

# NOMENCLATURE

V : Volume	[m <sup>3</sup> ]
V <sub>t</sub> : . total	
V <sub>g</sub> : V. phase gazeuse	
V <sub>l</sub> : V. phase liquide	
V <sub>s</sub> : V. phase solide	
M : Masse	[ kg ]
ρ : Masse volumique	[kg/m <sup>3</sup> ]
ρ <sub>s</sub> : de la phase solide ou réelle	
ρ <sub>l</sub> : de la phase liquide	
ρ <sub>g</sub> : de la phase gazeuse	
θ : Teneur en eau	[ _ ]
θ <sub>l</sub> : Teneur en élément liquide	
θ <sub>s</sub> : Teneur en élément solide	
θ <sub>g</sub> : Teneur en élément gazeux	
θ <sub>r</sub> : Teneur en eau résiduelle	
θ <sub>s</sub> : Teneur en eau à saturation	
f : Porosité	[ - ]
e : indice de vide	[ - ]
φ : Potentiel de pression	[ m ]
φ <sub>p</sub> : Potentiel de pression hydrostatique	
φ <sub>g</sub> : Potentiel de gravité	
H : Charge hydraulique totale	[ m ]
h : charge de pression	[ m ]
z : charge de gravité	[ m ]
K(θ) , K : Conductivité hydraulique	[ m/s ]
K <sub>s</sub> : Conductivité hydraulique à saturation	
χ : Perméabilité intrinsèque du sol	[ m <sup>2</sup> ]

$\mu$ : Viscosité dynamique de l'eau	[ Pa.s ]
$c(\theta), c$ : Capacité capillaire	[ m <sup>-1</sup> ]
D: Diffusivité hydraulique	[ m <sup>2</sup> /s ]
Q : Débit	[ m <sup>3</sup> /s ]
$Q_v$ : débit volumique	
$Q_m$ : débit massique	
q : Flux d'eau (charge)	[ m/s ]
$q_e$ : flux entrant	
$q_s$ : flux sortant	
$\bar{v}$ : Vitesse moyenne du fluide	[ m/s ]
$\vec{v}$ : Vitesse d'écoulement du fluide	
S : Section de la portion de sol	[ m <sup>2</sup> ]
$\vec{\gamma}$ : Accélération gravitationnelle	
t : instant	
L : Longueur de couche de sol	[ m ]
$\delta$ : Hauteur de la couche	[ m ]
I : Indice pour l'abscisse	[ - ]
J : Indice pour la côte	[ - ]
N : indice pour le temps	[ - ]

# TABLE DES MATIERES

## NOMENCLATURE

## LISTE DES FIGURES

## INTRODUCTION.....1

## PARTIE I : THEORIE SUR LE PROCESSUS D'INFILTRATION DE L'EAU DANS LE SOL

I.1. Propriétés physiques du sol.....	10
I.1.1. Structure.....	10
I.1.2. Paramètres descriptifs.....	12
I.1.2.1. Grandeurs intrinsèques et relatives.....	12
I.1.2.2. Porosité.....	14
I.1.3. Propriétés hydrodynamiques.....	16
I.1.3.1. Quelques définitions.....	16
I.1.3.2. Conductivité hydraulique $k$ .....	18
I.1.3.3. Capacité capillaire $c$ .....	20
I.1.3.4. Diffusivité hydraulique $D$ .....	20
I.2. Principes de l'infiltration.....	21
I.3. Dynamique des écoulements en milieu poreux.....	23
I.3.1. Approche microscopique.....	24
I.3.2. Approche macroscopique.....	25
I.3.2.1. Débit volumique – Débit massique.....	25
I.3.2.2. Equations de base.....	26
II.1. Formulation du problème : équation de Richards.....	28
II.1.1. Equations générales des écoulements.....	29
II.1.2. Equation de Richards .....	30
I.2. Présentation du modèle.....	31
II.3. Conditions d'étude	33
II.3.1. Conditions générales.....	33
II.3.2. Conditions physiques.....	33

II.3.3. Paramètres caractéristiques du sol.....	34
III.1. Méthode d'analyse.....	37
III.1.1. Modèle discrétisé.....	37
III.1.2. Forme approchée de l'équation dynamique des écoulements.....	39
III.1.3. Conditions aux frontières.....	40
III.2. Les cas étudiés	44
III.2.1 Infiltration et redistribution.....	46
III.2.2. Influence de l'épaisseur des couches sur le processus d'infiltration.....	53
III.2.3. Evolution de l'infiltration dans des échantillons de différentes porosités.....	55
III.2.4. Influence de l'organisation structurale des couches d'infiltration.....	57
ANNEXE	1
1 L'équation de continuité.....	1
2- L'équation de quantité de mouvement (Equation de Navier-Stokes).....	1
3 - Equation de continuité appliquée à l'écoulement d'eau.....	1
4- Equation dynamique.....	1
<b>CONCLUSION.....</b>	<b>53</b>

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

**ANNEXES**

## LISTE DES FIGURES

### PARTIE I

Figure I.1 : Types de structure particulaire (approche macroscopique).....	11
Figure I.2 : Types de structure continue (approche macroscopique).....	11
Figure I.3 : Représentation schématique de la constitution volumique du sol.....	12
Figure I.4 : Diverses représentations de la répartition volumique des phases dans le sol	14
Figure I.5 : Schéma illustrant les vides.....	14
Figure I.6 : Schéma illustrant un espace poral à porosité résiduelle.....	15
Figure I.7 : Schéma illustrant un espace poral à porosité effective.....	15
Figure I.8 : Exemples de courbes porosimétriques.....	16
Figure I.9 : Allure générale de la relation $h(\theta)$ .....	17
Figure I.10 : Variation de la fonction $K(\theta)$ pour deux types de sol .....	19
Figure I.11 : Allure générale de la fonction $K(\theta)$ .....	19
Figure I. 12 : Profil hydrique d'un sol initialement sec pour une infiltration en cours	21
Figure I.13 : Evolution du profil hydrique au cours du temps.....	22
Figure I. 14 : Profil hydrique en milieu non saturé.....	23
Figure I. 15 : Modèle microscopique d'un sol poreux.....	24

## INTRODUCTION

Etant donné l'importance de la contribution du sol dans divers domaines, notamment celui du génie rural, la simulation numérique des processus intervenant dans le sol contribue à une meilleure résolution des difficultés que l'on peut rencontrer dans ces domaines.

La connaissance du sol ainsi que la description des phénomènes qui le caractérisent sont, en effet, indispensables à la manipulation de ce milieu.

Dans le présent mémoire, intitulé : "Infiltration de l'eau dans le sol : étude par modélisation", nous nous proposons l'étude de l'infiltration sur un modèle de sol stratifié. Notre étude est basée sur le traitement numérique de l'équation de Richards qui permet, en effet, de traduire le processus d'infiltration de l'eau dans le sol.

Le traitement numérique que nous avons effectué utilise la technique de modélisation par différences finies. Cette dernière est surtout efficace dans le cas d'un système homogène et isotrope, d'autant plus qu'elle permet d'obtenir des résultats satisfaisants avec un travail de programmation réduit.

A part la méthode par différences finies, il y a aussi la méthode par éléments finis qui demande un travail de programmation beaucoup plus important et qui complète relativement bien la méthode par différences finies.

Pour atteindre notre objectif, nous rappelons dans le premier chapitre intitulé : "Théorie sur le processus d'infiltration de l'eau dans le sol", les différentes propriétés physiques du sol, le principe d'infiltration et la dynamique des écoulements en milieux poreux.

Dans le second chapitre intitulé "Etude de l'infiltration sur un Modèle de sol stratifié", nous allons voir en premier lieu la formulation du problème c'est-à-dire l'établissement de l'équation de Richards, ensuite nous allons présenter le modèle que nous avons choisi sera présenté et enfin, les différentes conditions qui s'appliquent au système étudié.

Dans le troisième chapitre intitulé : "Analyse par simulation numérique", nous présentons la méthode d'analyse utilisée, ainsi que son application à différents modèles de structures stratifiées. Ces modèles d'application ont été choisis en tenant compte des cas réels du sol malgache.

En dernier lieu, la présentation des résultats obtenus et des interprétations nous conduit à la conclusion qui termine ce travail.

**Rapport-Gratuit.com**

Le processus d'infiltration de l'eau dans le sol est, en premier lieu, géré par les propriétés hydrodynamiques du sol ; ces dernières dépendent à la fois des caractéristiques du sol et de celles de l'eau.

L'étude du phénomène, sous l'aspect physique, nécessite alors la connaissance de la nature du sol (structure, constitution, propriétés physiques...) d'une part, et des propriétés de l'eau (masse volumique, viscosité...) d'autre part.

Ceci nous a conduit à rappeler tout d'abord quelques notions de base sur les propriétés physiques du sol avant de présenter l'infiltration proprement dite.

## **I.1. Propriétés physiques du sol**

Le sol représente un élément de l'écosystème dans lequel il est inséré et son état global (physique et structural) évolue selon les conditions d'équilibre naturel de l'ensemble de cet écosystème.

### **I.1.1. Structure**

Du point de vue structural, le sol se présente comme un système poreux caractérisé par un arrangement de particules solides, de cavités ou espaces vides (pores) et un certain degré d'humidité résiduelle, dans le cas général. Ainsi, il peut être considéré comme un système physique composé de trois phases : solide, liquide, gazeux, dont les comportements dynamiques, s'influencent mutuellement et à tout instant.

En Physique du sol, la structure est déterminée à partir de la disposition et de l'organisation des particules qui constituent la phase solide. La détermination peut alors s'effectuer selon deux approches : microscopique et macroscopique.

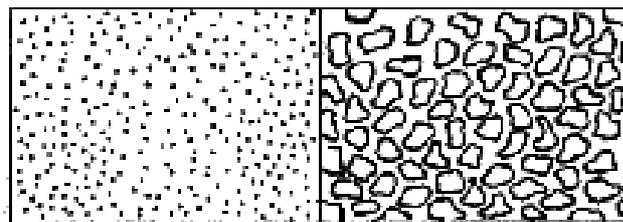
L'approche microscopique est réalisée à partir d'un échantillon de sol en coupe mince où l'on relève les éléments constitutifs ainsi que leur mode d'assemblage. Ce type d'approche permet de distinguer les principaux constituants suivants :

- le squelette constitué de particules monocristallines, de taille supérieure à  $2\mu\text{m}$  (il contient les éléments sableux),
- le plasma constitué de particules de taille inférieure à  $2\mu\text{m}$  (il contient les éléments argileux),
- les cutanes qui désignent les couches de plasma situées autour des éléments du squelette,
- les pores qui sont des cavités non occupées par les particules solides.

Selon cette première approche, le mode d'organisation de ces quatre éléments au sein du sol en détermine la structure.

L'approche macroscopique consiste par contre à observer directement au champ la disposition et l'organisation des éléments du sol. Selon le mode d'arrangement des constituants, on peut distinguer essentiellement deux types de structure : les structures particulières et les structures continues.

On parle de structure particulière lorsque les particules solides qui constituent le sol ne sont pas reliées entre elles (Figure I.1)



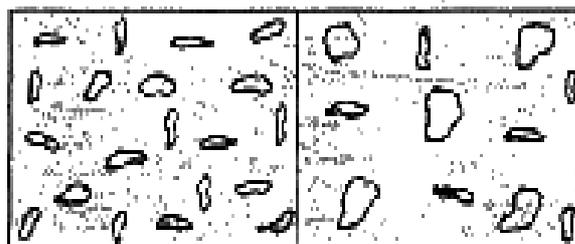
a) Type cendreux

b) Type sableux

**Figure I.1 : Types de structure particulière (approche macroscopique)**

Il n'y a donc pas d'adhérence entre les éléments. Dans ce type de structure, lorsque la taille des particules solides est petite (particules fines), on parle de type cendreux, dans le cas contraire, on parle de type sableux.

Par ailleurs, un sol a une structure de type continu lorsque les particules solides qu'il contient sont reliées entre elles de telle manière qu'on ne peut ni les distinguer, ni les séparer (Figure I.2.).



a) Type ciment

b) Type grès

**Figure I.2 : Types de structure continue (approche macroscopique)**

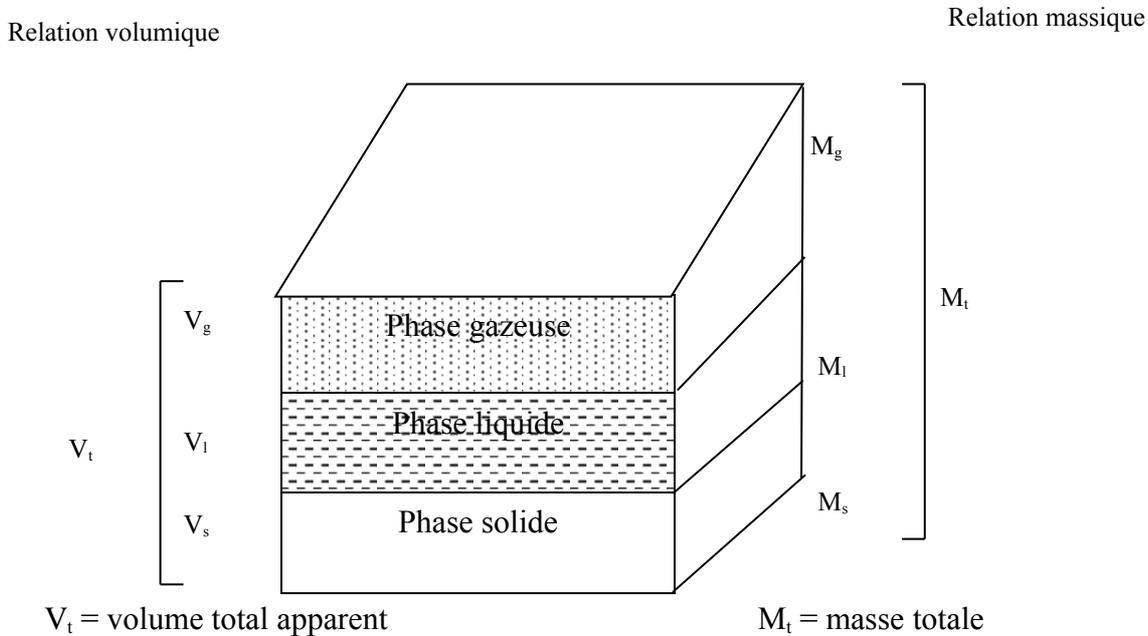
Dans ce cas, le critère de distribution des structures se limite à la taille des particules, soit : de type ciment, pour les particules très fines, et de type grès, pour les particules de sable.

Remarque :

Dans les sols de structure particulière, l'eau s'infiltré par écoulement à travers les cavités. Dans le cas des sols de structure continue par contre, l'absence d'espace vide laisse à supposer que le phénomène d'infiltration est impossible, à priori.

### **I.1.2. Paramètres descriptifs**

La prise en compte des caractéristiques structurales du sol dans l'analyse de son comportement dynamique s'effectue par une opération de paramétrisation. Ainsi, pour décrire la constitution volumique globale du sol, on peut se servir du schéma simplifié de la figure I.3.



**Figure I.3 : Représentation schématique de la constitution volumique du sol**

Soulignons que cette représentation ne reflète que la répartition globale des éléments constitutifs du sol et ne traduit aucunement la réalité, où les trois phases en présence s'interagissent mutuellement à tout instant.

#### **I.1.2.1. Grandeurs intrinsèques et relatives**

En se basant sur cette représentation, la description s'effectue par des grandeurs représentatives des spécificités propres à chacune des phases, d'une part et de leur distribution dans le sol, d'autre part. Ces grandeurs sont respectivement désignées par caractéristiques globales intrinsèques et caractéristiques globales relatives.

##### **a) Caractéristiques globales intrinsèques**

Les spécificités des différentes phases qui constituent le sol s'expriment de la manière la plus générale par leurs masses volumiques respectives.

- La masse volumique

$$\rho_s [\text{kg/m}^3] = \frac{M_s}{V_s}$$

de la phase solide est parfois appelée masse volumique réelle.

- La masse volumique

$$\rho_l [\text{kg/m}^3] = \frac{M_l}{V_l}$$

de la phase liquide reste toujours approximativement égale à l'unité.

- La masse volumique

$$\rho_g [\text{kg/m}^3] = \frac{M_g}{V_g}$$

de la phase gazeuse est voisine de zéro, en raison de sa faible densité moléculaire.

Remarque :

Etant donné qu'en Science du sol, l'échelle de temps se chiffre en années, les caractéristiques intrinsèques des constituants peuvent être supposées constantes, si bien qu'elles représentent un critère de différenciation des sols.

b) Caractéristiques globales relatives

La distribution volumique des trois phases constituant le sol s'exprime par les volumes relatifs qu'elles occupent respectivement c'est-à-dire, par le rapport de leur volume propre au volume apparent du sol.

$$\theta_s [\%] = \frac{V_s}{V_t} \quad \theta_l [\%] = \frac{V_l}{V_t} \quad \theta_g [\%] = \frac{V_g}{V_t}$$

Les volumes relatifs  $\theta_l$  de la phase liquide (teneur en eau) et  $\theta_g$  de la phase gazeuse sont des grandeurs très changeantes ; de ce fait, ils constituent les variables d'état sur lesquelles repose essentiellement la description des phénomènes de transfert.

Par contre, le volume relatif  $\theta_s$  de la phase solide reste pratiquement constant, étant donné l'échelle de temps en Physique du sol ; de ce fait, le sol peut être considéré comme un système indéformable dans l'étude du processus d'infiltration.



Dans la plupart des cas, la porosité des sols varie entre 30% et 60%.

La connaissance de la valeur de *l'indice de vide* noté  $e$  permet aussi de quantifier le volume d'espace vide à l'intérieur d'un sol. Cette quantité est définie par le rapport entre le volume de vide et le volume d'éléments solides dans le sol, soit :

$$e = \frac{V_r}{V_s} \quad [m^3/m^3] \quad I.2$$

La relation entre la porosité et indice de vide pour un sol donné est la suivante :

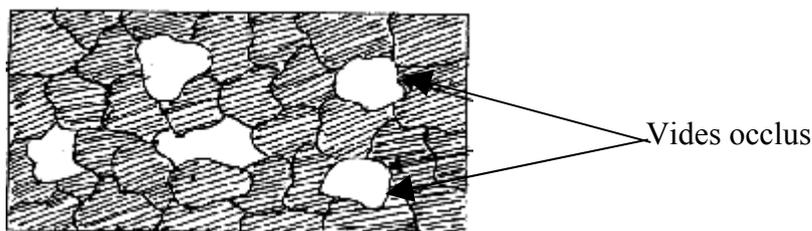
$$f = \frac{e}{e + 1} \quad I.3$$

L'indice de vide est compris dans le cas général, entre 0,3 et 2,0 pour un sol donné.

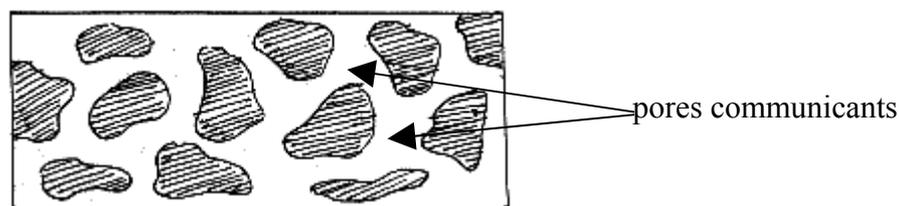
A l'intérieur d'un échantillon de sol, on peut distinguer deux sortes d'espaces vides formant ce qu'on appelle espace poral.

Il y a d'abord des espaces vides qui sont isolés c'est à dire qu'il n'y a pas de communication ni avec les autres vides ni avec l'extérieur.

La partie du système poral qui est constituée par ce type d'espaces vides est appelée système à porosité résiduelle. A part cela, il y a aussi des espaces vides qui sont en communication avec les autres espaces vides ou le milieu extérieur, on parle alors de système à porosité effective.



**Figure I.6 : Schéma illustrant un espace poral à porosité résiduelle**

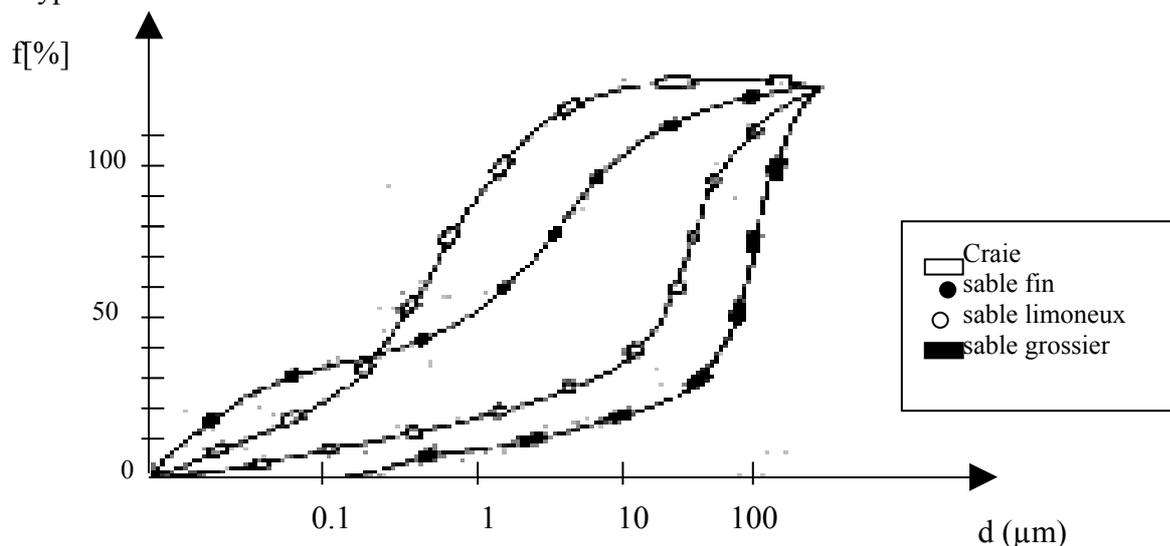


**Figure I.7 : Schéma illustrant un espace poral à porosité effective**

Selon la taille des pores occlus ou des pores communicants à l'intérieur d'un sol, il est possible de caractériser un sol en traçant la courbe appelée *courbe porosimétrique*.

Celle-ci représente la proportion volumique du système poral constitué de pores de diamètre apparent  $d$  inférieur à un diamètre donné.

La figure (I.8) représente des exemples de courbes porosimétriques pour quelques types de sol.



**Figure I.8 : Exemples de courbes porosimétriques**

### **I.1.3. Propriétés hydrodynamiques**

La description et l'analyse de la dynamique de l'écoulement de l'eau dans le sol sont gérées par les propriétés hydrodynamiques du sol. Ces propriétés sont traduites par des grandeurs qui permettent d'estimer quantitativement les "réactions" du sol vis à vis du mouvement de l'eau en son sein.

Avant de présenter les grandeurs fondamentales qui définissent les propriétés hydrodynamiques du sol, nous allons rappeler quelques définitions relatives au processus d'infiltration.

#### **I.1.3.1. Quelques définitions**

a- Teneur en eau résiduelle  $\theta_r$

Elle représente la valeur minimale de la teneur en eau d'un sol.

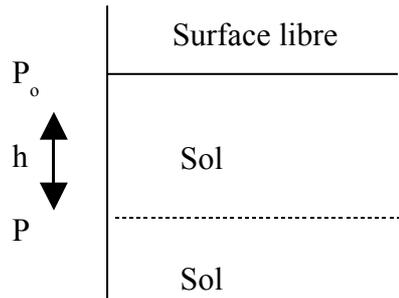
b- Teneur en eau à saturation  $\theta_s$

Elle représente la valeur maximale de la teneur en eau lorsque l'ensemble de l'espace poral est occupé par de l'eau. Nous donnons ci-après les ordres de grandeur de cette quantité pour trois types de sol.

- Sol sableux  $35\% \leq \theta_s \leq 50\%$
- Sol silteux  $40\% \leq \theta_s \leq 60\%$
- Sol argileux  $30\% \leq \theta_s \leq 65\%$

c- Potentiel de pression hydrostatique  $\phi_p$

Il mesure la différence entre la pression volumique en un point de la phase liquide et celle en un point pris à la surface libre (pression atmosphérique  $p_o$ ), qui est prise comme référence.



et il est défini par la relation :

$$\phi \text{ [J/m}^3 = P_a] = P - P_o = \rho_l g h \quad (\text{I.4})$$

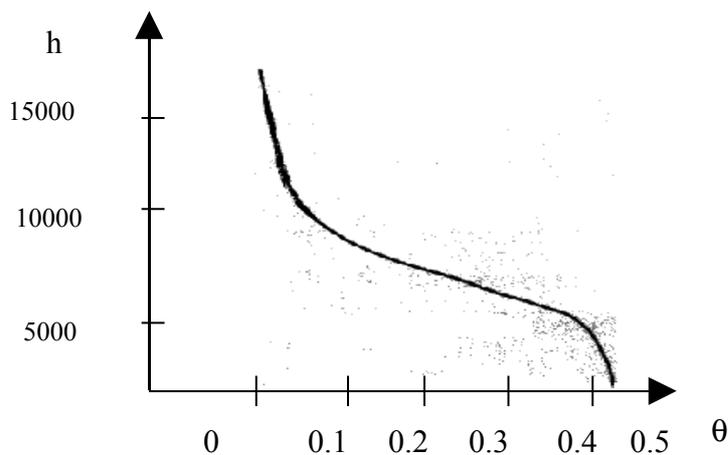
Remarques

- Si le milieu est homogène et incompressible, la masse volumique  $\rho_l$  est constante ; dans ce cas, le potentiel de pression peut s'exprimer sous la forme simple.

$$\phi_p \text{ [J/N = m]} = h$$

On désigne alors le potentiel de pression par *charge de pression*

- Lorsque la phase liquide d'un sol est en équilibre hydrostatique, son potentiel de pression ( $h$ ) varie en fonction de  $\theta$  selon la courbe (profil hydrique) ci-après.



**Figure I.9 : Allure générale de la relation  $h(\theta)$**

#### d- Potentiel de gravité $\phi_g$

Il représente l'énergie mise en jeu dans un écoulement provoqué par la force de pesanteur et exprime la différence entre la pression volumique en un point de la phase liquide et celle en un point du sol (note  $z_0 = 0$ ), qui est prise comme référence. Il est défini par la relation :

$$\phi_g [\text{J/m}^3 = \text{Pa}] = \rho_l g (z - z_0) = \rho_e g z \quad (\text{I.5})$$

#### Remarque :

Si le milieu liquide est homogène, la quantité  $\phi_g$  peut s'exprimer sous la forme simple :

$$\phi_g [\text{J/N} = \text{m}] = z$$

On désigne alors le potentiel de gravité par *charge de gravité*.

#### e- Charge hydraulique totale H

En milieu homogène, les variations des potentiels de pression  $h$  et de gravité  $z$  dans la phase liquide du sol y engendrent la force motrice d'écoulement.

Pour tenir compte de ces deux contributions dans le processus d'infiltration, on utilise généralement une grandeur unique qui est la charge hydraulique totale  $H$  telle que :

$$H = h + z$$

Parmi les grandeurs qui définissent les propriétés hydrodynamiques du sol, on peut citer les plus fondamentales qui sont : la conductivité hydraulique, la capacité capillaire et la diffusivité hydraulique.

### I.1.3.2. Conductivité hydraulique $k$

Tout gradient de charge  $\vec{\nabla} H$  existant au sein de la phase liquide y crée une force motrice qui provoque l'écoulement de l'eau, avec une densité de flux  $q$ .

D'après la loi de Darcy/.../, la quantité  $q$  est proportionnelle  $|\vec{\nabla} H|$ , avec un coefficient de proportionnalité  $K$  qui représente la manifestation de l'effet de résistance à l'écoulement, dû aux forces de frottement.

$$q = k |\vec{\nabla} H| \quad [\text{m/s}] \quad (\text{I.6})$$

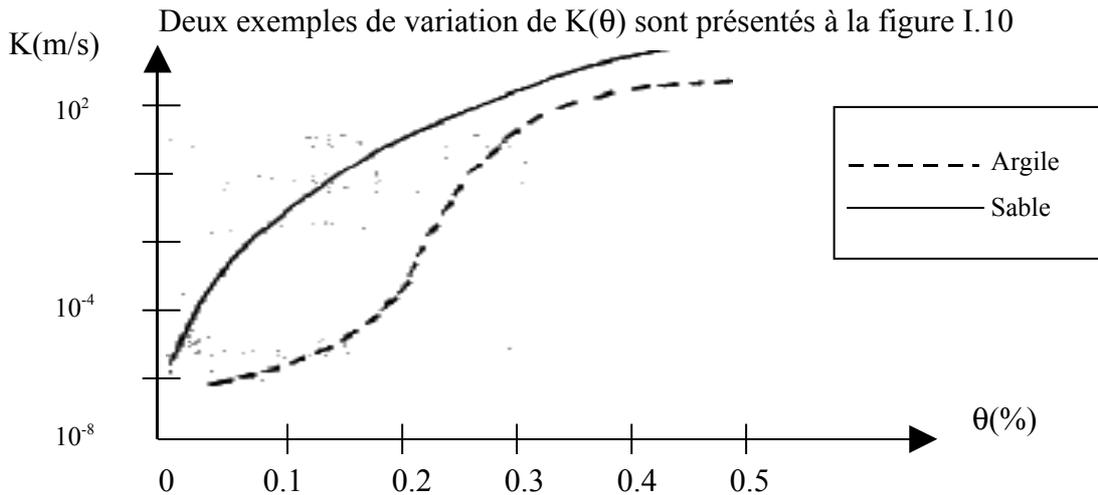
Ce coefficient désigne la conductivité hydraulique.

Dans un sol saturé, c'est-à-dire que tout le volume de l'espace poral est occupé par de l'eau, la conductivité hydraulique est constante et prend la valeur maximale (à saturation)  $K_s$ , telle que :

$$K_s = \frac{K \rho g}{\eta} \quad (I.7)$$

où  $K$  désigne la perméabilité intrinsèque du sol  
et  $\eta$ , la viscosité dynamique de l'eau.

Dans un sol non saturé, caractérisé par une teneur en eau  $\theta$  inférieure à  $\theta_s$ , la conductivité hydraulique n'est plus constante mais varie en fonction de  $\theta$ . D'une manière générale,  $K$  augmente lorsque les valeurs de  $\theta$  se rapprochent de  $\theta_s$ .

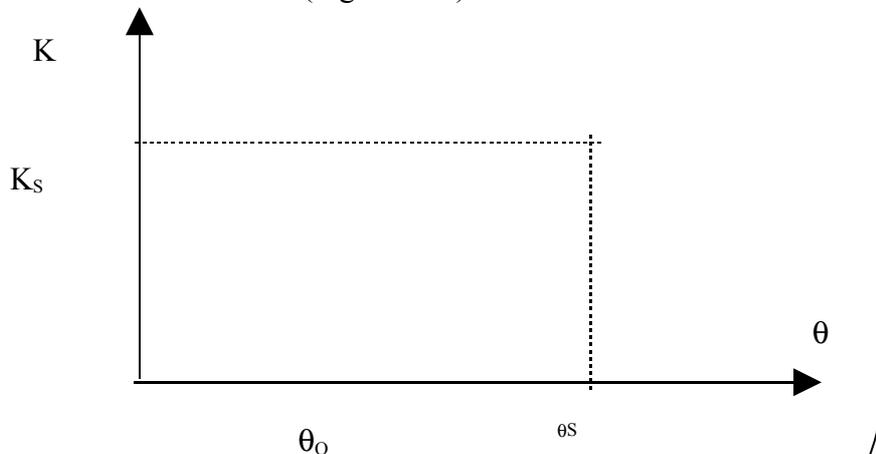


**Figure I.10 : Variation de la fonction  $K(\theta)$  pour deux types de sol**

En admettant que le mouvement d'écoulement s'effectue en profondeur (suivant l'axe  $z$  d'un repère tridimensionnel  $Oxyz$ ), la conductivité hydraulique est définie, d'après la loi de Darcy par la relation :

$$q = -K \frac{dH}{dz}$$

Quant à l'expression analytique de la fonction  $K(\theta)$ , elle a été déduite de l'allure générale de sa courbe de variation (Figure I.11)



**Figure I.11 : Allure générale de la fonction  $K(\theta)$**

Cette figure montre que la conductivité hydraulique est nulle pour des valeurs de  $\theta$  inférieures à une valeur critique  $\theta_0$  et qu'elle croît de façon exponentielle jusqu'à la valeur maximale  $\theta_s$ .

Brooks et Corey / / ont proposé une relation empirique donnant l'expression de K en fonction de  $\theta$ , sous la forme :

$$K(\theta) = K_s \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{3+2\lambda} \quad (I.8)$$

où  $\lambda$  désigne une constante empirique reflétant la porosité du sol.

A part la dépendance de la conductivité hydraulique avec la teneur en eau du sol, elle peut dépendre aussi d'autres facteurs tels que l'indice de vide du milieu, ou le potentiel hydraulique. Mais dans cette étude, nous nous sommes surtout intéressés à la dépendance avec la teneur en eau.

#### 1.1.3.3. Capacité capillaire c

Elle représente la variation de la teneur en eau du sol par unité de variation du potentiel de pression et elle est définie par la relation :

$$c(h) = \frac{d\theta}{dh} \quad (I.9)$$

Cette grandeur permet de traduire toute variation de h par des variations de la teneur en eau  $\theta$ , et réciproquement, ce qui rend pratique l'estimation de la disponibilité de l'eau dans le sol.

Les valeurs de  $c(h)$  dépendent des caractéristiques texturales et structurales du sol, par conséquent, elle représente un paramètre qui permet de tenir compte des spécificités du sol dans la modélisation numérique du processus d'infiltration.

#### 1.1.3.4. Diffusivité hydraulique D

Elle est définie par le rapport de la conductivité hydraulique et de capacité capillaire, soit :

$$D(\theta) = K(\theta) / \frac{\partial \theta}{\partial h} = K(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (I.10)$$

Cette grandeur dépend aussi du type de sol considéré et l'allure de sa variation peut être approchée par une relation empirique de la forme :

$$D(\theta) = a e^{b\theta} \quad (I.11)$$

a et b étant des constantes dépendant du sol étudié

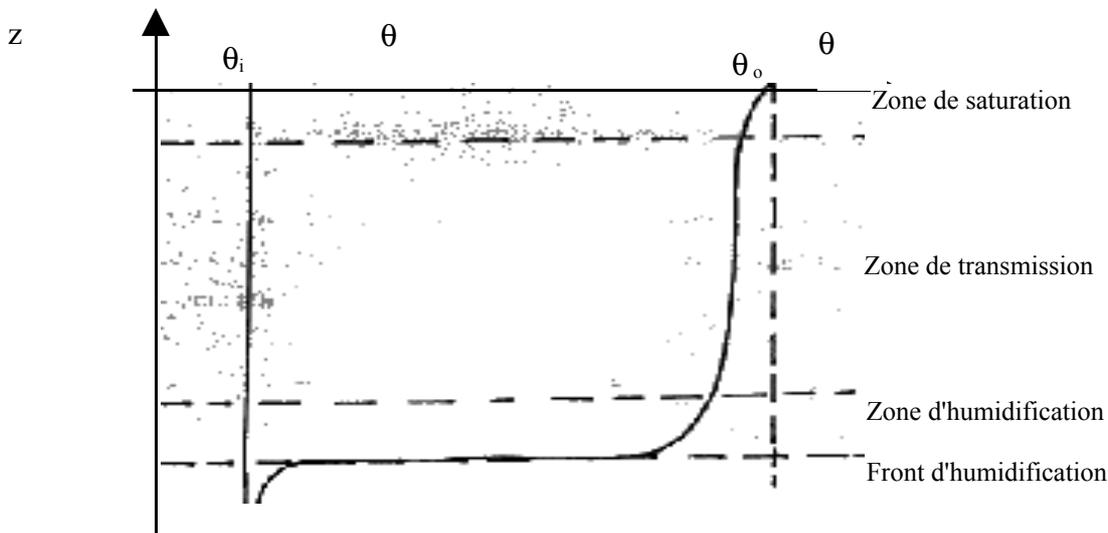
## **I.2. Principes de l'infiltration**

On désigne par infiltration, le processus de pénétration de l'eau dans le sol, par l'intermédiaire des pores. Elle est engendrée par toute perturbation (pluie, gradient d'humidité, gradient de pression, ...) qui modifie la répartition initiale d'équilibre de la charge de pression et de la teneur en eau dans le sol.

Le mouvement de l'eau, par infiltration, instaure une nouvelle répartition de la teneur en eau dans le sol de manière à établir un nouvel équilibre entre les trois phases du sol.

Ainsi, l'étude physique des caractéristiques de l'infiltration peut être ramenée à celle de l'évolution de la répartition de la teneur en eau dans le sol, cette répartition étant représentée, en profondeur, par la courbe  $\theta(z)$  appelée *profil hydrique* présentée à la figure I.12.

En étudiant le processus d'infiltration dans un sol initialement sec, Bodman et Colman / . / ont pu établir le profil hydrique  $\theta(z)$  présenté à la figure I.12.

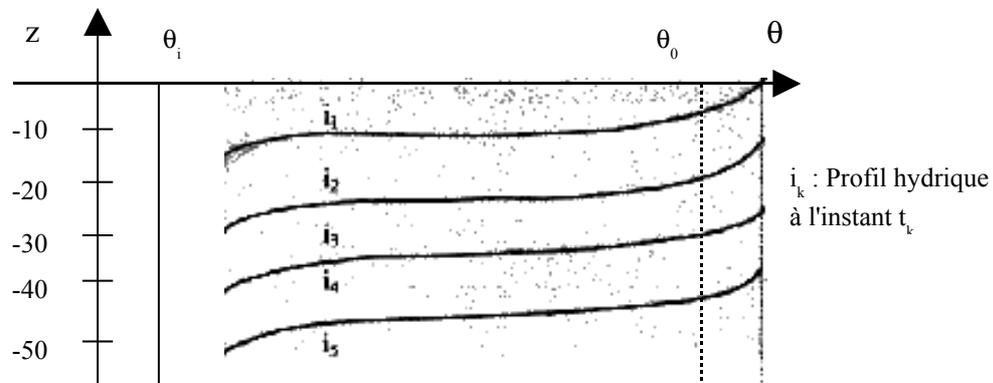


**Figure I.12 : Profil hydrique d'un sol initialement sec pour une infiltration en cours**

Ce profil est caractérisé par la présence de trois zones distinctes, à savoir : la zone de saturation, la zone de transmission et la zone d'humidification.

- La zone de saturation apparaît quand la charge hydraulique produit une pénétration à saturation, à la surface du sol. Elle s'étend alors dans une faible épaisseur à partir de la surface et est caractérisée par une teneur en eau maximale.
- La zone de transmission s'étend dans une couche située juste après la zone de saturation et elle est caractérisée par une répartition quasiment uniforme de la teneur en eau.
- La zone d'humidification succède à la zone de transmission dans la couche d'infiltration. Elle est caractérisée par une rapide décroissance de  $\theta$  en fonction de la profondeur, jusqu'à la valeur minimale  $\theta_i$ .

La surface qui limite cette zone, en profondeur, définit le front d'humidification. Pour suivre l'évolution du processus d'infiltration, il s'agit d'établir à des instants successifs les profils hydriques du sol étudié (Figure I, ...)



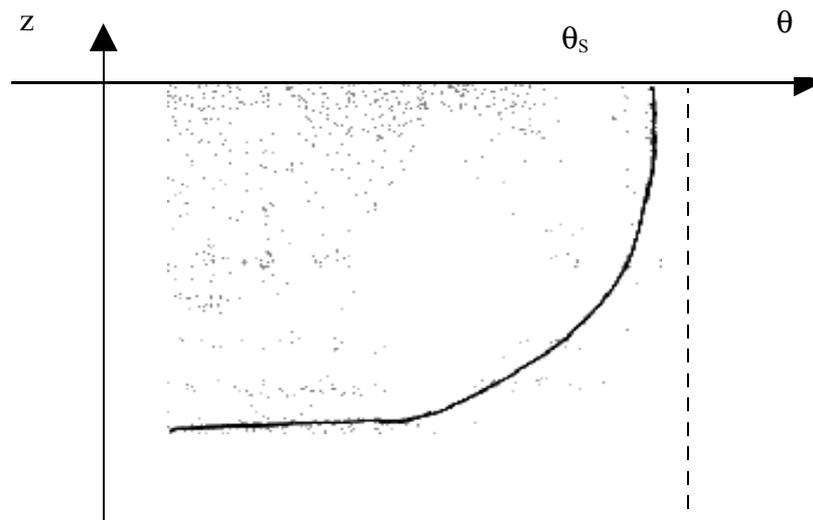
**Figure I.13 : Evolution du profil hydrique au cours du temps**

Différents auteurs / . / ont montré qu'au cours de l'évolution de l'infiltration, la zone de transmission s'étend en profondeur, ce qui repousse le front d'humidification vers le bas jusqu'à l'obtention d'une répartition d'équilibre global du "système sol".

Remarque :

Le type de charge le plus fréquent qui déclenche l'infiltration est l'eau de pluie. Dans ce cas, on mesure l'intensité de la charge par la quantité d'eau qui tombe sur la surface du sol par unité de temps (ou débit d'alimentation). Selon la valeur de ce débit, la dynamique du processus d'infiltration peut différer d'un cas à l'autre et en particulier, on peut distinguer les trois cas suivants :

- a- Si l'intensité de la pluie dépasse la conductivité hydraulique à saturation  $K_s$ , une partie de l'eau reçue n'est pas absorbée et forme une lame d'eau en surface. L'infiltration s'effectue alors à la vitesse de pénétration en sol saturé (présence d'une zone de saturation dans le profil hydrique).
- b- Si l'intensité de la pluie est légèrement inférieure à la conductivité hydraulique à saturation  $K_s$ , on a une infiltration dite "en milieu présaturé". Ce cas est en fait très proche du cas d'infiltration en milieu saturé.
- c- Si l'intensité de la pluie est très inférieure à  $K_s$ , on a une infiltration dite "en milieu non saturé". Dans ce cas, la zone de saturation n'apparaît plus dans le profil hydrique et on a des courbes de variation ayant l'allure suivante :



**Figure I. 14 : Profil hydrique en milieu non saturé**

### **I.3. Dynamique des écoulements en milieu poreux**

L'analyse de la dynamique de l'eau, circulant à travers les pores du sol, permet d'établir une formulation mathématique du processus d'infiltration.

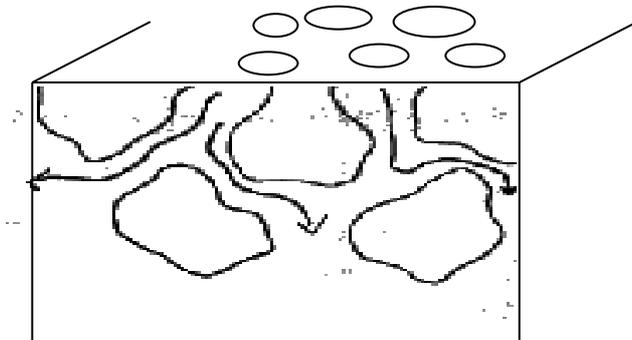
Les lois qui régissent ce mouvement découlent des lois générales de la dynamique des fluides, auxquelles s'ajoute la considération de la spécificité du milieu traversé (milieu poreux).

En effet, au cours de l'infiltration dans le sol, l'eau circule suivant les trajectoires que définit la répartition des cavités de l'espace poral du sol. En première approximation, cette trajectoire est assimilable à une succession d'étroits canaux qui ont disposés irrégulièrement dans le sol.

Vu sous cet angle, l'écoulement peut être décrit selon deux approches : microscopique et macroscopique.

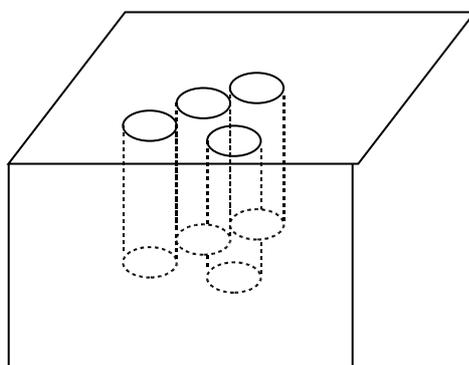
### **1.3.1. Approche microscopique**

A l'échelle microscopique, l'eau qui s'écoule à travers les pores est vue comme un fluide circulant dans des conduits discontinus, de formes différentes, de dimensions différentes et d'orientations différentes.



Il s'agit alors d'étudier le mouvement des molécules qui composent le fluide, à travers ces conduits.

Vue la complexité du problème, on peut partir de l'hypothèse simplificatrice suivante : le sol est composé d'un faisceau de tubes rectilignes, de diamètre constant sur toute leur longueur (Figure I.15).



**Figure I. 15 : Modèle microscopique d'un sol poreux**

Le débit total d'eau qui transite dans le milieu sera alors obtenu en additionnant les débits élémentaires de chaque tube.

Cette hypothèse apporte de grandes simplifications au niveau du raisonnement, toutefois elle est peu réaliste pour le cas du sol et la description qui s'en déduit est difficilement extrapolable au cas réel.

Ainsi, quitte à se limiter à une description sommaire du phénomène, on préfère généralement recourir à une approche plus globale.

### **1.3.2. Approche macroscopique**

Dans le cadre de la dynamique des fluides, les phénomènes d'écoulement sont, en général, traités sous l'aspect macroscopique (mécanique de Newton).

Selon cette approche, on étudie le mouvement d'un petit volume de fluide (particule de fluide) dans un milieu d'écoulement que l'on considère comme continu.

Pour caractériser cet écoulement, deux grandeurs interviendront : la vitesse et le débit.

#### **1.3.2.1. Débit volumique – Débit massique**

Dans le mouvement d'un fluide à travers une conduite, si un volume de fluide  $dV$  traverse la section droite de la conduite pendant le temps  $dt$ , le débit volumique, noté  $Q_v$ , est défini par la relation :

$$Q_v \text{ [m}^3\text{/s]} = \frac{dV \text{ [m}^3\text{]}}{dt \text{ [s]}}$$

Par analogie, si une masse de fluide  $dm$  traverse la section droite pendant le temps  $dt$ , le débit massique  $Q_m$  est défini par la relation :

$$Q_m \text{ [kg/s]} = \frac{dm \text{ [kg]}}{dt \text{ [s]}}$$

Remarques :

- a) Un régime d'écoulement est dit permanent ou stationnaire, si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, ...) ont chacun, une valeur constante dans le temps, en tout point de la conduite.
- b) La relation entre  $Q_m$  et  $Q_v$  est donnée par

$$Q_m = \rho Q_v$$

$\rho$  étant la densité du fluide

Selon l'approche macroscopique, le mouvement des particules d'un fluide en écoulement obéit à la dynamique des fluides, qui est décrite par les équations de base comprenant l'équation de continuité et l'équation de quantité de mouvement :

### 1.3.2.2. Equations de base

L'état d'un fluide en écoulement est décrit par les grandeurs suivantes :

- le vecteur  $\vec{v}$  de composantes  $(v_x, v_y, v_z)$
- la densité  $\rho(x, y, z, t)$
- la pression  $p(x, y, z, t)$
- la température  $T(x, y, z, t)$

Si les propriétés internes (thermiques, thermodynamiques, ...) du fluide sont connues, on dispose des équations ci-après pour déterminer les six variables dépendantes inconnues :  $v_x, v_y, v_z, \rho, P, T$ .

#### \* L'équation de continuité

Appliquée à une particule de fluide de masse  $M$  à l'instant  $t$ , de volume  $V$  et de masse volumique  $\rho$ , l'équation de continuité s'écrit : (Voir Annexe §1)

$$\boxed{\frac{\partial M_v}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) V = 0} \quad (I.12.)$$

#### Remarques :

a) En utilisant la notation de la dérivée particulaire, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0$$

b) Pour un fluide homogène et incompressible, la densité des particules reste invariable le long de leur trajectoire, soit :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Ainsi, l'équation de continuité s'écrit :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

Le champ de vitesse d'un fluide homogène et incompressible est donc sans divergence.

\* L'équation de quantité de mouvement (Equation de Navier-Stokes)

Appliquée à une particule de fluide de vitesse  $\vec{v}$  et de masse volumique  $\rho$ , l'équation de quantité de mouvement s'écrit : (Voir Annexe § 2)

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\overset{=}{\tau} + \vec{\gamma} \quad (\text{I.13})$$

Dans cette équation,

- désigne la pression hydrostatique,
- $\overset{=}{\tau}$  est le tenseur des contraintes

Remarque

Dans le cas général, l'équation d'énergie fait partie des équations de base de la dynamique des fluides car elle rend compte du transfert de chaleur qui accompagne l'écoulement.

Toutefois, dans le cadre de cette étude, nous nous sommes limités à l'analyse du bilan de l'infiltration et le seul effet de la chaleur qui a été considéré est la perte par évaporation.

Dans l'étude du phénomène d'infiltration, le problème qui se pose peut consister soit à favoriser l'écoulement (irrigation,...), soit au contraire à le ralentir, voire le bloquer (protection des routes). Et, dans tous les cas de figure, il est nécessaire de connaître les caractéristiques de l'écoulement afin de pouvoir intervenir efficacement dans les mesures de prévention ou de protection.

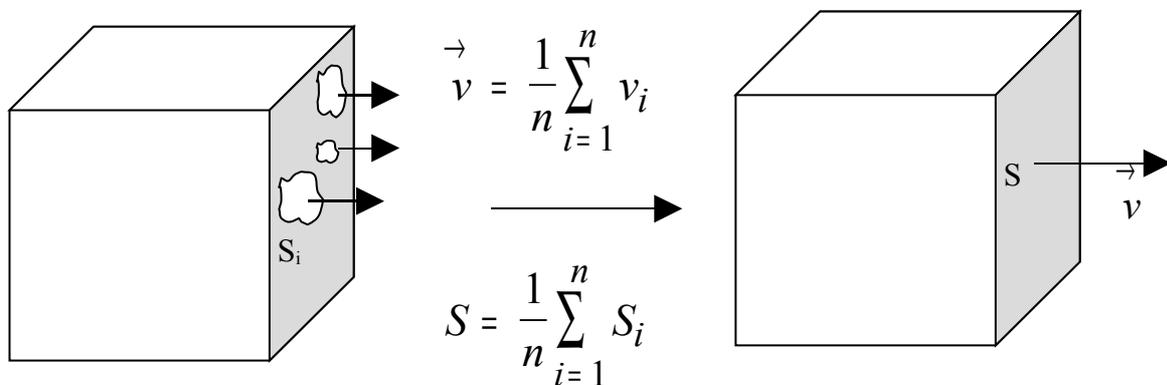
Le traitement scientifique que nous proposons dans ce travail est basé sur une formulation mathématique qui est établie à partir des équations de base de la dynamique des fluides.

## II.1. Formulation du problème : équation de Richards.

Les équations de base de la dynamique des fluides font intervenir la vitesse d'écoulement  $\vec{v}$ . Cependant, l'application de ces équations au processus d'infiltration en milieu poreux est confrontée aux problèmes liés à la distribution irrégulière des pores dans le sol.

En effet, la grande diversité des caractéristiques géométriques des pores (dimension, forme, orientation,...) ainsi que leur distribution aléatoire impliquent une grande diversité des cas à considérer dans la détermination du vecteur de vitesse  $\vec{v}$ .

Afin de contourner la difficulté, on peut adopter une approche qui consiste à considérer une vitesse d'ensemble (vitesse fictive) de la masse de fluide en mouvement. Cela revient à considérer que l'écoulement à travers une portion de sol s'effectue globalement de manière uniforme sur toute sa section.



Et on tiendra compte des spécificités locales de l'écoulement par l'intermédiaire des paramètres structuraux et hydrodynamiques (porosité, diffusivité et conductivité hydraulique,...).

Selon cette approche, il est plus commode d'exprimer la vitesse moyenne fictive du fluide par le rapport entre le débit  $Q$  et la section totale  $S$  de la portion de sol considérée :

$$\bar{v} [\text{m/s}] = \frac{Q[\text{m}^3 / \text{s}]}{S[\text{m}^2]}$$

Soit, sous la forme d'une densité de flux  $q$

$$\bar{v} \equiv q = \frac{Q}{S}$$

Par ailleurs, on se placera dans les conditions d'écoulement suivantes (loi de Darcy) :

- matrice solide homogène, isotrope et stable
- fluide homogène, isotherme et incompressible (masse volumique constante)
- énergie cinétique négligeable (faible vitesse d'écoulement)
- régime d'écoulement permanent
- écoulement laminaire

En traduisant les conditions citées ci-dessous sur les équations de base de la dynamique des fluides, on obtient les équations sur lesquelles ont porté nos calculs dans l'analyse du problème d'infiltration.

### **II.1.1. Equations générales des écoulements**

Ces équations résultent de la combinaison de l'équation de continuité et de l'équation dynamique (équation de Darcy).

a) Equation de continuité (Voir Annexe § 3)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div } \vec{q} = 0 \quad (\text{II.1})$$

où  $\theta$  désigne la teneur en eau et  $\vec{q}$  la densité de flux de vitesse.

b) Equation dynamique (Voir Annexe § 4)

- En milieu isotrope saturé

$$\vec{q} = -K_s \vec{\nabla} H \quad (\text{II.2a})$$

$K_s$  étant la conductivité hydraulique à saturation.

- En milieu isotrope non saturé

$$\begin{aligned} \vec{q} &= -K(h) \vec{\nabla} H \\ \text{ou} \\ \vec{q} &= -K(\theta) \vec{\nabla} H \end{aligned} \quad (\text{II.2b})$$

On en déduit les équations générales des écoulements dans un milieu saturé et dans un milieu non saturé.

- En milieu saturé, chaque élément de volume du sol reste saturé et la variation temporelle de la masse d'eau  $M_c$  contenue dans le sol est nulle, par conséquent, l'équation de continuité (II.2) devient.

$$\text{div } \vec{q} = 0$$

En combinant cette relation avec l'équation dynamique, on obtient :

$$\text{div} (-K \vec{\nabla} H) = 0$$

$$\text{soit } \nabla^2 H = 0 \quad (\text{II.3})$$

- En milieu non saturé, la combinaison des équations (II.1) et (II.2b) donne :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div}(K(\theta) \vec{\nabla} H) \quad (\text{II.4a})$$

*ou encore*

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \text{div}(K(h) \vec{\nabla} H) \quad (\text{II.4b})$$

### **II.1.2. Equation de Richards**

Après développement du second membre de l'égalité (II.4a), on obtient l'équation générale aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) \left( \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + 1 \right) \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(\theta) \frac{1}{C(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K(\theta) \frac{1}{C(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\theta) \frac{1}{C(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) \right]$$

Compte tenu de la relation de définition :

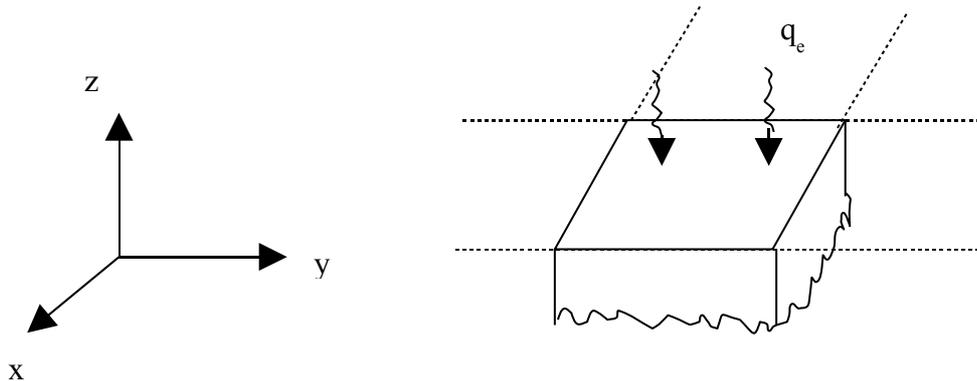
$$D(\theta) = \frac{K(\theta)}{C(\theta)}$$

l'équation générale des écoulements en milieu saturé s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z}] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (\text{II.5})$$

Elle représente l'équation de Richards

Pour analyser le processus d'infiltration décrit par cette équation, nous avons procédé par modélisation en considérant une portion de sol, recevant sur sa surface libre un certain flux d'eau (précipitation, irrigation,...) de densité  $q_e$ .

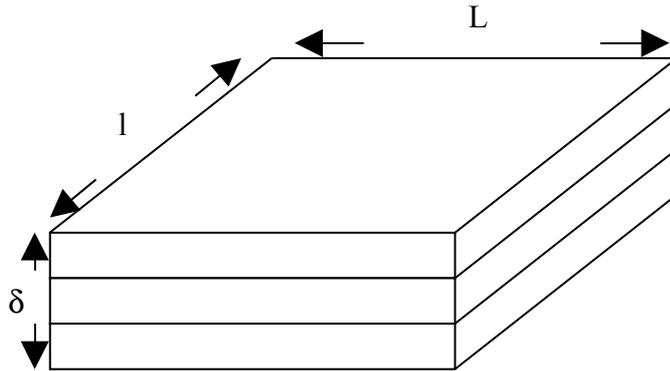


et l'étude consiste à suivre l'évolution dans le temps du profil hydrique  $\theta(t, x, y, z)$ , dans une épaisseur de valeur finie.

Pour ce faire, nous avons posé le problème en partant d'un modèle qui représentera le "système-sol" et sur lequel seront traduites les hypothèses et les conditions de l'étude.

## **I.2. Présentation du modèle**

Pour représenter le sol qui est la matrice solide du système, nous avons choisi un modèle stratifié composé de trois couches parallélépipédiques de même épaisseur.



Pour chaque couche de ce modèle, on admettra les hypothèses suivantes :

a) Phase solide

- • indéformable : la structure interne et la texturation de la matrice solide ne changent pas au cours du temps. Cette hypothèse revient à négliger, pendant la durée de l'infiltration, les processus liés à l'activité biologique du sol qui modifient sa structure,

- • homogène et isotrope : les propriétés et caractéristiques hydro-dynamiques ne dépendent pas de la direction considérée dans l'espace de définition du système. Cette hypothèse ramène la description d'un système hétérogène et anisotrope en celle d'un assemblage de sous-systèmes respectivement homogènes et isotropes, par approximation.

- • isotherme : l'influence des variations de température n'est pas considérée. Cela revient à négliger la contribution des gradients de température (conditions climatiques, interaction sol-atmosphère,...) dans le bilan hydrique.

b) Phase liquide

- • incompréhensible et non visqueux
- • à faible vitesse d'écoulement, car le conduit est matérialisé par l'espace poral du sol

- • en écoulements vertical et horizontal.

c) Phase gazeux

La dynamique de la phase gazeuse est essentiellement gérée par les échanges avec les systèmes racinaires des végétaux (production-consommation) et avec l'atmosphère. Et dans des conditions d'indéformabilité et d'isothermie de la matrice solide, cette dynamique a peu d'influence sur celle de la phase liquide. Pour cette raison, nous nous sommes limités, dans nos calculs, à la considération de la phase solide et de la phase liquide.

Pour cette raison, nous sommes limités, dans nos calculs, à la considération de la phase solide et de la phase liquide.

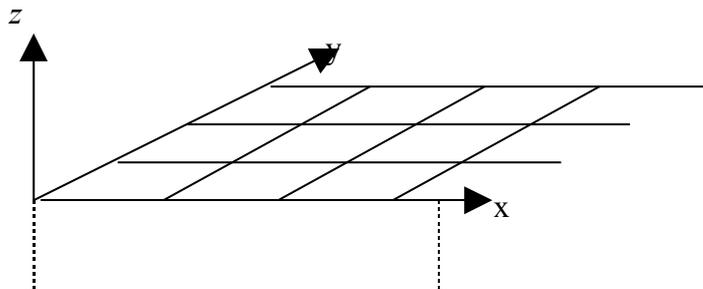
## **II.3. Conditions d'étude**

### **II.3.1. Conditions générales**

Le système tridimensionnel qu'on cherche à analyser est dans un état non saturé ou coexistent l'infiltration verticale et l'infiltration horizontale. Ainsi, le traitement des équations du problème, dans le cas général, doit s'effectuer à trois dimensions.

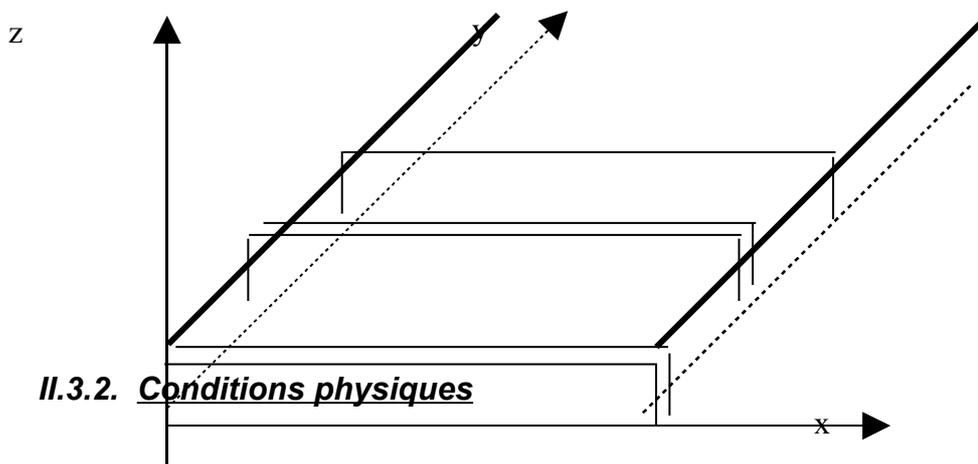
Néanmoins, il est possible de ramener la description dans l'espace à deux dimensions en effectuant l'approximation suivante :

Si on réalise une discrétisation fictive du plan  $(0,x,y)$ .



On s'aperçoit que la détermination du profil hydrique suivant le plan  $(0,y,z)$  s'effectue d'une manière analogue à celle du profil hydrique suivant le plan  $(0,x,z)$ , moyennant un simple changement de variable.

Pour cette raison, on peut ramener le domaine d'étude à l'espace à deux dimensions [suivant le plan  $(0,x,z)$ , par exemple] et on reconstitue la description à trois dimensions à partir d'un assemblage qu'on peut schématiser comme suit :

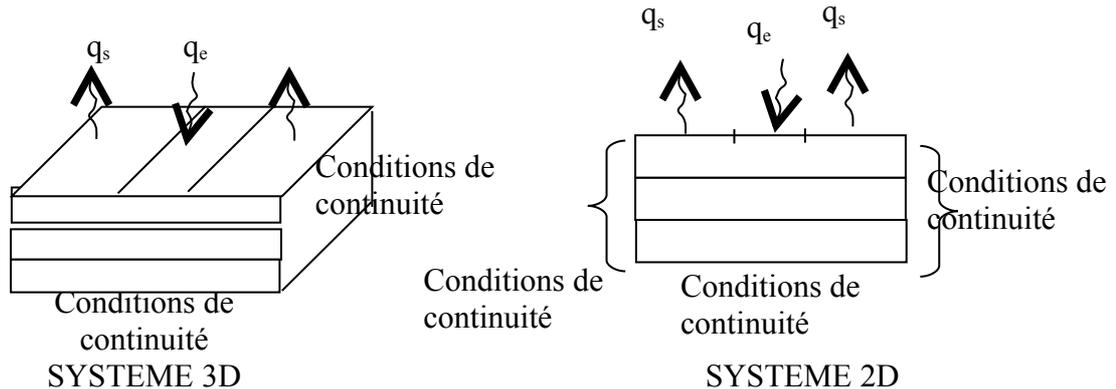


En se servant du procédé d'approximation annoncé précédemment, les conditions physiques qui s'appliquent au système 3D sont traduites sur le système 2D qui lui est associé. Ces conditions sont les suivantes :

a) Condition initiale

A l'instant initial de l'étude, le sol est caractérisé par une teneur en eau homogène et de valeur  $\theta_0$ .

b) Conditions aux limites



**Figure II. 1: Condition aux limites du modèle de sol stratifié**

A la surface libre du sol ( $z=0$ ), l'infiltration est déclenchée par l'arrivée d'une certaine quantité d'eau sur la partie centrale de cette surface. La quantité d'eau ainsi reçue (charge) est caractérisée par un flux constant  $q_e$ , appelé flux entrant.

Par ailleurs, nous avons considéré une possibilité d'évaporation par cette surface libre et, cette perte est caractérisée par un flux sortant  $q_s$ .

Les faces latérales et la base de la structure ne représentent que des délimitations fictives du modèle car le système réel s'étend en fait au-delà de ces frontières. Par conséquent, elles ne font l'objet d'aucune condition aux limites, par contre elles doivent vérifier les conditions de continuité du phénomène étudié.

c) Régime d'écoulement

L'analyse est rapportée à un écoulement en régime permanent.

**II.3.3. Paramètres caractéristiques du sol**

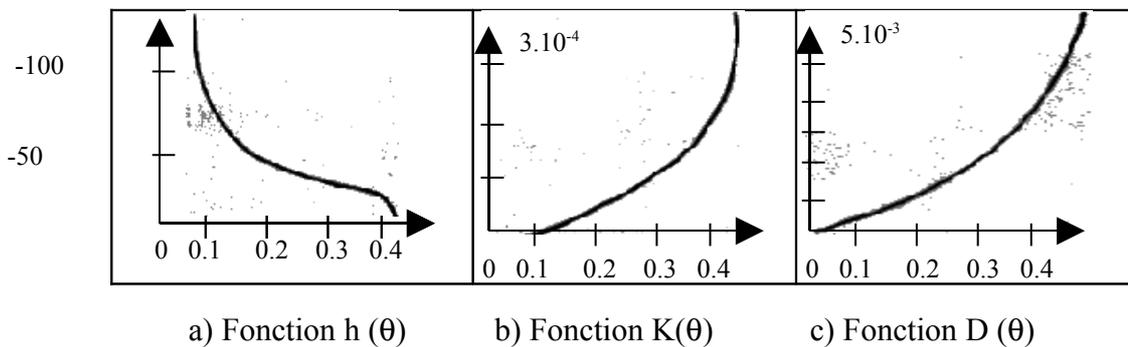
Chaque couche  $i$  qui compose le modèle du sol est caractérisée par sa propre conductivité hydraulique  $K_i(\theta)$  et par conséquent, par sa propre diffusivité hydraulique  $D_i(\theta)$ , en vertu de la relation.

$$D_i(\theta) = \frac{K_i(\theta)}{C_i(\theta)} \quad (\text{II.12})$$

$$C_i(\theta) = \left( \frac{\partial(\theta)}{\partial h} \right)_i \text{ étant la capacité capillaire.}$$

Ces paramètres permettent de prendre en compte la différenciation de caractéristiques entre couches (porosité, conductivité hydraulique à saturation, teneur en eau résiduelle, ...).

Les relations liant les paramètres ( $K$ ,  $D$ ,  $h$ ) et  $\theta$  sont très complexes et elles dépendent des caractéristiques texturale et structurale du sol. Par conséquent, de nombreux auteurs se sont basés sur des résultats empiriques pour déduire l'allure générale de chacune des fonctions  $K(\theta)$ ,  $f(\theta)$  et  $D(\theta)$  (Figure II.3)



**Figure II-2. : Allure générale des principales fonctions hydrodynamiques.**

Parmi les auteurs qui ont cherché à formuler mathématiquement ces modes de variation, on peut citer Brooks et Corey / / qui ont proposé, pour  $K(\theta)$  et  $h(\theta)$ , les modèles d'expression suivantes :

$$K(\theta) = K_s \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^n \quad (\text{II.13})$$

$$h(\theta) = -h_s \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{-N} \quad (\text{II.14})$$

tels que :

- $n$  et  $N$  désignent des paramètres constants qui reflètent la porosité du sol.
- $\theta_r$  est la teneur en eau résiduelle
- $K_s$  et  $h_s$  sont respectivement la conductivité hydraulique et la charge de pression à saturation.

En se servant de ces expressions et de la relation de définition (II.12), il est possible d'établir un modèle mathématique pour la fonction  $D(\theta)$ , soit :

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} = K_s (\theta^*)^n \left[ N h_s (\theta^*)^{-N-1} \frac{1}{\theta_s - \theta_r} \right]$$

$$\text{Avec } \theta^* = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$$

d'où, après simplification :

$$D(\theta) = N h_s K_s \frac{(\theta - \theta_r)^{n-N-1}}{(\theta_s - \theta_r)^{n-N}} \quad (\text{II.15})$$

Nous donnons ci-après les ordres de grandeur de quelques paramètres simplifiants  
/./.

a- Teneur en eau à saturation  $\theta_s$

- Sol sableux  $0,35 \leq \theta_s \leq 0,50$
- Sol silteux  $0,40 \leq \theta_s \leq 0,60$
- Sol argileux  $0,30 \leq \theta_s \leq 0,65$

b- Porosité  $f$

Dans le cas général, on a :

$$0,3 \leq f \leq 0,6$$

c- Teneur en eau résiduelle  $\theta_r$

$$10^{-2} \leq \theta_r \leq 10^{-1}$$

d- Conductivité hydraulique à saturation  $K_s$

$$10^{-2} \leq K_s \leq 10^{-1}$$

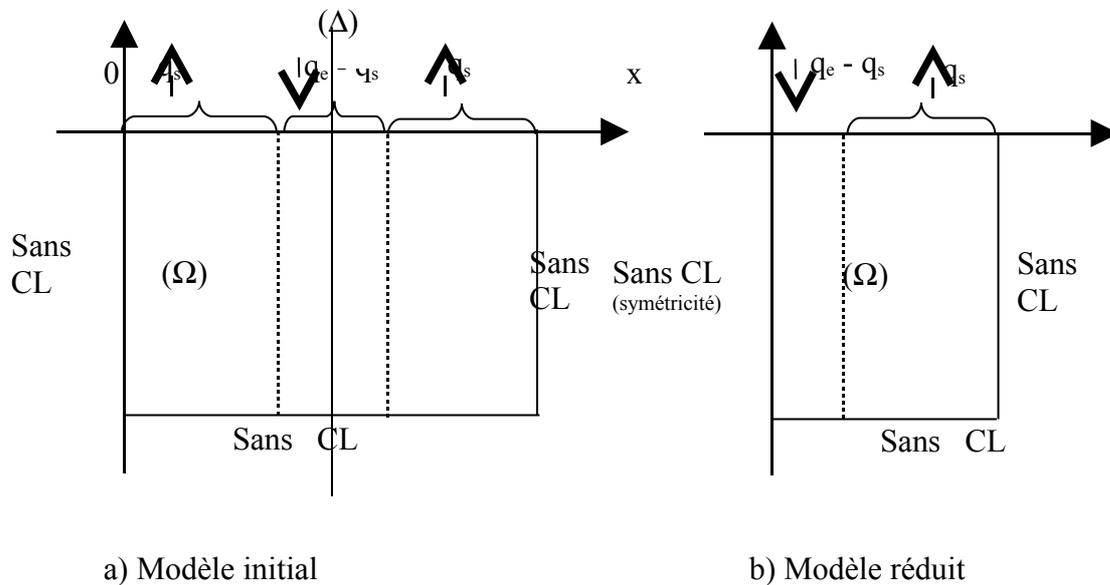
Après avoir établi, dans la deuxième partie de ce travail, un modèle permettant d'étudier le problème d'infiltration dans le sol, nous en avons réalisé une simulation numérique en utilisant la méthode des différences finies. Cette opération de simulation est rapportée à une forme discrétisée du modèle, à laquelle sont appliquées les conditions physiques du problème.

### III.1. Méthode d'analyse

#### III.1.1. Modèle discrétisé

Il est construit par une opération de maillage selon le procédé ci-après.

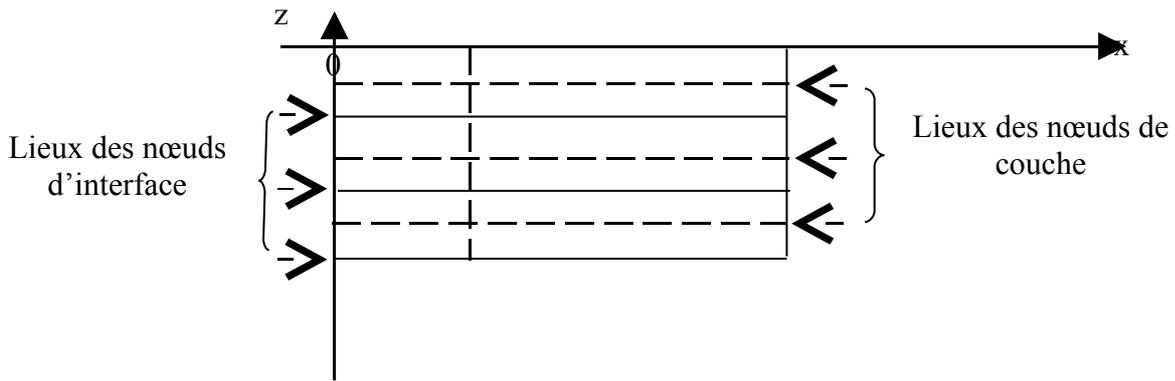
Représentons par la surface ( $\Omega$ ) de la figure III-1-a, une coupe suivant le plan ( $O,x,z$ ) de la portion de sol étudié, avec les conditions physiques de charge ( $q_e, q_s$ ) choisies.



**Figure III.1 : Modèle d'analyse**

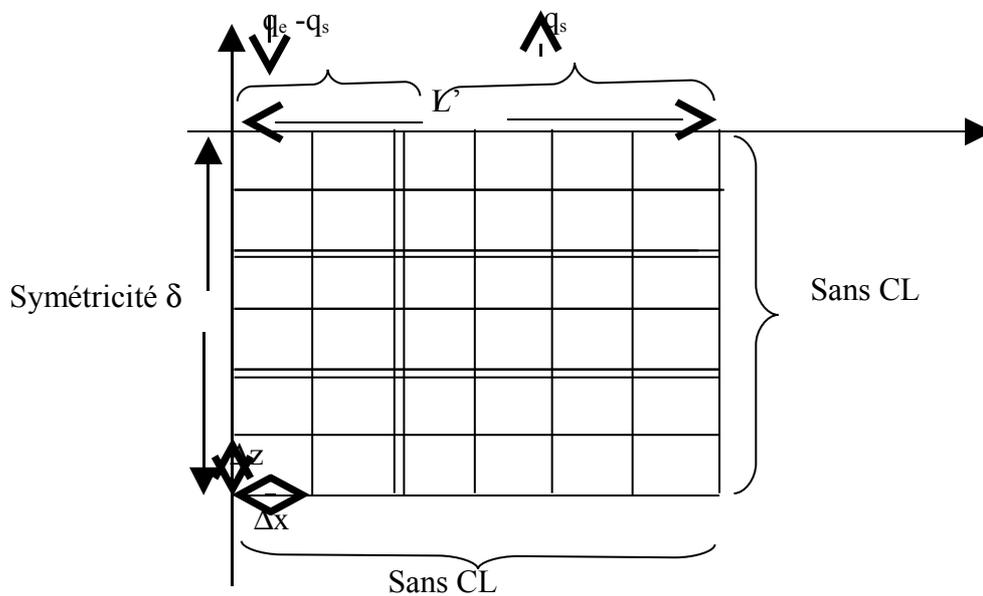
Afin de gagner en nombre de points de mesure et par conséquent d'affiner le modèle, on peut le réduire de moitié en vertu de la symétrie par rapport à ( $\Delta$ ), ce qui conduit au modèle ( $\Omega'$ ) de la figure III.1-b.

Quant au maillage suivant la direction  $Oz$ , les nœuds (points de mesure) sont disposés de manière à permettre une description de l'évolution du processus à l'intérieur de chaque couche et à l'interface de deux couches successives (Figure III.1-c).



**Figure III.1-c : Maillage en z du modèle**

En tenant compte de toutes ces considérations, nous avons établi le modèle discrétisé du sol, selon la figure III.2.



**Figure III-2 : Modèle discrétisé du sol (vue en coupe)**

Sur ce modèle géométrique, si on pose

$$\Delta x = \frac{L'}{6}, \quad \Delta z = \frac{\delta}{6}$$

Chaque nœud est repéré par son abscisse  $x$  et sa côte  $z$ , à l'aide des indices :

$$i = \frac{x}{\Delta x} \quad \text{pour l'abscisse}$$

et

$$j = \frac{z}{\Delta z} \quad \text{pour la côte}$$

et à tout instant  $t_n$ , les variables du problème qui sont définies en chaque nœud, sont affectées :

- d'un indice en x, noté i
- d'un indice en y, noté j
- d'un indice en instant, noté n

Quant à la description de l'évolution de l'infiltration par l'intermédiaire de ce modèle, on utilisera une forme approchée (formulation discrète) de l'équation dynamique des écoulements dont la résolution, rapportée au modèle discrétisé, conduira à des solutions qui se présentent sous la forme discrète :

$$\{\theta_{ijn}\} = \{\theta(x_i, z_j, t_n)\}$$

### **III.1.2. Forme approchée de l'équation dynamique des écoulements**

Partant de l'équation différentielle (II.11) qui décrit les écoulements en milieu non saturé, on a :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \quad (\text{III.1-a})$$

ou encore

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D(\theta) \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial D(\theta)}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial D(\theta)}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \quad (\text{III.1-b})$$

La forme approchée de cette équation, selon la méthode de Cranck-Nicholson, définit la variable continue  $\theta(x, z, t)$  dans le domaine d'étude ( $\Omega'$ ) par pas de  $\Delta x$ ,  $\Delta z$  et  $\Delta t$ .

En posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \quad ; \lambda_z = \frac{\Delta t}{2(\Delta z)^2} \\ D_{ij} = D_{ijn} = D_{ijn+1} \quad ; K_{ij} = K_{ijn} = K_{ijn+1} \\ \theta_{ij}^r = \theta_{ijn+1} + \theta_{ijn} \end{array} \right.$$

la forme approchée de (III.1-b) a pour expression générale :

$$A_1^{(1)}\theta_{ij-1}^r + A_2^{(1)}\theta_{i-1j}^r + A_3^{(1)}\theta_{ij}^r + A_4^{(1)}\theta_{i+1j}^r + A_5^{(1)}\theta_{ij+1}^r = A_6^{(1)}2\theta_{ijn} \quad (\text{III.2})$$

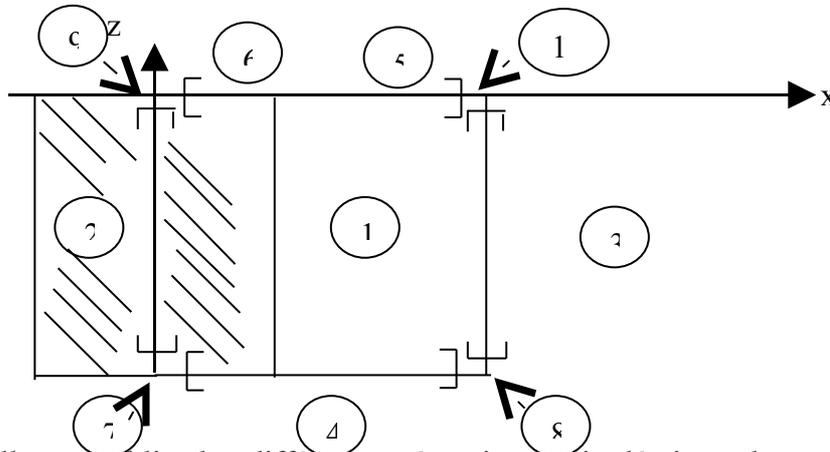
avec :

$$\begin{cases} A_1^{(1)} = -\lambda_z D_{ij} \\ A_2^{(1)} = -\lambda_x D_{ij} \\ A_3^{(1)} = 1 + \lambda_x (D_{i+1j} + D_{ij}) + \lambda_z (D_{ij+1} + D_{ij}) \\ A_4^{(1)} = -\lambda_x D_{i+1j} \\ A_5^{(1)} = -\lambda_z D_{ij+1} \\ A_6^{(1)} = 2\lambda_z \Delta_z (K_{ij+1} - K_{ij}) \end{cases}$$

### III.1.3. Conditions aux frontières

Lors de la mise en application de cette méthode de discrétisation, chaque frontière du domaine d'étude ( $\Omega'$ ) est décrite par une équation qui lui est propre.

En adoptant les numérotations suivantes :



Nous allons établir les différentes équations qui décrivent les conditions aux frontières.

Cas 2 :

Cette frontière est caractérisée par les conditions de symétrie en x, ce qui conduit à l'équation suivante.

$$A_1^{(2)}\theta_{ij-1}^r + A_3^{(2)}\theta_{ij}^r + A_4^{(2)}\theta_{i+1j}^r + A_5^{(2)}\theta_{ij+1}^r = A_6^{(2)} + 2\theta_{ijn} \quad (\text{III.3.a})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1^{(2)} = A_1^{(2)} \\ A_3^{(2)} = A_3^{(1)} \\ A_4^{(2)} = -\lambda_x (D_{ij} + D_{i+1j}) \\ A_5^{(2)} = A_5^{(1)} \\ A_6^{(2)} = A_6^{(1)} \end{array} \right.$$

Cas 3 :

Cette frontière est caractérisée par une continuité du flux suivant la direction Ox, ce qui donne :

$$A_1^{(3)} \theta_{ij-1}^r + A_2^{(3)} \theta_{i-1j}^r + A_3^{(3)} \theta_{ij}^{(r)} + A_5^{(3)} \theta_{ij+1}^r = A_6^{(3)} + 2\theta_{ijn} \quad (\text{III.3.b})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1^{(3)} = A_1^{(1)} \\ A_2^{(3)} = \lambda_x (D_{i+1j} - D_{ij}) \\ A_3^{(3)} = 1 + \lambda_x (D_{ij} - D_{i+1j}) + \lambda_z (D_{ij+1} + D_{ij}) \\ A_5^{(3)} = A_5^{(1)} \\ A_6^{(3)} = A_6^{(1)} \end{array} \right.$$

Cas 4 :

Cette frontière est caractérisée par une continuité du flux suivant la direction Oz, ce qui donne :

$$A_2^{(4)} \theta_{i-1j}^r + A_3^{(4)} \theta_{ij}^r + A_4^{(4)} \theta_{i+1j}^r + A_5^{(4)} \theta_{ij+1}^r = A_6^{(4)} + 2\theta_{ijn} \quad (\text{III.3.c})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2^{(4)} = A_2^{(1)} \\ A_3^{(4)} = 1 + \lambda_x(D_{i+1j} + D_{ij}) + \lambda_z(D_{ij+1} - D_{ij}) \\ A_4^{(4)} = A_4^{(1)} \\ A_5^{(4)} = \lambda_z(D_{ij} - D_{ij+1}) \\ A_6^{(4)} = A_6^{(1)} \end{array} \right.$$

### Cas 5

Cette frontière est caractérisée par une charge

$$q_s = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

ce qui conduit à l'équation générale :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D(\theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial D(\theta)}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{q_s}{\Delta z} - \frac{D(\theta)}{\Delta z} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z}$$

la forme approchée est :

$$\boxed{A_1^{(5)} \theta_{ij-1}^r + A_2^{(5)} \theta_{i-1j}^r + A_3^{(5)} \theta_{ij}^r + A_4^{(5)} \theta_{i+1j}^r = A_6^{(5)} + 2\theta_{ijn}} \quad (\text{III.3d})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1^{(5)} = A_1^{(1)} \\ A_2^{(5)} = A_2^{(1)} \\ A_3^{(5)} = A_3^{(1)} + A_5^{(1)} \\ A_4^{(5)} = A_4^{(1)} \\ A_6^{(5)} = A_6^{(1)} - q_s(2\lambda, \Delta_z) \end{array} \right.$$

### Cas 6 :

Cette partie de frontière est caractérisée par une charge.

$$q_e - q_s = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

Le traitement de ce sixième cas est analogue à celui du cinquième cas, moyennant le remplacement de  $q_s$  par  $(q_s - q_e)$ , soit.

$$A_1^{(6)}\theta_{ij-1}^r + A_2^{(6)}\theta_{i-1j}^r + A_3^{(6)}\theta_{ij}^r + A_4^{(6)}\theta_{i+1j}^r = A_6^{(6)} + 2\theta_{ijn} \quad (\text{III.3e})$$

avec :

$$\begin{cases} A_1^{(6)} = A_1^{(5)} \\ A_2^{(6)} = A_2^{(5)} \\ A_3^{(6)} = A_3^{(5)} \\ A_4^{(6)} = A_4^{(5)} \\ A_6^{(6)} = A_6^{(5)} + q_e \end{cases}$$

Cas 7 – 8 – 9 – 10 :

La forme approchée de l'équation dynamique qui caractérise chacun de ces cas est déduite de la combinaison des résultats obtenus pour les frontières qui les définissent, soit :

Cas 7: combinaison du cas 2 et du cas 4

Cas 8: combinaison du cas 3 et du cas 4

Cas 9: combinaison du cas 2 et du cas 6

Cas 10: combinaison du cas 3 et du cas 5

En écrivant l'équation dynamique en chaque nœud  $N_{ij}$  du modèle discrétisé, on obtient le système d'équations algébriques qui représente la forme approchée du système d'équations différentielles du problème.

Ce système algébrique se présente sous la forme matricielle :

$$[A] \{\theta^r\} = 2\{\theta_n\} + [F]$$

$$\text{Soit } [A] \{\theta_{n+1}\} = [-A + 2I] \{\theta_n\} + \{\theta_n\} \quad (\text{III.4})$$

I étant la matrice identité.

D'après cette relation générale, les valeurs des teneurs en eau  $\{\theta_{n+1}\}$ , définies à un instant  $t_{n+1}$  quelconque se déduisent des valeurs  $\{\theta_n\}$ , définies à l'instant  $t_n$  immédiatement précédent, ainsi que de la charge  $\{F\}$  subie par le système.

Ainsi, l'analyse numérique de l'évolution du processus s'effectue par la résolution de l'équation (III.4) en partant d'une répartition initiale  $\{80\}$  de la teneur en eau et pour des conditions de charge données.

### **III.2. Les cas étudiés**

Dans la réalité, le sol est un système complexe dont la composition est très hétérogène et les constituants très diversifiés; de même, sa structure est en constante évolution. Il serait alors hasardeux de choisir les cas à étudier selon des critères liés à la composition ou à la structure du sol.

Par contre, étant donné le rôle primordial joué par l'espace poral du sol sur le mouvement d'infiltration, on peut prendre la porosité comme paramètre de classification des types de sol. Cela revient à différencier les échantillons à analyser par leurs porosités respectives.

Ainsi, en application de la méthode d'analyse qui a été présentée au paragraphe précédent, nous avons; effectué la simulation du processus d'infiltration sur quelques types de sol de différentes porosités. A travers l'étude de ces cas, nous voulons décrire le mode d'évolution de l'infiltration selon :

- le type de sol (matrice solide),
- l'épaisseur des couches d'infiltration,
- l'arrangement interne des couches d'infiltration

Et selon les résultats obtenus, nous essaierons de dégager les modèles de matrice solide qui favorisent l'infiltration d'une part, (impact dans le domaine agrologique) et qui le bloquent d'autre part (impact sur le plan de l'hydrologie).

Afin d'atteindre ces objectifs, nous avons effectué des séries de calcul qui sont axées sur les points d'intérêt suivants :

- a- Modes d'évolution de l'infiltration et de la redistribution
- b- Influence de l'épaisseur des couches sur le processus d'infiltration
- c- Modes d'évolution de l'infiltration dans des échantillons de différentes porosités  $f$  ( $0.3 \leq f \leq 0.8$ ).
- d- Influence de l'organisation structurale des couches d'infiltration

Les valeurs numériques des paramètres physiques que nous avons utilisés dans les calculs sont groupées dans le tableau III. 1.

Types de sol	F	$K_s$	N	$\theta_r$	$\theta_s$	N	$h_s$
1- Très perméable	0.8	$10^{-3}$	5.00	0.01	0.3	1.10	0.200
2- Perméable	0.7	$10^{-5}$	5.80	0.01	0.4	1.43	0.153
3- Semi-perméable	0.5	$10^{-6}$	7.00	0.01	0.5	2.00	0.100
4- Imperméable	0.3	$10^{-7}$	9.67	0.01	0.6	3.40	0.025

**TABLEAU III.1. : Valeurs numériques des paramètres de modélisation**

Les échantillons de mesure sont de forme parallélépipédique et ont les mêmes dimensions: 1 m x 1 m x 0.5 m.

Les conditions physiques appliquées (Figure III.3) sont:

- une teneur en eau résiduelle égale à 0.01
- une charge de densité  $q_e$  variant entre  $5 \cdot 10^{-6}$  m/s et  $10^{-7}$  m/s, appliquée temporairement ou de manière continue sur une bande rectangulaire centrale, de 0,2 m x 1 m, de la surface exposée du bloc.
- une perte par évaporation négligeable
- un suivi de l'évolution des processus toutes les cinq minutes sur une durée de 4 heures.

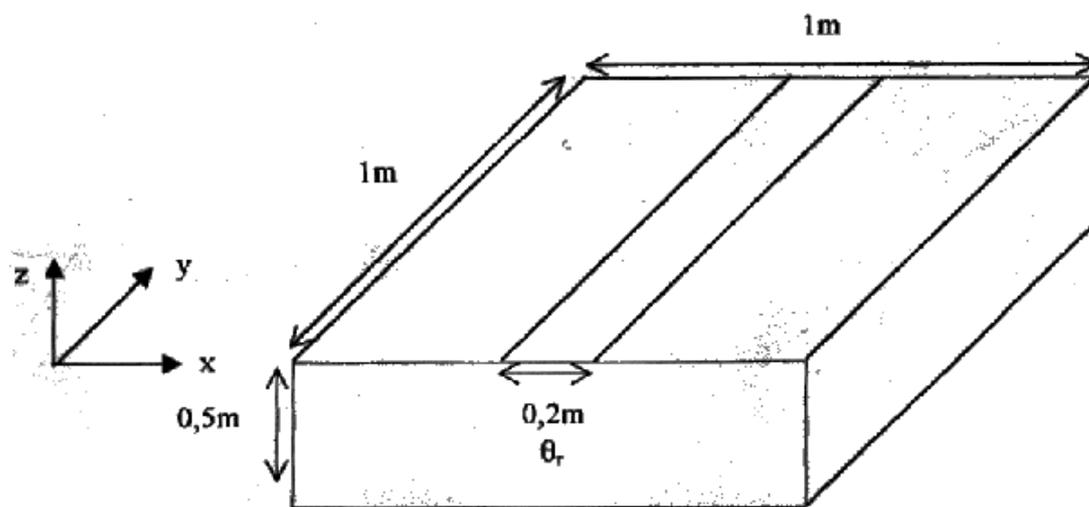


Figure III.3. : Schéma de l'échantillon de mesure

Les conditions ont été choisies afin de placer l'échantillon dans un état non-saturé et/ou saturé durant le temps de mesure. La charge répartie sur la bande centrale de la face exposée permet d'assurer la symétrie du problème d'une

part, et d'obtenir en même temps les deux profils hydriques  $\theta(z)$  et  $\theta(x)$ , d'autre part.

### III.2.1 Infiltration et redistribution

A la suite d'un apport d'eau à la surface du sol (charge), le flux qui pénètre en profondeur caractérise l'infiltration. Lorsque cet apport cesse, la quantité d'eau retenue dans le sol continue à se déplacer sous l'effet des gradients de pression et de gravité (perturbation) provoquées initialement par la charge. Ce mouvement caractérise la redistribution et il se poursuit en tendant vers un rééquilibrage de la répartition des potentiels hydrauliques dans le sol.

Dans ce premier volet, nous allons décrire l'évolution de l'infiltration et celle de la redistribution dans le sol en nous servant des profils hydriques obtenus pour le deuxième échantillon du tableau III.1.

A partir d'un instant initial  $t_0 = 0$  où l'on applique une charge  $q_e = 5.10^{-6}$  m/s, les courbes d'évolution de la fonction  $\theta(t)$  à chaque niveau de côté  $z$  et d'abscisse  $x = 0$  sont portées dans la figure III.4a

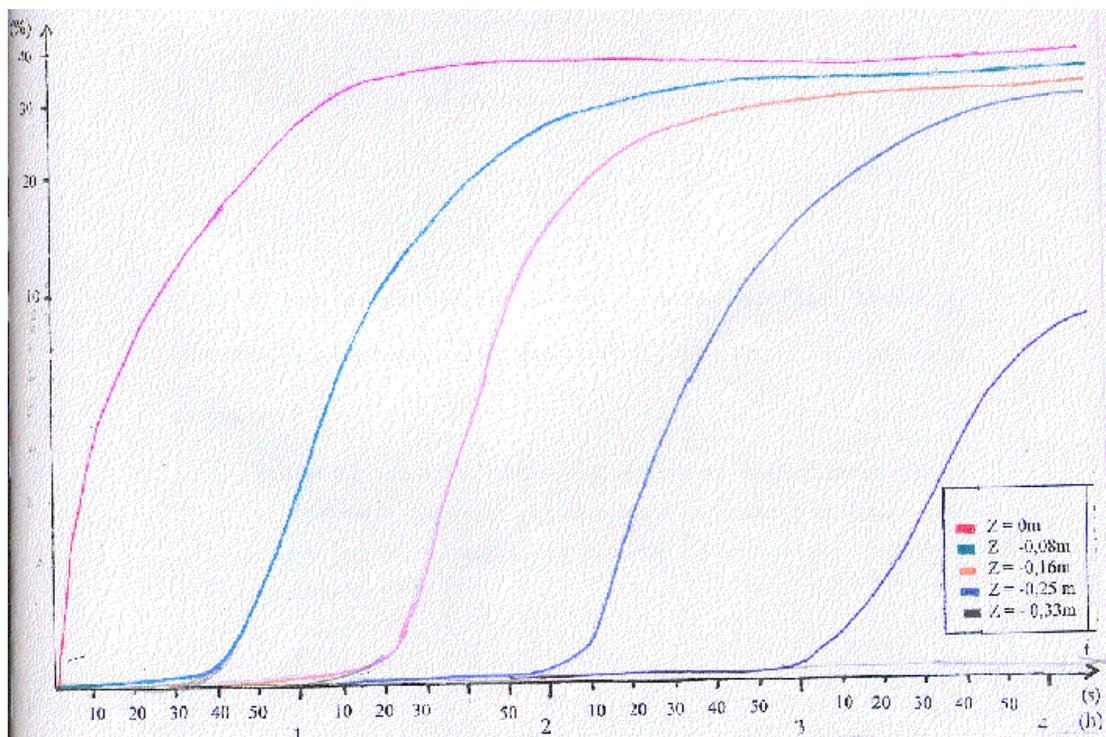


Figure III.4a: Variation de  $\theta(t)$  pour  $x = 0$  et

$z = 0 \text{ m} / -0,08 \text{ m} / -0,16 \text{ m} / -0,025 \text{ m} / -0,33 \text{ m}$

L'allure de ces courbes est telle que:

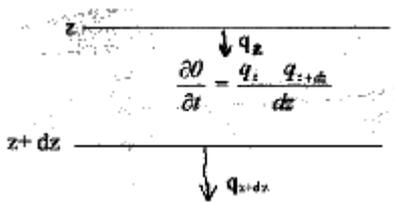
- à chaque niveau de cote  $z$ , la vitesse de croissance  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$  la teneur en eau est une fonction

décroissante de  $\theta$ .

- au cours du temps, la répartition de  $\theta$  à tous les niveaux tend vers une valeur d'équilibre commune.

La première observation s'explique par le fait qu'à tout instant  $t$ , la quantité  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ .

au sein d'une couche  $d_z$  limitée par les niveaux de cotes  $z$  et  $z + dz$ , est égale à la différence entre la densité du flux entrant  $q_z$  et celle du flux sortant  $q_{z+dz}$ .



Or le flux  $q_z$  est proportionnel au gradient de  $\theta$  dans  $d_z$  (équation dynamique).

$$q_z = D \left[ \frac{\theta_z - \theta_{z+dz}}{dz} \right] = D(\vec{\nabla} \theta)_{dz}$$

$D$  étant le coefficient de diffusion. A mesure que l'eau s'écoule par infiltration,  $\theta_{z+dz}$

augmente, ce qui diminue  $(\vec{\nabla} \theta)_{dz}$  c'est-à-dire  $q_z$ ; ceci entraîne la diminution de  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ .

■ Quant à la deuxième observation, elle montre que l'infiltration évolue de manière à atténuer progressivement les gradients de charge créés par l'apport  $q_e$ , jusqu'à l'instauration d'une nouvelle répartition d'équilibre  $\theta(x,z)$ .

L'évolution du profil hydrique  $\theta(z)$  vers le profil d'équilibre est illustrée par figure III.4b, pour les quatre premières heures

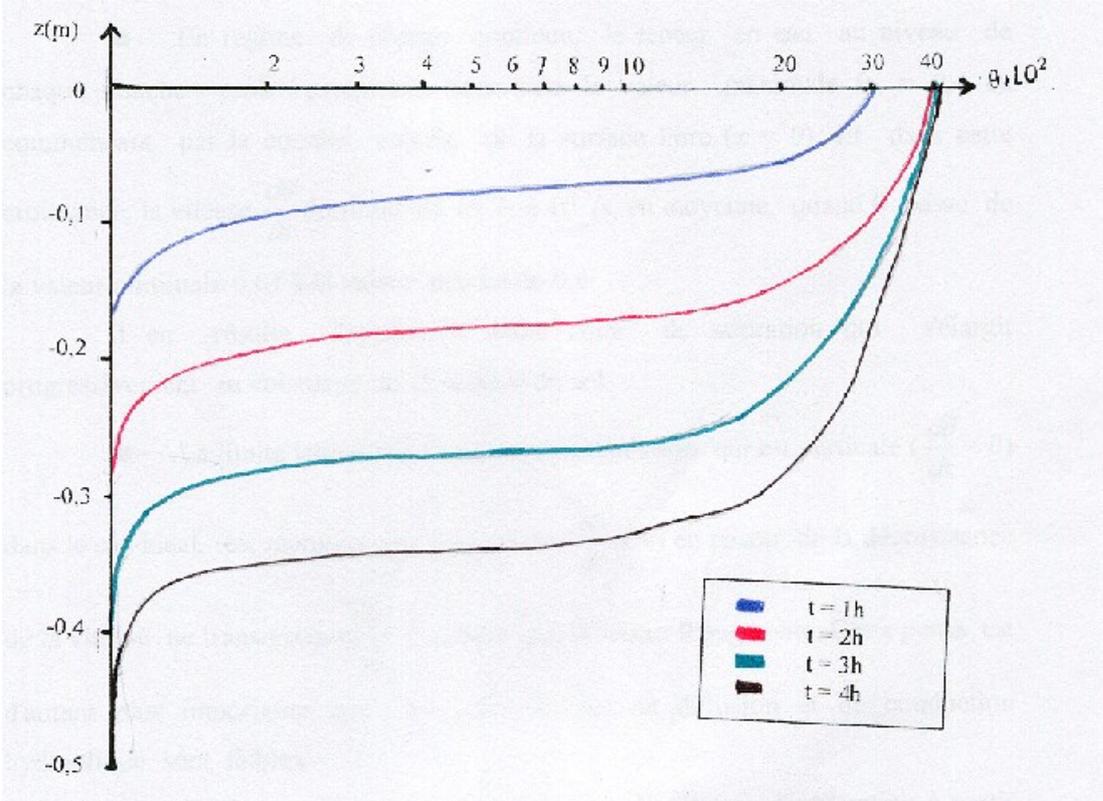


Figure III.4b: Evolution du profil hydrique

L'allure de ces courbes met en évidence la présence des parties caractéristiques du profil hydrique en milieu non saturé (Figure I.14) qui sont: la zone de transmission, la zone d'humidification et le front d'humidification.

Quant au mode d'évolution traduit par ces profils hydriques, on peut émettre les remarques suivantes:

- En régime de charge continue, la teneur en eau au niveau de chaque couche croît progressivement vers la valeur maximale  $\theta_s = 0,4$  en commençant par la courbe

voisine de la surface libre ( $z = 0$ ). Et dans cette croissance, la vitesse  $\frac{d\theta}{dz}$  diminue de

$10^{-4}/s$  à  $10^{-7}/s$ , en moyenne, quand  $\theta$  passe de la valeur minimale 0,01 à la valeur maximale 0,4.

Il en résulte l'apparition d'une zone de saturation qui s'élargit progressivement au voisinage de la surface du sol.

- La limite latérale de la zone de transmission qui est verticale ( $\frac{d\theta}{dz} = 0$ ) dans le cas

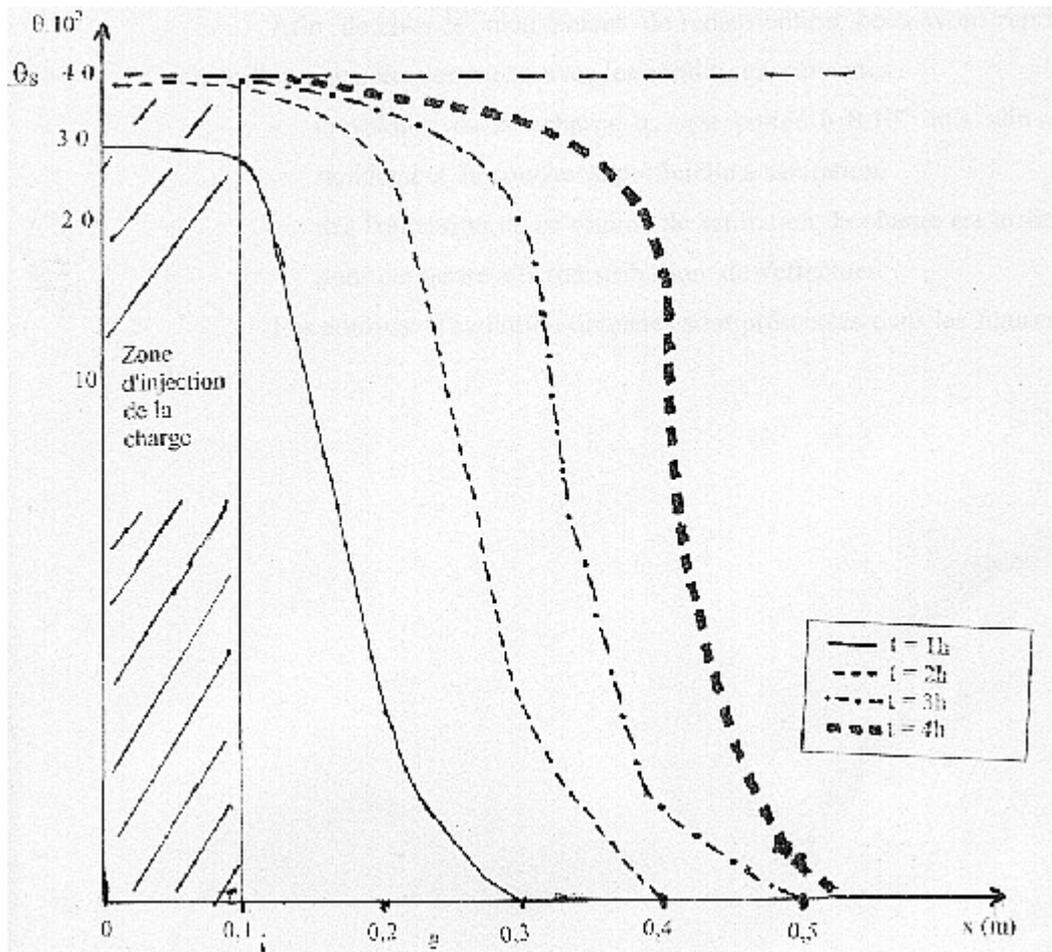
idéal, est marquée par une pente ( $\frac{d\theta}{dz} \neq 0$ ) en raison de la décroissance de la vitesse

de transmission  $\frac{d\theta}{dt}$  à mesure que la teneur  $\theta$  augmente. Cette pente est d'autant plus

importante quels coefficients de diffusion et de conduction hydraulique sont faibles.

- De façon générale, on peut estimer la vitesse d'infiltration à partir de la vitesse de déplacement du front d'humidification qui, dans notre exemple, varie entre  $2,5 \cdot 10^{-5}$  m/s et  $3 \cdot 10^{-5}/s$ .

En ce qui concerne l'évolution du profil hydrique  $\theta(x)$ , les courbes de variation obtenues (Figure III.4.c) traduisent l'étalement latéral progressif de la quantité d'eau injectée dans une zone réduite de la surface libre.



**Figure III.4.c : Evolution du profil hydrique  $\theta(x)$  pour  $z = 0$**

Et puisque ce mouvement d'étalement est uniquement régi par le processus de diffusion, on remarque comme précédemment que la teneur en des points qui entourent la zone d'injection de la charge croît vers la valeur d'équilibre  $\theta_s$  en commençant par les points les plus proches de la zone chargée. La vitesse de cette évolution qui est relativement rapide au démarrage devient plus modérée à mesure que la teneur  $\theta$  augmente.

Afin de créer le mouvement de redistribution, nous avons repris le même échantillon que précédemment, avec les conditions suivantes:

- la valeur de la charge  $q_e$  est portée à  $8.10^{-6}$  m/s afin de mener rapidement la couche superficielle à saturation,
- dès l'obtention de ce régime de saturation, la charge est arrêtée ( $q_e = 0$ ) pour permettre à la redistribution de s'effectuer.

Les courbes d'évolution obtenues sont présentées dans les figures III.4d et III.4.e

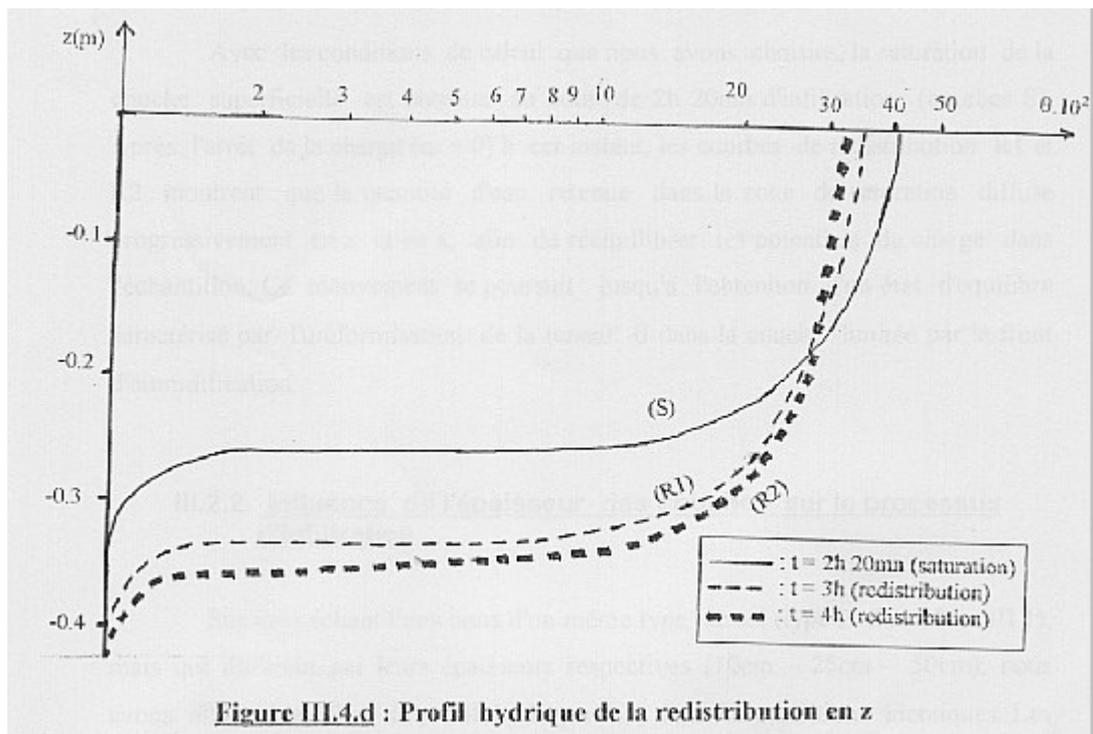


Figure III.4.d : Profil hydrique de la redistribution en z

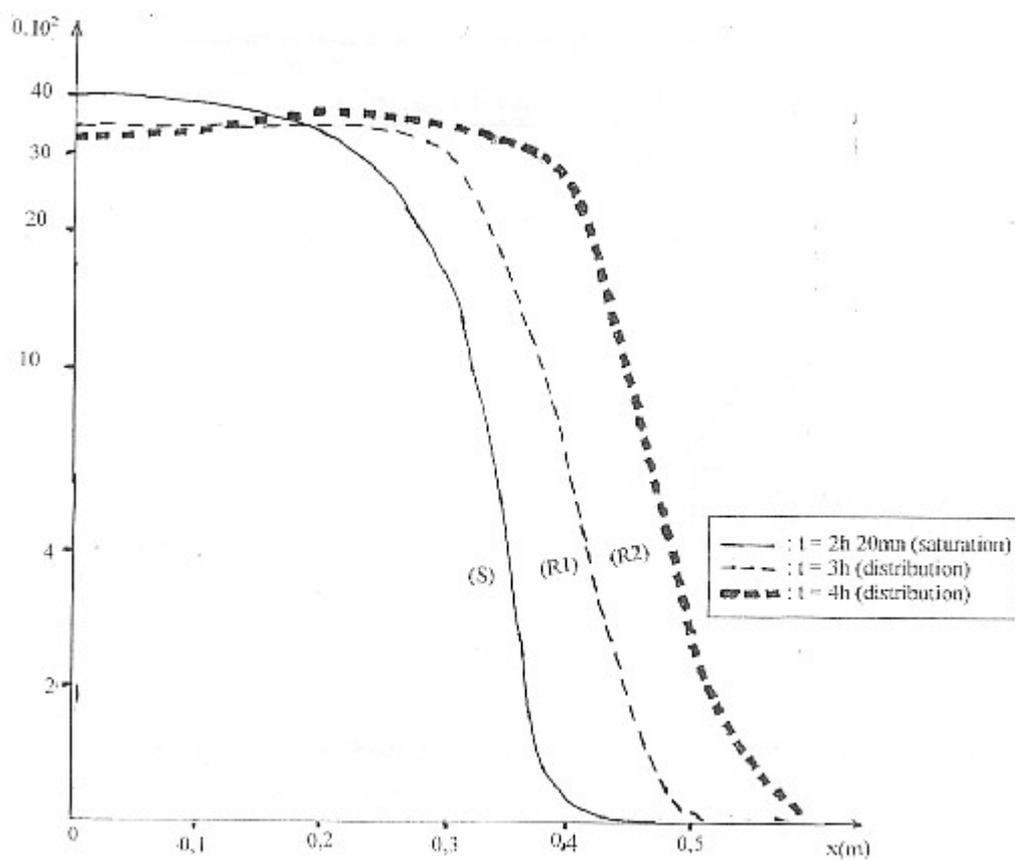
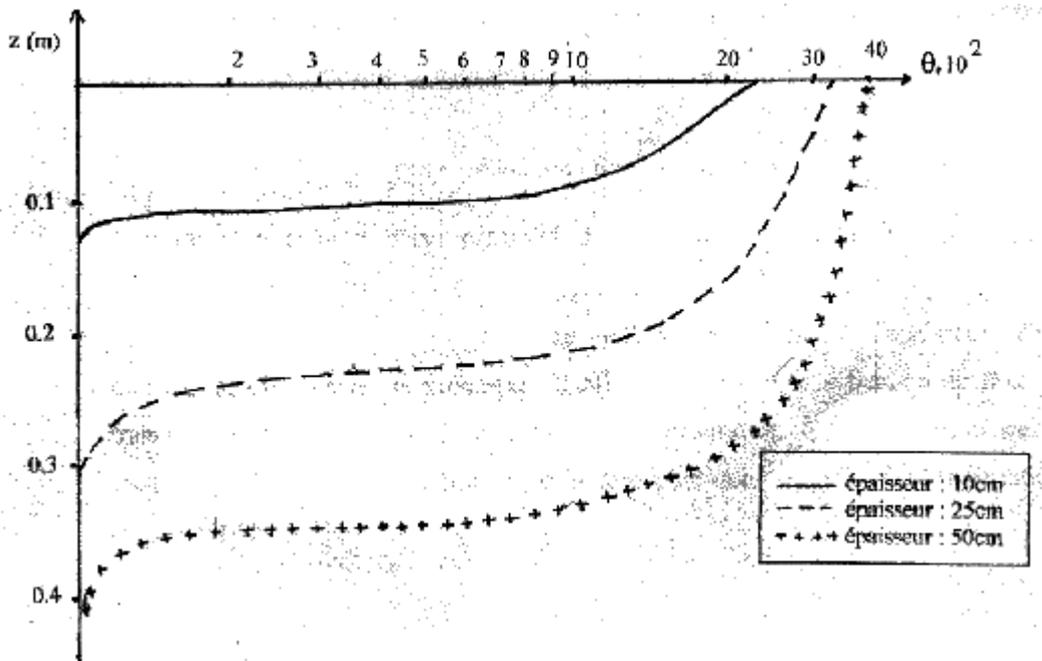


Figure III.4.e : Profil hydrique de la redistribution en x

Avec les conditions de calcul que nous avons choisies, la saturation de la couche superficielle est obtenue au bout de 2h 20mn d'infiltration (courbes S). Après l'arrêt de la charge ( $q_e = 0$ ) à cet instant, les courbes de redistribution R1 et R2 montrent que la quantité d'eau retenue dans la zone de saturation diffuse progressivement en z et en x, afin de rééquilibrer les potentiels de charge dans l'échantillon. Ce mouvement se poursuit jusqu'à l'obtention d'un état d'équilibre caractérisé par l'uniformisation de la teneur  $\theta$  dans la couche limitée par le front d'humidification.

### III.2.2. Influence de l'épaisseur des couches sur le processus d'infiltration

Sur les trois échantillons issus d'un même type de sol (type 2 du tableau III.I), mais qui diffèrent par leurs épaisseurs respectives (10cm – 25cm – 50cm), nous avons effectué le calcul du profil hydrique  $\theta(z)$  dans des conditions identiques. Les courbes obtenues au bout de 4h d'infiltration sont rapportées dans la figure III.5a.

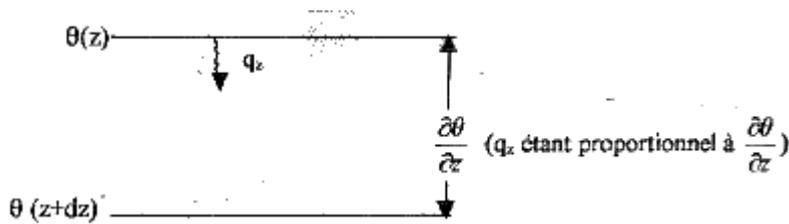


**Figure III.5a: Profils hydriques  $\theta(z)$  d'échantillons de différentes épaisseurs (durée d'infiltration = 4h)**

De ces trois courbes, il ressort la remarque générale suivante: si l'allure du profil hydrique est globalement conservée, les propriétés du mouvement d'infiltration (vitesse, intensité, répartition, etc...), varient selon l'épaisseur de la matrice solide traversée.

En effet, on constate qu'à un même niveau de profondeur, la teneur est d'autant plus élevée que l'épaisseur est importante. Cette observation peut s'expliquer par une conséquence des propriétés du phénomène de diffusion qui gère l'infiltration.

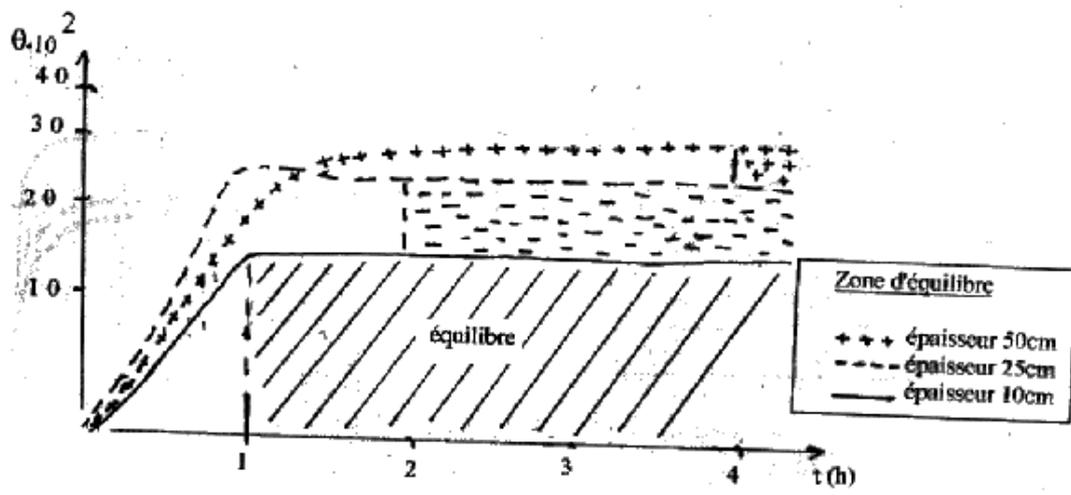
A la traversée d'une couche d'épaisseur  $d_z$ , caractérisée par un gradient  $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ ,



plus  $d_z$  est faible, plus  $q_z$  est élevé, ce qui tend à compenser plus rapidement le gradient  $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ , initialement existant.

A la suite de cette réduction de  $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ ,  $q_z$  diminue. Ceci entraîne une diminution de l'apport d'eau par unité de temps dans  $d_z$  et il en résulte une plus faible croissance de  $\theta$ .

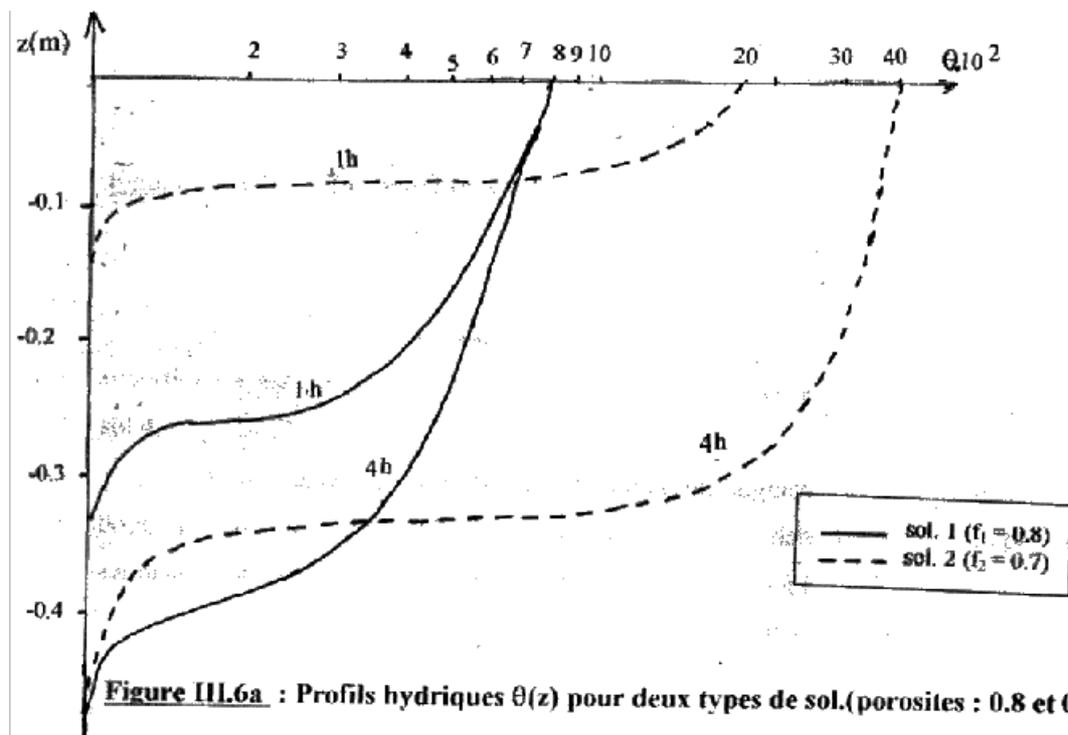
En résumé, on peut conclure qu'une réduction de l'épaisseur de la matrice solide active le processus d'infiltration, par intensification du flux de transfert  $q$ ; et ceci conduit à une plus rapide instauration d'un état d'équilibre, où les teneurs  $\theta$  dans les couches ne subissent plus que de très faible variations (Figure III.5b).



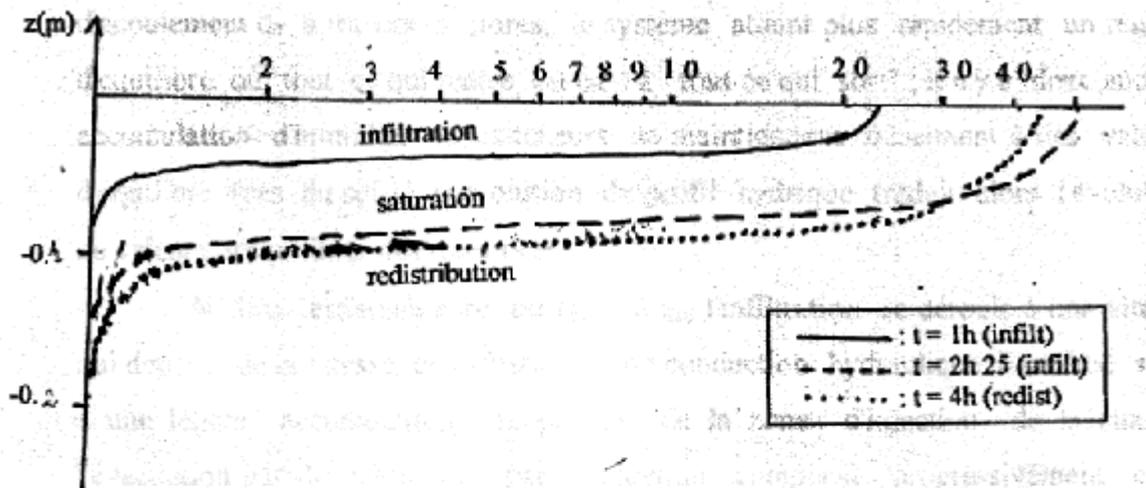
**Figure III-5b:** Variations de  $\theta(t)$  du point ( $z=0 ; x=0$ ) pour différentes épaisseurs de couche

### III.2.3. Evolution de l'infiltration dans des échantillons de différentes porosités.

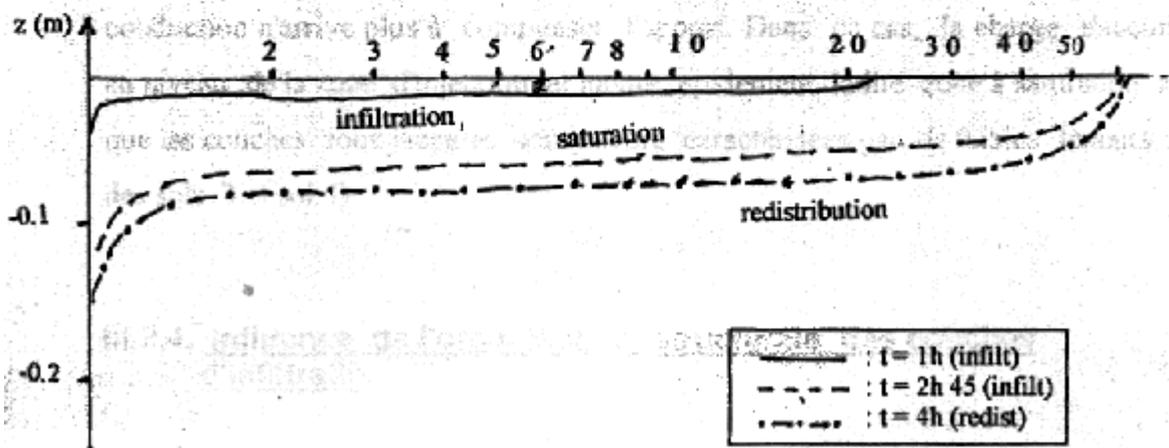
Les mêmes conditions de calcul que précédemment, l'étude de l'évolution de l'infiltration en fonction de la porosité de la matrice solide a été effectuée sur 4 échantillons de porosités respectives:  $f_1 = 0.8$  (sol.1),  $f_2 = 0.7$  (sol.2),  $f_3 = 0.5$  (sol.3),  $f_4 = 0.3$  (sol.4). Les résultats obtenus sont illustrés par les figures III.6 a-b-c.



**Figure III.6a :** Profils hydriques  $\theta(z)$  pour deux types de sol.(porosites : 0.8 et 0.7)



**Figure III 6b : Profils hydriques  $\theta(z)$  pour un sol de porosité  $f = 0.5$  (sol.3)**



**Figure III 6c : Profils hydriques  $\theta(z)$  pour un sol de porosité  $f = 0.3$  (sol.4)**

D'après ces résultats, on peut remarquer que:

- plus la porosité est élevée, plus vite la saturation de la couche superficielle est atteinte: au bout de 2h 25 pour le sol.3 et au bout de 2h 45 pour le sol.4
- la vitesse de transfert de l'eau injectée augmente avec la porosité. Au bout de 4h de temps, les fronts d'humidification dans les 4 types de sol s'échelonnent entre  $-8\text{cm}$  et  $-40\text{cm}$  en passant de  $f_1 = 0.3$  à  $f_4 = 0.8$ .

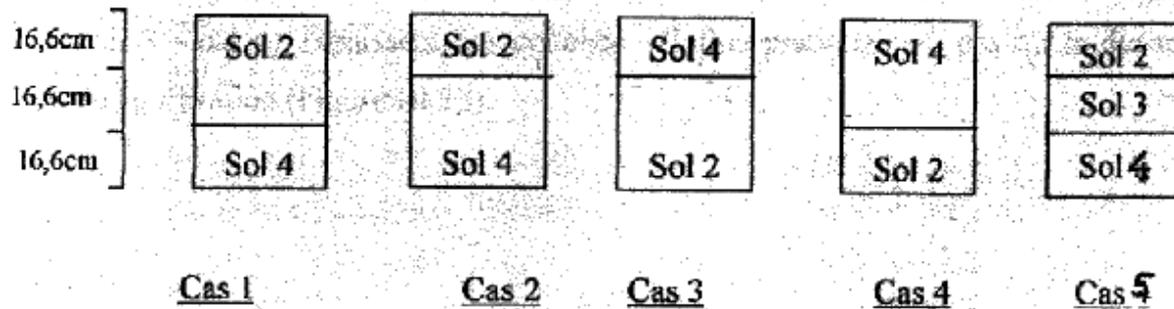
Ces observations peuvent être expliquées par les faits suivants. Au niveau d'une couche de sol, l'espace poral représente les voies par lesquelles l'eau s'écoule par infiltration.

- Si la vitesse d'injection  $q_e$  (flux de charge) est inférieure à la vitesse d'écoulement  $q_d$  à travers les pores, le système atteint plus rapidement un régime d'équilibre où "tout ce qui rentre est égal à tout ce qui sort"; il n'y a donc aucune accumulation d'humidité et les teneurs se maintiennent quasiment à des valeurs d'équilibre (cas du sol). L'évolution du profil hydrique traduit alors l'évolution de valeurs d'équilibre des teneurs  $\theta$ .
- Si  $q_e$  est supérieure ou égale à  $q_d$ , l'infiltration se déroule à une vitesse qui dépend de la vitesse de diffusion et de conduction hydraulique. Et même s'il y a une légère accumulation au niveau de la zone d'injection de la charge, l'évacuation par diffusion et par conduction compense progressivement cette accumulation; et on assiste à une évolution de la teneur  $\theta$  en profondeur, couche après couche (cas du sol.2).
- Si  $q_e$  est très élevée par rapport à  $q_d$ , l'évacuation par diffusion et par conduction n'arrive plus à compenser l'apport. Dans ce cas, la charge s'accumule au niveau de la zone d'injection et même rapidement ladite zone à saturation alors que les couches sous-jacentes sont encore caractérisées par de faibles teneurs (cas des sols.3 et sol.4)

### **III.2.4. Influence de l'organisation structurale des couches d'infiltration**

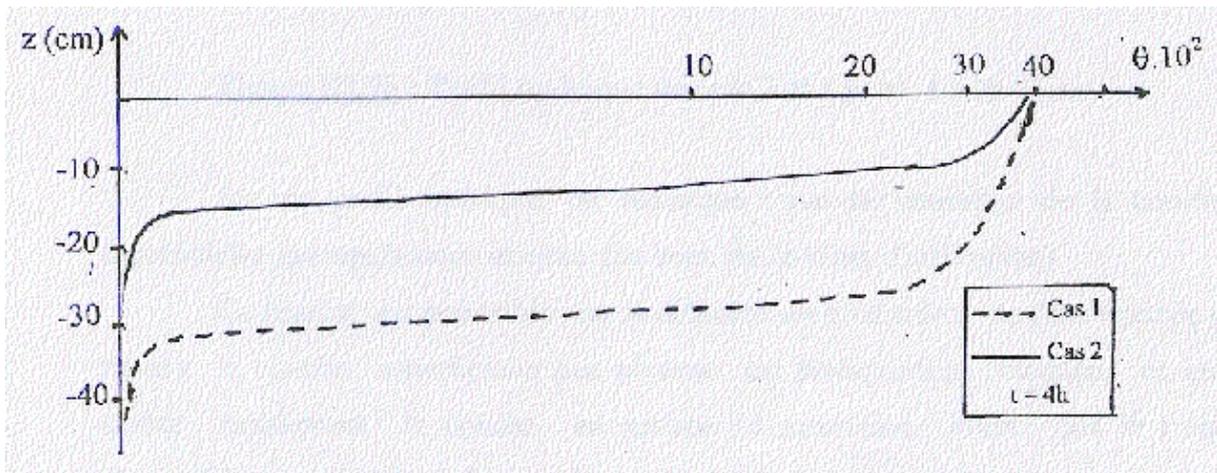
Nous avons étudié l'influence de l'organisation structurale de la matrice solide sur l'infiltration, à partir de modèles schématisés par des superpositions de couches parallèles.

Pour ce faire, nous avons considéré les cas de figure suivants:



D'après les résultats obtenus, on peut émettre les remarques générales suivantes:

1- Si la couche périphérique est plus poreuse que la couche sous-jacente (cas 1 – cas 2), les teneurs en eau à un niveau de même côte sont d'autant plus importantes que l'épaisseur de cette couche périphérique est plus élevée (figure III.7a).

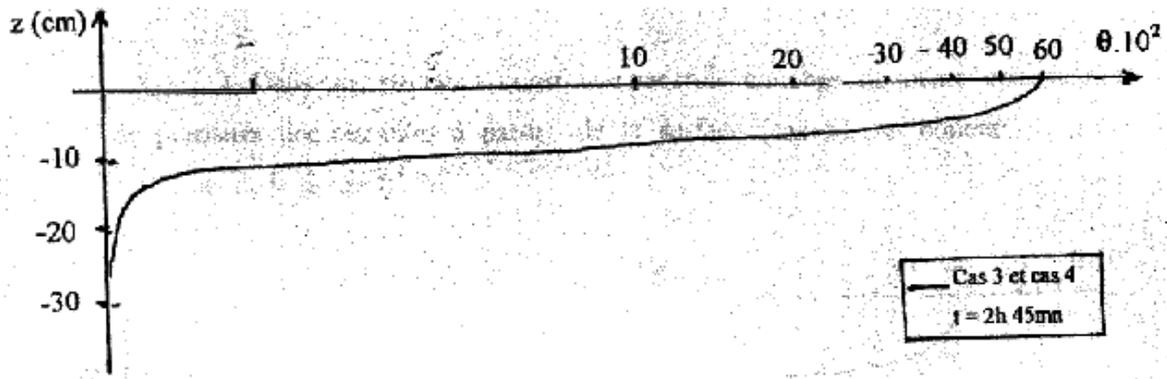


**Figure**

**III.7a: Profils hydriques des cas 1 et 2 pour t = 4h**

Cette différenciation peut s'expliquer de la manière suivante : Le mouvement de l' eau qui s'infiltré à travers la couche superficielle est ralenti ou bloqué au niveau de la surface qui sépare les deux couches. De ce fait, le niveau de saturation est plus rapidement atteint si l' épaisseur de la couche superficielle est faible. Par la suite, l' eau apportée par la charge ne s'infiltré plus mais se perd en eau de ruissellement, en surface.

2- Si la couche périphérique est moins poreuse que la couche sous-jacente ( cas3-cas4 ), l'épaisseur des couches n'influe pratiquement pas sur la dynamique de l'infiltration ( Figure III.7b).



**Figure III.7b : Profil hydrique des cas 3 et 4 pour  $t = 2h45mn$**

Sur ce profil hydrique, on remarque que la saturation de la couche superficielle est rapidement atteinte ( au bout de 2h45mn d'infiltration ).

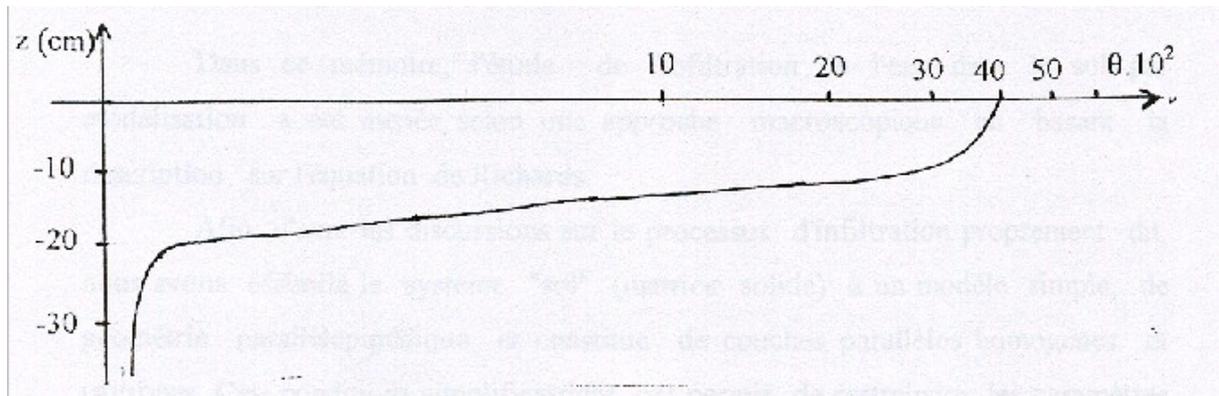
Ce résultat est prévisible car la diffusion en profondeur de l'eau injectée à travers la couche superficielle peu poreuse est pratiquement bloquée, ce qui amène rapidement la couche en surface à saturation avant que le front d'humidification n'atteigne la couche poreuse sous-jacente.

Ces observations permettent d'avancer des déductions relatives à des problèmes qu'on rencontre souvent dans les domaines de l'agronomie et du génie rural.

Dans le domaine de l'agronomie, les racines des plantes ont besoin, pour leur croissance, d'un niveau d'humidité déterminé qui est variable selon l'espèce considérée. Et pour chaque cas, ce niveau doit être maintenu de façon permanente pendant des durées prédéfinies. Ceci nous incite à dire que le type de matrice solide représentée par le cas1 peut remplir les conditions requises pour ce genre de problème. L'épaisseur et le type de la couche superficielle sont alors choisis selon les particularités des plantes (profondeur des racines, besoin en humidité, durée d'humidification, etc...). La sous-couche peu poreuse assure la rétention de l'humidité en profondeur pendant la durée d'assimilation de l'eau par les racines.

Dans le domaine du génie rural où l'on cherche à bloquer l'infiltration, on peut envisager une matrice solide représentée par le cas4. Dans une telle structure, la couche superficielle, après saturation, bloque l'infiltration en profondeur et évacue l'eau apportée par la charge par un ruissellement en surface.

3- Dans une structure constituée par trois couches de même épaisseur et de porosités décroissantes à partir de la surface (cas5), on obtient le profil hydrique de la figure III.7c.



**Figure III.7c: Profil hydrique du cas 5 pour  $t = 4h$**

Ce profil est peu différent de celui obtenu pour le cas2 dont la structure ne diffère de celle du cas5 que par le type de la couche intermédiaire (sol 4 pour le cas 2 et sol 3 pour le cas 5).

On peut tirer de cette observation que dans le processus d'infiltration, les propriétés caractéristiques de la couche superficielle ( épaisseur, porosité,...) jouent un rôle de premier plan sur la dynamique d'écoulement de l'eau.

Après la traversée de cette première couche, les profils d'infiltration diffèrent selon que la couche sous-jacente est plus poreuse ou moins poreuse. Mais dans chaque cas, quelque soit le rapport des porosités des deux couches, on n'observe aucune modification notable sur le profil hydrique.

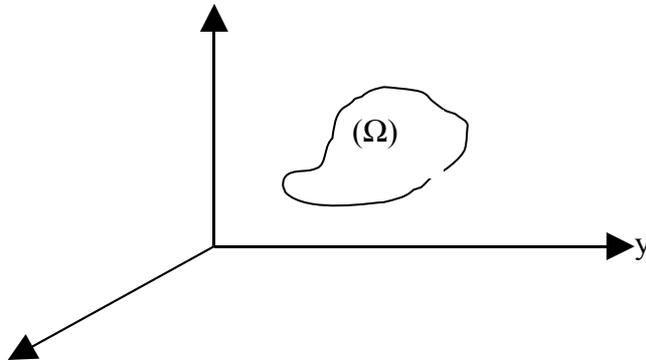


# ANNEXE

## 1 L'équation de continuité

Elle traduit la conservation de la masse d'une particule de fluide en écoulement, et s'établit ainsi :

Considérons une particule de fluide  $\Omega$  de volume arbitraire ( $V$ ) et limitée par une surface extérieure  $S$  perméable mais fixe dans l'écoulement. Dans un repère cartésien ( $O, x, y, z$ ).



le volume de ( $\Omega$ ) est immobile dans l'espace et la masse de fluide qu'il contient à l'instant  $t$  est donnée par :

$$M_v(t) = \int_v \rho \, d\omega$$

où  $d\omega$  désigne un élément de volume à l'intérieur de  $\Omega$ .

La conservation de masse de fluide exige que le taux de variation total de  $M_v$  soit nul

$$\frac{DM_v}{Dt} = 0$$

Cette dérivée exprime la variation temporelle globale de  $M_v$  lors de son déplacement avec l'écoulement. L'opérateur  $\frac{D}{Dt}$  est appelé *dérivée particulaire* et est définie par :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$$

En traduisant la condition de continuité sur la grandeur  $M_v$ , on obtient l'équation :

$$\frac{\partial M_v}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{A.1})$$



## 2- L'équation de quantité de mouvement (Equation de Navier-Stockes)

La quantité de mouvement  $\vec{I}$  d'une particule de fluide est définie par le produit :

$$\vec{I} = m \cdot \vec{\gamma}$$

où  $m$  désigne la masse de la particule et  $\vec{\gamma}$ , sa vitesse.

Considérons alors le mouvement d'une masse de fluide  $M_v$ , correspondant à l'instant  $t$  au volume fixe  $V$  et délimitée par une surface extérieure  $S$ .

Pour un fluide continu, la quantité de mouvement est donnée par

$$\vec{I}_v(t) = \int_v \rho \vec{\gamma} d\omega$$

La loi de Newton exige que le taux de variation total  $\vec{I}_v$  soit égal à la résultante de toutes les forces  $\vec{F}$  agissant sur la masse  $M_v$ , que ce soit à la surface  $S$  ou à l'intérieur de  $S$ , soit :

$$\frac{D \vec{I}_v}{Dt} = \sum \vec{F} \quad (\text{A.2})$$

Les forces qui peuvent accélérer la particule de fluide sont essentiellement les forces massiques et les forces de surface .

a) - Une force massique quelconque  $\vec{F}_M$  peut s'écrire sous la forme générale :

$$\vec{F}_M = \int_v \rho \vec{a} d\omega$$

où  $a$  a la dimension d'une accélération.

Les forces de ce type sont par exemple : les forces gravitationnelles, électromagnétiques,....

b) Une force de surface  $\vec{F}_S$  appliquée à une particule de fluide est représentée par les contraintes tangentielle  $\{\tau\}$  et normale  $\{\sigma\}$ . Il est d'usage de grouper ces deux composantes en une seule grandeur tensorielle, notée  $\bar{\bar{P}}$ , telle que :

$$\bar{\bar{P}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Et la force totale de surface  $\vec{F}_S$  s'écrit :



$$\vec{F}_s = \int_S \vec{n} \bar{P} dS$$

où  $\vec{n}$  désigne la normale à l'élément de surface  $dS$  considéré.

On en déduit l'équation de quantité de mouvement sous la forme intégrale :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) d\omega + \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS = \int_V \rho \vec{\gamma} d\omega + \int_S \vec{n} \bar{P} dS$$

Pour présenter cette équation sous forme différentielle, on appliquera le théorème de Gauss qui établit l'égalité :

$$\int_S \vec{n} \bar{P} dS = \int_S \vec{\nabla} \cdot \bar{P} d\omega$$

Soit, après arrangement des termes :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \bar{\tau} + \vec{\gamma} \quad (\text{A.3})$$

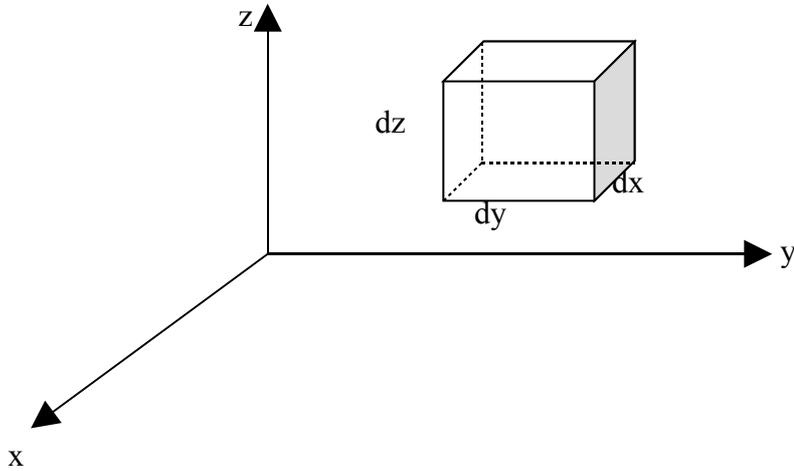
Dans cette équation,  $P$  désigne la pression hydrostatique,  $\bar{\tau}$  est définie par

décomposition  $\bar{P} = -p\bar{I} + \bar{\tau}$  où  $\bar{I}$  est le tenseur unitaire  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



### 3 - Equation de continuité appliquée à l'écoulement d'eau

Considérons une portion de sol, de volume  $V = dx \, dy \, dz$



qui renferme de l'eau, de masse  $M_e$ , de volume  $V_e$ , et de masse volumique  $\rho_e$ .

Le principe de continuité appliqué à cette portion de sol se traduit par l'égalité entre le bilan des masses d'eau entrant et sortant du volume  $V$ , pendant un intervalle de temps donné, et la variation de la masse du volume du sol pendant le même intervalle de temps, soit :

$$\frac{\partial M_e}{\partial t} + V \cdot \vec{\nabla} (\rho_e \vec{v}) = 0 \quad (\text{A.4a})$$

La vitesse étant identifiée à la densité de flux  $\vec{q}$ , on aura encore :

$$\frac{\partial M_e}{\partial t} + V \cdot \vec{\nabla} (\rho_e \vec{q}) = 0 \quad (\text{A.4b})$$

En tenant compte de la décomposition

$$M_e = \rho_e V_e = \rho_e \frac{V_e}{V} V = \rho_e \theta V$$

où  $\theta$  désigne la teneur en eau et des conditions de validité de la loi de Darcy, l'équation (A.4b) devient :

$$\rho_e V \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho_e V \operatorname{div} \vec{q} = 0$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0} \quad (\text{A.5})$$

Cette identité relie toute variation de la densité de flux à une variation de la teneur en eau.



#### 4- Equation dynamique

Cette equation est déduite de l'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{D \vec{v}}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \frac{1}{\rho} \vec{\tau} + \vec{\gamma} \quad (\text{A.6})$$

où  $\vec{\gamma}$  représente l'accélération gravitationnelle

$\vec{\tau}$  a pour composantes dans le repère tridimensionnel :  $(\mu, \gamma, \omega)$

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

L'eau étant un fluide newtonien, les éléments du tenseur  $\vec{\tau}$  sont donnés par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xx} = \mathfrak{S}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} = \mathfrak{S}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{zz} = \mathfrak{S}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{array} \right.$$

En se plaçant dans les conditions de Darcy, la relation (A.6) s'écrit sous la forme décomposée suivante.



$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Lorsque le comportement de la phase liquide n'est décrit que d'un point de vue quantitatif, comme c'est le cas ici, la charge totale en un point quelconque du milieu considéré est définie comme la somme des charges de pression et de gravité.

Comme cette charge est définie relativement à une charge de référence (charges à la surface libre du sol), on peut exprimer respectivement les charges de pression et de gravité, en termes de potentiel de charge  $\Phi$ , soit (Cf §.1.3.1.)

$$\begin{cases} \phi_p = p - p_0 = \rho g h \\ \phi_g = \rho g (z - z_0) = \rho g z (z_0 = 0) \end{cases}$$

Le système (A.7) devient alors :

$$\begin{cases} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} - \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \rho g \frac{\partial h}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \rho w \frac{\partial w}{\partial z} - \rho g \frac{\partial}{\partial z} (h + z) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

En introduisant le potentiel de charge hydraulique total  $H = h + z$ , on a encore :

$$\begin{cases} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} - \rho g \frac{\partial H}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \rho g \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \rho w \frac{\partial w}{\partial z} - \rho g \frac{\partial H}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Dans ce système, les deux premières équations décrivent l'infiltration horizontale et la dernière, l'infiltration verticale.

En milieu isotrope saturé, le gradient de vitesse est constant et on a :



$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial y} = \rho \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\mu}{\kappa}$$

où :

- $\mu$  désigne la viscosité dynamique de l'eau, ce qui traduit l'effet de ses spécificités propres sur l'intensité des forces de friction interne.
- $\kappa$  est la perméabilité intrinsèque du sol qui exprime son pouvoir de résistance à l'écoulement.

Ainsi (A.9) peut s'écrire

$$\begin{cases} \frac{\mu}{\kappa} u = -\rho g \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\mu}{\kappa} v = -\rho g \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\mu}{\kappa} w = -\rho g \frac{\partial H}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

ou encore sous la forme vectorielle

$$\frac{\mu}{\kappa} \vec{v} = -\rho g \vec{\nabla} H$$

$$\vec{v} = -\frac{\rho g}{\mu} \kappa \vec{\nabla} H$$

$$\text{soit } \boxed{\vec{q} = -\frac{\rho g \kappa}{\mu} \vec{\nabla} H} \quad (\text{A.10b})$$

Cette identité exprime que la densité du flux d'infiltration est proportionnelle au gradient de potentiel de charge : c'est la loi de Darcy.

Le coefficient  $\frac{\rho g \kappa}{\mu}$  qui représente la manifestation de l'effet de résistance à l'écoulement dû aux forces de frottement (friction interne du liquide et réaction du sol) définit la conductivité hydraulique à saturation  $\kappa_s$ , d'où :

$$\boxed{\vec{q} = -K_S \vec{\nabla} H} \quad (\text{A.10c})$$

En milieu isotrope non saturé,



Comme on s'est placé dans les conditions d'écoulement à faible vitesse, les

termes  $\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\}$  du système d'équation (A.9) peuvent être négligés devant les

termes  $\left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right\}$ . Par conséquent, on peut écrire, en première approximation :

$$\begin{cases} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \approx -\rho g \frac{\partial H}{\partial x} \\ \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \approx -\rho g \frac{\partial H}{\partial y} \\ \rho w \frac{\partial w}{\partial z} \approx -\rho g \frac{\partial H}{\partial z} \end{cases}$$

D'après ces relations, la proportionnalité entre la densité de flux et le gradient de potentiel de charge reste valable en milieu non saturé. Cependant, il faut tenir compte de la variation de la résistance à l'écoulement (c'est-à-dire  $K$ ) en fonction du potentiel de pression  $h$  (ou de la teneur en eau  $\theta$ ).

Le comportement dynamique global de la phase liquide est alors décrit par une relation non linéaire entre la densité de flux et le gradient de potentiel de charge, soit :

$$\boxed{\vec{q} = -K(h) \vec{\nabla} H \text{ ou } \vec{q} = -K(\theta) \vec{\nabla} H} \quad (\text{A.11})$$



# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1.- André Musy . " Physique du sol " . LAUSANNE : Presses polytechniques et universitaires Romandes , 1991 – 335p
- 2.- H. Chamayou . " Les Bases physiques , chimiques et minéralogiques de la science du sol" . PARIS : ACCT , 1989 – 593p
- 3.- G. Duvaut. " Mécanique des milieux continus" .  
PARIS : MASSON , 19990 – 292 p
- 4.- Daniel Euvrard . " Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur ",  
PARIS : MASSON , 1990 - 341p.



Nom : RAMANDA  
Prénom : Zo Hanitriniomy  
Titre : INFILTRATION DE L' EAU DANS LE SOL :  
ETUDE PAR MODELISATION  
Nombre de pages : 53  
Nombre de figures : 33

### **RESUME**

L'étude de l'infiltration de l'eau dans le sol consiste en l'analyse du profil hydrique et au suivi de son évolution.

Dans ce mémoire, l'étude a été menée par modélisation en appliquant la méthode des différences finies pour la résolution de l'équation de Richards.

Le sol a été représenté par un modèle parallélépipédique constitué de couches parallèles homogènes et isotropes, soumis à une charge continue.

Les paramètres descriptifs retenus sont l'épaisseur, la porosité et l'arrangement des couches constituant la structure.

Mots clés : Porosité, Potentiel de charge, Charge, Potentiel de pression  
Profil hydrique, Saturation.

Directeur de mémoire : Mademoiselle Esther ANDRIANTSOA  
Professeur