

NOTATIONS

I- Notations latines

B : matrice reliant les déformations aux variables nodales
 E : module d'élasticité longitudinale
 f : vecteur des sollicitations nodales
 G : module d'élasticité transversale
 J : déterminant du jacobien
 K_e : matrice de rigidité élémentaire
 K^e : matrice de rigidité de l'élément de référence
 K : matrice de rigidité après assemblage
 L : longueur des poutres
 N : matrice des fonctions d'interpolation
 U : énergie de déformation
 V : potentiel des forces nodales
 W : potentiel de déformation
 u_i, v_i, w_i : déplacements nodaux dans les directions $0x, 0y$ et $0z$
 u, u_n : vecteurs des déplacements nodaux

M_{AB} : moment d'encastrement de l'élément AB au niveau du nœud A
 $\mathcal{M}_{AB}, \mathcal{M}'_{AB}$: moment d'encastrement parfait de l'élément AB au niveau du nœud A
 $\mathcal{R}_{AB}, \mathcal{R}'_{AB}$: facteurs de rigidité de l'élément AB dans le plan
 R_x, R_y et R_z : facteurs de rigidité de l'élément dans l'espace
 a, b, c : coefficients mécaniques de l'élément de structure
 a_x, a_y et a_z : coefficients mécaniques de l'élément dans l'espace

II- Notations grecques

δ : opérateur variationnel
 ε : vecteur ou matrice des déformations
 σ : vecteur ou matrice des contraintes
 ν : coefficient de Poisson

θ_A : rotation du nœud A dans le plan
 θ_{Ax} : rotation du nœud A par rapport à l'axe $0x$
 φ_{AB} : rotation de l'élément AB dans le plan
 φ^y_{AB} : rotation de l'élément AB par rapport à son axe local $0y$
 ψ, θ et φ : premier, second et troisième angles d'Euler

SOMMAIRE

Introduction

Partie I : Introduction au calcul de structure

- Approche de la mécanique des solides élastiques
- Introduction au calcul de structure

Partie II : Quelques méthodes de calcul de structures

- Méthode analytique du calcul de structures
- Méthode matricielle
- Méthode de calcul par éléments finis

Partie III : Programmmations

- Présentation du logiciel Matlab
- Programmation des calculs par la méthode des rotations
- Programmation des calculs par la méthode matricielle
- Programmation des calculs par éléments finis
- Regroupement des programmes

Partie IV : Application

- Description du problème
- Simulations
- Comparaison des résultats

Conclusion

Bibliographie

Annexes

INTRODUCTION

Le premier physicien connu qui considéra la nature de la résistance et la rupture des solides fut Galilée. Un mémoire lui fut publié à Leyde en 1638.

En 1660, Hooke montra que les petits efforts provoquaient la déformation d'un solide.

En 1744, Bernoulli exprima la proportionnalité de la courbe d'une lame élastique au couple qui lui est appliqué.

Coulomb les suivit, en 1776, en affirmant que la rupture est inévitable lorsque la résistance limite d'un matériau est atteinte.

A partir des travaux de ces chercheurs, l'étude de la résistance des matériaux prit son essor et elle se développa dans le dix-neuvième siècle.

Jusqu'à présent, dans la plupart des cas, en résistance des matériaux, le calcul des structures constituées d'éléments complexes s'effectuaient à l'aide du formulaire de résistance des matériaux et de la théorie de l'élasticité. Or, ces calculs, s'ils ne sont pas très difficiles quand les méthodes générales de résolution sont maîtrisées, sont par contre toujours longs et fastidieux.

Récemment, apparut la méthode des éléments finis. Elle permet de résoudre un problème de mécanique en remplaçant le système continu par un modèle discret équivalent caractérisé par un nombre fini de paramètres. De ce fait, elle est facilement programmable.

La technique de calcul utilisant l'outil informatique présente alors de grands avantages. Elle est facilement mise en œuvre et nécessite peu de matériels informatiques.

Notre ouvrage, qui cite une partie parmi des centaines d'autres, de cette technique est divisé en quatre parties.

Dans la première sont développées les différentes méthodes de calcul des solides élastiques. Les méthodes de calcul de structure y seront particulièrement exposées.

La seconde partie est composée de la présentation de quelques méthodes de calcul dont une méthode analytique, la méthode matricielle et la méthode des éléments finis.

La troisième partie comprend la présentation du logiciel « Matlab » : logiciel très maniable pour la programmation des opérations sur les matrices.

Tandis que dans la dernière partie, les présents programmes sont amenés à exécuter le calcul du portique d'un même bâtiment.

Partie 1 :

Introduction au calcul de structures





Chapitre 1

Approche de la mécanique des solides élastiques

1 Aspect physique

La notion de la Résistance des Matériaux a vu le jour en 1638, quand le mathématicien Galilée commença à se demander sur la résistance d'une poutre encastrée à une de ses extrémités.

Le physicien Hooke le suivit, en 1660, en démontrant que les corps jadis considérés comme étant indéformables, présentent des petites déformations dès qu'un effort leur est appliqué et que ces déformations sont proportionnelles à ce dernier. En fait, d'une manière générale, les corps solides résistent, en se déformant, aux actions des forces extérieures qui les sollicitent.



Figure 1 : gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

Si la Résistance des Matériaux intéressait les hommes au milieu du dix-septième siècle, c'est parce qu'elle avait, dès lors, de l'importance à leur égard. En effet, la Résistance des Matériaux permet de :

- Savoir la dimension minimale qu'une structure doit posséder pour qu'elle puisse supporter un lot de chargements donné ;
- Et de même, savoir la grandeur maximale des chargements que sa dimension lui permet de supporter.

Nous pouvons déjà discerner que la détermination de ces valeurs peut s'avérer aussi économique que sécuritaire dans la construction d'un ouvrage.

1.1 Description du problème

Un problème de mécanique, d'un point de vue général, consiste en la détermination de l'état d'un élément de structure soumis à des sollicitations. Pour ce faire, il est important de connaître quelques caractéristiques de l'élément en question :

- sa géométrie, sa forme ;
- le ou les matériaux le constituant.

De plus, les sollicitations auxquelles il est soumis :

- les forces volumiques ;
- les forces surfaciques ;
- les déplacements imposés ainsi que les déplacements induits ;
- les températures et les flux de chaleur dans le milieu.

En se limitant dans le domaine de la statique et en négligeant l'influence de la température sur l'état des matériaux, dans toute la suite, ces derniers types de sollicitation seront exclus de l'étude.

La connaissance de ces différentes grandeurs permet la résolution du problème. En d'autres termes, de déterminer :

- les déplacements en tout point ;
- les déformations y afférent ;
- les contraintes ainsi que les sollicitations en tout point.

1.2 But de la Résistance des Matériaux

Sachant l'utilité de la Résistance des Matériaux, nous pouvons comprendre qu'elle ne peut pas être délaissée d'évolution et de progrès depuis les temps de Galilée. Au contraire, elle doit connaître de nombreuses améliorations. Ainsi, à ce propos, des recherches aussi bien techniques que mathématiques seront toujours à espérer.

Sur ce, notre contribution sera d'élaborer quelques programmes de calcul de portiques tridimensionnels, par la méthode matricielle et par la méthode des éléments finis – méthode numérique découlant de la discrétisation de la méthode dite mécanique des milieux continus – sous un logiciel de simulation.

1.3 Résolution d'un problème statique par la Résistance des Matériaux

Les plus souvent, les déformations sont trop petites pour être observées sans l'aide d'un instrument de précision. Il convient qu'il en soit ainsi afin d'avoir une assurance sur la solidité des constructions. Pour l'établissement de cette assurance, il est essentiel :

- de connaître, par des essais, la façon dont le matériau réagit à certaines sollicitations, afin de les choisir à bon escient ;
- de savoir déterminer les formes les plus économiques et calculer les dimensions des pièces qui doivent, en toute sécurité, résister à des efforts dont on a prévu la grandeur et le mode d'action.

De ce fait, la résolution d'un problème de Résistance des Matériaux se ramène toujours à trouver les paramètres complémentaires (inconnus) des uns ou des autres des grandeurs principales de la mécanique des milieux continus.

Connaissant les déformations, la Résistance des Matériaux permet de trouver les sollicitations ainsi que les efforts internes de l'élément étudié. Par contre, sachant les forces appliquées, elle permet de calculer les déformations qui en résulteraient et par la suite, la dimension minimale de l'élément qui permettrait une sécurité optimale.

Généralement, une partie des efforts qui sont extérieurs au système – les sollicitations – ainsi qu'une partie des déplacements – les déplacements imposés – sont préalablement connues. Le problème consiste alors à trouver les parties complémentaires qui sont représentées par les réactions aux appuis et les déplacements inconnus puisque la connaissance de ceux-ci est indispensable pour déterminer les contraintes dans les pièces.

2 Principes généraux de la mécanique des corps solides

La mécanique des solides élastiques est une branche de la mécanique des milieux continus, restreinte à l'étude des solides dans la phase élastique de leur évolution.

2.1 Déformations et contraintes dans un solide

2.1.1 Déplacements et déformations

La notion de déplacement ainsi que de déformation constituent, en général, l'observation expérimentale du mouvement dans un milieu continu. Pour une bonne compréhension du principe de la mécanique des solides élastiques, il convient de noter les définitions suivantes.

Le déplacement d'un point matériel est la distance parcourue par ce point, au terme de son mouvement, dans le temps. Il est mis en évidence par la superposition de toutes les positions du point, pendant le mouvement.

La déformation d'un point est, par contre, le déplacement relatif de ce point par rapport à sa position d'origine. Il en découle que la déformation du solide tout entier est la différence relative entre ses formes avant et pendant le chargement.

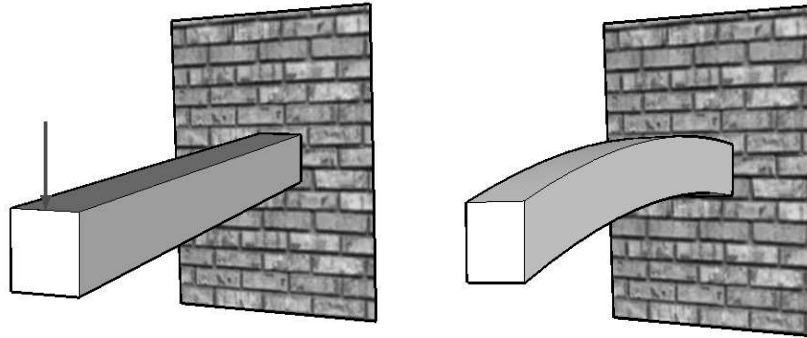


Figure 2 : déformation d'un solide

2.1.2 Déformations

Physiquement, on dit qu'il y a déformation, en un point M , dans une direction quelconque Ox dès que sa distance dx par rapport à un point qui lui est infiniment voisin n'est pas conservée.

La matrice de déformation $\bar{\bar{\epsilon}}$ en fonction du déplacement $\vec{u}$ est :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\text{grad } \bar{u} + {}^t\text{grad } \bar{u}) \quad (1-1-2-1)$$

Compatibilité des déformations

Le tenseur des petites déformations $\bar{\bar{\epsilon}}$ est la partie symétrique du gradient du champ de déplacement $\vec{u}$. De ce fait, le rotationnel de $\bar{\bar{\epsilon}}$ est :

$$\text{rot } \bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} \text{rot } o \text{ grad } \bar{u} + \frac{1}{2} \text{rot } o {}^t\text{grad } \bar{u} \quad (1-1-2-2)$$

Et comme le premier terme du second membre s'annule, il ne reste que :

$$\text{rot } \bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} \text{rot } o {}^t\text{grad } \bar{u} \quad (1-1-2-3)$$

Ainsi, en utilisant le caractère associatif des deux opérateurs :

$${}^t\text{rot } \bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} \text{grad } o \text{ rot } \bar{u} \quad (1-1-2-4)$$

La compatibilité des déformations est traduite par le simple fait que le rotationnel d'un champ de gradient doit être nul. Ce qui permet d'avancer que la condition de compatibilité des déformations s'écrit :

$$\text{rot } o \text{ } {}^t\text{rot } \bar{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad (1-1-2-5)$$

Afin d'éviter de redéfinir le rotationnel d'un tenseur du second ordre, cette relation est très souvent simplifiée par :

$$\text{grad } o \text{ div } \bar{\bar{\varepsilon}} + {}^t\text{grad } o \text{ div } \bar{\bar{\varepsilon}} - \text{grad } o \text{ grad } (\text{tr } \bar{\bar{\varepsilon}}) - \Delta \bar{\bar{\varepsilon}} = 0 \quad (1-1-2-6)$$

Ou sous forme indicielle :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (1-1-2-7)$$

2.1.3 Contraintes

La figure suivante illustre les contraintes normales dans la section (Σ) d'un solide (V) soumis à des efforts qui lui sont extérieurs.

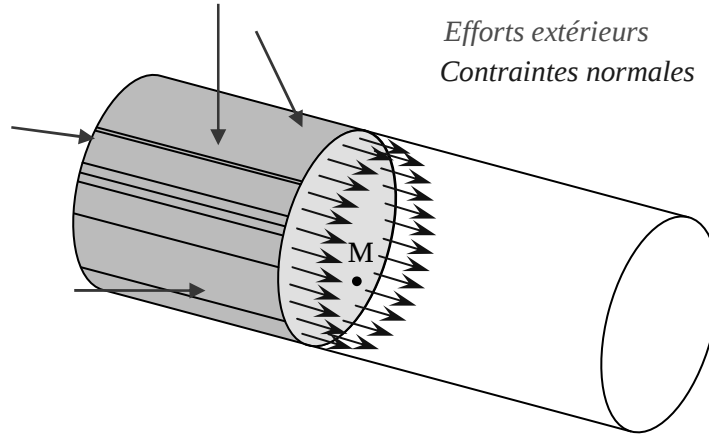


Figure 3 : contrainte dans un solide

La contrainte en un point quelconque M du volume (V), sur une facette quelconque de normale $\vec{n}$, est notée par $\vec{T}(M, \vec{n})$.

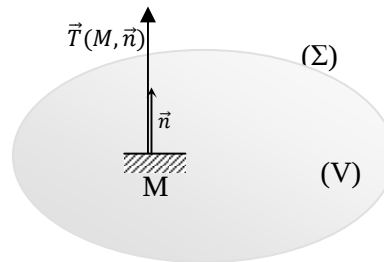


Figure 4 : contrainte en un point quelconque

La relation fondamentale de la dynamique sur un tétraèdre élémentaire de volume ΔV , délimité par quatre facettes élémentaires s'écrit :

$$\rho \cdot \ddot{\vec{x}} \cdot \Delta V = \rho \cdot \vec{f} \cdot \Delta V + \Sigma \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \Delta \sigma_i \quad (1-1-2-8)$$

$$\Sigma \vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T}_i(M, n_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1-1-2-9)$$

Donc :

$$\rho \cdot \ddot{x} \cdot e_i \cdot \Delta V = \rho \cdot f_i \cdot e_i \cdot \Delta V - \sigma_{ij} \cdot e_i \cdot \Delta \sigma_j + T_i \cdot e_i \cdot \Delta \sigma \quad (1-1-2-10)$$

Enfin, en admettant que $\ddot{x} = 0$, on aboutit à :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} + \vec{\tau}_n \quad (1-1-2-11)$$

2.1.4 Relations entre contraintes et déformations

De nombreuses relations, aussi connues sous le nom de lois de comportement, traduisent la contrainte en un point, dans une direction donnée, en fonction de sa déformation et vice-versa. Mais pour un matériau isotrope, homogène et élastique, l'expression simple de la loi de Hooke suffit largement à accomplir cette tâche.

Sous forme matricielle, la loi de Hooke se traduit par :

$$\vec{\sigma} = \overset{\equiv}{\overset{\equiv}{D}} \cdot \vec{\varepsilon} \quad (1-1-2-12)$$

Où $\overset{\equiv}{\overset{\equiv}{D}}$, le tenseur d'élasticité ou tenseur de Young, est un tenseur d'ordre 4.

Si $\vec{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ et $\vec{\varepsilon} = \{\varepsilon_{kl}\}$ alors :

$$\overset{\equiv}{\overset{\equiv}{D}} = \{D_{ijkl}\}$$

Sous forme discrétisée, cette équation matricielle devient :

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \text{tr}(\vec{\varepsilon}) \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \varepsilon_{ij} \quad (1-1-2-13)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\vec{\sigma}) \cdot \delta_{ij} \quad (1-1-2-14)$$

avec :

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad (1-1-2-15)$$

2.2 Cadre mathématique

Mathématiquement, la mécanique des milieux continus possède deux principaux outils :

- l'outil de modélisation géométrique, qui représente la configuration du milieu à étudier ;

- l'outil de mesure, qui est représenté par les différents référentiels que nous utilisons. Il permet de suivre l'évolution du milieu, dans l'espace et dans le temps.

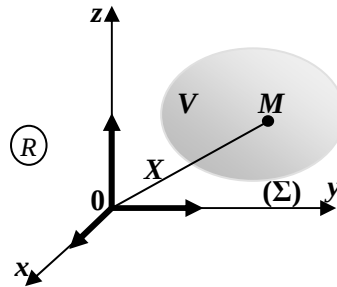


Figure 5 : représentation d'un solide dans l'espace

L'outil de modélisation est le moyen permettant de reproduire le solide à étudier dans un espace de travail où il sera facile de mesurer toutes ses caractéristiques physiques.

Sur ce, pour parfaire l'étude d'un solide, il faut d'abord s'acquérir de sa loi de comportement : l'équation qui lie ses déformations aux contraintes qui lui sont imposées. Ensuite, on doit prendre garde que cette loi tient compte des différentes hypothèses exigées par les méthodes de calcul utilisées. Enfin, après avoir écrit l'équation régissant l'équilibre du solide en question et explicité ses conditions aux limites, on doit parvenir à démontrer qu'une et une seule solution parvient à résoudre le problème. On dit alors que le problème est mathématiquement bien posé.

Cette solution nécessite toujours une certaine abstraction mathématique et sa détermination reste assez délicate ; néanmoins, les méthodes de calcul ainsi que les méthodes d'approximation qui se veulent surmonter cet obstacle sont nombreuses.

2.3 Etapes de résolution d'un problème

Dans ce paragraphe, nous ne traiterons que généralement la mécanique des milieux continus à trois dimensions. Et sur ce, elle peut être divisée en quatre étapes, à savoir :

- la modélisation macroscopique des milieux continus et de leur mouvement, en y décrivant les déformations et en rappelant les lois de conservation que doit respecter tout mouvement ;
- la description des efforts qui génèrent le mouvement des milieux continus, avec l'introduction de la notion de contraintes et l'écriture des équations globales qui les régissent ;

- l'introduction à l'échelle microscopique des comportements élémentaires qui permet de compléter la modélisation en introduisant les relations de comportement qui traduisent le lien local entre déformations et efforts ;
- la résolution de problèmes d'équilibre élastique. Cette étape de résolution de problèmes globaux utilise le principe des travaux virtuels pour écrire, analyser et résoudre les problèmes posés, et pour en valider les solutions. Elle permet d'aborder de nombreuses situations pratiques et de noter les problèmes de distribution d'efforts, de discontinuités de solutions, d'incompatibilité de déformations, et d'instabilités géométriques.

La méthode de la mécanique des solides élastiques (et donc celle de la mécanique des milieux continus) peut être appelée à résoudre un problème quand les hypothèses suivantes sont satisfaites.

- Le milieu observé se présente comme un continuum de points ;
- Chaque point est entouré d'un petit volume de matière qu'il suit en moyenne dans son mouvement. Le mouvement respectant les voisinages aux échelles étudiées.

2.4 Application aux ouvrages du Génie Civil

2.4.1 Eléments de construction

Physiquement, un solide est un corps physique tridimensionnel muni d'une certaine rigidité qui conserve sa forme, sa taille ainsi que sa cohésion tant que la valeur de la résultante des efforts qui lui sont appliqués engendre une contrainte qui lui est admissible.

Ce qui nous intéresse réside surtout dans ce dernier point, c'est-à-dire : la taille et la résistance de ces corps.

Bien que notre intérêt ne porte que sur ces quelques caractéristiques, il est indispensable de connaître toutes les différentes facettes des aspects mécaniques des éléments à étudier afin de gagner le maximum de sécurité tout en dépensant le minimum de matériau, donc de coût.

La méthode des éléments finis permet d'étudier le comportement de tout corps solide ; sa seule limite se situe sur la quantité d'opérations numériques à effectuer.

Dans le domaine du Génie Civil, et surtout dans celui du Bâtiment et Travaux Publics, les éléments les plus fréquemment rencontrés sont ceux qui se ramènent aux structures : les dalles, les poutres, les poteaux.

Le schéma suivant donne une idée sur ces éléments en montrant quelques types de solides liés à ce domaine.

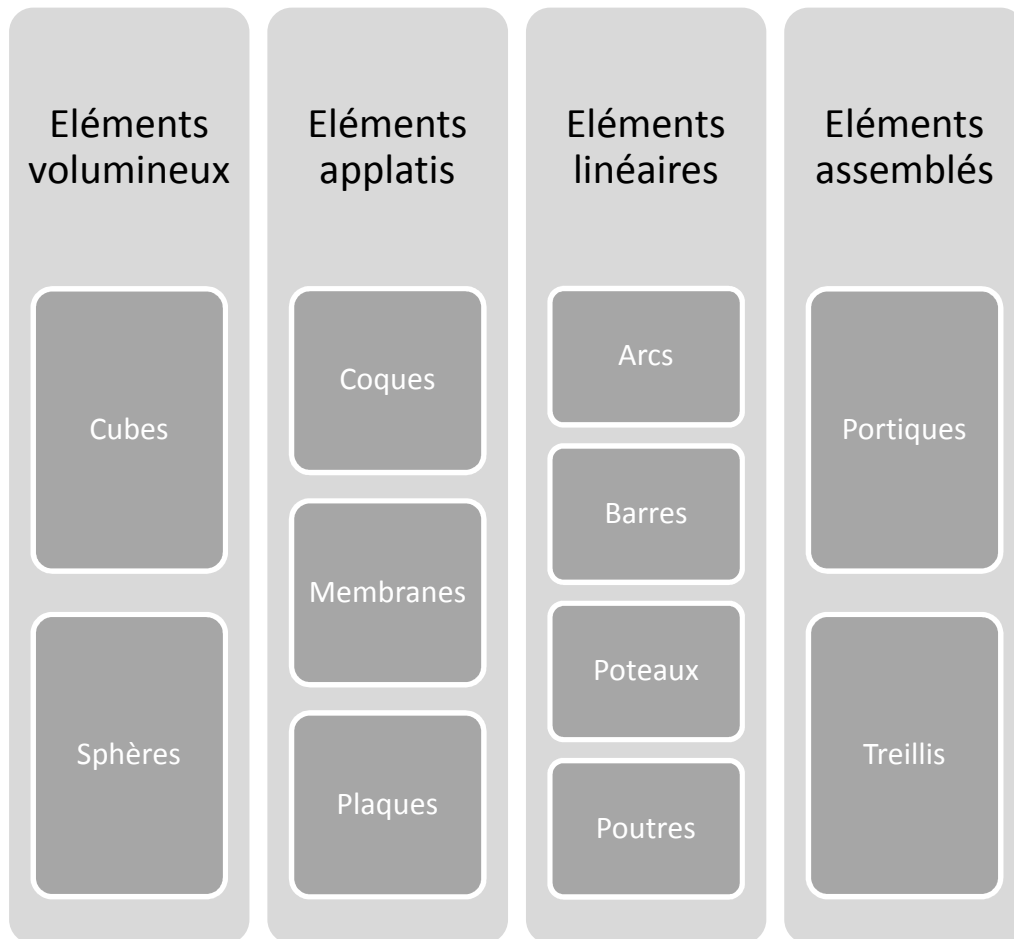


Figure 6 : les éléments de construction en Génie Civil

D'autres éléments encore, résultant de l'extension de ceux présentés dans l'organigramme, sont utilisés dans les ouvrages de Génie Civil :

- les dômes ;
- les coupoles et les voûtes ;
- les réservoirs et les membranes.

On peut facilement reconnaître ces éléments de structures par leurs formes. Nonobstant, il est plus convenable de donner quelques définitions à ce propos.

2.4.2 Poutre

La fibre moyenne de la poutre est le lieu géométrique des centres de gravité de toutes ses sections. Une poutre gauche est une poutre dont la fibre moyenne forme une courbe gauche. Une poutre plane est une poutre dont la fibre moyenne est une courbe plane ; c'est-à-dire contenue dans un plan. Une poutre est dite droite lorsque sa fibre moyenne est un segment de droite. De même, une poutre à plan moyen est une poutre possédant un plan de symétrie qui contient sa fibre moyenne et ce plan est désigné par les termes de plan moyen.

Les poutres à plan moyen qui sont chargées dans leur plan se rencontrent fréquemment et constituent un des problèmes essentiels traités par la Résistance des Matériaux connu sous le nom de la Théorie des poutres.

Notons que les barres forment un cas particulier de poutres. En effet, une barre peut être vue comme étant une poutre dont le chargement se limite aux seules forces axiales. De ce fait, c'est une poutre qui ne travaille qu'en traction-compression.

Dans un milieu unidimensionnel ou dans un milieu bidimensionnel, les chargements d'une poutre selon la Théorie des poutres peuvent être groupés en trois classes :

- les efforts ponctuels ;
- les efforts répartis ;
- et les moments fléchissant.

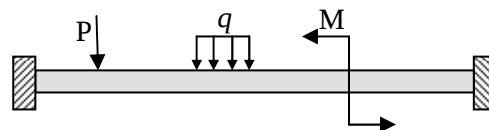


Figure 7 : chargement d'une poutre plane

Une poutre travaille surtout en flexion : c'est l'effort le plus prépondérant et par conséquent c'est l'effort qui produit le maximum de déformation ; dans son étude, on considère rarement les efforts de traction ou de compression ainsi que les efforts de torsions, et même les efforts de cisaillement sont quelquefois négligés.

Par la suite, les déformations observées pendant le chargement de la poutre sont constituées par les flèches ou les dénivellations de sa ligne moyenne sur toute sa longueur.

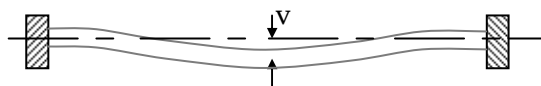


Figure 8 : déformation d'une poutre

L'étude n'inclura que les poutres droites à plan moyen du fait de la délicatesse de la mise en équation des courbes représentant les fibres moyennes des autres cas suscités.

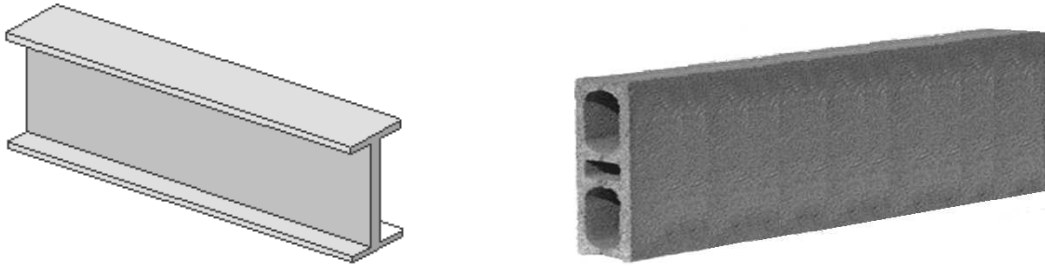


Figure 9 : sections transversales de poutres

2.4.3 Poteau

Si on se fixe une attention sur la forme, le poteau et la poutre ont les mêmes caractéristiques. Les premiers points qui les diffèrent sont leurs orientations et leurs modes de chargement. Les poteaux ont leurs axes principaux dirigés dans un sens vertical et ils sont généralement chargés par des efforts de compression.

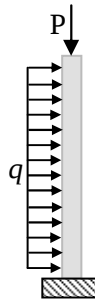


Figure 10 : chargement d'un poteau

Néanmoins, parfois les poteaux travaillent en traction, en flambement et même en flexion. Dans la suite, seuls les poteaux à section rectangulaire seront étudiés. Ceci est dû à la grande complexité de la modélisation des autres sections délicates de formes¹.



Figure 11 : poteaux

¹ Pour opter plus tard pour une section circulaire ou autres formes complexes, il suffit de prendre une aire de section dont le moment d'inertie est le même que celui calculé par la méthode.

2.4.4 Dalle

Une dalle est un élément de structure plane dont la dimension verticale est assez faible par rapport aux deux autres.

Dans le domaine du génie civil, elle est utilisée pour couvrir le sol, pour boucher un trou ou pour jouer le rôle de l'élément porteur des planchers.

Du point de vue chargement, elle travaille en compression (si une couche de matériaux lui est sous-jacente) ou en flexion.

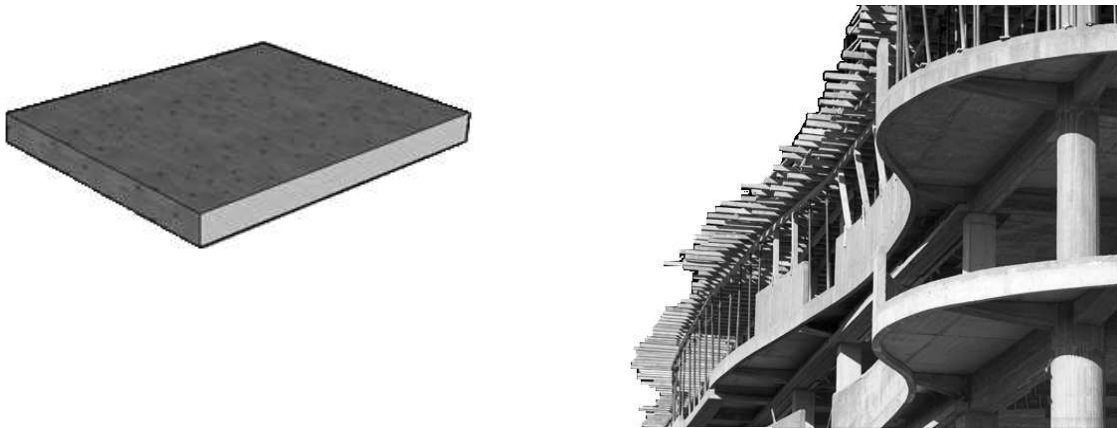


Figure 12 : dalles et planchers

2.4.5 Plaque

Dans la Résistance des Matériaux, le mot plaque désigne tout élément plat muni d'une faible épaisseur (par rapport aux deux autres dimensions) quelque soit la direction de ce dernier. De ce fait, la plaque inclut la dalle, la voile, la coque, le dôme, la coupole etc.

Une théorie analogue à celle des poutres étudie les problèmes de plaques minces. Elle assimile la plaque à une surface plane en négligeant son épaisseur et ne considère que son plan moyen.



Figure 13 : Plaques

2.4.6 Coque et voile

Un voile est géométriquement définie par sa surface moyenne S , par son épaisseur h et par les conditions d'appui sur le contour de sa surface moyenne ou bord du voile (bord encastré, bord articulé, bord libre, etc.). Les forces appliquées à un voile sont des forces de volume, des forces de surface et des forces de ligne (réactions des appuis distribuées le long des bords du voile). Une coque, par contre, est un voile mince ou épais subissant des efforts de flexion.



Figure 14 : coques et voiles

2.4.7 Arc et voûte

Un arc est une poutre ayant une forme courbée verticalement ou horizontalement. C'est un élément d'architecture qui permet de répartir harmonieusement le poids et les forces de la construction entre deux murs ou entre deux piliers porteurs. Sa courbure peut être constante ou variable suivant sa longueur. Généralement, un arc est chargé suivant son plan moyen.

Ce qui différencie une voûte d'un arc est que sa longueur n'est pas continue. C'est-à-dire qu'elle est constituée par un assemblage d'éléments solides – dont les trois dimensions ont à peu près les mêmes ordres de grandeur – appelés pièces de voûte.

Le concept de ces deux éléments présente bon nombre d'avantages. Leur courbure réduit considérablement les contraintes et par conséquent, amène à gagner largement dans un point de vue économique.

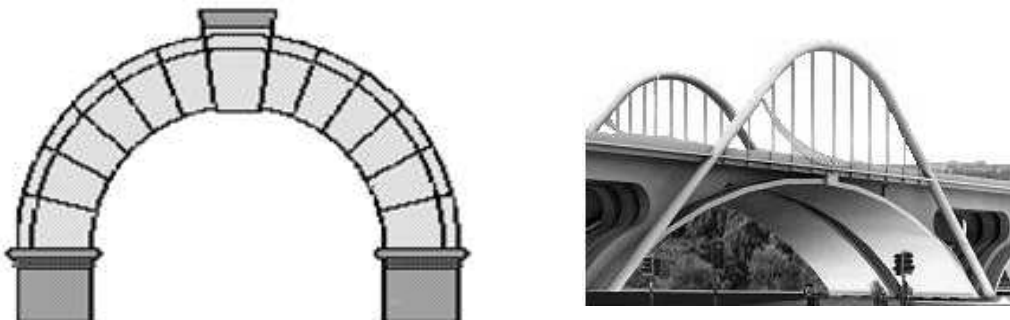


Figure 15 : Voute et pont en arc

2.4.8 Dôme

C'est une dalle comportant une convexité au sein de sa surface. Généralement, un dôme est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par son centre de gravité.

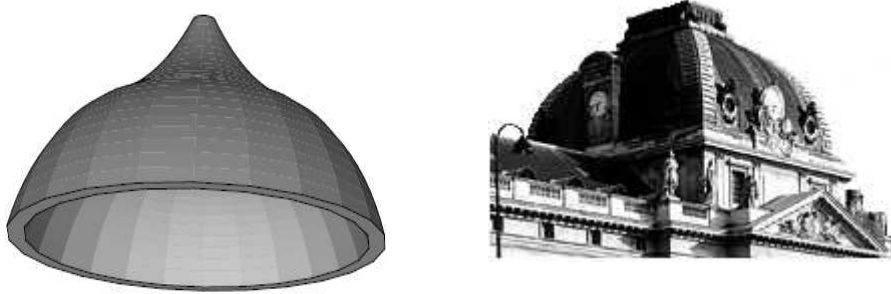


Figure 16 : dômes

2.4.9 Coupole

La coupole est une ramification du voile et du dôme. Elle ne comporte aucune surface plane et sa forme avoisine celle d'une calotte ou d'une demi-sphère. Généralement, une coupole est utilisée pour faire office de toiture. Bien que sa mise en œuvre soit assez complexe, nombreux sont ceux qui l'adoptent de part son caractère très esthétique.

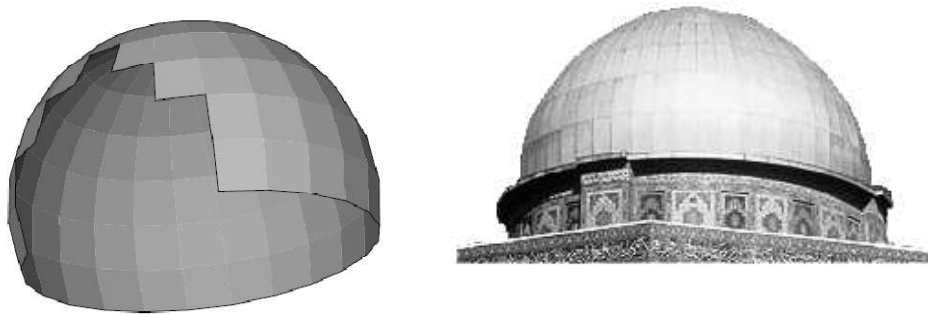


Figure 17 : coupoles

2.4.10 Réservoir

Les réservoirs sont des éléments de construction qui servent à retenir ou à contenir un fluide : liquide ou gazeux.

Un réservoir est sollicité en traction par flexion le long de son contour. La conception d'un réservoir est assez délicate puisque, à part les calculs usuels, l'on doit considérer la fuite du fluide qu'il renferme à travers les microfissures de l'ouvrage.



Figure 18 : bouée et citerne

2.4.11 Membrane

Les membranes ne se rencontrent que dans les aéroports, les cirques et les établissements nécessitant une construction rapide et provisoire, que ce soit une habitation, un hangar ou un camp militaire facilement déplaçable. Nombre de théories excluent les membranes des solides du fait qu'elles ne travaillent que par la traction – et ignorent la compression – de leurs fibres moyennes.

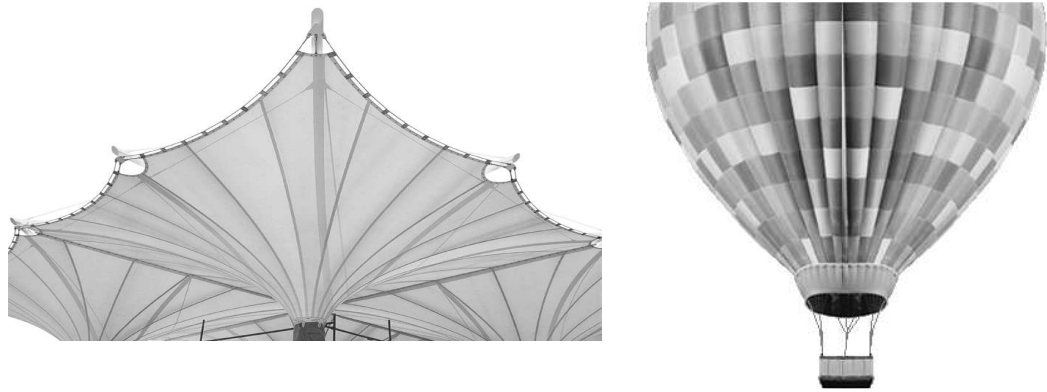


Figure 19 : membranes

2.4.12 Portique

Le portique résulte d'un assemblage de poutres et de poteaux. Dans les bâtiments, il est employé pour faire office d'ossature. De plus, son emploi s'avère être très économique puisque l'on n'a plus besoin de confectionner des murs porteurs. Au lieu de cela, de simples cloisons rigides peuvent suffire à remplacer ces derniers.

Les expériences ont montré que les bâtiments munis d'ossature se révèlent être plus résistants que ceux directement portés par des murs.

D'un autre point de vue, le portique avance un autre avantage, il joue naturellement un rôle de contreventement.

Presque tous les bâtiments modernes sont munis d'ossatures porteuses puisque, à part ses caractéristiques mécaniques, le portique offre une gamme de choix sur l'architecture ainsi que sur l'esthétique du bâtiment.

En effet, il libère le concepteur de toute contrainte mécanique du fait que l'ossature absorbe toutes les charges du bâtiment et facilite par la suite la confection de diverses formes complexes que ce soit au niveau des voiles (tels les murs rideaux), que ce soit au niveau de la toiture (tels les dômes).

L'utilisation des ossatures porteuses offre aussi aux ingénieurs la possibilité de construire des immeubles du type IGH : Immeuble de Grande Hauteur, pour un minimum de coût. Grâce à la continuité des éléments du portique (en plus de la résistance des voiles), le bâtiment peut être assimilé à une grande poutre verticale, encastrée dans le sol. Ce qui augmente sensiblement sa résistance et par le même chemin réduit visiblement le coût de sa réalisation.

Dans la construction d'un bâtiment, le portique n'est perçu à l'évidence qu'à la phase où les dalles ainsi que les murs sont partiellement construits.

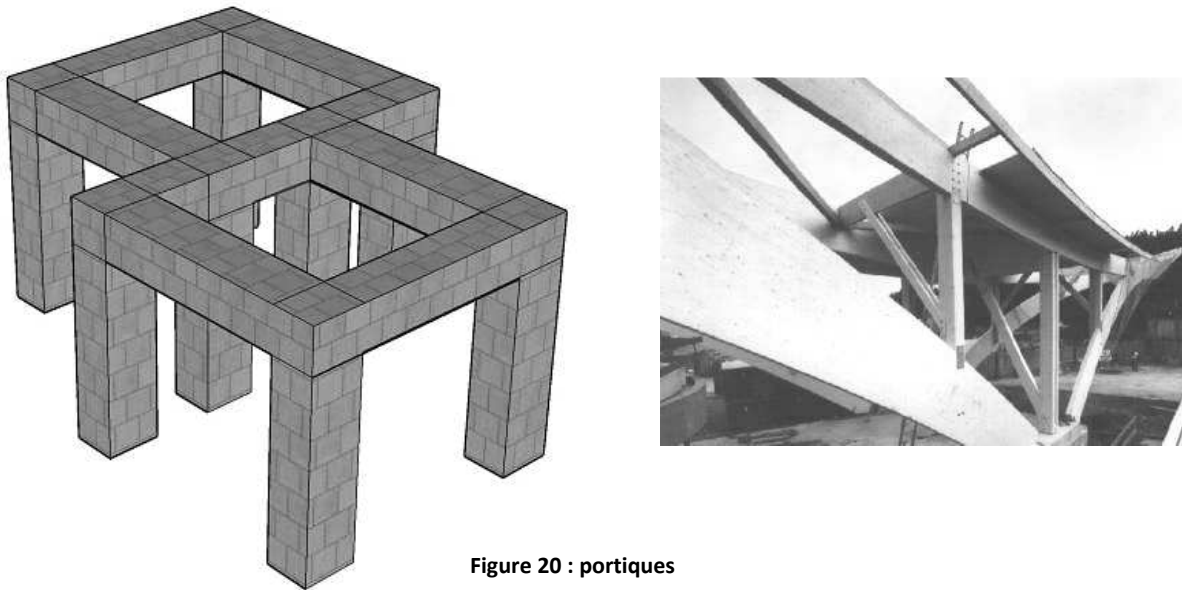


Figure 20 : portiques

2.5 Hypothèses

Dans le but de simplifier les calculs et de ne pas s'écarter de la réalité, plusieurs hypothèses doivent être considérées.

2.5.1 Hypothèses de base

Plusieurs hypothèses sont à formuler avant d'entrer dans le vif du sujet. En effet, les méthodes de calcul ne sont applicables, et commettent parfois quelques erreurs irrécupérables, que si toutes les hypothèses listées ci-après sont satisfaites.

2.5.1.1 Hypothèses sur les matériaux

Homogénéité

La principale hypothèse qui vise les caractéristiques du matériau est l'hypothèse sur l'homogénéité de ce dernier. L'homogénéité se dit d'un milieu matériel qui présente des propriétés constantes dans toute son étendue. Tous les calculs sont basés sur le fait que l'élément à étudier est composé d'un matériau bénéficiant de cette caractéristique.

Néanmoins, avant de pouvoir parler de l'homogénéité, il convient de définir l'échelle dans laquelle l'élément sera étudié.

Ainsi, un élément, quel qu'il soit, ne peut être considéré comme homogène qu'à partir d'une certaine échelle dimensionnelle qui lui est propre.

Dans le domaine de la Résistance des Matériaux, l'échelle la plus employée est l'échelle macroscopique. Dans cette échelle, la plupart des matériaux de construction : l'acier, le béton, le bois et même le sol sont considérés comme étant homogènes. Pourtant, réellement, certains d'entre eux ne le sont pas.

L'acier est un exemple parfait de matériaux homogènes quelle que soit l'échelle (physique et non chimique) de mesure. Ce fait est mis en évidence par la figure suivante qui montre l'aspect d'une barre d'acier, vue dans un microscope.



Figure 21 : acier au microscope

Le béton, par contre, résulte d'un mélange à une proportion bien définie de plusieurs constituants, à savoir le ciment, les granulats ainsi que d'autres liquides (eau et adjuvants) nécessaire à son développement. Ce qui fait qu'il n'est pas réellement homogène.

Les figures ci après illustrent le même béton vu dans deux échelles différentes : macroscopique et microscopique.

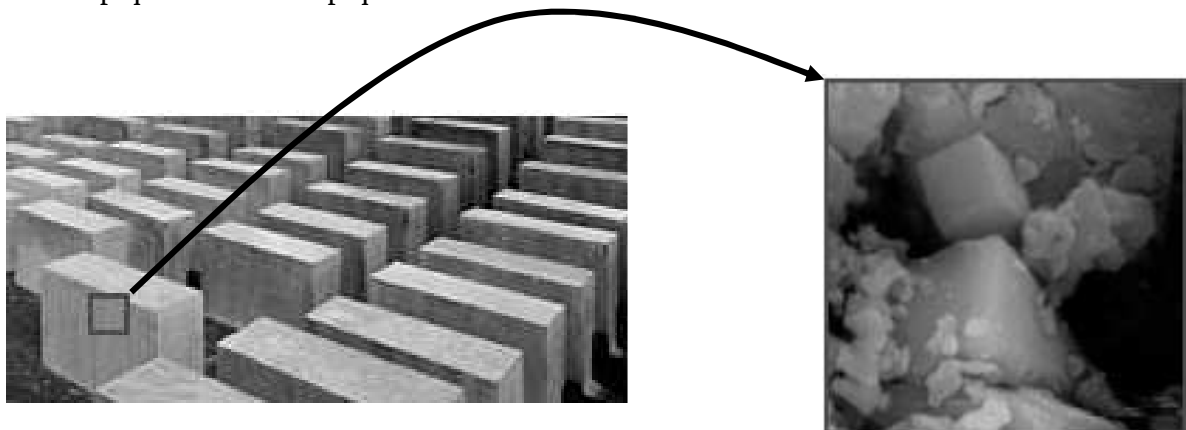


Figure 22 : échelles de mesure du béton

Isotropie

Un matériau isotrope est un matériau dont les propriétés mécaniques restent constantes dans toutes les directions. Un matériau orthotrope, par contre, présente différentes propriétés mécaniques selon la direction considérée. L'adjectif 'anisotrope' signifie non-isotrope mais dans le domaine de la Résistance des Matériaux, il est surtout utilisé pour qualifier les matériaux qui ne sont ni isotrope ni orthotrope.

L'idéal est d'avoir à étudier un matériau isotrope mais les éléments ne doivent pas obligatoirement présenter cet aspect. Puisque, comme il sera détaillé plus loin, la matrice d'élasticité peut être confectionnée de manière à ce qu'elle prenne en compte le caractère orthotrope ou anisotrope du solide étudié.

L'acier est un exemple parfait de matériau isotrope. Le bois naturel est, par contre, considéré comme étant orthotrope.

Elasticité

Un corps, dans le domaine de la Résistance des Matériaux, et d'ailleurs de la mécanique générale, se classe en deux catégories :

- Les corps rigides ou indéformables qui, de part leur appellation, ne subissent aucune déformation quelle que soit l'intensité de la charge qui leur est appliquée ;
- Les corps souples ou élastiques qui, après que les sollicitations leur soient retirées, regagnent leurs formes initiales.

Presque tous les éléments de construction, dans le domaine du Génie Civil, sont considérés comme étant homogènes du fait qu'ils sont étudiés dans une échelle macroscopique. Mais en réalité, les matériaux utilisés dans une construction de Génie Civil ne sont ni parfaitement homogènes ni parfaitement isotropes.

Les matériaux élastiques sont tels que leurs déformations et leurs contraintes sont reliées par une relation linéaire connue sous le nom de la loi de Hooke, c'est-à-dire que si ε représente l'état de déformation d'un élément élastique et que σ est son état de contrainte alors, la loi de comportement de cet élément est :

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \quad (1-1-2-16)$$

Selon la dimension dans laquelle on effectue l'analyse, le module d'élasticité $[D]$ d'un matériau est tel que :

- milieu unidimensionnel :

$$[D] = E$$

- milieu bidimensionnel, déformation plane :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{vmatrix}$$

- milieu tridimensionnel :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{vmatrix}$$

Où E est le module d'Young du matériau et ν est son coefficient de Poisson.

2.5.1.2 Hypothèses sur les grandeurs

Dans le cadre de l'espace tridimensionnel, et d'ailleurs dans les 1 et 2-D, les corps solides peuvent être vus suivant différents degrés de précision :

- L'échelle microscopique ;
- Et l'échelle macroscopique.

La première voit les solides sous un aspect minuscule. De ce fait, elle amène à considérer ces derniers sous une précision de microscope. L'observateur tient compte de toutes les imperfections ainsi que les défauts de mise en œuvre ou de fabrication des corps. De plus, il perçoit que certains corps, considérés théoriquement comme étant homogènes ne le sont pas vraiment en réalité (le béton par exemple, d'un point de vue microscopique est hétérogène).

En générale, cette première échelle est employée pour l'étude des corps infimes tels que les atomes et les cellules.

Par contre, la seconde voit les corps sous un aspect très général. Dans cette échelle, une poutre en béton armé, à section rectangulaire est vue comme une matière homogène ayant la forme d'un parallélépipède ou d'un prisme rectangulaire, sans défaut ni imperfection, et surtout,

présentant les caractéristiques mécaniques d'un « béton armé » ; ce qui est un concept purement imaginaire.

Presque tous les problèmes de Résistance des Matériaux sont étudiés dans cette dernière échelle.

2.5.1.3 Hypothèses sur les sollicitations

Le chargement inspire un aspect crucial dans le calcul des ouvrages. En effet, son intensité influe sur la phase de déformation des éléments en question : phase élastique ou phase plastique.

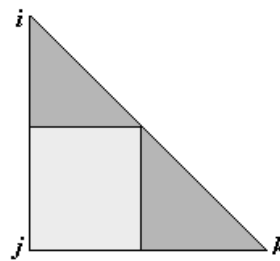
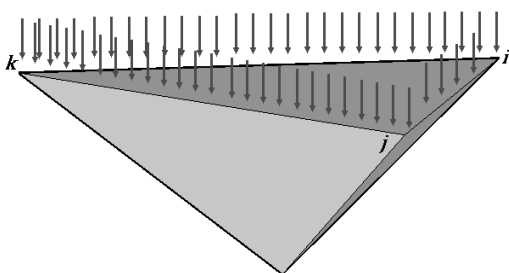
Dans le but de se rapprocher le plus possible de la réalité, les sollicitations considérées dans le calcul doivent refléter tous les efforts qui agissent sur le système. Sur ce, il a lieu de considérer :

- le poids propre des éléments ;
- les forces et les couples concentrés ;
- les forces et les couples répartis ;

Il faut signaler qu'une force concentrée est une force qui est répartie sur une petite aire de surface, négligeable par rapport à la longueur de la poutre.

De plus, afin de s'acquérir une assurance lors de la conception de l'ouvrage, admettons que les charges sont appliquées de manière statique : c'est-à-dire qu'elles sont, initialement nulles et progressent jusqu'à atteindre leurs vraies valeurs.

Enfin, pour simplifier l'insertion des efforts dans le programme de calcul, il est pratique de considérer que les forces et chargements concentrés appliqués entre deux ou plusieurs nœuds sont distribués par une simple distribution rectangulaire :



$$q(i) = \frac{1}{4} q.S$$

$$q(j) = \frac{1}{2} q.S$$

$$q(k) = \frac{1}{4} q.S$$

Figure 23 : distribution du chargement

2.5.2 Hypothèses de calcul

A part les hypothèses de base, plusieurs autres hypothèses doivent être citées. Lors du calcul, pour minimiser le temps ainsi que les outils utilisés, il est indispensable de considérer les cas qui suivent.

2.5.2.1 Hypothèses sur les dimensions

Cette section étudiera particulièrement les dimensions des poutres ainsi que celles des poteaux ; ces deux éléments constituant les principaux composants d'un portique.

Les formes d'une poutre et d'un poteau ne se diffèrent que sur l'orientation de leurs axes principaux. Celui de la poutre est perpendiculaire à la verticale tandis que celui d'un poteau est perpendiculaire à l'horizontale.

Nonobstant, les caractéristiques suivantes sont communes pour ces deux éléments en question.

Soient :

- h , la hauteur de l'élément ; c'est sa plus grande dimension transversale ;
- b , sa largeur ; la plus petite de ses dimensions transversales ;
- R , son rayon de courbure ;
- L , sa longueur développée. L'axe principal de l'élément sera dirigé dans sa direction.

On admet que :

- Pour que la répartition verticale des contraintes dans une section droite de la poutre sera uniforme :

$$\frac{h}{b} \leq 10$$

- Pour que la poutre puisse, par la force de ses fibres, transmettre les efforts qui lui sont appliqués vers les appuis se trouvant à ses extrémités :

$$\frac{1}{30} < \frac{h}{L} < \frac{1}{5}$$

Enfin, les poutres courbes sont admises si elles satisfont à l'hypothèse suivante qui consiste en la limitation de leur courbure.

- Pour que la courbure de la poutre n'ait aucune influence sur sa résistance :

$$\frac{R}{h} \geq 5$$

Sur ce dernier point, l'étude inclura le cas où le rayon de courbure de la poutre varie suivant sa longueur.

De plus, il convient d'exclure les cas de poutres présentant des variations de section brusques, des trous ou des épaulements.

2.5.2.2 Hypothèses sur les déformations

L'hypothèse essentielle dans la formulation d'un problème de la Résistance des Matériaux est que les déplacements sont petits. Une autre hypothèse issue de celle-ci est que les déformations sont négligeables comparées aux dimensions des éléments considérés.

L'hypothèse de Navier est admise. C'est-à-dire : les calculs considèrent que les sections droites avant les déformations demeurent droites. De plus, le déplacement relatif d'une section (Σ) par rapport à une section qui lui est infiniment voisine est composé :

- D'une translation,
- Et d'une rotation.

En ce qui concerne les changements de volumes des matériaux, le coefficient de dilatation cubique doit rester constant au cours des déformations.

$$\theta = \text{tr}(\bar{\varepsilon}) = \text{Constante}$$

2.5.2.3 Hypothèses sur les contraintes

Les hypothèses sur les contraintes peuvent être considérées comme étant un approfondissement des hypothèses sur les sollicitations ainsi que des hypothèses sur les matériaux qui sont déjà citées antérieurement.

Chaque matériau possède une certaine intensité de contrainte σ_0 , en dessous de laquelle, il reste dans la phase élastique de sa déformation et au-delà de laquelle, il pénètre dans la phase des déformations plastiques.

Dans la phase élastique, le matériau retrouve sa forme initiale et perd toutes ses déformations (hypothèses théoriques) dès que toutes les contraintes qui lui sont appliquées se retirent.

Sa résistance ainsi que toutes ses caractéristiques mécaniques regagnent leurs valeurs d'origine : On peut dire, en quelque sorte, qu'il revient à l'état neuf.

Par contre, quand le matériau entre en phase plastique, c'est-à-dire qu'il possède un ou plusieurs points ayant une contrainte supérieure à la limite élastique :

$$\exists M \in V, \sigma_1 > \sigma_0$$

certaines de ses déformations restent permanentes : les déformations des points ayant atteint la contrainte limite de la phase élastique. De plus, sa résistance connaît une variation. Un autre état de contrainte $\sigma_1 > \sigma_0$ est alors à considérer.

En dessous de σ_1 , la résistance du matériau connaît une augmentation tandis qu'au-delà, elle se détériore ou reste stationnaire.

σ_1 est appelé : contrainte maximale plastique ou contrainte d'équilibre limite.

Le schéma suivant illustre les différentes valeurs de contrainte et les phases de comportement afférentes : le point R est le point représentant la rupture du matériau.

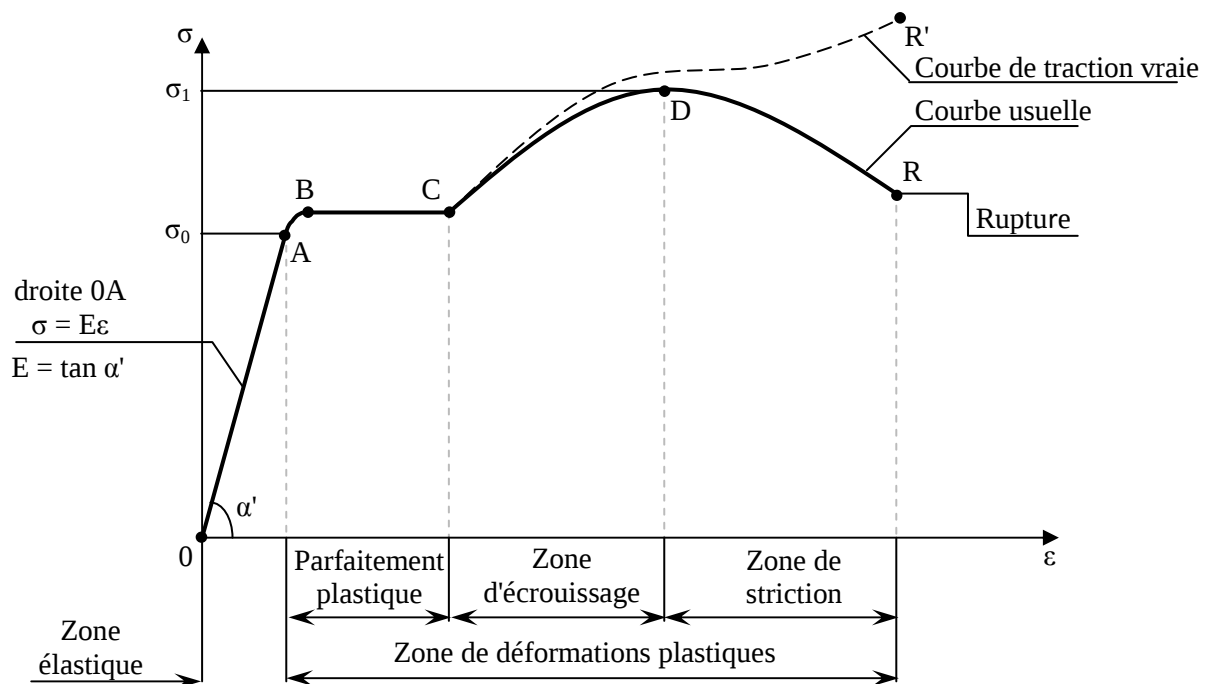


Figure 24 : loi de comportement des matériaux

Dans tout ce qui suit, l'étude se limitera en-dessous de la contrainte limite élastique et, par conséquent, ne considérera que la phase élastique de déformation.

Les contraintes dans les éléments de structure sont, dans le calcul, toujours considérées comme étant inférieures à celles des sollicitations. Sur ce point, s'il arrive que cette considération ne s'avère pas dans la réalité. Une procédure de redimensionnement ou de choix de matériau plus robuste devra alors avoir lieu.

Pour les chargements continus aux frontières (linéaires ou surfaciques), il découle de la dernière hypothèse sur les sollicitations que la distribution de contrainte en chaque point, sur la ligne ou sur la surface où les chargements sont effectués, est constante.

2.5.2.4 Hypothèses sur les appareils d'appui

Les appareils d'appui sont les pièces qui supportent les éléments de construction. Tout comme ces derniers, ils peuvent aussi bien être déformables (élastiques) qu'indéformables (rigides) puisqu'en réalité, les caractéristiques des matériaux qui les constituent ne diffèrent guère de ceux des éléments de construction.

Nonobstant, le plus souvent, ils sont considérés comme étant des éléments rigides ou solides indéformables et sont, par la suite, désignés par les termes d'appuis rigides.

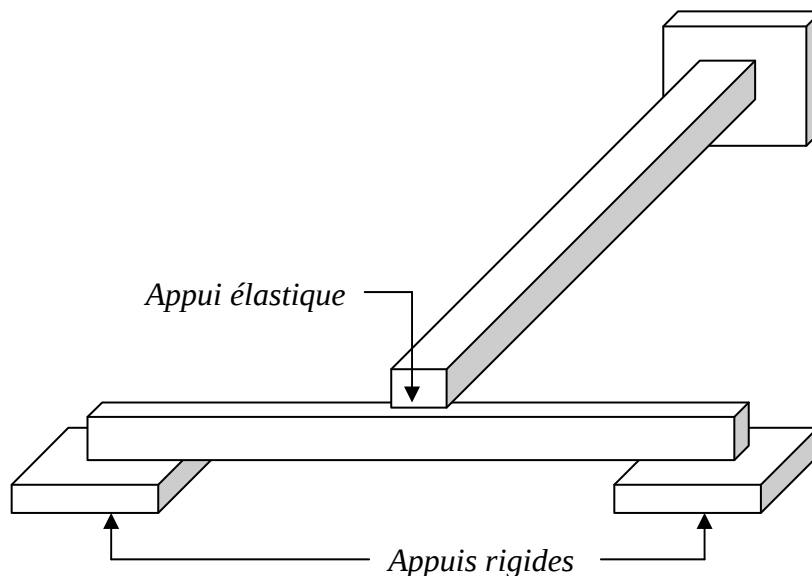


Figure 25 : appuis élastique et rigides

Dans le domaine de la théorie des poutres, les appuis rigides sont classés en trois catégories. En citant dans le sens décroissant de leurs degrés de liberté, on a :

- Les appuis simples ;
- Les articulations ;
- Et les encastrements.

Appuis simples

D'abord, un appui simple, comme son nom l'indique, bloque les éléments de telle sorte que ceux-ci ne peuvent se déplacer que suivant deux directions ; leur liberté sur une direction donnée étant sanctionnée par l'appui.

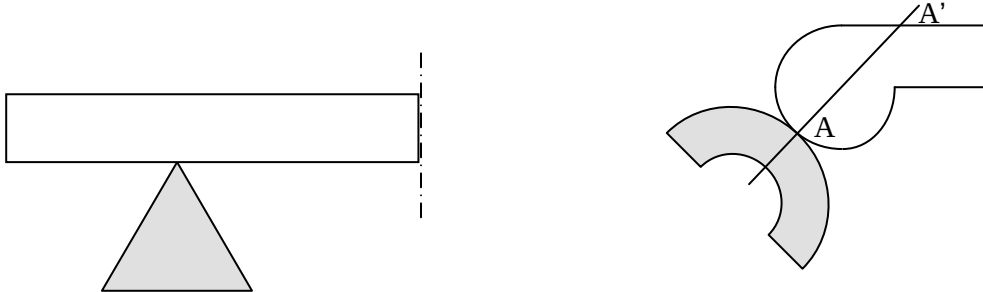


Figure 26 : appuis simples

Le contact ponctuel en A, représenté par la figure précédente, est celui d'un appui simple idéal. Les éléments de l'action de l'appui sont :

- le point d'application de la réaction d'appui ;
- la droite ou la direction de support de celle-ci ;
- son sens ;
- et son intensité.

Articulations

Ensuite, une articulation peut être définie comme étant un assemblage de deux appuis simples dont les directions sont perpendiculaires. Il en résulte que les éléments appuyés ne peuvent plus se déplacer. La seule liberté qui leur reste est celle qui représente leurs rotations autour de l'articulation.

La liberté qu'elle offre sur la rotation des éléments conduit à ce qu'elle ne transmette aucun effort de flexion ; on démontre que, sur une articulation, le moment fléchissant est toujours nul.

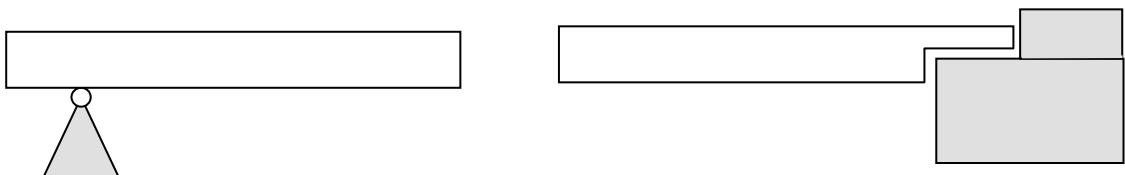


Figure 13 : articulations

Encastrements

Enfin, les éléments qui sont appuyés par encastrement perdent tous leurs degrés de liberté. Ils ne peuvent se déplacer ni suivant l'horizontale, ni suivant la verticale aussi bien qu'ils ne peuvent effectuer aucune rotation. Il en découle que ce dernier type d'appui constitue l'appui idéal dans la construction d'une structure.

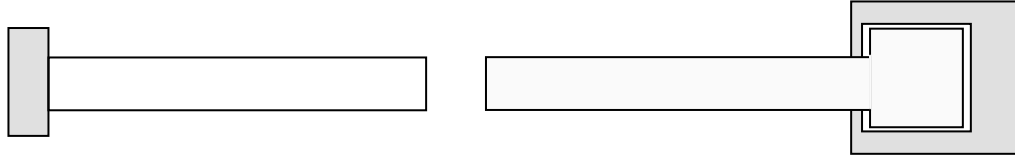


Figure 27 : encastrements

Afin de minimiser la délicatesse des expressions littérales ainsi que des applications numériques, tous les appareils d'appui de calcul sont ramenés à des encastrements. De même, tous les appareils de liaison des différents éléments de la structure sont considérés comme étant des encastrements sauf dans le cas où ils seraient spécifiés indépendamment.

2.5.3 Autres hypothèses

- Se plaçant toujours dans le domaine du Génie Civil, il est jugé que les éléments de structures ne puissent être animés de vitesses ou d'accélération considérables. De ce fait, ce qui suit exclura ces derniers et se limitera aux seuls cas où les éléments ne sont pas en mouvement.
- Le calcul porte sur la détermination des déplacements ainsi que des réactions aux appuis concernant la structure étudiée. Il se limite aux efforts de flexion, de cisaillement et de torsion. Il ignore, par la suite, les effets dus au flambement et aux autres phénomènes en dehors de ces domaines. Pour une meilleure précision des résultats, il est alors conseillé de ne pas dépasser les longueurs de flambement des poteaux lors du prédimensionnement.
- Nous supposerons que la section de chacun des éléments constituant la construction demeure constante sur toute la longueur de cet élément; cette section pouvant toutefois être très différente d'un élément à l'autre.
- Particulièrement pour la méthode des rotations, la formulation des équations d'équilibre suppose que les poutres sont suffisamment élancées. C'est-à-dire que leurs dimensions doivent satisfaire à la relation :

$$\frac{L}{h} \geq 10$$

Chapitre 2

Introduction aux calculs de structures

1 Contexte physique

Le calcul de structures est un embranchement de la résistance des matériaux qui vise à se restreindre au seul dimensionnement des éléments appartenant à une structure.

Bien qu'il puisse être appliqué dans divers domaines, le calcul de structures est surtout utilisé pour les études du bâtiment.

Aujourd'hui, l'ensemble des techniques propres à la construction a tendance à s'écarter de plus en plus de la fabrication artisanale à pied d'œuvre pour se concentrer vers l'assemblage, sur le chantier, de composants de plus en plus grands, intégrés et fabriqués en usine. La construction contemporaine se caractérise aussi par une plus grande coordination dimensionnelle : les structures et leurs composants sont conçus et fabriqués comme des multiples d'un élément standard, ce qui réduit considérablement la découpe et l'ajustage à pied d'œuvre.

Les principaux éléments d'une construction de bâtiment sont :

- les infrastructures qui permettent à la superstructure de se reposer sur le sol et qui assurent sa stabilité par rapport à son milieu extérieur ;
- l'ossature ou le portique qui assure la stabilité aérienne de l'ouvrage, supporte toutes les charges appliquées et transmet aux fondations les sollicitations dues au poids propre de l'édifice, aux charges d'occupation et aux contraintes exercées par le vent;
- les murs porteurs qui peuvent être intégrés à la structure, ainsi que les poteaux, les poutres et les planchers qui définissent l'ossature ;
- les cloisons intérieures ou murs de refend, qui peuvent être parfois intégrés à la structure ;
- les systèmes de contrôle d'ambiance : le chauffage, la ventilation, le conditionnement d'air, l'éclairage et l'isolation acoustique ;
- les systèmes de circulation verticale : ascenseurs, escaliers mécaniques, escaliers et cages ;
- les réseaux d'alimentation en énergie et en eau, ainsi que le système d'évacuation des déchets ;
- l'enveloppe, qui est constituée par la façade, les pignons et la toiture. Elle sépare l'intérieur de l'extérieur de la construction et la protège des sollicitations climatiques diverses. Elle doit être confectionnée d'une manière à ce que la lumière solaire arrive à éclairer une grande partie de l'intérieur afin de faire le maximum d'économie d'énergie.

Les principaux éléments d'une structure sont les poutres et les poteaux qui les supportent, le toit et les planchers qui déterminent les surfaces habitables du bâtiment.

Les bâtiments de faible hauteur peuvent présenter une très grande variété de formes architecturales : parallélépipèdes, voûtes, dômes ou paraboles. La structure d'un bâtiment simple d'un seul niveau comprend une dalle en béton armé, directement posée à même le sol, des murs extérieurs en maçonnerie portés par cette dalle et, enfin, un toit. Dans le cas de bâtiments bas, on utilise couramment des poteaux intérieurs placés entre les murs porteurs en maçonnerie. Mais on peut également employer des poteaux espacés, supportés par la dalle ou par des semelles isolées. Les murs extérieurs sont alors supportés par les poteaux ou suspendus entre ces poteaux. Si la portée du toit est faible, des poutres en bois, en acier ou en béton suffiront à former l'ossature de la couverture.

La structure de construction de loin la plus courante est la charpente à ossature, ensemble d'éléments verticaux combinés à des éléments horizontaux. Dans le cas d'immeubles de grande hauteur, on utilise de moins en moins les murs porteurs, préférant employer les murs d'enceinte qui ne supportent pas la structure.

La charpente à ossature consiste le plus souvent en une combinaison multiple de portiques. Lorsqu'il s'agit de constructions s'élevant à plusieurs étages, on emploie alors le béton armé, l'acier, ou un composite de béton armé et d'acier. Les bâtiments de très grande hauteur nécessitent souvent le recours à des solutions sophistiquées pour résister aux poussées latérales, telles que celles du vent, ou à d'éventuels tremblements de terre. C'est pourquoi on utilise souvent un mélange d'acier et de béton.

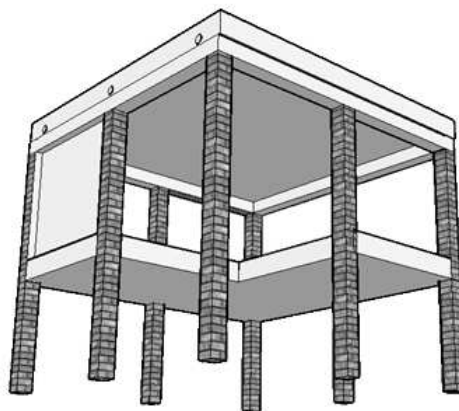


Figure 1 : exemple de structure

Les éléments de base de l'ossature d'un bâtiment se composent de poteaux verticaux, de poutres horizontales qui relient les poteaux les plus éloignés entre eux, et de poutrelles qui

relient les travées plus courtes, formant alors un réseau. Le bâti est renforcé afin d'éviter les déformations, voire un effondrement qui serait dû à des charges inégales ou à d'éventuelles vibrations. La stabilité latérale est assurée par la liaison des poutrelles, des poteaux et des poutres, ainsi que par les planchers, les murs intérieurs et les membrures diagonales.

2 Description du calcul de structures

2.1 Définitions

Avant de passer au vif du sujet, il est important de se renseigner sur quelques mots importants qui se rencontrent fréquemment dans la méthode en question et dont la compréhension est indispensable.

2.1.1 Structure

Le terme de structure est un mot qui opère dans un domaine assez vaste. Restreint au domaine du Génie Civil, il représente l'ensemble des gros œuvres tels que les ossatures de bâtiments, les structures de ponts, les dalots ainsi que d'autres encore.

2.1.2 Calcul de structures

Principe des méthodes de calcul de structures

Bien que la méthode des milieux continus permette de calculer les dimensions minimales de toute sorte de solides, il est crucial de disposer d'une méthode simplifiée, bien adaptée aux éléments à étudier. En effet, la mécanique des milieux continus est une méthode qui a été établie afin de résoudre tous les problèmes de mécanique liés aux solides dont la seule limite est que ces derniers doivent présenter une certaine continuité au niveau de chacun de ses points. Par conséquent, elle détient un domaine très vaste par rapport à la résistance des matériaux qui, usant de quelques approximations, se limite au calcul des solides ayant une forme géométrique simple. Il en découle que, pour le calcul d'un élément de solide dont la forme est compatible, la résistance des matériaux est une méthode plus facile et plus rapide : donc plus efficace.

De la même manière, le calcul de structures est une branche de la résistance des matériaux qui se focalise dans les études d'ossature du bâtiment ainsi que d'autres structures connexes. Il est d'un grand intérêt puisqu'il permet de calculer, en un même temps, toute la structure.

La présente méthode vise à déterminer les différents efforts dans chaque élément de la structure en usant de quelques approximations. En effet, elle ne peut calculer directement la structure dans sa forme réelle mais doit se restreindre à une forme représentative plus simple. Le concepteur est alors assujéti à diverses décisions concernant le choix des figures géométriques qui doivent reproduire le schéma réel dans tous ses aspects mécaniques sans pour autant être très complexes afin de réduire au maximum le coût du calcul.

Prédimensionnement

Généralement, l'étude d'un bâtiment se déroule en trois étapes, à savoir :

- le prédimensionnement des éléments de structure au stade de la conception. Cette étape permet de s'acquérir une assurance sur la possibilité d'accomplissement du projet. A partir de ce stade, les dimensions de chaque élément de la structure ne sont plus susceptibles de grandes modifications.
- le métré ou la matérialisation des dimensions précédentes au stade de chiffrage des quantités de matière : béton, coffrages, aciers...
- la justification des dimensions retenues et la réalisation de divers plans d'exécution.

Le prédimensionnement est la première étape de l'étude d'un bâtiment. Connaissant les longueurs et les formes physiques de chaque élément de la structure, des formules simples permettent de fixer ses dimensions de façon à ce qu'elles approchent les dimensions optimales.

2.2 Types de structures

Nombreux sont les types de structures rencontrés dans les ouvrages du Génie Civil. Néanmoins, hormis les plaques, les coques ainsi que les dalles, les structures les plus fréquentes dans la construction du bâtiment sont :

- Les systèmes de poutres continues ;
- Les systèmes de barres ou treillis ;
- Les systèmes de poutres ou portiques de bâtiment.

Il convient de noter qu'une structure composée de barres ne diffère d'un système de poutres que par le nombre de degrés de liberté au niveau des extrémités de chacun de ces éléments.

2.2.1 Système de poutres continues

Un système de poutres continues est une succession de poutres qui se trouvent dans le même plan et dont les directions sont les mêmes. Les différentes travées d'une telle structure sont séparées par des appareils d'appui : appuis simples ou articulés. Les encastrement ne peuvent être confectionnés qu'aux bouts de la structure. La théorie des poutres est le principe le plus approprié à l'étude d'une telle structure.

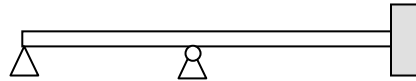


Figure 2 : poutre continue

2.2.2 Structure de barres

Une structure de barres est un ensemble de poutres qui ne travaillent qu'en traction-compression. Chaque poutre est reliée à ses adjacentes par des articulations de manière à annuler tout effort de flexion.

Les structures de barres ou treillis sont surtout rencontrés dans les structures de pont ainsi que dans les fermes constituant la toiture du bâtiment. Leur calcul se fait suivant des méthodes appropriées telles que la méthode de Cremona.

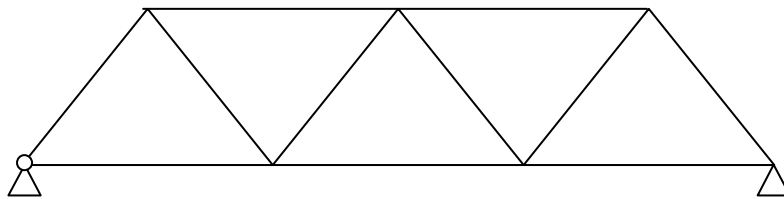


Figure 3 : treillis

2.2.3 Portique d'un bâtiment

Le portique est la structure portante qui forme l'ossature d'un bâtiment. Il peut être représenté par l'assemblage de poutres (contenues ou non dans un plan horizontal) et de poteaux. Certains portiques peuvent être calculés par la méthode de calcul des poutres continues mais les méthodes les plus usuellement utilisées sont celles propres au calcul de structures.

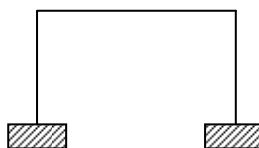


Figure 4 : portique d'un bâtiment

2.3 Objectifs du calcul de structures

Dans l'étude d'un bâtiment, le calcul de structures a donc pour objectif de se donner une assurance sur une quantité minimale de matériau tout en satisfaisant aux exigences suivantes :

- sur la résistance :

La structure doit pouvoir supporter et transmettre les charges externes qui lui sont imposées.

- sur la stabilité :

La structure doit conserver son intégrité géométrique afin de s'écarter des conditions d'instabilité du système lors des phénomènes de flambement.

- sur l'endurance :

La structure, si elle est soumise à un chargement répété, doit pouvoir tolérer sans rupture un certain nombre de cycles de sollicitations variables (vent et autres surcharges) avant de se rompre.

- sur la résilience :

Eventuellement, dans le cas où un chargement dynamique est à prévoir (séisme), la structure doit pouvoir absorber une certaine quantité d'énergie sans connaître de dommages considérables.

2.4 Hypothèses des méthodes de calcul de structures

2.4.1 Hypothèse sur les déformations

Dans le but de pouvoir utiliser toutes les formules mathématiques de la Résistances des Matériaux qui visent à approcher les déplacements de chaque point des éléments de structures, il faut admettre que les déformations de ces derniers sont petites.

2.4.2 Hypothèse de Saint Venant

Enoncé du principe de Saint Venant

La contrainte $\vec{\sigma}$ en un point éloigné des points d'application d'un système de forces ne dépend que de la résultante générale $\vec{R}$ et du moment résultant M de ce système de forces.

$$\begin{cases} \vec{R} = \int_{\Sigma} \vec{\sigma} \cdot d\sigma \\ M = \int_{\Sigma} \vec{\sigma} \cdot \vec{x} \cdot d\sigma \end{cases} \quad (1-2-2-1)$$

Principe d'équivalence

Considérons une section (Σ) de centre de gravité G . La section (Σ) sépare donc la poutre en deux parties, l'une (A) à sa gauche et l'autre (B) à sa droite. La partie (B) est en équilibre sous

l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures exercées par la partie (A). Ces forces intérieures ont pour densité le vecteur contrainte qui s'exerce en tout point de la section médiane. Ce qui conduit au principe d'équivalence suivant.

Le système des contraintes qui s'exercent sur la section (Σ) considérée comme appartenant à la partie de droite (B) est équivalent au système des forces extérieures appliquées à la partie de gauche (A).

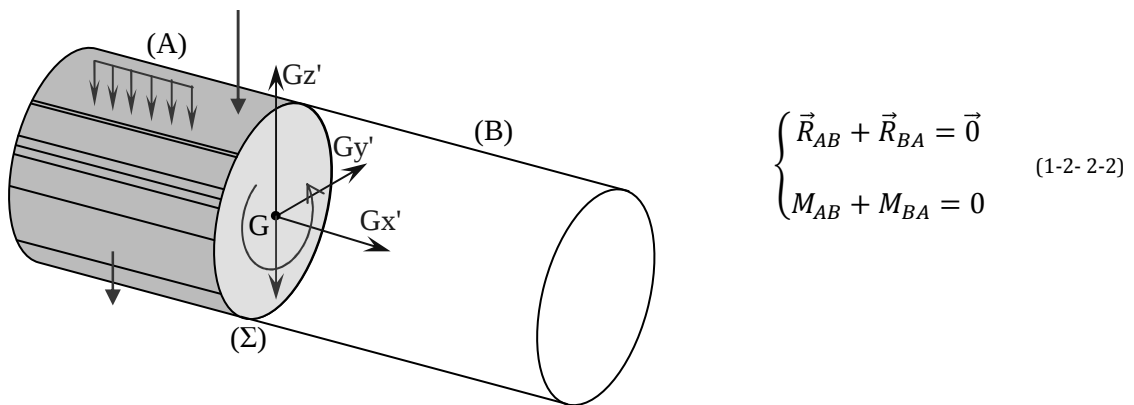


Figure 5 : résultantes des forces en G

Le principe de Saint-Venant permet de supposer que les contraintes qui s'exercent sur la section (Σ) ne dépendent que de la résultante générale et du moment résultant des forces appliquées à gauche de cette section.

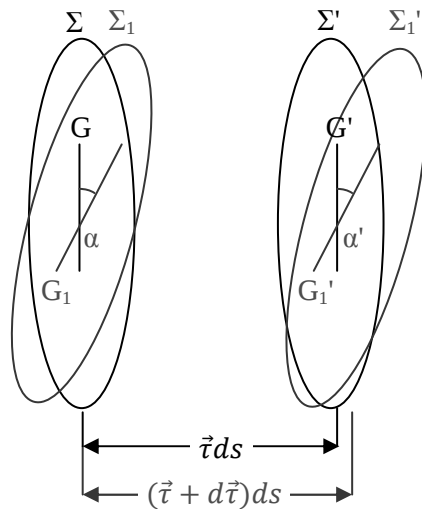
2.4.3 Hypothèse de Navier

L'hypothèse de Navier consiste à supposer que les sections normales à la fibre moyenne restent planes après la déformation de la poutre. Cette hypothèse, qui permet de calculer les contraintes normales dues au moment fléchissant, est bien vérifiée dans le cas de la flexion pure où l'effort tranchant est nul. Par contre, dans le cas de la flexion simple (avec effort tranchant), les sections ne restent pas planes, mais se gauchissent en forme d'une lettre 'S' très aplatie pendant la déformation.

Afin de se passer de cette exception, convenant à substituer cette hypothèse par le principe de Navier-Bernoulli généralisé :

Deux sections droites infiniment voisines Σ et Σ' de la poutre deviennent, après déformation, deux sections $\Sigma 1$ et $\Sigma 1'$ infiniment voisines, en général gauches ; les sections $\Sigma 1$ et $\Sigma 1'$ sont superposables par déplacement.

Avant déformation, on passe de la section (Σ) de centre G et d'abscisse curviligne s à la section (Σ') de centre G' et d'abscisse curviligne $s + ds$ par une translation $\vec{\tau} ds$ infiniment petite et par une rotation $\vec{\Omega} ds$ infiniment petite autour de G . Le principe de Navier-Bernoulli généralisé montre qu'on passe de la section (Σ_1) de centre G_1 à la section (Σ_1') de centre de gravité G_1' par une translation $(\vec{\tau} + d\vec{\tau}) ds$ infiniment petite et par une rotation $(\vec{\Omega} + d\vec{\Omega}) ds$ infiniment petite. Les vecteurs $d\vec{\tau}$ et $d\vec{\Omega}$ caractérisent la déformation de la poutre au voisinage de la section (Σ). Ils définissent donc la déformation généralisée.



$$(\alpha' - \alpha) = (\Omega + d\Omega) ds$$

$$\Omega = |\vec{\Omega}| \quad (1-2-2-3)$$

Figure 6 : déformations de 2 sections voisines

Le principe de Navier-Bernoulli généralisé est fondé sur les observations suivantes :

- le gauchissement d'une section est toujours très petit vis-à-vis des dimensions de celle-ci.

$$r_{gauch} \ll S(\Sigma)$$

- la variation du gauchissement, lorsqu'on passe d'une section à une autre section infiniment voisine, est toujours très petite, non seulement vis-à-vis des dimensions de la section, mais aussi vis-à-vis de la distance des deux sections infiniment voisines.

$$\delta r_{gauch} \ll GG'$$

Le principe de Navier-Bernoulli généralisé revient à négliger les variations de l'effort tranchant et du couple de torsion dans l'étude de la déformation d'un élément de poutre.

On démontre que la variation de longueur pendant la déformation d'un élément de fibre compris entre deux sections voisines est, dans l'hypothèse du principe de Navier-Bernoulli généralisé, la même que dans l'hypothèse de la conservation des sections planes.

Il n'en résultera donc aucune modification des formules classiques donnant les contraintes normales dues au moment fléchissant. Par contre, le principe de Navier-Bernoulli généralisé permet, en plus, de calculer la déformation due à l'effort tranchant ou au couple de torsion sans soulever aucune difficulté ni contradiction.

3 Structures isostatiques et hyperstatiques

3.1 Structures isostatiques

3.1.1 Equations d'équilibre statique

Les équations d'équilibre statique sont les équations qui traduisent l'équilibre statique d'une structure dans l'espace où elle est étudiée.

Pour un système de poutres planes, on a les trois équations suivantes.

$$\begin{cases} \Sigma V = 0 \\ \Sigma H = 0 \\ \Sigma M_{/A} = 0 \end{cases} \quad (1-2-3-1)$$

- ΣV représente la somme de toutes les forces et réactions verticales ;
- ΣH représente la somme de toutes les forces et réactions horizontales ;
- ΣM représente la somme de tous les moments ramenés à n'importe quel point A.

3.1.2 Structures isostatiques

Une structure isostatique est une structure composée de poutres, de poteaux ou de barres (droites ou courbes) dont l'état peut être déterminé par la résolution des équations classiques de la statique.

Dans l'exemple de la figure suivante, il est évident que les trois équations du paragraphe précédent suffisent à la recherche des réactions inconnues aux droits des deux appuis.

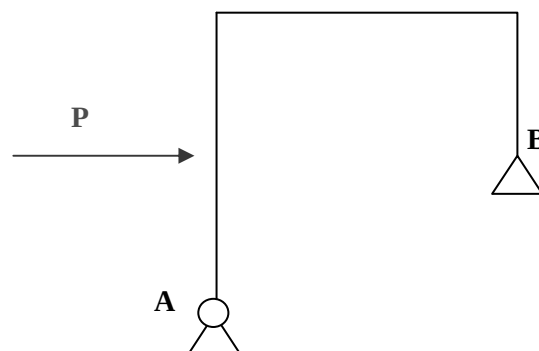


Figure 7 : exemple de structures isostatiques

Equilibre verticale

$$V_A + V_B = 0 \quad (1-2-3-2)$$

Equilibre horizontale

$$H_A + P = 0 \quad (1-2-3-3)$$

3.2 Structures hyperstatiques**3.2.1 Différence entre isostatique et hyperstatique**

Contrairement aux structures isostatiques, les structures hyperstatiques ne peuvent pas être résolues par les seules équations d'équilibre statique. Cette différence peut aussi être traduite par le fait que le nombre des forces et des réactions inconnues dans un système hyperstatique est supérieur au nombre des équations statiques pouvant être écrites.

3.2.2 Hyperstaticités interne et externe

On dit qu'une structure est extérieurement hyperstatique lorsque le nombre de réactions inconnues excède le nombre d'équations statiques pouvant être formulées.

Par ailleurs, un portique est intérieurement hyperstatique dans le cas où les équations statiques n'arrivent pas à trouver les forces internes dans ses éléments bien que toutes les réactions inconnues soient déterminées.

Il en découle qu'une structure intérieurement et extérieurement hyperstatique est une structure dont les réactions au niveau des appuis et les efforts internes au niveau d'un ou de plusieurs de ses éléments ne peuvent être calculés par les équations classiques de la statique.

Les figures ci-après illustrent deux portiques hyperstatiques. Remarquons que le premier portique est intérieurement hyperstatique tandis que le second l'est extérieurement.

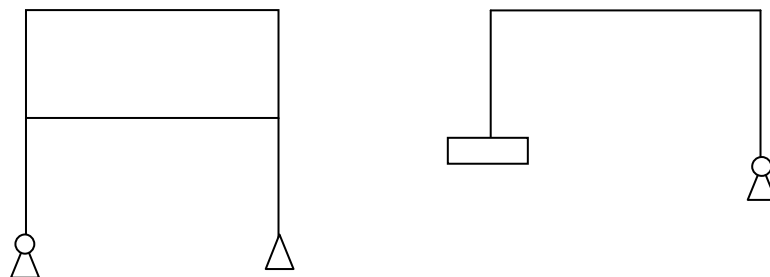


Figure 8 : exemples de structures hyperstatiques

Les degrés d'hyperstaticité interne et externe d'une structure composée de b -barres, p -appuis et de n -nœuds sont respectivement donnés par :

$$d_i = 3n - b \quad (1-2-3-4)$$

$$d_e = p - nb \text{ équations statiques} \quad (1-2-3-5)$$

4 Quelques méthodes de calcul pour les structures hyperstatiques

Nombreuses sont les méthodes de calcul de structure ayant passé les phases d'expérimentation. Parmi celles les plus utilisées, on distingue :

- les méthodes énergétiques dont la méthode des forces ;
- la méthode des rotations ;
- et la méthode matricielle.

La méthode des forces sera présentée dans ce chapitre avec plus de détail. Quant aux autres méthodes, de plus amples explications feront l'objet de la seconde partie de cet ouvrage.

4.1 Méthode des forces

La méthode des forces est une méthode énergétique issue du théorème de Menabrea.

4.1.1 Théorème de Menabrea

Le théorème de Menabrea signifie que les forces hyperstatiques prennent des valeurs qui rendent minimale l'énergie potentielle interne d'un système donné, exprimée en fonction des sollicitations (dont les forces hyperstatiques) qui lui sont appliquées.

Si W désigne l'énergie potentielle interne du système et si X_i sont des forces hyperstatiques alors il vient que :

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = 0 \quad (1-2-4-1)$$

Dans le cas où des déplacements δ_i sont initialement imposés au système, cette relation devient :

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = \alpha_i \quad (1-2-4-2)$$

Enoncé

La dérivée partielle de l'énergie potentielle interne d'un système par rapport à une inconnue hyperstatique externe dégagée par une coupure, est égale aux déplacements imposés à ce système.

4.1.2 Principe de la méthode

Afin de déterminer l'état d'une structure hyperstatique, il faut le ramener à un système isostatique équivalent en remplaçant les liaisons surabondantes par les efforts inconnues correspondants.

Cela revient à pratiquer quelques coupures : une pour chaque inconnue hyperstatique, aux niveaux des éléments de la structure.

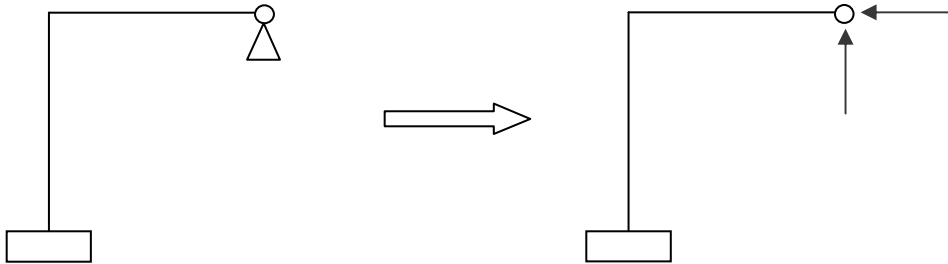


Figure 9 : coupure

Une fois que l'hyperstaticité est levée, c'est-à-dire que les inconnues hyperstatiques sont déterminées, le traçage des diagrammes dans le système hyperstatique revient à construire ceux-ci dans le système isostatique équivalent. Seulement, il faut considérer les efforts hyperstatiques en plus des efforts externes.

Sous la forme d'équations, on a dans chaque travée :

$$\begin{cases} N = N_{ext} + \sum X_i n_i \\ V = V_{ext} + \sum X_i v_i \\ M = M_{ext} + \sum X_i m_i \end{cases} \quad (1-2-4-3)$$

n_i, v_i et m_i étant les valeurs respectives des efforts normal, tranchant et fléchissant correspondant à la force hyperstatique X_i dans la travée considérée.

4.1.3 Equations de continuité

Pour une structure possédant n degrés d'hyperstaticité, l'équation de continuité sera formulée de part les équations suivantes.

$$\frac{\partial W}{\partial X_1} = \alpha_1, \quad \frac{\partial W}{\partial X_2} = \alpha_2, \quad \frac{\partial W}{\partial X_i} = \alpha_i, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial X_n} = \alpha_n \quad (1-2-4-4)$$

On démontre que chacune de ces équations peut être reformulée de la façon suivante :

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = \alpha_i \Leftrightarrow \alpha_{i1}X_1 + \alpha_{i2}X_2 + \dots + \alpha_{in}X_n + \alpha_{i ext} = \alpha_i \quad (1-2-4-5)$$

Les coefficients α_{ij} ($i = 1 \text{ à } n$) forment la matrice de souplesse de la structure tandis que le coefficient $\alpha_{i \text{ ext}}$ représente la déformation de la structure dans la direction de la force X_i due aux forces extérieures.

4.1.4 Résolution des équations de continuité

La résolution du problème se ramène à la résolution des équations de continuité donc à la détermination des inconnues hyperstatiques X_i .

Pour ce faire, l'expression littérale de chaque coefficient de souplesse est :

$$\alpha_{ij} = \int_L \frac{m_{ik} \cdot m_{kj}}{EI} ds + \int_L \frac{n_{ik} \cdot n_{kj}}{EA} ds + \int_L \frac{v_{ik} \cdot v_{kj}}{GA} ds \quad (1-2-4-6)$$

Cependant, remarquons que ces équations de continuité peuvent être assemblées dans une équation matricielle globale :

$$[\alpha_{ij}]\{X\} + \{\alpha_{ext}\} = \{\alpha_{imposé}\} \quad (1-2-4-7)$$

Ce qui fait que :

$$\{X\} = [\alpha_{ij}]^{-1} \cdot (\{\alpha_{imposé}\} - \{\alpha_{ext}\}) \quad (1-2-4-8)$$

4.2 Méthode des rotations

La méthode des rotations est une méthode mathématique qui permet de définir l'état d'une structure de part la détermination des rotations de chacun de ses nœuds. Elle est plus employée dans le calcul de portiques que dans le calcul des autres structures (ponts, poutres continues etc.).

Les portiques ont un comportement flexionnel, c'est-à-dire qu'ils travaillent surtout en flexion. Et on peut, par conséquent, négliger les efforts de cisaillement dans ses éléments.

La première opération à effectuer lors de la résolution d'un problème de portique par la méthode des rotations est de rechercher les moments isostatiques aux extrémités de chacun de ses éléments.

Ensuite, de part les équations d'équilibres ainsi que les expressions littérales des moments d'encastrement en chaque nœud, on détermine les rotations nodales.

Enfin, en remplaçant les expressions littérales de ces rotations dans les expressions des moments par leurs valeurs numériques, on peut calculer les sollicitations au niveau de chaque élément de la structure.

Comme la méthode des rotations est surtout utilisée dans l'étude d'une structure dont le degré d'hyperstaticité est élevé, il faut s'attendre à un nombre élevé de nœuds, donc d'équations. Dans le but d'éviter le désordre qui surviendrait, et surtout en vue de faciliter la résolution, chaque équation est insérée dans un tableau de façon à avoir une certaine forme matricielle :

$$[R]\{\theta\} = \{S\} \quad (1-2-4-9)$$

- R est la matrice de rigidité de la structure ;
- θ est le vecteur des rotations ;
- et S est le vecteur des seconds membres (composés par les moments d'encastrement aux extrémités de chaque élément).

4.3 Méthode matricielle

La méthode matricielle était une des méthodes les plus utilisée en calculs de structures. Elle est basée sur la méthode des déplacements et est plutôt restreinte aux études des assemblages de poutres.

La méthode matricielle se propose de calculer une structure composée de poutres (et de poteaux) en étudiant chacun de ses éléments d'une manière isolée. La façon la plus efficace de réaliser cette tâche est de :

- étudier préalablement un élément gabarit qui pourrait reproduire tous ces éléments moyennant quelques paramètres près ;
- établir les équations d'équilibre de chaque élément en utilisant les résultats de cette étude ;
- en déduire les équations qui devraient régir l'équilibre du système tout entier et les résoudre.

Conclusion de la première partie

La résistance des matériaux est une branche de la mécanique statique qui se limite sur la détermination de l'état de déformation d'un corps solide soumis à diverses sollicitations. Elle importe beaucoup aux constructeurs puisqu'elle permet d'avoir une assurance sur la sécurité de leurs ouvrages tout en leur permettant de faire des économies sur les quantités de matériaux à mettre en œuvre.

Théoriquement, la résistance des matériaux permet de déterminer la déformation d'un solide de part les sollicitations qui lui sont imposées ou de déterminer les contraintes en chaque point d'un solide de part les déformations observées sur ce dernier en utilisant des équations classiques de la statique.

Pour ce faire, on doit, dans un premier temps, considérer quelques hypothèses sur lesquelles les calculs ultérieurs seront basés.

- Premièrement, les matériaux à partir desquels les éléments de la structure à étudier sont fabriqués doivent être homogènes, isotropes et parfaitement élastiques ;
- Ensuite, les déformations en fonction des sollicitations dans un élément de structure sont supposées régies par la loi de comportement des matériaux ;
- Enfin, les dimensions des éléments de la structure doivent impérativement correspondre aux dimensions admises par la résistance des matériaux.

Comme le calcul de chaque élément d'une structure par les méthodes de la résistance des matériaux reste toujours très long et assez fastidieux, des méthodes simples restreintes aux seuls calculs de structures ont été inventées dans le but d'alléger cette délicatesse.

Bien que les méthodes suivant lesquelles on peut déterminer l'état d'une structure soient nombreuses, les plus utilisées sont la méthode des forces, la méthode des déplacements ainsi que les méthodes forfaitaires adaptées aux matériaux de fabrication.

La méthode des forces vise à déterminer l'état d'une structure par la recherche des efforts internes dans chacun de ses éléments tandis que la méthode des déplacements procède par la recherche des déformations du système.

Partie 2 :

Méthodes de calculs de structures





Chapitre 1

Méthode analytique de calculs de structures

1 Domaine d'utilisation de la méthode des rotations

La méthode des rotations est une méthode de calcul qui, généralement, est amenée à étudier les portiques dans un plan. De ce fait, elle rapporte une représentation bidimensionnelle de la structure réelle en usant de sa symétrie.

Par ailleurs, la présente méthode peut être utilisée pour résoudre un problème statique de résistance des matériaux dont le degré d'hyperstaticité est élevé ; notons qu'elle s'applique très bien au calcul des systèmes de poutres continues en assimilant les appuis intermédiaires à des nœuds.

C'est une méthode puissante qui possède un caractère général, telle que la méthode des forces. Cependant, elle est surtout utilisée dans le calcul de structures constituées d'un assemblage de poutres, de poteaux et de barres droites suffisamment élancés.

2 Description de la méthode

La méthode des rotations est basée sur les déplacements des nœuds de chaque élément de la structure. Sur ce, il y a lieu de classer cette dernière en deux types selon les possibilités de déplacements de ses nœuds :

- les structures à nœuds fixes ;
- et les structures à nœuds déplaçables.

Les nœuds sont dits déplaçables s'ils présentent une possibilité de déplacements dans le plan de représentation de la structure. Autrement, on dit qu'ils sont non-déplaçables, invariables ou fixes.

La méthode des rotations suppose que le déplacement axial de chaque extrémité d'un élément de la structure est négligeable. De plus, dans un portique, les efforts de traction, de compression et de cisaillement sont faibles comparés à l'effort de flexion. Il est donc de notre intérêt, sans que cela influe sur la précision de la méthode, de les négliger.

2.1 Portiques à nœuds fixes

Dans ces structures, les seules libertés observées au niveau des nœuds sont leurs rotations. Il en découle que le degré de liberté (nombre de déplacements indépendants possibles) de chaque nœud doit être, au plus, égal à l'unité. Notons que la translation des nœuds d'un

système peut être empêchée soit par la nature même du système (notamment le type d'appuis), soit par une symétrie de la géométrie et du chargement du système.

La figure suivante illustre quelques cas de structures à nœuds fixes.

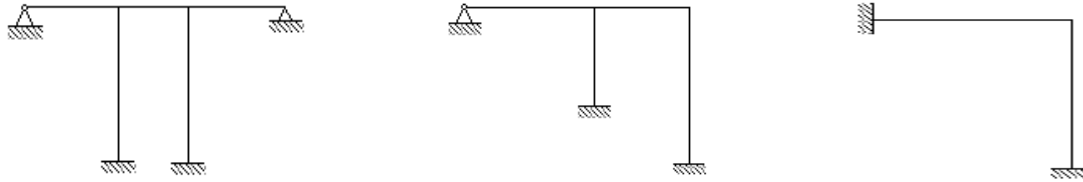


Figure 1 : portiques à nœuds fixes

2.2 Les portiques à nœuds déplaçables

Contrairement au premier cas de portiques, ceux-ci contiennent des nœuds qui, en plus des rotations, subissent des translations.

Afin de distinguer ces deux cas, on pourra vérifier qu'un portique à nœuds déplaçables conduit à un système articulé instable ou mécanisme si l'on remplace tous ses nœuds ainsi que tous les encastremements qu'il renferme par des articulations.

Le degré de liberté de ce système induit est égal au nombre de translations possibles de ses nœuds. Par conséquent, il correspond au nombre d'appuis supplémentaires nécessaires au système pour qu'il reste stable.

Si :

- n représente le nombre de nœuds du système susceptibles de se déplacer ;
- c , le nombre de contours indépendants (mailles ouvertes ou fermées) ;

alors, le nombre de translations indépendantes possibles d dans tout le système est donné par la formule suivante.

$$d = n - c \quad (2-1- 2-1)$$

2.3 Démarches de la méthode des rotations

La méthode consiste à déterminer les rotations de chaque nœud de la structure. Puis, en raison de l'interdépendance qui lie les déformations, les contraintes et les sollicitations, l'équation d'équilibre des nœuds conduit à déterminer les efforts dans chaque élément. Le principe de la méthode peut être conceptualisé en trois étapes, à savoir :

- la transformation du système en une structure statique de base équivalent : système dont tous les nœuds sont immobiles et ne peuvent effectuer ni translation ni rotation ;
Pour avoir la structure statique de base, on munie la structure initiale de plusieurs appuis supplémentaires dans le but d'immobiliser ses nœuds.

- l'ajout de déplacements inconnus au niveau des appuis fictifs la structure statique qui permet de retrouver le système initial ;

- l'établissement de la relation d'équilibre en chaque nœud, l'assemblage et sa résolution.

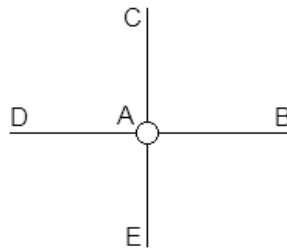


Figure 2 : nœud reliant quatre barres

3 Equations d'équilibre

La relation suivante traduit l'équilibre au niveau du nœud A du schéma représenté par la figure 2.

$$M_A = M_{AB} + M_{AC} + M_{AD} + M_{AE} \quad (2-1-3-1)$$

Dans cette relation doivent figurer les rotations, les moments d'encastrement, les effets des forces extérieures ainsi que les déplacements imposés au nœud. Pour ce faire, une autre relation doit être considérée : l'expression du moment d'encastrement.

- d'abord, dans le cas où la poutre, le poteau ou la barre AB considérée est encastree à son extrémité B. Considérons alors le cas d'une poutre encastree à ses deux extrémités.

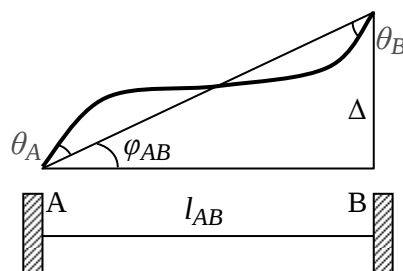


Figure 3 : angles de rotation

Le schéma met en évidence la relation :

$$\tan \varphi_{AB} = \frac{\Delta}{l_{AB}} \quad (2-1-3-2)$$

Pour les petits déplacements,

$$\varphi_{AB} = \frac{\Delta}{l_{AB}} \quad (2-1-3-3)$$

Or nous avons les expressions des rotations données par les formules de Bresse :

$$\theta_A = \theta'_A - a.M_A - b.M_B + \frac{\Delta}{l_{AB}} \quad (2-1-3-4)$$

$$\theta_B = \theta'_B + b.M_A - c.M_B + \frac{\Delta}{l_{AB}} \quad (2-1-3-5)$$

Donc, en posant :

$$\mathcal{R}_{AB} = \frac{c}{ac-b^2} \quad , \quad \mathcal{R}_{BA} = \frac{a}{ac-b^2}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{b}{c} \quad \text{et} \quad \lambda_{BA} = \frac{b}{a}$$

On obtient l'expression du moment d'encastrement parfait au niveau du nœud A de l'élément de structure AB.

$$M_{AB} = \mathcal{M}_{AB} + \mathcal{R}_{AB} \times \theta_A + \lambda_{AB} \times \mathcal{R}_{BA} \times \theta_B - \mathcal{R}_{AB} \times (1 + \lambda_{AB}) \times \varphi_{AB} \quad (2-1-3-6)$$

- par contre, si l'élément présente une articulation à son extrémité B, on doit adopter la formule suivante :

$$M_{AB} = \mathcal{M}'_{AB} + \mathcal{R}'_{AB} \times \theta_A - \mathcal{R}'_{AB} \times \varphi_{AB} \quad (2-1-3-7)$$

Avec :

$$\mathcal{R}'_{AB} = \frac{3}{4} \mathcal{R}_{AB} \quad (2-1-3-8)$$

$\mathcal{M}'_{AB}$ étant le moment d'encastrement de l'élément AB au niveau de son extrémité A.

4 Résolution d'un problème de calcul de structure

4.1 Généralités

La résolution d'un problème de calcul de structure se ramène toujours à trouver les dimensions optimales de chaque élément du système. Pour y parvenir, il faut rechercher les contraintes maximales qui agissent dans chaque pièce.

Comme il est exposé auparavant, les efforts de flexion sont les efforts les plus prépondérants dans un système de poutres. De ce fait, on peut avoir une idée sur les valeurs des contraintes dans un élément de part les valeurs des moments fléchissant qu'il renferme.

4.2 Etapes de la résolution

Facteurs de rigidité et coefficient de transmission des éléments à section constante

Les facteurs de rigidité sont des constantes qui dépendent du module d'Young de l'élément en question, de son moment d'inertie ainsi que de sa longueur. Il en découle que pour les éléments qui ont une section constante tout au long de leur portée, on peut écrire :

$$R_{AB} = R_{BA} \quad (2-1-4-1)$$

La valeur du facteur de rigidité d'une poutre AB, encastree à ces deux extrémités qui ne présente aucune variation de section, est :

$$R_{AB} = \frac{a}{ac - b^2} \quad (2-1-4-2)$$

avec :

$$\begin{cases} a = \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{dx}{EI} \\ b = \int_0^l \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{dx}{EI} \\ c = \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 \frac{dx}{EI} \end{cases}$$

où :

- E est le module d'Young du matériau constituant l'élément ;
- I : le moment d'inertie constant de l'élément ;
- l : sa portée.

On peut facilement reconnaître que pour une poutre ayant une section constante, les expressions de ces coefficients peuvent être réduites.

$$a = 2b = c = \frac{l}{3EI} \quad (2-1-4-3)$$

Il s'en suit que le facteur de rigidité de la poutre AB peut être écrit sous la forme suivante.

$$R_{AB} = \frac{4EI}{l} \quad (2-1-4-4)$$

Par contre, si la poutre AB est encastree au niveau du nœud A et articulée à son autre extrémité B, son facteur de rigidité est tel que :

$$R'_{AB} = \frac{3EI}{l} \quad (2-1-4-5)$$

En ce qui concerne le facteur de transmission λ , les mêmes expressions des coefficients mécaniques permettent aisément de déduire, pour un élément à section constante, une écriture plus simple.

$$\lambda_{AB} = \frac{b}{c} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_{BA} = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

Equation d'équilibre de chaque nœud

L'équation d'équilibre qui a été énoncée au paragraphe 1.2.3 est une équation qui traduit le cas extrême d'un nœud où aboutissent quatre éléments de structure. Mais les cas les plus fréquents sont les nœuds qui relient deux ou trois éléments. Il y a donc lieu de considérer les autres équations qui régissent l'équilibre de ces cas.

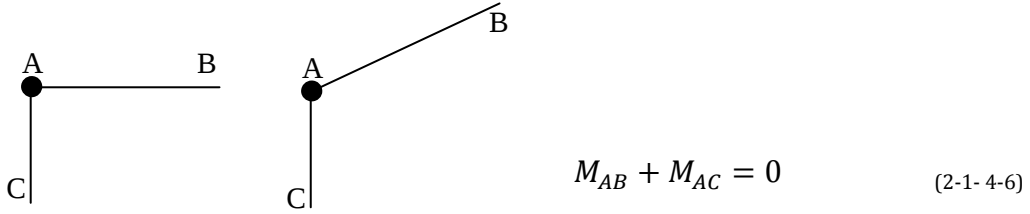


Figure 4 : nœuds reliant deux éléments

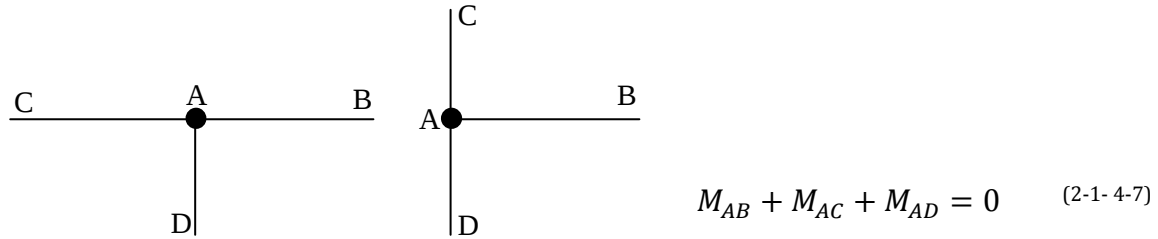


Figure 5 : nœuds reliant trois éléments

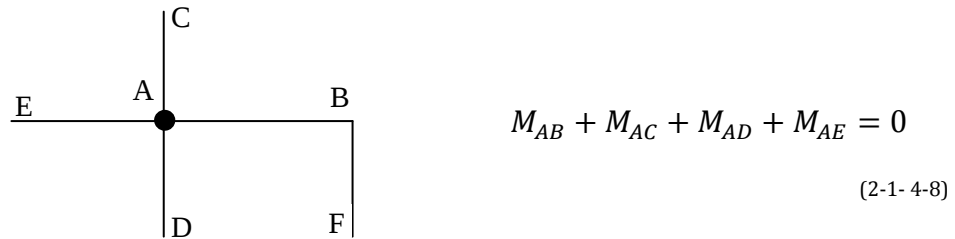


Figure 6 : nœud reliant quatre éléments

En reportant les équations du paragraphe 1.3 portant sur le moment d'encastrement en A de la poutre AB dans l'équation d'équilibre du nœud A, on obtient la relation qui traduit la stabilité de ce dernier :

$$(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD} + R_{AE})\theta_A + \lambda_{BA}\mathcal{R}_{BA}\theta_B + \lambda_{CA}\mathcal{R}_{CA}\theta_C + \lambda_{DA}\mathcal{R}_{DA}\theta_D + \lambda_{EA}\mathcal{R}_{EA}\theta_E = -(\mathcal{M}_{AB} + \mathcal{M}_{AC} + \mathcal{M}_{AD} + \mathcal{M}_{AE}) \quad (2-1- 4-9)$$

- pour le nœud B :

$$(R_{BA} + R_{BF})\theta_B + \lambda_{AB}\mathcal{R}_{AB}\theta_A + \lambda_{FB}\mathcal{R}_{FB}\theta_F = -(\mathcal{M}_{BA} + \mathcal{M}_{BF}) \quad (2-1- 4-10)$$

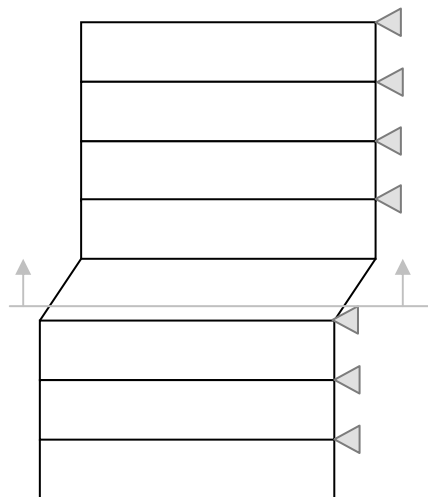
Equations traduisant les mécanismes

Les seules équations d'équilibre des nœuds ne sont pas suffisantes pour résoudre le problème. Afin de compléter cette lacune, il faut considérer des équations supplémentaires, notamment celles qui traduisent les mécanismes résultant des déplacements des nœuds.

Ces équations supplémentaires sont obtenues en considérant séparément chaque mécanisme possible de la structure.

Dans ce but, il faut :

- ajouter des appuis fictifs au niveau des nœuds susceptibles de se déplacer de manière à ce que seul un mécanisme soit possible ;
- écrire les équations de la statique afférentes à la partie de la structure qui se trouve au dessus du mécanisme afin de discerner une relation incluant tous les efforts horizontaux :



$$\Sigma H_{A_i A_j} = \Sigma V_{A_k A_l} \quad (2-1-4-11)$$

Figure 7 : isolation d'un mécanisme

où :

- $\Sigma H_{A_i A_j}$ est la somme de tous les efforts horizontaux agissant sur le système ;
- $V_{A_k A_l}$ est la réaction horizontale de l'élément $A_k A_l$ au milieu extérieur, en A_k .

Assemblage

L'assemblage des éléments consiste à:

- établir un tableau de valeurs dont la première ligne contient les rotations inconnues et dont les nœuds figurent dans la première colonne ;

- insérer les éléments du tableau de façon à ce que chacune de ses lignes traduise l'équilibre du nœud qui la désigne.

Remarques :

- 1- Pour faciliter le remplissage de ce tableau, il convient de nommer les nœuds d'une manière à ce que la plupart des éléments soient désignés par deux lettres voisines.
- 2- De part sa confection, la matrice induite de ce tableau est une matrice symétrique. En effet, toutes les constantes qui y figurent ont un caractère symétrique :

$$R_{AB} = R_{BA} \text{ et } \lambda_{AB} = \lambda_{BA}$$

- 3- Dans le but d'avoir un maximum de lisibilité, il est conseillé d'ajouter, à ce tableau, une autre colonne qui représente les seconds membres de chaque équation d'équilibre.

Le tableau suivant représente les équations d'équilibre des nœuds A et B de la figure 6.

	Premier membre						Second membre
Rotations Nœuds	θ_A	θ_B	θ_C	θ_D	θ_E	θ_F	Moments
A	$R_{AB} + R_{AC} + R_{AD} + R_{AE}$	$\lambda_{BA}\mathcal{R}_{BA}$	$\lambda_{CA}\mathcal{R}_{CA}$	$\lambda_{DA}\mathcal{R}_{DA}$	$\lambda_{EA}\mathcal{R}_{EA}$	0	$-(\mathcal{M}_{AB} + \mathcal{M}_{AC} + \mathcal{M}_{AD} + \mathcal{M}_{AE})$
B	$\lambda_{AB}\mathcal{R}_{AB}$	$R_{BA} + R_{BF}$	0	0	0	$\lambda_{FB}\mathcal{R}_{FB}$	$-(\mathcal{M}_{BA} + \mathcal{M}_{BF})$
...							...

Tableau 1 : exemple de tableau des équations d'équilibre

- insérer les équations qui traduisent les déplacements de nœuds afin que la matrice constituée par les valeurs du premier membre du tableau soit une matrice carrée. Il est conseillé, dans le but d'avoir une symétrie parfaite, de diviser tous les termes de ces dernières équations d'une manière à ce que les éléments de la n^{ième} ligne correspondent à celles de la n^{ième} colonne.

Résolution

A la fin de l'assemblage, quand le tableau est rempli, on peut procéder à la résolution des équations.

Le premier membre du tableau constitue une matrice carrée dont la dimension est égale au nombre de nœuds susceptibles de rotation augmenté du nombre de déplacements indépendants possibles des éléments de la structure. Par contre, le second membre du tableau

constitue une matrice uni-colonne S qui résulte de la multiplication du premier membre R par la matrice uni-colonne des rotations inconnues θ .

$$R \times \theta = S \quad (2-1-4-12)$$

La résolution du problème consiste donc à multiplier l'inverse de la matrice du premier membre du tableau par la matrice du second membre.

$$\theta = R^{-1} \times S \quad (2-1-4-13)$$

5 Calcul d'une structure plane par la méthode des rotations

Dans le but d'acquérir une bonne compréhension de la méthode, considérons un exemple de structure et établissons les étapes à franchir pour déterminer son état.

5.1 Schéma de la structure

Considérons un cas simple de système de poutres représenté par les schémas suivants.

Dans cette structure, les liaisons au niveau des nœuds sont assurées par des encastrement, excepté le cas du nœud C qui est doté d'une articulation. Considérons, de plus, le cas de chargement représenté par la seconde figure.

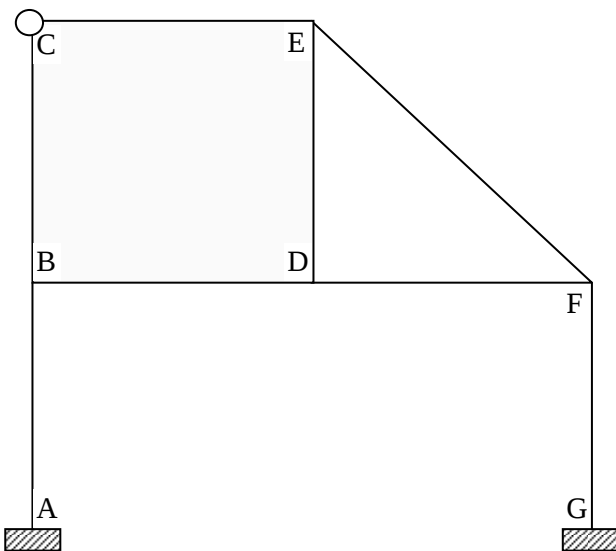


Figure 9 : assemblage de poutres

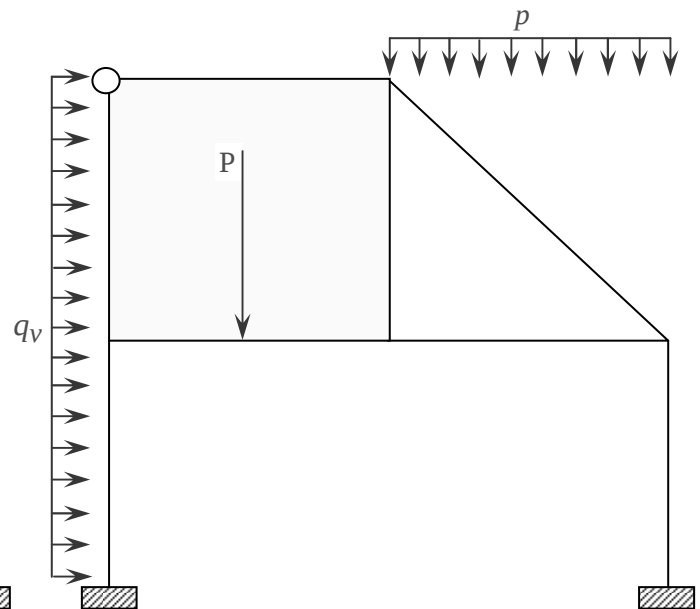


Figure 8 : chargements

Par la suite, déterminons les équations d'équilibre au niveau de chaque nœud.

5.2 Equations d'équilibre

Nœud A

Le nœud A est constitué d'un encastrement rigide ; c'est un nœud qui lie le système au milieu extérieur. De plus, le schéma de la figure 9 met en évidence qu'il n'est en contact direct qu'avec un seul élément. Ce qui fait que la relation traduisant l'équilibre de ce nœud est une équation de l'équilibre statique du système tout entier. Elle sera utilisée plus tard dans les équations qui traduisent les mécanismes.

Nœud B

Par contre, l'équilibre du nœud B peut être traduit par l'équation suivante.

$$(R_{BA} + R'_{BC} + R_{BD})\theta_B + \lambda_{DB}R_{DB}\theta_D - R_{BA}(1 + \lambda_{BA})\varphi_{AB} - R'_{BC}\varphi_{BC} = -(\mathcal{M}_{BA} + \mathcal{M}'_{BC} + \mathcal{M}_{BD}) \quad (2-1-5-1)$$

Nœud C

Comme il est mentionné antérieurement et précisé par le schéma de la figure 8, le nœud C est muni d'une articulation. Ce qui fait que tout moment fléchissant qui aboutit à ce nœud sera affecté d'une valeur nulle. Par conséquent, l'équation d'équilibre de ce nœud n'inclut pas les moments fléchissant et ne comporte que les efforts normaux et transversaux qui maintiennent la stabilité du système.

Nœud D

$$\lambda_{BD}R_{BD}\theta_B + (R_{DB} + R_{DE} + R_{DF})\theta_D + \lambda_{ED}R_{ED}\theta_E + \lambda_{FD}R_{FD}\theta_F - R_{DE}(1 + \lambda_{DE})\varphi_{BC} = -(\mathcal{M}_{DB} + \mathcal{M}_{DE} + \mathcal{M}_{DF}) \quad (2-1-5-2)$$

Nœud E

$$\lambda_{DE}R_{DE}\theta_D + (R'_{EC} + R_{ED} + R_{EF})\theta_E + \lambda_{FE}R_{FE}\theta_F - R_{ED}(1 + \lambda_{ED})\varphi_{BC} = -(\mathcal{M}'_{EC} + \mathcal{M}_{ED} + \mathcal{M}_{EF}) \quad (2-1-5-3)$$

Nœud F

$$\lambda_{DF}R_{DF}\theta_D + \lambda_{EF}R_{EF}\theta_E + (R_{FD} + R_{FE})\theta_F - R_{FG}(1 + \lambda_{FG})\varphi_{AB} - R_{FE}(1 + \lambda_{FE})\varphi_{BC} = -(\mathcal{M}_{FD} + \mathcal{M}_{FE} + \mathcal{M}_{FG}) \quad (2-1-5-4)$$

Nœud G

Puisque le cas du nœud G est identique à celui du nœud A, son équation d'équilibre ne sera d'aucune utilité dans le but d'établir une relation contenant les rotations de chaque élément au niveau des nœuds.

5.3 Equations traduisant les mécanismes

Descriptions des mécanismes

Vue la forme de la structure, on peut facilement distinguer deux déplacements indépendants de nœuds : par exemple, le déplacement du nœud B ainsi que celui du nœud E (C et D ou encore C et F). De ce fait, on a deux mécanismes indépendants. Le premier mécanisme s'obtient par la mise en place d'un appui simple fictif au niveau du nœud C, ou bien au niveau du nœud E, afin de restreindre le déplacement de l'élément de structure CE. Quant au second mécanisme, il est obtenu par la confection d'un appui fictif au niveau intermédiaire de la structure, c'est-à-dire au niveau du nœud B, D ou F.

Les schémas suivants illustrent les déplacements des éléments de la structure ainsi que les rotations des poteaux lors de ces deux mécanismes.

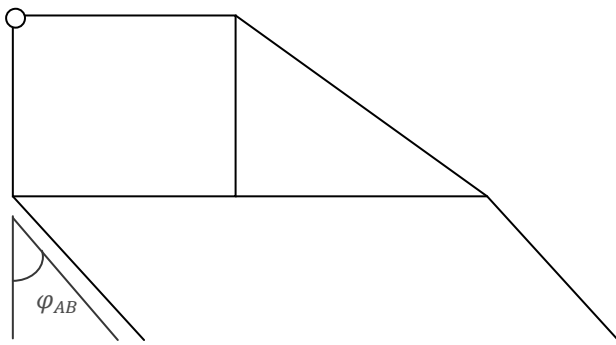


Figure 11 : premier mécanisme

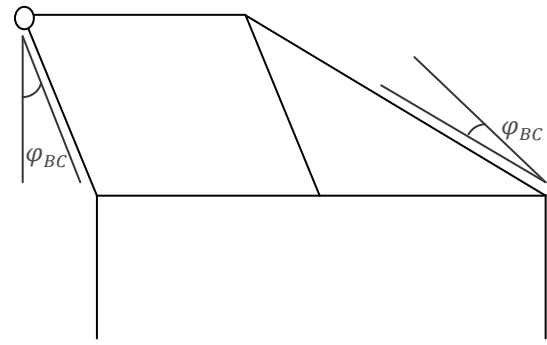


Figure 10 : second mécanisme

Equations traduisant les mécanismes

Les équations des mécanismes sont les équations qui traduisent l'équilibre fictif statique du système. Dans cet exemple de structure, les efforts horizontaux seront les seuls à être considérés puisque le système n'est lié au milieu extérieur que par ses éléments verticaux. Autrement, il y a lieu de prendre en compte l'équilibre entre les forces verticales.

D'abord, en ce qui concerne le premier mécanisme, l'équation de la statique définie au paragraphe 1.4.2, concernant les mécanismes conduit à la relation suivante.

$$\Sigma H_{AG} = V_{AB} + V_{GF} \quad (2-1-5-5)$$

$$\Sigma H_{AG} = q_V \cdot (l_{AB} + l_{BC})$$

avec :

$$V_{AB} = \tau_{AB} + \frac{M_{BA} + M_{AB}}{l_{AB}}$$

$$\tau_{AB} = \frac{1}{2} q_V \cdot l_{AB}$$

Ensuite, la relation qui traduit le second mécanisme est :

$$\Sigma H_{BF} = q_V \cdot l_{BC} \quad (2-1-5-6)$$

avec :

$$\Sigma H_{BF} = V_{BC} + V_{FE} + V_{GE}$$

$$V_{FE} = \tau_{FE} + \frac{M_{FE} + M_{EF}}{l_{EF}}$$

$$\tau_{FE} = 0$$

Après avoir développé les termes des moments, on aboutit à deux équations finales qui peuvent être représentées par les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} -R_{BA}(1 + \lambda_{BA})\theta_B - R_{FG}(1 + \lambda_{FG})\theta_F + 2[(1 + \lambda_{AB})R_{AB} + (1 + \lambda_{GF})R_{GF}]\varphi_{AB} = \\ -q_V(l_{AB} + l_{BC}) + (\mathcal{M}_{AB} + \mathcal{M}_{BA} + \mathcal{M}_{FG} + \mathcal{M}_{GF}) \end{aligned} \quad (2-1-5-7)$$

et

$$\begin{aligned} -R'_{BC}\theta_B - R_{ED}(1 + \lambda_{ED})\theta_D - (1 + \lambda_{EF})R_{EF}\theta_E - (1 + \lambda_{FE})R_{FE}\theta_F + [(1 + \lambda_{BC})R'_{BC} + 2(1 + \lambda_{EF})R_{EF} \\ + 2(1 + \lambda_{ED})R_{ED}]\varphi_{BC} = -q_V \cdot l_{BC} + (\mathcal{M}_{BC} + \mathcal{M}_{EF} + \mathcal{M}_{FE}) \end{aligned} \quad (2-1-5-8)$$

5.4 Assemblage

Cette étape consiste à rassembler les équations d'équilibre de chaque nœud ainsi que les équations des mécanismes dans un tableau, dans le but de faciliter la lecture, et par conséquent, la résolution.

Les dimensions du tableau doivent être déterminées avant son remplissage. De cette façon, on élimine le risque d'omission de quelques équations. Sur ce, le nombre de lignes doit correspondre au nombre de rotations possibles augmenté du nombre de mécanismes. Le nombre de colonnes, par contre, se déduit de celui-ci par l'ajout d'une colonne qui représentera les seconds membres de chaque équation (puisque la matrice des premiers membres est une matrice carrée).

les tableaux suivants représentent l'équation matricielle obtenue après l'assemblage des équations d'équilibre de chaque nœud.

Le premier membre du tableau exprime la matrice de rigidité du système.

Premier membre

Rotation Nœuds	θ_B	θ_D	θ_E	θ_F	φ_{AB}	φ_{BC}
B	$R_{BA} + R'_{BC} + R_{BD}$	$\lambda_{DB}R_{DB}$	0	0	$-R_{BA}(1 + \lambda_{BA})$	$-R'_{BC}$
D	$\lambda_{BD}R_{BD}$	$R_{DB} + R_{DE} + R_{DF}$	$\lambda_{ED}R_{ED}$	$\lambda_{FD}R_{FD}$	0	$-R_{DE}(1 + \lambda_{DE})$
E	0	$\lambda_{DE}R_{DE}$	$R'_{EC} + R_{ED} + R_{EF}$	$\lambda_{FE}R_{FE}$	0	$-R_{ED}(1 + \lambda_{ED})$
F	0	$\lambda_{DF}R_{DF}$	$\lambda_{EF}R_{EF}$	$R_{FD} + R_{FE}$	$-R_{FG}(1 + \lambda_{FG})$	$-R_{FE}(1 + \lambda_{FE})$
Méca 1	$-R_{BA}(1 + \lambda_{BA})$	0	0	$-R_{FG}(1 + \lambda_{FG})$	$2(1 + \lambda_{AB})R_{AB} + 2(1 + \lambda_{GF})R_{GF}$	0
Méca 2	$-R'_{BC}$	$-R_{ED}(1 + \lambda_{ED})$	$-(1 + \lambda_{EF})R_{EF}$	$-(1 + \lambda_{FE})R_{FE}$	0	$(1 + \lambda_{BC})R'_{BC} + 2(1 + \lambda_{EF})R_{EF} + 2(1 + \lambda_{ED})R_{ED}$

Tableau 2 : premier membre du tableau

Par contre, le second membre du tableau représente le vecteur des moments fléchissant habituellement reconnus sous le nom de moments d'encastrement parfait.

Second membre

Nœuds	Moments
B	$-(\mathcal{M}_{BA} + \mathcal{M}'_{BC} + \mathcal{M}_{BD})$
D	$-(\mathcal{M}_{DB} + \mathcal{M}_{DE} + \mathcal{M}_{DF})$
E	$-(\mathcal{M}'_{EC} + \mathcal{M}_{ED} + \mathcal{M}_{EF})$
F	$-(\mathcal{M}_{FD} + \mathcal{M}_{FE} + \mathcal{M}_{FG})$
φ_{AB}	$-q_V(l_{AB} + l_{BC}) + (\mathcal{M}_{AB} + \mathcal{M}_{BA} + \mathcal{M}_{FG} + \mathcal{M}_{GF})$
φ_{BC}	$-q_V \cdot l_{BC} + (\mathcal{M}_{BC} + \mathcal{M}_{EF} + \mathcal{M}_{FE})$

Tableau 3 : second membre du tableau

6 Extension de la méthode pour les structures spatiales

Les démarches de calcul sont à peu près les mêmes que pour les structures planes moyennant les quelques particularités suivantes.

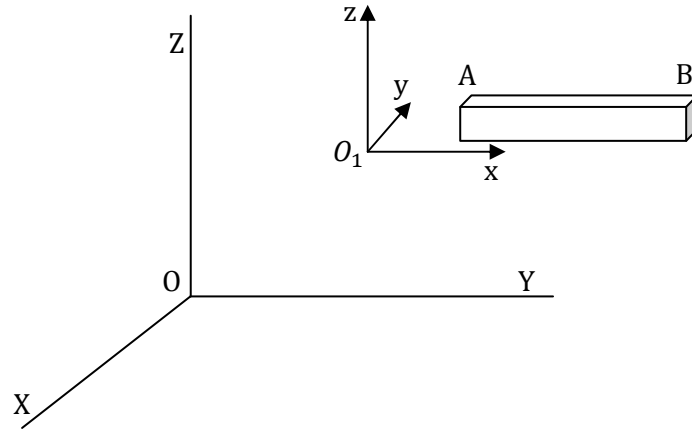
6.1 Formulation des équations d'équilibres nodaux

Les mêmes formules de Bresse qui ont servi à la formulation des équations d'équilibres nodaux d'une structure plane peuvent être utilisées pour la formulation des équations d'équilibres d'une structure spatiale moyennant l'intervention d'un mathématicien. Mais on

peut aisément aboutir aux mêmes résultats en développant les équations de la déformée d'une poutre fléchie et tordue.

$$\begin{cases} \frac{d\theta_x}{dx} = -\frac{M_x}{GI_p} \\ \frac{d^2v_y}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y} \\ \frac{d^2v_z}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \end{cases} \quad (2-1-6-1)$$

L'intégration de ces équations entre les sections extrêmes d'une poutre de référence AB conduit aux expressions des moments au niveau de ses nœuds A et B.



$$\begin{cases} M_{Ax} = R_{Ax} \theta_{Ax} - R_{Bx} \theta_{Bx} \\ M_{Ay} = \mu_y + R_{Ay} \theta_{Ay} + R_{By} \theta_{By} - (1 + \lambda) R_{Ay} \varphi_z \\ M_{Az} = \mu_z + R_{Az} \theta_{Az} + R_{Bz} \theta_{Bz} - (1 + \lambda) R_{Az} \varphi_y \end{cases} \quad (2-1-6-2)$$

$$\begin{cases} M_{Bx} = R_{Bx} \theta_{Bx} - R_{Ax} \theta_{Ax} \\ M_{By} = \mu_y + R_{By} \theta_{By} + R_{Ay} \theta_{Ay} - (1 + \lambda) R_{By} \varphi_z \\ M_{Bz} = \mu_z + R_{Bz} \theta_{Bz} + R_{Az} \theta_{Az} - (1 + \lambda) R_{Bz} \varphi_y \end{cases} \quad (2-1-6-3)$$

Avec

$$\begin{cases} R_{Ax} = R_{Bx} = \frac{GI_p}{l} \\ R_{Ay} = R_{By} = \frac{4EI_y}{l} \\ R_{Az} = R_{Bz} = \frac{4EI_z}{l} \end{cases} \quad (2-1-6-4)$$

6.2 Transfert des équations dans le repère global

Avant de pouvoir effectuer les opérations d'assemblage, il faut transférer les équations d'équilibre de chaque élément de son repère local vers le repère global de l'ensemble de la structure.

Pour cela, utilisons les angles d'Euler : ψ , θ et φ .

Les figures ci-après illustrent les rotations suivant les angles d'Euler moyennant les deux repères de passage (Ox_1, y_1, z_1) et (Ox_2, y_2, z_2) .

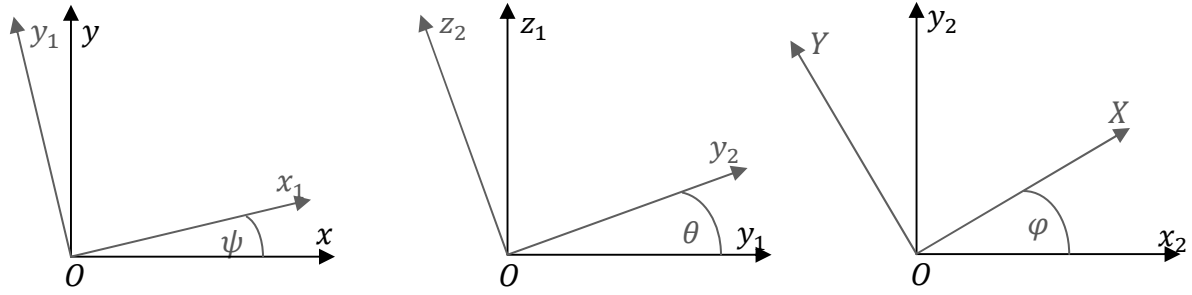


Figure 12 : illustration des rotations suivant les angles d'Euler

Les matrices de transfert correspondant respectivement à l'angle ψ , θ et φ sont :

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-1-6-5)$$

$$[\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2-1-6-6)$$

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-1-6-7)$$

Les vecteurs en coordonnées locales et en coordonnées globales sont reliés par les relations suivantes.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [\psi][\theta][\varphi] \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (2-1-6-8)$$

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = ([\psi][\theta][\varphi])^{-1} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (2-1-6-9)$$

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [\varphi]^{-1}[\theta]^{-1}[\psi]^{-1} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (2-1-6-10)$$

Ou encore :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

6.3 Equations traduisant les mécanismes

Deux équations traduisent le mécanisme d'un niveau de la structure : l'équation de l'équilibre suivant la direction Ox et celle suivant la direction Oy.

$$\begin{cases} \Sigma X_{ext} = \Sigma X_{int} \\ \Sigma Y_{ext} = \Sigma Y_{int} \end{cases} \quad (2-1-6-11)$$

Chapitre 2

Méthode matricielle

1 Description de la méthode

La méthode matricielle est une méthode parmi tant d'autres dérivées de la résistance des matériaux et de la mécanique des milieux continus.

1.1 Fondement

La méthode matricielle était basée sur deux méthodes, à savoir la méthode des forces et celle des déplacements. On peut aussi dire qu'elle dérive de la méthode des éléments finis unidimensionnels restreinte à l'étude des assemblages de poutres.

La méthode des forces vise, en premier lieu, à spécifier les forces internes et externes qui sont inconnues et ensuite, à user des relations de compatibilité de déformations afin de trouver leurs valeurs.

Par contre, la méthode des déplacements requiert une identification des déplacements inconnus et les retrouve par les équations d'équilibre. Après avoir calculé les déplacements, les forces internes et externes de la structure qui sont auparavant inconnues sont déterminées par les équations de compatibilité de déplacements.

La présente méthode use de la méthode des déplacements. En effet, la méthode des forces peut aussi être utilisée afin d'analyser une structure. Cependant, elle présente quelques menus désavantages. Le plus important est que toutes ces méthodes puissent être employées dans le but de résoudre un problème statiquement déterminé ou indéterminé bien que la méthode des forces requière deux procédures tout à fait différentes pour la résolution de ces deux cas. De plus, la méthode des déplacements donne directement les déplacements et les forces inconnus alors que les déplacements ne sont pas directement obtenus par la méthode des forces.

1.2 Principe

L'application de la méthode matricielle au calcul de structure vise à subdiviser celle-ci en une série d'éléments discrets et à identifier chacun de leurs bouts à des nœuds.

Pour un portique, les éléments de la subdivision sont les poutres et les poteaux tandis que chaque point de liaison constitue un nœud. Les forces ainsi que les déplacements de chaque élément sont déterminés et reliés à un autre par les équations d'équilibre écrites au niveau des nœuds. Ces relations sont ensuite groupées afin de constituer la matrice de rigidité de la structure entière. Cette matrice permet de trouver tous les déplacements de chaque nœud de la structure selon les forces ainsi que les déplacements imposés au système.

Avant de développer une procédure formelle sur la méthode matricielle, il est d'abord nécessaire d'établir quelques définitions ainsi que quelques concepts préliminaires.

1.3 Quelques définitions

1.3.1 Éléments et nœuds

Pour modéliser un solide, la meilleure façon de le représenter est de :

- le subdiviser en plusieurs volumes élémentaires ;
- choisir un élément géométrique simple qui peut représenter chaque subdivision ;
- joindre ces éléments à leurs bouts afin de retrouver la forme et la structure du solide.

Dans ce cas, chaque subdivision du volume représente un élément. Ses nœuds sont, par contre, les points de jointure auxquels les éléments voisins lui sont connectés.

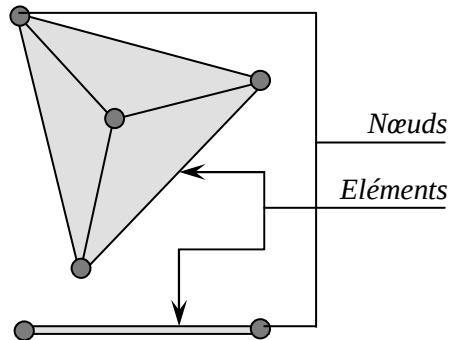


Figure 1 : éléments et nœuds

1.3.2 Forces et déplacements correspondants

Ainsi, le déplacement correspondant à la force concentrée F aura un déplacement parallèle à F et appliqué au même point d'application que F . Il convient de mentionner que le terme de force est ici utilisé pour désigner tous les efforts y compris les moments. Notons de plus que le déplacement qui correspond à un moment est une rotation.

La matrice élémentaire des forces sera représentée par une matrice uni-colonne à six termes telle que :

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

Tandis que celle des déplacements est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}$$

1.3.3 Degrés de liberté

Le degré de liberté est le nombre de forces indépendantes ou déplacements considérés pendant l'analyse d'une structure. Il en découle que pour une même structure donnée, le degré de liberté du système peut varier suivant la méthode de calcul adoptée.

Par exemple, pour le cas d'une poutre soumise à une flexion simple, on peut avoir deux ou quatre degrés de liberté au niveau d'un nœud, selon l'espace dans lequel elle est étudiée.

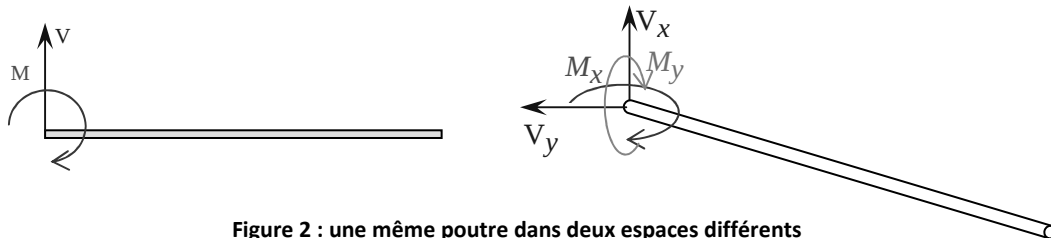


Figure 2 : une même poutre dans deux espaces différents

1.3.4 Déplacements indépendants

Les déplacements indépendants sont les déplacements qui ne sont pas connexes c'est-à-dire qui ne possèdent aucune relation entre les autres déplacements.

Considérant le cas d'une barre, un élément peut se déplacer suivant son axe. Dans le cas extrême où aucun appareil d'appui ne résiste à ce déplacement, on peut aisément identifier un seul déplacement indépendant.

Par contre, dans le cas d'une poutre vue dans son plan, si les déplacements axiaux sont négligés, les deux bouts de l'élément peuvent se déplacer suivant deux directions. Comme on peut écrire deux relations qui lient ces déplacements, il s'en suit que l'élément possède deux déplacements indépendants.

Enfin, dans le cas d'un élément de structure où les déplacements axiaux sont pris en considération, une poutre peut comprendre trois déplacements indépendants.

Il en découle que le nombre de degrés de liberté d'une structure ne dépend pas seulement de sa forme physique (ses appuis ainsi que la disposition de ses éléments) mais aussi des hypothèses et des considérations techniques imposées lors du calcul.

1.3.5 Forces indépendantes

Par analogie aux déplacements indépendants, une force indépendante est une force qui n'est pas liée aux autres forces appliquées à la structure. Dans certains cas, l'équation d'équilibre donne une ou plusieurs relations entre les forces appliquées afin de stabiliser la structure. Il y a donc lieu de considérer ces forces comme étant dépendantes.

Pour une structure stable, toutes les forces appliquées sont indépendantes puisqu'aucune relation de stabilité n'est à définir.

1.3.6 Conditions régissant le comportement structural

Une structure doit satisfaire aux quatre conditions suivantes qui sont employées dans son analyse.

- Le vecteur résultant de la somme statique des forces doit être nul. Le mot force est ici employé dans un sens général incluant les moments fléchissant.
- Les contraintes et les déformations qui en résultent sont reliées par la loi de comportement du matériau qui compose l'élément de structure.
- La connaissance des seules forces appliquées n'est pas suffisante pour déterminer l'état d'une structure. Il faut, de plus, recourir aux conditions aux limites. Les conditions aux limites sont les relations qui expriment la liaison du système à son milieu extérieur. Par exemple, le déplacement vertical, horizontal ainsi que la rotation au niveau d'un encastrement sont nuls.
- Les déformations de chaque élément de la structure doivent être compatibles. Pour ce, les déplacements solutions doivent satisfaire à une certaine condition de compatibilité des déformations.

2 Matrices élémentaires

Avant de procéder à la confection de la matrice de rigidité d'une structure, il convient de déterminer les matrices élémentaires de chacun de ses éléments. Ceci est nécessaire pour simplifier les expressions.

2.1 Coefficients matricielle au niveau d'un nœud

La résolution d'un problème de calcul de structure par la méthode matricielle vise à déterminer le vecteur de déplacements $\{u\}$ dans l'équation matricielle suivante.

$$\{F\} = [k] \{u\} \quad (2-2-2-1)$$

Les composantes des vecteurs $\{F\}$ et $\{u\}$ sont respectivement les forces et les déplacements au niveau des nœuds tandis que celles de la matrice $[k]$ sont appelées coefficients matricielle. Et comme dans la plupart des matrices utilisées dans les calculs de structures, la matrice $\{k\}$ de la présente méthode est une matrice symétrique.

Dans un espace plan, à l'extrémité d'un élément, c'est-à-dire au niveau d'un nœud, on observe deux degrés de liberté, soit deux sortes de sollicitations, à savoir l'effort tranchant et l'effort de flexion et de même, deux sortes de déplacements : le déplacement vertical ou la dénivellation et la rotation du nœud en question. La matrice de rigidité reliant les efforts aux déplacements comprend donc exactement quatre composantes pour chaque nœud.

Par contre, pour l'étude d'un treillis ou lors de la résolution d'un problème de structure composée d'éléments de barres, la méthode peut être réduite dans une dimension. En effet, la seule force qui s'applique aux extrémités d'une barre est l'effort normal dû à la compression ou à la traction de cette dernière tandis que le seul déplacement qui en résulte est un rétrécissement ou un allongement de l'élément. Il en découle que la matrice de rigidité élémentaire n'a que quatre composantes (un pour chaque nœud).

2.2 Matrice élémentaire d'une barre

La figure qui suit illustre le déplacement d'une barre dans son axe principal.

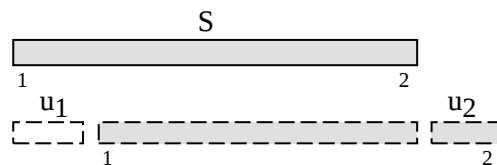


Figure 3 : déformations d'une barre

La théorie des poutres enseigne que dans une barre isolée, la contrainte en chaque point est obtenue par la division de la sollicitation qui lui est appliquée par l'aire de la section dans laquelle il se trouve.

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (2-2-2-2)$$

Or la loi de Hooke dicte que la contrainte en chaque point et la déformation correspondante sont reliées par le module d'élasticité du matériau de part lequel l'élément a été fabriqué.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2-2-2-3)$$

La combinaison de ces deux équations amène à déduire une expression de la force appliquée en fonction de la déformation.

$$F = ES \cdot \varepsilon \quad (2-2-2-4)$$

2.2.1 Equations au niveau d'une extrémité de barre

Comme il a été mentionné antérieurement, la déformation de la barre est la différence de longueur entre son état initial et son état déformé. Sa valeur est donc facilement obtenue par la comparaison des deux états sus-cités.

$$\varepsilon = \frac{(u_2 - u_1)}{l} \quad (2-2-2-5)$$

Par la suite, une déformation négative est une compression tandis qu'une déformation positive indique une traction, une extension ou un étirement.

En ce qui concerne la force F , elle se déduit des efforts appliqués de part et d'autre de la barre par :

$$F = (F_2 - F_1) \quad (2-2-2-6)$$

2.2.2 Equation matricielle d'une barre

Sachant que les efforts F_1 et F_2 ne diffèrent que par leurs sens, une équation matricielle peut être soustraite de ces deux équations linéaires : l'équation d'équilibre de la barre.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & -\frac{ES}{l} \\ -\frac{ES}{l} & \frac{ES}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2-2-2-7)$$

Une identification des éléments de cette équation permet de retrouver les composantes de la matrice de rigidité de la barre.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-2-2-8)$$

2.3 Matrice élémentaire d'une poutre en torsion

Une poutre en torsion est un élément de barre soumis à un couple dont la direction coïncide avec celle de l'axe principal de la barre. Le schéma ci après montre une telle est poutre dans un espace tridimensionnel.

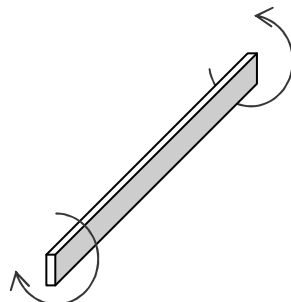


Figure 4 : poutre en torsion

2.3.1 Contrainte de glissement

D'abord, notons que dans une poutre simplement sollicitée par un effort de torsion, la contrainte tangentielle ou contrainte de glissement est donnée par la relation suivante.

$$\tau = \frac{M}{W} \quad (2-2-2-9)$$

Où :

- M est le moment de torsion ;
- W est le module de torsion de la section de poutre considérée.

2.3.2 Angle de torsion

Ensuite, l'angle unitaire de torsion en fonction du moment de torsion est obtenu par la formule suivante.

$$\omega = \frac{M}{GI} \quad (2-2-2-10)$$

Par conséquent, l'angle de torsion sur toute la longueur peut être déduit de cette relation en multipliant son second membre par la portée de la poutre.

$$\theta = \frac{Ml}{GI} \quad (2-2-2-11)$$

2.3.3 Matrice de rigidité élémentaire d'une poutre en torsion

En reportant l'équation de l'angle de torsion du paragraphe précédent au niveau des deux extrémités de la poutre et en admettant que les efforts appliqués en ces points sont symétriques, on obtient l'équation matricielle qui régit l'équilibre de la poutre.

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GI}{l} & -\frac{GI}{l} \\ -\frac{GI}{l} & \frac{GI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2-2-2-12)$$

2.4 Matrice élémentaire d'une poutre dans le plan

Dans le but d'avoir une compréhension aisée, les procédures de confection de la matrice élémentaire doivent être précédées de l'élaboration de l'équation de la déformée.

2.4.1 Equation de la déformée

L'équation de la déformée est une des équations fondamentales de la théorie des poutres. Cette équation représente une relation directe entre les efforts appliqués et les déformations observées dans un élément. Elle est basée sur l'équation différentielle de la flèche le long de la travée d'une poutre en flexion.

Pour une poutre soumise à :

- une charge linéaire q ;
- une charge ponctuelle P ;
- un moment fléchissant M :
- une rotation initiale θ_0 ;
- et un dénivelé initial v_0 ,

on a :

$$v(x) = EI \left[\frac{x^4}{24} q + \frac{(x-x_p)^3}{6} P + \frac{(x-x_M)^2}{2} M \right] + \theta_0 \cdot x + v_0 \quad (2-2-2-13)$$

Dans le cas où seules les extrémités sont chargées, cette équation se transforme en une relation qui relie les déformations au niveau des deux bouts de la poutre.

$$v_2 = EI \left[\frac{Pl^3}{6} + \frac{Ml^2}{2} \right] + \theta_1 \cdot l + v_1 \quad (2-2-2-14)$$

2.4.2 Expressions des efforts au niveau des nœuds

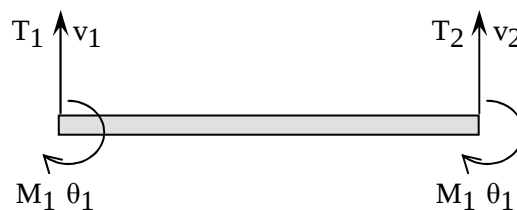


Figure 5 : déformations dans une poutre

- v_1 et v_2 sont respectivement les déplacements verticaux des extrémités 1 et 2 de la poutre ;
- θ_1 et θ_2 sont les rotations respectives des nœuds 1 et 2.

L'équilibre statique des efforts verticaux indique une opposition entre les efforts tranchant T_1 et T_2 .

De plus, la théorie des poutres donne les expressions de ces efforts en fonction des moments observés aux nœuds.

$$T_1 = -\frac{M_1 + M_2}{l} \quad T_2 = \frac{M_1 + M_2}{l} \quad (2-2-2-15)$$

L'équation différentielle des petits déplacements est :

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = T_1 \cdot x + M_1 \quad (2-2-2-16)$$

Donc :

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} T_1 \cdot x^2 + M_1 \cdot x + C_1 \quad (2-2-2-17)$$

$$EI v = \frac{1}{6} T_1 \cdot x^3 + \frac{1}{2} M_1 \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \quad (2-2-2-18)$$

Afin de déterminer les deux constantes d'intégration C_1 et C_2 , il est décisif de se reporter aux conditions aux limites. D'abord, au point 1, on observe que :

$$v = v_1$$

$$\frac{dv}{dx} = -\theta_1$$

Par conséquent, $C_1 = -EI \theta_1$ et $C_2 = EI v_1$.

Ensuite, au point 2 :

- $v = v_2$;
- $\frac{dv}{dx} = -\theta_2$;

Ce qui amène aux expressions des efforts appliqués en fonction des déformations qui en résultent.

$$T_1 = -\frac{6 EI \theta_1}{l^2} - \frac{6 EI \theta_2}{l^2} + \frac{12 EI}{l^3} (v_1 - v_2) \quad (2-2-2-19)$$

$$T_2 = -\frac{6 EI \theta_1}{l^2} + \frac{6 EI \theta_2}{l^2} - \frac{12 EI}{l^3} (v_1 - v_2) \quad (2-2-2-20)$$

$$M_1 = \frac{4 EI \theta_1}{l} + \frac{2 EI \theta_2}{l} - \frac{6 EI}{l^2} (v_1 - v_2) \quad (2-2-2-21)$$

$$M_2 = \frac{2 EI \theta_1}{l} + \frac{4 EI \theta_2}{l} - \frac{6 EI}{l^2} (v_1 - v_2) \quad (2-2-2-22)$$

2.4.3 Identification des composantes de la matrice de rigidité

On peut facilement identifier les composantes de la matrice de rigidité de la poutre en groupant ces quatre équations dans une même équation matricielle.

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (2-2-2-23)$$

$$\{F\} = [k] \{u\} \quad \text{avec}$$

$$[k] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

3 Calcul de structure par la méthode matricielle

3.1 Matrice de transfert

Afin de simplifier les calculs, chaque matrice de rigidité élémentaire est calculée dans un repère local propre à l'élément en question. Cependant, cette procédure rencontre un obstacle lors de l'assemblage de toutes les matrices de rigidité élémentaires dans la matrice de rigidité globale.

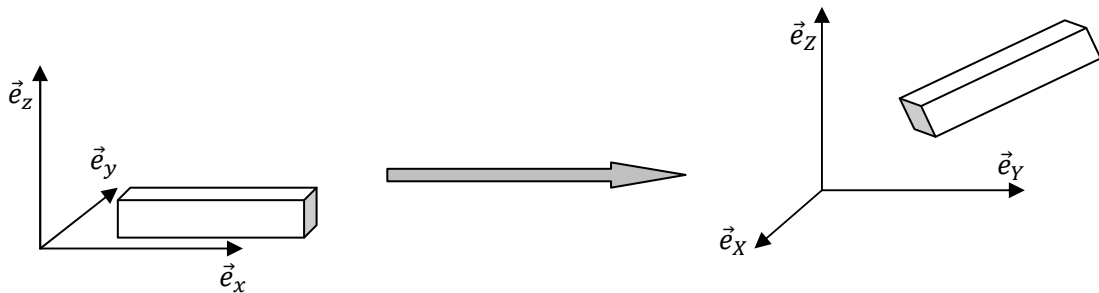


Figure 6 : transfert de coordonnées

Dans le but de contourner cette adversité, il est indispensable de confectionner une matrice de transfert qui reporte les déplacements ainsi que les efforts en coordonnées locales dans le repère global où l'assemblage sera effectué.

Pour le cas où la structure se situe dans un espace tridimensionnel, la matrice de transfert doit avoir la forme suivante¹.

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

3.1.1 Matrice de transfert d'un vecteur local en un vecteur global

Considérons un premier repère local (x, y, z) ainsi qu'un deuxième repère global (X, Y, Z) . Considérons ensuite un vecteur quelconque $\vec{u}$ ayant les coordonnées suivantes dans le repère local.

$$\{\vec{u}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Alors, la matrice de transfert $[t]$ donne les coordonnées de ce vecteur dans le repère global en usant des paramètres de l'ancienne base (e_x, e_y, e_z) dans la nouvelle base (e_X, e_Y, e_Z) .

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & v \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & w \sin \theta \sin \varphi \\ -u \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -v \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & w \sin \theta \cos \varphi \\ u \sin \psi \sin \theta & -v \cos \psi \sin \theta & w \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.1.2 Matrice de transfert des composantes d'une matrice de rigidité élémentaire

Dans le repère local où il se trouve, un élément de structure est contenu dans une dimension : l'axe des x . De plus, il n'est chargé que dans une direction perpendiculaire à cet axe. Ce qui fait que la matrice de rigidité élémentaire n'a que deux dimensions.

D'une autre part, le problème d'un système de poutres qui fait l'objet d'une telle étude n'est toujours pas forcément plan. Il y a donc lieu de convertir la matrice de rigidité élémentaire plane en une matrice équivalente à trois dimensions avant de la transférer dans la matrice de rigidité globale de la structure.

Pour ce faire, convenons d'adopter les notations suivantes :

- U_1 est la composante suivant l'axe OX du vecteur de déplacements $\vec{U}_1$;
- V_1 est celle suivant l'axe OY ;
- et W_1 suivant l'axe OZ .

¹ Voir le chapitre sur la méthode des éléments finis.

De même :

- X_1 composante de l'effort transversal $\vec{X}_1$ suivant l'axe OX ;
- Y_1 celle suivant l'axe OY ;
- et enfin Z_1 celle suivant OZ .

D'abord, avant toute conversion, il est impératif de transférer la matrice de rigidité élémentaire à deux dimensions dans un espace tridimensionnel. Moyennant les constantes A , E et G de la matrice de rigidité d'une barre et du facteur commun d'une poutre tordue par celui d'une poutre fléchie, la matrice de rigidité tridimensionnelle d'un élément possède la forme suivante.

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GI_p}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{-2EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GI_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{-2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

Cette étape est nécessaire pour pouvoir écrire l'équation matricielle élémentaire dans le repère global.

$$\{F\} = [k] \{U\} \quad (2-2-3-1)$$

Notons que le transfert d'un vecteur et d'une matrice de la base locale vers la base globale n'influe que sur les valeurs de leurs composantes. Par conséquent, leurs dimensions restent toujours les mêmes.

Pour faire suite à cette transformation, la matrice de transfert $[t]$ doit être reformulée de manière à ce qu'elle s'adapte à la nouvelle forme de la matrice de rigidité. En effet, la matrice $[t]$ ne peut transférer que les composantes d'un vecteur de l'ancienne base vers la nouvelle alors qu'il nous faut une matrice $[T]$ pouvant transférer, en un même temps, la matrice des efforts d'une part et la matrice des déplacements d'une autre part.

La conception de la matrice $[T]$ moyennant la matrice identité $id3$ s'effectue de la manière suivante :

$$[T] = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix}$$

Remarque

Afin de ne pas perdre trop de temps à déterminer les deux angles de rotation θ et φ , une manière plus commode de spécifier la rotation d'une poutre est de fixer d'une part, un axe de coordonnées autour duquel la rotation doit s'effectuer et d'autre part, un angle de rotation par rapport à l'axe initial (principal) de la poutre.

3.1.3 Transfert de la matrice de rigidité élémentaire

Enfin, la dernière étape de la transformation consiste à exprimer l'équation matricielle en fonction du vecteur global des forces $\{F\}$ ainsi que celui des déplacements $\{U\}$.

Nous savons que :

$$\vec{e}_x = [t] \vec{e}_x \quad (2-2-3-2)$$

Donc :

$$\{F\} = [T] \{f\} \quad (2-2-3-3)$$

Et de même :

$$\{U\} = [T] \{u\} \quad (2-2-3-4)$$

D'autre part, l'équilibre d'un élément de la structure se traduit par l'équation (2-3-1).

Ce qui fait que :

$$[T] \{f\} = [k] [T] \{u\} \quad (2-2-3-5)$$

$$\{f\} = [T]^{-1} [k] [T] \{u\} \quad (2-2-3-6)$$

En identifiant les trois premiers termes du second membre par la matrice de rigidité globale d'un élément, l'assemblage de toutes les équations matricielles telles que celle-ci retrouve l'équation matricielle de la structure entière.

$$\{f\} = [K] \{u\} \quad (2-2-3-7)$$

3.2 Réseau de poutres

La méthode matricielle permet de résoudre un problème de calcul de structure en assimilant chaque élément du système à un élément de poutre isolé dont l'assemblage conduit à la structure initiale. Sur ce, la méthode présente certaines démarches dont la plus importante est la modélisation de la structure.

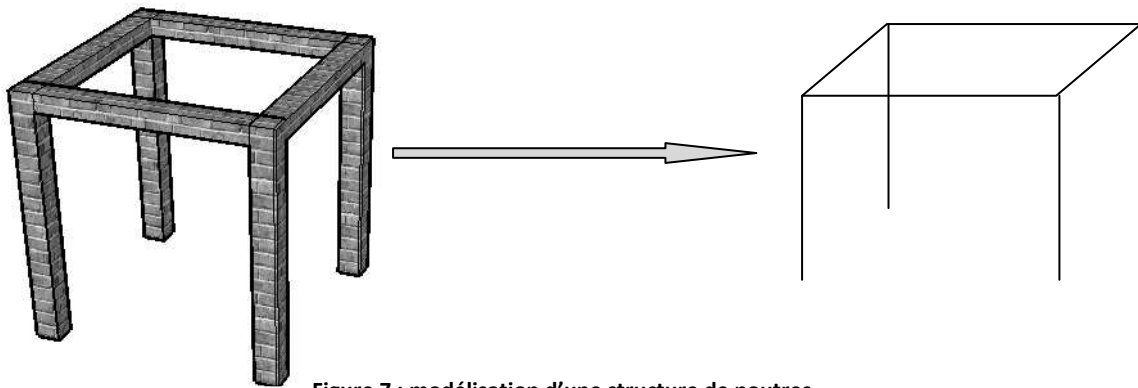


Figure 7 : modélisation d'une structure de poutres

3.2.1 Etapes de calcul

La détermination de l'état d'une structure par la présente méthode s'effectue en suivant les étapes suivantes.

1- Confection de la matrice de rigidité élémentaire

La première opération à effectuer consiste en la confection manuelle et littérale de la matrice de rigidité élémentaire d'un élément de référence dont les caractéristiques mécaniques (modules d'élasticité) et physiques (longueur, section ...) sont représentées d'une façon générale.

Afin de bénéficier d'un maximum de précision tout en effectuant un minimum de calcul,

- Pour le cas où la structure à représenter est un treillis, l'élément de référence à considérer est une barre : élément qui ignore les efforts transversaux et fléchissant ;
- Un système de poutres continues est mieux représenté par un ensemble d'éléments de poutre qui ne considèrent pas les efforts de traction-compression ;

- Et enfin, un élément de référence constitué d'une poutre qui prend en compte tous ces trois efforts suscités est employé pour représenter une structure de poutres.

2- Assemblage de la matrice de rigidité globale

La matrice de rigidité globale se déduit des matrices de rigidité élémentaires par l'assemblage de ces dernières dans une grande matrice initialement nulle. La confection de cette matrice se fait suivant les phases suivantes :

- D'abord, les dimensions de la matrice doivent être égales aux dimensions d'une matrice élémentaire multipliées par le nombre de poutres qui constituent le système.

$$\begin{cases} N = n \times \text{nombre éléments} \\ M = m \times \text{nombre éléments} \end{cases}$$

Initialement, tous les éléments de la matrice sont des zéros.

- Les éléments ainsi que les nœuds de la structure sont numérotés d'une manière à ce que les nœuds qui s'avoisinent aient des numéros rapprochés et soient reliés par des éléments rapprochés. Ceci permet de faciliter l'inversion matricielle qui sera effectuée plus tard, et par conséquent, deux numérotations différentes conduisent aux mêmes résultats.
- La matrice de rigidité élémentaire de chaque élément est insérée, dans l'ordre, dans la matrice.

Dans le cas où un nœud raccorde plusieurs éléments, chaque composante relative à ce nœud dans les matrices élémentaires de ces éléments sont sommées afin d'avoir la composante de la matrice de rigidité globale afférente.

3- Assemblage du vecteur force

Le vecteur force est le vecteur qui assemble chaque force s'appliquant au niveau de tous les nœuds de la structure. Il convient de déterminer, en avance, les nœuds qui font l'objet d'un chargement. Quant aux réactions inconnues, elles sont exprimées littéralement afin de les reconnaître facilement lors de la résolution de l'équation matricielle.

4- Résolution de l'équation matricielle

La résolution consiste à déterminer tous les éléments du vecteur force ainsi que du vecteur déplacement en résolvant l'équation matricielle finale.

$$\{f\} = [K]\{u\}$$

Dans le but de simplifier la programmation des opérations matricielles, il est conseillé de restructurer les trois termes de cette équation de manière à ce que, dans les deux vecteurs, les composantes connues se séparent des composantes inconnues.

3.2.2 Opérations matricielles

Insertions des matrices élémentaires dans la matrice globale

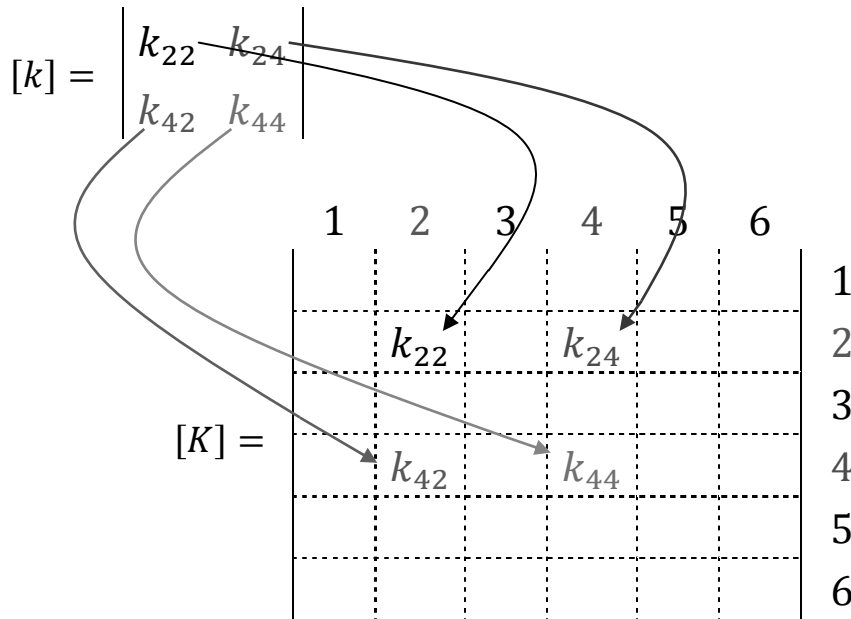


Figure 8 : conception de la matrice de rigidité

3.2.3 Résolution

Après avoir conçu tous les termes de l'équation matricielle, il convient de les trier de façon à obtenir l'équation suivante.

$$\begin{array}{|c|} \hline F \text{ connues} \\ \hline F \text{ inconnues} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline K_{cc} & K_{ci} \\ \hline K_{ic} & K_{ii} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline U \text{ inconnus} \\ \hline U \text{ connus} \\ \hline \end{array} \quad (2-2-3-8)$$

La sous-matrice ' $U \text{ inconnus}$ ' s'obtient alors, en premier lieu par les multiplications matricielles suivantes :

$$U \text{ inconnus} = (K_{cc})^{-1} \times (F \text{ connues} - K_{ci} \times U \text{ connus}) \quad (2-2-3-9)$$

Chapitre 3

Méthode des éléments finis

1 Théorème des Travaux Virtuels

Le Théorème des Travaux Virtuels est une formulation énergétique parmi les nombreux principes qui peuvent aisément traduire le comportement mécanique des milieux continus. Il est basé sur le fait que l'on effectue une simulation virtuelle du système dans le but d'observer les travaux des efforts qui lui sont appliqués selon les déplacements qui lui sont affligés. C'est une méthode assez simple qui permet de résoudre un problème de mécanique élastique. En effet, il amène à trouver les équations d'équilibre ainsi que d'autres équations de la mécanique des milieux continus par la conception d'une seule relation : celle des travaux virtuels.

Afin de faciliter la compréhension du principe, il est commode de connaître les équations de base de la mécanique variationnelle classique avant de procéder aux équations des travaux virtuels.

1.1 Equilibre des solides élastiques

1.1.1 Equilibre statique d'un solide

L'équilibre d'un solide est assuré tant qu'on peut représenter la résultante des forces qui lui sont appliquées par un tenseur nul, au niveau de son centre de gravité. Mathématiquement, cela signifie que :

- la somme de toutes les forces qui agissent sur le solide en question est un vecteur nul ;
- l'intensité de la somme des moments de chaque force qui lui est appliquée se réduit à une valeur nulle au niveau de son centre de gravité.

Par conséquent, les équations qui traduisent l'équilibre d'un solide doivent comprendre toutes les sollicitations qui sont extérieures au système.

D'autre part, la considération des efforts qui sont intérieurs au système, c'est-à-dire les efforts qui s'interagissent entre eux permet de satisfaire l'équilibre de chaque point du solide.

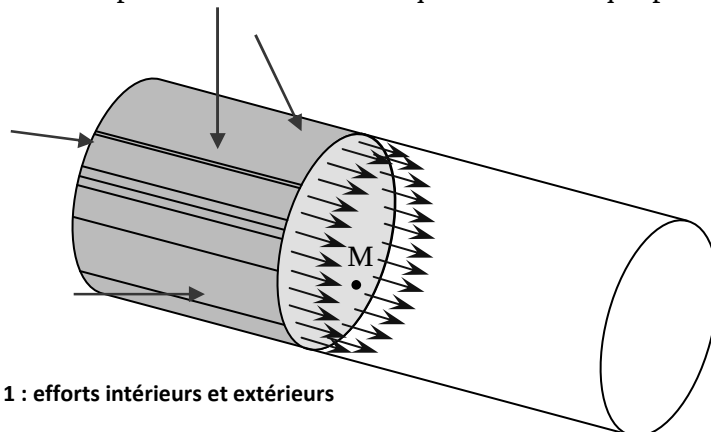


Figure 1 : efforts intérieurs et extérieurs

1.1.2 Mise en équations

Equilibre d'un point matériel

La relation fondamentale de la dynamique est la relation qui traduit l'équilibre d'un point matériel : qu'il soit en mouvement ou au repos.

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2-3-1-1)$$

Dans l'étude des solides élastiques, qui sont statiquement au repos, il suffit de postuler que la vitesse ainsi que l'accélération de ceux-ci sont ramenées à une valeur nulle.

L'équation de la dynamique se ramène donc à :

$$\vec{F} = \vec{0} \quad (2-3-1-2)$$

$\vec{F}$ étant la résultante de toutes les forces appliquées au point matériel.

Equilibre d'un élément de volume

Mathématiquement, l'équation d'équilibre d'un corps solide se déduit de celle du point matériel par l'intégration de cette dernière sur l'élément de volume V qu'il occupe. Néanmoins, il doit figurer dans cette équation, les forces de surfaces qui lient le système étudié à son milieu extérieur au niveau de sa frontière S_f . En effet, ce sont les forces qui empêchent le mouvement du corps en question dans l'espace qui le contient.

$$\int_V \vec{f} dv + \int_{S_f} \vec{T} d\sigma = \vec{0} \quad (2-3-1-3)$$

L'expression de la force superficielle $\vec{T}$ est donnée par l'équation de la contrainte en un point M sur une facette quelconque de normale $\vec{n}$.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (2-3-1-4)$$

La transformation du second terme de l'intégrale précédente par la formule d'Ostrogradsky conduit à l'expression globale de l'équation d'équilibre d'un élément de volume.

$$\int_V \vec{f} dv + \int_V \text{div } \bar{\sigma} dv = \vec{0} \quad (2-3-1-5)$$

1.2 Théorème des Travaux Virtuels

Les considérations énergétiques permettent la formulation d'un problème en tant que principe variationnel, aboutissant ainsi à une formulation intégrale. L'intérêt de ce principe est de fournir directement la forme intégrale sans avoir à passer par les équations aux dérivées partielles.

1.2.1 Enoncé du TTV

Dans un milieu en équilibre, le travail des forces qui lui sont extérieures lors d'un déplacement virtuel est égal au travail des contraintes en chacun de ses points au cours de sa déformation sous l'action de ces forces extérieures.

1.2.2 Expression du TTV

Si le travail des forces extérieures lors du déplacement virtuel du système est W_e et si celui des forces intérieures est W_i alors le Théorème des Travaux Virtuels peut être formulé par la relation suivante.

$$W_e = W_i \quad (2-3-1-6)$$

Développons les termes de ces travaux, dans le but de formuler une équation qui permet d'exprimer cette égalité à l'aide des paramètres du système.

$$\left\{ \begin{array}{l} W_e = \frac{1}{2} \int_V \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} \, dv \\ W_i = \int_V \vec{f} \cdot \vec{u} \, dv + \int_{S_f} \vec{T} \cdot \vec{u} \, d\sigma \end{array} \right. \quad (2-3-1-7)$$

Enfin, de part la différentiation de l'égalisation de ces deux équations, on peut aisément déduire une relation qui traduit le Théorème des Travaux Virtuels.

$$\int_V \bar{\sigma} : \delta \bar{\varepsilon} \, dv = \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, dv + \int_{S_f} \vec{T} \cdot \delta \vec{u} \, d\sigma \quad (2-3-1-8)$$

1.2.3 Equivalence entre les équations variationnelles classiques et le TTV

Grâce à l'équivalence entre ces deux formulations, l'équation du TTV permet de retrouver les équations des conditions aux limites ainsi que l'équilibre d'un élément de volume. La démonstration se base sur la transformation d'Ostrogradsky :

En effet, on sait que :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{u} + {}^t \text{grad } \vec{u}) \quad (2-3-1-9)$$

La substitution de cette équation dans l'expression du TTV conduit à :

$$\int_V \vec{u} \cdot (\vec{f} - \text{div } \bar{\sigma}) dv + \int_{S_f} \vec{u} \cdot (\vec{T} - \bar{\sigma} \vec{n}) d\sigma = 0 \quad (2-3-1-10)$$

2 Discrétisations

2.1 Généralités

2.1.1 Objectifs

La discrétisation est une méthode qui vise à réduire la difficulté des calculs lors de la résolution d'un problème de mécanique des milieux continus. Elle est basée sur une certaine approximation : la restriction du milieu continu en un milieu discret équivalent.

2.1.2 Définition

La résolution d'un problème de mécanique des milieux continus par la méthode variationnelle n'est pas toujours possible puisque la formulation des fonctions inconnues devient difficile, voire impossible pour les cas où le milieu en question possède une forme assez complexe. Par contre, cette méthode est ordinairement utilisée pour la démonstration d'une relation ou, à la limite, pour le calcul d'un solide ayant une forme géométrique simple. Afin de contourner cet obstacle, on a souvent recours à la reformulation du problème dans un milieu discret, défini par des points principaux qui, lorsqu'on les relie, forment un volume épousant à peu près le milieu réel initial. C'est la théorie de la discrétisation.

2.2 Problème sur les méthodes de calculs continus

Afin d'obtenir les résultats qui représentent le mieux la réalité, les méthodes de calcul variationnelles se proposent de considérer les éléments tels qu'ils sont physiquement, c'est-à-dire qu'elles s'efforcent de minimiser les approximations et les hypothèses faites lors des calculs. Il découle de ce fait que ces méthodes n'avancent des solutions que très rarement ; la plupart du temps, les calculs sont fastidieux et les équations, très délicates voire irrésolvables.

En effet, selon le problème traité et les conditions aux limites imposées, ces solutions doivent satisfaire à des équations d'équilibre qui sont sous forme d'équations différentielles ordinaires

ou intégrales. Il est clair que ces équations doivent être satisfaites en tout point du domaine quelque soit les coordonnées de ce dernier.

Par exemple, l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dx} = x$$

a comme solution générale :

$$y = \frac{1}{2}x^2 + c$$

La première équation peut-être réécrite de la façon suivante :

$$\frac{dy}{dx} - x = 0$$

Si nous utilisons notre solution et si nous remplaçons sa dérivée dans la dernière équation, nous obtenons :

$$x - x = 0 \quad \forall x$$

Autrement dit, quelle que soit la valeur de x , la solution doit impérativement satisfaire à l'équation.

Pour les cas de géométries simples, les solutions qui satisfont, et aux équations des conditions aux limites et à l'équilibre de chaque point du système étudié, peuvent souvent être déterminées de façon analytique. Quant aux cas où les géométries s'avèrent être un peu plus complexes, il est assez rare, sinon impossible, de trouver de telles solutions.

Des méthodes d'approximation se révèlent alors indispensables afin de pouvoir estimer les valeurs réelles (numériques) de ces solutions. Les degrés de précision varient suivant la technique adoptée et les caractéristiques géométriques du modèle étudié.

Il existe une quantité de méthodes d'approximation. Le choix sur leur utilisation réside dans :

- le degré d'approximation ou la finesse de la solution voulue ;
- la rapidité du calcul à mettre en œuvre et l'aisance de sa réalisation ;
- et surtout les hypothèses propres à chaque méthode.

Un des principes les plus abordables, et de ce fait, les plus utilisés est la discrétisation. Il consiste en la restriction du domaine continu en un autre domaine dit discret. La discrétisation par éléments finis réduit visiblement les calculs et permet de faciliter considérablement la résolution du problème.

2.3 Quelques méthodes de discrétisation

Les méthodes d'approximation sont utilisées lorsque les méthodes analytiques ne permettent pas de trouver une solution au problème. Elles consistent alors en la substitution du milieu en un nombre fini de paramètres dits généraux qui peuvent être aisément déterminés par des calculs numériques.

Ces méthodes, suivant les formulations, se classent en deux catégories :

- Les méthodes à formulations locales, sous forme d'équations aux dérivées partielles qui visent à transformer les équations sous forme d'intégrale par la méthode des résidus pondérés ;
- Les méthodes à formulations variationnelles visant à transformer les équations en intégrales et chercher, par la suite, une fonctionnelle par la méthode de Ritz.

Nombreuses encore sont les méthodes de résolution d'un problème du milieu continu. La méthode de Ritz et celle des résidus pondérés figurent parmi celles des plus utilisées. Sur ce, quelques méthodes issues de cette dernière seront particulièrement citées postérieurement.

2.3.1 Méthode d'approximation de Ritz

La méthode de recherche de solution approchée de Ritz s'appuie sur la minimisation de l'énergie potentielle.

Le principe du potentiel minimum est à la base d'une méthode d'approximation et de calcul puissante. L'idée est de minimiser l'énergie potentielle, non pas sur l'ensemble de tous les champs de déplacement cinématiquement admissibles, mais sur un sous-ensemble de dimension finie bien choisi.

La méthode de Ritz consiste à représenter le champ de déplacement par une combinaison linéaire de fonctions a_i et P_i , vérifiant les conditions aux limites, et qui rend minimale l'énergie du système.

Les énergies interne et externe du système qui sont respectivement notées par E_i et E_e sont telles que :

$$E_i = -U = \frac{1}{2} \int_V \bar{\sigma} : \bar{\epsilon} dv \quad (2-3- 2-1)$$

$$E_e = V = \int_V \vec{f} \cdot \vec{u} dv - \int_{S_f} \vec{T} \cdot \vec{u} d\sigma \quad (2-3- 2-2)$$

Donc son énergie potentielle est :

$$E_p = U + V = -\frac{1}{2} \int_V \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} dv + \int_V \vec{f} \cdot \vec{u} dv + \int_{S_f} \vec{T} \cdot \vec{u} d\sigma \quad (2-3- 2-3)$$

L'expression :

$$\frac{\partial E_p}{\partial a_i} = 0 \quad (2-3- 2-4)$$

combine plusieurs équations dont le nombre est égal à celui des inconnues a_i de $\vec{u}$.

2.3.2 Méthode des résidus pondérés

L'équation d'équilibre d'un point du volume est :

$$\mathcal{L}(\vec{u}) + \vec{f} = \vec{0} \quad (2-3- 2-5)$$

Celle d'un point de la frontière est :

$$\mathcal{C}(\vec{u}) + \vec{T} = \vec{0} \quad (2-3- 2-6)$$

Posons alors

$$\mathcal{L}(\vec{u}) + \vec{f} = \mathcal{R}(\vec{u}) .$$

$\mathcal{R}(\vec{u})$ est le résidu de la première équation.

Pour une fonction de pondération ψ donnée, la méthode des résidus pondérés cherche à trouver la fonction inconnue $\vec{u}$ qui annulerait une certaine fonction intégrale $W(\vec{u})$.

C'est la fonction qui représente le travail du système.

$$W(\vec{u}) = \int_V \psi \mathcal{R}(\vec{u}) dv \quad (2-3- 2-7)$$

L'annulation de cette intégrale conduit à l'annulation des deux équations d'équilibre.

2.3.3 Méthode de Galerkin

Dans un champ de déplacement $\vec{u}$, pour la version de Galerkin, la fonction de pondération ψ n'est autre que $\delta\vec{u}$.¹

¹ Le champ de déplacement est : $\vec{u} = \langle u \ v \ w \rangle$ avec $u = \langle P \rangle \{a\}$; $v = \langle P \rangle \{b\}$; $w = \langle P \rangle \{c\}$.

Alors :

$$\langle \psi \rangle = \langle \delta u \rangle = \langle \delta u \quad \delta v \quad \delta w \rangle$$

Par la suite :

$$W(\vec{u}) = \int_V \langle \delta u \rangle \{ \mathcal{R}(\vec{u}) \} dv \quad (2-3-2-8)$$

Ou plus discrètement :

$$W(u) = \langle \delta a \rangle \int_V \{ P \} (\langle \mathcal{L}(P) \{ a \} \rangle + f) dv \quad (2-3-2-9)$$

f étant la composante de $\vec{f}$ suivant la direction de projection. Développée, cette dernière équation en génère 3-n autres : le nombre des paramètres généraux.

2.3.4 Méthodes de collocation

La méthode de collocation par sous-domaines consiste à choisir des fonctions de pondération ψ constantes sur un sous-domaine de V et nulles partout ailleurs.

La méthode de collocation par points consiste à choisir des fonctions de pondération ψ non nulles en un seul point du domaine V tandis que la méthode des fonctions « spline » est obtenue en écrivant la formulation normale, morceau par morceau, et en imposant des conditions de raccordement de la fonction cherchée et de certaines de ces dérivées.

2.3.5 La méthode des sous-régions

Pour la méthode des sous-régions, la fonction de pondération est égale à l'unité. Alors l'intégrale à résoudre devient :

$$W(\vec{u}) = \int_V \mathcal{R}(\vec{u}) dv$$

2.3.6 La méthode des moindres carrés

La méthode de moindres carrés est obtenue en prenant la fonction de pondération suivante.

$$\psi = \frac{\partial}{\partial a_j} \mathcal{L}(\vec{u}) = \frac{\partial}{\partial q_j} \mathcal{L} \left\{ \sum_1^n a_i \cdot P \right\}$$

2.3.7 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis vise à rapprocher la solution exacte par une fonction résultant de l'interpolation d'une solution discrète qui n'est calculée qu'en un nombre fini de points.

Par conséquent, dans cette méthode, les fonctions intégrales sont remplacées par des sommes discrètes telles que :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_a^b f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (2-3-2-10)$$

La fonction de déplacement approchée par la méthode des éléments finis possède à peu près la forme décrite par les équations suivantes.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \{u\} \\ \{u\} &= \langle N \rangle \{u_e\} \end{aligned} \quad (2-3-2-11)$$

La fonction de déformation est obtenue par la dérivation de la fonction de déplacement.

$$\varepsilon = [B]\{\vec{u}\} \quad (2-3-2-12)$$

Où

- $\langle N \rangle$ est la fonction d'interpolation ;
- $\{u_e\}$ est le vecteur des déplacements de l'élément de référence ;
- $[B]$ est un opérateur différentiel.

Or le principe des travaux virtuels dicte l'équation suivante.

$$-\int_V \bar{\sigma} : \delta \bar{\varepsilon} dv + \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{u} dv + \int_{S_f} \vec{T} \cdot \delta \vec{u} d\sigma = 0 \quad (2-3-2-13)$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \int_V (-[\sigma] \cdot [\delta \varepsilon] + \langle \delta u \rangle \cdot \{f\}) dv = 0 \\ \int_{S_f} \langle \delta u \rangle \cdot \{T\} d\sigma = 0 \end{cases}$$

Admettons que la vérification de la première équation implique celle de la seconde puisque :

$$\mathcal{L}(\vec{u}) + \vec{f} = \vec{0}$$

implique :

$$\mathcal{C}(\vec{u}) + \vec{T} = \vec{0}$$

Après avoir remplacé respectivement les termes de $[\sigma]$ et $[\varepsilon]$, la première équation issue du principe des travaux virtuels, on a :

$$\int_V (- {}^t[\delta\varepsilon] \cdot [D] \cdot [\varepsilon] + \langle \delta u \rangle \cdot \{f\}) dv = 0$$

$$\int_V (\langle \delta u \rangle {}^t[B] \cdot [D] \cdot [B]\{u\} - \langle \delta u \rangle \cdot \{f\}) dv = 0 \quad (2-3-2-14)$$

Et en posant,

$$[K] = {}^t[B] \cdot [D] \cdot [B]$$

la simplification de cette dernière équation par la matrice uniligne $\langle \delta u \rangle$ donne l'équation finale de la méthode des éléments finis.

$$[K]\{u\} - \{f\} = 0 \quad (2-3-2-15)$$

3 Discrétisation par éléments finis

3.1 Démarche de la discrétisation par éléments finis

La discrétisation consiste à résoudre un problème donné en ne cherchant à connaître que les solutions au problème en un nombre fini de points et de trouver le reste par des interpolations. Les méthodes variationnelles, pour leur part, recherchent les solutions en tous les points du milieu sans user d'aucune approximation.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, le domaine d'étude est partagé en plusieurs éléments finis de formes géométriques simples telles que des triangles, des rectangles ou des tétraèdres afin de minimiser l'étendue du calcul à effectuer. Pour ce faire, l'enchaînement suivant doit être suivi.

- La construction de formes intégrales ;
- L'approximation par sous-domaines ;
- Et la résolution par des techniques d'intégration numérique.

Les techniques de calcul numérique seront indiquées plus tard ; pour le moment, seules les deux premières phases sont traitées en détail.

3.1.1 Formulation variationnelle

Bien qu'utilisant la méthode des éléments finis, il est nécessaire de commencer la résolution par la formulation variationnelle du problème. De ce fait, la probabilité de commettre des erreurs dans les différentes étapes qui suivent sera réduite.

Cette formulation qui consiste en la position mathématique du problème amène à :

- 1- déterminer les équations différentielles ordinaires ou partielles qui représentent le mieux le problème à traiter sous certaines hypothèses valables (problèmes d'ingénierie) :

$$\sum_i \frac{\partial^i}{\partial x^i} (\vec{u}, \vec{f}) = 0 \quad (2-3-3-1)$$

- 2- transformer le système d'équations aux dérivées ordinaires ou partielles en formes intégrales :

$$W = \int_V W(\vec{u}, \vec{f}) \cdot dv = 0 \quad (2-3-3-2)$$

Où $\vec{u}$ et $\vec{f}$ sont respectivement la variable d'état (fonction inconnue) et la fonction des sollicitations.

Remarque

En usant du principe des travaux virtuels, on n'est pas obligé de suivre cette démarche puisqu'il permet d'éviter la première étape qui est la formulation des équations aux dérivées partielles : une étape lente et fastidieuse.

3.1.2 Approximation par sous-domaines

En connaissant à peu près les multiples facettes du problème, il est plus aisé de franchir les étapes de calcul proposées par la méthode des éléments finis. L'approximation par sous-domaine comprend à peu près cinq étapes pouvant être définies comme suit.

- 1- transformer les équations d'équilibre sous forme différentielle qui sont à satisfaire en tout point du domaine en une équation intégrale qui, une fois intégrée sur le domaine, doit être nulle : elle est fondamentale pour la résolution par la méthode des éléments finis. En effet, on sait que toute intégrale peut être partitionnée en une somme d'intégrales de telle sorte que:

$$W = \sum_1^n W_e = 0 \quad (2-3-3-3)$$

Où :

$$W_e = \int_{V_e} W_e(\vec{u}_e, \vec{f}) \cdot dv \quad \text{et} \quad V = \sum_1^n V_e$$

V_e est le volume d'un élément (subdivision du domaine) et V , le volume total. Ainsi, remarquons que nous pouvons intégrer sur chaque domaine V_e , la fonction intégrale W_e et sommer le résultat par la suite pour obtenir :

$$W = 0$$

Nous pouvons donc partitionner un domaine complexe en une somme de sous-domaines relativement plus simples. Ces sous-domaines peuvent être choisis de telle façon qu'ils soient dotés d'une forme aisée comme, par exemple, des lignes, des triangles, des rectangles ou des tétraèdres. La figure suivante illustre ce concept. Ainsi, nous pouvons standardiser la forme de ces sous-domaines selon que l'on se situe dans un espace à une, deux ou trois dimensions.

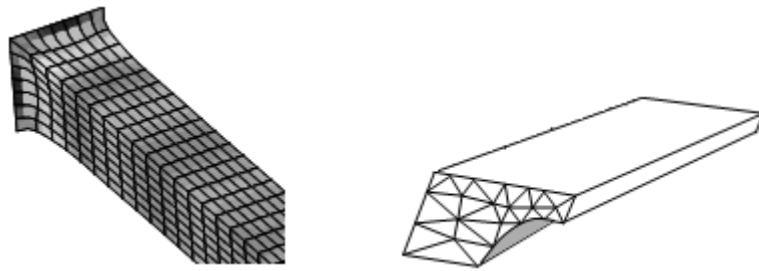


Figure 2 : Découpage en sous-domaines

- 2- étant donné que l'on peut utiliser un sous-domaine de géométrie simple, approcher la solution sur ce sous-domaine en posant une solution par une technique d'interpolation au niveau de celui-ci où seuls seront inconnus les paramètres discrets. Ainsi, la méthode des éléments finis permet d'établir une solution où les inconnues en des points discrets constituent, en général, la solution recherchée.

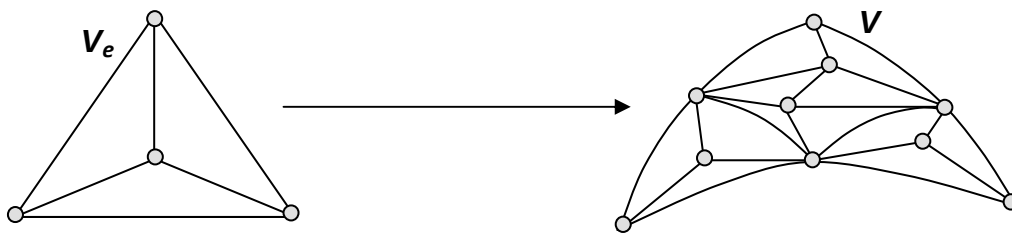


Figure 3 : Assemblage

- 3- une fois le type d'élément choisi, utiliser les fonctions d'interpolation qui régissent la variation des variables d'état $\vec{u}$ et de pondération ψ pour les introduire dans l'équation de W_e moyennant une certaine fonction g ; ce qui génère un système matériel discret du type :

$$W_e = g \langle \psi \rangle ([K_e] \{\vec{u}_e\} - \vec{f}_e) \quad (2-3- 3-4)$$

L'indice e s'associe à un élément dit élément de référence tandis que les paramètres sans indice sont propres aux variables globales.

3.1.3 Assemblage et résolution

Après les étapes de l'approximation par sous-domaines,

- 1- assembler les éléments afin de satisfaire à l'équation :

$$W = \Sigma W_e = g \langle \psi \rangle ([K] \{\vec{u}\} - \vec{f}) = 0$$

- 2- finalement, résoudre l'équation matricielle finale :

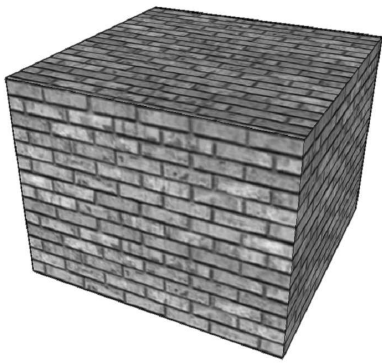
$$\{\vec{u}\} = [K]^{-1}\{f\}$$

Le vecteur $\vec{u}$ représente la solution en des points discrets (les nœuds) du domaine. À partir des valeurs discrètes, nous pouvons obtenir la solution entre les nœuds en utilisant les fonctions d'interpolation choisies précédemment.

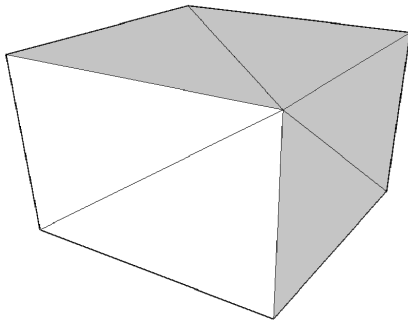
3.1.4 Résumé de la démarche par schématisation

Les figures de la page suivante schématisent les étapes suscitées pour un cas de problème tridimensionnel.

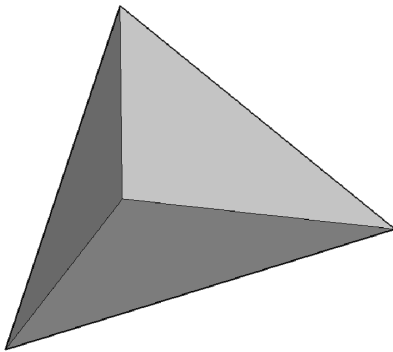
Formulation du problème



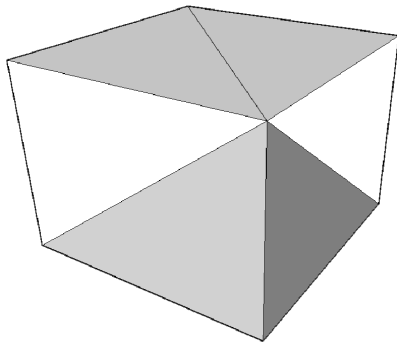
Subdivision du volume



Conception de l'élément de référence



Collecte des caractéristiques de chaque élément



Assemblage

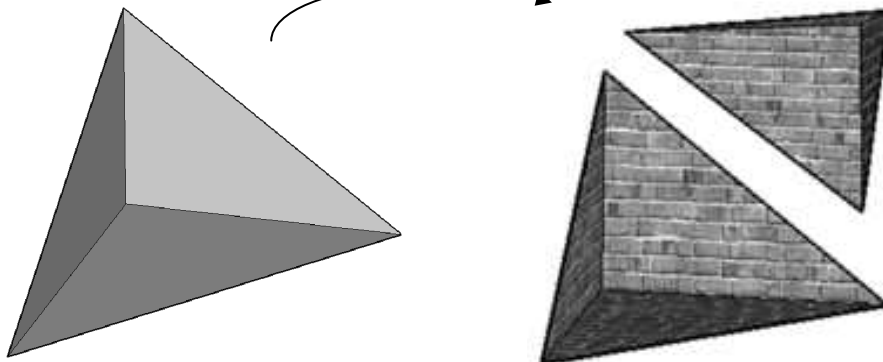


Figure 4 : étapes de la discrétisation

3.2 Éléments de référence

Selon la dimension où l'on souhaite travailler, la forme de l'élément à modéliser et le degré de précision voulu, la méthode des éléments finis offre quelques éléments de référence :

3.2.1 Éléments finis unidimensionnels

Pour une modélisation unidimensionnelle, l'élément de référence principal est l'élément barre. Il est représenté sous la forme d'une ligne qui aboutit sur deux nœuds ;

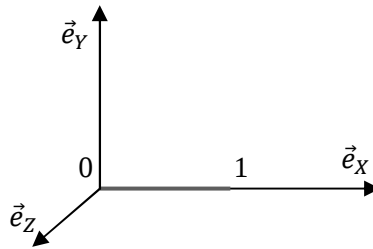


Figure 5 : Élément barre

Un autre élément de référence est aussi utilisé pour la modélisation des éléments courbes. On le reconnaît généralement sous le nom d'élément de barre (de poutre, de ligne...) courbe. Cependant, son utilisation amène à rencontrer quelques problèmes dans l'étape de l'assemblage puisqu'il est souvent paramétré par des coordonnées cylindriques.

3.2.2 Éléments finis bidimensionnels

Pour la modélisation bidimensionnelle, les éléments de référence sont nombreux. Parmi eux, les éléments suivants sont des plus utilisés.

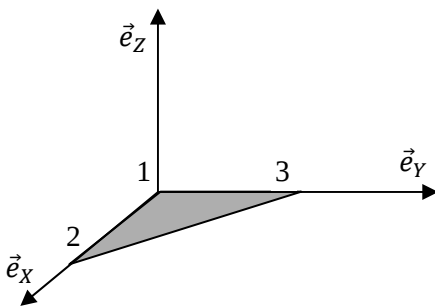


Figure 6 : Élément triangulaire

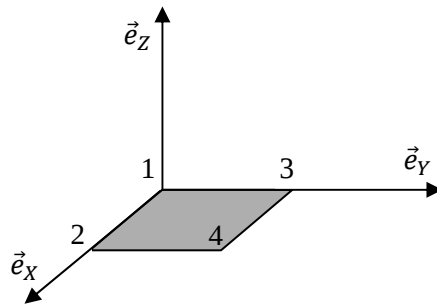


Figure 7 : Élément rectangulaire ou quadrangle

Les éléments triangulaires et rectangulaires sont les principaux éléments de référence plans. Cependant, bien d'autres éléments encore peuvent représenter les modèles plans. Qui plus est, les techniciens, afin de réduire leur calcul, n'utilisent que les éléments isoparamétriques : le triangle à trois nœuds et le rectangle à quatre nœuds.

3.2.3 Éléments finis tridimensionnels

Pour une modélisation tridimensionnelle, les éléments le plus souvent employés sont les tétraèdres à quatre nœuds et les hexaèdres à huit nœuds.

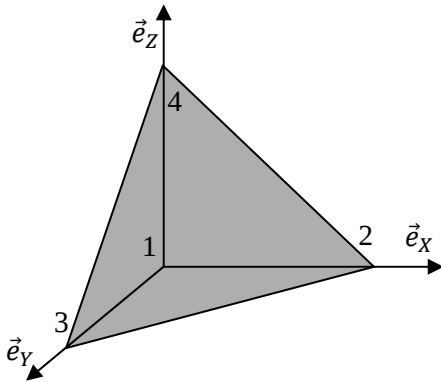


Figure 9 : Élément tétraédrique

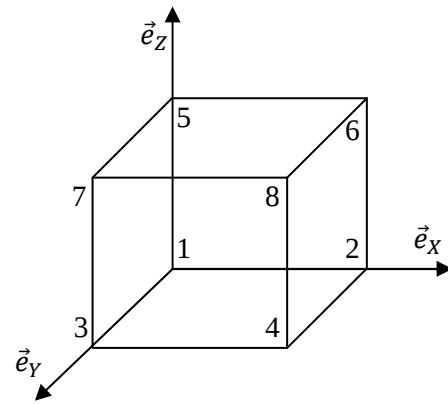


Figure 9 : Élément hexaédrique

Ces deux éléments sont les éléments les plus simples à manipuler dans la représentation des solides à trois dimensions. Leur grande force est qu'on peut reproduire leur résolution dans une programmation sur ordinateur, d'une manière relativement aisée par rapport aux autres éléments de référence.

En analysant les comportements de ces deux éléments lors du calcul, il est clair que l'élément ayant les points les plus favorables est l'élément tétraédrique. En effet, l'utilisation de cet élément requiert la considération de quatre nœuds pour le calcul de l'élément de référence au lieu de huit pour l'autre. Cela entraîne que la construction de la matrice de rigidité de celui-ci est moins complexe et que la programmation des calculs est moins rugueuse.

Toutefois, la différence entre eux ne se perçoit d'une façon évidente que lorsqu'ils sont conduits à reproduire des objets de forme complexe. L'hexaèdre connaît une petite méprise dans la reproduction d'un volume complexe par rapport à un élément tétraédrique qui possède des côtés ayant à peu près les mêmes dimensions.

En dépit de cela, un autre élément de référence, l'élément prismatique, connaît une forte fréquence d'utilisation. Ce dernier est surtout utilisé pour reproduire un volume dont la forme éprouve une certaine ressemblance à la forme du prisme ou s'il ne faut considérer qu'un petit nombre de subdivisions pour le reproduire puisque les étapes de calcul pour cet élément sont assez délicates.

3.3 Justification du choix de l'élément fini tétraédrique

Le choix de l'élément de référence tient un rôle judicieux dans la discrétisation par éléments finis. Il est évident qu'il doit respecter quelques conditions qui dépendent de l'élément réel à représenter.

Afin de ne pas se tromper sur ce choix, il convient de suivre les phases de réduction de choix qui suivent.

3.3.1 Considération de la dimension dans laquelle le calcul sera exécuté.

Il faut que la dimension de l'élément de référence épouse celle du solide, du volume, de la surface ou du segment à représenter. Par exemple, il n'est pas logique de représenter une sphère comme étant un assemblage d'une infinité d'éléments de barre courbe.

Il en découle que pour un élément de volume, les éléments sur lesquels le choix doit se faire se réduisent à :

- l'élément tétraédrique ;
- l'élément hexaédrique ;
- l'élément prismatique.

3.3.2 Forme de l'élément

L'élément de référence doit prendre en compte la forme de l'élément qu'il serait amené à reproduire. Il doit considérer toutes les facettes, tous les angles, tous les défauts et toutes les imperfections de celui-ci afin de donner la représentation la plus proche de la réalité.

Nonobstant, tout élément de référence satisfaisant à la condition du paragraphe 1.4.2, peut représenter toutes les formes moyennant quelques méprises d'approximation.

3.3.3 Degré de précision

Ce facteur ne dépend que du nombre de nœuds de l'élément de référence et de la finesse du maillage à établir. Dans le but d'avoir le maximum de précision, on doit considérer un nombre de nœuds élevé. Et de la même façon, afin de procéder à un calcul simplifié, il convient de ne considérer que le minimum de nœuds.

Cependant, il est indispensable de ne pas omettre que la performance de l'outil sur lequel les calculs doivent s'effectuer tient la place la plus importante dans le choix en question.

3.3.4 Coût du calcul

Le coût est un des principaux critères à mettre en œuvre afin de déterminer la variante de méthodes qui doit être retenue. Aussi, convenons à préciser quelques définitions concernant ce sujet.

Le coût de calcul est la grandeur qui détermine la puissance des méthodes et la quantité des calculs à promouvoir afin de résoudre un problème. Plus il est élevé, plus la méthode utilisée pour la résolution est puissante et le temps de calcul lent. L'analyse par ce critère privilégie la méthode qui présente le coût de calcul minimal parmi toutes les variantes de méthodes présentées.

En ce qui nous concerne, cette analyse conduit à ne considérer que l'élément tétraédrique puisqu'il est l'élément qui minimise le temps de calcul requis.

3.3.5 Envergure de la méthode

Le présent programme peut résoudre n'importe quel problème de résistance des matériaux tant que le solide à considérer possède un volume fini qui peut être représenté par un continuum de points. En plus des solides usuels, il peut être amené à résoudre un problème de portique (assemblage de plusieurs éléments solides). Sur ce, il y a lieu de déclarer que ces derniers possèdent des liaisons entre eux afin que le programme puisse ajuster les nœuds de raccordement.

3.4 Opérations élémentaires

3.4.1 Matrices de transfert des coordonnées

Lors de l'assemblage, une matrice de transfert permet de reporter les coordonnées du référentiel local où se trouve l'élément de référence vers le référentiel global qui contient la subdivision à représenter.

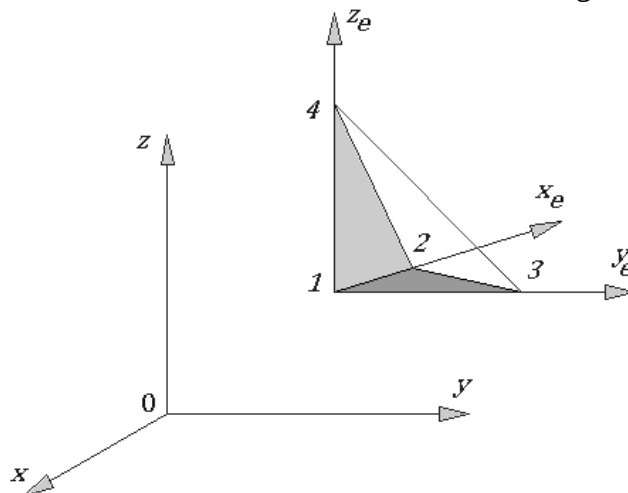


Figure 10 : élément de référence dans son repère local

Pour simplifier l'exposé, il est commode de créer une analogie entre la matrice de transfert et les angles d'Euler.

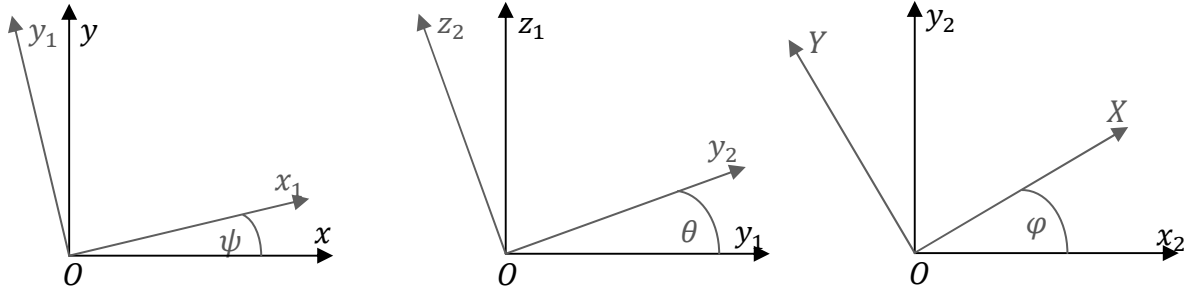


Figure 11 : changement de base

Alors, les coordonnées des vecteurs de la base locale dans le repère global sont telles que :

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\{X\} = [t] \{x\}$$

Par conséquent, chaque vecteur $\vec{u}_e$ de la base locale peut être exprimé dans le repère global par :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_e \\ v_e \\ w_e \end{Bmatrix}$$

D'où la matrice de transfert des déplacements :

$$\begin{Bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \\ \vec{u}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{u}_{e1} \\ \vec{u}_{e2} \\ \vec{u}_{e3} \\ \vec{u}_{e4} \end{Bmatrix}$$

$$\{u\} = [T] \{u_e\}$$

3.4.2 Vecteur des forces

Les forces extérieures qui sont appliquées au système, que ce soit au niveau des nœuds ou non, sont prises en compte dans le calcul à l'aide du vecteur des forces.

Les forces élémentaires s'appliquant sur un nœud i donné sont représentées par une matrice uniligne telle que :

$$\{f_i\} = \begin{Bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{iz} \end{Bmatrix}$$

3.4.3 Matrice de rigidité élémentaire

La matrice de rigidité traduit la relation qui existe entre les efforts appliqués par les nœuds sur les éléments.

Fonction de base

La conception de la matrice de rigidité élémentaire commence par le choix de la fonction de base. Dans le cas d'un élément de référence tétraédrique, la fonction de base d'un élément à quatre nœuds est telle que :

$$\langle P \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \rangle$$

Fonctions d'interpolation

La matrice uniligne N qui représente les fonctions d'interpolation se déduit facilement de la fonction de base P par la relation suivante.

$$\langle N \rangle = \langle P \rangle [P(\xi)]$$

$$\langle N \rangle = \langle 1 - \xi - \eta - \zeta \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \rangle$$

Comme l'élément de référence tétraédrique à quatre nœuds est isoparamétrique, les fonctions d'interpolation ainsi que les fonctions de transformation géométrique coïncident.

$$\langle N \rangle = \langle \bar{N} \rangle$$

Matrice reliant les déformations aux variables nodales

Selon Lagrange, la matrice des déformations se déduit du vecteur de déplacements par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

$$[\varepsilon] = [\mathcal{L}]\{u\}$$

Ce qui fait que :

$$[\mathcal{L}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{vmatrix}$$

La relation $[B] = [L] \langle N \rangle$ détermine les éléments de la matrice qui relie les déformations aux variables nodales.

par conséquent, on a :

$$[B] = \begin{vmatrix} \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & \dots \\ \dots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dots \\ \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \dots \\ \dots & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & \dots \end{vmatrix} \quad i = 1 \text{ à } 4$$

Module de Young

D'une part, dans une modélisation tridimensionnelle, le module de Young est représenté par un tenseur D d'ordre 4. En effet, il doit satisfaire à la relation

$$\bar{\sigma} = D : \bar{\varepsilon} \quad (2-3-3-5)$$

D'autre part, la loi de comportement des corps élastiques est, sous une forme discrète :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (2-3-3-6)$$

où :

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Donc, pour se passer de cette difficulté, on peut adopter les notations suivantes :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2 \varepsilon_{23} \\ 2 \varepsilon_{31} \\ 2 \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité élémentaire

Elle est obtenue en intégrant la double multiplication de la matrice du module d'Young par la matrice qui relie les déformations aux variables nodales, sur l'élément de référence.

$$[k^e] = \int_{V_e} {}^t[B] [D] [B] \det J \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (2-3-3-7)$$

Matrice de transfert

Les matrices de transfert qui sont ultérieurement notées par $[T]$, sont utilisées afin d'insérer une matrice de rigidité élémentaire dans la matrice globale lorsque l'orientation du repère local de l'élément en question diffère de celle du repère global.

$$\{U\} = [T] \{u\} \quad (2-3-3-8)$$

$$\{F\} = [T] \{f\}$$

On a alors :

$$[T] \{f\} = [k] [T] \{u\}$$

Donc :

$$[T]^{-1} [T] \{f\} = [T]^{-1} [k] [T] \{u\}$$

$$\{f\} = [K] \{u\} \quad [K] = [T]^{-1} [k] [T]$$

3.4.4 Assemblage

La matrice de rigidité est obtenue par addition des différents termes calculés sur chacun des éléments. Cette procédure est appelée assemblage de la matrice globale à partir des matrices élémentaires. Dans la phase d'assemblage, chaque subdivision V_e est amenée à apporter sa

contribution dans la reconstruction de l'élément réel V ; elle ressemble alors à une pièce d'un grand puzzle. A la fin de cette phase, quand toutes les pièces sont réunies, on doit percevoir un élément qui concorde, sinon ressemble, au volume continu.

L'assemblage doit garantir l'équilibre et la stabilité de l'ensemble. Il doit faire en sorte de connecter tous les nœuds de manière à ce qu'aucun nœud supplémentaire ne soit à rajouter dans chaque élément et permettre une continuité des champs volumiques à travers les frontières des éléments voisins.

Les grandeurs qui se rapportent à des éléments de subdivision seront affectées de l'indice « e » tandis que les grandeurs afférentes à l'élément réel seront notées sans indice.

Assemblage du vecteur des forces

Si le champ de forces $\{f_e\}$ de l'élément V_e est représenté par le vecteur f_e^i , alors le champ de force total obtenu après assemblage doit répondre à la relation :

$$\{f\} = \sum_e f_e^i \quad (2-3-3-9)$$

L'exposant i indique le numéro global du nœud tandis que l'indice e représente le numéro de la subdivision. Il découle de cette formule que la somme ne s'effectue que sur les éléments ayant, au moins, un nœud en commun.

Notons que sur les nœuds qui sont en contact direct avec le milieu extérieur (nœuds sur les appuis et nœuds de chargement), d'autres valeurs encore doivent être insérées dans l'expression du vecteur $\{f_e\}$ afin de représenter les conditions aux limites.

Assemblage de la matrice de rigidité

La matrice de rigidité élémentaire interprète les caractéristiques mécaniques d'une subdivision. Pour obtenir la matrice de rigidité totale à partir de cette matrice, on doit procéder à l'expansion de la matrice élémentaire.

Pour ce faire, on doit :

- considérer que la matrice de rigidité de l'ensemble est initialement une matrice carrée dont tous les termes sont nuls ;
- en plaçant les différentes pièces du tableau, donc chaque élément de l'assemblage, à sa place, insérer leur matrice de rigidité dans la matrice nulle ;

- vérifier, quand tous les éléments de la matrice sont installés, que seule une bande incluant la diagonale de celle-ci est peuplée ; autrement, il sera quasiment impossible d'inverser la matrice et donc de résoudre l'équation d'équilibre finale.

S'il s'avère que la matrice de rigidité ne constitue pas une matrice bande, il faut revenir à l'étape de la subdivision, en essayant de rapprocher les numéros des éléments ayant un ou plusieurs nœuds en commun.

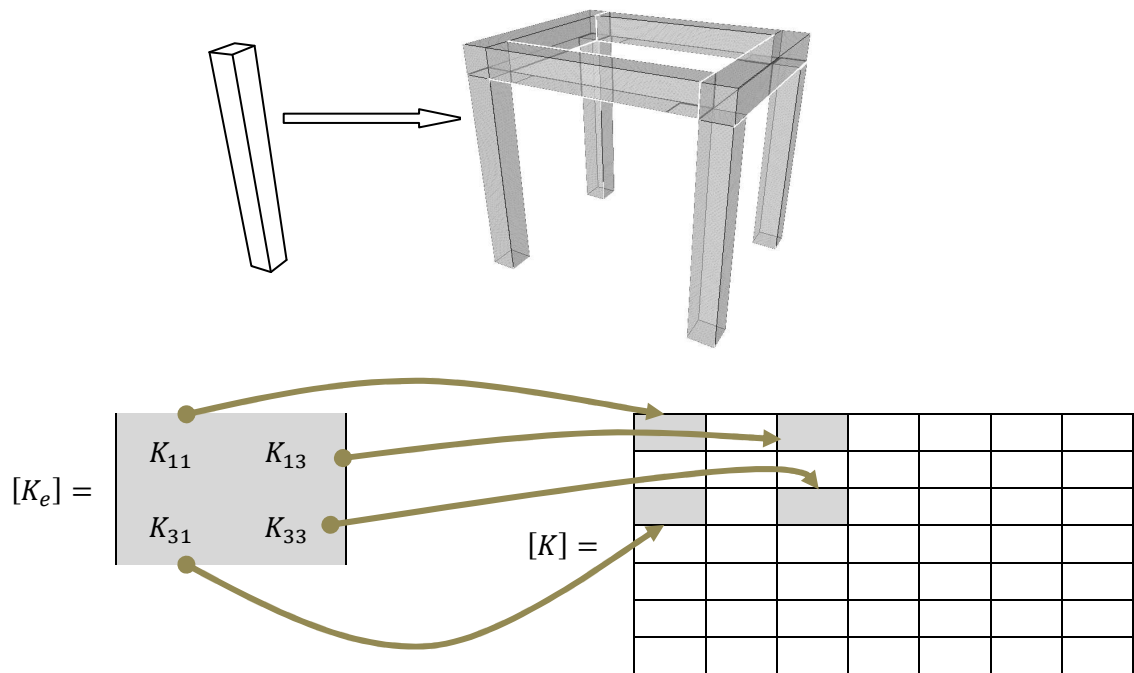


Figure 12 : ajout d'un élément

Conclusion de la seconde partie

La méthode des rotations est une des méthodes de calcul de structures les plus utilisées. Cela est dû au fait qu'elle est assez rapide. Pourtant, elle n'est employée à calculer une structure que lorsque le degré d'hyperstaticité de celle-ci est élevé.

Or, la méthode des rotations est restreinte aux portiques plans. Pour pouvoir l'utiliser à résoudre des problèmes tridimensionnels, il faut effectuer quelques extensions et en même temps, réduire le domaine d'étude par l'adoption de quelques hypothèses supplémentaires.

La méthode matricielle et la méthode des éléments finis, quant à elles, opèrent par la subdivision de la structure en un nombre finis d'éléments sur lesquels les calculs sont moins complexes.

La méthode matricielle est basée sur l'emploi d'une méthode de calcul de la Résistance des Matériaux visant à étudier un élément de poutre dit de référence. Au terme de cette étude, on obtient les équations d'équilibre de l'élément. Ces équations moyennant quelques paramètres d'état sont ensuite généralisées à chaque élément du système. Enfin, on procède à l'assemblage de ces équations selon les positions de chaque élément afin de former une équation matricielle qui traduit l'équilibre interne et externe de la structure toute entière.

La méthode des éléments finis est, par opposition à ces deux méthodes précédentes, une méthode d'approximation qui vise à calculer les fonctions de déformation de la structure en un nombre finis de points. Les résultats sont ensuite étendus à la totalité du volume de la structure grâce à une fonction d'interpolation.

Partie 3 :

Programmations





Chapitre 1

Présentation du logiciel Matlab

1 Logiciel de programmation

1.1 Préliminaires

Le calcul d'une structure donnée, quelle que soit la méthode utilisée, est toujours assez délicat. Les trois méthodes de calcul qui ont été présentées dans la partie précédente ne font qu'affirmer cette vérité. En effet, la grandeur des matrices à manipuler, la complexité des expressions à élaborer, la difficulté des calculs à effectuer ainsi que l'erreur commise lors des différentes approximations augmentent en même temps que le nombre des éléments qui constituent la structure. Dès que ce dernier atteint une certaine valeur, le calcul manuel est d'une telle complexité que les ingénieurs sont obligés d'abandonner cette option ; il y a donc lieu de recourir aux aides précieuses d'un micro-ordinateur.

1.2 Caractéristiques d'un logiciel de programmation

L'utilisation des matrices dans l'étude d'une structure réduit considérablement la difficulté des calculs tout en augmentant la lisibilité des expressions dans les différentes équations. Cependant, très peu nombreux sont les logiciels qui s'avèrent efficaces dans le but de programmer les calculs comportant des opérations matricielles. Dans le paragraphe suivant sont cités quelques caractéristiques qu'un logiciel de programmation doit avoir afin qu'il puisse être utilisé pour la programmation des calculs par les méthodes qui ont été élaborées dans la partie antérieure.

1.2.1 Manipulation

Un logiciel de programmation doit avoir une grande facilité de manipulation. Ses fonctions ainsi que ses variables par défaut doivent avoir des noms logiques afin que ses utilisateurs puissent facilement les reconnaître. De plus, il doit permettre un transfert aisé de chaque élément d'un organigramme préalablement conçu dans un ou plusieurs scripts sans modifier l'ordre hiérarchique dans ce dernier. Particulièrement, en ce qui concerne la programmation des calculs de structure, le logiciel de programmation doit comprendre plusieurs fonctions de base prédéfinies et directement utilisables par une simple écriture, une inscription ou une instruction effectuée dans l'espace de travail.

1.2.2 Rapidité

La vitesse de calcul ou la rapidité d'exécution des calculs élémentaires de base d'un tel logiciel doit être assez élevée afin de ne pas dépenser trop de temps à attendre les résultats

après avoir entré toutes les données nécessaires. Elle est un des points les plus importants qui déterminent le choix du logiciel.

Une opération entre deux matrices peut être programmée dans un logiciel qui ne reconnaît pas les matrices en tant que variables compactes puisqu'il suffit de considérer chacune de leurs composantes comme étant une variable distincte ; seulement, le calcul serait trop lent.

1.2.3 Puissance

Outre la vitesse d'exécution des calculs, la puissance d'un logiciel constitue un facteur d'appréciation important. Sur ce, il convient de définir la différence entre ces deux caractéristiques : la vitesse de calcul indique le temps imparti pour que le logiciel effectue une opération élémentaire donnée tandis que sa puissance joue sur la quantité d'opérations qu'il peut effectuer dans un même temps, c'est la capacité même de la mémoire de travail du logiciel. En effet, la taille de mémoire attribuée à une matrice est d'autant plus élevée que ses dimensions sont grandes ; une mémoire faible ne pourrait donc effectuer qu'une quantité restreinte d'opérations matricielles.

Il est, par conséquent, évident qu'un logiciel lent mais puissant est préférable à un autre logiciel rapide qui ne peut assimiler qu'un nombre limité d'opérations.

Notons de plus que lorsque la mémoire vive utilisée lors de la mise en marche du programme vient à approcher la mémoire vive du micro processeur, la taille du logiciel est à considérer en tant que facteur de choix.

1.2.4 Approximation

Les calculs assistés par ordinateur sont des calculs numériques. Or, nous savons tous que pour effectuer de tels calculs, il faut user de quelques approximations, même si ce n'est que pour arrondir les valeurs. Dans le but d'offrir une bonne lisibilité des nombres, chaque logiciel est assujéti à ne représenter dans les résultats de calcul que deux, trois ou tout au plus quatre chiffres après une virgule pour les petits nombres et à arrondir les grands nombres en les représentant par des puissances de dix. Il devient alors difficile de savoir jusqu'à quel rang s'effectuent les approximations réelles au sein du programme. Afin de se donner une idée là-dessus, il est conseillé de recourir aux guides des utilisateurs ou aux divers manuels livrés avec le produit. Sur deux logiciels, l'un est préférable à l'autre s'il possède la valeur d'approximation minimale donc le degré d'approximation maximal.

2 Matlab

Le nom du logiciel MATLAB vient de l'abréviation de deux mots anglais qui sont MATrix et LABoratory. C'est donc un logiciel de programmation et de calcul qui peut manipuler facilement des opérations matricielles.

2.1 Historique

Matlab est écrit à l'origine, en Fortran, par Cleve Moler ; il était destiné à faciliter l'accès au logiciel matriciel développé dans les projets LINPACK et EISPACK. La version actuelle, écrite en C par the MathWorks Inc., existe en version professionnelle et en version étudiant. Sa disponibilité est assurée sur plusieurs plates formes : Sun, Bull, HP, IBM, compatibles PC (DOS, Unix ou Windows), Macintosh, iMac et plusieurs machines parallèles.

Matlab est un environnement puissant, complet et facile à utiliser destiné au calcul scientifique. Il apporte aux ingénieurs, chercheurs et à tout scientifique un système interactif intégrant calcul numérique et visualisation. C'est un environnement performant, ouvert et programmable qui permet de remarquables gains de productivité et de créativité.

Matlab est un environnement complet, ouvert et extensible pour le calcul et la visualisation. Il dispose de plusieurs centaines (voire milliers, selon les versions et les modules optionnels autour du noyau de Matlab) de fonctions mathématiques, scientifiques et techniques. L'approche matricielle de Matlab permet de traiter les données sans aucune limitation de taille et de réaliser des calculs numériques et symboliques de façon fiable et rapide. Grâce aux fonctions graphiques de Matlab, il devient très facile de modifier interactivement les différents paramètres des graphiques pour les adapter selon nos souhaits.

L'approche ouverte de Matlab permet de construire un outil sur mesure. On peut inspecter le code source et les algorithmes des bibliothèques de fonctions (Toolboxes), modifier des fonctions existantes et en ajouter d'autres.

Matlab possède son propre langage, intuitif et naturel qui permet des gains de temps de CPU spectaculaires par rapport à des langages comme le C, le TurboPascal et le Fortran. Avec Matlab, on peut faire des liaisons de façon dynamique, à des programmes C ou Fortran, échanger des données avec d'autres applications (via la DDE : Matlab serveur ou client) ou utiliser Matlab comme moteur d'analyse et de visualisation.

Matlab comprend aussi un ensemble d'outils spécifiques à des domaines, appelés *Toolboxes* (ou Boîtes à Outils). Indispensables à la plupart des utilisateurs, les Boîtes à Outils sont des collections de fonctions qui étendent l'environnement Matlab pour résoudre des catégories spécifiques de problèmes. Les domaines couverts sont très variés et comprennent notamment le traitement du signal, l'automatique, l'identification de systèmes, les réseaux de neurones, la logique floue, le calcul de structure, les statistiques, etc.

Matlab fait également partie d'un ensemble d'outils intégrés dédiés au Traitement du Signal. En complément du noyau de calcul Matlab, l'environnement comprend des modules optionnels qui sont parfaitement intégrés à l'ensemble :

- une vaste gamme de bibliothèques de fonctions spécialisées (*Toolboxes*)
- *Simulink*, un environnement puissant de modélisation basée sur les *schémas-blocs* et de simulation de systèmes dynamiques linéaires et non linéaires
- Des bibliothèques de blocs *Simulink* spécialisés (*Blocksets*)
- D'autres modules dont un *Compilateur*, un *générateur de code C*, un *accélérateur*,...
- Un ensemble d'outils intégrés dédiés au Traitement du Signal : le *DSP Workshop*.

2.2 Justification du choix

MATLAB permet le travail interactif soit en mode commande, soit en mode programmation ; tout en ayant toujours la possibilité de faire des visualisations graphiques. Considéré comme un des meilleurs langages de programmation (tels que C ou Fortran), MATLAB possède les particularités suivantes par rapport à ces langages :

- la programmation facile,
- la continuité parmi les valeurs entières, réelles et complexes,
- la gamme étendue des nombres et leurs précisions,
- la bibliothèque mathématique très compréhensive,
- l'outil graphique qui inclut les fonctions d'interface graphique et les utilitaires,
- la possibilité de liaison avec les autres langages classiques de programmation (C ou Fortran).

Dans MATLAB, aucune déclaration n'est à effectuer sur les nombres. En effet, il n'existe pas de distinction entre les nombres entiers, les nombres réels, les nombres complexes et la simple

ou double précision. Cette caractéristique rend le mode de programmation très facile et très rapide.

Avec Fortran, par exemple, une subroutine est presque nécessaire pour chaque variable de simple ou de double précision, entière, réelle ou complexe. Dans MATLAB, aucune nécessité n'est demandée pour la séparation de ces variables.

La bibliothèque des fonctions mathématiques dans MATLAB donne des analyses mathématiques très simples. En effet, l'utilisateur peut exécuter dans le mode commande n'importe quelle fonction mathématique se trouvant dans la bibliothèque sans avoir à recourir à la programmation.

Pour l'interface graphique, des représentations scientifiques et même artistiques des objets peuvent être créées sur l'écran en utilisant les expressions mathématiques. Les graphiques sur MATLAB sont simples et attirent l'attention des utilisateurs vues les possibilités importantes offertes par ce logiciel.

2.3 Opérations élémentaires sur Matlab

2.3.1 Interface principale de Matlab

La figure ci-après montre un aspect général de l'interface principale de Matlab.

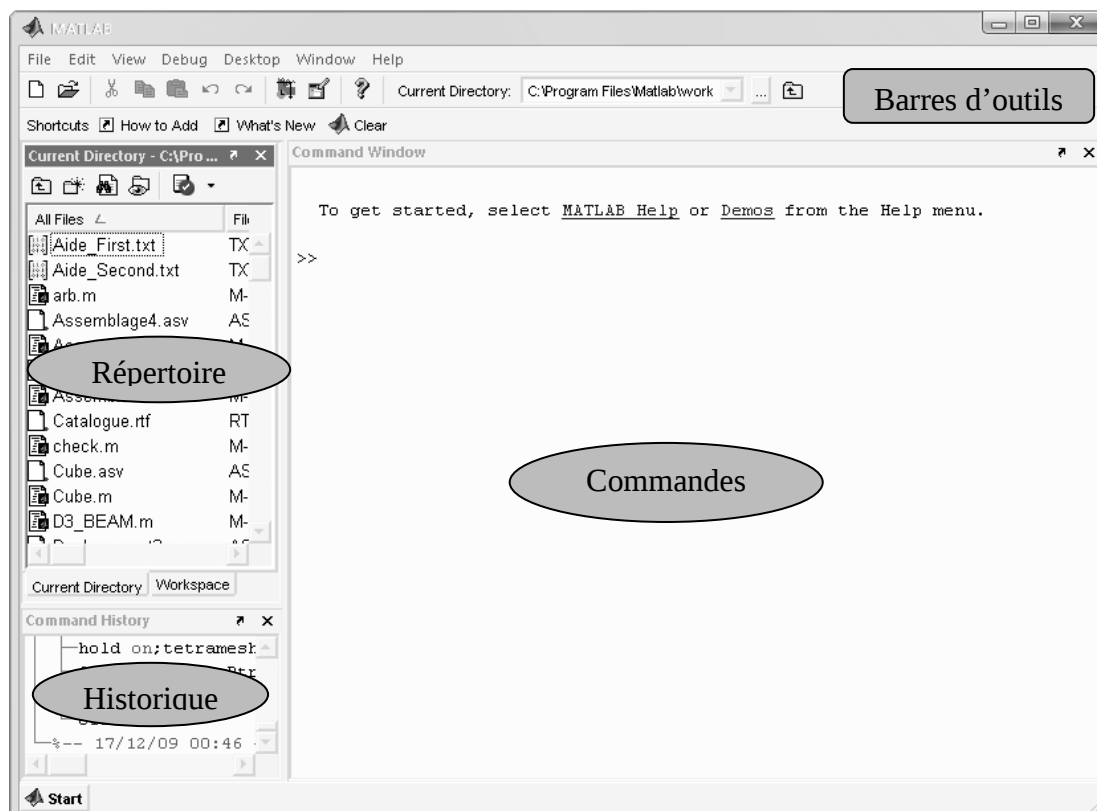


Figure 1 : interface principale de Matlab

Elle est donc divisée en plusieurs compartiments dont :

- un compartiment des commandes où l'utilisateur donne ses instructions et spécifie les opérations qu'il veut effectuer,
- un compartiment « historique » où les opérations récentes sont affichées,
- et un compartiment où les scripts programmés par l'utilisateur sont répertoriés

2.3.2 Variables en Matlab

Matlab gère les nombres entiers, réels, complexes, les chaînes de caractères ainsi que les tableaux de nombres de façon transparente. Il n'est pas utile de déclarer le type de la variable que l'on manipule, y compris les tableaux. Par ailleurs, toutes les variables utilisées restent présentes en mémoire et peuvent être rappelées.

Dans Matlab, il y a un seul type de variable : le type matrice. Un nombre est une matrice carrée d'ordre 1. Il n'y a donc pas de déclaration de variables à effectuer. De même, il n'y a pas lieu de s'occuper de l'allocation des variables dans la mémoire de travail puisque les matrices et les vecteurs peuvent être redimensionnés après leurs créations. Cependant, lorsque on utilise Matlab, par commodité, on peut supposer l'existence de 3 types de variables, à savoir : le scalaire, le vecteur (ligne ou colonne), et la matrice de dimension (n,m).

Les noms des variables et des fonctions sont composés de lettres et de chiffres. Seuls les 19 premiers caractères sont significatifs et Matlab fait la distinction entre les minuscules et les majuscules. Il est important de savoir que chaque nom de variable doit débuter par une lettre dans le but d'éviter les conflits lors d'un rappel ultérieur.

2.3.3 Variables prédéfinies

Matlab comporte plusieurs variables spécialement prédéfinies afin d'augmenter la facilité de sa manipulation. Il est conseillé de ne pas utiliser les noms de ces variables pour définir d'autres valeurs sous peine de conflits souvent très difficilement décelables. Les variables prédéfinies les plus fréquemment utilisées sont :

- π : symbole représentant le rapport constant de la circonférence d'un cercle à son diamètre
- inf : abréviation de 'infini', bornes inférieure et supérieure de l'ensemble des réels
- i, j : unité imaginaire des nombres complexes, $i = j = \sqrt{-1}$
- realmin : le plus petit nombre réel positif reconnu par Matlab

realmax : le plus grand nombre réel reconnu par Matlab

eps : erreur commise par le programme en utilisant le format 'double'

ans : abréviation de 'answer' utilisée pour définir les variables non intitulées

flops : nombre d'opérations effectuées par Matlab pendant la session

NaN : abréviation de Not-a-Number désignant les formes indéterminées

2.3.4 Opérations sur les matrices

Les composantes d'une matrice sont toujours placées dans un crochet lors de sa création ; le séparateur de lignes est le point-virgule tandis que celui des colonnes est la virgule.

```
>> A = [1, 2; -1, 3; 4, 0]
```

```
A =
     1     2
    -1     3
     4     0
```

Matlab reconnaît une matrice comme une variable compacte ; ce qui facilite considérablement les opérations matricielles. Les lois mathématiques de base telles que l'addition, la soustraction, la multiplication et la division sont des lois aussi bien internes qu'externes dans l'espace de travail de Matlab. Ainsi, pour obtenir le produit de deux matrices A et B compatibles ou bien pour avoir la matrice résultant de la multiplication de la matrice A par le scalaire B, on peut écrire la syntaxe "**A * B**"

2.4 Programmer en Matlab

Pour réaliser un calcul élémentaire dans Matlab, on peut opérer de deux manières différentes. D'abord, en écrivant les instructions via l'espace de travail, Matlab exécute momentanément les opérations demandées. Ensuite, en rédigeant dans un ou plusieurs scripts les syntaxes afférentes, Matlab exécute les opérations voulues après que les scripts soient appelés depuis l'espace de travail.

2.4.1 Extension d'un fichier programme

Un script (ou M-file) est un fichier contenant des instructions de Matlab. En Matlab, les noms des fichiers-programmes se terminent par une extension '.m'. Aucune compilation n'est à faire avant l'exécution du programme c'est au cours de son exécution qu'un message d'erreur apparaît et indique le lieu où se trouve l'erreur si elle a lieu.

2.4.2 Instructions de contrôle

Syntaxe de test ' if '

if <i>condition</i>		if <i>condition1</i>		If <i>condition1</i>
<i>instruction</i>		<i>instruction</i>		<i>instruction</i>
end		else <i>condition2</i>		elseif <i>condition2</i>
		<i>instruction</i>		<i>instruction</i>
		end		else
				<i>instruction</i>
				end

Syntaxe de branchement ' switch '

```

switch expression
    case Value
        instruction
    otherwise
        instruction
end

```

Syntaxe de boucle ' while 'et ' for '

while <i>expression</i>		for <i>indice = début :pas :fin</i>
<i>instruction</i>		<i>instruction</i>
end		end

2.4.3 Programme utilisant d'autres programmes

Matlab possède des fichiers-programmes ou scripts prédéfinis pouvant être utilisés dans l'espace de travail ou lors de la création d'un autre programme. De même, un fichier-programme créé dans Matlab peut être employé en tant que programmes prédéfinis à la seule condition que l'espace de travail coïncide au répertoire où il se trouve. Un script ' *program.m* ' peut être appelé via l'espace de travail par l'écriture dans ce dernier de la syntaxe ' *program* '.

Une programmation doit reposer sur l'écriture d'un script principal qui fait appel à des fonctions autonomes. Cela permet :

- d'améliorer la lisibilité des instructions ;

- de tester indépendamment des différentes parties de la programmation ;
- d'augmenter le degré de généralité : utilisation d'une même fonction à divers endroits du programme, voire réutilisation des fonctions dans d'autres applications.

Recommandations pour une programmation

- choisir des noms significatifs pour les variables et les fonctions
- vérifier le nombre et le type des arguments d'appel et de retour des fonctions
- n'utiliser les boucles ' for ' et ' while ' que si nécessaires, elles peuvent souvent être remplacées avantageusement par des opérations et fonctions matricielles.
- préférer les algorithmes itératifs aux algorithmes récursifs.

La figure ci-après illustre une ramification hiérarchique d'instructions dans un programme principal ' main.m '.

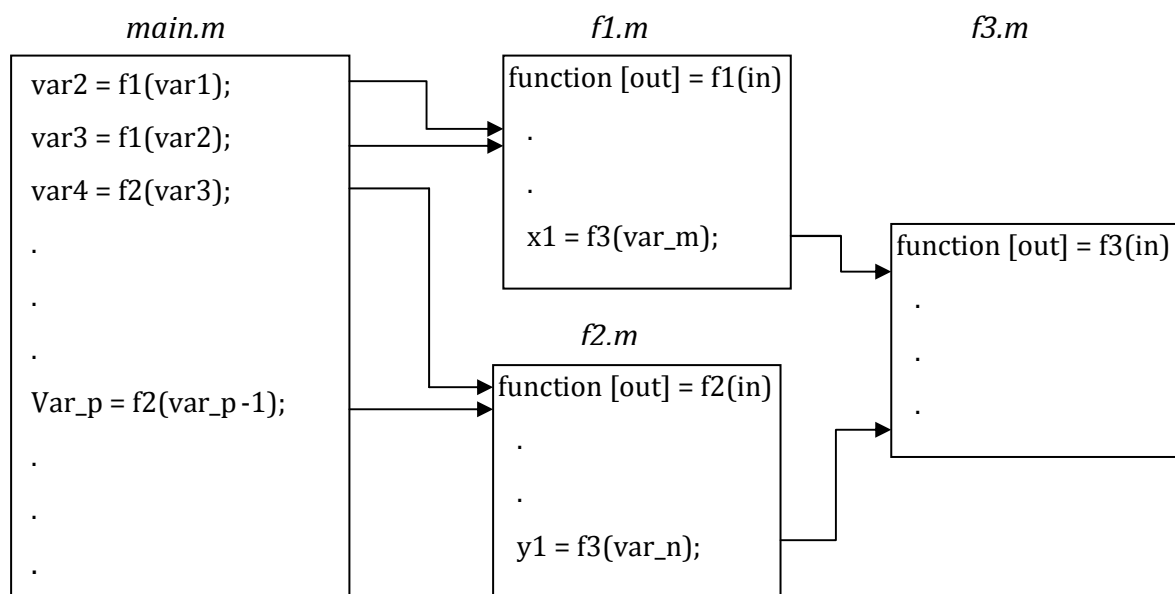


Figure 2 : script principal et scripts subordonnés

2.5.1 Définition

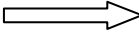
Un programme interactif est un programme intervenant dans la réalisation d'interfaces et assurant une interaction adaptée entre l'utilisateur et la machine, c'est-à-dire l'homme et l'ordinateur.

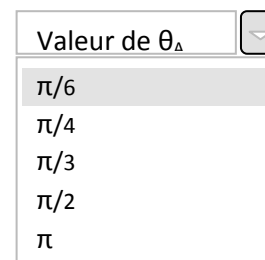
Il se présente sous la forme d'une fenêtre comportant un ou plusieurs choix sur lesquels l'utilisateur est amené à spécifier ses préférences.

2.5.2 Avantages

L'utilisation d'une interface possède plusieurs avantages dans la programmation que ce soit sur Matlab ou sur un autre langage de programmation. A savoir :

- Par rapport aux programmes souscrits sous forme de script, les programmes écrits sous forme d'interfaces sont plus pratiques du fait qu'ils permettent de recueillir le maximum de données tout en introduisant le minimum d'arguments. En effet, dans une interface, puisque les choix sont limités, au lieu d'écrire la valeur numérique d'un angle de rotation, par exemple, il suffit de sélectionner l'une des rotations prescrites dans le programme.

$\theta_A = 0,52359877559830$ | 



Valeur de θ_A
$\pi/6$
$\pi/4$
$\pi/3$
$\pi/2$
π

- D'un autre point de vue, particulièrement pour Matlab, l'emploi d'une interface permet à l'utilisateur de revenir sur n'importe quelle erreur commise lors de la saisie manuelle des arguments d'entrée. Ce qui n'est pas possible dans l'espace de travail habituel.
- Dans l'espace de travail de Matlab, l'exécution d'une commande se fait par des instructions écrites dans la fenêtre de dialogue. Dans une interface, on n'est pas obligé d'écrire ces instructions puisqu'il suffit d'appuyer sur les boutons adéquats. Les seuls arguments à spécifier sont les valeurs de quelques paramètres qui ne peuvent être formulés sous forme de choix. Ce qui permet de gagner du temps.
- L'emploi d'une interface possède l'avantage selon lequel on peut regrouper toutes les fonctions dont on a besoin dans une seule fenêtre : des axes pour la représentation des figures, des boutons pour l'exécution les calculs, des menus de choix ainsi que des textes éditables où l'on peut saisir des valeurs numériques.
- Enfin, le plus important est que l'interface permet à des utilisateurs non initiés au logiciel de programmation (ici Matlab) d'effectuer des opérations tout en ignorant la manipulation du logiciel. Il est possible de dessiner sur AutoCAD tout en ignorant la programmation sur C et sur l'Assembleur grâce à son interface.

2.5.3 Création

- 1- La fenêtre de création d'une interface dans Matlab s'ouvre par l'exécution de l'une des commandes suivantes.
 - Ecrire le mot ' guide ' dans l'espace de travail, après l'invite de Matlab ;
 - Atteindre l'icône  du ' guide ' dans la barre des tâches de la fenêtre principale de Matlab.
- 2- L'ajout de boutons, de textes éditables, de listes, d'axes graphiques ou d'autres contrôles s'effectue automatiquement en transportant l'icône correspondant dans l'interface graphique.
- 3- Après avoir confectionné la forme, il y a lieu de programmer un script qui lui est associé et qui commande les opérations à effectuer par chaque instruction donnée dans l'interface.

Matlab prépare le script en question pendant la confection même de la forme, de telle façon qu'il suffit de définir les opérations correspondant à chaque commande.

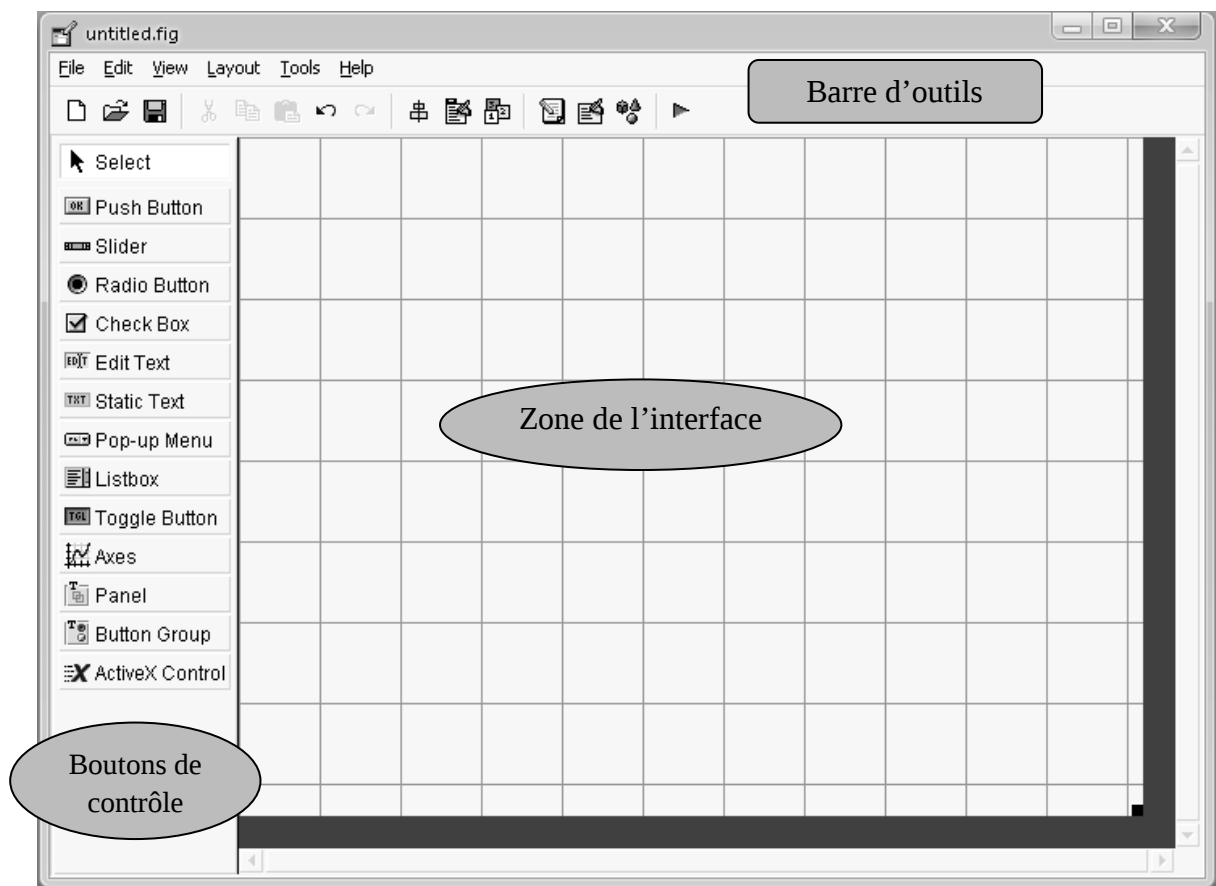


Figure 3 : interface initialement vide

Après la première étape de la création de l'interface, le logiciel Matlab affiche à l'écran une fenêtre comportant une figure initialement vide telle qu'elle est montrée par la figure qui suit.

La version 7.0 de Matlab reconnaît aussi les boutons de contrôle ActiveX comme étant ses propres boutons de commande. On peut donc recueillir des boutons de contrôle venant d'un autre programme ou même d'un autre logiciel installé dans le système pour les employer dans une interface de Matlab. Pour ce faire, il suffit d'appuyer sur le bouton  dédié aux contrôles ActiveX du champ des boutons de contrôle et de tracer la surface voulue pendant que le curseur est en mode de traçage.

Il convient de noter que la fenêtre de l'interface ne peut être redimensionnée après sa création et que l'utilisateur doit, par conséquent, spécifier les dimensions de la figure dans la deuxième étape de sa création.

2.5.4 Manipulation

La manipulation des interfaces de Matlab est tout à fait aisée puisqu'elles ont les mêmes formes ainsi que les mêmes propriétés que celles des langages de base tels que C ou Visual Basic.

Les contrôles les plus fréquemment utilisés dans une interface graphique de Matlab sont listés ci après.

Push Button	Appuyer sur ce bouton de contrôle permet d'effectuer les opérations prédéfinies.
Radio Button, Check Box	Lors d'un choix multiple, ces boutons de contrôle indiquent l'inclusion ou l'exclusion des paramètres afférents
Edit Text, Static Text	Texte éditables et texte statique non éditables.
Pop-up Menu	Menu présentant un nombre limité de choix.
List box	Tableau uniligne pouvant contenir une liste d'objets.
Axes	Emplacement pouvant contenir un schéma, une figure ou toute autre image.
Panel	Compartiment pouvant contenir et isoler plusieurs contrôles du reste de l'interface.

Tableau 1 : contrôles de l'interface graphique

Chapitre 2

Programmation de la méthode des rotations

1 Seconds membres des équations d'équilibre

1.1 Moments parfaits

Les moments parfaits ou les moments d'encastrement parfaits sont les moments que devraient avoir les éléments (poutres et poteaux) au niveau de leurs extrémités si leurs degrés d'hyperstaticité étaient réduits à zéros. Il en découle que la détermination de ces moments revient à rapporter et à étudier chaque élément dans un milieu où il sera isolé du reste du système.

En ce qui concerne la détermination des moments parfaits, dans le but d'accélérer les calculs, un catalogue ou un formulaire des résultats obtenus lors de l'étude de quelques cas de chargements d'une poutre simplement ou doublement appuyée serait à prévoir. Sinon, l'expression du moment fléchissant, dans une poutre en flexion simple, en fonction des sollicitations est donnée par la relation qui suit.

$$M(x) = M + x.P + \frac{1}{2}x^2.q(x) \quad (3-2-1-1)$$

1.2 Formulation du vecteur des seconds membres

Les éléments du vecteur des seconds membres peuvent être divisés en deux parties qui regroupent respectivement les éléments nodaux, obtenus par l'écriture des équations nodales et les éléments afférents aux mécanismes.

Les éléments de la partie nodale, moyennant un signe près, sont obtenus par la somme des moments d'encastrement parfait des éléments de la structure qui aboutissent au nœud spécifié. Les éléments de l'autre partie, par contre, sont constitués par les termes connus (de valeur) de l'équation qui régit chaque mécanisme puisqu'en effet, le vecteur des seconds membres ne doit contenir aucune expression littérale.

1.2.1 Seconds membres des équations nodales

Le vecteur des seconds membres est issu de l'insertion du second membre de chaque équation d'équilibre nodale dans un vecteur initialement nul. Cependant, l'expression de chaque second membre possède une certaine régularité de part laquelle on peut facilement déduire une formulation programmable.

Dans l'espace, pour un nœud reliant quatre poutres, le second membre de l'équation d'équilibre est de la forme :

$$-(\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4)$$

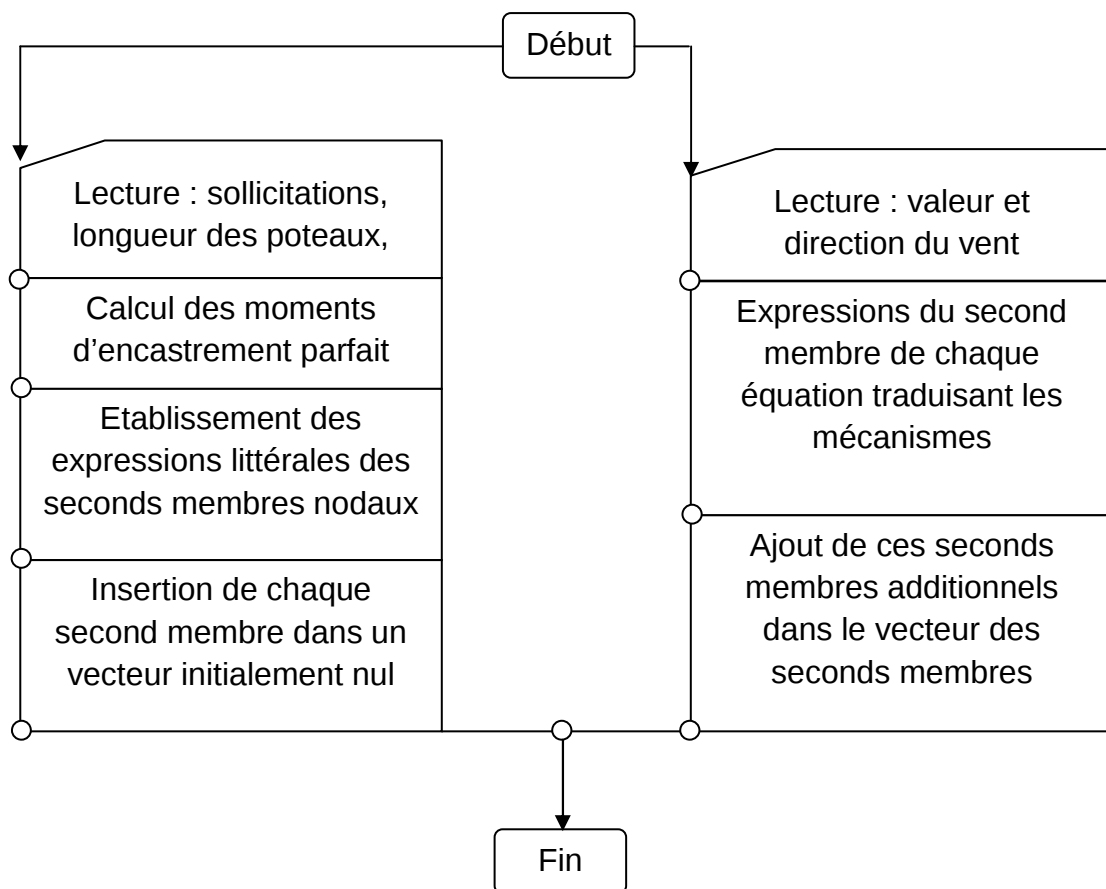
1.2.2 Seconds membres des équations de mécanismes

Par opposition à ceux des équations d'équilibre nodales, les seconds membres des équations d'équilibre des mécanismes ne connaissent pas une régularité formulable. Néanmoins, l'expression du second membre de l'équation d'équilibre du mécanisme est toujours de la forme¹ :

$$q.l + (\sum \mathcal{M}_i)$$

1.3 Organisation des calculs

Les démarches à suivre pour la réalisation du vecteur des seconds membres sont régies par les éléments de l'organigramme suivant.



1.4 Arguments d'entrée

Les données principales nécessaires pour la confection du vecteur des seconds membres sont les sollicitations ramenées au niveau des nœuds. Toutefois, le programme peut calculer, en fonction des sollicitations en travée, les valeurs des réactions aux nœuds.

¹ Voir : Partie II – Méthode des rotations - 1.5.4

1.5 Arguments de sortie

On peut retourner, de part les arguments d'entrée, les valeurs des différentes réactions aux nœuds mais comme les principales inconnues du problème sont les rotations. Le programme doit les stocker au lieu de les afficher dans le but d'avoir un gain de temps.

2 Matrice de rigidité

2.1 Facteurs de rigidité

Les facteurs de rigidité sont les valeurs qui communiquent les caractéristiques physiques de chaque élément. De ce fait, leur conception tient un rôle important dans les démarches de la méthode.

Comme les facteurs de rigidité d'un élément au niveau de ses deux bouts sont les mêmes, le programme peut ne calculer qu'un facteur par élément. Ainsi, dans le cas où le programme reçoit une instruction sur l'existence d'une articulation au niveau d'un nœud de l'élément, il doit pouvoir ajuster automatiquement l'expression de celui-ci.

- Pour un encastrement, $R = \frac{4EI}{l}$
- Pour une articulation, $R' = \frac{3EI}{l}$

2.2 Equations des mécanismes

Les équations des mécanismes ne prennent en compte que les poteaux et les poutres inclinées par rapport au plan horizontal ; elles ignorent tous ce qui se trouve dans ce plan. Ainsi, les rotations à considérer lors des opérations sur les mécanismes sont les rotations des poteaux (des poutres inclinées) ainsi que les rotations des nœuds afférents.

L'insertion des équations des mécanismes dans la matrice de rigidité du système est une opération assez délicate puisque l'automatisation des expressions littérales de l'équilibre des mécanismes au repos est quasiment impossible. Nonobstant, en utilisant la symétrie de la matrice de rigidité du système, on peut aisément avoir les éléments de la matrice de rigidité afférents aux équations des mécanismes autres que les éléments diagonaux. Quant à ces derniers, on peut facilement identifier, de part les équations théoriques, une certaine logique sur la formulation des expressions.

2.3 Formulation de la matrice de rigidité

Les opérations à effectuer pour la conception de la matrice de rigidité de la structure par la méthode des rotations sont décrites par les étapes ci après.

- Calcul des facteurs de rigidité élémentaires ;
- Numérotation des nœuds susceptibles de rotation ;
- Identification des nœuds reliés entre eux par la conception d'une matrice de connectivité ;
- Confection d'une matrice de rigidité initialement nulle ;
- Insertion des facteurs de rigidité dans cette dernière selon la matrice de connectivité ;

1	2		A	B	C	D	E	F	G
A	B		A	0	0	0	0	0	0
B	C		B	0	R_{BD}	0	$0,5R_{BD}$	0	0
B	D	→	C	0	0	0	0	0	0
C	D		D	0	$0,5R_{BD}$	0	R_{DB}	0	0
...	...		E	0	0	0	0	0	0
...	...		F	0	0	0	0	0	0
...	...		G	0	0	0	0	0	0

Tableau 1 : population de la matrice de rigidité

- Population de la matrice de rigidité par les facteurs du premier membre de chaque équation de mécanisme.

3 Résolution

3.1 Représentation matricielle de l'équilibre du système

A la fin de l'assemblage de la matrice de rigidité ainsi qu'après la confection du vecteur des seconds membres, on peut procéder à la représentation matricielle de l'équation qui traduit l'équilibre du système tout entier.

Au cas échéant, l'équation matricielle de l'équilibre du système peut être formulée par la relation suivante.

$$\{M\} = [R]\{\theta\} \quad (3-2-3-1)$$

3.2 Détermination des rotations inconnues

De part les arguments d'entrée, le programme effectue un calcul préliminaire qui vise à confectionner les facteurs de rigidité de chaque élément, les moments d'encastrement parfaits

au niveau des extrémités de chaque élément ainsi que les forces horizontales agissant sur chaque niveau de la structure.

Il rassemble, ensuite, les facteurs de rigidité de façon à obtenir la matrice de rigidité R de la structure entière. Et enfin, après avoir inversé cette matrice, il calcule le vecteur des rotations θ par le produit matriciel suivant.

$$\{\theta\} = [R]^{-1}\{S\} \quad (3-2-3-2)$$

S étant le vecteur des seconds membres.

3.3 Calcul des moments aux nœuds

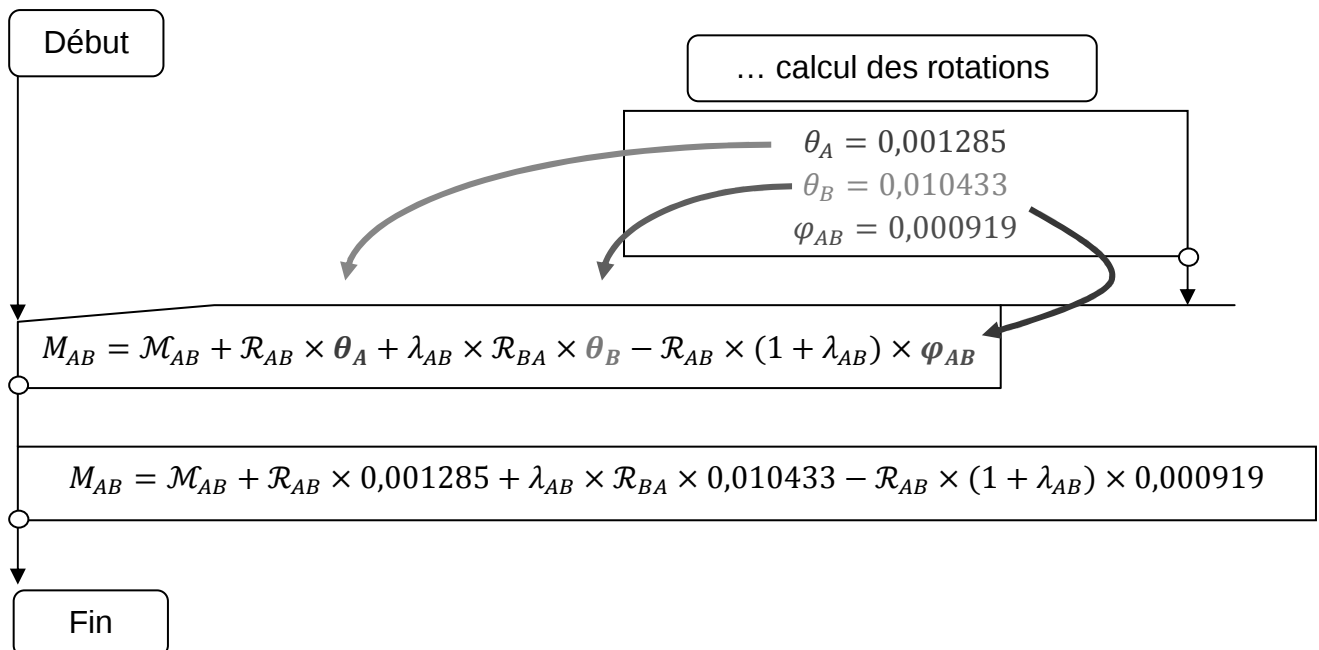
Les équations qui permettent d'obtenir les moments au niveau des extrémités de chaque élément sont les mêmes équations qui ont servi à la conception de la matrice de rigidité de la structure. Il en découle que pour retrouver ces moments, le programme doit faire l'opération inverse, c'est-à-dire :

- remplacer les expressions littérales des rotations dans ces équations par leurs valeurs respectives après leur calcul ;
- et recalculer ces moments.

D'un point de vue numérique, il suffit d'ajouter aux valeurs des moments d'encastrement parfait, le reste de l'expression des moments réels.

$$M = \mathcal{M} + \Sigma R_{ij}\theta_i \quad (3-2-3-3)$$

Ces opérations peuvent être traduites par l'organigramme suivant.

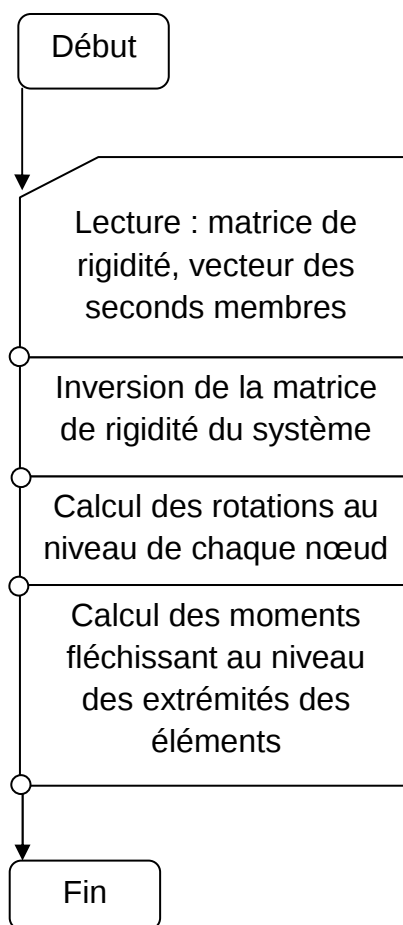


3.4 Organisation des calculs par la méthode des rotations

Comme il est énoncé dans les chapitres antérieurs, la méthode des rotations vise à déterminer l'état d'un système de poutres formant un portique par la recherche des rotations au niveau de ses nœuds.

3.4.1 Procédés

A partir de la connaissance de la matrice de rigidité du système ainsi que du vecteur des seconds membres, la démarche suivie par le programme jusqu'aux résultats finaux est décrite par les éléments de l'organigramme ci-après.



3.4.2 Arguments d'entrée

Pour ce faire, certaines instructions concernant les caractéristiques mécaniques et physiques ainsi que les sollicitations du système sont requises :

- toutes les sollicitations au niveau des nœuds et en travée ;
- les portées, les sections et les moments d'inertie de tous les éléments de la structure ;
- la disposition de chaque élément dans l'ensemble de la structure.

Dans le but de faciliter l'insertion de toutes ces instructions dans le logiciel, le programme doit les récolter d'une manière simple. Dans ce but, il ne demandera que les arguments suivants :

- Les sollicitations au niveau de chaque élément ;
- Sa portée, sa section et son inertie ;
- Le niveau ainsi que la direction de chaque élément.

3.4.3 Argument de sortie

De part ces données, le programme peut calculer les rotations ainsi que les moments de flexion aux extrémités de chaque poutre.

A partir de ces résultats, on peut, grâce aux équations classiques de la théorie des poutres, calculer les efforts normaux, les efforts tranchant ainsi que les moments fléchissant en travée de chaque élément.

Chapitre 3

Programmation de la méthode matricielle

1 Matrice de rigidité élémentaire

1.1 Arguments d'entrée

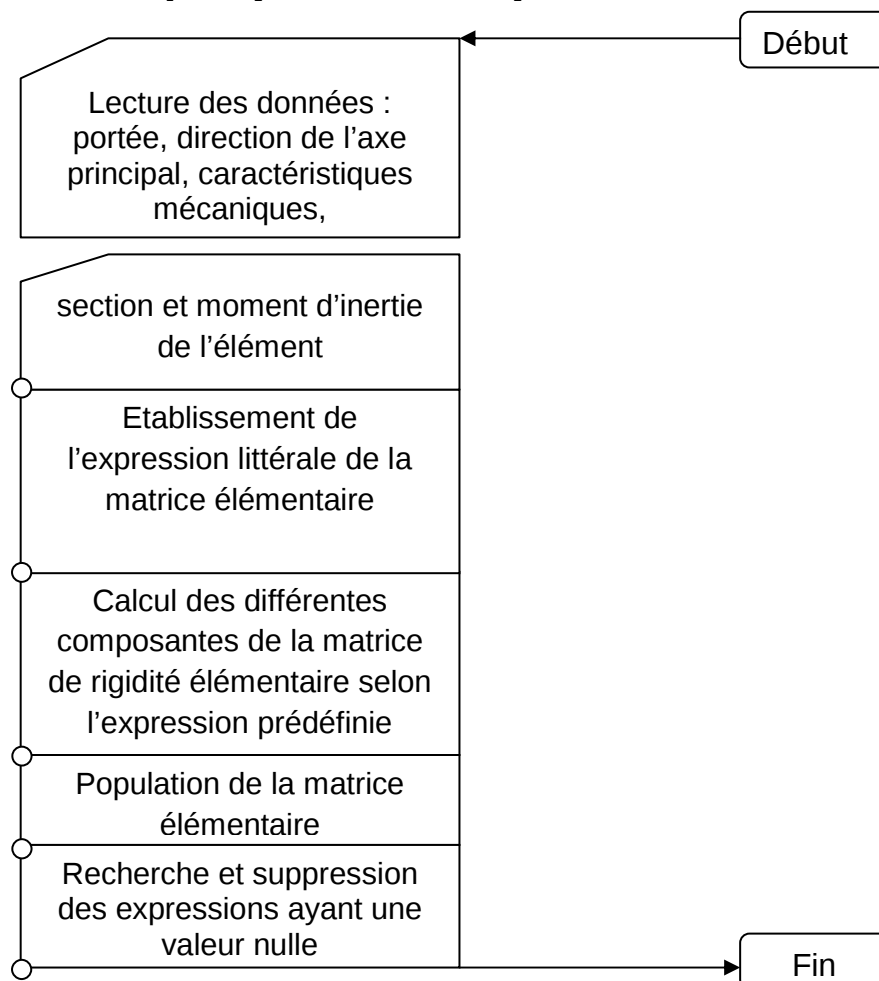
Les données nécessaires au programme sont :

- la portée de l'élément ;
- son module d'élasticité E ;
- son moment d'inertie I ;
- sa section ;
- son module d'élasticité transversal G .

1.2 Organisation des calculs

L'organigramme suivant régit le trajet suivi lors de la conception des scripts permettant de calculer la matrice de rigidité élémentaire d'un élément de la structure selon la méthode matricielle.

Notons que pour la présente méthode, la matrice de rigidité élémentaire peut varier d'un élément à l'autre, aussi bien qu'elle peut rester la même pour toute la structure.



2 Vecteur élémentaire des forces

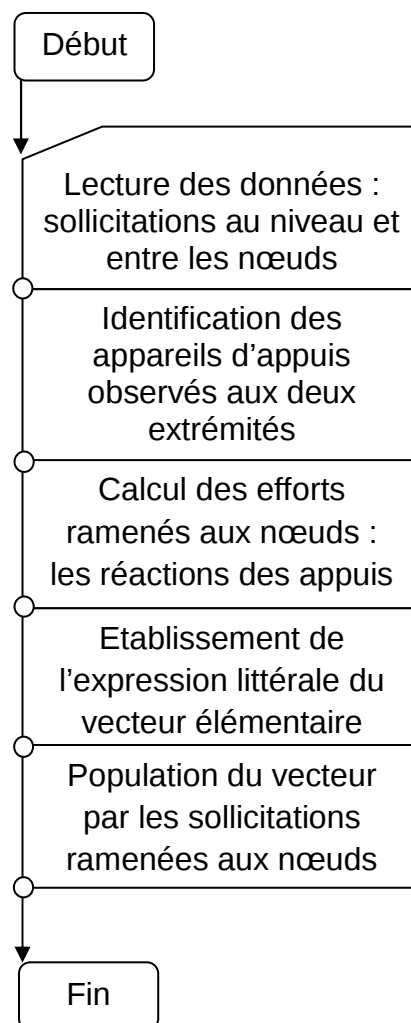
Le vecteur des forces attribuées à chaque nœud d'un élément de la structure doit comporter six lignes :

- l'effort normal, parallèle à son axe principal, qui parcourt toute sa travée ;
- l'effort tangentiel suivant la première perpendiculaire à son axe principal ;
- l'effort tangentiel suivant sa seconde perpendiculaire ;
- le moment de torsion observé au niveau du nœud ;
- le moment de flexion par rapport à la première perpendiculaire ;
- ainsi que le moment fléchissant par rapport à la seconde perpendiculaire.

Du fait qu'un élément comporte deux nœuds, en tout, il faut compter 12 composantes pour un vecteur force élémentaire.

2.1 Organisation des calculs

La conception du vecteur élémentaire des forces doit suivre la démarche indiquée par l'organigramme qui suit.



2.2 Arguments d'entrée

Les données nécessaires pour la confection du vecteur force élémentaire sont les sollicitations appliquées sur la travée de l'élément considéré ainsi que celles qui agissent directement au niveau de ses nœuds.

Comme le programme n'est pas adapté à prendre en compte les sollicitations en travée, il est nécessaire de ramener celles-ci au niveau des nœuds par l'utilisation des formules classiques de la théorie des poutres. Aussi, si la présence d'une quelconque articulation au niveau d'un nœud n'est pas signalée auparavant, le programme considère automatiquement une jointure rigide entre les éléments (encastrement).

2.3 Argument de sortie

Le programme retourne, selon les arguments d'entrée, un vecteur composé de 12 lignes dont la forme est décrite par la représentation littérale ci-après.

$$\{F_e\} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ M_{X1} \\ M_{Y1} \\ M_{Z1} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ M_{X2} \\ M_{Y2} \\ M_{Z2} \end{array} \\ \hline \end{array}$$

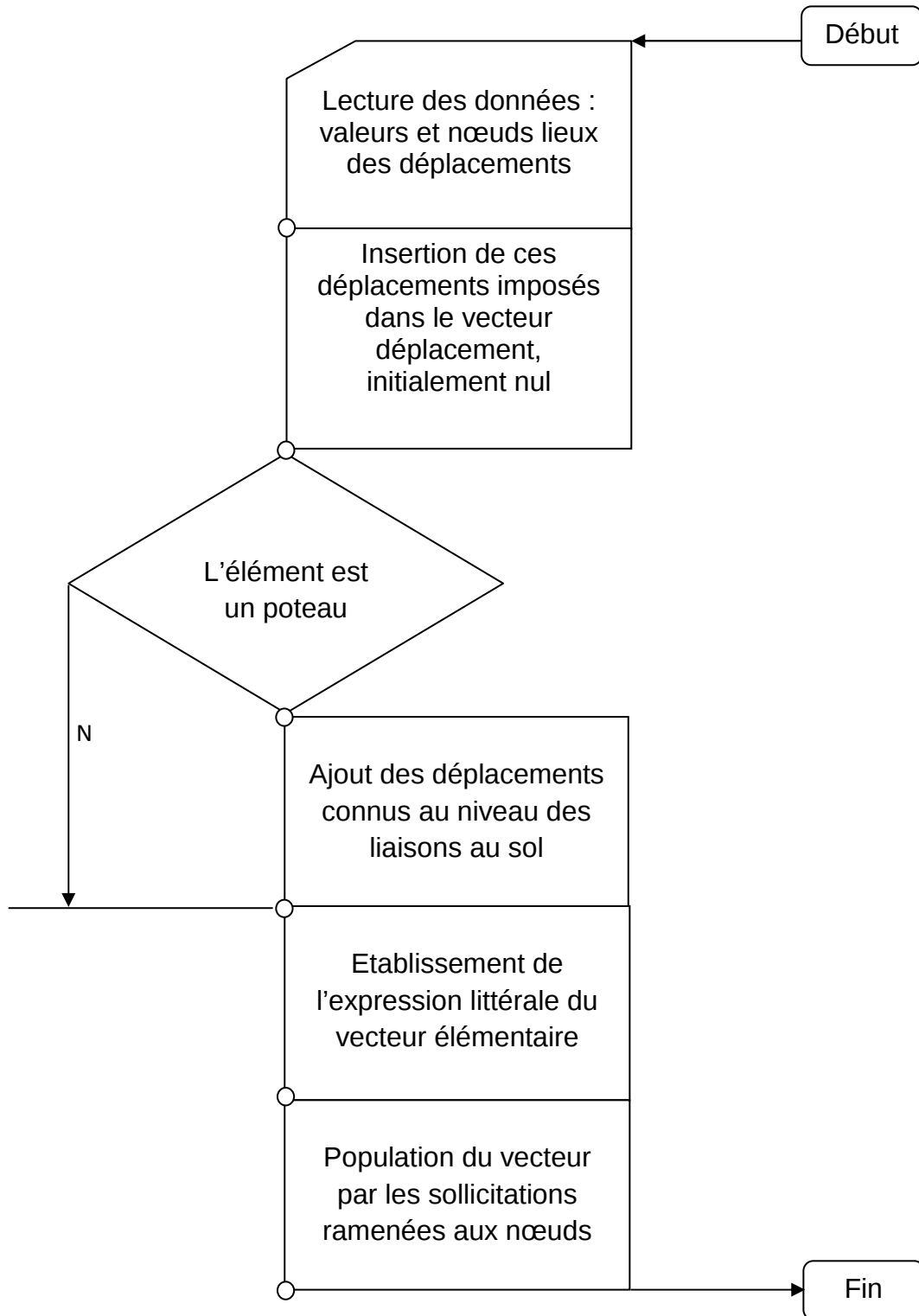
3 Vecteur élémentaire des déplacements

3.1 Arguments d'entrée

Afin de simplifier la récolte des informations nécessaires concernant les déplacements imposés au niveau des nœuds, le programme a été conçu de manière à ce qu'il reconnaisse automatiquement les nœuds encastrés au sol, de part leurs troisièmes coordonnées. Par défaut, si aucun changement de coordonnées n'est spécifié auparavant, le programme considère que les seuls déplacements connus sont ceux des ces nœuds encastrés.

3.2 Organisation des calculs

Cet organigramme représente les opérations à effectuer dans le but d'obtenir le vecteur des déplacements élémentaires.



3.3 Arguments de sortie

Au niveau de chaque nœud, la méthode prend en compte six degrés de liberté, ce qui fait que pour chaque élément, on doit compter 12 composantes du vecteur élémentaire des déplacements.

La représentation littérale ci-contre illustre l'ordre des paramètres dans un tel vecteur.

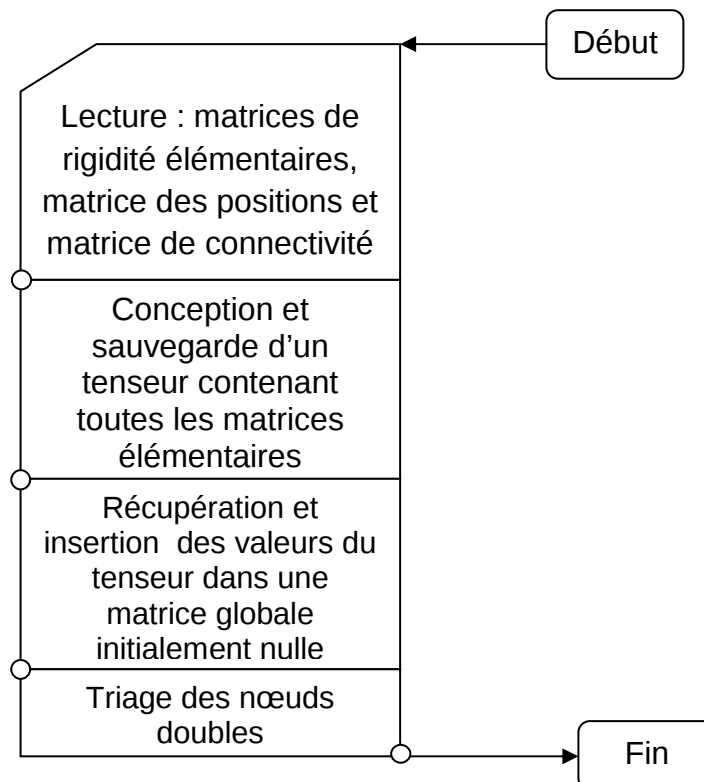
$$\{U_e\} = \begin{array}{c} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ \theta_{X1} \\ \theta_{Y1} \\ \theta_{Z1} \\ \hline U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ \theta_{X2} \\ \theta_{Y2} \\ \theta_{Z2} \end{array}$$

4 Assemblages

4.1 Assemblage de la matrice de rigidité

4.1.1 Organisation des calculs

Les étapes à suivre pour le calcul de la matrice de rigidité globale du système sont représentées par l'organigramme qui suit.



4.1.2 Procédé

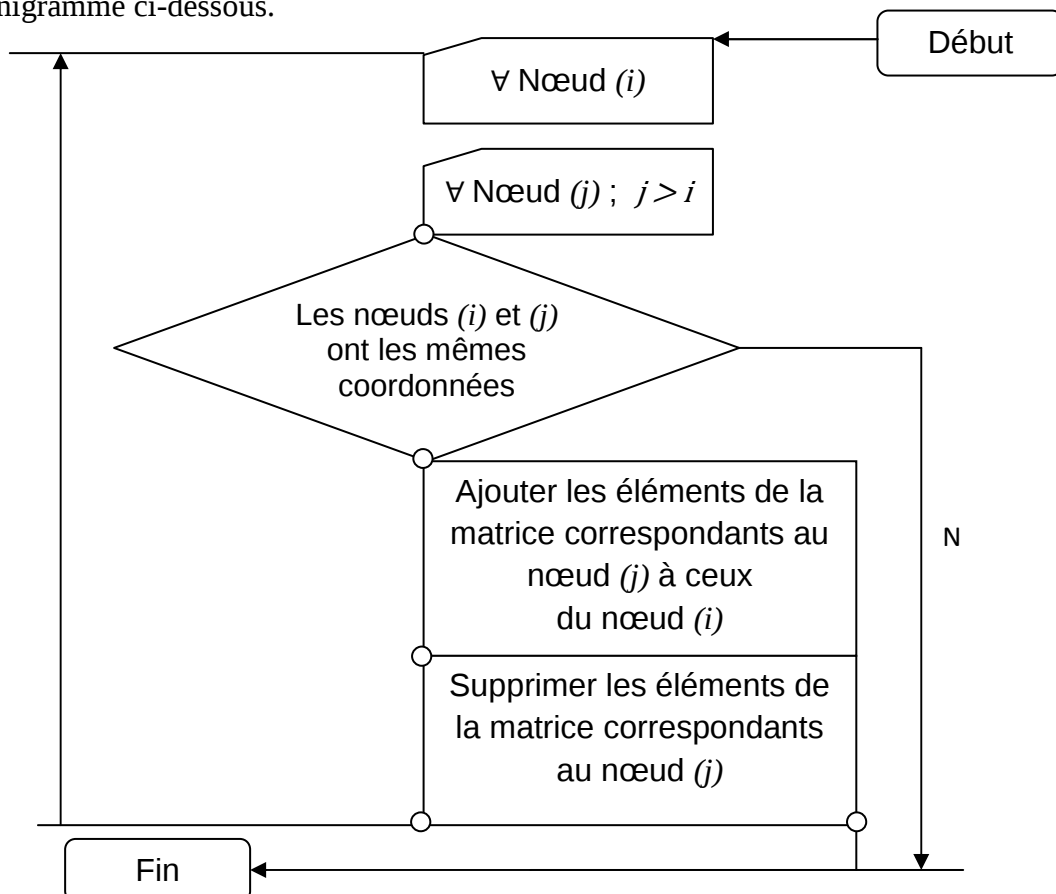
L'assemblage consiste à confectionner la matrice de rigidité globale de la structure toute entière par l'insertion de chaque matrice élémentaire dans une grande matrice initialement nulle. Pour ce faire, les arguments d'entrée sont :

- la matrice de rigidité de chaque élément de la structure ;
- la matrice des positions de l'ensemble de la structure ;
- la matrice de connectivité du système ;
- éventuellement, l'ordre de numérotation des éléments de la structure.

Les opérations à effectuer sont régies par les étapes suivantes :

- assemblage de toutes les matrices élémentaires en un tenseur cubique selon les numéros des nœuds inscrits dans la matrice des positions ou bien, selon l'ordre de numérotation des éléments décrits par la matrice de connectivité ;
- confection d'une matrice globale contenant, dans l'ordre prédéfini, les cages du tenseur de rigidité global ;
- triage des nœuds doubles.

Le triage des composantes de la matrice globale afférentes aux nœuds qui figurent plusieurs fois dans la matrice des positions est une opération assez délicate dont le concept suit l'organigramme ci-dessous.



4.2 Assemblage du vecteur des forces

4.2.1 Procédé

L'assemblage du vecteur peut s'effectuer juste après la confection des vecteurs forces de tous les éléments de la structure. En effet, à part ceux-ci, il ne nécessite que la matrice des positions ainsi que la matrice de connectivité.

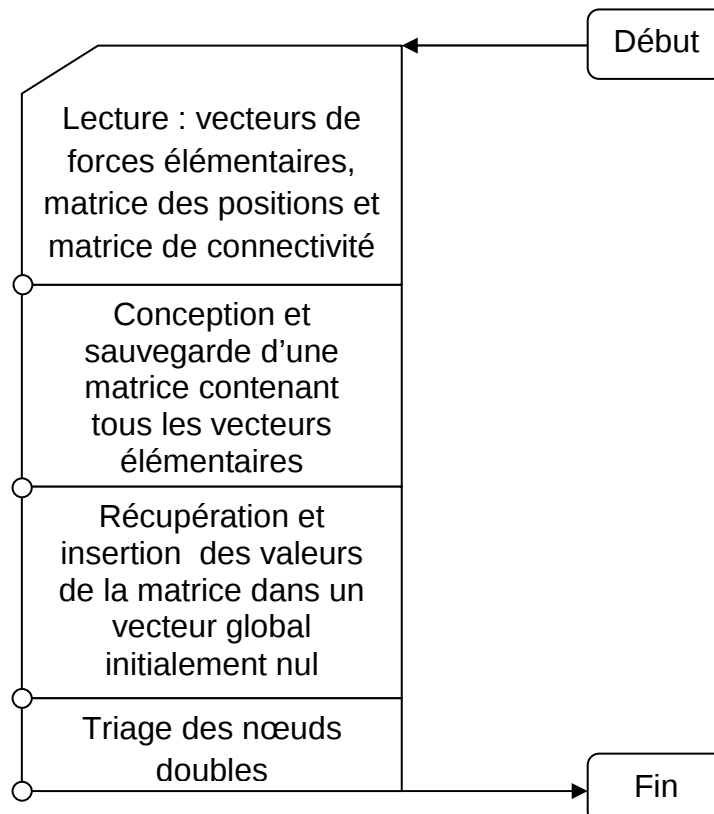
Pour obtenir ce vecteur, il faut procéder à :

- l'assemblage des vecteurs élémentaires dans une matrice initialement nulle dont les numéros des colonnes correspondent aux numéros des éléments ;
- l'insertion de chaque colonne de la matrice dans un vecteur global initialement nul de façon à respecter l'ordre prédéfini ;
- le triage des éléments correspondant aux nœuds doubles.

Sur ce dernier point, bien que l'opération présente quelques difficultés, elle peut être effectuée suivant le même principe que le triage de la matrice de rigidité globale du paragraphe précédent.

4.2.2 Organisation des calculs

Le procédé de l'assemblage du vecteur global des forces peut être résumé de la manière suivante.



4.3 Assemblage du vecteur des déplacements

4.3.1 Procédé

Le vecteur des déplacements n'enregistre que les déplacements imposés aux nœuds spécifiés ; comme le logiciel ne reconnaît pas les expressions littérales, il assimile les déplacements non spécifiés à des variables non-réelles et par conséquent, ayant une valeur nulle.

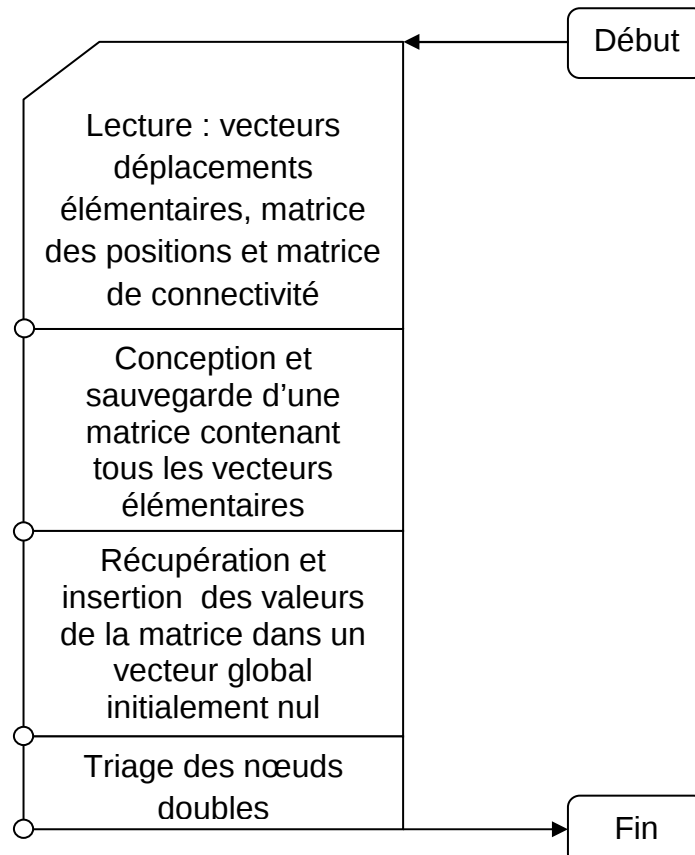
Le programme récolte les déplacements imposés dans une fenêtre de dialogue interactif et confectionne, par la suite, le vecteur des déplacements. Pour cela, il suit les démarches suivantes :

- assemblage des déplacements élémentaires dans une matrice globale de façon à respecter l'ordre prédéfini par le numéro de chaque élément ;
- récupération et insertion des valeurs de ces déplacements dans un vecteur global, initialement nul ;
- triage des nœuds doubles.

Il convient de mentionner que l'opération de triage du vecteur des déplacements suit le même principe que celles de la matrice de rigidité et du vecteur des forces.

4.3.2 Organisation des calculs

En résumé, les différentes étapes énoncées dans le paragraphe précédent sont décrites dans la schématisation suivante.



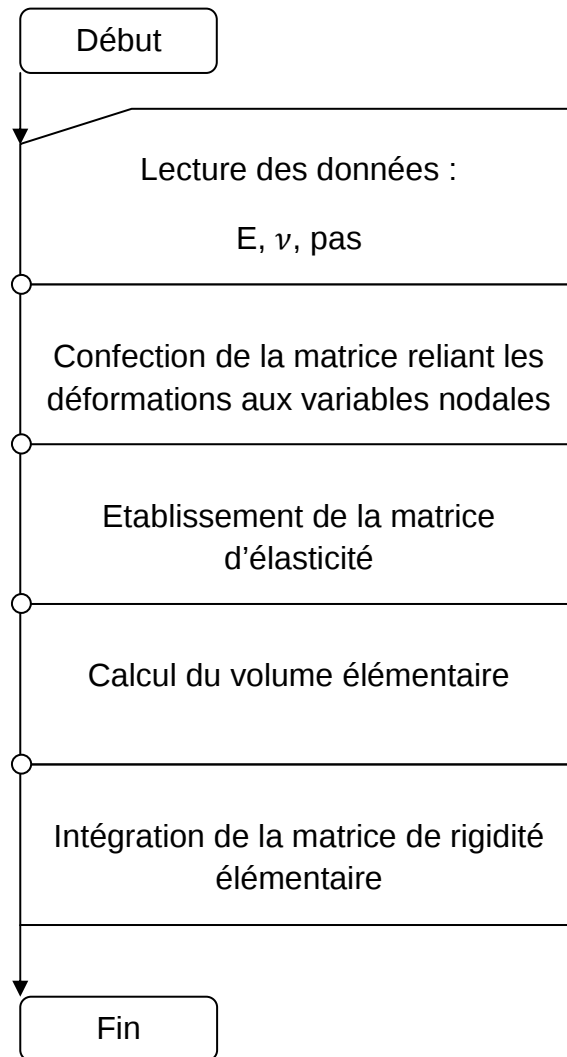
Chapitre 4

Programmation de la méthode des éléments finis

1 Matrice de rigidité élémentaire

1.1 Organisation des calculs

La programmation du calcul qui permet la conception de la matrice de rigidité élémentaire se fait suivant l'organigramme suivant.



1.2 Arguments d'entrée

Dans le programme, le script qui permet de calculer la matrice de rigidité élémentaire est la fonction ' **function** Elementaire4.m '.

Les arguments d'entrée sont les caractéristiques du matériau : le module d'élasticité et le coefficient de Poisson des éléments de la structure ainsi que le pas du maillage.

1.2.1 Module d'élasticité

En cliquant sur le menu prescrit, le programme offre plusieurs choix sur la valeur du module d'élasticité à considérer. Ces choix sont basés sur les modules de quelques matériaux couramment utilisés en Génie Civil tels que le béton, le béton armé et l'acier.

1.2.2 Coefficient de Poisson

Le coefficient de Poisson est la constante qui caractérise la répartition de contraintes dans les directions principales de l'élément étudié. Sur ce, le programme offre trois valeurs prescrites :

- 0,2 : pour les matériaux fibreux et le béton ;
- 0,3 : pour la plupart des métaux ;
- 0,5 : pour les matériaux très souples tels que le caoutchouc.

1.2.3 Pas du maillage

Le pas du maillage détermine la finesse de la subdivision à appliquer dans la discrétisation des éléments de la structure.

- Pour un maillage gros, le pas est fixé à l'unité ;
- Pour un maillage moyen, il est fixé à 0,5 unité ;
- Tandis que pour un maillage affiné, le pas correspondant est de 0,2 unité.

1.3 Argument de sortie

Afin de réduire le nombre de matrices de rigidité élémentaire à concevoir à l'unité et afin de faciliter l'assemblage entre les éléments de la structure, il faut faire en sorte que le degré du maillage de chaque poutre ainsi que de chaque poteau soit le même.

Un seul argument émane alors du script : la matrice de rigidité élémentaire. Sur ce, il convient de noter que la matrice doit être carrée et doit posséder 144 composantes réparties sur 12 lignes et 12 colonnes.

Pendant la programmation, la vérification manuelle du script de la matrice de rigidité élémentaire est cruciale puisque toutes les opérations qui s'en suivent en dépendent. Une éventuelle erreur mettrait irréversiblement en péril le programme tout entier.

1.4 Opérations manuelles pour la vérification du script

1.4.1 La fonction élémentaire de base

La fonction élémentaire de base des éléments tétraédriques est un vecteur uniligne comportant quatre composantes.

$$\langle P \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \rangle$$

1.4.2 Fonction d'interpolation

La fonction d'interpolation est obtenue en multipliant la fonction de base par la matrice qui regroupe ses valeurs au niveau des quatre nœuds du tétraèdre élémentaire.

$$\langle N \rangle = \langle P \rangle [P(\xi)]$$

Après calcul, on obtient :

$$\langle N \rangle = \langle \lambda \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \rangle$$

Afin de simplifier les expressions, la première composante de ce dernier est désignée par la lettre λ dont la valeur est :

$$\lambda = 1 - \xi - \eta - \zeta$$

1.4.3 Matrice reliant les déformations aux variables nodales

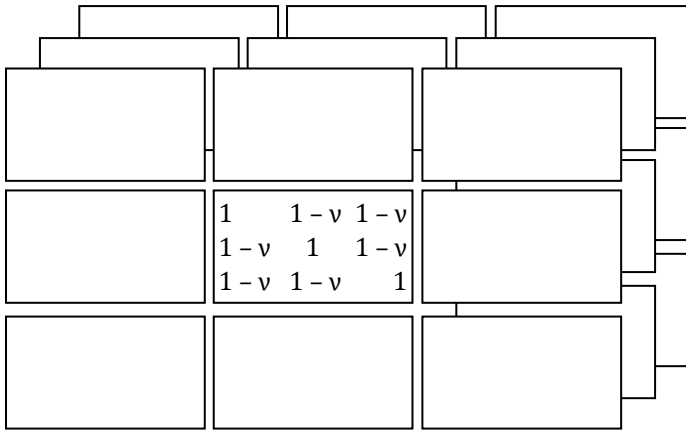
Cette matrice, reconnue sous la notation de $[B]$ est obtenue en multipliant l'opérateur différentiel qui lie la matrice des déplacements à la matrice des déformations par la fonction d'interpolation $\langle N \rangle$.

Après calcul, quand chaque élément de la matrice est remplacé par sa valeur numérique respective, on obtient :

$$[B] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1.4.4 Module d'élasticité

Pour un élément unidimensionnel, le module d'élasticité est un scalaire : un tenseur d'ordre 1. De même, pour un élément bidimensionnel, c'est un tenseur d'ordre 2 ou une matrice. Et pour un élément tridimensionnel, un tenseur d'ordre 4 est requis pour représenter son module d'élasticité.

$$[D] = E_1 \times$$


Comme la représentation d'un tel tenseur est encore assez compliquée, on a résolu de le réduire en une matrice carrée dont les valeurs sont issues du tenseur d'origine.

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{vmatrix}$$

La valeur numérique de la matrice $[D]$ n'est obtenue qu'après avoir choisi les valeurs numériques de ν et de E . Néanmoins, en tant qu'exemple, la matrice d'élasticité suivante est celle d'un élément tel que :

- $E = 2,1.10^5$ MPa
- $\nu = 0,2$
- D_{ij} en MPa

$$[D] = \begin{vmatrix} 23333,3 & 58333,3 & 58333,3 & 0 & 0 & 0 \\ 58333,3 & 23333,3 & 58333,3 & 0 & 0 & 0 \\ 58333,3 & 58333,3 & 23333,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 87500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 87500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 87500 \end{vmatrix}$$

1.4.5 Matrice de rigidité élémentaire

La matrice de rigidité élémentaire s'obtient par l'opération intégrale :

$$[k_e] = \int_{V_e} {}^t[B][D][B] \det J \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (3-4-1-1)$$

où le déterminant de la matrice jacobienne J est :

$$\det J = 6V$$

V étant le volume du tétraèdre élémentaire.

De part la valeur de [B] ainsi que celle de [D] précédentes, pour l'élément tétraédrique élémentaire, la valeur de la matrice de rigidité élémentaire, en MPa par unité de longueur, est :

-13611	-4861,1	-4861,1	2916,7	0	1944,4	2916,7	1944,4	0	7777,8	2916,7	2916,7
-4861,1	-13611	-4861,1	0	2916,7	1944,4	2916,7	7777,8	2916,7	1944,4	2916,7	0
-4861,1	-4861,1	-13611	2916,7	2916,7	7777,8	0	1944,4	2916,7	1944,4	0	2916,7
2916,7	0	2916,7	-2916,7	0	0	0	0	0	0	0	-2916,7
0	2916,7	2916,7	0	-2916,7	0	0	0	-2916,7	0	0	0
1944,4	1944,4	7777,8	0	0	-7777,8	0	-1944,4	0	-1944,4	0	0
2916,7	2916,7	0	0	0	0	-2916,7	0	0	0	-2916,7	0
1944,4	7777,8	1944,4	0	0	-1944,4	0	-7777,8	0	-1944,4	0	0
0	2916,7	2916,7	0	-2916,7	0	0	0	-2916,7	0	0	0
7777,8	1944,4	1944,4	0	0	-1944,4	0	-1944,4	0	-7777,8	0	0
2916,7	2916,7	0	0	0	0	-2916,7	0	0	0	-2916,7	0
2916,7	0	2916,7	-2916,7	0	0	0	0	0	0	0	-2916,7

Dans le programme de calcul par éléments finis, le script donnant la matrice de rigidité élémentaire est décrit par la fonction ' fonction Elementaire ' suivante :

```
function elementaire = Elementaire( Mu, E, pas )
% (elementaire) = Elémentaire( Mu, E, pas)
%% Classic functions
% Rappel des valeurs dans Fem_1.mat
if nargin < 3.0 load Fem_1 E Mu pas; end
nu = Mu; e = E; pa = pas;
```

```
clear Mu E pas

%% Corps du programme

    % Module d'Young

G = e/((1+nu)*(1-2*nu));

D = G.*[1-nu, nu, nu, 0, 0, 0; nu, 1-nu, nu, 0, 0, 0; nu, nu, 1-nu, 0, 0, 0; 0, 0, 0, (1-2*nu)/2, 0, 0; 0, 0, 0, 0, (1-2*nu)/2, 0; 0, 0, 0, 0, 0, (1-2*nu)/2];

clear G nu e

% Matrice reliant les déformations aux variables nodaux

B = [-1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0; 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0; -1, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0; -1, -1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0];

% Matrice de rigidité

    % Préliminaires

B1 = B';

R1 = B1*D*B;

clear B B1 D

if pa == .1

    Vol = ((1/6)*pa*.01); % Volume d'un tétraèdre (1/3*Base*H)

else % pas = 0.2, 0.5 ou 1.0

    Vol = ((1/6)*pa*.04);

end

Int = ((.5)*Vol^2); % Intégrale de V.dv

clear pa Vol

    % Calcul

elementaire = Int*R1; % Intégrale de B1*D*B*V.dv

clear Int R1

elementaire = sparse (elementaire);

% Réduit son volume de stockage
```

2 Vecteur des forces

2.1 Arguments d'entrée

Comme chaque nœud possède trois degrés de liberté, la taille du vecteur des forces est trois fois le nombre de nœuds du système étudié.

Les données nécessaires au programme pour calculer le vecteur des forces sont les intensités, les directions ainsi que les positions de tous les efforts connus appliqués aussi bien aux niveaux des nœuds qu'entre les nœuds.

2.1.1 Position

Pour une charge répartie telle que le poids propre ou un chargement linéaire, le programme se passe de la position et se contente de la valeur et de la direction de la charge, utiles pour reconnaître la face d'application. Il détecte ensuite, par le biais d'une fonction de distance, les nœuds qui se trouvent sur la face en question avant d'y répartir la somme de l'intensité de tout le chargement de la poutre ou du poteau sur toute sa portée.

Par contre, pour une charge ponctuelle, la position est cruciale pour reconnaître le ou les nœuds concernés.

2.1.2 Intensité

L'intensité de la charge prise en compte par le programme est comptée positivement dans le sens positif de l'axe principal qui lui est directement parallèle. Par conséquent, pour le poids propre ainsi que les éventuelles surcharges d'exploitation verticales, il est indispensable de précéder, d'un signe moins, les valeurs des intensités de chargements.

2.1.3 Direction

D'abord, la direction des efforts dans les poteaux est, soit suivant le premier axe principal $x'x$, soit suivant le second axe principal $y'y$.

Par contre, la direction de la poutre est récoltée par le programme dans la section de reproduction du volume, avant la récolte des caractéristiques des chargements. Afin d'éviter certaines erreurs de manipulation du programme, les efforts normaux dans les poutres sont restreints de façon à ce que :

- Si l'axe de la poutre suit l'axe $x'x$, la direction des forces qui y sont appliquées ne doit pas être contenue dans cette direction ; soit elle suit l'axe vertical, soit elle suit l'axe horizontal directement perpendiculaire $y'y$.
- Et si la poutre est dirigée suivant l'axe $y'y$, la direction des forces qui lui sont appliquées doit être suivant l'axe $x'x$ ou suivant l'axe $z'z$.
- Dans les cas où la poutre suit une toute autre direction, les forces peuvent être appliquées suivant n'importe quel axe.

2.2 Argument de sortie

De part les différents arguments d'entrée, le script qui opère sur le vecteur des forces permet de se procurer le vecteur global de toutes les forces appliquées dans les éléments de la structure. Le vecteur global, vecteur force du système tout entier, est obtenu par l'assemblage des vecteurs force de chaque élément de la structure.

3 Vecteur des déplacements

Le vecteur des déplacements possède une forme analogue au vecteur des forces. Les nombres de leurs lignes, de leurs colonnes donc de leurs composantes sont les mêmes. En effet, à chaque effort déclaré dans le vecteur des forces correspond, dans le vecteur des déplacements, à un déplacement qui lui est directement induit.

3.1 Arguments d'entrée

Les arguments d'entrée du script opérant dans la conception du vecteur des déplacements sont :

- La position du ou des nœuds soumis à des déplacements imposés ;
- Ainsi que les vecteurs qui représentent ces déplacements.

En effet, il est évident que dans l'espace de représentation de la structure, le déplacement d'un nœud doit être spécifié par vecteur tridimensionnel.

3.2 Argument de sortie

Par analogie au vecteur force, le script régissant le vecteur déplacement renvoie un vecteur qui contient toutes les sollicitations au niveau de chaque nœud de l'élément.

4 Assemblages

4.1 Assemblages de la matrice de rigidité globale

Dans la programmation des calculs, la méthode des éléments finis appliquée au calcul de structures comporte deux différentes étapes d'assemblage, à savoir :

- l'assemblage des éléments tétraédriques pour la construction d'un élément de la structure ;
- l'assemblage des éléments de la structure pour l'obtention du portique tout entier.

La première étape de l'assemblage est l'assemblage par éléments finis proprement dit tandis que la seconde peut être définie comme étant l'assemblage par l'extension de la méthode des éléments finis au calcul de structures.

4.1.1 Premier assemblage

Le script qui régit la première étape de l'assemblage de la matrice de rigidité varie selon le type de l'élément de structure considéré :

- Pour la conception d'une poutre, le script correspondant est la fonction ' **function** Poutre4.m ' ;
- Par contre, pour un poteau, c'est la fonction ' **function** Poteau4.m '.

4.1.1.1 Choix du type d'élément

Poutre

Une poutre peut être orientée suivant une infinité de directions dont la seule limite est l'axe $z'z$. Afin de faciliter la collecte des informations concernant les facteurs de choix de cette disposition et dans le but d'éviter la saisie manuelle des angles d'orientation qui est souvent très délicate, le programme a été doté d'un nombre fini d'options de directions.

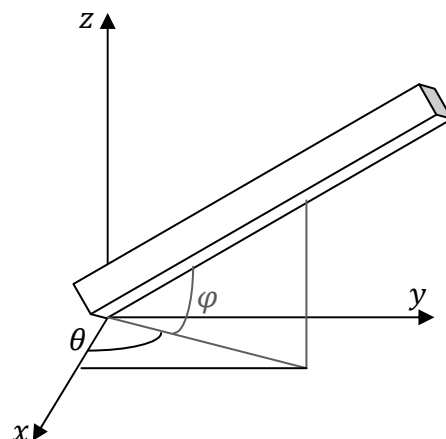


Figure 1 : orientation d'une poutre

Pour une poutre dont l'axe principal fait un angle θ par rapport au premier axe du premier plan dans le repère global, c'est-à-dire l'axe $x'x$, ainsi qu'un angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$ par rapport au troisième axe du même repère, le programme identifie les angles d'orientation de chaque élément de façon à ce que sa longueur suit son axe ; sa largeur suit alors automatiquement l'axe directement perpendiculaire tandis que sa hauteur suit l'axe $z'z$.

Poteau

Indifféremment aux diverses orientations possibles d'une poutre, les poteaux sont toujours orientés verticalement : dans la direction du troisième axe principal. Par conséquent, la programmation du premier assemblage d'un poteau est moins complexe que celle du cas d'une poutre. En effet, il suffit de déclarer dans le script que la longueur de l'élément suit l'axe $z'z$ et qu'automatiquement ses sections se situent parallèlement au plan Oxy .

4.1.1.2 Orientation d'une poutre

L'orientation d'une poutre est définie par la direction de son axe principal. Dans le but de ne pas créer de nouvelles notations, le programme utilise les notations angulaires des coordonnées sphériques afin de reconnaître la direction d'une poutre¹.

- L'angle θ est l'angle que fait l'axe principal de la poutre avec l'axe $x'x$;
- L'angle φ est, par contre, celui qu'il fait avec l'axe $z'z$.

Pour se passer de l'insertion manuelle des angles lors de l'emploi du programme, ce dernier est muni d'un nombre fini de choix qui regroupent les directions les plus fréquentes.

4.1.1.3 Conception de la matrice des positions

La matrice des positions ou matrice des coordonnées est la matrice qui liste les coordonnées de chaque nœud de l'élément de structure suivant un ordre spécifique. Sa conception est cruciale puisque la subdivision du volume de l'élément considéré en dépend. Les scripts qui aboutissent à la matrice des positions, selon le type de l'élément et à part son orientation, utilisent les coordonnées de départ ainsi que les coordonnées d'arrivée de l'élément : c'est-à-dire les valeurs de X_{min} , X_{max} , Y_{min} , Y_{max} , Z_{min} et Z_{max} .

¹ Pour les rotations complexes, on doit se rapporter aux angles d'Euler

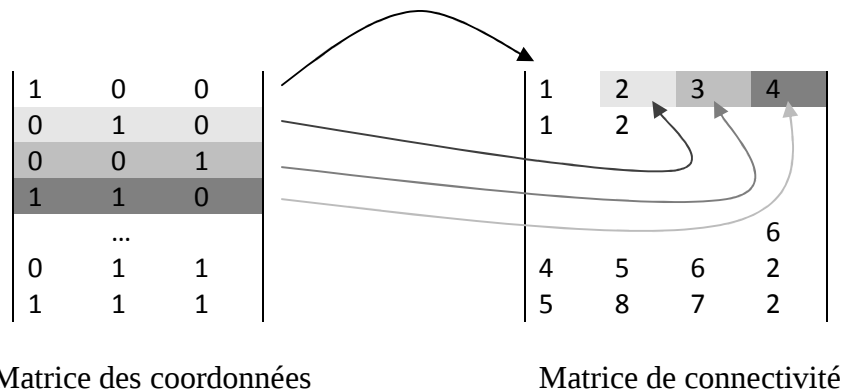
4.1.1.4 Tessellation² de la matrice des positions

De part les coordonnées des nœuds, le programme utilise une tessellation qui vise à lier ces derniers afin de définir un modèle de maillage. La matrice issue d'une tessellation est, par conséquent, la matrice de connectivité utilisée dans les opérations ultérieures.

Dans tout le programme, la tessellation de calcul est du type Delaunay tandis que celle de la reproduction du volume est la tessellation par défaut de Matlab : le type ' patch '.

4.1.1.5 Création du maillage

Avant d'entrer dans les détails, il est important de savoir qu'une matrice des coordonnées est une matrice à trois colonnes tandis qu'une matrice de connectivité comporte quatre colonnes.



Un script permet de créer une maille en reliant les quatre nœuds dont les numéros figurent dans une même ligne de la matrice de connectivité.

De part cette liaison, un autre script crée une figure contenant la représentation du volume engendré par la matrice des coordonnées de façon à reproduire toutes les mailles.

Dans le programme, le script qui conduit à la création d'une maille est appelé ' fonction delaunayn.m ' tandis que le second script est la fonction ' fonction tetramesh.m '.

4.1.2 Second assemblage

Après avoir obtenu toutes les matrices de rigidité élémentaire venant de tous les éléments de la structure, le programme procède à la conception de la matrice de rigidité globale qui représente la structure toute entière.

² Matérialisation des limites de chaque subdivision

4.1.2.1 Arguments d'entrée

Pour cela, le programme à besoin :

- de la matrice de rigidité de chaque élément ;
- de la matrice de coordonnées de chaque élément ;
- de la matrice de connectivité de chaque élément.

4.1.2.2 Procédés

La première opération à effectuer est la confection de la matrice de coordonnées ainsi que de la matrice de connectivité de la structure toute entière.

- D'abord, la matrice de coordonnées de chaque élément de la structure est insérée dans un tenseur d'ordre 3 initialement vide dont les numéros des cages³ correspondent aux numéros des éléments en tâchant de respecter l'ordre de ces derniers. Cette opération est nécessaire afin d'éviter les problèmes de stockage de valeurs ;
- Pour des vérifications ultérieures, il est important de recenser les dimensions de chaque matrice élémentaire ;
- Vient ensuite l'assemblage de la matrice de connectivité, de la même manière que la matrice des coordonnées ;
- Enfin, de part ces deux tenseurs cubiques, le programme confectionne les matrices de coordonnées et de connectivité de l'ensemble en triant les mêmes nœuds qui se retrouvent plusieurs fois dans différents éléments. Cette opération est un peu délicate puisque les coordonnées d'un même nœud peuvent différer de quelques 10^{-16} unité près lors de leurs confections ; il convient alors d'utiliser un autre script permettant d'effacer cette méprise.

La seconde opération consiste en la confection de la matrice de rigidité globale.

- De la même façon que les opérations précédentes, il est essentiel de reporter, en premier lieu, la matrice de rigidité de chaque élément dans un tenseur cubique dont les numéros des cages correspondent aux numéros des éléments ;
- Ensuite, le programme confectionne la matrice de rigidité globale du système en insérant la matrice de rigidité de chaque élément dans une matrice initialement nulle ;
- Un script de triage vient ensuite supprimer les coefficients de rigidité afférents aux dédoublements des nœuds qui étaient triés de la matrice des coordonnées. Il faut

³ Troisième dimension d'un tenseur d'ordre 3.

prendre garde d'enregistrer les numéros des éléments retirés afin de pouvoir effectuer une quelconque vérification ultérieure. Notons que cette opération de triage ne peut se faire que si on a accès aux composantes de la matrice des coordonnées avant et après son triage.

4.1.2.3 Argument de sortie

La matrice qui résulte de ces opérations est la matrice de rigidité de l'ensemble. Cette matrice doit avoir à peu près la forme d'une matrice bande puisque chaque matrice élémentaire est, de part sa confection, une matrice plus ou moins diagonale.

Notons que la matrice peut comporter quelques éléments qui se retrouvent loin de la diagonale, ce qui est tout à fait logique puisque lors de l'opération du triage, les facteurs de rigidité correspondant aux nœuds doubles sont rajoutés à ceux qui se rapportent aux nœuds dédoublés.

4.1.3 Données utiles

Par la synthèse de tous les arguments qui figurent dans les paragraphes qui précèdent, les données utilisées par le programme, dans le but de fournir la matrice de rigidité globale sont :

- Le module d'élasticité du matériau de fabrication des éléments de la structure ;
- Le coefficient de Poisson y afférent ;
- Le type du maillage ;
- Les coordonnées de départ et d'arrivée de chaque élément ;
- Et l'orientation des poutres.

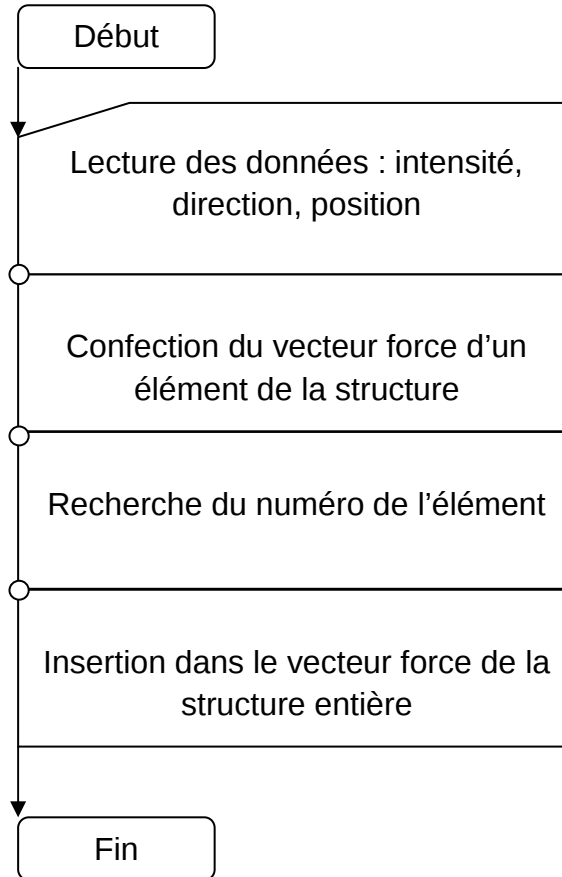
Remarque

Lors de la conception du programme, la conservation des tenseurs cubiques regroupant respectivement les matrices des positions, les matrices de connectivité et les matrices de rigidité de tous les éléments de la structure est cruciale afin de se préserver d'éventuelles erreurs commises pendant l'édition de tous les scripts.

4.2 Assemblage du vecteur force

4.2.1 Organisation des calculs

La programmation des opérations de calcul du vecteur force s'effectue suivant l'organigramme qui suit.



4.2.2 Vecteur des forces au niveau d'un nœud

Comme chaque nœud possède trois degrés de liberté, le vecteur des forces au niveau d'un nœud doit comporter trois composantes, à savoir :

- la composante de la résultante suivant l'axe $x'x$;
- la composante de la résultante suivant l'axe $y'y$;
- la composante de la résultante suivant l'axe $z'z$.

4.2.3 Vecteur force d'un élément de la structure

C'est le vecteur force obtenu après le premier assemblage : celui des éléments finis proprement dit. Il découle du paragraphe précédent que le nombre des composantes de ce vecteur doit être égal à trois fois le nombre de nœuds de l'élément en question : donc de la longueur de sa matrice des positions.

4.2.4 Vecteur force de la structure

Le vecteur des forces de la structure toute entière est le vecteur obtenu après le second assemblage de chaque vecteur force au niveau de tous les éléments du système.

Ayant accès aux vecteurs force élémentaire, la confection d'un vecteur force unissant tous les efforts appliqués à la structure suit les étapes ci-après :

- la confection d'une matrice réunissant toutes les valeurs des efforts appliqués à chaque élément :

Lors de cette opération, les numéros des colonnes de la matrice doivent correspondre aux numéros des éléments de la structure. Pour faciliter les insertions, il convient de créer avant tout une matrice nulle dont le nombre de colonnes égale le nombre des éléments qui composent le système.

- le transfert des valeurs de cette matrice dans un vecteur dont le nombre de lignes est égal au nombre des éléments de la matrice :

Les composantes de la matrice doivent être transférées de façon à respecter l'ordre de ses colonnes. Cette opération est d'une grande aisance puisqu'il suffit de donner, au logiciel, une instruction qui permet de citer tous les éléments de la matrice initiale.

- le triage des composantes correspondant aux nœuds dédoublés :

Cette opération ne peut se faire que si on a accès à la matrice précédente, aux matrices des positions et aux matrices de connectivité avant et après leurs triages. Sur ce, à chaque nœud trié de la matrice des positions, le programme extrait du vecteur force les trois lignes qui y correspondent.

4.3 Assemblage du vecteur déplacement

4.3.1 Déplacements au niveau d'un nœud

Le nombre des composantes d'un vecteur déplacement au niveau d'un nœud doit correspondre au nombre de degrés de liberté qu'on y observe. Sur ce, il doit comprendre :

- le déplacement du nœud suivant l'axe $x'x$;
- le déplacement du nœud suivant l'axe $y'y$;
- le déplacement du nœud suivant l'axe $z'z$.

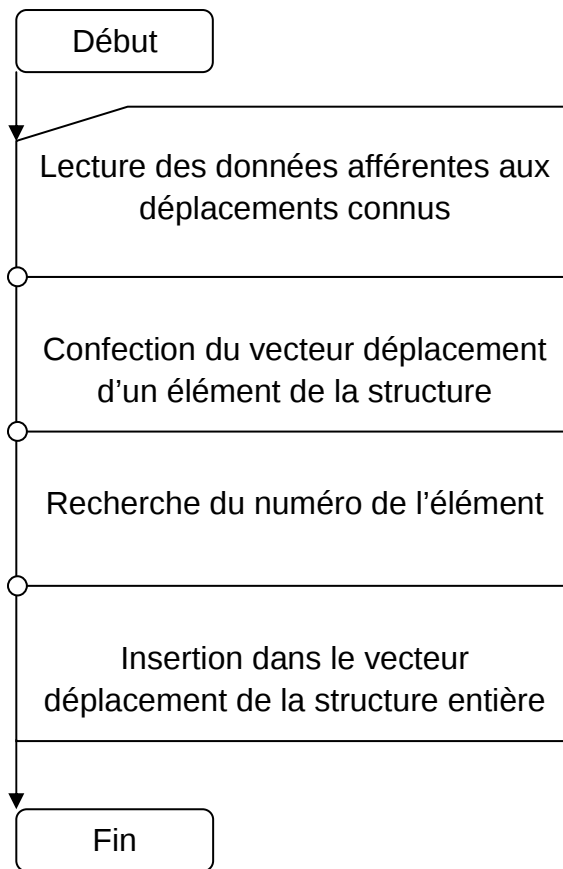
4.3.2 Vecteur déplacement d'un élément de la structure

C'est le vecteur obtenu après l'assemblage du vecteur des déplacements au niveau de chaque nœud de l'élément.

Par analogie au vecteur force, le vecteur déplacement d'un élément de la structure doit avoir $3n$ composantes si n représente le nombre des nœuds de l'élément.

4.3.3 Organisation des calculs

La confection du vecteur déplacement suit l'organigramme ci-après.



4.3.4 Vecteur déplacement de la structure

Ce vecteur résulte du second assemblage des vecteurs des déplacements.

Ayant accès aux vecteurs des déplacements élémentaires, la confection d'un vecteur déplacement unissant tous les déplacements imposés observés dans la structure toute entière suit les étapes ci-après :

- la confection d'une matrice réunissant toutes les valeurs des déplacements imposés en chaque élément :

Comme lors de l'assemblage du vecteur force, lors de cette opération, les numéros des colonnes de la matrice doit correspondre aux numéros des éléments de la structure. Pour faciliter les insertions, il convient de créer avant tout une matrice nulle dont le nombre de colonnes égalise le nombre des éléments qui composent le système.

- le transfert des valeurs de cette matrice dans un vecteur dont le nombre de lignes est égal au nombre des éléments de la matrice :

Les composantes de la matrice doivent être transférées de façon à respecter l'ordre de ses colonnes.

- le triage des composantes correspondant aux nœuds dédoublés.

5 Résolution de l'équation matricielle finale

5.1 Arguments d'entrée

La résolution est la dernière opération en ce qui concerne la méthode des éléments finis. Pour ce faire, on doit avoir accès aux données suivantes :

- le vecteur force de la structure toute entière ;
- la matrice de rigidité globale ;
- ainsi que le vecteur déplacement du système.

5.2 Procédés

La résolution consiste à effectuer les trois principales opérations qui suivent.

- En premier lieu, le programme recense les numéros des lignes du vecteur déplacement dont les valeurs sont connues.

Il convient de distinguer trois cas de nœuds selon leurs états de chargement : d'abord, les nœuds sollicités sont les nœuds supportant directement un ou plusieurs efforts extérieurs ; ensuite, les nœuds appuyés qui lient la structure au milieu extérieur sont les nœuds dont les efforts appliqués sont inconnus et enfin, les autres nœuds : les nœuds intermédiaires qui ne soutiennent aucun effort extérieur direct sont les nœuds non-chargés.

Il en découle que les seules forces inconnues se situent au niveau des nœuds faisant l'objet de liaisons avec le milieu extérieur. Dans un portique, ce sont les efforts de réaction au niveau des semelles de fondation.

Comme les valeurs de ces efforts sont inconnues, le logiciel renvoie une valeur nulle quand il est amené à les afficher. Sur ce point, il faut prendre garde qu'une ou deux composantes successives du vecteur peuvent être nulles bien que la force appliquée au niveau du nœud correspondant soit connue.

0.01
0
0
0
-0.02
0.005
0
0
0
0.01
0
0

}

Force inconnue au niveau d'un nœud

- Ensuite, il trie le vecteur des forces, le vecteur des déplacements ainsi que la matrice de rigidité de façon à séparer les déplacements connus des déplacements inconnus comme l'indique l'exemple suivant.

Lors de ce triage, la connaissance des numéros des composantes inconnues du vecteur des forces est indispensable.

0.01
0
0
0
-0.02
0.005
0
0
0
0.01
0
0

=

							-	-	-			
							-	-	-			
							-	-	-			
							-	-	-			
							-	-	-			
							-	-	-			
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
							-	-	-			
							-	-	-			
							-	-	-			

-
-
-

↓

→

↓

Les tableaux qui précèdent représentent respectivement le vecteur des forces, la matrice de rigidité et le vecteur des déplacements de l'équation d'équilibre finale avant l'opération en question.

Les tableaux qui suivent, par contre, sont les résultats de la séparation.

0.01										-	-	-	
0										-	-	-	
0										-	-	-	
0										-	-	-	
-0.02										-	-	-	
0.005										-	-	-	
0.01										-	-	-	
0										-	-	-	
0										-	-	-	
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

- Par des équations mathématiques simples, le programme retrouve les déplacements inconnus. Enfin, la multiplication de la matrice de rigidité globale par le vecteur déplacement, à présent retrouvé, conduit au vecteur des forces.

Après l'étape du triage, l'équation matricielle globale peut être représentée par les formes suivantes.

$$\begin{array}{c|c} F \text{ connues} \\ \hline F \text{ inconnues} \end{array} = \begin{array}{c|c} K_{cc} & K_{ci} \\ \hline K_{ic} & K_{ii} \end{array} \begin{array}{c|c} U \text{ inconnus} \\ \hline U \text{ connus} \end{array}$$

Il en découle que :

$$F \text{ connues} = K_{cc} \times U \text{ inconnus} + K_{ci} \times U \text{ connus} \quad (3-4-5-1)$$

Donc :

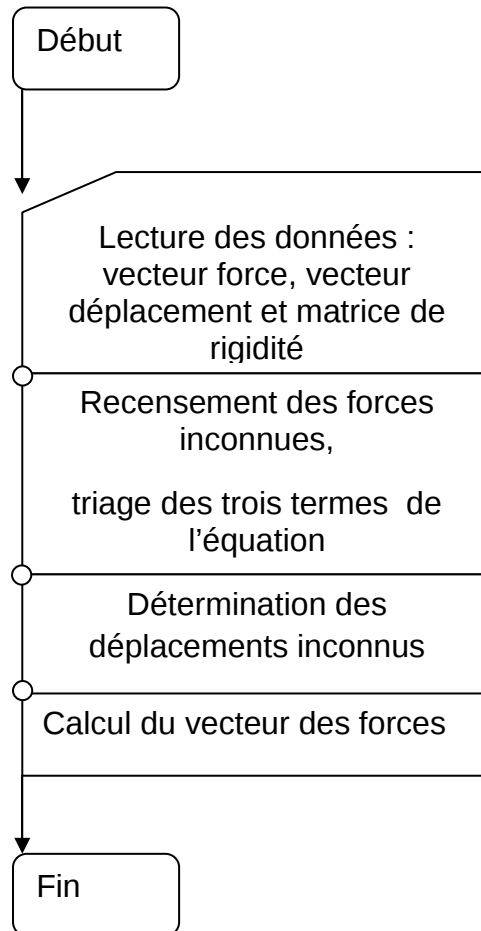
$$U \text{ inconnus} = K_{cc}^{-1} \times F \text{ connues} - K_{cc}^{-1} \times K_{ci} \times U \text{ connus} \quad (3-4-5-2)$$

Enfin :

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad (3-4-5-3)$$

5.3 Organisation des calculs

En résumé de toutes les étapes détaillées dans le paragraphe précédent, consacré aux procédés de la résolution de l'équation matricielle finale, l'organigramme ci après illustre les démarches vues dans un aspect généralisé.



5.4 Arguments de sortie

Les inconnues essentielles de la méthode des éléments finis sont les vecteurs des forces et des déplacements. Ces deux vecteurs doivent donc impérativement figurer dans les résultats finaux du programme. La matrice de rigidité globale pouvant être utile dans une quelconque opération ultérieure, le programme le stocke en tant que base de données dans un fichier de stockage du logiciel.

Chapitre 5

Regroupement des programmes

1 Les interfaces interactives

Dans Matlab, la programmation des interfaces interactives se ramène à la programmation des opérations à effectuer lors du rappel de chaque commande.

1.1 Interfaces préliminaires

Les interfaces préliminaires sont les fenêtres qui accueillent l'utilisateur lors du démarrage du programme. La première interface annonce le titre du programme tandis que la seconde interface demande à l'utilisateur de choisir parmi les trois programmes prédéfinis.

1.1.1 Interface d'introduction

La fenêtre de l'interface d'introduction est montrée par la figure suivante.

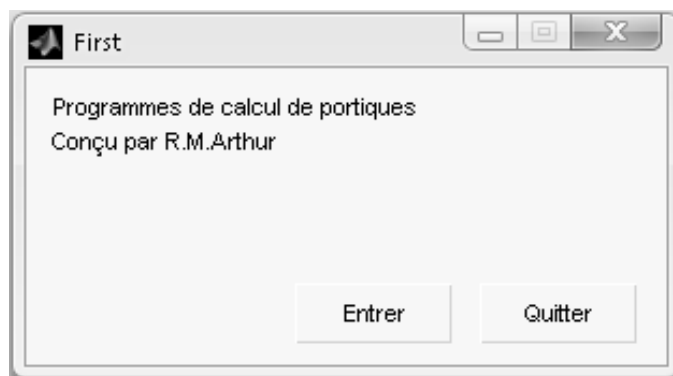


Figure 1 : fenêtre de l'interface d'introduction

C'est la première fenêtre qui s'ouvre au commencement du programme. Elle annonce que l'utilisateur a tenté d'accéder avec succès, au corps du programme et qu'il est sur le point de l'exécuter. Ainsi, elle lui demandera, dans un dialogue simple, s'il veut continuer.

1.1.2 Interface de choix des méthodes

L'interface de choix des méthodes est représentée par la figure qui suit.

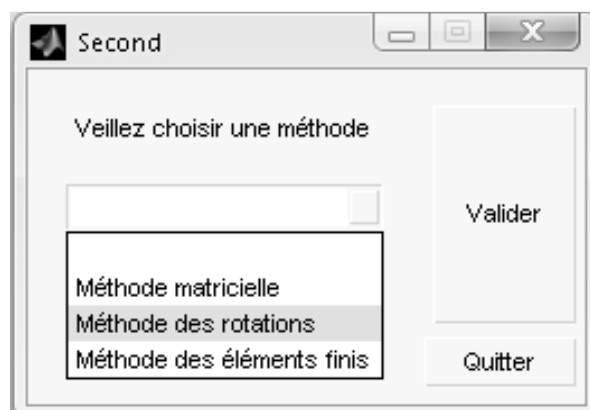


Figure 2 : fenêtre de l'interface de choix

Après avoir accepté d'entrer dans le corps du programme, en appuyant sur le bouton 'Entrer' de la première fenêtre, une seconde fenêtre apparaît. Celle-ci demande de spécifier suivant quelle méthode l'étude doit être effectuée. Dans la boîte de menus se trouvent les trois méthodes de calcul que le programme propose. Après avoir opté pour un choix, il suffit d'appuyer sur le bouton 'Valider'.

1.2 Interfaces principales

Après avoir effectué un choix sur la méthode appropriée, l'utilisateur est invité dans une interface qui recueille les caractéristiques mécaniques et géométriques globales de la structure. Ensuite, de part ses caractéristiques, le programme s'adapte et renvoie une interface de calcul qui recueille les détails sur la forme de chaque élément. Cette interface de calcul est l'interface principale correspondante à la méthode choisie.

1.2.1 Interface de la méthode des rotations

Un exemple d'interface principale du programme de calcul selon la méthode des rotations est représenté par la fenêtre suivante.

The screenshot shows a software window titled "Rotation_0". The window is divided into several sections:

- Top Left:** A large empty rectangular area for drawing a structural diagram.
- Top Right:** A section titled "Arthur.com" containing input fields for:
 - Chargement:** P, q, M.
 - Section:** S, I, E.
 - Units: "Kg, m" and "cm kN".
- Middle Right:** A section titled "Portées" with input fields for:
 - AB, BC, CD, DE, BD (left column).
 - CE, CF, DF, EG, FH (right column).
 - A unit field "(m)".
- Bottom Right:** Three buttons: "Autre cas de charges", "Sortir", and "Valider".
- Bottom Left:** A section titled "Résultats" containing:
 - Rotations des noeuds:** Input fields for nodes B, C, E, F.
 - Moments aux noeuds:** A grid of input fields for moments between nodes:

AB	CD	DE	FH
BA	DC	ED	HF
BC	CE	DF	
CB	EC	FD	
BD	CF	EG	
DB	FC	GE	

Figure 3 : fenêtre principale de la méthode des rotations

D'abord, en haut, à gauche, se trouve l'axe de représentation du schéma de la structure à étudier. Ensuite, en haut, à droite se situe un compartiment regroupant les lieux de récupération des arguments d'entrée. En dessous de celui-ci, sont placés les boutons de commande du programme. Et enfin, en bas, on trouve le compartiment où les résultats seront affichés.

Notons que le nombre d'arguments d'entrée varie suivant le nombre des éléments de la structure et qu'il en est de même pour les arguments de sortie.

1.2.1.1 Inscription des données

Tous les arguments d'entrée sont regroupés dans un compartiment afin d'empêcher l'utilisateur d'omettre l'un d'entre eux. Néanmoins, les surcharges d'exploitation (les sollicitations), les caractéristiques mécaniques communes et les portées des éléments sont séparées dans leurs compartiments respectifs selon la figure suivante.

Données		Section	
Chargement			
p		S	
q		I	
M		E	
kg, m		cm, kN	
Portée			
AB		CE	
BC		CF	
CD		DF	
DE		EG	
BD		FH	
(m)			

Figure 4 : compartiment des arguments d'entrée

En ce qui concerne les unités de calcul, l'utilisateur possède un libre choix sur les unités qu'il veut utiliser. Il suffit alors de les spécifier dans les menus correspondant.

1.2.1.2 Commandes

La figure ci-après illustre les boutons de commande de l'interface principale de la méthode des rotations.

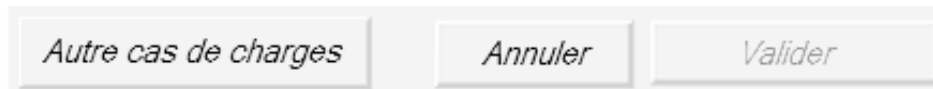


Figure 5 : boutons de commande

Lorsque tous les textes éditables du compartiment des arguments d'entrée sont remplis de valeurs numériques (aucune expression littérale), l'utilisateur peut enclencher la commande de calcul en appuyant sur le bouton 'Valider'.

Par contre, si l'utilisateur veut changer quelques détails concernant la forme ou les sollicitations de la structure, il peut à tout moment appuyer sur le bouton 'Autres cas de chargement'.

Enfin, après que le programme de calcul par la méthode des rotations ait fini les opérations demandées, la touche 'Sortir' possède les mêmes fonctionnalités que l'icône 'Fermer' de la fenêtre, à la seule exception qu'en plus, elle sauvegarde le projet dans le stockage des données de Matlab avant de quitter complètement l'application.

Le tableau suivant décrit des fonctions de chaque bouton de commande de l'interface principale de la méthode des rotations.

Bouton	Fonction
Autres cas de charges	Annuler les calculs et définir une autre structure
Annuler	Quitter le programme
Valider	Démarrer les calculs visant à déterminer l'état de la structure

Tableau 1 : boutons de commande de la méthode des rotations

1.2.1.3 Représentation des résultats

Avant que la touche 'Valider' ne soit appuyée, la fenêtre de l'interface est réduite de façon à ce que le compartiment des résultats ne s'affiche pas à l'écran. Il en est ainsi pour que l'utilisateur puisse se concentrer entièrement dans la saisie des arguments d'entrée.

Dans le compartiment correspondant aux rotations des nœuds, seuls les angles de déformation au niveau des nœuds susceptibles de rotation sont indiqués parce que les autres sont supposés être nuls.

Résultats

Rotations des nœuds		Moments aux nœuds							
B		AB		CD		DE		FH	
C		BA		DC		ED		HF	
E		BC		CE		DF			
F		CB		EC		FD			
		BD		CF		EG			
		DB		FC		GE			

Figure 6 : compartiment des résultats

1.2.2 Interface de la méthode matricielle

Stiffness_2

Arthur.com

Noeud

Ajouter

Sollicitation

Ramener les efforts

Element

S

I

E

L

Ajouter

Direction

Origine

OX

A						
B						
C						
D						
E						
F						
G						
H						

(kN) Ajouter

Autre cas de charges Annuler Valider

Résultats

Simuler les déplacements

Voir les forces nodales

Voir les déplacements

Enregistrer

Figure 7 : interface de la méthode matricielle

Pareil à l'interface principale de la méthode des rotations, celle de la méthode matricielle comprend :

- un compartiment réservé à la représentation schématique de la structure ;
- un compartiment réservé à la récupération des arguments d'entrée ;
- et un compartiment pour l'affichage des résultats, qui se trouve au bas de la fenêtre et qui est masqué avant le démarrage des calculs.

1.2.2.1 Inscription des données

L'interface principale du programme correspondant à la méthode matricielle réserve un espace pour la saisie des caractéristiques mécaniques, des caractéristiques géométriques ainsi que des efforts appliqués au niveau de chaque élément.

Quant aux unités, elles doivent être spécifiées par l'utilisateur afin qu'elles correspondent à ses préférences. Par défaut, les unités employées sont : le mètre et le kilo Newton (m, kN).

1.2.2.2 Commandes

A part les boutons de commande, Matlab offre plusieurs boîtes de commande. Sur ce, dans l'interface de la méthode matricielle, les boîtes de menus sont fréquemment utilisées. Leur manipulation sont les mêmes que celle des langages de base.

Les boutons de commande dans l'interface de la méthode matricielle ont les fonctionnalités décrites par le tableau suivant.

Bouton	Fonction
Ajouter	Ajouter un élément à la structure
Autres cas de charges	Annuler les calculs et définir une autre structure
Annuler	Quitter le programme
Ramener les efforts	Calculer les efforts aux nœuds de part les efforts en travée
Valider	Démarrer les calculs visant à déterminer l'état de la structure

Tableau 2 : boutons de commande de la méthode matricielle

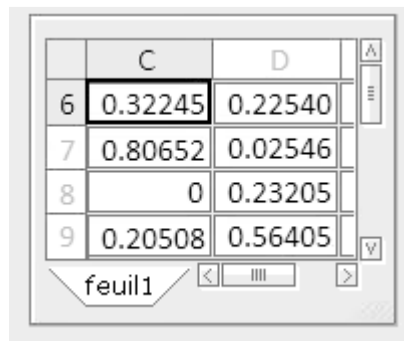
Par contre, le tableau suivant représente la liste des menus suivie de leurs fonctions respectives.

Boîtes de menus	Fonction
Ajouter (dans l'espace 'Nœud')	Permet de saisir les sollicitations ou les déplacements nodaux
Direction (dans l'espace 'Elément')	Permet de choisir la direction principale de l'élément à rajouter

Tableau 3 : menus de la méthode matricielle

1.2.2.3 Représentation des résultats

Le calcul fait, le programme retourne les résultats sous forme de tableau dans l'espace ActiveX de la feuille de calcul de Microsoft Office 2003. Il est alors à l'utilisateur de les saisir ou de les copier dans un autre fichier prenant en charge les tableaux. La figure suivante représente la feuille de calcul montrant les résultats de l'étude d'un exemple de structure.



	C	D
6	0.32245	0.22540
7	0.80652	0.02546
8	0	0.23205
9	0.20508	0.56405

Figure 8 : feuille de calcul

1.2.3 Interface de la méthode des éléments finis

La figure suivante illustre ces différents compartiments de l'interface de la méthode des éléments finis.

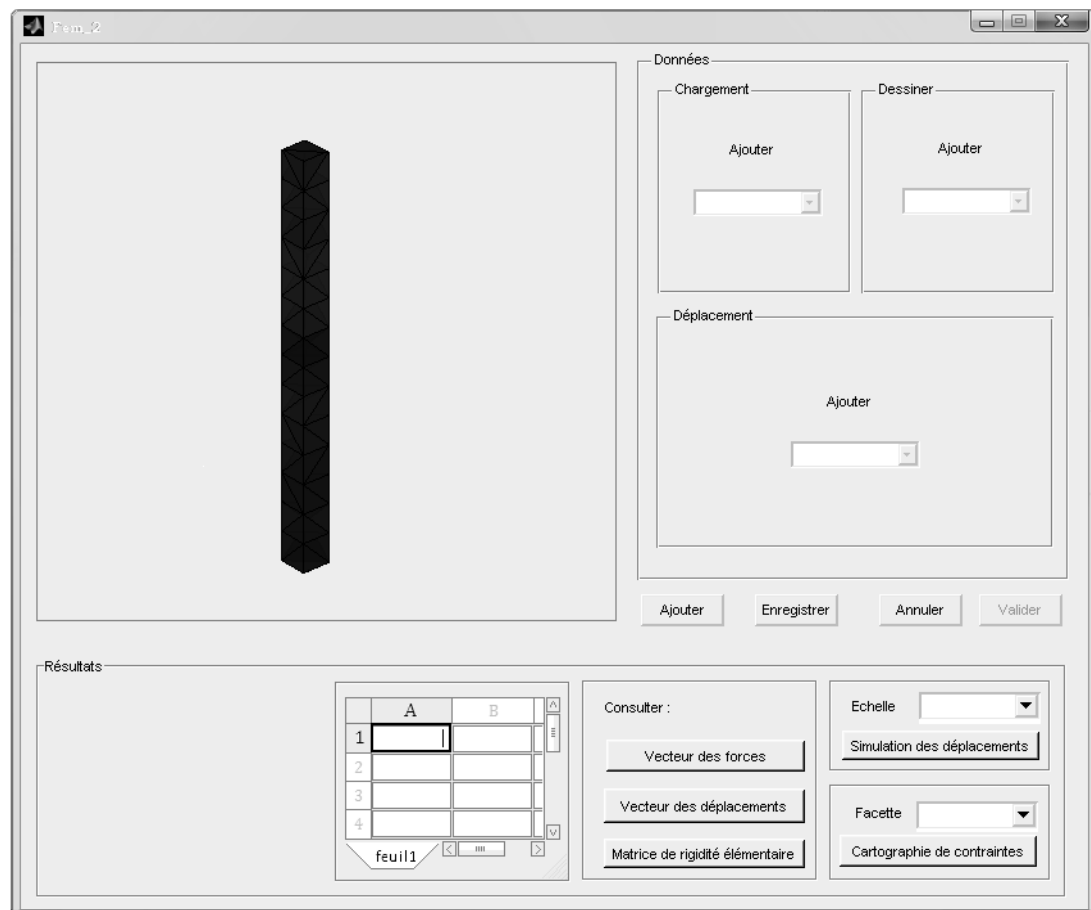


Figure 9 : interface de la méthode des éléments finis

Un axe de représentation se situe dans le premier coin de la fenêtre. Chaque élément de la structure y sera tracé. Les arguments d'entrée seront recueillis dans un compartiment qui se trouve en haut, à droite. Et enfin, l'espace attribué à l'affichage des résultats est disposé au bas de l'interface.

1.2.3.1 Inscription des données

Dans le compartiment réservé aux arguments d'entrée,

- le sous compartiment 'Chargement' inclue un menu sur le choix du type de chargement à appliquer sur l'élément. Notons qu'on peut appliquer autant de charges que l'on veut sur un élément donné ;
- le sous compartiment 'Dessiner' comporte le menu de choix du type (poutre ou poteau) de l'élément à ajouter au structure ;
- tandis que le sous compartiment 'Déplacement' est réservé à la saisie des données correspondant aux déplacements imposés à la structure.

Après avoir pointé le curseur sur l'un de ces différents menus du compartiment et après avoir effectué un choix, le programme affiche les boîtes de textes où l'utilisateur doit saisir les valeurs correspondant à son choix. Les trois figures qui suivent illustrent cette opération.

The figure shows three separate input panels for a structural analysis software.

- Chargement Panel:** Contains three input fields labeled 'Valeur', 'Position', and 'Direction'. The 'Direction' field has a dropdown menu currently showing 'OX'. Below these fields is a button labeled '(kN)'.
- Poutre Panel:** Contains two columns of input fields. The left column is labeled 'Dimension' and includes fields for 'b', 'h', and 'L'. The right column is labeled 'Origine' and includes fields for 'X', 'Y', and 'Z'. Below these is a 'Direction' dropdown menu showing '0°'. To the right of the 'Z' field is a unit selector '(m)' with a dropdown arrow.
- Déplacement Panel:** A larger panel with two rows of input fields. The first row is labeled 'Noeud' and has fields for 'X', 'Y', and 'Z'. The second row is labeled 'Glissement' and also has fields for 'X', 'Y', and 'Z'. To the right of these fields is a large button labeled 'Ajouter'.

Figure 10 : compartiments de saisie des arguments d'entrée

1.2.3.2 Représentation des résultats

Après tout calcul fait, le programme doit retourner les résultats correspondant à l'état de la structure. Les valeurs du vecteur des forces, de la matrice de rigidité ou du vecteur des déplacements peuvent être affichées dans la feuille de calcul du compartiment des résultats selon le bouton de commande spécifié par l'utilisateur.

Cette feuille de calcul résulte de l'insertion d'un contrôle ActiveX relié au programme Excel du logiciel Microsoft office.

Afin de visualiser les valeurs comprises dans chaque cellule, deux coulisses horizontale et verticale permettent de naviguer dans la feuille. Les touches de navigation du clavier de subvenir à cette tâche.

1.2.3.3 Commandes

Puisqu'un portique est composé de plusieurs poutres et puisque le programme ne peut déterminer d'avance le nombre de ces éléments, il faut spécifier l'insertion de chaque élément dans l'ensemble de la structure.

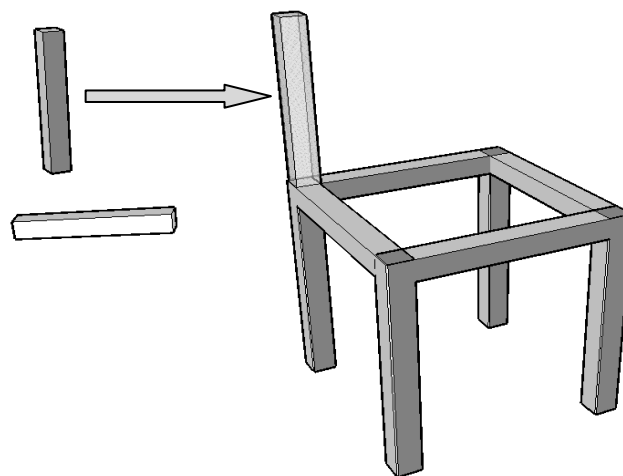


Figure 11 : ajout d'un élément

Sur ce, les boutons de commande 'Ajouter' servent à insérer un élément, ajouter un chargement ou spécifier un déplacement imposé à la structure. Afin de mieux comprendre les fonctions de chaque bouton de commande, il convient de distinguer quelques classes de boutons :

- les boutons du type général qui ne sont contenus dans aucun compartiment ;
- le bouton du compartiment des arguments d'entrée ;
- et les boutons du compartiment des arguments de sortie.

La fonction de chaque bouton, selon sa classe, est régie par le tableau suivant.

Type	Boutons	Fonctions
Général	Ajouter	Ajouter un élément ou une charge
	Annuler	Interrompre le programme pour sortir
	Sortir	Enregistrer les résultats et quitter le programme
	Valider	Démarrer le calcul de la structure par la méthode des éléments finis
Arguments d'entrée	Ajouter	Imposer le déplacement saisi au nœud spécifié
Arguments de sortie	Vecteur des forces	Afficher le vecteur des forces dans la feuille de calcul
	Vecteur des déplacements	Afficher le vecteur des déplacements dans la feuille de calcul
	Matrice de rigidité élémentaire	Montrer la matrice de rigidité d'un tétraèdre élémentaire utilisé pendant le calcul
	Simulation des déplacements	Illustrer, dans une figure, l'état de la structure après l'application des efforts

Tableau 4 : boutons de commande de la méthode des éléments finis

Conclusion de la troisième partie

Le logiciel Matlab est un logiciel puissant qui se distingue des autres logiciels programmables par sa faculté à reconnaître les matrices en tant que variables entières et compactes. Par conséquent, les opérations matricielles dans Matlab s'effectuent comme les opérations numériques classiques usant des lois de composition interne de l'ensemble des réels.

La programmation des scripts dans Matlab est aisée du fait que ses instructions sont très peu différentes de celles des langages de base tels que les logiciels C et Visual Basic. De plus, Matlab offre une possibilité d'assembler les scripts dans une interface principale.

La programmation des calculs par la méthode des rotations, la méthode matricielle et la méthode des éléments finis se fait suivant les théories traitées dans la seconde partie de cet ouvrage.

Pour faciliter l'instruction et l'exécution des commandes ainsi que la saisie des arguments d'entrée par les utilisateurs, des figures interactives indépendantes ont été créées pour chaque méthode de calcul. Ils pourront alors choisir la méthode suivant laquelle les calculs devront s'effectuer.

Bien que les fenêtres interactives varient suivant la méthode de calcul utilisée, leurs formes générales ont été conçues de telle manière que les positions des compartiments importants (tels que celui réservé à la saisie des valeurs) ne soient pas modifiées. De cette façon, les utilisateurs ne pourront pas se perdre facilement pendant le déroulement d'un programme.

Partie 4 :

Application





Chapitre 1

Description du problème

1 Description du problème

En tant qu'application à la théorie de la conception de ces programmes et en tant que support d'information sur leur mode d'utilisation, un exemple de structure d'un bâtiment en forme de portique tridimensionnel sera étudié dans cette partie par les trois méthodes de calcul décrites précédemment.

La forme du portique en question est choisie de sorte que la majorité des fonctionnalités des trois programmes soient mise en évidence tandis que son état de chargement est choisi d'une manière à simplifier les calculs tout en tachant de représenter toutes les sollicitations possibles dans un espace à trois dimensions.

1.1 Procédé de l'étude

En premier lieu, le programme de calcul des portiques par la méthode des rotations est amené à résoudre le problème. En second lieu, le programme de calcul par la méthode matricielle effectue la même opération en vue d'une comparaison ultérieure. Ensuite, le programme de calcul par la méthode des éléments finis est utilisé afin de donner les valeurs approchées des déplacements ainsi que des contraintes réelles en tout point de la structure. Et enfin, une comparaison générale est effectuée de façon à pouvoir tirer une conclusion sur la précision de chaque méthode et surtout pour déduire le type de méthodes de calcul adéquates à l'étude de chaque catégorie de structures.

1.2 Schéma de représentation de la forme de la structure

Ce schéma est directement utilisé par le programme de calcul par la méthode des éléments finis.



Figure 1 : schéma réel du portique

1.3 Schéma de représentation simplifiée de la forme de la structure

La figure suivante résulte de la modélisation d'un système de poutres (un portique) formant l'ossature d'un bâtiment. Sur ce, chaque élément de la structure est représentée par un segment de droite tandis que les nœuds de liaison sont représentés par des points. Cette reproduction simplifiée est utilisée par les programmes de calcul par la méthode des rotations et par la méthode matricielle.

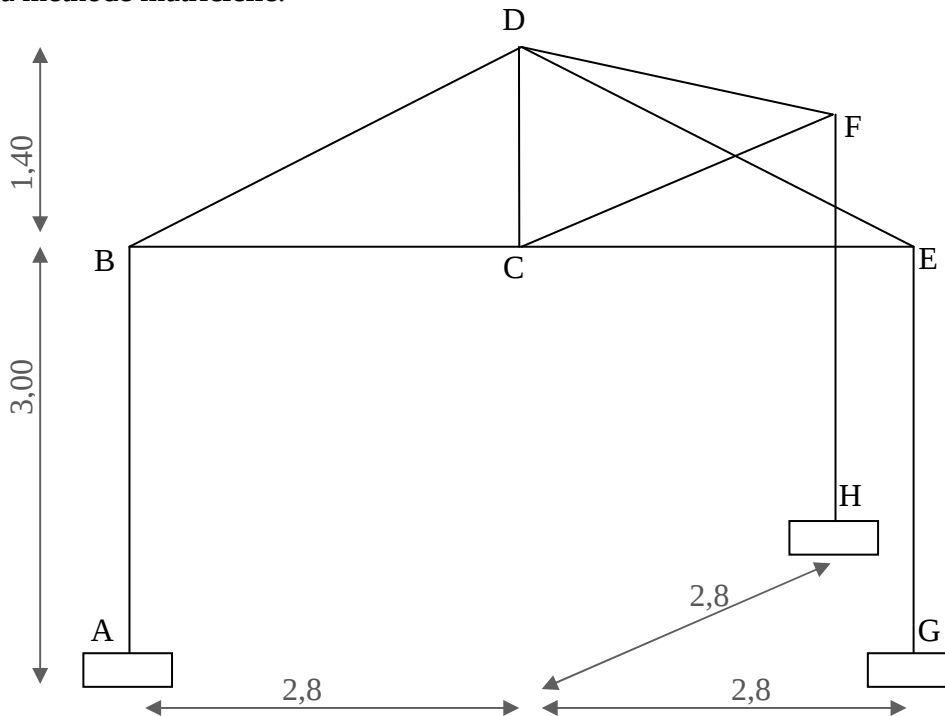


Figure 2 : représentation de la structure

2 Données du problème

La hauteur du premier niveau est de 3,00m.

Celle du second niveau est de 1,40m.

La portée des poutres BC, CE et CF est de 2,80m.

Il en résulte que la portée des trois autres poutres : BD, DE et DF est d'environ 3,15m.

Les liaisons entre les éléments sont tous des encastrements.

Les caractéristiques géométriques des éléments de la structure sont telles que la section de chaque élément est de 20x20 cm².

2.1 Caractéristiques du matériau composant les éléments de la structure

Dans le cas d'une structure en béton armé, nous avons les caractéristiques mécaniques suivantes.

- Module d'élasticité longitudinal $E = 3700 \sqrt[3]{f_{cj}}$ soit 11 000 MPa (en 28 jours) ;
- Module d'élasticité transversal $G = 4\,500 \text{ MPa}$;
- Coefficient de Poisson $\nu = 0,2$;
- Poids spécifique du béton armé $\rho = 25 \text{ kN/m}^3$.

2.2 Sollicitations et déplacements imposés

2.2.1 Sollicitations

Les sollicitations considérées dans le calcul sont les poids propres de la structure (ou les charges permanentes) ainsi que les surcharges (charges d'exploitation). Notons que seules ces dernières sont représentées dans les figures.

Puisque les sections des éléments de la structure restent les mêmes, les forces générées par les charges permanentes dans chaque poutre ont une valeur fixe.

$$F = 1 \text{ kN/ml}$$

En ce qui concerne les surcharges, dans le but de représenter les différents chargements possibles dans un bâtiment (effort concentré, effort réparti ; effort vertical et effort horizontal), optons pour les efforts suivants.

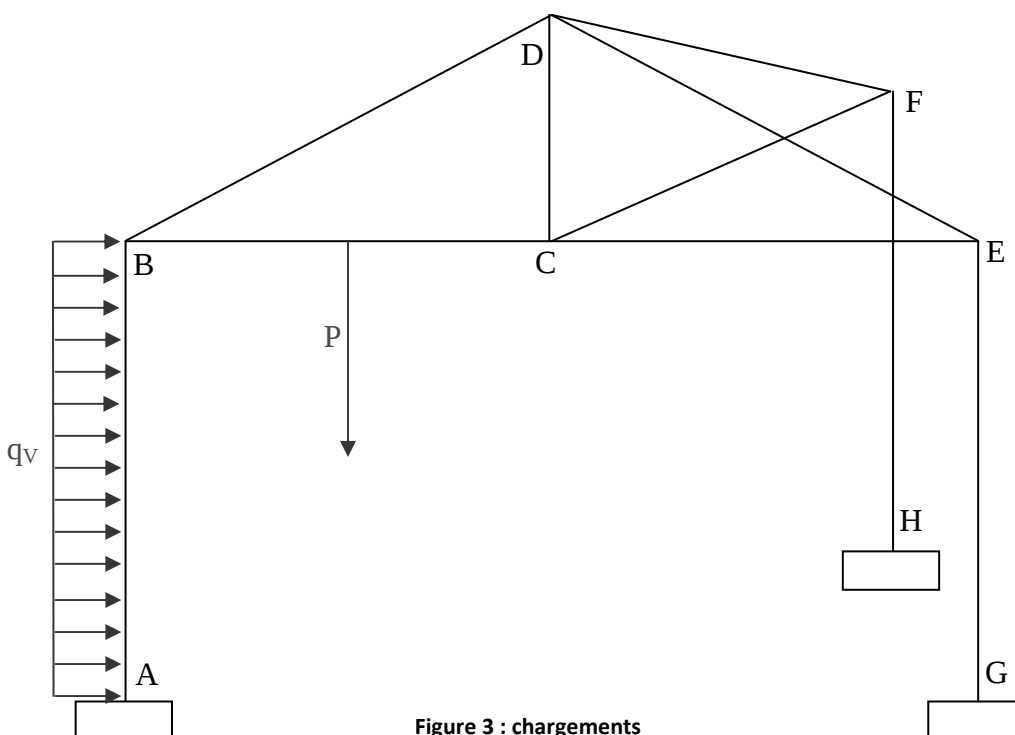


Figure 3 : chargements

Les valeurs des charges d'exploitation sont :

- $P = 10 \text{ kN}$;
- $q_V = 3 \text{ kN}$.

2.2.2 Déplacements imposés

Afin de rester en dehors des détails de la fondation de la structure, supposons que les liaisons de celle-ci au sol sont des encastrement. Par la suite, les déplacements des nœuds au niveau des appuis seront nuls.

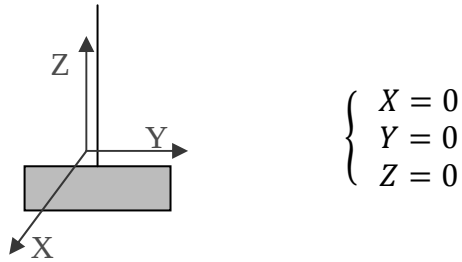


Figure 4 : déplacements nodaux

A l'exception de ces déplacements suscités, aucun autre déplacement n'est imposé à la structure.

Chapitre 2

Simulation

1 Résolution du problème

1.1 Méthode des rotations

La résolution du problème par la méthode des rotations consiste donc à :

- ramener les efforts dans les éléments en des forces nodales ;
- calculer les rotations au niveau des nœuds par l'inversion de la matrice de rigidité de la structure ;
- et retrouver les moments fléchissant aux extrémités de chaque élément de part les formules utilisées dans l'établissement des équations d'équilibre.

Dans le but d'ordonner les éléments, le schéma suivant nous montre les numéros des éléments ainsi que ceux des nœuds.

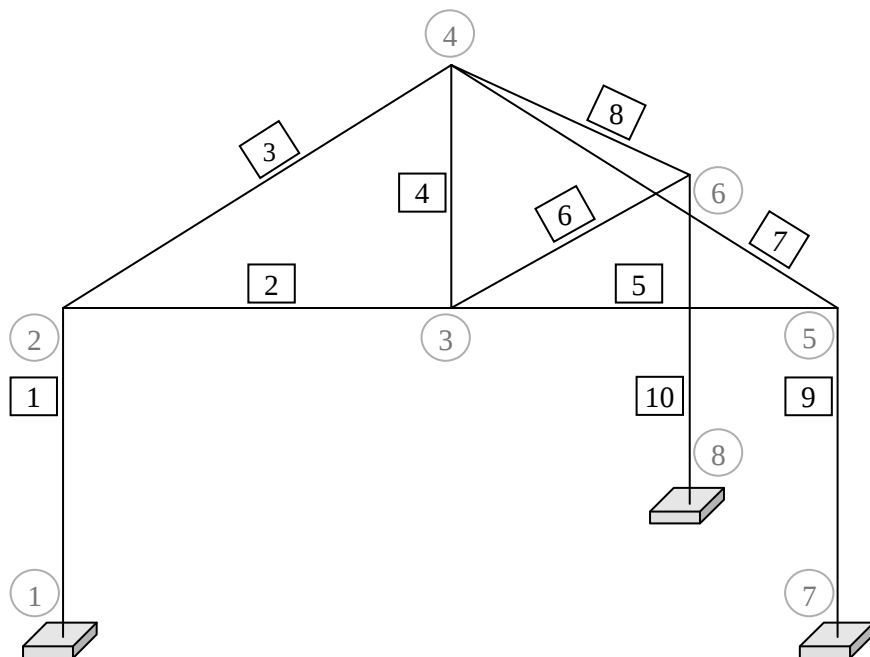


Figure 1 : numérotations des nœuds et des éléments

Les numéros encadrés sont ceux des éléments tandis que les numéros inscrits dans un cercle sont ceux des nœuds. Dans l'étude de ce portique, le nombre de nœuds considérés est donc de 8 ; celui des éléments est, par contre, de 10.

1.1.1 Rotations aux nœuds

Selon le type de structure choisie, le programme demande les caractéristiques mécaniques et géométriques de chaque élément avant de démarrer les calculs. Par la suite, de part les données du problème, les rotations au niveau des nœuds de la structure, en $10^{-3}rd$ sont :

A	θ_x	0	E	θ_x	-0,0311
	θ_y	0		θ_y	-0,0978
	θ_z	0		θ_z	0
B	θ_x	-0,0311	F	θ_x	-0,0715
	θ_y	-0,0967		θ_y	-0,1290
	θ_z	0		θ_z	0
C	θ_x	-0,0306	G	θ_x	0
	θ_y	0,0826		θ_y	0
	θ_z	0		θ_z	0
D	θ_x	-0,0613	H	θ_x	0
	θ_y	0,0041		θ_y	0
	θ_z	0		θ_z	0

Tableau 1 : rotations des nœuds

Remarquons que les rotations au niveau des nœuds A, G et H sont nulles ; ce qui est évident puisque ces nœuds représentent l'encastrement du système dans le sol : sa liaison avec le milieu extérieur.

1.1.2 Moments aux appareils d'appui

Par contre, les moments au niveau des appareils d'appui, en $kN.m$ sont :

AB	M_x	0,5468
	M_y	4,3221
	M_z	0
GE	M_x	-0,5468
	M_y	-0,8604
	M_z	2,9230
HF	M_x	-1,2578
	M_y	-1,1347
	M_z	2,9230

Tableau 2 : moments aux appuis

1.2 Méthode matricielle

La numérotation des éléments ainsi que celles des nœuds sont les mêmes que celles employées dans la méthode des rotations.

1.2.1 Schéma de la structure avant sa déformation

La figure qui suit schématise l'état de la structure avant sa déformation, c'est-à-dire avant l'application des charges, telle qu'elle est représentée par le programme. Remarquons que par la méthode matricielle, les éléments de la structure sont symbolisés par des lignes.

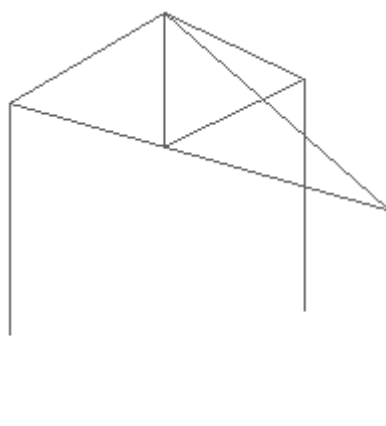


Figure 2 : état avant déformation

1.2.2 Déplacements aux nœuds

L'interface correspondant à la méthode matricielle demande les efforts nodaux avant d'exécuter les calculs. Pourtant, le programme peut calculer, de part les efforts appliqués dans les éléments, les forces nodales correspondantes. Il suffit, dans ce cas, d'appuyer sur le bouton 'Ramener les efforts'.

Après les calculs, qui se déroulent en 5,20 s, le programme retourne les valeurs des déplacements nodaux en mm et en $10^{-3}rd$ telles qu'elles sont représentées dans le tableau suivant.

Nœud	u_x	u_y	u_z	Nœud	θ_x	θ_y	θ_z
A	0	0	0	A	0	0	0
B	6,4336	0,1516	-0,1642	B	-0,0277	-0,6742	-0,3223
C	6,1717	-0,4930	-1,4887	C	-0,3151	-0,4610	-0,0573
D	6,5398	-0,8631	-1,4683	D	-0,2712	0,2544	-0,1433
E	6,4216	-0,2231	-0,1644	E	-0,1657	-0,2107	0,2133
F	6,3923	-0,5281	-0,0309	F	-0,5337	-0,1836	-0,1567
G	0	0	0	G	0	0	0
H	0	0	0	H	0	0	0

Tableau 3 : déplacements nodaux

Remarquons que les déplacements au niveau des nœuds A, G et H sont nuls et que le déplacement maximal suivant l'axe Oz est celui du nœud C :

u_x	u_y	u_z	θ_x	θ_y	θ_z
6,172	-0,493	-1,489	-0,315	-0,461	-0,057

Tableau 4 : déplacements du nœud C

1.2.3 Sollicitations aux nœuds

Le tableau suivant contient les valeurs des sollicitations (forces en kN et moments en kN.m) au niveau de chaque extrémité des poutres ainsi que des poteaux qui constituent la structure.

Nœud	V_x	V_y	V_z	Nœud	M_x	M_y	M_z
A	-4,2171	0,2791	17,2173	A	1,6100	6,7824	0,0612
B	4,5000	0	-8,1800	B	-0,0000	-0,0000	0
C	0	0	-11,0013	C	-0,0000	0,0000	0
D	0	0	-5,0325	D	0	0	0
E	0	0	-3,1800	E	0	-0,0000	0
F	0	0	-3,1800	F	-0,0000	0	0,0000
G	-3,5733	-0,0044	13,1012	G	1,0054	0,3824	-0,1548
H	-0,2102	-0,2751	10,0810	H	0,9432	-1,6767	0,0899

Tableau 5 : sollicitations nodales

Remarquons que les valeurs des sollicitations suivant l'axe Oy sont presque nulles du fait que le chargement de la structure est plan.

1.2.4 Schémas de la structure après sa déformation

Pour une sécurité optimale, les déformations de la structure doivent être limitées à une certaine valeur. Cependant, la représentation schématique de celles-ci ne sera d'aucune utilité que si on exagère leurs valeurs.

Ainsi, pour avoir une idée sur l'état de déformation de la structure, la représentation de ces dernières dans les figures qui suivent s'effectuera moyennant un facteur d'agrandissement de $6 \times 10^{+2}$.

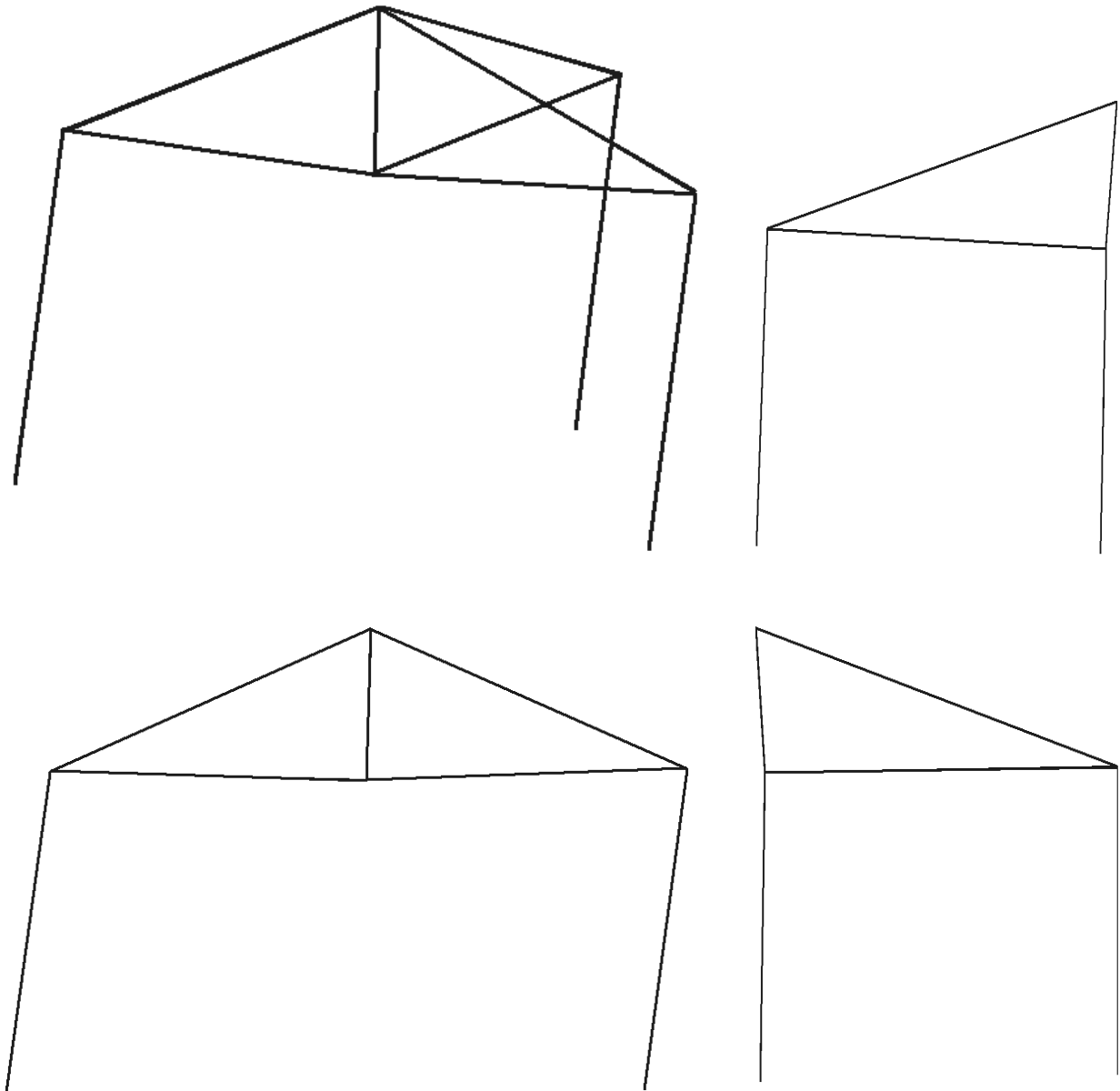


Figure 3 : schémas de la structure après déformation

1.3 Méthode des éléments finis

Dans cette application, le type de maillage utilisé donne un pas de 0,20 m (20 cm).

Par un calcul simple du volume de l'ensemble de la structure, sachant qu'un cube élémentaire est formé par 6 tétraèdres, on peut estimer que le nombre d'éléments de subdivision atteint les 2 000.

Pour optimiser le temps de calcul, ce qui devient d'important lorsque le nombre de nœuds s'avère être élevé, il faut numéroté les éléments d'une manière à ce que la matrice rigidité

ressemble à une matrice bande. Pour cela, on doit faire en sorte que la condition de maillage suivante soit respectée.

$$|i - j| = \text{minimum possible}$$

si i et j sont les numéros de deux nœuds successifs.

En outre, en ce qui concerne la numérotation des éléments, nous utiliserons celles des deux méthodes précédant.

1.3.1 Déplacements aux extrémités de chaque élément de la structure

A chaque nœud du système, le programme retourne 3 arguments :

- déplacement suivant Ox ;
- déplacement suivant Oy ;
- déplacement suivant Oz.

Pourtant le nombre de nœuds est assez important. Il est alors préférable de n'afficher que les déplacements au niveau d'un ou de quelques nœuds pour chaque intersection de poutres. L'unité est le *mm*.

A	u_x	0	E	u_x	6,4210
	u_y	0		u_y	-0,2136
	u_z	0		u_z	-0,2041
B	u_x	6,4342	F	u_x	6,3976
	u_y	0,1631		u_y	-0,5676
	u_z	-0,2224		u_z	-0,02571
C	u_x	6,1760	G	u_x	0
	u_y	-0,4775		u_y	0
	u_z	-1,5478		u_z	0
D	u_x	6,5431	H	u_x	0
	u_y	-0,8468		u_y	0
	u_z	-1,5120		u_z	0

Tableau 6 : déplacements moyens des extrémités de chaque élément

1.3.2 Schéma de la structure avant sa déformation

La figure suivante montre le schéma de la structure avant sa phase de déformation telle qu'elle est reproduite par le programme en utilisant la méthode des éléments finis.

Le type de maillage utilisé pour cette représentation est le maillage tétraédrique de 20 cm de côté. Les plages de couleurs qui ornent le schéma ne sont que des plages provisoires visant à définir les limites de chaque volume élémentaire

L'échelle de la représentation est d'environ $\frac{1}{40}$

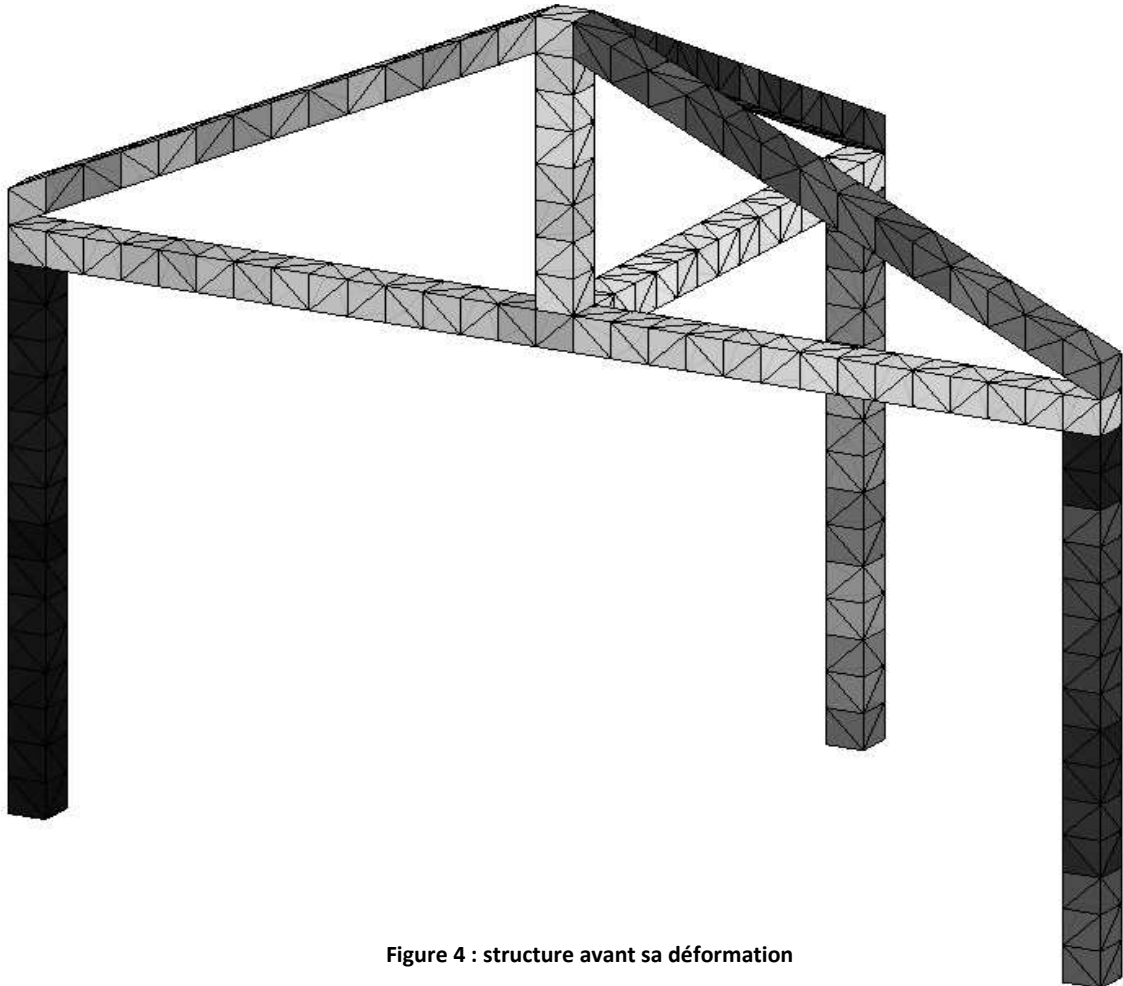


Figure 4 : structure avant sa déformation

1.3.3 Sollicitations aux extrémités de chaque élément de la structure

Correspondant aux déplacements calculés par le programme, à chaque nœud sont assimilées trois sollicitations :

- contrainte parallèle à l'axe Ox ;
- contrainte parallèle à l'axe Oy ;
- contrainte parallèle à l'axe Oz.

Le tableau suivant retourne les valeurs des sollicitations au niveau du lieu (des nœuds) de chaque jointure d'un élément de structure à un autre.

Les premières valeurs (1/3) sont les sollicitations suivant la direction $x'x$; les secondes valeurs (2/3) sont celles suivant la direction $y'y$ tandis que les troisièmes valeurs (3/3) sont celles suivant la direction $z'z$.

kN								
A	V_x	-	-	-3,5901	E	V_x	0	0
	V_y	-	-	0,2033		V_y	0	0
	V_z	-	-	3,0211		V_z	-0,4287	-0,4288
B	V_x	0,2806	0	0	F	V_x	0	0
	V_y	0	0	0		V_y	0	0
	V_z	-0,4288	-0,4287	-0,4291		V_z	-0,4288	-0,4289
C	V_x	0	0	0	G	V_x	-	-
	V_y	0	0	0		V_y	-	-
	V_z	-0,4289	-0,4288	-0,4290		V_z	-	2,2536
D	V_x	0	0	0	H	V_x	-	-
	V_y	0	0	0		V_y	-	-
	V_z	-0,4285	-0,4288	-0,4288		V_z	-	1,8047

Tableau 7 : sollicitations au niveau de quelques nœuds de chaque jointure

En sommant les valeurs des sollicitations absorbées par tous les nœuds au niveau de la fondation de chacun des trois poteaux (du premier niveau), on obtient les réactions du tableau suivant.

A	V_x	-4,7112
	V_y	0,2349
	V_z	15,7719
G	V_x	-3,4312
	V_y	-0,0161
	V_z	12,6754
H	V_x	-2,0121
	V_y	-0,0513
	V_z	10,9625

Tableau 8 : sollicitations moyennes au niveau des appareils d'appui

1.3.4 Schémas de la structure après sa déformation

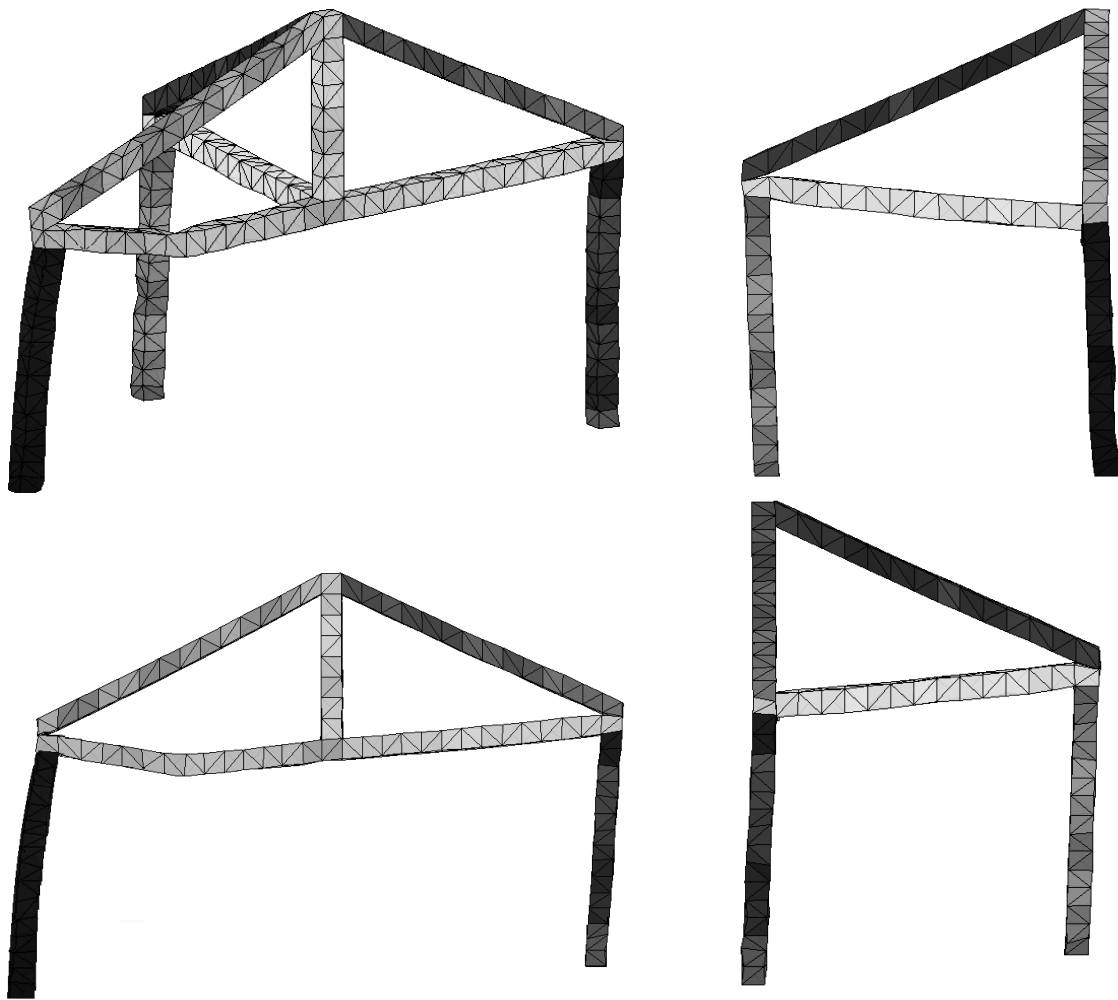


Figure 5 : schémas de la structure après déformation

Notons que les rotations des nœuds ne sont pas incluses dans les résultats du fait que la fonction de base associée au tétraèdre élémentaire (à quatre nœuds) ne prend en compte que trois degrés de liberté au niveau de chaque nœud.

2 Temps de calcul

2.1 Puissance de la machine

Les valeurs des temps de calcul détaillés dans ce qui suit sont observées sur un micro ordinateur dont les caractéristiques sont les suivantes.

Module	Unité	Valeur
Fréquence	GHz	2,20
Mémoire vive	Go	2,00
Version de Matlab	-	7.01
Nombre de processeurs	-	1

Tableau 9 : Caractéristiques de la machine

Notons que ces valeurs sont à peu près les mêmes moyennant quelques secondes d'écart dès que la version de la machine est supérieure à la version de référence du Pentium IV.

Notons de plus, qu'en révisant et en améliorant certains scripts du programme, on pourra gagner sur le temps qui lui est nécessaire pour la réalisation des calculs.

2.2 Méthode des rotations

Le temps dont le micro ordinateur met pour réaliser les calculs des angles de rotation des nœuds est d'environ 1,50 s.

Le tableau suivant donne quelques valeurs sur le temps utile pour déterminer l'état d'une structure donnée selon le nombre d'éléments qu'elle contient.

Nombre approximatif de nœuds	Temps de calcul en seconde
< 10	1,50
< 50	7,50
< 100	30,00

Tableau 10 : temps de calcul par la méthode des rotations

2.3 Méthode matricielle

Pour cet exemple de structure, le programme met à peu près 5,20 s avant de retourner les déplacements au niveau de tous les nœuds de la structure.

Nombre approximatif des éléments	Temps de calcul en seconde
< 10	5,20
< 50	45,00
< 100	180,00

Tableau 11 : temps de calcul par la méthode matricielle

2.4 Méthode des éléments finis

Comme le nombre de nœuds considérés par cette méthode est assez élevé par rapport aux deux autres méthodes, on peut déjà estimer que le temps mis par le programme pour effectuer les calculs devrait augmenter.

Nombre approximatif des éléments (poutres)	Temps de calcul en seconde
< 10	250,00

Tableau 12 : temps de calcul par la méthode des éléments finis

Pour le calcul d'un élément de la structure dont le pas de maillage est de 20 cm, la machine met environ 30 s ; ce qui fait qu'au total, pour la structure entière, elle n'a besoin que de quelques 240 s, soit 4 mn.

Notons qu'en optant pour un plus grand maillage, on peut remarquablement augmenter cette vitesse de calcul.

Chapitre 3

Comparaison des résultats

1 Etats de la structure

Juste après l'application des efforts de chargement sur la structure, les déformations commencent à apparaître. Il convient de rappeler que les déformations réelles sont composées d'une part, des déplacements et d'autre part, des rotations au niveau de chaque nœud.

1.1 Méthode des rotations

1.1.1 Calcul des contraintes à mi-travées

Les valeurs des contraintes en travée sont calculées de part les valeurs des moments fléchissant en utilisant la théorie des poutres : c'est-à-dire les formules statiques classiques qui lient les sollicitations et les contraintes dans une poutre.

$$\begin{cases} \sigma_N = \sigma_{NN} + \sigma_{NM} \\ \sigma_T = \sigma_{TM} + \sigma_{TT} \end{cases} \quad (4-3-1-1)$$

$$\sigma_{NN}(x) = \frac{N(x)}{A}$$

$$\sigma_{NM}(x) = \frac{M_f(x)}{I} v$$

$$\sigma_{TM}(x) = \frac{h V(x)}{I}$$

$$\sigma_{TT}(x) = \frac{M_t(x)}{I} v$$

La contrainte normale maximale σ_N ainsi que celle la valeur absolue de la contrainte de cisaillement σ_T à mi-travées dans chaque élément de la structure sont données par le tableau suivant ; l'unité étant le MPa.

MPa	σ_N	σ_T		σ_N	σ_T
AB	1,8705	1,8164	CF	0,2813	0,6333
BC	2,2188	1,1169	DE	0,3507	0,6268
BD	0,6958	0,3507	DF	0,3507	0,2559
CD	0,3742	0,7689	EG	1,4805	1,8094
CE	0,2813	0,0598	FH	0,2503	0,8742

Tableau 1 : contraintes à mi-travées

1.1.2 Calcul des déformations à mi-travées

De même, les déformations en travée sont calculées à partir des contraintes en utilisant les modules d'élasticité des éléments.

$$\varepsilon = E^{-1} \cdot \sigma \quad (4-3-1-2)$$

Tout calcul fait, les déformations à mi-travées, en valeur absolue, sont telles que:

	ε_N	ε_T
AB	1,36 E-02	1,32 E-02
BC	1,61 E-02	8,12 E-03
CE	2,05 E-03	4,34 E-04
F	2,55 E-03	1,86 E-03

Tableau 2 : déformations à mi-travées

1.2 Méthode matricielle

Par la méthode matricielle, les déformations nodales sont calculées par la méthode elle-même ; les déformations à mi-travées peuvent donc être directement déduites par l'interpolation des déformations en chaque extrémité des éléments.

1.2.1 Calcul des contraintes à mi-travées

Les contraintes peuvent être déduites des sollicitations en utilisant les formules qui sont présentées dans le paragraphe 1.1.1 de la méthode des rotations.

Le tableau suivant indique les valeurs maximales des contraintes à mi-travée de chaque élément de la structure.

MPa	σ_x	σ_y	σ_z			σ_x	σ_y	σ_z
AB	1,2378	1,1124	1,5337		CF	0,2850	0,1234	0,0615
BC	1,5267	0,7443	1,6238		DE	0,4087	0,2300	0,2678
BD	2,2875	1,3729	0,0714		DF	0,1025	0,7530	0,0650
CD	0,6803	0,0537	0,6837		EG	1,2410	1,1123	1,5267
CE	0,4637	0,0478	0,3778		FH	0,2128	0,0443	0,9690

Tableau 3 : contraintes à mi-travées

1.2.2 Calcul des déformations à mi-travées

Pour simplifier les opérations à effectuer, appliquons directement la loi de Hooke aux valeurs des contraintes qui ont été calculées précédemment.

$$\varepsilon = E^{-1} \cdot \sigma$$

Le tableau qui suit résume les déformations à mi-travée de chaque élément de la structure.

	ε_x	ε_y	ε_z
AB	0,003 650	0,003 010	0,001 372
BC	0,001 221	0,002 313	0,001 315
CE	0,000 318	0,000 696	0,000 305
DF	0,000 781	0,000 354	0,0008 771

Tableau 4 : déformations à mi-travées

1.3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis, comme la méthode matricielle, peut donner directement les valeurs des déformations nodales. On accède donc facilement aux valeurs des déformations ainsi qu'aux valeurs des contraintes à mi-travées par des opérations simples.

1.3.1 Calcul des déformations à mi-travées

Comme les degrés de liberté au niveau de chaque nœud pris en compte lors des calculs sont au nombre de 3, le programme retourne les déplacements nodales suivant les trois axes de coordonnées. Les déformations à mi-travée du tableau ci-après résultent de la valeur moyenne des valeurs de la déformation au niveau des points les plus proches du milieu de la travée en question.

	ε_x	ε_y	ε_z
AB	0,003 731	0,003 111	0,001 218
BC	0,001 145	0,001 367	0,002 478
CE	0,000 304	0,001 837	0,000 157
DF	0,000 396	0,000 345	0,000 791

Tableau 5 : déformations à mi-travées

1.3.2 Calcul des contraintes à mi-travées

De part les valeurs des déplacements, on peut accéder aux valeurs des contraintes en utilisant la loi de comportement de chaque élément de la structure.

Les contraintes maximales correspondant aux déplacements établis dans le tableau précédent sont :

MPa	σ_x	σ_y	σ_z			σ_x	σ_y	σ_z
AB	1,2181	1,0740	1,5180		CF	0,2025	0,1067	0,0539
BC	1,5426	0,8019	1,6352		DE	0,4778	0,2430	0,3089
BD	2,2640	1,3655	0,0709		DF	0,0985	0,7498	0,0654
CD	0,7284	0,0690	0,7085		EG	1,3769	1,1396	1,5508
CE	0,3923	0,0345	0,3667		FH	0,0708	0,0198	0,9573

Tableau 6 : contraintes à mi-travées

2 Comparaison des contraintes

2.1 Tableau de comparaison des contraintes

Considérons les contraintes maximales au niveau de quelques éléments de la structure en vue d'une comparaison de valeurs. L'unité de contraintes employée dans le tableau qui suit est le MPa.

Nœud	Méthode des rotations		Méthode matricielle			Méthode des EF		
	σ_N	σ_T	σ_x	σ_y	σ_z	σ_x	σ_y	σ_z
AB	1,8705	1,8164	1,2378	1,1124	1,5337	1,2181	1,0740	1,5180
BC	2,2188	1,1169	1,5267	0,7443	1,6238	1,5426	0,8019	1,6352
CE	0,2813	0,0598	0,4637	0,0478	0,3778	0,3923	0,0345	0,3667
DF	0,3507	0,2559	0,1025	0,7530	0,0650	0,0985	0,7498	0,0654

Tableau 7 : comparaison des contraintes

2.2 Contraintes données par le logiciel Robot

Dans le but de vérifier la fiabilité des résultats proposés par les trois programmes, il convient de les comparer à des valeurs déjà approuvées.

Le tableau ci-après contient les valeurs des contraintes maximales en ces mêmes points, calculées par le logiciel 'Robot'.

Nœud	Logiciel Robot		
	σ_x	σ_y	σ_z
AB	1,3599	1,0729	1,6878
BC	1,5902	0,7292	1,7125
CE	0,5098	0,0707	0,4100
DF	0,6904	0,7569	0,7164

Tableau 8 : contraintes du logiciel Robot

- Les contraintes du logiciel 'Robot' sont surtout assimilables aux contraintes proposées par la méthode matricielle. Cela signifie déjà que l'on peut attribuer un certain degré de confiance au présent programme.
- Les contraintes proposées par la méthode des rotations ne s'écartent de ces valeurs que de près.
- Les contraintes fournies par la méthode des éléments finis minimisent celles des autres méthodes du fait que la subdivision de cette méthode est la plus affinée.

3 Comparaison des déformations

3.1 Tableau de comparaison des déformations

Suivant les contraintes présentées dans les paragraphes qui précèdent, les valeurs des déformations au niveau des éléments AB, BC, CE et DF sont données par le tableau suivant.

Nœud	Méthode matricielle			Méthode des EF		
	ε_x	ε_y	ε_z	ε_x	ε_y	ε_z
AB	0,003 650	0,003 010	0,001 372	0,003 731	0,003 111	0,001 218
BC	0,001 221	0,002 313	0,001 315	0,001 145	0,001 367	0,002 478
CE	0,000 318	0,000 696	0,000 305	0,000 304	0,001 837	0,000 157
DF	0,000 781	0,000 354	0,000 877	0,000 396	0,000 345	0,000 791

Tableau 9 : comparaison des déformations

Les déformations proposées par ces deux méthodes sont tout à fait comparables ; elles ne diffèrent que de près.

3.2 Remarque

Les déformations proposées par la méthode des rotations ne sont pas représentées dans le tableau de comparaison puisque cette méthode ne peut pas donner les valeurs des déformations suivant les trois axes de coordonnées.

4 Observations issues de la comparaison

Suivant les résultats obtenus selon les trois méthodes de calcul proposées dans le programme, notons quelques observations sur l'envergure de chacune d'elles.

4.1 Méthode des rotations

Les valeurs des contraintes ainsi que celles des déformations obtenues par la méthode des rotations après les calculs sont, en moyenne, supérieures aux valeurs réelles (estimées après la comparaison). Cependant, elles sont très proches de ces dernières.

D'une autre part, le temps mis par le programme pour parfaire la totalité des opérations de calculs est remarquablement rapide par rapport aux deux autres méthodes.

De part ces remarques, déduisons en conclusion que la méthode des rotations est une méthode parfaitement utilisable pour le calcul d'un portique moyennant les quelques hypothèses détaillées dans les premiers chapitres de l'ouvrage.

4.2 Méthode matricielle

La méthode matricielle, plus que la méthode des rotations, retourne des valeurs qui identifient pratiquement les valeurs réelles des contraintes ainsi que celles des déformations dans cette étude. Cependant, le temps mis par le programme pour les diverses étapes de calculs est relativement lent par rapport à cette première méthode.

Cette concordance est surtout due au fait que cette méthode permet de représenter toutes les forces pouvant s'appliquer dans un système de poutre : les forces ainsi que les moments correspondant.

Concluons que la méthode matricielle est une méthode assez précise pour le calcul des structures composées de poutres (ou de barre) moyennant quelques paramètres temporels.

4.3 Méthode des éléments finis

De son côté, le temps de calcul nécessaire au programme pour le calcul de la structure par la méthode des éléments finis est nettement supérieur aux deux autres méthodes.

Quant aux résultats donnés par la méthode, les valeurs décalent des valeurs réelles, d'une manière très atténuée. Pourtant, il faut remarquer que les valeurs des contraintes normales (de compression) proposées par la méthode sont les minimales.

Les contraintes et les déformations données par la méthode des éléments finis doivent être celles qui se rapprochent le plus de la réalité puisque le maillage de la méthode est le plus fin. Toutefois, notons que l'élément de référence utilisé par le programme est le tétraèdre élémentaire à quatre nœuds possédant trois degrés de liberté au niveau de chacun de ses extrémités. Ce qui fait qu'en quelques sortes, les calculs négligent les rotations et ne prennent en compte que les translations des nœuds.

Ainsi, la méthode des éléments finis par le tétraèdre élémentaire à quatre nœuds est surtout appropriée au calcul des structures qui travaillent plutôt en traction-compression ou en cisaillement qu'en flexion : telles que les poteaux centrés, les treillis, ainsi que les pièces solides comprimées des fondations du bâtiment.

Conclusion de la quatrième partie

Le choix de la structure sur laquelle les études sont effectuées a été fondé dans le but d'une part, de représenter une forme plus ou moins complexe tout en gardant une idée sur les états de chargements ainsi que sur les états de déformations possibles et d'autre part, de se fonder sur un portique réellement concevable.

Afin de s'écarter des détails sur le type et la forme des semelles, l'ancrage du bout de chaque poteau dans le sol de fondation est tel que tous les degrés de liberté des nœuds d'appuis dans le sol sont supprimés.

Le temps mis par la méthode des rotations pour effectuer les opérations de calculs est le plus rapide. Celui de la méthode des éléments finis est le plus lent du fait que le nombre des éléments de subdivision considérés par cette méthode est très élevé. Néanmoins, les vitesses de calculs proposées par le programme sont incontestablement élevées.

Les résultats retournés par la méthode des rotations rapprochent les valeurs réelles de très près. Ceux de la méthode matricielle les identifient pratiquement. Quant à la méthode des éléments finis, les valeurs qu'elle fournisse présentent des menues écarts par rapport aux valeurs réelles puisque l'élément tétraédrique pris comme élément de référence néglige en quelque sorte les efforts fléchissant.

CONCLUSION

Les concepteurs, en dehors des problèmes architecturaux, sont toujours confrontés à des problèmes techniques et économiques durant la phase de calculs de leurs structures ; et cela est inévitable.

Pendant longtemps, ils devaient, sans aucune autre manière, effectuer les calculs de façon manuelle : un travail rude et difficile. Ce qui a incité les ingénieurs à employer des méthodes simples, adaptées à des structures particulières ; les méthodes de calculs forfaitaires ont alors connu un essor et par la suite, les méthodes analytiques ont été délaissées.

De nos jours, les ingénieurs du Génie Civil ont profité du progrès informatique pour réduire ces problèmes par la programmation des méthodes numériques appliquées au calcul de structures moyennant l'outil informatique. Qui plus est, du fait de sa très grande rapidité, cette technique permet d'effectuer un test virtuel sur la déformation d'une multitude de variantes et de choisir entre celles qui ont une résistance sécuritaire ou encore d'optimiser les formes des éléments dans le but de gagner sur les matériaux.

Dans cet ouvrage, nous avons consacré une étude sur la programmation sous Matlab : un logiciel de simulation numérique et virtuelle, en se basant sur quelques méthodes de calcul de structures. Notons que de part les étapes théoriques présentées dans la seconde partie et de part les organigrammes de la troisième partie, on peut facilement déduire une démarche de programmation pouvant s'adapter à d'autre langage.

En ce qui concerne l'extension de ces programmes, les résultats obtenus pendant ce premier travail sont promettant. Et on peut déjà envisager de continuer une recherche sur la programmation de l'étude des solides déformables en dehors de la phase élastique de leurs déformations.

BIBLIOGRAPHIES

- [1] ARGYRIS, J.H.,
«*Recent advances in Matrix Methods of Structural Analysis*»
Pergamon Press, 1964, 190 p
- [2] BATHE K.J.,
«*Finite Element Procedures* »
Prentice Hall, 1996, 1052 p
- [3] Jean-Louis BATOZ et Gouri DHATT :
«*Modélisation des structures par éléments finis -Volume 1,2 et 3 : Solides élastiques, Poutres et plaques et Coques*»
Hermès, 1990 – 1992. 455, 483 et 564 p
- [4] Jean COURBON :
«*Résistance des matériaux, Théories des poutres* »
Techniques de l'ingénieur et traité de Construction, 2006, 30 p
- [5] Yves DEBARD
«*RdM 5.xx Module élasticité plane*»
Institut Universitaire de Technologie du Mans
Département Génie Mécanique et Productique, 163 p
- [6] Jean GARRIGUES
«*La méthode des éléments finis* »
Janvier 2002, 83 p
- [7] Hervé OUDIN
«*Méthode des éléments finis* »
Janvier 2009, 69 p
- [8] ROSS, C.T.F.,
«*Finite element methods in engineering science* »
Ellis Horwood, 1985.
- [9] ROSS, C.T.F.,
«*Finite Element Programs for Axisymmetric Problems in Engineering*»
Ellis Horwood, 1984.
- [10] SABOURIN F. SALLE E ;
«*Calculs des Structures par Eléments Finis - Barres - Poutres Elasticité plane Axisymétrie -Plaques – Coques - Non-linéarités* »
21 novembre 2007, 54 p
- [11] RAZAFINJATO V. ;
[12] RIVONIRINA R.
«*Cours de calculs des structures* » dépensés à l'ESPA.

TABLE DES MATIERES

Introduction

Première partie : Introduction au calcul de structures

Chapitre 1 : Approche de la Résistance des matériaux

1	Aspect physique.....	2
1.1	Description du problème.....	3
1.2	But de la Résistance des Matériaux.....	3
1.3	Résolution d'un problème statique par la Résistance des Matériaux.....	4
2	Principes généraux de la mécanique des corps solides.....	4
2.1	Déformations et contraintes dans un solide.....	4
2.1.1	Déplacements et déformations.....	4
2.1.2	Déformations.....	5
2.1.3	Contraintes.....	6
2.1.4	Relations entre contraintes et déformations.....	7
2.2	Cadre mathématique.....	7
2.3	Etapes de résolution d'un problème.....	8
2.4	Application aux ouvrages du Génie Civil.....	9
2.4.1	Eléments de construction.....	9
2.4.2	Poutre.....	11
2.4.3	Poteau.....	12
2.4.4	Dalle.....	13
2.4.5	Plaque.....	13
2.4.6	Coque et voile.....	14
2.4.7	Arc et voûte.....	14
2.4.8	Dôme.....	15
2.4.9	Coupole.....	15
2.4.10	Réservoir.....	15
2.4.11	Membrane.....	16
2.4.12	Portique.....	16

2.5	Hypothèses.....	17
2.5.1	Hypothèses de base.....	17
2.5.2	Hypothèses de calcul.....	22
2.5.3	Autres hypothèses.....	27

Chapitre 2 : Introduction au calcul de structures

1	Contexte physique	28
2	Description du calcul de structures.....	30
2.1	Définitions.....	30
2.1.1	Structure.....	30
2.1.2	Calcul de structures.....	30
2.2	Types de structures.....	31
2.2.1	Système de poutres continues.....	32
2.2.2	Structure de barres.....	32
2.2.3	Portique d'un bâtiment.....	32
2.3	Objectifs du calcul de structures.....	33
2.4	Hypothèses des méthodes de calcul de structures.....	33
2.4.1	Hypothèse de Saint Venant.....	33
2.4.2	Hypothèse de Navier.....	34
3	Structures isostatiques et hyperstatiques.....	36
3.1	Structures isostatiques.....	36
3.1.1	Equations d'équilibre statique.....	36
3.1.2	Structures isostatiques.....	36
3.2	Structures hyperstatiques.....	37
3.2.1	Différence entre isostatique et hyperstatique.....	37
3.2.2	Hyperstaticités interne et externe.....	37
4	Quelques méthodes de calcul pour les structures hyperstatiques.....	38
4.1	Méthode de forces.....	38
4.1.1	Théorème de Menabrea.....	38

4.1.2	Principe de la méthode.....	39
4.1.3	Equations de continuité.....	39
4.1.4	Résolution des équations de continuité.....	40
4.2	Méthode des rotations.....	40
4.3	Méthode matricielle.....	41
Conclusion de la première partie.....		42

Seconde partie : méthodes de calcul de structures

Chapitre 1 : Méthode analytique

1	Domaine d'utilisation de la méthode des rotations.....	43
2	Description de la méthode.....	43
2.1	Portiques à nœuds fixes.....	43
2.2	Les portiques à nœuds déplaçables.....	44
2.3	Démarches de la méthode des rotations.....	44
3	Equations d'équilibre.....	45
4	Résolution d'un problème de calcul de structure.....	46
4.1	Généralités.....	46
4.2	Etapas de la résolution.....	47
5	Calcul d'une structure plane par la méthode des rotations.....	51
5.1	Schéma de la structure.....	51
5.2	Equations d'équilibre.....	52
5.3	Equations traduisant les mécanismes.....	53
5.4	Assemblage.....	54
6	Extension de la méthode pour les structures spatiales.....	55
6.1	Formulation des équations d'équilibres nodaux.....	55
6.2	Transfert des équations dans le repère global.....	56
6.3	Equations traduisant les mécanismes.....	57

Chapitre 2 : Méthode matricielle

1	Description de la méthode.....	58
1.1	Fondement.....	58
1.2	Principe.....	58
1.3	Quelques définitions.....	59
1.3.1	Eléments et nœuds.....	59
1.3.2	Forces et déplacements correspondants.....	59
1.3.3	Degrés de liberté.....	60
1.3.4	Déplacements indépendants.....	60
1.3.5	Forces indépendantes.....	60
1.3.6	Conditions régissant le comportement structural.....	60
2	Matrices élémentaires.....	61
2.1	Coefficients matricielle au niveau d'un nœud.....	61
2.2	Matrice élémentaire d'une barre.....	61
2.2.1	Equations au niveau d'une extrémité de barre.....	62
2.2.2	Equation matricielle d'une barre.....	62
2.3	Matrice élémentaire d'une poutre en torsion.....	63
2.3.1	Contrainte de glissement.....	63
2.3.2	Angle de torsion.....	63
2.3.3	Matrice de rigidité élémentaire d'une poutre en torsion.....	63
2.4	Matrice élémentaire d'une poutre dans le plan.....	64
2.4.1	Equation de la déformée.....	64
2.4.2	Expressions des efforts au niveau des nœuds.....	64
2.4.3	Identification des composantes de la matrice de rigidité.....	66
3	Calcul de structure par la méthode matricielle.....	66
3.1	Matrice de transfert.....	66
3.1.1	Matrice de transfert d'un vecteur local en un vecteur global.....	67
3.1.2	Matrice de transfert des composantes d'une matrice de rigidité élémentaire.....	67

3.1.3	Transfert de la matrice de rigidité élémentaire.....	69
3.2	Réseau de poutres.....	69
3.2.1	Etapas de calcul.....	70
3.2.2	Opérations matricielles.....	71
3.2.3	Résolution.....	72

Chapitre 3 : Méthode de calcul par éléments finis

1	Théorème des Travaux Virtuels.....	73
1.1	Equilibre des solides élastiques.....	73
1.1.1	Equilibre statique d'un solide.....	73
1.1.2	Mise en équations.....	73
1.2	Théorème des Travaux Virtuels.....	74
1.2.1	Enoncé du TTV.....	75
1.2.2	Expression du TTV.....	75
1.2.3	Equivalence entre les équations variationnelles classiques et le TTV.....	75
2	Discrétisations.....	76
2.1	Généralités.....	76
2.1.1	Objectifs.....	76
2.1.2	Définition.....	76
2.2	Problème sur les méthodes de calculs continus.....	76
2.3	Quelques méthodes de discrétisation.....	77
2.3.1	Méthode d'approximation de Ritz.....	77
2.3.2	Méthode des résidus pondérés.....	78
2.3.3	Méthode de Galerkin.....	79
2.3.4	Méthodes de collocation.....	79
2.3.5	La méthode des sous-régions.....	79
2.3.6	La méthode des moindres carrés.....	80
2.3.7	Méthode des éléments finis.....	80

3	Discrétisation par éléments finis.....	81
3.1	Démarche de la discrétisation par éléments finis.....	81
3.1.1	Formulation variationnelle.....	82
3.1.2	Approximation par sous-domaines.....	82
3.1.3	Assemblage et résolution.....	84
3.1.4	Résumé de la démarche par schématisation.....	84
3.2	Eléments de référence.....	85
3.2.1	Eléments finis unidimensionnels.....	85
3.2.2	Eléments finis bidimensionnels.....	86
3.2.3	Eléments finis tridimensionnels.....	86
3.3	Justification du choix de l'élément fini tétraédrique.....	87
3.3.1	Considération de la dimension dans laquelle le calcul sera exécuté.....	87
3.3.2	Forme de l'élément.....	87
3.3.3	Degré de précision.....	88
3.3.4	Coût du calcul.....	88
3.3.5	Envergure de la méthode.....	88
3.4	Opérations élémentaires.....	88
3.4.1	Matrices de transfert des coordonnées.....	88
3.4.2	Vecteur des forces.....	90
3.4.3	Matrice de rigidité élémentaire.....	90
3.4.4	Assemblage.....	93
	Conclusion de la seconde partie.....	95

Troisième partie : Programmations

Chapitre 1 : Présentation du logiciel

1	Logiciel de programmation.....	99
1.1	Preliminaires.....	99

1.2	Caractéristiques d'un logiciel de programmation.....	99
1.2.1	Manipulation.....	99
1.2.2	Rapidité.....	99
1.2.3	Puissance.....	100
1.2.4	Approximation.....	100
2	Matlab.....	101
2.1	Historique.....	101
2.2	Justification du choix.....	102
2.3	Opérations élémentaires sur Matlab.....	103
2.3.1	Interface principale de Matlab.....	103
2.3.2	Variables en Matlab.....	104
2.3.3	Variables prédéfinies.....	104
2.3.4	Opérations sur les matrices.....	105
2.4	Programmer en Matlab.....	105
2.4.1	Extension d'un fichier programme.....	105
2.4.2	Instructions de contrôle.....	106
2.4.3	Programme utilisant d'autres programmes.....	106
2.5	Création d'un programme interactif dans Matlab.....	107
2.5.1	Définition.....	107
2.5.2	Avantages.....	108
2.5.3	Création.....	109
2.5.4	Manipulation.....	110

Chapitre 2 : Programmation de la méthode des rotations

1	Seconds membres des équations d'équilibre.....	111
1.1	Moments parfaits.....	111
1.2	Formulation du vecteur des seconds membres.....	111
1.2.1	Seconds membres des équations nodales.....	111
1.2.2	Seconds membres des équations de mécanismes.....	112

1.3	Organisation des calculs.....	112
1.4	Arguments d'entrée.....	112
1.5	Arguments de sortie.....	113
2	Matrice de rigidité.....	113
2.1	Facteurs de rigidité.....	113
2.2	Equations des mécanismes.....	113
2.3	Formulation de la matrice de rigidité.....	114
3	Résolution.....	114
3.1	Représentation matricielle de l'équilibre du système.....	114
3.2	Détermination des rotations inconnues.....	114
3.3	Calcul des moments aux nœuds.....	115
3.4	Organisation des calculs par la méthode des rotations.....	116
3.4.1	Procédés.....	116
3.4.2	Arguments d'entrée.....	116
3.4.3	Argument de sortie.....	117

Chapitre 3 : Programmation de la méthode matricielle

1	Matrice de rigidité élémentaire.....	118
1.1	Arguments d'entrée.....	118
1.2	Organisation des calculs.....	118
2	Vecteur élémentaire des forces.....	119
2.1	Organisation des calculs.....	119
2.2	Arguments d'entrée.....	120
2.3	Argument de sortie.....	120
3	Vecteur élémentaire des déplacements.....	120
3.1	Arguments d'entrée.....	120
3.2	Organisation des calculs.....	121
3.3	Arguments de sortie.....	122

4	Assemblages.....	122
4.1	Assemblage de la matrice de rigidité.....	122
4.1.1	Organisation des calculs.....	122
4.1.2	Procédé.....	123
4.2	Assemblage du vecteur des forces.....	124
4.2.1	Procédé.....	124
4.2.2	Organisation des calculs.....	124
4.3	Assemblage du vecteur des déplacements.....	125
4.3.1	Procédé.....	125
4.3.2	Organisation des calculs.....	125

Chapitre 4 : Programmation des calculs par éléments finis

1	Matrice de rigidité élémentaire.....	126
1.1	Organisation des calculs.....	126
1.2	Arguments d'entrée.....	126
1.2.1	Module d'élasticité.....	127
1.2.2	Coefficient de Poisson.....	127
1.2.3	Pas du maillage.....	127
1.3	Argument de sortie.....	127
1.4	Opérations manuelles pour la vérification du script.....	128
1.4.1	La fonction élémentaire de base.....	128
1.4.2	Fonction d'interpolation.....	128
1.4.3	Matrice reliant les déformations aux variables nodales.....	128
1.4.4	Module d'élasticité.....	129
1.4.5	Matrice de rigidité élémentaire.....	130
2	Vecteur des forces.....	132
2.1	Arguments d'entrée.....	132
2.1.1	Position.....	132
2.1.2	Intensité.....	132

2.1.3	Direction.....	132
2.2	Argument de sortie.....	133
3	Vecteur des déplacements.....	133
3.1	Arguments d'entrée.....	133
3.2	Argument de sortie.....	133
4	Assemblages.....	134
4.1	Assemblages de la matrice de rigidité globale.....	134
4.1.1	Premier assemblage.....	134
4.1.2	Second assemblage.....	136
4.1.3	Données utiles.....	138
4.2	Assemblage du vecteur force.....	139
4.2.1	Organisation des calculs.....	139
4.2.2	Vecteur des forces au niveau d'un nœud.....	139
4.2.3	Vecteur force d'un élément de la structure.....	139
4.2.4	Vecteur force de la structure.....	140
4.3	Assemblage du vecteur déplacement.....	140
4.3.1	Déplacements au niveau d'un nœud.....	140
4.3.2	Vecteur déplacement d'un élément de la structure.....	141
4.3.3	Organisation des calculs.....	141
4.3.4	Vecteur déplacement de la structure.....	141
5	Résolution de l'équation matricielle finale.....	142
5.1	Arguments d'entrée.....	142
5.2	Procédés.....	142
5.3	Organisation des calculs.....	145
5.4	Arguments de sortie.....	145

Chapitre 5 : Regroupement des programmes

1	Les interfaces interactives.....	146
1.1	Interfaces préliminaires.....	146

1.1.1	Interface d'introduction.....	146
1.1.2	Interface de choix des méthodes.....	146
1.2	Interfaces principales.....	147
1.2.1	Interface de la méthode des rotations.....	147
1.2.2	Interface de la méthode matricielle.....	150
1.2.3	Interface de la méthode des éléments finis.....	155
	Conclusion de la troisième partie.....	156

Quatrième partie : Application

Chapitre 1 : Description du problème

1	Description du problème.....	157
1.1	Procédé de l'étude.....	157
1.2	Schéma de représentation de la forme de la structure.....	157
1.3	Schéma de représentation simplifiée de la forme de la structure.....	158
2	Données du problème.....	158
2.1	Caractéristiques du matériau composant les éléments de la structure.....	159
2.2	Sollicitations et déplacements imposés.....	159
2.2.1	Sollicitations.....	159
2.2.2	Déplacements imposés.....	160

Chapitre 2 : Simulations

1	Résolution du problème.....	161
1.1	Méthode des rotations.....	161
1.1.1	Rotations aux nœuds.....	162
1.1.2	Moments aux appareils d'appui.....	162
1.2	Méthode matricielle.....	163

1.2.1	Schéma de la structure avant sa déformation.....	163
1.2.2	Déplacements aux nœuds.....	163
1.2.3	Sollicitations aux nœuds.....	164
1.2.4	Schémas de la structure après sa déformation.....	164
1.3	Méthode des éléments finis.....	165
1.3.1	Déplacements aux extrémités de chaque élément de la structure.....	166
1.3.2	Schéma de la structure avant sa déformation.....	166
1.3.3	Sollicitations aux extrémités de chaque élément de la structure.....	167
1.3.4	Schémas de la structure après sa déformation.....	169
2	Temps de calcul.....	169
2.1	Puissance de la machine.....	169
2.2	Méthode des rotations.....	170
2.3	Méthode matricielle.....	170
2.4	Méthode des éléments finis.....	170

Chapitre 3 : Comparaisons des résultats

1	Etats de la structure.....	172
1.1	Méthode des rotations.....	172
1.1.1	Calcul des contraintes à mi-travées.....	172
1.1.2	Calcul des déformations à mi-travées.....	172
1.2	Méthode matricielle.....	173
1.2.1	Calcul des contraintes à mi-travées.....	173
1.2.2	Calcul des déformations à mi-travées.....	173
1.3	Méthode des éléments finis.....	174
1.3.1	Calcul des déformations à mi-travées.....	174
1.3.2	Calcul des contraintes à mi-travées.....	175
2	Comparaison des contraintes.....	175
2.1	Tableau de comparaison des contraintes.....	175
2.2	Contraintes données par le logiciel Robot.....	175

3	Comparaison des déformations.....	176
3.1	Tableau de comparaison des déformations.....	176
3.2	Remarque.....	177
4	Observations issues de la comparaison.....	177
4.1	Méthode des rotations.....	177
4.2	Méthode matricielle.....	177
4.3	Méthode des éléments finis.....	178
	Conclusion de la quatrième partie.....	179

Conclusion

Bibliographies

Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo
Département Bâtiment et Travaux Publics

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme d'Ingénieur
en Bâtiment et Travaux Publics

RAMANDALINA

Miharivo Arthur

VB IV 117 Tongarivo Tanjombato
102 – Antananarivo
034 01 490 45
miharivoarthur@yahoo.fr

Titre : Programmes de calculs des portiques tridimensionnels

Nombre de pages : 180

Nombre de figures : 43

Nombres de Tableaux : 158

Résumé

L'objet de ce mémoire est l'élaboration d'un programme de calcul permettant la détermination de l'état de n'importe quel portique, avec une certaine précision, dans un temps relativement court. Des descriptions ainsi que des rappels théoriques sur les principes analytiques des méthodes de calculs de structures sont présentés dans les premières parties de cet ouvrage. Matlab a été choisi comme étant le logiciel de programmation de ses méthodes du fait de sa grande maniabilité bien que les directives théoriques et les organigrammes proposés peuvent très bien être utilisés pour une programmation sous un autre langage.

Summary

The object of this book is the development of a calculation program allowing the determination of the state of any beams structure with a certain precision, in a relatively short time. Descriptions of theories on the analytical principles of the methods of structures' calculation are presented in the first parts of this work. Matlab was selected as being the software under which the programming of those methods are written because of its great handiness although the theoretical directives and the flow charts proposed can be used for programming under another language.

Mots clés : programmation, Matlab, calculs de structures, comparaison des résultats.

Directeur du mémoire : Monsieur RAHELISON Landy