (5.17) peut être estimée numériquement à partir de 10^6 tirages aléatoires de M et P (voir section 4.2.2). Les distributions ainsi obtenues sont bimodales et correspondent aux évolutions des figures 4.1 à 4.3 avec un pic supplémentaire plus ou moins grand centré sur zéro. Afin d’ajuster les 145 paramètres du modèle A, on cherche à approximer les distributions bimodales de masses par des gaussiennes tronquées. L’ajustement sera ensuite obtenu par régularisation de Tikhonov avec contraintes.

Une distribution gaussienne tronquée dépend en principe de trois paramètres. D’une part la distribution dépend de la valeur moyenne et de l’écart-type de la distribution non tronquée, et d’autre part elle dépend des bornes qui définissent la troncature. Pour simplifier, les bornes de tous les paramètres sont fixées à $\mathbf{l} = 0$ et $\mathbf{u} \sim \infty$. On se restreint à considérer uniquement

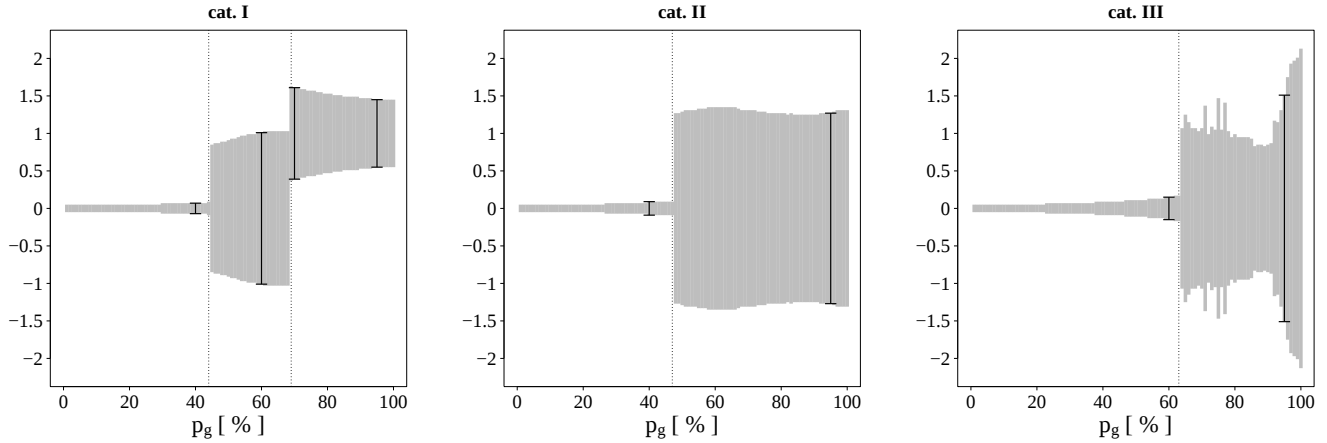


FIGURE 5.8 – En gris, évolutions avec p_g des moyennes et écart-types déterminés afin d’approximer les distributions bimodales de masses au sein des trois catégories d’incertitude. Les ordonnées sont en masses standards. Les traits pointillés indiquent des sauts brusques d’écart-type ou de moyenne. En noir, moyennes et écart-types des cas particuliers représentés sur la figure 5.9.

les valeurs 0 et 1 comme valeurs possibles des moyennes. Approximer une distribution bimodale par une gaussienne tronquée revient alors à déterminer une valeur optimale de l’écart-type. On détermine cette valeur en testant, pour les deux moyennes possibles, différentes valeurs d’écart-types régulièrement espacées. La moyenne et l’écart-type sont choisis de sorte à minimiser l’aire comprise entre la distribution de masse bimodale et la distribution tronquée.

La figure 5.8 représente en fonction de p_g , les écart-types et les moyennes retenus pour l’approximation des distributions bimodales. La représentation de ces deux paramètres est similaire à celle des figures 5.5 et 5.7. Les écart-types et les moyennes sont donc représentés par des traits verticaux centrés sur la valeur moyenne et s’étalant sur ± 1 écart-type (en masses standards).

Les paramètres sont déterminés pour les trois catégories d’incertitude. Pour chaque catégorie, on identifie 2 à 3 intervalles de p_g délimités par des sauts brusques de moyenne ou d’écart-type. L’évolution avec l’écart-type de l’aire comprise entre la distribution bimodale et la distribution gaussienne tronquée contient deux minima. Les sauts d’écart-types observés sur les figures s’expliquent par le passage du minimum global, avec l’évolution de p_g , d’un des minima vers l’autre. Pour $p_g > 70$ et la catégorie I, un saut d’écart-type est dû simplement à la valeur moyenne qui passe de 0 à 1. Le comportement bruité de la troisième figure provient d’un minimum très plat. Notons que pour $p_g = 0$, l’écart-type n’est pas nul mais égal à la largeur de la fenêtre utilisée pour l’estimation numérique des densités de probabilité bimodales.

La figure 5.9 compare schématiquement les distributions bimodales avec leurs approximations correspondantes pour différentes catégories d’incertitudes et différentes valeurs de p_g . Les écart-types et moyennes des quelques cas choisis sont indiqués sur la figure 5.8.

5.4.2 Ajustement

Afin d’évaluer l’ajustement que l’on peut espérer obtenir avec le modèle A, on considère l’ensemble des observations Terre-planètes disponibles dans INPOP. De la même manière que pour le cas d’étude, on travaille avec des perturbations obtenues après ajustement pondéré des conditions initiales (voir section 5.1.1).

La figure 5.8 montre qu’avec les distributions gaussiennes tronquées, un astéroïde dont la probabilité d’exclusion est inférieure à environ 25% a très peu de chances d’avoir sa masse ajustée à une valeur non nulle. On fixe ainsi à zéro les masses des 38 astéroïdes du modèle pour

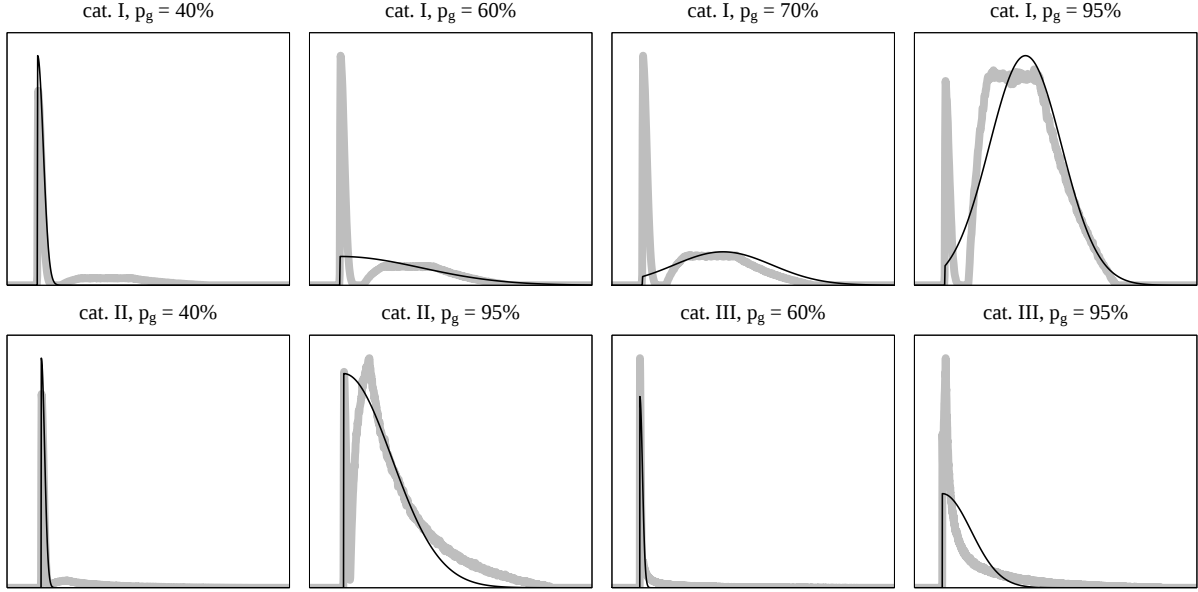


FIGURE 5.9 – Comparaisons schématiques entre distributions bimodales de masses (en gris) et les approximations correspondantes (en noir) pour différentes catégories et valeurs de p_g .

lesquels $p_g < 25\%$. L’ajustement des 107 paramètres restants par régularisation de Tikhonov avec contraintes de boîtes est représenté sur la figure 5.10. La figure affiche également les distributions à priori et à posteriori de la régularisation sans contraintes. De manière analogue à la section 5.3.5, on tient compte d’un bruit aléatoire d’écart-type $\sigma_\varepsilon = 1$ et on s’ajuste à $\mathbf{X} - \mathbf{X}_m$. La régularisation s’appuie sur des à priori attribués selon la figure 5.8 en fonction des probabilités d’exclusion et des catégories d’incertitude. Pour l’anneau, la distribution à priori est identique à celle de la section 5.1.2.

On remarque sur la figure 5.10 que certaines barres d’erreur sont relativement éloignées de la valeur 1 qui, on le rappelle, correspond aux masses de chacun des astéroïdes dans le modèle test. Le fait de soustraire aux observations l’erreur de modèle $\mathbf{X}_m$ définie pour le cas d’étude n’élimine pas entièrement l’erreur systématique de l’ajustement. Une erreur systématique est notamment introduite par le fait que dans le nouveau modèle les moyennes à priori des 77 paramètres du cas d’étude ne sont pas toutes à 1. Parmi les 107 paramètres du modèle A, plus de la moitié est ajustée à des valeurs non nulles. Il s’agit en majorité des objets qui faisaient partie du cas d’étude. Néanmoins, la correspondance entre objets dont les masses sont non nulles et astéroïdes du cas d’étude n’est pas parfaite. Une vingtaine d’astéroïdes présents dans le cas d’étude possèdent après ajustement du modèle A, des masses nulles.

Afin d’évaluer la qualité du modèle A de manière plus objective, on a recours à des expériences Monte Carlo analogues à celles de Kuchynka *et al.* (2010). On attribue aux 27142 astéroïdes du modèle test un des 100 ensembles de masses aléatoires déterminés au chapitre 4. La somme des perturbations individuelles permet d’obtenir les perturbations $\mathbf{X}$ induites sur les distances Terre-planètes auxquelles on rajoute un bruit d’écart-type $\sigma_\varepsilon = 1$. Pour chacun des 100 ensembles de masses, le modèle A est ajusté aux observations ainsi obtenues par régularisation de Tikhonov avec contraintes de boîte. Les erreurs moyennes commises sur les masses d’astéroïdes au cours des 100 ajustements sont représentées sur la figure 5.11. La figure représente également pour chaque astéroïde l’écart-type de la distribution des erreurs relatives. Environ une trentaine de paramètres est en moyenne ajustée avec une erreur inférieure à 50%. Seulement 8 masses d’astéroïdes sont ajustées de manière satisfaisante avec des erreurs inférieures à 30%. On remarque sur la figure un

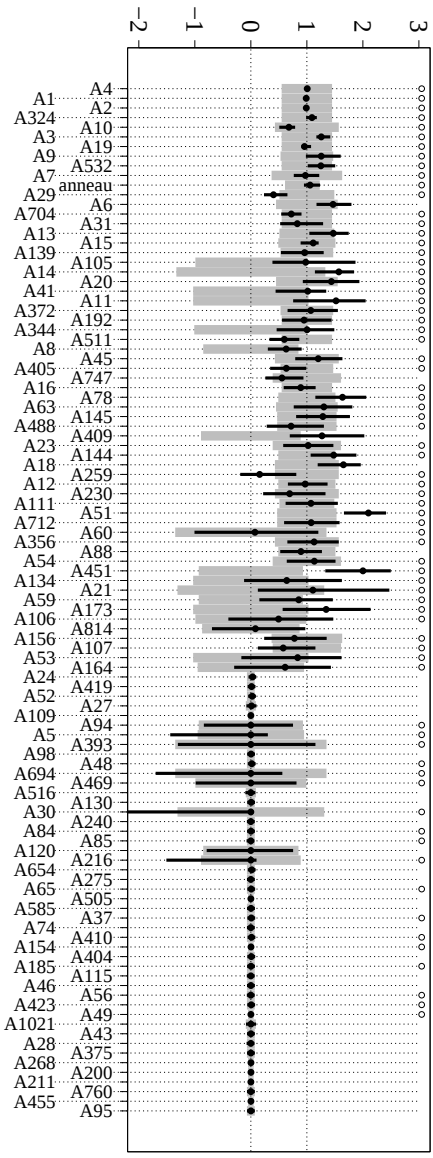


FIGURE 5.10 – Ajustement des 107 paramètres du modèle A à l'ensemble des observations Terre-planètes disponibles dans INPOP. Les traits verticaux gris et noirs représentent respectivement les distributions à priori et à posteriori. Les points vides dans la partie supérieure du tracé indiquent les objets présents dans le cas d'étude à 77 paramètres.

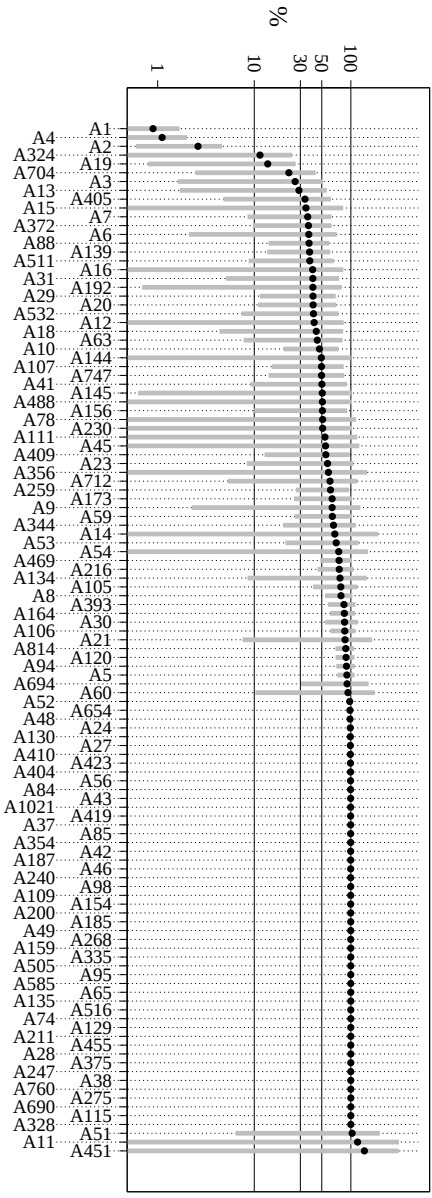


FIGURE 5.11 – Erreurs relatives commises en moyenne sur les masses d'astéroïdes par les ajustements du modèle A au cours de 100 expériences Monte Carlo. En gris sont représentés les écart-types des distributions d'erreurs relatives.

groupe d'objets dont les erreurs sont exactement à 100%. Il s'agit des astéroïdes dont les masses sont systématiquement ajustées à zéro.

Pour chaque ensemble de masses aléatoires, on estime également la capacité d'extrapolation du modèle en terme de prédiction de la distance Terre-Mars au cours des années 2010-2015. L'estimation de l'extrapolation nécessite de calculer pour chacun des 27142 astéroïdes du modèle test, la perturbation après ajustement pondéré des conditions initiales non seulement pour l'ensemble des données de INPOP mais aussi pour l'intervalle d'extrapolation. Le calcul est analogue à celui décrit dans la section 3.4.2. L'ajustement des perturbations induites par des changements de conditions initiales intervient sur l'ensemble des observations y compris l'intervalle d'extrapolation. Les coefficients qui déterminent l'amplitude des changements sont par contre obtenus uniquement à partir des observations datant d'avant 2010. La différence entre les perturbations de la distance Terre-Mars induites par le modèle et les perturbations induites par les 27142 astéroïdes est systématiquement inférieure à 2 m entre 1999 et 2010. En moyenne sur les 100

ajustements du modèle A, la différence passe en 1 an à 40 m. En 5 ans, la différence atteint presque 200 m. L’extrapolation du modèle A est donc assez mauvaise, notamment l’extrapolation sur 1 an est 4 fois moins bonne que celle estimée par Folkner *et al.* (2008) pour l’éphéméride DE421.

5.4.3 Un deuxième modèle

En se basant sur la figure 5.10, le modèle ajusté dans la section précédente contient à peine 60 masses d’astéroïdes non nulles. Le modèle est donc particulièrement parcimonieux. Actuellement, les modèles d’astéroïdes employés dans les éphémérides contiennent plus de 300 objets.

Pour diminuer les incertitudes de l’ajustement représenté par la figure 5.10, on considère un deuxième modèle appelé B contenant plus d’astéroïdes que le modèle A. La liste de l’annexe 9.6 a été obtenue à partir d’expériences Monte Carlo où l’algorithme CPLEX pouvait enlever jusqu’à 110 astéroïdes parmi les 27142 objets du modèle test. En autorisant l’algorithme à enlever jusqu’à 300 astéroïdes, l’erreur systématique intervenant sur la modélisation de la distance Terre-Mars par un anneau est diminuée d’un facteur 5. Le nombre moyen d’astéroïdes exclus de l’effet global passe alors de 74 à environ 200 (voir chapitre 4). Avec plus d’astéroïdes, l’ajustement régularisé se basera sur plus d’informations à priori ce qui devrait également contribuer à diminuer les erreurs des masses ajustées.

Liste des astéroïdes

La sélection d’astéroïdes que l’on propose pour ce deuxième modèle est obtenue avec la même méthodologie que la sélection du modèle A. On se base sur des expériences Monte Carlo similaires à celles de la section 4.3.3, néanmoins on fixe le paramètre N des optimisations CPLEX à 300 au lieu de le fixer à 110. Une nouvelle liste est ainsi compilée rassemblant les astéroïdes ayant une probabilité non nulle de ne pas faire partie de l’effet global. Afin d’améliorer la capacité d’extrapolation du modèle construit, on tient compte en plus de l’ensemble des données disponibles dans INPOP des perturbations de la distance Terre-Mars entre 2010 et 2015. On travaille avec des perturbations obtenues après ajustement pondéré des conditions initiales. Comme dans la section précédente, cet ajustement se base uniquement sur des observations antérieures à 2010. La soustraction aux perturbations des effets induits par les conditions initiales ajustées intervient par contre sur l’ensemble des intervalles de temps.

La nouvelle liste d’astéroïdes avec les probabilités d’exclusion correspondantes est reproduite dans l’annexe 9.7. La liste contient 276 objets dont la probabilité d’exclusion est inférieure à 25%. Jusqu’à 164 objets sont de catégorie I, 109 de catégorie II et seulement 3 de catégorie III. Avec les 100 expériences Monte Carlo qui ont permis la compilation de la liste, on estime la masse de l’anneau à $1.4 \pm 0.2 \times 10^{-10} M_{\odot}$. On note que la valeur est identique à la valeur de la figure 4.6 obtenue en considérant uniquement les données disponibles Terre-Mars

Ajustement

La figure 5.12 représente la qualité d’ajustement des masses du modèle B. De la même manière que pour la figure 5.11, les erreurs représentées sont obtenues en ajustant par régularisation de Tikhonov avec contraintes le modèle B aux perturbations induites par différents modèles tests. La figure représente uniquement les masses dont l’erreur relative moyenne est inférieure à 50%. On observe que le fait de considérer un nombre plus élevé d’astéroïdes dans un modèle améliore sensiblement les ajustements. Désormais 129 masses sont déterminées en moyenne à mieux que 50% et 23 astéroïdes à mieux que 30%. Sur les 276 masses, environ une soixantaine est systématiquement mise à zéro. Le modèle reste donc toujours relativement parcimonieux.

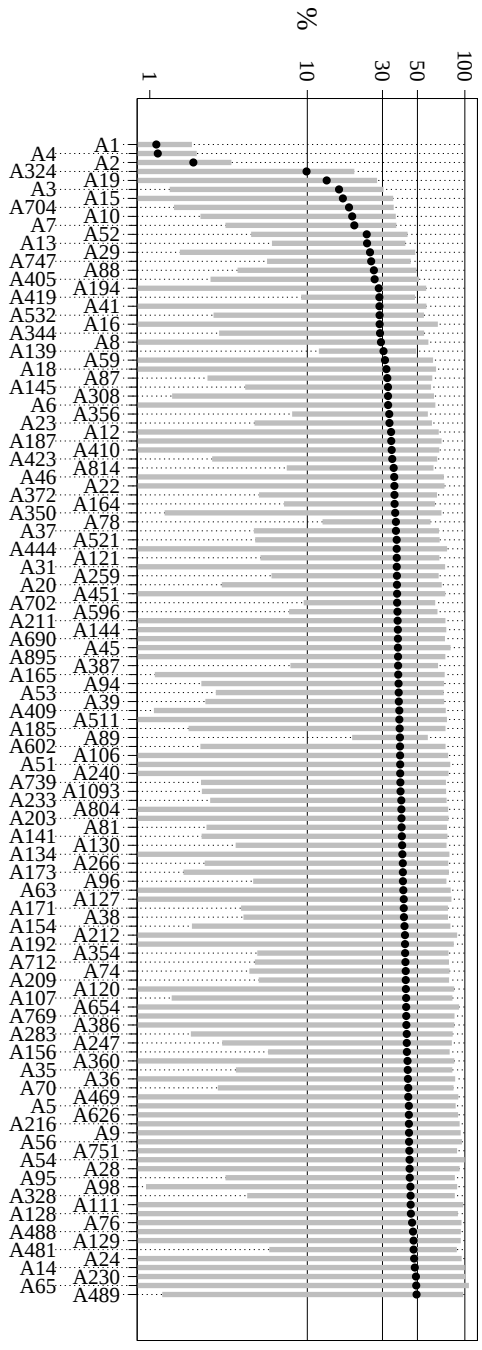


FIGURE 5.12 – Analogue de la figure 5.11 pour le modèle B. La figure représente uniquement les astéroïdes qui en moyenne s’ajustent à mieux que 50%.

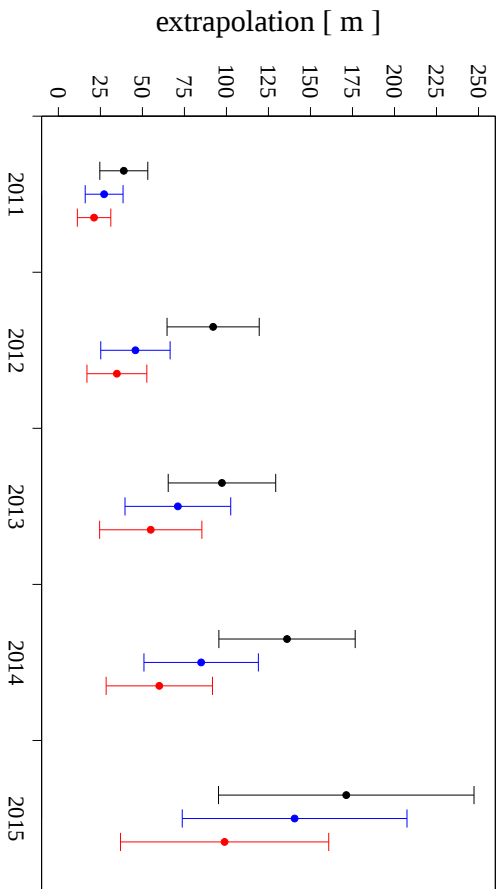


FIGURE 5.13 – Capacités d’extrapolation de trois modèles d’astéroïdes différents. Pour chaque date, les estimations concernent le modèle A (en noir), un modèle similaire à B où le choix d’astéroïdes ne tient pas compte des perturbations au delà de 2010 (en bleu) et enfin le modèle B (en rouge).

Extrapolation

Le nouveau modèle bénéficie également d’une meilleure extrapolation. Entre 2010 et 2011, on prévoit des perturbations de la distance Terre-Mars avec une précision d’environ 20 m. Les capacités d’extrapolation des modèles A et B sont comparées figure 5.13. On affiche également les extrapolations d’un modèle analogue à B mais obtenu sans considérer dans la sélection des astéroïdes les perturbations au delà de 2010. Chaque point de la figure correspond au maximum atteint entre 2010 et une date par la différence moyenne entre les perturbations d’un modèle et les perturbations du modèle test. Les moyennes sont obtenues à partir de 100 expériences Monte Carlo où l’on fait varier les masses du modèle test. Les incertitudes représentent les écart-types autour de ces moyennes. Sur la figure, on voit que tenir compte des perturbations au delà de 2010 dans la construction d’un modèle améliore nettement la capacité d’extrapolation. L’extrapolation du modèle B, en tenant compte des incertitudes affichées sur la figure, peut atteindre la limite des 10 m estimée pour DE421. Pour améliorer davantage l’extrapolation, il faudrait compiler une liste plus complète que celle de l’annexe 9.7. Il serait alors nécessaire de reconcevoir les optimisations CPLEX prévues pour Kuchynka *et al.* (2010). Actuellement les optimisations permettent l’ajustement effectif de 200 paramètres au maximum. Le calcul de l’effet global avec l’élimination du modèle test de $N > 200$ astéroïdes est obtenu en éliminant d’office les $N - 200$ objets les plus perturbateurs. Pour $N \sim 500$, cette approche devient inefficace car l’optimisation n’a pas assez de paramètres sur lesquels jouer.

5.5 Conclusion

Nous avons proposé une approche systématique pour ajuster aux observations planétaires les modèles d’astéroïdes introduits au chapitre 4 (basés sur un nombre restreint d’objets individuels et un anneau). Sur un cas d’étude simple, on a montré que l’ajustement direct par moindres carrés de tous les paramètres d’un tel modèle était impossible. En effet, les multicollinéarités qui existent entre les effets des différents astéroïdes amplifient très fortement le bruit des observations. Les erreurs relatives sur les paramètres ajustés dépassent alors largement les 100%. Une interprétation bayésienne des moindres carrés montre que la méthode est pourtant le meilleur moyen permettant d’exploiter les observations afin d’ajuster le modèle. Il apparaît ainsi qu’un ajustement meilleur peut être obtenu uniquement si l’on dispose d’informations supplémentaires par rapport à celles déjà contenues dans les observations planétaires.

Des informations supplémentaires peuvent être obtenues à partir des estimations astrophysiques des masses d’astéroïdes. On a introduit la méthode de régularisation de Tikhonov avec contraintes de boîte qui permet de tenir compte simultanément de ces nouvelles données et des mesures Terre-planètes. Son implémentation pratique se base sur l’algorithme BVLS et nécessite un minimum de changements par rapports aux routines d’ajustement par moindres carrés existantes. La méthode a été testée sur un modèle concret contenant, en plus d’un anneau, 276 astéroïdes individuels (liste de l’annexe 9.7). En générant différentes perturbations des orbites planétaires à partir de 27142 astéroïdes et en variant les masses de ces derniers, on a montré que l’ajustement du modèle permet en moyenne la détermination de plus de 100 masses avec une précision de l’ordre de 50%. Une vingtaine d’objets peut même être déterminée à mieux que 30%. De la même manière on a estimé la capacité d’extrapolation du modèle testé à environ 20 ± 10 m en 1 an. Ces performances sont encourageantes pour implémenter les modèles d’astéroïdes du chapitre 4 et leurs ajustements régularisés dans la construction des éphémérides planétaires.

Effets des astéroïdes sur le voisinage du point de Lagrange L_2

Cette partie de la thèse a été réalisée en réponse à l'offre 20092201-1 du Centre National d'Études Spatiales. L'objectif de l'étude est d'évaluer l'effet des astéroïdes sur un objet placé au voisinage du point de Lagrange L_2 du système Terre-Soleil. Un intérêt particulier est porté aux perturbations qui pourraient être induites sur les satellites de l'agence spatiale européenne, Herschel et Planck. L'analyse de ces perturbations à partir du suivi des sondes pourrait fournir des informations sur les masses d'astéroïdes. Ces informations pourraient à leur tour être exploitées pour l'amélioration des éphémérides planétaires.

Introduction Les satellites Herschel et Planck de l'agence spatiale européenne (ESA) ont été placés en orbite autour du point de Lagrange L_2 du système Terre-Soleil en juin 2009. Herschel a pour but de fournir des observations astronomiques dans le domaine infrarouge et submillimétrique, l'objectif de Planck est de réaliser une carte des anisotropies de température du fond diffus cosmologique (Bauske, 2009). La durée des missions est prévue au maximum sur 2 ans et demi pour Planck et sur 4 ans et demi pour Herschel.

Pour des observatoires spatiaux comme Herschel et Planck, le point L_2 présente un certain nombre d'avantages par rapport au voisinage immédiat de la Terre. En effet, depuis L_2 il est possible d'observer la totalité de la sphère céleste à l'exception d'une seule direction regroupant au même temps la Terre, le Soleil et la Lune. L'alignement permanent des corps vu depuis L_2 permet également d'assurer simplement la communication avec la sonde et la protection des rayonnements infrarouges. L'antenne et un bouclier thermique peuvent être en permanence orientés dans une seule direction. Du point de vue dynamique, L_2 permet de maintenir une trajectoire nominale pour un coût modéré en carburant ce qui prolonge la durée de vie potentielle des missions. Le point L_2 est naturellement instable, ainsi toute trajectoire doit être corrigée à des intervalles réguliers. Dans le cas de Herschel et Planck, ces corrections sont opérées environ tous les 30 jours (Hechler et Yáñez, 2006; Hechler et Cobos, 2002). Il est intéressant de noter que ce caractère instable assure que le voisinage de L_2 restera en permanence vide de débris spatiaux qui pourraient s'y accumuler au fur et à mesure des missions. En plus de Herschel et Planck, le point L_2 accueille depuis 2001 le satellite WMAP de l'agence spatiale américaine (NASA). Dans un futur proche, d'autres missions seront également placées au voisinage de L_2 . On peut en particulier citer la mission GAIA (ESA) prévue pour 2012, ou le James Webb Space Telescope (NASA/ESA) prévu pour 2014.

De manière générale, les effets des astéroïdes ne semblent pas être pris en compte dans les conceptions des missions au voisinage de L_2 . Dans Hechler et Yáñez (2006), les astéroïdes sont absents du modèle dynamique servant à générer les orbites opérationnelles des missions. Ils n'apparaissent pas non plus dans l'étude du bruit et des perturbations subies par les satellites. Dans notre étude, un des objectifs est de valider l'hypothèse que l'effet des astéroïdes est effectivement négligeable dans la conception des missions autour de L_2 . Dans le cas contraire, il est intéres-

sant de déterminer si à partir des données du suivi de la sonde on ne pourrait pas extraire des informations utiles concernant les masses des astéroïdes perturbateurs. Selon Hechler et Yáñez (2006), les positions de Herschel et Planck peuvent être restituées avec une précision de l'ordre de la dizaine de kilomètres. La mesure de la distance aux sondes est limitée par un bruit de l'ordre du mètre. Le bruit des données Doppler permet un suivi de la vitesse radiale avec une précision de 0.1 mm/s. Hechler et Yáñez (2006) considèrent des réajustements d'orbites tous les 30 à 60 jours. Ainsi l'effet d'un astéroïde pourra être considéré comme significatif s'il perturbe une trajectoire de plus de 1 m en 2 mois.

Plan de l'étude L'étude se structure en trois chapitres. Le premier est une étude du modèle circulaire restreint qui s'appuie fortement sur des travaux antérieurs publiés dans la littérature. On introduit le calcul de la forme normale et la méthode du multiple shooting qui permettent de construire des orbites quasi-périodiques autour de L_2 . Ces outils sont ensuite utilisés pour construire des orbites similaires à celles de Herschel et Planck dans un modèle du Système solaire réaliste fourni par l'éphéméride INPOP (Fienga *et al.*, 2009, 2008). Le deuxième chapitre présente le modèle quasi-bicirculaire (Andreu, 1999). Ce cadre analytique est ensuite adapté à l'étude d'une perturbation induite par un astéroïde sur une orbite quasi-périodique. On montre qu'une partie dominante de la perturbation suit en réalité une évolution simple dont on dérive l'expression. Dans le troisième chapitre, purement numérique, on estime les effets de plus de 200000 astéroïdes sur Herschel et Planck dans les premiers mois des missions. Sous l'hypothèse que l'effet d'un astéroïde est le plus important lors des rencontres proches avec la sonde, on estime les effets maximaux pouvant être induits par des astéroïdes au cours de l'intervalle de temps 2009-2030.

Chapitre 6

Trajectoires quasi-périodiques autour de L_2

Après une mise en équation du problème circulaire restreint à 3 corps (PCR3C), on étudiera les orbites possibles autour du point de Lagrange L_2 dans des systèmes de plus en plus complets. Le système le plus simple considéré est le PCR3C développé en L_2 à l'ordre 2. On présente ensuite une méthode permettant d'obtenir des trajectoires quasipériodiques pour des développements à des ordres plus élevés. Finalement on va au delà du PCR3C et on considère un problème perturbé intégré numériquement avec INPOP et contenant entre autres les huit planètes et la Lune.

6.1 Le problème circulaire restreint à trois corps

On va suivre la démarche de Szebehely (1982), on adopte néanmoins un repérage légèrement différent. Une particule P de masse négligeable évolue dans un champ gravitationnel induit par les masses m_S et m_T en orbite képlérienne circulaire (voir figure 6.1). Les masses m_S et m_T sont en général appelées les primaires et dans notre cas elles correspondent respectivement au Soleil et à la Terre. Le problème étant restreint, l'orbite des primaires reste non perturbée. En plus d'un repère inertiel R_0 , on définit un repère R_a centré au barycentre avec l'axe $\mathbf{x}$ orienté vers m_T et l'axe $\mathbf{y}$ colinéaire à la vitesse de m_T . On définit également un repère R_b , analogue à R_a mais centré en L_2 . Les deux repères R_a et R_b tournent par rapport au repère inertiel avec une vitesse angulaire égale au moyen mouvement n des primaires.

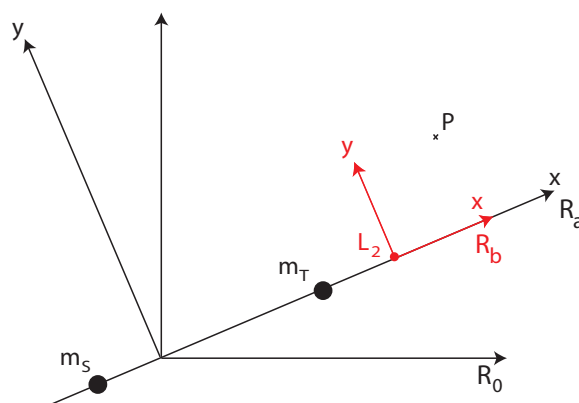


FIGURE 6.1 – Le problème circulaire restreint à trois corps.

6.1.1 Formulation hamiltonienne

On note respectivement par T et U , l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la particule. Dans les variables cartésiennes (x, y, z) du repère tournant R_a , on a

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x} - ny)^2 + \frac{1}{2}(\dot{y} + nx)^2$$

$$U = -\frac{Gm_S}{d_S} - \frac{Gm_T}{d_T}$$

avec G la constante gravitationnelle, n le moyen mouvement et d_S, d_T les distances de la particule aux masses m_S et m_T . On déduit l'expression du lagrangien $L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = T - U$ qui s'écrit

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x} - ny)^2 + \frac{1}{2}(\dot{y} + nx)^2 + \frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{Gm_S}{d_S} + \frac{Gm_T}{d_T}$$

L'écriture du lagrangien peut être simplifiée en prenant la distance mutuelle dénotée a des primaires pour unité de distance et $1/n$ pour unité de temps. En notant les quantités exprimées dans ces nouvelles unités avec un prime, on a

$$\text{distance}' = \frac{1}{a} \times \text{distance}$$

$$\text{temps}' = n \times \text{temps}$$

Comme $n' = a' = 1$, dans les nouvelles unités la troisième loi de Kepler devient $n'^2 a'^3 = G'(m_S + m_T) = 1$. En omettant les primes, le lagrangien peut donc être réécrit

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x} - y)^2 + \frac{1}{2}(\dot{y} + x)^2 + \frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{1 - \mu}{d_S} + \frac{\mu}{d_T}$$

avec μ le rapport des masses $m_T/(m_S + m_T)$. On remarque que dans les nouvelles unités les abscisses de m_S et m_T sont respectivement $-\mu$ et $1 - \mu$. Avec le lagrangien on peut reformuler le problème dans le formalisme hamiltonien. Les actions sont définies par

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z}$$

et le hamiltonien $H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L$ s'écrit

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x + \frac{\mu - 1}{d_S} - \frac{\mu}{d_T}$$

avec

$$d_S = ((x + \mu)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$d_T = ((x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$
(6.1)

6.1.2 Position du point d'équilibre L_2

La position du point L_2 s'obtient en cherchant un point fixe des équations du mouvement. Sachant que le point est situé sur l'axe Terre - Soleil, le point doit satisfaire à $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ et $y = z = 0$. En notant par γ la distance de L_2 à la Terre on a encore $x = \mu - 1 + \gamma$ ($\gamma > 0$) car

TABLE 6.1 – Valeurs de μ et γ pour le système Terre-Soleil.

$$\mu = 3.040423459543435 \times 10^{-6}$$

$$\gamma = 0.01007824050772411$$

L_2 est situé par définition plus loin du Soleil que la Terre. L'injection de ces contraintes dans les équations de Hamilton conduit à

$$\gamma^5 + (3 - \mu)\gamma^4 + (3 - 2\mu)\gamma^3 - \mu\gamma^2 - 2\mu\gamma - \mu = 0 \quad (6.2)$$

La résolution numérique de cette équation du cinquième degré fournit une valeur de γ . En calculant¹ μ pour le système Terre - Soleil et en incluant dans la masse de la Terre celle de la Lune, on obtient la valeur de γ donnée dans le tableau 6.1.2. La multiplication de γ par l'unité astronomique conduit à une estimation de la distance entre la Terre et L_2 de 1507683 km.

6.2 Développement du hamiltonien au voisinage de L_2

Dans cette partie on suit les développements de Jorba et Masdemont (1999). Le mouvement d'une particule est déterminé de manière générale par le hamiltonien (6.1). En considérant que la particule reste proche de L_2 , la dynamique peut être représentée par le développement limité du hamiltonien au voisinage de L_2 . On se place dans le repère tournant R_b centré en L_2 (voir figure 6.1), les coordonnées x, y, z auront donc désormais L_2 pour origine. Comme dans Jorba et Masdemont (1999), on prendra γ pour unité de distance. On a donc

$$\text{distance}_{[N]} = \frac{1}{\gamma} \times \text{distance}'$$

où l'indice $[N]$ indique le nouveau système d'unités comme on vient de le définir. L'hamiltonien dans le repère R_b avec les unités $[N]$ s'obtient à partir de (6.1) :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x - \left(1 + \frac{1-\mu}{\gamma}\right)x + \frac{\mu-1}{\gamma^3 d_1} - \frac{\mu}{\gamma^3 d_2} \\ d_1 &= \left(\left(x + 1 + \frac{1}{\gamma}\right)^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2} \\ d_2 &= \left((x+1)^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Sauf mention contraire, on va désormais travailler dans les unités $[N]$. Le développement de Taylor en x, y, z du hamiltonien (6.3) peut être écrit explicitement. Selon Jorba et Masdemont (1999), on a

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x - \sum_{n \geq 2}^{\infty} c_n(\mu) T_n(x, y, z) \\ \text{avec } c_n(\mu) &= \frac{(-1)^n}{\gamma^3} \left(\mu + (1-\mu) \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

Les $T_n(x, y, z)$ sont des polynômes homogènes en (x, y, z) de degrés n définis par récurrence avec

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1 &= x \\ \text{et } T_n &= \frac{2n-1}{n} x T_{n-1} + \frac{1-n}{n} (x^2 + y^2 + z^2) T_{n-2} \end{aligned}$$

1. La valeur de μ est donnée par les éphémérides INPOP08 (Fienga *et al.*, 2009).

6.2.1 Solution du hamiltonien à l'ordre 2

Le développement à l'ordre 2 en x, y, z du hamiltonien (6.3) conduit à

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - xp_y + yp_x - c_2 x^2 + \frac{c_2}{2} y^2 + \frac{c_2}{2} z^2 \quad (6.4)$$

avec $c_2 = \frac{\mu}{\gamma^3} + \frac{1-\mu}{(1+\gamma)^3}$

A cet ordre, l'évolution de (x, y, z, p_x, p_y, p_z) est régie par des équations différentielles linéaires. Une manière standard de procéder consiste à chercher un changement de variable linéaire de sorte à diagonaliser le système des équations différentielles. Selon Jorba et Masdemont (1999) le passage aux nouvelles variables $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ est donné par

$$(x, y, z, p_x, p_y, p_z)^T = C \times (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)^T$$

avec

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{s_1} & 0 & 0 & \frac{-2\lambda}{s_1} & \frac{2\omega_1}{s_2} & 0 \\ \frac{\lambda^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & \frac{-\omega_1^2 - 2c_2 - 1}{s_2} & 0 & \frac{\lambda^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda^2 + 2c_2 + 1}{s_1} & \frac{-\omega_1^2 + 2c_2 + 1}{s_2} & 0 & \frac{\lambda^2 + 2c_2 + 1}{s_1} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda^3 + (1 - 2c_2)\lambda}{s_1} & 0 & 0 & \frac{-\lambda^3 - (1 - 2c_2)\lambda}{s_1} & \frac{-\omega_1^3 + (1 - 2c_2)\omega_1}{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\omega_2} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Les coefficients de la matrice C dépendent de c_2 et on a

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(c_2 - 2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2} \right)^{1/2} \\ s_1 &= (2\lambda(4 + (4 + 3c_2)\lambda^2 + 5c_2 - 6c_2^2))^{1/2} \\ s_2 &= (\omega_1(-4 + (4 + 3c_2)\omega_1^2 - 5c_2 + 6c_2^2))^{1/2} \\ \omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-c_2 + 2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2} \right)^{1/2} \\ \omega_2 &= \sqrt{c_2} \end{aligned}$$

Dans les nouvelles variables l'expression du hamiltonien (6.4) devient

$$H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = \lambda q_1 p_1 + \frac{\omega_1}{2} (q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2} (q_3^2 + p_3^2) \quad (6.6)$$

La solution s'obtient maintenant sans difficultés et on a

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 e^{\lambda t} & , & \quad p_1 = a_2 e^{-\lambda t} \\ q_2 &= a_3 \sin(\omega_1 t + \phi_{xy}) & , & \quad p_2 = a_3 \cos(\omega_1 t + \phi_{xy}) \\ q_3 &= a_4 \cos(\omega_2 t + \phi_z) & , & \quad p_3 = -a_4 \sin(\omega_2 t + \phi_z) \end{aligned} \quad (6.7)$$

TABLE 6.2 – Paramètres intervenant dans la solution (6.8) du hamiltonien d'ordre 2 en unités adimensionnelle [N] et en années terrestres.

λ [rad]	$= 2.48$ ($= 15.61$ rad an ⁻¹)
ω_1 [rad]	$= 2.06$ ($= 12.92$ rad an ⁻¹)
ω_2 [rad]	$= 1.99$ ($= 12.47$ rad an ⁻¹)
κ_1 []	$= -0.55$
κ_2 []	$= 3.19$

où $(a_1, a_2, a_3, a_4, \phi_{xy}, \phi_z)$ sont des constantes dépendant des conditions initiales. On peut obtenir la solution dans les variables (x, y, z, p_x, p_y, p_z) en appliquant aux fonctions (6.7) la matrice de passage C . Ainsi la solution du hamiltonien d'ordre 2 s'écrit

$$\begin{aligned}
x &= A_1 e^{\lambda t} + A_2 e^{-\lambda t} + A_{xy} \cos(\omega_1 t + \phi_{xy}) \\
y &= \kappa_1 A_1 e^{\lambda t} - \kappa_1 A_2 e^{-\lambda t} - \kappa_2 A_{xy} \sin(\omega_1 t + \phi_{xy}) \\
z &= A_z \cos(\omega_2 t + \phi_z) \\
p_x &= (\lambda - \kappa_1) A_1 e^{\lambda t} - (\lambda - \kappa_1) A_2 e^{-\lambda t} + (\kappa_2 - \omega_1) A_{xy} \sin(\omega_1 t + \phi_{xy}) \\
p_y &= (\lambda \kappa_1 + 1) A_1 e^{\lambda t} + (\lambda \kappa_1 + 1) A_2 e^{-\lambda t} + (1 - \kappa_2 \omega_1) A_{xy} \cos(\omega_1 t + \phi_{xy}) \\
p_z &= -\omega_2 A_z \sin(\omega_2 t + \phi_z)
\end{aligned} \tag{6.8}$$

avec

$$A_1 = \frac{2\lambda}{s_1} a_1, \quad A_2 = \frac{-2\lambda}{s_1} a_2, \quad A_{xy} = \frac{2\omega_1}{s_2} a_3, \quad A_z = \frac{a_4}{\sqrt{\omega_2}}$$

et

$$\kappa_1 = \frac{\lambda^2 - 2c_2 - 1}{2\lambda}, \quad \kappa_2 = \frac{\omega_1^2 + 2c_2 + 1}{2\omega_1}$$

Les valeurs numériques de λ , ω_1 et ω_2 sont résumées dans le tableau 6.2. Le tableau contient aussi les valeurs de κ_1 et κ_2 qui déterminent les rapports relatifs entre les évolutions en x et y . On remarque que la solution contient à priori des termes exponentiellement croissants. Pour des conditions initiales telles que $q_1 = p_1 = 0$ ces termes exponentiels disparaissent et la trajectoire devient quasipériodique. Les coordonnées décrivent alors une courbe de Lissajous

$$\begin{aligned}
x &= A_{xy} \cos(\omega_1 t + \phi_{xy}) \\
y &= -\kappa_2 A_{xy} \sin(\omega_1 t + \phi_{xy}) \\
z &= A_z \cos(\omega_2 t + \phi_z)
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Le tableau 6.3 donne les paramètres A_{xy} , A_z , ϕ_{xy} et ϕ_z d'une orbite de Lissajous type considérée dans le rapport d'analyse de mission de Herschel et Planck (Hechler et Yáñez, 2006). On va se servir de cet exemple particulier pour montrer dans un premier temps comment obtenir une orbite stable autour de L_2 dans le cas d'un hamiltonien développé à un ordre supérieur à 2. Dans un deuxième temps on va montrer comment l'orbite obtenue à un ordre supérieur peut être transférée dans un modèle complet du système solaire.

6.2.2 Stabilité numérique

La figure 6.2 compare l'orbite de Lissajous type tracée analytiquement avec son analogue obtenu numériquement en intégrant avec l'intégrateur numérique Runge-Kutta DOPRI le hamiltonien d'ordre 2 dans les variables (x, y, z, p_x, p_y, p_z) . La figure 6.3 retrace les trajectoires en

TABLE 6.3 – Paramètres d’une orbite de Lissajous type.

A_{xy} [km]	= 31375.21
A_z [km]	= 100000
ϕ_{xy} [°]	= 5.73
ϕ_z [°]	= 84.27

variables $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$. Les conditions initiales de l’intégration sont obtenues en injectant les valeurs du tableau 6.3 dans la solution analytique (6.9). En marquant les valeurs à l’instant initial par l’indice (0) , on a

$$\begin{aligned}
x(0) &= A_{xy} \cos \phi_{xy} & , & \quad p_x(0) = -\omega_1 A_{xy} \sin \phi_{xy} \\
y(0) &= -\kappa_2 A_{xy} \sin \phi_{xy} & , & \quad p_y(0) = -\kappa_2 \omega_1 A_{xy} \cos \phi_{xy} \\
z(0) &= A_z \cos \phi_z & , & \quad p_z(0) = -A_z \omega_2 \sin \phi_z
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Il est utile pour la suite de calculer ces conditions initiales en terme de $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$. En appliquant à (6.10) l’inverse de la matrice C on obtient

$$\begin{aligned}
q_{1(0)} &= 0 & , & \quad p_{1(0)} = 0 \\
q_{2(0)} &= \frac{A_{xy}s_2}{2\omega_1} \sin \phi_{xy} & , & \quad p_{2(0)} = \frac{A_{xy}s_2}{2\omega_1} \cos \phi_{xy} \\
q_{3(0)} &= A_z \sqrt{\omega_2} \cos \phi_z & , & \quad p_{3(0)} = -A_z \sqrt{\omega_2} \sin \phi_z
\end{aligned} \tag{6.11}$$

On observe sur la figure 6.2 que l’orbite intégrée correspond initialement à la solution analytique mais qu’au bout d’environ 2 ans elle quitte brusquement le voisinage de L_2 . Ce phénomène est dû à l’erreur numérique dans les conditions initiales de l’intégration. Comme celles-ci sont calculées avec une précision finie, le facteur A_1 de la solution générale (6.8) ne sera en pratique jamais nul mais de l’ordre de 10^{-16} (en précision double). Cette erreur de 10^{-16} correspond à une erreur sur la position de la sonde inférieure au micron. La trajectoire intégrée contient néanmoins inévitablement une composante en $10^{-16}e^{\lambda t}$ qui croît avec le temps. Avec la valeur de λ du tableau 6.2, on peut estimer que le terme exponentiel atteint l’unité et devient donc entièrement dominant pour $t = 2.36$ années. Il est donc impossible d’obtenir par intégration numérique en précision double une trajectoire qui se maintiendrait au voisinage de L_2 pendant plus que deux ans. Le développement à l’ordre 2 est une première approximation de tous les problèmes plus complexes, ainsi il sera également impossible d’obtenir numériquement des trajectoires sur plus de deux ans dans les problèmes développés à des ordres plus élevés ou dans le problème perturbé par des planètes.

6.2.3 Réduction à la variété centrale

Le développement à l’ordre 2 donne une bonne idée des solutions du hamiltonien du PCR3C complet, pourvu que la trajectoire reste proche de L_2 . Le développement est néanmoins insuffisant pour le calcul des conditions initiales. En effet à cause de la présence du terme exponentiel dans la solution générale, la moindre erreur sur les conditions initiales a des conséquences catastrophiques. La figure 6.4 montre l’intégration du hamiltonien complet (6.3) avec les conditions initiales de la solution d’ordre 2. L’orbite décrit à peine une boucle quand le terme exponentiel devient dominant. Pour obtenir une solution similaire à celle de la figure 6.2, il faut calculer les conditions initiales à partir d’une solution quasipériodique d’un hamiltonien d’ordre plus élevé.

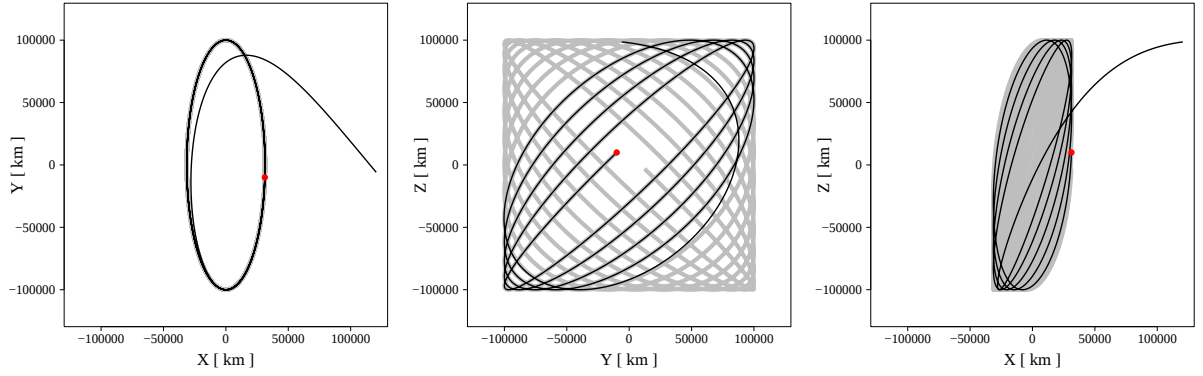


FIGURE 6.2 – En gris, orbite de Lissajous analytique (6.9) tracée sur 6 ans. En noir, orbite analogue sur 2.4 ans obtenue par intégration numérique du hamiltonien (6.4) d'ordre 2. Le point rouge marque l'état initial.

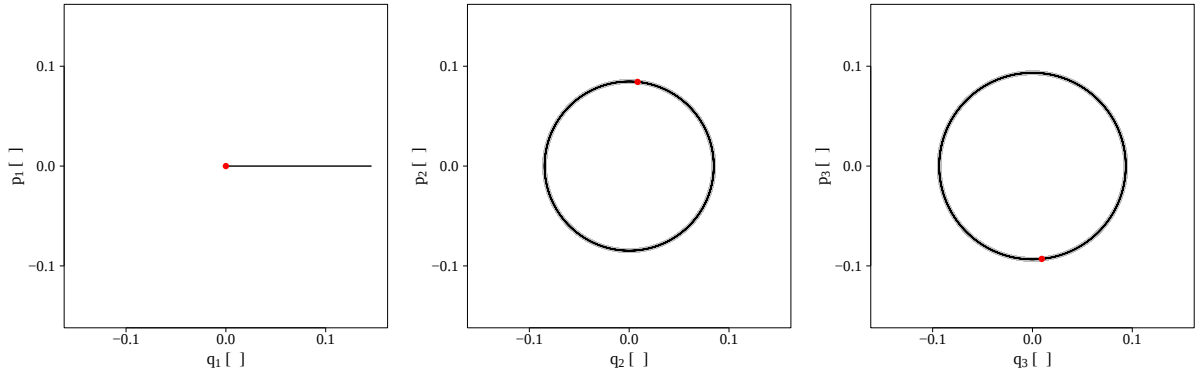


FIGURE 6.3 – Analogue de la figure 6.2 en variables $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ dans le système d'unités $[N]$. Le point rouge marque l'état initial.

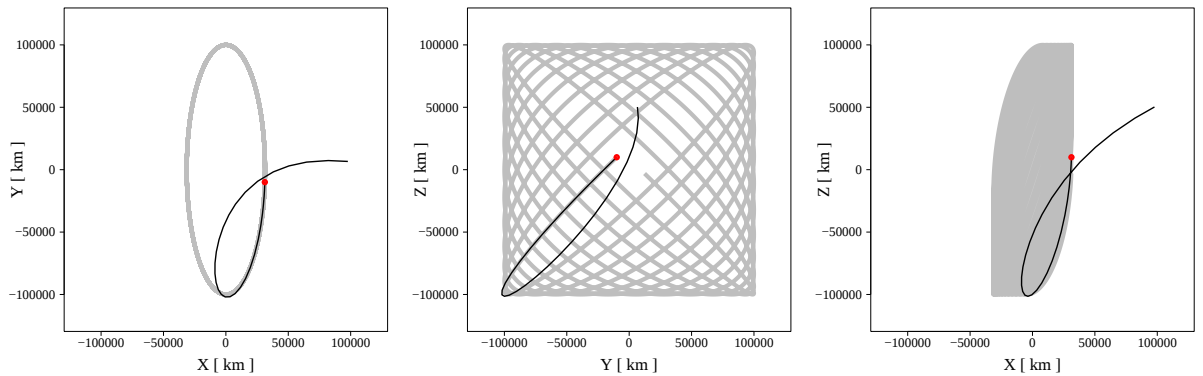


FIGURE 6.4 – En gris, orbite de Lissajous analytique. En noir, orbite analogue au bout de 3 mois obtenue par intégration numérique du hamiltonien complet (6.3) avec les conditions initiales (6.10). Le point rouge marque l'état initial.

Dans toute cette section les variables $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ définies dans la section 6.2.1 seront notées $(q_1^{\text{LIN}}, q_2^{\text{LIN}}, q_3^{\text{LIN}}, p_1^{\text{LIN}}, p_2^{\text{LIN}}, p_3^{\text{LIN}})$.

On appelle variété centrale, un sous-ensemble de l'espace des phases qui contient toutes les conditions initiales dont l'évolution est quasipériodique. La réduction à la variété centrale consiste à paramétrer l'espace des phases de sorte à pouvoir simplement identifier la variété centrale. On remarque que le changement de variables défini par la matrice (6.5) est une telle paramétrisation pour le hamiltonien d'ordre 2 car dans les variables $(q_1^{\text{LIN}}, q_2^{\text{LIN}}, q_3^{\text{LIN}}, p_1^{\text{LIN}}, p_2^{\text{LIN}}, p_3^{\text{LIN}})$ toute condition initiale où $q_1^{\text{LIN}} = p_1^{\text{LIN}} = 0$ conduit à une solution quasipériodique.

Une méthode pour obtenir la réduction à la variété centrale consiste à chercher à réécrire le développement du hamiltonien sous sa forme normale. Définissons par la suite la transformation canonique suivante

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1 & , & \quad p_1 = p_1 \\ q_2 &= \sqrt{2I_2} \sin \theta_2 & , & \quad p_2 = \sqrt{2I_2} \cos \theta_2 \\ q_3 &= \sqrt{2I_3} \sin \theta_3 & , & \quad p_3 = \sqrt{2I_3} \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (6.12)$$

où les variables $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ sont des variables quelconques. Ecrit sous sa forme normale, un hamiltonien est un polynôme constitué uniquement de monômes du type

$$(p_1 q_1)^{\alpha_1} (I_2)^{\alpha_2} (I_3)^{\alpha_3}$$

avec α_1, α_2 et α_3 des entiers positifs. On note qu'en variables $(q_1, \theta_2, \theta_3, p_1, I_2, I_3)$ le hamiltonien d'ordre 2 s'écrit déjà sous cette forme. En effet en appliquant à (6.6) le changement de variable (6.12), on obtient

$$H(q_1, \theta_2, \theta_3, p_1, I_2, I_3) = \lambda q_1 p_1 + \omega_1 I_2 + \omega_2 I_3$$

Pour tout monôme d'une forme normale on peut vérifier avec les équations de Hamilton que les actions I_2 et I_3 ainsi que le produit $(p_1 p_1)$ sont des constantes de mouvement. On en déduit la solution générale d'une forme normale dans les variables $(q_1, \theta_2, \theta_3, p_1, I_2, I_3)$ qui s'écrit

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{1(0)} e^{\Lambda t} & , & \quad p_1 = p_{1(0)} e^{-\Lambda t} \\ \theta_2 &= \Omega_1 t + \theta_{2(0)} & , & \quad I_2 = I_{2(0)} \\ \theta_3 &= \Omega_2 t + \theta_{3(0)} & , & \quad I_3 = I_{3(0)} \end{aligned} \quad (6.13)$$

avec

$$\Lambda = \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{1}{q_1} \quad , \quad \Omega_1 = \frac{\partial H}{\partial I_2} \quad , \quad \Omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_3} \quad (6.14)$$

$\Lambda, \Omega_1, \Omega_2$ sont des valeurs réelles qui dépendent uniquement des conditions initiales. On note que dans (6.13), le comportement exponentiel n'est présent que sur (q_1, p_1) . Par conséquent la variété centrale est entièrement définie par $q_1 = p_1 = 0$ et un point sur la variété centrale est paramétré par $(\theta_2, \theta_3, I_2, I_3)$.

Pour passer des variables qui normalisent le hamiltonien à l'ordre 2 vers de nouvelles variables qui normalisent le hamiltonien à un ordre plus élevé, on utilise l'implémentation de Robutel *et al.* (2009) de la méthode de Deprit (1969). L'exécution de l'implémentation avec le manipulateur algébrique TRIP (Gastineau et Laskar, 2009) conduit pour l'ordre 4 à la forme normale suivante

$$\begin{aligned} H = & \quad 2.48432 \quad p_1 q_1 & \quad +2.05701 \quad I_2 & \quad +1.98507 \quad I_3 \\ & -0.112812 \quad p_1^2 q_1^2 & \quad -0.525418 \quad p_1 q_1 I_2 & \quad -0.458842 \quad p_1 q_1 I_3 \\ & -0.0923689 \quad I_2^2 & \quad -0.0742956 \quad I_3^2 & \quad +0.0355156 \quad I_2 I_3 \end{aligned}$$

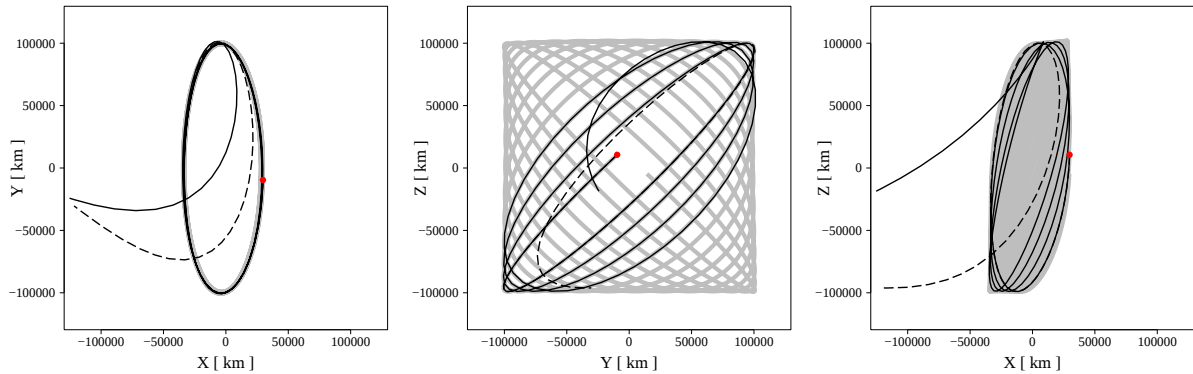


FIGURE 6.5 – En gris, solution analytique du hamiltonien développée à l'ordre 18. En noir, orbite au bout 2 ans obtenue par intégration numérique du hamiltonien complet et des conditions initiales obtenues par réduction à la variété centrale à l'ordre 18. En pointillé, orbite analogue pour l'ordre 4 tracée sur 7 mois et demi.

La dépendance qui lie les variables initiales aux variables finales qui normalisent le hamiltonien est polynômiale. Elle est donnée explicitement dans l'annexe 9.8. On note qu'au premier ordre q_1^{LIN} et q_1 sont égaux. Il en est de même pour les autres variables.

La figure 6.5 représente la solution théorique du problème circulaire restreint développée à l'ordre 18. Cette solution est obtenue en transposant la solution de la forme normale (6.13) dans les variables initiales $(q_1^{\text{LIN}}, q_2^{\text{LIN}}, q_3^{\text{LIN}}, p_1^{\text{LIN}}, p_2^{\text{LIN}}, p_3^{\text{LIN}})$ et enfin dans les variables (x, y, z, p_x, p_y, p_z) . Les conditions initiales en variables normalisantes $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ sont prises égales à (6.11). On remarque que l'orbite analytique obtenue est très similaire à l'orbite de Lissajous de la figure 6.2. La figure contient également le tracé de l'intégration du hamiltonien complet du PCR3C avec les conditions initiales de la solution théorique pour les ordres 4 et 18. On observe qu'avec l'ordre 4 la trajectoire quitte le voisinage de L_2 au bout de 7 mois alors qu'avec l'ordre 18 elle y reste sur presque deux ans.

6.3 Méthode du multiple shooting

Dans la section précédente on a montré qu'en pratique il est possible d'obtenir la solution analytique du problème circulaire restreint à trois corps pour un ordre élevé au voisinage de L_2 . Alors un choix particulier de conditions initiales permet d'obtenir des orbites quasipériodiques. Celles-ci sont analogues aux orbites de Lissajous, solutions à l'ordre 2. Le problème perturbé correspondant au modèle du Système solaire implémenté dans INPOP est beaucoup plus complexe que le problème circulaire restreint et la réduction à la variété centrale est extrêmement difficile. On a alors recours à la méthode du "multiple shooting" qui permet d'affiner numériquement les conditions initiales d'une solution développée du PCR3C de sorte à les ramener sur la variété centrale du système perturbé. La méthode est décrite en détail par Gomez *et al.* (1999).

6.3.1 Principe de la méthode

Le point de départ de la méthode est une solution quasipériodique du PCR3C calculée à un ordre suffisamment élevé sur un intervalle de temps donné. On définit des instants t_i ($0 \leq i \leq N$) répartis à des intervalles Δt réguliers. Considérons maintenant au temps t_i le vecteur d'état d'une particule sur la trajectoire. On note ce vecteur d'état $Q_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i), \dot{x}(t_i), \dot{y}(t_i), \dot{z}(t_i))$. Sous l'effet des deux primaires du PCR3C, au temps t_{i+1} le vecteur d'état Q_i deviendra Q_{i+1} . Ce ne

sera pas le cas si la particule considérée est soumise à des forces induites par un système différent du PCR3C. Notons avec $\Phi(Q_i)$ l'image de Q_i par le flot au temps Δt du système perturbé. Le principe du multiple shooting consiste à trouver des vecteurs d'états Q_i ($0 \leq i \leq N$) de sorte à annuler la fonction suivante :

$$F = (Q_0, Q_1, \dots, Q_N) = \begin{pmatrix} \Phi(Q_0) - Q_1 \\ \Phi(Q_1) - Q_2 \\ \vdots \\ \Phi(Q_{N-1}) - Q_N \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

On remarque que le problème ainsi posé a $6(N+1)$ inconnues alors que F n'a que $6N$ équations. Il y a donc à priori un sous-espace de dimension 6 pouvant annuler F . Pour obtenir une solution unique le problème doit être davantage contraint. Une manière de procéder pour résoudre (6.15) est d'utiliser la méthode itérative de Newton en fixant 6 paramètres. En note par $Q^{(0)}$ le vecteur regroupant tous les vecteurs d'état aux différents instants de la solution analytique et par $Q^{(j)}$ son analogue à la jème itération de la méthode de Newton. Ainsi on a de manière générale $Q^{(j)} = (Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, \dots, Q_N^{(j)})$. La méthode de Newton consiste à chercher un zéro de F en calculant de manière itérative $\Delta Q^{(j)} = Q^{(j+1)} - Q^{(j)}$ avec

$$J \times \Delta Q^{(j)} + F(Q^{(j)}) = 0 \quad (6.16)$$

où J est la matrice jacobienne de F évaluée en $Q^{(j)}$. Remarquons que si on ne fixe pas 6 paramètres, la matrice J n'est pas inversible car elle a 6 colonnes de plus que de lignes.

A la place d'imposer arbitrairement certains paramètres comme constants, Gomez *et al.* (1999) proposent de chercher une solution $\Delta Q^{(j)}$ de sorte à satisfaire (6.16) avec une correction $\|\Delta Q^{(j)}\|_2$ minimum. Ainsi posé, le problème a une unique solution qui peut être trouvée par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. En effet, minimiser $\|\Delta Q^{(j)}\|_2$ avec la contrainte imposée par l'équation (6.16) revient à résoudre pour $\Delta Q^{(j)}$ et un vecteur μ à $6N$ éléments le système suivant

$$\begin{aligned} \nabla \left[(\Delta Q^{(j)})^T \Delta Q^{(j)} + \mu^T (J \times \Delta Q^{(j)} + F(Q^{(j)})) \right] &= 0 \\ J \times \Delta Q^{(j)} + F(Q^{(j)}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

où le gradient ∇ est ici calculé par rapport à $\Delta Q^{(j)}$. On note que cette fois-ci on a bien $6(2N+1)$ variables et autant d'équations. On peut vérifier que la solution du système (6.17) est

$$\Delta Q^{(j)} = -J^T \times (J \times J^T)^{-1} \times F(Q^{(j)}) \quad (6.18)$$

Ainsi à chaque pas j on a l'expression de la correction à appliquer à $Q^{(j)}$. En pratique, au bout de moins de dix itérations la correction $\Delta Q^{(j)}$ devient négligeable et on a $\Phi(Q^{(j)}) = Q^{(j+1)}$ à la précision de la machine près. Les points $Q^{(j)}$ représentent alors une orbite dans le problème perturbé. Cette orbite peut être restituée en intégrant les conditions initiales $Q_0^{(j)}$ avec INPOP dans un modèle du Système solaire. De la même manière que dans le cas du PCR3C, à cause de la précision numérique finie, on ne doit pas s'attendre à ce que l'orbite se maintienne sans corrections au voisinage de L_2 sur plus que deux ans.

6.3.2 Application à l'orbite type

On va utiliser la méthode du multiple shooting pour ramener sur la variété centrale du système perturbé la solution analytique calculée à l'ordre 18 dans la section 6.2.3 pour le problème circulaire restreint. Le système perturbé est modélisé par INPOP avec les paramètres de

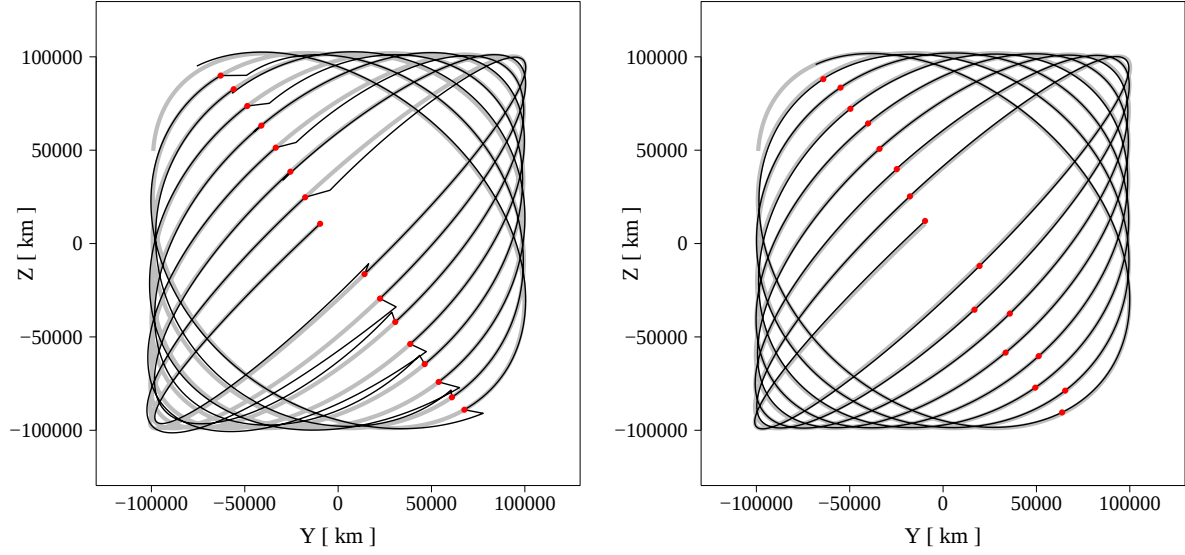


FIGURE 6.6 – En gris, solution analytique du hamiltonien développé à l'ordre 18 tracée sur 4 ans. En noir, intégrations obtenues avec INPOP sur 90 jours des conditions initiales $Q_i^{(0)}$ à gauche et $Q_i^{(1)}$ à droite. Dans les deux graphes les conditions initiales des intégrations sont marquées par les points rouges.

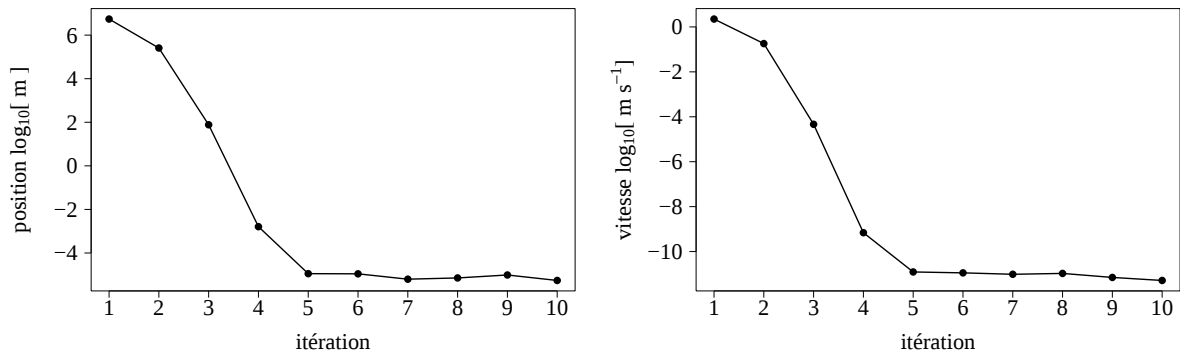


FIGURE 6.7 – Evolution des corrections moyennes en positions et vitesses au fur et à mesure des itérations.

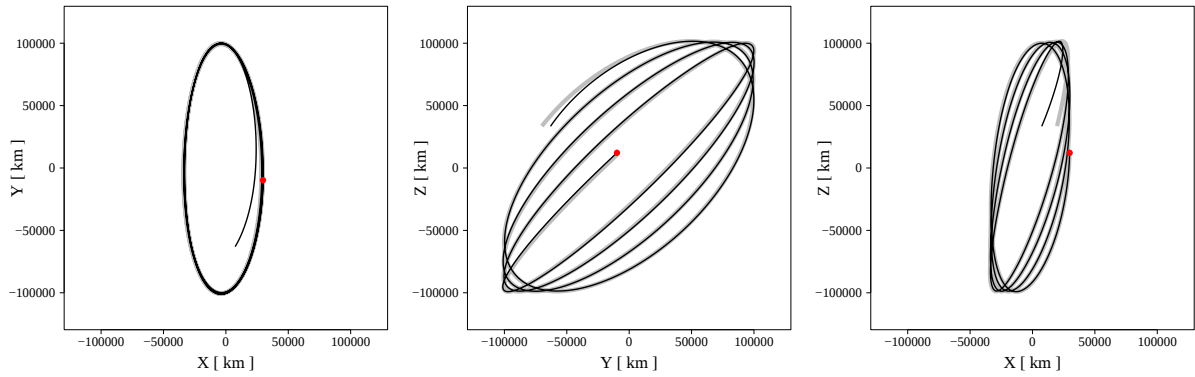


FIGURE 6.8 – Intégration sur 2 ans dans le système perturbé des conditions initiales déterminées par multiple shooting. En gris, orbite analytique servant de départ au multiple shooting.

l'éphéméride² INPOP08 à l'exception de la modélisation des astéroïdes. En effet pour pouvoir ultérieurement évaluer l'effet des astéroïdes sur la trajectoire, on cherche la variété centrale dans un modèle où les masses de l'anneau et des 303 astéroïdes de INPOP08 sont nulles.

On définit des temps t_i ($0 \leq i \leq N$, $t_0 = 0$) séparés par des intervalles Δt de 90 jours. Dans la figure 6.5 la solution analytique est calculée sur 6 ans mais on se restreint ici à un intervalle de 4 ans, on a donc $N = 16$. L'orbite théorique doit être ramenée dans un système d'unités et un repérage cohérent avec INPOP. Ce passage nécessite quelques précautions car dans le système perturbé l'orbite de la Terre n'est pas circulaire ce qui implique des variations de la distance Terre-Soleil et du moyen mouvement qui sont pris comme unités dans le PCR3C. Une fois que les positions et vitesses de l'orbite théorique sont ramenées en UA et jours dans l'ICRF, il est possible de commencer le multiple shooting (on choisit ici pour l'origine du temps l'époque J2000). La partie de gauche de la figure 6.6 montre des trajectoires sur 90 jours obtenues avec INPOP à partir des 16 conditions initiales Q_i^0 ($0 \leq i \leq N - 1$) issues de la solution analytique. Le repère de la figure est tournant avec la distance Terre-Soleil pour unité (les positions sont quand même données en km en multipliant par l'UA). Les intégrations des 16 conditions initiales permettent d'obtenir $F(Q^{(0)})$. On estime la matrice jacobienne de F numériquement en variant une à une les $6(N+1)$ variables de F de 10^{-10} UA pour les positions et de 10^{-10} UA jours⁻¹ pour les vitesses. Avec (6.18) on peut calculer la première correction $\Delta Q^{(0)}$ ce qui permet d'obtenir $Q^{(1)}$. L'intégration de ces nouvelles conditions initiales est donnée dans la partie droite de la figure 6.6, on remarque que dès cette première itération les discontinuités présentes dans la partie gauche de la figure disparaissent. Pour affiner au maximum l'orbite, la méthode est itérée 10 fois en recalculant à chaque itération la matrice jacobienne. Il est intéressant de représenter l'évolution des corrections $\Delta Q^{(j)}$ au fur et à mesure des itérations. On calcule pour chacun des vecteurs $\Delta Q^{(j)}$ les corrections moyennes (en valeurs absolues) des positions et vitesses sur les 17 conditions initiales. On observe sur la figure 6.7 que les corrections diminuent exponentiellement et pour $\Delta Q^{(6)}$ elles atteignent un minimum qui correspond à la précision numérique.

En prenant pour conditions initiales le vecteur d'état $Q_0^{(10)}$ et en intégrant sur 2 ans avec INPOP, on obtient une orbite dont le caractère exponentiel n'apparaît que vers la toute fin de l'intervalle (voir figure 6.8). On peut voir sur la figure 6.7 qu'à partir de l'itération 5, toutes les conditions initiales sont égales à la précision numérique près. Il se trouve que l'itération 10 fournit l'orbite la plus stable numériquement mais les trajectoires des autres itérations quittent le voisinage de L_2 seulement quelques mois auparavant.

2. Dans l'ensemble de l'étude, la version de INPOP08 utilisée est INPOP08a.

TABLE 6.4 – Paramètres des orbites de Planck et Herschel. Les fréquences $\Lambda, \Omega_1, \Omega_2$ ont été obtenu analytiquement à partir des formes normales calculées à l'ordre 18.

Planck	Herschel
A_{xy} [km] = 90000	A_{xy} [km] = 245000
A_z [km] = 280000	A_z [km] = 110000
ϕ_{xy} [°] = 90	ϕ_{xy} [°] = 90
ϕ_z [°] = 90	ϕ_z [°] = 90
Λ [rad] = 2.45 (= 15.41 rad an ⁻¹)	Λ [rad] = 2.36 (= 14.85 rad an ⁻¹)
Ω_1 [rad] = 2.05 (= 12.90 rad an ⁻¹)	Ω_1 [rad] = 2.02 (= 12.69 rad an ⁻¹)
Ω_2 [rad] = 1.98 (= 12.44 rad an ⁻¹)	Ω_2 [rad] = 2.04 (= 12.80 rad an ⁻¹)

6.4 Orbites de Herschel et Planck affinées pour INPOP

La figure 6.9 représente les trajectoires analytiques de Herschel et Planck sur les durées maximum prévues pour les deux missions (4.5 ans et 2.5 ans respectivement). Les trajectoires sont obtenues avec une solution analytique calculée à l'ordre 18. Elles sont très approximatives, en effet les conditions initiales ont été choisies de sorte à ce que les orbites analytiques ressemblent au mieux aux tracés de Hechler et Yáñez (2006) et de Bauske (2009). Le tableau 6.4 donne ces conditions initiales en termes des paramètres d'une orbite de Lissajous équivalente. Les conditions initiales en variables normalisantes s'obtiennent en injectant ces paramètres dans (6.11). On remarque que la taille des orbites est largement plus grande que la taille de l'orbite de Lissajous type considérée précédemment. En particulier Herschel décrit une boucle aussi large que la distance de L_2 à la Terre. Par conséquent les trajectoires dépendent d'ordres relativement élevés du hamiltonien. Elles sont donc relativement déformées par rapport à une courbe de Lissajous théorique donnée par (6.9). Le tableau 6.4 contient également les valeurs de $\Lambda, \Omega_1, \Omega_2$ fournies par la réduction à la variété centrale. On observe sur ces valeurs que Herschel est sur une orbite particulière, dite quasihalo, proche de la résonance 1 : 1 des deux fréquences Ω_1 et Ω_2 .

On applique pour Herschel comme pour Planck la méthode du multiple shooting avec comme point de départ les trajectoires analytiques d'ordre 18. La manière dont on procède est la même que pour l'orbite de Lissajous type considérée dans les sections précédentes. Par contre l'origine du temps est fixée au 15 juin 2009 c'est à dire à 3483 jours julien depuis J2000. Cette date correspond selon Bauske (2009) à l'injection des deux satellites sur leurs orbites finales. Les figures 6.10 et 6.11 comparent les orbites de Herschel et Planck obtenues sur 2 ans par intégration numérique avec INPOP à leurs analogues théoriques. On note que l'orbite de Herschel obtenue à l'issue du multiple shooting est un peu différente de l'orbite analytique de départ. L'orbite est tellement large que l'approximation de la solution à l'ordre 18 n'est toujours pas suffisante pour décrire la dynamique. L'implémentation de la réduction à la variété centrale dont on dispose ne permet pas d'aller beaucoup plus loin que l'ordre 18. Le calcul de la forme normale à l'ordre 24, qui nécessite environ 5GB de mémoire vive, n'améliore que très peu la ressemblance entre l'orbite théorique et l'orbite obtenue après multiple shooting.

Jorba et Masdemont (1999) utilisent une méthode qui permet d'atteindre l'ordre 32 en n'utilisant que 38 MB de mémoire vive. La méthode consiste à calculer une forme normale partielle. Il s'agit d'un changement de variables qui permet de se ramener à la variété centrale et d'éliminer tout comportement hyperbolique. En revanche le changement ne fournit pas directement une solution de l'hamiltonien. Le mouvement sur la variété centrale doit donc être étudié numériquement. L'implémentation de la méthode n'a pas été considérée dans le cadre de ce travail.

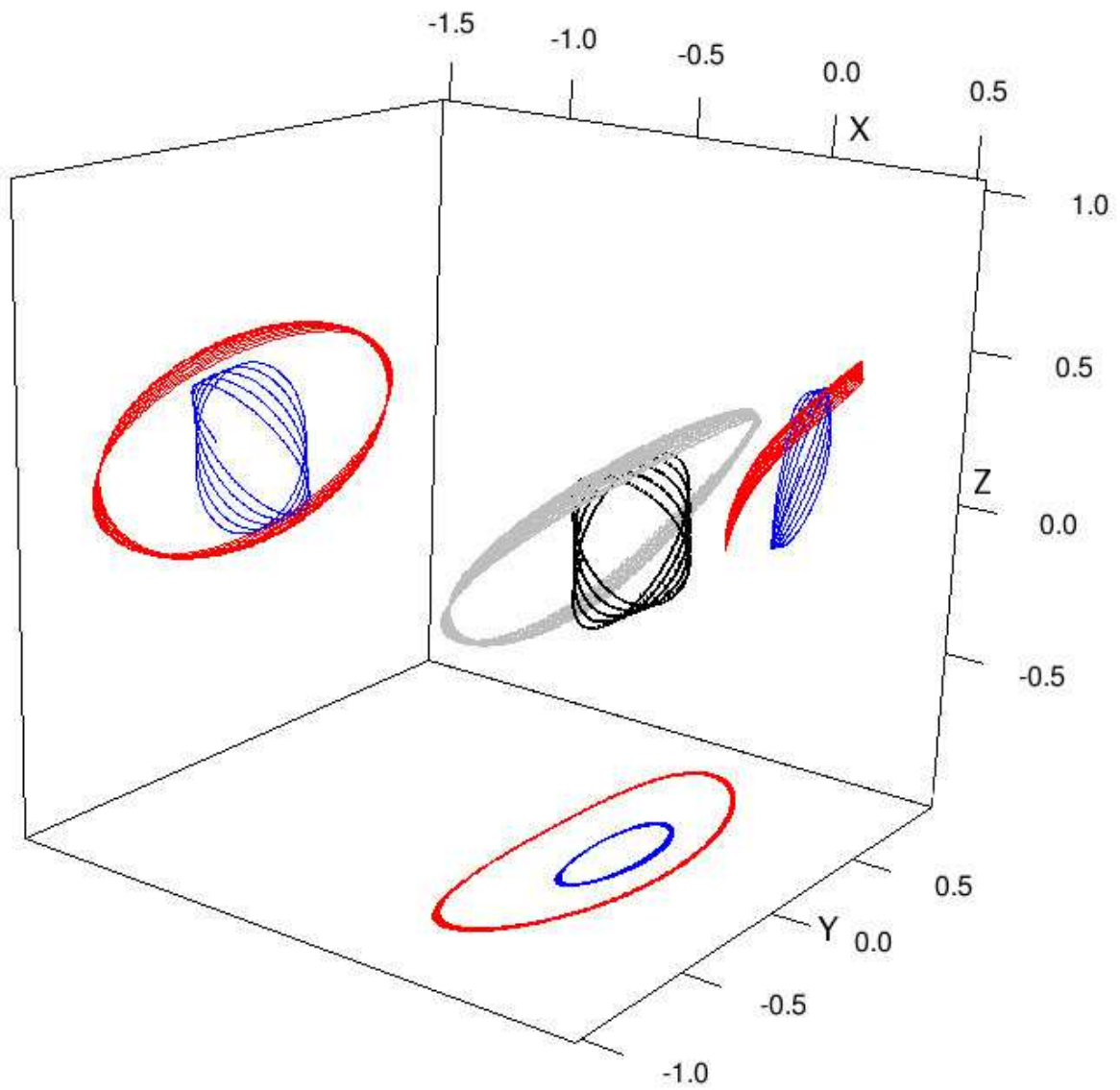


FIGURE 6.9 – Orbites analytiques de Herschel (projections en rouge) et Planck (projections en bleu) dans un repère tournant. Les positions normalisées sont exprimées en millions de km en multipliant par la valeur de l'UA. Sur ce tracé la Terre se situe approximativement aux coordonnées $(-1.5, 0, 0)$, le point de Lagrange L_2 est à l'origine.

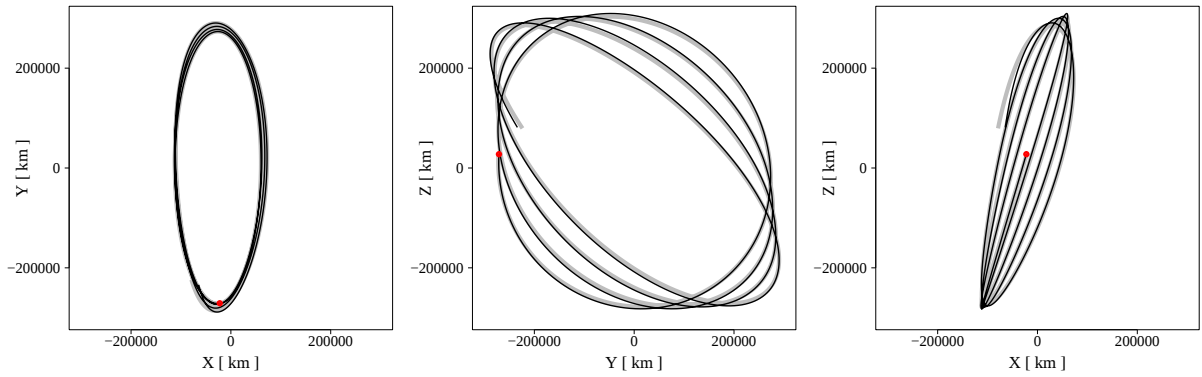


FIGURE 6.10 – Intégration avec INPOP de Planck sur 2 ans. En gris, orbite analytique servant de départ au multiple shooting.

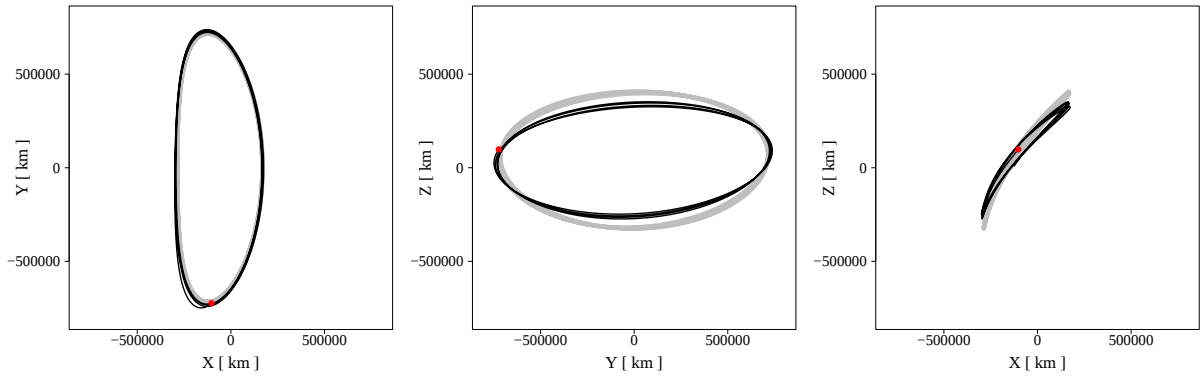


FIGURE 6.11 – Analogue de la figure 6.10 pour Herschel.

6.5 Conclusion

Le problème circulaire restreint à 3 corps (PCR3C) permet l'étude de la dynamique d'une particule autour du point de Lagrange L_2 . On a montré que lorsque les équations du mouvement sont développées à l'ordre 2 au voisinage du point de Lagrange, un choix particulier de conditions initiales engendre une trajectoire quasi-périodique qui suit une courbe de Lissajous. Sans un choix particulier de conditions initiales, le mouvement de la particule est dominé par un comportement exponentiellement divergeant.

La perturbation du problème consistant à introduire des termes d'ordres supérieurs ne détruit pas l'existence de la variété centrale (sous-espace des conditions initiales engendrant un mouvement quasi-périodique). La variété peut être d'ailleurs paramétrée explicitement par le calcul de la forme normale qui définit une bijection entre les points de la variété et un tore.

Un modèle complexe comme le modèle dynamique de INPOP n'est dans une certaine mesure qu'une perturbation du PCR3C. Au même titre que précédemment, un bon choix de condition initiale dans le modèle complexe engendrera un mouvement quasi-périodique au voisinage de L_2 . Le calcul de ces conditions initiales à partir d'une paramétrisation explicite est alors difficile. En affinant numériquement des conditions initiales obtenues dans le PCR3C, il est néanmoins possible de se ramener sur la variété centrale du modèle complexe. A la fin du chapitre, on a pu ainsi obtenir des vecteurs positions et vitesses dont l'intégration avec INPOP conduit à des trajectoires similaires aux trajectoires des sondes Herschel et Planck.

Chapitre 7

Étude de la perturbation d'une trajectoire

On rappelle qu'une perturbation, induite par exemple par un astéroïde, est définie comme la différence entre deux trajectoires issues de conditions initiales identiques (voir section 2.1.2). La première trajectoire est obtenue avec un modèle de référence et la deuxième trajectoire est obtenue avec le même modèle auquel on ajoute un perturbateur. On peut définir de manière analogue une perturbation induite par plusieurs perturbateurs. Avant d'aborder l'estimation numérique des effets des astéroïdes sur un objet placé au voisinage de L_2 , on propose dans cette partie d'étudier un modèle analytique.

Dans le cadre d'un problème à 4 corps simplifié, on montre que toute perturbation induite par un astéroïde correspond à une divergence exponentielle en $A_0 e^{\Lambda t}$ par rapport à la trajectoire de référence. La vitesse de divergence Λ correspond à la valeur propre de la forme normale du PCR3C (voir 6.2.3). On dérive également une expression approchée de l'amplitude A_0 ce qui en pratique permet de prédire entièrement la perturbation.

7.1 Le problème restreint à quatre corps

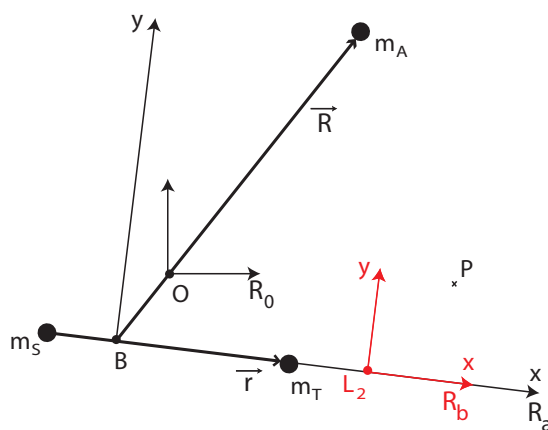


FIGURE 7.1 – Le problème restreint à quatre corps.

On adopte des repérages et notations analogues à ceux utilisés dans la partie 6. Une particule P , de masse négligeable, est soumise à l'effet de 3 masses. Ces masses sont dénotées m_S , m_T et m_A et elles correspondent respectivement au Soleil, la Terre et un astéroïde. On suppose que

les 3 primaires évoluent dans un plan invariant. A part cette hypothèse, le mouvement des 3 primaires est à priori quelconque. Le problème est restreint, ainsi la particule subit les forces des 3 primaires mais n'a pas d'effet sur eux. La situation est illustrée par la figure 7.1. On note par $\mathbf{r}$ le vecteur reliant le Soleil à la Terre. Le vecteur $\mathbf{R}$ correspond à la position de l'astéroïde par rapport au barycentre B du système Terre-Soleil. Le barycentre de l'ensemble des 3 primaires est noté O . De manière analogue à la section 6.1, on va considérer 3 repères : un repère inertiel R_0 centré en O , un repère tournant R_a centré en B et orienté selon $\mathbf{r}$ et enfin un repère R_b tournant également avec $\mathbf{r}$ mais centré en L_2 . On remarque que le point de Lagrange L_2 , en tant que point d'équilibre, n'existe pas dans le problème à 3 corps. On peut néanmoins le définir géométriquement comme un point situé dans la direction de $\mathbf{r}$ à une distance γ de la Terre (voir section 6.1.2).

7.1.1 Formulation hamiltonienne

Pour dériver le hamiltonien qui détermine le mouvement de la particule, on va suivre la démarche classique exposée dans Andreu (1999). On note par $\boldsymbol{\rho}$ la position dans le repère inertiel d'une particule de masse négligeable, dans notre cas il s'agit d'une sonde placée au voisinage de L_2 . On définit des coordonnées généralisées $\mathbf{q}_a$ qui repèrent cette particule par rapport au point B . On vérifie que l'on a alors

$$\mathbf{q}_a = \boldsymbol{\rho} + \frac{\mu'}{1 + \mu'} \mathbf{R} \quad \text{avec} \quad \mu' = \frac{m_A}{m_S + m_T}$$

On note par $\mathbf{q}_b$ les coordonnées généralisées qui repèrent la particule dans le repère tournant R_a , ainsi

$$\mathbf{q}_b = C^T \mathbf{q}_a \quad \text{avec} \quad C^T = \begin{pmatrix} r_1/r & r_2/r & 0 \\ -r_2/r & r_1/r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où r, r_1 et r_2 correspondent respectivement à la norme de $\mathbf{r}$ et aux composantes de $\mathbf{r}$ dans R_0 . Enfin à partir de $\mathbf{q}_b$ on peut définir les coordonnées $\mathbf{q}$ qui normalisent la distance depuis B à la particule par r ,

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}_b}{r}$$

L'expression de $\mathbf{q}$ en fonction de $\boldsymbol{\rho}$ s'écrit

$$\mathbf{q} = \frac{1}{r} C^T \left(\boldsymbol{\rho} + \frac{\mu'}{1 + \mu'} \mathbf{R} \right)$$

Inversement on a

$$\boldsymbol{\rho} = -\frac{\mu'}{1 + \mu'} \mathbf{R} + B \mathbf{q} \quad \text{où} \quad B = r C = \begin{pmatrix} r_1 & -r_2 & 0 \\ r_2 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

Avec cette relation on est en mesure d'exprimer l'énergie cinétique T en fonction des coordonnées généralisées $\mathbf{q}$ et leurs dérivées $\dot{\mathbf{q}}$. On a

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\rho}}^2 = \frac{\mu'}{1 + \mu'} \frac{\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{\mathbf{q}^T \dot{B}^T \dot{B}}{2} \mathbf{q} + \frac{\dot{\mathbf{q}}^T B^T B \dot{\mathbf{q}}}{2} - \frac{\mu'}{1 + \mu'} \dot{\mathbf{R}}^T \dot{B} \mathbf{q} - \frac{\mu'}{1 + \mu'} \dot{\mathbf{R}}^T B \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \dot{B}^T B \dot{\mathbf{q}}$$

L'expression de l'énergie potentielle s'écrit

$$U = -\frac{Gm_S}{\|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_S\|} - \frac{Gm_T}{\|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_T\|} - \frac{Gm_A}{\|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_A\|} = -\frac{Gm_S}{r\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_S\|} - \frac{Gm_T}{r\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_T\|} - \frac{Gm_A}{r\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_A\|}$$

où $\boldsymbol{\rho}_S, \boldsymbol{\rho}_T, \boldsymbol{\rho}_A$ repèrent les positions de m_S, m_T, m_A et $\mathbf{q}_S, \mathbf{q}_T, \mathbf{q}_A$ sont leurs analogues en coordonnées généralisées. L'écriture du lagrangien $L = T - U$ permet de définir les actions. On vérifie que

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = r^2 \dot{\mathbf{q}} - \frac{\mu'}{1 + \mu'} B^T \dot{\mathbf{R}} + B^T \dot{B} \mathbf{q}$$

Pour obtenir cette expression on utilise le fait que $B^T B = r^2 I$ avec I la matrice identité. Le hamiltonien se déduit du lagrangien par $H = \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} - L$ et on obtient après calculs

$$H = \frac{1}{2r^2} \mathbf{p}^2 + p_t + \frac{\mu'}{1 + \mu'} \frac{\mathbf{p}^T B^T \dot{\mathbf{R}}}{r^2} - \frac{\mathbf{p}^T B^T \dot{B} \mathbf{q}}{r^2} + U$$

Le hamiltonien est rendu autonome en introduisant l'action supplémentaire p_t qui permet de traiter le temps t comme variable indépendante. On considère le changement de variables suivant qui est canonique pour toute fonction $\mathbf{f}$ dépendant du temps (les nouvelles variables sont marquées avec des primes)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' &= \mathbf{q}, & t' &= t \\ \mathbf{p}' &= \mathbf{p} + \mathbf{f}, & p'_t &= p_t + \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{f}} \end{aligned}$$

Avec $\mathbf{f} = \frac{\mu'}{1 + \mu'} B^T \dot{\mathbf{R}}$ on peut redéfinir les actions et réécrire le hamiltonien dans les nouvelles variables. En omettant les primes, on obtient

$$\mathbf{p} = r^2 \dot{\mathbf{q}} + B^T \dot{B} \mathbf{q}$$

et

$$H = \frac{1}{2r^2} \mathbf{p}^2 + p_t - \frac{\mathbf{p}^T B^T \dot{B} \mathbf{q}}{r^2} - \frac{\mu'}{1 + \mu'} \ddot{\mathbf{R}}^T B \mathbf{q} + U \quad (7.1)$$

Le hamiltonien peut être réécrit sous une forme moins compacte en fonction des composantes de $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$. Ainsi avec $\mathbf{q} = (x, y, z)$ et $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, on a

$$\begin{aligned} p_x &= r^2 (\dot{x} - \alpha_2 x - \alpha_3 y) \\ p_y &= r^2 (\dot{y} + \alpha_3 x - \alpha_2 y) \\ p_z &= r^2 (\dot{z} - \alpha_2 z) \end{aligned}$$

En notant par α_i des fonctions du temps dépendant de $\mathbf{r}$ et de $\mathbf{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} H &= \frac{\alpha_1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \alpha_2 (p_x x + p_y y + p_z z) + \alpha_3 (p_x y - p_y x) + \alpha_4 x + \alpha_5 y - \alpha_6 \left(\frac{1 - \mu}{d_S} + \frac{\mu}{d_T} + \frac{\mu'}{d_A} \right) \\ \text{avec} \quad d_S &= ((x + \mu)^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ d_T &= ((x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ d_A &= ((x - \alpha_7)^2 + (y - \alpha_8)^2 + z^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (7.2)$$

De même que dans la partie 6, le paramètre μ correspond ici à $m_T / (m_S + m_T)$. Dans l'expression de l'énergie potentielle, les facteurs Gm_S , Gm_T et Gm_A ont été exprimés en fonction de μ et μ' . Ceci s'obtient en adoptant le demi-grand axe a et l'inverse du moyen mouvement n d'une orbite Terre-Soleil de référence (non perturbée) comme unités de distance et de temps. Ce changement d'unités n'affecte en rien les coordonnées généralisées $\mathbf{q}$ car elles sont adimensionnelles, par contre il affecte les vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{R}$. Les coefficients α_i s'expriment convenablement en adoptant des

notations complexes. Ainsi en notant par r_1, r_2 et R_1, R_2 les composantes de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{R}$ dans le repère R_0 , on définit $z = r_1 + ir_2$ et $Z = R_1 + iR_2$. On a alors

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{r^2} & \alpha_2 &= \frac{-Re(\bar{z}\dot{z})}{r^2} & \alpha_3 &= \frac{Im(\bar{z}\dot{z})}{r^2} & \alpha_4 &= \frac{-\mu'}{1+\mu'}Re(\bar{z}\ddot{Z}) \\ \alpha_5 &= \frac{-\mu'}{1+\mu'}Im(\bar{z}\ddot{Z}) & \alpha_6 &= \frac{1}{r} & \alpha_7 &= \frac{Re(\bar{z}Z)}{r^2} & \alpha_8 &= \frac{Im(\bar{z}Z)}{r^2} \\ \alpha'_4 &= Re(\bar{z}\ddot{z}) & \alpha'_5 &= Im(\bar{z}\ddot{z}) \end{aligned} \quad (7.3)$$

On remarque que l'on a défini deux fonctions α'_4 et α'_5 qui n'apparaissent pas dans (7.2) mais qui seront utiles par la suite. Le hamiltonien que l'on vient de dériver est à comparer avec le hamiltonien obtenu dans le cadre du PCR3C dans la section 6.1.1. En effet pour $\mu' = 0$ et $\mathbf{r} = (\cos t, \sin t, 0)^T$, l'expression (7.2) devient égale à (6.1).

7.1.2 Repérage par rapport à L_2

Les coordonnées généralisées $\mathbf{q}$ utilisées précédemment repèrent les positions dans le repère R_a , donc par rapport au barycentre Terre-Soleil. Pour repérer les positions dans le repère R_b , c'est à dire par rapport à L_2 , on effectue sur (7.1) le changement de variable canonique suivant

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' &= \mathbf{q} + \mathbf{f}_0, & t' &= t \\ \mathbf{p}' &= \mathbf{p} + \mathbf{f}, & p'_t &= p_t + \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{f}} \end{aligned}$$

où les primes indiquent les nouvelles variables et

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0^T &= (\gamma + 1 - \mu, 0, 0)^T \\ \mathbf{f} &= -B^T \dot{B} \mathbf{f}_0 \end{aligned}$$

On rappelle qu'avec la distance Terre-Soleil égale à l'unité, γ correspond à la distance entre L_2 et la Terre et $\gamma + 1 - \mu$ représente donc la distance entre le barycentre Terre-Soleil et L_2 . En omettant les primes, on obtient

$$\mathbf{p} = r^2 \dot{\mathbf{q}} + B^T \dot{B} \mathbf{q}$$

et

$$H = \frac{1}{2r^2} \mathbf{p}^2 + p_t - \frac{\mathbf{p}^T B^T \dot{B} \mathbf{q}}{r^2} - \frac{\mu'}{1+\mu'} \ddot{\mathbf{R}}^T B \mathbf{q} + \mathbf{p}^T B^T \ddot{B} \begin{pmatrix} \gamma + 1 - \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U$$

Les coordonnées $\mathbf{q}$ correspondent désormais à des positions dans le repère R_b . Pour obtenir l'analogie de l'hamiltonien du PCR3C (6.3), il reste à normaliser $\mathbf{q}$ par γ . On effectue ainsi un dernier changement de variable

$$\mathbf{q}' = \frac{\mathbf{q}}{\gamma}, \quad \mathbf{p}' = \frac{\mathbf{p}}{\gamma}$$

Ce changement est canonique à condition de travailler avec un nouvel hamiltonien

$$H' = \frac{H}{\gamma^2}$$

Ainsi dans les nouvelles variables on a

$$\mathbf{p} = r^2 \dot{\mathbf{q}} + B^T \dot{B} \mathbf{q}$$

et

$$H = \frac{1}{2r^2} \mathbf{p}^2 + p_t - \frac{\mathbf{p}^T B^T \dot{B} \mathbf{q}}{r^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\mu'}{1 + \mu'} \ddot{\mathbf{R}}^T B \mathbf{q} + \mathbf{p}^T B^T \ddot{B} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1-\mu}{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{U}{\gamma^3}$$

En termes des composantes de $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$ on obtient

$$\begin{aligned} p_x &= r^2(\dot{x} - \alpha_2 x - \alpha_3 y) \\ p_y &= r^2(\dot{y} + \alpha_3 x - \alpha_2 y) \\ p_z &= r^2(\dot{z} - \alpha_2 z) \end{aligned}$$

En introduisant les deux fonctions du temps α'_4 et α'_5 définies précédemment et en adoptant pour $\mathbf{r}$ et $\mathbf{R}$ un système d'unités analogue à celui de (7.2), le hamiltonien s'écrit

$$\begin{aligned} H &= \frac{\alpha_1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \alpha_2(p_x x + p_y y + p_z z) + \alpha_3(p_x y - p_y x) \\ &\quad + \frac{\alpha_4}{\gamma} x + \frac{\alpha_5}{\gamma} y + \left(1 + \frac{1-\mu}{\gamma}\right) (\alpha'_4 x + \alpha'_5 y) - \frac{\alpha_6}{\gamma^3} \left(\frac{1-\mu}{d_S} + \frac{\mu}{d_T} + \frac{\mu'}{d_A}\right) \\ \text{avec } d_S &= \left((x + 1 + \frac{1}{\gamma})^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \\ d_T &= ((x + 1)^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ d_A &= \left((x + 1 + \frac{1-\mu}{\gamma} - \frac{\alpha_7}{\gamma})^2 + (y - \frac{\alpha_8}{\gamma})^2 + z^2\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{7.4}$$

Cette expression est l'analogue dans le cadre du PCR3C du hamiltonien (6.3) obtenu dans la section 6.1.2.

7.2 Le problème quasi-bicirculaire

Dans la section précédente on a posé un cadre très général pour l'étude du mouvement d'une particule soumise à l'action de trois primaires. Le modèle le plus simple que l'on peut définir dans ce cadre est le modèle bicirculaire qui impose comme circulaires les mouvements de la Terre $\mathbf{r}$ et de l'astéroïde $\mathbf{R}$. Néanmoins, ce modèle ne permet pas de rendre compte correctement de la perturbation induite par un astéroïde sur une sonde placée au voisinage de L_2 . En effet, un astéroïde exerce des forces presque identiques sur la Terre et sur la sonde, alors que la perturbation effective d'une orbite autour de L_2 correspond approximativement à la différence des deux effets. Par conséquent en négligeant la perturbation de la Terre, l'effet sur la sonde est surestimé. Pour remédier à ce problème, on va considérer un modèle où les trajectoires des primaires sont plus réalistes. Un tel modèle comportant trois primaires sur des orbites cohérentes, c'est à dire qui obéissent aux lois de Newton, est appelé le problème quasi-bicirculaire. Le modèle est traité en détail dans Andreu (1999) pour une solution du problème à trois corps obtenue sous forme de séries de Fourier. Ici on propose une démarche différente qui consiste à s'appuyer sur les équations de Lagrange et le développement de la fonction perturbatrice pour chercher une solution quasipériodique au premier ordre en masse. On appellera le cadre analytique ainsi construit, le problème quasi-bicirculaire restreint à quatre corps (PQBCR4C).

7.2.1 Perturbation de l'orbite de la Terre

Dans cette section on dérive, dans le cadre du problème à trois corps, une expression du vecteur $\mathbf{r}$ correcte au premier ordre en masse de l'astéroïde. L'expression est par la suite utilisée

pour calculer les α_i intervenant dans le hamiltonien (7.4). On adopte les notations standards, ainsi on note par a, λ, e et ϖ respectivement le demi-grand axe, la longitude moyenne, l'excentricité et la longitude du périhélie de la Terre. Le moyen mouvement associé à a est noté n . On marque avec des primes les éléments orbitaux héliocentriques de l'astéroïde. Comme on s'intéresse ici à des orbites d'excentricités proches de zéro, on introduit les variables $k = e \cos \varpi, h = e \sin \varpi, k' = e' \cos \varpi', h' = e' \sin \varpi'$. L'expression de $\mathbf{r}$ en termes des éléments orbitaux s'écrit au premier ordre en excentricité comme

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \cos \lambda + \frac{a}{2}(h \sin 2\lambda + k \cos 2\lambda) - \frac{3}{2}ak \\ a \sin \lambda + \frac{a}{2}(k \sin 2\lambda - h \cos 2\lambda) - \frac{3}{2}ah \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

L'expression est dérivée à partir de relations classiques de mécanique céleste. Pour plus de détails, on réfère le lecteur à Brouwer et Clemence (1961). L'évolution des éléments orbitaux qui interviennent dans (7.5) est donnée par les équations de Lagrange. Dans le cadre d'un problème plan, celles-ci s'écrivent selon Brouwer et Clemence (1961) comme

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2} (1 - \sqrt{1-e^2})}{na^2 e^2} \left(k \frac{\partial R}{\partial k} + h \frac{\partial R}{\partial h} \right) \\ \dot{k} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{k\sqrt{1-e^2}}{na^2 (1 + \sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \\ \dot{h} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k} - \frac{h\sqrt{1-e^2}}{na^2 (1 + \sqrt{1-e^2})} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (7.6)$$

La notation e^2 remplace ici $k^2 + h^2$. Les équations font intervenir la fonction de perturbation R qui dans le problème à trois corps correspond à

$$R(a, \lambda, k, h, a', \lambda', k', h') = \frac{Gm_A}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} - Gm_A \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{r}'}{r'^3}$$

où $\mathbf{r}'$ et r' représentent respectivement le vecteur reliant m_S à m_A et à sa norme (on a $\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mu \mathbf{r}$). Des équations analogues à (7.6) peuvent être écrites pour les éléments orbitaux de l'astéroïde. La fonction de perturbation s'écrit alors

$$R'(a, \lambda, k, h, a', \lambda', k', h') = \frac{Gm_T}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} - Gm_T \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{r}'}{r^3}$$

On considère les orbites de la Terre et de l'astéroïde comme circulaires à l'instant d'origine, ainsi on a

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a & a' &= a'_0 + \Delta a' \\ n &= n_0 + \Delta n & n' &= n'_0 + \Delta n' \\ \lambda &= \lambda_0 + \Delta \lambda & \lambda' &= \lambda'_0 + \Delta \lambda' \\ k &= \Delta k & k' &= \Delta k' \\ h &= \Delta h & h' &= \Delta h' \end{aligned} \quad (7.7)$$

où les indices $_0$ indiquent les valeurs initiales des paramètres orbitaux. En particulier, on a $\lambda_0 = n_0 t$ et $\lambda'_0 = n'_0 t + \phi'_0$ où ϕ'_0 est la phase initiale de l'astéroïde par rapport à la Terre. Les perturbations Δ sont, au premier ordre en masses, proportionnelles à Gm_A pour les éléments

orbitaux de la Terre et à Gm_T pour les éléments de l'astéroïde. En injectant (7.7) dans (7.6) et en ne retenant que les termes d'ordre 1 en masses, on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}a &= \frac{2}{n_0 a_0} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \\
\dot{\Delta}n &= -\frac{3}{a_0^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \\
\dot{\Delta}\lambda &= \Delta n - \frac{2}{n_0 a_0} \frac{\partial R}{\partial a} \\
\dot{\Delta}k &= -\frac{1}{n_0 a_0^2} \frac{\partial R}{\partial h} \\
\dot{\Delta}h &= \frac{1}{n_0 a_0^2} \frac{\partial R}{\partial k}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

où les dérivées de la fonction perturbatrice sont évaluées en $(a_0, \lambda_0, k_0, h_0, a'_0, \lambda'_0, k'_0, h'_0)$. Comme les orbites sont initialement circulaires, k_0, h_0, k'_0, h'_0 sont nuls. La variation de Δn s'obtient avec la troisième loi de Kepler appliquée à la variation du demi-grand axe dans les équations (7.6). On définit α comme le rapport des demi-grands axes a/a' et on va supposer désormais que l'orbite de l'astéroïde est extérieure à celle de la Terre. Pour pouvoir calculer les dérivées qui apparaissent dans (7.8), on développe R en puissances des excentricités. Les dérivées de R seront évaluées pour des excentricités nulles, ainsi le développement peut être limité au premier ordre en excentricité de la Terre. Selon Brouwer et Clemence (1961) on a

$$\begin{aligned}
R &= \frac{Gm_A}{2a'} \alpha \left(-2 \cos(\lambda - \lambda') - k \cos(2\lambda - \lambda') - h \sin(2\lambda - \lambda') + 3k \cos \lambda' + 3h \sin \lambda' \right) \\
&+ \frac{Gm_A}{2a'} \sum_j \left(b_{1/2}^{(j)} \cos(j\lambda - j\lambda') - (2jb_{1/2}^{(j)} + \alpha Db_{1/2}^{(j)}) \{k \cos((1-j)\lambda + j\lambda') + h \sin((1-j)\lambda + j\lambda')\} \right)
\end{aligned} \tag{7.9}$$

avec j entier relatif. La fonction de perturbation se présente donc comme une série infinie de termes quasi-périodiques. Les coefficients de Laplace $b_{1/2}^{(j)}$ sont des fonctions de α définies pour tout $\alpha < 1$. On rappelle que le développement en série de Taylor de ces fonctions est au moins d'ordre j en α . La fonction $Db_{1/2}^{(j)}$ correspond à la dérivée de $b_{1/2}^{(j)}$ par rapport à α , on a par ailleurs

$$Db_s^{(j)} = s(b_{s+1}^{(j-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(j)} + b_{s+1}^{(j+1)})$$

Les différentes dérivées qui interviennent dans les équations (7.8) s'obtiennent directement à partir de (7.9). On adopte le demi-grand axe de la Terre a_0 comme unité de distance et l'inverse du moyen mouvement correspondant $1/n_0$ comme unité de temps. On a donc $\lambda_0 = t$ et $\lambda'_0 = \eta t + \phi'$ où η correspond au rapport des moyens mouvements n'_0/n_0 . Dans la suite, les éléments orbitaux sont évalués pour les orbites circulaires initiales. Pour faciliter la lecture, on omettra par la suite les indices 0. Après annulation des excentricités, on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}a &= \mu' \alpha \left(2\alpha \sin(\lambda - \lambda') - jb_{1/2}^{(j)} \sin(j\lambda - j\lambda') \right) \\
\dot{\Delta}n &= -\frac{3}{2} \dot{\Delta}a \\
\dot{\Delta}\lambda &= \Delta n + \mu' \alpha^2 \left(2 \cos(\lambda - \lambda') - Db_{1/2}^{(j)} \cos(j\lambda - j\lambda') \right) \\
\dot{\Delta}k &= -\frac{\mu' \alpha}{2} \left(3\alpha \sin \lambda' - \alpha \sin(2\lambda - \lambda') - (2jb_{1/2}^{(j)} + \alpha Db_{1/2}^{(j)}) \sin((1-j)\lambda + j\lambda') \right) \\
\dot{\Delta}h &= \frac{\mu' \alpha}{2} \left(3\alpha \cos \lambda' - \alpha \cos(2\lambda - \lambda') - (2jb_{1/2}^{(j)} + \alpha Db_{1/2}^{(j)}) \cos((1-j)\lambda + j\lambda') \right)
\end{aligned} \tag{7.10}$$

où les indices j doivent être sommés sur l'ensemble des entiers relatifs. Pour obtenir les perturbations, il suffit d'intégrer. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\Delta a &= -\frac{\mu' \alpha}{1-\eta} \left(2\alpha \{ \cos(\lambda - \lambda') - \cos(\phi') \} - b_{1/2}^{(j)} \{ \cos(j\lambda - j\lambda') - \cos(j\phi') \} \right) \\
\Delta n &= -\frac{3}{2} \Delta a \\
\Delta k &= \frac{\mu' \alpha}{2} \left(\frac{3\alpha}{\eta} \{ \cos \lambda' - \cos \phi' \} - \frac{\alpha}{2-\eta} \{ \cos(2\lambda - \lambda') - \cos \phi' \} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2jb_{1/2}^{(j)} + \alpha Db_{1/2}^{(j)}}{(1-j) + j\eta} \{ \cos((1-j)\lambda + j\lambda') - \cos(j\phi') \} \right) \\
\Delta h &= \frac{\mu' \alpha}{2} \left(\frac{3\alpha}{\eta} \{ \sin \lambda' - \sin \phi' \} - \frac{\alpha}{2-\eta} \{ \sin(2\lambda - \lambda') + \sin \phi' \} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2jb_{1/2}^{(j)} + \alpha Db_{1/2}^{(j)}}{(1-j) + j\eta} \{ \sin((1-j)\lambda + j\lambda') - \sin(j\phi') \} \right)
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Les perturbations contiennent des séries quasipériodiques et des termes constants. On ne donne pas l'expression de $\Delta\lambda$ car elle est volumineuse et, comme on va le montrer dans la suite, elle n'est pas nécessaire au calcul des α_i du hamiltonien (7.4). Parmi tous les dénominateurs de (7.11), seulement $(1-j) + j\eta$ peut éventuellement être nul pour $j > 0$ et

$$\eta = 1 - \frac{1}{j}$$

Pour éviter ce cas, on impose $\eta < 0.5$. Ceci revient à imposer α inférieur à ~ 0.63 et donc a' supérieur à 1.6 UA.

7.2.2 Perturbation d'une orbite au voisinage de L_2

La dynamique d'une particule dans le PQBCR4C est donnée par le hamiltonien (7.4). Avec les calculs de la section précédente, on est en mesure de calculer les fonctions du temps α_i et de donner une expression du hamiltonien au premier ordre en masses. En injectant (7.7) dans l'expression (7.5), on obtient dans les unités adimensionnelles au premier ordre en μ'

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda + \Delta a \cos \lambda - \Delta \lambda \sin \lambda + \frac{1}{2}(\Delta h \sin 2\lambda + \Delta k \cos 2\lambda) - \frac{3}{2}\Delta k \\ \sin \lambda + \Delta a \sin \lambda + \Delta \lambda \cos \lambda + \frac{1}{2}(\Delta k \sin 2\lambda - \Delta h \cos 2\lambda) - \frac{3}{2}\Delta h \end{pmatrix} \tag{7.12}$$

Les relations (7.3) montrent qu'en plus de $\mathbf{r}$ les α_i dépendent de $\mathbf{R}$. Il est bien sûr possible de calculer un développement de $\mathbf{R}$ au premier ordre en μ analogue à celui que l'on vient de faire pour $\mathbf{r}$ mais ce n'est pas nécessaire. En effet, $\mathbf{R}$ intervient uniquement dans $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_7$ et α_8 qui apparaissent dans le hamiltonien systématiquement avec μ' en facteur. Ainsi pour obtenir un hamiltonien au premier ordre en masses on peut travailler avec

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \lambda' \\ \sin \lambda' \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

Les expressions de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{R}$ que l'on vient de donner et les définitions (7.3) permettent de calculer les α_i .

On obtient au premier ordre en masses :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1 - 2\Delta a + 2\Delta k \cos \lambda + 2\Delta h \sin \lambda \\
\alpha_2 &= -\dot{\Delta}a + (\dot{\Delta}k + \Delta h) \cos \lambda + (\dot{\Delta}h - \Delta k) \sin \lambda \\
\alpha_3 &= 1 + \dot{\Delta}\lambda + 2(\Delta k - \dot{\Delta}h) \cos \lambda + 2(\Delta h + \dot{\Delta}k) \sin \lambda \\
\alpha_4 &= \mu' \alpha^2 \cos(\lambda - \lambda') \\
\alpha_5 &= -\mu' \alpha^2 \sin(\lambda - \lambda') \\
\alpha'_4 &= -1 - 2\Delta a - 2\dot{\Delta}\lambda + \ddot{\Delta}a + (2\dot{\Delta}h - \ddot{\Delta}k - \Delta k) \cos \lambda - (\Delta h + 2\dot{\Delta}k + \ddot{\Delta}h) \sin \lambda \\
\alpha'_5 &= 2\dot{\Delta}a + \ddot{\Delta}\lambda + 2(\dot{\Delta}k - \ddot{\Delta}h) \cos \lambda + 2(\dot{\Delta}h + \ddot{\Delta}k) \sin \lambda \\
\alpha_6 &= 1 - \Delta a + \Delta k \cos \lambda + \Delta h \sin \lambda
\end{aligned} \tag{7.14}$$

En plus des termes explicités dans (7.10) et (7.11), les expressions ci-dessus dépendent de $\ddot{\Delta}\lambda$, $\ddot{\Delta}k$ et $\ddot{\Delta}h$ qui s'obtiennent sans difficultés à partir de (7.10). On note qu'aucun des α_i ne dépend de $\Delta\lambda$. Les fonctions α_7 et α_8 interviennent dans le hamiltonien avec μ' en facteur, elles peuvent donc être calculées à l'ordre 0,

$$\begin{aligned}
\alpha_7 &= \frac{1}{\alpha} \cos(\lambda - \lambda') \\
\alpha_8 &= -\frac{1}{\alpha} \sin(\lambda - \lambda')
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Pour valider le modèle que l'on vient de développer, on va l'utiliser pour estimer l'effet d'un astéroïde sur l'orbite de Lissajous type considérée dans la partie 6. Le tableau 7.2.2 donne les paramètres d'un astéroïde fictif dont l'orbite est coplanaire avec celle de la Terre. La longitude moyenne, le demi-grand axe et la masse de l'astéroïde sont par contre pris égaux à ceux de Ceres dans le repère écliptique à l'époque J2000. La perturbation est calculée avec l'intégrateur DOPRI. Dans un premier temps, on intègre l'orbite type avec le hamiltonien (7.4) pour $\mu' = 0$, ensuite on intègre le même hamiltonien mais cette fois-ci en attribuant à μ' la valeur du tableau 7.2.2. Dans les deux intégrations, les conditions initiales de l'orbite sont identiques et égales aux conditions initiales calculées dans la section 6.2.3 avec la méthode de réduction à la variété centrale. On rappelle que les expressions des α_i font intervenir des séries de coefficients de Laplace. Pour pouvoir fournir à l'intégrateur un nombre fini de termes, les α_i sont développés à l'ordre 20 en α . On note avec x_0, y_0, z_0 l'évolution de l'orbite type dans le repère tournant R_b dans le cas $\mu' = 0$. En notant maintenant par x, y, z l'orbite dans le cas $\mu' \neq 0$ et par $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ les différences avec le cas $\mu = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x - x_0 \\
\Delta y &= y - y_0 \\
\Delta z &= z - z_0
\end{aligned}$$

La figure 7.2 donne l'évolution des perturbations $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ en fonction du temps. La figure contient également les perturbations obtenues avec l'orbite de Lissajous type intégrée avec INPOP. Ces perturbations sont calculées en intégrant avec INPOP l'orbite de Lissajous obtenue par multiple shooting dans la section 6.3.2 dans deux modèles différents du Système solaire. Le premier modèle est le système perturbé contenant les huit planètes, le deuxième modèle contenant en plus l'astéroïde du tableau 7.2.2. On observe sur la figure, que le hamiltonien (7.4) rend assez bien compte des perturbations induites sur l'orbite autour de L_2 . On note que les perturbations sont relativement faibles même si l'astéroïde considéré a la masse de Ceres. En effet, les perturbations atteignent un mètre au bout de 6 mois environ. Il s'agit d'un temps relativement long

TABLE 7.1 – Paramètres d’un astéroïde fictif similaire à Ceres mais dont l’orbite est coplanaire avec celle de la Terre.

$$\mu' [] = 4.658 \times 10^{-10}$$

$$a' [\text{UA}] = 2.766$$

$$\phi' [^\circ] = 60.131$$

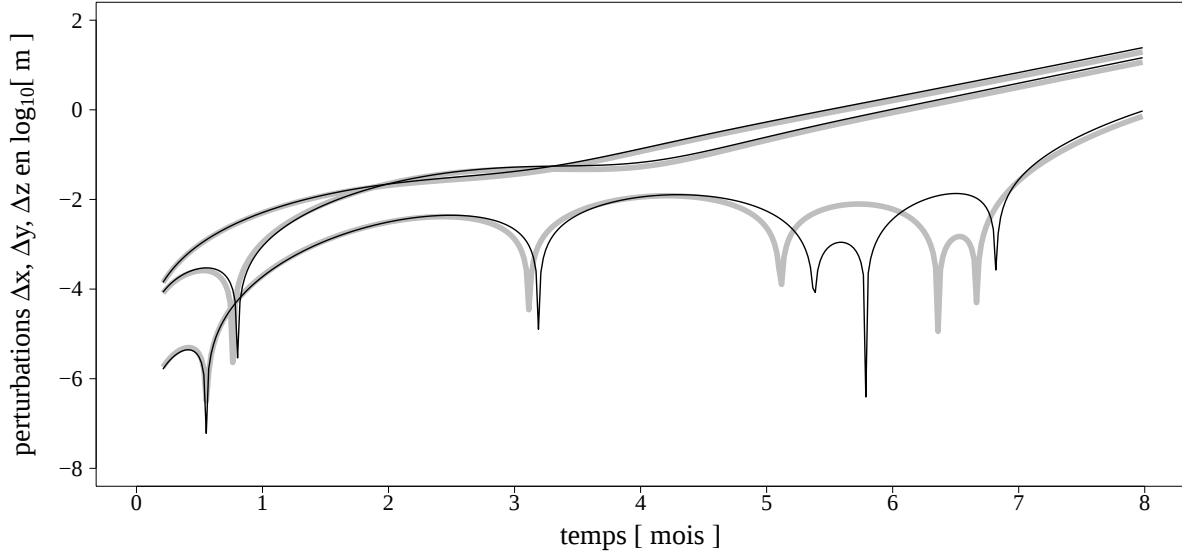


FIGURE 7.2 – Perturbations induites par l’astéroïde fictif sur l’orbite de Lissajous type. Les perturbations sur les trois directions du repère tournant R_b sont affichées. Au bout de 8 mois, la perturbation Δx est la plus importante, suivie de Δy et ensuite Δz . La figure compare les perturbations prédites par le PQBCR4C (noir) et les perturbations obtenues numériquement avec INPOP (gris).

comparé aux intervalles de 30 à 60 jours prévus pour le réajustement des orbites de Herschel et Planck dans le rapport Hechler et Yáñez (2006). Au bout de 6 mois, une différence apparaît entre la perturbation Δz prévue par le modèle et les intégrations INPOP. Cette différence provient du fait que dans le modèle perturbé de INPOP, les orbites de l’astéroïde et de la Terre sont affectées par les autres planètes du Système solaire ce qui n’est pas pris en compte dans le PQBCR4C. La figure 7.3, compare la perturbation prévue par le modèle du PQBCR4C avec une perturbation estimée à partir d’une intégration INPOP d’un problème à trois corps constitué uniquement du Soleil, de la Terre et de l’astéroïde. Alors la différence entre l’intégration INPOP et l’intégration du PQBCR4C disparaît.

Le cadre du PQBCR4C semble bien adapté pour prédire l’effet d’un astéroïde sur une orbite autour de L_2 . On rappelle néanmoins que dès la section 7.1, on travaille avec l’hypothèse d’une excentricité de l’astéroïde faible et dans le cas où le mouvement de l’astéroïde est confiné dans le plan éclipique.

Une figure analogue à la figure 7.3 peut être tracée en imposant les orbites de la Terre et de l’astéroïde comme strictement circulaires. C’est le cadre du problème bicirculaire mentionné précédemment. Le hamiltonien correspondant s’obtient simplement en recalculant les α_i du hamiltonien (7.4) avec $z = e^{it}$. Pour l’astéroïde fictif considéré ici, le modèle bicirculaire surestimera d’un facteur 1000 la perturbation réelle obtenue avec INPOP.

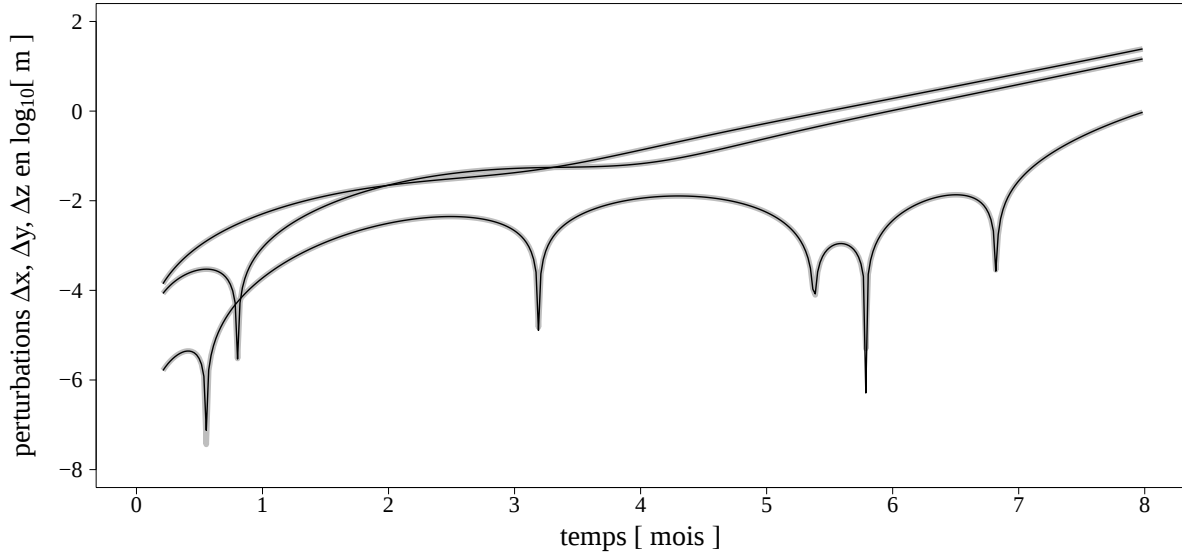


FIGURE 7.3 – Analogie de la figure 7.2, on compare les perturbations prédites par le PQBCR4C (noir) et les perturbations obtenues numériquement avec INPOP (gris) dans un modèle du Système solaire simplifié, contenant uniquement le Soleil, la Terre et l’astéroïde.

7.3 Perturbation d’une orbite sur la variété centrale du PCR3C

Les perturbations induites par un astéroïde sur une orbite au voisinage de L_2 ont été précédemment obtenues en comparant les intégrations du PQBCR4C pour $\mu' = 0$ et pour $\mu' \neq 0$. Il est tentant de dériver une expression analytique des perturbations sans avoir recours à une intégration numérique.

7.3.1 Approche perturbative

En notant avec H et H' respectivement les hamiltoniens du PCR3C et du PQBCR4C, on peut écrire au premier ordre en μ'

$$H' = H + \mu' \Delta H$$

Considérons le développement en (x, y, z) à un ordre quelconque de H' . On se place dans les variables normalisantes $(q_1, \theta_2, \theta_3, p_1, I_2, I_3)$ du PCR3C définies dans la section 6.2.3. Dans ces variables, la partie du hamiltonien correspondant au PCR3C s’écrit comme un polynôme ne faisant intervenir que des puissances de $(q_1 p_1)$, de I_2 et de I_3 . En écrivant les équations de Hamilton pour H' on obtient pour la première variable

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial H'}{\partial p_1} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_1} + \mu' \frac{\partial \Delta H}{\partial p_1} \end{aligned}$$

En notant dans l’équation ci-dessus, la partie provenant du PCR3C par f_{p_1} et la partie proportionnelle à μ' par g_{p_1} , la relation se réécrit comme

$$\dot{q}_1 = f_{p_1} + \mu' g_{p_1}$$

Avec des notations analogues on obtient pour les autres variables les équations suivantes

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= f_{q_1} + \mu' g_{q_1} \\ \dot{\theta}_2 &= f_{I_2} + \mu' g_{I_2} \\ \dot{I}_2 &= f_{\theta_2} + \mu' g_{\theta_2} \\ \dot{\theta}_2 &= f_{I_2} + \mu' g_{I_2} \\ \dot{I}_2 &= f_{\theta_2} + \mu' g_{\theta_2}\end{aligned}$$

Sous forme vectorielle ces équations se résument par

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mu' \mathbf{g}(\mathbf{X}) \quad (7.16)$$

où $\mathbf{X} = (q_1, p_1, \theta_2, I_2, \theta_3, I_3)$. Pour trouver une solution de (7.16), on suit une démarche perturbative classique qui consiste à linéariser le problème et à trouver une solution approchée par la méthode de variation de la constante. On note par $\mathbf{X}^0$ une solution de $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$ partant de conditions initiales situées sur la variété centrale. Ainsi selon les relations (6.13) on a

$$(\mathbf{X}^0)^T = (0, 0, \Omega_1 t + \theta_{2(0)}, I_{2(0)}, \Omega_2 t + \theta_{3(0)}, I_{3(0)})^T$$

On cherche au premier ordre en μ' , une solution de (7.16) partant des mêmes conditions initiales que $\mathbf{X}^0$. Formellement cette solution s'écrit

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^0 + \mu' \mathbf{X}^1 \quad (7.17)$$

avec à l'instant initial $\mathbf{X}_{(0)}^1 = 0$. La perturbation induite sur la sonde par l'astéroïde correspond à $\mathbf{X} - \mathbf{X}^0 = \mu' \mathbf{X}^1$. En injectant (7.17) dans (7.16) on obtient au premier ordre

$$\dot{\mathbf{X}}^1 = M_{\mathbf{f}} \times \mathbf{X}^1 + \mu' \mathbf{g}(\mathbf{X}^0) \quad (7.18)$$

où $M_{\mathbf{f}}$ est la matrice jacobienne de $\mathbf{f}$ évaluée en $\mathbf{X}^0$:

$$M_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial I_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_3 \partial p_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial I_3 \partial p_1} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_2 \partial q_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial I_2 \partial q_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_3 \partial q_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial I_3 \partial q_1} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial I_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial I_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_2 \partial I_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial I_2 \partial I_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_3 \partial I_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial I_3 \partial I_2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial \theta_2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \theta_2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial I_2 \partial \theta_2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_3 \partial \theta_2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial I_3 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial I_3} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial I_3} & \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_2 \partial I_3} & \frac{\partial^2 H}{\partial I_2 \partial I_3} & \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_3 \partial I_3} & \frac{\partial^2 H}{\partial I_3 \partial I_3} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial \theta_3} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \theta_3} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_2 \partial \theta_3} & -\frac{\partial^2 H}{\partial I_2 \partial \theta_3} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_3 \partial \theta_3} & -\frac{\partial^2 H}{\partial I_3 \partial \theta_3} \end{pmatrix}$$

7.3.2 Résolution formelle

Pour résoudre (7.18), on explicite les composantes de la matrice $M_{\mathbf{f}}$. Le hamiltonien du PCR3C s'écrit

$$H = \sum_k (q_1 p_1)^{\alpha_1^k} (I_2)^{\alpha_2^k} (I_3)^{\alpha_3^k}$$

avec $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k$ entiers positifs (à ne pas confondre avec les α_i de la section 7.1). Pour le premier terme de la matrice $M_{\mathbf{f}}$, on a

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} = \sum_k (\alpha_1^k)^2 (q_1 p_1)^{\alpha_1^k - 1} (I_2)^{\alpha_2^k} (I_3)^{\alpha_3^k}$$

En évaluant en $\mathbf{X}^0$, on élimine tous les termes faisant intervenir q_1 ou p_1 , donc tous les termes tels que $\alpha_1^k \neq 1$. On a donc

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} = \sum_{\substack{k \\ (\alpha_1^k \neq 1)}} (I_2)^{\alpha_2^k} (I_3)^{\alpha_3^k}$$

On vérifie que le membre de droite correspond exactement au paramètre Λ défini par (6.14) pour une trajectoire sur la variété centrale du PCR3C. Ainsi on a

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} = \Lambda$$

On peut calculer de manière analogue les autres termes de la matrice $M_{\mathbf{f}}$. On obtient finalement

$$M_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes. En notant les composantes $\mathbf{X}^1$ par $(q_1^1, p_1^1, \theta_2^1, I_2^1, \theta_3^1, I_3^1)$, la relation (7.18) donne

$$\begin{aligned} \dot{q}_1^1 &= \Lambda q_1^1 + \mu' g_{p_1}(\mathbf{X}^0) \\ \dot{p}_1^1 &= -\Lambda p_1^1 + \mu' g_{q_1}(\mathbf{X}^0) \\ \dot{\theta}_2^1 &= c_1 I_2^1 + c_2 I_3^1 + \mu' g_{I_2}(\mathbf{X}^0) \\ \dot{I}_2^1 &= \mu' g_{\theta_2}(\mathbf{X}^0) \\ \dot{\theta}_3^1 &= c_2 I_2^1 + c_3 I_3^1 + \mu' g_{I_3}(\mathbf{X}^0) \\ \dot{I}_3^1 &= \mu' g_{\theta_3}(\mathbf{X}^0) \end{aligned} \tag{7.19}$$

Les composantes de $\mathbf{g}(\mathbf{X}^0)$ dépendent des fonctions quasipériodiques α_i du hamiltonien du PQBCR4C et de la trajectoire quasipériodique de l'orbite non perturbée $\mathbf{X}^0$. Ainsi les composantes de $\mathbf{g}(\mathbf{X}^0)$ sont elles-mêmes des fonctions quasipériodiques du temps. On déduit de (7.19) que I_2^1 et I_3^1 varient de manière quasipériodiques ou éventuellement linéaire si g_{θ_2} et g_{θ_3} contiennent des termes constants. Par conséquent θ_2^1 et θ_3^1 varient également de manière quasipériodique avec en plus éventuellement des termes linéaires ou quadratiques en temps. Ce n'est pas le cas de q_1^1 et p_1^1 . En effet par la méthode de la variation des constantes on obtient

$$q_1^1 = A(t) e^{\Lambda t} \quad \text{avec} \quad A(t) = \mu' \int_0^t e^{-\Lambda T} g_{p_1}(T) dT \tag{7.20}$$

Pour une fréquence quelconque ν on a

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\Lambda \tau} \cos \nu \tau d\tau &= e^{-\Lambda t} \frac{\nu \sin \nu t - \Lambda \cos \nu t}{\Lambda^2 + \nu^2} + \frac{\Lambda}{\Lambda^2 + \nu^2} \\ \int_0^t e^{-\Lambda \tau} \sin \nu \tau d\tau &= -e^{-\Lambda t} \frac{\nu \cos \nu t + \Lambda \sin \nu t}{\Lambda^2 + \nu^2} + \frac{\nu}{\Lambda^2 + \nu^2} \end{aligned} \tag{7.21}$$

Ainsi, en négligeant les variations quasipériodiques devant le terme exponentiel, q_1^1 s'écrit comme

$$q_1^1 = \mu' A_0 e^{\Lambda t} \quad (7.22)$$

où A_0 est une constante déterminée par le hamiltonien du PQBCR4C. De manière analogue on peut dériver une expression pour p_1^1 . En négligeant dans celle-ci le terme exponentiellement décroissant, elle ne contient que des termes quasipériodiques.

Pour résumer, la perturbation de l'astéroïde se traduit au premier ordre en μ' par des termes quasipériodiques sur toutes les variables $(q_1, \theta_2, \theta_3, p_1, I_2, I_3)$ et un terme exponentiel supplémentaire sur q_1 . Sur les variables $(\theta_2, \theta_3, I_2, I_3)$ on peut également s'attendre à des termes linéaires ou même quadratiques en temps. On vérifie avec la relation (6.12) que la perturbation est aussi quasipériodique sur $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ avec en plus un terme exponentiel en $e^{\Lambda t}$ sur q_1 et des termes quasipériodiques dont les amplitudes augmentent linéairement ou quadratiquement pour (q_2, q_3, p_2, p_3) . L'effet dominant de la perturbation se traduit simplement par un éloignement exponentiel de la variété centrale.

Le calcul de la forme normale fournit les relations polynomiales entre les variables normalisantes $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ et les variables $(q_1^{\text{LIN}}, q_2^{\text{LIN}}, q_3^{\text{LIN}}, p_1^{\text{LIN}}, p_2^{\text{LIN}}, p_3^{\text{LIN}})$ définies dans la section 6.2.3. En développant au premier ordre en μ' et en considérant le terme en $e^{\Lambda t}$ comme dominant devant tous les autres, on obtient pour la perturbation en q_1^{LIN}

$$(q_1^{\text{LIN}})^1 = \mu' A_0 e^{\Lambda t} P_{q_1}$$

Dans cette expression, P_{q_1} est un polynôme en q_2, q_3, p_2, p_3 évalué pour la solution non perturbée $\mathbf{X}^0$. De manière analogue on peut écrire pour les autres variables

$$\begin{aligned} (q_2^{\text{LIN}})^1 &= \mu' A_0 e^{\Lambda t} P_{q_2} \\ (q_3^{\text{LIN}})^1 &= \mu' A_0 e^{\Lambda t} P_{q_3} \\ (p_1^{\text{LIN}})^1 &= \mu' A_0 e^{\Lambda t} P_{p_1} \\ (p_2^{\text{LIN}})^1 &= \mu' A_0 e^{\Lambda t} P_{p_2} \\ (p_3^{\text{LIN}})^1 &= \mu' A_0 e^{\Lambda t} P_{p_3} \end{aligned}$$

Les expressions de P_{q_1} et des autres polynômes sont données dans l'annexe 9.5 pour un calcul de la forme normale à l'ordre 4. On est maintenant en mesure d'écrire la perturbation en termes des coordonnées x, y, z de la sonde. Avec la matrice C définie par (6.5) on a

$$\begin{aligned} x^1 &= \mu' \frac{2A_0}{s_1} e^{\Lambda t} (\lambda(P_{q_1} - P_{p_1}) + \omega_1 P_{p_2}) \\ y^1 &= \mu' \frac{A_0}{s_1} e^{\Lambda t} (\lambda^2(P_{q_1} + P_{p_1}) - \omega_1^2 P_{q_2} - (2c_2 + 1)(P_{q_1} + P_{q_2} + P_{p_1})) \\ z^1 &= \mu' \frac{A_0}{\sqrt{\omega_2}} e^{\Lambda t} P_{q_3} \end{aligned} \quad (7.23)$$

On peut réécrire ces équations comme

$$\begin{aligned} x^1 &= \mu' A_0 e^{\Lambda t} P_x \\ y^1 &= \mu' A_0 e^{\Lambda t} P_y \\ z^1 &= \mu' A_0 e^{\Lambda t} P_z \end{aligned} \quad (7.24)$$

où les expressions de P_x, P_y et P_z , calculée à partir de l'annexe 9.5, sont données dans le tableau 7.3.2. On note que les perturbations x^1, y^1, z^1 obtenues ci-dessus, correspondent au premier ordre en μ' , aux perturbations $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ de la section 7.2.

TABLE 7.2 – Polynômes modulant l'évolution exponentielle d'une perturbation du PCR3C. Les polynômes font intervenir des puissances des composantes d'une solution non perturbée $q_2^0, q_3^0, p_2^0, p_3^0$. Dans le tableau l'exposant 0 est omis pour faciliter la lecture.

P_x	P_y	P_z
+0.420	-0.229	+0.121 q_3
-0.114 q_2	-0.102 q_2	-0.194 p_3
+0.038 p_2	+0.168 p_2	-0.066 $q_2 q_3$
+0.036 q_2^2	+0.025 q_2^2	-0.031 $q_3 p_2$
+0.014 q_3^2	-0.034 q_3^2	+0.029 $q_2 p_3$
+0.128 $q_2 p_2$	-0.001 $q_2 p_2$	+0.062 $p_2 p_3$
-0.003 p_2^2	-0.055 p_2^2	
+0.101 $q_3 p_3$	-0.005 $q_3 p_3$	
-0.004 p_3^2	+0.014 p_3^2	

Le raisonnement de cette section est très général et ne fait à aucun moment intervenir le PQBCR4C. Ce dernier intervient implicitement dans A_0 . Ainsi le même raisonnement s'appliquerait également à une perturbation générée par un modèle plus complet, prenant par exemple en compte un astéroïde excentrique incliné. Les équations (7.24) montrent qu'une orbite perturbée se comporte de la même manière qu'une orbite non perturbée du PCR3C placée initialement en dehors de la variété centrale. La distance qui sépare la condition initiale de la variété centrale est donnée par le paramètre A_0 .

Les équations que l'on vient d'obtenir permettent d'interpréter les évolutions que l'on observe sur la figure 7.3. Comme l'orbite de Lissajous type considérée ici est d'amplitude relativement faible par rapport à la distance Terre- L_2 , on va simplifier (7.24) et ne considérer que l'ordre le plus bas en $(q_2^0, q_3^0, p_2^0, p_3^0)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta x &= 0.420 \mu' A_0 e^{\Lambda t} \\
\Delta y &= -0.229 \mu' A_0 e^{\Lambda t} \\
\Delta z &= (0.121 q_3^0 - 0.194 p_3^0) \mu' A_0 e^{\Lambda t}
\end{aligned} \tag{7.25}$$

L'amplitude faible de l'orbite fait que les valeurs des fréquences Λ, Ω_1 et Ω_2 qui déterminent les variations de $(q_2^0, q_3^0, p_2^0, p_3^0)$ sont très proches des valeurs de λ, ω_1 et ω_2 données dans le tableau 6.2. On retrouve sur la figure 7.3 pour Δx et Δy les évolutions exponentielles en Λ . On prévoit d'ailleurs un rapport entre Δx et Δy égal à ~ 0.55 ce qui correspond bien au décalage constant que l'on observe sur la figure. Par contre, on ne retrouve pas une évolution exponentielle pour Δz modulée par la fréquence ω_2 de q_3^0 et p_3^0 . Sur l'intervalle de temps de la figure 7.3, la perturbation Δz est encore dominée par des termes quasi-périodiques dont l'amplitude augmente de manière linéaire ou quadratique avec le temps. Ces termes ont été négligés dans les expressions (7.24). Le comportement exponentiel de Δz ne devient dominant qu'au bout de 7 mois, comme le montre la figure 7.4 qui retrace la perturbation sur un intervalle de temps plus long. Les termes négligés produisent également les modulations que l'on remarque sur Δx et Δy au cours des deux premiers mois de la perturbation.

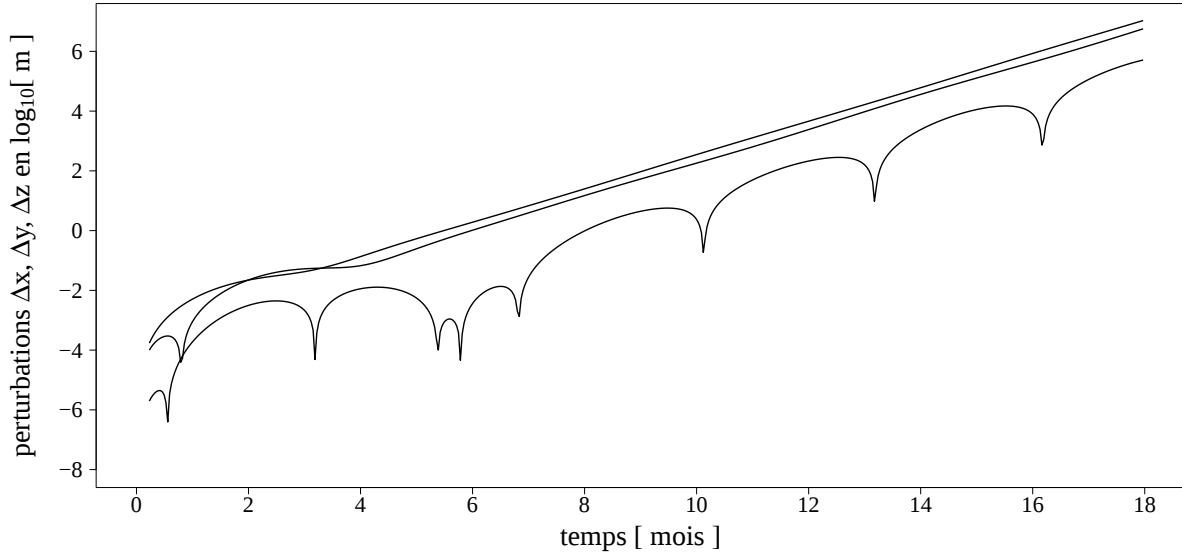


FIGURE 7.4 – Perturbations induite en 18 mois par l’astéroïde fictif sur l’orbite de Lissajous type. La perturbation en Δx est la plus importante, suivie de Δy et ensuite de Δz . Le tracé a été obtenu numériquement avec le modèle du Système solaire simplifié (on obtiendrait un résultat exactement identique en intégrant le hamiltonien du PQBCR4C).

Notons qu’avec (7.25), on peut écrire les perturbations induites sur les vitesses :

$$\begin{aligned}\dot{\Delta x} &= 0.420 \quad \Lambda \mu' A_0 e^{\Lambda t} \\ \dot{\Delta y} &= -0.229 \quad \Lambda \mu' A_0 e^{\Lambda t} \\ \dot{\Delta z} &= (0.121 \quad q_3^0 - 0.194 \quad p_3^0) \Lambda \mu' A_0 e^{\Lambda t}\end{aligned}$$

Avec les valeurs de Λ données par le tableau 6.4, on vérifie que si la perturbation en position atteint le mètre, alors la perturbation en vitesse atteint environ $0.1 \mu m/s$. Sachant que le suivi de Herschel et Planck est assuré au mieux avec une précision du mètre en distance et une précision de 0.1 mm/s en vitesse radiale (Hechler et Yáñez, 2006), les perturbations des orbites seront détectées en premier sur le suivi de la distance à la sonde plutôt que sur les données Doppler.

7.3.3 Calcul de l’amplitude de la perturbation

On propose d’utiliser le hamiltonien du PBCR4C pour estimer le paramètre A_0 qui détermine l’amplitude de la perturbation induite par l’astéroïde sur l’orbite autour de L_2 . On rappelle que A_0 correspond à la partie constante de

$$\mu' \int_0^t e^{-\Lambda T} g_{p_1}(T) dT \quad (7.26)$$

où g_{p_1} est la dérivée, par rapport à la variable normalisante p_1 , de la partie du hamiltonien dépendant de μ' . La fonction g_{p_1} est évaluée pour une solution non perturbée $(q_2^0, q_3^0, p_2^0, p_3^0)$. On va dans la suite considérer le développement de g_{p_1} à l’ordre 0 en $(q_2^0, q_3^0, p_2^0, p_3^0)$. On se restreint ainsi à des orbites de petite amplitude comme l’orbite de Lissajous type. Cette démarche simplifie les calculs et aboutit à une expression de A_0 générale et indépendante de l’orbite au voisinage de L_2 . On vérifie qu’à l’ordre 0, on a

$$g_{p_1} = C_x \frac{\partial \Delta H}{\partial x} + C_y \frac{\partial \Delta H}{\partial y} \quad \text{avec} \quad C_x = \left(\frac{-2\lambda}{s_1} \right), \quad C_y = \left(\frac{\lambda^2 - 2c_2 - 1}{s_1} \right) \quad (7.27)$$

où ΔH correspond à la partie du hamiltonien du PBCR4C proportionnelle à μ' . Avec (7.4), on obtient

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial x} = \frac{\alpha_4}{\gamma} + \frac{1+\gamma-\mu}{\gamma}(\alpha'_4 + \alpha_6) + \frac{\mu'}{\gamma}(1+\gamma-\mu-\alpha_7) \left((1+\gamma-\mu-\alpha_7)^2 + \alpha_8^2 \right)^{-3/2}$$

Avec les expressions des α_i données par (7.3), on vérifie que tous les termes sont bien proportionnels à μ' . Le coefficient μ peut être négligé car de toute façon, avec les expressions des α_i obtenues dans la section 7.2.1, le hamiltonien du PQBCR4C n'est valide qu'au premier ordre en μ et μ' . En développant en coefficients de Laplace le dernier terme de l'expression, on a

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial x} = \frac{\alpha_4}{\gamma} + \frac{1+\gamma}{\gamma}(\alpha'_4 + \alpha_6) + \frac{\mu' b_{3/2}^{*(j)}}{4\gamma} (2(1+\gamma)\cos(jL) - \cos((j+1)L) - \cos((j-1)L))$$

La variable L remplace ici $\lambda - \lambda'$ et $b_{3/2}^{*(j)}$ représente la valeur des coefficients de Laplace évalués en $(1+\gamma)\alpha$. Comme dans la section 7.2.1, les termes dépendant de j doivent être sommés sur l'ensemble des entiers relatifs. Les α_i peuvent être explicités avec (7.10) et (7.11). Après simplifications on dérive l'expression suivante

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial x} = \frac{\mu' \alpha^2}{\gamma} \left(-\gamma \cos L + \frac{1+\gamma}{2} (D b_{1/2}^{(j)} + \alpha b_{3/2}^{*(j)}) \cos(jL) - \frac{1}{4} b_{3/2}^{*(j)} \{ \cos((j+1)L) + \cos((j-1)L) \} \right)$$

Pour la dérivée du hamiltonien par rapport à y , on procède de manière analogue. On aboutit à

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial y} = \frac{\mu' \alpha^2}{\gamma} \left(\gamma \sin L - j \frac{1+\gamma}{2\alpha} b_{1/2}^{(j)} \sin(jL) + \frac{1}{4} b_{3/2}^{*(j)} \{ \sin((j+1)L) - \sin((j-1)L) \} \right)$$

Avec les expressions de $\frac{\partial \Delta H}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Delta H}{\partial y}$, on est en mesure de calculer la partie constante de (7.26). Définissons au préalable pour tout entier relatif k , les fonctions suivantes de η et ϕ'

$$\begin{aligned} c^{(k)} &= \frac{k(1-\eta) \cos(k\phi') - \lambda \sin(k\phi')}{\lambda^2 + k^2(1-\eta)^2} \\ s^{(k)} &= \frac{\lambda \cos(k\phi') + k(1-\eta) \sin(k\phi')}{\lambda^2 + k^2(1-\eta)^2} \end{aligned} \quad (7.28)$$

On peut vérifier directement, ou avec les expressions (7.21), qu'en négligeant les termes exponentiellement décroissant on a

$$\begin{aligned} c^{(k)} &= \int_0^t e^{-\Lambda\tau} \cos(kL) d\tau \\ s^{(k)} &= \int_0^t e^{-\Lambda\tau} \sin(kL) d\tau \end{aligned}$$

Avec les expressions des dérivées de ΔH injectées dans (7.27) et (7.26), on obtient l'expression générale de A_0 à l'ordre 0 en $(q_2^0, q_3^0, p_2^0, p_3^0)$,

$$\begin{aligned} A_0 &= C_x \frac{\mu' \alpha^2}{\gamma} \left(-\gamma c^{(1)} + \frac{1+\gamma}{2} (D b_{1/2}^{(j)} + \alpha b_{3/2}^{*(j)}) c^{(j)} - \frac{1}{4} b_{3/2}^{*(j)} (c^{(j+1)} + c^{(j-1)}) \right) \\ &\quad + C_y \frac{\mu' \alpha^2}{\gamma} \left(\gamma s^{(1)} - j \frac{1+\gamma}{2\alpha} b_{1/2}^{(j)} s^{(j)} + \frac{1}{4} b_{3/2}^{*(j)} (s^{(j+1)} - s^{(j-1)}) \right) \end{aligned} \quad (7.29)$$

La figure 7.5 donne, pour un demi-grand axe de l'astéroïde fixé à 2.766, l'évolution de A_0 en fonction de la phase à l'origine ϕ' . Pour comparaison, on trace sur la figure également la variation

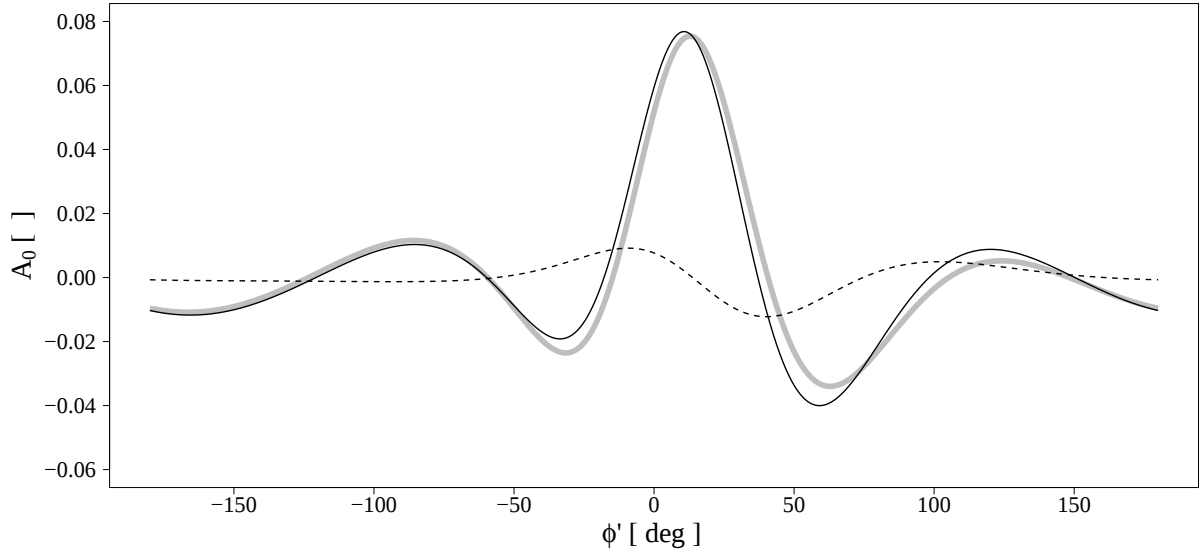


FIGURE 7.5 – En gris, évolution de A_0 calculée à l'ordre 0 en $(q_2^0, q_3^0, p_2^0, p_3^0)$. En noir, évolution de A_0 calculée à l'ordre 3. En pointillé, la différence entre les deux courbes.

de A_0 calculée à un ordre plus élevé en $(q_2^0, q_3^0, p_2^0, p_3^0)$. Le hamiltonien du PQBCR4C est développé à l'ordre 4 et on utilise l'annexe 9.8 pour le calcul de g_{p_1} . L'amplitude A_0 ainsi obtenue est d'ordre 3 en $(q_2^0, q_3^0, p_2^0, p_3^0)$ et elle dépend par conséquent des paramètres de l'orbite de Lissajous type. La figure montre que le développement à l'ordre 0 est une bonne approximation de A_0 . Néanmoins pour des angles proches de $-20^\circ, 50^\circ$ et 100° l'erreur due à l'approximation et le fait que la fonction A_0 s'annule conduit à des erreurs relatives non négligeables.

On peut maintenant retrouver analytiquement la perturbation générée par l'astéroïde fictif et obtenue dans la section précédente en intégrant le hamiltonien du PQBCR4C. La figure 7.6 compare la perturbation obtenue numériquement dans la section 7.3.2 avec la prévision analytique fournie par l'expression de A_0 à l'ordre 3 et les relations (7.25). On observe que les prévisions de Δx et Δy collent aux résultats numériques au bout de 3 mois et demi, lorsque la perturbation vaut alors seulement quelques centimètres. Sur la figure apparaît également la prévision en Δx que l'on obtient avec la formule (7.29). La phase $\sim 60^\circ$ de l'astéroïde est malheureusement trop proche d'une zone où l'approximation de A_0 à l'ordre le plus bas conduit à une erreur observable.

Le calcul analytique de A_0 permet une estimation rapide de la perturbation. Ainsi on peut tracer une carte de stabilité de l'orbite de Lissajous type en fonction du demi-grand axe et de la phase de l'astéroïde perturbateur. La figure 7.7 donne le temps nécessaire à un astéroïde de la masse de Ceres à perturber l'orbite type de 1 m. Le tracé est obtenu avec le calcul de A_0 à l'ordre 3 et l'expression (7.25). Le temps t_{lim} auquel la perturbation atteint 1 m est donné par

$$t_{lim} = -\frac{1}{\lambda} \ln \left| \mu' A_0 \frac{2\lambda}{s_1} \right| \quad (7.30)$$

On observe que quelque soit la phase, un astéroïde situé au delà de 2 UA ne peut pas avoir un effet supérieur à 1 m sur l'orbite. On rappelle que la distance héliocentrique de 2 UA détermine la borne inférieure de la ceinture principale qui comprend la majorité des astéroïdes. Comme d'autre part l'astéroïde Ceres est de loin le plus massif de la ceinture, on peut dès à présent prévoir que l'effet de la majorité des astéroïdes sur l'orbite de Lissajous type sera largement inférieur au mètre sur une période de l'ordre du mois. Si ce résultat est confirmé pour les orbites de Herschel et Planck, les perturbations des astéroïdes non prises en compte lors de la construction des orbites seront

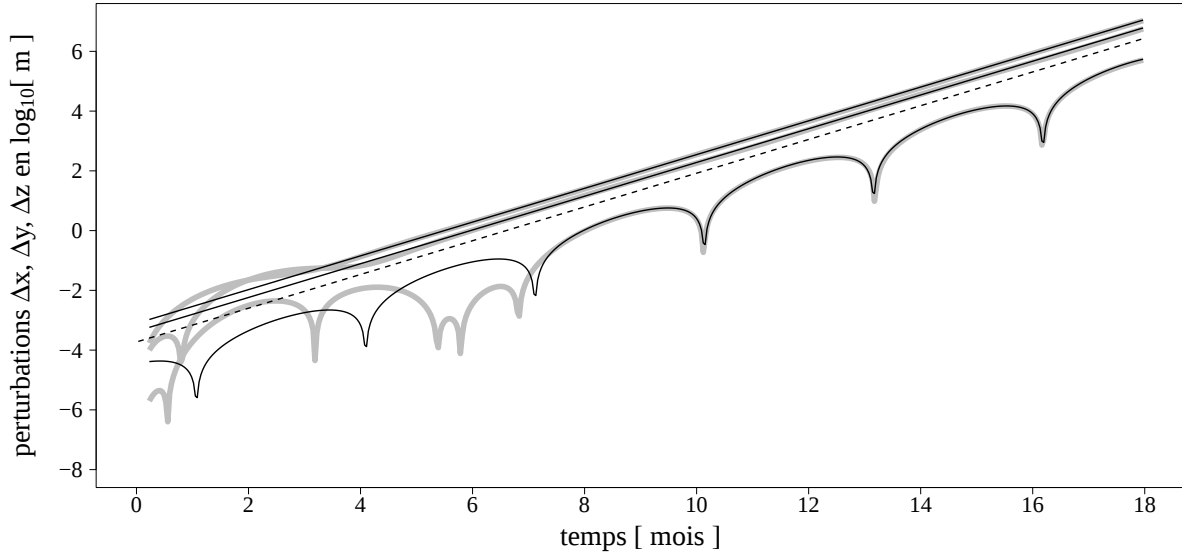


FIGURE 7.6 – En gris, perturbations induites en 18 mois par l’astéroïde fictif sur l’orbite de Lissajous type. En noir, tracé obtenu avec le calcul de A_0 analytique. En pointillé, prévision pour Δx fournie par la formule (7.29).

en pratique indétectables sur les orbites réelles des sondes. En effet, les manoeuvres sur les deux sondes effaceront à priori toute perturbation éventuellement due aux astéroïdes et accumulée pendant le vol libre de la sonde. Sur la figure 7.7, on remarque que l’effet de l’astéroïde est maximum s’il est proche de la Terre, que ce soit en demi-grand axe ou en phase.

Un paramètre intéressant est le signe de A_0 , car il détermine si l’astéroïde aura tendance à rapprocher la sonde de la Terre ou plutôt à l’éloigner. En effet selon (7.25), un signe positif de A_0 induit une perturbation croissante selon l’axe x du repère tournant R_b et donc un éloignement de la Terre. Un signe négatif de A_0 induit, par contre, une rencontre proche avec la Terre. Sur la figure 7.7 on a représenté en pointillé les points pour lesquels A_0 s’annule et change de signe. Sachant que pour une phase $\phi' = 0$ le signe de A_0 est positif, on peut conclure que l’astéroïde considéré jusqu’à maintenant avec $\phi' \sim 60^\circ$ aura tendance à rapprocher la sonde de la Terre. On vérifie cette prédiction en traçant à partir d’une intégration numérique, figure 7.8, l’évolution de l’orbite perturbée dans le repère tournant R_b . Pour comparaison, la figure donne aussi la perturbation qui serait induite par le même astéroïde si sa phase à l’origine était de 50° . La sonde, à la place d’entrer en orbite autour de la Terre, serait alors éjectée.

7.4 Application à Herschel et Planck

Dans les sections précédentes on a développé un modèle analytique permettant de prédire, dans le cadre du PQBCR4C, l’effet d’un astéroïde sur une orbite autour de L_2 . Il a été montré que l’orbite perturbée se comportait comme une orbite du PCR3C placée à l’extérieur de la variété centrale. La perturbation induite par l’astéroïde augmente alors avec le temps de manière exponentielle. Cette évolution est entièrement caractérisée par une constante A_0 qui à priori dépend des paramètres de l’orbite autour de L_2 et des paramètres du PQBCR4C, en particulier du demi-grand axe et de la phase de l’astéroïde perturbateur.

Pour appliquer le modèle analytique aux orbites de Herschel et Planck, on calcule les paramètres A_0 à l’ordre 3 en $(q_2^0, q_3^0, p_2^0, p_3^0)$. Les variations de $(q_2^0, q_3^0, p_2^0, p_3^0)$ sont obtenues par la

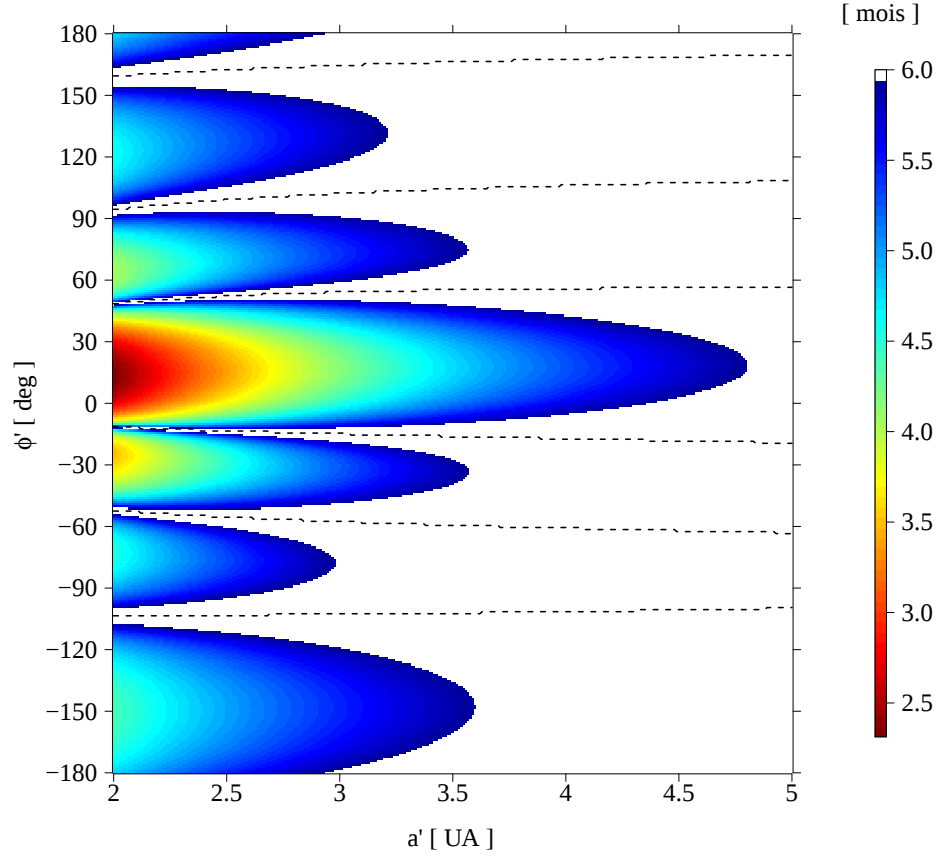


FIGURE 7.7 – Temps nécessaire pour perturber de 1 m l'orbite de Lissajous type. Le temps est donné en mois comme fonction du demi-grand axe et de la phase à l'origine de l'astéroïde perturbateur (les temps supérieurs à 6 mois apparaissent en blanc). En pointillé on indique les points où A_0 s'annule et change de signe.

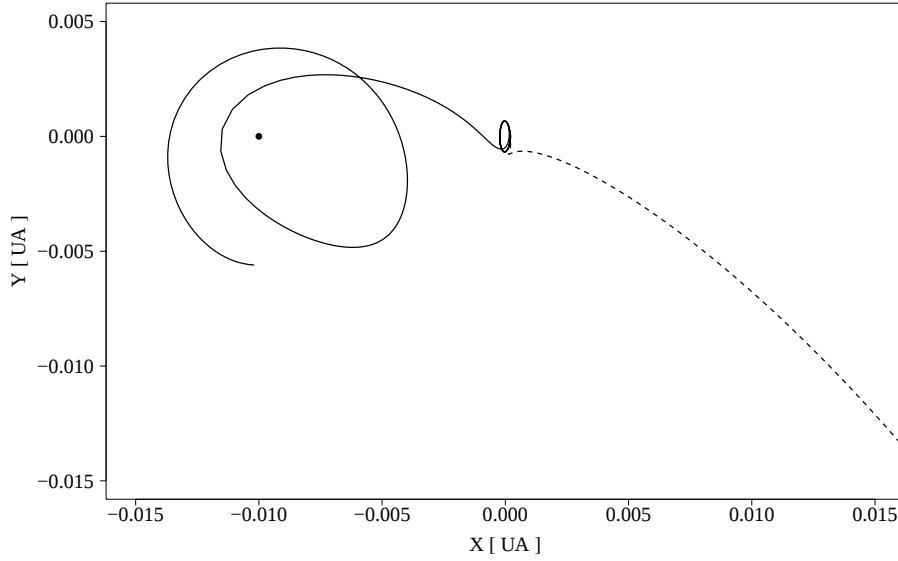


FIGURE 7.8 – Orbite de Lissajous perturbée par l’astéroïde fictif, tracée sur 25 mois dans le repère R_b . En pointillé, orbite perturbée par le même astéroïde mais dont la phase à l’origine a été modifiée à $\phi' = 50^\circ$. La position de la Terre est marquée par le point noir.

réduction à la variété centrale à l’ordre 18 et les paramètres d’orbites du tableau 6.4. Le même tableau fournit pour chacune des orbites les fréquences Λ, Ω_1 et Ω_2 . Contrairement à la section 7.3.3, on ne fait plus l’approximation consistant à prendre les valeurs $\Lambda, \Omega_1, \Omega_2$ égales à $\lambda, \omega_1, \omega_2$. Une fois les deux A_0 calculés, on en déduit les perturbations $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ avec (7.24) et les expressions de P_x, P_y et P_z fournies dans le tableau 7.3.2.

La comparaison des perturbations prévues analytiquement avec leurs analogues numériques était faite dans la section 7.3.3 avec un modèle numérique contenant uniquement le Soleil, la Terre et l’astéroïde. Ce modèle est en effet le plus proche du système décrit par le PQBCR4C. Ici on va utiliser le modèle perturbé complet contenant les huit planètes. En effet, les conditions initiales de Herschel et Planck obtenues par réduction à la variété centrale, même à l’ordre 18, sont trop imprécises pour être stables sur une dizaine de mois. Plutôt que de les stabiliser par multiple shooting dans le système Terre-Soleil, on préfère utiliser les orbites obtenues dans la section 6.4 pour le modèle du Système solaire complet. La figure 7.9 représente la perturbation induite par un astéroïde fictif de la masse de Ceres sur l’orbite de Planck. Les paramètres de l’astéroïde sont ceux du tableau 7.2.2. On note que l’instant d’origine pour Herschel et Planck n’est pas l’époque J2000 mais le 15 juin 2009, ainsi la phase donnée dans le tableau ne correspond pas à celle de Ceres. Sur la même figure on a représenté la prévision analytique de la perturbation qui paraît en bon accord avec le résultat numérique. La figure 7.10 représente la perturbation induite sur Herschel. La prévision analytique et le calcul numérique sont aussi en bon accord pour Δx et Δy , on attribue les légères différences à la présence des huit planètes dans le modèle. La correspondance est par contre moins bonne pour Δz . Cette insuffisance du modèle provient du fait que l’orbite de Herschel obtenue par multiple shooting est différente de l’orbite obtenue à partir de la réduction à la variété centrale. Cette différence, qui intervient essentiellement sur la composante z de l’orbite, se voit notamment sur la figure 6.10.

Comme le modèle analytique donne de bonnes prévisions même pour des orbites aussi larges que Herschel et Planck, on peut envisager de tracer des cartes de stabilités analogues à celle de la figure 7.7. Pour obtenir ces cartes, on n’utilise pas la formule (7.30) car elle ne prend pas en

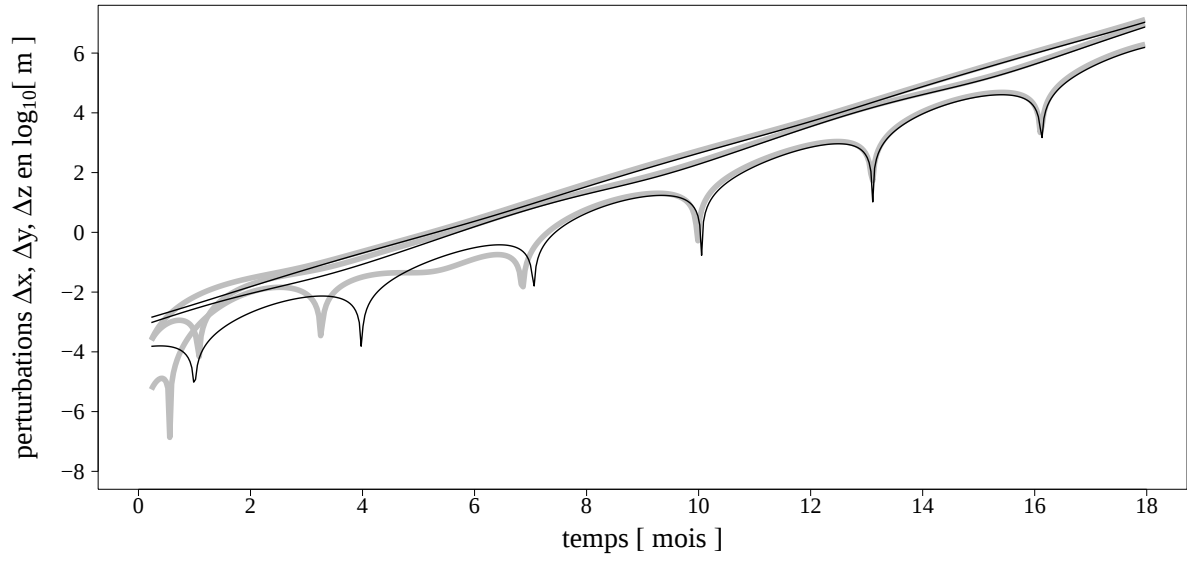


FIGURE 7.9 – En gris, tracé de la perturbation induite par l’astéroïde fictif sur l’orbite de Planck. En noir, perturbation obtenue analytiquement.

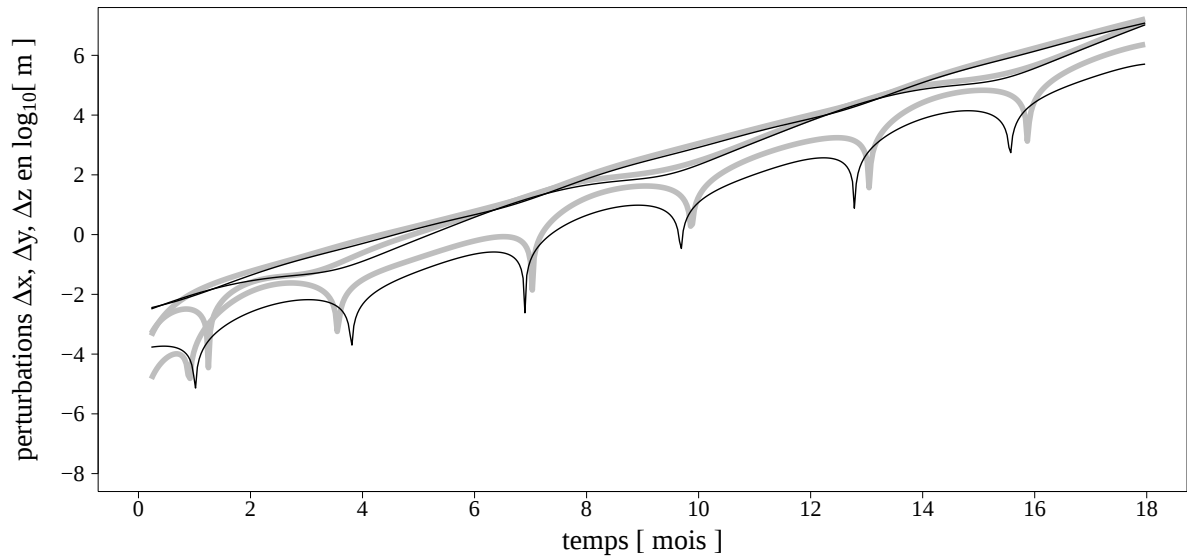


FIGURE 7.10 – En gris, tracé de la perturbation induite par l’astéroïde fictif sur l’orbite de Herschel. En noir, perturbation obtenue analytiquement.

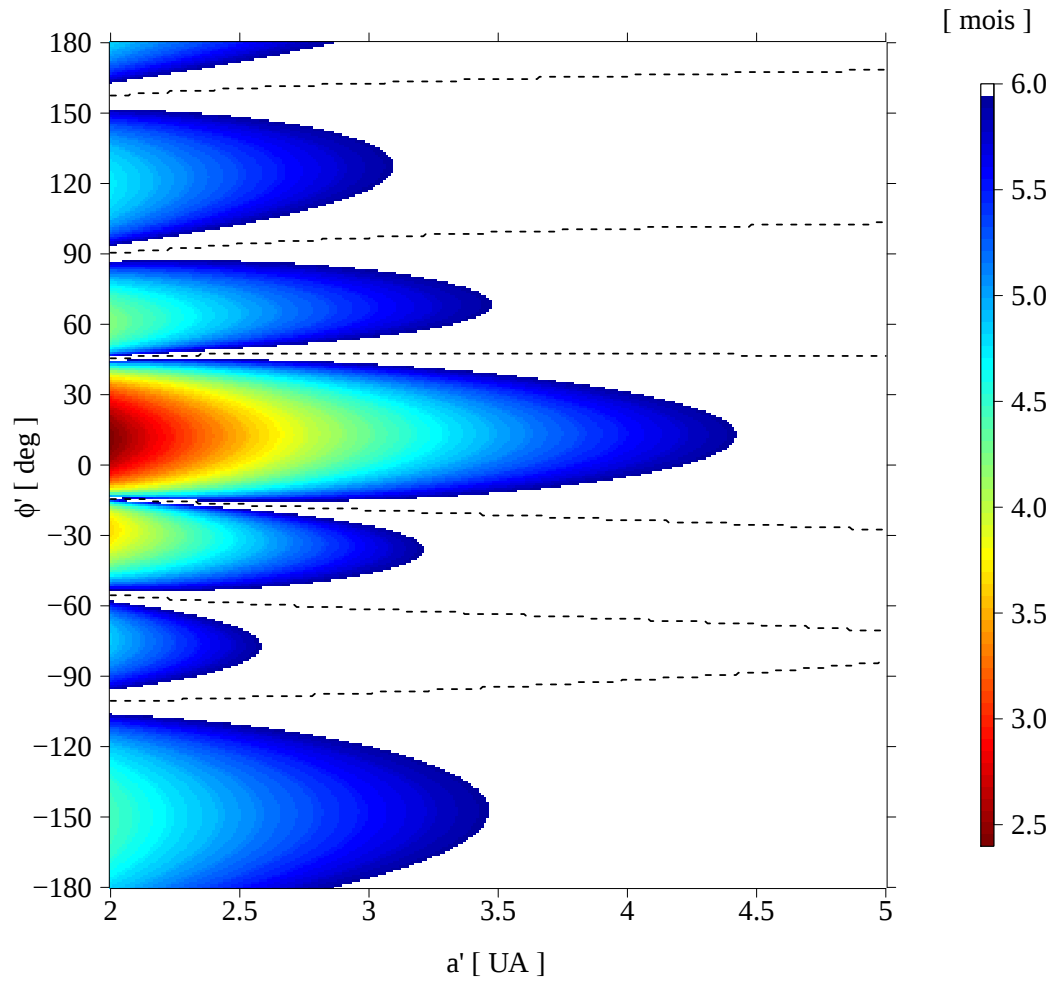


FIGURE 7.11 – Temps nécessaire pour perturber de 1 m l’orbite de Planck. Le temps est donné en mois comme fonction du demi-grand axe et de la phase à l’origine de l’astéroïde perturbateur (les temps supérieurs à 6 mois apparaissent en blanc). En pointillé on indique les points où A_0 s’annule et change de signe.

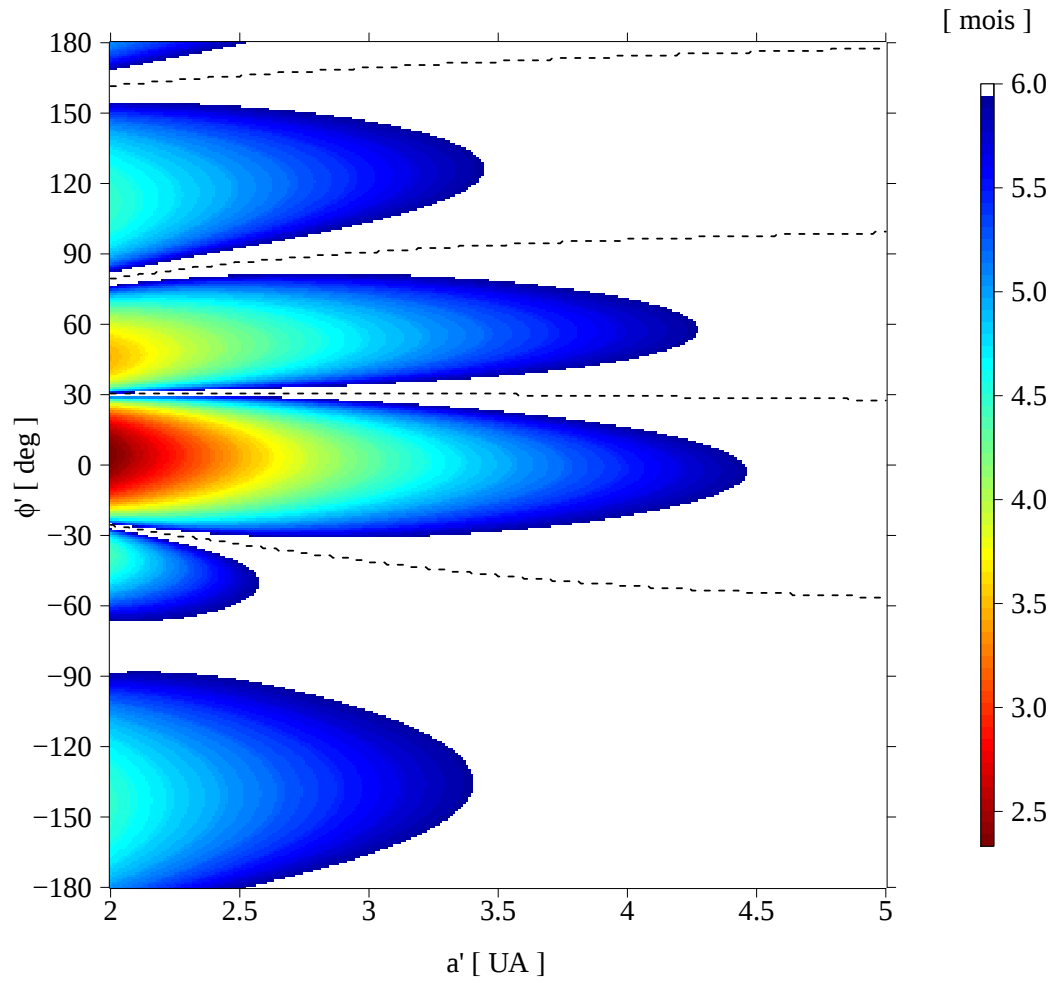


FIGURE 7.12 – Temps nécessaire pour perturber de 1 m l’orbite de Herschel. Le temps est donné en mois comme fonction du demi-grand axe et de la phase à l’origine de l’astéroïde perturbateur (les temps supérieurs à 6 mois apparaissent en blanc). En pointillé on indique les points où A_0 s’annule et change de signe.

compte les oscillations que l'on observe pour Herschel et Planck sur Δx et Δy . Les cartes 7.11 et 7.12 sont donc obtenues en calculant pour chaque point (a', ϕ') , l'évolution analytique de Δx sur 18 mois et en déduisant graphiquement le temps où cette perturbation atteint le mètre. Comme pour la figure 7.7, on a représenté sur les cartes les limites où Δx s'annule et change de signe. La zone contenant $\phi' = 0$ correspond pour les deux cartes à un Δx positif.

7.5 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre le problème quasi-bicirculaire restreint à 4 corps (PQBCR4C). Il s'agit d'une extension du problème circulaire restreint à 3 corps (PCR3C) auquel on rajoute un primaire supplémentaire. Dans le PQBCR4C, les orbites héliocentriques des deux primaires sont initialement d'excentricités nulles. Néanmoins les éléments osculateurs des deux corps ne sont pas imposés comme constants. Ils évoluent avec le temps de sorte à satisfaire les lois de Newton. On a montré que ce modèle décrit bien la perturbation induite par un astéroïde d'excentricité et d'inclinaison nulles sur une orbite quasi-périodique autour de L_2 dans un système initialement à trois corps. Dans un modèle du Système solaire complexe comme celui de INPOP, la description du PQBCR4C est moins bonne mais toujours satisfaisante.

La perturbation se traduit sur les variables normalisantes $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ par des termes supplémentaires quasipériodiques dont les amplitudes restent soit constantes, soit elles évoluent de manière linéaire ou quadratique. Sur q_1 apparaît en plus un terme exponentiel $A_0 e^{\Lambda t}$. L'amplitude A_0 est proportionnel à la masse de l'astéroïde et Λ est donné par le calcul de la forme normale (voir chapitre 6). En première approximation, le comportement perturbé est donc identique au comportement dans une situation non perturbée avec des conditions initiales placées à l'extérieur de la variété centrale. En effet en considérant l'évolution exponentielle comme dominante, la perturbation induite par l'astéroïde se traduit par une divergence exponentielle sur les trois composantes x, y, z de la trajectoire. Les effets provenant de deux astéroïdes différents sont alors proportionnels et indistinguables.

On a dérivé une expression analytique de la perturbation. Celle-ci est relativement simple à condition que l'orbite quasipériodique soit proche de L_2 . Pour des orbites larges comme celles de Herschel et Planck, l'expression fait intervenir les polynômes issus du calcul de la forme normale à des ordres élevés.

Chapitre 8

Estimations des perturbations avec un modèle numérique

Avec les cartes de stabilité obtenues dans la partie précédente, on a pu conclure qu'un astéroïde situé au delà de 2 UA n'induirait pas d'effet significatif sur une orbite autour de L_2 . En effet, pour un objet de la masse de Ceres on peut prévoir une perturbation maximum de 1 mètre induite en 2 mois. On rappelle que pour Herschel et Planck, cet intervalle de temps correspond environ au temps de vol libre maximum des sondes entre manoeuvres. Sachant que Ceres est de loin l'objet le plus massif de la ceinture principale, la perturbation induite par la majorité des astéroïdes sera largement inférieure à cette prévision. Le résultat a néanmoins été obtenu avec un modèle plan où les trajectoires de l'astéroïde et de la Terre sont circulaires et où le demi-grand axe de l'astéroïde n'est jamais à moins de 2 UA. L'objectif de cette dernière partie est d'évaluer numériquement la stabilité de Herschel et Planck dans un modèle numérique plus réaliste.

8.1 Effets au cours des premiers mois des missions

Le modèle que l'on choisit pour évaluer les perturbations induites par les astéroïdes est le modèle du Système solaire dans lequel on dispose depuis la section 6.4, d'orbites de Herschel et Planck stables. Il s'agit donc de l'éphéméride complète INPOP08 dépourvue d'astéroïdes. L'effet d'un astéroïde particulier sera estimé de manière standard, en intégrant les sondes en présence de l'astéroïde et en comparant avec l'orbite non perturbée.

On propose d'estimer l'effet induit par chacun des astéroïdes connus aujourd'hui au cours des premiers mois suivant l'injection en orbite autour de L_2 de Herschel et Planck. On se restreint néanmoins aux objets ayant une orbite confirmée et donc aux objets ayant un numéro associé à leur nom ou leur désignation.

8.1.1 Orbites des astéroïdes

Pour obtenir les orbites des astéroïdes, on s'appuie sur le catalogue Astorb introduit au chapitre 1. On rappelle que depuis la section 6.4, on dispose des conditions initiales de Herschel et Planck pour le 15 juin 2009 (3483 jours après l'époque J2000). L'ensemble des 219017 astéroïdes du catalogue possédant un numéro doit donc être ramené à la date du 15 juin 2009. L'opération est identique à celle décrite dans la section 1.2.1.

8.1.2 Calcul des perturbations

Avec les orbites des astéroïdes calculées pour le 15 juin 2009 et les masses standards fournies par Astdata (voir l'annexe 9.2), on est en mesure de calculer les perturbations induites sur

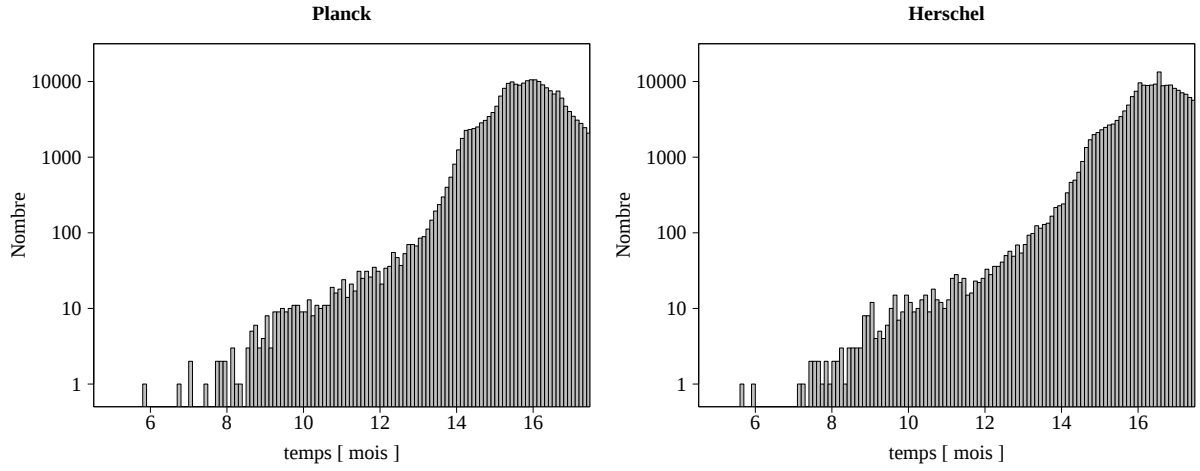


FIGURE 8.1 – À gauche, histogramme représentant en fonction du temps le nombre d’astéroïdes ayant un effet de un mètre sur Planck. À droite, figure analogue mais tracée pour Herschel.

TABLE 8.1 – Effets induits sur les orbites de Planck et Herschel au bout de 2 mois. Le tableau fournit pour chaque astéroïde le temps t_{lim} nécessaire pour obtenir un effet de 1 m sur au moins un des deux satellites.

nom	cat. d’incertitude	masse [$10^{-10} M_{\odot}$]	Planck [mm]	Herschel [mm]	t_{lim} [mois]
1 Ceres	I	4.658	4.68	11.49	5.62
2 Pallas	I	1.076	6.41	7.44	5.88
16 Psyche	I	0.107	2.36	2.09	6.80
88 Thisbe	I	0.053	1.59	0.64	7.03
3 Juno	I	0.084	0.97	2.03	7.26
7 Iris	I	0.053	0.86	1.60	7.43
324 Bamberga	I	0.079	0.76	1.26	7.49
4 Vesta	I	1.392	1.76	1.76	7.52
140 Siwa	I	0.009	0.86	0.86	7.52
18 Melpomene	I	0.018	0.76	1.46	7.59
89 Julia	I	0.023	0.63	0.90	7.69
259 Aletheia	I	0.038	0.63	0.47	7.82
52 Europa	I	0.181	0.33	0.66	7.85
173 Ino	I	0.024	0.37	0.76	7.92
164 Eva	I	0.008	0.36	0.56	7.95

Herschel et Planck au cours des premiers mois des deux missions. On effectue 219017 intégrations INPOP des deux satellites en présence des différents astéroïdes. Ces intégrations sont menées sur 18 mois, de sorte à pouvoir obtenir pour chacun des 219017 objets des évolutions analogues à celles des figures 7.9 et 7.10. On se rend compte que les perturbations induites par les astéroïdes sont en général très faibles. En 8 mois, seulement 15 astéroïdes réussissent à perturber les orbites de plus de un mètre. Le tableau 8.1 montre que pour ces 15 astéroïdes les effets induits au cours des 2 premiers mois des missions sont de l'ordre de quelques millimètres. La figure 8.1 représente, sous forme de histogrammes, les résultats obtenus sur l'ensemble des astéroïdes. Chaque histogramme donne en fonction de la date le nombre d'objets induisant un effet de l'ordre du mètre sur Herschel ou Planck. On peut noter une tendance de Herschel à être légèrement plus stable que Planck. Ce phénomène provient du paramètre Λ , différent pour les deux satellites (voir tableau 6.4), qui détermine la vitesse de divergence exponentielle due à la perturbation.

On note avec t_{lim} le temps limite où une perturbation atteint le mètre. Avec la formule (7.30), on peut calculer le décalage Δt_{lim} de ce temps limite qui a lieu si la masse de l'astéroïde n'est pas égale à la masse standard μ' mais à une masse nouvelle μ'_n :

$$\Delta t_{\text{lim}} = -\frac{\ln \mu'_n / \mu'}{\lambda}$$

Pour les deux satellites, la multiplication par un facteur 16 des masses des astéroïdes avance ce temps limite d'environ 2 mois. La multiplication par un facteur 50, avance le temps de 3 mois. Selon le tableau 1.3, les facteurs 16 et exceptionnellement 50 sont les facteurs maximaux que l'on peut raisonnablement appliquer aux masses les moins bien déterminées (catégorie III). Ainsi avec la figure 8.1 on peut conclure qu'aucun astéroïde n'est en mesure d'induire un effet significatif au cours des premiers mois des missions. Sur la figure le perturbateur le plus important faisant partie du groupe III, est l'astéroïde 332 Siri qui induit un effet significatif à partir de 11 mois. On note que pour ramener ce temps à 2 mois, la masse de l'astéroïde devrait être multipliée par un facteur 70000.

8.2 Majoration des perturbations

On vient d'estimer les effets des astéroïdes pendant les quelques mois qui suivent l'injection en orbite de Herschel et Planck. Sur un intervalle plus long, l'expérience faite dans la section précédente doit être répétée plusieurs fois. La durée maximum prévue pour la mission Herschel est de 54 mois. Ainsi l'expérience devrait idéalement être répétée 27 fois de sorte à couvrir entièrement l'intervalle par des tranches de 2 mois. Sur toutes ces tranches, les orbites des satellites doivent d'abord être réajustées et ensuite intégrées en présence de chacun des astéroïdes. On note que les réajustements à effectuer sont directement disponibles à partir du calcul de multiple shooting. En effet, la procédure décrite dans la section 6.3.2 fournit à des intervalles réguliers de 90 jours, pour Herschel comme pour Planck, des vecteurs d'états placés sur la variété centrale.

L'estimation exhaustive des effets des astéroïdes est en pratique assez exigeante en moyens informatiques. Les 219017 intégrations nécessaires au tracé de la figure 8.1, demandent une journée de calcul sur dix processeurs 1.5Ghz. On propose ici de procéder différemment. On part de l'hypothèse que sur 2 mois, l'effet d'un astéroïde est surtout déterminé par la distance minimale le séparant de la sonde. Ainsi pour estimer l'effet maximum qu'un astéroïde peut induire, on va considérer seulement les moments où les astéroïdes passe le plus proche de L_2 . Il sera ainsi possible de majorer les perturbations pour l'ensemble des 219017 objets au cours de plusieurs années avec un coût en calcul inférieur au coût dépensé dans la section précédente lors de l'estimation des perturbations sur 18 mois.

8.2.1 Recherche des rencontres proches

On restreint la recherche des rencontres proches avec L_2 à l'intervalle compris entre le 15 juin 2009 et le 1er janvier 2030. Les orbites des astéroïdes sont considérées comme keplériennes ce qui permet pour chaque astéroïde une détermination rapide de l'instant où la distance au point L_2 est minimum. Rappelons que la position de L_2 est définie géométriquement par le vecteur $\mathbf{r}(1+\mu)$ où $\mathbf{r}$ repère la position héliocentrique du barycentre Terre-Lune. Contrairement aux astéroïdes, l'orbite du barycentre Terre-Lune est obtenue à partir de INPOP08. Parmi les 219017 objets, on en décompte 324 qui s'approchent du point L_2 à moins de 0.2 UA. Par soucis de précision, les orbites de ces objets sont recalculées dans INPOP08 pour remplacer les approximations keplériennes (le pas de sortie a été fixé à 0.2 jours). Le tableau 8.2 rassemble les rencontres pour lesquelles la distance minimale à L_2 est inférieure à 0.04 UA. En tête du tableau on trouve l'astéroïde 99942 Apophis, qui selon Giorgini *et al.* (2008) passera le 13 avril 2029 à 38000 ± 2000 km de la Terre. Notons que INPOP08 donne une prévision entièrement en accord avec ces valeurs. La rencontre proche a lieu pour la même date avec une distance minimale de 39000 km.

Les distances du tableau 8.2 sont à comparer avec les orbites de Herschel et Planck tracées sur les figures 6.11 et 6.10. L'orbite de Herschel s'éloigne à plus de 0.005 UA du point L_2 . Un objet placé sur une orbite aussi large peut en théorie aller jusqu'à entrer en collision avec les deux premiers astéroïdes du tableau. Notons que le tableau fournit les rencontres les plus proches avec L_2 jusqu'en 2030. Il ne faut pas oublier qu'au cours de l'intervalle de temps considéré, plusieurs rencontres entre L_2 et chacun des astéroïdes peuvent avoir lieu. Ainsi par exemple Apophis passe le plus proche de L_2 en 2029, mais il n'est pas exclu qu'il n'ait déjà subi une rencontre un peu moins proche avant cette date. L'annexe 9.10, résume les rencontres les plus proches avec L_2 ayant effectivement lieu au cours des missions Herschel, Planck et GAIA.

8.2.2 Passage au repère du PQBCR4C

Pour pouvoir estimer les effets des astéroïdes aux moments où ils sont le plus proche de L_2 , on détermine pour chaque astéroïde son vecteur d'état 15 jours avant la rencontre proche. La position et la vitesses sont transposées dans le repère tournant R_b du PQBCR4C défini dans la section 7.2. Le vecteur d'état est ensuite retransposé dans le repère inertiel de INPOP calculé pour la date du 15 juin 2009 à laquelle on dispose des conditions initiales de Herschel et Planck. On recrée ainsi en 2009 une situation qui en réalité a lieu ultérieurement. La situation est identique uniquement pour le positionnement mutuel de la Terre, du Soleil et de l'astéroïde. Les positions des autres planètes sont différentes. Cette différence peut néanmoins être négligée dans la mesure où dans la section 7.2 on a montré que la perturbation du voisinage de L_2 était correctement décrite par un modèle à 3 primaires. Pour respecter le cadre du PQBCR4C, lors du passage dans le repère tournant, les unités du vecteur d'état sont normalisées par la distance Terre-Soleil. Cette distance n'est pas constante à cause de l'excentricité de la Terre. Un calcul rigoureux exigerait également un changement de l'échelle de temps. On le néglige car le moyen mouvement de la Terre varie très peu sur l'intervalle de temps 2009-2030.

La figure 8.2 illustre l'opération pour Ceres. La figure représente la trajectoire de Ceres tracée dans le repère tournant lors de la "rencontre" la plus proche avec la Terre prévue pour 2018. Sur la même figure on a représenté la trajectoire intégrée depuis le 15 juin 2009 à partir d'une condition initiale de l'astéroïde calculée avec les changement successifs de repères. On note que sur les 2 mois représentés, les deux trajectoires sont très proches. Ainsi on peut supposer qu'une évaluation de l'effet de l'astéroïde obtenue en intégrant l'astéroïde simultanément avec les deux satellites dans le cas transposé en juin 2009 donnera une bonne estimation de l'effet que l'astéroïde induit lors de la rencontre en 2018. La figure 8.3 est la superposition de la trajectoire de l'astéroïde 153814 au cours de la rencontre prévue pour 2028 (voir tableau 8.2) et dans le cas transposé en

TABLE 8.2 – Rencontres proches avec le point L_2 ayant lieu avant le 1er janvier 2030. On donne pour chaque astéroïde, la date de la rencontre ainsi que la distance minimale à L_2 .

nom	cat. d'incertitude	masse [$10^{-20} M_\odot$]	date [ans]	distance [UA]
99942 Apophis	II	5.232	2029.28	0.00416
153814 -	II	18.070	2028.48	0.00444
35396 -	II	125.500	2028.82	0.00726
137108 -	II	31.230	2027.60	0.00741
152637 -	II	27.760	2026.49	0.00835
7482 -	II	144.600	2022.05	0.01628
171576 -	II	13.520	2017.81	0.01828
33342 -	II	31.230	2015.94	0.01953
7335 -	II	108.100	2022.40	0.02295
152664 -	III	5.997	2009.74	0.02346
153201 -	II	4.536	2020.91	0.02385
4660 Nereus	II	20.690	2021.94	0.02387
68347 -	II	1.961	2018.41	0.02700
163899 -	II	144.600	2018.97	0.02721
4953 -	II	5997.000	2027.43	0.02832
163348 -	II	1.777	2020.43	0.02918
173561 -	II	12.190	2026.60	0.02942
85990 -	II	1.777	2016.02	0.02969
164121 -	II	329.100	2016.83	0.03005
199145 -	II	18.070	2023.12	0.03094
162082 -	II	7.742	2019.82	0.03194
68216 -	II	249.800	2009.77	0.03337
163132 -	II	18.070	2014.66	0.03538
5604 -	II	249.800	2017.15	0.03554
163364 -	II	9.253	2013.40	0.03626
138971 -	II	15.680	2022.17	0.03632
216258 -	II	1.295	2019.96	0.03647
153958 -	II	20.690	2012.55	0.03677
3361 Orpheus	II	6.406	2025.88	0.03698
66391 -	II	217.700	2019.40	0.03748
139622 -	II	15.680	2023.93	0.03765
3122 Florence	II	5232.000	2017.67	0.03839
162421 -	II	18.070	2012.14	0.03895
163373 -	II	6.832	2020.12	0.03920
214869 -	III	583.700	2012.84	0.03984

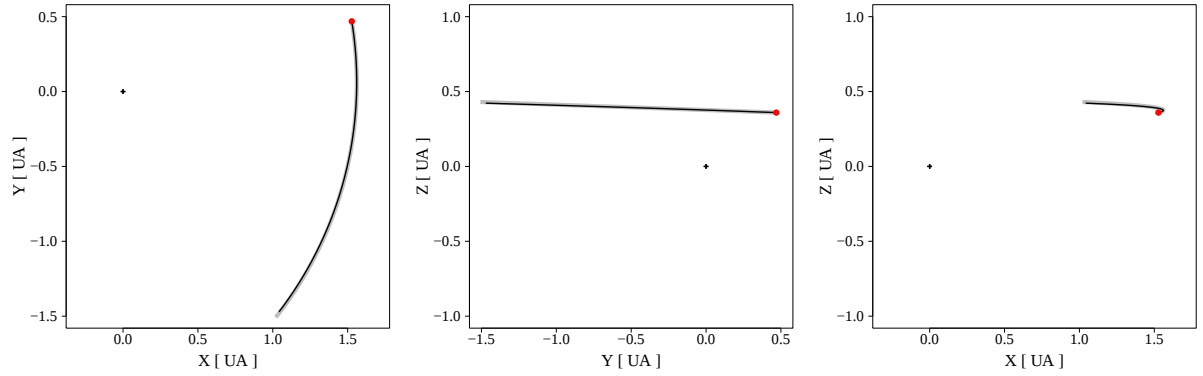


FIGURE 8.2 – Evolutions de Ceres tracées sur 2 mois dans le repère tournant centré en L_2 représenté par une croix. En gris, trajectoire au cours d’une rencontre proche ayant lieu en 2018. En noir trajectoire analogue obtenue à partir d’une condition initiale (point rouge) transposée en 2009.

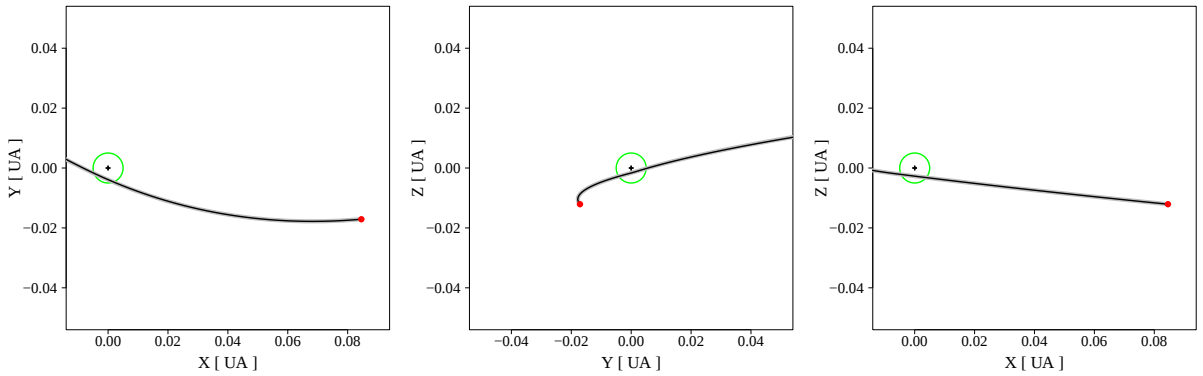


FIGURE 8.3 – Analogie de la figure 8.2 tracé pour l’astéroïde 153814. En vert, sphère englobant approximativement le volume occupé par Herschel et Planck.

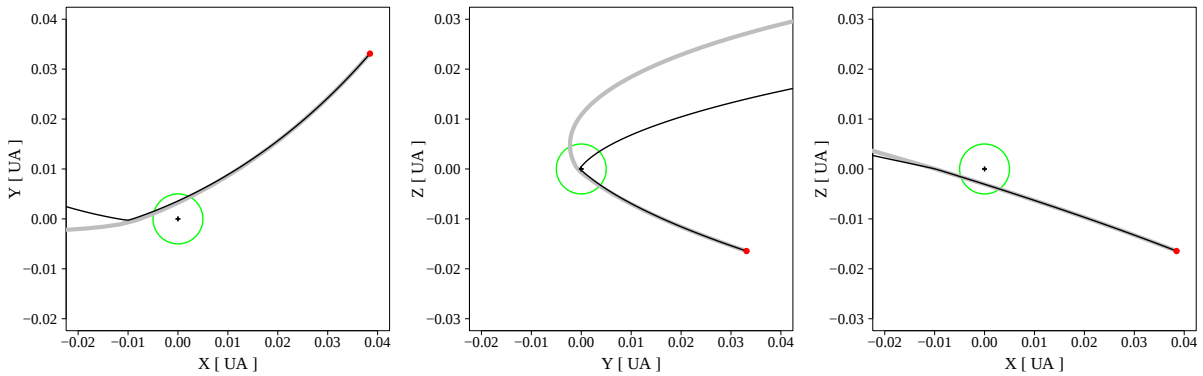


FIGURE 8.4 – Analogie de la figure 8.2 tracé pour 99942 Apophis. En vert, sphère englobant approximativement le volume occupé par Herschel et Planck.

2009. La correspondance entre les deux trajectoires est toujours bonne. Néanmoins la proximité du passage avec le point L_2 fait que l'effet de l'astéroïde dépendra des positionnements exacts des satellites sur leurs orbites. En effet selon les phases ϕ_{xy} et ϕ_z des satellites définies dans la section 6.1.2, la rencontre avec l'astéroïde pourra être assez lointaine ou au contraire très proche, même collisionnelle. Ainsi pour l'estimation des effets lors des rencontres aussi proches que celles du tableau 8.2, la méthode consistant à travailler avec toujours les mêmes conditions initiales des satellites n'est pas adaptée. Pour des astéroïdes dont la distance minimale à L_2 est supérieur à 0.04 UA, on peut par contre considérer que la distance à un satellite en orbite autour de L_2 ne dépend plus de sa phase. L'effet induit par la rencontre sera donc le même pour n'importe quel satellite et peut donc être estimé avec les orbites de Herschel et Planck dont on dispose. On représente sur la figure 8.4, la rencontre avec 99942 Apophis où l'évolution obtenue à partir de la condition initiale transposée en 2009 représente correctement la rencontre proche de 2029 jusqu'au moment où l'astéroïde est dévié par la Terre. La transposition de la rencontre en 2009 est trop approximative pour rendre compte correctement de la déviation induite par la Terre.

L'estimation correcte des perturbations induites au cours des rencontres proches du tableau 8.2 sort du cadre de ce travail. En effet elle nécessiterait des orbites précises de Herschel et Planck dont on ne dispose pas. On rappelle que les paramètres des orbites utilisées ici ont été obtenus graphiquement à partir de Bauske (2009).

8.2.3 Evaluation des perturbations

Le calcul des perturbations induites par les astéroïdes dans les configurations de rencontres proches fournit une estimation de l'effet maximum qu'un astéroïde pourra induire sur le voisinage de L_2 . Les intégrations des deux satellites en présence de chacun des 219017 astéroïdes permettent de conclure que l'effet maximum ne dépasse pour aucun des objets considérés le mètre en 2 mois. D'ailleurs l'effet induit en 2 mois est, pour la quasi-totalité des astéroïdes, en dessous du seuil de précision numérique de INPOP. Pour cette raison, les masses des astéroïdes sont prises égales à la masse de Ceres lors des intégrations. Sachant que la perturbation est proportionnelle à la masse de l'astéroïde (voir section 7.3), la perturbation correspondant à la masse estimée de l'objet s'obtient par un simple produit en croix. Parmi les 219017 astéroïdes, cinq ont leurs masses supérieures à la masse de Ceres. Il s'agit d'objets trans-Neptuniens dont les effets sont obtenus à partir de leur propre masse. Le tableau 8.3 rassemble les 20 astéroïdes les plus perturbateurs en configuration de rencontre proche. La perturbation affichée dans le tableau correspond à l'effet maximum induit en 2 mois sur Herschel ou Planck. Les effets induits sur les deux satellites sont, en général, similaires. En comparant les tableaux 8.3 et 8.1, on note que les effets issus des rencontres proches peuvent être jusqu'à 100 fois plus importants que les effets calculés à partir des configurations des astéroïdes durant les premiers mois des missions.

Il peut paraître surprenant que le tableau 8.3 ne contient aucun des objets déterminés précédemment comme subissant une rencontre très proche avec le point L_2 . En effet si on considère toutes les masses des astéroïdes égales, les effets les plus importants sont induits par les astéroïdes du tableau 8.1. Pour une masse égale à celle de Ceres, l'astéroïde 99942 Apophis induit sur les satellites un effet de 450 km. L'effet est donc plus de un million de fois supérieur à celui estimé ici pour Ceres. La perturbation de 99942 Apophis reste néanmoins négligeable car le rapport de sa masse avec celle de Ceres est de l'ordre de 10^{-10} . Dans le tableau 8.3, tous les astéroïdes appartiennent au groupe d'incertitude I. Le premier astéroïde du groupe III induit un effet inférieur à 0.5 mm. Pour que son effet soit significatif, sa masse devrait être sous-estimé par un facteur 2000 ce qui est bien au delà de l'erreur prévue dans la section 8.1.1. On peut donc conclure, que même en estimant les effets des astéroïdes dans les configurations à priori les plus favorables, les effets des astéroïdes sur le voisinage du point L_2 restent largement négligeables.

TABLE 8.3 – Perturbations maximales pouvant être induites en 2 mois sur le voisinage de L_2 entre juin 2009 et janvier 2030.

nom	cat. d'incertitude	masse [$10^{-10} M_\odot$]	Perturbation max. [mm]
4 Vesta	I	1.392	126.55
1 Ceres	I	4.658	101.82
2 Pallas	I	1.076	59.92
324 Bamberga	I	0.079	21.56
7 Iris	I	0.053	11.75
10 Hygiea	I	0.444	9.94
3 Juno	I	0.084	8.83
19 Fortuna	I	0.065	7.32
6 Hebe	I	0.042	6.01
511 Davida	I	0.228	5.16
18 Melpomene	I	0.018	5.04
15 Eunomia	I	0.109	5.01
194 Prokne	I	0.031	4.35
344 Desiderata	I	0.015	3.93
8 Flora	I	0.017	3.55
52 Europa	I	0.181	3.42
88 Thisbe	I	0.053	3.27
654 Zelinda	I	0.013	3.14
16 Psyche	I	0.107	2.88
54 Alexandra	I	0.030	2.80

8.3 Conclusion

En intégrant les orbites de Herschel et Planck en présence de chacun des 219017 astéroïdes connus aujourd'hui, on a vu que les effets des astéroïdes les plus perturbateurs ne dépassent pas le mètre au bout de 6 mois. Sachant que les orbites des sondes sont corrigées environ tous les 30 jours et que la précision du suivi des sondes est de l'ordre du mètre, ces effets sont entièrement négligeables.

Pour obtenir un résultat plus général, on a fait l'hypothèse que l'effet d'un astéroïde sur une orbite quasipériodique est d'autant plus grand que la distance sonde-astéroïde est faible. En estimant les perturbations induites par les astéroïdes en configurations de rencontres proches pouvant avoir lieu entre juin 2009 et janvier 2030, on retrouve le résultat précédant. Aucun astéroïde n'induit en 2 mois un effet supérieur à 1 m.

Conclusion et perspectives

La première partie de la thèse est consacrée à l'amélioration du modèle d'astéroïdes dans les éphémérides planétaires. Des centaines de milliers d'astéroïdes sont actuellement recensés dans le Système solaire. Plusieurs centaines de ces objets induisent des perturbations des mouvements planétaires suffisamment importantes pour être détectables par les observations dont on dispose. La modélisation des perturbations demande à priori la connaissance précise des masses des astéroïdes concernés. Comme on ne dispose que d'estimations très incertaines, la modélisation pose un vrai défi. Dans les éphémérides, le problème est abordé en tenant compte de ~ 300 astéroïdes estimés comme étant les plus perturbateurs. La majorité des masses de ces objets est ensuite déterminée à partir de l'ajustement de trois densités associées aux principales classes taxonomiques. Une sélection restreinte de masses est ajustée individuellement. Initialement proposée dans les années 80, l'approche est en général toujours utilisée aujourd'hui en adaptant empiriquement les sélections de masses traitées individuellement au fur et à mesure que de nouvelles observations planétaires deviennent disponibles. La modélisation imparfaite des astéroïdes a pour conséquences une extrapolation limitée des éphémérides et des erreurs systématiques importantes dans les paramètres ajustés.

Dans ce travail nous avons commencé par faire le point sur les connaissances actuelles des masses d'astéroïdes et notamment sur les incertitudes des déterminations astrophysiques. La perturbation induite par un astéroïde sur une planète a ensuite été étudiée de manière analytique. Dans Kuchynka *et al.* (2010), on a ainsi pu déterminer le rayon d'un anneau solide ayant le même effet sur les planètes que la ceinture principale privée de quelques individus. En estimant numériquement les perturbations individuelles de 27142 astéroïdes, on a montré que le nombre d'objets ayant un effet significatif sur les observations planétaires s'élève à environ 160. En tenant compte des incertitudes sur les masses des astéroïdes, le nombre peut monter jusqu'à 367. Aucun objet trans-Neptunien ou objet géocroiseur ne fait partie des 367 astéroïdes. La majorité des 367 objets est contenue dans la ceinture principale. Numériquement, on a montré qu'en termes de perturbations des planètes, les interactions mutuelles entre astéroïdes peuvent être négligées. Cette propriété permet d'obtenir rapidement la perturbation induite par un grand nombre d'astéroïdes de masses quelconques à partir des 27142 estimations numériques calculées une fois pour toutes. L'ensemble de ces résultats sert de base à la principale contribution de la thèse qui est de proposer une nouvelle approche, systématique et générale, de la modélisation des astéroïdes.

Dans un modèle dynamique réaliste, les observations planétaires disponibles sont très peu contraignantes pour les masses d'astéroïdes. Par conséquent, les observations en elles-mêmes ne permettent pas un ajustement correct. L'ajustement doit être régularisé à partir d'observations supplémentaires ou, de manière plus générale, d'informations supplémentaires. L'amélioration de l'ajustement est sinon impossible, ou équivalente à un pronostic fait au hasard. On considère comme informations supplémentaires, les déterminations astrophysiques de masses d'astéroïdes et leurs incertitudes. Cette connaissance à priori a été utilisée d'une part pour construire des modèles contenant un nombre variable d'astéroïdes individuels et un anneau. L'approche basée sur des optimisations successives de problèmes quadratiques mixtes est le principal sujet de Kuchynka

et al. (2010). Les connaissances à priori ont d'autre part été utilisées pour l'ajustement régularisé des modèles construits. Notons que les astéroïdes inclus dans les modèles font en général partie des objets dont les masses astrophysiques sont les mieux déterminées. La méthode de régularisation de Tikhonov par contraintes de boîtes permet d'exploiter les connaissances à priori tout en étant particulièrement simple à implémenter. Au chapitre 5, nous avons proposé un modèle concret contenant 276 astéroïdes et un anneau. L'ajustement régularisé de ce modèle aux observations planétaires devrait permettre la détermination d'environ 100 masses avec des erreurs relatives inférieures à 50% et la détermination de 23 masses avec des erreurs inférieures à 30%. Le nouveau modèle constitue par là une alternative encourageante aux modèles utilisés classiquement dans les éphémérides.

Dans cette thèse, nous avons exploité des mesures synthétiques et parfaites des distances Terre-planètes calculées à partir d'intégrations INPOP. Une première étape pour poursuivre ce travail est d'utiliser l'ajustement de Tikhonov avec contraintes de boîte pour ajuster le modèle contenant 276 astéroïdes à des données planétaires réelles. L'implémentation de la technique nécessite en pratique le recours à l'algorithme BVLS. Depuis la version INPOP10a, celui-ci est déjà implémenté dans INPOP. Ainsi des premiers tests pourraient être faits assez rapidement. A plus long terme, le modèle à 276 astéroïdes pourrait être remplacé par un modèle contenant plus d'objets. Comme il est mentionné au chapitre 5, ceci demande de reprendre les routines d'optimisation basées sur les bibliothèques CPLEX. Les routines devront probablement être parallélisées afin d'obtenir un nouveau modèle en un temps raisonnable. Afin d'améliorer davantage l'ajustement des masses d'astéroïdes, il serait intéressant d'introduire dans la régularisation une version moins forte de l'hypothèse classique des densités constantes au sein des classes taxonomiques. La régularisation de Tikhonov, dite d'ordre 1, permet de tenir compte d'une pénalité qui force certains des paramètres ajustés à rester proches (voir Aster *et al.*, 2005). Son implémentation pratique n'est pas plus compliquée que celle de la régularisation d'ordre zéro considérée jusqu'à maintenant.

Les efforts à poursuivre ce travail doivent s'accompagner, d'une part, d'une mise à jour des observations planétaires et, d'autre part, d'une mise à jour des connaissances à priori des masses d'astéroïdes. Au final, ce ne sont pas des techniques évoluées de régularisation, mais ces informations supplémentaires qui peuvent conduire vers un meilleur ajustement. Les années à venir apporteront plusieurs opportunités d'élargir les observations planétaires disponibles aujourd'hui¹. Le suivi des sondes MEX et VEX devrait se poursuivre jusque fin 2012. La sonde MESSENGER sera mise en orbite autour de Mercure début 2011 et pourra ainsi fournir des observations précises de la planète, analogues à celles dont on dispose aujourd'hui pour Mars et Vénus. La version INPOP10a exploite déjà les données MESSENGER au cours des survols de Mercure. De la même manière, il devrait être possible d'exploiter les survols de Jupiter (en 2007) et de Pluton (en 2015) par la sonde New Horizons. Les observations précises des deux planètes pourraient élargir l'ensemble des astéroïdes à modéliser dans INPOP aux troyens et aux objets trans-Neptuniens. Notons la possibilité d'utiliser le suivi de la sonde Dawn pour obtenir des mesures précises des distances Terre-Vesta et Terre-Ceres. On exploiterait ces mesures dans INPOP au même titre que les observations des distances Terre-planètes. La mise en orbite autour des deux astéroïdes est programmée pour 2011 et 2015 respectivement. Dans un futur proche, on peut s'attendre également à une amélioration des estimations de masses d'astéroïdes obtenues indépendamment des éphémérides planétaires. D'une part les observations infrarouges avec de nouveaux instruments comme le télescope Spitzer vont compléter les mesures anciennes SIMPS/MIMPS. Le nombre de diamètres estimés par la méthode radiométrique augmentera considérablement. D'autre part avec les relevés comme Pan-STARRS ou GAIA, on disposera d'observations des astéroïdes d'une

1. Les dates mentionnées dans la suite du texte ont été obtenues à partir des sites dédiés aux différentes missions. On renvoie le lecteur notamment à sci.esa.int, messenger.jhuapl.edu, pluto.jhuapl.edu et dawn.jpl.nasa.gov.

précision sans précédent. Les observations permettront une quantité importante de déterminations astrométriques de masses (voir section 1.3.3). Ces nouvelles déterminations pourront servir d'informations à priori lors des ajustements d'éphémérides planétaires. Sachant que la précision d'observations GAIA devrait être meilleure que 1 mas, on peut même imaginer que les observations des astéroïdes fournies par GAIA permettront à elles seules l'amélioration des orbites des planètes. Avec cette précision, l'ajustement des astéroïdes pourrait contraindre les mouvements planétaires au même titre que l'ajustement de l'orbite d'une sonde spatiale. L'ajustement simultané des orbites des astéroïdes et des orbites des planètes contribuerait alors à une nette amélioration des éphémérides planétaires.

La deuxième partie de la thèse est dédiée à l'étude des effets des astéroïdes sur les satellites placés au niveau du point de Lagrange L_2 du système Terre-Soleil. Une des motivations de l'étude était de pouvoir éventuellement exploiter le suivi des sondes Herschel et Planck afin de déterminer des masses d'astéroïdes que l'on pourrait ensuite introduire dans INPOP. La perturbation d'une orbite placée initialement sur la variété centrale du problème circulaire restreint à 3 corps (PCR3C) se traduit par une divergence en $A_0 e^{\Lambda t}$ par rapport à l'orbite non perturbée. Ce comportement exponentiel n'est pas l'unique composante de la perturbation, néanmoins avec le temps il devient rapidement dominant. L'évolution d'une particule dans un système perturbé est en fait similaire à l'évolution dans le système non perturbé pour une condition initiale placée à l'extérieur de la variété centrale. La vitesse de la divergence exponentielle est donnée par le paramètre Λ qui s'obtient, pour une orbite quasi-périodique donnée, par le calcul de la forme normale. L'expression de l'amplitude A_0 en fonction des paramètres orbitaux de l'astéroïde a été calculée analytiquement dans le cadre d'un problème plan à 4 corps (PQBCR4C). Nous avons conclu qu'un astéroïde de la masse de Ceres situé sur une orbite circulaire au delà de 2 UA pouvait induire sur les orbites de Herschel et Planck un effet maximal de 1 m en 2 mois. Un tel effet est entièrement indétectable à partir des observations des satellites. Les erreurs sur le suivi des deux satellites sont supérieures à 1 m et des manoeuvres opérées sur les trajectoires évitent une accumulation des perturbations sur plus de un mois.

Une estimation numérique des effets induits sur Herschel et Planck, avec des astéroïdes placés sur des orbites réalistes, aboutit à une conclusion analogue à celle suggérée par l'étude analytique. Les effets des astéroïdes les plus perturbateurs n'atteignent le mètre qu'au bout de plusieurs mois. On note alors que les perturbations sont entièrement dominées par une composante exponentielle ce qui rend les effets des différents astéroïdes entièrement indifférentiables. Pour généraliser ce résultat obtenu pour les premiers mois des missions à un intervalle de temps plus long, les effets des astéroïdes ont été estimés dans des configurations de rencontres proches avec le point L_2 ayant lieu entre 2009 et 2030. En faisant l'hypothèse que les perturbations des astéroïdes sont maximales lors de rencontres proches, ces estimations fournissent pour chaque astéroïde une borne supérieure sur l'effet qu'il peut induire. Même en situation de rencontre proche, les perturbations observées sont toujours inférieures au mètre en 2 mois. Ce résultat obtenu à partir des orbites de Herschel et Planck peut être considéré comme valable pour n'importe quel autre orbite quasi-périodique. En effet, la grande majorité des astéroïdes passe suffisamment loin de L_2 pour que la distance minimale astéroïde-sonde soit quasiment identique pour Herschel, Planck ou tout autre objet en orbite autour de L_2 . Une liste contenant une trentaine d'objets intervenant dans des rencontres extrêmement proches avec le point L_2 a été établie. L'effet induit par ces objets n'a pas été déterminé mais pourrait l'être dans le cadre d'une étude future.

Chapitre 9

Annexes

9.1 Masses d'astéroïdes

On rassemble dans le tableau suivant les masses d'astéroïdes déterminées aujourd'hui avec précision. Le tableau se base sur Baer *et al.* (2009)¹ qui rassemble la majorité des masses disponibles dans la littérature avant janvier 2009. Parmi toutes les valeurs publiées, on donne les déterminations qui d'après la discussion de la section 1.3 se présentent comme les plus significatives, le tableau n'est donc pas exhaustif. On adopte pour Ceres, Pallas et Vesta les déterminations obtenues par Fienga *et al.* (2009) dans un ajustement aux observations de INPOP08. Les déterminations astrométriques proviennent uniquement de Baer et Chesley (2008) et Baer *et al.* (2008). Dans la section 1.3 on a estimé l'erreur systématique de la méthode astrométrique à $10^{-12}M_{\odot}$. Par conséquent, parmi les masses obtenues avec cette méthode, on a gardé que les masses supérieures à $2 \times 10^{-12}M_{\odot}$.

Pour chaque astéroïde on donne dans le tableau la méthode qui a permis la détermination de sa masse. Les lettres E,A,M et S correspondent respectivement à la détermination par ajustement d'une éphéméride, à la méthode astrométrique, à l'observation d'un système multiple et à la détermination à partir du suivi d'une sonde. Le tableau rassemble en plus des masses, leurs incertitudes formelles comme elles sont fournies par les différents auteurs. Les incertitudes calculées à partir d'une erreur systématique de $10^{-12}M_{\odot}$ sont données entre parenthèse uniquement si elles sont plus grandes que l'erreur formelle. On note que pour les astéroïdes multiples, la masse correspond à la masse totale du système.

astéroïde	masse [$M_{\odot}$]	incertitude	méthode	référence
1 Ceres	4.658e-10	1 %	E	Fienga <i>et al.</i> (2009)
2 Pallas	1.076e-10	1 %	E	Fienga <i>et al.</i> (2009)
3 Juno	1.340e-11	17 %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
4 Vesta	1.392e-10	1 %	E	Fienga <i>et al.</i> (2009)
6 Hebe	6.460e-12	5 (15) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
7 Iris	6.860e-12	7 (15) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
8 Flora	4.260e-12	11 (23) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
9 Metis	5.700e-12	25 %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
10 Hygiea	4.450e-11	2 %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
11 Parthenope	3.090e-12	1 (32) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
13 Egeria	8.200e-12	20 %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)

1. Des versions actualisées de la compilation sont régulièrement mises à disposition par Jim Baer à l'adresse <http://home.earthlink.net/~jimbaer1/astmass.txt>

Suite.

astéroïde	masse [$M_{\odot}$]	incertitude	méthode	référence
14 Irene	4.130e-12	18 (24) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
15 Eunomia	1.570e-11	1 (6) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
16 Psyche	1.100e-11	4 (9) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
19 Fortuna	6.380e-12	4 (16) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
20 Massalia	2.850e-12	14 (35) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
22 Kalliope	4.070e-12	2 %	M	Marchis <i>et al.</i> (2008a)
24 Themis	5.670e-12	38 %	A	Baer et Chesley (2008)
29 Amphitrite	5.920e-12	5 (17) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
31 Euphrosyne	3.130e-12	19 (32) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
45 Eugenia	2.860e-12	2 %	M	Marchis <i>et al.</i> (2008a)
52 Europa	8.290e-12	10 (12) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
65 Cybele	8.930e-12	7 (11) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
87 Sylvia	7.431e-12	<0.5 %	M	Marchis <i>et al.</i> (2005)
88 Thisbe	5.300e-12	17 (19) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
90 Antiope	4.173e-13	2 %	M	Descamps <i>et al.</i> (2007)
107 Camilla	5.630e-12	3 %	M	Marchis <i>et al.</i> (2008a)
121 Hermione	2.705e-12	6 %	M	Marchis <i>et al.</i> (2005)
130 Elektra	3.320e-12	6 %	M	Marchis <i>et al.</i> (2008b)
243 Ida	1.900e-14	5 %	M	Petit <i>et al.</i> (1997)
253 Mathilde	5.194e-14	4 %	S	Yeomans <i>et al.</i> (1997)
283 Emma	6.938e-13	2 %	M	Marchis <i>et al.</i> (2008b)
379 Huenna	1.926e-13	5 %	M	Marchis <i>et al.</i> (2008b)
433 Eros	3.362e-15	<0.5 %	S	Yeomans <i>et al.</i> (2000)
511 Davida	2.200e-11	5 %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
617 Patroclus	6.840e-13	8 %	M	Marchis <i>et al.</i> (2006)
704 Interamnia	1.860e-11	6 %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
762 Pulcova	7.040e-13	7 %	M	Marchis <i>et al.</i> (2008a)
804 Hispania	2.020e-12	21 (50) %	A	Baer <i>et al.</i> (2008)
3749 Balam	2.560e-16	4 %	M	Marchis <i>et al.</i> (2008b)
25143 Itokawa	1.760e-20	3 %	S	Fujiwara <i>et al.</i> (2006)
66391 (1999KW4)	1.250e-18	4 %	M	Ostro <i>et al.</i> (2006)
136108 Haumea	2.014e-09	1 %	M	Ragozzine et Brown (2009)
136199 Eris	8.346e-09	1 %	M	Brown et Schaller (2007)
185851 (2000DP107)	2.420e-19	10 %	M	Margot <i>et al.</i> (2002)

9.2 Compilation Astdata

La compilation Astdata est disponible publiquement² et rassemble des données provenant de diverses sources pour l'ensemble des 219017 astéroïdes considérés au chapitre 1. Le fichier consiste d'un tableau dénommé **data** de 17 colonnes et 219017 lignes lisible par la commande **load** du logiciel³ libre R. Nous donnons ici un bref descriptif de chaque colonne mais on renvoie le lecteur au chapitre 1 et particulièrement à la section 1.4 pour plus de détails. Le suffixe **_I** dans le nom d'une colonne indique que celle-ci a été compilée au chapitre 1 et ne provient pas d'une source particulière.

- **pdes** : Numéro IAU de l'astéroïde
- **name** : Nom de l'astéroïde
- **alb** : Albedo fournit par le Small Body Database Search Engine (SBDSE). Cette base⁴ rassemble des déterminations d'albedos de sources très diverses. Elle constitue donc un bon point de départ pour rechercher l'albedo et le diamètre d'un astéroïde particulier. La majorité des albedos proviennent de SIMPS néanmoins un nombre importants d'albedos sont adoptés arbitrairement.
- **diam** : Diamètre fournit par SBDE très souvent déterminé à partir de l'albedo.
- **taxo_T** : Taxonomie de Tholen fournie par SBDE.
- **taxo_B** : Taxonomie SMASSII fournie par SBDE.
- **H** : Magnitude absolue provenant de Astorb (voir section 1.2).
- **taxo_I** : Appartenance à une des deux classes d'albedo C ou S. L'appartenance est déterminée au chapitre 1 à partir des taxonomies de Tholen et SMASSII compilées par Neese (2006), dans certains cas rares ces taxonomies peuvent être différentes des taxonomie fournies par SBDE.
- **alb_I** : Valeurs d'albedos attribuées au même temps que les diamètres à tous les astéroïdes selon le processus décrit au chapitre 1.
- **diam_I** : Diamètre lié à l'albedo par la magnitude absolue. L'unité est le kilomètre.
- **diam_err_I** : Catégorie d'incertitude. La catégorie I correspond à des incertitudes inférieures à 10% sur les diamètres. La catégorie II correspond à une incertitude inférieure à 35% et la catégorie III correspond à une surestimation ou sous-estimation du diamètre par un facteur 2 ou même 3.
- **diam_src_I** : Source ayant permis d'attribuer l'albedo et donc le diamètre. Il peut s'agir des données SIMPS (Tedesco *et al.*, 2004a), MIMPS (Tedesco *et al.*, 2004b), des taxonomies (Neese, 2006) ou des travaux de Stansberry *et al.* (2008), Drummond *et al.* (2009) et Storrs *et al.* (2005). Les albedos peuvent dans certains cas être attribués uniquement en fonction du demi-grand axe.
- **a,l,e,w,I,0** : Valeurs des éléments orbitaux ($a, \lambda, e, \varpi, I, \Omega$) en J2000 obtenues à partir de Astorb dans un repère orienté selon la direction et l'écliptique de Jupiter. Les unités sont l'UA pour les demi-grands axes et le degrés pour les angles.
- **fam** : Famille dynamique selon Zappala *et al.* (1997). La colonne ne contient que les 15 familles dynamiques considérées dans Tedesco *et al.* (2005) pour la construction d'un modèle de la ceinture d'astéroïdes.
- **mass_I** : Masses des astéroïdes en $M_{\odot}$. A l'exception de Ceres, Pallas et Vesta où les masses proviennent de Fienga *et al.* (2009), les valeurs sont obtenues à partir du diamètre **diam_I** et d'une densité moyenne de 2.5 g cm^{-3} .

2. Astdata est disponible sur www.imcce.fr/~kuchynka/Astdata/Astdata.

3. Le projet R est consultable sur www.r-project.org.

4. SBDSE est accessible sur ssd.jpl.nasa.gov/sbdb_query.cgi. Pour consulter les astéroïdes un à un on renvoie à ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi.

Dans l'extrait de Astdata qui suit, on a omis la colonne **fam** sinon le tableau est donné ainsi qu'il s'affiche dans R. La liste contient l'ensemble des astéroïdes qui apparaissent dans le texte et dans les annexes de cette thèse. Dans Astdata, lorsqu'une entrée n'est pas disponible, elle apparaît comme un tiré horizontal pour le texte et comme NA pour les données numériques. Certaines entrées dans la colonne **diam_src_I** sont entre parenthèses. Il s'agit de données dont les diamètres étaient de catégorie III et qui donc ont été recalculées à partir d'un albedo moyen de 0.125.

pdes	name	alb	diam	taxo_T	taxo_B	H	taxo_I	alb_I	diam_I	diam_err_I	diam_src_I	a	l	e	w	I	O	mass_I
1	Ceres	0.0900	952.40	G	C	3.34	C	0.1133	848.00	I	simps	2.766	124.346	0.078	118.170	9.368	41.505	4.658e-10
2	Pallas	0.1587	532.00	B	B	4.13	C	0.1587	498.00	I	simps	2.772	79.744	0.230	86.784	34.478	138.719	1.076e-10
3	Juno	0.2383	233.92	S	Sk	5.33	S	0.2380	234.00	I	simps	2.668	-97.955	0.258	21.777	12.573	139.374	8.432e-12
4	Vesta	0.4228	530.00	V	V	3.20	-	0.4232	468.00	I	simps	2.362	-161.732	0.090	-142.756	5.832	68.433	1.392e-10
5	Astraea	0.2268	119.07	S	S	6.85	S	0.2270	119.00	I	simps	2.574	142.700	0.192	103.054	4.470	116.475	1.109e-12
6	Hebe	0.2679	185.18	S	S	5.71	S	0.2684	185.00	I	simps	2.425	27.495	0.202	-18.579	13.768	105.876	4.167e-12
7	Iris	0.2766	199.83	S	S	5.51	S	0.2761	200.00	I	simps	2.385	62.046	0.230	8.643	6.761	-132.532	5.265e-12
8	Flora	0.2426	135.89	S	-	6.49	S	0.2421	136.00	I	simps	2.202	-134.198	0.156	-0.103	4.609	77.715	1.655e-12
9	Metis	0.1180	190.00	S	-	6.28	S	0.2261	155.00	I	mimps	2.387	-130.204	0.122	38.580	4.518	24.063	2.451e-12
10	Hygiea	0.0717	407.12	C	C	5.43	C	0.0718	407.00	I	simps	3.138	180.960	0.119	-158.255	5.146	-113.428	4.437e-11
11	Parthenope	0.1803	153.33	S	Sk	6.55	S	0.1810	153.00	I	simps	2.453	-166.318	0.099	-76.355	3.485	98.514	2.357e-12
12	Victoria	0.1765	112.77	S	L	7.24	S	0.1757	113.00	I	simps	2.335	-107.765	0.219	-91.333	9.339	-155.047	9.496e-13
13	Egeria	0.0825	207.64	G	Ch	6.74	C	0.0822	208.00	I	simps	2.577	33.796	0.085	87.701	15.871	3.184	5.922e-12
14	Irene	0.1590	152.00	S	S	6.30	S	0.2000	163.31	II	taxo	2.585	80.664	0.167	146.734	7.847	47.936	2.866e-12
15	Eunomia	0.2094	255.33	S	S	5.28	S	0.2099	255.00	I	simps	2.644	101.381	0.186	-5.782	13.022	-104.047	1.091e-11
16	Psyche	0.1203	253.16	M	X	5.90	-	0.1205	253.00	I	simps	2.921	-41.139	0.138	-16.731	2.466	138.059	1.066e-11
17	Thetis	0.1715	90.04	S	Sl	7.76	S	0.1716	90.00	II	simps	2.470	178.001	0.136	-135.107	4.440	96.512	4.797e-13
18	Melpomene	0.2225	140.57	S	S	6.51	S	0.2211	141.00	I	simps	2.295	50.129	0.218	-18.138	9.345	120.376	1.845e-12
19	Fortuna	0.0370	200.00	G	Ch	7.13	C	0.0538	214.77	I	storsrs2005	2.443	172.241	0.158	-2.841	2.375	-153.960	6.519e-12
20	Massalia	0.2096	145.50	S	S	6.50	S	0.2081	146.00	I	simps	2.409	124.781	0.142	65.873	1.647	-140.116	2.048e-12
21	Lutetia	0.2212	95.76	M	Xk	7.35	-	0.2200	96.00	II	simps	2.436	-110.793	0.162	-65.214	1.888	31.300	5.822e-13
22	Kalliope	0.1419	181.00	M	X	6.45	-	0.1418	181.00	I	simps	2.908	-98.493	0.101	27.401	12.665	26.780	3.902e-12
23	Thalia	0.2536	107.53	S	S	6.95	S	0.2513	108.00	I	simps	2.627	-126.251	0.233	90.451	9.086	26.507	8.290e-13
24	Themis	0.0670	198.00	C	B	7.08	C	0.0500	228.06	II	taxo	3.126	-72.342	0.134	108.886	1.193	-80.647	7.806e-12
25	Phocaea	0.2310	75.13	S	S	7.83	S	0.2317	75.00	II	simps	2.400	10.236	0.256	-91.802	22.137	-179.039	2.776e-13
26	Proserpina	0.1966	94.80	S	S	7.50	S	0.1957	95.00	II	simps	2.656	142.036	0.088	-156.462	3.000	-11.060	5.642e-13
27	Euterpe	0.1620	96.00	S	S	7.00	S	0.2000	118.31	II	taxo	2.347	-103.929	0.172	55.219	0.313	34.210	1.090e-12
28	Bellona	0.1763	120.90	S	S	7.09	S	0.176										

93	Minerva	0.0733	141.55	CU	C	7.70	C	0.0729	142.00	I	simps	2.754	-80.533	0.140	-118.130	8.792	-40.143	1.884e-12
94	Aurora	0.0395	204.89	CP	C	7.57	C	0.0394	205.00	I	simps	3.163	-181.595	0.083	23.731	8.256	-42.377	5.669e-12
95	Arethusa	0.0698	136.04	C	Ch	7.84	C	0.0698	136.00	I	simps	3.072	-139.428	0.145	1.419	14.050	-149.698	1.655e-12
96	Aegle	0.0523	170.02	T	T	7.67	C	0.0523	170.00	I	simps	3.063	16.688	0.132	131.200	16.925	-77.126	3.233e-12
97	Klotho	0.2285	82.83	M	-	7.63	-	0.2275	83.00	II	simps	2.670	-171.452	0.256	32.236	11.166	129.213	3.763e-13
98	Ianthe	0.0471	104.45	CG	Ch	8.84	C	0.0475	104.00	I	simps	2.685	103.070	0.189	116.728	16.028	-46.486	7.403e-13
99	Dike	0.0627	69.04	C	Xk	9.43	C	0.0627	69.00	II	simps	2.661	-73.067	0.199	-159.497	13.271	0.857	2.162e-13
102	Miriam	0.0507	83.00	P	C	9.26	C	0.0507	83.00	II	simps	2.659	51.356	0.255	-38.453	5.759	-173.058	3.763e-13
105	Artemis	0.0465	119.08	C	Ch	8.57	C	0.0466	119.00	I	simps	2.373	-85.879	0.176	-152.101	21.476	155.528	1.109e-12
106	Dione	0.0893	146.59	G	Ggh	7.41	C	0.0888	147.00	I	simps	3.165	70.794	0.176	-4.339	3.680	13.521	2.090e-12
107	Camilla	0.0525	222.62	C	X	7.08	C	0.0523	223.00	I	simps	3.474	59.910	0.079	85.291	9.740	144.162	7.298e-12
109	Felicitas	0.0699	89.44	GC	Ch	8.75	C	0.0705	89.00	II	simps	2.699	146.397	0.296	23.650	8.150	-42.093	4.639e-13
111	Ate	0.0605	134.55	C	Ch	8.02	C	0.0600	135.00	I	simps	2.593	-81.751	0.102	76.100	6.125	-95.567	1.619e-12
112	Iphigenia	0.0393	72.18	DCX	Ch	9.84	C	0.0395	72.00	II	simps	2.435	-18.096	0.129	-55.332	3.667	-86.543	2.456e-13
114	Kassandra	0.0884	99.65	T	Xk	8.26	C	0.0877	100.00	II	simps	2.679	34.608	0.136	120.639	4.518	143.148	6.581e-13
115	Thyra	0.2747	79.83	S	S	7.51	S	0.2734	80.00	II	simps	2.379	-67.561	0.192	9.406	12.757	-89.888	3.369e-13
117	Lomia	0.0528	148.71	XC	X	7.95	-	0.0526	149.00	I	simps	2.991	-111.018	0.025	17.924	15.432	-51.585	2.177e-12
120	Lachesis	0.0463	174.10	C	C	7.75	C	0.0463	174.00	I	simps	3.115	-130.517	0.063	179.621	7.671	-63.227	3.467e-12
121	Hermione	0.0482	209.00	C	Ch	7.31	C	0.0482	209.00	I	simps	3.441	-172.648	0.146	-28.320	6.445	32.000	6.008e-12
127	Johanna	NA	122.00	CX	Ch	8.30	C	0.0559	123.00	I	mimps	2.754	-66.827	0.066	88.059	7.880	-13.561	1.225e-12
128	Nemesio	0.0504	188.16	C	C	7.49	C	0.0504	188.00	I	simps	2.750	-28.722	0.128	-16.231	5.089	34.232	4.373e-12
129	Antigone	0.1640	113.00	M	X	7.07	-	0.1680	125.00	I	drummond2009	2.867	160.064	0.214	-151.261	11.195	104.065	1.285e-12
130	Elektra	0.0755	182.25	G	Ch	7.12	C	0.0757	182.00	I	simps	3.118	112.538	0.214	-16.300	21.989	111.842	3.967e-12
132	Aethra	0.1990	42.87	M	Xe	9.38	-	0.1691	43.00	II	simps	2.610	-180.638	0.388	116.931	26.273	-136.360	5.232e-14
134	Sophrasynne	0.0364	108.00	C	Ch	8.76	C	0.0366	123.00	I	simps	2.563	-109.476	0.117	34.356	12.177	-55.534	1.225e-12
135	Hertha	0.1436	79.24	M	Xk	8.23	-	0.1445	79.00	II	simps	2.430	-131.446	0.204	-72.576	3.111	-74.262	3.245e-13
137	Meliboea	0.0503	145.42	C	-	8.05	C	0.0506	145.00	I	simps	3.113	129.480	0.222	-86.483	13.758	171.422	2.006e-12
139	Juewa	0.0557	156.60	CP	X	7.78	-	0.0554	157.00	I	simps	2.784	-13.951	0.174	131.651	11.192	-40.616	2.547e-12
140	Siwa	0.0676	109.79	P	Xc	8.3												

335	Roberta	0.0580	89.07	FP	B	8.96	C	0.0581	89.00	II	simps	2.474	154.735	0.176	-108.677	4.327	125.238	4.639e-13
336	Lacadiera	0.0459	69.31	D	Xk	9.76	C	0.0463	69.00	II	simps	2.252	-132.050	0.095	-130.665	6.633	-153.036	2.162e-13
337	Devosa	0.1614	59.11	X	X	8.74	-	0.1619	59.00	II	simps	2.383	45.522	0.138	57.667	8.284	-49.389	1.352e-13
344	Desiderata	0.0592	132.27	C	-	8.08	C	0.0594	132.00	I	simps	2.593	-157.101	0.318	-110.939	17.623	9.067	1.514e-12
345	Tercidina	0.0654	94.12	C	Ch	8.71	C	0.0656	94.00	II	simps	2.325	92.207	0.061	46.072	10.314	-176.783	5.466e-13
346	Hermantaria	0.2189	106.52	S	S	7.13	S	0.2169	107.00	I	simps	2.797	-19.575	0.103	-12.663	7.465	54.493	8.062e-13
350	Ornamenta	0.0566	118.35	C	-	8.37	C	0.0569	118.00	I	simps	3.116	-157.599	0.153	32.828	23.607	53.538	1.081e-12
354	Eleonora	0.1948	155.17	S	Sl	6.44	S	0.1952	155.00	I	simps	2.800	38.632	0.112	110.234	17.401	106.933	2.451e-12
356	Liguria	0.0528	131.31	C	-	8.22	C	0.0530	131.00	I	simps	2.757	-157.798	0.239	37.716	8.667	-49.653	1.479e-12
360	Carlova	0.0535	115.76	C	C	8.48	C	0.0532	116.00	I	simps	2.997	-54.199	0.182	25.698	10.625	100.143	1.027e-12
361	Bononia	0.0453	141.72	DP	-	8.22	-	0.0451	142.00	I	simps	3.954	-16.988	0.213	52.698	12.526	-22.887	1.884e-12
362	Havnia	NA	98.00	XC	-	9.00	-	0.1250	59.58	III	-	2.578	62.388	0.043	21.339	7.792	-18.010	1.392e-13
365	Corduba	0.0335	105.92	X	C	9.18	C	0.0335	106.00	I	simps	2.802	47.669	0.157	3.802	12.760	154.989	7.838e-13
372	Palma	0.0655	188.62	BFC	B	7.20	C	0.0652	189.00	I	simps	3.142	-27.158	0.264	47.689	24.774	-70.841	4.443e-12
375	Ursula	NA	216.00	C	Xc	7.47	C	0.0500	190.56	II	taxo	3.123	39.383	0.107	-73.770	16.692	-63.204	4.554e-12
379	Huenna	0.0587	92.33	B	C	8.87	C	0.0591	92.00	II	simps	3.128	85.920	0.193	-43.682	1.768	-179.495	5.124e-13
386	Siegena	0.0692	165.01	C	C	7.43	C	0.0692	165.00	I	simps	2.895	-74.944	0.172	-8.701	19.756	134.084	2.956e-12
387	Aquitania	0.1900	100.51	S	L	7.41	S	0.1881	101.00	I	simps	2.739	-102.855	0.237	-111.712	16.931	94.235	6.780e-13
389	Industria	0.1983	79.23	S	S	7.88	S	0.1994	79.00	II	simps	2.609	163.349	0.066	151.001	9.443	-113.952	3.245e-13
393	Lampetia	0.0829	96.89	C	Xc	8.39	C	0.0827	97.00	II	simps	2.778	-128.207	0.331	-93.769	15.430	-178.566	6.006e-13
404	Arsinoe	0.0461	97.71	C	Ch	9.01	C	0.0458	98.00	II	simps	2.593	-130.354	0.200	177.560	12.832	55.655	6.194e-13
405	Thia	0.0468	124.90	C	Ch	8.46	C	0.0467	125.00	I	simps	2.581	-61.177	0.247	167.925	13.140	-138.526	1.285e-12
407	Arachne	0.0548	95.07	C	-	8.88	C	0.0549	95.00	II	simps	2.625	172.215	0.069	-20.454	8.811	-103.472	5.642e-13
409	Aspasia	0.0606	161.61	CX	Xc	7.62	-	0.0603	162.00	I	simps	2.576	96.654	0.071	-160.380	12.293	-150.140	2.798e-12
410	Chloris	0.0554	123.57	C	Ch	8.30	C	0.0550	124.00	I	simps	2.727	114.876	0.238	-126.653	9.625	60.574	1.255e-12
412	Elisabetha	0.0536	90.96	-	C	9.00	C	0.0536	91.00	II	simps	2.762	-56.222	0.043	162.468	12.465	71.014	4.959e-13
415	Palatia	0.0628	76.34	DP	-	9.21	-	0.0633	76.00	II	simps	2.794	-176.816	0.300	28.234	7.029	95.539	2.889e-13
416	Vaticana	0.1689	85.47	S	Sl	7.89												

769	Tatjana	0.0429	106.44	-	-	8.90	-	0.0433	106.00	I	simps	3.181	10.962	0.179	-101.966	6.843	-7.204	7.838e-13
784	Pickeringia	0.0555	89.42	-	C	9.00	C	0.0560	89.00	II	simps	3.100	45.998	0.239	-142.118	12.247	-27.201	4.639e-13
786	Bredichina	0.0730	91.60	C	-	8.65	C	0.0724	92.00	II	simps	3.166	-126.516	0.170	-171.987	13.289	52.750	5.124e-13
788	Hohensteina	0.0787	103.68	-	-	8.30	-	0.0782	104.00	I	simps	3.145	5.919	0.121	-172.383	14.089	147.141	7.403e-13
790	Pretoria	0.0384	170.37	P	-	8.00	-	0.0386	170.00	I	simps	3.409	113.802	0.151	-103.093	21.702	-142.529	3.233e-12
804	Hispania	0.0520	157.58	PC	C	7.84	C	0.0517	158.00	I	simps	2.836	46.072	0.142	-65.153	15.928	-52.611	2.596e-12
814	Tauris	0.0470	109.56	C	C	8.74	C	0.0466	110.00	I	simps	3.151	2.394	0.311	-9.969	20.559	51.874	8.759e-13
886	Washingtonia	0.0713	90.56	-	C	8.70	C	0.0706	91.00	II	simps	3.184	-148.838	0.262	-37.947	15.754	21.307	4.959e-13
895	Helio	0.0420	141.90	FCB	B	8.30	C	0.0419	142.00	I	simps	3.199	-34.500	0.149	49.104	27.320	-130.755	1.884e-12
911	Agamemnon	0.0444	166.66	D	-	7.89	C	0.0442	167.00	I	simps	5.239	74.185	0.068	22.420	22.534	-60.939	3.065e-12
914	Palisana	0.0943	76.61	CU	-	8.76	-	0.0933	77.00	II	simps	2.458	-128.483	0.212	-92.266	26.441	-139.234	3.004e-13
932	Hooveria	NA	NA	CB	-	10.00	C	0.0500	59.43	II	taxo	2.420	-151.528	0.090	27.854	8.124	-30.139	1.381e-13
943	Begonia	0.0456	69.21	ST	-	9.77	-	0.0459	69.00	II	simps	3.125	139.114	0.206	82.212	10.817	79.394	2.162e-13
951	Gaspra	NA	12.20	S	S	11.46	S	0.2000	15.17	II	taxo	2.209	82.821	0.174	-13.682	5.297	-136.522	2.297e-15
952	Caia	0.0554	81.61	-	-	9.20	-	0.0549	82.00	II	simps	2.982	24.022	0.252	-22.508	9.950	-24.865	3.628e-13
1021	Flammario	0.0458	99.39	F	B	8.98	C	0.0461	99.00	II	simps	2.737	9.293	0.288	5.613	14.568	80.883	6.385e-13
1036	Ganymed	0.2926	31.66	S	S	9.45	S	0.2863	32.00	II	simps	2.658	65.101	0.538	-48.465	27.227	-178.205	2.156e-14
1093	Freda	0.0381	116.73	C	-	8.83	C	0.0379	117.00	I	simps	3.133	17.729	0.269	-88.031	24.298	17.394	1.054e-12
1107	Lictoria	0.0646	79.17	-	Xc	9.10	-	0.0648	79.00	II	simps	3.177	-57.531	0.129	69.871	5.789	77.125	3.245e-13
1171	Rusthavelia	0.0394	70.13	P	-	9.90	-	0.0395	70.00	II	simps	3.174	115.521	0.198	11.097	1.916	101.634	2.257e-13
1172	Aneas	0.0403	142.82	D	-	8.33	C	0.0402	143.00	I	simps	5.180	-54.141	0.105	-100.294	17.810	-146.613	1.924e-12
1173	Anchises	0.0308	126.27	P	-	8.89	-	0.0309	126.00	I	simps	5.324	-63.559	0.137	-72.753	8.210	-112.887	1.316e-12
1235	Schorria	NA	NA	CX:	-	12.68	-	0.2000	8.65	II	zone1	1.910	-59.304	0.155	20.707	24.983	-26.029	4.259e-16
1317	Silvretta	NA	NA	CX:	-	9.91	-	0.0500	61.95	II	zone2	3.187	109.353	0.245	1.371	20.796	-32.469	1.565e-13
1437	Diomedes	0.0313	164.31	DP	-	8.30	-	0.0314	164.00	I	simps	5.139	86.469	0.046	47.913	21.623	-82.361	2.903e-12
1867	Deiphobus	0.0422	122.67	D	-	8.61	C	0.0420	123.									

162082	-	NA	NA	-	- 18.90	- 0.2000	0.49	II	zone1	1.246	-101.697	0.187	-34.440	20.592	-179.447	7.742e-20
162421	-	NA	NA	-	- 18.30	- 0.2000	0.65	II	zone1	0.947	44.552	0.124	-18.533	23.169	-67.418	1.807e-19
163132	-	NA	NA	-	- 18.30	- 0.2000	0.65	II	zone1	1.220	-43.247	0.296	-128.346	48.074	122.506	1.807e-19
163348	-	NA	NA	-	- 20.00	- 0.2000	0.30	II	zone1	0.877	-145.430	0.434	85.544	6.654	-132.609	1.777e-20
163364	-	NA	NA	-	- 18.80	- 0.2000	0.52	II	zone1	1.364	24.712	0.369	138.751	5.418	-131.291	9.253e-20
163373	-	NA	NA	-	- 19.00	- 0.2000	0.47	II	zone1	1.471	58.410	0.547	-167.307	2.700	-87.891	6.832e-20
163899	-	NA	NA	-	- 16.80	- 0.2000	1.30	II	zone1	0.829	5.584	0.210	-155.758	9.759	-121.200	1.446e-18
164121	-	NA	NA	-	- 16.20	- 0.2000	1.71	II	zone1	1.110	-105.252	0.292	93.471	43.468	0.886	3.291e-18
171576	-	NA	NA	-	- 18.50	- 0.2000	0.59	II	zone1	1.084	4.492	0.583	-126.754	17.743	175.871	1.352e-19
173561	-	NA	NA	-	- 18.60	- 0.2000	0.57	II	zone1	1.448	-161.410	0.311	-47.914	26.972	102.566	1.219e-19
174567	-	NA	NA	-	- 3.60	- 0.1250	716.26	III	-	45.542	-140.856	0.146	-27.850	21.446	151.274	2.418e-10
175113	-	NA	NA	-	- 4.70	- 0.1250	431.59	III	-	39.048	-85.337	0.064	131.839	12.125	46.789	5.291e-11
199145	-	NA	NA	-	- 18.30	- 0.2000	0.65	II	zone1	1.649	-132.580	0.732	-141.287	4.987	-100.593	1.807e-19
202421	-	NA	NA	-	- 3.40	- 0.1250	785.36	III	-	43.620	-22.680	0.140	131.563	26.878	-89.718	3.188e-10
208996	-	NA	NA	-	- 3.60	- 0.1250	716.26	III	-	39.578	74.943	0.175	-128.698	14.687	-141.980	2.418e-10
214869	-	NA	NA	-	- 16.30	- 0.1250	2.07	III	-	2.835	142.895	0.660	38.617	1.348	147.713	5.837e-18
216258	-	NA	NA	-	- 20.20	- 0.2000	0.27	II	zone1	1.672	7.704	0.485	107.594	3.756	-142.448	1.295e-20

9.3 Partie directe de la fonction de perturbation

L'expression (2.15) donnée au chapitre 2 correspond à la partie directe de la fonction de perturbation développée à l'ordre 2 en excentricités et inclinaisons. On reproduit depuis Brouwer et Clemence (1961) les coefficients $C_i^{(k)}$ qui interviennent dans (2.15). On a donc

$$\begin{aligned}
C_1^{(k)} &= \frac{1}{2}b_{1/2}^{(k)} \\
C_2^{(k)} &= \frac{-4k^2 + 2\alpha D + \alpha^2 D^2}{8}b_{1/2}^{(k)} \\
C_3^{(k)} &= -\frac{\alpha}{4}b_{3/2}^{(k-1)} - \frac{\alpha}{4}b_{3/2}^{(k+1)} \\
C_4^{(k)} &= \frac{-2k - \alpha D}{2}b_{1/2}^{(k)} \\
C_5^{(k)} &= \frac{-1 + 2k + \alpha D}{2}b_{1/2}^{(k-1)} \\
C_6^{(k)} &= \frac{2 + 6k + 4k^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2}{4}b_{1/2}^{(k+1)} \\
C_7^{(k)} &= \frac{-2 + 6k - 4k^2 + 2\alpha D - 4k\alpha D - \alpha^2 D^2}{4}b_{1/2}^{(k-1)} \\
C_8^{(k)} &= \frac{-5k + 4k^2 - 2\alpha D + 4k\alpha D + \alpha^2 D^2}{8}b_{1/2}^{(k)} \\
C_9^{(k)} &= \frac{2 - 7k + 4k^2 - 2\alpha D + 4k\alpha D + \alpha^2 D^2}{8}b_{1/2}^{(k-2)} \\
C_{10}^{(k)} &= \alpha b_{3/2}^{(k+1)} \\
C_{11}^{(k)} &= -\alpha b_{3/2}^{(k-1)} \\
C_{12}^{(k)} &= \frac{\alpha}{2}b_{3/2}^{(k-1)}
\end{aligned}$$

L'opérateur D correspond à la dérivée par rapport à α . On rappelle que l'on a

$$Db_s^{(k)} = s \left(b_{s+1}^{(k-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(k)} + b_{s+1}^{(k+1)} \right)$$

Les relations de récurrence (2.12) s'écrivent

$$\begin{aligned}
b_{s+1}^{(k)} &= \frac{s+k}{s} \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} b_s^{(k)} - \frac{2(k-s+1)}{s} \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2} b_s^{(k+1)} \\
b_{s+1}^{(k+1)} &= \frac{k}{k-s} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) b_{s+1}^{(k)} - \frac{k+s}{k-s} b_{s+1}^{(k-1)}
\end{aligned}$$

Avec ces relations, on peut exprimer l'ensemble des $C_i^{(k)}$ en fonction uniquement de $b_{3/2}^{(k)}$ et $b_{3/2}^{(k+1)}$.

Il serait biensûr possible d'exprimer les $C_i^{(k)}$ en fonction de $b_{1/2}^{(k)}, b_{1/2}^{(k+1)}$ ou de tout autre paire de coefficients de Laplace analogue. On peut ainsi comparer effectivement les formules de Brouwer et Clemence (1961) avec les expressions obtenues dans l'implémentation TRIP du développement de la fonction perturbatrice (voir chapitre 2). Egalement, en écrivant les $C_i^{(k)}$ en fonction de $b_{3/2}^{(k)}$ et $b_{3/2}^{(k+1)}$, on obtient des expressions plus simples que celles de Brouwer et Clemence (1961) pour une valeur de k particulière. Dans le cas général où k n'est pas évalué, les nouvelles expressions sont malheureusement plus volumineuses. L'implémentation des relations de récurrence dans un

logiciel de calcul formel⁵ conduit à

$$\begin{aligned}
C_1^{(k)} &= \frac{\alpha^2 + 1}{2(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k)} & - \frac{\alpha}{1 + 2k} b_{3/2}^{(k+1)} \\
C_2^{(k)} &= \frac{k(1 - 3k)(1 + \alpha^2)}{8(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k)} & + \frac{\alpha(6k^2 + 1)}{8(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k+1)} \\
C_3^{(k)} &= -\frac{k(\alpha^2 + 1)}{2(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k)} & - \frac{\alpha}{2(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k+1)} \\
C_4^{(k)} &= \frac{(\alpha^2(1 + k) - k)(2k + \alpha)}{2\alpha(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k)} & - \frac{2k + \alpha}{2(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k+1)} \\
C_5^{(k)} &= \frac{2k(k - 1)\alpha^4 + (3 - 4k)\alpha^2 + 2k(3k - 2)}{2\alpha(1 + 2k)(2k - 1)} b_{3/2}^{(k)} & + \frac{(1 - k)\alpha^2 - 3k + 2}{2(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k+1)} \\
C_6^{(k)} &= \frac{\alpha(3 + 8k + 6k^2)}{4(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k)} & - \frac{(1 + k)(2 + 3k)(1 + \alpha^2)}{4(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k+1)} \\
C_8^{(k)} &= \frac{(k - 2)^2\alpha^2 + k(9k - 8)}{8(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k)} & + \frac{\alpha(14k - 10k^2 - 3)}{8(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k+1)} \\
C_{10}^{(k)} &= & \alpha b_{3/2}^{(k+1)} \\
C_{11}^{(k)} &= -\frac{2k(\alpha^2 + 1)}{1 + 2k} b_{3/2}^{(k)} & + \frac{\alpha(2k - 1)}{1 + 2k} b_{3/2}^{(k+1)} \\
C_{12}^{(k)} &= \frac{k(\alpha^2 + 1)}{1 + 2k} b_{3/2}^{(k)} & + \frac{\alpha(1 - 2k)}{2(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k+1)}
\end{aligned}$$

Les expressions de $C_7^{(k)}$ et $C_9^{(k)}$ sont données par :

$$\begin{aligned}
C_7^{(k)} &= \frac{2k(1 - k)(k - 2)\alpha^4 + (9 - 18k + 6k^2)\alpha^2 - 6k(3k - 2)(k - 1)}{4\alpha(1 + 2k)(2k - 1)} b_{3/2}^{(k)} \\
&\quad + \frac{(k - 1)((k - 2)\alpha^2 - 6 + 9k)}{4(1 + 2k)} b_{3/2}^{(k+1)} \\
C_9^{(k)} &= \frac{4k^2(k - 1)(k - 2)\alpha^6 + k(35k - 24 - 12k^2)\alpha^4}{8\alpha^2(1 + 2k)(2k - 1)(2k - 3)} b_{3/2}^{(k)} \\
&\quad + \frac{(36 - 84k + 59k^2 - 12k^3)\alpha^2 + 4k(k - 1)(12 - 22k + 9k^2)}{8\alpha^2(1 + 2k)(2k - 1)(2k - 3)} b_{3/2}^{(k)} \\
&\quad + \frac{2k(1 - k)(k - 2)\alpha^4 + (9 - 16k + 6k^2)\alpha^2 + 2(1 - k)(9k^2 - 22k + 12)}{8\alpha(1 + 2k)(2k - 3)} b_{3/2}^{(k+1)}
\end{aligned}$$

5. On utilise le logiciel commercial Maple, www.maplesoft.com.

9.4 Effets des astéroïdes entre 1960 et 2020

Les tableaux suivant, rassemblent les astéroïdes les plus perturbateurs en terme de distances Terre-planètes sur l'intervalle 1960-2020. L'amplitude correspond au maximum atteint par la perturbation sur l'intervalle après ajustement des conditions initiales des deux planètes concernées. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur aux sections 3.2.2 et 3.4.1. Lorsqu'un astéroïde ne possède pas de nom, le tableau ne fournit pas sa désignation provisionnelle mais affiche simplement un tiré horizontal conformément à la convention adoptée pour la compilation Astdata (voir annexe 9.2). La longueur des tableaux a été fixée de sorte à ce que chaque tableau contienne au moins tous les astéroïdes dont la perturbation est supérieure à environ 20 m. Les amplitudes des tableaux correspondent aux masses standards des astéroïdes.

distance Terre-Mercure :

astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]
1 Ceres	29	324 Bamberga	9	3 Juno	2
4 Vesta	23	7 Iris	5	19 Fortuna	2
2 Pallas	21	89 Julia	3	16 Psyche	2
18 Melpomene	10	46 Hestia	3	15 Eunomia	2
654 Zelinda	10	10 Hygiea	2	6 Hebe	2

distance Terre-Venus :

astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]
1 Ceres	35	324 Bamberga	15	1036 Ganymed	3
4 Vesta	32	7 Iris	8	735 Marghanna	3
2 Pallas	30	89 Julia	7	3 Juno	3
654 Zelinda	19	16 Psyche	4	15 Eunomia	3
18 Melpomene	17	46 Hestia	4	344 Desiderata	3

distance Terre-Mars :

astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]
4 Vesta	4941	31 Euphrosyne	156	51 Nemausa	95
2 Pallas	2544	532 Herculina	154	372 Palma	87
1 Ceres	2122	9 Metis	149	11 Parthenope	87
324 Bamberga	1678	52 Europa	144	488 Kreusa	82
7 Iris	630	24 Themis	131	192 Nausikaa	81
10 Hygiea	435	139 Juewa	126	216 Kleopatra	81
19 Fortuna	356	511 Davida	124	8 Flora	79
6 Hebe	260	20 Massalia	115	63 Ausonia	76
3 Juno	224	405 Thia	112	98 Ianthé	71
41 Daphné	212	354 Eleonora	101	747 Winchester	71
654 Zelinda	192	5 Astraea	96	42 Isis	66

astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]
704 Interamnia	66	53 Kalypso	37	469 Argentina	25
78 Diana	65	516 Amherstia	36	187 Lambertia	25
145 Adeona	63	109 Felicitas	36	28 Bellona	25
14 Irene	63	83 Beatrix	35	30 Urania	24
23 Thalia	63	48 Doris	35	304 Olga	24
27 Euterpe	55	230 Athamantis	35	356 Liguria	24
94 Aurora	53	106 Dione	35	164 Eva	23
29 Amphitrite	53	694 Ekard	34	17 Thetis	22
585 Bilkis	53	521 Brixia	34	240 Vanadis	22
313 Chaldaea	48	18 Melpomene	33	335 Roberta	22
15 Eunomia	45	194 Prokne	33	88 Thisbe	21
344 Desiderata	45	25 Phocaea	33	702 Alauda	21
259 Aletheia	45	21 Lutetia	30	34 Circe	21
105 Artemis	43	393 Lampetia	30	97 Klotho	20
13 Egeria	41	554 Peraga	29	144 Vibilia	20
419 Aurelia	41	135 Hertha	27	154 Bertha	20
505 Cava	41	130 Elektra	26	760 Massinga	19
60 Echo	39	415 Palatia	26	114 Cassandra	18
74 Galatea	38	814 Tauris	26	451 Patientia	18

distance Terre-Jupiter :

astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]
1 Ceres	922	24 Themis	63	41 Daphne	31
2 Pallas	448	121 Hermione	56	1172 Aneas	31
10 Hygiea	410	488 Kreusa	48	48 Doris	31
624 Hektor	325	279 Thule	46	225 Henrietta	28
511 Davida	259	324 Bambergia	41	137 Meliboea	27
4 Vesta	164	153 Hilda	41	94 Aurora	26
52 Europa	108	3 Juno	41	106 Dione	24
704 Interamnia	90	130 Elektra	40	747 Winchester	23
76 Freia	90	2797 Teucer	36	96 Aegle	23
190 Ismene	89	361 Bononia	35	532 Herculina	23
87 Sylvia	86	372 Palma	35	375 Ursula	23
65 Cybele	83	334 Chicago	35	199 Byblis	22
31 Euphrosyne	81	16 Psyche	34	1867 Deiphobus	22
1437 Diomedes	78	15 Eunomia	34	49 Pales	22
107 Camilla	77	469 Argentina	33	566 Stereoskopia	22
154 Bertha	68	259 Aletheia	32	654 Zelinda	22
911 Agamemnon	66	3451 Mentor	32	790 Pretoria	21
1173 Anchises	64	2920 Automedon	32	18 Melpomene	19

distance Terre-Saturne :

astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]
1 Ceres	264	136472 Makemake	28	84522 -	19
4 Vesta	97	624 Hektor	25	136199 Eris	19
2 Pallas	69	18 Melpomene	22	324 Bamberga	18
10 Hygiea	29	28978 Ixion	22	50000 Quaoar	18
10199 Chariklo	29	654 Zelinda	22	511 Davida	16

distance Terre-Uranus :

astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]
136472 Makemake	291	47171 -	72	120347 -	34
1 Ceres	236	4 Vesta	67	208996 -	31
136199 Eris	226	35671 -	59	175113 -	30
50000 Quaoar	174	90568 -	58	55565 -	29
136108 Haumea	146	202421 -	57	26375 -	27
28978 Ixion	143	38628 Huya	54	10 Hygiea	24
84522 -	130	174567 -	52	654 Zelinda	24
55636 -	117	55637 -	51	145451 -	23
54598 Bienor	103	120178 -	51	19308 -	22
145452 -	88	15874 -	45	18 Melpomene	22
90482 Orcus	86	145453 -	42	145480 -	21
90377 Sedna	81	84922 -	42	42301 -	20
2 Pallas	72	119951 -	38	144897 -	20

distance Terre-Neptune :

astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]	astéroïde	ampli. [m]
136472 Makemake	299	175113 -	112	55637 -	34
145452 -	288	2 Pallas	80	84922 -	33
1 Ceres	211	174567 -	76	55636 -	30
50000 Quaoar	206	4 Vesta	71	88611 Teharonhiawako	28
136199 Eris	202	90482 Orcus	57	654 Zelinda	26
44594 -	196	90568 -	53	18 Melpomene	26
28978 Ixion	194	38628 Huya	40	10 Hygiea	24
136108 Haumea	148	120347 -	39	55565 -	21
84522 -	141	145480 -	39	66652 Borasisi	20
120178 -	140	15874 -	36	134860 -	20
90377 Sedna	125	145453 -	36	145451 -	19

9.5 Effets des astéroïdes sur les données de INPOP

Le tableau suivant, rassemble les astéroïdes ayant un effet significatif sur les données disponibles pour contraindre le modèle dynamique de INPOP. Il s'agit des 157 astéroïdes discutés dans la section 3.4.2 classés selon leurs effets sur les observations modernes (MGS/MO/MEX) de la distance Terre-Mars. Pour chaque astéroïde on donne l'amplitude de l'effet sur les différentes données.

astéroïde	radar Mer. [m]	radar Ven. [m]	VEX [m]	Viking [m]	MGS/MO/MEX [m]	Cassini [m]
4 Vesta	788.95	558.55	318.08	7262.97	1196.42	213.79
1 Ceres	571.22	303.16	86.46	1365.40	794.76	88.64
2 Pallas	141.23	288.37	34.08	1791.24	147.54	23.93
324 Bamberga	43.75	71.94	30.08	1229.14	92.28	21.52
10 Hygiea	32.65	44.01	22.71	503.96	76.90	15.67
19 Fortuna	23.44	70.78	14.11	386.20	59.09	10.06
3 Juno	27.51	26.76	12.18	340.41	55.44	10.42
704 Interamnia	7.34	7.87	6.97	100.34	34.49	4.78
532 Herculina	17.06	22.65	7.92	187.89	32.61	5.62
9 Metis	9.94	18.75	8.23	259.71	29.57	5.82
7 Iris	14.67	68.97	5.94	284.38	27.61	4.48
29 Amphitrite	12.00	35.28	6.13	122.62	26.73	3.68
24 Themis	15.86	22.44	7.54	167.31	26.01	5.14
31 Euphrosyne	18.66	24.95	7.04	137.94	23.42	4.77
13 Egeria	7.72	16.41	5.91	40.70	22.25	4.46
15 Eunomia	15.99	24.86	4.28	58.93	21.49	4.90
6 Hebe	23.23	16.63	7.69	216.77	21.06	4.83
14 Irene	11.45	21.96	5.91	39.92	18.20	4.86
11 Parthenope	11.89	10.05	4.80	77.69	17.29	3.11
139 Juewa	12.63	19.80	3.66	116.15	16.55	2.53
747 Winchester	5.37	6.24	2.11	51.32	15.99	1.81
105 Artemis	6.47	13.74	4.56	109.15	15.15	3.15
20 Massalia	10.36	11.37	4.47	110.05	14.73	3.02
372 Palma	8.40	11.36	4.09	81.37	13.77	2.78
8 Flora	5.51	6.28	1.76	35.37	12.68	1.54
45 Eugenia	5.46	5.03	1.72	31.01	11.83	1.67
41 Daphne	3.90	10.69	3.30	129.57	11.52	2.20
405 Thia	3.79	14.34	2.11	61.81	11.40	1.31
18 Melpomene	6.31	46.37	2.42	24.25	11.32	1.83
192 Nausikaa	3.44	5.72	3.21	78.91	11.21	2.34
145 Adeona	3.59	5.57	2.41	31.65	11.01	1.80
511 Davida	24.80	13.23	3.84	34.98	10.21	2.59
354 Eleonora	4.26	10.65	3.63	89.23	10.19	2.56
52 Europa	12.88	15.52	1.96	54.04	9.89	2.94
16 Psyche	3.59	7.61	1.04	14.22	9.72	1.24

Suite.

astéroïde	radar Mer.	radar Ven.	VEX	Viking	MGS/MO/MEX	Cassini
419 Aurelia	3.32	9.20	3.18	89.53	9.54	2.24
78 Diana	5.18	9.81	2.00	60.19	9.32	1.26
259 Aletheia	3.60	3.09	1.89	45.44	9.22	1.39
27 Euterpe	3.47	6.47	2.48	63.87	9.12	1.69
23 Thalia	4.37	6.96	2.66	30.57	9.05	2.20
488 Kreusa	2.99	4.73	2.10	55.05	8.60	1.55
187 Lambertia	5.45	18.47	2.29	28.52	7.65	2.02
230 Athamantis	3.51	4.85	1.94	49.36	7.61	1.41
409 Aspasia	3.60	2.84	2.02	37.33	7.55	1.52
94 Aurora	2.15	3.04	1.67	46.17	7.47	1.23
344 Desiderata	4.75	8.23	3.32	86.88	7.38	2.50
130 Elektra	1.76	2.18	1.34	38.57	7.04	1.02
111 Ate	4.45	3.12	1.72	29.53	6.96	1.61
42 Isis	3.70	5.05	2.40	67.94	6.79	1.47
109 Felicitas	3.17	7.16	1.84	55.33	6.79	1.29
63 Ausonia	5.92	10.79	2.19	67.45	6.36	1.46
12 Victoria	3.44	7.37	1.27	30.06	6.17	0.79
144 Vibia	4.43	3.71	1.81	46.11	6.14	1.04
469 Argentina	2.25	2.43	1.30	33.01	6.12	0.93
88 Thisbe	1.86	5.79	0.98	10.69	5.74	0.81
356 Liguria	2.90	3.66	1.56	29.44	5.73	1.00
712 Boliviana	4.12	4.87	1.17	38.10	5.72	0.79
60 Echo	4.24	7.67	1.37	40.87	5.69	0.88
50 Virginia	2.39	4.92	1.49	49.47	5.66	1.00
128 Nemesis	2.00	4.72	0.77	15.93	5.64	0.43
5 Astraea	3.00	5.20	1.37	51.64	5.52	1.02
48 Doris	6.01	7.73	1.20	35.95	5.31	1.04
30 Urania	2.18	3.20	1.31	34.87	5.31	0.99
59 Elpis	2.50	1.48	0.89	14.38	5.31	0.67
98 Ianthe	2.11	5.32	1.38	37.68	5.19	0.97
194 Prokne	4.16	11.89	1.30	23.74	5.13	1.34
156 Xanthippe	1.43	8.65	0.74	5.14	5.12	0.53
51 Nemausa	6.33	7.57	1.35	59.18	5.06	0.76
516 Amherstia	1.74	1.95	1.57	32.72	5.04	0.99
89 Julia	3.01	8.79	0.63	9.30	4.79	1.15
451 Patientia	4.37	5.70	0.80	24.60	4.76	0.75
313 Chaldaea	2.34	3.66	1.16	13.29	4.72	0.86
554 Peraga	1.64	4.76	1.28	43.96	4.69	0.95
107 Camilla	0.76	0.77	0.62	6.17	4.62	0.44
21 Lutetia	1.82	1.86	1.25	29.76	4.53	0.89
65 Cybele	2.96	2.42	0.89	6.59	4.52	0.69

Suite.

astéroïde	radar Mer.	radar Ven.	VEX	Viking	MGS/MO/MEX	Cassini
654 Zelinda	8.77	45.52	1.21	26.37	4.48	0.76
240 Vanadis	1.71	4.46	0.93	34.59	4.48	0.66
393 Lampetia	2.01	4.14	1.62	50.78	4.27	1.13
694 Ekard	1.54	2.76	1.41	38.10	4.17	1.02
134 Sophrosyne	3.86	2.67	1.06	27.90	4.16	0.75
54 Alexandra	1.89	2.25	0.94	26.52	4.11	0.69
81 Terpsichore	0.49	3.03	0.38	22.00	4.04	0.29
40 Harmonia	2.57	4.09	0.70	4.32	3.95	0.48
106 Dione	1.97	3.45	1.09	24.87	3.90	0.78
120 Lachesis	1.31	2.23	1.11	30.66	3.89	0.79
28 Bellona	1.38	2.67	0.92	13.50	3.81	0.60
173 Ino	1.93	3.85	0.81	26.35	3.80	0.83
49 Pales	1.11	1.43	0.95	21.20	3.78	0.70
22 Kalliope	1.11	3.47	0.52	9.21	3.77	0.49
444 Gypsis	1.32	1.69	0.53	11.82	3.71	0.52
76 Freia	1.93	2.46	0.75	15.63	3.71	0.55
84 Klio	2.53	2.11	0.65	28.71	3.70	0.51
185 Eunike	1.06	2.46	0.85	8.00	3.64	0.60
275 Sapiientia	1.53	3.35	0.92	25.90	3.62	0.67
46 Hestia	1.28	14.13	0.97	9.78	3.59	0.69
53 Kalypso	2.79	5.21	1.29	5.10	3.56	1.13
37 Fides	2.43	1.63	1.12	18.98	3.54	0.69
216 Kleopatra	1.12	2.64	1.17	32.00	3.48	0.81
164 Eva	3.32	2.72	1.01	23.26	3.42	0.66
85 Io	2.08	3.80	0.92	16.97	3.36	0.49
410 Chloris	2.26	4.57	1.05	14.76	3.35	0.77
423 Diotima	2.67	1.59	0.29	7.93	3.34	0.53
1021 Flammario	0.94	6.06	0.76	17.78	3.30	0.54
56 Melete	1.50	5.51	0.84	22.56	3.27	0.52
114 Kassandra	1.18	2.37	1.13	21.47	3.27	0.78
129 Antigone	2.16	1.35	0.89	15.91	3.24	0.69
96 Aegle	1.82	2.83	0.94	7.30	3.24	0.67
154 Bertha	4.47	4.65	0.93	28.66	3.23	0.76
34 Circe	1.54	2.77	0.85	15.24	3.23	0.59
585 Bilkis	1.36	3.34	0.69	28.29	3.17	0.54
17 Thetis	1.04	1.35	0.88	18.84	3.15	0.60
137 Meliboea	1.73	0.88	0.67	11.54	3.13	0.56
115 Thyra	1.77	3.18	0.88	21.19	3.03	0.67
43 Ariadne	1.12	1.64	0.74	18.24	3.03	0.50
521 Brixia	0.98	9.08	0.82	23.56	3.02	0.68
95 Arethusa	0.74	0.50	0.53	8.19	3.02	0.34

Suite.

astéroïde	radar Mer.	radar Ven.	VEX	Viking	MGS/MO/MEX	Cassini
404 Arsinoe	1.49	1.80	0.85	27.94	3.01	0.61
200 Dynamene	1.40	4.21	0.68	6.09	3.01	0.50
335 Roberta	1.32	4.58	0.96	26.11	2.96	0.70
449 Hamburga	1.53	2.36	0.48	12.14	2.95	0.33
247 Eukrate	1.78	1.81	0.43	9.65	2.94	0.48
505 Cava	1.54	4.32	1.09	27.39	2.91	0.77
159 Aemilia	1.59	2.35	0.84	17.87	2.88	0.60
268 Adorea	2.87	3.06	0.62	8.59	2.83	0.80
814 Tauris	1.18	2.68	0.69	36.09	2.80	0.50
328 Gudrun	0.93	1.21	0.68	13.85	2.74	0.49
25 Phocaea	1.37	3.56	0.84	23.62	2.73	0.63
36 Atalante	2.09	6.07	0.63	13.03	2.71	0.61
74 Galatea	1.31	3.69	0.84	25.86	2.69	0.57
86 Semele	0.65	1.01	0.50	12.96	2.63	0.36
38 Leda	1.19	1.97	0.77	13.58	2.62	0.53
83 Beatrix	0.78	1.79	0.64	17.08	2.60	0.50
121 Hermione	0.91	0.92	0.65	8.27	2.60	0.38
211 Isolda	2.33	1.86	1.00	13.25	2.58	0.80
345 Tercidina	1.77	1.34	0.68	16.05	2.55	0.52
1093 Freda	0.63	0.97	0.48	12.89	2.54	0.34
375 Ursula	1.09	1.63	0.53	18.16	2.53	0.38
209 Dido	0.76	1.41	0.81	17.54	2.53	0.55
895 Helio	1.48	1.74	0.65	12.03	2.47	0.46
690 Wratislavia	0.90	1.09	0.63	15.63	2.47	0.43
70 Panopaea	2.10	1.63	0.77	10.81	2.41	0.53
337 Devosa	0.79	1.85	0.69	18.44	2.40	0.50
386 Siegena	2.18	2.98	0.51	4.41	2.35	0.48
93 Minerva	0.82	2.33	0.47	11.73	2.25	0.39
304 Olga	1.32	1.90	0.73	18.68	2.22	0.51
87 Sylvia	1.07	0.88	0.36	9.67	2.22	0.25
739 Mandeville	0.62	3.21	0.40	4.55	2.21	0.36
760 Massinga	0.71	1.73	0.62	16.51	2.21	0.48
135 Hertha	1.03	1.19	0.63	18.36	2.12	0.42
602 Marianna	1.98	1.04	0.36	7.18	2.08	0.22
471 Papagena	1.72	1.62	0.38	11.98	2.06	0.33
39 Laetitia	1.13	1.81	0.35	5.11	2.04	0.16
593 Titania	0.93	2.38	0.53	16.26	2.03	0.35
141 Lumen	1.31	2.09	0.62	10.70	2.02	0.74
702 Alauda	0.78	0.91	0.10	11.75	2.01	0.29
69 Hesperia	1.42	1.38	0.43	6.61	2.01	0.42

9.6 Astéroïdes exclus de l'effet global

Le tableau rassemble les 144 astéroïdes de la section 4.3.4 dont la chance de ne pas faire partie d'un effet global est supérieure à 10%. Le tableau donne pour chaque objet la probabilité de ne pas faire partie de l'effet global. La probabilité est déterminée à partir des expériences Monte-Carlo de la section 4.3.3, elle est donc égale au nombre de fois qu'un astéroïde donné a été exclu de l'effet global au cours des 100 expériences.

astéroïde	proba. %	astéroïde	proba. %	astéroïde	proba. %
1 Ceres	100	230 Athamantis	74	516 Amherstia	43
2 Pallas	100	356 Liguria	74	52 Europa	42
3 Juno	100	23 Thalia	71	46 Hestia	41
4 Vesta	100	54 Alexandra	70	56 Melete	41
324 Bamberga	100	107 Camilla	70	28 Bellona	40
19 Fortuna	99	747 Winchester	70	654 Zelinda	40
704 Interamnia	99	7 Iris	69	1021 Flammario	40
16 Psyche	96	156 Xanthippe	69	37 Fides	38
31 Euphrosyne	95	11 Parthenope	68	375 Ursula	38
192 Nausikaa	95	41 Daphne	66	404 Arsinoe	38
511 Davida	95	134 Sophrosyne	64	95 Arethusa	37
532 Herculina	95	694 Ekard	64	98 Ianthé	37
139 Juewa	93	173 Ino	63	115 Thyra	37
405 Thia	93	393 Lampetia	63	24 Themis	36
372 Palma	91	53 Kalypso	61	65 Cybele	36
9 Metis	90	60 Echo	61	240 Vanadis	35
111 Ate	88	344 Desiderata	60	410 Chloris	35
29 Amphitrite	86	469 Argentina	58	185 Eunike	34
13 Egeria	85	14 Irene	57	48 Doris	33
15 Eunomia	84	105 Artemis	56	74 Galatea	32
78 Diana	84	106 Dione	56	85 Io	32
12 Victoria	83	21 Lutetia	54	130 Elektra	32
88 Thisbe	83	5 Astraea	53	84 Klio	31
144 Vibia	82	30 Urania	53	419 Aurelia	31
51 Nemausa	81	164 Eva	53	585 Bilkis	31
145 Adeona	80	59 Elpis	52	43 Ariadne	29
488 Kreusa	80	94 Aurora	52	49 Pales	29
712 Boliviana	79	451 Patientia	52	268 Adorea	29
6 Hebe	77	409 Aspasia	49	275 Sapientia	29
20 Massalia	77	216 Kleopatra	48	211 Isolda	28
63 Ausonia	77	814 Tauris	47	760 Massinga	27
10 Hygiea	75	8 Flora	45	109 Felicitas	26
45 Eugenia	75	27 Euterpe	45	200 Dynamene	26
259 Aletheia	75	120 Lachesis	45	154 Bertha	25
18 Melpomene	74	423 Diotima	43	455 Bruchsalia	25

astéroïde	proba. %	astéroïde	proba. %	astéroïde	proba. %
505 Cava	25	93 Minerva	20	337 Devosa	15
129 Antigone	24	96 Aegle	20	739 Mandeville	15
135 Hertha	24	895 Helio	20	137 Meliboea	14
690 Wratislavia	24	87 Sylvia	18	667 Denise	14
38 Leda	23	194 Prokne	18	70 Panopaea	13
42 Isis	23	81 Terpsichore	17	329 Svea	13
187 Lamberta	23	444 Gypsis	17	593 Titania	13
328 Gudrun	23	521 Brixia	17	17 Thetis	12
354 Eleonora	23	50 Virginia	16	114 Cassandra	12
159 Aemilia	22	76 Freia	16	326 Tamara	12
247 Eukrate	22	86 Semele	16	786 Bredichina	12
335 Roberta	21	34 Circe	15	22 Kalliope	11
40 Harmonia	20	190 Ismene	15	1093 Freda	11

9.7 Sélection d'objets pour un nouveau modèle d'astéroïdes

Le tableau rassemble les 276 astéroïdes déterminés dans la section 5.4.3 avec leurs probabilités d'exclusion. Les astéroïdes ont été déterminés à partir de 100 expériences Monte Carlo. Chaque expérience consiste à optimiser la sélection de moins de 300 objets de sorte à représenter la perturbations induite par 27142 astéroïdes d'un modèle test par un anneau et les objets sélectionnés. Contrairement à la liste de l'annexe 9.6, l'optimisation est basée non seulement sur l'ensemble des données disponibles dans INPOP mais également sur les perturbations de la distance Terre-Mars entre 2010 et 2015.

La liste reproduite ici constitue la meilleure sélection, qu'on a pu fournir dans le cadre de cette thèse, des astéroïdes à implémenter individuellement dans le modèle dynamique d'une éphéméride.

astéroïde	proba. %	astéroïde	proba. %	astéroïde	proba. %
1 Ceres	100	105 Artemis	100	24 Themis	98
2 Pallas	100	111 Ate	100	51 Nemausa	98
3 Juno	100	128 Nemesis	100	96 Aegle	98
4 Vesta	100	134 Sophrosyne	100	107 Camilla	98
5 Astraea	100	144 Vibia	100	130 Elektra	98
6 Hebe	100	173 Ino	100	156 Xanthippe	98
7 Iris	100	187 Lambertia	100	240 Vanadis	98
8 Flora	100	192 Nausikaa	100	259 Aletheia	98
9 Metis	100	266 Aline	100	328 Gudrun	98
10 Hygiea	100	313 Chaldaea	100	409 Aspasia	98
11 Parthenope	100	324 Bamberga	100	469 Argentina	98
12 Victoria	100	354 Eleonora	100	712 Boliviana	98
13 Egeria	100	356 Liguria	100	14 Irene	97
15 Eunomia	100	372 Palma	100	78 Diana	97
16 Psyche	100	405 Thia	100	94 Aurora	97
18 Melpomene	100	419 Aurelia	100	120 Lachesis	97
19 Fortuna	100	511 Davida	100	209 Dido	97
20 Massalia	100	532 Herculina	100	393 Lampetia	97
29 Amphitrite	100	704 Interamnia	100	694 Ekard	97
31 Euphrosyne	100	814 Tauris	100	751 Faina	97
39 Laetitia	100	23 Thalia	99	27 Euterpe	96
41 Daphne	100	42 Isis	99	38 Leda	96
45 Eugenia	100	54 Alexandra	99	521 Brixia	96
52 Europa	100	139 Juewa	99	46 Hestia	95
53 Kalypso	100	194 Prokne	99	65 Cybele	95
63 Ausonia	100	216 Kleopatra	99	84 Klio	95
74 Galatea	100	230 Athamantis	99	106 Dione	95
87 Sylvia	100	344 Desiderata	99	410 Chloris	95
88 Thisbe	100	488 Kreusa	99	505 Cava	95
89 Julia	100	690 Wratislavia	99	747 Winchester	95

astéroïde	proba. %	astéroïde	proba. %	astéroïde	proba. %
423 Diotima	94	22 Kalliope	80	547 Praxedis	66
30 Urania	93	129 Antigone	80	72 Feronia	65
163 Erigone	93	35 Leukothea	79	93 Minerva	65
70 Panopaea	92	154 Bertha	79	268 Adorea	65
109 Felicitas	92	233 Asterope	79	287 Nephthys	64
444 Gypsis	92	404 Arsinoe	79	68 Leto	63
516 Amherstia	92	489 Comacina	79	546 Herodias	63
739 Mandeville	92	135 Hertha	78	91 Aegina	62
28 Bellona	91	141 Lumen	78	250 Bettina	62
145 Adeona	91	386 Siegena	78	407 Arachne	62
451 Patientia	91	596 Scheila	78	471 Papagena	62
602 Marianna	91	165 Loreley	77	181 Eucharis	61
95 Arethusa	90	203 Pompeja	77	345 Tercidina	59
164 Eva	90	275 Sapientia	77	508 Princetonia	59
212 Medea	90	943 Begonia	77	85 Io	57
49 Pales	89	1021 Flammario	77	442 Eichsfeldia	57
56 Melete	89	59 Elpis	76	117 Lomia	56
804 Hispania	89	387 Aquitania	76	886 Washingtonia	56
308 Polyxo	87	43 Ariadne	75	200 Dynamene	55
760 Massinga	87	554 Peraga	75	389 Industria	55
99 Dike	85	98 Ianthé	73	426 Hippo	55
185 Eunike	85	121 Hermione	73	593 Titania	55
283 Emma	85	162 Laurentia	73	50 Virginia	54
654 Zelinda	85	455 Bruchsalia	73	568 Cheruskia	53
769 Tatjana	85	895 Helio	73	67 Asia	52
21 Lutetia	84	37 Fides	72	1963 Bezovec	52
81 Terpsichore	84	76 Freia	72	153 Hilda	51
150 Nuwa	84	667 Denise	72	177 Irma	51
585 Bilkis	84	702 Alauda	72	223 Rosa	51
75 Eurydike	83	932 Hooveria	72	284 Amalia	51
247 Eukrate	83	36 Atalante	70	788 Hohensteina	51
350 Ornamenta	83	127 Johanna	69	1171 Rusthawelia	51
375 Ursula	83	360 Carlova	69	82 Alkmene	50
481 Erita	83	584 Semiramis	69	159 Aemilia	50
1093 Freda	83	40 Harmonia	68	329 Svea	50
171 Ophelia	82	190 Ismene	68	599 Luisa	50
211 Isolda	82	234 Barbara	67	784 Pickeringia	50
626 Notburga	82	503 Evelyn	67	786 Bredichina	50
17 Thetis	81	48 Doris	66	102 Miriam	48
60 Echo	81	238 Hypatia	66	207 Hedda	47
115 Thyra	81	337 Devosa	66	304 Olga	47

astéroïde	proba. %	astéroïde	proba. %	astéroïde	proba. %
379 Huenna	47	172 Baucis	37	598 Octavia	30
506 Marion	46	236 Honoria	37	25 Phocaea	29
591 Irmgard	46	420 Bertholda	37	112 Iphigenia	29
758 Mancunia	46	449 Hamburga	37	198 Ampella	29
914 Palisana	44	952 Caia	37	241 Germania	29
160 Una	43	62 Erato	36	253 Mathilde	29
303 Josephina	42	629 Bernardina	36	365 Corduba	29
336 Lacadiera	42	735 Marghanna	36	32 Pomona	28
2064 Thomsen	42	485 Genua	35	58 Concordia	28
69 Hesperia	41	1317 Silvretta	35	77 Frigga	28
90 Antiope	41	362 Havnia	33	432 Pythia	28
1107 Lictoria	41	416 Vaticana	33	346 Hermentaria	27
140 Siwa	40	479 Caprera	33	732 Tjilaki	27
524 Fidelio	40	132 Aethra	32	757 Portlandia	27
47 Aglaja	39	245 Vera	32	26 Proserpina	26
137 Meliboea	39	326 Tamara	32	146 Lucina	26
535 Montague	39	361 Bononia	32	424 Gratia	26
325 Heidelberga	38	680 Genoveva	32	454 Mathesis	26
566 Stereoscopia	38	83 Beatrix	31	465 Alekto	26
583 Klotilde	38	412 Elisabetha	31	545 Messalina	26
86 Semele	37	80 Sappho	30	705 Erminia	26

9.8 Passage en forme normale à l'ordre 4

Le tableau donne les expressions de $q_1^{\text{LIN}}, q_2^{\text{LIN}}, q_3^{\text{LIN}}, p_1^{\text{LIN}}, p_2^{\text{LIN}}$ et p_3^{LIN} en fonction des variables normalisantes q_1, q_2, q_3, p_1, p_2 et p_3 . Ce changement de variable canonique permet d'écrire le hamiltonien du PCR3C développé à l'ordre 4 sous sa forme normale (voir section 6.2.3). On note que les coefficients 0.000 qui apparaissent dans le tableau sont en réalité non nuls mais inférieurs à 10^{-3} .

q_1^{LIN}	q_2^{LIN}	q_3^{LIN}	p_1^{LIN}	p_2^{LIN}	p_3^{LIN}
1.000 q_1	1.000 q_2	1.000 q_3	1.000 p_1	1.000 p_2	1.000 p_3
-0.306 q_1^2	+0.104 q_1^2	+0.171 $q_1 q_3$	-0.049 q_1^2	+0.092 q_1^2	+0.488 $q_1 q_3$
-0.432 $q_1 q_2$	+0.203 $q_1 q_2$	-0.171 $q_3 p_1$	+0.184 $q_1 q_2$	+0.590 $q_1 q_2$	+0.170 $q_2 q_3$
-0.295 q_2^2	-0.203 $q_2 p_1$	+0.190 $q_3 p_2$	+0.295 q_2^2	+0.284 q_2^2	+0.488 $q_3 p_1$
-0.244 q_3^2	-0.104 p_1^2	-0.273 $q_1 p_3$	+0.244 q_3^2	+0.085 q_3^2	-0.171 $q_1 p_3$
-0.612 $q_1 p_1$	-0.154 $q_1 p_2$	-0.367 $q_2 p_3$	+0.612 $q_1 p_1$	+0.432 $q_1 p_1$	+0.171 $p_1 p_3$
-0.184 $q_2 p_1$	+0.043 $q_2 p_2$	-0.273 $p_1 p_3$	+0.432 $q_2 p_1$	+0.590 $q_2 p_1$	-0.190 $p_2 p_3$
+0.049 p_1^2	-0.154 $p_1 p_2$	-0.095 $q_1^2 q_3$	+0.306 p_1^2	+0.092 p_1^2	-0.273 $q_1^2 q_3$
-0.203 $q_2 p_2$	+0.190 $q_3 p_3$	-0.093 $q_1 q_2 q_3$	-0.209 $q_1 p_2$	-0.203 $q_1 p_2$	-0.113 $q_1 q_2 q_3$
-0.209 $p_1 p_2$	-0.057 q_1^3	-0.717 $q_2^2 q_3$	-0.203 $q_2 p_2$	+0.203 $p_1 p_2$	+0.113 $q_2 q_3 p_1$
-0.077 p_2^2	-0.085 $q_1^2 q_2$	-0.005 q_3^3	+0.077 p_2^2	-0.021 p_2^2	+0.273 $q_3 p_1^2$
-0.171 $q_3 p_3$	+0.042 $q_1 q_2^2$	-0.047 $q_1 q_3 p_1$	-0.171 $q_3 p_3$	+0.184 p_3^2	-0.240 $q_1 q_3 p_2$
-0.137 p_3^2	+0.020 q_2^3	-0.093 $q_2 q_3 p_1$	+0.137 p_3^2	-0.072 q_1^3	-1.611 $q_2 q_3 p_2$
+0.134 q_1^3	+0.102 $q_1 q_3^2$	-0.095 $q_3 p_1^2$	+0.028 q_1^3	-0.359 $q_1^2 q_2$	-0.240 $q_3 p_1 p_2$
+0.118 $q_1^2 q_2$	+0.726 $q_2 q_3^2$	-0.044 $q_1 q_3 p_2$	-0.147 $q_1^2 q_2$	-0.135 $q_1 q_2^2$	-0.009 $q_1^2 p_3$
-0.043 $q_1 q_2^2$	+0.015 $q_1^2 p_1$	+0.044 $q_3 p_1 p_2$	-0.209 $q_1 q_2^2$	+0.001 $q_1 q_3^2$	-0.132 $q_1 q_2 p_3$
-0.035 q_2^3	+0.069 $q_1 q_2 p_1$	+0.695 $q_3 p_2^2$	-0.035 q_2^3	-0.054 $q_1^2 p_1$	+0.654 $q_2^2 p_3$
-0.083 $q_1 q_3^2$	+0.042 $q_2^2 p_1$	+0.034 $q_1^2 p_3$	-0.117 $q_1 q_3^2$	+0.135 $q_2^2 p_1$	-0.120 $q_3^2 p_3$
-0.028 $q_2 q_3^2$	+0.102 $q_3^2 p_1$	+0.042 $q_1 q_2 p_3$	-0.028 $q_2 q_3^2$	-0.001 $q_3^2 p_1$	-0.278 $q_1 p_1 p_3$
+0.072 $q_1^2 p_1$	+0.015 $q_1 p_1^2$	-0.042 $q_2 p_1 p_3$	-0.057 $q_1^2 p_1$	+0.054 $q_1 p_1^2$	-0.132 $q_2 p_1 p_3$
-0.050 $q_1 q_2 p_1$	-0.085 $q_2 p_1^2$	-0.034 $p_1^2 p_3$	-0.050 $q_1 q_2 p_1$	+0.359 $q_2 p_1^2$	-0.009 $p_1^2 p_3$
-0.209 $q_2^2 p_1$	-0.057 p_1^3	+0.088 $q_1 p_2 p_3$	-0.043 $q_2^2 p_1$	+0.072 p_1^3	+0.109 $q_1 p_2 p_3$
-0.117 $q_3^2 p_1$	-0.040 $q_1^2 p_2$	-1.314 $q_2 p_2 p_3$	-0.083 $q_3^2 p_1$	-0.055 $q_1^2 p_2$	-0.109 $p_1 p_2 p_3$
-0.057 $q_1 p_1^2$	-0.117 $q_1 q_2 p_2$	+0.088 $p_1 p_2 p_3$	+0.072 $q_1 p_1^2$	-0.393 $q_1 q_2 p_2$	-0.658 $p_2^2 p_3$
-0.147 $q_2 p_1^2$	+0.117 $q_2 p_1 p_2$	+0.034 $q_3 p_3^2$	+0.118 $q_2 p_1^2$	-0.275 $q_2^2 p_2$	-0.003 p_3^3
+0.028 p_1^3	+0.040 $p_1^2 p_2$		+0.134 p_1^3	-0.694 $q_3^2 p_2$	
+0.210 $q_1^2 p_2$	+0.026 $q_1 p_2^2$		+0.058 $q_1^2 p_2$	-0.410 $q_1 p_1 p_2$	
+0.469 $q_1 q_2 p_2$	+0.007 $q_2 p_2^2$		-0.066 $q_1 q_2 p_2$	-0.393 $q_2 p_1 p_2$	
+0.141 $q_2^2 p_2$	+0.026 $p_1 p_2^2$		-0.141 $q_2^2 p_2$	-0.055 $p_1^2 p_2$	
+0.009 $q_3^2 p_2$	-0.074 $q_1 q_3 p_3$		-0.009 $q_3^2 p_2$	+0.065 $q_1 p_2^2$	
+0.275 $q_1 p_1 p_2$	+0.074 $q_3 p_1 p_3$		-0.275 $q_1 p_1 p_2$	-0.065 $p_1 p_2^2$	
+0.066 $q_2 p_1 p_2$	+1.414 $q_3 p_2 p_3$		-0.469 $q_2 p_1 p_2$	+0.019 p_3^2	
-0.058 $p_1^2 p_2$	-0.039 $q_1 p_3^2$		-0.210 $p_1^2 p_2$	+0.054 $q_1 q_3 p_3$	
+0.053 $q_1 p_2^2$	-0.740 $q_2 p_3^2$		+0.099 $q_1 p_2^2$	+1.277 $q_2 q_3 p_3$	
+0.099 $q_2 p_2^2$	-0.039 $p_1 p_3^2$		+0.099 $q_2 p_2^2$	+0.054 $q_3 p_1 p_3$	
+0.099 $p_1 p_2^2$			+0.053 $p_1 p_2^2$	-0.056 $q_1 p_3^2$	

Suite.

q_1^{LIN}	q_2^{LIN}	q_3^{LIN}	p_1^{LIN}	p_2^{LIN}	p_3^{LIN}
+0.000	p_2^3		-0.000	p_2^3	+0.056 $p_1 p_3^2$
+0.243	$q_1 q_3 p_3$		+0.033	$q_1 q_3 p_3$	+0.670 $p_2 p_3^2$
+0.079	$q_2 q_3 p_3$		-0.079	$q_2 q_3 p_3$	
-0.033	$q_3 p_1 p_3$		-0.243	$q_3 p_1 p_3$	
+0.074	$q_3 p_2 p_3$		+0.074	$q_3 p_2 p_3$	
+0.047	$q_1 p_3^2$		+0.024	$q_1 p_3^2$	
+0.007	$q_2 p_3^2$		+0.007	$q_2 p_3^2$	
+0.024	$p_1 p_3^2$		+0.047	$p_1 p_3^2$	
+0.013	$p_2 p_3^2$		-0.013	$p_2 p_3^2$	

9.9 Polynômes $P_{q_1}, P_{q_2}, P_{q_3}, P_{p_1}, P_{p_2}$ et P_{p_3}

Expressions des polynôme modulant le comportement exponentiel d'une orbite à l'extérieur de la variété centrale. Les variables q_2, q_3, p_2, p_3 correspondent à une orbite non perturbée évoluant sur la variété centrale du PCR3C Elles devraient être notées par $q_2^0, q_3^0, p_2^0, p_3^0$ mais l'indice est omis dans le tableau pour faciliter la lecture.

P_{q_1}	P_{q_2}	P_{q_3}	P_{p_1}	P_{p_2}	P_{p_3}
+1.000	+0.203 q_2	+0.171 q_3	+0.184 q_2	+0.590 q_2	+0.488 q_3
-0.432 q_2	-0.154 p_2	-0.273 p_3	+0.612 p_1	+0.432 p_1	-0.171 p_3
-0.612 p_1	+0.042 q_2^2	-0.093 $q_2 q_3$	-0.209 p_2	-0.203 p_2	-0.113 $q_2 q_3$
-0.043 q_2^2	+0.102 q_3^2	-0.047 $q_3 p_1$	-0.209 q_2^2	-0.135 q_2^2	-0.240 $q_3 p_2$
-0.083 q_3^2	+0.069 $q_2 p_1$	-0.044 $q_3 p_2$	-0.117 q_3^2	+0.001 q_3^2	-0.132 $q_2 p_3$
-0.050 $q_2 p_1$	+0.015 p_1^2	+0.042 $q_2 p_3$	-0.050 $q_2 p_1$	+0.054 p_1^2	-0.278 $p_1 p_3$
-0.057 p_1^2	-0.117 $q_2 p_2$	+0.088 $p_2 p_3$	+0.072 p_1^2	-0.393 $q_2 p_2$	+0.109 $p_2 p_3$
+0.469 $q_2 p_2$	+0.026 p_2^2		-0.066 $q_2 p_2$	-0.410 $p_1 p_2$	
+0.275 $p_1 p_2$	-0.074 $q_3 p_3$		-0.275 $p_1 p_2$	+0.065 p_2^2	
+0.053 p_2^2	-0.039 p_3^2		+0.099 p_2^2	+0.054 $q_3 p_3$	
+0.243 $q_3 p_3$			+0.033 $q_3 p_3$	-0.056 p_3^2	
+0.047 p_3^2			+0.024 p_3^2		

9.10 Rencontres proches des astéroïdes avec L_2

Les tableaux suivants résument les rencontres plus proches que 0.04 UA entre les astéroïdes et L_2 pouvant avoir lieu au cours des missions Herschel, Planck et GAIA. Les durées approximatives des missions ont été estimés respectivement à juin 2009 - janvier 2014, juin 2009 - janvier 2012 (Bauske, 2009) et janvier 2012 - janvier 2018 (Lindgren, 2010). Les tableaux sont donc similaires au tableau 8.2 qui donne les rencontres les plus proches avec L_2 pour l'intervalle juin 2009 - janvier 2030. Comme pour le tableau 8.2, les valeurs des distances minimales sont basées sur des intégrations INPOP08 et un pas de sortie de 0.2 jours.

Planck (juin 2009 - janvier 2012) :

nom	cat. d'incertitude	masse [$10^{-20} M_\odot$]	date [ans]	distance [UA]
152664 -	III	5.997	2009.74	0.02346
68216 -	II	249.800	2009.77	0.03337

Herschel (juin 2009 - janvier 2014) :

nom	cat. d'incertitude	masse [$10^{-20} M_\odot$]	date [ans]	distance [UA]
152664 -	III	5.997	2009.74	0.02346
68216 -	II	249.800	2009.77	0.03337
163364 -	II	9.253	2013.40	0.03626
153958 -	II	20.690	2012.55	0.03677
162421 -	II	18.070	2012.14	0.03895
214869 -	III	583.700	2012.84	0.03984

GAIA (janvier 2012 - janvier 2018) :

nom	cat. d'incertitude	masse [$10^{-20} M_\odot$]	date [ans]	distance [UA]
171576 -	II	13.520	2017.81	0.01828
33342 -	II	31.230	2015.94	0.01953
85990 -	II	1.777	2016.02	0.02969
164121 -	II	329.100	2016.83	0.03005
163132 -	II	18.070	2014.66	0.03538
5604 -	II	249.800	2017.15	0.03554
163364 -	II	9.253	2013.40	0.03626
153958 -	II	20.690	2012.55	0.03677
3122 Florence	II	5232.000	2017.67	0.03839
162421 -	II	18.070	2012.14	0.03895
214869 -	III	583.700	2012.84	0.03984

Acronymes

ARSA Anti-Robinson seriation by Simulated Annealing
BDL Bureau Des Longitudes
BVLS Bounded Variable Least Squares
CNES Centre National d'Études Spatiales
DE Development Ephemeris
ESA European Space Agency
EPM Ephemerides of Planets and the Moon
GAIA Global Astrometric Interferometer for Astrophysics
IAU International Astronomical Union
ICRF International Celestial Reference Frame
IERS International Earth Rotation and Reference Systems Service
IMCCE Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides
INPOP Intégration Numérique Planétaire de l'Observatoire de Paris
IRAS Infrared Astronomical Satellite
J2000 1er janvier 2000, 12h TT (2451545 jours juliens)
JPL Jet Propulsion Laboratory
MESSENGER MErcury Surface, Space ENvironment, GEochemistry and Ranging
MEX Mars Express
MGS Mars Global Surveyor
MIMPS MSX Infrared Minor Planet Survey
MO Mars Odyssey
MSX Midcourse Space experiment
NASA National Aeronautics and Space Administration
NEAR Near Earth Asteroid Rendezvous
Pan-STARRS Panoramic Survey Telescope And Rapid Response System
PCR3C problème circulaire restreint à 3 corps
PQBCR4C problème quasi-bicirculaire restreint à quatre corps
SBDSE Small Body Database Search Engine
SDSS Sloan Digital Sky Survey
SIMPS Supplemental IRAS Minor Planet Survey
TAI Temps Atomique International
TDB Temps Dynamique Barycentrique

TT Temps Terrestre
UA Unité Astronomique
UTC Temps Universel Coordonné
VEX Venus Express
VLBI Very Large Baseline Interferometry
VSOP Variation Séculaires des Orbites Planétaires

Bibliographie

- M.A. ANDREU : The Quasibicircular Problem. *PhD thesis, Dept. Matemàtica Aplicada o Anàlisi, Universitat de Barcelona*, mars 1999.
- R. C. ASTER, B. BORCHERS et C. H. THURBER : *Parameter Estimation and Inverse Problems (International Geophysics)*. Academic Press, January 2005.
- J. BAER, S. CHESLEY et D. BRITT : Asteroid Masses V1.0. *NASA Planetary Data System*, 116, juillet 2009.
- J. BAER et S. R. CHESLEY : Astrometric masses of 21 asteroids, and an integrated asteroid ephemeris. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 100:27–42, janvier 2008.
- J. BAER, A. MILANI, S. CHESLEY et R. D. MATSON : An Observational Error Model, and Application to Asteroid Mass Determination. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 40 de *Bulletin of the American Astronomical Society*, pages 493–+, septembre 2008.
- R. BAUSKE : Operational maneuver optimization for the ESA missions Herschel and Planck. *Proceeding of 21st International Symposium on Space Flight Dynamics, Toulouse, France*, 2009.
- E. BOWELL, B. HAPKE, D. DOMINGUE, K. LUMME, J. PELTONIEMI et A. W. HARRIS : Application of photometric models to asteroids. In R. P. BINZEL, T. GEHRELS, & M. S. MATTHEWS, éditeur : *Asteroids II*, pages 524–556, 1989.
- E. BOWELL, K. MUINONEN et L. H. WASSERMAN : A Public-Domain Asteroid Orbit Data Base. In A. MILANI, M. DI MARTINO, & A. CELLINO, éditeur : *Asteroids, Comets, Meteors 1993*, volume 160 de *IAU Symposium*, pages 477–+, 1994.
- D. T. BRITT, D. YEOMANS, K. HOUSEN et G. CONSOLMAGNO : Asteroid Density, Porosity, and Structure. *Asteroids III*, pages 485–500, 2002.
- D. BROUWER et G.M. CLEMENCE : *Methods of Celestial Mechanics*. 1961.
- M. E. BROWN et E. L. SCHALLER : The Mass of Dwarf Planet Eris. *Science*, 316:1585–, juin 2007.
- M. BRUSCO, H.F. KAHN et S. STAHL : Heuristic implementation of dynamic programming for matrix permutation problems in combinatorial data analysis. *Psychometrika*, 73:503–522, 2008.
- S. J. BUS et R. P. BINZEL : Phase II of the Small Main-Belt Asteroid Spectroscopic Survey A Feature-Based Taxonomy. *Icarus*, 158:146–177, juillet 2002.
- A. CELLINO : Minor Bodies : Spectral Gradients and Relationships with Meteorites. *Space Sci. Rev.*, 92:397–412, avril 2000.

- G. DAHLQUIST et Å. BJÖRCK : *Numerical Methods in Scientific Computing, Volume I*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- M. DELBO et P. TANGA : Thermal inertia of main belt asteroids smaller than 100 km from IRAS data. *Planet. Space Sci.*, 57:259–265, février 2009.
- A. DEPRIT : Canonical transformations depending on a small parameter. *Celestial Mechanics*, 1:12–30, mars 1969.
- P. DESCAMPS, F. MARCHIS, T. MICHALOWSKI, F. VACHIER, F. COLAS, J. BERTHIER, M. ASSAFIN, P. B. DUNCKEL, M. POLINSKA, W. PYCH, D. HESTROFFER, K. P. M. MILLER, R. VIEIRA-MARTINS, M. BIRLAN, J.-P. TENG-CHUEN-YU, A. PEYROT, B. PAYET, J. DORSEUIL, Y. LÉONIE et T. DIJOUX : Figure of the double Asteroid 90 Antiope from adaptive optics and light-curve observations. *Icarus*, 187:482–499, avril 2007.
- J. DRUMMOND, J. CHRISTOU et J. NELSON : Triaxial ellipsoid dimensions and poles of asteroids from AO observations at the Keck-II telescope. *Icarus*, 202:147–159, juillet 2009.
- L. DURIEZ : Le développement de la fonction perturbatrice. In *Les Méthodes Modernes de la Mécanique Céleste*, page 35. Editions frontières, 1989.
- J. EVANS : The birth of Astronomy. In *The History and Practice of Ancient Astronomy*, page 14. Oxford University Press, 1998.
- A. FIENGA, J. LASKAR, P. KUCHYNKA, C. LE PONCIN-LAFITTE, H. MANCHE et M. GASTINEAU : Gravity tests with INPOP planetary ephemerides. In S. A. KLIONER, P. K. SEIDELMANN, & M. H. SOFFEL, éditeur : *IAU Symposium*, volume 261 de *IAU Symposium*, pages 159–169, janvier 2010.
- A. FIENGA, J. LASKAR, T. MORLEY, H. MANCHE, P. KUCHYNKA, C. LE PONCIN-LAFITTE, F. BUDNIK, M. GASTINEAU et L. SOMENZI : INPOP08, a 4-D planetary ephemeris : from asteroid and time-scale computations to ESA Mars Express and Venus Express contributions. *A&A*, 507:1675–1686, décembre 2009.
- A. FIENGA et H. MANCHE : . *Communication privée*, 2010.
- A. FIENGA, H. MANCHE, P. KUCHYNKA, J. LASKAR et M. GASTINEAU : INPOP10a. Note Scientifique, IMCCE, Observatoire de Paris, août 2010. www.imcce.fr/inpop.
- A. FIENGA, H. MANCHE, J. LASKAR et M. GASTINEAU : INPOP06 : a new numerical planetary ephemeris. *A&A*, 477:315–327, janvier 2008.
- W. M. FOLKNER, J. G. WILLIAMS et D. H. BOGGS : The Planetary and Lunar Ephemeris DE 421. *JPL IOM 343R-08-003*, 2008.
- W.M FOLKNER : Communication privée. juin 2010.
- A. FUJIWARA, J. KAWAGUCHI, D. K. YEOMANS, M. ABE, T. MUKAI, T. OKADA, J. SAITO, H. YANO, M. YOSHIKAWA, D. J. SCHEERES, O. BARNOUIN-JHA, A. F. CHENG, H. DEMURA, R. W. GASKELL, N. HIRATA, H. IKEDA, T. KOMINATO, H. MIYAMOTO, A. M. NAKAMURA, R. NAKAMURA, S. SASAKI et K. UESUGI : The Rubble-Pile Asteroid Itokawa as Observed by Hayabusa. *Science*, 312:1330–1334, juin 2006.
- M. GASTINEAU et J. LASKAR : TRIP 1.0. TRIP Reference manual, IMCCE, Paris Observatory, 2009. www.imcce.fr/Equipes/ASD/trip/trip.html.

- T. GEHRELS : On the feasibility of observing small asteroids with Galileo, Venera, and Comet-Rendezvous-Asteroid-Flyby Missions. *Astronomicheskii Vestnik*, 20:306–318, décembre 1986.
- J. D. GIORGINI, L. A. M. BENNER, S. J. OSTRO, M. C. NOLAN et M. W. BUSCH : Predicting the Earth encounters of (99942) Apophis. *Icarus*, 193:1–19, janvier 2008.
- A. G. GLEN, L. M. LEEMIS et J. H. DREW : Computing the distribution of the product of two continuous random variables. *Computational Statistics & Data Analysis*, 44:451–464, 2004.
- G. GOMEZ, J. MASDEMONT et C. SIMO : Quasihalo orbits associated with libration points. *Journal of the Astronautical Sciences*, 46, 1999.
- M. HECHLER et J. COBOS : Herschel, Planck and Gaia orbit design. In G. GOMEZ, M.W. LO et J.J. MASDEMONT, éditeurs : *Libration point orbits and applications*, 2002.
- M. HECHLER et A. YÁÑEZ : Herschel/Planck consolidated report on mission analysis, issue 3.1. Rapport technique, ESA/ESOC, 2006.
- J.L. HILTON : Asteroid Masses and Densities. *Asteroids III*, pages 103–112, 2002.
- J.L. HILTON : . *Communication privée*, 2009.
- IAU : *Proceedings of the Twenty Sixth General Assembly Prague 2006*. 2006.
- A. IVANTSOV : Asteroid mass determination at Nikolaev Observatory. *Planet. Space Sci.*, 56:1857–1861, novembre 2008.
- R. JEDICKE, J. LARSEN et T. SPAHR : Observational Selection Effects in Asteroid Surveys. *Asteroids III*, pages 71–87, 2002.
- À. JORBA et J. MASDEMONT : Dynamics in the center manifold of the collinear points of the restricted three body problem. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 132:189–213, juillet 1999.
- O. M. KOCHETOVA : Determination of Large Asteroid Masses by the Dynamical Method. *Solar System Research*, 38:66–75, janvier 2004.
- A. S. KONOPLIV, C. F. YODER, E. M. STANDISH, D.-N. YUAN et W. L. SJOGREN : A global solution for the Mars static and seasonal gravity, Mars orientation, Phobos and Deimos masses, and Mars ephemeris. *Icarus*, 182:23–50, mai 2006.
- A.S. KONOPLIV, S.W. ASMAR, W.M. FOLKNER, O. KARATEKIN, D.C. NUNES, S.E. SMREKAR, C.F. YODER et M.T. ZUBER : Mars High Resolution Gravity Fields from MRO, Mars Seasonal Gravity, and Other Dynamical Parameters. *Icarus - submitted*, 2010.
- G. A. KRASINSKY, E. V. PITJEVA, M. V. VASILYEV et E. I. YAGUDINA : Hidden Mass in the Asteroid Belt. *Icarus*, 158:98–105, juillet 2002.
- P. KUCHYNKA, J. LASKAR, A. FIENGA et H. MANCHE : A ring as a model of the main belt in planetary ephemerides. *A&A*, 514:A96+, mai 2010.
- J. LASKAR : Accurate methods in general planetary theory. *A&A*, 144:133–146, mars 1985.
- J. LASKAR : Frequency analysis of a dynamical system. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 56:191–196, mai 1993.

- J. LASKAR et P. ROBUTEL : Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62:193–217, juillet 1995.
- L. A. LEBOWSKY et J. R. SPENCER : Radiometry and a thermal modeling of asteroids. *In* R. P. BINZEL, T. GEHRELS, & M. S. MATTHEWS, éditeur : *Asteroids II*, pages 128–147, 1989.
- L. LINDEGREN : Gaia : Astrometric performance and current status of the project. *In* S. A. KLIONER, P. K. SEIDELMANN, & M. H. SOFFEL, éditeur : *IAU Symposium*, volume 261 de *IAU Symposium*, pages 296–305, janvier 2010.
- H. MANCHE : Thèse de doctorat, Observatoire de Paris, École doctorale Astronomie et Astrophysique d’Île de France, 2010.
- F. MARCHIS, P. DESCAMPS, M. BAEK, A. W. HARRIS, M. KAASALAINEN, J. BERTHIER, D. HESTROFFER et F. VACHIER : Main belt binary asteroidal systems with circular mutual orbits. *Icarus*, 196:97–118, juillet 2008a.
- F. MARCHIS, P. DESCAMPS, J. BERTHIER, D. HESTROFFER, F. VACHIER, M. BAEK, A. W. HARRIS et D. NESVORNÝ : Main belt binary asteroidal systems with eccentric mutual orbits. *Icarus*, 195:295–316, mai 2008b.
- F. MARCHIS, D. HESTROFFER, P. DESCAMPS, J. BERTHIER, A. H. BOUCHEZ, R. D. CAMPBELL, J. C. Y. CHIN, M. A. VAN DAM, S. K. HARTMAN, E. M. JOHANSSON, R. E. LAFON, D. LE MIGNANT, I. DE PATER, P. J. STOMSKI, D. M. SUMMERS, F. VACHIER, P. L. WIZINOVICH et M. H. WONG : A low density of 0.8 g cm^{-3} for the Trojan binary asteroid 617 Patroclus. *Nature*, 439:565–567, février 2006.
- F. MARCHIS, D. HESTROFFER, P. DESCAMPS, J. BERTHIER, C. LAVER et I. DE PATER : Mass and density of Asteroid 121 Hermione from an analysis of its companion orbit. *Icarus*, 178:450–464, novembre 2005.
- J. L. MARGOT, M. C. NOLAN, L. A. M. BENNER, S. J. OSTRO, R. F. JURGENS, J. D. GIORGINI, M. A. SLADE, E. S. HOWELL et D. B. CAMPBELL : Radar Discovery and Characterization of Binary Near-Earth Asteroids. *In* *Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts*, volume 33 de *Lunar and Planetary Inst. Technical Report*, pages 1849–+, mars 2002.
- D.D. MCCARTHY et G. PETIT : IERS Conventions. Rapport technique, 2003.
- J. E. MITCHELL : Branch-and-Cut Algorithms for Combinatorial Optimization Problems. *In* *Handbook of Applied Optimization*. Oxford University Press, 2000.
- S. MOURET, D. HESTROFFER et F. MIGNARD : Asteroid masses and improvement with Gaia. *A&A*, 472:1017–1027, septembre 2007.
- S. MOURET, J. L. SIMON, F. MIGNARD et D. HESTROFFER : The list of asteroids perturbing the Mars orbit to be seen during future space missions. *A&A*, 508:479–489, décembre 2009.
- T.D. MOYER : Jet Propulsion Laboratory Technical Report, JPL-TR-32-1527, mai 1971.
- K. MUINONEN et E. BOWELL : Asteroid orbit determination using Bayesian probabilities. *Icarus*, 104:255–279, août 1993.
- C. D. MURRAY et S. F. DERMOTT : Chaos and long term evolution. *In* *Solar System dynamics*, page 409. Cambridge University Press, 1999.

- C. NEESE : Asteroid Taxonomy V5.0. *NASA Planetary Data System*, 48, mars 2006.
- D. NESVORNÝ, R. JEDICKE, R. J. WHITELEY et Ž. IVEZIĆ : Evidence for asteroid space weathering from the Sloan Digital Sky Survey. *Icarus*, 173:132–152, janvier 2005.
- X. X. NEWHALL, E. M. STANDISH et J. G. WILLIAMS : DE 102 - A numerically integrated ephemeris of the moon and planets spanning forty-four centuries. *A&A*, 125:150–167, août 1983.
- D. P. O’LEARY et B. W. RUST : Confidence intervals for inequality-constrained least squares problems, with applications to ill-posed problems. *Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7:2, 1986.
- S. J. OSTRO, J.-L. MARGOT, L. A. M. BENNER, J. D. GIORGINI, D. J. SCHEERES, E. G. FAHNSTOCK, S. B. BROSCART, J. BELLEROSE, M. C. NOLAN, C. MAGRI, P. PRAVEC, P. SCHEIRICH, R. ROSE, R. F. JURGENS, E. M. DE JONG et S. SUZUKI : Radar Imaging of Binary Near-Earth Asteroid (66391) 1999 KW4. *Science*, 314:1276–1280, novembre 2006.
- E. PARENT et J. BERNIER : *Le raisonnement bayésien*. Springer-Verlag France, 2007.
- A. PARKER, Ž. IVEZIĆ, M. JURIĆ, R. LUPTON, M. D. SEKORA et A. KOWALSKI : The size distributions of asteroid families in the SDSS Moving Object Catalog 4. *Icarus*, 198:138–155, novembre 2008.
- J.-M. PETIT, D. D. DURDA, R. GREENBERG, T. A. HURFORD et P. E. GEISSLER : The Long-Term Dynamics of Dactyl’s Orbit. *Icarus*, 130:177–197, novembre 1997.
- E. V. PITJEVA : EPM ephemerides and relativity. In S. A. KLIONER, P. K. SEIDELMANN, & M. H. SOFFEL, éditeur : *IAU Symposium*, volume 261 de *IAU Symposium*, pages 170–178, janvier 2010.
- D. RAGOZZINE et M. E. BROWN : Orbits and Masses of the Satellites of the Dwarf Planet Haumea (2003 EL61). *AJ*, 137:4766–4776, juin 2009.
- P. ROBUTEL, B. MEYSSIGNAC et J. LASKAR : Paramétrisation de la variété centrale avec TRIP. *Communication privée*, 2009.
- V. G. SHEVCHENKO et E. F. TEDESCO : Asteroid albedos deduced from stellar occultations. *Icarus*, 184:211–220, septembre 2006.
- J.L. SIMON, M. CHAPERONT-TOUZÉ, B. MORANDO et W. THUILLOT, éditeurs. *Introduction aux éphémérides astronomiques*. EDP Sciences, 1998.
- E. M. STANDISH : Jet Propulsion Laboratory Interoffice Memorandum, IOM 312.F-98-048, août 1998.
- E. M. STANDISH, X. X. NEWHALL, J. G. WILLIAMS et W. M. FOLKNER : JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE403/LE403. *JPL IOM 314.10-127*, 1995.
- E. M. STANDISH, Jr. : The observational basis for JPL’s DE 200, the planetary ephemerides of the Astronomical Almanac. *A&A*, 233:252–271, juillet 1990.
- J. STANSBERRY, W. GRUNDY, M. BROWN, D. CRUIKSHANK, J. SPENCER, D. TRILLING et J.-L. MARGOT : *Physical Properties of Kuiper Belt and Centaur Objects : Constraints from the Spitzer Space Telescope*, pages 161–179. 2008.

- P. B. STARK et R. L. PARKER : Bounded variable least squares : an algorithm and applications. *Computational Statistics*, 10:129, 1995.
- A. D. STORRS, C. DUNNE, J.-M. CONAN, L. MUGNIER, B. P. WEISS et B. ZELLNER : A closer look at main belt asteroids 1 : WF/PC images. *Icarus*, 173:409–416, février 2005.
- V. SZEBEHELY : *Theory of orbits. The restricted problem of three bodies*. 1982.
- A. TARANTOLA : *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- E. F. TEDESCO : Asteroid Albedos and Diameters. In A. MILANI, M. DI MARTINO, & A. CELLINO, éditeur : *Asteroids, Comets, Meteors 1993*, volume 160 de *IAU Symposium*, pages 55–+, 1994.
- E. F. TEDESCO, A. CELLINO et V. ZAPPALÁ : The Statistical Asteroid Model. I. The Main-Belt Population for Diameters Greater than 1 Kilometer. *AJ*, 129:2869–2886, juin 2005.
- E. F. TEDESCO, M. P. EGAN et S. D. PRICE : The Midcourse Space Experiment Infrared Minor Planet Survey. *AJ*, 124:583–591, juillet 2002a.
- E. F. TEDESCO, P. V. NOAH, M. NOAH et S. D. PRICE : The Supplemental IRAS Minor Planet Survey. *AJ*, 123:1056–1085, février 2002b.
- E. F. TEDESCO, P. V. NOAH, M. NOAH et S. D. PRICE : IRAS Minor Planet Survey V6.0. *NASA Planetary Data System*, 12, octobre 2004a.
- E. T. TEDESCO, M. P. EGAN et S. D. PRICE : MSX Infrared Minor Planet Survey V1.0. *NASA Planetary Data System*, 3, octobre 2004b.
- D. J. THOLEN et M. A. BARUCCI : Asteroid taxonomy. In R. P. BINZEL, T. GEHRELS, & M. S. MATTHEWS, éditeur : *Asteroids II*, pages 298–315, 1989.
- D. TRILLING, B. BHATTACHARYA, T. SPAHR, J. STANSBERRY, M. SYKES et L. WASSERMAN : The Spitzer Asteroid Catalog III : The Pan-STARRS 1 era. In *Spitzer Proposal ID #50274*, pages 50274–+, mars 2008.
- B. D. WARNER, A. W. HARRIS et P. PRAVEC : The asteroid lightcurve database. *Icarus*, 202:134–146, juillet 2009.
- J. G. WILLIAMS : Determining asteroid masses from perturbations on Mars. *Icarus*, 57:1–13, janvier 1984.
- D. K. YEOMANS, P. G. ANTREASIAN, J.-P. BARRIOT, S. R. CHESLEY, D. W. DUNHAM, R. W. FARQUHAR, J. D. GIORGINI, C. E. HELFRICH, A. S. KONOPLIV, J. V. MCADAMS, J. K. MILLER, W. M. OWEN, D. J. SCHEERES, P. C. THOMAS, J. VEVERKA et B. G. WILLIAMS : Radio Science Results During the NEAR-Shoemaker Spacecraft Rendezvous with Eros. *Science*, 289:2085–2088, septembre 2000.
- D. K. YEOMANS, J.-P. BARRIOT, D. W. DUNHAM, R. W. FARQUHAR, J. D. GIORGINI, C. E. HELFRICH, A. S. KONOPLIV, J. V. MCADAMS, J. K. MILLER, W. M. OWEN, Jr., D. J. SCHEERES, S. P. SYNNOTT et B. G. WILLIAMS : Estimating the Mass of Asteroid 253 Mathilde from Tracking Data During the NEAR Flyby. *Science*, 278:2106–+, décembre 1997.
- V. ZAPPALA, Ph. BENDJOYA, A. CELLINO, P. FARINELLA et C. FROESCHLE : Asteroid Dynamical Families V4.1. *NASA Planetary Data System*, 1997.

B. ZELLNER, A. THIRUNAGARI et D. BENDER : The large-scale structure of the asteroid belt.
Icarus, 62:505–511, juin 1985.