Table des matières

Introduction

Genèse

Dans un article intitulé "Cohomology of Lie algebra" ([8]) paru en 1953, G. Hochschild et J.-P. Serre prouvent d'importants théorèmes concernant la cohomologie d'algèbres de Lie, comme par exemple ce résultat permettant un calcul de la cohomologie d'une algèbre de Lie grâce à des résultats de semi-simplicité :

Théorème. $[Hochschild, Serre, 1953]$

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, M un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie et $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ soit semi-simple. On a alors pour tout $n \geq 0$ l'isomorphisme suivant :

$$H^n(\mathfrak{g}, M) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathbb{K}) \otimes H^j(\mathfrak{h}, M)^{\mathfrak{g}}.$$

Ces résultats sont obtenus grâce à un outil d'algèbre homologique développé quelques années plus tôt par J. Leray lors d'un cours dispensé au Collège de France ([9]) : les suites spectrales. L'idée générale de cette théorie est de découper le calcul potentiellement extrêmement difficile d'un espace de cohomologie en l'étude de plusieurs espaces plus simples. On construit pour cela une suite $(E_r, d_r)_{r\geq 0}$ de complexes, dont chaque "page" E_r est essentiellement la cohomologie de la page précédente. Dans les cas que nous étudierons, cette suite deviendra stationnaire : c'est cette valeur stabilisée qui nous apportera les informations souhaitées sur les espaces de cohomologie. Néanmoins le calcul de la page E_2 suffit généralement à obtenir des résultats intéressants, heureusement car le calcul des pages suivantes est souvent compliqué.

Dans [8], G. Hochschild et J.-P. Serre construisent une suite spectrale à partir d'une filtration du complexe de Chevalley-Eilenberg $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}, M) := \Lambda^n(\mathfrak{g}, M)$, essentiellement définie par :

$$\mathcal{E}^p\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}, M) := \{f : \mathfrak{g}^{\otimes n} \to M \mid f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ si n-p+1 arguments appartiennent à } \mathfrak{h}\}.$$

C'est une méthode usuelle pour construire des suites spectrales qui convergent vers (dans le sens "qui vont donner des informations sur") la cohomologie du complexe considéré. Cette filtration induit une suite spectrale dont les auteurs montrent que la deuxième page vérifie, sous certaines hypothèses, l'isomorphisme suivant :

$$E_2^{p,q} \simeq H^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, H^p(\mathfrak{h}, M)),$$

où $E_2^{p,q}$ est un élément de la page $E_2 = \{E_2^{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$. Le calcul de cette deuxième page permet d'obtenir entre autres le théorème cité ci-dessus.

Les algèbres de Leibniz

Dans son article [10], J.-L. Loday pose les bases de l'étude d'une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz. Ces dernières sont des algèbres L dont le crochet vérifie seulement l'identité suivante :

$$\forall x, y, z \in L,\ \ [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

Une des motivations pour s'intéresser à de tels objets est d'ordre cohomologique : pour prouver que la différentielle de Chevalley-Eilenberg en est bien une, on n'utilise en effet pas le caractère antisymétrique du crochet. J.-L. Loday construit donc une théorie (co)homologique liée à ces algèbres en s'inspirant de celle associée aux algèbres de Lie, c'est-à-dire qu'il définit une "bonne" notion de module et de complexe de (co)chaînes :

Définition. *Soit L une algèbre de Leibniz. Un L-module est la donnée d'un espace vectoriel M et de deux applications linéaires : $[-,-]_l : L \otimes M \to M$ et $[-,-]_r : M \otimes L \to M$ vérifiant : $\forall x, y \in L$, $\forall m \in M$,*

(LLM) $\quad [x, [y, m]_l]_l = [[x, y], m]_l + [y, [x, m]_l]_l,$

(LML) $\quad [x, [m, y]_r]_l = [[x, m]_l, y]_r + [m, [x, y]]_r,$

(MLL) $\quad [m, [x, y]]_r = [[m, x]_r, y]_r + [x, [m, y]_r]_l.$

Cette définition de module a pour intérêt de généraliser celle de module au sens de Lie : si le crochet est antisymétrique, alors on retrouve la notion usuelle de module.

Le complexe de cochaînes (dit de Loday), noté $\mathcal{C}(L, M)$, a cette fois pour espace sous-jacent en degré n l'espace $Hom(L^{\otimes n}, M)$ et pour différentielle :

$$\begin{aligned} d^n f(x_1, \dots, x_{n+1}) := & \sum_{1\leq i<j\leq n+1} (-1)^i f(x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x_i} \otimes [x_i, x_j] \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) \\ & + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} [x_i, f(x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x_i} \cdots \otimes x_{n+1})]_l \\ & + (-1)^{n+1} [f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n), x_{n+1}]_r. \end{aligned}$$

Une étude poussée de ces espaces de (co)homologie à été effectuée, notamment dans l'article sus-cité, mais aussi par T. Pirashvili dans [19], ou en collaboration dans [14] et [15]. Ces résultats sont en général des adaptations de théorèmes connus dans le cadre moins général des algèbres de Lie. On peut par exemple citer le résultat suivant, issu de [14], et qui montre bien le rapprochement entre algèbres de Lie et de Leibniz :

Théorème. $[Loday, Pirashvili, 1993]$

Soient L une algèbre de Leibniz et M un L-module. On a l'isomorphime suivant :

$$H^*(L, M) \simeq Ext^*_{UL(L)}(U(L_{Lie}), M),$$

où L_{Lie} est l'algèbre de Lie naturellement associée à L et $UL(L)$ est une généralisation de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie aux algèbres de Leibniz.

Suites spectrales et homologie d'algèbres de Leibniz

Dans sa thèse ([5]), A. V. Gnedbaye utilise des méthodes similaires à celle de G. Hochschild et J.-P. Serre, mais cette fois pour étudier l'homologie d'algèbres de Leibniz (à valeur dans un Lie-comodule M). A partir d'une algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ et d'un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, il définit la filtration $\mathcal{F}^{p\leq n}\mathcal{C}_n(\mathfrak{g}, M) := \mathfrak{g}^{\otimes(n-p)} \otimes \mathfrak{h} \otimes M$ du complexe de chaînes $\mathcal{C}_n(\mathfrak{g}, M) := \mathfrak{g}^{\otimes n} \otimes M$, et construit à partir de celle-ci une suite spectrale E dont la première page vérifie, pour $p \geq 1$:

$$E^1_{p,q} \simeq HL_q(\mathfrak{h}, M) \otimes (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{g}^{\otimes(p-1)}.$$

Dans certains cas particuliers, mais aussi pour $p = 0, 1$, il réussit même à calculer le terme E^2. Il montre par exemple que sous certaines conditions, on a l'isomorphisme suivant pour $p \geq 2$:

$$E_2^{p,q} \simeq H_q(K, M) \otimes H_p(L, L/K).$$

De cette étude, il déduit certains calculs d'homologie pour des algèbres de Leibniz de petite dimension, mais retrouve aussi une formule de type Künneth pour les algèbres de Leibniz, déja montrée par J. L. Loday dans [12] :

Théorème. $[Loday, 1996]$

Pour L, L' deux algèbres de Leibniz, on a l'isomorphisme suivant :

$$H_*(L \oplus L', \mathbb{K}) \simeq H_*(L, \mathbb{K}) \star H_*(L', \mathbb{K}),$$

où $\star$ est le produit libre de module gradué défini dans [12].

Organisation de la thèse et principaux résultats

Cette thèse débute par deux parties introductives : une première sur les algèbres de Leibniz, puis une deuxième sur les suites spectrales.

La première partie est principalement basée sur l'article [10] de Jean-Louis Loday et sur la thèse [3] de Simon Covez pour la partie théorie, et sur [2] et [4] pour les exemples. On commence par définir les algèbres de Leibniz, ainsi que les notions algèbriques intrinsèquement liées : sous-algèbres, morphismes,... On détaille ensuite la théorie cohomologique liée à ces algèbres développée par J.-L. Loday, on revient notamment sur la notion de module d'algèbre de Leibniz et de complexe de Loday : une partie importante de ce chapitre est dédiée à prouver que la différentielle que l'on introduit en est bien une.

A noter que nous travaillons ici avec des algèbres de Leibniz à gauche, tandis que J.-L. Loday utilise des algèbres à droite. Cette distinction est mise en perspective dans ce chapitre.

Le deuxième chapitre, introduisant les suites spectrales, a été écrit à partir du livre [20] de Weibel, de [16] de Mac Lane, et de [17] de McCleary. On débute ce chapitre en définissant ce qu'est une suite spectrale, et, comme pour les algèbres de Leibniz, les objets algébriques liés à ces dernières.

On se penche ensuite sur l'étude d'un genre particulier de suites spectrales : celles définies à partir d'une filtration du complexe de cochaîne dont on souhaite connaître la cohomologie. En effet, si $\mathcal{FC}$ est une filtration d'un complexe $\mathcal{C}$, alors en posant :

$$E_0^{p,q} := \frac{\mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}}{\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q}},$$

on peut construire une suite spectrale qui converge sous certaines conditions vers la cohomologie du complexe.

Le troisième chapitre constitue le corps de cette thèse : nous y étudions non pas l'homologie comme A. V. Gnedbaye, mais la cohomologie d'algèbres de Leibniz, en s'appuyant sur ces travaux et sur ceux cités ci-dessus, mais aussi sur l'article [7] de G. Hochschild et J.-P. Serre dans lequel ils étudient grâce à des suites spectrales la cohomologie de groupe. Nous définissons au total quatre suites spectrales inspirées de ces différentes publications.

Dans un premier temps, on transpose telle quelle la filtration définie sur les algèbres de Lie, et on obtient le théorème suivant décrivant la page E_0 :

Théorème. $[B., 2017]$

Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K une sous-algèbre de L. On a, pour tout $p, q \geq 0$, les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants :

$$E_0^{p,q} \simeq Hom\left(\sum_{A_{p+1,q-1}} (L/K)^{\otimes\alpha_1} \otimes K^{\otimes\beta_1} \otimes (L/K)^{\otimes\alpha_2} \otimes \cdots \otimes K^{\otimes\beta_m}, M\right),$$

où $A_{p,q} := \{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_m, \beta_m \in \{0,1\} \mid m \in \mathbb{N}, \sum_{1\leq i\leq m} (\alpha_i + \beta_i) = p + q, \sum_{1\leq i\leq m} \beta_i = q+1\}$.

L'intérêt de cette suite spectrale est qu'elle est multiplicative, dans un sens que nous définirons au chapitre 2, malheureusement le calcul des pages suivantes s'avère insaisissable.

Dans une deuxième partie, on s'inspire de [7] pour définir la filtration du complexe de Loday suivante :

$$\mathcal{F}^p\mathcal{C}^n(L, M) := \{f : L^{\otimes n} \to M \mid f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = 0 \text{ si } \exists i \geq n-p+1 \text{ tel que } x_i \in K\}.$$

On montre que la suite spectrale issue de cette filtration ne converge pas vers la cohomologie de $\mathcal{C}(L, M)$, mais vers celle du complexe quotient $\mathcal{C}(L, M)/\mathcal{C}(L/K, M)$, que nous décrirons dans cette section. On parvient cette fois à calculer sous certaines hypothèses la deuxième page de la suite spectrale pour obtenir le théorème suivant :

Théorème. $[B., 2017]$

Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal bilatère de L vérifiant $[K, M] = [M, K] = 0$. *Pour tout $p \geq 0, q \geq 1$, on a :*

$$F_2^{p,q} \simeq H^{q-1}(L, Hom(K, H^p(L/K, M))),$$

où $Hom(K, H^p(L/K, M))$ est un L-module symétrique.

On en déduit ensuite par exemple le résultat suivant, sous les mêmes hypothèses que le théorème :

$$H^1(\mathcal{C}(L, M)/\mathcal{C}(L/K, M)) \simeq H^0(L, Hom(K, H^0(L/K, M))).$$

Dans la troisième section de ce chapitre, on définit la filtration duale de celle définie par A. V. Gnedbaye pour l'homologie d'algèbre de Leibniz. Malgré le fait que cette filtration soit prévue pour étudier les algèbres de Leibniz à droite, elle est encore valide pour les algèbres à gauche, et permet même une étude intéressante. Plus précisément, on pose :

$$\mathcal{G}^p\mathcal{C}^n(L,M) := \{f : L^{\otimes n} \to M \mid f_{|K^{\otimes(n+1-p)}\otimes L^{\otimes(p-1)}} = 0\}.$$

La suite spectrale construite à partir de cette filtration converge cette fois bien vers la cohomologie de l'algèbre L à valeurs dans M. On peut à nouveau calculer la deuxième page de la suite spectrale : on obtient plus précisément le théorème suivant :

Théorème. $[B., 2017]$

Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal bilatère de L. On a pour $p \geq 1$ les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants :

$$G_2^{p,q} \simeq H^q(K, Hom(L/K, H^{p-1}(L,M))),$$

où $Hom(L/K, H^{p-1}(L,M))$ est un K-module symétrique.

Finalement, on définit la quatrième suite spectrale comme la précédente, mais cette fois en tenant compte du fait que l'on travaille avec des algèbres de Leibniz à gauche. On obtient alors la filtration suivante :

$$\mathcal{GB}^pC^n(L,M) := \{f : L^{\otimes n} \to M \mid f_{|L^{\otimes(p-1)}\otimes K^{\otimes(n+1-p)}} = 0\},$$

qui converge toujours bien vers $H(L,M)$. Le calcul de la première page de la suite issue de cette filtration donne lieu au théorème suivant :

Théorème. $[B., 2017]$

Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal à gauche de L. Pour tout $q \geq 0$, on a les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants :

$$GB_1^{p,q} \simeq \begin{cases} H^q(K,M) & si\ p = 0, \\ \\ Hom(L^{\otimes(p-1)} \otimes L/K, H^q(K,M)) & si\ p \geq 1, \end{cases}$$

Il est par contre plus difficile de décrire la deuxième page en toute généralité, mais comme A. V. Gnedbaye, on calcule certains termes de la page E_2 pour p petit :

Théorème. $[B., 2017]$

Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal de L. Si $[K, M] = [K, K] = 0$, alors pour tout $q \geq 0$, on a l'isomorphisme d'espaces vectoriels suivant :

$$GB_2^{0,q} \simeq H^0(L/K, H^q(K, M)),\ GB_2^{1,q} \simeq H^1(L/K, H^q(K, M)),$$

où $H^q(K, M)$ est un L/K-module symétrique.

Grâce à la suite exacte à 5 termes (décrite au chapitre 2), on obtient pour corollaire l'injection de $H^1(L/K, H^0(K, M))$ dans la cohomologie $H^1(L, M)$ sous les mêmes hypothèses. L'étude de cette dernière suite termine ce chapitre. Les applications de ces différents théorèmes à des calculs plus explicites de cohomologie sont l'objet du chapitre quatre.

Dans ce dernier chapitre on appliquera ces résultats à des algèbres de Leibniz faisant intervenir des algèbres de Lie semi-simples en s'appuyant en particulier sur l'adaptation à la cohomologie du théorème suivant, énoncé par T. Pirashvili dans l'article [19] :

Théorème. $[Pirashvili, 1994]$

Soit $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie et M un $\mathfrak{g}$-Lie-module. Alors $H_i(\mathfrak{g}, M)$ est nul dès que $i \neq 0$.

1

Préambule sur les algèbres de Leibniz

1.1 Généralités

On nomme algèbre tout couple (A, μ) composé d'un espace vectoriel A et d'une application linéaire $\mu : A \otimes A \to A$, appelée multiplication. Sauf mention contraire, on considèrera dans ce manuscript des algèbres et des espaces vectoriels de dimension finie définis sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0.

Définition 1.1.1. *Une algèbre de Leibniz à gauche est une algèbre L dont la multiplication, notée $[\cdot, \cdot]$ et appelée "crochet", vérifie l'identité dite de Leibniz à gauche :*

$$\forall x, y, z \in L, \ \ [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

Remarque 1.1.2.

- L est une algèbre de Leibniz à gauche si et seulement si pour tout $x \in L$, l'application linéaire $[x, \cdot]$ est une dérivation à gauche.
- Il existe une notion d'algèbre de Leibniz à droite, détaillée dans l'aparté 1.2. Sauf mention contraire, on travaillera dans cette thèse uniquement avec des algèbres de Leibniz à gauche, sans plus effectuer cette précision.

Exemple 1.1.3.

1. Une algèbre de Lie est une algèbre de Leibniz.

2. Le crochet défini pour tout $i, j \in [1, n]$ par $[p_i, q_j] := \lambda_{ij} z$, où λ_{ij} est un réel fixé (les autres crochets élémentaires étant nuls), munit l'espace vectoriel H_n de base $\{z, p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n\}$ d'une structure d'algèbre de Leibniz dite de Heisenberg (pour sa similitude avec les algèbres de Lie de Heisenberg définie dans [2]). En effet, toute composition du crochet de H_n est nulle.

3. Soit A une algèbre associative et $D : A \to A$ une application linéaire. Si D est soit un endomorphisme d'algèbres vérifiant $D^2 = D$, soit une dérivation vérifiant $D^2 = 0$, alors le crochet $[a, b] := D(a)b - bD(a)$ fait de A une algèbre de Leibniz qui n'est pas en général une algèbre de Lie (voir [10]). Dans quelques cas particuliers comme $D = 0,\ D = Id, etc...$ $(A, [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie.

Remarque 1.1.4. Par soucis de concision, lorsque l'on définira le crochet d'une algèbre de Leibniz sur ces vecteurs de bases, on ne précisera que les valeurs non nulles.

Définition 1.1.5. *Soit L une algèbre de Leibniz. Une sous-algèbre K de L est un sous-espace vectoriel de L stable par crochet (i.e. : vérifiant $[K, K] \subset K$). On dit de plus qu'elle est :*

- *un idéal à gauche si $[L, K] \subset K$,*
- *un idéal à droite si $[K, L] \subset K$,*
- *un idéal bilatère si elle est un idéal à gauche et à droite.*

Exemple 1.1.6.

1. Si L est une algèbre de Lie, tout idéal de L au sens de Lie est un idéal bilatère au sens de Leibniz.

2. $[L, L]$ est toujours un idéal bilatère d'une algèbre de Leibniz L.

3. Le sous-espace de H_n (algèbre définie dans l'Exemple 1.1.3) de base $\{p_1, \ldots, p_n\}$ est un idéal à gauche, mais pas à droite. Par contre, tout sous-espace contenant le vecteur z est un idéal bilatère.

Exemple 1.1.7. Si L est une algèbre de Leibniz, alors $Leib(L) := Vect(\{[x, x] \mid x \in L\})$ est un idéal bilatère de L, qui est de plus abélien (*i.e.* : $\forall x, y \in Leib(L),\ [x, y] = 0$).

En effet, pour tout $x, y \in L$, on a d'un côté par l'identité de Leibniz :

$$[[x,x],y] = [x,[x,y]] - [x,[x,y]] = 0,$$

ce qui montre à la fois que $Leib(L)$ est abélien et que c'est un idéal à droite de L. De l'autre :

$$\begin{aligned}[y,[x,x]] =& [[y,x],x] + [x,[y,x]] \\ =& [[y,x]+x,[y,x]+x] - [x,x] - [[y,x],[y,x]] \in Leib(L),\end{aligned}$$

donc $Leib(L)$ est bien un idéal bilatère de L.

Remarque 1.1.8. Si $Leib(L) = 0$, alors : $\forall\ x, y \in L,\ 0 = [x+y, x+y] = [x,y] + [y,x]$, et donc L est une algèbre de Lie.

Proposition 1.1.9. *Une algèbre de Leibniz L de dimension 2 de base $\{e_1, e_2\}$ est soit une algèbre de Lie, soit isomorphe à l'une des deux algèbres de Leibniz suivantes : celle de crochet $[e_1, e_1] = e_2$ (que l'on notera L_1^2), ou celle de crochet $[e_1, e_1] = [e_1, e_2] = e_2$ (que l'on notera L_2^2).*

Démonstration. Soit L une algèbre de Leibniz de dimension 2 qui ne soit pas une algèbre de Lie. $Leib(L) \neq 0$ car L n'est pas une algèbre de Lie, et $Leib(L) \neq L$ car L n'est pas abélienne. Donc $Leib(L)$ est un sous-espace vectoriel de L de dimension 1. Soit donc $e_1 \in L - \{0\}$ tel que $e_2 := [e_1, e_1] \neq 0$: $Leib(L) = Vect(e_2)$. De plus, $e_1 \notin Leib(L)$ (sinon $e_2 = [e_1, e_1] = 0$ car $Leib(L)$ abélien), donc $\{e_1, e_2\}$ est une base de L.

On obtient le crochet (partiel) suivant sur cette base : $[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_2] = 0, [e_2, e_1] = 0$. De plus, il existe α tel que $[e_1, e_2] = \alpha e_2$ car $Leib(L)$ est un idéal de L. Deux cas se présentent alors : soit $\alpha = 0$, et on trouve alors L_1^2, soit $\alpha \neq 0$, et quitte à remplacer e_1 par $e_1' := \frac{1}{\alpha} e_1$ et e_2 par $e_2' := \frac{1}{\alpha^2}[e_1, e_1]$, on peut supposer $\alpha = 1$ et on trouve finalement L_2^2. □

Exemple 1.1.10. $Vect(e_2)$ est le seul idéal propre des deux algèbres de Leibniz L_2^1 et L_2^2, il est de plus bilatère.

Définition 1.1.11. *Soient L et L' deux algèbres de Leibniz et $f : L \to L'$ une application linéaire. On dit que f est un morphisme (d'algèbres de Leibniz) si elle vérifie l'identité suivante :*

$$f([x,y]_L) = [f(x), f(y)]_{L'}$$

Si de plus l'application est bijective, on parle alors d'isomorphisme.

Exemple 1.1.12. Il existe exactement deux familles à un paramètre $g_{1,\alpha}$ et $g_{2,\alpha}$ de morphismes de L_1^2 dans L_2^2 définies par $g_{1,\alpha}(e_1) = \alpha(f_1 - f_2), g_{1,\alpha}(e_2) = 0$ et $g_{2,\alpha}(e_1) =$

$\alpha f_2, g_{2,\alpha}(e_2) = 0$, où on note $\{e_1, e_2\}$ la base de L_1^2 définie dans l'Exemple 1.1.9, et $\{f_1, f_2\}$ celle de L_2^2 définie dans ce même exemple.

En effet, si on note $g(e_1) = \alpha f_1 + \beta f_2$ et $g(e_2) = \alpha' f_1 + \beta' f_2$, alors $g([x, y]) = [g(x), g(y)]\ \forall x, y \in L_1^2 \Leftrightarrow \alpha' = \beta' = 0, \alpha = -\beta$ ou $\alpha' = \beta' = \alpha = 0$.

Définition 1.1.13. *Soit L une algèbre de Leibniz. Un L-module est la donnée d'un espace vectoriel M et de deux applications linéaires : $[-,-]_l : L \otimes M \to M$ et $[-,-]_r : M \otimes L \to M$ vérifiant : $\forall x, y \in L$, $\forall m \in M$,*

(LLM) $\quad [x, [y, m]_l]_l = [[x, y], m]_l + [y, [x, m]_l]_l,$

(LML) $\quad [x, [m, y]_r]_l = [[x, m]_l, y]_r + [m, [x, y]]_r,$

(MLL) $\quad [m, [x, y]]_r = [[m, x]_r, y]_r + [x, [m, y]_r]_l.$

Un L-module est dit trivial si $[-,-]_l = [-,-]_r = 0$.

Définition 1.1.14. *Soit L une algèbre de Leibniz. Un L-Lie-module est la donnée d'un espace vectoriel M et d'une application linéaire : $[-,-]_l : L \otimes M \to M$ vérifiant* **(LLM)**.

Remarque 1.1.15. Si L est une algèbre de Lie, alors un L-Lie-module est simplement un L-module, au sens usuel du terme pour une algèbre de Lie.

Exemple 1.1.16. Soit L une algèbre de Leibniz.

1. L est un L-module pour $[-,-]_l = [-,-]_r = [-,-]_L$.
2. Si M est un L-Lie-module, il y a deux manières naturelles d'en faire un L-module : soit en posant $[-,-]_r = 0$, soit en posant $[-,-]_r = -[-,-]_l \circ \tau$, où $\tau(a, b) := (b, a)$.

Définition 1.1.17. *Soit L une algèbre de Leibniz et M un L-Lie-module.*

- *En posant $[-,-]_r = 0$, on définit un M-module dit antisymétrique.*
- *En posant $[-,-]_r = -[-,-]_l \circ \tau$, on définit un M-module dit symétrique.*

Remarque 1.1.18. Pour simplifier les notations, on notera dans la suite les deux applications $[-,-]_l$ et $[-,-]_r$ de la même façon que le crochet de L. Aucune confusion n'est à redouter puisque les éléments impliqués nous montrent bien de quel crochet il s'agit. Néanmoins, pour les désigner, on appelera le premier "action à gauche" et le deuxième "action à droite". Un L-Lie-module est la donnée uniquement d'une action à gauche.

Proposition 1.1.19. *Soit L une algèbre de Leibniz et K un idéal bilatère de L. Si K est un idéal, alors le crochet $[\bar{l}, \bar{l'}] := \overline{[l, l']}$, où $\bar{l}$ désigne la classe de l dans L/K, est bien défini pour tout $l, l' \in L$ et vérifie l'identité de Leibniz.*

Démonstration. Il suffit de montrer que ce crochet est bien défini, le fait qu'il vérifie l'identité de Leibniz découle immédiatement du fait que le crochet de L la vérifie.

Soient $l, l' \in L$ et $k, k' \in K$. $[l+k, l'+k'] = [l, l'] + [k, l'] + [l, k'] + [k, k']$, et $[k, l'], [l, k'], [k, k'] \in K$ car K est un idéal bilatère, donc le crochet est bien défini. □

Exemple 1.1.20. Soit L une algèbre de Leibniz et K une sous-algèbre de L. L'espace L/K admet la structure de K-module suivante :

$$[k, \bar{l}]_l := \overline{[k, l]} \text{ et } [\bar{l}, k]_r := \overline{[l, k]}.$$

Comme pour la proposition précédente, la seule chose à vérifier est que ce crochet est bien défini. Or : $\forall l \in L$, $\forall k, k' \in K$, $[k, l+k'] = [k, l] + [k, k']$ et $[l+k, k'] = [l, k'] + [k, k']$. Donc, comme K est une sous-algèbre, $[k, k'] \in K$, et ainsi le crochet est bien défini.

Si de plus K est un idéal bilatère, alors la structure de module précédente est triviale et l'espace L/K admet la structure de L-module (resp. de L/K-module) suivante :

$$[l', \bar{l}]_l := \overline{[l', l]} \text{ et } [\bar{l}, l']_r := \overline{[l, l']} \quad (\text{resp } [\overline{l'}, \bar{l}]_l := \overline{[l', l]} \text{ et } [\bar{l}, \overline{l'}]_r := \overline{[l, l']}).$$

Comme ci-dessus, la seule chose à vérifier est que ce crochet est bien défini. Or : $\forall l \in L$, $\forall k, k' \in K$, $[l', l+k] = [l', l] + [l', k]$ et $[l+k, l'] = [l, l'] + [k, l']$. Donc, comme K est un idéal, $[l', k], [k, l'] \in K$, et ainsi le premier crochet est bien défini. Le deuxième l'est par la Proposition 1.1.19.

Proposition 1.1.21. *Soient L une algèbre de Leibniz et M_1, M_2 deux L-Lie-module.*

1. *$Hom(M_1, M_2)$ est un L-Lie-module pour l'action définie pour tout $l \in L$, $m \in M$ et $f \in Hom(M_1, M_2)$ par :*

$$[l, f](m) = [l, f(m)] - f([l, m]).$$

2. *$M_1 \otimes M_2$ est un L-Lie-module pour l'action définie pour tout $l \in L, m_1, m_2 \in M$ par :*

$$[l, m_1 \otimes m_2] = [l, m_1] \otimes m_2 + m_1 \otimes [l, m_2].$$

Démonstration. 1. Soient $l, l' \in L$ et $f \in Hom(M_1, M_2)$. Montrons que le crochet défini dans la proposition vérifie bien

$$(\mathbf{LLM}) : [l, [l', f]] = [[l, l'], f] + [l', [l, f]].$$

On considère $m \in M$ puis on calcule séparément les trois termes de cette égalité :

(a) $[l,[l',f]](m) = [l,[l',f(m)]] - [l,f([l',m])] - [l',f([l,m])] + f([l',[l,m]])$;

(b) $[[l,l'],f](m) = [[l,l'],f(m)] - f([[l,l'],m])$;

(c) $[l',[l,f]](m) = [l',[l,f(m)]] - [l',f([l,m])] - [l,f([l',m])] + f([l,[l',m]])$.

Or puisque M_2 et M_1 sont deux L-Lie-module, on a les égalités suivantes :

$$[l,[l',f(m)]] - [[l,l'],f(m)] - [l',[l,f(m)]] = 0 \ ;$$
$$f([l',[l,m]]) + f([[l,l'],m]) - f([l,[l',m]]) = 0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &[l,[l',f]](m) - [[l,l'],f](m) - [l',[l,f]](m) \\ &\qquad = -[l,f([l',m])] - [l',f([l,m])] - (-[l',f([l,m])] - [l,f([l',m])]) \\ &\qquad = 0. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $m \in M$, on a bien pour tout $l,l' \in L$ et $f \in Hom(M_1,M_2)$:

$$[l,[l',f]] = [[l,l'],f] + [l',[l,f]],$$

et donc le crochet construit dans la proposition défini bien une structure de L-Lie-module sur $Hom(M_1,M_2)$.

2. Soient $l,l' \in L$ et $m_1 \otimes m_2 \in M_1 \otimes M_2$. Montrons que le crochet défini dans la proposition vérifie bien

$$(\mathbf{LLM}) : [l,[l',m_1 \otimes m_2]] = [[l,l'],m_1 \otimes m_2] + [l',[l,m_1 \otimes m_2]].$$

On calcule séparément les trois termes de cette égalité :

On obtient pour le premier :

$$\begin{aligned} [l,[l',m_1 \otimes m_2]] = {} & [l,[l',m_1]] \otimes m_2 + [l',m_1] \otimes [l,m_2] \\ & + [l,m_1] \otimes [l',m_2] + m_1 \otimes [l,[l',m_2]], \end{aligned}$$

pour le deuxième : $[[l,l'],m_1 \otimes m_2] = [[l,l'],m_1] \otimes m_2 + m_1 \otimes [[l,l'],m_2]$,

et finalement pour le troisième :

$$\begin{aligned} [l',[l,m_1 \otimes m_2]] = {} & [l',[l,m_1]] \otimes m_2 + [l,m_1] \otimes [l',m_2] \\ & + [l',m_1] \otimes [l,m_2] + m_1 \otimes [l',[l,m_2]]. \end{aligned}$$

Or puisque M_2 est un L-Lie-module : $[l,[l',m_1]]\otimes m_2-[[l,l'],m_1]\otimes m_2-[l',[l,m_1]]\otimes m_2=0$, et comme M_2 est un L-Lie-module : $m_1\otimes[l,[l',m_2]]-m_1\otimes[[l,l'],m_2]-m_1\otimes[l',[l,m_2]]=0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}[l,[l',m_1\otimes m_2]]-[[l,l'],&m_1\otimes m_2]-[l',[l,m_1\otimes m_2]]\\ &=[l,m_1]\otimes[l',m_2]+[l',m_1]\otimes[l,m_2]\\ &\quad-([l,m_1]\otimes[l',m_2]+[l',m_1]\otimes[l,m_2])\\ &=0.\end{aligned}$$

On a finalement bien montré que pour tout $l,l'\in L$ et $m_1\otimes m_2\in M_1\otimes M_2$:

$$[l,[l',m_1\otimes m_2]]=[[l,l'],m_1\otimes m_2]+[l',[l,m_1\otimes m_2]],$$

et donc le crochet construit dans la proposition défini bien une structure de L-Lie-module sur $M_1\otimes M_2$.

□

Corollaire 1.1.22. *Soient L une algèbre de Leibniz, K un idéal bilatère de L et M un L-module. On considère $A,B,C\in\{K,L,L/K\}$. Pour $p,q,r\in\mathbb{N}$, $Hom(A^{\otimes p}\otimes B^{\otimes q}\otimes C^{\otimes r},M)$ est un L-Lie-module pour l'action à gauche suivante :*

$$[l,f](a\otimes b\otimes c):=[l,f(a\otimes b\otimes c)]-f([l,a]\otimes b\otimes c)-f(a\otimes[l,b]\otimes c)-f(a\otimes b\otimes[l,c]),$$

où $a\in A^{\otimes p},b\in B^{\otimes q}$, $c\in C^{\otimes r}$ et $[l,x]:=\sum\limits_{k=1}^{p}x_1\otimes\cdots\otimes[l,x_k]\otimes\cdots\otimes x_p$ si $x=x_1\otimes\cdots\otimes x_p$.

Remarque 1.1.23. Le L-module symétrique associé à ce L-Lie-module a pour action à droite :

$$[f,l](a,b,c):=-[l,f(a,b,c)]+f([l,a],b,c)+f(a,[l,b],c)+f(a,b,[l,c]).$$

Il paraîtrait plus naturel de prendre pour action à droite :

$$[f,l](a,b,c):=[f(a,b,c),l]-f([a,l],b,c)-f(a,[b,l],c)-f(a,b,c),$$

cette action n'est pourtant en général pas compatible (au sens de la Définition 1.1.13) avec celle à gauche définie dans le corollaire précédente.

Pour une algèbre de Leibniz L, M un L-module, et par soucis de concision, on notera dans la suite :

- $d_{lm}(f)(x_1,\dots x_{n+1})=f(x_1,\dots,\hat{x}_l,\dots,[x_l,x_m],\dots,x_{n+1})$,

- $\delta_k(f)(x_1, \dots x_{n+1}) = [x_k, f(x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_{n+1})]$,
- $\partial(f)(x_1, \dots x_{n+1}) = [f(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}]$,

où $f \in Hom(L^{\otimes n}, M), x_i \in L$.

Définition/Théorème 1.1.24. $[Loday, 1994]$

Soient L une algèbre de Leibniz et M un L-module.

On note $C^n(L, M) := Hom(L^{\otimes n}, M)$ et $d^n : Hom(L^{\otimes n}, M) \to Hom(L^{\otimes (n+1)}, M)$ l'application définie par :

$$d^n := \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^i d_{ij} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \delta_i + (-1)^{n+1} \partial.$$

Le couple $(C^*(L, M), d^*)$ est un complexe de cochaînes, on l'appelle complexe de Loday associé à L et à valeurs dans M.

Prouver ce théorème revient à montrer que $d \circ d = 0$. On commence par montrer cette égalité pour un L-module trivial (Lemme 1.1.25), puis pour un L-module dont l'action à droite est nulle (Lemme 1.1.26), et enfin on prouve le théorème dans le cas général.

Lemme 1.1.25. *Soit L une algèbre de Leibniz et M un L-module. Si M est trivial, alors $d^{n+1} d^n = 0$ pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration. On considère une application $f \in Hom(L^{\otimes n}, M)$. Puisque nous nous plaçons dans le cas d'une action triviale, la différentielle de f est définie par :

$$d^n(f) := \sum_{1 \leq l < m \leq n+1} (-1)^l d_{lm}(f).$$

On cherche à calculer :

$$d^{n+1} d^n(f) = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n+2 \\ 1 \leq l < m \leq n+1}} (-1)^{l+i} d_{ij} d_{lm}(f).$$

On découpe la somme de la façon suivante :

$$d^{n+1} d^n(f) = \sum_{1 \leq i \leq l < m \leq n+1} (-1)^{l+i} d_{i,l+1} d_{lm}(f) + \sum_{\substack{1 \leq i < m+1 \\ 1 \leq l < m \leq n+1}} (-1)^{l+i} d_{i,m+1} d_{lm}(f)$$
$$+ \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n+2 \\ 1 \leq l < m \leq n+1 \\ j \notin \{l+1, m+1\}}} (-1)^{l+i} d_{ij} d_{lm}(f).$$

Pourquoi ce choix ? Puisque si $j \notin \{m+1, l+1\}$, les crochets ne se rencontrent pas aux deux étapes de la composition. On va avoir dans ce cas de simples formules de commutation du type $d \circ d = d \circ d$. Dans les autres cas, l'annulation des termes vient de ce que le crochet vérifie l'identité de Leibniz. Des calculs immédiats montrent que l'on obtient plus précisément les relations suivantes :

1. $\forall\ 1 \leq i < j \leq l < m \leq n+1,\ d_{ij}d_{lm} = d_{l+1,m+1}d_{ij}$,

2. $\forall\ 1 \leq i \leq l < j-1 < m \leq n+1,\ d_{ij}d_{lm} = d_{l+1,m+1}d_{i,j-1}$,

3. $\forall\ 1 \leq l < i < j \leq m \leq n+1,\ d_{ij}d_{lm} = d_{l,m+1}d_{i-1,j-1}$.

4. $\forall\ 1 \leq l < i \leq m \leq n+1,\ d_{l,m+1}d_{i-1,m} - d_{i,m+1}d_{l,m} + d_{l,i}d_{i-1,m} = 0$.

Grâce aux trois premières relations, on montre que le dernier terme de la somme est nul :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leq i<j\leq n+2\\ 1\leq l<m\leq n+1\\ j\notin\{l+1,m+1\}}} (-1)^{l+i} d_{ij}d_{lm} &= \left(\sum_{1\leq i<j\leq l<m\leq n+1} (-1)^{l+i} d_{ij}d_{lm} + \sum_{1\leq l<m<i<j\leq n+2} (-1)^{l+i} d_{ij}d_{lm}\right)\\
&\quad + \left(\sum_{1\leq i\leq l<j\leq m\leq n+1} (-1)^{l+i} d_{ij}d_{lm} + \sum_{1\leq l<i\leq m<j\leq n+2} (-1)^{l+i} d_{ij}d_{lm}\right)\\
&\quad + \left(\sum_{1\leq l<i<j\leq m\leq n+1} (-1)^{l+i} d_{ij}d_{lm} + \sum_{1\leq i\leq l<m<j\leq n+2} (-1)^{l+i} d_{ij}d_{lm}\right)\\
&= \sum_{1\leq i<j\leq l<m\leq n+1} (-1)^{l+i}(d_{ij}d_{lm} - d_{l+1,m+1}d_{ij})\\
&\quad + \sum_{1\leq i\leq l<j-1<m\leq n+1} (-1)^{l+i}(d_{ij}d_{lm} - d_{l+1,m+1}d_{i,j-1})\\
&\quad + \sum_{1\leq l<i<j\leq m\leq n+1} (-1)^{l+i)}(d_{ij}d_{lm} - d_{l,m+1}d_{i-1,j-1})\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puis grâce à la dernière relation, on montre que les deux premiers termes de la somme s'annulent :

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le i\le l<m\le n+1}(-1)^{l+i}d_{i,l+1}d_{lm}+\sum_{\substack{1\le i<m+1\\1\le l<m\le n+1}}(-1)^{l+i}d_{i,m+1}d_{lm}\\
&\qquad=\sum_{i\le l<m\le n+1}(-1)^{l+i}d_{i,l+1}d_{lm}+\sum_{\substack{i<m+1\\l<m\le n+1}}(-1)^{l+i}d_{i,m+1}d_{lm}\\
&\qquad=\sum_{i\le l<m\le n+1}(-1)^{l+i}d_{i,l+1}d_{lm}\\
&\qquad\quad+\sum_{l<i\le m\le n+1}(-1)^{l+i}d_{i,m+1}d_{lm}+\sum_{i\le l<m\le n+1}(-1)^{l+i}d_{i,m+1}d_{lm}\\
&\qquad=\sum_{1\le l<i\le m\le n+1}(-1)^{l+i+1}(d_{l,i}d_{i-1,m}-d_{i,m+1}d_{l-1,m}+d_{l,m+1}d_{i-1,m})\\
&\qquad=\ 0.
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve du lemme. □

Lemme 1.1.26. *Soit L une algèbre de Leibniz et M un L-module. Si M vérifie $[M,L]=0$, alors $d^{n+1}d^n=0$ pour tout $n\ge 0$.*

Démonstration. La différentielle de f est définie par :

$$d^n(f):=\sum_{1\le l<m\le n+1}(-1)^l d_{lm}(f)+\sum_{1\le k\le n}(-1)^{k-1}\delta_k(f).$$

D'après le lemme précédent, seuls les termes suivants de $d^{n+1}d^n$ sont a priori non nuls :

$$\sum_{\substack{1\le i<j\le n+2\\1\le k\le n}}(-1)^{i+k-1}d_{ij}\delta_k(f)+\sum_{\substack{1\le i<j\le n+1\\1\le k\le n+1}}(-1)^{i+k-1}\delta_k d_{ij}(f)+\sum_{\substack{1\le l\le n+1\\1\le k\le n}}(-1)^{l+k}\delta_l\delta_k(f).\quad(1.1)$$

Par des calculs immédiats, on montre les relations de commutations suivantes :

1. Pour $1\le i<j\le n+1,\ d_{ij}\delta_{j-1}-\delta_i\delta_{j-1}+\delta_j\delta_i=0,$
2. pour $1\le i<j\le k\le n$, $d_{ij}\delta_k=\delta_{k+1}d_{ij},$
3. pour $1\le k<i<j\le n+1$, $d_{ij}\delta_k=\delta_k d_{i-1,j-1},$
4. pour $1\le i\le k<j-1\le n,\ d_{ij}\delta_k=\delta_{k+1}d_{i,j-1}.$

On découpe la première somme de (1.1) en deux parties et on étudie séparément les deux termes obtenus :

$$\sum_{\substack{1\le i<j\le n+2\\1\le k\le n}}(-1)^{i+k-1}d_{ij}\delta_k=\sum_{1\le i<j\le n+1}(-1)^{i+j}d_{ij}\delta_{j-1}+\sum_{\substack{1\le i<j\le n+2\\1\le k\le n\\k\ne j-1}}(-1)^{i+k-1}d_{ij}\delta_k.$$

D'après l'assertion 1., on a dans un premier temps :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n+1}(-1)^{i+j}d_{ij}\delta_{j-1} &= \sum_{1\leq i<j\leq n+1}(-1)^{i+j}\delta_i\delta_{j-1} - \sum_{1\leq i<j\leq n+1}(-1)^{i+j}\delta_j\delta_i \\ &= -\sum_{\substack{1\leq l\leq n+1\\1\leq k\leq n}}(-1)^{l+k}\delta_l\delta_k.\end{aligned}$$

D'après les assertions 2., 3. et 4., on obtient ensuite :

$$\sum_{\substack{1\leq i<j\leq n+2\\1\leq k\leq n\\k\neq j-1}}(-1)^{i+k-1}d_{ij}\delta_k = -\sum_{\substack{1\leq i<j\leq n+1\\1\leq k\leq n+1}}(-1)^{i+k-1}\delta_k d_{ij}.$$

Ceci permet de conclure quant à la nullité de $d^{n+1}d^n$ en réintégrant ces relations à (1.1). □

Démonstration du théorème. La différentielle de f est désormais définie par :

$$d^n(f) := \sum_{1\leq l<m\leq n+1}(-1)^l d_{lm}(f) + \sum_{1\leq k\leq n}(-1)^{k-1}\delta_k(f) + (-1)^{n+1}\partial(f).$$

D'après les résultats issus des Lemmes 1.1.25 et 1.1.26, les seuls termes restant au calcul de $d^{n+1}d^n$ sont :

$$\begin{aligned}d^{n+1}d^n = &\sum_{1\leq i<j\leq n+2}(-1)^{n+i-1}d_{ij}\partial + \sum_{1\leq i<j\leq n+1}(-1)^{n+i}\partial d_{ij} \\ &+ \sum_{1\leq k\leq n+1}(-1)^{n+k}\delta_k\partial + \sum_{1\leq k\leq n}(-1)^{n+k+1}\partial\delta_k - \partial^2.\end{aligned}$$

On calcule les relations suivantes :

1. $\forall\ 1\leq i<j\leq n+1,\ d_{ij}\circ\partial = \partial\circ d_{ij}$,

2. $d_{n+1,n+2}\partial = \partial^2 + \delta_{n+1}\partial$,

3. $\forall\ 1\leq k\leq n,\ \delta_k\partial = \partial\delta_k + d_{k,n+2}\partial$.

On obtient donc, en regroupant les termes pour utiliser ces relations :

$$\begin{aligned} d^2 = & \sum_{1\leq i<j\leq n+1} (-1)^{n+i-1} \left(d_{ij}\partial - \partial d_{ij}\right) \\ & + \sum_{1\leq k\leq n} (-1)^{n+k}(\delta_k\partial - \partial\delta_k - d_{k,n+2}\partial) \\ & + d_{n+1,n+2}\partial - \delta_{n+1}\partial - \partial^2 \\ =& 0. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du théorème. □

Remarque 1.1.27. Il existe au moins une autre preuve de ce théorème (voir par exemple [13]) plus habituelle, mais nous exposons ici celle-ci dans le but d'introduire certaines relations de commutation entre les applications d_{ij}, δ_k et ∂, qui seront réutilisé dans le chapitre 3.

Exemple 1.1.28.

1. Pour $n = 0$, on obtient :

$$\begin{array}{rlcl} d^0 : & Hom(L^{\otimes 0}, M) \simeq M & \to & Hom(L, M) \\ & m & \mapsto & d^0 m : l \mapsto -[m, l]. \end{array}$$

2. Pour $n = 1$, on obtient :

$$\begin{array}{rlcl} d^1 : & Hom(L, M) & \to & Hom(L^{\otimes 2}, M) \\ & f & \mapsto & d^1 f : x\otimes y \mapsto -f([x,y]) + [x, f(y)] + [f(x), y]. \end{array}$$

3. Pour $n = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} d^2 f(x_1\otimes x_2\otimes x_3) &= -f([x_1,x_2]\otimes x_3) + f(x_1\otimes [x_2,x_3]) - f(x_2\otimes [x_1,x_3]) \\ &\quad +[x_1, f(x_2\otimes x_3)] - [x_2, f(x_1\otimes x_3)] - [f(x_1\otimes x_2), x_3]. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.29. Dans le cas où $M = L$, les exemples ci-dessus amènent les remarques suivantes, pouvant motiver la définition de la différentielle :

1. $d^0m = 0 \Leftrightarrow m \in Z_g(L)$, où $Z_g(L)$ est l'idéal à droite (appelé centre à droite) de L défini par $Z_g(L) := \{m \in L \mid [m, L] = 0\}$,
2. $d^1f = 0 \Leftrightarrow f$ est une dérivation à gauche sur L,
3. Soit $(L, [\cdot, \cdot])$ une algèbre (au sens général). L est une algèbre de Leibniz si et seulement si $d^2([\cdot, \cdot]) = 0$ (d est évidemment bien définie sur toute algèbre).

Définition 1.1.30. *Soit L une algèbre de Leibniz. Un L-comodule est la donnée d'un espace vectoriel M et de deux applications linéaires : $[-,-]_l : L \otimes M \to M$ et $[-,-]_r : M \otimes L \to M$ vérifiant : $\forall x, y \in L$, $\forall m \in M$,*

(LLM)' $[[x, y], m]_l = [x, [y, m]_l]_l + [y, [m, x]_r]_l,$

(LML)' $[y, [m, x]_r]_l = [[y, m]_l, x]_r + [[x, y], m]_l,$

(MLL)' $[[m, x]_r, y]_r = [m, [x, y]]_r + [[m, y]_r, x]_r.$

Un comodule est dit trivial si $[-,-]_l = [-,-]_r = 0$.

Proposition 1.1.31. *Un L-module est le dual d'un L-comodule dans le sens suivant :*

Si M est un L-comodule, alors M^* est un L-module pour les actions définies ci-dessous.

1. $[x, \alpha]_l(m) := \alpha([m, x]_r)$ *pour tout* $\alpha \in M^*$, $x \in L$ *et* $m \in M$,
2. $[\alpha, x]_r(m) := \alpha([x, m]_l)$ *pour tout* $\alpha \in M^*$, $x \in L$ *et* $m \in M$,

Démonstration. Soient $\alpha \in M^*$, $x, y \in L$ et $m \in M$.

On calcule d'un côté :

- $[x, [y, \alpha]_l]_l(m) = \alpha([[m, x]_r, y]_r)$,
- $[[x, y], \alpha]_l(m) = \alpha([[m, [x, y]_r)$,
- $[y, [x, \alpha]_l]_l(m) = \alpha([[m, y]_r, x]_r)$.

Par la relation $(MLL)'$: $\alpha([[m, x]_r, y]_r) = \alpha([m, [x, y]]_r) + \alpha([[m, y]_r, x]_r)$, et donc les crochets vérifient bien (LLM).

Puis :

- $[x, [\alpha, y]_r]_l(m) = \alpha([y, [m, x]_r]_l)$,
- $[[x, \alpha]_l, y]_r(m) = \alpha([y, m]_l, x]]_r)$,
- $[\alpha, [x, y]]_r(m) = \alpha([[x, y], m]_l)$.

Par la relation $(LML)'$: $\alpha([y,[m,x]_r]_l) = \alpha([[y,m]_l,x]]_r) + \alpha([[x,y],m]_l)$, et donc les crochets vérifient bien (LML).

Et finalement :

- $[\alpha,[x,y]]_r(m) = \alpha([[x,y],m]_l)$,
- $[[\alpha,x]_r,y]_r(m) = \alpha([x,[y,m]_l]_l)$,
- $[x,[\alpha,y]_r]_l(m) = \alpha([y,[m,x]_r]_l)$.

Par la relation $(LLM)'$: $\alpha([[x,y],m]_l) = \alpha([x,[y,m]_l]_l) + \alpha([y,[m,x]_r]_l)$, et donc les crochets vérifient bien (MLL).

Ainsi M^* est bien un L-module pour les actions définies dans la proposition. □

Définition/Théorème 1.1.32. [*Loday*, 1994]

Soient L une algèbre de Leibniz et M un L-comodule. On note $C_n(L,M) := L^{\otimes n} \otimes M$ et $d_n : L^{\otimes n} \otimes M \to L^{\otimes(n-1)} \otimes M$ l'application définie par : $\forall\, x_1,\dots,x_n \in L, \forall m \in M,\ \forall f \in Hom(L^{\otimes n}, M)$,

$$\begin{aligned} d_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes m) := \\ &\sum_{1\le i<j\le n} (-1)^i x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x}_i \otimes \cdots \otimes x_{j-1} \otimes [x_i,x_j] \otimes x_{j+1} \otimes \cdots \otimes x_n \otimes m \\ &+ \sum_{1\le i\le n-1} (-1)^{i-1} x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x}_i \otimes \cdots \otimes x_n \otimes [m,x_i] \\ &+ (-1)^n x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1} \otimes [x_n,m]. \end{aligned}$$

Le couple $(C_*(L,M),d_*)$ est un complexe de chaînes.

Démonstration. Une preuve de ce théorème (pour les algèbres de Leibniz à droite) est explicitée par J.-L. Loday et T. Pirashvili dans son article [14]. □

Exemple 1.1.33. On obtient les premières différentielles suivantes, où $x,y \in L$ et $m \in M$:

1. $d_1(x \otimes m) = -[x,m]$,
2. $d_2(x \otimes y \otimes m) = -[x,y] \otimes m + y \otimes [m,x] + x \otimes [y,m]$.

Remarque 1.1.34. Une motivation pour choisir cette définition de différentielle peut être la suivante : $(d_1 \circ d_2)(x \otimes y \otimes m) = [[x,y],m] - [x,[y,m]] - [y,[m,x]]$. Donc $d_1 \circ d_2 = 0$ équivaut à ce que les actions de L sur M vérifient l'identité $(LLM)'$.

Définition 1.1.35. *Soient C^* et D^* deux complexes de cochaînes.*

1. *Un morphisme de complexes de cochaînes $\phi^* : C^* \to D^*$ est une famille $\phi = (\phi^n)_n$ de morphismes d'espaces vectoriels $\phi^n : C^n \to D^n$ vérifiant $\phi^{n+1} \circ d_D^n = d_C^n \circ \phi^n$.*

2. *Un isomorphisme de complexes est un morphisme vérifiant de plus que chaque ϕ_n est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

3. *Un quasi-isomorphisme est un morphisme de complexes qui induit des isomorphismes d'espaces vectoriels au niveau cohomologique.*

Remarque 1.1.36. Un isomorphisme est en particulier un quasi-isomorphisme.

Remarque 1.1.37. On définit de même ces objets pour les complexes de chaînes.

Proposition 1.1.38. *Soient L une algèbre de Leibniz et M un L-comodule. On considère M^* comme un L-module au sens de la Proposition 1.1.31. Alors le complexe de Loday est isomorphe au dual gradué du complexe de chaînes de l'algèbre de Leibniz L dans le sens suivant :*

$$C^n(L, M^*) \simeq (C_n(L, M))^*$$

Démonstration. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Lorsque M est de dimension finie, on a les isomorphismes d'espaces vectoriels suivant :

$$C^n(L, M^*) \simeq Hom(L^{\otimes n}, M^*) \simeq Hom(L^{\otimes n} \otimes M, \mathbb{R}) = (C_n(L, M))^*.$$

On note ψ^n la composée de ces deux isomorphismes. La différentielle sur $(C_n(L, M))^*$ est définie comme suit : $d^n_{(C_n)^*}(\tilde{f}) := \tilde{f} \circ d_{n+1}$. Il s'agit de montrer que $(\psi^{n+1} \circ d^n)(f) = (d^n_{(C_n)^*} \circ \psi^n)(f) = \psi^n(f) \circ d_{n+1}$.

D'une part :

$$\begin{aligned}
\psi^n(f) \circ d_{n+1}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \otimes m) := \\
&\sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^i \psi(f)(x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x}_i \otimes \cdots \otimes x_{j-1} \otimes [x_i, x_j] \otimes x_{j+1} \otimes \dots x_n \otimes m) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \psi(f)(x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x}_i \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \otimes [m, x_i]) \\
&+ (-1)^n \psi(f)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes [x_{n+1}, m]).
\end{aligned}$$

D'autre part, en reprenant la Proposition 1.1.31, on trouve bien la même expression en calculant $(\psi^{n+1} \circ d^n)(f)$.

Ainsi on a bien l'isomorphisme demandé : $C^n(L, M^*) \simeq (C_n(L, M))^*$. □

1.2 Aparté : algèbre de Leibniz à droite

Si on choisit de travailler avec des algèbres de Leibniz à droite, voici ce qu'il convient de modifier :

- Le crochet vérifie l'identité de Leibniz à droite : $[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$.
- Un L-module est défini de la façon suivante :

  (LLM) $[x,[y,m]_l]_l = [[x,y],m]_l - [[x,m]_l,y]_r$,

  (LML) $[x,[m,y]_r]_l = [[x,m]_l,y]_r - [[x,y],m]_l$,

  (MLL) $[m,[x,y]]_r = [[m,x]_r,y]_r - [[m,y]_r,x]_r$.
- $C_n(L,M) := M \otimes L^{\otimes n}$
- La différentielle en cohomologie devient la suivante :

$$\begin{aligned} d^n f(x_1,\ldots,x_{n+1}) :=& \\ & \sum_{1\leq i<j\leq n+1} (-1)^{j-1} f(x_1,\ldots,x_{i-1},[x_i,x_j],x_{i+1},\ldots,\hat{x_j}\ldots x_{n+1}) \\ & + \sum_{i=2}^{n} (-1)^i [f(x_1,\ldots,\hat{x_i},\ldots,x_{n+1}),x_i] + \\ & + [x_1, f(x_2,\ldots,x_{n+1})]. \end{aligned}$$

- De même que précédemment, il existe la caractérisation suivante : L est une algèbre de Leibniz à droite si et seulement si $d^2([\cdot,\cdot]) = 0$.
- Un L-comodule M est défini par les trois relations suivantes :

  (LLM)' $[[x,y],m]_l = [x,[y,m]_l]_l - [y,[x,m]_l]_l$,

  (LML)' $[y,[m,x]_r]_l = [[y,m]_l,x]_r - [m,[x,y]]_r$,

  (MLL)' $[[m,x],y]_r = [m,[x,y]]_r - [[y,m]_l,x]_r$.
- La différentielle en homologie devient, pour un L-comodule M :

$$\begin{aligned} d_n(m \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \ :=\ & \sum_{1\leq i<j\leq n} (-1)^{j+1} m\otimes x_1 \otimes\cdots\otimes x_{i-1}\otimes[x_i,x_j]\otimes x_{i+1}\otimes\cdots\otimes\hat{x_j}\otimes\cdots\otimes x_n \\ & + \sum_{i=2}^{n} (-1)^i [x_i,m]\otimes x_1\otimes\cdots\otimes\hat{x_i}\otimes\cdots\otimes x_n \\ & + [m,x_1]\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_n. \end{aligned}$$

2

Préambule sur les suites spectrales

2.1 Généralités

Sauf mention contraire, dans cette section r désignera un entier naturel et p, q des entiers relatifs.

Définition 2.1.1. *Une suite spectrale est la donnée de deux éléments :*

1. *Une famille d'espaces vectoriels* $E := \{E_r^{p,q}\}_{p,q,r}$,
2. *Une famille de différentielles* $d := \{d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}\}_{p,q,r}$.

On obtient donc une famille de complexes de cochaînes :

$$\{(\mathcal{C}^*_{p,q,r}, d^*_{p,q,r}) := (E_r^{p+r(*-p-q),q+(-r+1)(*-p-q)}, d_r^{p+r(*-p-q),q+(-r+1)(*-p-q)})\}_{p,q,r}.$$

On demande enfin qu'il existe des isomorphismes :

$$E_{r+1}^{p,q} \simeq H^{p+q}(\mathcal{C}^*_{p,q,r}, d^*_{p,q,r}).$$

On appelle page E_r (ou page r) d'une suite spectrale (E, d) le couple $(\{E_r^{p,q}\}_{p,q}, \{d_r^{p,q}\}_{p,q})$, où parfois par abus de language simplement la famille $\{E_r^{p,q}\}_{p,q}$.

Remarque 2.1.2. *A quoi ressemblent les premières pages d'une suite spectrale* (E, d) *?*

1. Les complexes qui constituent la page E_0 ont pour espaces sous-jacents $\mathcal{C}^*_{p,q,0} = E_0^{p,*-p}$, et pour différentielles en degré $p+q$: $d^{p+q}_{p,q,0} = d_0^{p,q} : E_0^{p,q} \to E_0^{p,q+1}$.

   On peut représenter cette page E_0 par la FIGURE 2.1, où le point de coordonnées (p, q) représente l'espace $E_0^{p,q}$ et les flèches les différentielles.

   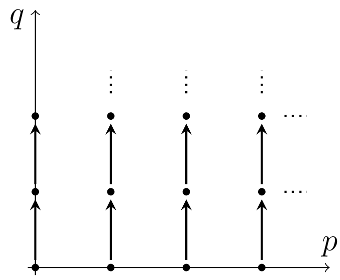

   FIGURE 2.1 : Page E_0.

   D'après la Définition 2.1.1, on a :

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &\simeq H^{p+q}(E_0^{p,*-p}) \\ &\simeq Ker(d_0^{p,q} : E_0^{p,q} \to E_0^{p,q+1})/Im(d_0^{p,q-1} : E_0^{p,q-1} \to E_0^{p,q}). \end{aligned}$$

   On peut remarquer que l'espace $E_1^{p,q}$ est isomorphe à un sous-quotient de $E_0^{p,q}$. Cette assertion est en fait vraie à chaque page :

$$\forall r \geq 0,\ E_{r+1}^{p,q} \textit{ est isomorphe à un sous-quotient de } E_r^{p,q}.$$

   En effet :

$$\begin{aligned} E_{r+1}^{p,q} &= H^{p+q}(E_r^{p+r(*-p-q),q+(-r+1)(*-p-q)}) \\ &= Ker(d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E^{p+r,q-r+1})/Im(d_r^{p,q-1} : E_r^{p-r,q+r-1} \to E^{p,q}). \end{aligned}$$

   En particulier, si $E_r^{p,q} = \{0\}$ pour un certain triplet p, q, r, alors $E_{r'}^{p,q} = \{0\}$ pour tout $r' \geq r$.

2. La page E_1 de la suite spectrale E est traversée par les complexes suivants :

$$(E_1^{*-q,q}, d^*_{p,q,1} = d_1^{*-q,q} : E_1^{*-q,q} \to E_1^{*-q+1,q}).$$

   La différentielle de degré $p+q$ est donc la suivante : $d^{p+q}_{p,q,1} = d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$. De même que pour la page précédente, on peut représenter cette page E_1 (voir la FIGURE 2.2).

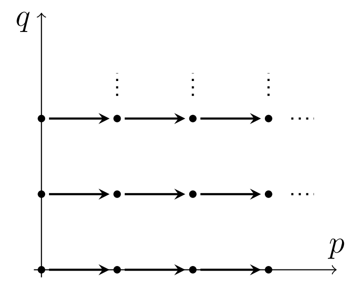

Figure 2.2 : Page E_1.

On obtient ensuite la deuxième page comme étant la cohomologie suivante : $E_2^{p,q} = H^{p+q}(E_1^{*-q,q})$.

3. De la même manière, les complexes de E_2 sont :

$$(E_2^{2*-2q-p,-*+2q+p}, d_2^{2*-2q-p,-*+2q+p}).$$

La différentielle en degré $p+q$ est donc la suivante : $d_{p,q,2}^{p+q} = d_2^{p,q} : E_2^{p,q} \to E_2^{p+2,q-1}$, comme illustré par la Figure 2.3.

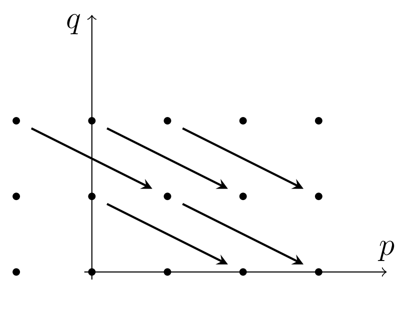

Figure 2.3 : Page E_2.

Remarque 2.1.3. On peut remarquer que dans les trois exemples précedents, si on appelle $p+q$ le degré total de $E_r^{p,q}$, la différentielle partant d'un espace de degré total $p+q$ arrive dans un espace de degré total $p+q+1$ (voir Figure 2.4).

Ceci se généralise à toutes les pages. En effet, une différentielle ayant pour espace de départ $E_r^{p,q}$, avec $p+q=n$, arrive dans l'espace $E_r^{p+r,q-r+1}$, de degré total $p+r+q-r+1 = p+q+1 = n+1$.

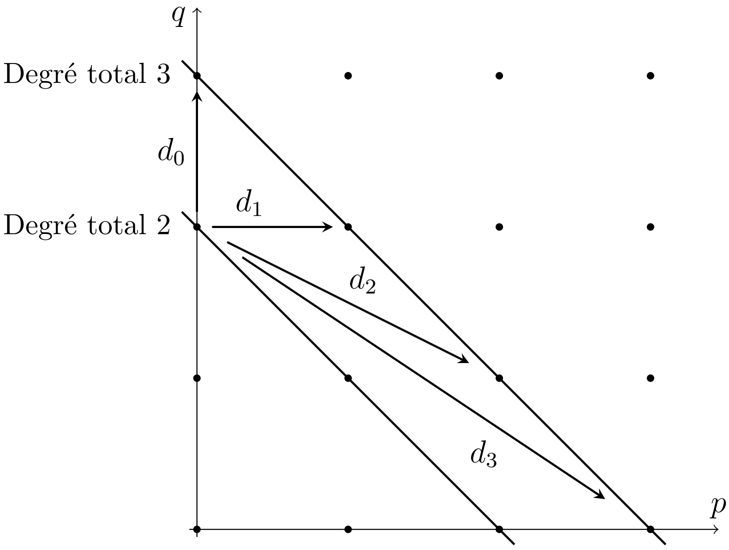

FIGURE 2.4 : Différentielles.

Exemple 2.1.4. On considère la suite spectrale dont les espaces de la page E_0 sont :

$$E_0^{p,q} := \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } p, q \text{ positifs} \\ \{0\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et les différentielles $d_0^{p,q}(x, y) := (y, 0)$ pour tout p, q positifs (Voir FIGURE 2.5).

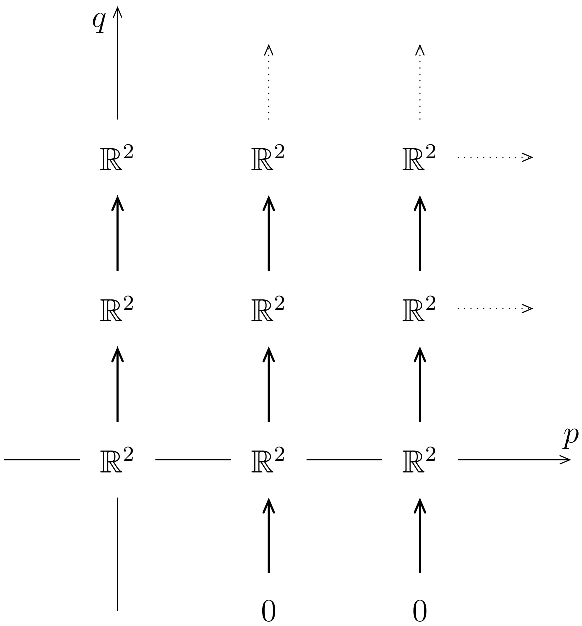

FIGURE 2.5 : Page E_0 - Exemple 2.1.4

On calcule immédiatement que $E_1^{p,0} = Ker(d_0^{p,0}) \simeq \mathbb{R}$ pour $p \geq 0$, et que $Ker(d_0^{p,q}) \simeq Im(d_0^{p,q-1})$ pour tout couple (p,q) vérifiant $p \geq 0$ et $q \geq 1$.

On obtient donc la page E_1 suivante (voir FIGURE 2.6) :

$$E_1^{p,q} \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p \geq 0 \text{ et } q = 0 \\ \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère la différentielle suivante : $d_1^{2p+1,0} = 0$, $d_1^{2p,0}(x) = \lambda_p \cdot x$, pour des λ_p réels non nuls.

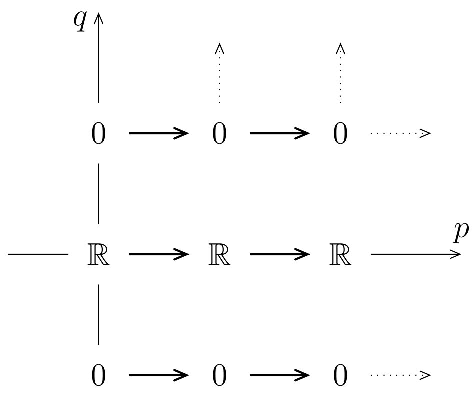

FIGURE 2.6 : Page E_1 - Exemple 2.1.4

On obtient donc la deuxième page suivante représentée par la figure 2.7.

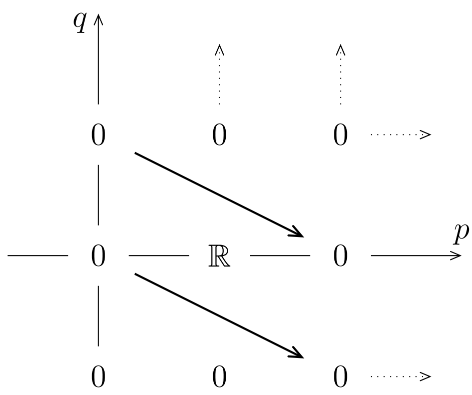

FIGURE 2.7 : Page E_2 - Exemple 2.1.4

Finalement, la différentielle d_2 est forcément nulle, et donc la page E_3 sera la même que la page E_2. De plus, puisque les diagonales de degré total pair sont nulles, toutes les différentielles supérieures sont nulles, et ainsi : $\forall r \geq 2,\ E_r = E_2$.

Exemple 2.1.5. On considère désormais la suite spectrale dont la page E_0 est constituée des espaces :

$$E_0^{p,q} := \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{si } q \geq 0 \\ \\ \{0\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et des différentielles $d_0^{p,q}(x, y, z) := (y + z, 0, 0)$ pour tout (p, q) tels que $q \geq 0$.

Des calculs élémentaires donnent les résultats suivants :

- $\forall q \geq 0,\ Ker(d_0^{p,q}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\}$

- $\forall q \geq 0,\ Im(d_0^{p,q}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$.

On obtient donc la première page suivante :

$$E_1^{p,q} \simeq \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } q = 0 \\ \\ \mathbb{R} & \text{si } q \geq 1 \\ \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les seules différentielles non nulles de cette première page seront celles entre les espaces isomorphes à $\mathbb{R}^2$, que l'on choisit comme suit : $d_1^{p,q}(x, y) := (y, 0)$.

On obtient donc comme deuxième page :

$$E_2^{p,q} \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q \geq 1 \\ \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme dans l'exemple précédent, toutes les différentielles supérieures sont nulles, et donc pour tout $r \geq 2$, $E_r = E_2$.

Définition 2.1.6. *Une suite spectrale* (E, d) *est dite :*

- *Bornée s'il existe* $r \geq 0$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il n'y a qu'un nombre fini d'espaces* $E_r^{p,n-p}$ *non nuls.*

- *Minorée s'il existe* $r \geq 0$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, les espaces* $E_r^{p,n-p}$ *sont nuls à partir d'un certain rang* p*.*

- *Stationnaire si pour tout* (p, q)*, il existe une page* r *telle que* $E_{r'}^{p,q} = E_r^{p,q}$ *pour tout* $r' \geq r$*. On note* $E_\infty^{p,q}$ *cet espace.*

Proposition 2.1.7. *Une suite spectrale bornée est stationnaire.*

Démonstration. On considère (E, d) une suite spectrale bornée. On fixe $p, q \in \mathbb{Z}$. Les espaces de la diagonale de degré total $p + q + 1$ sont nulles à partir d'un certain rang p, donc les différentielles sortante de $E_r^{p,q}$ seront également nulles pour r assez grand.

Un constat similaire pour la diagonale de degré total $p + q - 1$ permet de conclure la même chose pour les différentielles entrantes.

On a bien montré qu'à partir d'un certain rang r, les différentielles qui concernent l'espace $E_r^{p,q}$ sont nulles, et donc que pour tout $r' \geq r$, $E_r^{p,q} \simeq E_r^{p,q}$. Ceci étant valable pour tout p, q, (E, d) est bien stationnaire. □

Exemple 2.1.8.

1. La suite spectrale de l'Exemple 2.1.4 est bornée, donc stationnaire. On a même vu que $E_\infty = E_1$.

2. Celle de l'Exemple 2.1.5 est seulement minorée, mais tout de même stationnaire : $E_\infty = E_2$.

Exemple 2.1.9. *Suite spectrale nulle en dehors du premier quadrant.*

Soit (E, d) une suite spectrale telle qu'à une certaine page r, $E_r^{p,q} = 0$ dès que $p \leq -1$ ou $q \leq -1$. Une telle suite est bornée puisque pour chaque n, $\#\{E_r^{p,n-p} \neq 0\} \leq n + 1$. D'après la Remarque 2.1.2., cette propriété de nullité se propage à toutes les pages qui suivent.

On fixe des indices p et q.

- si $r > q + 1$, alors la différentielle partant de $E_r^{p,q}$ est nulle, en effet :

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1} = \{0\}.$$

- si $r > p$, alors la différentielle arrivant sur $E_r^{p,q}$ est nulle, en effet :

$$d_r^{p-r,q+r-1} : E_r^{p-r,q+r-1} = \{0\} \to E_r^{p,q}.$$

Ainsi dès que $r > \max(p, q+1)$, les différentielles qui concernent l'espace $E_r^{p,q}$ sont nulles, et donc $E_{r'}^{p,q}$=$E_r^{p,q}$ pour tout $r' \geq r$. Comme on l'a énoncé ci-dessus, la suite est bien stationnaire.

Exemple 2.1.10. Une suite spectrale nulle en dehors du demi-plan gauche est minorée, mais non bornée.

Définition 2.1.11. *Soient (E, d) et (E', d') deux suites spectrales. Un morphisme f : $(E, d) \to (E', d')$ est une famille d'applications $\{f_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r'^{p,q}\}_{p,q,r}$ vérifiant :*

- *$\forall r \geq 0,\ d'_r f_r = f_r d_r$,*

- *$\forall r \geq 0,\ f_{r+1}$ est l'application induite par f_r en cohomologie.*

Un isomorphisme de suites spectrales est un morphisme tel que pour un certain r, les applications $f_r^{p,q}$ soient des isomorphismes pour tout p, q.

Proposition 2.1.12. *Soit $f : E \to E'$ un isomorphisme de suites spectrales. Alors à partir d'un certain rang r, tous les $f_r^{p,q}$ sont des isomorphismes. Si de plus (E, d) et (E', d') sont bornées, alors tous les $f_\infty^{p,q} : E_\infty^{p,q} \to E'^{p,q}_\infty$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. Une preuve détaillée est présente dans [16] page 321 (Théorème 1.1). □

Définition 2.1.13. *Une filtration d'un espace vectoriel E est une famille $\mathcal{F}E := (\mathcal{F}^p E)_p$ de sous-espaces vectoriels de E vérifiant :*

$$\cdots \subset \mathcal{F}^p E \subset \mathcal{F}^{p-1} E \subset \cdots .$$

On appelle $(E, \mathcal{F})$ un espace filtré.

La filtration est de plus dite exhaustive si $E = \cup \mathcal{F}^p E$, séparée si $\cap \mathcal{F}^p \mathcal{E} = \{0\}$ et finie s'il existe $s \geq t \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathcal{F}^s E = \{0\}$ et $\mathcal{F}^t E = E$.

Remarque 2.1.14. Une telle filtration est plus précisément dite décroissante, elle est dite croissante si les inclusions de la définition ci-dessus sont inversées.

Exemple 2.1.15. Les espaces $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n constituent une filtration (croissante) exhaustive et séparée, mais non finie, de $\mathbb{R}[X]$.

Définition 2.1.16.

1. *Une suite spectrale minorée est dite convergente s'il existe une famille* $H := \{H^n\}_n$ *d'espaces vectoriels, chacun admettant une filtration exhaustive et séparée* $\mathcal{F}H^n$*, telle que :*
$$\forall p, q \in \mathbb{Z},\ E_\infty^{p,q} \simeq \mathcal{F}^p H^{p+q} / \mathcal{F}^{p+1} H^{p+q}.$$

2. *Une suite spectrale bornée est dite convergente s'il existe une famille* $\{H^n\}_n$ *d'espaces vectoriels, chacun admettant une filtration finie* $\mathcal{F}^s H^n$*, telle que :*
$$\forall p, q \in \mathbb{Z},\ E_\infty^{p,q} \simeq \mathcal{F}^p H^{p+q} / \mathcal{F}^{p+1} H^{p+q}.$$

Dans les deux cas, on note $E_0^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}$ *et on dit que* (E, d) *converge vers* H*.*

Exemples 2.1.17.

- La suite spectrale bornée de l'Exemple 2.1.4 converge vers la famille $\{H^n \simeq \mathbb{R}\}_n$ munie de la filtration triviale : $\mathcal{F}^p H^n \simeq \mathbb{R}$ si $p = n$, $\mathcal{F}^p H^n \simeq \{0\}$ sinon.
- Celle minorée de l'Exemple 2.1.5 converge vers la famille $\{H^0 := \mathbb{R}\} \cup \{H^n := \mathbb{R}^n\}_{n \geq 1}$ munie de la filtration suivante :
  - si $n = 0$: $\mathcal{F}^0 H^0 \simeq \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}^1 H^0 \simeq \{0\}$,
  - si $n \geq 1$: $\mathcal{F}^p H^n \simeq \mathbb{R}^{n-p}\ \forall p \in [0, n]$.

Le théorème suivant nous montre que cette notion de convergence est bien consistante.

Théorème 2.1.18. *Soient* E *et* E' *deux suites spectrales minorées qui convergent respectivement vers* H *et* H'*. S'il existe un isomorphisme* $f : E \to E'$*, alors tout morphisme* $h : H \to H'$ *compatible avec* f *est un isomorphisme.*

Démonstration. Une preuve détaillée est présente dans [20] page 126 (Théorème de conparaison 5.2.12). □

2.2 Suites spectrales issues d'une filtration

Définition 2.2.1. *Une filtration d'un complexe de cochaînes* $\mathcal{C}$ *est une famille* $\mathcal{FC} := (\mathcal{F}^p\mathcal{C})_{p\in\mathbb{Z}}$ *de sous-complexes de* $\mathcal{C}$ *vérifiant :*
$$\cdots \subset \mathcal{F}^p\mathcal{C} \subset \mathcal{F}^{p-1}\mathcal{C} \subset \cdots .$$

On appelle $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ *un complexe filtré.*

La filtration est de plus dite :

1. *minorée si pour tout* $n \geq 0$*, il existe* $s \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathcal{F}^s\mathcal{C}^n = \{0\}$*,*
2. *majorée si pour tout* $n \geq 0$*, il existe* $t \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathcal{F}^t\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^n$*,*
3. *bornée si elle est minorée et majorée (ou de façon équivalente si pour chaque* n*, la filtration de* $\mathcal{C}^n$ *est finie).*

Remarque 2.2.2.

- Les notions de filtrations exhaustives et séparées s'exportent aisément depuis la Définition 2.1.13.
- Si $\mathcal{C}$ est un complexe positif (*i.e. :* $\mathcal{C}^n$ *n'est défini que pour* $n \geq 0$) , on dit que la filtration est canoniquement bornée si $\mathcal{F}^0\mathcal{C} = \mathcal{C}$ et que $\mathcal{F}^{n+1}\mathcal{C}^n = \{0\}$ pour tout $n \geq 0$.

Exemple 2.2.3. *D'après [8], de G. Hochschild et J.-P. Serre.*

On considère une algèbre de Lie A, un A-module M (au sens de Lie) et une sous-algèbre K de A. A l'algèbre A, on associe le complexe positif $\Lambda(A, M)$ dont les espaces sous-jacents sont les $\Lambda^n(A, M)$ et la différentielle est celle donnée par la Définition/Théorème 1.1.24.

On pose $\mathcal{F}^0\mathcal{C} := \mathcal{C}$, et pour tout $n \geq 0$, on définit les sous-espaces de $\mathcal{C}^n$ suivants :

$$\mathcal{F}^p\mathcal{C}^n(A, M) = \begin{cases} \{f : A^{\otimes n} \to M \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ si } \exists a_{i_0}, \ldots, a_{i_{n-p}} \in K\} & \text{si } p \in [0, n], \\ \{0\} & \text{si } p \geq n+1. \end{cases}$$

On a bien les inclusions $\mathcal{F}^p\mathcal{C}^n \subset \mathcal{F}^{p-1}\mathcal{C}^n$ pour tout p, n. De plus, on deduit de l'expression suivante que si $f \in \mathcal{F}^p\mathcal{C}^n$, alors $df \in \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} d^n f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = & \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^i f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{j-1}, [x_i, x_j], x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}) \\ & + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} [x_i, f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})] \\ & + (-1)^{n-1} [f(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}]. \end{aligned}$$

Donc les $\mathcal{F}^p\mathcal{C}$ sont des sous-complexes, et $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ est bien un complexe filtré, sa filtration est de plus canoniquement bornée.

Exemple 2.2.4. *D'après [7], de G. Hochschild et J.-P. Serre.*

On considère un groupe G, un G-module M (*i.e.* : un ensemble sur lequel G agit) et un sous-groupe distingué K de G. On note $\mathcal{A}(G, M)$ le complexe positif des cochaînes normalisées de G à valeurs dans M (*i.e.* : dont le n^{ieme} espace est composé des morphismes de G^n dans M nuls si l'un des argument est le neutre e de G). La différentielle de ce complexe est définie comme suit :

$$\begin{aligned} d^n(f)(g_1, \ldots, g_{n+1}) := & \; g_1 \cdot f(g_2, \ldots, d_{n+1}) \\ & + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) \\ & + (-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n). \end{aligned}$$

On filtre le complexe de la façon suivante : pour tout $p \in [0, n]$, on pose :

$$\mathcal{F}^p \mathcal{A}^n(G, M) := \{f : G^n \to M \mid f(g_1, \ldots, g_n) = f(g_1, \ldots, g_{n-p}, \overline{g_{n-p+1}}, \ldots, \overline{g_n})\},$$

où $\overline{g}$ désigne la classe de g dans G/K, et on prend pour convention : $\mathcal{F}^{n+1} C^n(A, M) = \{0\}$.

On montre comme dans l'exemple précédent que ces espaces forment bien une filtration canoniquement bornée de $\mathcal{A}$.

Lemme 2.2.5. *Si $(F_p)_p$ est une filtration du complexe de chaînes (C_n, d_n), alors les espaces $F^p := \{f \in Hom(C_n, \mathbb{K}) \mid f_{|F_p} = 0\}$ définissent une filtration du complexe de cochaînes $(C^n := Hom(C_n, \mathbb{K}), d^n)$, où $d^n(f)(x) := f(d_n(x))$.*

De plus, par ce procédé, une filtration croissante deviendra décroissante (et inversement) et une filtration exhaustive deviendra séparé (et inversement).

Démonstration. Soit $(F_p C_n)_p$ est une filtration du complexe de chaînes (C_n, d_n). C'est-à-dire que $d_n(F_p C_n) \subset F_p C_{n-1}$.

Soit $f \in F^p C^n := \{f \in Hom(C_n, M) \mid f_{|F_p C_n} = 0\}$.

On a tout d'abord $F^p C^n \subset F^p C^{n+1}$ pour tout p, n, puis :

$$d^n f(F_p C_{n+1}) = f(d_{n+1}(F_{p+1} C_n)) \subset f((F_p C_n)) = 0,$$

Donc $d^n(F^p C^n) \subset F^p C^{n+1}$, et $(F^p C^n)_p$ est bien une filtration (croissante) de (C^n, d^n). $\square$

Proposition 2.2.6. *Si $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ est un complexe filtré, alors on peut construire une suite spectrale de page E_0 définie comme suit :*

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}, \quad E_0^{p,q} := \frac{\mathcal{F}^p \mathcal{C}^{p+q}}{\mathcal{F}^{p+1} \mathcal{C}^{p+q}},$$

et dont les différentielles $d_r^{p,q}$ sont induites par la différentielle de $\mathcal{C}$.

Démonstration. Tout d'abord, $\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q}$ est bien un sous-espace de $\mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}$ d'après la Définition 2.2.1. De plus, toujours d'après cette dernière, la différentielle de $\mathcal{C}$ vérifie $d(\mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}) \subset \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q+1}$ et $d(\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q}) \subset \mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q+1}$, donc induit bien une application $d_0^{p,q} : E_0^{p,q} = \frac{\mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}}{\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q}} \longrightarrow E_0^{p,q+1} = \frac{\mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q+1}}{\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q+1}}$.

Pour tout $r \geq 1$ et $p, q \in \mathbb{Z}$, on va maintenant construire des sous-quotients $E_r^{p,q}$ de $E_0^{p,q}$, et des différentielles $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$. On montrera ensuite que ces espaces forment bien une suite spectrale.

On fixe $r \geq 1$ et $p, q \in \mathbb{Z}$.

Pour construire d_r, on s'appuie sur la différentielle $d_0^{p,q} : E_0^{p,q} \to E_0^{p,q+1}$, issue de $d : \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q} \to \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q+1}$. La première contrainte est que l'espace d'arrivée doit être un sous-quotient de $E_0^{p+r,q-r+1} = \mathcal{F}^{p+r}\mathcal{C}^{p+q+1}/\mathcal{F}^{p+r+1}\mathcal{C}^{p+q+1}$. Il faut donc trouver un sous-espace $Z_r^{p,q}$ de $\mathcal{F}^p C^{p+q}$ vérifiant $d(Z_r^{p,q}) \subset Z_r^{p+r,q-r+1} (\subset \mathcal{F}^{p+r}\mathcal{C}^{p+q+1})$.

On introduit pour cela les sous-espaces de $\mathcal{F}^p C^{p+q}$ suivants :

$$Z_r^{p,q} := \{x \in \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q} \mid dx \in \mathcal{F}^{p+r}\mathcal{C}^{p+q+1}\}.$$

Par définition de ces espaces, on a bien $d(Z_r^{p,q}) \subset \mathcal{F}^{p+r}\mathcal{C}^{p+q+1}$. De plus, puisque $d \circ d = 0$, on a même l'inclusion $d(Z_r^{p,q}) \subset Z_r^{p+r,q-r+1}$. On a donc bien pour l'instant $d : Z_r^{p,q} \to Z_r^{p+r,q-r+1}$.

Mais les espaces $E_r^{p,q}$ doivent être des sous-quotients de $E_0^{p,q}$: on doit donc quotienter au départ par $\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q} \cap Z_r^{p,q} = Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ et à l'arrivée par $\mathcal{F}^{p+r+1}\mathcal{C}^{p+q+1} \cap Z_r^{p+r,q-r+1} = Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$.

Mais la potentielle application "$d : Z_r^{p,q}/Z_{r-1}^{p+1,q-1} \to Z_r^{p+r,q-r+1}/Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$" est mal définie car $d(Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \neq 0$ dans le quotient $Z_r^{p+r,q-r+1}/Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$.

Pour obtenir une application bien définie, il faut donc quotienter une dernière fois à l'arrivée par l'image de cet espace :

$$d(Z_{r-1}^{p+1,q-1})/Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \cap d(Z_{r-1}^{p+1,q-1}) = d(Z_{r-1}^{p+1,q-1})/d(Z_r^{p+1,q-1}),$$

et donc par cohérence au départ par : $d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2})/d(Z_r^{p-r+1,q+r-2})$.

Finalement, en posant :

$$E_r^{p,q} = \frac{Z_r^{p,q}/Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2})/\partial(Z_r^{p-r+1,q+r-2})},$$

on obtient un sous-quotient de $E_0^{p,q}$, et la différentielle $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q}$ construite ci-dessus est bien définie et induite par d.

Il ne reste plus qu'à vérifier que la famille $\{E_r^{p,q}, d_r^{p,q}\}_{r,p,q}$ que l'on vient de construire constitue bien une suite spectrale, c'est-à-dire que la page $r+1$ est bien issue du passage à la cohomologie de la page r comme demandé dans la Définition 2.1.1. Il s'agit de montrer que :

$$E_{r+1}^{p,q} \simeq Ker(d_r^{p,q})/Im(d_r^{p-r,q+r-1}).$$

- Par définition des espaces $Z_r^{p,q}$, le noyau de $d : Z_r^{p,q} \to Z_r^{p+r,q-r+1}/Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$ est exactement $Z_{r+1}^{p,q}$. De plus, $Z_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r-1}^{p+1,q-1} = Z_r^{p+1,q-1}$, ainsi :

$$Ker(d_r^{p,q}) = \frac{Z_{r+1}^{p,q}/Z_r^{p+1,q-1}}{d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2})/d(Z_r^{p-r+1,q+r-2})}.$$

- Pour l'image, on a tout d'abord :

$$Im(d_r^{p-r,q+r-1}) := \frac{d(Z_r^{p-r,q+r-1})/Z_{r-1}^{p+1,q-1} \cap d(Z_r^{p-r,q+r-1})}{d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) \cap d(Z_r^{p-r,q+r-1})/d(Z_r^{p-r+1,q+r-2}) \cap d(Z_r^{p-r,q+r-1})}$$

  Or $Z_{r-1}^{p+1,q-1} \cap d(Z_r^{p-r,q+r-1}) = d(Z_{r+1}^{p-r,q+r-1})$, $\partial_{r-1}(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) \cap d(Z_r^{p-r,q+r-1}) = d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2})$, et $d(Z_r^{p-r+1,q+r-2}) \cap d(Z_r^{p-r,q+r-1}) = d(Z_r^{p-r+1,q+r-2})$, donc :

$$Im(d_r^{p-r,q+r-1}) = \frac{d(Z_r^{p-r,q+r-1})/d(Z_{r+1}^{p-r,q+r-1})}{d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2})/d(Z_r^{p-r+1,q+r-2})}.$$

On en déduit immédiatement que :

$$E_{r+1}^{p,q} = \frac{Z_{r+1}^{p,q}/Z_r^{p+1,q-1}}{\partial_r(Z_r^{p-r,q+r-1})/d(Z_{r+1}^{p-r,q+r-1})} \simeq Ker(d_r^{p,q})/Im(d_r^{p-r,q+r-1}),$$

ce qui termine la preuve de cette proposition. □

Exemple 2.2.7. *Cas d'une filtration triviale*

Si la filtration est triviale (*i.e. :* $\mathcal{F}^0\mathcal{C} = \mathcal{C}, \mathcal{F}^1\mathcal{C} = \{0\}$), alors la page E_0 est concentrée sur la colonne "$p = 0$" et à pour valeurs $E_0^{0,*} = \mathcal{C}^*$. On obtient ensuite $E_\infty^{0,q} = E_1^{0,q} = H^q$.

Exemples 2.2.8. *Cas d'une filtration canoniquement bornée*

Si $\mathcal{C}$ est un complexe filtré positif et que sa filtration $\mathcal{FC}$ est canoniquement bornée, alors $E_0^{p,q}$ est nul dès que $p < 0$ ou $q < 0$: on obtient une suite spectrale nulle en dehors du premier cadran.

1. Etude de la ligne "$q = 0$".

   Les termes de la ligne "$q = 0$" de chaque page sont donnés par la formule $E_r^{p,0} = Z_r^{p,0}/d(Z_{r-1}^{p-r+1,r-2})$. Pour les premières pages, on obtient $E_0^{p,0} = \mathcal{F}^p\mathcal{C}^p$, $E_1^{p,0} = \{x \in \mathcal{F}^p\mathcal{C}^p \mid dx \in \mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^p\}$, $E_2^{p,0} = Ker(d : \mathcal{F}^p\mathcal{C}^p \to \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+1})$, etc...

   On peut de plus remarquer que :

   - Dès que $r \geq 2$, le numérateur ne dépend plus de r et vaut $Ker(d^q_{|\mathcal{F}^p\mathcal{C}^q})$.
   - Dès que $r \geq p + 1$, le dénominateur ne dépend plus de r et à pour valeur $d^{p+q-1}(Z_p^{0,p+q-1})$.

   Ainsi chaque terme de la ligne "$q = 0$" se stabilise pour $p \geq 1$ en :

$$E_\infty^{p,0} = E_{p+1}^{p,0} = \frac{Ker(d^q_{|\mathcal{F}^p\mathcal{C}^q})}{d^{p+q-1}(Z_p^{0,p+q-1})}.$$

2. Etude de la colonne "$p = 0$"

   On obtient de même que précédemment l'isomorphisme suivant pour $q \geq 1$:

$$E_\infty^{0,q} = E_{q+1}^{0,q} = \frac{Ker(d^q)/Ker(d^q_{|\mathcal{F}^1\mathcal{C}^q})}{d^{q-1}(\mathcal{C}^{q-1})}.$$

Remarque 2.2.9. *Quelques généralités sur la page E_1*

Puisque pour tout p, q on a l'égalité $Z_0^{p,q} = \{x \in \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q} \mid dx \in \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q+1}\} = \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}$, la construction donnée dans la preuve précédente nous donne, pour $r = 1$:

$$E_1^{p,q} = \frac{Z_1^{p,q}/\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q}}{d(\mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q-1})/d(Z_1^{p,q-1})}.$$

Explicitons l'isomorphime $H^{p+q}(E_0^{p,*-p}) \simeq E_1^{p,q}$.

D'une part : $Ker(d : \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q} \to \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q+1}/\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q+1}) = Z_1^{p,q}$, et donc $Ker(d_0) = Z_1^{p,q}/\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q}$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
&Im(d_0 : \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q-1}/\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q-1} \to \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}/\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q})\\
&\qquad = Im(d : \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q-1} \to \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q})/\left(\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q} \cap Im(d : \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q-1} \to \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q})\right)\\
&\qquad = d(\mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q-1})/d(Z_1^{p,q-1}))
\end{aligned}$$

On retrouve donc bien que $H^{p+q}(E_0^{p,*-p}) = E_1^{p,q}$.

Exemple 2.2.10. *Retour sur l'Exemple 2.2.3*

Si K est un idéal, on obtient alors la suite spectrale de premières pages :

$$E_0^{p,q} \simeq \mathcal{C}^q(K, \mathcal{C}^p(A/K, M)), E_1^{p,q} \simeq H^q(K, \mathcal{C}^p(A/K, M)), E_2^{p,q} \simeq H^q(K, H^p(A/K, M)).$$

Exemple 2.2.11. *Retour sur l'Exemple 2.2.4*

Si K est distingué dans G, on obtient alors la suite spectrale de premières pages :

$$E_0^{p,q} \simeq \mathcal{C}^p(G/K, \mathcal{C}^q(K, M)), E_1^{p,q} \simeq \mathcal{C}^p(G/K, H^q(K, M)).$$

Lemme 2.2.12. *Soient $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ un complexe filtré et E la suite spectrale associée selon la méthode enoncée dans la Proposition 2.2.6. Si $\mathcal{F}\mathcal{C}$ est minorée (resp. bornée), alors E est minorée (resp. bornée).*

Démonstration. On suppose dans un premier temps que la filtration est minorée. C'est-à-dire qu'il existe $s \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{F}^s\mathcal{C}^n = 0$. On obtient donc que $E_0^{p,n-p} = \frac{\mathcal{F}^p\mathcal{C}^n}{\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^n} = 0$ si $p \geq s$. Ainsi E est bien minorée.

Si maintenant la filtration $\mathcal{F}\mathcal{C}$ est bornée, alors il existe $s, t \in \mathbb{Z}$ tels que : $\{0\} = \mathcal{F}^s\mathcal{C}^n \subset \mathcal{F}^{s-1}\mathcal{C}^n \subset \cdots \subset \mathcal{F}^{t+1}\mathcal{C}^n \subset \mathcal{F}^t\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^n$. On obtient alors immédiatemant que $E_0^{p,q} = \frac{\mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}}{\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q}} = 0$ dès que $p \geq s$ ou $p \leq t+1$. Il n'y a donc bien qu'un nombre fini d'espaces $E_0^{p,n-p}$ non nuls pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et ainsi E est bien bornée. □

Théorème 2.2.13. *Soient $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ un complexe filtré et E la suite spectrale associée selon la méthode énoncée dans la Proposition 2.2.6. Si la filtration est exhaustive et minorée, alors la suite spectrale est minorée et converge vers la cohomologie de $\mathcal{C}$.*

Lemme 2.2.14. *Soient A un espace vectoriel et B, C deux sous-espaces de A. On a l'isomorphisme suivant :*

$$\frac{A/B}{A \cap C/B \cap C} \simeq \frac{A/A \cap C}{B/B \cap C}.$$

Démonstration. (*du lemme*) On quotiente l'application linéaire surjective $A \twoheadrightarrow A/A \cap C$ en $A/B \twoheadrightarrow \frac{A/A\cap C}{B/B\cap C}$. Elle a pour noyau $A \cap C/B \cap C$, donc on obtient bien l'isomorphisme souhaité. □

Démonstration. (*du théorème*)

Supposons que la filtration $\mathcal{FC}$ de $\mathcal{C}$ est exhaustive et minorée.

Tout d'abord, la suite spectrale est bien minorée d'après le Lemme précédent.

On considère ensuite la filtration suivante sur $H(\mathcal{C}, d)$:

$$\mathcal{F}^p H^n(\mathcal{C}, d) := Im\left(\frac{Ker(d^n) \cap \mathcal{F}^p\mathcal{C}^n}{d^{n-1}(\mathcal{C}^{n-1}) \cap \mathcal{F}^p\mathcal{C}^n} \hookrightarrow H^n(\mathcal{C}, d)\right).$$

On cherche à montrer qu'alors :

$$\frac{\mathcal{F}^p H^{p+q}(\mathcal{C}, d)}{\mathcal{F}^{p+1} H^{p+q}(\mathcal{C}, d)} \simeq E_\infty^{p,q}$$

D'un côté :

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{F}^p H^{p+q}(\mathcal{C}, d)}{\mathcal{F}^{p+1} H^{p+q}(\mathcal{C}, d)} &\simeq \frac{Ker(d^{p+q}) \cap \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}/d^{p+q-1}(\mathcal{C}^{p+q-1}) \cap \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}}{Ker(d^{p+q}) \cap \mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q}/d^{p+q-1}(\mathcal{C}^{p+q-1}) \cap \mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q}} \\ &\simeq \frac{Ker(d^{p+q}) \cap \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}/Ker(d^{p+q}) \cap \mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q}}{d^{p+q-1}(\mathcal{C}^{p+q-1}) \cap \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}/d^{p+q-1}(\mathcal{C}^{p+q-1}) \cap \mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q}},\end{aligned}$$

le deuxième isomorphisme découlant du Lemme 2.2.14.

De l'autre :

$$E_\infty^{p,q} = \frac{\bigcap_r (Z_r^{p,q}/Z_{r-1}^{p+1,q-1})}{\bigcup_r (\partial_{r-1}(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2})/Z_{r-1}^{p+1,q-1} \cap \partial_{r-1}(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}))}$$

Etudions le numérateur puis le dénominateur de $E_\infty^{p,q}$:

- $\mathcal{F}$ est une filtration minorée, donc pour r suffisament grand, $\mathcal{F}^{p+r}\mathcal{C}^{p+q+1} = \{0\}$, et par suite l'espace $Z_r^{p,q}$ est simplement $Ker(d^{p,q}) \cap \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}$. Or ces espaces sont liés par les inclusions suivantes : $\dots \subset Z_r^{p,q} \subset Z_{r-1}^{p,q} \subset \dots$, donc :

$$\bigcap_r (Z_r^{p,q}/Z_{r-1}^{p+1,q-1}) = Ker(d^{p,q}) \cap \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}/Ker(d^{p,q}) \cap \mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q}.$$

- On considère un élément $x \in \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q} \cap d(\mathcal{C}^{p+q-1})$. Il existe donc $a \in \mathcal{C}^{p+q-1}$ tel que $x = da \in \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}$. Mais puisque $\mathcal{F}$ est exhaustive, $a \in \mathcal{F}^t\mathcal{C}^{p+q-1}$ pour un certain $t \in \mathbb{Z}$. Et finalement $a \in Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-1}$, pour $r = p - t + 1$.

  Ainsi $\bigcup_r d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) = d(\mathcal{C}^{p+q-1}) \cap \mathcal{F}^p\mathcal{C}^{p+q}$.

  De plus, puisque $\dots \subset Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subset Z_{r-2}^{p+1,q-1} \subset \dots \subset Z_0^{p+1,q-1}$, on obtient que $\bigcup_r Z_{r-1}^{p+1,q-1} = Z_0^{p+1,q-1} = \mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q}$, ce qui permet de conclure la preuve.

$\square$

Remarque 2.2.15. En particulier, si la filtration est bornée, alors la suite spectrale est aussi bornée et converge vers la cohomologie de $\mathcal{C}$.

Corollaire 2.2.16. *Soient* $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ *un complexe filtré et* E *la suite spectrale associée selon la méthode énoncée dans la Proposition 2.2.6. Si la suite spectrale associée est minorée, alors elle converge vers la cohomologie de* $\bigcup_p \mathcal{F}^p\mathcal{C}/\bigcap_p \mathcal{F}^p\mathcal{C}$.

Démonstration. On note $\mathcal{C}' := \bigcup_p \mathcal{F}^p\mathcal{C}/\bigcap_p \mathcal{F}^p\mathcal{C}$. La filtration induite par $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}'$ est bien exhaustive et minorée, donc la suite spectrale issue de cette filtration converge bien vers la cohomologie de $\mathcal{C}'$. Finalement, il est clair que les suites spectrales issues de $\mathcal{FC}$ et de $\mathcal{FC}'$ sont bien isomorphes, ce qui termine la preuve de ce corollaire.

□

Lemme 2.2.17. *Soient* $\mathcal{C}$ *un complexe de cochaînes,* $\mathcal{FC}$ *une filtration de ce complexe et* E *la suite spectrale associée. Si la filtration est canoniquement bornée, alors la suite d'espaces vectoriels suivante est exacte :*

$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1(C^*) \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to H^2(C^*).$$

En particulier, $E_2^{1,0}$ *s'injecte dans* $H^1(C^*)$.

Démonstration. Les différentielles qui concernent les espaces $E_r^{1,0}$, $E_r^{0,1}$ pour $r \geq 2$ et $E_r^{2,0}$ pour $r \geq 3$ sont nulles car les espaces de départ et d'arrivée sont nuls. Donc $E_\infty^{1,0} \simeq E_2^{1,0}$, $E_\infty^{0,1} \simeq E_2^{0,1}$ et $E_\infty^{2,0} \simeq E_3^{2,0}$.

D'un côté $E_2^{1,0} \simeq \mathcal{F}^1H^1/\mathcal{F}^2H^1 \simeq \mathcal{F}^1H^1$ car la filtration est canoniquement bornée et donc $E_2^{1,0} \hookrightarrow H^1$.

De l'autre, $E_2^{0,1} \simeq \mathcal{F}^0H^1/\mathcal{F}^1H^1 \simeq H^1/E_2^{1,0}$, toujours car la filtration est canoniquement bornée, on obtient donc une application $H^1 \to E_2^{0,1}$ de noyau $E_2^{1,0}$.

On a donc pour le moment :

$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1(C^*) \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0}.$$

On a ensuite $H^2 \simeq \mathcal{F}^2H^2/\mathcal{F}^3H^2 \simeq E_\infty^{2,0} \simeq E_3^{2,0} \simeq Ker(d_2^{2,0})/Im(d_2^{0,1})$. Mais $d_2^{2,0} = 0$ et $E_2^{0,1} \hookrightarrow E_2^{2,0}$, d'où $H^2 \simeq E_2^{2,0}/E_2^{0,1}$, ce qui permet de terminer la preuve. □

2.3 Multiplicativité

Lemme 2.3.1. *Soit (E, d) une suite spectrale. Supposons que pour un certain $r \geq 0$:*

1. *il existe un produit bigradué $E_r^{p_1,q_1} \times E_r^{p_2,q_2} \to E_r^{p_1+p_2,q_1+q_2}$ pour tout p_i, q_i.*

2. *d^r vérifie la relation $d^r(xy) = d^r(x)y + (-1)^{p_1+q_1} x d^r(y)$, où $x \in E_r^{p_1,q_1}, y \in E_r^{p_2,q_2}$.*

Alors le produit sur la page E_r induit un produit sur la page E_{r+1}.

Remarque 2.3.2. Pour plus de renseignements sur ce lemme, voir [20], paragraphe 5.2.13, ainsi que l'errata (1995).

Définition 2.3.3. *Une suite spectrale est dite multiplicative s'il existe un rang $a \geq 0$ tel que E_r admette un produit (au sens du lemme précédent) pour tout $r \geq a$.*

Proposition 2.3.4. *Soit $(\mathcal{C}, \mu)$ une algèbre différentielle graduée. Soit $\mathcal{F}\mathcal{C}$ une filtration de $\mathcal{C}$ respectant le produit de $\mathcal{C}$ dans le sens suivant : pour tout p, q, $\mu(\mathcal{F}^p\mathcal{C} \times \mathcal{F}^q\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}^{p+q}\mathcal{C}$.*

Alors la suite spectrale construite à partir de cette filtration est multiplicative.

Démonstration. Le produit du complexe $\mathcal{C}$ est bien défini sur la page E_0 :

$$\mathcal{F}^p\mathcal{C}/\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C} \times \mathcal{F}^q\mathcal{C}/\mathcal{F}^{q+1}\mathcal{C} \to \mathcal{F}^{p+q}\mathcal{C}/\mathcal{F}^{p+q+1}\mathcal{C}.$$

En effet, la filtration vérifie les inclusions suivantes :

- $\mu(\mathcal{F}^p\mathcal{C} \times \mathcal{F}^q\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}^{p+q}\mathcal{C}$
- $\mu(\mathcal{F}^p\mathcal{C} \times \mathcal{F}^{q+1}\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}^{p+q+1}\mathcal{C}$
- $\mu(\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C} \times \mathcal{F}^q\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}^{p+q+1}\mathcal{C}$

De plus, on montre par récurence que pour tout $r \geq 0$, la différentielle d^r vérifie bien l'identité demandé car par définition d'une algèbre différentielle graduée, on a la relation suivante :

$$\forall x, y \in \mathcal{C},\ d(xy) = d(x)y + (-1)^p x d(y),\ \text{où } x \in \mathcal{C}^p.$$

□

Définition 2.3.5. *On dit qu'une permutation $\sigma \in S_{p+q}$ est un (p, q)-shuffle si :*

- $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$,
- $\sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)$,

On note alors $sh_{pq} : L^{\otimes(p+q)} \to L^{\otimes(p+q)}$ *l'application définie par :*

$$sh_{p,q}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) := \sum_{\sigma \in \{(p,q)-shuffle\}} x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Exemple 2.3.6.

- Les $(1,1)$-shuffle sont id et (12), et donc :

$$sh_{11}(x \otimes y) = x \otimes y + y \otimes x,$$

- Les $(2,1)$-shuffle sont id, (23) et (123), et donc :

$$sh_{21}(x \otimes y \otimes z) = x \otimes y \otimes z + x \otimes z \otimes y + z \otimes x \otimes y,$$

- Les $(1,2)$-shuffle sont id, (12) et (132), et donc :

$$sh_{12}(x \otimes y \otimes z) = x \otimes y \otimes z + y \otimes x \otimes z + y \otimes z \otimes x.$$

Définition 2.3.7. *On appelle* $\tilde{sh}$ *l'image de l'application sh définie ci-dessus sous l'anti-morphisme induit par* $\sigma \mapsto sgn(\sigma) \cdot \sigma^{-1}$*. On obtient donc la formule :*

$$\tilde{sh}_{p,q}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) := \sum_{\sigma \in \{(p,q)-shuffle\}} sgn(\sigma) \cdot x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(p+q)}.$$

Exemple 2.3.8.

- $\tilde{sh}_{11}(x \otimes y) = x \otimes y - y \otimes x,$
- $\tilde{sh}_{21}(x \otimes y \otimes z) = x \otimes y \otimes z - x \otimes z \otimes y + y \otimes z \otimes x,$
- $\tilde{sh}_{12}(x \otimes y \otimes z) = x \otimes y \otimes z - y \otimes x \otimes z + z \otimes x \otimes y.$

Définition 2.3.9. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie et* (A, μ) *une algèbre commutative qui soit de plus un* $\mathfrak{g}$*-module trivial. On définit l'application bilinéaire produit-cup*

$$\cup : C^p(\mathfrak{g}, A) \times C^q(\mathfrak{g}, A) \to C^{p+q}(\mathfrak{g}, A)$$

par :

$$f \cup g := \mu \circ (f, g) \circ \tilde{sh}_{p,q}.$$

Exemple 2.3.10.

- Si $f \in C^1(\mathfrak{g}, A)$ et $g \in C^1(\mathfrak{g}, A)$, alors :

$$(f \cup g)(x, y) = f(x)g(y) - f(y)g(x).$$

- Si $f \in C^2(\mathfrak{g}, A)$ et $g \in C^1(\mathfrak{g}, A)$, alors :

$$(f \cup g)(x, y, z) = f(x, y)g(z) - f(x, z)g(y) + f(y, z)g(x).$$

- Si $f \in C^1(\mathfrak{g}, A)$ et $g \in C^2(\mathfrak{g}, A)$, alors :

$$(f \cup g)(x, y, z) = f(x)g(y, z) - f(y)g(x, z) + f(z)g(x, y).$$

Exemple 2.3.11. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et M un $\mathfrak{g}$-module. On considère la filtration du complexe de Chevalley-Eilenberg définie dans l'Exemple 2.2.3. Montrons qu'elle respecte le produit défini ci-dessus au sens de la Proposition 2.3.4 : Soient $f \in \mathcal{F}^p\mathcal{C}^n$ et $g \in \mathcal{F}^q\mathcal{C}^m$: montrons que $f \cup g \in \mathcal{F}^{p+q}\mathcal{C}^{n+m}$. Soient $x_1, \ldots, x_{n+m}$ $n + m$ vecteurs de $\mathfrak{g}$ dont au moins $n + m - p - q + 1$ appartiennt à la sous-algèbre $\mathfrak{h}$. Il s'agit de prouver que $(f \cup g)(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0$.

$$\begin{aligned}
&(f \cup g)(x_1, \ldots, x_{n+m}) \\
&\qquad = \mu \circ (f, g) \circ \tilde{sh}_{n,m}(x_1, \ldots, x_{n+m}) \\
&\qquad = \sum_{\sigma \in \{(n,m)-shuffle\}} sgn(\sigma) \cdot f(x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(m)})g(x_{\sigma^{-1}(m+1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n+m)}).
\end{aligned}$$

Or puisqu'il y a $n + m - p - q + 1$ vecteurs dans $\mathfrak{h}$, il y en a forcément soit $n - p + 1$ en arguments de f, soit $m - q + 1$ en arguments de g quelque soit la permutation σ. Ainsi $(f \cup g)(x_1, \ldots, x_{n+m})$ est nulle, ce qui prouve que le cup-produit respecte bien la filtration. Par la Proposition 2.3.4, on en déduit que la suite spectrale issue de cette filtration est multiplicative au sens de la Définition 2.3.3

Définition 2.3.12. *Soit L une algèbre de Leibniz et (A, μ) une algèbre commutative qui soit de plus un L-module trivial. On définit l'application bilinéaire produit-cup*

$$\tilde{\cup} : C^p(L, A) \times C^q(L, A) \to C^{p+q}(L, A)$$

par :

$$f \tilde{\cup} g := \mu \circ (f \otimes g) \circ (\tilde{sh}_{p,q-1} \otimes id_L).$$

Exemple 2.3.13.

- Si $f \in C^1(L, A)$ et $g \in C^1(L, A)$, alors :

$$(f\tilde{\cup}g)(x \otimes y) = f(x)g(y).$$

- Si $f \in C^2(L, A)$ et $g \in C^1(L, A)$, alors :

$$(f\tilde{\cup}g)(x \otimes y \otimes z) = f(x \otimes y)g(z).$$

- Si $f \in C^1(L, A)$ et $g \in C^2(L, A)$, alors :

$$(f\tilde{\cup}g)(x \otimes y \otimes z) = f(x)g(y \otimes z) - f(y)g(x \otimes z).$$

Remarque 2.3.14. Cette structure multiplicative est l'adaptation aux algèbres de Leibniz à gauche de celle définie par J.-L. Loday dans [11]. Nous allons étudier dans le prochain chapitre si les suites spectrales que nous définirons sont multiplicative ou non pour ce cup-produit $\tilde{\cup}$.

Proposition 2.3.15. *$(C^*(L, A), (-1)^{deg(\cdot)deg(\cdot)} \cdot \tilde{\cup})$ est une algèbre Zinbiel, c'est-à-dire que le produit cup vérifie l'identité suivante :*

$$f\tilde{\cup}(g\tilde{\cup}h) = (f\tilde{\cup}g)\tilde{\cup}h + (-1)^{|f||g|}(g\tilde{\cup}f)\tilde{\cup}h).$$

Lemme 2.3.16. *Le produit $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \cdot (v_{p+1}, \ldots v_{p+q}) := (sh_{p,q-1} \otimes id)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p+q})$ munit l'algèbre tensorielle $T(V)$ d'une structure d'algèbre Zinbiel (à gauche), c'est-à-dire qu'il vérifie l'identité :*

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z + (y \cdot x) \cdot z.$$

Démonstration. (Du lemme)

Il s'agit de montrer que :

$$\begin{aligned}(sh_{p,q+r-1} \otimes id)\circ(id_{C^p} \otimes sh_{q,r-1} \otimes id)) &= (sh_{p+q,r-1} \otimes id) \circ ((sh_{p,q-1} \otimes id \otimes id_{C^r})) \\ &+ (sh_{p+q,r-1} \otimes id) \circ (sh_{q,p-1} \otimes id \otimes id_{C^r}) \circ (\tau_{p,q} \otimes id_{C^r}).\end{aligned}$$

Or par associativité des shuffles, on a :

$$(sh_{p,q+r-1} \otimes id) \circ (id_{C^p} \otimes sh_{q,r-1} \otimes id) = (sh_{p+q,r-1} \otimes id) \circ (sh_{p,q} \otimes id_{C^r}).$$

Finalement, $sh_{p,q} = sh_{p,q-1} \otimes id + (sh_{q,p-1} \otimes id) \circ \tau_{p,q}$, puisque les (p, q)-shuffle se terminent soit par l'élément v_p, soit par v_{p+q}. On obtient ainsi bien l'identité d'algèbre Zinbiel sur $T(V)$. □

Démonstration. (De la proposition)

Si on développe l'identité qu'il faut démontrer, on obtient immédiatement :

$$(id_{C^p} \otimes \tilde{sh}_{q,r-1} \otimes id) \circ (\tilde{sh}_{p,q+r-1} \otimes id) = (\tilde{sh}_{p,q-1} \otimes id \otimes id_{C^r}) \circ (\tilde{sh}_{p+q,r-1} \otimes id) \\ + (-1)^{pq}(\tau_{p,q} \otimes id_{C^r})(\tilde{sh}_{q,p-1} \otimes id \otimes id_{C^r}) \circ (\tilde{sh}_{p+q,r-1} \otimes id).$$

Or cette expression est simplement l'image par l'antimorphisme considéré précédement (celui engendré par $\sigma \mapsto sgn(\sigma) \circ \sigma^{-1}$) de :

$$(sh_{p,q+r-1} \otimes id) \circ (id_{C^p} \otimes sh_{q,r-1} \otimes id)) = (sh_{p+q,r-1} \otimes id) \circ ((sh_{p,q-1} \otimes id \otimes id_{C^r})) \\ + (sh_{p+q,r-1} \otimes id) \circ (sh_{q,p-1} \otimes id \otimes id_{C^r}) \circ (\tau_{p,q} \otimes id_{C^r}).$$

Et cette dernière égalité est exactement l'identité d'algèbre Zinbiel du lemme précédent, donc la Proposition est bien démontrée. □

Corollaire 2.3.17. *$(H^*(L,A), (-1)^{deg(\cdot)deg(\cdot)} \cdot \tilde{\cup})$ est une algèbre Zinbiel.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que le produit cup est bien défini au niveau cohomologique, c'est-à-dire que la différentielle cohomologique agit comme une dérivation sur les cochaînes. Pour cela on adapte la preuve du Lemme 2.6 de [11] aux algèbres de Leibniz à gauche. □

3

Définition et études des suites spectrales

Dans ce chapitre, nous allons construire et étudier 4 suites spectrales liées à la cohomologie d'algèbres de Leibniz. Pour ce faire nous commencerons par étudier 4 filtrations $\mathcal{EC}(L, M)$, $\mathcal{FC}(L, M)$, $\mathcal{GC}(L, M)$ et $\mathcal{GBC}(L, M)$ du complexe de Loday, essentiellemment définies par :

- $\mathcal{E}^p\mathcal{C}^n(L,M):=\{f:L^{\otimes n}\to M \mid f(x_1,\dots,x_n)=0$ si n-p+1 arguments appartiennent à $K\}$,
- $\mathcal{F}^p\mathcal{C}^n(L,M):=\{f:L^{\otimes n}\to M \mid f(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=0$ si $\exists i\geq n-p+1$ tel que $x_i\in K\}$,
- $\mathcal{G}^pC^n(L, M) := \{f : L^{\otimes n} \to M \mid f_{|K^{\otimes(n+1-p)}\otimes L^{\otimes(p-1)}} = 0\}$,
- $\mathcal{GB}^pC^n(L, M) := \{f : L^{\otimes n} \to M \mid f_{|L^{\otimes(p-1)}\otimes K^{\otimes(n+1-p)}} = 0\}$,

où L est une algèbre de Leibniz, K une sous-algèbre de L et M un L-module. Puis nous construirons 4 suites spectrales à partir de ces filtrations selon la méthode décrite au chapitre précédent dont nous calculerons les premières pages.

Avant de commencer cette étude, on calcule la cohomologie en bas degré de certaines algèbres de Leibniz de petites dimensions, pour avoir une base d'exemples qui pemettront d'illustrer les suites spectrales construites dans ce chapitre. Les applications plus poussées viendront dans le chapitre suivant.

Exemple 3.0.1. On considère l'algèbre de Leibniz L_1^2 dont le crochet sur une base $\{e_1, e_2\}$ est : $[e_1, e_1] = e_2$ (voir Exemple 1.1.9) et on étudie sa cohomologie à valeurs elle-même.

Pour les calculs qui suivent, on note $l := l_1e_1 + l_2e_2 \in L_1^2$, $l' := l'_1e_1 + l'_2e_2 \in L_1^2$ et $f = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} \in Hom(L_1^2, L_1^2)$. On note également $E_1 := vect(e_1)$ et $E_2 := vect(e_2)$.

- $d^0(l)(l') = -[l,l'] = -l_1l'_1e_2$, donc $H^0(L_1^2, L_1^2) \simeq Ker(d^0) \simeq E_2$.

- Calcul de $H^1(L_1^2, L_1^2)$:

$$\begin{aligned} d^1(f)(l\otimes l') &= -f([l,l']) + [l, f(l')] + [f(l), l'] \\ &= -l_1l'_1a_{12}e_1 + (-a_{22}l_1l'_1 + 2a_{11}l_1l'_1 + a_{12}l_2l'_1 + a_{12}l_1l'_2)e_2 \end{aligned}$$

Donc :

$$f \in Ker(d^1) \Leftrightarrow f(l) = a_{11}l_1e_1 + (a_{21}l_1 + 2a_{11}l_2)e_2.$$

Puis comme $Im(d^0) \simeq Hom(E_1, E_2)$, on obtient :

$$H^1(L_1^2, L_1^2) \simeq \{f : L_1^2 \to L_1^2 \mid f(l) = a(l_1e_1 + 2l_2e_2) \text{ où } a \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 3.0.2. On considère l'algèbre de Leibniz L_2^2 dont le crochet sur une base $\{e_1, e_2\}$ est : $[e_1,e_1] = [e_1,e_2] = e_2$ (voir Exemple 1.1.9) et on étudie sa cohomologie à valeurs dans elle même.

Pour les calculs qui suivent, on note $l := l_1e_1 + l_2e_2 \in L_2^2$, $l' := l'_1e_1 + l'_2e_2 \in L_2^2$ et $f = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} \in Hom(L_2^2, L_2^2)$. On note également $E_2 := vect(e_2)$.

- Calcul de $H^0(L_2^2, L_2^2)$: $d^0(l)(l') = -[l,l'] = -l_1(l'_1 + l'_2)e_2$, donc $H^0(L_1^2, \mathbb{K}) \simeq Ker(d^0) \simeq E_2$.

- Calcul de $H^1(L_2^2, L_2^2)$:

$$\begin{aligned} d^1(f)(l\otimes l') &= -f([l,l']) + [l, f(l')] + [f(l), l'] \\ &= -a_{12}(l_1l'_1 + l_1l'_2)e_1 - a_{22}(l_1l'_1 + l_1l'_2)e_2 \\ &\quad + l_1(l'_1(a_{11} + a_{21}) + l'_2(a_{12} + a_{22}))e_2 \\ &\quad + (a_{11}l_1 + a_{12}l_2)(l'_1 + l'_2)e_2. \end{aligned}$$

Donc :

$$f \in Ker(d^1) \Leftrightarrow \exists a \text{ tel que } f(l) = a(l_1 + l_2)e_2.$$

Mais un calcul immédiat donne $Im(d^0) \simeq Ker(d^1)$, donc $H^1(L_2^2, L_2^2) = 0$

Exemple 3.0.3. On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{K})$ des matrices de taille $(2,2)$ et on étudie sa cohomologie à valeurs dans elle même. On note $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$, et $\mathfrak{h}_2$ l'idéal des homothéties.

- $d^0(A)(B) = -[A, B]$, donc $H^0(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{K}), \mathfrak{gl}_2(\mathbb{K})) \simeq Ker(d^0) \simeq \mathfrak{h}_2$.

- Calcul de $H^1(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{gl}_2)$.

  Grâce à l'isomorphisme de modules suivant : $\mathfrak{gl}_2 \simeq \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{h}_2$, on a :

$$H^1(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{gl}_2) \simeq H^1(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{h}_2) \simeq H^1(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{sl}_2) \oplus H^1(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{h}_2).$$

  Or la cohomologie de Leibniz de degré 1 d'une algèbre de Lie à valeurs dans un Lie-module est la même que la cohomologie de Lie, donc par le Théorème 10 de [8] : $H^1(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{sl}_2) = 0$. Ainsi on a simplement :

$$H^1(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{gl}_2) \simeq H^1(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{h}_2).$$

  Puis $H^1(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{h}_2) \simeq Hom(\mathfrak{gl}_2/[\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{gl}_2], \mathfrak{h}_2) \simeq Hom(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_2)$.

Exemple 3.0.4. Le dernier exemple de cette série est l'algèbre de Leibniz L_6 de dimension 3 dont le crochet est défini sur une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ par $[e_2, e_3] = -[e_3, e_2] = e_2,\ [e_3, e_3] = e_1$.

L_6 est bien une algèbre de Leibniz : en effet, pour tout $x, y, z \in L_6$, on calcule $[x, [y, z]] = -x_3(y_2z_3 - y_3z_2)e_2,\ [[x, y], z] = (x_2y_3 - x_3y_2)z_3e_2$ et $[y, [x, z]] = -y_3(x_2z_3 - x_3z_2)e_2$. Donc le crochet respecte bien l'identité de Leibniz.

On étudie sa cohomologie à valeurs dans elle-même. Pour les calculs qui suivent, on note $l := l_1e_1 + l_2e_2 + l_3e_3 \in L_6$, $l' := l'_1e_1 + l'_2e_2 + l'_3e_3 \in L_6$ et $f = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \in Hom(L_6, L_6)$. On note également à nouveau $E_i = vect(e_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

- $d^0(l)(l') = -[l, l'] = -l_3l'_3e_1 - (l_2l'_3 - l_3l'_2)e_2$, donc $H^0(L_6, L_6) \simeq Ker(d^0) \simeq E_1$.

- Calcul de $H^1(L_6, L_6)$:

  On cherche des conditions sur f pour avoir $d^1(f)(l \otimes l') = -f([l, l']) + [l, f(l')] + [f(l), l'] = 0$ pour tout $l, l' \in L_6$. Le terme en e_3 de cette équation nous montre que $a_{31} = a_{32} = 0$, celui en e_1 que $a_{12} = 0$ et que $a_{11} = 2a_{33}$, puis celui en e_2 que $a_{21} = a_{33} = 0$. Ainsi :

$$f \in Ker(d^1) \iff f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis comme $d^0(l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l_3 \\ 0 & l_3 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient que :

$$f \in H^1(L_6, L_6) \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{K} \text{ tel que } f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l \\ 0 & -l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On termine cette section par un lemme qui nous servira à étudier les pages 0 des suites spectrales dans la section suivante.

Lemme 3.0.5. *Soient E et M deux espaces vectoriels. On note $F^* := \{f : E \to M \mid f_{|F} = 0\}$. Soient F et G deux sous-espaces de E tels que $F \subset G$. Alors :*

$$F^*/G^* \simeq Hom(G/F, M).$$

Démonstration. On considère l'application bien définie et surjective suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & F^* & \to & Hom(G/F, M). \\ & f & \mapsto & f : \bar{x} \mapsto f(x) \end{array}$$

Il est immédiat que $Ker(\phi) = G^*$, donc on a bien un isomorphisme :

$$\Phi : F^*/G^* \to Hom(G/F, M).$$

□

3.1 Etude de la première suite spectrale EC(L,M)

Définition/Proposition 3.1.1. *Soient une algèbre de Leibniz L, un L-module M et une sous-algèbre K de L. Si K est une sous-algèbre de L, alors les complexes $(\mathcal{E}^p\mathcal{C}^*(L,M))_{p\geq 0}$ suivants constituent une filtration du complexe $\mathcal{C}^*(L,M)$:*

- $\mathcal{E}^0\mathcal{C}^*(L,M) = \mathcal{C}^*(L,M)$
- *Pour tout $p \geq 1$:*
  - $\forall n \geq p-1,\ \mathcal{E}^p\mathcal{C}^n(L,M) :=$

$$\{f : L^{\otimes n} \to M \mid f(x_1,\dots,x_n) = 0 \text{ si n-p+1 arguments appartiennent à } K\}.$$

  - $\forall n \leq p-1,\ \mathcal{E}^p\mathcal{C}^n(L,M) = 0.$

On note $E\mathcal{C}(L,M)$ la suite spectrale associée à cette filtration selon la méthode décrite dans la Proposition 2.2.6.

Démonstration. Soient $p \geq 1, n \geq p-1$ et $f \in \mathcal{E}^p\mathcal{C}^n(L,M)$.

Montrons que $df \in \mathcal{E}^pC^{n+1}(L,M)$, c'est-à-dire que $df(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) = 0$ si au moins $n+1-p+1$ arguments appartient à K. Soit $x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \in L^{\otimes(n+1)}$ un $(n+1)$-uplet dans lequel au moins $n-p+2$ éléments appartiennent à K. Les termes de type "d_{ij}" de la différentielles sont nuls car $f \in \mathcal{E}^pC^n(L,M)$ et K est une sous-algèbre, ceux de la forme "δ_i" et ∂ car $f \in \mathcal{E}^pC^n(L,M)$.

Les cas $p=0$ et $n \leq p-1$ étant immédiats, on peut conclure que $\mathcal{E}\mathcal{C}(L,M)$ est une filtration du complexe $\mathcal{C}(L,M)$. □

Remarque 3.1.2.

1. La filtration $\mathcal{E}\mathcal{C}(L,M)$ est la retranscription de celle définie dans [8] pour étudier la cohomologie d'algèbres de Lie (développée dans l'exemple 2.2.3).
2. Cette filtration est bornée.

Proposition 3.1.3. *Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K une sous-algèbre de L. On a, pour tout $p,q \geq 0$, les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants :*

$$E_0^{p,q} \simeq Hom\left(\sum_{A_{p+1,q-1}} (L/K)^{\otimes\alpha_1} \otimes K^{\otimes\beta_1} \otimes (L/K)^{\otimes\alpha_2} \otimes \cdots \otimes K^{\otimes\beta_m}, M\right),$$

où $A_{p,q} := \{\alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_m,\beta_m \in \{0,1\} \mid m \in \mathbb{N},\ \sum_{1\leq i\leq m}(\alpha_i+\beta_i) = p+q,\ \sum_{1\leq i\leq m}\beta_i = q+1\}.$

Démonstration. On peut voir $\mathcal{E}^p C^{p+q}(L, M)$ comme étant l'ensemble des applications $f : \mathcal{C}^{p+q} \to \mathcal{C}^{p+q+1}$ nulles sur l'ensemble suivant :

$$\sum_{A_{p,q}} L^{\otimes \alpha_1} \otimes K^{\otimes \beta_1} \otimes L^{\otimes \alpha_2} \otimes \cdots \otimes K^{\otimes \beta_m},$$

Sous cette reformulation, on peut appliquer le Lemme 3.0.5 pour obtenir :

$$E_0^{p,q} \simeq Hom\left(\frac{\sum_{A_{p+1,q-1}} L^{\otimes \alpha_1} \otimes K^{\otimes \beta_1} \otimes L^{\otimes \alpha_2} \otimes \cdots \otimes K^{\otimes \beta_m}}{\sum_{A_{p,q}} L^{\otimes \alpha_1} \otimes K^{\otimes \beta_1} \otimes L^{\otimes \alpha_2} \otimes \cdots \otimes K^{\otimes \beta_m}}, M \right)$$

On considère alors l'application linéaire surjective suivante :

$$\sum_{A_{p+1,q-1}} L^{\otimes \alpha_1} \otimes K^{\otimes \beta_1} \otimes \cdots \otimes K^{\otimes \beta_m} \to \sum_{A_{p+1,q-1}} (L/K)^{\otimes \alpha_1} \otimes K^{\otimes \beta_1} \otimes \cdots \otimes K^{\otimes \beta_m},$$

Le noyau de cette application est :

$$\sum_{A_{p,q}} L^{\otimes \alpha_1} \otimes K^{\otimes \beta_1} \otimes L^{\otimes \alpha_2} \otimes \cdots \otimes K^{\otimes \beta_m},$$

donc on obtient bien l'isomorphisme demandé. □

Exemples 3.1.4.

On obtient les espaces $E_0^{p,q}$ suivants :

- $E_0^{0,0}\mathcal{C}(L, M) \simeq M$,
- $E_0^{0,1}\mathcal{C}(L, M) \simeq Hom(K, M)$, $E_0^{1,0}\mathcal{C}(L, M) \simeq Hom(L/K, M)$,
- $E_0^{0,2}\mathcal{C}(L, M) \simeq Hom(K^{\otimes 2}, M)$,
- $E_0^{2,0}\mathcal{C}(L, M) \simeq Hom((L/K)^{\otimes 2}, M)$,
- $E_0^{1,1}\mathcal{C}(L, M) \simeq Hom(K \otimes L/K + L/K \otimes K, M)$.

Proposition 3.1.5. *La suite spectrale $E\mathcal{C}(L, M)$ converge vers la cohomologie de L à valeurs dans M.*

Démonstration. Il s'agit simplement d'une application du théorème de convergence (Théorème 2.2.13). □

Proposition 3.1.6. *La suite E est multiplicative pour le cup-produit $\tilde{\cup}$ (voir Définition 2.3.12).*

Démonstration. Montrons que la filtration $\mathcal{EC}(L,M)$ est stable pour le cup-produit $\tilde{\cup}$. Soient $f \in \mathcal{E}^p\mathcal{C}^n(L,M)$ et $g \in \mathcal{E}^q\mathcal{C}^m(L,M)$: montrons que $f \cup g \in \mathcal{E}^{p+q}\mathcal{C}^{n+m}(L,M)$. Soient $x_1, \ldots, x_{n+m}$ $n+m$ vecteurs de L dont au moins $n+m-p-q+1$ appartiennt à la sous-algèbre K. Il s'agit de prouver que $(f\tilde{\cup}g)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+m}) = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{Or } & (f\tilde{\cup}g)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+m}) \\
&= (\mu \circ (f \otimes g) \circ (\tilde{sh}_{n,m-1} \otimes id_L))(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+m}) \\
&= \sum_{\sigma \in \{(n,m-1)-shuffle\}} sgn(\sigma) \cdot f(x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}) \\
&\qquad\qquad g(x_{\sigma(n+1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n+m-1)} \otimes x_{n+m}).
\end{aligned}$$

Or puisqu'il y a $n+m-p-q+1$ vecteurs dans K, il y en a forcément soit $n-p+1$ en arguments de f, soit $m-q+1$ en arguments de g quelque soit la permutation σ. Ainsi $(f\tilde{\cup}g)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+m})$ est nulle, ce qui prouve que le cup-produit respecte bien la filtration. Par la Proposition 2.3.4, on en déduit que la suite spectrale issue de cette filtration est multiplicative au sens de la Définition 2.3.3. □

3.2 Etude de la deuxième suite spectrale FC(L,M)

3.2.1 Définition de la filtration

Définition/Proposition 3.2.2. *Soient une algèbre de Leibniz L, un L-module M et une sous-algèbre K de L. Si K est un idéal bilatère de L vérifiant $[K,M] = [M,K] = 0$, alors les complexes $(\mathcal{F}^p\mathcal{C}^*(L,M))_{p\geq 0}$ suivants constituent une filtration du complexe $\mathcal{C}^*(L,M)$:*

- $\mathcal{F}^0\mathcal{C}^*(L,M) = \mathcal{C}^*(L,M)$
- *Pour tout $p \geq 1$:*
  - $\forall n \geq p,\ \mathcal{F}^p\mathcal{C}^n(L,M) :=$

$$\{f : L^{\otimes n} \to M \mid f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = 0 \text{ si } \exists i \geq n-p+1 \text{ tel que } x_i \in K\},$$

  - $\forall n \leq p-1,\ \mathcal{F}^p\mathcal{C}^n(L,M) = \mathcal{F}^n\mathcal{C}^n(L,M)$.

On note $F\mathcal{C}(L,M)$ la suite spectrale associée à cette filtration selon la méthode décrite dans la Proposition 2.2.6.

Démonstration. Soient $p \geq 1, n \geq p$ et $f \in \mathcal{F}^p\mathcal{C}^n(L,M)$.

Montrons que $df \in \mathcal{F}^pC^{n+1}(L,M)$, c'est-à-dire que $df(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) = 0$ si au moins un argument parmi les p derniers appartient à K. Soit $x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \in L^{\otimes(n+1)}$ un $(n+1)$-uplet dans lequel au moins un élément parmi $x_{n-p+2}, \ldots, x_{n+1}$ appartient à K.

On découpe la différentielle en les six termes suivants :

$$\begin{aligned}
d^n f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) := & \sum_{1 \leq i < j \leq n-p+1} (-1)^{i-1}(-1)^i d_{ij}(f)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) && (3.1)\\
& + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-p+1 \\ n-p+2 \leq j \leq n+1}} (-1)^i d_{ij}(f)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) && (3.2)\\
& + \sum_{n-p+2 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i-1}(-1)^i d_{ij}(f)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) && (3.3)\\
& + \sum_{i=1}^{n-p+1} (-1)^{i-1} \delta_i(f)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) && (3.4)\\
& + \sum_{i=n-p+2}^{n+1} (-1)^{i-1} \delta_i(f)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) && (3.5)\\
& + (-1)^{n+1} \partial(f)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}). && (3.6)
\end{aligned}$$

Les termes 3.1 et 3.4 sont nuls car $f \in \mathcal{F}^pC^n(L,M)$, le terme 3.2 est nul car $[L,K] \subset K$, et 3.3 car $[L,K] \subset K$ et $[K,L] \subset K$. La somme 3.5 est nulle car $[K,M] = 0$, et 3.6 car $[M,K] = 0$, il faut en effet prendre en compte le cas où c'est l'élément de K qui n'est plus en argument de f.

Les cas $p = 0$ et $n \leq p-1$ étant immédiats, on peut conclure que si K est un idéal bilatère vérifiant $[K,M] = [M,K] = 0$, alors $\mathcal{FC}(L,M)$ est une filtration du complexe $\mathcal{C}(L,M)$. □

Remarque 3.2.3.

1. La filtration $\mathcal{FC}(L,M)$ est la retranscription de celle définie dans [7] pour étudier la cohomologie de groupe (développée dans l'exemple 2.2.4).

2. Soit $p \geq 1$. Si $n \geq p$, alors $\mathcal{F}^pC^n(L,M) \overset{e.v.}{\simeq} Hom(L^{\otimes(n-p)} \otimes (L/K)^{\otimes p}, M)$, et si $n \leq p-1$, $\mathcal{F}^pC^n(L,M) \simeq Hom((L/K)^{\otimes n}, M)$.

3. Cette filtration est majorée, mais pas séparée :

$$\forall n, \quad \bigcap_p \mathcal{F}^p\mathcal{C}^n \simeq Hom((L/K)^{\otimes n}, M).$$

Exemple 3.2.4.

On considère l'algèbre de Leibniz $L_1^2 = Vect(e_1, e_2)$ définie dans l'Exemple 1.1.9, dont la cohomologie a été calculée dans l'Exemple 3.0.1, ainsi que son idéal bilatère $E_2 := Vect(e_2)$. On étudie sa cohomologie à valeurs dans elle-même.

Ces données entrent bien dans le cadre de la Définition/Proposition 3.2.2 puisque $[E_2, L_1^2] = [L_1^2, E_2] = 0$.

On obtient des espaces $\mathcal{F}^p\mathcal{C}^n(L_1^2, L_1^2) \simeq Hom((L_1^2)^{\otimes(n-p)} \otimes E_1^{\otimes p}, L_1^2)$ pour $p \geq 0$ et $n \geq p$, où on a noté $E_1 := L_1^2/E_2 \simeq Vect(e_1)$. Explicitement, $\mathcal{C}^n(L_1^2, L_1^2)$ est filtrée comme suit :

$$Hom(E_1^{\otimes n}, L_1^2) \hookrightarrow Hom(L_1^2 \otimes E_1^{\otimes(n-1)}, L_1^2) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow Hom((L_1^2)^{\otimes n}, L_1^2) \simeq \mathcal{C}^n(L_1^2, L_1^2).$$

Exemple 3.2.5.

On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_2$ des matrices de taille $(2,2)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et l'idéal bilatère $\mathfrak{h}_2$ des matrices d'homothéties de même taille. On étudie sa cohomologie à valeurs dans elle-même, ce qui est possible ici puisque une matrice de $\mathfrak{h}_2$ commute avec toute autre matrice. Le calcul explicite de cette cohomologie est traité dans l'Exemple 3.0.3.

On obtient alors un espace quotient $\mathfrak{pgl}_2 = \mathfrak{gl}_2/\mathfrak{h}_2$ de dimension 3, et les espaces de filtration suivants : $\mathcal{F}^p\mathcal{C}^n(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{gl}_2) \simeq Hom(\mathfrak{gl}_2^{\otimes(n-1)} \otimes \mathfrak{pgl}_2^{\otimes p}, \mathfrak{gl}_2)$.

Proposition 3.2.6. *Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal bilatère de L vérifiant $[K, M] = [M, K] = 0$. On a, pour tout $p \geq 0$, l'isomorphisme d'espaces vectoriels suivant :*

$$F_0^{p,q}\mathcal{C}(L, M) \simeq \begin{cases} \{0\} & si\ q = 0 \\ Hom(L^{\otimes(q-1)} \otimes K \otimes (L/K)^{\otimes p}, M) & si\ q \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration. Soient $p \geq 0$ et $q \geq 1$. On considère l'application de restriction (surjective) suivante, le premier isomorphisme étant donné par la Remarque 3.2.3 et la Définition 3.2.2 :

$$\phi_0^{p,q} : \mathcal{F}^p C^{p+q}(L, M) \overset{e.v.}{\simeq} Hom(L^{\otimes q} \otimes (L/K)^{\otimes p}, M) \to Hom(L^{\otimes(q-1)} \otimes K \otimes (L/K)^{\otimes p}, M).$$

Il est immédiat que $Ker(\phi_0^{p,q}) \simeq Hom(L^{\otimes(q-1)} \otimes (L/K)^{\otimes(p+1)}, M) \overset{e.v.}{\simeq} \mathcal{F}^{p+1}C^{p+q}(L, M)$, on obtient donc bien l'isomorphisme d'espaces vectoriels souhaité. Le cas $q = 0$ découle simplement du fait que $\mathcal{F}^{p+1}\mathcal{C}^p(L, M) = \mathcal{F}^p\mathcal{C}^p(L, M)$ pour tout $p \geq 0$. □

Exemple 3.2.7. *Retour sur l'Exemple 3.2.4*

On obtient ici la première page de la suite spectrale suivante (pour $q \geq 1$) :

$$F_0^{p,q}C(L_1^2, L_1^2) \simeq Hom((L_1^2)^{\otimes(q-1)} \otimes E_2 \otimes E_1^{\otimes p}, L_1^2).$$

Exemple 3.2.8. *Retour sur l'Exemple 3.2.5*

On obtient la première page de la suite spectrale suivante (pour $q \geq 1$) :

$$F_0^{p,q}C(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{gl}_2) \simeq Hom(\mathfrak{gl}_2^{\otimes(q-1)} \otimes \mathfrak{h}_2 \otimes \mathfrak{pgl}_2^{\otimes p}, \mathfrak{gl}_2).$$

Proposition 3.2.9. *La suite spectrale $F\mathcal{C}(L, M)$ converge vers la cohomologie du complexe quotient $\mathcal{C}(L, M)/\mathcal{C}(L/K, M)$:*

$$F\mathcal{C}(L, M) \Rightarrow H^*(\mathcal{C}^*(L, M)/\mathcal{C}^*(L/K, M)).$$

Démonstration. C'est une simple application du Corollaire 2.2.16. □

Remarque 3.2.10. L'espace vectoriel sous-jacent du complexe quotient est nul en degré 0, égale à $Hom(K, M)$ en degré 1, et plus généralement égal en degré n à :

$$Hom(\sum_{1\leq i\leq n} L \otimes \cdots \otimes L \otimes K \otimes L \otimes \cdots \otimes L, M),$$

où le facteur K est à la i^{me} place.

On peut remarquer que si $\{e_1, \ldots, e_m\}$ est une base de L et $\{e_k, \ldots, e_m\}$ une base de K, alors une base de $\sum_{1\leq i\leq n} L \otimes \cdots \otimes L \otimes K \otimes L \otimes \cdots \otimes L$ peut être constuite simplement à partir de la base canonique de $L^{\otimes n}$ en y otant les $k-1$ vecteurs suivants : $e_1^{\otimes n}, \ldots, e_{k-1}^{\otimes n}$. En effet, ce sont les seuls vecteurs de la base canonique qui ne sont pas présents dans ce sous-espace de $L^{\otimes n}$.

Exemple 3.2.11. On calcule la cohomologie en degré 1 du complexe décrit dans la Remarque précédente pour $L = M = L_1^2$ et $K = E_2$.

Soit $f = (a_i)_{1\leq i\leq 2} \in Hom(E_2, L_1^2)$. Une base de $L \otimes K + K \otimes L$ est $\{e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$, et on calcule

$$d^1 f(e_1 \otimes e_2) = d^1 f(e_2 \otimes e_1) = a_1 e_2,\ d^1 f(e_2 \otimes e_2) = 0,$$

donc

$$H^1(\mathcal{C}(L_1^2, L_1^2)/\mathcal{C}(E_1, L_1^2)) = Ker(d^1) \simeq Hom(E_2, E_2).$$

Exemple 3.2.12. On calcule la cohomologie en degré 1 du complexe décrit dans la Remarque précédente pour $L = M = \mathfrak{gl}_2$ et $K = \mathfrak{h}_2$. Soit $f = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} \in Hom(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{gl}_2)$, une base de $\mathcal{C}^2(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{gl}_2)/\mathcal{C}^2(\mathfrak{pgl}_2, \mathfrak{gl}_2)$ est $\{I \otimes M_{ij}, M_{ij} \otimes I\}$ pour $1 \leq i, j \leq 2$, $(i, j) \neq (2, 2)$, et on calcule que :

$$d^1 f(I \otimes M_{11}) = 0 \Leftrightarrow a_{21} = a_{12} = 0,$$

et par suite la condition $d^1 f(I \otimes M_{21}) = 0$ nous donne les résultats suivantes : $a_{11} = a_{22}$.

Les autres contrainte n'apportent pas plus d'informations sur f, on obtient donc :

$$H^1(\mathcal{C}(\mathfrak{gl}_2,\mathfrak{gl}_2)/\mathcal{C}(\mathfrak{pgl}_2,\mathfrak{gl}_2)) = Ker(d^1) \simeq Hom(\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_2).$$

3.2.13 Calcul des premières pages

Théorème 3.2.14. $[B., 2017]$

Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal bilatère de L vérifiant $[K,M]=[M,K]=0$. On a, pour tout $p\geq 0$, les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants :

$$F_1^{p,q} \simeq \begin{cases} \{0\} & si\ q=0, \\ \\ H^{q-1}(L, Hom(K\otimes L/K^{\otimes p}, M)) & si\ q\geq 1, \end{cases}$$

où $Hom(K\otimes (L/K)^{\otimes p}, M)$ est le L-module symétrique défini dans le Corollaire 1.1.22.

Remarque 3.2.15. On obtient ici précisément l'action à gauche suivante :

$$\begin{aligned}[l,f](k_1\otimes\overline{l_2}\otimes\cdots\otimes\overline{l_{p+1}}) :=& [l, f(k_1\otimes\overline{l_2}\otimes\cdots\otimes\overline{l_{p+1}})] - f([l,k_1]\otimes\overline{l_2}\otimes\cdots\otimes\overline{l_{p+1}}) \\ &- \sum_{i=2}^{p+1} f(k_1\otimes\overline{l_2}\otimes\cdots\otimes[l,\overline{l_i}]\otimes\cdots\otimes\overline{l_{p+1}}),\end{aligned}$$

Démonstration. Soient $p\geq 0$ et $q\geq 1$. On note toujours $\phi_0^{p,q}$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels $F_0^{p,q}\to Hom(L^{\otimes(q-1)}\otimes K\otimes L/K^{\otimes p}, M)$, $d^{p,*}$ la différentielle du complexe $C^{*-1}(L, Hom(K\otimes(L/K)^{\otimes p}, M))$ (où $Hom(K\otimes(L/K)^{\otimes p}, M)$ est considéré comme étant un module symétrique), et $d_0^{p,q} : F_0^{p,q}\to F_0^{p,q+1}$ la différentielle sur la page 0 de la suite spectrale.

Il s'agit maintenant de vérifier que $\phi_0^{p,q+1}\circ d_0^{p,q} = d^{p,q-1}\circ\phi_0^{p,q}$, ce qui impliquera que $F_1^{p,q}\simeq H^{p+q}(F_0^{p,*-p})$ est isomorphe à $H^{q-1}(L, Hom(K\otimes L/K^{\otimes p}, M))$.

Soit $f\in\mathcal{F}^pC^{p+q}$, on note $\overline{f}$ sa classe dans $F_0^{p,q}$.

D'une part :

$$d_0^{p,q}(\overline{f}) = \sum_{1\leq i<j\leq p+q+1} (-1)^i d_{ij}(\overline{f}) + \sum_{i=1}^{p+q}(-1)^{i-1}\delta_i(\overline{f}) + (-1)^{p+q+1}\partial(\overline{f}).$$

Mais $d_0^{p,q}(\overline{f})\in F_0^{p,q+1} = \dfrac{\mathcal{F}^pC^{p+q+1}}{\mathcal{F}^{p+1}C^{p+q+1}}$ et :

- $d_{ij}(f)\in\mathcal{F}^{p+1}C^{p+q+1}$ dès que $i\geq q+1$ car K est un idéal,
- $\delta_i(f)\in\mathcal{F}^{p+1}C^{p+q+1}$ dès que $i\geq q+1$ car $[K,M]=0$,

- $\partial(f) \in \mathcal{F}^{p+1}C^{p+q+1}$ car $[M, K] = 0$.

Donc $d_0^{p,q}(\overline{f}) = \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1 \\ 1\leq i\leq q}} (-1)^i d_{ij}(\overline{f}) + \sum_{i=1}^{q}(-1)^{i-1}\delta_i(\overline{f})$.

D'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned}
&(\phi_0^{p,q+1} \circ d_0^{p,q})(\overline{f})(l_1, \dots l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}) \\
&\qquad= \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1 \\ 1\leq i\leq q}} (-1)^i \phi_0^{p,q+1}(d_{ij}(\overline{f}))(l_1, \dots l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}) \\
&\qquad\quad+ \sum_{i=1}^{q}(-1)^{i-1}\phi_0^{p,q+1}(\delta_i(\overline{f}))(l_1, \dots l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}).
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
&d^{p,q-1} \circ \phi_0^{p,q}(\overline{f})(l_1, \dots, l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}) \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq q} (-1)^i d_{ij}(\phi_0^{p,q}(\overline{f}))(l_1, \dots, l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}) \\
&\quad+ \sum_{i=1}^{q-1}(-1)^{i-1}\delta_i(\phi_0^{p,q}(\overline{f}))(l_1, \dots, l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}) &(3.7)\\
&\quad+ (-1)^q\partial(\phi_0^{p,q}(\overline{f}))(l_1, \dots, l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}) &(3.8)\\
&= \sum_{1\leq i<j\leq q} (-1)^i d_{ij}(\phi_0^{p,q}(\overline{f}))(l_1, \dots, l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}) \\
&\quad+ \sum_{i=1}^{q-1}(-1)^{i-1}\delta_i(\phi_0^{p,q}(\overline{f}))(l_1, \dots, l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}) &(3.9)\\
&\quad- \sum_{\substack{1\leq i\leq q-1 \\ q+1\leq j\leq p+q}} (-1)^{i-1} d_{ij}(\phi_0^{p,q}(\overline{f}))(l_1, \dots, l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}) &(3.10)\\
&\quad- (-1)^q\delta_q(\phi_0^{p,q}(\overline{f}))(l_1, \dots, l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}) &(3.11)\\
&\quad+ (-1)^q \sum_{q+1\leq j\leq p+q+1} d_{qj}(\phi_0^{p,q}(\overline{f}))(l_1, \dots, l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}) &(3.12)\\
&= \sum_{\substack{1\leq i\leq q \\ 1\leq i<j\leq p+q+1}} (-1)^i d_{ij}(\phi_0^{p,q}(\overline{f}))(l_1, \dots, l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}) \\
&\quad+ \sum_{i=1}^{q}(-1)^{i-1}\delta_i(\phi_0^{p,q}(\overline{f}))(l_1, \dots, l_q, k_{q+1}, \overline{l_{q+2}}, \dots, \overline{l_{p+q+1}}).
\end{aligned}$$

Les lignes 3.9 et 3.10 découle de la ligne 3.7 d'après la Remarque 3.2.15, et les lignes 3.11 et 3.12 proviennent de la ligne 3.8 par symétrie du module $Hom(K \otimes (L/K)^{\otimes p}, M)$. Il s'agit donc de vérifier que :

- $\forall i \in [1, q],\ \forall j \in [i, p+q+1],\ d_{ij} \circ \phi_0^{p,q} = \phi_0^{p,q+1} \circ d_{ij}$;

- $\forall i \in [1, q],\ \delta_i \circ \phi_0^{p,q} = \phi_0^{p,q+1} \circ \delta_i$.

Or ceci est immédiat puisque ϕ_0 est simplement issu de la factorisation à un sous-quotient d'une application de restriction. On a donc bien $\phi_0^{p,q+1} \circ d_0^{p,q} = d^{p,q-1} \circ \phi_0^{p,q}$ pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ (le cas $q = 0$ est immédiat), ce qui termine la preuve. $\square$

Exemple 3.2.16. *Retour sur l'Exemple 3.2.4*

On note $\tilde{M}_p = Hom(E_2 \otimes E_1^{\otimes p}, L_1^2)$. Ici l'action à gauche de L_1^2 sur $\tilde{M}_p$ est simplement $[l, f](e_2 \otimes e_1^{\otimes p}) := [l, f(e_2 \otimes e_1^{\otimes p})]$ car les crochets $[L_1^2, E_2]$ et $[L_1^2, E_1]$ sont nuls. Donc, en notant $x_p e_1 + y_p e_2 := f(e_2 \otimes e_1^{\otimes p})$ et $l = l_1 e_1 + l_2 e_2$, on obtient que $[l, f](e_2 \otimes e_1^{\otimes p}) = l_1 x_p e_2$.

Calculons explicitement quelques espaces $F_1^{p,q}$ pour de petites valeurs de q.

- $F_1^{p,1}\mathcal{C}(L, M) = H^0(L_1^2, \tilde{M}_p) = \{f \in \tilde{M}_p \mid \forall l \in L_1^2, [f, l] = 0\}$.

  Or on calcule que $[f, L] = 0 \Leftrightarrow x_p = 0$, et donc $F_1^{p,1} \simeq Hom(E_2 \otimes E_1^{\otimes p}, E_1)$ est de dimension 1.

- $F_1^{p,2}\mathcal{C}(L, M) = \dfrac{\{f \in Hom(L_1^2, \tilde{M}_p) \mid \forall l, l' \in L_1^2, f([l, l']) = [l, f(l')] + [f(l), l']\}}{d\tilde{M}_p}$.

  On montre que $\forall l, l' \in L \ f([l, l']) = [l, f(l')] + [f(l), l'] \Leftrightarrow f \in Hom(E_1, Hom(E_2 \otimes E_1^{\otimes p}, L_1^2))$, et que $Im(d) \simeq Hom(E_1, Hom(E_2 \otimes E_1^{\otimes p}, E_2))$. Ainsi :

$$F_1^{p,2}\mathcal{C}(L, M) \simeq Hom(E_1, Hom(E_2 \otimes E_1^{\otimes p}, E_1)).$$

Exemple 3.2.17. *Retour sur l'Exemple 3.2.5*

Calculons explicitement quelques espaces $F_1^{p,q}$ pour de petites valeurs de q.

- $F_1^{0,1}C(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{gl}_2) = H^0(\mathfrak{gl}_2, Hom(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{gl}_2)) = \{f : \mathfrak{h}_2 \to \mathfrak{gl}_2 \mid \forall A \in \mathfrak{gl}_2, [f, A] = 0\}$.

  Puisque $Hom(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{gl}_2)$ est symétrique, $[f, A](h) = -[A, f(h)]$. Or $\mathfrak{h}_2$ est un espace de dimension 1 engendré par la matrice identité I. Si on note $f(I) = (b_{ij})$ et $A = (a_{ij})$, alors

$$[f, A](I) = \begin{pmatrix} -a_{12}b_{21} + b_{12}a_{21} & b_{12}(a_{22} - a_{11}) + a_{12}b_{11} - a_{12}b_{22} \\ a_{21}(b_{22} - b_{11}) + b_{21}a_{11} - a_{22}b_{21} & a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} \end{pmatrix},$$

  et donc $[f, \mathfrak{gl}_2] = 0 \Leftrightarrow f(I) \in \mathfrak{h}_2$. Ainsi $F_1^{0,1}C(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{gl}_2) \simeq Hom(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_2)$.

- $F_1^{1,1}C(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{gl}_2) = H^0(\mathfrak{gl}_2, Hom(\mathfrak{h}_2 \otimes \mathfrak{pgl}_2, \mathfrak{gl}_2)) = \{f : \mathfrak{h}_2 \otimes \mathfrak{pgl}_2 \to \mathfrak{gl}_2 \mid [f, \mathfrak{gl}_2] = 0\}$.

  On a $[f, A](I \otimes \overline{B}) = -[A, f(I \otimes \overline{B})] + f(I \otimes [A, \overline{B}])$. On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathfrak{gl}_2$: $(E_{ij})_{(i,j) \neq (2,2)}$ est donc une base de $\mathfrak{pgl}_2$. On pose ensuite $f(I, E_{11}) =$

$(a_{ij}), f(I, E_{12}) = (b_{ij})$ et $f(I, E_{21}) = (c_{ij})$. Finalement, en étudiant à quelles conditions $[f, A](I \otimes E_{11})$, $[f, A](I \otimes E_{12})$ et $[f, A](I \otimes E_{21})$ sont nuls pour tout $A \in \mathfrak{gl}_2$, on montre que $F_1^{1,1}C(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{gl}_2)$ est nul.

Théorème 3.2.18. $[B., 2017]$

Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal bilatère de L vérifiant $[K, M] = [M, K] = 0$. Pour tout $p \geq 0, q \geq 1$, on a :

$$F_2^{p,q} \simeq H^{q-1}(L, Hom(K, H^p(L/K, M))),$$

où $Hom(K, H^p(L/K, M))$ est le L-module induit par $Hom(K \otimes (L/K)^{\otimes p}, M)$.

Démonstration. D'après la construction étudiée au chapitre 2, la différentielle d_1 de la page F_1 est définie par $d_1^{p,q}([f]_0) := [d^{p,q}f]_0$, où $f \in F_0^{p,q}$ et $d^{p,q} : F_0^{p,q} \to F_0^{p+1,q}$ est induite par la différentielle globale du complexe $\mathcal{C}(L, M)$.

D'après les isomorphismes de la Proposition 3.2.6, on a ici :

$$d^{p,q} : Hom(L^{\otimes(q-1)} \otimes K \otimes (L/K)^{\otimes p}, M) \to Hom(L^{\otimes(q-1)} \otimes K \otimes (L/K)^{\otimes(p+1)}, M),$$

et donc $d^{p,q} := \sum\limits_{q+1 \leq l < m \leq p+q+1} (-1)^l d_{lm} + \sum\limits_{q+1 \leq r \leq p+q} (-1)^{r-1}\delta_r + (-1)^{p+q+1}\partial$.

On reconnaît ici la différentielle du complexe $Hom(L^{\otimes(q-1)} \otimes K, C^*((L/K), M))$.

Ainsi, si les différentielles d_0 et d commutent, ce qui est prouvé dans le lemme suivant, alors on peut prendre la cohomologie des espaces F_1 par rapport à la différentielle d et on obtient exactement le théorème demandé. $\square$

Lemme 3.2.19. *Pour tout $p \geq 0, q \geq 1$, on a la relation de commutation suivante :*

$$d_0^{p+1,q} d^{p,q} + d^{p,q+1} d_0^{p,q} = 0.$$

Démonstration. On réutilise ici les notations utilisées dans la preuve du Théorème 1.1.24 et des lemmes qui suivent :

- $d_0^{p,q} := \sum\limits_{\substack{1 \leq i < j \leq p+q+1 \\ 1 \leq i \leq q}} (-1)^i d_{ij} + \sum\limits_{1 \leq k \leq q} (-1)^{k-1}\delta_k,$

- $d^{p,q} := \sum\limits_{q+1 \leq l < m \leq p+q+1} (-1)^l d_{lm} + \sum\limits_{q+1 \leq r \leq p+q} (-1)^{r-1}\delta_r + (-1)^{p+q+1}\partial.$

On obtient alors d'un côté :

$$\begin{aligned}
d_0^{p+1,q}d^{p,q} = & \sum_{\substack{1\le i<j\le p+q+2\\ 1\le i\le q<l<m\le p+q+1}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm} + \sum_{\substack{1\le i<j\le p+q+2\\ 1\le i\le q<r\le p+q}} (-1)^{i+r-1} d_{ij}\delta_r \\
& + \sum_{\substack{1\le i<j\le p+q+2\\ 1\le i\le q}} (-1)^{p+q+i+1} d_{ij}\partial + \sum_{1\le k\le q<l<m\le p+q+1} (-1)^{l+k-1}\delta_k d_{lm} \\
& + \sum_{1\le k\le q<r\le p+q} (-1)^{k+r}\delta_k\delta_r + \sum_{1\le k\le q} (-1)^{k+p+q}\delta_k\partial
\end{aligned}$$

et de l'autre :

$$\begin{aligned}
d^{p,q+1}d_0^{p,q} = & \sum_{\substack{1\le i<j\le p+q+1\\ 1\le i\le q\\ q+2\le l<m\le p+q+2}} (-1)^{i+l} d_{lm}d_{ij} + \sum_{\substack{q+2\le l<m\le p+q+2\\ 1\le k\le q}} (-1)^{l+k-1} d_{lm}\delta_k \\
& + \sum_{\substack{1\le i<j\le p+q+1\\ 1\le i\le q\\ q+2\le r\le p+q+1}} (-1)^{r+i-1}\delta_r d_{ij} + \sum_{\substack{1\le k\le q\\ q+2\le r\le p+q+1}} (-1)^{k+r}\delta_r\delta_k \\
& + \sum_{\substack{1\le i<j\le p+q+1\\ 1\le i\le q}} (-1)^{p+q+i}\partial d_{ij} + \sum_{1\le k\le q} (-1)^{k+p+q-1}\partial\delta_k
\end{aligned}$$

Pour faciliter la lecture, on numérote dans la suite les termes de $d_0^{p+1,q}d^{p,q}$ de (1) à (6) et ceux de $d^{p,q+1}d_0^{p,q}$ de (a) à (f).

Pour commencer, par la relation 3. de la preuve du Lemme 1.1.26, on obtient :

$$\sum_{\substack{q+2\le l<m\le p+q+2\\ 1\le k\le q}} (-1)^{l+k-1} d_{lm}\delta_k = \sum_{1\le k\le q<l<m\le p+q+1} (-1)^{l+k}\delta_k d_{lm},$$

et par les relations 1. et 3. de la preuve du théorème 1.1.24, on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{1\le i<j\le p+q+2\\ 1\le i\le q}} (-1)^{p+q+i+1} d_{ij}\partial + \sum_{1\le i\le q} (-1)^{p+q+i}\delta_i\partial = \\
& \qquad \sum_{\substack{1\le i<j\le p+q+1\\ 1\le i\le q}} (-1)^{p+q+i+1}\partial d_{ij} + \sum_{1\le i\le q} (-1)^{p+q+i}\partial\delta_i
\end{aligned}$$

C'est-à-dire (4) $= -(b)$ et (3) + (6) $= -(e) - (f)$.

On étudie ensuite le terme (1), en le décomposant en cinq sommes distinctes pour utiliser les relations décrites dans la preuves du Lemme 1.1.25.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<l<m\leq p+q+1}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm} = & \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<l<m\leq p+q+1\\ i<j\leq l}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm} \\ & + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<l<m\leq p+q+1\\ l+1<j\leq m}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm} + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<l<m\leq p+q+1\\ m+1<j}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm} \\ & + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<l<m\leq p+q+1\\ j=m+1}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm} + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<l<m\leq p+q+1\\ j=l+1}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm}.\end{aligned}$$

Par la relation 4., les deux dernières sommes donnent :

$$\sum_{1\leq l\leq q<i-1<m\leq p+q+1} (-1)^{i+l+1} d_{im+1}d_{lm}.$$

Puis par les relations 1.,2. et 3., on obtient pour les trois premières :

$$\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1\\ 1\leq i\leq q\\ q+2\leq l<m\leq p+q+2}} (-1)^{i+l+1} d_{lm}d_{ij} - \sum_{1\leq l\leq q<i-1<m\leq p+q+1} (-1)^{i+l+1} d_{im+1}d_{lm}.$$

Ainsi

$$\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<l<m\leq p+q+1}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm} = \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1\\ 1\leq i\leq q\\ q+2\leq l<m\leq p+q+2}} (-1)^{i+l+1} d_{lm}d_{ij},$$

et donc $(1) = -(a)$.

Attaquons nous pour finir à (2), que l'on scinde en trois :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<r\leq p+q}} (-1)^{i+r-1} d_{ij}\delta_r = & \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<r\leq p+q\\ j\leq r}} (-1)^{i+r-1} d_{ij}\delta_r + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<r\leq p+q\\ j\geq r+2}} (-1)^{i+r-1} d_{ij}\delta_r \\ & + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<r\leq p+q\\ j=r+1}} (-1)^{i+r-1} d_{ij}\delta_r,\end{aligned}$$

pour pouvoir utiliser cette fois les relations 1., 2. et 4. issues de la preuve du lemme 1.1.26

et obtenir :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<r\leq p+q}} (-1)^{i+r-1} d_{ij}\delta_r &= \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<r\leq p+q\\ j\leq r}} (-1)^{i+r-1}\delta_{r+1} d_{ij} \\
&\quad + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q<r\leq p+q\\ j\geq r+2}} (-1)^{i+r-1}\delta_{r+1} d_{i,j-1} \\
&\quad + \sum_{1\leq i\leq q<j-1\leq p+q} (-1)^{i+j}(\delta_i\delta_{j-1} - \delta_j\delta_i) \\
&= \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1\\ 1\leq i\leq q<r-1\leq p+q\\ j\leq r-1}} (-1)^{i+r}\delta_r d_{ij} + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1\\ 1\leq i\leq q<r-1\leq p+q\\ j\geq r}} (-1)^{i+r}\delta_r d_{i,j} \\
&\quad + \sum_{1\leq i\leq q<j\leq p+q} (-1)^{i+j+1}\delta_i\delta_j - \sum_{1\leq i\leq q<j-1\leq p+q} (-1)^{i+j}\delta_j\delta_i \\
&= \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1\\ 1\leq i\leq q<r-1\leq p+q}} (-1)^{i+r}\delta_r d_{ij} \\
&\quad + \sum_{1\leq i\leq q<j\leq p+q} (-1)^{i+j+1}\delta_i\delta_j - \sum_{1\leq i\leq q<j-1\leq p+q} (-1)^{i+j}\delta_j\delta_i
\end{aligned}$$

Donc on trouve $(2) + (5) = -(c) - (d)$.

Finalement, on a montré que $d_0^{p+1,q}d^{p,q} + d^{p,q+1}d_0^{p,q} = 0$ □

Corollaire 3.2.20. *Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal bilatère de L vérifiant $[K, M] = [M, K] = 0$.*

$$H^1(\mathcal{C}(L, M)/\mathcal{C}(L/K, M)) \simeq H^0(L, Hom(K, H^0(L/K, M))).$$

Démonstration. Pour tout $p \geq 0$, $F_2^{p,0} = F_1^{p,0} = \{0\}$, donc la suite exacte à 5 termes donnée par le Lemme 2.2.17 est la suivante :

$$\{0\} \to H^1(\mathcal{C}(L, M)/\mathcal{C}(L/K, M)) \to F_2^{0,1} \to \{0\}.$$

Et donc on a bien l'isomorphisme demandé puisque $F_2^{0,1} \simeq H^0(L, Hom(K, H^0(L/K, M)))$ d'après le théorème précédent. □

Exemple 3.2.21. *Retour sur l'Exemple 3.2.4*

D'après le corollaire précédent, $F_2^{p,q}(L_1^2, L_1^2) \simeq H^{q-1}(L_1^2, Hom(E_2, H^p(E_1, L_1^2)))$. Mais un calcul immédiat montre que $d : C^p(E_1, L_1^2)) \to C^{p+1}(E_1, L_1^2))$ est nulle, et donc que pour tout $q \geq 1$, $F_2^{p,q}(L_1^2, L_1^2) \simeq H^{q-1}(L_1^2, Hom(E_2 \otimes E_1^{\otimes p}, L_1^2)) \simeq F_1^{p,q}$.

On peut remarquer que le corollaire est bien vérifié ici : on a calculé dans l'Exemple

3.2.11 que $H^1(\mathcal{C}(L_1^2, L_1^2)/\mathcal{C}(L_1^2/E_2, L_1^2)) \simeq Hom(E_2, E_2)$ et dans l'Exemple 3.2.16 que $F_1^{1,0}$ est aussi isomorphe à $Hom(E_2, E_2)$.

Exemple 3.2.22. *Retour sur l'Exemple 3.2.5*

On se place dans le cas où $p = 0$, pour obtenir $H^0(\mathfrak{pgl}_2, \mathfrak{gl}_2) \simeq Hom(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_2)$, et ensuite, puisque $d : C^0(\mathfrak{pgl}_2, \mathfrak{gl}_2) \to C^1(\mathfrak{pgl}_2, \mathfrak{gl}_2)$ est nulle, on obtient donc que pour tout $q \geq 1$, $F_2^{0,1}(\mathfrak{gl}_2), \mathfrak{gl}_2)) \simeq Hom(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_2)$.

Comme ci-dessus, le corollaire est à nouveau bien vérifié puisque nous avons calculé dans l'Exemple 3.2.12 que

$$H^1(\mathcal{C}(\mathfrak{gl}_2, \mathfrak{gl}_2)/\mathcal{C}(\mathfrak{pgl}_2, \mathfrak{gl}_2)) \simeq Hom(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_2).$$

Remarque 3.2.23. Dans certains cas, notamment sous des conditions de semi-simplicité, on peut relier la cohomologie quotient calculée grâce à la suite $F\mathcal{C}(L, M)$ et la cohomologie $H(L, M)$. Ces liens sont expliqué dans le chapitre consacré aux applications.

Remarque 3.2.24. La filtration $\mathcal{FC}$ n'est pas multiplicative.

En effet, on peut montrer le contre-exemple suivant : si $f \in \mathcal{F}^1\mathcal{C}^1(L, M)$ et $g \in \mathcal{F}^1\mathcal{C}^2(L, M)$, alors $f \tilde{\cup} g$ n'est en général pas dans l'espace $\mathcal{F}^2\mathcal{C}^3(L, M)$.

3.3 Etude de la troisième suite spectrale GC(L,M)

3.3.1 Définition de la filtration

Définition/Proposition 3.3.2. *Soient L une algèbre de Leibniz, K une sous-algèbre de L et M un L-module. Les complexes $(\mathcal{G}^p\mathcal{C}(L, M))_{p\geq 0}$ suivants constituent une filtration du complexe $\mathcal{C}^*(L, M)$:*

- $\mathcal{G}^0\mathcal{C}^*(L, M) := \mathcal{C}^*(L, M)$
- *Pour tout $p \geq 1$:*
  - $\forall n \geq p - 1, \mathcal{G}^p\mathcal{C}^n(L, M) := \{f : L^{\otimes n} \to M \mid f_{|K^{\otimes(n+1-p)} \otimes L^{\otimes(p-1)}} = 0\}$,
  - $\forall n < p - 1,\ \mathcal{G}^p\mathcal{C}^n(L, M) := \{0\}$.

On note $G\mathcal{C}(L, M)$ la suite spectrale associée à cette filtration sur le modèle de la Proposition 2.2.6.

Démonstration. Soient $p \geq 1, n \geq p - 1$ et $f \in \mathcal{G}^p C^n(L, M)$. Montrons que $d^n f \in \mathcal{G}^p C^{n+1}(L, M)$. Soient donc $k_1, \ldots, k_{n+2-p} \in K$ et $l_{n+3-p}, \ldots, l_{n+1} \in L$: il s'agit de montrer que $d^n f(k_1, \ldots, k_{n+2-p}, l_{n+3-p}, \ldots, l_{n+1}) = 0$. On découpe la somme comme suit :

$$\begin{aligned}
d^n f(k_1, \ldots, k_{n+2-p}, &l_{n+3-p}, \ldots, l_{n+1}) = \\
&\sum_{1\leq i<j\leq n+2-p} (-1)^i d_{ij}(f)(k_1, \ldots, k_{n+2-p}, l_{n+3-p}, \ldots, l_{n+1}) \\
&+ \sum_{1\leq i\leq n+2-p<j\leq n+1} (-1)^i d_{ij}(f)(k_1, \ldots, k_{n+2-p}, l_{n+3-p}, \ldots, l_{n+1}) \\
&+ \sum_{n+3-p\leq i<j\leq n+1} (-1)^i d_{ij}(f)(k_1, \ldots, k_{n+2-p}, l_{n+3-p}, \ldots, l_{n+1}) \\
&+ \sum_{i=1}^{n+2-p} (-1)^{i-1} \delta_i(f)(k_1, \ldots, k_{n+2-p}, l_{n+3-p}, \ldots, l_{n+1}) \\
&+ \sum_{i=n+3-p}^{n+1} (-1)^{i-1} \delta_i(f)(k_1, \ldots, k_{n+2-p}, l_{n+3-p}, \ldots, l_{n+1}) \\
&+(-1)^{n+1} \partial(f)(k_1, \ldots, k_{n+2-p}, l_{n+3-p}, \ldots, l_{n+1}).
\end{aligned}$$

Pour montrer que la première somme est nulle, on utilise le fait que K soit une sous-algèbre de L et que $f_{|K^{\otimes(n+1-p)}\otimes L^{\otimes(p-1)}} = 0$; pour chacun des autres termes, le fait que $f_{|K^{\otimes(n+1-p)}\otimes L^{\otimes(p-1)}} = 0$ suffit. Donc on a bien :

$$d^n f(k_1, \ldots, k_{n+2-p}, l_{n+3-p}, \ldots, l_{n+1}) = 0.$$

Si $n < p - 1$, le résultat est immédiat, notamment puisque $\mathcal{G}^p\mathcal{C}^{p-1}(L, M) = \{0\}$. Finalement, le cas $p = 0$ est trivialement vrai, donc on peut conclure que $\mathcal{GC}(L, M)$ est bien une filtration du complexe $\mathcal{C}(L, M)$. □

Exemple 3.3.3.

- $\mathcal{G}^1\mathcal{C}^n(L, M) = \{f : L^{\otimes n} \to M) \mid f_{|K^{\otimes n}} = 0\}$.
- $\mathcal{G}^n\mathcal{C}^n(L, M) = \{f : L^{\otimes n} \to M) \mid f_{|K\otimes L^{\otimes n-1}} = 0\}$.

Remarque 3.3.4.

- La filtration $\mathcal{GC}(L, M)$ est la filtration duale (au sens du Lemme 2.2.5) de celle définie dans [6] pour l'homologie d'algèbres de Leibniz à droite.
- La filtration $\mathcal{GC}(L, M)$ de $\mathcal{C}(L, M)$ est canoniquement bornée. En effet, pour tout n :
$$\mathcal{G}^0\mathcal{C}^n(L, M) = \mathcal{C}^n(L, M) \text{ et } \mathcal{G}^{n+1}\mathcal{C}^n(L, M) = 0.$$

Exemple 3.3.5. On considère l'algèbre de Leibniz L_2^2 définie dans l'exemple 1.1.9, dont le crochet est défini par $[e_1, e_1] = [e_1, e_2] = e_2$, et son idéal bilatère $E_2 :=< e_2 >$. On étudie sa cohomologie à valeurs dans elle-même, précédemment calculée dans l'Exemple 3.0.2. On obtient pour tout $p \geq 1$ et $n \geq p-1$ des espaces :

$$\mathcal{G}^p\mathcal{C}^n(L_2^2, L_2^2) = \{f : (L_2^2)^{\otimes n} \to L_2^2 \mid f_{|E_2^{\otimes(n+1-p)} \otimes (L_2^2)^{\otimes(p-1)}} = 0\}.$$

Exemple 3.3.6. On considère l'algèbre de Leibniz L_6, dont la définition et le calcul de la cohomologie en petit degré sont donnés dans l'Exemple 3.0.4, et son idéal bilatère $E_{12} :=< e_1, e_2 >$. On obtient pour tout $p \geq 1$ et $n \geq p-1$ des espaces :

$$\mathcal{G}^p\mathcal{C}^n(L_6, L_6) = \{f : L_6^{\otimes n} \to L_6 \mid f_{|E_{12}^{\otimes(n+1-p)} \otimes (L_6)^{\otimes(p-1)}} = 0\}.$$

Proposition 3.3.7. *Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K une sous-algèbre de L. Pour $q \geq 0$, on a les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants :*

$$G_0^{p,q}\mathcal{C}(L, M) \simeq \begin{cases} Hom(K^{\otimes q}, M) & si\ p = 0, \\ \\ Hom(K^{\otimes q} \otimes L/K \otimes L^{\otimes(p-1)}, M) & si\ p \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration. Cette proposition découle immédiatement du Lemme 3.0.5. □

Exemple 3.3.8. *Retour sur l'Exemple 3.3.5*

On obtient ici pour $p = 0$ un espace : $G_0^{0,q}(L_2^2, L_2^2) \simeq Hom(E_2^{\otimes q}, L_2^2)$, et pour $p \geq 1$: $G_0^{p,q}(L_2^2, L_2^2) \simeq Hom(E_2^{\otimes q} \otimes E_1 \otimes (L_2^2)^{\otimes(p-1)}, L_2^2)$.

Exemple 3.3.9. *Retour sur l'Exemple 3.3.6*

On obtient maintenant pour $p = 0$ un espace : $G_0^{0,q}(L_6, L_6) \simeq Hom(E_{12}^{\otimes q}, L_6)$, et pour $p \geq 1$: $G_0^{p,q}(L_6, L_6) \simeq Hom(E_{12}^{\otimes q} \otimes E_3 \otimes (L_6)^{\otimes(p-1)}, L_6)$, où $E_3 = vect(e_3)$.

Proposition 3.3.10. *Soient L une algèbre de Leibniz, K une sous-algèbre de L et M un L-module. La suite spectrale $G\mathcal{C}(L, M)$ converge vers $H^*(L, M)$.*

Démonstration. C'est une application immédiate du Théorème 2.2.13, qui s'applique puisque la filtration considérée est bornée. □

3.3.11 Etude des premières pages

Théorème 3.3.12. $[B., 2017]$

Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal bilatère de L. On a les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants :

$$G_1^{p,q}\mathcal{C}(L,M) \simeq \begin{cases} H^q(K,M) & si\ p=0, \\ \\ H^q(K, Hom(L/K \otimes L^{\otimes(p-1)}, M)) & si\ p \geq 1, \end{cases}$$

où $Hom(L/K \otimes L^{\otimes(p-1)}, M)$ est le K-module symétrique défini dans le Corollaire 1.1.22.

Remarque 3.3.13. On rappelle que $Hom(L/K\otimes L^{\otimes(p-1)}, M)$ admet précisément la structure de L-Lie-module suivante :

$$[k,f](\overline{l_1}, l_2, \ldots, l_p) = [k, f(\overline{l_1}, l_2, \ldots, l_p)] - \sum_{i=2}^{p} f(\overline{l_1}, l_2, \ldots, [k, l_i], \ldots, l_p),$$

pour tout $k \in K,\ l_1, \ldots, l_p \in L$ et $f \in Hom(L/K \otimes L^{\otimes(p-1)}, M)$. Le terme pour $p = 1$ de la somme étant nulle puisque puisque $[k, \overline{l_1}] = 0$.

Démonstration. On fixe $p \geq 1$ et $q \geq 0$, et on note :

- $\varphi_0^{p,q}$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels $G_0^{p,q} \simeq Hom(K^{\otimes q} \otimes L/K \otimes L^{\otimes(p-1)}, M)$ donné par la Proposition 3.3.7,
- $d_C^{p,*}$ la différentielle du complexe $C^*(K, Hom(L/K \otimes L^{\otimes(p-1)}, M))$, où le K-module est comme dans l'énoncé considéré comme symétrique.

On cherche à montrer que l'isomorphisme commute avec les différentielles, c'est-à-dire l'on a la relation suivante :

$$\varphi_0^{p-1,q+1} \circ d_0^{p,q} = d_C^{p-1,q} \circ \varphi_0^{p,q}.$$

On considère $f \in \mathcal{G}^p\mathcal{C}^{p+q}(L,M)$ dont on note $\overline{f}$ sa classe dans le quotient $G_0^{p,q}\mathcal{C}(L,M)$. D'une part, puisque d_0 est induite par la différentielle du complexe $\mathcal{C}(L,M)$, on obtient :

$$d_0^{p,q}(\overline{f}) = \sum_{1\leq i<j\leq p+q+1} (-1)^i d_{ij}(\overline{f}) + \sum_{i=1}^{p+q} (-1)^{i-1}\delta_i(\overline{f}) + (-1)^{p+q}\partial(\overline{f}).$$

Mais $d_0^{p,q}(\overline{f}) \in G_0^{p,q+1} = \dfrac{\mathcal{G}^p\mathcal{C}^{p+q+1}(L,M)}{\mathcal{G}^{p+1}\mathcal{C}^{p+q+1}(L,M)}$, et :

- $d_{ij}(\overline{f}) \in \mathcal{G}^{p+1}C^{p+q+1}$ dès que $i \geq q+2$,
- $\delta_i(\overline{f}) \in \mathcal{G}^{p+1}C^{p+q+1}$ dès que $i \geq q+2$,
- $\partial(\overline{f}) \in \mathcal{G}^{p+1}C^{p+q+1}$,

donc on obtient finalement : $d_0^{p,q}\overline{f} = \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1 \\ i\leq q+1}} (-1)^i d_{ij}(\overline{f}) + \sum_{i=1}^{q+1}(-1)^{i-1}\delta_i(\overline{f})$.

D'où l'on déduit que pour tout $k_1, \dots, k_{q+1} \in K$ et $l_{q+2}, \dots, l_{p+q+1} \in L$:

$$\begin{aligned}
&(\varphi_0^{p-1,q+1} \circ d_0^{p,q})(\overline{f})(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{q+1} \otimes \overline{l_{q+2}} \otimes l_{q+3} \otimes \cdots \otimes l_{p+q+1}) \\
&\quad = \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1 \\ i\leq q+1}} (-1)^i \varphi_0^{p-1,q+1}(d_{ij}(\overline{f}))(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{q+1} \otimes \overline{l_{q+2}} \otimes l_{q+3} \otimes \cdots \otimes l_{p+q+1}) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{q+1}(-1)^{i-1}\varphi_0^{p-1,q+1}(\delta_i(\overline{f}))(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{q+1} \otimes \overline{l_{q+2}} \otimes l_{q+3} \otimes \cdots \otimes l_{p+q+1}).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&d_{C^q}^{p,q} \circ \varphi_0^{p,q}(\overline{f})(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{q+1} \otimes \overline{l_{q+2}} \otimes l_{q+3} \otimes \cdots \otimes l_{p+q+1}) \\
&\quad = \sum_{1\leq i<j\leq q+1} (-1)^i d_{ij}(\varphi_0^{p,q}(\overline{f}))(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{q+1} \otimes \overline{l}_{q+2} \otimes l_{q+3}, \dots, l_{p+q+1}) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{q}(-1)^{i-1}\delta_i(\varphi_0^{p,q}(\overline{f}))(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{q+1} \otimes \overline{l_{q+2}} \otimes l_{q+3} \otimes \cdots \otimes l_{p+q+1}) \\
&\qquad + (-1)^{q-1}\partial(\varphi_0^{p,q}\overline{f})(k_1 \otimes \cdots \otimes k_q \otimes k_{q+1} \otimes \overline{l_{q+2}} \otimes l_{q+3} \otimes \cdots \otimes l_{p+q+1}) \qquad (3.13) \\
&\quad = \sum_{1\leq i<j\leq q+1} (-1)^i d_{ij}(\varphi_0^{p,q}(\overline{f}))(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{q+1} \otimes \overline{l}_{q+2} \otimes l_{q+3}, \dots, l_{p+q+1}) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{q}(-1)^{i-1}\delta_i(\varphi_0^{p,q}(\overline{f}))(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{q+1} \otimes \overline{l_{q+2}} \otimes l_{q+3} \otimes \cdots \otimes l_{p+q+1}) \\
&\qquad - \sum_{\substack{1\leq i\leq q \\ q+1\leq j\leq p+q+1}} (-1)^{i-1} d_{ij}(\varphi_0^{p,q}(\overline{f}))(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{q+1}, \overline{l_{q+2}} \otimes l_{q+3}, \dots, l_{p+q+1}) \\
&\qquad - (-1)^{q-1}\delta_{q+1}(\varphi_0^{p,q}(\overline{f}))(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{q+1} \otimes \overline{l_{q+2}} \otimes l_{q+3} \otimes \cdots \otimes l_{p+q+1}) \qquad (3.14) \\
&\qquad + (-1)^{q-1}\sum_{j=q+1}^{p+q+1} d_{q+1,j}(\varphi_0^{p,q}(\overline{f}))(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{q+1} \otimes \overline{l_{q+2}} \otimes l_{q+3} \otimes \cdots \otimes l_{p+q+1}) \\
&\qquad\qquad (3.15) \\
&\quad = \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1 \\ 1\leq i\leq q+1}} (-1)^i d_{ij}(\varphi_0^{p,q}(\overline{f}))(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{q+1}, \overline{l_{q+2}} \otimes l_{q+3} \otimes \cdots \otimes l_{p+q+1}) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{q+1}(-1)^{i-1}\delta_i(\varphi_0^{p,q}(\overline{f}))(k_1 \otimes \cdots \otimes k_{q+1} \otimes \overline{l_{q+2}} \otimes l_{q+3} \otimes \cdots \otimes l_{p+q+1}).
\end{aligned}$$

Les lignes (3.14) et (3.15) proviennent de la ligne (3.13) car le module $Hom(L/K \otimes L^{\otimes(p-1)}, M)$ est symétrique. Il s'agit donc de vérifier que :

- $\forall i \in [1, q+1],\ \varphi_0^{p-1,q+1} \circ \delta_i = \delta_i \circ \varphi_0^{p,q}$;
- $\forall i \in [1, q+1],\ j \in [i+1, p+q+1],\ \varphi_0^{p-1,q+1} \circ d_{ij} = d_{ij} \circ \varphi_0^{p,q}$.

Or ceci est immédiat puisque φ_0 est simplement issue de la factorisation d'une application de restriction à un sous-quotient. Ainsi on a bien l'égalité souhaitée : $\varphi_0^{p,q+1} \circ d_0^{p,q} = d_C^{p,q} \circ \varphi_0^{p,q}$. Le cas $p = 0$ étant immédiat, ceci termine la preuve. □

Exemple 3.3.14. *Retour sur l'Exemple 3.3.5*

On note $f(e_2^{\otimes q}) := a_1e_1 + a_2e_2$ et $g \in Hom(E_2^{\otimes q}, Hom(E_1, L_2^2))$. On commence par calculer les différentielles sur $G_0^{p,q}\mathcal{C}(L, M)$ pour de petits p et q :

- $d_0^{0,q}(f)(e_2^{\otimes q}) = (-1)^{q+1}a_1e_2$.
- $d_0^{p,q}(g) = 0$ si $p \geq 1$.

On en déduit que :

- $G_1^{0,q}C(L_2^2, L_2^2) \simeq H^q(E_2, L_2^2) \simeq \{0\}$.
- $G_1^{p,q}C(L_2^2, L_2^2) \simeq G_0^{p,q} \simeq Hom(E_2^{\otimes q} \otimes E_1 \otimes (L_2^2)^{\otimes(p-1)}, L_2^2)$ si $p \geq 1$.

Exemple 3.3.15. *Retour sur l'Exemple 3.3.6*

On considère les vecteurs $w = w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3 \in L_6$ et $x = x_1e_1 + x_2e_2, y = y_1e_1 + y_2e_2 \in E_{12}$, ainsi que les applications $f = (a_{ij})_{ij} \in Hom(E_{12}, L_6)$ $g = (a_i)_i \in Hom(E_3, L_6)$ et $h \in Hom(E_{12}, Hom(E_3, L_6))$ définie par $h(e_1)(e_3) = (b_i)_i, h(e_2)(e_3) = (c_i)_i$. On commence par calculer les différentielles sur $G_0^{p,q}$ pour de petits p et q :

- $d_0^{0,0}(w)(x) = w_3x_2e_2$.
- $d_0^{0,1}(f)(x \otimes y) = a_{31}(x_2y_1 - x_1y_2)e_2$.
- $d_0^{1,0}(g)(x)(e_3) = x_2a_3e_2$
- $d_0^{1,1}(h)(x \otimes y)(e_3) = (y_1x_2b_3 + y_2x_2c_3)e_2$.

Puis on obtient :

- $G_1^{0,0}C(L_6, L_6) \simeq H^0(E_{12}, L_6) \simeq E_{12}$.
- $G_1^{0,1}C(L_6, L_6) \simeq H^1(E_{12}, L_6) \simeq Hom(E_{12}, E_1) \otimes Hom(E_1, E_2) \otimes Hom(E_2, E_1)$.
- $G_1^{1,0}C(L_6, L_6) \simeq H^0(E_{12}, Hom(E_3, L_6)) \simeq Hom(E_3, E_{12})$.
- $h \in G_1^{1,1}C(L_6, L_6) \Leftrightarrow h(e_1)(e_3) \in E_{12}$ et $h(e_2)(e_3) \in E_1$.

Théorème 3.3.16. $[B., 2017]$

Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal bilatère de L. On a pour $p \geq 1$ les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants :

$$G_2^{p,q}\mathcal{C}(L,M) \simeq H^q(K, Hom(L/K, H^{p-1}(L,M))),$$

où $Hom(L/K, H^{p-1}(L,M))$ est le K-module induit par le L-module du Théorème 3.3.12.

Remarque 3.3.17. De même que pour $F\mathcal{C}(L,M)$, pour pouvoir identifier d_1 à la différentielle d du complexe $Hom(K^{\otimes q} \otimes L/K, C^*(L,M))$, il suffit que d_0 commute avec d.

Lemme 3.3.18. *Pour tout $p \geq 1$ et $q \geq 0$:*

$$d_0^{p+1,q} \circ d^{p,q} + d^{p,q+1} \circ d_0^{p,q} = 0.$$

Démonstration. On reprend ici le schéma de preuve utilisé précédemment pour démontrer le Lemme 3.2.19.

- $d_0^{p,q} := \sum\limits_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1 \\ 1\leq i\leq q+1}} (-1)^i d_{ij} + \sum\limits_{1\leq k\leq q+1} (-1)^{k-1}\delta_k,$
- $d^{p,q} := \sum\limits_{q+2\leq l<m\leq p+q+1} (-1)^l d_{lm} + \sum\limits_{q+2\leq r\leq p+q} (-1)^{r-1}\delta_r + (-1)^{p+q+1}\partial.$

On obtient alors d'un côté :

$$\begin{aligned} d_0^{p+1,q} d^{p,q} = & \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2 \\ 1\leq i\leq q+1<l<m\leq p+q+1}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm} + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2 \\ 1\leq i\leq q+1<r\leq p+q}} (-1)^{i+r-1} d_{ij}\delta_r \\ & + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2 \\ 1\leq i\leq q+1}} (-1)^{p+q+i+1} d_{ij}\partial + \sum_{1\leq k\leq q+1<l<m\leq p+q+1} (-1)^{l+k-1}\delta_k d_{lm} \\ & + \sum_{1\leq k\leq q+1<r\leq p+q} (-1)^{k+r}\delta_k\delta_r + \sum_{1\leq k\leq q+1} (-1)^{k+p+q}\delta_k\partial \end{aligned}$$

et de l'autre :

$$\begin{aligned} d^{p,q+1} d_0^{p,q} = & \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1 \\ 1\leq i\leq q+1 \\ q+3\leq l<m\leq p+q+2}} (-1)^{i+l} d_{lm}d_{ij} + \sum_{\substack{q+3\leq l<m\leq p+q+2 \\ 1\leq k\leq q+1}} (-1)^{l+k-1} d_{lm}\delta_k \\ & + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1 \\ 1\leq i\leq q+1 \\ q+3\leq r\leq p+q+1}} (-1)^{r+i-1}\delta_r d_{ij} + \sum_{\substack{1\leq k\leq q+1 \\ q+3\leq r\leq p+q+1}} (-1)^{k+r}\delta_r\delta_k \\ & + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1 \\ 1\leq i\leq q+1}} (-1)^{p+q+i}\partial d_{ij} + \sum_{1\leq k\leq q+1} (-1)^{k+p+q-1}\partial\delta_k \end{aligned}$$

Pour faciliter la lecture, on numérote dans la suite les termes de $d_0^{p+1,q}d^{p,q}$ de (1) à (6) et ceux de $d^{p,q+1}d_0^{p,q}$ de (a) à (f).

Pour commencer, par la relation 3. de la preuve du Lemme 1.1.26, on obtient :

$$\sum_{\substack{q+3\leq l<m\leq p+q+2\\ 1\leq k\leq q+1}} (-1)^{l+k-1} d_{lm}\delta_k = \sum_{1\leq k\leq q+1<l<m\leq p+q+1} (-1)^{l+k}\delta_k d_{lm},$$

et par les relations 1. et 3. de la preuve du théorème 1.1.24, on a :

$$\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1}} (-1)^{p+q+i+1} d_{ij}\partial + \sum_{1\leq i\leq q+1} (-1)^{p+q+i}\delta_i\partial = \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1\\ 1\leq i\leq q+1}} (-1)^{p+q+i+1}\partial d_{ij} + \sum_{1\leq i\leq q+1} (-1)^{p+q+i}\partial\delta_i$$

C'est-à-dire $(4) = -(b)$ et $(3) + (6) = -(e) - (f)$.

On étudie ensuite le terme (1), en le décomposant en cinq sommes distinctes pour utiliser les relations décrites dans la preuves du lemme 1.1.25.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<l<m\leq p+q+1}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm} = &\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<l<m\leq p+q+1\\ i<j\leq l}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm}\\ &+ \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<l<m\leq p+q+1\\ l+1<j\leq m}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm} + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<l<m\leq p+q+1\\ m+1<j}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm}\\ &+ \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<l<m\leq p+q+1\\ j=m+1}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm} + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<l<m\leq p+q+1\\ j=l+1}} (-1)^{i+l} d_{ij}d_{lm}.\end{aligned}$$

Par la relation 4., les deux dernières sommes donnent :

$$\sum_{1\leq l\leq q+1<i-1<m\leq p+q+1} (-1)^{i+l+1} d_{im+1}d_{lm}.$$

Puis par les relations 1.,2. et 3., on obtient pour les trois premières :

$$\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1\\ 1\leq i\leq q+1\\ q+3\leq l<m\leq p+q+2}} (-1)^{i+l+1} d_{lm}d_{ij} - \sum_{1\leq l\leq q+1<i-1<m\leq p+q+1} (-1)^{i+l+1} d_{im+1}d_{lm}.$$

Ainsi :

$$\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<l<m\leq p+q+1}} (-1)^{i+l} d_{ij} d_{lm} = \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1\\ 1\leq i\leq q+1\\ q+3\leq l<m\leq p+q+2}} (-1)^{i+l+1} d_{lm} d_{ij},$$

et donc $(1) = -(a)$.

Attaquons nous pour finir à (2), que l'on scinde en trois :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<r\leq p+q}} (-1)^{i+r-1} d_{ij}\delta_r = & \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<r\leq p+q\\ j\leq r}} (-1)^{i+r-1} d_{ij}\delta_r + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<r\leq p+q\\ j\geq r+2}} (-1)^{i+r-1} d_{ij}\delta_r \\ & + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<r\leq p+q\\ j=r+1}} (-1)^{i+r-1} d_{ij}\delta_r,\end{aligned}$$

pour pouvoir utiliser cette fois les relations 1., 2. et 4. issues de la preuve du Lemme 1.1.26 et obtenir :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<r\leq p+q}} (-1)^{i+r-1} d_{ij}\delta_r = & \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<r\leq p+q\\ j\leq r}} (-1)^{i+r-1} \delta_{r+1} d_{ij} \\ & + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+2\\ 1\leq i\leq q+1<r\leq p+q\\ j\geq r+2}} (-1)^{i+r-1} \delta_{r+1} d_{i,j-1} \\ & + \sum_{1\leq i\leq q+1<j-1\leq p+q} (-1)^{i+j} (\delta_i\delta_{j-1} - \delta_j\delta_i) \\ = & \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1\\ 1\leq i\leq q+1<r-1\leq p+q\\ j\leq r-1}} (-1)^{i+r} \delta_r d_{ij} + \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1\\ 1\leq i\leq q+1<r-1\leq p+q\\ j\geq r}} (-1)^{i+r} \delta_r d_{i,j} \\ & + \sum_{1\leq i\leq q+1<j\leq p+q} (-1)^{i+j+1} \delta_i\delta_j - \sum_{1\leq i\leq q+1<j-1\leq p+q} (-1)^{i+j} \delta_j\delta_i \\ = & \sum_{\substack{1\leq i<j\leq p+q+1\\ 1\leq i\leq q+1<r-1\leq p+q}} (-1)^{i+r} \delta_r d_{ij} \\ & + \sum_{1\leq i\leq q+1<j\leq p+q} (-1)^{i+j+1} \delta_i\delta_j - \sum_{1\leq i\leq q+1<j-1\leq p+q} (-1)^{i+j} \delta_j\delta_i\end{aligned}$$

Donc on trouve $(2) + (5) = -(c) - (d)$.

Finalement, on a montré que $d_0^{p+1,q} d^{p,q} + d^{p,q+1} d_0^{p,q} = 0$ $\square$

Proposition 3.3.19. *Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal bilatère de L tels que M est un K-module trivial et $[K, K] = 0$. Pour tout $q \geq 0$:*

$$G_2^{0,q} \simeq H^q(K, H^0(L/K, M)),$$

où $H^0(L/K, M)$ est un K-module symétrique dont l'action à gauche est induite par la Remarque 3.3.13.

Démonstration. On considère le complexe $(Hom(K^q, C^*(L/K, M)), d^{*,q})$ et on cherche à montrer que $d_0^{1,q} d^{0,q} + d^{0,q+1} d_0^{0,q} = 0$.

D'un côté $d^{0,q} = -\partial$, et de l'autre :

$$d_0^{0,q} = \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^i d_{ij} + \sum_{1 \leq k \leq q+1} (-1)^k \delta_k + (-1)^{q+1} \partial.$$

On montre immédiatement en utilisant les relations de la preuve du Théorème 1.1.24 que ces deux différentielles commutent, ce qui conclut la preuve de la Proposition. □

Exemple 3.3.20. *Retour sur l'Exemple 3.3.5*

- Tout d'abord, $G_2^{0,q}(L_2^2, L_2^2) = 0$ car $G_1^{0,q}(L_2^2, L_2^2) = 0$.
- Ensuite, pour tout $p \geq 1$, $d_1^{p,q}$ est nulle, donc encore une fois $G_2^{p,q}(L_2^2, L_2^2) = G_1^{p,q}(L_2^2, L_2^2) = G_0^{p,q}(L_2^2, L_2^2)$.

Exemple 3.3.21. *Retour sur l'Exemple 3.3.6*

On note $w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3 \in L_6$.

- Calcul de $G_2^{0,q}(L_6, L_6) \simeq H^q(E_{12}, H^0(E_3, L_6))$.

  Tout d'abord $H^0(E_3, L_6) \simeq E_1$ car $dw(e_3) = -[w, e_3] = -w_3 e_1 - w_2 e_2$, puis comme E_1 est un module trivial, on obtient $G_2^{0,q}(L_6, L_6) \simeq Hom(E_{12}^{\otimes q}, E_1)$. On peut remarquer que $H^0(L_6, L_6) \simeq E_1$, et donc : $G_2^{0,0}(L_6, L_6) \simeq H^0(L_6, L_6)$.

- Puis $G_2^{1,q}(L_6, L_6) \simeq H^q(E_{12}, Hom(E_3, H^0(L_6, L_6))) \simeq H^q(E_{12}, Hom(E_3, E_1))$, mais la différentielle du complexe $C^*(E_{12}, Hom(E_3, E_1))$ est à nouveau nulle, donc :

$$G_2^{1,q}(L_6, L_6) \simeq Hom(E_{12}^{\otimes q} \otimes E_3, E_1).$$

  On peut en déduire par exemple, grâce au Lemme 2.2.17 qui énonce que l'espace $G_2^{1,0}(L_6, L_6) \simeq Hom(E_3, E_1)$ s'injecte dans $H^1(L_6, L_6)$, que cet espace de cohomologie est non nul.

Corollaire 3.3.22. *Soient L une algèbre de Leibniz, K un idéal bilatère de L vérifiant $[K,K]=0$ et M un L-module tel que M soit un K-module trivial. La suite suivante est exacte :*

$$\begin{aligned}0 \to & H^0(K, Hom(L/K, H^0(L,M)) \to H^1(L,M) \to \\ & H^1(K, H^0(L/K,M)) \to H^0(K, Hom(L/K, H^1(L,M)) \to H^2(L,M).\end{aligned}$$

Démonstration. C'est la suite exacte à 5 termes définie dans le Lemme 2.2.17 appliquée à la suite spectrale $G\mathcal{C}(L,M)$. □

Exemple 3.3.23. Pour l'algèbre L_2^2, on obtient la suite exacte suivante :

$$0 \to Hom(E_1,E_2) \to H^1(L_2^2, L_2^2) \simeq 0 \to Hom(E_2,E_2) \to 0.$$

En effet :

- $H^0(E_2, Hom(E_1, H^0(L_2^2, L_2^2)) \simeq H^0(E_2, Hom(E_1,E_2))$ d'après les calculs effectués dans l'Exemple 3.0.2. Puis $H^0(E_2, Hom(E_1,E_2)) \simeq Hom(E_1,E_2)$ car la différentielle est nulle.
- $H^1(E_2, H^0(E_1, L_2^2)) \simeq H^1(E_2,E_2) \simeq Hom(E_2,E_2)$
- $H^0(E_2, Hom(E_1, H^1(L_2^2, L_2^2))) \simeq 0$.

Exemple 3.3.24. Pour l'algèbre L_6, on obtient la suite exacte suivante :

$$0 \to Hom(E_3,E_1) \to H^1(L_6,L_6) \simeq Hom(E_3,E_1) \to Hom(E_{12},E_1) \to Hom(E_3^{\otimes 2},E_1).$$

En effet :

- $H^0(L_6,L_6) \simeq E_1$ par le calcul effectué dans l'Exemple 3.0.4, puis :
$$H^0(E_{12}, Hom(E_3, H^0(L_6,L_6)) \simeq H^0(E_{12}, Hom(E_3,E_1) \simeq Hom(E_3,E_1),$$
le dernier isomorphisme découlant du fait que la différentielle est nulle.
- $H^1(E_{12}, H^0(E_3,L_6)) \simeq Hom(E_{12},E_1)$ car $H^0(E_3,L_6) \simeq E_1$.
- $H^0(E_{12}, Hom(E_3, H^1(L_6,L_6)) \simeq Hom(E_3^{\otimes 2},E_1)$.

Proposition 3.3.25. *La suite G est multiplicative pour le cup-produit $\tilde{\cup}$ (au sens de la Définition 2.3.12).*

Démonstration. Montrons que la filtration $\mathcal{GC}(L,M)$ est stable pour le cup-produit $\tilde{\cup}$. Soient $f \in \mathcal{G}^p\mathcal{C}^n(L,M)$ et $g \in \mathcal{G}^q\mathcal{C}^m(L,M)$: montrons que $f \cup g \in \mathcal{G}^{p+q}\mathcal{C}^{n+m}(L,M)$. Soient $x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+m} \in K^{\otimes(n+m+1-p-q)} \otimes L^{\otimes(p+q-1)}$. Il s'agit de prouver que

$$(f\tilde{\cup}g)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+m}) = 0.$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } & (f\tilde{\cup}g)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+m}) \\
&= (\mu \circ (f \otimes g) \circ (\tilde{sh}_{n,m-1} \otimes id_L))(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+m}) \\
&= \sum_{\sigma \in \{(n,m-1)-shuffle\}} sgn(\sigma) \cdot f(x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}) \\
&\qquad\qquad g(x_{\sigma(n+1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n+m-1)} \otimes x_{n+m}).
\end{aligned}$$

Or puisqu'il y a $n+m-p-q+1$ vecteurs dans K, il y en a forcément soit $n-p+1$ en arguments de f, soit $m-q+1$ en arguments de g quelque soit la permutation σ. De plus, puisque $\sigma \in \{(n,m-1) - shuffle\}$, dans les 2 cas les termes $x_i \in K$ sont toujours en premières places. Ainsi $(f\tilde{\cup}g)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+m})$ est nulle, ce qui prouve que le cup-produit respecte bien la filtration. Par la Proposition 2.3.4, on en déduit que la suite spectrale issue de cette filtration est multiplicative au sens de la Définition 2.3.3. □

3.4 Etude de la quatrième suite spectrale GBC(L,M)

3.4.1 Définition de la filtration

Définition/Proposition 3.4.2. *Soient L une algèbre de Leibniz, K un idéal à gauche de L et M un L-module. Les complexes $(\mathcal{GB}^p\mathcal{C}(L,M))_p$ suivants constituent une filtration du complexe $C^*(L,M)$:*

- $\mathcal{GB}^0C^*(L,M) = C^*(L,M)$,
- *Pour tout $p \geq 1$:*
  - $\forall n \geq p-1,\ \mathcal{GB}^pC^n(L,M) := \{f : L^{\otimes n} \to M \mid f_{|L^{\otimes(p-1)} \otimes K^{\otimes(n+1-p)}} = 0\}$
  - $\forall n \leq p-2,\ \mathcal{GB}^pC^n(L,M) := \{0\}$.

On note $GB\mathcal{C}(L,M)$ la suite spectrale associée à cette filtration sur le modèle de la Proposition 2.2.6.

Démonstration. Soient $p \geq 1, n \geq p-1$ et $f \in \mathcal{GB}^pC^n(L,M)$. Montrons que $d^n f \in \mathcal{GB}^pC^n(L,M)$. Soient donc $l_1,\ldots,l_{p-1} \in L$ et $k_p,\ldots,k_{n+1} \in K$: il s'agit de montrer que

$d^n f(l_1, \ldots, l_{p-1}, k_p, \ldots, k_{n+1}) = 0$. Pour bien voir que cette assertion est vraie, on découpe la somme comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
d^n f(l_1, \ldots, l_{p-1}, & k_p, \ldots, k_{n+1}) \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} (-1)^i d_{ij} f(l_1, \ldots, l_{p-1}, k_p, \ldots, k_{n+1}) \\
&+ \sum_{1 \leq i \leq p-1 < j \leq n+1} (-1)^i d_{ij}(f)(l_1, \ldots, l_{p-1}, k_p, \ldots, k_{n+1}) \qquad (3.16) \\
&+ \sum_{p \leq i < j \leq n+1} (-1)^i d_{ij}(f)(l_1, \ldots, l_{p-1}, k_p, \ldots, k_{n+1}) \\
&+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i-1} \delta_i f(l_1, \ldots, l_{p-1}, k_p, \ldots, k_{n+1}] \\
&+ \sum_{i=p}^{n+1} (-1)^{i-1} \delta_i f(l_1, \ldots, l_{p-1}, k_p, \ldots, k_{n+1}] \\
&+ (-1)^{n+1} \partial f(l_1, \ldots, k_{n+1})
\end{aligned}$$

K est un idéal à gauche de L, donc les vecteurs en arguments de f à la ligne 3.16 sont bien dans $L^{\otimes(p-1)} \otimes K^{\otimes(n+1-p)}$. Pour les autres lignes, cette vérification est immédiate, donc puisque $f_{|L^{\otimes(p-1)} \otimes K^{\otimes(n+1-p)}} = 0$, on a bien :

$$d^n f(l_1, \ldots, l_{p-1}, k_p, \ldots, k_n) = 0.$$

Les cas $p = 0$ et "$p \geq 1, n \leq p - 2$" étant immédiats, on conclut que $\mathcal{GBC}(L, M)$ est bien une filtration du complexe $\mathcal{C}(L, M)$. □

Exemple 3.4.3. $\mathcal{GB}^1 C^n(L, M) = \{f : L^{\otimes n} \to M) \mid f_{|K^{\otimes n}} = 0\}$

Exemple 3.4.4. On considère l'algèbre de Leibniz L_1^2 de base $\{(e_1, e_2)\}$ définie dans l'Exemple 1.1.9, dont la cohomologie a été calculée dans l'Exemple 3.0.1, ainsi que son idéal bilatère $E_2 := Vect(e_2)$. On étudie sa cohomologie à valeurs elle-même.

On obtient pour $p \geq 1$ et $n \geq p - 1$ les espaces suivants :

$$\mathcal{GB}^p \mathcal{C}^n(L_1^2, L_1^2) \simeq \{f : (L_1^2)^{\otimes n} \to M \mid f_{|(L_1^2)^{\otimes(p-1)} \otimes E_2^{\otimes(n+1-p)}} = 0\}.$$

Exemple 3.4.5. On considère l'algèbre de Leibniz L_6 de crochet défini sur une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ par $[e_2, e_3] = -[e_3, e_2] = e_2,\ [e_3, e_3] = e_1$, et son idéal bilatère E_2. On étudie sa cohomologie à valeurs elle-même (voir l'Exemple 3.0.4).

On obtient pour $p \geq 1$ et $n \geq p - 1$ les espaces suivants :

$$\mathcal{GB}^p \mathcal{C}^n(L_6, L_6) \simeq \{f : L_6^{\otimes n} \to L_6 \mid f_{|L_6^{\otimes(p-1)} \otimes E_2^{\otimes(n+1-p)}} = 0\}.$$

Remarque 3.4.6.

- La filtration $\mathcal{GBC}(L, M)$ est une adaptation de $\mathcal{GC}(L, M)$ aux algèbres de Leibniz à gauche.

- La filtration $\mathcal{GBC}(L, M)$ est canoniquement bornée.

Proposition 3.4.7. *La suite spectrale converge vers la cohomologie de L à valeurs dans M.*

Démonstration. Il s'agit simplement d'une application du théorème de convergence (Théorème 2.2.13). □

3.4.8 Calcul des premières pages

Proposition 3.4.9. *Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal à gauche de L. Pour tout $q \geq 0$, on a les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants :*

$$GB_0^{p,q} \simeq \begin{cases} Hom(K^{\otimes q}, M) & si\ p = 0, \\ \\ Hom(L^{\otimes (p-1)} \otimes L/K \otimes K^{\otimes q}, M) & si\ p \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration. Cette proposition découle immédiatement du Lemme 3.0.5. □

Exemple 3.4.10. *Retour sur l'Exemple 3.4.4*

On obtient pour $p = 0$: $GB_0^{p,q} \simeq Hom(E_2^{\otimes q}, L_6)$, et pour $p \geq 1$:

$$Hom(L_6^{\otimes (p-1)} \otimes E_{13} \otimes E_2^{\otimes q}, M)$$

Exemple 3.4.11. *Retour sur l'Exemple 3.4.5*

On obtient pour $p = 0$: $GB_0^{p,q} \simeq Hom(E_2^{\otimes q}, L_1^2)$, et pour $p \geq 1$:

$$Hom((L_1^2)^{\otimes (p-1)} \otimes E_1 \otimes E_2^{\otimes q}, M)$$

Théorème 3.4.12. $[B., 2017]$

Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal à gauche de L. Pour tout $q \geq 0$, on a les isomorphismes d'espaces vectoriels suivants :

$$GB_1^{p,q} \simeq \begin{cases} H^q(K, M) & si\ p = 0, \\ \\ Hom(L^{\otimes(p-1)} \otimes L/K, H^q(K, M)) & si\ p \geq 1, \end{cases}$$

Démonstration. Dans un premier temps, on considère $p \geq 1$ et $q \geq 0$. Pour faciliter la lecture, on notera k_i les éléments de K, l_i ceux de L et $\overline{l_i}$ ceux de L/K. On note de plus :

- $\psi_0^{p,q}$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels suivant :

  $$GB_0^{p,q} \simeq Hom(L^{\otimes(p-1)} \otimes L/K, Hom(K^{\otimes q}, M)),$$

  issu de la Proposition 3.4.9.

- $d_K^{p-1,*}$ la différentielle du complexe $Hom(L^{\otimes(p-1)} \otimes L/K, C^*(K, M))$ définie par :

  $$d_K^{p-1,q}(\overline{f}) = \sum_{p+1 \leq i < j \leq p+q+1} (-1)^{i-p} d_{ij}(\overline{f}) + \sum_{i=p+1}^{p+q} (-1)^{i-p+1} \delta_i(\overline{f}) + (-1)^{q+1} \partial(\overline{f}).$$

- $d_0^{p,q} : GB_0^{p,q} \to GB_0^{p,q+1}$ la différentielle sur la page 0 de la suite spectrale.

Nous allons montrer que $\psi_0^{p,q+1} \circ d_0^{p,q} = (-1)^p d_K^{p-1,q} \circ \psi_0^{p,q}$, ce qui permettra de conclure.

Soit $f \in \mathcal{GB}^p C^{p+q}$, on note $\overline{f}$ sa classe dans $GB_0^{p,q}$. Rappelons que :

$$d_0^{p,q}(\overline{f}) = \sum_{1 \leq i < j \leq p+q+1} (-1)^i d_{ij} f + \sum_{i=1}^{p+q} (-1)^{i-1} \delta_i f + (-1)^{p+q+1} \partial f.$$

Mais $d_0^{p,q} f \in GB_0^{p,q+1} = \dfrac{\mathcal{GB}^p C^{p+q+1}}{\mathcal{GB}^{p+1} C^{p+q+1}}$ et :

- $d_{ij}(f) \in \mathcal{GB}^{p+1} C^{p+q+1}$ dès que $i \leq p$,

- $\delta_i(f) \in \mathcal{GB}^{p+1} C^{p+q+1}$ dès que $i \leq p$.

D'où l'on obtient que :

$$d_0^{p,q}(\overline{f}) = \sum_{p+1 \leq i < j \leq p+q+1} (-1)^i d_{ij}(\overline{f}) + \sum_{i=p+1}^{p+q} (-1)^{i-1} \delta_i(\overline{f}) + (-1)^{p+q+1} \partial(\overline{f}).$$

Puis :

$$
\begin{aligned}
(\psi_0^{p,q+1} \circ d_0^{p,q})(\overline{f}) = &\sum_{p+1 \leq i < j \leq p+q+1} (-1)^i \psi_0^{p,q+1}(d_{ij}(\overline{f})) \\
&+ \sum_{i=p+1}^{p+q} (-1)^{i-1} \psi_0^{p,q+1}(\delta_i(\overline{f})) \\
&+ (-1)^{p+q+1} \psi_0^{p,q+1}(\partial(\overline{f})).
\end{aligned}
$$

Or, on a vu ci-dessus que :

$$
\begin{aligned}
d_K^{p-1,q}(\psi_0^{p,q}(f)) = &\sum_{p+1 \leq i < j \leq p+q+1} (-1)^{i-p} d_{ij}(\psi_0^{p,q}(f)) \\
&+ \sum_{i=p+1}^{p+q} (-1)^{i-p+1} \delta_i(\psi_0^{p,q}(f)) \\
&+ (-1)^{q+1} \partial(\psi_0^{p,q}(f)).
\end{aligned}
$$

Ainsi, puisque ψ_0 commute avec les opérateurs d_{ij}, δ_i et ∂, on a bien l'identité souahitée pour tout $p \geq 1$ et $q \geq 0$:

$$\psi_0^{p,q+1} \circ d_0^{p,q} = (-1)^p d_K^{p-1,q} \circ \psi_0^{p,q}.$$

Si $p = 0$, alors l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\psi_0^{0,q}$ est simplement l'application de restriction, et la preuve de cette égalité est immédiate. Ainsi les espaces vectoriels considérés dans l'énoncé sont bien isomorphes. $\square$

Exemple 3.4.13. *Retour sur l'Exemple 3.4.4*

On calcule immédiatement que $H^q(E_2, L_1^2) \simeq Hom(E_2^{\otimes q}, L_1^2)$, et donc $GB_1 \simeq GB_0$.

Exemple 3.4.14. *Retour sur l'Exemple 3.4.5*

On commence par calculer $H^q(E_2, L_6)$: soit $f \in C^q(E_2, L_6)$ définie par $f(e_2^{\otimes q}) := l_1 e_1 + l_2 e_2 + l_3 e_3$.

$$
\begin{aligned}
df(e_2^{\otimes(q+1)}) &= \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i-1} [e_2, f(e_2^{\otimes q})] + (-1)^{q+1} [f(e_2^{\otimes q}), e_2] \\
&= \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i-1} l_3 e_2 + (-1)^q l_3 e_2 \\
&= l_3 e_2 (\sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i-1})
\end{aligned}
$$

Ainsi $df(e_2^{\otimes(q+1)}) = l_3 e_2$ si q est pair, 0 sinon.

On en déduit immédiatement que :

$$GB_1^{0,q}(L_6, L_6) \simeq \begin{cases} Hom(E_2, E_{12}) & \text{si } q \text{ est pair,} \\ Hom(E_2, E_{13}) & \text{si } q \text{ est impair.} \end{cases}$$

et que pour tout $p \geq 1$:

$$GB_1^{p,q}(L_6, L_6) \simeq \begin{cases} Hom(L_6^{\otimes(p-1)} \otimes E_1 \otimes E_2, E_{12}) & \text{si } q \text{ est pair,} \\ Hom(L_6^{\otimes(p-1)} \otimes E_1 \otimes E_2, E_{13}) & \text{si } q \text{ est impair.} \end{cases}$$

3.4.15 Que peut-on dire de la deuxième page ?

Remarque 3.4.16. Le problème qui se pose ici et qui n'apparaissait par pour les suites spectrales $F\mathcal{C}(L, M)$ et $G\mathcal{C}(L, M)$ est que la différentielle d_1 définie sur $GB_1\mathcal{C}(L, M)$ par :

$$d_1([f]_0) := [d(f)]_0,$$

où $f \in GB_0^{p,q}\mathcal{C}(L, M)$ et d est induite par la différentielle globale $d : C^{p+q}(L, M) \to C^{p+q+1}(L, M)$, ne s'identifie à aucune différentielle usuelle.

En effet, on obtient $d : GB_0^{p,q}\mathcal{C}(L, M) \to GB_0^{p+1,q}\mathcal{C}(L, M)$ définie par :

$$d = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq p+q+1 \\ 1 \leq i \leq p+1}} (-1)^i d_{ij} + \sum_{1 \leq i \leq p+1} (-1)^{i-1} \delta_i.$$

Observons si dans certains cas particuliers on peut tout de même interpréter d_1.

Lemme 3.4.17. *Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal de L. Si $[K, M] = [K, K] = 0$, alors :*

- *$Hom(K, M)$ est un L/K-Lie-module pour l'action suivante, induite par le Corollaire 1.1.22 :*

$$[\bar{l}, f](k_1 \otimes \cdots \otimes k_q) := [\bar{l}, f(k_1 \otimes \cdots \otimes k_q)] - \sum_{i=1}^{q} f(k_1 \otimes \ldots [\bar{l}, k_i] \otimes \cdots \otimes k_q).$$

- *$H^q(K, M)$ est un L/K-Lie-module.*

Démonstration. • Puisque nous avons comme hypothèse que $[K, M] = [K, K] = 0$:

$$[k, f](k_1 \otimes \cdots \otimes k_q) := [k, f(k_1 \otimes \cdots \otimes k_q)] - \sum_{i=1}^{q} f(k_1 \otimes \ldots [\overline{k}, k_i] \otimes \cdots \otimes k_q) = 0.$$

Donc $Hom(K, M)$ est bien un L/K-module.

- Pour $f \in C^q(K, M)$, la formule de Cartan $[k, f] = d \circ \iota_k(f) + \iota_k \circ d(f)$ nous montre que $H^q(K, M)$ est bien un K-module. Cette action de K sur $H^q(K, M)$ s'étend à L puisque M est un L-module et K un idéal à gauche. Le premier point du lemme nous montre que $[K, H^q(K, M)] = [H^q(K, M), K] = 0$ et ainsi $H^q(K, M)$ est bien un L/K-module.

□

Proposition 3.4.18. *Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal de L. Si $[K, M] = [K, K] = 0$, alors pour tout $q \geq 0$, on a l'isomorphisme d'espaces vectoriels suivant :*

$$GB_2^{0,q} \simeq H^0(L/K, H^q(K, M)),$$

où $H^q(K, M)$ est un L/K-module symétrique pour l'action décrite dans le lemme précédent.

Démonstration. Pour $p = 0$ on obtient la différentielle d suivante :

$$d(f) = - \sum_{2 \leq j \leq q+1} d_{1j} + \delta_1.$$

Or c'est exactement la différentielle de degré 0 du complexe $C^*(L/K, Hom(K^{\otimes q}, M))$, où $Hom(K^{\otimes q}, M))$ est un L/K-module symétrique pour l'action donnée par le lemme précédent. On montre comme dans les parties précédentes pour conclure que d et d_0 commutent. □

Théorème 3.4.19. $[B., 2017]$

Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal de L. Si $[K, M] = [K, K] = 0$, alors pour tout $q \geq 0$, on a l'isomorphisme d'espaces vectoriels suivant :

$$GB_2^{1,q} \simeq H^1(L/K, H^q(K, M)),$$

où $H^q(K, M)$ est un L/K-module symétrique pour l'action décrite dans le lemme précédent.

Démonstration. Pour $p = 1$ la différentielle d de donnée par la Remarque 3.4.16 est la suivante :

$$d(f) = -\sum_{2\leq j\leq q+2} d_{1j} + \sum_{3\leq j\leq q+2} d_{2j} + \delta_1 - \delta_2.$$

C'est-à-dire explicitement :

$$\begin{aligned}
df(l_1, \overline{l_2}, k_3, \otimes \cdots \otimes k_{q+2}) &= -f([l_1, \overline{l_2}], k_3, \ldots k_{q+2})] \\
&- \sum_{3\leq j\leq q+2} f(\overline{l_2}, k_3 \otimes \ldots [l_1, k_i] \otimes \cdots \otimes k_{q+2}) \\
&+ \sum_{3\leq j\leq q+2} f(\overline{l_1} \otimes k_3 \otimes \ldots [\overline{l_2}, k_i] \otimes \cdots \otimes k_{q+2}) \\
&+ [l_1, f(\overline{l_2} \otimes k_3 \otimes \cdots \otimes k_{q+2}) - [\overline{l_2}, f(\overline{l_1} \otimes k_3 \otimes \cdots \otimes k_{q+2})
\end{aligned}$$

Donc puisque $[K, M] = [K, K] = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
df(l_1, \overline{l_2}, k_3, \otimes \cdots \otimes k_{q+2}) &= -f([\overline{l_1}, \overline{l_2}], k_3, \ldots k_{q+2})] \\
&- \sum_{3\leq j\leq q+2} f(\overline{l_2}, k_3 \otimes \ldots [\overline{l_1}, k_i] \otimes \cdots \otimes k_{q+2}) \\
&+ \sum_{3\leq j\leq q+2} f(\overline{l_1} \otimes k_3 \otimes \ldots [\overline{l_2}, k_i] \otimes \cdots \otimes k_{q+2}) \\
&+ [\overline{l_1}, f(\overline{l_2} \otimes k_3 \otimes \cdots \otimes k_{q+2}) - [\overline{l_2}, f(\overline{l_1} \otimes k_3 \otimes \cdots \otimes k_{q+2})
\end{aligned}$$

On reconnait ici la différentielle de degré 1 du complexe $C^*(L/K, Hom(K^{\otimes q}, M))$. On peut finalement montrer d et d_0 commutent par des calculs similaires à ceux concernant les deux suites spectrales précédentes, ce qui termine cette preuve. □

Remarque 3.4.20. Malheuresement, dès le cas $p = 2$, la différentielle d donnée par la Remarque 3.4.16 ne correspond plus à celle du complexe $C^*(L/K, Hom(K^{\otimes q}, M))$.

En effet, un simple calcule :

$$\begin{aligned}
&df(l_1 \otimes l_2 \otimes \overline{l_3} \otimes k_4 \otimes \cdots \otimes k_{q+3}) = \\
&\quad - f([l_1, l_2] \otimes \overline{l_3} \otimes k_4 \otimes \cdots \otimes k_{q+3}) - \sum_{i=4}^{q+3} f(l_2, \overline{l_3}, k_4 \otimes \ldots [l_1, k_i] \otimes \ldots k_{q+3}) \\
&\quad + f(l_1 \otimes [l_2, \overline{l_3}] \otimes k_4 \otimes \cdots \otimes k_{q+3}) + \sum_{i=4}^{q+3} f(l_1, \overline{l_3}, k_4 \otimes \ldots [l_2, k_i] \otimes \ldots k_{q+3}) \\
&\quad - \sum_{i=4}^{q+3} f(l_1, \overline{l_2}, k_4 \otimes \ldots [\overline{l_3}, k_i] \otimes \ldots k_{q+3}) \\
&\quad + [l_1, f(l_2 \otimes \overline{l_3} \otimes k_4 \otimes \cdots \otimes k_{q+3}) - [l_2, f(l_1 \otimes \overline{l_3} \otimes k_4 \otimes \cdots \otimes k_{q+3}) \\
&\quad + [\overline{l_3}, f(l_1 \otimes l_2 \otimes k_4 \otimes \cdots \otimes k_{q+3}).
\end{aligned}$$

montre bien cette différence.

Exemple 3.4.21. *Retour sur l'Exemple 3.4.4*

On considère l'algèbre L_1^2 dont le crochet est $[e_1, e_1] = e_2$, et on étudie sa cohomologie à valeurs dans elle-même (calculée explicitemment dans l'Exemple 3.0.1). On utilise pour ce faire l'idéal bilatère E_2 de L_1^2 qui vérifie bien les hypothèses requise pour utiliser la Proposition 3.4.18 et le Théorème 3.4.19.

- On calcule $GB_2^{0,q} \simeq H^0(E_1, H^q(E_2, L_1^2))$. Tout d'abord la différentielle de $C^*(E_2, L_1^2)$ est nulle, donc $GB_2^{0,q} \simeq H^0(E_1, Hom(E_2^{\otimes q}, L_1^2))$. Puis, si on pose $f(e_2^{\otimes q}) := l_1e_1+l_2e_2$, alors $df(e_1)(e_2^{\otimes q}) = l_1e_2$ et par suite $GB_2^{0,q} \simeq Ker(d) \simeq Hom(E_2^{\otimes q}, E_2)$.
- Calcul de $GB_2^{1,0} \simeq H^1(E_1, H^0(E_2, L_1^2))$.

  $H^0(E_2, L_1^2)) \simeq L_1^2$, mais ici il est vu comme un module symétrique. Puis $df(e_1 \otimes e_1) = 0$ et $d(l)(e_1) = l_1e_2$. donc : $GB_2^{1,0} \simeq Hom(E_1, E_1)$.

Corollaire 3.4.22. *Soient L une algèbre de Leibniz, M un L-module et K un idéal de L. Si* $[K, M] = [K, K] = 0$*, alors la suite suivante est exacte :*

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1(L/K, H^0(K, M)) \to H^1(L, M) \to H^0(L/K, H^1(K, M)) \\ &\to GB_2^{2,0}(L, M) \to H^2(L, M) \end{aligned}$$

Démonstration. Découle immédiatement du Lemme 2.2.17 en utilisant les isomorphismes du Théorème 3.4.19. □

Exemple 3.4.23. *Retour sur l'Exemple 3.4.4*

Pour l'algèbre L_1^2, d'après les calculs effectués dans l'Exemple 3.4.21, on obtient la suite exacte suivante :

$$0 \to Hom(E_1, E_1) \to H^1(L_1^2, L_1^2) \to Hom(E_2, E_2) \to GB_2^{2,0}(L_1^2, L_1^2) \to H^2(L, M)$$

Remarque 3.4.24. La filtration $\mathcal{GBC}(L, M)$ n'est pas multiplicative

En effet, on peut montrer le contre-exemple suivant : si $f \in \mathcal{GB}^1\mathcal{C}^1(L, M)$ et $g \in \mathcal{GB}^1\mathcal{C}^2(L, M)$, alors $f \tilde{\cup} g$ n'est en général pas dans l'espace $\mathcal{GB}^2\mathcal{C}^3(L, M)$.

4

Applications aux algèbres semi-simples

4.1 Définitions et théorèmes généraux

Définition 4.1.1. *Une algèbre de Lie est dite simple si elle n'est pas abélienne et ne contient pas d'idéaux non propres.*

Exemple 4.1.2. Pour $n \geq 2$, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ et pour $n \geq 5$, $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ sont des algèbres de Lie simples.

Définition 4.1.3. *Une algèbre de Lie est dite semi-simple si elle ne contient pas d'idéal abélien non nul.*

Proposition 4.1.4. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathfrak{g}$ est semi-simple.*
2. *$\mathfrak{g}$ est somme directe d'algèbres de Lie simples.*
3. *$\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal résoluble non nul.*

Théorème 4.1.5. $[Pirashvili, 1994]$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et M un $\mathfrak{g}$-Lie-module. Alors l'homologie de Leibniz de $\mathfrak{g}$ est concentrée en degré 0 :

$$\forall k \geq 1, \;\; H_k(\mathfrak{g}, M) = 0.$$

Démonstration. Une preuve détaillée est présente dans l'article [19] de T. Pirashvili. □

Remarque 4.1.6. L'homologie de Leibniz d'une algèbre de Lie à valeurs dans un Lie-module est celle à valeurs dans le comodule antisymétrique associé (c'est-à-dire pour le crochet à droite nul).

Remarque 4.1.7. F. Wagemann et B. Omirov ont prouvé que ce théorème est aussi vrai en cohomologie dans [18].

4.2 Applications

4.2.1 Applications concernant FC(L,M)

Proposition 4.2.2. *Soit L une algèbre de Leibniz, K un idéal de L tel que L/K soit une algèbre de Lie semi-simple et M un L-Lie-module. Alors :*

$$\forall i \geq 1, \quad H^i(L, M) \simeq H^i\left(\frac{\mathcal{C}(L, M)}{\mathcal{C}(L/K, M)}\right).$$

Démonstration. La suite exacte courte de complexes suivante :

$$0 \to \mathcal{C}(L/K, M) \to \mathcal{C}(L, M) \to \mathcal{C}(L, M)/\mathcal{C}(L/K, M) \to 0$$

induit une suite exacte longue en cohomologie qui commence par :

$$\begin{aligned} 0 \to & H^1(L/K, M) \to H^1(L, M) \to H^1(\mathcal{C}(L, M)/\mathcal{C}(L/K, M)) \to \\ & H^2(L/K, M) \to H^2(L, M) \to H^2(\mathcal{C}(L, M)/\mathcal{C}(L/K, M)) \to \cdots \end{aligned}$$

Mais puisque L/K est semi-simple, $H^i(L/K, M)$ est nulle pour tout $i \geq 1$ par la remarque qui suit le Théorème 4.1.5. On obtient donc exactement les isomorphismes demandés. □

Remarque 4.2.3. L'hypothèse demandée sur L de posséder un idéal tel que L/K soit semi-simple n'est pas contraignante. En effet la décomposition de Levi en affirme l'existence pour toute algèbre de Leibniz de dimension finie sur un corps de caractéristique 0 (voir [1]).

Corollaire 4.2.4. *Soit L une algèbre de Leibniz, K un idéal de L tel que L/K soit une algèbre de Lie semi-simple et M un L-Lie-module vérifiant $[K, M] = [M, K] = 0$. La suite spectrale $F\mathcal{C}(L, M)$ converge vers la cohomologie $\tilde{H}(L, M)$, égale à celle de $H(L, M)$ sauf en degré 0 où elle est nulle.*

Corollaire 4.2.5. *Soit L une algèbre de Leibniz, K un idéal de L tel que L/K soit une algèbre de Lie semi-simple et M un L-Lie-module tel que $[K, M] = [M, K] = 0$. On a* *l'isomorphisme suivant :*

$$H^1(L, M) \simeq H^0(L, Hom(K, H^0(L/K, M))).$$

Démonstration. D'après le Corollaire 3.2.20 :

$$H^1(\mathcal{C}(L, M)/\mathcal{C}(L/K, M)) \simeq H^0(L, Hom(K, H^0(L/K, M))),$$

ce qui donne le résultat souhaité grâce à la Proposition précédente. □

Proposition 4.2.6. *Soient L une algèbre de Leibniz, K un idéal tel que L/K soit une algèbre de Lie semi-simple et M un L/K-Lie-module tel que $[M, K] = 0$. Alors on a l'isomorphisme suivant, pour $q \geq 1$:*

$$H^q(L, M) \simeq H^{q-1}(L, Hom(K, M^{L/K})).$$

Démonstration. Par le Théorème 4.1.5, on obtient que

$$F_2^{p,q} \simeq H^{q-1}(L, Hom(K, H^p(L/K, M)))$$

est nul dès que $p \geq 1$ (et pour $q = 0$ par définition). Ceci nous donne tout d'abord que toutes les différentielles d'ordre $r \geq 2$ sont nulles, et donc que $F_\infty \simeq F_2$. On fixe $q \geq 1$. Par la Proposition 4.2.2, on a l'isomorphisme :

$$H^q(L, M) \simeq H^q\left(\frac{\mathcal{C}(L, M)}{\mathcal{C}(L/K, M)}\right),$$

donc la suite $F\mathcal{C}(L, M)$ converge dans notre cas vers la cohomologie $H(L, M)$. De plus, par le définition de la convergence :

$$\forall p \geq 0, q \geq 1,\ F_\infty^{p,q} \simeq \mathcal{F}^p H^{p+q}(L, M)/\mathcal{F}^{p+1} H^{p+q}(L, M),$$

et donc : $0 \simeq \mathcal{F}^1 H^q(L, M)/\mathcal{F}^2 H^q(L, M) \simeq \cdots \simeq \mathcal{F}^q H^q(L, M)/\mathcal{F}^{q+1} H^q(L, M)$. Mais $\mathcal{F}^{q+1} H^q(L, M) \simeq 0$, donc on obtient que $\mathcal{F}^i H^q(L, M) \simeq 0$ pour tout $i \geq 1$. Ainsi

$$H^{q-1}(L, Hom(K, M^{L/K})) \simeq F_2^{0,q} \simeq \mathcal{F}^0 H^q(L, M)/\mathcal{F}^1 H^q(L, M) \simeq \mathcal{F}^0 H^q(L, M),$$

et puisque $\mathcal{F}^0 H^q(L, M) \simeq H^q(L, M)$, on a bien le résultat escompté. □

4.2.7 Application concernant GC(L,M)

Proposition 4.2.8. *Soient L une algèbre de Leibniz, K un idéal de L qui soit une algèbre de Lie semi-simple et M un L-module. Alors $G_2^{p,q}(L,M) = 0$ dès que $q \geq 1$ et $p \geq 2$.*

Démonstration. Le K-module $Hom(L/K, H^{p-1}(L,M))$ est trivial. En effet, l'action de K sur L/K est évidemment trivial, et celle de K sur $H^{p-1}(L,M)$ (puisque $p \geq 2$) l'est grâce aux formule de type Cartan décrites dans la Proposition 1.3.2 de [3]. Ainsi, puisque K est semi-simple, on obtient par le théorème de Pirashvili et le Théorème 3.3.16 que :

$$G_2^{p,q}(L,M) \simeq H^q(K, Hom(L/K, H^{p-1}(L,M)))$$

est nul dès que $q \geq 1$ et $p \geq 2$. □

4.2.9 Application concernant l'injection de Leib dans Lie

Proposition 4.2.10. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et M un $\mathfrak{g}$-module. L'inclusion*

$$Hom(\Lambda^n \mathfrak{g}, M) \hookrightarrow Hom(\mathfrak{g}^{\otimes n}, M)$$

induit un morphisme entre le complexe de Chevalley-Eilenberg $C_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$ et celui de Loday $C(\mathfrak{g}, M)$.

Ce dernier morphisme induit à son tour trois morphismes de suites spectrales (multiplicatif dans le premier cas) de $EC_{Lie}(\mathfrak{g}, M)$ vers $EC(\mathfrak{g}, M)$, $GC(\mathfrak{g}, M)$ et $GBC(\mathfrak{g}, M)$.

Démonstration. La première affirmation est l'objet de la Proposition 1.3.4 de [3]. La deuxième découle du fait que le morphisme de complexes est immédiatement compatible avec les filtrations $\mathcal{EC}(\mathfrak{g}, M)$, $\mathcal{GC}(\mathfrak{g}, M)$ et $\mathcal{GBC}(\mathfrak{g}, M)$. □

5

Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes servi d'un outil mathématique, les suites spectrales, dans le but d'étudier la cohomologie des algèbres de Leibniz.

Nous avons défini et étudié plusieurs suites spectrales, en nous inspirant des travaux récents de A.V. Gnedbaye, et plus anciens de G. Hochschild et J.-P. Serre. En effet, ces derniers ont défini des suites spectrales à partir de filtrations de complexes d'algèbres de Lie d'une part, et de groupe d'autre part. Nous nous sommes resservi de ces filtrations dans le cadre des complexes d'algèbres de Leibniz. Nous avons alors réussi à calculer, sous certaines conditions, la page E_0 de la suite, ainsi qu'à montrer qu'elle est multiplicative, dans le premier cas ; et la deuxième page dans le cas s'inspirant de l'étude des groupes.

De son côté, A.V. Gnedbaye a défini une suite spectrale à partir d'une filtration de complexe de chaînes d'une algèbre de Leibniz, que nous avons dualisé pour se retrouver dans le cas cohomologique. On obtient alors deux suites spectrales différentes, selon que l'on adapte ou non son travail aux algèbres de Leibniz à gauche, dont nous arrivons à calculer la deuxième page dans un cas, la première dans l'autre.

Les applications que nous avons développées permettent essentiellement l'étude de la cohomologie de Leibniz de certaines algèbres de Lie : celles qui possèdent un idéal bilatère tel que le quotient soit semi-simple ou celles possédant un idéal semi-simple.

Bibliographie

[1] D. W. Barnes. On Levi's theorem for Leibniz algebras. Bull. Aust. Math. Soc., 86(2) :184–185, 2012. 92

[2] A. J. Calderón, L. M. Camacho, and B. A. Omirov. Leibniz algebras of Heisenberg type. J. Algebra, 452 :427–447, 2016. 10, 16

[3] S. Covez. The local integration of Leibniz algebras. Thèse, Université de Nantes, June 2010. 10, 94

[4] I. Demir, K. C. Misra, and E. Stitzinger. On some structures of Leibniz algebras. In Recent advances in representation theory, quantum groups, algebraic geometry, and related topics, volume 623 of Contemp. Math., pages 41–54. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014. 10

[5] A. V. Gnedbaye. Sur l'homologie des algèbres de Leibniz, opérades des algèbres k-aires, volume 1995/22 of Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée [Prepublication of the Institute of Advanced Mathematical Research]. Université Louis Pasteur, Département de Mathématique, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, 1995. Thèse, Université de Strasbourg I (Louis Pasteur), Strasbourg, 1995. 9

[6] A. V. Gnedbaye. Suite spectrale d'une extension d'algèbres de Leibniz. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 324(12) :1327–1332, 1997. 71

[7] G. Hochschild and J.-P. Serre. Cohomology of group extensions. Trans. Amer. Math. Soc., 74 :110–134, 1953. 10, 11, 41, 60

[8] G. Hochschild and J.-P. Serre. Cohomology of Lie algebras. Ann. of Math. (2), 57 :591–603, 1953. 7, 40, 55, 57

[9] J. Leray. L'anneau spectral et l'anneau filtre d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue. J. Math. Pures Appl. (9), 29 :1–139, 1950. 7

[10] J.-L. Loday. Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz. Enseign. Math. (2), 39(3-4) :269–293, 1993. 8, 10, 16

[11] J.-L. Loday. Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras. Math. Scand., 77(2) :189–196, 1995. 51, 52

[12] J.-L. Loday. Künneth-style formula for the homology of Leibniz algebras. Math. Z., 221(1) :41–47, 1996. 9, 10

[13] J. L. Loday. Cyclic homology, volume 301. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998. 26

[14] J.-L. Loday and T. Pirashvili. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology. Math. Ann., 296(1) :139–158, 1993. 9, 28

[15] J.-L. Loday and T. Pirashvili. Leibniz representations of Lie algebras. J. Algebra, 181(2) :414–425, 1996. 9

[16] S. Mac Lane. Homology. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1975 edition. 10, 38

[17] J. McCleary. A user's guide to spectral sequences, volume 58 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001. 10

[18] B. Omirov and F. Wagemann. Rigidity and cohomology of leibniz algebras, 2015. 92

[19] T. Pirashvili. On Leibniz homology. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 44(2) :401–411, 1994. 9, 13, 92

[20] C. A. Weibel. An introduction to homological algebra, volume 38 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. 10, 39, 48

Table des figures

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Thomas BEAUDOUIN

Etude de la cohomologie d'algèbres de Leibniz via des suites spectrales

A study of the cohomology of Leibniz algebras via spectral sequences

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier différentes suites spectrales permettant d'obtenir des propriétés intéressantes concernant la cohomologie d'algèbres de Leibniz en générale ou dans certains cas particuliers. Cette étude est faite dans l'esprit des travaux effectués par J.-P. Serre et G. Hochschild sur les algèbres de Lie, et dans la continuité de ceux effectués par A.V. Gnedbaye sur l'homologie d'algèbre de Leibniz à valeurs dans une semi-représentation.
Dans le premier chapitre, on définit la notion d'algèbre de Leibniz, comme généralisation des algèbres de Lie, et on en donne les propriétés fondamentales qui vont nous être utiles pour l'étude ultérieure.
Le deuxième chapitre est un préambule rappelant les principales définitions et propriétés liées aux suites spectrales, en particulier celles définies à partir d'une filtration de complexe. On étudiera attentivement la convergence de ces suites spectrales.
Le chapitre trois, corps de cette étude, est consacré spécifiquement à la définition de différentes suites spectrales et à l'étude des propriétés qu'elles permettent de prouver concernant la cohomologie d'algèbre de Leibniz.
Enfin le dernier chapitre permettra d'étudier des applications des résultats énoncés dans le chapitre trois.

Mots clés

algèbre de Leibniz, complexe de Loday, filtration de complexe, algèbre semi-simple, cohomologie, suites spectrales .

Abstract

This thesis is devoted to the study of different spectral sequences for the cohomology of Leibniz alebras in general or in certain specific examples. Some of the results are motivated by work of G.Hochschild and J.-P. Serre for Lie algebras and groups as well as the thesis of A.V. Gnedbaye on the homology of Leibniz algebras with values in a special kind of modules.
In the first chapter we define the notion of aLeibniz algebras as a generalization of a Lie algebras with a non-antisymmetric bracket. We also prove some basic properties of Leibniz algebras.
The second chapter is a general introduction to spectral sequences, especially those defined from a filtration of a complex. Among other topics, we consider the notion of convergence of a spectral sequence.
In the third chapter four different filtrations of Loday's complex defining Leibniz cohomology are studied. We compute the first pages for the spectral sequences arising from each of these filtrations. As a consequence we derive some properties of Leibniz cohomology.
The last chapter give some other applications of the results obtain in Chapter 3.

Key Words

Leibniz algebra, Loday's complex, filtration on cochaîne complex, semi-simple algebra, cohomology, spectral sequences.