

# Sommaire

Remerciements.....	4
Sommaire .....	6
Table des notations.....	9
I. Introduction.....	14
II. Comportement électromécanique des résonateurs MEMS: prérequis .....	17
II.A. Introduction .....	17
II.B. Dynamique des résonateurs linéaires.....	17
II.B.a. Réponse fréquentielle d'un résonateur linéaire du second ordre .....	19
II.B.b. Réponse temporelle d'un résonateur linéaire du second ordre .....	21
II.C. Description des vibrations en mécanique des milieux continus .....	22
II.C.a. Problème général.....	22
II.C.b. Définition et caractéristiques des modes propres d'un système .....	22
II.C.c. Réduction d'ordre de modèle .....	23
II.C.d. Etude de cas : dynamique des poutres vibrantes rectangulaires en flexion pure .....	24
II.C.e. Conditions aux limites d'un pont vibrant en flexion pure .....	26
II.C.f. Comportement d'une poutre sous différentes sollicitations .....	27
II.C.g. Modèle d'ordre réduit d'un résonateur capacitif à pont vibrant .....	29
II.D. Dynamique des résonateurs non-linéaires .....	34
II.D.a. Hypothèses.....	35
II.D.b. Spécificité des résonateurs à haut facteur de qualité .....	36
II.D.c. Signification physique de la balance harmonique et de la méthode des variations lentes.....	37
II.D.d. Régime permanent.....	38
II.D.e. Etude de cas : Réponse fréquentielle d'un résonateur soumis à une non-linéarité cubique .....	38
II.D.f. Régime transitoire .....	40
II.D.g. Critère de Routh-Hurwitz .....	41
II.D.h. Etude de cas : Stabilité en boucle ouverte d'un résonateur soumis à une non-linéarité cubique .....	41
II.E. Présentation du dispositif expérimental .....	42
II.F. Construction d'un banc automatisé de mesures et de caractérisation .....	48
II.F.a. Présentation du banc automatisé de mesures et de caractérisation.....	48
II.F.b. Limitations dues au fonctionnement du banc de caractérisation.....	51
II.G. Conclusion .....	52
III. Amélioration de la fiabilité des capteurs MEMS capacitifs résonants .....	54
III.A. Introduction .....	54
III.B. Modes de défaillances des capteurs MEMS résonants capacitifs .....	55
III.B.a. Accumulation de charge au sein des diélectriques .....	55
III.B.b. Défaillances mécaniques .....	56
III.B.c. Détérioration du vide interne de la cellule.....	57
III.B.d. Défaillance électromécanique : Phénomène de pull-in .....	58
III.B.e. Bilan de l'impact des principaux modes de défaillance .....	61
III.C. Caractérisation de MEMS capacitifs résonants en régime linéaire .....	61
III.C.a. Etat de l'art : Caractérisation par mesures électriques.....	62

III.C.b. Développement d'une nouvelle méthode de caractérisation : mesure harmonique à impulsions.....	71
III.C.c. Limites de la méthode harmonique à impulsions et construction de la méthode à impulsions sous-harmonique (SPMA) .....	74
III.C.d. Identification de la réponse fréquentielle .....	75
III.C.e. Résultats expérimentaux de caractérisation linéaire.....	78
III.D. Limitations liées à la caractérisation des MEMS en régime linéaire .....	81
III.E. Réponse fréquentielle des MEMS capacitifs résonants en régime non-linéaire.....	82
III.E.a. Introduction.....	82
III.E.b. Etat de l'art des méthodes de caractérisation non-linéaire de MEMS .....	83
III.E.c. Modélisation du comportement dynamique non-linéaire des MEMS capacitifs sous différentes ondes d'actionnement .....	89
III.E.d. Validation expérimentale.....	99
III.F. Caractérisation non-linéaire des MEMS capacitifs résonants .....	101
III.F.a. Construction de la fonction objectif.....	102
III.F.b. Procédure de minimisation de la fonction objectif .....	106
III.F.c. Etude de cas : Caractérisation non-linéaire d'un résonateur à non-linéarité cubique .....	107
III.F.d. Résultats expérimentaux de caractérisation non-linéaire.....	110
III.G. Conclusion.....	118
IV. Amélioration des performances des capteurs MEMS capacitifs oscillants .....	119
IV.A. Introduction.....	119
IV.B. Fonctionnement en boucle fermée des capteurs résonants.....	120
IV.B.a. Principe et intérêt de la mesure résonante .....	120
IV.B.b. Structure générale d'une boucle auto-oscillante à MEMS.....	121
IV.C. Etude du pull-in résonant dans les oscillateurs à résonateur MEMS capacitif .....	124
IV.C.a. Introduction .....	124
IV.C.b. Limites de stabilité en boucle fermée : condition de pull-in résonant .....	124
IV.C.c. Illustration des limites de stabilités pour les différents actionnements .....	126
IV.C.d. Impact de la non-linéarité de détection capacitive sur le comportement d'un oscillateur auto-entretenu .....	128
IV.D. Etude du comportement d'un oscillateur en présence de bruit .....	132
IV.D.a. Sources de bruit.....	132
IV.D.b. Outils de description des performances d'un oscillateur .....	135
IV.D.c. Conversion du bruit injecté dans le système en bruit de fréquence .....	137
IV.D.d. Stabilité fréquentielle d'un oscillateur soumis à un bruit additif.....	140
IV.D.e. Stabilité fréquentielle d'un oscillateur soumis à des fluctuations lentes.....	145
IV.D.f. Validation du modèle sur résonateur de Duffing soumis à un bruit blanc additif .....	147
IV.D.g. Stabilité fréquentielle d'un oscillateur MEMS capacitif soumis à différentes sources de bruit et de fluctuations .....	151
IV.E. Conclusion.....	158
Conclusion générale.....	160
V. Bibliographie.....	162
Annexes.....	170
Annexe 1 : Orthogonalité des modes propres et définition de la masse et de la raideur modale .....	170
a) Définition d'un opérateur auto-adjoint défini positif .....	170

b) Définition des produits scalaires .....	170
Annexe 2 : Théorie des distributions pour l'étude des actionnements par impulsions .....	171
a) Impulsion de Dirac : Définition et spectre .....	171
b) Peigne de Dirac : Définition et spectre.....	172
Annexe 3 : Exemples de gains statiques de cellules MEMS .....	173
Annexe 4 : Non-linéarité de détection .....	173
Annexe 5 : Description d'un calcul numérique de série de Fourier.....	175
Annexe 6 : Identification de paramètres d'un résonateur MEMS capacitif dans le domaine de Nyquist .....	177
Annexe 7 : Absence de raidissement mécanique pour le résonateur étudié .....	178
Annexe 8 : Réponse fréquentielle d'un pont vibrant capacitif imparfaitement encastré à une extrémité.....	184
Annexe 9 : Théorème des fonctions implicites .....	186
Annexe 10 : Décomposition en séries de Fourier d'une fonction d'une variable à évolution sinusoïdale .....	187
Annexe 11 : Construction d'un oscillateur auto-entretenu à impulsions .....	188
Annexe 12 : Détermination de la variance des composantes en phase et en quadrature d'un bruit blanc.....	190
Annexe 13 : Impact des composantes en phase et en quadrature du bruit sur le comportement d'un oscillateur à résonateur non-linéaire .....	191
Table des illustrations .....	193
Table des tableaux.....	198

## Table des notations

$\equiv$	Définition
$\langle f g\rangle_s$	Produit scalaire spatial de $f$ et $g$
$\ f\ $	Norme de $f$ associée au produit scalaire spatial
$\langle f g\rangle_T$	Produit scalaire temporel de $f$ et $g$
$\underline{f}$	Transformée de Fourier de $f$
$S_f$	Densité spectrale de puissance de $f$
$\bar{f}$	Valeur moyenne de $f$
$\dot{f}$	Dérivée temporelle de $f$ par rapport au temps réduit $\omega_0 t$
$\ddot{f}$	Dérivée seconde temporelle de $f$ par rapport au temps réduit $\omega_0 t$
$\hat{f}$	Estimateur de $f$
$\alpha$	Coefficient d'amortissement linéaire
$\alpha_k$	Coefficient de modulation de la raideur en phase avec le déplacement
$\alpha_Q$	Coefficient d'ajustement linéaire de $1/Q$ par rapport à la tension de polarisation
$\beta_k$	Coefficient de modulation de la raideur en quadrature avec le déplacement
$\gamma$	Coefficient de non-linéarité cubique (Duffing)
$\delta$	Impulsion de Dirac
$\epsilon$	Permittivité diélectrique du milieu séparant les deux électrodes
$\epsilon_h$	$\frac{2g^s}{g^c} \left[ 1 - \frac{A_s}{g^s} \frac{\partial g^s}{\partial A} \right]$ ( $\cot \varphi_e$ en regime linéaire)
$\zeta$	Fonction de détection non-linéaire
$\eta$	Coefficient de conversion électromécanique adimensionné
$\tilde{\eta}$	Coefficient de conversion électromécanique dimensionné $\eta/V_b^2$ (en $V^{-2}$ )
$\theta$	Vecteur de paramètres recherchés dans une procédure d'identification
$\kappa$	Coefficient correctif de la force électrostatique subie par une résonateur capacitif à pont vibrant ( $\kappa \simeq 0.014$ )
$\lambda_i^4$	Valeur propre associée au mode propre $i$ ( $\lambda_1 \simeq 4,73$ )
$\mu$	Coefficient d'amortissement linéique
$\nu$	Rapport entre la tension d'actionnement et la tension de polarisation
$\xi$	Taux d'amortissement
$\rho$	Masse volumique du silicium



$\sigma$	Contrainte dans la poutre
$\sigma_b$	Ecart-type d'un bruit $b$
$\tau$	Temps de réponse d'un système du second ordre
$\tau_e$	Temps d'échantillonnage
$\tau_t$	Temps de réponse d'un té de polarisation $\tau_t = R_t C_t$
$\Upsilon$	Fonction objectif (indicée en fonction du cas considéré)
$\varphi$	Déphasage introduit par le résonateur
$\varphi_e$	Déphasage introduit par l'électronique de rétroaction
$\psi$	Phase instantanée
$\omega$	Pulsation
$\omega_0$	Pulsation propre
$\omega_s$	Pulsation du régime établi (non-perturbé)
$\Omega$	Pulsation (ou fréquence) normalisée par rapport à $\omega_0$
$\Omega_s$	Fréquence normalisée par rapport à $\omega_0$ du régime établi non-perturbé
$A$	Amplitude d'oscillation normalisée par rapport au gap
$A_s$	Amplitude du régime établi non-perturbé
$AVAR$	Variance d'Allan
$a_0$	Déplacement statique
$b$	Bruit introduit en entrée du résonateur
$C_0$	Capacité nominale du résonateur
$csc$	Cosécante
$e$	Fonction erreur (indicée en fonction du cas considéré)
$E$	Module de Young du silicium dans la direction cristallographique du résonateur
$E_X$	Intégrale elliptique complète de seconde espèce estimée en $X$
$\mathbb{E}$	Energie
$f$	Fréquence $f = \omega/2\pi$
$f_0$	Fréquence propre
$F$	Force adimensionnée
$F_e$	Force électrostatique adimensionnée
$\tilde{F}$	Force exercée sur le résonateur
$F_1$	Composante de la force d'actionnement électrostatique due uniquement à la tension de polarisation (terme de ramollissement électrostatique)

$F_c$	Composante de la force d'actionnement électrostatique en quadrature avec le déplacement du résonateur
$F_s$	Composante de la force d'actionnement électrostatique en phase avec le déplacement du résonateur
$g^c$	Composante de l'ensemble des forces non-linéaires exercées sur le résonateur en quadrature avec le déplacement
$g^s$	Composante de l'ensemble des forces non-linéaires exercées sur le résonateur en phase avec le déplacement
$G_0$	Gain nominal du résonateur ( $G_0 = C_0 V_b$ , en coulombs (C))
$G_e$	Gain électrique de l'amplificateur de charge à la fréquence de travail
$G$	Gap entre les électrodes
$h$	Epaisseur du résonateur
$H$	Fonction de transfert liant le déplacement $x$ à la force $F$
$H_{cos}$	Fonction de transfert liant les fluctuations de fréquence à la composante du bruit injecté en quadrature par rapport au déplacement du résonateur
$H_{mes}$	Fonction de transfert liant la tension de sortie de l'amplificateur de charge à la tension d'actionnement.
$H_{sin}$	Fonction de transfert liant les fluctuations de fréquence à la composante du bruit injecté en phase avec le déplacement du résonateur
$I_0$	$\langle 1   w_1 \rangle_s \simeq 0,523$
$I_1$	$\ w_1\ ^2 \simeq 0,397$
$I_2$	$\langle \frac{d^2 w_1}{dy^2}   w_1 \rangle_s \simeq -1,22$
$i_p$	Courant parasite
$i_m$	Courant motionnel
$k$	Raideur
$k_1$	Raideur effective du premier mode de vibration d'un pont
$k_b$	Constante de Boltzmann
$K_X$	Intégrale elliptique complète de première espèce
$\mathbb{K}$	Matrice de raideur
$l$	Largeur du résonateur
$\ln$	Logarithme népérien
$\log_{10}$	Logarithme en base 10

$L$	Longueur du résonateur
$L_x$	Longueur caractéristique dans la direction $x$ . Pour un résonateur capacitif, $L_x = G$ .
$m$	Masse du résonateur
$m_1$	Masse effective du premier mode de vibration d'un pont
$\mathbb{M}$	Matrice de masse
$N$	Nombre subharmonique
$N_p$	Traction dans la poutre
$q_m$	Charge motionnelle
$Q$	Facteur de qualité ( $Q = 1/2\xi$ )
$Q_0$	Facteur de qualité de la cellule MEMS en absence de tension
$S$	Surface des électrodes en vis-à-vis ( $S = Ll$ )
sec	Sécante
$t$	Temps
$T_p$	Largeur des impulsions
$T$	Température
$V_0$	Rapport entre l'amplitude du premier harmonique de la tension d'actionnement et la tension de polarisation ( $V_0 = V_1/V_b$ )
$V_1$	Amplitude du premier harmonique de la tension d'actionnement
$V_{act}$	Tension d'actionnement
$V_b$	Tension de polarisation
$V_{in}$	Tension d'entrée de la cellule MEMS
$V_{out}$	Tension de sortie de l'amplificateur de charge
$V_{sq}$	Amplitude d'un signal carré
$V_p$	Amplitude des impulsions dans un actionnement à impulsions
$V_{cp}$	Amplitude des impulsions dans un actionnement à impulsions combinées
$V_s$	Amplitude d'un signal sinusoïdal
$w(y, t)$	Forme spatiale (adimensionnée) de la ligne moyenne de la poutre
$\tilde{w}(\tilde{y}, t)$	Forme spatiale (dimensionnée) de la ligne moyenne de la poutre
$w_i(y)$	$i$ -ième mode spatial adimensionné du résonateur
$x$	Déplacement du résonateur normalisé par rapport à la longueur caractéristique $L_x$
$\tilde{x}$	Déplacement (dimensionné) du résonateur dans la direction $x$
$X$	Ecart par rapport à la fréquence unitaire $X = 1/\Omega - 1$

$y$	Coordonnée le long de la fibre moyenne de la poutre normalisée par rapport à $L$
$\tilde{y}$	Coordonnée spatiale (dimensionnée) le long de la fibre moyenne de la poutre
$y_\omega$	Fluctuation de fréquence $y_\omega = \frac{1}{\omega_s} \frac{d\varphi}{dt}$

# I. Introduction

Dans l'industrie aéronautique, le pilotage d'appareils volants (avions, drones, hélicoptères...) nécessite de nombreuses données de vol : pressions, températures, vitesse, accélération, altitude, positionnement géographique, etc. sont autant de données indispensables à la prise de décision des pilotes, humains ou automatiques. Une absence d'accès ou un accès erroné à ces informations peut avoir des conséquences dramatiques, autant dans l'aviation civile que dans la navigation militaire.

Afin d'accéder à un nombre croissant d'informations de vol, les capteurs se sont multipliés sur les appareils, tout au long du 20<sup>e</sup> siècle. Parmi eux, on peut citer les accéléromètres, gyromètres et baromètres. L'objectif de réduction des coûts et de la consommation énergétique des systèmes embarqués a contribué, depuis les années 1970, à l'avènement de nouvelles technologies à la fois compactes et performantes. Plusieurs lignes de recherche stratégiques ont alors été menées en parallèle. La première consiste à concentrer un maximum de mesures dans un même dispositif macroscopique. C'est ainsi que des centrales inertielles, dispositifs compacts permettant à un appareil de se repérer sans l'aide de la navigation GPS, ont vu le jour. La seconde ligne stratégique, davantage en rupture avec les technologies précédentes, se base sur l'utilisation des structures microscopiques.

Cette dernière ligne stratégique a donné naissance à une pléthore de capteurs micro-électromécaniques (MEMS, de l'anglais « Micro-Electro-Mechanical Systems ») actuellement utilisés pour des mesures de navigation, compte-tenu du bon compromis qu'ils offrent en termes de performances, coût, dimensions et poids. L'avènement des technologies de fabrication CMOS et SOI (Silicon On Insulator) a rendu possible la fabrication à grande échelle de composants microélectroniques aux caractéristiques répétables grâce à une bonne reproductibilité des procédés. Parmi les structures ainsi fabriquées, certaines possèdent la particularité de comporter des parties mobiles ou déformables, généralement libérées par recours à une couche sacrificielle. Par une succession d'étapes mêlant épitaxie, photolithographie et gravure (sèche ou humide), on peut ainsi fabriquer des dispositifs capacitifs, formés d'électrodes fixes et mobiles. Ces dernières, de masse faible et de raideur élevée, possèdent des caractéristiques vibratoires intéressantes pour une utilisation dans des capteurs : fréquence de résonance élevée et amortissement faible. Les capteurs MEMS ainsi obtenus consomment peu d'énergie, ont des temps de réponse courts et une bonne précision [1], comparés à leurs homologues macroscopiques.

Les MEMS ont de nombreuses applications : ils sont notamment utilisés comme accéléromètres [2], gyromètres [3], capteurs de pression [4] et de température [5]. Dans ces capteurs, la mesure s'obtient par l'intermédiaire de la sensibilité d'un élément mécanique à la grandeur physique d'intérêt (mesurande). Le terme MEMS (Micro-Electro-Mechanical System) traduit leur principe de fonctionnement. Ils sont formés d'une structure microscopique, mise en mouvement par un système d'actionnement et/ou par des stimuli extérieurs. Ce mouvement est ensuite transformé en signaux électriques via un mode de transduction spécifique. Parmi les différentes catégories de MEMS, on s'intéresse ici aux capteurs dits « résonants ». Il s'agit de capteurs comprenant un résonateur mécanique très faiblement amorti placé à l'intérieur d'une boucle de rétroaction électronique qui permet d'entretenir la vibration à la résonance. Dans ce type de capteurs, c'est le plus souvent la raideur (et donc la fréquence de résonance) du résonateur qui varie en fonction d'une grandeur physique qu'on cherche à mesurer.

Dans la plupart des applications actuelles, l'utilisation des structures MEMS est limitée à un domaine de fonctionnement linéaire. Les régimes linéaires présentent un certain nombre d'avantages considérables par rapport aux régimes non-linéaires. Les non-linéarités, en plus

d'être complexes à simuler et moins accessibles à l'intuition, engendrent une dégradation des performances des capteurs si aucune précaution particulière n'est prise. Cependant, les MEMS sont des dispositifs intrinsèquement fortement non-linéaires [6]. Ils sont le siège de nombreux phénomènes engendrant un amortissement, des forces d'actionnement et/ou une raideur non-linéaires. L'essor des capteurs MEMS a d'ailleurs largement contribué à de récentes découvertes dans le domaine de la dynamique non-linéaire [7] [8]. L'utilisation des résonateurs MEMS dans des régimes supposés linéaires n'est donc possible que dans une gamme de fonctionnement extrêmement réduite, dans laquelle le mouvement de la partie mobile est suffisamment faible pour que l'effet des non-linéarités ne se fasse pas quantitativement ressentir. L'exploitation de ces régimes de fonctionnement nécessite alors une électronique performante. L'amélioration de la fiabilité et des performances des capteurs MEMS requiert donc la modélisation de leur comportement dans des régimes de fonctionnement non-linéaires.

Dans les applications aéronautiques, la fiabilité des systèmes est un point particulièrement sensible, du point de vue sécuritaire, car les capteurs ont vocation à être opérationnels pendant plusieurs décennies sur les appareils. Ils peuvent subir des dommages au cours de leur utilisation avec, comme conséquence, une perturbation plus ou moins importante des mesures. Afin d'anticiper les défaillances, et de les prévenir, on peut opter pour l'exploitation des régimes non-linéaire, qui sont sensibles à davantage de caractéristiques du capteur que les régimes de mesure traditionnels. Les régimes non-linéaires sont une source riche d'informations sur la structure et sont donc particulièrement intéressants dans une optique d'amélioration de la fiabilité des capteurs.

Au-delà des problématiques de fiabilité, l'utilisation de capteurs MEMS présente également des défis technologiques dans certains domaines d'application, tels que la navigation inertielle. Dans ces applications, la capacité d'un système à se positionner précisément dans l'espace sans l'aide de systèmes de communication est directement liée à la stabilité fréquentielle des accéléromètres et des gyromètres qui mesurent son déplacement et l'orientent par rapport aux points cardinaux. La recherche de modes de fonctionnement à stabilité optimale à long terme pourrait permettre de répondre à de nouveaux besoins spécifiques aux applications stratégiques liées à la Défense Nationale. Dans ce travail, on montre qu'il est possible d'améliorer la stabilité fréquentielle des capteurs MEMS par une exploitation judicieuse de leurs régimes de fonctionnement non-linéaire.

Cette thèse s'attache à construire et valider expérimentalement des modèles de comportement non-linéaire des capteurs MEMS capacitifs résonants. Elle débute par les prérequis et les outils mathématiques indispensables à la poursuite des objectifs qui ont été fixés. Ces prérequis sont présentés dans le chapitre II. Le chapitre III aborde ensuite l'amélioration de la fiabilité des capteurs MEMS. Dans ce chapitre, on décrit les modes de défaillance les plus courants des capteurs et leur effet sur le comportement mécanique de la structure micro-usinée. On aborde ensuite la fiabilité sous l'angle de la caractérisation. Les résultats théoriques sont confrontés à des validations expérimentales réalisées sur un capteur de pression industriel fabriqué par THALES Avionics (Valence). Ce capteur sert de support de validation mais les méthodes présentées ici ne se limitent pas aux capteurs de pression. L'applicabilité des résultats à d'autres structures MEMS fait la force des modèles et des méthodes développés.

Enfin, le chapitre IV décrit le fonctionnement général d'un capteur résonant, puis des exemples d'architectures spécifiques aux capteurs MEMS. On y aborde le comportement de boucles électroniques oscillantes à base de résonateurs MEMS capacitifs. En particulier, on s'intéresse à l'ensemble des points de fonctionnement accessibles à ces oscillateurs. Un modèle permettant d'évaluer la stabilité fréquentielle des oscillateurs MEMS est ensuite élaboré. Cette

dernière approche permet de proposer des régimes de fonctionnement optimaux en termes de stabilité fréquentielle pour les oscillateurs MEMS capacitifs. Les perspectives pour de futurs travaux sont évoquées en conclusion de ce manuscrit.

## II. Comportement électromécanique des résonateurs

### MEMS: prérequis

#### II.A. Introduction

Avant de pouvoir étudier le comportement des capteurs MEMS résonants, on présente dans ce chapitre les bases de description des résonateurs linéaires et non-linéaires, ainsi que les outils mathématiques utiles tout au long de la thèse. On présente tout d'abord le comportement d'un résonateur linéaire à une dimension. Les notions de théorie spectrale et de décomposition modale permettant de décrire le comportement d'un résonateur à élément déformable sont ensuite exposées. La décomposition sur base des modes propres permet de faire le lien entre la mécanique des milieux continus régie par des équations aux dérivées partielles et les modèles d'ordre réduit (régis par des équations différentielles temporelles) utiles par la suite. Enfin, on présente des méthodes de résolution des modèles d'ordre réduit obtenus dans le cas d'un résonateur à un seul degré de liberté et à amortissement faible. Afin de faciliter la lecture et la compréhension, chacune des méthodes présentées sera illustrée sur une étude de cas simple.

Après cette description du comportement mécanique des MEMS, ce chapitre expose les modes de transduction spécifiques aux MEMS capacitifs qui permettent d'avoir accès, expérimentalement, au mouvement du résonateur sous la forme de tensions électriques. Ceci permet enfin de présenter le dispositif expérimental qui sera utilisé dans toute la suite de cette thèse.

#### II.B. Dynamique des résonateurs linéaires

Le modèle le plus simple de résonateur MEMS consiste en une masse  $m$ , fixée à un bâti par un ressort de raideur  $k$  et soumise à des forces de frottements linéaires équivalentes à un amortissement linéaire  $\alpha$ . Ce modèle est représenté sur la Fig. 1 où  $\tilde{F}(t)$  correspond à la force appliquée sur le résonateur, et  $\tilde{x}$  correspond au déplacement de la masse  $m$ . Dans toute la suite, les notations  $\tilde{x}$  et  $\tilde{F}$  feront référence à des grandeurs dimensionnées, tandis que les notations  $x$  et  $F$  feront référence à des grandeurs adimensionnées.

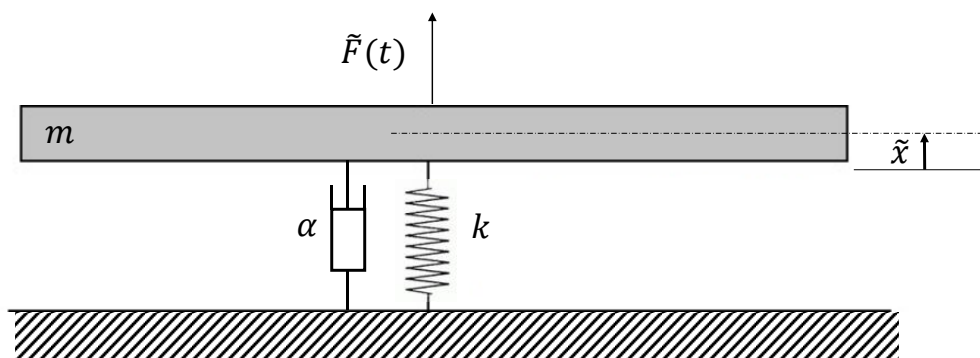


Fig. 1 Modèle simple de résonateur linéaire



Dans toute la suite de ce paragraphe, on considèrera le déplacement normalisé du résonateur par rapport à une longueur caractéristique  $L_x$  (qui dépend du cas considéré):

$$x = \frac{\tilde{x}}{L_x}. \quad (1)$$

La fréquence propre d'un résonateur est définie comme la fréquence à laquelle oscillerait ce résonateur en évolution libre et en l'absence de forces non conservatrices (ce qui implique  $\alpha = 0$ ). Dans ce cas, l'équation régissant le comportement dynamique d'un tel résonateur du second ordre s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , pulsation naturelle du résonateur.

En présence de frottements ou d'autres forces dissipatives, les oscillations libres du système sont amorties. L'équation dynamique régissant le mouvement libre d'un oscillateur amorti s'écrit alors:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3)$$

où  $\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$  est le taux d'amortissement du résonateur. On définit le facteur de qualité du résonateur par rapport au taux d'amortissement :

$$Q \equiv \frac{1}{2\xi}. \quad (4)$$

Cette définition du facteur de qualité est générale et ne dépend que de l'amortissement du système. L'équation du mouvement libre du résonateur se transforme alors en :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5)$$

En présence d'une force  $\tilde{F}(t)$  appliquée sur le résonateur, l'équation (5) devient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 F(t) \quad (6)$$

où  $F(t) = \frac{\tilde{F}(t)}{\omega_0^2 m L_x}$  est une force adimensionnée.

## II.B.a. Réponse fréquentielle d'un résonateur linéaire du second ordre

La fréquence de résonance et le facteur de qualité d'un résonateur peuvent être définis par rapport au comportement du résonateur dans le cas d'oscillations entretenues. Pour un résonateur linéaire dont l'oscillation est entretenue par une force sinusoïdale adimensionnée  $F(t) = F \sin \omega t$ , on peut écrire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 F \sin \omega t \quad (7)$$

où  $F$  est l'amplitude de la force d'excitation adimensionnée  $F(t)$ . Dorénavant, on notera systématiquement  $\underline{\quad}$  l'opérateur « transformée de Fourier ». Par la suite, on normalisera la fréquence d'oscillation par la transformation :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (8)$$

On obtient alors la fonction de transfert du système décrit par (7) :

$$H(j\Omega) = \frac{\underline{x}}{\underline{F}} = \frac{1}{1 - \Omega^2 + \frac{j\Omega}{Q}} \quad (9)$$

dont le gain vaut :

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}} \quad (10)$$

et dont la phase s'écrit :

$$\varphi(\Omega) = \arg \left[ \frac{1}{1 - \Omega^2 + \frac{j\Omega}{Q}} \right] = \arctan \left( Q \left( \frac{1}{\Omega} - \Omega \right) \right) - \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

Le gain et la phase d'un tel résonateur sont tracés en Fig. 2 pour  $Q = 100$ .

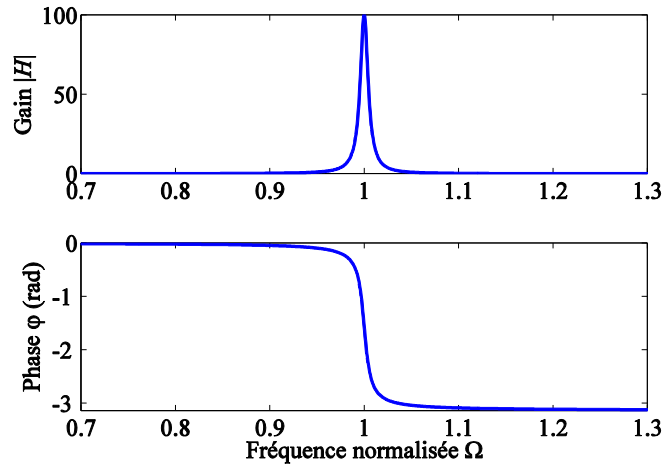


Fig. 2 Réponse typique d'un résonateur linéaire du second ordre à haut facteur de qualité.

La pulsation de résonance de l'oscillateur entretenu correspond au maximum de la courbe de gain et vaut alors :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (12)$$

ce qui prouve que :

$$\omega_r \simeq \omega_0 \text{ pour } Q \gg 1. \quad (13)$$

On remarquera que, pour  $(\omega - \omega_0)^2 \simeq 0$  (donc proche de la fréquence de résonance) :

$$\begin{cases} G(\Omega) \simeq \frac{Q}{\sqrt{1 + 4Q^2X(\Omega)^2}} \\ \varphi(\Omega) \simeq \arctan(2QX(\Omega)) - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (14)$$

où  $X(\omega) = \frac{1}{\Omega} - 1$ .

Le facteur de qualité est parfois défini par rapport à la bande passante à -3dB du résonateur. On peut montrer l'équivalence de cette définition avec la définition (4), sous certaines hypothèses. En effet, la largeur à mi-hauteur du pic de résonance vaut :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0 \left( \sqrt{-\frac{1}{2} + Q^2} + \sqrt{-\frac{1}{8} + Q^2} - \sqrt{-\frac{1}{2} + Q^2} - \sqrt{-\frac{1}{8} + Q^2} \right)}{Q} \quad (15)$$

soit :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \left( 1 + o\left(\frac{1}{Q^2}\right) \right). \quad (16)$$

Dans le cas où le facteur de qualité est suffisamment grand (i.e. où l'amortissement est suffisamment faible), un développement limité au 1<sup>er</sup> ordre en  $1/Q$  donne :

$$\begin{cases} \omega_r \approx \omega_0 \\ Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \end{cases}. \quad (17)$$

Il est à noter que l'équivalence entre la relation (17) et la définition (4) n'est valable que dans le cas où le facteur de qualité est suffisamment grand et où le résonateur est actionné par des forces linéaires (i.e. dont l'expression ne dépend pas de la variable de déplacement  $x$ ).

De même, on peut définir le facteur de qualité via la pente de la courbe de phase à la résonance, qui vaut :

$$\left. \frac{d\varphi}{d\Omega} \right|_{\Omega=1} = -2Q. \quad (18)$$

L'utilisation de cette dernière propriété comme définition du facteur de qualité n'est également équivalente aux précédentes que dans le cas d'un résonateur linéaire à haut facteur de qualité.

### II.B.b. Réponse temporelle d'un résonateur linéaire du second ordre

Si l'on considère la réponse d'un résonateur décrit par l'équation (5) lâché d'une position initiale normalisée  $x = x_0$  avec une vitesse initiale  $v_0 = \frac{dx}{dt}(t=0)$ , l'évolution temporelle de la position du résonateur décrit par (5) s'écrit :

$$\begin{cases} x(t) = \left[ x_0 \cos \omega_1 t + \left( \frac{x_0}{\omega_1 \tau} + \frac{v_0}{\omega_1} \right) \sin \omega_1 t \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \frac{dx}{dt}(t) = \left[ v_0 \cos \omega_1 t - \left( \frac{x_0 \omega_0^2}{\omega_1} + \frac{v_0}{\omega_1 \tau} \right) \sin \omega_1 t \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{cases} \quad (19)$$

où  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$  et  $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$  (pulsation de résonance). A partir de ces expressions, des considérations énergétiques permettent de proposer une interprétation physique du facteur de qualité. Celui-ci est parfois défini par rapport à l'énergie dissipée par le résonateur en oscillations libres sur une pseudo-période. En effet, l'énergie du résonateur à l'instant  $t$  vérifie :

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_0 \left[ 1 + \frac{\sin 2\omega_1 t}{\omega_1 \tau} + 2 \left( \frac{\sin 2\omega_1 t}{\omega_1 \tau} \right)^2 \right] \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \quad (20)$$

où  $\mathbb{E}_0$  est l'énergie du résonateur à l'instant  $t = 0$ . Ainsi, l'énergie  $\Delta\mathbb{E}$  dissipée par le résonateur pendant la pseudo-période suivant  $t$  s'écrit :

$$\frac{\Delta\mathbb{E}}{\mathbb{E}} = 1 - \exp\left(-\frac{4\pi}{\tau\omega_1}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{2\pi\omega_0}{Q\omega_1}\right). \quad (21)$$

Dans la limite où l'amortissement est suffisamment faible ( $Q \gg 1$  et  $\omega_1 \simeq \omega_0$ ), on obtient :

$$Q \simeq \frac{2\pi\mathbb{E}}{\Delta\mathbb{E}}. \quad (22)$$

On peut remarquer que l'expression (22), tout comme l'expression (17), n'est équivalente à la définition (4) que dans le cas où le facteur de qualité est suffisamment grand et où le système est linéaire. L'expression (22) est cependant souvent utilisée comme définition notamment parce qu'elle permet la mesure du facteur de qualité via une méthode impulsionnelle, simple et rapide, consistant à mesurer la décroissance exponentielle des oscillations.

## II.C. Description des vibrations en mécanique des milieux continus

### II.C.a. Problème général

Les considérations de la section II.B ne suffisent pas toujours à décrire le comportement d'un MEMS. Dans le cas où l'élément mobile du MEMS est déformable, la modélisation du système requiert la description précise de la dynamique du résonateur (à poutre ou à membrane). De manière générale, un tel résonateur en vibration libre peut être décrit par une équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \forall y \in \Sigma, \forall t \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathbb{M}(w(y, t))] + \mathbb{K}(w(y, t)) = 0 \\ \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \forall y \in \partial\Sigma, \forall t \in \mathbb{R}, R_j(w(y, t)) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

où  $w$  désigne le déplacement du résonateur,  $\Sigma$  le domaine du résonateur et  $\partial\Sigma$  son contour et  $R_j$  les conditions aux limites (spatiales) imposées par le problème. L'expression des opérateurs spatiaux linéaires  $\mathbb{K}$  (opérateur de raideur) et  $\mathbb{M}$  (opérateur de masse) d'ordre  $p$  reflète les différentes forces en présence et dépend du type de résonateur considéré. Il est à noter que, comme ce sont des opérateurs spatiaux, ils n'incluent aucune dérivée temporelle. La résolution du problème (23) dans le cas général est complexe, car il s'agit d'une équation aux dérivées partielles assortie de conditions aux limites dans laquelle le formalisme des ondes progressives à une dimension n'est pas adapté.

### II.C.b. Définition et caractéristiques des modes propres d'un système

La résolution du problème (23) passe par la recherche de modes propres  $w_i$  tels que le déplacement  $w$  du résonateur s'écrive comme une solution à variables séparées sous la forme :

$$w(y, t) = x_i(t)w_i(y). \quad (24)$$

Il vient alors, en tirant parti de la linéarité des opérateurs spatiaux  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{K}$  :

$$\begin{cases} \forall x_i(t) \neq 0, \frac{\mathbb{M}(w_i(y))}{x(t)} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\mathbb{K}(w_i(y)) \\ \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \forall y \in \partial\Sigma, \forall t \in \mathbb{R}, R_j(x_i(t)w_i(y)) = 0 \end{cases} . \quad (25)$$

Comme le membre de droite de la première équation ne dépend pas de la variable temporelle  $t$ , on peut donc écrire :

$$\exists \omega_i \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \omega_i^2 x = 0 \\ \mathbb{K}(w_i(y)) + \omega_i^2 \mathbb{M}(w_i(y)) = 0 \end{cases} . \quad (26)$$

La première équation du système (26) se résout sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x_i(t) = A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t . \quad (27)$$

On peut aisément vérifier que cette solution reste valable pour  $x(t) = 0$ . L'équation (27) montre que l'évolution temporelle de chacun des modes propres est sinusoïdale. La deuxième équation du système (26) correspond à un problème de Sturm-Liouville (problème aux valeurs propres). De manière générale, il existe une infinité dénombrable de modes propres  $\{w_1, w_2, \dots\}$  et de valeurs propres  $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  solutions de ce problème. De plus, ces modes propres dépendent des conditions aux limites  $R_j$ . On admettra par la suite que les modes propres ainsi déterminés constituent une base de l'espace vectoriel des solutions du système (23).

### II.C.c. Réduction d'ordre de modèle

On montre, en Annexe 1, que, si les opérateurs  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{M}$  sont auto-adjoints définis positifs, les modes propres sont orthogonaux au sens du produit scalaire de masse et de raideur définis pour deux fonctions  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} \langle f|g \rangle_M = \int_{\Sigma} f \mathbb{M}(g) d\Sigma \\ \langle f|g \rangle_K = \int_{\Sigma} f \mathbb{K}(g) d\Sigma \end{cases} . \quad (28)$$

Cette propriété justifie l'utilisation des modes propres comme une base privilégiée de description du mouvement. La décomposition en modes propres consiste à écrire la solution générale décrivant la dynamique du résonateur soumis à une excitation comme la superposition de mouvements décrits par les modes propres (calculés en régime d'oscillations libres). En théorie, on écrira donc [9]:

$$w(y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) w_i(y) . \quad (29)$$

La réduction d'ordre de modèle consiste à limiter la décomposition en modes propres à un nombre restreint de modes. On utilisera donc l'approximation [9]:

$$\hat{w}(y, t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) w_i(y) \quad (30)$$

où  $N \in \mathbb{N}$  est choisi en fonction du problème étudié et de la précision recherchée. L'impact du choix du nombre de modes utilisés pour décrire le comportement d'un résonateur MEMS a été étudié et illustré dans [10] pour un résonateur MEMS à actionnement capacitif. La fonction  $\hat{w}$  ainsi définie n'est pas solution de (23), mais on peut chercher les  $x_i$  qui annulent la projection du résidu sur la base des modes propres choisis, en définissant le résidu par :

$$R_w = \|w(y, t) - \hat{w}(y, t)\|^2 \quad (31)$$

Le choix du produit scalaire associé à la norme utilisée pour le calcul du résidu a bien sûr un impact sur l'approximation choisie.

Pour identifier les coefficients de la décomposition sur base des modes propres, on peut projeter la seconde équation du système (26) sur chacun des modes propres  $w_j$  au sens du produit scalaire  $\langle | \rangle_s$  défini par :

$$\langle f | g \rangle_s = \int_{\Sigma} f g d\Sigma \quad (32)$$

Ceci donne :

$$\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket, m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + k_i x_i = 0 \quad (33)$$

L'équation (33) correspond alors, pour chacun des modes considérés, à un résonateur harmonique libre du second ordre. Dans le cas où le système est principalement excité suivant un de ses modes de vibration, l'équation (33) donne alors une unique équation différentielle du mouvement à une dimension. Cette équation (ce système) est appelée « modèle d'ordre réduit ». Afin d'illustrer la méthode, on présente, dans la section II.C.d, le cas particulier d'une poutre vibrante rectangulaire.

#### **II.C.d. Etude de cas : dynamique des poutres vibrantes rectangulaires en flexion pure**

On s'intéresse ici à des poutres vibrantes rectangulaires (structures dans lesquelles une dimension spatiale est très grande devant les autres). La modélisation des résonateurs à diaphragme ou à membrane sort du cadre de cette thèse, bien que des raisonnements similaires (mais plus complexes) puissent être menés.

Les modèles développés au cours de ce doctorat se limitent à l'étude de poutres résonantes dans la théorie des petites déformations d'Euler-Bernoulli, qui néglige l'influence du cisaillement au sein de la poutre. Sous ces hypothèses, on peut résumer le mouvement de la poutre au

mouvement de sa fibre moyenne. Une coupe présentant la poutre et sa fibre moyenne est représentée en Fig. 3. Les conditions aux limites sur la poutre dépendent des applications et leur impact sera illustré dans un second temps.

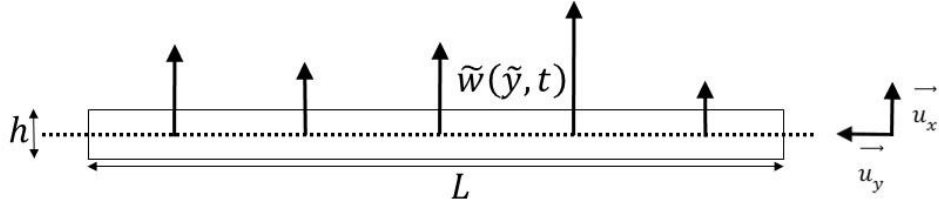


Fig. 3 Schéma générique d'une poutre résonante dans les hypothèses d'Euler-Bernoulli

On notera  $f$  la valeur algébrique d'un vecteur  $\vec{f}$ . L'équation régissant le comportement d'une poutre de module de Young  $E$ , de masse volumique  $\rho$ , de longueur  $L$  de largeur  $l$  et d'épaisseur  $h$  s'écrit, en l'absence de tension :

$$\frac{EI}{L^4} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho l h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (34)$$

où  $I = \frac{lh^3}{12}$  est le moment d'inertie (géométrique) de la poutre et où le déplacement instantané d'un point de la fibre moyenne  $\tilde{w}$  et la variable spatiale  $\tilde{y}$  ont été normalisés :

$$\begin{cases} y = \frac{\tilde{y}}{L} \\ w = \frac{\tilde{w}}{L_x} \end{cases} \quad (35)$$

Comme précédemment, on a noté  $L_x$  une dimension caractéristique du système dans la direction définie par  $\vec{u}_x$ .

Dans ce cas, on identifie les opérateurs de raideur et de masse par :

$$\begin{cases} \mathbb{K}(w) = \frac{EI}{L^4} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ \mathbb{M}(w) = \rho l h w \end{cases} \quad (36)$$

L'équation (34) devient alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathbb{M}(w(y, t))] + \mathbb{K}(w(y, t)) = 0 \quad (37)$$

Afin de déterminer les modes de vibration associés à l'équation (34), il est nécessaire de considérer le problème muni de conditions aux limites. L'exemple d'un pont vibrant est donné en section II.C.e.



## II.C.e. Conditions aux limites d'un pont vibrant en flexion pure

Dans le cas d'une poutre encastrée aux deux extrémités, structure appelée « pont », les conditions aux limites imposées aux modes  $w_i$  de flexion sont :

$$\begin{cases} w_i(0) = 0 \\ \frac{dw_i}{dy}(0) = 0 \\ w_i(1) = 0 \\ \frac{dw_i}{dy}(1) = 0 \end{cases} \quad . \quad (38)$$

Pour trouver les modes propres associés, on cherche  $w$  sous la forme :

$$w(y, t) = x(t)w_i(y) \quad (39)$$

où  $w_i$  est un mode propre qui dépend des conditions aux limites. On obtient alors :

$$\frac{Et^2}{12L^4\rho w_i} \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} = -\frac{\ddot{x}}{x(t)} \quad . \quad (40)$$

L'indépendance du terme de gauche par rapport la variable temporelle et du terme de droite par rapport à la variable spatiale  $y$  donne :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_i^2 x = 0 \\ \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} = \lambda_i^4 w_i \end{cases} \quad (41)$$

où  $\omega_i^2 \equiv \frac{Eh^2}{12L^4\rho w_i} \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4}$  et  $\lambda_i^4 \equiv \frac{12L^4\rho}{Et^2} \omega_i^2$  sont des constantes. Le paramètre  $\lambda_i^4$  est appelée valeur propre associée au mode propre  $w_i$ .

On peut remarquer que cette définition de  $\lambda_i$  correspond à la relation de dispersion du mode. Ceci conduit alors à une infinité de modes propres vérifiant la même relation de dispersion. Par exemple, le premier de ces modes s'écrit :

$$w_1(y) = \frac{1}{w_{max}} \left[ \frac{\cosh(\lambda_1 y) - \cos(\lambda_1 y)}{\cosh(\lambda_1) - \cos(\lambda_1)} - \frac{\sinh(\lambda_1 y) - \sin(\lambda_1 y)}{\sinh(\lambda_1) - \sin(\lambda_1)} \right] \quad (42)$$

avec  $\lambda_1 \simeq 4.73$  et  $w_{max} = \frac{\cosh(\frac{\lambda_1}{2}) - \cos(\frac{\lambda_1}{2})}{\cosh(\lambda_1) - \cos(\lambda_1)} - \frac{\sinh(\frac{\lambda_1}{2}) - \sin(\frac{\lambda_1}{2})}{\sinh(\lambda_1) - \sin(\lambda_1)}.$

## II.C.f. Comportement d'une poutre sous différentes sollicitations

Les calculs précédents ne sont rigoureusement valables que dans le cas d'une poutre en oscillations libres en l'absence d'amortissement et de contrainte interne au matériau. Plus généralement, le comportement d'une poutre vibrante peut parfois faire intervenir différentes sollicitations : contrainte de traction ou de compression au sein du matériau, amortissement (linéaire ou non-linéaire), actionnement externe permettant la mise en mouvement, etc. L'impact de ces différentes sollicitations est décrit dans les paragraphes suivants.

### II.C.f.i. Impact d'une contrainte de tension au sein du matériau

Dans le cas où la poutre est soumise à une traction  $\vec{N}_p$  (voir Fig. 4, pour  $\vec{f}_l = \vec{0}$ ), l'équation de la dynamique devient :

$$\frac{Elh^3}{12L^4} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{N_p}{L^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho lh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (43)$$

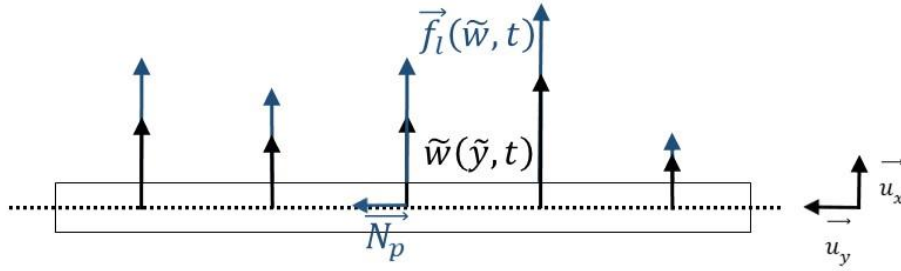


Fig. 4 Schéma d'une poutre sous différentes sollicitations dans les hypothèses d'Euler-Bernoulli.

Ainsi, l'opérateur de raideur s'écrit désormais :

$$\mathbb{K}(w) = \frac{EI}{L^4} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{N_p}{L^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad . \quad (44)$$

Un tel opérateur définit donc des modes propres différents du cas non contraint. L'impact de la contrainte sur la forme des modes propres a été étudié dans la littérature, notamment vis-à-vis du premier mode propre d'un pont [11].

### II.C.f.ii. Impact d'un amortissement linéaire

En présence d'un phénomène d'amortissement linéaire, l'équation de la dynamique fait également apparaître un terme dissipatif :

$$\frac{Elh^3}{12L^4} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{N_p}{L^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} + \rho lh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (45)$$

où  $\mu$  est un coefficient d'amortissement linéaire (linéique). L'existence de ce terme dissipatif modifie l'équation différentielle (33) obtenue après projection sur les modes propres. La poutre

se comporte alors, vis-à-vis de chacun de ses modes propres, non plus comme un oscillateur harmonique libre mais comme un oscillateur harmonique amorti.

### II.C.f.iii. Impact de forces d'actionnement

L'utilisation de résonateurs requiert souvent l'application de forces d'actionnement permettant d'entretenir le mouvement amorti de la poutre et de compenser les phénomènes dissipatifs. En présence d'une force linéique  $\vec{f}_l(\tilde{w}, t)$ , l'équation décrivant le comportement de la poutre, représentée en Fig. 4, devient :

$$\frac{Elh^3}{12L^4} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{N_p}{L^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} + \rho lh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{f_l(\tilde{w}, t)}{L_x} . \quad (46)$$

La solution de l'équation (46), munie de conditions aux limites, ne peut rigoureusement plus s'écrire comme combinaison linéaire des modes propres précédemment définis en régime d'oscillations libres en absence de forces d'actionnement. En d'autres termes, la famille des modes propres déterminés en régime libre ne forme pas une base de l'espace des solutions. Cependant, il est courant d'utiliser tout de même une approximation sur base de ces modes propres et d'écrire :

$$w(y, t) \simeq \sum_{i=1}^N x_i(t) w_i(y) . \quad (47)$$

Cette démarche est également suivie dans le cas où le résonateur est actionné par des forces non-linéaires [10]. Bien qu'elle repose sur une approximation, cette approche permet néanmoins de rendre compte de nombreux phénomènes observés expérimentalement.

### II.C.f.iv. Limitation à un unique mode propre

Dans de nombreux cas, les propriétés géométriques (de symétrie) et physiques (amortissement) du système rendent un unique mode de vibration prépondérant [6] [12] [13]. Il est alors courant de considérer que ce mode de vibration correspond, en première approximation, au mode propre calculé en régime libre, et de décrire le système à travers un seul degré de liberté. Dans le cas où le premier mode est prépondérant, on écrira donc :

$$w(y, t) \simeq x(t) w_1(y) . \quad (48)$$

Une telle description présente l'avantage non-négligeable de simplifier considérablement le traitement analytique du problème, tout en produisant des résultats souvent proches de la réalité expérimentale. Dans la suite de ce manuscrit, on se placera toujours dans le cadre de cette hypothèse.

## II.C.g. Modèle d'ordre réduit d'un résonateur capacitif à pont vibrant

Dans les MEMS à actionnement capacitifs, la force d'actionnement est générée par une électrode fixe en vis-à-vis d'une électrode mobile. La force totale subie par une poutre déformable en vibration exercée par la tension aux bornes du dispositif dépend, dans le cas général, de la forme du mode de vibration.

Pour décrire le cas d'une poutre mobile bi-encastée (pont), on se placera sous les hypothèses de capacités localement planes, en négligeant les effets de bord. Cette approximation est d'autant plus valable que le résonateur est long. Dans le cas contraire, les effets de bord peuvent devenir importants et modifier la capacité du MEMS. On notera  $\epsilon$  la permittivité diélectrique du milieu séparant les deux électrodes,  $S = lL$  la surface des électrodes fixe et mobile (supposée identique),  $G$  la distance entre les deux électrodes au repos (appelée « gap » en anglais),  $V_b$  et  $V_{act}$  les tensions de polarisation et d'actionnement appliquées en entrée du résonateur. Dans ce cas, la force électrique linéique, projetée sur l'axe  $\vec{u}_x$ , exercée en chaque point de coordonnée  $y$  du résonateur s'écrit :

$$f_e(\tilde{w}, t) = \frac{\epsilon S (V_b + V_{act}(t))^2}{2L(G - \tilde{w}(y, t))^2} = \frac{\epsilon S V_b^2 (1 + v(t))^2}{2LG^2(1 - w(y, t))^2} \quad (49)$$

où on a noté  $v = V_{act}/V_b$ . On cherche maintenant à résoudre l'équation (46), munie des conditions aux limites (38) pour un pont vibrant soumis à cette force électrostatique. On supposera par la suite que l'amortissement  $\mu$  et les contraintes  $N_p$  modifient peu la forme (spatiale) de la solution de l'équation (37) de sorte qu'on écrira toujours:

$$w(y, t) \simeq x(t)w_1(y) \quad . \quad (50)$$

En effectuant le produit scalaire de (46) par  $w_1$  (au sens de  $\langle | \rangle_s$ ) et en notant  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire  $\langle | \rangle_s$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{Elh^3\lambda_1^4}{12L^4} I_1 - \frac{N_p}{L^2} I_2 \right] x(t) + \mu I_1 \frac{dx}{dt} + \rho l h I_1 \frac{d^2x}{dt^2} \\ = \frac{\epsilon l V_b^2 (1 + v(t))^2}{2G^3} \left\langle \frac{1}{(1 - x(t)w_1)^2} \middle| w_1 \right\rangle_s \end{aligned} \quad (51)$$

où

$$\begin{cases} I_1 = \|w_1\|^2 = \int_0^1 w_1^2 \simeq 0,397 \\ I_2 = \left\langle \frac{d^2 w_1}{dy^2} \middle| w_1 \right\rangle_s \simeq -4,88 \end{cases} \quad . \quad (52)$$

On peut alors définir le coefficient de raideur effective  $k_1$ , l'amortissement effectif  $c_1$  et la masse effective  $m_1$  par :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{Elh^3\lambda_1^4}{12L^3}I_1 - \frac{N_p}{L}I_2 \\ c_1 = \mu LI_1 \\ m_1 = \rho lhLI_1 \end{cases} . \quad (53)$$

On obtient alors l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 F_e(x(t), t) \quad (54)$$

avec

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{m_1} \left[ \frac{Elh^3\lambda_1^4 I_1}{12L^3} - \frac{N_p}{L} I_2 \right] \\ Q = \frac{m_1 \omega_0}{\mu L} \\ F_e(x(t), t) = \frac{\epsilon S V_b^2 (1 + \nu(t))^2}{2m_1 \omega_0^2 G^3} \left\langle \frac{1}{(1 - x(t)w_1)^2} \middle| w_1 \right\rangle_s \end{cases} . \quad (55)$$

L'équation (54) est similaire à l'équation (6), ce qui montre que la poutre se comporte, vis-à-vis de son mode de vibration, comme un oscillateur harmonique amorti, actionné par des forces non-linéaires. Elle reste valable tant que la contrainte  $N_p$  dans la poutre varie lentement dans le temps (par rapport à  $1/\omega_0$ ).

Comme  $I_2 < 0$ , la contrainte de traction (respectivement de compression) à l'intérieur de la poutre génère une augmentation (respectivement une diminution) de la fréquence propre du mode de vibration de la poutre. Du point de vue du facteur de qualité en revanche, il est plus difficile de déterminer l'impact d'une contrainte de traction, compte-tenu de l'impact que la traction peut avoir sur le coefficient  $\mu$  [11].

### II.C.g.i. Raidissement mécanique

Jusqu'à présent, la longueur de la poutre a été supposée constante au cours du mouvement. En réalité, pour une poutre parfaitement encastree à ses deux extrémités, le mouvement de la ligne moyenne génère une elongation du matériau, qui est la cause d'un effet normal (traction) supplémentaire au sein de la poutre. Ce phénomène est notamment décrit dans un livre de Nayfeh et Mook [14]. L'effort normal supplémentaire résultant  $N_a$  est relié à l'elongation  $\Delta L$  en première approximation via le module de Young par la relation :

$$N_a = \frac{Elh\Delta L}{L} . \quad (56)$$

Comme l'abscisse curviligne le long de la ligne moyenne vérifie, pour des déformations faibles ( $\frac{d\tilde{w}}{d\tilde{y}} \ll 1$ ) :

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \frac{G^2}{L^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2} \simeq 1 + \frac{G^2}{2L^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (57)$$

l'effort normal supplémentaire se traduit par :

$$N_a = \frac{ElhG^2}{2L^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy = \frac{ElhG^2 x(t)^2}{2L^2} \left\| \frac{dw_1}{dy} \right\|^2 . \quad (58)$$

L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x (1 + \gamma x(t)^2) = \omega_0^2 F_e(x(t), t) \quad (59)$$

où on a introduit le paramètre  $\gamma$  appelé coefficient de raidissement ou « coefficient de Duffing » :

$$\gamma \simeq \frac{\frac{ElhG^2}{2L^4} I_2^2}{\frac{Elh^3 \lambda_1^4}{12L^4} I_1 - \frac{N_p}{L^2} I_2} \quad (60)$$

avec

$$\left\| \frac{dw_1}{dy} \right\|^2 \simeq 4.88 = -I_2 . \quad (61)$$

En absence de contrainte de traction  $N_p$ , le coefficient de Duffing devient :

$$\gamma \simeq \frac{6G^2 I_2^2}{h^2 \lambda_1^4 I_1} \simeq 0,72 \frac{G^2}{h^2} . \quad (62)$$

La non-linéarité due au raidissement de la poutre a fait l'objet de nombreuses études, que ce soit dans la modélisation de la réponse fréquentielle du système ou dans son influence sur le bruit de phase des oscillateurs dont le résonateur est soumis à une non-linéarité cubique [6] [15]. Son impact sur les phénomènes de résonance (auto-)paramétrique [16] et sur le bruit de phase des oscillateurs utilisant un tel résonateur a également été soulevé dans plusieurs études [17] [18].

### II.C.g.ii. Méthodes analytiques de résolution approchée

L'équation (59) montre que la dynamique du résonateur peut se ramener à celle d'un système résonant du second ordre, dont le terme d'excitation dépend de la forme (géométrique) du mode de vibration  $w_1$ .

De façon générale, il est complexe d'obtenir une expression analytique exacte de  $F_e(x(t), t)$ . Afin de pallier cette difficulté, plusieurs solutions existent et ont été développées dans la littérature. Parmi elles, on peut citer principalement trois approches :

- une approche par développement en séries de Taylor de la force électrostatique [16] [19].
- une approche consistant à se ramener à des termes polynomiaux en multipliant chacun des termes de l'équation (37) par le dénominateur de la force non-linéaire  $f$  avant de

projeter l'équation sur le mode propre  $w_1$ . Cette méthode est développée par Younis et al. [10]. Elle sera référencée par la suite sous l'abréviation MBP (« Multiplication Before Projection ») comme c'est le cas dans [20].

- une approche par approximation du mode résonant. Cette méthode consiste à se ramener à une expression approchée de  $w_1$  qui permet ensuite d'obtenir un résultat analytique exact de la projection de la force électrostatique sur ce mode. [21]

Etant donné qu'elle repose sur un développement en séries de Taylor, la première de ces trois approches est essentiellement limitée à mesure que l'amplitude du déplacement du résonateur augmente. Le moyen le plus direct pour étendre son domaine de validité est d'augmenter l'ordre du développement en séries de Taylor. Cependant, la question de l'ordre le plus pertinent à considérer se pose alors, car l'amélioration de la précision se fait au prix d'une complexité accrue des expressions obtenues.

Il a été montré [20] que la méthode MBP peut, sous certaines réserves, mener à des résultats plus précis que la première. Ceci nécessite, dans certains cas comme le nôtre, de multiplier les termes de l'équation (37) par un terme polynomial en  $w$  adéquat, et non plus simplement par  $(1 - x(t)w_1)^2$ .

Comparée aux deux méthodes précédentes, la troisième méthode donne les résultats les plus précis [20], pour une complexité de calcul limitée (due à un nombre faible de termes à calculer), sur toute la largeur du gap  $G$  (i.e. quelle que soit l'amplitude de déplacement du résonateur). Nous nous concentrerons donc sur cette méthode. Dans le cas d'un pont vibrant, on peut alors approximer  $F_e$  par [22]:

$$F_e(x(t), t) \simeq \frac{\eta_{cc}(1 + v(t))^2(1 + \kappa x(t))}{(1 - x(t))^{\frac{3}{2}}} \quad (63)$$

avec :

$$\begin{cases} I_0 = \int_0^1 w_1 \simeq 0,523 \\ \kappa \simeq 0.014 \\ \eta_{cc} = \frac{\epsilon S V_b^2 I_0}{2m_1 \omega_0^2 G^3} \end{cases} . \quad (64)$$

Lorsqu'il sera fait référence au coefficient  $\eta_{cc}$ , on l'appellera « coefficient de transduction électromécanique ». Compte-tenu de la faible valeur du coefficient  $\kappa$ , on utilisera l'approximation  $\kappa \ll 1$ , de sorte que la force adimensionnée s'écrira alors :

$$F_e(x(t), t) \simeq \widehat{F}_e(x(t), t) = \frac{\eta_{cc}(1 + v(t))^2}{(1 - x(t))^{\frac{3}{2}}} . \quad (65)$$

L'erreur  $\epsilon_F = \left| 1 - \frac{\widehat{F}_e}{F_e} \right|$  introduite par l'approximation (65) par rapport à l'expression (63) lorsque  $x$  parcourt tout l'intervalle  $[0,1]$  est alors bornée par la limite de 1.4%. On remarquera

que, dans le cas d'un résonateur MEMS (de masse  $m$ ) à capacités planes, la force adimensionnée  $F_e$  s'écrit sous une forme assez similaire :

$$F_e(x(t), t) \simeq \hat{F}_e(x(t), t) = \frac{\eta(1 + v(t))^2}{(1 - x(t))^2} \quad (66)$$

avec

$$\eta = \frac{\epsilon S V_b^2}{2m\omega_0^2 G^3} \quad (67)$$

Le coefficient  $\eta$  sera également appelé « coefficient de conversion électromécanique » et on précisera simplement, le cas échéant, s'il s'agit d'un modèle à capacités planes ou d'un modèle de pont vibrant. La ressemblance des expressions (65) et (66) permet de comprendre que, dans de nombreux cas (comme on le montrera par la suite), un modèle à capacités planes permet de rendre qualitativement compte des phénomènes observés sur un résonateur à pont vibrant.

### II.C.g.iii. Dynamique d'un MEMS capacitif à pont vibrant

En résumé, l'équation (54) décrivant la dynamique d'un résonateur à un degré de liberté parfaitement encastré à ses deux extrémités soumis uniquement à des forces électrostatiques s'écrit :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2(1 + \gamma x^2)x = \frac{\eta_{cc}\omega_0^2(1 + v(t))^2}{(1 - x(t))^{\frac{3}{2}}} \quad (68)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m_1} \left[ \frac{Elh^3\lambda_1^4 I_1}{12L^3} - \frac{N_p}{L} I_2 \right]} \\ \lambda_1 = 4,73 \\ I_1 = \|w_1\|^2 = \int_0^1 w_1^2 \simeq 0,397 \\ I_2 = \int_0^1 \frac{d^2 w_1}{dy^2} w_1 \simeq -4,88 \\ Q = \frac{m_1 \omega_0}{\mu L} \\ \eta_{cc} = \frac{\epsilon S V_b^2 I_0}{2m_1 \omega_0^2 G^3} \\ I_0 = \int_0^1 w_1 \simeq 0,523 \\ m_1 = \rho l t L I_1 \\ \gamma \simeq \frac{\frac{ElhG^2}{2L^4} I_2^2}{\frac{Elh^3\lambda_1^4}{12L^4} I_1 - \frac{N_p}{L^2} I_2} \end{array} \right.$$



L'équation (68) est non-linéaire à deux égards :

- la non-linéarité électrostatique due à l'actionnement capacitif ;
- la non-linéarité mécanique due au raidissement de la poutre encastrée-encastrée lorsque l'amplitude du mouvement s'accroît.

Cette équation est la base de notre étude sur les non-linéarités dans les capteurs MEMS résonants. Dans le chapitre III, on s'attachera à préciser les modes de défaillance courants des MEMS afin d'étudier notamment leur impact sur le comportement décrit par l'équation (68).

### Remarque : Approximation linéaire

On peut remarquer que, dans le cas où le déplacement  $x(t)$  est d'amplitude suffisamment faible ( $x(t) \ll 1$ ), ce qui correspond au cas où l'actionnement est de faible amplitude ( $v(t) \ll 1$ ), l'équation (68) peut se ramener à une équation linéaire en  $x$ :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \eta_{cc} \omega_0^2 (1 + 2v(t)) \left( 1 + \frac{3}{2} x(t) \right) \simeq \eta_{cc} \omega_0^2 \left( 1 + \frac{3}{2} x(t) + 2v(t) \right) . \quad (69)$$

Ainsi, sous cette hypothèse d'approximation linéaire, le comportement fréquentiel d'un tel résonateur rentre dans le cadre de la section II.B.

De façon générale, comme on peut le constater dans l'équation (68), le comportement d'un résonateur MEMS capacitif dépend de l'actionnement envisagé. Dans cette thèse, on cherchera à décrire le comportement d'un MEMS soumis à des actionnements de différentes formes. Parmi eux, l'actionnement par impulsions sera privilégié. Le traitement d'un tel actionnement requiert des outils mathématiques simples de la théorie des distributions, notamment les impulsions et les peignes de Dirac. Leurs définitions et leurs propriétés utiles pour nos travaux sont exposées dans l'Annexe 2.

## II.D. Dynamique des résonateurs non-linéaires

Maintenant que le modèle d'ordre réduit d'un résonateur à pont vibrant a été construit, on illustre ici différentes méthodes de résolution. On pourrait opter pour une méthode numérique dans le domaine temporel (de type Runge-Kutta). Cependant, pour comprendre et optimiser un tel résonateur, il est utile de chercher une solution analytique. Ceci nécessite de déterminer l'expression des termes d'actionnement.

Comme expliqué précédemment, on se limite toujours à un résonateur dont le comportement peut être décrit par un unique degré de liberté. Par exemple, dans le cas d'un résonateur à haut facteur de qualité, on a montré que l'équation (33) peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 F(x(t), t) . \quad (70)$$

L'équation non-linéaire (70) ne peut pas être résolue de façon exacte sans hypothèses supplémentaires. En revanche, des hypothèses additionnelles sur la forme de la réponse

permettent sa résolution [23]. Nous nous focaliserons ici sur deux méthodes, qui font partie des plus simples à mettre en œuvre tout en offrant une bonne précision des résultats :

- la méthode de la balance harmonique ;
- la méthode des variations lentes d'amplitude et de phase.

Ces deux méthodes sont basées sur des hypothèses similaires qui sont détaillées dans la section II.D.a.

On aurait également pu utiliser d'autres méthodes, telles que des méthodes de perturbations ou celle des échelles multiples. Cependant, comme on le verra tout au long de ce travail, la méthode de la balance harmonique permet une compréhension fine de la physique des phénomènes, qu'il s'agisse de caractérisation (chapitre III) ou d'études de comportement en présence de bruit (chapitre IV).

### II.D.a. Hypothèses

Les hypothèses de la méthode de la balance harmonique et de celle des perturbations lentes peuvent se résumer qualitativement de la façon suivante.

- La réponse dynamique d'un résonateur non-linéaire sélectif en oscillations libres peut être raisonnablement approximée par une somme finie de signaux sinusoïdaux harmoniques de sa fréquence propre.
- La réponse dynamique d'un résonateur non-linéaire sélectif entretenu en régime permanent peut être approximée par une somme finie de signaux sinusoïdaux harmoniques de la fréquence d'actionnement. Dans le cas où le système n'est pas en régime permanent, cette même hypothèse reste valable dans la limite où l'amplitude et la phase instantanée varient lentement au cours du temps.

Ainsi, la réponse d'un tel résonateur peut être approximée comme suit :

- dans la méthode de la balance harmonique par :

$$x(t) \simeq a_0 + \sum_{p=1}^N A_p \sin(p\omega t + \varphi_p) \quad (N \in \mathbb{N}) \quad (71)$$

où  $a_0$  est le déplacement statique du résonateur. Cette méthode permet alors de décrire le comportement d'un résonateur dont l'amplitude et la phase d'oscillation sont stabilisées (régime permanent).

- dans la méthode des variations lentes d'amplitude et de phase :

$$x(t) \simeq a_0(t) + \sum_{p=1}^N A_p(t) \sin(\psi_p(t)) \quad (N \in \mathbb{N}) \quad (72)$$

où  $\dot{\psi}_p(t) = p\omega(t)$ .

La méthode des variations lentes suppose alors que  $A_p$  et  $\psi_p$  varient lentement par rapport à la moyenne de  $1/p\omega$ . Cette méthode permet de décrire les évolutions (supposées lentes) de l'amplitude et de la phase au cours du temps (on parle de régime transitoire).

La précision des résultats obtenus par la méthode de la balance harmonique et la méthode des variations lentes est d'autant meilleure que la sélectivité fréquentielle du résonateur est fine (ce qui nécessite de hauts facteurs de qualité). Dans la section II.D.b, on détaille le cas spécifique d'un résonateur à haut facteur de qualité ( $Q > 100$ ).

### II.D.b. Spécificité des résonateurs à haut facteur de qualité

Le nombre  $N$  d'harmoniques à considérer dépend de la précision voulue et de la sélectivité du résonateur. Dans le cadre des MEMS, les résonateurs présentent couramment des facteurs de qualité de plusieurs milliers, pouvant même aller parfois jusqu'à plus d'un million [24]. Dans ces cas, on pourra supposer, avec une bonne précision les résultats suivants :

- dans la méthode de la balance harmonique :

$$x(t) \simeq a_0 + A \sin(\omega t + \varphi) \quad (73)$$

- dans la méthode des perturbations lentes :

$$x(t) \simeq a_0(t) + A(t) \sin(\psi(t)) \quad (74)$$

De plus, lorsque l'amplitude  $A$  du mouvement sera suffisamment grande par rapport au déplacement statique  $a_0$ , on écrira, pour simplifier les expressions :

$$x(t) \simeq A \sin(\omega t + \varphi) \quad (75)$$

ou, pour la méthode des variations lentes :

$$x(t) \simeq A(t) \sin(\psi(t)) \quad (76)$$

Afin d'illustrer la validité de cette hypothèse, on reporte, en Fig. 5, un résultat de simulation transitoire pour un résonateur capacitif à pont vibrant avec  $\gamma = 10^{-2}$ ,  $Q = 1000$ ,  $\eta = 10^{-3}$  actionné à partir de  $t = 0$  par une force adimensionnée  $F$  carrée et de pulsation  $0.998\omega_0$  et d'amplitude 0.5. On constate sur cette simulation :

- que le régime permanent peut être raisonnablement approximé, même à grande amplitude d'oscillation (i.e.  $x$  proche de 1), par la somme d'une sinusoïde et d'une composante statique très faible par rapport à l'amplitude de la sinusoïde.
- que le régime transitoire présente des variations lentes d'amplitude (par rapport à la période du signal).

A fortiori, pour des facteurs de qualité encore plus élevés comme ceux étudiés dans ce manuscrit, la validité de l'hypothèse de première harmonique se vérifiera.

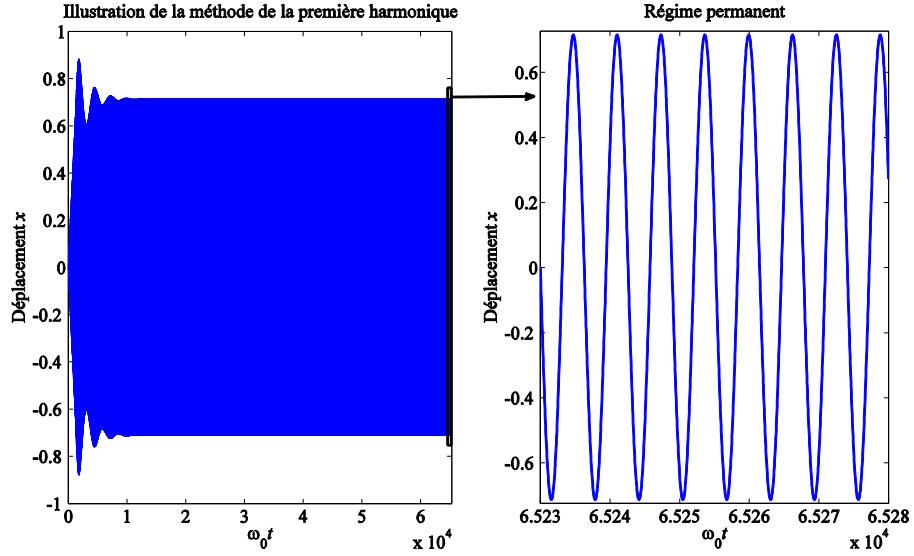


Fig. 5 Illustration de la validité de l'hypothèse de première harmonique sur une simulation transitoire. Gauche : Evolution jusqu'au régime permanent. Droite : Zoom sur le régime permanent.

Dans ce manuscrit, on précisera, au cas par cas, lorsqu'une composante statique  $a_0$  a été prise en compte. Ce sera principalement le cas pour les procédures de caractérisation décrites en section III.E.

#### II.D.c. Signification physique de la balance harmonique et de la méthode des variations lentes

Mathématiquement, la détermination des régimes d'oscillation fait intervenir l'utilisation d'un opérateur de produit scalaire temporel défini, pour deux fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  périodiques de période  $T$  par :

$$\langle f(t)|g(t) \rangle_T = \frac{2}{T} \int_0^T f(u)g(u)du \quad . \quad (77)$$

La détermination des inconnues se fait ensuite par projection, au sens du produit scalaire  $\langle | \rangle_T$ , de l'équation de comportement sur les fonctions de base choisies. En notant  $\bar{f}$  la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur une période, on constate aisément que :

$$\langle f(t)|1 \rangle_T = 2 \bar{f} \quad . \quad (78)$$

Ces opérations peuvent être interprétées physiquement en considérant que les méthodes de la balance harmonique et des perturbations lentes conduisent, via l'équation (69), à trois équations correspondant :

- à la valeur moyenne du déplacement sur une période ;
- à la composante de déplacement en phase avec l'actionnement ;
- à la composante de déplacement en quadrature avec l'actionnement.

En appliquant cette méthode, on parvient à décrire le comportement d'un résonateur à haut facteur de qualité en régime permanent (via la méthode de la balance harmonique) et en régime transitoire variant lentement (via la méthode des variations lentes d'amplitude et de phase).

#### II.D.d. Régime permanent

On détaille ici la méthode de la balance harmonique sur un résonateur décrit par l'équation générale (70). On considère ici un résonateur à haut facteur de qualité actionné par une force périodique de période  $T$  actionné en régime permanent.

Sous l'hypothèse (73), la méthode de la balance harmonique donne le régime permanent décrit par le système :

$$\begin{cases} a_0 = \overline{F(x(t), t)} \\ A(1 - \Omega^2) = \left\langle F(x(t), t) \left| \sin \frac{2\pi t}{T} \right\rangle_T \\ \frac{A\Omega}{Q} = \left\langle F(x(t), t) \left| \cos \frac{2\pi t}{T} \right\rangle_T \end{cases} \quad (79)$$

Ces équations seront particulièrement utiles pour la caractérisation de résonateurs MEMS en régime non-linéaire en section III.F. Lorsque la composante statique  $a_0$  sera suffisamment faible, on pourra, pour simplifier, considérer l'hypothèse (75) au lieu de (73) et écrire :

$$\begin{cases} A(1 - \Omega^2) = \left\langle F(x(t), t) \left| \sin \frac{2\pi t}{T} \right\rangle_T \\ \frac{A\Omega}{Q} = \left\langle F(x(t), t) \left| \cos \frac{2\pi t}{T} \right\rangle_T \end{cases} . \quad (80)$$

#### II.D.e. Etude de cas : Réponse fréquentielle d'un résonateur soumis à une non-linéarité cubique

Dans cette section, on illustre la méthode de la balance harmonique sur un résonateur soumis à une non-linéarité cubique « durcissante » (i.e.  $\gamma > 0$ ) et actionné par une force sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . L'équation de comportement du résonateur s'écrit :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(1 + \gamma x^2) = \omega_0^2 F \sin \omega t \quad . \quad (81)$$

La méthode de la balance harmonique, en supposant  $x = a_0 + A \sin(\omega t + \varphi)$ , mène cette fois à :

$$\begin{cases} a_0(2 + 3A^2\gamma + 2a_0^2\gamma) = 0 \\ A(1 - \Omega^2) + \frac{3}{4}\gamma A^3 + Aa_0^2\gamma = F \cos \varphi \\ \frac{A\Omega}{Q} = -F \sin \varphi \end{cases} \quad (82)$$

ce qui donne, puisque  $2 + 3A^2\gamma + 2a_0^2\gamma > 0$  :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ F = A \sqrt{\frac{\Omega^2}{Q^2} + \left(1 - \Omega^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2\right)^2} \\ \varphi = \text{atan} \left[ \frac{1 - \Omega^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2}{\frac{\Omega}{Q}} \right] - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (83)$$

Les réponses fréquentielles à différentes amplitudes d'actionnement sont alors données par les lignes de contour de  $F$  dans l'espace  $(A, \Omega)$ . Un exemple de résultat pour  $Q = 10^4$ ,  $\gamma = 10^{-2}$  et différentes amplitudes de force d'actionnement (de bleu foncé à rouge  $F = 10^{-6}$ ,  $F = 5 \times 10^{-6}$ ,  $F = 10^{-5}$  et  $F = 2 \times 10^{-5}$ ), est donné en Fig. 6.

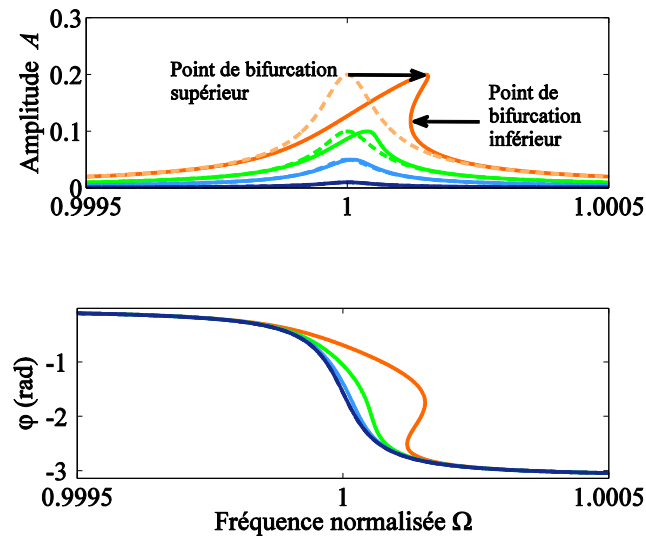


Fig. 6 Réponses fréquentielles typiques d'un résonateur de pulsation propre unitaire soumis à une non-linéarité cubique durcissante de type Duffing pour différentes amplitudes d'actionnement. Les lignes pointillées correspondent au cas linéaire (dans ce cas les réponses en phase sont superposées à la courbe en bleu foncé).

A grande amplitude d'oscillation, on constate que la réponse fréquentielle est multi-valuée, c'est-à-dire qu'à une fréquence donnée correspondent parfois plusieurs points de fonctionnement. En pratique, le système sélectionne, en fonction de son historique, un seul de ces points de fonctionnement, ce qui donne lieu à des profils d'hystérésis. Ceci fait apparaître deux points de bifurcation, appelés « point de bifurcation supérieur » et « point de bifurcation inférieur ». Pour comprendre ce phénomène, il est nécessaire de déterminer la stabilité des points de fonctionnement des réponses fréquentielles tracées. Pour ce faire, il reste à écrire les équations régissant la dynamique du système en régime transitoire qui permettront de traduire l'évolution du comportement du résonateur en cas d'écart à ses positions d'équilibre.

### II.D.f. Régime transitoire

Dans cette section, on cherche à déterminer les équations régissant la dynamique transitoire d'un résonateur à haut facteur de qualité. Pour ce faire, on utilise la méthode des variations lentes d'amplitude et de phase sur un système en boucle ouverte, dont les hypothèses ont été données dans le paragraphe II.D.a. On écrit dès lors la dynamique du résonateur sous la forme :

$$x = a_0 + A \sin \psi \quad . \quad (84)$$

avec  $\psi(t) = \omega t + \varphi(t)$  et où on néglige, comme dans [25], les variations temporelles de la composante  $a_0$ . Lorsqu'on étudiera le régime transitoire, on notera les dérivées temporelles sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phantom{x}} = \frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dt} \\ \ddot{\phantom{x}} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2}{dt^2} \end{array} \right. \quad . \quad (85)$$

Les projections de l'équation (70) s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \overline{F(a_0 + A \sin \psi, t)} \\ \ddot{A} + A[1 - (\Omega + \dot{\varphi})^2] + \frac{1}{Q} \dot{A} = \langle F(a_0 + A \sin \psi, t) | \sin \psi \rangle_T \\ 2(\Omega + \dot{\varphi})\dot{A} + A\ddot{\varphi} + \frac{A(\Omega + \dot{\varphi})}{Q} = \langle F(a_0 + A \sin \psi, t) | \cos \psi \rangle_T \end{array} \right. \quad . \quad (86)$$

Dans l'hypothèse des variations lentes, on peut se limiter, pour l'étude de la stabilité à [23] :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \overline{F(a_0 + A \sin \psi, t)} \\ A[1 - (\Omega + \dot{\varphi})^2] = \langle F(a_0 + A \sin \psi, t) | \sin \psi \rangle_T \\ 2\Omega\dot{A} + \frac{A\Omega}{Q} = \langle F(a_0 + A \sin \psi, t) | \cos \psi \rangle_T \end{array} \right. \quad (87)$$

ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \overline{F(a_0 + A \sin \psi, t)} \\ \dot{\varphi} \simeq \frac{1}{2\Omega} [1 - \Omega^2] - \frac{1}{2A\Omega} \langle F(a_0 + A \sin \psi, t) | \sin \psi \rangle_T \\ \dot{A} \simeq \frac{1}{2\Omega} \langle F(a_0 + A \sin \psi, t) | \cos \psi \rangle_T - \frac{A}{2Q} \end{array} \right. \quad . \quad (88)$$

Le système (88) permet non seulement de décrire l'évolution temporelle d'un résonateur à haut facteur de qualité soumis à une force  $F$  mais également de déterminer la stabilité des solutions du régime permanent, via le critère de Routh-Hurwitz.

Bien entendu, l'annulation des termes dérivés permet de retrouver les résultats en régime permanent obtenus plus simplement par la méthode de la balance harmonique. Afin de

déterminer si l'amplitude et la phase calculées par la méthode de la balance harmonique sont stables (i.e. si de telles amplitudes et phases sont observables en pratique), on peut étudier la stabilité du système (88) en constatant qu'il s'agit d'un système différentiel non-linéaire. L'étude de la stabilité fait alors appel au critère de Routh-Hurwitz, dont l'expression mathématique est donnée dans la section II.D.g.

#### II.D.g. Critère de Routh-Hurwitz

Le système (88) est écrit sous la forme d'une équation d'état dont le vecteur d'état est  $X = \begin{bmatrix} \varphi \\ A \end{bmatrix}$ , et dont l'équation d'état s'écrit :

$$\dot{X} = G(X) \quad (89)$$

où  $G$  est une fonction à valeurs vectorielles ( $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ). En notant  $X_s$  une solution du régime permanent et  $J(X)$  le jacobien du système (89), on peut déterminer la stabilité de cette solution par le critère de Routh-Hurwitz. Ce critère indique que les solutions considérées sont stables si et seulement si les coefficients du polynôme caractéristique  $P(\lambda) = \det[J(X_s) - \lambda \mathbb{I}]$  (où  $\mathbb{I}$  est la matrice identité) sont tous de même signe. On détermine ainsi l'ensemble des points répulsifs du système.

#### II.D.h. Etude de cas : Stabilité en boucle ouverte d'un résonateur soumis à une non-linéarité cubique

Dans le cas d'un résonateur soumis à une force d'actionnement linéaire et une non-linéarité cubique (avec  $\gamma > 0$ ), le système (88) devient :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \dot{\varphi} \simeq \frac{1}{2\Omega} \left[ 1 - \Omega^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2 \right] - \frac{F \cos \varphi}{2A\Omega} \\ \dot{A} \simeq -\frac{F \sin \varphi}{2\Omega} - \frac{A}{2Q} \end{cases} \quad (90)$$

On peut alors, via le critère de Routh-Hurwitz, déterminer les solutions stables parmi les points de fonctionnement représentés sur la Fig. 6. Le résultat est donné en Fig. 7. On constate sur ce graphique l'existence d'un point de bifurcation supérieur et d'un point de bifurcation inférieur lorsque l'amplitude d'actionnement atteint des valeurs suffisantes.



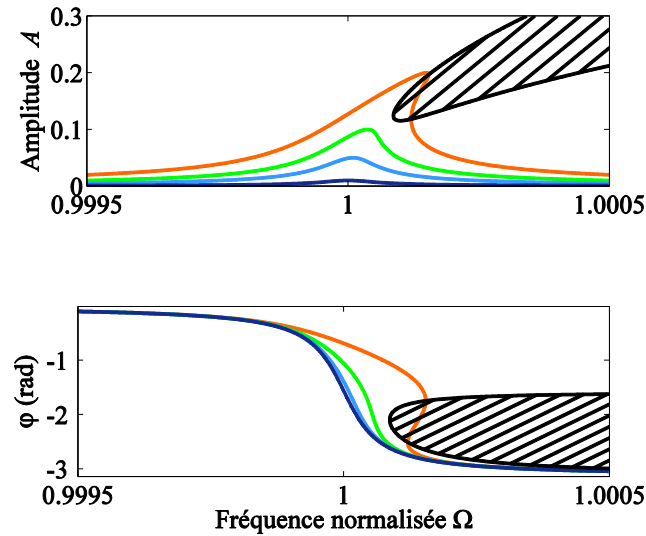


Fig. 7 Zones d'instabilité (hachurées) d'un résonateur de pulsation propre unitaire soumis à une non-linéarité cubique durcissante pour différentes amplitudes d'actionnement (mêmes paramètres que la Fig. 6).

Maintenant que les outils nécessaires à la description mécanique du comportement des résonateurs MEMS ont été introduits, il reste à présenter le principe de transduction permettant de convertir l'information vibratoire mécanique en signaux électriques exploitables. Pour cela, on présente dans la section II.E le dispositif expérimental utilisé dans le cadre de cette thèse.

## II.E. Présentation du dispositif expérimental

L'ensemble des résultats expérimentaux présentés dans cette thèse ont été obtenus à partir de mesures effectuées sur une cellule résonante de capteur de pression P90 (Thales Avionics). Il est encapsulé sous vide afin de limiter l'amortissement visqueux et ainsi d'augmenter son facteur de qualité. Une coupe transversale de la cellule MEMS ainsi qu'un schéma de principe, tirés de [26], sont représentés en Fig. 8.

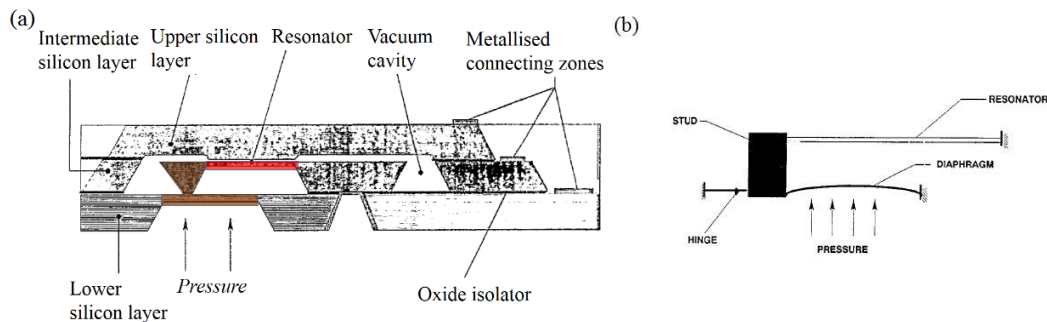


Fig. 8 (a) Coupe transversale de la cellule MEMS du capteur de pression étudié. (b) Principe de fonctionnement du capteur.

La structure est en silicium dopé p. Le résonateur est constitué d'une poutre, dont l'une des extrémités est maintenue encastree au substrat silicium et dont l'autre est accrochée à la surface d'un diaphragme par l'intermédiaire d'un plot massif.

Une illustration du mode de résonance principal de la structure, calculé par modélisation par éléments finis, est représentée en Fig. 9. Il s'agit d'un mode en « pont » vibrant (i.e. encastré des deux côtés) déjà évoqué dans le chapitre II. En cas d'augmentation de pression sur la face inférieure du diaphragme, la déflexion de ce dernier entraîne l'augmentation de la traction dans la poutre, ce qui accroît la fréquence propre du mode « pont » (voir Fig. 8.b). La résonance a lieu vers 65 à 70kHz dans les conditions normales de température et de pression (20°C, 1bar).

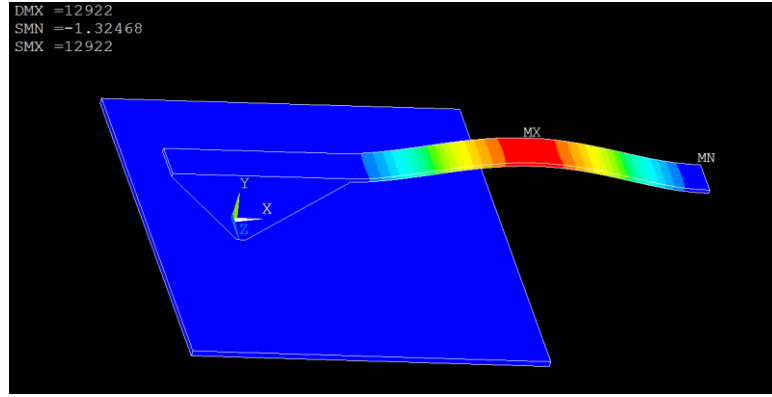


Fig. 9 Principal (premier) mode de résonance de la structure MEMS : mode encastré-encastré.

Compte-tenu des dimensions du résonateur, ses paramètres sont (on donne le coefficient de conversion électromécanique à la tension  $V_b = 20$  V en exemple) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(N_p = 0) = 58,6 \text{ kHz} \\ C_0 = 0,49 \text{ pF} \\ \eta_{cc}(V_b = 20\text{V}) \simeq 2 \times 10^{-3} \end{array} \right. . \quad (91)$$

En conditions normales de température et de pression (température  $T = 20^\circ\text{C}$ , pression  $P = 1$  bar), la fréquence de résonance observée est de l'ordre de  $f_0 \simeq 68\text{kHz}$ , ce qui nous permet d'estimer la traction dans la poutre:

$$N_p \simeq 0,46 \text{ N} \quad (92)$$

et la contrainte :

$$\sigma \simeq 114 \text{ MPa} . \quad (93)$$

Ce résonateur est branché sur un dispositif d'actionnement et de détection représenté en Fig. 10. Les valeurs des composants utilisés sont discutées ci-dessous.

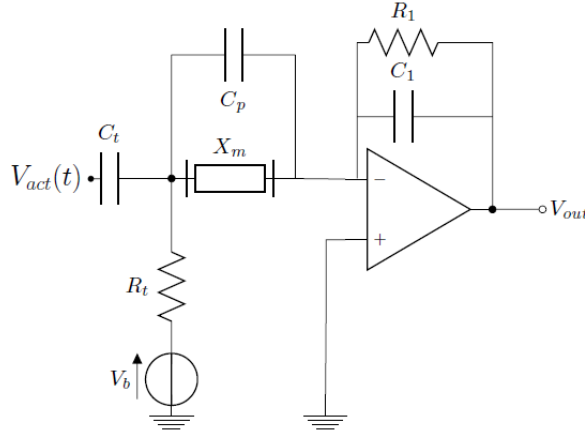


Fig. 10 Circuit électronique composé d'un té de polarisation et d'un amplificateur de charge. L'élément  $X_m$  correspond au résonateur.

Sur la Fig. 10,  $X_m$  correspond au résonateur et  $C_p$  à une capacité parasite. Cette capacité parasite est intrinsèquement présente entre l'entrée et la sortie de la cellule [27] [28] et a pour origine :

- la capacité nominale formée par le résonateur et l'électrode en vis-à-vis.
- des capacités introduites par la connectique.

Son impact sur le comportement du système sera étudié dans le chapitre III.

Afin de comprendre les différents étages du circuit de la Fig. 10, on présente ici leur fonctionnement.

Tout d'abord, la détection du mouvement d'un résonateur MEMS capacitif nécessite l'utilisation d'une tension de polarisation  $V_b$  permettant de convertir le déplacement en courant électrique exploitable. La capacité du MEMS étant variable, le mouvement de la partie mobile génère une charge du condensateur formé par le MEMS, appelée charge motionnelle, qui s'écrit :

$$q_m = C(x(t))V_b \quad (94)$$

On définit alors le courant motionnel par :

$$i_m \equiv \frac{dq_m}{dt} \quad (95)$$

et la capacité nominale du MEMS par :

$$C_0 = \frac{\epsilon S}{G} \quad (96)$$

Dans le cas où le déplacement  $x(t)$  sera suffisamment faible pour pouvoir supposer une dépendance linéaire de  $C$  avec  $x$ , on définit alors le gain statique de la cellule MEMS par :

$$G_0 \equiv \frac{dq_m}{dx} = cste \quad (97)$$

Des exemples de gain statique pour un résonateur à capacités planes et un résonateur à pont vibrants sont donnés dans l'Annexe 3. L'équation (94) témoigne cependant du fait que la détection du mouvement  $x(t)$  est non-linéaire, à cause de la dépendance non-linéaire de la capacité vis-à-vis de ce mouvement. Ce phénomène est développé dans l'Annexe 4 sur deux cas de figure (résonateur à capacités planes et résonateur à pont vibrant) et on montre dans quelles limites l'effet de la non-linéarité de détection peut être négligé.

La charge générée par le mouvement de la partie mobile est ensuite récupérée, amplifiée et traduite en tension. Pour ce faire, on peut utiliser, par exemple, un amplificateur de charge ou un amplificateur à transimpédance, qui sont représentés en Fig. 11.

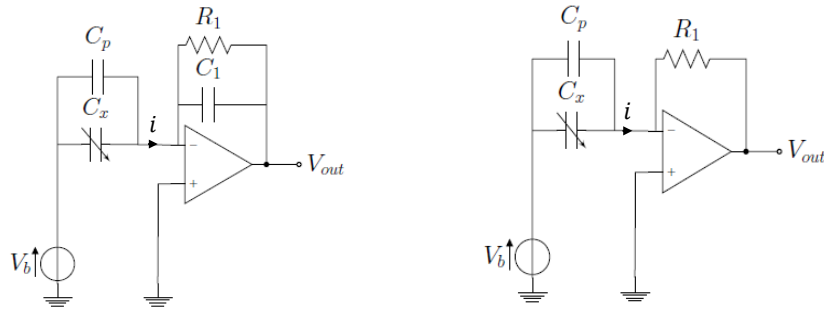


Fig. 11 Systèmes typiques de détection capacitive. L'élément  $C_x$  représente la capacité variable (qui peut être un résonateur dans le cas d'un capteur résonant). Amplificateur de charge (gauche) et amplificateur à transimpédance (droite). Le condensateur  $C_p$  correspond à la capacité parasite présente entre les électrodes de la cellule MEMS.

Dans notre cas, on utilise un amplificateur de charge dont la fonction de transfert  $H_a = \frac{V_{out}}{i}$  s'écrit :

$$H_a = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1} \quad (98)$$

Il s'agit donc d'un filtre passe-bas. On utilise sa caractéristique intégratrice, de sorte à avoir accès à la charge motionnelle. En théorie, il faudrait choisir  $R_1$  et  $C_1$  de façon à ce que  $\omega \gg 1/R_1 C_1$ . En pratique, afin d'obtenir un gain de conversion suffisant, la pulsation de coupure doit être choisie suffisamment proche de la fréquence de travail. De plus, afin de limiter le bruit introduit par la résistance  $R_1$ , il est préférable de la choisir aussi faible que possible. Les mesures ont été réalisées dans le cadre de cette thèse en choisissant (sauf indication contraire) :

$$\begin{cases} R_1 = 1 \text{ M}\Omega \\ C_1 = 10 \text{ pF} \end{cases} \quad (99)$$

Le diagramme de Bode correspondant est reporté en Fig. 12.

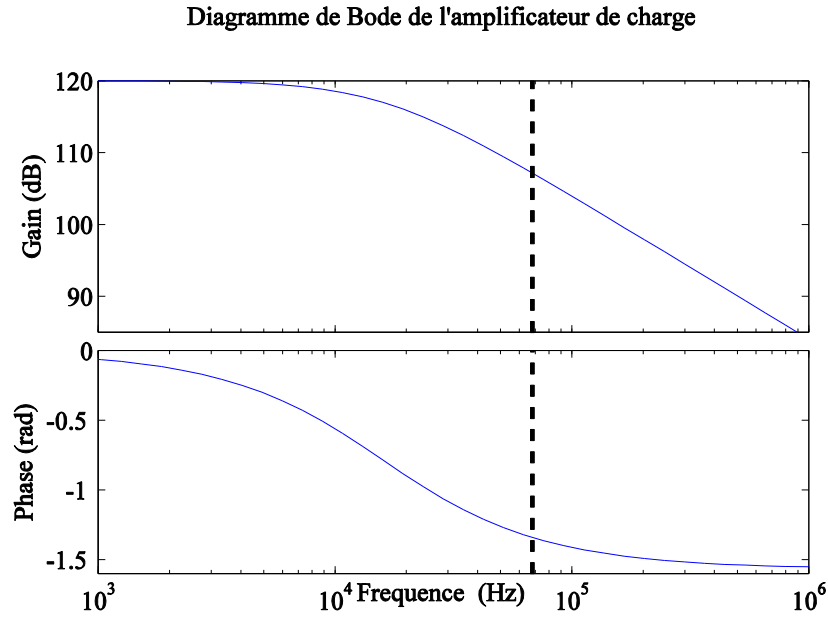


Fig. 12 Diagramme de bode de l'amplificateur de charge utilisé pour la détection. La fréquence de travail est représentée par le trait pointillé.

Par rapport à un amplificateur à transimpédance, un amplificateur de charge présente principalement deux intérêts :

- donner directement accès à l'image du déplacement du résonateur et non à l'image de sa vitesse ;
- ne pas être sensible aux capacités parasites éventuellement présentes entre l'entrée et la sortie de l'amplificateur opérationnel.

On notera par la suite  $G_e$  le gain électrique reliant la tension de sortie de l'amplificateur à la charge (intégrale du courant) soit :

$$G_e = \frac{1}{C_1} \quad . \quad (100)$$

Pour des résonateurs à haut facteur de qualité, on pourra considérer  $G_e$  constant sur l'ensemble de la gamme de mesure du fait de la faible bande passante du résonateur.

Pour comprendre l'architecture électronique de la Fig. 10, il reste à expliquer l'utilisation d'un té de polarisation, composé d'une capacité  $C_t$  et d'une résistance  $R_t$  (voir Fig. 13). Ce té de polarisation permet l'actionnement du résonateur par une tension alternative  $V_{act}(t)$  à des fréquences proches de la résonance.

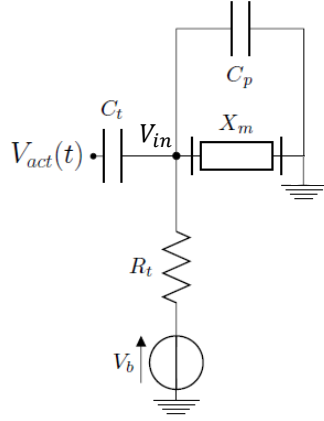


Fig. 13 Structure typique d'actionnement capacitif. Actionnement via té de polarisation.

En l'absence de résonateur et de tension de polarisation, la tension d'entrée  $V_{in}$  du résonateur vérifie :

$$\underline{V}_{in}(V_b = 0) = \frac{j\omega\tau_t \underline{V}_{act}}{1 + j\omega\tau_t} \quad (101)$$

où  $\tau_t = R_t C_t$ . On choisit ici :

$$\begin{cases} C_t = 1 \text{ } \mu\text{F} \\ R_t = 1 \text{ k}\Omega \end{cases} \quad (102)$$

de sorte que la pulsation de travail  $\omega$  vérifie  $\frac{1}{2\pi\tau_t} \simeq 160 \text{ Hz} \ll \omega$ . Sous cette hypothèse, on obtient :

$$\underline{V}_{in}(V_b = 0) \simeq \underline{V}_{act} \quad . \quad (103)$$

Le théorème de superposition donne alors :

$$\underline{V}_{in} = \underline{V}_b + \underline{V}_{act} \quad . \quad (104)$$

En revanche, lorsque le résonateur est branché, la relation liant  $V_{in}$  à  $V_{act}$  est modifiée. En notant  $\underline{Z}_m$  l'impédance (a priori inconnue) du résonateur, on a alors, en supposant que la capacité parasite  $C_p$  est très faible devant la capacité du té de polarisation ( $C_t \gg C_p$ ) :

$$\underline{V}_{in}(V_b = 0) \simeq \frac{j\omega\tau_t \underline{V}_{act}}{1 + j\omega\tau_t + \frac{R_t}{\underline{Z}_m}} \quad . \quad (105)$$

L'équation (105) souligne le problème d'adaptation d'impédance lié à l'utilisation de ce dispositif. En pratique, la présence de  $X_m$  modifie la tension d'entrée  $V_{in}$ , d'autant plus que le

résonateur peut présenter des imperfections (résistances parasites notamment). De plus, dans le cas d'une utilisation du MEMS en régime non-linéaire, l'impédance  $Z_m$  inconnue est non-linéaire ce qui rend encore plus difficile la prédiction de l'effet de cette mauvaise adaptation d'impédance. Le seul phénomène que nous avons pu constater expérimentalement est une chute de tension entre  $V_{act}$  et  $V_{in}$ . On prendra donc soin de mesurer la tension réellement imposée en sortie du té de polarisation.

Les mesures manuelles de caractérisation linéaire nécessitent de nombreuses tentatives, car la caractérisation de MEMS requiert un environnement stable, notamment en matière de pression ou de température. L'acquisition des données doit être réalisée suffisamment rapidement pour que ces paramètres externes n'aient pas évolué entre son début et sa fin. Afin de rendre possible l'acquisition d'une réponse fréquentielle dans un temps raisonnable (i.e. de l'ordre de 1 à 5 minutes), un banc de mesures automatisé a été construit.

La conception d'un banc automatisé est également indispensable afin de prouver la faisabilité d'une caractérisation précise et rapide à l'échelle industrielle pour le contrôle qualité des produits après fabrication voire, à terme, pour des vérifications de bon fonctionnement sur des systèmes embarqués. Dans la suite de la section II.F, on décrit la structure et le fonctionnement du banc de mesures automatisé construit au cours du doctorat.

## **II.F. Construction d'un banc automatisé de mesures et de caractérisation**

### **II.F.a. Présentation du banc automatisé de mesures et de caractérisation**

Le banc de caractérisation est constitué :

- du résonateur P90 précédemment décrit, branché sur le circuit électronique décrit en Fig. 10 ;
- d'un générateur d'ondes arbitraires de la marque Thurlby Thandar Instruments (TTI), modèle TGA12104, permettant d'actionner le résonateur ;
- d'une alimentation stabilisée Tektronix PWS4721, servant à polariser le résonateur ;
- d'un oscilloscope Tektronix MSO 5204, permettant l'acquisition des signaux ;
- d'un ordinateur pour le post-traitement des signaux ainsi que la commande des différents appareils.

L'ensemble des communications entre les appareils est réalisé par une communication sous protocole GPIB, via des câbles adaptateurs GPIB/USB. Le banc a été intégralement programmé sous MATLAB, pour la commande des appareils, le traitement des signaux de sortie du circuit électronique et la caractérisation des réponses fréquentielles. Une photographie du banc de caractérisation automatisé est reproduite en Fig. 14. Une photographie du circuit constitué du té de polarisation, du résonateur et de l'amplificateur de charge est fournie en Fig. 15.



Fig. 14 Photographie du banc de caractérisation automatisé.

L'alimentation stabilisée, le générateur et l'oscilloscope sont pilotés sous MATLAB suivant le schéma présenté en Fig. 16. A chaque acquisition, les réglages de l'oscilloscope sont ajustés pour optimiser la plage dynamique de mesure, afin de limiter les incertitudes liées à la numérisation des signaux. Les tensions de sortie du circuit électronique sont ensuite enregistrées dans l'ordinateur, avec la fréquence d'actionnement correspondante. L'ensemble du programme est paramétré par l'intermédiaire d'une interface graphique dynamique, également programmée sous MATLAB. Un exemple de paramétrage sur cette interface est présenté en Fig. 17. Le programme a initialement été conçu pour caractériser deux capteurs simultanément mais n'a été complètement testé et validé que pour la caractérisation d'un seul capteur. Cependant, sa structure le rend suffisamment modulable pour que l'adaptation à plusieurs capteurs ne pose pas de problème si le besoin se manifeste. La limitation principale au nombre de capteurs qu'on peut caractériser simultanément est, à l'heure actuelle, le nombre de ports disponibles pour l'acquisition (4 sur l'oscilloscope actuel, ce qui correspond à 2 capteurs au maximum).

Une fois les signaux de sortie obtenus, le post-traitement numérique est réalisé sous MATLAB, et la réponse fréquentielle en amplitude et en phase est extraite. Elle est ensuite exploitée par ce même logiciel pour estimer les paramètres du système.

On a pu constater une chute de tension entre l'entrée et la sortie du té de polarisation, due à une adaptation d'impédance imparfaite avec le circuit électrique équivalent du résonateur. De ce fait, on choisit de mesurer la tension d'actionnement en sortie du té de polarisation afin de vérifier l'amplitude des impulsions de tension réellement appliquées à la cellule résonante.



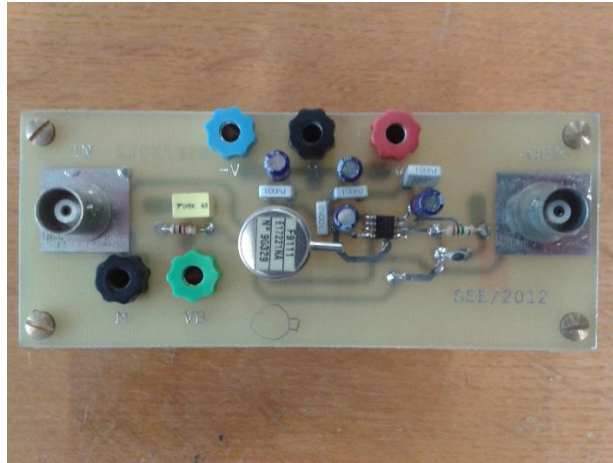


Fig. 15 Photographie du circuit imprimé de caractérisation.

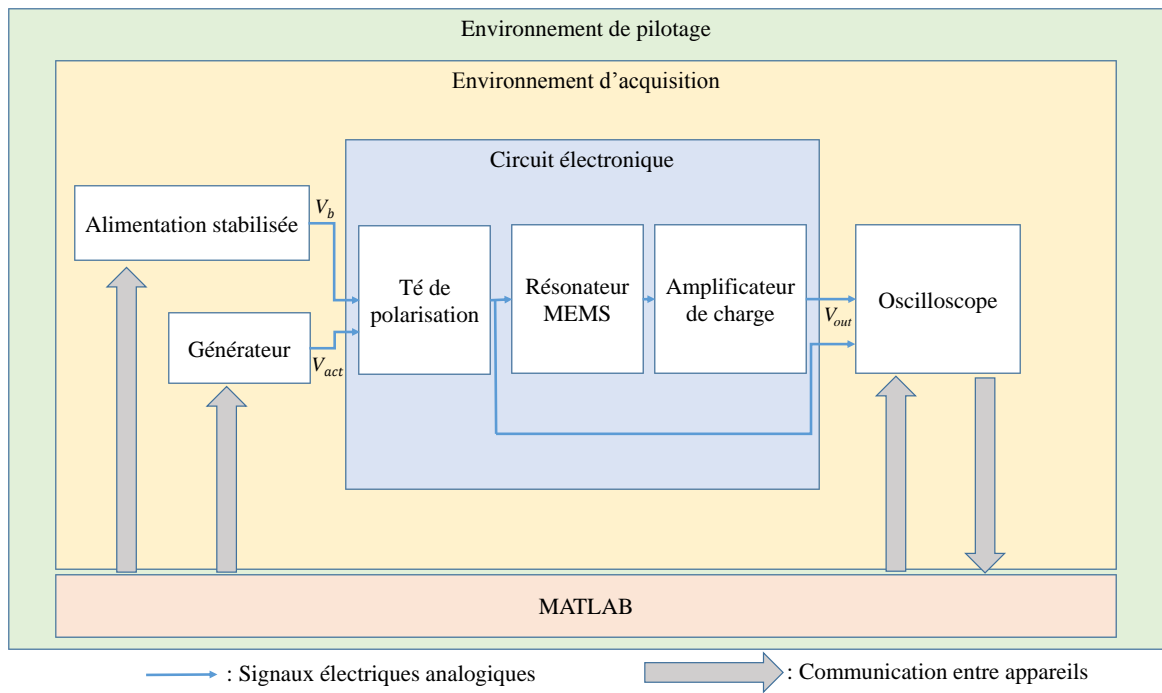


Fig. 16 Schéma de l'environnement de pilotage et d'acquisition

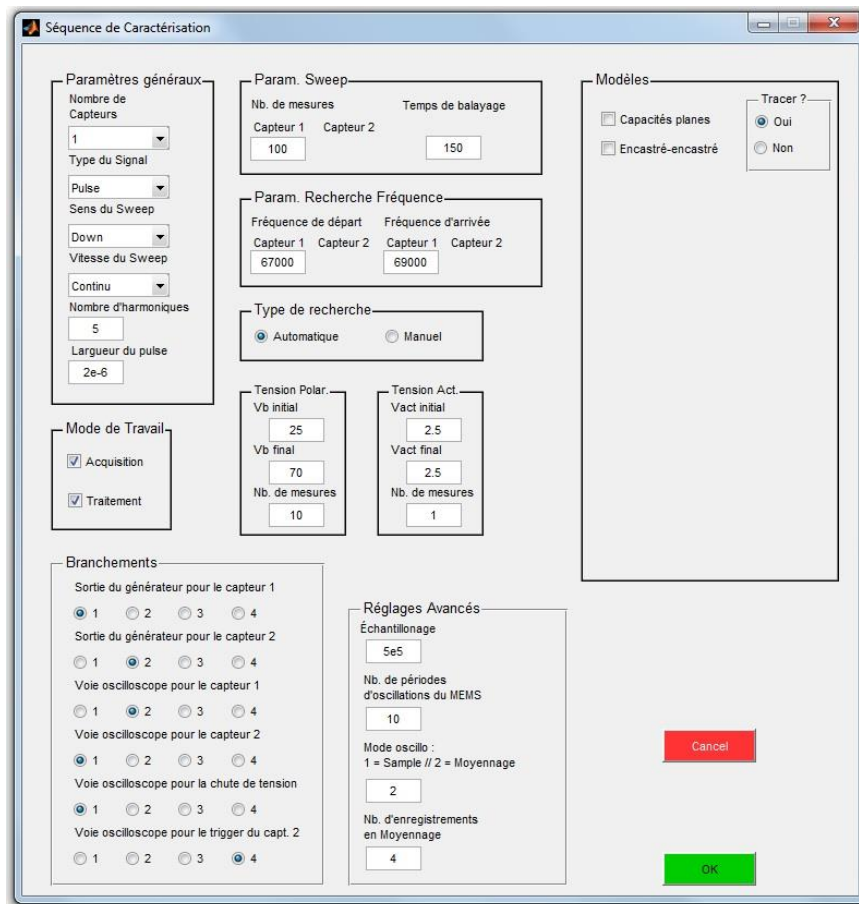


Fig. 17 Interface graphique de paramétrage

## II.F.b. Limitations dues au fonctionnement du banc de caractérisation

Les principales limitations matérielles dues au banc de mesure concernent :

- la vitesse de la procédure ;
- les performances du générateur en termes de génération d'impulsions de courte durée ;
- la gestion de la mémoire vive de l'ordinateur de commande.

### II.F.b.i. Limitations de la vitesse de la procédure

La vitesse de la procédure dépend de la méthode utilisée. Le programme a été conçu pour autoriser le choix entre un balayage en fréquence parfaitement continu (fréquence qui varie continûment avec le temps) ou discontinu (évolution de la fréquence par pas).

Dans le premier cas, la vitesse d'acquisition est limitée par le temps nécessaire à l'oscilloscope pour prendre en compte les commandes de réglage d'échelle, ce qui limite soit la vitesse de la procédure (à nombre de points de mesure fixé), soit le nombre de points de mesures que l'on peut obtenir sur la réponse en fréquence. De plus, on a pu constater expérimentalement que la précision fréquentielle du générateur de signaux en mode « balayage » était nettement inférieure à celle accessible en mode de génération simple. Sur la bande passante du résonateur, la fréquence du générateur ne varie pas parfaitement linéairement avec le temps, ce qui rend moins précise et plus difficile l'identification de la réponse fréquentielle en mode balayage.

Le second cas permet de s'affranchir davantage du bruit de mesure et d'améliorer ainsi la précision de la caractérisation. En effet, dans le cas où le balayage est discontinu, chaque enregistrement peut faire l'objet d'une moyenne temporelle qui limite les effets du bruit (blanc) sur les mesures. La vitesse de la procédure est, dans ce cas, limitée par le temps nécessaire entre chaque mesure pour réaliser la moyenne.

### **II.F.b.ii. Génération d'impulsions**

L'amplitude des impulsions d'actionnement est limitée, par le générateur actuel, à 10V, ce qui restreint les amplitudes d'actionnement accessibles. Pour accroître l'amplitude, on peut choisir d'élargir les impulsions, mais ceci se fait aux dépens de la précision du modèle. L'hypothèse (127) d'impulsions de courte durée peut alors dans certains cas ne plus être vérifiée, et le modèle devrait être adapté pour prendre en compte leur durée.

### **II.F.b.iii. Limitations de mémoire vive utilisée par Matlab**

L'utilisation de MATLAB comme logiciel de commande s'avère pratique en termes de programmation, mais génère des problèmes dans la gestion de la mémoire vive utilisée. En effet, dans les versions actuelles du logiciel, les lectures répétées des valeurs indiquées par l'oscilloscope tendent à fractionner rapidement la mémoire. L'utilisation de commandes de suppression des variables stockées et de défragmentation de la mémoire n'a pas résolu le problème. De ce fait, le logiciel nécessite actuellement un redémarrage lorsque la mémoire est trop fragmentée. Ce problème prendrait encore plus d'importance dans l'optique d'une industrialisation du procédé. Utiliser des cartes d'acquisition plutôt qu'un oscilloscope et reprogrammer le banc sous LABVIEW (en cas d'achat de licences) pourraient permettre de résoudre ce problème, quitte à faire appel à MATLAB, le cas échéant, pour le post-traitement numérique. Cette limitation était inconnue au départ du projet, ce qui explique qu'elle n'ait pas été anticipée. On peut penser que les prochaines versions de MATLAB résoudront partiellement le problème et seront davantage optimisées pour l'acquisition d'enregistrements expérimentaux et le contrôle d'appareils de mesure.

## **II.G. Conclusion**

Dans cette section, les outils mathématiques nécessaires à l'étude de la dynamique et de la stabilité des résonateurs MEMS ont été présentés. Ces méthodes ont permis notamment d'établir le modèle d'ordre réduit d'un résonateur capacitif à pont vibrant et de mettre en évidence les différents paramètres caractéristiques d'un tel résonateur. Ces paramètres seront utiles dans la description du fonctionnement et des modes de défaillances des capteurs MEMS dans la section III.B.

On a également pu voir, grâce à ces modèles, qu'un tel résonateur peut être décrit, à de faibles amplitudes d'oscillation, comme un oscillateur harmonique amorti. L'analyse et la caractérisation des réponses fréquentielles d'un résonateur capacitif sous cette hypothèse sera le sujet des sections III.C. à III.D.

On a ensuite développé les méthodes utiles pour la résolution d'un tel modèle. Chacune de ces méthodes a été illustrée sur le cas simple d'un résonateur à raideur quadratique (ou non-linéarité cubique dite non-linéarité de « Duffing »). Le cas plus complexe d'un résonateur capacitif sera

résolu dans les sections III.E et III.F. Finalement, ces modèles permettront d'étudier l'impact du bruit sur la stabilité fréquentielle des oscillateurs MEMS capacitifs, dans le chapitre IV.

Enfin, dans la dernière section de ce chapitre, le dispositif expérimental utilisé dans le cadre de cette thèse a été présenté. Ceci a permis d'introduire le principe de l'actionnement et de la détection électrostatique. Grâce à l'ensemble de ces outils, il est désormais possible de confronter les modèles analytiques à l'expérience et d'aborder les problématiques d'amélioration de la fiabilité et des performances des résonateurs MEMS capacitifs.

# III. Amélioration de la fiabilité des capteurs MEMS

## capacitifs résonants

### III.A. Introduction

L'identification des paramètres déterminant le comportement mécanique des parties mobiles est une étape clé dans l'amélioration de la fiabilité des capteurs MEMS. En effet, leurs défaillances se traduisent le plus souvent en termes de variations de ces paramètres. L'identification, appelée « procédure de test » dans le milieu industriel ou « procédure de caractérisation », fait souvent référence à des situations spécifiques, accessibles en laboratoire, où le résonateur est testé avant d'être encapsulé. A ce stade de la fabrication, les dimensions du résonateur sont directement mesurables (par exemple au microscope électronique) et différentes techniques permettent d'accéder à ses caractéristiques vibratoires. Parmi ces techniques, on peut notamment citer la microscopie interférentielle, qui est utilisable tant que le résonateur n'est pas encapsulé dans une cellule opaque.

En revanche, une fois le capteur installé dans des systèmes embarqués, l'accès aux caractéristiques du capteur devient beaucoup plus limité. Il est dès lors nettement plus complexe de suivre, au cours de la vie du capteur, l'évolution de ses caractéristiques et d'anticiper d'éventuelles défaillances. Pourtant, ce suivi s'avère particulièrement critique compte tenu de la durée de vie des capteurs utilisés dans les applications aéronautiques, souvent de l'ordre de la dizaine d'années.

On cherche ici à mettre au point des méthodes de caractérisation donnant accès à un maximum d'informations électriques et mécaniques sur le résonateur en mobilisant le moins de moyens possibles. Ceci se traduit par une électronique aussi simple que possible, qui limite les problèmes d'encombrement, de consommation énergétique et de coût.

Après une introduction sur les modes de défaillances spécifiques des cellules MEMS, en section III.B, on réalise un état de l'art des méthodes de caractérisation de MEMS capacitifs. Les avantages et les inconvénients de ces méthodes sont étudiés, notamment lorsqu'elles requièrent l'accès à des technologies peu réalistes pour des systèmes embarqués. Une nouvelle méthode de caractérisation de MEMS capacitifs est ensuite élaborée. Cette méthode, basée sur un actionnement par impulsions, est d'abord présentée et validée à faibles amplitudes d'oscillations. Tous ces travaux font l'objet de la section III.C.

Comme expliqué dans le paragraphe II.D, le comportement des résonateurs capacitifs devient de plus en plus non-linéaire à mesure que l'amplitude d'oscillation augmente. Cette non-linéarité fait intervenir la forme de l'onde d'actionnement. Contrairement au cas linéaire étudié en section III.C, la forme de cette onde, imposée en entrée du résonateur, a donc un impact sur la réponse du système. Pour cette raison, on détermine, à partir de la section III.E, l'impact de la forme d'actionnement sur le comportement fréquentiel des résonateurs MEMS capacitifs. La détermination de ce comportement permet finalement de construire une procédure d'identification de paramètres, en section III.F, qui est validée expérimentalement.

Ce chapitre a fait l'objet de trois publications dans des conférences internationales [29] [30] [31] et de deux publications dans des revues scientifiques à comité de lecture [32] [33].

### III.B. Modes de défaillances des capteurs MEMS résonants capacitifs

Dans cette section, on évoque les principaux modes de défaillances connus des MEMS capacitifs ainsi que leur impact respectif sur le comportement du résonateur. On ne s'intéresse ici qu'aux défaillances des cellules résonantes. Les défaillances d'ordre électrique (pannes d'autres composants) sortent du cadre de cette étude. Les principaux modes de défaillance connus et étudiés ici sont :

- l'accumulation de charge au sein des diélectriques présents dans la cellule ;
- les différents types d'usure mécanique (fluage et fatigue) ;
- les problèmes liés au manque d'herméticité des cellules encapsulées sous vide ;
- la destruction du résonateur par contact entre les deux électrodes constituant la cellule.

#### III.B.a. Accumulation de charge au sein des diélectriques

Dans les cellules MEMS capacitives, le matériau constituant les deux électrodes se couvre dès la fabrication d'une couche d'oxyde. Par exemple, dans les résonateurs en silicium, une couche de silice recouvre le wafer utilisé pour la fabrication. Cette couche d'oxyde a des propriétés diélectriques. L'une des défaillances les plus fréquentes provient alors d'une accumulation de charges au sein de cette couche diélectrique. Ce phénomène est particulièrement présent dans les interrupteurs MEMS étant donnée l'existence de contacts entre l'oxyde et l'électrode en vis-à-vis [34]. Cependant, il intervient également dans les MEMS capacitifs sans contact [35] [36], catégorie dans laquelle se situent les capteurs MEMS utilisés dans la navigation. L'apparition d'un tel phénomène pour des dispositifs sans contacts a été observée expérimentalement, mais la physique exacte du phénomène reste méconnue.

Quelle que soit leur origine, les charges accumulées dans le diélectrique lors de l'utilisation à long terme du MEMS génère l'apparition d'une tension de décalage statique, notée  $V_{sh}$ . Son effet sur l'actionnement des MEMS capacitifs et sur la détection de leur mouvement peut être modélisé comme suit.

L'accumulation de charges au sein du diélectrique a tout d'abord des conséquences sur la détection du mouvement du résonateur. C'est ce phénomène qui est étudié ici. Dans le cas où des charges se sont accumulées dans le diélectrique, la charge motionnelle s'écrit [27]:

$$q_m = C(t)(V_b + V_{sh}) \quad . \quad (106)$$

Pour comprendre l'impact de la tension de décalage  $V_{sh}$ , on peut envisager le cas d'une détection supposée linéaire. Dans ce cas., le gain statique  $G_0 = dq_m/dx$  de la cellule se trouve modifié par l'emprisonnement de charges dans le diélectrique (augmenté ou diminué en fonction du signe de  $V_{sh}$ ). Par exemple, dans le cas d'un résonateur à capacités planes, le gain statique  $G_0$  donné en (285) devient :

$$G_0 = \frac{\epsilon S}{G} (V_b + V_{sh}) \quad . \quad (107)$$

Ce gain est donc augmenté de la tension de décalage (ou diminué suivant le signe de  $V_{sh}$ ).

L'accumulation de charges dans le diélectrique a également un effet sur l'efficacité de l'actionnement lorsqu'une tension d'actionnement  $V_{act}$  est superposée à la tension de polarisation

$V_b$ . Dans le cas d'un résonateur linéaire, cet effet a déjà été largement décrit [27]. De nouveau, pour comprendre qualitativement le phénomène, on peut considérer un modèle de résonateur à capacités planes. Dans ce cadre, on a vu, dans la section II.C, que la force adimensionnée  $F_e$  exercée sur le résonateur lorsqu'il est soumis à une tension de polarisation  $V_b$  et une tension d'actionnement  $V_{act}$  peut s'écrire (voir (66)) :

$$F_e(t) \simeq \frac{\eta(1 + v(t))^2}{(1 - x(t))^2} . \quad (108)$$

En présence d'une accumulation de charges générant une tension statique  $V_{sh}$ , la force subie par le résonateur devient :

$$F_e(t) = \frac{\eta_{eff} \left(1 + 2 \frac{V_{sh}}{V_b}\right) \left(1 + v_{eff}(t)\right)^2}{(1 - x(t))^2} \quad (109)$$

avec

$$\begin{cases} \eta_{eff} \simeq \frac{\epsilon S V_b^2}{2 G^3} \left(1 + 2 \frac{V_{sh}}{V_b}\right) \\ v_{eff}(t) \simeq v(t) \left(1 - \frac{V_{sh}}{V_b}\right) \end{cases} \quad (110)$$

en ayant supposé, comme c'est généralement le cas, que la tension statique due à la charge dans les diélectriques reste faible par rapport à la tension de polarisation imposée ( $V_{sh} \ll V_b$ ).

Une telle accumulation génère donc une modification du coefficient de transduction électromécanique et une modification de la tension d'actionnement effective subie par le MEMS.

En résumé, l'accumulation de charges au sein du diélectrique a pour conséquence la détérioration du comportement électrique et mécanique du MEMS à travers :

- la modification du coefficient de conversion électromécanique ;
- la modification de l'amplitude d'actionnement effectivement subie par le résonateur ;
- la modification du gain statique de la cellule.

Qu'il s'agisse du cas linéaire ou non-linéaire, l'identification de ce phénomène peut se faire en réalisant des mesures à tension de polarisation positive et négative. Les réponses obtenues, si elles sont différentes, en sont alors la signature [27].

### III.B.b. Défaillances mécaniques

Parmi les principales défaillances mécaniques répertoriées dans la littérature, on peut citer le fluage et la fatigue. On en présente ici la définition ainsi qu'une description qualitative de l'impact qu'ils peuvent avoir sur le comportement des MEMS capacitifs, même s'il est complexe de les identifier avec certitude autrement que par mesure optique.

Le fluage concerne la déformation mécanique irréversible des parties mobiles sous l'effet de contraintes constantes (inférieures à la limite d'élasticité des matériaux). Une étude expérimentale récente indique que les effets de fluages peuvent apparaître au bout de quelques heures [37]. Le temps d'apparition (de l'ordre de 1h à 10h) peut varier en fonction de la température. Plus la température augmente, plus ces effets apparaissent rapidement.

Cette déformation peut avoir des conséquences multiples, notamment la modification de la géométrie du résonateur ou la modification du mode de résonance, et donc la modification potentielle de tous les paramètres d'intérêt : coefficient de conversion électromécanique  $\eta$ , facteur de qualité  $Q$ , capacité nominale (donc gain statique), et raideur (donc pulsation propre).

La fatigue concerne, contrairement au fluage, l'usure des parties vibrantes des MEMS sous l'action de contraintes ou déformations variables dans le temps. Ces contraintes peuvent aussi bien être mécaniques que thermiques. Les propriétés locales des matériaux sont alors modifiées. Le phénomène peut aller jusqu'à la formation de fissures ou la rupture de la structure [38].

Deux types de fatigue sont répertoriés dans la littérature :

- la fatigue due aux effets thermiques (ou thermoélastiques) : les déformations répétées de la partie mobile du MEMS génèrent des compressions et des dilatations locales du matériau qui se traduisent par des échauffements locaux. Ces échauffements modifient les propriétés mécaniques et physiques du matériau.
- la fatigue due à l'usure mécanique (essentiellement présente dans les interrupteurs MEMS où le résonateur subit des contacts mécaniques répétés).

La fatigue peut donner lieu, comme le fluage, à des modifications géométriques ou physiques du résonateur, qui impactent son fonctionnement à long terme (précision et justesse). Bien qu'aucune étude ne détermine avec précision l'impact de ce phénomène sur tous les paramètres d'intérêt, on peut principalement s'attendre à une modification de la raideur de la partie mobile et donc de la fréquence propre du mode principal de résonance.

### **III.B.c. Détérioration du vide interne de la cellule**

La fabrication de cellules résonantes performantes comprend généralement un procédé d'encapsulation sous vide. Ce procédé permet de limiter les frottements subis par la structure mobile et donc d'augmenter le facteur de qualité de ses modes de résonance.

Cependant, l'encapsulation n'est pas parfaitement hermétique. Tout au long du cycle de vie du capteur, le vide réalisé lors de la fabrication peut se détériorer. Afin de limiter ce problème, des pièges à gaz (ou « getters » en anglais) sont généralement utilisés. Ils se présentent sous la forme de fines couches de matériau (non-évaporable) fait d'un alliage à base de zirconium. Tant qu'elle n'est pas saturée, la couche absorbe les gaz actifs, notamment l'eau, le monoxyde de carbone, le dioxyde de carbone, le dioxygène, le diazote et le dihydrogène [39]. Leur efficacité pour prolonger la durée de vie des capteurs a été démontrée [40].

Néanmoins, la durée de vie de ces pièges à gaz est limitée. Lorsque la couche de piège est saturée, la qualité du vide présent dans la cellule commence à évoluer ce qui engendre une modification du coefficient d'amortissement du résonateur, et donc de son facteur de qualité.

D'autres travaux de recherches ont démontré l'efficacité de procédés d'encapsulation spécifiques permettant de garantir l'herméticité des cellules sur des durées étendues (supérieures



à 1 an) [41] [42]. Cependant, pour les durées d'utilisation des capteurs dans l'aéronautique (supérieures à 10 ans), le problème d'herméticité des cellules reste d'actualité.

### III.B.d. Défaillance électromécanique : Phénomène de pull-in

Une autre défaillance, spécifique aux capteurs MEMS capacitifs, correspond aux dégâts engendrés par le contact entre les différentes électrodes en vis-à-vis. Ce phénomène, appelé « pull-in », peut se produire dans deux cas de figure différents :

- un cas de figure appelé « pull-in statique », correspondant à l'application d'une tension de polarisation trop forte entre les deux électrodes.
- un cas de figure appelé « pull-in dynamique » qui correspond à l'attraction irréversible de l'élément mobile vers l'électrode qui lui fait face à grande amplitude d'oscillation. Lorsque l'élément mobile est un résonateur, on parlera de « pull-in résonant ».

Les phénomènes de pull-in statique et dynamique ont été largement étudiés dans la littérature [1] [43]. La présentation de ces deux cas de figure fait l'objet des prochains paragraphes. Dans certains cas extrêmes, le contact entre les électrodes peut engendrer la destruction de la partie mobile. On parle alors parfois de « snap-in ».

#### III.B.d.i. Pull-in statique

La force électrostatique exercée entre deux électrodes soumises à une différence de potentiel est toujours attractive. Au-delà d'une tension limite, cette attraction devient trop forte pour que la raideur de l'élément mobile suffise à l'empêcher de s'écraser sur l'électrode qui lui fait face. Des considérations énergétiques permettent de déterminer cette tension limite (ainsi que la position correspondante du résonateur). Par exemple pour un résonateur plan soumis à une tension de polarisation  $V_b$ , l'énergie totale du système {ressort + capacité + source de tension} s'écrit :

$$\mathbb{E}_{tot} = \frac{kG^2x^2}{2} - \frac{\epsilon SV_b^2}{2G(1-x)} \quad . \quad (111)$$

Une position  $x_s$  peut alors être stable si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbb{E}_{tot}}{dx}(x_s) = 0 \\ \frac{d^2\mathbb{E}_{tot}}{dx^2}(x_s) > 0 \end{cases} \quad (112)$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} kx_s - \frac{\epsilon SV_b^2}{2G^3(1-x_s)^2} = 0 \\ k - \frac{\epsilon SV_b^2}{G^3(1-x_s)^3} < 0 \end{cases} \quad . \quad (113)$$

Le déplacement limite  $x_{pi}$  et la tension de polarisation limite  $V_{pi}$  générant l'apparition du phénomène de pull-in statique pour un résonateur capacitif s'écrivent donc :

$$\begin{cases} x_{pi} = \frac{1}{3} \\ V_{pi} = \sqrt{\frac{8kG^3}{27\epsilon S}} = V_b \sqrt{\frac{4}{27\eta}} \end{cases} \quad (114)$$

La limite de pull-in statique trouvée ici permet d'exprimer la condition à remplir pour pouvoir négliger la composante statique du déplacement d'un résonateur à capacités planes :

$$\eta \ll \frac{4}{27} \approx 0,15 \quad (115)$$

Le phénomène de pull-in est illustré en termes énergétiques sur la Fig. 18 pour un résonateur à capacités planes ayant même raideur, gap et surface que le résonateur décrit en section II.E. Sur ce graphique, on représente le profil de  $\mathbb{E}_{tot}$  pour différentes tensions de polarisation. Pour une tension  $V_b = V_{pi} = 142V$ , le profil d'énergie ne présente plus de minimum local, ce qui explique l'apparition de l'instabilité. Le point d'inflexion du cas limite se trouve bien à un tiers du gap.

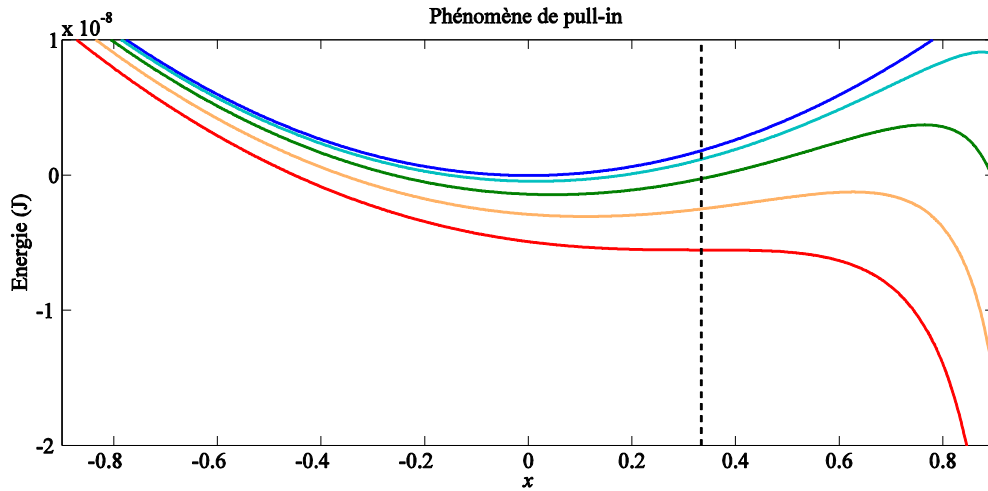


Fig. 18 Illustration du phénomène de pull-in statique pour différentes tension de polarisation linéairement réparties entre 10V et 142V (du bleu au rouge). La ligne pointillée correspond à un déplacement d'un tiers du gap.

Une fois le pull-in statique atteint, l'élément mobile ne peut théoriquement plus être libéré, sauf en annulant la tension de polarisation [44]. L'électrode mobile peut alors être détériorée, voire complètement détruite, dans des cas extrêmes, par le choc avec l'électrode fixe.

La relation de pull-in (114) est parfois citée dans la littérature comme un inconvénient fort des résonateurs capacitifs, dont le déplacement ne pourrait théoriquement pas dépasser un tiers du gap entre les électrodes. Cependant, il est important de noter qu'elle n'est valable que dans le cas d'un résonateur plan soumis à une tension constante.

Notre résonateur est encastré aux deux extrémités et la relation (114) n'est rigoureusement pas valable (la tension de pull-in statique est encore plus élevée pour un résonateur bi-encastré).

Cependant, l'ordre de grandeur de la tension  $V_{pi}$  est largement supérieur à la tension de polarisation utilisée dans les capteurs résonants et les systèmes embarqués. Ainsi, l'instabilité la plus problématique dans les capteurs résonants n'est pas le pull-in statique mais le pull-in résonant décrit qualitativement en III.B.d.ii.

### III.B.d.ii. Pull-in dynamique

Afin de diminuer l'impact du bruit sur le fonctionnement des capteurs, il est intéressant d'accroître la tension d'actionnement de sorte à accroître l'amplitude du mouvement du résonateur. Cependant, lorsque l'amplitude d'oscillations s'accroît, le risque de voir le résonateur atteindre une amplitude instable qui générerait son attraction irréversible vers l'électrode qui lui fait face s'accroît également. Dans le cas d'oscillations non-entretenues (en l'absence de tension d'actionnement), l'énergie totale du système {masse + ressort + capacité + source de tension} s'écrit cette fois :

$$\mathbb{E}_{tot} = \frac{1}{2} m G^2 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{k G^2 x^2}{2} - \frac{\epsilon S V_b^2}{2G(1-x)} \quad . \quad (116)$$

On peut représenter le pull-in dynamique dans l'espace des phases, où il se matérialise sous la forme d'orbites ouvertes à proximité de  $x = 1$ . La Fig. 19 représente les trajectoires parcourues par le système à différentes énergies pour  $V_b = 30V$ . Des amplitudes nettement supérieures à  $x = 1/3$  (limite du pull-in statique) sont accessibles.

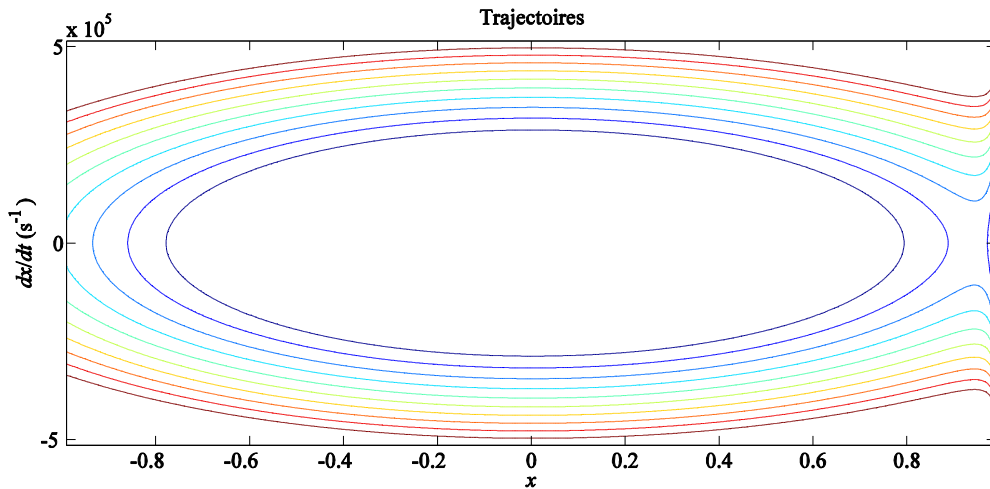


Fig. 19 Illustration du phénomène de pull-in dynamique dans l'espace des phases : trajectoires de phase pour différents niveaux d'énergie.

Bien qu'il permette une compréhension qualitative du problème, ce raisonnement reste simpliste car il ne prend pas en compte la tension d'actionnement, indispensable pour compenser les pertes énergétiques. Il correspond en fait au cas théorique d'un actionnement par un peigne de Dirac parfait. Dans un cadre plus large, un certain nombre d'études ont déterminé la condition de pull-in résonant d'un résonateur MEMS capacitif soumis à divers actionnements [13] [25]. Ces études se sont intéressées au cas de figure le plus courant, où l'actionnement est réalisé en quadrature avec la détection du mouvement du MEMS [1]. Il a été prouvé que l'amplitude mécanique maximale atteignable dans ce cas est supérieure à un tiers du gap (limite définie par le pull-in statique) mais que sa valeur exacte dépend de la forme de l'onde d'actionnement

envisagée. Des considérations plus générales sur ce phénomène, valables quel que soit le déphasage introduit par l'électronique, seront présentés dans le chapitre IV.

### III.B.e. Bilan de l'impact des principaux modes de défaillance

L'impact des modes de défaillance les plus courants est résumé dans le Tableau 1 qui met en évidence à quel point chacun présente une signature spécifique. Cette signature pourrait permettre, à terme, de les identifier à partir de mesures électriques. On comprend dès lors l'intérêt d'élaborer des méthodes de caractérisation permettant d'accéder à l'ensemble des paramètres impactés.

Mode de défaillance	Paramètres du MEMS potentiellement impactés
Accumulation de charges au sein des diélectriques	$\eta, G_0$
Fluage	$\omega_0, Q, \eta, G_0$
Fatigue	$\omega_0, Q$
Détérioration du vide interne de la cellule	$Q$
Pull-in	$\omega_0, Q, \eta, G_0$ Cas extrême: destruction du résonateur

Tableau 1. Impact des principaux modes de défaillance sur les paramètres caractéristiques du résonateur.

### III.C. Caractérisation de MEMS capacitifs résonants en régime linéaire

Une procédure de caractérisation se construit en 3 étapes, comme indiqué sur le diagramme représenté en Fig. 20 :

- le choix d'un modèle de comportement ;
- le choix du type de mesures et d'un protocole expérimental (méthodes temporelles, fréquentielles, etc.) ;
- l'estimation des paramètres du modèle à partir des résultats expérimentaux.

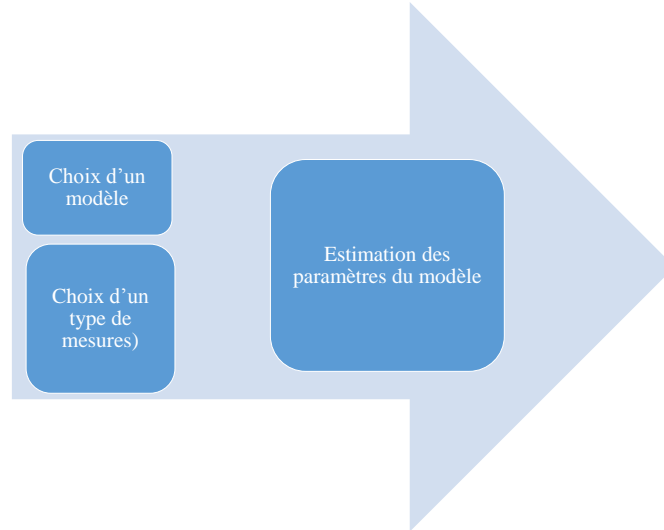


Fig. 20 Etapes d'une procédure de caractérisation.

Avant de construire une méthode plus générale, on se limite, dans cette section, à la caractérisation de résonateurs à de faibles amplitudes d'oscillation. On choisit donc, dans toute la section III.C, le modèle d'un résonateur harmonique amorti (voir section II.B). On construit ici une nouvelle méthode d'identification valable pour ce type de résonateur.

En particulier, on s'intéresse ici aux difficultés intrinsèques à la caractérisation de résonateurs capacitifs liées à l'existence de capacités parasites entre les électrodes de la cellule résonante. On présente ensuite les différentes méthodes publiées dans la littérature permettant de s'en affranchir, ainsi que la nouvelle méthode développée dans le cadre de ce doctorat.

### III.C.a. Etat de l'art : Caractérisation par mesures électriques

Comme expliqué dans l'introduction, on s'intéresse ici à la caractérisation de cellules encapsulées et éventuellement installées sur des systèmes embarqués. Dans ce cadre, les mesures optiques du dispositif sont hors de portée, et on ne présentera donc que les méthodes de caractérisation par mesures électriques.

#### III.C.a.i. Difficulté posée par la caractérisation des MEMS

Comme présenté dans la section II.E, une capacité parasite est intrinsèquement présente entre les électrodes des cellules MEMS capacitives à actionnement et détection unilatéraux (MEMS à un seul port) [27] [28]. L'effet de cette capacité sur le courant de sortie du MEMS est représenté en Fig. 21. En supposant, comme dans la section II.E, que la tension d'entrée du résonateur s'écrit comme la superposition d'une tension de polarisation  $V_b$  et d'une tension d'actionnement  $V_{act}$ , et en notant  $C_p$  la capacité parasite entre les électrodes du MEMS, la charge de la cellule MEMS formée par la mise en parallèle de  $C$  et  $C_p$  s'écrit:

$$q_{tot}(t) = [C(x(t)) + C_p](V_b + V_{act}) \quad . \quad (117)$$

Le courant total s'écrit donc :

$$i_{tot}(t) = \frac{dq_{tot}}{dt} = \frac{dC}{dt} (V_b + V_{act}) + C(x(t)) \frac{dV_{act}}{dt} + \overbrace{C_p \frac{dV_{act}}{dt}}^{i_p} . \quad (118)$$

Le plus souvent, les cellules MEMS sont opérées sous une tension d'actionnement très inférieure à la tension de polarisation, de sorte que qu'on peut supposer :

$$V_{act} \ll V_b . \quad (119)$$

Sous cette hypothèse, l'équation (118) se réécrit :

$$i_{tot}(t) = \overbrace{\frac{dC}{dt} V_b + C(x(t)) \frac{dV_{act}}{dt}}^{i_m} + \overbrace{C_p \frac{dV_{act}}{dt}}^{i_p} . \quad (120)$$

La tension d'entrée donne naissance à un courant de sortie formé par la superposition du courant motionnel d'intérêt  $i_m$  avec un courant provenant de la capacité parasite  $i_p$ . Dans le cas où la tension  $V_{act}$  est sinusoïdale, il est alors impossible de distinguer, par une simple observation du signal de sortie, la composante du courant due à la capacité parasite de celle due au mouvement de la partie mobile du MEMS.

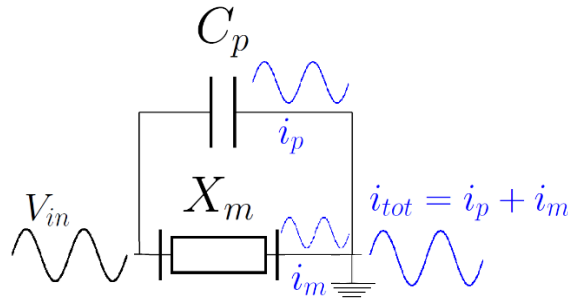


Fig. 21 Effet de la capacité parasite sur le courant de sortie de la cellule MEMS

La présence de cette capacité distord le pic de résonance et génère, en aval de la résonance, un phénomène d'antirésonance dû à une résonance parallèle entre le résonateur (qu'on pourrait, en première approximation, considérer comme un circuit RLC série) et la capacité parasite. Le profil de phase est également drastiquement modifié. Pour illustrer ce phénomène, on présente en Fig. 22 une réponse fréquentielle (normalisée par rapport au maximum de la réponse) obtenue sous actionnement sinusoïdal en régime linéaire sur le résonateur présenté dans la section II.E (faible amplitude d'oscillation). On y observe nettement le phénomène de résonance et d'antirésonance. On peut également noter le faible intervalle de variation de la phase (par rapport à  $[-\pi, 0]$ ).

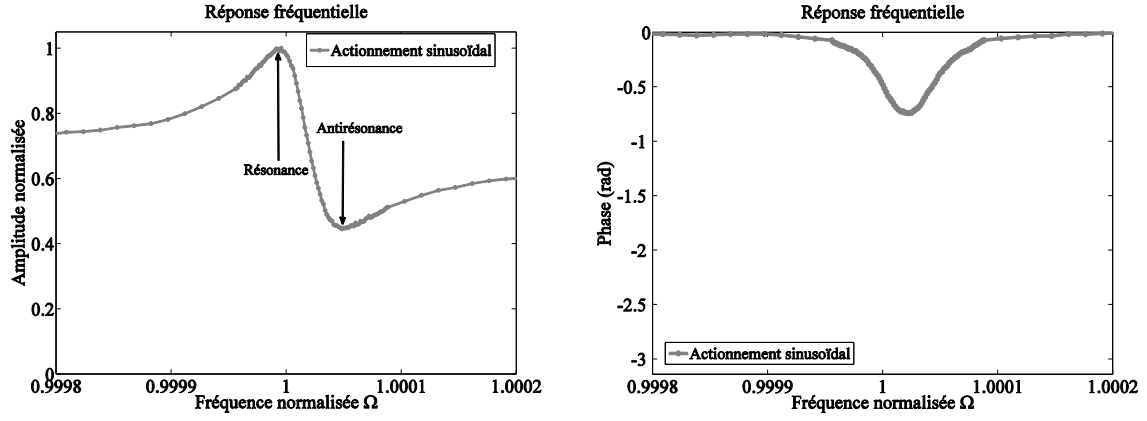


Fig. 22 Profil expérimental obtenu en régime linéaire: Amplitude (Gauche) et phase (droite).

Ce profil de résonance est dû au fait que les mesures électriques ne donnent pas accès à la fonction de transfert reliant le déplacement à la force d'actionnement mais plutôt à la fonction de transfert  $H_{mes}$  reliant l'intégrale du courant motionnel à la tension d'actionnement. Par exemple, considérons un résonateur capacitif linéaire défini par la fonction de transfert suivante (voir section II.B) :

$$H = \frac{x}{F} = \frac{1}{1 - \Omega^2 + \frac{j\Omega}{Q}} \quad (121)$$

où  $F = 2\eta V_{in}$ . Si on observe le déplacement par l'intermédiaire d'un amplificateur de charge (voir section II.E), on peut tracer le diagramme de Bode de  $H_{mes}$  :

$$H_{mes} \equiv \frac{V_{out}}{V_{act}} = \frac{1}{j\omega C_1} \frac{i_p + i_m}{V_{act}} = \frac{C_p}{C_1} + \frac{2\eta C_0}{C_1 \left(1 - \Omega^2 + \frac{j\Omega}{Q}\right)} \quad (122)$$

La fonction de transfert  $H_{mes}$  est illustrée en Fig. 23 pour  $Q = 10^4$  et des valeurs croissantes du rapport  $2\eta C_0/C_p$  ( $10^{-5}$ ,  $2 \times 10^{-5}$  et  $10^{-4}$ ). Les réponses en amplitude ont été normalisées par rapport à leur valeur maximale.

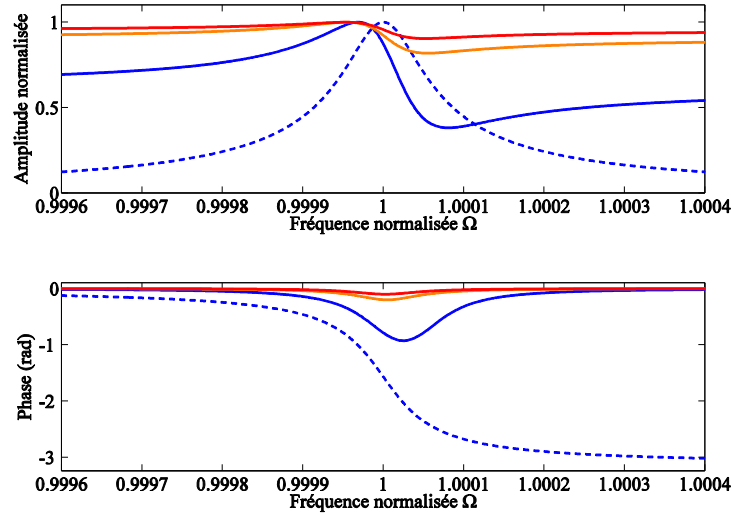


Fig. 23 Illustration du problème posé par la capacité parasite sur un résonateur linéaire. Réponse mécanique du résonateur (ligne discontinue) et réponse électrique pour des valeurs croissantes de capacités parasites (de bleu à rouge). Les réponses en amplitude ont été normalisées par rapport à leur maximum.

Dans le cas de fortes capacités parasites, la résonance peut être complètement masquée, en amplitude comme en phase, par le courant provenant de la capacité parasite, comme illustré sur la Fig. 23. A moins d'utiliser un système de détection synchrone, ce phénomène rend complexe la procédure de recherche expérimentale de la résonance qui peut déjà être longue, même en absence de parasites, compte-tenu de la faible bande passante des résonateurs à haut facteur de qualité. De plus, il est compliqué d'estimer précisément l'impact des parasites sans savoir a priori s'il existe d'autres résistances et capacités parasites. On trouve dans la littérature des modèles faisant référence à de multiples parasites, résistifs et capacitifs, en entrée et en sortie du résonateur [45].

Afin de limiter l'impact de ces parasites, on pourrait tenter d'augmenter la tension de polarisation afin d'accroître le coefficient de conversion électromécanique  $\eta$ . Cependant, ceci ne peut se faire sans atteindre des régimes de fonctionnement non-linéaire du résonateur. Dans ces régimes, la présence de la capacité parasite génère des réponses fréquentielles extrêmement distordues [46] à partir desquelles l'identification de paramètres peut s'avérer très complexe. Les formes de réponses fréquentielles non-linéaires pour différents niveaux de capacité parasite sont reportées en Fig. 24 (tiré de [46]).



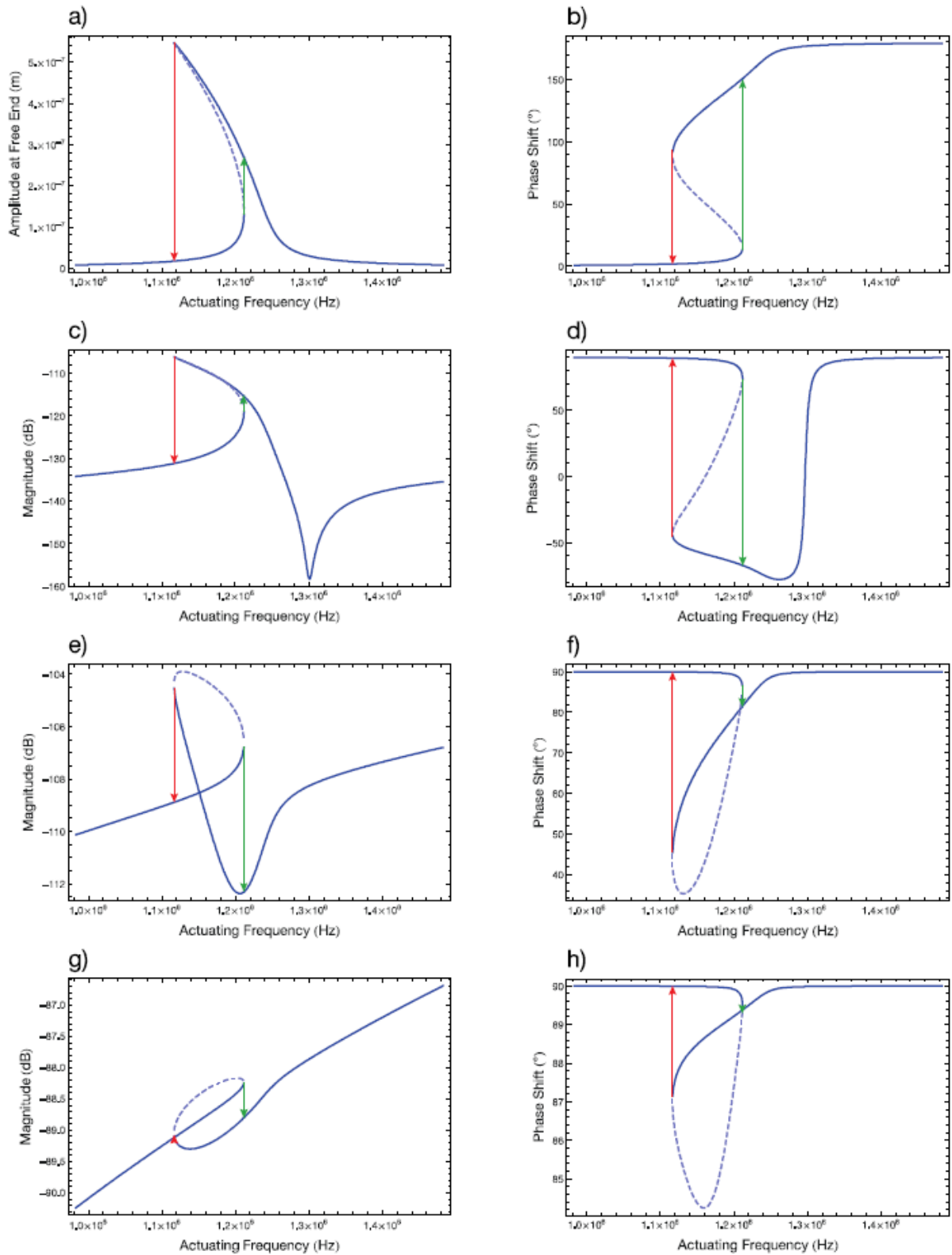


Fig. 24 Effet de la capacité parasite sur la réponse fréquentielle d'un résonateur capacitif en régime non-linéaire (tiré de [46]). Graphiques c), e) et g) : Réponses en amplitude pour des valeurs croissantes de capacité parasite. Graphiques d), f) et h) : Réponses en phase correspondantes. Les graphiques a) et b) correspondent à la réponse mécanique.

Pour toutes ces raisons, la présence d'une capacité parasite représente un défi pour la caractérisation de résonateur. On peut classer les méthodes qui permettent de s'en affranchir en deux catégories :

- les méthodes matérielles ;
- les méthodes basées sur le modelage du signal d'entrée.

Comme il ne s'agit pas ici de parler des méthodes d'identification, mais bien des méthodes d'acquisition, on ne traitera pas, dans cette section, des différentes façons de post-traiter une réponse fréquentielle pour identifier des paramètres (notamment, dans certains cas, la valeur de la capacité parasite). Ces méthodes seront évoquées dans la section III.C.e lorsqu'il s'agira d'identifier des paramètres à partir d'une réponse fréquentielle expérimentale.

### III.C.a.ii. Méthodes matérielles

Cette catégorie de méthodes fait référence à la suppression du signal parasite par soustraction avec un autre signal électrique [47].

Une première façon de réaliser cette compensation consiste à utiliser une capacité discrète (capacité de compensation) dont la valeur est supposée proche de la valeur estimée de la capacité parasite. On applique alors le signal d'entrée du MEMS à la capacité discrète placée en parallèle, et on réalise la soustraction du signal sortant du MEMS par le signal provenant de la capacité de compensation [48]. Le principe d'une telle compensation est repris en Fig. 25.

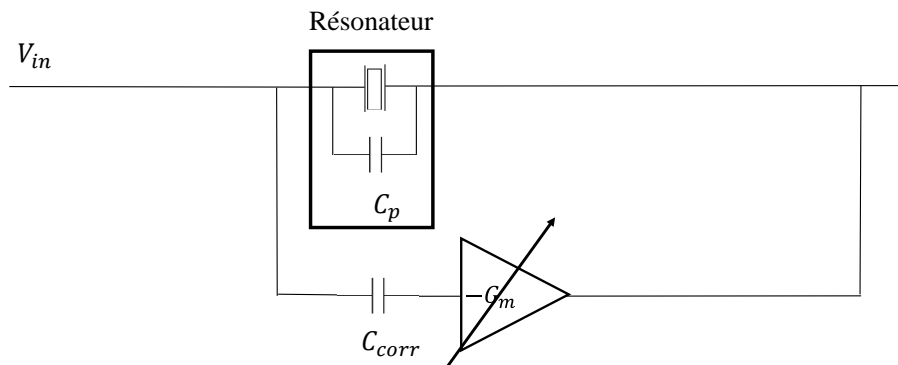


Fig. 25 Compensation de la capacité parasite par une capacité discrète  $C_{corr}$ .

Ce dispositif nécessite cependant le contrôle d'un gain variable à ajuster jusqu'à obtenir une bonne compensation du signal parasite. De plus, la capacité parasite  $C_p$  est souvent faible (dans notre cas inférieure à  $1pF$ ), de sorte que l'utilisation de composants capacitifs discrets peut s'avérer complexe (les capacités de connectique peuvent elles-mêmes être proches de  $1pF$ ). Enfin, une telle architecture nécessite une bonne connaissance a priori de la nature des parasites (résistifs et/ou capacitifs).

Pour obtenir une compensation précise de la capacité parasite sans avoir à ajuster un gain variable, on peut également choisir d'imposer le signal d'actionnement à deux résonateurs similaires. On peut alors ne polariser qu'un seul des deux résonateurs ou les polariser en inverse [49] (voir Fig. 26). Si les signaux parasites sont identiques sur les deux résonateurs, une mesure différentielle permet de les annuler, tandis que le signal motionnel, lui, provient uniquement du (des) résonateur(s) polarisé(s).

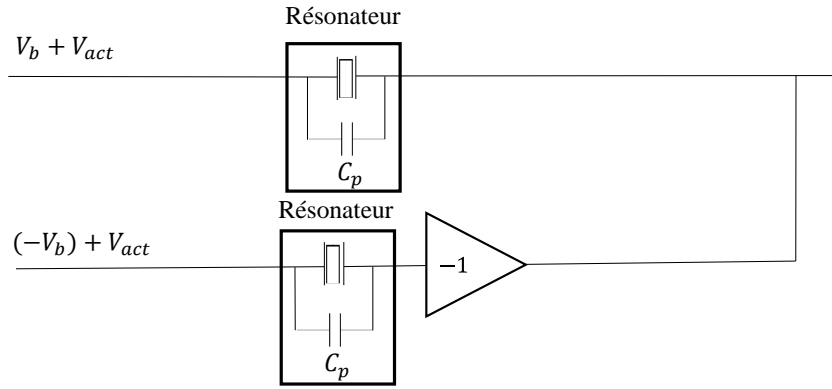


Fig. 26 Compensation de la capacité parasite par utilisation d'un second résonateur.

Cette méthode ne peut être utilisée que lorsque l'on dispose de deux résonateurs similaires ce qui nécessite généralement de les fabriquer ensemble, sur le même wafer, pour limiter les dispersions de fabrication. L'efficacité de la suppression des effets parasites par cette méthode dépend alors très largement de la capacité de l'expérimentateur à fabriquer des dispositifs identiques.

Enfin, parmi les méthodes matérielles de compensation de la capacité parasite, il est possible d'utiliser une conception ad-hoc, en utilisant par exemple une détection multi-électrodes [28] éventuellement combinée à des mesures piezorésistives [50]. Cependant, dans notre cas d'étude, on cherche à caractériser un résonateur capacitif à un seul port (d'actionnement et de détection), ce qui rend ces dernières méthodes impossibles à appliquer.

### III.C.a.iii. Modelage du signal d'entrée (« input-design methods »)

D'autres techniques de suppression des effets parasites consistent à actionner le résonateur à l'aide d'un signal choisi pour que le signal motionnel se distingue aisément du signal parasite, soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine fréquentiel. Parmi les méthodes existantes, on peut citer :

- l'actionnement sinusoïdal subharmonique ;
- les méthodes basées sur la décroissance exponentielle des oscillations libres (méthodes dites de « ring-down »).

#### 1. Suppression des effets parasites par actionnement sinusoïdal subharmonique

On trouve, dans la littérature, des méthodes consistant à actionner le résonateur avec un signal dont le spectre présente une composante à une fréquence sous-multiple de la fréquence propre du résonateur. Pour obtenir une oscillation, on tire parti de la non-linéarité de l'actionnement vis-à-vis de la tension appliquée en entrée du système. En actionnant le résonateur à une fréquence proche de la moitié de sa fréquence de résonance, on génère une composante proche de la fréquence de résonance par l'intermédiaire de la relation [51] [50] :

$$F(t) \propto (V_b + V_{act}(t))^2 \quad . \quad (123)$$

Le signal de sortie du MEMS comprend alors :

- une composante parasite de pulsation proche de  $\frac{\omega_0}{2}$ .
- une composante motionnelle de pulsation proche de  $\omega_0$ .

Il est donc aisé de séparer la composante motionnelle par décomposition spectrale du signal de sortie.

Cette méthode est extrêmement efficace pour limiter les effets du courant parasite sur la réponse en fréquence. Cependant, elle requiert l'utilisation d'un générateur d'actionnement à très bas taux de distorsion harmonique. En particulier, il est nécessaire que la seconde harmonique (parasite) de la tension d'actionnement soit d'amplitude extrêmement faible par rapport à l'harmonique principale.

Dans la plupart des appareils, le taux de distorsion relatif à cette seconde harmonique seule n'est pas fourni. La donnée présentée dans les fiches techniques qui correspond à la pureté harmonique du signal est le taux de distorsion harmonique (Total Harmonic Distortion (THD)). Il s'agit du rapport de la puissance de toutes les harmoniques parasites sur celle de l'harmonique principale. En négligeant les harmoniques d'ordre supérieur à deux, on peut modéliser un signal « sinusoïdal » de sortie d'un générateur non-idéal par :

$$V_{act}(t) = V_a(\sin(\omega t) + \epsilon \sin(2\omega t + \varphi_2)) \quad (124)$$

avec  $\epsilon \ll 1$  (de  $\epsilon \simeq 10^{-3}$  pour un générateur classique à  $\epsilon \simeq 10^{-5}$  pour un générateur à très faible distorsion (e.g. SRS DS360)). Ainsi, pour  $\omega \simeq \frac{\omega_0}{2}$ , on a :

$$V_{act}(t) \simeq V_a \left( \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) + \epsilon \sin(\omega_0 t + \varphi_2) \right) . \quad (125)$$

Le signal d'amplitude  $\epsilon V_a$  est alors converti en intensité parasite, par l'intermédiaire de la capacité parasite, qui se superpose au signal motionnel à la pulsation  $2\omega \simeq \omega_0$ . Il est alors impossible de distinguer, dans la composante à  $2\omega$  du signal, la part provenant du signal motionnel et la part du signal provenant de la capacité parasite.

Pour illustrer ce problème, la Fig. 27 représente la réponse fréquentielle simulée d'un résonateur capacitif linéaire de paramètres  $Q = 10^3$ ,  $\frac{C_0}{C_p} = 0,1$  et  $\eta = 5 \times 10^{-4}$  branché sur un amplificateur de charge tel que  $\frac{C_0 V_b}{C_1} = 1$  V. La pulsation propre a été normalisée, comme dans le chapitre II. On a ici supposé un actionnement par un signal sinusoïdal dont la seconde harmonique est à  $-60$  dB (typique d'un générateur classique [52]). L'amplitude de l'harmonique principale du signal d'actionnement (i.e. proche de  $\omega_0/2$ ) a été fixée à 500 mV, de sorte que l'amplitude de la seconde harmonique soit de 0,5mV et on a supposé, pour simplifier, que  $\varphi_2 = 0$ , c'est-à-dire que le signal parasite est en phase avec le signal principal. La méconnaissance a priori de  $\varphi_2$  et la difficulté à la mesurer précisément rend le problème d'identification d'autant plus complexe. On constate la présence d'une distorsion de la réponse fréquentielle due au signal parasite provenant du générateur, qui peut considérablement perturber l'identification des paramètres (surtout du facteur de qualité).

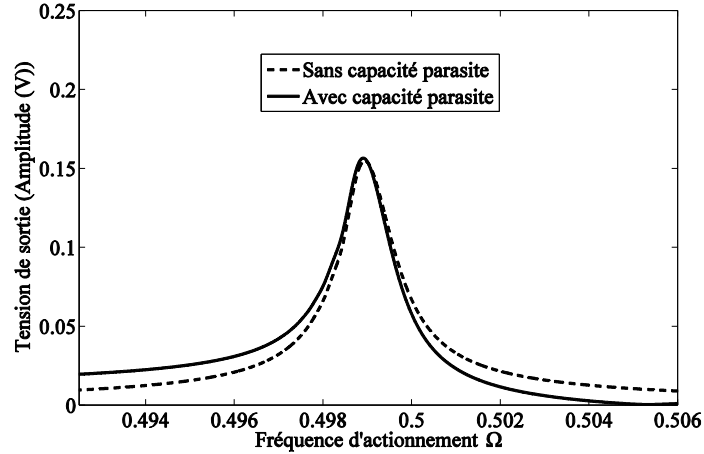


Fig. 27 Illustration de l'effet de la distorsion harmonique du signal d'entrée actionné avec un signal sinusoïdal sous-harmonique (méthode décrite dans [51]).

## 2. Suppression des effets parasites par méthodes de « ring-down »

Une autre façon de modeler le signal d'entrée pour s'affranchir des capacités parasites consiste à séparer temporellement l'actionnement et la détection. Une telle méthode est basée sur le simple fait que, lorsque le résonateur n'est pas actionné, aucun signal parasite ne peut être observé. Ainsi, il suffit de fournir suffisamment d'énergie au résonateur à un instant donné, puis de relâcher l'actionnement et d'enregistrer la décroissance exponentielle des oscillations. Un exemple simulé de cette méthode est représenté en Fig. 28.

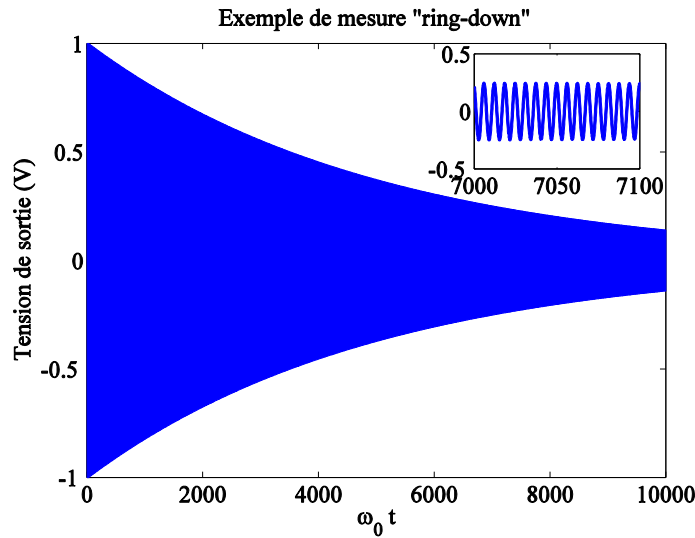


Fig. 28 Exemple simulé de mesures en oscillations libres (« ring-down ») pour un résonateur linéaire de facteur de qualité  $Q = 10^4$ .

Cette méthode constitue l'une des plus répandues [15] [53] [54] [55]. Elle présente en effet l'avantage d'être rapide, même pour des résonateurs à très haut facteur de qualité et/ou très basse fréquence de résonance. Afin d'observer la décroissance exponentielle des oscillations, il faut uniquement enregistrer le signal pendant une durée de l'ordre de (voir (19)) :

$$t_{acquisition} \simeq \tau = \frac{2Q}{\omega_0} . \quad (126)$$

Pour un résonateur à très haut facteur de qualité (par exemple  $Q = 10^6$ ) et basse fréquence de résonance (par exemple  $\omega_0 = 10^4 \text{ rad. s}^{-1}$ ), le temps d'acquisition avoisine 3 minutes, ce qui est suffisamment court pour pouvoir s'assurer que les paramètres extérieurs, tels que la pression ou la température, n'ont pas significativement varié pendant l'acquisition.

Le principal inconvénient de cette méthode réside dans la nécessité de fournir une énergie initiale suffisante au résonateur, afin d'obtenir un rapport signal sur bruit (« Signal-to-noise ratio » ou SNR en anglais) satisfaisant durant l'acquisition. Une façon de s'affranchir de ce problème est de répéter la procédure plusieurs fois et de réaliser une moyenne, mais cela rallonge alors considérablement le temps d'acquisition total. Un autre moyen consiste à actionner le résonateur pendant une certaine durée par un signal périodique de fréquence proche de la fréquence de résonance, puis d'éteindre l'actionnement. Cependant, il est dans ce cas nécessaire de connaître précisément la fréquence de résonance du résonateur avant de réaliser l'acquisition, ce qui n'est pas nécessairement simple, compte-tenu du très haut facteur de qualité des MEMS et donc de l'étroitesse de leur bande passante (voir équation (17)). Pour contourner le problème, on peut également insérer le résonateur dans une boucle à verrouillage de phase puis observer la décroissance des oscillations après déconnexion mais l'architecture électronique nécessaire est alors nettement plus complexe [15] (il faut généralement utiliser un amplificateur à détection synchrone).

La méthode mise au point dans le cadre de cette thèse se place dans cette catégorie de méthodes de modelage du signal d'entrée. Sa description fait l'objet de la section III.C.b.

### **III.C.b. Développement d'une nouvelle méthode de caractérisation : mesure harmonique à impulsions**

La méthode développée dans le cadre de cette thèse se base, comme les mesures « ring-down », sur le fait que, en l'absence de signal d'actionnement, le courant de sortie du MEMS est uniquement l'image du mouvement du résonateur. L'idée consiste à actionner le résonateur par un peigne de Dirac de pulsation principale  $\omega$  proche de la pulsation de résonance du résonateur (la définition du peigne de Dirac est donnée Annexe 2).

Dans le domaine de Fourier, le spectre d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac composé de tous les harmoniques de pulsation  $N\omega$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ). Les premiers harmoniques du spectre d'un tel peigne de Dirac sont représentées en Fig. 29 pour  $\omega \simeq \omega_0$ . Afin d'illustrer la sélectivité fréquentielle du résonateur, la réponse fréquentielle d'un résonateur à haut facteur de qualité est représentée, de manière qualitative, sur le même graphique (courbe grise). Du point de vue du résonateur, tout se passe comme si le signal d'actionnement ne présentait qu'un unique harmonique, proche de sa fréquence de résonance. Par conséquent, le signal de sortie du résonateur est uniquement constitué de cette harmonique et est donc sinusoïdal.

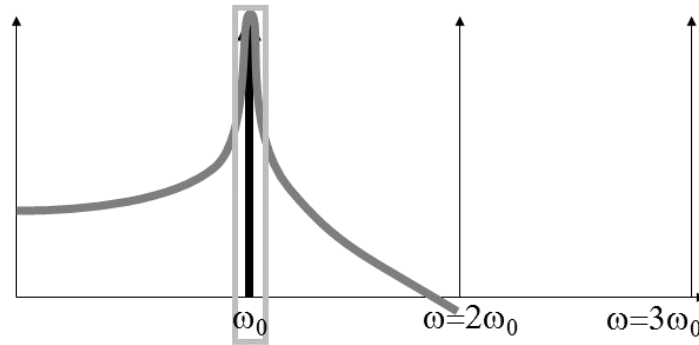


Fig. 29 Illustration du principe de la mesure harmonique à impulsions.

Il est important de noter que, dans le cas où le résonateur présente des modes de résonance de fréquence propre proche d'un multiple de la fréquence du mode d'intérêt, la méthode d'actionnement par impulsions peut devenir inadaptée (ou nettement plus complexe à mettre en œuvre). Ces modes parasites risquent en effet d'être également actionnés par les harmoniques supérieures de l'actionnement. Nous nous concentrerons ici sur des modèles de résonateurs à un seul degré de liberté, qui sont suffisants dans de nombreux cas [6] [16] [56]. La validité de cette hypothèse sera confirmée expérimentalement dans le paragraphe III.C.e.

L'application d'une impulsion en entrée de la capacité parasite génère, en réponse, une impulsion de courant, qui se superpose au signal motionnel. Le signal de sortie de l'amplificateur de charge placé en sortie de la cellule MEMS se compose alors de la superposition :

- d'un train d'impulsions (peigne de Dirac), de fréquence principale proche de la fréquence de résonance du résonateur ;
- d'une tension sinusoïdale, image du courant motionnel, provenant de la vibration (mécanique) du résonateur.

Lorsque la fréquence principale du train d'impulsions est proche de la fréquence de résonance du mode étudié, on parlera de méthode « HPMA » (« Harmonic Pulsed-Mode Actuation »).

Bien entendu, réaliser une opération de filtrage linéaire sur les signaux de sortie ne peut théoriquement rien apporter vis-à-vis de la suppression de la capacité parasite. En effet, la composante gênante du signal parasite est à la même fréquence que la composante utile du signal motionnel. Aucun filtrage linéaire ne peut permettre de diminuer la composante parasite sans diminuer de manière identique le signal motionnel. Un article récent propose pourtant de filtrer le signal de sortie à l'aide d'un filtre linéaire et défend qu'un actionnement par impulsions combiné à ce filtrage diminue les effets de la capacité parasite [57]. Cette apparente amélioration est plutôt à attribuer à des phénomènes non-linéaires dus à l'utilisation d'un amplificateur opérationnel (slew-rate notamment) qu'au filtrage réalisé. Il faut donc opter pour un traitement de signal non-linéaire.

Afin d'exploiter les avantages liés au régime à impulsions, on choisit de traiter les signaux dans le domaine temporel et de supprimer la part provenant de la capacité parasite  $C_p$ . Le traitement non-linéaire consiste à supprimer intégralement les données contenues dans le temps de réponse lié à la capacité parasite. La suppression des impulsions présentes en sortie à cause de la capacité parasite donne une sinusoïde tronquée, dont l'amplitude et la phase peuvent être déterminées précisément car la fréquence du signal est connue (fréquence d'actionnement). L'un des avantages de la méthode réside d'ailleurs dans le fait que, même dans le cas où les parasites seraient partiellement résistifs, le signal parasite reste localisé dans le temps, ce qui permet

aisément sa suppression. La forme du signal de sortie permet également à un expérimentateur de trouver rapidement la résonance, même dans le cas où la valeur de la capacité et/ou des résistances parasites seraient importants. Le traitement de signal décrit ici est intrinsèquement non-linéaire sans quoi il serait impossible de distinguer la part de la composante parasite de celle du courant motionnel à la fréquence d'intérêt.

Un exemple d'enregistrement de signal de sortie, avant et après traitement est reproduit en Fig. 30. Cette figure montre que le signal enregistré est très proche d'une sinusoïde, ce qui témoigne du réalisme du modèle de résonateur à 1 degré de liberté. Pour vérifier cette affirmation, on présente, sur les Fig. 30-b et Fig. 30-c les deux étapes de traitement du signal de sortie, à savoir :

- la suppression des impulsions parasites ;
- la reconstitution d'une sinusoïde à la fréquence d'actionnement par calcul numérique de série de Fourier (pour les détails de la méthode, voir Annexe 5). Le résultat de cette opération est donné sur la Fig. 30-c, où une sinusoïde à la fréquence d'actionnement a été reconstituée sur base du signal tronqué.

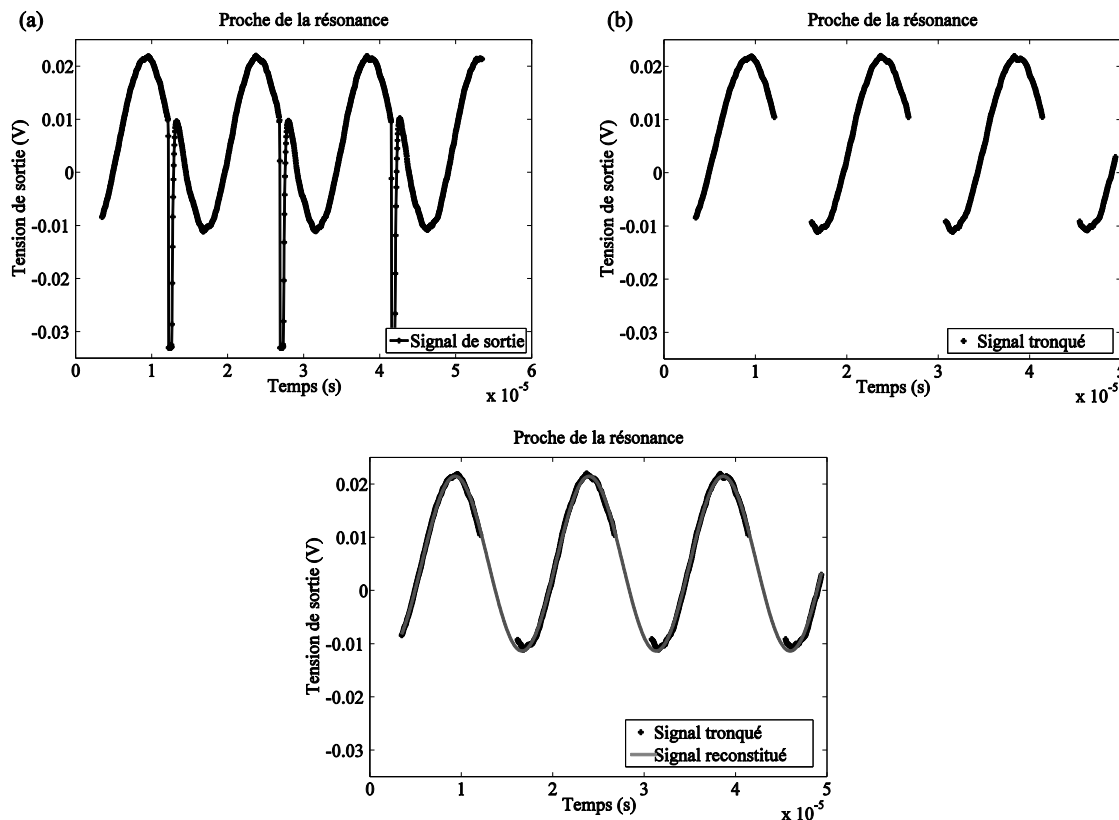


Fig. 30 Signaux de sortie de mesure HPMA. (a) Données expérimentales. (b) Signal tronqué. (c) Signal reconstitué.

La méthode illustrée en Fig. 30 assure une bonne identification de l'amplitude et de la phase, tant que la fréquence d'échantillonnage de l'acquisition est suffisamment grande par rapport à la fréquence du signal  $V_{out}(t)$ . Bien que la détermination de l'amplitude et de la phase du signal  $V_{out}(t)$  ne requière en théorie que deux points par période, l'enregistrement d'un plus grand nombre de points permet de limiter l'impact du bruit de mesure. Par exemple, pour un bruit blanc superposé à un signal enregistré en  $N$  points, l'erreur d'identification de l'amplitude du signal



est proportionnelle à  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ . L'enregistrement du signal de sortie du MEMS avec une forte fréquence d'échantillonnage  $f_e \gg \frac{\omega}{2\pi}$  permet de disposer d'un nombre de points suffisant pour que la suppression de  $n < N$  points d'enregistrement ne dégrade pas significativement la mesure.

### **III.C.c. Limites de la méthode harmonique à impulsions et construction de la méthode à impulsions sous-harmonique (SPMA)**

La précision de la mesure HPMA est sensible à la forme, à l'amplitude et à la durée des impulsions après distorsion éventuelle par le circuit électronique (notamment par l'amplificateur opérationnel placé en sortie du résonateur, qui déforme les impulsions à cause du phénomène de slew-rate). Cette distorsion dépend non seulement de la capacité parasite mais également de la fréquence de coupure de l'électronique et des impédances parasites (a priori inconnues) présentes en entrée et en sortie du résonateur. De ce fait, la durée des impulsions présentes dans le signal de sortie peut être plus longue que dans le signal d'actionnement, de sorte qu'une partie du signal motionnel restant après suppression des impulsions peut être polluée par la « queue » des impulsions ainsi distordues (voir Fig. 30-a).

Afin de limiter ce problème, une alternative consiste à allonger la période du signal d'actionnement de sorte à observer, non plus une seule, mais plusieurs périodes de signal motionnel entre deux impulsions. La résonance peut alors être observée quand la période principale du signal à impulsions n'est plus proche de  $2\pi/\omega_0$  mais de  $2N\pi/\omega_0$  ( $N \in \mathbb{N}$  et  $N > 1$ ). Plus le nombre entier  $N$  (appelé « nombre subharmonique ») est élevé, plus il devient simple de faire la distinction entre le signal motionnel et le signal parasite. On reporte en Fig. 31-a un signal enregistré expérimentalement proche de la fréquence de résonance pour  $N = 12$ . Lorsque  $N$  est supérieur à l'unité, on parlera de méthode « SPMA » (« Subharmonic Pulsed-Mode Actuation »).

Hormis le tracé de réponse fréquentielle, un des avantages de cette méthode réside dans le fait qu'il devient extrêmement simple, pour un expérimentateur, de détecter rapidement la fréquence de résonance. Savoir si la fréquence d'actionnement imposée est proche ou éloignée de la fréquence de résonance devient aisé, étant donné que l'amplitude de la partie sinusoïdale du signal change drastiquement à l'approche de la fréquence de résonance (comparé aux mesures sinusoïdales dont un exemple a été reporté en Fig. 22). Le signal motionnel sinusoïdal, observé cette fois sur plusieurs périodes, peut alors être enregistré et traité par décomposition numérique en série de Fourier, comme décrit en Annexe 5.

Le seul phénomène susceptible de perturber la mesure réside dans la présence d'un dépassement positif, en aval des impulsions, qui disparaît après quelques périodes de signal, partiellement dû à des effets non-linéaires dans l'amplificateur opérationnel de sortie. Pour limiter ce problème, on prendra soin de garder une marge de sécurité en aval des impulsions, dont on supprimera également les points de mesure.

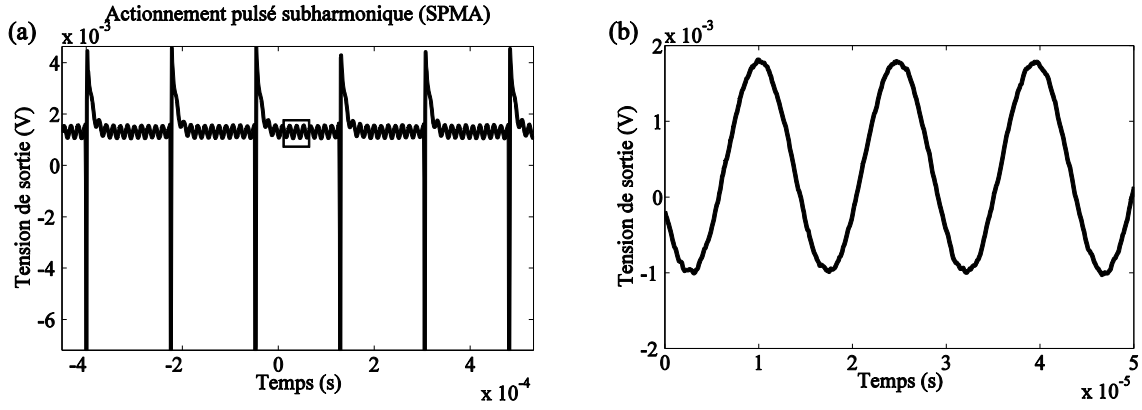


Fig. 31 Signaux de sortie de mesure SPMA ( $N = 12$ ). Signal enregistré (a) et zoom sur le signal motionnel (b).  
(tiré de [32])

### III.C.d. Identification de la réponse fréquentielle

Pour identifier la réponse fréquentielle du système, on effectue un balayage en fréquence du train d'impulsions proche de la fréquence de résonance du résonateur, pour la méthode HPMA, ou proche d'un sous-multiple de cette fréquence, pour la méthode SPMA. Pour cela, on utilise un générateur d'ondes arbitraires.

#### III.C.d.i. Equivalence entre mesure à impulsions et mesure sinusoïdale

Dans cette section, on prouve l'équivalence, pour un résonateur linéaire à haut facteur de qualité, entre un actionnement par impulsions et un actionnement sinusoïdal. Il est important d'avoir conscience des deux hypothèses cruciales pour une telle affirmation :

- une valeur élevée du facteur de qualité (on verra ici ce que signifie « élevée »).
- une utilisation du résonateur dans des régimes de fonctionnement linéaire.

Cette dernière hypothèse est cruciale, et on verra dans la section III.E que le comportement fréquentiel d'un résonateur capacitif dans des régimes de fonctionnement non-linéaire dépend drastiquement de la forme d'onde d'actionnement.

Considérons ici un tel résonateur linéaire, actionné par un train d'impulsions de tension de durée finie  $T_p$  et d'amplitude  $V_p$  répétés avec une période  $T = \frac{2\pi N}{\omega}$ . Si la largeur des impulsions est très inférieure à la période du signal motionnel, soit:

$$T_p \ll \frac{2\pi}{\omega} , \quad (127)$$

on peut les considérer comme des impulsions de Dirac de « masse »  $V_p T_p$  (on rappelle ici que la description d'impulsions de Dirac est donnée en Annexe 2). La tension d'actionnement  $V_{act}$  s'écrit alors :

$$V_{act}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta\left(t - \frac{2\pi k N}{\omega}\right) V_p T_p . \quad (128)$$

Par superposition, la réponse à une somme de Dirac décalés dans le temps est la somme des réponses impulsionnelles décalées dans le temps, ce qui donne, pour la sortie  $V_{out}(t)$  du résonateur (du second ordre) :

$$V_{out}(t) = 2\eta G_e C_0 V_p T_p \omega \operatorname{Re} \left( e^{(-\alpha + j\omega_1)t} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \right)$$

$$\text{où} \begin{cases} r = e^{(-\alpha + j\omega_1)T} \\ \alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \\ \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \end{cases} . \quad (129)$$

Sans perte de généralité, on suppose une impulsion générée à  $t = 0$  et on étudiera la réponse du résonateur sur l'intervalle  $[0, T]$ . La limite de la série géométrique présente dans l'expression (129) donne :

$$V_{out}(t) \simeq \frac{2\eta G_e C_0 V_p T_p \omega e^{-\alpha t}}{\sqrt{1 + \exp[-2\alpha T] - 2 \exp[-\alpha T] \cos \omega_0 T}} \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (130)$$

avec

$$\varphi = \arctan \left( \frac{e^{-\alpha T} \cos(\omega_0 T) - 1}{e^{-\alpha T} \sin(\omega_0 T)} \right) . \quad (131)$$

En posant :

$$X = \frac{1}{\Omega} - 1 \quad (132)$$

et en faisant les hypothèses :

$$\begin{cases} Q \gg 2\pi N \\ 2\pi|X| \ll 1 \end{cases} \quad (133)$$

la tension de sortie  $V_{out}(t)$  s'écrit, comme dans le cas d'un actionnement sinusoïdal (voir équation (14)):

$$V_{out}(t) \simeq V_{lor} \sin(\omega t + \varphi) \quad (134)$$

$$\text{avec } \begin{cases} V_{lor} \simeq \frac{G_e V_p T_p \omega_0}{N \pi \sqrt{1 + 4Q^2 X^2}} \\ \varphi \simeq \arctan(2QX) - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ce qui correspond à la réponse à une excitation sinusoïdale  $V_{act}(t) = V_s \sin \omega t$  vérifiant :

$$V_s = \frac{V_p T_p \omega_0}{N \pi} . \quad (135)$$

Ce résultat peut se comprendre dans le domaine fréquentiel. Si le facteur de qualité est suffisamment grand devant  $N$ , les harmoniques et sous-harmoniques constituant le train de Dirac sont efficacement filtrées par le résonateur de sorte que le signal motionnel n'est lui constitué que d'un seul harmonique.

Pour valider les approximations effectuées, l'erreur relative entre l'amplitude donnée par l'équation (134) et celle donnée par l'expression (130) est reportée en Fig. 32 pour  $Q = 2 \times 10^4$  (proche du facteur de qualité du résonateur décrit en Fig. 10) et différentes valeurs de  $N$ .

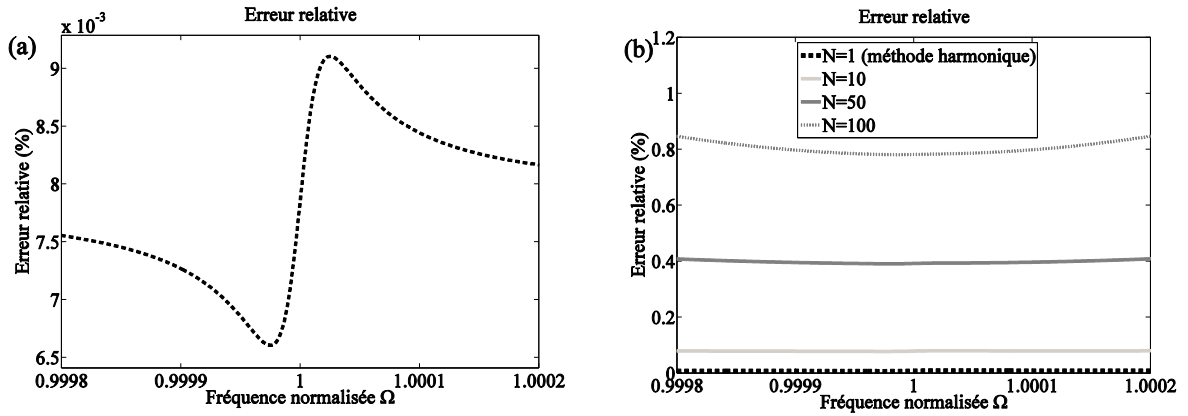


Fig. 32 (a) Erreur relative sur l'amplitude due aux approximations ( $Q = 20000$  et  $N = 1$  (HPMA)). (b) Erreur pour différentes valeurs du nombre subharmonique  $N$  (tiré de [32]).

Etant donnée l'approximation  $Q \gg 2\pi N$ , on constate logiquement que l'erreur commise augmente avec le nombre subharmonique  $N$ . Cependant, pour un facteur de qualité de 20000, la différence entre l'équation (134) et l'équation (130) est inférieure à 0.5%, même pour de grandes valeurs de  $N$  (e.g.  $N = 50$ ). Bien entendu, pour des facteurs de qualité plus faibles,  $N$  doit être choisi avec précaution.

### III.C.d.ii. Limites expérimentales à la méthode à impulsions subharmonique

Afin d'améliorer la précision des mesures effectuées par la méthode subharmonique, il est nécessaire d'augmenter la longueur du signal sinusoïdal observé, c'est-à-dire d'augmenter la valeur du nombre subharmonique  $N$ . En pratique, la résonance a pu être clairement observée même à des nombres subharmoniques très élevés (de l'ordre de 100).

Cependant, la valeur de  $N$  est limitée par plusieurs facteurs listés ci-dessous :

- La puissance disponible pour l'harmonique proche de  $f_0$  : une augmentation de  $N$  diminue la puissance disponible pour l'actionnement du résonateur (voir équation (135))
- Le facteur de qualité du résonateur :  $N$  doit rester très inférieur à  $Q/2\pi$ . Dans le cas contraire, il faut utiliser l'expression plus complexe (130) au lieu de (134).
- La durée finie des impulsions d'actionnement : le rapport cyclique est limité par la capacité du générateur à fournir des impulsions de rapport cyclique faible. Ainsi, l'augmentation du nombre subharmonique requiert l'élargissement des impulsions. Pour cette raison, la représentation spectrale de l'actionnement n'est en réalité pas un peigne de Dirac mais présente une caractéristique en sinus-cardinal, illustrée en Fig. 33 (on a choisi pour l'illustration  $Q = 10^3$  pour des raisons de lisibilité). Ainsi, un compromis doit être trouvé entre la valeur de  $N$  et la largeur des impulsions (voir Fig. 31).

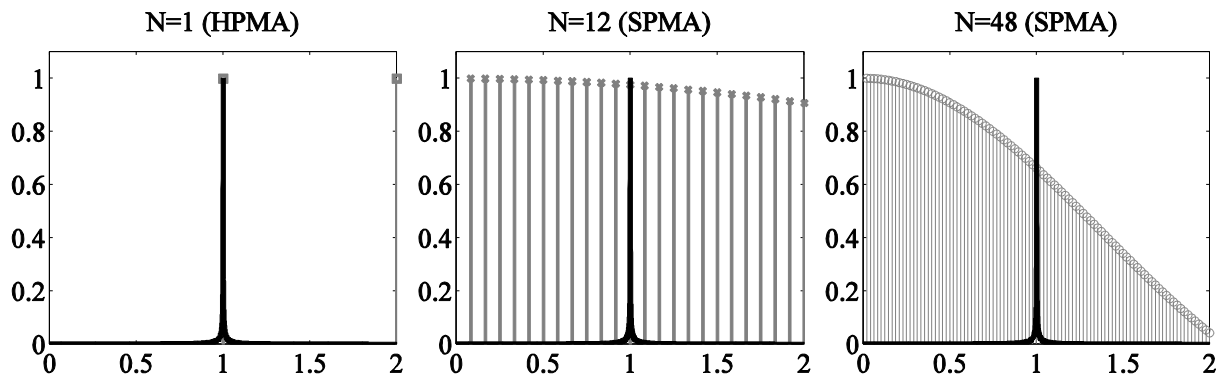


Fig. 33 Illustration d'un actionnement subharmonique avec  $N = 1$ ,  $N = 12$  et  $N = 48$ . Les lignes verticales correspondent à un peigne de Dirac modulé par un sinus-cardinal, dû à la largeur des impulsions. Le trait noir représente la réponse fréquentielle d'un résonateur de facteur de qualité  $Q = 1000$ .

Maintenant que les bases théoriques ont été posées, on présente, dans la section III.C.e, les résultats expérimentaux obtenus pour des caractérisations linéaires sous actionnement par impulsions.

### III.C.e. Résultats expérimentaux de caractérisation linéaire

Les sept principales méthodes existantes permettant d'identifier les paramètres d'un modèle linéaire de résonateur à partir d'une réponse fréquentielle sont expliquées et comparées dans la littérature [58]. Certaines méthodes traitent les réponses fréquentielles dans le domaine de Bode, d'autres dans le domaine de Nyquist. L'utilisation du domaine de Nyquist est tout particulièrement intéressante pour des MEMS capacitifs présentant une capacité parasite entre les électrodes du résonateur [59]. Cette représentation de Nyquist revient à tracer la fonction de transfert  $H_{mes}(j\omega)$  reliant le déplacement  $x$  à la tension d'actionnement sinusoïdale  $V$  dans le plan complexe. Le principe de la mesure est décrit dans l'Annexe 6.

Cependant, l'article [58] conclut que la méthode la plus robuste vis-à-vis du bruit de mesure consiste à identifier la réponse en amplitude dans le domaine de Bode par ajustement d'une courbe lorentzienne par méthode des moindres carrés non-linéaires. Pour cette raison, c'est cette méthode d'identification que nous avons choisie ici pour tous les ajustements réalisés sur les réponses expérimentales. Elle consiste à minimiser la fonction objectif :

$$Y_{lin}(\omega_0, Q) = \sum_j \left( A_j(\omega_j) - A(\omega_j, \omega_0, Q) \right)^2 \quad (136)$$

où les  $A_j$  correspondent aux mesures d'amplitudes réalisées aux pulsations  $\omega_j$  et  $A(\omega_j, \omega_0, Q)$  aux amplitudes d'une courbe lorentzienne de paramètres  $(\omega_0, Q)$  estimées aux mêmes pulsations. Dans le cas idéal (mesure non-bruïtée et paramètres identifiés avec une précision infinie), la fonction objectif vérifie  $Y_{lin}(\omega_0, Q) = 0$ .

Les résultats expérimentaux obtenus par méthode à impulsions harmonique (HPMA) sont représentés en Fig. 34. La courbe noire correspond à l'ajustement d'un modèle de résonateur linéaire (via la minimisation de  $Y_{lin}$ ) sur les points de mesures obtenus la méthode HPMA. Les ajustements ont été réalisés en identifiant un modèle de résonateur linéaire sur la réponse en amplitude par méthode des moindres carrés non-linéaires sur une courbe lorentzienne. La phase a ensuite été reconstituée et superposée aux mesures.

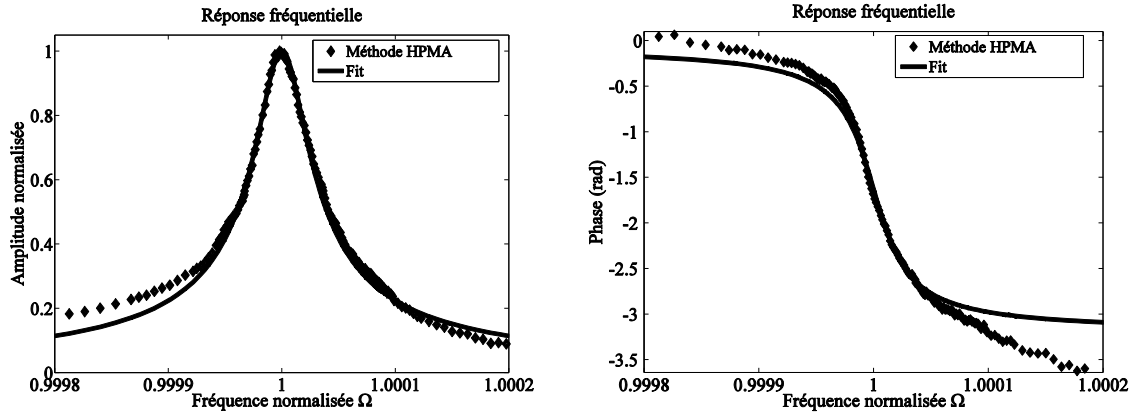


Fig. 34 Réponses expérimentales obtenues par actionnement sinusoïdal (courbe grise) et par actionnement par impulsions harmonique (losanges noirs). La courbe noire continue correspond à un ajustement d'une réponse lorentzienne sur la courbe de mesures HPMA (tiré de [32]).

Le facteur de qualité et la fréquence de résonance identifiés sont respectivement  $Q = 2,1 \times 10^4$  et  $f_0 = 68,1\text{kHz}$ . On peut cependant constater sur la Fig. 34 que l'ajustement de la courbe lorentzienne sur les mesures n'est pas parfait. La principale cause de ces écarts réside dans la difficulté de supprimer les impulsions parasites, qui constituent une large part du signal de sortie.

Les résultats obtenus par la méthode SPMA, en balayant la fréquence d'actionnement autour de  $f_0/12$  (i.e.  $N = 12$ ), sont présentés en Fig. 35. Comme précédemment, les paramètres caractéristiques de la réponse ont été estimés sur base de la réponse en amplitude.

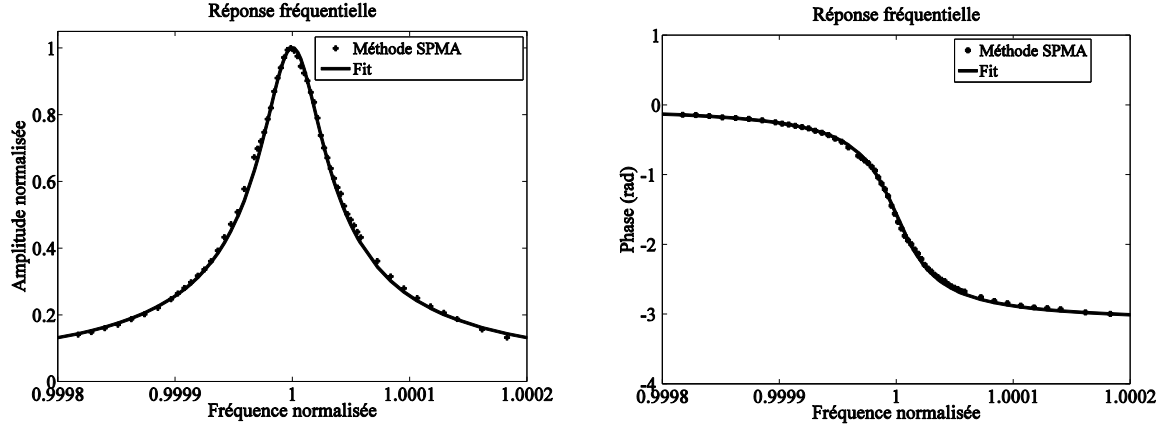


Fig. 35 Réponse expérimentale obtenue par actionnement par impulsions subharmonique (croix noires). La courbe noire continue correspond à un ajustement d'une réponse lorentzienne sur la courbe de réponse en amplitude (tiré de [32]).

Le facteur de qualité et la fréquence de résonance identifiés sur cette courbe sont  $Q = 1,89 \times 10^4$  et  $f_0 = 68,0\text{kHz}$ . La valeur obtenue ici montre que la méthode HPMA présentée précédemment a surestimé le facteur de qualité de 11%. Malgré cette erreur, la méthode HPMA reste intéressante car elle peut, dans certains cas, limiter le risque de résonances parasites dont les fréquences de résonances seraient proches d'une des harmoniques de l'actionnement. Une partie des écarts peut également s'expliquer par la possible variation de la pression et de la température entre les deux séries de mesures.

Pour chacune des séries de mesures enregistrées en Fig. 34 et Fig. 35, on reporte en Fig. 36, l'erreur quadratique cumulée entre les courbes ajustées et les courbes expérimentales pour un balayage en fréquence entre  $1 - f_{end}$  et  $1 + f_{end}$  (ici  $f_{end} = 0,0002$ ). L'erreur quadratique cumulée est définie ici par la formule :

$$\epsilon(f) = \sqrt{\frac{\sum_{1-f}^{1+f} (x_{fit}(f) - x_{mes}(f))^2 \Delta f}{\sum_{1-f}^{1+f} x_{fit}(f)^2 \Delta f}} \quad (137)$$

où  $x_{fit}$  et  $x_{mes}$  représentent, le cas échéant, l'amplitude ou la phase (respectivement de la courbe ajustée ou de la courbe de mesures) et où  $\Delta f$  représente l'intervalle de fréquence entre deux mesures.

On constate sur la Fig. 36 que, contrairement à la méthode HPMA, la méthode SPMA permet de limiter fortement l'erreur lorsque la fréquence d'actionnement s'éloigne de la fréquence de résonance. Dans le cas présent, l'erreur totale cumulative n'est que de 2,6% sur l'amplitude et de 1% sur la phase avec la méthode SPMA, contre 10% pour la méthode HPMA. L'erreur sur la mesure HPMA est principalement due à la faible précision des mesures effectuées loin de la résonance, ce qui s'explique par la moindre qualité de l'identification par séries de Fourier sur les signaux fortement tronqués. Ainsi, pour compenser partiellement ce problème, il est nécessaire, avec la méthode HPMA, de multiplier le nombre de mesures effectuées très près de la résonance (ce qui est visible sur la Fig. 34).

L'erreur résiduelle de la méthode SPMA est, quant à elle, principalement due à la présence de bruit dans les signaux, et pourrait sans doute être limitée en isolant davantage le système lors des mesures.

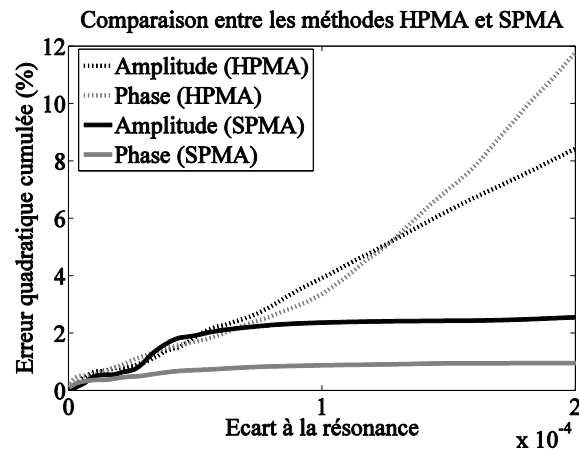


Fig. 36 Erreur quadratique cumulée entre les courbes ajustées et les courbes expérimentales pour la méthode HPMA (courbes pointillées) et la méthode SPMA (courbes continues), pour l'amplitude (courbes noires) et la phase (courbes grises).

### III.D. Limitations liées à la caractérisation des MEMS en régime linéaire

Dans ce chapitre, les différentes méthodes permettant de caractériser un résonateur MEMS capacitif en régime linéaire ont été présentées. Une nouvelle méthode de caractérisation a été élaborée, et son efficacité pour supprimer les effets dus aux capacités parasites a été prouvée expérimentalement.

L'identification d'une réponse linéaire (i.e. lorentzienne) à partir de mesures effectuées sur un MEMS résonant requiert un actionnement suffisamment faible pour que la non-linéarité d'actionnement puisse être négligée. Ceci limite donc nécessairement l'amplitude des signaux mesurés et, de fait, le rapport signal sur bruit. Afin de limiter l'impact du bruit, il est alors nécessaire :

- d'isoler au maximum le système de mesure du bruit extérieur ;
- de moyenner chacun des enregistrements dans le temps afin de s'affranchir au mieux de tout bruit blanc restant.

Le premier point peut s'avérer contraignant dans des dispositifs embarqués, où une isolation complète est difficile à mettre en place compte-tenu d'un nombre important de sources potentielles de bruit. La seconde mesure pose également problème car elle allonge considérablement le temps d'acquisition (de l'ordre de dix minutes pour le résonateur industriel à l'étude). Il est alors complexe d'assurer, sur une telle durée, l'invariance des paramètres extérieurs tels que la température et la pression, auxquelles le résonateur est sensible. Pour limiter l'impact du bruit et ainsi diminuer le temps d'acquisition, on peut choisir d'accroître l'amplitude des oscillations. Ceci ne peut se faire sans entrer dans des régimes de fonctionnement non-linéaire.

Un dernier point bloquant dans la caractérisation linéaire sur des systèmes embarqués réside dans la précision fréquentielle du générateur de fonctions requis pour obtenir la réponse fréquentielle de résonateurs de très haut facteur de qualité.



On peut imaginer deux façons de contourner ce problème. La première consisterait à développer des méthodes d'identification de paramètres sur base de mesures en boucle fermée. Des phases de test pourraient alors être implémentées sur des systèmes embarqués. La seconde consisterait à caractériser les résonateurs en régime non-linéaire. La distorsion des réponses fréquentielles dans ces régimes élargit le pic de résonance du résonateur. On peut alors réaliser une telle mesure à l'aide d'un générateur moins performant (en termes de stabilité fréquentielle).

Pour toutes ces raisons, on s'intéresse à la caractérisation non-linéaire de MEMS résonants dans la suite de ce chapitre. La section III.E détaille la modélisation des MEMS capacitifs en boucle ouverte, et l'impact de la forme de l'onde d'actionnement sur la réponse en fréquence. Enfin, une procédure d'identification de paramètres de modèles non-linéaires de MEMS est construite et validée expérimentalement en section III.F.

### **III.E. Réponse fréquentielle des MEMS capacitifs résonants en régime non-linéaire**

#### **III.E.a. Introduction**

On a établi, dans la section III.C, que la réponse fréquentielle mécanique d'un résonateur linéaire à haut facteur de qualité à un degré de liberté est indépendante de la forme d'onde appliquée en entrée. Dans le cas non-linéaire, ces conclusions ne seront plus valables. L'étude de l'impact de l'onde d'actionnement sur la réponse non-linéaire des MEMS capacitifs fait l'objet de cette section. En particulier, on étudie les réponses fréquentielles sous quatre formes d'onde d'actionnement rencontrées dans la littérature : l'actionnement sinusoïdal [18], l'actionnement carré [13] [60], l'actionnement par impulsions [61] et l'actionnement par impulsions combinées [62].

La modélisation précise de la réponse du résonateur permet ensuite la caractérisation non-linéaire de MEMS, qui a principalement quatre intérêts.

Le premier est relatif à l'objectif de fiabilisation. La caractérisation non-linéaire permet d'obtenir davantage d'informations sur la structure que la caractérisation linéaire, car la forme de la réponse en fréquence dépend d'un plus grand nombre de paramètres. Comme expliqué dans la section III.B, chaque mode de défaillance possède une signature propre sur les différents paramètres du système (gain, fréquence propre, facteur de qualité et coefficient de conversion électromécanique). Il est donc intéressant, lors de la phase de qualification du produit, de caractériser le résonateur vis-à-vis de ces différents paramètres.

Le second intérêt a déjà été rapidement évoqué dans la section III.D et est relatif à la bande passante de la mesure. En effet, la caractérisation fréquentielle linéaire d'un résonateur nécessite un générateur de très bonne stabilité fréquentielle compte-tenu du facteur de qualité élevé du résonateur, et donc de l'étroitesse de sa bande passante. Un tel générateur peut s'avérer coûteux à implémenter et encombrant sur des systèmes embarqués. La mesure en régime non-linéaire s'opère, du fait de la distorsion du pic de résonance, sur une bande de fréquence nettement plus large qu'en régime linéaire (typiquement 10 fois plus large). On a déjà pu observer ce type de phénomène sur un résonateur à non-linéarité cubique, étudié dans le paragraphe II.D.e. Ainsi, la mesure peut être réalisée à l'aide d'un générateur à stabilité fréquentielle réduite par rapport à la caractérisation en régime linéaire.

De plus, on verra, dans le chapitre IV, que l'identification des paramètres des modèles non-linéaires permet également d'émettre des recommandations pour optimiser les performances des capteurs.

Enfin, dans une optique d'innovation plus en rupture par rapport aux méthodes traditionnelles, on peut éventuellement se servir de caractéristiques de cycles d'hystérésis pour mesurer une grandeur physique. Effet non-linéaire par excellence, le cycle d'hystérésis et sa position exacte sont extrêmement sensibles à de nombreux paramètres. Un exemple de ce type de mesure a été récemment publié. Elle exploite la position du cycle d'hystérésis pour la détection de particules [63]. Pour ce type de mesure, la caractérisation précise du résonateur en régime non-linéaire est indispensable. Bien sûr, pour des mesures de navigation telles que la pression, la température ou l'accélération, une telle application semble à ce jour complexe à mettre en place.

Cette section se subdivise en quatre sous-sections. La section III.E.b présente un état de l'art des différentes catégories de méthodes de caractérisation non-linéaire présentes dans la littérature scientifique relative aux MEMS. La section III.E.c concerne la modélisation de la réponse fréquentielle de résonateurs capacitifs sous différentes formes d'actionnement. On s'attachera à présenter et à interpréter l'impact des différences entre ces actionnements. Cette étape fera également l'objet d'une validation expérimentale permettant de prouver l'apparition des phénomènes prédits.

### **III.E.b. Etat de l'art des méthodes de caractérisation non-linéaire de MEMS**

Il existe une pléthore de méthodes d'identification de modèles non-linéaires (temporelles et/ou fréquentielles), de même qu'il existe un très grand nombre de procédures d'estimation de paramètres pour ces modèles, et il serait illusoire de prétendre tous les présenter ici. Un article de référence, écrit par G. Kerschen en 2006 [64], cite pas moins de 446 articles traitant de caractérisation non-linéaire dans le domaine de la mécanique des structures, en prenant soin d'insister sur le fait que, malgré la tentative d'exhaustivité, certains travaux ont certainement été oubliés. De plus, comme souligné par A. Carrella et D. J. Ewins dans un article de 2011 [65], aucune méthode universelle n'existe dans ce domaine et chacune des méthodes existantes présente ses propres qualités et ses propres limites.

Avant de développer la nouvelle méthode étudiée et publiée pendant ce doctorat [30] [31], il est utile cependant de rappeler les différentes catégories de méthodes existant dans la littérature, afin de pouvoir se positionner parmi elles. Dans le domaine spécifique des MEMS, on peut classer les méthodes d'identification de modèles non-linéaires en deux catégories :

- Les mesures temporelles, basées sur l'acquisition, dans le domaine temporel, de la décroissance des signaux en oscillation libre, parmi lesquelles on peut citer :
  - o les méthodes basées sur l'exploitation directe dans le domaine temporel de ces mesures ;
  - o les méthodes « temps-fréquence », qui passent par la reconstruction de caractéristiques fréquentielles à partir d'une mesure temporelle.
- Les méthodes fréquentielles basées sur la mesure de la réponse en régime forcé (cf. cas linéaire de la section III.C).

### III.E.b.i. Caractérisation par mesures dans le domaine temporel

Dans ce paragraphe, on se focalise sur les méthodes basées sur des mesures de décroissance exponentielle d'oscillations non-entretenues. Ces méthodes requièrent, pour obtenir un rapport signal sur bruit satisfaisant, d'actionner « suffisamment longtemps » le résonateur avec une tension d'actionnement de fréquence proche de la fréquence de résonance, pour que l'amplitude d'oscillation se stabilise, puis d'annuler la tension d'actionnement. Ceci se fait généralement par un actionnement en boucle fermée. Ensuite, on mesure la décroissance des oscillations en régime libre.

#### 1. Ajustement de la réponse dans le domaine temporel

La première méthode, développée par Polunin et al. [15] [66], consiste à extraire, à partir des oscillations en régime libre, les deux composantes du signal de sortie respectivement en phase et en quadrature avec le signal d'entrée. La décroissance exponentielle des oscillations libres permet, dans le domaine temporel, de déterminer le facteur de qualité, la fréquence propre, et les éventuels coefficients d'amortissement et de raideur non-linéaires. Le résonateur est d'abord excité à la résonance en boucle fermée via un amplificateur à détection synchrone. Le signal d'excitation est ensuite arrêté et on enregistre la décroissance des oscillations ainsi que la fréquence instantanée du signal de sortie à partir du point de fonctionnement atteint en boucle fermée.

Cette méthode a d'abord été construite pour identifier une réponse à non-linéarité cubique [15] puis a été très récemment étendue à un modèle plus complexe tenant compte d'un amortissement quadratique, d'un terme d'actionnement non-linéaire et d'une non-linéarité d'ordre 5 (i.e. proportionnelle à  $x^5$ ) [66]. L'efficacité de cette méthode n'a été démontrée que sur des linéarités polynômiales d'ordre inférieur à 6, même si l'auteur énonce en conclusion qu'elle pourrait aisément s'appliquer pour des linéarités polynômiales d'ordre supérieur.

Pour des non-linéarités non-polynômiales (comme c'est le cas pour un actionnement électrostatique), l'évolution de la phase instantanée et de l'amplitude en fonction du temps risquent cependant de devenir complexes à déterminer.

De plus, compte-tenu de la très faible variation de la fréquence au cours de la décroissance des oscillations, il est nécessaire de disposer d'un numériseur haute performance et un signal très peu bruité pour pouvoir identifier la fréquence instantanée avec précision.

Reproduire la mesure réalisée par Polunin nécessite d'être capable de faire la distinction, sur une période, entre deux signaux sinusoïdaux de fréquences proches à  $\pm 1\%$ . Pour mieux comprendre en quoi ceci constitue un problème, deux signaux sinusoïdaux d'amplitude unitaire et de fréquences proches de 1% sont représentés sur la Fig. 37. Parvenir à faire la distinction entre la fréquence des deux signaux nécessite une plage dynamique et une fréquence d'échantillonnage très élevées. Dans son article, Polunin utilise d'ailleurs un convertisseur analogique-numérique haute performance AlazarDSO ATS9360 capable d'atteindre une résolution de 12 bits et une fréquence d'échantillonnage de 1,8GS/s. Un tel convertisseur fonctionne sous une tension de 12V et un courant de 1,2A [67] (ou une tension de 3,3V et un courant de 3A), soit une puissance d'environ 10W, ce qui constitue une contrainte forte pour une implémentation dans des systèmes embarqués.

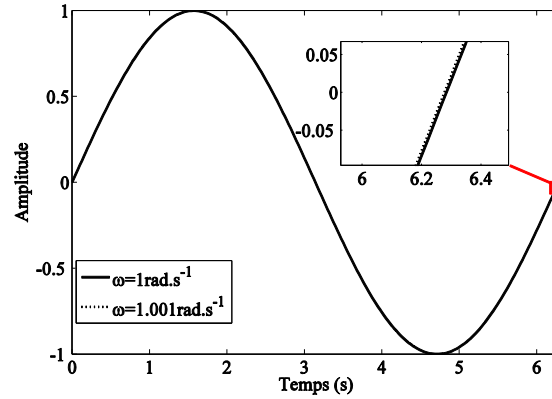


Fig. 37 Illustration du problème de détermination de la fréquence instantanée pour un résonateur à haut facteur de qualité : Différence, sur une période, entre deux signaux sinusoïdaux d'amplitude unitaire et de fréquences proches à  $\pm 1\%$  (pulsations de  $1\text{rad.s}^{-1}$  et de  $1,001\text{rad.s}^{-1}$ ).

## 2. Reconstruction partielle de la réponse fréquentielle à partir de la réponse temporelle

Une seconde méthode, développée par Londoño et al. [68], consiste à exploiter une mesure de décroissance exponentielle des oscillations libres pour reconstruire une caractéristique de la réponse fréquentielle non-linéaire. Elle s'inscrit donc dans la catégorie des mesures « temps-fréquence » définie par Kerschen dans son article de 2006 [64]. Londoño propose de s'intéresser à la dorsale des réponses fréquentielles (« backbone curve ») qui correspond au lieu géométrique de l'espace  $(A, \omega)$  décrit par les maxima des réponses fréquentielles pour différentes amplitudes d'actionnement. Cette courbe ainsi reconstruite est souvent appelée en anglais « backbone curve » qu'on traduira par « dorsale ». Un exemple de résultat décrivant cette méthode, est reporté en Fig. 38 [68].

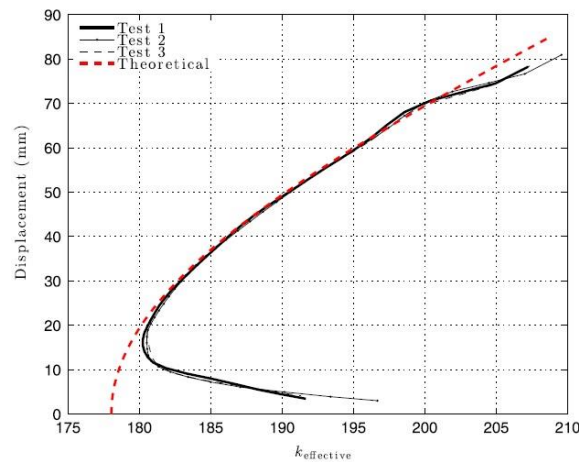


Fig. 38 Résultats de caractérisation par méthode « temps-fréquence » : estimation des paramètres après reconstruction de la « backbone curve » dans l'espace amplitude-raideur (tiré de [68]). Les courbes noires correspondent à différentes séries de mesures effectuées sur un même résonateur. La courbe rouge pointillé correspond au résultat de l'identification.

Comme toutes les méthodes basées sur une mesure temporelle, son avantage principal réside dans le temps très court requis pour obtenir une courbe de mesure par rapport à un balayage fréquentiel. Cet avantage est particulièrement important lorsqu'il s'agit de caractériser des résonateurs à haut facteur de qualité et faible fréquence de résonance. Londoño l'a également

appliquée à des résonateurs à plusieurs degrés de liberté présentant des réponses en fréquence très distordues par rapport au cas linéaire.

La principale réserve à émettre vis-à-vis de cette méthode réside, comme pour la méthode de Polunin, dans l'identification de la fréquence instantanée (variable) du signal dans le cas où le facteur de qualité du résonateur est très élevé. Cette mesure nécessite en effet un convertisseur analogique-numérique haute performance.

Un autre inconvénient de la méthode réside dans la difficulté de rejeter ou de valider définitivement un modèle sur la base d'une telle identification. Pour comprendre le problème, on peut par exemple s'intéresser au cas simple d'un résonateur à non-linéarité cubique (voir chapitre II), pour lequel l'équation de la dorsale s'écrit :

$$A = \sqrt{\frac{4}{3\gamma\omega_0^2} \left( \omega^2 - \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{Q^2} \right) \right)} . \quad (138)$$

Au mieux, il est possible d'identifier correctement deux paramètres indépendants (par exemple  $\gamma\omega_0^2$  et  $\omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{Q^2} \right)$ ) sur une telle courbe. Le troisième paramètre (et tout paramètre supplémentaire tel que, par exemple, le gain nominal  $G_0$ ) ne peuvent être déterminés qu'en réalisant d'autres séries de mesures. Le même problème se pose pour d'autres non-linéarités, telles que la non-linéarité électrostatique. Malgré ces réserves, cette méthode reste, avec celle développée par Polunin, l'une des plus abouties pour l'identification de systèmes MEMS non-linéaires par l'intermédiaire de mesures temporelles.

### III.E.b.ii. Caractérisation non-linéaire par balayage fréquentiel

On a vu, dans la section III.E.b.i, les limites des méthodes de caractérisation non-linéaire basées sur l'exploitation de mesures de décroissance exponentielle des oscillations. Ces problèmes peuvent être contournés en effectuant un balayage fréquentiel en régime d'oscillations entretenues. L'inconvénient principal de ces méthodes réside dans leur durée d'acquisition car la vitesse de balayage est limitée par le temps de réponse du système ( $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ ). Cependant, comme nous le montrerons par la suite, elles donnent de très bons résultats de caractérisation. On se focalisera ici sur deux types de méthodes :

- l'estimation partielle de paramètres sur base de considérations géométriques sur les courbes de réponse en fréquence, illustrée par les travaux de Davis [69] :
- l'estimation complète de tous les paramètres d'un modèle non-linéaire sur base d'ajustement de la courbe de réponse fréquentielle par la méthode des moindres carrés, présentée dans les travaux de Dick et al. [70].

## 1. Caractérisation partielle par mesure directe

En régime linéaire, on a montré dans le chapitre II que la détermination du facteur de qualité d'un résonateur peut se faire à partir d'une mesure de la bande passante à -3dB (i.e. la largeur à mi-hauteur du pic de résonance). Cette mesure n'est pas adaptée pour une réponse fréquentielle non-linéaire. Cependant, Davis étend cette notion à des réponses fréquentielles non-linéaires, en considérant les fréquences auxquelles la puissance maximale est divisée par  $n > 1$  (où  $n$  est un nombre rationnel). En définissant le facteur de qualité comme correspondant à l'énergie perdue par le résonateur pendant un pseudo-période d'oscillations libres (voir section II.B), il l'exprime en fonction de cette bande passante à  $10 \log_{10} \left( \frac{1}{n} \right)$  dB. La formule à considérer dépend alors du type de non-linéarité. Davis se focalise sur une non-linéarité cubique et un amortissement non-linéaire.

Cette méthode présente essentiellement un intérêt pratique car elle permet d'estimer rapidement, sans traitement mathématique complexe, le facteur de qualité du résonateur même en régime non-linéaire. Cependant, sa plus grande faiblesse réside dans le fait que l'estimation est réalisée sur des points de mesures obtenus en dehors du cycle d'hystérésis. Il s'agit donc de points à faible amplitude particulièrement sensibles au bruit. De plus, elle requiert également la mesure du point d'amplitude maximum de la réponse en fréquence, qui peut être difficile à obtenir car il se trouve à proximité du point de bifurcation supérieur (point instable). Enfin, comme il ne s'agit que de la mesure de trois points, la méthode est peu robuste vis-à-vis du bruit ou des erreurs de mesure.

## 2. Caractérisation sur base de mesures de points de bifurcation

Afin de caractériser intégralement un résonateur non-linéaire, on peut se tourner, dans le domaine fréquentiel, vers un ajustement de courbes par la méthode des moindres carrés. Cette méthode est différente de la mesure à trois points de Davis dans le sens où elle exploite l'ensemble des points mesurés d'une réponse en fréquence. Un tel ajustement est proposé par A. J. Dick et al. [70] afin d'estimer les paramètres de résonateurs piézoélectriques non-linéaires. Les auteurs construisent une méthode séquentielle (reprise en Fig. 39) permettant d'identifier ainsi jusqu'à six paramètres en combinant :

- un premier ajustement par la méthode des moindres carrés (trois paramètres sont ainsi déterminés, les autres étant fixés) ;
- un second ajustement aux moindres carrés du point de bifurcation supérieur de la courbe de réponse (lorsqu'il existe), permettant de déterminer un quatrième paramètre ;
- un troisième ajustement, consistant à supposer l'existence d'une contrainte dans le résonateur, et à déterminer la valeur de cette contrainte pour modifier la fréquence de résonance du modèle ajusté.

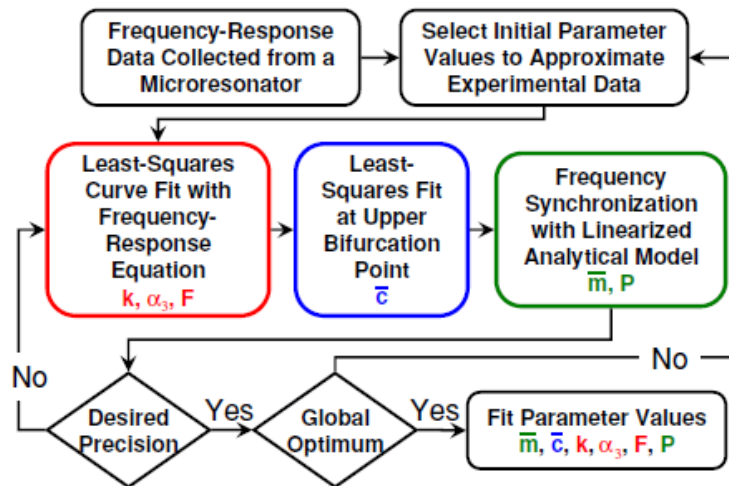


Fig. 39 Procédure d'identification de paramètres proposée dans [70]. 1<sup>e</sup> étape : raideur, coefficient de Duffing, amplitude de la force. 2<sup>e</sup> étape : coefficient d'amortissement. 3<sup>e</sup> étape : masse et contrainte axiale dans le résonateur.

La procédure est ensuite répétée jusqu'à la convergence (avec une précision arbitraire). Il s'agit donc d'une méthode itérative. Dick applique cette méthode à des réponses fréquentielles mesurées par voie optique (où il n'est donc pas nécessaire de déterminer le gain électrique du résonateur).

Cette méthode nécessite un choix pertinent du point de départ, i.e. une bonne estimation des paramètres a priori. Même si elle aboutit à des résultats satisfaisants, il n'est pas évident qu'elle soit parfaitement fiable, dans la mesure où l'unicité de la réponse vers laquelle converge la procédure n'est pas évoquée (ni a fortiori prouvée). Ce questionnement est d'autant plus fondé que les réponses fréquentielles obtenues sont généralement proches de celles d'un résonateur à non-linéarité cubique. Quatre paramètres suffisent à déterminer intégralement la réponse fréquentielle de ce dernier (la fréquence propre  $\omega_0$ , le facteur de qualité  $Q$ , le coefficient de non-linéarité  $\gamma$  et la force d'actionnement  $F$ ) et on peut s'interroger sur l'unicité de la solution lors de l'identification de 6 paramètres sur une courbe similaire. De plus, la méthode nécessite la mesure du point de bifurcation supérieur qui, par essence, est très complexe (proche de l'instabilité). Pour les ajustements de réponses ne présentant pas de bifurcation, les auteurs font référence à une autre méthode [71]. La méthode manque donc de flexibilité.

Malgré cela, la méthode proposée par Dick reste l'une des plus abouties pour caractériser une réponse fréquentielle non-linéaire d'un résonateur à un seul degré de liberté. Dans la suite, on construit progressivement une nouvelle méthode de caractérisation non-linéaire, basée, comme la méthode de Dick, sur une procédure itérative. Cependant, contrairement à [70], on cherchera à construire une méthode qui fonctionne aussi bien en présence qu'en absence de point de bifurcation. On exploitera les avantages de l'actionnement par impulsions pour supprimer des effets liés aux capacités parasites (voir section III.C.b). Il est donc nécessaire, avant toute caractérisation, de modéliser la réponse fréquentielle non-linéaire d'un résonateur capacitif soumis à différentes formes d'actionnement, notamment un actionnement par impulsions. C'est l'objet de la section III.E.c.

### III.E.c. Modélisation du comportement dynamique non-linéaire des MEMS capacitifs sous différentes ondes d'actionnement

Dans cette section, on décrit le comportement d'un résonateur MEMS capacitif soumis à des actionnements de différentes formes d'ondes. On s'intéresse à un actionnement sinusoïdal, deux types d'actionnement par impulsions et un actionnement carré.

#### III.E.c.i. Résolution de l'équation de comportement

Le comportement dynamique d'un MEMS à capacités planes polarisé sous tension  $V_b$  et actionné par une tension  $V_{act}(t)$  s'écrit, avec les notations précédentes (chapitre II):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{\eta \omega_0^2 (1 + v(t))^2}{(1 - x(t))^2} . \quad (139)$$

On pourrait aisément intégrer dans ce modèle d'autres types de non-linéarités polynômiales, telles qu'une non-linéarité cubique, qui traduirait par exemple le raidissement d'un pont vibrant lors de sa déformation (voir section II.C.g.i). Cependant, il a été montré, sur un modèle à éléments finis, que ce raidissement n'intervient pas quantitativement sur le résonateur à l'étude, du fait de la présence d'un encastrement imparfait à l'une de ses extrémités. La preuve de cette spécificité inhabituelle pour un pont vibrant est donnée en Annexe 7. Cette affirmation sera également vérifiée sur les résultats expérimentaux de ce chapitre. Enfin, on a vu dans le chapitre II que le comportement d'un résonateur à pont vibrant en l'absence de non-linéarité cubique s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{\eta_{cc} \omega_0^2 (1 + v(t))^2}{(1 - x(t))^{3/2}} . \quad (140)$$

Ce modèle est étudié en Annexe 8. Etant donné que le modèle de résonateur à capacités planes permet de décrire qualitativement les mêmes phénomènes, pour une complexité mathématique nettement moindre, on a choisi d'analyser le comportement du résonateur sur base du modèle à capacités planes. On se limitera donc, dans cette section, au modèle décrit par l'équation (139).

Afin de tracer la réponse fréquentielle d'un tel résonateur, on applique la méthode de la balance harmonique décrite en section II.D.d à l'équation (139), en supposant que le déplacement du résonateur peut s'écrire :

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) . \quad (141)$$

Une telle hypothèse est valable tant que le déplacement statique du résonateur introduit par la tension de polarisation est très inférieur à l'amplitude critique du pull-in statique. La projection de l'équation (139) sur les fonctions « sinus » et « cosinus » permet alors de définir deux équations qui déterminent l'amplitude  $A$  et la phase  $\varphi$  :



$$\begin{cases} S(A, \varphi) \equiv \frac{\eta \omega_0^2}{\pi A} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\left(1 + v\left(t - \frac{\varphi}{\omega}\right)\right)^2 \sin \omega t dt}{(1 - A \sin \omega t)^n} - \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} = 0 \\ C(A, \varphi) \equiv \frac{\eta \omega_0^2}{\pi A} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\left(1 + v\left(t - \frac{\varphi}{\omega}\right)\right)^2 \cos \omega t dt}{(1 - A \sin \omega t)^n} - \frac{A \omega_0}{Q} = 0 \end{cases} . \quad (142)$$

Les différentes formes d'excitation envisagées sont décrites dans la section III.E.c.ii.

### III.E.c.ii. Formes d'ondes d'actionnement étudiées

On s'intéresse ici à la réponse fréquentielle d'un résonateur sous différentes formes d'actionnement :

- un actionnement sinusoïdal ;
- un actionnement à impulsions positives ;
- un actionnement constitué d'une succession d'impulsions positives et négatives, appelé « actionnement à impulsions combinées » ;
- un actionnement carré.

Les formes d'onde correspondant à ces cas de figure sont reproduites en Fig. 40. Comme précédemment, on notera  $T_p$  la durée des impulsions d'actionnement et  $V_p$  leur amplitude. Dans le cas d'un actionnement par impulsions combinées (voir Fig. 40), on notera  $V_{cp}$  l'amplitude de chacune des impulsions du train. On supposera que toutes les impulsions sont de même durée  $T_p \ll 1/f_0$ . Dans le cas d'un actionnement sinusoïdal, on notera, comme précédemment,  $V_s$  l'amplitude du signal d'actionnement. Enfin, dans le cas d'un actionnement carré, l'amplitude du signal sera notée  $V_{sq}$ . On notera  $V_0$  le rapport entre l'amplitude  $V_1$  de la première harmonique de chacun des signaux et la tension de polarisation  $V_b$ . On choisit ici de comparer les réponses en fréquence obtenues pour les différentes formes d'onde à  $V_0$  égal (i.e. à amplitude de première harmonique de l'actionnement égale). Ceci impose des relations entre  $V_s$ ,  $V_{cp}$ ,  $V_p T_p$  et  $V_{sq}$  qui sont récapitulées dans le Tableau 2.

	Sinusoïdal	Impulsions	Impulsions combinées	Carré
$V_0$	$\frac{V_s}{V_b}$	$\frac{V_p T_p \omega_0}{\pi V_b}$	$\frac{2V_{cp} T_p \omega_0}{\pi V_b}$	$\frac{4V_{sq}}{\pi V_b}$

Tableau 2. Expressions du ratio entre le premier harmonique de l'actionnement et la tension de polarisation.

Dans la suite de ce chapitre, on étudie le comportement non-linéaire des MEMS capacitifs actionnés par chacune de ces formes d'onde.

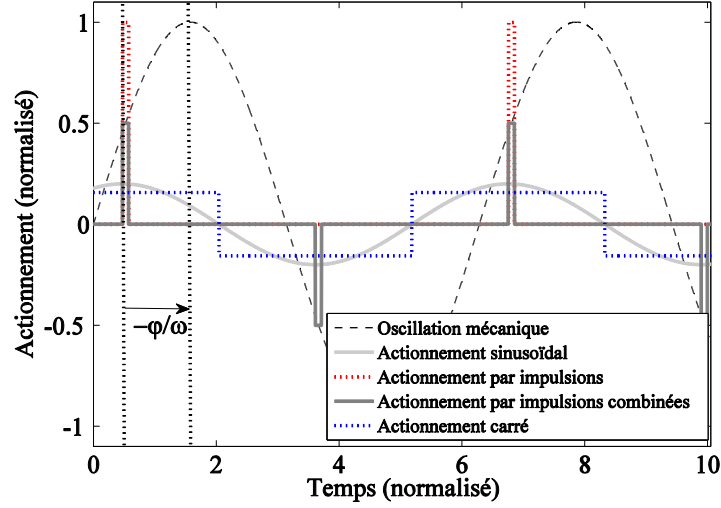


Fig. 40 Formes d'ondes étudiées : Actionnement sinusoïdal (trait gris clair), par impulsions (trait noir pointillé), par impulsions combinées (trait continu gris foncé) et carré (trait gris pointillé)

### III.E.c.iii. Impact de la forme d'onde à travers la non-linéarité

En supposant que l'amplitude de l'actionnement reste très faible par rapport à la tension de polarisation ( $V_0 \ll 1$ ) ce qui est généralement vérifié en pratique, le système (142) devient :

$$\begin{cases} S(A, \varphi) \equiv \frac{2\eta\omega_0^2}{\omega A} [F_1(A) + F_s(A, \varphi) V_0 \cos \varphi] - \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} = 0 \\ C(A, \varphi) \equiv -\frac{2\eta\omega_0^2 V_0 F_c(A, \varphi)}{\omega} \sin \varphi - \frac{A\omega_0}{Q} = 0 \end{cases} \quad (143)$$

où

$$F_1(A) = \frac{A}{(1 - A^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (144)$$

et où  $F_s(A, \varphi)$  et  $F_c(A, \varphi)$  sont respectivement liés aux composantes en phase et en quadrature de l'actionnement. Leurs expressions sont données dans le Tableau 3.

	Sinusoïdal	Impulsions	Impulsions combinées	Carré
$F_s$	$\frac{2}{(1-A^2)^{3/2}} \left[ 1 - \frac{1-A^2}{1+\sqrt{1-A^2}} \right]$	$\frac{1}{(1-A \cos \varphi)^2}$	$\frac{1+A^2 \cos^2 \varphi}{(1-A^2 \cos^2 \varphi)^2}$	$\frac{A \arctan \left( A \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1-A^2}} \right)}{(1-A^2)^{3/2} \cos \varphi} + \frac{1}{(1-A^2)(1-A^2 \sin^2 \varphi)}$
$F_c$	$\frac{2}{\sqrt{1-A^2}} - \frac{2}{1+\sqrt{1-A^2}}$	$\frac{1}{(1-A \cos \varphi)^2}$	$\frac{1+A^2 \cos^2 \varphi}{(1-A^2 \cos^2 \varphi)^2}$	$\frac{1}{1-A^2 \sin^2 \varphi}$

Tableau 3. Expression des composantes en phase et en quadrature de la force d'actionnement électrostatique pour un résonateur à capacités planes actionné par différentes formes d'onde.

Le système (143) dépend donc de la forme d'onde imposée au MEMS, traduisant la modulation de ces différentes formes d'onde par la non-linéarité d'actionnement.

On peut obtenir les réponses fréquentielles correspondant aux différents actionnements en résolvant le système (143). Il existe différentes manières de le résoudre. L'une des plus efficaces (en termes de temps et de complexité algorithmique) consiste à combiner les deux équations jusqu'à exprimer  $V_0 = f(A, \omega, \varphi)$  et  $\omega = f_\omega(A, \varphi)$ , ou encore  $\varphi = f_\varphi(A, \omega)$ . On obtient alors une expression de  $V_0$  en fonction de  $A$  et de  $\varphi$  ou de  $A$  et de  $\omega$ . On peut ensuite tracer les contours correspondant à différentes lignes de niveaux de  $V_0$  (i.e. différentes valeurs d'amplitudes d'actionnement imposées au résonateur).

Enfin, on peut déterminer la stabilité des solutions trouvées à l'aide de la méthode décrite en II.D. Dans le cas présent, elle se résume à :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \Big|_{A_s, \varphi_s} + \frac{\partial C}{\partial A} \Big|_{A_s, \varphi_s} < 0 \\ \frac{\partial C}{\partial \varphi} \Big|_{A_s, \varphi_s} \frac{\partial S}{\partial A} \Big|_{A_s, \varphi_s} - \frac{\partial S}{\partial \varphi} \Big|_{A_s, \varphi_s} \frac{\partial C}{\partial A} \Big|_{A_s, \varphi_s} < 0 \end{cases} . \quad (145)$$

Dans tous les cas, la première condition s'écrit  $-\frac{\omega_0}{2Q} < 0$  ce qui est toujours vérifié. On peut alors déterminer le domaine de stabilité en calculant la ligne de niveau :

$$\frac{\partial C}{\partial \varphi} \Big|_{A_s, \varphi_s} \frac{\partial S}{\partial A} \Big|_{A_s, \varphi_s} - \frac{\partial S}{\partial \varphi} \Big|_{A_s, \varphi_s} \frac{\partial C}{\partial A} \Big|_{A_s, \varphi_s} = 0 \quad (146)$$

dans l'espace  $(A, \omega)$ .

### III.E.c.iv. Réponses fréquentielles d'un résonateur à capacités planes

On reporte en Fig. 41 les réponses fréquentielles obtenues pour les différents actionnements décrits en Fig. 40. Les paramètres choisis pour l'illustration sont :

$$\begin{cases} Q = 10^4 \\ \eta = 5 \times 10^{-4} \end{cases} . \quad (147)$$

Pour la plupart des tensions de polarisation utilisées en pratique, le coefficient de conversion mécanique est supérieur à cette valeur (plutôt de l'ordre de  $10^{-3}$ , voir section II.E). Cependant, la distorsion (plus faible) des réponses fréquentielles introduite par  $\eta = 5 \times 10^{-4}$  permet de mieux observer les phénomènes qu'on cherche à mettre en évidence (voir section III.E.d pour les résultats obtenus avec le dispositif réel). Les amplitudes d'actionnement correspondent, de bleu foncé à brun, à :  $V_0 = 0,01$ ,  $V_0 = 0,02$ ,  $V_0 = 0,03$ ,  $V_0 = 0,04$ ,  $V_0 = 0,045$  et  $V_0 = 0,048$ . Les zones hachurées sont les zones d'instabilité définies par l'inégalité (145). Ces zones correspondent aux points des espaces  $(A, \omega)$  et  $(\varphi, \omega)$  dans lesquelles aucune solution du système (142) ne peut être stable pour des valeurs données de  $Q$  et de  $\eta$ . Par conséquent, il s'agit de l'ensemble des points répulsifs de la dynamique d'évolution lente du système, c'est-à-dire l'ensemble des branches instables. Bien que leur forme et leur position dépendent de  $Q$  et de  $\eta$ , il semble que la frontière inférieure du domaine instable sur le diagramme de phase soit généralement plus près de la quadrature pour l'actionnement sinusoïdal et l'actionnement carré que pour les actionnements par impulsions.

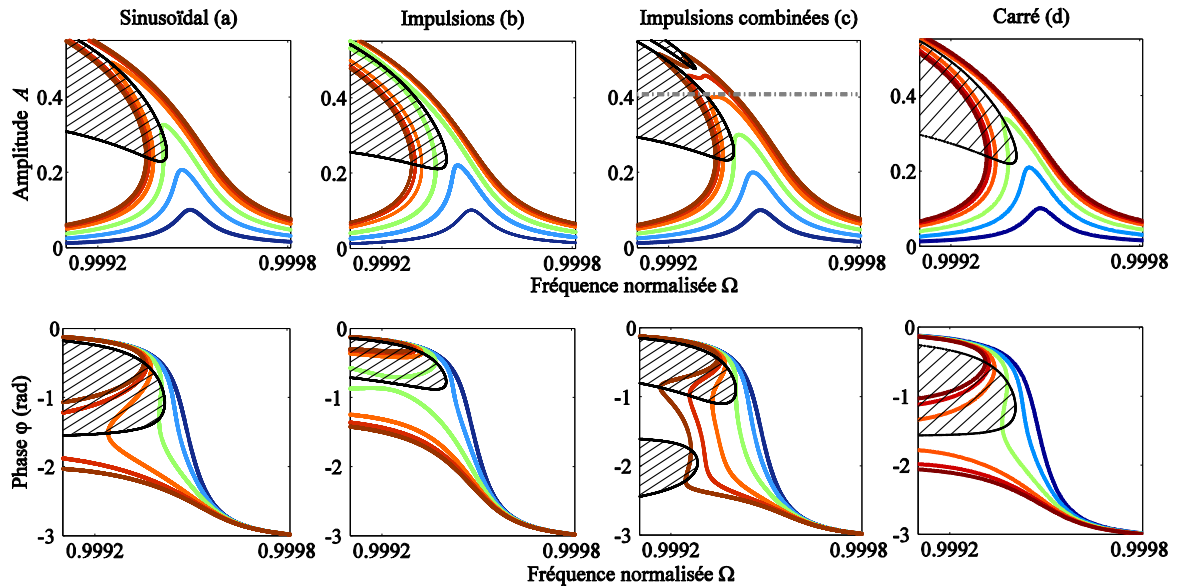


Fig. 41 Réponses fréquentielles obtenues pour différents actionnements à différentes amplitudes d'actionnement. Les zones hachurées correspondent aux zones instables. La ligne horizontale pointillée correspond à la limite d'apparition de deux pics de résonance (graphique (c))

Dans tous les cas, la non-linéarité électrostatique a deux effets majeurs sur la réponse fréquentielle, représentés schématiquement sur la Fig. 42.

- Elle génère un « ramollissement » de la poutre : la fréquence de résonance baisse par rapport à un hypothétique cas linéaire. Ce phénomène est spécifique à un transducteur capacitif à rapprochement des plans dans la mesure où un résonateur à non-linéarité cubique ne présente pas ce décalage (voir Fig. 6 dans la section II.D.e).
- De façon semblable à une non-linéarité cubique, elle distord la réponse fréquentielle, qui ne décrit plus une courbe lorentzienne. Lorsque l'amplitude devient suffisamment grande, on constate, comme dans le cas d'une non-linéarité cubique, l'apparition d'un cycle d'hystérésis : plusieurs amplitudes d'oscillations différentes peuvent apparaître pour une même fréquence, de sorte que le point de fonctionnement dépend de l'historique du système.

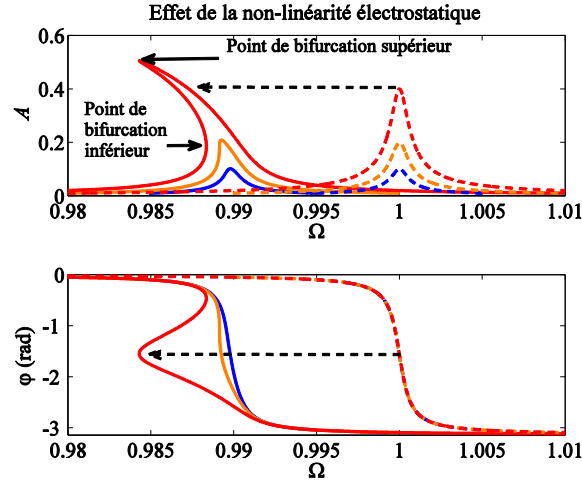


Fig. 42 Description qualitative de l'effet de la non-linéarité électrostatique sur la réponse fréquentielle d'un résonateur MEMS à haut facteur de qualité. Les courbes en pointillé correspondent à un résonateur linéaire.

Malgré ces similitudes, les comportements fréquentiels observés avec les quatre actionnements envisagés sont significativement différents. Un tel phénomène ne s'observerait pas avec un résonateur à non-linéarité cubique, dans la mesure où les termes non-linéaires n'y font pas intervenir la forme d'onde d'actionnement (voir équations de la section II.D.e).

L'actionnement sinusoïdal et l'actionnement carré sont les seuls à générer des réponses fréquentielles proches l'une de l'autre, bien que, à très hautes amplitudes (courbe orange), des écarts apparaissent. La différence entre les actionnements par impulsions et les autres est particulièrement visible au niveau de la réponse en phase. Sur la Fig. 41, on constate également la présence d'un phénomène de double hystérésis sous actionnement par impulsions combinées, avec l'apparition de deux pics de résonance consécutifs. Ce phénomène est étudié en section III.E.c.v.

### III.E.c.v. Analyse du phénomène de double résonance

Parmi les phénomènes intéressants mis en évidence par la Fig. 41, on constate que, au-delà d'une amplitude critique, la réponse en fréquence sous actionnement par impulsions combinées présente deux résonances consécutives. L'amplitude d'apparition de ce phénomène est indépendante des paramètres du système. Pour trouver cette amplitude limite, on peut d'abord constater que l'équation  $C(A, \varphi) = 0$  peut se réécrire :

$$R(A, C_\varphi) = A - \frac{2\eta Q V_p T_p \omega_0}{\pi V_b} \frac{(1 + A^2 C_\varphi^2)}{(1 - A^2 C_\varphi^2)^2} \sqrt{1 - C_\varphi^2} \quad (148)$$

où  $C_\varphi = \cos \varphi$ . Le théorème des fonctions implicites (voir Annexe 9) donne les valeurs de  $C_\varphi$  pour lesquelles  $A$  atteint des extrema :

$$\frac{\partial A}{\partial C_\varphi} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial R}{\partial C_\varphi} = 0 \quad (149)$$

ce qui se résume à :

$$C_\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad A^4 C_\varphi^4 - A^2(2A^2 - 6)C_\varphi^2 + 1 - 6A^2 = 0 \quad . \quad (150)$$

La solution  $C_\varphi = 0$  correspond à  $A = 2\eta Q V_0$  qui peut alors être soit un maximum, soit un minimum local. Les autres solutions sont :

$$C_\varphi = C_{1,2} = \pm \frac{1}{A} \sqrt{A^2 - 3 + \sqrt{A^4 + 8}} \quad (151)$$

et

$$C_\varphi = C_{3,4} = \pm \frac{1}{A} \sqrt{A^2 - 3 - \sqrt{A^4 + 8}} \quad . \quad (152)$$

Les solutions  $C_{3,4}$  sont imaginaires pures et ne correspondent donc à aucune réalité physique. Les solutions  $C_{1,2}$  ne sont, elles, réelles que lorsque  $A \geq A_l$  avec :

$$A_l = \frac{1}{\sqrt{6}} \simeq 0,408 \quad . \quad (153)$$

Si  $A < A_l$ , les réponses en amplitude présentent un unique extremum (maximum). Si  $A = A_l$  ( $C_{1,2} = 0$ ), la réponse présente trois extrema identiques correspondant à un maximum de la réponse en fréquence. Au-delà de l'amplitude d'actionnement  $V_0 = 1/(2\eta Q \sqrt{6})$  (dans le cas de la Fig. 41,  $V_0 = 0.0408$ ),  $C_1$  et  $C_2$  correspondent aux deux maxima des réponses en fréquence, tandis que  $\varphi = -\pi/2$  correspond à un minimum. Ces deux valeurs  $C_1$  et  $C_2$  sont symétriques par rapport à  $\varphi = -\pi/2$  car  $C_1 = -C_2$ . Le même phénomène de double résonance apparaît pour d'autres géométries de résonateurs. Par exemple, dans le cas d'un résonateur encastré aux deux extrémités, l'amplitude d'oscillation critique vaut (voir Annexe 8):

$$A_l = \frac{2}{\sqrt{15}} \simeq 0,52 \quad . \quad (154)$$

### III.E.c.vi. Interprétation comme amplification paramétrique

Les phénomènes observés en Fig. 41 font penser à des résonances autoparamétriques, dues à l'interaction entre les harmoniques supérieures de l'actionnement et le déplacement sinusoïdal du résonateur. Cependant, les réponses à un actionnement par impulsions et par impulsions combinées sont très différentes de l'actionnement sinusoïdal, comparativement à l'actionnement carré, qui donne des réponses proches de l'actionnement sinusoïdal. Ainsi, l'apparition d'un double pic de résonance sous actionnement par impulsions combinées est fortement liée à la localisation de l'onde d'actionnement dans un court laps de temps.

Afin de comprendre les spécificités de chaque actionnement, on peut approcher, dans le cas où  $\Omega \simeq 1$ , la deuxième équation du système (143) par:

$$A \simeq -2\eta Q V_0 F_c(A, \varphi) \sin \varphi \quad . \quad (155)$$

Le cas hypothétique d'un actionnement linéaire donnerait, lui :

$$A \simeq -2\eta Q V_0 \sin \varphi \quad . \quad (156)$$

La fonction  $F_c$  peut donc être vue comme un facteur d'amplification (éventuellement d'inhibition) paramétrique, selon qu'elle est supérieure ou inférieure à 1. Les fonctions  $\log_{10} F_c(A, \varphi)$  sont représentées en Fig. 43 pour les quatre types d'actionnement.

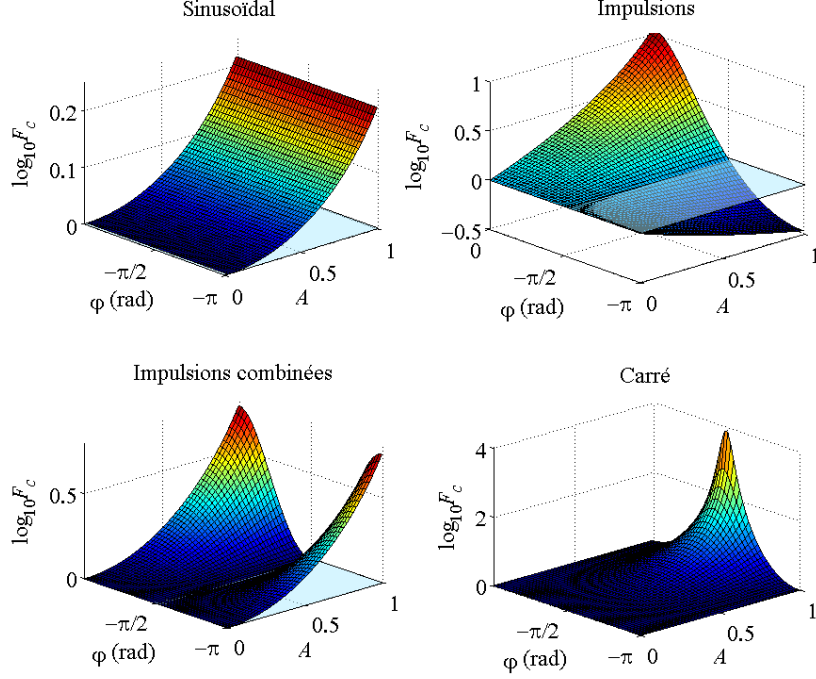


Fig. 43 Facteur d'amplification autoparamétrique ( $\log_{10} F_c(A, \varphi)$ ) pour un actionnement sinusoidal, à impulsions, à impulsions combinées et carré.

Dans le cas d'un actionnement par impulsions combinées, on constate que  $F_c(A, \varphi) \geq 1$ , de sorte que ce coefficient peut être vu comme un facteur d'amplification par rapport à un hypothétique cas linéaire. Compte-tenu de son rôle dans le comportement du résonateur, on appellera  $\ln F_c$  « facteur d'amplification ». La présence d'un double pic de résonance en Fig. 41 peut être vue comme le résultat d'une compétition entre deux effets contradictoires :

- l'amplification due à  $F_c(A, \varphi)$ , qui augmente à mesure que le résonateur s'éloigne de la quadrature ;
- la caractéristique  $\sin \varphi$  du cas linéaire.

Dans le cas d'un actionnement par impulsions (non combinées), on constate que  $F_c(A, \varphi) \geq 1$  pour  $\varphi \geq -\pi/2$  et  $F_c(A, \varphi) \leq 1$  pour  $\varphi \leq -\pi/2$ . Ceci explique :

- la distorsion de la courbe de réponse en phase ;
- la position du maximum de la réponse en amplitude qui ne correspond pas à la quadrature.

Dans les deux cas, on constate que  $F_c\left(A, -\frac{\pi}{2}\right) = 1$ , ce qui signifie que, si le résonateur est utilisé en boucle fermée dans un oscillateur imposant la quadrature entre l'actionnement et la vibration du résonateur, l'amplitude d'oscillation varie linéairement avec l'amplitude d'actionnement.

On peut analyser le cas sinusoïdal de la même façon. Dans ce cas, le facteur d'amplification est indépendant de  $\varphi$ . Par ailleurs, puisque  $F_c(A) \geq 1$ , il s'agit bien d'une amplification et non d'une inhibition. L'actionnement sinusoïdal est plus « efficace » que l'actionnement par impulsions combinées de par son plus grand facteur d'amplification. Cependant, le prix d'une meilleure amplification réside dans une plus faible amplitude de pull-in résonant obtenue en utilisation en boucle fermée avec actionnement sinusoïdal (voir [62]) Ce point sera approfondi dans la section IV.A.

Enfin, dans le cas d'un actionnement carré, on constate également que  $F_c(A, \varphi) \geq 1$ , de sorte qu'il s'agit toujours d'un facteur d'amplification. Ce facteur d'amplification est plus faible que le facteur d'amplification de l'actionnement sinusoïdal aux faibles amplitudes d'oscillations. Cependant, il augmente ensuite très rapidement, ce qui explique pourquoi le maximum d'amplitude obtenu sous actionnement carré évolue très rapidement avec l'amplitude d'actionnement une fois que l'amplitude dépasse environ 30% du gap (voir courbes orange, rouge et brune sur la Fig. 41). A très forte amplitude d'excitation, l'actionnement carré est donc plus efficace que l'actionnement sinusoïdal. Cela se paie, dans ce cas-ci également, par un niveau de pull-in résonant plus bas lors d'une utilisation du résonateur dans un oscillateur opéré à la quadrature (voir chapitre IV).

### III.E.c.vii. Validation sur des simulations en régime transitoire

Les résultats des précédentes simulations de régime permanent ont été vérifiés sur des simulations de régime transitoire. Cette vérification permet notamment de s'assurer que l'amplitude  $a_0$  du déplacement statique du résonateur et l'amplitude  $A_2$  du second harmonique du déplacement peuvent être négligées.

On reporte en Fig. 44 les résultats d'une simulation de balayage fréquentiel en régime transitoire (sous Simulink) pour un actionnement par impulsions combinées dont le rapport cyclique est fixé à 1,6%. Etant donnée la durée de la simulation en régime transitoire, on se limite ici à un seul balayage en fréquence, des hautes vers les basses fréquences, correspondant au cas à impulsions combinées sous  $V_0 = 0,048$  (cas de la double résonance). Les résultats de simulation (en ligne continue) correspondent bien aux résultats prédits par la modélisation en régime permanent (en ligne pointillée) (voir Fig. 44-a). Les écarts restants sont discutés dans la section III.E.c.viii. Durant toute la durée du balayage, les amplitudes  $a_0$  et  $A_2$  restent inférieures à 1% de l'amplitude  $A$  du premier harmonique (avec pour seules exceptions de légers dépassements dus à des effets transitoires, voir Fig. 44-b).



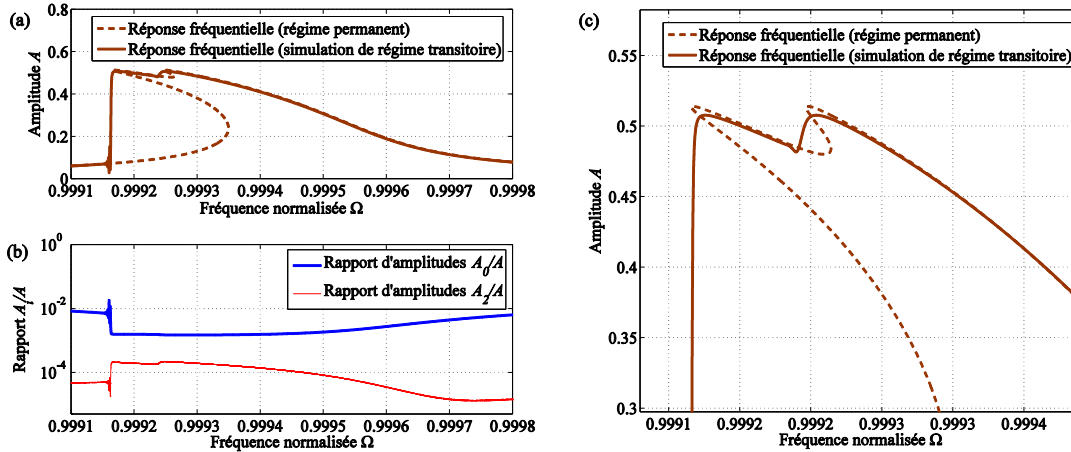


Fig. 44 Vérification des hypothèses et des résultats sur une simulation en régime transitoire. (a) Réponse fréquentielle. (b) Vérification du déplacement statique et de la seconde harmonique. (c) Zoom sur le haut de la réponse fréquentielle.

### III.E.c.viii. Effet de la largeur des impulsions sur la réponse fréquentielle

En suivant la même méthode que précédemment, il est possible d'adapter le modèle pour prendre en compte le rapport cyclique exact des impulsions (combinaisons ou non). Cependant, ceci alourdit considérablement les expressions obtenues. Pour illustrer l'effet de la largeur des impulsions sur la réponse obtenue, on reporte en Fig. 45 des résultats de simulations en régime transitoire obtenues pour un actionnement par impulsions à  $V_0 = 0,048$  pour différentes valeurs du rapport cyclique. La Fig. 45 confirme que la différence entre les réponses fréquentielles observées dans le cas des impulsions et celles observées dans le cas sinusoïdal est directement liée à la localisation temporelle des impulsions. Plus le rapport cyclique se rapproche de  $1/2$ , plus les réponses fréquentielles se rapprochent du cas d'un actionnement carré présenté sur la Fig. 41.

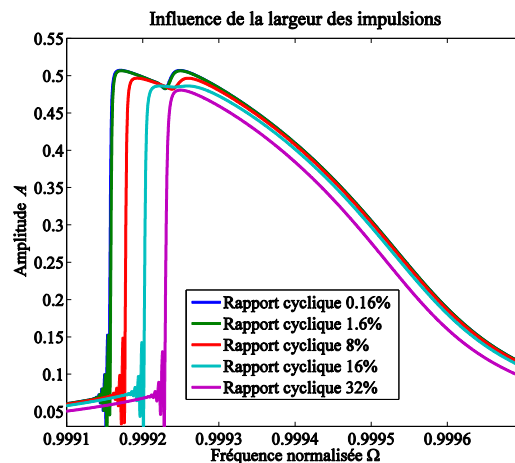


Fig. 45 Effet du rapport cyclique des impulsions sur la réponse fréquentielle. Cas d'un actionnement par impulsions combinées sous  $V_0 = 0,048$ .

Afin de valider toutes ces prédictions, des mesures ont été réalisées à l'aide du banc automatisé de test décrit en section II.F. Les résultats expérimentaux sont présentés dans la section III.E.d.

### III.E.d. Validation expérimentale

Dans cette section, on vérifie expérimentalement l'existence des phénomènes modélisés en section III.E.c. Les expériences sont réalisées sur le banc de mesure présenté en section II.F. Compte-tenu de la présence d'une capacité parasite entre les électrodes de la cellule résonante, on ne validera ici que les résultats concernant l'actionnement par impulsions et l'actionnement par impulsions combinées. Ces deux actionnements permettent, via le traitement de données présenté dans le cadre de la caractérisation linéaire (voir section III.C.b), de s'affranchir des effets de la capacité parasite dans les réponses fréquentielles obtenues. Le dispositif expérimental utilisé est le même que celui décrit précédemment dans la section II.E, dans lequel on a fixé la tension de polarisation  $V_b$  à 40V.

Le résonateur utilisé ici est le même que précédemment (voir Fig. 8). Il s'agit donc d'un résonateur encastré aux deux extrémités, dont le comportement vis-à-vis de la forme de l'actionnement est qualitativement identique à celui d'un résonateur à capacités planes (voir Annexe 8).

#### III.E.d.i. Protocole expérimental

Le résonateur est ici actionné par des impulsions de tension de différentes amplitudes et de durée  $2\mu\text{s}$  (rapport cyclique de 13%). Un tel rapport cyclique permet de fournir assez de puissance au résonateur pour atteindre les comportements observés en Fig. 41, étant donné que l'amplitude des impulsions est limitée par le générateur.

Deux exemples d'actionnement imposés en entrée de la cellule MEMS sont reportés en Fig. 46. Pour les raisons pratiques détaillées en section III.C.c, on utilise l'actionnement par impulsions subharmoniques (SPMA) au lieu de l'actionnement par impulsions harmoniques (HPMA). Le nombre subharmonique  $N$  de l'actionnement SPMA est choisi égal à 5, c'est-à-dire que la pulsation principale  $\omega$  du train d'impulsions est choisie proche de  $\omega_0/5$ . L'amplitude et la phase de l'harmonique à  $5\omega$  du signal de sortie est ensuite récupérée, après suppression des impulsions.

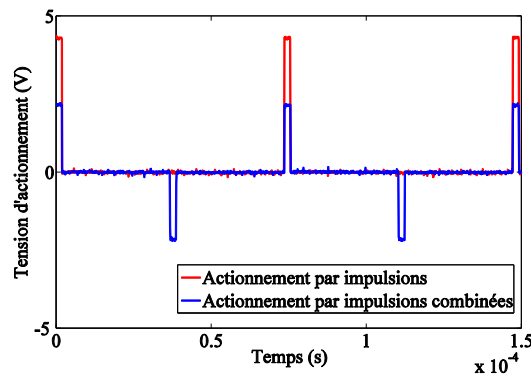


Fig. 46 Exemple de signaux expérimentaux d'actionnement par impulsions et à impulsions combinées pour un nombre subharmonique  $N = 5$ .

### III.E.d.ii. Résultats de mesures

Les réponses fréquentielles mesurées expérimentalement sont reportées sur la Fig. 47 pour  $V_0 = 3 \times 10^{-4}$ ,  $V_0 = 5,7 \times 10^{-4}$ ,  $V_0 = 1,6 \times 10^{-3}$ ,  $V_0 = 5,7 \times 10^{-3}$  et  $V_0 = 1,1 \times 10^{-2}$ . On constate, comme justifié dans l'Annexe 7, l'absence de raidissement mécanique sur les réponses en fréquences due à l'imperfection d'un des encastrements de la poutre vibrante. D'autres mesures, réalisées à différentes tensions d'actionnement et de polarisation, viennent confirmer cette hypothèse (voir sections III.F.d.i et III.F.d.ii). Des mesures similaires ont été effectuées sur d'autres cellules du même modèle de capteur et ont mené aux mêmes conclusions.

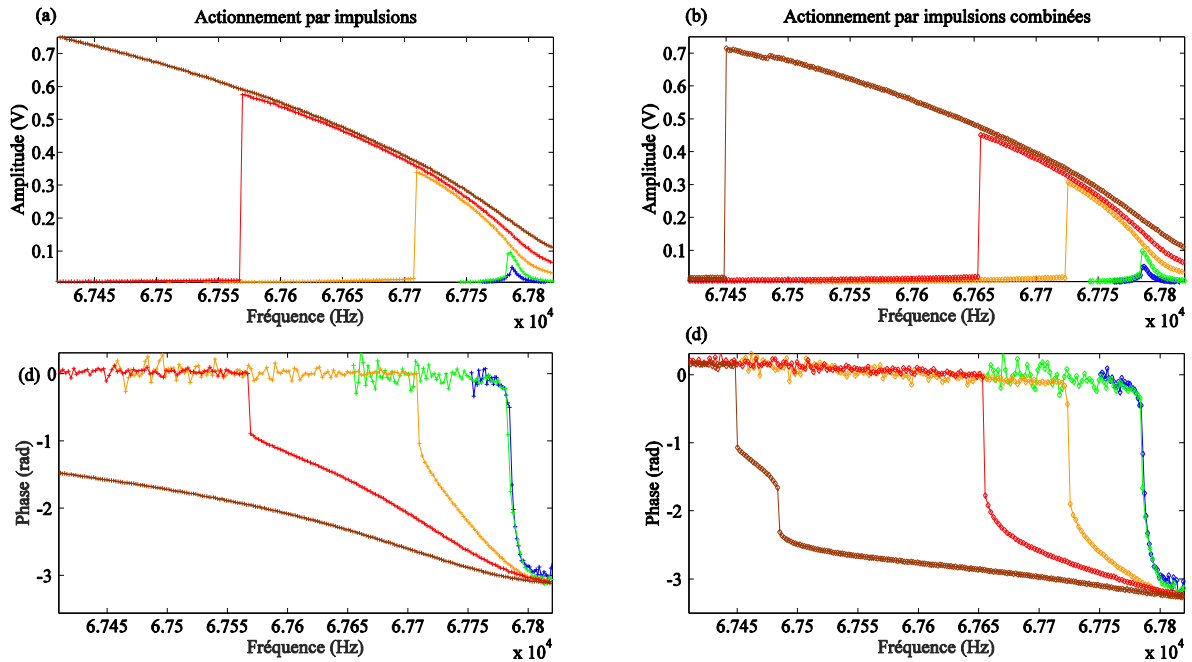


Fig. 47 Résultats expérimentaux. Comparaison de l'actionnement par impulsions et de l'actionnement par impulsions combinées pour des amplitudes d'actionnement croissantes (de bleu à brun).

A mesure que l'actionnement et l'amplitude d'oscillation augmentent, on constate sur la Fig. 47 que les réponses fréquentielles d'un résonateur soumis aux deux formes d'onde diffèrent. On voit apparaître, à très fortes amplitudes, sur les Fig. 47-b et Fig. 47-d, deux cycles d'hystérésis, marqués par une double résonance, ce qui était prédit par la théorie. Afin de mieux les mettre en évidence, un zoom est représenté en Fig. 48.

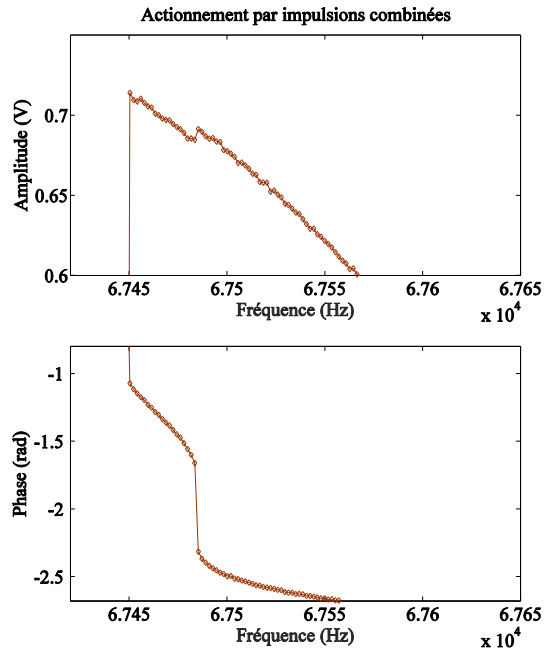


Fig. 48 Zoom sur le phénomène de double hystérésis.

Comme indiqué dans les remarques faites en section III.E.c.iv, la forte distorsion des réponses fréquentielles due à la valeur relativement élevée du coefficient de conversion électromécanique  $\eta$  (par rapport à la valeur de l'illustration de la Fig. 41) rend peu visible la double hystérésis sur la réponse en amplitude (un zoom sur le haut de la réponse en fréquence de la Fig. 47-b est présenté en Fig. 48). En revanche, cette double hystérésis est tout particulièrement visible sur la réponse en phase (Fig. 47-d), qui diffère radicalement de la réponse en phase sous actionnement par impulsions (Fig. 47-c). Compte-tenu du gain électrique estimé du résonateur lors de mesures de caractérisation linéaire, le phénomène de double résonance observé ici correspond à une amplitude d'oscillation mécanique d'environ 60% du gap entre les électrodes, ce qui est cohérent avec les prédictions d'un pont vibrant donnant une amplitude limite de 52% (équation (313)).

L'ensemble de ces résultats expérimentaux confirme donc les prévisions et la validité de la modélisation. Sa pertinence permet désormais de construire une procédure de caractérisation non-linéaire efficace des MEMS capacitifs résonants, ce qui est réalisé dans la section III.F.

### III.F. Caractérisation non-linéaire des MEMS capacitifs résonants

Les modèles construits dans la section III.E.c permettent d'élaborer une méthode de caractérisation des MEMS en régime non-linéaire. On rappelle que la caractérisation se fait essentiellement en trois étapes :

- le choix d'un modèle ;
- le choix d'un type de mesures et d'un protocole expérimental (méthodes temporelles, fréquentielles, etc.) ;
- le choix d'une procédure d'estimation des paramètres du modèle.

Le premier choix a été présenté dans le chapitre II et sera validé expérimentalement dans la section III.F.d. Le second choix a également déjà été effectué. Il s'agira, comme précédemment, de mesures fréquentielles obtenues par balayage fréquentiel d'un signal d'actionnement fait

d'impulsions périodiques. Ainsi, on se placera à tension d'actionnement et de polarisation données, et on fera varier la fréquence d'actionnement. On aurait également pu envisager caractériser le résonateur autrement, par exemple à fréquence d'actionnement donnée et à amplitude d'actionnement variable. Notre choix se justifie cependant par la difficulté à atteindre les régimes d'amplitude les plus élevés dans des régimes très fortement hystérétiques en l'absence de balayage fréquentiel.

Le dernier choix fait l'objet de cette section. On s'attachera ici à construire une fonction objectif qui répond au problème de caractérisation non-linéaire par la méthode des moindres carrés.

### III.F.a. Construction de la fonction objectif

On a vu, dans la section III.C.e, que l'identification de paramètres d'une réponse fréquentielle d'un résonateur linéaire pouvait être réalisée par une minimisation par méthode des moindres carrés non-linéaires sur la fonction objectif :

$$Y_{lin}(\omega_0, Q) = \sum_j \left( A_j(\omega_j) - A(\omega_j, \omega_0, Q) \right)^2 . \quad (157)$$

Dans le cas non-linéaire, la dépendance de  $A$  vis-à-vis de la pulsation d'actionnement  $\omega$  décrit une courbe paramétrique multi-valuée. Pour illustrer cette idée, on a même observé, dans le cas d'un actionnement par impulsions combinées par exemple, que la réponse en fréquence pouvait présenter jusqu'à cinq amplitudes d'oscillations différentes (dont seulement 3 sont stables) pour une même fréquence. La détermination de l'amplitude correspondant à un jeu de paramètres nécessite donc, à chacune des fréquences d'actionnement, un choix parmi toutes les solutions possibles. Ceci rend l'utilisation d'une telle fonction objectif à la fois complexe et peu robuste. D'ailleurs, dans le cas non-linéaire,  $Y$  n'est plus à proprement parler une « fonction » objectif puisqu'il ne s'agit plus d'une fonction dès lors que la courbe est multi-valuée. On décrit ici la construction d'une fonction objectif permettant de résoudre ce problème. On commencera par l'illustrer sur le cas simple d'un résonateur linéaire, pour l'étendre ensuite à différents cas non-linéaires.

Dans le cas d'un résonateur linéaire actionné par une force (adimensionnée)  $F$ , la méthode de la balance harmonique (décrite en II.D) appliquée à l'équation de la dynamique aboutit à :

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) = \omega_0^2 F \cos \varphi \\ \frac{A\omega_0\omega}{Q} = -\omega_0^2 F \sin \varphi \end{cases} . \quad (158)$$

En sommant le carré des deux équations ainsi obtenues, on peut faire disparaître la dépendance à la phase  $\varphi$  et écrire :

$$A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{A^2\omega_0^2\omega^2}{Q^2} = \omega_0^4 F^2 . \quad (159)$$

On définit ensuite la fonction erreur  $e_{lin}$  identiquement nulle :

$$e_{lin}(A, \omega, \boldsymbol{\theta}) \equiv 1 - \frac{A^2}{\omega_0^4 F^2} \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2} \right] = 0 \quad (160)$$

où  $\boldsymbol{\theta} = (\omega_0, Q, F)$ .

Si on considère une série de  $k$  mesures d'amplitudes  $(A_j)_{j \in \llbracket 1; k \rrbracket}$  correspondant à des pulsations  $(\omega_j)_{j \in \llbracket 1; k \rrbracket}$ , on peut alors construire une fonction objectif  $Y_l$  sous la forme :

$$Y_l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^k e_{lin}(A_j, \omega_j, \boldsymbol{\theta})^2 . \quad (161)$$

En l'absence de tout bruit de mesure, ce critère est nul pour les valeurs nominales de  $\omega_0, Q$  et  $F$ . Pour caractériser un tel résonateur, on peut dès lors choisir de minimiser la fonction  $Y_l$ .

On peut construire de la même façon la fonction objectif dans le cas d'une non-linéarité cubique (voir II.D.e). La fonction erreur  $e_d$  et la fonction objectif  $Y_d$  s'écrivent alors :

$$\begin{cases} e_d(A, \omega, \boldsymbol{\theta}) \equiv 1 - \frac{A^2 \omega^2}{\omega_0^2 Q^2 F^2} [1 + \Psi_d(A, \omega, \boldsymbol{\theta})^2] = 0 \\ Y_d(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^k e_d(A_j, \omega_j, \boldsymbol{\theta})^2 \end{cases} . \quad (162)$$

où  $\begin{cases} \Psi_d(A, \omega, \boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{Q}{\omega_0 \omega} \left( \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \gamma \omega_0^2 A^2 \right) \\ \boldsymbol{\theta} = (\omega_0, Q, \gamma, F) \end{cases}$

Cette méthode de construction présente deux intérêts majeurs.

- Flexibilité : il s'agit d'une méthode générique dans la mesure où elle ne dépend pas de l'existence ou de l'absence de points de bifurcation sur la courbe de réponse en fréquence (contrairement à la méthode présentée dans [70]).
- Robustesse :  $Y_d$  est bien une fonction, c'est-à-dire qu'à un jeu de paramètres donné ne correspond qu'une seule valeur de  $Y_d$ . Il n'est donc pas nécessaire d'effectuer un choix parmi plusieurs solutions.

Ces expressions, indépendantes de  $\varphi$ , rendent les mesures de phase facultatives. Elles peuvent néanmoins servir à réaliser une validation croisée du modèle en reconstruisant la phase via :

$$\varphi = \arctan[\Psi_d(A, \omega, \theta)] - \frac{\pi}{2} \quad (163)$$

La méthode présentée ici ne s'applique qu'à des non-linéarités statiques sans mémoire (comme c'est le cas de toutes les non-linéarités étudiées dans ce manuscrit). Comme Chen et al. [72], on définit une non-linéarité statique comme une non-linéarité qui ne dépend du temps que par l'intermédiaire de  $x(t)$ . Une non-linéarité est définie comme « sans mémoire » si et seulement si la valeur de la fonction non-linéaire correspondante ne dépend pas de l'historique du système.

On aurait, bien entendu, pu choisir un autre critère d'optimisation. Par exemple, on aurait pu choisir d'éliminer la dépendance vis-à-vis de l'amplitude et de garder uniquement la phase. Dans le cas d'une non-linéarité cubique, on pourrait écrire :

$$1 - \frac{4\omega^2}{3\gamma\omega_0^2 F^2 Q^2 \sin^2 \varphi} \left( \frac{\omega F}{Q\omega_0} \cot \varphi - 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) = 0 \quad (164)$$

En pratique, l'observation expérimentale de  $\varphi$  se fait avec un décalage  $\varphi_0$ . Ce décalage doit également être évalué. Dans les tests réalisés durant cette thèse, nous avons constaté que l'introduction de ce paramètre supplémentaire  $\varphi_0$  pose des problèmes de convergence de l'optimisation. Il faudrait alors construire une autre fonction objectif plus adaptée. Nous avons choisi ici de nous limiter à une identification sur base de mesures en amplitude. La phase sera ensuite reconstruite à partir des paramètres estimés et comparée à l'expérience.

La méthode illustrée sur le cas d'une non-linéarité cubique, peut être adaptée pour une non-linéarité d'actionnement électrostatique. Le système (voir section III.E.c) :

$$\begin{cases} A(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\eta\omega_0^2 F_1(A) = 2\eta\omega_0^2 F_s(A, \varphi) V_0 \cos \varphi \\ \frac{A\omega_0\omega}{Q} = -2\eta\omega_0^2 V_0 F_c(A, \varphi) \sin \varphi \end{cases} \quad (165)$$

mène, en divisant les deux équations, à :

$$\begin{cases} \Psi(A, \omega, \varphi, \boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{QF^c(A, \varphi)}{A\omega_0\omega F^s(A, \varphi)} [A(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\eta\omega_0^2 F_1(A)] \\ \varphi = \arctan[\Psi(A, \omega, \varphi, \boldsymbol{\theta})] - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (166)$$

où  $\boldsymbol{\theta} = (\omega_0, \eta, Q)$ .

On obtient alors une fonction erreur  $e$  et une fonction objectif  $Y$  :

$$\begin{cases} e(A, \omega, \varphi, \boldsymbol{\theta}) \equiv 1 - \frac{A^2 \omega^2 [1 + \Psi(A, \omega, \varphi, \boldsymbol{\theta})^2]}{4\eta^2 \omega_0^2 V_0^2 Q^2 F_c(A, \varphi)^2} = 0 \\ Y(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^k e(A_j, \omega_j, \varphi, \boldsymbol{\theta})^2 \end{cases} \quad (167)$$

où  $\begin{cases} \Psi(A, \omega, \varphi, \boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{QF_c(A, \varphi)}{A\omega_0\omega F_s(A, \varphi)} [A(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\eta\omega_0^2 F_1(A)] \\ \boldsymbol{\theta} = (\omega_0, Q, \eta) \end{cases}$

On constatera au passage que la phase  $\varphi$  peut s'exprimer, en fonction de  $\Psi$ , comme solution de (166).

La dépendance de  $F_c$  et de  $F_s$  vis-à-vis de  $\varphi$  rend ces expressions lourdes dans le cas d'un actionnement carré car  $\Psi$ ,  $e$  et  $Y$  dépendent de  $\varphi$  (la caractérisation nécessite donc, soit des mesures d'amplitude et de phase, soit la résolution numérique de l'équation (166) pour chacun des points de mesure). En revanche dans le cas sinusoïdal,  $F_c$  et  $F_s$  sont indépendants de  $\varphi$ . Enfin, dans les cas impulsionsnels, les composantes de l'actionnement en phase et en quadrature avec le

déplacement du résonateur sont égales ( $F_c = F_s$ ). Pour cette raison,  $\varphi$  s'écrit simplement sous la forme :

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan[\Psi_p(A, \omega, \boldsymbol{\theta})] - \frac{\pi}{2} \\ \text{où } \Psi_p(A, \omega, \boldsymbol{\theta}) &\equiv \frac{Q}{A\omega_0\omega} [A(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\eta\omega_0^2 F_1(A)] \end{aligned} \quad (168)$$

On trouve alors une fonction erreur  $e_p$  et une fonction objectif  $Y_p$  indépendantes de  $\varphi$ :

$$\begin{cases} e_p(A, \omega, \boldsymbol{\theta}) \equiv 1 - \frac{A^2\omega^2[1 + \Psi_p(A, \omega, \boldsymbol{\theta})^2]}{4\eta^2 Q^2 \omega_0^2 V_0^2 F_c \left( A, \arctan[\Psi_p(A, \omega, \boldsymbol{\theta})] - \frac{\pi}{2} \right)^2} = 0 \\ Y_p(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^k e_p(A_j, \omega_j, \boldsymbol{\theta})^2 \end{cases} \quad (169)$$

où  $\boldsymbol{\theta} = (\omega_0, \eta, Q)$ .

On constate une nouvelle fois dans ces expressions, indépendantes de  $\varphi$ , que les mesures de phase sont facultatives. Elles peuvent néanmoins servir à réaliser une validation croisée du modèle, comme on le verra dans les sections III.F.d à III.F.d.ii. De plus, ces formules restent valables aussi bien pour un MEMS à pont vibrant qu'un MEMS à capacités planes, même si les expressions de  $F_s$  et  $F_c$  dans le premier cas sont plus complexes (voir Annexe 8).

Enfin, on pourrait également prendre en compte une composante statique de déplacement du résonateur en écrivant, suivant l'hypothèse (73) présentée dans la section II.D.a :

$$x(t) = a_0 + A \sin(\omega t + \varphi) \quad (170)$$

ce qui donne, par exemple dans le cas d'un actionnement à impulsions (sur un MEMS à capacités planes) :

$$\begin{cases} e_p(R, \omega, \boldsymbol{\theta}) \equiv 1 - \frac{(1 - a_0)^2 R^2 \omega^2 [1 + \Psi(R, \omega, \boldsymbol{\theta})^2]}{4\eta^2 \omega_0^2 V_0^2 Q^2 F_c \left( R, \arctan[\Psi_p(R, \omega, \boldsymbol{\theta})] - \frac{\pi}{2} \right)^2} = 0 \\ Y(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^k e_p(R_j, \omega_j, \boldsymbol{\theta})^2 \end{cases} \quad (171)$$

où  $\begin{cases} \Psi_p(R, \omega, \boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{Q}{R\omega_0\omega} \left[ R(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{2\eta}{(1 - a_0)^2} \omega_0^2 F_1(R) \right] \\ R = \frac{A}{1 - a_0} \\ \boldsymbol{\theta} = (\omega_0, Q, \eta) \\ a_0 \text{ est la plus petite racine de } a_0(1 - a_0)^2 = \eta. \end{cases}$

Dans le cas d'un pont vibrant, la formule (171) reste valable en prenant soin d'utiliser les expressions adéquates de  $F_1$ ,  $F_c$ ,  $F_s$  et  $\eta$  (voir Annexe 8), et de remplacer  $(1 - a_0)^2$  par  $(1 - a_0)^{\frac{3}{2}}$ .



En pratique, les mesures électriques ne donnent pas accès à l'amplitude  $A$  mais à une tension. Lorsque l'amplitude d'oscillation est suffisamment faible (inférieure à 25% du gap pour un résonateur plan, et à 30% du gap pour un pont vibrant (voir Annexe 4)), la détection peut être considérée comme linéaire ( $\zeta(A) = A$  avec une erreur inférieure à 5%). Par exemple, dans le cas d'une détection via amplificateur de charge (voir II.E), en notant  $V_i$  les amplitudes de tensions mesurées aux pulsations  $\omega_i$ , on cherchera à minimiser la fonction objectif sous la forme :

$$\begin{cases} Y(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^k e(A_j, \omega_j, \boldsymbol{\theta})^2 \\ A_j = \frac{R_1 \omega_j}{G_0 \sqrt{1 + R_1^2 C_1^2 \omega_j^2}} \end{cases} \quad (172)$$

où  $\boldsymbol{\theta} = (\omega_0, Q, \eta, G_0)$ .

### III.F.b. Procédure de minimisation de la fonction objectif

Comme le montre sa définition, la fonction  $Y$  est non-linéaire par rapport aux paramètres du résonateur. Il existe de nombreux algorithmes permettant de minimiser une telle fonction par rapport aux (trois ou quatre) paramètres dont elle dépend. On pourrait choisir une méthode d'optimisation globale statistique (recuit simulé, Monte Carlo) ou heuristique (Nelder-Mead) ou une méthode d'optimisation locale. Comme les méthodes d'optimisation globale sont lourdes en termes de capacité et de temps de calcul, on opte ici pour une méthode d'optimisation locale par moindres carrés utilisant un algorithme de régions de confiance sur la fonction  $e$ . Cette optimisation, réalisée sous MATLAB (fonction *lsqnonlin*), revient à chercher un minimum local de la fonction  $Y$  par rapport au vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  de paramètres. Expérimentalement, on a pu constater que cet algorithme convergeait plus rapidement, dans notre cas, que les autres algorithmes tels que celui de Levenberg-Marquardt, de Nelder-Mead ou des méthodes de point intérieur. De plus, elle ne nécessite pas d'expression analytique du gradient de la fonction  $Y$ . L'étude théorique de la convergence de ces algorithmes sort du cadre de ces travaux et ne sera pas évoquée.

La méthode choisie suppose une première estimation a priori de la solution, qui est rendue possible par la connaissance des dimensions approchées du résonateur, mais aussi par la connaissance de la position expérimentale du pic de résonance. Elle nécessite également de fixer une tolérance définissant la condition d'arrêt de l'optimisation. Dans notre cas, la tolérance  $tol$  a été fixée à  $10^{-8}$  sur  $\boldsymbol{\theta}$  et sur  $Y$ . La précision de cette méthode est illustrée sur un exemple de non-linéarité cubique ci-après.

### III.F.c. Etude de cas : Caractérisation non-linéaire d'un résonateur à non-linéarité cubique

Dans toute cette section on notera  $\hat{p}$  l'estimation d'un paramètre (ou d'un vecteur de paramètres)  $p$ . Afin de valider la méthode, on présente ici quelques résultats de simulation montrant que la minimisation de  $Y$  mène à une caractérisation correcte du résonateur. On simule le cas d'un résonateur à pont vibrant actionné mécaniquement par une force sinusoïdale, soumis à une non-linéarité cubique durcissante (de type « Duffing »). Un tel résonateur sera donc caractérisé via la définition de la fonction  $e_d$  donnée dans l'équation (162).

A partir de valeurs fixées des paramètres  $(\omega_0, Q, \gamma, F)$ , les réponses en fréquence correspondantes sont calculées, puis on génère, à partir de ces réponses, 40 points pseudo-expérimentaux, représentant 40 mesures  $(A_i)_{i \in \llbracket 1; 30 \rrbracket}$  pour 30 pulsations différentes  $(\omega_i)_{i \in \llbracket 1; 30 \rrbracket}$  lors d'un balayage en fréquence proche de la résonance. Dans chaque cas, on suppose que le balayage est réalisé de façon à mesurer les points du haut de la courbe de résonance, c'est-à-dire vers les hautes fréquences pour  $\gamma > 0$  et vers les basses fréquences pour  $\gamma < 0$ . On considère plusieurs jeux de paramètres, pour toutes les combinaisons des valeurs indiquées dans le Tableau 4.<sup>1</sup> La pulsation propre  $\omega_0$  est supposée normalisée, de sorte que  $\omega_0 = 1 \text{ rad. s}^{-1}$ .

Paramètre	Valeurs					
$\gamma$	$-3 \times 10^{-3}$	$-10^{-3}$	$-5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$3 \times 10^{-3}$
$Q$	$2 \times 10^4$	$10^4$	$5 \times 10^3$	$3 \times 10^3$	$10^3$	
$F$	$10^{-4}$	$6 \times 10^{-5}$	$3 \times 10^{-5}$	$10^{-5}$		

Tableau 4. Valeurs des paramètres de simulation pour la validation de la procédure de caractérisation. On teste ici les 120 combinaisons possibles de ces valeurs de paramètres.

Les 10000 valeurs initiales sont tirées aléatoirement (selon une distribution uniforme) autour des valeurs nominales dans un intervalle :

- de  $\pm 100\%$  pour  $\gamma$ ,  $Q$  et  $F$  ;
- de  $\pm \frac{1000}{Q} \%$  pour  $\omega_0$ .

Ces intervalles définissent également les intervalles de recherche de la solution fixés pour l'algorithme.

On sait, par construction, qu'il existe un jeu de paramètres  $\theta$  tel que  $Y(\theta) = 0$ . En revanche, la fonction  $Y$  n'est pas convexe (elle tend vers 1 quand  $F$  tend vers l'infini et s'annule pour les valeurs nominales de  $\omega_0$ ,  $Q$ ,  $\gamma$  et  $F$ ) et rien ne garantit l'absence de minima locaux. Pour cette raison, la robustesse de la méthode est vérifiée statistiquement. On effectue 10000 tirages pour chaque jeu de paramètres possible (pour un total de  $1,2 \times 10^6$  tests).

<sup>1</sup> On signalera au passage que les valeurs du paramètre  $F$  données dans [30] sont erronées, dans la mesure où il s'agit en réalité de la valeur de  $4\pi^2 F$  et non de  $F$  comme indiqué dans cet article.

Afin de limiter la durée de la procédure, on a fixé le nombre d'itérations à 100 et le nombre d'évaluation de fonctions à 1000. L'expérience a montré que, dans certains cas, pour des valeurs initiales mal choisies, les valeurs de paramètres s'approchent des bornes qui leur ont été fixées. Le résultat obtenu est alors erroné (valeur de  $\gamma > 1$ ), et il est alors plus simple et plus rapide de relancer l'algorithme à partir d'un autre point de départ aléatoire. On détaille ici les résultats obtenus par la procédure itérative décrite en Fig. 49.

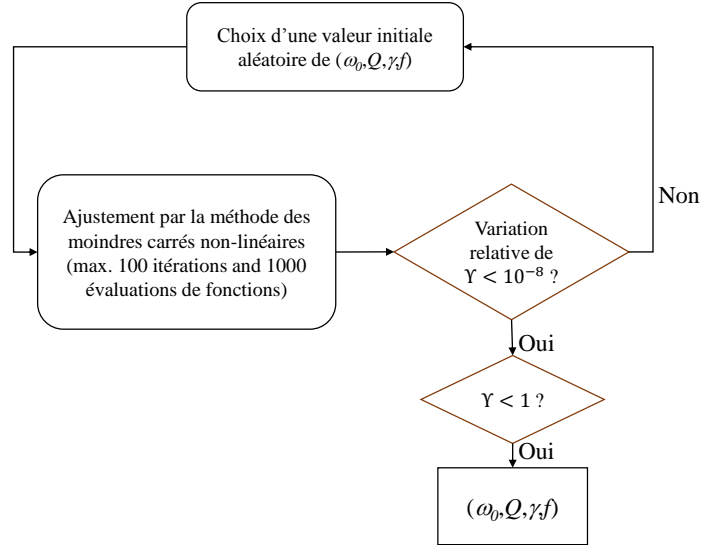


Fig. 49 Organigramme de la procédure récursive de caractérisation.

Des résultats typiques de reconstruction du profil de réponse fréquentielle à partir des jeux de données simulés sont donnés en Fig. 50 (pour  $Q = 10^4$ ,  $F = 6 \times 10^{-5}$  et toutes les valeurs de  $\gamma$ ). Comme attendu, la concordance entre les données simulées et les réponses fréquentielles identifiées est excellente.

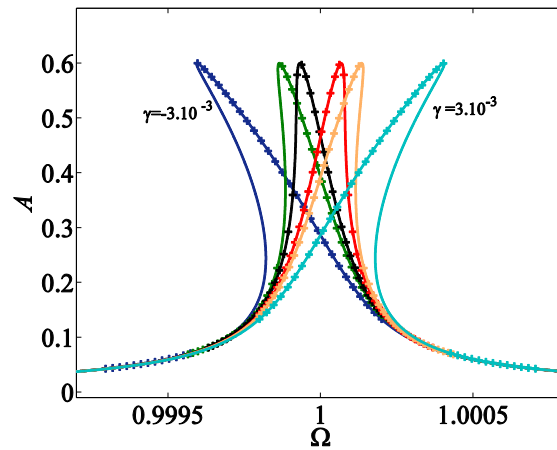


Fig. 50 Reconstitution de réponses fréquentielles sur base de jeux de données simulés pour un résonateur à non-linéarité cubique.

On trace, en Fig. 51, la moyenne des erreurs relatives d'estimation de chaque paramètre pour chacun des jeux de paramètres testés. Pour faciliter l'interprétation, les jeux de paramètres ont été triés dans le sens d'une erreur décroissante sur  $\gamma$ . On constate une erreur moyenne maximale  $|\hat{\gamma} - \gamma|$  (sur les 10000 tests) de 34% sur le coefficient de non-linéarité cubique. Ceci correspond au cas d'un comportement quasiment lorentzien (cas illustré en Fig. 52, où la valeur de  $|\gamma|A_{max}^2$

est inférieure à  $10^{-7}$ ,  $A_{max}$  étant le maximum de la réponse en fréquence). Dans ce cas extrême, la non-linéarité n'apparaît pas significativement, ce qui engendre une identification approximative de  $\gamma$ . Il faut donc garder à l'esprit qu'il est inutile d'espérer identifier avec précision un modèle non-linéaire sur une telle réponse. L'erreur sur  $\gamma$  devient inférieure à 1% lorsque  $|\gamma|A_{max}^2$  devient supérieur à  $3 \times 10^{-7}$ , ce qui prouve que, lorsque le comportement non-linéaire est suffisamment marqué,  $\gamma$  est identifié avec précision.

Sur l'ensemble des tests réalisés, l'erreur sur l'estimation  $Q$  et  $F$  reste inférieure à  $4 \times 10^{-5}\%$  (erreur extrêmement faible). L'erreur sur l'estimation de  $\omega_0$  est, elle, encore plus faible (inférieure à  $2 \times 10^{-11}\%$ ). On notera que, pour une identification correcte dans les cas très hystérétiques, il est utile de disposer d'au moins quelques points de mesure sur la branche inférieure de la réponse en amplitude. Pour ce faire, on peut soit dépasser le point de bifurcation supérieur lors des mesures, soit effectuer quelques mesures supplémentaires en balayage fréquentiel dans le sens inverse.

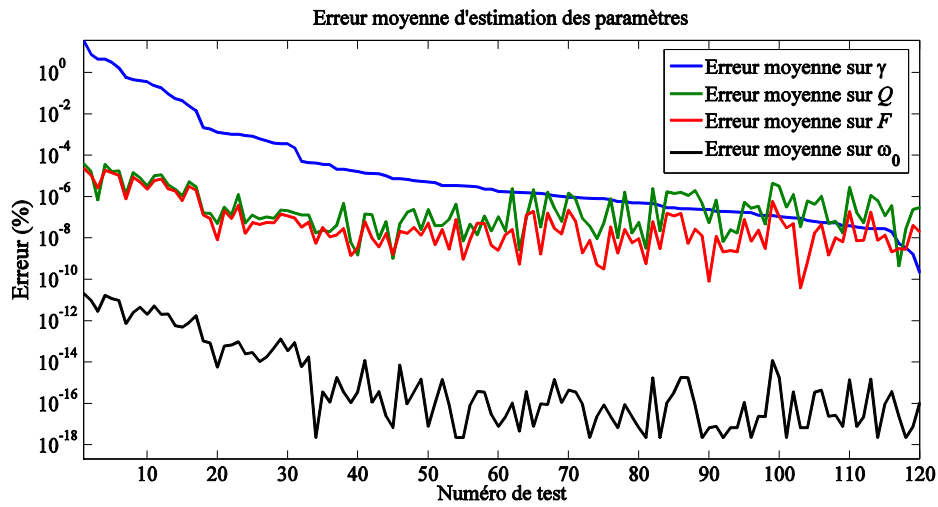


Fig. 51 Erreur moyenne ( $\hat{\theta} - \theta$ ) sur chacune des 120 combinaisons de paramètres testées.

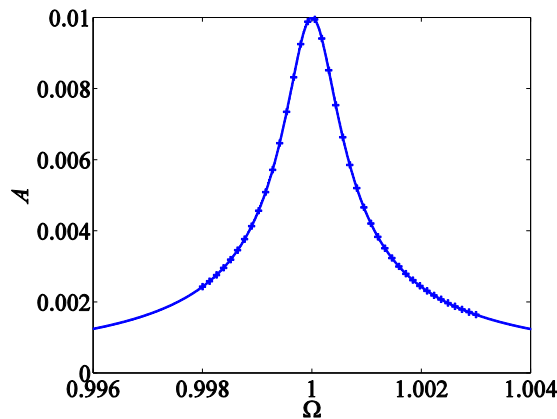


Fig. 52 Reconstitution de la réponse fréquentielle la moins non-linéaire ( $F = 10^{-5}$ ,  $Q = 1000$ ,  $\gamma = 5 \times 10^{-4}$ ) avec une erreur de 34% sur  $\gamma$ .

Enfin, 100% des tests ont convergé en un maximum de 3 cycles de la procédure itérative décrite en Fig. 49, soit un maximum de 3000 évaluations de la fonction  $Y$ . Ceci permet de garantir la rapidité de la procédure. Sur un ordinateur portable muni d'un processeur Intel Core i7-3667U, l'ensemble des 1,2 millions d'identifications ont été réalisées en une vingtaine d'heures soit une moyenne de 0,6 s pour une séquence d'identification.

Des tests similaires ont été réalisés sur le modèle de description d'un résonateur capacitif et donnent des résultats concluants. On notera cependant une restriction : l'identification simultanée d'un coefficient de conversion électromécanique et d'un coefficient de non-linéarité cubique (par exemple pour un résonateur capacitif parfaitement encasté à ses extrémités) peut poser problème dans la mesure où les deux coefficients ont des effets similaires sur la réponse en fréquence. Ceci ne concerne pas le résonateur à l'étude ici, qui ne présente pas de non-linéarité cubique (voir Annexe 7).

On est également en droit de se demander dans quelle mesure le bruit de mesure est susceptible d'affecter la précision de l'identification. Son impact dépend bien sûr de son niveau, mais également de son contenu spectral (un bruit blanc étant le plus simple à éliminer). On peut dans tous les cas affirmer que l'identification en régime non-linéaire est moins sensible au bruit de mesure que l'identification en régime linéaire dans la mesure où les niveaux d'oscillations atteints (et donc le rapport signal sur bruit) sont plus élevés.

L'identification de réponses fréquentielles (sous différents types d'actionnement) sur la base de ce principe a été intégralement implémentée sur le banc automatisé de mesures. Les résultats expérimentaux obtenus sous actionnement par impulsion sont donnés dans la section III.F.d.

### III.F.d. Résultats expérimentaux de caractérisation non-linéaire

Dans cette section, on expose les résultats expérimentaux de caractérisation non-linéaire d'une cellule MEMS de capteur de pression P90 (voir description dans la section II.E). Les mesures ont toutes été effectuées sous actionnement par impulsions sur le banc de caractérisation automatisé décrit en section II.F.

On se limite ici à des oscillations d'amplitude inférieures à 30%, ce qui permet de négliger la non-linéarité de détection. Malgré cette faible amplitude, les réponses obtenues sont extrêmement non-linéaires du fait de l'utilisation de hautes tensions de polarisation (comprises entre 10V et 40V). Comme précédemment, on utilisera systématiquement l'actionnement par impulsions subharmoniques SPMA de pulsation proche de  $\frac{\omega_0}{5}$  ( $N = 5$ ).

Les résultats de caractérisation reproduits dans cette section sont obtenus sur base d'un modèle à un pont vibrant sans raidissement mécanique actionné par des impulsions positives de tension (cas le plus proche de notre dispositif expérimental). En notant comme précédemment  $V_i$  les amplitudes de tensions mesurées aux pulsations  $\omega_i$ , on minimise donc la fonction  $Y_p^{cc}$ :

$$Y_p^{cc}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^k e_p^{cc} \left( \frac{C_1 V_j}{G_0}, \omega_j, \boldsymbol{\theta} \right)^2 \quad (173)$$

vis-à-vis de  $\boldsymbol{\theta} = (\omega_0, \eta_{cc}, Q, G_0)$ , où l'expression de  $e_p^{cc}$  correspond à celle de  $e_p$  pour  $F_1 = F_1^{cc}$ ,  $F_s = F_s^{cc}$  et  $F_c = F_c^{cc}$  (voir Annexe 8 pour les expressions exactes). La composante statique  $a_0$  a été négligée après avoir vérifié que sa prise en compte n'influe pas quantitativement sur les résultats présentés ci-dessous.

Pour limiter le temps d'acquisition des mesures, tous les balayages en fréquence ont été réalisés uniquement des hautes vers les basses fréquences, ce qui correspond au meilleur rapport signal sur bruit. On notera que, pour améliorer le rapport signal sur bruit des mesures, la résistance de rétroaction de l'amplificateur de charge a ici été fixée à  $R_1 = 470\text{k}\Omega$  au lieu de  $R_1 = 1\text{M}\Omega$ .

### III.F.d.i. Mesures à différentes tensions d'alimentation

Afin de vérifier la validité du modèle, des mesures de caractérisation ont tout d'abord été réalisées à différentes tensions d'alimentation. On présente, en Fig. 53, des résultats obtenus sous une tension de polarisation de 30V lorsque le résonateur est actionné par des impulsions de tension de durée 1 $\mu$ s et de premier harmonique  $V_1 = 1,2 \times 10^{-2}V$ ,  $V_1 = 1,9 \times 10^{-2}V$ ,  $V_1 = 2,8 \times 10^{-2}V$ ,  $V_1 = 3,8 \times 10^{-2}V$ ,  $V_1 = 4,6 \times 10^{-2}V$  et  $V_1 = 5,5 \times 10^{-2}V$ . Compte-tenu du gain identifié sur les mesures, les amplitudes de vibration à la résonance atteignent ici 6% à 22% du gap entre les électrodes.

Une façon de vérifier la pertinence du modèle choisi consiste à utiliser les mesures de phase pour effectuer une « validation croisée » du résultat. En reconstruisant la phase avec les paramètres estimés sur la réponse en amplitude, on peut alors vérifier la concordance avec les mesures. Sur la Fig. 53, on constate un très bon accord entre le modèle et l'expérience. L'identification est réalisée sur les mesures d'amplitude, et on peut se convaincre de la pertinence du modèle en observant l'évolution de la phase reconstruite avec les paramètres identifiés, qui concorde également avec les mesures.

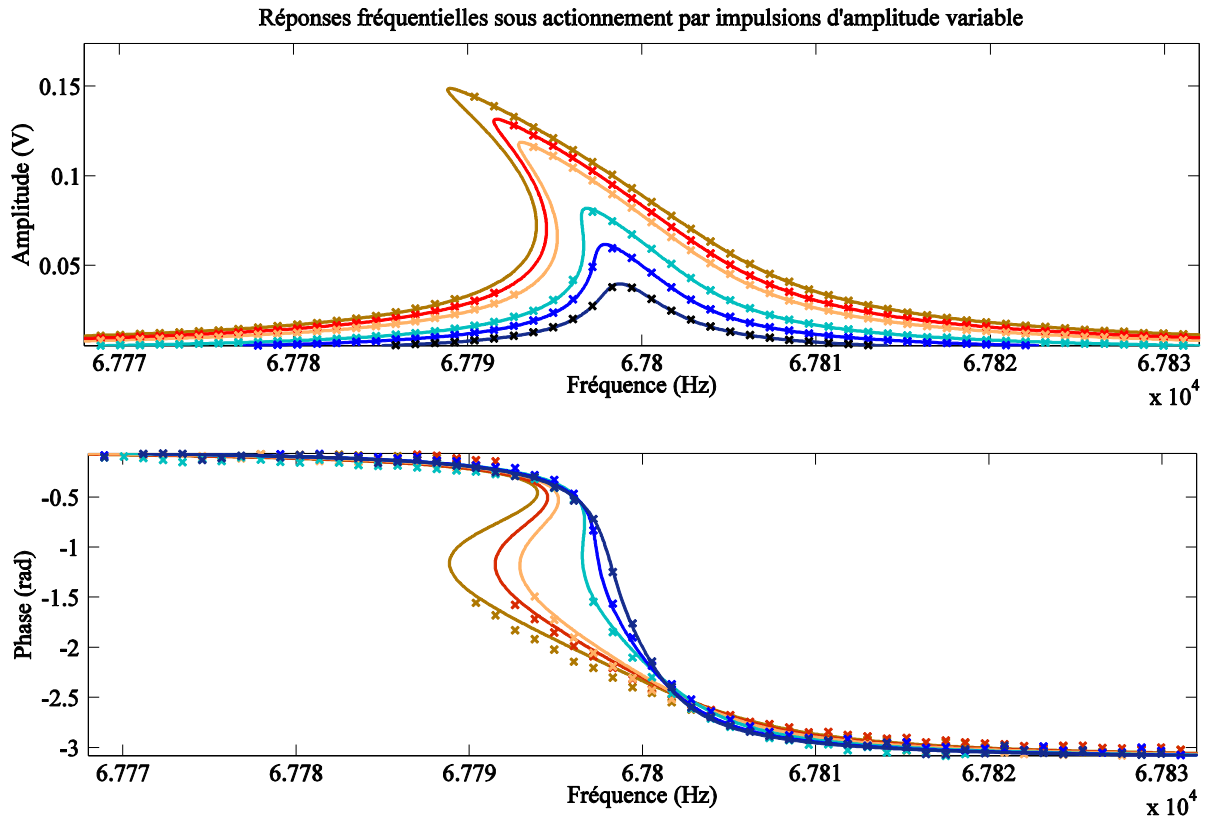


Fig. 53 Résultats expérimentaux sur 5 séries de mesures de réponses fréquentielles pour des tensions d'alimentation croissantes (de bleu à brun).

On présente aussi, sur la Fig. 54, le gain nominal, le facteur de qualité, le coefficient de conversion électromécanique et la fréquence propre (à distinguer de la fréquence de résonance) déduits expérimentalement.

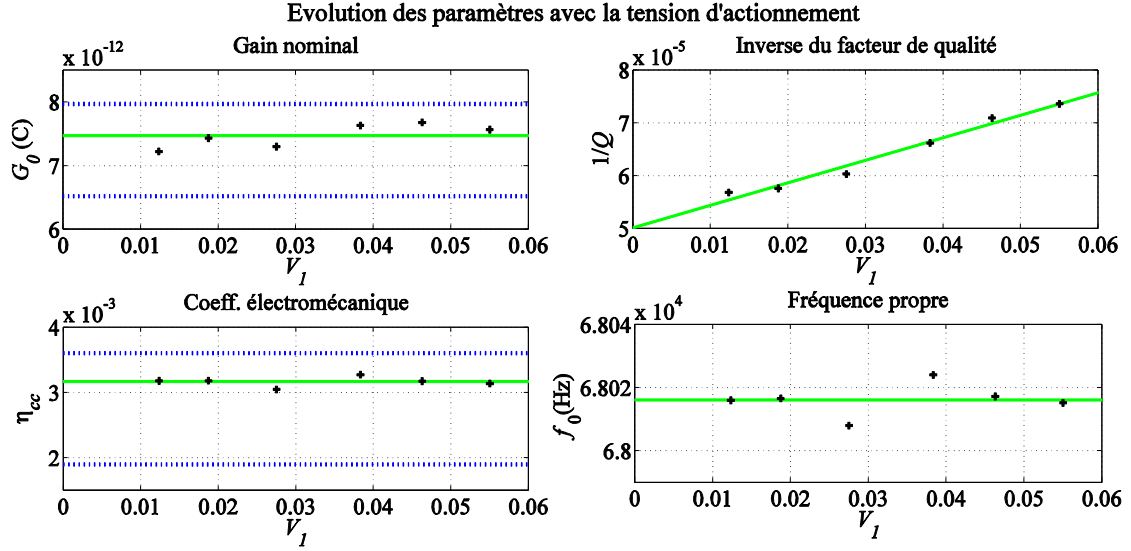


Fig. 54 Evolution des paramètres avec la tension d'actionnement. Les valeurs attendues du coefficient électromécanique et du gain nominal (compte-tenu de la géométrie du dispositif) sont comprises entre les lignes horizontales bleues pointillées. Les lignes vertes correspondent à un ajustement (constant pour  $G_e$ ,  $\eta$  et  $f_0$  et affine pour  $Q$ ).

Hormis le facteur de qualité, tous les paramètres sont indépendants de la tension d'actionnement, conformément à notre modèle. Les variations observées du gain et du coefficient électromécanique sont inférieures à  $\pm 3,7\%$  autour de leur valeur moyenne. La fréquence propre est stable à  $\pm 0,02\%$  par rapport à la valeur moyenne. Ces variations sont probablement liées à l'incertitude de détermination due au bruit de mesure et/ou par de faibles fluctuations de pression au cours des mesures. Une meilleure isolation du système, notamment vis-à-vis des bruits provenant du réseau (50 Hz), permettrait sans doute les diminuer.

Sur la base des dimensions du résonateur, on peut déterminer une valeur théorique du gain nominal  $G_0$  et du coefficient de conversion électromécanique  $\eta_{cc}$ . L'incertitude sur le gap entre les électrodes, qui est compris entre  $5,4\mu\text{m}$  et  $6,6\mu\text{m}$ , définit un intervalle dans lequel ces paramètres doivent se trouver. Ces intervalles sont représentés par les lignes bleues pointillées sur la Fig. 54, dans lequel se situent toutes les estimations réalisées à partir des mesures.

On trace également, sur la Fig. 55, l'estimation de la capacité nominale du MEMS  $C_0 = \frac{\epsilon S}{G} = \frac{2G_0}{V_b}$  (voir Annexe 3) déduite de l'identification. Toutes les mesures sont contenues dans l'intervalle prévu par la géométrie du résonateur.

Les résultats mettent également en évidence un phénomène non-prédit par le modèle. Le facteur de qualité diminue notablement avec l'amplitude d'actionnement. On peut ajuster un comportement affine sur l'évolution de l'inverse du facteur de qualité (donc du taux d'amortissement), ce qui donne ici, à tension de polarisation constante :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0^{V_b}} + \beta_Q V_1 \quad (174)$$

où  $\beta_Q = 4,26 \times 10^{-4} \text{ V}^{-1}$  et  $Q_0^{V_b} = 1,99 \times 10^4$  pour  $V_b = 30 \text{ V}$ . Expérimentalement, des tests ont été effectués à d'autres tensions de polarisation et laissent entendre que la pente  $\beta_Q$  ne varie pas (ou peu, aux incertitudes de mesure près) avec la tension de polarisation. En revanche, le

coefficient  $Q_0^{V_b}$  varie, lui, significativement avec la tension de polarisation. La détermination de cette variation fait l'objet de la section III.F.d.ii.

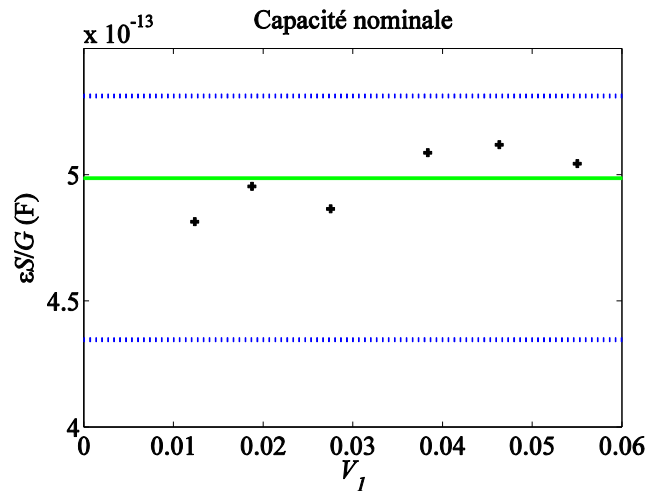


Fig. 55 Détermination de la capacité nominale de la cellule MEMS. La valeur attendue compte-tenu de la géométrie du dispositif (et de l'incertitude sur le gap) est comprise entre les lignes horizontales pointillées.

La source de la variation de  $Q$  avec l'amplitude d'actionnement n'a pas pu être identifiée avec certitude. Une explication à ce phénomène pourrait se trouver dans l'encastrement imparfait de la poutre. A haute amplitude d'oscillations, l'énergie mécanique perdue au niveau des encastrements pourrait dépendre de l'amplitude d'oscillation. Selon cette hypothèse, il y aurait, à haute amplitude, plus de dissipation d'énergie, ce qui générerait l'apparition d'un amortissement non-linéaire qui se traduirait, dans notre modèle, par une baisse du facteur de qualité observé. Une telle hypothèse pourrait expliquer à la fois l'évolution du facteur de qualité et les faibles écarts subsistant entre les réponses en phase prédite et observée.

On remarquera enfin que, dans le cas le plus hystérétique (courbe brune), le point de bifurcation n'a pas été atteint lors des mesures. En effet, ce point est extrêmement instable. De plus, les expériences ont été réalisées en mode de balayage discontinu compte-tenu de l'imprécision fréquentielle de notre générateur lors d'une utilisation en mode de balayage continu (voir II.F). Un tel balayage discontinu rend impossible la mesure du point de bifurcation des cycles fortement hystérétiques. Ceci ne perturbe cependant pas l'identification, comme attendu suite aux tests réalisés sur des modèles théoriques (voir section III.F.c).

Maintenant que le modèle a été validé à différentes tensions d'actionnement, on le vérifie à différentes tensions de polarisation dans la section III.F.d.ii.

### III.F.d.ii. Mesures à différentes tensions de polarisation

On reporte, en Fig. 56, les résultats expérimentaux de caractérisation obtenus sous actionnement par impulsions pour des tensions linéairement distribuées entre  $V_b = 15V$  et  $V_b = 40V$ . L'amplitude de la première harmonique des impulsions en entrée du résonateur est ici de  $V_1 = 0,05V$  (impulsions de tension d'amplitude 1,8V et de largeur 1μs). Compte-tenu du gain identifié sur les mesures, les amplitudes de vibration à la résonance atteignent ici 16% du gap à une polarisation de 15V et 23% à une polarisation de 40V. Aux tensions d'actionnement et de polarisation utilisées, l'amplitude maximale évolue donc peu, malgré une distorsion grandissante des courbes de réponse (due à l'augmentation conjointe de  $G_0$  et de  $\eta_{cc}$ ).



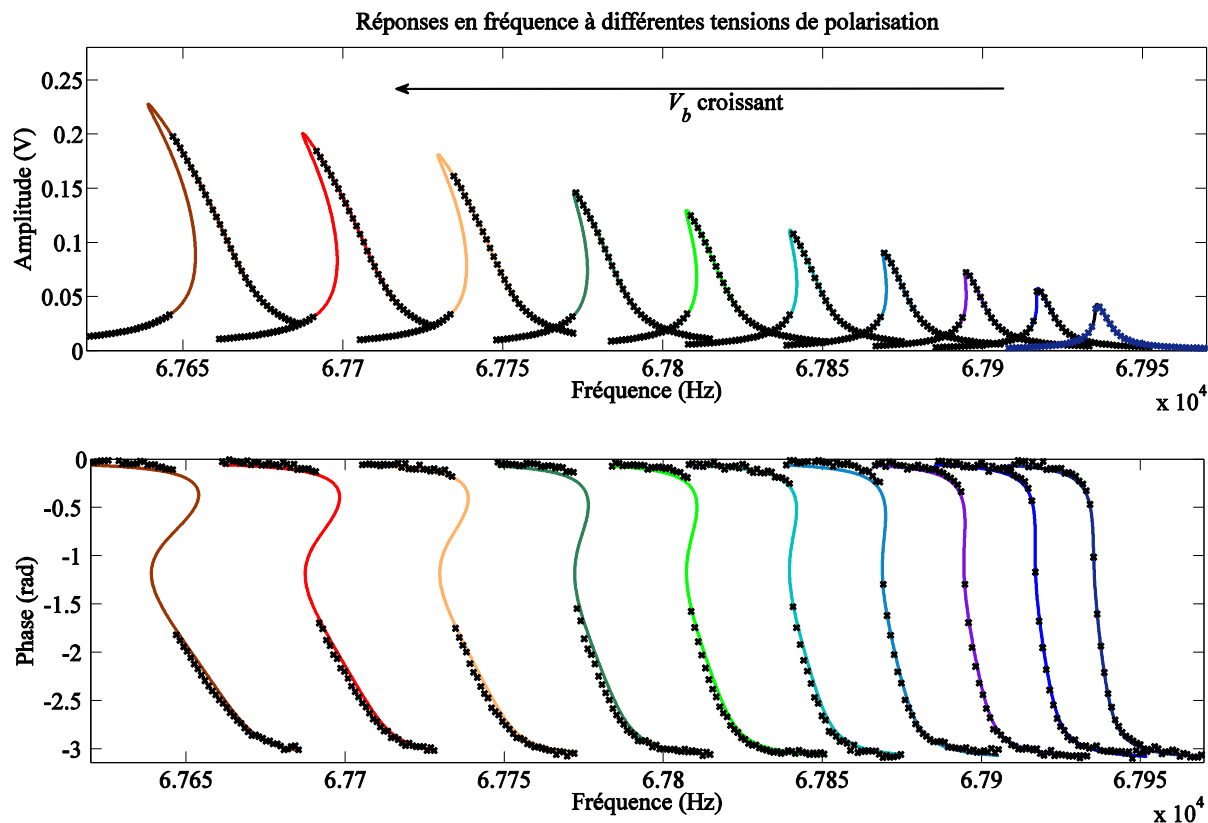


Fig. 56 Résultats expérimentaux. Dix séries de mesures de réponses fréquentielles à dix tensions de polarisation différentes.

Sur cette série de mesures, la fréquence de résonance diminue, comme attendu, avec la tension de polarisation. Ceci ne présume cependant rien sur l'évolution de la pulsation propre  $\omega_0$ , représentée en Fig. 57, qui augmente de 0,04% entre  $V_b = 15$  V et  $V_b = 40$  V. Cette dérive pourrait être liée à une faible modification de la masse effective du mode de vibration due à une légère perturbation de sa forme lors de l'application de la tension de polarisation. Elle pourrait également provenir de certaines approximations du modèle (notamment l'hypothèse  $\kappa = 0,014 \approx 0$ ).

La Fig. 56 met cependant en évidence la qualité des ajustements obtenus sur les réponses en amplitude. De plus, la reconstruction des profils de réponse en phase à partir des paramètres identifiés est satisfaisante, malgré quelques légers écarts aux plus hautes tensions de polarisation (essentiellement pour les mesures de phases proches de 0).

On trace également, en Fig. 57, l'évolution des paramètres avec la tension de polarisation.

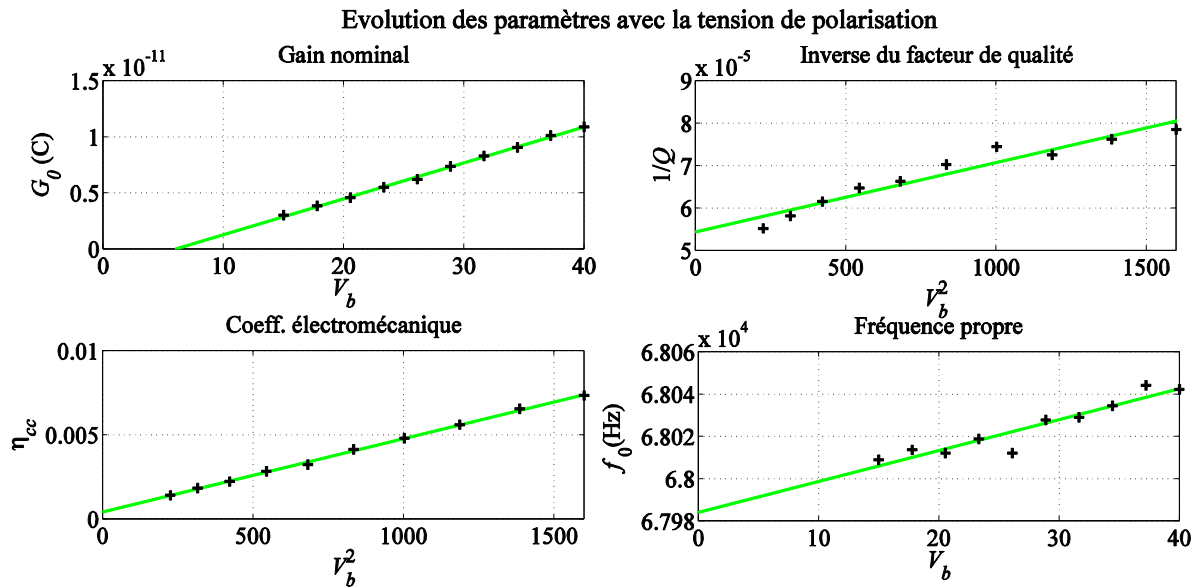


Fig. 57 Valeurs des paramètres en fonction de la tension de polarisation.

Les ordres de grandeur obtenus concordent avec la théorie. L'évolution du coefficient de conversion électromécanique avec le carré de la tension de polarisation est linéaire conformément au modèle, avec un très faible décalage au niveau de l'ordonnée à l'origine. De même, le gain statique est une fonction affine de  $V_b$  dont l'ordonnée à l'origine est non nulle ( $1,9 \times 10^{-12}$  C). Cet écart à l'origine a été constaté sur toutes les cellules testées mais sa source n'a pas pu être identifiée avec certitude. Parmi les causes potentielles d'erreur, nous avons pu éliminer les hypothèses suivantes :

- un biais introduit par la procédure d'identification entre la valeur réelle du gain et la valeur estimée.  
De nombreux tests réalisés sur des données simulées (avec ou sans bruit) ont montré une estimation précise et non-biaisée des paramètres, lors de la reconstruction de réponses en fréquence simulées. Ces tests sont similaires à ceux présentés pour un résonateur à non-linéarité cubique (dans le paragraphe III.F.c) et n'apportent pas d'information supplémentaire. C'est pourquoi ils ne sont pas repris dans ce manuscrit.
- l'impact de la non-linéarité de détection.  
L'hypothèse consistant à négliger la non-linéarité de détection, a été validé en réintroduisant cette non-linéarité à notre modèle. Ceci complique fortement les expressions obtenues et n'a qu'un impact à peine détectable sur les résultats aux amplitudes atteintes sur cette série de mesure, loin d'expliquer les écarts à la théorie.
- l'impact de la largeur des impulsions.  
A ces amplitudes, on n'a constaté aucun écart significatif sur des résultats expérimentaux obtenus pour des impulsions 5 fois moins larges, et une amplitude 5 fois plus grande.
- un phénomène de charge dans les diélectriques.  
Polariser le résonateur sous des tensions négatives n'a pas modifié les résultats, ce qui exclut cette hypothèse. De plus, tous les capteurs testés ont présenté les mêmes écarts à la théorie.
- une spécificité du capteur utilisé lors de cette expérience.  
Les mesures ont été reproduites sur une quinzaine de cellules différentes de capteur P90 provenant de deux lots de fabrication différents. En dehors de quelques capteurs

défaillants pour lesquels les mesures n'ont pas été concluantes, les cellules fonctionnelles ont toutes exhibé le même comportement et les mêmes écarts à la théorie.

- l'approximation de la forme du mode de résonance.  
Etant donné que tous les modèles testés, quelle que soit l'approximation utilisée (pont vibrant ou capacités planes sous actionnement par impulsions ou sinusoïdal), ont généré les mêmes écarts, les décalages restants ne proviennent donc pas de cette approximation.
- l'hypothèse consistant à négliger les termes d'ordre 2 en  $V_0$ .  
Les écarts entre la théorie et la pratique s'observent de plus en plus, à mesure qu'on augmente la tension de polarisation. Si la cause provenait de ces termes d'ordre 2, l'erreur observée devrait être plus grande à faible tension de polarisation qu'à haute tension de polarisation.
- l'hypothèse consistant à négliger la variation de la composante statique avec l'amplitude du mouvement.  
La composante statique estimée ici est extrêmement faible (inférieure à 1% du gap). L'effet observé de cette composante sur les résultats d'identification est également faible et n'explique en rien les écarts restants.

Parmi les causes potentielles d'écarts, l'existence d'un amortissement non-linéaire, suspectée dans la section III.F.d.i, pourrait partiellement expliquer une erreur d'identification. Il se pourrait également qu'un effet d'origine électrique (résistances parasites par exemple) soit à l'origine d'une chute de tension en entrée de la cellule, qui génère un décalage de quelques volts entre la tension de polarisation appliquée en entrée et la tension de polarisation réellement appliquée sur le résonateur. Cependant, nous n'avons pas pu identifier l'origine physique ni l'emplacement d'une telle chute de tension et cette hypothèse reste donc très incertaine.

Concernant le facteur de qualité, la modélisation précise de toutes les sources d'amortissement est restée hors du cadre de notre étude. De futurs travaux pourraient s'inspirer de la revue des (nombreuses) sources de pertes énergétiques potentielles listées dans la littérature [73]. Cependant, on peut constater que l'amortissement (inverse du facteur de qualité) croît quantitativement avec la tension de polarisation. En combinant cette évolution avec celle constatée en section III.F.d.i, on peut alors postuler une évolution du facteur de qualité sous la forme :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \beta_Q V_1 + \alpha_Q V_b^2 \quad (175)$$

avec  $\alpha_Q = 1,64 \times 10^{-8} \text{ V}^{-2}$  et  $Q_0 = 2,9 \times 10^4$  pour  $V_1 = 0,122 \text{ V}$ . Nous avons deux explications plausibles à ce type de comportement, entre lesquelles les mesures et connaissances actuelles ne nous ont pas permis de trancher avec certitude.

La première hypothèse fait référence à de la dissipation ohmique dans une résistance parasite de la cellule résonante. Cela reviendrait à dire que le facteur de qualité du résonateur est limité par un facteur de qualité électrique qui vérifie :

$$Q_e = \frac{1}{\alpha_Q V_b^2} \quad (176)$$

Dans le cas de nanorésonateurs, un comportement similaire a déjà été prédit et démontré [74]. Néanmoins, la démonstration du phénomène donnée dans [74] est fondée sur une linéarisation du comportement mécanique du résonateur. Elle fait intervenir une équation différentielle linéaire d'ordre 3 déduite de la combinaison d'une équation de comportement électrique avec l'équation de la dynamique du résonateur. Dans le cas non-linéaire, la prise en compte exacte de tels phénomènes électriques est plus complexe. Il faudrait alors tenter d'identifier des composants résistifs parasites intervenant dans la modélisation électrique du résonateur. Sous cette hypothèse, l'identification d'un modèle non-linéaire du second ordre sur un modèle d'ordre plus élevé pourrait être également la source des écarts entre les résultats expérimentaux et le modèle.

En dehors de la dissipation ohmique, la seconde explication possible fait référence à l'existence possible d'un mode de résonance parasite des structures environnant le résonateur. Dans le cas hypothétique où la fréquence propre d'un tel mode se trouverait être légèrement inférieure à un multiple de la fréquence de résonance du pont vibrant, des phénomènes impliquant la non-linéarité d'actionnement et des termes de couplage mécanique pourraient apparaître. Dans un tel cas, il est possible que la variation de la tension de polarisation (qui engendre une baisse de la fréquence de résonance) accorde la vibration du pont avec un mode de résonance parasite. De la sorte, les pertes énergétiques à l'encastrement pourraient augmenter avec la tension de polarisation [75].

Ces deux explications restent pour le moment à l'état d'hypothèse et aucune expérience réalisée jusqu'à présent n'a permis de trancher de manière certaine entre l'une et l'autre.

Malgré ces réserves, on peut considérer que la connaissance de l'évolution de tous ces paramètres avec la tension de polarisation et la tension d'actionnement, décrite en Fig. 54 et Fig. 57 suffirait à identifier d'éventuelles défaillances avant que des pannes ne se produisent. Dans la mesure où les modèles construits concordent avec les résultats d'expérience et que les écarts restants semblent correspondre à des erreurs systématiques, on peut sereinement utiliser le modèle choisi comme base saine pour le diagnostic préventif de défaillances. L'identification exhaustive des phénomènes encore non expliqués pourra faire l'objet de futurs travaux.

Toutes les mesures ont été réalisées à pression et température données. L'évolution du facteur de qualité avec la température est relativement bien connue par THALES (amortissement thermoélastique, voir [76] ou [77]) et il a donc été choisi de ne pas l'étudier spécifiquement. On s'est affranchi des variations de pression et de température en mesurant l'ensemble des 16 réponses fréquentielles (de cette section et de la section précédente) sur une durée totale inférieure à 30min et en branchant une seringue (hermétique) au niveau de l'entrée d'air du capteur. Au vu des résultats obtenus dans le cadre d'expériences non reproduites ici, l'évolution du facteur de qualité avec la pression appliquée sur le diaphragme de la cellule résonante est complexe et peu reproductible d'un capteur à l'autre. La détermination de l'impact de la pression sur le facteur de qualité est loin d'être triviale dans la mesure où une variation de pression génère une modification de l'état de contrainte à la fois dans la poutre et dans la structure environnante (notamment le diaphragme). Une modélisation de l'influence de la pression pourra faire l'objet de futurs travaux.

### III.G. Conclusion

Dans ce chapitre, on a décrit le comportement fréquentiel de résonateurs MEMS capacitifs à un degré de liberté. La construction d'une méthode de caractérisation en régime linéaire puis non-linéaire, et sa validation expérimentale, ont permis d'identifier jusqu'à 4 paramètres indépendants régissant le comportement du résonateur. La combinaison des informations données par ces paramètres permettra, à terme, l'identification et la discrimination de causes de défaillances voire le diagnostic préventif des capteurs.

On a également pu étudier l'influence de la forme d'actionnement sur les réponses fréquentielles non-linéaires, aussi bien sur les mesures d'amplitude que de phase. Un certain nombre de phénomènes spécifiques ont ainsi été mis en évidence et expliqués, à la fois théoriquement et expérimentalement, à très haute amplitude d'oscillation.

Les mesures réalisées soulignent également la largeur importante du pic de résonance en régime non-linéaire (proche de 50Hz) par rapport à la bande passante en régime linéaire (environ 6Hz), ce qui rend les mesures de caractérisation moins sensibles à la stabilité fréquentielle du signal d'actionnement. Le rapport signal sur bruit des mesures est également nettement meilleur qu'en régime linéaire. La combinaison de ces deux avantages permet donc d'envisager plus sereinement la faisabilité d'une telle caractérisation, à faible coût et faible encombrement, dans des systèmes embarqués, par rapport à un fonctionnement linéaire à faible amplitude d'oscillation.

Si ce chapitre a permis de mettre en évidence l'influence de la forme du signal d'actionnement sur la réponse en boucle ouverte, il est également légitime de s'interroger sur son influence en boucle fermée, dans le cadre d'une application de type capteur. Le chapitre suivant montre qu'il est également essentiel d'en tenir compte pour estimer les performances d'un capteur résonant capacitif. Pour ce faire, on commencera par décrire le principe de fonctionnement de capteurs oscillants. On donnera également quelques exemples d'architectures simples permettant de réaliser de tels oscillateurs. On étudiera enfin l'impact de la forme de l'onde d'actionnement et des paramètres du résonateur sur les conditions de pull-in résonant et sur les points de fonctionnement optimaux des oscillateurs MEMS.

## **IV. Amélioration des performances des capteurs MEMS capacitifs oscillants**

### **IV.A. Introduction**

Les capteurs MEMS oscillants étudiés dans ce chapitre sont des systèmes constitués d'un résonateur MEMS dont la vibration est maintenue par une boucle électronique de rétroaction. La fréquence des oscillations ainsi entretenues, sensible au mesurande, permet de réaliser la mesure. La stabilité fréquentielle de ces systèmes est donc un élément déterminant vis-à-vis de la précision et de la justesse de la mesure. Cet indicateur de performance est particulièrement critique dans des applications liées à la navigation inertielle. Toute dérive lente, due par exemple à la température ou au vieillissement du résonateur [78], limite les performances à long terme. Une telle dérive peut par exemple, dans les gyroscopes MEMS, générer des erreurs de localisation importantes : actuellement, les performances de dérive des gyroscopes MEMS avoisinent  $1^\circ/\text{h}$  [79].

Afin de limiter ce problème, il est indispensable d'étudier et de modéliser le comportement de l'oscillateur en fonction du point de fonctionnement nominal choisi à la conception. Dans la plupart des oscillateurs MEMS publiés dans la littérature, le résonateur est actionné en quadrature, ce qui correspond au pic de résonance du cas linéaire [1] [78].

Dans le cas d'un résonateur non-linéaire, certaines études ont montré que le point de fonctionnement optimal ne se situe pas à la quadrature. Notamment, pour les résonateurs à non-linéarité cubique, si l'actionnement est déphasé de  $120^\circ$  par rapport au déplacement du résonateur, il existe une amplitude optimale à laquelle la fréquence d'oscillation devient insensible aux fluctuations de la phase introduite par l'électronique [80]. Cette valeur correspond, pour de tels résonateurs, à la limite d'apparition d'une hystérésis sur les courbes de réponse en fréquence.

Une étude de Kenig et al. présente des résultats allant dans le même sens [17]. Ses conclusions sont plus générales dans la mesure où non seulement des fluctuations de phase mais également des fluctuations de gain de l'électronique et de paramètres mécaniques du résonateur y sont modélisées. Elle montre comment déterminer la phase de rétroaction optimale pour minimiser l'impact de ces différentes fluctuations. Là aussi, le point de fonctionnement optimal d'un oscillateur à non-linéarité cubique s'éloigne de la quadrature à mesure que l'amplitude d'oscillation augmente. Ces conclusions ont été validées expérimentalement [18].

Si la stabilité fréquentielle d'oscillateurs à non-linéarité cubique est déjà bien modélisée, aucune étude n'a encore déterminé, en revanche, les points de fonctionnement optimaux d'oscillateurs MEMS capacitifs actionnés par différentes formes d'onde. Pourtant, nous avons démontré dans le chapitre III que le comportement d'un résonateur MEMS capacitif diffère fortement de celui d'un résonateur de Duffing.

Le but de ce chapitre est de déterminer les points de fonctionnement optimaux de ces capteurs et de montrer dans quelle mesure ces points dépendent des paramètres du résonateur et de la forme de l'onde d'actionnement. Le chapitre débute par la présentation du fonctionnement général d'un capteur oscillant. (section IV.B). Avant de développer des modèles de stabilité fréquentielle des oscillateurs, on étudie le cas extrême de l'instabilité de pull-in résonant. Cette limite détermine l'ensemble des régimes accessibles aux oscillateurs MEMS capacitifs, et on les compare sous différentes ondes d'actionnement (section IV.C).

La section IV.D débute par la présentation des sources de bruit susceptibles d'impacter le comportement d'un oscillateur MEMS, ainsi que par la description des outils permettant l'étude de la stabilité fréquentielle des oscillateurs (spectre de bruit de phase, de bruit de fréquence et variance d'Allan). On modélise ensuite les fluctuations lentes de fréquence liées à l'utilisation de résonateurs MEMS. Un indicateur de performance permettant de comparer la stabilité fréquentielle de différents oscillateurs est proposé, et les points de fonctionnement optimaux en termes de stabilité fréquentielle vis-à-vis de cet indicateur sont calculés. La détermination de ces points optimaux est réalisée pour différentes sources de bruit telles que le bruit thermomécanique ou des fluctuations de différents paramètres. Des illustrations sont en particulier données pour les fluctuations de la phase de rétroaction (appelées « effet Leeson » [81]) ou de la tension de polarisation.

## **IV.B. Fonctionnement en boucle fermée des capteurs résonants**

### **IV.B.a. Principe et intérêt de la mesure résonante**

La conception d'un capteur résonant se fait par l'intermédiaire d'une structure dont la raideur (ou la masse) varie avec un mesurande (pression, température, accélération...). La fréquence propre de son (ses) mode(s) de vibration est alors modifiée. Une mesure de cette fréquence donne donc accès, après étalonnage, à la valeur du mesurande.

La mesure de fréquence propre peut se faire en boucle ouverte ou en boucle fermée. Le cas de la mesure en boucle ouverte a été traité dans le chapitre III. On pourrait donc réaliser des mesures répétées de fréquence propre en boucle ouverte. Cependant, on a vu que le temps caractéristique d'établissement du régime permanent est de  $3\tau = 6Q/\omega_0$  (voir section III.C.a) ce qui limite alors la bande passante de la mesure pour des résonateurs à haut facteur de qualité (temps de réponse de  $3n\tau$  pour  $n$  mesures à  $n$  fréquences d'actionnement différentes). La bande passante d'un capteur basé sur une mesure en boucle ouverte risquerait alors, avec de tels facteurs de qualité, d'être trop faible pour des applications aéronautiques, où le suivi des informations de vol peut nécessiter des bandes passantes de plusieurs centaines de hertz [82]. La baisse du facteur de qualité n'est pas une solution à ce problème, car la résolution de la mesure fréquentielle dépend de celle du pic de résonance, qui requiert généralement un facteur de qualité le plus élevé possible. Ceci justifie d'ailleurs des travaux de recherche visant à l'obtention des MEMS aux facteurs de qualité atteignant quelques millions [24].

Une option pour faire face à ce problème consiste à entretenir les oscillations du résonateur par une boucle de rétroaction. Le temps de réponse de l'oscillateur est alors, dans le pire des cas, de  $3\tau$  soit au minimum  $n$  fois inférieur au temps nécessaire à réaliser la mesure en boucle ouverte. Le principe de fonctionnement de ces structures est décrit en section IV.B.b.

L'utilisation de la fréquence comme grandeur de mesure est principalement intéressante du fait du caractère quasi-digital de l'information contenue dans la fréquence, qui peut être facilement mesurée via un comptage de fronts [83]. La mesure de fréquence trouve également son utilité dans les applications sensibles aux interférences [84], où l'intégrité de l'information de fréquence est assurée, quelle que soit la chaîne de transmission, bien plus qu'avec l'amplitude ou la phase.

#### IV.B.b. Structure générale d'une boucle auto-oscillante à MEMS

Le principe de fonctionnement d'un capteur MEMS auto-oscillant est représenté en Fig. 58. Il consiste en la combinaison d'une électronique de détection, d'une mise en forme du signal d'actionnement et d'une étape de conversion d'une grandeur électrique en une force d'actionnement.

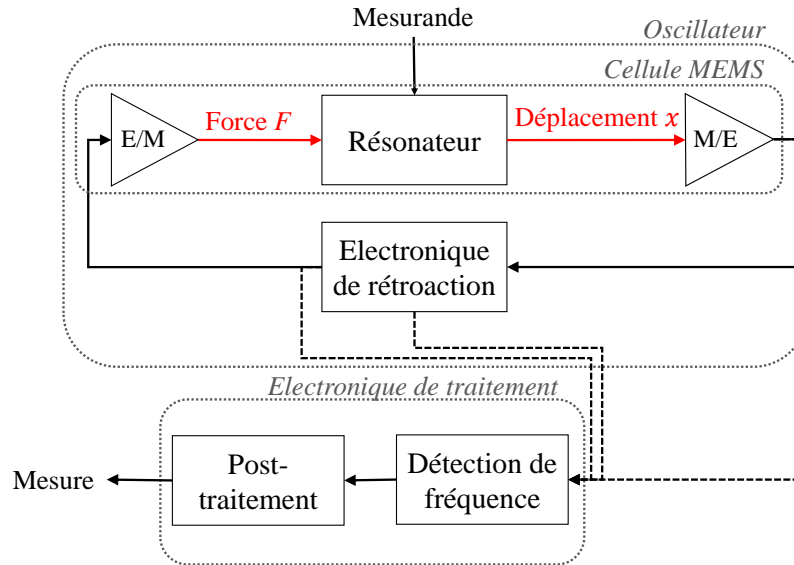


Fig. 58 Principe de fonctionnement d'un capteur MEMS résonant. Signaux électriques (flèches noires) et grandeurs mécaniques (flèches rouges). Les étapes de transduction électrique/mécanique et mécanique/électrique sont représentées par les triangles (respectivement notés E/M et M/E). La fréquence peut être récupérée à partir des signaux de détection, d'actionnement, ou de signaux intermédiaires de l'électronique de rétroaction (traits pointillés).

Physiquement, la boucle de rétroaction permet de réinjecter de l'énergie au résonateur pour compenser les différents phénomènes dissipatifs qu'il subit. Pour ce faire, l'électronique de rétroaction doit remplir deux fonctions (voir Fig. 59) :

- Amplifier le signal de sortie du résonateur.
- Déphaser le signal de sortie du résonateur.

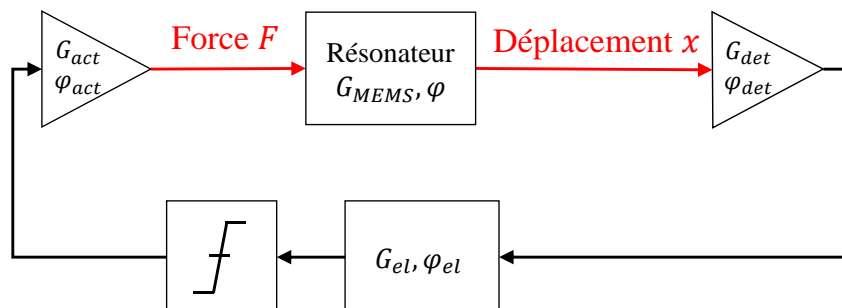


Fig. 59 Fonctions remplies par les différents éléments de la boucle auto-oscillante : non-linéarité (ici exemple d'une saturation) et gain et déphasage introduits par l'électronique ( $G_{el}, \varphi_{el}$ ), la détection (conversion mécano-électrique) ( $G_{det}, \varphi_{det}$ ), l'actionnement (conversion électro-mécanique) ( $G_{act}, \varphi_{act}$ ). L'ordre dans lequel ces fonctions sont réalisées peut différer.



Ceci se traduit sous la forme du critère d'oscillation de Barkhausen, qui impose, pour entretenir l'oscillation à une pulsation  $\omega$ , que :

- le gain  $G_{tot}$  de la boucle (produit des gains des différents blocs à la fréquence d'oscillation) vérifie :

$$G_{tot}(\omega) \equiv G_{act}(\omega)G_{MEMS}(\omega)G_{det}(\omega)G_{el}(\omega) = 1 \quad . \quad (177)$$

Cette condition permet à l'oscillation de se maintenir.

- le déphasage total dans la boucle (somme du déphasage introduit par le MEMS  $\varphi$  et du déphasage introduit par l'électronique de rétroaction  $\varphi_e$ ) soit nul :

$$\varphi(\omega) + \varphi_{el}(\omega) + \varphi_{act}(\omega) + \varphi_{det}(\omega) = 0 [2\pi] \quad . \quad (178)$$

Dans la suite, on notera :

$$\varphi_e(\omega) \equiv \varphi_{el}(\omega) + \varphi_{act}(\omega) + \varphi_{det}(\omega) \quad (179)$$

de sorte que la condition de Barkhausen impose :

$$\varphi_e(\omega) = -\varphi(\omega) [2\pi] \quad . \quad (180)$$

L'étude de la dynamique de démarrage des oscillations dans les oscillateurs MEMS est restée hors du cadre de notre étude. En pratique, afin de permettre ce démarrage (en présence de bruit), le gain  $G_{tot}$  de boucle doit être légèrement supérieur à l'unité. Une non-linéarité, telle qu'une saturation du gain, est également indispensable pour limiter le niveau des oscillations (voir Fig. 59). L'ordre dans lequel ces différentes fonctions (amplification, déphasage et saturation) peut être choisi arbitrairement, même si ce choix a un impact sur les performances de l'oscillateur en fonction de la présence de différentes sources de bruit.

Parmi les composants physiques capables de réaliser la fonction de déphasage, on peut notamment citer [85] :

- la boucle à verrouillage de phase (PLL) auquel cas l'amplitude d'actionnement est imposée par l'oscillateur contrôlé en tension présent dans la PLL et il n'est pas nécessaire de rajouter un élément saturant dans l'électronique de rétroaction ;
- un filtre (actif ou passif) en amont ou en aval de la non-linéarité. Dans ce cas, on parle d'oscillateur auto-entretenu.

La boucle d'oscillation peut dans certains cas être contrôlée en amplitude, principalement pour éviter que des amplitudes trop grandes et non maîtrisées ne viennent détériorer voire détruire le résonateur (voir section III.B.d). Dans ce cas, le système de contrôle de l'amplitude joue le rôle de la non-linéarité. Cependant, ce contrôle n'est pas indispensable au fonctionnement de l'oscillateur [85].

L'oscillation peut théoriquement être entretenue quelle que soit la phase (non-nulle) rajoutée par l'électronique. Cependant, la plupart des oscillateurs MEMS sont opérés en quadrature ( $\varphi_e = \frac{\pi}{2}$ ), ce qui correspond, dans le cas d'un résonateur linéaire, à la résonance [78] [86] et qui permet :

- d'optimiser le rapport signal sur bruit : le choix du point de fonctionnement au niveau du pic de résonance permet de limiter les effets liés au bruit en amplitude.
- d'optimiser la stabilité fréquentielle de la boucle : la pente de la réponse en phase étant maximale à la quadrature, une variation de phase dans la boucle de rétroaction, par exemple due au bruit, n'a qu'un impact limité sur la fréquence d'oscillation. Ce raisonnement qualitatif n'est cependant valable que dans le cas où le résonateur suit une loi de comportement linéaire. Dans le cas où des forces non-linéaires entrent en jeu, l'apparition d'une interdépendance entre l'amplitude et la fréquence rend ce raisonnement simpliste caduc comme on le verra dans la section IV.D. De plus, il y a de nombreuses autres sources de bruit dont l'impact n'est pas nécessairement minimal à la quadrature (on le verra également dans la section IV.D).

Maintenant que le principe de fonctionnement des capteurs oscillants a été décrit et illustré, on s'intéresse à la modélisation du comportement de ces capteurs pour différentes formes d'actionnement. Dans la suite du chapitre IV, on étudie un oscillateur à résonateur MEMS capacitif actionné en boucle fermée par les ondes précédemment décrites dans le chapitre III. Il s'agit donc :

- d'un signal sinusoïdal,
- d'un signal carré,
- d'un signal à impulsions,
- d'un signal à impulsions combinées.

Pour faciliter la lecture, ces signaux, déjà décrits dans le chapitre III, sont illustrés en Fig. 60.

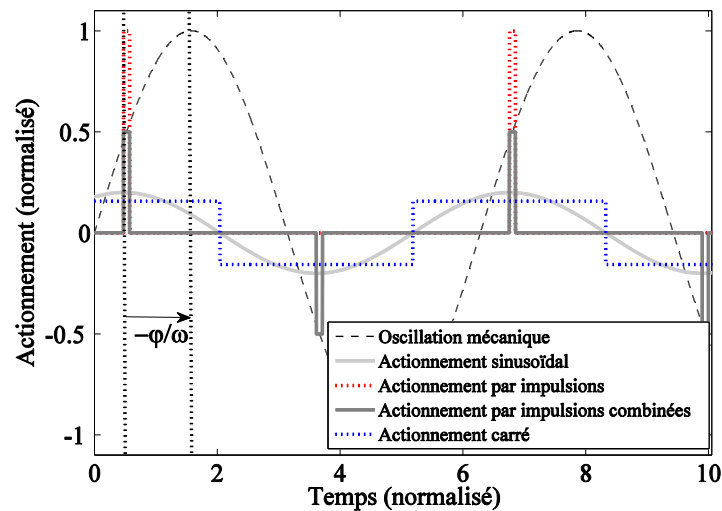


Fig. 60 Formes d'ondes étudiées : Actionnement sinusoïdal (trait gris clair), par impulsions (trait noir pointillé), par impulsions combinées (trait continu gris foncé) et carré (trait gris pointillé)

Les actionnements sinusoïdaux et carrés sont couramment utilisés dans les oscillateurs [18] [13] [60]. Le cas sinusoïdal limite le risque d'exciter un mode de résonance indésirable au sein de la structure MEMS. On pourra se référer à la littérature [61] [62] [87] et à l'annexe 11 pour la description d'architectures électroniques d'oscillateurs MEMS utilisant des signaux carrés ou impulsionnels. L'implémentation d'une architecture à actionnement par impulsions combinées a été réalisée préalablement à cette thèse et publiée [75] (voir Annexe 11).

## IV.C. Etude du pull-in résonant dans les oscillateurs à résonateur MEMS capacitif

### IV.C.a. Introduction

Les équations de comportement de l'oscillateur MEMS en boucle fermée sont identiques à celles déjà étudiées en boucle ouverte dans le chapitre III. La principale différence réside dans les variables à considérer. En boucle ouverte, la fréquence et l'amplitude d'actionnement sont imposées par le générateur de signaux, et l'amplitude et la phase de l'oscillation du résonateur en sont une conséquence. En boucle fermée, c'est la phase et l'amplitude d'actionnement qui sont imposées par l'architecture électronique. L'amplitude et la fréquence d'oscillation sont alors les conséquences de la phase et de l'amplitude de l'actionnement choisies.

Dans toute la suite du chapitre IV, on se concentrera sur un modèle de résonateur à capacités planes. On a démontré, dans le chapitre III, qu'un tel modèle présente l'avantage d'être à la fois simple d'utilisation et suffisant pour prédire qualitativement le comportement du résonateur à l'étude. De plus, dans toute la suite, on choisira l'origine des temps  $t$  de sorte que le déplacement  $x$  du résonateur s'écrive désormais :

$$x(t) = A \sin \omega t \quad (181)$$

Avant d'étudier plus en détail les performances des oscillateurs MEMS (en termes de stabilité fréquentielle), on s'intéresse ici au cas extrême d'instabilité défini par la condition de pull-in résonant (voir, pour l'interprétation qualitative, la section III.B.d). Cette condition indique les limites dans lesquelles il est possible d'ajuster la phase et le gain de rétroaction de l'électronique. Les développements des sections IV.C.b et IV.C.c ont été publiés dans une conférence internationale [88].

### IV.C.b. Limites de stabilité en boucle fermée : condition de pull-in résonant

Comme dans le chapitre III, on s'intéresse ici à un résonateur à capacités planes utilisé sous faible tension de polarisation (par rapport à la tension de pull-in statique  $V_{pi}$ , i.e. tel que  $V_b^2 \ll V_{pi}^2$ ). Ceci revient à supposer que (voir section III.B.d) :

$$\eta \ll \frac{4}{27} \quad (182)$$

et qu'on peut, comme précédemment, négliger la composante statique de déplacement  $a_0$ . Les équations décrivant, en régime permanent, le comportement d'un tel résonateur placé dans une boucle fermée sont identiques à celles décrites dans la section III.E. En revanche, la condition de stabilité des oscillations est modifiée. Pour trouver cette condition, on écrit, suivant la méthode des variations lentes, décrite dans la section II.D.f :

$$\begin{cases} \ddot{A} + A[1 - \Omega^2] + \frac{1}{Q}\dot{A} = 2\eta \left[ \frac{A}{(1 - A^2)^{\frac{3}{2}}} + F_s V_0 \cos \varphi_e \right] \\ 2\Omega\dot{A} + A\dot{\Omega} + \frac{A\Omega}{Q} = 2\eta F_c V_0 \sin \varphi_e \end{cases} \quad (183)$$

La prise en compte de toutes les dérivées temporelles présentes dans ce système peut être réalisée. Cependant, on peut se limiter, pour l'étude de la stabilité [23], au système suivant :

$$\begin{cases} S(A, \Omega) \equiv \frac{1}{2\Omega} \left[ 1 - \Omega^2 - \frac{2\eta}{A} \left[ \frac{A}{(1 - A^2)^{\frac{3}{2}}} + F_s V_0 \cos \varphi_e \right] \right] = 0 \\ \Omega C(A, \Omega) \equiv 2\eta F_c V_0 \sin \varphi_e - \frac{A\Omega}{Q} = A\dot{\Omega} + 2\Omega\dot{A} \end{cases} \quad (184)$$

En régime permanent, l'oscillateur est donc décrit par :

$$\begin{cases} S(A_s, \Omega_s) = 0 \\ C(A_s, \Omega_s) = 0 \end{cases} \quad (185)$$

Le système (184) permet de déterminer la stabilité des solutions du régime permanent  $(A_s, \Omega_s)$ . La première équation donne  $\Omega$  comme solution d'un trinôme du second degré qu'on peut donc écrire sous la forme d'une fonction de  $A$ . La seconde équation se réécrit alors :

$$\dot{A} = \frac{C(A, \Omega)}{2 \left( 1 + \frac{A}{2} \frac{\Omega'}{\Omega} \right)} \quad (186)$$

où  $\Omega' = \frac{\partial \Omega}{\partial A}$ . Afin d'alléger les notations, on omet de préciser que les dérivées partielles sont exprimées en  $(A_s, \Omega_s)$ .

On peut ensuite appliquer le critère de Routh-Hurwitz (à une dimension) pour déterminer la stabilité des solutions  $(A_s, \Omega_s)$  (voir chapitre II). Compte-tenu du fait que  $C(A_s, \Omega_s) = 0$ , les solutions  $(A_s, \Omega_s)$  sont stables si et seulement si :

$$\frac{DC}{DA} \equiv \frac{\partial C}{\partial A} + \frac{\partial C}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial A} < 0 \quad (187)$$

où  $\frac{D}{DA}$  désigne la dérivée totale par rapport à  $A$ . Dans le cas impulsionnel,  $\frac{\partial C}{\partial \Omega} = 0$  de sorte que la condition de pull-in résonant s'écrit simplement :

$$\frac{\partial C}{\partial A} = 0 \quad (188)$$

qu'on peut réécrire :

$$\frac{\partial \left[ \frac{C}{A} \right]}{\partial A} = 0 \quad (189)$$

car  $C(A_s, \Omega_s) = 0$ . L'oscillation est dès lors stable si et seulement si :

$$1 - A \frac{\partial \ln F_c}{\partial A} > 0 \quad . \quad (190)$$

On obtient finalement la condition de pull-in résonant :

$$1 - A \frac{\partial \ln F_c}{\partial A} = 0 \quad . \quad (191)$$

Dans le cas d'un actionnement sinusoïdal ou carré, le même raisonnement mène à :

$$1 - A \frac{\partial \left( \ln F_c + \frac{1}{\Omega} \right)}{\partial A} = 0 \quad . \quad (192)$$

Compte-tenu du fait que  $Q \gg 1$ , on peut considérer que  $\Omega$  varie peu avec  $A$  tant que  $\varphi_e$  est suffisamment éloigné de 0. Ceci est vérifié dans les oscillateurs car  $\varphi_e \simeq 0$  supposerait un gain électrique (donc  $V_0$ ) infini (voir deuxième équation du système (184)). On retrouve alors la condition de pull-in résonant (191).

L'expression littérale simple (191) permet de prendre conscience de l'importance du facteur d'amplification ( $\ln F_c$ ) correspondant à la composante en quadrature de l'actionnement (tracé en Fig. 43 dans la section III.E.c). Celui-ci définit en effet à lui seul la limite de stabilité de la boucle fermée, indépendamment de la composante en phase. La condition (191) est toujours vérifiée pour un résonateur de Duffing (à actionnement linéaire) car  $F_c$  est indépendant de  $A$ , ce qui prouve que les oscillations dans ce cas sont stables, quelles que soient l'amplitude et la phase de l'actionnement [89]. De plus, la limite du pull-in résonant est indépendante des paramètres du résonateur. Il est donc inutile, sous faibles tensions de polarisation, de chercher à optimiser les paramètres du résonateur vis-à-vis de ce phénomène.

#### IV.C.c. Illustration des limites de stabilités pour les différents actionnements

On détermine dans cette section les conditions de pull-in résonant pour les quatre ondes d'actionnement reproduites en Fig. 60. Les zones d'instabilité sont représentées par les zones hachurées sur la Fig. 61. Pour illustrer le comportement d'un résonateur par rapport à ces limites de pull-in, on trace également l'évolution de  $A(\varphi_e)$  pour  $Q = 10^4$  et  $\eta = 5 \times 10^{-4}$  pour différentes valeurs d'actionnement, même si la limite de pull-in résonant est indépendante de la valeur des paramètres du résonateur. Les limites de stabilité en boucle fermée diffèrent drastiquement des limites de stabilité trouvées en boucle ouverte dans le chapitre III. Par exemple, l'ensemble des valeurs de phase comprises entre 0 et  $\pi$  est accessible en boucle fermée jusqu'à des amplitudes atteignant plus de 60% du gap, alors que la réponse fréquentielle en boucle ouverte présente une discontinuité à des amplitudes bien plus faibles (proches de 20% du gap, voir Fig. 41 du chapitre III). Ceci permet de garantir le maintien des oscillations même en cas de variations de phase dans la boucle sans risque d'atteindre le pull-in résonant.

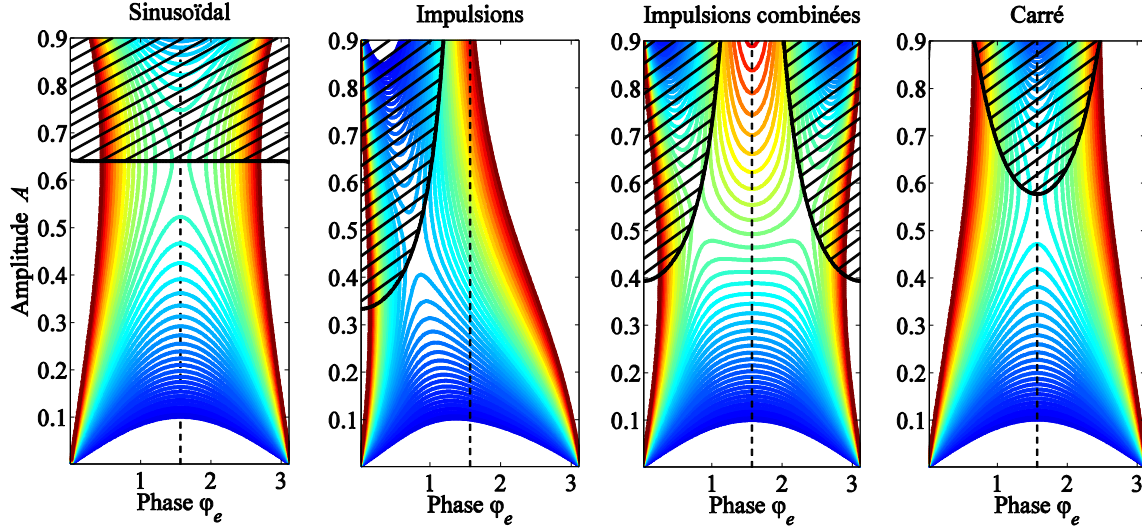


Fig. 61 Réponses en boucle fermée d'un résonateur à capacités planes et à détection linéaire pour différentes valeurs de  $V_0$  logarithmiquement distribuées entre  $10^{-2}$  et  $10^{-1}$ . Les zones d'instabilité sont représentées en hachuré.

L'équation (191) donne une expression analytique simple de la limite de stabilité dans tous les cas envisagés. Ces expressions sont répertoriées dans le Tableau 5. Etant donnée l'augmentation rapide de  $\ln F_c$  avec l'amplitude à la quadrature sous actionnement carré (voir, pour rappel, la Fig. 43 dans le chapitre III), on comprend pourquoi la limite de stabilité à la quadrature est plus faible que sous actionnement sinusoïdal (du fait de la présence du terme  $\frac{\partial \ln F_c}{\partial A}$ ).

Onde d'actionnement	$F_c$	Condition de pull-in résonant
Sinusoïdal	$\frac{2}{\sqrt{1-A^2}} - \frac{2}{1+\sqrt{1-A^2}}$	$A = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{2} (11 - \sqrt{13})} \approx 0,64$
Impulsions	$\frac{1}{(1 - A \cos \varphi_e)^2}$	$A = \frac{\sec \varphi_e}{3}$
Impulsions combinées	$\frac{1 + A^2 \cos^2 \varphi_e}{(1 - A^2 \cos^2 \varphi_e)^2}$	$A =  \sec \varphi_e  \sqrt{-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}$
Carré	$\frac{1}{1 - A^2 \sin^2 \varphi_e}$	$A = \frac{\csc \varphi_e}{\sqrt{3}}$

Tableau 5. Expression analytique des limites de stabilité pour un résonateur à capacités planes à haut facteur de qualité opéré sous faible tension de polarisation (devant la tension de pull-in statique).

Les limites de stabilités trouvées à la quadrature correspondent au cas décrit dans l'article de Juillard [25] et dans l'article de Zhang [1]. Dans un intervalle de déphasages supérieur à 0,8 radians, l'actionnement par impulsions combinées permet théoriquement de couvrir l'ensemble du gap entre les électrodes. Ce fait était déjà connu à la quadrature [25], mais c'est ici la première fois qu'on détermine l'intervalle dans lequel cette condition est respectée. Cet avantage se paie par contre au prix d'une efficacité moindre de l'actionnement par rapport au cas d'actionnement sinusoïdal, dans le sens où des valeurs de  $V_0$  plus élevées sont nécessaires pour atteindre des amplitudes d'oscillation comparables. Les mêmes conclusions ont déjà été tirées sur les réponses en boucle ouverte dans le chapitre III. Enfin, on constate qualitativement qu'une fluctuation de

phase  $\varphi_e$  n'a pas le même impact sur l'amplitude selon le point de fonctionnement et la forme d'onde choisis. Ce dernier point sera approfondi dans la section IV.D.g.

Les résultats de la Fig. 61 ne sont valables que dans un cas idéal : pour les appliquer sur un cas concret, il faut tenir compte de la manière dont la détection du mouvement est réalisée et de celle dont l'excitation est générée. Notamment, dans un oscillateur auto-entretenu (i.e. en l'absence de boucle à verrouillage de phase), la non-linéarité de détection capacitive peut distordre fortement les limites de pull-in résonant précédemment déterminées. La description de ce phénomène est présentée dans la section IV.C.d.

#### IV.C.d. Impact de la non-linéarité de détection capacitive sur le comportement d'un oscillateur auto-entretenu

En l'absence de boucle à verrouillage de phase, c'est-à-dire dans les oscillateurs auto-entretenus, le signal motionnel est directement utilisé pour la génération de l'onde d'actionnement par la boucle de rétroaction. Par exemple, la génération d'un actionnement par impulsions combinées peut se faire à l'aide d'un comparateur suivi d'un filtre dérivateur. Le schéma de principe d'un tel oscillateur a été publié par E. Colinet en 2004 [90] et est repris ici en Fig. 62. Le rapport cyclique du signal de sortie du comparateur est rigoureusement égal à 1/2 tant que le signal motionnel est strictement sinusoïdal.

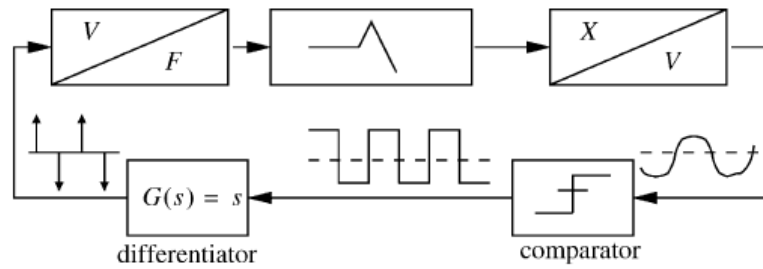


Fig. 62 Schéma de principe d'un oscillateur à impulsions combinées [90].

En revanche, dans le cas où la détection est non-linéaire, par exemple dans le cas d'un résonateur à détection unilatérale, le courant motionnel est l'image distordue du mouvement du résonateur. La relation exacte entre la capacité instantanée et le déplacement de la structure dépend de la forme du mode de résonance.

Afin de limiter la complexité calculatoire, on se place encore ici dans le cas d'un résonateur plan, qui suffit à tirer des conclusions qualitatives sur l'impact de la non-linéarité de détection. Un tel résonateur vérifie :

$$C(x, t) = \frac{C_0}{1 - x(t)} \quad . \quad (193)$$

De ce fait, dans le cas où un amplificateur de charge est placé en sortie du résonateur (voir II.E) la tension de sortie  $V_{out}$  de l'amplificateur s'écrit :

$$V_{out} = -\frac{C_0 V_b}{C_1} \left[ f_{NL}(x(t)) - \overline{f_{NL}(x(t))} \right] \quad (194)$$

où  $f_{NL}(x(t)) = \frac{1}{1-x(t)}$ . Ainsi, pour un déplacement sinusoïdal  $x(t) = A \sin \omega t$ , la distorsion harmonique de la tension mesurée grandit à mesure que l'amplitude  $A$  augmente. Un exemple présentant l'effet de cette non-linéarité pour  $C_0 V_b / C_1 = 1V$ , une fréquence  $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et une amplitude  $A = 0,8$  est tracé en Fig. 63.

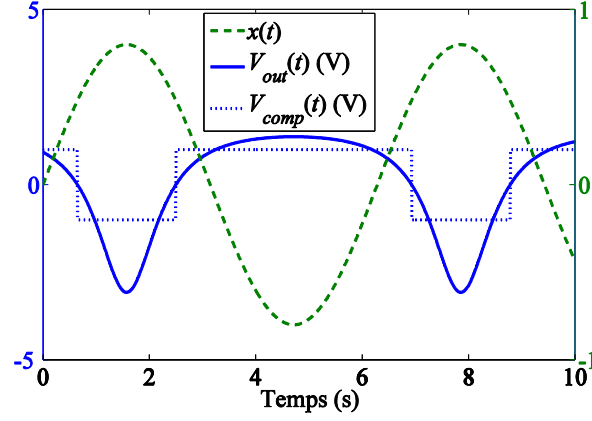


Fig. 63 Effet de la détection unilatérale sur la distorsion du signal motionnel. Déplacement du résonateur  $x$ , tension de sortie de l'amplificateur de charge  $V_{out}$  et tension de sortie du comparateur  $V_{comp}$ .

Le déclenchement d'un comparateur sur les instants où  $V_{out}$  s'annule génère alors un signal carré de rapport cyclique dépendant de l'amplitude d'oscillation (voir Fig. 63). On peut trouver les moments de déclenchement du comparateur en écrivant la capacité du MEMS:

$$C(x, t) = \frac{C_0}{1 - A \sin \omega t} \quad . \quad (195)$$

Les instants de déclenchement  $t_1$  et  $t_2$  du comparateur correspondant à  $V_{out} = 0V$  vérifient donc, pour un déplacement du résonateur  $x(t) = A \sin \omega t$  :

$$\theta_1 \equiv \omega t_1 = \arcsin \frac{1 - \sqrt{1 - A^2}}{A} \pm 2k\pi \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (196)$$

et

$$\theta_2 \equiv \omega t_2 = \pi - \theta_1 \quad . \quad (197)$$

Les équations décrivant le système et les expressions de  $F_s$  et de  $F_c$  données dans le Tableau 3 sont alors modifiées comme en témoignent l'équation (198) et le Tableau 6.

$$\begin{cases} S(A, \varphi_e) \equiv \frac{2\eta}{\Omega(1 - A^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\eta V_0}{\Omega A} F_s(A, \varphi_e) \cos \varphi_e - \frac{1 - \Omega^2}{\Omega} = 0 \\ C(A, \varphi_e) \equiv -\frac{2\eta V_0}{\Omega} F_c(A, \varphi_e) \sin \varphi_e - \frac{A}{Q} = 0 \end{cases} \quad (198)$$



	Impulsions	Impulsions combinées	Carré
$F_s$	$\frac{\cos(\theta_1 + \varphi_e)}{\cos \varphi_e (1 - A \cos(\theta_1 + \varphi_e))^2}$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\cos(\theta_1 + \varphi_e)}{\cos \varphi_e (1 - A \cos(\theta_1 + \varphi_e))^2} - \frac{\cos(\theta_1 - \varphi_e)}{\cos \varphi_e (1 + A \cos(\theta_1 - \varphi_e))^2} \right]$	$\frac{A \arctan \left( A \frac{\cos(\theta_1 + \varphi_e)}{\sqrt{1 - A^2}} \right)}{(1 - A^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos(\theta_1 - \varphi_e)}{(1 - A^2)(1 - A^2 \sin^2(\theta_1 - \varphi_e))}$
$F_c$	$\frac{\sin(\theta_1 + \varphi_e)}{\sin \varphi_e (1 - A \cos(\theta_1 + \varphi_e))^2}$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\theta_1 + \varphi_e)}{\sin \varphi_e (1 - A \cos(\theta_1 + \varphi_e))^2} - \frac{\sin(\theta_1 - \varphi_e)}{\sin \varphi_e (1 + A \cos(\theta_1 - \varphi_e))^2} \right]$	$\frac{\cos \theta_1}{(1 - A \sin(\theta_1 + \varphi_e))(1 - A \sin(\theta_1 - \varphi_e))}$

Tableau 6. Expression des composantes en phase et en quadrature de la force d'actionnement électrostatique pour un résonateur à capacités planes à détection unilatérale actionné par différentes formes d'onde.

Compte-tenu des expressions de  $F_c$ , il est difficile de trouver une formule analytique simple de la limite de stabilité. En revanche, on peut la déterminer numériquement. Les courbes ainsi obtenues sont présentées en Fig. 64 (on rappelle qu'elles sont indépendantes des paramètres choisis). Les courbes de réponse  $A(\varphi_e)$  d'un résonateur de paramètres  $\eta = 5 \times 10^{-4}$  et  $Q = 10^4$  sont également tracées pour différentes valeurs de  $V_0$  distribuées entre  $10^{-2}$  et  $10^{-1}$ . Pour permettre la comparaison on retrace également les résultats obtenus dans le cas d'une détection linéaire, qui servent de référence. Etant donné que le raisonnement présenté ici est relatif à l'utilisation d'une architecture spécifique pour un actionnement par impulsions (combinées ou non) ou carré, on se limite ici à ces trois actionnements.

Dans tous les cas étudiés ici, le déclenchement du signal d'actionnement sur le signal motionnel distordu modifie à la fois la réponse du résonateur  $A(\varphi_e)$  et les limites de stabilité. Du point de vue des courbes  $A(\varphi_e)$ , on retrouve qualitativement les mêmes comportements que dans le cas d'une détection linéaire, mis à part quelques différences d'ordre quantitatif :

- dans le cas d'un actionnement à onde carrée, les maxima des courbes  $A = f(\varphi_e)$  (lorsqu'ils existent) sont légèrement décalés vers les phases inférieures à  $\pi/2$ .
- sous actionnement à impulsions combinées, le phénomène de double résonance apparaît toujours mais il est moins marqué que dans le cas d'une détection linéaire (voir Fig. 61).

Par contre, la non-linéarité de détection a un effet très important sur les limites de stabilité. Par exemple, la Fig. 64 illustre la diminution de l'amplitude maximale accessible avec l'oscillateur à impulsions combinées. Du fait de la dépendance du rapport cyclique du signal de sortie du comparateur avec le déplacement du résonateur, on atteint par exemple une amplitude maximale proche de 60% du gap lorsque  $\varphi_e = \pi/2$  (contre 100% du gap avec une détection linéaire). Ainsi, si l'on souhaite actionner le résonateur sur toute la largeur du gap entre les électrodes, il est nécessaire de modifier l'architecture de génération du signal d'actionnement. On pourrait par exemple générer ce signal à partir du signal de sortie d'une boucle à verrouillage de phase, dont le rapport cyclique est fixe et imposé par l'oscillateur contrôlé en tension.

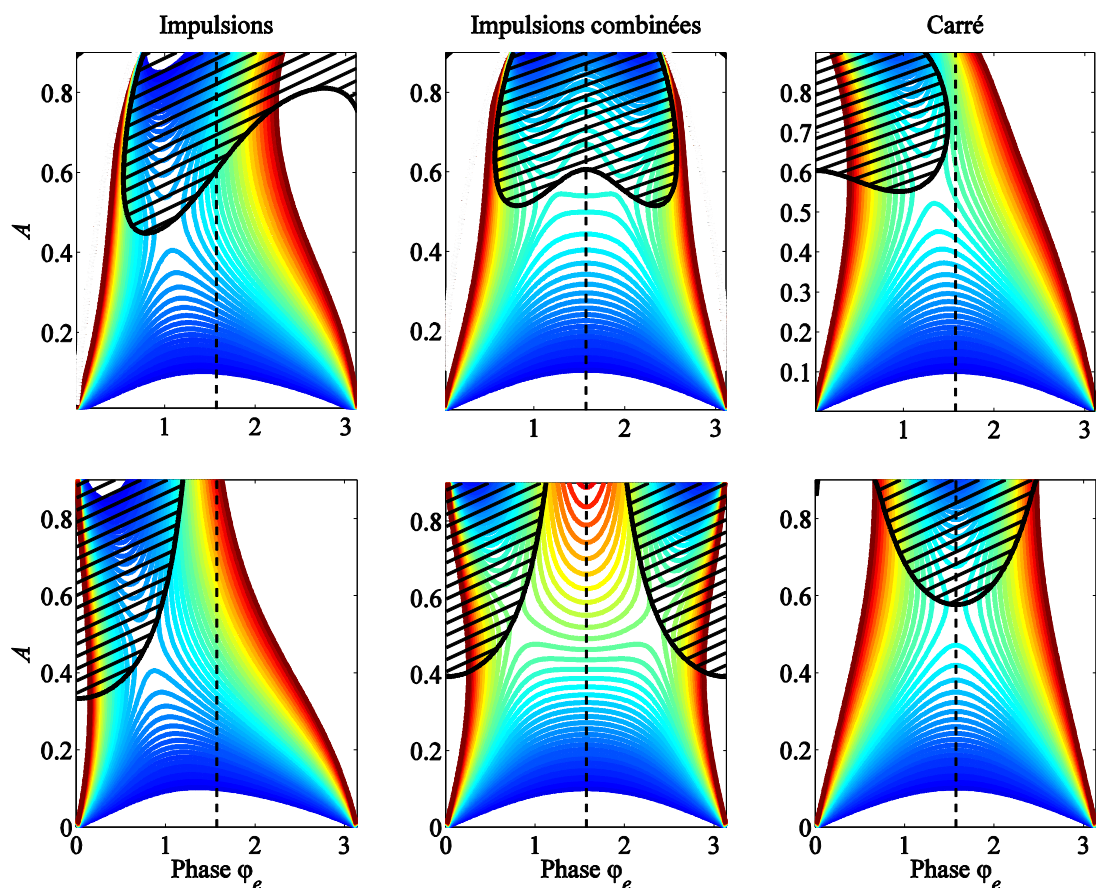


Fig. 64 Haut : Réponses en boucle fermée d'un résonateur à capacités planes à détection non-linéaire avec déclenchement de l'actionnement sur les passages par zéro de la tension de sortie. Bas : Réponses en boucle fermée dans le cas linéaire. Les zones d'instabilité sont représentées en hachuré.

Jusqu'à présent, on a déterminé les limites de stabilité des oscillateurs MEMS capacitifs. On a mis en évidence l'influence de la forme du signal d'actionnement sur celles-ci (et donc l'influence de l'architecture électronique). De plus, l'impact de la non-linéarité de détection capacitive sur la condition de pull-in résonant a également été étudié. Cette non-linéarité diminue drastiquement l'amplitude maximale d'oscillation accessible dans un oscillateur auto-entretenu à impulsions combinées. L'utilisation d'une boucle à verrouillage de phase ou une étape de filtrage des harmoniques supérieures du signal motionnel pourrait permettre de résoudre ce problème.

La vérification expérimentale des limites de pull-in résonant est complexe compte-tenu du fait que la mesure ne peut se faire sans risquer d'endommager définitivement le résonateur. Elle n'a pas encore été réalisée et pourra éventuellement faire l'objet de futurs travaux.

## IV.D. Etude du comportement d'un oscillateur en présence de bruit

Dans cette section, on cherche à caractériser les performances d'un oscillateur MEMS capacitif. Comme on l'a mis en évidence dans le chapitre III, le comportement d'un tel oscillateur est significativement différent de celui d'un oscillateur de Duffing. On s'attachera à souligner, lorsqu'il y en a, les différences entre un résonateur de Duffing et un résonateur capacitif en termes de stabilité fréquentielle. On identifie ici, grâce à une étude théorique, les points de fonctionnement optimaux vis-à-vis de diverses sources de bruit.

Avant de présenter les modèles mathématiques, on liste les différentes sources de bruit à envisager ainsi que les outils de description des performances fréquentielles d'un oscillateur.

### IV.D.a. Sources de bruit

Les sources potentielles de bruit dans les oscillateurs MEMS sont nombreuses [91] et dépendent de l'architecture considérée (i.e. du type et du nombre de composants utilisés). On regroupe ici les sources de bruit par signature spectrale, et on notera  $S_b(f)$  la densité spectrale de puissance du bruit :

- bruit blanc ou « quasi-blanc » défini par  $S_b(f) = cste$ .
- bruits en  $1/f^\alpha$  (avec  $\alpha \geq 1$ ), par exemple le « bruit rose » défini par  $S_b(f) \propto 1/f$  ou le « bruit marron » défini par  $S_b(f) \propto 1/f^2$ .
- bruits fortement colorés (ou « harmoniques ») tels que les bruits de réseau ou d'alimentation à découpage (à 50Hz ou 100 Hz), ou ceux dus à des effets d'antennes. Ces derniers sont particulièrement dépendants de l'environnement de travail. Ils ne seront pas traités ici.

#### IV.D.a.i. Bruit blanc (ou « quasi-blanc »)

En pratique, aucun bruit n'est parfaitement blanc et tous présentent une fréquence de coupure. Par abus de langage, on parlera de source de bruit blanc lorsque la fréquence de coupure de la densité spectrale de puissance du bruit est largement supérieure à toutes les fréquences de travail.

La première source de bruit blanc à considérer provient de l'agitation thermique au sein du résonateur et des composants résistifs présents dans l'oscillateur. Pour chacune des résistances  $R$  du circuit, la tension  $V_R$  à ses bornes, vérifie :

$$V_R = V_{R_0} + b_V \quad (199)$$

où  $V_{R_0}$  représente la tension en l'absence de bruit et où  $b_V$  est un processus stochastique dont la densité spectrale de puissance  $S_{b_V}$  est une constante qui dépend uniquement de la température  $T$  et de la valeur de la résistance (en  $V^2/Hz$ ) :

$$S_{b_V} = 4k_b T R \quad (200)$$

où  $k_b$  est la constante de Boltzmann.

L'agitation thermique a également un impact sur le bruit intrinsèque du résonateur, appelé bruit thermomécanique. Il s'agit du bruit provenant de l'agitation thermique au sein du composant [92]. L'expression de ce bruit thermomécanique peut s'obtenir en écrivant l'équation mécanique du résonateur linéarisée en l'absence d'actionnement (autre que le bruit lui-même):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f_n(t) \quad . \quad (201)$$

Par analogie avec le bruit thermique d'une résistance électrique [44], le bruit thermomécanique est un bruit quasi-blanc dont la densité spectrale de puissance vaut (en  $N^2/Hz$ ) :

$$S_{f_n} = \frac{4k_b T m \omega_0}{Q} = \frac{4k_b T \sqrt{km}}{Q} \quad . \quad (202)$$

Une augmentation du facteur de qualité du résonateur permet de diminuer le niveau de bruit thermomécanique, ce qui justifie la recherche de facteurs de qualité très élevés [24]. Une augmentation de la tension de polarisation a pour effet, à facteur de qualité fixé, de diminuer la constante de raideur équivalente  $k$  et donc le niveau de bruit thermomécanique. On pourrait donc être tenté de minimiser le niveau de bruit en travaillant à des tensions de polarisations élevées. Cependant, cet effet reste mineur dans la mesure où le résonateur est opéré loin du pull-in statique (voir section III.B.d). La constante de raideur du système est largement déterminée par la constante de raideur mécanique (i.e. indépendante des paramètres électriques). On peut, pour s'en convaincre, se référer aux mesures effectuées dans la section III.F. L'utilité d'une augmentation de la tension de polarisation est également à pondérer par la baisse du facteur de qualité qu'elle engendre, observée notamment sur le capteur P90 dans le chapitre III (mais aussi sur d'autres dispositifs [74]). De plus, cela ne peut se faire qu'au prix d'une augmentation de la consommation électrique du système. Enfin, une diminution de la masse du résonateur permet de minimiser le niveau de bruit thermomécanique, ce qui justifie l'utilisation de dispositifs aux dimensions réduites (NEMS pour « Nano-Electro-Mechanical Systems »).

Il est utile de remarquer qu'on n'obtient ici qu'une estimation (un ordre de grandeur) du bruit thermomécanique basée sur des hypothèses de linéarité qui ne sont théoriquement plus valables à grande amplitude. L'étude théorique du niveau de bruit thermomécanique dans un dispositif non-linéaire est restée hors du cadre de ces travaux.

Parmi les autres sources de bruit blanc (éventuellement non gaussien) [93] [94], on peut citer l'adsorption (et la désorption) de molécules en surface et le déplacement des défauts cristallins.

Le premier de ces deux phénomènes se déroule lorsqu'un milieu fluide est présent dans l'environnement du résonateur (par exemple l'air). Ces phénomènes ont été abordés dans un article de 1999 écrit par J.R. Vig et Y. Kim. Il existe plusieurs manières de rendre ce phénomène négligeable, la principale consistant à réaliser le vide autour du résonateur.

Le second cas est lié à la présence de défauts à l'intérieur du matériau constituant le résonateur. Ce phénomène est particulièrement présent dans les résonateurs polycristallins, où le déplacement de joints de grains, de vides ou de défauts ponctuels peut générer un bruit non-négligeable [91].

Tous ces bruits sont liés à la physique fondamentale. Leur niveau ne peut être limité par l'architecture électronique de l'oscillateur. En revanche, on verra, dans les sections IV.D.c à IV.D.g, comment, à niveau de bruit donné, il est possible d'optimiser la stabilité fréquentielle de l'oscillateur par un choix approprié de son point de fonctionnement.

#### IV.D.a.ii. Bruit en $1/f^\alpha$

Comme autre catégorie de bruits, on peut citer l'ensemble des bruits dont la densité spectrale de puissance évolue en  $1/f^\alpha$  avec  $\alpha \geq 1$ . L'un des plus connus est le bruit de scintillation (« flicker » en anglais), terme qui regroupe les bruits ayant une signature spectrale en  $1/f$  (également appelé « bruit rose »). L'existence d'un tel bruit dans de nombreux domaines de la physique (et même de l'art) semble attester d'une certaine universalité de ce phénomène, même si les sources potentielles en sont très diverses [95].

Comme exemple, on peut citer le bruit de scintillation des transistors, principalement des transistors MOS. Son origine est encore mal connue. Parmi les causes identifiées les plus probables, on cite généralement les fluctuations de la mobilité des porteurs de charge (variation de la résistance du canal) [96] ou la variation du nombre de porteurs de charge par piégeage des porteurs mobiles. Le niveau de bruit de scintillation dépend largement du type de composants utilisés dans la boucle d'oscillation. Ce bruit électronique peut se manifester à différents endroits et l'impact du positionnement des sources de bruit au sein de cette boucle ne doit pas être négligé [97]. Dans tous les cas, les composants électroniques doivent être choisis de sorte que le bruit électronique introduit dans la boucle d'oscillation ne limite pas la stabilité fréquentielle de l'oscillateur.

Parmi les autres sources de bruit en  $1/f^\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ ), on peut aussi citer des fluctuations lentes de paramètres (sous l'effet, par exemple, d'une dérive de température). Il est difficile de distinguer plusieurs sources de bruit de même signature spectrale, mais une contribution intrinsèque du résonateur est envisagée dans la littérature [98] [99]. En effet, de récentes études ont mis en lumière l'insuffisance du bruit thermomécanique et du bruit électronique pour expliquer les performances de stabilité des oscillateurs MEMS. Elles montrent que les performances de stabilité fréquentielle de ces oscillateurs sont significativement inférieures aux prévisions liées aux phénomènes connus (bruit thermomécanique, les limitations dues aux non-linéarités ou à des phénomènes de couplage, bruits liés à des impuretés ou des défauts). Une des sources de bruit expliquant ces écarts réside dans les fluctuations lentes de la raideur du résonateur au cours du temps [98] [99].

Enfin, il existe d'autres phénomènes physiques à l'origine de bruits en  $1/f^\alpha$ . Parmi les phénomènes connus, le mouvement brownien (défini comme le mouvement d'une particule dont la vitesse est un processus aléatoire qui suit une loi normale de distribution) présente une signature de bruit brun ( $\alpha = 2$ ) [100].

Il ne faut pas confondre le spectre des sources de bruit et le spectre de bruit de fréquence de l'oscillateur. Ce dernier est la conséquence combinée du spectre des sources de bruit, de leur positionnement dans la boucle d'oscillation et de la conversion électromécanique par le résonateur. La conversion de différentes sources de bruit en bruit de fréquence est étudiée dans les sections IV.D.c à IV.D.g. Notamment, on s'attachera à distinguer l'impact de bruits additifs et de bruits multiplicatifs sur le comportement d'un oscillateur MEMS. Avant d'étudier ce phénomène de conversion, on présente, dans la section, IV.D.b, les outils et définitions qui servent à décrire les performances fréquentielles d'un oscillateur.

#### IV.D.b. Outils de description des performances d'un oscillateur

La justesse et la précision des mesures fournies par un capteur résonant dépendent notamment de la stabilité de sa fréquence d'oscillation. Il existe trois façons de caractériser les performances d'un capteur résonant en termes de stabilité fréquentielle (en l'absence de variation du mesurande) [101]:

- Le spectre de bruit de phase.
- Le spectre de bruit en fréquence.
- La variance d'Allan.

Comme précédemment, on note  $A_s$  et  $\omega_s$  l'amplitude et la fréquence d'oscillation en l'absence de bruit. Dans ce cas, le mouvement du résonateur en régime établi en l'absence de bruit s'écrit, d'après nos notations :

$$x = A_s \sin[\omega_s t] \quad . \quad (203)$$

En présence de bruit, on observe en revanche un signal de fréquence et d'amplitude variables. On peut alors écrire  $x$  sous la forme [102] [97] :

$$x = A_s(1 + \epsilon_x(t)) \sin[\omega_s t + \varphi(t)] \quad (204)$$

ou encore :

$$x = A_s(1 + \epsilon_x(t)) \sin[\omega_s(1 + y_\omega(t))t] \quad (205)$$

où on a défini la fluctuation de pulsation instantanée normalisée par :

$$y_\omega(t) = \frac{1}{\omega_s} \frac{d\varphi}{dt} \quad . \quad (206)$$

La fonction  $\epsilon_x$  représente le bruit en amplitude. La fonction  $\varphi$  correspond, elle, à la phase instantanée du signal. Le cas particulier idéal (absence de bruits) correspond à  $\epsilon_x = 0$  et  $y_\omega = 0$  ou encore à  $\epsilon_x = 0$  et  $\varphi = cste$ . Dans le cas réel, on caractérise les fluctuations de phase instantanée par l'intermédiaire de la densité spectrale de puissance (i.e. la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation) du signal  $\varphi(t)$  ou du signal  $y_\omega$ . Lorsqu'on parlera de spectre ou de densité spectrale de puissance de  $\varphi$  ou de  $y_\omega$ , on notera systématiquement  $\Delta\omega$  la variable fréquentielle pour expliciter le fait qu'il s'agit de l'écart fréquentiel par rapport à la porteuse à  $\omega_s$ . On définit le spectre de bruit de phase  $\mathcal{L}$  comme :

$$\mathcal{L}(\Delta\omega) \equiv \frac{1}{2} S_\varphi(\Delta\omega) \quad (207)$$

où  $S_\varphi$  correspond à la densité de spectrale de puissance de  $\varphi$ .  $\mathcal{L}$  s'exprime généralement en dBc/Hz. Par abus de langage, on parlera de « spectre de bruit de phase » (ou de « spectre de bruit de fréquence ») au lieu de « densité spectrale de puissance de la phase » (ou de « densité spectrale de puissance de la fréquence »).

Le spectre de bruit de phase typique d'un oscillateur est représenté en Fig. 65 [101]. Ce spectre présente différentes pentes, caractéristiques de fluctuations de diverses origines.

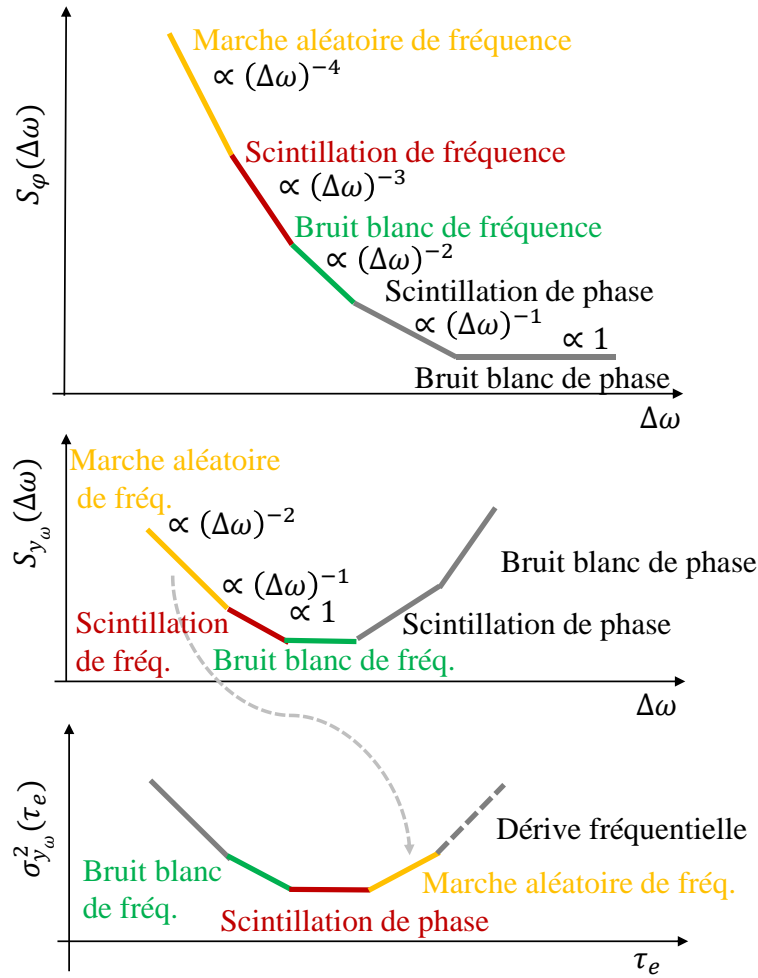


Fig. 65 Forme typique d'un spectre de bruit de phase (haut), d'un spectre de bruit de fréquence (milieu) et de la variance d'Allan (bas) d'un oscillateur en échelle logarithmique, reproduit à partir de [103].

D'après (206), le spectre de bruit de fréquence vérifie :

$$S_{y_\omega}(\Delta\omega) = \frac{\Delta\omega^2}{\omega_s^2} S_\varphi(\Delta\omega) = 2 \frac{\Delta\omega^2}{\omega_s^2} \mathcal{L}(\Delta\omega) \quad (208)$$

Le spectre typique de bruit de fréquence d'un oscillateur linéaire est également représenté en Fig. 65.

Enfin, on peut aussi s'intéresser à la variance d'Allan. Il s'agit d'une façon d'estimer la variance classique sur un signal échantillonné. Elle est définie, pour un signal échantillonné à une fréquence  $1/\tau_e$ , par :

$$AVAR(\tau_e) \equiv \sigma_{y_\omega}^2(\tau_e) = \frac{1}{2} E \left( (\overline{y_\omega^{k+1}} - \overline{y_\omega^k})^2 \right) \quad (209)$$

où  $E$  est l'espérance mathématique et où  $\overline{y_\omega^k}$  correspond au  $k$ -ième échantillon de la moyenne glissante du signal  $y_\omega$  sur une durée  $\tau_e$  définie par :

$$\overline{y_\omega}(t) = \frac{1}{\tau_e} \int_0^{\tau_e} y_\omega(t + t_v) dt_v \quad . \quad (210)$$

Ces approches traduisent, de façon différente, la stabilité fréquentielle d'un signal. Elles ne sont pas équivalentes dans la mesure où il est impossible de remonter aux spectres de bruit de phase et de bruit de fréquence à partir de la variance d'Allan.

L'allure typique de la variance d'Allan est également représentée en Fig. 65. Intégrer (moyenner) les mesures permet de minimiser l'effet des variations rapides de la fréquence. A partir d'une certaine durée d'intégration, l'opération de moyenne n'apporte plus d'amélioration. Le palier ainsi atteint correspond au palier d'instabilité de biais et est la conséquence du bruit de flicker sur la fréquence. A long terme, moyenner les mesures dégrade leur précision du fait des variations lentes de la fréquence.

Maintenant que les différentes sources de bruit et les caractéristiques spectrales d'un oscillateur ont été présentées, on étudie la manière dont le spectre du bruit injecté est mis en forme par l'oscillateur et converti en bruit de fréquence.

#### IV.D.c. Conversion du bruit injecté dans le système en bruit de fréquence

La modélisation de la conversion du bruit injecté en bruit de fréquence dans les oscillateurs est un sujet large et complexe, de par la multitude de sources de bruit potentiels et de phénomènes de conversion des bruits d'amplitude en bruit de phase. Le modèle le plus couramment utilisé, et le plus simple à comprendre est le modèle de Leeson [104]. Il prend en compte le temps de réponse de la boucle oscillante vis-à-vis de fluctuations de la phase de rétroaction (phase imposée en entrée du résonateur) et indique qualitativement comment les fluctuations de fréquence de l'oscillateur sont liées aux fluctuations de phase en entrée du résonateur. Des fluctuations rapides de phase d'entrée (de temps caractéristique inférieur à  $2Q/\omega_s$ ) génèrent une évolution instantanée de la phase de sortie du résonateur (il est court-circuité) de sorte que le spectre de bruit de phase est identique, aux fréquences éloignées de la porteuse, au spectre des fluctuations de phase en entrée. Au contraire, des fluctuations lentes de phase d'entrée sont converties en fluctuations de fréquence par l'intermédiaire de la réponse fréquentielle du résonateur.

Ce raisonnement mène à l'expression analytique :

$$S_\varphi(\Delta\Omega) = S_{\varphi_e}(\Delta\Omega) \left[ 1 + \frac{1}{4Q^2(\Delta\Omega)^2} \right] \quad (211)$$

où les spectres ont été définis par rapport à la l'écart fréquentiel à la porteuse normalisée  $\Delta\Omega = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ .

On peut alors compléter le schéma de la Fig. 65 en introduisant la fréquence de coupure  $\omega_s/2Q$  et le temps caractéristique  $2Q/\omega_s$ , pour obtenir la Fig. 66 :



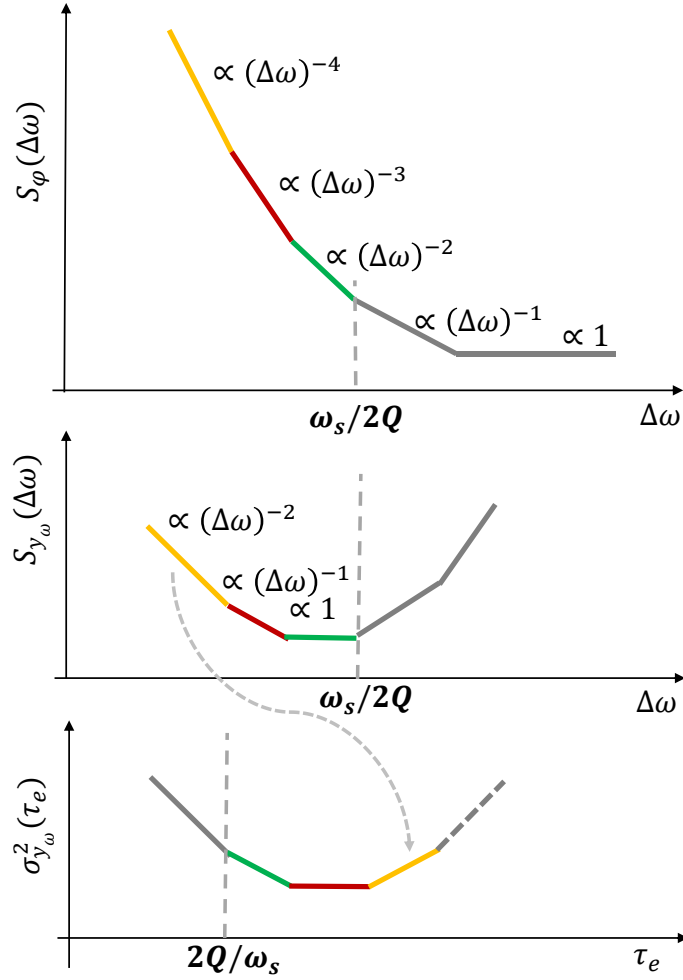


Fig. 66 Position de la pulsation de coupure  $\omega_s/2Q$  et du temps caractéristique  $2Q/\omega_s$  sur les spectres de bruit de phase et de fréquence et sur le graphique de variance d'Allan, selon le modèle de Leeson.

Le modèle de Leeson permet donc de tirer de premières conclusions intéressantes sur la constitution du spectre de bruit de fréquence d'un oscillateur. De manière plus générale, Ward et Duwel étendent cette formule à un résonateur quelconque, éventuellement non-linéaire, qui fait intervenir la pente de la réponse en phase [97] :

$$S_\varphi(\Delta\Omega) = S_{\varphi_e}(\Delta\Omega) \left[ 1 + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\Omega} \right)^{-2} \frac{1}{(\Delta\Omega)^2} \right] . \quad (212)$$

L'équation (212) est bien équivalente à l'équation (211) pour un résonateur linéaire (voir les définitions du facteur de qualité en section II.B.a).

La prise en compte de sources de bruit autres que des fluctuations de phase en entrée du résonateur n'est pas incluse dans le modèle de Leeson. Pour modéliser de façon plus générale le bruit de fréquence, il existe de nombreuses autres approches [87] [97] [105] [104] [106] [107] [108] [109] [110]. Un comparatif de ces différentes méthodes peut notamment être trouvé dans article de revue récent écrit par S.V. Shinde [111]. Afin de comprendre l'impact du bruit injecté sur le comportement d'un oscillateur, l'un des modèles les plus accessibles à l'intuition est développé par A. Hajimiri [108], qui analyse les effets du bruit sur deux composantes (voir Fig. 67):

- une composante du bruit en phase avec le signal d'oscillation.
- une composante du bruit en quadrature avec le signal d'oscillation.

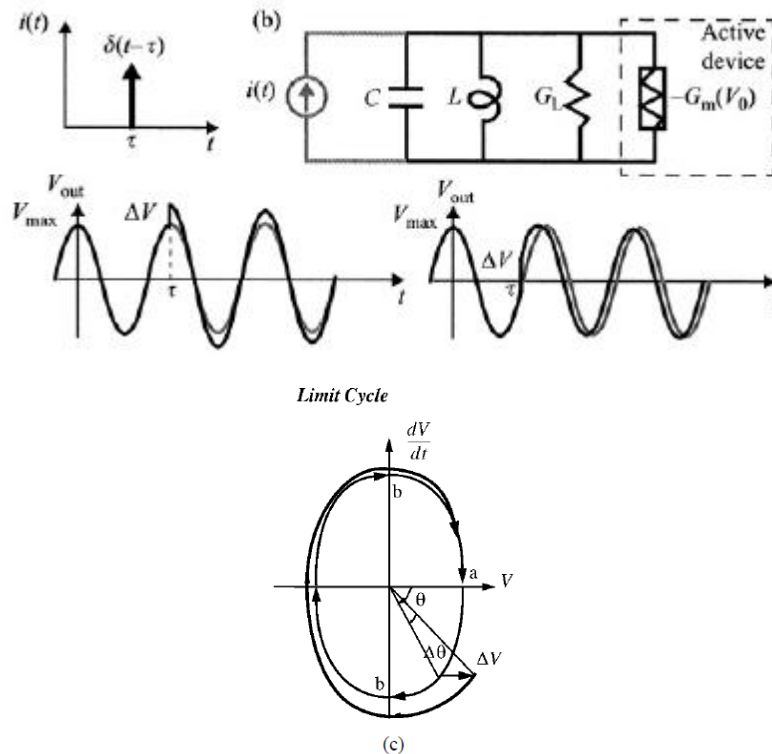


Fig. 67 Décomposition du bruit sur un oscillateur LC par A. Hajimiri [108] [102]. (a) Impulsion  $i(t)$  de bruit injectée en phase. (b) Impulsion  $i(t)$  de bruit injectée en quadrature. (c) Effet d'une impulsion sur l'amplitude et la phase de l'oscillateur dans l'espace des phases.

A. Hajimiri caractérise alors l'oscillateur par une fonction de sensibilité impulsionnelle en phase et en amplitude. Cet outil permet d'étudier l'impact de l'instant auquel l'oscillateur subit une perturbation impulsionnelle. Il distingue notamment deux cas particuliers, valables pour un oscillateur linéaire de type LC : lorsqu'une impulsion de bruit est déclenchée en phase ou en quadrature avec l'oscillation. Pour un tel oscillateur, une impulsion de bruit injectée au passage par zéro du signal de l'oscillateur a un impact maximum sur la phase de l'oscillation, mais nul sur son amplitude. A l'inverse, une impulsion de bruit générée à un extrême du signal de l'oscillateur a un impact nul sur la phase de l'oscillation mais maximal sur son amplitude. Il s'agit d'une des interprétations physiques les plus accessibles sans formalisme mathématique complexe, et elle permet de comprendre à quel point les composantes en phase et en quadrature du bruit injecté ont des conséquences différentes sur le comportement de l'oscillateur.

Le formalisme utilisé ici ne fera pas référence aux fonctions de sensibilité impulsionnelles en phase et en amplitude. En revanche, on s'attachera à bien distinguer l'impact du bruit injecté en phase de celui du bruit injecté en quadrature.

#### IV.D.d. Stabilité fréquentielle d'un oscillateur soumis à un bruit additif

Dans cette section, on étudie l'impact d'un bruit additif sur le comportement d'un oscillateur MEMS. On se limitera donc dans un premier temps à l'étude du système décrit en Fig. 68. Le bruit  $b(t)$  correspond, par exemple, au bruit thermomécanique du résonateur. Une étude similaire à celle présentée dans cette section a fait l'objet d'une publication dans une conférence internationale [112].

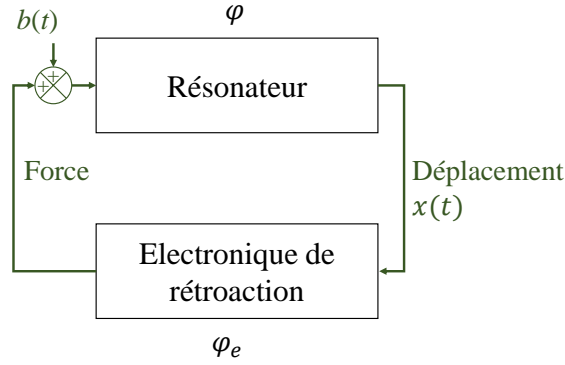


Fig. 68 Système étudié pour la modélisation du bruit de fréquence soumis à un bruit additif.

Pour commencer, avant de considérer le cas plus général d'un résonateur non-linéaire, on traite le cas simple d'un résonateur linéaire. L'étude de ce cas simple permet déjà de tirer des conclusions intéressantes sur la mise en forme du bruit. Dans ce paragraphe, on considère le cas où le régime faiblement perturbé d'un oscillateur peut être décrit par l'équation:

$$\ddot{x} + \frac{1}{Q}\dot{x} + x = F \sin(\omega t + \varphi_e) + b(t) \quad (213)$$

où  $b(t)$  est considéré comme une perturbation de faible amplitude au régime permanent non-perturbé décrit par (pour un résonateur à haut facteur de qualité) :

$$x_s(t) = A_s \sin(\omega_s t) \quad (214)$$

En régime perturbé, la solution s'écrit alors :

$$x(t) = A(t) \sin(\omega(t)t) \quad (215)$$

Dans la suite, on travaillera avec la pulsation normalisée :

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{\omega_0} \quad (216)$$

et on notera comme précédemment  $\Omega = \omega/\omega_0$ . La méthode de la balance harmonique donne :

$$\begin{cases} A[1 - \Omega^2] = F \cos \varphi_e + b^s \\ 2\Omega\dot{A} + A\dot{\Omega} + \frac{A\Omega}{Q} = F \sin \varphi_e + b^c \end{cases} \quad (217)$$

où les composantes en phase (exposants  $s$ , pour « sinus ») et en quadrature (exposants  $c$ , pour « cosinus ») sont :

$$\begin{cases} b^s = \frac{\omega_s}{\pi} \int_t^{\frac{2\pi}{\omega_s} + t} b(u) \sin \omega_s u \, du \\ b^c = \frac{\omega_s}{\pi} \int_t^{\frac{2\pi}{\omega_s} + t} b(u) \cos \omega_s u \, du \end{cases} \quad (218)$$

Dans le cas où  $b$  est stationnaire (comme c'est le cas d'un bruit blanc par exemple),  $b^s$  et  $b^c$  sont cyclostationnaires. On pourra se référer à [113] pour une étude détaillée de ce type de processus. On peut alors définir pour  $b^s$  et  $b^c$  un spectre empirique vérifiant :

$$S_{b^s}(\Omega) = S_{b^c}(\Omega) = \frac{\Omega_s^2}{\pi^2 \Omega^2} \sin^2 \left[ \frac{\pi \Omega}{\Omega_s} \right] (S_b(\Omega - \Omega_s) + S_b(\Omega + \Omega_s)) \quad (219)$$

On étudiera en particulier les fluctuations ayant une influence sur l'instabilité de biais [104] (voir Fig. 66), de temps caractéristique supérieur à  $2Q/\omega_s$ . Ce temps, caractéristique d'une rupture de pente de la variance d'Allan représentée en Fig. 66, est indépendant du spectre des sources de bruit et uniquement dépendant du résonateur utilisé. Ceci permet de tirer des conclusions générales sur l'optimisation d'un oscillateur MEMS indépendamment du spectre des sources de bruits qui impactent son fonctionnement.

L'équation (219) montre que, les composantes de  $b$  proches de la porteuse sont mises en forme par l'oscillateur et se trouvent modulées autour de  $\Omega_s$ , qui est en dehors de la bande d'intérêt  $[0, \frac{\Omega_s}{2Q}]$ . Dans les limites d'un tel modèle, des fluctuations de fréquence en  $1/f$  ne peuvent s'expliquer que par d'autres types de bruit, non additifs. Par exemple, un bruit rose additif « mis en forme » spectralement par une non-linéarité quadratique peut générer une caractéristique en  $1/f$  du spectre de bruit de fréquence [99]. C'est également le cas de fluctuations lentes de paramètres du système comme on l'expliquera dans la section IV.D.e.

Afin de modéliser l'impact du bruit  $b$  à travers  $b^s$  et  $b^c$ , on peut poursuivre le raisonnement en écrivant l'amplitude et la fréquence normalisée comme faiblement perturbées autour de la solution du régime permanent en l'absence de bruit :

$$\begin{cases} A = A_s + \delta A \\ \Omega = \Omega_s + \delta \Omega \end{cases} \quad (220)$$

Un développement limité au premier ordre donne alors :

$$\begin{cases} \delta A[1 - \Omega_s^2] - 2A_s\Omega_s\delta\Omega = b^s \\ 2\Omega_s\delta A + A_s\delta\Omega + \frac{A_s\delta\Omega + \Omega_s\delta A}{Q} = b^c \end{cases} \quad (221)$$

En combinant les deux équations, on aboutit à :

$$\underline{\delta\Omega} = H_{\sin} \underline{b^s} + H_{\cos} \underline{b^c} \quad (222)$$

avec :

$$\begin{cases} H_{sin}(\Delta\Omega) = -\frac{2\Omega_s}{A_s} \frac{j\Delta\Omega + \frac{1}{2Q}}{(1 + 3\Omega_s^2)j\Delta\Omega + \frac{1 + \Omega_s^2}{Q}} \\ H_{cos}(\Delta\Omega) = \frac{1}{A_s} \frac{1 - \Omega_s^2}{(1 + 3\Omega_s^2)j\Delta\Omega + \frac{1 + \Omega_s^2}{Q}} \end{cases} \quad (223)$$

On constate que les fluctuations de la fréquence sont la conséquence des composantes en phase et en quadrature du bruit injecté, mis en forme respectivement par les fonctions de transfert  $H_{sin}$  et  $H_{cos}$ . Logiquement, plus l'amplitude d'oscillation augmente, plus les fluctuations de fréquences sont faibles, à niveau de bruit donné (du fait de la présence du coefficient  $1/A_s$ ). Les fluctuations de fréquence sont donc minimisées, vis-à-vis du bruit additif blanc, lorsque le résonateur est actionné à la quadrature ( $\varphi_e = \pi/2$ ) qui correspond à la résonance, donc à la plus haute amplitude  $A_s$  accessible à actionnement donné.

Pour un résonateur à haut facteur de qualité,  $\Omega_s \simeq 1$  pour  $Q \gg 1$  (tant que  $\varphi_e$  est suffisamment éloigné de 0 (modulo  $\pi$ ), cf. réponses fréquentielles de la section III.E.c.iv).

Ainsi, vis-à-vis du bruit injecté en phase, la fonction de transfert  $H_{sin}$  peut être approximée par une constante :

$$H_{sin} \simeq -\frac{1}{2A_s} \quad . \quad (224)$$

De plus, on peut constater que le bruit injecté en quadrature avec l'oscillation est mis en forme par  $H_{cos}$  qui est un filtre passe-bas du premier ordre de pulsation de coupure :

$$\Omega_c = \frac{1 + \Omega_s^2}{Q(1 + 3\Omega_s^2)} \simeq \frac{1}{2Q} \quad (225)$$

et de gain :

$$|H_{cos}| = \frac{1 - \Omega_s^2}{A_s} \ll |H_{sin}| \quad . \quad (226)$$

Comme  $H_{sin}$  est constant (voir (224)) et que  $H_{cos}$  est quasiment constant sur la bande passante  $[0; \Omega_s/2Q]$ , le résonateur réagit quasiment instantanément à des bruits additifs de temps caractéristique (adimensionné) supérieur à  $2Q/\Omega_s$ . On parlera alors de régime quasi-statique vis-à-vis de ces perturbations. Compte-tenu de  $|H_{cos}| \ll |H_{sin}|$ , pour un résonateur linéaire, le bruit injecté en phase avec le mouvement du résonateur génère l'essentiel des fluctuations de fréquence. Pour mieux voir comment ces composantes influent sur les fluctuations de fréquence, on peut déduire la densité spectrale de puissance  $S_{\delta\Omega}$  des fluctuations de fréquence  $\delta\Omega$ . Compte-tenu de  $\Omega_s \simeq 1$ , on peut même écrire  $S_{y_\omega} \simeq S_{\delta\Omega}$ , de sorte que :

$$S_{y_\omega} \simeq S_{\delta\Omega} = |H_{sin}|^2 S_{b^s} + |H_{cos}|^2 S_{b^c} \quad . \quad (227)$$

L'équation (227) n'est rigoureusement valable que si  $b^s$  et  $b^c$  sont indépendants, ce qui est vrai à long terme (par rapport au temps caractéristique adimensionné  $2Q/\Omega_s$ ). Cette hypothèse est également retenue dans d'autres travaux de la littérature scientifique [17]. Le spectre en fréquence de l'oscillateur est bien la somme de deux composantes, respectivement corrélées aux bruits injectés en phase et en quadrature. Ceci est cohérent avec l'approche de A. Hajimiri [108]. On pourrait de cette manière déduire comment le spectre du bruit injecté est mis en forme en spectre de bruit de fréquence.

Au-delà des considérations spectrales, on peut également s'intéresser à la variance d'Allan estimée pour un temps d'échantillonnage adimensionné  $2Q$  qui s'obtient à partir de :

$$AVAR(2Q) = 2 \int_0^{\frac{1}{2Q}} S_y(\Delta\Omega) d(\Delta\Omega) \quad . \quad (228)$$

Dans le cas particulier d'un bruit  $b$  supposé blanc, de variance  $\sigma_b^2$ , la variance de  $b^c$  et de  $b^s$  vaut (voir Annexe 12):

$$\sigma_{b^c}^2 = \sigma_{b^s}^2 \simeq \frac{\sigma_b^2}{\pi} \quad . \quad (229)$$

On trouve alors la variance d'Allan d'un oscillateur à résonateur linéaire sous la forme :

$$AVAR(2Q) \simeq \frac{\sigma_b^2}{4\pi A_s^2 Q} \left[ \begin{array}{c} \text{Contribution de } b^s \\ \tilde{1} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Contribution de } b^c \\ \frac{1}{2} \cot^2 \varphi_e \end{array} \right] \quad . \quad (230)$$

On prouve ainsi mathématiquement que le point optimal de fonctionnement d'un résonateur linéaire vis-à-vis d'un bruit additif est situé à la quadrature qui correspond simultanément au maximum d'amplitude et à  $\cot \varphi_e = 0$ .

Un raisonnement comparable peut être mené sur un résonateur non-linéaire, moyennant une complexité mathématique plus importante. On se référera, pour les calculs, à l'Annexe 13. Dans ce cas, les fonctions de transfert de mise en forme du bruit s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{sin}(\Delta\Omega) \simeq -\frac{1}{2A_s} \\ H_{cos}(\Delta\Omega) \simeq \frac{\epsilon_h}{4QA_s \left[ j\Delta\Omega + \frac{1}{2Q} - \frac{1}{2} \frac{\partial g^c}{\partial A} \right]} \end{array} \right. \quad (231)$$

où  $g^c$  (respectivement  $g^s$ ) représente la composante en quadrature (respectivement en phase) de l'ensemble des forces non-linéaires exercées sur le résonateur (voir Annexe 13) et où :

$$\epsilon_h = \frac{2g^s}{g^c} \left[ 1 - \frac{A_s}{g^s} \frac{\partial g^s}{\partial A} \right] \quad . \quad (232)$$

Comme détaillé dans l'Annexe 13, ces expressions de  $H_{sin}$  et de  $H_{cos}$  ne sont valables que pour un résonateur à haut facteur de qualité opéré « suffisamment loin » de  $\varphi_e = 0 [\pi]$  pour vérifier :

$$\begin{cases} \Omega_s \simeq 1 \\ \frac{\epsilon_h}{2Q} \ll 1 \end{cases} . \quad (233)$$

Dans le cas linéaire,  $g^s$  et  $g^c$  sont indépendants de l'amplitude et on retrouve le résultat (230) en constatant que  $\epsilon_h = \cot \varphi_e$ . Dans le cas non-linéaire comme dans le cas linéaire, la fonction  $H_{sin}$  peut être approximée par un gain pur, tandis que  $H_{cos}$  est un filtre passe-bas (de fréquence de coupure  $\frac{1}{2Q} - \frac{1}{2} \frac{\partial g^c}{\partial A}$  légèrement différente du cas linéaire). Cependant, le gain nominal de  $H_{cos}$  dépend cette fois de la valeur de  $\frac{\partial g^c}{\partial A}$  et de  $\epsilon_h$ . La présence de ces deux termes génère une différence importante par rapport au cas linéaire. Pour illustrer cette différence, on peut calculer la variance d'Allan exprimée en  $2Q$  et la comparer au cas linéaire :

$$\begin{aligned} AVAR(2Q) &= 2 \int_0^{\frac{1}{2Q}} |H_{sin}(\Delta\Omega)|^2 S_{b^s}(\Delta\Omega) d(\Delta\Omega) \\ &+ 2 \int_0^{\frac{1}{2Q}} |H_{cos}(\Delta\Omega)|^2 S_{b^c}(\Delta\Omega) d(\Delta\Omega) \end{aligned} \quad (234)$$

soit :

$$\begin{aligned} AVAR(2Q) &\simeq 2 \int_0^{\frac{1}{2Q}} |H_{sin}(\Delta\Omega)|^2 S_{b^s}(\Delta\Omega) d(\Delta\Omega) \\ &+ 2 \int_0^{\frac{1}{2Q} \left(1 - Q \frac{\partial g^c}{\partial A}\right)} \left| \frac{\epsilon_h}{2A_s \left[1 - Q \frac{\partial g^c}{\partial A}\right]} \right|^2 S_{b^c}(\Delta\Omega) d(\Delta\Omega) \end{aligned} \quad (235)$$

en ayant négligé la contribution de  $H_{cos}$  au-delà de sa bande passante  $\left[0; \frac{1}{2Q} \left(1 - Q \frac{\partial g^c}{\partial A}\right)\right]$ . Dans le cas d'un bruit blanc de variance  $\sigma_b^2$ , on obtient finalement, en remarquant que  $Q = \frac{A_s \Omega_s}{g^c} \simeq \frac{A_s}{g^c}$  :

$$AVAR(2Q) \simeq \frac{\sigma_b^2}{4\pi A_s^2 Q} \left[ \begin{array}{c} \text{Contribution de } b^s \\ \vec{1} \end{array} + \frac{\text{Contribution de } b^c}{2} \frac{\epsilon_h^2}{\left|1 - \frac{A_s}{g^c} \frac{\partial g^c}{\partial A}\right|} \right] . \quad (236)$$

Une autre façon de retrouver le résultat précédent consiste à exprimer directement la réponse du résonateur comme quasi-statique. En effet, dans un intervalle fréquentiel de  $\left[0, \frac{\Omega_s}{2Q}\right]$  proche de la porteuse à  $\Omega_s$ , le raisonnement précédent revient à considérer que :

$$\begin{cases} H_{sin}(\Delta\Omega) \simeq H_{sin}(0) = cste \\ H_{cos}(\Delta\Omega) \simeq H_{cos}(0) = cste \end{cases} \quad (237)$$

ce qui consiste à dire que les fluctuations lentes de  $b^s$  et  $b^c$  sont directement converties en fluctuations lentes de  $\Omega$  et  $A$ . Un résultat similaire serait donc obtenu en négligeant les dérivées temporelles dans (217) pour le cas linéaire ou dans (326) (voir Annexe 13) pour le cas non-linéaire et en écrivant :

$$\begin{cases} S(A, \Omega, b^s) = 0 \\ C(A, \Omega, b^c) = 0 \end{cases} \quad (238)$$

On peut étendre ce raisonnement pour déduire l'impact d'autres types de fluctuations, éventuellement paramétriques. C'est l'objet de la section IV.D.e. La prise en compte de dérivées temporelles serait par contre nécessaire pour la modélisation du comportement de l'oscillateur face à des fluctuations « rapides » devant  $2Q/\omega_s$  mais « lentes » devant  $1/\omega_s$ .

#### IV.D.e. Stabilité fréquentielle d'un oscillateur soumis à des fluctuations lentes

On peut tenir compte de fluctuations d'un paramètre  $p$  quelconque (éventuellement  $b^s$  et/ou  $b^c$ ) de faible amplitude et variant lentement en écrivant les équations régissant le comportement du résonateur :

$$\begin{cases} S(A, \Omega, p) = 0 \\ C(A, \Omega, p) = 0 \end{cases} \quad (239)$$

où on a explicité la dépendance de  $S$  et  $C$  vis-à-vis du paramètre  $p$  du résonateur ou de la boucle de rétroaction. La méthode de prise en compte des variations de paramètres présentée ici est la même que celle utilisée dans [17] [18]. En régime quasi-statique, une fluctuation lente  $\delta p$  de  $p$  entraîne une variation  $\delta\Omega$  de  $\Omega_s$  telle que :

$$\Omega = \Omega_s + \frac{\partial\Omega}{\partial p} \delta p \quad (240)$$

Les dérivées de  $S$  et de  $C$  vis-à-vis de  $p$  s'écrivent, elles :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dp} = \frac{\partial S}{\partial p} + \frac{\partial S}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial S}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial p} = 0 \\ \frac{dC}{dp} = \frac{\partial C}{\partial p} + \frac{\partial C}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial C}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial p} = 0 \end{cases} \quad (241)$$

En combinant ces équations, on déduit :

$$\frac{\partial S}{\partial A} \frac{dC}{dp} - \frac{\partial C}{\partial A} \frac{dS}{dp} = \frac{\partial S}{\partial A} \frac{\partial C}{\partial p} - \frac{\partial C}{\partial A} \frac{\partial S}{\partial p} + \left( \frac{\partial S}{\partial A} \frac{\partial C}{\partial \Omega} - \frac{\partial C}{\partial A} \frac{\partial S}{\partial \Omega} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial p} = 0 \quad (242)$$

On obtient alors la sensibilité de la fréquence aux variations (lentes) du paramètre  $p$  :



$$\frac{\partial \Omega}{\partial p} = \frac{\frac{\partial C}{\partial A} \frac{\partial S}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial A} \frac{\partial C}{\partial p}}{\frac{\partial S}{\partial A} \frac{\partial C}{\partial \Omega} - \frac{\partial C}{\partial A} \frac{\partial S}{\partial \Omega}} . \quad (243)$$

A partir de l'expression (243), on peut par exemple retrouver celles de  $H_{sin}(0)$  et  $H_{cos}(0)$  obtenues dans le cas d'un bruit additif (voir section IV.D.d) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial b^s} = H_{sin}(0) = -\frac{1}{2A_s} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial b^c} = H_{cos}(0) = \frac{\epsilon_h}{2A_s \left(1 - \frac{A_s}{g^c} \frac{\partial g^c}{\partial A}\right)} \end{cases} .$$

On peut également, à nouveau à partir de l'expression (243), définir l'ensemble des points de fonctionnement  $(V_0, \varphi_e)$  optimaux vis-à-vis des fluctuations du paramètres  $p$  qui correspondent à la phase et à l'amplitude de fonctionnement données par :

$$\min_{V_0, \varphi_e} \left( \left| \frac{\partial \Omega}{\partial p} \right| \right) . \quad (244)$$

Dans le cas d'un résonateur linéaire soumis à des fluctuations lentes de la phase de rétroaction  $\varphi_e$ , le point optimum de fonctionnement en termes de stabilité fréquentielle est donné par :

$$\min_{V_0, \varphi_e} \left( \left| \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_e} \right| \right) = \min_{\varphi_e} \left( \frac{Q}{Q^2 \sin^2 \varphi_e - \cos^2 \varphi_e} \right) . \quad (245)$$

Ce minimum correspond à  $\varphi_e = \pi/2$  donc à la quadrature, quelle que soit l'amplitude d'actionnement  $V_0$ . Ainsi, on constate que, en plus d'être optimal vis-à-vis d'un bruit additif, le choix de la quadrature est également optimal, pour un résonateur linéaire, vis-à-vis des fluctuations de phase de rétroaction. Ceci peut se comprendre intuitivement en observant que la quadrature correspond, pour un résonateur linéaire à la pente maximale de la réponse en phase (courbe  $\varphi(\omega)$ ). On remarque également que, pour un résonateur linéaire, il n'existe aucun point de fonctionnement pour lequel la fréquence est insensible aux fluctuations lentes de phase de rétroaction, dans la mesure où :

$$\frac{Q}{Q^2 \sin^2 \varphi_e - \cos^2 \varphi_e} \quad (246)$$

ne s'annule jamais.

Dans d'autres cas, il est possible d'annuler le numérateur de l'expression (243), ce qui donne un (voire plusieurs) point(s) de fonctionnement optimal (optimaux) où la fréquence est insensible aux fluctuations lentes du paramètre  $p$ . Ce(s) point(s) de fonctionnement optimal (optimaux) est (sont) alors défini(s) par :

$$\begin{cases} S(A, \Omega, p) = 0 \\ C(A, \Omega, p) = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial A} \frac{\partial S}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial A} \frac{\partial C}{\partial p} = 0 \end{cases} \quad (247)$$

Cette définition de point optimal correspond à celle donnée dans [105] vis-à-vis de la phase de rétroaction ( $p = \varphi_e$  dans ce cas). Le cas particulier d'un résonateur linéaire montre que tout point de fonctionnement est insensible aux fluctuations lentes de gain car l'expression (243) pour  $p = F$  donne :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial F} = 0 \quad (248)$$

quel que soit le point de fonctionnement choisi. Ainsi, pour un résonateur linéaire, la fréquence est insensible aux fluctuations lentes du gain de rétroaction quelles que soient la phase de rétroaction  $\varphi_e$  et l'amplitude d'oscillation  $A_s$ .

En prenant en compte la dépendance de la fréquence aux multiples paramètres indépendants, on peut également écrire la densité spectrale des fluctuations de fréquence en séparant la contribution du bruit thermomécanique et celle des fluctuations de paramètres  $p_i$  indépendants :

$$S_{\delta\Omega} = \sum_i \left( \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} \right)^2 S_{p_i} + \left( \frac{\partial \Omega}{\partial b} \right)^2 S_b \quad (249)$$

où  $S_{p_i}$  représente la densité spectrale de puissance de  $\delta p_i$  et où :

$$\left( \frac{\partial \Omega}{\partial b} \right)^2 = \left( \frac{\partial \Omega}{\partial b^c} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Omega}{\partial b^s} \right)^2 \quad (250)$$

L'étude du point optimal de fonctionnement vis-à-vis des différentes sources de bruit pour un résonateur capacitif actionné par différentes formes d'onde est l'objet de la suite de ce chapitre. Dans cette étude, on définira les performances d'un oscillateur par rapport à la variance des fluctuations de fréquence  $\sigma_{\delta\Omega}^2$ , comme cela a été fait dans d'autres études [18] [106]. D'autres indicateurs de stabilité fréquentielle peuvent être construits. Néanmoins, l'utilisation de la variance  $\sigma_{\delta\Omega}^2$  des écarts fréquentiels à la porteuse reste suffisant dans la mesure où on se limite dans tous les cas aux contributions apportées par les fluctuations lentes (voir raisonnement sur  $H_{sin}$  et  $H_{cos}$  en section IV.D.d).

#### **IV.D.f. Validation du modèle sur résonateur de Duffing soumis à un bruit blanc additif**

Dans cette section, on valide le modèle précédent en étudiant la stabilité fréquentielle d'un oscillateur à résonateur de Duffing. Les résultats de notre modèle seront comparés à des simulations transitoires sous SIMULINK. Pour cette raison, afin de garantir des temps de simulations raisonnables, le facteur de qualité sera choisi, ici, assez faible ( $Q = 100$ ).

Dans le cas d'un résonateur soumis uniquement à une non-linéarité cubique (voir section II.D.e) actionné par une force sinusoïdale d'amplitude normalisée  $F$ , on peut écrire :

$$\begin{cases} g^s = -\frac{3}{4}\gamma A^3 + F \cos \varphi_e \\ g^c = F \sin \varphi_e \end{cases} \quad (251)$$

donc :

$$AVAR(2Q) \simeq \frac{\sigma_b^2}{4\pi A_s^2 Q} \left[ 1 + \frac{\epsilon_h^2}{2} \right] \quad (252)$$

où :

$$\epsilon_h = \frac{1}{F \sin \varphi_e} \left[ -\frac{3}{4}\gamma A_s^3 + F \cos \varphi_e + \frac{9}{4}\gamma A_s^3 \right] = \cot \varphi_e + \frac{3}{2}\gamma Q A_s^2 \quad . \quad (253)$$

On peut analyser le comportement de la variance d'Allan en distinguant des cas particuliers suivant les valeur de  $\gamma$  et  $Q$ . Les résultats sont récapitulés dans le Tableau 7. Pour un tel résonateur, la non-linéarité ne déforme pas significativement la courbe de variance des fluctuations de fréquence tant que  $\gamma Q \ll 1$ . Dans cette limite, on pourra parler de résonateur « faiblement non-linéaire ». En revanche, lorsque  $\gamma$  ou  $Q$  augmente, la courbe se déforme et son minimum se décale. Proche de la quadrature, on constate, comme expliqué dans [6], qu'une augmentation du facteur de qualité rend l'oscillateur plus sensible aux non-linéarités, du fait de la présence du produit  $\gamma Q$ .

Cas de figure	Hypothèse	Variance d'Allan $AVAR(2Q)$
Cas non-linéaire	Expression générale	$\frac{\sigma_b^2}{4\pi A_s^2 Q} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left[ \cot \varphi_e + \frac{3}{2}\gamma Q A_s^2 \right]^2 \right]$
	Proche de la quadrature	$\frac{\sigma_b^2}{4\pi A_s^2 Q} \left[ 1 + \frac{9}{8}\gamma^2 Q^2 A_s^4 \right]$
Cas linéaire ou peu non-linéaire	$\gamma \ll \frac{1}{Q}$	$\frac{\sigma_b^2}{4\pi A_s^2 Q} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cot^2 \varphi_e \right]$

Tableau 7. Expressions de la variance des fluctuations de fréquence pour un oscillateur de Duffing soumis à un bruit blanc additif. Comparaison avec un résonateur linéaire.

La dégradation de la stabilité fréquentielle à la quadrature est illustrée sur les figures de mérite tracées en Fig. 69 où on a pris  $\gamma = 0,2$  et  $Q = 100$ , de sorte que  $\gamma Q > 1$ . Sur cette figure, on trace l'évolution de la variance d'Allan estimée en  $\tau_e = 2Q$  pour  $F = 5 \times 10^{-4}$ ,  $F = 2,5 \times 10^{-3}$  et  $F = 5 \times 10^{-3}$ . Afin de vérifier l'exactitude des résultats obtenus, on compare les résultats donnés par la formule (252) (lignes continues sur la Fig. 69) à des simulations transitoires réalisées sous Simulink avec  $\sigma_b^2 = 10^{-6}$  (cercles). Dans les simulations transitoires, le bruit  $b$  est généré avec un temps d'échantillonnage de  $\tau_b = 0,1s$  pour une pulsation propre supposée à  $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  soit une période propre de  $6,3 \text{ s} \gg \tau_b$ . Dans ces simulations, on calcule la variance d'Allan pour un temps d'échantillonnage adimensionné de  $2Q$ .

Les résultats des simulations transitoires concordent avec l'expression (252), ce qui témoigne de la pertinence des hypothèses menant à l'expression (252). A de faibles amplitudes

d'oscillation, le régime optimal de fonctionnement de l'oscillateur correspond à un actionnement en quadrature, qui mène à la fois à une amplitude d'oscillation maximale (donc un bon rapport signal sur bruit) et à une stabilité fréquentielle optimale. A mesure que l'amplitude de l'actionnement augmente, le point de fonctionnement à bruit de fréquence minimal s'éloigne de la quadrature. Concernant le déphasage optimal à introduire dans la boucle, des conclusions similaires ont été atteintes et validées dans les travaux de Kenig et Villanueva [17] [18] et des courbes de réponses expérimentales ont confirmé ces prédictions. Ces travaux interprètent le phénomène comme la combinaison de la sensibilité de la fréquence au bruit thermique et aux variations des paramètres du résonateur (tels que le facteur de qualité ou le coefficient de non-linéarité cubique). Notre approche permet de prédire un phénomène similaire et montre qu'il peut être généré directement par la présence de bruit thermomécanique.

En observant le graphique d'évolution de la fréquence et celui de la stabilité fréquentielle (notamment le minimum de bruit de fréquence proche de  $\varphi_e = 2,5$  rad), on pourrait être amené à croire que les points optimaux en termes de stabilité correspondent aux points de pente nulle (ou minimale en valeur absolue) de la courbe de fréquence. Cependant, une pente nulle peut également donner lieu à un maximum local de bruit de fréquence. De plus, la présence d'un minimum local de bruit de fréquence proche de  $\varphi_e = 0,5$  rad est incompatible avec une telle conclusion.

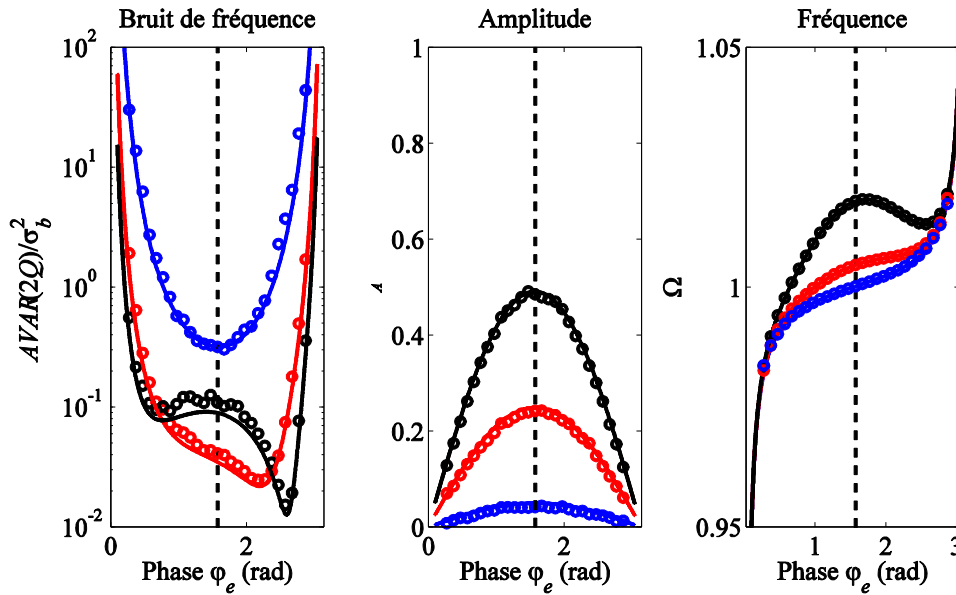


Fig. 69 Evolution de la variance des fluctuations de fréquence pour un résonateur à non-linéarité cubique fortement non-linéaire ( $\gamma Q > 1$ ) actionné par des forces d'amplitude croissante et soumis à un bruit blanc additif. Les lignes continues correspondent à l'équation (252). Les cercles correspondent à des simulations en régime transitoire effectuées dans les mêmes conditions.

Pour trouver le point de fonctionnement optimal à amplitude d'actionnement fixée, on peut réécrire  $AVAR(2Q)$  en rappelant que  $\Omega_s \simeq 1$  et  $A_s/Q \simeq F \sin \varphi_e$ , ce qui donne :

$$AVAR(2Q) \simeq \frac{\sigma_b^2}{4\pi Q^3 F^2 \sin^2 \varphi_e} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left[ \cot \varphi_e + \frac{3}{2} \gamma Q^3 F^2 \sin^2 \varphi_e \right]^2 \right] \quad (254)$$

Le point de fonctionnement optimal vis-à-vis du bruit blanc additif pour un oscillateur à amplitude d'actionnement contrôlée est alors déterminé par :

$$\varphi^{opt} = \max \left\{ \varphi_e \text{ tel que } \frac{d[AVAR(2Q)]}{d\varphi_e} = 0 \right\} \quad (255)$$

Dans le cas d'un actionnement linéaire ( $\gamma = 0$ ), l'équation :

$$\frac{d[AVAR(2Q)]}{d\varphi_e} = 0 \quad (256)$$

donne un unique extrémum qui correspond bien à un minimum en  $\varphi_e = \pi/2$ . Dans le cas d'une non-linéarité cubique, l'expression (255) est très complexe. Pour des raisons de lisibilité, et compte-tenu du fait qu'elle n'apporte rien à la compréhension du résultat, elle n'est pas reportée ici. On peut cependant l'évaluer numériquement. On trace en Fig. 70 l'évolution de la phase optimale pour un tel oscillateur à amplitude d'actionnement fixée, en fonction de l'amplitude d'actionnement  $F$  choisie, pour différentes valeurs de  $\gamma$  (et toujours  $Q = 100$ ). Comme attendu, plus le coefficient de non-linéarité cubique augmente, plus la phase optimale s'éloigne rapidement de la quadrature. Pour  $\gamma \ll 1/Q$ , la phase optimale se situe toujours très proche de la quadrature (cas quasi-linéaire). Pour  $\gamma = 0,2$ , les valeurs de phase optimale concordent bien avec la Fig. 69.

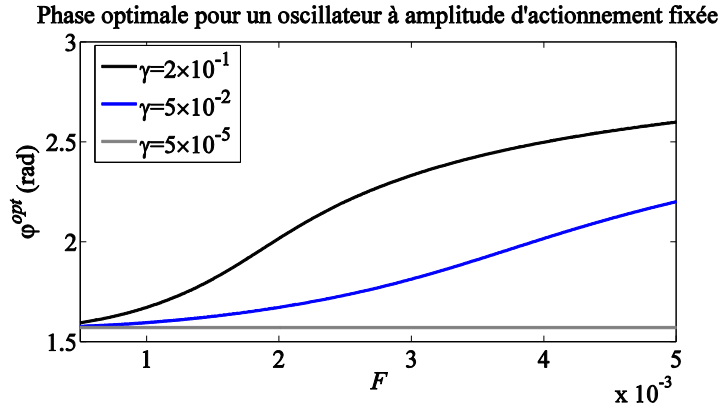


Fig. 70 Point de fonctionnement optimal vis-à-vis du bruit thermomécanique pour un oscillateur à amplitude d'actionnement fixée constitué d'un résonateur à non-linéarité cubique.

Maintenant qu'on a montré comment déterminer le point de fonctionnement optimal à amplitude d'actionnement donnée, on peut également s'intéresser à un oscillateur à amplitude d'oscillation contrôlée [114]. Dans ce cas, les expressions du Tableau 7 permettent de déterminer l'expression analytique de la phase optimale, pour  $A_s$  donné, en cas de perturbation par un bruit blanc. Ce point est défini par  $\epsilon_h = 0$  soit :

$$\varphi_e = \varphi_{OAC}^{opt} = \operatorname{arccot} \left[ -\frac{3}{2} \gamma Q A_s^2 \right] + \pi \quad (257)$$

(l'indice « OAC » est choisi pour « oscillateur à amplitude contrôlée »). Si on impose, par construction de l'oscillateur,  $\varphi_e = \varphi_{OAC}^{opt}$ , le niveau de la variance d'Allan correspond à celui d'un résonateur linéaire opéré à la quadrature et à la même amplitude d'oscillation  $A_s$  :

$$AVAR(2Q) = \frac{\sigma_b^2}{4\pi A_s^2 Q} \quad (258)$$

Pour atteindre ce régime, l'amplitude d'actionnement correspondante doit alors vérifier :

$$F = F^{opt} = \frac{A_s}{Q} \sqrt{1 + \frac{9}{4} \gamma^2 Q^2 A_s^4} \quad (259)$$

L'évolution de  $\varphi_{OAC}^{opt}$  avec l'amplitude d'oscillation est tracée en Fig. 71 pour les mêmes valeurs de paramètres que précédemment. On remarque que la phase optimale de fonctionnement n'est proche de la quadrature sur l'ensemble du gap que lorsque  $\gamma Q \ll 1$ . De plus, elle est toujours supérieure à la quadrature, ce qui est en accord avec de précédentes études [17] [80].

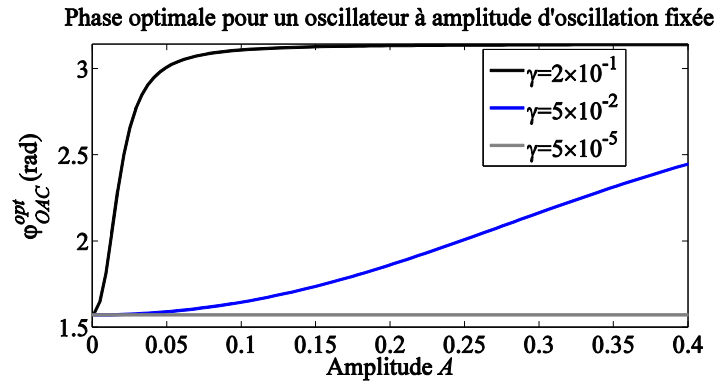


Fig. 71 Phase et amplitude d'actionnement du point de fonctionnement optimal pour un résonateur de Duffing de facteur de qualité  $Q = 10^2$  à actionnement linéaire.

Maintenant que le cas d'un résonateur à non-linéarité cubique a été étudié, intéressons-nous désormais au cas plus complexe d'un résonateur capacitif.

#### IV.D.g. Stabilité fréquentielle d'un oscillateur MEMS capacitif soumis à différentes sources de bruit et de fluctuations

Dans le cas d'un actionnement électrostatique, on a vu dans le chapitre III.E (Tableau 3) que  $g^s$  et  $g^c$  pouvaient s'écrire :

$$\begin{cases} g^s = \frac{2\eta A}{(1 - A^2)^{\frac{3}{2}}} + 2\eta V_0 F_s(A, \varphi_e) \cos \varphi_e \\ g^c = 2\eta V_0 F_c(A, \varphi_e) \sin \varphi_e \end{cases} \quad (260)$$

Comme précédemment, on peut tout d'abord étudier le comportement de l'oscillateur en présence de bruit additif. Dans ce cas, l'équation régissant la dynamique d'un résonateur MEMS à capacités planes devient :

$$\ddot{x} + \frac{1}{Q}\dot{x} + x = \frac{\eta(1 + v(t))^2}{(1 - x(t))^2} + b(t) \quad (261)$$

La fonction  $\epsilon_h$  se simplifie alors sous la forme :

$$\epsilon_h = \frac{F_s}{F_c} \left( 1 - A_s \frac{\partial \ln F_s}{\partial A} \right) \cot \varphi_e - \frac{6\eta Q A_s^2}{(1 - A_s^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (262)$$

de sorte que la variance d'Allan exprimée en  $2Q$  s'écrit :

$$AVAR(2Q) = \frac{\sigma_b^2}{4\pi A_s^2 Q} \left[ 1 + \frac{1}{2 \left( 1 - A_s \frac{\partial \ln F_c}{\partial A} \right)} \left[ \frac{F_s}{F_c} \left( 1 - A_s \frac{\partial \ln F_s}{\partial A} \right) \cot \varphi_e - \frac{6\eta Q A_s^2}{(1 - A_s^2)^{\frac{5}{2}}} \right]^2 \right] \quad (263)$$

L'équation (263) montre que les performances d'un oscillateur à résonateur capacitif soumis à un bruit additif dépendent du type d'actionnement considéré. On voit bien, une fois de plus, l'importance du coefficient d'amplification  $F_c$  étudié en section III.E.c. Plus la composante en quadrature de l'actionnement, i.e. le coefficient d'amplification, est sensible aux variations d'amplitude d'oscillation, plus les performances de bruit de fréquence s'en trouvent dégradées (dans la limite fixée par la condition de pull-in trouvée en section IV.C qui correspond à l'annulation du dénominateur, et donc à une variance infinie). Si on s'intéresse plus précisément aux performances du résonateur actionné à proximité de la quadrature, les performances de l'oscillateur sont déterminées par :

$$AVAR(2Q) \simeq \frac{\sigma_b^2}{4\pi A_s^2 Q} \left[ 1 + \frac{18\eta^2 Q^2 A_s^4}{(1 - A_s^2)^5 \left( 1 - A_s \frac{\partial \ln F_c}{\partial A} \right)} \right] \quad (264)$$

L'ensemble des résultats est répertorié dans le Tableau 8.

Cas de figure	Hypothèse	Variance d'Allan $AVAR(2Q)$
Cas non-linéaire	Expression générale	$\frac{\sigma_b^2}{4\pi A_s^2 Q} \left[ 1 + \frac{1}{2 \left( 1 - A_s \frac{\partial \ln F_c}{\partial A} \right)} \left[ \frac{F_s}{F_c} \left( 1 - A_s \frac{\partial \ln F_s}{\partial A} \right) \cot \varphi_e - \frac{6\eta Q A_s^2}{(1 - A_s^2)^{\frac{5}{2}}} \right]^2 \right]$
	Proche de la quadrature	$\frac{\sigma_b^2}{4\pi A_s^2 Q} \left[ 1 + \frac{18A_s^4 \eta^2 Q^2}{(1 - A_s^2)^5 \left( 1 - A_s \frac{\partial \ln F_c}{\partial A} \right)} \right]$
Cas linéaire ou peu non-linéaire	$\eta \ll \frac{1}{Q}$	$\frac{\sigma_b^2}{4\pi A_s^2 Q} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cot^2 \varphi_e \right]$

Tableau 8. Expressions de la variance des fluctuations de fréquence pour un oscillateur à résonateur MEMS à capacités planes soumis à un bruit blanc additif. Comparaison avec un résonateur linéaire.

Dans le cas du résonateur étudié spécifiquement ici, on a vu dans le chapitre III que le coefficient de transduction électromécanique est de l'ordre de  $\eta \simeq 10^{-3}$  lorsque la tension de polarisation est comprise entre 10V et 40V. Comme  $Q \simeq 10^4$ , l'hypothèse  $\eta \ll 1/Q$  n'est pas vérifiée. De manière générale, on ne s'intéressera pas ici à des résonateurs faiblement non-linéaire dans la mesure où ceux-ci sortent du cadre de l'hypothèse  $V_0 \ll 1$  dès que  $A > 0,2$  (pour comprendre cela, on peut se rappeler que l'amplitude à la quadrature sous actionnement par impulsions s'écrit  $A = 2\eta Q V_0$ ). On trace en Fig. 72 les courbes obtenues pour un résonateur de paramètres  $\eta = 10^{-3}$  et  $Q = 10^4$  actionné sous  $V_0 = 5 \times 10^{-3}$ ,  $V_0 = 1,35 \times 10^{-2}$  ou  $V_0 = 2,25 \times 10^{-2}$  actionné par chacune des quatre formes d'ondes étudiées.

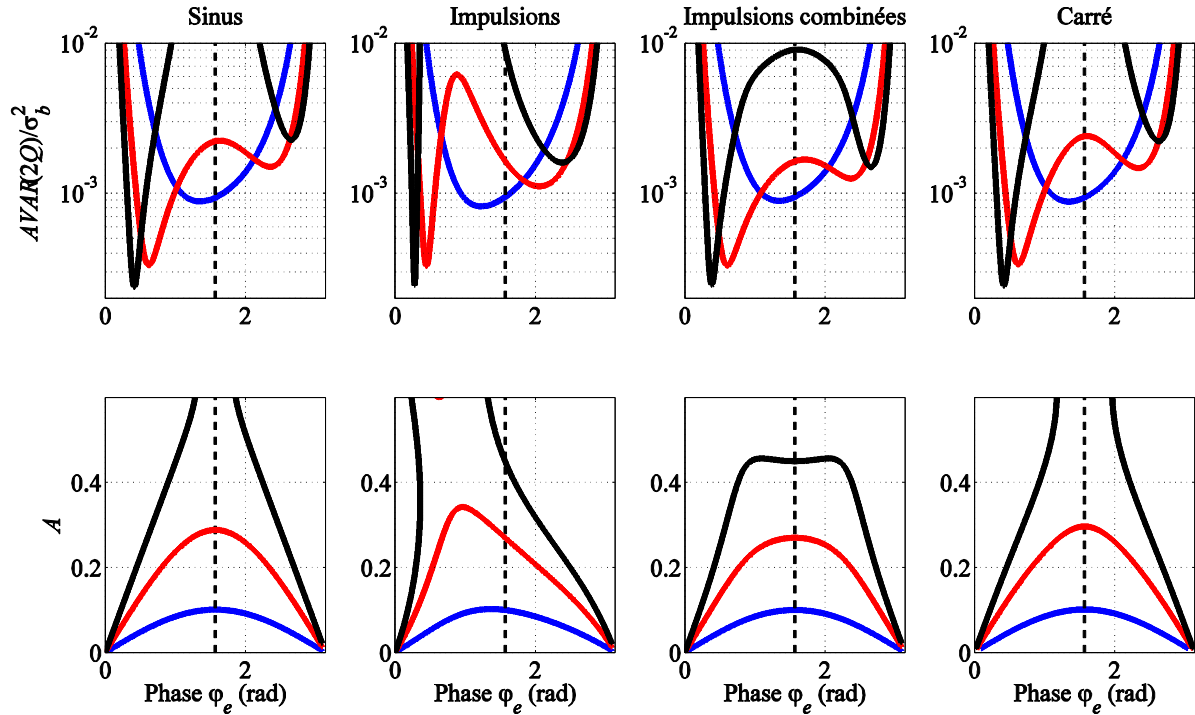


Fig. 72 Variance d'Allan exprimée en  $2Q$  et amplitude d'oscillation en fonction de la phase de rétroaction pour un résonateur fortement non-linéaire : actionnement sinusoïdal (bleu), par impulsions (rouge), par impulsions combinées (gris) et carré (noir). Le trait pointillé correspond à la quadrature.

La première constatation qu'on peut faire sur la Fig. 72 concerne la similitude des courbes de variance d'Allan à faible et moyenne amplitude d'actionnement (courbes bleues et rouges) sous les différents actionnements, malgré les différences entre les courbes d'amplitude. Ceci se comprend car  $\eta Q = 10 \gg 1$  de sorte que le terme prédominant provient du ramollissement électrostatique  $\frac{6\eta Q A_s^2}{(1-A_s^2)^{5/2}}$  qui est indépendant de la forme d'onde de l'actionnement. La différence entre les formes d'ondes ne devient notable que lorsqu'on se rapproche suffisamment de la condition de pull-in dynamique (voir courbes noires).

On peut également constater que, même à des amplitudes d'oscillation proches de seulement 10% du gap (voir courbes bleues), l'optimum en termes de stabilité fréquentielle est déjà légèrement décalé par rapport à la quadrature. De plus, on voit sur la Fig. 72 que, comme dans le cas d'un résonateur de Duffing, un actionnement de forte amplitude génère un maximum local de bruit de fréquence à la quadrature, sauf dans le cas d'un actionnement par impulsions



asymétrique (impulsions uniquement positives ou, de façon similaire, uniquement négatives) pour lequel la symétrie des courbes d'amplitude par rapport à l'axe  $\varphi_e = \frac{\pi}{2}$  est rompue.

Les résultats précédents sont tracés à amplitude d'actionnement donnée, ce qui correspond donc au cas d'un oscillateur à amplitude d'actionnement contrôlée. Comme dans le cas d'un résonateur de Duffing, on peut également étudier la stabilité fréquentielle d'un oscillateur à amplitude d'oscillation contrôlée, pour lequel  $A_s$  est fixé. Tant que la condition (265) définie par :

$$A_s \frac{\partial \ln F_s}{\partial A} < 1 \quad (265)$$

est respectée, il existe, à amplitude d'oscillation donnée, une phase générant une stabilité fréquentielle optimale, qui vérifie  $\epsilon_h = 0$ . Cette phase est définie par :

$$\varphi_e = \varphi_{OAC}^{opt} \simeq \arccot \left[ \frac{6\eta Q A_s^2 F_c}{F_s \left( 1 - A_s \frac{\partial \ln F_s}{\partial A} \right) (1 - A_s^2)^{\frac{5}{2}}} \right] \quad (266)$$

On fera bien attention au fait que la condition (265) est une condition supplémentaire à la condition de pull-in, qui faisait, elle, apparaître la composante en quadrature  $F_c$  de l'actionnement et non la composante en phase  $F_s$ . Dans le cas d'un actionnement sinusoïdal,  $F_s$  et  $F_c$  sont indépendantes de  $\varphi_e$  et on trouve directement la valeur de  $\varphi_{OAC}^{opt}$ . Un tel déphasage optimal existe tant que  $A_s < 0,44$  (condition (265)). Le niveau de la variance d'Allan pour  $\varphi_e = \varphi_{OAC}^{opt}$  correspond alors à celui d'un résonateur linéaire opéré à la quadrature et à la même amplitude d'oscillation, i.e :

$$AVAR(2Q) = \frac{\sigma_b^2}{4\pi A_s^2 Q} \quad (267)$$

Ce niveau est atteint pour une amplitude d'actionnement telle que :

$$V_0^{opt} = \frac{A_s}{2Q\eta} \sqrt{1 + \frac{36\eta^2 Q^2 A_s^4 F_c^2}{F_s^2 \left( 1 - A_s \frac{\partial \ln F_s}{\partial A} \right)^2 (1 - A_s^2)^5}} \quad (268)$$

Dans le cas sinusoïdal, si  $A_s > 0,44$ , il n'existe aucune phase de rétroaction pour laquelle le niveau de la variance d'Allan est indépendant du coefficient  $\eta$  de la non-linéarité d'actionnement. Au-delà de cette amplitude limite, les performances en termes de stabilité fréquentielle sont forcément dégradées par rapport au cas d'un résonateur linéaire opéré à la quadrature à la même amplitude d'oscillation. De plus, un compromis doit être trouvé entre l'optimisation du bruit de fréquence, qui requiert une amplitude d'oscillation plus grande, d'une part, et l'amplitude d'actionnement envisageable en pratique d'autre part. Une augmentation de l'amplitude d'actionnement nécessite en effet une électronique plus performante et consommatrice. On gardera également à l'esprit que notre modèle reste valable uniquement tant que  $V_0 \ll 1$ . Enfin,

dans le cas où  $F_s$  et  $F_c$  sont fonctions de  $\varphi_e$  (cas d'actionnement non sinusoïdal), l'expression (266) est une équation implicite dont la résolution peut se faire numériquement.

Les valeurs de  $\varphi_{OAC}^{opt}$  pour  $\eta = 10^{-3}$  et  $Q = 10^4$ , ainsi que les amplitudes d'actionnement correspondantes (i.e.  $V_0^{opt}$ ) sont tracées sur la Fig. 73.

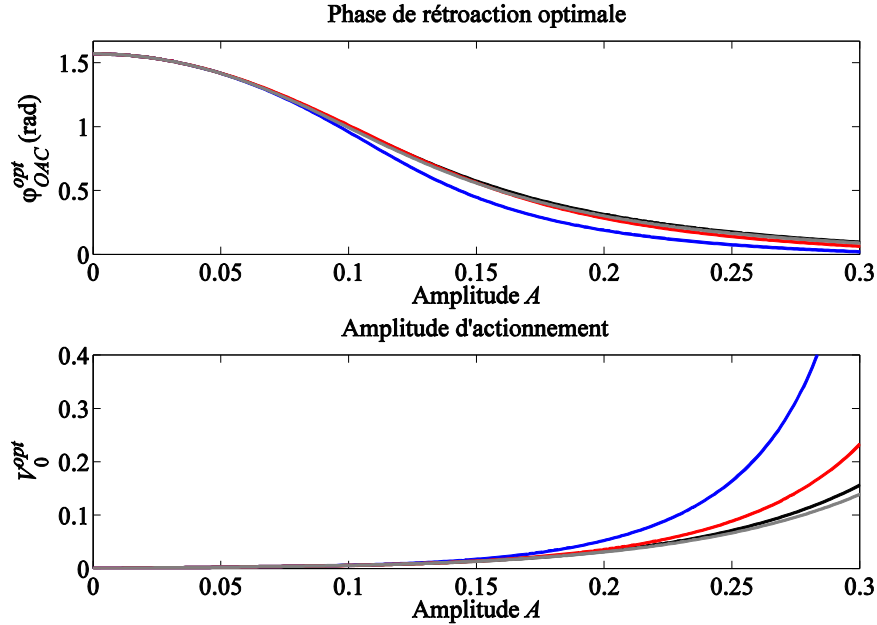


Fig. 73 Haut : Phase de rétroaction optimale en fonction de l'amplitude d'oscillation pour un actionnement sinusoïdal (noir), par impulsions (bleu), par impulsions combinées (rouge) et carré (gris). Bas : Amplitudes d'actionnement correspondantes.

Le déphasage optimal ainsi déterminé est toujours inférieur à  $\pi/2$ , contrairement au cas d'un coefficient de non-linéarité cubique positif (voir en comparaison la Fig. 71). Plus le comportement non-linéaire du résonateur est marqué (i.e. plus le produit  $\eta Q$  est élevé), plus la phase optimale se décale rapidement de la quadrature. Même pour un résonateur faiblement non-linéaire actionné à des amplitudes proches de 10% du gap, la phase optimale s'est déjà nettement décalée de la quadrature (elle se situe, dans notre cas, aux environs de 1 rad). Comme précédemment, on constate que le seul actionnement donnant des résultats significativement différents des autres est l'actionnement par impulsions (non combinées). La phase optimale de rétroaction pour l'actionnement par impulsions s'éloigne plus rapidement de la quadrature que les autres. La relative similitude des résultats obtenus avec les différents actionnements a déjà été expliquée et est à attribuer au terme de ramollissement électrostatique (i.e. la composante dépendante de la tension de polarisation et indépendante de l'actionnement).

Pour prendre en compte de manière plus générale l'effet de différents bruits, qu'ils soient additifs ou multiplicatifs, on peut raisonner sur la sensibilité de la fréquence aux fluctuations de différents paramètres (voir équation (243)). Des résultats obtenus par cette approche ont été publiés dans une conférence internationale [115]. Vis-à-vis du bruit blanc, on retrouve la condition  $\epsilon_h = 0$ , correspondant à l'optimum de stabilité précédente, qui minimise cette fois :

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial b^s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial b^c}\right)^2 = |H_{sin}|^2 + |H_{cos}|^2 = \frac{1}{4A_s^2} \left[ 1 + \frac{\epsilon_h^2}{\left(1 - \frac{A_s}{g^c} \frac{\partial g^c}{\partial A}\right)^2} \right] \quad (269)$$

On trace, en Fig. 74, la sensibilité fréquentielle au bruit thermomécanique  $\log_{10} \left[ \sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial b^s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial b^c}\right)^2} \right]$  sous actionnement sinusoïdal, par impulsions et par impulsions combinées. Comme sur les Fig. 72 et Fig. 73, les illustrations correspondent à  $\eta = 10^{-3}$  et  $Q = 10^4$ . Les points de fonctionnement  $A(\varphi_e)$  à différentes amplitudes d'actionnement sont tracés en pointillé. On ne représente pas ici le cas de l'actionnement carré compte-tenu de sa très grande similitude avec l'actionnement sinusoïdal. Comme précédemment, on constate que la phase optimale se rapproche de 0 à mesure que l'amplitude augmente. La différence entre les actionnements n'est remarquable qu'à des amplitudes supérieures à 20-30% du gap, pour lesquelles la phase optimale tend vers 0 (zones bleues). Les résultats pour les différents actionnements sont également comparés à un modèle de résonateur de Duffing dont le coefficient de non-linéarité cubique vaut  $\gamma = -4\eta < 0$  (correspondant au terme d'ordre 3 d'un développement limité de la force électrostatique).

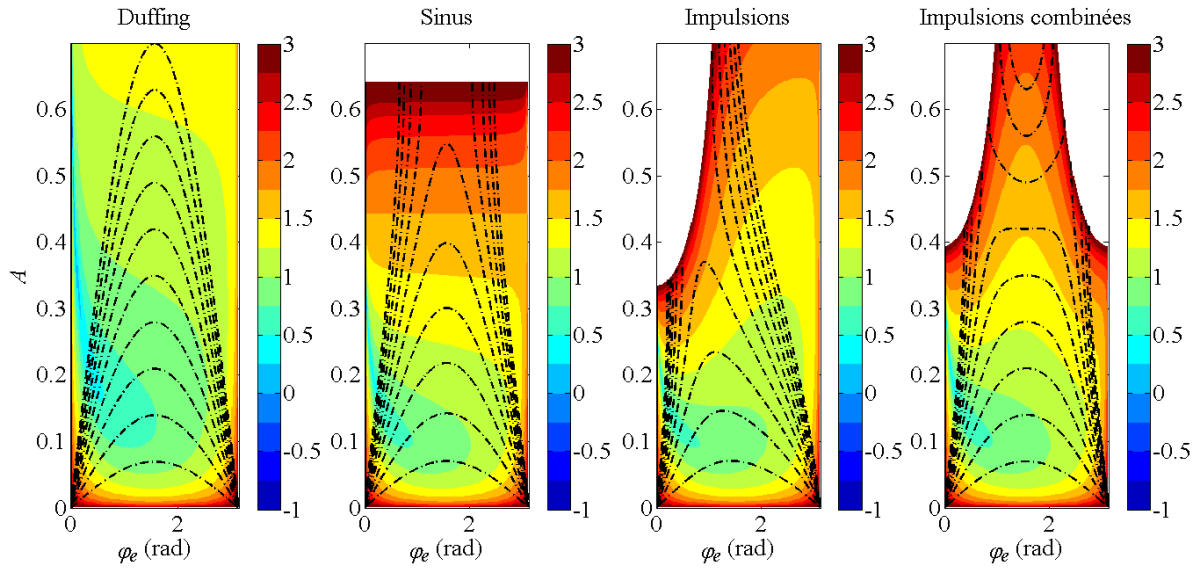


Fig. 74 Sensibilité de la fréquence au bruit thermomécanique pour différents actionnements et comparaison avec un modèle de Duffing tel que  $\gamma = -4\eta$ .

La Fig. 74 montre que la prise en compte d'une non-linéarité cubique seule sous-estime largement l'impact du bruit additif sur la stabilité fréquentielle, surtout à l'approche de l'amplitude limite définie par la condition de pull-in résonant (voir zones rouges), phénomène inexistant dans le cas du résonateur de Duffing.

On peut également étudier la sensibilité aux fluctuations lentes de la phase de rétroaction  $\log_{10} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_e} \right)$ . Ces fluctuations sont en effet, comme on l'a déjà vu [104] [105], une cause majeure de bruit de fréquence. La sensibilité correspondante est représentée en Fig. 75.

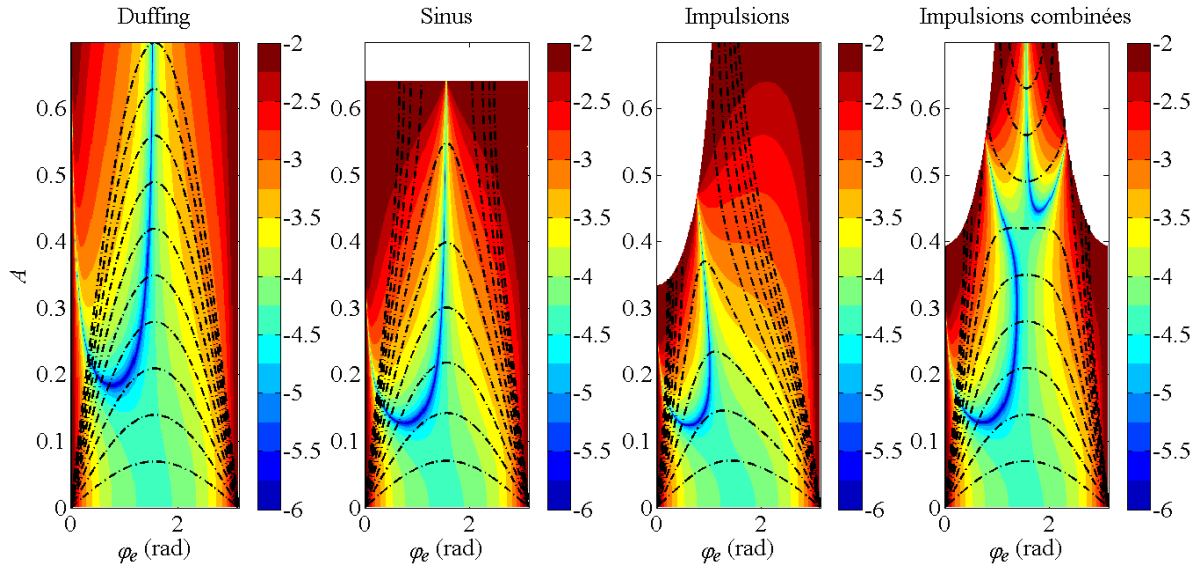


Fig. 75 Sensibilité de la fréquence aux fluctuations lentes de la phase de rétroaction pour différents actionnements et comparaison avec un modèle de Duffing tel que  $\gamma = -4\eta$ .

Du point de vue de la sensibilité à des fluctuations de la phase de rétroaction, le comportement du résonateur sous actionnement sinusoïdal est proche de celui du résonateur de Duffing, tant que le résonateur n'atteint pas le pull-in résonant. L'actionnement sinusoïdal et l'actionnement par impulsions combinées font apparaître un minimum de sensibilité (zone bleu foncé) proche de la quadrature à des amplitudes très élevées (supérieures à 40% voire 50% du gap pour les actionnements par impulsions). En théorie, les points optimaux ainsi déterminés sont insensibles aux fluctuations de phase de rétroaction (points optimaux au sens de [80]). Ceci justifie l'utilisation de régimes non-linéaires pour l'amélioration de la stabilité fréquentielle. Le prix à payer par rapport aux régimes à basse amplitude réside à la fois dans l'augmentation de l'amplitude d'actionnement (et donc dans la consommation) et dans la nécessité d'une connaissance précise de la phase de rétroaction. En effet, le minimum de sensibilité à haute amplitude est très étroit, et une incertitude sur la phase du point de fonctionnement peut facilement ruiner les efforts de conception en faisant basculer l'oscillateur dans des régimes très sensibles à des fluctuations de phase.

Sous actionnement par impulsions (non combinées), il est inutile de chercher un point de fonctionnement à sensibilité minimale vis-à-vis de la phase de rétroaction au-delà d'une amplitude d'oscillation de 50% du gap. De plus, dans ce cas, tous les points optimaux sont relativement éloignés de la quadrature.

Sous actionnement par impulsions combinées, au-delà de l'amplitude critique  $A_l = 1/\sqrt{6}$  (voir section III.E.c), deux zones de stabilité optimale apparaissent. Ceci est à relier au double cycle d'hystérésis observé sur les réponses en phase en boucle ouverte et à la démultiplication des points de fonctionnement pour lesquels la pente de la courbe de réponse en phase est infinie.

Un autre fait remarquable concerne la présence d'une zone de stabilité optimale proche de celle déterminée dans le cas du bruit thermomécanique (voir  $\varphi_e < \frac{\pi}{2}$  et  $A$  proche de 0,2 sur la Fig. 74 et la Fig. 75). Si les sources prépondérantes de bruit de fréquence dans l'oscillateur sont le bruit thermomécanique et les fluctuations de phase de rétroaction, alors il est judicieux de choisir un tel point de fonctionnement, qui permet de minimiser les deux simultanément.

Enfin, on peut également étudier la sensibilité de la fréquence aux fluctuations tension de polarisation, qui induisent des fluctuations de  $\eta$ . Pour illustrer l'impact d'une telle fluctuation,

on représente, en Fig. 76, la sensibilité de la fréquence aux fluctuations du coefficient électromécanique  $\log_{10}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\right)$ . On constate une légère augmentation de la sensibilité avec l'amplitude d'oscillation, qui laisse entendre que, en plus de nécessiter un meilleur contrôle de la phase, les points de fonctionnement à haute amplitude requièrent également un meilleur contrôle de la tension de polarisation que les régimes à faible amplitude. En comparaison, l'approximation cubique sous-estime très largement les fluctuations de fréquences engendrées par une fluctuation de  $\eta$ . On peut en déduire que c'est essentiellement le terme de ramollissement électrostatique, absent du modèle de non-linéarité cubique, qui en est la cause.

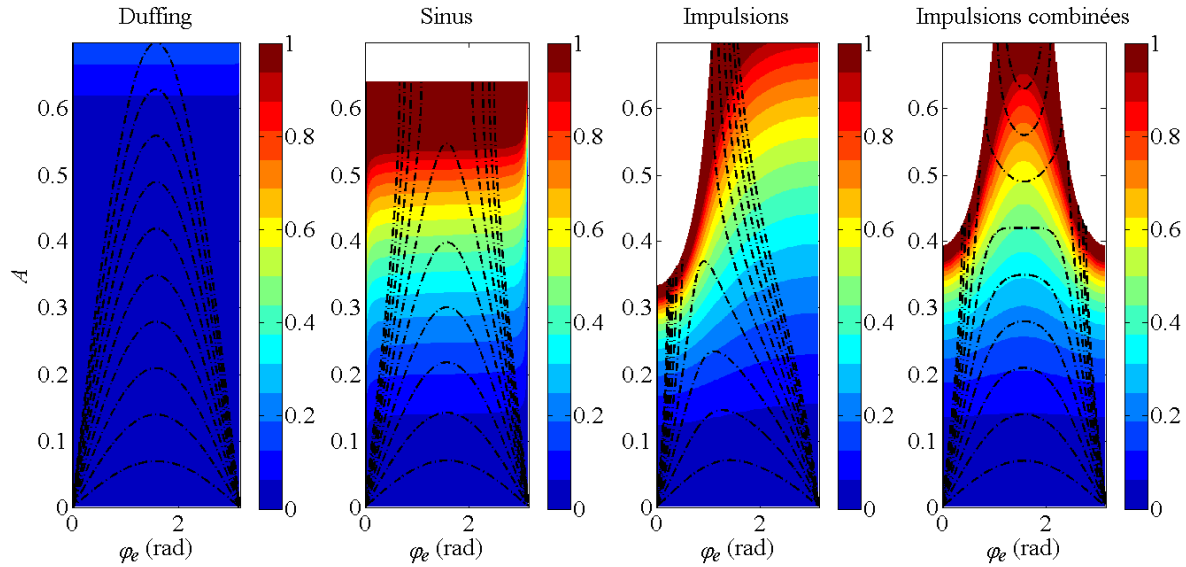


Fig. 76 Sensibilité de la fréquence aux fluctuations lentes de la tension de polarisation pour différents actionnements et comparaison avec un modèle de Duffing tel que  $\gamma = -4\eta$ .

Bien entendu, cette étude n'est pas exhaustive. D'autres types de fluctuations peuvent être envisagés (fluctuations de fréquence propre, de tension d'actionnement, etc.). De façon similaire, on pourrait, au-delà des ondes déjà étudiées dans ce manuscrit, envisager de construire une forme d'onde optimale pour compenser au maximum la dégradation de la stabilité fréquentielle introduite par la non-linéarité.

## IV.E. Conclusion

Les travaux menés dans ce chapitre donnent des outils pour comparer les performances de différentes architectures d'oscillateurs MEMS. Après avoir déterminé les limites de pull-in résonant d'oscillateurs MEMS capacitifs, sous certaines hypothèses, et montré leur indépendance vis-à-vis des paramètres du résonateur, des modèles de bruit de fréquence ont été construits. On a suivi pour cela une méthodologie existante dans la littérature, après avoir explicité ses limites de validité. Cette méthodologie a ensuite été adaptée pour comparer différents types d'oscillateurs et a permis de mettre en évidence des phénomènes a priori contre-intuitifs, comme la présence de maxima locaux de bruit de phase à la quadrature. Ce phénomène est, dans le cas d'un résonateur capacitif, aggravé au fur et à mesure que le résonateur se rapproche de son amplitude de pull-in.

Une méthode permettant la détermination de phases optimales en termes de stabilité fréquentielle vis-à-vis de différentes sources de bruit à long terme a été construite. Parmi les

sources de perturbations ont été envisagés le bruit thermomécanique mais aussi des fluctuations de paramètres intervenant dans le comportement de l'oscillateur. Le choix d'un point de fonctionnement optimal ainsi déterminé se fait au prix d'une amplitude d'actionnement plus grande, et donc d'une consommation plus importante du dispositif. Il est également plus sensible aux incertitudes sur la phase et le gain de l'actionnement (ce qui le rend plus compliqué à atteindre expérimentalement). De plus, les points optimaux vis-à-vis du bruit thermomécanique et/ou de fluctuations de phase ne le sont pas vis-à-vis de la polarisation ou de la tension d'actionnement. Ils requièrent tous un meilleur contrôle des fluctuations de ces deux tensions. Un compromis entre consommation, complexité du contrôle et performances de stabilité fréquentielle est donc nécessaire.

Les expériences mettant en évidence nos prévisions en termes de stabilité fréquentielle n'ont pas encore pu être réalisées, par manque de temps et de matériel adapté pour de telles mesures. Cependant, les modèles ont pu être validés sur des simulations transitoires d'oscillateurs MEMS. La validation expérimentale de ces dernières prédictions fera l'objet de futurs travaux.

## Conclusion générale

Pour améliorer la fiabilité et les performances des capteurs utilisés dans la navigation, de nombreuses pistes peuvent être envisagées : choix d'une technologie macro- ou microscopique, optimisation de l'élément sensible, amélioration des procédés de fabrication, isolation vis-à-vis du bruit environnant ou optimisation de l'architecture électronique. Nous avons choisi, au cours de cette thèse, d'orienter nos recherches vers cette dernière solution, qui présente l'avantage d'être flexible (facilement adaptable à différents capteurs) tout en limitant les coûts. La flexibilité des solutions techniques est particulièrement souhaitée dans l'industrie aéronautique, où la mise sur le marché de chaque nouveau produit nécessite une procédure lourde et coûteuse de qualification servant à attester du respect des normes de sécurité.

Vis-à-vis des progrès technologiques, le comportement fortement non-linéaire des résonateurs MEMS est souvent considéré comme un frein, voire une limite infranchissable. Pourtant, l'exploitation des phénomènes non-linéaires constitue une source extrêmement riche d'améliorations. Au prix d'une complexité mathématique accrue et d'efforts de conception spécifiques, la modélisation précise du comportement des MEMS donne accès à des informations précieuses, à la fois pour la détection de défaillances et l'optimisation des performances.

Au cours de ce doctorat, un modèle de comportement non-linéaire de cellule MEMS de capteur de pression a été construit et validé expérimentalement. La portée des méthodes développées dépasse largement le cadre restreint de tels capteurs et on peut sereinement les appliquer à d'autres systèmes résonants non-linéaires, qu'il s'agisse ou non de MEMS. Néanmoins, un certain nombre de limites ont été mises en lumière. Par exemple, la construction d'une méthode d'identification systématique, rapide et robuste pour des systèmes présentant à la fois une non-linéarité polynômiale et une non-linéarité électrostatique pose problème. Les effets de ces deux catégories de non-linéarités sont difficiles à discriminer et la convergence des procédures d'identification systématiques vers une solution juste et unique n'est pas assurée. Il faut alors parfois opter pour des méthodes ad-hoc. L'extension de nos travaux à de tels systèmes fait partie des perspectives à court terme.

De plus, les résultats de caractérisation ont mis en évidence des pertes énergétiques croissantes avec la tension de polarisation et la tension d'actionnement. Un modèle empirique d'évolution du facteur de qualité a été proposé sur base de résultats expérimentaux. L'origine de ces pertes n'a pas été identifiée avec certitude, même si l'on soupçonne de la dissipation ohmique dans une résistance parasite non prise en compte dans notre modèle. On pourrait envisager de vérifier cette hypothèse par une caractérisation complète du système constitué par le résonateur non-linéaire et une (ou plusieurs) résistance(s). Cela se fait notamment pour des résonateurs linéaires utilisés dans les transducteurs piézoélectriques [116]. Néanmoins, comme expliqué dans le chapitre III, un phénomène de couplage du résonateur avec un mode parasite de vibration de la structure environnante pourrait également expliquer les variations du facteur de qualité. Quelle que soit l'origine de ces pertes, leur identification nécessite un faisceau de courbes à tension de polarisation et/ou d'actionnement variables. Il faut alors mesurer plusieurs réponses fréquentielles successives, ce qui se fait au détriment du temps nécessaire pour la procédure. Afin de résoudre ce problème, de futurs travaux permettront peut-être d'élaborer une procédure de caractérisation non-linéaire en boucle fermée. Une autre piste, en cours d'exploration, vise à identifier les paramètres du système à l'aide d'un balayage fréquentiel rapide (qui engendre l'apparition de phénomènes transitoires).

Le dernier chapitre de cette thèse a permis d'étudier l'impact de la non-linéarité d'actionnement sur les performances des oscillateurs MEMS capacitifs. En particulier,

l'influence de la forme du signal d'actionnement a été mise en évidence. Vis-à-vis de la stabilité fréquentielle des capteurs inertiels et plus généralement des capteurs pour la navigation, l'exploitation du comportement non-linéaire des résonateurs MEMS tient une place de choix parmi les directions de recherche à privilégier. A partir de la connaissance des caractéristiques du système, l'étude des régimes de fonctionnement accessibles montre comment limiter, voire annuler, l'impact de différentes sources de bruit sur la stabilité fréquentielle à long terme des oscillateurs MEMS. La construction de circuits électroniques permettant de valider expérimentalement les choix de conception proposés fera l'objet de futurs travaux. On pourra notamment s'inspirer de l'oscillateur à impulsions combinées construit préalablement à ce doctorat [75]. L'étude de résonateurs soumis à des signaux à largeur d'impulsion modulée (de type PWM) mènerait sans doute à des résultats intéressants. On pourrait envisager la construction d'une forme d'onde optimisant les performances d'un oscillateur vis-à-vis de divers indicateurs (limite de pull-in résonant et/ou sensibilité de la fréquence à une ou plusieurs sources de fluctuations).

L'impact de la forme du signal d'actionnement sur la réponse des MEMS fait également apparaître des phénomènes contre-intuitifs dont le potentiel reste partiellement à explorer dans d'autres domaines d'applications que celui des capteurs. Par exemple, l'optimisation d'interrupteurs MEMS résonants [117] nécessite la connaissance précise des limites de stabilité déterminées dans ce manuscrit. Enfin, dans un tout autre domaine, les outils développés dans cette thèse pourraient aussi permettre de trouver des points de fonctionnement et/ou des paramètres optimisant le rendement de conversion des transducteurs piézoélectriques [118] utilisés pour la récupération d'énergie [119]. Ce dernier thème est d'ailleurs particulièrement d'actualité dans un monde où la consommation électrique et le stockage d'énergie sont devenus des contraintes majeures pour la conception de systèmes embarqués.



## V. Bibliographie

- [1] W.-M. Zhang, H. Yan, Z.-K. Peng and G. Meng, “Electrostatic pull-in instability in MEMS/NEMS: A review,” *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 214, p. 187–218, 2014.
- [2] Analog Devices, “ADXL337 Small, Low Power, 3-Axis  $\pm 3$  g (Datasheet),” 2010. [Online]. Available: <http://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADXL337.pdf>.
- [3] Analog Devices, “ADXRS290 Ultralow Noise, Dual-Axis MEMS Gyroscope (Datasheet),” 2014. [Online]. Available: <http://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADXRS290.pdf>.
- [4] S.T. Microelectronics, “MEMS nano pressure sensor: 260-1260 hPa absolute digital output barometer (Datasheet),” 2015. [Online]. Available: <http://www.st.com/>.
- [5] OMRON, “D6T MEMS Thermal Sensors (Datasheet),” [Online]. Available: <https://www.omron.com/ecb/products/pdf/en-d6t.pdf>.
- [6] R. Lifshitz and M. C. Cross, “Nonlinear Dynamics of Nanomechanical and Micromechanical Resonators,” in *Review of Nonlinear Dynamics and Complexity*, Wiley, 2008.
- [7] C. v. d. Avoort, R. v. d. Hout, J. J. M. Bontemps, P. G. Steeneken, K. L. Phan, R. H. B. Fey, J. Hulshof and J. T. M. v. Beek, “Amplitude saturation of MEMS resonators explained by autoparametric resonance,” *J. of Micromechanics and Microengineering*, vol. 20, p. 105012, 2010.
- [8] M. I. Younis, *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*, New York: Springer, 2011.
- [9] L. Cordier and M. Bergmann, “Réduction de dynamique par décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD),” LEMTA, UMR 7563 (CNRS - INPL - UHP), Aussois, 2006.
- [10] M. I. Younis, E. M. Abdel-Rahman and A. Nayfeh, “A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS,” *J. of Microelectromechanical Systems*, vol. 12, no. 5, pp. 672-680, 2003.
- [11] C. Morelle, D. Théron, B. Grimbort, I. Roch-Jeune, V. Brandli and V. Avramovic, “Gallium nitride MEMS resonators: how residual stress impacts design and performances,” in *Symposium on Design, Test, Integration and Packaging of MEMS and MoEMS (DTIP)*, Budapest, 2016.
- [12] D. K. Agrawal, J. Woodhouse and A. Seshia, “Modeling nonlinearities in MEMS oscillators,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 60, no. 8, pp. 1646-1659, 2013.
- [13] A. Fargas-Marques, J. Casals-Terré and A. M. Shkel, “Resonant pull-in condition in parallel-plate electrostatic actuators,” *J. of Microelectromechanical Systems*, vol. 16, no. 5, pp. 1044-1053, 2007.
- [14] A.-H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 1995.
- [15] P. Polunin, Y. Yang, J. Atalaya, E. Ng, S. Strachan, O. Shoshani, M. Dykman, S. Shaw and T. Kenny, “Characterizing MEMS nonlinearities directly: the ring-down

- measurements,” in *18th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS)*, Anchorage, 2015.
- [16] J. Rhoads, S. W. Shaw, K. L. Turner, J. Moehlis, B. E. DeMartini and W. Zhang, “Generalized parametric resonance in electrostatically actuated microelectromechanical oscillators,” *J. of Sound and Vibration*, vol. 296, pp. 797-829, 2006.
  - [17] E. Kenig, M. C. Cross, L. G. Villanueva, R. B. Karabalin, M. H. Matheny, R. Lifshitz and M. L. Roukes, “Optimal operating points of oscillators using nonlinear resonators,” *Physical Review E*, vol. 86, no. 5, p. 056207, 2012.
  - [18] L. G. Villanueva, E. Kenig, R. B. Karabalin, M. H. Matheny, R. Lifshitz, M. C. Cross and M. L. Roukes, “Surpassing Fundamental Limits of Oscillators Using Nonlinear Resonators,” *Physical Review Letters*, vol. 110, no. 17, p. 177208, 2013.
  - [19] A. A. Trusov and A. M. Shkel, “Capacitive detection in resonant MEMS with arbitrary amplitude of motion,” *J. of Micromechanics and Microengineering*, vol. 17, pp. 1583-1592, 2007.
  - [20] J. Juillard, G. Vidal-Alvarez and N. Barniol, “A further study of reduced-order modeling techniques for nonlinear MEMS beams,” in *Symposium on Design, Integration, Test and Packaging of MEMS and MoEMS (DTIP)*, Montpellier, 2015.
  - [21] J. Juillard, “A comparative study of reduced-order modeling techniques for nonlinear MEMS beams,” in *Symposium on Design, Test, Integration & Packaging of MEMS and MOEMS*, Montpellier, France, 2015.
  - [22] J. Juillard, G. Arndt and E. Colinet, “Modeling of Micromachined Beams Subject to Nonlinear Restoring or Damping Forces,” *J. of Microelectromechanical systems*, vol. 20, pp. 165-177, 2011.
  - [23] A. Gelb and W. E. V. Velde, *Multiple-input describing functions and nonlinear system design*, Cambridge: McGraw-Hill Book Company, 1968.
  - [24] D. Senkal, M. J. Ahamed, M. H. A. Ardakani, S. Askari and A. M. Shkel, “Demonstration of 1 million Q-factor on microglassblown wineglass resonators with out-of-plane electrostatic transduction,” *J. of Microelectromechanical Systems*, vol. 24, no. 1, pp. 29-37, 2015.
  - [25] J. Juillard, “Analysis of resonant pull-in of micro-electromechanical,” *J. of Sound and Vibration*, vol. 350, pp. 123-139, 2015.
  - [26] J. Mandle, O. Lefort and A. Migeon, “A new micromachined silicon high-accuracy pressure sensor,” *Sensors and Actuators A*, Vols. 46-47, pp. 129-132, 1995.
  - [27] S. Kalicinski, H. Tilmans, M. Wevers and I. D. Wolf, “A new characterization method for electrostatically actuated resonant MEMS: Determination of the mechanical resonance frequency, quality factor and dielectric charging,” *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 154, no. 2, p. 304–315, 2009.
  - [28] J. Giner, A. Uranga, E. Marigó, J. Muñoz-Gamarra, E. Colinet, N. Barniol and J. Arcamone, “Cancellation of the parasitic feedthrough current in an integrated CMOS–MEMS clamped-clamped beam resonator,” *Microelectronic Engineering*, vol. 98, pp. 599-602, 2012.
  - [29] A. Brenes, J. Juillard, F. V. D. Santos and A. Bonnoit, “Characterization of MEMS resonators via feedthrough de-embedding of pulsed-mode response,” in *The 28th European Conference on Solid-State Transducers (EUROSENSORS)*, Brescia, 2014.

- [30] A. Brenes, J. Juillard, L. Bourgois and F. V. D. Santos, "Parameter estimation from nonlinear frequency response of MEMS resonators," in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, Lisbon, 2015.
- [31] A. Brenes, J. Juillard, L. Bourgois and F. V. D. Santos, "Characterization of capacitive MEMS resonators via nonlinear open-loop frequency responses," in *Symposium on Design, Test, Integration and Packaging of MEMS and MoEMS (DTIP)*, Montpellier, 2015.
- [32] A. Brenes, J. Juillard, F. V. D. Santos and A. Bonnoit, "Characterization of MEMS resonators via feedthrough de-embedding of harmonic and subharmonic pulsed-mode response," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 229, pp. 211-217, 2015.
- [33] A. Brenes, J. Juillard, L. Bourgois and F. V. D. Santos, "Influence of the driving waveform on the open-loop frequency response of MEMS resonators with nonlinear actuation schemes," *J. of Microelectromechanical Systems*, vol. 25, no. 4, pp. 812-820, 2016.
- [34] A. Koszewski, F. Souchon, C. Dieppedale, D. Bloch and T. Ouisse, "Physical model of dielectric charging in MEMS," *J. of Micromechanics and Microengineering*, vol. 23, no. 4, p. 045019, 2013.
- [35] S. Gorreta, J. Pons-Nin, M. Dominguez-Pumar and E. Blokhina, "Characterization method of the dynamics of the trapped charge in contactless capacitive MEMS," in *Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS (DTIP), 2014 Symposium on*, Cannes, 2014.
- [36] M. Dominguez-Pumar, S. Gorreta, J. Pons-Nin, E. Blokhina, P. Giounanlis and O. Feely, "Real-time characterization of dielectric charging in contactless capacitive MEMS," *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, vol. 82, no. 3, pp. 559-569, 2015.
- [37] A. Soma, G. D. Pasquale and M. Saleem, "Creep in MEMS," in *Symposium on Design, Testing, Integration, and Packaging of MEMS/MOEMS (DTIP)*, Cannes, 2014.
- [38] A. Soma and G. D. Pasquale, "MEMS Mechanical Fatigue: Experimental Results on Gold Microbeams," *J. of Microelectromechanical Systems*, vol. 18, no. 4, pp. 828-835, 2009.
- [39] G. Longoni, A. Conte, M. Moraja and A. Fourier, "Stable and Reliable Q-Factor in Resonant MEMS with Getter Film," in *2006 IEEE International Reliability Physics Symposium*, San Jose, CA, 2006.
- [40] F. Siviero, A. Bonucci, A. Conte, M. Moraja, O. Gigan and I. Thomas, "Lifetime prediction in vacuum packaged MEMS provided with integrated getter film," in *Conference on Infrared Technology and Applications XXXVIII*, Baltimore, MD, 2012.
- [41] R. N. Candler, M. A. Hopcroft, B. Kim, W.-T. Park, R. Melamud, M. Agarwal, G. Yama, A. Partridge, M. Lutz and T. W. Kenny, "Long-term and accelerated life testing of a novel single-wafer vacuum encapsulation for MEMS resonators," *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 15, no. 6, pp. 1446-1456, 2006.
- [42] A. B. Graham, M. W. Messana, P. G. Hartwell, J. Provine, S. Yoneoka, R. Melamud, B. Kim, R. T. Howe and T. W. Kenny, "A method for wafer-scale encapsulation of large lateral deflection MEMS devices," *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 19, no. 1, pp. 28-37, 2010.
- [43] D. Elata, "On the static and dynamic response of electrostatic actuators," *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, vol. 53, no. 4, pp. 373-384, 2005.
- [44] M.-H. Bao, *Micro Mechanical Transducers*, Shanghai: Elsevier, 2000, pp. 171-173.

- [45] K. Tanaka, R. Kihara, A. Sanchez-Amores, J. Montserrat and J. Esteve, "Parasitic effect on silicon MEMS resonator model parameters," *Microelectronic Engineering*, vol. 84, p. 1363–1368, 2007.
- [46] G. Vidal-Álvarez, F. Torres, N. Barniol and O. Gottlieb, "The influence of the parasitic current on the nonlinear electrical response of capacitive sensed cantilever beams," in *Symposium on Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS*, Cannes, 2014.
- [47] J. Verd, A. Uranga, J. Segura and N. Barniol, "A 3V CMOS-MEMS oscillator in 0.35 $\mu$ m CMOS technology," in *The 17th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS & EUROSENSORS XXVII)*, Barcelona, 2013.
- [48] S. Wang, T. J. Koickal, A. Hamilton, E. Mastropaolo, R. Cheung, A. Abel, L. S. Smith and L. Wang, "A power-efficient capacitive read-out circuit with parasitic-cancellation for MEMS cochlea sensors," *IEEE Transactions on Biomedical Circuits and Systems*, vol. 10, no. 1, pp. 25-37, 2016.
- [49] S. Wang, T. J. Koickal, A. Hamilton, E. Mastropaolo, R. Latif, R. Cheung, M. Newton and L. Smith, "A low-noise interface circuit for MEMS cochlea-mimicking acoustic sensors," in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Seoul, 2012.
- [50] A.-H. Lin, J. E.-Y. Lee, J. Yan and A. A. Seshia, "Enhanced transduction methods for electrostatically driven MEMS resonators," in *International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS)*, Denver, 2009.
- [51] V. Logeeswaran, F. T. M. Chan, F. Chau and Y. Liang, "First harmonic (2f) characterisation of resonant frequency and Q-factor of micromechanical transducers," *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, vol. 37, pp. 17-33, 2003.
- [52] Aim TTI, "TGA1200 Series," [Online]. Available: <http://www.aimtti.com>.
- [53] Z. Zeng, M. Pertijs and D. Karabacak, "An energy-efficient interface for resonant sensors based on ring-down measurement," *Review of Scientific Instruments*, vol. 84, p. 025005, 2013.
- [54] K. Y. Yasumura, T. D. Stowe, E. M. Chow, T. Pfafman, B. C. S. T. W. Kenny and D. Rugar, "Quality factors in micron- and submicron-thick cantilevers," *J. of Microelectromechanical Systems*, vol. 9, no. 1, pp. 117-125, 2000.
- [55] A. R. Klempner, R. T. Marinis, P. Hefti and R. J. Pryputniewicz, "Experimental determination of Q-factors of microcantilevers coated with thin metal films," in *SEM Annual Conference & Exposition on Experimental and Applied Mechanics*, Connecticut, 2007.
- [56] S. Shmulevich, M. Lerman and D. Elata, "On the quality of quality-factor in gap-closing electrostatic resonators," *J. Micromech. Microeng.*, vol. 23, p. 115010, 2013.
- [57] J. L. Muñoz-Gamarra, E. Marigó, J. Giner, A. Uranga, F. Torres and N. Barniol, "Characterization of CMOS-MEMS resonator by pulsed mode electrostatic actuation," in *2010 IEEE International Frequency Control Symposium*, Newport Beach, 2010.
- [58] P. J. Petersan and S. M. Anlage, "Measurement of resonant frequency and quality factor of microwave resonators: Comparison of methods," *J. of Applied Physics*, vol. 84, no. 6, pp. 3392-3401, 1998.

- [59] J. E.-Y. Lee and A. Seshia, "Direct parameter extraction in feedthrough-embedded capacitive MEMS resonators," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 167, no. 2, pp. 237-244, 2011.
- [60] J. E.-Y. Lee, B. Bahreyni, Y. Zhu and A. A. Seshia, "A single-crystal-silicon bulk-acoustic-mode microresonator oscillator," *IEEE Electron Device Letters*, vol. 29, no. 7, pp. 701-703, 2008.
- [61] S. Gorreta, D. Fernandez, E. Blokhina, J. Pons-Nin, V. Jimenez, D. O'Connell, O. Feely, J. Madrenas and M. Dominguez, "Pulsed Digital Oscillators for Electrostatic MEMS," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 59, no. 12, pp. 2835-2845, 2012.
- [62] J. Juillard, A. Bonnoit, E. Avignon, S. Hentz and E. Colinet, "Large amplitude dynamics of micro/nanomechanical resonators actuated with electrostatic pulses," *J. of Applied Physics*, vol. 107, no. 1, p. 014907, 2010.
- [63] M. Sensa, V. N. Nguyen, S. Baguet, C. H. Lamarque, R. Dufour and S. Hentz, "Real time sensing in the nonlinear regime of NEMS resonators," in *IEEE 29th International Conference on Microelectromechanical Systems (MEMS)*, Shanghai, 2016.
- [64] G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis and J.-C. Golinval, "Review: Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 20, pp. 505-592, 2006.
- [65] A. Carrella and D. Ewins, "Identifying and quantifying structural nonlinearities in engineering applications from measured frequency response functions," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 25, no. 3, pp. 1011-1027, 2011.
- [66] P. M. Polunin, Y. Yang, M. I. Dykman, T. W. Kenny and S. W. Shaw, "Characterization of MEMS resonator nonlinearities using the ringdown response," *J. of Microelectromechanical Systems*, vol. 25, no. 2, pp. 297-303, 2016.
- [67] AlazarTech, "ATS9360 1.8GS/s 12-Bit PCIe Gen2 Digitizer," Alazar Technologies, Pointe-Claire, 2015.
- [68] J. M. Londoño, S. A. Neild and J. E. Cooper, "Identification of backbone curves of nonlinear systems from resonance decay responses," *J. of Sound and Vibration*, vol. 348, pp. 224-238, 2015.
- [69] W. O. Davis, "Measuring quality factor from a nonlinear frequency response with jump discontinuities," *J. of Microelectromechanical Systems*, vol. 20, no. 4, pp. 968-975, 2011.
- [70] A. J. Dick, B. Balachandran, D. L. DeVoe and C. D. J. Mote, "Parametric identification of piezoelectric microscale resonators," *J. of Micromechanics and Microengineering*, vol. 16, pp. 1593-1601, 2006.
- [71] P. Malatkar and A. H. Nayfeh, "A parametric identification technique for single-degree-of-freedom weakly nonlinear systems with cubic nonlinearities," *J. of Vibration and Control*, vol. 9, pp. 317-336, 2003.
- [72] G. Chen, D. J. Hill and X. Yu, *Bifurcation control: Theory and Applications*, Melbourne: Springer, 2003.
- [73] M. Imboden and P. Mohanty, "Dissipation in nanoelectromechanical systems," *Physics Reports*, vol. 534, pp. 89-146, 2014.
- [74] T. Barois, A. Ayari, A. Siria, S. Perisanu, P. Vincent, P. Poncharal and S. T. Purcell, "Ohmic electromechanical dissipation in nanomechanical cantilevers," *Physical Review B*, vol. 85, p. 075407, 2012.

- [75] A. Brenes, J. Juillard and F. V. D. Santos, "Electrostatically-induced modal crosstalk phenomena in resonant MEMS sensors," in *Symposium on Design, Test, Integration and Packaging on MEMS and MoEMS (DTIP)*, Cannes, 2014.
- [76] C. Zener, "Internal friction in solids," *Physical Review*, vol. 52, pp. 230-235, 1937.
- [77] R. Lifshitz and M. L. Roukes, "Thermoelastic damping in micro- and nano-mechanical systems," *Physical Review B*, vol. 61, no. 8, pp. 5600-5609, 2000.
- [78] J. T. M. v. Beek and R. Puers, "A review of MEMS oscillators for frequency reference and timing applications," *J. Micromech. Microeng.*, vol. 22, p. 013001, 2012.
- [79] I. R. Edu, R. Obreja and T. L. Grigorie, "Current technologies and trends in the development of gyros used in navigation applications – a review," in *5th International Conference on Communications and Information Technology (CIT)*, Corfu Island, 2011.
- [80] D. S. Greywall, B. Yurke, P. A. Busch, A. N. Pargellis and R. L. Willett, "Evading amplifier noise in nonlinear oscillators," *Physical Review Letters*, vol. 72, p. 2992, 1994.
- [81] E. Rubiola, "The Leeson Effect - Phase noise in quasilinear oscillators," Cambridge University Press, Nancy, 2005.
- [82] Y. Dong, P. Zwahlen, A.-M. Nguyen, F. Rudolf and J.-M. Stauffer, "High performance inertial navigation grade sigma-delta MEMS accelerometer," in *IEEE Position Location and Navigation Symposium (PLANS)*, Indian Wells, 2010.
- [83] R. M. Langdon, "Resonator sensors - A review," *J. of Physics E: Scientific Instruments*, vol. 18, pp. 103-115, 1985.
- [84] T. Gast, "Sensors with oscillating elements," *J. of Physics E: Scientific Instruments*, vol. 18, p. 18783, 1985.
- [85] R. Levy, A. Dupret and H. Mathias, "Phase noise analysis of the Frequency Tracking Oscillator," in *IEEE International Frequency Control Symposium*, Newport Beach, CA, 2010 .
- [86] X. Feng, C. White, A. Hajimiri and M. Roukes, "A self-sustaining ultrahigh-frequency nanoelectromechanical oscillator," *Nature Nanotechnology*, vol. 3, pp. 342-346, 2008.
- [87] D. K. Agrawal and A. A. Seshia, "An Analytical Formulation for Phase Noise in MEMS Oscillators," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 61, no. 12, pp. 1938-1952, 2014.
- [88] A. Brenes, J. Juillard and F. V. D. Santos, "Dynamic pull-in of high-Q MEMS oscillators with arbitrary closed-loop phase shift," in *Euroensors*, Budapest, 2016.
- [89] J. Juillard, A. Bonnoit, E. Avignon, S. Hentz, N. Kacem and E. Colinet, "From MEMS to NEMS: closed-loop actuation of resonant beams beyond the critical Duffing amplitude," in *IEEE sensors*, Lecce, 2008.
- [90] E. Colinet, J. Juillard, S. Guessab and R. Kielbasa, "Actuation of resonant MEMS using short pulsed forces," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 115, pp. 118-125, 2004.
- [91] A. N. Cleland and M. L. Roukes, "Noise processes in nanomechanical resonators," *J. of Applied Physics*, vol. 92, no. 5, pp. 2758-2769, 2002.
- [92] T. B. Gabrielson, "Mechanical-thermal noise in micromachined acoustic and vibration sensors," *IEEE Transaction on Electron Devices*, vol. 40, no. 5, pp. 903-909, 1993.
- [93] J. Vig and Y. Kim, "Noise in Microelectromechanical System Resonators," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 46, no. 6, pp. 1558-1565, 1999.

- [94] Y. K. Yong and J. R. Vig, "Resonator surface contamination-a cause of frequency fluctuations ?," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 36, no. 4, pp. 452-458, 1989.
- [95] R. F. Voss, "1/f flicker noise: a brief review," in *33rd Annual Symposium on Frequency Control*, Atlantic City, 1979.
- [96] F. N. Hooge, "1/f noise sources," *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 41, no. 11, pp. 1926-1935, 1994.
- [97] P. Ward and A. Duwel, "Oscillator Phase Noise: Systematic Construction of an Analytical Model Encompassing Nonlinearity," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 58, no. 1, pp. 195-205, 2011.
- [98] M. Sansa, E. Sage, E. C. Bullard, M. Gély, T. Alava, E. Colinet, A. K. Naik, L. G. Villanueva, L. Duraffourg, M. L. Roukes, G. Jourdan and S. Hentz, "Frequency fluctuations in silicon nanoresonators," *Nature Nanotechnology*, no. 19, p. 18pp, 2016.
- [99] E. Rubiola and V. Giordano, "On the 1/f frequency noise in ultra-stable quartz oscillators," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 54, no. 1, pp. 15-22, 2007.
- [100] E. Milotti, "1/f noise: a pedagogical review," 2002. [Online]. Available: arXiv:physics/0204033.
- [101] E. Rubiola, "Phase & Frequency Noise Metrology," CNRS, Besançon, 2008.
- [102] A. Hajimiri, Trade-offs in Analog Circuit Design - Trade-offs in Oscillator Phase Noise, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, pp. 551-589.
- [103] E. Rubiola, "Short course on frequency and amplitude stability in oscillators," [Online]. Available: <http://rubiola.org/pdf-lectures/PhD-Course--Time-frequency-All-lectures.pdf>.
- [104] D. Leeson, "A Simple Model of Feedback Oscillator Noise Spectrum," *RFIC Virtual Journal, IEEE*, vol. 54, no. 2, pp. 329-330, 1966.
- [105] B. Yurke, D. S. Greywall and A. N. P. a. P. A. Busch, "Theory of amplifier-noise evasion in an oscillator employing a nonlinear resonator," *Physical Review A*, vol. 51, no. 5, pp. 4211-4229, 1995.
- [106] S. Sancho, F. Ramírez and A. Suárez, "Analysis and reduction of the oscillator phase noise from the variance of the phase deviations, determined with harmonic balance," in *Microwave Symposium Digest, 2008 IEEE MTT-S International*, Atlanta, 2008.
- [107] A. Demir, "Phase noise in oscillators: DAEs and colored noise sources," in *IEEE/ACM International Conference on Computer-aided design (ICCAD)*, San Jose, CA, 1998.
- [108] A. Hajimiri and T. H. Lee, "A General Theory of Phase Noise in Electrical Oscillators," *IEEE J. of Solid-State Circuits*, vol. 33, no. 2, pp. 179-194, 1998.
- [109] B. Razavi, "Analysis, modeling and simulation of phase noise in monolithic voltage-controlled oscillators," in *IEEE Custom Integrated Circuits Conference*, Santa Clara, CA, 1995.
- [110] D. Ham and A. Hajimiri, "Virtual damping and einstein relation in oscillators," *IEEE J. of Solid-State Circuits*, vol. 38, no. 3, pp. 407-418, 2003.
- [111] S. V. Shinde, "Review of oscillator phase noise models," in *International MultiConference of Engineers and Computer Scientists*, Hong Kong, 2014.

- [112] A. Brenes, J. Juillard and F. V. D. Santos, "Impact of the closed-loop phase shift on the frequency stability of capacitive MEMS oscillators," in *Symposium on Design, Test, Integration and Packaging of MEMS and MoEMS (DTIP)*, Budapest, 2016.
- [113] W. A. Gardner, Introduction to random processes with applications to signals and systems, Yountville: McGraw-Hill, 1989, pp. 323-338.
- [114] S. Lee and C. T.-C. Nguyen, "Influence of automatic level control on micromechanical resonator oscillator phase noise," in *IEEE International Frequency Control Symposium*, Tampa, 2003.
- [115] J. Juillard, A. Brenes and F. V. D. Santos, "Influence of excitation waveform on the frequency stability of an electrostatic MEMS oscillator," in *Euroensors*, 2016, 2016.
- [116] A. G. Phipps, "Modeling and characterization of piezoelectric energy harvesting systems with the pulsed resonant converter," University of Florida, Gainesville, 2010.
- [117] Y. Lin, W.-C. Li, Z. Ren and C. T. -C. Nguyen, "The micromechanical resonant switch ('Resoswitch')," in *Solid-State Sensor, Actuator and Microsystems Workshop*, Hilton-Head, 2004.
- [118] K. Wolf and O. Gottlieb, "Nonlinear dynamics of a cantilever beam actuated by piezoelectric layers in symmetric and assymetric configuration," Technion Israel Institute of Technology, Haifa, 2001.
- [119] D. Guyomar, C. Richard, A. Badel, E. Lefeuvre and M. Lallart, Energy harvesting technologies, New York: Springer, 2009, pp. 209-266.
- [120] W. Gander, M. Gander, J. Martin and F. Kwok, Scientific computing - An introduction using Maple and MATLAB, New Delhi: Springer, 2014.
- [121] S. Shmulevich and D. Elata, "Dynamically balanced folded-beam suspensions for resonators," *J. of Microelectromechanical Systems*, vol. 24, no. 6, pp. 1965-1972, 2015.



# Annexes

## Annexe 1 : Orthogonalité des modes propres et définition de la masse et de la raideur modale

### a) Définition d'un opérateur auto-adjoint défini positif

Un opérateur  $\mathbb{K}$  est dit auto-adjoint si et seulement si :

$$\forall f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, \forall g: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, \langle f | \mathbb{K}(g) \rangle_s = \langle g | \mathbb{K}(f) \rangle_s \quad (270)$$

Un opérateur  $\mathbb{K}$  est dit défini positif si :

$$\begin{cases} \forall f, \langle f | \mathbb{K}(f) \rangle_s \geq 0 \\ \langle f | \mathbb{K}(f) \rangle_s = 0 \Rightarrow f = 0 \end{cases} \quad (271)$$

### b) Définition des produits scalaires

On définit le produit scalaire de deux fonctions  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\langle f | g \rangle_s = \int_{\Sigma} f g d\Sigma \quad (272)$$

Soient deux modes propres  $w_p$  et  $w_q$ , de valeurs propres  $\omega_p$  et  $\omega_q$ , on a alors :

$$\begin{cases} \mathbb{K}(w_p(y)) = \omega_p^2 \mathbb{M}(w_p(y)) \\ \mathbb{K}(w_q(y)) = \omega_q^2 \mathbb{M}(w_q(y)) \end{cases} \quad (273)$$

Si  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{M}$  sont auto-adjoints définis positifs, on peut définir les produits scalaires de masse et de raideur par :

$$\begin{cases} \langle f | g \rangle_M = \int_{\Sigma} f \mathbb{M}(g) d\Sigma \\ \langle f | g \rangle_K = \int_{\Sigma} f \mathbb{K}(g) d\Sigma \end{cases} \quad (274)$$

Sous ces hypothèses, on trouve :

$$\begin{cases} (\omega_p^2 - \omega_q^2) \langle w_p | w_q \rangle_M = 0 \\ \forall p \neq q, \langle w_p | w_q \rangle_K = 0 \end{cases} \quad (275)$$

Ainsi, les modes propres sont orthogonaux au sens de l'opérateur de raideur  $\mathbb{K}$  et de l'opérateur de masse  $\mathbb{M}$ . Pour  $p = q$ , on peut alors définir la masse et la raideur modale du mode  $p$  par :

$$\begin{cases} \langle w_p | w_p \rangle_M = m_p \\ \langle w_p | w_p \rangle_K = k_p \end{cases} \quad (276)$$

## Annexe 2 : Théorie des distributions pour l'étude des actionnements par impulsions

### a) Impulsion de Dirac : Définition et spectre

On définit une impulsion parfaite comme la distribution de Dirac  $\delta$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} \forall x \neq 0, \delta(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \delta(x) = \infty \end{cases} \quad (277)$$

Il n'est pas possible de représenter graphiquement cette distribution, mais elle est généralement notée avec une flèche accompagnée d'un « 1 », qui représente l'aire du signal (au sens de la théorie des distributions). Cette distribution est représentée en Fig. 77.

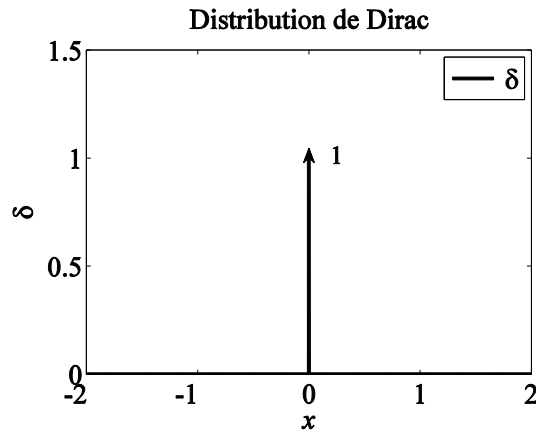


Fig. 77 Tracé d'une distribution de Dirac

Parmi les propriétés remarquables de cette distribution, on se contentera de remarquer que :

$$\forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (278)$$

De manière équivalente à la définition (277), on peut définir une impulsion de Dirac comme le signal (théorique) ayant un spectre parfaitement blanc tel que :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \underline{\delta}(\omega) = 1 \quad (279)$$

Dans la réalité, des impulsions on toujours une hauteur et une durée finie. Dans ce cas, on appelle « masse » d'une impulsion de Dirac le produit  $V_p T_p$  où  $V_p$  et  $T_p$  sont respectivement l'amplitude et la largeur de l'impulsion.

### b) Peigne de Dirac : Définition et spectre

Un peigne de Dirac de période principale  $T$  se définit comme une fonction  $\Delta_T$   $T$ -périodique telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in ]0; T[, \Delta_T(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \Delta_T(x) = \infty \end{cases} \quad (280)$$

Un tel peigne de Dirac de période 1 est représenté en Fig. 78 (avec la même notation combinant une flèche assortie d'un « 1 » pour désigner le pic d'aire unitaire).

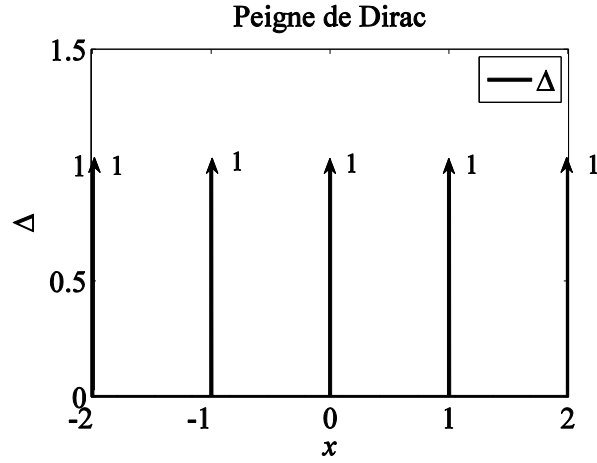


Fig. 78 Tracé d'un peigne de Dirac

Au vu de la définition de  $\Delta_T$ , on remarque que, pour toute fonction  $T$ -périodique :

$$\int_0^T \Delta_T(x) f(x) dx = f(0) \quad (281)$$

De manière équivalente à la définition (280), on peut définir un peigne de Dirac comme le signal (théorique) ayant un spectre tel que :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \underline{\Delta}_T(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \underline{\Delta}_{\frac{\omega}{2\pi}}(\omega) \quad (282)$$

Le spectre d'un peigne de Dirac de période principale  $T$  dans le domaine temporel est un spectre de Dirac de période principale  $\omega/2\pi$  dans le domaine fréquentiel.

### Annexe 3 : Exemples de gains statiques de cellules MEMS

Dans le cas d'un MEMS constitué de deux électrodes planes, la charge motionnelle accumulée sur l'électrode mobile s'écrit, en négligeant les effets de bord:

$$q_m(t) = \frac{C_0 V_b}{1 - x(t)} \quad (283)$$

Si le déplacement du résonateur est de faible amplitude ( $x \ll 1$ ), on obtient :

$$q_m \simeq \frac{\epsilon S V_b}{G} x(t) \quad (284)$$

Le gain statique de la cellule s'écrit alors :

$$G_0 = \frac{\epsilon S V_b}{G} \quad (285)$$

Pour un MEMS à pont vibrant, l'expression de la capacité donnée dans [22] mène à :

$$G_0 = \frac{\epsilon S V_b}{2G} \quad (286)$$

On constate que le gain statique liant le déplacement du résonateur à la charge motionnelle dans le cas d'un résonateur encastré aux deux extrémités est deux fois inférieur à celle d'un résonateur à capacités planes (voir équation (284)).

### Annexe 4 : Non-linéarité de détection

Lorsque l'amplitude du déplacement augmente, le courant motionnel est distordu. Dans la limite des résonateurs à haut facteur de qualité ( $Q \gg 1$ ), la réponse en régime permanent du résonateur peut être approximée par  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$  (voir méthode de la balance harmonique) et l'amplitude  $A_m$  de l'harmonique de pulsation  $\omega$  composant  $q_m$  s'écrit :

$$A_m = \frac{\epsilon S V_b}{G} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin t \, dt}{1 - A \sin t} = \frac{\epsilon S V_b}{G} \frac{A}{1 - A^2 + \sqrt{1 - A^2}} \quad (287)$$

L'erreur relative commise sur l'harmonique de pulsation  $\omega$  en négligeant la non-linéarité de détection pour un résonateur plan est tracée en Fig. 79. On constate logiquement que cette erreur croît avec l'amplitude du déplacement. Elle reste inférieure à 5% jusqu'à une oscillation de 25% du gap entre les électrodes, quelle que soit la valeur des paramètres du résonateur. Ainsi, on pourra supposer, pour un modèle de résonateur plan que l'approximation :

$$A_m \simeq \frac{\epsilon S V_b}{G} A \quad (288)$$

est valable et que la charge motionnelle est l'image (linéaire) du déplacement du résonateur lorsque l'amplitude de son déplacement reste inférieure à 25% du gap entre les électrodes.

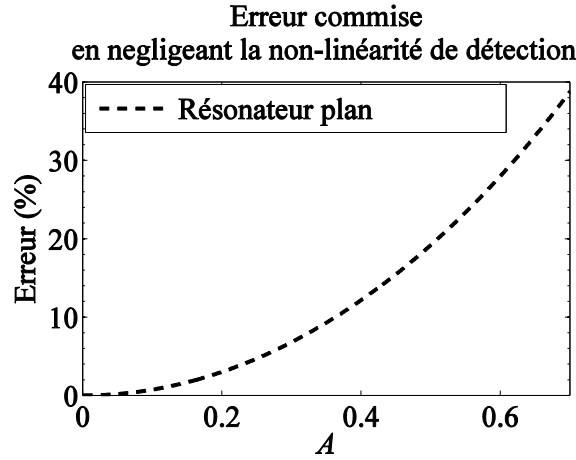


Fig. 79 Erreur commise en approxinant la détection par une détection linéaire pour un résonateur plan.

Les conclusions de la Fig. 79 ne sont valables que dans le cas d'un MEMS à capacités planes. Dans le cas où le résonateur est déformable, la forme du mode de résonance a également un impact sur la non-linéarité de détection. Pour un pont vibrant, on obtient :

$$A_m \simeq \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon S V_b}{2G} \int_0^{2\pi} \frac{\sin t \, dt}{(1 - A \sin t)^{\frac{1}{2}}} \quad (289)$$

$$= \frac{\epsilon S V_b}{2G\pi} \frac{\sqrt{1+A} \left[ (A-1) E_{\frac{2A}{A-1}} + K_{\frac{2A}{A-1}} \right] + \sqrt{1-A} \left[ K_{\frac{2A}{A+1}} - (1+A) E_{\frac{2A}{A+1}} \right]}{A\sqrt{1-A^2}}$$

où  $K_X$  (respectivement  $E_X$ ) correspond à l'intégrale elliptique complète de première (respectivement de seconde) espèce définies par :

$$\forall X \in [0; 1[, \begin{cases} K_X \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - X \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \\ E_X \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - X \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \end{cases} \quad (290)$$

L'erreur commise sur l'harmonique de pulsation  $\omega$  en négligeant la non-linéarité de détection pour un pont vibrant est tracée en Fig. 80. On constate que cette erreur est plus faible que pour un résonateur plan. Elle reste inférieure à 5% jusqu'à une oscillation de 31% du gap entre les électrodes, quelle que soit la valeur des paramètres du résonateur. Ainsi, on pourra supposer, lorsque l'amplitude du déplacement du résonateur encastré-encastré est inférieure à 30% du gap entre les électrodes, que l'approximation :

$$A_m \simeq \frac{\epsilon S V_b}{2G} A \quad (291)$$

est valable. Sous cette hypothèse, la charge motionnelle reste l'image linéaire du déplacement du résonateur, même lorsque la dynamique du mouvement du résonateur est, elle, non-linéaire.

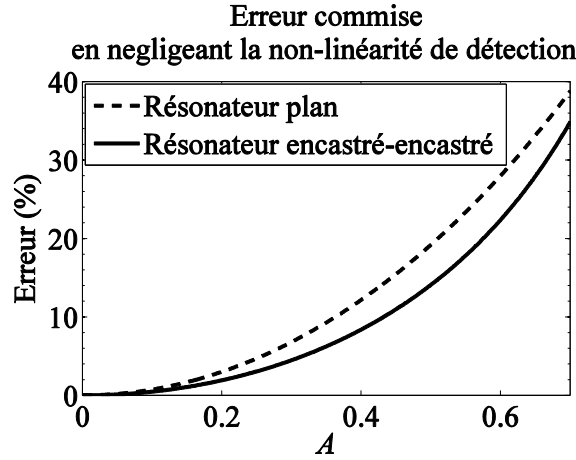


Fig. 80 Erreur commise en approximant la détection par une détection linéaire pour un pont vibrant et comparaison avec un résonateur plan.

## Annexe 5 : Description d'un calcul numérique de série de Fourier

Il s'agit, à partir d'un signal sinusoïdal tronqué  $s_l$  de fréquence connue, d'identifier son amplitude et sa phase. Pour ce faire, on pourrait théoriquement se contenter d'identifier l'amplitude et la phase à partir de toute paire de points  $(t_1, s_l(t_1))$  et  $(t_2, s_l(t_2))$ , puis de moyenner les résultats obtenus en prenant les points deux à deux.

Une manière plus efficace de procéder consiste à effectuer une série de Fourier numérique afin d'identifier les coefficients de Fourier d'ordre un. Il faut noter qu'une transformée de Fourier (qui supposerait alors la fréquence comme inconnue) ne donnerait pas des résultats satisfaisants car l'identification précise de la fréquence requerrait un enregistrement du signal sur une très longue durée (où une résolution en amplitude presque infinie, ce qui est impossible en pratique).

D'après la théorie de Fourier, on sait qu'il existe une unique décomposition d'un signal continu périodique de pulsation  $\omega$  en une série de Fourier sous la forme :

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t)$$

$$\text{avec } \begin{cases} a_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} s(t) dt \\ \forall i \geq 1, a_i = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} s(t) \cos i\omega t dt \\ \forall i \geq 1, b_i = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} s(t) \sin i\omega t dt \end{cases} \quad (292)$$

Comme on ne dispose que d'une période tronquée, on ne peut pas utiliser directement les expressions des coefficients de Fourier pour les déterminer. En revanche, on peut effectuer un

calcul numérique de coefficients qui minimisent la différence, au sens des moindres carrés, entre  $s_1$  et  $s$  et en déduire qu'il s'agit bien des coefficients de Fourier. Ce calcul numérique peut se faire pour un signal dont le spectre est majoritairement constitué d'un nombre limité d'harmoniques où on supposera alors :

$$s(t) \approx \sum_{i=0}^H (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t) \quad (293)$$

où  $H$  est choisi suffisamment grand pour prendre en compte les harmoniques observables du signal  $s(t)$ . En particulier, en notant  $t_j$  ( $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ) les instants où l'on dispose d'une valeur du signal de sortie  $V_{out}$ , on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} s(t_1) \\ s(t_2) \\ \vdots \\ s(t_n) \end{bmatrix} \simeq V \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_H \\ b_H \end{bmatrix} \quad (294)$$

$$\text{où } V = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega t_0) & \sin(\omega t_0) & \cos(2\omega t_0) & \sin(2\omega t_0) & \cdots & \cos(H\omega t_0) & \sin(H\omega t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega t_n) & \sin(\omega t_n) & \cos(2\omega t_n) & \sin(2\omega t_n) & \cdots & \cos(H\omega t_n) & \sin(H\omega t_n) \end{bmatrix}$$

Afin d'identifier les coefficients  $(a_i, b_i)_{i \in \llbracket 1, H \rrbracket}$ , on peut résoudre de manière numérique le système linéaire (294) (où les  $s(t_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ , valeurs du signal de sortie aux instants  $t_j$ , sont enregistrés expérimentalement). Pour ce faire, étant donné que la matrice  $V$  n'est pas (nécessairement) carrée, l'un des algorithmes les plus performants, en termes de complexité de calcul, consiste à décomposer la matrice en un produit d'une matrice orthogonale (donc carrée)  $Q$  et d'une matrice triangulaire supérieure  $R$  (décomposition QR) de sorte que  $V = QR$ , puis à écrire :

$$R^T R \begin{bmatrix} s(t_1) \\ s(t_2) \\ \vdots \\ s(t_n) \end{bmatrix} = V^T \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_H \\ b_H \end{bmatrix} \quad (295)$$

On peut ensuite utiliser les algorithmes de résolution, simples et rapides, de systèmes linéaires à matrice triangulaire par substitution directe ou inverse.

On peut montrer que cette méthode de résolution par décomposition QR revient à effectuer un ajustement aux moindres carrés de la formule de décomposition tronquée en série de Fourier sur le signal  $s(t)$  [120]. Ainsi, on obtient, sur le signal de sortie tronqué, la meilleure identification des coefficients de Fourier au sens des moindres carrés. On peut enfin déduire, pour chaque enregistrement, l'amplitude et la phase du signal par les formules :

$$\begin{cases} A = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) \end{cases} \quad (296)$$

si  $a_1 \neq 0$ , ce qui est toujours vérifié en pratique. On peut ainsi tracer la réponse du résonateur.

### Annexe 6 : Identification de paramètres d'un résonateur MEMS capacitif dans le domaine de Nyquist

La représentation de Nyquist revient à tracer la fonction de transfert  $H_{mes}(j\omega)$  reliant le déplacement  $x$  à la tension d'actionnement sinusoïdale  $V$  dans le plan complexe.

$$\begin{cases} Re(H_{mes}(j\omega)) = C_p + \frac{2\eta C_0 V_b (1 - \Omega^2)}{(1 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}} \\ Im(H_{mes}(j\omega)) = \frac{-2\eta C_0 V_b \Omega}{Q \left[ (1 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2} \right]} \end{cases} \quad (297)$$

où les opérateurs  $Re$  et  $Im$  désignent respectivement partie réelle et partie imaginaire. On peut alors tracer la réponse fréquentielle du système décrit par  $H_{mes}$  dans le domaine de Nyquist, en présence ou en l'absence de capacité parasite. Ce tracé est réalisé en Fig. 81.

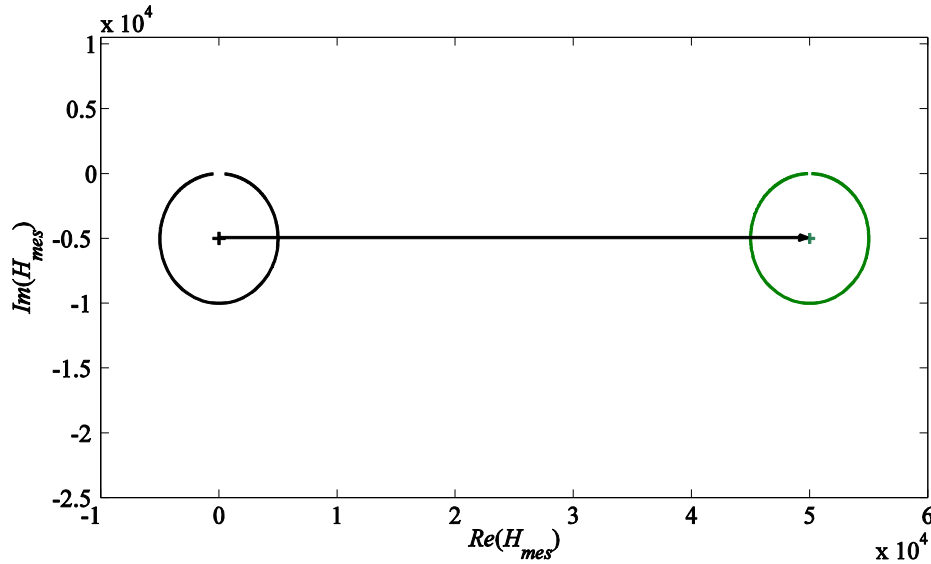


Fig. 81 Description qualitative de l'effet d'une capacité parasite sur la réponse fréquentielle d'un résonateur linéaire dans le domaine de Nyquist (courbe noire, sans capacité parasite, et courbe verte, avec capacité parasite telle que  $2\eta C_0/C_p = 2 \times 10^{-5}$ ).

On constate, sur la Fig. 81, que la réponse fréquentielle d'un résonateur MEMS linéaire dans le domaine de Nyquist ne subit qu'une translation du fait de la présence d'une capacité parasite. Il est alors possible d'identifier un cercle dans ce domaine à partir d'une série de mesures. La norme du vecteur de translation permet de déterminer la valeur de la capacité parasite.



L'identification des paramètres à partir de la réponse fréquentielle tracée dans le domaine de Nyquist permet de remonter simultanément à la fréquence de résonance et au facteur de qualité du résonateur.

Cette méthode présente principalement deux inconvénients.

- Dans le cas d'un résonateur à haute capacité parasite, il reste extrêmement complexe de trouver la résonance et de la mesurer avec précision, compte-tenu de la très faible variation observée sur l'amplitude et la phase (voir pour rappel Fig. 24).
- Pour un résonateur linéaire, en l'absence de phénomènes liés à la présence d'une capacité parasite, cette méthode a été prouvée moins robuste au bruit que les méthodes d'ajustement de l'amplitude ou de la phase par méthode des moindres carrés [58].

## Annexe 7 : Absence de raidissement mécanique pour le résonateur étudié

### a) Impact de l'imperfection de l'encastrement sur la réponse statique

Comme montré en section II.C.g.i, un résonateur parfaitement encasté à ses deux extrémités se raidit du fait de son allongement lors de sa déformation. Ceci génère l'apparition d'un terme de non-linéarité cubique  $\gamma x^3$ .

Dans notre cas d'étude (voir Fig. 8-a), bien que la forme du mode de résonance soit proche de celle d'un résonateur encasté aux deux extrémités (voir Fig. 9), le résonateur n'est pas parfaitement encasté à l'une de ses extrémités car il est fixé à un diaphragme qui est lui-même déformable. Ceci se traduit alors à la fois par des effets dynamiques et des effets statiques. Du point de vue des effets statiques, on peut simuler, en résolution non-linéaire d'un modèle à éléments finis, le déplacement maximal du résonateur par rapport à la position d'équilibre sous une pression électrostatique  $P_s$  appliquée à sa surface supérieure. Dans ce cas, le déplacement statique  $a_0$  du résonateur s'écrit :

$$(1 + \gamma a_0^2) a_0 = \frac{P_s L}{G \omega_0^2} \quad (298)$$

soit

$$a_0 = \frac{1}{3} \left( -\frac{3 \times 2^{\frac{1}{3}}}{\gamma^{\frac{1}{3}} \vartheta^{\frac{1}{3}}} + \frac{\gamma^{\frac{1}{3}} \vartheta^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} \gamma} \right) \quad (299)$$

où  $\vartheta = \gamma^{\frac{1}{3}} \left( \sqrt{108\gamma + \frac{729L^2 P_s^2 \gamma^2}{G^2 \omega_0^4}} + \frac{27LP_s \gamma}{G \omega_0^2} \right)^{\frac{1}{3}}$ . On constate, dans l'équation (299), que le déplacement statique de la poutre (correspondant au déplacement du centre de la poutre dans un modèle encasté-encasté) n'évolue pas linéairement avec la pression statique. On a ainsi une manière simple de vérifier a priori si le résonateur est soumis, ou non, à la non-linéarité cubique due au raidissement.

Sur la Fig. 82, on reporte les résultats de simulations statiques non-linéaires par éléments finis. On trace le déplacement du centre de la poutre lorsqu'elle est soumise à une pression constante. Les résultats obtenus pour le capteur de pression à diaphragme sont comparés à ceux obtenus en

forçant, sur la même structure, un encastrement parfait aux deux extrémités. Le déplacement du capteur de pression sur une loi linéaire (Fig. 82-a). On est donc en présence d'une poutre qui :

- présente un mode de résonance principal proche de celui d'un pont vibrant (Fig. 9) ;
- en situation statique, ne présente pas de non-linéarité de raidissement.

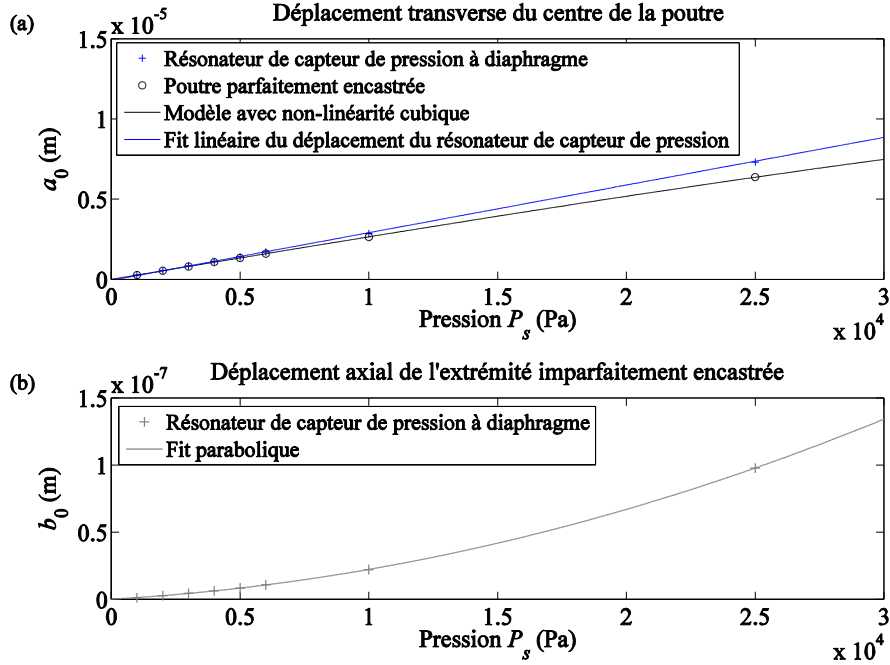


Fig. 82 Illustration de l'absence de non-linéarité cubique sur le capteur de pression à l'étude : Résultats de simulations par éléments finis. (a) Déplacement transverse du centre de la poutre et comparaison avec un modèle parfaitement encastree. (b) Déplacement axial de l'extrémité imparfaitement encastree.

On peut analyser quantitativement ce phénomène et prouver que l'absence de raidissement est bien due au déplacement (de faible amplitude) de l'extrémité pseudo-encastree. En effet, comme on l'a vu en section II.C.g.i, le mouvement transverse (ici déplacement statique  $x(t) = a_0$ ) d'une poutre parfaitement encastree aux deux extrémités génère un allongement  $\Delta L$  tel que :

$$L + \Delta L = L \int_0^1 \sqrt{1 + \left( \frac{a_0}{L} \frac{\partial w_{cc}}{\partial y} \right)^2} dy \simeq L \int_0^1 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{L} \frac{\partial w_{cc}}{\partial y} \right)^2 dy \quad (300)$$

Dans le cas où le mouvement axial de l'encastrement compense cette élongation, le phénomène de raidissement n'apparaît pas. Cette condition correspond à un déplacement axial  $b_0$  de l'extrémité pseudo-encastree :

$$b_0 = \Delta L \simeq \frac{a_0^2}{2L} \int_0^1 \left( \frac{\partial w_{cc}}{\partial y} \right)^2 dy \simeq \frac{a_0^2}{2L} \times 4.88 \quad (301)$$

Compte-tenu de la longueur du résonateur ( $L=1.8\text{mm}$ ) et de la pente ( $0.293\mu\text{m} \cdot \text{Pa}^{-1}$ ) de la droite  $a_0 = f(P)$  trouvée en Fig. 82-a, le déplacement axial de l'encastrement compense l'élongation de la poutre si le coefficient de degré 2 de la parabole  $b_0 = f(P)$  vérifie  $\frac{s^2}{2L} \times 4.88 =$

$0.1167 \text{ fm} \cdot \text{Pa}^{-2}$ . Sur la Fig. 82-b, ce coefficient vaut  $0.1125 \text{ fm} \cdot \text{Pa}^{-2}$  très proche de la valeur attendue. Ceci prouve donc que c'est bien le déplacement axial statique de l'extrémité qui génère l'absence de non-linéarité cubique.

### b) Impact de l'imperfection de l'encastrement sur la réponse dynamique

Dans le cas dynamique, l'inertie des éléments connectés au résonateur au niveau de l'encastrement imparfait peut jouer un rôle dans la réponse fréquentielle du système. L'étude d'encastrements imparfaits servant de guide au mouvement de la poutre a fait l'objet d'un article récent de S. Shmulevich et D. Elata [121]. Cet article s'intéresse spécifiquement à des poutres dont un encastrement présente des degrés de liberté (de faible amplitude) en translation et/ou en rotation. Il étudie l'impact de la réponse fréquentielle de ce mouvement guidé. Le mouvement de l'encastrement imparfait se comporte comme un filtre passe-bas par rapport au signal qui engendre son mouvement.

Dans notre cas, le mouvement du résonateur entraîne celui de l'encastrement imparfait. Ceci pourrait générer un raidissement en fonction de la réponse fréquentielle de l'encastrement, en fonction de l'inertie de l'encastrement et de la raideur du matériau. Ce phénomène est illustré en Fig. 83.

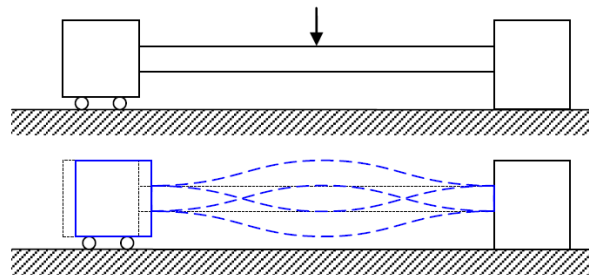


Fig. 83 Illustration de l'effet d'un encastrement imparfait sur la dynamique d'une poutre.

Pour démontrer l'absence de ce phénomène, on reporte en Fig. 84 et Fig. 85 les résultats de simulations dynamiques non-linéaires à éléments finis où des pressions sinusoïdales de 300 et de 2000Pa ont été appliquées sur la face supérieure de la poutre. Afin de garantir un temps raisonnable de simulation, le facteur de qualité a été fixé à 5 et l'amplitude des pressions considérées permet, avec ce facteur de qualité, d'atteindre des déplacements couvrant l'intégralité du gap, dont la largeur est proche de  $6\mu\text{m}$ .

La comparaison entre la Fig. 84 et la Fig. 85 permet de voir que le déplacement transverse de l'encastrement imparfait est très faible devant le déplacement transverse du center de la poutre. On comprend ainsi pourquoi la forme du mode de vibration principal est proche de celle d'un pont vibrant. Ce déplacement transverse de l'extrémité sera noté  $x_E(t)$  (normalisé par rapport au gap) et peut être identifié à  $x_E(t) = a_{E_0} + a_E \sin(\omega t + \varphi_E)$ , (Fig. 84).

Ensuite, on constate que :

- Le déplacement transverse (normalisé par rapport au gap  $G$ ) du centre de la poutre est sinusoïdal ((Fig. 85)).
- Le déplacement axial (normalisé par rapport à la longueur de la poutre  $L$ ) de l'extrémité imparfaitement encastree peut être modélisé par une composante statique et deux harmoniques (et sera noté  $y_E(t) = b_0 + b_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + b_2 \sin(2\omega t + \varphi_2)$ , voir courbes vertes sur la Fig. 85).

Les valeurs de  $a_1$ ,  $\varphi$ ,  $a_E$ ,  $a_{E_0}$ ,  $\varphi_E$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $b_2$ ,  $\varphi_2$  pour des pressions de 300 et de 2000Pa sont reportées dans le Tableau 9.

Amplitude de la pression	$a_1$	$a_e$ ( $\times 10^{-2}$ )	$a_{e_0}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$b_0$ ( $\times 10^{-6}$ )	$b_1$ ( $\times 10^{-6}$ )	$b_2$ ( $\times 10^{-6}$ )
300Pa	0,14	0,48	-1,13	0,25	1,51	0,26
2000Pa	0,93	2,6	-48	10,9	9,94	11,6

Amplitude de la pression	$\varphi$ (rad)	$\varphi_1$ (rad)	$\varphi_2$ (rad)	$\varphi_e$ (rad)
300Pa	1.37	1.36	1.14	1.38
2000Pa	1.37	1.36	1.15	1.38

Tableau 9. Caractéristiques des déplacements mesurés sur le modèle éléments finis en simulation non-linéaire transitoire pour le centre de la poutre et l'extrémité imparfaitement encastree.

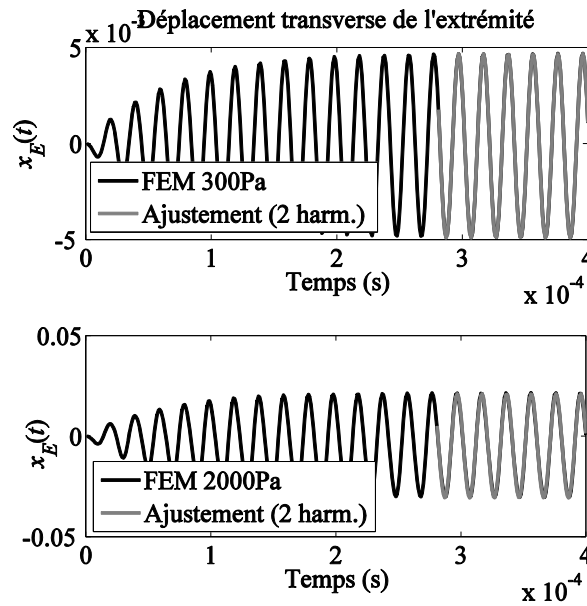


Fig. 84 Simulations non-linéaires transitoires par éléments finis pour deux pressions d'amplitudes différentes. Mouvement transverse normalisé de l'extrémité imparfaitement encastree et ajustement par  $x_E(t) = a_{E_0} + a_E \sin(\omega t + \varphi_E)$ .

Le mouvement d'un résonateur encastree aux deux extrémités engendre l'allongement  $\Delta L$  :

$$\Delta L(t) \simeq \frac{x(t)^2}{2L} \int_0^1 \left( \frac{\partial w_{cc}}{\partial y} \right)^2 dy \simeq \frac{x(t)^2}{2L} \times 4.88 \quad (302)$$

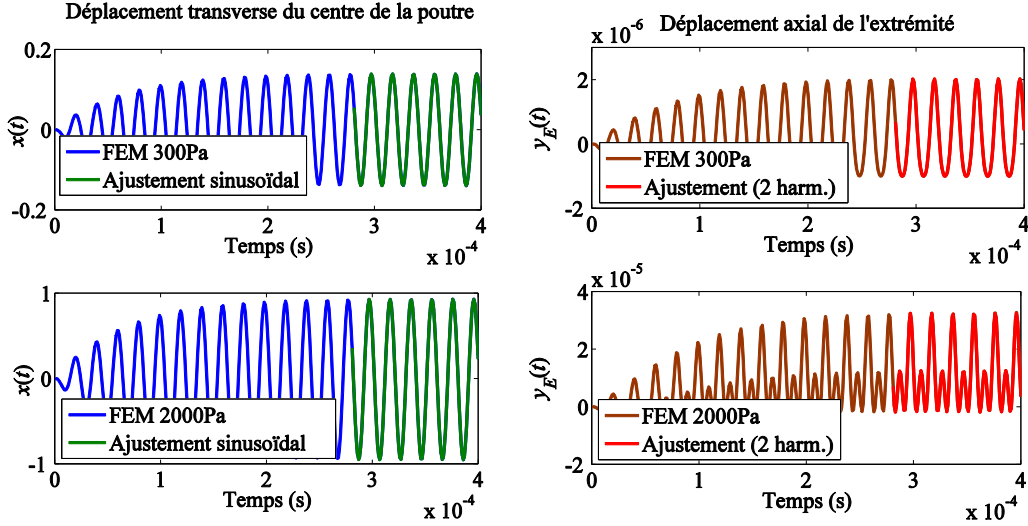


Fig. 85 Simulations non-linéaires transitoires par éléments finis pour deux pressions d'amplitudes différentes.

Gauche : Mouvement transverse normalisé du centre de la poutre et ajustements  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ .

Droite : Mouvement axial normalisé de l'extrémité imparfaitement encastree et ajustement par  $y_e(t) = b_0 + b_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + b_2 \sin(2\omega t + \varphi_2)$ .

Comme  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ , on peut alors écrire:

$$\Delta L(t) \simeq \frac{G^2 A^2}{4L} (1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)) \times 4,88 \quad (303)$$

Ainsi, l'élongation d'une poutre parfaitement encastree aux deux extrémités présente deux composantes:

- Une composante statique  $\Delta L_0 \simeq \frac{G^2 A^2}{4L} \times 4,88$ .
- Une composante dynamique à  $2\omega$ -component d'amplitude  $\Delta L_{2\omega} = \Delta L_0 \simeq \frac{G^2 A^2}{4L} \times 4,88$  and phase  $2\varphi - \frac{\pi}{2}$ .

Le déplacement axial de l'encastrement imparfait compense l'élongation si le déplacement axial statique et sa composante à  $2\omega$  vérifient:

$$b_0 + b_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) = \frac{\Delta L(t)}{L} \simeq \frac{G^2 x(t)^2}{2L^2} \times 4,88 \simeq x(t)^2 \times 2,71 \times 10^{-5} \quad (304)$$

Dans le cas contraire, si la réponse fréquentielle du mouvement axial de l'encastrement en fonction du mouvement transverse de la poutre présente une fréquence de coupure très inférieure au double de la fréquence de travail, l'encastrement peut être vu comme parfait. Dans le cas particulier où ce filtre passe-bas présente un pic de résonance proche du double de la fréquence de travail, des phénomènes de résonance paramétrique peuvent drastiquement modifier le comportement dynamique de la poutre.

Aucun de ces deux cas de figure ne se présente ici, comme en atteste la Fig. 86, qui montre que la formule (304) est bien vérifiée. Les coefficients directeurs des deux ajustements linéaires correspondant à 300Pa et à 2000Pa sont respectivement  $2,72 \times 10^{-5}$  et  $2,66 \times 10^{-5}$ , très proches de la valeur attendue. Le fait que les ellipses  $b_0 + b_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) = f(x^2)$  soient applaties au

point qu'elles semblent linéaires est caractéristique de la relation de phase  $\varphi_2 = 2\varphi - \frac{\pi}{2}$  (voir Tableau 9).

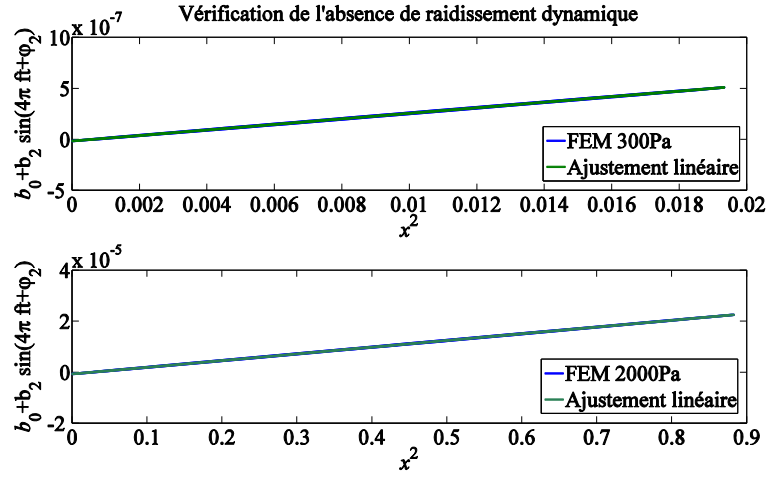


Fig. 86 Simulations non-linéaires transitoires par éléments finis: Evolution de la composante statique et de la composante dynamique à  $2\omega$  du déplacement axial en fonction du déplacement du centre de la poutre.

Le déplacement de l'extrémité résulte en une modulation de la raideur de la poutre qui s'écrit alors  $k(1 + \alpha_k x(t) + \beta_k \dot{x})$ . Comme  $\varphi_E \simeq \varphi$ , on pourra considérer  $\beta \simeq 0$ . Concernant  $\alpha_k$ , on peut le négliger tant que :

$$\left| \frac{Elhb_1}{L^2} \left\langle \frac{d^2 w_1}{dy^2} \right| w_1 \right\rangle_s \right| \ll \frac{Eb_1 h^3 \lambda_1^4}{12L^3} \|w_1\|^2 \quad (305)$$

c'est-à-dire tant que :

$$b_1 \ll 5 \times 10^{-4} \quad (306)$$

ce qui est vérifié dans nos simulations.

Compte-tenu de l'absence de raidissement dû à l'imperfection de l'encastrement et de l'absence de phénomènes dynamiques de résonance paramétrique à cet encastrement, l'équation de comportement du résonateur s'écrit donc :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{\eta \omega_0^2 (1 + v(t))^2}{(1 - x(t))^{\frac{3}{2}}} \quad (307)$$

Avec un tel résonateur, on peut étudier spécifiquement l'impact de la non-linéarité électrostatique, indépendamment de la non-linéarité cubique de raidissement.

## Annexe 8 : Réponse fréquentielle d'un pont vibrant capacitif imparfaitement encastré à une extrémité

Le comportement dynamique d'un MEMS à pont vibrant imparfaitement encastré à une extrémité polarisé sous tension  $V_b$  et actionné par une tension  $V_{act}(t)$  peut s'approximer, avec les notations précédentes, par (voir Annexe 6) :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x \simeq \frac{\eta \omega_0^2 (1 + v(t))^2}{(1 - x(t))^{3/2}} \quad (308)$$

Afin de tracer la réponse fréquentielle d'un tel résonateur, on applique la méthode de la balance harmonique décrite en section II.D.d à l'équation (308), en supposant toujours:

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \\ V_0 \ll 1 \end{cases} \quad (309)$$

La méthode de la balance harmonique donne alors :

$$\begin{cases} S(A, \varphi) \equiv \frac{2\eta\omega_0^2}{\omega A} [F_1^{cc}(A) + V_0 F_s^{cc}(A, \varphi) \cos \varphi] - \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} = 0 \\ C(A, \varphi) \equiv -\frac{2\eta\omega_0^2 V_0 F_c^{cc}(A, \varphi)}{\omega} \sin \varphi - \frac{A\omega_0}{Q} = 0 \end{cases} \quad (310)$$

avec

$$F_1^{cc}(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin t \, dt}{(1 - A \sin t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{1+A}}{\pi A(1-A^2)} \left[ E_{\frac{2A}{1+A}} - (1-A) K_{\frac{2A}{1+A}} \right] \quad (311)$$

où  $K_A$  (respectivement  $E_A$ ) représente l'intégrale elliptique complète de première (respectivement de seconde) espèce estimée en  $A$ . Comme dans le cas d'un résonateur à capacités planes,  $F_s^{cc}(A, \varphi)$  et  $F_c^{cc}(A, \varphi)$  dépendent de la forme d'actionnement et sont respectivement liés aux effets de l'actionnement en phase et en quadrature de phase avec le déplacement. Leurs expressions sont fournies dans le Tableau 10, où on a noté  $C_\varphi = \cos \varphi$ ,  $S_\varphi = \sin \varphi$ ,  $N_+ = \sqrt{1 + AC_\varphi}$ ,  $N_- = 1 - AC_\varphi$  et  $\beta = \sqrt{N_- N_+}$ .

	Sinusoidal	Impulsions	Impulsions combinées	Carré
$F_s$	$\frac{4\sqrt{1+A}}{\pi(1-A^2)} E_{\frac{2A}{1+A}}$ $- \frac{8}{\pi A^2 \sqrt{1+A}} \left[ K_{\frac{2A}{1+A}} - (1+A) E_{\frac{2A}{1+A}} \right]$	$\frac{1}{N_-^3}$	$\frac{1}{2} \frac{N_+^3 + N_-^3}{(N_- N_+)^3}$	$\frac{N_- + N_+}{(1-A^2)\beta}$ $- \frac{1}{AC_\varphi(1+A)\beta} \left[ E_{-\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}} \left( \frac{2A}{A-1} \right) - E_{\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}} \left( \frac{2A}{A-1} \right) + \frac{(1+A)\beta}{\sqrt{1-A}} \left( K_{\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}} \left( \frac{2A}{A-1} \right) - K_{\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}} \left( \frac{2A}{A-1} \right) \right) \right]$
$F_c$	$\frac{8}{\pi A^2 \sqrt{1+A}} \left[ K_{\frac{2A}{1+A}} - (1+A) E_{\frac{2A}{1+A}} \right]$	$\frac{1}{N_-^3}$	$\frac{1}{2} \frac{N_+^3 + N_-^3}{(N_- N_+)^3}$	$\frac{1}{AS_\varphi} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-AS_\varphi}} - \frac{1}{\sqrt{1+AS_\varphi}} \right]$

Tableau 10. Expression des composantes en phase et en quadrature de la force d'actionnement électrostatique pour un résonateur à pont vibrant actionné par différentes formes d'onde.

Dans le Tableau 10, on a noté  $K_\alpha(A)$  (respectivement  $E_\alpha(A)$ ) les intégrales elliptiques incomplètes de première (respectivement de deuxième) espèce estimées en  $\alpha$  et en  $A$  définies par :

$$\begin{cases} K_\alpha(A) = \int_0^\alpha \frac{dt}{(1-A \sin^2 t)^{\frac{1}{2}}} \\ E_\alpha(A) = \int_0^\alpha (1-A \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} dt \end{cases} \quad (312)$$

La résolution du système (310) donne alors les réponses en fréquence représentées en Fig. 87 (pour des actionnements d'amplitude légèrement supérieure à celles considérées pour un résonateur à capacités planes, afin de pouvoir observer tous les phénomènes voulus). On constate que les résultats sont globalement identiques à ceux d'un résonateur à capacités planes. La principale différence se situe dans les niveaux d'actionnement requis pour les observer. En suivant le même raisonnement qu'en section III.E.c.v, on peut montrer que l'amplitude limite d'apparition de deux pics de résonance pour l'actionnement par impulsions combinées est légèrement plus haute que pour un résonateur à capacités planes et vaut :

$$A_l^{cc} = \frac{2}{\sqrt{15}} \simeq 0,52 \quad (313)$$

La limite correspondante est reproduite en gris sur la Fig. 87.



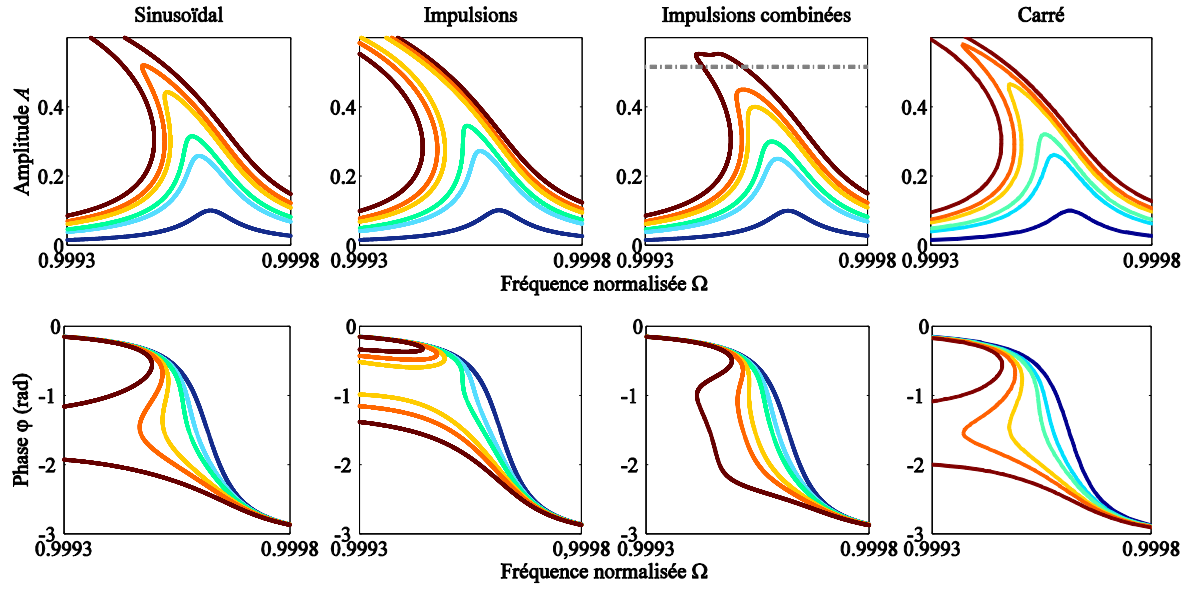


Fig. 87 Réponses en fréquence d'une poutre encastée-encastée sans raidissement mécanique actionnée de façon électrostatique pour  $V_0 = 0,01$ ,  $V_0 = 0,025$ ,  $V_0 = 0,03$ ,  $V_0 = 0,04$ ,  $V_0 = 0,045$  et  $V_0 = 0,055$ . La ligne grise horizontale correspond à l'amplitude limite d'apparition de la double résonance (voir équation (313)).

## Annexe 9 : Théorème des fonctions implicites

Dans l'analyse des résultats et la résolution des problèmes analytiques, il est parfois utile de faire appel au théorème des fonctions implicites, lorsque les variables du système sont liées entre elles par de multiples équations. On se limite ici au cas de fonctions de deux variables réelles même si ce théorème s'énonce de façon beaucoup plus générale sur des espaces de Banach. Dans  $\mathbb{R}^2$ , ce théorème mentionne que :

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  définie sur un ouvert  $\mathbb{U}$  de  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $(x_0, y_0)$  un point de  $\mathbb{U}$  tel que :

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases} \quad (314)$$

Alors, il existe une fonction réelle  $g$  de classe  $C^1$ , définie sur un intervalle ouvert réel  $\mathbb{W}$  contenant  $x_0$ , et un voisinage ouvert  $\mathbb{V}$  de  $(x_0, y_0)$  dans  $\mathbb{U} \cap (\mathbb{W} \times \mathbb{R})$ , tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y) \in \mathbb{U} \times \mathbb{V}, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow g(x) = y \\ \forall x \in \mathbb{U}, f(x, g(x)) = 0 \\ \forall (x, y) \in \mathbb{U} \times \mathbb{V}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0 \\ \frac{dg}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} \end{array} \right. \quad (315)$$

## Annexe 10 : Décomposition en séries de Fourier d'une fonction d'une variable à évolution sinusoidale

Soit  $F$  une non-linéarité statique sans mémoire et  $x(t) = A \sin \omega t$  le déplacement du résonateur. La décomposition de  $F$  en série de Fourier donne :

$$F(x(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i(A) \cos i\omega t + b_i(A) \sin i\omega t)$$

$$\text{avec } \begin{cases} a_0(A) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(x(t)) dt \\ \forall i \geq 1, a_i(A) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(x(t)) \cos i\omega t dt \\ \forall i \geq 1, b_i(A) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(x(t)) \sin i\omega t dt \end{cases} \quad (316)$$

Montrons que dans ce cas les coefficients  $a_{2k+1}$  et  $b_{2k}$  sont nuls :

$$b_{2k}(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin t) \sin 2kt dt \quad (317)$$

Le changement de variable  $t \rightarrow -t$  et la  $2\pi$ -périodicité de  $F$  donnent :

$$b_{2k}(A) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(-A \sin t) \sin 2kt dt = -b_{2k}(-A) \quad (318)$$

Le changement de variable  $t \rightarrow t - \pi$  et la  $2\pi$ -périodicité de  $F$  donnent cette fois :

$$b_{2k}(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(-A \sin t) \sin 2kt dt = b_{2k}(-A) \quad (319)$$

On prouve ainsi que  $b_{2k}(A) = 0$ .

De même, on peut prouver par des changements de variable similaires que  $a_{2k+1}(A) = 0$ . On peut donc écrire  $F$  sous la forme :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{2k+1}(A) \sin((2k+1)\omega t) + F_{2k}(A) \cos(2k\omega t) \quad (320)$$

## Annexe 11 : Construction d'un oscillateur auto-entretenu à impulsions

On implémente ici une architecture d'oscillateur à impulsions combinées actionné à la quadrature. Une façon simple de construire un oscillateur à impulsions combinées consiste à brancher un amplificateur de charge, un comparateur et un filtre dérivateur dans la boucle. Le signal du comparateur, déclenché sur le signal de sortie de l'amplificateur de charge, est ensuite dérivé et réinjecté en entrée du résonateur. Le schéma de principe d'un tel oscillateur a été publié par E. Colinet en 2004 [90] et est repris ici en Fig. 62.

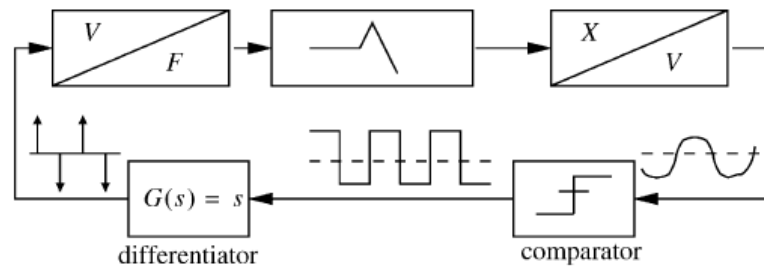


Fig. 88 Schéma de principe d'un oscillateur à impulsions combinées [90].

Dans le cadre de nos travaux, la faisabilité d'un tel oscillateur a été validée. Le schéma électrique de l'architecture correspondante est tracé en Fig. 89. Les valeurs de  $R_t$  choisies pour nos expériences sont ici  $R_t = 560\Omega$ ,  $R_t = 1,5k\Omega$  et  $R_t = 2,2k\Omega$ .

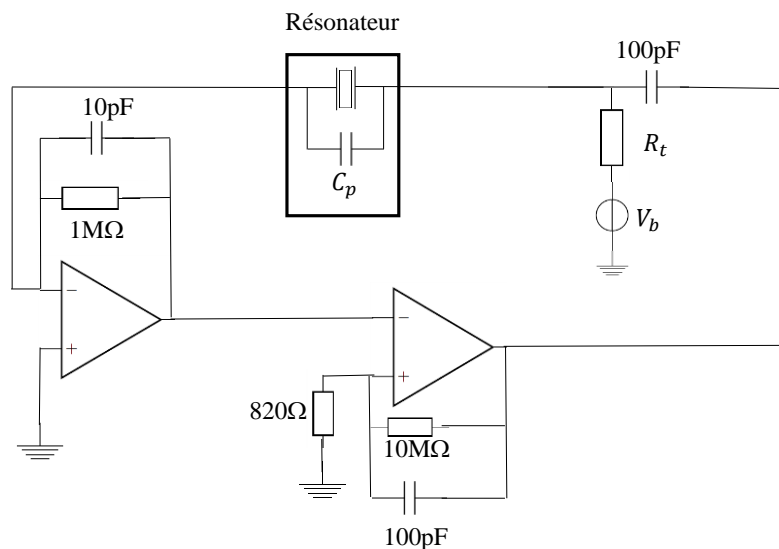


Fig. 89 Schéma électrique d'un oscillateur à impulsions combinées.

Les composantes alternatives des signaux de sortie du comparateur, du té de polarisation et de l'amplificateur de charge obtenus expérimentalement sont reportés en Fig. 90. On constate, comme attendu, que le signal de sortie de l'amplificateur de charge contient :

- Un signal motionnel sinusoïdal
- Des impulsions de tension provenant de la capacité parasite de la cellule MEMS, superposées au signal motionnel.

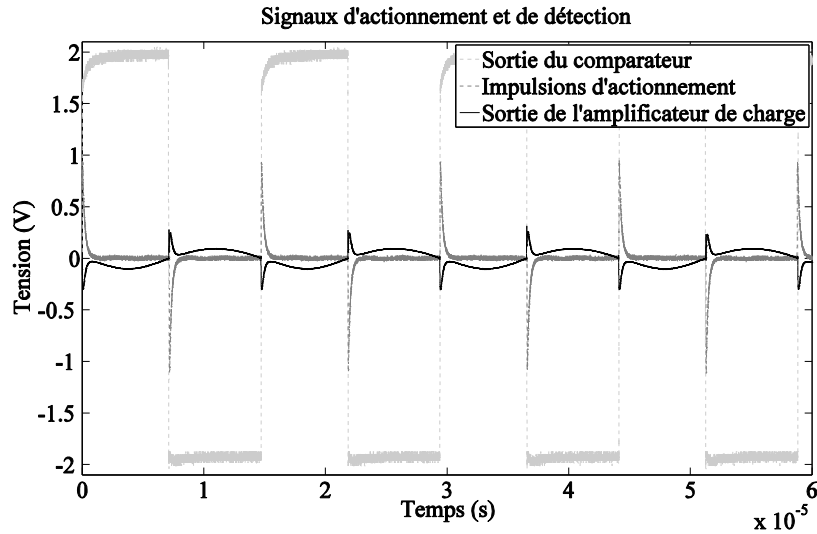


Fig. 90 Résultats expérimentaux : composantes alternatives des signaux de sortie du comparateur, du té de polarisation et de l'amplificateur de charge pour un oscillateur à impulsions combinées (pour  $R_t = 570\Omega$ ).

Dans l'architecture de la Fig. 89, l'actionnement est réalisé en quadrature, ce qui est confirmé expérimentalement sur la Fig. 90. Pour faire varier le déphasage introduit par la boucle de rétroaction, il serait nécessaire de rajouter un étage dans l'architecture. On pourrait par exemple rajouter un filtre passe-tout déphaseur en sortie de l'amplificateur de charge. Cette solution a été testée expérimentalement mais pose des problèmes de stabilité des oscillations. La principale difficulté d'utilisation d'un tel filtre réside dans la présence des pics de tension parasites véhiculés de l'entrée vers la sortie du MEMS par la capacité parasite  $C_p$ . L'utilisation d'un filtre passe-tout déphaseur génère un déphasage différent sur chacune des harmoniques des impulsions parasites qui parcourent l'oscillateur, ce qui peut détruire l'oscillation. Utiliser un filtre passe-tout déphaseur en sortie du comparateur pose le même problème. Une autre solution consisterait par exemple à utiliser une boucle à verrouillage de phase et à dériver le signal de sortie de l'oscillateur contrôlé en tension. La boucle pourrait alors être verrouillée autour de la valeur de phase souhaitée. La réalisation expérimentale d'un oscillateur à impulsions combinées utilisant une boucle à verrouillage de phase n'a pas encore été réalisée.

Avant de pouvoir analyser la réponse en boucle fermée d'un tel oscillateur, il est nécessaire de prendre en compte l'impact de la non-linéarité de détection du capteur P90 (et des capteurs à détection unilatérale de manière générale) sur le rapport cyclique du signal d'actionnement. Dans le cas d'un comparateur déclenché sur le signal motionnel d'un résonateur à détection unilatérale [90] (Fig. 89), le signal de sortie est distordu. Ce phénomène est présenté dans la section IV.C. Un exemple de signal obtenu expérimentalement et illustrant ce phénomène est reporté en Fig. 91. On constate sur ce signal :

- La présence d'impulsions parasites, comme à plus faible amplitude.
- Un signal motionnel distordu présentant une amplitude positive  $V^+$  inférieure à l'amplitude négative  $V^-$ .

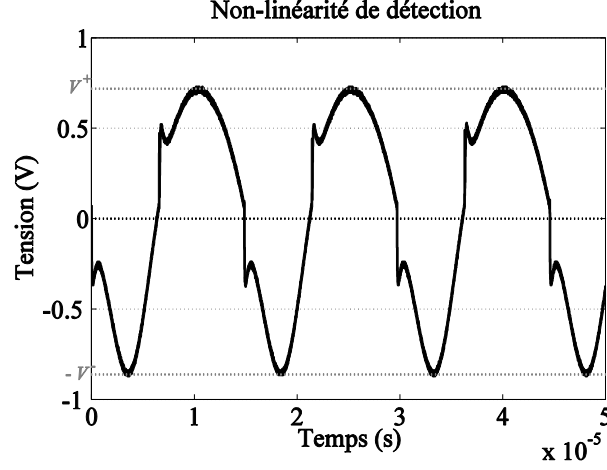


Fig. 91 Effet de la détection unilatérale sur la distorsion du signal motionnel (résultat expérimental):  
composante alternative du signal de sortie de l'amplificateur de charge à grande amplitude d'oscillation (>  
30% du gap) pour  $R_t = 1,5k\Omega$ .

## Annexe 12 : Détermination de la variance des composantes en phase et en quadrature d'un bruit blanc

Pour déterminer la variance des composantes en phase  $b^s$  et en quadrature  $b^c$  d'un bruit blanc, on peut exprimer la variance comme la fonction d'autocorrélation exprimée au point 0 soit :

$$\sigma_{b^c}^2 = E(b^c(0)b^c(t)) \quad (321)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{b^c}^2 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} E(b(\tau_1 + t)b(\tau_2)) \sin \psi(t \\ + \tau_1) \sin \psi(\tau_2) \frac{d\psi}{d\tau_1} \frac{d\psi}{d\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (322)$$

Comme  $b$  est un bruit blanc, on trouve :

$$\sigma_{b^c}^2 = \frac{\sigma_b^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\tau_1 = \tau_2 - t) \sin \psi(t + \tau_1) \sin \psi(\tau_2) \frac{d\psi}{d\tau_1} \frac{d\psi}{d\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \quad (323)$$

$$\sigma_{b^c}^2 \simeq \frac{\Omega_s \sigma_b^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi \simeq \frac{\sigma_b^2 \Omega_s}{\pi} \simeq \frac{\sigma_b^2}{\pi} \quad (324)$$

Le calcul peut être mené avec  $b^s$  et mène au même résultat.

### Annexe 13 : Impact des composantes en phase et en quadrature du bruit sur le comportement d'un oscillateur à résonateur non-linéaire

Dans le cas d'un résonateur non-linéaire,  $H_{cos}$  peut avoir un impact non-négligeable sur la stabilité fréquentielle de l'oscillateur comme on le prouve dans la suite de cette section. Pour le comprendre, on peut écrire l'équation régissant le comportement mécanique d'un résonateur non-linéaire soumis à un bruit thermomécanique sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{1}{Q}\dot{x} + x = g_{NL}(t, x(t)) + b(t) \quad (325)$$

où  $g_{NL}$  regroupe, le cas échéant, l'ensemble des forces non-linéaires que subit le résonateur. La méthode de la balance harmonique donne cette fois :

$$\begin{cases} A[1 - \Omega^2] = g^s(A, \Omega) + b^s \\ 2\Omega\dot{A} + A\dot{\Omega} + \frac{A\Omega}{Q} = g^c(A, \Omega) + b^c \end{cases} \quad (326)$$

où  $g^s$  et  $g^c$  sont respectivement les composantes en phase et en quadrature de  $g_{NL}$ . Un développement limité au premier ordre de  $g^s$  et  $g^c$  donne :

$$\begin{cases} g^s(A, \Omega) = A_s[1 - \Omega_s^2] + \frac{\partial g^s}{\partial A}\delta A + \frac{\partial g^s}{\partial \Omega}\delta \Omega \\ g^c(A, \Omega) = \frac{A_s\Omega_s}{Q} + \frac{\partial g^c}{\partial A}\delta A + \frac{\partial g^c}{\partial \Omega}\delta \Omega \end{cases} \quad (327)$$

Le système (326) devient donc, pour  $Q \gg 1$  et  $\Omega_s \simeq 1$  :

$$\begin{cases} \delta A \frac{g^s}{A_s} \left[ 1 - \frac{A_s}{g^s} \frac{\partial g^s}{\partial A} \right] - 2Q g^s \delta \Omega \frac{\partial g^s}{\partial A} = b^s \\ \frac{2}{A_s} \delta \dot{A} + \delta \dot{\Omega} + \frac{\delta A}{A_s Q} \left( 1 - \frac{A_s}{g^c} \frac{\partial g^c}{\partial A} \right) + \frac{\delta \Omega}{Q} \left( 1 - \frac{1}{g^c} \frac{\partial g^c}{\partial \Omega} \right) = \frac{b^c}{Q g^c} \end{cases} \quad (328)$$

On peut alors éliminer  $\delta A$  de la première équation en appliquant l'opérateur  $2\frac{d}{dt} + \frac{1}{Q} \left( 1 - \frac{A_s}{g^c} \frac{\partial g^c}{\partial A} \right)$ . La combinaison des deux équations donne finalement :

$$\begin{aligned} \delta \dot{\Omega} \left( 1 + \frac{\epsilon_h}{4Q} \right) + \frac{\delta \Omega}{2Q} \left[ 1 - Q \frac{\partial g^c}{\partial A} + \frac{\epsilon_h}{2Q} \left( 1 + \frac{1}{A_s} \frac{\partial g^c}{\partial \Omega} \right) \right] = \\ \frac{1}{2A_s} \left[ \frac{\epsilon_h}{2Q} b^c - b^s - \frac{b^s}{2Q} \left( 1 - Q \frac{\partial g^c}{\partial A} \right) \right] \end{aligned} \quad (329)$$

où on a noté :

$$\begin{aligned}\epsilon_h &\equiv \frac{1}{\left(g^c + \frac{1}{2Q} \frac{\partial g^s}{\partial \Omega}\right)} \left[g^s - A_s \frac{\partial g^s}{\partial A}\right] \simeq \frac{g^s}{g^c} \left[1 - \frac{A_s}{g^s} \frac{\partial g^s}{\partial A}\right] \\ &\simeq Q \left(1 - \Omega_s^2 - \frac{\partial g^s}{\partial A}\right)\end{aligned}\quad (330)$$

Tant que l'actionnement est opéré suffisamment proche de la quadrature,  $\frac{\epsilon_h}{2Q} \ll 1$  de sorte que l'équation devient :

$$\dot{\delta\Omega} + \frac{\delta\Omega}{2Q} \left[1 - Q \frac{\partial g^c}{\partial A}\right] = \frac{1}{2A_s} \left[ \frac{\epsilon_h}{2Q} b^c - \left[ \dot{b}^s + \frac{b^s}{2Q} \left(1 - Q \frac{\partial g^c}{\partial A}\right) \right] \right] \quad (331)$$

On peut ensuite réécrire les fonctions de transfert  $H_{sin}$  et  $H_{cos}$  sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{sin}(\Delta\Omega) \simeq -\frac{1}{2A_s} \\ H_{cos}(\Delta\Omega) \simeq \frac{\epsilon_h}{4QA_s \left[ j\Delta\Omega + \frac{1}{2Q} - \frac{1}{2} \frac{\partial g^c}{\partial A} \right]} \end{array} \right. \quad (332)$$

# Table des illustrations

Fig. 1 Modèle simple de résonateur linéaire .....	17
Fig. 2 Réponse typique d'un résonateur linéaire du second ordre à haut facteur de qualité...20	
Fig. 3 Schéma générique d'une poutre résonante dans les hypothèses d'Euler-Bernoulli .....	25
Fig. 4 Schéma d'une poutre sous différentes sollicitations dans les hypothèses d'Euler-Bernoulli.....	27
Fig. 5 Illustration de la validité de l'hypothèse de première harmonique sur une simulation transitoire. Gauche : Evolution jusqu'au régime permanent. Droite : Zoom sur le régime permanent. ....	37
Fig. 6 Réponses fréquentielles typiques d'un résonateur de pulsation propre unitaire soumis à une non-linéarité cubique durcissante de type Duffing pour différentes amplitudes d'actionnement. Les lignes pointillées correspondent au cas linéaire (dans ce cas les réponses en phase sont superposées à la courbe en bleu foncé). ....	39
Fig. 7 Zones d'instabilité (hachurées) d'un résonateur de pulsation propre unitaire soumis à une non-linéarité cubique durcissante pour différentes amplitudes d'actionnement (mêmes paramètres que la Fig. 6). ....	42
Fig. 8 (a) Coupe transverse de la cellule MEMS du capteur de pression étudié. (b) Principe de fonctionnement du capteur. ....	42
Fig. 9 Principal (premier) mode de résonance de la structure MEMS : mode encastré-encastré. ....	43
Fig. 10 Circuit électronique composé d'un té de polarisation et d'un amplificateur de charge. L'élément $X_m$ correspond au résonateur. ....	44
Fig. 11 Systèmes typiques de détection capacitive. L'élément $C_x$ représente la capacité variable (qui peut être un résonateur dans le cas d'un capteur résonant). Amplificateur de charge (gauche) et amplificateur à transimpédance (droite). Le condensateur $C_p$ correspond à la capacité parasite présente entre les électrodes de la cellule MEMS. ....	45
Fig. 12 Diagramme de bode de l'amplificateur de charge utilisé pour la détection. La fréquence de travail est représentée par le trait pointillé. ....	46
Fig. 13 Structure typique d'actionnement capacitif. Actionnement via té de polarisation. ....	47
Fig. 14 Photographie du banc de caractérisation automatisé. ....	49
Fig. 15 Photographie du circuit imprimé de caractérisation. ....	50
Fig. 16 Schéma de l'environnement de pilotage et d'acquisition .....	50
Fig. 17 Interface graphique de paramétrage.....	51
Fig. 18 Illustration du phénomène de pull-in statique pour différentes tension de polarisation linéairement réparties entre 10V et 142V (du bleu au rouge). La ligne pointillée correspond à un déplacement d'un tiers du gap.....	59
Fig. 19 Illustration du phénomène de pull-in dynamique dans l'espace des phases : trajectoires de phase pour différents niveaux d'énergie.....	60
Fig. 20 Etapes d'une procédure de caractérisation.....	62
Fig. 21 Effet de la capacité parasite sur le courant de sortie de la cellule MEMS.....	63
Fig. 22 Profil expérimental obtenu en régime linéaire: Amplitude (Gauche) et phase (droite). ....	64
Fig. 23 Illustration du problème posé par la capacité parasite sur un résonateur linéaire. Réponse mécanique du résonateur (ligne discontinue) et réponse électrique pour des valeurs croissantes de capacités parasites (de bleu à rouge). Les réponses en amplitude ont été normalisées par rapport à leur maximum. ....	65



Fig. 24 Effet de la capacité parasite sur la réponse fréquentielle d'un résonateur capacitif en régime non-linéaire (tiré de [46]). Graphiques c), e) et g) : Réponses en amplitude pour des valeurs croissantes de capacité parasite. Graphiques d), f) et h) : Réponses en phase correspondantes. Les graphiques a) et b) correspondent à la réponse mécanique. ....	66
Fig. 25 Compensation de la capacité parasite par une capacité discrète $C_{corr}$ . ....	67
Fig. 26 Compensation de la capacité parasite par utilisation d'un second résonateur. ....	68
Fig. 27 Illustration de l'effet de la distorsion harmonique du signal d'entrée actionné avec un signal sinusoïdal sous-harmonique (méthode décrite dans [51]). ....	70
Fig. 28 Exemple simulé de mesures en oscillations libres (« ring-down ») pour un résonateur linéaire de facteur de qualité $Q = 10^4$ . ....	70
Fig. 29 Illustration du principe de la mesure harmonique à impulsions. ....	72
Fig. 30 Signaux de sortie de mesure HPMA. (a) Données expérimentales. (b) Signal tronqué. (c) Signal reconstitué. ....	73
Fig. 31 Signaux de sortie de mesure SPMA ( $N = 12$ ). Signal enregistré (a) et zoom sur le signal motionnel (b). (tiré de [32]) ....	75
Fig. 32 (a) Erreur relative sur l'amplitude due aux approximations ( $Q = 20000$ et $N = 1$ (HPMA)). (b) Erreur pour différentes valeurs du nombre subharmonique $N$ (tiré de [32]). ....	77
Fig. 33 Illustration d'un actionnement subharmonique avec $N = 1$ , $N = 12$ et $N = 48$ . Les lignes verticales correspondent à un peigne de Dirac modulé par un sinus-cardinal, dû à la largeur des impulsions. Le trait noir représente la réponse fréquentielle d'un résonateur de facteur de qualité $Q = 1000$ . ....	78
Fig. 34 Réponses expérimentales obtenues par actionnement sinusoïdal (courbe grise) et par actionnement par impulsions harmonique (losanges noirs). La courbe noire continue correspond à un ajustement d'une réponse lorentzienne sur la courbe de mesures HPMA (tiré de [32]). ....	79
Fig. 35 Réponse expérimentale obtenue par actionnement par impulsions subharmonique (croix noires). La courbe noire continue correspond à un ajustement d'une réponse lorentzienne sur la courbe de réponse en amplitude (tiré de [32]). ....	80
Fig. 36 Erreur quadratique cumulée entre les courbes ajustées et les courbes expérimentales pour la méthode HPMA (courbes pointillées) et la méthode SPMA (courbes continues), pour l'amplitude (courbes noires) et la phase (courbes grises). ....	81
Fig. 37 Illustration du problème de détermination de la fréquence instantanée pour un résonateur à haut facteur de qualité : Différence, sur une période, entre deux signaux sinusoïdaux d'amplitude unitaire et de fréquences proches à $\pm 1\%$ (pulsations de $1\text{rad.s}^{-1}$ et de $1,001\text{rad.s}^{-1}$ ). ....	85
Fig. 38 Résultats de caractérisation par méthode « temps-fréquence » : estimation des paramètres après reconstruction de la « backbone curve » dans l'espace amplitude-raideur (tiré de [68]). Les courbes noires correspondent à différentes séries de mesures effectuées sur un même résonateur. La courbe rouge pointillé correspond au résultat de l'identification. ....	85
Fig. 39 Procédure d'identification de paramètres proposée dans [70]. 1 <sup>e</sup> étape : raideur, coefficient de Duffing, amplitude de la force. 2 <sup>e</sup> étape : coefficient d'amortissement. 3 <sup>e</sup> étape : masse et contrainte axiale dans le résonateur. ....	88
Fig. 40 Formes d'ondes étudiées : Actionnement sinusoïdal (trait gris clair), par impulsions (trait noir pointillé), par impulsions combinées (trait continu gris foncé) et carré (trait gris pointillé) ....	91
Fig. 41 Réponses fréquentielles obtenues pour différents actionnements à différentes amplitudes d'actionnement. Les zones hachurées correspondent aux zones instables. La ligne horizontale pointillée correspond à la limite d'apparition de deux pics de résonance (graphique (c)) ....	93

Fig. 42 Description qualitative de l'effet de la non-linéarité électrostatique sur la réponse fréquentielle d'un résonateur MEMS à haut facteur de qualité. Les courbes en pointillé correspondent à un résonateur linéaire.....	94
Fig. 43 Facteur d'amplification autoparamétrique ( $\log_{10} F_c(A, \varphi)$ ) pour un actionnement sinusoïdal, à impulsions, à impulsions combinées et carré. ....	96
Fig. 44 Vérification des hypothèses et des résultats sur une simulation en régime transitoire. (a) Réponse fréquentielle. (b) Vérification du déplacement statique et de la seconde harmonique. (c) Zoom sur le haut de la réponse fréquentielle. ....	98
Fig. 45 Effet du rapport cyclique des impulsions sur la réponse fréquentielle. Cas d'un actionnement par impulsions combinées sous $V_0 = 0,048$ . ....	98
Fig. 46 Exemple de signaux expérimentaux d'actionnement par impulsions et à impulsions combinées pour un nombre subharmonique $N = 5$ . ....	99
Fig. 47 Résultats expérimentaux. Comparaison de l'actionnement par impulsions et de l'actionnement par impulsions combinées pour des amplitudes d'actionnement croissantes (de bleu à brun).....	100
Fig. 48 Zoom sur le phénomène de double hystérésis. ....	101
Fig. 49 Organigramme de la procédure récursive de caractérisation.....	108
Fig. 50 Reconstitution de réponses fréquentielles sur base de jeux de données simulés pour un résonateur à non-linéarité cubique. ....	108
Fig. 51 Erreur moyenne ( $\theta - \theta$ ) sur chacune des 120 combinaisons de paramètres testées. ....	109
Fig. 52 Reconstitution de la réponse fréquentielle la moins non-linéaire ( $F = 10^{-5}$ , $Q = 1000$ , $\gamma = 5 \times 10^{-4}$ ) avec une erreur de 34% sur $\gamma$ . ....	109
Fig. 53 Résultats expérimentaux sur 5 séries de mesures de réponses fréquentielles pour des tensions d'actionnement croissantes (de bleu à brun). ....	111
Fig. 54 Evolution des paramètres avec la tension d'actionnement. Les valeurs attendues du coefficient électromécanique et du gain nominal (compte-tenu de la géométrie du dispositif) sont comprises entre les lignes horizontales bleues pointillées. Les lignes vertes correspondent à un ajustement (constant pour $G_e$ , $\eta$ et $f_0$ et affine pour $Q$ ). ....	112
Fig. 55 Détermination de la capacité nominale de la cellule MEMS. La valeur attendue compte-tenu de la géométrie du dispositif (et de l'incertitude sur le gap) est comprise entre les lignes horizontales pointillées. ....	113
Fig. 56 Résultats expérimentaux. Dix séries de mesures de réponses fréquentielles à dix tensions de polarisation différentes. ....	114
Fig. 57 Valeurs des paramètres en fonction de la tension de polarisation. ....	115
Fig. 58 Principe de fonctionnement d'un capteur MEMS résonant. Signaux électriques (flèches noires) et grandeurs mécaniques (flèches rouges). Les étapes de transduction électrique/mécanique et mécanique/électrique sont représentées par les triangles (respectivement notés E/M et M/E). La fréquence peut être récupérée à partir des signaux de détection, d'actionnement, ou de signaux intermédiaires de l'électronique de rétroaction (traits pointillés). ....	121
Fig. 59 Fonctions remplies par les différents éléments de la boucle auto-oscillante : non-linéarité (ici exemple d'une saturation) et gain et déphasage introduits par l'électronique ( $G_{el}, \varphi_{el}$ ), la détection (conversion mécano-électrique) ( $G_{det}, \varphi_{det}$ ), l'actionnement (conversion électromécanique) ( $G_{act}, \varphi_{act}$ ). L'ordre dans lequel ces fonctions sont réalisées peut différer. ....	121

Fig. 60 Formes d'ondes étudiées : Actionnement sinusoïdal (trait gris clair), par impulsions (trait noir pointillé), par impulsions combinées (trait continu gris foncé) et carré (trait gris pointillé) .....	123
Fig. 61 Réponses en boucle fermée d'un résonateur à capacités planes et à détection linéaire pour différentes valeurs de $V_0$ logarithmiquement distribuées entre $10^{-2}$ et $10^{-1}$ . Les zones d'instabilité sont représentées en hachuré. ....	127
Fig. 62 Schéma de principe d'un oscillateur à impulsions combinées [90].....	128
Fig. 63 Effet de la détection unilatérale sur la distorsion du signal motionnel. Déplacement du résonateur $x$ , tension de sortie de l'amplificateur de charge $V_{out}$ et tension de sortie du comparateur $V_{comp}$ . ....	129
Fig. 64 Haut : Réponses en boucle fermée d'un résonateur à capacités planes à détection non-linéaire avec déclenchement de l'actionnement sur les passages par zéro de la tension de sortie. Bas : Réponses en boucle fermée dans le cas linéaire. Les zones d'instabilité sont représentées en hachuré. ....	131
Fig. 65 Forme typique d'un spectre de bruit de phase (haut), d'un spectre de bruit de fréquence (milieu) et de la variance d'Allan (bas) d'un oscillateur en échelle logarithmique, reproduit à partir de [103]. ....	136
Fig. 66 Position de la pulsation de coupure $\omega_s/2Q$ et du temps caractéristique $2Q/\omega_s$ sur les spectres de bruit de phase et de fréquence et sur le graphique de variance d'Allan, selon le modèle de Leeson.....	138
Fig. 67 Décomposition du bruit sur un oscillateur LC par A. Hajimiri [108] [102]. (a) Impulsion $i(t)$ de bruit injectée en phase. (b) Impulsion $i(t)$ de bruit injectée en quadrature. (c) Effet d'une impulsion sur l'amplitude et la phase de l'oscillateur dans l'espace des phases. ..	139
Fig. 68 Système étudié pour la modélisation du bruit de fréquence soumis à un bruit additif. ....	140
Fig. 69 Evolution de la variance des fluctuations de fréquence pour un résonateur à non-linéarité cubique fortement non-linéaire ( $\gamma Q > 1$ ) actionné par des forces d'amplitude croissante et soumis à un bruit blanc additif. Les lignes continues correspondent à l'équation (252). Les cercles correspondent à des simulations en régime transitoire effectuées dans les mêmes conditions. ....	149
Fig. 70 Point de fonctionnement optimal vis-à-vis du bruit thermomécanique pour un oscillateur à amplitude d'actionnement fixée constitué d'un résonateur à non-linéarité cubique. ....	150
Fig. 71 Phase et amplitude d'actionnement du point de fonctionnement optimal pour un résonateur de Duffing de facteur de qualité $Q = 10^2$ à actionnement linéaire.....	151
Fig. 72 Variance d'Allan exprimée en $2Q$ et amplitude d'oscillation en fonction de la phase de rétroaction pour un résonateur fortement non-linéaire : actionnement sinusoïdal (bleu), par impulsions (rouge), par impulsions combinées (gris) et carré (noir). Le trait pointillé correspond à la quadrature. ....	153
Fig. 73 Haut : Phase de rétroaction optimale en fonction de l'amplitude d'oscillation pour un actionnement sinusoïdal (noir), par impulsions (bleu), par impulsions combinées (rouge) et carré (gris). Bas : Amplitudes d'actionnement correspondantes.....	155
Fig. 74 Sensibilité de la fréquence au bruit thermomécanique pour différents actionnements et comparaison avec un modèle de Duffing tel que $\gamma = -4\eta$ . ....	156
Fig. 75 Sensibilité de la fréquence aux fluctuations lentes de la phase de rétroaction pour différents actionnements et comparaison avec un modèle de Duffing tel que $\gamma = -4\eta$ . ....	157
Fig. 76 Sensibilité de la fréquence aux fluctuations lentes de la tension de polarisation pour différents actionnements et comparaison avec un modèle de Duffing tel que $\gamma = -4\eta$ . ....	158

Fig. 77 Tracé d'une distribution de Dirac .....	171
Fig. 78 Tracé d'un peigne de Dirac.....	172
Fig. 79 Erreur commise en approximant la détection par une détection linéaire pour un résonateur plan. ....	174
Fig. 80 Erreur commise en approximant la détection par une détection linéaire pour un pont vibrant et comparaison avec un résonateur plan. ....	175
Fig. 81 Description qualitative de l'effet d'une capacité parasite sur la réponse fréquentielle d'un résonateur linéaire dans le domaine de Nyquist (courbe noire, sans capacité parasite, et courbe verte, avec capacité parasite telle que $2\eta C_0/C_p = 2 \times 10^{-5}$ ). ....	177
Fig. 82 Illustration de l'absence de non-linéarité cubique sur le capteur de pression à l'étude : Résultats de simulations par éléments finis. (a) Déplacement transverse du centre de la poutre et comparaison avec un modèle parfaitement encasté. (b) Déplacement axial de l'extrémité imparfaitement encastée.....	179
Fig. 83 Illustration de l'effet d'un encastrement imparfait sur la dynamique d'une poutre. ....	180
Fig. 84 Simulations non-linéaires transitoires par éléments finis pour deux pressions d'amplitudes différentes. Mouvement transverse normalisé de l'extrémité imparfaitement encastée et ajustement par $xEt = aE0 + aE\sin(\omega t + \varphi E)$ .....	181
Fig. 85 Simulations non-linéaires transitoires par éléments finis pour deux pressions d'amplitudes différentes. Gauche : Mouvement transverse normalisé du centre de la poutre et ajustements $xt = A\sin\omega t + \varphi$ . ....	182
Fig. 86 Simulations non-linéaires transitoires par éléments finis: Evolution de la composante statique et de la composante dynamique à $2\omega$ du déplacement axial en fonction du déplacement du centre de la poutre. ....	183
Fig. 87 Réponses en fréquence d'une poutre encastée-encastée sans raidissement mécanique actionnée de façon électrostatique pour $V_0 = 0,01$ , $V_0 = 0,025$ , $V_0 = 0,03$ , $V_0 = 0,04$ , $V_0 = 0,045$ et $V_0 = 0,055$ . La ligne grise horizontale correspond à l'amplitude limite d'apparition de la double résonance (voir équation (313)). ....	186
Fig. 88 Schéma de principe d'un oscillateur à impulsions combinées [90].....	188
Fig. 89 Schéma électrique d'un oscillateur à impulsions combinées.....	188
Fig. 90 Résultats expérimentaux : composantes alternatives des signaux de sortie du comparateur, du té de polarisation et de l'amplificateur de charge pour un oscillateur à impulsions combinées (pour $Rt = 570\Omega$ ). ....	189
Fig. 91 Effet de la détection unilatérale sur la distorsion du signal motionnel (résultat expérimental): composante alternative du signal de sortie de l'amplificateur de charge à grande amplitude d'oscillation ( $> 30\%$ du gap) pour $Rt = 1,5k\Omega$ . ....	190

## Table des tableaux

Tableau 1. Impact des principaux modes de défaillance sur les paramètres caractéristiques du résonateur. ....	61
Tableau 2. Expressions du ratio entre le premier harmonique de l'actionnement et la tension de polarisation. ....	90
Tableau 3. Expression des composantes en phase et en quadrature de la force d'actionnement électrostatique pour un résonateur à capacités planes actionné par différentes formes d'onde. ....	92
Tableau 4. Valeurs des paramètres de simulation pour la validation de la procédure de caractérisation. On teste ici les 120 combinaisons possibles de ces valeurs de paramètres. ....	107
Tableau 5. Expression analytique des limites de stabilité pour un résonateur à capacités planes à haut facteur de qualité opéré sous faible tension de polarisation (devant la tension de pull-in statique). ....	127
Tableau 6. Expression des composantes en phase et en quadrature de la force d'actionnement électrostatique pour un résonateur à capacités planes à détection unilatérale actionné par différentes formes d'onde. ....	130
Tableau 7. Expressions de la variance des fluctuations de fréquence pour un oscillateur de Duffing soumis à un bruit blanc additif. Comparaison avec un résonateur linéaire. ....	148
Tableau 8. Expressions de la variance des fluctuations de fréquence pour un oscillateur à résonateur MEMS à capacités planes soumis à un bruit blanc additif. Comparaison avec un résonateur linéaire. ....	152
Tableau 9. Caractéristiques des déplacements mesurés sur le modèle éléments finis en simulation non-linéaire transitoire pour le centre de la poutre et l'extrémité imparfaitement encastrée. ....	181
Tableau 10. Expression des composantes en phase et en quadrature de la force d'actionnement électrostatique pour un résonateur à pont vibrant actionné par différentes formes d'onde. ....	185