

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
1 Méthode d'analyse du comportement sismique des structures	7
1 Études expérimentales	8
1.1 Essais sur table vibrante	8
1.2 Essais pseudo-dynamiques (sur mur de réaction)	10
1.3 Essais en centrifugeuse	13
2 Simulations numériques	14
2.1 Analyses statiques équivalentes	14
2.2 Analyses dynamiques non-linéaires	18
3 Méthodes hybrides	20
2 Méthodes d'analyse hybride	23
1 Introduction	25
2 Méthodes hybrides par décomposition de domaine	26
2.1 Méthodes primales	30
2.2 Méthode duale	33
2.3 Méthode mixte explicite	42
3 Méthode hybride par analyse (semi-)globale	43
3.1 Analyse semi-globale	43
3.2 Méthode globale	47
4 Bilan des méthodes existantes	49
5 Analyse hybride dans Castem	49
5.1 Élément hybride dans Cast3m	49
5.2 Méthode par pénalisation	49
6 Conclusion	52
3 Modélisation de l'endommagement du béton pour des analyses sismiques	55
1 Introduction	57
2 Observations expérimentales pour le comportement du béton	57
2.1 Essais monotones	58

2.2	Essais cycliques	59
2.3	Sollicitations spécifiques	61
2.4	Caractéristiques du comportement à prendre en compte pour des chargements sismiques	61
3	Modélisation du comportement cyclique du béton	61
3.1	Choix de l'échelle de représentation	61
3.2	Modèles "mesoscopiques"	62
3.3	Modèles macroscopiques	65
4	Modèle d'endommagement avec anisotropie induite	68
4.1	Cadre thermodynamique	68
4.2	Comportement monotone du modèle	72
4.3	Comportement cyclique du modèle	74
5	Modèle d'endommagement anisotrope adapté aux chargements cycliques	83
5.1	Endommagement actif	83
5.2	Première application : Poteau en bi-flexion	90
5.3	Autre application de l'endommagement actif : estimation de l'ou- verture des fissures	91
6	Application : SMART2008	94
6.1	Présentation du Benchmark	94
6.2	Modélisation adoptée	95
6.3	Phase 1 : Test à l'"aveugle" (<i>Blind test</i>)	96
6.4	Phase 2 : Recalage des modes propres	106
6.5	Conclusion	106
7	Conclusion et perspectives	107
4	Modèle d'endommagement anisotrope avec déformations permanentes	109
1	Anélasticité induite par l'endommagement	111
1.1	Identification des fonctions d'anélasticité : g_D et g_H	112
1.2	Comportement au point de Gauss	116
1.3	Positivité de la dissipation	116
2	Modèle couplé plasticité-endommagement anisotrope pour chargements cycliques	120
2.1	Potentiel de Gibbs du modèle couplé	120
2.2	Fonction critère et fonction de consolidation	120
2.3	Plasticité : pseudo-potentiel et loi d'évolution	121
2.4	Endommagement : pseudo-potentiel et loi d'évolution	122
2.5	Positivité de la dissipation	122
2.6	Identification des paramètres	122
2.7	Variante non linéaire de la fonction de consolidation	128
2.8	Domaine élastique du modèle couplé	131
3	Conclusion et perspectives	131

5	Étude du comportement expérimental cyclique d'une structure en béton armé	133
1	Introduction	135
2	Étude expérimentale d'un élément de structure sous chargement cyclique	135
2.1	Objet de l'étude et structure étudiée	135
2.2	Comportement expérimental global	137
2.3	Étude de la fissuration	137
2.4	Analyse numérique	153
2.5	Conclusion	157
3	Analyse hybride	160
3.1	Dimensionnement de la structure et choix de l'instrumentation . .	160
3.2	Implantation de la méthode de pénalisation	162
3.3	Protocole expérimental : communication essai/calcul	164
3.4	Instrumentation	165
3.5	Campagne expérimentale	166
3.6	Analyses des résultats des tests hybrides	166
3.7	Étude du comportement de l'algorithme de couplage	169
3.8	Ré-analyse numérique de la poutre	170
4	Bilan et conclusion	175
6	De la quasi-statique vers le temps réel	177
1	Limites des essais hybrides pseudo-dynamiques	179
2	Essais pseudo-dynamiques continus	180
3	Essais hybrides temps réel	182
3.1	Spécificités matériels	183
3.2	Spécificités logiciels	183
3.3	Application : Portique multiétagé de Ghannoum [SHK ⁺ 11] . . .	184
3.4	Simulation hybride sur table vibrante	185
3.5	Difficultés liées au temps réel	186
	Conclusion et perspectives	189
	Bibliographie	193

Introduction

La tenue des structures de génie civil face aux sollicitations environnementales (séismes, vents, vagues, chocs ...) reste une problématique majeure à la fois pour la sécurité des personnes mais aussi pour la pérennité des ouvrages. Elle est d'autant plus d'actualité que les nouvelles normes européennes et françaises sur la construction considèrent un risque sismique non nul sur presque la totalité du territoire français pour les ouvrages particuliers (immeubles de grande hauteur et immeubles accueillant du public). En parallèle, les réglementations écologiques vont évoluer vers des bâtiments à énergie positive d'ici une dizaine d'années (RT 2020). Ce durcissement impose donc des innovations technologiques (rupteurs thermiques ...) présentant des résistances suffisantes vis-à-vis des chargements sismiques. Même si des codes de dimensionnement (PS92, Eurocode 8) proposent des normes et des moyens d'évaluer le comportement sismique des structures, leurs champs d'application restent restreints aux structures classiques. Un travail important reste à effectuer pour l'analyse et la prédiction du comportement des ouvrages complexes (ponts, tours de grande hauteur) ou présentant un risque particulier (enceintes de confinement, stockage de produits dangereux).

Les premiers travaux sur la tenue des ouvrages face aux séismes datent des premières constructions. En effet, la source principale des études parasismiques est le retour d'expérience post-sismique. La quantité d'informations recueillies sur les ouvrages après un séisme est innombrable tant qualitativement que quantitativement (Rapport de mission de l'AFPS¹ par exemple). C'est d'ailleurs, en partie, l'évaluation des dégâts causés aux structures qui permet d'évaluer l'intensité du séisme. Les constructions sont en conditions réelles et tous les phénomènes sont pris en compte : interactions sol-structure, dégradation voire effondrement de la structure, influence des équipements, collisions avec d'autres structures ... Ces observations, sources d'importantes informations, ne sont toutefois pas suffisantes pour améliorer considérablement l'ingénierie sismique.

Ainsi, des méthodes d'analyses prédictives doivent être élaborées pour évaluer les ouvrages avant construction ou avant séisme en vue d'une amélioration de leur résistance. Le génie parasismique a donc développé divers moyens d'analyses. Deux voies majeures coexistent et se complètent pour améliorer la compréhension du comportement des ouvrages : les moyens expérimentaux et l'analyse numérique. Chacune de ces méthodes

1. Association Française du génie ParaSismique

présente évidemment des avantages mais aussi des inconvénients. Pour éviter d'attendre un séisme (et ses inévitables victimes) afin de valider un dispositif de construction et une méthode de dimensionnement, de nombreux tests ont été développés pour prédire le comportement des ouvrages.

Les méthodes expérimentales les plus simples proposent un chargement statique supposé équivalent au chargement sismique maximal de la région à appliquer à la structure [PBS95]. Ces tests donnent des informations partielles sur le comportement. À l'opposé, les essais sur table vibrante [Tak75] proposent des essais proches de la réalité, surtout si la structure est testée à grandeur réelle. Malgré leur complexité, ces essais offrent la possibilité d'analyser le comportement dynamique de la structure : phénomènes dissipatifs, visqueux ... En parallèle, d'autres essais permettent l'expérimentation de structures moins grandes pour des raisons économiques évidentes sans toutefois modifier le comportement de la structure globale. En effet, des lois de similitude offrent la possibilité de tester des maquettes à échelles réduites représentatives de la structure réelle [Buc14]. Ces lois fournissent des facteurs d'amplification à appliquer aux accélérations subies par la structure. Ces amplifications sont réalisées grâce à l'ajout de masses sur la structures pour des tests sur table sismique ou par centrifugation de l'essai. Dans tous les cas, l'expérimentation présente un coût important limitant considérablement le nombre d'essais pouvant être réalisés. Or les composantes aléatoires de l'excitation sismique et la non-linéarité du comportement des structures nécessitent de nombreux tests pour valider la tenue de celles-ci.

L'autre voie majeure est l'analyse numérique. En effet, la puissance de calcul actuelle permet de modéliser et de simuler des ouvrages aussi grands et complexes que les ouvrages de génie civil. Les méthodes d'analyse numérique des structures sont aussi nombreuses que variées : éléments finis, volumes finis, éléments discrets [CS79] [MD99], modèles cohésifs, méthodes SPH (Smooth Particle Hydrodynamics) [RES04], méthodes modales-spectrales, analyses probabilistes ou déterministes ... En plus du choix de la méthode numérique proprement dite, il est nécessaire de choisir l'échelle de modélisation : faut-il représenter la microstructure des matériaux ou inversement adopter des modèles globaux à l'échelle de l'élément de structure ? En effet, certains auteurs proposent la modélisation du matériau à l'échelle mesoscopique [BG84] [OLK01] [Ngu10]. Ainsi pour le béton, le modèle tient compte de la géométrie et de l'emplacement de chaque granulat, la pâte cimentaire étant considérée comme une matrice. Cette finesse de modélisation est utile pour l'analyse précise des micro-fissurations dues aux différents retraits, provoquant la rupture de l'interface pâte cimentaire et granulats. Toutefois, l'analyse d'une structure globale engendre une taille du modèle telle que le coût de la simulation devient prohibitif. Cette remarque est d'autant plus vraie pour des modèles encore plus fins, tenant compte de chaque composant chimique du matériau. À l'opposé, l'échelle centimétrique (voire métrique) propose des macro-éléments représentant chacun une partie de la structure étudiée : poteau, poutre, voile, liaison ... Ce choix de modélisation donne la possibilité d'obtenir rapidement la réponse globale de la structure mais ne permet pas l'accès à la dégradation de la structure et au faciès de fissuration. Or, ce faciès de fissuration, et notamment l'ouverture de fissure, est parfois le facteur dimensionnant d'un ouvrage (im-

perméabilité d'une enceinte de confinement par exemple).

Le compromis choisi dans ce travail repose sur une modélisation phénoménologique du matériau à l'échelle macroscopique : elle permet de prendre en compte les phénomènes microscopiques induisant la rupture structurelle via l'introduction de variables internes sans raffiner excessivement le maillage. Plus précisément, nous choisissons de développer un modèle d'endommagement pour simuler le comportement complexe du béton. En effet, le béton présente non seulement un caractère adoucissant mais aussi des propriétés dissymétriques, unilatérales, anisotropes, dissipatives ... Le modèle d'endommagement anisotrope de Desmorat [Des04] utilise une variable tensorielle d'endommagement d'ordre 2 symétrique pour représenter l'anisotropie induite dans le béton. Le choix d'une telle variable permet la simulation d'un endommagement orthotrope induit par le chargement dont la base d'orthotropie peut évoluer avec l'endommagement. Ainsi, l'orientation des fissures est correctement modélisée, induisant donc anisotropie et dissymétrie du comportement du matériau endommagé. De plus, une condition sur le signe des contraintes autorise une reprise de raideur lors de la refermeture des micro-fissures. Toutefois, le modèle initialement proposé par Desmorat ne permet pas la simulation sous sollicitations alternées : le matériau endommagé est consolidé dans certaines directions de chargement. Ce phénomène de consolidation est contraire aux observations du comportement quasi-fragile de ce matériau. Le modèle doit donc être corrigé grâce à l'introduction du concept d'endommagement actif [Leb07] [SDRD] [Cha09] qui ne tient compte que des fissures ouvertes (en extension). Ainsi, le modèle devient apte à la simulation de chargements complexes avec changement de signe. Certaines caractéristiques restent cependant ignorées : les déformations permanentes dues en partie à la refermeture imparfaite des fissures, la dissipation due au frottement des fissures ... Des améliorations seront donc proposées, et certaines étudiées en détails, pour prendre en compte ces phénomènes complexes.

L'expérimentation et la modélisation forment en réalité une dualité difficilement séparable. En effet, les modèles développés nécessitent une validation (partielle ou totale) sur des cas de chargements réels. Cette confrontation entre des résultats numériques et expérimentaux permet de mieux comprendre les phénomènes importants. De plus, l'expérience permet d'identifier les paramètres du modèle. Enfin, les modèles numériques atteignent leurs limites lors de la rupture de la structure étudiée. En effet, rares sont les modèles permettant à la fois de simuler une structure complète et des phénomènes tels que des grands déplacements, du flambage, de la perte de matière, rupture, effondrement. Pour combler ce manque, de nombreux auteurs proposent le couplage de plusieurs modèles en les adaptant aux différentes parties de la structure. Actuellement de nombreux développements associent les éléments finis aux éléments discrets [XB04]. Ce couplage est essentiellement utilisé pour des problèmes de chocs avec perforation.

Toutefois, les analyses post-séisme montrent en général une rupture localisée de la structure. Le reste de la structure est faiblement endommagé. La faible dégradation de

la structure peut être modélisée aisément par un modèle numérique (dans notre cas un modèle d'endommagement). Par contre, le modèle manque de fiabilité pour la zone fortement endommagée, cette partie sera donc testée expérimentalement. Toutefois, il ne s'agit pas d'effectuer une pré-analyse numérique pour obtenir un chargement à appliquer à la structure expérimentale : les différentes parties de la structure s'influencent entre elles, il est donc nécessaire de coupler fortement les deux sous-structures afin que le comportement global soit correctement modélisé. Ces méthodes de sous-structuration, appelées hybrides (au sens numérique/expérimental), tentent d'associer les avantages de la modélisation numérique à ceux de l'expérimental. Cependant, une attention particulière doit être portée au choix du couplage entre la sous-structure numérique et la sous-structure expérimentale. Ainsi, une étude détaillée des différents couplages possibles est nécessaire pour effectuer un choix cohérent au cahier des charges de notre simulation hybride. Les méthodes de décomposition de domaine pour la résolution de problèmes numériques recensent plusieurs possibilités de couplage pour des problèmes linéaires (ou linéarisés) : méthodes primales [LDV91], méthodes duales [FR98], méthodes mixtes [FLT⁺98]. La décomposition de domaine permet, en plus de coupler différents modèles, d'accélérer le calcul en parallélisant celui-ci pour le répartir sur plusieurs processeurs. D'autres auteurs préfèrent décomposer directement le problème dynamique [CG02] [CGH03]. Ces dernières méthodes offrent plus de souplesse sur les choix d'intégration numérique et sur les pas de temps à définir pour chaque sous-structure. Ces différentes méthodes sont donc détaillées dans cette étude.

Enfin, il paraît nécessaire de valider notre démarche par la réalisation d'un essai hybride. Un portique est donc simulé par une méthode hybride : une des poutres est testée expérimentalement tandis que le reste de la structure est simulé grâce au modèle d'endommagement anisotrope. Cette campagne expérimentale permet de tester les différentes versions du modèle d'endommagement ainsi que plusieurs méthodes de couplage. Cette étude permettra aussi d'analyser en détail le comportement et le mode de rupture d'un élément de structure en béton armé soumis à un chargement sismique. L'utilisation d'un outil LMT de corrélation d'images (CORRELI Q4, [HRB⁺02]) permet de suivre l'évolution de la fissuration : ouverture, propagation, refermeture, bifurcation, ramification ...

L'étude des méthodes classiques d'analyse des structures (CHAPITRE 1) permet d'évaluer leurs limites. En effet, de nombreuses techniques expérimentales sont contraignantes du fait de la taille des structures étudiées et des effets dynamiques. À l'opposé, les méthodes numériques proposent des méthodes plus ou moins simplifiées permettant de représenter le comportement global des structures. Toutefois, la représentation des dommages localisés (fissuration, flambement des aciers, glissement des aciers, pertes de matière) est délicate. Ainsi, on s'aperçoit que les méthodes expérimentales et numériques sont complémentaires : le concept d'analyse hybride est l'association du réalisme expérimental aux (relativement) faibles coûts numériques.

L'analyse hybride demande une attention particulière au couplage entre la partie de la structure modélisée numériquement et la partie testée. Le CHAPITRE 2 présente donc les

différentes méthodes de décomposition de domaine et de sous-structuration. Ces méthodes sont d'abord expliquées avant d'être évaluées pour le couplage numérique/expérimental. Toutefois, le choix d'effectuer les analyses en temps dilaté nous permet d'élaborer un cahier des charges particulier pour la méthode de couplage : convergence inconditionnelle assurée sans choix de paramètres au préalable, non intrusivité dans le code de calcul, non dépendance à la structure étudiée.

L'algorithme de couplage est un point stratégique d'une méthode hybride mais la précision du calcul numérique détermine aussi la validité de l'analyse hybride. Ainsi le CHAPITRE 3 développe le modèle d'endommagement anisotrope initial afin de l'étendre aux chargements sismiques (chargements alternés). Ce travail demande au préalable l'étude du comportement local (sur un point Gauss) du modèle. Le modèle est ensuite validé grâce à l'étude éléments finis d'une structure représentative testée au CEA-Saclay (benchmark SMART2008).

Le choix de l'algorithme et du modèle étant effectué, la méthode d'analyse hybride est testée sur un cas test. Le CHAPITRE 5 se décompose en deux parties. La première propose l'étude expérimentale d'un élément de structure (poutre en flexion trois points alternée) afin de comprendre le mécanisme de fissuration et de rupture. L'étude de la structure complète est finalement réalisée avec deux différentes versions du modèle d'endommagement développées précédemment. Cette étude nous permet donc d'évaluer à la fois la méthode d'analyse hybride et le modèle d'endommagement.

La méthode présentée ici se restreint aux analyse hybrides pseudo-dynamiques (l'essai est réalisé en temps dilaté). Toutefois ces méthodes hybrides s'étendent au cas des essais continus et du temps réel : le CHAPITRE 6 détaille ces différentes variantes. La possibilité de couplage d'un modèle complexe (endommagement anisotrope) avec un essai en temps réel est illustrée grâce à une collaboration avec l'Université du Colorado.

Chapitre 1

Méthode d'analyse du comportement sismique des structures

Ce chapitre propose un état de l'art des méthodes d'analyse du comportement sismique des ouvrages de génie civil. En effet les méthodes sont nombreuses, chacune proposant une approche particulière, que ce soit expérimentale ou numérique.

Sommaire

1	Études expérimentales	8
1.1	Essais sur table vibrante	8
1.2	Essais pseudo-dynamiques (sur mur de réaction)	10
1.3	Essais en centrifugeuse	13
2	Simulations numériques	14
2.1	Analyses statiques équivalentes	14
2.2	Analyses dynamiques non-linéaires	18
3	Méthodes hybrides	20

1 Études expérimentales

L'étude expérimentale des structures sous séisme reste une voie d'étude majeure. En effet, l'expérimentation permet une analyse précise du mode de rupture des structures. Selon la complexité de la structure étudiée et de la sollicitation, plusieurs techniques expérimentales existent : table vibrante, mur de réaction, expérimentations sur un élément de structure. Les objectifs d'un test expérimental sont multiples. Cela peut être simplement la validation d'un équipement ou d'une structure : savoir si oui ou non il reste fonctionnel pendant et/ou après un chargement sismique. Cela concerne généralement des ouvrages assurant des fonctions de sécurité ou de survie : hôpitaux, centrales nucléaires, réseaux d'approvisionnement en énergie, en eau potable, réseaux de télécommunication. Le résultat de ce type d'analyse est binaire : oui ou non, le système est-il validé ? D'autres essais sont réalisés pour valider un modèle numérique. En effet, tout modèle numérique doit être confronté à des résultats expérimentaux pour en valider le domaine d'application. Ces essais nécessitent une instrumentation plus riche enfin d'identifier le comportement intégral de la structure, la réponse globale de la structure ne suffit pas pour la validation d'un modèle.

De même que les modèles numériques, l'élaboration de norme et de règles de constructions doivent s'appuyer sur des résultats réels pour assurer leur véracité et leur sécurité.

1.1 Essais sur table vibrante

L'expérimentation sur table vibrante est l'approche naturelle de l'étude sismique des structures. En effet, la structure est soumise à des accélérations réelles appliquées à sa base. La structure est fixée sur plaque épaisse et massive, considérée comme rigide, maintenue par des vérins verticaux et/ou horizontaux selon les degrés de liberté de la table (FIG.1.1). En contre partie, les vérins doivent être reliés à une masse importante pour reprendre les efforts sans induire de vibrations aux alentours. Évidemment, les vérins doivent être alimentés par un groupe hydraulique pouvant fournir le débit nécessaire aux vitesses et déplacements exigés. Tous ces éléments sont critiques dans le dimensionnement de la plateforme d'essai. La capacité de la table sismique se définit par plusieurs paramètres : la masse pouvant être embarquée, le nombre de degrés de liberté, la vitesse maximale, l'accélération maximale, l'amplitude de déplacement, la plage de fréquence utile. Le tableau TAB.1.1 résume les caractéristiques principales des plus grandes tables sismiques.

Par exemple, la table Miki au Japon permet de tester en taille réelle un bâtiment en béton armé de six étages (FIG.1.2). Si la quantité d'information fournit par un tel essai est conséquente, le coût d'une telle campagne expérimentale est prohibitif.

Ainsi, pour réduire les coûts et pouvoir tester des ouvrages plus importants, la structure n'est pas testée en taille réelle mais réduite. L'opération ne consiste pas simplement à réduire les dimensions de la structure : il faut que l'essai soit représentatif de la structure réelle. Ainsi, des principes d'équivalence (en contrainte, vitesse ou accélération) permettent d'obtenir le facteur de similarité. Pour obtenir cette équivalence en accélération (la

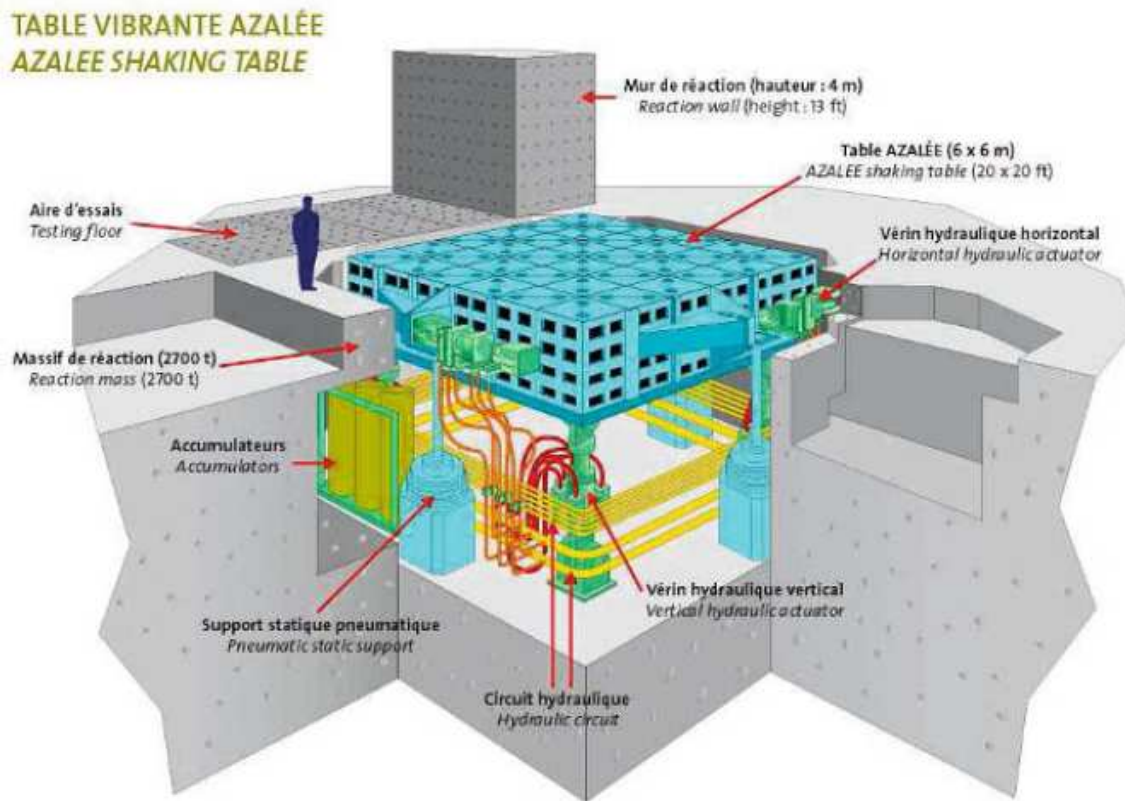


FIGURE 1.1: Table sismique Azalée du CEA-Saclay d'après [Sollogoub, 2007]

plus utilisée en dynamique non-linéaire), il faut augmenter la masse volumique des matériaux de l'inverse du facteur de réduction. Ceci s'effectue d'un point de vue expérimental en ajoutant des masses ponctuelles réparties sur la structure.

Cependant, la chaîne expérimentale (du signal imposé à la maquette) est complexe et la réponse de l'ensemble table/maquette est difficilement prévisible. En effet, les vérins hydrauliques utilisés offrent de très bonnes performances en termes d'efforts, vitesses et amplitudes de course mais provoquent aussi une forte distortion du signal. Le comportement de l'ensemble table/maquette dépend de sa masse (donc de la masse de la structure, celle de la table étant parfaitement connue) et de la raideur. Or cette dernière change durant l'essai de manière plus ou moins conséquente. Ainsi, il est très difficile d'imposer à la structure l'excitation voulue. Il est donc nécessaire d'évaluer le comportement pour pouvoir l'inverser et imposer un signal transformé, qui au final, sera proche de l'excitation voulue.

Institution	Pays	Degrés de liberté	Masse utile (tonnes)	Surface (m^2)
CEA	France	6	100	36
MIKI	Japon	3	1200	300
Public Works Research Institute	Japon	6	22	64
Univ de Pavie	Italie	1	60	39

TABLE 1.1: Principales tables sismiques actuellement en service



FIGURE 1.2: Exemple de structure réelle testée sur table vibrante (Miki) [Sollogoub, 2007]

1.2 Essais pseudo-dynamiques (sur mur de réaction)

Certaines structures de génie civil possèdent des éléments élancés avec des concentrations de masses ponctuelles. Dans ce cas, les efforts sismiques se concentrent dans ces endroits. Il est ainsi possible d'appliquer la sollicitation là où la masse se concentre au lieu d'appliquer l'accélération au pied de la structure (FIG.1.3). Ici un mur de réactions et des vérins (autant que de degrés de liberté sollicités) remplacent la table sismique. L'utilisation de vérins dynamiques permet de tester la structure en temps réel et ainsi de prendre en compte expérimentalement la dissipation et autres phénomènes visqueux. Toutefois les déplacements peuvent être importants (notamment en tête de structure) et nécessitent donc des vérins hydrauliques à course longue. Or, pour exercer le déplacement en temps réel sur une longue course, le compresseur hydraulique doit posséder un débit important. Ces limitations techniques peuvent être contournées en effectuant les essais

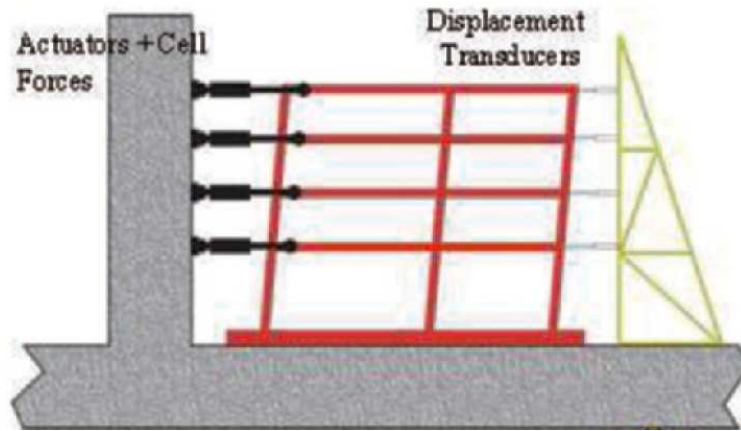


FIGURE 1.3: Exemple d'essai sur mur de réaction [Dermitzakis, 1985]

en temps dilaté [DM85] [BP94] [PVP⁺06] [Peg96] [PP00]. Ce type d'essai, appelé essai pseudo-dynamique, prend en compte les effets dynamiques grâce à un calcul mené en parallèle de l'essai. De nombreux schémas numériques sont développés pour réaliser les essais pseudo-dynamiques. L'équation de la dynamique s'écrit :

$$M \cdot a + C \cdot v + R(u) = -M \cdot a^{sol} \quad (1.1)$$

où les matrices M et C sont respectivement les matrices de masse et d'amortissement, les vecteurs a , v l'accélération et la vitesse de la structure. a_{sol} est l'accélération sismique. R représente les forces au sein de la structure quand celle-ci est soumise au déplacement u . C'est la détermination de ces forces qui s'avère délicate pour les structures non linéaires. Cette méthode propose de les déterminer expérimentalement tandis que les forces d'inertie et d'amortissement sont calculées. Les forces d'inertie sont facilement connues : la masse est aisée à maîtriser lors de la construction d'une structure. Par contre, l'amortissement est plus délicat à identifier (cependant un amortissement de Rayleigh est couramment utilisé). L'essai réalisé est donc finalement quasi-statique, le rôle de la dynamique est pris en compte numériquement et appliqué lentement. Le choix d'un schéma numérique permet de réécrire l'équation de la dynamique sous la forme d'un problème statique équivalent. L'équation EQ.(1.2) illustre le calcul du pas de temps $n + 1$ en connaissance des données au pas de temps n :

$$\tilde{M} \cdot a_{n+1} = -M \cdot a_{n+1}^{sol} + \tilde{F}(R(u_n), v_n, C) \quad (1.2)$$

où \tilde{M} est une pseudo-matrice de masse construite avec les matrices de masse, amortissement et raideur et de paramètres propres au schéma d'intégration. Le choix du schéma numérique est primordial car il doit permettre la convergence de la simulation sans itération qui engendrerait un surchargement de la structure. Ce surchargement est préjudiciable car il provoque un endommagement excessif voire la rupture de la structure de manière prématurée. Un schéma explicite peut être utilisé. Illustrons la méthode avec le schéma des différences centrées. Les variables cinématiques s'écrivent :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{u_{n+1} - 2 \cdot u_n + u_{n-1}}{\Delta t^2} \\ v_n &= \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} \end{aligned} \quad (1.3)$$

En substituant ces termes dans l'équation du mouvement, EQ.(1.1) au temps t_n , on obtient le système suivant à résoudre :

$$K^* \cdot u_{n+1} = F_{n+1}^* \quad (1.4)$$

Où la matrice de pseudo-rigidité K^* et le vecteur de pseudo-force F^* sont :

$$\begin{aligned} K^* &= M + \frac{\Delta t}{2} C \\ F_{n+1}^* &= \Delta t^2 (f_n - \underbrace{k \cdot u_n}_{r_n}) + 2 \cdot M \cdot u_n - \left(M - \frac{\Delta t}{2} C\right) u_{n-1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Cette méthode est conditionnellement stable, le pas de temps doit vérifier : $\Delta t \leq \frac{2}{\omega}$ où ω est la pulsation propre la plus élevée de la structure. L'utilisation de ce schéma dans un essai pseudo-dynamique où on connaît l'histoire des sollicitations et les conditions initiales¹ u_0 , v_0 et a_0 , se résume ainsi :

1. Initialisation : on calcule $u_{-1} = u_0 - \Delta t v_0 + \frac{\Delta t}{2} a_0$
2. Calcul de K^* (EQ.(1.5))
3. Pour chaque pas de temps :
 - (a) Calcul de F_{n+1}^* (EQ.(1.5))
 - (b) Calcul de u_{n+1} (EQ.(1.4))
 - (c) Calcul de v_n et a_n (EQ.(1.3))
 - (d) On impose u_{n+1} à la structure
 - (e) On mesure r_{n+1}
 - (f) Fin du pas n

Mais des auteurs proposent des méthodes semi-explicites offrant une convergence inconditionnelle [HHT77] : l'étape prédictive du schéma utilise la raideur initiale de la structure. Ainsi, la mesure des forces de réaction au pas de temps n ($R(u_n)$) permet de calculer l'accélération au pas $n+1$. La méthode α -OS est très utilisée pour les essais pseudo-dynamiques [BB04]. L'étape prédictive permet d'évaluer les variables cinématiques explicitement :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n+1} &= u_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) a_n \\ \tilde{v}_{n+1} &= v_n + \Delta t (1 - \gamma) a_n \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ensuite, le schéma α introduit une pondération entre deux pas de temps successifs dans l'équation de la dynamique. L'équation EQ.(1.1) devient ainsi :

$$m a_{n+1} + (1 + \alpha) C v_{n+1} - \alpha C v_n + (1 + \alpha) r_{n+1} - \alpha r_n = (1 + \alpha) f_{n+1} - \alpha f_n \quad (1.7)$$

1. Le problème de ce type de schéma d'intégration est la nécessité d'introduire un déplacement à l'instant t_{-1} qui ne possède aucune signification physique.

Tel quel, le schéma est implicite : il faut connaître la force de réaction pour le déplacement au pas $n + 1$. La méthode dite *Operator Splitting* (OS) propose une approximation de la raideur grâce à la raideur initiale :

$$r_{n+1}(u_{n+1}) \approx K^I u_{n+1} + (\tilde{r}_{n+1}(\tilde{u}_{n+1}) - K^I \tilde{u}_{n+1}) \quad (1.8)$$

Ainsi, l'EQ.(1.7) devient explicite :

$$\hat{M} \cdot a_{n+1} = \hat{F}_{n+1} - \tilde{r}_{n+1}(\tilde{u}_{n+1}) \quad (1.9)$$

où $\tilde{r}_{n+1}(\tilde{u}_{n+1})$ est la force de réaction de la structure soumise au déplacement estimé \tilde{u}_{n+1} , et \tilde{M} et \tilde{F}_{n+1} sont définis par :

$$\begin{aligned} \hat{M} &= M + \gamma \Delta t (1 + \alpha) C + \beta \Delta t^2 (1 + \alpha) K^I \\ \hat{F}_{n+1} &= (1 + \alpha) f_{n+1} - \alpha f_n + \alpha \tilde{r}_n - (1 + \alpha) \tilde{r}_{n+1} \\ &= +\alpha C \tilde{v}_n - (1 + \alpha) C \tilde{v}_{n+1} + \alpha (\gamma \Delta t C + \beta \Delta t^2 K^I) a_n \end{aligned} \quad (1.10)$$

Cette équation permet de calculer l'accélération au pas de temps $n + 1$ et donc de corriger les variable cinématique :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \tilde{u}_{n+1} + \Delta t^2 \beta a_{n+1} \\ v_{n+1} &= \tilde{v}_{n+1} + \Delta t \gamma a_{n+1} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Les paramètres β et γ sont choisis de manière à vérifier les relations [HHT77] :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(1-\alpha)^2}{4} \\ \gamma &= \frac{1-2\alpha}{2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Et $\alpha \in [-1/3, 0]$ permet d'ajuster l'amortissement numérique.

Malgré des schémas numériques performants, les méthodes expérimentales sur murs de réactions limitent toutefois le nombre de degrés de liberté de la structure testée ainsi que la hauteur de la structure. En effet, le mur de réaction doit avoir les mêmes dimensions que la structure expérimentale mais avec une raideur beaucoup plus importante. Evidemment, comme précédemment, il est possible de tester des maquettes à échelle réduite, en prenant en compte les effets d'échelle. De plus, cette méthode fusionne des résultats numériques et des résultats expérimentaux. Ces derniers sont sources d'erreurs qui risque de s'accumuler avec le temps et provoquer la divergence de la simulation [PPMT04]. Le tableau TAB.1.2 recense les murs de réaction les plus importants. La figure (FIG.1.4) montre un exemple de structure testée sur le mur de réaction d'Ispra.

1.3 Essais en centrifugeuse

Nous avons vu précédemment que pour l'étude de structure à échelle réduite, il faut augmenter la masse volumique (plus exactement le poids volumique). La première solution est de rajouter des masses plus ou moins réparties. Cela convient pour l'étude de

Institution	Pays	Hauteur (m)	Surface (m ²)
EC JRC	Italie	16	281
Hazama Corp	Japon	18	423
Building Research Inst.	Japon	25	NC
Southwest research Inst	USA	NC	930
U. of California, San Diego	USA	15	946

TABLE 1.2: Principaux murs de réaction en service

structure type béton-armé, mais ce n'est pas envisageable pour l'étude des sols ou des interactions sol-structure. Une meilleure solution est d'augmenter artificiellement la gravité. Le principe de la centrifugeuse est donc adapté pour l'expérimentation sismique. Le protocole expérimental (structure, instrumentation, moyen de chargement) est confiné dans une nacelle placée à l'extrémité d'un bras. La rotation de ce dernier incline la nacelle et engendre une accélération centrifuge (FIG.1.5).

Institution	Pays	Rayon (m)	Charge utile (tonnes)	Accélération maximale g
DelftGeo	Pays-Bas	6	5.5	400
ETH	Suisse	1.1	2	440
CEA-CESTA	France	10	1	100
LCPC	France	5.5	2	200
Kajima	Japon	2.63	1	200
USArmy	USA	6.5	8	350

TABLE 1.3: Principales centrifugeuses

2 Simulations numériques

2.1 Analyses statiques équivalentes

Les premiers dimensionnements de structure pour les sollicitations sismiques sont en général effectués en simulant les charges dynamiques par des charges statiques équivalentes. Ces méthodes ont l'avantage de proposer des solutions simples et peu coûteuses en temps de calcul. Elles constituent souvent les normes parasismiques, on voit donc apparaître des coefficients de sécurité plus ou moins forfaitaires et empiriques.

2.1.1 Méthode des forces de remplacement

La méthode des forces de remplacement est la première méthode numérique pour estimer la résistance sismique d'un bâtiment [DJF02]. Selon, l'emplacement géographique



FIGURE 1.4: Exemple de structure testée sur un mur de réaction (ELSA, Ispra) [Sollogoub, 2007]

de la structure et la géologie du massif de construction (argile, sable, rocher ...), des spectres normalisés de séisme sont définis. Les spectres normalisés expriment les accélérations à prendre en compte en fonction de la période propre de la structure. Ainsi, en connaissant la fréquence propre de la structure étudiée (de nombreuses méthodes permettent le calcul ou l'estimation de cette fréquence), on obtient l'accélération dimensionnante. Cette accélération donne la force horizontale équivalente au chargement sismique (FIG.1.6). Pour tenir compte d'une éventuelle superposition de sollicitation (vent, charges supplémentaires, neige ...), cette force tient compte des charges quasi-permanentes avec des facteurs de probabilité de concomitance. Cette force globale est ensuite répartie verticalement sur les différents étages de la structure. Ainsi, la résistance de la structure étudiée vis-à-vis d'un chargement sismique est déterminée par la résistance à ce chargement statique. Cette méthode ne tient compte que de la première fréquence propre de la structure. Or la réponse globale de la structure est une superposition d'un grand nombre de modes propres plus ou moins excités par le contenu fréquentiel du séisme.

2.1.2 Méthode des spectres de réponse

La méthode des spectres de réponse [VFF94] propose un enrichissement de la méthode en tenant compte des principaux modes propres de la structure. Grâce au spectre normalisé du séisme, chaque mode propre est associé à une accélération dimensionnante.



FIGURE 1.5: Centrifugeuse à bras (LCPC, Nantes) [Sollogoub, 2007]

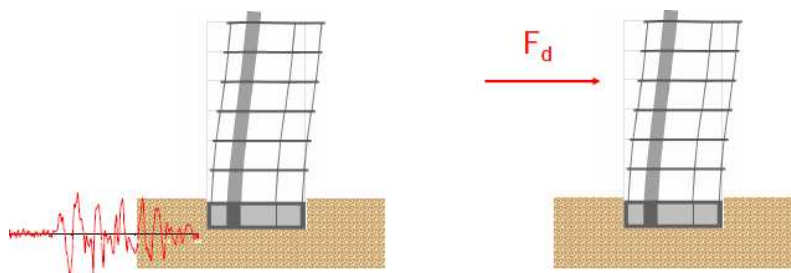


FIGURE 1.6: Principe de la méthode des forces de remplacement

Ainsi, les différentes forces équivalentes sont déterminées, et combinées pour former la force statique équivalente.

Les deux méthodes exposées ci-dessus prennent en compte uniquement le comportement élastique de la structure. Or, pendant le chargement sismique, la structure s'endommage et les fréquences propres chutent considérablement (FIG.1.7). Ce changement de fréquence propre influence l'accélération spectrale à prendre en compte pour le dimensionnement. De plus, l'étude d'une même structure avec ces deux méthodes montre des différences de plus de 20%. Il paraît donc nécessaire de développer des méthodes plus fiables, optimisant la conception de la structure en diminuant les coefficients de sécurité et prenant en compte les non-linéarités de la structure.

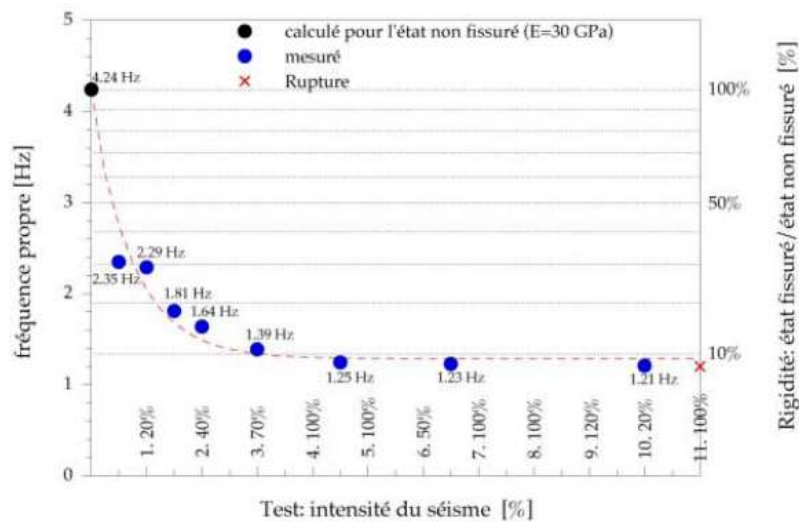


FIGURE 1.7: Étude de la chute des fréquences propres au cours de l'endommagement

2.1.3 Dimensionnement en capacité

Le dimensionnement en capacité [Pau79] [HCS90] propose une analyse moderne des structures. Elle considère la capacité d'une structure à se déformer sous les sollicitations sismiques. Ainsi, elle confère à la structure des aptitudes à se déformer et dissiper de l'énergie sismique sous forme de déformations plastiques. Le dimensionnement en capacité prévoit donc des zones ductiles localisées qui jouent le rôle de fusibles. Ces zones concentrent l'endommagement mais permettent d'écarter les efforts maximaux dans la structure.

Le principe est équivalent au concept de maillon faible dans une chaîne. La méthode classique de dimensionnement considère des éléments de résistance et de fragilité identique. La rupture de la chaîne est imprévisible et souvent fragile. L'ajout d'un unique maillon plus faible, mais ductile permet donc de concentrer les détériorations dans un élément connu, mais aussi d'augmenter la capacité globale de la structure grâce à la diminution de l'effort maximal.

Le dimensionnement en capacité a permis d'élaborer les codes récents de dimensionnement sismique. Toutefois, il est nécessaire de connaître le comportement des éléments ductiles et la méthode reste donc pertinente uniquement pour les structures classiques possédant des dispositifs constructifs connus.

2.1.4 Analyse Push Over

L'analyse *Push Over* [Fae96] [Bor00] [Eln01] propose de conserver le concept de chargement statique équivalent mais de l'appliquer à un modèle numérique non linéaire. Ainsi, la structure est modélisée numériquement avec une méthode choisie préalablement, ce qui permet dans un premier temps de calculer précisément la fréquence pro-

pre de la structure. La force statique équivalente est déterminée en fonction du spectre sismique puis appliquée progressivement au modèle numérique. Le calcul prend donc naturellement en compte les phénomènes non-linéaires de la structure. La courbe de réponse force-déplacement donne une estimation de la réponse sismique de la structure, permettant d'évaluer sa résistance.

2.2 Analyses dynamiques non-linéaires

Les méthodes statiques équivalentes offrent la possibilité d'estimer le comportement sismique d'une structure avec un faible coût numérique à partir de spectres normalisés. Toutefois, deux séismes ayant des spectres similaires peuvent provoquer des réponses complètement différentes sur une même structure. Ainsi, l'analyse non-linéaire temporelle des structures est nécessaire pour les ouvrages exceptionnels. La possibilité de modélisation des structures est quasiment infinie. Toutefois différentes familles de modélisation existent : éléments finis, éléments discrets, modèles particuliers ... Nous allons développer ici quelques méthodes simplifiées spécialement adaptées aux structures de génie civil. En effet, mis à part les structures hautement spécifiques (enceintes de confinement, barrages), les ouvrages de génie civil présentent souvent des structures élancées : poteaux, poutres, voiles ... Plusieurs méthodes proposent des modélisations simplifiées.

2.2.1 Macro-modèle

Les macro-modèles permettent de simuler les comportements de chaque élément d'une structure [Dav98] [KMD03] [BRJ03] [DBJ⁺08]. Ainsi, les différentes parties d'une structure telles que les voiles, les poteaux, les poutres sont modélisées grâce à des assemblages de ressorts non-linéaires. Ces solutions offrent une très bonne estimation de la réponse globale de la structure. Toutefois, la construction d'un macro-modèle et l'identification de ses paramètres demandent l'expérimentation ou la connaissance du comportement de chaque élément de la structure. De plus, ce type de modélisation ne permet pas d'accéder à des informations locales : endommagement du béton, plastification des aciers, ouvertures des fissures.

2.2.2 Méthodes simplifiées : Modélisation multifibre pour la méthode des éléments finis

D'autres méthodes simplifiées diminuent le temps de calcul par rapport à un calcul 3D complet sans toutefois perdre l'information locale. Nous allons développer cette méthode pour un élément poutre. Le pendant de cette méthode existe pour les voiles (considérés comme des plaques). Le principe est de modéliser la structure grâce à des éléments poutres. Les éléments poutres offrent plusieurs choix : Euler-Bernoulli [BPPC87] [LaB91] [SFT96] [KRM06], Timoshenko [GPP94] [MKRC06] ... Contrairement à une modélisation poutre classique, la poutre n'est pas considérée comme un matériau homogène : elle est constituée de plusieurs fibres, chacune pouvant être représentative d'un

matériau différent. La figure FIG.1.8 montre la décomposition d'une poutre en béton armé. On remarque donc la finesse de modélisation possible : les aciers sont modélisés

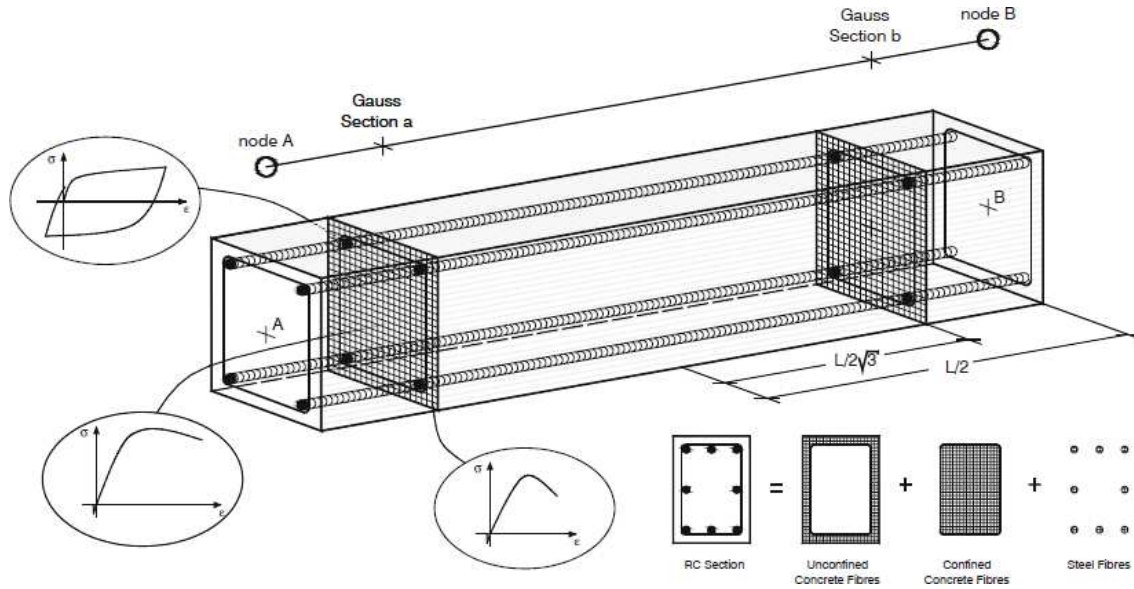


FIGURE 1.8: Modélisation multifibre (d'après [Pinho, 2007])

à leur position exacte, le béton confiné (par les cadres) et le béton non confiné sont considérés comme distincts et simulés par des modèles de comportement (des paramètres "matériau") différents. Contrairement, à la modélisation tri-dimensionnel qui exige la conception d'un modèle 3D, chaque fibre possède un comportement unidimensionnel (ou quasi-unidimensionnel). Cette caractéristique permet d'utiliser plus de modèles pour chaque matériau : soit un modèle unidimensionnel (Menegotto-Pinto (1973), Monti-Nutti (1992) pour l'acier ; La Borderie pour le béton), soit un modèle 3D réduit au cas 1D. Ces lois 1D ont l'avantage de jouir d'une implantation robuste et efficace, permettant de réduire le temps de calcul.

La modélisation de la structure permet de travailler avec les variables généralisées : \mathbf{s} (contraintes), \mathbf{u} (déplacements) et \mathbf{e} (déformations) :

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= (N \ M_x \ M_y \ M_z)^T \\ \mathbf{u} &= (U_x \ \theta_x \ U_y \ U_z)^T \\ \mathbf{e} &= (\epsilon \ \theta_x \ \chi_y \ \chi_z)^T\end{aligned}\tag{1.13}$$

où N est l'effort normal, M_x le moment de torsion, M_y et M_z les moments de flexion, U_x le déplacement longitudinal, θ_x la rotation de torsion, U_y et U_z les flèches, ϵ la déformation longitudinale, χ_y et χ_z les courbures. La relation entre les déplacements généralisés et les déformations généralisées est donnée par la cinématique des poutres choisies (Euler-Bernoulli ou Timoshenko). La relation entre les contraintes généralisées et les déforma-

tions généralisées s'écrit :

$$\mathbf{s} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{e} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & 0 & 0 \\ & & K_{33} & K_{34} \\ \text{sym} & & & K_{44} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Les termes de la matrice de raideur s'obtiennent par intégration des propriétés mécaniques sur la section de la poutre² :

$$\begin{aligned} K_{11} &= \int_S E(x, y) dS \\ K_{22} &= \int_S G(x, y) (y^2 + z^2) dS \\ K_{33} &= \int_S E(x, y) z^2 dS \\ K_{44} &= \int_S E(x, y) y^2 dS \\ K_{13} &= \int_S E(x, y) z dS \\ K_{14} &= - \int_S E(x, y) y dS \\ K_{34} &= - \int_S E(x, y) yz dS \end{aligned} \quad (1.15)$$

À la différence d'un élément poutre classique, les propriétés ne sont pas constantes sur la poutre mais uniquement sur chaque fibre. Dans le cadre de la cinématique des poutres de Timoshenko, le comportement de chaque fibre est découplé dans les directions normale et tangente. Ainsi, les non-linéarités n'apparaissent que sur la composante longitudinale, le comportement tangent reste linéaire. Toutefois, pour les poutres faiblement élancées (proche de 1), le couplage doit être introduit [Dub94] [Kot00]. De même la prise en compte de la torsion demande un enrichissement de la théorie [SF98] [MKRC06].

3 Méthodes hybrides

Les sections précédentes montrent les deux approches classiques de l'étude sismique des structures : l'expérimental et le numérique. Ces deux approches possèdent des limites : l'expérimental est coûteux (maquette et moyen d'essai) et l'aspect stochastique du matériau demande une campagne expérimentale sur de nombreuses éprouvettes (irréalisable pour des structures) ; le numérique impose des hypothèses de calcul plus ou moins sévères réduisant le domaine d'application (rupture difficile à obtenir).

D'un autre côté, seul l'expérimental permet d'observer le mode de ruine d'une structure, et les modèles numériques montrent de très bonnes capacités à simuler le comportement de structures faiblement dégradées. De plus, les observations post sismiques sur les ouvrages montrent régulièrement une rupture localisée (FIG.1.9). Le reste de la structure subit des dommages légers. Il paraît donc assez naturel de vouloir décomposer la structure en deux domaines : la partie fortement dégradée est testée expérimentalement pendant que la partie faiblement endommagée est simulée numériquement (FIG.1.10).

2. en non linéaire, le calcul de la matrice de raideur est remplacé par le calcul de la matrice tangente



FIGURE 1.9: Exemples de ruptures localisées

Toutefois, pour conserver le comportement global de la structure initiale, il est impératif d'avoir un couplage fort entre les deux domaines, ils ont des effets réciproques l'un sur l'autre. Les méthodes hybrides couplent donc un domaine expérimental à un domaine numérique afin de simuler le comportement d'un ouvrage à moindre coût sans compromis sur la précision du mode de rupture. Si les méthodes hybrides semblent fusionner les avantages des deux méthodes, elles cumulent aussi leurs inconvénients et leurs erreurs.

Pour mener à terme une simulation hybride, il faut donc élaborer une méthode de couplage stable et robuste et utiliser un modèle de comportement fiable et précis. Les chapitres suivants vont donc présenter les algorithmes de couplage pouvant être utilisés pour un test hybride, un modèle d'endommagement anisotrope adapté au matériau béton et enfin un exemple d'application sur un cas concret. Enfin, les essais hybrides sont déclinés en diverses solutions : exécution de l'essai hybride en temps dilaté, en pseudo-dynamique continue, voire en temps réel pour les structures dont le comportement est visco-dépendant. Le dernier chapitre présentera donc ces méthodes innovantes en montrant la possibilité de coupler l'expérimental à un modèle complexe, même en temps réel.

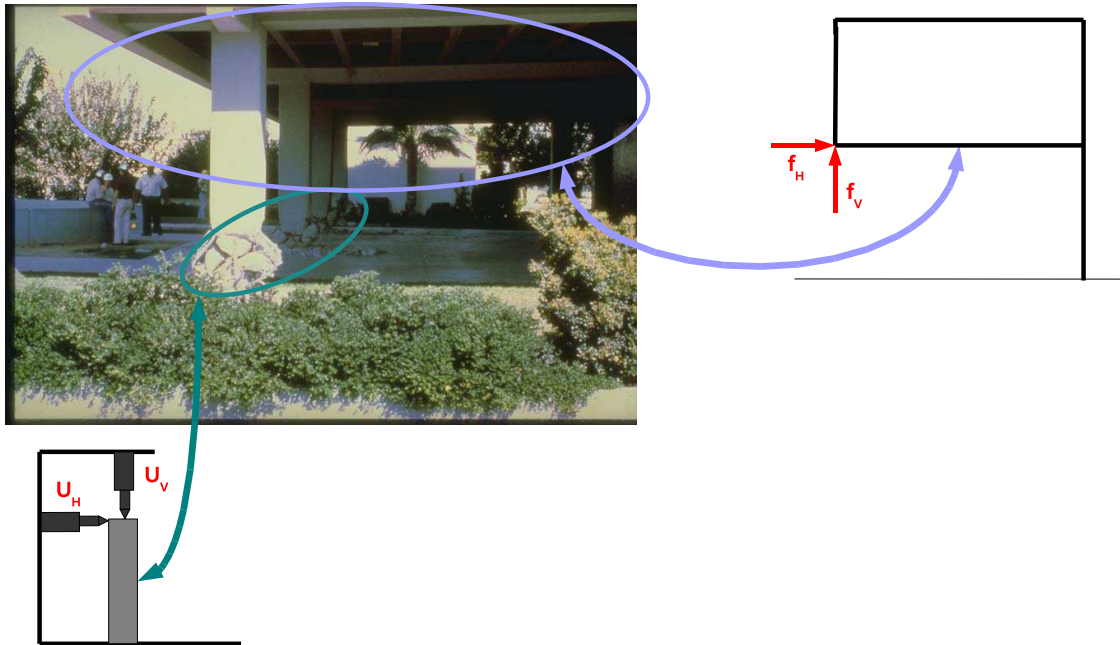


FIGURE 1.10: Décomposition de la structure

Chapitre 2

Méthodes d'analyse hybride

Les méthodes d'analyses hybrides semblent proposer une alternative idéale pour l'analyse de l'endommagement des structures sous séisme. En effet, une fois la partie sensible de la structure identifiée, seule celle-ci est testée expérimentalement sans toutefois perdre les interactions avec le reste de la structure. L'essai est piloté par une simulation numérique (éléments finis, éléments discrets ...) qui elle-même prend en compte le comportement de la structure expérimentale. Les méthodes d'analyses hybrides consistent donc à élaborer une stratégie de couplage entre un essai et un calcul. Ce chapitre passe en revue diverses méthodes de sous-structuration en vue de leur utilisation pour un essai hybride.

Sommaire

1	Introduction	25
2	Méthodes hybrides par décomposition de domaine	26
2.1	Méthodes primales	30
2.2	Méthode duale	33
2.3	Méthode mixte explicite	42
3	Méthode hybride par analyse (semi-)globale	43
3.1	Analyse semi-globale	43

3.2	Méthode globale	47
4	Bilan des méthodes existantes	49
5	Analyse hybride dans Castem	49
5.1	Élément hybride dans Cast3m	49
5.2	Méthode par pénalisation	49
6	Conclusion	52

1 Introduction

Les analyses hybrides (couplant essai et calcul) permettent de simuler le comportement globale d'une structure en couplant le faible coût des calculs numériques avec le réalisme d'un essai expérimental. Cette technique, même si elle ne permet pas de remplacer des essais sur structures complètes, offre des possibilités d'études paramétriques ou statistiques à coût modéré et dans un laps de temps restreint. En effet, pour identifier la partie sensible d'une structure, il peut être nécessaire de réaliser un essai classique : structure complète (éventuellement à une échelle inférieure à 1) sur table sismique ou sur mur de réaction. Cet essai permet non seulement d'identifier la partie critique de la structure où l'endommagement important se concentre, mais aussi d'identifier les modèles numériques à utiliser pour le reste de la structure. Ainsi les efforts expérimentaux se concentrent sur un seul élément de la structure (poutre, poteau, liaison ...) minimisant le coût de fabrication et dimension de la plateforme d'essai. Par conséquent, pour le coût d'un essai sur structure complète, il est possible de réaliser une campagne expérimentale de plusieurs essais.

Les avantages des méthodes hybrides sont séduisants, toutefois ces méthodes soulèvent d'autres difficultés. Il faut notamment assurer la convergence globale de la simulation. Contrairement à une analyse purement numérique les itérations ne doivent pas engendrer un surchargement (overshot) de la structure expérimentale, provoquant un endommagement excessif influençant toute la suite de la simulation.

L'idée principale des simulations hybrides est de diviser la structure en deux parties (ou éventuellement plus) dont au moins une est expérimentale et une autre numérique. Cette sous-structuration fait évidemment penser aux méthodes de décomposition de domaines. Ces méthodes sont utilisées régulièrement dans les analyses numériques pour de nombreuses raisons : parallélisation des calculs, couplage de différentes modélisations avec ou sans recouvrement. Les méthodes de décomposition de domaine sont introduites par Schwarz [Sch69] à la fin du vingtième siècle. Cette méthode fut reprise pour plusieurs problèmes inhérents au calcul scientifique [Dry87] [DGP84] [AL85] [MN85] [KG87]. Plus récemment, les méthodes de décomposition de domaines sont utilisées pour la parallélisation des calculs complexes [CC77] [RFG98] [RF99] [FPL00] [Rix04] et le couplage de modèles différents [CG02] [CGH03] [BS03] [XT03] [XB04]. Ainsi, il paraît judicieux d'utiliser ces méthodes éprouvées en remplaçant une sous-structure numérique par la sous-structure expérimentale [TM03] [BMPB00] (SECTION 2). L'utilisation d'une structure expérimentale interdit des méthodes avec recouvrement. La première partie de ce chapitre détaille les différentes méthodes de décomposition de domaine et leur possible adaptation aux analyses hybrides numérique/expérimentale.

Une seconde possibilité existe pour réaliser le couplage essai/calcul. En effet, l'élément expérimental peut être considéré comme un élément particulier (qui sera nommé hybride) du modèle numérique [Wei05] [Kan08]. Ainsi, le modèle numérique inclut la structure globale. Le comportement de l'élément hybride est déterminé expérimentalement. La seconde section (SECTION 3) détaillera ces méthodes globales d'analyse hybride.

Ensuite, un bilan est effectué (SECTION 4) pour identifier les méthodes qui paraissent les

plus pertinentes au vue de critères avancés pour cette étude.

Enfin, l'implantation de différentes méthodes hybrides dans le code de calcul *Cast3m* sera exposée (SECTION 5). Des premières évaluations des couplages seront étudiés en simulant numériquement la structure testée. Ces études numérique/numérique permettent d'identifier d'éventuelles divergences ou des surchargements de la sous-structure expérimentale.

2 Méthodes hybrides par décomposition de domaine

Les méthodes de décomposition de domaine permettent de diviser une structure en plusieurs sous-structures afin d'optimiser le temps de calcul global de la structure (en parallélisant le calcul) ou de coupler différents modèles¹. Si ces méthodes sont développées pour des applications numériques, il est intéressant de les étudier afin d'évaluer leur capacité à des fins hybrides. En effet, il suffit de remplacer une des sous-structures numériques par le test expérimental pour réaliser un test hybride. Nous allons donc évaluer les différentes méthodes de décomposition de domaines en vue d'une adaptation aux tests hybrides.

Pour illustrer les méthodes de décomposition de domaine, nous allons travailler sur un problème statique (FIG.2.1) répondant à l'équation², EQ.(2.1).

$$Ku = f \quad (2.1)$$

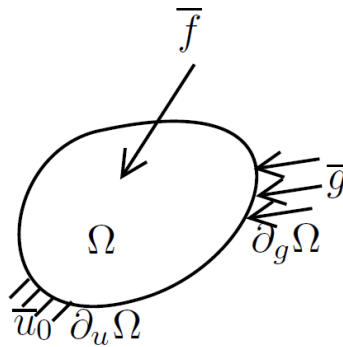


FIGURE 2.1: Structure globale (d'après Gosselet et Rey 2007)

La figure FIG.2.2 montre la décomposition de la structure en trois sous-domaines. Le nouveau problème peut être analysé de plusieurs façons.

1. Les méthodes de couplage avec recouvrement ne sont pas étudiées ici à cause de l'impossibilité de les adapter aux tests hybrides.
2. Tout problème dynamique équivaut (d'un point de vue numérique) à résoudre un problème statique.

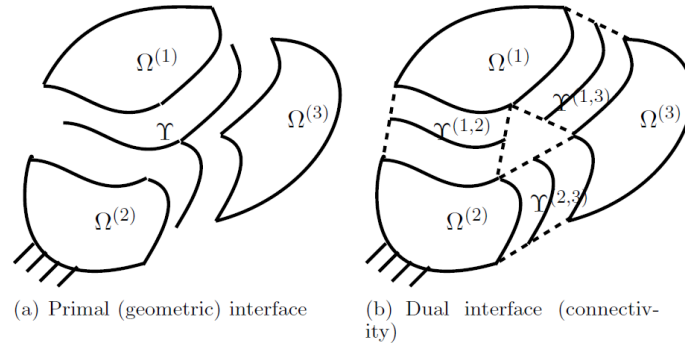


FIGURE 2.2: Structure décomposée en trois sous-domaines (d'après Gosselet et Rey 2007)

La première façon de voir ce problème est de considérer les inconnues d'interfaces à part comme un autre domaine. Ainsi on aura $s + 1$ sous-structures à résoudre. Les inconnues sont donc les $u^{(s)} \forall s$, qui correspondent aux noeuds internes aux sous-structures, et $u^{(b)}$, qui regroupe toutes les inconnues d'interfaces. On construit donc un vecteur inconnu \tilde{u} (N est le nombre de sous-structures) :

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ \vdots \\ u_i^{(N)} \\ u_b \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Ce vecteur inconnu est solution du problème :

$$\tilde{K}\tilde{u} = \tilde{f} \quad (2.3)$$

On s'aperçoit facilement que pour passer de l'EQ.(2.1) à EQ.(2.3) il suffit de réarranger les tenseur K et vecteur f . Toutefois il est encore impossible de résoudre indépendamment les sous-problèmes. Cette méthode est nommée *primale*.

La seconde façon d'aborder le problème est de considérer s sous-problèmes (ici $s = 3$), dont les inconnues sont les $u^{(s)}$ avec pour chaque sous-domaine :

$$u^{(s)} = \begin{pmatrix} u_i^{(s)} \\ u_b^{(s)} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

où $u_i^{(s)}$ sont les inconnues appartenant uniquement à la sous-structure s , et $u_b^{(s)}$ sont les inconnues appartenant à la frontière de la sous-structure s . L'influence des différentes sous-structures sur les autres sont prises en compte par l'intermédiaire des *forces d'interface* (multiplicateurs de Lagrange) $\lambda^{(s)}$:

$$K^{(s)}u^{(s)} = f^{(s)} + \lambda^{(s)} \quad (2.5)$$

On s'aperçoit immédiatement que les inconnues d'interfaces sont communes à au moins 2 sous-domaines. Elles apparaîtront dans plusieurs équations et sont donc a priori différentes. Leur égalité sera donc imposée a posteriori :

$$\sum_s \underline{L}^{(s)} u^{(s)} = 0 \quad (2.6)$$

où $\underline{L}^{(s)}$ sont des matrices de connectivité. De la même façon, il faut vérifier le principe d'action réaction sur les interfaces :

$$\sum_s L^{(s)} \lambda^{(s)} = 0 \quad (2.7)$$

où $L^{(s)}$ sont des matrices de connectivité identiques aux matrices $\underline{L}^{(s)}$ aux signes près : sur un point d'interface, les variables cinématiques doivent être identiques alors que les efforts sont opposés.

Cette méthode est nommée *duale*.

Dans ce type de problème on s'aperçoit que chaque domaine possède sa propre numérotation des nœuds. Or la résolution du problème d'interface nécessite l'utilisation de matrice de connectivité. Quelques soient les méthodes étudiées ci-après, nous allons conserver les mêmes notations pour plus de clarté. Pour les assimiler, nous les illustrons sur un problème simple. La figure FIG.2.3 montre la structure globale avec la numérotation des nœuds (niveau de numérotation 0). Les traits pointillés situent l'emplacement de la décomposition.

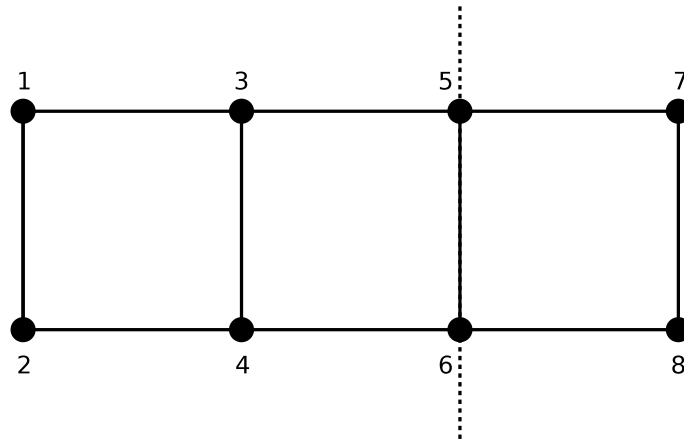


FIGURE 2.3: Numérotation du maillage globale avant décomposition de domaine

Après décomposition, on obtient donc deux structures indépendantes (FIG.2.4) avec leur numérotation propre. Pour chacune des sous-structures, la matrice de raideur (ou pseudo-raideur en cas d'analyse dynamique) sont connues.

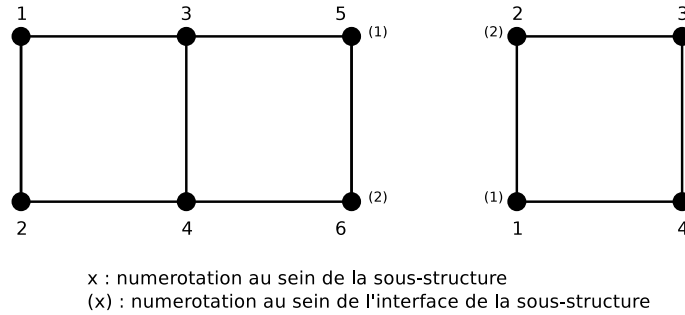


FIGURE 2.4: Numérotation du maillage dans chaque sous-domaine

Pour résoudre le problème d'interface et pour imposer l'égalité des variables cinématiques ainsi que la réciprocité des efforts, il faut pouvoir extraire les nœuds d'interface et les réagencer afin de pouvoir écrire les équations. Une première famille de matrice de connectivité permet d'extraire les nœuds d'une sous-structure, afin de les projeter dans un système de numérotation propre à l'interface de la sous-structure $x \rightarrow (x)$:

$$t^1 = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad t^2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (2.8)$$

Une fois les degrés de liberté de l'interface extraits sur chaque domaine, il faut les assembler et les arranger. Les matrices de connectivité $A^{(s)}$ et $\underline{A}^{(s)}$ permettent d'assurer réciproquement l'égalité et la réciprocité sur les nœuds d'interface :

$$A^1 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \quad \underline{A}^1 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.9)$$

$$A^2 = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \quad \underline{A}^2 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.10)$$

La suite du chapitre montre les éventuelles applications des méthodes exposées sur une décomposition hybride. Dans ce cas précis on considère seulement deux sous-structures : une numérique N et une expérimentale E . Pour évaluer la pertinence de ces différentes méthodes, l'essai hybride est simulé par un couplage numérique/numérique où l'une des sous-structures représente l'essai. L'évaluation est effectuée sur un problème simple constitué d'une masse relié à deux ressorts (FIG.2.6). La décomposition du problème est effectuée sur la masse. Une étude paramétrique sur les répartition de raideur et de masse peut être réalisée afin d'établir le domaine de validité des méthodes. Pour cela on définit deux coefficients : $\alpha = \frac{M_1}{M_{tot}}$ et $\beta = \frac{K_1}{K_{tot}}$.

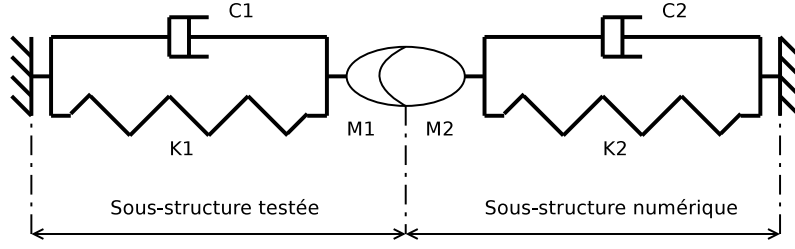


FIGURE 2.5: Struture test pour l'évaluation de méthode d'analyse hybride

2.1 Méthodes primales

2.1.1 Méthode primale BDD - *Balanced Decomposition Domain* et Condensation statique

L'approche primale consiste donc à considérer l'interface comme un domaine indépendant. Après avoir fait le choix de la décomposition des domaines, chaque noeud est attribué à un seul et unique domaine. La matrice du problème peut maintenant être réarrangée pour ordonner les noeuds par domaine. L'approche primale consiste à chercher dans un premier temps les déplacements à l'interface, c'est-à-dire, résoudre la dernière ligne de l'équation EQ.(2.3).

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & K_{ib}^{(1)} A^{(1)T} \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & K_{ii}^{(N)} & K_{ib}^{(N)} A^{(N)T} \\ A^{(1)} K_{bi}^{(1)} & \cdots & \cdots & A^{(N)} K_{bi}^{(N)} & \sum_s A^{(s)} K_{bb}^{(s)} A^{(s)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i^{(N)} \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_i^{(N)} \\ \sum_s A^{(s)} f_b^{(s)} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

On s'aperçoit ainsi qu'un bloc de la matrice globale est diagonal : il correspond aux matrices propres à chaque sous-domaines et sont donc indépendantes. Par contre, chaque sous-domaine est relié à l'interface par les termes de la colonne de droite. De plus, la dernière ligne correspond au problème d'interface, qui lui dépend de chaque sous-domaine. Pour découpler les sous-problèmes, il faut d'abord connaître u_b . Pour cela les $u_i^{(s)}$ sont éliminés dans la dernière ligne en les remplaçant par (condensation des $u_i^{(s)}$) :

$$u_i^{(s)} = K_{ii}^{(s)-1} \left(f_i^{(s)} - K_{ib}^{(s)} A^{(s)T} u_b \right) \quad (2.12)$$

Ainsi, en les substituant dans la dernière ligne de l'équation EQ.(2.11), le problème d'interface devient :

$$\sum_s A^{(s)} \underbrace{\left(K_{bb}^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{ib}^{(s)} \right)}_{S_p^{(s)}} A^{(s)T} u_b = \sum_s A^{(s)} \underbrace{\left(f_b^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} f_i^{(s)} \right)}_{b_p^{(s)}} \quad (2.13)$$

Ainsi, l'équation du problème globale EQ.(2.11) devient :

$$\begin{pmatrix} K_{ii}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & K_{ib}^{(1)} A^{(1)T} \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & K_{ii}^{(N)} & K_{ib}^{(N)} A^{(N)T} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & S_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i^{(N)} \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_i^{(N)} \\ b_p \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

avec $S_p = \sum_s A^{(s)} S_p^{(s)} A^{(s)T}$ et $b_p = \sum_s A^{(s)} b_p^{(s)}$. Ce système étant triangulaire, il peut être découplé sans difficulté par la résolution du problème d'interface dans un premier temps, puis toutes les sous-structures peuvent être résolues séparément. Ainsi, la deuxième étape du calcul peut être résolue par parallélisme pour un gain de vitesse de calcul. L'avantage de cette méthode est l'absence d'approximation. Le résultat est identique au résultat sans décomposition. Toutefois pour un problème non linéaire (tel que le béton armé), la décomposition est effectuée sur le problème linéarisé $\tilde{K}u = f$ (\tilde{K} peut être la matrice initiale ou tangente selon les méthodes).

Pour un problème dynamique la décomposition est effectuée sur le problème statique équivalent : $\hat{M}a = \hat{f}$. Toutes les sous structures héritent donc du même schéma d'intégration numérique.

2.1.2 Application aux tests hybrides pseudo-dynamique

Cette méthode ne peut cependant pas être appliquée telle quelle en pseudo-dynamique. En effet, appliquons par exemple cette méthode à l'équation EQ.(2.11) en considérant seulement deux sous-structures. On obtient l'équation suivante³ :

$$\begin{pmatrix} \hat{M}_{ii}^N & 0 & \hat{M}_{ib}^N A^{NT} \\ 0 & \hat{M}_{ii}^E & \hat{M}_{ib}^E A^{ET} \\ 0 & 0 & S_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i^N \\ a_i^E \\ a_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_i^{(1)} \\ \hat{f}_i^{(2)} \\ b_p \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

avec

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{s=1}^2 A^{(s)} S_p^{(s)} A^{(s)T} \\ S_p^{(s)} &= \hat{M}_{bb}^{(s)} - \hat{M}_{bi}^{(s)} \hat{M}_{ii}^{(s)-1} \hat{M}_{ib}^{(s)} \\ b_p &= \sum_{s=1}^2 A^{(s)} b_p^{(s)} \\ b_p^{(s)} &= \hat{f}_b^{(s)} - \hat{M}_{bi}^{(s)} \hat{M}_{ii}^{(s)-1} \hat{f}_i^{(s)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Donc dans notre cas où la structure 2 est testée expérimentalement, on a :

$$\begin{aligned} b_p^E &= \hat{f}_b^E - \hat{M}_{bi}^E \hat{M}_{ii}^{E-1} \hat{f}_i^E \\ &= \underbrace{f_b^E - r_b^E}_{Exp.} - (C \cdot v)_b^E - \hat{M}_{bi}^E \hat{M}_{ii}^{E-1} \left(\underbrace{f_i^E - r_i^E}_{Exp.} - (C \cdot v)_i^E \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. N représente la sous-structure numérique, E la sous-structure expérimentale.

Dans un test hybride, les forces internes de la sous-structure 2 sont donc mesurées sur la structure expérimentale au lieu d'être calculées. Le schéma d'intégration estime le déplacement de l'instant n en fonction des variables cinématiques de l'instant $n-1$:

$$\tilde{u}_n(u_{n-1}, v_{n-1}, a_{n-1}) \quad (2.18)$$

Les efforts de réaction de la sous structure expérimentale sont estimés en appliquant ce déplacement :

$$\tilde{r}^E = \begin{pmatrix} r_i^E \\ r_b^E \end{pmatrix} = \tilde{r}^E(\tilde{u}) \quad (2.19)$$

On remarque toutefois que ce schéma de résolution nécessite la connaissance des matrices $\hat{M}_{bi}^{(2)}$ et $\hat{M}_{ii}^{(2)}$. Or selon les schémas d'intégration temporelle choisis pour le problème pseudo-dynamique, la matrice de pseudo-masse est une combinaison linéaire des matrices de masse M , d'amortissement C et de rigidité K . Les matrices de masse et d'amortissement doivent être connues car leurs effets sont simulés, mais la matrice de rigidité de la structure expérimentale est justement inconnue (ce qui justifie l'utilisation d'une méthode hybride). Ainsi, la méthode de condensation statique restreint considérablement le choix des méthodes d'intégration numérique à des schémas ne nécessitant pas la connaissance de la raideur réelle de la sous-structure : différence centré (explicite), Newmark avec $\beta = 0$ (explicite), α -OS.

Il est aussi possible d'effectuer une condensation partielle du problème. En effet, au lieu de condenser toutes les sous-structures sur l'interface, seule la sous-structure numérique est condensée, l'interface reste liée à la structure expérimentale :

$$\begin{pmatrix} \hat{M}_{ii}^N & 0 & \hat{M}_{ib}^N A^{NT} \\ 0 & \hat{M}_{ii}^E & \hat{M}_{ib}^E A^{ET} \\ 0 & A^E \hat{M}_{ib}^E & \tilde{S}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i^N \\ a_i^E \\ a_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_i^N \\ \hat{f}_i^E \\ \tilde{b}_p \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

avec maintenant

$$\begin{aligned} \tilde{S}_p &= A^N S_p^N A^{NT} + A^E \hat{M}_{bb}^E A^{ET} \\ \tilde{b}_p &= A^N b_p^N + A^E f_p^E \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ainsi le problème numérique est condensé sur le problème expérimental. Ce schéma est utilisé pour des tests pseudo-dynamiques à ELSA [Pinto,00]. Cette variante permet de ne pas séparer les variables cinématiques de la sous-structure expérimentale. Il est important de remarquer que si les degrés de liberté de la sous structure testée sont uniquement des noeuds d'interface (l'étude d'une poutre au sein d'une structure par exemple) alors la sous-structure expérimentale est incluse entièrement dans l'interface, et les méthodes de condensation totale et partielle deviennent équivalentes à :

$$\begin{pmatrix} \hat{M}_{ii}^N & \hat{M}_{ib}^N A^{(N)} \\ 0 & \tilde{S}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i^N \\ a_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_i^N \\ \tilde{b}_p \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

avec $\tilde{S}_p = A^N S_p^N A^{NT}$ et $\tilde{b}_p = A^N b_p^N$.

Cette méthode propose une solution exacte de décomposition de domaine. Toutefois, la décomposition est effectuée sur le problème linéarisé. Cette méthode impose donc le même schéma d'intégration numérique pour l'ensemble des sous-structures. Or l'utilisation d'une sous-structure expérimentale impose l'utilisation d'un schéma explicite : Newmark explicite ou α -OS. L'utilisation d'une méthode purement explicite nécessite l'adaptation du pas de temps de calcul pour assurer la convergence du calcul. Le pas de temps de calcul pour l'ensemble des sous-structures doit être le minimum des pas de temps critiques pour chaque sous-structure. Ce choix peut être très contraignant pour le coût de calcul global de la simulation hybride. Ainsi il est plus judicieux d'utiliser le schéma d'intégration α -OS. Ce schéma particulier est rarement intégré dans les codes de calcul et nécessite donc son implantation, qui peut être complexe selon les codes de calculs utilisés.

2.2 Méthode duale

Dans une méthode duale, chaque sous-domaine conserve son bord d'interface. Ainsi, les noeuds aux interfaces apparaissent dans au minimum deux sous-domaines. Ceci a plusieurs conséquences. D'abord, le nombre de l'ensemble des noeuds des sous-domaines est supérieur au nombre de noeuds de la structure non décomposée. De plus, l'apparition de ces doublons dans les inconnues cinématiques exige un système d'équations supplémentaire pour que ces inconnues des noeuds en vis-à-vis dans deux sous-domaines différents soient égaux. Enfin, un dernier système d'équations est ajouté pour imposer la réciprocité des efforts d'interfaces.

2.2.1 Méthode FETI

La méthode FETI est la méthode duale générique pour un problème statique (ou statique équivalent à un problème dynamique). Dans ce dernier cas, cela impose le même schéma d'intégration temporelle pour les deux sous-structures [FPL00] [FLT⁺98]. Considérons le problème dual de la décomposition de domaine, sur le domaine (s) :

$$K^{(s)}u^{(s)} = f^{(s)} + \underbrace{t^{(s)T} A^{(s)T} \lambda_b}_{\lambda^{(s)}} \quad (2.23)$$

Si le tenseur $K^{(s)}$ est linéaire, on décompose l'inconnue $u^{(s)}$ en deux parties $u_l^{(s)}$ et $u_f^{(s)}$ solutions des équations suivantes :

$$\begin{cases} K^{(s)}u_f^{(s)} = f^{(s)} \\ K^{(s)}u_l^{(s)} = \lambda^{(s)} \end{cases} \quad (2.24)$$

La solution d'une sous-structure est vue comme la superposition d'une solution *libre*⁴

4. Libre dans la mesure où les efforts d'interfaces sont pris nuls

$u_f^{(s)}$ et une solution *liée* $u_l^{(s)}$. Ainsi, on peut résoudre dans un premier temps les problèmes libres sans se soucier des efforts d'interfaces encore inconnus. Toutefois on doit toujours vérifier les équations EQS.(2.6),(2.7). En utilisant la décomposition de la solution, la première équation EQ.(2.6) correspondant à la continuité cinématique devient :

$$\sum_s \underline{L}^{(s)} \left(u_f^{(s)} + u_l^{(s)} \right) = 0 \quad \underline{L}^{(s)} = \underline{A}^{(s)} t^{(s)} \quad (2.25)$$

Or à ce stade, la solution libre est connue, on peut donc exprimer la solution liée en fonction de celle libre de la manière suivante :

$$\sum_s \underline{L}^{(s)} u_l^{(s)} = - \sum_s \underline{L}^{(s)} u_f^{(s)} \quad (2.26)$$

Ainsi résoudre le problème lié équivaut à résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} K^{(1)} & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K^{(N)} & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & L^{(1)} & \dots & \dots & L^{(N)} \\ -\underline{L}^{(1)} & \dots & \dots & -\underline{L}^{(N)} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_l^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_l^{(N)} \\ \lambda_l^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_l^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_k \underline{L}^{(k)} u_f^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Ainsi le calcul se décompose en deux parties. La première étape consiste à la résolution des problèmes libres de chaque sous domaine. Ces problèmes étant indépendants les uns des autres, il est donc possible (c'est même l'intérêt lors de calcul purement numérique) de les résoudre en parallèle. Dans une décomposition numérique, il est donc judicieux de décomposer la structure afin d'avoir un temps de résolution équivalent dans chaque sous-structure en tenant compte d'éventuelles non linéarités. Dans ce cas, la décomposition est effectuée sur le problème linéarisé. La seconde étape est la résolution du problème d'interface. Cette étape est donc critique car elle ne peut être effectuée en parallèle et est d'autant plus coûteuse que le nombre de sous-structures est important (et donc la taille de l'interface).

Application aux tests hybrides pseudo-dynamique Dans un test hybride, on travaille avec un problème statique équivalent, il y a donc les trois variables cinématiques de la dynamique : déplacement, vitesse et accélération. Ainsi, la continuité cinématique peut

5. La sous-structure n'est soumise qu'aux forces d'interfaces

être imposée au choix sur l'une de ces trois variables :

$$\begin{aligned} & \sum_s \underline{A}^{(s)} t^{(s)} u^{(s)} = 0 \\ \text{ou} & \sum_s \underline{A}^{(s)} t^{(s)} v^{(s)} = 0 \\ \text{ou} & \sum_s \underline{A}^{(s)} t^{(s)} a^{(s)} = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Le choix de la variable cinématique pour la continuité est crucial pour la convergence du calcul. Il est prouvé [CG02] que le choix de la vitesse assure une meilleure convergence. Après avoir choisi un schéma d'intégration temporelle, le problème se résout en deux étapes : la première consiste à résoudre l'ensemble des problèmes libres des N sous-structures, et la deuxième étape est la résolution du problème lié dont la construction dépend du schéma d'intégration et du type de continuité choisi. Ainsi, pour réaliser un test hybride, il faut que la pseudo-matrice à décomposer soit linéaire et connue, ce qui impose l'utilisation du schéma de Newmark explicite ou du schéma α -OS. Prenons par exemple le schéma de Newmark explicite ($\beta = 0$, $\gamma = 1/2$) pour obtenir les équations à résoudre pour les différentes conditions de continuité. Pour le schéma de Newmark explicite, l'intégration temporelle des variables cinématiques donne les expressions suivantes pour le déplacement et la vitesse :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \underbrace{u_n + \Delta t v_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 a_n}_{\tilde{u}_{n+1}} \\ v_{n+1} &= \underbrace{v_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 a_n}_{\tilde{v}_{n+1}} + \frac{1}{2} \Delta t^2 a_{n+1} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Les notations $(\tilde{\cdot})$ indiquent la partie explicite des expressions. En décomposant l'accélération en partie libre et liée, on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \tilde{u}_{n+1} = u_{f \ n+1} \\ v_{n+1} &= \underbrace{\tilde{v}_{n+1} + \frac{1}{2} \Delta t^2 a_{f \ n+1}}_{v_{f \ n+1}} + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta t^2 a_{l \ n+1}}_{v_{l \ n+1}} \end{aligned} \quad (2.30)$$

On construit ainsi le problème décomposé équivalent au problème dynamique :

$$\begin{aligned} \forall k \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{M}^{(k)} \cdot a_{l \ n+1}^{(k)} = \lambda_{n+1}^{(k)} \\ \sum_k \underline{A}^{(k)} t^{(k)} a_{n+1}^{(k)} = 0 \\ \sum_k \underline{A}^{(k)} t^{(k)} \lambda_{n+1}^{(k)} = 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ainsi, il est possible de résoudre la première équation du système précédent indépendamment des autres. Toutefois pour résoudre les autres, il faut construire un système d'équations en fonction du type de continuité choisi.

Continuité en accélération Dans ce premier cas, l'équation de continuité EQ.(2.25) peut se réécrire :

$$\sum_k \underbrace{A^{(k)} t^{(k)}}_{\underline{L}^{(k)}} (a_{f\ n+1}^{(k)} + a_{l\ n+1}^{(k)}) = 0 \quad (2.32)$$

or on connait $a_{f\ n+1}^{(k)} \forall k$ (solutions des problèmes libres), donc on a :

$$\sum_k \underline{L}^{(k)} a_{l\ n+1}^{(k)} = - \sum_k \underline{L}^{(k)} a_{f\ n+1}^{(k)} \quad (2.33)$$

Ainsi on construit le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \hat{M}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \hat{M}^{(N)} & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & L^{(1)} & \dots & \dots & L^{(N)} \\ -\underline{L}^{(1)} & \dots & \dots & -\underline{L}^{(N)} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{l\ n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{l\ n+1}^{(N)} \\ \lambda_{l\ n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_{l\ n+1}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_k \underline{L}^{(k)} a_{f\ n+1}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Ce système matriciel inclut la continuité cinématique et la réciprocité des efforts d'interfaces. Il permet de résoudre le problème lié et donc le problème global.

Continuité en vitesse Dans ce second cas, l'équation de continuité EQ.(2.25) devient :

$$\sum_k \underline{L}^{(k)} \frac{\Delta t}{2} a_{l\ n+1}^{(k)} = - \sum_k \underline{L}^{(k)} v_{f\ n+1}^{(k)} \quad (2.35)$$

Ainsi on peut construire le système matriciel suivant :

*Analyse de l'endommagement des structures de génie civil :
Techniques de sous-structuration hybride couplé à un modèle d'endommagement anisotrope*

$$\begin{pmatrix} \hat{M}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \hat{M}^{(N)} & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & L^{(1)} & \dots & \dots & L^{(N)} \\ -\frac{\Delta t}{2} \underline{L}^{(1)} & \dots & \dots & -\frac{\Delta t}{2} \underline{L}^{(N)} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{l_{n+1}}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{l_{n+1}}^{(N)} \\ \lambda_{l_{n+1}}^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda_{l_{n+1}}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_k \underline{L}^{(k)} v_{f_{n+1}}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Comme précédemment, ce système permet de résoudre le problème lié et donc le problème global.

Continuité en déplacement La continuité en déplacement s'écrit $\sum_k \underline{A}^{(k)} t^{(k)} u_{n+1}^{(k)} = 0$, or la décomposition de l'accélération avec le schéma d'intégration de Newmark donne $u_{l_{n+1}}^{(k)} = 0$. Donc l'équation de continuité devient $\sum_k \underline{A}^{(k)} t^{(k)} u_{f_{n+1}}^{(k)} = 0$ qui ne permet pas de résoudre le problème lié.

Cette méthode propose là encore une solution de décomposition de domaine sur le problème linéarisé. Ainsi comme la méthode primale étudiée précédemment, cette méthode impose l'utilisation d'une méthode explicite, induisant un pas de temps réduit ou le schéma d'intégration α -OS.

2.2.2 Méthode duale (explicite) sur le problème dynamique

Pour comprendre le principe de la décomposition duale sur un problème dynamique, nous allons nous intéresser à un cas test simple (FIG.2.6). Notre système masse-ressort amorti est donc décomposé en deux systèmes indépendant.

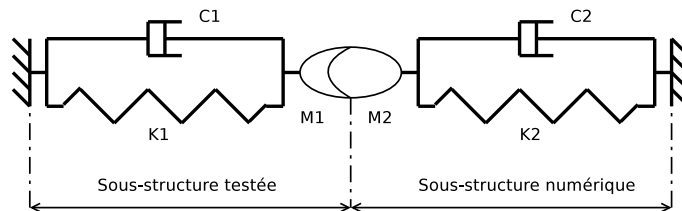


FIGURE 2.6: Structure étudiée pour le cas test

$$\begin{cases} M^1 \cdot a^1 + C^1 \cdot v^1 + K^1 \cdot u^1 = F^1 + \lambda^1 \\ M^2 \cdot a^2 + C^2 \cdot v^2 + K^2 \cdot u^2 = F^2 + \lambda^2 \end{cases} \quad (2.37)$$

Où λ_1 et λ_2 sont les multiplicateurs de Lagrange représentant les efforts d'interfaces. La réciprocité impose donc :

$$\lambda^1 + \lambda^2 = 0 \quad (2.38)$$

On s'aperçoit aussi que le seul degré de liberté apparaît dans les deux sous-domaines. Les variables cinématiques $(\cdot)^1$ et $(\cdot)^2$ représentent la cinématique du même point. Ainsi, en décomposant directement le problème dynamique, plusieurs conditions de continuité cinématique peuvent être utilisées : le déplacement, la vitesse ou l'accélération.

$$u^1 - u^2 = 0 \quad (2.39)$$

$$v^1 - v^2 = 0 \quad (2.40)$$

$$a^1 - a^2 = 0 \quad (2.41)$$

Chacune des conditions de continuité cinématique permettent de déterminer une expression du multiplicateur de Lagrange :

$$\lambda_n^d = \frac{K^1 (F_n^2 - M^2 \cdot a_n^2 - C^2 \cdot v_n^2) - K^2 (F_n^1 - M^1 \cdot a_n^1 - C^1 \cdot v_n^1)}{K^1 + K^2} \quad (2.42)$$

$$\lambda_n^v = \frac{C^1 (F_n^2 - M^2 \cdot a_n^2 - K^2 \cdot u_n^2) - C^2 (F_n^1 - M^1 \cdot a_n^1 - K^1 \cdot u_n^1)}{C^1 + C^2} \quad (2.43)$$

$$\lambda_n^a = \frac{M^1 (F_n^2 - C^2 \cdot v_n^2 - K^2 \cdot u_n^2) - M^2 (F_n^1 - C^1 \cdot v_n^1 - K^1 \cdot u_n^1)}{M^1 + M^2} \quad (2.44)$$

Il est démontré que la condition de continuité en vitesse est la seule condition convergente [CG02]. On peut illustrer ce phénomène facilement en résolvant ce problème test avec les trois conditions de continuité cinématique. Dans cet exemple, les efforts d'interfaces sont résolus explicitement. Les problèmes découplés peuvent être résolus avec n'importe quel schéma d'intégration temporelle, ce qui permet d'adapter un schéma implicite à convergence inconditionnelle pour la structure numérique et un schéma explicite ou $\alpha - OS$ pour la structure expérimentale.

On traite notre cas d'étude pour différentes répartition de raideur et de masse et pour deux pas de temps ($8 \cdot 10^{-3}$ s et $8 \cdot 10^{-4}$ s) (FIG.2.7 à FIG.2.9).

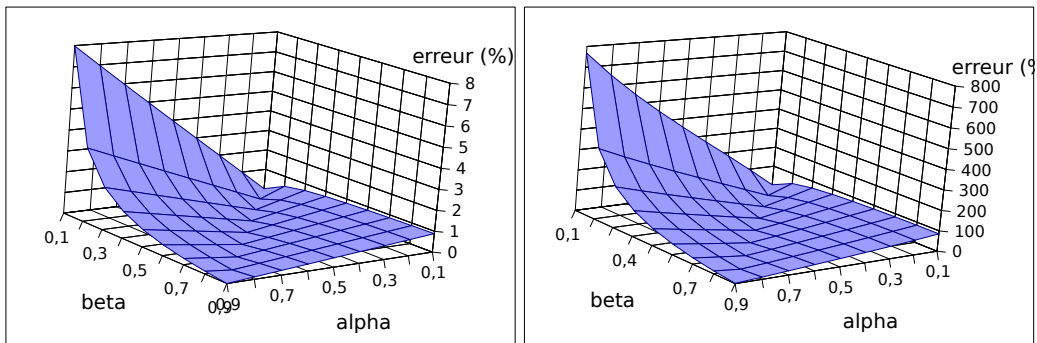


FIGURE 2.7: Erreur en continuité en accélération en fonction de la répartition de raideur (beta) et de masse (alpha)

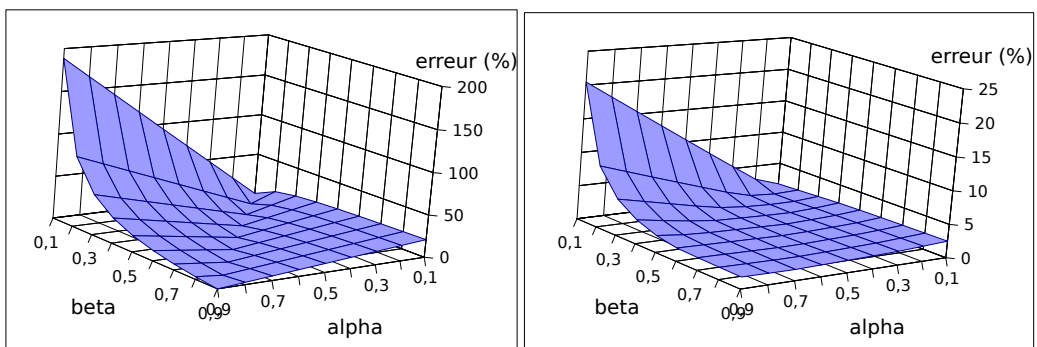


FIGURE 2.8: Erreur en continuité en vitesse en fonction de la répartition de raideur (beta) et de masse (alpha)

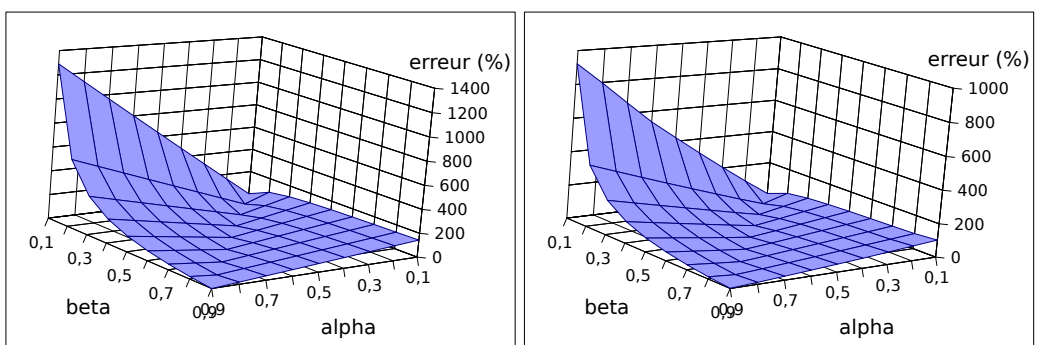


FIGURE 2.9: Erreur en continuité en déplacement en fonction de la répartition de raideur (beta) et de masse (alpha)

Le cas test permet d'illustrer la meilleure convergence du problème lorsque celui-ci est résolu avec la continuité en vitesse, ceci à pas de temps fixé.

Application aux tests hybrides pseudo-dynamique L'utilisation de ce schéma peut facilement s'adapter aux tests hybrides. En effet, l'avantage principal de cette méthode est l'indépendance des sous-domaine vis-à-vis des schémas d'intégration numérique. Ainsi, il suffit d'adopter un schéma adapté aux tests hybrides (Newmark explicite, α -OS) pour la structure testée.

Cette méthode a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre. Toutefois, le couplage reste explicite, ce qui peut entraîner une divergence du calcul global. Le pas de temps du couplage doit être défini a priori. Une étude rapide montre que le pas de temps doit être réduit considérablement. Ainsi cette méthode ne paraît finalement pas efficace ni pertinente pour une sous-structuration hybride.

2.2.3 Méthode duale (implicite) sur le problème dynamique

La section précédente montre la possibilité de décomposer directement le problème dynamique par une décomposition duale du problème. Ainsi, on peut exploiter cette solution de façon optimale pour les tests hybrides. En effet, la structure expérimentale nécessite un schéma d'intégration temporelle de type Newmark explicite ou α -OS. Cependant, rien n'oblige à utiliser ces schémas pour la structure numérique. Au contraire elle bénéficierait d'une meilleure convergence si son schéma d'intégration est implicite. On remarque donc l'utilisation du côté numérique d'un schéma implicite pouvant tirer profit d'un grand pas de temps sans corrompre la convergence, et du côté expérimental d'un schéma explicite exigeant un pas de temps court. La décomposition du problème dynamique au lieu du problème statique équivalent permet cette finesse [CG02] [CGH03]. Le pas de temps de la première sous-structure sera noté ΔT et celui de la seconde sous-structure δT . Cette méthode peut être aussi utile lors du couplage numérique-numérique d'un code explicite avec un code implicite (couplage fluide/structure par exemple). Pour distinguer les deux schémas d'intégration différents nous les noterons $(\tilde{\cdot})$ et $(\hat{\cdot})$.

Les équations du problème dynamique décomposé deviennent :

$$\begin{aligned}\hat{M}^1 \cdot a^1 &= \hat{F}^1 + L^1 \cdot \Lambda \\ \tilde{M}^2 \cdot a^2 &= \tilde{F}^2 + L^2 \cdot \Lambda \\ \underline{L}^1 \cdot v^1 + \underline{L}^2 \cdot v^2 &= 0 \\ L^1 \cdot \Lambda + L^2 \cdot \Lambda &= 0\end{aligned}\tag{2.45}$$

Comme dans la méthode FETI, l'accélération est décomposée en accélérations dites liée et libre qui sont chacune solution d'une partie du problème :

$$\begin{aligned}\hat{M}^1 \cdot a_f^1 &= \hat{F}^1 \\ \hat{M}^1 \cdot a_l^1 &= L^1 \cdot \Lambda \\ \tilde{M}^2 \cdot a_f^2 &= \tilde{F}^2 \\ \tilde{M}^2 \cdot a_l^2 &= L^2 \cdot \Lambda\end{aligned}\tag{2.46}$$

Ainsi, on définit deux problèmes libres qui sont résolus indépendamment mais qui dépendent de la solution liée pour les pas précédents. De la même façon, les autres variables cinématiques sont décomposées :

$$\begin{aligned} d_f^{n+1} &= \tilde{d}^{n+1} + \beta \delta t^2 a_f^{n+1} & u_l^{n+1} &= \beta \delta t^2 a_l^{n+1} & u^{n+1} &= u_f^{n+1} + u_l^{n+1} \\ v_f^{n+1} &= \tilde{v}^{n+1} + \gamma \delta t a_f^{n+1} & v_l^{n+1} &= \gamma \delta t a_l^{n+1} & v^{n+1} &= v_f^{n+1} + v_l^{n+1} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ainsi le problème lié se construit sur la condition de continuité cinématique :

$$\begin{aligned} \underline{L}^1 \cdot (v_{1f}^{n+1} + v_{1l}^{n+1}) + \underline{L}^2 \cdot (v_{1f}^{n+1} + v_{1l}^{n+1}) &= 0 \\ \underline{L}^1 \cdot v_{1l}^{n+1} + \underline{L}^2 \cdot v_{1l}^{n+1} &= -\underline{L}^1 \cdot v_{1f}^{n+1} - \underline{L}^2 \cdot v_{1f}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.48)$$

La complexité de cette méthode est la gestion des deux discrétisations temporelles différentes pour les deux sous-domaines. En effet, le problème de liaison des deux problèmes doit être résolu à chaque pas de temps. Ainsi les équations à résoudre au pas n pour la structure simulée sont :

$$\gamma_1 \Delta T \begin{pmatrix} \hat{M}^1 & -L^1 \\ -\underline{L}^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1l}^{n+1} \\ \Delta^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{L}^1 \cdot v_{1f}^{n+1} + \underline{L}^2 \cdot (v_{2f}^{n+1} + v_{2l}^{n+1}) \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Pour résoudre ce système, il faut d'abord résoudre le sous-domaine 2 pour connaître le second terme. Le système du sous-domaine 2 est :

$$\gamma_2 \delta T \begin{pmatrix} \hat{M}^2 & -L^2 \\ -\underline{L}^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2l}^{n+1} \\ \Delta^{n+m/M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{L}^2 \cdot v_{2f}^{n+m/M} + \underline{L}^1 \cdot (v_{1f}^{n+m/M} + v_{1l}^{n+m/M}) \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Il faut donc relier les variables des deux discrétisations temporelles. On le réalise par une interpolation linéaire :

$$(\cdot)_1^{n+m/M} = \left(1 - \frac{m}{M}\right) (\cdot)_1^n + \frac{m}{M} (\cdot)_1^{n+1} \quad (2.51)$$

A partir des équations EQS.(2.47),(2.48),(2.51) on exprime la vitesse liée :

$$\underline{L}^1 \cdot v_{1l}^{n+m/M} = \underline{L}^1 \cdot \gamma \delta T a_l^{n+1} = \underline{L}^1 \cdot \gamma \delta T \hat{M}_1^{-1} L^1 \Lambda^{n+m/M} \quad (2.52)$$

Après condensation de l'équation EQ.(2.50) on obtient :

$$\left(\gamma \delta T \underline{L}^1 \hat{M}_1^{-1} L^1 + \gamma \delta t \underline{L}^2 \hat{M}_2^{-1} L^2 \right) \Lambda^{n+m/M} = - \left(\underline{L}^1 v_{1f}^{n+m/M} + \underline{L}^2 v_{2f}^{n+m/M} \right) \quad (2.53)$$

Ce qui nous permet d'obtenir l'équation du problème lié du sous-domaine 2 :

$$\tilde{M}^2 a_{2l}^{n+m/M} = L^2 \cdot \Lambda^{n+m/M} \quad (2.54)$$

La méthode duale appliquée directement à l'équation de la dynamique offre des avantages importants. Non seulement il est possible d'avoir autant de schémas d'intégration temporelle différents que de sous-structures mais aussi autant de discrétisations temporelles différentes. Cette méthode peut même être adaptée à des tests hybrides continus [PM02] afin d'éviter les temps de latence dus à la résolution du problème d'interface.

Application aux tests hybrides pseudo-dynamique Ce schéma de couplage montre de nombreux avantages. Premièrement, la décomposition de domaine est réalisée sur le problème dynamique et permet donc de choisir le schéma d'intégration temporelle le mieux adapté pour chaque sous-structure. La figure FIG.2.10 montre l'application de ce schéma sur le cas test en variant la répartition de masse et de raideur. La sous-structure numérique profite du schéma de Newmark implicite et la sous-structure expérimentale du schéma α -OS. De plus, chaque sous-structure peut bénéficier d'un pas de temps différent afin

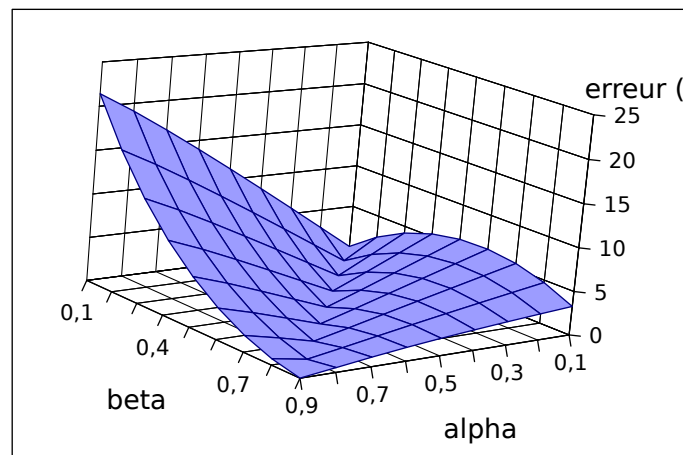


FIGURE 2.10: Erreur du schéma de décomposition implicite sur le problème dynamique en fonction de la répartition de masse (alpha) et de raideur (beta)

d'optimiser le temps de calcul sans compromettre la convergence. Toutefois, l'implantation de ce schéma est complexe et nécessite notamment des manipulations de matrices qui alourdissent les calculs. Une variante de ce schéma est proposée par P.Pegon [PM02] pour effectuer des tests hybrides continus.

2.3 Méthode mixte explicite

Cette méthode considère deux sous-structures indépendantes avec des conditions d'interfaces mixtes (déplacement pour une sous-structure, force pour l'autre) (FIG.2.11) dépendantes du temps. Chaque problème est ensuite résolu de façon indépendante avec une actualisation des conditions d'interfaces à intervalles de temps prédéfinis. Il faut donc distinguer plusieurs échelles de temps et plusieurs discrétisations temporelles. L'échelle de temps dynamique est liée au problème lui-même et l'échelle de temps expérimental est liée à l'expérimentation. Les deux peuvent être confondues dans le cas d'un calcul en temps réel. Les deux discrétisations concernent d'un côté l'échantillonnage d'actualisation des conditions d'interfaces et de l'autre la discrétisation temporelle pour le calcul numérique. Les deux peuvent être confondues ou non, mais le premier doit être un multiple du second.

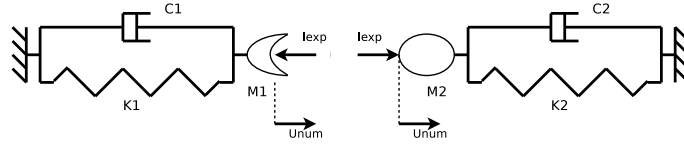


FIGURE 2.11: Décomposition de la structure du cas test pour un couplage mixte explicite

Le problème globale s'écrit :

$$Ma + Cv + r = f_{ext} \quad (2.55)$$

Après décomposition en deux domaines :

$$\begin{aligned} M^N a^N + C^N v^N + r^N &= f_{ext}^N + \lambda_{E \rightarrow N} \\ M^E a^E + C^E v^E + r^E(u_{int}^N) &= f_{ext}^E + \lambda_{N \rightarrow E} \end{aligned} \quad (2.56)$$

La première équation est résolue numériquement avec une force d'interface constante sur un ou plusieurs pas de temps numérique. À la fin de chaque pas de temps d'interface, le déplacement à l'interface est extrait du calcul numérique pour être imposé sur la sous-structure testée. Dans le cas d'une sous-structuration pseudo-dynamique, le déplacement est imposé lentement puis les forces internes (correspondant donc aux réactions $r^E(u_{int}^A)$) sont mesurées. Pour extraire, les forces d'interfaces pour le pas numérique suivant, il faut un schéma pseudo-dynamique, de préférence explicite pour tenir compte des effets inertiels et visqueux.

Si cette méthode assure la convergence de la sous-structure numérique à chaque pas de temps, la convergence globale de l'analyse n'est pas assurée et dépend fortement de la discrétisation temporelle d'interface. Cette discrétisation temporelle dépend fortement de la répartition de la raideur entre les deux sous-structures.

3 Méthode hybride par analyse (semi-)globale

3.1 Analyse semi-globale

Dans une approche semi-globale, une partie de la sous-structure expérimentale est modélisée avec la sous-structure numérique. Il s'agit le plus souvent de la masse et de l'amortissement lors d'essai pseudo-dynamique (FIG.2.13). En effet, lors d'un essai pseudo-dynamique, les effets d'inertie et visqueux doivent être pris en compte numériquement [BP94] [Peg96] [PP00] même lors d'analyses par décomposition de domaine. Une méthode globale inclut la prise en compte de ces effets directement dans le calcul de la partie numérique.

Ainsi, après décomposition, le problème régi par l'équation EQ.(2.55) s'écrit de la façon suivante dans un cas d'analyse pseudo-dynamique :

$$\begin{aligned} M^G a^G + C^G v^G + r^A &= f_{ext}^A + \lambda_{E \rightarrow A} \\ r^E(u_{int}^A) &= f_{ext}^E + \lambda_{A \rightarrow E} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Dans le cas d'une analyse hybride en temps réel, les effets de viscosité et d'inertie peuvent être pris en compte totalement ou partiellement par la partie expérimentale.

Considérons le problème simple d'une masse reliée à deux ressorts amortis (FIG.2.12). La masse est divisée en deux parties, chacune intégrant une sous-structure différente. La partie gauche de la structure (M_1 , C_1 , K_1) est la partie testée expérimentalement. Dans une méthode semi-globale, seule la raideur de la sous-structure est déterminée expérimentalement, la dissipation et la force d'inertie sont elles calculées par la simulation de la partie numérique en intégrant la masse et l'amortisseur dans la structure numérique (FIG.2.13).

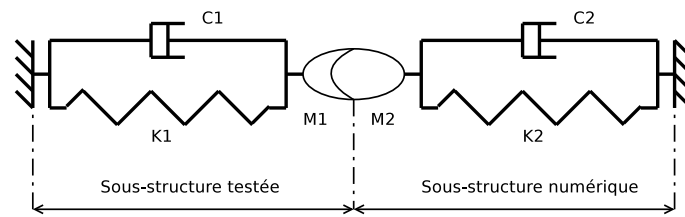


FIGURE 2.12: Décomposition de la structure globale du cas test

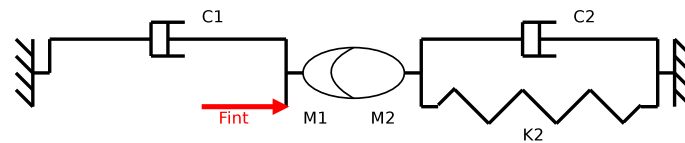


FIGURE 2.13: Sous-structure modélisée numériquement pour la méthode semi-globale

La partie expérimentale de l'analyse hybride devient simplement un test statique. La complexité demeure dans le couplage de deux sous-structures. Le couplage est notamment sensible à la répartition de la raideur globale entre les deux sous-structures. L'étude des schémas de couplage doit donc prendre en compte ce paramètre. Pour cela, le coefficient $\beta = K_2/(K_1 + K_2)$ est introduit. Deux couplages sont maintenant étudiés : le couplage explicite et un couplage avec sous-itération.

3.1.1 Couplage explicite

Cette première méthode propose un couplage explicite très aisé à mettre en oeuvre. En effet, pour chaque sous-structure les conditions d'interfaces sont déterminés par le calcul ou par l'essai au pas de temps du pas précédent (FIG.2.14). Le calcul de la partie numérique peut donc être itératif. Une fois la convergence atteinte pour la sous-structure numérique, le déplacement d'interface est envoyé au contrôleur de la plateforme d'essai. Inversement, la mesure expérimentale de la force de réaction de la sous-structure expérimentale est envoyée au calculateur pour actualiser la condition d'interface en force.

Malgré la simplicité du couplage, la convergence n'est a priori pas assurée et dépend fortement du pas de temps du couplage. Une étude paramétrique montre l'influence du facteur β sur le pas de temps maximal pour obtenir une précision acceptable de l'analyse

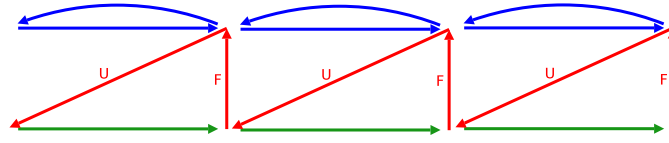


FIGURE 2.14: Schéma de communication pour un couplage explicite alterné

hybride. Nous comparons la solution issue de la simulation hybride avec la solution de référence pour différentes répartitions de la raideur et pour différents pas de temps. La figure FIG.2.15 montre l'erreur maximale en fonction du paramètre β et du pas de temps dt . A pas de temps donné, l'erreur est d'autant plus grande que la raideur expériment-

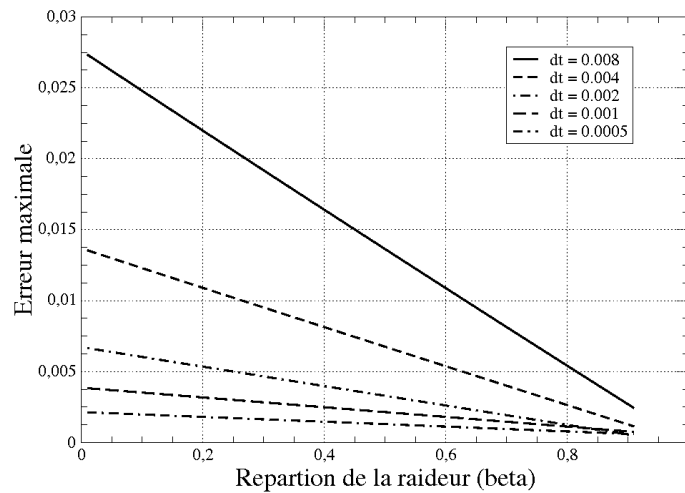


FIGURE 2.15: Erreur pour le couplage explicite en fonction de la répartition de la raideur et du pas de temps

taile est prépondérante. L'erreur est linéaire par rapport à la répartition de raideur. Pour une structure donnée (β fixé), une diminution du pas de temps améliore évidemment la convergence du calcul.

Cette étude paramétrique montre la nécessité d'un pas de temps très court pour obtenir une bonne convergence globale de la simulation hybride. Ceci entraîne un coût de calcul important et peu avantageux par rapport un schéma d'intégration globale explicite (BDD).

3.1.2 Couplage avec sous-itération

Cette seconde méthode propose un enrichissement de la méthode précédente. En effet, au lieu de réduire le pas de temps des deux sous-structures, seul le pas de temps expérimental est ajusté pour obtenir la convergence (FIG.2.16). Le pas de temps numérique est déterminé de façon similaire à un calcul non hybride. Ensuite le pas de temps expérimental est choisi parmi les sous-multiples du pas de temps numérique (3 dans l'exemple de

la figure FIG.2.16). Le déplacement est envoyé progressivement à la plateforme expérimentale permettant d'actualiser les conditions d'interface pour le calcul numérique. La figure FIG.2.16 illustre une progression linéaire du déplacement appliqué à la structure expérimentale. Toutefois ce type de progression revient exactement au calcul explicite précédent. La meilleure vitesse de convergence est obtenue par un envoi de la totalité du

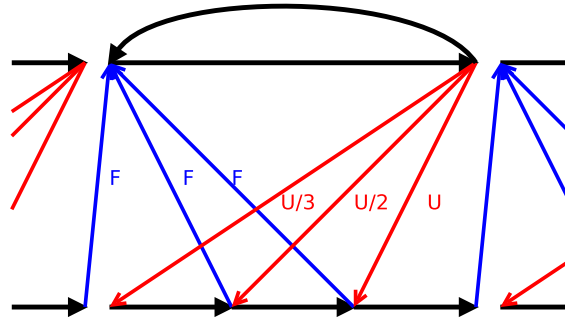


FIGURE 2.16: Schéma de communication avec sous-itérations (exemple pour trois sous-itérations)

déplacement dès la première itération (FIG.2.17). Toutefois, cette méthode possède un fort risque de surchargement de la structure expérimentale, ce qui est très préjudiciable. Ainsi, il faut optimiser la fonction qui permet l'envoi progressif permettant une conver-

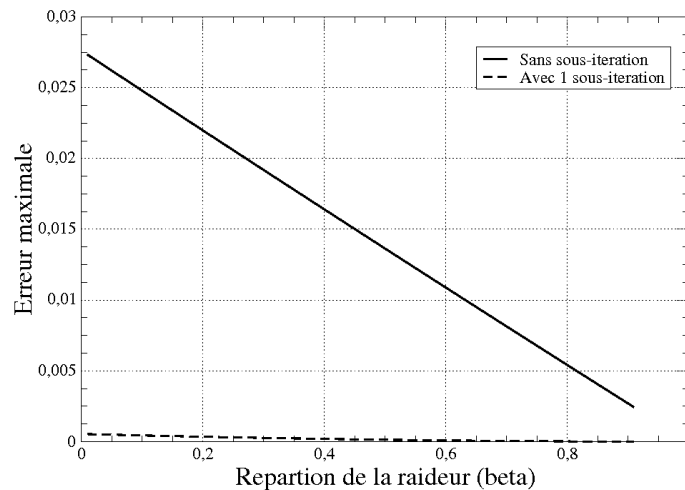


FIGURE 2.17: Erreur du couplage explicite avec sous-itérations en fonction du nombre de sous-itérations et de la répartition de la raideur : envoi de la totalité du déplacement

gence rapide tout en évitant les surchargements. La figure FIG.2.18 illustre la convergence avec une fonction racine carrée.

Cette étude montre l'importance d'augmenter le nombre de sous-itération lorsque que la raideur globale est majoritairement répartie sur la structure expérimentale. Si ce premier résultat est prévisible, il est aussi remarquable que pour une structure donnée (β fixé)

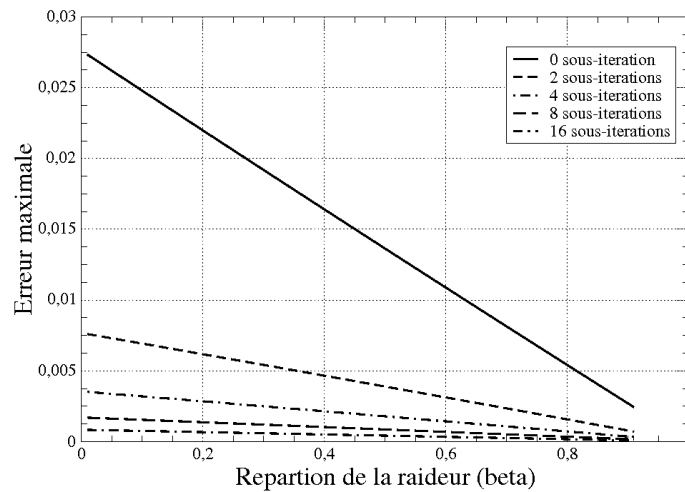


FIGURE 2.18: Erreur du couplage explicite avec sous-itérations en fonction du nombre de sous-itérations et de la répartition de la raideur : envoi progressif (racine carré) du déplacement

une faible augmentation de nombre de sous-pas permet de faire chuter l'erreur considérablement si la progression du déplacement envoyé est correctement choisie.

3.2 Méthode globale

Dans une approche globale, on considère dans un premier temps la structure dans son ensemble (sous-structure numérique et sous-structure expérimentale). Ainsi toute la structure est modélisée et maillée dans le code élément fini choisi de la même manière que pour un calcul purement numérique à un détail près. En effet, la sous-structure est modélisée par un élément hybride avec autant de degré de liberté que la structure testée. La différence est donc au niveau local dans le schéma numérique : l'élément hybride ne contient aucune loi de comportement mais une routine de communication permettant d'envoyer le déplacement numérique et de récupérer la force de réaction expérimentale. En général, l'élément hybride contient aussi des algorithmes de corrections, de filtres ou des compensateurs de retard pour les applications en temps réel.

La sous-structure expérimentale hérite donc du schéma d'intégration temporelle de la sous-structure numérique (Newmark pour Cast3m, α -OS pour Mercury⁶ ...), et, pour les applications pseudo-dynamiques, les forces d'inertie et visqueuses sont directement prises en compte dans le calcul global. Cette méthode rend extrêmement simple la gestion des communications dès lors que l'élément hybride est réalisé.

Il faut toutefois remarquer que ce type de méthode est fondée sur une méthode numérique, elle est donc itérative et susceptible de provoquer des *overshot*. Ainsi il est

6. Code de calcul développé à l'Université du Colorado (Boulder) pour des applications temps réel

nécessaire de travailler avec la matrice de raideur initiale voir de surestimer la raideur initiale de l'élément hybride (donc la raideur de la structure testée) enfin d'avoir une convergence "par le bas". L'avantage principal de cette méthode est une convergence globale naturellement assurée. En effet, le logiciel itère jusqu'à convergence, et autant d'essais sont réalisés que le nombre d'itérations nécessaire pour chaque pas de temps. Aucun pas de temps ou nombre de sous-itérations sont à déterminer a priori évitant tout risque d'erreur entrainant la divergence du calcul hybride pouvant entrainer des dommages sur la plateforme expérimentale et évidemment sur la structure testée.

3.2.1 Méthode de Shing

Cette méthode est notamment utilisée pour les tests hybrides en temps réel. En effet, une méthode globale associée au schéma α -OS offre de bonne possibilité de calcul hybride. La méthode proposée par Shing [SV91] [SVC91] [SNB96] utilise ce principe en fixant un nombre de sous-itérations pour contrôler le temps de calcul pour chaque pas et synchroniser les deux sous-structures pour l'analyse temps réel. Dans l'exemple du schéma FIG.2.19, seulement deux sous-pas sont utilisés, l'ordre de grandeur usuel est d'une ou deux dizaines de sous-pas. Dans ce schéma, le nombre de sous-pas correspond au nombre d'itération pour le calcul numérique. Pour chaque itération, une consigne est envoyée au verin en interpolant le déplacement convergé du pas précédent et le déplacement calculé à l'itération courante.

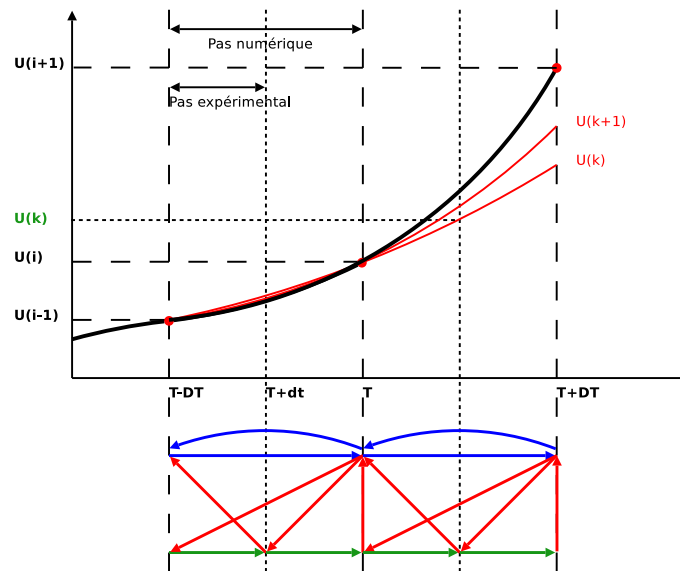


FIGURE 2.19: Schéma de communication de la méthode de couplage de Shing

Ce schéma est particulièrement adapté pour l'analyse hybride en temps réel, mais nécessite un schéma d'intégration α -OS et l'existence d'un élément hybride. De plus, il nécessite le choix d'un nombre d'itération prédéfini, ce qui peut être limitant pour la convergence du calcul.

4 Bilan des méthodes existantes

Nous avons vu précédemment différentes méthodes de décomposition de domaine et algorithmes pouvant s'adapter aux analyses hybrides numérique/expérimental. Toutefois, le fait qu'au moins une sous-structure soit expérimentale minimise les choix possibles. En effet, les critères retenus pour un algorithme de couplage sont les suivants : le non dépassement du chargement (overshot) lors d'éventuelles itérations ; une convergence assurée sans paramètres à définir a priori ; enfin, une dernière contrainte est ajoutée, la faible intrusion de la méthode dans le code de calcul. Ainsi notre choix se tourne naturellement vers une méthode globale dans laquelle on utilise le schéma d'intégration temporelle du code de calcul choisi et la convergence est assurée grâce à un critère qui est à déterminer.

5 Analyse hybride dans Castem

5.1 Élément hybride dans Cast3m

Nous allons détailler ici l'implantation d'un élément hybride dans Cast3m pour notre cas d'étude : un élément de structure élançée avec un seul degré de liberté (qui pourra être généralisé). La sous-structure testée sera modélisée par un élément poutre avec donc six degrés de liberté à chaque extrémité. Dans notre cas précis, une extrémité est encastree, l'autre libre à l'exception d'un degré de liberté horizontal qui est commun avec la sous-structure numérique.

Pour un élément poutre classique, les déplacements aux extrémités sont connus, et on calcule les forces internes $r = Ku$ via la loi de comportement sur chaque point de Gauss. Pour un élément hybride, il est nécessaire d'avoir un seul et unique point de Gauss, et la loi de comportement est remplacée par la mesure expérimentale.

Ainsi, il suffit de créer un nouveau modèle de comportement adapté aux éléments poutre qui ouvre une *socket* vers la plateforme C++ du centre d'essai. Cette *socket* permettant donc d'envoyer la commande en déplacement et de récupérer l'effort mesuré. Toutefois, cette communication est complexe à mettre en œuvre. Elle nécessite l'ouverture d'une *socket* au sein de la routine de la loi de comportement. Or Cast3m (code choisi pour cette étude) intègre des routines de *socket* ou d'appel à des fonctions extérieures au niveau supérieur (c'est-à-dire, à la fin d'un pas de calcul, quand celui-ci a convergé). Nous allons donc dégénérer cette méthode pour tirer profit de ces caractéristiques.

5.2 Méthode par pénalisation

La méthode précédente montre l'implantation d'un élément hybride. Cette phase nécessite la connaissance du langage de programmation du code élément fini (fortran dans le cas de l'utilisation Cast3m). L'intégration de la communication (via socket, fifo ou appel à une fonction externe codé en C++) au sein d'un élément peut être complexe. Une alternative simple à programmer est une méthode de pénalisation. La partie expérimentale est modélisée dans la structure numérique avec des éléments classiques associés à

un modèle linéaire. La rigidité de la partie expérimentale est volontairement sur-estimée pour éviter les *overshot*. Ensuite pour chaque pas de temps, la structure est simulée avec la raideur initiale, le déplacement de la structure expérimentale est donc sous-estimé. Le déplacement et la force de réaction de la structure expérimentale sur la structure simulée sont extraits : (U_{int}^N et F_{int}^N). Ce déplacement est imposé sur la sous-structure réelle, et la force de réaction est mesurée. Cette force mesurée est inférieure à la force calculée grâce à l'utilisation conjointe de la raideur initiale et de la sur-estimation de la raideur de la partie testée. L'étape de pénalisation consiste à imposer un système de forces auto-équilibrées pour qu'à déplacement égal, la sous-structure modélisée ait le même effort de réaction que la structure testée. Ce protocole est itéré jusqu'à convergence. La convergence est contrôlée par l'erreur entre l'effort de réaction mesuré et celui calculé avec la pénalisation du pas précédent.

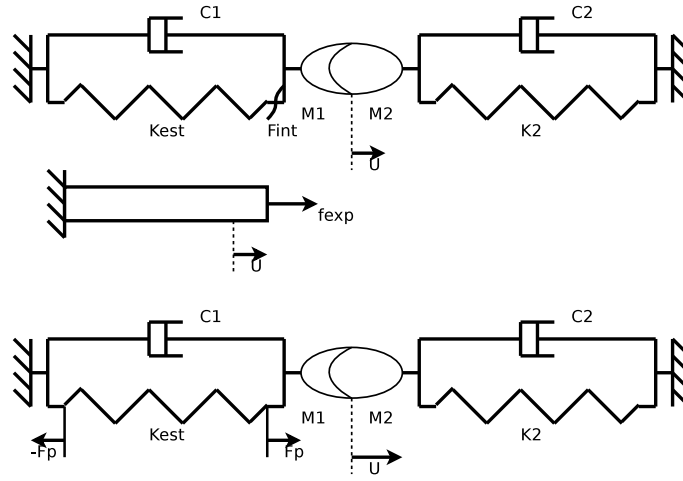


FIGURE 2.20: Décomposition de la structure pour la méthode par pénalisation

$$C_{conv} = \left| \frac{F_{int} - F_{exp}}{F_{exp}} \right| \leq Tol \quad (2.58)$$

où F_{int} est la force numérique d'interaction entre les deux sous-structures numériques et F_{exp} la force de réaction expérimentale.

Ce schéma hybride peut être résumé par cette organigramme :

1. Calcul de la matrice de rigidité initial avec sur-estimation de la rigidité de la sous-structure expérimentale.
2. Initialisation de la pénalisation
3. Boucle sur les pas de temps
 - (a) Calcul du chargement extérieur
 - (b) Boucle de convergence : tant que $C_{conv} \geq Tol$
 - i. Mise à jour du chargement avec la force de pénalisation actualisée $F_n^P = F_{n-1}^P + \chi_{n-1}^F$

- ii. Calcul numérique de la structure
- iii. Extraction des déplacements aux interfaces N/E $^7 : U_{int}^N$
- iv. Extraction des efforts internes aux interfaces N/E : F_{int}^N
- v. On impose U_{int}^N à la structure expérimentale, on mesure F_{int}^E
- vi. Calcul de l'erreur de réciprocité des efforts $\chi_n^F = F_{int}^N - F_{int}^E$

Le problème approché (dans lequel la sous-structure est remplacée par un élément numérique plus rigide) devient équivalent au problème réel dès lors que l'évolution des forces de pénalisation sont déterminées. L'évolution de cette pénalisation est supposée linéaire entre deux pas de temps.

Plusieurs paramètres influencent la simulation et doivent donc être étudiés pour assurer le résultat. En effet, il faut choisir tout d'abord la raideur associée à l'élément expérimental (plusieurs raideurs si l'interface N/E contient plusieurs degrés de liberté). Cette raideur doit surestimer la raideur réelle de la structure. Dans le cas d'une structure adoucissante (béton armée). Il faut donc surestimer la raideur élastique. Dans certains cas, cette dernière peut être mesurée sans endommager le matériau. Si cette manipulation n'est pas possible, on est obligé de surestimer avec un coefficient important. Dans le cas où elle est connue, il faut choisir un coefficient ($\alpha \geq 1$). Ce coefficient influence la vitesse de convergence : plus il est important, plus le nombre d'itération est important. Le deuxième paramètre important est le critère de convergence Tol : il permet ou pas d'obtenir une convergence globale satisfaisante. On ne peut pas éviter de faire le parallèle avec le résidu d'un calcul numérique non linéaire. Ainsi l'idéal est de choisir le même critère de convergence pour la partie hybride que pour le calcul numérique lui même. Un critère plus faible n'aurait pas de sens, car les erreurs seraient induites par le calcul numérique. A l'inverse un critère plus grand permet d'éviter des itérations hybrides superflus mais ne doit pas introduire non plus trop d'erreurs. Toutefois, pour ne pas itérer infiniment, il faut vérifier que le critère ne soit pas plus faible que les erreurs de mesure. Ce critère doit donc être choisi en fonction de la chaîne de mesure expérimentale.

Nous allons donc étudier notre cas test avec plusieurs coefficients de surestimation et avec plusieurs valeur de la tolérance de convergence. La première étude considère une tolérance de 0.01. La figure FIG.2.21 montre d'un côté l'erreur maximale en fonction de la répartition de raideur et de l'autre le nombre maximale de sous-itérations. La même étude est réalisée pour une tolérance de 0.001 (FIG.2.22) afin d'évaluer l'influence de ce critère sur la précision et sur le temps de calcul (nombre de sous-itérations). On remarque que l'erreur maximale est considérablement plus faible que le critère de convergence sur les sous-itérations. Le nombre maximale d'itération reste faible. Toutefois, la vitesse de l'analyse dépend du nombre total d'itérations effectuées lors de l'analyse (FIG.2.23).

Cette étude montre que le coût de calcul peut être important selon la répartition de raideur, mais l'avantage de cette méthode est l'absence de surchargement de la structure testée et l'assurance d'atteindre la convergence globale de la simulation.

7. Numérique/Expérimental

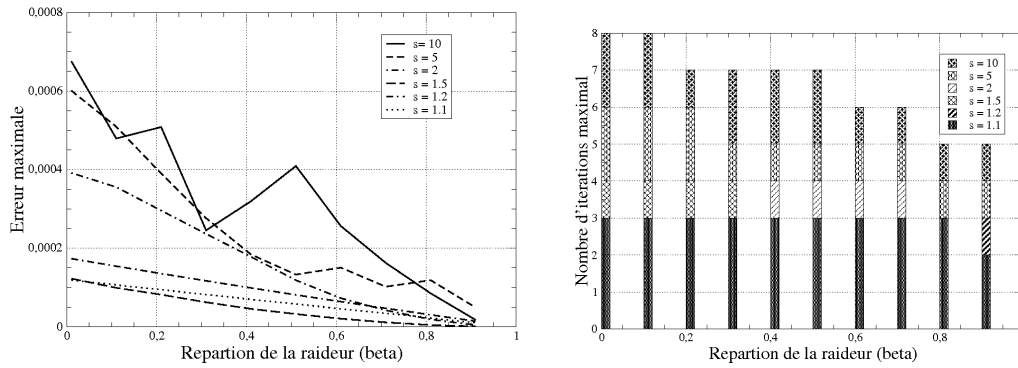


FIGURE 2.21: Etude du schéma par pénalisation pour une tolérance de 0.01 en fonction de la répartition de raideur et de l'estimation de la raideur de la sous-structure expérimentale

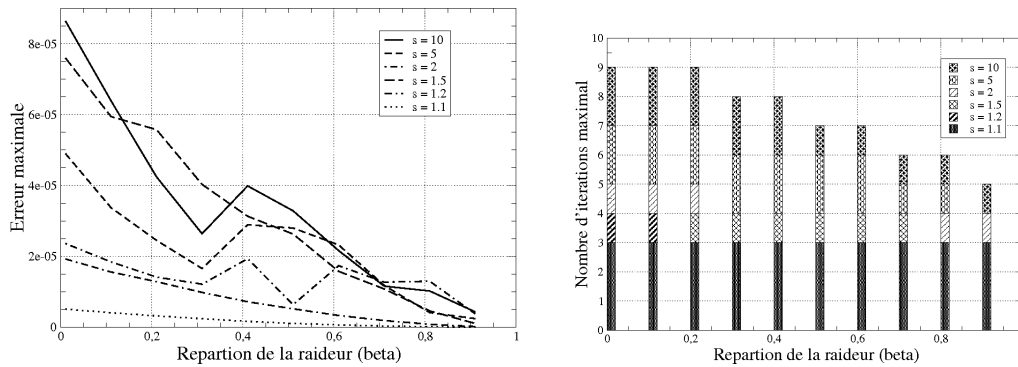


FIGURE 2.22: Etude du schéma par pénalisation pour une tolérance de 0.001 en fonction de la répartition de raideur et de l'estimation de la raideur de la sous-structure expérimentale

6 Conclusion

Cette partie a permis de recenser les différentes méthodes pouvant servir à l'analyse hybride de structures. Parmi ces nombreuses méthodes beaucoup nécessitent soit la manipulation parfois complexe de nombreuses matrices de grandes dimensions qui alourdissent les calculs, soit de définir au préalable une discrétisation temporelle influençant la convergence globale de la structure. Ainsi, nous préférons utiliser des méthodes globales (élément hybrides ou pénalisation) qui offrent les avantages d'être inconditionnellement stable (quelque soit le pas de temps) et très peu intrusives dans le code de calcul. En effet, la seule condition pour pouvoir coupler un code de calcul avec l'essai et la possibilité d'envoyer des données à un programme extérieur (protocoles socket, FIFO) ou d'appeler une fonction externe. Les deux possibilités sont souvent disponibles dans les différents codes de calcul, évitant ainsi le développement d'un élément hybride parfois complexe.

La première étape de l'élaboration d'une analyse hybride est effectuée. Toutefois, le choix de l'algorithme de couplage n'est pas suffisant pour garantir la précision de l'anal-

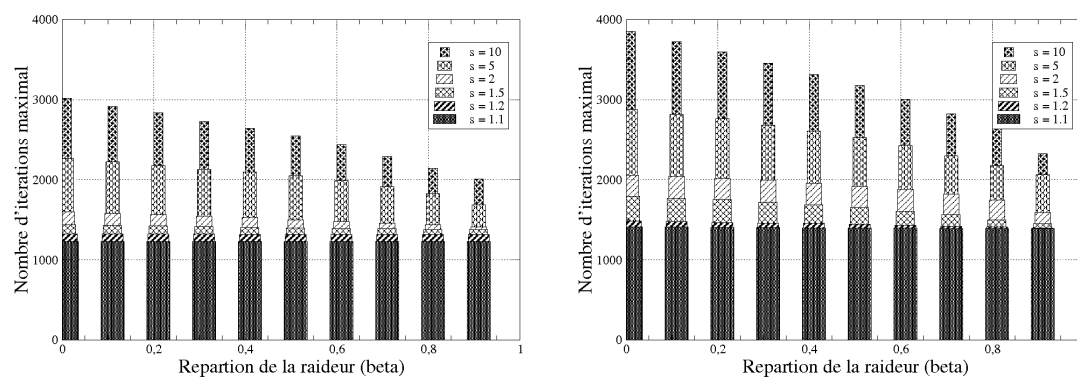


FIGURE 2.23: Nombre total d'itération pour le schéma par pénalisation

yse. En effet, le couplage doit être effectué avec un modèle de comportement pertinent pour représenter les mécanismes de détérioration actifs dans la structure numérique. Le chapitre suivant détaille le modèle d'endommagement anisotrope que nous allons adapter au cas des analyses sismiques.

Chapitre 3

Modélisation de l'endommagement du béton pour des analyses sismiques

Bien que le matériau béton soit un matériau de construction parmi les plus courants (notamment en France) et que son invention remonte à plusieurs siècles, (Rome antique ; John Smeaton (1756) ; pont du jardin des plantes de Lyon, Joseph et Louis Vicat 1855), il reste complexe à appréhender. En effet, de nombreux mécanismes peuvent se manifester selon le type de chargement exercé sur le spécimen. Ainsi des nombreux modèles (empiriques aux modèles les plus fins) tentent de représenter tous les mécanismes physico-chimiques microscopiques existant. Devant une telle profusion, il peut paraître difficile de faire un choix pertinent. Nous allons donc tout d'abord observer le comportement du béton sous des chargements mécaniques afin de pouvoir élaborer un modèle d'endommagement pertinent pour des études sismiques de structures. Ce modèle sera ensuite utilisé pour simuler la structure numérique dans les analyses hybrides.

Sommaire

1	Introduction	57
2	Observations expérimentales pour le comportement du béton	57

2.1	Essais monotones	58
2.2	Essais cycliques	59
2.3	Sollicitations spécifiques	61
2.4	Caractéristiques du comportement à prendre en compte pour des chargements sismiques	61
3	Modélisation du comportement cyclique du béton	61
3.1	Choix de l'échelle de représentation	61
3.2	Modèles "mesoscopiques"	62
3.3	Modèles macroscopiques	65
4	Modèle d'endommagement avec anisotropie induite	68
4.1	Cadre thermodynamique	68
4.2	Comportement monotone du modèle	72
4.3	Comportement cyclique du modèle	74
5	Modèle d'endommagement anisotrope adapté aux chargements cycliques	83
5.1	Endommagement actif	83
5.2	Première application : Poteau en bi-flexion	90
5.3	Autre application de l'endommagement actif : estimation de l'ou- verture des fissures	91
6	Application : SMART2008	94
6.1	Présentation du Benchmark	94
6.2	Modélisation adoptée	95
6.3	Phase 1 : Test à l'"aveugle" (<i>Blind test</i>)	96
6.4	Phase 2 : Recalage des modes propres	106
6.5	Conclusion	106
7	Conclusion et perspectives	107

1 Introduction

Les méthodes d'analyse hybride utilisent la simulation numérique pour modéliser le comportement d'une grande partie de la structure. Ainsi, la précision de l'analyse hybride dépend fortement de la finesse de modélisation du comportement pour ces calculs. Il est donc primordial d'utiliser un modèle prenant en compte la physique du matériau et capable de simuler une structure entière.

De plus, les enjeux actuels de la simulation des structures en béton armé sont la connaissance précise des phénomènes de dégradation mécanique : endommagement et fissuration. En effet, les problématiques nucléaires ne sont pas principalement la tenue même des structures (déjà construites) mais leur étanchéité (dans le contexte de l'extension de leur durée d'utilisation). Ainsi, un intérêt fort se porte sur l'ouverture des fissures (macroscopiques et microscopiques) : le projet national CEOS.fr propose l'étude de la fissuration de structures en béton sous chargements mécaniques (monotones et alternés) mais aussi thermo-hygro-mécaniques. Dans le cadre de ce projet, nous évaluerons la capacité des modèles étudiés à estimer la fissuration.

Ce chapitre propose donc d'analyser le comportement expérimental du matériau béton sous différents chargements mécaniques pour identifier les phénomènes à prendre en compte. Une seconde partie s'attache à modifier le modèle d'endommagement anisotrope développé par Desmorat. En effet, dans sa version initiale, le modèle ne permet pas d'effectuer des chargements alternés et ne prend pas bien en compte les déformations permanentes [Des04].

2 Observations expérimentales pour le comportement du béton

Pour comprendre la complexité du comportement du matériau béton, une analyse des résultats expérimentaux est nécessaire. Mais avant même de soumettre notre matériau à divers chargements, nous allons déjà nous intéresser à la structure du matériau. Le béton est un matériau qui évolue dans le temps : fabriqué à partir de différents matériaux de phases différentes (principalement gravier, sable, ciment et eau), de nombreuses réactions physico-chimiques ont lieu durant son jeune âge pour passer d'un matériau fluide à un matériau solide. Cette transition est appelée phase de prise. Ensuite, le béton mûrit encore pendant plusieurs semaines (voire années). On considère généralement que le béton atteint ses caractéristiques définitives 28 jours après sa conception (pour les bétons classiques). C'est le matériau béton dans son stade mûr qui nous intéresse dans cette étude, sans l'effet du temps.

Si l'observation d'une structure en béton laisse apparaître un matériau homogène et isotrope, une étude à des échelles plus fines (du centimètre au micron) (FIG.3.1, [Auv03]) montre un matériau complètement hétérogène (mais globalement isotrope). En effet, aucune direction n'est privilégiée, contrairement à des matériaux composites constitués de fibres longues. Ainsi, malgré ses hétérogénéités, le béton est à l'état sain un matériau

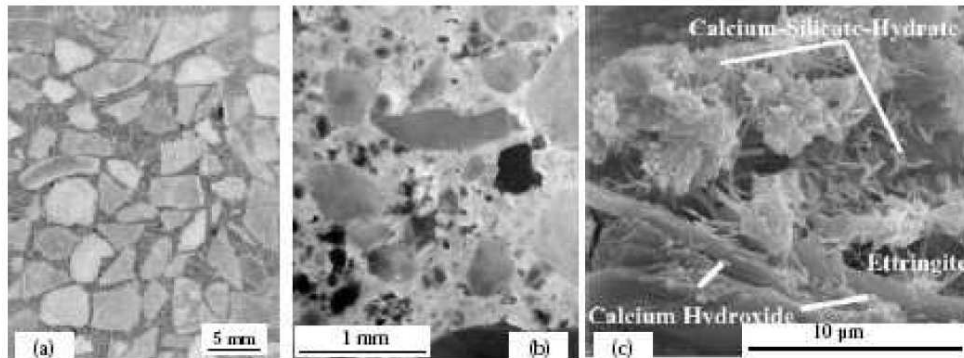


FIGURE 3.1: Structure macro et microscopique du béton [Auvray, 2003]

globalement isotrope.

2.1 Essais monotones

Regardons maintenant le comportement du béton sous des sollicitations simples et monotones : traction et compression. Bien que théoriquement simple, l'essai de traction sur une éprouvette en béton est loin d'être évident. Les essais de traction directe [GS85][Ter80] ne sont souvent pas convenables : l'utilisation de mors ou de colle induisent des contraintes parasites ne permettant pas une rupture en traction simple. Il faut donc utiliser des essais indirects (flexion, essai brésilien, essai PIED [Ram90]) et des modes de pilotages complexes pour obtenir le comportement complet de béton jusqu'à rupture (FIG.3.2). L'essai de traction montre un comportement fragile : le matériau reste

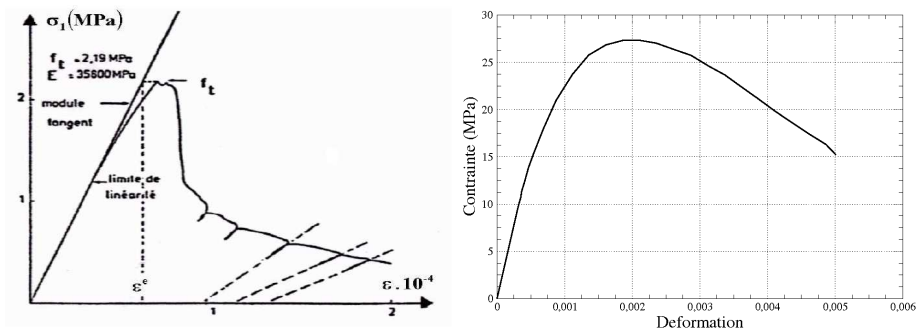


FIGURE 3.2: Comportement monotone du béton en traction [Terrien, 1980] et compression [Karson, 1969]

quasi-élastique jusqu'au pic de contrainte, puis les contraintes chutent brutalement. Cette chute de contraintes correspond souvent à l'apparition d'une macro-fissure perpendiculaire au chargement.

Les essais de compression [KJ69] sont plus simples à réaliser et normalisés par les codes de calcul de la profession. Une série d'essais peut donc être réalisée sur un même

matériau (éprouvettes confectionnées à partir du béton d'une même gachée). On s'aperçoit que le comportement en compression diffère totalement de celui en traction (FIG.3.2). Non seulement les contraintes et les déformations au pic sont de l'ordre de dix fois supérieures à celles en traction, mais le comportement post-pic est plus ductile. Pour expliquer cette forte dissymétrie entre le comportement en traction et en compression, il est utile d'analyser la microstructure du matériau lors de sa dégradation (FIG.3.3). La



FIGURE 3.3: Évolution de la microfissuration du béton en compression (pétrographie Shah)

pétrographie montre une micro-fissuration qui se développe parallèlement à la direction de chargement macroscopique. La dégradation du matériau est localisée sur une zone plus importante. Ainsi, on remarque que le chargement influence grandement la dégradation du matériau (orientation et densité de micro-fissuration) provoquant une anisotropie induite [FPCLB97]. De plus, l'analyse microscopique de matériaux dégradés met en exergue différents modes de rupture : en effet les micro-fissures créées dans le matériau sont de différentes sortes : fissuration de la pâte cimentaire, décohésion entre les granulats et la pâte cimentaire, rupture des granulats.

Les essais de traction et de compression simples mettent déjà en avant de nombreuses caractéristiques du béton : dissymétrie, anisotropie induite, micro-fissuration.

2.2 Essais cycliques

En vue de comprendre le comportement des structures en béton armé sous séisme, il est nécessaire d'observer le comportement du béton sous sollicitations cycliques. Ainsi plusieurs essais peuvent être pertinents : chargement de traction ou compression avec

décharges, chargements alternés traction/compression. L'essai de traction vu précédemment [Ter80] montre le comportement lors de décharges partielles. L'extrapolation de ces décharges soulignent la diminution de la raideur tangente ainsi que l'apparition de déformations résiduelles à contraintes nulles. Des essais sont aussi réalisés avec décharges complètes (FIG.3.4). Des essais de compression incluant des décharges [Ram90] [KJ69] (FIG.3.4) montrent les mêmes phénomènes, à des ordres de grandeurs plus importants pour les déformations résiduelles. De plus, le pilotage de l'essai étant facilité, les décharges

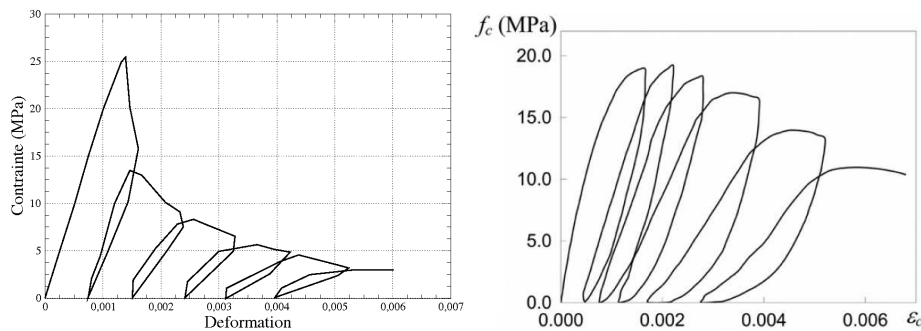


FIGURE 3.4: Comportement cyclique du béton en traction (gauche, [Taylor, 1992]) et compression (droite, [Karson, 1969])

peuvent être réalisées complètement. On observe donc que la non-linéarité des décharges s'accompagne de dissipation (visible par les boucles d'hystérésis). Malgré leur comple-

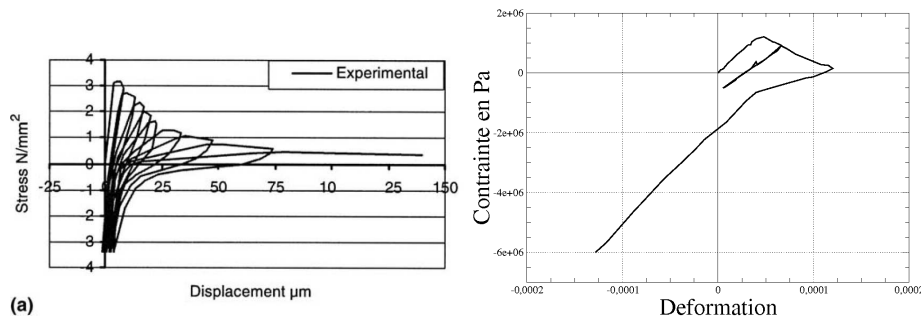


FIGURE 3.5: Essai de traction/compression cyclique sur éprouvette de béton [Rei84][MB89]

xité, les essais cycliques traction/compression [MB89] [Rei84] (FIG.3.5) livrent des informations capitales. En effet, en plus de confirmer l'apparition de déformations résiduelles après un chargement endommageant de traction, le passage de la traction à la compression montre une reprise de raideur importante. Ce phénomène, appelé effet unilatéral, s'explique par la fermeture de certaines micro-fissures. Les fissures ouvertes perpendiculairement lors de la traction, se retrouvent dans un état comprimé. Les lèvres opposées des fissures se mettent donc en contact, redonnant ainsi une partie de sa raideur initiale au matériau.

2.3 Sollicitations spécifiques

Des essais plus spécifiques mettent en évidence d'autres caractéristiques du comportement du béton. En effet, des essais multiaxiaux en traction ou compression peuvent être réalisés [KHR69]. Par exemple, en fort confinement le béton présente un comportement plastique [GS73] s'expliquant par l'effondrement des pores de la matrice cimentaire. Le phénomène de dilatance (dû au caractère granulaire du matériau) est également observé en compression. Des essais de fluage montrent la dépendance temporelle du comportement, notamment en traction. Les essais de fatigue exhibent une dégradation du matériau même à faible amplitude de chargement après de nombreux cycles. Enfin, la réalisation des essais uniaxiaux précédemment détaillés en dynamique rapide modifie le comportement du béton mettant ainsi en valeur une dépendance à la vitesse de chargement.

2.4 Caractéristiques du comportement à prendre en compte pour des chargements sismiques

Les observations précédentes montrent les principales caractéristiques du comportement du béton sous sollicitation mécanique. Toutefois, selon les cas que nous souhaitons traiter, il n'est pas forcément nécessaire de vouloir modéliser tous les phénomènes. De plus, il n'ont pas tous la même importance et la même influence sur les résultats globaux de la simulation. Nous allons donc proposer une sélection et une classification en 3 niveaux des caractéristiques à prendre en compte pour des simulations d'ouvrages sous séisme :

- Niveau 1 : dissymétrie, anisotropie induite, effet unilatéral
- Niveau 2 : déformations résiduelles (et dilatance)
- Niveau 3 : dissipation par frottement des fissures

Par la suite, nous allons donc nous focaliser sur les modèles pouvant au minimum représenter les caractéristiques de niveau 1.

3 Modélisation du comportement cyclique du béton

3.1 Choix de l'échelle de représentation

Le choix d'un modèle de comportement nécessite avant tout un choix de l'échelle représentative du matériau. Il a été vu précédemment que selon l'échelle d'observation, le béton apparaît comme plus ou moins hétérogène. Une modélisation fine du comportement exige une représentation microscopique prenant en compte tous les constituants du matériau jusqu'à l'échelle des C-S-H ... Une telle finesse de représentation exige une puissance de calcul importante réduisant la structure étudiée à quelques centimètres tout au plus. Certains auteurs proposent de modéliser le béton à l'échelle mésoscopique : le béton est considéré comme une matrice cimentaire comprenant des inclusions (le gravier). Cette modélisation permet l'analyse de structures plus grandes, mais encore inférieures à un élément de structure réelle même avec des méthodes multi-échelles. Notre choix se tourne

donc vers des modèles macroscopiques : le matériau est considéré comme homogène. Cette hypothèse simpliste permet la simulation d'ouvrage complexes et imposants, y compris en dynamique.

3.2 Modèles "mesoscopiques"

3.2.1 Modèle microplan

Ce modèle se base sur le comportement du béton dans l'axe normal au plan de la fissure, [BG84]. L'intérêt est d'adopter des relations simples entre les contraintes et les déformations suivant cette direction. Ensuite, il suffit de balayer l'espace pour obtenir une multifissuration. Ainsi il est possible de prendre en compte finement l'anisotropie du comportement et la refermeture des fissures.

Cette méthode se décompose en trois étapes :

1. passage des déformations macroscopiques ε_{ij} aux déformations sur les microplans $\varepsilon_V, \varepsilon_D, \varepsilon_T$
2. passage des déformations sur les microplans aux contraintes sur ces mêmes microplans $\sigma_V, \sigma_D, \sigma_T$
3. passage des contraintes sur les microplans aux contraintes macroscopiques σ_{ij}

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{a} & \\
 \varepsilon_{ij} & \longrightarrow & \varepsilon_V, \varepsilon_D, \varepsilon_T \\
 & \downarrow \text{b} & \\
 \sigma_{ij} & \longleftarrow & \sigma_V, \sigma_D, \sigma_T \\
 & \text{c} &
 \end{array}$$

(a) Déformations cinématiques - Cette première étape consiste à passer du tenseur des déformations aux composantes suivant la direction considérée. L'hypothèse de déformations cinématiques¹ donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_N &= \varepsilon_{ij} n_i n_j \\
 \varepsilon_{T_r} &= \varepsilon_{rj} n_j - \varepsilon_N n_r
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

De plus pour prendre en compte les effets de compression, il faut partitionner les déformations normales en déformations déviatoriques et déformations volumiques :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_N &= \varepsilon_V + \varepsilon_D \quad \text{avec} \quad \varepsilon_V = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} \\
 \varepsilon_D &= \varepsilon_N - \varepsilon_V
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

1. Cette hypothèse considère que les déformations sur les micro-plans dans une direction sont les projections du tenseur des déformations macroscopiques dans cette direction, [BG84]

(b) Loi de comportement sur microplan - Maintenant il faut utiliser des lois de comportement dans l'axe considéré. Pour cela on utilise des lois phénoménologiques qui pour un modèle prenant en compte la refermeture des fissures sont de la forme, [CPP92] :

$$\begin{aligned}
 \sigma_V > 0 &\implies \sigma_V = E_V^0 \varepsilon_V \left[\left(1 + \frac{|\varepsilon_V|}{a} \right)^{-p} + \left(\frac{|\varepsilon_V|}{b} \right)^q \right] \\
 \sigma_V < 0 &\implies \sigma_V = E_V^0 \varepsilon_V e^{-\left(\frac{|\varepsilon_V|}{a_1} \right)^{p_1}} \\
 \sigma_D > 0 &\implies \sigma_D = E_D^0 \varepsilon_D e^{-\left(\frac{|\varepsilon_D|}{a_2} \right)^{p_2}} \\
 \sigma_D < 0 &\implies \sigma_D = E_D^0 \varepsilon_D e^{-\left(\frac{|\varepsilon_D|}{a_1} \right)^{p_1}} \\
 \vec{\sigma}_T &= E_T^0 \gamma e^{-\left(\frac{\gamma}{a_3^0 + k \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}} \right)^{p_3}} \vec{\varepsilon}_T
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ces lois phénoménologiques contiennent de nombreux paramètres à identifier (E_V^0 , E_D^0 , γ , a , b , p , q , a_1 , a_2 , a_3^0 , p_1 , p_2 , p_3 , et k), ce qui rend la tâche difficile.

(c) Principe d'équivalence en énergie - La dernière étape de cette méthode consiste à former le tenseur des contraintes à partir des composantes axiales. Cette étape est numériquement la plus complexe. En effet, contrairement à ce qu'on pourrait croire, il ne suffit pas de faire la transformation inverse de l'étape *a*. Pour cela on utilise une équivalence en énergie² :

$$\frac{4\pi}{3} \sigma_{ij} \cdot \delta \varepsilon_{ij} = 2 \int_{\Omega} [(\sigma_V + \sigma_D) \cdot \delta \varepsilon_N + \sigma_{T_r} \cdot \delta \varepsilon_{T_r}] d\Omega \tag{3.4}$$

où Ω est l'angle solide. Cette intégration nécessite une discrétisation de la surface d'une demi-sphère (de rayon unité) qui, pour obtenir de bons résultats doit être d'au moins 20 ou 30 facettes. Cependant, cela peut se révéler insuffisant dans certains cas [Bad01].

Toutefois, malgré ses limites, cette méthode permet de rendre compte de nombreux essais, [BP88][BXP96][Baz00][OLK01].

3.2.2 Modèle de mésolfissuration

Le premier avantage de ce modèle développé par Dragon et Halm [DHD00] [HD98], par rapport au précédent est son cadre thermodynamique propre [WJF06] [MK97]. De plus, il permet de coupler autant de phénomènes que l'on souhaite : effet unilatéral, frottements des lèvres de fissures, déformations plastiques ... Cette approche se fonde sur des considérations microscopiques et des phénomènes physiques pour construire des variables mésoscopiques. Le tenseur d'endommagement est construit à partir de l'observation microscopique du matériau. A partir du volume élémentaire représentatif (VER) microfissuré (FIG.3.6), on définit le tenseur d'endommagement :

2. Pour représenter la fissure dans toutes les directions, il suffit que le vecteur normal \vec{n} balaie un demi-espace, on intègre donc l'énergie sur un angle solide Ω correspondant au demi-espace.

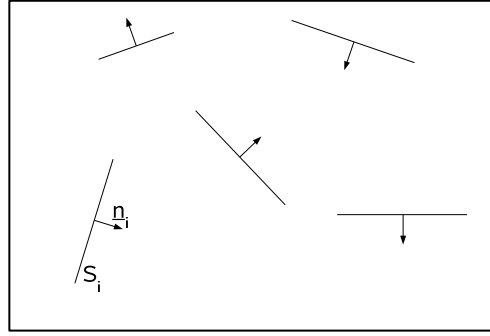


FIGURE 3.6: Volume élémentaire représentatif pour le modèle de mésosfissuration

$$\underline{\underline{D}} = \sum_i \mathbf{d}^i(s) \mathbf{n}^i \otimes \mathbf{n}^i \quad (3.5)$$

où $\mathbf{d}^i(s)$ est la densité de fissuration³. Le tenseur ainsi construit est diagonalisable, il paraît donc judicieux de l'écrire dans sa base propre :

$$\underline{\underline{D}} = \sum_{k=1} D^k \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k \quad (3.6)$$

Ainsi, les variables microscopiques ($\mathbf{d}^i(s)$ et \mathbf{n}^i) sont transposées en variables macroscopiques (D^k et \mathbf{v}^k).

Le modèle s'inscrivant dans un cadre thermodynamique, le comportement du matériau est défini par un potentiel d'énergie libre, et une loi d'évolution de l'endommagement. Pour respecter l'invariance de la loi, l'énergie doit être un polynôme invariant de $\underline{\underline{D}}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$. De plus, les hypothèses d'élasticité à endommagement constant et de non interaction des fissures permettent d'écrire l'énergie de la manière suivante :

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = g \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot D) + \frac{\lambda}{2} (\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 + \mu \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) + \alpha \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot D) + 2\beta \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2 \cdot D) \quad (3.7)$$

Par dérivation, on obtient la loi de comportement $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$:

$$\boldsymbol{\sigma} = gD + \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) I + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \alpha [\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) D + \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot D) I] + 2\beta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot D + D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.8)$$

Enfin il reste à définir le critère d'endommagement f :

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = |g| \sqrt{\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \boldsymbol{\varepsilon}^+} - C_0 - C_1 \text{Tr}(D) = 0 \quad (3.9)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^+ = \underline{\underline{P}}^+ : \underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{P}}^+$ un tenseur de projection d'ordre 4 qui permet de sélectionner les valeurs propres positives des déformations. L'évolution de l'endommagement est pilotée

3. la densité de fissuration est proportionnelle à la surface s de fissuration

par une loi d'écoulement normale au critère.

Le modèle définie ci-dessus ne prend pas en compte la refermeture des fissures. Pour cela, il faut créer un terme d'énergie dans le cas où les fissures sont refermées, le premier étant toujours valable dans le cas où les fissures sont ouvertes :

$$w^{ferm}(\epsilon, D) = g \text{Tr}(\epsilon \cdot D) + \frac{\lambda}{2} (\text{Tr}(\epsilon))^2 + \mu \text{Tr}(\epsilon^2) + \alpha \text{Tr}(\epsilon) \text{Tr}(\epsilon \cdot D) + 2\beta \text{Tr}(\epsilon^2 \cdot D) + \gamma \epsilon : \hat{D} : \epsilon \quad (3.10)$$

où \hat{D} est un tenseur d'ordre 4 construit à partir du tenseur D d'ordre 2 :

$$\hat{D} = \sum_{k=1}^3 D^k \bar{v}^k \otimes \bar{v}^k \otimes \bar{v}^k \otimes \bar{v}^k \quad (3.11)$$

Bien que ce modèle possède un environnement théorique bien fondé, il ne permet pas d'obtenir la ruine de la structure : le modèle ne permet pas de revenir à une contrainte nulle pour les faibles niveaux de méso-fissuration après endommagement. D'autres modèles d'endommagement par mésosfissuration ont été développés notamment par Pensée [PK01] [PK03].

3.3 Modèles macroscopiques

Les modèles précédemment étudiés partent d'un concept micromécanique pour construire le comportement macroscopique du matériau. Une autre approche consiste à modéliser directement le comportement macroscopique d'après les observations expérimentales.

3.3.1 Modèles d'endommagement

Concept d'endommagement - Les observations expérimentales précédentes montrent un adouccissement et une perte de rigidité lors de la dégradation du matériau. Cette perte de raideur s'explique par l'apparition de micro-fissures au sein du matériaux. Kachanov et Rabotnov [Kac58] [Rab69] ont introduit le concept de contrainte effective, qui correspond à la contrainte réellement reprise par le matériaux. En effet, si on exerce une coupe perpendiculaire au chargement, la section S se décompose en partie saine de surface totale \tilde{S} et en vide dus aux fissures de surface totale S_D . La contrainte macroscopique s'exprime par le rapport de la force sur la surface totale : $\sigma = \frac{F}{S}$. Mais la contrainte dans le matériau sain est égale à $\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}}$, cette contrainte est appelée contrainte effective, et s'exprime donc :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{F}{S - S_D} = \frac{F}{S \left(1 - \frac{S_D}{S}\right)} \quad (3.12)$$

Le terme adimensionnée $\frac{S_D}{S}$ représente le taux surfacique de défaut. Pour un problème unidimensionnel ou isotrope⁴, ce taux est la variable d'endommagement D . On en déduit l'expression de la contrainte effective en fonction de l'endommagement :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (3.13)$$

Le principe d'équivalence en déformation [Lem71] permet de définir le module de rigidité effectif \tilde{E} (qui peut être mesuré lors des décharges) :

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{E}} = \frac{\sigma}{E} \quad \text{d'ou} \quad \tilde{E} = E(1 - D) \quad (3.14)$$

Un matériau sain ne présente aucune micro-fissure. Le taux surfacique de défauts (autres que les défauts initiaux), et donc l'endommagement, sont nuls. Le module de rigidité effectif est égal au module de rigidité initial : $\tilde{E} = E$. À l'inverse, si le matériau est complètement fissuré, la surface totale de fissure tend vers la surface totale du matériau. Dans ce cas, l'endommagement tend vers 1 et le module effectif vers 0. En pratique, on définit un endommagement critique strictement inférieur à un, correspondant à la rupture du matériau.

Choix de la variable d'endommagement - La variable d'endommagement D est donc une nouvelle variable interne pouvant être insérée dans un modèle de comportement formulé dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus. De nombreux auteurs ont développé des modèles d'endommagement en considérant soit l'énergie libre $\rho\psi$ de Helmotz [HN75] [CHMM03] [Mar81] ou l'enthalpie libre de Gibbs $\rho\psi^*$ [Lad83][DGR07].

Les premiers modèles développés pour le béton représentent l'endommagement du béton par une variable scalaire D . A priori, l'endommagement scalaire représente un endommagement isotrope. Or nous avons vu que le comportement dissymétrique provient d'une anisotropie induite par une fissuration orientée. Pour combler cette lacune, certains modèles introduisent deux variables scalaires d'endommagement [Maz84] [LaB91] ou des notions de déformations équivalentes plus ou moins complexes [dVBvG95]. Le premier cas est contraire à la notion même de variable thermodynamique. En effet, une variable thermodynamique représente l'état intrinsèque du matériau et ne doit pas dépendre de l'état de chargement du matériau. Dans tous les cas, l'endommagement isotrope est inefficace pour représenter l'état réel de l'endommagement et l'anisotropie induite.

Une variable scalaire étant incapable de représenter l'anisotropie induite par la fissuration, plusieurs théories utilisent des variables d'ordre supérieur. L'endommagement étant une variable interne, il doit être invariant lors d'un changement de repère. Cette caractéristique élimine les variables d'ordre impair. Pour modéliser l'anisotropie la plus générale, le choix le plus naturel est une variable tensorielle d'ordre 4 [Cha79] [LO81] [Kra85]. Onat et Leckie puis Krajcinovic ont démontré qu'une variable d'ordre supérieur n'apporte aucune amélioration par rapport à une variable d'ordre 4 [KM95]. Les concepts

4. Dans le cas isotrope, le taux surfacique de défaut ne dépend pas du plan de coupe

de contrainte effective et de module effectif peuvent être étendus pour l'anisotropie avec une variable d'ordre 4 de la manière suivante :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \left(\underline{I}_{ijkl} - D_{ijkl} \right)^{-1} \sigma_{kl} \quad \tilde{E}_{ijkl} = \left(\underline{I}_{ijkl} - D_{ijkl} \right) \cdot E_{ijkl} \quad (3.15)$$

Toutefois, l'utilisation d'une variable d'endommagement d'ordre 4 (81 composantes) complexifie considérablement le modèle. De plus les lois d'évolutions de l'endommagement seront difficiles à identifier rigoureusement. Cette représentation ne peut être issue que d'une représentation micromécanique du comportement (voir ci-dessus). Une autre façon de représenter l'anisotropie est de considérer que le réseau de fissure est orienté dans trois directions orthogonales. Ceci conduit à une variable d'endommagement d'ordre 2 symétrique [CS82]. L'endommagement devient orthotrope. Les directions principales de l'endommagement peuvent tourner pour suivre l'évolution de la fissuration.

Modèles d'endommagement avec une variable d'ordre 2 - Les modèles d'endommagement utilisant une variable d'ordre 2 sont nombreux. On distingue deux grandes familles. La première considère un potentiel écrit avec l'énergie libre spécifique de Helmotz [MK96] [HD96] [BGL07] [Cha05]. Ce potentiel est une combinaison des invariants du couple de variables $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{D}}$. Toutefois, le fait de supposer le comportement élastique linéaire à endommagement constant (lors des décharges par exemple), et la nullité de l'énergie en l'absence de déformations réduisent l'expression de potentiel à :

$$\begin{aligned} \rho \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{D}}) = & \frac{1}{2} \lambda \left(\text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \right)^2 + 2\mu \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) + \eta_1 \text{Tr}(\underline{\underline{D}}) \left(\text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \right)^2 \\ & + \eta_2 \text{Tr}(\underline{\underline{D}}) \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) + \eta_3 \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon D}}) + \eta_4 \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2 \underline{\underline{D}}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les différents modèles proposent donc différentes valeurs des coefficients η_i ou l'enrichissement du potentiel par d'autres variables internes [MK96]. L'inconvénient de ce type de modèles qui suivent le cadre standard de la thermodynamique, est l'évolution (plus ou moins importante) de l'endommagement dans toutes les directions quelques soit la direction de chargement. D'autres modèles sont écrits dans le cadre non standard, mais présentent soit le choix contestable de plusieurs variables d'endommagement [PT96] soit des relations contrainte-déformation discontinues lors de chargements non proportionnels [Ju89] [CW82].

La deuxième famille de modèles d'endommagement considère l'enthalpie libre de Gibbs. Le modèle développé ici appartient à cette famille de modèle d'endommagement.

3.3.2 Modèles couplés endommagement/plasticité

Un modèle d'endommagement permet d'obtenir la diminution du module de rigidité effectif au cours de la dégradation du matériau. Si le caractère adoucissant est bien modélisé, les déformations permanentes sont inexistantes. Or ces dernières sont mises en valeurs lors des observations expérimentales. Pour modéliser ces déformations permanentes, il paraît naturel de coupler un modèle d'endommagement avec un modèle de

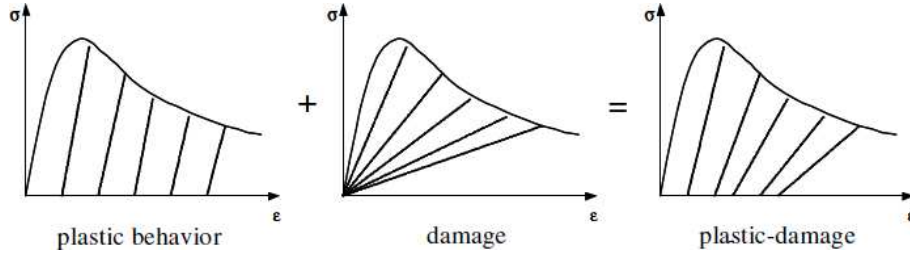


FIGURE 3.7: Couplage d'un modèle d'endommagement et de plasticité

plasticité (FIG.3.7). Le couplage d'un modèle d'endommagement avec un modèle de plasticité induit donc l'introduction de nouvelles variables internes : $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$ pour les déformations plastiques et éventuellement des variables pour l'écrouissage isotrope et cinématique du domaine d'élasticité [LC85] [Ju89] [PT96] [HD00] [Bur97] [JHPCG06] [LOD96] [RBM00]. Pour éviter un couplage fort entre l'endommagement et la plasticité, il est possible de construire un modèle où les déformations permanentes sont fonction directement de l'endommagement [LaB91], ou inversement l'endommagement est fonction des déformations plastiques [FD87] [Ulm96] [MB06].

4 Modèle d'endommagement avec anisotropie induite

4.1 Cadre thermodynamique

4.1.1 Potentiels thermodynamiques

Le modèle d'endommagement développé ici est écrit en enthalpie libre (de Gibbs) afin de piloter l'effet unilatéral grâce au signe des contraintes. Dans un premier temps nous allons nous intéresser à la description du comportement adoucissant. Ainsi, nous allons introduire une variable interne d'endommagement. Le choix de la dimension de la variable d'endommagement est primordial pour représenter l'anisotropie induite. En effet, si un (ou des) endommagement(s) scalaire(s) est (sont) incapable(s) de modéliser un endommagement anisotrope, un tenseur d'ordre 4 complexifie considérablement le modèle. Ainsi, un endommagement tensoriel d'ordre 2 est choisi pour représenter l'état de micro-fissuration [CS82] : $\underline{\underline{D}}$. Pour obtenir une contrainte effective symétrique dérivant du potentiel thermodynamique, le potentiel est divisé en partie déviatorique (fonction du déviateur $\underline{\underline{\sigma}}^D$) et hydrostatique [LDS99] :

$$\rho\psi^*(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}}) = \frac{1+\nu}{2E} \text{Tr}(\underline{\underline{H}}\underline{\underline{\sigma}}^D \underline{\underline{H}}\underline{\underline{\sigma}}^D) + \frac{1-2\nu}{6E} \frac{\text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}})^2}{1 - \frac{\eta}{3}\text{Tr}(\underline{\underline{D}})} \quad (3.17)$$

où E est le module d'élasticité, ν le coefficient de Poisson, $\underline{\underline{H}} = (\underline{\underline{Id}} - \underline{\underline{D}})^{-1/2}$ et η un paramètre matériau représentant la sensibilité hydrostatique. Le potentiel ainsi défini est

convexe par rapport à ces variables internes et continûment différentiable assurant la stabilité et la continuité des lois d'état y compris en chargement non proportionnel. L'endommagement agit sur les deux parties du potentiel de manière permanente quelque soit le chargement. Tel quel, ce modèle n'est pas apte à capter les effets unilatéraux (reprise de raideur) lors de chargements cycliques. Pour remédier à cette carence, il "suffit" de faire agir l'endommagement uniquement sur la partie positive des contraintes. Deux possibilités sont alors envisageables :

- refermeture partielle : l'endommagement agit entièrement sur la partie déviatorique mais partiellement sur la partie hydrostatique (uniquement sur la partie positive de la trace des contraintes). Ainsi, le comportement reste élastique lors d'un chargement de tri-compression. Toutefois lors de ce type de chargement le mode de dégradation diffère de l'endommagement : en effet, en tri-compression les déformations sont négatives et les fissures se referment et donc n'évoluent pas, en revanche, les pores implosent et la raideur tend à augmenter. Ce phénomène de fermeture des pores n'est pas pris en compte dans le modèle, car non négligeable seulement dans des cas de confinements extrêmes non rencontrés en sismique. De plus, ce phénomène ne résultant pas de mécanismes liés à de la micro-fissuration, il relève plus de la plasticité. Le potentiel de Gibbs pour la version avec refermeture partielle s'écrit :

$$\rho\psi^*(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}}) = \frac{1+\nu}{2E} \text{Tr}(\underline{\underline{H}} \underline{\underline{\sigma}}^D \underline{\underline{H}} \underline{\underline{\sigma}}^D) + \frac{1-2\nu}{6E} \left[\frac{\langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_+^2}{1 - \frac{\eta}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{D}})} + \langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_-^2 \right] \quad (3.18)$$

- refermeture totale : l'endommagement agit uniquement sur les parties positives des parties déviatorique et hydrostatique. Ceci offre la possibilité de récupérer toute la raideur, toutes les fissures se referment, mais nécessite la définition d'une partie positive particulière [Lad83] [LD05] :

$$\underline{\underline{\sigma}}_+^D = \Sigma_I \langle \lambda_I \rangle_+ (\underline{\underline{H}}^{-1} T_I) (\underline{\underline{H}}^{-1} T_I)^T \quad (3.19)$$

où λ_I et T_I sont respectivement les valeurs et vecteurs propres de $\underline{\underline{H}} \underline{\underline{\sigma}}^D$.

$$\rho\psi^*(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}}) = \frac{1+\nu}{2E} \text{Tr}(\underline{\underline{H}}^p \underline{\underline{\sigma}}_+^D \underline{\underline{H}}^p \underline{\underline{\sigma}}_+^D + \underline{\underline{H}}^n \underline{\underline{\sigma}}_-^D \underline{\underline{H}}^n \underline{\underline{\sigma}}_-^D) + \frac{1-2\nu}{6E} \left[\frac{\langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_+^2}{1 - \frac{\eta}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{D}})} + \langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_-^2 \right] \quad (3.20)$$

où $\underline{\underline{H}}^p = \underline{\underline{H}} = (\underline{\underline{Id}} - \underline{\underline{D}})^{1/2}$, et $\underline{\underline{H}}^n = (\underline{\underline{Id}} - h\underline{\underline{D}})^{1/2}$ avec $0 \leq h \leq 1$.

4.1.2 Lois d'état

Le potentiel présenté ci-dessus dépend de deux variables d'état : $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{D}}$. Les forces thermodynamiques associées, respectivement $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{Y}}$, dérivent du potentiel de Gibbs.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \rho \frac{\partial \psi_e^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1+\nu}{E} \left[(\underline{\underline{H}} \underline{\underline{\sigma}}_+^D \underline{\underline{H}})^D + \langle \underline{\underline{\sigma}}^D \rangle_-^D \right] + \frac{1-2\nu}{3E} \left[\frac{\langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_+}{1 - \text{Tr}(\underline{\underline{D}})} + \langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_- \right] \quad (3.21)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \rho \frac{\partial \psi_e^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1+\nu}{E} [\underline{\underline{H}} \underline{\underline{\sigma}}^D \underline{\underline{H}}]^D + \frac{1-2\nu}{3E} \left[\frac{\langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_+}{1 - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{D}})} + \langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_- \right] \underline{\underline{Id}} \quad (3.22)$$

Les propriétés mathématiques du potentiel assure la continuité des relations contraintes-déformations pour les deux variantes. Dans le cas de refermeture partielle (EQ.(3.22)), la relation contraintes-déformations est inversible analytiquement, rendant ainsi l'implantation numérique explicite. Dans le cas de la refermeture totale, la relation doit être inversée numériquement grâce à une méthode type Newton. Nous privilégierons donc la première version pour des raisons numériques si la refermeture totale ne se justifie pas. Dans les deux cas, la contrainte effective se définit naturellement à partir de l'expression suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \rho \frac{\partial \psi_e^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}) \underline{\underline{Id}} \quad (3.23)$$

ce qui nous permet d'identifier la contrainte effective comme étant :

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \underline{\underline{H}} \underline{\underline{\sigma}}^D \underline{\underline{H}}^D + \left(\frac{\langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_+}{1 - \eta D_H} + \langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_- \right) \underline{\underline{Id}} \quad (3.24)$$

ou

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \underline{\underline{H}} \underline{\underline{\sigma}}_+^D \underline{\underline{H}}^D + \langle \underline{\underline{\sigma}}^D \rangle_- + \left(\frac{\langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_+}{1 - \eta D_H} + \langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_- \right) \underline{\underline{Id}} \quad (3.25)$$

La force thermodynamique associée à l'endommagement, $\underline{\underline{Y}}$ (taux de restitution d'énergie) se calcule en dérivant le potentiel par la variable d'endommagement :

$$\underline{\underline{Y}} = \rho \frac{\partial \psi_e^*}{\partial \underline{\underline{D}}} \quad (3.26)$$

Un calcul de dérivation complexe [LD05] [LBCD09] permet d'obtenir l'expression de $\underline{\underline{Y}}$. Toutefois, elle n'est pas nécessaire pour l'implantation du modèle dans un code élément fini. Un tel calcul n'est donc pas détaillé ici.

4.1.3 Fonction critère et loi de consolidation

La fonction critère de Mazars [MBR90] est étendue au cas anisotrope avec tenseur d'endommagement d'ordre 2 :

$$f = \hat{\varepsilon} - \kappa(d(\underline{\underline{D}})) \quad (3.27)$$

où $d(\underline{\underline{D}})$ est un scalaire représentant l'état d'endommagement du matériau. $\hat{\varepsilon}$ reste la déformation équivalente de Mazars ($\varepsilon_{\text{Mazars}} = \sqrt{\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_+ : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_+}$). Le choix du scalaire $d(\underline{\underline{D}})$ doit se restreindre aux invariants. La trace est choisie dans un premier temps. Deux lois

de consolidation κ peuvent être envisagées (la première similaire à celle du modèle de Dragon et Halm [DHD00]) :

$$\kappa(\text{Tr}(\underline{\underline{D}})) = \frac{\text{Tr}(\underline{\underline{D}})}{A} + \kappa_0 \quad (3.28)$$

$$\kappa(\text{Tr}(\underline{\underline{D}})) = a \cdot \tan \left[\frac{\text{Tr}(\underline{\underline{D}})}{aA} + \arctan \left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right] \quad (3.29)$$

Ces deux lois sont inversibles et dérivables. L'inversabilité est nécessaire pour garder le schéma d'intégration explicite. Les deux lois introduisent respectivement deux (κ_0, A) et trois paramètres (κ_0, A, a) "matériau" sans dimension. Le seuil initial est donc défini par $f = \hat{\varepsilon} - \kappa(\text{Tr}(\underline{\underline{D}})) = 0$, soit $\hat{\varepsilon} = \kappa_0$. Le domaine élastique initial est donc identique à celui du modèle de Mazars. La FIG.3.8 compare le domaine élastique initial du modèle avec les résultats de [KHR69]. Le modèle donne le même ordre de grandeur du domaine

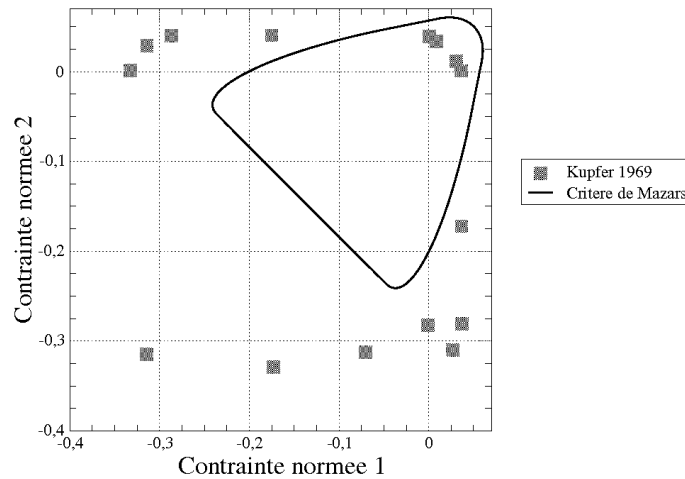


FIGURE 3.8: Comparaison modèle/expérimental du domaine élastique initial de Mazars pour le modèle d'endommagement anisotrope [KHR69]

élastique. Les différences observées proviennent en partie seulement de la définition de la limite élastique. Expérimentalement, la limite élastique est souvent définie par la perte d'un certain pourcentage de la raideur initiale. Or numériquement, la limite est définie précisément par la fonction critère et par la définition de la déformation équivalente de Mazars, peu encline à représenter les états confinés.

4.1.4 Pseudo-potentiel, lois d'évolution

Pour l'évolution de l'endommagement, on définit un pseudo-potentiel dépendant linéairement du taux d'énergie de restitution et de la partie positive des déformations. Ainsi,

après dérivation du pseudo-potentiel par rapport au taux de restitution d'énergie, on obtient une évolution de l'endommagement proportionnelle aux extensions en accord avec les observations expérimentales. L'anisotropie est ainsi induite naturellement.

$$F_d = \underline{Y} : \langle \underline{\varepsilon} \rangle_+^\alpha \quad (3.30)$$

$$\underline{\dot{D}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F_d}{\partial \underline{Y}} = \dot{\lambda} \langle \underline{\varepsilon} \rangle_+^\alpha \quad (3.31)$$

En effet, si on considère une traction selon la direction 1, la partie positive du tenseur des déformations se réduit à ε_{11} , et donc seul la composante D_{11} évolue. Par contre, pour un chargement en compression dans la même direction, seules les composantes $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ sont positives et provoquent l'évolution de l'endommagement dans les directions 2 et 3. L'endommagement devient donc anisotrope suivant le type de chargement et sa direction.

4.1.5 Positivité de la dissipation

L'introduction d'un pseudo-potentiel dans l'écriture du modèle pour gouverner l'évolution de l'endommagement impose la vérification de la positivité de la dissipation afin d'assurer la validité thermodynamique. Celle-ci a été vérifiée par Desmorat [Des06].

4.2 Comportement monotone du modèle

La réponse analytique du modèle est maintenant étudiée pour vérifier si les principales caractéristiques des matériaux quasi-fragiles sont bien représentées : comportement adoucissant, dissymétrie traction/compression ... Pour cela des paramètres matériaux sont choisis pour représenter un béton standard (tableau TAB.3.1).

E	42
ν	0.2
κ_0	$5 \cdot 10^{-5}$
a	$2.93 \cdot 10^{-4}$
A	5000

TABLE 3.1: Paramètres du modèle

4.2.1 Traction simple

Pour un chargement de traction simple, le tenseur des déformations s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 = \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_+ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Ainsi, la déformation équivalente de Mazars devient $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_1$ et la limite élastique est donc atteinte pour une déformation $\varepsilon_1 = \kappa_0$. La condition de consistance donne l'évolution de la trace de l'endommagement :

$$f = \hat{\varepsilon} - \kappa(\text{Tr}(\underline{\underline{D}})) = 0 \quad \text{d'ou} \quad \text{Tr}(\underline{\underline{D}}) = \kappa^{-1}(\hat{\varepsilon}) \quad (3.33)$$

Le multiplicateur de Lagrange est obtenu par la loi d'évolution :

$$\underline{\underline{D}} = \dot{\lambda} \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_+^2 \quad \text{donne} \quad \dot{\lambda} = \frac{\text{Tr}(\underline{\underline{D}})}{\hat{\varepsilon}^2} \quad (3.34)$$

Ainsi on obtient la valeur de l'endommagement au pas n en fonction du pas précédent :

$$D_1 = \frac{\kappa^{-1}(\hat{\varepsilon}) - D_1^{n-1}}{\hat{\varepsilon}^2} \varepsilon_{11}^2 \quad (3.35)$$

Le comportement en traction monotone peut donc être obtenu. La relation contrainte-déformation est tracée (FIG.3.9) avec la loi de consolidation non linéaire. Le comportement montre effectivement un caractère adoucissant jusqu'à rupture ($\sigma = 0$). Toutefois, contrairement à la majorité des modèles d'endommagement et des observations expérimentales, le comportement s'adoucit avant le pic, et la rupture n'est pas suffisamment brutale. Les résultats expérimentaux en traction sont cependant à prendre avec précaution dû aux difficultés expérimentales pour des ruptures fragiles.

4.2.2 Compression simple

Considérant un matériau sain, un chargement de compression (selon la direction 1) est effectué. Le tenseur des déformations demeure diagonal mais sa partie positive devient :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 = \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

La limite élastique en compression devient ainsi $\varepsilon_2 = \frac{\kappa_0}{\sqrt{2}}$ équivalent à $\varepsilon_1 = \frac{\kappa_0}{-\nu\sqrt{2}}$. Le domaine élastique initial est plus important pour la compression qu'en traction de l'ordre de $\frac{1}{\nu\sqrt{2}} = 3.5$. La dissymétrie du domaine élastique contribue à la dissymétrie du comportement globale. De même qu'en traction, le multiplicateur de Lagrange est déterminé par la condition de consistance, permettant ainsi de connaître l'évolution de l'endommagement :

$$D_2 = \frac{\kappa^{-1}(\hat{\varepsilon}) - 2D_2^{n-1}}{\hat{\varepsilon}^2} \varepsilon_{22}^2 \quad (3.37)$$

La relation contrainte-déformation est tracée (FIG.3.9) avec la loi de consolidation non linéaire. Le comportement en compression montre une contrainte pic et des déformations

à rupture de l'ordre de dix fois supérieures à celles en traction. De même, l'énergie de rupture en traction est très inférieure à celle de compression, montrant ainsi un comportement fragile en traction et plus ductile en compression. La dissymétrie du comportement est donc bien représentée par ce modèle.

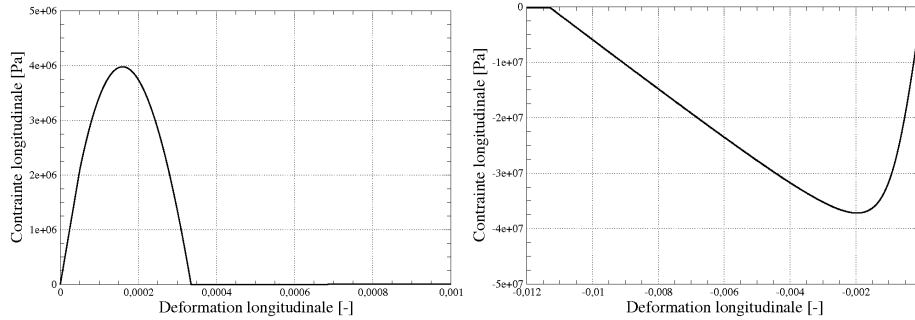


FIGURE 3.9: Comportement monotone du modèle d'endommagement initial

4.3 Comportement cyclique du modèle

Pour une utilisation en sismique, il est nécessaire d'avoir un comportement cyclique adéquat. Pour cela, des matériaux endommagés vont être simulés. Pour simplifier l'étude, deux cas uniaxiaux seront détaillés : traction/compression et compression/traction. Dans les deux cas, la procédure consiste à charger le matériau jusqu'à un endommagement dont la trace vaut 0.3. Ensuite le matériau est chargé dans la direction opposée jusqu'à rupture. Deux aspects sont étudiés en détail ci-dessous : la refermeture de fissure (ou effet unilatéral) et l'influence du pré-endommagement sur le comportement global du matériau.

4.3.1 Effet unilatéral

L'effet unilatéral consiste à une reprise plus ou moins importante de raideur lors de la fermeture de la microfissuration apparente. Ainsi, dans les deux cas étudiés ici, la reprise de raideur doit intervenir lors du passage traction/compression (cas 1) et compression/traction (cas 2), soit dans les deux cas pour $\underline{\underline{\epsilon}} = 0$ et $\underline{\underline{\sigma}} = 0$. Les trois versions du modèle (sans refermeture et avec refermeture partielle et totale) sont comparées. Le comportement des modèles lors du passage à ($\underline{\underline{\epsilon}} = 0$, $\underline{\underline{\sigma}} = 0$) est illustré (FIG.3.10). Lors du premier chargement, le comportement des trois modèles est identique.

Pour le cas 1, la décharge montre une raideur apparente de :

$$E_{app}^0 = \frac{E}{\frac{1+\nu}{9} \left(\frac{4}{1-D_1} + 2 \right) + \frac{1-2\nu}{3(1-D_1)}} \leq E \quad (3.38)$$

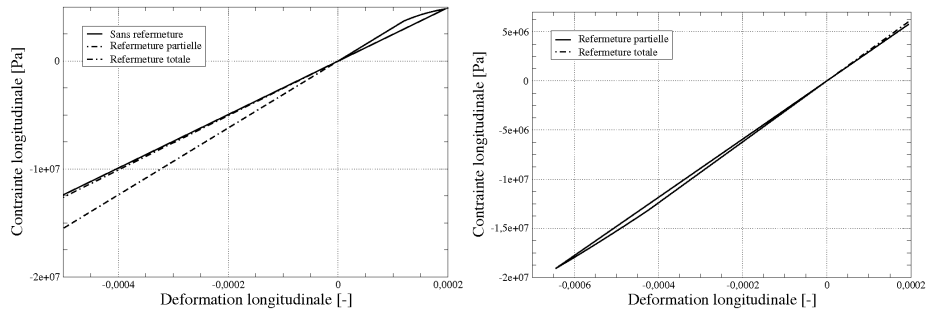


FIGURE 3.10: Comportement des modèles vis-à-vis de la refermeture de fissure : traction/compression et compression/traction

La raideur apparente décroît quand l'endommagement augmente. Lors du passage en compression, le premier modèle ne montre pas de changement de pente, la raideur apparente reste constante :

$$E_{app}^1 = \frac{E}{\frac{1+\nu}{9} \left(\frac{4}{1-D_1} + 2 \right) + \frac{1-2\nu}{3(1-D_1)}} = E_{app}^0 \leq E \quad (3.39)$$

Il n'y a donc aucune reprise de raideur contrairement aux observations expérimentales. La section apparente ne tient pas compte de la fermeture de la microfissuration. Pour y remédier, la deuxième version du modèle sépare la partie positive et la partie négative de la contrainte hydrostatique, l'endommagement agissant seulement sur la partie positive (direction des extensions), ainsi, la raideur apparente est modifiée lors du passage en compression :

$$E_{app}^2 = \frac{E}{\frac{1+\nu}{9} \left(\frac{4}{1-D_1} + 2 \right) + \frac{1-2\nu}{3}} \geq E_{app}^0 \quad (3.40)$$

La raideur apparente est donc plus importante que la raideur de décharge mais reste strictement inférieure à la raideur initiale du matériau. Pour obtenir celle-ci lors du chargement en compression, il est nécessaire d'agir sur la contrainte déviatorique en la séparant en partie positive et négative, l'endommagement agissant uniquement sur la partie positive. Ainsi, la raideur de recharge en compression devient la raideur initiale du matériau sain.

$$E_{app}^3 = \frac{E}{\frac{1+\nu}{9} (4 + 2) + \frac{1-2\nu}{3}} = E \geq E_{app}^2 \geq E_{app}^0 \quad (3.41)$$

Le raisonnement pour le cas de chargement 2 diffère légèrement. En effet, le comportement diffère selon les versions du modèle, même pour le chargement initial en compression. En compression, la trace de la contrainte étant négative, la déformation de la version 1 s'exprime :

$$\varepsilon = \left[\frac{1+\nu}{9} \left(4 + \frac{2}{1-D_2} \right) + \frac{1-2\nu}{3(1-D_2)} \right] \frac{\sigma}{E} \quad (3.42)$$

alors que pour les autres versions :

$$\varepsilon = \left[\frac{1+\nu}{9} \left(4 + \frac{2}{1-D_2} \right) + \frac{1-2\nu}{3} \right] \frac{\sigma}{E} \quad (3.43)$$

La comparaison va donc se concentrer sur les versions 2 (refermeture partielle) et 3 (refermeture totale) du modèle. Le module apparent lors de la décharge vaut :

$$E_{app}^0 = \frac{E}{\frac{1+\nu}{9} \left(4 + \frac{2}{1-D_2} \right) + \frac{1-2\nu}{3}} \quad (3.44)$$

Lors de la charge en compression, la contrainte hydrostatique devient positive, donc l'endommagement devient actif en diminuant le module sphérique :

$$E_{app}^2 = \frac{E}{\frac{1+\nu}{9} \left(4 + \frac{2}{1-D_2} \right) + \frac{1-2\nu}{3(1-D_2)}} \quad (3.45)$$

La version 2 du modèle voit donc le module apparent diminuer lors du passage compression/traction. Ce phénomène est contradictoire avec le principe de refermeture des micro-fissures, toutefois la fragilité du comportement en traction peut justifier l'influence du chargement en compression sur le comportement en traction. La version 3 du modèle prend en compte la fermeture des microfissures sur la partie déviatorique des contraintes :

$$E_{app}^3 = \frac{E}{\frac{2(1+\nu)}{3} + \frac{1-2\nu}{3(1-D_2)}} \quad (3.46)$$

Le modèle d'endommagement propose une gestion de l'effet unilatéral pouvant être partielle ou totale. Ainsi, la reprise de raideur lors de la refermeture des fissures est modélisée correctement.

4.3.2 Comportement à rupture d'un matériau pré-endommagé

La partie précédente met en valeur le changement de raideur apparente lors d'un changement de signe du chargement (effet unilatéral). Ceci affecte uniquement le comportement élastique d'un matériau pré-endommagé. Maintenant il est important de se focaliser sur le comportement endommageable d'un matériau pré-endommagé dans une autre direction. Comme précédemment, le matériau est d'abord chargé en traction jusqu'à un endommagement de $D_1 = 0.3$, puis ensuite chargé en compression, mais jusqu'à rupture. Dans ce premier cas de chargement cyclique, le modèle montre un renforcement du matériau : la contrainte pic en compression devient largement supérieure à la contrainte maximale en compression du matériau sain. De plus, la déformation à rupture (correspondant à un endommagement en compression de $D_2 = 1$) est très largement supérieure à celle pour le matériau sain (FIG.3.11). Le même test est réalisé pour un chargement alterné compression/traction (FIG.3.12). Le matériau est donc chargé en compression jusqu'à un

endommagement de $D_2 = 0.15$, puis chargé en traction jusqu'à rupture complète. Dans ce cas, le matériau endommagé possède la même déformation à rupture que le matériau sain, mais la contrainte maximale est supérieure à la contrainte maximale en traction du matériau sain (non endommagé).

Dans les deux cas de chargements alternés étudiés ici, un phénomène de consolidation dû à un endommagement dans une direction différente est mis en valeur. Ce phénomène est contraire aux observations expérimentales : un matériau quasi-fragile comme le béton ne peut être consolidé par un pré-endommagement dans une direction différente. Il est inhérent à une consolidation κ isotrope (tout comme l'écrouissage isotrope qui n'est pas capable de rendre compte du comportement cyclique des métaux). Pour mieux comprendre ce phénomène de consolidation, il faut étudier attentivement l'évolution des surfaces seuil (limites élastiques) en fonction de l'endommagement. Les surfaces seuil sont donc calculées et tracées pour le matériau sain puis pour des matériaux endommagés en traction ($D_1 = 0.3$) et en compression ($D_2 = 0.15$). Les surfaces seuil sont calculées pour un état de contraintes planes ($\sigma_{11} - \sigma_{22}$) puis tracées dans ce même plan ainsi que dans le plan des déformations ($\epsilon_{11} - \epsilon_{22}$) après projection dans ce plan. En effet, l'état de chargement étant en contrainte plane les déformations hors plan ne sont pas nulles, ce qui permet d'obtenir des surfaces fermées.

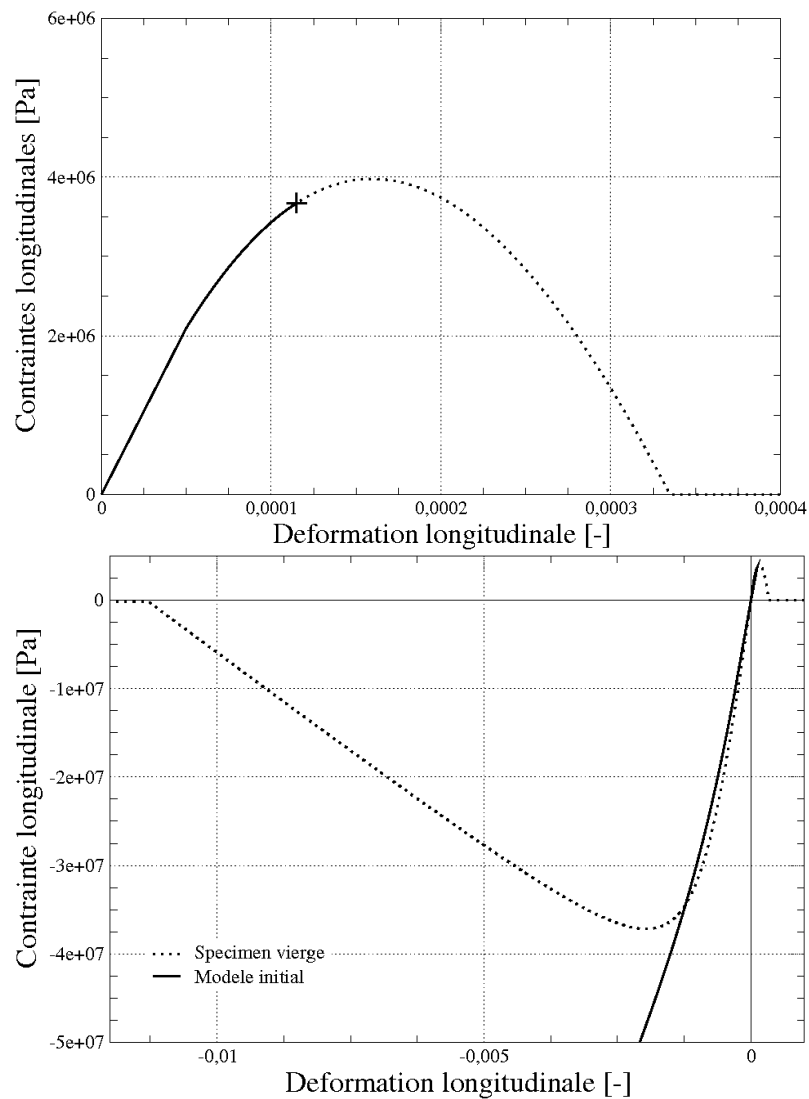


FIGURE 3.11: Comportement cyclique du modèle d'endommagement avec refermeture partielle (initial) : traction/compression - Comparaison avec le comportement à l'état vierge

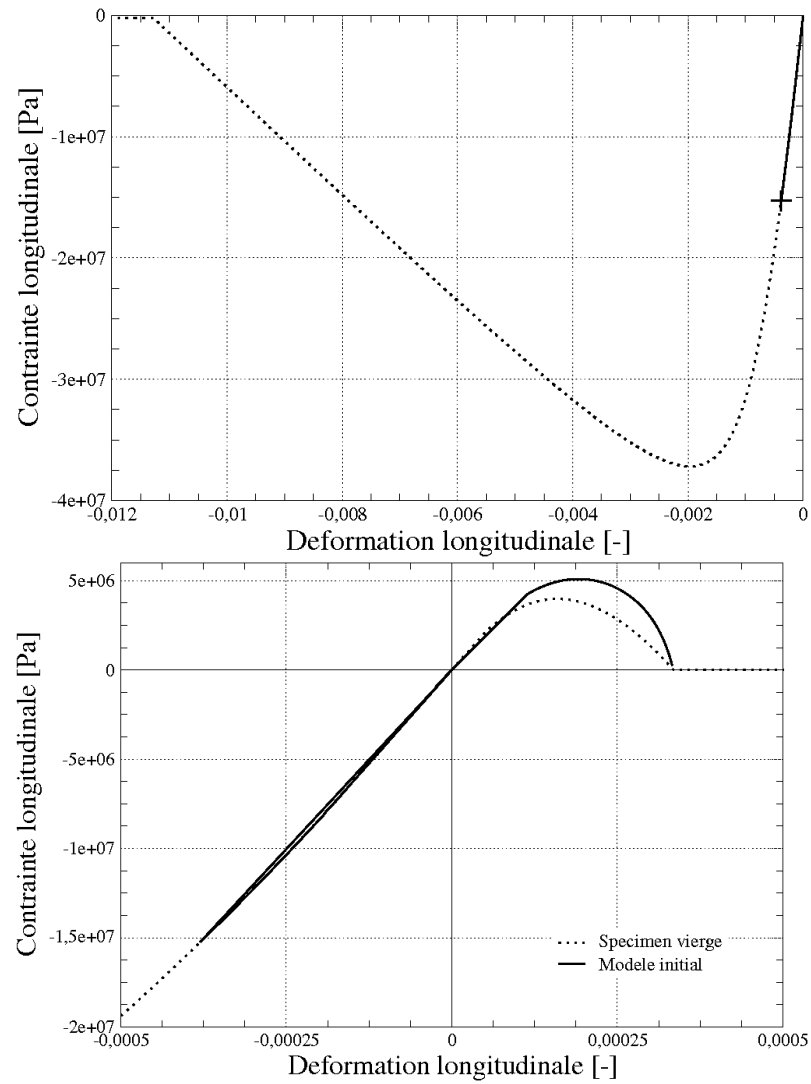


FIGURE 3.12: Comportement cyclique du modèle d'endommagement avec refermeture partielle (initial) : compression/traction - Comparaison avec le comportement à l'état vierge

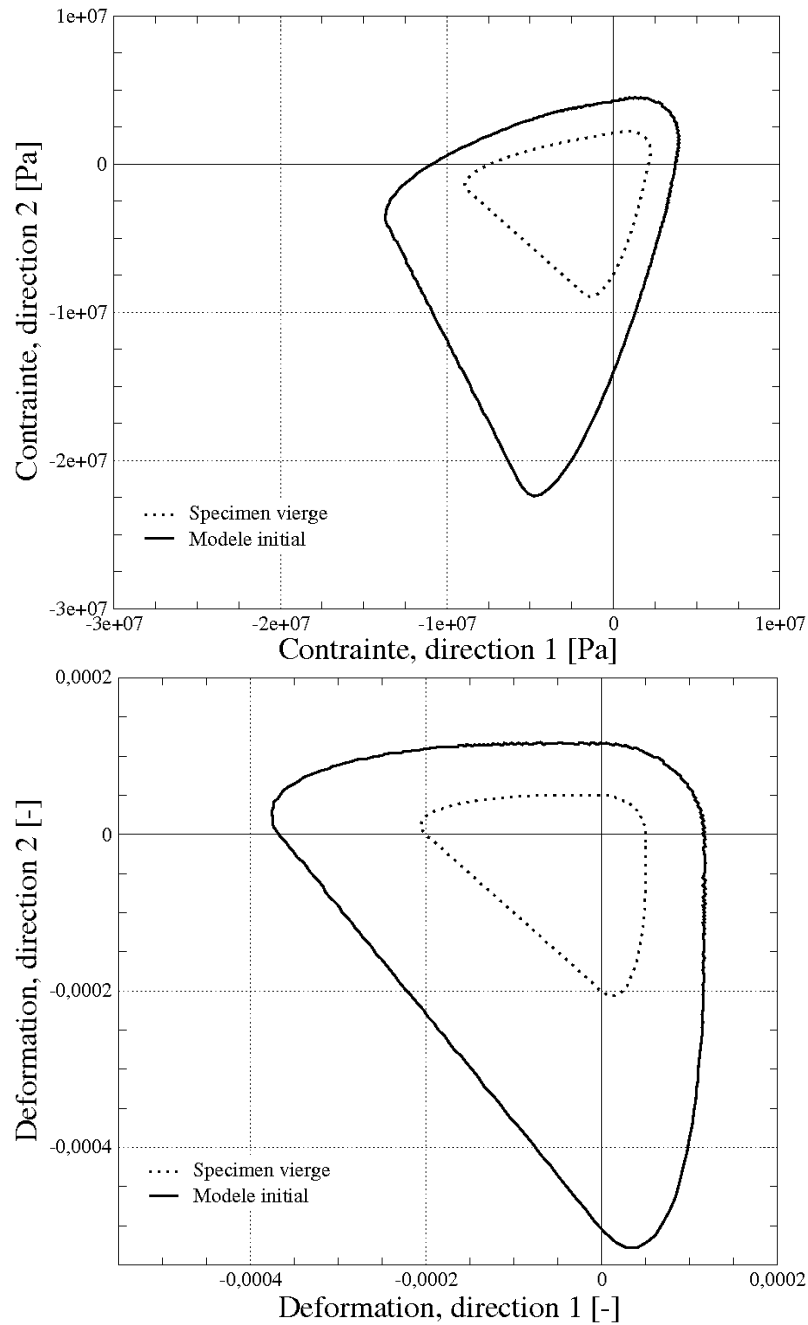


FIGURE 3.13: Domaine d'élasticité pour le matériau endommagé en traction dans la direction 1

Pour le cas du matériau endommagé en traction, la surface seuil montre une évolution quasi isotrope (FIG.3.13) : la surface augmente dans toutes les directions du plan ($\sigma_{11} - \sigma_{22}$) mais avec coefficient différent selon les directions. Cela correspond à l'écrouissage isotrope des métaux. En se focalisant sur l'axe σ_{11} (correspondant au cas de chargement alterné étudié précédemment), on s'aperçoit que la limite élastique s'exprime :

$$\begin{aligned} f &= \hat{\varepsilon} - \kappa(\text{Tr}(\underline{\underline{D}})) = \sqrt{2}\varepsilon_2 - \kappa(D_1) \\ \varepsilon_2 &= \frac{\kappa(D_1)}{\sqrt{2}} \\ \sigma_1^l &= \frac{E \kappa(D_1)}{\sqrt{2} \left[\frac{1+\nu}{9} \left(\frac{-2}{1-D_1} - 1 \right) + \frac{1-2\nu}{3} \right]} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Sa valeur est de -1.1MPa contre -0.68MPa pour le matériau sain. Ainsi, l'endommagement est retardé ce qui a donc pour effet de consolider le matériau. L'évolution pas tout à fait isotrope est une conséquence de l'anisotropie induite dans le matériau par l'évolution de l'endommagement (ici $D_1 = 0.15, D_2 = D_3 = 0$). La limite élastique pour un chargement dans la direction ($\sigma_{11} = 0, \sigma_{22} < 0$) est :

$$\begin{aligned} f &= \hat{\varepsilon} - \kappa(\text{Tr}(\underline{\underline{D}})) = \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_3} - \kappa(D_1) \\ \varepsilon_1 &= \left[\frac{1+\nu}{9} \left(\frac{-2}{1-D_1} - 1 \right) + \frac{1-2\nu}{3} \right] \frac{\sigma_2}{E} \\ \varepsilon_3 &= \left[\frac{1+\nu}{9} \left(\frac{1}{1-D_1} - 4 \right) + \frac{1-2\nu}{3} \right] \frac{\sigma_2}{E} \\ \sigma_2^l &= \frac{-E \kappa(D_1)}{\sqrt{\left[\frac{1+\nu}{9} \left(\frac{-2}{1-D_1} - 1 \right) + \frac{1-2\nu}{3} \right]^2 + \left[\frac{1+\nu}{9} \left(\frac{1}{1-D_1} - 4 \right) + \frac{1-2\nu}{3} \right]^2}} \end{aligned} \quad (3.48)$$

La limite élastique est donc plus importante dans cette direction. Pour le cas de chargement inverse (compression/traction) (FIG.3.14), les observations sont identiques : l'évolution quasi-isotrope de la surface seuil, retarde l'endommagement en traction augmentant ainsi beaucoup trop la contrainte maximale. Ces deux tests numériques suffisent à invalider le modèle pour des chargements alternés de types séismes, chocs ... Toutefois, cette version est valable pour des chargements monotones avec éventuellement des décharges.

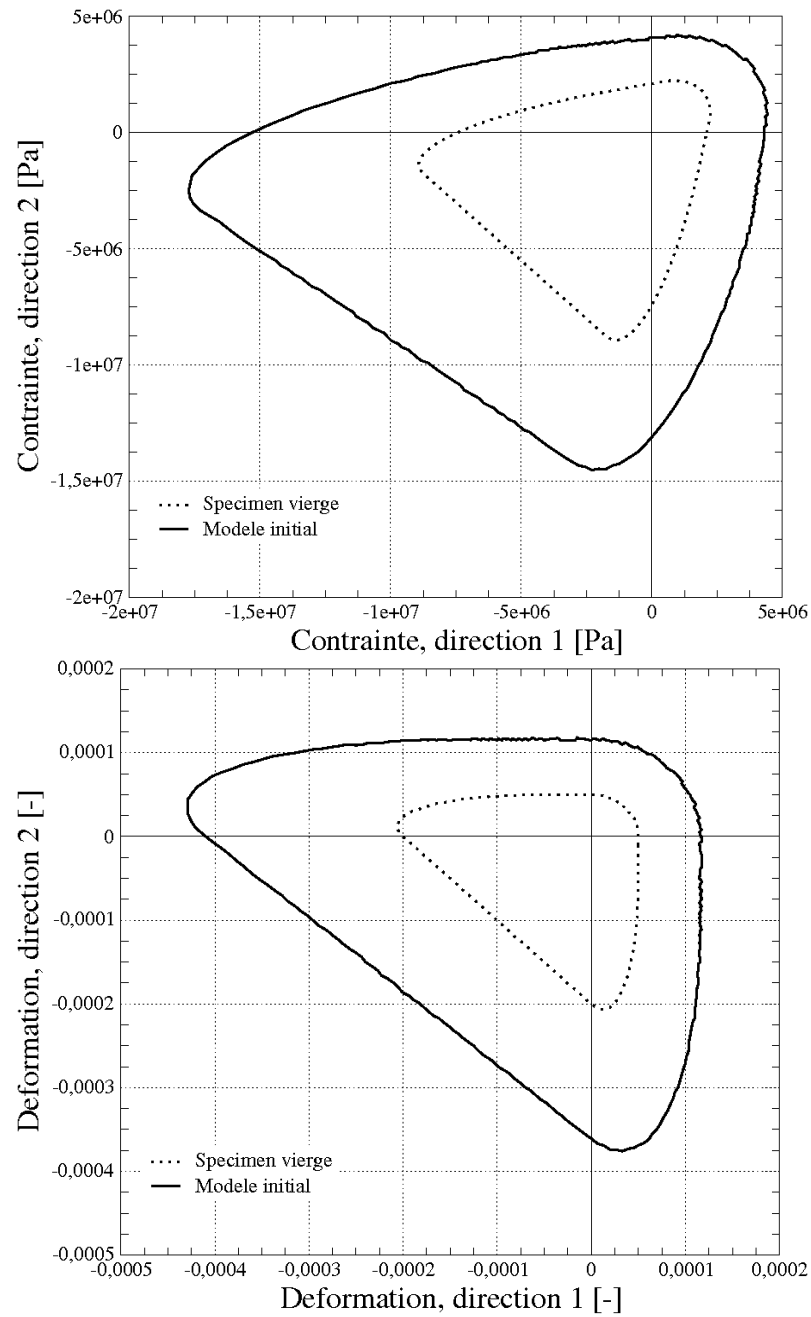


FIGURE 3.14: Domaine d'élasticité pour le matériau endommagé en compression dans la direction 1

5 Modèle d'endommagement anisotrope adapté aux chargements cycliques

La section précédente montre les limites du modèle développé dans des cas de chargements alternés. En effet, la partition en contraintes positive et négative ne suffit pas pour représenter l'effet unilatéral correctement. Cette partition permet de prendre en considération la refermeture des fissures dans la relation contrainte/déformation, mais il faut aussi la prendre en considération dans la fonction de consolidation. En effet, celle-ci dépend de l'état d'endommagement général du matériau (via la trace de l'endommagement dans le modèle initial) sans différencier si les fissures sont ouvertes ou fermées. Ainsi il est nécessaire de définir un nouveau scalaire représentant l'état de fissuration active (uniquement les fissures ouvertes) : l'endommagement actif d_ϵ [Leb07] [SDRD09]. Ainsi la fonction de consolidation précédente devient :

$$\kappa(\text{Tr}(\underline{\underline{D}})) \rightarrow \kappa(\text{Tr}(d_\epsilon)) \quad (3.49)$$

5.1 Endommagement actif

5.1.1 Concept de l'endommagement actif

Pour un modèle uniaxial, le concept d'endommagement actif est relativement simple. Une fissure s'ouvre si elle subit une extension dans sa direction orthogonale. Ainsi, l'endommagement actif est nul en compression ($d_\epsilon = 0$ quand $\epsilon < 0$) et confondu à l'endommagement en traction ($d_\epsilon = D$ quand $\epsilon > 0$). L'endommagement actif peut donc s'exprimer :

$$d_\epsilon = D \cdot \mathcal{H}(\epsilon) \quad (3.50)$$

L'endommagement actif est donc l'endommagement modulé par la fonction Heaviside des déformations (des déformations élastiques si la plasticité est introduite). Ce concept peut être facilement étendu dans le cas d'un modèle d'endommagement isotrope. En effet, dans ce cas, l'endommagement est représentatif de micro-défauts pouvant être sphériques. Leur état d'ouverture, et donc d'activation dépend du chargement hydrostatique. L'endommagement actif dépend donc du signe de la trace des déformations (où des déformations élastiques) :

$$d_\epsilon = D \cdot \mathcal{H}(\text{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}})) \quad (3.51)$$

Pour le modèle considéré ici, la complexité vient de l'anisotropie de l'endommagement. En effet, le concept présenté ci-dessus ne peut être étendu qu'à des chargements proportionnels où les tenseurs d'endommagement et des déformations restent diagonalisables dans la même base. Dans ce cas particulier l'endommagement actif pourrait effectivement s'exprimer :

$$d_\epsilon = \sum_i D_i \mathcal{H}(\epsilon_i) \quad (3.52)$$

Toutefois cette expression n'étant valable que pour des chargements particuliers, il est nécessaire de définir un endommagement actif valable pour tout type de chargement. Les

bases propres des tenseurs d'endommagement et des déformations étant différentes, le tenseur d'endommagement est projeté sur la partie positive du tenseur des déformations, normé par la valeur propre maximale des déformations :

$$d_{\varepsilon} = \frac{\underline{\underline{D}} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_+}{\max \varepsilon_I} \quad (3.53)$$

où ε_I sont les valeurs propres des déformations. L'avantage de cette définition est la correspondance au modèle initial pour des chargements monotones sans modifications des paramètres matériau. En effet, si on considère un chargement uniaxial monotone de traction. Les déformations et l'endommagement s'écrivent :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} > 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} < 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} = \varepsilon_{22} < 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

L'endommagement actif devient donc (en traction monotone) :

$$d_{\varepsilon} = \frac{D_{11}\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}} = D_{11} = \text{Tr}(\underline{\underline{D}}) \quad (3.55)$$

Ainsi, en conservant les paramètres matériaux du modèle initial, le modèle avec l'endommagement actif donne la même **réponse monotone** que le modèle initial. Un raisonnement identique en **compression monotone** donne : $d_{\varepsilon} = 2D_{22} = \text{Tr}(\underline{\underline{D}})$.

5.1.2 Comportement cyclique du modèle avec endommagement actif

Le comportement cyclique est vérifié sur un point de Gauss en réalisant les deux cas tests précédant avec la version du modèle avec refermeture partielle. Le comportement en compression d'un matériau pré-endommagé en traction présente une contrainte maximale plus faible qu'un matériau sain (FIG.3.15). Cette diminution de la contrainte pic suit le sens de la réalité physique. Toutefois aucun essai expérimental n'est réalisable pour quantifier cette évolution. Le comportement tend vers celui du matériau sain lors de la rupture : les déformations à rupture du matériau endommagé et du matériau sain sont identiques. Le test en traction d'un matériau endommagé en compression montre quelques différences (FIG.3.15). Si la contrainte maximale devient aussi inférieure à celle du matériau sain, les déformations à rupture diffèrent pour devenir plus faibles. Les deux tests numériques montrent les capacités du modèle pour simuler des structures sous des chargements cycliques tels que des séismes.

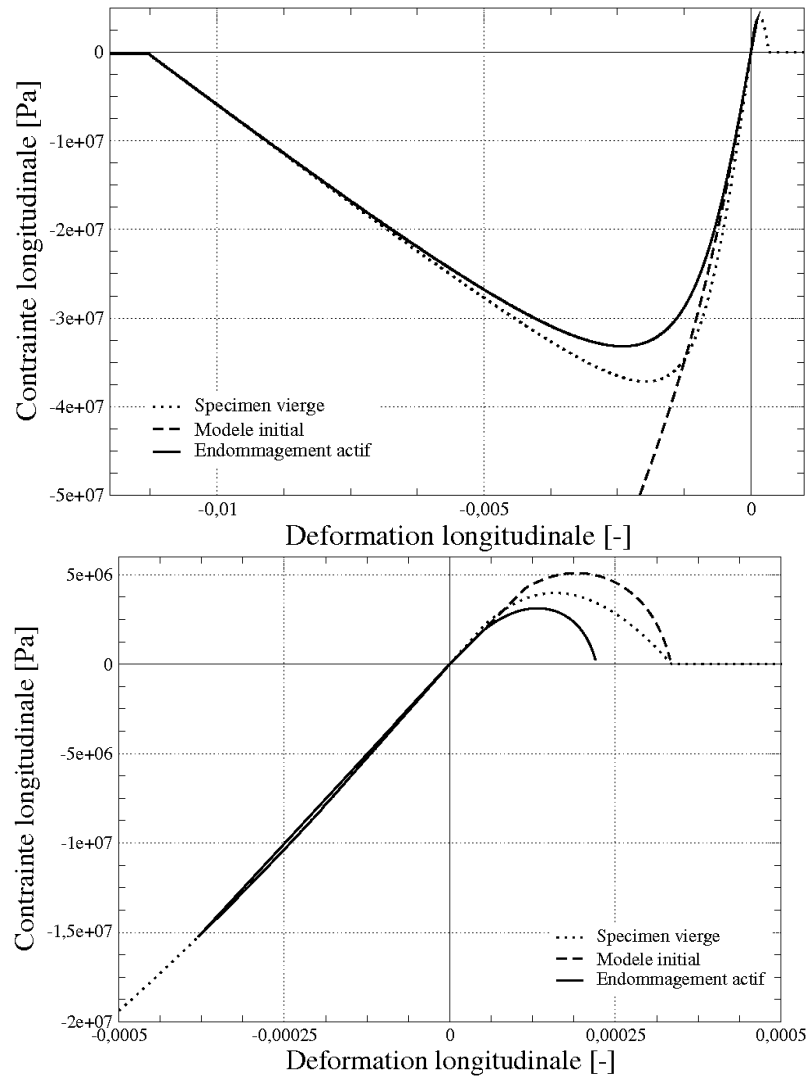


FIGURE 3.15: Comportement cyclique des différentes versions du modèle d'endommagement : traction/compression et compression/traction

5.1.3 Domaine élastique : matériau sain et endommagé

Pour comprendre l'effet de l'endommagement actif sur le comportement cyclique du modèle, il faut encore une fois s'intéresser à l'évolution des surfaces élastiques en fonction de l'endommagement. Comme précédemment, les surfaces élastiques sont calculées en contraintes planes ($\sigma_{11} - \sigma_{22}, \sigma_{33} = 0$) puis tracées dans ce même plan ainsi que dans le plan des déformations ($\epsilon_{11} - \epsilon_{22}$) après projection (les déformations dans la direction 3 sont non nulles). Je considère d'abord un matériau endommagé en traction jusqu'à un état d'endommagement de $D_{11} = 0.3$ (FIG.3.16). Les surfaces élastiques du matériau endommagé restent continues mais perdent leur convexité. Cette perte de convexité n'invalide pas le modèle car la loi d'évolution de l'endommagement dérive d'un pseudo-potentiel non associé. Toutefois cette perte de convexité pourra éventuellement influencer le schéma d'intégration de la loi de comportement. Deux évolutions différentes sont remarquables. En se focalisant sur la projection de la surface dans le plan des déformations, deux domaines se distinguent : les deux cadrans de droites ($\epsilon_{11} > 0$) où la surface est confondue avec celle du modèle sans endommagement actif, et les cadrans de gauche ($\epsilon_{11} < 0$) où la surface seuil est proche de celle du matériau sain. Pour le premier domaine ($\epsilon_{11} > 0$), la surface seuil du matériau endommagé reste confondue avec la surface seuil du modèle en $\text{Tr}(\underline{\underline{D}})$ (sans endommagement actif) tant que la direction 1 demeure la direction de plus grande déformation. En effet, dans ce cas, l'endommagement actif reste égal à la trace de l'endommagement : $d_\epsilon = \text{Tr}(\underline{\underline{D}})$. Dès que la direction 1 n'est plus la direction de plus grande déformation, l'expression de l'endommagement actif devient :

$$d_\epsilon = \frac{\underline{\underline{D}} : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+}{\max \epsilon_I} = \frac{D_{11} \epsilon_{11}}{\epsilon_{22} \text{ ou } \epsilon_{33}} < D_{11} = \text{Tr}(\underline{\underline{D}}) \quad (3.56)$$

L'endommagement actif diminuant, la surface élastique se réduit d'autant. Les cadrans opposés ($\epsilon_{11} < 0$) montrent une surface élastique du matériau endommagé de l'ordre de celle du matériau sain, donc largement inférieure à la surface seuil du modèle sans endommagement actif. Si je m'intéresse à la direction de compression dans la direction 1 (correspondant aux cas des tests numériques précédemment étudiés), l'endommagement actif est nul ($d_\epsilon = 0$) mais l'endommagement dans cette direction fait chuter la limite élastique en contrainte :

$$\sigma_1^I = \frac{E \kappa_0}{\sqrt{2} \left[\frac{1+\nu}{9} \left(\frac{-2}{1-D_1} - 1 \right) + \frac{1-2\nu}{3} \right]} < \frac{E \kappa_0}{\sqrt{2} \left[\frac{1+\nu}{9} (-3) + \frac{1-2\nu}{3} \right]} = \sigma_1^{I \text{ sain}} \quad (3.57)$$

Je considère maintenant un matériau pré-endommagé en compression jusqu'à un état d'endommagement de $D_{22} = 0.15$ (donc de trace $\text{Tr}(\underline{\underline{D}}) = 2D_{22} = 0.3$). La surface seuil de ce matériau pré-endommagé croît globalement dans toutes les directions, mais de moindre amplitude que pour le modèle sans endommagement actif. Deux points sont tout de même remarquables : pour $\sigma_{11} < 0$ et $\sigma_{22} = 0$, la direction correspond à la direction de pré-endommagement, les surfaces du modèle avec et sans endommagement actif sont donc confondues (chargement monotone) ; à l'opposée pour $\sigma_{11} > 0$ et $\sigma_{22} = 0$, la

surface du modèle avec endommagement actif devient légèrement inférieure à celle du matériau sain. Cette dernière particularité s'explique par l'influence de l'endommagement sur l'expression des contraintes :

$$\sigma_1^l = \frac{E \kappa_0}{\sqrt{2} \left[\frac{1+\nu}{9} \left(4 + \frac{2}{1-D_{22}} \right) + \frac{1-2\nu}{3(1-2D_{22})} \right]} < \frac{E \kappa_0}{\sqrt{2} \left[\frac{1+\nu}{9} (6) + \frac{1-2\nu}{3} \right]} = \sigma_1^{l \text{ sain}} \quad (3.58)$$

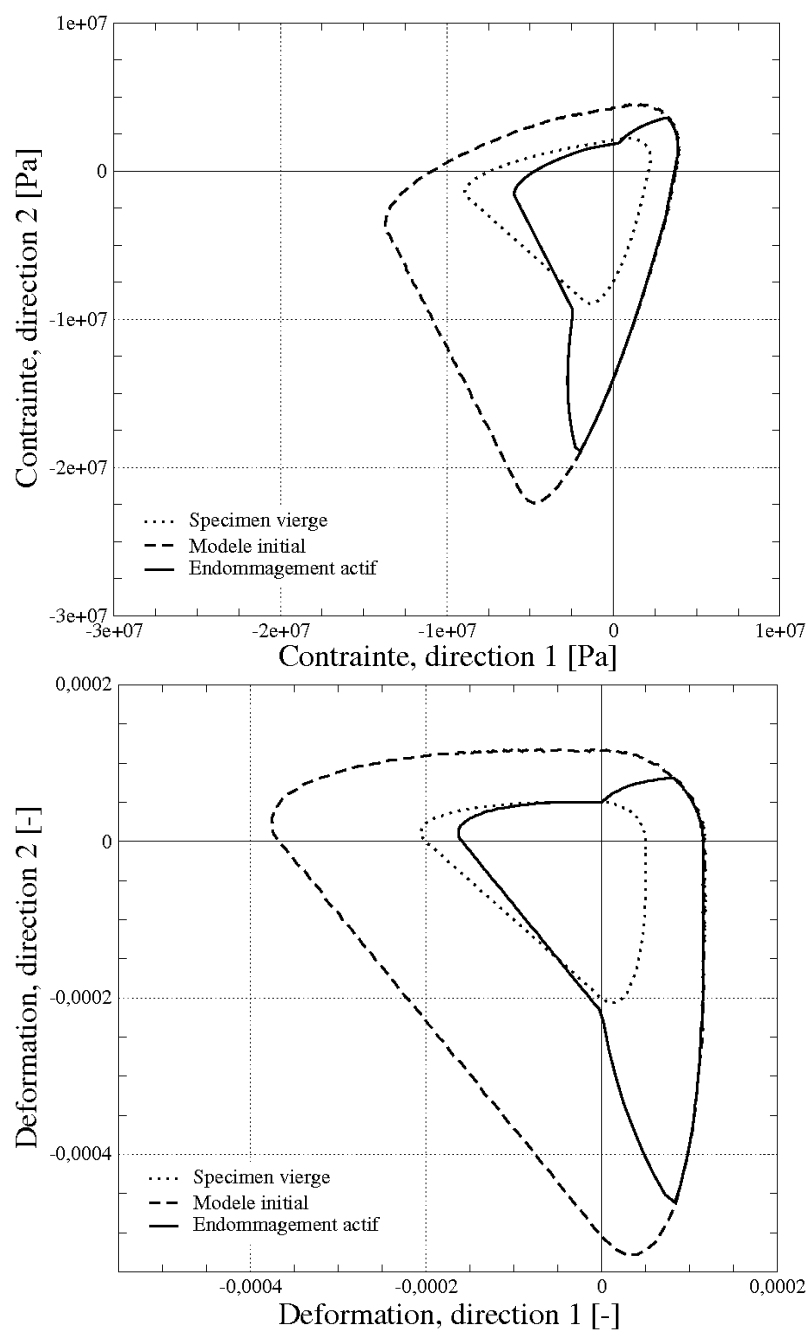


FIGURE 3.16: Domaine d'élasticité pour un matériau endommagé en tension dans la direction 1

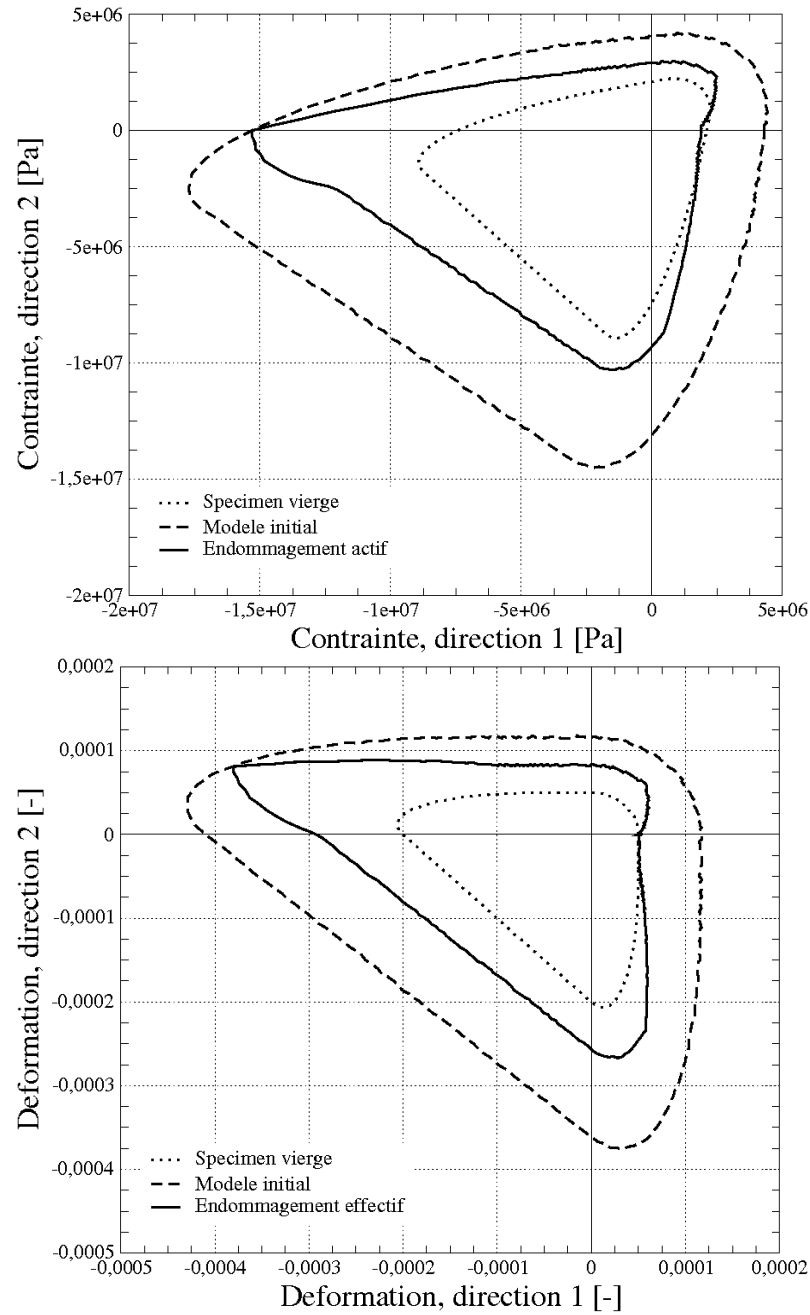


FIGURE 3.17: Domaine d'élasticité pour un matériau endommagé en compression dans la direction 1

La position intermédiaire pour un chargement quelconque s'explique par la présence d'une déformation dans la direction 3. Par exemple dans la direction ($\sigma_{11} < 0, \sigma_{22} > 0$), l'endommagement actif devient :

$$d_\epsilon = \frac{\underline{\underline{D}} : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+}{\max \epsilon_I} = \frac{D_{22} (\epsilon_{22} + \epsilon_{33})}{\max (\epsilon_{22}, \epsilon_{33})} = D_{22} (1 + \alpha) < 2D_{22} \quad (3.59)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{22}} & \text{si } \epsilon_{22} > \epsilon_{33} \\ \alpha = \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{33}} & \text{si } \epsilon_{33} > \epsilon_{22} \end{cases} \quad (3.60)$$

Dans une direction quelconque du plan des contraintes, l'endommagement actif est donc strictement inférieur à la trace de l'endommagement, diminuant ainsi le domaine élastique du matériau endommagé.

Grâce à l'endommagement actif qui permet de prendre en compte uniquement les fissures ouvertes (dites actives) dans la fonction de consolidation, le modèle d'endommagement anisotrope est apte à simuler le comportement d'un matériau quasi fragile type béton sous chargement cyclique. Cette amélioration ouvre la voie à l'étude dynamique (séisme, chocs) de structures en béton armé.

5.2 Première application : Poteau en bi-flexion

Une structure relativement simple est maintenant étudiée pour illustrer l'apport de l'endommagement actif. La structure choisie est un poteau encastré en pied et chargé d'une masse inertielle en tête. Le poteau subit un séisme bidirectionnel dans le plan horizontal. Ce test reste purement numérique, aucun essai n'est réalisé. La réponse temporelle de la structure n'a donc pas d'importance. Par contre, l'évolution de l'endommagement actif est étudiée en comparaison à l'évolution de l'endommagement. La figure FIG.3.18 montre à gauche la carte de l'endommagement principal et à droite la carte de l'endommagement actif. L'endommagement montre une croissance monotone. En effet, l'endommagement représente l'état de fissuration réelle du matériau sans distinguer les fissures ouvertes et fermées. A l'opposé, l'endommagement actif dépend de l'état de chargement de la structure. Ainsi à un instant donné, l'endommagement actif est compris entre 0 et la valeur de l'endommagement. Au pas de calcul 320, l'endommagement se crée. L'ensemble de la zone endommagée est donc en extension : $\dot{D} = \dot{\lambda} \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+$. L'endommagement actif se confond avec l'endommagement global. Pour le pas de calcul 800, la structure est déjà endommagée sur toute sa section dans sa partie basse. L'endommagement global reste donc strictement positif dans tout cette zone. L'endommagement actif lui dépend du chargement et s'annule dans la zone en compression, et reste égale à l'endommagement global dans la zone en extension. Cette simulation montre explicitement le concept d'endommagement actif à l'échelle de la structure.

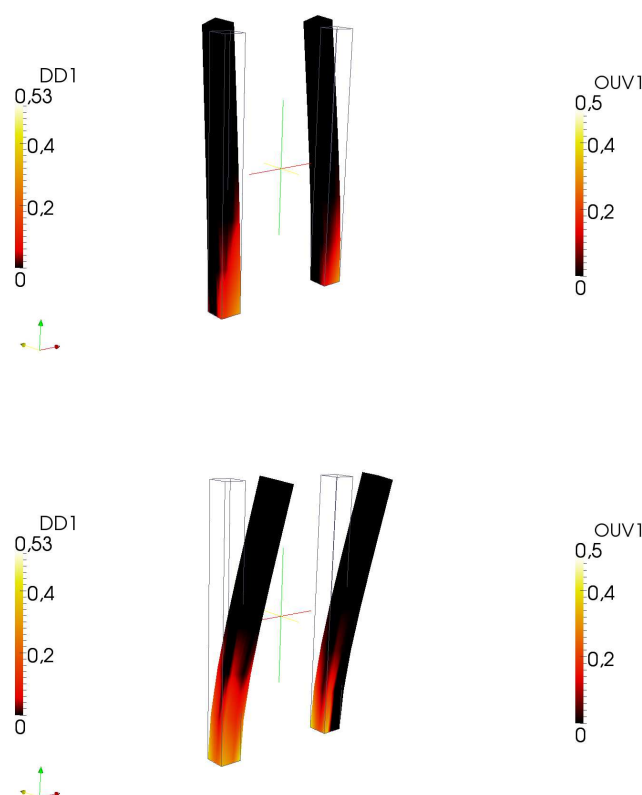


FIGURE 3.18: Désactivation de l'endommagement - Illustration sur un poteau en bi-flexion (pas de calcul 320 et 800) - Endommagement à gauche, endommagement actif à droite

5.3 Autre application de l'endommagement actif : estimation de l'ouverture des fissures

Le concept d'endommagement actif permet aussi d'autres applications adaptées aux simulations d'ouvrages en bétons armés. En effet, une importante problématique actuelle est l'estimation de l'ouverture des fissures pour calculer des débits de fuite ou la pénétration de fluide. Cette problématique est même actuellement le thème du projet national CEOS.fr. Ce projet s'intéresse aux ouvertures de fissures des structures en béton sous divers chargements (mécanique et thermo-hydro-mécanique).

L'estimation de l'ouverture des fissures doit prendre en compte l'éventuelle fermeture des fissures pour ne pas surestimer les débits. Ainsi, l'endommagement actif semble approprié à cette problématique. En effet, dans une zone endommagée, les déformations peuvent se partitionner en déformations élastiques correspondant aux déformations propres du matériau et en déformations d'endommagement correspondant à l'ouverture des micro-fissures. L'endommagement actif permet donc de moduler les déformations pour

évaluer celles comptant pour l'ouverture de fissure. Un matériau endommagé en traction est considéré sous deux chargements différents (traction et compression) (FIG.3.19). L'ouverture de fissure est nulle pour le cas en compression, donc l'ouverture de fissure

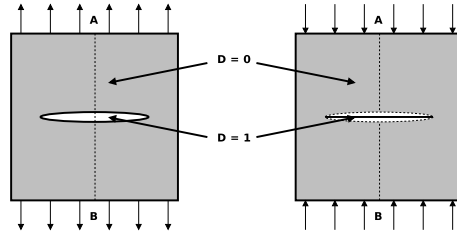


FIGURE 3.19: Estimation de l'ouverture de fissure grâce au modèle d'endommagement

peut être estimé par l'expression suivante (selon le trajet AB) :

$$I_{1D} = \int_A^B d_\epsilon \cdot \epsilon ds \quad (3.61)$$

Les points extrêmes de l'intégration doivent être situés hors de la zone endommagée pour estimer complètement l'ouverture de la fissure. De même, si plusieurs zones endommagées sont incluses dans le segment $[AB]$, l'ouverture estimée sera la somme des ouvertures des différentes fissures. Pour un modèle 3D, l'expression peut se généraliser par :

$$I_{3D} = \int_A^B d_\epsilon \cdot \left(\vec{t} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{t} \right) ds \quad \text{avec} \quad \vec{t} = \frac{\vec{AB}}{AB} \quad (3.62)$$

Pour être significatif, l'ouverture de fissure doit être estimée dans la direction perpendiculaire à celle-ci, correspondant à la direction de déformation maximale. Dans cette direction, l'ouverture de fissure devient :

$$I_{3D} = \int_A^B d_\epsilon \cdot \max \epsilon_I ds = \int_A^B \underline{\underline{D}} : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+ ds \quad (3.63)$$

Une première application de l'estimation de l'ouverture de fissure a été réalisée par Chambart [Cha09]. L'application porte sur la simulation de l'essai brésilien. Cet essai permet d'effectuer de la traction indirecte sur une éprouvette cylindrique. Un chargement de compression est appliquée radialement et provoque une fissure unique de traction. Le modèle numérique est présenté sur la figure FIG.3.20. Le déplacement vertical est imposé sur une génératrice du cylindre et tous les déplacements sont bloqués sur la génératrice opposée. La direction de chargement est la direction z. La simulation est effectuée avec le modèle d'endommagement présenté ci-dessus dans le code éléments finis Cast3m. L'éprouvette est chargée jusqu'à rupture complète. Les cartes d'endommagement dans les directions verticale et horizontale sont présentés sur la figure FIG.3.21. On remarque donc une zone fortement endommagée traversant la section verticalement et des zones endommagées aux appuis. L'ouverture de la fissure est estimée sur le diamètre perpendiculaire à la fissure. La figure FIG.3.22 montre l'évolution de l'ouverture de la fissure en fonction

du déplacement vertical pour le test expérimental (gauche) et pour la simulation (droite). La simulation estime une ouverture de fissure maximale de $15\mu m$. Pour l'expérience, l'ouverture de la fissure est mesurée sur les deux faces de l'éprouvette. Les résultats expérimentaux montrent une ouverture de fissure maximale entre $68\mu m$ et $126\mu m$. Le modèle d'endommagement anisotrope associé au concept d'endommagement actif offre donc une relativement bonne estimation de l'ouverture de fissure mais sûrement trop imprécise pour un calcul de flux.

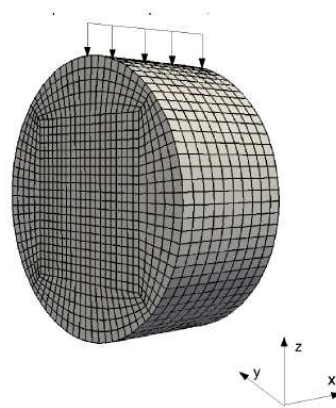


FIGURE 3.20: Modèle numérique pour la simulation du test brésilien



(a) Direction horizontale

(b) Direction verticale

FIGURE 3.21: Carte d'endommagement pour le test brésilien

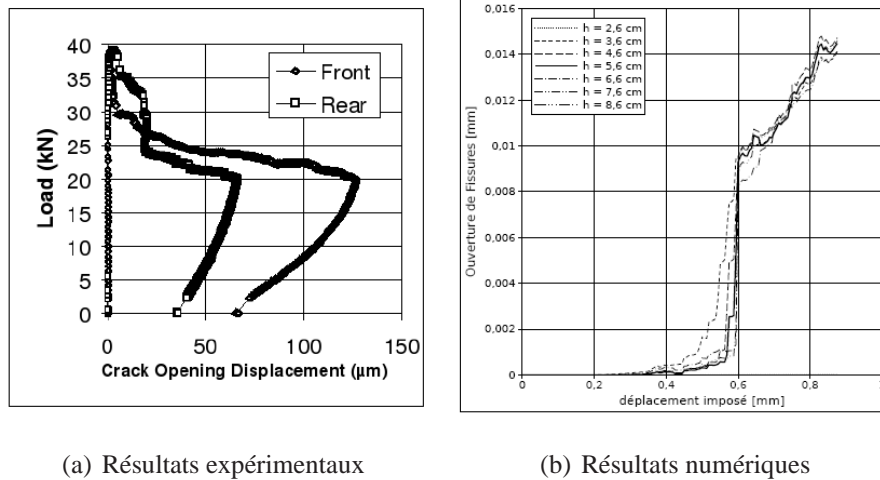


FIGURE 3.22: Ouverture de fissure pour le test brésilien

6 Application : SMART2008

6.1 Présentation du Benchmark

Le benchmark SMART, initié par le CEA de Saclay, s'inscrit dans l'étude de structures complexes sous sollicitations sismiques complexes. En effet, si de nombreux outils sont efficaces et fiables pour des structures simples et symétriques, leurs limites apparaissent rapidement pour des structures massives, complexes et non symétriques. Dans certains cas, la dissymétrie engendre un écart significatif entre le centre de gravité et le centre de torsion, provoquant donc un mouvement de torsion de la structure même sous chargement (sismique) uniaxial. Or, les constructions de l'industrie nucléaire sont généralement complexes et massives. Ainsi, le CEA a proposé l'étude d'un bâtiment technique adjacent à une enceinte de confinement. Ce bâtiment présente les particularités énoncées ci-dessus (voiles-planchers, centre de gravité et de torsion distincts) et son dimensionnement est primordial car il peut compromettre l'intégrité de l'enceinte adjacente. L'objet du benchmark est donc une représentation réduite de ce bâtiment de trois étages présentant une forte dissymétrie (FIG.3.23). Il présente des voiles sur trois cotés avec des réservations sur les voiles de plus grandes dimensions.

La maquette totalise 12 tonnes de béton armé sur lesquels seront ajoutés 12 tonnes de masses supplémentaires par étage représentant les équipements et les effets d'échelle. L'ensemble de 48 tonnes sera testé sur la table sismique multiaxiale Azalée du CEA : elle sera soumise à une série d'excitations sismiques multiaxiales (axes horizontaux) croissante de 0.1g à 1g. Le benchmark se décompose en plusieurs étapes distinctes. La première étape correspond à une étude "à l'aveugle" : seules les données de dimensionnement sont connues. Des calculs prévisionnels sont ainsi réalisés pour chaque niveau de sollicitation. Une deuxième phase similaire intègre les paramètres matériaux préalablement identifiés sur les essais sur éprouvettes et les accélérations mesurées sur la table. Nous allons

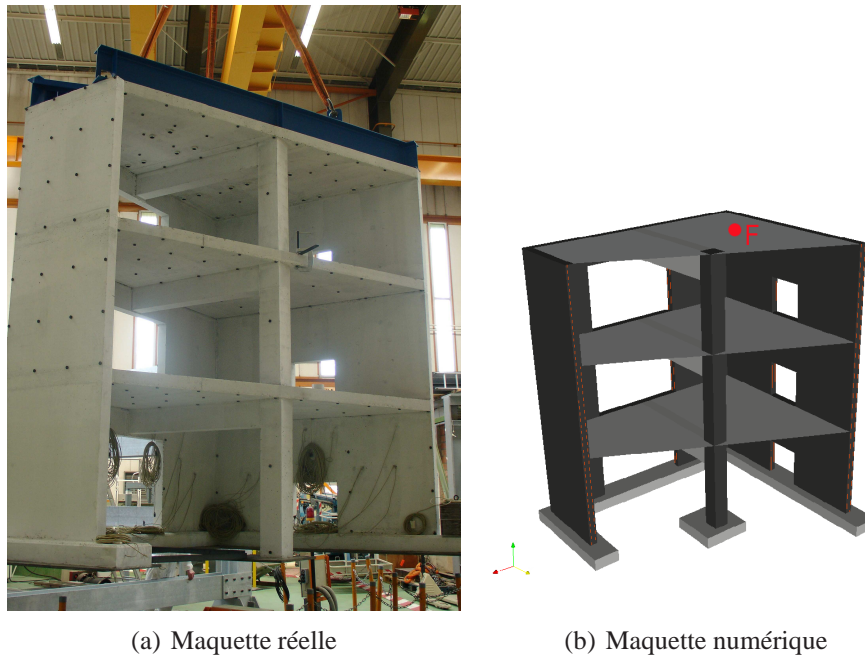


FIGURE 3.23: Maquette SMART (benchmark SMART 2008, CEA-Saclay)

nous intéresser essentiellement à la première phase pour évaluer la pertinence de notre modèle. Ensuite, on propose de modéliser la table sismique afin de recalcr les premiers modes propres de vibration sur les mesures expérimentales. L'étude des phases suivantes n'est pas réalisée dans ce document.

6.2 Modélisation adoptée

La maquette SMART est une structure massive qui rend difficile l'utilisation de modèles simplifiés comme par exemple les modèles multifibres ou les macro-éléments. Nous avons donc opté pour un maillage élément fini *3D*. Ce type de modélisation et le dimensionnement incitent à utiliser un modèle d'endommagement anisotrope : en effet, dû au décentrement du centre de torsion, le chargement biaxial induit un comportement complexe de la structure. La maquette est dimensionnée pour s'endommager dans la partie basse des voiles ; les planchers, poteaux et fondations restant élastiques. Ainsi, pour optimiser le coût de calcul, seuls les voiles (sur les trois niveaux) sont modélisés en *3D* non-linéaire avec une modélisation des aciers avec des éléments *1D* et un modèle élasto-plastique, (FIG.3.24). Les autres parties sont modélisées avec un modèle *3D* élastique linéaire isotrope (pour les fondations et les poteaux) ou un modèle plaque élastique linéaire isotrope (planchers).

Le raffinement du maillage est tout aussi délicat vu la taille de la maquette. En effet, il faut encore trouver l'optimum entre coût de calcul et précision. Les maillages choisis pour les différentes parties de la structure sont présentés sur la figure FIG.3.25

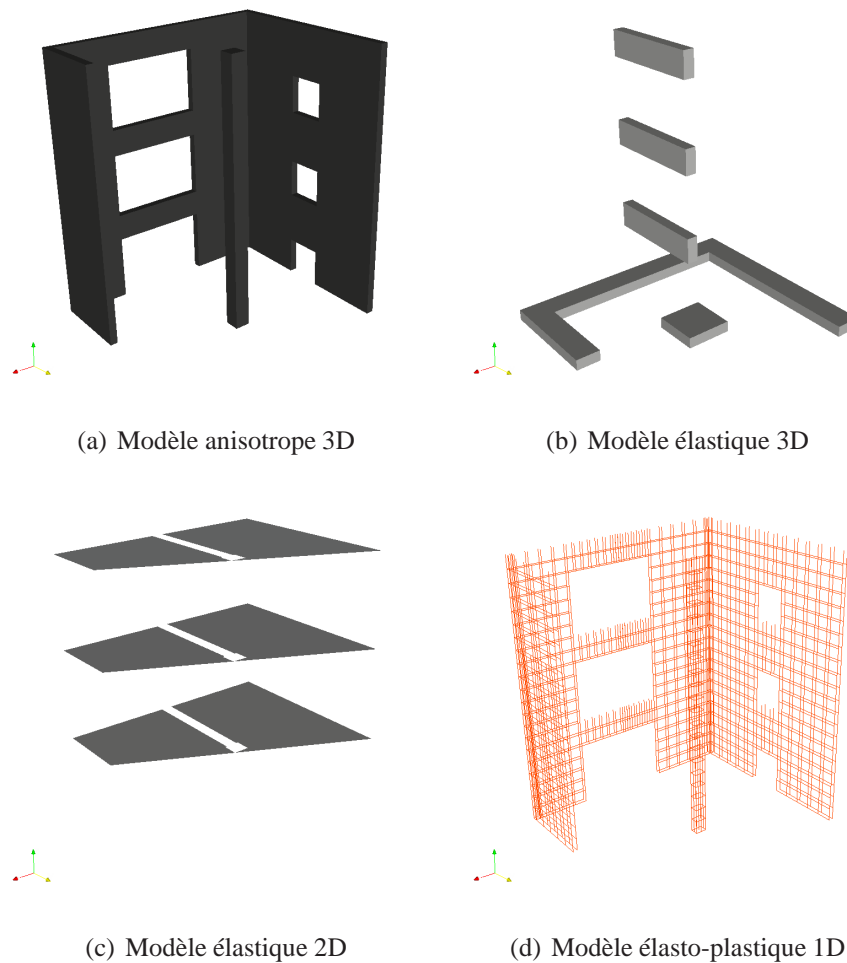


FIGURE 3.24: Modélisation des différents éléments de la maquette SMART

6.3 Phase 1 : Test à l'"aveugle" (*Blind test*)

La première phase du benchmark est une étude à l'aveugle de la maquette. Dans ce type d'analyse, seuls les éléments de dimensionnement sont connus : dimensions, ferrailage, caractéristiques des matériaux. Cette étude permet d'évaluer le comportement de la structure. Phase absolument nécessaire lors de la préparation de l'essai. Elle est particulièrement intéressante, car elle rend impossible l'utilisation de paramètres flous pour recalculer les résultats. De plus, les signaux temporels utilisés pour les analyses dynamiques sont les signaux de commande qui peuvent différer considérablement des accélérations réellement imposées sur la maquette. Dans cette première étude, deux séries d'analyses sont réalisées : une modale et une temporelle.

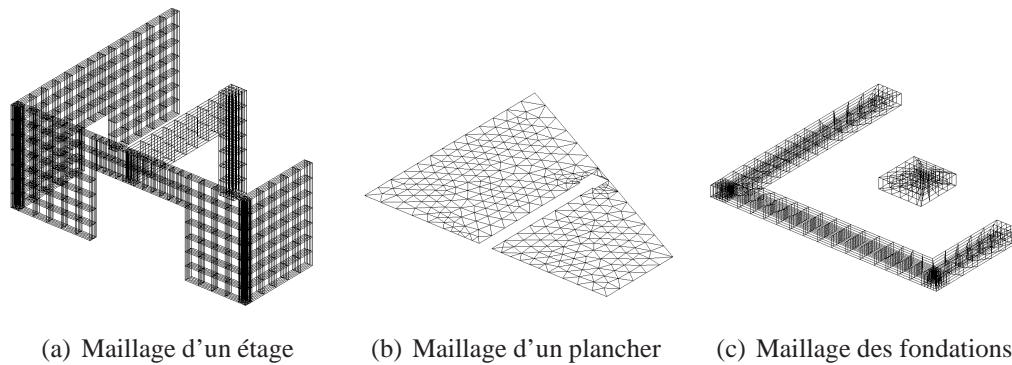


FIGURE 3.25: Maillage des différents éléments de la maquette SMART

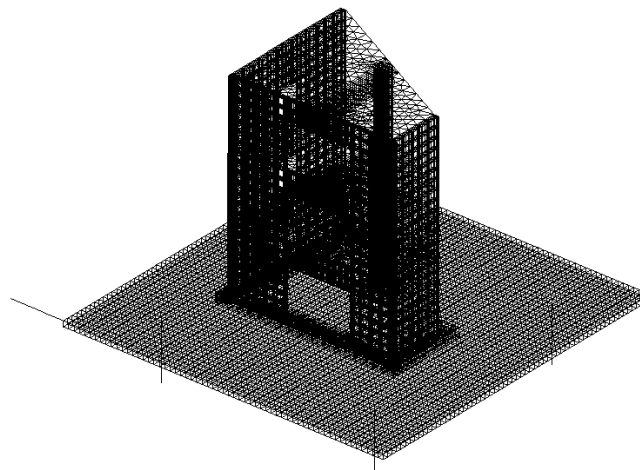


FIGURE 3.26: Maillage global de la maquette SMART avec modélisation de la table

6.3.1 Analyse modale

L'analyse modale est réalisée en supposant le pied de la structure encastree. Les résultats de l'analyse sont résumés dans le tableau TAB.3.2. Ce dernier expose la valeur de la fréquence (Hz) et de la période (s) des dix premiers modes propres. Les quatre premiers modes propres sont illustrés sur la figure FIG.3.27. On s'aperçoit que les différents modes propres sont complexes : le mode 1 présente une combinaison d'un mode de flexion de premier ordre et de torsion de premier ordre. Le mode 2 est similaire, avec toutefois des modes différents et une fréquence plus élevée. Dans le mode 3, on observe le mouvement vertical des planchers. Le mode 4, quant à lui, est la combinaison d'un mode vertical des planchers avec un mode de torsion. Cette première étude modale réalisée à l'aveugle montre la complexité de la structure étudiée et des effets tridimensionnels dus à l'excentrement du centre de torsion par rapport au centre de gravité.

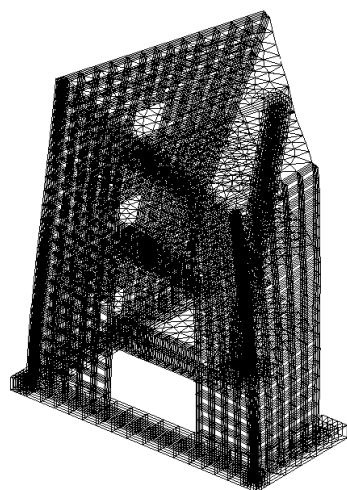
Ces modes propres peuvent être, a posteriori, comparés aux mesures expérimentales,

tableau TAB.3.3. On s'aperçoit d'une erreur importante et croissante lorsque les modes augmentent.

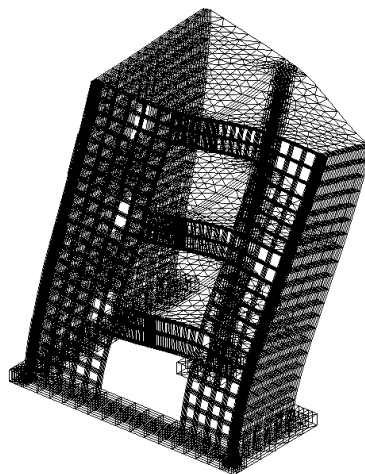
Toutefois, les modes propres expérimentaux correspondent à la réponse à un bruit blanc de l'ensemble maquette, table sismique et vérins. L'étude de cet ensemble est réalisée ci dessous.

Mode	Fréquence en Hz	Période en s
1	9.4459	0.10587
2	16.547	0.06043
3	31.015	0.03224
4	32.685	0.03060
5	33.132	0.03018
6	34.816	0.02872
7	36.146	0.02767
8	36.974	0.02705
9	39.282	0.02546
10	40.169	0.02489

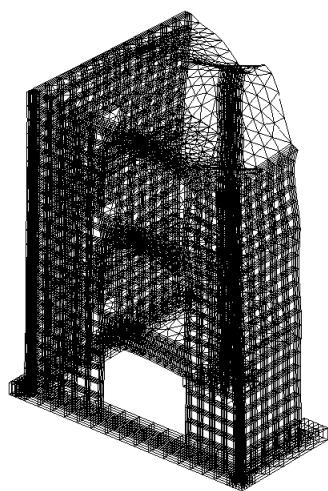
TABLE 3.2: Modes propres numériques de la maquette SMART - Analyse sans recalage



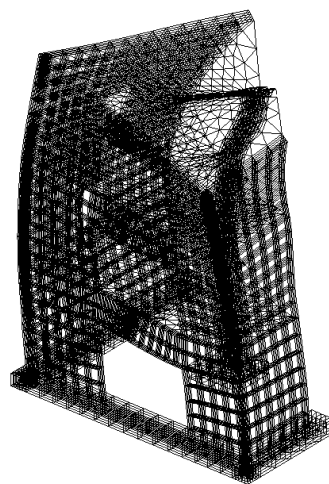
(a) Mode 1



(b) Mode 2



(c) Mode 3



(d) Mode 4

FIGURE 3.27: Premiers modes propres de la maquette SMART - Analyse sans recalage

6.3.2 Analyse temporelle

La seconde analyse consiste en une étude de la réponse temporelle de la structure soumise à une série de séisme d'amplitudes variables. Deux différents séismes sont utilisés : un artificiel et un enregistré (San Fernando 1976) (FIG.3.28 et FIG.3.29). Les amplitudes des séismes évoluent de 0.05 à 1g.

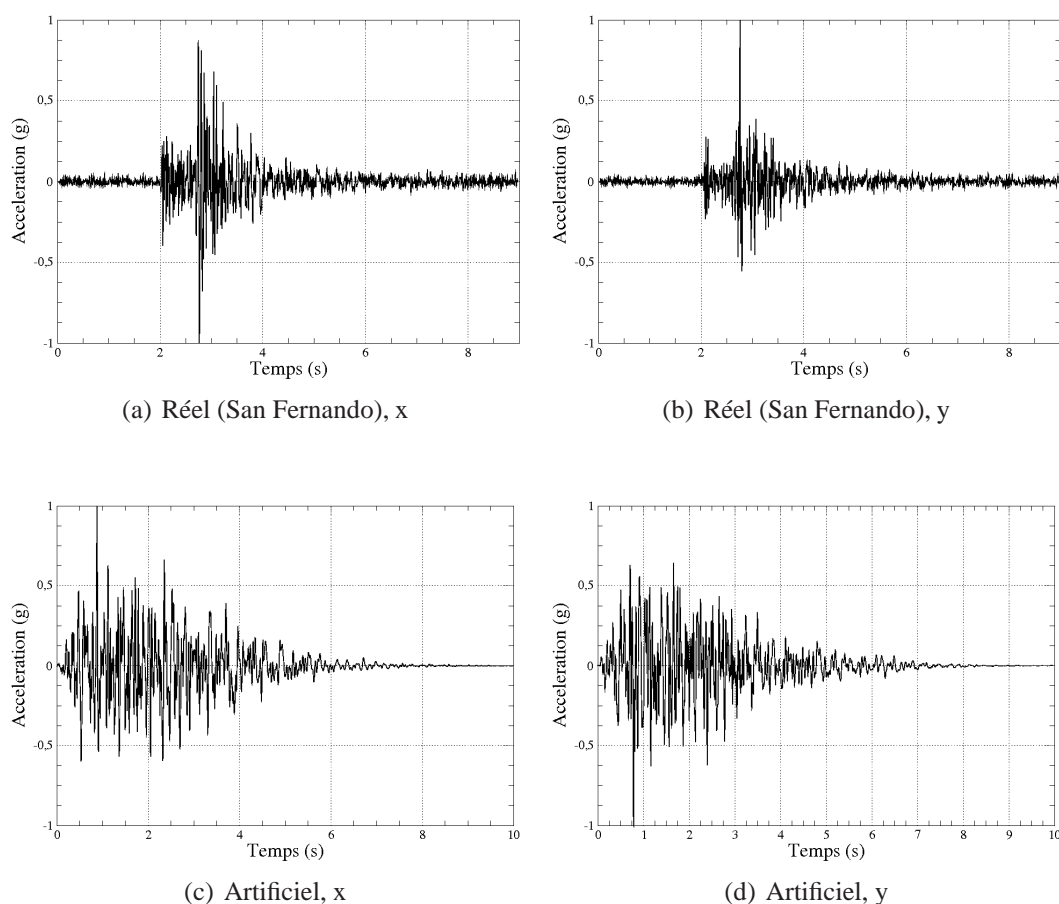
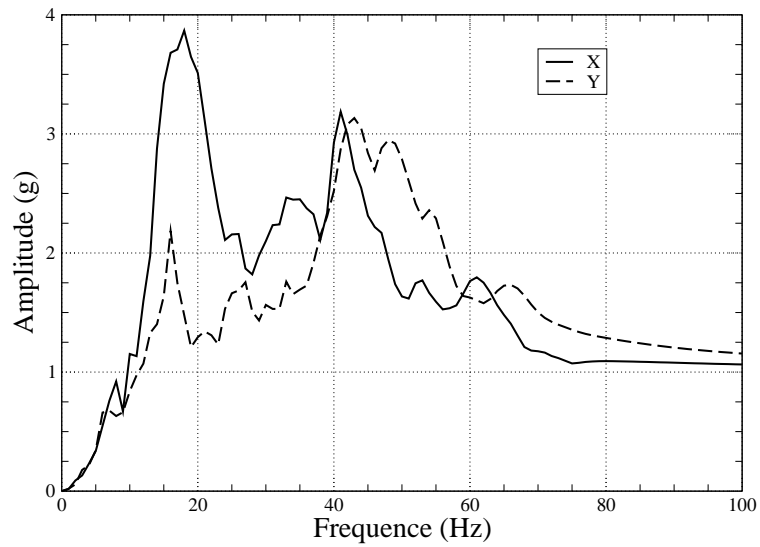


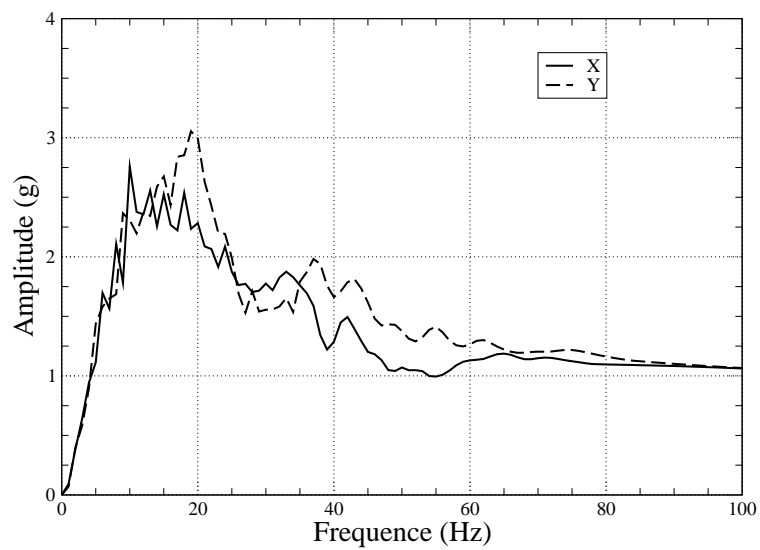
FIGURE 3.28: Accélérogrammes utilisés pour les analyses temporelles - Benchmark SMART

Les deux signaux utilisés possèdent des contenus fréquentiels différents. Le séisme réel présente deux pics d'amplitude sur ses deux composantes, mais leurs fréquences sont supérieures aux premières valeurs propres de la structure. Le séisme artificiel est conçu pour exciter les premières valeurs propres de la maquette.

L'étude ci-dessous se concentre sur les niveaux de séismes 0.2g, 0.4g et 0.8g et les points B et D du troisième niveau de la structure (FIG.3.30). Les points analysés sont diamétralement opposés. Les spectres des réponses numériques et expérimentales sont comparés (FIG.3.31 à FIG.3.33). En effet, à ce stade de l'étude on ne connaît que le signal de commande envoyé au vérin de la table sismique. Même si l'électronique de commande du vérin contient des algorithmes correctifs, la structure est réellement soumise à des ac-



(a) Réel (San Fernando)



(b) Artificiel

FIGURE 3.29: Contenu fréquentiel des accélérogrammes utilisés pour les analyses temporelles - Benchmark SMART

céléérations différentes. C'est pourquoi nous comparons ici que le contenu fréquentiel des

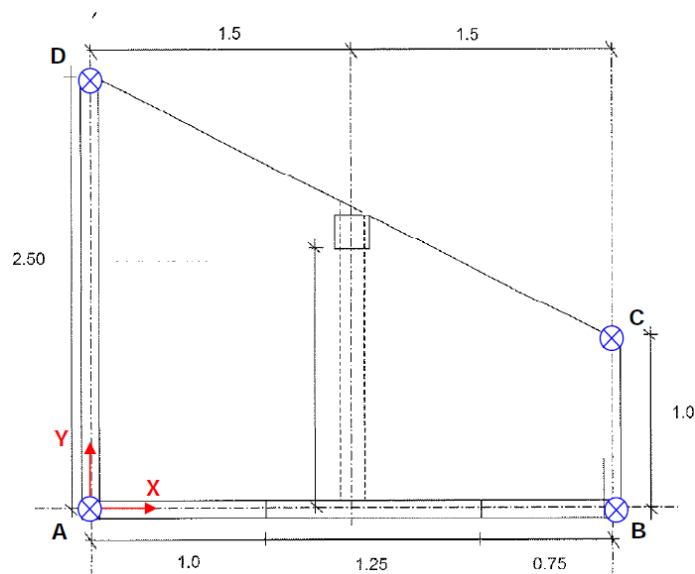


FIGURE 3.30: Localisation des points d'intérêt - Plancher de l'étage 3

réponses. Nous n'effectuons aucune comparaison temporelle qui ne permette aucune conclusion. Il est utile de rappeler que pour ces analyses, les fréquences propres expérimentales de la structures sont encore inconnues. La forte dissymétrie de la structure induit un contenu fréquentiel différent entre les réponses mesurées au points B et D. Toutefois, les mesures expérimentales montrent la présence de deux pics distincts de fréquences inférieures à 20 Hz pour les différents chargements. Le modèle a quelques difficultés à capter ces deux pics. On les aperçoit essentiellement pour le point B aux faibles chargements. De plus, on remarque un décalage de fréquence entre le pic principal mesuré et celui calculé. Ceci confirme la surestimation de la raideur de la structure avec la modélisation adoptée. A quelques exceptions, le spectre calculé possède le même ordre de grandeur que celui mesuré. Enfin, l'élargissement du pic principal dû à l'endommagement de la structure est correctement obtenu.

Pour analyser la détérioration de la structure, la carte d'endommagement en fin de simulation est tracée pour les trois niveaux de séisme étudiés précédemment (FIG.3.34).

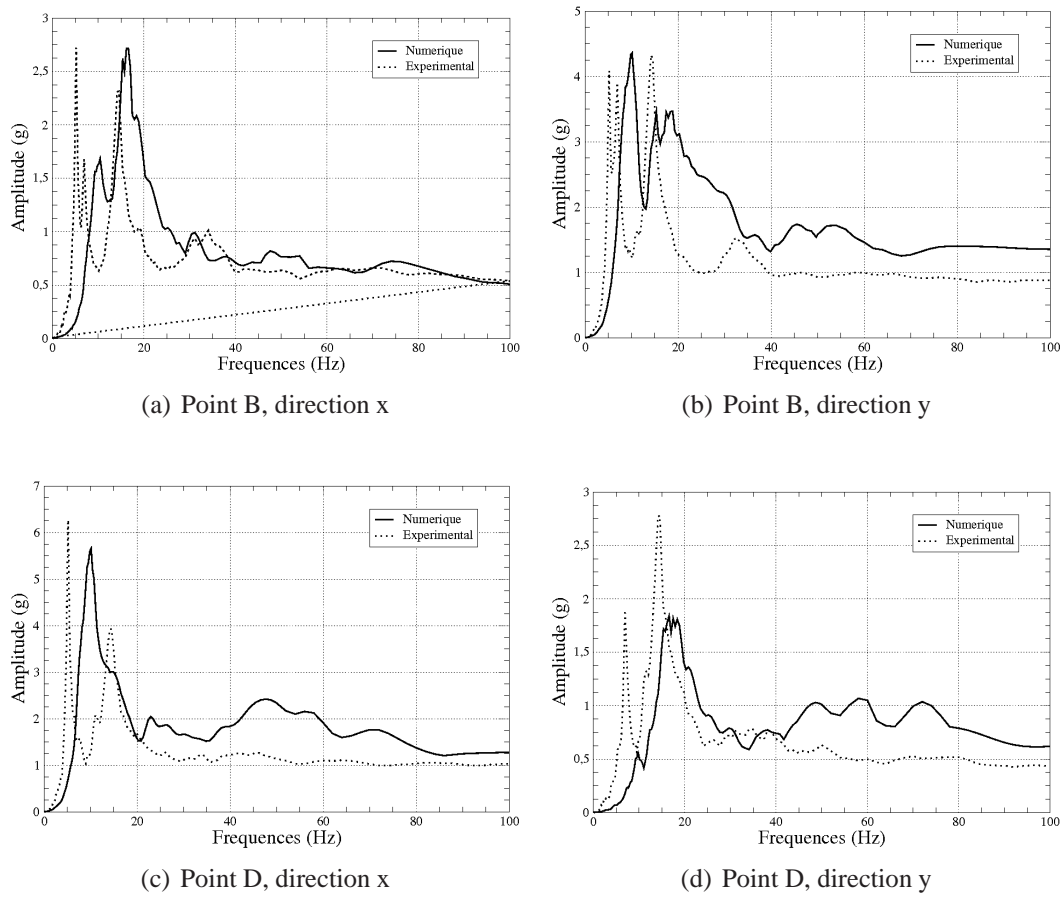


FIGURE 3.31: Contenu fréquentiel des réponses expérimentales et numériques : PGA = 0.2 g

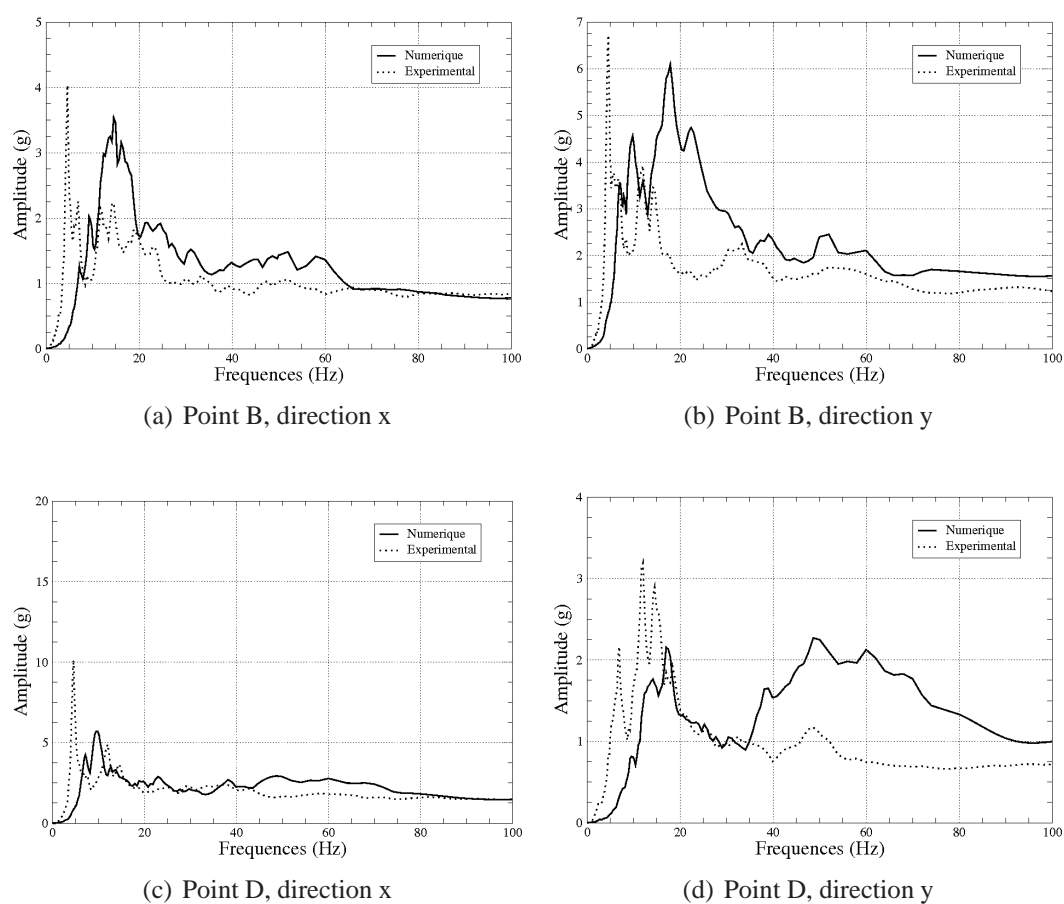


FIGURE 3.32: Contenu fréquentiel des réponses expérimentales et numériques : PGA = 0.4 g

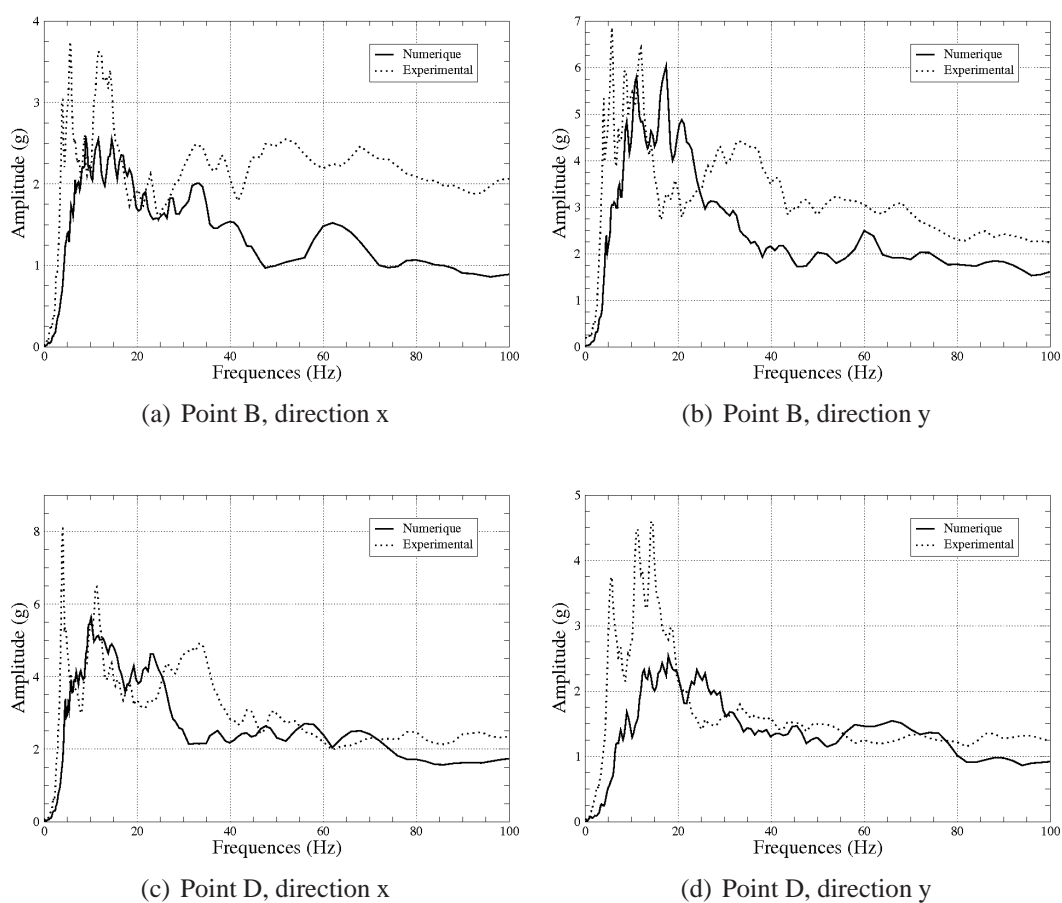


FIGURE 3.33: Contenu fréquentiel des réponses expérimentales et numériques : PGA = 0.8 g

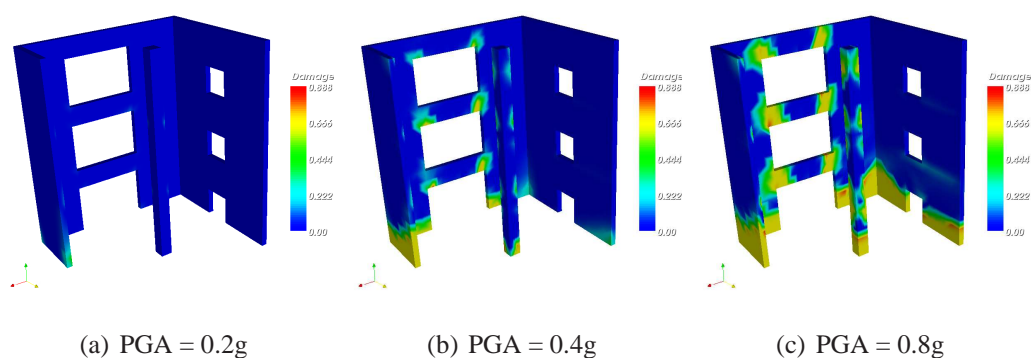


FIGURE 3.34: Carte d'endommagement de la maquette SMART pour les trois niveaux de séisme

On s'aperçoit ainsi que l'endommagement débute bien par le pied de la structure (voiles et poteau), et ce même à faible niveau d'excitation. Ensuite, l'endommagement se crée selon des lignes à 45 degré au-dessus des réservations situées sur les voiles. Il faut noter qu'aucun limiteur de localisation n'a été utilisé. La taille des éléments a été fixée à 20 cm.

6.4 Phase 2 : Recalage des modes propres

6.4.1 Modélisation de la table sismique

Pour raffiner le modèle et corriger l'écart entre les valeurs propres numériques et expérimentales, on modélise maintenant la table et les vérins. La table est modélisée par une plaque élastique infiniment rigide. Les fondations de la maquette SMART sont encastrées sur la table. La liaison est considérée comme parfaite. Les vérins sont modélisés par de simples ressorts. Les 4 vérins verticaux sont placés aux endroits exacts, par contre les vérins horizontaux sont modélisés par un seul ressort de rigidité supérieure. La modélisation de la table et des vérins permet d'obtenir des fréquences propres beaucoup plus proches de celles expérimentales tableau TAB.3.3. Toutefois, cette modélisation ne tient

Mode	Sans table (Hz)	Avec table (Hz)	Exp (Hz)
1	9.4459	7.2754	6.10
2	16.547	7.49971	7.96
3	31.015	16.649	15
4	32.685	30.123	

TABLE 3.3: Modes propres corrigés et expérimentals de la maquette SMART

pas encore en compte la valeur réelle des paramètres matériaux mesurés sur les éprouvettes réalisées lors de la fabrication de la maquette, ce qui peut expliquer les différences. La suite de l'étude consiste donc à identifier les paramètres "matériau" grâce aux essais réalisés sur les éprouvettes en béton. Ainsi, la modélisation de la table, l'identification des paramètres et la connaissance des accélérations réelles au pied de la maquette vont nous permettre d'effectuer une modélisation beaucoup plus précise. Cependant les résultats ne peuvent être présentés ici car cette étude fait l'objet d'un stage à venir.

6.5 Conclusion

Cette étude d'un cas concret permet de montrer dans un premier temps que l'on peut utiliser un modèle d'endommagement anisotrope pour les analyses éléments finis 3D de structures soumises à des séismes. Elle permet aussi de confronter le modèle développé à des mesures expérimentales. Malgré la modélisation simpliste de la structure réellement testée (absence de la table et des vérins dans la modélisation temporelle, utilisation des accélérations théoriques et non réelles), le modèle arrive à prévoir la réponse de la structure

de manière satisfaisante. Toutefois il aurait été intéressant de réaliser l'analyse temporelle avec la modélisation complète et les signaux réellement subis par la structure.

7 Conclusion et perspectives

Ce chapitre explique le développement de deux versions du modèle d'endommagement anisotrope. En effet, la version initiale possédait déjà plusieurs caractéristiques essentielles pour la modélisation du béton sous conditions extrêmes : adoucissement, dégradation de la raideur apparente (endommagement), anisotropie induite, dissymétrie de comportement en traction et compression. De plus le cadre thermodynamique strict dans lequel est développé le modèle évite toute dérive non physique (comme une dissipation négative en chargement non proportionnel). Toutefois, la version initiale ne permet pas l'analyse sous contraintes alternées : le matériau est consolidé et présente des contraintes pics élevées.

La première évolution utilise le concept d'endommagement actif pour tenir compte de l'état de chargement du matériau dans le critère d'évolution de l'endommagement. Cette modification de la loi de consolidation permet l'analyse de chargements alternés. Toutefois, ce modèle ne tient pas compte de l'apparition de déformations permanentes pour des états d'endommagement élevés.

Chapitre 4

Modèle d'endommagement anisotrope avec déformations permanentes

Le chapitre précédent montre la capacité du modèle à simuler l'endommagement d'une structure massive en béton armé soumis à un chargement complexe multidirectionnel (séisme). En effet le modèle prend en compte les principales caractéristiques du matériau béton : adoucissement, dissymétrie du comportement, anisotropie induite, effet unilatéral. Mais lors de chargements extrêmes, le béton présente aussi des déformations permanentes lors des décharges. Ces déformations résiduelles ont des conséquences non négligeables et doivent être prises en compte pour une simulation fine du comportement du matériau. Je vais donc m'intéresser ici à étendre le modèle d'endommagement anisotrope afin de modéliser les déformations permanentes. Deux possibilités sont envisagées. La première solution tente de piloter l'évolution des déformations permanentes directement par l'état d'endommagement du matériau. Si cette solution paraît élégante car elle évite d'ajouter des variables internes supplémentaires, elle montre rapidement ses limites pour des chargements complexes. La deuxième possibilité propose le couplage entre un modèle de plasticité et le modèle d'endommagement. Cette dernière solution nous permet la simulation de chargements complexes de type sismique.

Sommaire

1	Anélasticité induite par l'endommagement	111
1.1	Identification des fonctions d'anélasticité : g_D et g_H	112
1.2	Comportement au point de Gauss	116
1.3	Positivité de la dissipation	116
2	Modèle couplé plasticité-endommagement anisotrope pour chargements cycliques	120
2.1	Potentiel de Gibbs du modèle couplé	120
2.2	Fonction critère et fonction de consolidation	120
2.3	Plasticité : pseudo-potentiel et loi d'évolution	121
2.4	Endommagement : pseudo-potentiel et loi d'évolution	122
2.5	Positivité de la dissipation	122
2.6	Identification des paramètres	122
2.7	Variante non linéaire de la fonction de consolidation	128
2.8	Domaine élastique du modèle couplé	131
3	Conclusion et perspectives	131

1 Anélasticité induite par l'endommagement

La partie adoucissante du comportement reste modélisée par le modèle présenté dans le chapitre précédent. Le potentiel de Gibbs est complété par un second potentiel dit anélastique ψ_{an}^* [HK88] [LaB91] [HD98] :

$$\psi^* (\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}}) = \underbrace{\psi_{el}^* (\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}})}_{\text{Modele precedant}} + \psi_{an}^* (\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}}) \quad (4.1)$$

Aucune variable interne n'est ajoutée. Le potentiel anélastique est exprimé linéairement en fonction des contraintes. Dans la même logique que la partie endommageable du modèle, le potentiel est divisé en partie déviatorique et hydrostatique. Deux fonctions linéaires sont donc définies en fonction des contraintes déviatoriques et de la trace des contraintes respectivement [Des04].

$$\rho \psi_{an}^* = g_D (\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{\sigma}}^D : \underline{\underline{D}} + g_H (\underline{\underline{D}}) \text{Tr} (\underline{\underline{\sigma}}) \quad (4.2)$$

avec deux fonctions d'anélasticité g_D et g_H dépendant de l'état d'endommagement du matériau. Elles seront à identifier expérimentalement. En dérivant la nouvelle expression du potentiel de Gibbs du modèle, on obtient l'expression des déformations totales qui se partitionnent en déformations élastiques et déformations anélastiques :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \rho \psi^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underbrace{\frac{\partial \rho \psi_{el}^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}_{el}} + \underbrace{\frac{\partial \rho \psi_{an}^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}_{an}} \quad (4.3)$$

La partie élastique des déformations correspond aux déformations totales du modèle précédent. Les déformations anélastiques dépendent, comme souhaité ici, uniquement de l'endommagement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{an} = \rho \frac{\partial \psi_{an}^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = g_D (\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{D}}^D + g_H (\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{Id}} \quad (4.4)$$

Chaque fonction d'anélasticité correspond respectivement aux déformations permanentes déviatoriques et hydrostatiques. Le fait de ne pas introduire de nouvelles variables internes engendre aucune nouvelle équation (fonction seuil, loi d'évolution...). Les déformations permanentes sont donc prises en compte de façon simple. Toutefois le potentiel du modèle précédent ne modélise plus les déformations totales mais uniquement les déformations élastiques. Il faut donc modifier les équations en remplaçant les déformations totales par les déformations élastiques dans la fonction seuil.

Le modèle incluant les déformations permanentes peut se résumer par les équations suivantes (incluant l'endommagement actif) :

$$\begin{aligned}
\rho\psi^*(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}}) &= \rho\psi_{el}^*(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}}) + \rho\psi_{an}^*(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}}) \\
\rho\psi_{an}^* &= g_D(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{\sigma}}^D : \underline{\underline{D}} + g_H(\underline{\underline{D}}) \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \\
\underline{\underline{\epsilon}} &= \underline{\underline{\epsilon}}_{el} + \underline{\underline{\epsilon}}_{an} \\
\underline{\underline{\epsilon}}_{el} &= \frac{1+\nu}{E} [\underline{\underline{H}} \underline{\underline{\sigma}}^D \underline{\underline{H}}]^D + \frac{1-2\nu}{3E} \left[\frac{\langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_+}{1 - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{D}})} + \langle \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_+ \right] \underline{\underline{Id}} \\
\underline{\underline{\epsilon}}_{an} &= g_D(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{D}}^D + g_H(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{Id}} \\
f &= \hat{\epsilon}_{el} - \kappa(d_\epsilon) \quad d_\epsilon = \frac{\underline{\underline{D}} : \langle \underline{\underline{\epsilon}}_{el} \rangle_+}{\max \epsilon_I^{el}} \\
F &= \underline{\underline{Y}} : \langle \underline{\underline{\epsilon}}_{el} \rangle_+ \rightarrow \underline{\underline{D}} = \dot{\lambda} \langle \underline{\underline{\epsilon}}_{el} \rangle_+ \\
\dot{\lambda} \text{ tel que } \dot{\lambda} f &= 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad f \leq 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

L'ajout des déformations rend les équations du modèle implicites. Le schéma numérique nécessitera donc une méthode itérative pour déterminer l'évolution des variables internes.

1.1 Identification des fonctions d'anélasticité : g_D et g_H

Les fonctions d'anélasticité sont identifiées à partir d'essais classiques de compressions cycliques sur éprouvettes. Il est toutefois nécessaire de mesurer les déformations transversales en plus des déformations longitudinales pour obtenir le tenseur complet des déformations. Ainsi, on a choisi d'analyser les essais de Ramtani (FIG.4.1, [Ram90]). La connaissance des déformations longitudinales ϵ_{11}^{exp} et transversales $\epsilon_{22}^{exp} = \epsilon_{33}^{exp}$ per-

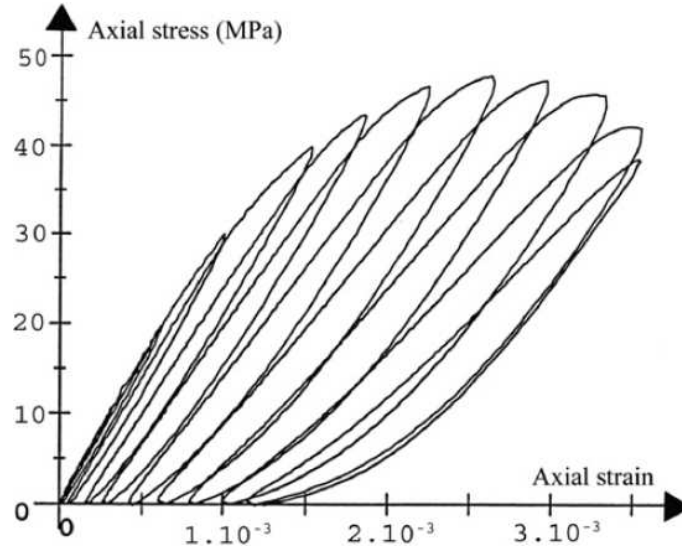


FIGURE 4.1: Essai de compression cyclique sur une éprouvette de béton [Ram90]

met de reconstruire le tenseur complet. Pour identifier les fonctions d'anélasticité, il faut

connaître l'évolution des déformations permanentes en fonction de l'évolution de l'endommagement. En effet, l'écriture uniaxiale des équations du modèle (EQ.(4.3), avec $D = \text{diag}[D_1, D_2, D_3 = D_2]$ diagonal) permet d'obtenir le tenseur des déformations permanentes :

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^{an} &= \frac{2}{3} g_D(D_1, D_2) (D_1 - D_2) + g_H(D_1, D_2) \\ \epsilon_{22}^{an} = \epsilon_{33}^{an} &= \epsilon_{33}^p = \frac{-1}{3} g_D(D_1, D_2) (D_1 - D_2) + g_H(D_1, D_2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le chargement expérimental est uniquement en compression (selon 1), donc $D_1 = 0$. Les équations EQ.(4.6) deviennent :

$$\begin{aligned} \epsilon_{an\ 11} &= \frac{-2}{3} g_D(D_2) D_2 + g_H(D_2) \\ \epsilon_{an\ 22} &= \epsilon_{33}^p = \frac{1}{3} g_D(D_2) D_2 + g_H(D_2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Toutefois pour faciliter l'identification et tirer pleinement partie de l'écriture du modèle, nous allons travailler séparément sur la partie déviatorique et la partie hydrostatique.

$$\epsilon_{an}^H = \frac{\text{Tr}(\epsilon_{an})}{3} = g_H(D_2) \quad (4.8)$$

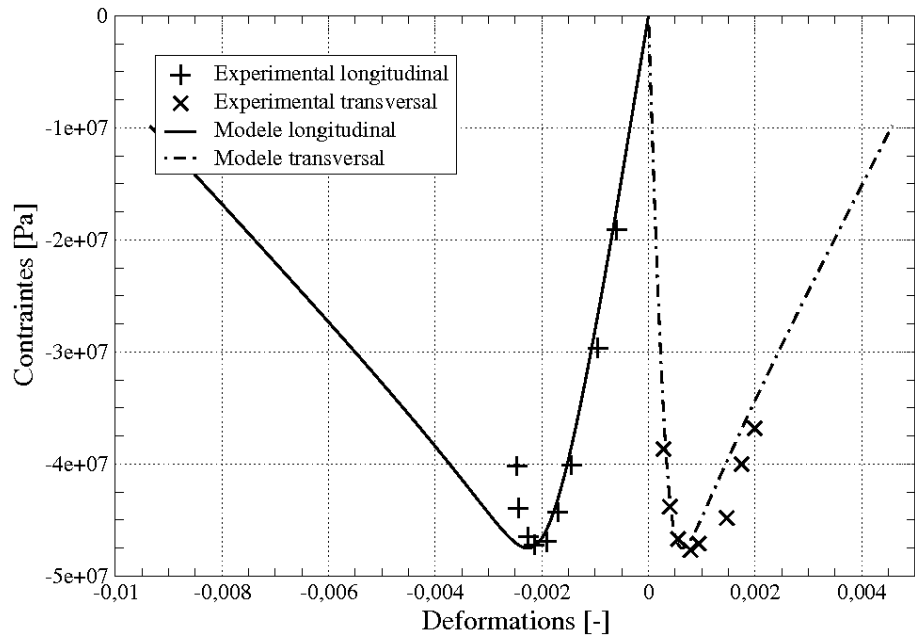
$$\epsilon_{an}^D = g_D(D_2) D^D \quad (4.9)$$

$$\epsilon_{an\ 11}^D = -g_D(D_2) \frac{2D_2}{3} \quad (4.10)$$

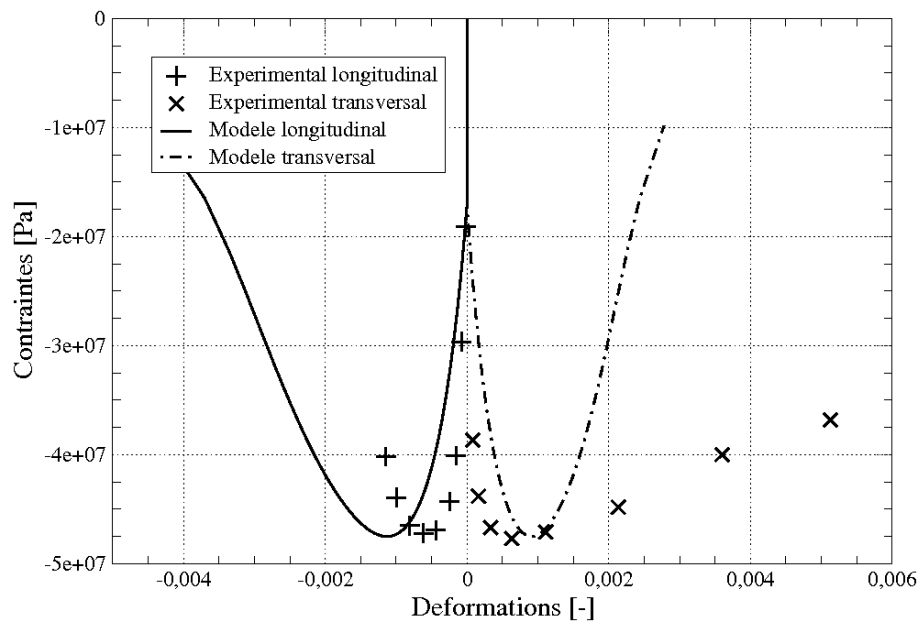
$$\epsilon_{an\ 22}^D = \epsilon_{an\ 33}^D = \frac{-1}{2} \epsilon_{an\ 11}^D \quad (4.11)$$

Ainsi il nous faut tracer les courbes expérimentales $\text{Tr}(\epsilon_{an}) - \text{Tr}(D)$ et $(\epsilon_{an}^D)_{11} - D_2$ pour pouvoir identifier les deux fonctions d'anélasticité.

Les points utiles à l'identification sont les points de chargements où les déformations et l'endommagement sont connus, c'est à dire à chaque décharge. Ainsi, pour une identification fine de ces fonctions, il est nécessaire d'effectuer un maximum de décharges avant rupture. Pour mesurer les déformations permanentes, il suffit d'extrapoler linéairement les décharges jusqu'à la contrainte nulle. Elles sont donc mesurées presque directement. Cette première étape permet de séparer les déformations totales en déformations élastiques d'un côté et permanentes de l'autre (FIG.4.2). L'évolution des déformations élastiques sert à identifier les paramètres de la partie $\rho\psi_e^*$ du modèle (E, ν, A, a et κ_0).



(a) Déformations élastiques



(b) Déformations permanentes

FIGURE 4.2: Confrontation du modèle d'endommagement aux mesures expérimentales

L'endommagement ne peut être mesuré directement. En effet, la pente mesurée lors d'une décharge donne la raideur apparente \tilde{E} , mais contrairement à un modèle d'endommagement isotrope : $\tilde{E} \neq (1 - D_2)E$. La réduction uniaxiale de la partie élasto-adoucissante des équations du modèle fournit la relation entre la raideur apparente et l'endommagement :

$$\tilde{E}_{11} = \frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{e\ 11}} = \frac{\epsilon_{e\ 11}}{\frac{1+\nu}{9} \left(2 + \frac{1}{1-D_2} \right) + \frac{1-2\nu}{3}} \quad (4.12)$$

Soit, après inversion, l'évolution de l'endommagement dans les directions orthogonales au chargement en fonction de la raideur apparente :

$$D_2 = 1 - \frac{2}{\frac{9}{1+\nu} \left(\frac{E}{\tilde{E}} - \frac{1-2\nu}{3} \right) - 4} \quad (4.13)$$

Ainsi, il est possible de connaître l'évolution des fonctions d'anélasticité g_D et g_H en fonction de l'endommagement D_2 .

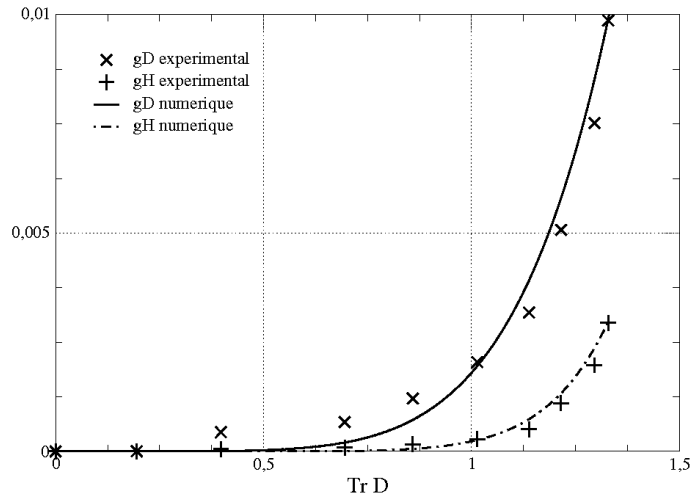


FIGURE 4.3: Fonctions d'anélasticité non linéaires identifiées sur les mesures expérimentales

Les points obtenus expérimentalement peuvent être modélisés par des lois non linéaires de la forme suivante :

$$g_D(\text{Tr}(\underline{\underline{D}})) = K_D (\text{Tr}(\underline{\underline{D}}))^{k_D} \quad \text{et} \quad g_H(\text{Tr}(\underline{\underline{D}})) = K_H (\text{Tr}(\underline{\underline{D}}))^{k_H} \quad (4.14)$$

Les paramètres identifiés sur cet essai sont résumés dans le tableau TAB.4.1.

Toutefois, pour des raisons de simplicité et pour diminuer le nombre de paramètres à identifier, une modélisation linéaire à seuil peut être proposée. En effet, pour un endommagement de trace inférieure à 1, les fonctions d'anélasticité restent faibles. Ainsi le seuil sera choisi à 1. Pour un endommagement inférieur à 1, les déformations permanentes seront donc supposées nulles, ensuite les fonctions d'anélasticité seront linéaires

K_H	0.065
k_H	6
K_D	1.4
k_D	4

TABLE 4.1: Paramètres identifiés pour l'évolution non linéaire des déformations permanentes

induisant donc une évolution des déformations mais elles impliquent une variation non linéaire pour les déformations déviatoriques. Les fonctions d'anélasticité linéaires s'expriment donc ainsi :

$$g_D(\text{Tr}(\underline{\underline{D}})) = K_D \cdot \langle \text{Tr}(\underline{\underline{D}}) - 1 \rangle_+ \quad \text{et} \quad g_H(\text{Tr}(\underline{\underline{D}})) = K_H \cdot \langle \text{Tr}(\underline{\underline{D}}) - 1 \rangle_+ \quad (4.15)$$

Les paramètres identifiés sont résumés dans le tableau TAB.4.2.

K_H	0.007
K_D	0.025

TABLE 4.2: Paramètres identifiés pour l'évolution linéaire des déformations permanentes

Aucun essai expérimental ne permet de connaître l'évolution des déformations permanentes en traction de manière précise. Pour le choix de modélisation linéaire, les déformations permanentes n'évoluent que pour un endommagement supérieur à un. Ainsi, les déformations permanentes sont ignorées en traction, la méconnaissance de leurs évolutions réelles est donc sans conséquence sur le modèle. Toutefois, pour le choix de modélisation non linéaires, les déformations permanentes évoluent pour des chargements de traction. Les fonctions d'anélasticité étant indépendante du chargement, on supposera donc que l'évolution des déformations permanentes en compression pour un endommagement de trace inférieure à 1 est représentatif de l'évolution des déformations permanentes en traction et dans les autres types de chargement.

1.2 Comportement au point de Gauss

Le modèle est valable pour des chargements monotones avec décharges (voir ci-dessous). Ainsi, le comportement du modèle est testé en compression avec décharges pour modéliser l'essai de Ramtani. Pour une meilleure représentation, les fonctions d'anélasticité sont choisies non linéaires. Le comportement du modèle donne une très bonne approximation des résultats expérimentaux que ce soit dans la direction longitudinale ou transversale.

1.3 Positivité de la dissipation

La modification du modèle exige la vérification de la positivité de la dissipation pour valider le cadre thermodynamique du modèle avec déformations permanentes. Le poten-

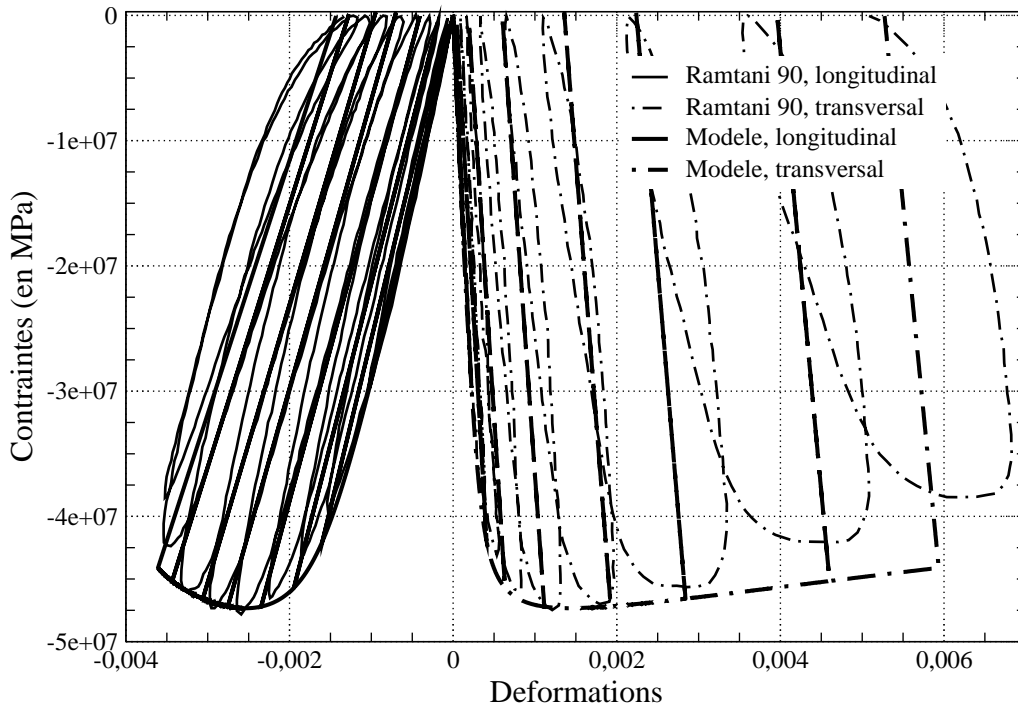


FIGURE 4.4: Comparaison essai/modèle en compression cyclique

tentiel de Gibbs s'exprime :

$$\rho\psi^*(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}}) = \rho\psi_e^*(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}}) + \rho\psi_{an}^*(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}}) \quad (4.16)$$

On rappelle les lois dérivées :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} &= \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \\ \underline{\underline{Y}} &= \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \underline{\underline{D}}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

La dissipation s'exprime par la contraction du taux de restitution d'énergie avec l'évolution de l'endommagement. L'expression de la dissipation peut être divisée en deux parties dont la première correspond à la dissipation du modèle d'endommagement initial (sans déformations permanentes) $(\underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{\dot{D}}})_e$. Le deuxième terme correspond donc à la dissipation due aux déformations permanentes $(\underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{\dot{D}}})_{an}$.

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{\dot{D}}} = (\underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{\dot{D}}})_e + (\underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{\dot{D}}})_{an} \quad (4.18)$$

La positivité de la première partie $(\underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{\dot{D}}})_e > 0$ a déjà été démontré [Des07]. On se concentre donc sur $(\underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{\dot{D}}})_{an}$. Ce choix de diviser le potentiel permet de simplifier le problème, mais il n'est pas nécessaire. En effet, si la positivité de cette partie de la dissipation

n'est pas vérifiée, il faudra considérer l'ensemble pour vérifier la positivité.

$$\begin{aligned}
 d(\rho \psi_{an}^*) &= \rho d(\psi_{an}^*) \\
 &= (g_D(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{D}}^D + g_H(\underline{\underline{D}}) Id) : d(\underline{\underline{\sigma}}) \\
 &\quad + \underbrace{g_D(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{\sigma}}^D : d(\underline{\underline{D}}) + \underline{\underline{\sigma}}^D : \underline{\underline{D}} d(g_D(\underline{\underline{D}})) + \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) d(g_H(\underline{\underline{D}}))}_{(\underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{\dot{D}}})_{an} dt} \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Ainsi il faut démontrer la positivité de l'expression suivante :

$$(\underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{\dot{D}}})_{an} dt = g_D(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{\sigma}}^D : d(\underline{\underline{D}}) + \underline{\underline{\sigma}}^D : \underline{\underline{D}} d(g_D(\underline{\underline{D}})) + \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) d(g_H(\underline{\underline{D}})) \quad (4.20)$$

Vu la complexité de l'expression, nous n'allons vérifier la positivité que dans des cas simples uniaxiaux en considérant les fonctions anélastiques linéaires à seuil. Différents cas seront étudiés : traction monotone, compression monotone, traction/compression, puis compression/traction.

En traction simple, le seuil des fonction d'anélasticité étant choisi à 1, les déformations permanentes seront nulles ($D_1 \leq D_c < 1$). Ainsi en traction :

$$\begin{aligned}
 g_D(\underline{\underline{D}}) &= 0 \\
 d(g_D(\underline{\underline{D}})) &= 0 \\
 d(g_H(\underline{\underline{D}})) &= 0
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

La dissipation due aux déformations permanentes reste donc nulle.

Si le cas de compression est considéré maintenant, les déformations permanentes ne croissent que lorsque la trace de l'endommagement est supérieure à 1, soit pour un cas de compression simple : $D_2 = D_3 > 0.5$. Ainsi la dissipation due aux déformations permanentes s'exprime :

$$(\underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{\dot{D}}})_{an} dt = \underbrace{\sigma \left(\frac{-2}{3} (2 D_2 - 1) K_D d(D_2) - \frac{4}{3} K_D D_2 d(D_2) + 2 K_H d(D_2) \right)}_{<0} \quad (4.22)$$

Qu'il est possible de simplifier en :

$$K_D (4 D_2 - 1) > 3 K_H \quad (4.23)$$

On obtient donc une condition entre les deux paramètres d'anélasticité selon la valeur de l'endommagement. Or ce dernier est compris entre 0.5 (pour activer les déformations permanentes) et la valeur critique D_c : $0.5 < D_2 \leq D_c < 1$ donc on obtient la condition entre les deux paramètres d'anélasticité : $K_H < \frac{K_D}{3}$. Cette condition assure la positivité de la dissipation pour un chargement de compression. La positivité de la dissipation dans un cas particulier ne suffit pas pour valider le modèle.

Des cas de chargements alternés sont maintenant analysés. Dans un premier temps, un cas de compression/traction est considéré, l'état d'endommagement est de trace supérieure à 1 : $\text{Tr}(\underline{\underline{D}}) = D_1 + 2D_2 > 1$. La dissipation peut s'exprimer :

$$(\underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{\dot{D}}})_{an} dt = \sigma d(D_1) \underbrace{\frac{2}{3} K_D (2 D_1 + D_2 - 1) + K_H}_{>0} \quad (4.24)$$

Ainsi, on en déduit la condition de positivité à vérifier :

$$\frac{2}{3} K_D (2 D_1 + D_2 - 1) + K_H > 0 \rightarrow (2 D_1 + D_2 - 1) > -\frac{3K_H}{2K_D} \quad (4.25)$$

Pour ce chargement, l'état d'endommagement est compris entre $0.5 < 2 D_1 + D_2 - 1 < 2$. La positivité de la dissipation est donc assurée si la condition suivante est vérifiée :

$$K_H > \frac{4}{3} K_D \quad (4.26)$$

Le même raisonnement pour un chargement de traction/compression permet d'obtenir une autre condition :

$$(\underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{\dot{D}}})_{an} = \sigma d(D_2) \underbrace{\frac{-2}{3} K_D (-D_1 + 4 D_2 - 1) + 2K_H}_{>0} \quad (4.27)$$

Soit

$$\frac{-2}{3} K_D (-D_1 + 4 D_2 - 1) + 2 K_H < 0 \quad (4.28)$$

$$(-D_1 + 4 D_2 - 1) > \frac{3K_H}{K_D} \quad (4.29)$$

or $-2 < -D_1 + 4 D_2 - 1$. Donc pour assurer la positivité de la dissipation on doit avoir :

$$K_H < \frac{-2}{3} K_D \quad (4.30)$$

or $K_H > 0$ et $K_D > 0$, ce qui ne permet pas de satisfaire à l' EQ.(4.30).

Les différents cas de chargements étudiés ci-dessus donnent des conditions entre les paramètres d'anélasticités pour assurer la positivité de la dissipation due aux déformations permanentes. Les conditions ne sont pas compatibles, la positivité de la dissipation ne peut être démontrée dans le cas général sans considérer l'ensemble de l'expression de la dissipation \mathcal{D} . Vu la complexité de l'expression, la démonstration complète semble très fastidieuse. Les applications de ce modèle ne sont donc validées que pour des chargements monotones (avec décharges).

2 Modèle couplé plasticité-endommagement anisotrope pour chargements cycliques

Le modèle d'endommagement anisotrope a montré ses limites pour la prise en compte des déformations permanentes pour des simulations sismiques. En effet, la positivité de la dissipation n'a pu être démontrée dans les cas cycliques. Il est donc nécessaire de développer un nouveau modèle. Pour modéliser les caractéristiques du comportement cyclique du matériau béton, le choix se tourne vers le couplage d'un modèle de plasticité et d'un modèle d'endommagement. Cette section présente donc le nouveau cadre thermodynamique du modèle couplé puis le comportement uniaxial du modèle sur un chargement cyclique.

2.1 Potentiel de Gibbs du modèle couplé

La partie élasto-endommageable du modèle anisotrope a convaincu dans la modélisation des caractères adoucissants, unilatéraux et anisotrope du matériau. Cette partie du potentiel est donc conservée. Comme précédemment, le potentiel de Gibbs du modèle initial est complété par un second potentiel qui cette fois-ci introduit une nouvelle variable interne : les déformations plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$.

$$\psi^* \left(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}} \right) = \underbrace{\psi_{el}^* \left(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}} \right)}_{\text{Modele initial}} + \psi_p^* \left(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_p \right) \quad (4.31)$$

Le potentiel de plasticité s'écrit simplement pour obtenir le partitionnement des déformations :

$$\psi_p^* \left(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_p \right) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_p \quad (4.32)$$

En effet, la dérivation du potentiel par la variable interne des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ permet de retrouver le partitionnement des déformations totales en déformations élastiques et déformations plastiques :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\partial \psi^* \left(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}} \right)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\partial \psi_{el}^* \left(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}} \right)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial \psi_p^* \left(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_p \right)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{\underline{\varepsilon}}_p \quad (4.33)$$

Cette écriture du modèle permet simplement de piloter les déformations permanentes par la dérivée d'un pseudo-potentiel (et normalité).

2.2 Fonction critère et fonction de consolidation

La fonction critère est choisie du type Drucker-Prager. Toutefois, étant couplée à un modèle d'endommagement, la fonction critère s'écrit en fonction des contraintes effectives $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$ au lieu des contraintes comme classiquement dans un modèle de Drucker-Prager.

$$\tilde{\sigma} = \left(\underline{\underline{H}} \underline{\underline{\sigma}}^D \underline{\underline{H}} \right)^D + \frac{1}{3} \left(\frac{\langle \text{Tr} \left(\underline{\underline{\sigma}} \right) \rangle_+}{1 - \eta D_H} + \langle \text{Tr} \left(\underline{\underline{\sigma}} \right) \rangle_- \right) \underline{\underline{Id}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{H}} = \left(\underline{\underline{Id}} - \underline{\underline{D}} \right)^{-1/2} \quad (4.34)$$

La fonction critère f s'exprime donc en fonction des contraintes effectives et d'une fonction de consolidation notée σ_s fonction de l'endommagement actif :

$$f = \tilde{\sigma}_{eq} + k_f \text{Tr}(\tilde{\sigma}) - \sigma_s(d_\varepsilon) \quad \text{avec} \quad \tilde{\sigma}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^D : \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}^D} \quad (4.35)$$

A propos de la fonction de consolidation, la loi linéaire du modèle initial est conservée pour sa simplicité et sa capacité à simuler le snapback observé sur les déformations élastiques (FIG.4.2) :

$$\sigma_s(d_\varepsilon) = \frac{d_\varepsilon}{A} + \sigma_{s0} \quad (4.36)$$

Il est évidemment nécessaire que la fonction de consolidation dépende de l'endommagement actif afin de prendre en compte les micro-fissures éventuellement refermées en chargement alterné (sans introduire d'écrouissage cinématique). La fonction de consolidation non-linéaire peut éventuellement être utilisée, son intérêt est étudié plus tard. La présence de l'endommagement actif d_ε rend la surface seuil non convexe mais les lois de plasticité dérivent du pseudo-potentiel F_p (voir ci-dessous) qui lui est convexe.

2.3 Plasticité : pseudo-potentiel et loi d'évolution

Pour gouverner la plasticité, un pseudo-potentiel plastique F_p est défini en ne conservant uniquement que les deux premiers termes de la fonction critère, mais en modifiant le paramètre de sensibilité hydrostatique k_f en le remplaçant par un nouveau paramètre "matériau" k_p (plasticité non associée, classique pour les géomatériaux) :

$$F_p = \tilde{\sigma}_{eq} + k_p \text{Tr}(\tilde{\sigma}) \quad (4.37)$$

L'évolution des déformations plastique dérive donc par normalité du pseudo-potentiel F_p :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\lambda}_p \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + k_p \frac{\partial \text{Tr}(\tilde{\sigma})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) \quad (4.38)$$

Cette écriture permet une nouvelle fois de décomposer les déformations plastiques en partie déviatorique et en partie hydrostatique. Mais contrairement au modèle sans plasticité, l'évolution des déformations permanentes est proportionnelle aux contraintes effectives et non plus à l'endommagement. Le développement de la dérivée précédente aboutie à l'expression de l'évolution des déformations permanentes :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p &= \dot{\lambda}_p \left(\left(\underline{\underline{H}} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p \underline{\underline{H}} \right)^D + k_p \left(\frac{\mathcal{H}(\text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}))}{1 - \eta D_H} - \mathcal{H}(-\text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}})) \right) \underline{\underline{Id}} \right) \\ \text{avec} \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p &= \dot{\lambda}_p \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{2}{3} \frac{(\underline{\underline{H}} \underline{\underline{\sigma}}^D \underline{\underline{H}})^D}{(\underline{\underline{H}} \underline{\underline{\sigma}}^D \underline{\underline{H}})_{eq}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

La loi pour le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}_p$ gouvernant les déformations plastiques peut être choisie arbitrairement du moment que la dissipation intrinsèque du modèle reste positive (modèle non standard). Le choix de cette fonction sera donc établie après mesures expérimentales.

2.4 Endommagement : pseudo-potentiel et loi d'évolution

Le pseudo-potentiel lié à l'endommagement est conservé identique à celui du modèle d'endommagement initial :

$$\begin{aligned} F_D &= F_D(\underline{Y}; \underline{\varepsilon}) = \underline{Y} : \langle \underline{\varepsilon} \rangle_+ \\ \underline{\dot{D}} &= \dot{\lambda}_D \frac{\partial F_D}{\partial \underline{Y}} = \dot{\lambda} \langle \underline{\varepsilon} \rangle_+ \end{aligned} \quad (4.40)$$

Le multiplicateur d'endommagement λ_D est quant à lui déterminé par la condition de consistance $f = 0$ et $\dot{f} = 0$.

2.5 Positivité de la dissipation

Le modèle couplé plasticité/endommagement est non-associé et non standard. Ses propriétés permettent de ne pas conserver la convexité des domaines élastiques, mais elle demande la vérification de la positivité de la dissipation intrinsèque. Cette dissipation s'exprime pour l'ensemble du modèle élasto-plastique comme étant :

$$\mathcal{D} = \underline{Y} : \underline{\dot{D}} + \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}_p = (\underline{Y} : \underline{\dot{D}})_e + \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}_p \quad (4.41)$$

Nous avons déjà vu précédemment que la positivité est vérifiée pour la première partie de la dissipation. Ce terme correspond à la dissipation du modèle initial sans plasticité (ni déformations permanentes). Nous allons donc nous intéresser à la seconde partie de la dissipation intrinsèque due à la plasticité :

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}_p = \underline{\sigma} : \left[\dot{\lambda}_p \left(\left(\underline{H} \dot{\underline{\varepsilon}}_p \underline{H} \right)^D + k_p \left(\frac{\mathcal{H}(\text{Tr}(\underline{\sigma}))}{1 - \eta D_H} - \mathcal{H}(-\text{Tr}(\underline{\sigma})) \right) \underline{Id} \right) \right] \quad (4.42)$$

Le calcul du terme de dissipation permet d'aboutir à l'expression suivante :

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}_p = \underbrace{\dot{\lambda}_p}_{\geq 0} \underbrace{\left(\tilde{\sigma}_{eq} + k_p \text{Tr}(\underline{\tilde{\sigma}}) \right)}_{\geq 0 \text{ si } k_p < k_f} \quad (4.43)$$

Ainsi la condition de positivité de la dissipation intrinsèque se réduit donc à une condition sur les paramètres matériau propre à la plasticité Drucker-Prager : k_p et k_f .

2.6 Identification des paramètres

L'identification des paramètres s'effectue à partir d'essais simples : essais de traction et de compression monotones pour les paramètres de la partie élasto-endommageable, et essais de compression cyclique pour la partie plasticité. Tous les essais étant uniaxiaux, il est intéressant et plus commode de travailler avec les équations réécrites en uniaxial du

modèle. Dans ces conditions d'uniaxialité, la fonction critère s'exprime, selon le cas de chargement (traction, $D_2 = D_3 = 0$, ou compression, $D_1 = 0, D_2 = D_3$) :

$$\begin{aligned} f_c &= \frac{-\sigma}{3} \left(\frac{2}{1-D_1} + \frac{1}{1-D_2} \right) + k_f \sigma - \sigma_s \\ f_t &= \frac{\sigma}{3} \left(\frac{2}{1-D_1} + \frac{1}{1-D_2} \right) + k_f \frac{\sigma}{1-\eta_{D_H}} - \sigma_s \end{aligned} \quad (4.44)$$

De même en uniaxial, l'évolution des déformations plastiques se réduit à :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_p^c &= \dot{\lambda}_p \left[\frac{-1}{6} \left(\frac{2}{1-D_1} + \frac{1}{1-D_2} \right) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + k_p \underline{\underline{Id}} \right] \\ \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_p^t &= \dot{\lambda}_p \left[\frac{1}{6} \left(\frac{2}{1-D_1} + \frac{1}{1-D_2} \right) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{k_p}{1-\eta_{D_H}} \underline{\underline{Id}} \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

Le premier paramètre à identifier est le paramètre k_f de la fonction seuil f . Ce paramètre gouverne la dissymétrie traction/compression du modèle. Il peut donc être identifié par exemple pour représenter la dissymétrie du domaine élastique initial. En effet les conditions de limite élastique en traction et en compression donnent le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} f_c = 0 &\rightarrow -\sigma_c + k_f \sigma_c = \sigma_{s0} \\ f_t = 0 &\rightarrow \sigma_t + k_f \sigma_t = \sigma_{s0} \end{aligned} \quad (4.46)$$

La dissymétrie du domaine est quantifiée par le rapport de la contrainte limite élastique de compression sur la contrainte limite élastique de traction : $\alpha = \frac{-\sigma_c}{\sigma_t} \geq 1$. La valeur du paramètre k_f s'exprime donc en fonction de ce facteur de dissymétrie α par :

$$k_f = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad (4.47)$$

Le choix du paramètre de dissymétrie k_f permet d'identifier la loi de consolidation σ_s régissant l'évolution de l'écrouissage et donc de l'endommagement (le modèle couplé ne possède qu'une loi de consolidation $\sigma_s(d_\epsilon)$ qui gouverne l'endommagement et la plasticité). Pour cela il faut tracer l'évolution de la consolidation en fonction de l'endommagement (FIG.4.5). Ainsi, il faut exploiter les décharges effectuées lors du chargement pour calculer l'endommagement réel. À chaque décharge, la consolidation peut être calculée de deux façons différentes : soit par la mesure des déformations élastiques, soit par celle des contraintes.

$$\begin{aligned} \sigma_s^\sigma &= -\sigma \left[\frac{1}{3} \left(2 + \frac{1}{1-D_2} \right) - k_f \right] \\ \sigma_s^\epsilon &= \frac{E}{1+\nu} |\epsilon_1^e - \epsilon_2^e| + k_f \frac{E}{1-2\nu} (\epsilon_1^e + 2\epsilon_2^e) \end{aligned} \quad (4.48)$$

On s'aperçoit ainsi qu'une fonction linéaire est suffisante. Toutefois il est important de noter que l'obtention d'une contrainte maximale précise nécessite une bonne corrélation entre loi de consolidation et les mesures expérimentales autour d'un endommagement de

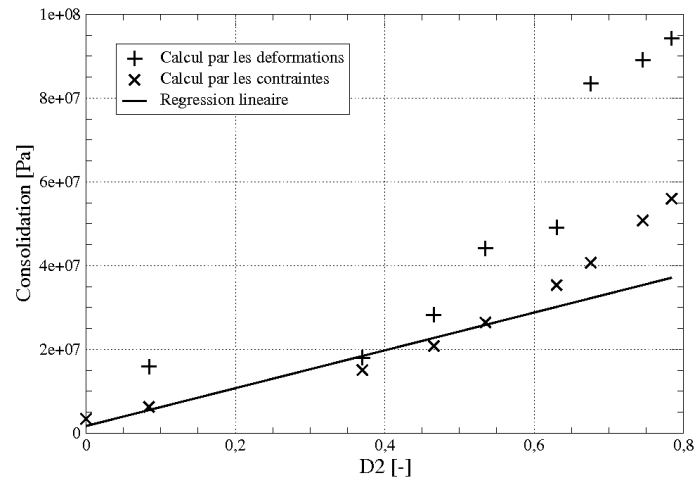


FIGURE 4.5: Évolution de la consolidation en fonction de l'endommagement induit par la compression

0.5. Cette forte corrélation autour de cette valeur permet donc une bonne représentation du pic. Il faut donc pondérer les points expérimentaux dont l'endommagement est proche de $\text{Tr}(D_2) = 0.5$. L'identification sur les essais de Ramtani donne les valeurs suivantes : $A = 4.43 \cdot 10^{-8} \text{MPa}^{-1}$ et $\sigma_{s0} = 1.8 \text{MPa}$. L'identification de ces paramètres permet de modéliser le comportement élasto-endommageable du modèle (FIG.4.6). La contrainte

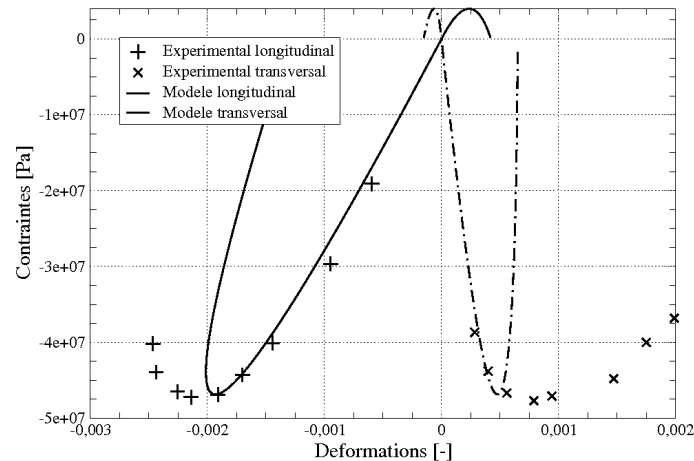


FIGURE 4.6: Partie élasto-endommageable du modèle

maximale en compression est obtenue correctement. La dissymétrie traction/compression est elle aussi satisfaisante. Par contre, les déformations élastiques sont sous-estimées.

L'évolution des déformations plastiques est pilotée par le paramètre k_p et la fonction λ_p . k_p représente le rapport entre déformations plastiques hydrostatiques et déformations

plastiques déviatoriques.

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p^c = \dot{\lambda}_p \left[\frac{-1}{3} \left(2 + \frac{1}{1-D_2} \right) + k_p \right] \quad (4.49)$$

Ainsi, on peut exprimer le rapport entre les déformations plastiques hydrostatiques et les déformations plastiques déviatoriques :

$$\frac{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{p,1}^H}{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{p,1}^D} = \frac{k_p}{\frac{-1}{3} \left(2 + \frac{1}{1-D_2} \right)} \quad (4.50)$$

Finalement, l'expression de k_p se réduit à :

$$k_p = \frac{-1}{3} \left(2 + \frac{1}{1-D_2} \right) \frac{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{p,1}^H}{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{p,1}^D} \quad (4.51)$$

A son tour λ_p peut être identifié sur les déformations plastiques hydrostatiques ou déviatoriques. Pour être utilisé lors de chargement cyclique, et comme déjà largement commenté, λ_p doit également dépendre de l'endommagement actif d_ε et non de $\text{Tr}(\underline{\underline{D}})$. En effet, après un chargement de compression endommageable, les déformations plastiques doivent évoluer lentement lors d'un chargement de traction même si la trace de l'endommagement dépasse 1 due à l'endommagement de compression.

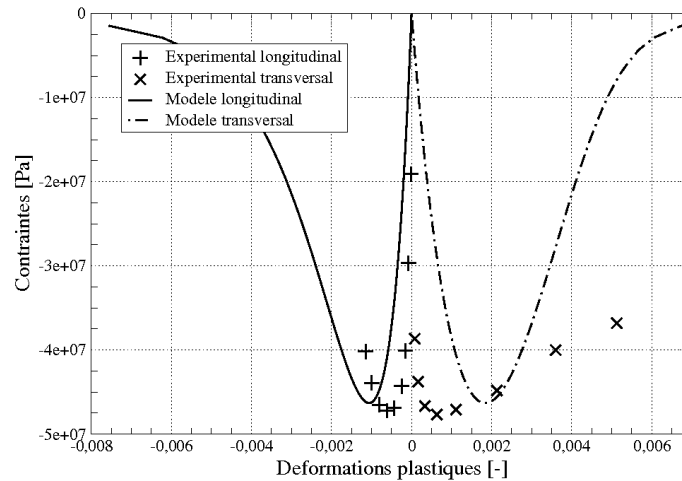


FIGURE 4.7: Déformations plastiques pour le modèle couplé

L'identification des paramètres terminée, le comportement global du modèle peut donc être calculé. La relation contrainte-déformation montre une bonne similitude avec les résultats expérimentaux (FIG.4.8). Comparé au modèle d'endommagement anisotrope initiale, les déformations plastiques ralentissent l'endommagement et empêche celui-ci

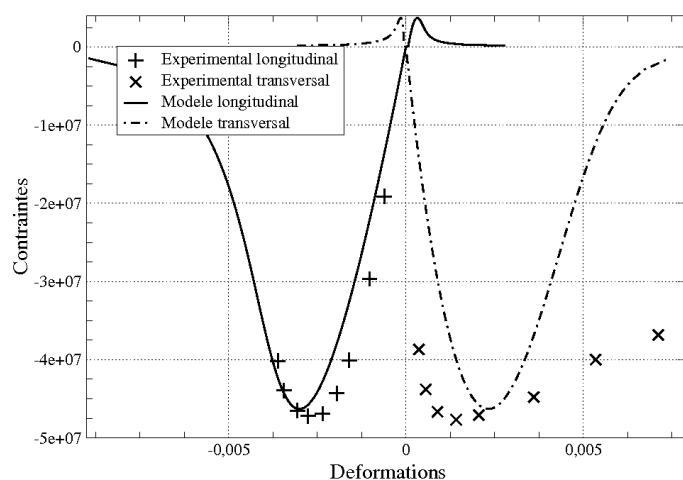


FIGURE 4.8: Comportement monotone du modèle couplé

d'atteindre 1. On obtient ainsi une contrainte qui tend asymptotiquement vers la contrainte nulle. Le comportement monotone est très satisfaisant, il convient donc de vérifier le comportement cyclique sur un chargement de compression/traction par exemple. Le matériau est soumis premièrement à une compression endommageable, puis avant rupture, il est déchargé et rechargé en traction jusqu'à rupture (FIG.4.9). Malgré l'endommagement

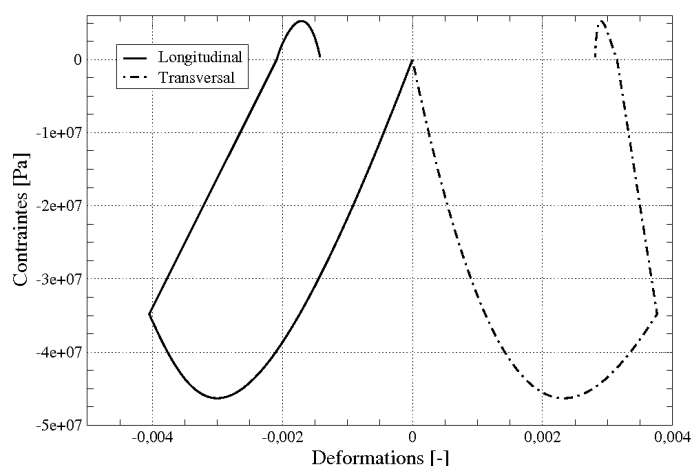


FIGURE 4.9: Chargement cyclique du modèle jusqu'à rupture

important induit par la compression, le matériau garde son comportement fragile en traction. Ce modèle est donc adapté aux chargements cycliques. La figure FIG.4.10 montre la comparaison entre le modèle couplé endommagement-plasticité avec les résultats du test de Ramtani. Un effort supplémentaire sur l'identification de paramètres permettrait d'optimiser les résultats.

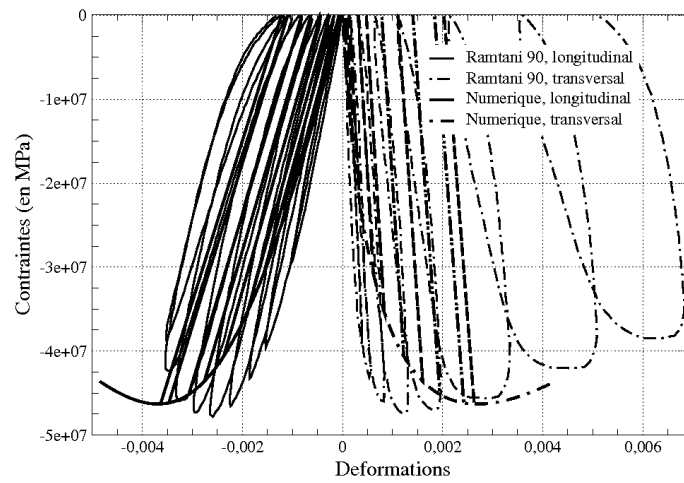


FIGURE 4.10: Comparaison expérimental/numérique pour le test de Ramtani

Le couplage de l'endommagement et de la plasticité permet donc d'obtenir un modèle regroupant les principales caractéristiques du béton sous-chargement alterné en vue d'applications sismiques.

2.7 Variante non linéaire de la fonction de consolidation

Nous avons vu dans l'identification précédente que la consolidation du matériau en compression peut être modélisée par une fonction linéaire. Toutefois, nous allons regarder si l'apport d'une fonction non linéaire est utile ou négligeable. La loi en tangente est conservée¹ :

$$\sigma_s(d_\epsilon) = a \tan \left[\frac{d_\epsilon}{aA} + \arctan \left(\frac{\sigma_{s0}}{a} \right) \right] \quad (4.52)$$

Cette loi non linéaire permet de mieux approcher les points expérimentaux situés aux en-

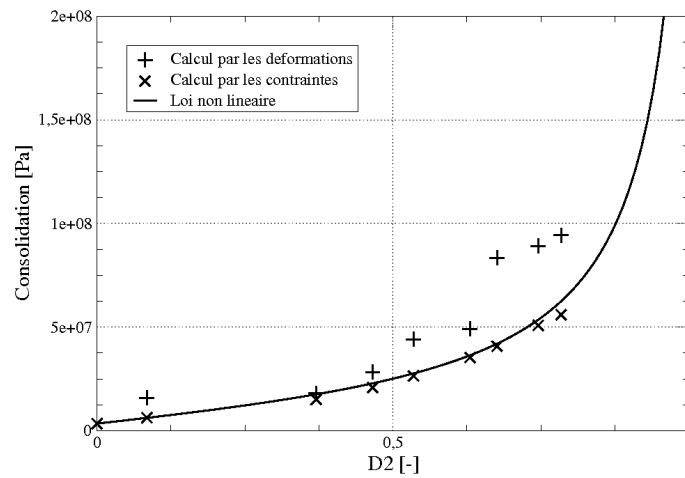


FIGURE 4.11: Identification de la loi de consolidation non linéaire

dommagements important (FIG.4.11). Par contre, le snapback observé pour les déformations élastiques est perdu (FIG.4.12). Toutefois, les déformations plastiques (FIG.4.13) et totales (FIG.4.14) sont correctes.

1. dans ce cas, le paramètre a s'exprime en MPa et le paramètre A en MPa^{-1}

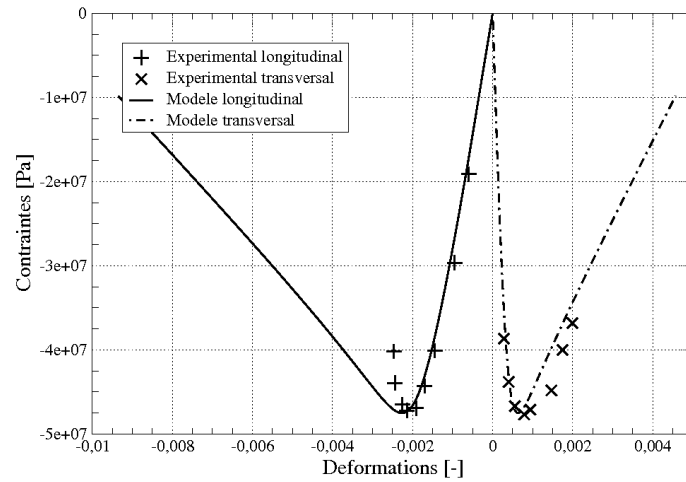


FIGURE 4.12: Comportement élastique du modèle avec consolidation non linéaire

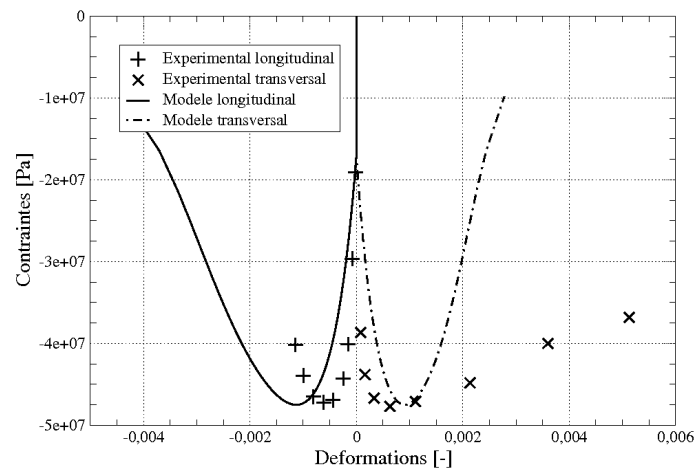


FIGURE 4.13: Évolution des déformations plastiques

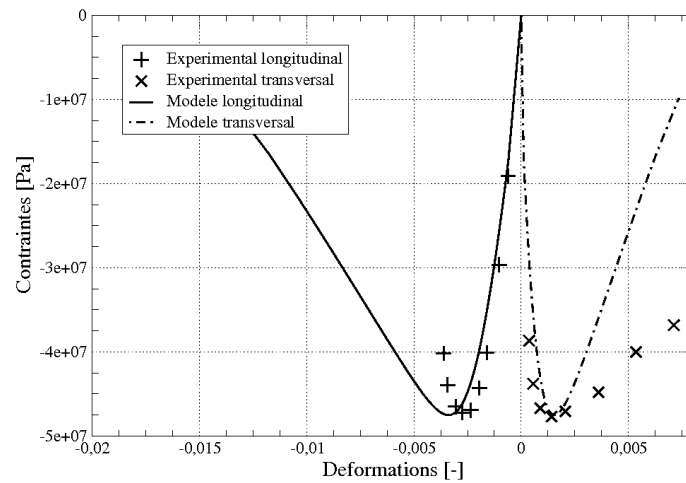


FIGURE 4.14: Comportement global du modèle avec consolidation non linéaire

2.8 Domaine élastique du modèle couplé

Le modèle couplé développé dans cette section possède une fonction critère différente de celle du modèle initial. Il est donc nécessaire d'observer le domaine élastique associé à ce critère. La figure FIG.4.15 montre le domaine élastique initial. Cette surface est typique

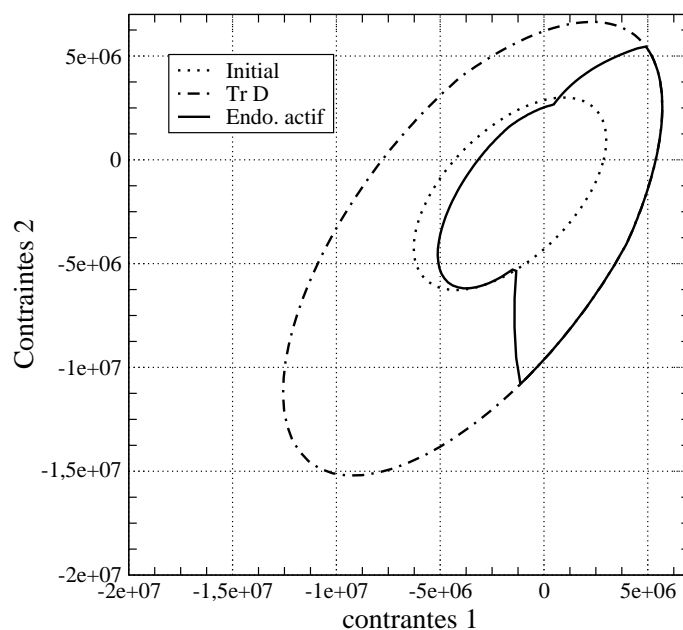


FIGURE 4.15: Domaine élastique du modèle couplé et son évolution pour un chargement de traction jusqu'à $D_1 = 0.3$

isotrope pour une fonction de consolidation dépendant de la trace de l'endommagement. L'apport de l'endommagement actif permet, là encore, une évolution anisotrope de cette surface seuil, permettant ainsi l'application d'un chargement alterné sans consolidation du matériau.

3 Conclusion et perspectives

Plusieurs solutions sont proposées pour tenir compte de ces déformations permanentes : des déformations permanentes pilotées par l'endommagement et le couplage du modèle initial avec un modèle de plasticité.

Malgré ces deux améliorations majeures, le modèle reste simplifié par rapport aux observations expérimentales. En effet, la reprise de raideur du modèle a lieu lors changement de signe des contraintes. Or expérimentalement la reprise de raideur a lieu plus tard. Une piste permettant une modélisation plus fine de la reprise de raideur serait d'écrire le mo-

dèle en variables mixtes :

$$\rho\psi^*(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{D}}) \rightarrow \rho\psi^*\left(\left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \alpha\underline{\underline{\sigma}}\right), \underline{\underline{D}}\right) \quad (4.53)$$

Ainsi, la condition de refermeture de fissure grâce à la partie positive de la variable mixte permettrait d'avoir une reprise de raideur sur une valeur intermédiaire entre contrainte nulle et déformation nulle. La construction d'un modèle sur une telle variable mixte semble toutefois complexe.

De plus le modèle ne capte pas les phénomènes dissipatifs observés lors des décharges. Généralement ces phénomènes dissipatifs sont modélisés par des lois de friction de type Coulomb [GL93] [HNN83] [LSP09] [Kac82]. D'autres auteurs proposent une approche micro-mécanique [PK02] [HD98]. Mais la méthode développée par Desmorat et Rague-
neau [DRP00] [RBM00] [PDR06] semble adaptée à l'écriture du modèle développé ici.

Chapitre 5

Étude du comportement expérimental cyclique d'une structure en béton armé : Test conventionnel et analyse hybride

La confrontation des résultats numériques à des mesures expérimentales reste la méthode de référence pour évaluer la validité d'un modèle numérique. Un test sur élément de structure est réalisé afin de comparer le modèle développé précédemment à des mesures. Selon les mesures effectuées sur l'essai, de nombreux résultats peuvent être comparés : réponse globale de la structure, champs de déformation, faciès de fissuration, ouverture de fissure, comportement des fissures (ouverture/fermeture), glissement des aciers ... Le domaine de validité du modèle peut ainsi être défini. En effet, certains modèles développés pour le calcul de structures vont très bien simuler le comportement global sans représenter les phénomènes locaux (macro-modèle). A l'opposé, certains modèles sont capables de simuler le comportement du matériau à une échelle très fine, mais leur capacité à calculer une structure complète est limitée. Ensuite, après validation du modèle d'endommagement, une analyse hybride est réalisée pour valider la démarche de ce travail en couplant l'essai au calcul numérique grâce à l'algorithme implicite développé.

Sommaire

1	Introduction	135
2	Étude expérimentale d'un élément de structure sous chargement cyclique	135
2.1	Objet de l'étude et structure étudiée	135
2.2	Comportement expérimental global	137
2.3	Étude de la fissuration	137
2.4	Analyse numérique	153
2.5	Conclusion	157
3	Analyse hybride	160
3.1	Dimensionnement de la structure et choix de l'instrumentation	160
3.2	Implantation de la méthode de pénalisation	162
3.3	Protocole expérimental : communication essai/calcul	164
3.4	Instrumentation	165
3.5	Campagne expérimentale	166
3.6	Analyses des résultats des tests hybrides	166
3.7	Étude du comportement de l'algorithme de couplage	169
3.8	Ré-analyse numérique de la poutre	170
4	Bilan et conclusion	175

1 Introduction

Ce chapitre présente la réalisation d'essais quasi-statiques cycliques réalisés sur des éléments structuraux en béton armé. Ces études ont plusieurs objectifs. Les principaux sont la validation du modèle d'endommagement par confrontation, et la démonstration de la faisabilité d'une analyse hybride grâce aux différents outils développés dans ce travail. Mais face aux problématiques actuelles en génie civil, on profite de ces essais pour mesurer et analyser les phénomènes locaux. En effet, une des préoccupations actuelles pour les structures de génie civil est la détermination de la perméabilité d'une structure endommagée. Cette dernière dépend fortement de la présence ou non de fissures et de leur éventuelle ouverture. Cette problématique est le sujet d'un projet national : CEOS.fr. Dans ce cadre, l'essai cyclique réalisé sur l'élément en béton armé sera équipé pour effectuer des mesures de champs (corrélation d'images) pour analyser les phénomènes locaux : fissuration, effets unilatéraux, déformations permanentes.

La première étude propose l'analyse du comportement d'une poutre en béton armé soumise à un chargement cyclique. Si le comportement global (force / déplacement) de la structure est connu, les phénomènes locaux d'ouverture/fermeture des fissures, l'évolution des déformations permanentes sont mal connus. Il est donc nécessaire d'étudier précisément ces phénomènes mésoscopiques grâce à des mesures de champs sur une structure relativement simple. Ces résultats sont ensuite comparés à des simulations numériques réalisées avec les modèles d'endommagement anisotropes décrits dans ce document (avec et sans déformations permanentes).

La seconde étude réalise une simulation hybride d'une structure en béton armé sous séisme. Une structure constituée d'un assemblage poteau-poutre contient une poutre en flexion 3 points identique à celle testée précédemment. La première étude nous permet donc de dimensionner la structure complète et de préparer l'analyse hybride. Cette dernière permet de prouver la faisabilité de couplage entre un essai et un modèle "matériau" complexe grâce à un schéma de couplage implicite et non intrusif (pour le code de calcul). La communication entre le PC de calcul et le PC de pilotage expérimental est réalisée par une carte de conversion numérique/analogique qui permet d'intégrer la communication de manière transparente vis-à-vis de l'utilisateur.

2 Étude expérimentale d'un élément de structure sous chargement cyclique

2.1 Objet de l'étude et structure étudiée

Pour pouvoir mener à bien cette étude, nous avons choisi une structure simple dont le comportement global est connu. Ainsi, l'étude porte sur une poutre en flexion trois points. La difficulté de cet essai est la réalisation des appuis simples acceptant des chargements cycliques. Pour cela, on utilise des liaisons élastiques ([LaB91]) spécifiques supportant des efforts verticaux sans induire de moment. La poutre étudiée est constituée de béton

ordinaire (CEMI 52.5) (des éprouvettes ont permis d'estimer les caractéristiques du béton - tableau TAB.5.1) et armé avec 4 HA 12 longitudinaux. L'espacement des cadres est de 15cm maximum (FIG.5.1). L'espacement des cadres permet de prévoir une rupture en cisaillement.

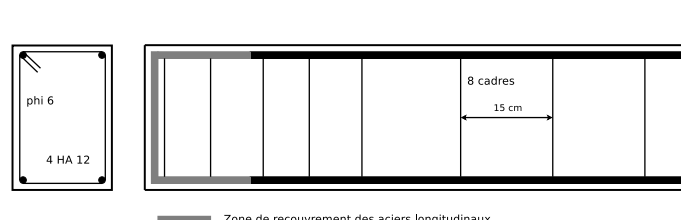


FIGURE 5.1: Poutre étudiée

Eprouvette	Contraintes maximales de compression	Déformation au pic	Module d'élasticité
	(MPa)	(10^{-3})	(GPa)
1	25.27	2.2	24,87
2	26.27	1.98	27.36
3	37.31	2.7	39.09
4	x	x	x
5	18.00	x	x
6	34.92	1.93	31.84

TABLE 5.1: Tests mécaniques du béton sur éprouvettes 16x32

Les mesures sont effectuées par mesure de champs (corrélation d'images) nous permettant ainsi de mesurer les déformations locales et de repérer les ouvertures et fermetures de fissures. Ce dispositif ne nécessite que peu d'instrumentation pour l'analyse d'une grande partie de la poutre : un mouchetis réalisé sur la poutre, un appareil photographique numérique (de qualité semi-professionnel) et éventuellement un éclairage d'appoint (ici, un panneau de lampes halogènes). Des photos sont prises régulièrement pour observer le comportement de la poutre lors des charges et des décharges.

Les différents chargements sont identiques à l'exception de l'amplitude. Le profil de chargement est défini par la figure FIG.5.2 où l'amplitude est normée. Les amplitudes testées sont 0.5mm puis de 1 à 8 mm avec un pas de 1 mm. Enfin, pour vérifier la répétabilité de l'essai, on effectuera ce chargement sur deux éprouvettes. Ceci nous permet d'évaluer la dispersion (sur toute la chaîne expérimentale), même si une étude approfondie de la dispersion mérite un nombre plus conséquent d'essais.

La durée du signal est fixée à $T=160$ secondes, la fréquence de prise de vue pour la corrélation est de $T/16$ soit toutes les 10 secondes pendant le premier cycle, puis toutes les 40 secondes ensuite.

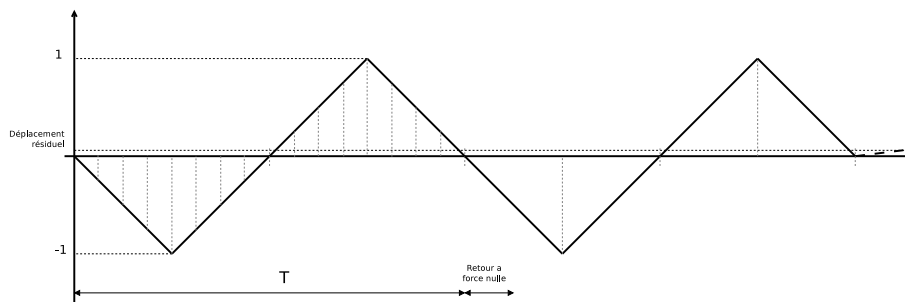


FIGURE 5.2: Cycle de chargement normé

2.2 Comportement expérimental global

Dans un premier temps nous allons observer le comportement global de la poutre en visualisant la relation force/déplacement. La figure FIG.5.3 montre le comportement par niveau de chargement.

Le premier cycle de chargement $[\pm 0.5 \text{ mm}]$ montre un comportement quasi élastique linéaire. Un léger endommagement du béton apparaît lors du premier chargement à $+ 0.5 \text{ mm}$. Pour des chargements de $\pm 1 \text{ mm}$ à $\pm 4 \text{ mm}$, l'endommagement du béton augmente, et le module de flexion diminue. On voit apparaître aussi des déformations permanentes lors du passage à effort nul mais aussi des boucles d'hystérésis. A ce stade de chargement, les aciers restent dans leur domaine élastique. L'hystérésis provient donc de l'abrasion de la rugosité des fissures dans le béton. A partir du chargement à $\pm 5 \text{ mm}$, les aciers entrent dans leur domaine plastique. On s'aperçoit aussi que la dissipation augmente grâce à l'élargissement des boucles d'hystérésis.

On remarque ainsi une dissymétrie du seuil de plasticité. Les aciers longitudinaux utilisés étant les mêmes sur les fibres inférieures et supérieures, cette dissymétrie doit provenir du placement des aciers. Effectivement, la position des aciers longitudinaux inférieurs est bien maîtrisée par l'utilisation de cales spécifiques. A l'opposé, le positionnement des aciers supérieurs dépend de la qualité de réalisation des cadres transversaux. La précision pour les aciers supérieurs est de l'ordre du centimètre. La figure FIG.5.4 montre la dispersion entre les deux essais réalisés avec le même chargement. On s'aperçoit ainsi que l'allure du comportement est identique bien que les valeurs extrêmes d'efforts diffèrent tout en restant du même ordre de grandeur. Cette différence provient des incertitudes de la réalisation des éprouvettes.

2.3 Étude de la fissuration

Les prises de vues effectuées durant les cycles de chargement vont nous permettre d'effectuer une analyse précise de l'évolution de la fissuration et de la refermeture des fissures. Deux analyses sont donc effectuées : la première se concentre sur l'évolution du faciès de fissuration en fonction de l'amplitude de chargement, la seconde étude aborde

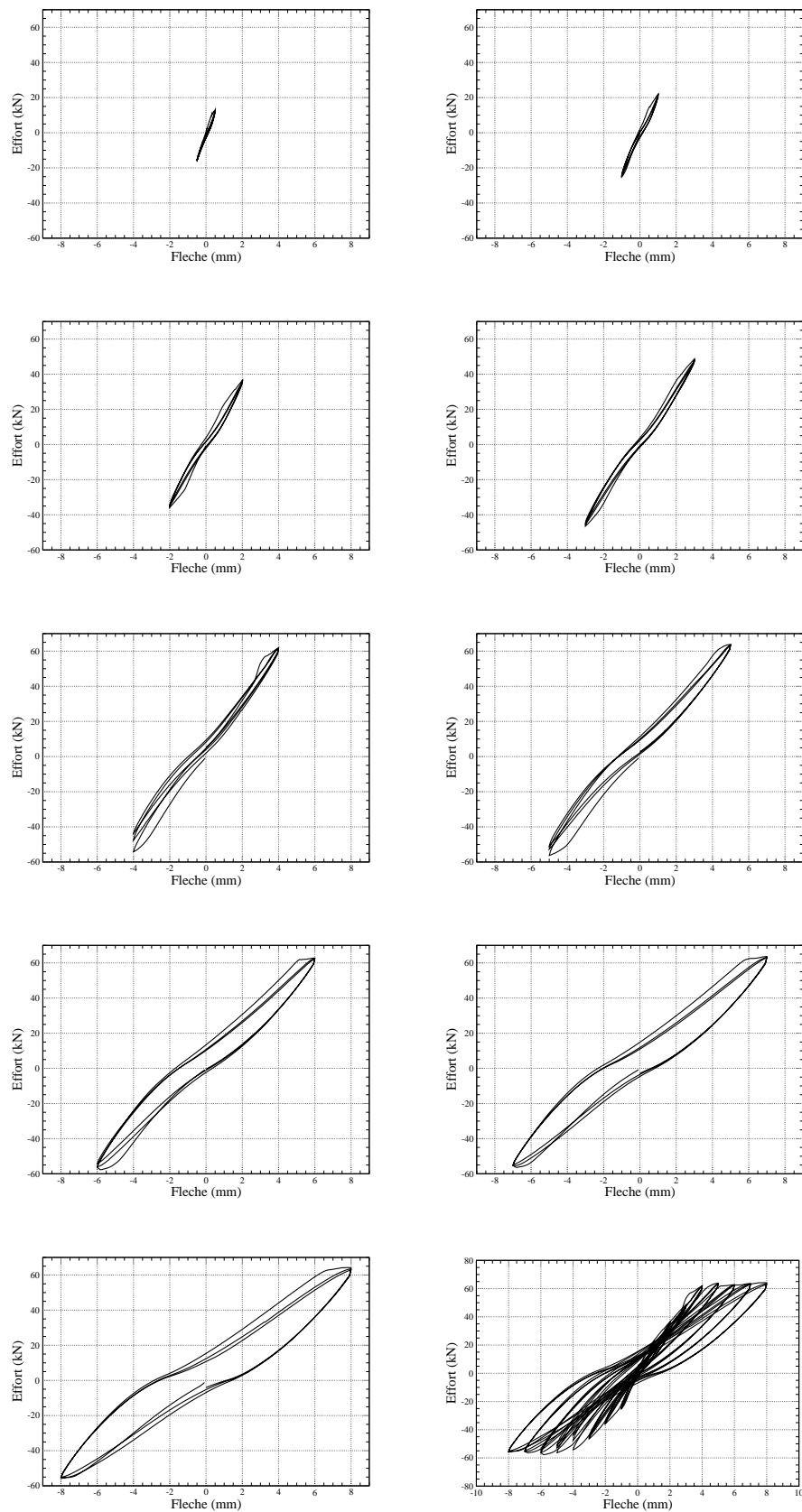
la refermeture des fissures au sein d'un cycle de chargement.

2.3.1 Evolution du faciès de fissuration

Dans cette première étude, nous nous intéressons au faciès de fissuration et de son évolution en fonction du niveau de chargement. Pour cela, on considère l'état de fissuration stabilisé au 3ème cycle. L'analyse est donc effectuée sur les deux derniers pics de chargement ($\pm a$, où a est l'amplitude) pour chaque niveau de sollicitation.

Les figures FIG.5.5 à FIG.5.13 montrent des déformations longitudinales (ϵ_{22}) pour chaque niveau de chargement. L'affichage des déformations longitudinales permet de mettre en valeur le faciès de fissuration. En effet, les zones claires correspondent aux fissures ouvertes alors que les zones les plus foncées aux fissures refermées.

Ainsi on distingue deux modes de fissuration selon le degré de chargement. Le premier mode de fissuration apparaît pour les faibles chargements : des fissures verticales apparaissent au droit des cadres. Ce phénomène est dû au faible enrobage de béton au niveau des cadres. Au niveau global, cette fissuration se traduit par un léger endommagement. Ce faciès est conservé jusqu'à un chargement de ± 4 mm. La deuxième phase de fissuration voit apparaître des fissures obliques. Ces fissures correspondent à la fissuration en flexion de la poutre. On s'aperçoit ainsi qu'au fur et à mesure de la propagation de ces fissures obliques, les fissures verticales apparues précédemment se referment partiellement (FIG.5.19 à FIG.5.22).

**FIGURE 5.3:** Cycles de chargement

*Analyse de l'endommagement des structures de génie civil :
Techniques de sous-structuration hybride couplé à un modèle d'endommagement anisotrope*

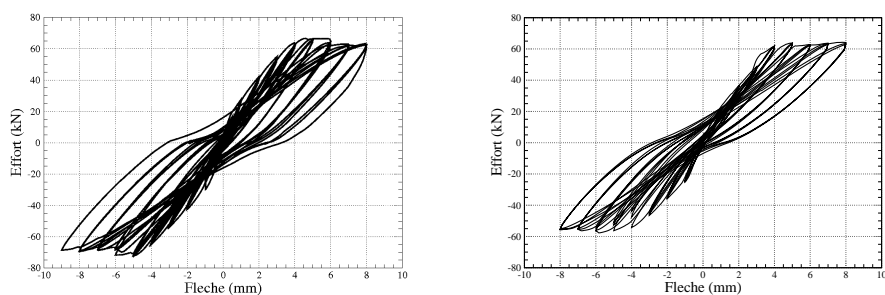


FIGURE 5.4: Dispersion évaluée sur deux essais

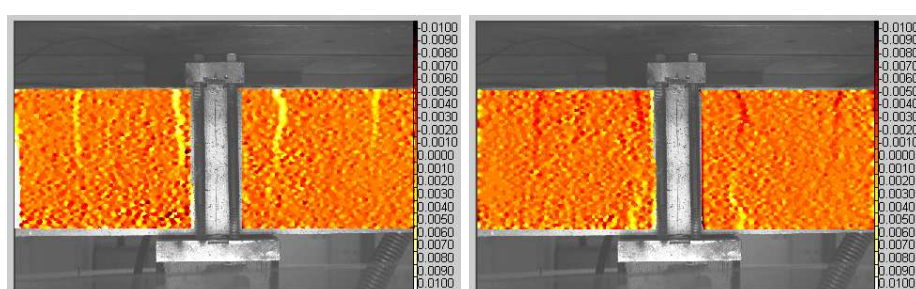


FIGURE 5.5: Déformations longitudinales - Niveau de chargement : - 0.5 mm (gauche) et + 0.5 mm (droite)

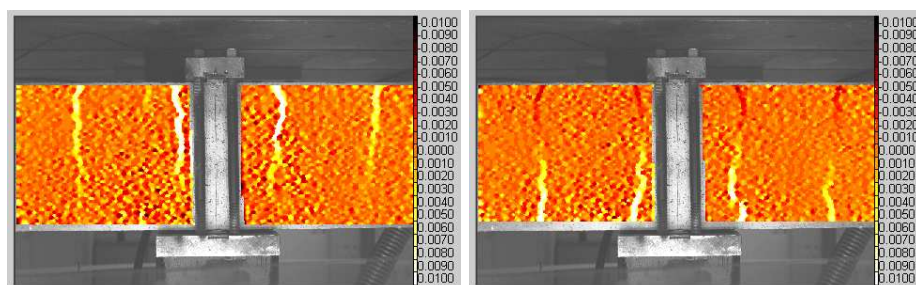


FIGURE 5.6: Déformations longitudinales - Niveau de chargement : - 1 mm (gauche) et + 1 mm (droite)

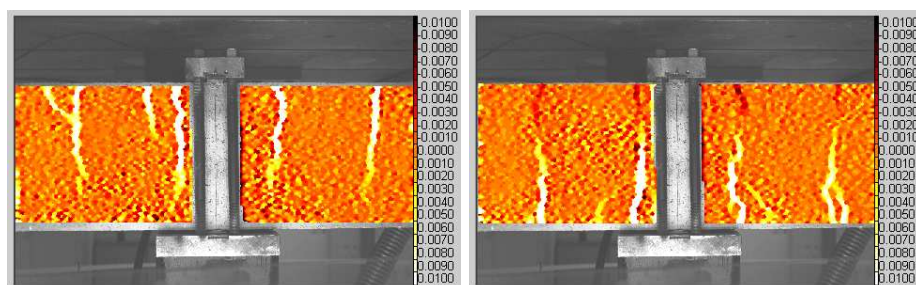


FIGURE 5.7: Déformations longitudinales - Niveau de chargement : - 2 mm (gauche) et + 2 mm (droite)

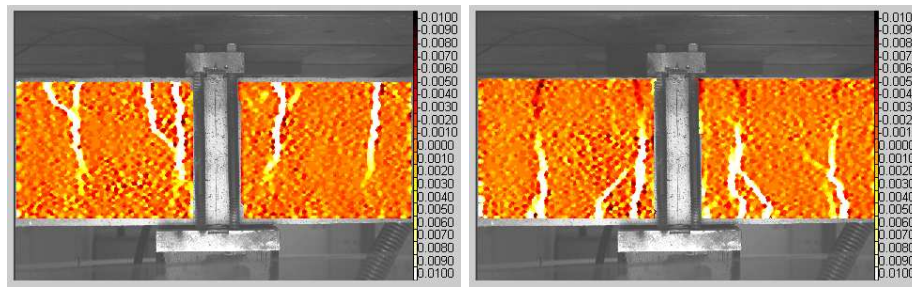


FIGURE 5.8: Déformations longitudinales - Niveau de chargement : - 3 mm (gauche) et + 3 mm (droite)

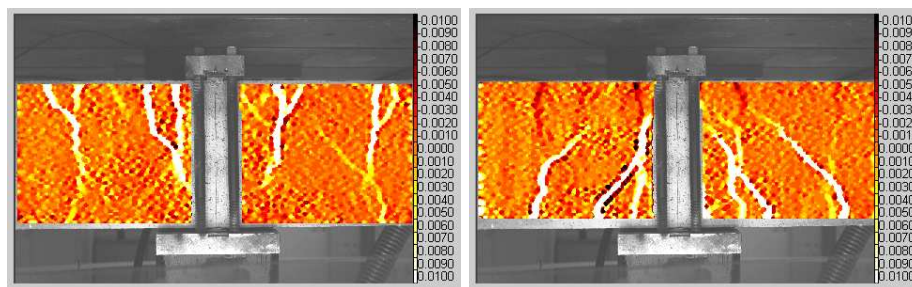


FIGURE 5.9: Déformations longitudinales - Niveau de chargement : - 4 mm (gauche) et + 4 mm (droite)

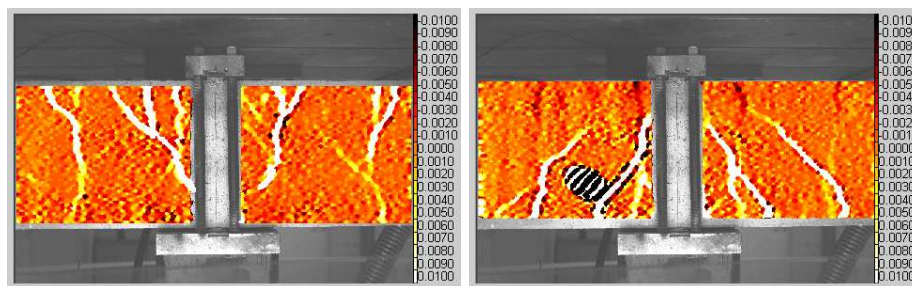


FIGURE 5.10: Déformations longitudinales - Niveau de chargement : - 5 mm (gauche) et + 5 mm (droite)

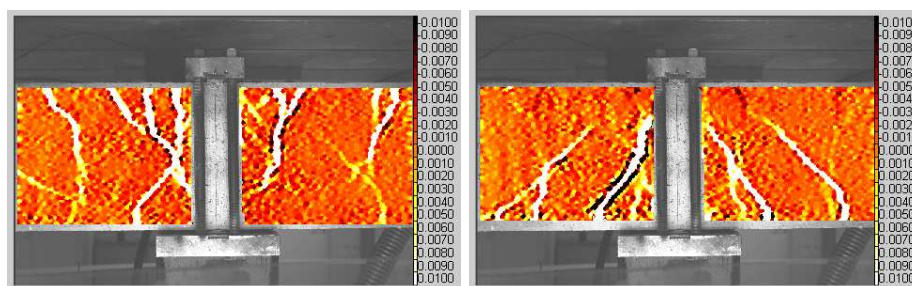


FIGURE 5.11: Déformations longitudinales - Niveau de chargement : - 6 mm (gauche) et + 6 mm (droite)

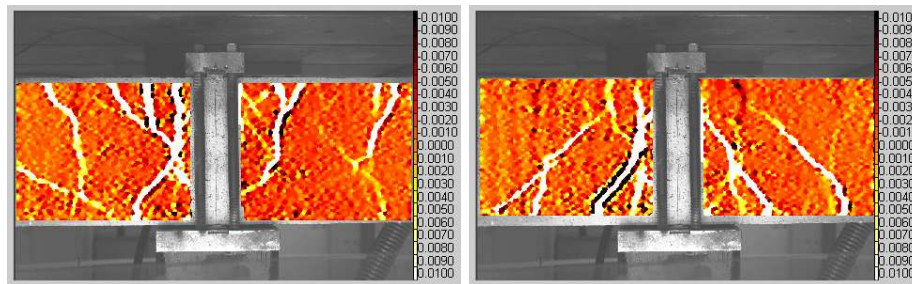


FIGURE 5.12: Déformations longitudinales - Niveau de chargement : - 7 mm (gauche) et + 7 mm (droite)

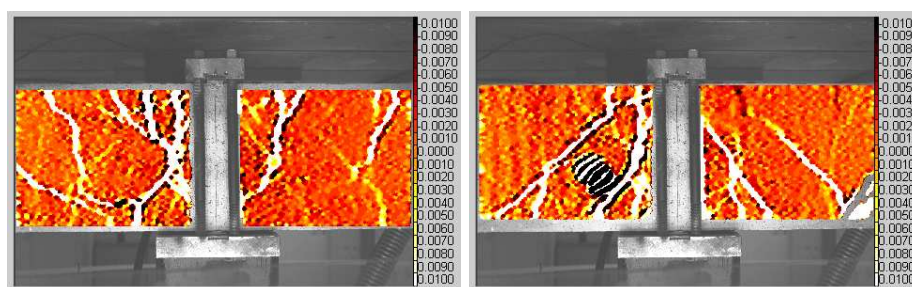


FIGURE 5.13: Déformations longitudinales - Niveau de chargement : - 8 mm (gauche) et + 8 mm (droite)

2.3.2 Étude de l'ouverture des fissures

Pour étudier précisément l'évolution de la fissuration, il est nécessaire de s'intéresser aux champs de déplacement¹. En effet, le saut de déplacement au droit des fissures donne une mesure de l'ouverture de fissure en surface de la structure. Dans un premier temps, les différentes fissures sont identifiées (FIG.5.14). L'ouverture des fissures est mesurée à 4 niveaux (FIG.5.14-en bas à droite).

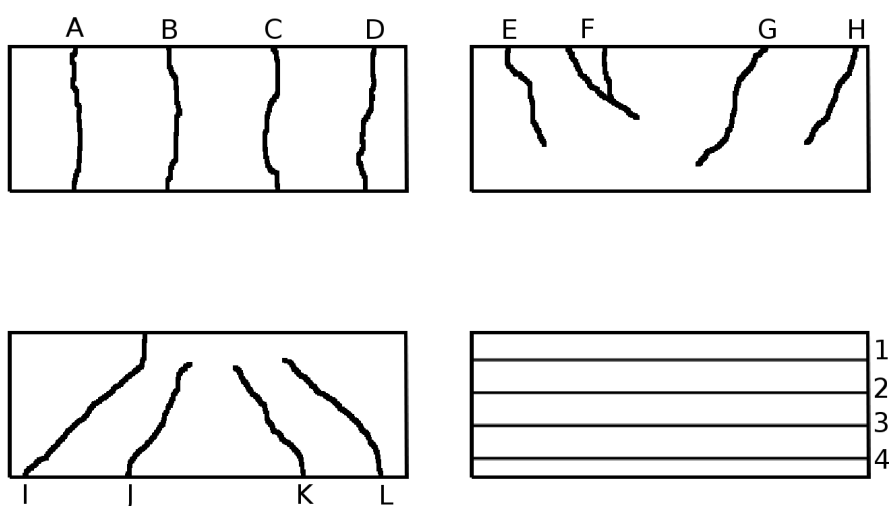


FIGURE 5.14: Repérage des fissures et des points de mesure choisis

Grâce aux champs de déplacement (FIG.5.5 à FIG.5.13), l'évolution des différentes fissures peut être mesurée en fonction du chargement (FIG.5.24 à FIG.5.33). Cette analyse confirme les deux phénomènes de fissuration. Les premières fissures à s'ouvrir sont les fissures verticales (A à D). Ensuite, les fissures de flexion (E à H et I à L) apparaissent et gouvernent la fissuration globale de la structure. Le relâchement des contraintes entre les fissures de flexion provoque la refermeture partielle des fissures verticales.

1. Les figures de corrélation d'image donnent des déplacements exprimés en pixel. Dans cette étude 1 pixel = 0.3 mm

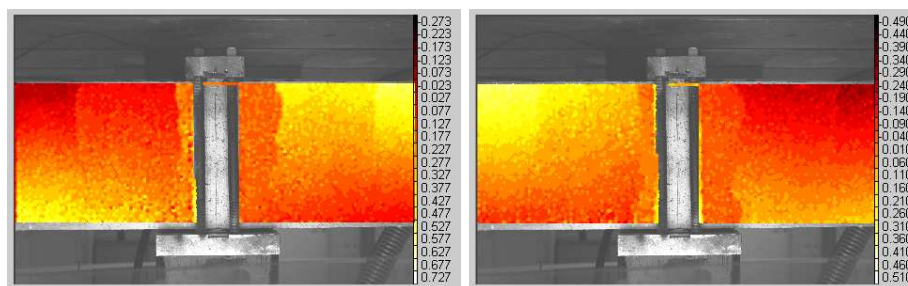


FIGURE 5.15: Déplacements longitudinaux - Niveau de chargement : - 0.5 mm (gauche) et + 0.5 mm (droite)

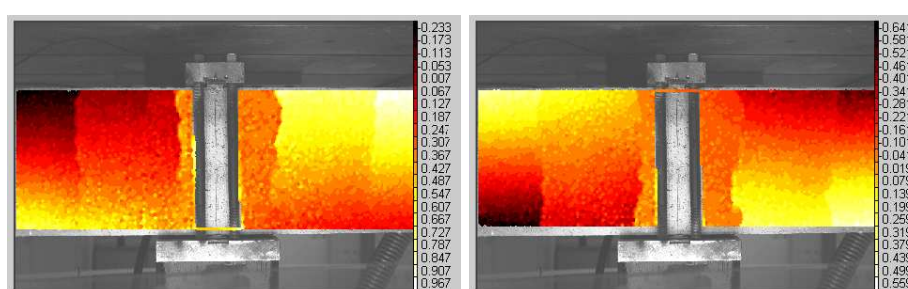


FIGURE 5.16: Déplacements longitudinaux - Niveau de chargement : - 1 mm (gauche) et + 1 mm (droite)

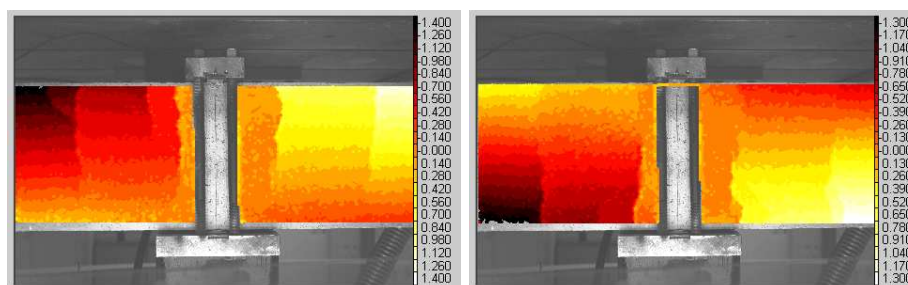


FIGURE 5.17: Déplacements longitudinaux - Niveau de chargement : - 2 mm (gauche) et + 2 mm (droite)

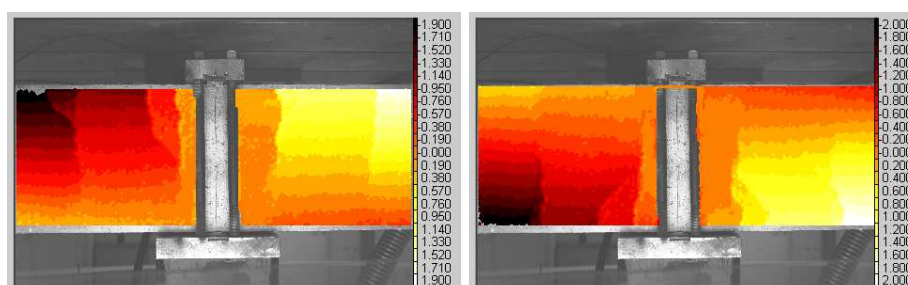


FIGURE 5.18: Déplacements longitudinaux - Niveau de chargement : - 3 mm (gauche) et + 3 mm (droite)

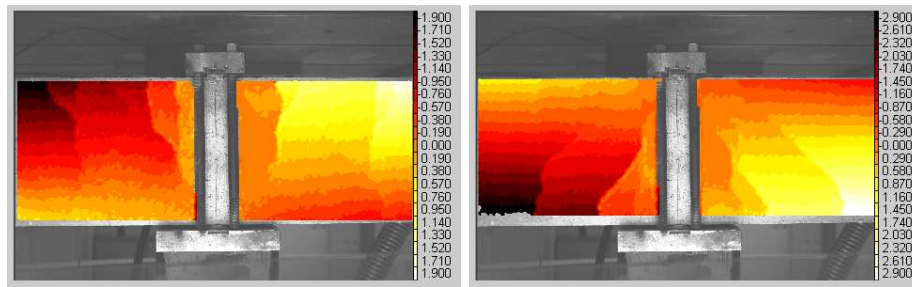


FIGURE 5.19: Déplacements longitudinaux - Niveau de chargement : - 4 mm (gauche) et + 4 mm (droite)

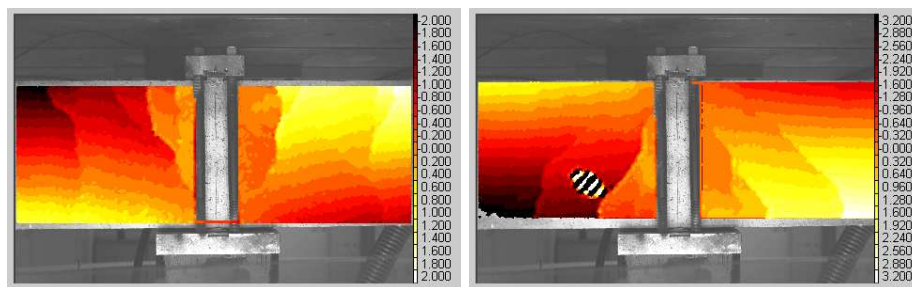


FIGURE 5.20: Déplacements longitudinaux - Niveau de chargement : - 5 mm (gauche) et + 5 mm (droite)

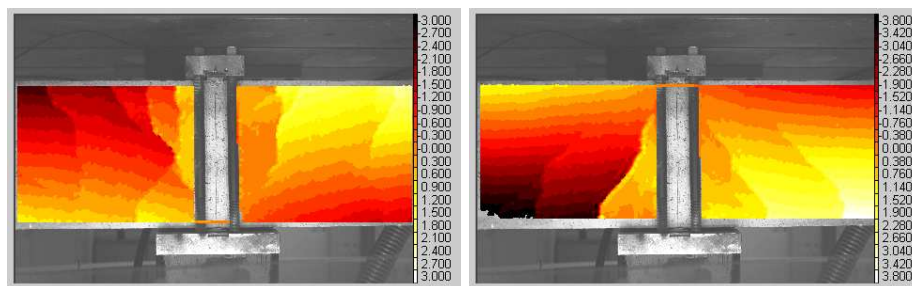


FIGURE 5.21: Déplacements longitudinaux - Niveau de chargement : - 6 mm (gauche) et + 6 mm (droite)

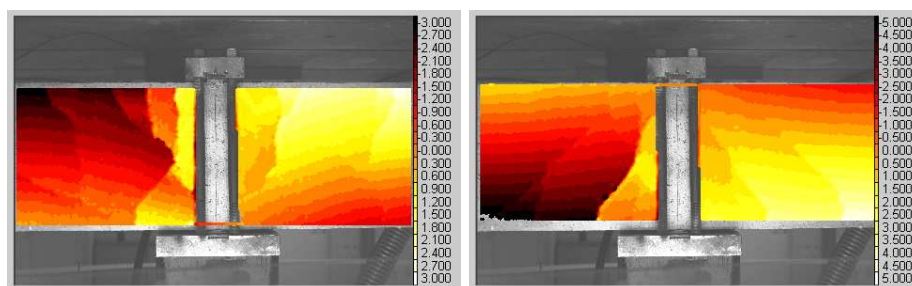


FIGURE 5.22: Déplacements longitudinaux - Niveau de chargement : - 7 mm (gauche) et + 7 mm (droite)

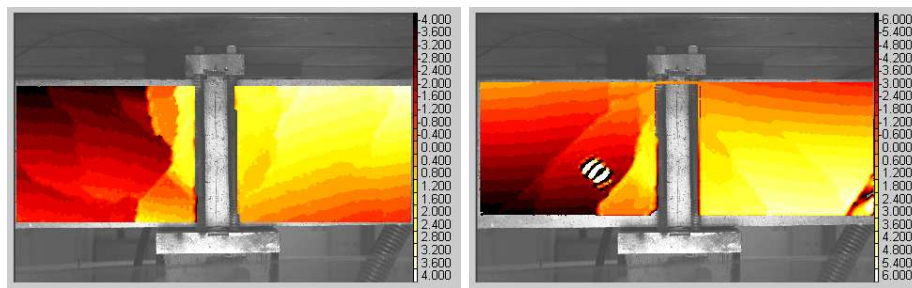


FIGURE 5.23: Déplacements longitudinaux - Niveau de chargement : - 8 mm (gauche) et + 8 mm (droite)

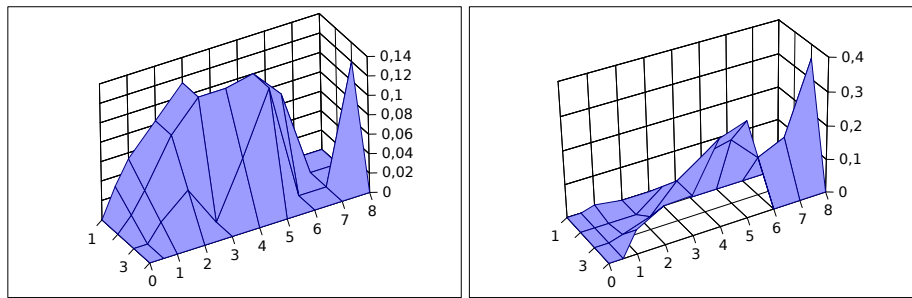


FIGURE 5.24: Ouverture de la fissure A en fonction du chargement : chargement négatif (gauche) et positif (droite)

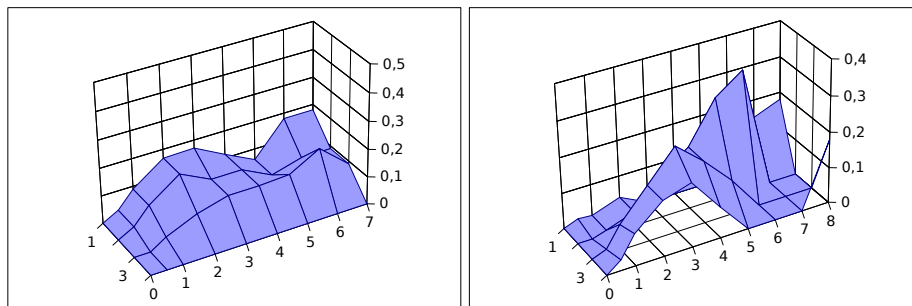


FIGURE 5.25: Ouverture de la fissure B en fonction du chargement : chargement négatif (gauche) et positif (droite)

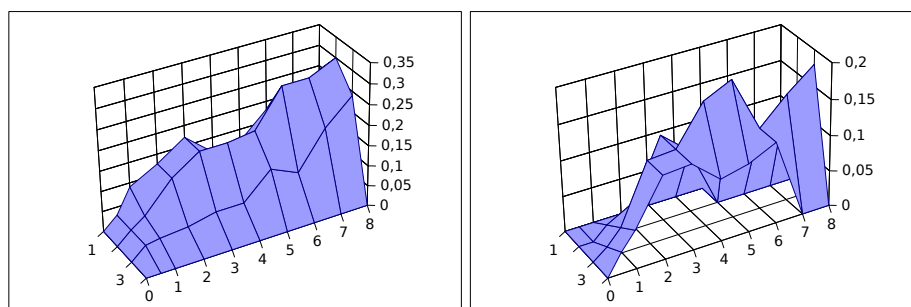


FIGURE 5.26: Ouverture de la fissure C en fonction du chargement : chargement négatif (gauche) et positif (droite)

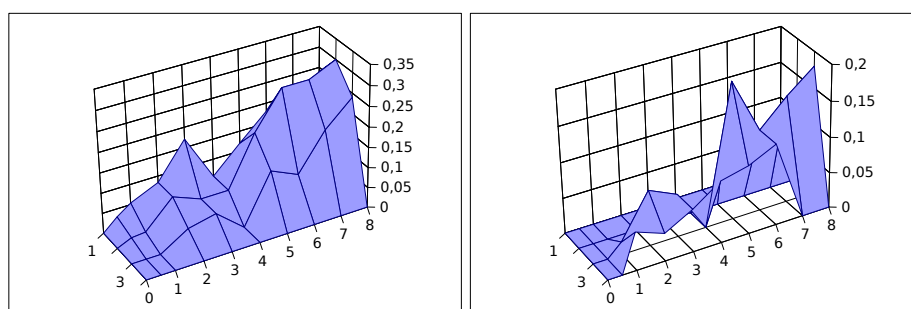


FIGURE 5.27: Ouverture de la fissure D en fonction du chargement : chargement négatif (gauche) et positif (droite)

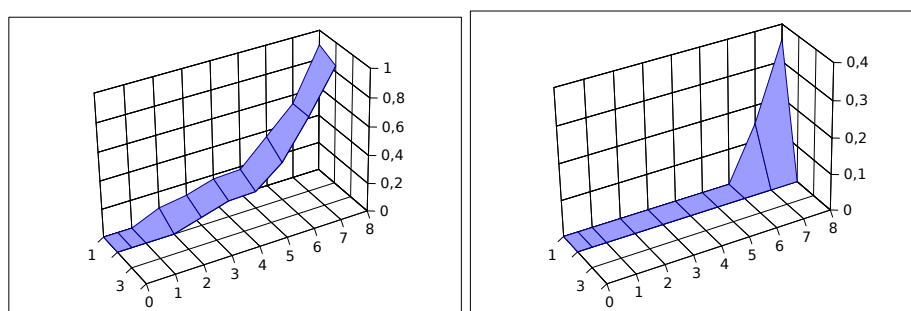


FIGURE 5.28: Ouverture de la fissure F en fonction du chargement : chargement négatif (gauche) et positif (droite)

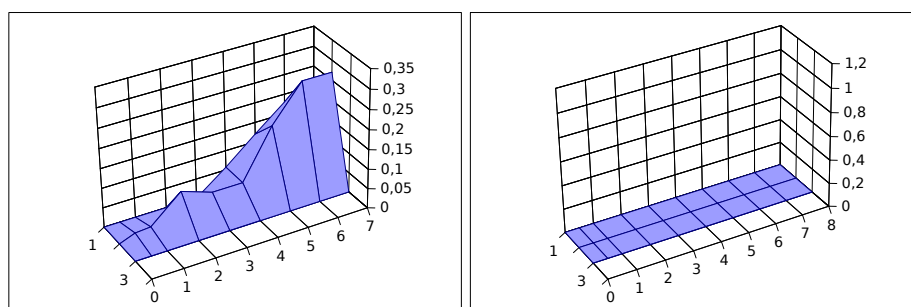


FIGURE 5.29: Ouverture de la fissure H en fonction du chargement : chargement négatif (gauche) et positif (droite)

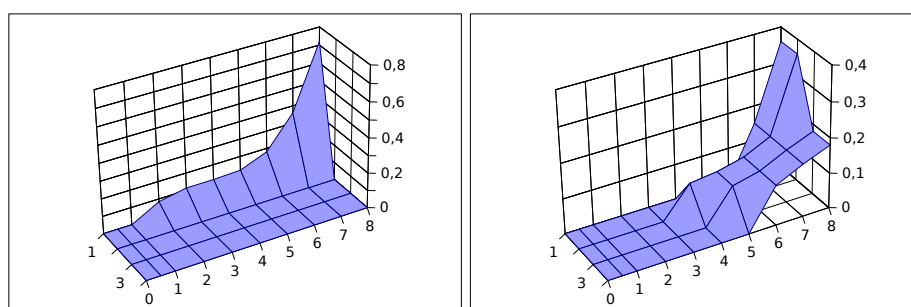


FIGURE 5.30: Ouverture de la fissure I en fonction du chargement : chargement négatif (gauche) et positif (droite)

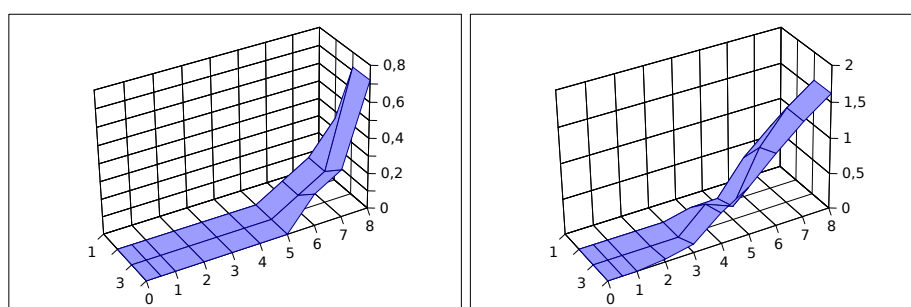


FIGURE 5.31: Ouverture de la fissure J en fonction du chargement : chargement négatif (gauche) et positif (droite)

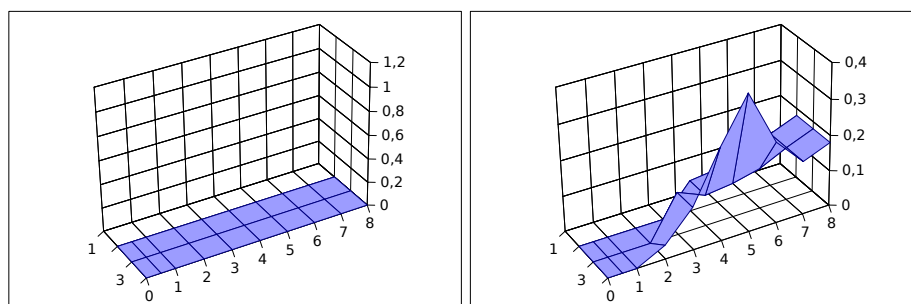


FIGURE 5.32: Ouverture de la fissure K en fonction du chargement : chargement négatif (gauche) et positif (droite)

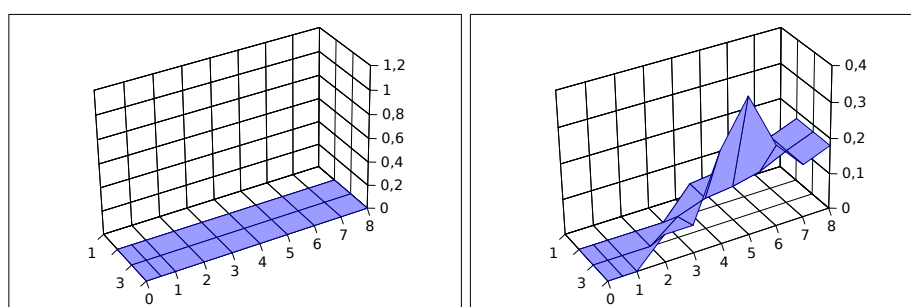


FIGURE 5.33: Ouverture de la fissure L en fonction du chargement : chargement négatif (gauche) et positif (droite)

Les fissures A à D possèdent le même comportement. Pour de faibles amplitudes (inférieures à 4 mm), elles s'ouvrent et se referment alternativement en fonction du signe du chargement. L'ordre de grandeur de l'ouverture est le même pour les quatre fissures : le dixième de millimètre pour le chargement de ± 4 mm. Pour des chargements plus élevés, l'étude est plus complexe : les fissures obliques de cisaillement s'ouvrent et croisent les premières fissures. Certains points de mesures (2 et 3) correspondent aux croisements. L'analyse est donc effectuée sur les points 1 et 4 uniquement. Sur ces points de mesure, on s'aperçoit que les fissures se referment presque totalement. L'analyse globale montre l'apparition simultanément des fissures obliques qui vont dominer. Le béton situé entre ces fissures est déchargé, les fissures se referment donc. Contrairement aux fissures verticales (A à D), les fissures obliques sont ouvertes ou complètement fermées selon la direction de chargement. Ainsi les fissures E à H s'ouvrent pour des chargements positifs tandis que les fissures I à L sont activées par un chargement négatif. De plus, leur ouverture, qui débute pour des chargements d'amplitude supérieure à 5 mm est régulière et continuellement croissante jusqu'à l'ordre du millimètre pour les chargements de plus grande amplitude. On remarque aussi que les fissures obliques ne sont pas traversantes.

Cette première analyse met en valeur les différents phénomènes de fissuration pour des chargements croissants. On s'aperçoit que les premières non-linéarités du comportement global apparaissent lors de la fissuration verticale au droit des cadres. Les fissures obliques de flexion sont créées pour des chargements plus élevés.

2.3.3 Étude de la refermeture des fissures lors d'un cycle de chargement

Après avoir repéré les processus de fissuration pour des charges croissantes, la refermeture des fissures est observée au cours d'un cycle de chargement. La figure FIG.5.34 montre l'évolution de la fissuration entre deux pics de chargement via l'observation des déformations longitudinales pour des chargement de ± 4 mm et ± 8 mm. Les images de gauche représente l'état de la fissuration pour le chargement d'amplitude 4 mm et les images de droite celui pour le chargement d'amplitude 8 mm.

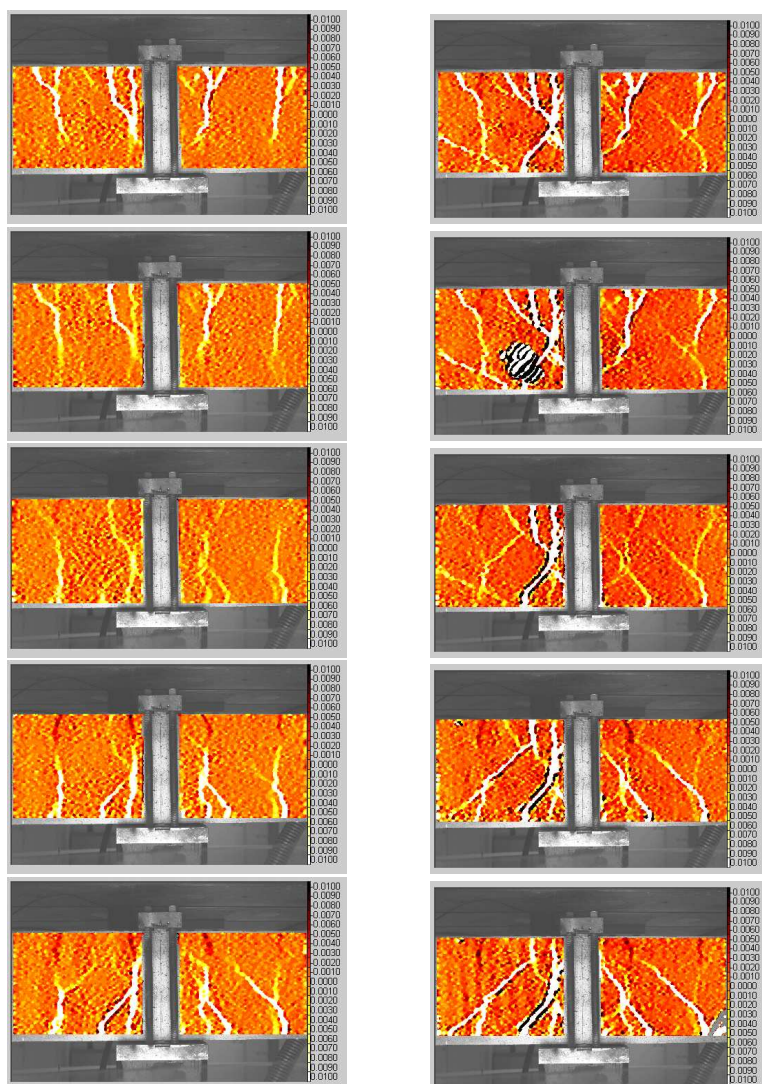


FIGURE 5.34: Évolution de la fissuration au cours d'un cycle de chargement ($\pm 4mm$ à gauche et $\pm 8mm$ à droite)

Pour le chargement de $\pm 4mm$, les fissures obliques de cisaillement se referment complètement pendant la décharge, puis les fissures obliques opposées s'ouvrent lors de la charge de signe opposé. Le comportement des fissures verticales est quelque peu différent. En effet, les extrémités de celle-ci s'ouvrent ou se referment selon le signe du chargement alors que la partie centrale des fissures reste ouverte.

Pour le chargement de $\pm 8mm$, la fissuration est gouvernée uniquement par les fissures de cisaillement. Les fissures verticales sont refermées quelque soit le chargement. Tandis que les fissures obliques s'ouvrent ou se referment en fonction du chargement, la fissure principale reste constamment ouverte. Cette fissure est celle qui est la plus ouverte. Elle doit correspondre à la zone de plastification des aciers, ce qui pourrait expliquer la difficulté pour refermer cette fissure.

2.4 Analyse numérique

Cette partie propose une analyse numérique de la poutre sous chargement cyclique. Cette étude nous permettra de comparer les différents modèles d'endommagement présentés dans les CHAPITRE 3 et CHAPITRE 4, plus précisément le modèle d'endommagement initial et le modèle couplé endommagement/plasticité. Une étude est menée sur le matériau béton et sur les aciers pour pouvoir effectuer une étude prédictive tableau TAB.5.1. L'identification des paramètres "matériau" est résumée dans le tableau TAB.5.2 et le tableau TAB.5.3. La structure étudiée ici est élancée. Ainsi, pour réduire le temps de calcul, la modélisation numérique multifibre est utilisée. L'utilisation de cette modélisation simplifiée ne permet pas d'effectuer une analyse non locale. Il est donc nécessaire d'ajuster le nombre de sections d'intégration le long de la poutre pour obtenir la force de rupture expérimentale. La discrétisation spatiale est ensuite conservée pour toute l'étude. Dans un premier temps, nous allons analyser l'apport des déformations permanentes dans le béton sur le comportement globale de la structure. Ensuite les effets de l'endommagement actif sont étudiés sur le chargement alterné.

E	31 GPa
ν	0.2
a	$3.48 \cdot 10^{-4}$
A	4850
κ_0	$1.2 \cdot 10^{-4}$

TABLE 5.2: Paramètres du modèle d'endommagement (sans déformations permanentes)

E	28 GPa
ν	0.2
A	$5.5 \cdot 10^{-8}$
σ_{s0}	$1 \cdot 10^{-5}$
k_p	0.011
k_f	0.8

TABLE 5.3: Paramètres du modèle couplé

2.4.1 Influence des déformations permanentes

Le comportement expérimental montre une légère dissymétrie pour l'effort maximal. Cette dyssymétrie provient d'un écart entre la position réelle et théorique des aciers dans le coffrage. Les analyses suivantes prennent en compte cet aléas de mise en oeuvre. Dans un premier temps, le comportement monotone des deux modélisations est étudié (FIG.5.35). Les deux modèles possèdent un comportement monotone similaire. La force maximale est correctement représentée, la dissymétrie étant due uniquement à une localisation légèrement dissymétrique des aciers longitudinaux. L'endommagement du béton qui se manifeste par une chute de la rigidité de la poutre est modélisé correctement par les deux

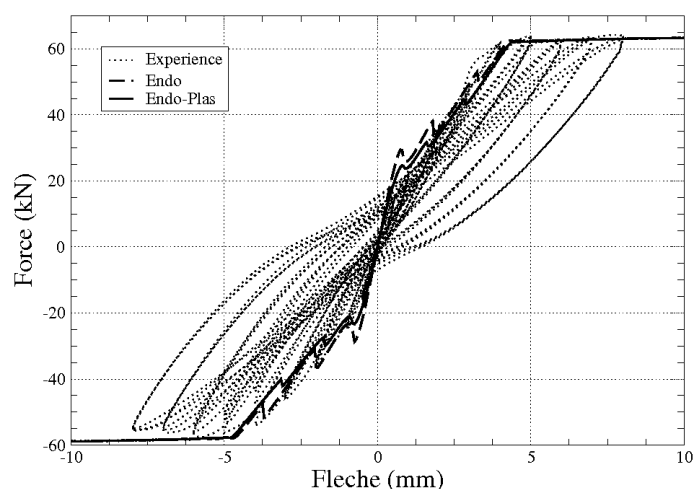


FIGURE 5.35: Comparaison des réponses monotones pour les deux modèles (*endo* : modèle d'endommagement avec endommagement actif ; *endo-plas* : modèle couplé endommagement plasticité)

modèles. Toutefois, les deux modèles présentent une légère différence pour la raideur initiale. Cette différence vient de l'identification des paramètres des différents modèles.

Le comportement cyclique des modèles est étudié (FIG.5.36 et FIG.5.37). Les deux modèles présentent une nouvelle fois un comportement très similaire. Ceci est dû à une faible activation de la plasticité dans le modèle couplé (FIG.5.40). Les deux modèles possèdent toutefois quelques défauts. Les boucles d'hystérésis ne sont pas modélisées : les décharges sont linéaires et élastiques, et le début des charges suivantes est aussi linéaire (de même raideur). La diminution de la raideur autour de 0 n'est pas captée. Lors de la décharge, la raideur est contrôlée par les aciers tendus, au passage à zéro, les fibres précédemment tendues se détendent d'où la perte de raideur. La raideur augmente à nouveau lorsque les fibres opposées se tendent. Les conséquences de l'effet unilatéral sont difficilement identifiables sur cet essai. La réponse globale de la structure reste très satisfaisante, ce qui permet de valider les modèles d'endommagement (couplé ou non) pour l'étude sismique des structures en béton armé.

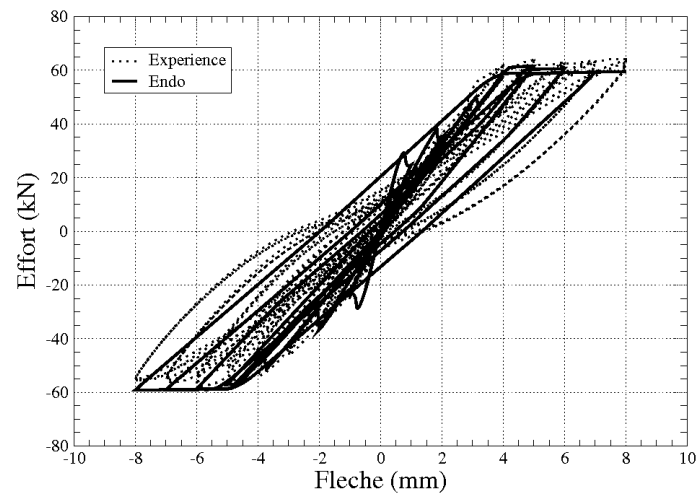


FIGURE 5.36: Comparaison des réponses cycliques expérimentale et numérique - Modèle "endo"

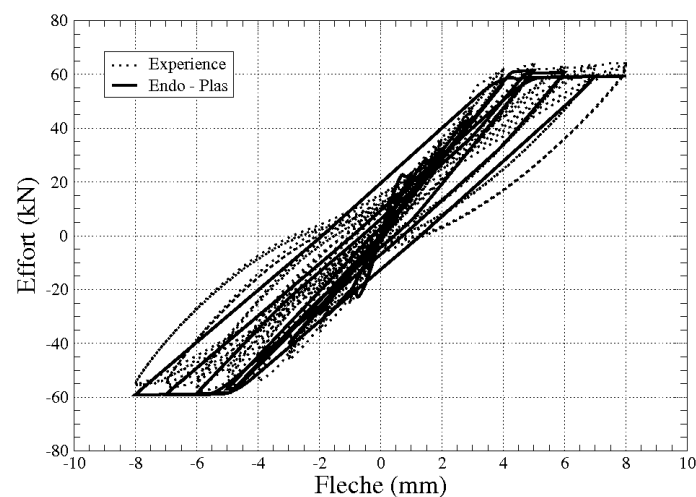


FIGURE 5.37: Comparaison des réponses cycliques expérimentale et numérique - Modèle "endo-plas"

2.4.2 Endommagement actif

Pour comprendre le processus d'endommagement, les cartes d'endommagement principaux (D_1 et D_2) et d'endommagement actif ($d_{1\epsilon} = \frac{D_1 \cdot \langle \epsilon_1 \rangle_+}{\epsilon_1}$ et $d_{2\epsilon} = \frac{D_2 \cdot \langle \epsilon_2 \rangle_+}{\epsilon_2}$) sont tracées pour deux niveaux de chargement : -2mm et -8mm (FIG.5.38 à FIG.5.41).

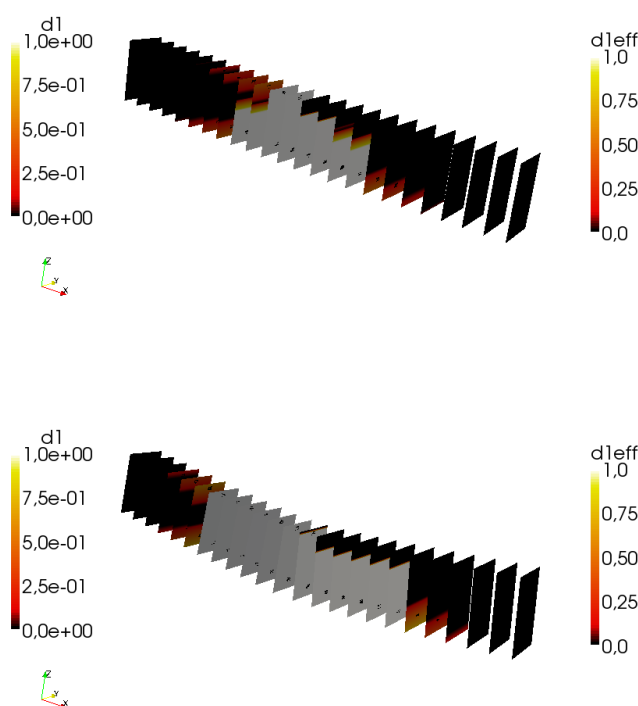


FIGURE 5.38: Carte d'endommagement D_1 et $d_{1\epsilon}$ pour des chargements de 2 et 8 mm - Modèle d'endommagement sans plasticité ("endo")

L'endommagement est représenté sur la partie gauche des poutres et les endommagements actifs sur la partie droite. Les poutres des figures FIG.5.38 et FIG.5.40 sont modélisées avec le modèle d'endommagement sans plasticité (modèle "endo") et celles des figures FIG.5.39 et FIG.5.41 avec le modèle couplé (modèle "endo-plas"). Le modèle couplé présente une zone endommagée plus large pour les deux niveaux de chargement étudiés ici. De plus, l'endommagement est majoritairement dans la direction longitudinale (D_1). L'endommagement transversal (D_2), qui apparaît dans une zone très localisée au centre de la poutre, reste inférieur à 0.5 pour le chargement le plus important et est légèrement plus faible pour le modèle couplé. Par conséquent, les déformations permanentes ne sont pas activées et restent nulles. L'endommagement actif permet d'apprécier l'état d'ouverture de la microfissuration.

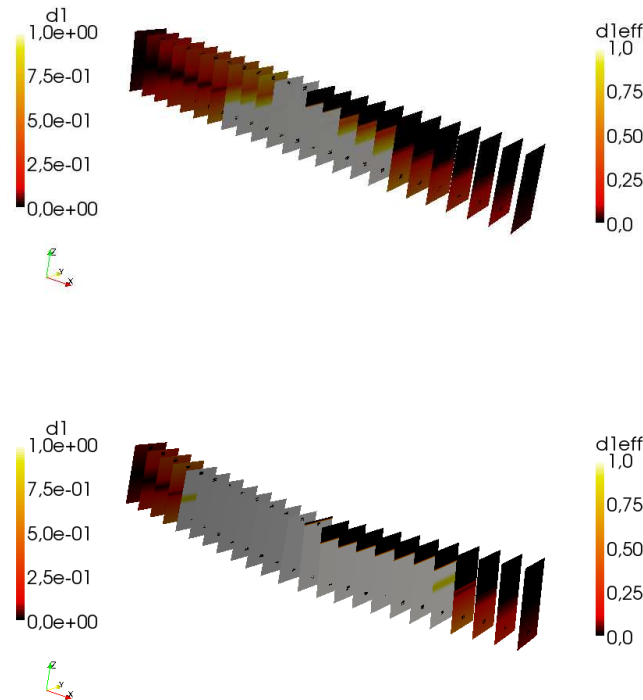


FIGURE 5.39: Carte d'endommagement D_1 et $d_{1\epsilon}$ pour des chargements de 2 et 8 mm - Modèle couplé ("endo-plas")

2.5 Conclusion

Cette étude d'un élément structural sous chargement cyclique met en valeur les processus de fissuration grâce à des mesures de champs réalisées lors de l'essai. Ainsi, deux phénomènes de fissuration sont observés : une première fissuration verticale au droit des cadres puis une fissuration oblique caractéristique des essais de flexion.

En parallèle, cet essai permet de valider les modèles d'endommagement développés ici. Toutefois, si le comportement global est correctement représenté, le faciès de fissuration ne peut pas être modélisé par le modèle simplifié multifibre choisi ici. Pour obtenir ce faciès de fissuration il faut modéliser l'ensemble des aciers (longitudinaux et cadres). De plus il est délicat de capter une multifissuration pour un modèle d'endommagement déterministe sans recours à une régularisation (non locale) complexe. Finalement, cette première étude valide qualitativement à la fois les modèles d'endommagement et le protocole expérimental de l'essai de flexion trois points.

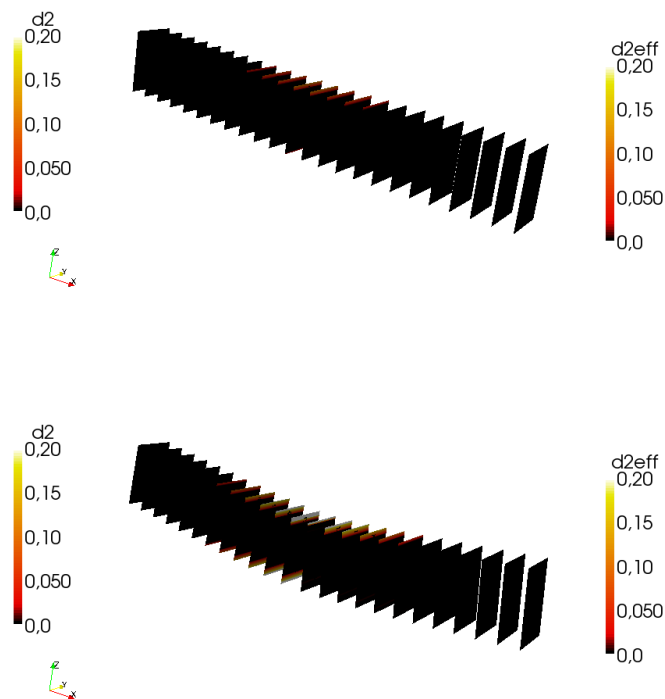


FIGURE 5.40: Carte d'endommagement D_2 et $d_{2\epsilon}$ pour des chargements de 2 et 8 mm -
Modèle d'endommagement sans plasticité ("endo")

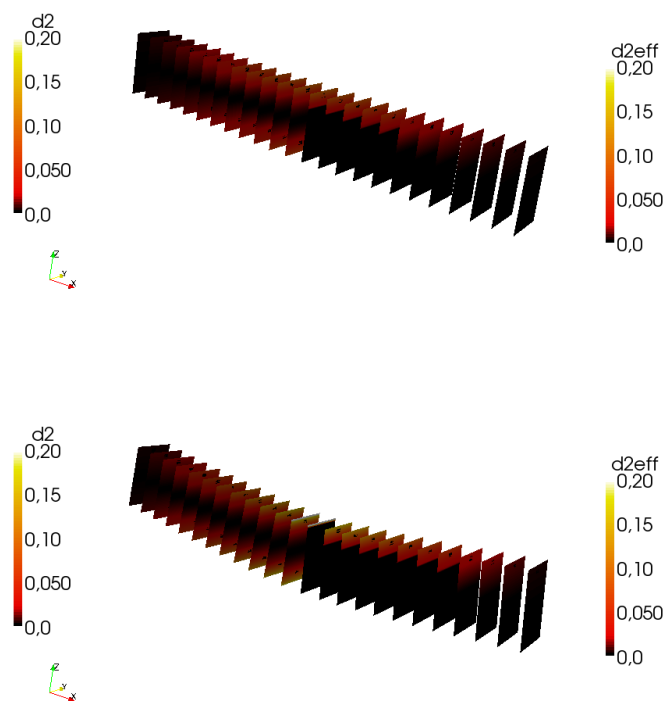


FIGURE 5.41: Carte d'endommagement D_2 et $d_{2\epsilon}$ pour des chargements de 2 et 8 mm - Modèle couplé ("endo-plas")

3 Analyse hybride

3.1 Dimensionnement de la structure et choix de l'instrumentation

Les critères de choix de la structure à étudier sont multiples. En effet, le caractère sismique de l'étude engendre un chargement alterné qu'il faudra appliquer à la structure expérimentale. Ce chargement alterné nécessite des précautions particulières quant aux conditions aux limites à appliquer. Or il existe un banc d'essai de flexion trois points dimensionné pour les chargements alternés : les liaisons pivots sont réalisées aux extrémités par des machoires posées sur des liaisons élastiques [LaB91] offrant un très faible couple équivalent à une liaison pivot. La liaison centrale correspond au point de chargement. La poutre est reliée au vérin par une simple machoire autour d'une fraction de cylindre. La structure expérimentale sera donc une poutre en flexion 3 points. Ceci limite considérablement l'interaction entre ce sous-domaine et le reste de la structure. En effet, il est impossible d'appliquer un déplacement différentiel entre les deux appuis, et le chargement central doit rester perpendiculaire aux appuis. Pour tester les schémas hybrides, il faut pouvoir avoir un couplage fort entre les deux sous-structures. C'est d'ailleurs ce couplage qui justifie l'utilisation de tests hybrides. En effet, si le couplage est faible, c'est-à-dire que le comportement de la structure testée influence faiblement le reste de la structure, il suffit d'un calcul préliminaire purement numérique pour connaître le chargement à appliquer sur la structure expérimentale. Ces diverses contraintes orientent le choix vers un problème relativement simple d'un portique à deux étages avec une travée au premier niveau et deux au second (FIG.5.42). En supposant que la poutre du niveau intermédiaire possède des liaisons pivots avec les poteaux adjacents, elle se retrouve ainsi en flexion trois points. La poutre expérimentale n'est sensible qu'à un chargement sismique vertical. L'amplitude de celui-ci sera choisi pour rester dans les limites admissibles des liaisons élastiques tout en endommageant la structure. De plus, l'essai pseudo-dynamique néglige les effets inertiels sur la poutre expérimentale. Pour que cette hypothèse soit valable, le niveau supérieur est chargé de masses fixes. Toutefois la structure sera aussi soumise à un séisme horizontal. Ce séisme induira de l'endommagement dans les poteaux de la structure. Les deux directions du séisme sont issues du même signal, seule l'amplitude sera adaptée pour obtenir l'endommagement voulu de la structure. Pour des raisons de facilité de fabrication et de compatibilité avec le matériel expérimental, la poutre testée est la même que pour l'étude précédente (FIG.5.1).

Le reste de la structure (poteau et poutre) est conçu avec la même section. Il reste toutefois à dimensionner la masse ajoutée et l'amplitude du séisme. Une analyse modale permet d'obtenir la valeur des premiers modes propres. La valeur de la masse ajoutée permet d'obtenir des modes propres de l'ordre de grandeur d'une structure de génie civil. Les résultats sont exposés ci-dessous (FIG.5.43, tableau TAB.5.4).

Le signal utilisé pour l'excitation sismique est illustré (FIG.5.44). Il servira aux excitations horizontale et verticale avec deux coefficients d'amplification différents (respectivement γ_v et γ_h). Le coefficient vertical est dimensionné pour endommager fortement la poutre testée, avec une flèche maximale inférieure à 10 mm (en valeur absolue). Le

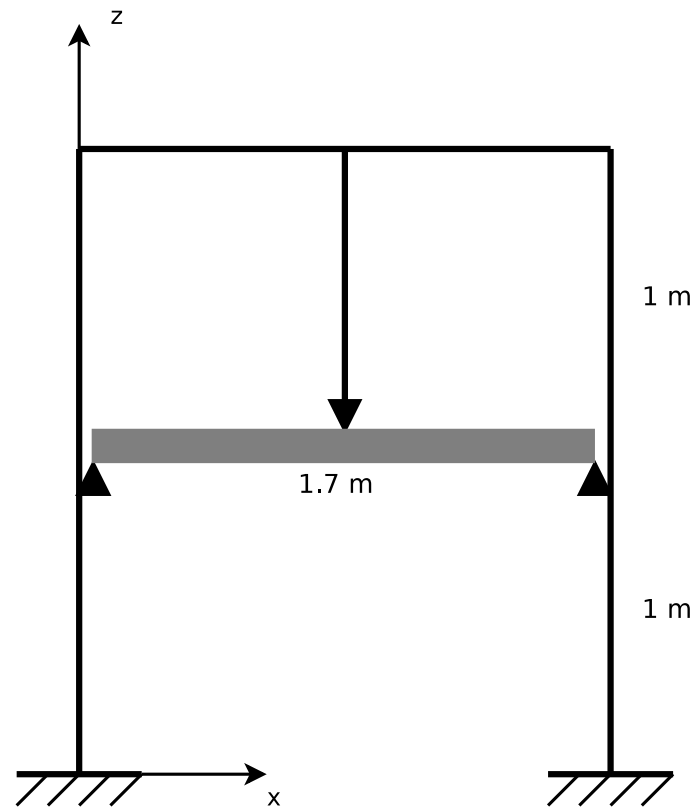


FIGURE 5.42: Structure globale

f_1	4.3734 Hz
f_2	21.53 Hz

TABLE 5.4: Modes propres de la structure

coefficient vertical est choisi pour endommager légèrement les poteaux de la structure numérique.

Pour cela, on modélise entièrement la structure avec les modèles d'endommagement. Une étude paramétrique rapide permet de choisir des coefficients d'amplifications de $\gamma_v = 3$ et $\gamma_h = 0.1$. Ces signaux sont purement numériques et choisis uniquement pour obtenir les déplacements voulus. Ils ne correspondent donc pas à des accélérations réelles. Les cartes d'endommagement et les réponses (FIG.5.45 et FIG.5.46) de la structure sont étudiées ci-dessous.

Pour les analyses suivantes, le modèle d'endommagement avec effet unilatéral et le modèle couplé sont utilisés. Les deux modèles donnent des résultats similaires avec des déplacements du même ordre de grandeur : de -6 mm à 2.5 mm pour les déplacements verticaux et de -4 mm à 3 mm pour les déplacements horizontaux. Le contenu fréquentiel des déplacements verticaux est presque confondu pour les deux modèles mais on remar-

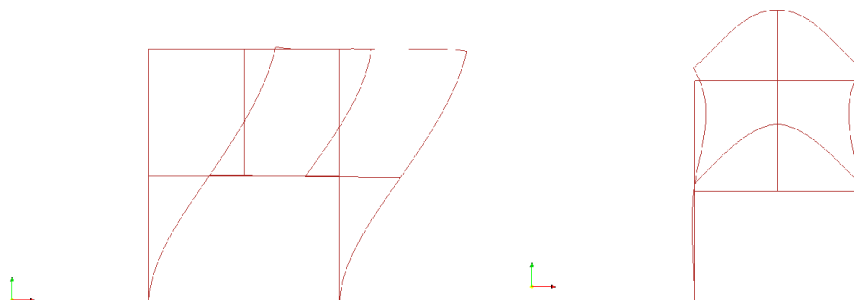


FIGURE 5.43: Modes propres de la structure

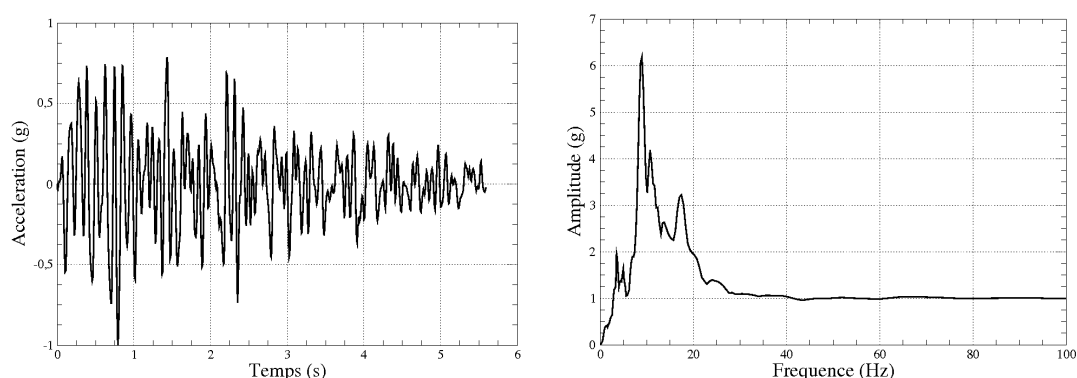


FIGURE 5.44: Signal sismique utilisé (normalisé en g)

que un décalage dans la direction négative pour le modèle d'endommagement. Les déplacements résiduels en fin de séisme sont donc plus importants pour ce dernier. Pour les déplacements horizontaux, les signaux temporels sont confondus mais le contenu fréquentiel montre des amplitudes plus élevées pour le modèle couplé pour des fréquences supérieures à 20Hz.

3.2 Implantation de la méthode de pénalisation

La mise en place de l'analyse hybride nécessite l'implantation de la méthode de pénalisation dans le code de calcul utilisé (ici le code éléments finis Castem du CEA). Comme nous l'avons décrit précédemment, cette méthode est peu intrusive et ne demande que la possibilité d'ouvrir une communication extérieure pour envoyer et recevoir des données. La dernière version de Castem (*Cast3m2010*) permet d'appeler un programme extérieur. Cette fonctionnalité est utilisée afin d'établir une connexion avec l'extérieur.

A la différence d'une simulation numérique classique, la méthode de pénalisation n'autorise le passage au pas de temps suivant seulement si la convergence globale (numérique / expérimentale) est atteinte. Pour cela, on introduit donc un paramètre de convergence qui assure qu'à déplacement égal, la force de réaction expérimentale est suffisamment proche de la réaction numérique de son homologue numérique. Or cette dernière

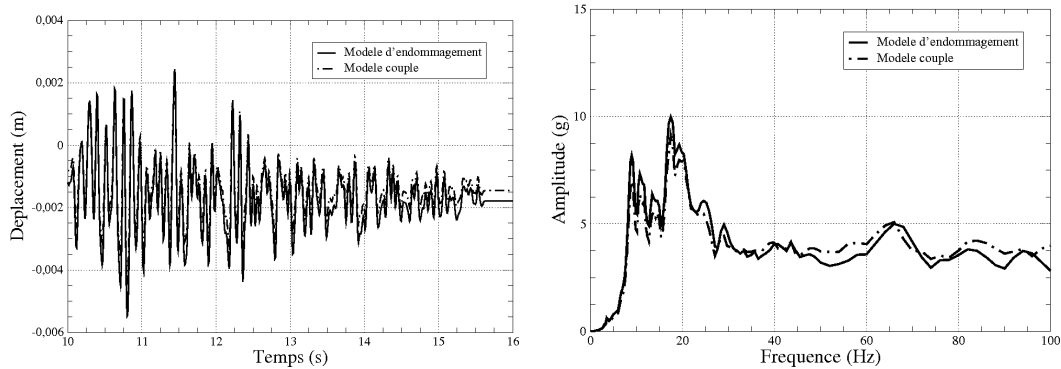


FIGURE 5.45: Etude de la réponse du point milieu de la poutre - Direction verticale

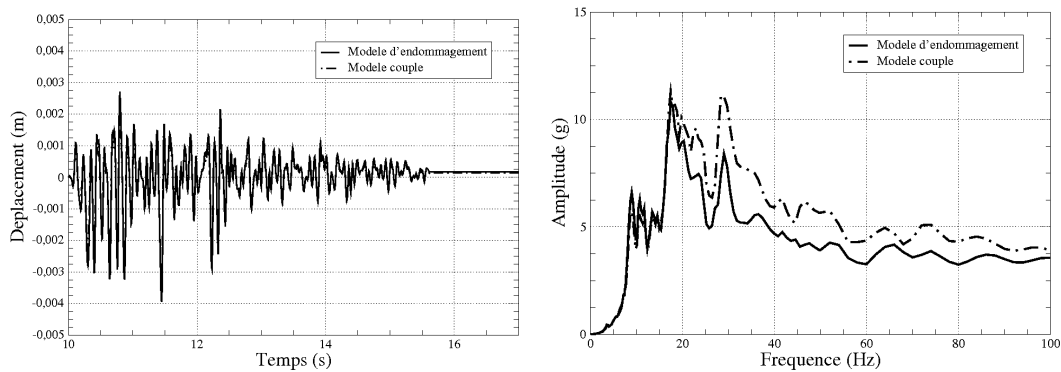


FIGURE 5.46: Etude de la réponse du point milieu de la poutre - Direction horizontale

possède une rigidité supérieure. La méthode de pénalisation correspond à l'ajout de forces externes additionnelles autocomposées qui assouplissent artificiellement la sous-structure numérique correspondant à l'élément testé. A chaque itération globale, ces forces de pénalisation sont actualisées. L'algorithme peut être résumé ainsi :

1. Choix du coefficient de surestimation de la raideur de la structure expérimentale
2. Calcul *PASAPAS* jusqu'à convergence avec les forces de pénalisation actualisées f_p
3. Extraction de la fêche numérique u et de la force de réaction numérique f_{num}
4. Envoi du déplacement u via une fonction extérieure
5. Reception de la force de réaction expérimentale f_{exp} via une fonction extérieure
6. Vérification de la convergence : $\chi = \frac{f_{num} - f_{exp}}{f_{exp}}$
 - (a) Si oui : on autorise le passage au pas de temps suivant en conservant la force de pénalisation
 - (b) Si non : on actualise la force de pénalisation : $f_p = f_p + (f_{num} - f_{exp})$ et on impose la reprise du même pas de temps *REPRISE*.

Initialement la force de pénalisation est nulle. On remarque qu'il y a donc deux niveaux de convergence. Le premier niveau est numérique, il correspond à la convergence

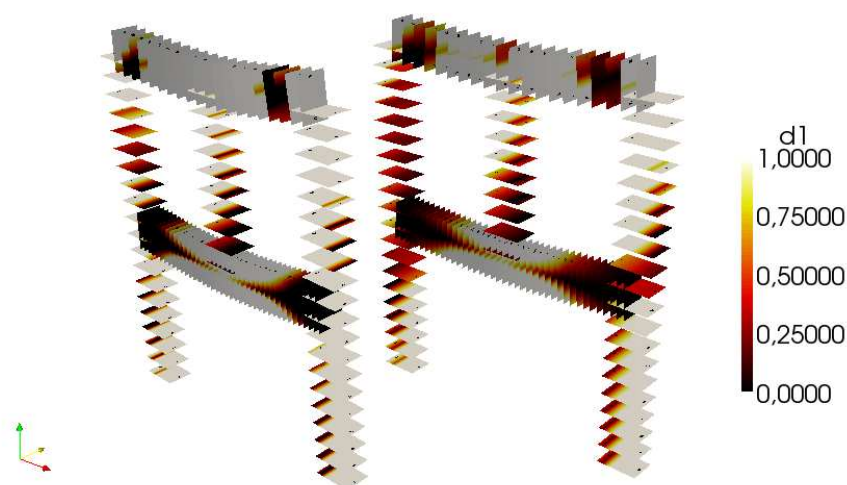


FIGURE 5.47: Carte d'endommagement D_1 (endommagement longitudinal) pour les deux modèles

du calcul avec des forces de pénalisation constantes. Le second est propre à la méthode choisie et correspond à l'obtention des forces de pénalisation équivalente au comportement réel de la poutre expérimentale.

3.3 Protocole expérimental : communication essai/calcul

La première partie du protocole expérimental est l'élaboration de la communication essai/calcul. En effet, le déplacement à imposer à la structure est issu d'un calcul Cast3m, et inversement l'effort de réaction mesuré doit être renvoyé à Cast3m. Pour réaliser cette communication, on utilise une carte de conversion Numérique/Analogique (*Labjack*) (FIG.5.50). Cette carte est reliée à l'ordinateur par câble ethernet et échange donc des données numériques. De l'autre côté, la carte possède des entrées/sorties analogiques (0-5 Volts codé sur 12 bits). Une bibliothèque de fonction *C++* permet d'utiliser la carte facilement. Pour ces essais hybrides, deux fonctions sont développées. La première permet d'envoyer un signal de sortie sous forme de rampe, avec en retour la mesure renvoyée sur une entrée. Ce programme permet d'effectuer le chargement et la mesure de la force de réaction en fin de chargement. Le second programme est simplement un trigger permettant de déclencher un appareil photographique numérique. Ces deux programmes écrits en *C++* sont utilisés dans Cast3m comme fonctions externes. Finalement, le protocole de communication est résumé sur la figure FIG.5.51. Le calculateur (ordinateur sous linux possédant Castem) est relié à la carte de conversion *Labjack*. Cette dernière constitue l'interface de communication entre Castem et la plateforme expérimentale. Sa fonction première est d'envoyer le déplacement à imposer à l'électronique MTS qui commande le vérin. En retour, celle-ci renvoie à la *Labjack* la force et le déplacement (via un

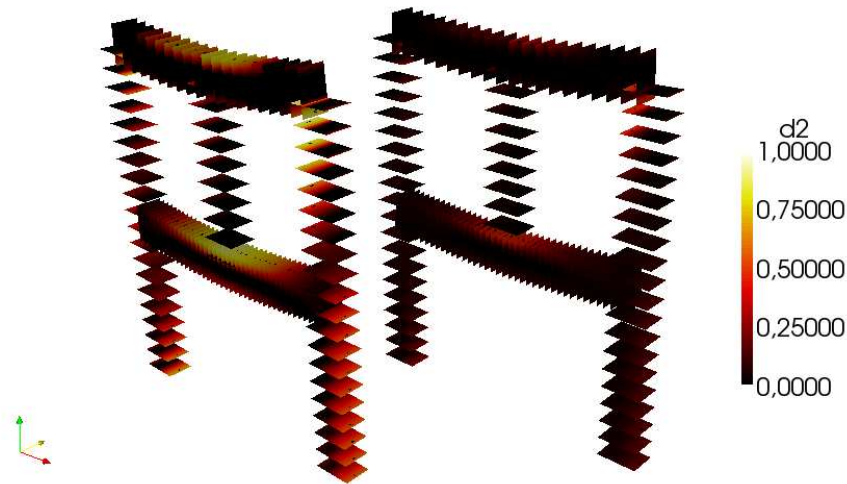


FIGURE 5.48: Carte d'endommagement D_2 (endommagement transversal) pour les deux modèles

capteur de déplacement extérieur LVDT) mesurés. Cette communication est effectuée en 0-5 V. En parallèle, la carte *Labjack* pilote le déclenchement de l'appareil photographique (utilisé pour la corrélation d'images). L'électronique MTS pilote le vérin en l'asservissant sur la tension extérieure provenant de la carte *Labjack*. L'utilisation d'une telle carte permet de s'affranchir d'un logiciel dédié à la conversion numérique/analogique.

3.4 Instrumentation

L'instrumentation de la partie expérimentale est relativement simple. L'effort est directement mesuré par la cellule d'effort du vérin. Le déplacement quant à lui ne peut être extrait du capteur interne au vérin. En effet, le vérin est bi-rotulé et présente donc des jeux non négligeables dans les rotules. Il est donc nécessaire de placer un capteur extérieur. Ainsi un capteur de déplacement LVDT mesure le déplacement de la plaque supérieure de la mâchoire centrale relativement à la dalle. Ce capteur permet d'éliminer le jeu dans les rotules du vérin et les déplacements dus à la déformation du portique de réaction. Ces deux mesures (effort de réaction et flèche) sont les seules indispensables à l'analyse hybride.

Le protocole expérimental est complété par une mesure de champs. Une analyse par corrélation d'images est réalisée sur la zone centrale de la poutre. Cette zone correspond à la zone de plus forte probabilité d'ouverture de fissure. Cette corrélation d'images nécessite la réalisation d'un mouchetis sur cette zone. L'éclairage étant insuffisant, on ajoute un éclairage d'appoint homogène. Les prises de vue sont synchronisées directement par le calcul globale.

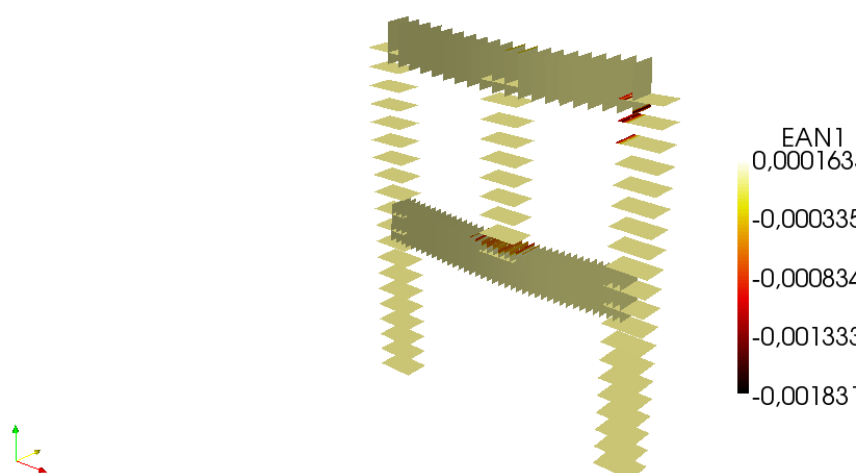


FIGURE 5.49: Déformations permanentes dans le portique pour le modèle couplé

3.5 Campagne expérimentale

Malgré l'analyse hybride qui permet d'étudier expérimentalement juste une partie de la structure, l'éprouvette reste d'une dimension métrique (1m64), ce qui rend les manipulations délicates. La campagne expérimentale dynamique est donc limitée à 4 poutres. Les deux modèles sont donc testés deux fois pour confirmer les résultats et notamment l'influence des aléas de fabrication sur le comportement global de la structure. Les deux essais réalisés avec le modèle couplé sont strictement identiques, tandis que pour les essais avec le modèle d'endommagement, les paramètres de l'algorithme hybride sont modifiés : la raideur de la poutre expérimentale est surestimée (ce qui permet d'éviter les overshots) avec un facteur 10 pour la poutre 4 et d'un facteur 1.2 pour la poutre 8. Les différents essais sont résumés dans le tableau TAB.5.5. Ces résultats sont ensuite comparés avec les analyses purement numériques. L'utilisation de la corrélation d'images nous permet d'étudier le faciès de fissuration et de confirmer les observations de l'étude cyclique réalisée précédemment. Les prises de vue sont synchronisées directement par le logiciel élément fini Cast3m. Pour les premiers essais, la synchronisation est effectuée à chaque pas convergé. Toutefois, le nombre de photographies est trop important et l'exploitation ne peut être réalisée que sur quelques prises. Ainsi, pour les seconds essais la synchronisation est effectuée lors du franchissement des déplacements maximaux (en valeur absolue).

3.6 Analyses des résultats des tests hybrides

Cette section aborde les résultats expérimentaux des tests hybrides.

*Analyse de l'endommagement des structures de génie civil :
Techniques de sous-structuration hybride couplé à un modèle d'endommagement anisotrope*

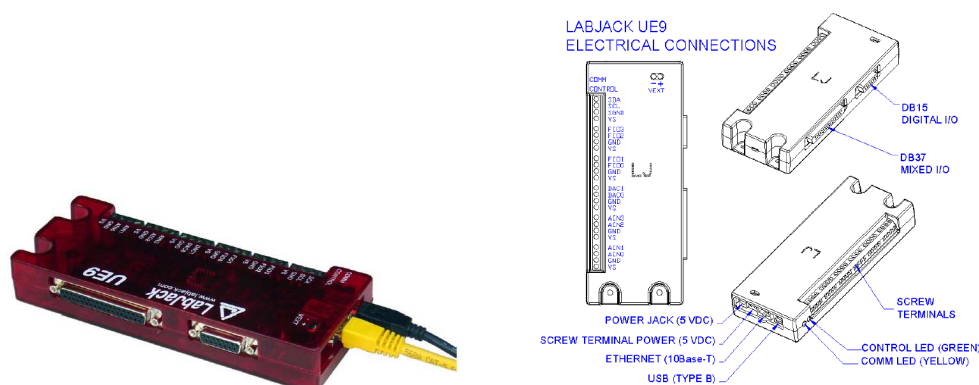


FIGURE 5.50: Carte d'acquisition Labjack

Poutre 1	Analyse conventionnelle, Modèle d'endommagement
Poutre 2	Analyse conventionnelle, Modèle couplé
Poutre 4	Analyse hybride, Modèle d'endommagement, Facteur d'amplification : 10
Poutre 5	Analyse hybride, Modèle couplé, Facteur d'amplification : 10
Poutre 7	Analyse hybride, Modèle couplé, Facteur d'amplification : 10
Poutre 8	Analyse hybride, Modèle d'endommagement, Facteur d'amplification : 1.2

TABLE 5.5: Différents essais réalisés avec les poutres en béton armé

Analyse du déplacement du point central de la poutre testée - Dans un premier temps intéressons nous aux résultats des analyses hybrides. Pour cela, nous étudions la réponse du point central de la poutre expérimentale. La réponse (en termes de déplacement) est analysée dans les directions verticale (FIG.5.52) et horizontale (FIG.5.53) et dans les domaines temporel et fréquentiel.

Les deux simulations complètement numériques minimisent le déplacement maximal et donc l'endommagement réel. Ainsi, les tests hybrides endommagent d'avantage la structure lors du pic de déplacement, influençant la suite de la réponse. Les déplacements résiduels en fin de séisme diffèrent : les analyses numériques avec les modèles d'endommagement et couplé donnent des déplacements de -1.8mm et de -1.5mm respectivement ; les tests hybrides donnent des déplacements plus importants : -2.9mm pour le modèle d'endommagement et -2.5 mm pour le modèle couplé. Le contenu fréquentiel des réponses est aussi affecté : les tests hybrides ont des amplitudes plus importantes mais très proches quelques soient les modèles utilisés pour la partie numérique. Les modélisations numériques minimisent donc les déplacements, ce qui va dans le sens contraire de la sécurité. On remarque que les essais sur les poutres 5 et 7 (modèle couplé) donnent des résultats identiques tandis que les essais sur les poutres 4 et 8 diffèrent. La poutre 8 semble plus souple et présente une flèche sous poids propre plus importante.

Les observations pour la réponse horizontale sont contraires. En effet, les déplace-

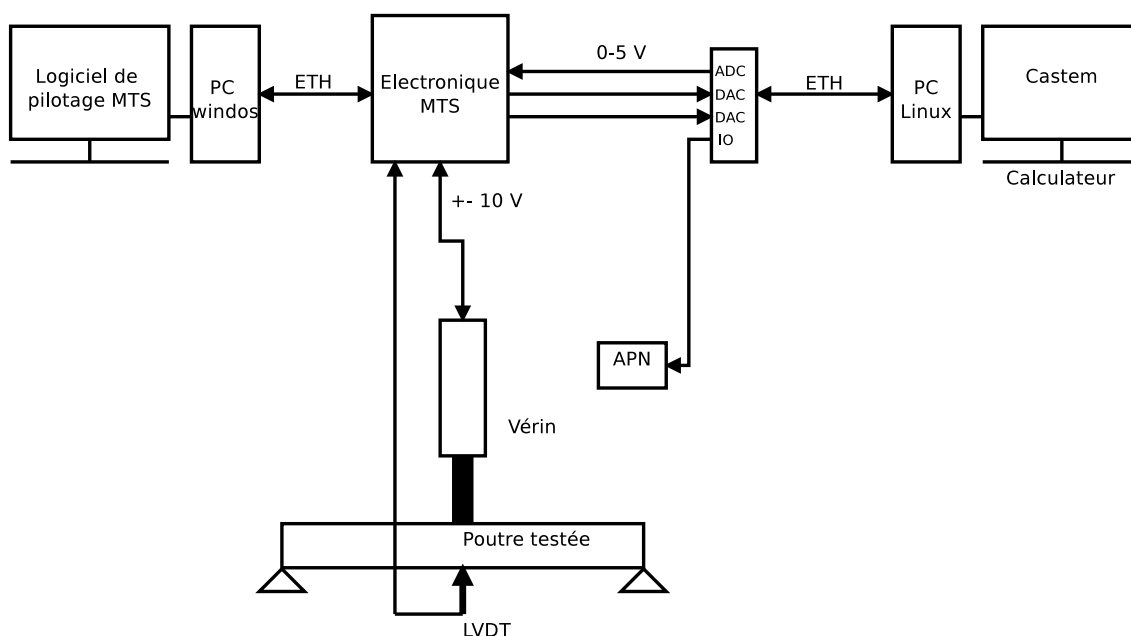


FIGURE 5.51: Protocole de communication entre ordinateur et la plateforme d'essai

ments obtenus par les tests hybrides sont moins importants. Les amplitudes du contenu fréquentiel sont beaucoup plus faibles (de presque 50%) pour les tests hybrides que pour les analyses numériques. On remarque cependant que les résultats des différents tests hybrides sont très proches.

Dans tous les cas, il faut remarquer que les résultats des tests hybrides avec le modèle couplé (poutres 5 et 7) sont quasiment confondus bien que les deux poutres ne soient pas issues du même coulage. Ainsi, la réponse globale de la structure est très peu sensible aux caractéristiques du béton utilisé pour la fabrication de la poutre (dans un certain domaine).

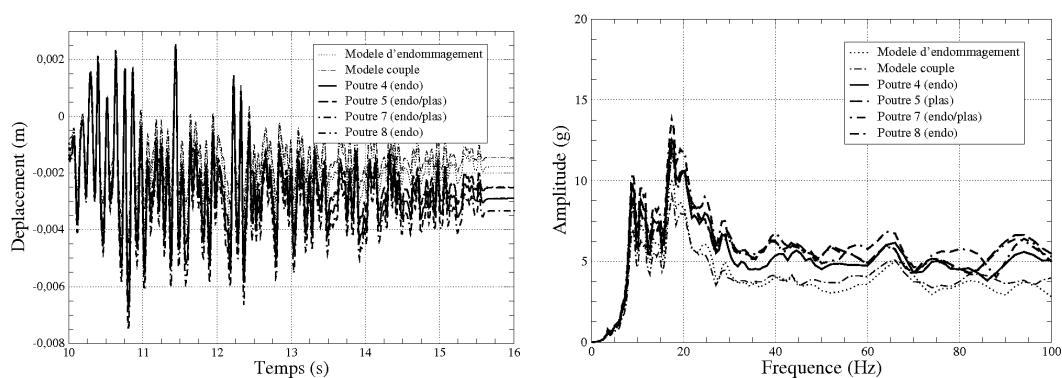


FIGURE 5.52: Etude de la réponse du point milieu de la poutre - Direction verticale

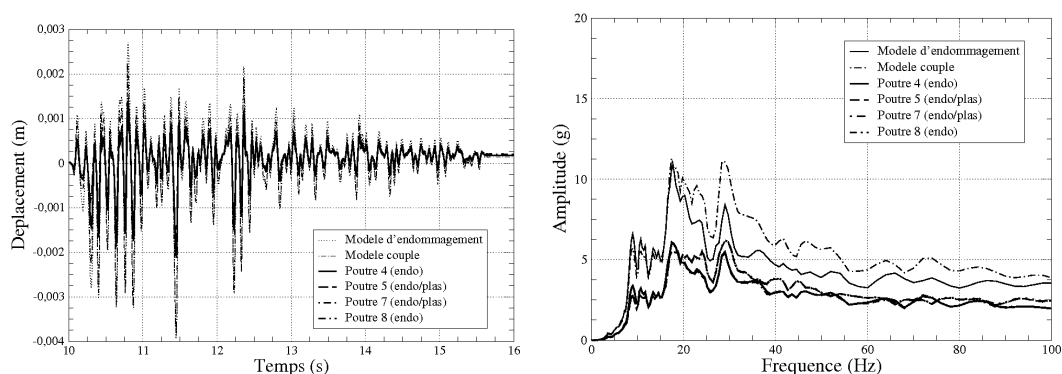


FIGURE 5.53: Etude de la réponse du point milieu de la poutre - Direction horizontale

Analyse du comportement des poutres -

La figure FIG.5.56 montre le comportement des poutres expérimentales en traçant la force de réaction en fonction de la flèche. Le comportement des différentes poutres est très similaire. La force maximale et les seuils de plasticité sont identiques car gouvernés par les aciers. Or les incertitudes et les variations sur les aciers sont très faibles. Les différences sont plus importantes pour la raideur initiale et la limite élastique des poutres. En effet, ces paramètres sont influencés par la qualité du béton. Or les aléas de fabrication sont plus importants. Toutefois, l'analyse précédente montre la faible influence de ces paramètres sur le comportement global de la structure (du moins vis-à-vis des variables observées).

3.7 Étude du comportement de l'algorithme de couplage

Nous profitons de ces essais hybrides pour observer le comportement de l'algorithme de couplage. Le tableau TAB.5.6 résume le nombre d'itérations hybrides (donc de commande envoyée à la plateforme expérimentale) pour les différentes essais hybrides. Plus de 3000 itérations sont nécessaires pour un total de 966 pas de calcul, si la raideur de la poutre est surestimée avec un facteur 10 (poutres 4, 5 et 7), et seulement 2500 pour une facteur 1.2.

Poutre étudiée	Nombre d'itération
Poutre 4	4374
Poutre 5	3469
Poutre 7	3473
Poutre 8	2563

TABLE 5.6: Nombre d'itérations hybrides totales

La figure FIG.5.57 montre le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir la convergence pour un pas de temps. La nécessité d'itérer plus de 10 fois à un pas de temps est très faible pour une surestimation d'un facteur 10. La figure FIG.5.58 illustre les erreurs

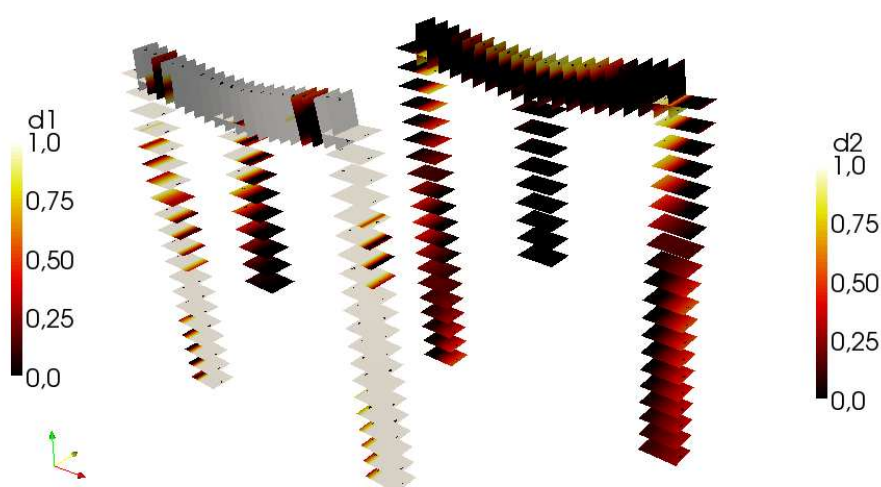


FIGURE 5.54: Cartes d'endommagement D_1 et D_2 pour la simulation avec modèle d'endommagement

résiduelles à convergence en fonction du temps. L'erreur, bien que toujours inférieure au critère de convergence fixé à 0.01 pour ces essais, est plus ou moins aléatoire. Le fait d'itérer permet d'empêcher la propagation de l'erreur et de faire diverger la simulation.

Le chargement appliqué lors des itérations semble être seulement dilaté temporellement (FIG.5.59-gauche) mais si on observe l'histoire des déplacements lors du calcul d'un pas de temps (FIG.5.59-droite), on s'aperçoit que le chargement est une suite de créniaux d'amplitude décroissante jusqu'à convergence. Chaque plateau correspond au calcul numérique effectué avec la force de réaction mesurée à la fin du chargement.

L'observation de la force de réaction (FIG.5.60) met en valeur l'existence de pic d'effort à la fin de chaque saut de déplacement. Ce phénomène est due à des effets de vitesse. Cet artefact est évité en mesurant l'effort quelques millisecondes après l'application du chargement. Il est possible de le diminuer en appliquant une rampe plus faible pour le chargement, mais cela induit un temps de réalisation de l'essai hybride plus long.

3.8 Ré-analyse numérique de la poutre

Pour comprendre les différences entre les analyses numériques et les analyses hybrides, nous allons simuler les poutres testées expérimentalement sous le chargement extrait des simulations hybrides et avec les modèles respectifs d'endommagement et couplé. La figure FIG.5.61 montre le résultat de la simulation de la poutre 4 avec le modèle d'endommagement. Plusieurs différences sont flagrantes. D'abord le comportement élastique est mal modélisé, les paramètres "matériau" utilisés ne sont pas représentatifs du matériau réel. La raideur du béton est considérablement sur-estimée (environ 30%). Une ré-identification des paramètres "matériau" du béton permettrait une meilleur représenta-

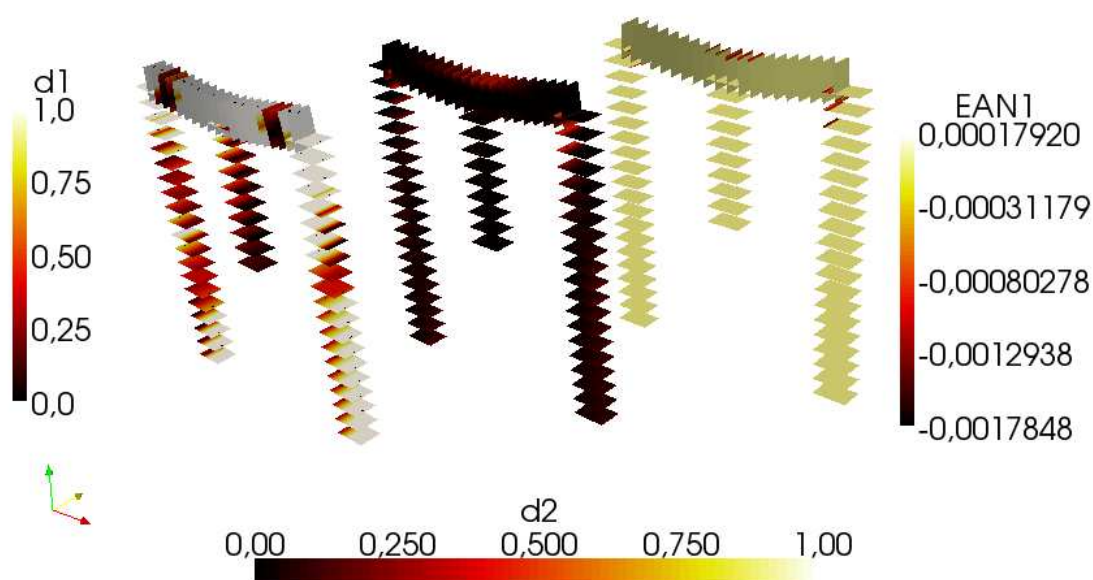


FIGURE 5.55: Cartes d'endommagement D_1 et D_2 et de plasticité ε_1^p pour la simulation avec modèle d'endommagement

tion du comportement initial de la poutre. Toutefois, l'erreur la plus pénalisante vient de la modélisation partielle des décharges (et recharges). En effet, la modélisation linéaire et élastique (et donc sans hystérésis) provoque un surchargement de la poutre. Celle-ci reprend donc plus d'effort que la poutre réelle, amoindrissant l'endommagement dans le reste de la structure. C'est donc ce phénomène qui provoque une estimation trop faible des déplacements résiduels post-sismiques.

La figure FIG.5.62 montre la réponse numérique du modèle couplé soumis au déplacement obtenue par la simulation hybride sur la poutre 5. Les mêmes phénomènes que précédemment sont observés.

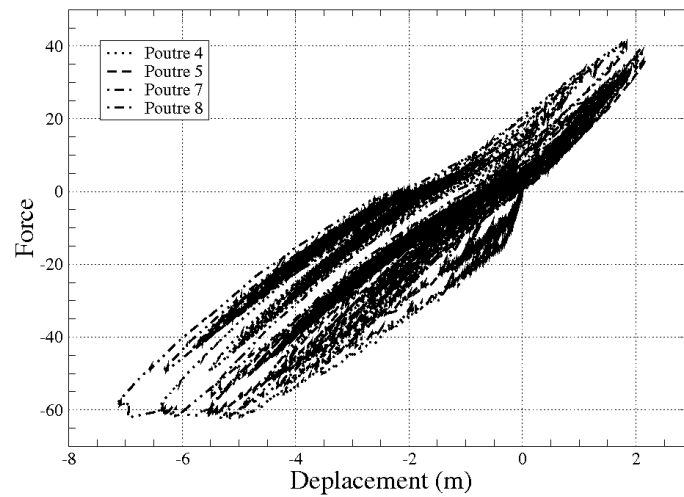


FIGURE 5.56: Réponses expérimentales force/déplacement

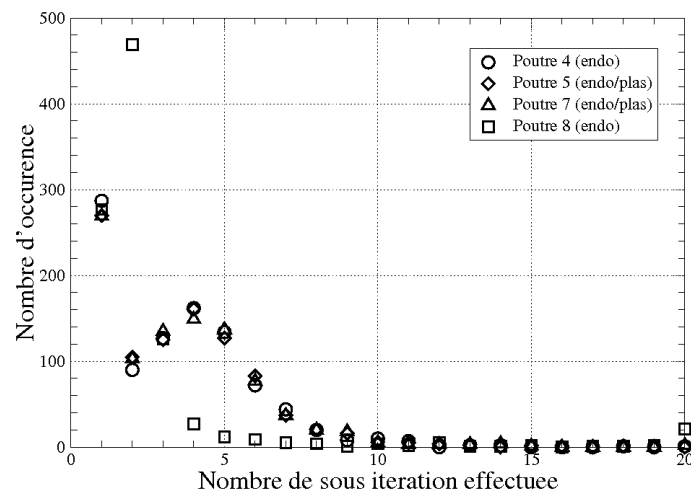


FIGURE 5.57: Nombre d'itérations hybride nécessaire pour la convergence

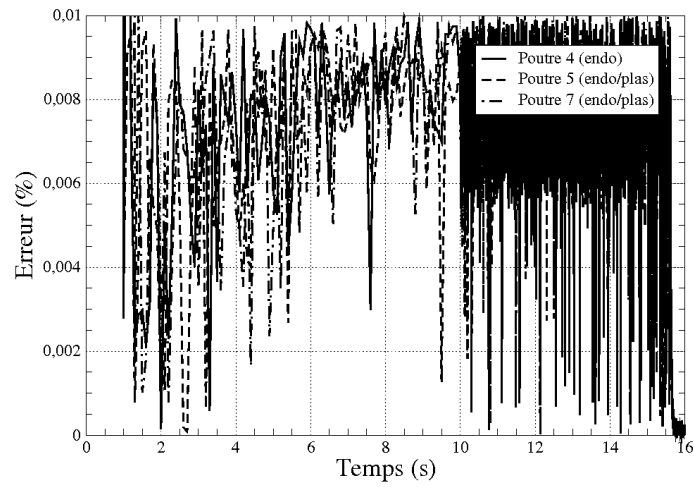


FIGURE 5.58: Erreur à convergence

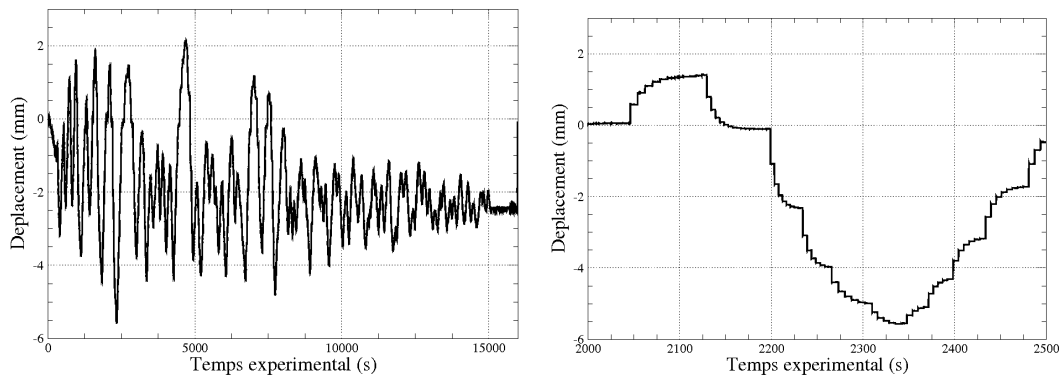


FIGURE 5.59: Déplacement appliqué réellement à la poutre expérimentale

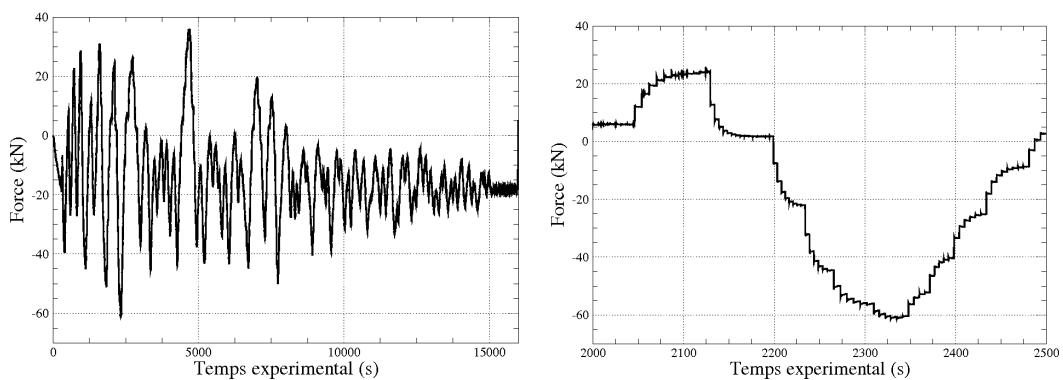


FIGURE 5.60: Force mesurée sur la poutre expérimentale

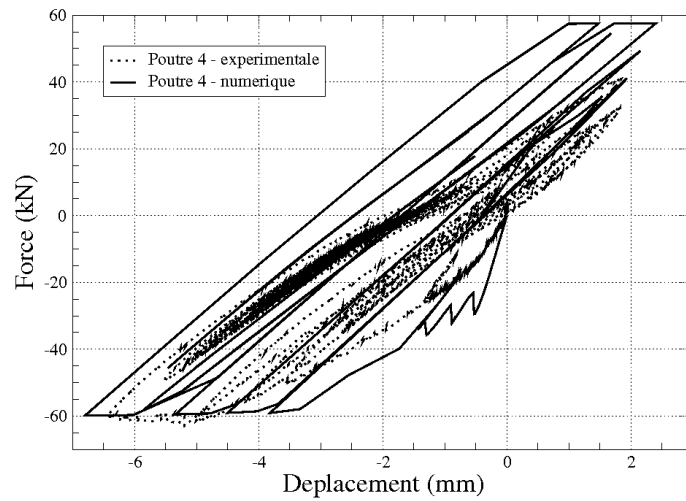


FIGURE 5.61: Analyse numérique sous chargement réel de la poutre 4

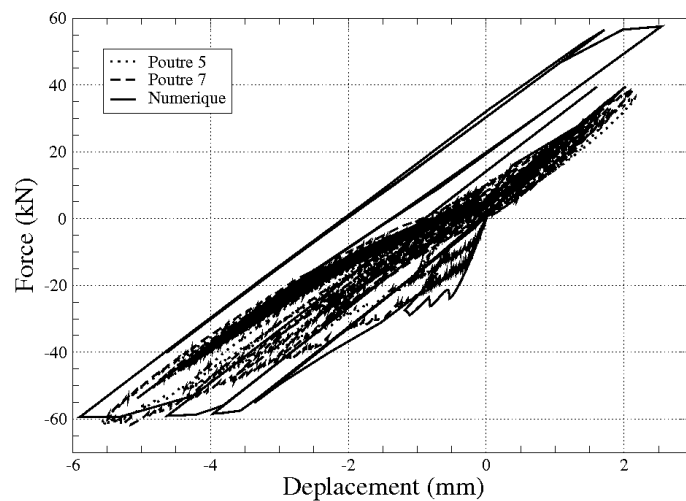


FIGURE 5.62: Analyse numérique sous chargement réel des poutres 5 et 7

4 Bilan et conclusion

Ce chapitre met en œuvre le travail développé dans les premiers chapitres : le développement d'une méthode d'analyse hybride numérique/expérimental et d'un modèle d'endommagement pour des simulations sismiques. Avant de réaliser les essais hybrides, le comportement de la structure expérimentale est étudié afin de comprendre les mécanismes de fissuration provoquant l'endommagement de l'élément structural. La corrélation d'images permet d'automatiser le suivi de la fissuration, ce qui permet de mettre en valeur des processus concurrents : la fissuration verticale qui est activée dès de faibles chargements, et la fissuration de cisaillement (oblique) qui prend le dessus pour les chargements d'amplitudes plus importantes. L'application de chargements cycliques permet d'observer les refermetures de fissures au cours d'un chargement cyclique. La plastification des aciers au niveau d'une fissure empêche cette dernière de se refermer.

Ensuite, un portique multi-étagé est simulé grâce à une décomposition hybride : une poutre de ce portique est testée expérimentalement tandis que le reste est simulé successivement avec les deux versions du modèle d'endommagement (endommagement simple et couplage endommagement plasticité). Ces tests hybrides ont un double objectif : la validation de la méthode choisie pour l'hybridation de la simulation et l'évaluation des modèles d'endommagement. La méthode de simulation hybride par pénalisation d'un modèle globale montre de bonnes caractéristiques de convergence sans devoir définir des paramètres a priori conditionnant la convergence globale (pas de temps ...). Seule la raideur initiale de la structure doit être connue (du moins approximativement) pour des éléments adoucissants. Dans le cas contraire, une surestimation importante (facteur supérieur à 10) du comportement élastique peut être utilisée sans toutefois pénaliser considérablement le temps de simulation.

Dans ce cas d'étude, les modèles d'endommagement montrent leur limite par l'absence de prise en compte des non-linéarités lors des décharges (ou recharges dans le domaine élastique écroui). Ces limites semblent pénalisantes car elles sous-estiment les déplacements de la structure.

Chapitre 6

De la quasi-statique vers le temps réel

Les essais hybrides permettent de coupler des modèles numériques à un test expérimental afin de profiter des avantages des deux méthodes. Mais, selon la structure et les matériaux testés, une méthode hybride pseudo-dynamique peut rapidement montrer ses limites. En effet, la phase d'attente expérimentale (temps nécessaire au calcul numérique) peut engendrer des phénomènes de relaxation : la partie expérimentale est maintenue à un déplacement imposé. Cette relaxation peut avoir des conséquences non négligeables sur la mesure de l'effort de réaction. Ainsi des méthodes plus complexes permettent d'éviter ces temps de relaxation : les méthodes hybrides pseudo-dynamiques continues. De plus, si le matériau possède un comportement visco-dépendant (visco-élastique, visco-plastique, visco-endommageable), la vitesse de chargement doit être respectée : les tests hybrides en temps réel ont donc été développés. Afin de montrer la faisabilité d'analyses hybrides temps réel en couplant un modèle complexe, une collaboration avec l'Université de Boulder est développée. Ainsi, le modèle d'endommagement couplé est implanté dans le code temps réel pour réaliser une série d'essais.

Sommaire

1	Limites des essais hybrides pseudo-dynamiques	179
2	Essais pseudo-dynamiques continus	180
3	Essais hybrides temps réel	182
3.1	Spécificités matériels	183
3.2	Spécificités logiciels	183
3.3	Application : Portique multiétagé de Ghannoum [SHK ⁺ 11]	184
3.4	Simulation hybride sur table vibrante	185
3.5	Difficultés liées au temps réel	186

1 Limites des essais hybrides pseudo-dynamiques

Les essais hybrides pseudo-dynamiques permettent de s'affranchir de toutes contraintes liées au temps de calcul du domaine numérique. Ainsi, quelque soit la complexité de la modélisation adoptée, le calcul a le temps de converger. Si cet aspect est précieux pour le domaine numérique, il peut être préjudiciable pour le domaine expérimental.

En effet, le chargement réellement appliqué à la structure expérimentale est en fait une succession de rampe et de plateau. La rampe permet d'effectuer le chargement de la consigne (entre deux pas de temps ou deux incréments) sans induire d'effet dynamique ni de vibration dans la structure. La durée (et donc la pente) de cette rampe résulte de l'optimisation entre le temps de charge minimum pour conserver les effets dynamiques négligeables. Le plateau maintient la consigne constante, en déplacement ou contraintes selon le mode de pilotage de l'essai, pendant que le calcul est effectué. A priori, la durée du plateau est variable et dépend du temps de calcul pour chaque pas (ou itération).

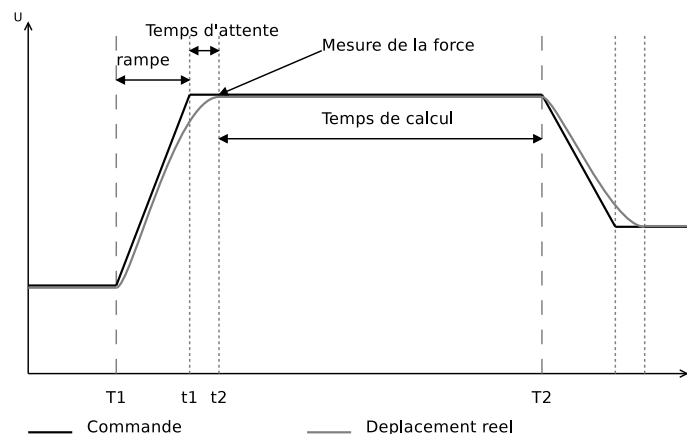


FIGURE 6.1: Trajet de chargement expérimental pour un essai hybride pseudo-dynamique

La phase d'attente contient une première partie correspondant à l'attente pour que le vérin atteigne la commande. Ce temps peut être considérablement réduit à quelques millisecondes avec un correcteur PID correctement réglé. Il est négligeable comparé avec le temps d'exécution du calcul. L'ordre de grandeur de ce dernier est plutôt la dizaine de secondes ou la minute que le millième de seconde.

Ce temps de latence peut être préjudiciable, notamment pour des structures en béton armé. En effet, à des niveaux de chargements tels que ceux appliqués pour une simulation sismique, la relaxation de la structure n'est plus négligeable, et le temps de latence provoque une baisse sensible de l'effort. Cela peut altérer la suite de la simulation. Il est donc primordial de diminuer voire supprimer ce temps de latence.

2 Essais pseudo-dynamiques continus

Pour éliminer ces temps de latence, Magonette propose d'effectuer un essai dit continu : l'ensemble rampe et plateau (FIG.6.2) est remplacé par un chargement linéaire ou non (FIG.6.3). L'essai n'est donc plus soumis à des chargements constants non réels.

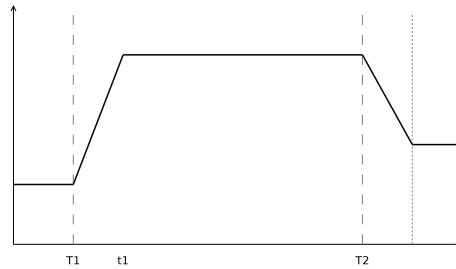


FIGURE 6.2: Commande pour les tests hybrides pseudo-dynamiques

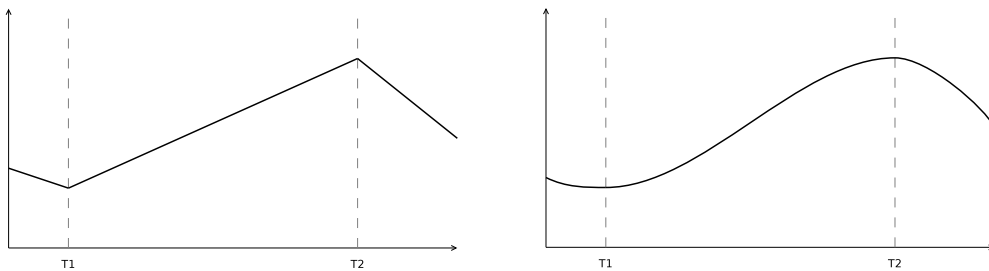


FIGURE 6.3: Commande pour les tests hybrides continus

Plusieurs points importants sont à remarquer : la commande n'est atteinte qu'en fin de pas (le calcul ne peut pas être effectué) et il faut connaître la commande au pas $n+1$ dès le pas n . Pour réaliser ces essais il faut donc modifier le schéma de communication classique (FIG.6.4).

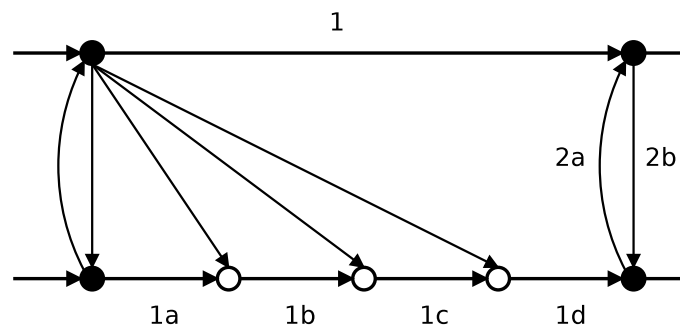


FIGURE 6.4: Algorithme de communication parallèle échelonné

La première solution qui s'avère la plus simple (FIG.6.5) est donc d'utiliser l'information expérimentale du pas $n - 1$. Ainsi le calcul est en avance sur l'essai et le pilotage de ce dernier peut être continu sans devoir attendre le calcul numérique. Cette méthode explicite demande de dilater le temps pour permettre au calcul d'être effectué lors du chargement expérimental entre deux pas de temps. Le protocole se résume donc par l'algorithme

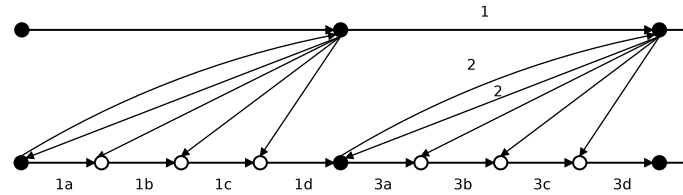


FIGURE 6.5: Algorithme de communication parallèle avec décalage

suivant :

1. La structure expérimentale est chargée jusqu'au déplacement $U(n)$. Simultanément, le calcul du pas $n + 1$ est réalisé avec comme condition d'interface la mesure de l'effort au temps $n - 1$.
2. Échange des conditions d'interfaces : la force mesurée $F(n)$ est envoyée au calcul ; le déplacement calculé $U(n)$ est envoyé à la plateforme d'essai.
3. La structure expérimentale est chargée jusqu'au déplacement $U(n + 1)$. Simultanément, le calcul du pas $n + 2$ est réalisé avec comme condition d'interface la mesure de l'effort au temps n .
4. ...

Cette procédure n'est toutefois pas satisfaisante à cause du décalage temporel des conditions d'interface. Pour améliorer ce schéma, il est possible de réaliser des sous-itérations expérimentales, permettant de mettre à jour les conditions d'interfaces au cours des itérations numériques.

Une amélioration majeure de l'algorithme initial de Gravouil utilisé pour les tests hybrides pseudo-dynamiques est proposée par Pegon et Magonette [PM02]. L'idée est d'entrelacer deux schémas d'intégration temporelle pour la partie numérique. Le premier reste identique au cas classique, le second possède un pas de temps double au premier, ce qui permet de prédire les conditions d'interfaces expérimentales. De plus cette variante conserve la caractéristique de stabilité du schéma original : le schéma global est stable tant que le schéma d'intégration au niveau expérimental est stable.

Le protocole se résume donc par l'algorithme suivant :

1. Réalisation simultanée de :
 - Calcul du pas de temps $n + 1$ à partir du pas $n - 1$: $\tilde{u}(n + 1)$.
 - Calcul du pas de temps n à partir du pas $n - 1$: $u(n)$.
 - $\tilde{u}(n)$ est imposé à la structure expérimentale
2. Échange des conditions d'interfaces :

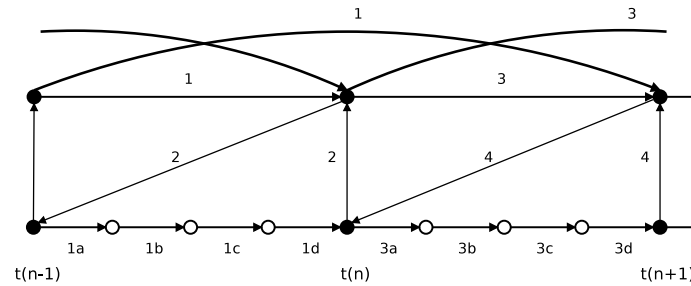


FIGURE 6.6: Algorithme de communication parallèle entrelacée

- $\tilde{u}(n+1)$ est envoyé à la plateforme d'essai.
 - $F(n)$ est envoyé au calcul
3. Réalisation simultanée de :
- Calcul du pas de temps $n+2$ à partir du pas n : $\tilde{u}(n+2)$.
 - Calcul du pas de temps $n+1$ à partir du pas n : $u(n+1)$.
 - $\tilde{u}(n+1)$ est imposé à la structure expérimentale
4. ...

Les méthodes d'analyse hybride continue permettent d'éviter des phénomènes parasites tels que la relaxation mais imposent des techniques plus complexes : l'entrelacement de deux schémas d'intégration nécessite l'usage de deux calculateurs, donc une double charge de calcul ; la synchronisation des trois processus demande la connaissance des temps de calcul ... Enfin, les tests continus possèdent encore un facteur de dilatation temporelle important : les effets dus à la vitesse sont quasiment nuls sur la structure expérimentale et exige donc une prise en compte numérique (de même que pour les essais pseudo-dynamiques). Or certains phénomènes dus à la vitesse de chargement sont difficilement modélisables (dissipations) et certains matériaux présentent une visco-élasticité (amortisseurs sismiques). L'étude de telles structures nécessite de respecter la dimension temporelle : les essais doivent être réalisés en temps réel.

3 Essais hybrides temps réel

La prise en compte de la globalité du comportement d'une structure nécessite l'application du chargement réel. Ainsi, les phénomènes visqueux (quelque soit leur origine) et dissipatifs exigent d'appliquer le chargement en temps réel [GSH⁺11]. Si cela est facilement réalisable pour des essais classiques (à conditions de posséder des vérins rapides et l'électronique adéquate), le problème se complique considérablement pour la réalisation d'essai hybride. Cette section s'attache à présenter les différentes problématiques associées aux simulations hybrides en temps réel.

Analyse de l'endommagement des structures de génie civil :

Techniques de sous-structuration hybride couplé à un modèle d'endommagement anisotrope

3.1 Spécificités matériels

La réalisation d'un essai hybride en temps réel cumule les contraintes d'un essai dynamique classique et ceux de la communication avec un ordinateur. En effet, l'application de sollicitations dynamiques impose l'utilisation de vérins dynamiques possédant une vitesse de déplacement élevée. Le groupe hydraulique associé doit évidemment pouvoir fournir le débit suffisant pour piloter le vérin.

En plus de ces contraintes propres à tout essai dynamique (mur de réaction, table vibrante), il faut synchroniser précisément les échanges entre la structure modélisée et la structure testée. Pour cela, la chaîne de communication doit être contrôlée et optimisée. Contrairement aux réseaux de communication classiques (éthernet) le réseau utilisé pour un test hybride doit être non seulement rapide mais aussi déterministe. La rapidité des communications est atteinte grâce à la fibre optique. Un réseau du type SCRAMNET permet de contrôler précisément la synchronisation de l'envoi et de la réception des données.

Le temps de calcul doit lui aussi être parfaitement contrôlé. Pour optimiser celui-ci, il faut utiliser un ordinateur puissant et rapide (cluster ou ordinateur équipé d'un processeur multi-cœurs cadencé à une fréquence élevée). Mais quelque soit la puissance d'un outil informatique, la gestion des opérations des communications ne peut être correctement contrôlée que par un système d'exploitation dit temps réel (Real Time Linux par exemple).

La réalisation d'essai hybride demande donc premièrement un équipement matériel spécifique. Mais les efforts doivent aussi être effectués du côté logiciel.

3.2 Spécificités logiciels

La rapidité du calcul de la structure numérique dépend évidemment du ordinateur choisi mais aussi de la modélisation adoptée. Ainsi, un effort important doit être effectué sur le logiciel utilisé et sur la modélisation choisie.

Effectivement, le nombre d'opération doit être minimisé au maximum. Ainsi l'université de Boulder décide de développer un code élément fini dédié aux simulations hybrides : *Mercury* [SKH11][Kan08]. Ce logiciel intègre des méthodes simplifiées pour l'étude des structures de génie civil de type poteau-poutre. La modélisation volumique des éléments est évidemment banni car beaucoup trop coûteuse en temps de calcul. Ainsi, l'utilisation conjointe de la méthode multifibre avec des éléments basés sur la souplesse permet de baisser considérablement le nombre de points de Gauss nécessaire. Toutefois pour combler les lacunes des éléments de souplesse, les zones fortement endommagées sont modélisées par des éléments basés sur la rigidité (FIG.6.7). Enfin, les non-linéarités telles que le glissement acier/béton sont prises en compte par des éléments de longueurs nulles [Elwood, 2002].

Cette stratégie de calcul permet de réduire le coût de calcul. Toutefois, les modèles matériaux utilisés doivent être précis pour prendre en compte les phénomènes internes. Ainsi, le logiciel intègre le modèle de Menegotto-Pinto [MP73] pour les aciers et le modèle phénoménologique de Kent et Park [KP71] pour le béton. Toutefois, si ce dernier

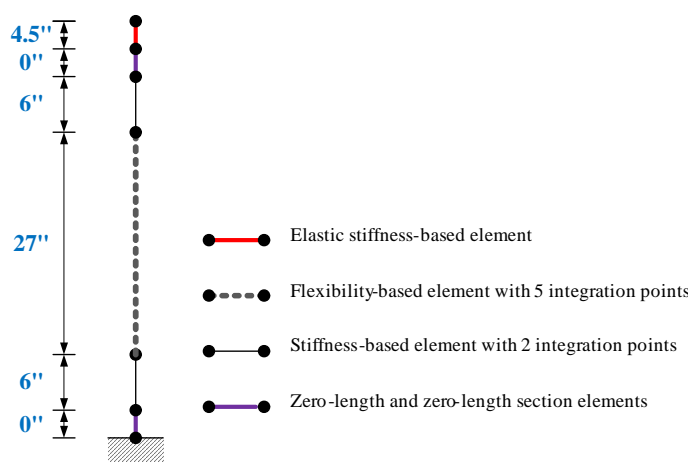


FIGURE 6.7: Modélisation d'un élément structural (poteau)

modèle est robuste et précis pour des calculs unidimensionnels (multifibre), une analyse 3D ultérieure demande l'utilisation d'un autre modèle avec d'autres paramètres ce qui complique l'opération. Les modèles d'endommagement développés ici (endommagement et couplage endommagement/plasticité) sont implémentés dans le code *Mercury*.

L'utilisation du code élément fini *Mercury* dédié aux calculs rapides sur un PC temps réel, permet de réaliser des calculs en temps réel d'une structure composée de plusieurs centaines de degrés de liberté.

La modélisation d'une structure non-linéaire nécessite un algorithme de couplage efficace pour assurer la convergence sans compromettre le calcul. Le schéma d'intégration de Shing [SV91] [SVC91] [SNB96] est utilisé. Cet algorithme de couplage avec sous-itérations expérimentales actualise les conditions d'interface pour chaque itération de calcul. Contrairement à la méthode par pénalisation, il n'y a qu'un seul niveau d'itération. La continuité du déplacement est assurée par une alternance d'extrapolation/interpolation. Le respect de la synchronisation fixe le nombre d'itération pour chaque pas de temps.

3.3 Application : Portique multiétagé de Ghannoum [SHK⁺11]

Une première application de simulation hybride est réalisé au laboratoire de Boulder pour prouver la faisabilité de tels essais. La structure étudiée est le portique multi-étagée testée par Ghannoum à Berkeley [Gha07] (FIG.6.8). Cette structure représente les bâtiments typiques de Californie : une partie du bâtiment n'est pas dimensionnée pour les chargements sismiques. Dans ce cas, ce sont les deux poteaux de droite qui ne possèdent pas suffisamment de cadres pour reprendre les charges sismiques.

Alors que la réalisation de l'essai de la structure complète sur table sismique est très coûteux et limité à un seul exemplaire, les analyses hybrides permettent le tests de plusieurs structures. Pour cette structure, l'élément qui est fortement endommagé est donc fourni par le test global. La décomposition de la structure est détaillée sur la fi-

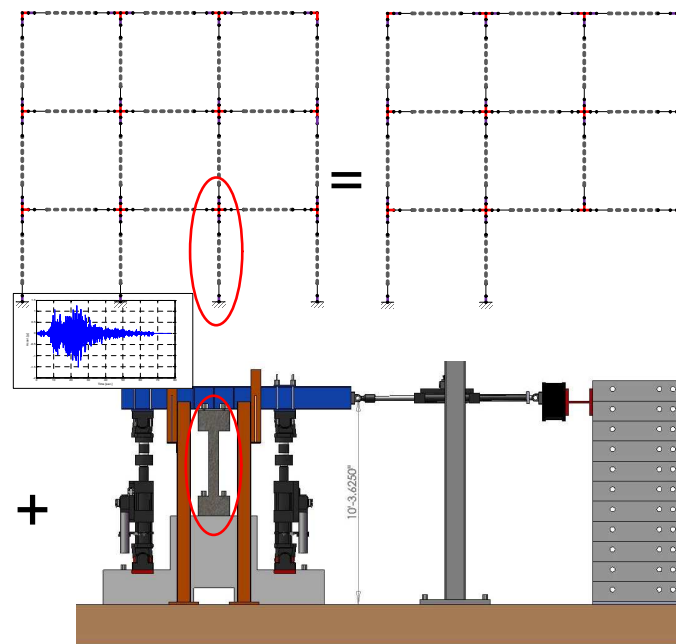


FIGURE 6.8: Structure testée par Ghannoum

figure FIG.6.9. La partie de la structure testée est donc le poteau faiblement ferraillé central. Le reste de la structure est donc modélisé avec des éléments mutifibres. La figure FIG.6.10 montre la modélisation adoptée pour les calculs préliminaires. En effet, le test de la structure complète est difficilement remplaçable pour la validation d'une modélisation. Ensuite, le poteau central est remplacé par un élément hybride pour coupler le modèle numérique à l'essai. La difficulté expérimentale est la gestion des trois degrés de liberté (deux translation et une rotation) en tête de poteau. L'asservissement est réalisé grâce à l'association de trois vérins (FIG.6.9).

Le faible coût de la simulation hybride (poteau de 1.2m) permet de multiplier les essais. Ainsi, les différents modèle béton (phénoménologique et d'endommagement) sont testés en analyse hybride.

3.4 Simulation hybride sur table vibrante

Le développement de simulation hybride en temps réel autorise l'utilisation de table vibrante pour la sollicitation de la structure testée. Des structures linéaires associées à des systèmes actifs d'amortissement des vibrations sont étudiées grâce à ce protocole [U.E] [QMDN08]. L'étude des systèmes d'amortissement actifs justifie l'utilisation de test hybride en temps réel.

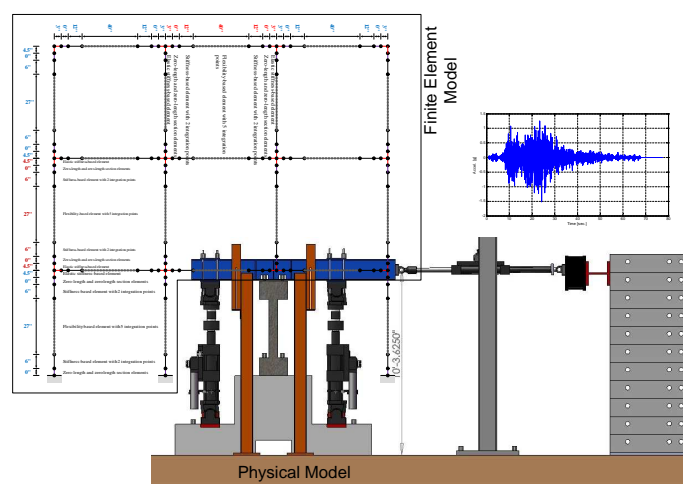


FIGURE 6.9: Décomposition de la structure de Ghannoum

3.5 Difficultés liées au temps réel

Les essais en temps réel prennent en compte les effets de vitesse au sein des matériaux. Toutefois, la réalisation des essais en temps réel (et donc à vitesse élevée) ajoute de nombreuses difficultés. En effet, le comportement dynamique des vérins hydrauliques est complexe. Or il est nécessaire d'anticiper leur comportement afin de corriger la commande pour imposer le déplacement voulu. De plus, le vérin possède une certaine inertie provoquant un effet retard préjudiciable : l'erreur se propage et devient non-négligeable. Il est donc nécessaire de développer des algorithmes de correction de cet effet retard [DH08].

Contrairement aux essais en temps dilaté où les effets visqueux et inertiels doivent être modélisés numériquement, en temps réel, la cellule de force du vérin mesure non seulement les efforts au sein de la structure testée mais aussi les effets inertiels du montage expérimental. Toutefois, les caractéristiques du montage sont connues et donc les effets parasites peuvent être retranchés numériquement.

Enfin, le concept même de temps réel est ambigu. En effet, comme toute simulation numérique, le temps est discrétisé dans une simulation hybride. Les variables cinématiques sont donc connues uniquement à des instants donnés. Or si on souhaite imposer des déplacements précis à des instants donnés, il existe une infinité de possibilité d'interpolation entre les différents instants.

Pour mesurer les efforts internes réels, il faut non seulement imposer le déplacement (pour les forces de raideur) mais aussi une vitesse donnée (forces visqueuses) et une accélération donnée (force d'inertie). Or il est actuellement impossible d'imposer les trois variables cinématiques. Il faut donc optimiser le prétraitement de la commande afin d'obtenir le meilleur compromis. Les écarts sont corrigés numériquement.

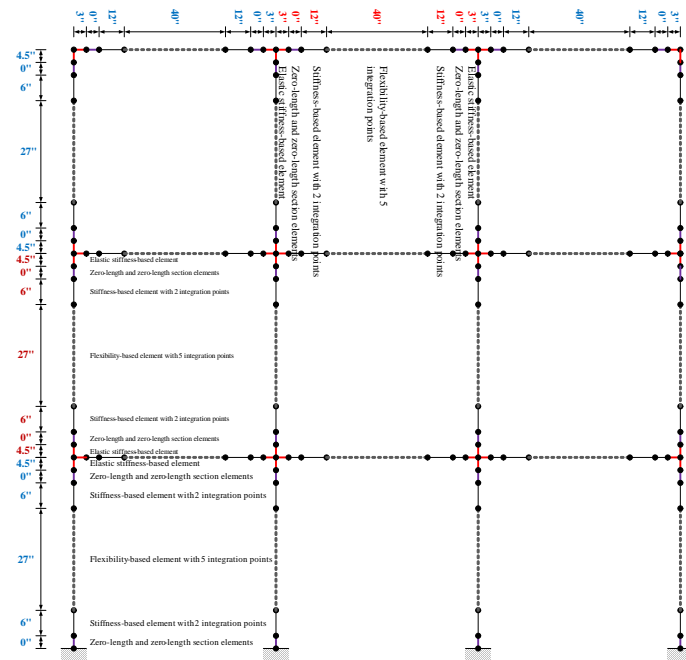


FIGURE 6.10: Modélisation adoptée pour la structure de Ghannoum

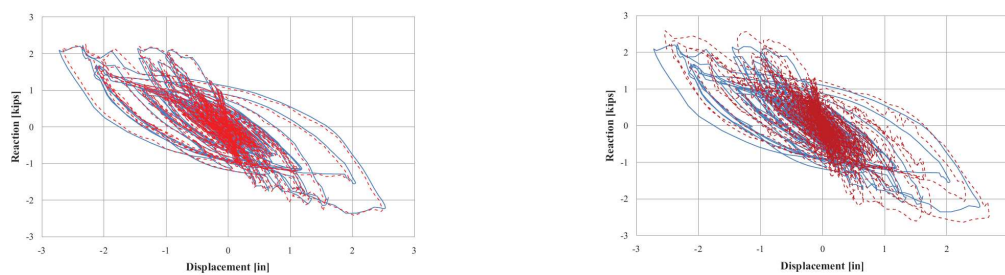


FIGURE 6.11: Déplacement au sommet du poteau : comparaison du modèle d'endommagement et du modèle couplé avec le modèle Kent et Park [Kent et Park, 1971]

Conclusion et perspectives

Conclusion

Ce travail de doctorat présente une alternative aux moyens d'étude classiques des structures sous séisme. Les méthodes purement expérimentales sont souvent très coûteuses (en testant des structures de grandes dimensions), nécessitent des équipements particuliers, et fournissent souvent des résultats plus qualitatifs que quantitatifs. De plus, une étude paramétrique est impossible car elle multiplie le coût et le temps nécessaire à sa réalisation. Or, l'hétérogénéité du béton demande la réalisation de plusieurs essais pour définir les conséquences des aléas de fabrication (entre autre). De l'autre côté, l'analyse numérique propose une solution rapide à faibles coûts pour modéliser le comportement d'une structure. Toutefois, la qualité de la solution dépend de la qualité et de la précision du modèle choisi. Ainsi les phénomènes provoqués par la rupture sont complexes : fissurations, flambage, grand déplacements, grandes déformations, perte de matière, effondrement ... La modélisation de ces phénomènes extrêmes est très délicate et demande l'utilisation de modèles fins et complexes : XFEM, modèles discrets ... Toutefois, ces modèles possèdent des domaines d'utilisation limités. La modélisation est limitée à des structures simples où la détérioration est localisée.

Pour combler les lacunes des modèles numériques et limiter les coûts des tests expérimentaux, les techniques hybrides couplant simulation numérique et essais sont abordés. L'avantage de ces méthodes est de remplacer la partie de la structure qui reste faiblement endommagée : lors de sollicitations sismiques la rupture de la structure se localise sur une partie restreinte. Pour des endommagements faibles, les modèles numériques fournissent une estimation du comportement précise pour des coûts numériques faibles. La partie fortement endommagée est testée expérimentalement. Le couplage entre le calcul et l'essai permet d'appliquer à la partie expérimentale le chargement réel et de prendre en considération le comportement de la poutre dans la simulation numérique. La précision d'une simulation hybride dépend donc de la gestion des interactions entre les deux sous-structures. Cette étude propose le développement d'une méthode simple à mettre en œuvre sans compromettre la stabilité et la précision du calcul. Cette méthode est très peu intrusive dans le code de calcul choisi pour la simulation numérique. Cette faible intrusivité permet de le rendre compatible avec une majorité des codes de calcul : l'appel à une fonction extérieure ou la possibilité d'une communication via le protocole FIFO est suffisante pour établir l'échange avec la plateforme expérimentale. L'actualisation de

conditions aux limites permet de prendre en compte le comportement expérimental. L'ajout d'une condition d'équilibre entre les structures numérique et expérimentale assure la convergence de la simulation. La difficulté restante est la communication entre le calculateur et l'électronique de la plateforme d'essai. Cette liaison est réalisée analogiquement. L'acquisition d'un convertisseur numérique/analogique N/A-A/N permet de transformer les informations numériques du calculateur en un signal analogique compatible avec les entrées auxiliaires de la majorité des asservisseurs. L'association du calculateur (un ordinateur portable est souvent suffisant) et de la carte constitue donc un ensemble pouvant être relié facilement à une plateforme d'essai. La solution proposée ici est suffisamment simple pour être appliquée rapidement à différents problèmes.

Bien que la sous-structure numérique reste faiblement endommagée, son comportement doit être finement modélisé. Pour une structure en béton armé, les différents phénomènes de dégradation du béton influencent le comportement global de la structure sollicitée. Ainsi, un modèle d'endommagement est développé et étudié pour modéliser les phénomènes actifs dans des chargements sismiques. Le modèle d'endommagement initial tient compte des caractéristiques principales avec un nombre de paramètres matériau limité à 5 (incluant les paramètres d'élasticité). L'utilisation d'une variable tensorielle d'ordre 2 pour représenter l'endommagement permet de reproduire l'anisotropie induite par la micro-fissuration diffuse lors des chargements. L'évolution de l'endommagement est pilotée par les déformations positives qui engendre une anisotropie naturellement dans les directions observées expérimentalement. Ainsi selon le sens de chargement (traction ou compression) l'endommagement évolue dans différentes directions (respectivement la direction de chargement et celle perpendiculaire) et donne une réponse dissymétrique représentative des matériaux cimentaires. Le partitionnement du potentiel thermodynamique en partie positive et négative offre la possibilité d'appliquer l'endommagement uniquement sur la partie positive des contraintes, ce qui fournit la reprise de raideur lors de la refermeture des fissures. Cette étude montre la nécessité que la refermeture des fissures doit être considérée pour la définition du domaine élastique du matériau. Pour cela le concept d'endommagement actif rend accessible l'état des fissures sous un chargement donné. L'introduction de ce concept est nécessaire pour la simulation de problèmes cycliques.

Le modèle initialement proposé ignore l'existence des déformations permanentes. Ces dernières ne sont cependant pas négligeables et doivent être modélisées pour représenter le comportement réel du béton. Deux façons d'insérer la modélisation de ces déformations permanentes ont été abordées : le pilotage des déformations permanentes par l'évolution de l'endommagement anisotrope (sans introduire de variable thermodynamique supplémentaire) et le couplage du modèle d'endommagement initial avec un modèle de plasticité. Finalement, les modèles développés ici offrent la possibilité d'une modélisation fine du comportement du béton, avec un nombre relativement limité de paramètres matériaux (de 7 à 9 selon la modélisation choisie pour les déformations permanentes) qui sont identifiables sur des essais simples (compression cyclique et essais de traction indirecte). L'analyse de structure en béton armé dans le CHAPITRE 5 montre que l'ajout des déformations permanentes dans le modèle n'a qu'une faible influence sur le comportement de

la structure. À l'opposé, le portique étudié à Boulder montre la nécessité de prendre en compte les déformations permanentes. Ainsi, l'influence des déformations permanentes sur la réponse d'une structure dépend donc fortement de la structure et des sollicitations appliquées à celle-ci. Même si les aspects "régularisation" n'ont pas été abordés dans ce travail, il convient de rappeler que tant que le modèle d'endommagement reste local, on obtient la dépendance bien connue au maillage (à sa taille mais aussi à son orientation). Le modèle élastique endommageable avec endommagement actif est aisément étendu au non local en remplaçant la déformation équivalente (élastique) locale par celle non-locale (de type [BPPC87]). Pour le modèle de plasticité, les choses peuvent s'avérer plus compliquées même si la même piste (remplacer $\tilde{\sigma}_{eq}$ et $\text{Tr}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}})$ par leur version non-locale) peut être pertinente.

L'étude se conclut sur la réalisation d'essais hybrides pour confirmer leur faisabilité notamment en couplant l'essai avec un modèle complexe comme celui développé ici. Une étude est menée en interne concernant les simulations hybrides en pseudo-dynamique. L'objet de l'étude est une structure simple de type poteau/poutre dont une poutre est extraite pour être testée expérimentalement. Cette campagne expérimentale possède plusieurs objectifs. Des premiers tests cycliques sans sous-structuration permettent l'étude du comportement des éléments et plus précisément l'étude du processus de fissuration. Les autres essais couplent la structure expérimentale avec le modèle numérique. Les deux modèles d'endommagement développés antérieurement sont utilisés pour la simulation numérique. La comparaison des résultats numériques et des différents résultats hybrides montre les limites des modèles d'endommagements. La robustesse de l'algorithme de couplage par pénalisation est testée en variant les paramètres de convergence. Une seconde campagne menée en collaboration avec l'Université de Boulder, s'intéresse à la faisabilité et la pertinence des simulations hybrides en temps réel. Les modèles d'endommagement sont implémentés dans le code de calcul spécifique et utilisés pour certaines simulations. La possibilité de réaliser une simulation hybride en couplant un modèle matériau complexe est prouvée même en temps réel.

L'approche complète de la simulation hybride est développée en proposant une méthode d'hybridation simple, universelle, peu intrusive, stable et robuste. Le couplage est réalisé avec un modèle numérique complexe inscrit dans le cadre de la thermodynamique. La solution finale permet la simulation hybride des structures de génie civil de type poteau/poutre.

Perspectives

Le travail présenté dans ce document montre la capacité du modèle d'endommagement anisotrope (avec ou sans déformations permanentes) à simuler des structures de dimensions importantes soumises à des sollicitations sismiques complexes. Toutefois, tous les phénomènes macroscopiques du comportement du béton ne sont pas pris en compte dans le modèle développé. En effet, le couplage avec un modèle de plasticité capte correctement les déformations résiduelles lors des décharges mais les phénomènes dissipatifs lors de charges/décharges (boucles d'hystérésis) sont ignorés. Or l'amortissement d'une structure sollicitée dynamiquement provient en partie de cette dissipation aux lèvres des fissures. Cette amortissement est actuellement pris globalement en compte par un amortissement de Reyleigh au niveau structural. Il serait donc intéressant de pouvoir modéliser correctement ce phénomène afin de s'affranchir de cette prise en compte forfaitaire. Un second aspect est particulièrement important pour l'étude du comportement sismique : la reprise de raideur. En effet elle joue un rôle important dans la réponse d'une structure et dans la répartition de l'endommagement. Le modèle d'endommagement anisotrope considère que la refermeture se produit brutalement lors du changement de signe des contraintes. Or les rares résultats expérimentaux montrent plutôt une refermeture plus au moins progressive située entre le changement de signe des contraintes et celui des déformations. Ces deux phénomènes proviennent de la rugosité des fissures. Dans le modèle d'endommagement, les micro-fissures sont considérées comme planes. La modélisation de la rugosité des fissures permettrait d'affiner le modèle d'endommagement. Toutefois, ces améliorations peuvent être coûteuses numériquement pour un apport faible sur la précision de la réponse de la structure.

La méthode de couplage numérique/expérimental par pénalisation a montré son efficacité et sa robustesse. Toutefois, le couplage est sensible à la précision de la chaîne de transmission de l'information. Or le maillon principal est le convertisseur analogique. En effet, celui utilisé dans ce travail possède des caractéristiques limitées (12 bits, 0-5 volts, 2 sorties analogiques) mais suffisante pour la simulation effectuée ici. Pour diminuer le bruit et ainsi augmenter la précision du pilotage expérimental, il serait préférable d'utiliser une carte de conversion $\pm 10V$ sur 16 bits. De même, pour pérenniser la méthode de communication entre le logiciel castem et la carte de conversion/acquisition il est nécessaire d'implanter la méthode de pénalisation comme élément hybride. Ainsi, la sous-structure expérimentale devient comme un élément classique de la structure numérique. Par contre, contrairement aux éléments classiques, l'intégration numérique est réalisée grâce au protocole expérimental. Le programme de pilotage, à proprement parlé, peut être développé afin d'assurer un pilotage continu de l'essai. Ainsi, il serait possible d'améliorer la simulation hybride pour se diriger vers des tests continus.

Bibliographie

- [AL85] V. AGHOSKOV & V. LEBEDEV – « The pointcarré-steklov's operators and the domain decomposition methods in variational problems », *Computational Processes and Systems* (1985), p. 173–227.
- [Auv03] J. AUVRAY – « Elaboration et caractérisation à haute température de bétons réfractaires à base d'alumine à spinelle », Thèse, Université de Limoges, 2003.
- [Bad01] P.-B. BADEL – « Contributions à la simulation numérique de structures en béton armé », Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 2001.
- [Baz00] Z. P. BAZANT – « Microplane model m4 for concrete », *Journal of Engineering Mechanics* **126** (2000), p. 944–961.
- [BB04] A. BONELLI & O. S. BURSI – « Generalized-alpha methods for seismic structural testing », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **33** (2004), p. 1067–1102.
- [BG84] Z. P. BAZANT & P. GAMBAROVA – « Crack shear in concrete : crack band microplane model », *Journal of Engineering Mechanics* **110** (1984), p. 2015–2035.
- [BGL07] P. BADEL, V. GODARD & J.-B. LEBLOND – « Application of some anisotropic damage model to the prediction of the failure of some complex industrial concrete structure », *International Journal of Solids and Structures* **xxx** (2007), p. xxx–xxx.
- [BMPB00] A. BONELLI, P. MAGONETTE, P. PEGON & P. BUCHET – « Time stepping algorithm for continuous pseudodynamic testing with substructuring », *Computer- Aided Civil and Infrastructure Engineering* (2000).
- [Bor00] A. BORZI, B. AND ELNASHAI – « Assesment of inelastic response of buildings using force and displacement-based approaches », *Structural Design of Tall Buildings* **9** (2000), p. 251–277.
- [BP88] Z. P. BAZANT & P. PRAT – « Microplane model for brittle-plastic materials, part i&ii », *Journal of Engineering Mechanics* **114** (1988), p. 1672–1702.
- [BP94] P. BUCHET & P. PEGON – « Psd testing with substructuring : Implementation and use », *Special publication, ISPRA* **I.94.25** (1994).

- [BPPC87] Z. BAZANT, J.-Y. PAN & G. PIJAUDIER-CABOT – « Softening in reinforced concrete beams and frames », *ASCE of J. os Struct. Engrg* **113** (1987), p. 2333–2347.
- [BRJ03] M. BRUN, J.-M. REYNOUARD & L. JEZEQUEL – « A simple shear wall model taking into account stiffness degradation », *Engineering Structures* **25** (2003), p. 1–9.
- [BS03] T. BELYTSCHKO & X. SP. – « Coupling methods for continuum model with molecular model », *International Journal for Multiscale Computational Engineering* **1** (2003), p. 115–126.
- [Buc14] E. BUCKINGHAM – « On physically silmilar systems », *Physics Review* **4** (1914), p. 354–377.
- [Bur97] N. BURLION – « Compaction des bétons : éléments de modélisation et caractérisation expérimentale », Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1997.
- [BXP96] Z. P. BAZANT, Y. XIANG & P. PRAT – « Microplane model for concrete, part i&ii », *Journal of Engineering Mechanics* **122** (1996), p. 245–268.
- [CC77] R. CRAIG & C.-J. CHANG – « On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis », in *Proc 18th Structures, Structural Dynamics and Materials Conf.*, 1977.
- [CG02] A. COMBESCURE & A. GRAVOUIL – « An numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transcient analysis », *Computer methods in applied mechanics and engineering* **191** (2002), p. 1129–1157.
- [CGH03] A. COMBESCURE, A. GRAVOUIL & B. HERRY – « An algorithm to solve transcient structural non-linear problems for non-matching time-space domains », *Computers & Structures* **81** (2003), p. 1211–1222.
- [Cha79] J. CHABOCHE – « The continuous damage mechanics. a tool to describe phenomena before crack initiation », *Nuclear Engineering Design* (1979).
- [Cha05] CHALLAMEL – « Strain-based anisotropic damage modelling and unilateral effects », *International Journal of Mechanical Sciences* **47** (2005).
- [Cha09] M. CHAMBART – « Endommagement anisotrope et comportement dynamique des structures en béton armé jusqu’à la ruine », Thèse, ENS Cachan, 2009.
- [CHMM03] A. CIMETIERRE, D. HALM, J.-J. MARIGO & E. MOLINES – « Modèles standards généralisés à convexe fixe en endommagement », *Compte-rendus de mē₂ecanique* **331** (2003), p. 291–294.
- [CPP92] I. CAROL & Z. P. B. P.C. PRAT – « New explicit microplane model for concrete : theoretical aspect and numerical implementation », *International Journal of Solids and Structures* **29** (1992), p. 1173–1191.

- [CS79] P. CUNDALL & O. STRACK – « A discrete numerical model for granular assemblies », *Geotechnique* **29** (1979), p. 47–65.
- [CS82] J.-P. CORDEBOIS & J. SIDOROFF – « Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité », *J.M.T.A. - Numéro Spécial* (1982), p. 45–60.
- [CW82] CHOW & WANG – « An anisotropic theory for continuum damage mechanics », *International Journal of Fracture* **33** (1982), p. 3–16.
- [Dav98] L. DAVENNE – « Analysis of seismic response of reinforced concrete frames with macro-elements », in *11th European Conference on Earthquake Engineering*, 1998.
- [DBJ⁺08] L. DAVENNE, A. BOULKERTOUS, P. JEHEL, B. PHAM & A. IBRAHIM-BEGOVIC – « Earthquake analysis of reinforced concrete structures using macro-elements », in *NATO Advanced Research Workshop "Damage assessment and reconstruction after natural disasters and previous military activities"*, 2008.
- [Des04] R. DESMORAT – « Modélisation d'endommagement anisotrope avec forte dissymétrie traction/compression », in *(RF)2B - 5es Journées Scientifiques du Regroupement Francophone pour la Recherche et la Formation sur le Bâtiment*, 2004.
- [Des06] — , « Positivité de la dissipation intrinsèque d'une classe de modèles d'endommagement anisotrope non standards », *Comptes-rendus de mécanique* **334** (2006), p. 587–592.
- [Des07] — , « Cadre thermodynamique non standard pour calculs robustes avec endommagement anisotrope », in *CFM 2007 - 18e Congrès Français de Mécanique*, 2007.
- [DGP84] Q. DINH, R. GLOWINSKI & J. PÉRIAUX – *Solving elliptic problems by domain decomposition methods with applications*, 1984.
- [DGR07] R. DESMORAT, F. GATUINGT & F. RAGUENEAU – « Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials », *Engineering Fracture Mechanics* (2007).
- [DH08] Y. DOZONO & T. HORIUCHI – « Real-time hybrid experimental system with actuator delay compensation », in *Hybrid simulation : Theory, Implementation and application* (2008), p. 65–76.
- [DHD00] A. DRAGON, D. HALM & T. DÉSOYER – « Anisotropic damage in quasi-brittle solids : modelling, computational issues and applications », *Computer methods in applied mechanics and engineering* **183** (2000), p. 331–352.
- [DJF02] B. DAVIDSON, H. JUDI & R. FENWICK – « Force based seismic-design : a displacement focussed approach », in *12th European Conference on Earthquake Engineering*, 2002.

- [DM85] S. DERMITZAKIS & S. MAHIN – « Development of substructuring techniques for on-line computer controlled seismic performance testing », *Earthquake Engineering Research Center, UCB UCB/EERC-85/04* (1985).
- [DRP00] R. DESMORAT, F. RAGUENEAU & H. PHAM – « Continuum damage mechanics for hysteresis and fatigue of quasi-brittle materials and structures », *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* **31** (2000), p. 307–329.
- [Dry87] M. DRYJA – « A finite element capacitance matrix method for the elliptic problem », *SIAM J. Numer. Anal.* **20** (1987), p. 671–680.
- [Dub94] J.-F. DUBÉ – « Modélisation simplifiée et comportement visco-endommageable des structures en béton », Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1994.
- [dVBvG95] J. DE VREE, W. BREKELMANS & M. VAN GILS – « Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics », *Computer and Structures* **55** (1995), p. 581–588.
- [Eln01] A. ELNASHAI – « Advanced inelastic static (pushover) analysis for earthquake applications », *Structural Engineering and Mechanics* **12** (2001), p. 51–69.
- [Fae96] G. FAELLA – « Evaluation of rc structures seismic response by means of nonlinear static pushover analyses », in *11th World Conference on Earthquake Engineering*, 1996.
- [FD87] G. FRANTZISKONIS & C. DESAY – « Constitutive models with strain softening », *Int. J. Solids Structures* **23** (1987).
- [FLT⁺98] C. FARHAT, M. LESOINNE, P. L. TALLEC, K. PIERSON & D. RIXEN – « Feti-dp : a dual-primal unified feti method-part i : A faster alternative to the two-level feti method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **50** (1998), p. 1523–1544.
- [FPCLB97] S. FICHANT, G. PIJAUDIER-CABOT & C. LA BORDERIE – « Continuum damage modelling : Approximation of crack induced anisotropy », *Mechanics Research Communications* **24** (1997), p. 109–114.
- [FPL00] C. FARHAT, K. PIERSON & M. LESOINNE – « The second generation feti methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems », *Computer methods in applied mechanics and engineering* **184** (2000), p. 333–374.
- [FR98] C. FARHAT & F.-X. ROUX – « A method of finite tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm », **32** (1998), p. 1205–1227.
- [Gha07] W. GHANNOUM – « Experimental and analytical dynamic collapse study of a reinforced concrete frame with light transverse reinforcement », Thèse, University of California, Berkeley, 2007.

- [GL93] L. GAMBAROTTA & S. LAGOMARSINO – « A microcrack damage model for brittle materials », *Int. J. Solids Structures* **30** (1993), p. 177–198.
- [GPP94] J. GUEDES, P. PEGON & A. PINTO – « A fibre/timoshenko beam element in castem 2000 », *JRC Special Publication Nr.I.94.31* (1994).
- [GS73] S. GREEN & S. R. SWANSON – « Static constitutive relations for concrete », *AFWL-TR-72-244, US Air Force Weapons Laboratory, Kirtland Air Force Base* (1973).
- [GS85] V. GEOPALAERATNAM & S. SHAH – « Softening response of plain concrete in direct tension », *ACI journal* **3** (1985), p. 310–323.
- [GSH⁺11] W. GHANNOUM, V. SAOUMA, G. HAUSMANN, K. POLKINGHORNE, M. ECK & D. KANG – « Loading rate effects in reinforced concrete columns », *ASCE* (2011), p. under review.
- [HCS90] H. HATAMOTO, Y. CHUNG & M. SHINOZUKA – « Seismic capacity enhancement of rc frames by means of damage control design », in *USNCEE*, 1990.
- [HD96] D. HALM & A. DRAGON – « A model of anisotropic damage model by mesocracks growth; unilateral effects », *International Journal of Damage Mechanics* **5** (1996), p. 384–402.
- [HD98] —, « An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials », *European Journal of Mechanics and Solids* **3** (1998), p. 439–460.
- [HD00] —, « An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials », *Computer methods in applied mechanics and engineering* **183** (2000), p. 331–352.
- [HHT77] H. HILBERT, T. HUGHES & R. TAYLOR – « Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **5** (1977), p. 283–292.
- [HK88] G. HERMANN & J. KESTIN – *On the thermodynamics foundation of a damage theory in elastic solids, in cracking and damage*, J. Mazars and Z.P. Bazant eds, 1988.
- [HN75] B. HALPHEN & Q. NGUYEN – « Sur les matériaux standards généralisés », *Journal de la mécanique* **14** (1975), p. 39–63.
- [HNN83] H. HORII & S. NEMAT-NASSER – « Overall moduli of solids with microcracks : load induced anisotropy », *J. Mech. Phys. Solids* **31** (1983), p. 151–171.
- [HRB⁺02] F. HILD, B. RAKA, M. BAUDEQUIN, S. ROUX & F. CANTELAUBE – « Multiscale displacement field measurements of compressed mineral-wool samples by digital image correlation », *Applied Optics* **41** (2002), p. 6815–6828.

- [JHPCG06] L. JASON, A. HUERTA, G. PIJAUDIER-CABOT & S. GHAVAMIAN – « An elastic plastic damage formulation for concrete : Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model », *Computational modelling of Concrete structures* (2006), p. 345–352.
- [Ju89] J. JU – « On energy-based coupled elastoplastic damage theories : constitutive modeling and computational aspects », *Int. J. Solids structure* **25** (1989).
- [Kac58] L. KACHANOV – « Time of the rupture process under creep conditions », *Isv. Akad. Nauk SSA Otd. Tekh.* (1958).
- [Kac82] KACHANOV – « A microcrack damage model for rock inelasticity. part i : frictional sliding on microcracks ; part ii : propagation of microcracks », *Mech. Mater* **1** (1982), p. 19–41.
- [Kan08] D. H. KANG – « An optimized computational environment for real time hybrid simulation », Thèse, University of Colorado, Boulder, 2008.
- [KG87] D. KEYES & W. GROPP – « A comparison of domain decomposition techniques for elliptic partial differential equations and their parallel implementation », *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **8** (1987), p. 166–202.
- [KHR69] H. KUPFER, H. HILSDORF & H. RUSCH – « Behavior of concrete under biaxial stress », *Proc ACI* **66** (1969), p. 656–666.
- [KJ69] I. KARSON & J. JIRSA – « Behavior of concrete under compressive loadings », *J. Struct Div ASCE* **95** (1969).
- [KM95] D. KRAJCINOVIC & S. MASTILOVIC – « Some fundamental issues of damage mechanics », *Mechanics of materials* **21** (1995), p. 217–230.
- [KMD03] P. KOTRONIS, J. MAZARS & L. DAVENNE – « The equivalent reinforced concrete model for simulating the behavior of walls under dynamic shear loading », *Engineering Fracture Mechanics* **70** (2003), p. 1085–1097.
- [Kot00] P. KOTRONIS – « Cisaillement dynamique de murs en béton armé », Thèse, ENS Cachan, 2000.
- [KP71] D. KENT & R. PARK – « Flexural members with confined concrete », *Journal of the Structural Division* **97** (1971).
- [Kra85] D. KRAJCINOVIC – « Continuous damage mechanics revisited : basic concepts and definitions », *J. Applied Mech.* **52** (1985), p. 829–834.
- [KRM06] P. KOTRONIS, F. RAGUENEAU & J. MAZARS – « A simplified modelling strategy for r/c walls satisfying ps92 and ec8 design », *Computer methods in applied mechanics and engineering* **195** (2006), p. 7077–7092.
- [LaB91] C. LABORDERIE – « Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse de structure en béton », Thèse, Université de Paris 6, 1991.
- [Lad83] P. LADEVEZE – « Sur une théorie de l'endommagement anisotrope », *Rapport Interne LMT* **34** (1983), p. 1–34.

- [LBCD09] J. LEMAITRE, A. BENALLAL, J.-L. CHABOCHE & R. DESMORAT – *Mécanique des matériaux solides, nouvelle édition.*, Dunod, 2009.
- [LC85] J. LEMAITRE & J.-L. CHABOCHE – *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1985.
- [LD05] J. LEMAITRE & R. DESMORAT – *Engineering damage mechanics : Ductile, fatigue and brittle failures*, Springer (Berlin), 2005.
- [LDS99] J. LEMAITRE, R. DESMORAT & M. SAUZAY – « Anisotropic damage law of evolution », *C. R. Acad. Sci. Paris, Mécanique des solides et des structures* **327** (1999), p. 1231–1236.
- [LDV91] P. LE TALLEC, Y.-H. DE ROECK & M. VIDRASCU – « Domain decomposition methods for large linearly elliptic three dimensional problems », *J. Comp. Appl. Math.* **34** (1991), p. 93–117.
- [Leb07] G. LEBON – « Simulation pseudo-dynamique d'ouvrages en béton par sous-structuration », *Rapport de stage de Master MIS-MSE, ENS Cachan* (2007).
- [Lem71] J. LEMAITRE – « Evaluation of dissipation and damage in metals », in *ICM Kyoto*, 1971.
- [LO81] F. LECKIE & E. ONAT – *Tensorial nature of damage measuring internal variables*, J. Hult and J. Lemaitre, Editors, Physical non-linearities in structural analysis, Springer, Berlin, 1981.
- [LOD96] LUCCIONI, OLLER & DENESI – « Couple plastic-damage model », *Computer methods in applied sciences* (1996).
- [LSP09] D. LEGUILLON & E. SANCHEZ-PALENCIA – « On the behavior of a cracked elastic body with (or without) friction », *J. Méc.* **1** (195-209), p. 195–209 1982.
- [Mar81] J.-J. MARIGO – « Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique », *Compte-rendus de l'académie des Sciences, Série II* **292** (1981), p. 1309–1312.
- [Maz84] J. MAZARS – « Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure », Thèse, Université de Paris 6, 1984.
- [MB89] J. MAZARS & Y. BERTHAUD – « Une rupture expérimentale appliquée au béton pour créer un endommagement diffus et mettre en évidence son caractère unilatéral », *C.R. Académie des Sciences de Paris* **308** (1989), p. 579–584.
- [MB06] M. MATALLAH & C. L. BORDERIE – « Modélisation numérique de l'endommagement anisotrope et unilatéral dans les structures en béton », *In 24eme rencontre Univeristaires de Génie Civil* (2006).
- [MBR90] J. MAZARS, Y. BERTHAUD & S. RAMTANI – « The unilateral behaviour of damage concrete. », *Engng Fract Mech* **35** (1990).

- [MD99] S. MAGNIER & F. DONZE – « Numerical simulation of impact using discrete elements methods », *Mechanics of Cohesive-frictional Materials* **3** (1999), p. 257–276.
- [MK96] S. MURAKAMI & K. KAMIYA – « Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on thermodynamics », *International Journal Mechanical Sciences* **39** (1996), p. 459–473.
- [MK97] — , « Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics », *International Journal of Mech. Sci.* **39** (1997), p. 473–486.
- [MKRC06] J. MAZARS, P. KOTRONIS, F. RAGUENEAU & G. CASAUX – « Using multifiber beams to account for shear and torsion applications to concrete structural elements », *Computer methods in applied mechanics and engineering* **195** (2006), p. 7264–7281.
- [MN85] A. MATSOKIN & S. NEPOMNIASCHIK – « A schwarz alternating method in subspace », *Solv. Math.* **29** (1985), p. 78–84.
- [MP73] MENEGOTTO & PINTO – « Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior, la resistance des structures et leur deformabilite ultime sous l'action de charges definies, repetees ou periodiquement variables », (1973).
- [Ngu10] T. D. NGUYEN – « Apport de la modélisation microscopique dans la prédiction des écoulements dans les ouvrages en béton fissuré en condition d'accident grave », Thèse, Université de Pau, 2010.
- [OLK01] J. OZBOLT, Y. LI & I. KOZAR – « Microplane model for concrete with relaxed cinematic constraint », *International Journal of Solids and Structures* **38** (2001), p. 2683–2711.
- [Pau79] T. PAULAY – « Capacity design of earthquake resisting ductile multistorey reinforced concrete frames », in *3rd Canadian conference on Earthquake engineering*, 1979.
- [PBS95] F. PIRES, R. BAIRRAO & S. SILVA – « Earthquake behaviour study of masonry infilled reinforced concrete frames. test of model md6. », *LNEC/C3ES report 137/95* (1995).
- [PDR06] T. PHAM, R. DESMORAT & F. RAGUENEAU – « Unified damage model for hysteresis, fatigue and creep of quasi-brittle materials », in *International Conference on Nonlinear Analysis and Engineering Mechanics Today*, 2006.
- [Peg96] P. PEGON – « Pseudo-dynamic testing with substructuring : the case of asynchronous motion », *Special publication* **I.96.42** (1996).
- [PK01] V. PENSEE & D. KONDO – « Une analyse micromécanique 3-d de l'endommagement par mésolfissuration », *C. R. Acad. Sci. Paris* **329** (2001), p. 271–276.

- [PK02] V. PENSI & D. KONDO – « Micromechanics of anisotropic brittle damage : comparative analysis between a stress based and a strain based formulation », *Mech. Mater.* **35** (2002), p. 747–761.
- [PK03] V. PENSEE & D. KONDO – « Micromechanics of anisotropic brittle damage : comparative analysis between a stress based and a strain based formulation », *Mechanics of Materials* **35** (2003), p. 747–761.
- [PM02] P. PEGON & G. MAGONETTE – « Continuous psd testing with non-linear substructuring : Presentation of a stable parallel inter-field procedure », *European Commission* **29** (2002).
- [PP00] A. V. PINTO & P. PEGON – « Pseudo-dynamic testing with substructuring at the elsa laboratory », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **29** (2000), p. 905–925.
- [PPMT04] A. V. PINTO, P. PEGON, G. MAGONETTE & G. TSIONIS – « Pseudo-dynamic testing of bridges using non linear substructuring », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics Special publication I.02.167* (2004), p. 1125–1146.
- [PT96] E. PAPA & A. TALIERCIO – « Anisotropic damage model for the multiaxial static and fatigue behaviour of plain concrete », *Engineering Fracture Mechanics* **55** (1996), p. 163–179.
- [PVP⁺06] A. V. PINTO, G. VERZELETTI, P. PEGON, G. MAGONETTE, P. NEGRO & J. GUEDES – « Pseudo-dynamic testing of large-scale r/c bridges », *ELSA Special publication I.02.167* (2006).
- [QMDN08] J. QUEVAL, A. L. MAOULT, U. DORKA & V. NGUYEN – « Real time substructure testing on distributed shaker tables in cea saclay », in *Hybrid simulation : Theory, Implementation and application* (2008), p. 123–132.
- [Rab69] Y. RABOTNOV – « Creep problems in structure members », *North Holland, Amsterdam* (1969).
- [Ram90] S. RAMTANI – « Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral », Thèse, Université de Paris 6, 1990.
- [RBM00] F. RAGUENEAU, C. L. BORDERIE & L. MAZARS – « Damage model for concrete-like materials coupling cracking and friction, contribution towards structural damping : first uniaxial applications. », *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* **5** (2000), p. 607–626.
- [Rei84] H. REINHARDT – « Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete », *Heron* **29** (1984), p. 1–42.
- [RES04] T. RABCUK, J. EIBL & L. STEMPNIIEWSKI – « Numerical analysis of high speed concrete fragmentation using a meshfree lagrangian method », *Engineering fracture mechanics* **71** (2004), p. 547–556.

- [RF99] D. RIXEN & C. FARHAT – « A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems », *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **44** (1999), p. 489–516.
- [RFG98] D. RIXEN, C. FARHAT & M. GÉRADIN – « A two step, two field hybrid method for the static and the dynamic analysis of substructure problems with conforming and non-conforming interfaces », *Computer methods in applied mechanics and engineering* **154** (1998), p. 229–264.
- [Rix04] D. RIXEN – « A dual craig-bampton method for dynamic substructuring », *Journal of Computational and Applied Mathematics* **168** (2004), p. 383–391.
- [Sch69] H. SCHWARZ – « Über einige abbildungsaufgaben », *J. Reine Angew. Math.* **70** (1969), p. 105–120.
- [SDRD] A. SOUID, A. DELAPLACE, F. RAGUENEAU & R. DESMORAT – « Pseudodynamic tests and nonlinear substructuring of damageable structures under complex earthquake ».
- [SDRD09] A. SOUID, A. DELAPLACE, F. RAGUENEAU & R. DESMORAT – « Pseudodynamic testing and nonlinear substructuring of damaging structures under earthquake loading », *Engineering Structures* **31** (2009), p. 1102–1110.
- [SF98] M. SCHULZ & F. FILIPPOU – « Generalized warping torsion formulation », *Journal of Engineering Mechanics* (1998), p. 339–347.
- [SFT96] E. SPACONE, F. FILIPPOU & F. TAUCER – « Fiber beam-column model for nonlinear analysis of r/c frames. i. formulation », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **25** (1996), p. 711–725.
- [SHK⁺11] V. SAOUMA, G. HAUSMANN, D. KANG, W. GHANNOUM & K. POLKINGHORNE – « On real time hybrid simulation, shake table tests, and numerical modeling ; systems vs components », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* (2011), p. under review.
- [SKH11] V. SAOUMA, D. KANG & G. HAUSMANN – « A computational finite-element program for hybrid simulation », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* (2011), p. in print.
- [SNB96] P. SHING, M. NAKASHIMA & O. S. BURSI – « Application of pseudodynamic test method to structural research », *Earthquake spectra* **12** (1996), p. 29–56.
- [SV91] P. SHING & M. VANNAN – « Implicit algorithm for pseudodynamic tests : convergence and energy dissipation. », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **20** (1991), p. 809–819.
- [SVC91] P. SHING, M. VANNAN & E. CARTER – « Implicit time integration for pseudodynamic tests », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **20** (1991), p. 551–576.

- [Tak75] K. TAKANASHI – « Non-linear earthquake response analysis of structures by a computer-actuator on-line system », *Bulletin of the earthquake resistant structures research centre* (1975).
- [Ter80] M. TERRIEN – « Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction », *Bulletin de liaison du LCPC* **105** (1980).
- [TM03] C. R. THEWALT & S. A. MAHIN – « Hybrid solution techniques for pseudodynamic testing », *Technical Report UCB/EERC-87/09* (2003).
- [U.E] U.E.DORKA – « Sub-psd tests », *Report of the DFG-project*.
- [Ulm96] F. ULM – « Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure », Thèse, Université de Paris 6, 1996.
- [VFF94] T. VIDIC, P. FAJFAR & M. FISCHINGER – « Consistent inelastic design spectra : strength and displacement », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **23** (1994), p. 502–521.
- [Wei05] Z. WEI – « Fast hybrid test system for substructure evaluation », Thèse, University of Colorado, Boulder, 2005.
- [WJF06] J. Y. WU, J. LI & R. FARIA – « An energy release rate-based plastic-damage model for concrete », *International Journal of Solids and Structures* **43** (2006), p. 583–612.
- [XB04] S. XIAO & T. BELYTSCHKO – « A bridging domain decomposition for coupling continua with molecular dynamics », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **193** (2004), p. 1645–1669.
- [XT03] S. XIAO & B. T. – « Coupling of atomistic and continuum simulations using a bridging scale decomposition », *Journal of Computational Physics* **190** (2003), p. 249–274.