

# Table des matières

<b>Liste des notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>Publications</b>	<b>7</b>
<b>1 Préliminaires sur les systèmes MIMO</b>	<b>9</b>
1.1 Système MIMO . . . . .	10
1.1.1 Schéma de transmission . . . . .	10
1.1.2 Codeur temps-espace . . . . .	10
1.1.3 Modulation . . . . .	11
1.1.4 Canal . . . . .	13
1.1.4.1 Présentation générale des canaux SISO . . . . .	13
1.1.4.2 Modèles de canaux de propagation . . . . .	14
1.2 Notion de diversité . . . . .	16
1.3 Capacité d'un canal . . . . .	17
1.3.1 Canal SISO . . . . .	17
1.3.1.1 Canal MIMO . . . . .	17
1.4 Conclusion . . . . .	19
<b>2 Codage temps-espace</b>	<b>21</b>
2.1 Performances et critères de performance . . . . .	22
2.1.1 Préliminaires . . . . .	22
2.1.2 Performances des codes temps-espace . . . . .	22
2.1.2.1 Probabilité d'erreurs des codes temps-espace dans un canal à évanouissements lents de Rayleigh . . . . .	23
2.1.2.2 Probabilité d'erreur des codes temps-espace dans un canal à évanouissements rapides de Rayleigh . . . . .	25
2.1.3 Critères de performance . . . . .	26
2.1.3.1 Critères de performance des codes pour un canal à évanouissements lents de Rayleigh . . . . .	26
2.1.3.2 Critères de performance des codes pour un canal à évanouissements rapides de Rayleigh . . . . .	27
2.1.3.3 Conclusion . . . . .	28
2.2 Codes temps-espace en bloc orthogonaux . . . . .	28
2.2.1 Code temps-espace d'Alamouti . . . . .	28
2.2.2 Généralisation du code d'Alamouti . . . . .	30

2.2.2.1	Codes O-STBCs réels . . . . .	32
2.2.2.2	O-STBCs complexes . . . . .	33
2.2.2.3	Codes temps-espace en bloc quasi-orthogonaux . . . . .	34
2.3	Codage en couches . . . . .	34
2.4	Codes à dispersion linéaire . . . . .	35
2.5	Codes algébriques . . . . .	37
2.5.1	Codes DAST . . . . .	37
2.5.2	Code TAST . . . . .	38
2.5.3	Codes parfaits . . . . .	39
2.6	Codes temps-espace en treillis . . . . .	41
2.6.1	Codage temps-espace en treillis . . . . .	41
2.6.2	Algorithme de Viterbi . . . . .	47
2.7	Codes temps-espace en treillis super-orthogonaux . . . . .	48
2.8	Golden STTCs . . . . .	52
2.9	Conclusion . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Outils et propriétés des STTCs <math>2^n</math>-PSK</b>	<b>55</b>
3.1	STTCs à modulation de type $2^n$ -PSK . . . . .	56
3.1.1	Schéma du codeur temps-espace en treillis à modulation de type $2^n$ -PSK	56
3.1.2	Exemples de codes existants . . . . .	58
3.1.3	Exemples de méthodes de construction des STTCs . . . . .	63
3.1.3.1	La méthode de Chen <i>et al.</i> . . . . .	63
3.1.3.2	La méthode d'Abdool-Rasool <i>et al.</i> . . . . .	65
3.1.3.3	Conclusion . . . . .	65
3.1.4	Codes équilibrés . . . . .	65
3.2	Outils et propriétés des STTCs $2^n$ -PSK . . . . .	67
3.2.1	Propriétés générales de $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . . . . .	67
3.2.2	Propriétés des $2^n$ -PSK STTCs . . . . .	73
3.2.3	Propriétés de la distance euclidienne entre deux mots de code . . . . .	74
3.3	Méthode existante de construction des codes équilibrés . . . . .	79
3.3.1	Exemple de génération de STTCs totalement équilibrés de type II ( $n_T = 2$ )	79
3.3.2	Exemple de génération de STTCs totalement équilibrés de type I ( $n_T = 2$ )	80
3.4	Conclusion . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Nouvelles méthodes de construction des STTCs <math>2^n</math>-PSK</b>	<b>83</b>
4.1	Nouvelle méthode de construction des STTCs équilibrés . . . . .	84
4.1.1	Nouvelle méthode de construction des codes équilibrés . . . . .	84
4.1.1.1	Codes totalement équilibrés . . . . .	84
4.1.1.2	Codes équilibrés . . . . .	85
4.1.2	Exemple de génération de STTCs 4-PSK à 3 antennes d'émission . . . . .	86
4.1.3	Exemple pour des STTCs 8 états 8-PSK 4 antennes d'émission . . . . .	90
4.2	Coset partitioning . . . . .	94
4.2.1	Description de la méthode . . . . .	94
4.2.2	Blocs optimaux . . . . .	98
4.2.3	Exemple de construction des meilleurs STTCs $2^n$ états $2^n$ -PSK $n_T$ an- tennes d'émission . . . . .	100

4.2.4	Exemple de construction des meilleurs STTCs 16 états 4-PSK avec $n_T$ antennes d'émission . . . . .	104
4.2.5	Exemple de construction de STTCs 8/32 états 4-PSK . . . . .	111
4.2.6	Exemple de réduction du temps pour obtenir les STTCs 4-PSK à l'aide du coset partitioning . . . . .	112
4.2.7	Conclusion . . . . .	114
4.3	Nouveaux STTCs 4-PSK et 8-PSK . . . . .	115
4.3.1	Codes 4-PSK . . . . .	115
4.3.2	Remarque sur les STTCs 8 états 8-PSK . . . . .	122
4.4	Conclusion . . . . .	125
<b>5</b>	<b>Nouvelle méthode de construction des STTCs <math>2^{2n}</math>-QAM</b>	<b>127</b>
5.1	Rappels sur les STTCs $2^{2n}$ -QAM . . . . .	128
5.1.1	Schéma du codeur . . . . .	128
5.1.2	Méthodes existantes de construction des STTCs $2^{2n}$ -QAM . . . . .	129
5.2	Nouvelle méthode de construction des STTCs $2^{2n}$ -QAM . . . . .	132
5.2.1	Propriétés des STTCs $2^{2n}$ -QAM . . . . .	132
5.2.2	Méthode générale . . . . .	134
5.2.3	Construction des STTCs $4^n$ états $2^{2n}$ -QAM avec $n_T$ antennes d'émission	136
5.2.3.1	Généralités . . . . .	136
5.2.3.2	Exemples de STTCs 16 états 16-QAM . . . . .	137
5.2.3.3	Exemples de STTCs 64 états 64-QAM . . . . .	139
5.2.4	Construction des STTCs 256 états 16-QAM . . . . .	142
5.2.5	Utilité de la décomposition de la distance euclidienne cumulée . . . . .	143
5.3	Conclusion . . . . .	145
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>147</b>
	<b>Annexes</b>	<b>151</b>
	<b>A Puissance moyenne reçue par les antennes de réception</b>	<b>153</b>
	<b>B Influence de la taille des mots de code</b>	<b>157</b>
	<b>C Comparaison des méthodes de génération des codes équilibrés</b>	<b>161</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>165</b>





# Liste des notations

Nous avons regroupé ci-dessous les principales notations utilisées dans ce document. Les vecteurs et les matrices seront respectivement en majuscules et en majuscules gras.

$n_T$	Nombre d'antennes d'émission
$n_R$	Nombre d'antennes de réception
$\mathbb{Z}_{2^n}$	Ensemble des entiers modulo $2^n$
$[\dots]^T$	Transposée de la matrice $[\dots]$
$\mathbf{G}$	Matrice génératrice d'un STTC
$\Phi$	Fonction de modulation des symboles SISO (PSK ou QAM)
$\Phi_v$	Fonction de modulation des symboles MIMO (PSK ou QAM)
$\Psi$	Fonction de codage
$\mathbf{B}$	Matrice des différences entre deux mots de code
$\mathbf{A}$	Matrice des distances entre deux mots de code
$r$	Rang de la matrice des distances entre deux mots de code
$d_E^2$	Distance Euclidienne au carré entre deux mots de code
$Y^t$	Symbole MIMO généré par un codeur temps-espace en treillis à l'instant $t$
$S^t$	Signal MIMO émis par un codeur temps-espace en treillis à l'instant $t$



# Introduction

Depuis quelques décennies, les communications sans-fil occupent une place majeure dans notre société, en s'intégrant de plus en plus dans tous les systèmes électroniques qui nous entourent. De ce fait, les demandes en terme de débit et de fiabilité sont de plus en plus importantes. Dans une communication sans fil, l'information émise est perturbée par le canal de propagation et par les systèmes électroniques eux-mêmes, entraînant une baisse de la qualité de la transmission. Pour faire face aux demandes de performance et aux défauts du canal de propagation, l'utilisation de plusieurs antennes en émission et en réception a été identifiée comme une solution très efficace pour augmenter la capacité du canal de transmission.

Parmi les techniques multi-antennaires dites MIMO pour Multiple Input Multiple Output, le codage temps-espace ou space-time (ST) s'est avéré très intéressant pour garantir une bonne qualité de communication. Chaque code ST est caractérisé par un gain de diversité spatiale et un gain de codage obtenus grâce à une utilisation conjointe du domaine spatial et du domaine temporel. Il existe une multitude de techniques de codage ST, chacune ayant des objectifs différents comme maximiser le rendement, le gain de diversité ou encore le gain de codage. Parmi ces codes, certains sont déjà largement utilisés dans des applications ou des normes existantes. Nous pouvons citer par exemple le code d'Alamouti employé dans la norme UMTS. Ce code fait partie de la famille des codes temps-espace en bloc (STBCs). Il a l'avantage d'offrir un gain de diversité maximal pour deux antennes d'émission et cela pour un décodage relativement simple. Récemment, pour augmenter le rendement et le gain de codage des systèmes MIMO, une famille de STBCs nommés codes parfaits a été élaborée.

La famille des codes temps-espace en treillis (STTCs) permet d'obtenir un gain de codage élevé. Les STTCs, proposés pour la première fois par Tarokh *et al.*, sont basés sur une généralisation des modulations codées en treillis dans un contexte MIMO. Chaque codeur temps-espace en treillis est caractérisé par son nombre d'états possibles, son nombre d'antennes d'émission et la modulation utilisée. Ainsi, le flux binaire d'entrée est réparti entre les différentes antennes d'émission à l'aide d'une matrice génératrice, avant d'être envoyé dans le canal de propagation. En réception, l'algorithme de Viterbi est couramment utilisé pour décoder l'information envoyée, ce qui demande un minimum de puissance de calcul. Pour optimiser les performances des STTCs, plusieurs critères ont été proposés pour maximiser le gain de diversité spatiale et le gain de codage. A l'aide de ces critères, une recherche peut être effectuée pour trouver les meilleurs STTCs. Cependant, le temps de recherche pour obtenir ces codes est important, particulièrement lorsque le nombre d'antennes d'émission, la complexité de la modulation ou la taille du bloc mémoire du codeur augmentent. L'utilisation d'une méthode efficace pour générer les meilleurs STTCs est alors nécessaire.

Cette thèse a pour objectif de trouver des solutions efficaces pour réduire le temps de recherche des meilleurs STTCs. Une précédente étude a montré que les meilleurs STTCs publiés appartenaient tous à une classe particulière de codes : la classe des codes équilibrés. Un

code est dit équilibré si les symboles MIMO émis sont équiprobables dans le cas où les données d'entrée sont fournies d'une façon équiprobable par une source binaire sans mémoire. Basés sur cette constatation, de précédents travaux ont permis d'élaborer une première méthode de construction des codes équilibrés qui a été exploitée dans le cas d'une modulation 4-PSK.

Dans un premier temps, nous avons donc proposé une nouvelle méthode plus efficace permettant la création des codes équilibrés  $2^n$ -PSK avec un nombre quelconque d'antennes d'émission. Par la suite, nous avons travaillé sur une méthode que nous avons appelée co-set partitioning, permettant de réduire de manière considérable le temps de recherche des meilleurs STTCs  $2^n$ -PSK. Nos études se sont ensuite orientées vers l'élaboration d'une méthode de construction des meilleurs STTCs utilisant une modulation d'amplitude en quadrature (QAM). Ainsi, les méthodes développées durant nos travaux ont permis la génération de codes performants à grand nombre d'antennes d'émission, à grand nombre d'états, aussi bien pour des signaux  $2^n$ -PSK que pour des signaux  $2^{2n}$ -QAM et cela sans recherches longues et fastidieuses.

## **Organisation de la thèse :**

Le premier chapitre introduit les bases des communications MIMO. Nous commençons par décrire les différentes caractéristiques d'un système MIMO. Les expressions de la capacité des canaux SISO et MIMO sont ensuite rappelées.

Dans le deuxième chapitre, un état de l'art concernant les codes ST est exposé. Tout d'abord, les principaux critères de performance des codes ST pour des canaux lents et rapides de Rayleigh sont rappelés. Dans le cas où le nombre de sous-canaux indépendants est faible, les performances sont gouvernées par les critères du rang et du déterminant pour des canaux à évanouissements lents de Rayleigh et par les critères de la distance de Hamming et de la distance-produit pour des canaux à évanouissements rapides de Rayleigh. Par contre, pour un nombre important de sous-canaux indépendants, le critère de la trace est préconisé pour décrire les performances des STTCs en présence de canaux à évanouissements lents et rapides de Rayleigh.

Dans le but de satisfaire ces critères, différentes techniques de codage ont été élaborées durant de précédents travaux. Ce chapitre se poursuit par la présentation du code d'Alamouti, suivi de sa généralisation à des codes ayant un nombre plus élevé d'antennes d'émission, couramment appelés STBCs orthogonaux. D'autres STBCs sont ensuite exposés tels que les codes en couche, les codes à dispersion linéaire et les codes algébriques. La famille des STTCs, sujet de nos travaux, est par la suite présentée. Avant de clore ce chapitre, des systèmes basés sur une concaténation de STTCs et d'autres types de codes sont décrits.

Le troisième chapitre analyse de manière approfondie les STTCs utilisant une modulation  $2^n$ -PSK. Il débute par la description de l'influence des différents paramètres des STTCs  $2^n$ -PSK. Pour cela, les performances des codes précédemment publiés, construits selon les différents critères sont évaluées par simulation. Ensuite, différentes propriétés des STTCs  $2^n$ -PSK et différents outils que nous serons amenés à utiliser par la suite sont exposés. La classe des codes équilibrés est alors introduite. Elle a l'avantage de contenir l'intégralité des meilleurs codes. Le principe de la méthode existante de construction des STTCs équilibrés 4-PSK clôt ce chapitre.

Le quatrième chapitre introduit les deux nouvelles méthodes de construction des STTCs  $2^n$ -PSK. La première concerne la génération des STTCs  $2^n$ -PSK équilibrés à  $n_T$  antennes d'émission. Elle est basée sur la génération du groupe  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  qui correspond à l'ensemble de

tous les symboles MIMO. La deuxième méthode de construction des meilleurs STTCs  $2^n$ -PSK appelée coset partitioning est ensuite développée. Elle repose sur une approche en cosets pour les systèmes MIMO du set partitioning proposé par Ungerboeck. Le principe est de regrouper les symboles MIMO partant d'un même état ou arrivant dans un même état du treillis dans des cosets. Chaque coset doit avoir des propriétés spécifiques concernant les distances euclidiennes séparant les symboles MIMO.

Construits à l'aide des deux nouvelles méthodes, de nouveaux STTCs 4-PSK et 8-PSK sont proposés. Les performances de ces nouveaux codes sont comparées aux performances des meilleurs codes correspondants précédemment publiés quand ils existent. Pour les STTCs 4-PSK avec plus de 6 antennes d'émission et pour les STTCs 8-PSK avec plus de 4 antennes d'émission, aucun code n'avait jusqu'alors été proposé dans la littérature en raison du temps de recherche trop important. Dans ce chapitre, grâce à l'efficacité des nouvelles méthodes, les premiers STTCs 4-PSK avec 7 et 8 antennes d'émission et les premiers STTCs 8-PSK avec 5 et 6 antennes d'émission sont présentés.

Le dernier chapitre concerne uniquement les STTCs  $2^{2n}$ -QAM. Un état de l'art concernant les codes existants est d'abord présenté. Différentes propriétés sont ensuite énoncées. Ces propriétés permettent de décrire une nouvelle méthode de construction des meilleurs STTCs  $2^{2n}$ -QAM basée uniquement sur une décomposition de la distance euclidienne entre deux mots de code. Les performances des codes QAM générés à l'aide de cette méthode sont analysées. L'efficacité de cette nouvelle méthode a ainsi permis la génération des premiers STTCs 16-QAM avec 3 et 4 antennes d'émission et des premiers STTCs 64-QAM avec 2 et 3 antennes d'émission.



# Publications

## Journaux internationaux avec comité de lecture

- [1] P. Viland, G. Zaharia, J.-F. H  lard, "New Efficient Method to Generate Optimal  $2^n$ -PSK STTCs with a Large Number of Transmit Antennas", *IET Communications*, (accept   et en cours).
- [2] P. Viland, G. Zaharia, J.-F. H  lard, "Optimal Generation of Space-Time Trellis Codes via the Coset Partitioning", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 60, no. 3, pp. 966-980, Mars 2011.
- [3] T. M. H. Ngo , P. Viland, G. Zaharia, J.-F. H  lard, "QPSK Balanced Space Time Trellis Codes", *Electronics Letters*, vol. 44, pp. 983-985, n  16, Juin 2008.

## Chapitre de livre

- [1] P. Viland, G. Zaharia, J.-F. H  lard, *New method to generate Balanced  $2^n$ -PSK STTCs*, "Vehicular Technologies", Intech, Vienna, 2010, (accept   et en cours).

## Conf  rences internationales avec comit   de lecture

- [1] P. Viland, G. Zaharia, J.-F. H  lard, "Euclidean Distance Decomposition to Generate New 16-QAM and 64-QAM Space-Time Trellis Codes", *2010 IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, (IEEE PIMRC 2010), Istanbul, Turquie, Sept. 2010.
- [2] P. Viland, G. Zaharia, J.-F. H  lard, "Coset partitioning for the 4-PSK space-time trellis codes", *2009 IEEE International Symposium on Signals, Circuits and Systems*, (IEEE ISSCS 2009), Iasi, Roumanie, Juil. 2009.
- [3] P. Viland, G. Zaharia, J.-F. H  lard, "Design of the best space-time trellis codes based on coset partitioning", *2009 IEEE International Workshop on Signal Processing Advances for Wireless Communications*, (IEEE SPAWC 2009), P  rouse, Italie, Juil. 2009.
- [4] P. Viland, G. Zaharia, J.-F. H  lard, "Improved Balanced  $2^n$ -PSK STTCs for Any Number of Transmit Antennas from a New and General Design Method", *2009 IEEE Vehicular Technology Conference - Spring*, (IEEE VTC 2009), Barcelone, Espagne, Avril 2009.
- [5] P. Viland, G. Zaharia, J.-F. H  lard, "A New Method to Design Balanced Space-Time Trellis Codes for Several Transmit Antennas", *2008 IEEE Global Communications Conference*, (IEEE GLOBECOM 2008), Nouvelle Orl  ans, Etats-Unis, Nov.-Dec. 2008.

- [6] P. Viland, G. Zaharia, J.-F. H  lard, "An improved method to design QPSK Balanced Space-Time Trellis Codes", *2008 European Wireless Conference*, (IEEE EW 2008), Prague, R  publique t  ch  que, Juin 2008.

### **Conf  rence nationale avec comit   de lecture**

- [1] P. Viland, G. Zaharia, J.-F. H  lard, "Nouvelle m  thode g  n  rale de construction des meilleurs codes temps-espace en treillis   quilibr  s", *GRETSI 2009*, Dijon, France, Sept. 2009.



# Chapitre 1

## Préliminaires sur les systèmes MIMO

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Système MIMO</b>	<b>10</b>
1.1.1	Schéma de transmission	10
1.1.2	Codeur temps-espace	10
1.1.3	Modulation	11
1.1.4	Canal	13
<b>1.2</b>	<b>Notion de diversité</b>	<b>16</b>
<b>1.3</b>	<b>Capacité d'un canal</b>	<b>17</b>
1.3.1	Canal SISO	17
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>19</b>

### Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons au contexte et aux bases théoriques de nos travaux. Nous présenterons les systèmes de communication sans-fil, plus particulièrement les systèmes multi-antennaires couramment appelés systèmes 'Multiple Input Multiple Output' (MIMO). Ce type de systèmes est une solution prometteuse pour les futurs réseaux sans-fil qui utilise la dimension spatiale pour améliorer leurs performances.

Dans une première partie, la chaîne de transmission MIMO sur laquelle nous avons travaillé, sera présentée. Les différents blocs et les différentes caractéristiques de cette chaîne tels que les différentes modulations utilisées ou encore les perturbations rencontrées par les signaux seront ensuite décrits. Nous verrons pour finir les différents modèles de canaux couramment employés dans la littérature.

Dans une deuxième partie, nous montrerons quel est l'intérêt d'utiliser plusieurs antennes d'émission et de réception. Pour cela, la capacité et les performances des systèmes MIMO seront exposées.

## 1.1 Système MIMO

### 1.1.1 Schéma de transmission

Considérons un système MIMO ayant  $n_T$  antennes d'émission et  $n_R$  antennes de réception représenté sur la figure 1.1.

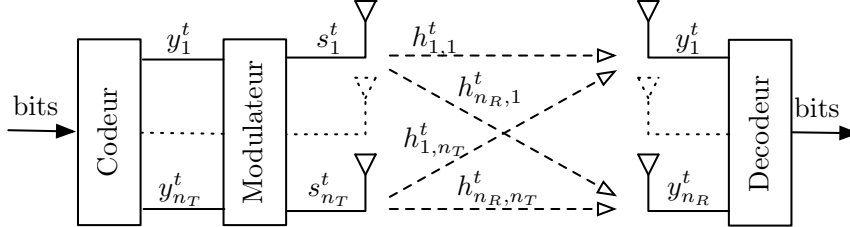


FIGURE 1.1 – Schéma d'un système MIMO

A chaque instant  $t$ , une série de bits en entrée est convertie en symbole MIMO  $Y^t = [y_1^t \cdots y_{n_T}^t]^T$  où  $[\cdots]^T$  est la transposée de la matrice  $[\cdots]$ . Dans le cas d'une modulation de phase 'Phase Shift Keying' (PSK), chaque symbole  $y_k^t \in \mathbb{Z}_{2^n}$ , où  $2^n$  correspond au nombre d'états de la modulation, est fourni au modulateur qui le convertit en signal  $s_k^t$ . L'ensemble des signaux  $s_k^t$  forme le signal MIMO  $S^t = [s_1^t \cdots s_{n_T}^t]^T$ . Pour une modulation d'amplitude en quadrature 'Quadrature Amplitude Modulation' (QAM), nous avons  $y_k^t \in \mathbb{Z}_{2^n}(j)$ . Chaque signal  $s_k^t$  avec  $k = \overline{1, n_T}$  est le signal envoyé par la  $k^e$  antenne d'émission, avec  $\overline{1, n_T} = \{1, 2, \cdots, n_T\}$ . Les signaux  $s_k^t$  sont alors transmis vers les  $n_R$  antennes de réception via les canaux de propagation SISO. Le coefficient  $h_{k',k}^t$  représente le gain du canal de propagation SISO entre l'antenne d'émission  $k$  et l'antenne de réception  $k'$  à l'instant  $t$ , avec  $k' = \overline{1, n_R}$ .

Le signal reçu par chaque antenne de réception est la somme des signaux émis par l'ensemble des antennes d'émission modifiés et bruités par le canal de propagation. Ainsi, le signal MIMO  $R^t = [r_1^t \cdots r_{n_R}^t]^T$  reçu à l'instant  $t$  s'écrit

$$R^t = \mathbf{H}^t S^t + N^t, \quad (1.1)$$

où  $N^t = [n_1^t \cdots n_{n_R}^t]^T$  est le bruit additif et  $\mathbf{H}^t \in \mathbb{C}^{n_R \times n_T}$  est une matrice représentant les coefficients complexes des canaux entre les différentes antennes. Les coefficients d'atténuation du canal entre la  $k^e$  antenne d'émission et la  $k'^e$  antenne de réception  $h_{k',k}^t$  sont regroupés dans la matrice

$$\mathbf{H}^t = \begin{bmatrix} h_{1,1}^t & \cdots & h_{1,n_T}^t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n_R,1}^t & \cdots & h_{n_R,n_T}^t \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Les prochaines parties décriront de manière plus détaillée les différents modules de la figure 1.1 et les différentes variables de l'expression (1.1).

### 1.1.2 Codeur temps-espace

Le but du codeur temps-espace est de répartir l'information sur les différentes antennes d'émission. Il est possible de distinguer deux grandes familles de schémas temps-espace. Chacune de ces familles a des objectifs différents : l'une privilégie la maximisation du débit de transmission, l'autre privilégie la minimisation de la probabilité d'erreur.

La première famille fait appel au multiplexage temps-espace. Son objectif est de répartir sans redondance l'information sur les différentes antennes d'émission.

La deuxième famille rajoute de la redondance à l'information envoyée. Ainsi, un même message va être retranscrit de manière différente en temps et en espace dans le but de réduire l'influence des différentes perturbations.

A un instant  $t$ , un codeur temps-espace fait correspondre  $L_r$  bits d'information  $X^t \in \mathbb{Z}_2^{L_r}$  où  $L_r$  représente le nombre de bits en entrée du codeur, à des symboles MIMO réels  $Y^t \in \mathbb{Z}_2^{n_T}$  ou complexes  $Y^t \in \mathbb{Z}_2^{n_T}(j)$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le codeur peut alors être décrit par une fonction  $Y^t = \Psi(X^t)$ . Le codeur met en relation de manière unique chaque élément de  $\mathbb{Z}_2^{L_r}$  à un élément de  $\mathbb{Z}_2^{n_T}$  ou de  $\mathbb{Z}_2^{n_T}(j)$  tel que

$$\Psi : \mathbb{Z}_2^{L_r} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{n_T} \quad (1.3)$$

ou

$$\Psi : \mathbb{Z}_2^{L_r} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{n_T}(j). \quad (1.4)$$

Les définitions de la fonction  $\Psi$  dépendant des codeurs seront données dans les prochains chapitres.

En réception, l'objectif est alors de décoder l'information reçue, c'est à dire de retrouver l'information binaire envoyée par l'émetteur.

Pour certains types de codeur, les fonctions de codage et de modulation sont confondues. Dans ce cas, les sorties sont directement les signaux modulés. Nous le verrons plus en détail dans le prochain chapitre qui présentera de manière non exhaustive une partie des nombreuses techniques existantes de codage temps-espace.

### 1.1.3 Modulation

La modulation consiste à faire correspondre à chaque symbole  $y_k^t$ , un signal  $s_k^t = \Phi(y_k^t)$  avec  $k = \overline{1, n_T}$ . La fonction  $\Phi$  dépend de la modulation utilisée. Les deux types de constellations que nous avons principalement exploités sont les constellations  $2^n$ -PSK et  $2^{2n}$ -QAM avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Si une modulation de type PSK est utilisée par le système, les symboles MIMO (avant la modulation) sont réels et appartiennent à  $\mathbb{Z}_2^{n_T}$ . Les signaux MIMO sont définis par  $S^t = [s_1^t \cdots s_k^t \cdots s_{n_T}^t]^T$  où les signaux  $s_k^t \in \mathbb{C}$  avec  $k = \overline{1, n_T}$  sont obtenus à l'aide de la fonction  $\Phi$  définie par

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z}_2^{n_T} &\rightarrow \mathbb{C} \\ s_k^t &= \Phi(y_k^t) = \exp(j \frac{\pi}{2^{n-1}} y_k^t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

où  $j^2 = -1$ . Similairement, nous pouvons définir une fonction  $\Phi_v$  qui associe directement un symbole MIMO à un signal MIMO tel que

$$\begin{aligned} \Phi_v : \mathbb{Z}_2^{n_T} &\rightarrow \mathbb{C}^{n_T} \\ S^t &= \Phi_v(Y^t) = \begin{bmatrix} \exp(j \frac{\pi}{2^{n-1}} y_1^t) \\ \vdots \\ \exp(j \frac{\pi}{2^{n-1}} y_{n_T}^t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Des exemples de modulations  $2^n$ -PSK avec  $n \in \{2, 3\}$  sont présentés dans la figure 1.2. De manière à normaliser la puissance d'émission du signal à 1, chaque point de la constellation est placé sur le cercle unitaire.

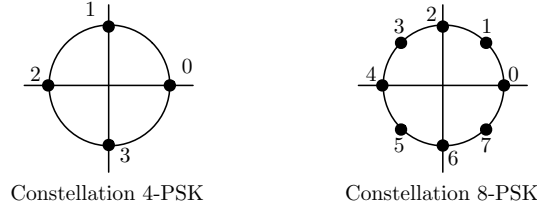


FIGURE 1.2 – Constellations 4-PSK et 8-PSK

Pour une QAM, nous représentons les symboles MIMO  $Y^t = [y_1^t \cdots y_{n_T}^t]^T$  sous forme complexe et donc appartenant à  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}(j)$ . Les signaux  $s_k^t$  correspondant aux symboles  $y_k^t$  après modulation, sont donnés par la fonction  $\Phi$  définie par

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathbb{Z}_{2^n}(j) \rightarrow \mathbb{C} \\ s_k^t &= \Phi(y_k^t) = y_k^t - \frac{2^n - 1}{2}(1 + j). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Comme précédemment, il est possible de définir une fonction  $\Phi_v$  qui associe pour chaque symbole MIMO un signal MIMO tel que

$$\begin{aligned} \Phi_v &: \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}(j) \rightarrow \mathbb{C}^{n_T} \\ S^t &= \Phi_v(Y^t) = Y^t - \frac{2^n - 1}{2}(1 + j)U. \end{aligned} \quad (1.8)$$

avec un vecteur colonne de  $n_T$  éléments tel que  $U = [1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T$ .

La figure 1.3 représente la correspondance entre les symboles  $y = y_i + jy_Q \in \mathbb{Z}_4(j)$  et les signaux 16-QAM  $s = s_i + js_Q$ . La puissance moyenne par symbole de cette constellation est 2,5. Comme nous le verrons plus tard, il sera nécessaire de normaliser la puissance d'émission durant les simulations.

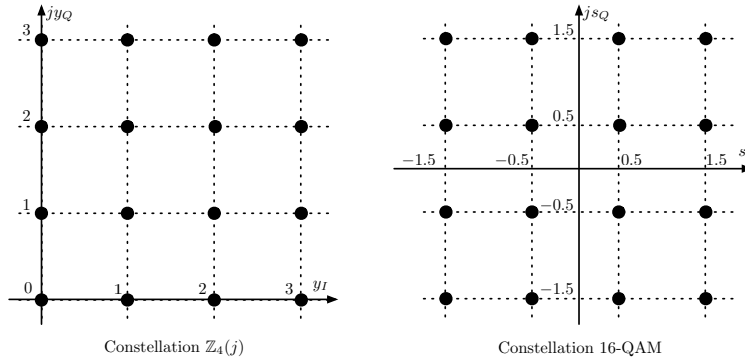


FIGURE 1.3 – Correspondance entre symboles et signaux 16-QAM

D'autres types de constellations existent ayant des propriétés particulières. Par exemple, les constellations hexagonales ( $q$ -HEX) sont des sous-ensembles de réseaux hexagonaux  $A_2$  [1]. Il existe aussi la modulation APSK utilisée principalement lors de communications vers des satellites [2]. Ce type de modulation combine une modulation de phase associée à une modulation d'amplitude.

### 1.1.4 Canal

#### 1.1.4.1 Présentation générale des canaux SISO

Les signaux  $s_k^t$ , avec  $k = \overline{1, n_T}$ , sont envoyés vers les  $n_R$  antennes de réception. Pour aller d'une antenne d'émission à une antenne de réception, les ondes électromagnétiques suivent plusieurs trajets. Chaque antenne de réception reçoit alors différentes versions du signal transmis par chaque antenne d'émission, indépendamment atténuées et déphasées. Les différents types de trajectoires possibles sont représentés par la figure 1.4.

Le trajet direct appelé 'Line Of Sight' (LOS), quand il existe, subit d'abord une atténuation due à la distance ou au masquage. Il est ensuite additionné à un signal de bruit dû au récepteur.

Les autres types de trajectoires sont dus aux objets présents dans l'environnement, comme le montre la figure 1.4. La réflexion correspond au rebond de l'onde sur des objets de taille supérieure à la longueur d'onde, par exemple des immeubles. La diffraction est principalement due aux objets ayant une surface irrégulière. L'origine de la diffusion des ondes vient de l'accumulation d'un grand nombre d'objets de petite taille, par exemple des nuages contenant des gouttes d'eau.

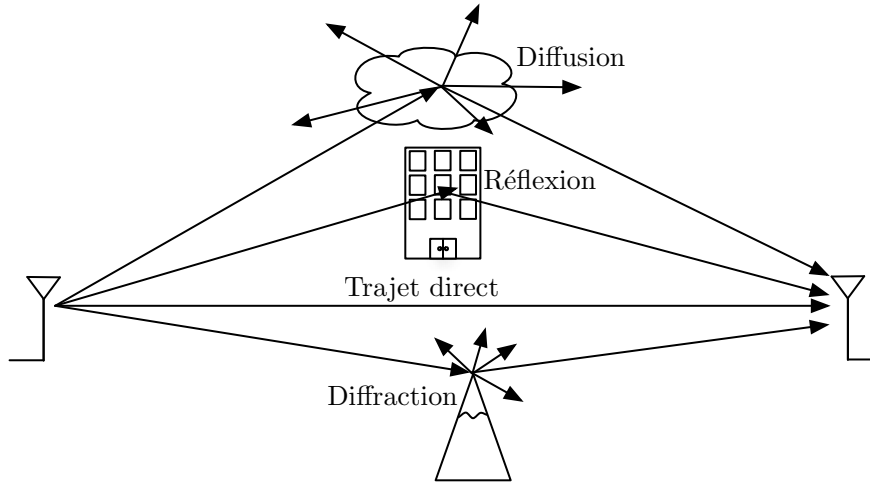


FIGURE 1.4 – Illustration des trajets multiples

Le signal résultant est la somme des contributions des différents trajets, chaque contribution étant une réplique du signal émis différemment atténuée et retardée. Lors du déplacement relatif d'une antenne par rapport à l'autre, le signal reçu peut subir des évanouissements à cause d'une combinaison destructive des signaux provenant des différents trajets. Ce phénomène est appelé couramment fading. De plus, un signal parasite modélisant le bruit causé principalement par le récepteur est ensuite additionné à la somme de tous les signaux arrivant sur l'antenne de réception.

Pour représenter les perturbations du signal dans le domaine temporel, le canal multi-trajets entre la  $k^e$  antenne d'émission et la  $k'^e$  antenne de réception peut se représenter par un filtre linéaire variant dans le temps avec un terme de bruit additif [3]. Ce filtre peut être caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $h(t, \tau)$  dans le cas où la bande du signal est inférieure à la bande de cohérence du canal. Un bruit additif est ensuite additionné au signal en sortie du filtre. Les coefficients du filtre autant que le bruit varient dans le temps comme décrit dans la figure 1.5.

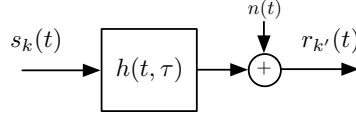


FIGURE 1.5 – Modélisation d'un canal

Le signal  $r_{k'}(t)$  arrivant sur la  $k'$ <sup>e</sup> antenne de réception peut alors s'écrire dans le domaine temporel

$$r_{k'}(t) = \sum_{k=1}^{n_T} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{k',k}(t, \tau) s_k(t - \tau) d\tau + n_{k'}(t). \quad (1.9)$$

Dans le domaine fréquentiel, il est possible d'observer des atténuations du signal différentes selon les fréquences. Le canal est alors sélectif en fréquence. Dans ce type de canal, la bande de cohérence est définie comme la largeur de bande maximale pour laquelle le canal peut être considéré comme constant par rapport à la bande de fréquence du signal. Au cours du temps, la réponse impulsionnelle/fréquentielle du canal peut varier. Le temps de cohérence est défini comme la durée maximale pour laquelle la réponse impulsionnelle/fréquentielle peut être considérée comme invariante dans le temps.

Au vu de ces différentes caractéristiques, quatre principaux types de canaux sont couramment différenciés :

- les canaux lents non sélectifs en fréquence. Ce cas est rencontré quand la bande du signal émis est plus petite que la bande de cohérence du canal et que la durée de transmission d'une succession finie de signaux MIMO est plus petite que le temps de cohérence ;
- les canaux rapides non sélectifs en fréquence. Ce cas est rencontré quand la bande du signal est plus petite que la bande de cohérence du canal et que la durée de transmission d'une succession finie de signaux MIMO est plus longue que le temps de cohérence ;
- les canaux lents sélectifs en fréquence. Ce cas est rencontré quand la bande du signal émis est plus large que la bande de cohérence du canal et que la durée de transmission d'une succession finie de signaux MIMO est plus petite que le temps de cohérence ;
- les canaux rapides sélectifs en fréquence. Ce cas est rencontré quand la bande du signal émis est plus large que la bande de cohérence du canal et lorsque la durée de transmission d'une succession finie de signaux MIMO est plus longue que le temps de cohérence.

#### 1.1.4.2 Modèles de canaux de propagation

Précédemment, nous avons mentionné que les canaux de propagation peuvent être modélisés par une réponse impulsionnelle. Pour l'obtenir, plusieurs approches existent. Il est possible d'utiliser un modèle déterministe invariant dans le temps. Ce type de modèle reproduit de manière exacte la propagation des signaux pour une configuration et un milieu précis. La réponse du canal peut par exemple être établie de manière expérimentale.

A l'inverse des modèles déterministes qui correspondent à un milieu et une configuration figés, les modèles stochastiques reposent sur la représentation statistique des paramètres du canal. Ce type de modèle ne reproduit pas un canal réel, mais permet d'obtenir de manière générique les performances d'un système sans-fil. Parmi les modèles stochastiques, les canaux de Rayleigh et de Rice sont couramment utilisés.

Le défaut majeur des modèles stochastiques est d'être trop générique et de représenter de manière infidèle un canal réel. Il est possible d'utiliser des modèles stochastiques géométriques

qui font appel à la représentation statistique des caractéristiques géométriques des différents objets présents dans le milieu de propagation. Ce type de modèle ne représente pas de manière exacte les caractéristiques d'un canal comme un modèle déterministe, mais permet d'avoir des connaissances plus proches de la réalité que le modèle stochastique.

Pour étudier les performances des systèmes MIMO, nous avons utilisé un modèle stochastique : le canal de Rayleigh présenté dans [4].

### Le canal de Rayleigh

Ce modèle prend pour hypothèse qu'il n'existe pas de trajet direct entre les antennes d'émission et les antennes de réception. Considérons un signal  $s(t) = \cos(2\pi f_c t)$ , où  $f_c$  est la fréquence porteuse, émis par une antenne d'émission et à destination d'une antenne de réception. Ce signal est transmis par  $I$  trajets multiples. Le signal reçu  $r(t)$  est alors la somme des  $I$  signaux venant des  $I$  différents trajets à laquelle il faut ajouter un bruit blanc gaussien  $n(t)$ . Notons  $a_i$  le facteur d'atténuation du  $i^e$  trajet et  $\phi_i$  le déphasage causé par le retard du  $i^e$  trajet. Le signal reçu est alors

$$r(t) = \sum_{i=1}^L a_i(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_i) + n(t) \quad (1.10)$$

$$= \cos(2\pi f_c t) \sum_{i=1}^L a_i \cos(\phi_i) - \sin(2\pi f_c t) \sum_{i=1}^L a_i \sin(\phi_i) + n(t). \quad (1.11)$$

Il est courant dans les communications numériques, d'appeler la 1<sup>e</sup> somme  $A = \sum_{i=1}^L a_i \cos(\phi_i)$ ,

terme en phase et la 2<sup>e</sup> somme  $B = \sum_{i=1}^L a_i \sin(\phi_i)$ , terme en quadrature. Ces deux termes proviennent des  $I$  trajets multiples. Dans le cas d'un nombre important de trajets, d'après le théorème de la limite centrale, les variables  $A$  et  $B$  sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . L'enveloppe du signal reçu est  $|h| = \sqrt{A^2 + B^2}$ . Etant données  $A$  et  $B$ ,  $|h|$  suit une loi de Rayleigh

$$f(h, \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \text{ avec } x \geq 0. \quad (1.12)$$

En discrétisant le temps et en représentant les signaux en bande de base, le signal reçu donné par l'expression (1.10) peut être noté  $r^t$ . De la même manière, nous notons  $s^t$  et  $n^t$  les signaux  $s(t)$  et  $n(t)$ . L'expression (1.10) peut alors s'écrire

$$r^t = h^t s^t + n^t, \quad (1.13)$$

où  $h^t$  est une variable gaussienne complexe aléatoire représentant le coefficient du canal de propagation à l'instant  $t$ .

Considérons que chaque coefficient  $h_{k'k}$  du canal MIMO de la figure 1.1 suit une loi de Rayleigh. Une succession de  $L$  symboles MIMO est envoyée par les  $n_T$  antennes d'émission dans ce canal. Le système peut voir le canal de Rayleigh de deux manières :

- soit comme un canal à évanouissements rapides de Rayleigh. Les coefficients  $h_{k',k}^t$  changent d'un symbole émis à l'autre ;

- soit comme un canal à évanouissements lents de Rayleigh. Les coefficients  $h_{k',k}^t$  sont constants durant la durée de transmission de  $L$  symboles MIMO. Les coefficients seront notés  $h_{k',k}$ .

Couramment lors d'études de systèmes MIMO, les parties réelles et les parties imaginaires des coefficients correspondant à un canal de Rayleigh sont définies pour suivre une loi normale  $\mathcal{N}(0; 0.5)$ . L'espérance mathématique noté  $\mathbb{E}$  du module de  $h_{k',k}^t$  est  $\mathbb{E}[|h_{k',k}^t|] = 1$ . La puissance reçue par chaque antenne est égale à la somme des puissances émises par les  $n_T$  antennes d'émission. La démonstration se trouve dans l'annexe A.

De plus durant nos travaux sur les systèmes MIMO, le bruit est considéré comme un bruit blanc complexe de moyenne nulle et de variance 0.5.

D'autres types de modèles de canaux existent comme le **canal de Rice**. De la même manière que le canal de Rayleigh, les coefficients sont des variables complexes aléatoires. La partie imaginaire et la partie réelle suivent une loi normale, qui contrairement au canal de Rayleigh, n'a pas une moyenne nulle. Cela revient à considérer l'existence d'un trajet direct entre l'antenne d'émission et l'antenne de réception.

## 1.2 Notion de diversité

La notion de diversité est utilisée pour combattre les trajets multiples du canal. L'idée est d'envoyer plusieurs répliques d'une même information dans des canaux de propagation différents. La probabilité qu'une des répliques soit moins perturbée par le coefficient du canal est d'autant plus grande que le nombre de répliques envoyées est important. Trois principales techniques de diversité peuvent être différenciées :

- la diversité temporelle. Le message est envoyé  $n$  fois à des intervalles de temps différents. De manière à assurer l'indépendance des coefficients du canal entre deux répliques du message, le temps entre deux envois doit être supérieur ou égal au temps de cohérence du canal. Cette diversité est souvent exploitée en utilisant conjointement un entrelacement temporel et un code correcteur d'erreur.
- la diversité fréquentielle. L'information est envoyée  $n$  fois simultanément sur  $n$  fréquences porteuses différentes par des signaux différents sur chaque fréquence. Pour assurer l'indépendance des fluctuations des évanouissements des signaux, il est nécessaire que les fréquences soient séparées d'au moins la bande de cohérence du canal. La diversité fréquentielle est exploitée dans les systèmes multi-porteuses ou encore dans les systèmes utilisant l'étalement de spectre.
- la diversité spatiale. Le signal est envoyé par plusieurs antennes d'émission et reçu par plusieurs antennes de réception. La distance entre les antennes de réception doit être supérieure à la longueur de cohérence qui est définie comme la distance entre deux antennes permettant d'avoir des canaux indépendants.

Nos travaux sont basés sur les systèmes MIMO. Ils exploitent donc la diversité spatiale mais aussi une diversité temporelle due au codage. Les performances théoriques de cette technique sont développées dans la prochaine partie.



### 1.3 Capacité d'un canal

L'étude de la capacité d'un canal permet de fixer les performances maximales théoriques de la communication. La capacité des systèmes 'Single Input Single Output' (SISO), ainsi que celle des systèmes MIMO seront rappelées. Nous soulignerons ainsi l'intérêt de l'utilisation de plusieurs antennes en émission et en réception.

#### 1.3.1 Canal SISO

Soient un canal non sélectif en fréquence pouvant être décrit par un coefficient  $h$ , une source  $S$  en entrée du canal et une source  $R$  en sortie du canal. La capacité d'un canal SISO s'écrit [5]

$$C_{SISO} = \mathbb{E} [\log_2(1 + \rho|h|^2)] \quad (\text{b/s/Hz}). \quad (1.14)$$

où  $\rho$  est le rapport signal à bruit et  $h$  est le coefficient du canal. Dans le cas où  $|h|$  suit une loi de Rayleigh,  $|h|^2$  suit une loi  $\mathcal{X}^2$  d'ordre 2 noté  $\mathcal{X}_2^2$ . Ainsi, si  $x = |h|^2$  est une variable aléatoire de loi  $\mathcal{X}_2^2$ , la capacité peut alors s'écrire

$$C_{SISO} = \mathbb{E} [\log_2(1 + \rho x)] \quad (\text{b/s/Hz}). \quad (1.15)$$

##### 1.3.1.1 Canal MIMO

Le système MIMO considéré a  $n_T$  antennes d'émission et  $n_R$  antennes de réception. Les signaux transmis par chaque antenne d'émission sont statistiquement indépendants. La matrice de covariance de l'ensemble des signaux MIMO envoyés  $\mathbf{S} = [S_1 \ S_2 \ \dots \ S_L]$  où  $L$  est le nombre de signaux MIMO envoyés s'écrit

$$\mathbf{Q}_S = \mathbb{E} (\mathbf{S}\mathbf{S}^H). \quad (1.16)$$

où  $[\dots]^H$  est la matrice hermitienne de  $[\dots]$ .

Le canal est modélisé par  $\mathbf{H}$ , une matrice  $n_R \times n_T$ . La capacité d'un canal MIMO est alors donnée par

$$C_{MIMO} = \mathbb{E} [\log_2 [\det(\mathbf{I}_{n_R} + \mathbf{H}\mathbf{Q}_S\mathbf{H}^H)]] \quad (\text{b/s/Hz}). \quad (1.17)$$

La capacité est maximale quand  $\mathbf{Q}_S = \frac{P_t}{N_t} \mathbf{I}_{n_T}$  [5] où  $\mathbf{I}_{n_T}$  représente la matrice identité  $n_T \times n_T$ , c'est à dire quand la puissance est répartie de manière uniforme sur les antennes d'émission. L'expression (1.17) devient alors

$$C_{MIMO} = \mathbb{E} \left[ \log_2 \left( \det \left[ \mathbf{I}_{n_R} + \frac{\rho}{n_T} \mathbf{H}\mathbf{H}^H \right] \right) \right] \quad (\text{b/s/Hz}). \quad (1.18)$$

où  $\rho$  est le rapport signal à bruit par antenne de réception.

La matrice  $\mathbf{H}$  peut être décomposée en valeurs singulières :  $\mathbf{H} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{V}^H$  où  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{V}$  sont unitaires et  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ . Les valeurs singulières sont notées  $\{\lambda_1 \dots \lambda_m\}$  où  $m = \text{rank}(\mathbf{H}) \leq m = \min(n_T, n_R)$ . L'expression (1.18)

de la capacité s'écrit alors [6]

$$C_{MIMO} = \mathbb{E} \left[ \log_2 \left( \det \left[ \mathbf{I}_m + \frac{\rho}{n_T} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right] \right) \right] \quad (1.19)$$

$$= \mathbb{E} \left[ \log_2 \left( \prod_{i=1}^m \left( 1 + \frac{\rho}{n_T} \lambda_i \right) \right) \right] \quad (1.20)$$

$$= \sum_{i=1}^m \mathbb{E} \left[ \log_2 \left( 1 + \frac{\rho}{n_T} \lambda_i^2 \right) \right] \text{ (b/s/Hz)}. \quad (1.21)$$

Pour souligner l'amélioration des performances des systèmes multi-antennaires, la capacité d'un canal à évanouissements rapides de Rayleigh va être évaluée en fonction du nombre d'antennes d'émission et ensuite en fonction du nombre d'antennes de réception. Les coefficients du canal changent à chaque temps symbole. Le premier exemple traite d'un système ayant une antenne d'émission et  $n_R$  antennes de réception. Le coefficient du canal entre l'antenne d'émission et la  $k'$ e antenne de réception est  $h_{k'}$ . Cette configuration permet d'observer exclusivement l'influence de la diversité en réception. La capacité de ce type de canal est définie dans [5] par

$$C = \mathbb{E} \left[ \log_2 \left( 1 + \rho \mathcal{X}_{2n_R}^2 \right) \right] \text{ (b/s/Hz)} \quad (1.22)$$

où  $\mathcal{X}_{2n_R}^2 = \sum_{k'=1}^{n_R} |h_{k'}|^2$  est une variable aléatoire qui suit une loi  $\mathcal{X}^2$  avec  $2n_R$  degrés de liberté et  $\rho$  est le 'Signal Noise Ratio' (SNR) (en échelle linéaire) sur chaque antenne de réception. Les courbes de la figure 1.6 montrent une augmentation de la capacité en fonction du nombre d'antennes de réception.

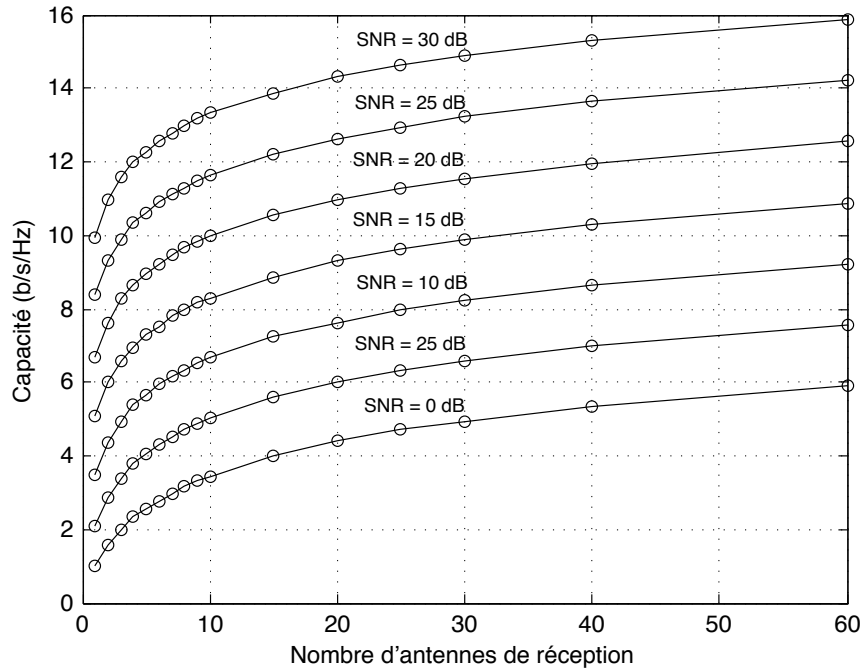


FIGURE 1.6 – Capacité d'un canal de Rayleigh à évanouissements rapides avec une antenne d'émission et plusieurs antennes de réception

De la même manière, il est possible d'étudier la capacité d'un canal MIMO pour un système admettant  $n_T$  antennes d'émission et une antenne de réception. Le coefficient du canal entre la  $k^e$  antenne d'émission et l'unique antenne de réception est  $h_k$ . Dans ce cas, comme présenté dans [5], la capacité du canal est

$$C = \mathbb{E} \left[ \log_2 \left( 1 + \frac{\rho}{n_T} \mathcal{X}_{2n_T}^2 \right) \right] \text{ (b/s/Hz)} \quad (1.23)$$

où  $\mathcal{X}_{2n_T}^2 = \sum_{k=1}^{n_T} |h_k|^2$  est une variable aléatoire qui suit une loi  $\mathcal{X}^2$  avec  $2n_T$  degrés de liberté. La courbe montrant la capacité du canal est représentée à la figure 1.7.

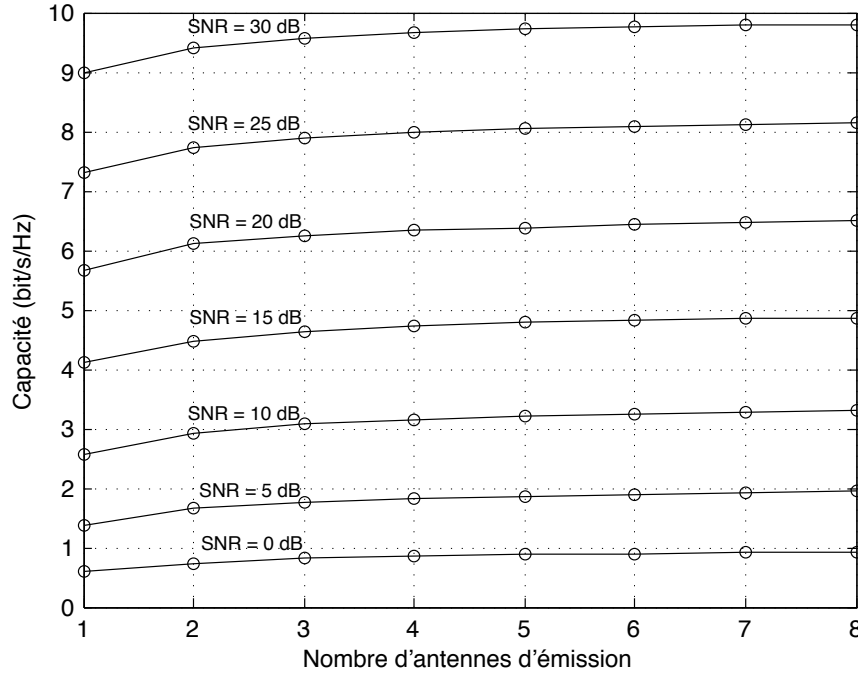


FIGURE 1.7 – Capacité d'un canal de Rayleigh à évanouissements rapides avec plusieurs antennes d'émission et une antenne de réception

D'après la loi des grands nombres, lorsque  $n_T$  tend vers l'infini,  $\frac{1}{n_T} \mathbf{H} \mathbf{H}^H$  tend vers  $\mathbb{E} [\mathbf{H} \mathbf{H}^H]$  qui correspond à la matrice de covariance du canal. Dans le cas de signaux décorrélés, la matrice de covariance du canal est égale à la matrice identité. Ainsi, pour un grand nombre d'antennes d'émission la capacité s'écrit [6]

$$C_{MIMO} = n_R \log_2(1 + P_t) \text{ (b/s/Hz)}. \quad (1.24)$$

On observe ainsi que pour un système ayant un nombre important d'antennes d'émission, la capacité augmente uniquement en fonction du nombre d'antennes de réception. Dans ce cas, augmenter le nombre d'antennes d'émission n'améliore pas les performances.

## 1.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de rappeler quelques notions concernant les systèmes multi-antennaires couramment appelés systèmes MIMO. Nous avons vu que ces systèmes exploitent la diversité

spatiale pour faire face aux perturbations du canal. Pour étudier les performances des systèmes MIMO, il est montré que le canal pouvait être représenté à l'aide de différents modèles. Durant nos travaux, des canaux de Rayleigh à évanouissements lents ou rapides ont été utilisés.

De plus, ce chapitre a rappelé la définition de la capacité d'un canal. Grâce à l'étude de la capacité des canaux MIMO, nous avons montré que les performances théoriques d'une communication sans-fil pouvaient être améliorées grâce à l'utilisation de systèmes multi-antennaires.

Parmi les différentes techniques utilisant plusieurs antennes en émission et en réception, nos travaux se sont portés sur les codes temps-espace. C'est pour cela que le prochain chapitre présentera les différents critères de construction des codes temps-espace, ainsi que les principaux types de codes temps-espace.

## Chapitre 2

# Codage temps-espace

### Sommaire

---

<b>2.1 Performances et critères de performance . . . . .</b>	<b>22</b>
2.1.1 Préliminaires . . . . .	22
2.1.2 Performances des codes temps-espace . . . . .	22
2.1.3 Critères de performance . . . . .	26
<b>2.2 Codes temps-espace en bloc orthogonaux . . . . .</b>	<b>28</b>
2.2.1 Code temps-espace d’Alamouti . . . . .	28
2.2.2 Généralisation du code d’Alamouti . . . . .	30
<b>2.3 Codage en couches . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>2.4 Codes à dispersion linéaire . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>2.5 Codes algébriques . . . . .</b>	<b>37</b>
2.5.1 Codes DAST . . . . .	37
2.5.2 Code TAST . . . . .	38
2.5.3 Codes parfaits . . . . .	39
<b>2.6 Codes temps-espace en treillis . . . . .</b>	<b>41</b>
2.6.1 Codage temps-espace en treillis . . . . .	41
2.6.2 Algorithme de Viterbi . . . . .	47
<b>2.7 Codes temps-espace en treillis super-orthogonaux . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>2.8 Golden STTCs . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>2.9 Conclusion . . . . .</b>	<b>53</b>

---

### Introduction

Les systèmes MIMO, comme nous l’avons vu dans le chapitre précédent, permettent d’augmenter la capacité d’un canal de transmission grâce à l’utilisation de plusieurs antennes en émission et en réception. Le codage temps-espace a pour objectif de répartir l’information en temps et en espace dans le but d’améliorer les performances de la communication.

Ce chapitre présente les différentes familles existantes de codes temps-espace. Nous allons tout d’abord nous intéresser aux probabilités d’erreurs des codes temps-espace en fonction du canal de propagation. De là, nous en déduirons les principaux critères régissant les performances de ces codes.

Une fois ces bases théoriques énoncées, les principaux schémas existants de codage temps-espace seront présentés.

## 2.1 Performances et critères de performance

### 2.1.1 Préliminaires

Considérons un codeur temps-espace utilisé dans le cas d'un système MIMO comprenant  $n_T$  antennes d'émission et  $n_R$  antennes de réception. Comme énoncé dans l'expression (1.3) ou (1.4), un codeur temps-espace est une fonction qui à chaque instant fait correspondre à  $L_r$  symboles binaires d'entrée notés  $X^t = [x_1^t \cdots x_{L_r}^t] \in \mathbb{Z}_2^{L_r}$  un symbole MIMO  $Y^t = [y_1^t \cdots y_{n_T}^t]^T \in \mathbb{Z}_2^{n_T}$ . Dans certains cas, il est possible que les symboles MIMO soient complexes i.e.  $Y^t \in \mathbb{Z}_2^{n_T}(j)$ . Par le biais de la fonction de modulation  $\Phi_v$  donnée dans les expressions (1.5) et (1.7) respectivement pour les modulations PSK et QAM, les symboles MIMO sont convertis en signaux MIMO  $S^t = [s_1^t \cdots s_{n_T}^t]^T \in \mathbb{C}^{n_T}$ . Certains types de codeurs comme les codeurs en blocs utilisent des signaux MIMO et non des symboles MIMO en entrée.

Quel que soit le type de codeur considéré, chaque signal  $s_k^t$  avec  $k = \overline{1, n_T}$  est transmis aux  $n_R$  antennes de réception via le canal de propagation défini à un instant  $t$  par une matrice  $\mathbf{H}^t$  de type  $n_R \times n_T$ . Chaque coefficient  $h_{k'k}^t$  avec  $k' = \overline{1, n_R}$  et  $k = \overline{1, n_T}$  de la matrice  $\mathbf{H}^t$  représente le coefficient du canal SISO entre l'antenne d'émission  $k$  et l'antenne de réception  $k'$  dans le cas d'un canal non sélectif en fréquence. Des détails sur cette matrice sont donnés dans le chapitre précédent. A chaque instant  $t$ , l'antenne de réception  $k'$  reçoit le signal

$$r_{k'}^t = \sum_{k=1}^{n_T} h_{k'k}^t s_k^t + n_{k'}^t, \quad (2.1)$$

où  $n_{k'}^t$  est le bruit additif gaussien sur la  $k'$ e antenne de réception. Ainsi, le signal MIMO reçu à l'instant  $t$  est donné comme dans l'expression (1.1) par

$$R^t = \mathbf{H}^t S^t + N^t, \quad (2.2)$$

où  $R^t = [r_1^t \cdots r_{n_R}^t]^T \in \mathbb{C}^{n_R}$  est le signal MIMO reçu par les  $n_R$  antennes de réception et  $N^t = [n_1^t \cdots n_{n_R}^t]^T$  représente le bruit additif du récepteur.

En réception, la technique du maximum de vraisemblance est utilisée pour retrouver à l'aide des signaux reçus aux différents instants  $t$ , les signaux envoyés  $S^t \in \mathbb{C}^{n_T}$ . En supposant une connaissance parfaite des coefficients du canal, le récepteur essaye alors de trouver les  $L$  signaux MIMO envoyés qui minimisent la quantité

$$\sum_{t=1}^L \sum_{k'=1}^{n_R} \left| r_{k'}^t - \sum_{k=1}^{n_T} h_{k'k}^t \hat{s}_k^t \right|, \quad (2.3)$$

où les  $\hat{s}_k^t$  sont les estimations des signaux  $s_k^t$ .

Maintenant que les différents paramètres des codeurs temps-espace ont été rappelés, leur probabilité d'erreur va être étudiée.

### 2.1.2 Performances des codes temps-espace

Pour évaluer les performances des codes temps-espace, nous considérons que l'émetteur transmet dans le canal  $L$  signaux MIMO. Le regroupement de ces  $L$  signaux MIMO est appelé mot de code et est noté

$$\mathbf{S} = [S^1 \cdots S^L] = \begin{bmatrix} s_1^1 & \cdots & s_1^L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n_T}^1 & \cdots & s_{n_T}^L \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Chaque colonne de  $\mathbf{S}$  est le signal MIMO transmis à l'instant  $t$ . La probabilité d'erreur par paire 'Pairwise Error Probability' (PEP) est la probabilité que le récepteur à maximum de vraisemblance décide en faveur d'un mot de code erroné

$$\hat{\mathbf{S}} = [\hat{S}^1 \dots \hat{S}^L], \quad (2.5)$$

alors que le mot de code envoyée est

$$\mathbf{S} = [S^1 \dots S^L]. \quad (2.6)$$

Ainsi, la limite supérieure de la PEP est donnée par [3]

$$P(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}} d^2(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})\right), \quad (2.7)$$

où  $N_0/2$  est la variance par dimension du bruit blanc gaussien,  $E_s$  est l'énergie moyenne par signal reçu par chaque antenne d'émission et

$$d^2(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) = \sum_{t=1}^L \left\| \mathbf{H}^t (S^t - \hat{S}^t) \right\|^2 \quad (2.8)$$

$$= \sum_{t=1}^L \sum_{k'=1}^{n_R} \left| \sum_{k=1}^{n_T} h_{k'k}^t (s_k^t - \hat{s}_k^t) \right|^2. \quad (2.9)$$

La fonction  $Q(x)$  est nommée fonction d'erreur complémentaire et est définie par

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2.10)$$

$$\leq \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \geq 0. \quad (2.11)$$

Comme  $d^2(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \geq 0$ , la probabilité d'erreur d'un code temps-espace peut s'écrire

$$P(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \leq \frac{1}{2} \exp\left(-d^2(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \frac{E_s}{4N_0}\right). \quad (2.12)$$

### 2.1.2.1 Probabilité d'erreurs des codes temps-espace dans un canal à évanouissements lents de Rayleigh

Dans un canal à évanouissements lents de Rayleigh, les coefficients ne varient pas durant la durée de transmission d'un mot de code. Ainsi, la matrice du canal est notée  $\mathbf{H}$  (la dépendance temporelle est supprimée). Une matrice de différences de mots de code est définie par

$$\mathbf{B}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) = \mathbf{S} - \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} s_1^1 - \hat{s}_1^1 & \dots & s_1^L - \hat{s}_1^L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n_T}^1 - \hat{s}_{n_T}^1 & \dots & s_{n_T}^L - \hat{s}_{n_T}^L \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Il est possible de construire une matrice des distances entre mots de code de taille  $n_T \times n_T$  définie par

$$\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) = \mathbf{B}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \mathbf{B}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})^H, \quad (2.14)$$

où  $[\dots]^H$  est la matrice hermitienne de  $[\dots]$ . Il existe une matrice unitaire  $\mathbf{V}$  et une matrice diagonale réelle  $\Lambda$  tel que

$$\mathbf{V}\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})\mathbf{V}^H = \Lambda. \quad (2.15)$$

Les colonnes  $V_k$  de  $\mathbf{V}$  sont les vecteurs propres de  $\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$ . Les éléments diagonaux  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_T}\}$  de la matrice  $\Lambda$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  données par

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n_T} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Si l'on pose  $H_{k'} = [h_{k',1} \dots h_{k',n_T}]$ , l'expression (2.8) peut alors s'écrire comme dans [7]

$$d^2(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) = \sum_{k'=1}^{n_R} H_{k'} \mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) H_{k'}^H \quad (2.17)$$

$$= \sum_{k'=1}^{n_R} \sum_{k=1}^{n_T} \lambda_k |\beta_{k',k}|^2, \quad (2.18)$$

où  $\beta_{k',k} = H_{k'} V_k$ . Ainsi, la probabilité d'erreur donnée dans l'expression (2.12) peut s'écrire

$$P(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \leq \prod_{k'=1}^{n_R} \exp \left( -\frac{E_s}{4N_0} H_{k'} \mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) H_{k'}^H \right) \quad (2.19)$$

$$\leq \prod_{k'=1}^{n_R} \exp \left( -\frac{E_s}{4N_0} \sum_{k=1}^{n_T} \lambda_k |\beta_{k',k}|^2 \right). \quad (2.20)$$

Dans le cas d'un canal à évanouissements lents de Rayleigh, la limite supérieure de la PEP est obtenue en moyennant  $P(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  par rapport à  $\mathbf{H}$ , ce qui donne

$$P(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \leq \left( \prod_{m=1}^r \left( 1 + \lambda_m \frac{E_s}{4N_0} \right) \right)^{-n_R}, \quad (2.21)$$

$r = \text{rang}(\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}))$  et  $\lambda_m$  représente les valeurs propres non-nulles de  $\mathbf{A}$  qui est une matrice hermitienne. Pour un fort SNR, la borne supérieure de la PEP devient

$$P(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \leq \left( \prod_{m=1}^r \lambda_m \right)^{-n_R} \left( \frac{E_s}{4N_0} \right)^{-rn_R}. \quad (2.22)$$

Il est possible de définir le gain de diversité

$$G_d = \min(rn_R), \quad \forall(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \quad (2.23)$$

et le gain de codage

$$G_c = \min \left( \frac{\left( \prod_{m=1}^r \lambda_m \right)^{\frac{1}{r}}}{d_u^2} \right), \quad \forall(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \quad (2.24)$$



avec  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , les valeurs propres non nulles de  $\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  et  $d_u^2$ , la distance euclidienne minimale au carré entre deux éléments d'un système de référence non codé. Par exemple,  $d_u^2 = 2$  dans le cas d'une constellation 4-PSK, comme représenté dans la figure 1.2. Le gain maximal de diversité est égal à  $G_d = n_T n_R$ , ce qui donne le gain de codage  $G_c = \min \left( \det \left( \mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \right) \right)$ .

### 2.1.2.2 Probabilité d'erreur des codes temps-espace dans un canal à évanouissements rapides de Rayleigh

Dans cette section, la matrice du canal est notée  $\mathbf{H}^t$  car les coefficients du canal varient à chaque temps symbole. De la même manière que précédemment, comme dans [8], la borne supérieure de la probabilité d'erreur est donnée par

$$P(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \leq \prod_{t=1}^l \left( 1 + d_E^2(S^t, \hat{S}^t) \frac{E_s}{4N_0} \right)^{-d_H(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})n_R}, \quad (2.25)$$

où  $d_E^2(S^t, \hat{S}^t) = \sum_{k=1}^{n_T} |s_k^t - \hat{s}_k^t|^2$  est la distance euclidienne au carré entre les signaux MIMO  $S^t$  et  $\hat{S}^t$  et  $d_H(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  est la distance de Hamming entre les mots de code  $\mathbf{S}$  et  $\hat{\mathbf{S}}$ . La distance de Hamming est le nombre de temps symbole durant lesquels les deux signaux MIMO sont différents.

Pour les forts SNR, comme dans [8], la borne supérieure de la PEP peut être approximée par

$$P(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \leq \left( d_P^2(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})^{\frac{1}{d_H(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})}} \frac{E_s}{4N_0} \right)^{-d_H(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})n_R}. \quad (2.26)$$

Dans l'expression (2.26),  $d_P^2(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  est la distance-produit entre les mots de code  $\mathbf{S}$  et  $\hat{\mathbf{S}}$ . Elle est définie comme le produit des distances euclidiennes au carré non nulles entre les signaux MIMO formant les deux mots de code de longueur  $L$ , c'est à dire

$$d_P^2(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) = \prod_{\substack{t=1 \\ S^t \neq \hat{S}^t}}^L d_E^2(S^t, \hat{S}^t) \quad (2.27)$$

$$= \prod_{\substack{t=1 \\ S^t \neq \hat{S}^t}}^L \left( \sum_{k=1}^{n_T} |s_k^t - \hat{s}_k^t| \right). \quad (2.28)$$

A partir de l'expression (2.26), le gain de diversité est défini comme

$$G_d = \min \left( d_H(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})n_R \right), \forall (\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \quad (2.29)$$

et le gain de codage comme

$$G_c = \min \left( \frac{d_P^2(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})^{\frac{1}{d_H(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})}}}{d_u^2} \right), \forall (\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \quad (2.30)$$

où  $d_u^2$  est la distance euclidienne minimale au carré entre deux signaux d'un système de référence non codé.

### 2.1.3 Critères de performance

Historiquement, le principe des codes temps-espace et les premiers critères de performance ont été présentés par Tarokh *et al.* dans [8]. Par la suite, d'autres critères ont été proposés pour optimiser les performances pour des configurations précises, par exemple dans le cas d'une grande diversité.

*Remarque :* par la suite, nous considérons que les mots de code notés  $\mathbf{S}$  et  $\hat{\mathbf{S}}$  sont différents.

#### 2.1.3.1 Critères de performance des codes pour un canal à évanouissements lents de Rayleigh

Les critères du rang et du déterminant proposés par Tarokh *et al.* dans [8], ont pour but de maximiser respectivement le gain de diversité  $G_d$  et le gain de codage  $G_c$  de l'expression (2.22). Ainsi, dans le cas d'un canal à évanouissements lents de Rayleigh, les critères de performance sont énoncés de la sorte :

- **Critère du rang** : le gain de diversité doit être maximal. Pour cela, la matrice  $\mathbf{B}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  doit être de rang plein pour toutes les paires de mots de code  $(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$ . Si le rang minimal de  $\mathbf{B}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  est  $r_{min}$  pour toutes les paires  $(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$ , alors le gain de diversité est égal à  $r_{min}n_R$ . Alors, le gain de diversité maximal pouvant être atteint par un code est  $n_T n_R$ .
- **Critère du déterminant** : les meilleurs codes ont un gain de codage maximal. Pour obtenir le gain de codage d'un code, le déterminant des matrices  $\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  est calculé pour toutes les paires  $(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  avec  $\mathbf{S} \neq \hat{\mathbf{S}}$ . Pour chaque code on obtient alors la valeur  $\min(\det(\mathbf{A}))$ . Les codes les plus performants ont la valeur de  $\min(\det(\mathbf{A}))$  qui est maximale.

Ces critères de performance contrôlent la probabilité d'erreur dans le cas d'un produit  $r_{min}n_R < 4$ , ce qui correspond à un nombre faible de canaux SISO indépendants [9].

Lorsque le gain de diversité est important, typiquement quand  $G_d = r_{min}n_R \geq 4$ , le critère de la distance euclidienne a été proposé dans [9]. Ce critère a aussi été préconisé dans [10] pour baisser la PEP des 'Space Time Trellis Code's (STTCs). Dans [11,12], Biglieri *et al.* ont montré que les performances d'un code temps-espace sont gouvernées par la distance euclidienne au carré entre les mots de code dans le cas d'un grand nombre d'antennes d'émission et de réception. Ce critère se base sur l'expression (2.20). Comme montré dans [9], si  $r_{min}n_R \geq 4$ , la probabilité d'erreur d'un code temps-espace donnée dans l'expression (2.20) peut être approximée par

$$P(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \leq \frac{1}{4} \exp \left( -n_R \frac{E_s}{4N_0} \sum_{k=1}^r \lambda_i \right) \quad (2.31)$$

où  $r \geq r_{min}$  est le rang de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$ . Pour une matrice carrée, la somme de ces valeurs propres est égale à la trace de la matrice. Ainsi, nous pouvons écrire que

$$\sum_{k=1}^r \lambda_i = \sum_{k=1}^{n_T} A_{kk} = \text{tr} \left( \mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \right), \quad (2.32)$$

où  $A_{kk}$  est le  $k^{\text{e}}$  élément diagonal de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$ . Comme

$$A_{k_1 k_2} = \sum_{t=1}^L (s_{k_1}^t - \hat{s}_{k_1}^t) (s_{k_2}^t - \hat{s}_{k_2}^t)^*, \quad (2.33)$$

quand  $k_1 = k_2 = k$ ,

$$A_{kk} = \sum_{t=1}^L |s_k^t - \hat{s}_k^t| = \sum_{t=1}^L d_E^2(s_k^t, \hat{s}_k^t) \quad \text{avec } k = \overline{1, n_T}. \quad (2.34)$$

La trace de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  est égale à la somme des distances euclidiennes au carré à chaque instant  $t$  entre les signaux MIMO  $S^t$  et  $\hat{S}^t$ . Elle s'écrit donc

$$\text{tr}(\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})) = \sum_{k=1}^{n_T} \sum_{t=1}^L d_E^2(s_k^t, \hat{s}_k^t) = \sum_{t=1}^L d_E^2(S^t, \hat{S}^t), \quad (2.35)$$

où  $L$  est la longueur du mot de code et  $d_E^2(S^t, \hat{S}^t) = \sum_{k=1}^{n_T} |s_k^t - \hat{s}_k^t|^2$  est la distance euclidienne au carré entre les signaux MIMO  $S^t$  et  $\hat{S}^t$ . La probabilité d'erreur de l'expression (2.31) peut s'écrire

$$P(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) \leq \frac{1}{4} \exp \left( -n_R \frac{E_s}{4N_0} \text{tr}(\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})) \right) \quad (2.36)$$

$$\leq \frac{1}{4} \exp \left( -n_R \frac{E_s}{4N_0} \sum_{t=1}^L d_E^2(S^t, \hat{S}^t) \right). \quad (2.37)$$

Ainsi, le critère de performance d'un code temps-espace dans le cas d'un canal à coefficients lents de Rayleigh et pour  $rn_R \geq 4$  peut être énoncé de la manière suivante :

- **Critère de la distance euclidienne ou de la trace** : pour les codes respectant  $r_{\min} n_R \geq 4$ , la trace de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  est calculée pour toutes les paires  $(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  avec  $\mathbf{S} \neq \hat{\mathbf{S}}$ . Pour chaque code, on obtient alors la valeur  $\min(\text{tr}(\mathbf{A}))$ . Les codes les plus performants ont la valeur  $\min(\text{tr}(\mathbf{A}))$  qui est maximale.

### 2.1.3.2 Critères de performance des codes pour un canal à évanouissements rapides de Rayleigh

La probabilité d'erreur d'un canal à évanouissements rapides de Rayleigh énoncée dans l'expression (2.26) dépend du gain de diversité et du gain de codage. Ainsi, dans le but d'améliorer les performances des codes temps-espace dans un canal à évanouissements rapides de Rayleigh, Tarokh *et al.* dans [8] proposent deux critères de performance :

- **Critère de la distance de Hamming** : le gain de diversité est maximal pour les codes les plus performants. Pour cela, la distance de Hamming  $d_H(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  entre deux mots de code quelconques  $\mathbf{S}$  et  $\hat{\mathbf{S}}$  avec  $\mathbf{S} \neq \hat{\mathbf{S}}$  est calculée. Pour chaque code, on obtient alors la valeur  $\min(d_H(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})) = d_{H_{\min}}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$ . Les codes les plus performants ont une valeur  $d_{H_{\min}}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  qui est maximale.
- **Critère de la distance produit** : le gain de codage des codes les plus performants est maximal. Pour cela, la distance produit  $d_P^2(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  entre deux mots de code quelconques  $\mathbf{S}$  et  $\hat{\mathbf{S}}$  avec  $\mathbf{S} \neq \hat{\mathbf{S}}$  est calculée. Pour chaque code, on obtient alors la valeur  $\min(d_P^2(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}))$ . Les codes les plus performants ont une valeur  $\min(d_P^2(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}))$  qui est maximale.

De la même manière que dans la partie précédente, lorsque le gain de diversité est important, typiquement lorsqu'il est supérieur à 4 ( $d_{H_{min}} n_R \geq 4$ ), la limite supérieure de la probabilité d'erreur dans le cas d'un canal à évanouissements lents de Rayleigh peut être décrite par l'expression (2.37). Ainsi, pour un gain de diversité  $G_d = d_{H_{min}} n_R \geq 4$ , le **critère de la trace** doit être utilisé.

### 2.1.3.3 Conclusion

Cette partie a résumé les différents critères à employer pour analyser les performances des codes en fonction de leurs caractéristiques et du canal.

Soit  $r_{min}$  le rang minimal de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  et  $d_{H_{min}}$  la distance de Hamming minimale calculés pour toutes les paires de mots de code  $(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$ . Si le canal est :

1. un canal de Rayleigh à évanouissements lents et si :
  - $r_{min} n_R < 4 \rightarrow$  **critères du rang et du déterminant** ;
  - $r_{min} n_R \geq 4 \rightarrow$  **critère de la trace**
2. un canal de Rayleigh à évanouissements rapides et si
  - $d_{H_{min}} n_R < 4 \rightarrow$  **critères de la distance de Hamming et de la distance produit** ;
  - $d_{H_{min}} n_R \geq 4 \rightarrow$  **critère de la trace**

Les parties précédentes ont présenté de manière théorique les codes temps-espace par le biais des probabilités d'erreur et des différents critères de performance. Nous allons maintenant nous intéresser aux principaux schémas de codage temps-espace.

## 2.2 Codes temps-espace en bloc orthogonaux

Les codes temps-espace en blocs ou en anglais Space-Time Block Codes (STBCs) sont historiquement les premiers codes temps-espace présentés dans la littérature. Le principe des STBCs est de diviser les séquences binaires d'entrée constituées de  $nP$  bits de manière à former  $P$  signaux d'une constellation à  $M = 2^n$  états. Des combinaisons linéaires de ces signaux et de leurs conjugués sont ensuite réparties dans une matrice  $n_T \times T$  où  $n_T$  est le nombre d'antennes d'émission et  $T$  le nombre de temps symbole nécessaire à l'envoi d'un mot de code. Le signal MIMO envoyé à l'instant  $t$  avec  $t = \overline{1, T}$  correspond à la  $t^e$  colonne du mot de code.

Un code temps-espace en blocs orthogonaux 'Orthogonal Space-time block Code' (O-STBC) est un STBC tel que son mot de code est une matrice orthogonale. Ces codes ont l'avantage d'avoir un gain de diversité maximal. Historiquement, Alamouti a proposé dans [13] le premier O-STBC pour 2 antennes d'émission. Nous commencerons donc par présenter le code d'Alamouti pour ensuite nous intéresser à la généralisation des O-STBCs pour un nombre d'antennes d'émission supérieur à 2.

### 2.2.1 Code temps-espace d'Alamouti

Considérons dans cette section une modulation à  $M$  états où  $M = 2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . A chaque instant, deux paquets de  $n = \log_2 M$  bits sont utilisés pour générer deux signaux  $s_1$  et  $s_2$  avec  $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ . Le mot de code envoyé en fonction de la paire de signaux  $(s_1, s_2)$  s'écrit [13]

$$t=1 \quad t=2 \tag{2.38}$$

$$\mathbf{C} = \begin{matrix} T_{x_1} \\ T_{x_2} \end{matrix} \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix} . \tag{2.39}$$

Cette représentation du mot de code est couramment appelée matrice de codage dans le cas des codes en bloc.

La transmission des signaux modulés s'effectue en 2 temps symbole. Au premier temps symbole  $t = 1$ , les signaux  $s_1$  et  $s_2$  sont envoyés respectivement par la première et la deuxième antenne. Au deuxième temps symbole  $t = 2$ , les signaux  $-s_2^*$  et  $s_1^*$  sont envoyés respectivement par la première et la deuxième antenne. L'orthogonalité est vérifiée car

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^H = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^* & s_2^* \\ -s_2 & s_1 \end{bmatrix} = (s_1 s_1^* + s_2 s_2^*) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (|s_1|^2 + |s_2|^2) \mathbf{I}_2, \quad (2.40)$$

où  $\mathbf{I}_2$  est la matrice identité. Le décodage des codes d'Alamouti est relativement simple. Nous considérons le cas d'un canal à évanouissements lents de Rayleigh avec  $k' \geq 1$  antennes de réception. Les coefficients du canal sont parfaitement connus en réception. Les signaux reçus  $r_{k'}^1$  et  $r_{k'}^2$  par la  $k'$ <sup>e</sup> antenne de réception respectivement lors du premier et du deuxième temps symbole sont groupés dans la matrice

$$R_{k'} = \begin{bmatrix} r_{k'}^1 & r_{k'}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{k',1} & h_{k',2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{k'}^1 & n_{k'}^2 \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

où  $h_{k',k}$  avec  $k = \{1, 2\}$  correspond au coefficient du canal entre la  $k$ <sup>e</sup> antenne d'émission et la  $k'$ <sup>e</sup> antenne de réception, et  $n_{k'}^1$  et  $n_{k'}^2$  sont les signaux de bruit sur la  $k'$ <sup>e</sup> antenne de réception respectivement au premier et au deuxième temps symbole. En posant  $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} h_{k',1} & h_{k',2} \\ h_{k',1}^* & h_{k',2}^* \end{bmatrix}$ , l'expression (2.41) peut aussi s'écrire

$$(R_{k'})' = \begin{bmatrix} r_{k'}^1 \\ (r_{k'}^2)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{k',1} & h_{k',2} \\ h_{k',1}^* & h_{k',2}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{k'}^1 \\ n_{k'}^2 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$= \mathcal{H}S + N. \quad (2.43)$$

En multipliant l'expression ci-dessus par  $\mathcal{H}^H$  à gauche, l'expression devient

$$\tilde{r}_{k'} = \mathcal{H}^H (R_{k'})' = \mathcal{H}^H \mathcal{H} S + \mathcal{H}^H N \quad (2.44)$$

$$= (|h_{k',1}|^2 + |h_{k',2}|^2) S + \mathcal{H}^H N. \quad (2.45)$$

Le but du décodeur à maximum de vraisemblance est de trouver les symboles estimés les plus probables

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arg \min_{\hat{s}_1 \in \mathcal{C}} \left( \sum_{k'=1}^{n_R} |\tilde{r}_{k',1} - (|h_{k',1}|^2 + |h_{k',2}|^2) \hat{s}_1|^2 \right) \\ \arg \min_{\hat{s}_2 \in \mathcal{C}} \left( \sum_{k'=1}^{n_R} |\tilde{r}_{k',2} - (|h_{k',1}|^2 + |h_{k',2}|^2) \hat{s}_2|^2 \right) \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

où  $\mathcal{C}$  représente l'ensemble des points de la constellation.

Classiquement, le rendement d'un STBC est défini par

$$R_c = \frac{n_s}{T}, \quad (2.47)$$

où  $n_s$  est le nombre de signaux modulés en entrée du codeur et  $T$  est le nombre de temps symbole utilisés pour la transmission complète d'un mot de code. Dans le cas d'un code

d'Alamouti, il y a deux signaux en entrée du codeur  $(s_1, s_2)$  et la transmission d'un mot de code dure deux temps symbole. Le code d'Alamouti a donc un rendement  $R_c$  égal à 1.

Pour que le gain de diversité soit maximal, il suffit de montrer que la matrice de différences de mots de code soit toujours de rang plein pour tous les mots de code  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix}$  et  $\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \hat{s}_1 & -\hat{s}_2^* \\ \hat{s}_2 & \hat{s}_1^* \end{bmatrix}$ . La matrice de différences de mots de code est alors

$$\mathbf{B}(\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}}) = \begin{bmatrix} s_1 - \hat{s}_1 & -s_2^* + \hat{s}_2^* \\ s_2 - \hat{s}_2 & s_1^* - \hat{s}_1^* \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

et la matrice des distances entre les mots de code est  $\mathbf{A}(\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}}) = \mathbf{B}(\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}})\mathbf{B}(\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}})^H$ . Le déterminant de  $\mathbf{A}(\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}})$ ,  $\det(\mathbf{A}(\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}})) = |s_1 - \hat{s}_1|^2 + |s_2 - \hat{s}_2|^2$  est nul si et seulement si  $\hat{s}_1 = s_1$  et  $\hat{s}_2 = s_2$ . Ainsi pour  $\mathbf{C} \neq \hat{\mathbf{C}}$ , la matrice  $\mathbf{B}(\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}})$  est toujours de rang plein, ce qui donne un gain de diversité égal à  $2n_R$ . Par contre, le code d'Alamouti n'apporte aucun gain de codage car

$$\forall(\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}}), G_C = \min \left( \frac{\det[\mathbf{A}(\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}})]}{d_u^2} \right) = 1. \quad (2.49)$$

En effet, le déterminant minimal de  $\mathbf{A}(\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}})$  pour toutes les paires  $(\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}})$  est égal à la distance minimale entre deux points de la constellation utilisée  $\mathcal{C}$ .

Les performances du code d'Alamouti sont présentées à la figure 2.1 pour une modulation 4-PSK avec une et deux antennes de réception. Le taux d'erreur binaire 'Bit Error Rate' (BER) est donné en fonction du SNR. Le canal choisi est un canal à évanouissements lents de Rayleigh de moyenne nulle et de variance 0.5. Le bruit est un bruit blanc gaussien centré. Ses performances sont comparées à celles d'un système non codé ayant une antenne d'émission. De manière à normaliser la puissance totale d'émission à 1, les signaux émis par chaque antenne sont divisés par  $n_T$ . Au vue de la figure 2.1, malgré l'absence de gain de codage du code d'Alamouti, le BER du code d'Alamouti est très inférieur aux BERs des systèmes non codés.

L'avantage du code d'Alamouti est tout d'abord de fournir un gain de diversité maximal. De plus, grâce à l'orthogonalité de la matrice de codage, un décodeur à maximum de vraisemblance utilisant un traitement linéaire particulièrement simple peut être utilisé. La généralisation du code d'Alamouti pour un nombre d'antennes d'émission plus important va être présentée dans la prochaine partie.

### 2.2.2 Généralisation du code d'Alamouti

La généralisation du code d'Alamouti pour  $n_T$  antennes d'émission a été proposée par Tarokh dans [14]. De la même manière que le code d'Alamouti, le principe des O-STBCs réside dans l'orthogonalité entre les mots de code. Nous considérons un STBC défini par une matrice de codage  $\mathbf{C}$  de taille  $n_T \times T$ , où  $n_T$  est le nombre d'antennes d'émission et  $T$  le nombre de temps symbole utilisés pour la transmission d'un mot de code.

Pour une constellation  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$  constituée de  $M = 2^n$  signaux SISO avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , une source binaire fournit  $nm$  bits au modulateur, avec  $m \in \mathbb{N}^*$ . Comme nous le verrons par la suite, le choix de  $m$  se fait en fonction du nombre de temps symbole utilisés pour transmettre un

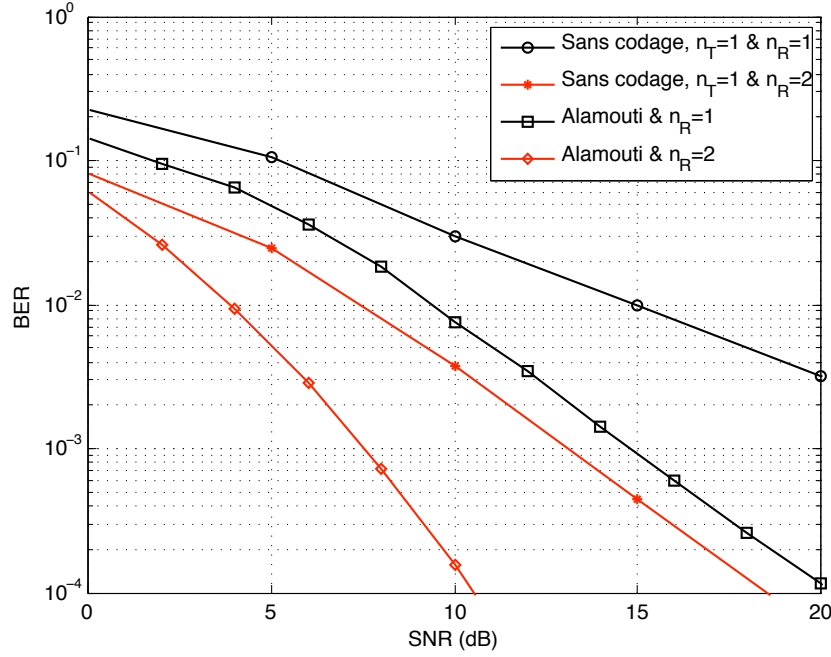
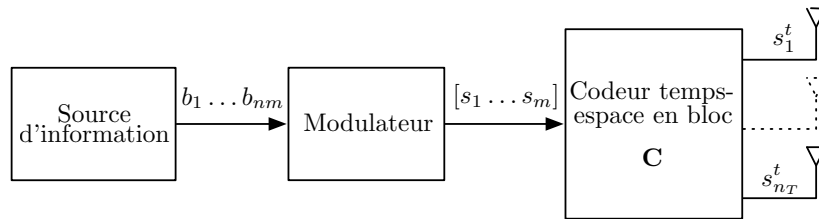


FIGURE 2.1 – Performances d'un système QPSK non codé et du code d'Alamouti

mot de code et du rendement du code qu'il est possible d'atteindre. Les  $m$  groupes de  $n$  bits sélectionnent dans la constellation  $m$  signaux modulés  $S = [s_1 \dots s_m]$ . Ces signaux sont livrés au codeur, qui à l'aide de la matrice de codage, fournit  $T$  signaux MIMO. A l'instant  $t$ , le signal MIMO envoyé par les antennes d'émission correspond à la  $t^e$  colonne  $[s_1^t \dots s_{n_T}^t]^T$  de la matrice de codage, où  $t \in \{1, \dots, T\}$  et  $s_k^t \in \mathcal{C}$ , avec  $k = \overline{1, n_T}$ . La représentation d'un codeur temps-espace en bloc est donnée dans la figure 2.2.


 FIGURE 2.2 – Schéma d'un codeur temps-espace en blocs avec  $n_T$  antennes d'émission

Les éléments des matrices de codage  $\mathbf{C}$ , sont des combinaisons linéaires des  $k$  symboles modulés  $[s_1 \dots s_m]$  et de leurs conjugués  $[s_1^* \dots s_m^*]$ . Le code est un code orthogonal si la relation

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^H = c\mathbf{I}_{n_T} \quad (2.50)$$

est vérifiée où  $\mathbf{I}_{n_T}$  est la matrice  $n_T \times n_T$  identité et  $c \in \mathbb{R}$  une constante quelconque non-nulle [14].

Ainsi, si l'expression (2.50) est vérifiée, le gain de diversité du code est maximal et vaut  $n_T n_R$  dans le cas d'un système avec  $n_R$  antennes de réception. Autrement dit, pour assurer la diversité maximale d'un code, il faut que les lignes  $C' = [s_k^1 \dots s_k^T]$  avec  $k = \{1, 2, \dots, n_T\}$

de la matrice de codage soient orthogonales entre elles, ce qui est le cas si toutes les paires de lignes différentes  $(C'_i, C'_l)$  avec  $i \in \{1, \dots, n_T\}$  et  $l \in \{1, \dots, n_T\}$  vérifient

$$\langle C'_i, C'_l \rangle = \sum_{t=1}^T s_i^t s_l^{t,*} = 0, \quad i \neq l. \quad (2.51)$$

Grâce à l'orthogonalité des mots de code, le décodeur à maximum de vraisemblance se simplifie en un décodeur linéaire, comme c'est le cas pour le code d'Alamouti.

Nous allons maintenant différencier les O-STBCs selon la nature réelle ou complexe de la constellation.

### 2.2.2.1 Codes O-STBCs réels

Ces types de codes utilisent une constellation  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$  comme la constellation d'une modulation d'amplitude. L'objectif de la construction des O-STBCs est de vérifier l'orthogonalité entre les signaux mais aussi d'atteindre un rendement maximal  $R_c = 1$  pour un nombre quelconque d'antennes d'émission. Un rendement maximal permet d'avoir une efficacité spectrale maximale qui est définie par

$$\eta = R_c m = \frac{n_s m}{T}, \quad (\text{b/s/Hz}). \quad (2.52)$$

$m$  est le nombre de bits d'information contenu dans chaque signal. Pour n'importe quel nombre  $n_T$  d'antennes d'émission, il existe un code réel de rendement maximal  $R_c = 1$  ayant un nombre de colonnes défini par

$$T = \min \left( 2^{4c+d} \right) \text{ avec } \{c \geq 0, 0 \leq d \leq 4 \mid 8c + 2^d \geq n_T\}, \quad (2.53)$$

comme montré dans [14].

Le tableau 2.1 montre le nombre de colonnes de  $\mathbf{C}$  pour obtenir un code ayant un rendement et un gain de diversité maximal.

$n_T$	2	3	4	5	6	7	8
$T$	2	4	4	8	8	8	8

TABLE 2.1 – Valeurs optimales de  $T$  en fonction du nombre d'antennes

Pour  $n_T = 2, 4$  et  $8$ , les matrices de codage sont des matrices carrées notées  $\mathbf{C}_{n_T \times n_T}$ . Le nombre d'antennes  $n_T$  d'émission est égal au nombre  $T$  de temps symbole nécessaire pour transmettre les  $T = n_T$  signaux MIMO du code. La matrice de codage est donnée pour  $n_T = 2$  par

$$\mathbf{C}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2 \\ s_2 & s_1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

et pour  $n_T = 4$  par

$$\mathbf{C}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 \\ s_2 & s_1 & s_4 & -s_3 \\ s_3 & -s_4 & s_1 & s_2 \\ s_4 & s_3 & -s_2 & s_1 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$



Comme le montre le tableau 2.1, pour les codes en blocs avec  $n_T = 3, 5, 6$  et  $7$ , les matrices de codage ne sont pas carrées. Par exemple, la matrice de codage d'un code à 3 antennes d'émission est

$$\mathbf{C}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 \\ s_2 & s_1 & s_4 & -s_3 \\ s_3 & -s_4 & s_1 & s_2 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Pour 5 antennes d'émission, la matrice de codage est

$$\mathbf{C}_{5 \times 8} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 & -s_5 & -s_6 & -s_7 & -s_8 \\ s_2 & s_1 & -s_4 & s_3 & -s_6 & s_5 & s_8 & -s_7 \\ s_3 & s_4 & s_1 & -s_2 & -s_7 & -s_8 & s_5 & s_6 \\ s_4 & -s_3 & s_2 & s_1 & -s_8 & s_7 & -s_6 & s_5 \\ s_5 & s_6 & s_7 & s_8 & s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Les codes ayant 6, 7 et 8 antennes d'émission sont donnés dans [14].

### 2.2.2.2 O-STBCs complexes

Similairement aux O-STBCs réels, nous pouvons généraliser la construction des O-STBCs aux constellations complexes  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ . Une matrice  $\mathbf{C}$  est une matrice de codage d'un code O-STBC si

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^H = c\mathbf{I}_{n_T}, \quad (2.58)$$

où  $m$  est le nombre de signaux en entrée du codeur,  $\mathbf{I}_{n_T}$  est une matrice identité  $n_T \times n_T$ ,  $c \in \mathbb{R}^*$  une constante non-nulle quelconque et  $s_i \in \mathbb{C}$  avec  $i = \overline{1, m}$  sont les signaux à transmettre.

Le code d'Alamouti est un O-STBC complexe. Il fournit un gain de diversité maximal égal à 2 et un rendement égal à 1. Ce code est le seul O-STBC complexe ayant un rendement unitaire [14]. L'objectif lors de la recherche des O-STBCs est de maximiser le rendement  $R_c$  des codes. Tarokh *et al.* dans [14] montrent que pour n'importe quel nombre d'antennes d'émission, il existe un O-STBC complexe de rendement  $1/2$ . Par exemple, un code avec 3 antennes d'émission peut avoir la matrice de codage

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 & s_1^* & s_2^* & -s_3^* & -s_4^* \\ s_2 & s_1 & s_4 & -s_3 & s_2^* & s_1^* & s_4^* & -s_3^* \\ s_3 & -s_4 & s_1 & s_2 & s_3^* & -s_4^* & s_1^* & s_2^* \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Il est possible avec des nombres particuliers d'antennes de trouver des codes à rendement plus important. Par exemple, pour 3 antennes d'émission, Tarokh *et al.* donnent un code avec un rendement  $3/4$  ayant la matrice de codage

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2 & \frac{s_3}{\sqrt{2}} & \frac{s_3}{\sqrt{2}} \\ s_2 & s_1^* & \frac{s_3}{\sqrt{2}} & -\frac{s_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{s_3}{\sqrt{2}} & \frac{s_3}{\sqrt{2}} & \frac{-s_1 - s_1^* + s_2 - s_2^*}{2} & \frac{s_2 + s_2^* + s_1 - s_1^*}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Dans [15], Hochwald *et al.* proposent d'autres codes ayant un rendement supérieur à  $1/2$ , comme c'est le cas pour un code à 3 antennes avec un rendement de  $3/4$  donné par

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2^* & s_3^* & 0 \\ -s_2 & s_1^* & 0 & -s_3^* \\ -s_3 & 0 & s_1^* & s_2^* \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Le décodage des O-STBCs complexes ou réels est très proche de celui utilisé par le code d'Alamouti. En effet, les O-STBCs peuvent être décodés à l'aide d'un algorithme à maximum de vraisemblance qui se simplifie considérablement grâce à l'orthogonalité des mots de code.

### 2.2.2.3 Codes temps-espace en bloc quasi-orthogonaux

Pour un nombre d'antennes supérieur à 2, nous avons vu dans la partie précédente que les O-STBCs complexes ne peuvent pas atteindre le rendement maximal unitaire  $R_c = 1$ . Dans [16], Jafarkani propose la construction de codes avec plus que 2 antennes d'émission atteignant un rendement maximal  $R_c = 1$  tout en assurant un gain de diversité maximal. Par contre, l'orthogonalité entre les différentes lignes du code n'est pas toujours vérifiée. Ces codes sont appelés codes temps-espace en blocs quasi-orthogonaux 'Quasi-Orthogonal Space-Time Block Code's (QO-STBCs).

La construction de ces codes va être présentée à l'aide d'un exemple fourni dans [16]. L'objectif est de construire un code en bloc à 4 antennes d'émission à rendement plein. Si deux paires différentes  $(s_1, s_2)$  et  $(s_3, s_4)$  de signaux sont codées suivant le code d'Alamouti, les mots de code peuvent s'écrire

$$C_{12} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix} \text{ et } C_{34} = \begin{bmatrix} s_3 & -s_4^* \\ s_4 & s_3^* \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

En utilisant ces deux matrices dans un schéma de type d'Alamouti, on peut alors construire le code

$$C = \begin{bmatrix} C_{12} & -C_{34}^* \\ C_{34} & C_{12}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* & -s_3^* & s_4 \\ s_2 & s_1^* & -s_4^* & s_3 \\ s_3 & -s_4^* & s_1^* & -s_2 \\ s_4 & s_3^* & s_2^* & s_1 \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

La première ligne et la dernière ligne ne sont pas orthogonales. Il est donc clair que le gain de diversité n'est pas maximal. Dans [16], il est démontré que ce code a un gain de diversité égal à  $2n_R$  et donc n'atteint pas le gain de diversité maximal  $n_T n_R$ . En contrepartie, le rendement de ce code vaut 2. Le décodage ne se fait plus comme pour les O-STBCs par symbole mais par paires de symboles  $(s_1, s_2)$  et  $(s_3, s_4)$ .

Par analogie, des codes pour un plus grand nombre d'antennes d'émission peuvent être construits pour obtenir des codes à rendement maximal mais n'atteignant pas le gain maximal de diversité.

## 2.3 Codage en couches

Précédemment, les codes temps-espace en blocs orthogonaux et quasi-orthogonaux ont été décrits. Leur objectif est d'utiliser la diversité spatiale pour renforcer la robustesse de la communication. Nous allons maintenant expliquer le principe des codes en couches. Ce type de schéma de codage fait appel au démultiplexage temps-espace. L'objectif du démultiplexage est de répartir sans redondance l'information sur les différentes antennes d'émission. Ainsi, le rendement de ces codes augmente linéairement en fonction du nombre d'antennes d'émission.

Dans le cas d'un codage temps-espace en couches, les  $n_T$  antennes d'émission émettent des signaux différents à chaque instant. Plusieurs versions de ce type d'architecture appelée 'Layered Space-Time' (LST) ont été proposées dans [17].

La version non codée de l'architecture LST est appelée 'Vertical Layered Space-Time' (VLST) ou 'Vertical Bell Layered Space-Time' (VBLAST) [18]. La chaîne d'émission complète (modulation comprise) utilisant l'architecture VLST est présentée à la figure 2.3(a). Dans ce type de système, les entrées binaires sont réparties sur les  $n_T$  antennes d'émission. Cette opération appelée démultiplexage, est réalisée par le bloc S/P ('Série / Parallèle') de la figure 2.3(a). Chaque sous-séquence alimente alors un modulateur avant d'être émise par sa propre antenne.

Pour augmenter la robustesse de la communication, un codeur correcteur d'erreurs peut être associé à l'architecture LST. Ces types d'architectures sont appelés 'Horizontal Layered Space-Time' (HLST). La figure 2.3(b) présente la chaîne d'émission d'une architecture HLST utilisant un seul code. Dans ce type d'architecture, la totalité de l'information est codée avant d'être divisée en sous-séquences qui sont ensuite réparties sur les différentes antennes.

Comme le montre la figure 2.3(c), une autre solution consiste à diviser la séquence en  $n_T$  sous-séquences, codées séparément. Pour chacune de ces architectures, il est possible de rajouter un entrelacement temporel propre à chaque antenne.

De meilleures performances sont obtenues grâce à l'architecture 'Diagonal Layered Space-Time' (DLST) proposée par Foschini [17]. Le but de cette architecture est de répartir l'information codée de chaque sous-séquence sur les différentes antennes. Cela s'effectue à l'aide d'un entrelaceur spatial. El Gamal *et al.* proposent dans [19] de compléter l'architecture HLST avec un entrelaceur temporel propre à chaque antenne en sortie de l'entrelaceur spatial. Cet entrelaceur est nommé 'Entr' dans la figure 2.4 qui représente ce type d'architecture.

En réception, les  $n_R$  antennes de réception séparent et détectent les  $n_T$  signaux transmis. Cette tâche est effectuée en appliquant les critères de détection du type 'Zero-Forcing' (ZF) ou 'Minimum Mean Square Error' (MMSE). Une condition pour assurer la bonne séparation et la bonne détection des signaux est d'avoir  $n_T \leq n_R$ . Les signaux détectés et séparés sont ensuite décodés à l'aide des algorithmes conventionnels de décodage.

## 2.4 Codes à dispersion linéaire

Les codes traités jusqu'à présent n'exploitent pas de manière optimale toutes les possibilités des systèmes MIMO. Les O-STBCs ou QO-STBCs ont un rendement limité à 1. Les codes LSTs exploitent le multiplexage temps-espace au détriment de la diversité.

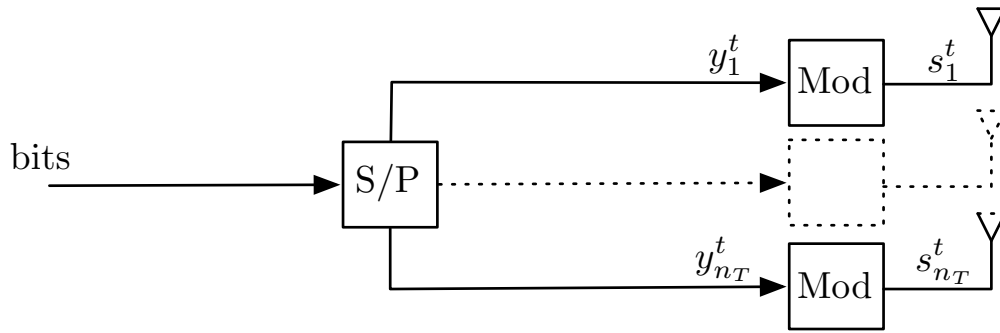
Hassibi *et al.* présentent dans [20,21] une nouvelle famille de codes : les codes à dispersion linéaire. Le principe est de transmettre une combinaison linéaire de symboles sur chaque antenne d'émission.

Soient  $Q$  signaux complexes  $s_1, s_2, \dots, s_Q$  à transmettre durant  $T$  temps symbole. En définissant  $s_q = \alpha_q + j\beta_q$ , le mot de code à transmettre est

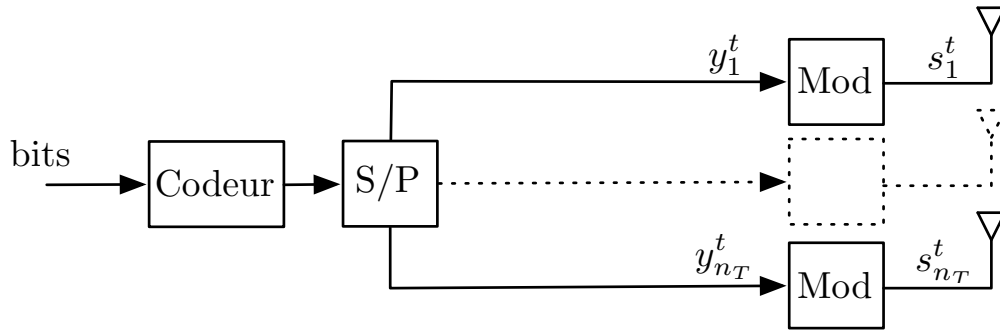
$$\mathbf{C} = \sum_{q=1}^Q (\alpha_q \mathbf{A}_q + j\beta_q^* \mathbf{B}_q), \quad (2.64)$$

où  $\mathbf{A}_q$  et  $\mathbf{B}_q$  sont des matrices  $n_T \times T$  appelées matrices de dispersion. Un code est donc défini par l'ensemble des matrices de dispersion  $(\mathbf{A}_q, \mathbf{B}_q)$ .

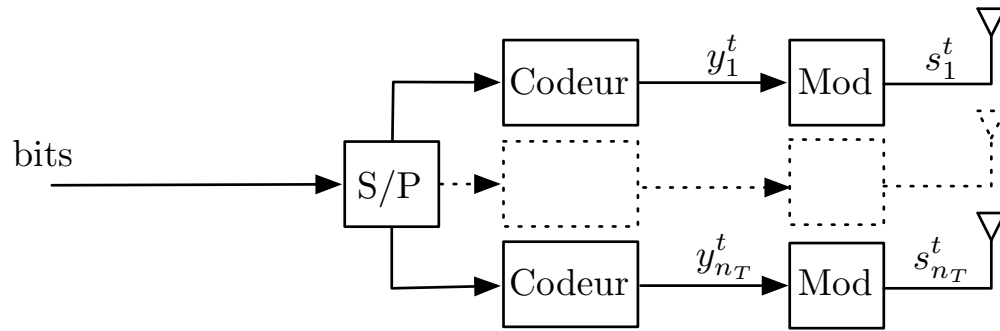
Les codes à dispersion linéaire peuvent être considérés comme une généralisation des codes temps-espace en blocs ou en couches. Ainsi, en utilisant la notation de l'expression (2.64), le code d'Alamouti peut s'écrire à l'aide des matrices de dispersion suivantes [21] :



(a) VLST



(b) HLST avec un code



(c) HLST avec un code par couche

FIGURE 2.3 – Architecture des codeurs VLST

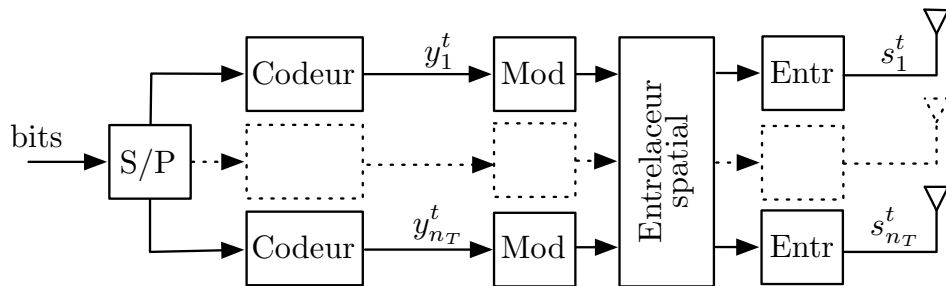


FIGURE 2.4 – Architecture du codeur DLST

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
B_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

*Remarque :* Une autre notation peut être rencontrée dans la littérature pour décrire les codes à dispersion linéaire. Un mot de code peut aussi s'écrire

$$\mathbf{C} = \sum_{q=1}^Q (s_q \mathbf{C}_q + s_q^* \mathbf{D}_q), \quad (2.65)$$

où  $\mathbf{C}_q$  et  $\mathbf{D}_q$  sont aussi des matrices  $n_T \times T$  appelées matrices de dispersion.

Dans [20, 21], Hassibi *et al.* proposent de les construire avec pour objectif de maximiser l'information mutuelle entre les signaux émis et les signaux reçus. Cependant, les codes obtenus ne satisfont pas toujours les critères du rang et du déterminant. Dans [22], Gohary *et al.* donnent une méthode basée sur des matrices de codage unitaires pour construire les codes à dispersion linéaire ayant un nombre important d'antennes d'émission.

Grâce à la structure linéaire du code, le décodage de ces codes est identique aux codes en couches VLST.

## 2.5 Codes algébriques

Cette famille de codes fait partie des codes à dispersion linéaire. Ils sont construits à l'aide de structures algébriques et vérifient les critères du rang et du déterminant. Nous présenterons donc quelques uns des codes algébriques comme les codes temps-espace algébriques diagonaux 'Diagonal Algebraic Space Time' (DAST) et les codes parfaits incluant le plus connu des codes algébriques : le *golden code*.

### 2.5.1 Codes DAST

Dans [23], Damen *et al.* présentent la famille de codes DAST. Cette famille de codes a l'avantage d'avoir un rendement  $R_c = 1$  et un gain de diversité maximal. L'idée des codes DAST est d'utiliser conjointement la technique des constellations tournées et de la transformée de Hadamard. De ce fait, la construction des codes DAST se fait uniquement pour  $n_T = 1, 2$  ou un multiple de 4. De plus, le rendement de ce code est limité à 1.

Le principe des constellations tournées est de multiplier la constellation par une matrice de rotation unitaire. En effet, pour une constellation  $\mathcal{C}$  de dimension  $d \in \mathbb{N}$ , si tous les points  $s \in \mathcal{C}$  de coordonnées  $s_1, \dots, s_d$  n'ont pas les mêmes coordonnées sur chaque dimension, alors la constellation est à diversité maximale et vaut  $d$ .

Considérons une modulation à  $2^n$  états. Le codeur reçoit  $nn_T$  bits en entrée qu'il transforme en  $n_T$  signaux complexes  $S = [s_1 \dots s_{n_T}]$ . La matrice de codage des codes DAST s'écrit alors

$$\mathbf{C} = \mathcal{H}_{n_T} \text{diag}(\mathbf{M}S), \quad (2.66)$$

où  $\mathbf{M}$  est une matrice de rotation de dimension  $n_T \times n_T$  donnant une constellation à diversité maximale. La matrice de Hadamard  $\mathcal{H}_{n_T}$  d'ordre  $n_T$  est une matrice carrée dont les coefficients

sont égaux à  $\pm 1$ . Cette matrice satisfait la condition d'orthogonalité  $\mathcal{H}_{n_T} \mathcal{H}_{n_T}^T = n_T \mathbf{I}_{n_T}$ . De plus,

$$\text{diag}([a_1 a_2 \cdots a_{n_T}]) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n_T} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Par exemple, pour un système 4-PSK à  $n_T = 2$  antennes d'émission, la matrice de Hadamard est

$$\mathcal{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

et la matrice de rotation peut être

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ 1 & -\theta \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

avec  $\theta = e^{j\pi/4}$ .

Pour décoder les codes DAST, le décodage sphérique peut être utilisé. Cet algorithme est un algorithme sous-optimal qui consiste à chercher le signal envoyé en cherchant parmi les points qui sont autour du signal reçu (dans une sphère centrée sur le signal reçu).

### 2.5.2 Code TAST

Dans [24], des codes temps-espace à gain de diversité maximal, à rendement plein et utilisant un décodage sphérique sont proposés. Ces codes appelés codes 'Threaded Algebraic Space Time' (TAST) combinent aussi bien la technique des codes temps-espace en couches vue dans la partie précédente que les codes algébriques. Le principe est de séparer l'information en couches appelées *threads*. Chaque couche est alors codée à l'aide d'un code DAST réduit. A chaque instant, les symboles codés sont ensuite transmis sur des antennes différentes.

Pour un système ayant  $n_T$  antennes d'émission et utilisant une  $2^n$ -QAM,  $nn_T^2$  bits sont fournis au codeur et transformés en  $n_T^2$  signaux modulés complexes. Les  $n_T^2$  signaux sont regroupés en  $n_T$  couches. La  $i^e$  couche s'écrit  $S_i = [s_{i,1} \cdots s_{i,n_T}]^T$  avec  $i \in \{1, \dots, n_T\}$  et  $s_{i,k} \in \mathbb{C}$  avec  $k \in \{1, \dots, n_T\}$ .

Chaque sous-couche  $S_i$  subit un codage de type DAST réduit, pondéré par  $\phi_i$ , donné par

$$C_i = \phi_i \mathbf{M}_i S_i, \quad (2.70)$$

où  $M_i$  est une matrice de rotation à diversité de modulation maximale et  $\phi_i \in \mathbb{C}$  doit être choisi de manière à garantir un gain de diversité maximal et un gain de codage maximal. Les différents signaux des sous-couches sont alors envoyés durant  $L$  temps symbole et répartis sur les différentes antennes. Par exemple, dans le cas de 4 antennes d'émission, les signaux issus de chaque couche sont répartis comme montré à la figure 2.5.

La maximisation des gains de diversité et de codage est directement liée au choix des  $\phi_i$ . Pour optimiser les performances, les  $\phi_i$  doivent être judicieusement choisis. Par contre, dans la majorité des cas, plus la taille de la constellation est importante, plus le gain de codage diminue.

$Tx_1$	1	4	3	2
$Tx_2$	2	1	4	3
$Tx_3$	3	2	1	4
$Tx_4$	4	3	2	1

 FIGURE 2.5 – Exemple de répartition des *threads* dans un code TAST

Un exemple de code TAST pour deux antennes d'émission est donné dans [24]. Les signaux complexes  $s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}$  issus des données binaires sont divisés en deux couches

$$S_1 = [s_{11} s_{12}]^T \quad (2.71)$$

$$S_2 = [s_{21} s_{22}]^T. \quad (2.72)$$

Chaque couche subit un codage DAST réduit

$$C_1 = [c_{11} c_{12}]^T = \phi_1 \mathbf{M} S_1 \quad (2.73)$$

$$C_2 = [c_{21} c_{22}]^T = \phi_2 \mathbf{M} S_2, \quad (2.74)$$

avec

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\pi/4} \\ 1 & -e^{j\pi/4} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

et

$$\phi_1 = 1 \text{ et } \phi_2 = (e^{-j\pi/6})^{1/2}. \quad (2.76)$$

Le mot de code envoyé est alors

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{22} \\ c_{21} & c_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

Le décodage des codes TAST peut s'effectuer tout comme les codes DAST à l'aide d'un décodeur sphérique.

### 2.5.3 Codes parfaits

La famille des codes parfaits a un rendement plein, un gain de diversité maximal et un gain de codage ne diminuant pas lorsque la taille de la constellation augmente. Le premier code parfait appelé *golden code* a été proposé dans [25] pour deux antennes d'émission. Une généralisation de cette famille de codes pour n'importe quel nombre d'antennes d'émission est ensuite énoncée dans [26].

**Définition 2.1** (Codes parfaits). *Un code temps-espace de dimension  $n_T \times n_T$  est parfait si et seulement si :*

- il transmet  $n_T^2$  signaux d'information QAM ou HEX, c'est à dire que son rendement est maximal ;
- la valeur minimale du déterminant de  $\mathbf{A}$  calculée pour toutes les paires de mots de code n'est pas nulle. Ainsi, le code atteint un gain de diversité maximal ;

- l'énergie utilisée à l'envoi de la combinaison linéaire des symboles d'information de chaque couche (i.e. de chaque ligne de la matrice de codage) est identique à l'énergie nécessaire à l'émission des symboles eux-mêmes, c'est à dire que l'énergie du système n'augmente pas par rapport à un système non codé;
- l'énergie moyenne transmise par antenne durant tous les  $T$  temps symbole est uniforme, c'est à dire que tous les symboles codés de la matrice de codage ont la même énergie.

En réception, le décodage des codes parfaits peut être fait à l'aide d'un décodeur de réseaux de points comme un décodeur sphérique.

### Les codes parfaits pour deux antennes d'émission

Dans le cas de deux antennes d'émission, le *golden code* présenté dans [25] est le premier code parfait publié. Il permet de transmettre 8 bits en 2 temps symbole. Ces bits sont transformés en 4 symboles QAM noté  $S_1 = [s_1 s_2]$  et  $S_2 = [s_3 s_4]$ . Les mots de code appartenant au *golden code* s'écrivent [27]

$$\mathbf{C} = \sum_{n=1}^2 \text{diag}(\mathbf{M}_2 S_n) \mathbf{\Gamma}^{n-1} \quad (2.78)$$

$$= \text{diag}\left(\mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}\right) \mathbf{I}_2 + \text{diag}\left(\mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} s_3 \\ s_4 \end{bmatrix}\right) \mathbf{\Gamma}, \quad (2.79)$$

où  $\mathbf{M}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha & \alpha\theta \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}\theta \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{I}_2$  la matrice identité  $2 \times 2$ ,  $\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$  et  $S_n = \begin{bmatrix} s_{2(n-1)+1} \\ s_{2(n-1)+2} \end{bmatrix}$  avec  $n \in \{1, 2\}$ . Les signaux  $s_1, s_2, s_3$  et  $s_4$  appartiennent à une constellation QAM,  $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\bar{\theta} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ,  $\alpha = 1 + j - j\theta$ ,  $\bar{\alpha} = 1 + j - j\bar{\theta}$  et  $\gamma = j = \sqrt{-1}$ .

Le mot de code peut aussi s'écrire

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha(s_1 + s_2\theta) & \alpha(s_3 + s_4\theta) \\ \gamma\bar{\alpha}(s_3 + s_4\bar{\theta}) & \bar{\alpha}(s_1 + s_2\bar{\theta}) \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

*Remarque :* Le terme *golden code* vient du fait que le paramètre  $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est le nombre d'or.

### Les codes parfaits avec $n_T \geq 3$

Dans [26, 27], des codes parfaits utilisant 2, 3, 4 et 6 antennes d'émission sont présentés. Dans le cas de trois antennes d'émission, les dimensions du code sont  $n_T = T = 3$  et 9 signaux d'information  $s_1, s_2, \dots, s_9$  sont transmis durant  $T = 3$  temps symbole. Pour l'instant, seuls des codes utilisant une constellation HEX ont été générés. Les mots de code pour 3 antennes d'émission peuvent s'écrire [26]

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \sum_{n=1}^3 \text{diag}(\mathbf{M}_3 S_n) \mathbf{\Gamma}^{n-1} \\ &= \text{diag}(\mathbf{M}_3 S_1) \mathbf{I}_3 + \text{diag}(\mathbf{M}_3 S_2) \mathbf{\Gamma} + \text{diag}(\mathbf{M}_3 S_3) \mathbf{\Gamma}^2, \end{aligned} \quad (2.81)$$

où

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0,66 + j0,327 & 0,021 + j0,327 & -0,492 + j0,327 \\ -0,294 - j0,146 & -0,037 - j0,589 & -0,614 + j0,408 \\ 0,53 + j0,262 & -0,047 - j0,736 & 0,273 - j0,182 \end{bmatrix},$$



$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_3 \text{ la matrice identité } 3 \times 3, \text{ et } \mathbf{S}_n = \begin{bmatrix} s_{3(n-1)+1} \\ s_{3(n-1)+2} \\ s_{3(n-1)+3} \end{bmatrix} \text{ avec } n \in \{1, 2, 3\}.$$

De la même manière, les codes parfaits  $4 \times 4$  ont été proposés dans [27] pour des symboles d'information QAM. La matrice des mots de code peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \sum_{n=1}^4 \text{diag}(\mathbf{M}_4 \mathbf{S}_n) \mathbf{\Gamma}^{n-1} \\ &= \text{diag}(\mathbf{M}_4 \mathbf{S}_1) \mathbf{I}_4 + \text{diag}(\mathbf{M}_4 \mathbf{S}_2) \mathbf{\Gamma} + \text{diag}(\mathbf{M}_4 \mathbf{S}_3) \mathbf{\Gamma}^2 + \text{diag}(\mathbf{M}_4 \mathbf{S}_4) \mathbf{\Gamma}^3, \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 0,258 - j0,312 & 0,345 - j0,418 & -0,418 + j0,505 & -0,214 + j0,258 \\ 0,258 + j0,087 & 0,472 + j0,16 & 0,16 + j0,054 & 0,764 + j0,258 \\ 0,258 + j0,214 & -0,505 - j0,418 & -0,418 - j0,345 & 0,312 + j0,258 \\ 0,258 - j0,763 & -0,054 + j0,16 & 0,16 - j0,472 & -0,087 + j0,258 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{S}_n = \begin{bmatrix} s_{4(n-1)+1} \\ s_{4(n-1)+2} \\ s_{4(n-1)+3} \\ s_{4(n-1)+4} \end{bmatrix} \text{ avec } n \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Les codes parfaits font partie d'une famille de codes très prometteuse pour les futurs réseaux sans fil. Ils allient un rendement et un gain de diversité très bons en comparaison aux autres codes comme le code d'Alamouti. Le décodage reste malgré tout plus compliqué que celui des O-STBCs.

## 2.6 Codes temps-espace en treillis

Le début de ce chapitre a présenté différents types de codes appartenant à la grande famille des STBCs. L'avantage de ces codes est la simplicité de codage et de décodage, tout en offrant de bonnes performances grâce à un rendement intéressant et un gain de diversité élevé. Le principal défaut des STBCs est le manque de gain de codage. Pour cela, une famille de codes appelés codes temps-espace en treillis STTC a été introduite pour la première fois par Tarokh *et al.* dans [8]. Nos travaux ont pour objectif la génération de nouveaux codes plus performants que ceux précédemment publiés.

Une première partie rappellera les principes théoriques des STTCs utilisant une modulation de type  $2^n$ -PSK ou  $2^{2n}$ -QAM. Dans le prochain chapitre, les codes publiés et leurs performances seront étudiés.

### 2.6.1 Codage temps-espace en treillis

Les STTCs, présentés en 1998, sont une adaptation des modulations codées en treillis appliquée aux systèmes MIMO. Ils ont l'avantage d'offrir des gains de codage et des gains de diversité intéressants.

Dans un STTC, les symboles MIMO en sortie du codeur dépendent aussi bien des données présentées à l'entrée du codeur que des données précédemment fournies dont les valeurs sont mémorisées. La valeur des mémoires à un instant  $t$  est appelée 'état'. A chaque instant  $t$ , le

codeur passe d'un état à un autre. Cette étape est appelée transition. Un symbole MIMO qui va être envoyé en sortie du codeur, est associé à chaque transition. Il est possible de représenter tout cela sous la forme d'un treillis. Dans [8], Tarokh *et al.* représentent les codes sous forme d'un treillis comme celui de la figure 2.6.

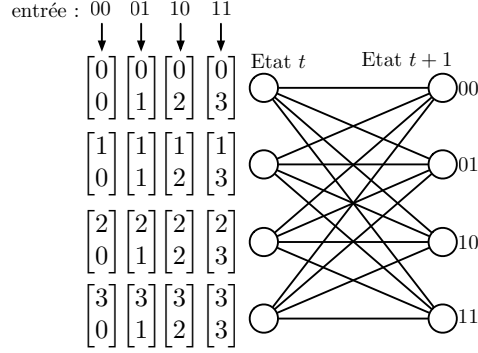


FIGURE 2.6 – STTC 4 états 4-PSK avec 2 antennes d'émission proposé par Tarokh

Dans la figure 2.6, les états sont décrits par les cercles et les transitions entre les états par les lignes. Les vecteurs-colonne à gauche du treillis représentent les symboles MIMO du codeur correspondant à la transition entre deux états. Cette transition dépend de l'état à l'instant  $t$  et des valeurs à l'entrée du codeur. Les signaux MIMO obtenus à partir des symboles MIMO sont émis sur les différentes antennes.

Les codes utilisant d'autres modulations peuvent être représentés de la même manière que le code 4 états 4-PSK avec 2 antennes d'émission proposé par Tarokh *et al.* et décrit par la figure 2.6. La représentation du treillis du code de Tarokh 8 états, 8-PSK avec 2 antennes d'émission est donnée à la figure 2.7.

Cette représentation relativement simple et valable pour des modulations PSK et QAM a le défaut de devenir difficile à représenter lorsque le nombre d'états du codeur devient grand. Pour simplifier la notation, il est possible de représenter le code sous forme matricielle, comme nous allons le voir dans le prochain paragraphe.

### Codeur $2^n$ -PSK temps-espace en treillis

Un codeur temps-espace en treillis  $2^{n\nu}$  états  $2^n$ -PSK  $n_T$  antennes d'émission peut se représenter comme celui de la figure 2.8. Dans cet exemple, la figure 2.8 matérialise un codeur  $2^{2\nu}$  états 4-PSK avec  $n_T$  antennes d'émission ( $n = 2$ ).

Un codeur temps-espace en treillis est composé d'un bloc d'entrée de  $n$  bits  $[x_1^t \cdots x_n^t]$  et de  $\nu$  blocs mémoire de  $n$  bits. A chaque instant  $t \in \mathbb{Z}$ , tous les bits d'un bloc sont remplacés par les  $n$  bits du bloc précédent. Pour chaque bloc  $i$ , où  $i = \overline{1, \nu + 1}$ , le  $l^e$  bit est associé à  $n_T$  coefficients  $g_{l,k}^i$  avec  $k = \overline{1, n_T}$ . Avec ces  $n_T$  coefficients, de la même manière que dans [28], une matrice génératrice  $n_T \times (\nu + 1)$  est obtenue

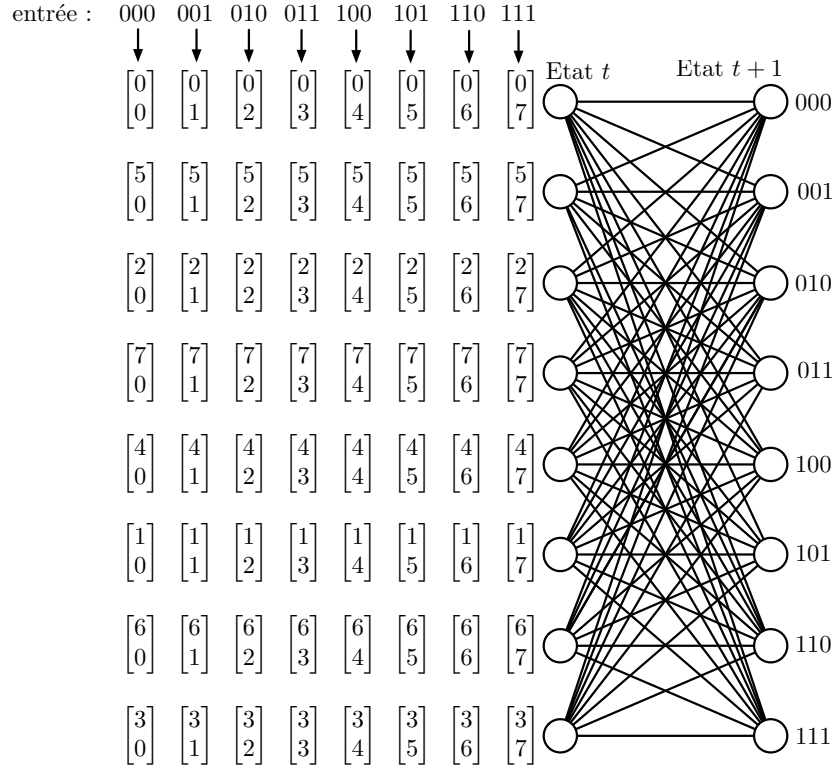
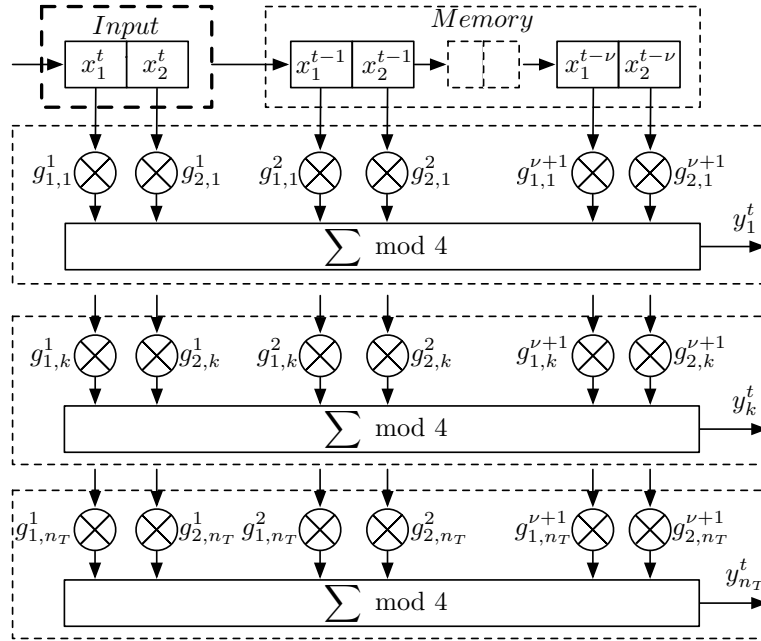


FIGURE 2.7 – STTC 8 états 8-PSK avec 2 antennes d'émission proposé par Tarokh


 FIGURE 2.8 – Codeur temps-espace en treillis  $4^\nu$  états 4-PSK avec  $n_T$  antennes d'émission ( $n = 2$ )

$$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} g_{1,1}^1 & \cdots & g_{n,1}^1 & \cdots & g_{1,1}^{\nu+1} & \cdots & g_{n,1}^{\nu+1} \\ \vdots & & & \cdots & & & \vdots \\ g_{1,k}^1 & \cdots & g_{n,k}^1 & \cdots & g_{1,k}^{\nu+1} & \cdots & g_{n,k}^{\nu+1} \\ \vdots & & & \cdots & & & \vdots \\ g_{1,n_T}^1 & \cdots & g_{n,n_T}^1 & \cdots & g_{1,n_T}^{\nu+1} & \cdots & g_{n,n_T}^{\nu+1} \end{array} \right] \quad (2.82)$$

$$= [G_1^1 \cdots G_n^1 | \cdots | G_1^{\nu+1} \cdots G_n^{\nu+1}], \quad (2.83)$$

où  $G_l^i = [g_{l,1}^i \cdots g_{l,n_T}^i]^T \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ .

Un état est défini par la valeur binaire des cellules mémoire correspondant aux colonnes non nulles de  $\mathbf{G}$ . Ainsi, à l'instant  $t$ , le symbole émanant de la  $k^e$  sortie du codeur peut s'écrire

$$y_k^t = \sum_{i=1}^{\nu+1} \sum_{l=1}^n x_l^{t-i+1} g_{l,k}^i \mod 2^n. \quad (2.84)$$

Ainsi, le codage est défini par une fonction

$$\Psi : \mathbb{Z}_2^{n(\nu+1)} \rightarrow \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}, \quad (2.85)$$

qui associe à chaque état étendu  $X^t = [x_1^t \cdots x_n^t \cdots x_1^{t-\nu} \cdots x_n^{t-\nu}]^T \in \mathbb{Z}_2^{n(\nu+1)}$  le symbole MIMO

$$Y^t = \Psi(X^t) = \mathbf{G}X^t \mod 2^n, \quad (2.86)$$

Les sorties du codeur sont modulées à l'aide de la fonction présentée dans l'expression (1.5),  $s_k^t = \exp(j \frac{\pi}{2^n-1} y_k^t)$ , avec  $k = \overline{1, n_T}$ . Les signaux MIMO sont alors envoyés dans le canal de propagation. Les codes représentés par les figures 2.6 et 2.7 peuvent ainsi être représentés sous la forme d'une matrice génératrice. La matrice du code de Tarokh *et al.* 4 états 4-PSK avec 2 antennes d'émission est

$$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (2.87)$$

La matrice génératrice du code de Tarokh 8 états 8-PSK avec 2 antennes d'émission est

$$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (2.88)$$

Dans la littérature, comme dans [7], il est courant de rencontrer une deuxième représentation d'un codeur  $2^n$ -PSK, comme le montre la figure 2.9 pour une modulation 4-PSK.

Ainsi, le code est représenté non pas par une matrice génératrice comme précédemment, mais par  $n$  vecteurs ligne. Dans le cas d'un STTC avec  $2^{n\nu}$  états,  $2^n$ -PSK et  $n_T$  antennes d'émission, les vecteurs ligne représentant le code sont

$$G'_1 = [(g_{1,1}^1, \cdots g_{1,n_T}^1)(\cdots)(g_{1,1}^{\nu+1}, \cdots g_{1,n_T}^{\nu+1})] \quad (2.89)$$

$$G'_2 = [(g_{2,1}^1, \cdots g_{2,n_T}^1)(\cdots)(g_{2,1}^{\nu+1}, \cdots g_{2,n_T}^{\nu+1})] \quad (2.90)$$

$$\cdots = \cdots$$

$$G'_n = [(g_{n,1}^1, \cdots g_{n,n_T}^1)(\cdots)(g_{n,1}^{\nu+1}, \cdots g_{n,n_T}^{\nu+1})]. \quad (2.91)$$

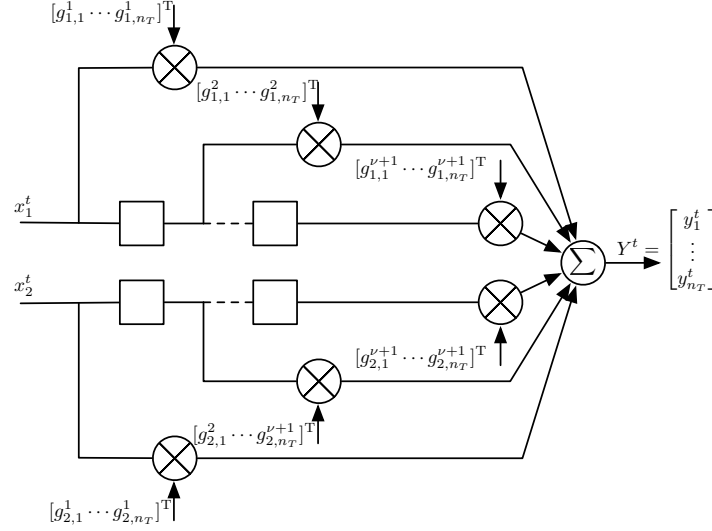


FIGURE 2.9 – Autre représentation possible d'un codeur temps-espace en treillis  $4^\nu$  états 4-PSK avec  $n_T$  antennes d'émission

De cette manière, le code de Tarokh 4 états 4-PSK 2 antennes d'émission est donné par :

$$G'_1 = [(0, 2)(2, 0)] \quad (2.92)$$

$$G'_2 = [(0, 1)(1, 0)]. \quad (2.93)$$

De même, le code 8 états 8-PSK 2 antennes d'émission est donné par

$$G'_1 = [(0, 4)(4, 0)] \quad (2.94)$$

$$G'_2 = [(0, 2)(2, 0)] \quad (2.95)$$

$$G'_3 = [(0, 1)(5, 0)]. \quad (2.96)$$

L'avantage de la représentation du codeur de la figure 2.9, utilisée par exemple par Chen *et al.* dans [7], est de représenter avec exactitude la réalité physique. Cependant, la notation utilisant une seule et unique matrice génératrice  $\mathbf{G}$  (c.f. expression (2.82)) permet de calculer les symboles MIMO  $Y^t$  en fonction de l'état étendu  $X^t$  à l'aide d'un simple produit matriciel. Ainsi, cette notation sera utilisée dans les chapitres suivants.

### Codeur $2^{2n}$ -QAM temps-espace en treillis

Les premiers codes utilisant une modulation QAM ont été proposés par Tarokh dans [8] sous la forme d'une représentation en treillis. Par la suite et dans le but de simplifier l'étude des  $2^{2n}$ -QAM STTCs avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , Liu *et al.* proposent dans [29, 30] de représenter les STTCs sous forme matricielle dans l'anneau des entiers complexes  $\mathbb{Z}_{2^n}(j)$ . Ainsi, chaque symbole MIMO est de la forme  $Y^t = Y_I^t + jY_Q^t \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}(j)$  où  $Y_I, Y_Q \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ .

De la même manière que pour les  $2^n$ -PSK STTCs, un codeur temps-espace en treillis  $4^{2\nu}$  états  $2^{2n}$ -QAM avec  $n_T$  antennes d'émission peut se décrire comme le montre la figure 2.10.

Pour un STTC  $4^{n\nu}$  états  $2^{2n}$ -QAM, à chaque instant  $t \in \mathbb{Z}$ , les  $2n$  entrées binaires  $b_1^t \dots b_n^t$  et  $b_{n+1}^t \dots b_{2n}^t$  sont converties en deux symboles  $x_1^t \in \mathbb{Z}_{2^n}$  et  $x_2^t \in \mathbb{Z}_{2^n}$  à l'aide du mapping naturel, où  $b_n^t$  et  $b_{2n}^t$  sont les bits de poids faible. Le bloc d'entrée contenant ces deux symboles  $\mathbb{Z}_{2^n}$  est suivi par  $\nu$  blocs mémoire. Chaque bloc-mémoire est constitué de deux cellules

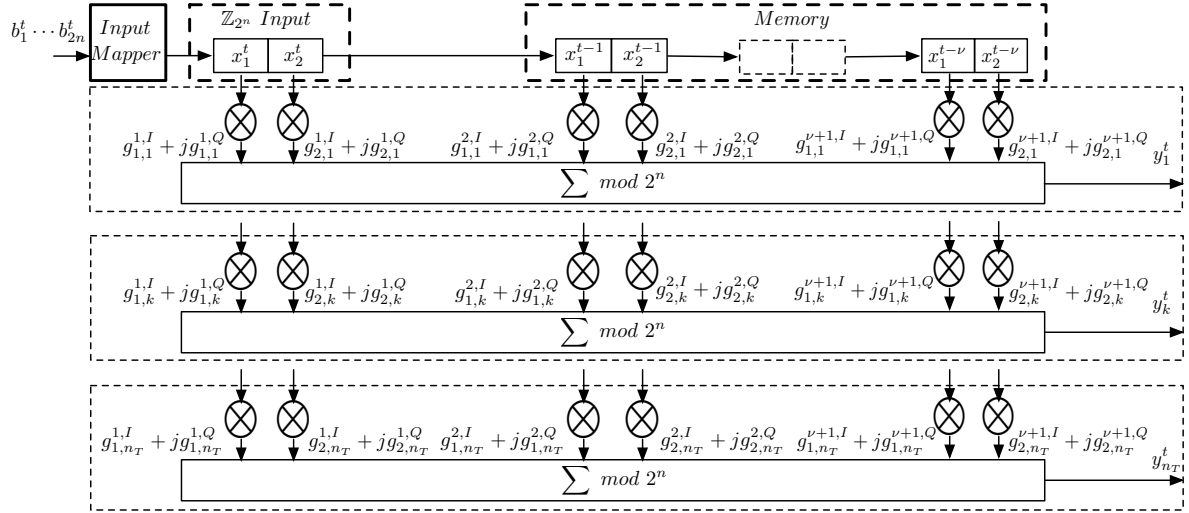


FIGURE 2.10 – Représentation d'un codeur temps-espace en treillis  $4^{2\nu}$  états  $4^n$ -QAM avec  $n_T$  antennes d'émission ( $n = 2$ )

mémoires de deux symboles  $\mathbb{Z}_{2^n}$ . Un état est défini par les valeurs des  $2\nu$  symboles des blocs mémoire. A chaque instant  $t$ , les deux symboles  $\mathbb{Z}_{2^n}$  d'un bloc sont remplacés par les deux valeurs des blocs mémoire précédents. Pour chaque bloc  $i$  avec  $i = \overline{1, \nu+1}$ , le  $l^e$  symbole avec  $l = \{1, 2\}$  est associé à  $n_T$  coefficients  $g_{l,k}^i = g_{l,k}^{i,I} + jg_{l,k}^{i,Q} \in \mathbb{Z}_{2^n}(j)$ , où  $k = \overline{1, n_T}$ . Avec ces  $n_T \times 2(\nu+1)$  coefficients complexes, la matrice génératrice peut s'écrire

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_I + j\mathbf{G}_Q \quad (2.97)$$

$$= \begin{bmatrix} G_1^{1,I} & G_2^{1,I} & \dots & G_1^{\nu+1,I} & G_2^{\nu+1,I} \\ G_1^{1,Q} & G_2^{1,Q} & \dots & G_1^{\nu+1,Q} & G_2^{\nu+1,Q} \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

$$= \begin{bmatrix} g_{1,1}^{1,I} & g_{2,1}^{1,I} & \dots & g_{1,1}^{\nu+1,I} & g_{2,1}^{\nu+1,I} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{1,k}^{1,I} & g_{2,k}^{1,I} & \dots & g_{1,k}^{\nu+1,I} & g_{2,k}^{\nu+1,I} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{1,n_T}^{1,I} & g_{2,n_T}^{1,I} & \dots & g_{1,n_T}^{\nu+1,I} & g_{2,n_T}^{\nu+1,I} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} g_{1,1}^{1,Q} & g_{2,1}^{1,Q} & \dots & g_{1,1}^{\nu+1,Q} & g_{2,1}^{\nu+1,Q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{1,k}^{1,Q} & g_{2,k}^{1,Q} & \dots & g_{1,k}^{\nu+1,Q} & g_{2,k}^{\nu+1,Q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{1,n_T}^{1,Q} & g_{2,n_T}^{1,Q} & \dots & g_{1,n_T}^{\nu+1,Q} & g_{2,n_T}^{\nu+1,Q} \end{bmatrix}. \quad (2.99)$$

Le codage est défini par une fonction

$$\Psi : \mathbb{Z}_{2^n}^{2(\nu+1)} \rightarrow \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}(j), \quad (2.100)$$

qui associe à chaque état étendu  $X^t = [x_1^t x_2^t \cdots x_1^{t-\nu} x_2^{t-\nu}]^T \in \mathbb{Z}_{2^n}^{2(\nu+1)}$  le symbole MIMO

$$Y_{X^t} = \mathbf{G}X^t \bmod 2^n \quad (2.101)$$

$$= \mathbf{G}_I X^t + j \mathbf{G}_Q X^t \bmod 2^n. \quad (2.102)$$

De la même manière que pour un STTC  $2^n$ -PSK, chaque sortie du codeur  $y_k^t$  permet de générer le signal modulé  $s_k^t$  avec  $k = \overline{1, n_T}$  à l'aide de la fonction présentée dans l'expression (1.7),  $s_k^t = y_k^t - \frac{2^n-1}{2}(1+j)$ .

### 2.6.2 Algorithme de Viterbi

Dans le paragraphe précédent, la partie émission des STTCs a été décrite pour les modulations PSK et QAM. Ce paragraphe va maintenant aborder la réception et le décodage des mots de code.

Pour décoder les STTCs, l'algorithme de Viterbi [31] est généralement utilisé. Le but de cet algorithme est de trouver dans le treillis le chemin le plus probable. Son avantage est d'être beaucoup plus rapide qu'une recherche exhaustive parmi l'ensemble de chemins possibles. Un chemin dans le treillis est une succession de transitions passant par des états différents. Ainsi, chaque chemin correspond à un mot de code.

Considérons un système MIMO constitué en émission d'un codeur temps-espace en treillis avec  $n_T$  antennes d'émission. Le récepteur est muni de  $n_R$  antennes de réception et il connaît parfaitement les coefficients du canal. Les signaux MIMO sont reçus durant  $L$  intervalles de temps.

A chaque instant  $t$ , pour chaque transition entre deux états, il est possible de définir une métrique de branche valant

$$\sum_{k'=1}^{n_R} \left| r_{k'}^t - \sum_{k=1}^{n_T} h_{k'k}^t \hat{s}_k^t \right|^2, \quad (2.103)$$

où  $\hat{S} = [\hat{s}_1^t \hat{s}_2^t \cdots \hat{s}_{n_T}^t]^T$  est le signal MIMO correspondant à la transition entre un état précédant et l'état donné,  $h_{k'k}^t$  le coefficient du canal entre la  $k^e$  antenne d'émission et la  $k'^e$  antenne de réception et  $r_{k'}^t$  le signal reçu sur la  $k'^e$  antenne de réception. De cette manière, pour chaque état, l'ensemble des distances entre le signal MIMO reçu et les signaux correspondant aux transitions convergeant vers l'état considéré est obtenu. Pour chaque état et à chaque instant, la métrique cumulée est calculée de la sorte :

- pour chaque transition arrivant sur l'état considéré, on calcule une métrique cumulée intermédiaire qui est la somme entre la métrique de branche relative à la transition et la métrique cumulée de l'état précédant considéré ;
- la valeur de la métrique cumulée retenue parmi toutes les transitions pour l'état considéré est la valeur minimale prise parmi les métriques cumulées intermédiaires.

Par conséquent, pour chaque état, l'état précédent le plus probable, c'est à dire celui qui minimise la métrique cumulée, est conservé. A la fin des  $L$  transitions, le chemin le plus probable est celui qui a la métrique cumulée la plus faible. Pour retrouver les signaux envoyés, la remontée des survivants est appliquée sur le chemin le plus probable. Le principe de la remontée des survivants est de regarder parmi les derniers états possibles du treillis celui qui a la métrique cumulée la plus faible. Sachant que pour chaque état, l'état d'avant le plus probable a été conservé, il est possible en partant du dernier état du treillis de retrouver le chemin le plus probable.

Cet algorithme très performant et beaucoup plus simple qu’une recherche exhaustive reste malgré tout relativement complexe comparé par exemple au décodage des O-STBCs. Ainsi, la complexité de décodage quand le nombre d’états devient important demande de la puissance de calcul.

Nos travaux se sont principalement orientés vers la construction des STTCs PSK et QAM. En effet, un des défauts des STTCs réside dans le fait que la recherche des meilleurs codes est très gourmande en temps de calcul. Les chapitres suivants exposeront deux nouvelles méthodes permettant une génération rapide des STTCs. Elles sont illustrées par des nouveaux codes plus performants que les meilleurs codes précédemment publiés.

## 2.7 Codes temps-espace en treillis super-orthogonaux

Dans les parties précédentes, nous avons vu que de bonnes performances pour une complexité relativement faible de décodage sont obtenues avec les O-STBCs. De plus, nous avons montré que les STTCs atteignaient des gains de diversité maximaux et de très bons gains de codage. Certaines études ont montré que, en alliant des O-STBCs à des STTCs, il était possible de construire des codes performants appelés ‘Super-Orthogonal Space-Time Trellis Code (SO-STTC).

Les SO-STTCs ont été introduits par Jafarkhani dans [32]. Indépendamment, Siwamogsatham et Fitz ont proposé une idée similaire dans [33–35] qu’ils généralisent ensuite dans [36]. De plus, un exemple de SO-STTC a été présenté indépendamment par Ionescu *et al.* dans [37]. Nous allons voir le principe des SO-STTCs par le biais d’un exemple dans le cas de 2 antennes d’émission.

Le code d’Alamouti a été présenté comme un code en bloc de gain de diversité maximal et de rendement  $R_c = 1$ . Il est défini par la matrice de codage

$$\mathcal{G}(s_1, s_2) = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

A l’instant  $t = 1$ , les signaux  $s_1$  et  $s_2$  sont envoyés respectivement par la première et la deuxième antenne. A l’instant  $t = 2$ , les signaux  $-s_2^*$  et  $s_1^*$  sont envoyés respectivement par la première et la deuxième antenne.

Le code d’Alamouti donné dans l’expression (2.104) n’est pas le seul code à avoir un rendement unitaire, un rang plein avec deux antennes de réception. L’ensemble des matrices de codage qui utilisent la même paire de signaux  $(s_1, s_2)$ , leurs conjugués et leurs opposés équivalents au code d’Alamouti sont donné par

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_1 & s_2^* \\ s_2 & s_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & s_2^* \\ -s_2 & s_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & s_2^* \\ s_2 & -s_1^* \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} -s_1 & s_2^* \\ -s_2 & -s_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_1 & -s_2^* \\ s_2 & -s_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ -s_2 & -s_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_1 & -s_2^* \\ -s_2 & s_1^* \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Les codes en blocs ayant une de ces matrices génératrices sont appelés codes super-orthogonaux. Nous notons cet ensemble  $\mathcal{C}$ . En utilisant seulement une matrice de codage  $\mathbf{C}$  parmi l’ensemble  $\mathcal{C}$ , il n’est pas possible en considérant toutes les paires  $(s_1, s_2)$  où  $s_1$  et  $s_2$  appartiennent à la constellation utilisée de créer toutes les mots de code orthogonaux  $2 \times 2$ . Seule la moitié est générée.



Pour créer la moitié restante de l'ensemble des matrices orthogonales, il est possible de multiplier la matrice de codage  $\mathbf{C}$  par une matrice unitaire.

Considérons la matrice unitaire suivante

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} e^{j\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.106)$$

En multipliant la matrice du code d'Alamouti à droite par la matrice unitaire donnée dans l'expression (2.106), une nouvelle matrice de codage est obtenue

$$\mathcal{G}(s_1, s_2, \theta) = \mathcal{G}(s_1, s_2) \mathbf{U} = \begin{bmatrix} s_1 e^{j\theta} & -s_2^* \\ s_2 e^{j\theta} & s_1^* \end{bmatrix}. \quad (2.107)$$

De manière à ne pas étendre la constellation initiale, il est nécessaire de fixer des conditions sur le choix de  $\theta$ . De ce fait, pour une modulation  $2^n$ -PSK,  $\theta$  doit être égal à  $\theta = \frac{2\pi m}{2^n}$  avec  $m \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ .

Le principe des SO-STTCs est d'attribuer des mots de codes super-orthogonaux aux différentes branches d'un treillis de manière à maximiser le gain de codage. Ainsi, tous les deux temps symbole,  $2n$  bits sont fournis au codeur. Durant deux temps symbole, un mot de code super-orthogonal est envoyé dans le canal de propagation. Le choix des mots de code à utiliser dépend du treillis (nombre d'états, nombre de branches parallèles ...). Pour optimiser ce choix, les mots de codes orthogonaux ou super orthogonaux sont séparés suivant la technique du *set partitioning* énoncée par Ungerboeck initialement dans [38] et ensuite dans [39, 40]. Le set partitioning propose de regrouper les signaux utilisés en différents ensembles, dans le but de maximiser le gain de codage pour des modulations codées en treillis. Cette technique peut s'énoncer suivant 3 règles.

**Règle 2.1.** *Tous les signaux doivent être utilisés un même nombre de fois.*

**Règle 2.2.** *Les transitions partant d'un même état ou arrivant sur un même état du treillis doivent appartenir à un même sous-ensemble de signaux séparés par la plus grande distance euclidienne.*

**Règle 2.3.** *Les branches parallèles dans le treillis, s'il y en a, doivent être assignées à des signaux séparés par la plus grande distance euclidienne. Des branches parallèles sont des branches partant d'un même état et arrivant sur un même état mais générant des symboles différents.*

Pour un code ayant un gain de diversité maximal, comme pour les codes super-orthogonaux, le gain de codage entre deux mots de code est défini comme le déterminant minimal de la matrice des distances  $\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  noté 'Coding Gain Distance' (CGD) calculée pour toutes les paires  $(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  comme dans [32]. Pour les SO-STTCs, le principe du set partitioning est utilisé non pas en évaluant la distance euclidienne au carré entre les signaux, mais en calculant les CGDs entre les différents mots de code. Ces derniers sont alors vus comme des points d'une constellation.

L'objectif du set partitioning est de partager les mots de code super-orthogonaux en sous-ensembles. La CGD de chaque sous-ensemble doit être maximale. Par exemple, la partition des mots de code à 2 antennes d'émission pour une modulation 4-PSK peut se faire comme le montre la figure 2.11 [32].

Dans cette figure,  $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}_4$  sont les symboles correspondants aux signaux modulés  $s_1 = \phi(y_1)$  et  $s_2 = \phi(y_2)$  respectivement. Pour chaque couple  $(y_1, y_2)$  le mot de code envoyé est

$$\begin{bmatrix} \phi(y_1) & -\phi(y_2)^* \\ \phi(y_2) & \phi(y_1)^* \end{bmatrix}. \quad (2.108)$$

min CGD: 4

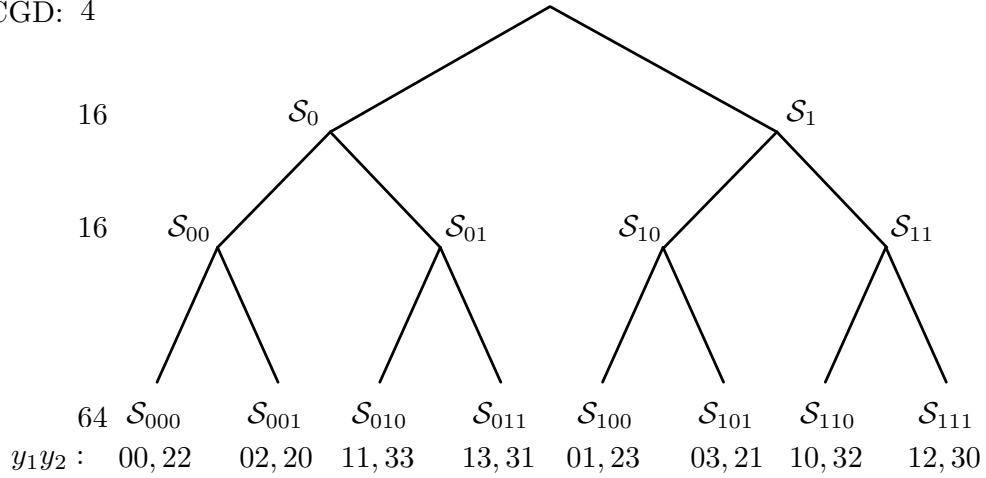


FIGURE 2.11 – Set partitioning basé sur la CGD pour un code orthogonal 4-PSK et 2 antennes d'émission

où  $\phi$  est la fonction de modulation. Les deux premiers sous-ensembles de mots de code sont  $\mathcal{S}_0$  contenant les couples  $(y_1 y_2) = \{(00), (22), (02), (20), (11), (33), (13), (31)\}$  et  $\mathcal{S}_1 = \{(01), (23), (03), (21), (10), (32), (12), (30)\}$ . La CGD minimale entre deux mots de code d'un même sous-ensemble est 16. Ensuite, nous avons  $\mathcal{S}_{00} = \{(00), (22), (02), (20)\}$ ,  $\mathcal{S}_{01} = \{(11), (33), (13), (31)\}$ ,  $\mathcal{S}_{10} = \{(01), (23), (03), (21)\}$  et  $\mathcal{S}_{11} = \{(10), (32), (12), (30)\}$ . La CGD minimale entre deux différents mots de code d'un même sous-ensemble  $\mathcal{S}_{00}$ ,  $\mathcal{S}_{01}$ ,  $\mathcal{S}_{10}$  et  $\mathcal{S}_{11}$  est 16. La CGD minimale séparant des mots de code des derniers sous-ensembles présentés dans la figure 2.11  $\mathcal{S}_{000}, \dots, \mathcal{S}_{111}$  est 64.

Les partitions d'autres mots de code d'un SO-STTC à 2 antennes d'émission sont présentées dans [32]. En utilisant ces partitions et les différentes règles du set partitioning basées sur la CGD et non la distance euclidienne au carré entre les signaux MIMO, des SO-STTCs sont créés de manière à maximiser le gain de codage, comme celui présenté à la figure 2.12.

Pour avoir un rendement égal à 1, tous les deux temps symbole, 4 bits sont fournis au codeur. Dans cet exemple, quatre branches partent de chaque état. Ainsi, chaque branche correspond à 4 mots de code en parallèle. Par exemple, la transition entre l'état nul à l'instant  $t$  et l'état nul à l'instant  $t + 2$  correspond aux 4 mots de code (cf. figure 2.12)

$$\mathcal{G}(s_1, s_2, 0)S_{00} = \left\{ \begin{bmatrix} \phi(0) & -\phi(0)^* \\ \phi(0) & \phi(0)^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \phi(2) & -\phi(2)^* \\ \phi(2) & \phi(2)^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \phi(0) & -\phi(2)^* \\ \phi(2) & \phi(0)^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \phi(2) & -\phi(0)^* \\ \phi(0) & \phi(2)^* \end{bmatrix} \right\} \quad (2.109)$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.110)$$

De la même manière que pour les STTCs, la représentation des SO-STTCs sous forme de treillis devient très vite fastidieuse dès que le nombre d'états augmente. C'est pour cette raison qu'une notation matricielle des SO-STTCs est utilisée dans [41, 42]. Cette représentation sous la forme de matrice génératrice permet une recherche simplifiée des meilleurs SO-STTCs. Ainsi

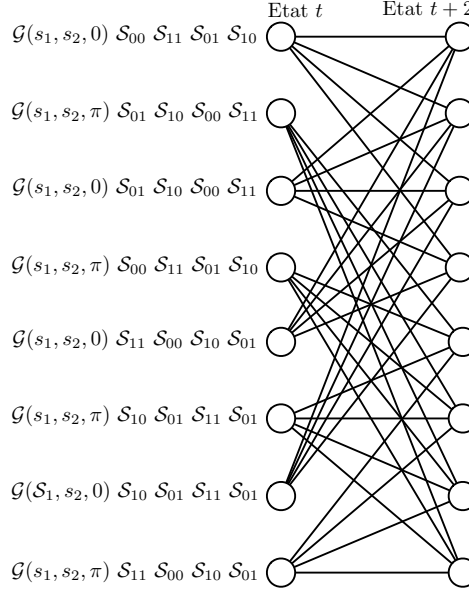


FIGURE 2.12 – SOSTTC 8 états 4-PSK 4 branches parallèles

le code présenté dans la figure 2.12 peut être défini par la matrice génératrice

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}. \quad (2.111)$$

Les signaux  $S^t = [s_1 s_2]^T$  sont donnés par

$$S^t = \Phi_v(Y^t) = \Phi_v(\mathbf{G}X^t). \quad (2.112)$$

où  $X^t$  est l'état étendu défini par

$$X^t = \underbrace{\left[ \overbrace{x_1^t x_2^t}^{\text{Partie de l'état suivant}} \quad \overbrace{x_3^t x_4^t}^{\text{Branches Parallèles}} \quad \overbrace{x_1^{t-1} x_2^{t-1} x_1^{t-2}}^{\text{Etat courant}} \right]}_{\text{bits d'entrée}}. \quad (2.113)$$

Pour retrouver les données codées et envoyées, le décodage à maximum de vraisemblance est utilisé. La première étape consiste à trouver les chemins parallèles les plus probables. Ensuite, l'algorithme de Viterbi est utilisé pour trouver le chemin dans le treillis le plus vraisemblable.

Les exemples que nous venons de présenter concernent uniquement les SO-STTCs à deux antennes d'émission. Le principe des SO-STTCs à deux antennes d'émission a été exploité par Ferré *et al.* dans [43] et par Jafarkhani *et al.* dans [44] pour respectivement 3 et 4 antennes d'émission. De plus, Sterian *et al.* dans [45] donnent des SO-STTCs 16-QAM pour 4 antennes d'émission.

## 2.8 Golden STTCs

Cette partie présente un nouveau schéma de modulation codée en treillis 'Trellis Coded Modulation' (TCM). Cette technique appelée 'Golden Space-Time Trellis Coded Modulation' (GST-TCM) a été présentée par Hong *et al.* dans [46, 47]. Elle combine les golden codes avec les TCMs dans le but d'offrir un rendement et un gain de codage important.

Un GST-TCM est construit de la manière suivante. Considérons comme dans l'expression (2.78), l'ensemble des mots d'un golden code donné par

$$\mathcal{G} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha(s_1 + s_2\theta) & \alpha(s_3 + s_4\theta) \\ j\bar{\alpha}(s_3 + s_4\bar{\theta}) & \bar{\alpha}(s_1 + s_2\bar{\theta}) \end{bmatrix} \right\}, \quad (2.114)$$

où  $s_1, s_2, s_3$  et  $s_4 \in \mathbb{C}$  sont des signaux issus des  $n$  bits d'entrée dans le cas d'une modulation à  $2^n$  états,  $\theta = 1 - \bar{\theta} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\alpha = 1 + j - j\theta$  et  $\bar{\alpha} = 1 + j - j\bar{\theta}$ .

Un sous-ensemble de mots d'un golden code  $\mathcal{G}_k \subseteq \mathcal{G}$  pour  $k = \overline{1, 4}$  est défini par

$$\mathcal{G}_k = \left\{ \mathbf{S} \mathbf{B}^k, \mathbf{S} \in \mathcal{G} \right\}, \quad (2.115)$$

avec

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} j(1 - \theta) & 1 - \theta \\ j\theta & j\theta \end{bmatrix}. \quad (2.116)$$

Pour chaque valeur de  $k$ , le déterminant minimal de  $\mathbf{A}$  calculé à partir de la matrice de différences entre deux mots de code appartenant à un même sous-ensemble est  $2^k \delta_{\min}$  où  $\delta_{\min}$  est le plus petit déterminant entre deux mots d'un *golden code* (quand  $k = 0$ ). De plus, les mots de code de  $\mathcal{G}_k$  avec  $k = \overline{1, 4}$  correspondent aux sous-réseaux de points (couramment appelées *lattice*) de  $\mathbb{Z}^8$  :  $D_4^2$ ,  $E_8$ ,  $L_8$  et  $2\mathbb{Z}^8$ . Les différentes caractéristiques de ces sous-*lattices* sont présentées en détail dans [48]. Une partition chaînée de lattices [49] est alors formée par les différents lattices

$$\mathbb{Z}^8 \supset D_4^2 \supset E_8 \supset L_8 \supset 2\mathbb{Z}^8. \quad (2.117)$$

Pour chaque lattice consécutif  $\Lambda_k \supset \Lambda_{k+1}$  de la partition chaînée, le groupe quotient correspondant  $\Lambda_k / \Lambda_{k+1}$  est d'ordre 4. De plus, de la même manière que dans [50], l'ensemble des représentants des cosets issus du groupe quotient  $\Lambda_k / \Lambda_{k+1}$  s'écrit  $[\Lambda_k / \Lambda_{k+1}]$ . Le set partitioning combiné à un code en treillis est alors utilisé pour augmenter la valeur du gain de codage.

A partir de ces bases, un exemple de codeur GST-TCM peut être représenté comme sur la figure 2.8 et détaillé dans [46, 47]. Considérons deux lattices  $\Lambda_{l_0}$  et  $\Lambda_{l_0+l}$  avec  $l_0 + l \leq 4$ . Le groupe quotient de  $\Lambda_{l_0} / \Lambda_{l_0+l}$  est d'ordre  $4^l$  ce qui correspond au nombre de cosets de  $\Lambda_{l_0+l}$  dans  $\Lambda_{l_0}$ . Les  $q$  bits d'entrée alimentent un codeur en treillis et un codeur de sous-lattice. Les sorties du codeur en treillis sont utilisées pour sélectionner un coset  $C_1 \in [\Lambda_{l_0} / \Lambda_{l_0+l}]$ . Les  $q_2$  bits servent à générer un représentant d'un coset  $C_2 \in [\Lambda_{l_0} / 2\mathbb{Z}^8]$ .  $C_1$  et  $C_2$  sont ensuite additionnés modulo 2 pour donner  $C'$ . Les  $q_3$  bits, à l'aide d'un codeur  $2\mathbb{Z}^8$  génèrent un vecteur  $2\mathbf{U} \in \mathbb{Z}^8$  qui est additionné à  $C'$ . Le résultat est alors associé à un golden code.

En réception, la technique du maximum de vraisemblance est utilisée par le biais de l'algorithme de Viterbi associé à un décodeur par sphère. Dans [51], une technique de décodage réduisant le nombre d'itérations du décodeur par sphère est décrite, permettant ainsi de réduire la complexité du décodage. Une analyse détaillée des performances des GST-TCMs a été faite dans [52] dans le cas de canaux à évanouissements lents ou rapides par blocs.

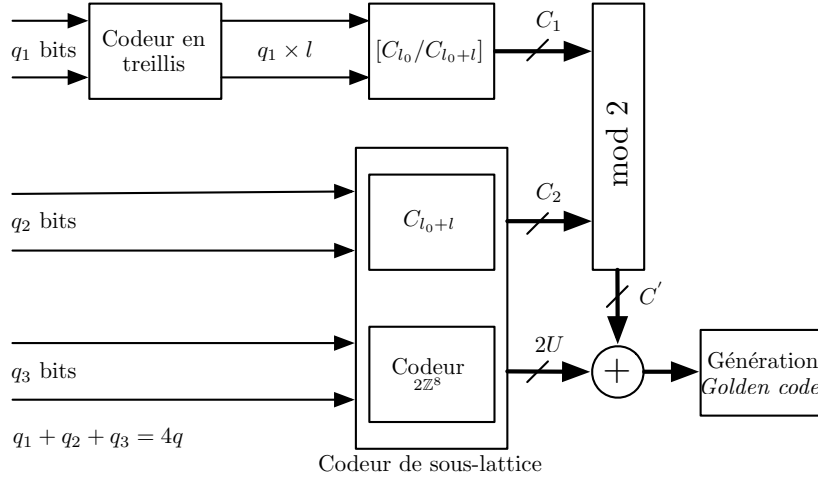


FIGURE 2.13 – Structure du codeur GST-TSM

## 2.9 Conclusion

Ce chapitre a eu pour objectif de rappeler les principes des codes temps-espace. A partir de leurs probabilités d'erreurs, les principaux critères de construction de ces codes ont été donnés : les critères du rang, du déterminant, de la distance de Hamming, de la distance produit et de la trace. Le choix de ces critères se fait en fonction de différents paramètres :

- le type de canal vu par le système : soit un canal de Rayleigh à évanouissements lents, soit un canal de Rayleigh à évanouissements rapides ;
- la valeur du produit entre le rang minimal  $r_{min}$  et  $n_R$  le nombre d'antennes de réception pour un canal de Rayleigh à évanouissements lents ou la valeur du produit entre le rang minimal  $r_{min}$  et la distance minimale de Hamming  $d_{H_{min}}$  entre deux mots de code pour un canal de Rayleigh à évanouissements rapides.

A partir de ces critères de construction, les principaux schémas de codage temps-espace ont été présentés. Nous avons donc dans un premier temps porté notre attention sur les O-STBCs et les QO-STBCs. L'avantage de ces codes est d'offrir un gain de diversité très intéressant pour un décodage extrêmement simple. En contrepartie, leur principal défaut est un gain de codage unitaire. Ensuite, nous avons vu que les codes LST donnaient une bonne alternative pour augmenter le rendement de la transmission. En effet, ces codes exploitent le multiplexage spatial au détriment de la diversité. Les codes à dispersion linéaire ont ensuite été présentés. Le rendement de ces codes est plus important que celui des O-STBCs et des QO-STBCs mais les critères du rang et du déterminant ne sont pas toujours respectés. De plus, le temps pour trouver les codes performants est important. Ces défauts ont été comblés grâce aux codes algébriques qui respectent le critère du rang et du déterminant. Parmi ces codes, les plus connus sont appelés codes parfaits incluant le golden code.

Nous avons présenté ensuite une famille de codes appelés STTCs qui allient un bon gain de diversité et de codage. Leurs défauts résident dans la complexité du décodeur de part l'utilisation de l'algorithme de Viterbi.

Pour assurer des bons gains de diversité et de codage, les SO-STTCs combinant des STBCs aux STTCs ont ensuite été introduits. Pour finir, notre liste (non-exhaustive) de techniques de codage temps-espace existantes, les GST-TCMs alliant les TCMs et les golden codes ont

été décrits.

Nos travaux portent sur la construction de nouveaux STTCs offrant de meilleures performances que ceux existants. De ce fait, des propriétés et des outils relatifs à la génération des STTCs vont être énoncés dans le prochain chapitre. Enfin, nous introduirons une classe particulière de STTCs : les STTCs équilibrés.

## Chapitre 3

# Outils et propriétés des STTCs $2^n$ -PSK

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>STTCs à modulation de type <math>2^n</math>-PSK</b>	<b>56</b>
3.1.1	Schéma du codeur temps-espace en treillis à modulation de type $2^n$ -PSK	56
3.1.2	Exemples de codes existants	58
3.1.3	Exemples de méthodes de construction des STTCs	63
3.1.4	Codes équilibrés	65
<b>3.2</b>	<b>Outils et propriétés des STTCs <math>2^n</math>-PSK</b>	<b>67</b>
3.2.1	Propriétés générales de $\mathbb{Z}_2^{n_T}$	67
3.2.2	Propriétés des $2^n$ -PSK STTCs	73
3.2.3	Propriétés de la distance euclidienne entre deux mots de code	74
<b>3.3</b>	<b>Méthode existante de construction des codes équilibrés</b>	<b>79</b>
3.3.1	Exemple de génération de STTCs totalement équilibrés de type II ( $n_T = 2$ )	79
3.3.2	Exemple de génération de STTCs totalement équilibrés de type I ( $n_T = 2$ )	80
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>81</b>

### Introduction

Le deuxième chapitre a introduit les différents critères de construction des codes temps-espace ainsi que les différentes familles de codes temps-espace. Parmi elles, nous allons nous intéresser aux STTCs. Cette famille de codes proposée par Tarokh *et al.* dans [8] est basée sur le principe des TCMs étendues à un contexte MIMO. Les STTCs ont l'avantage d'avoir des gains de codage et de diversité élevés. En contrepartie, leur décodage demande beaucoup de puissance de calcul. De plus, le temps de recherche des meilleurs codes est très important, particulièrement pour des codes à grand nombre d'antennes d'émission, d'états ou pour des constellations de grande taille. L'objectif premier de nos travaux a donc été de trouver des méthodes rapides et générales pour créer les meilleurs codes.

Nous commencerons ce chapitre en rappelant les critères de construction spécifiques aux STTCs  $2^n$ -PSK. Ensuite, certaines solutions existantes pour réduire le temps de recherche

des codes seront énoncées. A partir de là, les différents outils et les différentes propriétés concernant les STTCs  $2^n$ -PSK utiles pour leur génération seront exposés. Nous finirons par présenter la classe des STTCs équilibrés contenant les STTCs  $2^n$ -PSK les plus performants.

### 3.1 STTCs à modulation de type $2^n$ -PSK

#### 3.1.1 Schéma du codeur temps-espace en treillis à modulation de type $2^n$ -PSK

Comme exposé dans le chapitre précédent, un STTC  $2^{2\nu}$  états 4-PSK avec  $n_T$  antennes d'émission peut être décrit par le schéma de la figure 3.1.

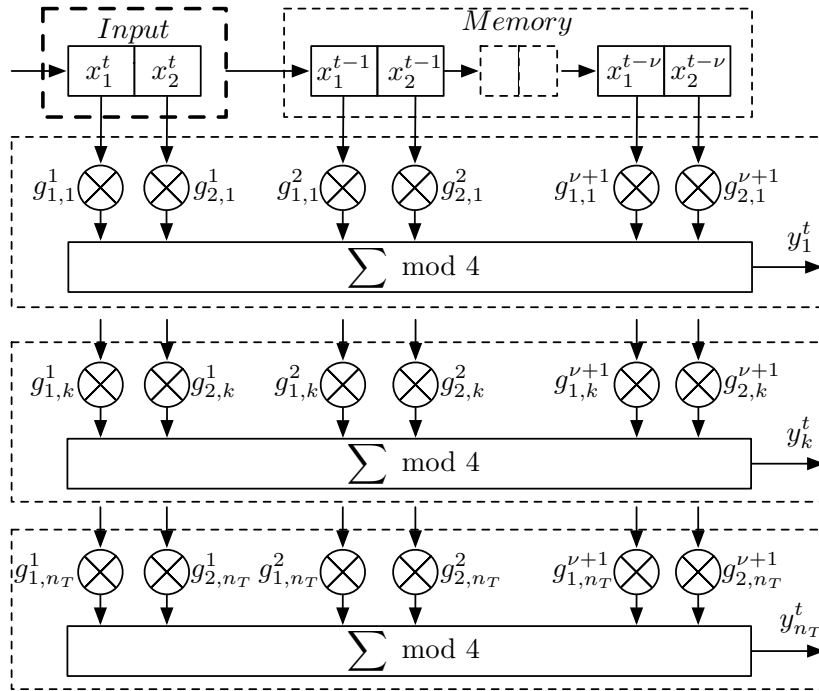


FIGURE 3.1 – Codeur temps-espace en treillis 4-PSK

Dans le cas général, c'est à dire pour un STTC  $2^{n\nu}$  états  $2^n$ -PSK avec  $n_T$  antennes d'émission, chaque bloc contient  $n$  cellules binaires, les coefficients de la matrice appartiennent à  $\mathbb{Z}_{2^n}$  et les opérations se font modulo  $2^n$ . Ainsi, les coefficients sont regroupés dans une matrice génératrice

$$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} g_{1,1}^1 & \cdots & g_{n,1}^1 & \cdots & g_{1,1}^{\nu+1} & \cdots & g_{n,1}^{\nu+1} \\ \vdots & & & & & & \\ g_{1,k}^1 & \cdots & g_{n,k}^1 & \cdots & g_{1,k}^{\nu+1} & \cdots & g_{n,k}^{\nu+1} \\ \vdots & & & & & & \\ g_{1,n_T}^1 & \cdots & g_{n,n_T}^1 & \cdots & g_{1,n_T}^{\nu+1} & \cdots & g_{n,n_T}^{\nu+1} \end{array} \right] \quad (3.1)$$

$$= [G_1^1 \cdots G_n^1 | \cdots | G_1^{\nu+1} \cdots G_n^{\nu+1}]. \quad (3.2)$$



Les symboles MIMO en sortie du codeur  $Y^t = [y_1^t y_2^t \cdots y_{n_T}^t]^T$  sont donnés par la fonction  $\Psi$ , définie par

$$\Psi : \mathbb{Z}_2^{n(\nu+1)} \rightarrow \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T} \quad (3.3)$$

$$Y^t = \Psi(X^t) = \mathbf{G}X^t \bmod 2^n, \quad (3.4)$$

où  $X^t = [x_1^t \cdots x_n^t \cdots x_1^{t-\nu} \cdots x_n^{t-\nu}]^T \in \mathbb{Z}_2^{n(\nu+1)}$  est l'état étendu au temps  $t$  qui correspond à la valeur binaire des  $n$  bits d'entrée et des  $n\nu$  bits contenus dans les  $\nu$  blocs mémoire. Le signal MIMO envoyé  $S^t = [s_1^t \cdots s_{n_T}^t]^T$  est alors donné à l'aide de la fonction de modulation décrite dans l'expression (1.5) qui effectue la correspondance entre les symboles  $y_k^t$  et les signaux  $s_k^t$ .

La matrice génératrice étant de taille  $n_T \times n(\nu+1)$ , il y a alors  $2^{n^2 n_T (\nu+1)}$  STTCs  $2^{n\nu}$  états  $2^n$ -PSK avec  $n_T$  antennes d'émission à analyser lors d'une recherche exhaustive. Comme dans la paragraphe 2.1.2, nous considérons un système avec  $n_R$  antennes de réception,  $r_{min}$  le rang minimal des matrices  $\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  calculées pour toutes les paires  $(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  et  $d_{H_{min}}$  la distance minimale de Hamming entre tous les mots de code  $\mathbf{S}$  et  $\hat{\mathbf{S}}$  où  $\mathbf{S} \neq \hat{\mathbf{S}}$ . Les principaux critères pour définir les performances dans le cas de  $n_R$  antennes de réception qui ont été définis dans le chapitre précédent sont :

- le critère du rang et du déterminant, pour  $r_{min}n_R < 4$  et pour un canal à évanouissements lents de Rayleigh ;
- le critère de la trace (aussi appelé critère de la distance euclidienne), pour  $r_{min}n_R \geq 4$  et pour un canal à évanouissements lents de Rayleigh ;
- le critère de la distance de Hamming et de la distance produit, pour  $d_{H_{min}}n_R < 4$  et pour un canal à évanouissements rapides de Rayleigh ;
- le critère de la trace, pour  $d_{H_{min}}n_R \geq 4$  et pour un canal à évanouissements rapides de Rayleigh.

Dans [53], Liao *et al.* fournissent des nouveaux critères de performance des STTCs dans le but d'augmenter le gain de codage. Ces critères sont basés sur le calcul de la borne de l'union liée au taux d'erreurs trames 'Frame Error Rate' (FER) qui est une fonction de la PEP et du spectre des distances [54, 55]. Le principe est de considérer l'ensemble des valeurs, soit des déterminants soit des distances euclidiennes au carré prises pour toutes les paires  $(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  avec  $\mathbf{S} \neq \hat{\mathbf{S}}$  et non pas seulement la valeur minimale du déterminant ou de la distance euclidienne au carré.

En résumé, dans le cas où le gain de diversité spatiale ( $r_{min}n_R$ ) est faible, les critères de construction peuvent être énoncés de la manière suivante :

- les codes les plus performants ont un gain de diversité maximal  $n_T n_R$ , les matrices des distances  $\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  doivent être de rang plein pour toutes les paires  $(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  ;
- les codes les plus performants ont un gain de codage maximal. Ainsi, si  $N(d)$  est le nombre de paires  $(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  donnant une matrice  $\mathbf{A}$  avec un déterminant  $d$ , la valeur

$$\eta = \sum_d N(d) d^{-n_R} \quad (3.5)$$

doit être maximale.

De la même manière, dans le cas où le gain de diversité spatiale est élevé ( $r_{min}n_R \geq 4$ ), les critères de construction peuvent être énoncés de la manière suivante :

- la trace des matrices  $\mathbf{A}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  est calculée pour toutes les paires  $(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}})$  avec  $\mathbf{S} \neq \hat{\mathbf{S}}$ . Pour chaque code on obtient alors la valeur  $\min(\text{tr}(\mathbf{A}))$ . Les codes les plus performants ont la valeur  $\min(\text{tr}(\mathbf{A}))$  qui est maximale.

- de plus, il faut choisir les codes ayant un nombre minimal de paires de mots de code séparées par  $\min(\text{tr}(\mathbf{A}))$ .

En effet, dans ce cas, (lorsque le produit entre le nombre d’antennes d’émission et de réception est important), c’est à dire dans le cas d’un grand nombre de canaux SISO indépendants, le canal MIMO peut être vu comme un canal gaussien. Dans ce cas, le critère de la trace peut être appliqué pour obtenir les STTCs ayant les meilleures performances.

### 3.1.2 Exemples de codes existants

Le temps nécessaire pour une recherche exhaustive ou même systématique des meilleurs codes augmente de manière exponentielle en fonction du nombre d’antennes d’émission, du nombre d’états et de la complexité de la modulation. Par conséquent, les codes précédemment publiés ont souvent un nombre d’antennes d’émission relativement faible, typiquement 2 ou 3 antennes d’émission.

Les premiers STTCs ont été publiés par Tarokh *et al.* et sont construits à partir des critères du rang et du déterminant [8]. Ensuite, dans [56] et [9], des codes utilisant le critère de la trace ont été obtenus. L’avantage de ce critère est d’être efficace aussi bien pour des canaux de Rayleigh à évanouissements lents que pour des canaux de Rayleigh à évanouissements rapides. Le tableau 3.1 présente les matrices génératrices des principaux STTCs 4 états 4-PSK avec deux antennes d’émission accompagnées des caractéristiques suivantes :

- la valeur minimale du déterminant des matrices  $\mathbf{A}$  notée ‘Det min’ calculée pour toutes les paires de mots de code différents ;
- le nombre de paires de mots de code pour lesquels on obtient ‘Det min’ noté ‘Nb det min’ ;
- la distance euclidienne minimale au carré entre deux mots de code différents notée ‘ $d_{E,\min}^2$ ’ ;
- le nombre de paires de mots de code ayant cette distance euclidienne noté ‘Nb  $d_{E,\min}^2$ ’ ;
- la distance de Hamming minimale entre deux mots de code différents notée ‘ $d_{H,\min}$ ’ ;
- la distance produit minimale entre deux mots de code différents notée ‘ $d_{P,\min}^2$ ’.

Les performances en terme de FER des codes notés Chen 2 et Hong représentées à la figure 3.2 ont été évaluées à l’aide de simulations dans le cas d’un canal à évanouissements lents de Rayleigh pour 1, 2 et 4 antennes de réception. Les coefficients du canal sont indépendants entre eux et sont des variables aléatoires complexes dont les parties réelles et imaginaires suivent une loi gaussienne  $\mathcal{N}(0; 0,5)$ . On considère ces coefficients parfaitement connus en réception. Chaque mot de code est constitué de 130 symboles MIMO. Cette longueur se retrouve couramment dans la littérature. Ainsi, il est possible de comparer rapidement les courbes de performance des nouveaux codes avec celles des codes précédemment publiés. L’influence de la taille des mots de code sur le FER et le BER est présentée dans l’annexe B. Le décodage est réalisé par l’algorithme de Viterbi. Ce type de simulation va être utilisé dans le reste du document pour tester les performances des codes étudiés.

Tous les codes du tableau 3.1 dont les performances ont été évaluées dans la figure 3.2, ont un gain de diversité spatiale maximal égal à  $n_T$ . Ainsi, d’après les critères de construction énoncés précédemment, si le nombre d’antennes de réception est égal à 1, le critère du rang et du déterminant régissent les performances. Si le nombre d’antennes de réception est supérieur ou égal à 2, les performances sont gouvernées par le critère de la trace. Il est donc normal de constater que le code de Hong proposé dans [61] est le plus performant lorsqu’une seule

Code	<b>G</b>	Rang	Det min	Nb det min	$d_{\min}^2$	Nb $d_{\min}^2$	$d_H$	$d_P^2$
Tarokh [14]	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	2	4	1024	4	1024	2	4
Baro [28]	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	2	8	256	6	256	2	8
Blum [57]	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	2	8	512	8	512	2	16
Firmanto [58]	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	2	4	512	10	1792	2	24
Chen 1 [59]	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	2	8	1536	6	512	2	8
Chen 2 [59]	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	2	4	110	10	1024	2	24
Jung [60]	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	2	8	769	8	512	2	16
Hong [61]	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	2	8	768	8	512	2	16

TABLE 3.1 – STTCs 4 états 4-PSK avec 2 antennes d'émission

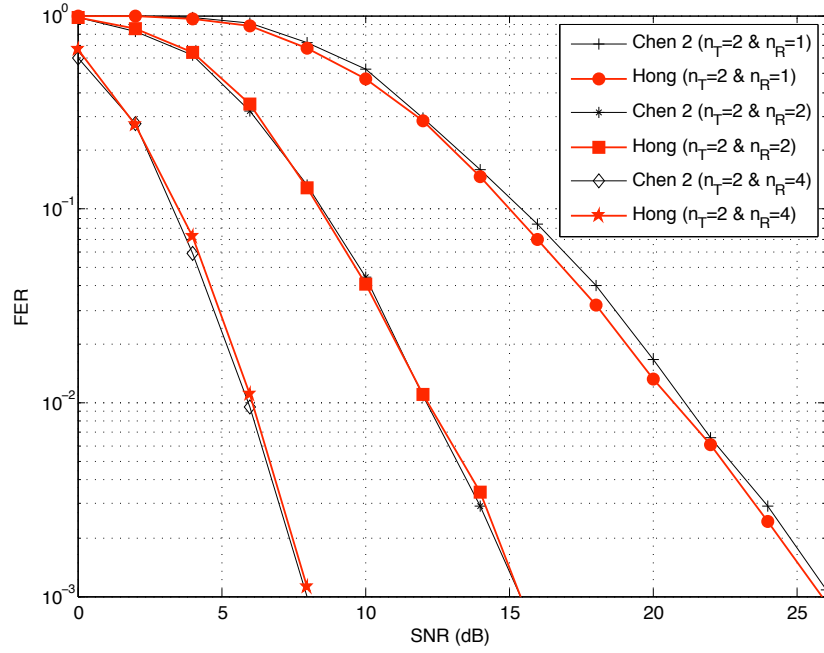


FIGURE 3.2 – Performances des codes 4 états 4-PSK avec 2 antennes d'émission pour 1, 2 et 4 antennes de réception

antenne de réception est utilisée. En effet, il a été construit dans le but de satisfaire pleinement les critères du rang et du déterminant. Par contre, pour un nombre d'antennes de réception plus important, le code noté Chen 2 dans le tableau 3.1, construit à partir du critère de la trace, tend à avoir de meilleures performances que le code de Hong.

Dans [62], Chen *et al.* donnent des codes construits à l'aide du critère du rang et du

déterminant et des codes construits à l'aide du critère de la trace. Les codes 16 états 4-PSK avec 3 antennes d'émission basés respectivement sur le critère du rang et du déterminant et sur le critère de la trace sont donnés dans le tableau 3.2. Les performances en terme de FER de ces deux codes sont évaluées par simulations et données à la figure 3.3.

Nom	$\mathbf{G}$	Rang	det min	$d_{\min}^2$
Chen det.	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	3	32	16
Chen trace	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	2	0	24

TABLE 3.2 – Codes de Chen 16 états 4-PSK 3 antennes d'émission construits à partir des critères du rang et du déterminant et du critère de la trace

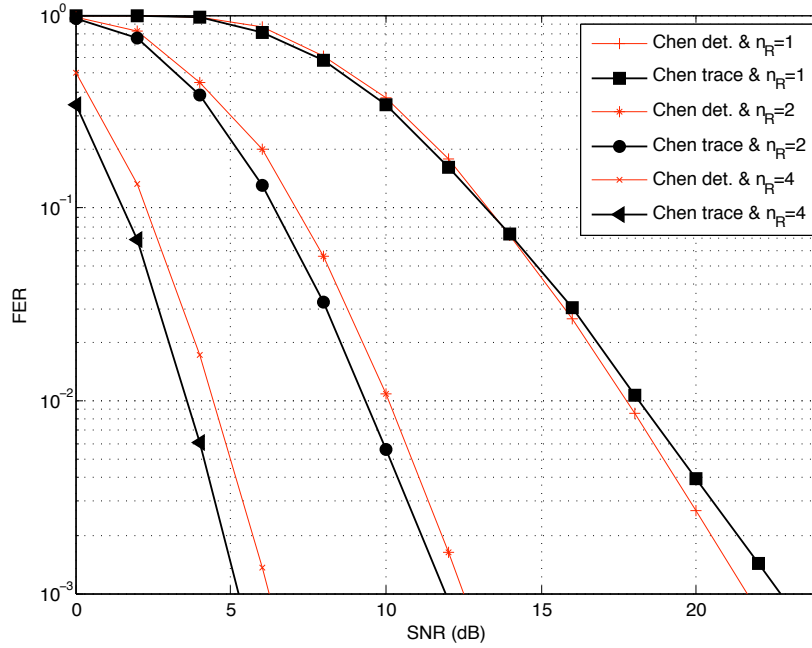


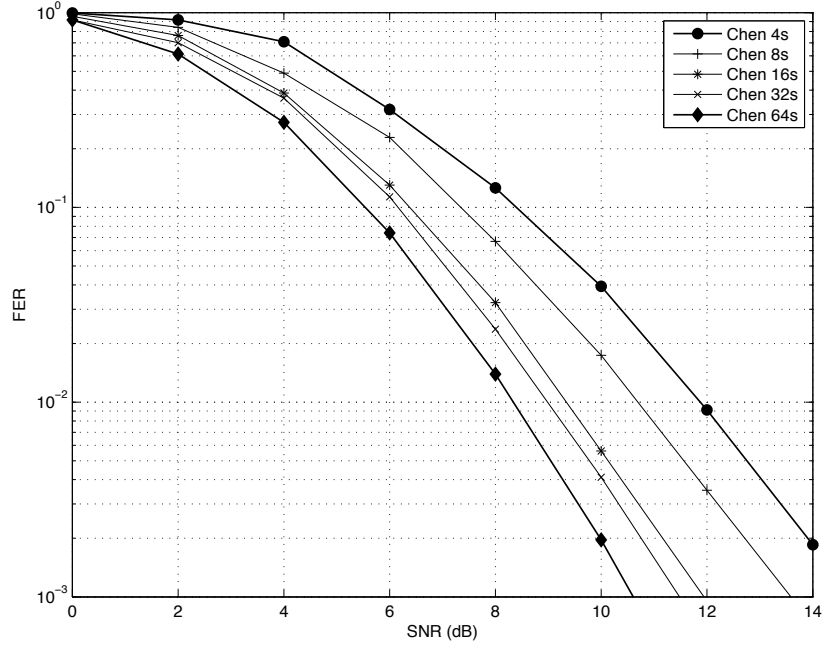
FIGURE 3.3 – Performances des codes 16 états 4-PSK 3 antennes d'émission construits à partir du critère du déterminant et de la trace et 1, 2 et 4 antennes de réception

A l'aide des figures 3.2 et 3.3, il apparaît clairement que lorsque le nombre de canaux SISO indépendants augmente, le critère de la trace régit les performances des codes et non les critères du rang et du déterminant.

Le tableau 3.3 contient l'ensemble des codes de Chen *et al.* construits dans [59] à partir du critère de la trace pour 3 antennes d'émission. Seul le nombre d'états varie entre les codes de ce tableau. L'influence de l'augmentation des états sur les performances peut alors être observée à travers la figure 3.4. Dans la légende de la figure 3.4, le terme 's' signifie états (*states*). Cette figure montre que plus le nombre d'états augmente, plus le code est performant. En contrepartie, le décodage demande plus de ressources.

nb etats	$\mathbf{G}$	Rang	$d_{\min}^2$
4	$\left[ \begin{array}{cc cc} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right]$	2	16
8	$\left[ \begin{array}{cc cc cc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$	2	20
8	$\left[ \begin{array}{cc cc cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$	2	24
32	$\left[ \begin{array}{cc cc cc cc} 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$	2	24
64	$\left[ \begin{array}{cc cc cc cc} 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right]$	2	28

TABLE 3.3 – Codes de Chen 4-PSK avec 3 antennes d'émission


 FIGURE 3.4 – Performances des codes 4-PSK  $n_T = 3$  et  $n_R = 2$  proposés par Chen

Certains codes sont spécialement construits à l'aide des critères de la distance de Hamming et de la distance produit pour être performants dans un canal à évanouissements rapides de Rayleigh. Le code de Firmanto donné dans le tableau 3.1, ayant pour matrice génératrice

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

a été généré suivant ces critères.

Dans [7], des codes avec 3 antennes d'émission ont été trouvés via les critères de la distance de Hamming et de la distance produit comme le STTC 4 états 4-PSK représenté par la matrice

génératrice

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

L'influence des critères de performance dans un canal à évanouissements rapides de Rayleigh va être analysée par simulations. Pour cela, les performances des codes donnés dans les relations (3.6) et (3.7) vont être comparées aux performances des codes correspondant de Chen construits via le critère de la trace. Ces codes de Chen sont donnés dans le tableau 3.1 sous le nom 'Chen 2' pour 2 antennes d'émission et dans le tableau 3.3 pour 3 antennes d'émission. Les figures 3.5 et 3.6 montrent le FER respectivement des codes à 2 et à 3 antennes d'émission dans un canal à évanouissements rapides de Rayleigh. Les codes basés sur la distance produit sont annotés  $d_P^2$ , ceux basés sur la distance euclidienne annotés par  $d_E^2$ .

Les codes basés sur la distance euclidienne entre les mots de code sont plus performants que ceux basés sur la distance produit spécialement dans le cas d'un produit entre le nombre d'antennes d'émission et le nombre d'antennes de réception important. C'est pour cette raison que nos travaux se sont principalement portés sur la génération de STTCs basés sur le critère de la trace.

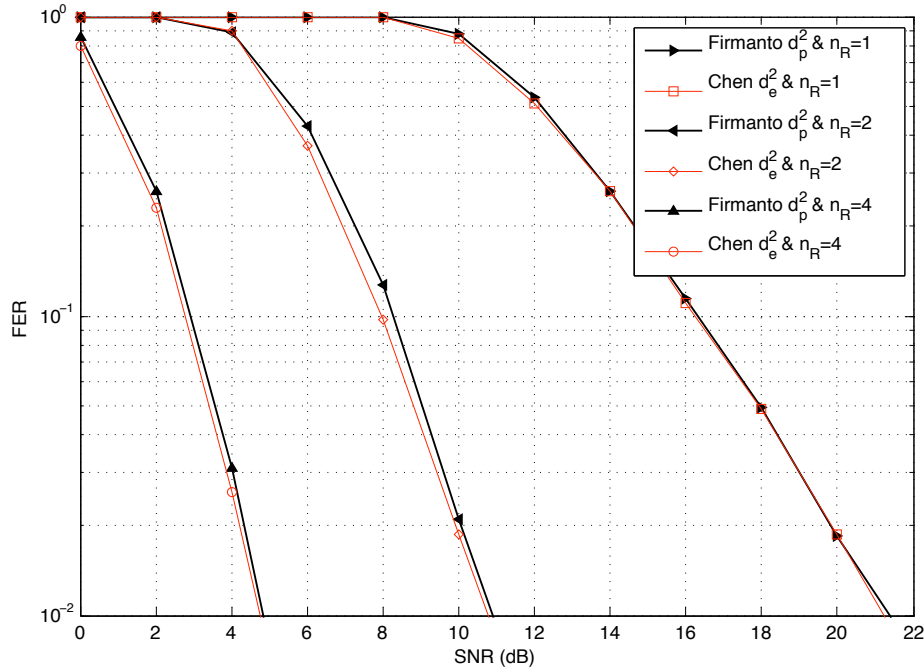


FIGURE 3.5 – Performances des STTCs 4 états 4-PSK 2 antennes d'émission dans un canal à évanouissements rapides de Rayleigh

Cette partie ne présente qu'un nombre réduit de codes que l'on trouve dans la littérature. Comme nous le verrons, il est possible, en utilisant nos nouvelles méthodes de construction, de trouver pour certaines configurations des codes ayant des performances identiques. De plus, dans les prochains chapitres, d'autres codes publiés seront aussi présentés. Leurs performances seront comparées aux nouveaux codes construits.

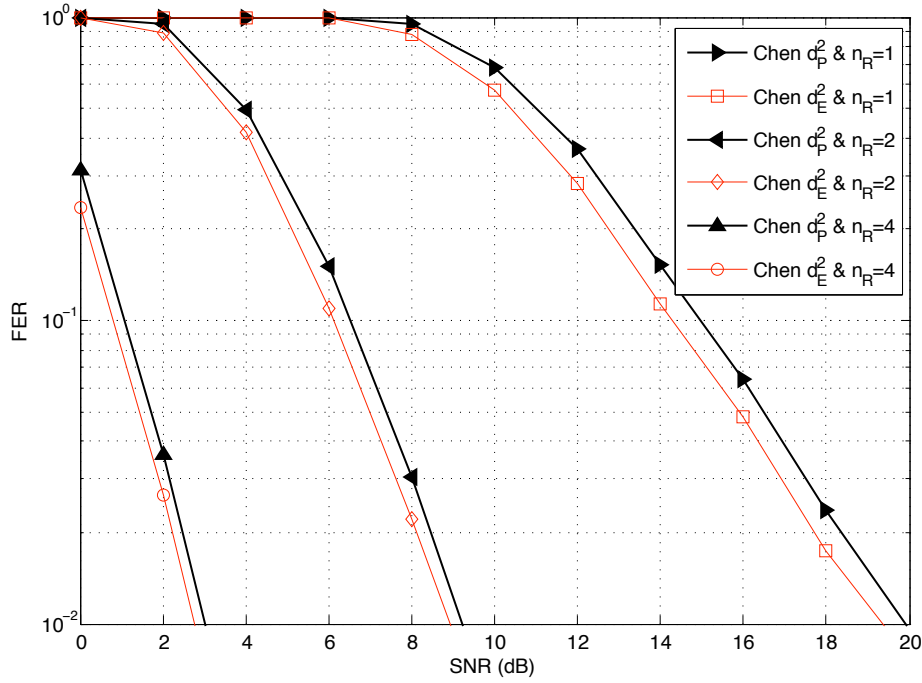


FIGURE 3.6 – Performances des STTCs 4 états 4-PSK 3 antennes d'émission dans un canal à évanouissements rapides de Rayleigh

### 3.1.3 Exemples de méthodes de construction des STTCs

Le nombre de codes devient rapidement important quand le nombre d'états, le nombre de points de la constellation et/ou d'antennes d'émission augmente. En effet, dans le cas de STTCs  $2^{n\nu}$  états  $2^n$ -PSK avec  $n_T$  antennes d'émission, le nombre des codes est

$$2^{n^2 n_T (\nu+1)}. \quad (3.8)$$

Cette constatation a une très grande influence sur le temps de recherche des codes ayant les meilleures performances, d'où la nécessité d'avoir des méthodes rapides et efficaces de recherche ou de génération des meilleurs codes. Plusieurs approches sont possibles pour réduire ce temps de recherche. Dans [63], Bernier *et al.* emploient une recherche aléatoire pour trouver les meilleurs codes. Le principe est de générer aléatoirement des STTCs. Ceux respectant au mieux les critères de performance sont alors sélectionnés.

Deux méthodes précédemment publiées ayant pour but de réduire les temps de recherche des STTCs les plus performants vont maintenant être exposées. Nous verrons par la suite que ces méthodes ne sont pas les seules existantes. En effet, une prochaine partie détaillera une méthode de recherche très efficace, basée sur la génération d'une classe particulière de codes : la classe des codes équilibrés.

#### 3.1.3.1 La méthode de Chen *et al.*

Chen *et al.* élaborent dans [59] une méthode qui réduit de manière significative le nombre de STTCs à analyser, spécialement quand le nombre d'antennes d'émission augmente. Cette méthode commence par une recherche exhaustive des meilleurs codes ayant 2 antennes d'émission

suivant le critère de la trace. Les tableaux 3.4 et 3.5 donnent ces STTCs pour respectivement les modulations 4-PSK et 8-PSK.

nb états	<b>G</b>	det min	$d_{\min}^2$
4	$\left[ \begin{array}{cc cc} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right]$	2	10
8	$\left[ \begin{array}{cc cc cc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right]$	2	12
16	$\left[ \begin{array}{cc cc cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right]$	2	16
32	$\left[ \begin{array}{cc cc cc cc} 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right]$	2	16
64	$\left[ \begin{array}{cc cc cc cc} 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right]$	2	64

TABLE 3.4 – Codes de Chen 4-PSK avec 2 antennes d’émission construits à partir du critère de la trace

nb états	<b>G</b>	det min	$d_{\min}^2$
8	$\left[ \begin{array}{ccc ccc} 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right]$	2	7.172
16	$\left[ \begin{array}{ccc ccc ccc} 2 & 4 & 7 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 7 & 6 & 7 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$	2	8.0
32	$\left[ \begin{array}{ccc ccc ccc} 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 3 & 2 & 0 & 2 & 7 \end{array} \right]$	2	8.586

TABLE 3.5 – Codes de Chen 8-PSK avec 2 antennes d’émission construits à partir du critère de la trace

Pour générer un STTC  $2^{n\nu}$  états  $2^n$ -PSK avec  $n_T \geq 3$  antennes d’émission, il faut au préalable avoir construit un code avec  $n_T - 1$  antennes d’émission. Les codes présentés dans les tableaux 3.4 et 3.5 permettent de commencer cet algorithme de recherche (pour 3 antennes d’émission). Les  $n_T - 1$  lignes de coefficients de la matrice génératrice du code à  $n_T - 1$  antennes d’émission forment les  $n_T - 1$  premières lignes du code à  $n_T$  antennes d’émission. Une recherche exhaustive est alors effectuée seulement pour les coefficients la dernière ligne de la matrice génératrice.

Sachant que les meilleurs codes avec  $n_T = 2$  trouvés à l’aide d’une recherche exhaustive ont un rang minimal égal à 2, le rang minimal de tous les codes générés avec  $n_T \geq 3$  antennes d’émission est supérieur ou égal à 2. Ainsi, il suffit d’utiliser seulement deux antennes de réception pour satisfaire les conditions d’utilisation du critère de la trace. L’avantage de cette méthode est de réduire significativement le nombre de codes à analyser.

Cependant, le principal inconvénient de cette méthode est la création de codes sous-optimaux. En effet, il sera montré dans le prochain chapitre qu’il est possible de trouver des codes ayant une trace minimale supérieure à celles des codes correspondants de Chen.



### 3.1.3.2 La méthode d'Abdool-Rasool *et al.*

Abdool-Rasool *et al* fournissent dans [64,65] des codes à grand nombre d'antennes d'émission. Dans ce cas, une recherche exhaustive ne peut pas être envisagée car le nombre de STTCs à analyser est trop important. Par exemple, le nombre de codes 4 états 4-PSK 5 antennes est égal à  $4^{4 \times 5} = 1,099\,5 \times 10^{12}$ . Pour cela, deux stratégies sont mises en place.

La première méthode pour réduire le temps de recherche des meilleurs codes est basée sur le fait que lorsque l'on calcule la trace minimale d'un code, la matrice des différences de mots de code  $\mathbf{B}$  est utilisée. Le résultat serait identique si l'on avait utilisé  $\mathbf{B}^*$ . Ainsi, si  $\mathbf{G}$  donne  $\mathbf{B}$ , l'objectif est de trouver les coefficients de la matrice génératrice  $\mathbf{G}'$  qui donne  $\mathbf{B}^*$ . Il ne sera alors pas utile d'analyser ce nouveau code.

La réalisation de la matrice génératrice donnant  $\mathbf{B}^*$  se fait en prenant les opposés des coefficients de la matrice d'origine car  $\Phi(-g) = \Phi(g)^*$ . Ainsi, le nombre de codes à analyser est divisé par deux.

La deuxième solution proposée par Abdool-Rasool dans [64, 65], pour réduire le temps de recherche, repose sur la permutation des lignes de la matrice génératrice. Pour un code à  $n_T$  antennes d'émission, les  $n_T!$  permutations possibles des lignes de la matrice génératrice donnent des codes ayant exactement les mêmes performances où  $k!$  est le factoriel de  $k$ . Intuitivement, cela revient à échanger l'ordre des antennes d'émission.

Grâce à ces deux méthodes, le nombre de codes à analyser est divisé par  $2(n_T!)$ . Par exemple, pour les codes 4 états 4-PSK 5 antennes d'émission, il ne reste que  $\frac{4^{4 \times 5}}{2(5!)} = 4,581\,3 \times 10^9$  codes à considérer, soit 0,41 % de la totalité des codes.

### 3.1.3.3 Conclusion

Dans le cas des matrices génératrices ayant un faible nombre de coefficients, typiquement pour un code avec deux antennes d'émission, une recherche exhaustive reste encore possible. Par exemple, Hong *et al.* dans [61] analysent la totalité des STTCs 4-PSK, 8-PSK et 16-QAM à deux antennes d'émission. Par contre, au vu du nombre important de STTCs lorsque les nombres d'états, le nombre d'antennes d'émission ou encore la taille de la constellation augmentent, une méthode de recherche efficace devient nécessaire. Nous verrons par la suite que pour réduire le temps de recherche des meilleurs codes, des approches beaucoup plus efficaces existent, par exemple en analysant uniquement les performances des codes équilibrés.

### 3.1.4 Codes équilibrés

La classe des codes équilibrés a été présentée historiquement dans [66,67]. Son intérêt est de contenir l'ensemble des meilleurs codes. Ainsi, la recherche des codes optimaux peut se restreindre aux codes équilibrés.

**Définition 3.1** (Code équilibré). *Un code est équilibré si et seulement si les symboles MIMO générés sont équiprobables si les données d'entrée sont fournies d'une façon équiprobable par une source binaire sans mémoire.*

*Remarque :* La définition des codes équilibrés reprend le concept donné dans la définition 2.1 du *set partitioning* proposé par Ungerboeck pour des systèmes SISO.

**Définition 3.2** (Nombre d'occurrences). *Le nombre d'occurrences d'un symbole MIMO est le nombre de fois que ce symbole MIMO est généré par l'ensemble des états étendus.*

Pour un code équilibré, le nombre d'occurrences des symboles MIMO  $n(Y) = n_0 \geq 1$  est identique, quel que soit le symbole  $Y$ .

**Définition 3.3** (Code totalement équilibré). *Un code est totalement équilibré si et seulement si il est équilibré et que tous les éléments de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  sont générés, c'est à dire  $\Psi(\mathbb{Z}_2^{L_r}) = \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . La fonction  $\Psi$  est définie par l'expression (3.4) et  $L_r$  est le nombre de colonnes de la matrice génératrice du code considéré.*

**Définition 3.4** (Code à longueur minimale). *Un code est dit à longueur minimale si et seulement si il est totalement équilibré et si le nombre d'occurrences de chaque symbole MIMO est  $n_0 = 1$ .*

**Exemple :** Concrètement, pour savoir si un code est équilibré, il faut obtenir pour chaque état étendu le symbole MIMO généré. De là, il faut calculer le nombre d'apparitions des différents symboles MIMO générés. Prenons deux matrices génératrices

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

et

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

correspondant à des STTCs 4 états 4-PSK à 2 antennes d'émission.

*Remarque :*  $\mathbf{G}_1$  est la matrice génératrice du code de Tarokh.

La répartition des symboles MIMO en fonction des état étendus est donnée dans les tableaux 3.6 et 3.7 pour respectivement  $\mathbf{G}_1$  et  $\mathbf{G}_2$ . Dans ces tableaux, les états étendus  $X^t = [x_1^t \ x_2^t \ x_1^{t-1} \ x_2^{t-1}]^T \in \mathbb{Z}_2^4$  sont notés sous forme décimale où  $x_2^{t-1}$  correspond au bit de poids faible. Le nombre d'occurrences de chaque symbole MIMO est aussi indiqué dans ces tableaux. La matrice génératrice  $\mathbf{G}_1$  génère la totalité des symboles MIMO possibles avec un nombre d'occurrences égal à 1. Ainsi, ce code est entièrement équilibré et à longueur minimale.

$\mathbf{G}_2$  génère des symboles MIMO qui n'ont pas le même nombre d'occurrences. Dans ce cas, le code ayant  $\mathbf{G}_2$  comme matrice génératrice n'est pas équilibré.

$X^t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Y$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
Nb occurrences	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

TABLE 3.6 – Apparition des symboles MIMO générés par  $\mathbf{G}_1$

$X^t$	0 12	1 13	2 14	3 15	4	5	6	7	8	9	10	11
$Y$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
Nb occurrences	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1

TABLE 3.7 – Apparition des symboles MIMO générés par  $\mathbf{G}_2$

Une première méthode permettant de construire des STTCs équilibrés a été présentée dans [66, 67]. Durant le début de nos travaux, nous avons établi un procédé plus efficace pour

créer ce type de codes. Par la suite, nous avons élaboré une nouvelle technique pour réduire de manière drastique le nombre de codes équilibrés à analyser. Avant d'exposer ces solutions de construction des meilleurs STTCs, différentes propriétés concernant le groupe additif  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  et les STTCs  $2^n$ -PSK vont être développées.

## 3.2 Outils et propriétés des STTCs $2^n$ -PSK

Il a été établi que chaque symbole MIMO appartient au groupe abélien additif  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Chaque colonne de la matrice  $\mathbf{G}$  appartient de ce fait à ce groupe. Nous allons donc exposer les différentes représentations et propriétés du groupe  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ .

### 3.2.1 Propriétés générales de $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$

Soit le sous-groupe normal  $\mathcal{C}_0$  de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  défini par

$$\mathcal{C}_0 = 2^{n-1}\mathbb{Z}_2^{n_T}. \quad (3.11)$$

**Propriété 1.**  $\forall V \in \mathcal{C}_0, -V = V$  avec  $V + (-V) = [0 \dots 0]^T$ .

*Preuve.* Soit un élément  $V \in \mathcal{C}_0$ .

$$V = 2^{n-1}q \text{ avec } q \in \mathbb{Z}_2^{n_T} \quad (3.12)$$

$$V + V = 2^n q = 0 \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T} \pmod{2^n} \quad (3.13)$$

Donc, il existe  $V' = V$  tel que  $V + V' = 0 \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Donc  $-V = V, \forall V \in \mathcal{C}_0$ .  $\square$

Grâce au sous-groupe  $\mathcal{C}_0$ , il est possible de partitionner le groupe  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  en  $2^{n_T(n-1)}$  cosets [50] tel que

$$\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}_{2^{n-1}}^{n_T}} \mathcal{C}_P, \quad (3.14)$$

où  $P$  est un représentant du coset  $\mathcal{C}_P = P + \mathcal{C}_0$ . A partir de ces cosets, une autre partition de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  peut être obtenue, donnée par

$$\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T} = \bigcup_{q=0}^{n-1} \mathcal{E}_q, \quad (3.15)$$

où  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{C}_0$ . Pour  $q = \overline{1, n-1}$ , les autres sous-ensembles  $\mathcal{E}_q$  sont définis par

$$\mathcal{E}_q = \bigcup_{P_q} (P_q + \mathcal{C}_0) = \bigcup_{P_q} \mathcal{C}_{P_q}, \quad (3.16)$$

où  $P_q \in 2^{n-q-1}\mathbb{Z}_{2^q}^{n_T} \setminus 2^{n-q}\mathbb{Z}_{2^{q-1}}^{n_T}$ . L'ensemble  $\mathbb{Z}_1^{n_T}$  contient seulement l'élément nul de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ .

**Définition 3.5.** Soit un sous-groupe de  $\Lambda_s$  de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Le coset  $C_p = P + \Lambda_s$  est dit relatif à  $Q = 2P \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Remarque : Tout élément  $P' \in C_P$  vérifie  $Q = 2P'$ .

$\mathcal{E}_0 :$	$\mathcal{C}_0$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\mathcal{E}_1 :$	$\mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
	$\mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
	$\mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

 TABLE 3.8 – Partition du groupe  $\mathbb{Z}_4^2$ 

Ainsi, pour  $q = \overline{2, n-1}$ , chaque coset  $\mathcal{C}_{P_q} = P_q + \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{E}_q$  est relatif à  $R = 2P_q \in \mathcal{E}_{q-1}$ .

Pour souligner cette technique de partitionnement, l'ensemble  $\mathbb{Z}_4^2$  des symboles MIMO d'un code 4-PSK à 2 antennes d'émission est représenté dans le tableau 3.8.

D'après ce tableau, le coset représenté en rouge  $\mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathcal{C}_0$  est relatif à l'élément rouge  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_0$ . Le coset représenté en vert  $\mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{C}_0$  est relatif à l'élément vert  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_0$ . Le coset représenté en jaune  $\mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathcal{C}_0$  est relatif à l'élément jaune  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_0$ .

Un autre exemple de partition est donné avec les symboles MIMO d'un code 8-PSK à 2 antennes d'émission. Chaque symbole MIMO appartient à  $\mathbb{Z}_8^2$ . Le nombre d'éléments étant égal à  $\text{card}(\mathbb{Z}_8^2) = 64$ , la partition utilisée dans le tableau 3.8 devient trop imposante. Le groupe est divisé en 3 sous-ensembles. Le premier sous-ensemble est

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{C}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.17)$$

Le second sous-ensemble est

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}} \cup \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}} \cup \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}, \quad (3.18)$$

où :

$$\begin{aligned} - \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} \text{ est relatif à } \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_0; \\ - \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \text{ est relatif à } \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_0; \\ - \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} \text{ est relatif à } \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_0. \end{aligned}$$

Le dernier sous-ensemble est

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \cup \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}} \cup \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \cup \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \\ &\quad \cup \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \cup \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \cup \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}} \cup \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}} \\ &\quad \cup \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \cup \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}} \cup \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}} \cup \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{[1]^{(0)}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{C}_{[3]^{(0)}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{C}_{[1]^{(2)}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{C}_{[3]^{(2)}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Ces cosets sont relatifs respectivement aux symboles MIMO  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$  qui forment le coset  $\mathcal{C}_{[2]^{(0)}}$ . De plus,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{[1]^{(1)}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{C}_{[2]^{(1)}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{C}_{[3]^{(1)}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{C}_{[3]^{(2)}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Ces cosets sont relatifs respectivement aux symboles MIMO  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$  qui forment le coset  $\mathcal{C}_{[2]^{(1)}}$ . Enfin, les cosets

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{[1]^{(1)}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{C}_{[3]^{(1)}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{C}_{[3]^{(1)}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{C}_{[3]^{(3)}} &= \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

sont relatifs respectivement aux symboles MIMO  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$  qui forment le coset  $\mathcal{C}_{[2]^{(2)}}$ .

Nous avons vu comment représenter l'ensemble de symboles MIMO. La définition et les propriétés qui suivent sont utilisées dans le but de créer des sous-groupes de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{nT}$ .

**Définition 3.6** (Vecteurs linéairement indépendants). *Les vecteurs  $V_1, V_2, \dots, V_l \in \mathbb{Z}_{2^n}^{nT}$  sont linéairement indépendants si et seulement si*

$$\Lambda_l = \left\{ \sum_{i=1}^l x_i V_i / \forall x_i \in \{0, 1\} \right\} \quad (3.20)$$

est un ensemble de  $2^l$  vecteurs de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ .

**Théorème 3.1.** Les vecteurs  $V_1, V_2, \dots, V_l \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  sont linéairement indépendants si et seulement si

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^l \lambda_i V_i = 0 \\ \lambda_i \in \{-1, 0, 1\}, \forall i = \overline{1, l} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i = \overline{1, l}. \quad (3.21)$$

*Preuve :* Supposons qu'il existe un ensemble de valeurs  $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$  pas toutes nulles tel que

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i V_i = 0. \quad (3.22)$$

On identifie 3 cas pour l'ensemble  $\mathcal{E} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\}$ .

1. Parmi les  $l$  valeurs  $\lambda_i$ , il existe des valeurs égales à 1 et des valeurs égales à -1. Soit  $\mathcal{E}^+ = \{\lambda_i \in \mathcal{E} / \lambda_i = 1\}$  et  $\mathcal{E}^- = \{\lambda_j \in \mathcal{E} / \lambda_j = -1\}$ . On note  $\mathcal{I}^+ = \{i / \lambda_i = 1\}$  et  $\mathcal{I}^- = \{j / \lambda_j = -1\}$ . La relation (3.22) devient

$$\sum_{i \in \mathcal{I}^+} V_i = \sum_{j \in \mathcal{I}^-} V_j = V_0 \in \Lambda_l. \quad (3.23)$$

Par conséquent, un vecteur de  $\Lambda_l$  s'obtient pour (au moins) deux ensembles de valeurs  $\{\lambda_i\}$  et  $\{\lambda_j\}$ . Ainsi,  $\Lambda_l$  a au plus  $2^l - 1$  éléments, donc  $V_1, V_2, \dots, V_l$  ne sont pas linéairement indépendants.

2. Si  $\mathcal{I}^- = \emptyset$ , alors

$$\sum_{i \in \mathcal{I}^+} V_i = 0 \in \Lambda_l. \quad (3.24)$$

Le vecteur nul  $0 \in \Lambda_l$  est généré pour (au moins) deux ensembles de valeurs  $\{\lambda_i\}$ .

3. Si  $\mathcal{I}^+ = \emptyset$ , alors

$$\sum_{j \in \mathcal{I}^-} V_j = V_0 \in \Lambda_l. \quad (3.25)$$

Par conséquent, un vecteur de  $\Lambda_l$  s'obtient pour (au moins) deux ensembles de valeurs  $\{\lambda_i\}$  avec  $i = \{1, 2, \dots, l\}$ . Ainsi,  $\Lambda_l$  a au plus  $2^l - 1$  éléments, donc  $V_1, V_2, \dots, V_l$  ne sont pas linéairement indépendants. □

**Théorème 3.2.** Soit  $V_1, V_2, \dots, V_m \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  avec  $m \leq nn_T$ ,  $m$  vecteurs linéairement indépendants. On définit l'ensemble

$$\mathcal{F}_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i V_i / \lambda_i \in \{-1, 0, 1\}, \forall i = \overline{1, m} \right\}, \quad (3.26)$$

où  $\mathcal{F}$  signifie 'fermé'. Si  $V_{m+1} \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T} \setminus \mathcal{F}_m$ , alors les vecteurs  $V_1, V_2, \dots, V_m, V_{m+1}$  sont linéairement indépendants.

*Preuve :* Soit l'ensemble

$$\Lambda_{m+1} = \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} x_i V_i / x_i \in \{0, 1\}, \forall i = \overline{1, m+1} \right\}. \quad (3.27)$$

Si  $x_{m+1} = 0$ , alors quand  $x_i \in \{0, 1\}$ ,  $\forall i = \overline{1, m}$ , on génère tous les éléments de  $\Lambda_m$ . Ces  $2^m$  éléments sont tous différents entre eux.

Si  $x_{m+1} = 1$ , on génère encore  $2^m$  éléments, car les  $m$  vecteurs sont linéairement indépendants, tous différents entre eux. Ces nouveaux  $2^m$  éléments n'appartiennent pas à  $\Lambda_m$ . En effet, supposons qu'il existe  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0 \in \{0, 1\}$  tel que

$$x_1^0 V_1 + x_2^0 V_2 \dots x_m^0 V_m + V_{m+1} \in \Lambda_m. \quad (3.28)$$

Dans ce cas, on peut trouver  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \{0, 1\}$  tel que

$$\sum_{i=1}^m x_i^0 V_i + V_{m+1} = \sum_{i=1}^m x_i V_i. \quad (3.29)$$

On en déduit

$$V_{m+1} = \sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0) V_i. \quad (3.30)$$

Si on note  $x_i - x_i^0 = \lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$ , on obtient

$$V_{m+1} = \sum_{i=1}^m \lambda_i V_i \in \mathcal{F}_m, \quad (3.31)$$

ce qui est faux car  $V_{m+1}$  est choisi en dehors de l'ensemble  $\mathcal{F}_m$ . Par conséquent, avec  $x_{m+1}$ , on génère  $2^m$  autres éléments, tous différents entre eux et différents des  $2^m$  éléments de  $\Lambda_m$ . Par conséquent,  $\Lambda_{m+1}$  a  $2^{m+1}$  éléments, donc  $V_1, V_2, \dots, V_m, V_{m+1}$  sont des vecteurs linéairement indépendants. □

**Propriété 2.** Si  $\Lambda_l$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  donné par

$$\Lambda_l = \left\{ \sum_{m=1}^l x_m V_m \bmod 2^n / x_m \in \{0, 1\} \right\}, \quad (3.32)$$

avec  $V_m \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ ,  $l \in \{1, \dots, nn_T\}$  et  $\text{card}(\Lambda_l) = 2^l$ , i.e. les vecteurs  $V_m$  sont linéairement indépendants, alors il y a au moins un vecteur  $V_m$  qui appartient à  $\mathcal{C}_0^* = \mathcal{C}_0 \setminus [0 \dots 0]^T$ . A noter que  $nn_T$  est le nombre maximal d'éléments de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  linéairement indépendants.

*Preuve.* On rappelle qu'un  $p$ -groupe  $\Lambda$  (où  $p$  est un nombre premier) est un groupe tel que  $\text{card}(\Lambda) = p^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ . Le premier théorème de Sylow peut s'énoncer de la manière suivante : soit  $p$  un entier premier et  $\Lambda$  un groupe fini. Si  $p^\beta$  avec  $\beta \leq \alpha$  divise  $\text{card}(\Lambda)$ , alors il existe un sous-groupe de  $\Lambda$  d'ordre  $p^\beta$ . Considérons le groupe

$$\Lambda_l = \left\{ \sum_{m=1}^l x_m V_m \bmod 2^n / x_m \in \{0, 1\} \right\}, \quad (3.33)$$

tel que  $\text{card}(\Lambda_l) = p^l = 2^l$ ,  $p = 2$  étant premier alors il existe des sous-groupes  $\Lambda_m$  de  $\Lambda_l$  avec  $m = \overline{1, l}$ . Il existe un sous-groupe  $\Lambda_{l-1}$  tel que

$$\text{card}(\Lambda_l) = p \text{card}(\Lambda_{l-1}) = 2 \text{card}(\Lambda_{l-1}) \quad (3.34)$$

Comme  $p = 2$ , il existe au moins un vecteur  $V_l \in \Lambda_l \setminus \Lambda_{l-1}$  tel que

$$\Lambda_l = \Lambda_{l-1} \cup (\Lambda_{l-1} + V_l). \quad (3.35)$$

De la même manière, il est possible de créer une partition

$$\Lambda_l / \Lambda_{l-1} / \cdots / \Lambda_m / \Lambda_{m-1} / \cdots / \Lambda_1 \quad (3.36)$$

avec  $\text{card}(\Lambda_m) = 2 \text{card}(\Lambda_{m-1})$  et  $\Lambda_m = \Lambda_{m-1} \cup (\Lambda_{m-1} + V_m)$  où  $V_m \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T} \setminus \Lambda_{m-1}$ . Ainsi  $\Lambda_1 = \{0, V_1\}$ . Pour que  $\Lambda_1$  soit un sous-groupe,  $-V_1 \in \Lambda_1$ . Comme  $V_1 \neq 0$ , on en déduit  $-V_1 = V_1$ , donc  $V_1 \in \mathcal{C}_0^*$ . Ainsi, parmi l'ensemble des vecteurs  $V_1, V_2, \dots, V_l$ , il y a au moins un vecteur appartenant à  $\mathcal{C}_0^*$ .  $\square$

**Propriété 3.** Pour générer un sous-groupe  $\Lambda_l = \left\{ \sum_{m=1}^l x_m V_m \text{ mod } 2^n / x_m \in \{0, 1\} \right\}$  avec  $V_m \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ ,  $l \in \{1, \dots, nn_T\}$  et  $\text{card}(\Lambda_l) = 2^l$ , i.e. les colonnes  $V_m$  sont linéairement indépendantes, les éléments  $V_m$  doivent être sélectionnés de la manière suivante :

- Le premier élément  $V_1$  doit appartenir à  $\mathcal{C}_0^*$ .
- Si  $m - 1$  colonnes ont déjà été choisies et génèrent un sous-groupe

$$\Lambda_{m-1} = \left\{ \sum_{m'=1}^{m-1} x_{m'} V_{m'} \text{ mod } 2^n / x_{m'} \in \{0, 1\} \right\}, \quad (3.37)$$

la  $m^e$  colonne  $V_m$  ne doit pas appartenir à  $\Lambda_{m-1}$  et doit appartenir soit à  $\mathcal{C}_0^*$ , soit à un coset relatif à un élément généré par les premières  $(m - 1)$  colonnes.

*Preuve.* Comme montré dans la propriété 2, il y a au moins un élément qui appartient à  $\mathcal{C}_0^*$ . Ainsi, si  $V_1 \in \mathcal{C}_0^*$ ,  $\Lambda_1 = \{0, V_1\}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ .

Nous considérons que  $m - 1$  éléments ont été sélectionnés pour générer un sous-groupe  $\Lambda_{m-1}$  avec  $m \in \{2, 3, \dots, nn_T\}$ .

Si nous prenons  $V_m \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T} \setminus \Lambda_{m-1}$  tel que  $2V_m = Q_m \in \Lambda_{m-1}$ , nous générons

$$\Lambda_m = \Lambda_{m-1} \cup \mathcal{C}_{V_m} \quad (3.38)$$

où  $\mathcal{C}_{V_m}$  est un coset défini par

$$\mathcal{C}_{V_m} = V_m + \Lambda_{m-1}. \quad (3.39)$$

Dans le but de montrer que  $\Lambda_m$  est un groupe, trois points sont à vérifier :

1.  $0 \in \Lambda_m$ .

*Preuve :* comme  $\Lambda_m = \Lambda_{m-1} \cup (\Lambda_{m-1} + V_m)$  et que  $0 \in \Lambda_{m-1}$ , nous avons  $0 \in \Lambda_m$ .

2.  $\forall V_1, V_2 \in \Lambda_m$ ,  $V_1 + V_2 \in \Lambda_m$ . Pour cela, trois situations doivent être vérifiées :

1<sup>e</sup> cas :  $V_1, V_2 \in \mathcal{C}_{V_m}$ .

Dans ce cas,  $V_1 = V_m + Q_1$  et  $V_2 = V_m + Q_2$  avec  $Q_1, Q_2 \in \Lambda_{m-1}$ . Ainsi,  $V_1 + V_2 = 2V_m + Q_1 + Q_2$ . Comme  $2V_m = Q_m \in \Lambda_{m-1}$  et  $\Lambda_{m-1}$  est un sous-groupe,  $V_1 + V_2 \in \Lambda_{m-1} \subset \Lambda_m$ .



2<sup>e</sup> cas :  $V_1 = V_m + Q_1 \in \mathcal{C}_{V_m}$  avec  $Q_1 \in \Lambda_{m-1}$  et  $V_2 \in \Lambda_{m-1}$ .

Dans ce cas  $V_1 + V_2 = V_m + Q_1 + V_2$ . Comme  $\Lambda_{m-1}$  est un sous-groupe,  $Q_1 + V_2 \in \Lambda_{m-1}$ . Alors,  $V_1 + V_2 \in \mathcal{C}_{V_m} \subset \Lambda_m$ .

3<sup>e</sup> cas :  $V_1, V_2 \in \Lambda_{m-1}$ .

Dans ce cas, comme  $\Lambda_{m-1}$  est un sous-groupe,  $V_1 + V_2 \in \Lambda_{m-1} \subset \Lambda_m$ .

Ainsi, l'addition des éléments de  $\Lambda_m$  est une loi de composition interne de  $\Lambda_m$ .

3.  $\forall V \in \Lambda_m, \exists -V \in \Lambda_m$  tel que  $V + (-V) = 0$ .

*Preuve* : Deux cas sont à considérer.

1<sup>e</sup> cas :  $V \in \Lambda_{m-1}$ .

Comme  $\Lambda_{m-1}$  est un sous-groupe, ainsi  $-V \in \Lambda_{m-1} \subset \Lambda_m$ .

2<sup>e</sup> cas :  $V \in \mathcal{C}_{m-1}$ .

Dans ce cas,  $V = V_m + Q$  avec  $Q \in \Lambda_{m-1}$ . Comme  $\Lambda_{m-1}$  est un sous-groupe,  $-Q = -V_m + (-V_m) = -2V_m \in \Lambda_{m-1}$  avec  $V_m + (-V_m) = 0$  et  $Q + (-Q) = 0$ . Ainsi, nous avons

$$-V_m = V_m + (-2V_m) = V_m + (-Q) \in \mathcal{C}_{V_m} \subset \Lambda_m. \quad (3.40)$$

Ainsi  $-V = -V_m + (-Q) = V_m + (-Q) + (-Q) \in \mathcal{C}_m \subset \Lambda_m$  parce que  $(-Q) + (-Q) \in \Lambda_{m-1}$ .

Ainsi, les opposés des éléments de  $\Lambda_m$  appartiennent à  $\Lambda_m$ .

Par conséquent, si chaque élément est sélectionné dans un coset relatif à un élément généré, l'ensemble créé  $\Lambda_m$  est aussi un sous-groupe. □

**Définition 3.7.** Une base  $V_1 \cdots V_l$  du groupe  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  est un ensemble de  $l = nn_T$  vecteurs linéairement indépendants respectant la relation

$$\left\{ \sum_{m=1}^l x_m V_m \bmod 2^n / x_m \in \{0, 1\} \right\} = \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}. \quad (3.41)$$

### 3.2.2 Propriétés des 2<sup>n</sup>-PSK STTCs

Tous les symboles MIMO appartiennent au groupe additif  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . A chaque instant, le calcul du symbole MIMO est régi par la matrice génératrice  $\mathbf{G}$  du code et par l'état étendu. Différentes propriétés de cette matrice et des codes 2<sup>n</sup>-PSK servant à optimiser leurs générations vont être énoncées.

**Propriété 4.** Le nombre de colonnes de la matrice génératrice des codes totalement équilibrés est  $L_r \geq L_{min} = nn_T$ . Ainsi,  $L_{min}$  est le nombre de colonnes de la matrice génératrice d'un code à longueur minimale.

*Preuve.* Soit la matrice génératrice  $\mathbf{G}$  d'un code 2<sup>n</sup>-PSK à  $n_T$  antennes d'émission. L'état étendu  $X^t$  peut prendre  $2^{L_r}$  valeurs binaires possibles. Le nombre total des symboles MIMO générés est alors

$$\sum_{Y \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}} n(Y) = 2^{L_r}. \quad (3.42)$$

Pour un code totalement équilibré,  $\forall Y \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ ,  $n(Y) = n_0$ ,  $\forall Y \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Le nombre des symboles MIMO existants est  $\text{card}(\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}) = 2^{nn_T}$ . Donc l'expression précédente devient

$$n_0 2^{nn_T} = 2^{L_r}. \quad (3.43)$$

Donc  $n_0 = 2^{L_r - nn_T}$ . Le nombre d'occurrences des symboles MIMO d'un code totalement équilibré est  $n_0 \geq 1$ , alors  $L_r \geq L_{\min} = nn_T$ .  $\square$

**Propriété 5.** *Pour un code à longueur minimale, toutes les colonnes de la matrice génératrice sont linéairement indépendantes.*

*Preuve.* Pour un code ayant une matrice génératrice de  $L_{\min}$  colonnes, l'ensemble des symboles MIMO générés est

$$\Lambda_{L_{\min}} = \left\{ \sum_{m=1}^{L_{\min}} x_m G_m \bmod 2^n / x_m \in \{0, 1\} \right\}. \quad (3.44)$$

Le nombre d'éléments de  $\Lambda_{L_{\min}}$  est maximal dans le cas où les colonnes  $G_m$  sont linéairement indépendantes. Dans ce cas, le nombre maximal d'éléments générés est  $\text{card}(\Lambda_{L_{\min}}) = 2^{L_{\min}} = 2^{nn_T}$ . Sachant que  $\text{card}(\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}) = 2^{nn_T}$ , les colonnes de la matrice génératrice doivent être linéairement indépendantes pour générer la totalité du groupe  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ .  $\square$

**Propriété 6.** *Considérons un code totalement équilibré avec une matrice génératrice  $\mathbf{G}$  de taille  $n_T \times L_r$ . Pour n'importe quelle colonne additionnelle  $G_{L_r+1} \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ , le code résultant est aussi un code totalement équilibré.*

*Preuve.* Pour un code totalement équilibré, l'ensemble des symboles MIMO générés est  $\Lambda_{L_r} = \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Si une  $(L_r + 1)^{\text{e}}$  colonne  $G_{L_r+1}$  est rajoutée à la matrice génératrice, alors le nouvel ensemble de symboles MIMO obtenu est  $\Lambda_{L_r+1} = \Lambda_{L_r} \cup (\Lambda_{L_r} + G_{L_r+1})$ . Comme  $G_{L_r+1} \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ , d'après la définition d'un groupe,  $\forall Y \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ , on a  $Y + G_{L_r+1} \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Donc  $\Lambda_{L_r+1} = \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ .

Le nombre d'occurrences des symboles appartenant à  $\Lambda_{L_r} = \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  est noté  $n_0$ . Il est évident que le nombre d'occurrences des éléments de l'ensemble  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T} + G_{L_r+1}$  est aussi  $n_0$ . Donc, si une colonne est ajoutée à la matrice génératrice  $\mathbf{G}$  d'un code totalement équilibré, le nombre d'occurrences de chaque symbole est  $2n_0$ .  $\square$

**Propriété 7.** *Si  $\mathbf{G}$  est la matrice génératrice d'un code équilibré, chaque permutation des lignes et/ou des colonnes fournit la matrice génératrice d'un nouveau code équilibré.*

*Preuve.* L'ensemble des symboles MIMO appartient au groupe  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Ainsi, une permutation des colonnes de  $\mathbf{G}$  va générer les mêmes symboles MIMO. Les symboles MIMO ne vont juste pas être obtenus pour les mêmes états étendus. Donc, le nouveau code ainsi créé sera aussi équilibré. Une permutation des lignes de la matrice génératrice, aura juste pour effet de permuer les symboles SISO  $s_k^t$  générés. Le code obtenu par la permutation des lignes de la matrices  $\mathbf{G}$  sera donc aussi équilibré.  $\square$

### 3.2.3 Propriétés de la distance euclidienne entre deux mots de code

Les propriétés suivantes concernent la fonction de modulation  $2^n$ -PSK utilisée par le code qui fait correspondre à chaque symbole MIMO  $Y^t \in \Psi(\mathbb{Z}_2^{L_r}) \subseteq \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  un signal MIMO  $S^t = \Phi_v(y_k^t) \in \mathcal{C}^{n_T}$  où  $\Phi(Y^t)$  est donnée par l'expression (1.6). L'ensemble  $\mathcal{C}$  représente la constellation  $2^n$ -PSK,  $\mathcal{C} = \Phi(\mathbb{Z}_{2^n})$ .

*Remarque* : pour simplifier la notation, lors d'opérations entre symboles MIMO appartenant à  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ , le terme mod  $2^n$  ne sera pas noté.

La distance euclidienne au carré entre deux signaux MIMO à l'instant  $t$ ,  $S_1^t = [s_{1,1}^t \cdots s_{1,n_T}^t]^T$  et  $S_2^t = [s_{2,1}^t \cdots s_{2,n_T}^t]^T$ , est donnée par

$$d_E^2(S_1^t, S_2^t) = \sum_{k=1}^{n_T} |s_{1,k}^t - s_{2,k}^t|^2. \quad (3.45)$$

Par abus de langage, on note la distance euclidienne au carré entre deux symboles MIMO  $Y_1^t$  et  $Y_2^t$  comme

$$d_E^2(Y_1^t, Y_2^t) \quad (3.46)$$

au lieu de  $d_E^2(S_1^t, S_2^t) = \sum_{k=1}^{n_T} d_E^2(\Phi(y_{k,1}^t), \Phi(y_{k,2}^t))$ . De plus, d'après les expressions (1.5) et (1.6), nous rappelons que

$$d_E^2(\Phi_v(Y_1^t), \Phi_v(Y_2^t)) = \sum_{k=1}^{n_T} d_E^2(\Phi(y_{k,1}^t), \Phi(y_{k,2}^t)). \quad (3.47)$$

**Propriété 8.** Soient 3 symboles MIMO  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Y_3$  appartenant à  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Si ces symboles correspondent à des signaux 2<sup>n</sup>-PSK alors

$$d_E^2(Y_1 + Y_3, Y_2 + Y_3) = d_E^2(Y_1, Y_2). \quad (3.48)$$

*Preuve.* Il est possible de réécrire la distance euclidienne au carré entre ces deux symboles comme

$$d_E^2(Y_1 + Y_3, Y_2 + Y_3) = \sum_{k=1}^{n_T} d_E^2(\Phi(y_{1,k} + y_{3,k}), \Phi(y_{2,k} + y_{3,k})) \quad (3.49)$$

$$= \sum_{k=1}^{n_T} \left| e^{j \frac{\pi}{2^{n-1}} (y_{1,k} - y_{3,k})} - e^{j \frac{\pi}{2^{n-1}} (y_{2,k} - y_{3,k})} \right|^2 \quad (3.50)$$

$$= \sum_{k=1}^{n_T} \left| e^{j \frac{\pi}{2^{n-1}} - y_{3,k}} \left( e^{j \frac{\pi}{2^{n-1}} y_{1,k}} - e^{j \frac{\pi}{2^{n-1}} y_{2,k}} \right) \right|^2 \quad (3.51)$$

$$= \sum_{k=1}^{n_T} \left| e^{j \frac{\pi}{2^{n-1}} y_{1,k}} - e^{j \frac{\pi}{2^{n-1}} y_{2,k}} \right|^2 \quad (3.52)$$

$$= d_E^2(S_1, S_2) \quad (3.53)$$

Ainsi, avec l'abus de langage mentionné ci-dessus, on a bien  $d_E^2(Y_1 + Y_3, Y_2 + Y_3) = d_E^2(Y_1, Y_2)$ .  $\square$

**Propriété 9.** Soient 2 symboles MIMO  $Y_1$ ,  $Y_2$  appartenant à  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Si ces symboles correspondent à des signaux 2<sup>n</sup>-PSK alors

$$d_E^2(Y_1, Y_2) = d_E^2(Y_1 - Y_2, 0) \quad (3.54)$$

avec  $\forall Y \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ ,  $Y + 0 = Y$ .

*Preuve.* On applique l'égalité (3.48) pour  $Y_3 = -Y_2$ . Comme

$$d_E^2(Y_1 + Y_3, Y_2 + Y_3) = d_E^2(Y_1, Y_2), \quad (3.55)$$

nous obtenons

$$d_E^2(Y_1 - Y_2, Y_2 - Y_2) = d_E^2(Y_1 - Y_2, 0) = d_E^2(Y_1, Y_2), \quad (3.56)$$

□

Le chapitre suivant traite des codes  $2^n$ -PSK construits à partir du critère de la trace. De ce fait, certaines propriétés vont être données de manière à réduire significativement la recherche des meilleurs codes en agissant sur le calcul de la distance euclidienne au carré minimale entre 2 mots de code. Considérons deux séquences binaires :

$$\begin{aligned} - X_{\hat{s}} &= [x_{\hat{s},1}^1 \cdots x_{\hat{s},n}^1 | x_{\hat{s},1}^2 \cdots x_{\hat{s},n}^2 | \cdots | x_{\hat{s},1}^{L-\nu} \cdots x_{\hat{s},n}^{L-\nu}]; \\ - X_s &= [x_{s,1}^1 \cdots x_{s,n}^1 | x_{s,1}^2 \cdots x_{s,n}^2 | \cdots | x_{s,1}^{L-\nu} \cdots x_{s,n}^{L-\nu}]. \end{aligned}$$

où  $L$  est la longueur des mots de code  $\hat{\mathbf{S}}$  et  $\mathbf{S}$  générés par les deux séquences binaires  $X_{\hat{s}}$  et  $X_s$ . Le critère de la trace énonce que la distance euclidienne au carré minimale entre deux mots de code  $\hat{\mathbf{S}}$  et  $\mathbf{S}$  doit être maximisée par un choix approprié de la matrice  $\mathbf{G}$ . Par la suite, cette distance va être notée 'Distance euclidienne cumulée' (DEC), en opposition à la distance euclidienne au carré entre deux signaux MIMO notée 'Distance euclidienne' (DE).

L'état final du codeur est égal à

$$W^0 = [0 \cdots 0 | \cdots | 0 \cdots 0]. \quad (3.57)$$

A chaque instant  $t = \overline{1, L - \nu}$ , les deux séquences binaires  $x_{\hat{s},1}^t \cdots x_{\hat{s},n}^t$  et  $x_{s,1}^t \cdots x_{s,n}^t$  issues de  $X_{\hat{s}}$  et  $X_s$  sont fournies à l'entrée du codeur. Ainsi, les états étendus au temps  $t = 1$  sont

$$X_{\hat{s}}^1 = [x_{\hat{s},1}^1 \cdots x_{\hat{s},n}^1 | 0 \cdots 0 | \cdots | 0 \cdots 0] \quad (3.58)$$

$$X_s^1 = [x_{s,1}^1 \cdots x_{s,n}^1 | 0 \cdots 0 | \cdots | 0 \cdots 0]. \quad (3.59)$$

Les états étendus au temps  $t = 2$  sont

$$X_{\hat{s}}^2 = [x_{\hat{s},1}^2 \cdots x_{\hat{s},n}^2 | x_{\hat{s},1}^1 \cdots x_{\hat{s},n}^1 | \cdots | 0 \cdots 0] \quad (3.60)$$

$$X_s^2 = [x_{s,1}^2 \cdots x_{s,n}^2 | x_{s,1}^1 \cdots x_{s,n}^1 | \cdots | 0 \cdots 0]. \quad (3.61)$$

A chaque instant  $t$ , les valeurs des états étendus sont  $X_{\hat{s}}^t = [x_{\hat{s},1}^t \cdots x_{\hat{s},n}^t | \cdots | x_{\hat{s},1}^{t-\nu} \cdots x_{\hat{s},n}^{t-\nu}]^T$  et  $X_s^t = [x_{s,1}^t \cdots x_{s,n}^t | \cdots | x_{s,1}^{t-\nu} \cdots x_{s,n}^{t-\nu}]^T$  où  $x_{\hat{s},l}^p = x_{s,l}^p = 0, \forall p \leq 0$ .

Comme l'état final doit être égal à  $W^{L+1} = [0 \cdots 0 | \cdots | 0 \cdots 0]$ , à chaque instant  $t \in \{L - \nu + 1, \cdots, L\}$ ,  $n$  bits nuls sont fournis au codeur. Ainsi, les états étendus à l'instant  $t = L$  sont

$$X_{\hat{s}}^L = [0 \cdots 0 | \cdots | 0 \cdots 0 | x_{\hat{s},1}^{L-\nu} \cdots x_{\hat{s},n}^{L-\nu}] \quad (3.62)$$

$$X_s^L = [0 \cdots 0 | \cdots | 0 \cdots 0 | x_{s,1}^{L-\nu} \cdots x_{s,n}^{L-\nu}]. \quad (3.63)$$

Considérons deux états étendus  $X_{\hat{s}}^t$  et  $X_s^t$  générant deux signaux MIMO  $\hat{S}^t = [\hat{s}_1^t \cdots \hat{s}_{n_T}^t]^T$  et  $S^t = [s_1^t \cdots s_{n_T}^t]^T$  donnés par

$$\hat{S}^t = \Phi_v(\mathbf{G}X_{\hat{s}}^t) \quad (3.64)$$

$$S^t = \Phi_v(\mathbf{G}X_s^t). \quad (3.65)$$

La DE entre ces deux signaux MIMO est  $d_E^2(\hat{S}^t, S^t)$ . Il est possible de calculer cette DE grâce aux deux états étendus  $X_{\hat{s}}^t$  et  $X_s^t$  et à la matrice génératrice  $\mathbf{G}$  via la fonction  $D_E$  définie par

$$\begin{aligned} D_E : \mathbb{Z}_{2^n}^{2(\nu+1)} \times \mathbb{Z}_{2^n}^{2(\nu+1)} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ D_E(X_{\hat{s}}^t, X_s^t) &= d_E^2(\Phi_v(\mathbf{G}X_{\hat{s}}^t), \Phi_v(\mathbf{G}X_s^t)). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Ainsi, la DEC est donnée par

$$DEC(\hat{S}, S) = \sum_{t=1}^L D_E(X_{\hat{s}}^t, X_s^t). \quad (3.67)$$

**Propriété 10.** *Le  $m^e$  et le  $(L - m + 1)^e$  terme de la DEC dépendent respectivement des  $m$  premiers blocs et des  $m$  derniers blocs de  $\mathbf{G}$ , avec  $m \in \{1, \dots, \nu + 1\}$ .*

*Remarque :* Dans le cas où  $m = \nu + 1$  les  $m$  premiers et  $m$  derniers blocs de  $\mathbf{G}$  sont confondus.

*Preuve.* Soit deux séquences binaires

$$X_{\hat{s}} = [x_{\hat{s},1}^1 \cdots x_{\hat{s},n}^1 | \dots | x_{\hat{s},1}^{L-\nu} \cdots x_{\hat{s},n}^{L-\nu}] \quad (3.68)$$

$$X_s = [x_{s,1}^1 \cdots x_{s,n}^1 | \dots | x_{s,1}^{L-\nu} \cdots x_{s,n}^{L-\nu}] \quad (3.69)$$

fournies au codeur. Le premier et le dernier état sont  $W^0 = W^L = [0 \cdots 0 | \cdots | 0 \cdots 0]$ . Ainsi, au premier temps symbole, le premier terme de chaque DEC est  $D_E(X_{\hat{s}}^1, X_s^1)$ , avec

$$X_{\hat{s}}^1 = [x_{\hat{s},1}^1 \cdots x_{\hat{s},n}^1 | 00 | \dots | 00] \quad (3.70)$$

$$X_s^1 = [x_{s,1}^1 \cdots x_{s,n}^1 | 00 | \dots | 00] \quad (3.71)$$

et le dernier terme est  $D_E(X_{\hat{s}}^L, X_s^L)$ , avec

$$X_{\hat{s}}^L = [00 | \dots | 00 | x_{\hat{s},1}^{L-\nu} \cdots x_{\hat{s},n}^{L-\nu}] \quad (3.72)$$

$$X_s^L = [00 | \dots | 00 | x_{s,1}^{L-\nu} \cdots x_{s,n}^{L-\nu}]. \quad (3.73)$$

Comme seules les  $n$  premières valeurs binaires des états étendus à l'instant  $t = 1$  dépendent des séquences binaires  $X_{\hat{s}}$  et  $X_s$ , seul le premier bloc de  $n$  colonnes de la matrice génératrice est employé au calcul du premier terme de la DEC. De la même manière, comme les  $n$  dernières valeurs binaires des états étendus à l'instant  $L$  dépendent des séquences binaires, seul le dernier bloc de  $n$  colonnes de la matrice génératrice est utile pour calculer le dernier terme de la DEC. Au deuxième temps symbole, le codeur est alimenté par un ensemble de  $n$  bits, les  $n$  bits reçus à l'instant  $t = 1$  sont alors décalés dans le deuxième bloc mémoire. Ainsi, le deuxième terme de la DEC est calculé via les deux premiers blocs de  $\mathbf{G}$ . Il se passe le phénomène inverse à l'avant-dernier temps symbole.

De la même manière, on peut prouver que les  $m$  premiers blocs et les  $m^e$  blocs de  $\mathbf{G}$  avec  $m = \overline{1, \nu + 1}$  sont utilisés pour calculer la somme des  $m$  premiers termes et la somme des  $m$  derniers termes de la DEC.  $\square$

Les valeurs de la DEC sont regroupées dans une matrice de taille  $2^{n(L-\nu)} \times 2^{n(L-\nu)}$  appelée matrice des DEC. La cellule de la  $i^e$  ligne de la  $l^e$  colonne de cette matrice représente la DEC entre les mots de code créés par les séquences binaires d'entrée ayant pour valeurs décimales  $i$  et  $l$ .

Pour simplifier le calcul des différentes DEC, plusieurs propriétés peuvent être énoncées.

**Propriété 11.** *La matrice des DEC est une matrice symétrique et de diagonale nulle. Ainsi, seulement la moitié des DEC n'appartenant pas à la diagonale peut être calculée pour trouver la DEC minimale.*

*Preuve.* Le mot de code  $\hat{\mathbf{S}}$  correspond à une ligne de la matrice des DEC et le mot de code  $\mathbf{S}$  correspond à une colonne de la matrice des DEC. Comme  $\sum_t d_E^2(\hat{S}^t, S^t) = \sum_t d_E^2(S^t, \hat{S}^t)$ , on va retrouver la même valeur en transposant la matrice.  $\square$

**Propriété 12.** *Soit un code 2<sup>n $\nu$</sup>  états 2<sup>n</sup>-PSK avec  $n_T$  antennes d'émission. Sa matrice génératrice est constituée de  $\nu + 1$  blocs de  $n$  colonnes. Si les colonnes de tous les blocs sont permutées de la même manière, le code résultant aura la même DEC minimale.*

*Preuve.* Soit la matrice génératrice  $\mathbf{G} = [G_1^1 \cdots G_n^1 | \cdots | G_1^{\nu+1} \cdots G_n^{\nu+1}]$ . La DEC se calcule pour toutes les paires de séquences binaires  $X_{\hat{s}}$  et  $X_s$  données par

$$\begin{aligned} - X_{\hat{s}} &= [x_{\hat{s},1}^1 \cdots x_{\hat{s},n}^1 | x_{\hat{s},1}^2 \cdots x_{\hat{s},n}^2 | \cdots | x_{\hat{s},1}^{L-\nu} \cdots x_{\hat{s},n}^{L-\nu}]; \\ - X_s &= [x_{s,1}^1 \cdots x_{s,n}^1 | x_{s,1}^2 \cdots x_{s,n}^2 | \cdots | x_{s,1}^{L-\nu} \cdots x_{s,n}^{L-\nu}]. \end{aligned}$$

A chaque instant  $t$ , les états étendus  $X_{\hat{s}}^t = [x_{\hat{s},1}^t \cdots x_{\hat{s},n}^t \cdots x_{\hat{s},1}^{t-\nu} \cdots x_{\hat{s},n}^{t-\nu}]^T$  et  $X^t = [x_{s,1}^t \cdots x_{s,n}^t \cdots x_{s,1}^{t-\nu} \cdots x_{s,n}^{t-\nu}]^T$  et la matrice génératrice fournissent deux symboles MIMO

$$\hat{S}^t = [G_1^1 \cdots G_n^1 | \cdots | G_1^{\nu+1} \cdots G_n^{\nu+1}] [x_{\hat{s},1}^t \cdots x_{\hat{s},n}^t \cdots x_{\hat{s},1}^{t-\nu} \cdots x_{\hat{s},n}^{t-\nu}]^T \quad (3.74)$$

$$S^t = [G_1^1 \cdots G_n^1 | \cdots | G_1^{\nu+1} \cdots G_n^{\nu+1}] [x_{s,1}^t \cdots x_{s,n}^t \cdots x_{s,1}^{t-\nu} \cdots x_{s,n}^{t-\nu}]^T \quad (3.75)$$

Si l'on permute les colonnes de  $\mathbf{G}$  pour obtenir une nouvelle matrice génératrice, par exemple  $\mathbf{G}' = [G_n^1 \cdots G_1^1 | \cdots | G_n^{\nu+1} \cdots G_1^{\nu+1}]$ , les symboles précédents  $\hat{S}^t$  et  $S^t$  seront générés en fonction des états étendus

$$X_{\hat{s}}'^t = [x_{\hat{s},n}^t \cdots x_{\hat{s},1}^t \cdots x_{\hat{s},n}^{t-\nu} \cdots x_{\hat{s},1}^{t-\nu}]^T \quad (3.76)$$

et

$$X^t = [x_{s,n}^t \cdots x_{s,1}^t \cdots x_{s,n}^{t-\nu} \cdots x_{s,1}^{t-\nu}]^T. \quad (3.77)$$

Ainsi, la permutation des colonnes de chaque bloc de  $\mathbf{G}$  est équivalente à une permutation identique des éléments binaires de chaque blocs des états étendus à chaque instant  $t$  :  $x_{\hat{s},1}^t \cdots x_{\hat{s},n}^t$  et  $x_{s,1}^t \cdots x_{s,n}^t$  avec  $t = \overline{1, L}$ .  $\square$

**Définition 3.8** (Code géométriquement uniforme). *Un code est géométriquement uniforme si les valeurs des DEC entre l'ensemble des chemins du treillis et un chemin donné  $P_i$  sont identiques quel que soit le chemin  $P_i$  [68].*

**Propriété 13.** *Pour un code géométriquement uniforme, l'ensemble des valeurs de DEC d'une colonne de la matrice des DEC est identique quelle que soit la colonne. Il en est de même pour les valeurs contenues dans chaque ligne. Ainsi, la DEC minimale d'un code GU peut se calculer uniquement entre un mot de code et tous les autres.*

*Preuve.* Chaque colonne (ou ligne) de la matrice des DEC correspond à un mot de code, c'est à dire à un chemin  $P_i$  dans le treillis. Comme le code est géométriquement uniforme, le même ensemble de DEC, pour tous les  $P_i$ , c'est à dire pour toutes les lignes ou les colonnes de la matrice de distances, va contenir la DEC minimale.  $\square$

### 3.3 Méthode existante de construction des codes équilibrés

Grâce à certains outils présentés dans les parties précédentes, nous allons pouvoir introduire la première méthode de construction des codes équilibrés. Plus particulièrement, nous allons nous intéresser à la méthode de construction des codes 4-PSK totalement équilibrés présentée par Ngo *et al.* dans [66, 67]. L'objectif de cette méthode est de construire une base de  $\mathbb{Z}_4^{n_T}$  en sélectionnant  $2n_T$  vecteurs de  $\mathbb{Z}_4^{n_T}$ , où chaque vecteur correspond à une colonne de la matrice génératrice.

Pour un code totalement équilibré, le rajout d'une colonne à la matrice génératrice donne un code qui est aussi entièrement équilibré. Ainsi, la méthode de construction que nous allons présenter est utilisée seulement pour la création des codes à longueur minimale. Pour trouver d'autres codes entièrement équilibrés, il suffit de rajouter n'importe quelle colonne à la matrice génératrice du code.

Les codes équilibrés à longueur minimale à  $2^{2\nu}$  états, 4-PSK et  $n_T$  antennes d'émission peuvent être séparés en  $n_T$  types. Les codes de type  $k$  avec  $k \in \{1, \dots, n_T\}$  ont une matrice génératrice constituée de  $k$  colonnes appartenant à  $\mathcal{C}_0^*$ .

Pour créer des bases de  $\mathbb{Z}_4^{n_T}$ , le choix des  $L_{min}$  vecteurs commence par la sélection de  $k$  vecteurs de  $\mathcal{C}_0^*$  où  $1 \leq k \leq n_T$ . Le nombre  $k$  de vecteurs dans  $\mathcal{C}_0$  définit alors le type du code. L'étape suivante est le choix de représentants linéairement indépendants de cosets permettant de récréer l'intégralité de  $\mathbb{Z}_4^{n_T}$ . Un vecteur dans chaque coset est alors sélectionné pour être une colonne de  $\mathbf{G}$ . Le problème de cette méthode est de trouver les éléments linéairement indépendants. Il faut pour cela "bloquer" (ou "fermer") les éléments de  $\mathcal{F}_m$  (c.f. théorème 3.2) dans le cas où  $m$  vecteurs ont déjà été sélectionnés. Le terme "bloqué" signifie interdire le choix de ce vecteur pour créer une colonne de  $\mathbf{G}$ .

#### 3.3.1 Exemple de génération de STTCs totalement équilibrés de type II ( $n_T = 2$ )

Considérons la génération des STTCs à longueur minimale 4 états 4-PSK 2 antennes d'émission. Les symboles MIMO appartiennent à  $\mathbb{Z}_4^2$ . Pour les codes de type II, la première étape est le choix de deux vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  linéairement indépendants appartenant à  $\mathcal{C}_0^*$ . L'objectif est de générer la totalité de  $\mathcal{C}_0$  avec  $\{x_1 V_1 + x_2 V_2 / x_1, x_2 \in \{0, 1\}\}$ . Ainsi, comme représenté en vert dans le tableau ci-dessous,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  peuvent être choisis pour générer  $\mathcal{C}_0$ . Les éléments en bleu sont les éléments générés par les 2 premiers vecteurs.

$c_0$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$c_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$c_{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$c_{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

TABLE 3.9 – Choix des deux premiers vecteurs

La deuxième étape est le choix de deux cosets linéairement indépendants, donc dans ce cas différents, par exemple  $\mathcal{C}_{\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}}$  et  $\mathcal{C}_{\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}}$ . Dans chacun des deux cosets, un vecteur est choisi, respectivement  $V_3$  et  $V_4$ , par exemple  $V_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_{\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}}$  et  $V_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_{\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}}$ . Comme tous les éléments de  $\mathcal{C}_0$  sont créés par  $V_1$  et  $V_2$ , les cosets contenant  $V_3$  et  $V_4$  sont entièrement générés. Le dernier coset est créé grâce à  $V_3 + V_4 + \mathcal{C}_0$ . Le tableau 3.10 montre la partition en cosets de  $\mathbb{Z}_4^2$ . Les vecteurs en vert sont les vecteurs sélectionnés  $V_1, V_2, V_3$  et  $V_4$ . Les vecteurs en bleu sont ceux générés par  $x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 + x_4V_4 / x_1, x_2, x_3$  et  $x_4 \in \{0, 1\}$ .

$c_0$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$c_{\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$c_{\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$c_{\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

TABLE 3.10 – Choix des deux derniers vecteurs

Ainsi, en utilisant les éléments sélectionnés comme colonne d'une matrice génératrice, on obtient la matrice génératrice

$$\mathbf{G} = [V_1 V_2 | V_3 V_4] \quad (3.78)$$

$$= \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]. \quad (3.79)$$

Pour trouver l'ensemble des matrices génératrices correspondant à un code équilibré à longueur minimale, il suffit de permuter les colonnes entre elles. De cette manière, il est possible de retrouver un code ayant les mêmes caractéristiques en termes de rank, de déterminants et de trace que le code de Chen [59]

$$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.80)$$

### 3.3.2 Exemple de génération de STTCs totalement équilibrés de type I ( $n_T = 2$ )

Les codes de type I ont un seul vecteur dans  $\mathcal{C}_0^*$ . Ainsi si  $V_1 = 2P \in \mathcal{C}_0 \setminus \{0\}$ , un mini-coset  $\mathcal{C}_{0,0} = \{0, V_1\}$  est généré. Chaque coset est alors séparé en deux mini-cosets

$$\mathcal{C}_{l,0} = l + \mathcal{C}_{0,0} \quad (3.81)$$

$$\mathcal{C}_{l,1} = \mathcal{C}_l \setminus \mathcal{C}_{l,0} \quad (3.82)$$

avec  $l \in \mathbb{Z}_2^2$ . Tout vecteur  $V_2$  choisi parmi  $\mathbb{Z}_2^{n_T} \setminus \mathcal{C}_0$  va générer un mini-coset. Prenons par exemple  $V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2P$  avec  $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Le deuxième vecteur  $V_2$  et le troisième vecteur  $V_3$  doivent appartenir aux deux mini-cosets de  $\mathcal{C}_P$ . En effet, il faut que  $V_2$  et  $V_3$  soient linéairement



indépendants. Par exemple, il est possible de choisir  $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $V_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Ainsi, les cosets  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_P$  sont entièrement générés. Le dernier vecteur doit être choisi parmi les vecteurs en blanc du tableau 3.11 où les vecteurs choisis et générés sont représentés en vert et en bleu respectivement.

$c_0$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$c_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$c_{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$c_{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

TABLE 3.11 – Choix des trois derniers vecteurs

Le dernier vecteur  $V_4$  est alors choisi parmi les deux cosets non générés, par exemple  $V_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Une des matrices génératrices est alors

$$\mathbf{G} = [V_1 V_2 | V_3 V_4] \quad (3.83)$$

$$= \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]. \quad (3.84)$$

A l'aide de ce choix de colonnes, 4! STTCs totalement équilibrés peuvent être générés en permutant les colonnes de la matrice génératrice. La permutation des lignes de ces matrices génératrices donne de plus 4! nouveaux codes.

Cette méthode est relativement efficace pour trouver les STTCs 4-PSK, totalement équilibrés à deux antennes d'émission. Dans le cas d'un plus grand nombre d'antennes, la difficulté est de déterminer par le calcul l'ensemble  $\mathcal{F}_m$  après chaque choix d'un vecteur  $V_m$  avec  $m \in \{1, \dots, nn_T\}$ .

Cette méthode a été présentée pour une modulation 4-PSK mais elle peut s'appliquer à des modulations  $2^n$ -PSK. Pour 2 et 3 antennes d'émission dans [69], des méthodes détaillées permettent de guider le choix de vecteurs de manière à simplifier la génération des STTCs entièrement équilibrés.

### 3.4 Conclusion

Ce chapitre a exposé de manière détaillée le principe des codes temps-espace en treillis qui ont l'avantage de fournir un gain de codage élevé, contrairement à certains codes en blocs comme les O-STBCs. Un des défauts majeurs des STTCs est le temps de recherche des meilleurs codes. Cette durée devient d'autant plus importante que le nombre d'états, la complexité de la modulation et le nombre d'antennes d'émission augmentent. Ainsi, des techniques précédemment publiées pour réduire le temps de recherche des STTCs optimaux ont été rappelées.

Parmi ces solutions, la génération des codes équilibrés s'est avérée très efficace pour obtenir rapidement les meilleurs STTCs. Les codes appartenant à cette classe respectent la propriété

suivante : les symboles MIMO générés ont le même nombre d'occurrences lorsque les données d'entrée sont fournies de manière équiprobable par une source binaire sans mémoire. Les meilleurs codes publiés appartiennent à cette classe de codes. La première méthode de génération des codes équilibrés a ainsi été rappelée. Cette méthode, efficace pour un faible nombre d'antennes d'émission, typiquement 2 ou 3, devient laborieuse pour un grand nombre d'antennes d'émission. De plus, même si cette méthode peut être utilisée pour une modulation 8-PSK, aucune étude ne traite ce cas dans la littérature.

D'autre part, ce chapitre a permis de fournir des propriétés et des outils concernant les STTCs  $2^n$ -PSK. Ils seront exploités dans le prochain chapitre qui exposera deux nouvelles méthodes rapides et efficaces de construction des STTCs  $2^n$ -PSK les plus performants.

## Chapitre 4

# Nouvelles méthodes de construction des STTCs $2^n$ -PSK

### Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Nouvelle méthode de construction des STTCs équilibrés . . . . .</b>	<b>84</b>
4.1.1	Nouvelle méthode de construction des codes équilibrés . . . . .	84
4.1.2	Exemple de génération de STTCs 4-PSK à 3 antennes d'émission . .	86
4.1.3	Exemple pour des STTCs 8 états 8-PSK 4 antennes d'émission . . .	90
<b>4.2</b>	<b>Coset partitioning . . . . .</b>	<b>94</b>
4.2.1	Description de la méthode . . . . .	94
4.2.2	Blocs optimaux . . . . .	98
4.2.3	Exemple de construction des meilleurs STTCs $2^n$ états $2^n$ -PSK $n_T$ antennes d'émission . . . . .	100
4.2.4	Exemple de construction des meilleurs STTCs 16 états 4-PSK avec $n_T$ antennes d'émission . . . . .	104
4.2.5	Exemple de construction de STTCs 8/32 états 4-PSK . . . . .	111
4.2.6	Exemple de réduction du temps pour obtenir les STTCs 4-PSK à l'aide du coset partitioning . . . . .	112
4.2.7	Conclusion . . . . .	114
<b>4.3</b>	<b>Nouveaux STTCs 4-PSK et 8-PSK . . . . .</b>	<b>115</b>
4.3.1	Codes 4-PSK . . . . .	115
4.3.2	Remarque sur les STTCs 8 états 8-PSK . . . . .	122
<b>4.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>125</b>

### Introduction

Précédemment, nous avons vu que le temps de recherche des meilleurs STTCs était très important, en particulier lorsque le nombre d'antennes d'émission, le nombre d'états du codeur et/ou la complexité de la modulation augmentaient. De ce fait, une recherche exhaustive ne pouvait plus être envisagée pour des codes avec plus que deux antennes d'émission. Des méthodes de construction ont alors été mises en place de manière à réduire le temps de recherche.

Une classe particulière de STTCs  $2^n$ -PSK appelée 'codes équilibrés' s'est distinguée comme contenant les codes ayant les meilleures performances. Un code est dit équilibré si et seulement

si les symboles MIMO générés par le code sont équiprobables dans le cas d'une source binaire qui fournit des données en entrée du codeur de façon équiprobable. Ainsi, il suffit d'effectuer une recherche exhaustive uniquement dans le sous-ensemble des codes équilibrés pour trouver les STTCs les plus performants [69]. Il est donc primordial d'avoir une méthode efficace pour construire cette classe de codes. La première méthode publiée pour construire des STTCs équilibrés a été présentée dans le chapitre précédent. Elle nécessite un temps de calcul qui devient important lorsque le nombre d'antennes d'émission devient élevé. De plus, elle a été uniquement appliquée dans le cas d'une modulation 4-PSK.

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode de construction des codes équilibrés plus simple et plus efficace que la première méthode va tout d'abord être détaillée. Ce chapitre continuera par la présentation d'une nouvelle méthode de construction des meilleurs STTCs  $2^n$ -PSK appelée 'coset partitioning'. Cette méthode permet de réduire considérablement le temps nécessaire pour la génération des meilleurs codes. Comme nous le verrons, elle est basée sur l'approche en cosets de Calderbank [70] du 'set partitioning' proposé par Ungerbock, cela dans un contexte MIMO, accompagnée d'une décomposition de la DEC. Grâce à l'efficacité de ces méthodes, des STTCs 4-PSK de 2 à 8 antennes d'émission et des STTCs 8-PSK de 2 à 6 antennes d'émission ont pu être générés.

## 4.1 Nouvelle méthode de construction des STTCs équilibrés

Cette nouvelle méthode permet une génération efficace des codes équilibrés. Elle est fondée sur la génération du groupe additif  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ .

### 4.1.1 Nouvelle méthode de construction des codes équilibrés

#### 4.1.1.1 Codes totalement équilibrés

D'après la propriété 6 énoncée dans le chapitre précédent, pour créer des codes totalement équilibrés, il faut commencer par construire des codes à longueur minimale. La matrice génératrice de ces codes est constituée de  $L_{min} = nn_T$  colonnes.

Pour créer un code à longueur minimale ayant une matrice génératrice  $\mathbf{G}$ , les colonnes  $G_i$  avec  $i = \overline{1, L_{min}}$  doivent être sélectionnées selon les règles suivantes :

**Règle 1.** *La première colonne  $G_1$  doit être choisie comme appartenant à  $\mathcal{C}_0^*$ . De part ce choix, le premier ensemble  $\Lambda_1$  créé est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  (c.f. propriété 1).*

**Règle 2.** *Si  $m$  colonnes ont déjà été choisies, avec  $m \in \{1, \dots, L_{min} - 1\}$ , la colonne suivante  $G_{m+1}$  doit créer un nouveau sous-groupe  $\Lambda_{m+1}$  de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  avec  $\text{card}(\Lambda_{m+1}) = 2\text{card}(\Lambda_m)$ .*

Pour choisir des colonnes de manière à générer des nouveaux sous-groupes avec deux fois plus d'éléments, les colonnes doivent être choisies comme énoncé dans la propriété 3. C'est à dire que l'algorithme suivant doit être respecté :

- la première colonne doit être choisie dans  $\mathcal{C}_0^*$  ;
- si les  $m \in \{1, \dots, L_{min} - 1\}$  premières colonnes de  $\mathbf{G}$  ont déjà été choisies pour former un sous-groupe  $\Lambda_m = \left\{ \sum_{m'=1}^m x_{m'} G_{m'} \bmod 2^n / x_{m'} \in \{0, 1\} \right\}$  de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ , alors la colonne  $G_{m+1}$  de  $\mathbf{G}$  ne doit pas appartenir à  $\Lambda_m$  et doit être sélectionnée dans un coset relatif (c.f. définition 3.5) à un vecteur appartenant à  $\Lambda_m$  ou à  $\mathcal{C}_0^*$ .

En respectant cet algorithme, le nouvel ensemble généré

$$\Lambda_{m+1} = \Lambda_m \cup (\Lambda_m + G_{m+1}) \quad (4.1)$$

est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ .

De cette manière, on obtient une partition en chaîne [49] du groupe  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$

$$\Lambda_{L_{min}} / \Lambda_{L_{min}-1} \cdots / \Lambda_m / \cdots / \Lambda_1, \quad (4.2)$$

avec  $\text{card}(\Lambda_{m+1}) = 2\text{card}(\Lambda_m)$ , où  $m = 1, L_{min} - 1$ . Comme  $\text{card}(\Lambda_1) = 2$ , grâce à la sélection de  $L_{min}$  colonnes, il est possible de créer le groupe  $\Lambda_{L_{min}} = \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  tel que  $\text{card}(\Lambda_{L_{min}}) = 2^{L_{min}}$ . Ainsi, comme  $\text{card}(\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}) = 2^{nn_T}$ , le nombre de colonnes pour générer ce code est bien égal à  $L_{min} = nn_T$ , comme montré dans la propriété 6.

Après cela, pour obtenir un code totalement équilibré mais qui n'est pas à longueur minimale, il suffit, comme décrit dans la propriété 6, de rajouter n'importe quelle colonne à la matrice génératrice du code pour créer un autre code totalement équilibré. Dans ce cas, le nombre d'occurrences des symboles MIMO sera doublé. De plus, comme montré par la propriété 7, la permutation des lignes ou des colonnes va encore fournir un nouveau code totalement équilibré.

Cette nouvelle méthode de construction des codes équilibrés a l'avantage de définir plus simplement que dans la première méthode l'ensemble dans lequel doivent être choisies les colonnes de  $\mathbf{G}$ . En effet, dans la première méthode, à chaque sélection d'une colonne  $G_m$  de  $\mathbf{G}$ , il fallait calculer l'ensemble  $\mathcal{F}_m$  défini dans le théorème 3.2, ce qui demandait du temps de calcul. Grâce à cette nouvelle méthode, les opposés des vecteurs choisis et générés sont automatiquement créés, car un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  est formé après chaque sélection d'une nouvelle colonne.

#### 4.1.1.2 Codes équilibrés

En se basant sur la méthode de construction des codes totalement équilibrés, il est possible de définir un algorithme permettant de créer des codes équilibrés (mais pas totalement équilibrés). C'est à dire que les symboles MIMO générés de manière équiprobable forment un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  et non la totalité du groupe  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  comme c'est le cas pour des codes totalement équilibrés.

Considérons la génération d'un code équilibré avec  $2^{L_r-n}$  états, où  $L_r$  est le nombre de colonnes de la matrice génératrice du code. Pour sélectionner les  $L_r$  colonnes, l'algorithme suivant doit être appliqué :

- les  $m_0 \leq L_{min} - 2$  premières colonnes  $G_1, G_2, \dots, G_{m_0}$  de  $\mathbf{G}$  doivent être sélectionnées à l'aide des règles 1 et 2. Ainsi, l'ensemble généré par les  $m_0$  premières colonnes est un sous-groupe

$$\Lambda_{m_0} = \left\{ \sum_{m=1}^{m_0} x_m G_m \bmod 2^n / x_m \in \{0, 1\} \right\} \quad (4.3)$$

de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Le nombre d'occurrences de chaque symbole MIMO  $Y \in \Lambda_{m_0}$  est  $n(Y) = 1$ .

- les colonnes  $G_{m_0+1}, \dots, G_{L_r-1}$  doivent être sélectionnées dans le sous-groupe  $\Lambda_{m_0}$ . Ainsi, le sous-groupe créé par les  $L_r - 1$  colonnes est  $\Lambda_{L_r-1} = \Lambda_{m_0}$ . Le nombre d'occurrences de chaque symbole MIMO est  $2^{L_r-m_0-1}, \forall Y \in \Lambda_{m_0}$ .

- la dernière colonne peut être sélectionnée n'importe où dans  $\mathbb{Z}_{2^n}^{nT}$ . Deux cas peuvent être analysés :
  - si  $G_{L_r} \in \Lambda_{L_r-1}$ , alors le nombre d'occurrences de chaque symbole MIMO est multiplié par 2. L'ensemble des symboles MIMO générés est le sous-groupe  $\Lambda_{L_r-1} = \Lambda_{m_0}$ .
  - si  $G_{L_r} \in \mathbb{Z}_{2^n}^{nT} \setminus \Lambda_{L_r-1}$ , l'ensemble généré  $\Lambda_{L_r} = \Lambda_{L_r-1} \cup (\Lambda_{L_r-1} + G_{L_r})$  n'est pas nécessairement un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{nT}$ . Le nombre d'occurrences de chaque symbole MIMO généré est égal à  $2^{L_r-m_0-1}$ , mais  $\text{card}(\Lambda_{L_r}) = 2\text{card}(\Lambda_{L_r-1})$ .

Grâce à la méthode de construction des codes totalement équilibrés et à l'adaptation pour la construction des codes équilibrés, il a été possible de générer des codes ayant de meilleures performances que ceux précédemment publiés par Chen *et al.* [62]. Par la suite, des exemples de construction des STTCs 4-PSK et 8-PSK équilibrés seront détaillés.

#### 4.1.2 Exemple de génération de STTCs 4-PSK à 3 antennes d'émission

La matrice génératrice des STTCs 64 états 4-PSK à 3 antennes d'émission est

$$\mathbf{G} = [G_1 G_2 | G_3 G_4 | G_5 G_6 | G_7 G_8], \quad (4.4)$$

avec  $G_i = [g_{i,1} \ g_{i,2} \ g_{i,3}]^T \in \mathbb{Z}_4^3$  où  $i = \overline{1,8}$ .

L'objectif est de construire un code totalement équilibré. Il faut donc commencer par sélectionner 6 colonnes pour créer un code à longueur minimale. Ensuite, d'après la propriété 6, il suffit de rajouter 2 colonnes appartenant à  $\mathbb{Z}_4^3$  pour obtenir un code totalement équilibré avec 64 états.

Pour cela, 8 éléments de  $\mathbb{Z}_4^3$  devront être choisis. La première colonne doit appartenir à  $\mathcal{C}_0^*$ . Il est possible de prendre  $G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Ainsi, la deuxième colonne peut être choisie soit dans  $\mathcal{C}_0^*$  soit dans le coset relatif à  $G_1$ . Le tableau 4.1 montre en vert la colonne  $G_1$  choisie, en bleu la colonne générée et en blanc les colonnes qu'il est possible de choisir.

$c_0$	<div><math>\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}</math></div>
$c_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$	<div><math>\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}</math></div>	<div><math>\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}</math></div>

TABLE 4.1 – Choix de la première colonne de  $\mathbf{G}$

Si  $G_2$  est choisie dans le coset  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , par exemple  $G_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ , le sous-groupe  $\Lambda_2$  représenté par les éléments de couleur (bleu et vert) dans le tableau 4.2 correspond au sous-groupe généré par les deux premières colonnes. Comme aucune nouvelle colonne de  $\mathcal{C}_0^*$  n'est générée, la troisième colonne  $G_3$  doit appartenir soit à  $\mathcal{C}_0^*$ , soit au coset relatif à  $G_1$  et ne doit pas faire partie de  $\Lambda_2$ .

La troisième colonne peut donc être choisie dans  $\mathcal{C}_0^*$ , par exemple  $G_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Dans ce cas, comme représenté dans le tableau 4.3, deux colonnes supplémentaires de  $\mathcal{C}_0$  sont générées (ou choisies). Ainsi, la sélection de  $G_4$  peut être effectuée parmi les éléments blancs du tableau 4.3. En posant  $G_1 = 2P_1$ ,  $G_3 = 2P_2$  et  $G_1 + G_3 = 2P_3$  donc  $P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , cette zone correspond à  $(\mathcal{C}_0 \cup (\mathcal{C}_0 + P_1) \cup (\mathcal{C}_0 + P_2) \cup (\mathcal{C}_0 + P_3)) \setminus \Lambda_2$ .

$c_0$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

 TABLE 4.2 – Choix de la deuxième colonne de  $\mathbf{G}$ 

$c_0$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

 TABLE 4.3 – Choix de la troisième colonne de  $\mathbf{G}$ 

Ainsi, la quatrième colonne peut être  $G_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ . Un nouveau sous-groupe est créé, comme représenté par l'ensemble coloré du tableau 4.4.

$c_0$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

 TABLE 4.4 – Choix de la quatrième colonne de  $\mathbf{G}$ 

Si la prochaine colonne  $G_5$  est sélectionnée parmi les éléments de la zone blanche, par exemple  $G_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ , le nombre d'éléments du nouveau sous-groupe  $\Lambda_5$  va doubler et la totalité de  $\mathcal{C}_0$  va être générée. Du fait de la génération de  $\mathcal{C}_0$ , la sélection de la dernière colonne  $G_6$  pourra se faire dans les cosets relatifs aux nouveaux éléments de  $\mathcal{C}_0$  représentés en blanc dans le tableau 4.5.

Si la dernière colonne  $G_6$  pour créer un code équilibré est sélectionnée parmi les éléments en blanc du tableau 4.5, l'ensemble généré sera  $\Lambda_6 = \mathbb{Z}_4^3 = \Lambda_5 \cup (\Lambda_5 + G_6)$  avec  $G_6 \in \mathbb{Z}_4^3 \setminus \Lambda_5$ . Il est possible de prendre  $G_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Le code ainsi créé est totalement équilibré et, de surcroît,

$c_0$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

 TABLE 4.5 – Choix de la cinquième colonne de  $\mathbf{G}$ 

à longueur minimale. Le nombre d'occurrences de chaque symbole MIMO est donc  $n_0 = 1$ . Sa matrice génératrice est

$$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right]. \quad (4.5)$$

D'après la propriété 6, il est possible de rajouter n'importe quelle colonne appartenant à  $\mathbb{Z}_4^3$  pour obtenir un nouveau code totalement équilibré. Dans le cas général, si l'on considère un code à  $L_r > L_{min}$  colonnes, le nombre d'occurrences des symboles MIMO du code sera alors  $2^{L_r - L_{min}}$  où  $L_r - L_{min}$  correspond au nombre de colonnes additionnelles. Ainsi, les colonnes  $G_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  et  $G_8 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  peuvent être ajoutées à la matrice génératrice précédente pour obtenir la nouvelle matrice génératrice

$$\mathbf{G}' = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]. \quad (4.6)$$

Ce code a une DEC minimale égale à 32 et un rang minimal des matrices  $\mathbf{G}$  égal à 3. Ces paramètres peuvent être comparés à ceux du code de Chen *et al.*, comme présenté dans le tableau 4.6.

Les figures 4.1 et 4.2 présentent les performances respectivement en terme de FER et de BER pour 2 et 4 antennes de réception des 2 codes présentés dans le tableau 4.6. Le code noté 'New' correspond au code nommé 'Nouveau code' dans le tableau 4.6. Cette notation



Code	$\mathbf{G}$	Rang	$d_{E,\min}^2$
Chen <i>et al.</i> [59]	$\left[ \begin{array}{cc cc cc cc} 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right]$	2	28
Nouveau code	$\left[ \begin{array}{cc cc cc cc} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$	3	32

TABLE 4.6 – STTCs 64 états 4-PSK à 3 antennes d'émission

sera gardée dans le reste du document. Les simulations ont été réalisées dans les mêmes configurations que celles présentées dans la section 3.1.2. On remarque que dans le cas du BER, le gain apporté par le nouveau code par rapport au code de Chen est négligeable, principalement dans le cas de 2 antennes de réception. Pour un FER de  $10^{-2}$ , le gain apporté par le nouveau code par rapport au code de Chen *et al.* est environ égal à 0,3 dB pour 2 antennes de réception et de 0,1 dB pour 4 antennes de réception.

Dans l'ensemble, les performances du nouveau code sont légèrement meilleures que celles du code de Chen *et al.* 64 états 4-PSK 3 antennes d'émission. De plus, contrairement à la méthode de recherche proposée par Chen *et al.* (vue précédemment), la nouvelle méthode permet de trouver les codes optimaux. Elle permet ainsi de générer les meilleurs codes et cela de manière relativement rapide.

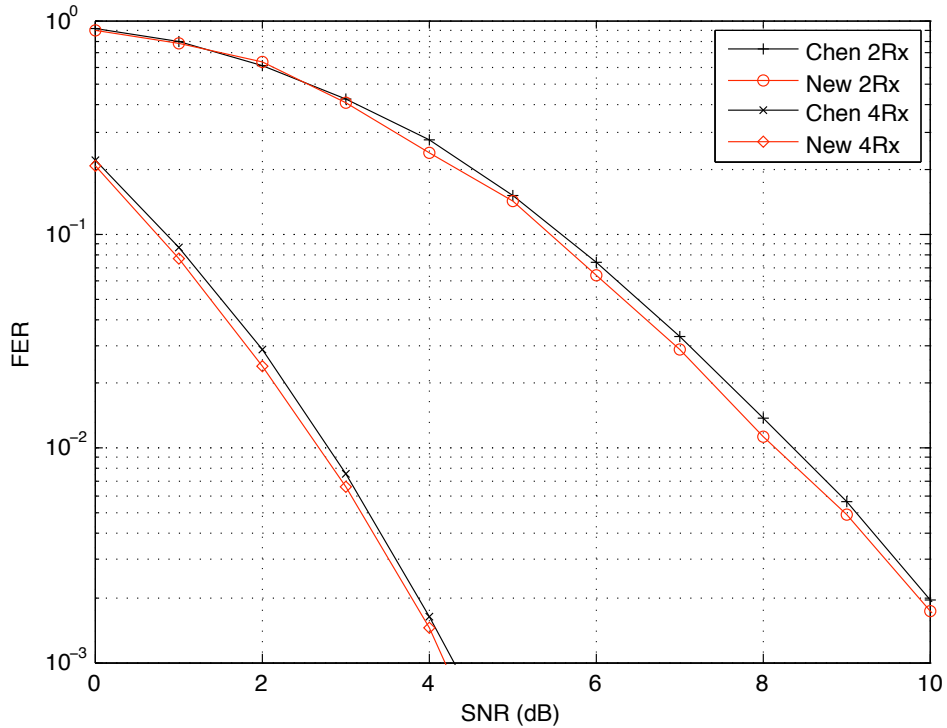


FIGURE 4.1 – FER des codes 64 états 4-PSK 3 antennes d'émission du tableau 4.6

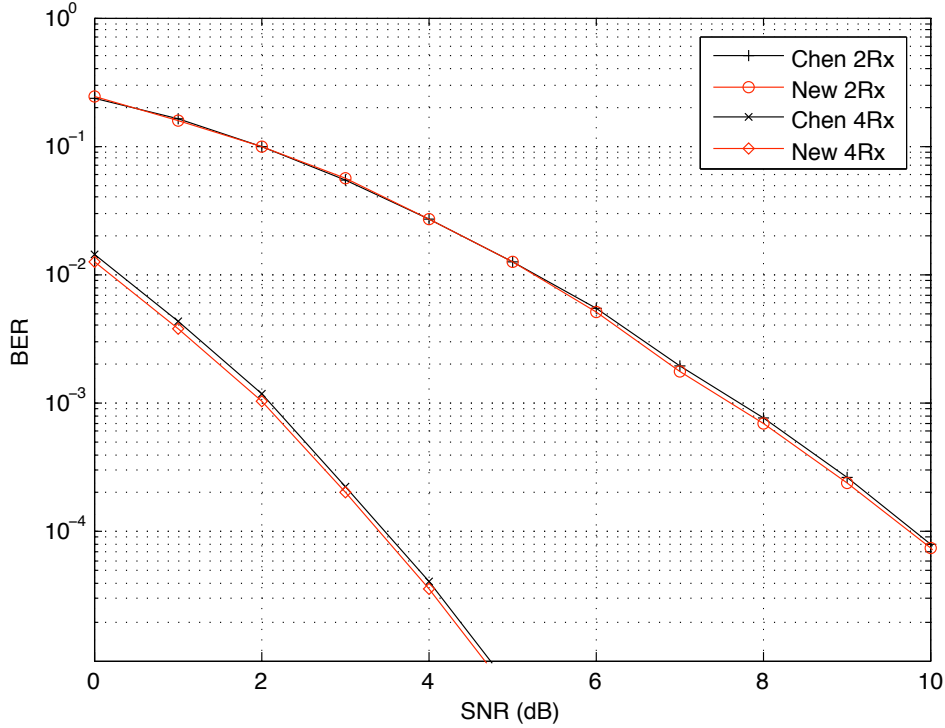


FIGURE 4.2 – BER des codes 64 états 4-PSK 3 antennes d'émission du tableau 4.6

#### 4.1.3 Exemple pour des STTCs 8 états 8-PSK 4 antennes d'émission

L'utilité de cette nouvelle méthode va maintenant être présentée par le biais de la construction d'un STTC équilibré 8 états 8-PSK 4 antennes d'émission. De par son nombre d'états, le code créé ne pourra pas être totalement équilibré. En effet, un STTC 8 états 8-PSK 4 antennes d'émission doit avoir au minimum  $L_{min} = nn_T = 12$  colonnes pour être entièrement équilibré. L'objectif de cet exemple est de créer un code générant le plus possible de symboles MIMO différents. Pour cela, la sélection de chaque nouvelle colonne de la matrice génératrice doit doubler la taille de l'ensemble des symboles MIMO générés, cela grâce aux choix de vecteurs linéairement indépendants. Etant donné que la matrice génératrice d'un STTC 8 états 8-PSK est constituée de 6 colonnes, le nombre maximal de symboles MIMO générés est  $2^6 = 64$ . La matrice génératrice des STTCs 8 états 8-PSK à 4 antennes d'émission est

$$\mathbf{G} = [G_1 G_2 G_3 | G_4 G_5 G_6], \quad (4.7)$$

avec  $G_i = [G_i^1 G_i^2 G_i^3 G_i^4]^T \in \mathbb{Z}_8^4$  où  $i = \overline{1, 6}$ . Le groupe  $\mathbb{Z}_8^4$  est divisé en 3 ensembles de vecteurs  $\mathcal{E}_0$ ,  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  obtenus par la réunion de certains cosets. Chaque coset inclus dans  $\mathcal{E}_i$ , est relatif à un vecteur appartenant à  $\mathcal{E}_{i-1}$  avec  $i = \{1, 2\}$ . La nouvelle méthode de construction des codes équilibrés stipule que la première colonne de  $\mathbf{G}$  doit être non-nulle et doit appartenir à

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{C}_0 = 2^{n-1} \mathbb{Z}_2^{n_T}. \quad (4.8)$$

Dans le cas considéré,  $G_1 \in 4\mathbb{Z}_2^4$ . La première colonne choisie peut être  $G_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 2P_1$  avec  $P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Le premier sous-groupe  $\Lambda_1 = \{0, G_1\}$  est alors créé. La prochaine colonne doit alors

appartenir à l'ensemble

$$\mathcal{S}_2 = (\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_{P_1}) \setminus \Lambda_1, \quad (4.9)$$

où  $\mathcal{C}_{P_1} \in \mathcal{E}_1$  est le coset relatif à  $G_1$  donné par  $\mathcal{C}_{P_1} = P_1 + \mathcal{C}_0$ . La deuxième colonne peut être égale à  $G_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Le sous-groupe créé s'écrit alors

$$\Lambda_2 = \{0, G_1, G_2, G_1 + G_2\} \quad (4.10)$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}, \quad (4.11)$$

avec  $G_1 + G_2 = -G_2$ . Comme  $G_2$  et  $-G_2 \in \mathcal{E}_1$ , l'ensemble dans lequel il est possible de choisir la prochaine colonne devient

$$\mathcal{S}_3 = (\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_{P_1} \cup \mathcal{C}_{P_2} \cup \mathcal{C}_{(P_1+P_2)}) \setminus \Lambda_2, \quad (4.12)$$

avec  $2P_2 = G_2$  et  $2(P_1 + P_2) = -G_2$ , ce qui donne  $P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $P_1 + P_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ . Ainsi, on peut choisir  $G_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ , ce qui va générer un nouveau sous-groupe

$$\Lambda_3 = \Lambda_2 \cup (\Lambda_2 + G_3) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.13)$$

L'ensemble  $\mathcal{S}_4$  dans lequel  $G_4$  sera choisi est donné par

$$\mathcal{S}_4 = (\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_{P_1} \cup \mathcal{C}_{P_2} \cup \mathcal{C}_{(P_1+P_2)}) \setminus \Lambda_3 \subset \mathcal{S}_3. \quad (4.14)$$

En effet, les nouveaux éléments générés, donnés par  $\Lambda_3 \setminus \Lambda_2$ , appartiennent tous à  $\mathcal{E}_2$ . Comme il n'existe pas de cosets relatifs aux éléments de  $\mathcal{E}_2$ , on en déduit  $\mathcal{S}_4 \subset \mathcal{S}_3$ .

Pour augmenter l'ensemble  $\mathcal{S}_5$  dans lequel  $G_5$  sera choisie,  $G_4$  doit appartenir soit à  $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{S}_4$ , soit à  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{S}_4$ . De cette manière, on assure que les colonnes peuvent être choisies dans les cosets relatifs aux nouveaux éléments générés.

On choisit par exemple  $G_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ , ce qui a pour effet de générer un nouveau sous-groupe

$$\Lambda_4 = \Lambda_3 \cup (\Lambda_3 + G_4) \quad (4.15)$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.16)$$

La cinquième colonne  $G_5$  de la matrice génératrice ne doit pas appartenir à  $\Lambda_4$  et doit être choisie soit dans  $\mathcal{C}_0^*$  soit dans les cosets relatifs aux éléments de  $\Lambda_4$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{E}_0$  ou l'ensemble  $\mathcal{E}_1$ . Ainsi,  $G_5$  peut être choisie dans  $\mathcal{S}_4 \setminus \Lambda_4$  mais aussi dans les cosets  $\mathcal{C} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

$\mathcal{C} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{C} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\mathcal{C} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  qui sont respectivement les cosets relatifs à  $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Ces quatre derniers éléments ont été générés par la sélection de  $G_4$ .

Ainsi,  $G_5$  peut être choisie parmi les éléments non-générés de  $\mathcal{C}_0$  ou dans les cosets relatifs aux éléments appartenant à l'ensemble

$$\Lambda_4 \cap (\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.17)$$

On peut donc choisir  $G_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}$ . Le nouveau sous-groupe  $\Lambda_5$  créé est donné par

$$\Lambda_5 = \Lambda_4 \cup (\Lambda_4 + G_5) \quad (4.18)$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.19)$$

Des nouveaux éléments de  $\mathcal{E}_1$  sont générés. Ainsi, il est possible de choisir  $G_6$  dans les cosets relatifs aux éléments appartenant à l'ensemble

$$\Lambda_5 \cap (\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.20)$$

La matrice génératrice du code est constituée de 6 colonnes. C'est à dire que  $G_6$  est la dernière colonne à être sélectionnée. Elle peut être sélectionnée sans aucune condition dans  $\mathbb{Z}_8^4$ . Si  $G_6 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ , le dernier ensemble  $\Lambda_6$  ne sera pas un groupe mais générera malgré tout un code équilibré, comme montré dans la section 4.1.1.2. On obtient donc la matrice génératrice

$$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 7 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right]. \quad (4.21)$$

L'ensemble des symboles MIMO générés par ces colonnes ne forme plus un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Par conséquent, l'algorithme proposé ne peut plus être utilisé pour l'ajout de colonnes à la matrice génératrice  $\mathbf{G}$  dans le but d'obtenir un nouveau code équilibré.

Ce code peut être comparé au code correspondant de Chen *et al.* présenté dans [62]. Le tableau 4.7 donne les différentes caractéristiques du code précédemment créé et celles du code de Chen *et al.* correspondant.

Nom	$\mathbf{G}$	Rang	$d_{E,\min}^2$
Chen <i>et al.</i> [62]	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 4 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$	2	16.58
Nouveau code	$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	2	17.17

TABLE 4.7 – STTCs 8 états 8-PSK 4 antennes d'émission

Les performances en terme de FER et de BER de ces deux codes sont présentées respectivement dans les figures 4.3 et 4.4. Le gain apporté par le nouveau code reste très faible par rapport au code de Chen *et al.*, surtout dans le cas de deux antennes de réception. L'attrait de cette méthode réside principalement dans la rapidité de génération des meilleurs codes et par la possibilité de l'utiliser dans les cas d'un grand nombre d'antennes d'émission, d'un grand nombre d'états et pour une taille de constellation utilisée importante. Avec les méthodes précédentes, la construction des STTCs dans ce cas-là était difficilement envisageable.

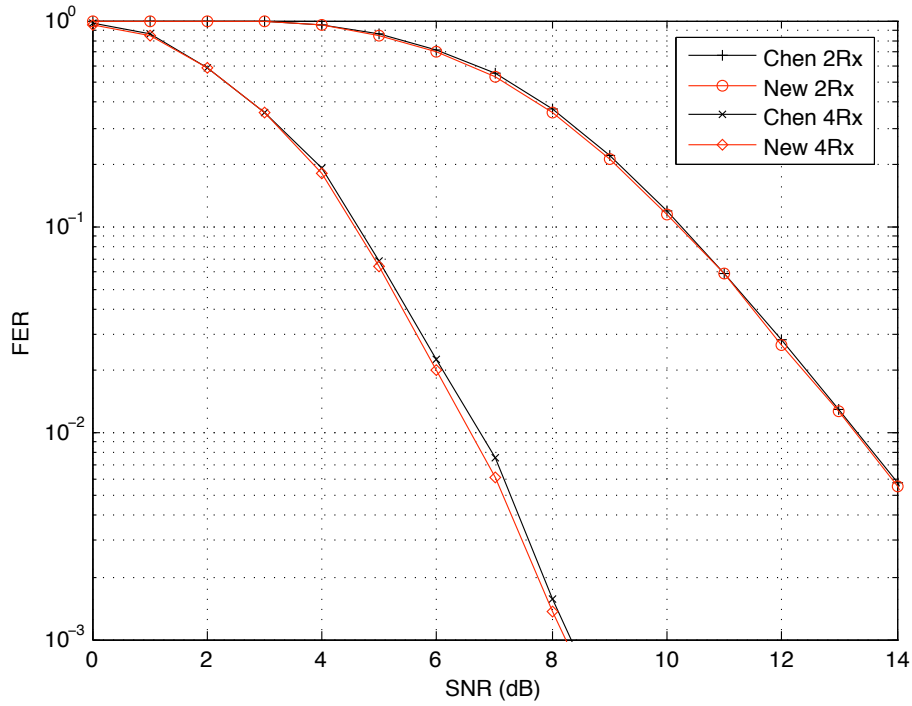


FIGURE 4.3 – FER des STTCs 8 états 8-PSK 4 antennes d'émission du tableau 4.7.

La méthode de construction des codes équilibrés améliore grandement le temps de recherche des meilleurs STTCs par rapport à une recherche exhaustive. De plus, de par sa simplicité, cette nouvelle méthode est plus rapide que la première méthode proposée dans [66, 67]. L'annexe C permet de comparer par le biais d'un exemple les deux méthodes existantes pour la création des STTCs équilibrés. Par la suite, une nouvelle méthode appelée *coset partitioning* réduisant grandement le nombre de codes à analyser va être présentée.

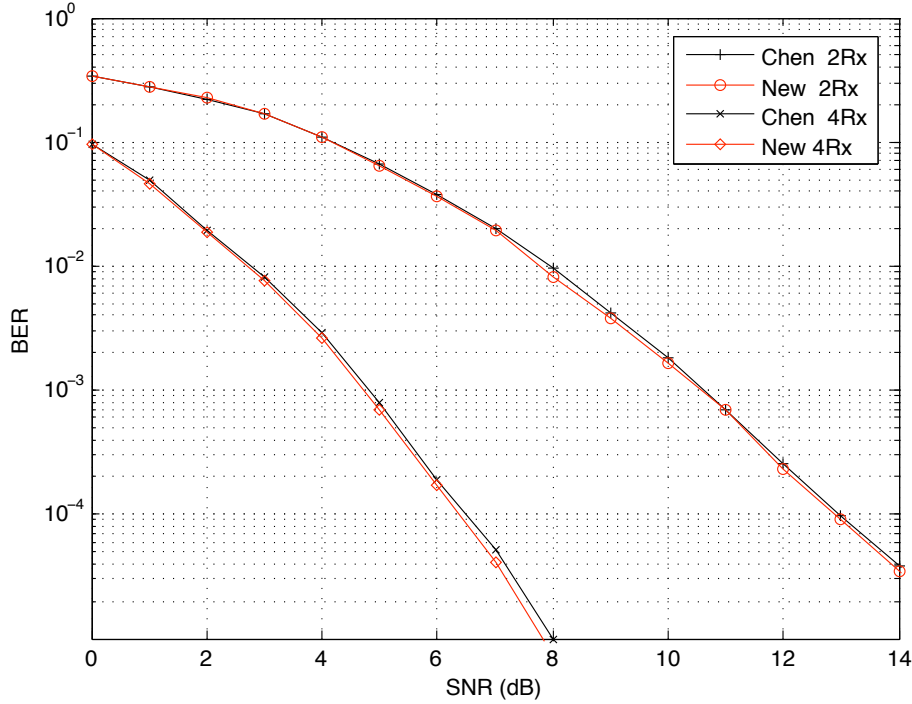


FIGURE 4.4 – BER des STTCs 8 états 8-PSK 4 antennes d'émission du tableau 4.7.

## 4.2 Coset partitioning

### 4.2.1 Description de la méthode

Le coset partitioning est une extension du set partitioning proposé par Ungerboeck dans [38–40]. Cette extension originale, proposée dans cette thèse, repose sur l'approche en cosets et en lattices de Calderbank [70]. De plus, une technique basée sur la décomposition de la DEC est utilisée pour optimiser la sélection des différentes colonnes.

En effet, pour construire les meilleurs TCM, Ungerboeck propose 3 règles numérotées 2.1, 2.2 et 2.3 dans ce document. Dans un premier temps, l'objectif du set partitioning est de séparer en terme de distance euclidienne, les signaux correspondants à des branches parallèles dans le treillis. Ensuite, il faut séparer par les plus grandes distances Euclidiennes possibles les signaux partant ou arrivant sur un même état. Pour cela, la constellation est divisée en ensembles.

Dans [70], une nouvelle technique de construction des TCMs est proposée toujours pour les systèmes SISO. Cette méthode basée sur une approche en cosets et en lattices permet de simplifier le set partitioning dans le cas où la taille de la constellation est importante. La constellation est divisée en cosets et non en ensembles comme dans le cas du set partitioning. A chaque instant  $t$ , le codeur sélectionne un coset. Ensuite, le codeur sélectionne un signal dans ce coset qui est alors envoyé par l'unique antenne d'émission.

Le coset partitioning proposé dans ce document est basé sur l'approche de Calderbank utilisée dans le cas des systèmes MIMO. Ainsi, les symboles MIMO sont séparés en cosets et non en simples sous-ensembles.

De plus, une décomposition de la DEC accompagne ce partitionnement en cosets. En effet,

considérons un code  $2^{n\nu}$  états  $2^n$ -PSK  $n_T$  antennes d'émission. On pose :

- $\alpha_F = \lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor$  (où  $F$  correspond au terme 'First');
- $\alpha_L = \nu - \alpha_F$  (où  $L$  correspond au terme 'Last').

Pour assurer la maximisation des DECs d'après la propriété 10, la somme des  $\alpha$  premiers termes de la DEC

$$\sum_{t=1}^{\alpha} D_E(X_s^t, X_s^t) \quad (4.22)$$

doit être maximisée pour  $\alpha \in \{1, \dots, \alpha_F\}$ , pour toutes les paires  $(X_s^t, X_s^t)$ , via la sélection des  $\alpha_F$  premiers blocs. De la même manière, pour toutes les paires  $(X_s^t, X_s^t)$  et indépendamment de la somme des  $\alpha_F$  premiers termes de la DEC, la somme des  $\alpha$  derniers termes de la DEC

$$\sum_{t=L-\alpha+1}^L D_E(X_s^t, X_s^t) \quad (4.23)$$

doit être maximisée pour  $\alpha \in \{1, \dots, \alpha_L\}$  via la sélection des  $\alpha_L$  derniers blocs. Le  $(\alpha_F + 1)^e$  bloc doit être sélectionné pour maximiser la DEC et créer un code ayant un gain de diversité supérieur à 1, cela en fonction des précédentes sélections.

L'ensemble des  $\alpha_F$  premiers blocs est appelé  $\mathcal{B}_F$  et l'ensemble des  $\alpha_L$  derniers blocs est appelé  $\mathcal{B}_L$ . Aucun bloc de  $\mathbf{G}$  n'appartient à la fois à  $\mathcal{B}_F = \{[G_1^1 \dots G_n^1], \dots, [G_1^{\alpha_F} \dots G_n^{\alpha_F}]\}$  et à  $\mathcal{B}_L = \{[G_1^{\nu-\alpha_L+2} \dots G_n^{\nu-\alpha_L+2}], \dots, [G_1^{\nu+1} \dots G_n^{\nu+1}]\}$  i.e.

$$\mathcal{B}_F \cap \mathcal{B}_L = \emptyset \quad (4.24)$$

Ainsi, les  $\alpha_F$  premiers blocs et les  $\alpha_L$  derniers blocs sont totalement indépendants i.e. les choix d'un bloc de  $\mathcal{B}_F$  ne dépend pas des blocs de  $\mathcal{B}_L$ . Le  $(\alpha_F + 1)^e$  bloc crée la dépendance entre les  $\alpha_F$  premiers termes de la DEC et les  $\alpha_L$  derniers termes de la DEC dans le but de maximiser la DEC minimale.

*Remarque :* Si  $\nu + 1 = 2$ ,  $\alpha_L = 0$ . Après le choix du premier bloc qui doit être optimal, le deuxième bloc doit lui aussi être optimal et aussi maximiser la DEC.

Le coset partitioning peut être énoncé à l'aide des propriétés suivantes :

**Propriété 14.** *Les symboles MIMO générés sont équiprobables.*

**Propriété 15.** *Les symboles MIMO partant d'un même état ou arrivant dans un même état appartiennent à un même coset.*

**Propriété 16.** *Les éléments de chaque coset doivent être séparés par une DE minimale qui doit être maximale.*

Pour un STTC  $2^{n\nu}$  états  $2^n$ -PSK, la matrice génératrice a  $\nu + 1$  blocs de  $n_T$  lignes et  $n$  colonnes. Ainsi, dans le but de satisfaire les propriétés du coset partitioning, les  $n$  colonnes  $[G_1^i \dots G_n^i]$  de chaque bloc  $i$ , avec  $i = \overline{1, \nu + 1}$  doivent générer un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$

$$\Lambda_i = \left\{ \sum_{l=1}^n x_l G_l^i \bmod 2^n / x_l \in \{0, 1\} \right\}, \quad (4.25)$$

avec  $\text{card}(\Lambda_i) = 2^n$ .

En d'autres termes, les colonnes de chaque bloc doivent être linéairement indépendantes et donc doivent respecter

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i G_i = 0 \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T} \text{ mod } 2^n, \text{ avec } \lambda_n \in \{-1, 0, 1\}, \forall i = \overline{1, n} \Leftrightarrow \lambda_i = 0, \forall i = \overline{1, n}. \quad (4.26)$$

Pour obtenir un sous-groupe, la sélection des  $n$  colonnes de chaque bloc doit respecter la propriété 3. Ainsi, les colonnes doivent être choisies de la manière suivante :

- la première colonne  $G_1^i$  doit appartenir à  $\mathcal{C}_0^*$  ;
- dans le cas où  $l - 1$  colonnes du bloc  $i$  ont déjà été sélectionnées, la colonne  $G_l^i$  avec  $l \in \{2, \dots, n\}$  et  $i \in \{1, \dots, \nu + 1\}$ , ne doit pas appartenir à

$$\Lambda_{l-1} = \left\{ \sum_{l'=1}^{l-1} x_{l'} G_{l'}^i \text{ mod } 2^n / x_{l'}^i \in \{0, 1\} \right\} \quad (4.27)$$

et doit appartenir à  $\mathcal{C}_0^*$  ou au coset relatif à un élément généré par les  $l - 1$  premières colonnes.

Ainsi, les colonnes de chaque bloc génèrent un sous-groupe. De plus, pour assurer la maximisation de la DEC, la somme des  $\alpha \in \{1, \dots, \alpha_F\}$  premiers termes de la DEC

$$\sum_{t=1}^{\alpha} D_E(X_s^t, X_s^t), \text{ avec } \alpha \in \{1, \dots, \alpha_F\} \quad (4.28)$$

doit être maximisée pour toutes les paires  $(X_s^t, X_s^t)$ . Ceci implique que les  $\alpha_F$  premiers blocs doivent être sélectionnés de la manière suivante :

- le dernier bloc utilisé pour calculer  $D_E(X_s^1, X_s^1)$ , le premier terme de la DEC, doit être sélectionné pour générer un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  contenant les symboles MIMO séparés par la plus large DE minimale. Les blocs ayant cette propriété sont appelés blocs optimaux ;
- si  $i$  blocs ont déjà été sélectionnés avec  $i \in \{1, \dots, \alpha_F - 1\}$ , le  $(i + 1)^e$  bloc doit être sélectionné de manière à maximiser  $\sum_{t=1}^{i+1} D_E(X_s^t, X_s^t)$ .

De la même manière, la somme des  $\alpha \in \{1, \dots, \alpha_L\}$  derniers termes

$$\sum_{t=L-\alpha+1}^L D_E(X_s^t, X_s^t), \text{ avec } \alpha \in \{1, \dots, \alpha_L\} \quad (4.29)$$

doit être maximisée pour toutes les paires  $(X_s^t, X_s^t)$ . Ainsi, les  $\alpha_L$  derniers blocs doivent être sélectionnés de la manière suivante :

- le premier bloc utilisé pour calculer le dernier terme de la DEC,  $D_E(X_s^L, X_s^L)$  doit être un bloc optimal. Ainsi, la plus petite distance séparant les symboles MIMO générés par le dernier bloc doit être maximale ;
- si  $\alpha$  blocs ont déjà été sélectionnés avec  $\alpha \in \{1, \dots, \alpha_L - 1\}$ , le  $(\alpha + 1)^e$  bloc doit être sélectionné de manière à maximiser  $\sum_{t=L-\alpha}^L D_E(X_s^t, X_s^t)$ .

Pour créer les meilleurs codes  $2^n$ -PSK, nous devons sélectionner le premier bloc  $B_1$  et le dernier bloc  $B_{\nu+1}$  qui génèrent respectivement les sous-groupes  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_{\nu+1}$ . Ces deux sous-groupes sont notés  $\Lambda_1^F$  et  $\Lambda_1^M$  respectivement parce qu'ils génèrent les symboles venant de



(‘originating From’) et convergeant vers (‘Merging to’) un même état. Si l’ensemble des symboles MIMO est noté  $\Lambda$ , alors chaque coset  $\Lambda/\Lambda_1^F$  contient les symboles MIMO venant d’un même état. De la même manière, chaque coset de  $\Lambda/\Lambda_1^M$  contient les symboles MIMO convergeant vers un même état. Pour obtenir les codes avec les meilleures performances, il faut dans un premier temps que les éléments de chaque coset de  $\Lambda/\Lambda_1^F$  et de  $\Lambda/\Lambda_1^M$  soient séparés par la plus grande DE minimale. La liste des blocs optimaux 4-PSK de 2 à 8 antennes d’émission, ainsi que la liste des blocs optimaux pour 8-PSK de 2 à 6 antennes seront données dans la partie 4.2.2.

Pour certains codes,  $m$  colonnes du dernier bloc mémoire avec  $m \in \{1, \dots, n-1\}$  peuvent être égales au vecteur nul. Le nombre d’états de ces codes est  $2^{n\nu-m}$ . Par exemple, le tableau 4.8 présente certains des codes 4-PSK et 8-PSK de Chen *et al.* ayant cette particularité.

Modulation	$n_T$	nb états	$\mathbf{G}$
4-PSK	2	8	$\left[ \begin{array}{cc cc cc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right]$
4-PSK	2	32	$\left[ \begin{array}{cc cc cc} 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{array} \middle  \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$
4-PSK	3	8	$\left[ \begin{array}{cc cc cc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$
4-PSK	3	32	$\left[ \begin{array}{cc cc cc} 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{array} \middle  \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$
8-PSK	2	16	$\left[ \begin{array}{ccc ccc} 2 & 4 & 7 & 3 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 7 & 6 & 7 \end{array} \middle  \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$
8-PSK	2	64	$\left[ \begin{array}{ccc ccc} 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{array} \middle  \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{array} \right]$

TABLE 4.8 – Codes de Chen *et al.* avec une colonne du dernier bloc égale au vecteur nul

En effet, considérons un STTC  $2^{n\nu-m}$  états  $2^n$ -PSK. A un instant  $t$ , l’état est donné par

$$W^t = [x_1^{t-1} \dots x_n^{t-1} | \dots | x_1^{t-\nu-1} \dots x_n^{t-\nu-1} | \square \dots \square x_{n-m+1}^{t-\nu} \dots x_n^{t-\nu}] \quad (4.30)$$

où  $\square$  correspond à une cellule mémoire d’une colonne nulle. La valeur de cette cellule n’a alors aucune influence sur la génération des symboles MIMO. Pour simplifier la notation, considérons le cas où  $n = 2$  et  $m = 1$ . Ainsi, un état s’écrit

$$W^t = [x_1^{t-1} x_2^{t-1} | \dots | x_1^{t-\nu-1} x_2^{t-\nu-1} | \square x_2^{t-\nu}]. \quad (4.31)$$

Les états étendus précédents (à l’instant  $t-1$ ) permettant d’obtenir l’état de l’expression ci-dessus à l’instant  $t$  sont

$$\begin{aligned} X^{t-1} &= [x_1^{t-1} x_2^{t-1} | \dots | 0 x_2^{t-\nu} | \square 0] \\ X^{t-1} &= [x_1^{t-1} x_2^{t-1} | \dots | 0 x_2^{t-\nu} | \square 1] \\ X^{t-1} &= [x_1^{t-1} x_2^{t-1} | \dots | 1 x_2^{t-\nu} | \square 0] \\ X^{t-1} &= [x_1^{t-1} x_2^{t-1} | \dots | 1 x_2^{t-\nu} | \square 1]. \end{aligned}$$

De ce fait, il apparaît que la première colonne de l'avant dernier bloc et la dernière colonne du dernier bloc génèrent les symboles MIMO convergeants vers un même état. Ainsi, pour ce type de code, il est nécessaire que :

- les colonnes du premier bloc forment un sous-groupe  $\Lambda_1^F$ . Les éléments de ce sous-groupe doivent être séparés par la plus grande DE minimale. C'est à dire que le premier bloc doit être optimal ;
- les  $m$  premières colonnes de l'avant dernier bloc et les  $n-m$  dernières colonnes du dernier bloc doivent générer un sous-groupe  $\Lambda_1^M$ . Les éléments de ce sous-groupe doivent être séparés par les plus grandes DEs qui permet la maximisation de la DEC minimale.

Si les colonnes de la matrice génératrice sont sélectionnées comme stipulé ci-dessus, la propriété 14 est vérifiée. Les STTCs ainsi créés sont des codes équilibrés (c.f. définition 3.1). En effet, l'ensemble des symboles MIMO générés par un code construit via le coset partitioning est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{nT}$  donné par

$$\Lambda_T = \sum_{i=1}^{\nu+1} \Lambda_i, \quad (4.32)$$

où  $\Lambda_i$  est le sous-groupe généré par les  $n$  colonnes du  $i^e$  bloc de  $\mathbf{G}$ .

*Remarque :* les STTCs construits à l'aide du coset partitioning respectent aussi les deux premières règles du set partitioning (règle 2.1 et règle 2.2). Seule la troisième règle du set partitioning (règle 2.3) n'est pas respectée par cette nouvelle méthode de construction car il n'existe pas de branches parallèles dans les STTCs. Des branches parallèles d'un treillis sont des branches partant d'un même état et arrivant dans un même état.

#### 4.2.2 Blocs optimaux

Les ensembles de blocs optimaux 4-PSK pour 2 à 8 antennes d'émission ont été générés de manière exhaustive. En effet, une recherche sur la totalité des blocs a été faite car le temps de recherche des blocs optimaux était relativement court. Par exemple, dans le cas de 3 antennes d'émission, le temps de recherche était de l'ordre de la seconde. Les blocs optimaux 4-PSK contiennent un élément de  $\mathcal{C}_0^*$  et un élément appartenant à un coset relatif au premier élément. Ainsi, les blocs optimaux sont basés sur la permutation des lignes ou des colonnes des blocs suivants :

- pour 2 antennes d'émission :  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1/3 \end{bmatrix}^T$  ;
- pour 3 antennes d'émission :  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T$  ;
- pour 4 antennes d'émission :  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T$  ;
- pour 5 antennes d'émission :  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T$  ;
- pour 6 antennes d'émission :  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T$  ;
- pour 7 antennes d'émission :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T ;$$

– pour 8 antennes d'émission :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T .$$

La notation '1/3' doit être lue '1 ou 3'.

Nous considérons le spectre des distances des blocs de la matrice  $\mathbf{G}$  comme la répartition des DEs entre les différents symboles MIMO générés par les blocs. Le spectre des distances de chaque bloc proposé précédemment est optimal et est fourni à la figure 4.5 dans le cas de 2, 3 et 4 antennes d'émission et à la figure 4.6 pour 5, 6, 7 et 8 antennes d'émission. Les DEs entre deux symboles identiques, étant égales à 0, ne sont pas représentées sur ces figures.

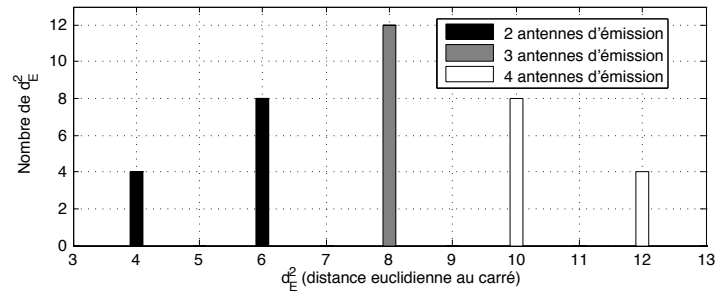


FIGURE 4.5 – Spectres de distances des blocs optimaux dans le cas d'une modulation 4-PSK pour 2, 3 et 4 antennes d'émission

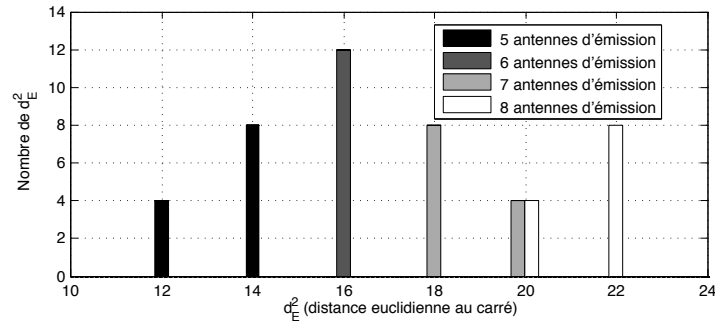


FIGURE 4.6 – Spectres de distances des blocs optimaux dans le cas d'une modulation 4-PSK pour 5, 6, 7 et 8 antennes d'émission

De plus, une recherche systématique a permis de trouver les blocs optimaux 8-PSK de 2 à 6 antennes d'émission. Le reste des blocs optimaux est donné par la permutation des lignes et des colonnes des blocs suivants :

- pour 2 antennes d'émission, deux ensembles de blocs peuvent être différenciés. Le 1<sup>er</sup> ensemble de blocs est  $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2/6 \\ 4 & 2/6 & 1/3/5/7 \end{bmatrix}$  avec une DE minimale de 2,58. Un autre ensemble de bloc  $\begin{bmatrix} 4 & V_1 & V_2 \\ 4 & V_1 & V_2 + 4 \end{bmatrix}$  avec  $V_1 \in \{2, 6\}$  et  $V_2 \in \{1, 3, 5, 7\}$  ou  $\begin{bmatrix} 4 & V_1 & V_2 \\ 4 & V_1 + 4 & V_3 \end{bmatrix}$  avec  $V_1 \in \{2, 6\}$  et  $(V_2, V_3) \in \{(1, 3), (3, 1), (4, 7), (7, 5)\}$  a une DE minimale entre ses

éléments égale à 4, ce qui est supérieure à la DE minimale des blocs précédents. Cependant, il n'est pas possible d'utiliser deux blocs de ce type pour obtenir un code ayant de bonnes performances. En effet, le code ainsi créé aurait un rang unitaire.

- pour 3 antennes d'émission :  $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2/6 \\ 4 & g_1 & g_2 \\ 4 & g_1 & g_2 + 4 \bmod 8 \end{bmatrix}$  avec  $g_1 \in \{2, 6\}$  et  $g_2 \in \{1, 5\}$  ou

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2/6 \\ 4 & g_1 & g_2 \\ 4 & g_1 + 4 \bmod 8 & g_3 \end{bmatrix} \text{ avec } g_1 \in \{2, 6\} \text{ et } (g_2, g_3) \in \{(1, 3), (3, 1), (5, 7), (7, 5)\};$$

- pour 4 antennes d'émission :  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6/2 \\ 4 & g_1 & g_2 \\ 4 & g_1 & g_3 \end{bmatrix}$  avec  $g_1 \in \{2, 6\}$  et  $(g_2, g_3) \in \{(1, 5),$

$(5, 1), (7, 3), (7, 3)\}$  ou

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6/2 \\ 4 & g_1 & g_2 \\ 4 & g_1 + 4 \bmod 8 & g_3 \end{bmatrix} \text{ avec } g_1 \in \{2, 6\} \text{ et } (g_2, g_3) \in \{(1, 3), (3, 1), (5, 7), (7, 5)\};$$

- pour 5 antennes d'émission, le nombre de blocs optimaux est égal à 192. Ces blocs optimaux s'écrivent  $[V_0 \ V_1 \ V_2]$  avec
  - $V_0 = [0 \ 0 \ 4 \ 4 \ 4]^T \in \mathcal{C}_0 = \mathcal{E}_0$ ;
  - $V_1 = [0 \ 4 \ v_1^1 \ v_2^1 \ v_3^1]^T \in \mathcal{E}_1$  avec  $v_1^1, v_2^1$  et  $v_3^1 \in \{2, 4\}$ ;
  - $V_2 = [4 \ 2/6 \ v_1^2 \ v_2^2 \ v_3^2]^T \in \mathcal{E}_2$  avec  $v_1^1, v_2^1$  et  $v_3^1 \in \{1, 3, 5, 7\}$ . Etant donné leur nombre important, la totalité des blocs optimaux ne sera pas donnée;
- pour 6 antennes d'émission, le nombre de blocs optimaux est égal à 384. Ces blocs optimaux s'écrivent  $[V_0 \ V_1 \ V_2]$  avec
  - $V_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 4 \ 4]^T \in \mathcal{C}_0 = \mathcal{E}_0$ ;
  - $V_1 = [0 \ 4 \ 4 \ v_1^1 \ v_2^1 \ v_3^1]^T \in \mathcal{E}_1$  avec  $v_1^1, v_2^1$  et  $v_3^1 \in \{2, 4\}$ ;
  - $V_2 = [4 \ 2/6 \ 2/6 \ v_1^2 \ v_2^2 \ v_3^2]^T \in \mathcal{E}_2$  avec  $v_1^1, v_2^1$  et  $v_3^1 \in \{1, 3, 5, 7\}$ .

Le spectre des distances de chaque bloc proposé précédemment est optimal et est fourni à la figure 4.7 dans le cas de 2, 3 et 4 antennes d'émission et à la figure 4.6 pour 5, 6, 7 et 8 antennes d'émission. Dans le cas de 2 antennes d'émission, le bloc ayant une DE minimale égale à 2,58 est seulement représenté. De la même manière que précédemment, les DEs entre deux symboles identiques ne sont pas représentées dans ces figures.

### 4.2.3 Exemple de construction des meilleurs STTCs $2^n$ états $2^n$ -PSK $n_T$ antennes d'émission

Les symboles MIMO appartiennent à  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . La matrice génératrice  $\mathbf{G}$  est constituée de 2 blocs de  $n$  colonnes :  $\mathcal{B}_i = [G_1^i G_2^i \cdots G_n^i]$  avec  $i \in \{1, 2\}$ . Nous considérons qu'aucune des colonnes de  $\mathbf{G}$  n'est égale au vecteur nul. Si le coset partitioning est utilisé, le premier et le dernier bloc génèrent des sous-groupes  $\Lambda_1^F$  et  $\Lambda_1^M$ . Par exemple, il est possible de représenter le treillis, comme le montre la figure 4.9 dans le cas d'un STTC 8 états 8-PSK et  $n_T$  antennes d'émission.

Chaque colonne de la matrice génératrice  $\mathbf{G}$  est égale à un des symboles MIMO représentés

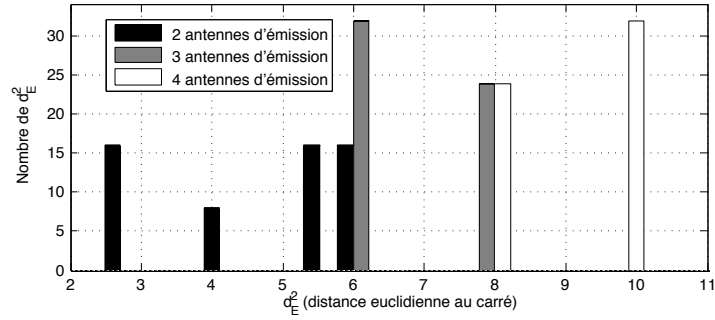


FIGURE 4.7 – Spectres des distances des blocs optimaux dans le cas d’une modulation 8-PSK pour 2, 3 et 4 antennes d’émission

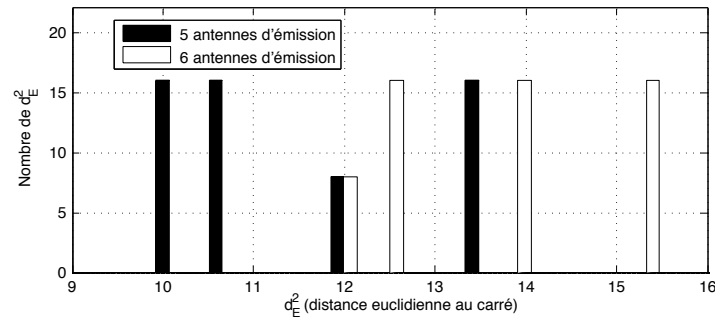


FIGURE 4.8 – Spectres des distances des blocs optimaux dans le cas d’une modulation 8-PSK pour 5 et 6 antennes d’émission

dans la figure 4.9. On obtient alors

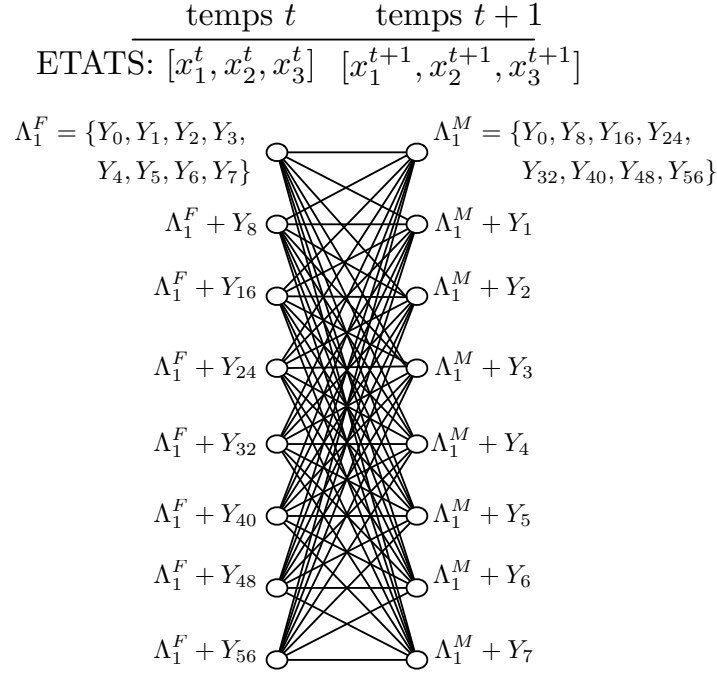
$$\mathbf{G} = [Y_1 Y_2 Y_4 | Y_8 Y_{16} Y_{32}] . \quad (4.33)$$

Dans ce treillis, les états sont représentés par des points et les transitions entre les états par des lignes. A chaque transition correspond un état étendu. Les éléments  $Y_i \in \mathbb{Z}_8^{n_T}$  représentent les symboles MIMO associés à un état étendu. L’index  $i$  est la valeur décimale de l’état étendu avec  $x_1^t$  le bit de poids faible. Les ensembles notés à droite et à gauche du treillis correspondent aux symboles MIMO partant d’un même état et arrivant dans un même état respectivement.

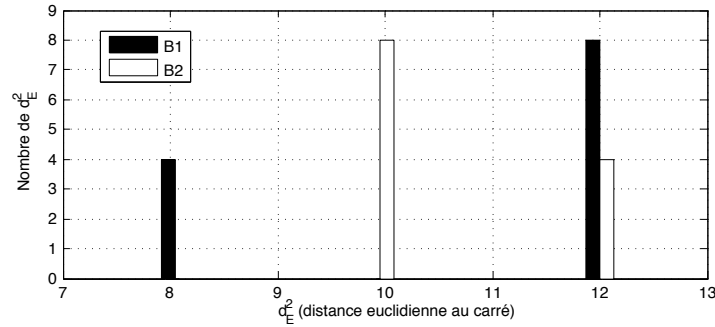
Pour créer les meilleurs codes  $2^n$ -PSK  $2^n$  états  $n_T$  antennes d’émission, il suffit de construire l’ensemble des codes formés par deux blocs optimaux. Parmi ces codes, les plus performants sont ceux ayant une DEC minimale qui est maximale.

Le tableau 4.9 présente les codes de Chen *et al.* [62] 4 états de 2 à 4 antennes d’émission, les codes de Rassool *et al.* 4 états [64] pour 5 et 6 antennes d’émission et des nouveaux codes 4 états de 2 et 6 antennes d’émission. Les codes de Chen *et al.* ayant l’indice \* peuvent être construits à l’aide du coset partitioning. Ils sont constitués de deux blocs optimaux et ont une DEC minimale.

Le code de Chen *et al.* à 4 antennes d’émission et les codes de Rassool à 5 et 6 antennes du tableau 4.9 ne peuvent être générés à l’aide du coset partitioning. La DEC minimale de ces codes est identique à celle des nouveaux codes proposés. La seule différence réside dans les spectres des distances des blocs des codes de Chen *et al.* et de Rassool. En effet, certains de ces blocs ne sont pas des blocs optimaux. Par conséquent, les DEs minimales entre les éléments


 FIGURE 4.9 – STTC 8 états 8-PSK  $n_T$  antennes d'émission

généérés par ces blocs sont inférieures à celles des nouveaux codes proposés. La figure 4.10 présente le spectre des distances du premier bloc ( $B_1$ ) en noir et celui du deuxième bloc ( $B_2$ ) en blanc du code de Chen *et al.* 4 états 4-PSK 4 antennes d'émission. Ainsi, la DE minimale du code de Chen *et al.* 4 états 4-PSK 4 antennes d'émission séparant les éléments générés par le premier bloc est 8. La DE minimale dans le cas d'un bloc optimal est donnée à la figure 4.6 et vaut 10.

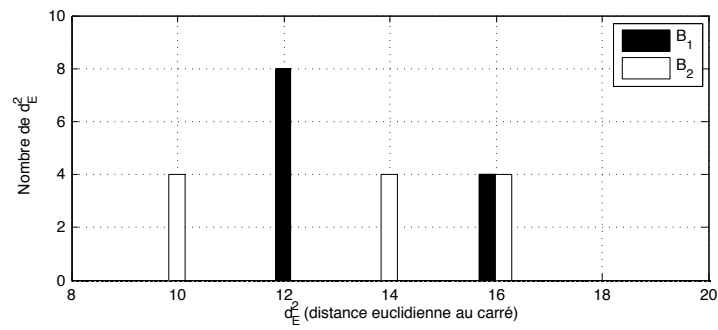

 FIGURE 4.10 – Spectres des distances des blocs du code de Chen *et al.* 4 états 4-PSK 4 antennes d'émission

De la même manière, les spectres de distances des codes 4 états 4-PSK avec 5 et 6 antennes d'émission proposés par Rassool *et al.* dans [64] sont représentés respectivement par les figures 4.11 et 4.12.

La DE minimale entre deux éléments générés par les blocs du code de Rassool 4 états 4-PSK avec 5 antennes de réception vaut 10. La distance pour un bloc optimal 4-PSK avec

Nom	$n_T$	$\mathbf{G}$	$d_{E \min}^2$
Chen* <i>et al.</i> [62]	2	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	10
Nouveau code	2	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	10
Chen* <i>et al.</i> [62]	3	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	16
Nouveau code	3	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	16
Chen <i>et al.</i> [62]	4	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	20
Nouveau code	4	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	20
Rassool <i>et al.</i> [64]	5	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	26
Nouveau code	5	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	26
Rassool <i>et al.</i> [64]	6	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	32
Nouveau code	6	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	32

TABLE 4.9 – Codes 4-PSK 4 états

FIGURE 4.11 – Spectres des distances des blocs du code de Rassool *et al.* 4 états 4-PSK 5 antennes d'émission

5 antennes d'émission vaut 12, comme le montre à la figure 4.6. De la même manière, nous pouvons observer que la DE minimale entre deux éléments générés par les blocs du code de Rassool 4 états 4-PSK avec 6 antennes de réception vaut 10. La distance pour un bloc optimal 4-PSK avec 5 antennes d'émission vaut 16, comme le montre la figure 4.6. Ainsi, comme les

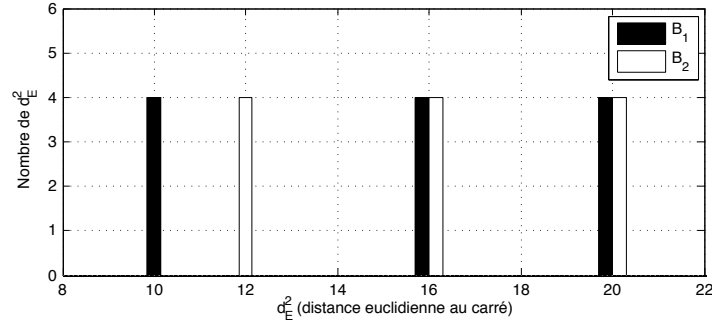


FIGURE 4.12 – Spectres des distances des blocs du code de Rassool *et al.* 4 états 4-PSK 6 antennes d'émission

blocs des codes précédemment publiés ne sont pas optimaux, la distance minimale entre deux éléments générés par chaque bloc n'est pas maximisée.

Les performances des codes du tableau 4.9 à 5 et 6 antennes sont évaluées par simulation dans le cas d'un canal lent de Rayleigh. Pour les codes avec moins de 5 antennes d'émission, seulement le FER sera présenté dans une prochaine section.

Les figures 4.13 et 4.14 présentent respectivement le FER et le BER du code de Rassool *et al.* 4 états 4-PSK 5 antennes d'émission et du nouveau code correspondant. Le gain apporté par le nouveau code par rapport au code proposé par Rassool *et al.* pour un FER de  $10^{-2}$  est d'environ 0,7 dB pour 2 antennes de réception et de 0,5 dB pour 4 antennes de réception. Pour un BER de  $10^{-4}$ , le gain apporté par le nouveau code est d'environ 0,9 dB pour 2 antennes de réception et 0,56 dB pour 4 antennes de réception.

Les figures 4.15 et 4.16 présentent respectivement le FER et le BER du code de Rassool *et al.* 4 états 4-PSK et 6 antennes d'émission et du nouveau code correspondant donnés tous deux dans le tableau 4.9. Le gain offert par le nouveau code par rapport au code proposé par Rassool *et al.* pour un FER de  $10^{-2}$  est d'environ 0,3 dB pour 2 antennes de réception et de 0,5 dB pour 4 antennes de réception. Pour un BER de  $10^{-4}$  le nouveau code apporte environ 0,35 dB de gain dans le cas de 2 antennes de réception et 0,4 dB dans le cas de 4 antennes de réception.

En utilisant les blocs optimaux, il est possible de générer des codes 8 états 8-PSK avec  $n_T$  antennes d'émission. Dans les précédentes publications, le temps de recherche étant trop important pour générer l'ensemble des codes avec un grand nombre d'antennes d'émission, seuls des codes avec 2, 3 et 4 antennes d'émission ont été proposés. Grâce au coset partitioning, il a été possible de créer des codes 8-PSK de 2 à 6 antennes d'émission, comme le montre le tableau 4.10.

Les figures 4.17 et 4.18 montrent respectivement le FER et le BER pour les STTCs 8 états 8-PSK 3 et 4 antennes d'émission. Toutes les simulations ont été effectuées avec deux antennes de réception. Dans le cas des codes à 3 et 4 antennes d'émission, les performances des nouveaux codes sont légèrement meilleures que les codes de Chen *et al.* correspondants.

#### 4.2.4 Exemple de construction des meilleurs STTCs 16 états 4-PSK avec $n_T$ antennes d'émission

Cette partie va décrire les étapes à parcourir pour générer les codes 16 états 4-PSK avec  $n_T$  antennes d'émission. Nous rappelons que les symboles MIMO appartiennent à  $\mathbb{Z}_4^{n_T}$ . Ce



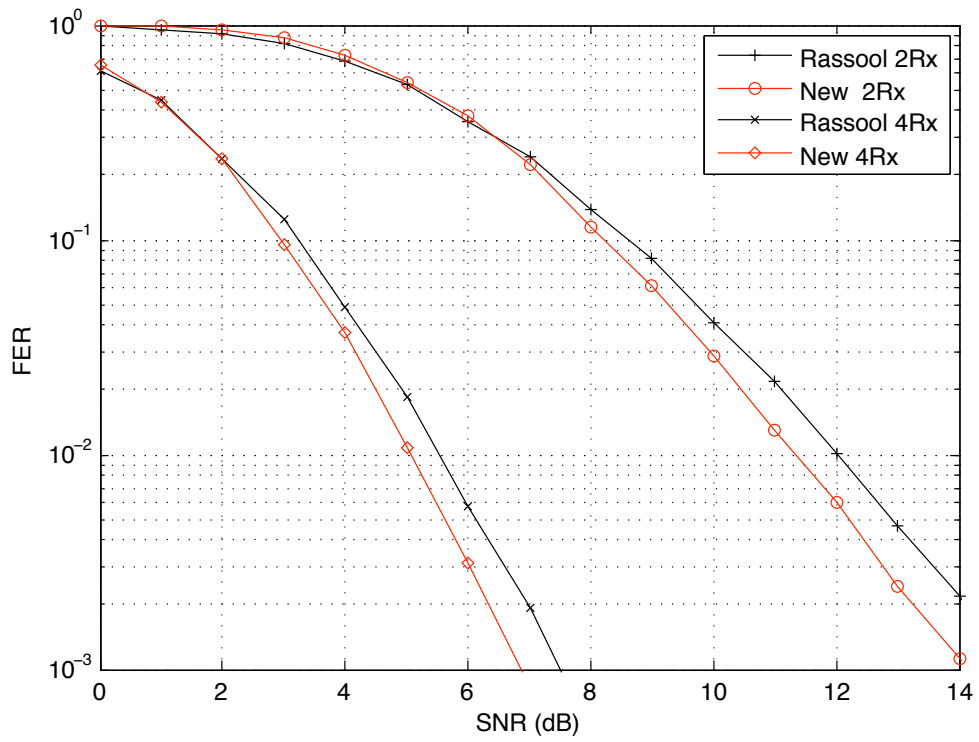


FIGURE 4.13 – FER des codes 4 états 4-PSK avec 5 antennes d'émission

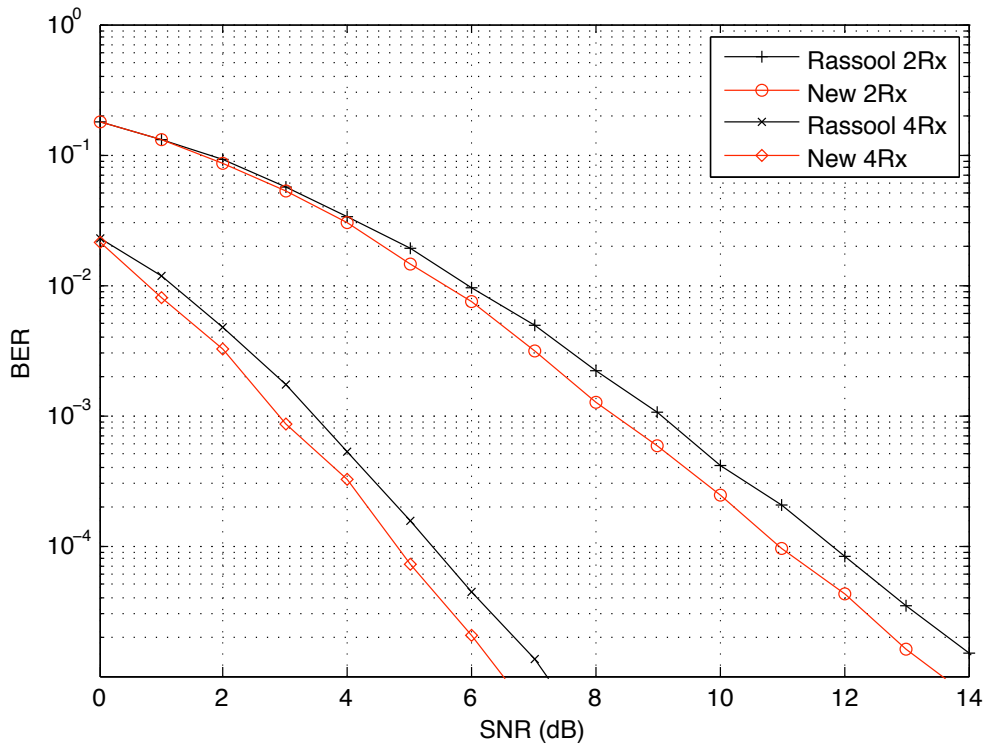


FIGURE 4.14 – BER des codes 4 états 4-PSK avec 5 antennes d'émission

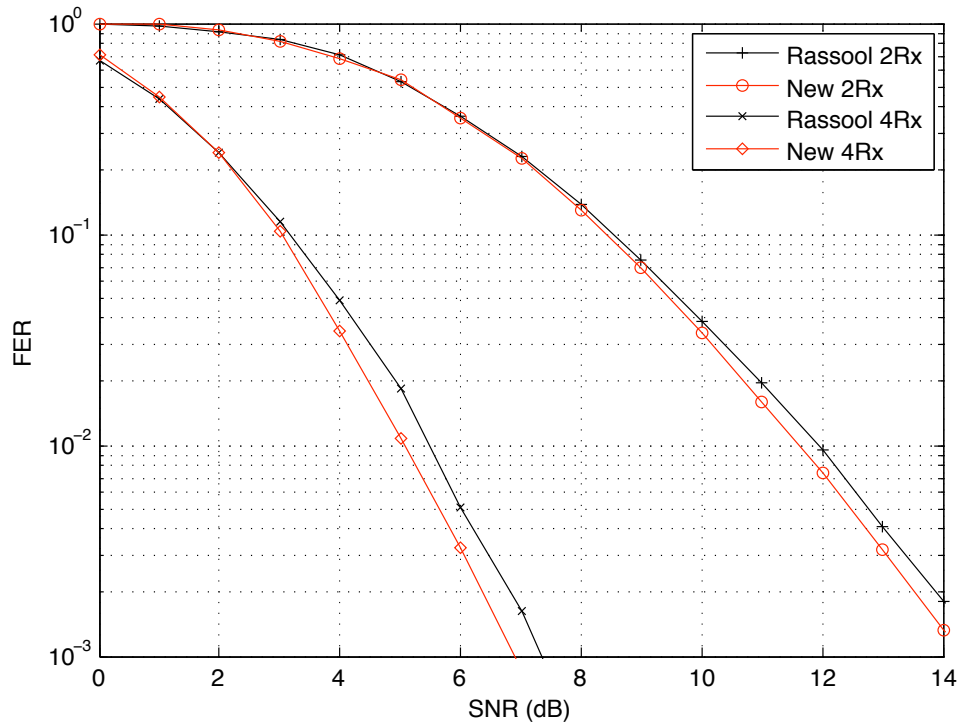


FIGURE 4.15 – FER des codes 4 états 4-PSK avec 6 antennes d'émission

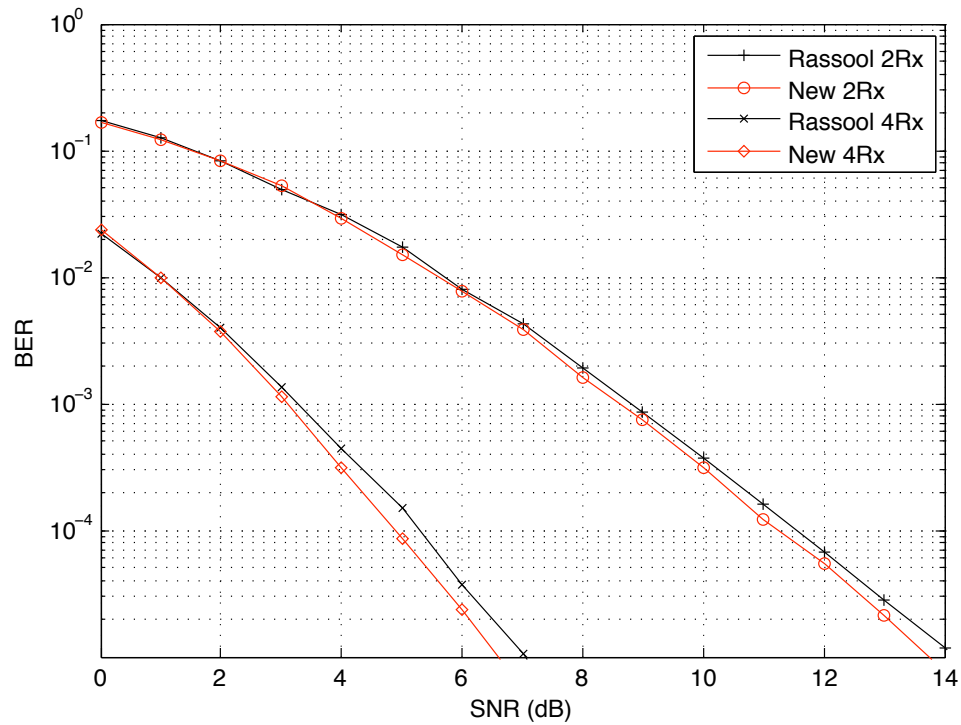


FIGURE 4.16 – BER des codes 4 états 4-PSK avec 6 antennes d'émission

$n_T$	$2^{\nu n}$	Code	$\mathbf{G}$	$d_{\min}^2$
3	8	Chen <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	12
		Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	12
4	8	Chen	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 4 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$	16.58
		Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	16
5	8	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$	20.58
6	8	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	25.17

TABLE 4.10 – STTCs 8 états 8-PSK

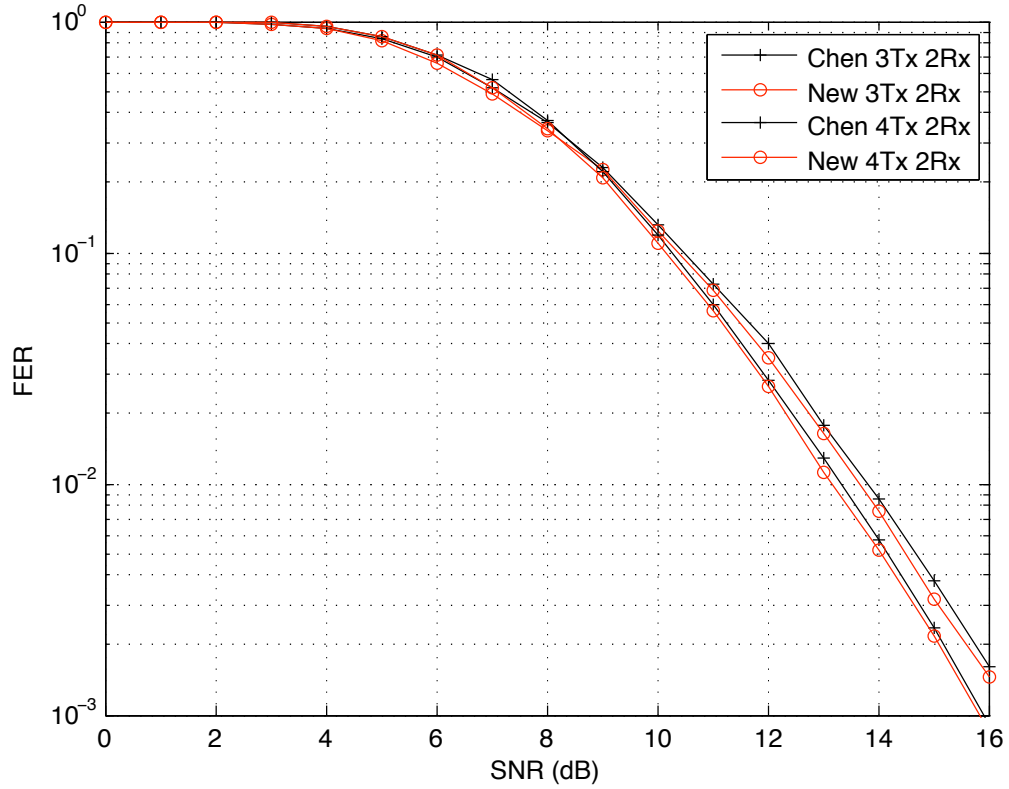


FIGURE 4.17 – FER des codes 8 états 8-PSK 3 &amp; 4 antennes d'émission

groupe peut être divisé en deux sous-ensembles de vecteurs :

- $\mathcal{E}_0 = \mathcal{C}_0$  ;
- $\mathcal{E}_1 = \bigcup (P + \mathcal{C}_0)$ , où  $P \in \mathbb{Z}_2^{n_T} \setminus [0 \cdots 0]^T$ .

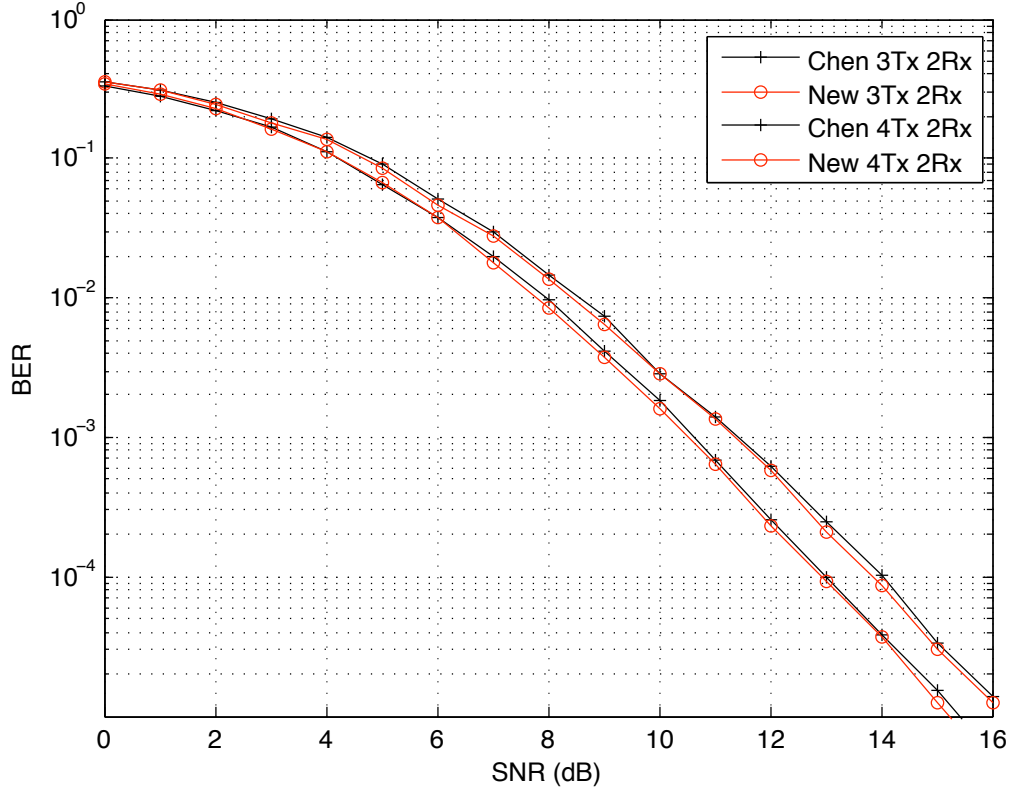


FIGURE 4.18 – BER des codes 8 états 8-PSK 3 &amp; 4 antennes d'émission

La matrice génératrice  $\mathbf{G}$  est constituée de 3 blocs de deux colonnes :  $B_i = [G_1^i G_2^i]$ , où  $G_l^i \in \mathbb{Z}_4^{n_T}$  avec  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $l \in \{1, 2\}$ . La matrice génératrice peut alors se représenter comme

$$\mathbf{G} = [G_1^1 G_2^1 | G_1^2 G_2^2 | G_1^3 G_2^3]. \quad (4.34)$$

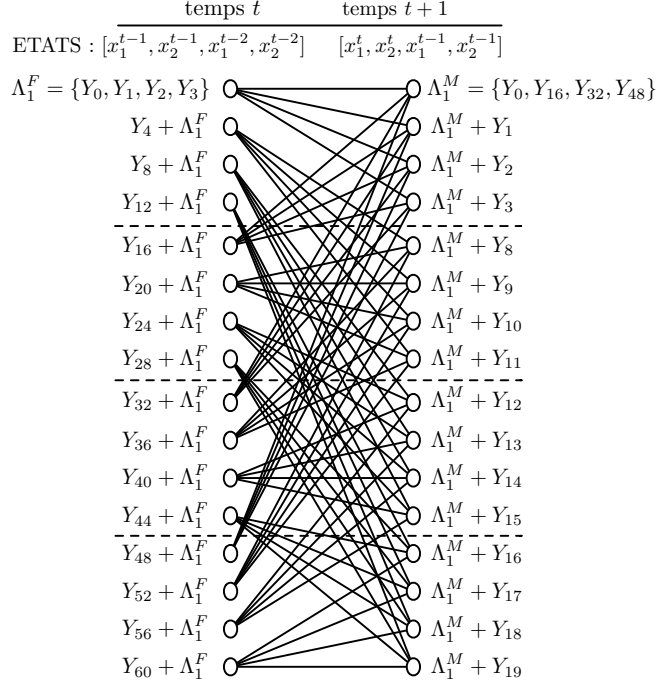
Si le coset partitioning est utilisé pour générer les STTCs, tous les blocs doivent générer des sous-groupes. De plus, comme  $\alpha_F = \alpha_L = 1$ , le premier et le dernier bloc de  $\mathbf{G}$  doivent générer respectivement les sous-groupes  $\Lambda_1^F$  et  $\Lambda_1^M$  de manière à maximiser la DE minimale entre les éléments générés. Ainsi, ces deux blocs doivent être optimaux. De cette manière, le treillis d'un code 16 états 4-PSK peut se représenter comme dans la figure 4.19. Dans ce cas, la matrice génératrice est

$$\mathbf{G} = [Y_1 Y_2 | Y_4 Y_8 | Y_{16} Y_{32}]. \quad (4.35)$$

De même que dans le treillis donné à la figure 4.9, les états sont représentés par des points et les transitions entre les états par des lignes. A chaque transition correspond un état étendu. Les éléments  $Y_i \in \mathbb{Z}_4^{n_T}$  représentent les symboles MIMO associés à un état étendu. L'index  $i$  est la valeur décimale de l'état étendu avec  $x_1^t$  le bit de poids faible. Les ensembles à gauche et à droite correspondent respectivement aux symboles MIMO partant d'un même état et arrivant dans un même état du treillis.

Pour construire  $\mathbf{G}$  via le coset partitioning, il faut procéder de la sorte :

- la première étape est la sélection des blocs  $B_1$  et  $B_3$ . Le premier bloc et le dernier bloc génèrent respectivement les sous-groupes  $\Lambda_1^F = \{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 = Y_1 + Y_2\}$  et  $\Lambda_1^M =$

FIGURE 4.19 – STTC 16 états 4-PSK  $n_T$  antennes d'émission

$\{Y_0, Y_{16}, Y_{32}, Y_{48} = Y_{16} + Y_{32}\}$ . Chaque coset de  $\Lambda/\Lambda_1^F$  et de  $\Lambda/\Lambda_1^M$  représente respectivement un ensemble de symboles partant d'un même état et un ensemble de symboles arrivant dans un même état. Ces blocs doivent être des blocs optimaux comme présenté précédemment ;

- la deuxième étape est la sélection du deuxième bloc. Ses colonnes sont sélectionnées pour former un sous-groupe. Sachant qu'un élément de  $\mathcal{C}_0^*$  est présent dans  $B_1$  et  $B_2$ , dans le but de maximiser le rang minimal du code, il est judicieux de prendre un seul élément dans  $\mathcal{C}_0^*$  pour former  $B_2$ .

Parmi tous les codes générés à l'aide du coset partitioning, les meilleurs codes sont ceux qui ont la plus grande DEC minimale. De cette manière, des STTCs 16 états 4-PSK de 2 à 8 antennes de réception ont pu être créés. La totalité des STTCs 4-PSK 16 états précédemment publiés, ainsi que les nouveaux codes correspondants sont donnés dans la prochaine partie accompagnés de leurs performances.

Les exemples donnés dans cette partie concernent seulement des STTCs 16 états à 7 et 8 antennes d'émission. De par le nombre important de codes à analyser, aucune publication n'a proposé des codes ayant ce nombre d'antennes d'émission. Cependant, la rapidité de construction des codes à l'aide du coset partitioning a permis de générer des STTCs 16 états, comme ceux présentés dans le tableau 4.11. Les figures 4.20 et 4.21 donnent leurs performances en terme de FER et de BER pour 2 et 4 antennes de réception. Ainsi, le fait de rajouter une antenne d'émission augmente la DEC minimale des codes, donc améliore les performances de la communication.

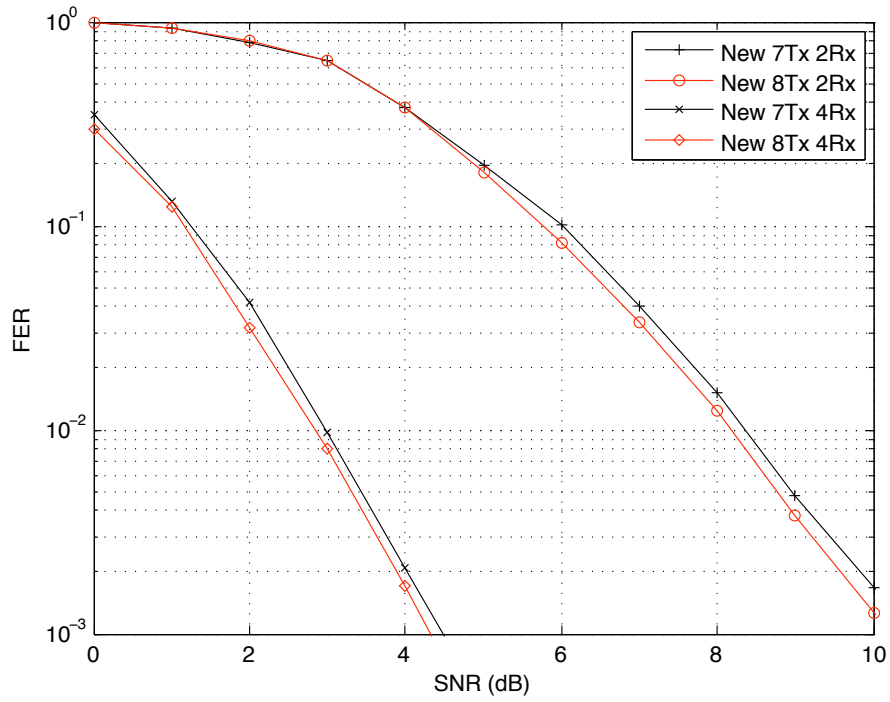


FIGURE 4.20 – FER des codes 16 états 4-PSK 7 & 8 antennes d'émission et 2 & 4 antennes de réception

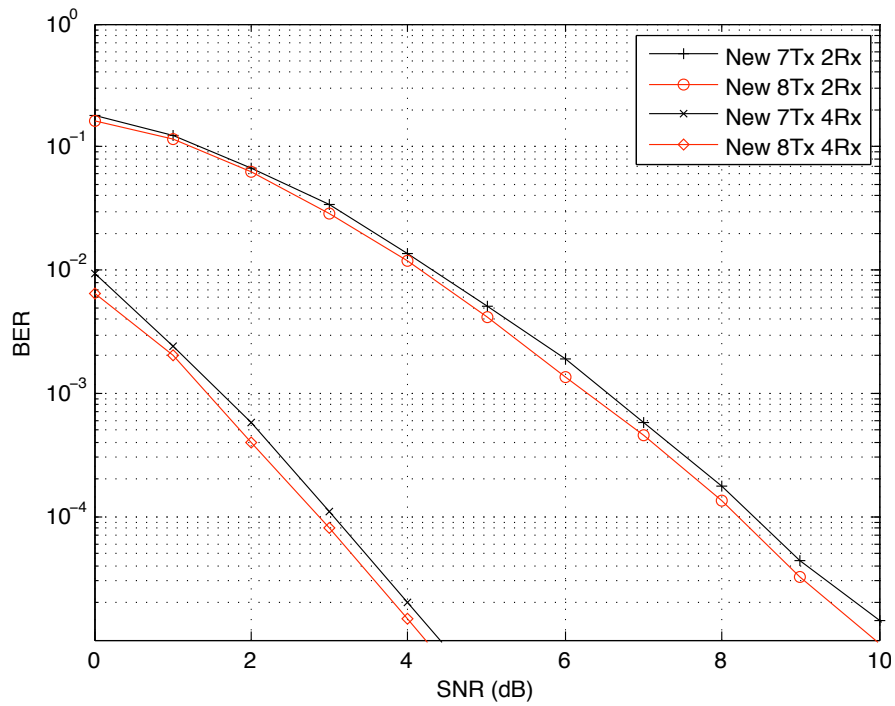


FIGURE 4.21 – BER des codes 16 états 4-PSK 7 & 8 antennes d'émission et 2 & 4 antennes de réception

$n_T$	$\mathbf{G}$	$d_{\min}^2$
7	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	56
8	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	64

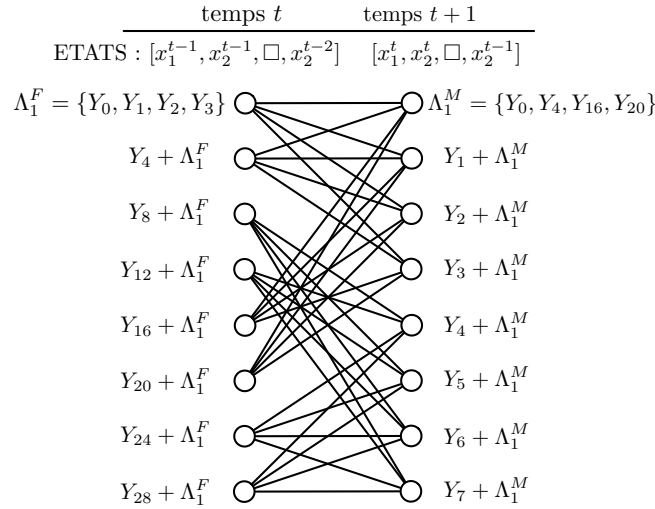
TABLE 4.11 – Nouveaux STTCs 16 états 4-PSK

#### 4.2.5 Exemple de construction de STTCs 8/32 états 4-PSK

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, certains codes ont la particularité d'avoir une ou plusieurs colonnes du dernier bloc égales au vecteur nul. Cette partie traite de la génération de ce type de codes, plus particulièrement des codes 8 états 4-PSK. Ce type de codes peut se représenter sous la forme d'un treillis, comme le montre la figure 4.22 pour un code ayant la matrice génératrice.

$$\mathbf{G} = [Y_1 Y_2 | Y_4 Y_8 | 0 Y_{16}]. \quad (4.36)$$

Dans cette figure, le terme  $\square$  correspond à la valeur de la cellule mémoire de la colonne nulle de la matrice génératrice  $\mathbf{G}$ .


 FIGURE 4.22 – Treillis d'un STTC 8 états 8-PSK  $n_T$  antennes d'émission

Pour respecter le coset partitioning il faut que :

- le premier bloc génère un sous-groupe optimal  $\Lambda_1^F = \{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 = Y_1 + Y_2\}$  ;
- la première colonne du deuxième bloc et la dernière colonne du dernier bloc génèrent un sous-groupe  $\Lambda_1^M = \{Y_0, Y_4, Y_{16}, Y_{20} = Y_{16} + Y_4\}$ . Ce groupe ne doit pas être nécessairement un sous-groupe optimal. Il ne reste que la deuxième colonne du deuxième bloc à sélectionner. Elle doit être choisie de manière à ce que le deuxième bloc génère un sous-groupe différent de  $\Lambda_1^M$ . Dans ce cas,  $Y_8 \in \mathcal{C}_P$  où  $2P = Y_4 \in \mathcal{C}_0$ . Ces trois colonnes,

en plus de former des groupes, doivent être sélectionnées de manière à maximiser la somme des 2 derniers termes de la DEC.

De cette manière, il a été possible de trouver des codes avec 8 et 32 états utilisant 2 à 6 antennes d'émission. Le tableau 4.12 montre ces codes pour 4 et 5 antennes d'émission. Les autres codes seront présentés dans une prochaine partie concernant exclusivement les nouveaux codes et leurs performances.

Nb antennes	nb états	Nom	<b>G</b>	$d_{\min}^2$
4	8	Chen <i>et al.</i> <i>et al.</i> *	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	26
		Nouveau code	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	26
5	32	Rassool <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	44
		Nouveau code	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	44

TABLE 4.12 – STTCs 4 états 4 antennes d'émission et STTCs 32 états 4-PSK 5 antennes d'émission

Le FER et le BER des codes du tableau 4.12 obtenus avec 2 antennes de réception sont présentés respectivement par les figures 4.23 et 4.24. Les performances des nouveaux codes sont légèrement meilleures que celles des codes proposés par Chen *et al.*.

#### 4.2.6 Exemple de réduction du temps pour obtenir les STTCs 4-PSK à l'aide du coset partitioning

Pour souligner l'intérêt du coset partitioning, nous allons comparer les temps nécessaires pour rechercher les meilleurs STTCs à l'aide, dans un premier temps, d'une recherche exhaustive, puis à l'aide du coset partitioning. Pour trouver les meilleurs STTCs, les DEC minimales doivent être calculées pour chaque code. La durée de cette opération est relativement importante, en particulier lorsque l'on considère des grandes séquences d'entrée, typiquement pour des séquences d'entrée de 8 bits ou plus. En effet, pour une séquence d'entrée de 8 bits, il y a  $(2^8)^2/2 = 32\,768$  DEC à calculer.

Pour limiter le temps de recherche des meilleurs STTCs, l'idée est de réduire l'ensemble des codes pour lesquels la DEC minimale doit être calculée, ce que fait parfaitement le coset partitioning. Les tableaux 4.13 et 4.14 montrent le nombre de codes générés avec une recherche exhaustive et le nombre de codes générés à l'aide du coset partitioning pour des STTCs 4 états 4-PSK avec 2 à 6 antennes d'émission et pour des STTCs 16 états 8-PSK avec 2 à 5 antennes d'émission. Le pourcentage de codes générés à l'aide du coset partitioning par rapport au nombre total de codes est aussi indiqué dans ces tableaux.

Ainsi, le temps total pour trouver les meilleurs codes avec le coset partitioning représente  $9,7 \times 10^{-2}$  % du temps que prendrait une recherche exhaustive dans le cas d'un STTC 4 états 4-PSK avec 2 antennes d'émission. En comparaison, si la construction des STTCs 4 états 4-



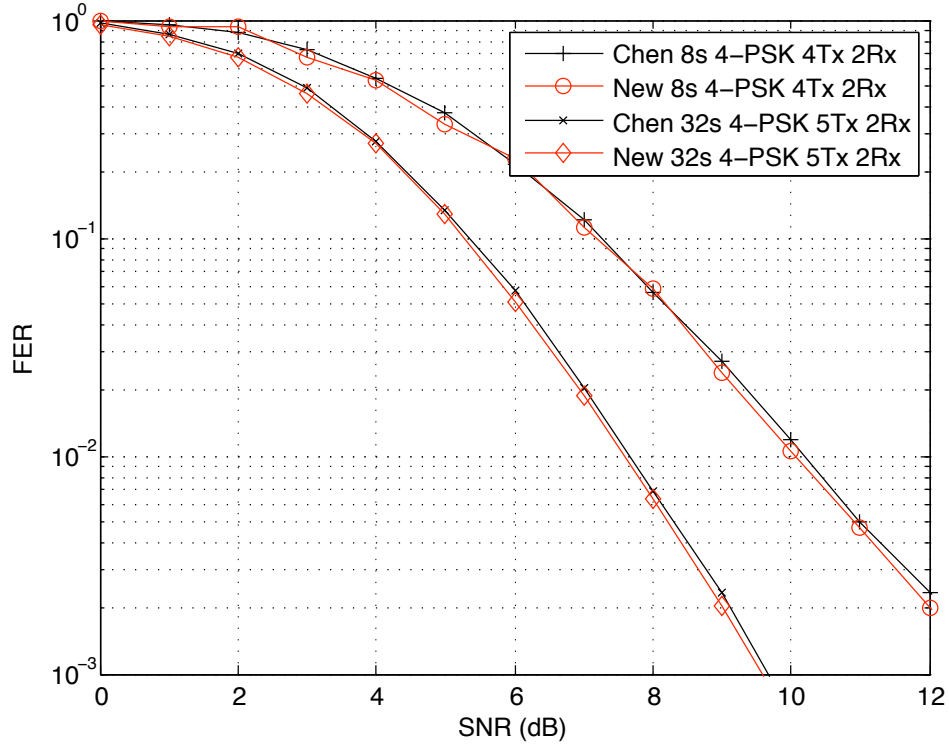


FIGURE 4.23 – FER des STTCs 8 états 4-PSK 4 antennes d'émission et des STTCs 32 états 4-PSK 5 antennes d'émission

$n_T$	Nombre de codes obtenus avec		Pourcentage de codes générés
	Recherche exhaustive	Coset partitioning	
2	$4^8 = 65\,536$	64	0,0977 %
3	$4^{12} = 16\,777\,216$	576	0,0034 %
4	$4^{16} = 4,295\,0 \times 10^9$	4096	$9,536\,7 \times 10^{-5}$ %
5	$4^{20} = 1,099\,5 \times 10^{12}$	14400	$2,328\,7 \times 10^{-6}$ %
6	$4^{24} = 2,814\,7 \times 10^{14}$	230400	$8,185\,5 \times 10^{-8}$ %

TABLE 4.13 – Nombre de STTCs 4 états 4-PSK

PSK avec 2 antennes d'émission se limite aux codes totalement équilibrés, il faudrait analyser 8,79% de STTCs possible.

Le temps pour générer les meilleurs STTCs 4 états 4-PSK avec 4 antennes d'émission à l'aide du coset partitioning est de l'ordre de la minute. Dans le cas des STTCs 16 états 4-PSK avec 3 antennes d'émission, il faut environ 20 minutes pour trouver les meilleurs codes. Comme les tableaux 4.13 et 4.14 le montrent, cette réduction du nombre de codes à analyser, donc du temps de recherche des meilleurs codes, est d'autant plus importante que le nombre d'antennes d'émission augmente et reste plus importante que la réduction apportée par la génération des codes équilibrés.

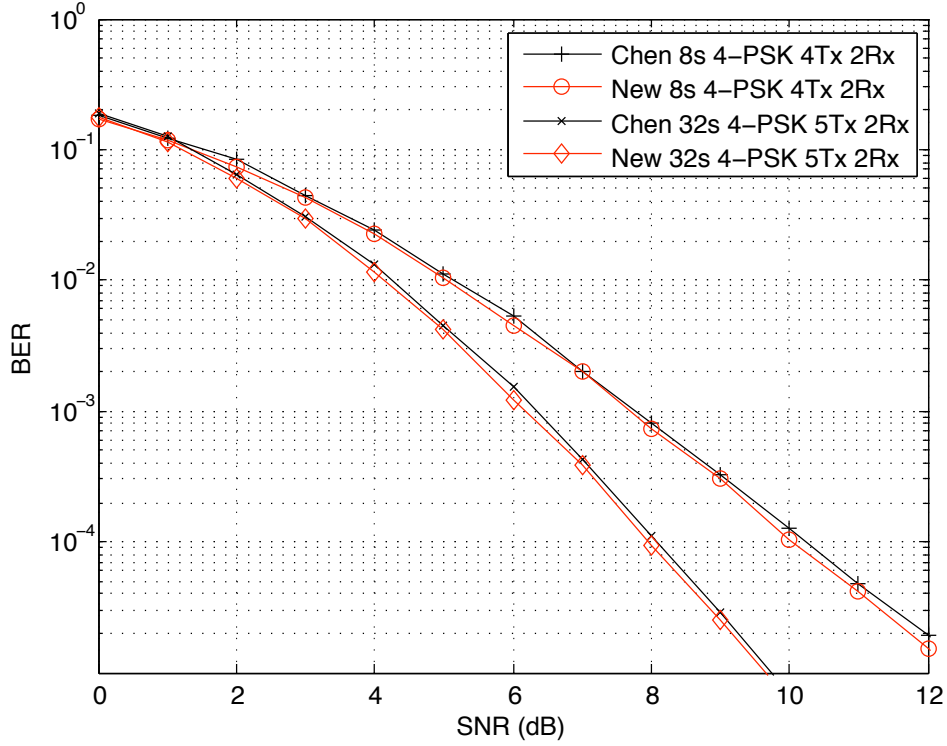


FIGURE 4.24 – BER des STTCs 8 états 4-PSK 4 antennes d'émission et des STTCs 32 états 4-PSK 5 antennes d'émission

$n_T$	Nombre de codes obtenus avec		Pourcentage de codes générés
	Recherche exhaustive	Coset partitioning	
2	$4^{12} = 16\,777\,216$	2 688	0,002 6 %
3	$4^{18} = 6,871\,9 \times 10^{10}$	120 960	0,000 176 02 %
4	$4^{24} = 2,814\,7 \times 10^{14}$	1 904 640	$6,766\,6 \times 10^{-7}$ %
5	$4^{30} = 1,152\,9 \times 10^{18}$	$54,925 \times 10^9$	$4,339\,3 \times 10^{-9}$ %

TABLE 4.14 – Nombre de STTCs 16 états 4-PSK

#### 4.2.7 Conclusion

Le principal attrait du coset partitioning est la réduction importante du temps de recherche des meilleurs STTCs, spécialement pour des codes à grand nombre d'antennes d'émission, d'états ou pour des constellations de grande taille. En effet, une recherche exhaustive est possible pour un faible nombre d'antennes. Par contre, dès que le nombre d'antennes d'émission augmente, le temps de calcul devient trop important pour pouvoir envisager d'utiliser une recherche exhaustive, d'où l'intérêt d'avoir une méthode alternative, rapide et efficace de génération des meilleurs STTCs.

La prochaine partie confrontera les performances des codes précédemment publiés à celles de nouveaux codes formés via le coset partitioning. Nous verrons ainsi que de précédentes

publications proposaient des codes très performants dans le cas d'un nombre faible d'antennes d'émission ou un nombre faible d'états car le temps de recherche était relativement court. Cependant, dès que le nombre d'antennes d'émission augmente, les codes présentés dans les précédentes publications ne sont plus optimaux.

## 4.3 Nouveaux STTCs 4-PSK et 8-PSK

### 4.3.1 Codes 4-PSK

Cette partie compare les performances des STTCs 4-PSK de 3 à 6 antennes d'émission proposés par Chen *et al.* ou Rassool *et al.*, à celles de nouveaux codes construits à l'aide du coset partitioning (donc des codes équilibrés).

Dans le cas où le nombre d'antennes d'émission est inférieur ou égal à 4, les codes présentés par Ngo *et al.* dans [71] ont des performances identiques ou meilleures que les codes de Chen *et al.*. Les performances des nouveaux STTCs que nous allons présenter par la suite ne vont pas être comparées à celles des codes de Ngo *et al.* car elles sont rigoureusement identiques. En effet, l'objectif des travaux présentés dans [71] et de ce document est de proposer les meilleurs codes et cela le plus rapidement possible. Ainsi, quelle que soit la méthode employée, les meilleurs codes trouvés sont identiques. Seul le temps de recherche pour générer ces codes varie d'une méthode à l'autre. L'efficacité du coset partitioning a permis la recherche des meilleurs STTCs ayant plus de 4 antennes d'émission.

Les STTCs 4-PSK à 2 antennes d'émission sont présentés dans le tableau 4.15. Les codes marqués par \* peuvent être construits à l'aide du coset partitioning. Pour les autres codes, le premier et le dernier bloc ne sont pas des blocs optimaux car les deux vecteurs de ces blocs appartiennent à  $\mathcal{C}_0$ . Cependant, la DE minimale entre les signaux MIMO générés par ces blocs est identique à celle des blocs optimaux. Les performances en terme de FER des nouveaux STTCs à 2 antennes d'émission sont exposées à la figure 4.25 dans le cas de 2 antennes de réception. Celles des codes correspondants de Chen ne sont pas présentées dans la figure 4.25. Ce choix a été fait dans le but de simplifier la figure car les courbes de performances de chaque nouveau code sont identiques ou extrêmement proches de celles des codes de Chen correspondants. Chen *et al.* ont utilisé une recherche exhaustive nécessitant une durée importante de calcul pour trouver les codes à 2 antennes d'émission publiés dans [62], tandis que les nouveaux codes proposés dans cette thèse ont été créés rapidement à l'aide du coset partitioning.

Les tableaux 4.16 et 4.17 présentent l'ensemble des codes de Chen *et al.*, ainsi que les nouveaux codes correspondants pour respectivement 3 et 4 antennes d'émission. Leurs performances sont données respectivement dans les figures 4.26 et 4.27.

De la même manière, les performances des codes de Rassool *et al.* et des nouveaux codes avec 5 et 6 antennes d'émission donnés respectivement dans les tableaux 4.18 et 4.19 sont présentées dans les figures 4.28 et 4.29.

Nb états	Code	<b>G</b>	$d_{\min}^2$
4	Chen * <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	10
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	10
8	Chen <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	12
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	12
16	Chen <i>et al.</i> *	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	16
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	16
32	Chen <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	16
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	16
64	Chen <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	18
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	18

Rappel : les codes annotés par \* sont des codes pouvant être construits par le biais du coset partitioning.

TABLE 4.15 – STTCs 4-PSK avec 2 antennes d'émission

Nb états	Code	<b>G</b>	$d_{\min}^2$
4	Chen <i>et al.</i> *	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	16
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	16
8	Chen <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	20
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	20
16	Chen <i>et al.</i> *	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	24
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	24
32	Chen <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	24
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	24
64	Chen <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	28
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	32

TABLE 4.16 – STTCs 4-PSK avec 3 antennes d'émission

Nb états	Code	<b>G</b>	$d_{\min}^2$
4	Chen <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	20
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	20
8	Chen <i>et al.</i> *	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	26
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	26
16	Chen <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	32
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	32
32	Chen <i>et al.</i> *	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	36
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	36
64	Chen <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	38
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	40

TABLE 4.17 – STTCs 4-PSK avec 4 antennes d'émission

Nb états	Code	<b>G</b>	$d_{\min}^2$
4	Rassool <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	26
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	26
8	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	32
16	Rassool <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	40
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	40
32	Rassool <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	44
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	44
64	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	48

TABLE 4.18 – STTCs 4-PSK avec 5 antennes d'émission

Nb états	Code	<b>G</b>	$d_{E,\min}^2$
4	Rassool <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	32
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	32
8	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	40
16	Rassool <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	48
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	48
32	Rassool <i>et al.</i>	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	52
	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	52
64	Nouveau code	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	64

TABLE 4.19 – STTCs 4-PSK avec 6 antennes d'émission

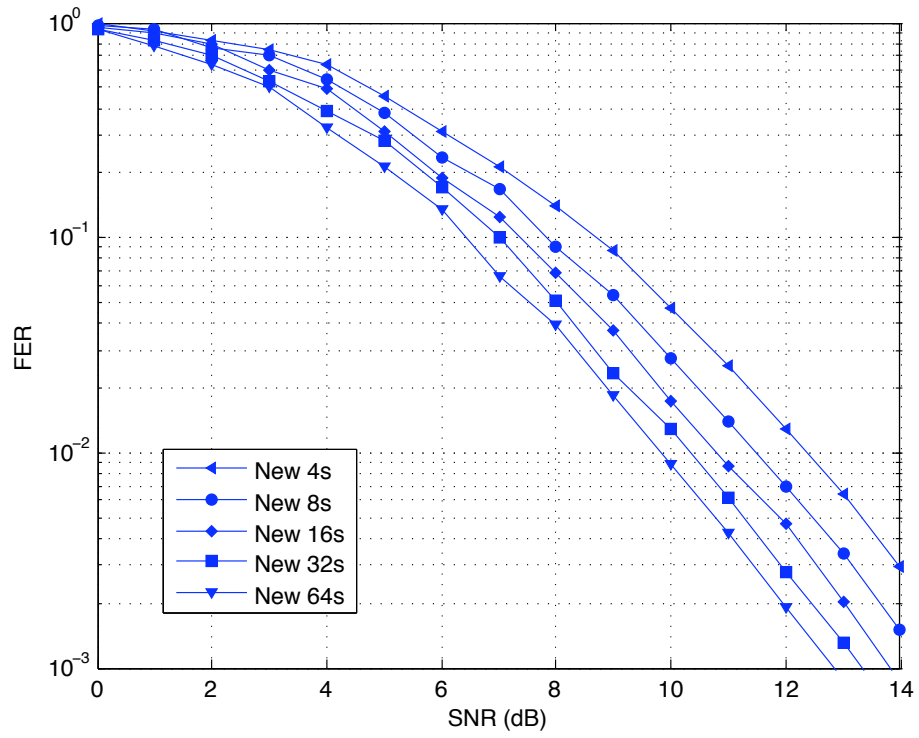


FIGURE 4.25 – FER des STTCs 4-PSK 2 antennes d'émission avec 2 antennes de réception

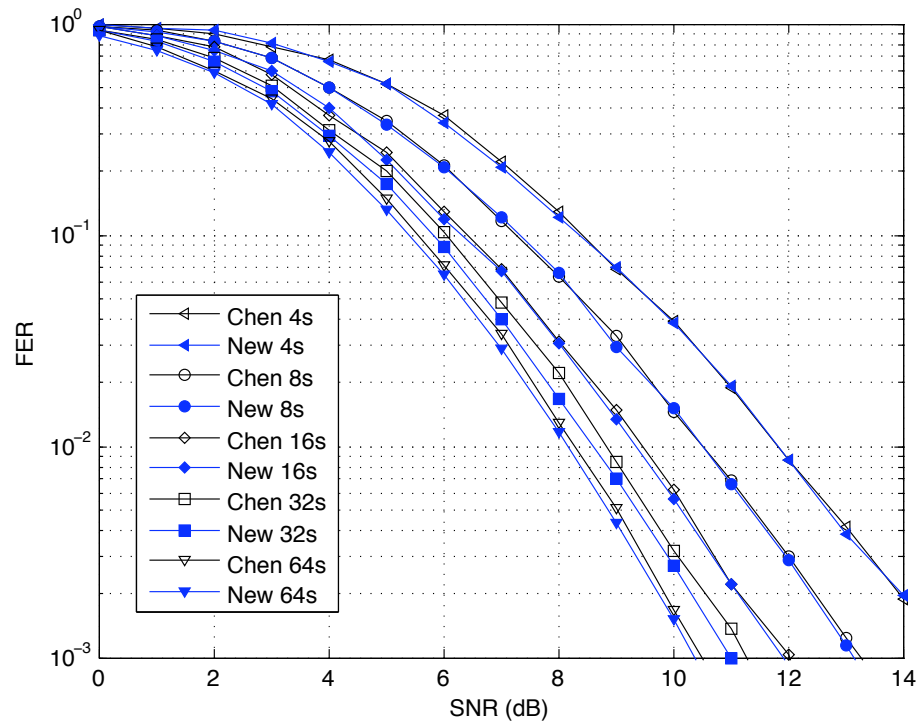


FIGURE 4.26 – FER des STTCs 4-PSK 3 antennes d'émission avec 2 antennes de réception



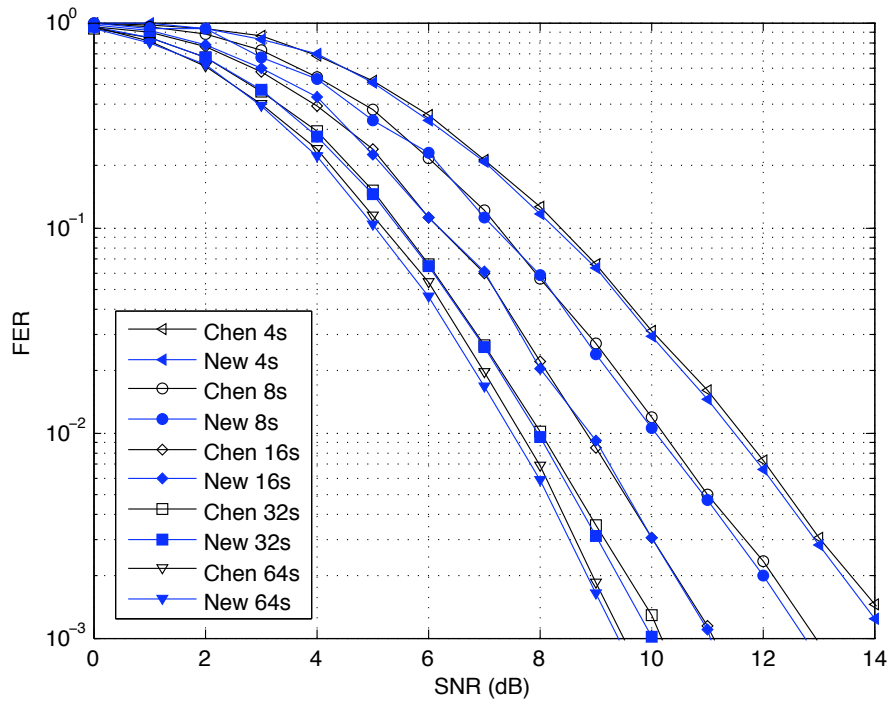


FIGURE 4.27 – FER des STTCs 4-PSK 4 antennes d'émission avec 2 antennes de réception

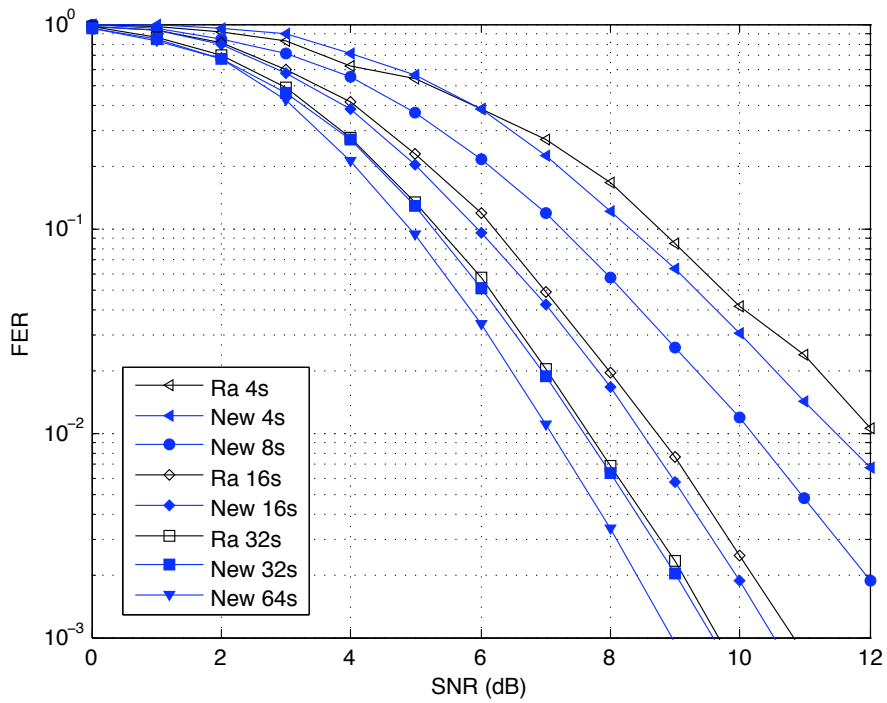


FIGURE 4.28 – FER des STTCs 4-PSK 5 antennes d'émission avec 2 antennes de réception

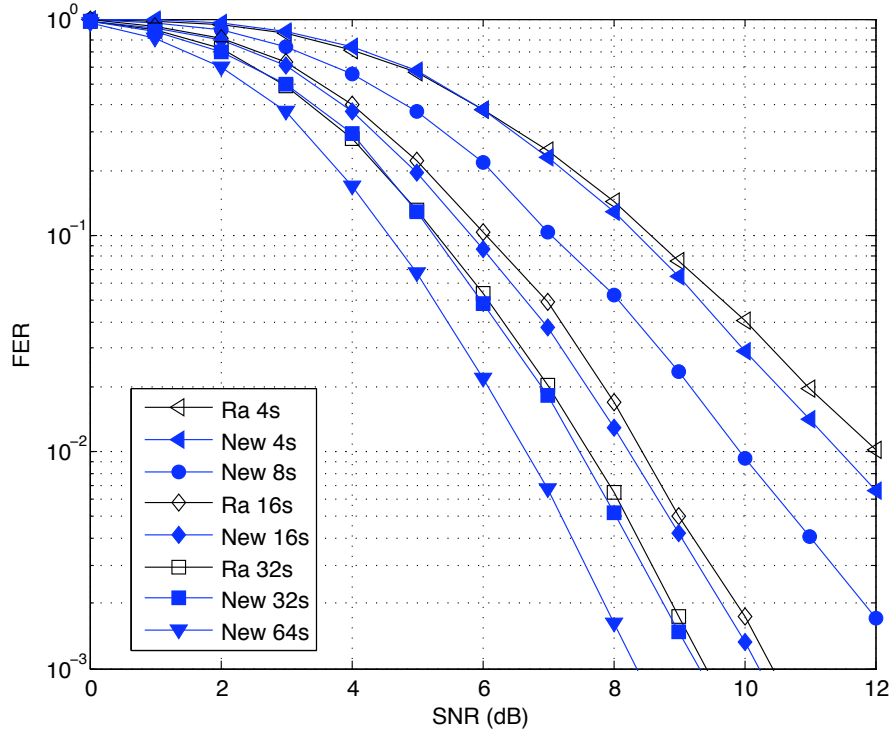


FIGURE 4.29 – FER des STTCs 4-PSK 6 antennes d'émission avec 2 antennes de réception

### 4.3.2 Remarque sur les STTCs 8 états 8-PSK

Dans ce chapitre, deux nouvelles méthodes de construction ont été développées dans le but d'obtenir les meilleurs codes. D'après les critères de performance, les meilleurs codes sont ceux ayant la plus grande DEC minimale. En ce qui concerne les STTCs 4-PSK, en utilisant les 2 méthodes, c'est à dire la génération des codes équilibrés ou l'utilisation du coset partitioning, on obtient des STTCs ayant la plus grande DEC minimale. Cela est dû à l'uniformisation des DEs générées par les blocs optimaux.

Pour les STTCs 8-PSK, dans le cas où le nombre d'états vaut 8, certains codes construits à l'aide du coset partitioning n'atteignent pas toujours la plus grande DEC possible. Ces codes (par exemple pour des STTCs 8 états 8-PSK 2 ou 4 antennes d'émission) ont une DEC minimale très légèrement plus faible que certains codes équilibrés. Par contre, le premier et le dernier bloc de la matrice génératrice sont des blocs optimaux. C'est à dire que les éléments qu'ils génèrent sont espacés par les plus grandes DEs possibles. Le tableau 4.20 montre le code 8 états 8-PSK 2 antennes d'émission proposé par Chen et un nouveau code du même type.

Code	$\mathbf{G}$	Rang	$d_{\min}^2$
Chen * <i>et al.</i>	$\left[ \begin{array}{ccc ccc} 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right]$	2	7.17
Nouveau code	$\left[ \begin{array}{ccc ccc} 1 & 4 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right]$	2	6.58

TABLE 4.20 – STTCs 8 états 8-PSK avec 2 antennes d'émission

Les performances de ces deux codes sont exposées dans la figure 4.30 pour le FER et

dans la figure 4.31 pour le BER. Grâce à ces résultats, nous observons que, malgré une DEC minimale légèrement plus faible que le code de Chen, le nouveau code a des performances identiques, voire très légèrement meilleures dans le cas de 4 antennes de réception. Cela vient du fait que le spectre des distances entre les éléments générés par le premier bloc et celui des éléments générés par le dernier bloc sont meilleurs que celui du code de Chen.

Ainsi, pour obtenir des codes 8 états 8-PSK 2 antennes d'émission ayant les mêmes performances, Chen *et al.* ont dû calculer les traces de  $8^{12} = 6,87 \times 10^{10}$  codes, tandis que nous avons trouvé nos codes parmi un ensemble de quelques milliers de codes.

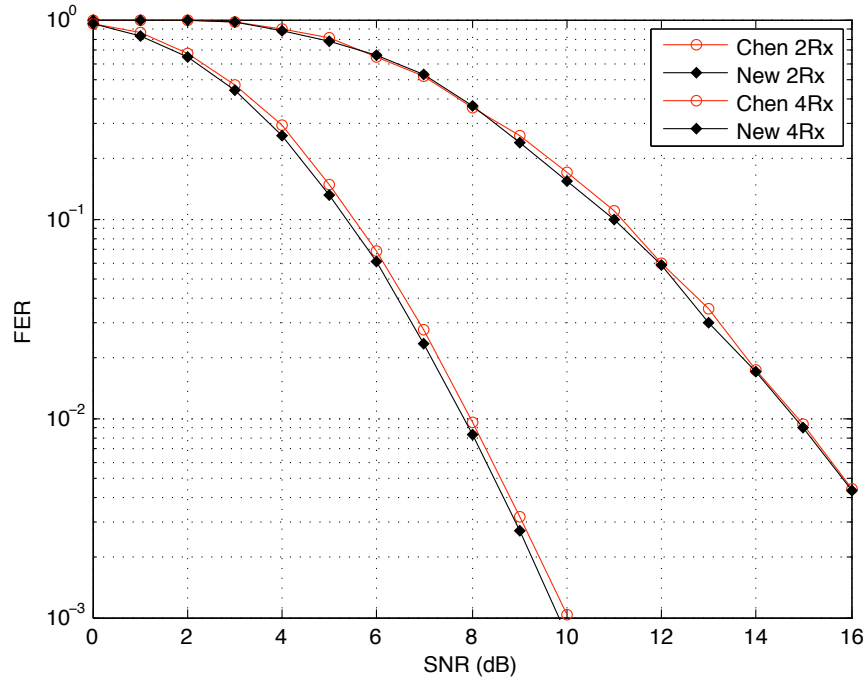


FIGURE 4.30 – FER des STTCs 8 états 8-PSK 2 antennes d'émission avec 2 et 4 antennes de réception

Au début du chapitre, un code équilibré 8 états 8-PSK 4 antennes d'émission a été présenté. Les performances de ce code et du code de Chen correspondant présentées dans les figures 4.3 et 4.4 pour respectivement le FER et le BER montrent que le nouveau code proposé que l'on renomme New 1 est légèrement plus performant que le code de Chen. Le coset partitioning a permis de construire des codes ayant une DEC minimale égale à 16, donc inférieure à la trace du code de Chen et du code équilibré 'New 1'. Un exemple de ces codes de DEC minimale égale à 16 est le code nommé 'New 2' ayant la matrice génératrice

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 6 & 7 \end{array} \right]. \quad (4.37)$$

Les figures 4.32 et 4.33 présentent les performances des deux nouveaux codes 'New 1' et 'New 2'. Bien que le code 'New 2' ait une DEC minimale légèrement plus faible que le code 'New1', les performances de ces deux codes sont identiques.

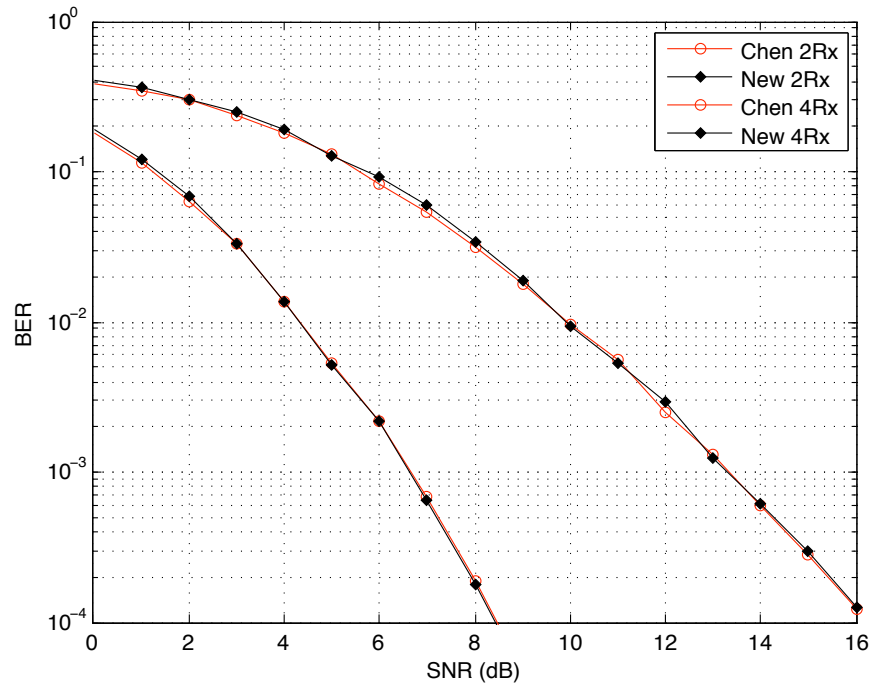


FIGURE 4.31 – BER des STTCs 8 états 8-PSK 2 antennes d'émission avec 2 et 4 antennes de réception

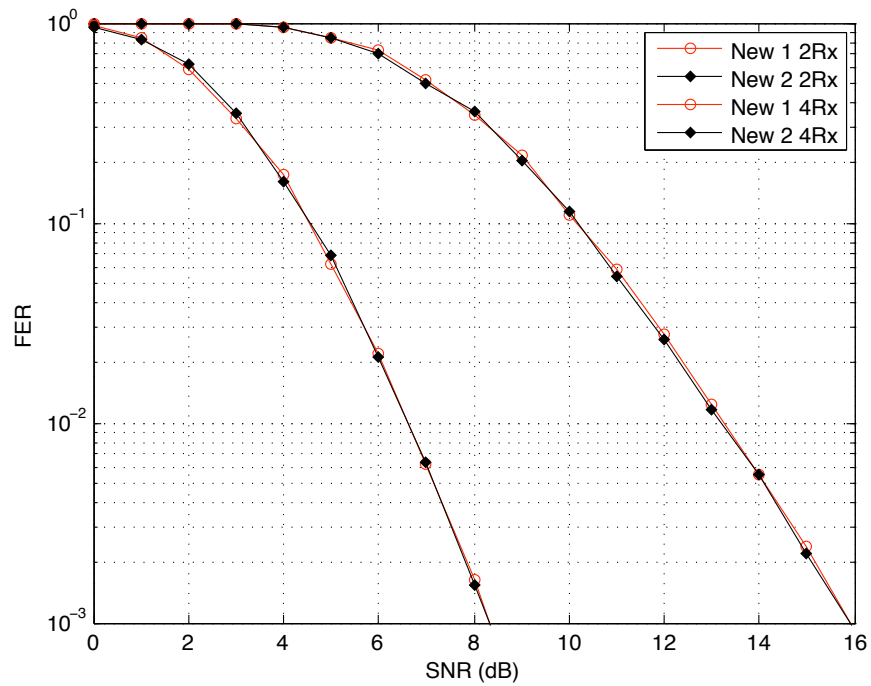


FIGURE 4.32 – FER des STTCs 8 états 8-PSK 4 antennes d'émission avec 2 et 4 antennes de réception

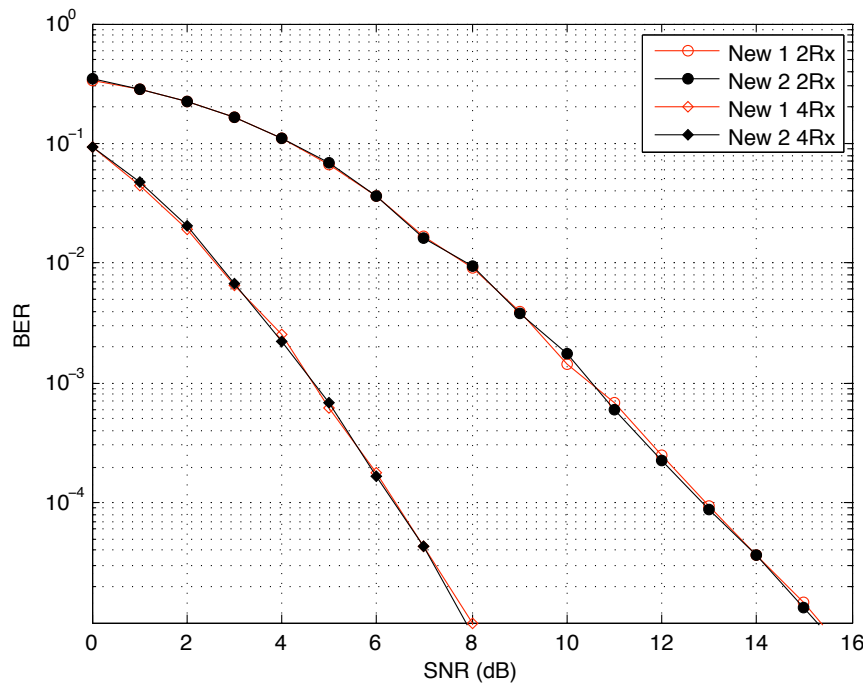


FIGURE 4.33 – BER des STTCs 8 états 8-PSK 4 antennes d'émission avec 2 et 4 antennes de réception

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode rapide et efficace de construction des codes équilibrés a tout d'abord été présentée. L'avantage de cette classe de STTCs est de contenir l'ensemble des meilleurs codes. Cette méthode, plus performante que celle proposée dans [66,67], a permis de générer des STTCs utilisant les modulations 4-PSK et 8-PSK dont les performances surpassent celles des codes précédemment publiés.

Toujours dans le but de réduire le temps de recherche des meilleurs codes, une nouvelle méthode appelée coset partitioning a ensuite été exposée. Cette technique est basée sur l'approche en cosets et en lattices de Calderbank [70] du set partitioning proposé par Ungerboeck [38]. Elle a l'avantage de réduire de manière drastique le nombre de codes à analyser, comparé au nombre de codes analysés par les méthodes proposées précédemment dans la littérature.

Basé sur ces deux méthodes, il a été possible de construire des codes 4-PSK de 2 à 6 antennes d'émission et des codes 8-PSK de 2 à 4 antennes d'émission dont les performances surpassent celles des codes publiés. Dans les précédentes études, comme celle effectuée par Rassool *et al.*, le nombre d'antennes d'émission des codes 4-PSK a été limité à 6, car, pour un nombre supérieur d'antennes d'émission, le temps de recherche des meilleurs codes devenait trop important. Grâce au coset partitioning, les premiers STTCs 4-PSK avec 7 et 8 antennes d'émission et les premiers STTCs 8-PSK avec 5 et 6 antennes d'émission ont pu être présentés.

Nous nous intéresserons dans le prochain chapitre à la génération des STTCs utilisant une modulation QAM. Pour cette modulation, le temps de recherche des codes offrant les meilleures performances est considérable, même dans le cas de deux antennes d'émission. Il est donc indispensable de proposer une solution radicale pour réduire le temps de génération de ces STTCs et ainsi proposer des codes avec plus que deux antennes d'émission.



## Chapitre 5

# Nouvelle méthode de construction des STTCs $2^{2n}$ -QAM

### Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Rappels sur les STTCs <math>2^{2n}</math>-QAM</b>	<b>128</b>
5.1.1	Schéma du codeur	128
5.1.2	Méthodes existantes de construction des STTCs $2^{2n}$ -QAM	129
<b>5.2</b>	<b>Nouvelle méthode de construction des STTCs <math>2^{2n}</math>-QAM</b>	<b>132</b>
5.2.1	Propriétés des STTCs $2^{2n}$ -QAM	132
5.2.2	Méthode générale	134
5.2.3	Construction des STTCs $4^n$ états $2^{2n}$ -QAM avec $n_T$ antennes d'émission	136
5.2.4	Construction des STTCs 256 états 16-QAM	142
5.2.5	Utilité de la décomposition de la distance euclidienne cumulée	143
<b>5.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>145</b>

### Introduction

Dans le chapitre précédent, deux nouvelles méthodes permettant la construction des meilleurs STTCs  $2^n$ -PSK ont été présentées. La première méthode concerne la génération des codes équilibrés. La deuxième méthode appelée coset partitioning est une extension pour les systèmes MIMO de l'approche en cosets et lattices de Calderbank du set partitioning proposé par Ungerboeck. Elles ont ainsi permis d'élaborer de nouveaux STTCs 4-PSK de 2 à 8 antennes d'émission, ainsi que des nouveaux codes 8-PSK de 2 à 6 antennes d'émission.

Dans ce chapitre, nous allons étudier la construction des STTCs  $2^{2n}$ -QAM. Dû à certaines propriétés de cette modulation, les deux méthodes présentées dans le chapitre précédent ne peuvent pas être utilisées pour construire les STTCs  $2^{2n}$ -QAM. Une méthode basée uniquement sur la décomposition de la DEC permettant de construire de manière rapide les meilleurs STTCs  $2^{2n}$ -QAM va donc être proposée.

Dans un premier temps, le schéma d'un codeur temps-espace en treillis  $2^{2n}$ -QAM sera proposé et les principes des STTCs QAM vont être rappelés. Nous continuerons par la présentation de la nouvelle méthode de construction des meilleurs STTCs. Basée sur une décomposition de la distance euclidienne cumulée entre deux mots de code, cette nouvelle méthode permet

de réduire significativement le temps de recherche des meilleurs codes. Ainsi, des exemples de STTCs 16-QAM de 2 à 4 antennes d'émission et des STTCs 64-QAM avec 2 et 3 antennes d'émission seront présentés. Leurs performances seront analysées par simulation et comparées aux codes précédemment publiés (quand cela est possible).

## 5.1 Rappels sur les STTCs $2^{2n}$ -QAM

### 5.1.1 Schéma du codeur

Comme montré dans le deuxième chapitre, un codeur temps-espace en treillis  $4^{n\nu}$  états  $2^{2n}$ -QAM peut se représenter par le schéma de la figure 5.1 (cas particulier  $n = 2$ ).

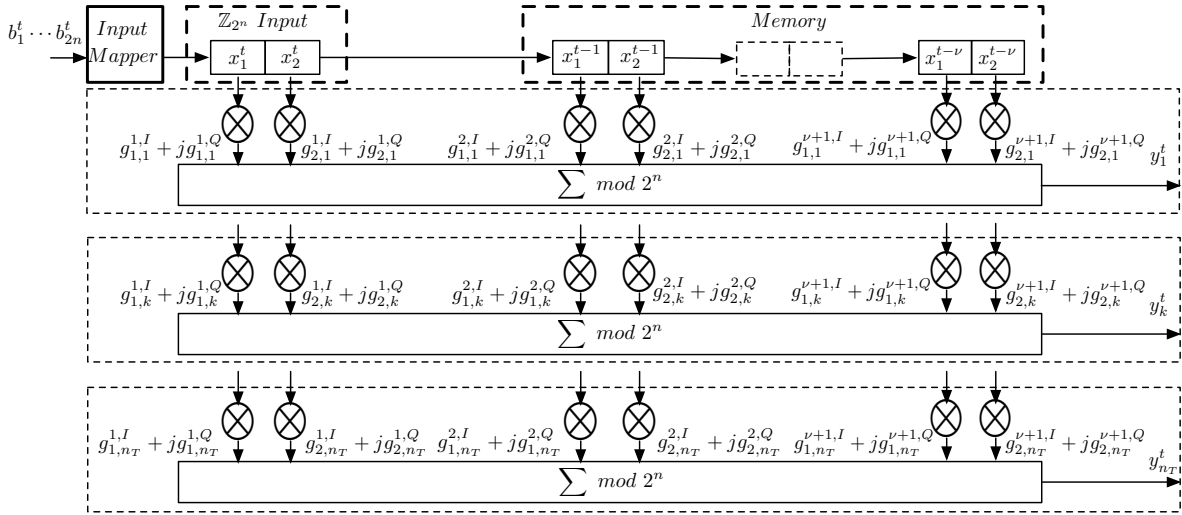


FIGURE 5.1 – Représentation d'un codeur temps-espace en treillis  $16^\nu$  états 16-QAM avec  $n_T$  antennes d'émission

Nous rappelons que pour un STTC  $4^{n\nu}$  états  $2^{2n}$ -QAM, à chaque instant  $t \in \mathbb{Z}$ , les  $2n$  symboles d'entrée binaires  $b_1^t \dots b_n^t$  et  $b_{n+1}^t \dots b_{2n}^t$  sont convertis en deux symboles  $x_1^t \in \mathbb{Z}_{2^n}$  et  $x_2^t \in \mathbb{Z}_{2^n}$  à l'aide du mapping naturel, où  $b_n^t$  et  $b_{2n}^t$  sont les bits de poids faible. Le bloc d'entrée contenant ces deux symboles  $\mathbb{Z}_{2^n}$  est suivi par  $\nu$  blocs-mémoire. Chaque bloc-mémoire est constitué de deux cellules mémoire de symboles  $\mathbb{Z}_{2^n}$ . À chaque temps symbole  $t$ , les deux symboles  $\mathbb{Z}_{2^n}$  d'un bloc sont remplacés par les deux symboles  $\mathbb{Z}_{2^n}$  du bloc précédent. Pour chaque bloc  $i = \overline{1, \nu+1}$ , le  $l^e$  symbole, avec  $l \in \{1, 2\}$ , est associé à  $n_T$  coefficients  $g_{l,k}^i = g_{l,k}^{i,I} + jg_{l,k}^{i,Q} \in \mathbb{Z}_{2^n}(j)$  où  $k = \overline{1, n_T}$ . Avec ces  $n_T \times 2(\nu+1)$  coefficients, la matrice génératrice peut s'écrire

$$\mathbf{G} = [G_1^1 G_2^1 | \dots | G_1^{\nu+1} G_2^{\nu+1}] = \mathbf{G}_I + j\mathbf{G}_Q \quad (5.1)$$

$$= \begin{bmatrix} G_1^{1,I} G_2^{1,I} | \dots | G_1^{\nu+1,I} G_2^{\nu+1,I} \\ + j [G_1^{1,Q} G_2^{1,Q} | \dots | G_1^{\nu+1,Q} G_2^{\nu+1,Q}] \end{bmatrix} \quad (5.2)$$



$$\begin{aligned}
 &= \left[ \begin{array}{cc|ccc} g_{1,1}^{1,I} & g_{2,1}^{1,I} & \cdots & g_{1,1}^{\nu+1,I} & g_{2,1}^{\nu+1,I} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{1,k}^{1,I} & g_{2,k}^{1,I} & \cdots & g_{1,k}^{\nu+1,I} & g_{2,k}^{\nu+1,I} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{1,n_T}^{1,I} & g_{2,n_T}^{1,I} & \cdots & g_{1,n_T}^{\nu+1,I} & g_{2,n_T}^{\nu+1,I} \end{array} \right] \\
 &+ j \left[ \begin{array}{cc|ccc} g_{1,1}^{1,Q} & g_{2,1}^{1,Q} & \cdots & g_{1,1}^{\nu+1,Q} & g_{2,1}^{\nu+1,Q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{1,k}^{1,Q} & g_{2,k}^{1,Q} & \cdots & g_{1,k}^{\nu+1,Q} & g_{2,k}^{\nu+1,Q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{1,n_T}^{1,Q} & g_{2,n_T}^{1,Q} & \cdots & g_{1,n_T}^{\nu+1,Q} & g_{2,n_T}^{\nu+1,Q} \end{array} \right]. \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

Un état est défini par les valeurs des  $2\nu$  symboles  $\mathbb{Z}_{2^n}$  des blocs mémoire correspondant à des colonnes non nulles de la matrice génératrice. A chaque instant  $t$ , les symboles MIMO  $Y^t = [y_1^t y_2^t \cdots y_{n_T}^t]^T$  en sortie du codeur sont donnés par  $Y^t = \Psi(X^t)$  où  $X^t = [x_1^t x_2^t \cdots x_1^{t-\nu} x_2^{t-\nu}]^T \in \mathbb{Z}_{2^n}^{2(\nu+1)}$  est l'état étendu à l'instant  $t$  et  $\Psi$  est définie par

$$\Psi : \mathbb{Z}_{2^n}^{2(\nu+1)} \rightarrow \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}(j) \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
 Y^t &= \Psi(X^t) = \mathbf{G}X^t \bmod 2^n \\
 &= \mathbf{G}_I X^t + j\mathbf{G}_Q X^t \bmod 2^n. \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

Le signal MIMO  $S^t = [s_1^t \cdots s_k^t \cdots s_{n_T}^t]^T$  envoyé à l'instant  $t$  dans le canal de propagation est déterminé à l'aide de la fonction de modulation donnée dans l'expression (1.8) qui établit la relation entre les symboles MIMO  $Y^t$  et les signaux MIMO  $S^t$

$$\begin{aligned}
 \Phi_v &: \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}(j) \rightarrow \mathbb{C}^{n_T} \\
 S^t &= \Phi_v(Y^t) = Y^t - \frac{2^n - 1}{2}(1 + j)U. \tag{5.6}
 \end{aligned}$$

avec un vecteur colonne de  $n_T$  éléments tel que  $U = [1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T$ .

Les critères de performance des STTCs QAM sont identiques à ceux utilisés par les STTCs  $2^n$ -PSK. C'est à dire que l'on pose  $r_{min}$  le rang minimal des matrices de différences des mots de code  $\mathbf{B}$  calculé pour toutes les paires de mots de code  $(\hat{\mathbf{S}}, \mathbf{S})$  avec  $\hat{\mathbf{S}} \neq \mathbf{S}$ . Si  $r_{min}n_R < 4$ , les critères du rang et du déterminant sont utilisés pour trouver les meilleurs codes. Dans le cas où  $r_{min}n_R \geq 4$ , le critère de la trace est préconisé. L'objectif de notre recherche est donc de construire les matrices génératrices  $\mathbf{G}$  permettant d'obtenir de manière rapide les meilleurs STTCs.

### 5.1.2 Méthodes existantes de construction des STTCs $2^{2n}$ -QAM

Dans [29, 30], Liu *et al.* proposent une méthode spécifique pour trouver simplement les codes temps-espace QAM à gain de diversité maximal, réduisant ainsi le temps de recherche de ces codes. Par la suite, Wong *et al.* [72] ainsi, que Hong *et al.* [61] utilisent ces travaux pour construire des STTCs QAM de rang plein pour deux antennes d'émission.

Pour cela, les symboles MIMO des STTCs  $2^{2n}$ -QAM sont représentés sur l'anneau complexe  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}(j)$  plutôt que dans  $\mathbb{C}^{n_T}$ . Ainsi, chaque symbole MIMO est représenté par

$$Y = Y_I + jY_Q, \quad (5.7)$$

où la partie réelle  $Y_I$  et la partie imaginaire  $Y_Q$  appartiennent à  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ .

Contrairement à notre manière de représenter la matrice génératrice, Wong *et al.* utilisent une matrice génératrice spécifique pour chaque antenne [72]. En utilisant les coefficients de la matrice génératrice de l'expression (5.1), la matrice génératrice de la  $k^e$  antenne dans le cas d'une 16-QAM représentée comme dans [72] est

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} g_{1,k}^{1,I} & g_{1,k}^{2,I} & \cdots & g_{1,k}^{\nu+1,I} \\ g_{2,k}^{1,I} & g_{2,k}^{2,I} & \cdots & g_{2,k}^{\nu+1,I} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} g_{1,k}^{1,Q} & g_{1,k}^{2,Q} & \cdots & g_{1,k}^{\nu+1,Q} \\ g_{2,k}^{1,Q} & g_{2,k}^{2,Q} & \cdots & g_{2,k}^{\nu+1,Q} \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

où toutes les additions se font modulo  $2^n$ . En utilisant une notation polynomiale en fonction de la variable  $D$  ('delay'), la matrice génératrice pour la  $k^e$  antenne d'émission peut s'écrire

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} g_{1,k}(D) \\ g_{2,k}(D) \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} g_{1,k}(D) \\ g_{2,k}(D) \end{bmatrix} \mod 2^n \quad (5.9)$$

$$= \begin{bmatrix} g_{1,k}^{1,I} + g_{1,k}^{2,I}D + \cdots + g_{1,k}^{\nu+1,I}D^\nu \\ g_{2,k}^{1,I} + g_{2,k}^{2,I}D + \cdots + g_{2,k}^{\nu+1,I}D^\nu \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} g_{1,k}^{1,Q} + g_{1,k}^{2,Q}D + \cdots + g_{1,k}^{\nu+1,Q}D^\nu \\ g_{2,k}^{1,Q} + g_{2,k}^{2,Q}D + \cdots + g_{2,k}^{\nu+1,Q}D^\nu \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Ainsi, le symbole à l'instant  $t$  calculé pour la  $k^e$  antenne d'émission est  $y_k^t = y_{I,k}^t + jy_{Q,k}^t$  avec

$$y_{k,I}^t = \sum_{l=1}^2 g_{l,k}^{1,I} x_l^t + \cdots + g_{1,k}^{\nu+1,I} x_l^{t-\nu} \mod 2^n \quad (5.11)$$

$$y_{k,Q}^t = \sum_{l=1}^2 g_{l,k}^{1,Q} x_l^t + \cdots + g_{1,k}^{\nu+1,Q} x_l^{t-\nu} \mod 2^n \quad (5.12)$$

Dans [29, 30], des ensembles spécifiques de coefficients servant à créer les codes à gain de diversité maximal sont définis.

**Définition 5.1** (Ensemble de coefficients  $\Sigma_o$ ). *Un ensemble de coefficients  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{L_c} \in \mathbb{Z}_{2^n}(j)$  avec  $L_c \in \mathbb{N}^*$  est un ensemble de coefficients  $\Sigma_o$ , s'il existe au moins  $1 \leq i \leq L_c$  indice(s) tel que pour  $\alpha_i = a_i + jb_i$ , la somme  $a_i + b_i$  soit un nombre impair. Le terme  $\Sigma_o$  a été choisi en référence à la somme pour  $\Sigma$  et au terme impair (odd en anglais) pour l'indice  $o$ .*

A l'aide des coefficients  $\Sigma_o$  et dans le cas de STTCs 16-QAM 2 antennes d'émission, le problème de la recherche des codes de rang plein peut être simplifié de la manière suivante [61, 72]. Considérons une combinaison linéaire de matrices génératrices propre à chaque antenne (représentée comme dans [72]) :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\alpha &= \alpha_1 \mathbf{G}_1 + \alpha_2 \mathbf{G}_2 \mod 2^n \\ &= \begin{bmatrix} \hat{g}_I^1(D) \\ \hat{g}_I^2(D) \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \hat{g}_Q^1(D) \\ \hat{g}_Q^2(D) \end{bmatrix} \mod 2^n \end{aligned} \quad (5.13)$$

Si le polynôme  $\hat{g}_I^1(D)\hat{g}_Q^2(D) - \hat{g}_Q^1(D)\hat{g}_I^2(D) \bmod 2^n$  a au moins un coefficient pair pour toutes les ensembles de  $L_c = 2$  coefficients  $\Sigma_o$  ( $\alpha_1, \alpha_2$ ) avec  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , alors le code a une diversité maximale.

Ainsi, des STTCs 16-QAM de rang plein dans le cas de deux antennes d'émission furent proposés dans [29, 30]. Dans [72], Wong *et al.* construisent tout d'abord à l'aide des coefficients  $\Sigma_o$  l'ensemble des codes à gain de diversité maximal. Ensuite, dans cet ensemble de codes, le critère de la trace est utilisé pour trouver les codes ayant une DEC minimale qui est maximisée. Hong *et al.* dans [61] donnent également des STTCs 16-QAM à 2 antennes d'émission. Dans un premier temps, à l'aide des coefficients  $\Sigma_o$ , les codes à gain de diversité maximal sont trouvés. Dans cet ensemble de codes, une recherche est ensuite effectuée pour trouver les codes qui minimisent  $\eta$  donné dans l'expression (3.5). L'ensemble de ces codes, ainsi que le premier STTC 16-QAM à 2 antennes d'émission proposé par Tarokh [8] sont présentés dans les tableaux 5.1 et 5.2 à l'aide de la représentation matricielle des codes de l'expression (5.1). La  $d_{E, \min}^2$  des codes de ces tableaux correspond à la DEC minimale sans avoir normaliser la puissance d'émission. Ainsi, les DEs sont directement calculées entre les signaux MIMO obtenus à l'aide de la fonction de mapping  $\Phi_v$  donnée dans l'expression (1.8).

Code	$\mathbf{G}$	$d_{E, \min}^2$
Tarokh [8]	$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	4
Liu [30]	$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	8
WYCK [72]	$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	12
Hong [61]	$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	8

TABLE 5.1 – STTCs 16 états 16-QAM 2 antennes d'émission

Code	$\mathbf{G}$	$d_{E, \min}^2$
WYCK [72]	$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	14
Hong [61]	$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	14

TABLE 5.2 – STTCs 64 états 16-QAM 2 antennes d'émission

Le principal problème pour trouver les meilleurs codes est la durée importante de recherche. En effet, dans le cas le plus simple, c'est à dire pour les STTCs 16 états 16-QAM avec 2

antennes d'émission, le nombre de codes à analyser est  $4^{16} = 4,295 \times 10^9$ . Le temps de recherche est alors bien trop important. C'est pour cette raison qu'une nouvelle solution permettant la génération des meilleurs STTCs  $2^{2n}$ -QAM  $n_T$  antennes d'émission va maintenant être exposée. Grâce à cette nouvelle méthode, pour la première fois, des STTCs 256 états 16-QAM 2 antennes d'émission, des STTCs 16-QAM 3 et 4 antennes d'émission et des STTCs 64-QAM 2 et 3 antennes d'émission ont pu être construits.

## 5.2 Nouvelle méthode de construction des STTCs $2^{2n}$ -QAM

### 5.2.1 Propriétés des STTCs $2^{2n}$ -QAM

Quelques propriétés relatives aux STTCs utilisant une constellation QAM vont tout d'abord être présentées. Tout comme dans le chapitre précédent, la distance euclidienne au carré entre deux mots de code est notée DEC, en opposition à la distance euclidienne au carré entre deux signaux MIMO notée DE. De plus, la matrice génératrice utilisée dans les prochaines parties est celle représentée dans la relation (5.1).

En outre, par abus de langage, la DE entre deux signaux MIMO  $\hat{S}^t$  et  $S^t$  est notée comme la DE entre les symboles MIMO correspondants, c'est à dire

$$d_E^2(\hat{S}^t, S^t) = d_E^2(\hat{Y}^t, Y^t), \quad (5.14)$$

avec  $\hat{Y}^t = \mathbf{G}X_s^t$  et  $Y^t = \mathbf{G}X_s^t$ .

**Propriété 17.** Soit un STTC  $4^{n\nu}$  états  $2^{2n}$ -QAM  $n_T$  antennes d'émission. Sa matrice génératrice est représentée par

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_I + j\mathbf{G}_Q \quad (5.15)$$

$$= \left[ G_1^{1,I} G_2^{1,I} \dots | G_1^{\nu+1,I} G_2^{\nu+1,I} \right] + j \left[ G_1^{1,Q} G_2^{1,Q} \dots | G_1^{\nu+1,Q} G_2^{\nu+1,Q} \right], \quad (5.16)$$

avec  $G_l^{i,I}$  et  $G_l^{i,Q} \in \mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  où  $l = \overline{1, 2}$  et  $i = \overline{1, \nu+1}$ . Le code représenté par la matrice génératrice  $\mathbf{G}$  a les mêmes caractéristiques en termes de DEC et de rang que le code ayant la matrice génératrice

$$\mathbf{G}' = \mathbf{G}_Q + j\mathbf{G}_I. \quad (5.17)$$

*Preuve.* Pour deux états étendus  $X_s^t$  et  $X_s^t$ , le premier code défini par  $\mathbf{G}$  donne deux signaux

$$\hat{S}^t = \Phi_v(\mathbf{G}X_s^t) = \Phi_v(\mathbf{G}_I X_s^t) + j\Phi_v(\mathbf{G}_Q X_s^t) = \hat{S}_I + j\hat{S}_Q = \hat{S}_I + j\hat{S}_Q \quad (5.18)$$

et

$$S^t = \Phi_v(\mathbf{G}X_s^t) = \Phi_v(\mathbf{G}_I X_s^t) + j\Phi_v(\mathbf{G}_Q X_s^t) = S_I + jS_Q. \quad (5.19)$$

La DE entre ces 2 symboles est alors

$$d_E^2 = \left| \hat{S}_I - S_I \right|^2 + \left| \hat{S}_Q - S_Q \right|^2. \quad (5.20)$$

Cette expression correspond aussi à la DE entre les symboles  $\hat{S}' = \hat{S}_Q + j\hat{S}_I$  et  $S' = S_Q + jS_I$  qui peuvent être générés par la matrice génératrice

$$\mathbf{G}' = \mathbf{G}'_I + j\mathbf{G}'_Q = \mathbf{G}_Q + j\mathbf{G}_I. \quad (5.21)$$

L'inversion entre les parties réelle et imaginaire d'un code ne change pas le spectre des distances.  $\square$

**Propriété 18.** La permutation des lignes de la matrice génératrice d'un code  $2^{2n}$ -QAM donne un code ayant le même spectre de distances.

*Preuve.* La preuve est triviale, tout comme pour les STTCs  $2^n$ -PSK, les permutations des lignes de la matrice génératrice correspondent à une permutation de la numérotation des antennes d'émission, ce qui ne change en rien les caractéristiques intrinsèques du code.  $\square$

**Propriété 19.** Soient deux symboles MIMO  $2^{2n}$ -QAM  $Y_1^t = \mathbf{G}X_1^t$  et  $Y_2^t = \mathbf{G}X_2^t$  où  $X_1^t$  et  $X_2^t$  sont les états étendus à l'instant  $t$ . Contrairement aux STTCs  $2^n$ -PSK, dans le cas des STTCs  $4^{n\nu}$  états  $2^{2n}$ -QAM  $n_T$  antennes d'émission

$$d_E^2(Y_1, Y_2) \neq d_E^2((Y_1 - Y_2) \bmod 2^n, 0). \quad (5.22)$$

*Preuve.* Pour prouver que les deux expressions ci-dessus ne sont pas égales, il suffit de prendre deux symboles MIMO  $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $Y_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  issus d'un STTC 16-QAM avec 2 antennes d'émission. On a donc

$$S_1 = \Phi_v(Y_1) = Y_1 - \frac{3}{2}(1+j) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}(1+j) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$S_2 = \Phi_v(Y_2) = Y_2 - \frac{3}{2}(1+j) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}(1+j) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

On a donc

$$S_1 - S_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Donc,

$$d_E^2(Y_1, Y_2) = d_E^2(S_1, S_2) = d_E^2(S_1 - S_2, 0) = (-1 - 0)^2 + (-1 - 0)^2 = 2. \quad (5.26)$$

De la même manière,

$$Y_1 - Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \bmod 4. \quad (5.27)$$

D'après la fonction de modulation,

$$\Phi_v(Y_1 - Y_2) = Y_1 - Y_2 - \frac{3}{2}(1+j) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}(1+j) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

et

$$\Phi_v(0) = 0 - \frac{3}{2}(1+j) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{3}{2}(1+j) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

On en déduit que

$$\Phi_v(Y_1 - Y_2) - \Phi_v(0) = \frac{3}{2}(1+j) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}(1+j) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Ainsi,

$$d_E^2(\Phi_v(Y_1 - Y_2), \Phi_v(0)) = d_E^2(\Phi_v(Y_1 - Y_2) - \Phi_v(0), 0) = (3 - 0)^2 + (3 - 0)^2 = 18 \quad (5.31)$$

Par conséquent  $d_E^2(Y_1, Y_2) \neq d_E^2((Y_1 - Y_2) \bmod 2^n, 0)$ .

*Remarque :* la cause de cette différence réside sur le calcul mod 4 de la différence  $Y_1 - Y_2$ . Le passage de  $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$  à  $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$  introduit une non-linéarité, ce qui n'est pas le cas avec la modulation PSK.  $\square$

### 5.2.2 Méthode générale

Cette partie présente de manière générale le principe de la méthode de construction des meilleurs STTCs  $2^{2n}$ -QAM.

Dans le cas d'un STTC décrit par l'expression (5.5), tous les symboles MIMO  $Y^t$  appartiennent à  $\mathbb{Z}_{4^n}^{n_T}(j)$ . Considérons deux séquences binaires différentes d'entrée

$$B_{\hat{s}} = [b_{\hat{s},1}^1 \cdots b_{\hat{s},2n}^1 | b_{\hat{s},1}^2 \cdots b_{\hat{s},2n}^2 | \cdots | b_{\hat{s},1}^{L-\nu} \cdots b_{\hat{s},2n}^{L-\nu}] \quad (5.32)$$

et

$$B_s = [b_{s,1}^1 \cdots b_{s,2n}^1 | b_{s,1}^2 \cdots b_{s,2n}^2 | \cdots | b_{s,1}^{L-\nu} \cdots b_{s,2n}^{L-\nu}] \quad (5.33)$$

où  $L$  est la longueur des mots de code  $\hat{\mathbf{S}}$  et  $\mathbf{S}$  que les deux séquences binaires  $B_{\hat{s}}$  et  $B_s$  génèrent et  $b_{\hat{s},l}^i$  et  $b_{s,l}^i \in \mathbb{Z}_2$  avec  $l = \overline{1, 2n}$  et  $i = \overline{1, L - \nu}$ .

Ces deux séquences sont converties en séquences  $\mathbb{Z}_{2^n}^{2(L-\nu)}$  données par

$$X_{\hat{s}} = [x_{\hat{s},1}^1 x_{\hat{s},2}^1 | x_{\hat{s},1}^2 x_{\hat{s},2}^2 | \cdots | x_{\hat{s},1}^{L-\nu} x_{\hat{s},2}^{L-\nu}] \quad (5.34)$$

et

$$X_s = [x_{s,1}^1 x_{s,2}^1 | x_{s,1}^2 x_{s,2}^2 | \cdots | x_{s,1}^{L-\nu} x_{s,2}^{L-\nu}] \quad (5.35)$$

où  $x_{\hat{s},l}^i$  et  $b_{s,l}^i \in \mathbb{Z}_{2^n}$  avec  $l = \overline{1, 2}$  et  $i = \overline{1, L - \nu}$ .

A chaque instant  $t = \overline{1, L - \nu}$ , deux symboles de chaque séquence  $x_{\hat{s},1}^t x_{\hat{s},2}^1$  et  $x_{s,1}^t x_{s,2}^t$  sont fournis au codeur. Ainsi à l'instant  $t = 1$ , les états étendus sont

$$X_{\hat{s}}^1 = [x_{\hat{s},1}^1 x_{\hat{s},2}^1 | 0 \ 0 | \cdots | 0 \ 0] \quad (5.36)$$

et

$$X_s^1 = [x_{s,1}^1 x_{s,2}^1 | 0 \ 0 | \cdots | 0 \ 0]. \quad (5.37)$$

A l'instant  $t = 2$ , les états étendus sont

$$X_{\hat{s}}^2 = [x_{\hat{s},1}^2 x_{\hat{s},2}^2 | x_{\hat{s},1}^1 x_{\hat{s},2}^1 | \cdots | 0 \ 0] \quad (5.38)$$

et

$$X_s^2 = [x_{s,1}^2 x_{s,2}^2 | x_{s,1}^1 x_{s,2}^1 | \cdots | 0 \ 0]. \quad (5.39)$$

Ainsi, à l'instant  $t = \overline{1, L - \nu}$ , les états étendus sont

$$X_{\hat{s}}^t = [x_{\hat{s},1}^t x_{\hat{s},2}^t | \cdots | x_{\hat{s},1}^{t-\nu} x_{\hat{s},2}^{t-\nu}] \quad (5.40)$$

et

$$X_s^t = [x_{s,1}^t x_{s,2}^t | \cdots | x_{s,1}^{t-\nu} x_{s,2}^{t-\nu}], \quad (5.41)$$

où  $x_{\hat{s},1}^p = x_{\hat{s},2}^p = x_{s,1}^p = x_{s,2}^p = 0, \forall p \leq 0$ . Comme le dernier état est l'état nul, à chaque instant  $t \in \{L - \nu + 1, \cdots, L\}$ , deux symboles nuls sont fournis au codeur. Ainsi, les derniers états étendus (à  $t = L$ ) sont

$$X_{\hat{s}}^L = [0 \ 0 | \cdots | 0 \ 0 | x_{\hat{s},1}^L x_{\hat{s},2}^L] \quad (5.42)$$

et

$$X_s^L = [0 \ 0 | \cdots | 0 \ 0 | x_{s,1}^L x_{s,2}^L]. \quad (5.43)$$

A l'aide des états étendus  $X_{\hat{s}}$  et  $X_s^t$ , à chaque instant  $t$ , on obtient deux signaux MIMO

$$\hat{S}^t = \Phi_v(\mathbf{G}X_{\hat{s}}^t \bmod 2^n) \quad (5.44)$$

$$S^t = \Phi_v(\mathbf{G}X_s^t \bmod 2^n), \quad (5.45)$$

où  $\Phi_v$  est la fonction de modulation QAM donnée dans l'expression (1.8).

Comme pour les STTCs  $2^n$ -PSK, il est possible de calculer la DE entre  $\hat{S}^t$  et  $S^t$  en fonction de la matrice génératrice  $\mathbf{G}$  et des états étendus  $X_{\hat{s}}^t$  et  $X_s^t$  via la fonction  $D_E$  définie par

$$\begin{aligned} D_E : \mathbb{Z}_{2^n}^{2(\nu+1)} \times \mathbb{Z}_{2^n}^{2(\nu+1)} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ D_E(X_{\hat{s}}^t, X_s^t) &= d_E^2(\Phi_v(\mathbf{G}X_{\hat{s}}^t), \Phi_v(\mathbf{G}X_s^t)). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Ainsi, la DEC entre les deux mots de code générés par les séquences  $X_{\hat{s}}$  et  $X_s$  d'un STTC  $2^{2n}$ -QAM est donnée par

$$DEC(X_{\hat{s}}, X_s) = \sum_{t=1}^L D_E(X_{\hat{s}}^t, X_s^t). \quad (5.47)$$

La propriété 10 du chapitre 3 est aussi respectée par les STTCs  $2^{2n}$ -QAM. Cette propriété expose le fait que la somme des  $m$  premiers termes et la somme des  $m$  derniers termes de la DEC dépendent respectivement seulement des  $m$  premiers blocs et seulement des  $m$  derniers blocs de  $\mathbf{G}$  avec  $m \in \{1, \dots, \nu + 1\}$ .

Une des notions du coset partitioning peut alors être reprise pour construire les codes QAM. En effet, le coset partitioning stipule que les blocs de la matrice génératrice doivent générer des sous-groupes. Pour le premier et le dernier bloc, les éléments qu'ils génèrent doivent être séparés par la plus grande DE minimale. Les autres blocs sont sélectionnés pour créer des sous-groupes et pour maximiser la DEC minimale.

Dans le cas d'un STTC  $2^{2n}$ -QAM décrit par l'expression (5.5), quelle que soit la matrice génératrice, l'ensemble des symboles générés forme un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}(j)$ . La construction des STTCs  $2^{2n}$ -QAM est alors uniquement basée sur une décomposition de la DEC.

Considérons un STTC  $4^{n\nu}$  états  $2^{2n}$ -QAM avec  $n_T$  antennes d'émission. On pose :

- $\alpha_F = \lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor$  ;
- $\alpha_L = \nu - \alpha_F$ .

Pour assurer la maximisation de la DEC, pour toutes les paires  $(X_{\hat{s}}^t, X_s^t)$ , la somme des  $\alpha$  premiers termes de la DEC

$$\sum_{t=1}^{\alpha} D_E(X_{\hat{s}}^t, X_s^t) \quad (5.48)$$

doit être maximisée pour  $\alpha = \overline{1, \alpha_F}$  via la sélection des  $\alpha_F$  premiers blocs. Les  $\alpha_F$  premiers blocs doivent être sélectionnés de la manière suivante :

- le premier bloc utilisé pour calculer le premier terme  $D_E(X_{\hat{s}}^1, X_s^1)$  de la DEC doit être un bloc optimal. Un bloc optimal est défini de la manière suivante. Chaque bloc génère les symboles MIMO de l'ensemble

$$\left\{ \sum_{l=1}^2 x_l G_l^1 \bmod 2^n / x_l \in \mathbb{Z}_{2^n} \right\} \quad (5.49)$$

Un bloc est dit optimal quand la plus petite distance euclidienne entre deux symboles MIMO différents générés par le bloc est maximale.

- si  $i$  blocs ont déjà été sélectionnés, avec  $i \in \{1, \dots, \alpha_F - 1\}$ , le  $(i + 1)^{\text{e}}$  bloc doit être sélectionné de manière à maximiser

$$\sum_{t=1}^{i+1} D_E(X_s^t, X_s^t) = \left[ \sum_{t=1}^i D_E(X_s^t, X_s^t) \right] + D_E(X_s^{i+1}, X_s^{i+1}). \quad (5.50)$$

Les sommes des premiers  $i$  termes  $\left[ \sum_{t=1}^i D_E(X_s^t, X_s^t) \right]$  ont été maximisées par le choix des premiers  $i$  blocs et ne dépendent pas du  $(i + 1)^{\text{e}}$  bloc.

De plus, pour toutes les paires  $(X_s^t, X_s^t)$ , la somme des  $\alpha$  derniers termes de la DEC

$$\sum_{t=L-\alpha+1}^L D_E(X_s^t, X_s^t) \quad (5.51)$$

doit être maximisée pour  $\alpha = \overline{1, \alpha_L}$  via la sélection des  $\alpha_L$  derniers blocs. Ainsi, les  $\alpha_L$  derniers blocs doivent être sélectionnés de la manière suivante :

- le dernier bloc utilisé pour calculer le dernier terme de la DEC,  $D_E(X_s^L, X_s^L)$  doit être un bloc optimal.
- si les derniers  $i$  blocs ont déjà été sélectionnés avec  $i \in \{1, \dots, \alpha_L - 1\}$ , le  $(L - i)^{\text{e}}$  bloc doit être sélectionné de manière à maximiser

$$\sum_{t=L-i}^L D_E(X_s^t, X_s^t) = D_E(X_s^{L-i}, X_s^{L-i}) + \left[ \sum_{t=L-i+1}^L D_E(X_s^t, X_s^t) \right]. \quad (5.52)$$

Les sommes des  $i$  derniers termes  $\left[ \sum_{t=L-i+1}^L D_E(X_s^t, X_s^t) \right]$  ont été maximisées par le choix des derniers  $i$  blocs et ne dépendent pas du  $(i + 1)^{\text{e}}$  dernier bloc.

Le  $(\alpha_F + 1)^{\text{e}}$  bloc doit être sélectionné pour maximiser la DEC et créer un code ayant une matrice génératrice avec un rang supérieur à 1, cela en fonction des précédentes sélections.

Ainsi, les  $\alpha_F$  premiers termes et les  $\alpha_L$  derniers termes sont totalement indépendants. Le  $(\alpha_F + 1)^{\text{e}}$  bloc crée la dépendance entre les  $\alpha_F$  premiers termes de la DEC et les  $\alpha_L$  derniers termes de la DEC dans le but de maximiser la DEC minimale.

*Remarque :* Si  $\nu + 1 = 2$  alors  $\alpha_L = 0$ . Dans ce cas, les deux blocs doivent être optimaux. Il faut alors chercher les paires de blocs optimaux qui maximisent la DEC minimale.

### 5.2.3 Construction des STTCs $4^n$ états $2^{2n}$ -QAM avec $n_T$ antennes d'émission

#### 5.2.3.1 Généralités

Cette partie présente la méthode utilisée pour construire des STTCs  $4^n$  états ( $\nu = 1$ )  $2^{2n}$ -QAM avec  $n_T$  antennes d'émission. Dans cette configuration, la matrice génératrice des codes est constituée de 2 blocs de 2 colonnes avec  $n_T$  lignes. Chaque colonne  $G_l^i$  appartient à  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}(j)$  pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $l \in \{1, 2\}$ .

Pour chaque DEC, le premier et le dernier terme  $D_E(X_s^1, X_s^1)$  et  $D_E(X_s^L, X_s^L)$  dépendent respectivement du premier bloc et du dernier bloc. Dans le but d'optimiser la DEC minimale, la directive est de maximiser  $D_E(X_s^1, X_s^1)$  et  $D_E(X_s^L, X_s^L)$  grâce au choix du premier et du dernier bloc. Ainsi, pour créer des STTCs performants grâce à la décomposition de la DEC, deux étapes doivent être respectées :



- tous les codes constitués de deux blocs optimaux sont construits ;
- parmi ces codes les meilleurs sont ceux avec la meilleure DEC.

### 5.2.3.2 Exemples de STTCs 16 états 16-QAM

En utilisant les considérations précédentes, les blocs optimaux pour 2, 3 et 4 antennes d'émission ont été générés.

Dans le cas de 2 antennes d'émission, 6 912 blocs optimaux ont été trouvés. Tous ces blocs ont la particularité de générer des éléments séparés par une distance  $DE \geq DE_{\min} = 4$ . Cette valeur a été calculée sans aucune normalisation de puissance. Ainsi, les signaux donnés par la fonction de mapping de l'expression (1.8) sont directement exploités pour le calcul des différentes DEs.

Les blocs avec  $DE_{\min} = 4$  n'ont pas tous un spectre de distances identique. Par exemple, le bloc

$$B_1 = B_{1,I} + jB_{1,Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

et le bloc

$$B_2 = B_{2,I} + jB_{2,Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

sont des blocs optimaux. Pourtant, lorsque l'on regarde les spectres de distances de ces blocs donnés dans la figure 5.2 pour  $B_1$  et à la figure 5.3 pour  $B_2$ , on s'aperçoit qu'ils sont différents. Seuls les DEs minimales de ces deux blocs sont égales.

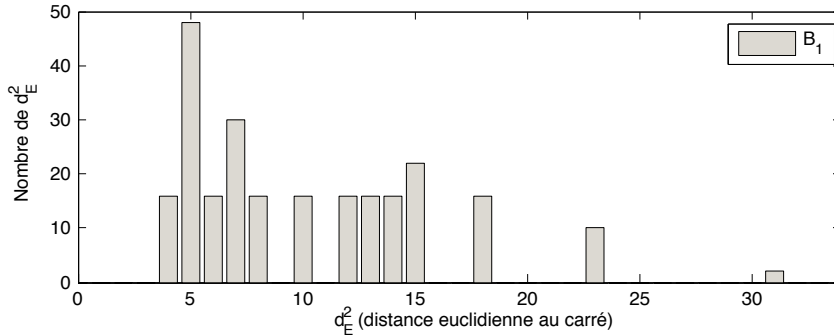
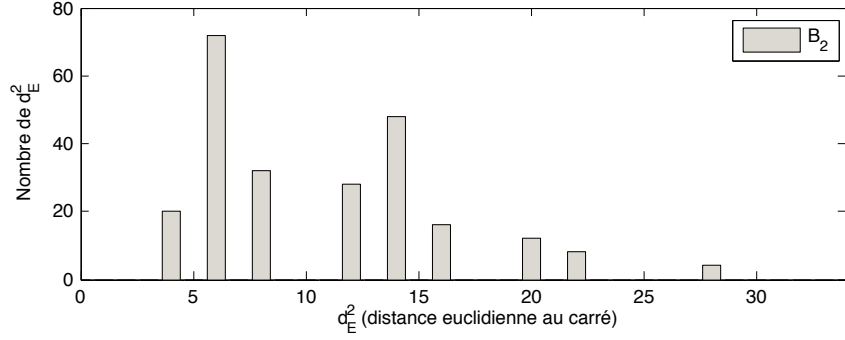


FIGURE 5.2 – Spectre de distances du bloc  $B_1$

Ainsi, à l'aide de blocs optimaux, de nouveaux STTCs 16 états 16-QAM ont été créés. Des exemples de codes sont présentés dans le tableau 5.3. Les codes ont les mêmes caractéristiques et donc les mêmes performances que le code nommé WYCK [72] dans le tableau 5.1.

De la même manière que pour les STTCs 16 états 16-QAM 2 antennes d'émission, des nouveaux STTCs 16 états 16-QAM avec 3 et 4 antennes d'émission ont été créés. Un exemple pour 3 et 4 antennes d'émission est donné dans le tableau 5.3. Malgré la réduction conséquente du nombre de codes à analyser, le temps de recherche en utilisant la méthode de la décomposition de la DEC reste relativement long. Ainsi, pour 3 et 4 antennes d'émission, seulement une partie des codes pouvant être construits à l'aide de la nouvelle méthode a été analysée.

Les performances des codes du tableau 5.1 et des codes du tableau 5.3 ont été évaluées par simulation. Le canal utilisé est un canal lent de Rayleigh ayant des coefficients qui sont indépendants et qui suivent un processus complexe gaussien de moyenne nulle et de variance

FIGURE 5.3 – Spectre de distances du bloc  $B_2$ 

Code	$\mathbf{G}$	$d_{\min}^2$
New 16s 16-QAM 2Tx	$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	12
New 16s 16-QAM 3Tx	$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	18
New 16s 16-QAM 4Tx	$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	24

TABLE 5.3 – Nouveau STTC 16 états 16-QAM 2, 3 et 4 antennes d'émission

0,5 par dimension. Ces coefficients sont parfaitement connus en réception. Chaque mot de code envoyé est constitué de 66 signaux MIMO 16-QAM, comme dans [61, 72]. Cette longueur assure un temps de simulation raisonnable. Le décodage est effectué par l'algorithme de Viterbi.

La puissance totale est normalisée, c'est à dire que la somme des puissances émises par les antennes d'émission vaut 1. Ainsi, dans le but de normaliser la puissance totale émise, les signaux MIMO 16-QAM doivent être multipliés :

- pour 2 antennes d'émission par 0,447 2 ;
- pour 3 antennes d'émission par 0,365 1 ;
- pour 4 antennes d'émission par 0,316 2.

De cette manière, les courbes de FER et de BER de STTCs 16 états 2 antennes d'émission de Liu *et al.* donnés dans [72], du code de Hong *et al.* correspondant [61] et des nouveaux codes du tableau 5.2 sont données respectivement par les figures 5.4 et 5.5. En ce qui concerne les codes à 2 antennes d'émission, les performances des trois codes sont presque identiques. Nous pouvons remarquer malgré tout que le code de Hong est légèrement moins performant que le code de WYCK et que le nouveau code correspondant. Cela est dû au fait que ce code a été construit dans le but de maximiser le gain de diversité et d'optimiser la répartition des déterminants. Ce code est donc efficace dans le cas d'un faible nombre d'antennes de réception, typiquement  $n_R = 1$ .

En ce qui concerne les codes ayant plus de deux antennes d'émission, il n'est pas possible de comparer leurs performances par rapport à d'autres codes publiés, étant donné qu'il n'existe pas de code correspondant préalablement publié.

### 5.2.3.3 Exemples de STTCs 64 états 64-QAM

A l'aide de la décomposition de la DEC, il a été possible de construire des codes 64 états utilisant une modulation 64-QAM. Un STTC 64 états 64-QAM avec  $n_T$  antennes d'émission a une matrice génératrice donnée par

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_I + j\mathbf{G}_Q \quad (5.55)$$

$$= \begin{bmatrix} G_1^{1,I} & G_2^{1,I} & | & G_1^{2,I} & G_2^{2,I} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} G_1^{1,Q} & G_2^{1,Q} & | & G_1^{2,Q} & G_2^{2,Q} \end{bmatrix}, \quad (5.56)$$

avec  $G_l^{i,I}$  et  $G_l^{i,Q} \in \mathbb{Z}_8^{n_T}(j)$  pour  $l \in \{1, 2\}$  et  $i \in \{1, 2\}$ . La matrice  $\mathbf{G}$  est donc constituée de 2 blocs :

$$B_1 = \begin{bmatrix} G_1^{1,I} & G_2^{1,I} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} G_1^{1,Q} & G_2^{1,Q} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

et

$$B_2 = \begin{bmatrix} G_1^{2,I} & G_2^{2,I} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} G_1^{2,Q} & G_2^{2,Q} \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Le principe reste le même que pour les codes 16-QAM. Il faut dans un premier temps générer la totalité des blocs optimaux. Dans le cas de 2 antennes d'émission, les éléments

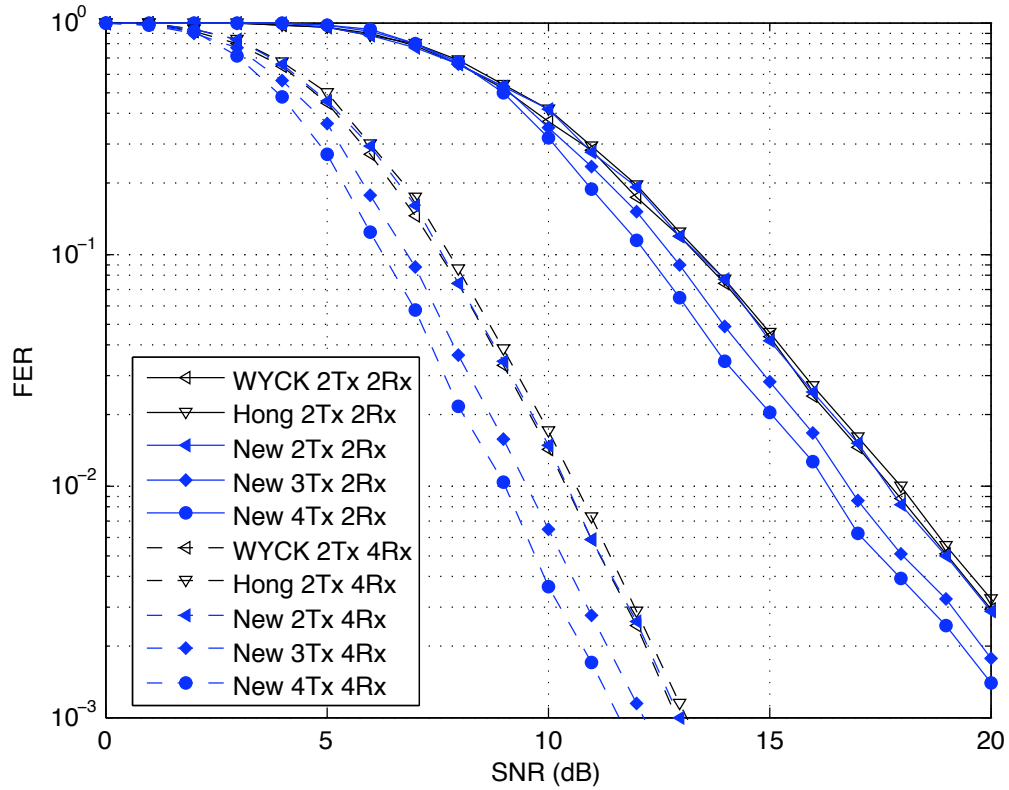


FIGURE 5.4 – FER des codes 16 états 16-QAM de 2 à 4 antennes d'émission

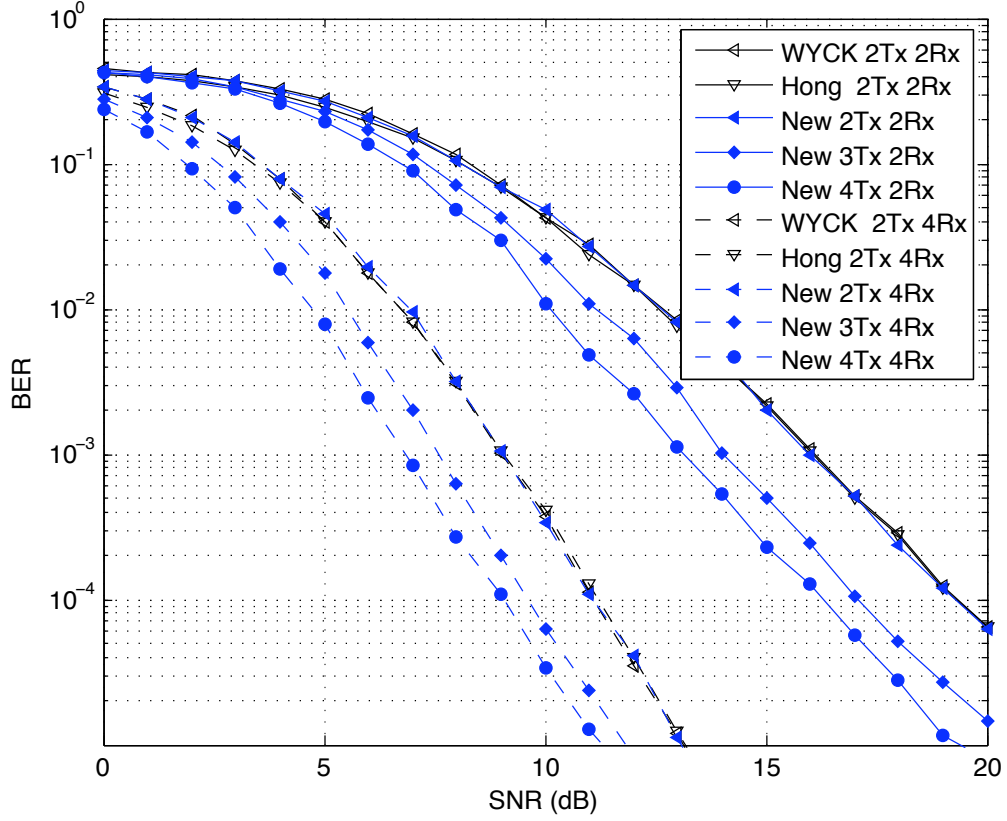


FIGURE 5.5 – BER des codes 16 états 16-QAM de 2 à 4 antennes d'émission

générés par les colonnes des blocs optimaux sont séparés par une  $DE \geq DE_{\min} = 9$ . Le nombre de blocs optimaux trouvés après une recherche exhaustive est 221 185. Dans le cas de trois antennes d'émission, la DE minimale entre deux éléments différents générés par un bloc est 22. Devant le nombre important de blocs à analyser, nous n'avons pas généré la totalité des blocs optimaux.

Par exemple, pour deux antennes d'émission, le bloc

$$B_{n_T=2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

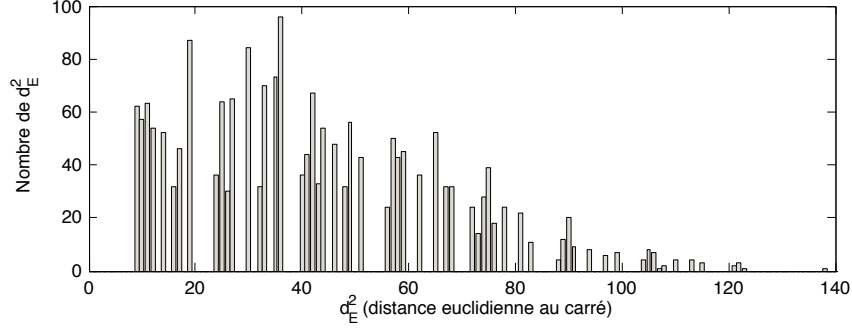
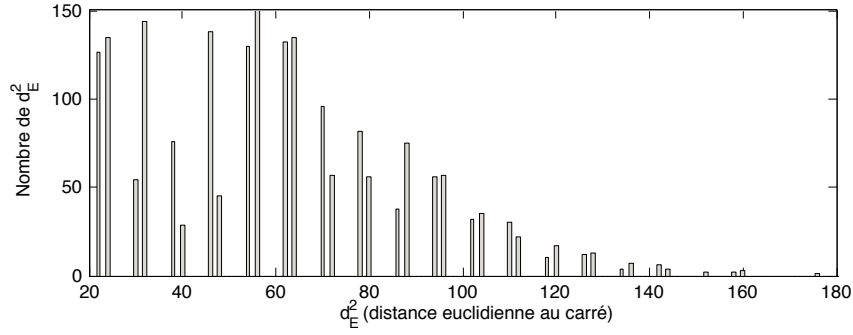
est un bloc optimal. Chaque bloc génère 64 symboles MIMO. Le spectre des distances du bloc ci-dessus est constitué de 1984 distances et présenté à la figure 5.6.

Pour 3 antennes d'émission, le bloc

$$B_{n_T=3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

est optimal. Son spectre des distances est donné à la figure 5.7.

Les matrices génératrices sont alors construites à l'aide de deux blocs optimaux. Parmi l'ensemble des possibilités, les codes les plus performants sont ceux ayant la plus grande DEC minimale. Des exemples de STTCs 64 états 64-QAM 2 antennes d'émission et 64 états 64-QAM 3 antennes d'émission sont exposés dans le tableau 5.4.


 FIGURE 5.6 – Spectre de distances du bloc  $B_{n_T=2}$ 

 FIGURE 5.7 – Spectre de distances du bloc  $B_{n_T=3}$ 

Code	$\mathbf{G}$	$d_{\min}^2$
New 64s 64-QAM 2Tx	$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	25
New 64s 64-QAM 3Tx	$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	48

TABLE 5.4 – STTC 64 états 64-QAM 2 &amp; 3 antennes d'émission

La trace (ou DEC) minimale des codes du tableau 5.4 correspond à la DEC minimale des codes sans avoir normaliser la puissance. Comme précédemment, les DEC sont directement calculées à l'aide des signaux MIMO obtenus à l'aide de la fonction de mapping  $\Phi$  donnée dans l'expression (1.8). Par contre, pour étudier les performances de ces codes, il est nécessaire de normaliser la puissance totale émise. Ainsi, les signaux MIMO sont multipliés :

- pour 2 antennes d'émission par 0,2182 ;
- pour 3 antennes d'émission par 0,1782.

Les performances de ces codes sont données dans la figure 5.8 pour le FER et la figure 5.9 pour le BER, pour 2 et 4 antennes de réception. Comme nous pouvons le remarquer sur les courbes de FER, l'ajout d'une antenne d'émission permet pour un FER de  $10^{-2}$  d'obtenir un gain d'environ 2 dB dans le cas de 2 et 4 antennes de réception.

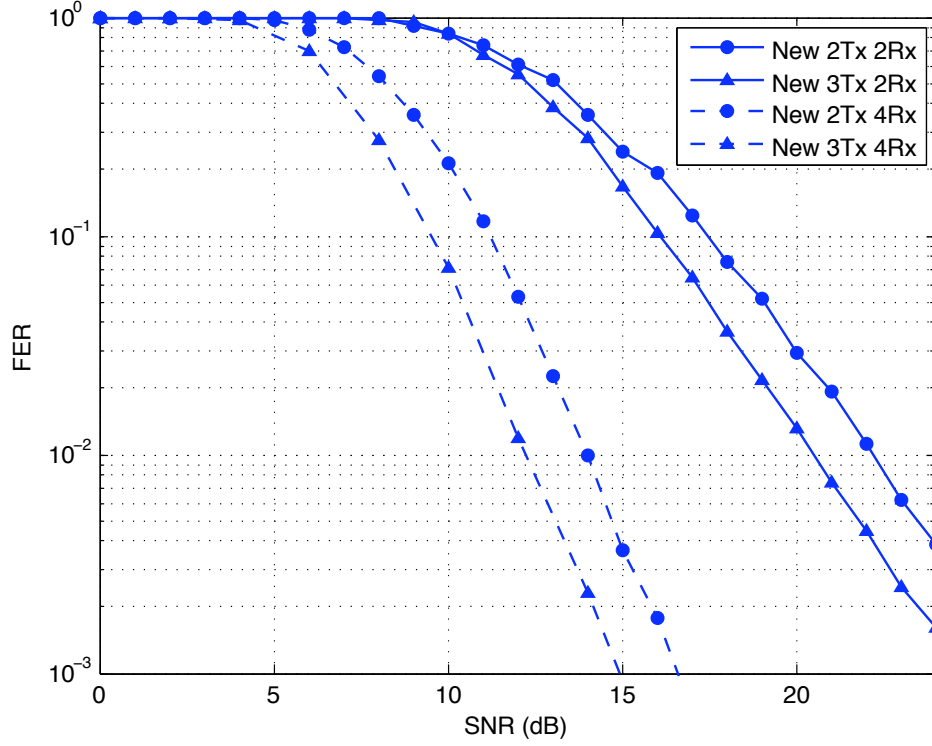


FIGURE 5.8 – FER des codes 64 états 64-QAM 2 &amp; 3 antennes d'émission

#### 5.2.4 Construction des STTCs 256 états 16-QAM

Un STTC 256 états 16-QAM  $n_T$  antennes d'émission a une matrice génératrice

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_I + j\mathbf{G}_Q \quad (5.61)$$

$$= \begin{bmatrix} G_1^{1,I} & G_2^{1,I} & G_1^{2,I} & G_2^{2,I} & G_1^{3,I} & G_2^{3,I} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} G_1^{1,Q} & G_2^{1,Q} & G_1^{2,Q} & G_2^{2,Q} & G_1^{3,Q} & G_2^{3,Q} \end{bmatrix}, \quad (5.62)$$

avec  $G_l^{i,I}$  et  $G_l^{i,Q} \in \mathbb{Z}_4^{n_T}(j)$  pour  $l \in \{1, 2\}$  et  $i \in \{1, 2, 3\}$ . La matrice  $\mathbf{G}$  est donc constituée de 3 blocs

$$B_i = \begin{bmatrix} G_1^{i,I} & G_2^{i,I} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} G_1^{i,Q} & G_2^{i,Q} \end{bmatrix} \text{ avec } i = \overline{1, 3}. \quad (5.63)$$

D'après la décomposition de la DEC, pour construire les meilleurs STTCs, il est nécessaire que  $B_1$  et  $B_3$  soient des blocs optimaux. Ainsi, le premier et le dernier terme de la DEC sont maximisés. Pour faire le lien entre ces termes, le bloc  $B_2$  ne doit pas être sélectionné parmi les blocs optimaux mais doit être choisi pour maximiser la DEC. Le nombre de STTCs 256 états 16-QAM  $n_T$  antennes d'émission reste relativement élevé. C'est pour cette raison que seulement une partie des codes a été analysée. Les premiers STTCs 256 états 16-QAM 2 et 3 antennes d'émission dont des exemples sont donnés dans le tableau 5.5 ont ainsi été obtenus.

Les performances de ces deux codes sont représentées dans les figures 5.10 et 5.11 respectivement pour le FER et le BER avec 2 et 4 antennes de réception. Dans le cas d'un FER de  $10^{-2}$ , le gain apporté par le rajout d'une antenne d'émission est d'environ 3,77 dB.

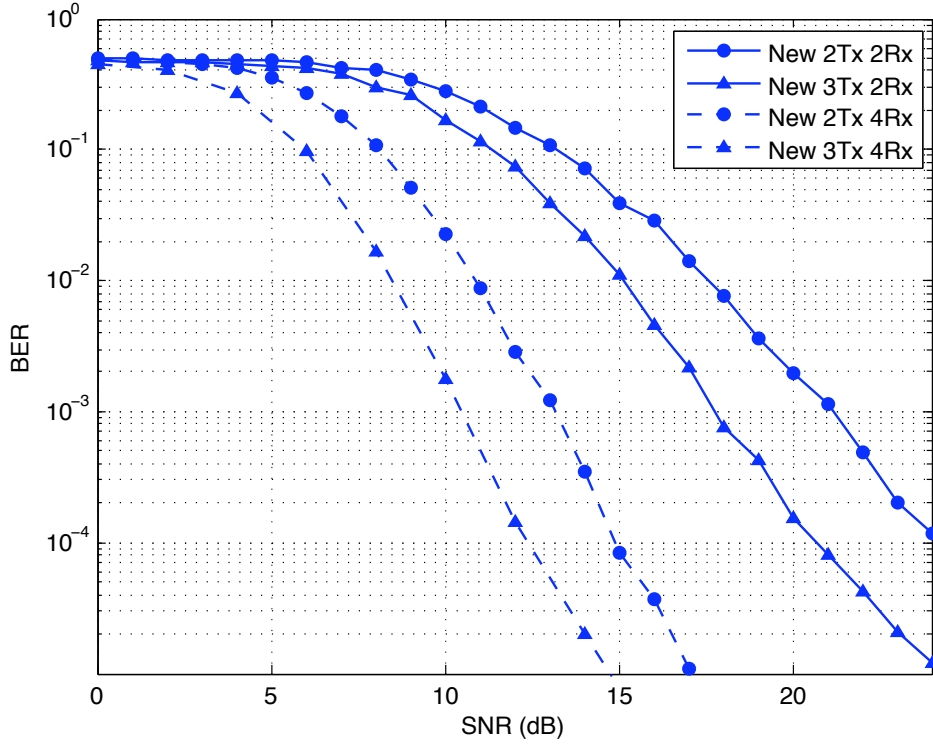


FIGURE 5.9 – BER des codes 64 états 64-QAM 2 &amp; 4 antennes d'émission

$n_T$	Code	$\mathbf{G}$	$d_{\min}^2$
2	New 256s 16-QAM 2Tx	$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	18
3	New 256s 16-QAM 3Tx	$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{G}_Q = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	28

TABLE 5.5 – STTC 256 états 64-QAM 2 &amp; 3 antennes d'émission

### 5.2.5 Utilité de la décomposition de la distance euclidienne cumulée

La construction des codes utilisant une modulation de type QAM peut devenir très longue et fastidieuse. C'est pour cette raison qu'aucun STTC 16-QAM à 3 et 4 antennes de réception et aucun STTC 64-QAM n'a été proposé dans les précédentes publications. Il est donc primordial pour trouver rapidement les meilleurs STTCs d'utiliser une méthode rapide et efficace. Nous allons donc voir dans quelle mesure la nouvelle méthode proposée diminue le temps de calcul. Pour cela, le cas des STTCs 16 états 16-QAM 2 antennes d'émission a été analysé.

Dans ce cas, le nombre total de codes est  $4^{16} \approx 4,295 \times 10^9$ . Wong *et al.* dans [72] analyse seulement les DEC des codes ayant un gain de diversité maximal, soit 9,23 % des codes. Pour construire ces codes, la nouvelle méthode basée sur la décomposition de la DEC utilise deux blocs optimaux. Une recherche exhaustive a fourni 6912 blocs optimaux. De cette manière, le

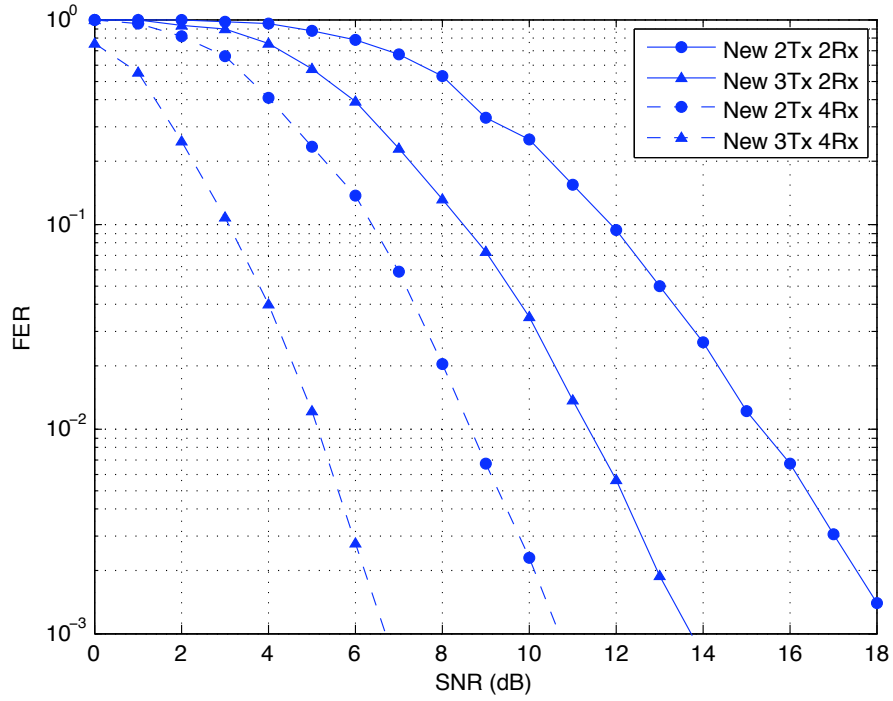


FIGURE 5.10 – FER des codes 256 états 16-QAM 2 & 3 antennes d'émission et 2 & 4 antennes de réception

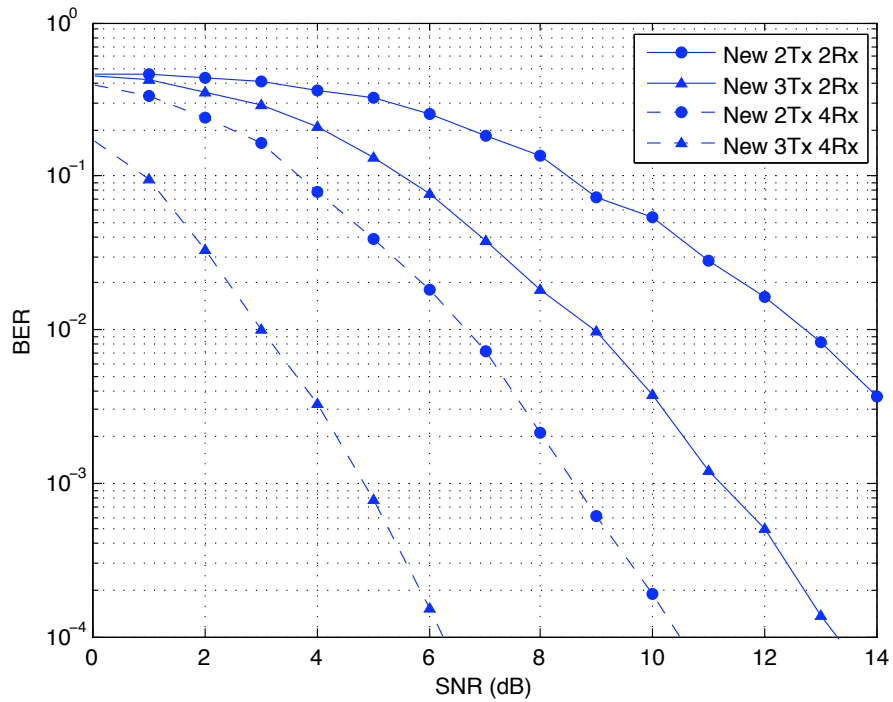


FIGURE 5.11 – BER des codes 256 états 16-QAM 2 & 3 antennes d'émission et 2 & 4 antennes de réception



nombre de codes pour lesquels le rang et la trace doivent être analysés est égal à  $6\,912 \times 6\,912 \approx 0,048 \times 10^9$ , soit environ 1,1 % de la totalité des codes.

Dans le cas d'un STTC 16 états 16-QAM 3 antennes d'émission, le nombre de matrices génératrices est  $4^{24} \approx 2,814\,7 \times 10^{14}$ . Il y a 264 961 blocs optimaux. Ainsi, le nombre de codes à analyser pour obtenir le meilleurs codes est  $264\,961^2 = 7,02 \times 10^{10}$ , ce qui correspond à 0,02 % de la totalité des codes.

Pour les codes 16-QAM à 256 états, le pourcentage du nombre de codes à examiner reste inchangé par rapport aux codes à 16 états. En effet, le premier et le dernier bloc sont des blocs optimaux. Par contre, il n'y a pas de condition spécifique pour le choix du deuxième bloc, en dehors de la maximisation de la DEC.

### 5.3 Conclusion

Les STTCs  $2^{2n}$ -QAM avec  $n_T > 2$  n'ont pas été traités dans la littérature, car le nombre important de codes rend la recherche trop coûteuse en temps de calcul. Dans les précédentes publications, les STTCs 16-QAM avec 2 antennes d'émission ont été construits dans le but de maximiser le gain de diversité et cela à l'aide des propriétés spécifiques des codes espace-temps utilisant une QAM [29, 30]. Dans [72], Wong *et al.* complètent ce critère par une recherche des codes via le critère de la trace. Dans [61], Hong *et al.* commencent par la génération de codes de rang plein. Ensuite, à la manière de [53], les codes ayant le meilleur spectre des déterminants sont recherchés.

La méthode que nous avons mise en place utilise un des principes du coset partitioning qui est basé sur une décomposition de la DEC. Le but de cette nouvelle méthode est de décomposer la matrice génératrice en blocs. Chaque bloc ou ensemble de blocs doit être alors sélectionné pour maximiser une somme de termes de la DEC afin de maximiser la DEC minimale. Cette méthode a créé des codes 16-QAM ayant 2 antennes d'émission qui ont les mêmes performances que les codes précédemment publiés. De plus, pour la première fois, des codes 16-QAM avec 3 et 4 antennes d'émission ont été générés, ainsi que des STTCs 64-QAM à 2 et 3 antennes d'émission.



# Conclusions et Perspectives

## Conclusions

Ce document est consacré à l'étude et à la construction des STTCs. Ces codes qui sont basés sur une extension des TCMs dans un contexte multi-antennaire permettent d'obtenir de très faibles taux d'erreurs grâce à un gain de codage élevé. Cependant, la durée de recherche des meilleurs codes s'avère être très importante, en particulier quand le nombre d'antennes d'émission, la taille de la constellation ou le nombre d'états possibles de la mémoire du codeur augmentent. De manière à éviter une recherche longue et fastidieuse, plusieurs méthodes de construction des meilleurs STTCs pour des modulations de types PSK et QAM ont été proposées.

Pour cela, les bases théoriques concernant les systèmes MIMO et les principes du codage temps-espace ont tout d'abord été rappelés dans les deux premiers chapitres. L'intérêt d'utiliser des STTCs pour augmenter les performances d'une communication a ainsi été identifié. En effet, les STTCs permettent d'obtenir des gains de diversité spatiale et des gains de codage très importants. Ces gains sont proportionnels au nombre d'antennes d'émission et au nombre d'états du codeur.

Un STTC est défini par sa modulation qui, dans notre cas, est soit une modulation  $2^n$ -PSK, soit une  $2^{2n}$ -QAM, par son nombre  $n_T$  d'antennes d'émission et par son nombre d'états. L'état d'un STTC à un instant  $t$  correspond à la valeur prise par l'ensemble des cellules-mémoire du codeur au temps  $t$ . Pour représenter simplement un STTC, le choix a été fait d'utiliser une représentation matricielle. Un STTC  $2^n$ -PSK est alors caractérisé par une matrice génératrice  $\mathbf{G}$ . Le nombre de lignes de cette matrice correspond au nombre d'antennes d'émission et le nombre de colonnes de la matrice correspond au nombre total de cellules du codeur (d'entrée et de mémoire). Dans le cas d'une QAM, la matrice génératrice est constituée d'une partie réelle et d'une partie imaginaire :  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_I + j\mathbf{G}_Q$ .

Pour une modulation  $2^n$ -PSK et pour une  $2^{2n}$ -QAM, la valeur de chaque coefficient de la matrice génératrice appartient respectivement au groupe  $\mathbb{Z}_{2^n}$  ou au groupe  $\mathbb{Z}_{2^n}(j)$ . Ainsi, le nombre de STTCs possibles croît en fonction de trois facteurs : le nombre d'antennes d'émission, le nombre d'états et la complexité de la modulation, ce qui allonge le temps de recherche des meilleurs codes. Pour résoudre ce problème, nous avons élaboré des méthodes pour réduire considérablement la durée d'identification et de génération des meilleurs STTCs.

Avant de présenter ces nouvelles méthodes de construction des STTCs, le chapitre 3 a mis en avant différentes propriétés concernant l'ensemble d'appartenance des symboles MIMO : le groupe  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Par la suite, des propriétés et des définitions concernant les STTCs ont été exposées. De là, la classe des codes équilibrés a pu être présentée. Les codes dits équilibrés respectent tous la même propriété : les symboles MIMO générés par le codeur sont équiprobables si les données binaires sont générées de manière équiprobable par une source binaire sans mé-

moire. L'intérêt de cette classe est de contenir la totalité des meilleurs STTCs publiés. Parmi les codes équilibrés, il est possible de distinguer les codes entièrement équilibrés qui génèrent avec la même probabilité la totalité des symboles MIMO possibles. Dans ce cas, l'intégralité du groupe  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  est créée par des combinaisons des colonnes de la matrice génératrice  $\mathbf{G}$ . Ainsi, pour réduire le temps de recherche des meilleurs codes, il est possible de construire l'ensemble des codes équilibrés et d'analyser les codes seulement dans cet ensemble pour trouver les plus performants. Durant de précédents travaux, une première méthode de construction des codes équilibrés avait été élaborée, mais exploitée seulement pour des codes 4-PSK.

Pour optimiser la génération des STTCs équilibrés, une nouvelle méthode de construction des codes équilibrés  $2^n$ -PSK, plus simple et plus générale que la première méthode publiée, a été présentée dans le chapitre 4. Cette méthode est basée sur un algorithme qui impose à chaque nouvelle sélection d'une colonne de  $\mathbf{G}$  la création d'un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . À l'aide de cette méthode, des STTCs 4-PSK et 8-PSK avec 2, 3 et 4 antennes d'émission ont pu être trouvés. Des simulations ont permis de montrer que nos nouveaux codes étaient plus performants que les codes correspondants précédemment publiés.

Une deuxième méthode de construction des meilleurs STTCs appelée coset partitioning a ensuite été présentée. Cette méthode, permettant de générer les STTCs  $2^n$ -PSK de manière optimale, est une extension pour les systèmes MIMO de l'approche en cosets et lattices de Calderbank du set partitioning proposé par Ungerboeck. Le set partitioning est une méthode de construction des modulations codées en treillis appliquée aux systèmes SISO. Son principe est de diviser en ensembles les signaux séparés par les plus grandes distances euclidiennes. Ces ensembles correspondent aux signaux partant d'un même état ou arrivant dans un même état. Le coset partitioning a la particularité de diviser l'ensemble des signaux MIMO en cosets et non en simples ensembles. Pour cela, les matrices génératrices sont divisées en blocs. Chaque bloc doit alors générer un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$ . Des propriétés spécifiques pour le choix de chaque bloc ont été établies grâce à la décomposition de la distance euclidienne entre deux mots de code. De cette manière, le nombre de codes à analyser est très faible par rapport aux méthodes précédemment publiées. Ainsi, des STTCs 4-PSK de 2 à 6 antennes d'émission et des STTCs 8-PSK de 2 à 4 antennes d'émission ayant de meilleures performances que les codes précédemment publiés ont été construits. De plus, grâce à l'efficacité du coset partitioning, pour la première fois, des STTCs 4-PSK avec 7 et 8 antennes d'émission et des STTCs 8-PSK avec 5 et 6 antennes d'émission ont été créés.

Pour finir, la génération des STTCs  $2^{2n}$ -QAM a été traitée dans le dernier chapitre. Leurs propriétés ont démontré que l'utilisation du coset partitioning n'était pas possible pour construire les meilleurs STTCs QAM. Seul le concept de la décomposition de la distance euclidienne entre les mots de code a pu être exploité. Ainsi, pour construire les meilleurs codes, la matrice génératrice est divisée en blocs. Chaque bloc doit être optimisé dans le but de maximiser des termes spécifiques de la distance euclidienne entre deux mots de code. Suivant cette démarche, des STTCs 16-QAM avec 2 antennes d'émission ont été proposés avec des performances identiques aux codes précédemment publiés quand ils existent. De plus, pour la première fois, des STTCs 16-QAM avec 3 et 4 antennes d'émission et des STTCs 64-QAM avec 2 et 3 antennes ont été produits.

## Perspectives

Le coset partitioning pourrait par la suite être appliqué à des familles de codes plus performantes telles que les SO-STTCs. En effet, comme montré dans le chapitre 2, les SO-STTCs permettent d'obtenir un gain de diversité maximal et un gain de codage important grâce à la concaténation d'un O-STBC et d'un STTC. Une adaptation de la méthode du coset partitioning aux SO-STTCs permettrait la construction de ces codes avec un nombre d'antennes d'émission très important.

De plus, ce document présente des méthodes de construction de STTCs permettant de construire des codes avec un grand nombre d'antennes d'émission. Dans un système réel, l'estimation du canal de propagation devient laborieuse et consommatrice en ressources, en particulier lorsque le nombre d'antennes d'émission et de réception est élevé. L'application de méthodes de construction comme le coset partitioning dans un codage temps-espace différentiel permettrait de s'affranchir de cette estimation et de construire ainsi des systèmes MIMO non cohérents à grand nombre d'antennes.



# Annexes





## Annexe A

# Puissance moyenne reçue par les antennes de réception

Dans cette annexe, nous allons démontrer que dans le cas d'un canal de Rayleigh, la puissance moyenne reçue par chaque antenne de réception est égale à la somme des puissances moyennes émises par chaque antenne d'émission.

Considérons le schéma A.1 présentant un système de communication à  $n_T$  antennes d'émission et 1 antenne de réception.

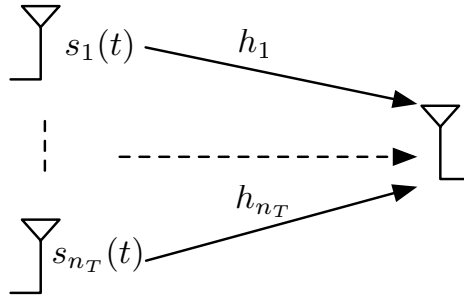


FIGURE A.1 – Schéma de communication à  $n_T$  antennes d'émission et 1 antenne de réception

Dans ce schéma de communication :

- le signal  $2^n$ -PSK envoyé par la  $k^e$  antenne d'émission avec  $k = \overline{1, n_T}$  défini par

$$s_k(t) = \sqrt{\frac{2}{n_T}} \times \cos(2\pi f_0 t + \theta_k) \quad (\text{A.1})$$

où  $\theta_k$  est la phase du signal et  $f_0$  la fréquence porteuse du signal. L'amplitude des signaux  $s_k^t$  a été déterminée de manière à normaliser la puissance totale émise à 1 ;

- $h_k$  est le coefficient complexe d'un canal de Rayleigh entre la  $k^e$  antenne d'émission et l'antenne de réception. Les composantes réelle et complexe suivent une loi  $\mathcal{N}(0; 0, 5)$ . De cette manière,  $|h_k|$  suit une loi de Rayleigh tandis que la phase  $\phi_k$  suit une loi uniforme sur  $]-\pi, \pi]$ . On considère que les coefficients du canal ne varient pas pendant un temps symbole

La puissance moyenne totale émise est la somme de la puissance moyenne émise par chaque antenne d'émission. Nous allons montrer que la puissance reçue par chaque antenne de réception est égale aussi à la somme de la puissance des signaux émis par chaque antenne d'émission,

quels que soient les signaux MIMO envoyés. L'antenne de réception reçoit le signal

$$s_R(t) = \sum_{k=1}^{n_T} \frac{\sqrt{2}|h_k|}{\sqrt{n_T}} \times \cos(2\pi f_0 t + \theta_k + \phi_k). \quad (\text{A.2})$$

Il est possible de représenter en bande de base les signaux  $s_k(t)$ , ce qui donne  $s_k = \frac{1}{\sqrt{n_T}} e^{j\theta_k}$ . Ainsi le signal reçu est

$$s_R = \sum_{k=1}^{n_T} h_k s_k. \quad (\text{A.3})$$

De cette manière la puissance totale reçue est

$$P_r = \left| \sum_{k=1}^{n_T} h_k s_k \right|^2 \quad (\text{A.4})$$

$$= \sum_{k=1}^{n_T} |h_k s_k|^2 + \sum_{\substack{i,l=1 \\ i \neq l}}^{n_T} (h_i s_i (h_l s_l)^* + (h_i s_i)^* h_l s_l) \quad (\text{A.5})$$

$$= \sum_{k=1}^{n_T} \left( \frac{1}{n_T} |h_k|^2 \right) + \sum_{\substack{i,l=1 \\ i \neq l}}^{n_T} 2\text{Real}(h_i s_i (h_l s_l)^*) \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{1}{n_T} \sum_{k=1}^{n_T} |h_k|^2 + \sum_{\substack{i,l=1 \\ i \neq l}}^{n_T} 2\text{Real}(h_i s_i (h_l s_l)^*). \quad (\text{A.7})$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(P_r) = \mathbb{E} \left( \frac{1}{n_T} \sum_{k=1}^{n_T} |h_k|^2 \right) + \mathbb{E} \left( \sum_{\substack{i,l=1 \\ i \neq l}}^{n_T} 2\text{Real}(h_i s_i (h_l s_l)^*) \right). \quad (\text{A.8})$$

On a  $h_k = h_{k,I} + j h_{k,Q}$  avec  $k = \overline{1, n_T}$  donc

$$|h_k|^2 = (h_{k,I})^2 + (h_{k,Q})^2 \Rightarrow \mathbb{E}(|h_k|^2) = \mathbb{E}((h_{k,I})^2) + \mathbb{E}((h_{k,Q})^2) \quad (\text{A.9})$$

$$= \text{var}(h_{k,I}) + \text{var}(h_{k,Q}) \quad (\text{A.10})$$

$$= \sigma^2 + \sigma^2 \quad (\text{A.11})$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad (\text{A.12})$$

$$= 1. \quad (\text{A.13})$$

---

Donc,  $\mathbb{E}\left(\frac{1}{n_T} \sum_{k=1}^{n_T} |h_k|^2\right) = 1$ , ce qui nous donne

$$\mathbb{E}(P_r) = 1 + \mathbb{E}\left(\sum_{\substack{i,l=1 \\ i \neq l}}^{n_T} 2\text{Real}(h_i s_i (h_l s_l)^*)\right) \quad (\text{A.14})$$

$$= 1 + 2\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{i,l=1 \\ i \neq l}}^{n_T} h_i h_l \frac{1}{\sqrt{n_T}} \frac{1}{\sqrt{n_T}} \cos(\phi_i - \phi_l + \theta_i - \theta_l)\right) \quad (\text{A.15})$$

$$= 1 + \quad (\text{A.16})$$

$$2\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{i,l=1 \\ i \neq l}}^{n_T} h_i h_l \frac{1}{n_T} (\cos(\phi_i - \phi_l) \cos(\theta_i - \theta_l) + \sin(\phi_i - \phi_l) \sin(\theta_i - \theta_l))\right) \quad (\text{A.17})$$

Etant donné que  $\mathbb{E}(\cos(\phi_i - \phi_l)) = 0$  et  $\mathbb{E}(\sin(\phi_i - \phi_l)) = 0$ , on en déduit que

$$\mathbb{E}(P_r) = 1. \quad (\text{A.18})$$

Ainsi, quel que soit le code utilisé, la puissance moyenne du signal reçu par chaque antenne de réception après un canal de Rayleigh dont les composantes réelle et complexe suivent une loi  $\mathcal{N}(0; 0, 5)$  est égale à 1.



## Annexe B

# Influence de la taille des mots de code

Durant, notre étude sur les STTCs, la longueur des mot de codes a été adoptée en fonction des précédentes publications. Ainsi, pour chaque simulation, les mots de codes sont constitués de 130 symboles MIMO  $2^n$ -PSK ou de 66 symboles MIMO  $2^{2n}$ -QAM dans le but de se retrouver dans les mêmes configurations que les simulations des précédentes publications. Cette annexe présente l'influence de la taille des mots de code sur les performances. Considérons les STTCs 4/16/32 états 4-PSK 3 antennes d'émission présentés dans le tableau B.1. La démarche pour construire ces codes a été présentée au chapitre 4.

Nom	$\mathbf{G}$	Rang	$d_{E,\min}^2$
Nouveau 4s 3Tx	$\left[ \begin{array}{cc cc} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right]$	2	28
Nouveau 16s 3Tx	$\left[ \begin{array}{cc cc cc} 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right]$	3	24
Nouveau 64s 3Tx	$\left[ \begin{array}{cc cc cc cc} 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right]$	3	32

TABLE B.1 – STTCs 64 états 4-PSK à 3 antennes d'émission

Les figures B.1, B.3, et B.5 représentent le FER des STTCs respectivement pour les codes du tableau B.1 avec 4, 16 et 64 états, tandis que leurs BERs sont donnés par les figures B.2, B.4 et B.6. Dans chaque cas, 4 longueurs de mots de code notées 'lg trame' dans les figures ont été considérées : 26, 130, 650 et 1300 symboles MIMO par mot de code. De plus, 4 antennes de réception ont été utilisées pour toutes les simulations.

Dans l'ensemble des cas considérés, nous remarquons que les mots de code ayant les meilleurs FER sont les mots de codes de faible taille.

En ce qui concerne le BER, pour chaque code, dans le cas où le SNR est très faible, les mots de code de faible longueur sont plus performants que les mots de code de grande taille. Par contre, pour des SNRs élevés, les mots de code de grande taille ont tendance à devenir plus performants que les mots de code de petite taille.

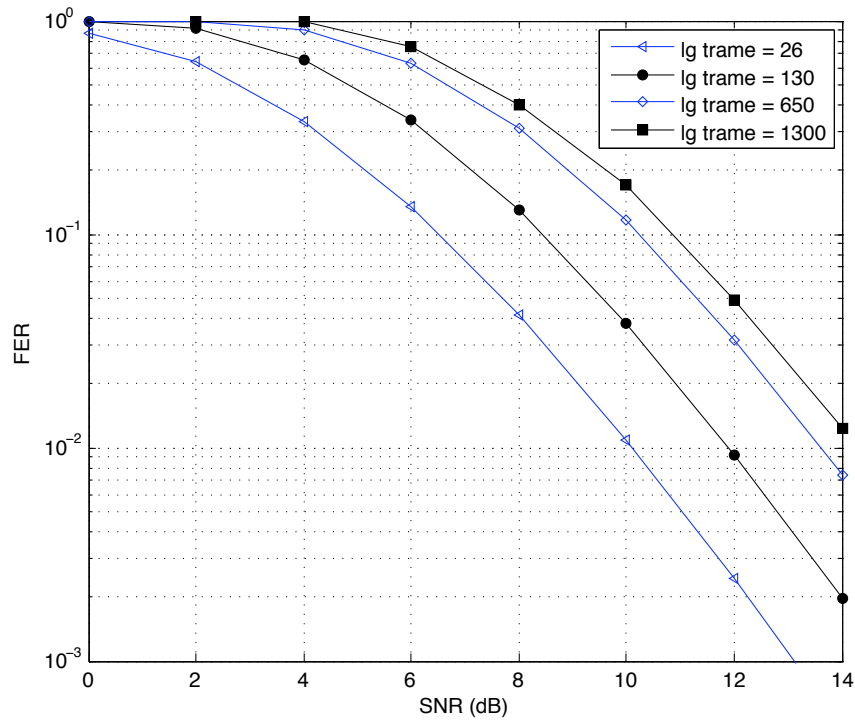


FIGURE B.1 – FER du STTC 4 états 4-PSK avec 3 antennes d'émission

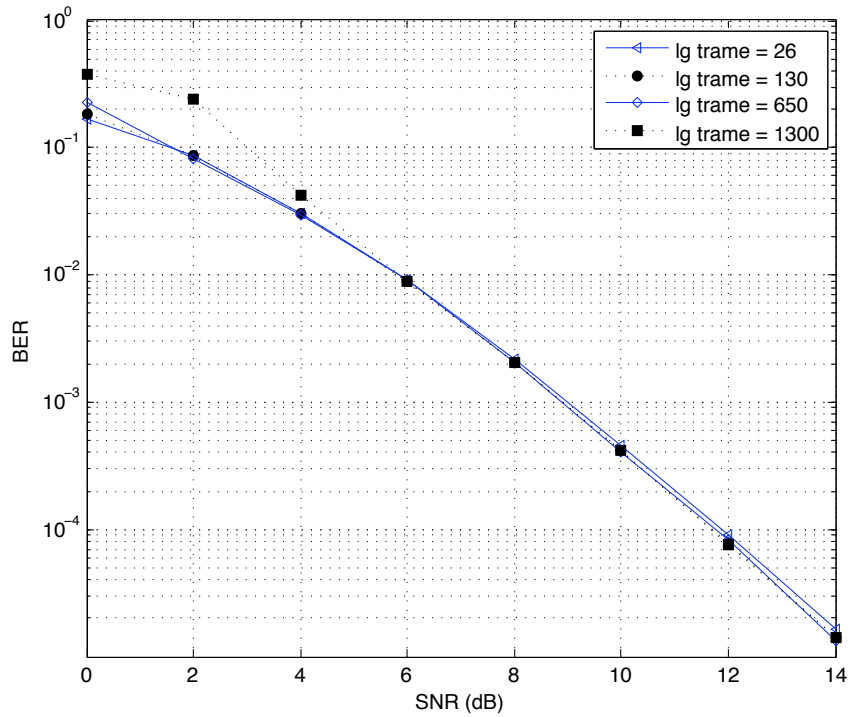


FIGURE B.2 – BER du STTC 4 états 4-PSK avec 3 antennes d'émission

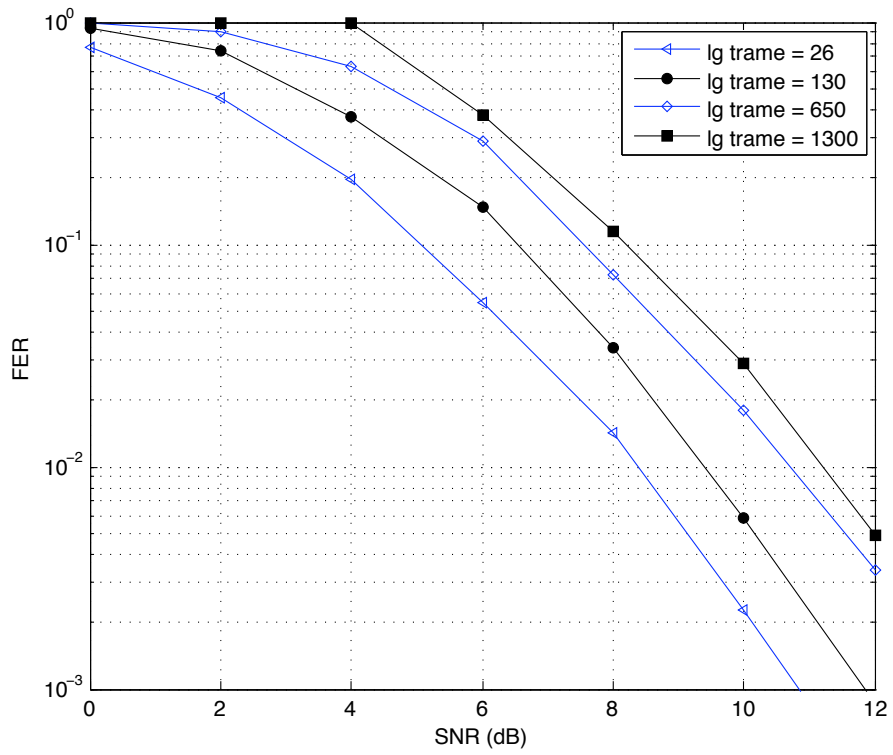


FIGURE B.3 – FER du STTC 16 états 4-PSK avec 3 antennes d'émission

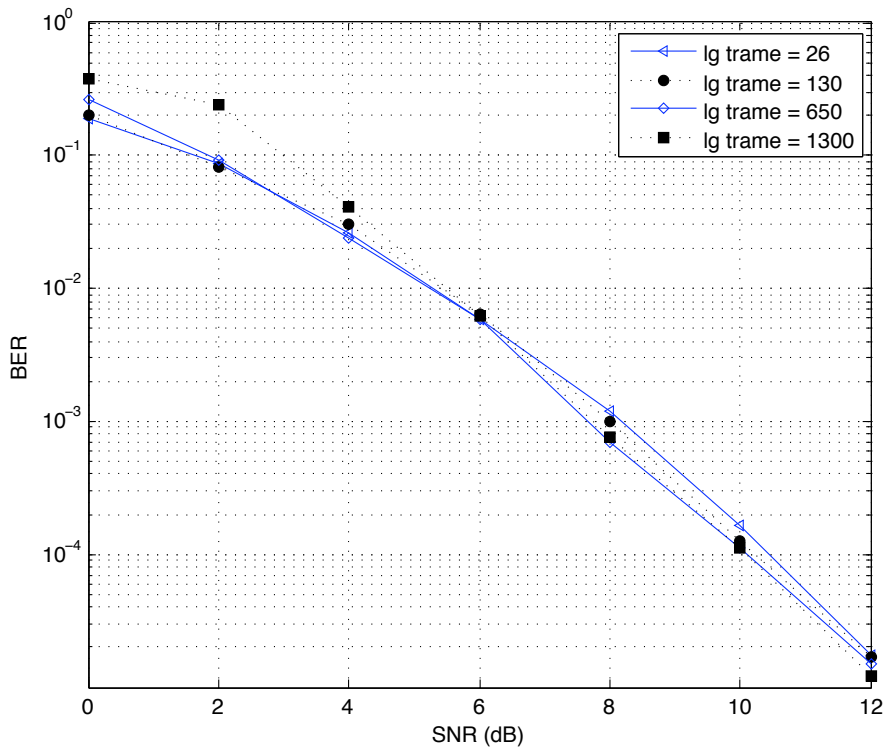


FIGURE B.4 – BER du STTC 16 états 4-PSK avec 3 antennes d'émission

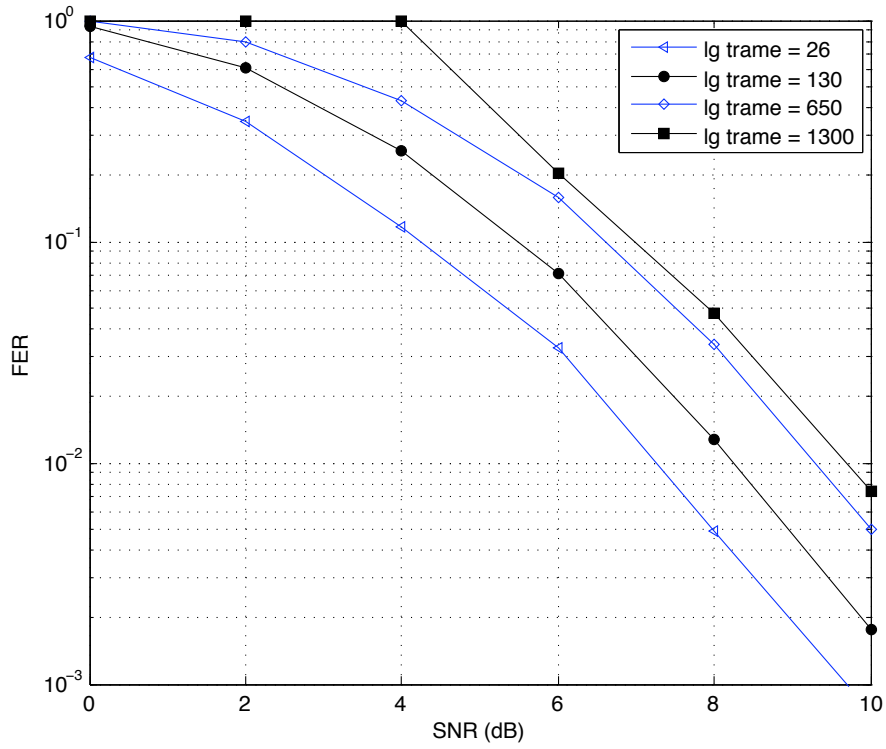


FIGURE B.5 – FER du STTC 64 états 4-PSK avec 3 antennes d'émission

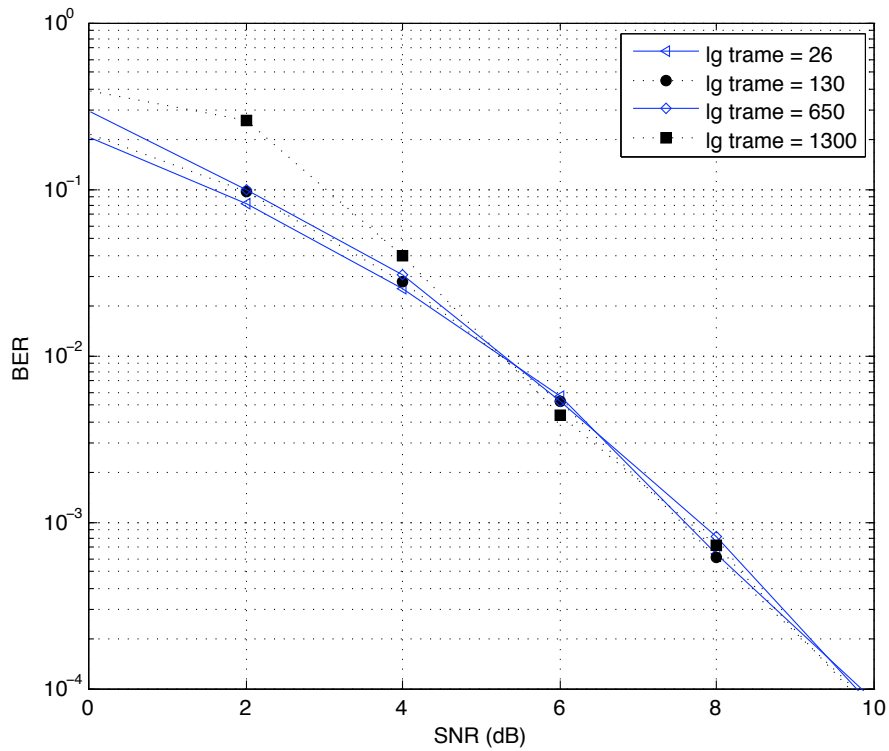


FIGURE B.6 – BER du STTC 64 états 4-PSK avec 3 antennes d'émission



## Annexe C

# Comparaison des méthodes de génération des codes équilibrés

Cette annexe va comparer par le biais d'un exemple, la complexité des deux méthodes de construction des codes équilibrés :

- la méthode donnée dans [66, 67] ;
- la méthode présentée dans ce document.

Par la suite, nous adoptons le code couleur suivant :

- vecteurs verts : vecteurs choisis ;
- vecteurs bleus : vecteurs générés ;
- vecteurs blancs : vecteurs pouvant être choisis ;
- vecteurs rouges : vecteurs bloqués (interdiction de les choisir par la suite).

Nous allons commencer par générer un code à longueur minimale 4-PSK avec 2 antennes d'émission à l'aide de la 1<sup>re</sup> méthode). Etant donné que le code que nous voulons obtenir est de type I, seulement un élément de  $\mathcal{C}_0$  doit être sélectionné, par exemple  $G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Après, nous choisissons 3 vecteurs linéairement indépendants dans 3 cosets différents. Ces vecteurs vont alors générer des éléments représentés en bleu dans le tableau C.1. Tous les éléments qui ne sont pas générés et qui ne sont pas linéairement indépendants (c.f. définition 3.6) aux vecteurs choisis sont alors bloqués (en rouge) et représentent donc des éléments de  $\mathcal{F}_4$ . Le reste des vecteurs devra être choisi de manière à créer l'intégralité de groupe  $\mathbb{Z}_4^3$ .

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

TABLE C.1 – Choix des 4 premières colonnes de  $\mathbf{G}$

Le 5<sup>e</sup> élément doit être choisi dans le but de générer de nouveaux éléments de  $\mathcal{C}_0$ . Il doit de plus appartenir à l'ensemble en blanc, par exemple  $G_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ . En effet, si le 5<sup>e</sup> vecteur est choisi parmi les éléments en rouge, les vecteurs ne seront pas linéairement indépendants (c.f. définition 3.6). Ce dernier vecteur va générer de nouveaux éléments de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  dont deux appartenant à  $\mathcal{C}_0$  et en bloquer d'autres, comme montré dans le tableau C.2.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

 TABLE C.2 – Choix de la 5<sup>e</sup> colonne de  $\mathbf{G}$ 

Comme nous voulons un code de type I, la seule possibilité est de choisir le dernier vecteur dans  $\mathcal{C}_0$ . Comme montré dans le tableau C.3, si  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  est sélectionné, la totalité de  $\mathbb{Z}_{2^n}^{n_T}$  est générée.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

 TABLE C.3 – Choix de la 6<sup>e</sup> colonne de  $\mathbf{G}$ 

La matrice génératrice du code créé est

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Ce code va maintenant être créé à l'aide de la nouvelle méthode de construction des codes équilibrés. L'objectif est de construire un code ayant une matrice génératrice  $\mathbf{G}' = [G'_1 G'_2 G'_3 G'_4 G'_5 G'_6]$ . Une permutation des colonnes de  $\mathbf{G}'$  permettra de retrouver la matrice génératrice  $\mathbf{G}$ .

La première étape est de choisir un vecteur dans  $\mathcal{C}_0$ ,  $G'_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Il est alors possible de choisir le 2<sup>e</sup> vecteur dans le coset  $\mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$ .

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

TABLE C.4 – Choix de la 1<sup>e</sup> colonne de  $\mathbf{G}'$

Le deuxième vecteur peut être  $G'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Comme montré dans le tableau C.5, aucun nouvel élément de  $\mathcal{C}_0$  n'est généré. Donc, le 3<sup>e</sup> vecteur doit encore être choisi dans le coset  $\mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$ . Une autre solution aurait été de choisir  $G'_2$  dans  $\mathcal{C}_0$ , dans ce cas, le code généré n'aurait pas été de type I mais de type II.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

TABLE C.5 – Choix de la 2<sup>e</sup> colonne de  $\mathbf{G}$

Nous choisissons maintenant  $G_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . On obtient ainsi le tableau C.6.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

TABLE C.6 – Choix de la 3<sup>e</sup> colonne de  $\mathbf{G}$

Comme représenté dans le tableau C.7, si l'on choisit  $G_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ , aucun nouveau vecteur  $\mathcal{C}_0$  n'est généré. Dans ce cas, le prochain élément doit appartenir à un des éléments blancs des cosets  $\mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$ ,  $\mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$  ou  $\mathcal{C}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$ .

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

TABLE C.7 – Choix de la 4<sup>e</sup> colonne de  $\mathbf{G}$

Nous pouvons prendre  $G_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Ainsi, la totalité de  $\mathcal{C}_0$  est générée. Il est alors possible de choisir le dernier vecteur dans les nouveaux cosets représentés en blanc dans le tableau C.7, par exemple  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Dans ce cas, la totalité de  $\mathbb{Z}_4^3$  comme montré précédemment dans le tableau C.3.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

 TABLE C.8 – Choix de la 5<sup>e</sup> colonne de  $\mathbf{G}$ 

Le code généré est donc

$$\mathbf{G}' = [G'_1 G'_2 G'_3 G'_4 G'_5 G'_6] \quad (\text{C.2})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Avec la permutation de certaines colonnes, on obtient

$$\mathbf{G} = [G'_1 G'_2 G'_4 G'_6 G'_5 G'_3] \quad (\text{C.4})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Le principal défaut de la première méthode est l'analyse des vecteurs linéairement indépendants. Dans le cas de deux et trois antennes d'émission, différents algorithmes existent pour éviter ces calculs proposés dans [69].

L'avantage de la nouvelle méthode est de définir simplement l'ensemble dans lequel choisir chaque nouvelle colonne de  $\mathbf{G}$ .

# Bibliographie

- [1] G. Forney, R. Gallager, G. Lang, F. Longstaff, and S. Qureshi, "Efficient modulation for band-limited channels," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 2, no. 5, pp. 632–647, Sept. 1984.
- [2] K. Liolis and N. Alagha, "On 64-apsk constellation design optimization," in *Proc. SPSC 2008*, Oct. 2008, pp. 1–7.
- [3] J. Proakis, *Digital Communications*. McGraw-Hill, 2001, vol. 4<sup>th</sup> ed.
- [4] H. Jafarkhani, *Space-Time Coding : theory and practice*. Cambridge, U.K. : Cambridge University Press, 2005.
- [5] G. Foschini and M. Gans, "On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas," *Wireless Personal Communications*, vol. 6, pp. 311–335, 1998.
- [6] I. E. Telatar, "Capacity of multi-antenna gaussian channels," *European Transactions on Telecommunications*, vol. 10, pp. 585–595, 1999.
- [7] B. Vucetic and J. Yuan, *Space - time coding*. John Wiley and Sons, 2003.
- [8] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. Calderbank, "Space-time codes for high data rate wireless communication : performance criterion and code construction," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 744–765, March 1998.
- [9] J. Yuan, Z. Chen, B. Vucetic, and W. Firmanto, "Performance and design of space-time coding in fading channels," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 12, pp. 1991–1996, Dec. 2003.
- [10] D. Ionescu, "New results on space-time code design criteria," in *Proc. IEEE WCNC 1999*, vol. 2, Sept. 1999, pp. 684–687.
- [11] E. Biglieri and A. Tulino, "Designing space-time codes for large number of receiving antennas," *Electronics Letters*, vol. 37, no. 17, pp. 1073–1074, Aug. 2001.
- [12] E. Biglieri, G. Taricco, and A. Tulino, "Performance of space-time codes for a large number of antennas," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, no. 7, pp. 1794–1803, Jul. 2002.
- [13] S. Alamouti, "A simple transmit diversity technique for wireless communications," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, no. 8, pp. 1451–1458, Oct. 1998.
- [14] V. Tarokh, H. Jafarkhani, and A. Calderbank, "Space-time block codes from orthogonal designs," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 5, pp. 1456–1467, Jul. 1999.

- [15] B. Hochwald, T. Marzetta, and C. Papadias, "A transmitter diversity scheme for wide-band cdma systems based on space-time spreading," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 19, no. 1, pp. 48–60, Jan. 2001.
- [16] H. Jafarkhani, "A quasi-orthogonal space-time block code," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 1, pp. 1–4, Jan. 2001.
- [17] G. Foschini, "Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas," *Bell Labs Technical Journal*, pp. 41–59, Autumn 1996.
- [18] G. D. Golden, G. J. Foschini, R. Valenzuela, and P. Wolniansky, "Detection algorithm and initial laboratory results using v-blast space-time communication architecture," *Electronics Letters*, vol. 35, no. 1, pp. 14–16, 7 Jan. 1999.
- [19] H. El Gamal and A. Hammons, "The layered space-time architecture : a new perspective," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 47, pp. 2321–2334, Sept. 2001.
- [20] B. Hassibi and B. Hochwald, "Linear dispersion codes," in *Proc. IEEE ISIT 2001*, June 2001, p. 325.
- [21] —, "High-rate codes that are linear in space and time," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, no. 7, pp. 1804–1824, Jul. 2002.
- [22] R. Gohary and T. Davidson, "Design of linear dispersion codes : asymptotic guidelines and their implementation," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 4, pp. 2892–2906, Nov. 2005.
- [23] M. Damen, K. Abed-meraim, and J. Belfiore, "Diagonal algebraic space-time block codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, pp. 628–636, June 2003.
- [24] H. El Gamal and M. Damen, "Universal space-time coding," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, no. 5, pp. 1097–1119, May 2003.
- [25] J. Belfiore, G. Rekaya, and E. Viterbo, "The golden code : A  $2 \times 2$  full-rate space-time code with nonvanishing determinants," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, no. 4, pp. 1432–1436, April 2005.
- [26] F. Oggier, G. Rekaya, J.-C. Belfiore, and E. Viterbo, "Perfect space-time block codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 9, pp. 3885–3902, Sept. 2006.
- [27] G. Rekaya-Ben Othman, "Nouvelles constructions algébriques de codes spatio-temporels atteignant le compromis "multiplexage-diversité"," Ph.D. dissertation, Telecom Paris, 2004.
- [28] S. Baro, G. Bauch, and A. Hansmann, "Improved codes for space-time trellis-coded modulation," *IEEE Communications Letters*, vol. 4, no. 1, pp. 20–22, Jan. 2000.
- [29] Y. Liu, M. Fitz, and O. Takeshita, "A rank criterion for qam space-time codes," in *Proc. IEEE ISIT 2000*, June 2000, p. 314.
- [30] —, "A rank criterion for QAM space-time codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, no. 12, pp. 3062–3079, Dec. 2002.
- [31] G. Forney, "The viterbi algorithm," *Proceeding of the IEEE*, 1973. [Online]. Available : <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:cs/0504020>
- [32] H. Jafarkhani and N. Seshadri, "Super-orthogonal space-time trellis codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, no. 4, pp. 937–950, April 2003.

- 
- [33] S. Siwamogsatham and M. Fitz, "Improved high-rate space-time codes via expanded stbc-mtcm constructions," in *Proc. ISIT 2002*, 2002, p. 106.
  - [34] —, "Improved high-rate space-time codes via orthogonality and set partitioning," in *Proc. IEEE WCNC 2002*, vol. 1, Mar. 2002, pp. 264–270.
  - [35] —, "Improved high-rate space-time codes via concatenation of expanded orthogonal block code and m-tcm," in *Proc. IEEE ICC 2002*, vol. 1, June 2002, pp. 636–640.
  - [36] —, "High-rate concatenated space-time block code m-tcm designs," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, no. 12, pp. 4173–4183, Dec. 2005.
  - [37] D. Ionescu, K. Mukkavilli, Z. Yan, and J. Lilleberg, "Improved 8- and 16-state space-time codes for 4psk with two transmit antennas," *IEEE Communications Letters*, vol. 5, no. 7, pp. 301–303, Jul. 2001.
  - [38] G. Ungerboeck, "Channel coding with multilevel/phase signals," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 28, no. 1, pp. 55–67, Jan. 1982.
  - [39] —, "Trellis-coded modulation with redundant signal sets part I : Introduction," *IEEE Communication Magazine*, vol. 25, no. 2, pp. 5–11, Feb. 1987.
  - [40] —, "Trellis-coded modulation with redundant signal sets part II : State of the art," *IEEE Communication Magazine*, vol. 25, no. 2, pp. 12–21, Feb. 1987.
  - [41] B. Laska, D. Dunwell, F. Chan, and H. Jafarkhani, "Computer design of super-orthogonal space-time trellis codes," in *Proc. Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering 2004*, vol. 4, May. 2004, pp. 2179–2184.
  - [42] M. Bale, B. Laska, D. Dunwell, F. Chan, and H. Jafarkhani, "Computer design of super-orthogonal space-time trellis codes," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 6, no. 2, pp. 463–467, Feb. 2007.
  - [43] G. Ferre, J. Cances, V. Meghdadi, and J. Dumas, "Stbc-based (turbo) sttc codes built by set partitioning for three transmit Antennas : construction and performances," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 6, no. 3, pp. 827–832, Mar. 2007.
  - [44] H. Jafarkhani and N. Hassanpour, "Super-quasi-orthogonal space-time trellis codes for four transmit antennas," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 4, no. 1, pp. 215–227, Jan. 2005.
  - [45] C. Sterian, Y. Wu, and M. Patzold, "A 16qam super-quasi-orthogonal space-time trellis code for four transmit antennas," in *Proc. IEEE VTC-Fall 2006*, Sept. 2006, pp. 1–5.
  - [46] Y. Hong, E. Viterbo, and J.-C. Belfiore, "Golden space-time trellis coded modulation," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 53, no. 5, pp. 1689–1705, May 2007.
  - [47] —, "High rate golden space-time trellis coded modulation," in *Proc. ACSSC 2006*, Oct. 2006, pp. 2087–2091.
  - [48] J. Conway and N. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer-Verlag, 1992.
  - [49] G. Forney, "Coset codes. i. introduction and geometrical classification," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 34, no. 5, pp. 1123–1151, Sept. 1988.
  - [50] J. Coleman, "Coset decomposition in lattices yields sample-block number systems," in *Proc. IEEE ISCAS 2002*, vol. 2, 2002, pp. 688–691.
  - [51] B. Cerato, G. Masera, and E. Viterbo, "Decoding the golden space-time trellis coded modulation," *IEEE Communications Letters*, vol. 12, no. 8, pp. 569–571, Aug. 2008.

- [52] E. Viterbo and Y. Hong, "On the performance of golden space-time trellis coded modulation over mimo block fading channels," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 8, no. 6, pp. 2737–2741, June 2009.
- [53] C. Liao and V. Prabhu, "Improved code design criteria for space-time codes over quasi-static flat fading channels," in *Proc. IEEE SPAWC 2005*, June 2005, pp. 7–11.
- [54] S. Benedetto, M. Mondin, and G. Montorsi, "Performance evaluation of trellis-coded modulation schemes," *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, no. 6, pp. 833–855, June 1994.
- [55] D. Aktas and M. Fitz, "Computing the distance spectrum of space-time trellis codes," in *Proc. IEEE WCNC 2000*, vol. 1, March 2000, pp. 51–55.
- [56] Z. Chen, J. Yuan, and B. Vucetic, "Improved space-time trellis coded modulation scheme on slow fading channels," *Electronics Letters*, vol. 37, no. 7, pp. 440–441, Mar. 2001.
- [57] Q. Yan and R. S. Blum, "Optimum space-time convolutional codes," in *Proc. IEEE WCNC 2000*, Sept. 2000, pp. 1351–1355.
- [58] W. Firmanto, B. Vucetic, and J. Yuan, "Space-time tcm with improved performance on fast fading channels," *IEEE Communications Letters*, vol. 5, no. 4, pp. 154–156, Apr. 2001.
- [59] Z. Chen, B. Vucetic, J. Yuan, and K. L. Lo, "Space-time trellis codes for 4-PSK with three and four transmit antennas in quasi-static flat fading channels," *IEEE Communications Letters*, vol. 6, no. 2, pp. 67–69, Feb. 2002.
- [60] Y. S. Jung and J. H. Lee, "New measure of coding gain for space-time trellis codes," in *Proc. IEEE ISIT 2001*, June 2001, p. 198.
- [61] Y. Hong and A. Guillen i Fabregas, "New space-time trellis codes for two-antenna quasi-static channels," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 56, no. 6, pp. 3581–3587, Nov. 2007.
- [62] Z. Chen, B. Vucetic, J. Yuan, and K. L. Lo, "Space-time trellis codes with two, three and four transmit antennas in quasi-static flat fading channels," in *Proc. IEEE ICC 2002*, vol. 3, May 2002, pp. 1589–1595.
- [63] D. Bernier and F. Chan, "Improved space-time trellis codes with three and four transmit antennas," in *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering 2004*, vol. 4, May 2004, pp. 2089–2093.
- [64] B. Abdool-Rassool, F. Heliot, L. Revely, M. Dohler, R. Nakhai, and H. Aghvami, "Fast search techniques for obtaining space-time trellis codes for Rayleigh fading channels and its performance in CDMA systems," in *Proc. IEEE VTC 2003-Spring*, vol. 1, Apr. 2003, pp. 66–69.
- [65] B. Abdool-Rassool, M. Nakhai, F. Heliot, L. Revely, and H. Aghvami, "Search for space - time trellis codes : novel codes for Rayleigh fading channels," *IEE Proceedings Communications*, vol. 1, no. 1, pp. 25–31, Feb. 2004.
- [66] T. Ngo, G. Zaharia, S. Bougeard, and J. Helard, "4-psk balanced sttc with two transmit antennas," in *Proc. IEEE VTC 2007-Spring*, April 2007, pp. 1693–1697.
- [67] —, "A new class of balanced 4-PSK STTC for two and three transmit antennas," in *Proc. IEEE SPAWC 2007*, June 2007, pp. 1–5.
- [68] S. Benedetto, R. Garelo, M. Mondin, and G. Montorsi, "Geometrically uniform tcm codes over groups based on  $l \times$  mpsk constellations," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 40, no. 1, pp. 137–152, Jan. 1994.



- [69] T. Ngo, “Etude et construction d’une nouvelle classe de codes temps-espace en treillis pour les futurs systèmes MIMO,” Ph.D. dissertation, IETR-INSA de Rennes, 2009.
- [70] A. Calderbank and N. Sloane, “New trellis codes based on lattices and cosets,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 33, no. 2, pp. 177–195, Mar. 1987.
- [71] T. Ngo, P. Viland, G. Zaharia, and J.-F. Helard, “Balanced qpsk space-time trellis codes,” *Electronics Letters*, vol. 44, no. 16, pp. 983–985, Jul. 2008.
- [72] A. Wong, J. Yuan, J. Choi, S. R. Kim, I.-K. Choi, and D.-S. Kwon, “Design of 16-qam space-time trellis codes for quasi-static fading channels,” in *Proc. IEEE VTC 2004-Spring*, vol. 2, May 2004, pp. 880–883.





## Résumé

Ces dernières années, les systèmes de communication sans fil utilisant plusieurs antennes en émission et en réception, couramment appelés systèmes MIMO, sont apparus comme une solution très prometteuse pour améliorer le débit et la fiabilité des transmissions de données. Dans le but de répartir l'information sur les différentes antennes d'émission, une multitude de codes temps-espace a été proposée dans la littérature. Parmi ces schémas de codage, les codes temps-espace en treillis (STTCs), basés sur des modulations codées en treillis dans un contexte multi-antennaire, se sont distingués comme offrant un très bon gain de codage. Des critères ont été élaborés pour analyser les performances des STTCs. Cependant, pour identifier les codes offrant les meilleures performances, il est nécessaire d'appliquer ces critères sur la totalité des codes. Cette recherche exhaustive nécessite un temps important de calcul, en particulier lorsque le nombre d'antennes d'émission, le nombre d'états du codeur ou encore la complexité de la modulation augmentent.

Le but de cette thèse est de proposer des solutions rapides et efficaces pour construire les meilleurs STTCs sans avoir recours à une recherche exhaustive. Dans un premier temps, une nouvelle méthode de construction des STTCs  $2^n$ -PSK équilibrés est présentée. L'avantage de cette classe de codes est de contenir l'ensemble des STTCs offrant les meilleures performances. Il suffit alors d'analyser seulement les STTCs  $2^n$ -PSK équilibrés pour trouver les meilleurs STTCs.

Une deuxième méthode appelée 'coset partitioning' est ensuite présentée. Exploitant une approche en cosets du set partitioning proposé par Ungerboeck, elle permet de générer de manière optimale les STTCs  $2^n$ -PSK les plus performants. Ainsi, les meilleurs STTCs 4-PSK de 2 à 8 antennes d'émission et les meilleurs STTCs 8-PSK de 2 à 6 antennes d'émission sont proposés.

Par la suite, nous nous intéressons à la génération des STTCs  $2^{2n}$ -QAM. Basée sur la décomposition de la distance euclidienne entre deux mots de code, une méthode permettant la génération des meilleurs STTCs  $2^{2n}$ -QAM est décrite. Ainsi, grâce à l'efficacité de cette méthode, pour la première fois, des STTCs 16-QAM avec 3 et 4 antennes et des STTCs 64-QAM avec 2 et 3 antennes d'émission sont construits.

Par ailleurs, les performances de tous les nouveaux codes proposés durant ces travaux de thèse sont évaluées par simulation en présence de canaux lents ou rapides de Rayleigh et en prenant en référence les meilleurs codes correspondants jusqu'alors publiés (lorsqu'ils existent).

## Abstract

During the last years, wireless communication systems using multiple transmit and receive antennas called MIMO systems have been of great interest to improve the performance of data transmission. Many systems have been proposed to allocate the information on each transmit antenna. It was shown that MIMO systems using space-time trellis codes (STTCs) achieve both spatial diversity and coding gains. STTCs are based on trellis coded modulations for MIMO systems. Several criteria have been proposed to analyze the performance of STTCs. To find the best codes, an exhaustive search is necessary. Nevertheless, the search-time is very large, especially when the number of transmit antennas, the number of states of the encoder and/or the modulation complexity increase.

The framework of this thesis is to develop several methods to design efficiently the best STTCs. In the case of  $2^n$ -PSK modulations, two methods to design the best STTCs are proposed. The first method concerns the generation of balanced STTCs because the best published codes are balanced.

The second method called "coset partitioning" is an optimal method based on a coset approach of set partitioning. Thereby, the best 4-PSK STTCs with 2 to 8 transmit antennas and the best 8-PSK STTCs with 2 to 6 transmit antennas are proposed.

Furthermore, a method based on the Euclidian distance decomposition is given to generate the best  $2^{2n}$ -QAM STTCs. Thus, the first 16-QAM STTCs with 3 and 4 transmit antennas and the first 64-QAM STTCs with 2 and 3 transmit antennas are given.

Moreover, the performance of all the new codes is also evaluated by simulation in a fast and slow Rayleigh channel. Their performance is compared to the best previous published codes as long as they exist.