

TABLE DES MATIÈRES

Problématique de la modélisation du moteur à induction pour la variation de vitesse industrielle “sans capteur”	5
1. Présentation de l'étude	7
1.1. Introduction	7
1.2. Problématique du contrôle de la vitesse d'un moteur à induction sans capteur mécanique	11
2. Modélisation d'un ensemble {moteur à induction - variateur de vitesse}	17
2.1. Modélisation standard du moteur à induction	17
2.2. Pertinence du modèle standard du moteur à induction	21
2.3. Modèle pour l'identification du moteur à induction	25
2.4. Modélisation d'un variateur de vitesse	30
Partie I. Problème d'identification du moteur à induction pour la variation de vitesse industrielle “sans capteur”	39
3. Identification des paramètres électriques moteur à l'arrêt	41
3.1. Introduction	41
3.2. Modèle du moteur à induction à l'arrêt	41
3.3. Identification des paramètres électriques du moteur à induction à l'arrêt	47
3.4. Résultats expérimentaux	64
Partie II. Problème d'observabilité du moteur à induction pour la variation de vitesse industrielle “sans capteur”	69
4. Observabilité du moteur à induction	71
4.1. Introduction	71
4.2. Étude du système au premier ordre	71
4.3. Observabilité du système non-linéaire	82
4.4. Construction d'un observateur pour les systèmes variant dans le temps	89
4.5. Conclusion	94
5. Singularités d'observabilité/de commandabilité	95

5.1. Introduction	95
5.2. Le cas mono-entrée	95
5.3. Étude d'un cas non-linéaire	99
5.4. Étude d'un système masse-ressort	99
5.5. Le cas Multi-entrées	103
5.6. Le cas de l'observabilité	107
5.7. Conclusion	110
A. Équivalence étoile-triangle	113
B. Sensibilité aux paramètres en régime permanent	115
C. Lois empiriques pour le point de fonctionnement	119
D. Modélisation des longs câbles - Équation du télégraphiste	121
E. Identifiabilité	127
Bibliographie	129

**PROBLÈMATIQUE DE LA MODÉLISATION
DU MOTEUR À INDUCTION POUR LA
VARIATION DE VITESSE INDUSTRIELLE
“SANS CAPTEUR”**

PRÉSENTATION

Dans cette partie, nous présentons dans un premier chapitre le moteur à induction en mettant en lumière les différentes problématiques liées à la variation de vitesse industrielle sans capteur mécanique. Il est fréquent d'omettre le terme “mécanique”, et on parle alors de variation de vitesse “sans capteur” (ou encore “sensorless”) . Pour que le moteur à induction soit utilisable dans des régimes de fonctionnement très variés, il doit être associé à un variateur de vitesse. Ce dernier permet d'ajuster au mieux la tension d'alimentation de manière à répondre aux variations de consigne de vitesse, de couple de charge, etc., sous des contraintes de valeurs maximales de courant et de tension.

Dans un deuxième chapitre, nous reviendrons sur la modélisation standard du moteur à induction. Cette modélisation nous servira de point de départ à une discussion sur la cohérence du modèle par rapport à quelques faits expérimentaux. De là, nous introduirons un modèle plus précis qui répondra mieux aux problèmes d'identification.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DE L'ÉTUDE

1.1. Introduction

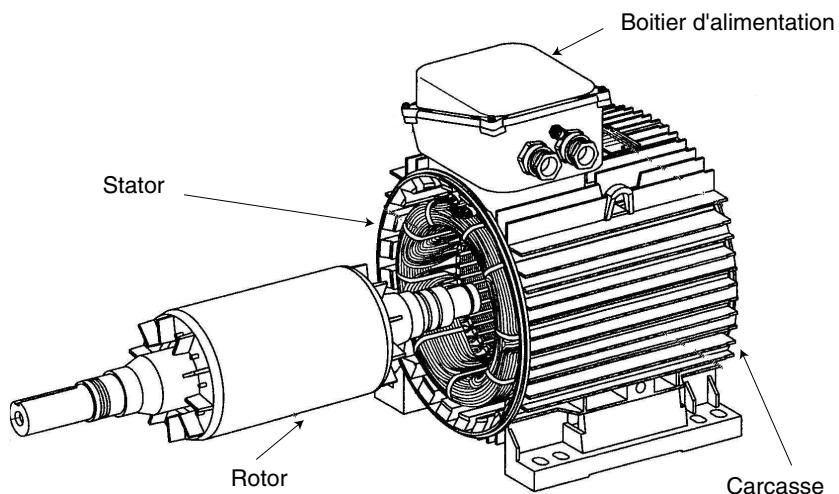


Figure 1 – Moteur à induction - Descriptif

1.1.1. Description et principe de fonctionnement du moteur à induction. — Un moteur à induction est un transformateur électrique dont les circuits magnétiques sont séparés en deux parties (primaire et secondaire) pouvant se mouvoir l'une par rapport à l'autre. La structure classique [FC79] d'un moteur à induction consiste en un stator de forme cylindrique portant sur sa partie périphérique interne les enroulements du primaire, et d'un rotor qui peut prendre plusieurs aspects :

- Rotor bobiné, un bloc de forme cylindrique portant les enroulements du secondaire identique à ceux du primaire à sa périphérie,
- Rotor à cage d'écureuil, des barres métalliques (cuivres ou aluminium) formant un cylindre reliées entre elles par leurs extrémités à l'aide de couronnes conductrices.

La superposition de trois champs magnétiques tournant créés par les enroulements des trois phases produit un champ résultant sinusoïdal tournant en synchronisation avec la fréquence d'alimentation du stator. Ce dernier crée un courant induit dans le rotor qui s'oppose naturellement au champ inducteur. Une force électromotrice est alors créée qui entraîne le rotor dans une rotation à la vitesse électrique du stator divisée par le nombre de paires de pôles.

Le mouvement relatif entre le primaire et le secondaire résulte de la force électromagnétique produite par l'induction des deux circuits. C'est le point essentiel du moteur à induction : les courants créés dans le rotor sont uniquement issus de l'induction.

Sans couple de charge, le moteur à induction tourne à la vitesse de synchronisme (le rapport entre la pulsation électrique et le nombre de paires de pôles). En présence d'un couple de charge, le moteur à induction voit sa vitesse différer de la vitesse de synchronisme ; c'est pour cette raison que le moteur à induction est quelques fois appelé par abus de langage moteur asynchrone.

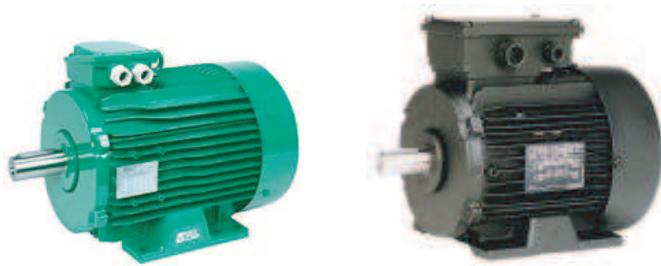


Figure 2 – Moteurs à induction, standard (à gauche), spécial variation de vitesse (à droite)

Nous voyons sur la figure 2 différents moteurs que nous utiliserons pour valider nos résultats. Ils vont d'un calibre de 1.5 kW jusqu'à 7.5 kW.

1.1.2. Historique du contrôle de la vitesse. — Le moteur à induction a un intérêt majeur par rapport aux autres types de moteur (courant continu, synchrone, ...), c'est sa robustesse et son faible coût de fabrication et d'entretien. Pour que l'intérêt principal du moteur à induction reste une force, il a fallu développer des outils permettant de contrôler sa vitesse aussi bien qu'il était possible de le faire avec d'autres types de moteur, et notamment les moteurs synchrones.

Les moteurs à induction étant largement utilisés dans l'industrie (pompe, machine outil, ventilateur, levage, ...), de nombreux industriels proposent des variateurs de vitesse pour moteur à induction. Citons par exemple Schneider Electric, Toshiba, Mitsubishi, Yaskawa, ABB, Fuji, GE, Siemens, ... Le variateur de vitesse apporte des solutions dans différents domaines : la consommation d'énergie, la durée de vie des moteurs, les performances, ...

Démarrage direct et démarreur. Le démarrage direct sur le réseau introduit un fort courant (jusqu'à 6 ou 7 fois le courant nominal, cf. chapitre 2, figure 4) dans le moteur pendant les premiers temps de la mise sous tension. De plus, si le moteur est connecté à une charge trop importante, celui-ci ne peut pas démarrer et risque de subir une forte élévation de température.

En effet, dans ce cas de fonctionnement, le moteur est entraîné par la charge (ou bloqué par un frein) et le courant à l'intérieur est calé à sa valeur de démarrage. À ce niveau de courant, le moteur s'échauffe très rapidement ; il ne faut pas plus d'une dizaine de secondes pour faire fondre les enroulements et le détruire.

Des modes de démarrage moins brutaux ont été développés. Le but principal est d'éviter le pic de courant. Le principe est de mettre deux thyristors par phase du moteur, montés têtes-bêches en parallèle, et de commander leurs ouvertures en alternance. Lorsque les trois phases sont passantes en même temps, la tension réseau est directement envoyée sur le moteur. Initialement, une seule phase est passante à la fois. Puis, le rythme d'ouverture des thyristors augmente, deux puis trois phases étant passantes en même temps. Si on choisit judicieusement le temps de commutation des thyristors, il est possible de limiter le niveau de courant dans le moteur.

Pour ces types de démarrage, le courant maximal est en général inférieur à celui obtenu avec un démarrage direct. Toutefois, il n'est pas possible d'assurer que le niveau de courant reste faible (i.e. environ 2 fois le courant nominal).

Loi U/f . Ce mode de fonctionnement est fondé sur la modélisation en régime permanent du moteur à induction. Effectivement, la relation entre d'une part l'amplitude U et la fréquence f de la tension statorique et d'autre part l'amplitude φ du flux peut être approchée par la relation $\varphi = U/f$ (cf. formules en régime permanent, voir chapitre 4). Il est alors clair que, choisissant de travailler à flux constant, il faut imposer à la tension statorique de respecter le rapport $U/f = \text{constante}$. Par construction, cette technique est sensible dans les phases transitoires. Le courant peut être limité de manière hardware ou logicielle.

Contrôle vectoriel. Par analogie au moteur à aimantation permanente, cette technique aspire à découpler les commandes de manière à contrôler le flux et le couple électromagnétique indépendamment. Obtenant des performances bien meilleures en régime dynamique, elle est largement répandue chez les fabricants de variateurs de vitesse.

Le niveau de courant maximum dans la machine est imposée par des limitations hardware ou logicielle. Cette limite est aux alentours de 1.8 fois le courant nominal.



Figure 3 – Démarrage/Ralentisseur - Schneider Electric



Figure 4 – Variateur de vitesse ATV58F - Schneider Electric

1.1.3. Présentation des outils de simulation et de développement utilisée. — Pour illustrer les aspects théoriques présentés lors de notre étude, nous insérerons à chaque fois qu'il sera possible des figures mettant en évidence les phénomènes décrits. Différents moyens sont à notre disposition. Ils se divisent en trois catégories.

- Les outils de simulation numérique sous P.C.

Ils permettront une validation ou une visualisation de phénomènes physiques liés au moteur à induction ou à l'étage de puissance d'un variateur de vitesse.

- Un banc d'essai en langage C articulé autour d'un variateur Altivar 66 d'un calibre de 4 kW (cf. figure 5).

Le banc d'essai se compose d'un P.C. et d'une carte DSP interfacée avec l'étage de puissance d'un variateur Altivar 66. L'implantation d'algorithmes se fait en langage C. Le but est de créer les signaux de tension que doit générer l'étage de puissance du variateur. En sortie, le

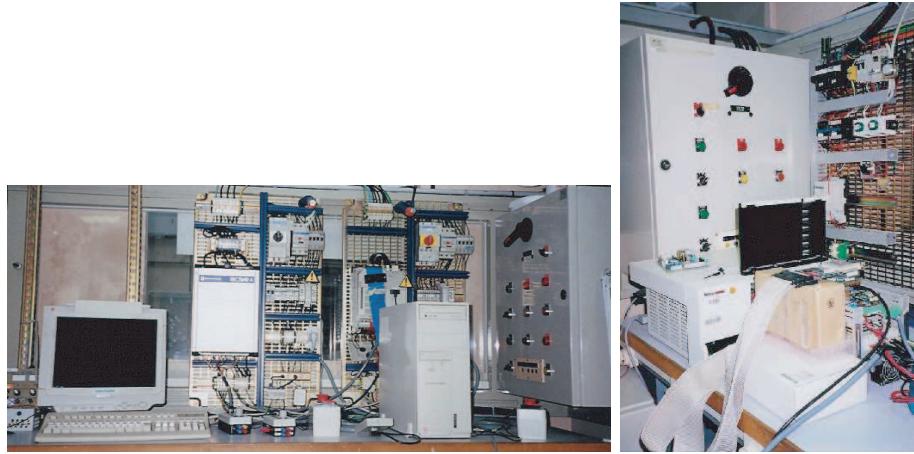


Figure 5 – Environnement d'essai sur maquette (à gauche) et sur produit final (à droite)

Puissance <i>P</i>	Courant <i>A</i>	<i>R_s</i> Ω	<i>R_r</i> Ω	<i>L_s</i> mH	<i>L_r</i> mH	<i>L_m</i> mH
0.75	2	12.89	9.31	555.7	557.0	537.6
1.1	2.8	8.85	5.89	380.6	382.3	367.7
1.5	3.7	5.91	4.51	298.7	300.5	289.0
2.2	4.8	4.16	2.98	272.1	272.0	264.5
3	5.9	2.67	2.09	180.9	181.0	175.8
4	8.7	1.62	1.14	153.1	155.2	148.7
5.5	12	1.078	0.787	122.3	123.3	118.5
7.5	16	0.786	0.625	100.0	100.9	96.9
11	22	0.480	0.239	71.5	72.5	69.5
15	30	0.275	0.166	51.5	52.3	50.1
18.5	37	0.207	0.102	48.6	49.4	47.2
22	42	0.173	0.095	45.0	45.8	43.8

Table 1 – Paramètres électriques de moteurs ATB

variateur de vitesse est relié à un moteur à induction. Celui-ci est facilement interchangeable dans une gamme de 1.5 kW à 7.5 kW (pour respecter les capacités de l'étage de puissance).

- Un produit industriel (un variateur Altivar 58-F) réinitialisable à partir d'un code assembleur (cf. figure 5).

Le produit industriel est reconfigurable logiciellement ce qui permet de tester différents algorithmes dans leurs versions finales sur un variateur Altivar 58-F. Les différences interviennent au niveau du programme lui-même qui doit être transcrit en assembleur. Il faut également remarquer que la chaîne de mesure est différente de celle que nous avons sur le banc d'essai. Nous avons effectué des essais sur différents variateurs, pour des calibres de 0.75 kW, 2.2 kW, 4 kW, 5.5 kW, 7 kW, 15 kW et 22 kW.

Pour être intégré dans un produit, les algorithmes que nous développons doivent passer avec succès ces trois phases d'étude. La convivialité des différentes plate-formes de simulations

Puissance nominale	Vitesse nominale	Couple nominal	Courant à vide	Intensité nominale	Facteur de puissance	Moment d'inertie
P kW	ω_{nom} min^{-1}	C_{nom} N.m	I_o A	I_{nom} A	$\cos \varphi$	J $kg.m^2$
0.75	1435	4.8	1.6	2	0.71	0.0024
1.1	1445	7.1	1.3	2.5	0.82	0.0039
1.5	1435	9.7	1.5	3.2	0.84	0.0049
2.2	1440	14	2.4	4.7	0.84	0.0051
3	1430	19.5	2.9	6.3	0.84	0.0071
4	1440	26	3.8	8	0.86	0.015
5.5	1460	35	4.1	10.4	0.88	0.0334
7.5	1455	49	4.7	14	0.89	0.035
9	1460	60	6.5	16.8	0.88	0.0385
11	1460	72	6.6	20.2	0.88	0.045
15	1465	100	11	28.1	0.85	0.095
18.5	1465	120	11	32.9	0.89	0.147
22	1465	144	15.4	40.8	0.86	0.147

Table 2 – Paramètres tabulés de moteur Leroy-Somer “Variation de Vitesse”

et développements permet une intégration graduelle des difficultés et de mettre en évidence l'importance relative des phénomènes environnementaux (e.g. les imperfections de l'étage de puissance, le codage en entier, le bruit de la chaîne de mesure, la longueur de câble entre le variateur et le moteur, ...) les uns par rapport aux autres.

Une fois intégré dans le produit, l'algorithme est testé dans une phase de “qualification produit”. Cette phase revient sur les performances du produit. Elle décide de la conformité du produit à atteindre le niveau fixé de performance. Par exemple, nous notons

- Les performances statiques. Montée en charge quasi-statique à vitesse constante.
En haute vitesse, cela permet de juger de la bonne maîtrise des saturations de tension. En basse vitesse, cela permet de noter la sensibilité aux paramètres (inclinaison des courbes) et la “qualité” de l'algorithme de contrôle (précision de vitesse, oscillation de vitesse, niveau de performance en quadrant générateur, ...).
- Les performances quasi-statiques. Inversion de sens de marche du moteur. En charge, à vide.
Le test classique est de regarder la tenue de charge lors d'une inversion lente entre +5 Hz et -5 Hz, et de -5 Hz à +5 Hz. Ce deuxième cas donne lieu à plus de problèmes.
- Les performances dynamiques. À-coup de charge, à-coup de vitesse de consigne, démarrage.
Ces tests permettent de juger des niveaux de couple accélérateur et décélérateur, de la robustesse en charge.

Lors des essais, une machine à courant continu ou une machine synchrone sert de charge. Elle est équipée de capteur de vitesse et de couplemètre. Les performances statiques sont tracées dans le plan couple-vitesse (cf. figure 6). Les performances dynamiques sont tracées en fonction du temps.

1.2. Problématique du contrôle de la vitesse d'un moteur à induction sans capteur mécanique

Le variateur de vitesse pour moteur à induction est un équipement électrique souvent mis en place dans un environnement déjà installé de machineries électriques. Le moteur à piloter n'est pas

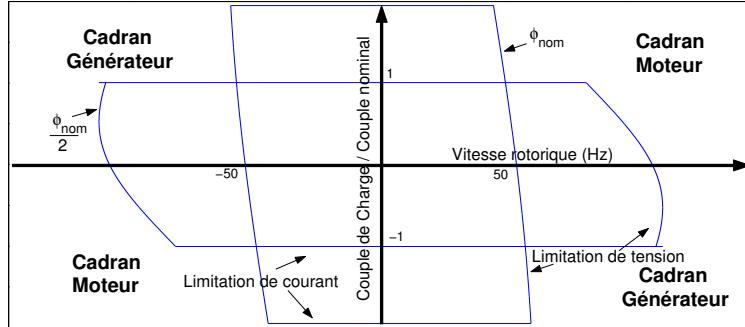


Figure 6 – Plan couple-vitesse. Limitations de courant et de tension

toujours accessible. Cette constatation implique deux remarques : la distance entre le variateur et le moteur peut être grande et il semble peu pratique de câbler une ligne faible ampérage pour le capteur de vitesse dans un environnement d'électronique de puissance ; le moteur est déjà installé dans son milieu d'utilisation et bien souvent il n'y a matériellement pas la place d'ajouter un capteur de vitesse sur l'axe du rotor. De plus, le capteur mécanique représente une perte de fiabilité pour le moteur à induction, celui-ci étant peu sensible aux perturbations extérieures au contraire d'un capteur de vitesse. C'est donc tout logiquement que le contrôle du moteur à induction sans capteur mécanique requiert l'attention de nombreux industriels désireux d'équiper le parc de moteur à induction déjà en place.

La relation entre la grandeur à piloter (la vitesse du moteur) et l'unique mesure des courants statoriques n'est pas directe. Elle n'est pas non plus évidente, ce qui rejette d'emblée une approche de type "boîte noire". Le contrôle de la vitesse passe par une modélisation physique du moteur à induction. Des lois de l'électromagnétique au modèle standard du moteur à induction, le cheminement est bien connu. Toutefois, il est possible de raffiner le modèle dans différentes directions en tenant compte d'effets reconnus. Citons par exemple la saturation magnétique, l'évolution thermique, l'effet de peau, les effets d'encoches, les pertes fer. Nous pouvons y ajouter les imperfections de l'étage de puissance (servant à créer la tension d'alimentation du moteur), par exemple les chutes de tension dans les composants électroniques et les retards inter-voies. Nous ne retiendrons pour notre étude que les effets de saturation magnétique (présent à fort courant), de chutes de tension (présent à faible tension).

La connaissance du modèle standard et de ces paramètres permet de contrôler le moteur à induction dans une large gamme de fréquence. Un algorithme de variation de vitesse doit être performant dans tous les cas de fonctionnement, sur toute une gamme de vitesse (de 0.5 Hz à 200 Hz) et de charge. La figure 7 montre la vitesse et le couple produit en réponse à une rampe de vitesse de consigne sous charge nominale. Le modèle standard (voir section 2.1) est correct dans une large zone de fonctionnement autour du point nominal comme nous pouvons le constater sur la figure 8. Toutefois, il existe des zones de fonctionnement où les performances sont plus faibles. Le mode de fonctionnement en sur-vitesse montre que le modèle linéaire n'est plus vraiment valide dans cette zone de fonctionnement. En effet, la limitation de tension impose une zone limite atteignable dans le plan charge/vitesse. Pour aller au-delà de cette zone, il faut affecter différemment la tension de manière à s'autoriser un couple maximum plus faible, mais une vitesse plus élevée. Pour cela, il

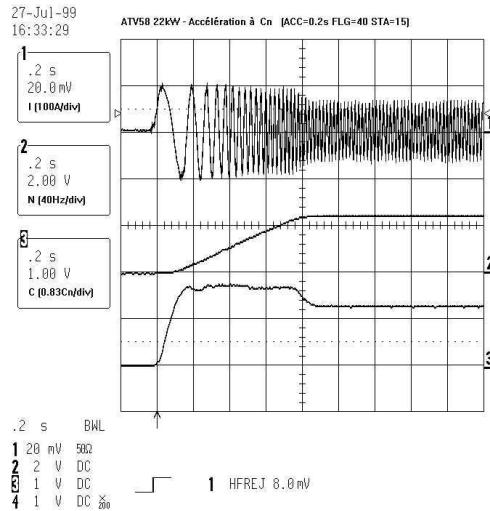


Figure 7 – Accélération sous charge nominale. Rampe de vitesse de 0.2s/50Hz.

suffit par exemple de changer la consigne de flux (défluxage). Le modèle classique du moteur, valide autour du point de fonctionnement nominal, ne permet pas d'obtenir les performances désirées. Il faut tenir compte de la saturation magnétique du moteur. Dans la zone de fonctionnement à basse vitesse, il est difficile de contrôler de manière satisfaisante le moteur à induction. Sur la figure 9, nous notons pourtant de bonnes performances statiques (montée en charge quasi statique à vitesse constante) jusqu'à environ 0.5 Hz en quadrant moteur (au dessus), et jusqu'à 2 Hz en quadrant générateur (en dessous). Nous remarquons également que les oscillations augmentent quand la vitesse de référence diminue. Il existe une zone d'environ -2 Hz à 0.5 Hz où le moteur n'atteint pas les performances qu'il obtient partout ailleurs. En plus des mauvaises performances de l'étage de puissance, le moteur à induction possède une propriété d'inobservabilité ("droite de glissement") au premier ordre dans cette zone de fonctionnement (voir figure 9). Pour rendre le contrôle plus difficile encore, il y a une zone d'instabilité autour des points de fonctionnement statique à basse vitesse. Nous remarquons que, sur une inversion de vitesse à charge nominale, le passage en basse vitesse introduit une déviation par rapport à la trajectoire de référence (voir figure 10).

Le modèle standard dépend de paramètres électriques et mécaniques. Nous venons de voir que lorsque ceux-ci sont bien connus le niveau de performance obtenu par un contrôle est bon, excepté à basse vitesse. Lors du fonctionnement des moteurs à induction, les résistances sont appelées à évoluer avec la température (environ 50% d'écart entre une utilisation à froid et à chaud). Les performances peuvent être largement dégradées si nous ne tenons pas compte de cet effet. Une mauvaise connaissance des paramètres électriques du moteur implique un mauvais fonctionnement en régime statique. Si les résistances sont mal connues, il apparaît une dérive de la vitesse avec la charge proportionnellement à l'erreur de résistance. Si les inductances sont mal connues, les consignes de flux ne sont pas respectées. Par exemple, si l'inductance statorique est sous évaluée, le courant dans la machine sera trop fort. Nous perdons des performances à deux niveaux : la consommation d'énergie est plus grande et le couple maximal atteignable est plus faible.

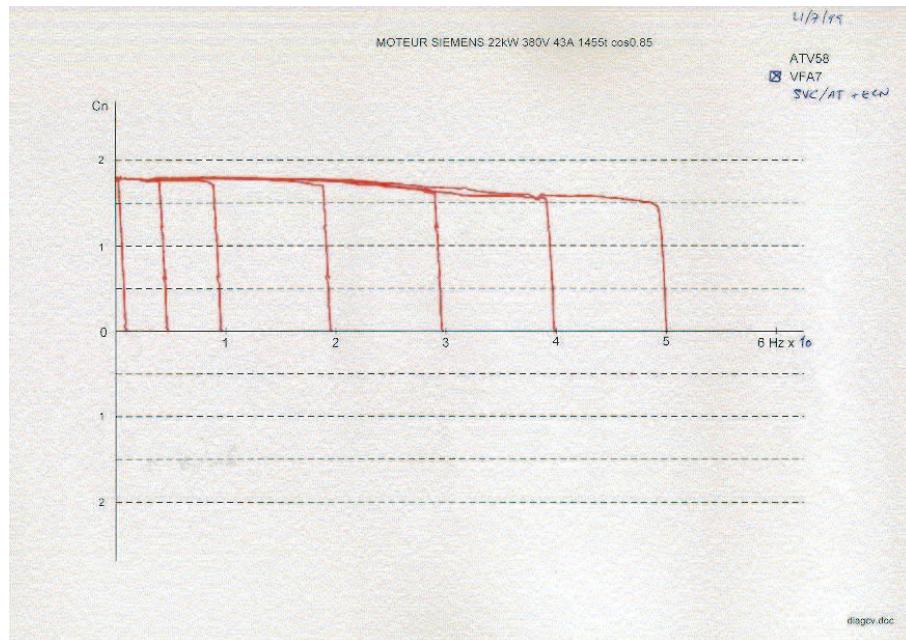


Figure 8 – Performances statiques à grande vitesse. Pour obtenir ces courbes, nous nous plaçons à la vitesse souhaitée (ici, 1 Hz, 5 Hz, 10 Hz, 20 Hz, 30 Hz, 40 Hz et 50 Hz) en l'absence de charge. Ensuite, nous augmentons le couple de charge jusqu'à se laisser entraîner par la charge le long des limitations de tension et de courant.

Nous venons de voir que la connaissance des paramètres du modèle du moteur à induction assure un bon niveau de performance des variateurs de vitesse. Il faut toutefois noter que l'identification des paramètres du moteur à induction pendant son fonctionnement normal n'existe pas actuellement sur les variateurs industriels. Une raison à cela peut être simplement que la seule connaissance des courants statoriques n'est pas suffisante pour reconstruire les grandeurs de flux, de vitesse et les paramètres électriques. D'ailleurs, un calcul de sensibilité montre qu'une variation de 50% de la résistance statorique entraîne une variation de 5% au plus des courants statoriques. De là, on voit qu'il est difficile de suivre une dérive lente au cours du temps de ce paramètre.

Trois moyens sont possibles pour obtenir les paramètres. Le plus simple est d'utiliser les paramètres tabulés dans le variateur de vitesse. Pour un variateur apairé (ou de puissance proche) les paramètres tabulés représentent les paramètres moyens d'une puissance donnée. Le deuxième moyen pour obtenir les paramètres est d'utiliser les paramètres de la plaque moteur : la puissance nominale, le courant nominal, la tension nominale, la vitesse nominale et le rendement. Ils permettent de remonter aux paramètres électriques. Ces derniers, comme ceux obtenus à partir des tables du variateur, assurent en général un fonctionnement moyen du variateur, avec un niveau de performance minimal. Pour améliorer ces dernières et aussi apporter une simplicité d'utilisation, une phase d'identification représente le troisième moyen d'obtenir les paramètres électriques. Cette identification ne doit pas apporter de désagrément à la charge connectée au moteur, c'est pour cela que nous rejetons l'idée d'une identification utilisant une séquence "excitante". L'identification moteur à l'arrêt est donc une voie naturelle pour identifier les paramètres électriques. Elle a des

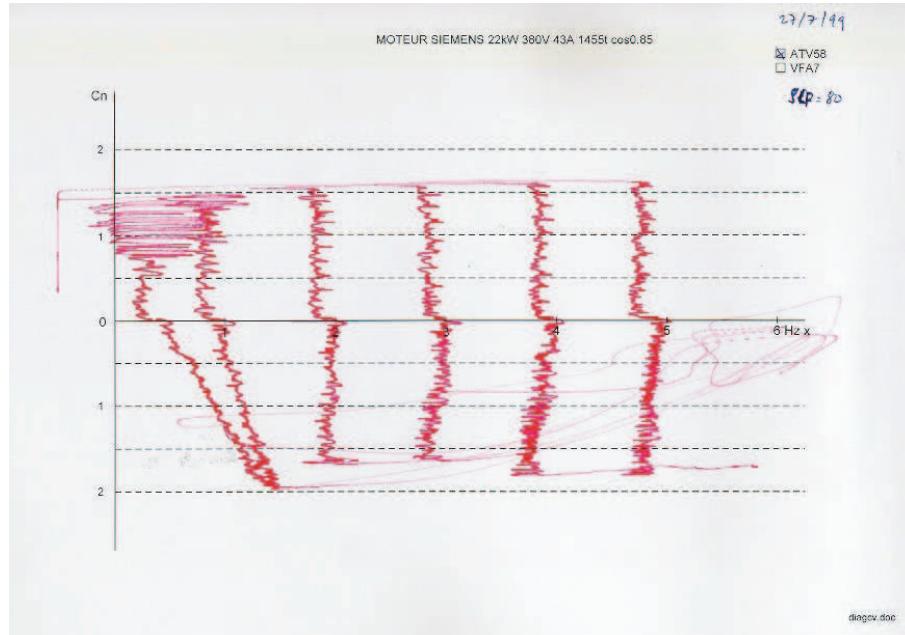


Figure 9 – Performances statiques à basse vitesse, quadrants moteur et générateur. Les courbes sont obtenues en se plaçant à vide (sans charge) à la vitesse souhaitée (ici, 0.5 Hz, 1 Hz, 2 Hz, 3 Hz, 4 Hz et 5 Hz). Ensuite, nous augmentons le couple de charge jusqu'à atteindre la limitation de courant. Le couple maximum obtenu dépend du niveau de courant maximum accepté.

avantages et des inconvénients. Les avantages sont clairement définis par les arguments employés jusque là : bonne initialisation des paramètres électriques pour le modèle standard (et le modèle thermique), simple et transparent pour l'utilisateur. Par contre, il y a des difficultés générées par le fonctionnement à l'arrêt. La zone de fonctionnement "basse tension, fort courant" oblige à considérer des phénomènes ignorés jusque là, ou du moins non pris en compte dans le modèle : l'étage de puissance peut fournir des tensions avec une dizaine de pourcents d'erreur, la saturation magnétique se fait bien plus ressentir dans la plage des courants utilisés. A partir d'une identification à l'arrêt, nous ne pouvons pas prendre en compte la variation ultérieure des paramètres due à l'échauffement du moteur. Un modèle thermique est utilisée pour adapter en ligne les paramètres résistifs (très affectés par la température dans le moteur - une variation de 50% des résistances est possible). Il est clair que les bonnes performances seront intimement liées à un bon réglage du modèle thermique.

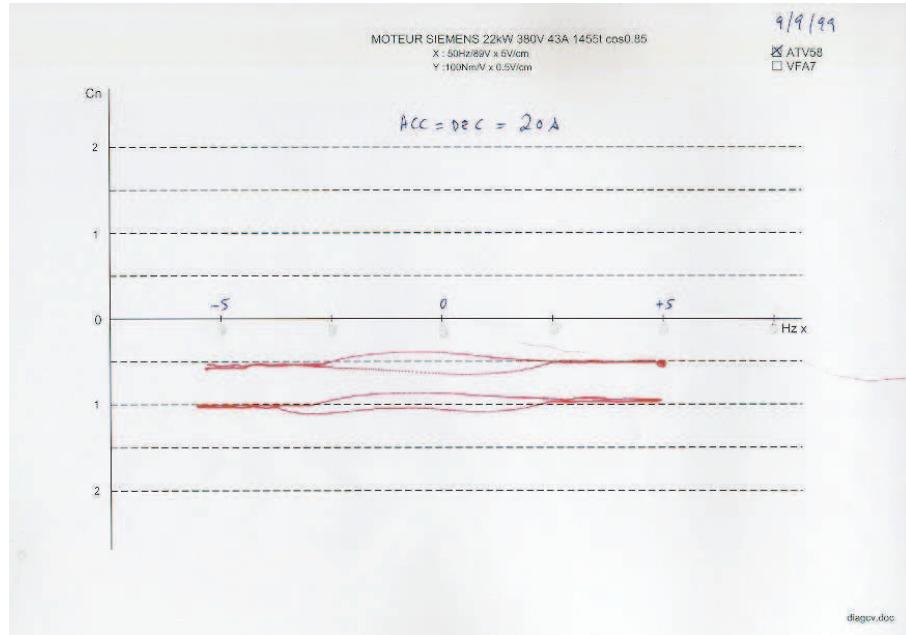


Figure 10 – Performances en inversion sous charge en fonction des paramètres. Les courbes sont obtenues en se plaçant sur un point de fonctionnement à 5 Hz sous charge nominale. Ensuite, nous imposons au variateur de suivre une rampe de vitesse l'amenant à -5 Hz en 20s.

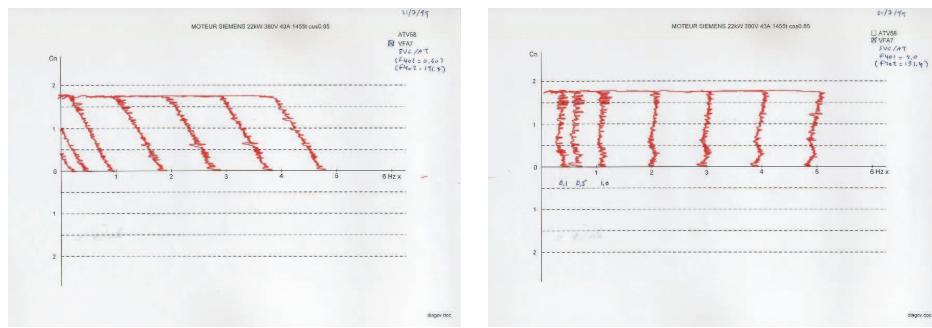


Figure 11 – Performances statiques en fonction des paramètres - Erreur paramétrique. À gauche, nous voyons une courbe de performances statiques (cf. figure 9) où une erreur sur la résistance rotorique a été commise. Les courbes de performances statiques sont inclinées proportionnellement à l'erreur de résistance $\omega_r = \bar{\omega}_{r,ref} - \frac{\bar{\tau}_{ref}}{\frac{3}{2}n_p|\varphi_r|^2} \Delta R_r$. À droite, nous voyons les mêmes courbes de performance statique où la résistance rotorique est parfaitement connue. Les courbes ne sont pas inclinées.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION D'UN ENSEMBLE {MOTEUR À INDUCTION - VARIATEUR DE VITESSE}

2.1. Modélisation standard du moteur à induction

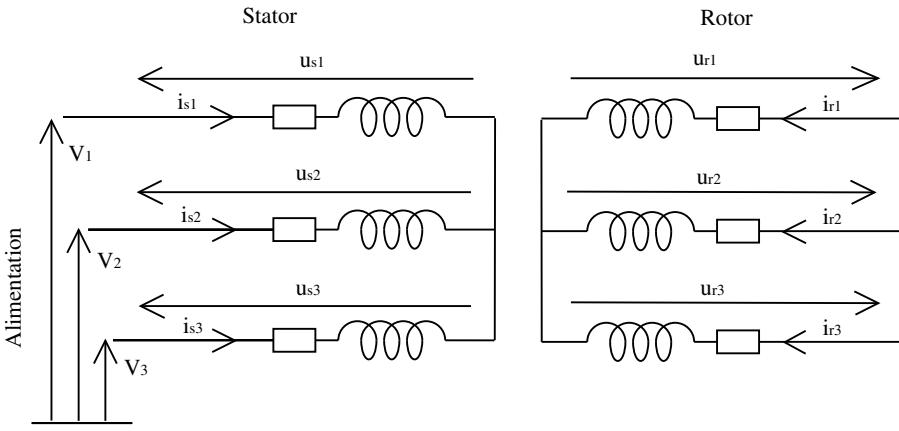


Figure 1 – Représentation du moteur à induction

2.1.1. Modèle triphasé du moteur. — Comme nous venons de le voir, le moteur à induction triphasé est composé de deux parties. La partie fixe est appelée le stator tandis que la partie libre est appelée le rotor. La modélisation standard du moteur à induction triphasé, symétrique et équilibré (cf. figure 1,[KWS95],[Leo85]) représente le stator par trois enroulements identiques décalés de $\frac{2\pi}{3}$ auxquels on peut appliquer un potentiel V_k et le rotor par trois enroulements identiques décalés de $\frac{2\pi}{3}$ en court-circuit. Les grandeurs indiquées par un s représenteront le stator alors que celles indiquées par un r rendront compte du rotor. Lorsque le moteur est configuré en étoile, les sommes des courants parcourant le rotor et le stator sont nulles :

$$\begin{aligned} i_{s_1} + i_{s_2} + i_{s_3} &= 0, \\ i_{r_1} + i_{r_2} + i_{r_3} &= 0. \end{aligned}$$

L'expression de la tension aux bornes d'un enroulement du stator est :

$$R_s i_{s_k} + \frac{d\phi_{s_k}}{dt} = u_{s_k},$$

où ϕ_{s_k} est le flux traversant l'enroulement statorique k , R_s sa résistance et u_{s_k} la différence de potentiel à ses bornes. Le rotor est modélisé de la même façon :

$$R_r \iota_{r_k} + \frac{d\phi_{r_k}}{dt} = 0,$$

où ϕ_{r_k} est le flux traversant l'enroulement rotorique k , R_r sa résistance. La différence de potentiel u_{r_k} aux bornes de l'enroulement rotorique est nulle, traduisant le fait que le rotor est en court-circuit. Le flux dans le moteur à induction est créé par la circulation de courant dans les enroulements. Pour les circuits magnétiques idéaux, c'est-à-dire linéaires, non saturés, à pertes fer et effets de peaux négligeables, l'expression du flux statorique dans l'enroulement k dépend de la valeur des courants dans les six enroulements.

$$\begin{aligned}\phi_{s_1} &= L_{s_1 s_1} \iota_{s_1} + L_{s_1 s_2} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iota_{s_2} + L_{s_1 s_3} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \iota_{s_3} \\ &\quad + M_{s_1 r_1} \cos(n_p \theta_r) \iota_{r_1} + M_{s_1 r_2} \cos(n_p \theta_r + \frac{2\pi}{3}) \iota_{r_2} + M_{s_1 r_3} \cos(n_p \theta_r + \frac{4\pi}{3}) \iota_{r_3}, \\ \phi_{s_2} &= L_{s_2 s_1} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \iota_{s_1} + L_{s_2 s_2} \iota_{s_2} + L_{s_2 s_3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iota_{s_3} \\ &\quad + M_{s_2 r_1} \cos(n_p \theta_r + \frac{4\pi}{3}) \iota_{r_1} + M_{s_2 r_2} \cos(n_p \theta_r) \iota_{r_2} + M_{s_2 r_3} \cos(n_p \theta_r + \frac{2\pi}{3}) \iota_{r_3}, \\ \phi_{s_3} &= L_{s_3 s_1} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iota_{s_1} + L_{s_3 s_2} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \iota_{s_2} + L_{s_3 s_3} \iota_{s_3} \\ &\quad + M_{s_3 r_1} \cos(n_p \theta_r + \frac{2\pi}{3}) \iota_{r_1} + M_{s_3 r_2} \cos(n_p \theta_r + \frac{4\pi}{3}) \iota_{r_2} + M_{s_3 r_3} \cos(n_p \theta_r) \iota_{r_3},\end{aligned}$$

où θ_r est la position angulaire du rotor et n_p le nombre de paires de pôles. De même pour les flux dans les enroulements rotoriques, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\phi_{r_1} &= M_{s_1 r_1} \cos(-n_p \theta_r) \iota_{s_1} + M_{s_2 r_1} \cos(-n_p \theta_r + \frac{2\pi}{3}) \iota_{s_2} + M_{s_3 r_1} \cos(-n_p \theta_r + \frac{4\pi}{3}) \iota_{s_3} \\ &\quad + L_{r_1 r_1} \iota_{r_1} + L_{r_1 r_2} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iota_{r_2} + L_{r_1 r_3} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \iota_{r_3}, \\ \phi_{r_2} &= M_{s_1 r_2} \cos(-n_p \theta_r + \frac{4\pi}{3}) \iota_{s_1} + M_{s_2 r_2} \cos(-n_p \theta_r) \iota_{s_2} + M_{s_3 r_2} \cos(-n_p \theta_r + \frac{2\pi}{3}) \iota_{s_3} \\ &\quad + L_{r_2 r_1} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \iota_{r_1} + L_{r_2 r_2} \iota_{r_2} + L_{r_2 r_3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iota_{r_3}, \\ \phi_{r_3} &= M_{s_1 r_3} \cos(-n_p \theta_r + \frac{2\pi}{3}) \iota_{s_1} + M_{s_2 r_3} \cos(-n_p \theta_r + \frac{4\pi}{3}) \iota_{s_2} + M_{s_3 r_3} \cos(-n_p \theta_r) \iota_{s_3} \\ &\quad + L_{r_3 r_1} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iota_{r_1} + L_{r_3 r_2} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \iota_{r_2} + L_{r_3 r_3} \iota_{r_3}.\end{aligned}$$

L'hypothèse du moteur symétrique et équilibré nous permet de symboliser l'influence d'un enroulement sur un autre en n'écrivant qu'une valeur d'auto-inductance statorique L_{ss} (respectivement de mutuelle inductance statorique M_{ss}) pour les différents $L_{s_i s_i}$ (respectivement $L_{s_i s_{j \neq i}}$), d'auto-inductance rotorique L_{rr} (respectivement de mutuelle inductance statorique M_{rr}) pour les différents $L_{r_i r_i}$ (respectivement $L_{r_i r_{j \neq i}}$) et de mutuelle inductance M_{sr} pour les différents $M_{s_i r_j}$. Les expressions précédentes sont symétriques, ce qui a pour première conséquence la simplification des relations liant les trois flux statoriques et les trois flux rotoriques.

$$\begin{aligned}\phi_{s_1} + \phi_{s_2} + \phi_{s_3} &= 0, \\ \phi_{r_1} + \phi_{r_2} + \phi_{r_3} &= 0.\end{aligned}$$

De ces deux relations et des expressions électriques dans les différentes mailles du stator, on obtient que la somme des trois tensions statoriques est nulle.

$$u_{s_1} + u_{s_2} + u_{s_3} = 0.$$

Pour une configuration en triangle, les équations électriques sont les mêmes.

Le couple électromagnétique produit par le moteur à induction prend la forme

$$C_{em} = \frac{\sqrt{3}}{3} n_p \begin{pmatrix} \phi_{r_1} \\ \phi_{r_2} \\ \phi_{r_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \iota_{r_1} \\ \iota_{r_2} \\ \iota_{r_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Modèle de Park du moteur. — Toutes les grandeurs intervenant dans le modèle sont définies par des triplets, une composante correspondant à une phase. Ces triplets sont contraints par construction à être de sommes nulles. Il en résulte que deux variables suffisent à caractériser un triplet.

La transformation de Park, qui n'est finalement qu'un changement de coordonnées, permet de réécrire dans un repère notée (a, b, c) les relations définies jusque là dans le repère triphasé $(1, 2, 3)$ en utilisant seulement deux variables (la grandeur d'indice c est identiquement nulle). La Transformée de Park qui est traditionnellement utilisée pour des signaux triphasés équilibrés est valable pour toutes formes de signaux dans la mesure où la contrainte de somme nulle est vérifiée.

La transformée de Park est équivalente au changement de coordonnées représenté par la matrice $P_{Triphase \rightarrow Park}$. Nous la représentons comme une rotation. Il faut remarquer que bien souvent la troisième coordonnée est omise. La figure 2 montre un exemple de passage du repère triphasé vers le repère de Park.

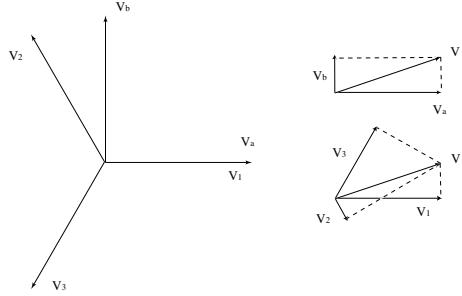


Figure 2 – Repère de Park et repère triphasé

$$P_{Triphase \rightarrow Park} = P_{T \rightarrow P} = \alpha_{T \rightarrow P} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$P_{Park \rightarrow Triphase} = P_{P \rightarrow T} = \alpha_{P \rightarrow T} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour que la transformation soit inversible, il faut que le produit $P_{T \rightarrow P} P_{P \rightarrow T}$ soit égal à la matrice unité. Le produit des coefficients $\alpha_{T \rightarrow P}$ et $\alpha_{P \rightarrow T}$ doit donc valoir $\frac{2}{3}$. La puissance instantanée du système s'écrit en triphasé $P_{123} = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3$. Dans le repère de Park, la puissance s'écrit $P_{ab} = u_a i_a + u_b i_b = \frac{3}{2} \alpha_{T \rightarrow P}^2 P_{123}$. La transformation conservant les puissances aura pour coefficients ($\alpha_{T \rightarrow P} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\alpha_{P \rightarrow T} = \sqrt{\frac{2}{3}}$). Une transformation conservant les amplitudes aura pour coefficients ($\alpha_{T \rightarrow P} = \frac{2}{3}$, $\alpha_{P \rightarrow T} = 1$). Dans tout ce qui suit, nous nous placerons dans le cadre de la transformation conservant les amplitudes.

De cette manière, nous définissons les grandeurs (i_{sa}, i_{sb}) et (ϕ_{sa}, ϕ_{sb}) dans le repère de Park lié au stator par la transformation précédente. Les grandeurs rotoriques ont jusque là été définies dans le repère lié au rotor. Pour les positionner dans le même repère que les grandeurs statoriques, il convient d'effectuer une rotation R des grandeurs rotoriques d'un angle $-n_p \theta_r$.

$$\begin{pmatrix} x_{r_a} \\ x_{r_b} \\ x_{r_c} \end{pmatrix} = R(-n_p \theta_r) P_{Triphase \rightarrow Park} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(-n_p \theta_r) & \cos(\frac{2\pi}{3} - n_p \theta_r) & \cos(\frac{4\pi}{3} - n_p \theta_r) \\ \sin(-n_p \theta_r) & \sin(\frac{2\pi}{3} - n_p \theta_r) & \sin(\frac{4\pi}{3} - n_p \theta_r) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r_1} \\ x_{r_2} \\ x_{r_3} \end{pmatrix}$$

Pour réduire encore les notations, nous remplaçons le couple (x_a, x_b) par le complexe $x_{ab} = x_a + j x_b$, où j est la variable complexe définie par $j^2 = -1$. Avec cette nouvelle formulation, les

équations électriques du stator et du rotor sont :

$$(1) \quad \begin{cases} R_s i_{sab} + \frac{d\phi_{sab}}{dt} = u_{sab}, \\ R_r i_{rab} + \frac{d\phi_{rab}}{dt} = j n_p \omega_r \phi_{rab}, \end{cases}$$

où les grandeurs complexes u_{sab} , ϕ_{sab} , ϕ_{rab} , i_{sab} et i_{rab} représentent les transformées de Park des grandeurs définies pour le modèle triphasé. De la même manière, en posant $L_s = L_{ss} + \frac{1}{2}M_{ss}$, $L_r = L_{rr} + \frac{1}{2}M_{rr}$ et $L_m = \frac{3}{2}M_{sr}$, les relations magnétiques deviennent

$$(2) \quad \begin{cases} \phi_{sab} = L_s i_{sab} + L_m i_{rab}, \\ \phi_{rab} = L_m i_{sab} + L_r i_{rab}. \end{cases}$$

D'après la loi de Lorentz, le moteur produit un couple électromagnétique $C_{em} = \frac{3}{2}n_p \Im(i_{rab}^* \phi_{rab})$. Le mouvement du rotor est obtenu à partir des lois de la mécanique et vaut :

$$(3) \quad J \frac{d^2\theta_r}{dt^2} = \frac{3}{2}n_p \Im(i_{rab}^* \phi_{rab}) - C_{charge},$$

où J est le moment d'inertie du rotor et C_{charge} le couple de charge. La vitesse instantanée du rotor ω_r vaut $\frac{d\theta_r}{dt}$.

En résumé, le modèle se compose de 5 paramètres électriques (inductance et résistance rotoriques et statoriques et inductance mutuelle), d'un paramètre mécanique (inertie) et d'un paramètre lié au type du moteur (le nombre de pôles). Il y a huit équations électriques, quatre relations algébriques (couplage magnétique) et quatre relations dynamiques (lois électriques). La vitesse rotorique est régie par une équation électro-mécanique.

2.1.3. Modèle tournant (d,q). — Le repère dans le champs tournant à la pulsation statorique instantanée ω_s est très classiquement utilisé. Il n'est pas nécessaire d'être en régime permanent pour effectuer la transformation. Le repère (d,q) tourne par rapport au repère (a,b) de l'angle statorique θ_s , défini par $\frac{d\theta_s}{dt} = \omega_s$.

$$\begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_s & \sin \theta_s \\ -\sin \theta_s & \cos \theta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix}.$$

Avec une notation complexe, la relation précédente s'écrit $x_d + jx_q = (x_a + jx_b)e^{-j\theta_s}$. Nous posons donc les grandeurs $(\phi_{rdq}, \phi_{sdq}, i_{rdq}, i_{sdq}, u_{sdq})$ dans le repère (d,q) comme étant les transformées des grandeurs $(\phi_{rab}, \phi_{sab}, i_{rab}, i_{sab}, u_{sab})$ du repère (a,b). Les équations (1), (2) et (3) se réécrivent en (d,q).

$$(4) \quad \begin{cases} R_s i_{sdq} + \frac{d\phi_{sdq}}{dt} = u_{sdq} - j\omega_s \phi_{sdq}, \\ R_r i_{rdq} + \frac{d\phi_{rdq}}{dt} = -j(\omega_s - n_p \omega_r) \phi_{rdq}, \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \phi_{sdq} = L_s i_{sdq} + L_m i_{rdq}, \\ \phi_{rdq} = L_m i_{sdq} + L_r i_{rdq}, \end{cases}$$

et

$$(6) \quad J \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{3}{2}n_p \Im(i_{rdq}^* \phi_{rdq}) - C_{charge}.$$

En résumé, le tableau suivant regroupe les différentes notations utilisées dans les différents repères. Dans le repère (d,q), plusieurs écritures d'état pour la partie électrique sont possibles, suivant que

repère triphasé	repère de Park (a, b) lié au stator	repère de Park (d, q) tournant à la vitesse ω_s
(x_1, x_2, x_3)	(x_a, x_b)	(x_d, x_q)
$(\phi_{s_1}, \phi_{s_2}, \phi_{s_3})$	(ϕ_{s_a}, ϕ_{s_b}) $\phi_{s_{ab}}$	(ϕ_{s_d}, ϕ_{s_q}) $\phi_{s_{dq}}$
$(\phi_{r_1}, \phi_{r_2}, \phi_{r_3})$	(ϕ_{r_a}, ϕ_{r_b}) $\phi_{r_{ab}}$	(ϕ_{r_d}, ϕ_{r_q}) $\phi_{r_{dq}}$
$(\iota_{s_1}, \iota_{s_2}, \iota_{s_3})$	$(\iota_{s_a}, \iota_{s_b})$ $\iota_{s_{ab}}$	$(\iota_{s_d}, \iota_{s_q})$ $\iota_{s_{dq}}$
$(\iota_{r_1}, \iota_{r_2}, \iota_{r_3})$	$(\iota_{r_a}, \iota_{r_b})$ $\iota_{r_{ab}}$	$(\iota_{r_d}, \iota_{r_q})$ $\iota_{r_{dq}}$

Table 1 – Notations utilisées dans les différents repères

nous privilégions une variable sur une autre. Nous allons juste écrire 2 des 6 systèmes possibles. Ils font intervenir le courant statorique (la mesure) et une grandeur de flux.

$$(7) \quad \begin{cases} (\iota_{s_{dq}}, \phi_{s_{dq}}) \\ \frac{d\phi_{s_{dq}}}{dt} = -j\omega_s \phi_{s_{dq}} - R_s \iota_{s_{dq}} + u_{s_{dq}}, \\ \frac{d\iota_{s_{dq}}}{dt} = \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{1}{\tau_r} - j n_p \omega_r \right) \phi_{s_{dq}} - \frac{1}{\sigma L_s} \left(R_s + \frac{L_s}{\tau_r} + j \sigma L_s (\omega_s - n_p \omega_r) \right) \iota_{s_{dq}} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s_{dq}}, \\ J \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{3}{2} n_p \Im(\phi_{s_{dq}}^* \iota_{s_{dq}}) - C_{charge}. \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} (\iota_{s_{dq}}, \phi_{r_{dq}}) \\ \frac{d\phi_{r_{dq}}}{dt} = - \left(\frac{1}{\tau_r} + j (\omega_s - n_p \omega_r) \right) \phi_{r_{dq}} + \frac{L_m}{\tau_r} \iota_{s_{dq}}, \\ \frac{d\iota_{s_{dq}}}{dt} = \frac{L_m}{\sigma L_s L_r} \left(\frac{1}{\tau_r} - j n_p \omega_r \right) \phi_{r_{dq}} - \frac{1}{\sigma L_s} \left(R_s + \frac{(1-\sigma)L_s}{\tau_r} + j \sigma L_s \omega_s \right) \iota_{s_{dq}} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{s_{dq}}, \\ J \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{3}{2} n_p \frac{L_m}{L_r} \Im(\iota_{s_{dq}} \phi_{r_{dq}}^*) - C_{charge}. \end{cases}$$

L'expression (7) utilise quatre paramètres électriques (R_s, L_s, σ, τ_r). L'expression (8) fait intervenir 5 paramètres électriques. Nous remarquons que le paramètre supplémentaire qui apparaît est en facteur des grandeurs rotoriques. Celles-ci n'étant pas mesurées, il est équivalent du point de vue de l'identification d'utiliser des variables modifiées incluant le cinquième paramètre, par exemple d'utiliser $\frac{L_m}{L_r} \phi_{r_{dq}}$ au lieu de $\phi_{r_{dq}}$ dans (8). Un autre quadruplé de paramètres est également possible ($R_s, \tau_r, R_{r_{eq}} = \frac{L_m^2}{L_r^2} R_r, L_f = \sigma L_s$). La grandeur L_f est appelée l'inductance de fuite du moteur et $R_{r_{eq}}$ est appelée résistance rotorique équivalente.

2.2. Pertinence du modèle standard du moteur à induction

2.2.1. Introduction. — Comme nous l'avons vu dans l'introduction, le modèle standard est valable dans une large zone de fonctionnement. Toutefois il existe des modes de fonctionnement qui demandent un modèle plus précis. Regardons en effet ces deux exemples :

- Le fonctionnement à basse vitesse pose le problème des imperfections dus à l'étage de puissance. Nous sommes en moyenne dans une zone de faible tension, faible courant. Les retards inter-voies et les chutes de tension dans l'étage de puissance peuvent introduire des erreurs de plusieurs dizaines de volts.
- Le fonctionnement en sur-vitesse pose le problème de la saturation magnétique. En effet, les points de fonctionnement en sur-vitesse ne se trouvent pas dans la zone atteignable⁽¹⁾ du plan couple-vitesse (défini pour un flux nominal). Le fonctionnement est possible en abaissant le niveau de flux dans la machine. La saturation de tension est repoussée permettant d'atteindre une plus grande zone. En modifiant la valeur de flux dans la machine, le comportement vis à vis de la saturation magnétique de la machine est modifié.

2.2.2. Comparaison entre le modèle et l'expérience. — Pour juger de la pertinence du modèle standard, nous allons comparer les résultats de simulation d'un modèle standard avec un modèle contenant une courbe de saturation magnétique (en forme de “coude”, voir plus loin). Nous reviendrons dans la section suivante sur ce modèle. L'objet de cette section est purement de juger qualitativement les différences entre les deux modèles et de les rapprocher des résultats connus expérimentalement.

Étude d'un démarrage. — Lors d'un démarrage sous les conditions nominales, les deux modèles ont sensiblement la même réponse. Nous remarquons une légère “avance” du modèle saturé indiquant

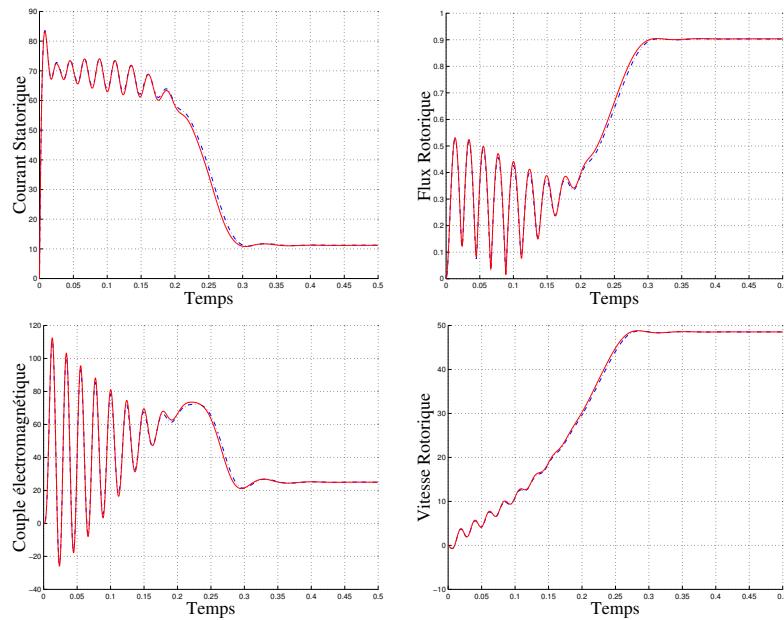


Figure 3 – Simulation : Démarrage d'un moteur 4 kW sur le réseau sous charge nominale. Le modèle avec saturation est représenté en trait plein (-) et le modèle standard est représenté en trait hachuré (-.).

⁽¹⁾Cette zone est définie par les limites en tension et courant imposées par le variateur de vitesse, cf. chapitre 1 figure 6

juste que la dynamique lente du système est légèrement accélérée si nous considérons la saturation magnétique. En première constatation (cf. figure 3), nous pouvons dire que la saturation influe peu le comportement en variation de vitesse.

Regardons également un démarrage à vide (cf. figure 4). Le niveau de courant en régime permanent est plus faible pour le modèle standard. C'est en conformité avec le modèle de saturation. Pour un même niveau de flux, le modèle saturé doit fournir plus de courant. Nous remarquons

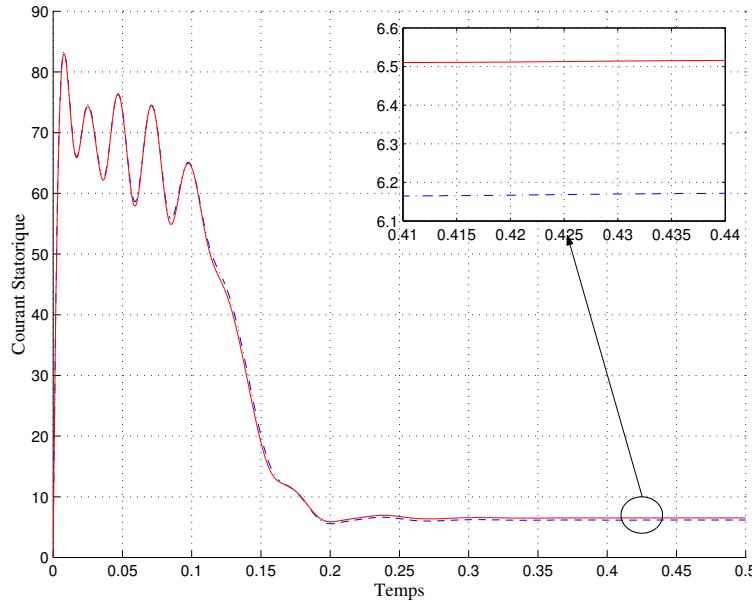


Figure 4 – Courant statorique en réponse à un démarrage réseau à vide. Le modèle avec saturation est représenté en trait plein (-) et le modèle standard est représenté en trait hachuré (- -).

que le pic de courant est identique que nous prenions en compte la saturation ou non. Par contre, le courant à vide est plus important (+5%). La vitesse rotorique est peu différente entre le cas linéaire et le cas saturé.

Nous ne prenons pas en compte les effets de saturation sur les fuites magnétiques. Elles peuvent notamment modifier l'allure des réponses à un démarrage réseau (surtout dans la zone de fort courant). Toutefois, au niveau de courant où nous travaillons habituellement, il semble légitime de considérer principalement l'effet de saturation du courant magnétisant.

Réponses à un échelon de tension. — Regardons maintenant les réponses à des échelons de tension (cf. figure 5). La tension ne tournant pas, le moteur est à l'arrêt. Nous nous attendons avec le modèle standard comme référence à voir des réponses en courant ayant l'allure d'un second ordre avec deux constantes de temps séparées. Avec le modèle saturé, la dynamique lente est accélérée. C'est ce qui produit la bosse sur la réponse en courant. Arrivant dans la partie saturée, la dynamique lente est soudainement accélérée. Le courant arrive plus rapidement à sa valeur d'équilibre.

Positionnement dans le coude de saturation. — La figure 6 contient les deux modèles de couplage magnétique, linéaire et saturé. Nous y avons positionné différents points de fonctionnement : nominal, à vide. Plusieurs remarques viennent à l'esprit. Le point de fonctionnement à vide est situé

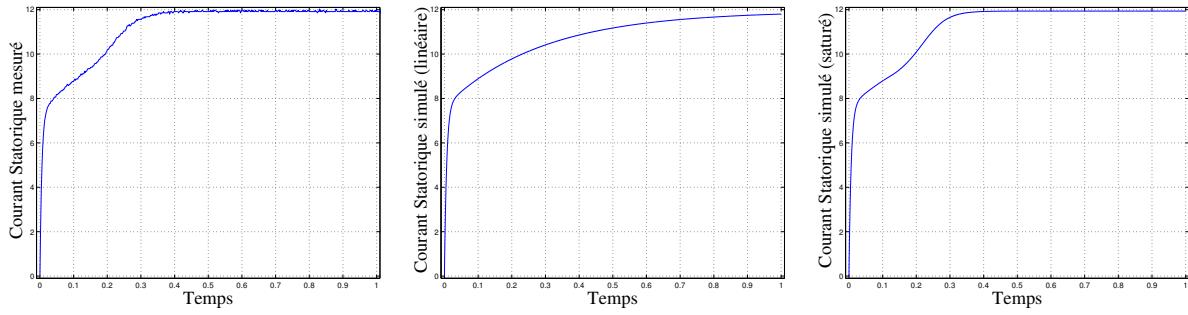


Figure 5 – Boucle ouverte : échelon de tension. La figure de gauche représente le résultat expérimental de la répose du moteur à un échelon de tension. La figure du centre représente la simulation d'un modèle standard. La figure de droite représente la simulation d'un modèle avec saturation.

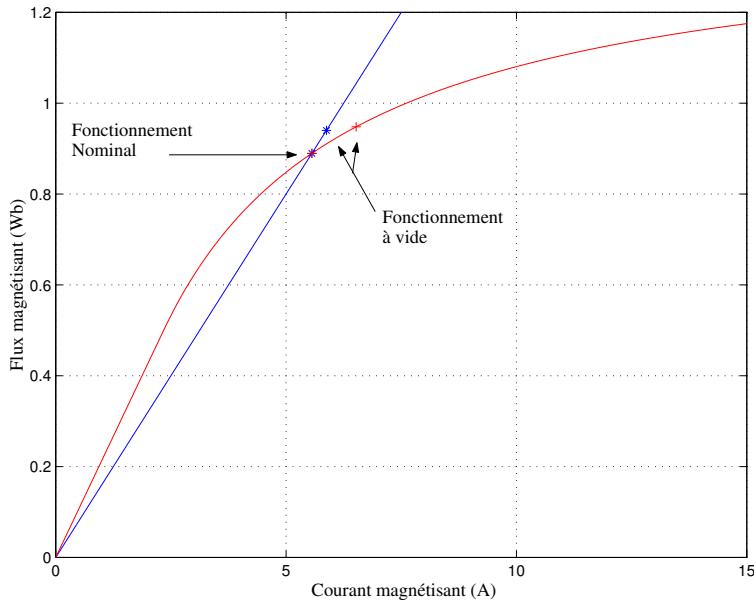


Figure 6 – Modèle de saturation et modèle linéaire équivalent. Equivalence des deux modèles autour du point de fonctionnement.

“au dessus” du point de fonctionnement nominal : le flux dans la machine est plus important à vide. Les points de fonctionnement à vide et sous charge nominal sont très proches. Pendant son fonctionnement, un moteur à induction balaye une toute petite partie de la courbe de saturation. C'est en ce sens que nous pouvons dire que le modèle standard est une bonne approximation du moteur en fonctionnement standard.

Par contre, l'identification est sensible à la saturation magnétique. Les signaux d'identification parcouruent toute la courbe de saturation.

Autres effets. — Dans le domaine de la sur-vitesse (au delà de 50 Hz), pour tenir la limitation de tension, il est nécessaire de baisser la consigne de flux.

Pour décélérer plus rapidement, il est d'usage d'utiliser une résistance de freinage permettant de dissiper de l'énergie. Un autre moyen peut être d'utiliser la saturation magnétique afin de dissiper une grande partie de l'énergie mécanique.

À basse vitesse, les retards inter-voies et les chutes de tension sont de l'ordre des tensions demandées. Même en mettant en place une compensation de ces effets, le fonctionnement en basse vitesse reste un domaine sensible aux imperfections de l'étage de puissance.

2.3. Modèle pour l'identification du moteur à induction

2.3.1. Modèle triphasé du moteur - Approche macroscopique. — Dans la section 2.1.1, nous avons donné la modélisation classique du moteur à induction, utilisant des relations linéaires pour modéliser le couplage magnétique.

Dans cette section, nous partons de la constatation expérimentale suivante : le modèle standard est valide au premier ordre. Nous cherchons une forme de saturation magnétique qui au premier ordre est équivalente au modèle standard.

Partons du modèle de saturation magnétique suivant.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_{s_a} \\ \varphi_{s_b} \end{pmatrix} &= f(\iota_{s_a}, \iota_{s_b}, \iota_{r_a}, \iota_{r_b}) \\ \begin{pmatrix} \varphi_{r_a} \\ \varphi_{r_b} \end{pmatrix} &= g(\iota_{s_a}, \iota_{s_b}, \iota_{r_a}, \iota_{r_b}) \end{aligned}$$

Faire l'hypothèse que, au premier ordre, le modèle standard est vérifié revient à supposer l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_{s_a} \\ \varphi_{s_b} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_a}{\partial \iota_{s_a}} & \frac{\partial f_a}{\partial \iota_{s_b}} \\ \frac{\partial f_b}{\partial \iota_{s_a}} & \frac{\partial f_b}{\partial \iota_{s_b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota_{s_a} \\ \iota_{s_b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_a}{\partial \iota_{r_a}} & \frac{\partial f_a}{\partial \iota_{r_b}} \\ \frac{\partial f_b}{\partial \iota_{r_a}} & \frac{\partial f_b}{\partial \iota_{r_b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota_{r_a} \\ \iota_{r_b} \end{pmatrix} = L_s^* \begin{pmatrix} \iota_{s_a} \\ \iota_{s_b} \end{pmatrix} + L_m^* \begin{pmatrix} \iota_{r_a} \\ \iota_{r_b} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \varphi_{r_a} \\ \varphi_{r_b} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_a}{\partial \iota_{s_a}} & \frac{\partial g_a}{\partial \iota_{s_b}} \\ \frac{\partial g_b}{\partial \iota_{s_a}} & \frac{\partial g_b}{\partial \iota_{s_b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota_{s_a} \\ \iota_{s_b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial g_a}{\partial \iota_{r_a}} & \frac{\partial g_a}{\partial \iota_{r_b}} \\ \frac{\partial g_b}{\partial \iota_{r_a}} & \frac{\partial g_b}{\partial \iota_{r_b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota_{r_a} \\ \iota_{r_b} \end{pmatrix} = L_m^* \begin{pmatrix} \iota_{s_a} \\ \iota_{s_b} \end{pmatrix} + L_r^* \begin{pmatrix} \iota_{r_a} \\ \iota_{r_b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Étudions le cas de f , celui de g en découlera. La fonction de saturation f doit vérifier

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial \iota_{s_a}} &= L_s^* & \frac{\partial f_a}{\partial \iota_{s_b}} &= 0 \\ \frac{\partial f_b}{\partial \iota_{s_a}} &= 0 & \frac{\partial f_b}{\partial \iota_{s_b}} &= L_s^* \\ \frac{\partial f_a}{\partial \iota_{r_a}} &= L_m^* & \frac{\partial f_a}{\partial \iota_{r_b}} &= 0 \\ \frac{\partial f_b}{\partial \iota_{r_a}} &= 0 & \frac{\partial f_b}{\partial \iota_{r_b}} &= L_m^* \end{aligned}$$

Nous en déduisons que la fonction f doit, au premier ordre, pouvoir se mettre sous la forme standard

$$(9) \quad f = L_s^* \begin{pmatrix} \iota_{s_a} \\ \iota_{s_b} \end{pmatrix} + L_m^* \begin{pmatrix} \iota_{r_a} \\ \iota_{r_b} \end{pmatrix} + \text{constante.}$$

Le couplage linéaire vérifie par définition la forme précédente.

$$\varphi_s = L_s \iota_s + L_m \iota_r, \quad \varphi_r = L_m \iota_s + L_r \iota_r.$$

Un couplage saturé en “module” vérifie également la forme (9).

$$\varphi_s = L_{fs}\iota_s + f(|\iota_s + \iota_r|) \frac{\iota_s + \iota_r}{|\iota_s + \iota_r|}, \quad \varphi_r = L_{fr}\iota_r + f(|\iota_s + \iota_r|) \frac{\iota_s + \iota_r}{|\iota_s + \iota_r|}.$$

Nous développerons ce modèle dans la partie suivante.

De nombreuses autres formulations sont possibles. La plus simple est un modèle de saturation portant directement sur les inductances. Nous choisissons une forme légèrement plus compliquée (cf. section suivante) mais qui a l'avantage de contenir dans sa définition un modèle de coude de saturation du moteur à induction.

2.3.2. Saturation magnétique dans le moteur à induction. — Le phénomène de la saturation magnétique dans le moteur à induction a amené de nombreuses publications depuis le milieu des années soixante-dix.

Partant de la caractéristique champ magnétique-excitation magnétique (B-H) des matériaux ferromagnétiques [Fey79], les auteurs cherchent à caractériser une relation flux magnétique-courant similaire. Le phénomène d'hystéresis est négligé : la largeur du cycle est nulle, ce qui permet de représenter la relation B-H par une simple courbe en forme de “coude”. C'est naturellement que les auteurs ont cherché à identifier des relations flux-courant de mêmes formes. Voici quelques fonctions analytiques qu'il est possible de trouver dans la littérature.

Subramanyam résume dans [Sub74] quelques modélisations possibles à partir de fonctions exponentielles.

$$\begin{aligned} H &= H_o e^{\frac{B}{B_o} - 1} \\ H &= H_\infty \left(1 - e^{-\frac{B}{B_o}}\right) \\ H &= \sum_k H_k \frac{B^k}{B_o^k} \\ B &= B_o e^{\alpha \frac{H - H_o}{H + H_o}} \end{aligned}$$

où les grandeurs B_o , H_o , H_k , H_∞ sont des constantes à déterminer. Une détermination graphique, une minimisation d'un écart ou une phase d'identification permettent de régler les modèles simplement.

Levi a apporté également de nombreux modèles analytiques de la saturation magnétique [Lev95], [Lev96]. Ceux sont des fonctions reliant le flux magnétisant φ au courant magnétisant ι . Ils ont la forme suivante.

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha \beta^\iota \iota^\gamma, \\ \varphi &= L_o \iota, \text{ si } \iota < \iota_o, \varphi = \left(q + \frac{g}{\iota} + \frac{h}{\iota^2}\right)^{-1}, \text{ si } \iota > \iota_o. \end{aligned}$$

Levi donne les valeurs numériques des différentes constantes pour des moteurs de 0.75 kW et 7.5 kW.

D'autres auteurs [GGPL97] présentent des fonctions articulées autour des fonctions arctan, tanh, .. et renvoient à de nombreuses références.

Sullivan et Sanders proposent dans [SS96] une relation flux-courant de la forme

$$\iota = \frac{s_1 - s_2}{(b^{-n} + \varphi^{-n})^{1/n}} + s_2 \varphi,$$

où s_1 et s_2 sont les pentes initiale et finale de la courbe de saturation, b le flux au point de rupture, et n un coefficient de forme. Les auteurs montrent également qu'un modèle flux-courant

peut être ramené à une fonction inductance dépendant du courant. C'est la voie que choisissent de nombreux auteurs également pour modéliser la saturation magnétique. Citons par exemple [Vas97, Kas98, Kla93, WBE89, GTT97].

Nous choisissons dans la section suivante une formulation différente de celles présentées ci-dessus. Elle possède l'avantage d'être simplement paramétrée par trois paramètres (deux grandeurs de flux, et une inductance) auxquels il est possible d'associer un explication physique.

Modélisation des saturations magnétiques. — Partant du modèle⁽²⁾ en T où le stator et le rotor sont représentés par une résistance et une inductance de fuite. La partie commune traversée par le courant $i_s + i_r$ (appelé courant magnétisant) est modélisée par une inductance. Les équations

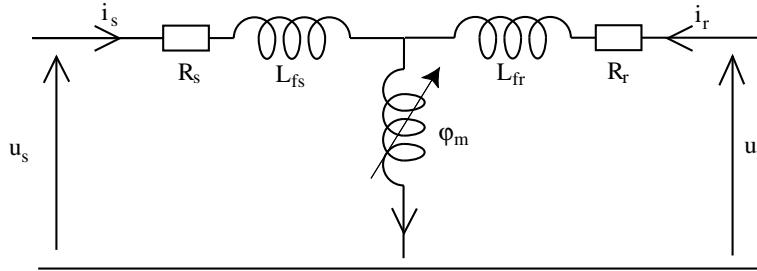


Figure 7 – Schéma de saturation en T dans le repère de Park.

magnétiques correspondent alors à

$$\begin{cases} \varphi_s = L_{fs}i_s + \varphi_m, \\ \varphi_r = L_{fr}i_r + \varphi_m, \end{cases}$$

où φ_m est une fonction du courant $i_m = i_s + i_r$ et de l'inductance magnétisante \tilde{L}_m . L'inductance L_{fs} , respectivement L_{fr} , est appelée l'inductance de fuite statorique, respectivement rotorique.

Nous définissons le flux φ_m comme une fonction du flux magnétisant "linéaire" (appelons-le $\tilde{\varphi}_m$) égal à $\tilde{L}_m i_m$. Nous faisons l'hypothèse que le flux sature en module et que la direction est conservée. Il s'écrit sous la forme $\varphi_m = f\left(\|\tilde{L}_m i_m\|\right) \frac{\tilde{L}_m i_m}{\|\tilde{L}_m i_m\|}$. Nous choisissons de modéliser la saturation par l'intermédiaire d'une fonction f homographique. L'intérêt de cette fonction est de représenter la courbe de saturation par deux zones : une zone linéaire et une zone de saturation ("coude"). En choisissant les valeurs de flux pour le début de la zone de saturation (φ_1) et pour le niveau maximum atteignable (φ_2), nous obtenons l'expression de la courbe de saturation :

$$\varphi_M = f(\tilde{\varphi}_M) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_M & \text{si } \tilde{\varphi}_M \leq \varphi_1 \\ \frac{\varphi_2 \tilde{\varphi}_M - \varphi_1^2}{\tilde{\varphi}_M + \varphi_2 - 2\varphi_1} & \text{si } \tilde{\varphi}_M \geq \varphi_1 \end{cases}$$

⁽²⁾Le modèle en T est le modèle le plus couramment utilisé pour représenter la saturation magnétique. Sullivan et Sanders proposent une représentation avec un modèle en II [SS96]. Ils considèrent que ce modèle est une représentation plus cohérente de la géométrie du système. Il convient de dire que les modèles en T et en II sont mathématiquement équivalents.

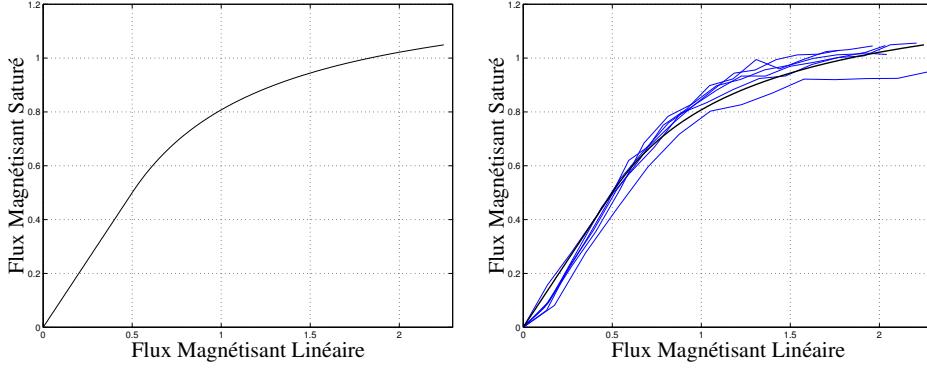


Figure 8 – Courbe de saturation proposée (à gauche) / Courbes expérimentales (à droite). Sur la courbe de droite, nous avons tracé le gabarit de saturation proposé et des relevés expérimentaux effectués sur différents moteurs de 1.5 kW à 7.5 kW.

où les grandeurs φ_1 et φ_2 sont homogènes à des flux. La fonction inverse s'écrit :

$$\tilde{\varphi}_M = g(\varphi_M) = \begin{cases} \varphi_M & \text{si } \varphi_M \leq \varphi_1 \\ \frac{(\varphi_2 - 2\varphi_1)\varphi_M + \varphi_1^2}{\varphi_2 - \varphi_M} & \text{si } \varphi_M \geq \varphi_1 \end{cases}$$

L'intégration en boucle ouverte de $u_s - R_s i_s$ donne une estimation de ϕ_s pour peu que R_s ne soit pas faux, c'est-à-dire que $u_s - R_s i_s$ doit être de gain statique nul. Les différentes courbes en trait fin correspondent à différents moteurs (différentes origines, différents calibres). Le trait épais correspond au modèle proposé. Les flux φ_1 et φ_2 sont choisis respectivement à 0.7 Wb et 1.5 Wb.

Le cas linéaire est un cas particulier de la formulation “saturée” proposée. En effet, dans le cas linéaire, le flux magnétisant s'écrit $\varphi_m = L_m i_m$, i.e. la fonction f est la fonction identité et $\tilde{L}_m = L_m$ et les inductances statorique L_s et rotoriques L_r valent $L_{fs} + L_m$ et $L_{fr} + L_m$.

Le problème qui nous intéresse est d'un autre ordre. Il s'agit de caractériser autour du point de fonctionnement nominal le couplage magnétique linéaire équivalent au couplage magnétique saturé. Pour cela, nous partons des grandeurs de courant i_{s_N} et i_{r_N} , des grandeurs de flux φ_{s_N} et φ_{r_N} et de vitesse ω_{r_N} obtenues pour une tension nominale u_{s_N} sous charge nominale C_N à partir du modèle saturé. Pour obtenir les paramètres du modèle linéaire équivalent, nous faisons l'hypothèse que celui-ci a le même point de fonctionnement.

Relations Communes	$R_s i_{s_N} = u_{s_N} - j\omega_{s_N} \varphi_{s_N},$
	$R_r i_{r_N} = -j(\omega_{s_N} - n_p \omega_{r_N}) \varphi_{r_N},$
	$C_N = \frac{3}{2} n_p \Im(i_{r_N}^\star \varphi_{r_N}),$
	$i_{m_N} = i_{r_N} + i_{s_N}$
Linéaires	$\varphi_{s_N} = L_s i_{s_N} + L_m i_{r_N},$
	$\varphi_{r_N} = L_m i_{s_N} + L_r i_{r_N},$
Saturées	$\varphi_{s_N} = L_{fs} i_{s_N} + f\left(\ \tilde{L}_m i_{m_N}\ \right) \frac{i_{m_N}}{\ i_{m_N}\ },$
	$\varphi_{r_N} = L_{fr} i_{r_N} + f\left(\ \tilde{L}_m i_{m_N}\ \right) \frac{i_{m_N}}{\ i_{m_N}\ }.$

Des expressions des flux rotoriques et statoriques, nous obtenons les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}\varphi_{s_N} &= L_s \iota_{s_N} + L_m \iota_{r_N} = L_{fs} \iota_{s_N} + f\left(\|\tilde{L}_m \iota_{m_N}\|\right) \frac{\iota_{m_N}}{\|\iota_{m_N}\|}, \\ \varphi_{r_N} &= L_m \iota_{s_N} + L_r \iota_{r_N} = L_{fr} \iota_{r_N} + f\left(\|\tilde{L}_m \iota_{m_N}\|\right) \frac{\iota_{m_N}}{\|\iota_{m_N}\|}.\end{aligned}$$

Si nous faisons apparaître le courant magnétisant dans les expressions des flux du modèle linéaire, nous isolons de part et d'autre du signe d'égalité deux termes dont les directions sont différentes.

$$\begin{aligned}(L_s - L_m - L_{fs}) \iota_{s_N} &= -L_m \iota_{m_N} + f\left(\|\tilde{L}_m \iota_{m_N}\|\right) \frac{\iota_{m_N}}{\|\iota_{m_N}\|}, \\ (L_r - L_m - L_{fr}) \iota_{r_N} &= -L_m \iota_{m_N} + f\left(\|\tilde{L}_m \iota_{m_N}\|\right) \frac{\iota_{m_N}}{\|\iota_{m_N}\|}.\end{aligned}$$

Il vient naturellement que :

$$\begin{aligned}L_s &= L_{fs} + L_m \\ L_r &= L_{fr} + L_m \\ L_m &= \frac{f\left(\|\tilde{L}_m \iota_{m_N}\|\right)}{\|\iota_{m_N}\|}.\end{aligned}$$

La figure 3 montre l'allure des grandeurs du moteur à induction en réponse à un démarrage sur le réseau sous charge nominale. Les réponses des deux modèles sont quasiment identiques.

Simulation et validation expérimentale. — Des essais effectués en simulation ont permis de retrouver des effets obtenus expérimentalement sur le banc moteur (cf. description du banc d'essai). Nous présentons trois effets permettant de caractériser l'effet de la saturation magnétique.

Pour comprendre comment agit la saturation magnétique, nous allons nous définir deux modèles de moteur à induction. L'un aura un modèle de couplage magnétique linéaire. L'autre aura un modèle de saturation magnétique. Les deux modèles ne sont pas distinguables au point de fonctionnement nominal, c'est-à-dire que le niveau de courant nominal dans le moteur tournant à vitesse nominale sous une charge nominale est le même pour les deux modèles. De là, nous allons regarder le comportement du moteur à vide, à l'arrêt, ... Nous retrouvons les phénomènes observés sur le banc d'essai.

Niveau de courant. — Un moteur saturé a un courant à vide plus grand qu'un moteur moins saturé. Nous remarquons que le pic de courant est identique que nous prenions en compte la saturation ou non (cf. figures 3 et 4). Par contre, le courant à vide est plus important (+5%). La vitesse rotorique est peu différente entre le cas linéaire et le cas saturé.

Nous ne prenons pas en compte les effets de saturation sur les fuites magnétiques. Elles peuvent notamment modifier l'allure des réponses à un démarrage réseau (surtout dans la zone de fort courant). Toutefois, au niveau de courant où nous travaillons habituellement, il semble légitime de considérer principalement l'effet de saturation du courant magnétisant.

Accélération de la dynamique lente. — Un coude apparaît lors de la réponse à un échelon de tension. La saturation accélère la dynamique du flux, la dynamique lente. Le courant a donc tendance à monter plus rapidement vers sa consigne. C'est ce que nous constatons sur la figure 9 où pour différents échelons de tension (de 5 à 20 Volts), nous avons tracé les courants statoriques obtenus expérimentalement. Les résultats de simulation utilisant le modèle de saturation (trait plein) et le modèle linéaire (trait pointillé) y sont superposés.

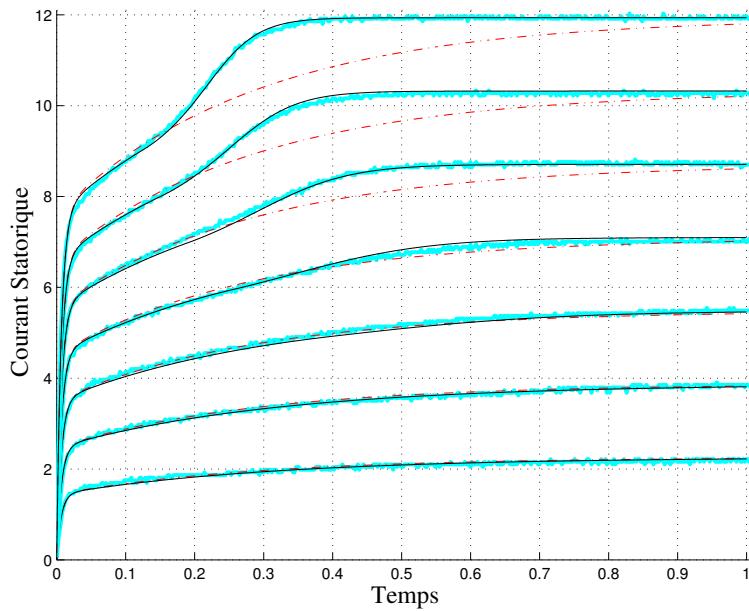


Figure 9 – Boucle ouverte : réponses à des échelons de tension. Nous avons tracé sur la même courbe les mesures (traits pleins larges) et les résultats de simulation des modèles avec saturation (traits pleins -) et standard (traits pointillés ..). Le modèle avec saturation rend compte de l'accélération de la dynamique rapide selon le niveau de saturation.

Gabarit de saturation en forme de “coude”. — Le flux statorique au point statique de fonctionnement suit une courbe (cf. figure 10) en forme de coude.

Pour identifier un gabarit de saturation, nous effectuons des essais à différents niveaux de courant. Nous y estimons le flux statorique. En faisant une approximation pour les valeurs de l'inductance de fuite statorique, nous cherchons le triplet $(\varphi_1, \varphi_2, \tilde{L}_m)$ qui minimise l'erreur du gabarit à la courbe expérimentale. Le tableau 2 regroupe les résultats obtenus pour différents moteurs.

2.4. Modélisation d'un variateur de vitesse

Pour entraîner en rotation un moteur à induction, plusieurs méthodes sont utilisables, du branchement direct sur le réseau, aux variateurs de vitesse en passant par les démarreurs.

Un variateur de vitesse peut avoir différents objectifs.

- Obtenir des performances importantes dans différentes phases de fonctionnement : tourner à différentes vitesses, suivre des profils dynamiques de vitesse, garder une vitesse constante malgré une variation du couple charge, ...
- Augmenter la durée de vie des moteurs à induction en maîtrisant le niveau de courant dans ces enroulements.
- Minimiser la consommation d'énergie.

Un variateur triphasé de vitesse est composé d'un étage de puissance ou pont onduleur (alimenté par un réseau triphasé) et d'une carte de contrôle. L'étage de puissance reçoit des ordres de la carte contrôle et alimente le moteur à induction. Dans une première partie, nous allons détailler l'étage

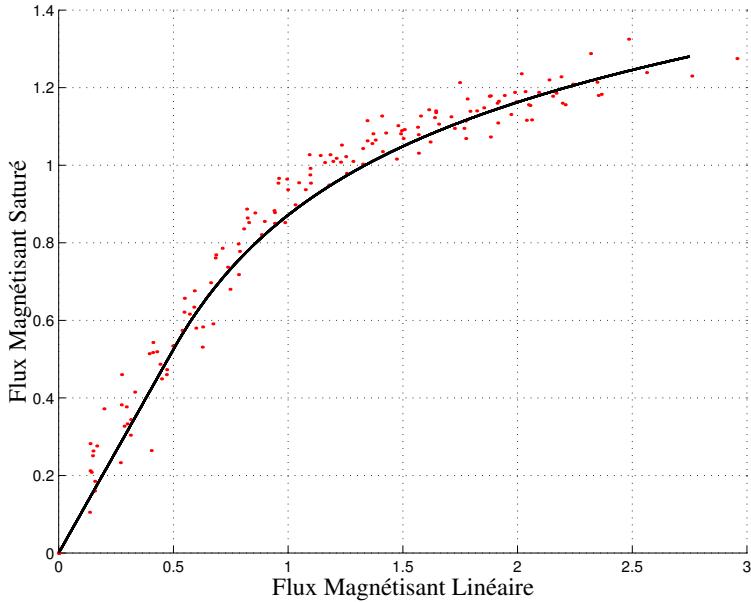


Figure 10 – Flux statorique estimé en fonction du flux magnétisant linéaire estimé. En trait plein, nous avons tracé le gabarit. Les points tracés représentent des valeurs expérimentales estimées pour une valeur de courant statorique fixée (régulation de courant). À partir de l'intégration de la quantité $u_s - R_s i_s$ et de la valeur des fuites statoriques, nous estimons le flux magnétisant “sature”. Le flux magnétisant “linéaire” est obtenu à partir d'une estimation de l'inductance mutuelle.

Moteur Marque	Puissance kW	φ_1 Wb	φ_2 Wb	\tilde{L}_m H
Leroy-Somer	4.0	0.7	1.3	0.174
ATB	4.0	0.8	1.2	0.157
AEG	4.0	0.6	1.3	0.164
LS	4.0	0.7	1.2	0.155
ATB	7.5	0.8	1.2	0.104
Brook (GB)	3.0	0.5	1.6	0.256
ATB	2.2	0.5	1.4	0.345
Leroy-Somer	2.2	0.7	1.3	0.284
GE	2.2	0.7	1.5	0.312
Mitsubishi	2.2	0.7	1.4	0.332

Table 2 – Paramètres des gabarits de saturation pour différents moteurs.

de puissance et ces deux imperfections principales : les retards intervoies et les chutes de tensions. Dans une seconde partie, nous allons quantifier l'influence des câbles électriques entre le variateur et le moteur à induction.

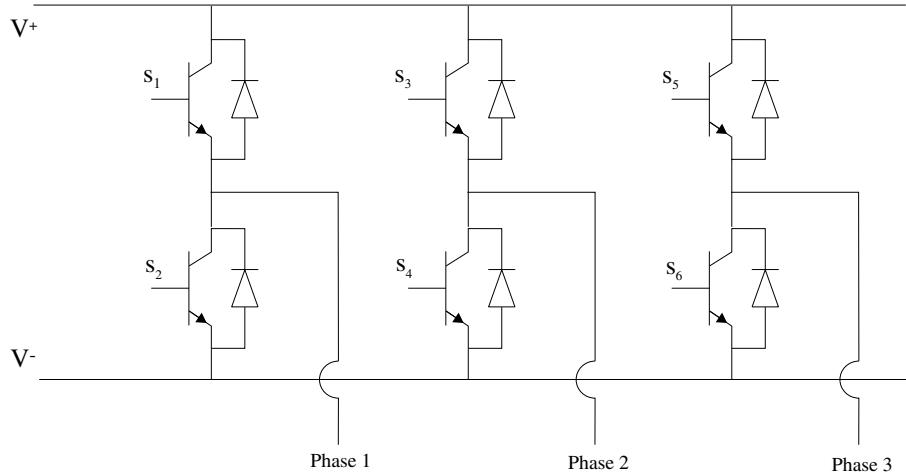


Figure 11 – Étage de puissance d'un variateur de vitesse.

2.4.1. Modélisation de l'étage de puissance. — Le pont onduleur est formé de trois phases indépendantes portant chacune deux interrupteurs. Un interrupteur est composé d'un transistor (IGBT) et d'une diode en anti-parallèle. Le système de modulation calcule un signal par phase définissant les ordres de conduction et de blocage des transistors. Ces ordres sont complémentaires pour les deux transistors de chaque phase, exceptés pendant les temps de commutations, où des temps morts sont introduits pour sécuriser le système.

Retards inter-voies. — La stratégie de commande du pont onduleur par modulation de largeur d'impulsion impose la présence d'un temps mort dans les ordres d'ouverture des transistors afin d'éviter le court-circuit de l'alimentation continue (l'ouverture simultanée de deux transistors d'une même branche). Schneider Electric a développé une stratégie de commande permettant de corriger de manière hardware l'influence des retards inter-voies. Les retards inter-voies se manifestent lors

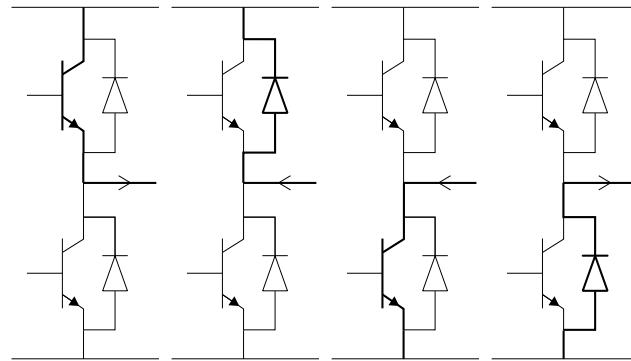


Figure 12 – Configurations possibles.

des commutations des interrupteurs. Ils sont introduits pour éviter les courts-circuits entre les bus

continus lors de l'ouverture de deux transistors d'une même phase. Nous voyons sur la figure 12 les différentes configurations possibles.

Pour l'identification des paramètres électriques, nous n'avons pas à nous soucier de ce phénomène. Nous considérons que les différences de tension, liées au retard inter-voies introduits, sont parfaitement compensées.

Chutes de tension dans l'étage de puissance. — Les chutes de ponts sont la différence entre le potentiel demandé (celui qu'on commande) et le potentiel réellement reçue par le moteur. Il convient de préciser le terme de chutes de ponts. Elles correspondent aux chutes de tension dans les composants électroniques qui constituent l'étage de puissance. Selon chaque phase du modèle triphasé, on observe une chute de tension qui est fonction des intensités présentent dans les trois phases. Dans le repère de Park, cette différence de tension va se traduire par un terme correctif en tension, comme on va le voir ci-dessous, qu'on notera V_{dp} par la suite.

$$\begin{pmatrix} V_{s_1} \\ V_{s_2} \\ V_{s_3} \end{pmatrix}_{\text{reçue}} = \begin{pmatrix} V_{s_1} \\ V_{s_2} \\ V_{s_3} \end{pmatrix}_{\text{demandée}} - \begin{pmatrix} V_{d_1}(i_{s_1})\text{signe}(i_{s_1}) \\ V_{d_2}(i_{s_2})\text{signe}(i_{s_2}) \\ V_{d_3}(i_{s_3})\text{signe}(i_{s_3}) \end{pmatrix}$$

Dans le cas de la configuration triangle, la relation entre les potentiels phase et les tensions

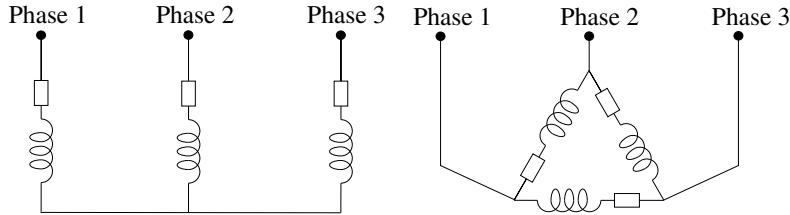


Figure 13 – Configurations étoile (gauche) et triangle (droite) du moteur à induction.

réellement appliquées aux bornes des phases du moteur est

$$\begin{pmatrix} u_{s_1} \\ u_{s_2} \\ u_{s_3} \end{pmatrix}_{\text{reçue}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{s_1} \\ V_{s_2} \\ V_{s_3} \end{pmatrix}_{\text{reçue}} .$$

Dans la suite, nous nous plaçons dans le cas d'une configuration étoile. La tension réellement appliquée aux bornes de chaque phase est :

$$\begin{pmatrix} u_{s_1} \\ u_{s_2} \\ u_{s_3} \end{pmatrix}_{\text{reçue}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{s_1} \\ V_{s_2} \\ V_{s_3} \end{pmatrix}_{\text{reçue}} .$$

Les matrices de changement de repère de triphasé vers Park sont les suivantes.

$$P_{\text{Triphase} \rightarrow \text{Park}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -2\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

$$P_{\text{Park} \rightarrow \text{Triphase}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

$signe(\iota_{s_1})$	$signe(\iota_{s_2})$	$signe(\iota_{s_3})$	$\frac{V_{dp_a}}{V_{dp}}$	$\frac{V_{dp_b}}{V_{dp}}$
+	-	-	$\frac{4}{3}$	0
+	+	-	$\frac{2}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
-	+	-	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
-	+	+	$-\frac{4}{3}$	0
-	-	+	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
+	-	+	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Table 3 – Chutes de tension en fonction du signe des courants

Elles diffèrent de celles définies précédemment au chapitre 1. En fait, n'ayant à notre disposition seulement deux capteurs de courant sur les phases 1 et 3, nous estimons le courant dans la troisième phase par la relation $\iota_{s_1} + \iota_{s_2} + \iota_{s_3} = 0$. Plutôt que de faire ce calcul intermédiaire, nous modifions la matrice de changement de repère de manière à ne pas faire figurer le courant sur la phase 2. Chaque ligne est recombinée avec un multiple de $(1 \ 1 \ 1)$.

Étudions comment se répartissent les chutes de pont selon le signe des courants dans les trois phases de Park. Six cas sont à étudier, puisque les trois grandeurs ne peuvent pas être simultanément de même signe. De plus, nous ferons l'approximation que les chutes de ponts sont constantes et ne dépendent que du signe de courant quelque soit la phase.

$$\begin{pmatrix} V_{dp_a} \\ V_{dp_b} \\ V_{dp_c} \end{pmatrix} = V_{dp} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} signe(\iota_{s_1}) \\ signe(\iota_{s_2}) \\ signe(\iota_{s_3}) \end{pmatrix}$$

Dans le tableau 3 sont rassemblées les valeurs des chutes de ponts ramenées sur les axes a et b, en fonction des signes des courants (cf. figures 14 et 15). Nous pouvons résumer les chutes de tension dans le repère (a,b) par un biais tournant

$$V_{dp_{ab}} = \frac{4}{3} V_{dp} e^{-j \frac{\pi}{3} \left[\frac{rem(angle(\iota_{s_{ab}}) + \frac{\pi}{6}, 2\pi)}{\frac{\pi}{3}} \right]}$$

où $\lfloor \alpha \rfloor$ désigne la partie entière de α . Ces relations se vérifient expérimentalement (cf. figure 16). Ceci donne une méthode d'identification pour les chutes de ponts. De plus, dans le cas où l'on envoie une tension sur l'axe a et une tension nulle sur l'axe b, on se retrouve avec une chute de ponts sur l'axe a égale à $\frac{4}{3}V_{dp}$. Une autre approche expérimentale utile pour valider le modèle des chutes de tension dans l'étage de puissance est d'envoyer, selon une seule direction, des échelons de différents niveaux de tension. Les signaux utilisés sont portés par l'axe a du repère de Park, la tension sur l'axe b étant maintenue à zéro.

$$u_{s_a} = V_{ref}, \quad u_{s_b} = 0.$$

Du tableau précédent sur la valeur des chutes de tension, nous en déduisons que la tension réellement reçue par le moteur prend la forme

$$u_{s_{a\text{reçue}}} = V_{ref} - V_{drop}, \quad u_{s_{b\text{reçue}}} = 0,$$

où V_{drop} vaut $\frac{4}{3}V_{dp}$. En l'absence de capteur de tension, nous ne pouvons pas estimer directement la valeur des chutes de tension. Toutefois, en fonctionnement statique, la tension statorique se déduit de la mesure du courant grâce au gain statique R_s .

$$R_s \iota_{s_a} = V_{ref} - V_{drop}, \quad R_s \iota_{s_b} = 0.$$

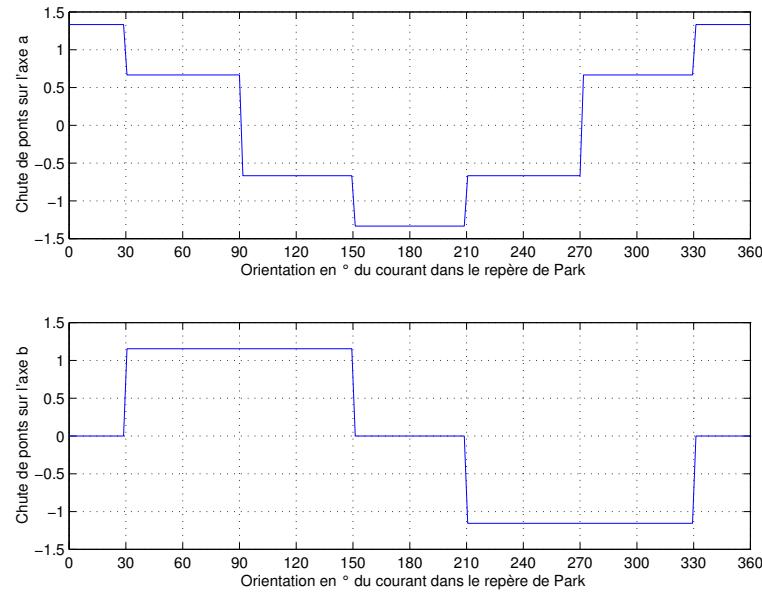


Figure 14 – Répartition théorique des chutes de ponts sur les axes a et b.

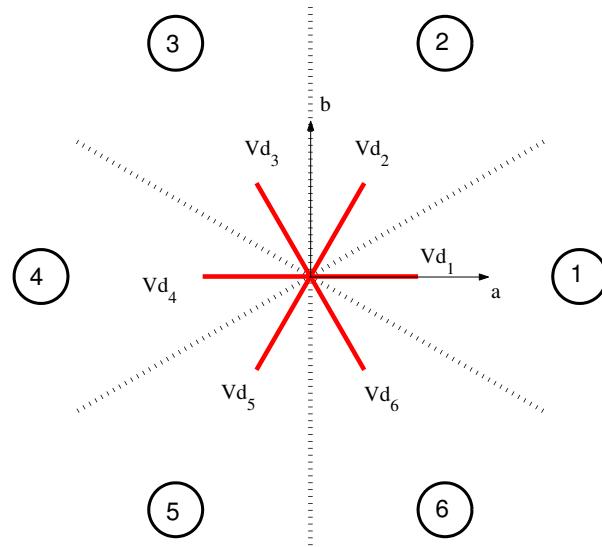


Figure 15 – Position théorique des chutes de ponts dans le plan (a,b) en fonction du secteur dans lequel se trouve le courant.

Des essais ont été réalisés sur le banc d'essai. Le principe était de récupérer grandeurs connues (i_s, u_s) en régime statique, pour différents niveaux d'intensité. Ainsi on obtient les caractéristiques

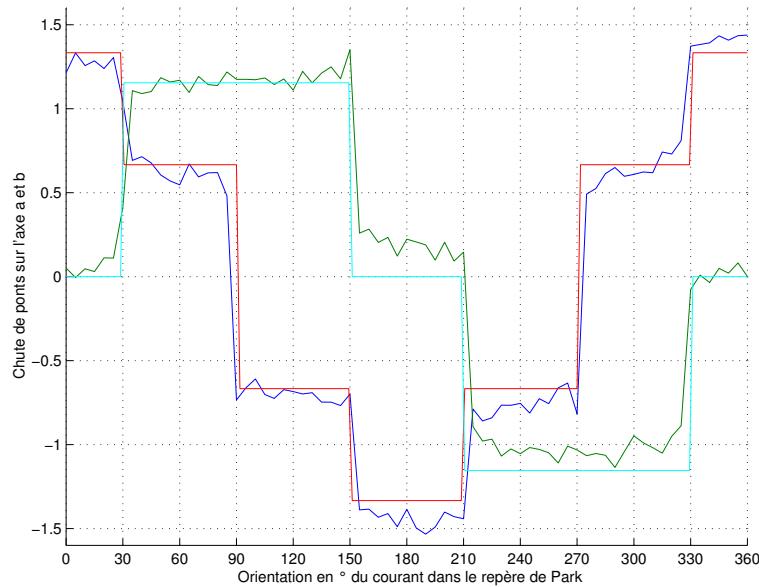


Figure 16 – Répartition expérimentale des chutes de ponts sur les axes a et b.

courant-tension de l'étage de puissance (cf. figure 17). Nous constatons que le modèle des chutes de tension constantes dans le repère de Park est globalement vérifié.

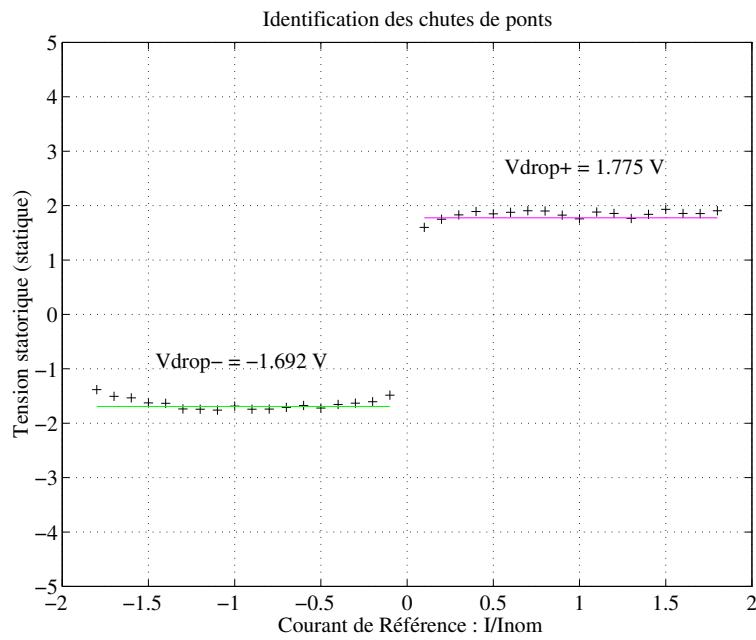


Figure 17 – Validité du modèle de chutes de tension (sur un banc d'essai de calibre 4kW). Nous nous plaçons à l'angle $\theta = 0$, i.e. la tension sur l'axe b est nulle. Chaque point de mesure est obtenu en comparant le courant statique obtenu et la tension constante demandée.

PARTIE I

**PROBLÈME D'IDENTIFICATION DU MOTEUR
À INDUCTION POUR LA VARIATION DE
VITESSE INDUSTRIELLE “SANS CAPTEUR”**

PRÉSENTATION

Dans le troisième chapitre, nous regarderons le problème d'identification des paramètres électriques du moteur à induction à l'arrêt. L'avantage pratique du moteur à l'arrêt pour l'identification des paramètres est la connaissance de la vitesse. Le modèle devient linéaire en les paramètres. Toutefois, il faut garder à l'esprit que le but de cette identification est d'apporter les paramètres électriques nécessaire au contrôle du moteur à induction (par l'intermédiaire du modèle non linéaire). Les paramètres doivent être identifiés séparément (et ne pas se limiter aux agrégations qui apparaissent dans le modèle à l'arrêt).

CHAPITRE 3

IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES ÉLECTRIQUES MOTEUR À L'ARRÊT

3.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons défini le modèle standard du moteur à induction. Nous avons également discuté de sa cohérence vis-à-vis du contrôle et de l'identification des moteurs à induction. Nos conclusions étaient de deux ordres. Le modèle standard est un modèle tout à fait valide pour la commande des moteurs. Par contre, pour l'identification, il est primordial de tenir compte des effets de saturation magnétique et de chutes de tension dans l'étage de puissance. À partir de ces considérations, nous présentons dans cette partie différentes techniques pour identifier le moteur à induction à l'arrêt. Dans un premier temps, nous précisons la forme que doivent vérifier les signaux d'identification pour ne pas faire tourner le moteur. De là, nous précisons le modèle du moteur à induction dédié à l'identification à l'arrêt. Dans un second temps, nous présenterons des algorithmes d'identification pour les paramètres électriques. Nous avons décomposé l'identification selon les échelles de temps naturelles du système. Le but de l'identification du moteur à induction est de fournir des paramètres pour le modèle standard utilisé en commande. En ce sens, l'identification des paramètres électriques a beaucoup d'intérêts :

- faciliter l'utilisation des variateurs de vitesse en fournissant simplement les paramètres des moteurs qui y sont connectés (plutôt que d'aller lire les paramètres de la plaque moteur qui ne sont pas toujours accessibles),
- améliorer les performances en fournissant de bons paramètres pour un modèle standard utilisé en commande.

3.2. Modèle du moteur à induction à l'arrêt

3.2.1. Tensions statoriques laissant le moteur à l'arrêt. —

Modèle linéaire. — Reprenons la modélisation (1), (2), (3) du moteur à induction.

$$\begin{cases} R_s i_{sab} + \frac{d\phi_{sab}}{dt} = u_{sab}, \\ R_r i_{rab} + \frac{d\phi_{rab}}{dt} = j n_p \omega_r \phi_{rab}, \\ \phi_{sab} = L_s i_{sab} + L_m i_{rab}, \\ \phi_{rab} = L_m i_{sab} + L_r i_{rab}. \end{cases}$$
$$J \frac{d\omega_r}{dt^2} = \frac{3}{2} n_p \Im(i_{rab}^* \phi_{rab}) - C_{charge},$$

Les conditions pour que le moteur soit à l'arrêt sont :

- La vitesse ω_r doit être nulle pendant toute la phase d'identification.
- Les signaux d'identification ne doivent pas créer de couple électromagnétique.

Cette dernière se traduit simplement sur les grandeurs rotoriques $\phi_{r_{ab}}$ et $\iota_{r_{ab}}$, elles doivent être orthogonales (i.e. $\Im(\iota_{r_{ab}}^* \phi_{r_{ab}}) = 0$). De l'équation (1), $R_r \iota_{r_{ab}} + \frac{d\phi_{r_{ab}}}{dt} = 0$, liant la dérivée du flux rotorique au courant rotorique, nous obtenons

$$\Im(\dot{\phi}_{r_{ab}}^* \phi_{r_{ab}}) = 0.$$

Le moteur à induction ne crée pas de couple si et seulement si le flux rotorique ne change pas d'orientation. Pour conclure, il ne reste qu'à dérouler les équations électriques. Dans un premier temps, l'équation (1), $R_r \iota_{r_{ab}} + \frac{d\phi_{r_{ab}}}{dt} = 0$, montre que le courant rotorique doit vérifier la même propriété.

$$\iota_{r_{ab}} \parallel \dot{\phi}_{r_{ab}}$$

De là, les relations de couplages magnétiques (2)

$$L_m \iota_{s_{ab}} = \phi_{r_{ab}} - L_r \iota_{r_{ab}}, \quad \phi_{s_{ab}} = L_s \iota_{s_{ab}} + L_m \iota_{r_{ab}},$$

nous fournissent le même résultat pour les grandeurs statoriques de flux et de courant.

$$\begin{aligned} \iota_{s_{ab}} \parallel (\phi_{r_{ab}} - L_r \iota_{r_{ab}}) &\Rightarrow \iota_{s_{ab}} \parallel \iota_{r_{ab}} \\ \phi_{s_{ab}} \parallel (L_s \iota_{s_{ab}} + L_m \iota_{r_{ab}}) &\Rightarrow \phi_{s_{ab}} \parallel \iota_{r_{ab}} \end{aligned}$$

Une dernière fois, utilisant l'équation électrique (1), $R_s \iota_{s_{ab}} + \frac{d\phi_{s_{ab}}}{dt} = u_{s_{ab}}$, nous montrons que la tension statorique doit garder son orientation tout au long de la phase d'identification.

$$u_{s_{ab}} \parallel \iota_{s_{ab}}$$

En particulier, les conditions initiales fournissent la direction à respecter par les signaux d'identification. Dans le cas de conditions initiales nulles, nous sommes libres sur le choix de l'orientation.

Les figures 1 et 2 représentent des réponses à des échelons de tensions (V sur l'axe a et 0 sur l'axe b). Dans le cas de conditions initiales nulles (cf. figure 1), toutes les directions sont possibles pour ne pas faire tourner le moteur et en particulier la direction choisie. Dans le second cas (cf. figure 2), les conditions initiales sont telles que l'orientation choisi pour la tension d'alimentation n'est pas alignée avec elles. Il s'en suit la création d'un couple.

Modèle incluant les saturations magnétiques. — Si nous reprenons la démarche précédente, nous voyons que notre modèle de saturation magnétique ne modifie en rien le résultat (cf. figures 1 et 2) puisque le modèle présenté conserve l'orientation des grandeurs.

Vérification expérimentale. — Pour vérifier que le moteur n'est pas entraîné en rotation par des signaux proposés, aux conditions initiales prêts, nous avons effectué l'expérience suivante en 3 étapes. Nous alimentons le moteur par une tension nulle dans un premier temps. Durant la deuxième phase, une tension constante alimente le moteur. Pour la dernière phase, nous alimentons le moteur par une tension orthogonale à la précédente. Comme nous le vérifions sur la figure 3, le moteur ne tourne pas dans le premier changement de phase, tandis qu'il tourne franchement lors du second changement de phase.

3.2.2. Modèle réduit. — Reprenons la modélisation (1), (2), (3) du moteur à induction.

$$\begin{cases} R_s \iota_{s_{ab}} + \frac{d\phi_{s_{ab}}}{dt} = u_{s_{ab}}, \\ R_r \iota_{r_{ab}} + \frac{d\phi_{r_{ab}}}{dt} = jn_p \omega_r \phi_{r_{ab}}, \end{cases}$$

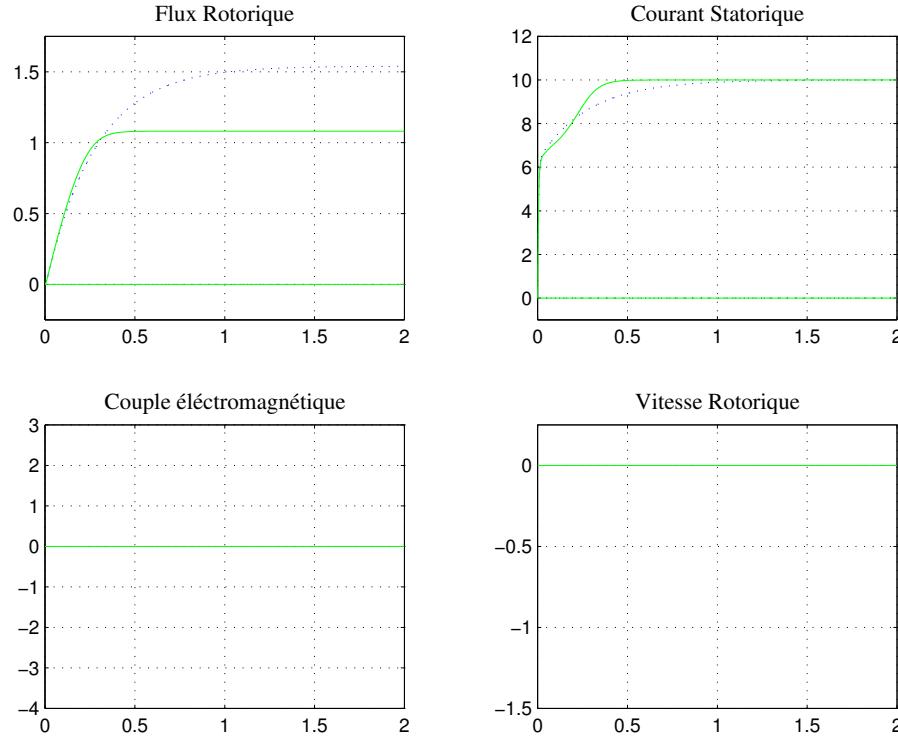


Figure 1 – Simulation : Réponses à un échelon de tension de commande avec des conditions initiales de flux nulles. Le modèle linéaire est représenté en pointillés (...) tandis que le modèle avec saturation est représenté en trait plein (-).

$$\begin{aligned}\phi_{s_{ab}} &= L_s i_{s_{ab}} + L_m i_{r_{ab}}, \\ \phi_{r_{ab}} &= L_m i_{s_{ab}} + L_r i_{r_{ab}},\end{aligned}$$

et

$$J \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{3}{2} n_p \Im(\mathbf{i}_{r_{ab}}^* \phi_{r_{ab}}) - C_{charge}.$$

Les grandeurs $i_{s_{ab}}$, $i_{r_{ab}}$, $\phi_{s_{ab}}$ et $\phi_{r_{ab}}$ sont complexes. Les conditions pour que le moteur soit à l'arrêt étant vérifiées (i.e. les grandeurs sont toutes orientées selon une même direction constante), nous pouvons réduire le modèle en éliminant une composante. Dans les coordonnées polaires, il est naturel d'éliminer les équations reliant les angles des grandeurs. Nous obtenons ainsi les équations utilisant uniquement les modules de grandeurs. Pour des raisons de simplicité d'écriture, nous les noterons φ_r , φ_s , i_r et i_s .

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_s}{dt} = u_s - R_s i_s, \\ \frac{d\varphi_r}{dt} = -R_r i_r, \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi_s = L_s i_s + L_m i_r, \\ \varphi_r = L_m i_s + L_r i_r. \end{cases}$$

Les grandeurs i_s , i_r , φ_s et φ_r sont réelles. Une fois encore, de ces deux équations algébriques et différentielles, nous pouvons écrire un système sous forme d'état basé sur le couple de grandeurs

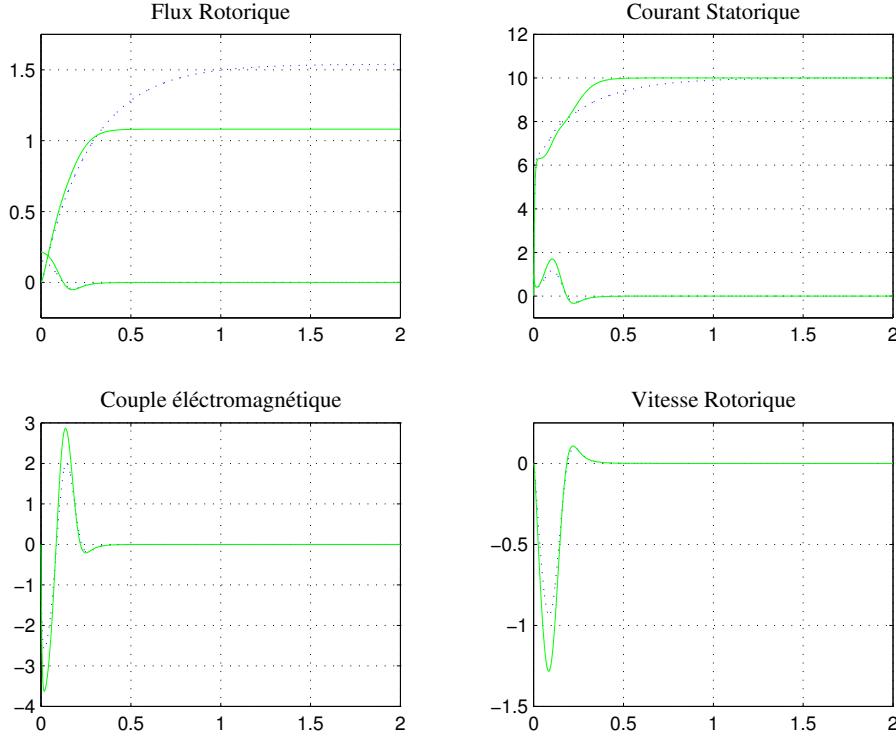


Figure 2 – Simulation : Réponses à un échelon de tension de commande avec des conditions initiales de flux non nulles. Le modèle linéaire est représenté en pointillés (...) tandis que le modèle avec saturation est représenté en trait plein (-).

(φ_s, ι_s) , par exemple,

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_s}{dt} = -R_s \iota_s + u_s, \\ L_f \frac{d\iota_s}{dt} = \frac{1}{\tau_r} \varphi_s - \left(R_s + \frac{L_s}{\tau_r} \right) \iota_s + u_s. \end{cases}$$

ou sur le couple (φ_r, ι_s) ,

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{L_m}{L_r} \frac{d\varphi_r}{dt} = -\frac{1}{\tau_r} \frac{L_m}{L_r} \varphi_r + \frac{L_m^2}{L_r^2} R_r \iota_s, \\ L_f \frac{d\iota_s}{dt} = \frac{1}{\tau_r} \frac{L_m}{L_r} \varphi_r - \left(R_s + \frac{L_m^2}{L_r^2} R_r \right) \iota_s + u_s. \end{cases}$$

Il est habituel d'utiliser les aggrégations de paramètres suivants :

- Le coefficient de fuite : $\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_r L_s}$.
- L'inductance de fuite : $L_f = L_s - \frac{L_m^2}{L_r} = \sigma L_s$.
- La constante de temps rotorique : $\tau_r = \frac{L_r}{R_r}$.
- La résistance rotorique équivalente : $R_{r_{eq}} = \frac{L_m^2}{L_r^2} R_r$.

Le système (12) utilise 4 paramètres tandis que le système (13) fait apparaître 5 paramètres. Toutefois un des paramètres (qui n'est pas identifiable dans ce mode de fonctionnement à l'arrêt) se retrouve en facteur de la grandeur φ_r qui n'est pas mesurée. Ces deux modèles sont des représentations sous forme d'un modèle d'état de la relation de transfert entre la sortie mesurée ι_s et la

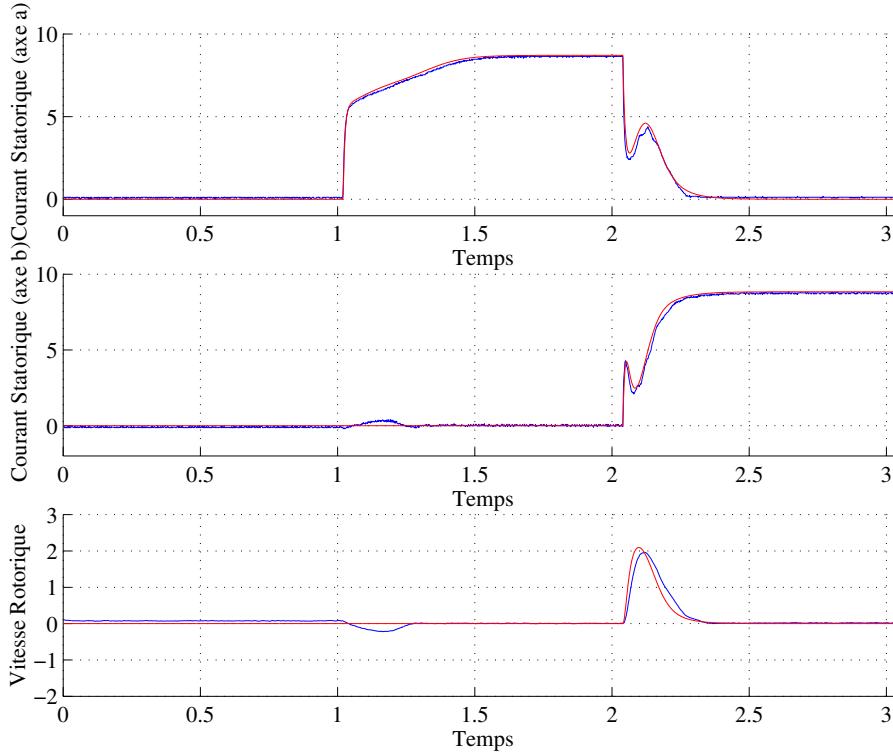


Figure 3 – Mise en évidence expérimentale de la sensibilité aux conditions initiales. Cette vérification expérimentale se déroule en trois étapes. La première consiste à placer le point de fonctionnement à l'origine (la tension est nulle sur les deux axes). Nous appliquons dans la deuxième étape un échelon de tension sur l'axe a, l'axe b étant maintenu à 0. Comme nous l'attendions, la vitesse reste pratiquement nulle, le système concerne son orientation durant toute cette phase. Dans la troisième phase, nous modifions notre commande : l'axe a est maintenu à 0 tandis qu'une tension est envoyée à l'axe b. La condition initiale n'est pas dans la direction du signal envoyé. L'effet du transitoire entraîne une rotation du moteur qui correspond à la simulation.

commande en tension u_s .

$$(14) \quad L_f \tau_r \ddot{i}_s + (R_s \tau_r + L_s) i_s + R_s i_s = \tau_r \dot{u}_s + u_s$$

Cette relation ne fait apparaître que 4 paramètres. Les paramètres identifiables sont

$$L_f, \quad L_s, \quad R_s, \quad \tau_r$$

ou une combinaison de ceux-ci. Il faut remarquer que ceux sont ces paramètres qui apparaissent dans le modèle standard de variation de vitesse. Le but de l'identification est de les récupérer sans pour autant récupérer séparément les valeurs d'inductances et de résistances.

Après avoir précisé le modèle au niveau de l'étage de puissance et du moteur à induction, nous pouvons présenter des méthodes pour identifier les paramètres électriques du moteur. Pour tenir compte de la saturation, deux voies sont envisageables. La première consiste à identifier un gabarit de saturation (ou de le supposer connu a priori) et d'identifier les paramètres d'un modèle incluant la saturation magnétique. La seconde approche consiste en l'identification du modèle linéarisé

équivalent au modèle saturé en excitant le moteur par des commandes de petites amplitudes autour de points de fonctionnement.

Pour développer le second point, partons du modèle incluant la saturation magnétique. Le moteur étant à l'arrêt, nous n'envoyons de la tension que sur un axe. Dans l'hypothèse d'un modèle de saturation sur le flux magnétisant φ_m , les relations magnétiques sont :

$$\begin{aligned}\varphi_s &= L_{fs}i_s + \varphi_m, \\ \varphi_r &= L_{fr}i_r + \varphi_m.\end{aligned}$$

Les équations électriques ont la forme :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_s}{dt} = -R_s i_s + u_s, \\ \frac{d\varphi_r}{dt} = -R_r i_r. \end{cases}$$

Pour se rapprocher du problème linéaire, il est intéressant de faire apparaître une forme d'état utilisant les grandeurs statoriques. Des équations magnétiques et de la forme particulière du flux magnétique, nous obtenons :

$$\varphi_m = \varphi_s - L_{fs}i_s$$

ou encore

$$f(\tilde{L}_m i_m) = \varphi_s - L_{fs}i_s$$

c'est-à-dire

$$i_m = \frac{1}{\tilde{L}_m} g(\varphi_s - L_{fs}i_s).$$

Les grandeurs rotoriques s'écrivent alors :

$$\begin{cases} i_r = -i_s + \frac{1}{\tilde{L}_m} g(\varphi_s - L_{fs}i_s) \\ \varphi_r = \varphi_s - (L_{fs} + L_{fr})i_s + \frac{L_{fr}}{\tilde{L}_m} g(\varphi_s - L_{fs}i_s) \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation électrique vérifiée par les grandeurs rotoriques, nous obtenons une relation dynamique reliant les grandeurs statoriques.

$$\left(L_{fr} + L_{fs} + \frac{L_{fr}L_{fs}}{\tilde{L}_m} g'(\varphi_s - L_{fs}i_s) \right) \frac{di_s}{dt} = -R_r i_s + \frac{R_r}{\tilde{L}_m} g(\varphi_s - L_{fs}i_s) + \left(1 + \frac{L_{fr}}{\tilde{L}_m} g'(\varphi_s - L_{fs}i_s) \right) \frac{d\varphi_s}{dt}$$

Nous obtenons le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_s}{dt} = -R_s i_s + u_s \\ \frac{di_s}{dt} = \frac{-R_r i_s + \frac{R_r}{\tilde{L}_m} g(\varphi_s - L_{fs}i_s) + \left(1 + \frac{L_{fr}}{\tilde{L}_m} g'(\varphi_s - L_{fs}i_s) \right) (-R_s i_s + u_s)}{L_{fr} + L_{fs} + \frac{L_{fr}L_{fs}}{\tilde{L}_m} g'(\varphi_s - L_{fs}i_s)} \end{cases}$$

Plaçons nous autour d'un point d'équilibre (φ_{s0}, i_{s0})

$$\varphi_s = \delta\varphi_s + \varphi_{s0}, \quad i_s = \delta i_s + i_{s0},$$

et écrivons la dynamique des petites variations $(\delta\varphi_s, \delta i_s)$ des grandeurs (φ_s, i_s) autour de ce point d'équilibre.

$$\begin{cases} \frac{d\delta\varphi_s}{dt} = -R_s \delta i_s + \delta u_s \\ \frac{d\delta i_s}{dt} = \frac{\left(\frac{R_r}{\tilde{L}_m} \right) g'(\varphi_{s0} - L_{fs}i_{s0})}{L_{fr} + L_{fs} + \frac{L_{fr}L_{fs}}{\tilde{L}_m} g'(\varphi_{s0} - L_{fs}i_{s0})} \delta\varphi_s \\ \quad - \frac{\left(R_s + R_r + \left(L_{fs} \frac{R_r}{\tilde{L}_m} + R_s \frac{L_{fr}}{\tilde{L}_m} \right) g'(\varphi_{s0} - L_{fs}i_{s0}) \right)}{L_{fr} + L_{fs} + \frac{L_{fr}L_{fs}}{\tilde{L}_m} g'(\varphi_{s0} - L_{fs}i_{s0})} \delta i_s \\ \quad + \frac{1 + \left(\frac{L_{fr}}{\tilde{L}_m} \right) g'(\varphi_{s0} - L_{fs}i_{s0})}{L_{fr} + L_{fs} + \frac{L_{fr}L_{fs}}{\tilde{L}_m} g'(\varphi_{s0} - L_{fs}i_{s0})} \delta u_s \end{cases}$$

Linéaire	Saturé linéarisé
R_s	R_s
R_r	R_r
L_m	$\hat{L}_m = \frac{\bar{L}_m}{g'(\varphi_{s_0} - L_{fs}i_{s_0})}$
L_r	$\hat{L}_r = L_{fr} + \hat{L}_m$
L_s	$\hat{L}_s = L_{fs} + \hat{L}_m$

Table 1 – Équivalence entre le modèle standard et le modèle saturé linéarisé

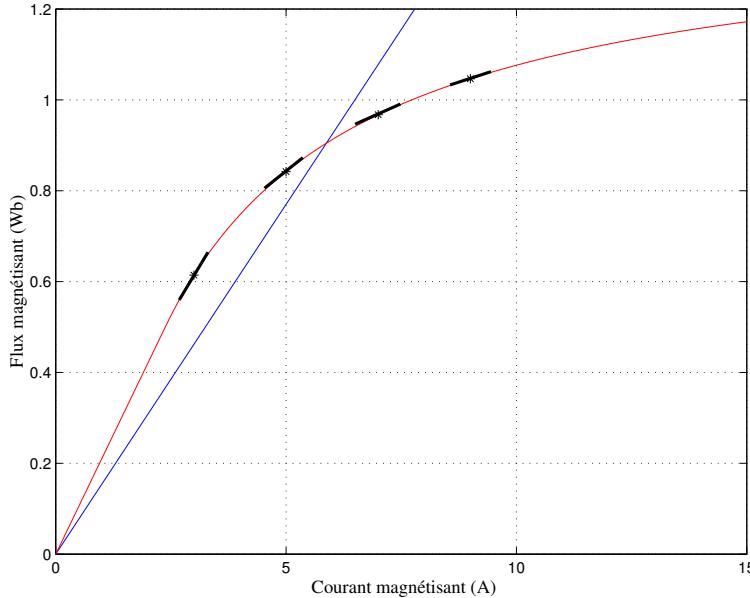


Figure 4 – Équivalence entre le modèle standard et le modèle saturé linéarisé

Pour simplifier les notations posons $\hat{L}_m = \frac{\bar{L}_m}{g'(\varphi_{s_0} - L_{fs}i_{s_0})}$, $\hat{L}_r = L_{fr} + \hat{L}_m$ et $\hat{L}_s = L_{fs} + \hat{L}_m$. Il s'en suit que le système s'écrit très simplement de la manière suivante.

$$\begin{cases} \left(\hat{L}_s - \frac{\hat{L}_m^2}{\hat{L}_r} \right) \frac{d\delta\varphi_s}{dt} = -R_s \delta i_s + \delta u_s \\ \left(\hat{L}_s - \frac{\hat{L}_m^2}{\hat{L}_r} \right) \frac{d\delta i_s}{dt} = \frac{R_r}{\hat{L}_r} \delta\varphi_s - \left(\frac{R_r}{\hat{L}_r} \hat{L}_s + R_s \right) \delta i_s + \delta u_s \end{cases}$$

Nous avons mis en évidence une correspondance “simple” entre les paramètres du modèle linéaire et les paramètres du modèle saturé linéarisé. Elles sont réunies dans le tableau 1.

3.3. Identification des paramètres électriques du moteur à induction à l’arrêt

L’identification des paramètres électriques du moteur à induction est un sujet largement traité dans la littérature [Vas93]. Trois thèmes semblent importants à retenir :

- Le diagnostic du moteur à induction,
- La simplification d’utilisation d’un variateur de vitesse,

- L'amélioration des performances du contrôle.

Nous nous intéressons aux deux derniers points. Comme nous l'avons montré dans la première partie de ce mémoire consacrée à la présentation de la variation de vitesse, les performances statiques et dynamiques en basse vitesse dépendent des paramètres électriques. Les paramètres de la plaque signalétique ne permettent pas toujours d'obtenir le niveau de performance souhaité.

Il faut également garder à l'esprit qu'un variateur de vitesse a aussi pour objet d'équiper le parc existant des moteurs à inductions. Bien souvent, ceux-ci sont situés dans des zones exposées ou difficilement accessible. L'intérêt de l'identification est dans ce cas de fournir des paramètres électriques convenable pour l'algorithme de contrôle.

Un variateur de vitesse possède un ensemble de jeux de paramètres pour des moteurs de calibres différents. Ces paramètres permettent de connaître les ordres de grandeurs des paramètres électriques du moteur à induction accouplé au variateur.

Dans la problématique du contrôle “sans capteur”, suivre les paramètres électriques dans une phase de fonctionnement standard est une sujet délicat. Ne possédant que deux capteurs de courant (dans les phases 1 et 3, par exemple), il faut prendre en compte les imperfections de l'étage de puissance qui ne fournit pas aux moteurs la tension demandée et le bruit important de la chaîne de mesure des courants. L'estimation ou l'adaptation en ligne des paramètres électriques est fortement liée à la structure des observateurs (du flux et de la vitesse) choisis. Ces derniers dépendent des paramètres et l'ensemble forme un schéma complexe dont la convergence semble difficile à justifier théoriquement. De plus, il faut garder à l'esprit que la méthode d'identification retenue doit pouvoir être embarquée sur un environnement temps réel optimisé selon des critères qui ne laissent que peu d'opérations possibles par période d'échantillonage.

Remarquons également, que dans son contexte industriel, un moteur à induction peut être connecté à une charge par construction. Des signaux excitants (i.e. entraînant une variation de vitesse et un couple) doivent être évités de manière à ne pas modifier l'état mécanique d'une éventuelle charge. Ceci empêche d'utiliser des méthodes d'identification moteur en fonctionnement [Lor93].

Toutes ces considérations nous amènent à réfléchir sur une phase d'identification moteur à l'arrêt. Le premier avantage d'une phase d'identification à l'arrêt est la connaissance de la vitesse. Un grand intérêt en découle : le modèle du moteur devient linéaire en les paramètres. De plus, nous avons montré dans la section précédente que, même en présence du phénomène de saturation magnétique, nous pouvons nous placer dans le cadre de l'identification des modèles linéaires en les paramètres (cf. [Lju87]). Ce point est essentiel puisque le mode de fonctionnement à l'arrêt ne permet pas de travailler autour d'un seul point de la courbe de saturation, mais bel et bien de la parcourir intégralement.

Ganji, Guillaume, Pintelon et Lataire proposent d'identifier les quatre paramètres électriques en une seule phase (voir [GGPL97]). Pour cela, ils utilisent un signal “multi-sinus” particulièrement excitant dans un large spectre fréquentiel. Une restriction forte est la génération en temps réel de ce signal.

Dans [MK93], les auteurs proposent différents modèles de moteur à induction (d'ordre supérieur pour modéliser plus finement les phénomènes liés aux formes des encoches) et proposent une identification selon la méthode du maximum de vrassemblance. Ils évaluent la pertinence de leur identification en comparant les résultats obtenus avec leur modélisation et obtenu grâce à la mesure.

De manière générale, les auteurs se tournent vers une identification en plusieurs phases séparant l'identification des différentes dynamiques selon leurs constantes de temps [RG96, Cau95, CRH⁺94, JCLR98, WMV91, Glo98].

Nous revenons dans la section qui suit sur l'identification simultanée (en une seul phase) des paramètres électriques. Ensuite, nous développons notre approche d'identification séparée selon les échelles de temps respectant nos trois contraintes principales :

- la saturation magnétique,
- la thermique moteur,
- la durée d'identification,

qui ne sont pas simultanément considérées dans la littérature.

3.3.1. Identification classique. — Le but de cette section n'est pas d'évaluer les méthodes d'identification sur le problème particulier du moteur à induction (voir par exemple [Mor99]). Nous avons comme objectif de dégager une démarche d'identification sous les contraintes

- d'applicabilité à un maximum de types de moteurs (fabricants, technologies différentes, ...).
- de rapidité et de simplicité de mise en oeuvre dans un environnement temps réel embarqué.

Dans cette section, nous allons présenter succinctement les méthodes classiques d'identification appliquées moteur à induction. Nous développons les deux approches continue et discrète qui peuvent se découper de manière identique en deux étapes :

- mettre en évidence une équation d'observation de la forme

$$\Phi\theta = Y$$

où θ est le vecteur de paramètres à identifier et les matrices Φ et Y des grandeurs connues,

- résoudre aux sens des moindres carrés le problème de l'identification des paramètres d'un modèle linéaire en les paramètres.

Les différents algorithmes et leurs pertinences face à un problème spécifique peuvent être retrouvés dans [WP94].

A. Approche continue. — Partant d'un modèle continu (14) de la relation courant-tension, la première approche consiste à utiliser des filtres de manière à faire disparaître les dérivations. Dans un premier temps, faisons un calcul à partir des fonctions de transfert. Nous reviendrons sur le résultat, en l'interprétant dans le domaine temporel.

Le système est régi par la fonction de transfert

$$\mathcal{H} = \frac{\tau_r s + 1}{L_f \tau_r s^2 + (L_s + R_s \tau_r) s + R_s}.$$

Choisissons deux filtres du première ordre \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{T_1 s + 1}, \quad \mathcal{F}_2 = \frac{1}{T_2 s + 1},$$

où T_1 et T_2 sont des constantes de temps. Écrivons maintenant les monômes de la variable s en fonction des filtres :

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{T_2} (T_2 s + 1) - \frac{1}{T_2}, & s^2 &= \frac{1}{T_1 T_2} (T_1 s + 1) (T_2 s + 1) - \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2^2} (T_2 s + 1) + \frac{1}{T_2^2} \\ \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1 s &= \frac{1}{T_2} \mathcal{F}_1 - \frac{1}{T_2} \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1, & \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1 s^2 &= \frac{1}{T_1 T_2} - \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2^2} \mathcal{F}_1 + \frac{1}{T_2^2} \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1 \end{aligned}$$

Cette formulation nous permet d'introduire des grandeurs filtrées

$$\begin{aligned} \iota_{f_1} &= \mathcal{F}_1 \iota_s & \iota_{f_2} &= \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1 \iota_s = \mathcal{F}_2 \iota_{f_1} \\ u_{f_1} &= \mathcal{F}_1 u_s & u_{f_2} &= \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1 u_s = \mathcal{F}_2 u_{f_1} \end{aligned}$$

Reprendons la fonction de transfert entre le courant ι_s et la tension u_s . Nous avons la relation

$$\iota_s = \mathcal{H} u_s.$$

Utilisons les filtres \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sur l'équation précédente. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1(L_f\tau_r s^2 + (L_s + R_s\tau_r)s + R_s)\iota_s &= \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1(\tau_r s + 1)u_s, \\ \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1(L_f\tau_r)s^2\iota_s + \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1(L_s + R_s\tau_r)s\iota_s + \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1(R_s)\iota_s &= \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1(\tau_r)su_s + \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1u_s, \\ (L_f\tau_r)\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1s^2\iota_s + (L_s + R_s\tau_r)\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1s\iota_s + (R_s)\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1\iota_s &= (\tau_r)s\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1u_s + \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1u_s,\end{aligned}$$

qui se transforme naturellement, à partir des expressions des monômes s^n en fonction de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 , en

$$(15) \quad \frac{L_f\tau_r}{T_1 T_2} \left(\iota_s - \frac{T_1 + T_2}{T_2} \iota_{f_1} + \frac{1}{T_2^2} \iota_{f_2} \right) + \frac{L_s + R_s\tau_r}{T_2} (\iota_{f_1} - \iota_{f_2}) + R_s\iota_{f_2} = \frac{\tau_r}{T_2} (u_{f_1} - u_{f_2}) + u_{f_2}.$$

Donnons une interprétation temporelle de ce résultat. Pour cela, posons

$$\begin{aligned}e(t) &= \frac{L_f\tau_r}{T_1 T_2} \left(\iota_s(t) - \frac{T_1 + T_2}{T_2} \iota_{f_1}(t) + \frac{1}{T_2^2} \iota_{f_2}(t) \right) + \frac{L_s + R_s\tau_r}{T_2} (\iota_{f_1}(t) - \iota_{f_2}(t)) \\ &\quad + R_s\iota_{f_2}(t) - \frac{\tau_r}{T_2} (u_{f_1}(t) - u_{f_2}(t)) - u_{f_2}(t).\end{aligned}$$

avec les grandeurs ι_{f_1} , ι_{f_2} , u_{f_1} et u_{f_2} définies à partir des représentations suivantes des filtres \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 .

$$\begin{aligned}T_1\dot{\iota}_{f_1} &= -\iota_{f_1} + \iota_s, & T_1\dot{u}_{f_1} &= -u_{f_1} + u_s, \\ T_2\dot{\iota}_{f_2} &= -\iota_{f_2} + \iota_{f_1}, & T_2\dot{u}_{f_2} &= -u_{f_2} + u_{f_1}.\end{aligned}$$

Les filtres sont définis en cascade l'un de l'autre. Les grandeurs ainsi définis permettent de présenter la grandeur e comme la solution d'une équation différentielle liée exclusivement aux filtres introduits.

$$T_1 T_2 \ddot{e} + (T_1 + T_2) \dot{e} + e = 0.$$

La grandeur e ne dépend donc que des conditions initiales du courant et de la tension. Les filtres que nous introduisons permettent d'oublier exponentiellement une erreur sur les conditions initiales.

$$e(t) = -T_2 \frac{T_1 \dot{e}(0) + e(0)}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} + T_1 \frac{T_2 \dot{e}(0) + e(0)}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}}, \text{ pour } T_1 \neq T_2.$$

Dans le cadre de l'identification, nous supposons que la grandeur e est identiquement nulle. Nous avons mis en évidence une équation d'observation (15) de la forme souhaitée linéaire en les paramètres.

B. Approche discrète. — Une fois encore, partons du modèle continu (14) du transfert.

$$L_f\tau_r\ddot{\iota}_s + (R_s\tau_r + L_s)\dot{\iota}_s + R_s\iota_s = \tau_r\dot{u}_s + u_s$$

Les entrées du système sont échantillonées à une fréquence de 4 kHz (nous notons la période d'échantillonage T_e) pour notre application. Pour simplifier les écritures qui vont suivre, définissons dès à présent les paramètres suivant

$$\begin{aligned}\tau_s &= \frac{L_s}{R_s}, \quad T = \tau_r, \quad K = \frac{1}{R_s}, \\ T_1 &= \frac{\tau_r + \tau_s}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tau_r + \tau_s}{2}\right)^2 - \sigma\tau_r\tau_s}, \\ T_2 &= \frac{\tau_r + \tau_s}{2} - \sqrt{\left(\frac{\tau_r + \tau_s}{2}\right)^2 - \sigma\tau_r\tau_s},\end{aligned}$$

qui sont des aggrégations de paramètres du moteur.

Le modèle discret du moteur à induction à l'arrêt est

$$\iota_s[k] = a_1 \iota_s[k-1] + a_2 \iota_s[k-2] + b_1 u_s[k-1] + b_2 u_s[k-2]$$

avec les coefficients a_1 , a_2 , b_1 et b_2 qui s'expriment en fonction des paramètres du moteur et de la période d'échantillonage.

$$(16) \quad \begin{aligned} a_1 &= e^{-T_e/T_1} + e^{-T_e/T_2}, \\ a_2 &= -e^{-T_e/T_1} e^{-T_e/T_2}, \\ b_1 &= K_a (1 - e^{-T_e/T_1}) + K_b (1 - e^{-T_e/T_2}), \\ b_2 &= -K_a e^{-T_e/T_2} (1 - e^{-T_e/T_1}) - K_b e^{-T_e/T_1} (1 - e^{-T_e/T_2}). \end{aligned}$$

où les paramètres K_a et K_b s'expriment simplement en fonction des paramètres moteurs.

$$K_a = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} K, \quad K_b = \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} K.$$

L'identification du système discret permet d'obtenir les paramètres a_i et b_i tels qu'ils sont définis dans (16). De ces relations, il faut calculer les paramètres moteurs. Les relations (16) s'inversent et permettent de revenir aux paramètres moteurs de la manière suivante :

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{T_e}{\log\left(\frac{a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + a_2}\right)}, \\ T_2 &= -\frac{T_e}{\log\left(\frac{a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + a_2}\right)}, \\ K_a &= \frac{b_1 e^{-T_e/T_1} + b_2}{(1 - e^{-T_e/T_1})(e^{-T_e/T_1} - e^{-T_e/T_2})}, \\ K_b &= \frac{-b_1 e^{-T_e/T_2} - b_2}{(1 - e^{-T_e/T_2})(e^{-T_e/T_1} - e^{-T_e/T_2})}, \\ K &= K_a + K_b, \\ T &= \frac{T_1 K_a + T_2 K_b}{K_a + K_b}. \end{aligned}$$

C. Résolution au sens des moindres carrés. — La réponse en courant à un échelon de tension est un second ordre avec deux constantes de temps très éloignées. Par défaut, nous obtenons le modèle de la figure 5. Nous voyons que la dynamique rapide du système est complètement ignorée par une identification standard. Bien sûr, si nous forçons l'ordre du modèle, nous identifions un système du second ordre. Les paramètres de la dynamique rapide (i.e. le pôle rapide) sont identifiés avec une forte variance d'un essai à l'autre.

Il est clair que si nous alimentons le moteur avec une tension de la forme multi-sinus (voir [GGPL97]) l'estimation paramétrique permet d'identifier correctement les paramètres. Nous ne cherchons pas à approfondir cette voie d'identification pour les raisons suivantes :

- L'implantation en temps réel d'un algorithme d'identification permettant d'obtenir les quatre paramètres en une seule phase n'est pas envisageable. En effet, il est très coûteux d'implanter une inversion matricielle (ou l'équivalent en récursif) en dimension 4 en respectant les périodes d'échantillonnage imposées par le microprocesseur.
- La génération d'un signal compliqué introduit les mêmes difficultés que précédemment.

Pour ces raisons, nous nous orientons vers une identification divisée en plusieurs phases. Ces différentes phases permettent de simplifier les modèles selon les dynamiques excitées. Ainsi nous

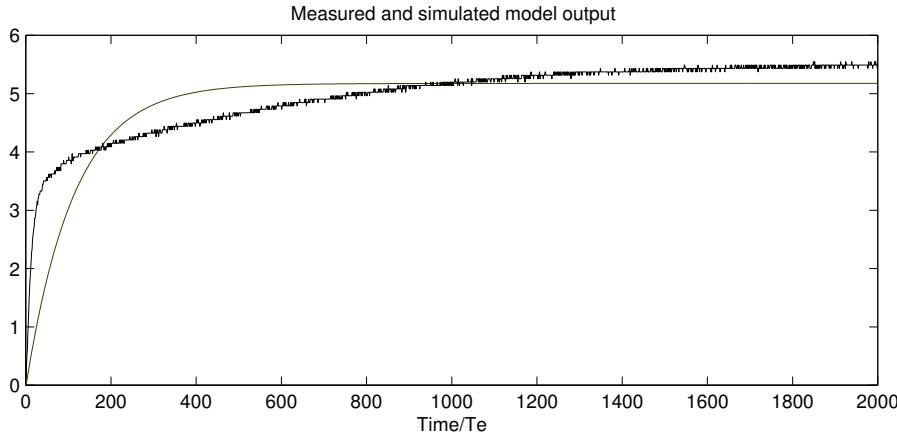


Figure 5 – Courant et modèle obtenu

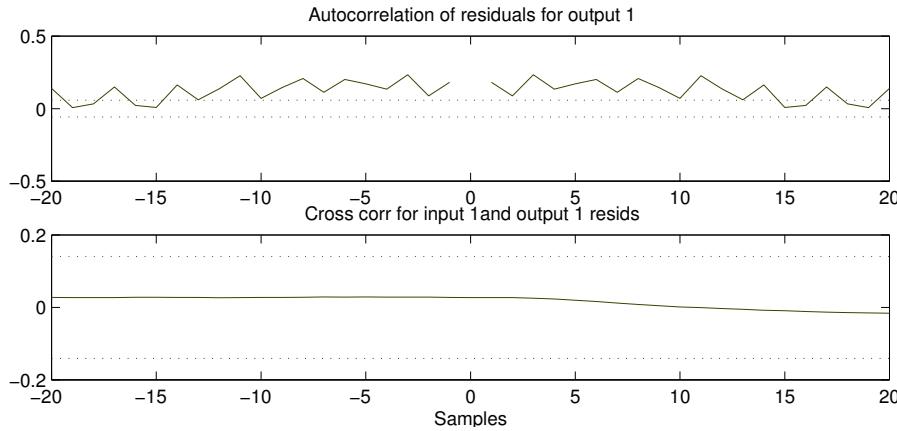


Figure 6 – Résidus

réduisons le modèle du moteur à induction à des systèmes du premier ordre. L'identification de ces derniers est simple à mettre en oeuvre, la forme des signaux d'excitation également.

3.3.2. Présentation de notre approche de l'identification des paramètres électriques. —

Commençons par nous intéresser au modèle standard. La relation entrée-sortie (14)

$$\sigma\tau_r\tau_s\ddot{i}_s + (\tau_r + \tau_s)i_s + i_s = \frac{\tau_r}{R_s}\dot{u}_s + \frac{1}{R_s}u_s$$

où u_s est la tension envoyée au moteur, i_s est le courant mesuré et les constantes τ_r et τ_s valent respectivement $\frac{L_r}{R_r}$ et $\frac{L_s}{R_s}$. Le système a naturellement deux constantes de temps très espacées, $\tau_{rapide} = \frac{\tau_r+\tau_s}{2} - \sqrt{\left(\frac{\tau_r+\tau_s}{2}\right)^2 - \sigma\tau_r\tau_s}$ et $\tau_{lent} = \frac{\tau_r+\tau_s}{2} + \sqrt{\left(\frac{\tau_r+\tau_s}{2}\right)^2 - \sigma\tau_r\tau_s}$. La fonction de transfert vaut :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{R_s} \frac{\tau_r s + 1}{\sigma\tau_r\tau_s s^2 + (\tau_r + \tau_s)s + 1} = \frac{1}{R_s} \frac{\tau_r s + 1}{(\tau_{rapide}s + 1)(\tau_{lent}s + 1)}$$

Puissance (kW)	Pôle rapide (Hz)	Pôle lent (Hz)	Zéro (Hz)
	$1/\tau_{rapide}$ $\approx \frac{\tau_r + \tau_s}{\sigma \tau_r \tau_s}$	$1/\tau_{lent}$ $\approx \frac{1}{\tau_r + \tau_s}$	$1/\tau_r$
0.55	575	8.51	12.11
0.75	521	7.90	11.71
1.1	474	7.48	10.77
1.5	430	6.97	10.50
2.2	414	5.17	7.67
3	400	5.29	8.07
4	224	3.52	5.15
5.5	188	3.01	4.46
7.5	174	2.84	4.34
11	133	1.74	2.31
15	113	1.59	2.22

Table 2 – Paramètres de moteurs ATB.

Voici, à titre indicatif à partir des données constructeur, un tableau donnant les valeurs des pôles et des zéros pour des moteurs de 0.75 à 15 kW. Les deux pôles sont espacés d'un facteur 60 environ quelque soit le calibre du moteur. Cette séparation est une propriété intrinsèque du moteur à induction.

De là, nous pouvons décomposer le problème de l'identification des quatre paramètres électriques en deux sous problèmes. La décomposition se fait selon les échelles de temps naturelles du système. Dans une première approximation, la dynamique rapide a pour transfert

$$\mathcal{H}_r = K_{rapide} \frac{1}{\tau_{rapide}s + 1}.$$

Son diagramme de Bode coïncide avec celui du transfert lui même (voir figure 7) pour des fréquences supérieures à une dizaine de Hertz. De la même manière, la dynamique lente s'approxime par un retard de phase.

$$\mathcal{H}_l = \frac{1}{R_s} \frac{\tau_{lent_1}s + 1}{\tau_{lent_2}s + 1}.$$

Il coïncide pour des fréquences inférieures à 1 Hz. De manières plus précises, il est intéressant pour caractériser exactement les différents modèles lent et rapide de faire le calcul suivant qui se décompose en trois étapes.

- Nous calculons la valeur en régime permanent des sorties $i_s = \mathcal{H}u_s$, $i_{s_r} = \mathcal{H}_r u_s$ et $i_{s_l} = \mathcal{H}_l u_s$ sous la commande d'un signal sinusoïdal de fréquence ω et d'amplitude ΔU . Elles ont toutes les trois la forme $\Delta I \sin(\omega t - \varphi)$ où les paramètres ΔI et φ dépendent des paramètres des

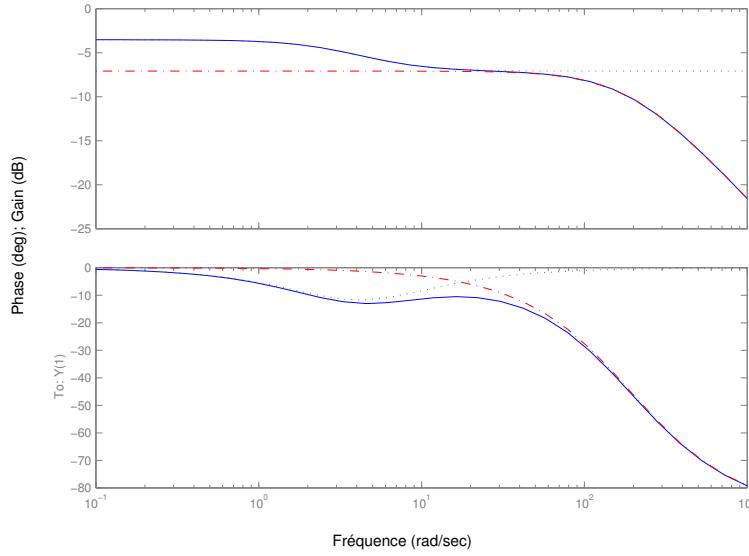


Figure 7 – Diagramme de Bode du moteur à l'arrêt (—). Approximation de la dynamique lente (..). Approximation de la dynamique rapide (-.-).

filtres \mathcal{H} , \mathcal{H}_r et \mathcal{H}_l .

$$\begin{aligned} i_s &= \Delta I \sin(\omega t - \varphi) \\ \Delta I &= \frac{1}{R_s} \sqrt{\frac{1 + (\omega \tau_r)^2}{(\omega \tau_r + \omega \tau_s)^2 + (1 - \sigma \omega \tau_r \omega \tau_s)^2}} \Delta U \\ \varphi &= -\arctan \omega \tau_r + \arctan \frac{\omega \tau_r + \omega \tau_s}{1 - \sigma \omega \tau_r \omega \tau_s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{s_r} &= \Delta I_r \sin(\omega t - \varphi_r) \\ \Delta I_r &= \frac{K_{rapide}}{\sqrt{1 + (\omega \tau_{rapide})^2}} \Delta U \\ \varphi_r &= \arctan \omega \tau_{rapide} \\ i_{s_l} &= \Delta I_l \sin(\omega t - \varphi_l) \\ \Delta I_l &= \frac{1}{R_s} \sqrt{\frac{1 + (\omega \tau_{lent_1})^2}{1 + (\omega \tau_{lent_2})^2}} \Delta U \\ \varphi_l &= -\arctan \omega \tau_{lent_1} + \arctan \omega \tau_{lent_2} \end{aligned}$$

- Nous inversons ces dernières relations dans les cas du système lent et du système rapide de manière à caractériser les paramètres des modèles, i.e. τ_{lent} , τ_r , τ_{rapide} , ..., en fonction de

l'amplitude et du déphasage obtenus.

$$\begin{aligned} K_{rapide} &= \frac{1}{\cos \varphi_r} \frac{\Delta I_r}{\Delta U} \\ \tau_{rapide} &= \frac{\tan \varphi_r}{\omega} \\ \tau_{lent_1} &= \frac{\cos \varphi_l - \frac{R_s \Delta I_l}{\Delta U}}{\omega \sin \varphi_l} \\ \tau_{lent_2} &= \frac{1 - \frac{R_s \Delta I_l}{\Delta U} \cos \varphi_l}{\frac{R_s \Delta I_l}{\Delta U} \omega \sin \varphi_l} \end{aligned}$$

- Nous concluons en remplaçant les déphasages φ_l et φ_r et les gains ΔI_l et ΔI_r par le déphasage et le gain du système complet. Nous obtenons alors une valeur des paramètres pour les systèmes réduits qui fournissent la même réponse en sortie que le système complet. Bien sûr, nous regardons le système rapide en haute fréquence et le système lent en basse fréquence (cf. figure). Nous obtenons pour le système rapide :

$$\begin{aligned} K_{rapide} &= \frac{1}{R_s} \frac{1 + (\omega \tau_r)^2}{1 + \omega \tau_r (\omega \tau_r + (1 - \sigma) \omega \tau_s)} = \frac{1}{R_s + (1 - \sigma) \frac{L_s}{\tau_r}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\omega \tau_r)^2}\right), \\ \tau_{rapide} &= \frac{L_s}{R_s} \frac{1 + \sigma (\omega \tau_r)^2}{1 + \omega \tau_r (\omega \tau_r + (1 - \sigma) \omega \tau_s)} = \frac{L_f}{R_s + (1 - \sigma) \frac{L_s}{\tau_r}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\omega \tau_r)^2}\right), \end{aligned}$$

et pour le système lent :

$$\begin{aligned} \tau_{lent_1} &= (1 - \sigma) \tau_r \frac{1}{1 + \sigma (\omega \tau_r)^2} = (1 - \sigma) \tau_r + \mathcal{O}\left((\omega \tau_r)^2\right), \\ \tau_{lent_2} &= (\tau_s + (1 - \sigma) \tau_r) \frac{1 + \sigma \frac{\tau_s}{\tau_s + (1 - \sigma) \tau_r} (\omega \tau_r)^2}{1 + \sigma (\omega \tau_r)^2} = \tau_s + (1 - \sigma) \tau_r + \mathcal{O}\left((\omega \tau_r)^2\right). \end{aligned}$$

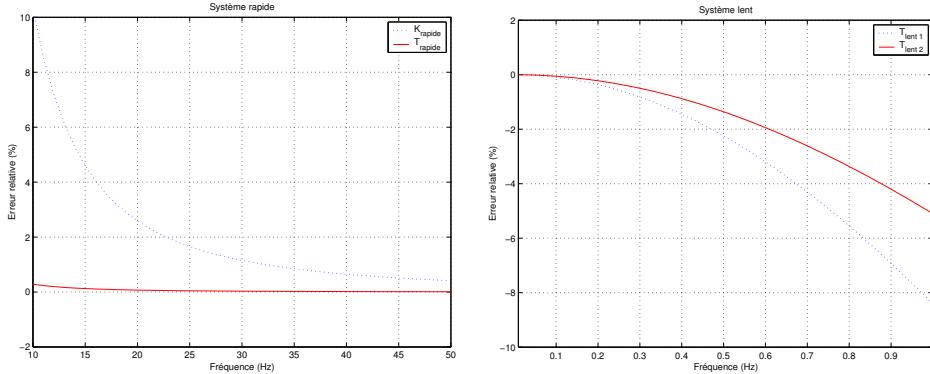


Figure 8 – Erreur relative des paramètres du modèle en fonction de la fréquence

Les approximations lente et rapide sont maintenant bien définies. Pour identifier les paramètres électriques du moteur à induction à l'arrêt, nous allons utiliser les modèles réduits que nous venons de définir. Ces modèles sont définis pour certaines zones de fréquences (cf. figure 7).

Le modèle rapide ne pose pas de difficultés. En effet les contraintes imposées aux signaux d'identification restent compatibles entre elles : le signal doit avoir une fréquence supérieur à une dizaine de hertz et ne doit pas être trop rapide pour ne pas exciter des phénomènes négligés (effet de peau, ...).

Le modèle lent est plus problématique. L'approximation étant correcte pour des fréquences très faibles (aux environs de 0.1 hertz), les signaux d'identification doivent durer environ plusieurs dizaines de secondes. Dans ces conditions, les effets dus à l'échauffement du moteur ne sont absolument pas négligeables. Ils vont jusqu'à remettre en cause la procédure d'identification fondée sur l'étude en régime permanent du système.

Pour éviter les problèmes liés à la thermique du moteur à induction, nous devons trouver une procédure d'identification de faible durée. Le régime permanent ne remplit pas ces conditions. Il semble alors naturel pour raccourcir la procédure d'identification de se tourner vers le régime transitoire (i.e. d'exciter le système ponctuellement).

3.3.3. Identification de R_s . — Le gain statique du système est obtenu en calculant le rapport $\frac{u_s(\infty)}{i_s(\infty)}$. Dans la pratique, on calcule la moyenne des signaux sur un horizon de temps où ils sont stabilisés. Les chutes de ponts peuvent être précompensées en envoyant systématiquement plus de tension que désirée. Dans ce cas, la valeur de la résistance statorique vaut :

$$R_s = \frac{U_{moy}}{I_{consigne}}.$$

Dans le cas de la non compensation des chutes de tension on obtient :

$$R_s = \frac{U_{moy} - V_{dp_{supposée}}}{I_{consigne}}.$$

Comme nous venons de le voir, la résistance statorique représente le gain statique du système. Une manière simple de l'obtenir est d'envoyer un échelon en entrée du système (i.e. la tension) et de mesurer la sortie (i.e. le courant statorique).

En réponse à un échelon de tension, le courant prend un temps de $3\tau_{lent}$ pour arriver à 95% de sa valeur finale, et il faut attendre $5\tau_{lent}$ pour s'assurer d'être à moins de 1% de la valeur finale.

Une autre manière de se trouver en régime établi est d'utiliser une boucle de régulation pour assurer un courant constant dans la machine. La tension de commande se stabilise à 95% de sa valeur finale en un temps de $3\tau_r$. Il vaut mieux sur-estimer ce temps de manière à être assuré que la tension soit stabilisée. Toutefois nous devons limiter le temps pour ne pas être influencé par la dérive thermique des résistances.

A. Identification de R_s indépendamment des chutes de ponts. —

Boucle ouverte. — Reprenons le modèle du moteur à induction à l'arrêt (12) et incluons-y le modèle de chutes de ponts. Nous choisissons une orientation selon l'axe a .

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_s}{dt} = -R_s i_s + u_s - V_{drop}, \\ \frac{di_s}{dt} = \frac{1}{\tau_r} \varphi_s - \left(R_s + \frac{L_s}{\tau_r} \right) i_s + u_s - V_{drop}. \end{cases}$$

En fonctionnement statique, nous obtenons les relations

$$\begin{cases} u_s = R_s i_s + V_{drop}, \\ \phi_s = L_s i_s. \end{cases}$$

Comme nous l'avons montré dans la section précédente, la dynamique du courant est formée de deux constantes de temps. De la plus lente, nous tirons qu'il faut $5 \frac{\tau_r + \tau_s + \sqrt{(\tau_r + \tau_s)^2 - 4\sigma\tau_r\tau_s}}{2}$ pour arriver en régime statique, soit environ $5(\tau_r + \tau_s)$.

Boucle fermée. — En fonctionnement statique, nous avons évidemment les mêmes relations que précédemment

$$\begin{cases} u_s = R_s i_s + V_{drop}, \\ \varphi_s = L_s i_s. \end{cases}$$

Le gain par rapport à la méthode précédente se situe au niveau de la durée d'identification. Pour une boucle de rétro-action de la forme proportionnelle-intégrale (P.I.),

$$u_s = k_p (i_{\text{référence}} - i_s) + k_i \int (i_{\text{référence}} - i_s) dt$$

nous pouvons amener la constante de temps lente à la valeur τ_r ce qui permet un gain d'environ τ_s : nous gagnons un facteur 2 pour la durée d'identification.

L'identification suit le même procédé que dans le premier cas. Nous régulons la tension de manière à obtenir une référence de courant (fixe) en sortie. Après $5\tau_r$, nous collectons des points de mesure pour estimer la résistance statorique.

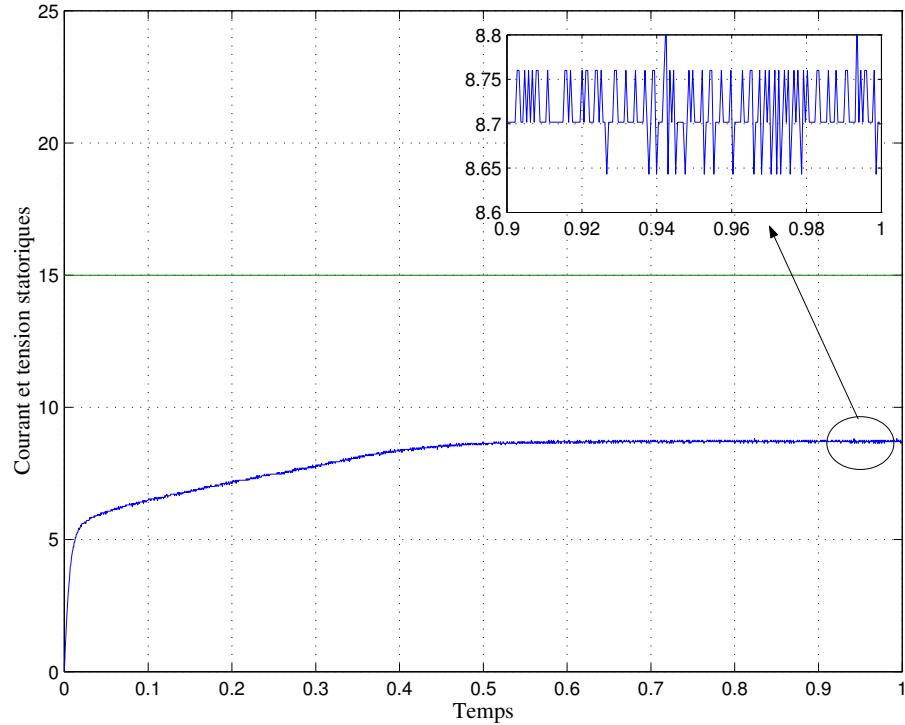


Figure 9 – Réponse à un échelon de tension

Résultats expérimentaux. — Pour estimer la résistance statorique, nous utilisons la tension demandée et le courant statorique mesuré. Sur quelques points de mesures (entre 32 et 64 par exemple), nous calculons les moyennes des grandeurs.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} u_{s_i} - V_{drop} = R_s i_{\text{référence}}$$

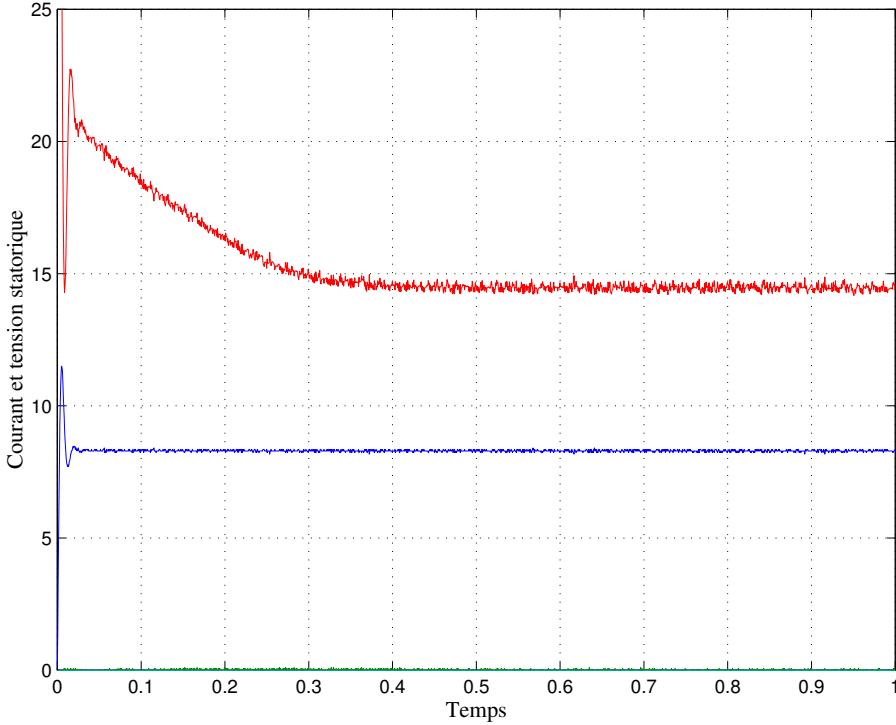


Figure 10 – Réponse à un échelon de courant

En retranchant la valeur des chutes de ponts, la résistance statorique s'obtient en calculant le rapport suivant.

$$\hat{R}_s = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} u_{s_i} - V_{drop}}{I_{\text{référence}}}$$

Courant	8.674	8.672	8.674	8.675	8.678	8.681	8.673	8.669	8.674	8.672
\hat{R}_s	1.556	1.557	1.556	1.556	1.556	1.555	1.557	1.557	1.556	1.557

Boucle ouverte : Niveau de courant pour un échelon de tension de 15 V

Courant, moyenne : 8.674 A, écart-type : 0.003 A,

Résistance statorique, moyenne : 1.556 Ω , écart-type : 0.001 Ω

Tension	14.421	14.447	14.432	14.447	14.436	14.478	14.472	14.462	14.473	14.452
\hat{R}_s	1.557	1.560	1.558	1.560	1.559	1.563	1.563	1.562	1.563	1.561

Boucle fermée : Niveau de tension pour un échelon de courant de 8.3 A

Tension, moyenne : 14.452 V, écart-type : 0.018 V,

Résistance statorique, moyenne : 1.561 Ω , écart-type : 0.002 Ω

Variance et biais d'estimation. — Sous les hypothèses que le bruit sur le courant a une variance σ_I et un biais nul (pour un niveau de courant I) et que le bruit sur la tension a une variance σ_U et de biais b_U (pour un niveau de tension U), nous obtenons les résultats suivants.

- Dans le cas d'une estimation suivant la méthode proposée, nous obtenons

$$\hat{R}_s = R_s + \frac{b_U}{I}$$

- Dans le cas d'une estimation suivant la méthode des moindres carrés, nous obtenons

$$\hat{R}_s = \frac{R_s + \frac{b_U}{I}}{1 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}$$

Dans ce dernier cas, nous introduisons un biais supplémentaire et systématique.

B. Identification de R_s et des chutes de ponts. — Deux méthodes ont été étudiées dans cette partie. La première consiste en l'identification des deux paramètres par une méthode des moindres carrés à partir de l'équation d'observation qui est linéaire en les paramètres. La seconde méthode proposée est totalement différente. Elle est fondée sur une structure d'observateur-contrôleur.

Méthode des moindres carrés. — Une approche expérimentale utile pour valider le modèle des chutes de tension dans l'étage de puissance est d'envoyer, selon une seule direction, des échelons de différents niveaux de tension. Les signaux utilisés sont portés par l'axe a du repère de Park, la tension sur l'axe b étant maintenue à zéro.

$$u_{s_a} = V_{ref}, \quad u_{s_b} = 0.$$

Du tableau présenté sur la valeur des chutes de tension dans la première partie (donnant les chutes de tensions en fonction du signe des courants), nous en déduisons que la tension réellement reçue par le moteur prend la forme

$$u_{s_{a\text{reçue}}} = V_{ref} - V_{drop}, \quad u_{s_{b\text{reçue}}} = 0,$$

où V_{drop} vaut $\frac{4}{3}V_{dp}$. En l'absence de capteur de tension, nous ne pouvons pas estimer directement la valeur des chutes de tension. Toutefois, en fonctionnement statique, la tension statorique se déduit de la mesure du courant grâce au gain statique R_s .

$$R_s i_{s_a} = V_{ref} - V_{drop}, \quad R_s i_{s_b} = 0.$$

Lors des essais, le principe était de récupérer grandeurs connues (i_s, u_s) en régime statique, pour différents niveaux d'intensité. Ainsi on obtient les caractéristiques courant-tension de l'étage de puissance (cf. figure 11). Nous constatons que le modèle des chutes de tension constantes dans le repère de Park est globalement vérifié.

3.3.4. Identification de la dynamique rapide. — Le système rapide possède une constante de temps d'environ 10 fois supérieure à la période d'échantillonnage du système ($250\mu s$ pour le banc d'essai et $500\mu s$ pour le produit). L'approximation continu du système est trop grossière.

Méthode discrète. — La forme discrétisée exacte de la dynamique rapide s'écrit

$$(17) \quad i_s[k+1] = e^{-T_e/T} i_s[k] + K \left(1 - e^{-T_e/T}\right) u_s[k]$$

où $i_s[k]$ représente la quantité $i_s(kT_e)$. La tension d'alimentation étant échantillonnée à $T_e = 250\mu s$, le courant statorique a pour expression

$$i_s[k] = \theta_2 (\theta_1^k \sin(wT_e) - \theta_1 \sin(kwT_e) + \sin((k-1)wT_e)) / (\theta_1^2 + 1 - 2\theta_1 \cos(wT_e)),$$

où $\theta_1 = e^{-T_e/T}$ et $\theta_2 = K (1 - e^{-T_e/T})$ sont les coefficients du modèle discret.

Il nous reste à étudier l'identification du système du premier ordre (17). C'est un simple modèle AR. À partir des paramètres θ_1 et θ_2 que nous identifions à partir du modèle du premier ordre,

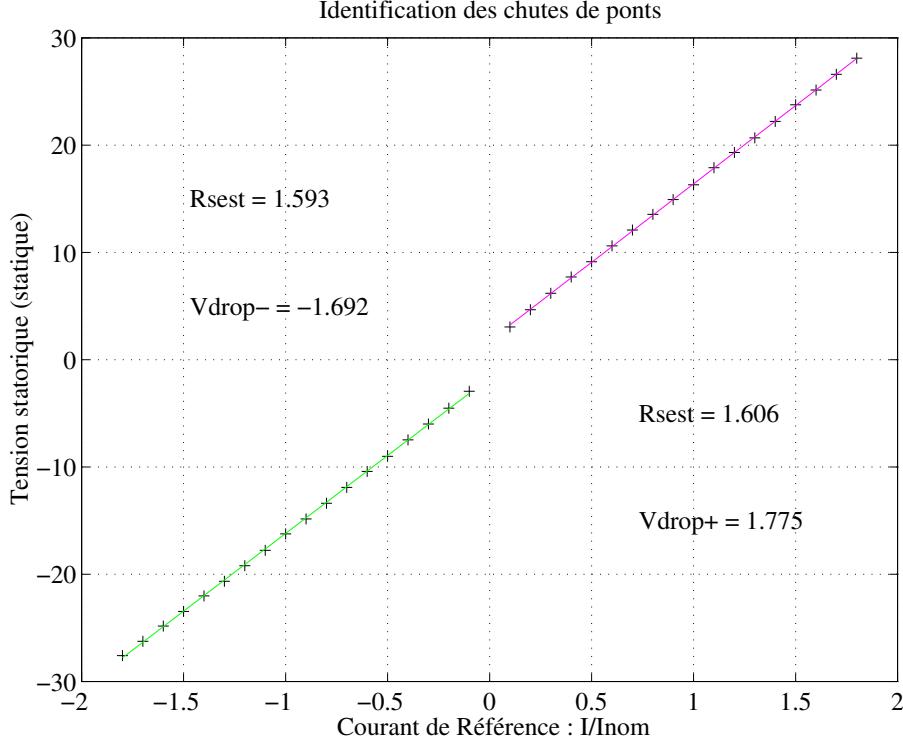


Figure 11 – Validité du modèle de chutes de tension (sur un banc d'essai de calibre 4kW).

nous obtenons les paramètres physiques par la transformation :

$$K = \frac{\theta_2}{1 - \theta_1}$$

$$T = -\frac{T_e}{\log(\theta_1)}$$

Boucle proportionnelle. — L'introduction d'une boucle proportionnelle permet de s'affranchir dans une plus large zone de la saturation magnétique. La boucle proportionnelle tend à écraser l'influence des paramètres. Le système à identifier reste un système du premier ordre

$$\iota_s[k + 1] = T_1 \iota_s[k] + T_2 \iota_{s_{ref}}[k].$$

Les deux paramètres du premier ordre permettent d'obtenir les paramètres de la dynamique rapide grâce aux relations

$$L_{f_{est}} = -\frac{K_p T_e (1 - T_1 - T_2)}{T_2 \log(T_1 + T_2)},$$

$$R_{request} = \frac{K_p (1 - T_1 - T_2)}{T_2}.$$

Des essais sur le banc d'essai ont été réalisés. Nous voyons sur la figure 12 les paramètres identifiés à différentes fréquences. L'essai a été effectué pour une amplitude d'oscillation constante. À partir de 60 Hertz, l'atténuation est trop forte et implique une mauvaise identification. Si nous prenons une amplitude plus grande, nous résolvons ce problème à haute fréquence.

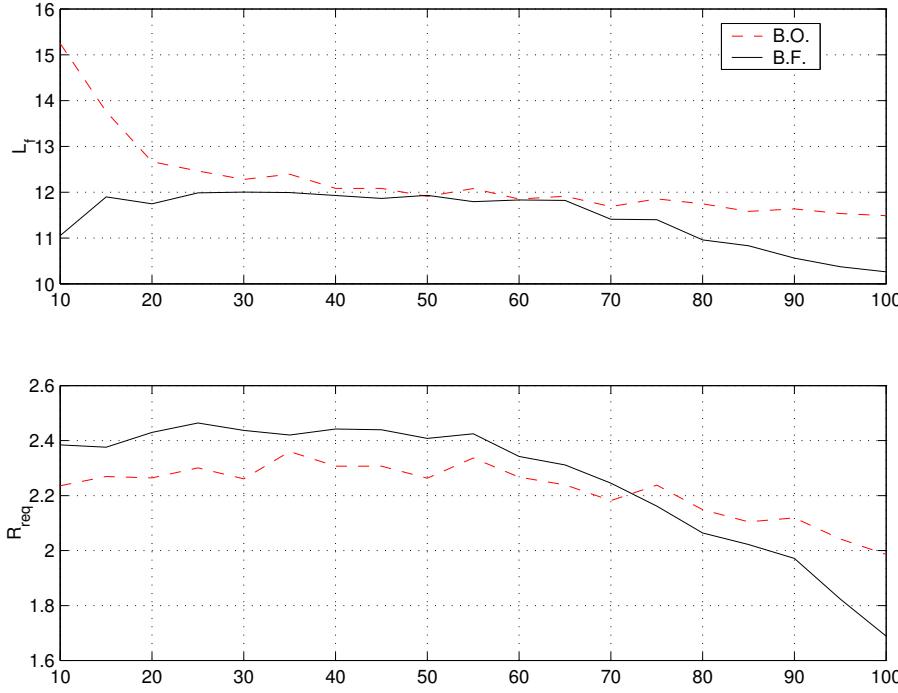


Figure 12 – Paramètres identifiés en fonction de la fréquence. Résultats expérimentaux pour un moteur de 4 kW.

Nous voyons sur la figure 13 les paramètres identifiés à différents niveaux de courant. Nous voyons que l'inductance de fuite identifiée varie avec le niveau de courant. La résistance identifiée est constante jusqu'à un certain niveau de courant ; ceci est d'autant plus vrai lorsque nous utilisons une boucle proportionnelle. Dans la plage de fréquence 20 Hz - 60 Hz, avec la boucle proportionnelle, les paramètres identifiés sont constants.

Les figures 15, 14, 16 représentent l'évolution de l'estimation des paramètres au cours d'un essai pour trois calibres de moteur différents.

Sur la figure 15, nous avons utilisé une consigne de courant à $\frac{3}{4}$ du courant nominal avec une amplitude de 2 A et une fréquence de 25 Hz. Nous pouvons voir que l'identification se fait très rapidement.

3.3.5. Identification des paramètres de la dynamique lente. —

Boucle ouverte. — Partons du modèle lent

$$\mathcal{H}_l = \frac{1}{R_s} \frac{(1-\sigma)\tau_r s + 1}{(\tau_s + (1-\sigma)\tau_r) s + 1} = \frac{1}{R_s} \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}.$$

Vues les constantes de temps du système, une identification continue est envisageable. Une manière de réaliser la relation entrée sortie de la dynamique lente est d'utiliser le filtre $H_f = \frac{1}{T_f s + 1}$. Le transfert entre le courant et la tension statorique s'écrit

$$\mathcal{H}_l = \frac{1}{R_s} \frac{T_1 + (T_f - T_1) H_f}{T_2 + (T_f - T_2) H_f}.$$

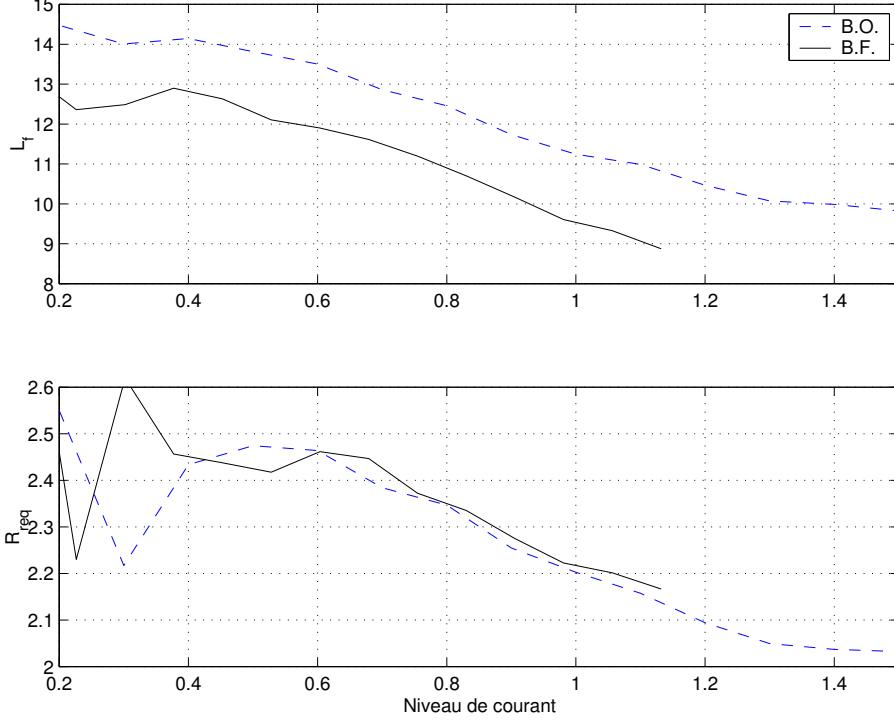


Figure 13 – Paramètres identifiés en fonction du niveau de courant. Résultats expérimentaux pour un moteur de 4 kW.

En réalisant les filtres de la manière suivante

$$\begin{aligned} T_f i_f &= -i_f + i_s, \\ T_f \dot{u}_f &= -u_f + u_s, \end{aligned}$$

l'équation d'observation pour l'identification devient

$$(18) \quad (u_f(t) - u_s(t)) T_1 + (R_s i_s(t) - R_s i_f(t)) T_2 = (u_f(t) - R_s i_f(t)) T_f, \text{ pour tout } t.$$

Cette relation permet de mettre en place une identification standard des moindres carrés. En posant

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= u_f(t) - u_s(t), \\ \varphi_2 &= R_s i_s(t) - R_s i_f(t), \\ y &= T_f (u_f(t) - R_s i_f(t)), \end{aligned}$$

nous identifions les paramètres $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ selon la méthode des moindres carrés. À partir des observations $\varphi = [\varphi_1 \quad \varphi_2]$, nous construisons l'estimation $\hat{\theta}$ telle que $\hat{\theta} = (\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T y$. Revenons sur l'équation (18). En posant

$$e_f(t) = (u_f(t) - u_s(t)) T_1 + (R_s i_s(t) - R_s i_f(t)) T_2 - (u_f(t) - R_s i_f(t)) T_f,$$

il est simple de noter que e_f vérifie la relation dynamique suivante

$$T_f \dot{e}_f + e_f = 0$$

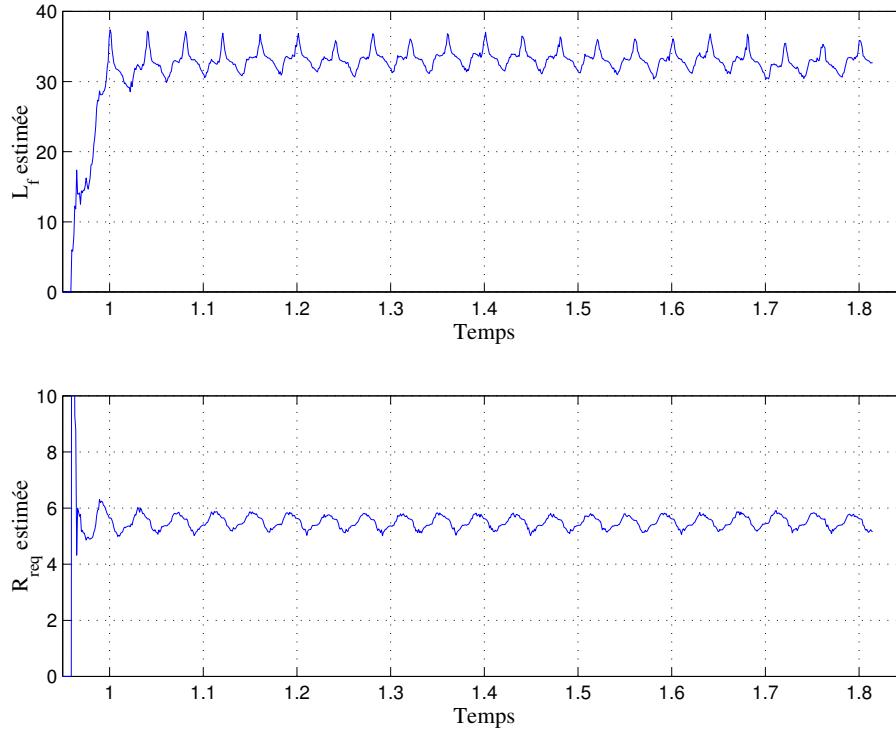


Figure 14 – Estimation de l’inductance de fuite et de la résistance équivalente. Résultats expérimentaux pour un moteur de 2.2 kW.

Une interprétation du filtre H_f s’en déduit. Le filtre que nous introduisons permet d’oublier exponentiellement ($e_f(t) = e_f(0)e^{-t/T_f}$) une erreur sur les conditions initiales.

Boucle proportionnelle-intégrale. — Nous introduisons un bouclage de manière à rendre plus rapide la phase d’identification de la dynamique lente. Contrairement à la méthode proposée en boucle ouverte, nous choisissons d’identifier la dynamique lente sur un transitoire. Nous réglons un contrôleur proportionnel-intégral de manière à placer le courant statorique très rapidement (quelques millisecondes) à sa référence. En observant la décroissance de la tension statorique, nous identifions les deux paramètres de la dynamique lente. Pour régler les gains de la boucle de courant, partons du système

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_s}{dt} = -R_s i_s + u_s, \\ L_f \frac{di_s}{dt} = \frac{1}{\tau_r} \varphi_s - \left(R_s + \frac{L_s}{\tau_r} \right) i_s + u_s. \end{cases}$$

En considérant que le flux reste constant (variable lente du système) pendant que le courant rejoint sa consigne, nous obtenons à partir de la deuxième équation un moyen de régler les gains k_p et k_i du P.I. : nous choisissons les pôles du transfert entre le courant et sa référence pour en déduire les valeurs des gains. Par l’approximation flux constant, nous avons réduit le système à un deuxième ordre dont les pôles vérifient

$$L_f s^2 + \left(R_s + k_p + \frac{L_s}{\tau_r} \right) s + k_i = 0$$

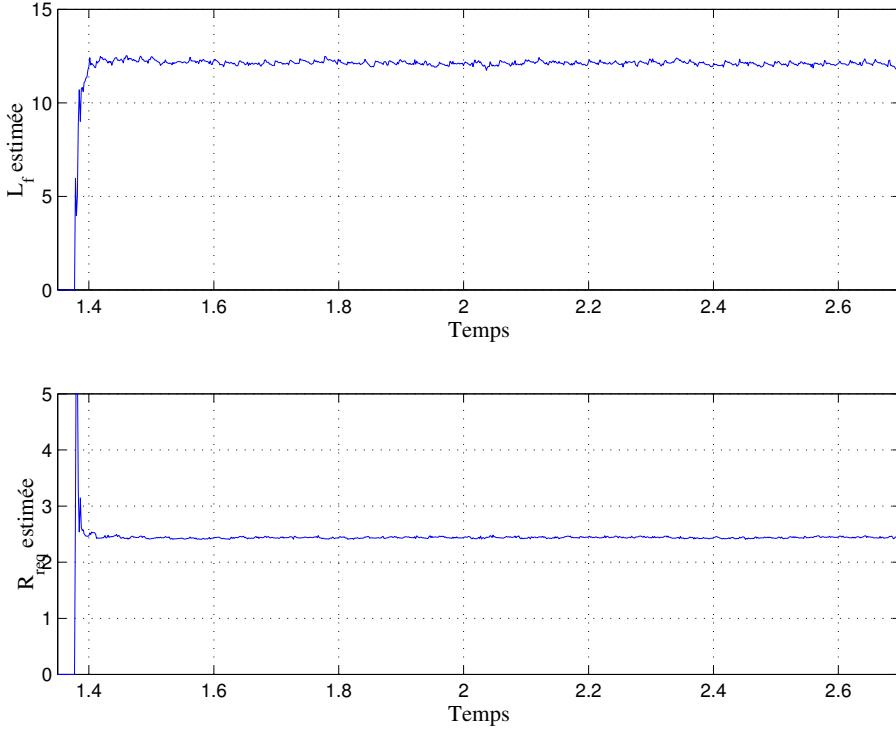


Figure 15 – Estimation de l'inductance de fuite et de la résistance équivalente. Résultats expérimentaux pour un moteur de 4 kW.

Nous choisissons de placer les pôles en $2\frac{R_s}{L_f}(1 \pm j)$. Nous obtenons les gains du correcteur

$$k_p = 3R_s - \frac{L_s}{\tau_r}, \quad k_i = 8\frac{R_s^2}{L_f}.$$

Le principe de l'identification est le même qu'en boucle ouverte ; nous utilisons la même équation d'observation (18)

$$(u_f(t) - u_s(t)) T_1 + (R_s i_s(t) - R_s i_f(t)) T_2 = (u_f(t) - R_s i_f(t)) T_f, \text{ pour tout } t,$$

utilisant un filtre du premier ordre. Nous utilisons (cf. figure 20) les points situés entre les deux traits verticaux. Le premier est défini par les valeurs des gains. Il correspond à 7 fois le temps de réponse du courant. Le second correspond au point d'arrêt : la tension n'apporte plus d'information, elle a atteint sa référence.

3.4. Résultats expérimentaux

La procédure d'identification est résumée sur la figure suivante. Sur les deux premières secondes (deux échelons à I_{nom} et $I_{identif} = \frac{P_{nom}}{\sqrt{3}U_{nom}I_{nom}}$), on identifie la résistance statorique et les chutes de ponts. Pendant une seconde, on force le courant à zéro. Puis, on identifie la constante de temps rotorique et l'inductance statorique sur un échelon de courant à $I_{identif}$. Pour finir, on passe en

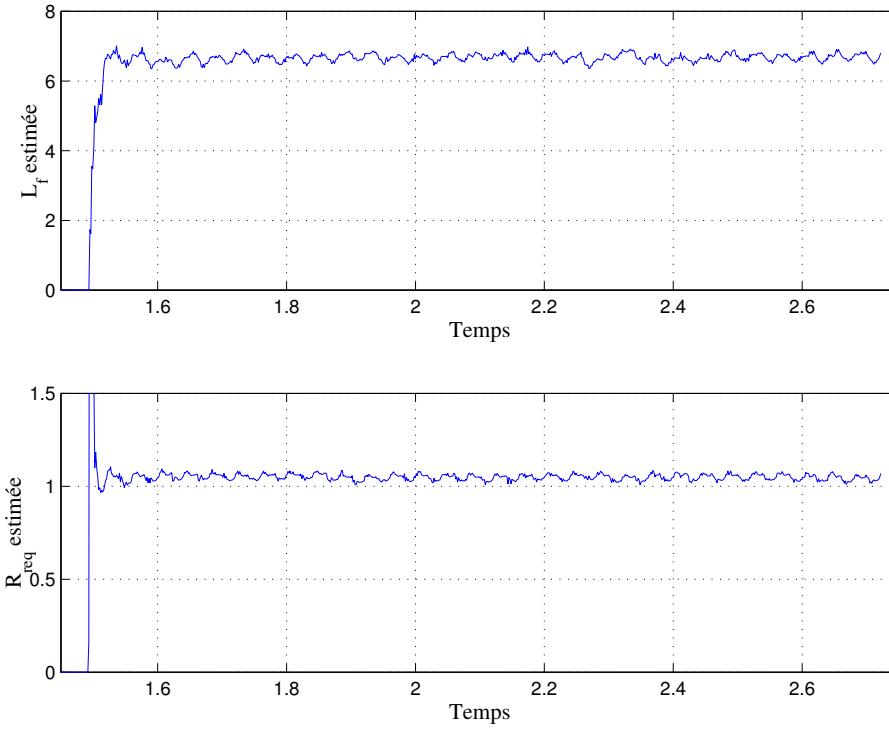


Figure 16 – Estimation de l'inductance de fuite et de la résistance équivalente. Résultats expérimentaux pour un moteur de 7.5 kW.

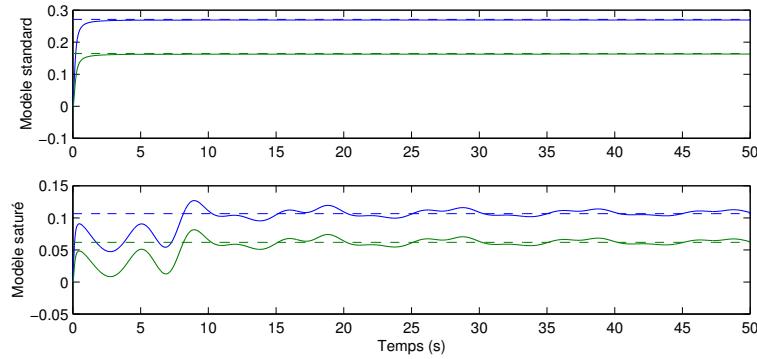


Figure 17 – Simulation : paramètres identifiés pour des modèles standard et saturé

boucle ouverte à la tension V_o correspondant au courant $I_{identif}$. Autour de cette tension, on impose une tension sinusoïdale d'amplitude $2V_o$ pour obtenir les fuites magnétiques.

I_{nom} (A)	R_s (Ω)	L_s (mH)	T_r (ms)	L_f (mH)
3.7	6.44-6.55	317-330	105-110	35.1

M429 Leroy Sommer 1.5kW LS90L T

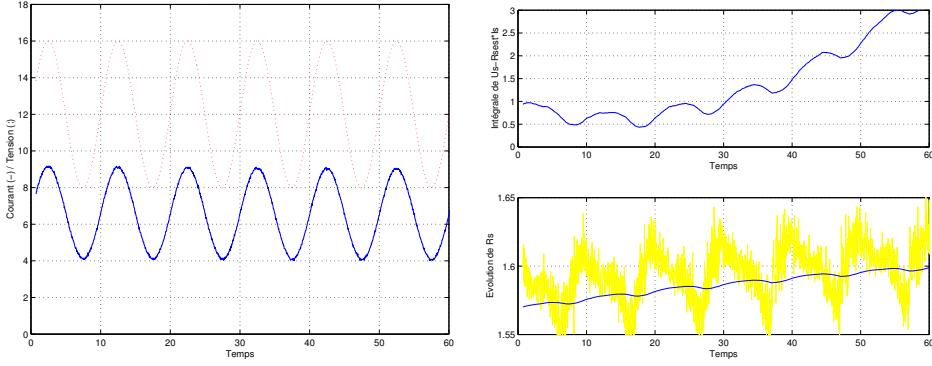


Figure 18 – Compromis fréquence - dérive thermique

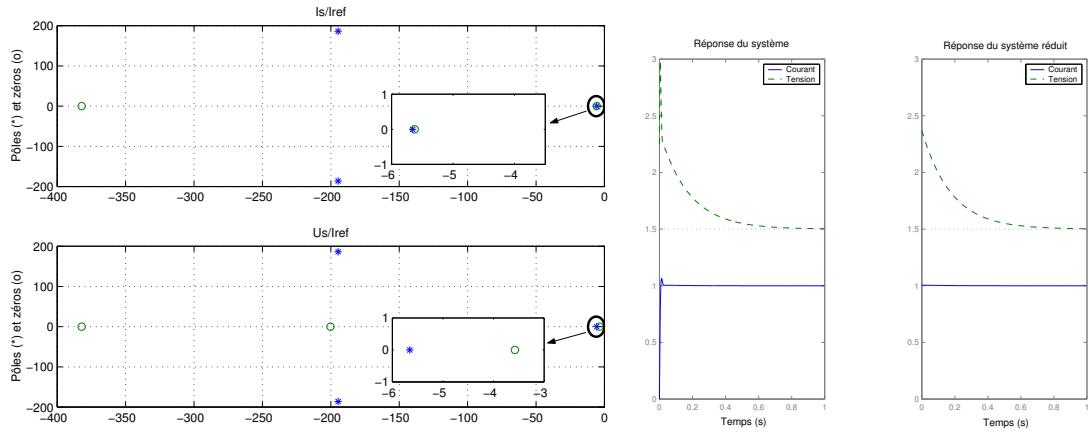


Figure 19 – Effet de la boucle proportionnelle

I_{nom} (A)	R_s (Ω)	L_s (mH)	T_r (ms)	L_f (mH)
4.6	3.61-3.68	282-298	114-120	20.3

M408 ATB 2.2kW

I_{nom} (A)	R_s (Ω)	L_s (mH)	T_r (ms)	L_f (mH)
9.1	1.60-1.62	143-154	139-147	12.7

M307 Leroy Sommer 4kW

I_{nom} (A)	R_s (Ω)	L_s (mH)	T_r (ms)	L_f (mH)
14.6	0.826-0.834	107-111	227-236	8.4

M395 Leroy Sommer 7.5kW

Pour quantifier la variation de l'estimation des paramètres, on reproduit plusieurs fois de suite la procédure d'identification. On se tient à des répétitions de 10 séquences de manière à limiter l'échauffement du moteur. L'écart type obtenu sur les paramètres est faible de l'ordre de un ou deux pour-cent. Mais plutôt que cette grandeur statistique, ce qui est pertinent d'un point de vue pratique, c'est la plage des valeurs obtenues, c'est-à-dire la différence entre les valeurs maximum et minimum obtenues. La différence maximum-minimum est de l'ordre de deux ou trois fois l'écart

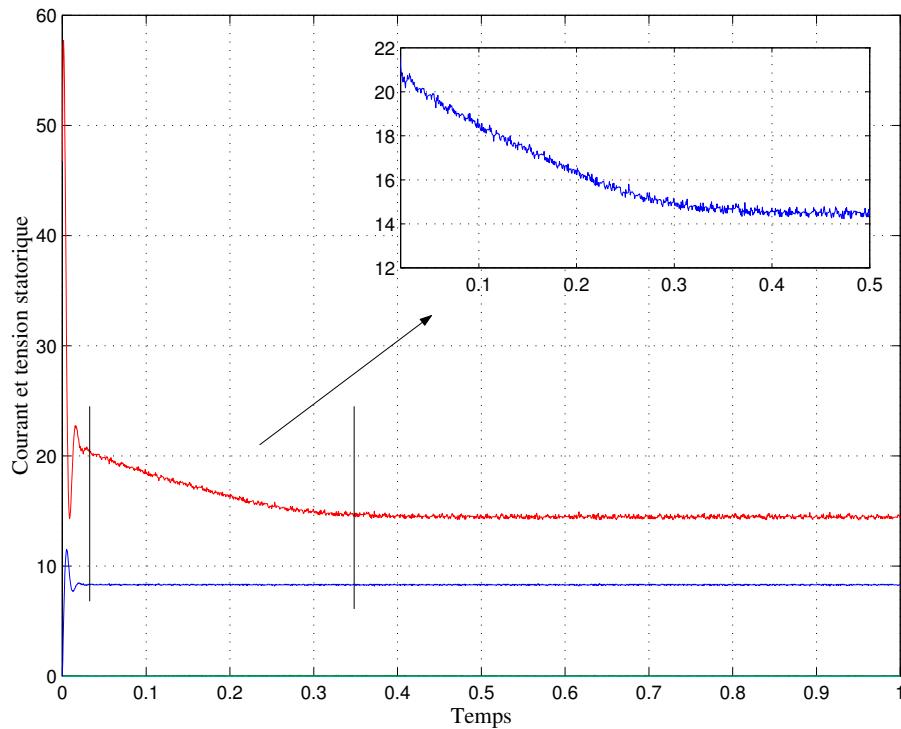


Figure 20 – Identification de la dynamique lente sur une régulation de courant.

type. Les tableaux représentent les valeurs identifiées des paramètres pour différents niveaux de courant. De plus, il faut noter que la valeur des inductances identifiées diminuent avec le niveau de courant.

L'identification a été validée en simulation, sur banc d'essai et sur la cible pour des moteurs allant de 0.75 kw à 22 kW. L'identification se résume sur le schéma suivant 21. Nous retrouvons notre

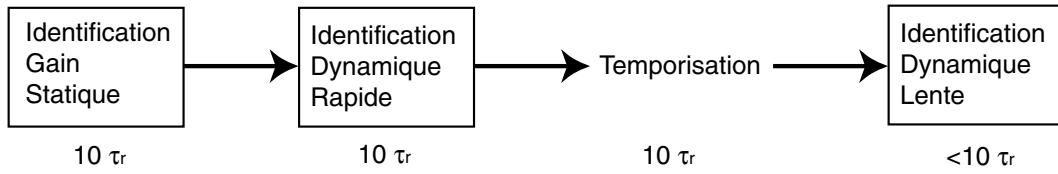


Figure 21 – Procédure d'identification

découpage selon les échelles de temps du système. Les deux premières étapes donnent des résultats parfaitement fiables et sont intégrés sur le variateur ATV 58-F développé par Schneider Electric. L'identification de la dynamique lente a rencontré des soucis dans la phase de qualification. Donnant des résultats exceptionnellement bon en développement sur cible, cette phase de l'identification reste toutefois sensible aux bruits de la chaîne de mesure. Des configurations où le moteur et le variateur sont connectés par des longs câbles entraînent une identification erronée de la dynamique lente.

La durée d'identification dépend uniquement de la constante de temps rotorique tabulée par calibre dans le variateur et reste relativement faible. Elle varie de 1.2 seconde pour un moteur 0.75 kW à 9.6 secondes pour un moteur 22 kW.

PARTIE II

**PROBLÈME D'OBSERVABILITÉ DU MOTEUR
À INDUCTION POUR LA VARIATION DE
VITESSE INDUSTRIELLE “SANS CAPTEUR”**

PRÉSENTATION

Dans cette partie, nous étudions le problème de l'observabilité du moteur à induction sans capteur mécanique.

Partant du modèle standard dont nous connaissons parfaitement les paramètres, nous faisons l'analyse “automatique” en boucle ouverte du système : stabilité, commandabilité, observabilité.

Dans un premier temps, nous étudierons le système linéarisé autour d'un point de fonctionnement. Cette analyse ne fait appel qu'à des outils d'automatique linéaire. Pour analyser plus en détails la perte d'observabilité au premier ordre, nous étudierons le problème plus général de l'observabilité du système non-linéaire. Les outils ne sont guère plus compliqués ; c'est plutôt le volume de calculs qui est le critère limitant. Nous montrerons dans cette étude du système non linéaire que le système reste inobservable autour de la droite de glissement, mais qu'il est toutefois observable sur une trajectoire traversant la droite de glissement (tout en vérifiant qu'il est très mal conditionné autour de la direction inobservable au premier ordre). Pour conclure le quatrième chapitre, nous proposons un observateur fondé sur le système variant dans le temps (système linéarisé autour d'une trajectoire). Nous traitons le moteur à induction comme un exemple d'application d'une méthode générale pour la synthèse d'observateur de système variant dans le temps possédant des singularités.

La méthode proposée fait l'objet du cinquième chapitre. Initialement, nous traitons le cas d'un système mono-variable possédant des singularités de commandabilité. Nous exhibons de manière constructive un bouclage exogène qui permet de lever le problème de singularité. Nous étendons notre méthode au cas multi-variables. L'originalité de notre approche réside dans la manière constructive et minimale d'obtenir un bouclage exogène permettant de transformer un système variant dans le temps en des chaînes d'intégrateurs.

Par dualité, nous traitons le cas de l'observabilité. Mais au delà de l'existence d'un observateur non singulier, nous apportons une méthode permettant la construction d'un observateur variant dans le temps et convergeant asymptotiquement.

CHAPITRE 4

OBSERVABILITÉ DU MOTEUR À INDUCTION

4.1. Introduction

Lors de la présentation de la problématique du contrôle de la vitesse d'un moteur à induction sans capteur mécanique, nous mettions en évidence une zone en basse vitesse où les variateurs existant n'atteignent pas le niveau souhaité de performances.

Nous montrons dans ce chapitre que le modèle standard du moteur à induction est inobservables au premier ordre, i.e. que le flux et la vitesse ne peuvent pas être reconstruits à partir de la seule mesure des courants statoriques. Ce sujet a déjà été largement abordé dans [Wes94, Lub99]. Dans la continuité de ces travaux, nous présenterons une condition suffisante d'observabilité sur le système non-linéaire [CdWYB⁺00]. Nous allons un peu plus loin en montrant que le système est observable autour d'une trajectoire traversant la droite d'inobservabilité au premier ordre mais est clairement mal conditionné.

4.2. Étude du système au premier ordre

Cette partie regroupe des résultats de base sur le moteur à induction. Nous nous plaçons dans la problématique du contrôle de la vitesse d'un moteur à induction sans capteur mécanique. Nous regardons plus précisément les aspects fondamentaux d'un système : stabilité, commandabilité, observabilité. Le domaine de la basse vitesse est principalement étudié.

Nous utilisons le modèle suivant dans le repère (d, q) .

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_r}{dt} = -\left(\frac{1}{\tau_r} + j(\omega_s - \omega)\right)\varphi_r + \frac{L_m}{\tau_r}\iota_s, \\ \frac{d\iota_s}{dt} = \frac{L_m}{L_f L_r} \left(\frac{1}{\tau_r} - j\omega\right)\varphi_r - \frac{1}{L_f} \left(R_s + \frac{L_m^2}{L_r^2} R_r + jL_f \omega_s\right) \iota_s + \frac{1}{L_f} u_s, \\ J \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2} n_p^2 \frac{L_m}{L_r} \Im(\iota_s \varphi_r^*) - n_p \tau, \\ \frac{d\tau}{dt} = 0. \end{cases}$$

où la grandeur ω représente la quantité $n_p \omega_r$.

Dans la section 4.2.1, nous allons montrer que le modèle (19) possède deux points d'équilibre. De là, nous pourrons linéariser le modèle autour d'un point d'équilibre (cf. section 4.2.2) et présenter quelques résultats.

- Le système est instable à basse vitesse. La zone d'instabilité sera explicitée dans le plan couple-vitesse (cf. section 4.2.3).
- Le système est commandable (sans singularités) (cf. section 4.2.4).

- Le système est inobservable au premier ordre sur une droite du plan couple-vitesse (cf. section 4.2.5).

4.2.1. Points d'équilibre. — Les points d'équilibre du système (19) sont définis par le quadruplé $(\bar{\varphi}_r, \bar{i}_s, \bar{\omega}, \bar{\tau})$ pour une commande $(\bar{\omega}_s, \bar{u}_s)$.

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\frac{1}{\tau_r} + j(\bar{\omega}_s - \bar{\omega})\right)\bar{\varphi}_r + \frac{L_m}{\tau_r}\bar{i}_s, \\ 0 &= \frac{L_m}{L_f L_r}\left(\frac{1}{\tau_r} - j\bar{\omega}\right)\bar{\varphi}_r - \frac{1}{L_f}\left(R_s + \frac{L_m^2}{L_r^2}R_r + jL_f\bar{\omega}_s\right)\bar{i}_s + \frac{1}{L_f}u_s, \\ 0 &= \frac{3}{2}n_p^2 \frac{L_m}{L_r} \Im(\bar{i}_s \bar{\varphi}_r^*) - n_p \bar{\tau}. \end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que nous avons trois relations pour six grandeurs. Il y a donc plusieurs manières d'exprimer les points d'équilibre. La première, qui s'apparente à de la génération de trajectoire, consiste à s'imposer des consignes de flux, de vitesse et de charge et de calculer les valeurs de courant, de tension et de pulsation statorique correspondantes. La seconde se rapproche de la boucle ouverte. Nous imposons les commandes (la tension, la pulsation statorique) et la charge afin d'en déduire les grandeurs d'état de flux, de courant et de vitesse. C'est par ce second cas que nous mettrons en évidence deux points d'équilibre.

En fonction du flux $\bar{\varphi}_r$, de la vitesse $\bar{\omega}$ et de la charge $\bar{\tau}$, nous obtenons la valeur des points d'équilibre :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_s &= \bar{\omega} + \frac{R_r}{\frac{3}{2}n_p^2 \bar{\varphi}_r \bar{\varphi}_r^*} n_p \bar{\tau}, \\ \bar{i}_s &= \frac{1}{L_m} (1 + j(\bar{\omega}_s - \bar{\omega})\tau_r) \bar{\varphi}_r, \\ u_s &= \left(j \frac{L_m}{L_r} \bar{\omega}_s + \frac{1}{L_m} (R_s + jL_f \bar{\omega}_s) (1 + j(\bar{\omega}_s - \bar{\omega})\tau_r) \right) \bar{\varphi}_r. \end{aligned}$$

En fonction de la tension \bar{u}_s , de la pulsation $\bar{\omega}_s$ et de la charge $\bar{\tau}$, (en régime établi) le système (19) nous donne les relations :

$$\begin{aligned} \varphi_r &= \frac{L_m}{(R_s + j\bar{\omega}_s L_s)(1 + j\omega_g \tau_r) + \bar{\omega}_s \frac{L_m^2}{L_r} \omega_g \tau_r} \bar{u}_s, \\ i_s &= \frac{1 + j\omega_g \tau_r}{(R_s + j\bar{\omega}_s L_s)(1 + j\omega_g \tau_r) + \bar{\omega}_s \frac{L_m^2}{L_r} \omega_g \tau_r} \bar{u}_s, \\ \omega_g &= \bar{\omega}_s - \omega, \\ \bar{\tau} &= \frac{3}{2}n_p \frac{\omega_g}{R_r} |\varphi_r|^2 = \frac{3}{2}n_p L \frac{\omega_g \tau_r}{(R_s - \bar{\omega}_s L_f \omega_g \tau_r)^2 + (\bar{\omega}_s L_s + R_s \omega_g \tau_r)^2} |\bar{u}_s|^2. \end{aligned}$$

La dernière relation est une équation implicite en la vitesse de glissement ω_g . Nous obtenons un trinôme du second degré

$$(R_s^2 + L_f^2 \bar{\omega}_s^2)(\omega_g \tau_r)^2 + \left(2LR_s \bar{\omega}_s - \frac{\frac{3}{4}n_p L |\bar{u}_s|^2}{\bar{\tau}}\right)(\omega_g \tau_r) + (R_s^2 + L_s^2 \bar{\omega}_s^2) = 0.$$

qui fait apparaître deux solutions possibles.

$$(20) \quad \omega_g \tau_r = \frac{\frac{3}{4}n_p L |\bar{u}_s|^2}{R_s^2 + L_f^2 \bar{\omega}_s^2} - LR_s \bar{\omega}_s + \epsilon \sqrt{\left(\frac{\frac{3}{4}n_p L |\bar{u}_s|^2}{\bar{\tau}} - LR_s \bar{\omega}_s\right)^2 - \frac{R_s^2 + L_s^2 \bar{\omega}_s^2}{R_s^2 + L_f^2 \bar{\omega}_s^2}}.$$

	$(\bar{u}_s, \bar{\omega}_s, \bar{\tau})$ (310V, 50Hz, 25Nm)		$(\bar{u}_s, \bar{\omega}_s, \bar{\tau})$ (35V, 2Hz, 40Nm)	
ϵ	-	+	-	+
ω	48.53	-36.72	0.95	-0.11
$ \varphi_r $	0.902	0.117	1.349	0.950
$ \iota_s $	11.24	73.80	13.50	15.83

Table 1 – Exemples de points d'équilibre.

avec $\epsilon = \pm 1$. Le choix de ϵ permet d'obtenir la vitesse de glissement et ainsi de remonter aux grandeurs de vitesse, de flux et de courant. Il est intéressant de remarquer que pour une tension et une charge données, deux points de fonctionnement sont possibles. Nous étudions dans la section 4.2.3 la stabilité de ces points d'équilibre. Dans le tableau 1, nous trouvons deux applications numériques. Nous imposons une tension, une pulsation et une charge, et nous calculons les vitesses, les flux et les courants. Dans le premier cas, à gauche, (les grandeurs correspondent à un fonctionnement nominal), les points d'équilibre sont très éloignés. Le point de fonctionnement "naturel" correspond au choix $\epsilon = -1$. Dans le second cas, à droite, les valeurs étant plus proches, il semble plus difficile d'opter pour l'un ou l'autre des points d'équilibres par avance.

Regardons maintenant ce qu'il advient quand nous choisissons un point de référence dans le plan couple-vitesse. Nous choisissons un flux, une vitesse, une charge. Nous avons exprimé au début de cette section la tension et la pulsation correspondant. Regardons maintenant les valeurs des points d'équilibre qui correspondent à ces valeurs. Remplaçons dans (20) les grandeurs \bar{u}_s , $\bar{\omega}_s$ et $\bar{\tau}$ par leurs valeurs. Nous obtenons ainsi

$$\omega_g \tau_r = \begin{cases} \bar{\omega}_g \tau_r, & \text{si } \epsilon = \text{signe} \left(\frac{(\bar{\omega}_g \tau_r)^2 - \frac{R_s^2 + L_s^2 \bar{\omega}_s^2}{R_s^2 + L_f^2 \bar{\omega}_s^2}}{\bar{\omega}_g \tau_r} \right), \\ \frac{R_s^2 + L_s^2 \bar{\omega}_s^2}{R_s^2 + L_f^2 \bar{\omega}_s^2} \frac{1}{\bar{\omega}_g \tau_r}, & \text{si } \epsilon = -\text{signe} \left(\frac{(\bar{\omega}_g \tau_r)^2 - \frac{R_s^2 + L_s^2 \bar{\omega}_s^2}{R_s^2 + L_f^2 \bar{\omega}_s^2}}{\bar{\omega}_g \tau_r} \right). \end{cases}$$

Pour retrouver notre point de fonctionnement initial, nous voyons apparaître un régionnement du plan couple-vitesse. À vitesse donnée, quand la vitesse de glissement (i.e. le couple) est dans l'intervalle $[-\infty; -\frac{1}{\tau_r} \sqrt{\frac{R_s^2 + L_s^2 \bar{\omega}_s^2}{R_s^2 + L_f^2 \bar{\omega}_s^2}}] \cup [0; \frac{1}{\tau_r} \sqrt{\frac{R_s^2 + L_s^2 \bar{\omega}_s^2}{R_s^2 + L_f^2 \bar{\omega}_s^2}}]$, il faut choisir la solution $\epsilon = -1$, et en dehors, choisir $\epsilon = +1$. La figure 1 illustre le régionnement du plan couple-vitesse.

4.2.2. Système linéarisé. — Linéarisons le système (19) autour d'un point d'équilibre $(\bar{\varphi}_r, \bar{\iota}_s, \bar{\omega}, \bar{\tau})$.

$$(21) \quad \begin{cases} \dot{\delta\varphi} &= -\left(\frac{1}{\tau_r} + j\bar{\omega}_s - j\bar{\omega}\right)\delta\varphi + (j\bar{\varphi}_r)\delta\omega + \left(\frac{L_m}{\tau_r}\right)\delta\iota - (j\bar{\varphi}_r)\delta\omega_s \\ L_f \dot{\delta\iota} &= \frac{L_m}{L_r} \left(\frac{1}{\tau_r} - j\bar{\omega}\right)\delta\varphi - j\frac{L_m}{L_r}\bar{\varphi}_r\delta\omega + \delta u - (R_s + R_{req} + jL_f\bar{\omega}_s)\delta\iota - jL_f\bar{\iota}_s\delta\omega_s \\ \dot{\delta\omega} &= \frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_r} \text{Imag}(\bar{\varphi}_r^*\delta\iota + \bar{\iota}_s\delta\varphi^*) - \frac{n_p}{J}\delta\tau \\ \dot{\delta\tau} &= 0 \end{cases}$$

où les grandeurs δx sont définies comme suit $\delta\varphi = \varphi_r - \bar{\varphi}_r$, $\delta\iota = \iota_s - \bar{\iota}_s$, $\delta\omega = \omega - \bar{\omega}$ et $\delta\tau = \tau - \bar{\tau}$. Ce système a pour vecteur d'état $(\delta\varphi, \delta\iota, \delta\omega, \delta\tau)$ et pour commande $(\delta\omega_s, \delta u)$. Pour étudier la stabilité et la commandabilité, nous n'inclurons pas le modèle de la charge $\dot{\delta\tau} = 0$. Avant d'écrire les matrices A , B et C de la forme d'état, transformons le système (21) en utilisant les grandeurs

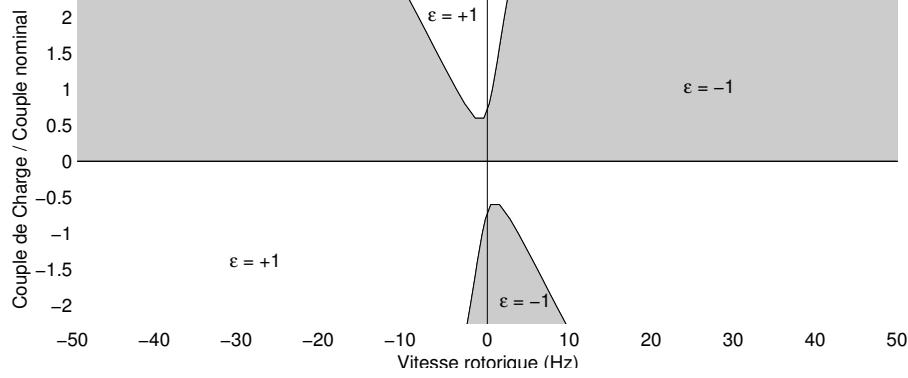


Figure 1 – Régionnement du plan couple vitesse pour le choix du point d'équilibre.

$(\delta\varphi_d, \delta\varphi_q, \delta\iota_d, \delta\iota_q, \delta\omega, \delta\tau)$ où $\delta\varphi_d + j\delta\varphi_q = \delta\varphi$, $\delta\iota_d + j\delta\iota_q = \delta\iota$. De plus, sans perte de généralité, nous choisissons un point d'équilibre de la forme :

$$\begin{aligned} \omega_g &= \frac{2R_r}{3n_p\bar{\varphi}^2}\bar{\tau}, & \bar{\varphi}_d &= \bar{\varphi}, & \bar{\iota}_d &= \frac{\bar{\varphi}}{L_m}, \\ \omega_s &= \omega + \omega_g, & \bar{\varphi}_q &= 0, & \bar{\iota}_q &= \frac{\bar{\varphi}}{L_m}\omega_g\tau_r, \end{aligned}$$

cest-à-dire, où nous avons placé le flux uniquement sur l'axe d.

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\delta\varphi}_d & = & -\frac{1}{\tau_r}\delta\varphi_d + (\bar{\omega}_s - \bar{\omega})\delta\varphi_q + \frac{L_m}{\tau_r}\delta\iota_d \\ \dot{\delta\varphi}_q & = & -(\bar{\omega}_s - \bar{\omega})\delta\varphi_d - \frac{1}{\tau_r}\delta\varphi_q + \bar{\varphi}\delta\omega + \frac{L_m}{\tau_r}\delta\iota_q - \bar{\varphi}\delta\omega_s \\ \dot{\delta\iota}_d & = & \frac{L_m}{L_f L_r \tau_r}\delta\varphi_d + \frac{L_m}{L_f L_r}\bar{\omega}\delta\varphi_q + \frac{1}{L_f}\delta u_d - \frac{R_s + R_{req}}{L_f}\delta\iota_d + \bar{\omega}_s\delta\iota_q + \bar{\iota}_q\delta\omega_s \\ \dot{\delta\iota}_q & = & -\frac{L_m}{L_f L_r}\bar{\omega}\delta\varphi_d + \frac{L_m}{L_f L_r}\delta\varphi_q - \frac{L_m}{L_f}\bar{\varphi}\delta\omega + \frac{1}{L_f}\delta u_q - \bar{\omega}_s\delta\iota_d - \frac{R_s + R_{req}}{L_f}\delta\iota_q - \bar{\iota}_d\delta\omega_s \\ \dot{\delta\omega} & = & \frac{3n_p^2}{2J}\frac{L_m}{L_r}(\bar{\varphi}\delta\iota_q + \bar{\iota}_q\delta\varphi_d - \bar{\iota}_d\delta\varphi_q) - \frac{n_p}{J}\delta\tau \\ \dot{\delta\tau} & = & 0 \end{array} \right.$$

Les matrices de la forme d'état

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

se lisent sur le système précédent. Les vecteurs x , u et y représentent respectivement les états, les commandes et les mesures.

$$x = (\delta\varphi_d \quad \delta\varphi_q \quad \delta\iota_d \quad \delta\iota_q \quad \delta\omega \quad \delta\tau)^T, \quad y = (\delta\iota_d \quad \delta\iota_q)^T, \quad u = (\delta\omega_s \quad \delta u_d \quad \delta u_q)^T.$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & \bar{\omega}_g & \frac{L_m}{\tau_r} & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\omega}_g & -\frac{1}{\tau_r} & 0 & \frac{L_m}{\tau_r} & \bar{\varphi} & 0 \\ \frac{L_m}{L_f L_r \tau_r} & \frac{L_m}{L_f L_r} \bar{\omega} & -\frac{R_s + R_{req}}{L_f} & \bar{\omega}_s & 0 & 0 \\ -\frac{L_m}{L_f L_r} \bar{\omega} & \frac{L_m}{L_f L_r} & -\bar{\omega}_s & -\frac{R_s + R_{req}}{L_f} & -\frac{L_m}{L_f L_r} \bar{\varphi} & 0 \\ \frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_r} \bar{\iota}_q & -\frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_r} \bar{\iota}_d & 0 & \frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_r} \bar{\varphi} & 0 & -\frac{n_p}{J} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

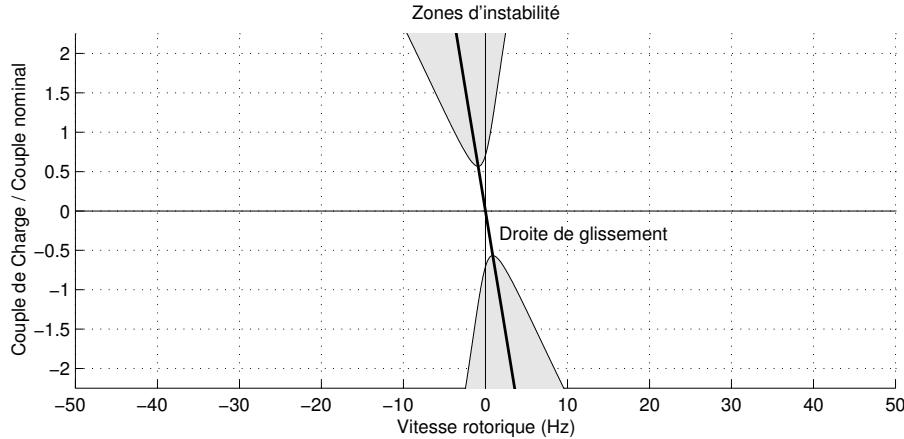


Figure 2 – Régionnement du plan couple-vitesse. Les zones grisées représentent les ensembles des points de fonctionnement pour lesquels le système est instable. Nous reviendrons dans la section 4.2.5 sur l'équation de la droite de glissement.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\varphi} & 0 & 0 \\ \bar{\imath}_q & \frac{1}{L_f} & 0 \\ -\bar{\imath}_d & 0 & \frac{1}{L_f} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2.3. Stabilité. — Pour étudier la stabilité locale du système, comme nous l'avons dit dans la section précédente, nous ne tenons pas compte de la dynamique de la charge. Regardons les valeurs propres de la matrice A . Le système est stable si les cinq valeurs propres sont à parties réelles négatives. Une conséquence (plus faible) est que si le déterminant de la matrice A est positif, le système est instable. L'étude du signe du déterminant nous donne une bonne indication sur le domaine d'instabilité. Il est aisé de vérifier que le déterminant de A vaut

$$\Delta_A = \frac{3n_p^2}{2JL_rL_f^2}\bar{\varphi}^2 \left((\bar{\omega}_g\tau_r)^2 \left(R_s^2 + (L_f\bar{\omega}_s)^2 \right) - \left(R_s^2 + (L_s\bar{\omega}_s)^2 \right) \right).$$

Le déterminant s'annule sur la courbe

$$\bar{\omega}_g\tau_r = \pm \sqrt{\frac{R_s^2 + (L_s\bar{\omega}_s)^2}{R_s^2 + (L_f\bar{\omega}_s)^2}}.$$

Les grandeurs $\bar{\omega}_g$ et $\bar{\omega}_s$ sont respectivement des images des grandeurs $\bar{\tau}$ et $\bar{\omega}$. Nous pouvons de cette manière tracer un domaine d'instabilité dans le plan couple-vitesse (à flux constant). La partie grisée (cf. figure 2) correspond à des points instables. Pour être plus précis, il conviendrait de calculer les valeurs propres de la matrice A , ou du moins de vérifier le critère de Routh. Le

polynôme caractéristique est du cinquième degré. Ses coefficients s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 c_5 &= -1 \\
 c_4 &= -2 \frac{R_s \tau_r + L_s}{L_f \tau_r} \\
 c_3 &= -\frac{3n_p^2}{2JL_r} \bar{\varphi}^2 \frac{L_s}{L_f} - \left(\omega_g^2 + \left(\frac{R_s + R_{r_{eq}}}{L_f} \right)^2 + \frac{4R_s + 2R_{r_{eq}}}{L_f \tau_r} + \omega_s^2 + \frac{1}{\tau_r^2} \right) \\
 c_2 &= -\frac{3n_p^2}{2JL_r} \bar{\varphi}^2 \tau_r \left(\frac{1}{\tau_r^2} + \frac{R_s + R_{r_{eq}}}{L_f} \frac{R_{r_{eq}}}{L_f} + 2 \frac{R_s + R_{r_{eq}}}{L_f \tau_r} - \omega_g^2 \right) \\
 &\quad - 2 \frac{L_s}{L_f \tau_r} \left(\frac{R_s \tau_r}{L_s} \omega_g^2 + \frac{R_s}{L_s} \frac{R_s \tau_r + L_s}{L_f \tau_r} + \omega_s^2 \right) \\
 c_1 &= -\frac{3n_p^2}{2JL_r} \bar{\varphi}^2 \frac{R_s}{L_f} \left(2 \left(1 - \omega_g^2 \tau_r^2 \right) \frac{1}{\tau_r} + \frac{L_s}{R_s} \omega_s^2 + \frac{R_s + 2R_{r_{eq}}}{L_f} \right) \\
 &\quad - \left((R_s^2 + L_s^2 \omega_s^2) + (R_s^2 + L_f^2 \omega_s^2) \omega_g^2 \tau_r^2 + 2R_{r_{eq}} R_s \tau_r^2 \omega_g \omega_s \right) \frac{1}{L_f^2 \tau_r^2} \\
 c_0 &= \frac{3n_p^2}{2JL_r} \bar{\varphi}^2 \frac{1}{\tau_r L_f^2} \left(\omega_g^2 \tau_r^2 (R_s^2 + \omega_s^2 L_f^2) - (R_s^2 + \omega_s^2 L_s^2) \right)
 \end{aligned}$$

En appliquant le critère de Routh à ce polynôme, nous pouvons mettre en évidence le nombre de valeurs propres qui sont à parties réelles positives. Nous retrouvons numériquement que, lorsque le déterminant s'annule, une valeur propre change de signe. Il faut également remarquer que pour une forte valeur du rapport $\bar{\varphi}^2/J$, une zone d'instabilité apparaît en haute vitesse (à partir de 50 Hz environ) qui correspond aux changements de signe de parties réelles de deux valeurs propres. Plus ce rapport est grand, plus cette zone s'agrandit et se déplace dans les hautes vitesses. Toutefois, à flux nominal, ce phénomène se passe pour des valeurs d'inertie inférieure à l'inertie moteur.

Si nous reprenons le tableau 1, nous pouvons mieux caractériser les points d'équilibre. Dans le premier cas, comme on s'y attendait, le point de fonctionnement pour $\epsilon = +1$ est instable, tandis que celui pour $\epsilon = -1$ est stable. Dans le second cas, qui était un peu plus délicat à traiter, nous pouvons préciser la stabilité des ceux points de fonctionnement. Le premier qui correspond à $\epsilon = -1$ est stable, tandis que le second (i.e. $\epsilon = +1$) est instable. Si nous appliquons la tension et la pulsation à partir d'un point proche du point de fonctionnement instable (correspondant à $\epsilon = +1$), nous aurons tendance à converger vers le point de fonctionnement stable ou à diverger (voir figure 3).

Illustrons la question de la stabilité des deux points d'équilibre sur un exemple. Partons du plan couple-vitesse où nous choisissons de regarder les points de fonctionnement situés sur la droite $\omega_r = 0$. Bien sûr, à ces points correspondent une tension et une pulsation. Et comme nous venons de le montrer, cette tension et cette pulsation nous fournissent deux points d'équilibre. Nous voyons (sur la figure 4) qu'une partie seulement de la droite $\omega_r = 0$ est stable. Prenons deux exemples.

- Le point U_1 . Le point de fonctionnement U_1 se situe dans la zone d'instabilité. Si nous nous écartons de ce point, nous irons soit vers le point S_1 correspondant, soit à l'infini, c'est à dire en blocage moteur.
- Le point S_2 . Le point de fonctionnement S_2 se situe dans la zone de stabilité. Si nous nous écartons de ce point, nous aurons tendance à revenir vers lui. Le second point d'équilibre, qui lui correspond, est le point instable U_2 .

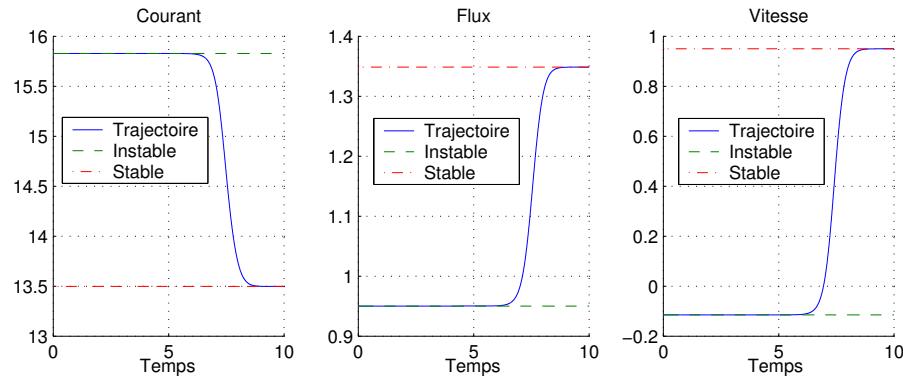


Figure 3 – Exemple d’instabilité : convergence vers le point stable correspondant.

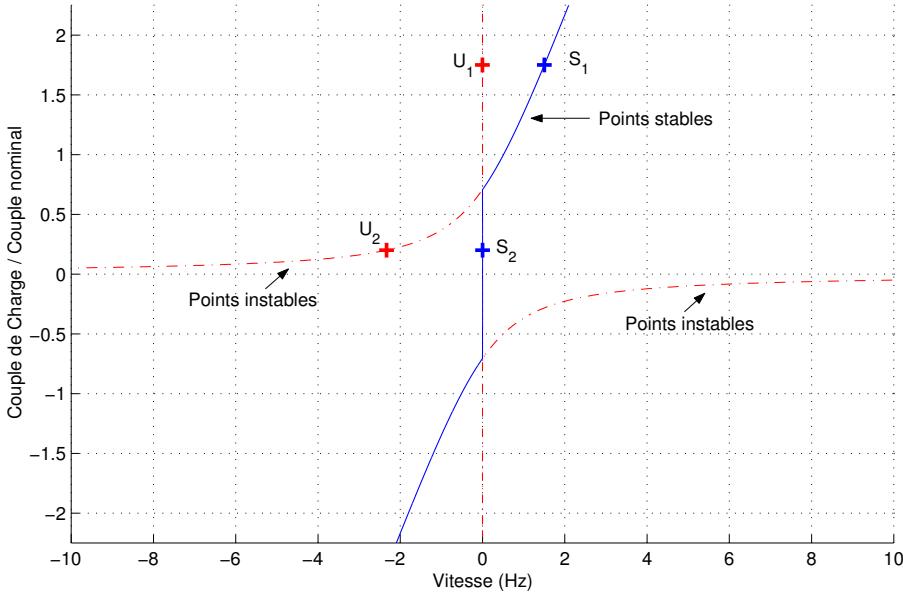


Figure 4 – Correspondance entre les points de fonctionnement

4.2.4. Commandabilité. — Pour étudier la commandabilité du système, comme nous l’avons dit dans la section précédente, nous ne tenons pas compte de la dynamique de la charge. Rappelons les matrices de la forme d’état du système.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_r} & \bar{\omega}_g & \frac{L_m}{\tau_r} & 0 & 0 \\ -\bar{\omega}_g & -\frac{1}{\tau_r} & 0 & \frac{L_m}{\tau_r} & \bar{\varphi} \\ \frac{L_m}{L_f L_r \tau_r} & \frac{L_m}{L_f L_r} \bar{\omega} & -\frac{R_s + R_{req}}{L_f} & \bar{\omega}_s & 0 \\ -\frac{L_m}{L_f L_r} \bar{\omega} & \frac{L_m}{L_f L_r \tau_r} & -\bar{\omega}_s & -\frac{R_s + R_{req}}{L_f} & -\frac{L_m}{L_f L_r} \bar{\varphi} \\ \frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_r} \frac{\omega_g \tau_r}{L_m} \bar{\varphi} & -\frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_r} \frac{1}{L_m} \bar{\varphi} & 0 & \frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_r} \bar{\varphi} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\varphi} & 0 & 0 \\ \frac{\omega_g \tau_r}{L_m} \bar{\varphi} & \frac{1}{L_f} & 0 \\ -\frac{1}{L_m} \bar{\varphi} & 0 & \frac{1}{L_f} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le critère de commandabilité des systèmes linéaires invariants s'applique simplement dans notre cas. Calculons la matrice :

$$\mathcal{O}_{AB} = [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^4B]$$

Dans un premier temps, nous calculons le produit AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & \frac{L_m}{L_f \tau_r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_m}{L_f \tau_r} \\ -\frac{\bar{\varphi}}{L_f L_m} (L_s \bar{\omega}_s + R_s \omega_g \tau_r) & -\frac{R_s + R_{req}}{L_f^2} & \frac{\bar{\omega}_s}{L_f} \\ \frac{\bar{\varphi}}{L_f L_m} (R_s - \omega_s \omega_g \tau_r L_f) & -\frac{\bar{\omega}_s}{L_f} & -\frac{R_s + R_{req}}{L_f^2} \\ 0 & 0 & \frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_f L_r} \bar{\varphi} \end{pmatrix}.$$

Pour étudier le rang de la matrice de commandabilité, nous pouvons nous limiter à une matrice semblable à la matrice \mathcal{O}_{AB} . Avec le calcul précédent, nous obtenons la matrice

$$[B \ AB] \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L_m}{L_f \tau_r} & 0 \\ -\bar{\varphi} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L_m}{L_f \tau_r} \\ \frac{1}{L_m} \bar{\omega}_g \tau_r \bar{\varphi} & \frac{1}{L_f} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_m} \bar{\varphi} & 0 & \frac{1}{L_f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_f L_r} \bar{\varphi} \end{pmatrix}$$

qui est de rang plein. Il n'est donc pas utile d'approfondir le calcul de la matrice de commandabilité. Le système est commandable indépendamment du point d'équilibre choisi.

4.2.5. Observabilité. — Dans cette partie, nous montrons que le moteur à induction est inobservable au premier ordre autour d'un point d'équilibre (cf. section 4.2.1) sous la condition supplémentaire $\bar{\omega}_s = 0$. Nous en donnons une interprétation géométrique dans le plan couple-vitesse. En conclusion de cette partie, nous donnons également une expression de la direction inobservable et nous montrons que la partie inobservable est instable.

Observabilité. — Le critère d'observabilité des systèmes linéaires invariants s'applique dans notre cas. Repartons du système (21). Utilisons cette fois un vecteur d'état incluant la dynamique de la charge. Nous allons montrer que le couple de charge ne change pas la propriété d'observabilité.

Calculons la matrice :

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{L_m}{L_f L_r \tau_r} & \frac{L_m}{L_f L_r} \bar{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{L_m}{L_f L_r} \bar{\omega} & \frac{L_m}{L_f L_r \tau_r} & 0 & 0 & -\frac{L_m}{L_f L_r} \bar{\varphi}_d & 0 \\ -\frac{L_m}{L_f L_r} \bar{\omega} \bar{\omega}_s & \frac{L_m}{L_f L_r \tau_r} \bar{\omega}_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L_m}{L_f L_r} \frac{n_p}{J} \bar{\varphi}_d \end{pmatrix}.$$

Le rang de $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$ est 6 excepté lorsque $\omega_s = 0$, où il est 5. Il en est de même pour la matrice \mathcal{O}_{CA} . Pour s'en convaincre, regardons une autre approche qui amène au même résultat.

Le système est observable si les grandeurs s'obtiennent en fonction des mesures et de leurs dérivées. Il en découle que le rang du système formé des mesures et de ces dérivées donnent un critère d'observabilité. Reprenons le système (21).

$$\frac{L_r L_f}{L_m} \dot{\delta i} = \left(\frac{1}{\tau_r} - j\bar{\omega} \right) \delta\varphi - j\bar{\varphi} \delta\omega + f_1(\delta i, \delta\omega_s, \delta u)$$

Le flux s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \dot{\delta\varphi} &= - \left(\frac{1}{\tau_r} + j\bar{\omega}_s - j\bar{\omega} \right) \delta\varphi + j\bar{\varphi} \delta\omega + f_2(\delta i, \delta\omega_s) \\ &= -j\bar{\omega}_s \delta\varphi + f_3(\delta i, \delta\omega_s, \delta u, \dot{\delta i}) \end{aligned}$$

Écrivons la dérivée seconde du courant :

$$\begin{aligned} \frac{L_r L_f}{L_m} \ddot{\delta i} &= \left(\frac{1}{\tau_r} - j\bar{\omega} \right) \dot{\delta\varphi} - j\bar{\varphi} \dot{\delta\omega} + f_4(\delta i, \delta\omega_s, \delta u, \dot{\delta i}, \dot{\delta\omega}_s, \dot{\delta u}) \\ (23) \quad &= -j\omega_s \left(\frac{1}{\tau_r} - j\bar{\omega} \right) \delta\varphi - j\bar{\varphi} \dot{\delta\omega} + f_5(\delta i, \delta\omega_s, \delta u, \dot{\delta i}, \dot{\delta\omega}_s, \dot{\delta u}) \\ &= \omega_s \bar{\varphi} \delta\omega - j\bar{\varphi} \dot{\delta\omega} + f_6(\delta i, \delta\omega_s, \delta u, \dot{\delta i}, \dot{\delta\omega}_s, \dot{\delta u}) \end{aligned}$$

La grandeur $\dot{\delta\omega}$ est réelle et vaut

$$\dot{\delta\omega} = \frac{3n_p^2}{2J} \frac{1}{L_r} (\bar{\omega}_g \tau_r \delta\varphi_d - \delta\varphi_q) - \frac{n_p}{J} \delta\tau + g_0(\delta i)$$

Remarquons avant de conclure que $\delta\omega^{(n)}$, pour $n \geq 2$, est un produit de ω_s et d'une fonction des grandeurs. Comme il en est de même pour $\delta\varphi$, il est clair que pour $n \geq 3$:

$$\delta i^{(n)} = \omega_s f(\delta\varphi) + g(\delta i^{(k)}, \delta u^{(k)}, \delta\omega_s^{(k)}), \quad k < n$$

Les dérivées de la mesure n'apportent plus d'information à $\omega_s = 0$. La perte d'observabilité à $\omega_s = 0$ se démontre à partir de l'équation (23). En excluant le cas où le flux est identiquement nul, nous avons la relation

$$\omega_s \delta\omega - j\dot{\delta\omega} = f_7(\delta i, \delta\omega_s, \delta u, \dot{\delta i}, \dot{\delta\omega}_s, \dot{\delta u}, \ddot{\delta i})$$

À $\omega_s = 0$, la partie réelle ne fournit aucune information et le rang de la matrice d'observabilité chute de 1.

Interpretation géométrique. — À $\omega_s = 0$, le système linéarisé tangent est donc inobservable. Le couple de charge $\tau_{\omega_s=0}$ vaut $\frac{3n_p}{2} \text{Imag}(\bar{i}\bar{\varphi}^*)$. En remplaçant la valeur de \bar{i} en fonction de $\bar{\varphi}$, nous obtenons l'expression :

$$\tau_{\omega_s=0} = -\bar{\omega} \frac{3n_p}{2R_r} \bar{\varphi} \bar{\varphi}^*$$

Dans le cadre de la variation de vitesse, il est commun de travailler à flux constant quelle que soit la vitesse rotorique. La relation entre le couple et la vitesse rotorique devient indépendante des grandeurs électriques :

$$\tau_{\omega_s=0} = -\frac{\bar{\omega}}{\omega_{g_{nom}}} C_{nom}$$

Stabilité de la grandeur inobservable. — D'après le calcul précédent, le système est inobservable à $\omega_s = 0$ au premier ordre. Nous allons montrer que sa partie inobservable n'est pas stable. Reprenons le système (22)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\delta\varphi_d} & = & -\frac{1}{\tau_r}\delta\varphi_d + (\bar{\omega}_s - \bar{\omega})\delta\varphi_q + \frac{L_m}{\tau_r}\delta\iota_d \\ \dot{\delta\varphi_q} & = & -(\bar{\omega}_s - \bar{\omega})\delta\varphi_d - \frac{1}{\tau_r}\delta\varphi_q + \bar{\varphi}\delta\omega + \frac{L_m}{\tau_r}\delta\iota_q - \bar{\varphi}\delta\omega_s \\ \dot{\delta\iota_d} & = & \frac{L_m}{L_r L_f \tau_r}\delta\varphi_d + \frac{L_m}{L_r L_f}\bar{\omega}\delta\varphi_q + \frac{1}{L_f}\delta u_d - \frac{R_s + R_{req}}{L_f}\delta\iota_d + \bar{\omega}_s\delta\iota_q + \bar{\iota}_q\delta\omega_s \\ \dot{\delta\iota_q} & = & -\frac{L_m}{L_r L_f}\bar{\omega}\delta\varphi_d + \frac{L_m}{L_r L_f \tau_r}\delta\varphi_q - \frac{L_m}{L_r L_f}\bar{\varphi}\delta\omega + \frac{1}{L_f}\delta u_q - \bar{\omega}_s\delta\iota_d - \frac{R_s + R_{req}}{L_f}\delta\iota_q - \bar{\iota}_d\delta\omega_s \\ \dot{\delta\omega} & = & \frac{3n_p^2}{2J}\frac{L_m}{L_r}(\bar{\varphi}\delta\iota_q + \bar{\iota}_q\delta\varphi_d - \bar{\iota}_d\delta\varphi_q) - \frac{n_p}{J}\delta\tau \\ \dot{\delta\tau} & = & 0 \end{array} \right.$$

et écrivons, en isolant les parties connues, dépendantes de la mesure et des commandes uniquement. Dans un premier temps, la dynamique des courants nous fournit les deux relations suivantes.

$$\begin{aligned} \dot{\delta\iota_d} &= \frac{L_m}{L_r L_f \tau_r}(\delta\varphi_d + \bar{\omega}\tau_r\delta\varphi_q) + \frac{1}{L_f}\delta u_d - \frac{R_s + R_{req}}{L_f}\delta\iota_d + \bar{\omega}_s\delta\iota_q + \bar{\iota}_q\delta\omega_s \\ \dot{\delta\iota_q} &= \frac{L_m}{L_r L_f}(-\bar{\omega}\tau_r\delta\varphi_d + \delta\varphi_q - \bar{\varphi}\tau_r\delta\omega) + \frac{1}{L_f}\delta u_q - \bar{\omega}_s\delta\iota_d - \frac{R_s + R_{req}}{L_f}\delta\iota_q - \bar{\iota}_d\delta\omega_s \end{aligned}$$

Définissons les grandeurs δz_d et δz_q au regard des équations précédentes. Posons :

$$\begin{aligned} \delta z_d &= \delta\varphi_d + \bar{\omega}\tau_r\delta\varphi_q \\ \delta z_q &= -\bar{\omega}\tau_r\delta\varphi_d + \delta\varphi_q - \bar{\varphi}\tau_r\delta\omega \end{aligned}$$

Ces variables sont des fonctions des grandeurs connues : des courants, de leurs dérivées, et des commandes. Écrivons leurs dynamiques.

$$\begin{aligned} \dot{\delta z_d} &= \omega_s\varphi\tau_r\delta\omega + \left(-\frac{1}{\tau_r}\delta z_d + \bar{\omega}_g\delta z_q + \frac{L_m}{\tau_r}\delta\iota_d + L_m\bar{\omega}\delta\iota_q - \bar{\omega}\tau_r\bar{\varphi}\delta\omega_s \right) \\ \dot{\delta z_q} &= -\frac{n_p}{J}\bar{\varphi}\tau_r \left(\delta\tau + \frac{3n_p\bar{\varphi}}{2L_r}(\bar{\omega}_g\tau_r\delta\varphi_d - \delta\varphi_q) \right) + \left(-\bar{\omega}_g\delta z_d - \frac{1}{\tau_r}\delta z_q - \bar{\omega}L_m\delta\iota_d + \frac{L_m}{\tau_r}\delta\iota_q - \frac{3n_p^2\bar{\varphi}^2}{2J}\frac{R_r}{R_s}\delta\iota_q - \bar{\varphi}\delta\omega_s \right) \end{aligned}$$

Les relations précédentes nous amènent à définir la variable δp_q issue de la dérivée de la grandeur δz_q .

$$\delta p_q = \delta\tau + \frac{3n_p\bar{\varphi}}{2L_r}(\bar{\omega}_g\tau_r\delta\varphi_d - \delta\varphi_q)$$

Résumons ces calculs par le changement de variable suivant.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \delta\iota_d \\ \tilde{x}_2 &= \delta\iota_q \\ \tilde{x}_3 &= \delta\varphi_d + \bar{\omega}\tau_r\delta\varphi_q \\ \tilde{x}_4 &= -\bar{\omega}\tau_r\delta\varphi_d + \delta\varphi_q - \bar{\varphi}\tau_r\delta\omega \\ \tilde{x}_5 &= \delta\tau + \frac{3n_p\bar{\varphi}}{2L_r}(\bar{\omega}_g\tau_r\delta\varphi_d - \delta\varphi_q) \end{aligned}$$

Choisissons une variable \tilde{x}_6

$$\tilde{x}_6 = \alpha_1\delta\iota_d + \alpha_2\delta\iota_q + \alpha_3\delta\varphi_d + \alpha_4\delta\varphi_q + \alpha_5\delta\omega + \alpha_6\delta\tau$$

de manière à ce que le vecteur $(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6)$ soit orthogonal à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \bar{\omega}\tau_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\omega}\tau_r & 1 & -\bar{\varphi}\tau_r & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3n_p\bar{\varphi}}{2L_r}\bar{\omega}_g\tau_r & -\frac{3n_p\bar{\varphi}}{2L_r} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une solution est

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -\frac{\bar{\omega}\tau_r}{1 + \bar{\omega}^2\tau_r^2}\bar{\varphi}\tau_r, \quad \alpha_4 = \frac{1}{1 + \bar{\omega}^2\tau_r^2}\bar{\varphi}\tau_r, \quad \alpha_5 = 1, \quad \alpha_6 = \frac{-1 + \bar{\omega}^2\tau_r^2}{1 + \bar{\omega}^2\tau_r^2}\frac{3n_p\bar{\varphi}^2}{2R_r}.$$

Nous pouvons désormais définir la matrice P de changement de variables

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \bar{\omega}\tau_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\omega}\tau_r & 1 & -\bar{\varphi}\tau_r & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3n_p\bar{\varphi}}{2L_r}\bar{\omega}_g\tau_r & -\frac{3n_p\bar{\varphi}}{2L_r} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{\omega}\tau_r}{1 + \bar{\omega}^2\tau_r^2}\bar{\varphi}\tau_r & \frac{1}{1 + \bar{\omega}^2\tau_r^2}\bar{\varphi}\tau_r & 1 & \frac{-1 + \bar{\omega}^2\tau_r^2}{1 + \bar{\omega}^2\tau_r^2}\frac{3n_p\bar{\varphi}^2}{2R_r} \end{pmatrix}$$

Reprenant le système 22, le vecteur \tilde{x} possède la dynamique suivante :

$$\dot{\tilde{x}} = PAP^{-1}\tilde{x} + PBu, \quad y = Cx.$$

Posons la matrice \tilde{A} égale à PAP^{-1} . Arrêtons nous sur la sixième colonne.

$$\tilde{A}(6) = 4 \frac{L_r R_r \bar{\varphi} (R_r^2 + \bar{\omega}^2 L_r^2) \omega_s}{D} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_r^2 + \bar{\omega}^2 L_r^2 \\ 0 \\ -\frac{3}{2}\bar{\varphi} n_p R_r (\omega_s - 2\omega) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$D = 4R_r^2 (R_r^2 + \bar{\omega}^2 L_r^2)^2 + 9n_p^2 \bar{\varphi}^4 (R_r^2 - \bar{\omega}^2 L_r^2)^2 + 9n_p^2 \bar{\varphi}^4 \omega_s \bar{\omega} L_r^2 (R_r^2 - L_r^2 \bar{\omega}^2) + 4R_r^2 \bar{\varphi}^2 L_r^2 (\bar{\omega}^2 L_r^2 + R_r^2)$$

Pour $\omega_s = 0$, la grandeur x_6 n'est pas observable. En effet, la sixième colonne de la matrice \tilde{A} est nulle dans ce cas.

De l'étude de la stabilité effectuée précédemment, nous déduisons que dans une zone autour de la droite d'inobservabilité (cf. étude de la stabilité) une combinaison des grandeurs x_i , pour $i \in [1; 5]$ est instable. Posons la matrice \tilde{P} , la matrice de changement de variables diagonalisant la matrice carrée de dimension 5 extraite de la matrice \tilde{A} , et de telle manière que la valeur instable se retrouve sur la première ligne. Si nous posons la matrice de changement de coordonnées

$$Q = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & \tilde{P} & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

et les matrices $\tilde{A} = Q^{-1}\tilde{A}Q$ et $\tilde{B} = Q^{-1}\tilde{B}$, le système devient

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \quad y = CQ\tilde{x}.$$

où $\tilde{\tilde{x}} = Q^{-1}\tilde{x}$. La dynamique inobservable $\tilde{\tilde{x}}_6$ est instable si et seulement si le terme correspondant à la dynamique instable apparaît dans sa dynamique. Numériquement, il est simple de vérifier que c'est le cas, i.e. que le premier terme de la sixième ligne est non nul.

4.2.6. Conclusions et approfondissements. — Dans Cette section, nous avons étudié le système linéarisé au premier ordre autour d'un point d'équilibre. Nous avons retrouvé que le système est

- commandable en tout point,
- observable en presque tout point, excepté sur une droite de "glissement" $\tau = -\frac{\bar{\omega}}{\omega_{g_{nom}}} C_{nom}$ (équivalente à $\omega_s = 0$) du plan couple-vitesse,
- stable sur une large zone utile du plan-couple vitesse, mais instable sur une zone en basse vitesse autour de la droite de "glissement".

La voie d'approfondissement logique est de s'intéresser à des systèmes plus complets (i.e. en boucle fermé) que le système en boucle ouverte. Nous présentons ci-dessous uniquement les résultats sur des figures dans le plan couple-vitesse.

- Nous considérons que le moteur est commandé en courant. Le système est stable si la quantité $\omega_g \tau_r$ est comprise entre -1 et $+1$. En effet, dans le plan couple-vitesse une des valeurs propres du système change de signe sur les droites $\tau = \pm \frac{3n_p |\varphi_r|^2}{2L_r}$.
- Nous avons étudié⁽¹⁾ également un système en boucle fermé, comprenant le moteur à induction, un observateur de flux et de vitesse, et le contrôleur (boucle de flux et de vitesse). Lorsque les paramètres sont parfaitement connus, le système bouclé est stable dans le plan couple-vitesse, excepté sur la droite de glissement où il est marginalement stable (i.e. une valeur propre s'annule). Toutefois, des zones de non-stabilité apparaissent lorsque les résistances sont mal-connues. La figure 5 montre les deux cas suivant :
 - Si les résistances sont sous-estimées, le point d'équilibre n'est plus défini autour d'une partie de la droite de glissement, pour une charge, en valeur absolue, supérieure, à $\frac{3n_p |\varphi_r|^2}{2L_r}$. Le système est instable. Nous nous retrouvons dans un cas similaire de celui en boucle ouverte (avec une zone d'instabilité plus étroite).
 - Si les résistances sont sur-estimées, le point d'équilibre n'est plus défini autour d'une partie de la droite de glissement, pour une charge, en valeur absolue, inférieure, à $\frac{3n_p |\varphi_r|^2}{2L_r}$. La zone d'"instabilité" est centrée sur l'origine du plan couple-vitesse.

4.3. Observabilité du système non-linéaire

Pour aller un pas plus loin que l'étude au premier ordre, nous nous intéressons à l'observabilité du système non-linéaire. Dans l'étude au premier ordre, nous nous intéressons qu'à la dérivée d'ordre 2 de la mesure. Dans cette partie, nous allons dans un premier temps retrouver les résultats de la partie précédente (étendue au non-linéaire). Dans un second temps, nous allons regarder si les dérivées d'ordre supérieur permettent de récupérer l'observabilité non-linéaire du flux rotorique.

La notion d'observabilité est clairement décrite dans [HK77] et [Isi89]. Au delà de toutes définitions, le principe de l'observabilité est de récupérer par une combinaison des mesures et de leurs dérivées toutes les grandeurs du systèmes. Il est donc raisonnable de définir un système formé des mesures et de l'ensemble de leurs dérivées successives et d'examiner s'il est possible d'établir des propriétés d'observabilités globales ou locales autour de certains points de fonctionnement. Nous

⁽¹⁾étude confidentielle Schenider Electric

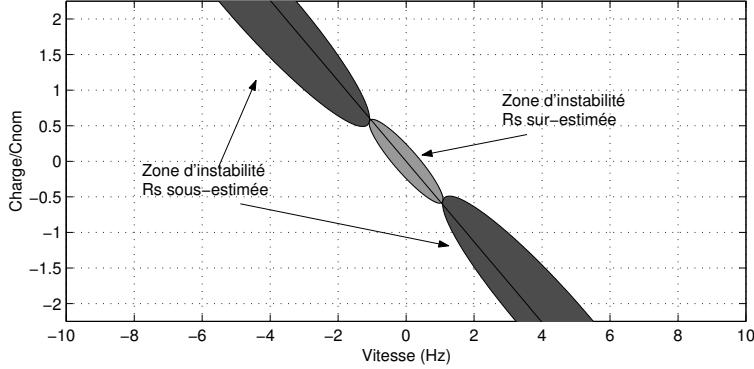


Figure 5 – Influence des paramètres sur la stabilité du système

avons déjà vu que le système linéaire tangent (approximation au premier ordre du système non-linéaire) est non observable en $\omega_s = 0$ (le flux ne tourne pas). Les conclusions sont elles identiques en non-linéaire ? Récupère-t-on l'observabilité du système à partir de dérivées d'ordre supérieur. Nous allons tâcher de répondre à ces questions. Dans ce qui suit nous nous plaçons dans le repère statorique. C'est-à-dire que les équations sont les mêmes mais ω_s n'apparaît plus.

4.3.1. Critère d'observabilité non-linéaire. — Considérons le système (24) incluant la charge. Nous sommes dans le repère fixe lié au stator. Nous utilisons également la grandeur de flux $\frac{L_m}{L_r} \varphi_r$, notée φ_r , afin de simplifier les calculs.

$$(24) \quad \begin{cases} \dot{\varphi}_r &= \left(-\frac{1}{\tau_r} + j\omega_r \right) \varphi_r + R_{r_{eq}} i_s \\ L_f i_s &= \left(\frac{1}{\tau_r} - j\omega_r \right) \varphi_r - (R_s + R_{r_{eq}}) i_s + u_s \\ \dot{\omega}_r &= \frac{3n_p^2}{2J} \text{Imag}(i_s \varphi_r^*) - \frac{n_p}{J} \tau \\ \dot{\tau} &= 0 \end{cases}$$

Le vecteur d'état est $x = [i_s^T \varphi_r^T \omega \tau]^T$. Nous allons calculer les expressions $i_s^{(n)}$ et $\mathcal{L}_n = \frac{\partial}{\partial x} i_s^{(n)}$. Le système (24) sera observable s'il existe un indice m tel que $\mathcal{L}\mathcal{A}_m = [\mathcal{L}_0^T \mathcal{L}_1^T \cdots \mathcal{L}_m^T]^T$ soit de rang plein. Clairement,

$$\mathcal{L}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reprendons le système (24) et “éclatons”-le en utilisant les parties réelle (notée d'un indice d'un indice a) et imaginaire (notée d'un indice d'un indice b).

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{r_a} &= -\frac{1}{\tau_r} \varphi_{r_a} - \omega_r \varphi_{r_b} + R_{r_{eq}} i_{s_a} \\ \dot{\varphi}_{r_b} &= -\frac{1}{\tau_r} \varphi_{r_b} + \omega_r \varphi_{r_a} + R_{r_{eq}} i_{s_b} \\ L_f i_{s_a} &= \frac{1}{\tau_r} \varphi_{r_a} + \omega_r \varphi_{r_b} - (R_s + R_{r_{eq}}) i_{s_a} + u_{s_a} \\ L_f i_{s_b} &= \frac{1}{\tau_r} \varphi_{r_b} - \omega_r \varphi_{r_a} - (R_s + R_{r_{eq}}) i_{s_b} + u_{s_b} \\ \dot{\omega}_r &= \frac{3n_p^2}{2J} (i_{s_b} \varphi_{r_a} - i_{s_a} \varphi_{r_b}) - \frac{n_p}{J} \tau \\ \dot{\tau} &= 0 \end{cases}$$

Écrivons les dérivées successives des grandeurs i_{s_a} et i_{s_b} .

$$\begin{cases} L_f i_{s_a} &= \frac{1}{\tau_r} \varphi_{r_a} + \omega_r \varphi_{r_b} - (R_s + R_{req}) i_{s_a} + u_{s_a} \\ L_f i_{s_b} &= \frac{1}{\tau_r} \varphi_{r_b} - \omega_r \varphi_{r_a} - (R_s + R_{req}) i_{s_b} + u_{s_b} \\ \\ L_f \ddot{i}_{s_a} &= \omega_r \dot{\varphi}_{r_b} + \frac{3n_p^2}{2J} (i_{s_b} \varphi_{r_a} - i_{s_a} \varphi_{r_b}) \varphi_{r_b} - \frac{n_p}{J} \tau \varphi_{r_b} + \frac{1}{\tau_r} \dot{\varphi}_{r_a} - (R_s + R_{req}) i_{s_a} + \dot{u}_{s_a} \\ L_f \ddot{i}_{s_b} &= -\omega_r \dot{\varphi}_{r_a} - \frac{3n_p^2}{2J} (i_{s_b} \varphi_{r_a} - i_{s_a} \varphi_{r_b}) \varphi_{r_a} + \frac{n_p}{J} \tau \varphi_{r_a} + \frac{1}{\tau_r} \dot{\varphi}_{r_b} - (R_s + R_{req}) i_{s_b} + \dot{u}_{s_b} \\ \\ L_f \dddot{i}_{s_a} &= \omega_r \ddot{\varphi}_{r_b} + 2 \frac{3n_p^2}{2J} (i_{s_b} \varphi_{r_a} - i_{s_a} \varphi_{r_b}) \dot{\varphi}_{r_b} - 2 \frac{n_p}{J} \tau \dot{\varphi}_{r_b} + \frac{1}{\tau_r} \ddot{\varphi}_{r_a} - (R_s + R_{req}) \ddot{i}_{s_a} + \ddot{u}_{s_a} \\ &\quad + \frac{3n_p^2}{2J} (i_{s_b} \varphi_{r_a} - i_{s_a} \varphi_{r_b} + i_{s_b} \dot{\varphi}_{r_a} - i_{s_a} \dot{\varphi}_{r_b}) \varphi_{r_b} \\ L_f \dddot{i}_{s_b} &= -\omega_r \ddot{\varphi}_{r_a} - 2 \frac{3n_p^2}{2J} (i_{s_b} \varphi_{r_a} - i_{s_a} \varphi_{r_b}) \dot{\varphi}_{r_a} + 2 \frac{n_p}{J} \tau \dot{\varphi}_{r_a} + \frac{1}{\tau_r} \ddot{\varphi}_{r_b} - (R_s + R_{req}) \ddot{i}_{s_b} + \ddot{u}_{s_b} \\ &\quad - \frac{3n_p^2}{2J} (i_{s_b} \varphi_{r_a} - i_{s_a} \varphi_{r_b} + i_{s_b} \dot{\varphi}_{r_a} - i_{s_a} \dot{\varphi}_{r_b}) \varphi_{r_a} \end{cases}$$

Écrivons maintenant \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_3 .

$$\mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R_s + R_{req}}{L_f} & 0 & \frac{1}{L_f \tau_r} & \frac{\omega_r}{L_f} & \frac{\varphi_{r_b}}{L_f} & 0 \\ 0 & -\frac{R_s + R_{req}}{L_f} & -\frac{\omega_r}{L_f} & \frac{1}{L_f \tau_r} & -\frac{\varphi_{r_a}}{L_f} & 0 \end{bmatrix}$$

Pour simplifier les calculs, nous définissons la matrice \mathcal{L}_2 bis qui est la différence entre la matrice \mathcal{L}_2 et un multiple de la matrice \mathcal{L}_1 afin d'annuler les termes des deux premières colonnes. Elle s'écrit

$$\mathcal{L}_2 \text{ bis} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3n_p^2}{2J} i_{s_b} \varphi_{r_b} & \frac{3n_p^2}{2J} (i_{s_b} \varphi_{r_a} - 2i_{s_a} \varphi_{r_b}) - \frac{n_p}{J} \tau & \dot{\varphi}_{r_b} & -\varphi_{r_b} \\ 0 & 0 & -\frac{3n_p^2}{2J} (2i_{s_b} \varphi_{r_a} - i_{s_a} \varphi_{r_b}) + \frac{n_p}{J} \tau & \frac{3n_p^2}{2J} i_{s_a} \varphi_{r_a} & -\dot{\varphi}_{r_a} & \varphi_{r_a} \end{bmatrix}$$

qui se simplifie en

$$\mathcal{L}_2 \text{ bis} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3n_p^2}{2J} i_{s_b} \varphi_{r_b} & \dot{\varphi}_r - \frac{3n_p^2}{2J} i_{s_a} \varphi_{r_b} & \dot{\varphi}_{r_b} & -\varphi_{r_b} \\ 0 & 0 & -\dot{\varphi}_r - \frac{3n_p^2}{2J} i_{s_b} \varphi_{r_a} & \frac{3n_p^2}{2J} i_{s_a} \varphi_{r_a} & -\dot{\varphi}_{r_a} & \varphi_{r_a} \end{bmatrix}.$$

De la même manière, nous définissons \mathcal{L}_3 bis à partir de \mathcal{L}_3 et \mathcal{L}_1 . Son écriture est

$$\mathcal{L}_3 \text{ bis} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3n_p^2}{2J} (2i_{s_b} \dot{\varphi}_{r_b} + i_{s_b} \varphi_{r_b}) & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{3n_p^2}{2J} (2i_{s_b} \varphi_{r_a} - i_{s_a} \varphi_{r_b} + 3i_{s_b} \dot{\varphi}_{r_a} - i_{s_a} \dot{\varphi}_{r_b}) & \dots \\ & & \frac{3n_p^2}{2J} (i_{s_b} \varphi_{r_a} - 2i_{s_a} \varphi_{r_b} + i_{s_b} \dot{\varphi}_{r_a} - 3i_{s_a} \dot{\varphi}_{r_b}) & \ddot{\varphi}_{r_b} & -2\dot{\varphi}_{r_b} \\ & & \frac{3n_p^2}{2J} (2i_{s_a} \dot{\varphi}_{r_a} + i_{s_a} \varphi_{r_a}) & -\ddot{\varphi}_{r_a} & 2\dot{\varphi}_{r_a} \end{bmatrix}$$

qui se simplifie en

$$\mathcal{L}_3 \text{ bis} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3n_p^2}{2J} (2i_{s_b} \dot{\varphi}_{r_b} + i_{s_b} \varphi_{r_b}) & \ddot{\varphi}_r - \frac{3n_p^2}{2J} (i_{s_a} \varphi_{r_b} + 2i_{s_a} \dot{\varphi}_{r_b}) & \dot{\varphi}_{r_b} & -2\dot{\varphi}_{r_b} \\ 0 & 0 & -\ddot{\varphi}_r - \frac{3n_p^2}{2J} (i_{s_b} \varphi_{r_a} + 2i_{s_b} \dot{\varphi}_{r_a}) & \frac{3n_p^2}{2J} (2i_{s_a} \dot{\varphi}_{r_a} + i_{s_a} \varphi_{r_a}) & -\ddot{\varphi}_{r_a} & 2\dot{\varphi}_{r_a} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons que \mathcal{LA}_1 est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau_r} & \omega_r & \varphi_{r_b} & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_r & \frac{1}{\tau_r} & -\varphi_{r_a} & 0 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons que \mathcal{LA}_2 est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau_r} & \omega_r & \varphi_{r_b} \\ 0 & 0 & -\omega_r & \frac{1}{\tau_r^2} & -\varphi_{r_a} \\ 0 & 0 & \frac{3n_p^2}{2J}\iota_{s_b}\varphi_{r_b} & \dot{\omega}_r - \frac{3n_p^2}{2J}\iota_{s_a}\varphi_{r_b} & \dot{\varphi}_{r_b} \\ 0 & 0 & -\dot{\omega}_r - \frac{3n_p^2}{2J}\iota_{s_b}\varphi_{r_a} & \frac{3n_p^2}{2J}\iota_{s_a}\varphi_{r_a} & -\dot{\varphi}_{r_a} \end{bmatrix}$$

Ainsi réécrit, le déterminant de \mathcal{LA}_2 vaut :

$$(25) \quad \Delta_1 = (\varphi_{r_a}^2 + \varphi_{r_b}^2) \frac{1}{\tau_r} \dot{\omega}_r + (\varphi_{r_a} \dot{\varphi}_{r_b} - \dot{\varphi}_{r_a} \varphi_{r_b}) \left(\omega_r^2 + \frac{1}{\tau_r^2} \right) = \varphi^2 \left(\frac{1}{\tau_r} \dot{\omega}_r + \left(\omega_r^2 + \frac{1}{\tau_r^2} \right) \dot{\alpha} \right)$$

où α est l'angle et φ le module du flux rotorique défini par $\varphi_r = \varphi \exp(j\alpha)$. Nous reviendrons à la fin de cette section sur l'interprétation géométrique de ce premier critère.

Il est intéressant pour poursuivre l'étude d'exhiber un vecteur du noyau de \mathcal{LA}_2 (la direction d'inobservabilité). Par exemple, ce vecteur a la forme suivante :

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_r \varphi_{r_a} - \frac{1}{\tau_r} \varphi_{r_b} \\ \frac{1}{\tau_r} \varphi_{r_a} - \omega_r \varphi_{r_b} \\ \frac{1}{\tau_r^2} + \omega_r^2 \\ \frac{\varphi_{r_a} \dot{\varphi}_{r_a} + \varphi_{r_b} \dot{\varphi}_{r_b}}{\varphi_{r_a}^2 + \varphi_{r_b}^2} \left(\frac{1}{\tau_r^2} + \omega_r^2 \right) - 2\omega_r \dot{\omega}_r - \omega_r \frac{n_p}{J} \tau - \frac{1}{\tau_r} \frac{3n_p^2}{2J} (\iota_{s_a} \varphi_{r_a} + \iota_{s_b} \varphi_{r_b}) \end{pmatrix}$$

Appliquons V à \mathcal{LA}_3 . Dans un premier temps, nous obtenons que \mathcal{LA}_3 est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau_r} & \omega_r & \varphi_{r_b} \\ 0 & 0 & -\omega_r & \frac{1}{\tau_r^2} & -\varphi_{r_a} \\ 0 & 0 & \frac{3n_p^2}{2J}\iota_{s_b}\varphi_{r_b} & \dot{\omega}_r - \frac{3n_p^2}{2J}\iota_{s_a}\varphi_{r_b} & \dot{\varphi}_{r_b} \\ 0 & 0 & -\dot{\omega}_r - \frac{3n_p^2}{2J}\iota_{s_b}\varphi_{r_a} & \frac{3n_p^2}{2J}\iota_{s_a}\varphi_{r_a} & -\dot{\varphi}_{r_a} \\ 0 & 0 & \frac{3n_p^2}{2J}(2\iota_{s_b}\dot{\varphi}_{r_b} + \iota_{s_b}\varphi_{r_b}) & \ddot{\omega}_r - \frac{3n_p^2}{2J}(i_{s_a}\varphi_{r_b} + 2i_{s_a}\dot{\varphi}_{r_b}) & \dot{\varphi}_{r_b} \\ 0 & 0 & -\ddot{\omega}_r - \frac{3n_p^2}{2J}(i_{s_b}\varphi_{r_a} + 2i_{s_b}\dot{\varphi}_{r_a}) & \frac{3n_p^2}{2J}(2i_{s_a}\dot{\varphi}_{r_a} + i_{s_a}\varphi_{r_a}) & -\ddot{\varphi}_{r_a} \end{bmatrix}$$

Calculons maintenant \mathcal{LA}_3V .

$$\mathcal{LA}_3V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\varphi_{r_a}}{\varphi_{r_a}^2 + \varphi_{r_b}^2} \Delta_1 \\ \frac{\varphi_{r_b}}{\varphi_{r_a}^2 + \varphi_{r_b}^2} \Delta_1 \\ \frac{\ddot{\varphi}_{r_a} \varphi_{r_a} + \omega_r (2\dot{\varphi}_{r_b} \dot{\varphi}_r - \varphi_{r_b} \ddot{\varphi}_r) + \left(\frac{1}{\tau_r^2} + \omega_r^2\right) \left(\ddot{\varphi}_{r_b} - 2\dot{\varphi}_{r_b} \frac{\varphi_{r_a} \dot{\varphi}_{r_a} + \varphi_{r_b} \dot{\varphi}_{r_b}}{\varphi_{r_a}^2 + \varphi_{r_b}^2}\right)}{J R_{r_{eq}}} \\ + \frac{3n_p^2}{2 J R_{r_{eq}}} \varphi_{r_b} \left(-\left(\frac{1}{\tau_r} \varphi_{r_a} - \omega \varphi_{r_b}\right) \ddot{\varphi}_{r_a} - \left(\omega \varphi_{r_a} + \frac{1}{\tau_r} \varphi_{r_b}\right) \ddot{\varphi}_{r_b} + \omega \dot{\varphi} (\varphi_{r_a}^2 + \varphi_{r_b}^2)\right) \\ + \frac{3n_p^2}{J R_{r_{eq}}} \varphi_{r_b} \left(\left(\left(\omega^2 - \frac{1}{\tau_r^2}\right) \varphi_{r_a} + \frac{\omega}{\tau_r} \varphi_{r_b}\right) \dot{\varphi}_{r_a} + \left(-\frac{\omega}{\tau_r} \varphi_{r_a} + \left(\omega^2 - \frac{1}{\tau_r^2}\right) \varphi_{r_b}\right) \dot{\varphi}_{r_b}\right) \\ \frac{\ddot{\varphi}_{r_a} \varphi_{r_b} - \omega_r (2\dot{\varphi}_{r_a} \dot{\varphi}_r - \varphi_{r_a} \ddot{\varphi}_r) - \left(\frac{1}{\tau_r^2} + \omega_r^2\right) \left(\ddot{\varphi}_{r_a} - 2\dot{\varphi}_{r_a} \frac{\varphi_{r_a} \dot{\varphi}_{r_a} + \varphi_{r_b} \dot{\varphi}_{r_b}}{\varphi_{r_a}^2 + \varphi_{r_b}^2}\right)}{J R_{r_{eq}}} \\ + \frac{3n_p^2}{2 J R_{r_{eq}}} \varphi_{r_a} \left(\left(\frac{1}{\tau_r} \varphi_{r_a} - \omega \varphi_{r_b}\right) \ddot{\varphi}_{r_a} + \left(\omega \varphi_{r_a} + \frac{1}{\tau_r} \varphi_{r_b}\right) \ddot{\varphi}_{r_b} - \omega \dot{\varphi} (\varphi_{r_a}^2 + \varphi_{r_b}^2)\right) \\ + \frac{3n_p^2}{J R_{r_{eq}}} \varphi_{r_a} \left(-\left(\left(\omega^2 - \frac{1}{\tau_r^2}\right) \varphi_{r_a} + \frac{\omega}{\tau_r} \varphi_{r_b}\right) \dot{\varphi}_{r_a} - \left(-\frac{\omega}{\tau_r} \varphi_{r_a} + \left(\omega^2 - \frac{1}{\tau_r^2}\right) \varphi_{r_b}\right) \dot{\varphi}_{r_b}\right) \end{pmatrix}$$

Le calcul direct de \mathcal{LA}_3V est fastidieux. Posons $\Delta_{2a} = \mathcal{LA}_3(7)$ et $\Delta_{2b} = \mathcal{LA}_3(8)$. Nous remarquons que $\Delta_2 = \Delta_{2a} + j\Delta_{2b}$ s'écrit de manière compacte :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \left(\frac{1}{\tau_r} + j\omega_r\right) \varphi_r \ddot{\varphi}_r - j2\omega_r \dot{\varphi}_r \dot{\varphi}_r - j\left(\frac{1}{\tau_r^2} + \omega_r^2\right) \left(\ddot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_r \overbrace{\frac{\varphi_r \varphi_r^*}{\varphi_r \varphi_r^*}}^{\dot{\varphi}_r}\right) \\ &\quad + j\frac{3n_p^2}{2 J R_{r_{eq}}} \varphi_r \left(\frac{1}{\tau_r} \varphi \ddot{\varphi} - \frac{1}{\tau_r} \varphi^2 \dot{\alpha}^2 + 2\omega \varphi \dot{\varphi} \dot{\alpha} + \omega \varphi^2 \ddot{\alpha} - \omega \dot{\varphi} \varphi^2 + 2\frac{1}{\tau_r} \omega \varphi^2 \dot{\alpha} - \left(\omega^2 - \frac{1}{\tau_r^2}\right) \varphi \dot{\varphi}\right) \end{aligned}$$

En fonction uniquement du module et de l'angle du flux rotorique, nous obtenons l'expression de Δ_2 suivante.

$$\begin{aligned} \Delta_2 e^{-j\alpha} &= \left(\frac{1}{\tau_r} + j\omega_r\right) \varphi \ddot{\varphi}_r - j2\omega_r \dot{\varphi}_r (\dot{\varphi} + j\dot{\alpha} \varphi) - j\left(\frac{1}{\tau_r^2} + \omega_r^2\right) \left(\ddot{\varphi} - \dot{\alpha}^2 \varphi + j\dot{\alpha} \varphi - 2\frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2}\right) \\ &\quad + j\frac{3n_p^2}{2 J R_{r_{eq}}} \varphi \left(\frac{1}{\tau_r} \varphi \ddot{\varphi} - \frac{1}{\tau_r} \varphi^2 \dot{\alpha}^2 + 2\omega \varphi \dot{\varphi} \dot{\alpha} + \omega \varphi^2 \ddot{\alpha} - \omega \dot{\varphi} \varphi^2 + 2\frac{1}{\tau_r} \omega \varphi^2 \dot{\alpha} - \left(\omega^2 - \frac{1}{\tau_r^2}\right) \varphi \dot{\varphi}\right) \end{aligned}$$

Il est possible de réduire les conditions Δ_2 en se plaçant dans des conditions particulières. Posons $\tilde{\Delta}_2 = \Delta_2 / \varphi_r$

- $\Delta_1 = 0$, $\dot{\varphi}_r = -\left(\omega_r^2 + \frac{1}{\tau_r^2}\right) \tau_r \omega_s$ (si $\Delta_1 \neq 0$, la question ne se pose pas).
- Le module du flux est supposé constant.

La condition devient :

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_2 &= \frac{\ddot{\omega}_r}{\tau_r} + \jmath\omega_r\dot{\omega}_r + 2\omega_r\dot{\omega}_r\omega_s + \jmath\left(\frac{1}{\tau_r^2} + \omega_r^2\right)\omega_s^2 + \left(\frac{1}{\tau_r^2} + \omega_r^2\right)\dot{\omega}_s + \jmath\frac{3n_p^2\varphi^2}{2JR_{eq}}\left(\omega_s\frac{2\omega - \omega_s}{\tau_r} + \omega(\dot{\omega}_s - \dot{\omega})\right) \\ &= \frac{\ddot{\omega}_r}{\tau_r} + 2\omega_r\dot{\omega}_r\omega_s + \left(\frac{1}{\tau_r^2} + \omega_r^2\right)\dot{\omega}_s + \jmath\left(\omega_r\ddot{\omega}_r + \left(\frac{1}{\tau_r^2} + \omega_r^2\right)\omega_s^2 + \frac{3n_p^2\varphi^2}{2JR_{eq}}\left(\omega_s\frac{2\omega - \omega_s}{\tau_r} + \omega(\dot{\omega}_s - \dot{\omega})\right)\right) \\ &= \dot{\Delta}_1 + \jmath\left(\omega_r\ddot{\omega}_r + \left(\frac{1}{\tau_r^2} + \omega_r^2\right)\omega_s^2 + \frac{3n_p^2\varphi^2}{2JR_{eq}}\left(\omega_s\frac{2\omega - \omega_s}{\tau_r} + \omega(\dot{\omega}_s - \dot{\omega})\right)\right)\end{aligned}$$

Tirons de ces calculs une première conclusion. Nous retrouvons l'expression de la "droite de glissement" en remplaçant dans (25) la valeur de $\dot{\alpha}$. À partir de l'équation de la dynamique de la vitesse, nous obtenons l'expression de la dérivée de l'angle du flux. Notons $\omega_s := \dot{\alpha}$.

$$\dot{\alpha} = \frac{2R_r J}{3n_p^2\varphi^2}\left(\dot{\omega}_r + \frac{n_p}{J}\tau\right) + \omega_r.$$

Remplaçons sa valeur dans l'expression (25) :

$$\Delta_1 = \varphi^2\left(\frac{1}{\tau_r} + \left(\omega_r^2 + \frac{1}{\tau_r^2}\right)\frac{2R_r J}{3n_p^2\varphi^2}\right)\dot{\omega}_r + \varphi^2\left(\omega_r^2 + \frac{1}{\tau_r^2}\right)\left(\frac{2R_r}{3n_p\varphi^2}\tau + \omega_r\right)$$

En régime établi, la vitesse rotorique ω_r est constante ; l'expression précédente se réduit en

$$\bar{\Delta}_1 = \frac{2R_r}{3n_p\varphi^2}\tau + \omega_r$$

qui est une équation de droite dans le plan (ω_r, τ) .

Étudions une trajectoire d'inversion sous charge, i.e. à charge constante, ($\omega_g = \text{constante}$), aller de +5 Hz à -5 Hz, peut-elle vérifier $\Delta_1 \neq 0$ ou $\dot{\Delta}_1 \neq 0$?

Pour le premier critère, Δ_1 , la réponse est simple. En effet, regardons la valeur de Δ_1 aux points de fonctionnement initial et final. Notons $\omega_{r0} = \frac{2R_r\tau}{3n_p\varphi^2}$. Par hypothèse, $\dot{\omega}_{r\text{initial}}$ = 0 et $\dot{\omega}_{r\text{finale}} = 0$. Nous obtenons :

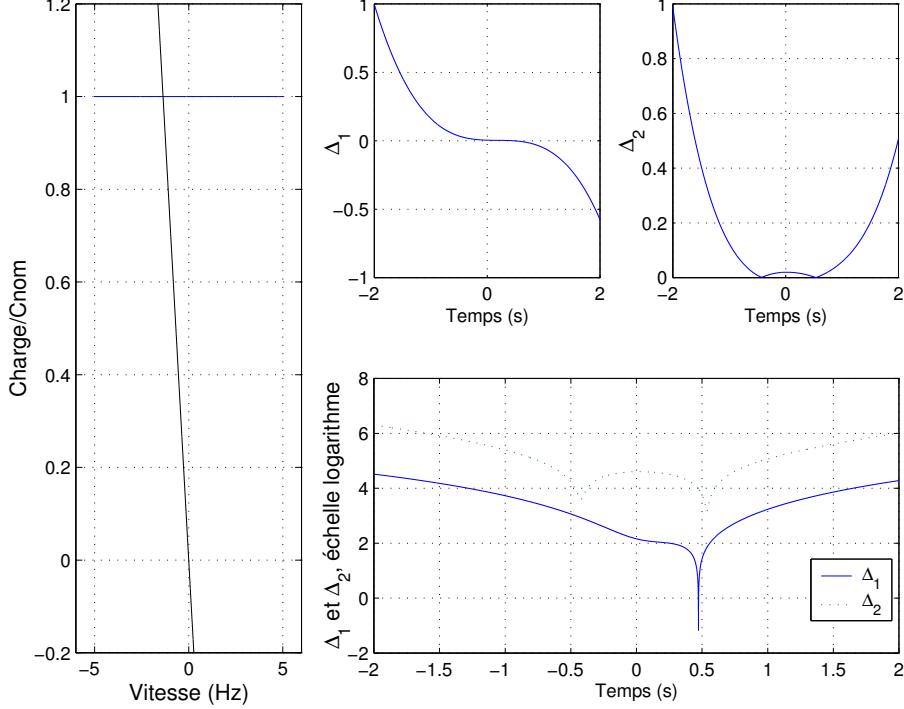
$$\begin{aligned}\Delta_{\text{initial}} &= \varphi^2\left(\omega_{r\text{initial}}^2 + \frac{1}{\tau_r^2}\right)(\omega_{r\text{initial}} + \omega_{r0}) \\ \Delta_{\text{final}} &= \varphi^2\left(\omega_{r\text{finale}}^2 + \frac{1}{\tau_r^2}\right)(\omega_{r\text{finale}} + \omega_{r0}).\end{aligned}$$

Or cette expression change de signe entre les instants initial et final, pour peu que $\omega_{r0} \in [\omega_{r\text{initial}}, \omega_{r\text{finale}}]$. La figure 6 montre une trajectoire à $\dot{\tau} = 0$. Le critère d'observabilité Δ_1 s'annule en un point le long de la trajectoire.

Pour le second critère, prenons, par exemple, une trajectoire à décélération constante. Pour que les deux critères s'annulent, il faut qu'il existe un temps t tel que :

$$\begin{aligned}\omega_s(t) &= \omega_r(t) + \omega_g = -\frac{\frac{1}{\tau_r}\dot{\omega}_r}{\omega_r^2(t) + \frac{1}{\tau_r^2}} \\ \omega_s(t) &= \omega_r(t) + \omega_g = -\frac{\omega_r^2(t) + \frac{1}{\tau_r^2}}{2\omega_r(t)}\end{aligned}$$

Il est clair qu'il existe des trajectoires ne vérifiant pas ces deux relations simultanément. En effet, la deuxième relation donne la contrainte sur la valeur de la vitesse $\omega_r(t)$. De là, il est simple de choisir la valeur de $\dot{\omega}_r$ qui ne vérifie pas la première relation.

Figure 6 – (Simulation) : Trajectoire à τ constant

4.3.2. Polynôme implicite. — Dans cette partie, notre but sera d'exprimer les grandeurs φ_s , φ_r , ι_r , ω_r et τ en fonction des grandeurs mesurée ι_s , de la commande u_s et de ses dérivées. Posons $z = L_f \dot{\iota}_s + (R_s + R_{r_{eq}}) \iota_s - u_s$. Nous en déduisons une relation entre le flux et la vitesse rotorique.

$$(26) \quad \left(\frac{1}{\tau_r} - j\omega \right) \varphi_r = z$$

On peut réécrire les équations pour exprimer la dynamique de $\frac{1}{\tau_r} - j\omega$.

$$(27) \quad \begin{cases} \overbrace{\frac{1}{\tau_r} - j\omega}^{\dot{z}} = -j \frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_r} \text{Imag}(\iota_s \varphi_r^*) + j \frac{n_p}{J} \tau \\ \dot{\varphi}_r = -z + \frac{L_m}{\tau_r} \iota_s \end{cases}$$

De (26) et (27), on obtient facilement une expression ne dépendant plus de la vitesse rotorique.

$$\begin{cases} \varphi_r \dot{z} = \dot{\varphi}_r z + \varphi_r^2 \left(-j \frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_r} \text{Imag}(\iota_s \varphi_r^*) + j \frac{n_p}{J} \tau \right) \\ \dot{\varphi}_r = -z + \frac{L_m}{\tau_r} \iota_s \end{cases}$$

Posons $\beta = z - \frac{L_m}{\tau_r} \iota_s$.

$$\begin{cases} \frac{n_p}{J} \tau = \frac{\varphi_r \dot{z} + z\beta}{j\varphi_r^2} + \frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_r} \text{Imag}(\iota_s \varphi_r^*) \\ \dot{\varphi}_r = -\beta \end{cases}$$

Le flux rotorique s'obtient à partir de l'équation implicite suivante.

$$(28) \quad \begin{aligned} \overbrace{\left(\frac{\dot{\varphi}_r + z\beta}{\varphi_r^2} \right)}^{\dot{z}} &= -j \frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_r} \text{Imag}(\overbrace{\dot{\varphi}_r^*}^{\dot{z}}) \\ \frac{\varphi_r^2 \ddot{z} + \varphi_r (2\dot{z}\beta + z\dot{\beta}) + 2z\beta^2}{\varphi_r^3} &= -j \frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_r} \text{Imag}(\overbrace{\dot{\varphi}_r^*}^{\dot{z}}) \end{aligned}$$

avec

$$(29) \quad \text{Imag}(\overbrace{\dot{\varphi}_r^*}^{\dot{z}}) = \text{Imag}(\dot{i}_s \varphi_r^* - i_s \beta^*)$$

L'équation implicite vérifiée par le flux rotorique est :

$$(30) \quad A\varphi_r^3 + B\varphi_r^2 + C\varphi_r + D = -jp\text{Imag}(E\varphi_r^*)\varphi_r^3$$

avec :

$$\begin{aligned} z &= L_f i_s + (R_s + R_{r_{eq}}) i_s - u_s, & \beta &= L_f i_s + R_s i_s - u_s, \\ A &= -j \frac{3n_p^2}{2J} \frac{L_m}{L_r} \text{Imag}(\dot{i}_s \beta^*), & B &= \ddot{z}, \\ C &= 2\dot{z} + z\dot{\beta}, & D &= 2z\beta^2, & E &= i_s \end{aligned}$$

Nous venons de montrer que les parties réelle et imaginaire du flux rotorique sont solutions de deux polynômes du quatrième degré à coefficient dépendant de grandeurs connues.

Remarquons que les coefficients de ce polynôme s'annulent pour les points d'équilibre définis sur la droite d'inobservabilité $w_s = 0$.

4.4. Construction d'un observateur pour les systèmes variant dans le temps

4.4.1. Étude du système linéarisé autour d'une trajectoire. —

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_r &= \left(-\frac{1}{\tau_r} - j(\omega_s - n_p \omega_r) \right) \varphi_r + R_{r_{eq}} i_s \\ L_f i_s &= \left(\frac{1}{\tau_r} - jn_p \omega_r \right) \varphi_r - (R_s + R_{r_{eq}} + jL_f \omega_s) i_s + u_s \\ \dot{\omega}_r &= \frac{3n_p}{2J} \text{Imag}(\dot{i}_s \varphi_r^*) - \frac{n_p}{J} \tau \\ \dot{\tau} &= 0 \end{aligned}$$

Il faut poser pour simplifier les notations $\varphi_r = \varphi_d + j\varphi_q$, $i_s = i_d + ji_q$, $\omega = n_p \omega_r$, $\omega_g = \omega_s - \omega_r$, $\lambda = \frac{3n_p^2}{2J}$, $\mu = \frac{n_p}{J}$ et $a = \frac{1}{\tau_r}$ et $R = R_s + R_{r_{eq}}$.

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_d &= -a\varphi_d + \omega_g \varphi_q + R_{r_{eq}} i_d \\ \dot{\varphi}_q &= -\omega_g \varphi_d - a\varphi_q + R_{r_{eq}} i_q \\ L_f i_d &= a\varphi_d + \omega \varphi_q - (R_s + R_{r_{eq}}) i_d + (L_f \omega_s) i_q + u_d \\ L_f i_q &= -\omega \varphi_d + a\varphi_q - (L_f \omega_s) i_d - (R_s + R_{r_{eq}}) i_q + u_q \\ \dot{\omega} &= \lambda(i_q \varphi_d - i_d \varphi_q) - \mu \tau \\ \dot{\tau} &= 0 \end{aligned}$$

Présentons maintenant une trajectoire d'inversion sous charge. Il est clair que nous choisissons une trajectoire de la forme :

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_d &= \varphi & \bar{\iota}_d &= \frac{a}{R_{re_eq}}\varphi & \bar{u}_d &= \frac{aR_s - L_f\omega_g\omega_s}{R_{re_eq}}\varphi & \bar{\omega} &= \frac{-2t}{T}\omega_0 & \bar{\tau} &= C \\ \bar{\varphi}_q &= 0 & \bar{\iota}_q &= \frac{\omega_g}{R_{re_eq}}\varphi & \bar{u}_q &= \frac{\omega R_s + \omega_g(R_s + R_{re_eq}) - L_f a \omega_s}{R_{re_eq}}\varphi & \bar{\omega}_s &= \bar{\omega} + \frac{R_{re_eq}}{\lambda\varphi^2}(\mu C + \dot{\omega})\end{aligned}$$

Le système linéarisé autour d'une telle trajectoire :

$$\begin{aligned}\dot{\delta\varphi}_d &= -a\delta\varphi_d + \omega_g\delta\varphi_q + R_{re_eq}\delta\iota_d \\ \dot{\delta\varphi}_q &= -\omega_g\delta\varphi_d - a\delta\varphi_q + \varphi\delta\omega - \varphi\delta\omega_s + R_{re_eq}\delta\iota_q \\ L_f\dot{\delta\iota}_d &= a\delta\varphi_d + \omega\delta\varphi_q + (L_f\iota_q)\delta\omega_s - R\delta\iota_d + (L_f\omega_s)\delta\iota_q + \delta u_d \\ L_f\dot{\delta\iota}_q &= -\omega\delta\varphi_d + a\delta\varphi_q - \varphi\delta\omega - (L_f\iota_d)\delta\omega_s - (L_f\omega_s)\delta\iota_d - R\delta\iota_q + \delta u_q \\ \dot{\delta\omega} &= \lambda(\iota_q\delta\varphi_d - \iota_d\delta\varphi_q + \varphi\delta\iota_q) - \mu\delta\tau \\ \dot{\delta\tau} &= 0\end{aligned}$$

Maintenant que nous avons défini le système linéarisé (c'est un système linéaire à coefficients variables dans le temps), étudions l'observabilité de ses grandeurs. Posons :

$$\begin{aligned}z_d &= L_f\dot{\delta\iota}_d - (L_f\iota_q)\delta\omega_s - \delta u_d = a\delta\varphi_d + \omega\delta\varphi_q - R\delta\iota_d + (L_f\omega_s)\delta\iota_q \\ z_q &= L_f\dot{\delta\iota}_q + (L_f\iota_d)\delta\omega_s - \delta u_q = -\omega\delta\varphi_d + a\delta\varphi_q - \varphi\delta\omega - (L_f\omega_s)\delta\iota_d - R\delta\iota_q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_d &= -\left((a^2 + \omega^2) + 2\omega_g\omega + a\frac{R}{L_f}\right)\delta\varphi_d + \left(\dot{\omega} + 2a\omega_g - \omega\frac{R}{L_f}\right)\delta\varphi_q - (\omega_g\varphi)\delta\omega \\ &\quad + \left(aR_{re_eq} - L_f\omega_s^2 + \frac{R^2}{L_f}\right)\delta\iota_d + (L_f\dot{\omega}_s + \omega R_{re_eq} - 2\omega_s R)\delta\iota_q - (\omega\varphi + L_f\omega_s\iota_d + R\iota_q)\delta\omega_s \\ &\quad - \frac{R}{L_f}\delta u_d + \omega_s\delta u_q \\ \dot{z}_q &= -\left(\dot{\omega} + 2a\omega_g - \omega\frac{R}{L_f} + \lambda\varphi\iota_q\right)\delta\varphi_d - \left(2\omega_g\omega + (a^2 + \omega^2) + a\frac{R}{L_f} - \lambda\varphi\iota_d\right)\delta\varphi_q + \varphi\left(a + \frac{R}{L_f}\right)\delta\omega \\ &\quad + (-L_f\dot{\omega}_s - \omega R_{re_eq} + 2\omega_s R)\delta\iota_d + \left(aR_{re_eq} - L_f\omega_s^2 + \frac{R^2}{L_f} - \lambda\varphi^2\right)\delta\iota_q + (-a\varphi - L_f\omega_s\iota_q + R\iota_d)\delta\omega_s \\ &\quad - \omega_s\delta u_d - \frac{R}{L_f}\delta u_q + \mu\varphi\delta\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_d &= \dot{z}_d + (\omega\varphi + L_f\omega_s\iota_d + R\iota_q)\delta\omega_s + \frac{R}{L_f}\delta u_d - \omega_s\delta u_q + \frac{R}{L_f}z_d - \omega_g z_q \\ &= -(a^2 + \omega^2 + \omega_g\omega)\delta\varphi_d + (\dot{\omega} + a\omega_g)\delta\varphi_q + (aR_{re_eq} - L_f\omega_s\omega)\delta\iota_d + (L_f\dot{\omega}_s - R_s\omega)\delta\iota_q \\ p_q &= \dot{z}_q + (a\varphi + L_f\omega_s\iota_q - R\iota_d)\delta\omega_s + \omega_s\delta u_d + \frac{R}{L_f}\delta u_q + \omega_g z_d + \left(\frac{R}{L_f} + a\right)z_q \\ &= -(\dot{\omega} + a\omega_s + \lambda\varphi\iota_q)\delta\varphi_d + (-\omega_s\omega + \lambda\varphi\iota_d)\delta\varphi_q + (-L_f\dot{\omega}_s - L_f\omega_s a + \omega R_s)\delta\iota_d \\ &\quad - (aR_s + L_f\omega_s\omega + \lambda\varphi^2)\delta\iota_q + \mu\varphi\delta\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_d = & \left(-2\omega_s \dot{\omega} - \omega \dot{\omega} + a(a^2 - \omega_g^2) + a^2 \frac{R_{r_{eq}}}{L_f} + \omega^2 \frac{R_s}{L_f} \right) \delta \varphi_d + \left(-\omega^2 \omega_s - \omega_g(2a^2 + \omega \omega_s) + a\omega \frac{R_{r_{eq}} - R_s}{L_f} \right) \delta \varphi_q \\
& + \varphi \left(a\omega_g + \frac{R_s}{L_f} \omega \right) \delta \omega + \left(-L_f \dot{\omega}(2\omega_s + \omega) - aR_{r_{eq}}(a + \frac{R}{L_f}) + 2R_s \omega \omega_s \right) \delta \iota_d \\
& + \left(-2R_s \dot{\omega} + aR_{r_{eq}}(2\omega_s - \omega) - L_f \omega \omega_s^2 + R_s \frac{R}{L_f} \omega \right) \delta \iota_q \\
& + (-\varphi \dot{\omega} - \omega \omega_s L_f \iota_q - \dot{\omega} L_f \iota_d + \omega R_s \iota_d) \delta \omega_s + \left(a \frac{R_{r_{eq}}}{L_f} - \omega \omega_s \right) \delta u_d + \left(\dot{\omega} - \frac{R_s}{L_f} \omega \right) \delta u_q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_q = & \left(\omega \omega_s^2 + 2a\omega \frac{R_s}{L_f} - a\dot{\omega}_s + \lambda \varphi^2 \frac{\omega}{L_f} \right) \delta \varphi_d \\
& + \left(-(2\omega_s + \omega) \dot{\omega} - a\omega_s^2 + (\omega^2 - a^2) \frac{R_s}{L_f} - \frac{\lambda \varphi^2}{R_{r_{eq}}} (\omega_g^2 + a^2) - \lambda \varphi^2 \frac{a}{L_f} \right) \delta \varphi_q \\
& + \varphi \left(a \frac{R_s}{L_f} + \lambda \varphi^2 \left(\frac{a}{R_{r_{eq}}} + \frac{1}{L_f} \right) \right) \delta \omega + \left(2R_s \dot{\omega} - L_f a \dot{\omega} + 2R_s a \omega_s - R_s \omega \frac{R}{L_f} + L_f \omega \omega_s^2 + \lambda \varphi^2 \omega \right) \delta \iota_d \\
& + \left(-L_f (2\omega_s + \omega) \dot{\omega} - 2L_f \omega \dot{\omega} + 2R_s \omega \omega_s - aL_f \omega_s^2 + R_s a \frac{R}{L_f} + \lambda \varphi^2 (a + \frac{R}{L_f}) \right) \delta \iota_q \\
& + \left(\varphi \omega \omega_s + L_f \iota_q \left(\omega \frac{R_s}{L_f} - \dot{\omega}_s - a\omega_s \right) + L_f \iota_d \left(a \frac{R_s}{L_f} + \omega \omega_s \right) \right) \delta \omega_s \\
& + \left(\omega \frac{R_s}{L_f} - \dot{\omega}_s - a\omega_s \right) \delta u_d - \left(a \frac{R_s}{L_f} + \omega \omega_s + \frac{\lambda \varphi^2}{L_f} \right) \delta u_q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_d = & \dot{p}_d - (-\varphi(a\omega_g + \dot{\omega}) + aR_{r_{eq}}\iota_q - \omega \omega_s L_f \iota_q - \dot{\omega} L_f \iota_d + \omega R_s \iota_d) \delta \omega_s \\
& - \left(a \frac{R_{r_{eq}}}{L_f} - \omega \omega_s \right) \delta u_d - \left(\dot{\omega} - \frac{R_s}{L_f} \omega \right) \delta u_q - \left(a\omega_g + \frac{R_s}{L_f} \omega \right) z_q - \left(a \frac{R_{r_{eq}}}{L_f} \right) z_d \\
q_q = & \dot{p}_q - \left(\varphi \omega \omega_s + L_f \iota_q \left(\omega \frac{R_s}{L_f} - \dot{\omega}_s - a\omega_s \right) + L_f \iota_d \left(a \frac{R_s}{L_f} + \omega \omega_s \right) \right) \delta \omega_s - \left(\omega \frac{R_s}{L_f} - \dot{\omega}_s - a\omega_s \right) \delta u_d \\
& + \left(a \frac{R_s}{L_f} + \omega \omega_s + \frac{\lambda \varphi^2}{L_f} \right) \delta u_q - \left(a \frac{R_s}{L_f} + \lambda \varphi^2 \left(\frac{a}{R_{r_{eq}}} + \frac{1}{L_f} \right) \right) z_q + \left(\dot{\omega} - \omega \frac{R_s}{L_f} \right) z_d
\end{aligned}$$

En résumé,

$$\begin{aligned}
z_d &= a\delta\varphi_d + \omega\delta\varphi_q - R\delta\iota_d + (L_f\omega_s)\delta\iota_q \\
z_q &= -\omega\delta\varphi_d + a\delta\varphi_q - \varphi\delta\omega - (L_f\omega_s)\delta\iota_d - R\delta\iota_q \\
p_d &= -(a^2 + \omega^2 + \omega_g\omega)\delta\varphi_d + (\dot{\omega} + a\omega_g)\delta\varphi_q + (aR_{r_{eq}} - L_f\omega_s\omega)\delta\iota_d \\
&\quad + (L_f\dot{\omega}_s - R_s\omega)\delta\iota_q \\
p_q &= -(\dot{\omega} + a\omega_s + \lambda\varphi\iota_q)\delta\varphi_d + (-\omega_s\omega + \lambda\varphi\iota_d)\delta\varphi_q + (-L_f\dot{\omega}_s - L_f\omega_s a + \omega R_s)\delta\iota_d \\
&\quad - (aR_s + L_f\omega_s\omega + \lambda\varphi^2)\delta\iota_q + \mu\varphi\delta\tau \\
q_d &= (-2\omega_s\dot{\omega} - \omega\dot{\omega} + a(a^2 - \omega_g\omega_s))\delta\varphi_d - (\omega\omega_s^2 + \omega_g a^2)\delta\varphi_q \\
&\quad + (-L_f a\omega_g\omega_s - L_f\dot{\omega}(2\omega_s + \omega) - a^2 R_{r_{eq}} + R_s\omega\omega_s)\delta\iota_d - (2R_s\dot{\omega} + aR_s\omega_g + L_f\omega\omega_s^2)\delta\iota_q \\
q_q &= \left(\omega\omega_s^2 - \frac{\lambda\varphi^2}{R_{r_{eq}}} a\omega \right) \delta\varphi_d - \left(2\omega_s\dot{\omega} + a\omega_s^2 + \frac{\lambda\varphi^2}{R_{r_{eq}}} \omega_g^2 \right) \delta\varphi_q \\
&\quad + \left((R_s - R_{r_{eq}} - aL_f)\dot{\omega} + aR_s\omega_s + L_f\omega\omega_s^2 - \lambda\varphi^2 \left(\omega_g + a\frac{L_f}{R_{r_{eq}}}\omega_s \right) \right) \delta\iota_d \\
&\quad - \left(L_f(\omega_s + \omega)\dot{\omega} - R_s\omega\omega_s + aL_f\omega_s^2 + \frac{\lambda\varphi^2}{R_{r_{eq}}} aR_s \right) \delta\iota_q
\end{aligned}$$

Pour φ différent de zéro, z_q permet de reconstruire la vitesse ω et p_q , le couple de charge τ . Il reste z_d , p_d , q_d et q_q pour calculer les deux composantes du flux. Il faut donc que la matrice

$$\begin{pmatrix} a & \omega \\ -(\omega^2 + \omega_g\omega) & \dot{\omega} + a\omega_g \\ -2\omega_s\dot{\omega} - \omega\dot{\omega} + a(a^2 - \omega_g\omega_s) & -(\omega\omega_s^2 + \omega_g a^2) \\ \omega\omega_s^2 - \frac{\lambda\varphi^2}{R_{r_{eq}}} a\omega & -\left(2\omega_s\dot{\omega} + a\omega_s^2 + \frac{\lambda\varphi^2}{R_{r_{eq}}} \omega_g^2\right) \end{pmatrix}$$

soit de rang plein. En utilisant la première ligne, on réduit l'étude du rang de la matrice précédente à celui de :

$$\begin{pmatrix} a & \omega \\ 0 & \Delta_1 = a\dot{\omega} + \omega_s(a^2 + \omega^2) \\ 0 & \Delta_2 = (2\omega_s + \omega)\omega\dot{\omega} - \omega_s a(a^2 + \omega^2) \\ 0 & \Delta_3 = -\omega_s(a\dot{\omega} + \omega_s(a^2 + \omega^2)) - a\omega_s\dot{\omega} + a\frac{\lambda\varphi^2}{R_{r_{eq}}}(\omega^2 - \omega_g^2) \end{pmatrix}$$

avec $\Delta_2 = -a\Delta_1 + \dot{\Delta}_1$ et $\Delta_3 = -\omega_s(\Delta_1 + a\dot{\omega} - a\frac{\lambda\varphi^2}{R_{r_{eq}}}(\omega - \omega_g))$. La grandeur $\delta\varphi_q$ est observable si $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 \neq 0$. De cette grandeur, nous remontons à l'observabilité du flux $\delta\varphi_d$, de la vitesse et de la charge.

Remarque. — En reprenant le calcul avec une consigne de flux φ non constante, on obtient les trois conditions suivantes (les deux premières sont inchangées) :

$$\begin{aligned}
a\dot{\omega} + \omega_s(a^2 + \omega^2) &= 0, \\
\dot{\omega}(a^2 + \omega^2 + 2\omega_s\omega) &= 0, \\
\omega_s(a\dot{\omega} - \Psi(a(\omega - \omega_g) + \omega\dot{\omega}_g)) + \dot{\Psi}(2a^2 + 3\omega\omega_g + \omega^2) + \ddot{\Psi} &= 0.
\end{aligned}$$

où $\Psi = \frac{\lambda\varphi^2}{R_{r_{eq}}}$. Au point $\dot{\omega} = \omega_s = 0$, le système est observable en fonctionnement quasi-statique si l'expression

$$2(a^2 - \omega_g^2)\dot{\Psi} + \ddot{\Psi}$$

est non nulle.

4.4.2. Construction d'un observateur-contrôleur pour le système variant dans le temps. —

Nous présentons sur le moteur à induction la démarche de la construction d'observateur variant dans le temps pour un système possédant une singularité d'observabilité.

La construction se déroule en deux étapes. Partant d'un système sous la forme

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C(t)x,$$

nous construisons un système étendu qui est observable sans singularité et un observateur de celui-ci. De manière duale, nous construisons un contrôleur à partir du système initial.

Observateur. — Posons $C_0(t) = C(t)$, $C_k(t) = \dot{C}_{k-1}(t) + C_k(t)A(t)$. Construisons alors les grandeurs z_k définies de la manière suivante

$$\begin{aligned} z_0 &= y = C(t)x \\ z_1 &= \dot{z}_0 - C_0(t)B(t)u = C_1(t)x \\ z_2 &= \dot{z}_1 - C_1(t)B(t)u = C_2(t)x \\ &\vdots \\ z_{N-1} &= \dot{z}_{N-2} - C_{N-2}(t)B(t)u = C_{N-1}(t)x \\ &= \dot{z}_{N-1} - C_{N-1}(t)B(t)u = C_N(t)x \end{aligned}$$

L'entier N est le plus petit entier assurant que la matrice $(C_0 \quad \cdots \quad C_{N-1})^T$ soit de rang plein. Sous une forme compacte, $z = (z_0 \quad \cdots \quad z_{N-1})^T$, nous pouvons écrire le système étendu

$$\dot{z} = \mathcal{A}(t)z + \mathcal{B}(t)u$$

et un observateur de ce dernier

$$\dot{\tilde{z}} = \mathcal{A}(t)\tilde{z} + \mathcal{B}(t)u + K(t)(z_0 - \tilde{z}_0)$$

Les calculs effectués dans la section précédente servent explicitement pour trouver la relation entre les grandeurs z et les grandeurs x . Le point délicat est de récupérer les composantes du flux en utilisant les dérivées à l'ordre 3 du courant.

Le choix des gains $K(t)$ découle de la forme particulière de \mathcal{A} . Ils sont choisis tels que l'équation aux erreurs

$$\dot{\tilde{z}} = \mathcal{A}(t)\tilde{z} - K(t)\tilde{z}_0 = (\mathcal{A}(t) - K(t)[1 \ 0 \ \dots \ 0])\tilde{z}$$

soit à coefficients réels (imposés). Le principe de construction des gains $K(t)$ est le suivant. De part la forme de $\mathcal{A}(t)$ (triangulaire supérieure et une dernière ligne), il est possible d'exprimer z_k , pour $k \geq 1$, en fonction des coefficients $K_j(t)$ et de z_0 . La dernière ligne de \mathcal{A} permet de concentrer tout en une seule équation différentielle en z_0 de degré N . Se donnant les pôles de la dynamique de z_0 , nous en déduisons (par la forme triangulaire), les coefficients $K_i(t)$.

Nous venons de montrer qu'il est possible de construire des gains dépendant du temps permettant d'assurer la convergence exponentielle des grandeurs \tilde{z} vers les grandeurs z .

Contrôleur. — Nous effectuons l'approche duale de celle présentée pour l'observateur. Posons $w_0 = H_0(t)x$. Construisons alors les grandeurs w_k définies de la manière suivante

$$\begin{aligned}\dot{w}_0 &= w_1 + H_0(t)B(t)u & w_1 &= H_1(t)x, & H_1(t) &= \dot{H}_0(t) + H_0(t)A(t) \\ \dot{w}_1 &= w_2 + H_1(t)B(t)u & w_2 &= H_2(t)x, & H_2(t) &= \dot{H}_1(t) + H_1(t)A(t) \\ &\vdots \\ \dot{w}_{N-2} &= w_{n-1} + H_{n-2}(t)B(t)u & w_{n-1} &= H_{n-1}(t)x, & H_{n-1}(t) &= \dot{H}_{n-2}(t) + H_{n-2}(t)A(t) \\ \dot{w}_{n-1} &= H_n(t)x + H_{n-1}(t)B(t)u & & & H_n(t) &= \dot{H}_{n-1}(t) + H_{n-1}(t)A(t)\end{aligned}$$

Nous définissons les w_k de cette manière afin de poser $\mathcal{H} = (H_0 \quad \dots \quad H_{n-1})$ et $\mathcal{H}B = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)$. Sous une autre forme, ça revient à choisir H_0 tel que

$$H_0 = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1) \mathcal{O}_{AB}^{-1}$$

où \mathcal{O}_{AB} représente la matrice de commandabilité. Nous obtenons une forme triangulaire supérieure pour la dynamique des grandeurs w avec la commande n'intervenant que sur la dernière ligne. Il suffit de choisir la commande

$$u = -H_n \mathcal{H}^{-1} (w - \bar{w}) + \Lambda (w - \bar{w})$$

où \bar{w} sont les grandeurs de références et Λ est un vecteur de coefficients réels représentant la dynamique souhaitée.

La structure d'observateur-contrôleur consiste à utiliser dans la commande les grandeurs observées à la place des grandeurs d'état (mesurées ou non).

4.5. Conclusion

Nous avons mis en évidence dans cette section que le contrôle dans le domaine de la basse vitesse devait surmonter une difficulté : la perte d'observabilité dans la zone d'instabilité. Sans être totalement nouvelle (surtout pour le phénomène d'inobservabilité), cette analyse dans le plan couple-vitesse met en lumière d'une manière très simple les zones d'instabilité, et par conséquent, les zones où contrôler la vitesse est plus délicat. Il faut noter également que ces difficultés sont bien connues des spécialistes du contrôle des moteurs à induction, aussi bien en boucle ouverte qu'en boucle fermée (en fonction des paramètres résistifs). L'analyse de la stabilité dans le plan-couple vitesse a apporté par le calcul des explications à des phénomènes existant.

Nous avons proposé dans ce chapitre la construction d'un observateur pour le moteur à induction linéarisé autour d'une trajectoire traversant la droite de glissement. Cette construction d'observateur est fondée sur la théorie développée dans le chapitre suivant, où nous explicitons une méthode pour passer outre les problèmes de singularités en commandabilité et observabilité pour des systèmes variant dans le temps. Toutefois, l'observateur que nous avons construit reste très sensible au mauvais conditionnement de la matrice d'observabilité au voisinage de la singularité.

CHAPITRE 5

SINGULARITÉS D'OBSERVABILITÉ/DE COMMANDABILITÉ

5.1. Introduction

Nous avons mis en évidence dans le chapitre précédent que le moteur à induction possédait une singularité d'observabilité autour d'une trajectoire d'inversion de vitesse. Nous allons développer dans ce chapitre une méthode permettant de construire un observateur pour les systèmes variant dans le temps possédant (ou non) des singularités.

Cette étude a débuté par l'étude d'un exemple [Mal00].

$$\dot{x} = tu$$

Ce système possède une singularité en $t = 0$ qui empêche le bouclage linéarisant simple $u = \dot{x}/t$. L'introduction d'une variable w annexe permet de résoudre le problème de la linéarisation sans singularité et également la paramétrisation de trajectoires non singulières.

$$\dot{w} = u.$$

En réécrivant le système, nous faisons apparaître la grandeur $wt - x$. Sa dynamique est

$$(31) \quad \widehat{\dot{wt} - x} = w.$$

De cette manière, nous venons de trouver un bouclage exogène qui permet de transformer le système initial en une chaîne de deux intégrateurs. Il y a un grand intérêt dans la méthode proposée : nous avons par construction des formulations explicites du bouclage exogène et des changements de coordonnées.

Cette étude se généralise aux systèmes variant dans le temps multi-variables. Nous verrons également un exemple de système non-linéaire pour lequel la condition de linéarisation exacte fait apparaître une singularité mais qui est linéarisable sans singularités grâce à un bouclage exogène.

Par dualité, nous pouvons transposer l'idée du premier exemple sur l'observabilité de système. Une application immédiate dans le cadre de notre étude du moteur à induction est d'étudier l'observabilité du système linéarisé autour d'une trajectoire d'inversion de vitesse du moteur à induction. En particulier, de répondre par la construction d'un observateur au problème de la singularité d'observabilité autour d'une trajectoire traversant la droite de glissement.

5.2. Le cas mono-entrée

Le système analytique mono-entrée linéaire variant dans le temps

$$(32) \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

est commandable à t_O si et seulement s'il existe un entier k tel que la matrice de commandabilité

$$\mathcal{C}_k(t_0) := (B_0(t_0) \quad B_1(t_0) \quad \dots \quad B_{k-1}(t_0))$$

soit de rang n (voir par exemple [Son91]) ; nous avons $B_0 := B$ et, pour tout entier $i \geq 0$,

$$B_{i+1}(t) := A(t)B_i(t) - \frac{d}{dt}B_i(t).$$

Plus précisément, nous dirons que le système est N -commandable à t_0 , où N est le plus petit entier tel que la matrice $\mathcal{C}_N(t_0)$ soit de rang n . Remarquons qu'à un point générique t_0 , un système commandable est n -commandable (i.e., $N = n$). En présence de singularités, nous sommes dans le cas $N > n$.

Le but de cette section est de montrer que si le système (32) est N -commandable à t_0 , il peut être transformé en une chaîne d'intégrateurs de longueur N

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ &\vdots \\ \dot{y}_{N-1} &= y_N \\ \dot{y}_N &= v \end{aligned}$$

par un bouclage dynamique de dimension $N - n$ et un changement de coordonnées. Notons que ce bouclage est toujours exogène [FLMR99, MMR97], i.e. il ne peut pas être exprimé comme une fonction de x et des dérivées de u .

Nous généralisons le cas générique $N = n$, qui peut être résolu par un bouclage statique (i.e. un bouclage dynamique de dimension $N - n = 0$), et en particulier le cas des systèmes variant dans le temps [SM67, Wol68, Bru70, MS73, Kai80]. Nous améliorons le résultat de [KKP85] présenté dans le cadre des systèmes discrets, où (après une adaptation au cas des systèmes continus) un bouclage dynamique de dimension nN est nécessaire ; voir également [Son87] pour des résultats proches dans le contexte de la pseudolinéarisation des systèmes non-linéaires.

L'intérêt du résultat est de deux ordres : il donne une paramétrisation sans singularités des trajectoires de (32), et résoud ainsi le problème de la planification de trajectoire ; il permet également d'assigner arbitrairement les pôles du système, et résoud ainsi le problème du suivi de trajectoire.

Théorème 1. — Soit le système analytique mono-entrée linéaire variant dans le temps

$$(33) \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

N -commandable à t_0 . Il existe alors un compensateur analytique dynamique

$$(34) \quad \begin{aligned} \dot{w} &= R(t)x + S(t)w + T(t)u, \quad w \in \mathbb{R}^{N-n}, \\ u &= K(t)x + L(t)w + v, \quad v \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

tel que le système étendu (33)-(34), qui est de dimension N , soit N -commandable à t_0 .

Comme conséquence immédiate, le système étendu peut être transformé autour de t_0 en une chaîne d'intégrateurs $y_N^{(N)} = v$.

Démonstration. — Par hypothèse, la matrice de commandabilité

$$\mathcal{C}_N(t_0) = (B_0(t_0) \quad B_1(t_0) \quad \dots \quad B_{N-1}(t_0))$$

est de rang n . Définissons

$$\hat{\mathcal{C}}_N := (B_{i_0} \quad \dots \quad B_{i_{n-1}})$$

la sous-matrice $n \times n$ inversible obtenue à partir des colonnes de \mathcal{C}_N . Une telle matrice existe toujours puisque par hypothèse la matrice $\mathcal{C}_N(t_0)$ est de rang plein (i.e. n). Définissons également la matrice

$$\check{\mathcal{C}}_N := (B_{i_n} \quad \dots \quad B_{i_{N-1}})$$

obtenue avec les colonnes restantes de \mathcal{C}_N .

Nous désirons construire un compensateur dynamique de taille $N - n$,

$$\dot{w} = R(t)x + S(t)w + T(t)u,$$

tel que le système étendu

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ T \end{pmatrix} u,$$

qui est de dimension N , soit N -commandable. En d'autres termes, nous désirons que la matrice de commandabilité $N \times N$

$$\tilde{\mathcal{C}}_N := \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & \dots & B_{N-1} \\ T_0 & T_1 & \dots & T_{N-1} \end{pmatrix}.$$

soit inversible à t_0 ; nous posons $T_0 := T$ et pour tout $k \geq 0$,

$$(35) \quad T_{k+1} := RB_k + ST_k - \dot{T}_k.$$

Nous définissons

$$\begin{aligned} \hat{T} &:= (T_{i_0} \quad \dots \quad T_{i_{N-1}}) \\ \hat{T}^s &:= (T_{1+i_0} \quad \dots \quad T_{1+i_{N-1}}) \\ \check{T} &:= (T_{i_n} \quad \dots \quad T_{i_{N-1}}) \\ \check{T}^s &:= (T_{1+i_n} \quad \dots \quad T_{1+i_{N-1}}); \end{aligned}$$

avec ces notations et à un réordonnancement des colonnes de $\tilde{\mathcal{C}}_N$ près,

$$\tilde{\mathcal{C}}_N = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{C}}_N & \check{\mathcal{C}}_N \\ \hat{T} & \check{T} \end{pmatrix}$$

et les relations (35) pour $k = 0 \dots N - 1$ peuvent être écrites sous forme matricielle par

$$(36) \quad (\hat{T}^s \quad \check{T}^s) = (R \quad S) \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{C}}_N & \check{\mathcal{C}}_N \\ \hat{T} & \check{T} \end{pmatrix} - (\dot{\hat{T}} \quad \dot{\check{T}}).$$

Nous définissons les matrices R, S, T en choisissant $\hat{T} := 0_{(N-n) \times n}$, $\check{T} := I_{(N-n) \times (N-n)}$ et $T_N := 0_{(N-n) \times 1}$; la relation (36) implique

$$\begin{aligned} R &:= \hat{T}^s \hat{\mathcal{C}}_N^{-1} \\ S &:= \check{T}^s - R \check{\mathcal{C}}_N, \end{aligned}$$

et mène (au même réordonnancement près) à la matrice de commandabilité inversible

$$\tilde{\mathcal{C}}_N = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{C}}_N & \check{\mathcal{C}}_N \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Notons en effet que la matrice T est définie par le choix de \hat{T} et \check{T} puisque par définition

$$T := T_{i_k} \text{ tel que } i_k = 0.$$

Il ne reste qu'à traiter le cas générique où le système

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(t)\tilde{x} + \tilde{B}(t)u, \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^N$$

est N -commandable à t_0 [SM67, Wol68, Bru70, MS73, Kai80]. Grâce à un changement de coordonnées

$$y := \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_{N-1} \end{pmatrix} \tilde{x},$$

où

$$\begin{aligned} H_0 &:= (0 \ \dots \ 0 \ 1) \tilde{\mathcal{C}}_N^{-1} \\ H_{i+1} &:= H_i \tilde{A} + \dot{H}_i, \quad i \geq 0, \end{aligned}$$

le système est transformé en

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ &\vdots \\ \dot{y}_{N-1} &= y_N \\ \dot{y}_N &= (\dot{H}_{N-1} + H_{N-1} \tilde{A}) \tilde{x} + u. \end{aligned}$$

Le choix de v tel que $u = -(\dot{H}_{N-1} + H_{N-1} \tilde{A}) \tilde{x} + v$ achève la preuve. \square

Exemple 1. — Nous illustrons la preuve sur un exemple

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= t x_2 \\ \dot{x}_2 &= t u. \end{aligned}$$

Il est 4-commandable à $t = 0$ avec une matrice de commandabilité qui vaut

$$\mathcal{C}_4(t) = \begin{pmatrix} 0 & t^2 & -3t & 3 \\ t & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilisant les notations de la preuve, nous posons $i_0 = 1$, $i_1 = 3$, $i_2 = 0$, $i_3 = 2$, $\hat{T} := 0_{2 \times 2}$ et $\breve{T} := I_{2 \times 2}$, tels que

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{C}}_4 & \breve{\mathcal{C}}_4 \\ \hat{T} & \breve{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & 3 & 0 & -3t \\ -1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De là, nous obtenons

$$R(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix},$$

$$T(t) = T_{i_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui mènent au compensateur dynamique suivant.

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= u, \\ \dot{w}_2 &= -x_2 + tw_1. \end{aligned}$$

Le système étendu est 4-commandable à $t = 0$ et peut être transformé en une chaîne de quatre intégrateurs en utilisant le changement de coordonnées

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{t^2}{3} & -\frac{t^3}{3} & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

5.3. Étude d'un cas non-linéaire

5.4. Étude d'un système masse-ressort

Il est aussi possible d'éliminer les singularités de systèmes non-linéaires tel qu'un système masse-ressort à raideur variable par exemple.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} u \\ &= f(x) + g(x)u. \end{aligned}$$

Ce système est génériquement linéarisable par bouclage statique mais possède une singularité aux points de la forme $(0, \bar{x}_2)$ [JR80]. La condition de bouclage statique linéarisant ("matrice de commandabilité non-linéaire")

$$(g \quad [f, g] \quad [f, [f, g]]) = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & 2x_2 \\ -x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 autour des points $(0, \bar{x}_2)$, $\bar{x}_2 \neq 0$ si le terme d'ordre supérieur $[f, [f, g]]$ est pris en compte. Grâce à un compensateur dynamique exogène

$$\dot{w} = w^2 + u - 1,$$

Le système étendu $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)u$ est linéarisable par bouclage statique autour de $(0, \bar{x}_2)$, $\bar{x}_2 \neq 0$. En effet, $[\tilde{g}, [\tilde{f}, \tilde{g}]] = -2\tilde{g}$ et la "matrice de commandabilité non-linéaire"

$$(\tilde{g} \quad [\tilde{f}, \tilde{g}] \quad [\tilde{f}, [\tilde{f}, \tilde{g}]]) = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & 2x_2 \\ -x_1 & x_2 & 0 \\ 1 & 2w & 2w^2 + 2 \end{pmatrix}$$

est de rang 3 autour de $(0, \bar{x}_2, \bar{w})$, $\bar{x}_2 \neq 0$. Le changement de coordonnées prend la forme

$$\begin{aligned} y_1 &:= x_1(x_2 + x_1w) \\ y_2 &:= -x_1^2 + (x_2 + x_1w)^2 \\ y_3 &:= -4x_1(x_2 + x_1w) + 2(x_1^2 + (x_2 + x_1w)^2)w \end{aligned}$$

et le bouclage

$$u := \frac{2(-x_1^2 + 3(x_2 + x_1w)^2)(1 - w^2) + v}{2(x_1^2 + (x_2 + x_1w)^2)}$$

mène à la chaîne d'intégrateurs

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = y_3, \quad \dot{y}_3 = v.$$

Construction du bouclage exogène. — Revenons sur la construction du bouclage exogène et du changement de variables. Nous cherchons un compensateur de la forme

$$\dot{\omega} = \alpha(\omega) + \beta(\omega)u.$$

Étudions les propriétés du système augmenté représenté par

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Il s'en suit que les jacobiniennes de \tilde{f} et \tilde{g} sont

$$D_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha' \end{pmatrix}, \quad D_{\tilde{g}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta' \end{pmatrix}.$$

On obtient donc le crochet de Lie de \tilde{f} et \tilde{g} et sa jacobienne

$$[\tilde{f}, \tilde{g}] = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ [\alpha, \beta] \end{pmatrix}, \quad D_{[\tilde{f}, \tilde{g}]} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 \\ [\alpha, \beta]' \end{pmatrix},$$

où on note $[\alpha, \beta]$ pour la valeur de $\alpha'\beta - \alpha\beta'$. De là, on achève les calculs par les crochets de \tilde{f} et $[\tilde{f}, \tilde{g}]$, et \tilde{g} et $[\tilde{f}, \tilde{g}]$.

$$[\tilde{f}, [\tilde{f}, \tilde{g}]] = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 0 \\ [\alpha, [\alpha, \beta]] \end{pmatrix}, \quad [\tilde{g}, [\tilde{f}, \tilde{g}]] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1 \\ [\beta, [\alpha, \beta]] \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les fonctions α et β . Pour cela, nous allons utiliser les deux propriétés suivantes : l'involutivité et la contrôlabilité du système.

Pour garder la propriété d'involutivité du système, il suffit que

$$[\tilde{g}, [\tilde{f}, \tilde{g}]] = \lambda g, \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1 \\ [\beta, [\alpha, \beta]] \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Il s'en suit que $[\beta, [\alpha, \beta]] = -2\beta$.

La propriété de contrôlabilité est vérifiée si la matrice suivante est de rang plein.

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \tilde{g} & [\tilde{f}, \tilde{g}] & [\tilde{f}, [\tilde{f}, \tilde{g}]] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & 2x_2 \\ -x_1 & x_2 & 0 \\ \beta & [\alpha, \beta] & [\alpha, [\alpha, \beta]] \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que le déterminant est non nul :

$$-x_1^2 [\alpha, [\alpha, \beta]] - 2x_1x_2[\alpha, \beta] - 2x_2^2\beta$$

En résumé, il faut résoudre

$$\begin{aligned} [\beta, [\alpha, \beta]] &= \beta'(\alpha'\beta - \alpha\beta') - \beta(\alpha''\beta - \alpha\beta'') = -2\beta \\ -x_1^2 [\alpha, [\alpha, \beta]] - 2x_1x_2[\alpha, \beta] - 2x_2^2\beta &\neq 0 \end{aligned}$$

Si on fait le choix de $\beta = 1$, il reste pour le calcul de α :

$$\begin{aligned} \alpha'' &= 2 \\ -x_1^2((\alpha')^2 - \alpha\alpha'') - 2x_1x_2\alpha' - 2x_2^2 &\neq 0 \end{aligned}$$

Il est clair que $\alpha = \omega^2 + a\omega + b$. La deuxième relation devient

$$\begin{aligned} x_1^2(2\omega^2 + 2a\omega + a^2 - 2b) + 2x_1x_2(2\omega + a) + 2x_2^2 &\neq 0 \\ -2bx_1^2 + a(x_1^2(2\omega + a) + 2x_1x_2) + 2(x_1\omega + x_2)^2 &\neq 0 \end{aligned}$$

Le choix de $a = 0$ et $b = -1$ permet d'assurer la positivité de l'expression.

Calcul du changement de variables. — Étudions avant de conclure le changement de variables nécessaire pour se ramener à une forme de Brunovský. Posons

$$\begin{aligned} z &= h_0(x_1, x_2, \omega) \\ \dot{z} &= h_{01}'(x_1, x_2, \omega)\dot{x}_1 + h_{02}'(x_1, x_2, \omega)\dot{x}_2 + h_{03}'(x_1, x_2, \omega)\dot{\omega} \\ &= (D_{h_0}\tilde{f}) + (D_{h_0}\tilde{g})u = h_1(x_1, x_2, \omega) \\ \ddot{z} &= (D_{h_1}\tilde{f}) + (D_{h_1}\tilde{g})u = h_2(x_1, x_2, \omega) \\ \dddot{z} &= (D_{h_2}\tilde{f}) + (D_{h_2}\tilde{g})u \end{aligned}$$

On choisit clairement

$$D_{h_0}\tilde{g} = 0 \quad D_{h_1}\tilde{g} = 0 \quad D_{h_2}\tilde{g} = 0$$

qui se traduisent par

$$D_{h_0}\tilde{g} = 0 \quad D_{h_0}[\tilde{f}, \tilde{g}] \quad D_{h_0}[\tilde{f}, [\tilde{f}, \tilde{g}]] \neq 0$$

On retrouve la matrice de contrôlabilité. On cherche donc à résoudre

$$D_{h_0}\mathcal{C} = (0 \quad 0 \quad \gamma)$$

Sachant que

$$\mathcal{C}^{-1} = \frac{-1}{[\alpha, [\alpha, \beta]]x_1^2 + 2[\alpha, \beta]x_1x_2 + 2\beta x_2^2} \begin{pmatrix} [\alpha, [\alpha, \beta]]x_2 & [\alpha, [\alpha, \beta]]x_1 + 2[\alpha, \beta]x_2 & -2x_2^2 \\ [\alpha, [\alpha, \beta]]x_1 & -2\beta x_2 & -2x_1x_2 \\ -\beta x_2 - [\alpha, \beta]x_1 & -\beta x_1 & -x_1^2 \end{pmatrix}$$

on en déduit que $D_{h_0} = \frac{[\beta x_2 + [\alpha, \beta]x_1 \quad \beta x_1 \quad x_1^2]}{[\alpha, [\alpha, \beta]]x_1^2 + 2[\alpha, \beta]x_1x_2 + 2\beta x_2^2} \gamma$. La résolution passe par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_1} &= \frac{\beta x_2 + [\alpha, \beta]x_1}{[\alpha, [\alpha, \beta]]x_1^2 + 2[\alpha, \beta]x_1x_2 + 2\beta x_2^2} \gamma \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} &= \frac{\beta x_1}{[\alpha, [\alpha, \beta]]x_1^2 + 2[\alpha, \beta]x_1x_2 + 2\beta x_2^2} \gamma \\ \frac{\partial h}{\partial \omega} &= \frac{x_1^2}{[\alpha, [\alpha, \beta]]x_1^2 + 2[\alpha, \beta]x_1x_2 + 2\beta x_2^2} \gamma \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \beta &= 1 \quad \alpha = \omega^2 - 1 \\ [\alpha, \beta] &= 2\omega \quad [\alpha, [\alpha, \beta]] = 2\omega^2 + 2 \end{aligned}$$

On obtient donc $[\alpha, [\alpha, \beta]]x_1^2 + 2[\alpha, \beta]x_1x_2 + 2\beta x_2^2$ qui vaut $2x_1^2 + 2(\omega x_1 + x_2)^2$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_1} &= \frac{\gamma(x_2 + 2\omega x_1)}{2x_1^2 + 2(\omega x_1 + x_2)^2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} &= \frac{\gamma x_1}{2x_1^2 + 2(\omega x_1 + x_2)^2} \\ \frac{\partial h}{\partial \omega} &= \frac{\gamma x_1^2}{2x_1^2 + 2(\omega x_1 + x_2)^2} \end{aligned}$$

Le choix de $\gamma = 2x_1^2 + 2(\omega x_1 + x_2)^2$ simplifie les relations ci-dessus et permet d'obtenir une expression simple de h .

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = x_2 + 2\omega x_1 \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} = x_1 \quad \frac{\partial h}{\partial \omega} = x_1^2$$

Déroulons les relations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x_1} &= x_2 + 2\omega x_1 \Rightarrow h(x_1, x_2, \omega) = x_1 x_2 + \omega x_1^2 + A(x_2, \omega) \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} &= x_1 = x_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2}(x_2, \omega) \Rightarrow h(x_1, x_2, \omega) = x_1 x_2 + \omega x_1^2 + B(\omega) \\ \frac{\partial h}{\partial \omega} &= x_1^2 = x_1^2 + \frac{\partial B}{\partial \omega}(\omega) \Rightarrow h(x_1, x_2, \omega) = x_1 x_2 + \omega x_1^2 + c\end{aligned}$$

où c est une constante qu'on choisit égale à zéro. Nous retrouvons le changement de variables présentée précédemment (i.e. $y_1 = x_1 x_2 + \omega x_1^2$) qui permet de transformer le système sous forme de Brunovski.

Un deuxième exemple non-linéaire. —

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= -\sigma_3 u, \\ \dot{\sigma}_2 &= \sigma_3 \omega_0, \\ \dot{\sigma}_3 &= \sigma_1 u - \sigma_2 \omega_0.\end{aligned}$$

Il est facile de constater que $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 1$. Pour étudier la contrôlabilité de ce système, effectuons le changement de variables suivant.

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sin(\theta), \\ \sigma_2 &= \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \sigma_3 &= \cos(\theta) \cos(\varphi)\end{aligned}$$

qui mène au système

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\cos(\varphi)u, \\ \dot{\varphi} &= 1 - \tan(\theta) \sin(\varphi).\end{aligned}$$

Si on pose

$$f(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g(\sigma) = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \tan(\theta) \end{pmatrix}$$

le système prend la forme

$$\dot{\sigma} = f(\sigma) + g(\sigma)u.$$

Calculons les premiers crochets de Lie :

$$\begin{aligned}[f, g] &= \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \tan(\theta) \end{pmatrix}, \\ [f, [f, g]] &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \tan(\theta) \end{pmatrix} = -g, \\ [g, [f, g]] &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f.\end{aligned}$$

Il est alors clair que la matrice

$$[g \ [f, g] \ [f, [f, g]] \ [g, [f, g]]] = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) \tan(\theta) & \cos(\varphi) \tan(\theta) & \sin(\varphi) \tan(\theta) & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang plein, prouvant ainsi que le système est contrôlable.

Par contre, la matrice

$$[g \ [f, g] \ [f, [f, g]]] = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \tan(\theta) & \cos(\varphi) \tan(\theta) & \sin(\varphi) \tan(\theta) \end{pmatrix}$$

est de rang plein en un point générique, mais chute de rang au point $\theta = 0$. De cette remarque, il découle que le système ne peut pas être transformé par une linéarisation exacte en une chaîne d'intégrateurs.

Remarquons que le système masse ressort, au contraire, vérifiait les hypothèses de la linéarisation exacte.

5.5. Le cas Multi-entrées

Définition 1. — *Le système variant dans le temps*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p,$$

est N -contrôlable si la matrice

$$\mathcal{C}_N = (B_0, B_1, \dots, B_{N-1})$$

est de rang plein, i.e. n , avec $B_0 = B$ et pour tout $k > 0$

$$B_k = AB_{k-1} - \dot{B}_{k-1}$$

Définition 2. — *Partant du système variant dans le temps*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p,$$

nous définissons les indices suivants :

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, α_i est le rang de la dernière direction apportée par la commande u_i .
- $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$, β_i est le nombre de directions apportées par la commande u_i .
- $r = (r_1, \dots, r_p)$, r_i est le nombre de vecteurs engendrés par u_i qui sont combinaisons linéaires de vecteurs déjà présents.

Théorème 2. — *Soit le système variant dans le temps N -contrôlable*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p.$$

Il existe des matrices (R, S, T) telles que le système augmenté

$$\overbrace{\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}}^{\dot{x}} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ R(t) & S(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B(t) \\ T(t) \end{pmatrix} u, w \in \mathbb{R}^n$$

soit transformable en p chaînes d'intégrateurs de dimension $\tilde{\alpha}_k$, pour $k \geq 1$. De plus, si on pose $\alpha = \max_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i$ et $\mathbb{I} = \{k, \alpha_k = \max_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i\}$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_k &= \alpha_k - \beta_k - r_k + (\alpha - \alpha_k - 1) \quad \text{si } k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{I} \\ \tilde{\alpha}_k &= \alpha - \beta_k \quad \text{si } k \in \mathbb{I} \end{aligned}$$

Le nombre d'intégrateurs exigé par le bouclage est donc

$$\eta = p\alpha - n - \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{I}} (1 + r_i)$$

Démonstration. — La matrice de contrôlabilité du système augmenté est :

$$\tilde{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & \dots & B_{N-1} \\ T_0 & T_1 & \dots & T_{N-1} \end{pmatrix}$$

où $T_0 = T$ et

$$(37) \quad T_k = -\dot{T}_{k-1} + RB_{k-1} + ST_{k-1}, k \geq 1$$

Parallèlement au cas mono-entrée, on réarrange la matrice de contrôlabilité de manière à faire apparaître une partie inversible $\hat{\mathcal{C}}$. On définit également les matrices \hat{T}^s , \check{T}^s , \hat{T} , \check{T} et $\check{\mathcal{C}}$. On ne prend pas en compte les colonnes de B_{N-1} n'apportant pas de direction supplémentaire (on se limite à une configuration minimale). De plus, on va distinguer dans la matrice $\check{\mathcal{C}}$, une partie $\check{\mathcal{C}}_1$ contenant les $\alpha_k - \beta_k$ et les $\max_i \alpha_i - \alpha_k - 1 - r_k$ colonnes, et une seconde $\check{\mathcal{C}}_2$ contenant les r_k colonnes. Une écriture matricielle de (37) est :

$$\begin{aligned} (\hat{T}^s & \check{T}_1^s & \check{T}_2^s) = -(\dot{\hat{T}} & \dot{\check{T}}_1 & \dot{\check{T}}_2) \\ & + (R & S) \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{C}} & \check{\mathcal{C}}_1 & \check{\mathcal{C}}_2 \\ \hat{T} & \check{T}_1 & \check{T}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le choix de $\hat{T} = 0$, $\check{T}_1 = I$ et $\check{T}_2 = CL$ (Combinaison linéaire des colonnes de \hat{T} et \check{T}_1) conduit aux matrices (R, S) suivantes :

$$\begin{aligned} R &= (\hat{T}^s + \dot{\hat{T}}) \hat{\mathcal{C}}^{-1} \\ S &= (\check{T}_1^s + \dot{\check{T}}_1) - R \check{\mathcal{C}}_1 \end{aligned}$$

Construisons un changement de variables de la manière suivante. Commençons par la chaîne c . Posons par avance $H_{c,k} = \dot{H}_{c,k-1} + H_{c,k-1}A$.

$$\begin{aligned} y_0 &= H_{c,0}x \\ y_1 &= \dot{y}_0 = H_{c,1}x + H_{c,0}\tilde{B}u \\ y_2 &= \dot{y}_1 = H_{c,2}x + H_{c,1}\tilde{B}u \\ &\vdots \\ y_{\tilde{\alpha}_p-1} &= \dot{y}_{\tilde{\alpha}_p-2} = H_{c,\tilde{\alpha}_p-1}x + H_{c,\alpha_p-2}\tilde{B}u \\ \dot{y}_{\tilde{\alpha}_p-1} &= H_{c,\tilde{\alpha}_p}x + H_{c,\tilde{\alpha}_p-1}\tilde{B}u \end{aligned}$$

Le choix des $H_{c,i}$, $i = 0 \dots \alpha_p - 2$ orthogonaux à \tilde{B} permet d'écrire

$$H_{c,0}\tilde{\mathcal{C}} = [0_{1 \times p} \quad \dots \quad 0_{1 \times p} \quad K_c \quad 0_{1 \times p} \quad \dots \quad 0_{1 \times p}]$$

où K_c est un vecteur ligne valant 1 à la c-ième colonne et 0 ailleurs. il s'en suit qu'après le réarrangement (appelons-le M), nous obtenons une expression de H qui vérifie les égalités précédentes.

$$\begin{pmatrix} H_{10} \\ \vdots \\ H_{p0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{1 \times p} & \dots & 0_{1 \times p} & K_1 & 0_{1 \times p} & \dots & 0_{1 \times p} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0_{1 \times p} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0_{1 \times p} & K_p \end{pmatrix} \times M \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{C}}^{-1} & -\hat{\mathcal{C}}^{-1}\check{\mathcal{C}}_1 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix},$$

La preuve est achevée en posant

$$v = \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_p \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} H_{1\tilde{\alpha}_1} \\ \vdots \\ H_{p\tilde{\alpha}_p} \end{pmatrix} x$$

□

Exemple 2. — Considérons le système variant dans le temps à trois commandes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= tx_2 + t^4 u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + tu_2 \\ \dot{x}_3 &= t^2 u_3 \end{aligned}$$

Il s'en suit qu'on peut écrire :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t^4 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\begin{aligned} B_0 &= \begin{pmatrix} t^4 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -4t^3 & t^2 & 0 \\ 0 & -1 & t^2 \\ 0 & 0 & -2t \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} 12t^2 & -3t & t^3 \\ 0 & 0 & -4t \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -24t & 3 & -7t^2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Les indices sont :

$$\alpha = (0, 4, 3), \quad \beta = (0, 2, 1), \quad r = (1, 0, 0)$$

Ainsi, le nombre d'intégrateurs pour le bouclage est $N = 6$. Ils se répartissent de la manière suivante.

$$\check{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} t^4 & 0 & 0 & -4t^3 & t^2 & 0 & 12t^2 & -3t & t^3 & -24t & 3 & -7t^2 \\ 0 & t & 0 & 0 & -1 & t^2 & 0 & 0 & -4t & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & -2t & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'en suit que R et S vérifient

$$R \begin{pmatrix} 3 & t^2 & t^3 \\ 0 & -1 & -4t \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$R \begin{pmatrix} t^4 & 0 & 0 & -4t^3 & 0 & -3t & 12t^2 & -24t & -7t^2 \\ 0 & t & 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & -2t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4t & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2t \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 2t^3 & -4t & -3t^2 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_1, & \dot{w}_2 &= u_2, & \dot{w}_3 &= u_3, & \dot{w}_4 &= w_1, & \dot{w}_5 &= w_3 \\ \dot{w}_6 &= -x_2 - 2tx_3 + tw_2 + 2t^3w_3 - 4tw_4 - 3t^2w_5 \end{aligned}$$

De plus, en posant

$$\begin{aligned} z_1 &= w_1, & z_1^{(2)} &= u_1, \\ z_2 &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{t^2}{3}x_2 + \frac{t^3}{2}x_3 - \frac{t^4}{3}w_1 - \frac{t^3}{2}w_2 - \frac{t^5}{2}w_3 \\ &\quad + \frac{4t^3}{3}w_4 + \frac{2t^4}{3}w_5 + tw_6, \\ z_2^{(4)} &= -8w_1 - 2tw_3 - 8w_5 - \frac{t^2}{3}u_3 - 4tu_1 + u_2, \\ z_3 &= \frac{1}{2}x_3 - \frac{t^2}{2}w_3 + 2tw_5, & z_3^{(3)} &= u_3, \end{aligned}$$

on conclut avec

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1, \\ v_2 &= -8w_1 - 2tw_3 - 8w_5 - \frac{t^2}{3}u_3 - 4tu_1 + u_2, \\ v_3 &= u_3. \end{aligned}$$

5.6. Le cas de l'observabilité

Définition 3. — *Le système variant dans le temps*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + B(t)u, x \in \mathbb{R}^n, \\ y &= C(t)x,\end{aligned}$$

est N -observable si la matrice

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_0 = C \\ C_1 = \dot{C}_0 + C_0A \\ \vdots \\ C_{N-1} = \dot{C}_{N-2} + C_{N-2}A \end{pmatrix}$$

est de rang n .

Théorème 3. — *Soit le système variant dans le temps N -observable*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + B(t)u, x \in \mathbb{R}^n, \\ y &= C(t)x.\end{aligned}$$

Il existe des matrices (R, S, D) telles que le système augmenté

$$\begin{aligned}\overbrace{\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}}^{\dot{\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}}} &= \begin{pmatrix} A(t) & R(t) \\ 0 & S(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B(t) \\ 0 \end{pmatrix} u, w \in \mathbb{R}^{N-n}, \\ y &= (C(t) \quad D(t)) \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

soit N -observable.

Démonstration. — La matrice d'observabilité du système augmenté est :

$$\tilde{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} C_0 & D_0 \\ C_1 & D_1 \\ \vdots & \\ C_{N-1} & D_{N-1} \end{pmatrix}$$

où $D_0 = D$ et

$$(38) \quad D_k = \dot{D}_{k-1} + D_{k-1}S + C_{k-1}R, k \geq 1$$

Parallèlement à la commandabilité, on réarrange la matrice d'observabilité de manière à faire apparaître une partie inversible $\hat{\mathcal{C}}$ de la matrice d'observabilité. On définit également les matrices \hat{D}^s , \check{D}^s , \hat{D} , \check{D} et $\check{\mathcal{C}}$. Une écriture matricielle de (38) est :

$$\begin{pmatrix} \hat{D}^s \\ \check{D}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\hat{D}} \\ \dot{\check{D}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{C}} & \hat{D} \\ \check{\mathcal{C}} & \check{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$$

Le choix de $\hat{D} = 0$, $\check{D} = I$ conduit aux matrices (R, S, D) suivantes :

$$R = \hat{\mathcal{C}}^{-1} \hat{D}^s$$

$$S = -\check{\mathcal{C}} \hat{\mathcal{C}}^{-1} \hat{D}^s + \check{D}^s$$

$$D = \text{ la première ligne de la matrice } D = \text{ ré-arrangée de } \begin{pmatrix} \hat{D} \\ \check{D} \end{pmatrix}$$

□

Exemple. —

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= tx_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= tx_1\end{aligned}$$

Le système est 4-observable.

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & t^2 \\ 0 & 3t \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

De la définition de $\hat{\mathcal{D}} = 0$, $\check{\mathcal{D}} = I$, on obtient :

$$\tilde{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 & 0 \\ 1 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

qui conduit à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & t^2 & 0 & 0 \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

et

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = (1 \ 0).$$

Le système augmenté s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= tx_2 + w_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ \dot{w}_1 &= -tw_2 \\ \dot{w}_2 &= 0 \\ y &= tx_1 + w_1\end{aligned}$$

Exemple. — Soit le système $(\ddot{x} = -\omega^2 x, y = \sin(t)x)$. Une réalisation de ce système est

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 \end{cases}$$

$$y = \sin(t)x_1$$

En utilisant la première dérivée de la mesure, il est aisément d'exprimer les états (x_1, x_2) en fonction de (y, \dot{y}) .

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{\sin(t)}y \\ x_2 &= -\frac{\cos(t)}{\sin(t)^2}y + \frac{1}{\sin(t)}\dot{y} \end{cases}$$

Toutefois, ces expressions ne sont pas définies en $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exprimons les dérivées de la mesure y jusqu'à l'ordre 3.

$$\begin{aligned} y^{(0)} &= \sin(t)x_1 \\ y^{(1)} &= \cos(t)x_1 + \sin(t)x_2 \\ y^{(2)} &= -(1 + \omega^2)\sin(t)x_1 + 2\cos(t)x_2 \\ y^{(3)} &= -(1 + 3\omega^2)\cos(t)x_1 - (3 + \omega^2)\sin(t)x_2 \end{aligned}$$

Utilisons maintenant $y^{(1)}$ et $y^{(2)}$ pour exprimer (x_1, x_2) . L'intérêt d'utiliser un niveau de dérivation supplémentaire est que les expressions ne font plus apparaître de singularités en temps (i.e. pour tout t , $1 + \frac{\omega^2-1}{2}\sin^2(t) \neq 0$).

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{\cos(t)}{1 + \frac{\omega^2-1}{2}\sin^2(t)}y^{(1)} + \frac{-\frac{1}{2}\sin(t)}{1 + \frac{\omega^2-1}{2}\sin^2(t)}y^{(2)} \\ x_2 &= \frac{\frac{\omega^2+1}{2}\sin(t)}{1 + \frac{\omega^2-1}{2}\sin^2(t)}y^{(1)} + \frac{\frac{1}{2}\cos(t)}{1 + \frac{\omega^2-1}{2}\sin^2(t)}y^{(2)} \end{cases}$$

Il ne reste plus, à ce stade, qu'à réaliser un système qui permet d'obtenir $y^{(1)}$ et $y^{(2)}$. Pour cela, exprimons $y^{(3)}$ en fonction de y , $y^{(1)}$ et $y^{(2)}$.

$$y^{(3)} = -\frac{(3\omega^2+1)\cos^2(t) + \frac{1}{2}(\omega^2+1)(\omega^2+3)\sin^2(t)}{1 + \frac{\omega^2-1}{2}\sin^2(t)}y^{(1)} + \frac{\frac{1}{2}(\omega^2+1)\cos(t)\sin(t)}{1 + \frac{\omega^2-1}{2}\sin^2(t)}y^{(2)}$$

Pour réaliser l'équation précédente, nous choisissons le de poser :

$$\begin{cases} y_0 &= y, \\ y_1 &= y^{(1)}, \\ y_2 &= y^{(2)}. \end{cases}$$

Il s'en suit qu'une réalisation du système est :

$$\begin{cases} \dot{y}_0 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\frac{(3\omega^2+1)\cos^2(t) + \frac{1}{2}(\omega^2+1)(\omega^2+3)\sin^2(t)}{1 + \frac{\omega^2-1}{2}\sin^2(t)}y_1 + \frac{\frac{1}{2}(\omega^2+1)\cos(t)\sin(t)}{1 + \frac{\omega^2-1}{2}\sin^2(t)}y_2. \end{cases}$$

Construisons un observateur de ce système. Posons :

$$\begin{cases} \dot{\hat{y}}_0 &= \hat{y}_1 + \lambda_0(y_0 - \hat{y}_0), \\ \dot{\hat{y}}_1 &= \hat{y}_2 + \lambda_1(y_0 - \hat{y}_0), \\ \dot{\hat{y}}_2 &= -\frac{(3\omega^2+1)\cos^2(t) + \frac{1}{2}(\omega^2+1)(\omega^2+3)\sin^2(t)}{1 + \frac{\omega^2-1}{2}\sin^2(t)}\hat{y}_1 + \frac{\frac{1}{2}(\omega^2+1)\cos(t)\sin(t)}{1 + \frac{\omega^2-1}{2}\sin^2(t)}\hat{y}_2 + \lambda_2(y_0 - \hat{y}_0). \end{cases}$$

Regardons l'équation aux erreurs :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_0 &= \tilde{y}_1 - \lambda_0\tilde{y}_0, \\ \dot{\tilde{y}}_1 &= \tilde{y}_2 - \lambda_1\tilde{y}_0, \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= a_1\tilde{y}_1 + a_2\tilde{y}_2 - \lambda_2\tilde{y}_0. \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 &= \dot{\tilde{y}}_0 + \lambda_0\tilde{y}_0, \\ \tilde{y}_2 &= \dot{\tilde{y}}_1 + \lambda_1\tilde{y}_0 = \ddot{\tilde{y}}_0 + \lambda_0\dot{\tilde{y}}_0 + (\lambda_0 + \lambda_1)\tilde{y}_0, \\ 0 &= \tilde{y}_0^{(3)} + (\lambda_0 - a_2)\ddot{\tilde{y}}_0 + (2\dot{\lambda}_0 + \lambda_1 - a_2\lambda_0 - a_1)\dot{\tilde{y}}_0 + (\ddot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_1 - a_2(\dot{\lambda}_0 + \lambda_1) - a_1\lambda_0 + \lambda_2)\tilde{y}_0 \end{cases}$$

où $a_1 = -\frac{(3\omega^2+1)\cos^2(t) + \frac{1}{2}(\omega^2+1)(\omega^2+3)\sin^2(t)}{1 + \frac{\omega^2-1}{2}\sin^2(t)}$ et $a_2 = \frac{\frac{1}{2}(\omega^2+1)\cos(t)\sin(t)}{1 + \frac{\omega^2-1}{2}\sin^2(t)}$.

Il suffit alors de choisir :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_0 & = & k_0 + a_2 \\ \\ \lambda_1 & = & \left(a_2 \lambda_0 - 2\dot{\lambda}_0 \right) + a_1 + k_1 \\ & = & a_2 k_0 + k_1 + (a_1 + a_2^2 - 2\dot{a}_2) \\ \\ \lambda_2 & = & - \left(\ddot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_1 - a_2 \left(\dot{\lambda}_0 + \lambda_1 \right) - a_1 \lambda_0 \right) + k_2 \\ & = & (a_1 + a_2^2 - \dot{a}_2) k_0 + a_2 k_1 + k_2 + (2a_1 a_2 + a_2^3 - \dot{a}_1 - 3a_2 \dot{a}_2 - \dot{a}_1 + \ddot{a}_2) \end{array} \right.$$

où les k_i sont les gains à régler de l'observateur. Un observateur pour les grandeurs du système de départ est donc :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \hat{x}_1 & = & \frac{\cos(t)}{1 + \frac{\omega^2 - 1}{2} \sin^2(t)} y_1 + \frac{-\frac{1}{2} \sin(t)}{1 + \frac{\omega^2 - 1}{2} \sin^2(t)} y_2 \\ \\ \hat{x}_2 & = & \frac{\frac{\omega^2 + 1}{2} \sin(t)}{1 + \frac{\omega^2 - 1}{2} \sin^2(t)} y_1 + \frac{\frac{1}{2} \cos(t)}{1 + \frac{\omega^2 - 1}{2} \sin^2(t)} y_2 \end{array} \right.$$

Les fonctions a_1 et a_2 étant connues, il est simple d'obtenir pour k_i fixés la valeur des gains λ_k .

5.7. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une nouvelle approche permettant de résoudre le problème de singularités de commandabilité et d'observabilité pour des systèmes variant dans le temps.

Nous avons montré que des extensions au domaine non-linéaire sont possibles pour des systèmes linéarisables par bouclage.

Nous avons présenté une méthode pour construire explicitement un observateur pour un système possédant des singularités d'observabilité. Il faut noter que les gains de l'observateur sont explicitement calculés de manière à assurer la convergence exponentielle de l'observateur.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons traité des problèmes de l'identification et de l'observabilité du moteur à induction pour la variation de vitesse industrielle "sans capteur".

La variation de vitesse des moteurs à induction dans le domaine de la basse vitesse est un problème difficile et encore ouvert. Il est difficile parce que la zone de basse vitesse fait apparaître de nombreuses difficultés :

- Variateur. Les imperfections de l'étage de puissance se font particulièrement ressentir dans le domaine des faibles tensions (les chutes de tension dans les composants électroniques représentent quelques dizaines de purcents de la tension envoyée au moteur),
- Moteur. Une zone d'inobservabilité (droite de glissement) est présente dans ce domaine du plan couple vitesse. De plus, une partie de cette zone d'inobservabilité apparaît dans une zone où le moteur est naturellement instable.

Les deux sujets traités ont comme point commun d'apporter une première solution. L'identification paramétrique permet de connaître parfaitement les paramètres du modèle et en ce sens de résoudre le problème du mauvais fonctionnement de la variation de vitesse dans le domaine de la basse vitesse. Toutefois, l'identification se faisant à l'arrêt, la dérive thermique des paramètres résistifs n'est pas parfaitement identifiable. Les performances se dégradent au cours du temps par manque de robustesse des algorithmes de commande vis-à-vis des dérives paramétriques. La construction d'un observateur exponentiellement stable autour d'une trajectoire traversant la droite d'inobservabilité apporte une seconde solution au problème.

Le problème reste néanmoins ouvert. Deux voies de recherche pour améliorer la variation de vitesse des moteurs à induction dans le domaine de la basse vitesse sont envisagables :

- Passer outre le problème d'observabilité du moteur à induction en étudiant la stabilisabilité par bouclage d'état,
- Étudier la robustesse aux variations ($\pm 20\%$) des paramètres résistifs des structures d'observateur-contrôleur non-linéaire.

APPENDICE A

ÉQUIVALENCE ÉTOILE-TRIANGLE

Pour rappel, l'équivalence triangle étoile 1 se traduit par :

$$Z_i^\Delta = \frac{Z_1^* Z_2^* + Z_1^* Z_3^* + Z_2^* Z_3^*}{Z_i^*},$$

$$Z_i^* = \frac{Z_1^\Delta Z_2^\Delta Z_3^\Delta}{Z_i^\Delta (Z_1^\Delta + Z_2^\Delta + Z_3^\Delta)}.$$

Vue des phases d'alimentation, une configuration triangle est perçue par sa configuration étoile

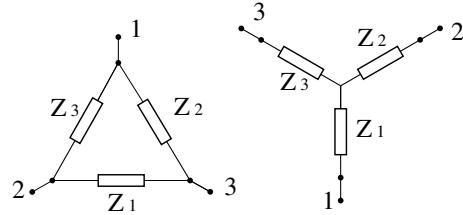


Figure 1 – Triangle - Etoile

équivalente. Nous avons le tableau d'équivalence suivant.

Étoile	U	I	φ	R_s	R_r	L_{ss}	L_{rr}	M_{sr}
Triangle	$\frac{\sqrt{3}}{3}U$	$\sqrt{3}I$	$\frac{\sqrt{3}}{3}\varphi$	$\frac{1}{3}R_s$	$\frac{1}{3}R_r$	$\frac{1}{3}L_{ss}$	$\frac{1}{3}L_{rr}$	$\frac{1}{3}M_{sr}$

Grandeur du moteur asynchrone vues de l'alimentation

En configuration triangle, la résistance statorique identifiée devrait valoir $\frac{R_s}{3}$. Nous constatons expérimentalement sur le banc d'essai 4 kW que lors de l'identification en triangle, nous obtenons une valeur supérieure à celle attendue. En fait, il faut introduire dans le modèle une résistance de ligne. Cette résistance de ligne R_{ligne} vaut environ 0.15Ω . Dans le cas triphasé, on identifie donc $R_s + R_{ligne}$ et dans le cas triangle $\frac{R_s}{3} + R_{ligne}$.

APPENDICE B

SENSIBILITÉ AUX PARAMÈTRES EN RÉGIME PERMANENT

Introduction. — Dans le cadre de la protection thermique des moteurs ou de la variation de vitesse, il est important de bien connaître la valeur de certains paramètres électriques afin d'assurer de bonnes performances. La résistance statorique est un paramètre important du fait de sa grande variation durant le cycle d'utilisation. En effet, sa variation est liée à l'échauffement du moteur et peut aller jusqu'à 50%.

Avant d'approfondir les recherches sur les techniques d'identification utilisable, il est intéressant de quantifier l'influence de cette variation sur les grandeurs mesurables du systèmes. C'est le but de cette étude.

À partir des paramètres électriques (fournis par le constructeur), nous calculons les grandeurs au point de fonctionnement nominal.

P (kW)	R_s Ω	τ_r s	L_s H	L_f H	C_{nom} N m	ω_g Hz	Courant A	Flux Wb
0.550	18.570	0.083	0.682	0.046	3.814	2.222	2.010	0.837
0.750	12.890	0.085	0.556	0.037	5.224	2.368	2.628	0.843
1.100	8.850	0.093	0.381	0.027	7.562	2.171	3.828	0.839
1.500	5.910	0.095	0.299	0.021	10.312	2.220	5.073	0.848
2.200	4.160	0.130	0.272	0.015	14.995	2.121	6.706	0.860
3.000	2.670	0.124	0.181	0.010	20.448	1.983	9.354	0.868
4.000	1.620	0.194	0.153	0.011	26.637	1.378	11.910	0.867
5.500	1.078	0.224	0.122	0.009	36.549	1.301	15.952	0.870
7.500	0.786	0.231	0.100	0.007	50.049	1.419	21.345	0.869
11.000	0.480	0.432	0.071	0.005	71.750	0.764	30.284	0.877
15.000	0.275	0.451	0.051	0.003	97.641	0.703	41.072	0.887

Nous allons maintenant exprimer la variation des grandeurs (vitesse, courant) en fonction des paramètres électriques. En particulier, nous cherchons à évaluer la variation de courant induite par un échauffement du stator. Le paramètre de résistance statorique peut évoluer et augmenter jusqu'à 50%. Dans un deuxième temps, nous allons suivre l'influence de la résistance rotorique. Nous pouvons a priori dire que cette dernière n'influence pas la valeur du courant, dans la mesure où celle-ci n'apparaît qu'en facteur de la vitesse de glissement (Le produit $\omega_g \tau_r$ est observable en régime permanent, mais les deux grandeurs ne le sont pas séparément).

Résistance statorique. — Commençons par exprimer la sensibilité de la vitesse de glissement. Le calcul est simple. A partir de l'expression, $ax^2 + bx + c = 0$, l'expression $\frac{dx}{dt}$ prend la forme

$$-\frac{\frac{da}{dt}x^2 + \frac{db}{dt}x + \frac{dc}{dt}}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Avec ce calcul, l'expression de la vitesse de glissement est :

$$\frac{\partial(\omega_g\tau_r)}{\partial R_s} = \frac{R_s (\omega_g\tau_r)^2 + (1 - \sigma)\omega_s L_s (\omega_g\tau_r) + R_s}{\sqrt{(1 - \sigma)^2 \left(\omega_s L_s R_s - \frac{3}{2} n_p L_s \frac{u_s u_s^*}{2\tau_c} \right)^2 - \left(R_s^2 + (\omega_s L_s)^2 \right) \left(R_s^2 + (\sigma\omega_s L_s)^2 \right)}}$$

avec

$$\omega_g\tau_r = -(1 - \sigma) \frac{\omega_s L_s R_s - \frac{3}{2} n_p L_s \frac{u_s u_s^*}{2\tau_c}}{R_s^2 + (\sigma\omega_s L_s)^2} + \sqrt{(1 - \sigma)^2 \left(\frac{\omega_s L_s R_s - \frac{3}{2} n_p L_s \frac{u_s u_s^*}{2\tau_c}}{R_s^2 + (\sigma\omega_s L_s)^2} \right)^2 - \frac{R_s^2 + (\omega_s L_s)^2}{R_s^2 + (\sigma\omega_s L_s)^2}}$$

En dérivant la relation de transfert entre le courant et la tension, nous écrivons l'équation de sensibilité suivante :

$$i_s \left(1 + \frac{\omega_s(1 - \sigma)L_s}{(1 + j\omega_g\tau_r)^2} \frac{\partial(\omega_g\tau_r)}{\partial R_s} \right) + \left(R_s + j\omega_s L_s \frac{1 + j\sigma\omega_g\tau_r}{1 + j\omega_g\tau_r} \right) \frac{\partial i_s}{\partial R_s} = 0$$

soit encore :

$$\frac{\partial i_s}{\partial R_s} = -\frac{1 + \frac{\omega_s(1 - \sigma)L_s}{(1 + j\omega_g\tau_r)^2} \frac{\partial(\omega_g\tau_r)}{\partial R_s}}{R_s + j\omega_s L_s \frac{1 + j\sigma\omega_g\tau_r}{1 + j\omega_g\tau_r}} i_s$$

Les variations relatives des grandeurs par rapport à la résistance sont définies comme suit :

$$\frac{\Delta \|i_s\|}{\|i_s\|} = \left(\frac{\partial i_s}{\partial R_s} \frac{R_s}{\|i_s\|} \right) \frac{\Delta R_s}{R_s}$$

P (kW)	$\frac{\Delta i_d}{i_d}$ %	$\frac{\Delta i_q}{i_q}$ %	$\frac{\Delta \ i_s\ }{\ i_s\ }$ %	$\frac{\Delta \omega_r}{\omega_r}$ %
0.550	-0.187	0.163	0.016	-0.010
0.750	-0.166	0.147	0.024	-0.010
1.100	-0.163	0.147	0.024	-0.009
1.500	-0.141	0.130	0.025	-0.008
2.200	-0.130	0.116	0.046	-0.008
3.000	-0.117	0.105	0.031	-0.006
4.000	-0.078	0.080	0.028	-0.003
5.500	-0.065	0.071	0.028	-0.003
7.500	-0.057	0.068	0.032	-0.003
11.000	-0.049	0.058	0.028	-0.001
15.000	-0.039	0.045	0.020	-0.001

Variation des courants (axe d, axe q, module) et de la vitesse en % pour 1% de variation de R_s

Typiquement, pour une résistance augmentant de 50%, le module du courant statorique augmente de 1.5%.

Résistance rotorique. — Comme nous venons de le montrer, la constante de temps rotorique n'apparaît que dans le produit $\omega_g \tau_r$ qui ne dépend que des paramètres. Sa sensibilité à τ_r est donc nulle. Il s'en suit que le courant et le flux sont insensibles aux variations de R_r . Seule la vitesse rotorique est influencée.

$$\frac{\partial(\omega_g)}{\partial\tau_r} = -\frac{\omega_g}{\tau_r}$$

ou encore

$$\frac{\partial(\omega_g)}{\partial R_r} = \frac{\omega_g}{R_r}$$

A 50 Hz, et de manière générale, à grande vitesse, le courant statorique est peu sensible à la résistance statorique. Nous avons noté une évolution de 1.5% du courant pour 50% d'augmentation de la résistance statorique.

	$\frac{\Delta i_d}{i_d}$ %	$\frac{\Delta i_q}{i_q}$ %	$\frac{\Delta \ i_s\ }{\ i_s\ }$ %	$\frac{\Delta\omega_r}{\omega_r}$ %	f_s Hz
$\frac{\Delta R_s}{R_s} = 1\%$	-0.057 -0.118	0.068 0.151	0.032 0.088	-0.003 -0.017	50 25
$\frac{\Delta R_s}{R_s} = 50\%$	-2.869 -5.919	3.404 7.544	1.615 4.376	-0.153 -0.871	50 25

Il est clair qu'en baissant la vitesse statorique, nous augmentons la sensibilité à R_s . D'un facteur 2 sur la vitesse, nous obtenons une sensibilité 3 fois plus importantes. Toutefois avec un niveau de sensibilité de l'ordre de 5%, nous restons dans une gamme de problème mal conditionné.

APPENDICE C

LOIS EMPIRIQUES POUR LE POINT DE FONCTIONNEMENT

Les paramètres identifiés doivent correspondre à la réalité du moteur asynchrone à son point de fonctionnement. Par réalité, nous entendons la prise en compte des non-linéarités du système : saturation, chutes de tensions dans l'étage de puissance, résistance de ligne, etc ...

Différentes lois empiriques sont possibles pour obtenir la valeur du point de fonctionnement du moteur asynchrone représenté par un modèle linéaire.

- (1) $I_{fonctionnement} = (0.5 - 0.0025Puissance) \sqrt{2}I_{nom}$
- (2) $I_{fonctionnement} = \frac{3}{4}I_{nom}$
- (3) $I_{fonctionnement} = \sqrt{2}\sin(\psi)I_{nom}$ avec le $\cos\psi$ plaqué.
- (4) $I_{fonctionnement} = \sin(\phi_m)I_{nom}$ en recalculant le $\cos\phi_m$ à partir des grandeurs nominales par la formule $\frac{P_{nom}}{\sqrt{3}U_{nom}I_{nom}}$ où P_{nom} représente la puissance mécanique plaquée (et non la puissance électrique).

numéro	P_{nom}	I_{nom}	$\cos\psi$	(1)	(2)	(3)	(4)
M395	7.5	14.6	0.90	0.681	0.75	0.616	0.625
M489	4.0	8.3	0.88	0.693	0.75	0.672	0.681
M298	4.0	8.3	0.84	0.693	0.75	0.767	0.681
M307	4.0	9.1	0.87	0.693	0.75	0.697	0.744
M285	4.0	9.5	0.87	0.693	0.75	0.697	0.769
M482	2.2	4.9	0.87	0.700	0.75	0.697	0.731
M429	1.5	3.7	0.83	0.702	0.75	0.789	0.788

Toutes ces règles empiriques sont sensiblement équivalentes. Elles dépendent des paramètres nominaux plaqués et sont identiques à 10%. Nous choisissons de retenir la règle (4) lors de l'identification suivant le modèle linéaire.

APPENDICE D

MODÉLISATION DES LONGS CÂBLES - ÉQUATION DU TÉLÉGRAPHISTE

Modélisation des longs câbles. — Dans cette partie, nous verrons l'influence des longs câbles sur les signaux effectivement reçus par le moteur (dans une phase de fonctionnement à l'arrêt). Plusieurs phénomènes sont mis en évidence. Nous montrerons que la fonction de transfert de l'ensemble câble+moteur est celle du moteur pour les câbles de faibles longueurs et est asymptotiquement une fonction propre du câble pour les longueurs de câbles importantes. Dans le domaine fréquentiel, le câble se caractérise principalement par une résistance de ligne (un décalage - gain statique - dans le plan de Bode) et un retard de phase à moyenne fréquence ; le tout dépendant de la longueur de câble.

Equations du système. —

Modèle de la charge. — Le moteur supposé à l'arrêt (nous nous plaçons à $\omega_s = 0$) est présenté par le transfert suivant :

$$(39) \quad Z = \frac{\iota_s}{u_s} = \frac{1 + s\tau_r}{R_s + s(L_s + R_s\tau_r) + s^2L_f\tau_r},$$

s étant l'opérateur de Laplace. Les signaux de commande sont envoyés en début de câble ($x = 0$) et sont reçus par le moteur en fin de câble ($x = l$). Dans un premier temps, nous allons rappeler la modélisation d'un câble pour arriver à l'équation aux dérivées partielles appelée "équation du télégraphiste". Dans un second temps, nous donnerons la solution dans le domaine fréquentiel de cette équation dans le cas particulier d'un moteur asynchrone comme charge.

Equation du télégraphiste. — L'équation aux dérivées partielles appelée "Equation du télégraphiste" est largement étudiée dans la littérature. Citons par exemple [EE97]. Le câble est caractérisé par 4 grandeurs : une résistance R , une inductance L , une capacité C et une conductance G . Sur la première cellule (voir figure 1), nous obtenons les relations :

$$\begin{aligned} V_0 - V_1 &= (Ldx) \frac{d}{dt}\iota_0 + (Rdx)\iota_0 \\ \iota_1 &= \iota_0 - (Cdx) \frac{d}{dt}V_1 + (Gdx)V_1 \end{aligned}$$

En combinant les deux équations précédentes, nous obtenons le transfert suivant :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ \iota_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(Ls + R)dx \\ -(Cs + G)dx & 1 + (Ls + R)(Cs + G)dx^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ \iota_0 \end{pmatrix}$$

Pour n cellules, le transfert prend la forme particulière suivante

$$\begin{pmatrix} V_n \\ \iota_n \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} V_0 \\ \iota_0 \end{pmatrix}$$

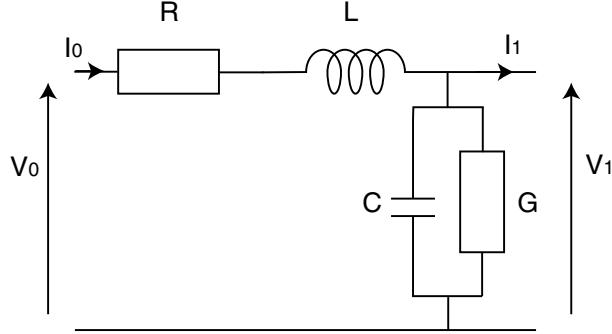


Figure 1 – Modélisation d'une "cellule élémentaire" d'un câble.

où M est la matrice de transfert entre (V_0, ι_0) et (V_1, ι_1) . Si nous notons $m_{ij}^{-n}(s)$ les coefficients de \mathcal{M}^{-n} , nous obtenons le transfert tension-courant à l'entrée du câble :

$$\frac{\iota_0}{V_0} = \frac{m_{21}^{-n}(s)Z + m_{22}^{-n}(s)}{m_{11}^{-n}(s)Z + m_{12}^{-n}(s)}$$

Pour un nombre infini de celulles (voir figure 2), nous obtenons les équations aux dérivées partielles

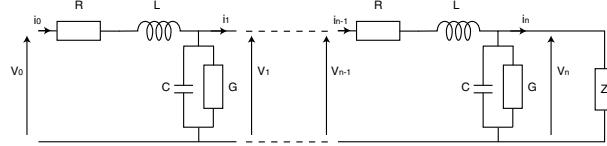


Figure 2 – Modélisation d'un câble par un ensemble de cellules élémentaires.

vérifiées par le courant et la tension :

$$(40) \quad \begin{aligned} \frac{V_0 - V_1}{dx} &= L \frac{d}{dt} \iota_0 + R \iota_0 & \rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} &= -(R + L \frac{\partial}{\partial t}) \circ \iota \\ \iota_1 &= \iota_0 - C \frac{d}{dt} V_1 + G V_1 & \rightarrow \frac{\partial \iota}{\partial x} &= -(G + C \frac{\partial}{\partial t}) \circ V \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, t) &= (R + L \frac{\partial}{\partial t}) \circ (G + C \frac{\partial}{\partial t}) \circ V(x, t) \\ \frac{\partial^2 \iota}{\partial x^2}(x, t) &= (R + L \frac{\partial}{\partial t}) \circ (G + C \frac{\partial}{\partial t}) \circ \iota(x, t) \end{aligned}$$

Résolution dans le domaine de Laplace. — La résolution des équations 40 tient compte des conditions aux limites ($x = 0$ et $x = l$) suivantes :

$$\begin{aligned} x &= 0 & \iota(0, t) &= \iota(t) \\ & & V(0, t) &= u(t) \end{aligned}$$

$$x = l \quad \iota(l, t) = (Z \star V)(l, t) \left(= -(R + L \frac{\partial}{\partial t})^{-1} \circ \frac{\partial V}{\partial x}(l, t)\right)$$

où \star est l'opérateur de convolution. En variable de Laplace, l'équation sur la tension issue de 40 devient une équation intégrable explicitement en la variable s .

$$(41) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, s) = \lambda(s)V(x, s)$$

où $\lambda = (R + Ls)(G + Cs)$. La solution explicite de l'équation 41 s'écrit :

$$V(x, s) = Ae^{-x\sqrt{\lambda}} + Be^{x\sqrt{\lambda}}$$

avec

$$\begin{aligned} V(0, s) &= A + B &= u(s) \\ V(l, s) &= Ae^{-l\sqrt{\lambda}} + Be^{l\sqrt{\lambda}} &= \frac{1}{Z(R+Ls)} \left(-A\sqrt{\lambda}e^{-l\sqrt{\lambda}} + B\sqrt{\lambda}e^{l\sqrt{\lambda}} \right) \end{aligned}$$

Dans [FMPR99], une étude similaire est effectuée dans un but de contrôle.

Posons $P = \sqrt{\frac{R+Ls}{G+Cs}}$ et $Q = \sqrt{(R+Ls)(G+Cs)} = \sqrt{\lambda}$. Les coefficients A et B s'obtiennent de la manière suivante.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1+PZ}{2} e^{lQ} V(l, s) \\ B &= \frac{1-PZ}{2} e^{-lQ} V(l, s) \end{aligned}$$

Nous en déduisons les expressions de $u(s)$, de $V(x, s)$ et $i(x, s)$.

$$u(s) = [\cosh(lQ) + PZ \sinh(lQ)] V(l, s),$$

$$V(x, s) = [\cosh((l-x)Q) + PZ \sinh((l-x)Q)] V(l, s),$$

$$i(x, s) = \frac{1}{P} [PZ \cosh((l-x)Q) + \sinh((l-x)Q)] V(l, s).$$

Le transfert Z' , vu du début du câble, s'écrit donc :

$$(42) \quad Z' = \frac{PZ \cosh(lQ) + \sinh(lQ)}{\cosh(lQ) + PZ \sinh(lQ)} \frac{1}{P}$$

Pour $l = 0$, nous retrouvons $Z' = Z$. Pour l grand, nous obtenons $Z' = \frac{1}{P}$. A partir d'une certaine longueur de câble, la charge n'a plus d'influence sur les grandeurs en entrée du câble.

Calculer les pôles et les zéros de ce transfert n'est pas chose facile. Comment trouver facilement les zéros de l'équation :

$$\frac{1+s\tau_r}{R_s + s(L_s + R_s\tau_r) + s^2L_f\tau_r} \sqrt{\frac{R+Ls}{G+Cs}} \tanh\left(l\sqrt{(R+Ls)(G+Cs)}\right) = 1.$$

Il est beaucoup plus facile d'étudier les pôles et les zéros de la fonction transfert de n cellules. Celle-ci est rationnelle. Par exemple, pour une cellule, le transfert vaut :

$$\frac{(G+Cs)(R_s + s(L_s + R_s\tau_r) + s^2L_f\tau_r) + 1+s\tau_r}{(1+(G+Cs)(R+Ls))(R_s + s(L_s + R_s\tau_r) + s^2L_f\tau_r) + (R+Ls)(1+s\tau_r)}$$

Le premier pôle du câble est situé à environ $\sqrt{\frac{L+L_f}{LC L_f}}$ ($\simeq 2.16 \cdot 10^4 Hz$) du point $(0, 0)$. Le premier zéro est situé à environ $\sqrt{\frac{1}{CL_f}}$ ($\simeq 0.70 \cdot 10^4 Hz$). Ces distances sont à comparer à $\frac{L_s+R_s\tau_r}{2L_f\tau_r} + \sqrt{\left(\frac{L_s+R_s\tau_r}{2L_f\tau_r}\right)^2 - \frac{R_s}{L_f\tau_r}}$ ($\simeq 2.4 \cdot 10^2 Hz$), la position du pôle rapide du moteur (cf. figures 3-a et 3-b).

Simulation fréquentielle. — Les paramètres de simulations sont les suivants :

- Le moteur (4 kW) : $R_s = 1.5\Omega$, $R_r = 0.9\Omega$, $L_s = 0.160H$, $L_r = 0.160H$ et $L_m = 0.152H$.
- Le câble : $R = .13\Omega/km$, $L = 36 * 10^{-3}H/km$, $C = 67 * 10^{-9}H/km$ et $G = 84 * 10^{-9}\Omega^{-1}/km$.

Dans un environnement de commande de moteur asynchrone, il est raisonnable de considérer une distance l de quelques dizaines de mètres. Nous présentons dans cette partie quelques résultats de simulation.

La figure 3-a ci-dessous représente les diagrammes de Bode du moteur asynchrone à l'arrêt et du système moteur+câble avec un câble modélisé par une infinité de cellules. Nous remarquons sur les figures 3-b et 4 que le câble simulé a autant de paires de pôles et de zéros que le nombre

de cellules élémentaires utilisées. Pour tenir compte de la première paire de zéros ("trou" dans le diagramme de Bode), le modèle à une seule cellule 3-b convient parfaitement. Si nous cherchons à simuler des phénomènes hautes fréquences, il faut utiliser un nombre de cellules suffisant. Il

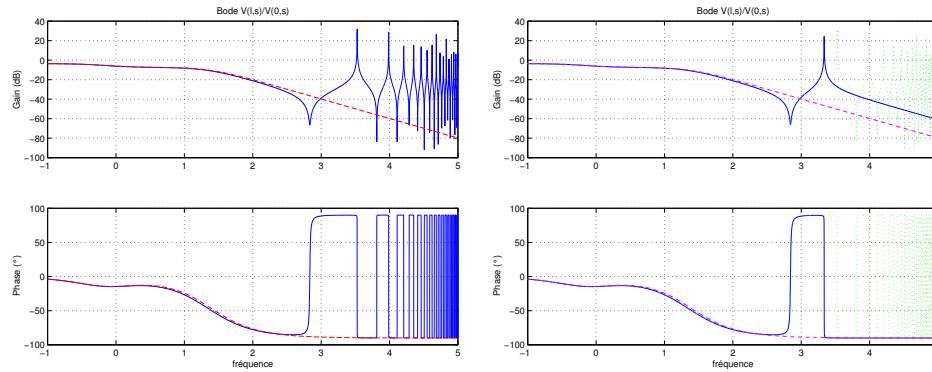


Figure 3 – (Simulation) a) Diagramme de Bode du système moteur+câble (-) et du moteur seul (:) / b) Diagramme de Bode du système moteur+câble représenté par 1 cellule (-)

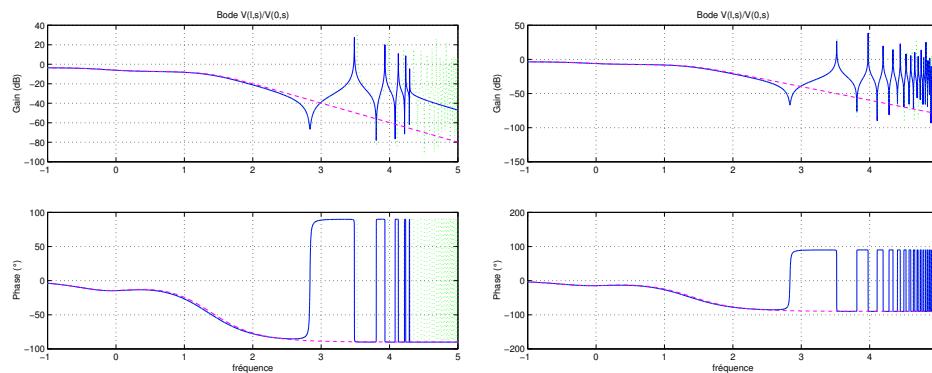


Figure 4 – (Simulation) Diagrammes de Bode du système moteur+câble représenté par 5 et 25 cellules (-)

est intéressant, pour se fixer à l'esprit les ordres de grandeurs, de regarder l'arrangement des pôles et des zéros dans le plan complexe de l'ensemble moteur+câble (représenté par n cellules). Sur la figure 5 sont représentés les pôles et les zéros pour $n = 10$ cellules. La figure de droite montre la répartition de ces derniers dans une échelle logarithmique. Le câble amène des pôles et des zéros très fortement imaginaires de plus en plus rapprochés en fréquence.

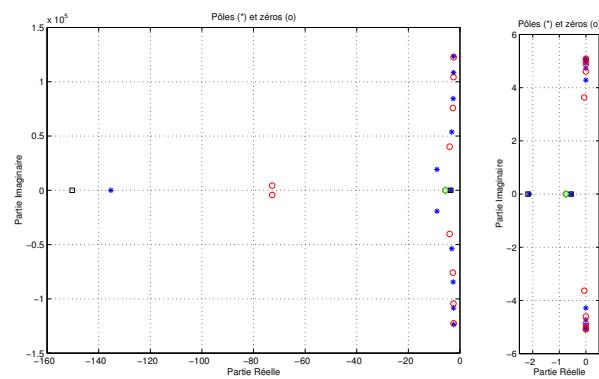


Figure 5 – (Simulation) Lieux des pôles et zéros pour l'ensemble moteur+câble (10 cellules)

APPENDICE E

IDENTIFIABILITÉ

Il peut être intéressant de voir l'identifiabilité des paramètres d'un système comme un problème d'observabilité (en général non linéaire).

Par exemple, l'identifiabilité du système

$$\dot{x} = ax + bu,$$

$$y = x,$$

peut se ramener à l'observabilité du système

$$\dot{x} = ax + bu, \dot{a} = 0, \dot{b} = 0,$$

$$y = x.$$

Cette dernière question se résoud en étudiant le rang de la matrice

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{\partial}{\partial \theta} y \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} y \\ \vdots \end{bmatrix}$$

où $\theta = (x \ a \ b)^T$. Le système sera observable si la matrice \mathcal{O} est de rang plein. En s'arrêtant au rang 2, elle s'écrit :

$$\mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & x & u \\ a^2 & \dot{x} + ax & \dot{u} + au \end{bmatrix}$$

Cette matrice est de rang plein si $x\dot{u} - u\dot{x}$ est non nul ; plus généralement le système sera observable si x et u ne sont pas égaux à une constante multiplicative près.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bru70] P. BRUNOVSKÝ – « A classification of linear controllable systems », *Kybernetika* **6** (1970), no. 3, p. 173–188.
- [Cau95] T. CAUSSAT – « Pilotage vectoriel autonome d'une machine asynchrone alimentée par convertisseur statique », Thèse, ENSEEIHT - INP, Toulouse, septembre 1995.
- [CdWYB⁺00] C. CANUDAS DE WIT, A. YOUSSEF, J. BARBOT, P. MARTIN & F. MALRAIT – « Observability conditions of induction motors at low frequencies », *CDC* (2000).
- [CRH⁺94] T. CAUSSAT, X. ROBOAM, J.-C. HAPIOT, J. FAUCHER & M. TIENTCHEU – « Self-commissioning for pwm voltage source inverter-fed induction motor at standstill », *Proc. of IECON* (1994), p. 198–203.
- [EE97] P. ESCANÉ & J. ESCANÉ – « Réseaux électriques linéaires à cosntantes réparties », *Techniques de l'ingénieur, traité Génie électrique D1* **100** (1997), p. 1–18.
- [FC79] D. FINK & J. CARROLL – *Standard handbook for electrical engineers*, McGraw-Hill, 1979.
- [Fey79] FEYNMAN – *Electromagnétisme*, MASC, vol. 1 et 2, InterEditions, Paris, 1979.
- [FLMR99] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN & P. ROUCHON – « A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems », *IEEE Trans. Automat. Control* **44** (1999), p. 922–937.
- [FMPR99] M. FLIESS, P. MARTIN, N. PETIT & P. ROUCHON – « Active signal restoration for the telegraph equation », *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control* (1999).
- [GGPL97] A. GANJI, P. GUILLAUME, R. PINTELON & P. LATAIRE – « Induction motor dynamic and static inductance identification using a broadband excitation technique », *IEEE Transactions on Energy conversion* (1997), p. 1–5.
- [Glo98] M. GLOBEVNIK – « Induction motor parameters measurement at standstill », *Proc. of IECON* (1998), p. 280–285.
- [GTT97] J. GODBERSEN, P. THØGERSEN & M. TONNES – « A practical identification scheme for induction motor at standstill using only a vs inverter as actuator », *Proc. of EPE* (1997), p. 3370–3374.
- [HK77] R. HERMANN & A. KRENER – « Nonlinear controllability and observability », *IEEE Transactions on automatic control* **ac-22** (1977), no. 5, p. 728–740.
- [Isi89] A. ISIDORI – *Nonlinear control system*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [JCLR98] C. JACOBINA, J. CHAVES, A. LIMA & L. RIBEIRO – « A new method for estimating all the electrical parameters of induction machines », *Proc. of IAS'98* (1998), p. 265–270.

- [JR80] B. JAKUBCZYK & W. RESPONDEK – « On linearization of control systems », *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math.* **28** (1980), p. 517–522.
- [Kai80] T. KAILATH – *Linear systems*, Prentice-Hall, 1980.
- [Kas98] T. KASMIEH – « Modélisation et caractérisation de la saturation magnétique des machines asynchrones en vue de la commande », Thèse, INPT, 1998.
- [KKP85] E. W. KAMEN, P. P. KHARGONEKAR & K. R. POOLLA – « A transfer-function approach to linear time-varying discrete-time systems », *SIAM J. Control & Opt.* **23** (1985), no. 4, p. 550–565.
- [Kla93] N. R. KLAES – « Parameter identification of an induction machine with regard to dependencies on saturation », *IEEE Transactions on Industry Applications* **29** (1993), no. 6, p. 1135–1140.
- [KWS95] P. KRAUSE, D. WASYNCZUK & C. SUDHOFFS – *Analysis of electric machniery*, Wiley interscience, 1995.
- [Leo85] W. LEONHARD – *Control of electrical drives*, Springer Verlag, 1985.
- [Lev95] LEVI – « An unified approach to main flux saturation », *IEEE Transactions on energy conversion* **10** (1995), no. 3, p. 455–461.
- [Lev96] ———, « Main flux saturation modelling in double cage », *IEEE transactions on energy conversion* **11** (1996), no. 2, p. 305–311.
- [Lju87] L. LJUNG – *System identification, theory for the user*, Prentice-Hall, 1987.
- [Lor93] L. LORON – « Application of the extended kalman filter to parameter estimation of induction motors », *EPE* **5** (1993), p. 85–90.
- [Lub99] D. LUBINEAU – « Commande linéaire de moteurs asynchrones avec observateurs », Thèse, LAG, avril 1999.
- [Mal00] B. MALGRANGE – « Lettre à P. ROUCHON », Communication personnelle, 26 janvier 2000.
- [MK93] S. MOON & A. KEYHANI – « Estimation of induction machine parameters from standstill time domain data », *Proc. of IAS* (1993), p. 336–342.
- [MMR97] P. MARTIN, R. MURRAY & P. ROUCHON – « Flat sys tems », *Proc. of the 4th European Control Conf.* (Brussels), 1997, Plenary lectures and Mini-courses, p. 211–264.
- [Mor99] S. MOREAU – « Contribution à la modélisation et à l'estimation paramétrique des machines électriques à courant alternatif : application au diagnostic », Automatique, Ecole supérieure d'ingénieurs de Poitiers, novembre 1999.
- [MS73] A. S. MORSE & L. M. SILVERMAN – « Structure of index-invariant systems », *SIAM J. Control* **11** (1973), no. 2, p. 215–225.
- [RG96] M. RUFF & H. GROTSTOLLEN – « Off-line identification of the electrical parameters of an industrial servo drive system », *Proc. of IAS'96* (1996), p. 213–220.
- [SM67] L. M. SILVERMAN & H. E. MEADOWS – « Controllability and observability in time-variable linear systems », *SIAM J. Control* **5** (1967), p. 64–73.
- [Son87] E. D. SONTAG – « Controllability and linearized regulation », *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-32** (1987), no. 10, p. 877–888.
- [Son91] ———, *Mathematical control theory*, 2nd éd., Springer, 1991.
- [SS96] SULLIVAN & SANDERS – « Models for induction machines with magnetic saturation of the main flux path », *IEEE Transactions on industrial electronics* **31** (1996), no. 4, p. 907–917.

- [Sub74] V. SUBRAHMANYAM – « Representation of magnetisation curves by exponential series », *IEEE Proceedings* **121** (1974), no. 7, p. 707–708.
- [Vas93] P. VAS – *Parameter estimation, condition monitoring, and diagnosis of electrical machines*, oxford science publication éd., Oxford, 1993.
- [Vas97] _____, « Simulation of saturated double-cage induction machines », *Electric Machines and Power Systems* (1997), no. 25, p. 271–285.
- [WBE89] J. WILLIS, G. BROCK & J. EDMONDS – « Derivation of induction motor models from standstill frequency response tests », *IEEE Transactions on Energy Conversion* **4** (1989), no. 4, p. 608–615.
- [Wes94] E. V. WESTERHOLT – « Commande non linéaire d'une machine asynchrone », Thèse, INPT, 1994.
- [WMV91] H. WEIBULL, T. MAGNUSSON & J. VALIS – « Standstill testing of properties of induction motors for inverter control », *Proc. of EPE91* (1991), p. 2363–2368.
- [Wol68] W. A. WOLOVICH – « On the stabilization of controllable systems », *IEEE Trans. Automat. Control* **AC-13** (1968), p. 569–572.
- [WP94] E. WALTER & L. PRONZATO – *Identification de modèles paramétriques*, MASC, Masson, Paris, 1994.