

SOMMAIRE

Remerciements.....	2
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	5
1- Définition du sujet.....	5
2- Historique du contexte actuel.....	5
3- Les problèmes auxquels répond notre thèse.....	6
4- La méthodologie pour répondre au problème.....	8
5- L'annonce de la structure du développement.....	10
PREMIERE PARTIE – ORIENTATION ET AXE DE LA RECHERCHE.....	12
CHAPITRE 1 : SITUATION DANS LE CHAMP D'ÉTUDE.....	15
1. Orientation de la recherche en Sciences de l'éducation.....	15
2. La question des acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire.....	24
3. État des lieux de la recherche sur l'enseignement-apprentissage du calcul mental.....	39
CHAPITRE 2 : PRATIQUES PRÉCONISÉES EN CALCUL MENTAL.....	50
1. Le constat des approches pédagogiques.....	51
2. Les dispositifs d'accompagnement du système éducatif.....	58
DEUXIÈME PARTIE – QUESTION CENTRALE ET CADRE THÉORIQUE.....	62
CHAPITRE 3 : QUESTIONS DE RECHERCHE ET HYPOTHÈSES.....	62
1. Les fondements de notre question de recherche.....	62
2. De la question centrale aux hypothèses.....	65
CHAPITRE 4 : ANALYSE DES CONCEPTS.....	74
1. Le concept de nombre.....	74
2. Le concept de calcul mental.....	89
3. Calcul mental et connaissance des nombres.....	97
4. Calcul mental et résolution de problèmes.....	102
5. Calcul mental et élèves en difficulté.....	108
CHAPITRE 5 : NOS PARTIS PRIS THÉORIQUES.....	115
1. La Théorie de l'Activité finalisée : un cadre unificateur pour l'articulation des pratiques enseignantes et des apprentissages des élèves.....	117

2. Emprunts et articulations des théories de Piaget et de Vygotski : conceptualisation médiations et zone proximale de développement.....	120
3. Des références à la didactique professionnelle et à la psychologie ergonomique.....	124

TROISIÈME PARTIE – LES PRATIQUES ORDINAIRES

DES ENSEIGNANTS AU CP : INVESTIGATIONS ET ANALYSE DES DONNÉES.....	128

CHAPITRE 6 : L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DU CALCUL

MENTAL DE SOMMES AVEC LE FRANCHISSEMENT DE LA DIZAINES AU CP.....	128

1. De la maternelle au cours préparatoire : Apprendre à quantifier.....	131
2. Du comptage au calcul mental des additions.....	155
3. Les obstacles à l'apprentissage du calcul mental de l'addition au CP et les conséquences sur son enseignement.....	176

4. Bilan intermédiaire sur l'étude de la notion.....	182

5. Les projets d'enseignement possibles : Une étude comparative des manuels.....	183

CHAPITRE 7 : UNE ÉTUDE DE CAS DANS L'ACADÉMIE DE GUADELOUPE.....	260

1. Méthodologie d'analyse des pratiques enseignantes.....	260

2. Analyses et interprétations des résultats.....	301

CHAPITRE 8 : RÉPONSE À LA QUESTION DE RECHERCHE.....	397

CONCLUSION.....	400

1- Rappel de la question centrale.....	400

2- La spécificité de notre démarche.....	400

3- Réponse à la question centrale de la recherche.....	405

4- Limites de la recherche.....	406

5- Mise en perspective de la recherche.....	407

BIBLIOGRAPHIE.....	409

TABLE DES ILLUSTRATIONS.....	447

1- Schémas.....	447

2- Tableaux.....	449

3- Figures.....	452

TABLE DES MATIÈRES.....	453

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1- Définition du sujet

Que dire de l'apprentissage du calcul mental des élèves du CP dans l'académie de Guadeloupe, plus particulièrement dans les quatre circonscriptions de la Grande-Terre, soit quatre-vingts (80) écoles, cent vingt-cinq classes (125) et deux mille neuf cent soixante-six (2 966) élèves ? Diffèrent-ils des autres circonscriptions ayant des classes similaires ? Peut-on caractériser les difficultés en mathématiques de ces élèves ? Observe-t-on des similitudes ou des écarts dans les pratiques enseignantes ?

Suite à ce questionnement, selon une majorité de professeurs, il est question ici de difficultés de compréhension ou de disponibilité pour comprendre. Difficultés qui, de façon bien évidente, vont gêner la rentabilité dans les activités mathématiques, sans pour cela mettre en cause une organisation cognitive spécifique. De manière précise, le sujet de notre recherche porte avant tout sur la problématique du sens et de l'automatisation construit simultanément, nécessitant une compréhension pour l'élaboration de savoirs solides que les élèves devraient réinvestir et l'automatisation de certains savoir-faire afin qu'ils puissent libérer des ressources cognitives dans le but d'accéder à des opérations plus élaborées et à la compréhension. C'est une manière de dire que les connaissances immédiatement disponibles (comme les résultats des tables d'addition) devraient améliorer considérablement les capacités de calcul intelligent où les élèves comprennent ce qu'ils font et pourquoi ils le font. Mais ce n'est pas toujours le cas, et parallèlement, cela laisse à penser également que les élèves devraient construire des connaissances pour mémoriser progressivement :

- Des faits numériques (décompositions / recompositions additives) dès le début du cycle 2 y compris les tables d'addition et de multiplication dans la suite du cycle ;
- Des procédures de calcul élémentaires en s'appuyant sur des connaissances pour développer des procédures de calcul adaptées aux nombres en jeu pour les additions et les soustractions, ainsi que pour obtenir le quotient et le reste d'une division euclidienne par un nombre à un chiffre et par des nombres comme 10, 25, 50 et 100 en fin de cycle).

Globalement, nous venons de présenter les aspects récurrents qui nous ont motivé à mettre en œuvre cette investigation pour essayer de comprendre et si possible expliquer l'impact des difficultés vécues par les élèves dans les épreuves du dénombrement, transcodage et base dix et surtout les écueils en calcul mental qui restent encore flous.

2- Historique du contexte actuel

Voilà déjà quatorze ans que le rapport de l'IGEN¹ Jean Louis Durpaire et ses collaborateurs sur « L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire » (juin 2006) notait déjà les « cris

¹ Inspecteur Général de l'Éducation Nationale

d'alarme » poussés sur le niveau des élèves : « ils ne sauraient plus compter, ils n'apprendraient plus les tables d'addition et de multiplication, ils ne sauraient plus poser des opérations ; faire une division et résoudre un problème élémentaire poserait plus de difficultés aux élèves d'aujourd'hui qu'à ceux d'hier » (p.16). Au mois de septembre de la même année, ces constats étaient confirmés par les piètres résultats des élèves aux évaluations nationales en calcul mental, notamment « dans les exercices où il s'agit non pas de restituer un fait numérique automatisé mais de s'appuyer sur des résultats connus pour construire rapidement des procédures adaptées aux nombres en jeu, certaines de ces procédures pouvant elles-mêmes être automatisées » (COPIRELEM, 2012, p.9). Aujourd'hui, force est de constater que malgré la politique d'élévation du niveau général des élèves, il y a bien péril en la demeure et pas seulement en mathématiques car toutes les évaluations standardisées nationales et internationales convergent vers des résultats inquiétants (Chesné, 2018). Dans le même ordre d'idées, les faibles performances de la France en nombres et calcul cachent des résultats encore plus inquiétants pour les Départements d'Outre-mer. Ainsi, lors des tests effectués par la Depp en août 2018, la Guadeloupe se situait, loin derrière Amiens, la dernière académie de France hexagonale, juste avant Mayotte et la Guyane placées en fin de classement. Ainsi, nous constatons que le contexte est aussi alarmant pour l'Académie de Guadeloupe que dans l'hexagone, ce qui veut dire que nous restons persuadés qu'il y a un gros travail à faire au niveau de la connaissance des résultats mémorisés, du sens des opérations, des connaissances plus ou moins spécifiques du mode de calcul choisi, des objets de savoirs qui demandent du temps pour découvrir, pour chercher, pour s'approprier, pour mémoriser, pour s'entraîner. Il s'agit donc d'y consacrer le temps nécessaire pour les apprentissages afin que les élèves abordent le calcul avec confiance et succès, un enseignement explicite construit en vue de l'atteinte d'objectifs précis à l'horizon d'une séquence, d'une année ou d'un cycle pour mener à bien les projets.

3- Les problèmes auxquels répond notre thèse

Ainsi, au regard du contexte préoccupant, notre question de recherche est : sachant que les professeurs des écoles disposent de ressources institutionnelles (programmes, documents d'accompagnement, formation continue, etc.), documentaires (manuels didactiques et pédagogiques, documentation numérique, etc.) et forts de leur expérience dans le domaine, comment les professeurs des écoles organisent-ils et conduisent-ils leur enseignement-apprentissage dans cette activité liant calcul et raisonnement afin de permettre aux élèves d'acquérir des compétences en numération et en résolution de problèmes ?

En fait, l'intérêt de cette question centrale a pour but d'identifier les changements opérés par les enseignants dans leur classe se rapportant principalement à l'organisation des apprentissages et à leur

analyse. Autrement dit, une organisation différente et différenciée des activités mises en œuvre découle, selon les élèves mis en activité, au prorata de la responsabilité de l'enseignant et de la mise en place de son projet d'enseignement. Dans la logique, ce dit projet doit offrir un cadre suffisamment sécurisant pour tenter d'autres approches didactiques telles que la variabilité de stratégies de comptage pour par exemple, résoudre des soustractions en permettant à l'élève de compter à rebours depuis le plus grand opérande jusqu'au plus petit (e.g. $7 - 4 = \dots 6, 5, 4, 3$), ou vers le haut du plus petit au plus grand opérande (e.g. $7 - 4 = \dots 5, 6, 7$). Par la suite, nous sommes d'avis que la pratique répétée du calcul devra entraîner la mémorisation des associations entre le problème et sa réponse. De ce fait, il devient par conséquent possible de résoudre un problème en récupérant directement la réponse correcte en mémoire à long terme. D'ailleurs, c'est ce que Thévenot et Fanget (2018) laissent à penser quand ils affirment qu'avec cette manière de faire, « la stratégie de récupération est la plus rapide et la plus efficace ». À cet égard, pour bien saisir le sens des difficultés vécues par les élèves, nous avons jugé bon d'émettre deux sous-questions de recherche, dans le but de répondre étape par étape à la question centrale. En effet, la première interroge le projet d'enseignement mis en place en termes d'adéquation et de pertinence. À savoir : « Quels sont les principaux éléments didactiques et pédagogiques du projet d'enseignement pris en considération par les professeurs des écoles observés et questionnés en vue de permettre aux élèves d'acquérir les connaissances sur les nombres, les opérations et la maîtrise des techniques du calcul mental ? ».

- Nous formulons l'hypothèse suivante :

H1 : « Quand il conçoit son projet d'enseignement le professeur des écoles tient compte principalement de sa situation de travail (programmes, savoir prescrit, emploi du temps, ressources institutionnelles, documentaires et matérielles disponibles), des élèves (leurs savoirs, leurs compétences, leurs activités mathématiques en termes à la fois d'accès au sens des notions visées et de potentialités d'apprentissage, leurs comportements individuels et collectifs) et de lui-même (ses objectifs, ses savoirs et savoir-faire, ses conceptions, son expérience et sa formation, etc.) ».

Il s'agit ici d'identifier les choix didactiques et pédagogiques à travers les éléments de base qui nous permettront de voir comment les enseignants ont construit leur projet d'enseignement aussi bien dans les classes performantes que moyennement performantes et peu performantes (Robert et Coulange, 2009). C'est une vision théorique que l'on peut qualifier de standard au regard de toute la logistique mise en œuvre par l'enseignant pour asseoir sa pédagogie, disons son enseignement dans des conditions normales. En d'autres termes, si les modèles didactiques permettent d'éclairer ce qui se passe dans une situation d'enseignement, ils ne sauraient en garantir l'efficacité de la même façon

qu'une lampe ne saurait nous conduire assurément dans l'obscurité même si la lumière permet de repérer sûrement les obstacles. Autrement dit, c'est une manière de percevoir comment le panel s'organise à travers les actions mises en œuvre par les enseignants afin de saisir le particularisme de chacun dans ses choix, ses décisions et ses applications au regard des problèmes posés par les élèves.

Au sujet de la deuxième sous-question formulée par cette interrogation : « Quelles sont les pratiques privilégiées par les enseignants lors des observations pour venir en aide aux élèves les plus fragiles en calcul mental au CP et mises en œuvre par les professeurs des écoles, tout au long des séquences d'enseignement de manière à favoriser l'acquisition pérenne des faits numériques et des procédures en calcul mental ? ».

- Nous formulons l'hypothèse suivante :

H2 : « Les professeurs des écoles mettent en œuvre des pratiques globales (enseignement explicite, activités collectives et rituelles, différenciation par les procédures, simulation mentale de l'action suivie d'une validation sur le matériel, verbalisation des procédures médiatisées par le maître, débat entre pairs, rédaction de traces écrites, institutionnalisations souples ou locales, etc.), des pratiques d'individualisation (différenciation par les ressources disponibles, les contraintes, la tâche, le rôle dans les jeux et les supports, encouragements, interventions du maître pour la concentration et la mise au travail ou autres ».

À la lecture de la deuxième sous-question, il s'agit ici de répondre par identification des pratiques privilégiées par les enseignants lors des observations pour venir en aide aux élèves les plus fragiles en calcul mental au CP. En effet, chaque enseignant devrait construire un enseignement adapté aux apprentissages effectifs des élèves de manière à répondre à leurs difficultés et à favoriser ainsi l'acquisition pérenne des faits numériques et des procédures en calcul mental, comme il est attendu par l'institution. Concrètement, s'agit-il de dispositifs institutionnels comme nous invite à le considérer Piquée (2007a) pour les élèves en difficulté ou encore des actions ponctuelles mises en œuvre dans le quotidien des classes ordinaires ou enfin d'une méthode pédagogique censée répondre aux besoins particuliers des élèves les plus nécessiteux (pédagogie différenciée, par exemple) ?

4- La méthodologie pour répondre au problème

Si la pédagogie peut être définie comme « l'enveloppement mutuel et dialectique de la théorie et de la pratique éducative par la même personne, pour la même personne » (Houssaye, 1993), notre recherche telle que nous la concevons, n'a pas de visée prescriptive mais présente bien un objectif de

construction de connaissances sur des pratiques d'enseignement. Pour ce faire, nous appuyons notre champ d'analyse sur six démarches : d'abord l'étude comparative des manuels dans le but de caractériser les savoirs à enseigner et la manière préconisée dans le cadre de l'apprentissage de l'addition mentale de deux nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine au cours préparatoire (CP). Pour ce faire, il est nécessaire d'étudier les projets d'enseignement figurant dans les manuels pour comprendre la nature des transpositions réalisées par les auteurs afin d'identifier les éléments didactiques et pédagogiques pris en considération par l'enseignant épistémique pour élaborer les scénarii et recueillir les suggestions de mises en œuvre faites aux professeurs des écoles.

Ensuite, l'analyse des pratiques enseignantes, en considérant que si elle permet de développer la connaissance objective en termes de catégories, logiques et stratégies inhérentes aux situations d'enseignement à travers la connaissance subjective en termes de compréhension du sens que chaque enseignant donne à ses conduites (Blanchard-Laville, 2001), notre cadre d'analyse tend vers une visée descriptive et compréhensive du fonctionnement des enseignants du panel. L'objet ici est de renseigner la question centrale à partir d'observations réalisées en classe et croisées sur trois niveaux (global, local et micro) afin de caractériser les pratiques, d'apprécier leurs effets sur les apprentissages et d'identifier les conditions professionnelles qui les déterminent.

Dans la continuité, l'étude des projets d'enseignement en corrélation avec le projet d'école qui offre un cadre suffisamment sécurisant pour tenter de mettre en commun les approches didactiques, le travail en module, les décroissements temporaires, les groupes d'intérêt ou encore les tentatives nouvelles de différenciation pédagogique. Le projet d'enseignement quant à lui permet à l'enseignant de préciser les contenus, les tâches, leur organisation, le chemin cognitif retenu, un panel d'outils mis au service des séquences d'apprentissage. C'est pour cela que nous l'avons retenu comme un levier nécessaire à notre démarche d'analyse car il nous permet d'identifier suffisamment d'éléments tels que les objectifs intermédiaires fixés, les contenus et leur organisation, le dispositif pédagogique retenu, la différenciation construite, le format et le type des séances, le type et le nombre d'activités proposées aux élèves à chaque séance en référence aux mathématiques visées pour « reconstituer ce que les élèves "reçoivent" comme cours et ce qu'ils ont à faire avec ce savoir, ces (futurs) connaissances » (Perrin-Glorian et Robert, 2005).

Par la suite, l'observation des séances qui est basée sur l'observation directe nécessaire et utile à notre démarche de recherche, vient rendre compte d'une configuration globale des enseignants dans les actions entreprises face aux élèves. En effet, elle se confronte à des situations réelles d'apprentissage ou à de multiples circonstances et « effets de contexte » (Burawoy, 2003) venant se croiser et

s'influençant en étant au service d'une construction d'objets dont les limites sont tracées par la problématique. Par conséquent, les pratiques perçues par les observations ont pour visée de progresser dans la connaissance des pratiques enseignantes propices au progrès en calcul mental des élèves particulièrement en difficulté. Ainsi, cet objectif nécessite à la fois de décrire les pratiques enseignantes à l'égard de ces apprenants et d'en apprécier les effets. En gros, ce procédé consiste à être le témoin des comportements sociaux des enseignants et des élèves durant les séances de calcul mental, en modifiant le moins possible le déroulement ordinaire. C'est pour cela que l'observation tel que nous la concevons a pour objet le recueil et l'enregistrement de toutes les composantes du déroulement des apprentissages souffrant la perception de ce témoin particulier qu'est l'observateur.

Après l'entretien à chaud, selon Boudon (2003), c'est la méthode la plus adaptée pour recueillir le « sens subjectif visé » ou les « raisons » des enquêtés comme le souligne pareillement Blanchet et Gotman (2007). En partant de ce principe, nous avons structuré notre entretien à chaud en trois temps : le premier temps (quelques minutes) invitait le professeur des écoles à nous donner ses premières impressions sans que nous lui posions trop de questions. Le deuxième temps s'est déroulé sur le modèle d'un entretien d'explicitation (au sens de Vermesh, 1990 ; 1994). In fine, les dernières questions étaient destinées à mettre en exergue les éléments invariants de son activité. Il va sans dire que ces entretiens à chaud ont été enregistrés l'aide d'un smartphone afin d'optimiser leur exploitation ultérieure. Dans tous les cas, il s'est instauré un véritable échange au cours duquel les enseignants ont exprimé leurs conceptions, leurs interprétations et leurs expériences à la suite de questions ouvertes et de nos différentes réactions.

Et pour terminer, la nature des contacts verbaux et du guidage, car l'utilisation de ce moyen d'action est intéressante, parce qu'elle nous permet d'apprécier la nature et la qualité des interventions de l'enseignant en fonction de la performance des classes à travers les différentes postures des écoliers. Par conséquent, ces données recueillies sont non négligeables et elles nous ont permis de mieux apprécier les réponses proposées par les enseignants face aux différents problèmes rencontrés surtout dans la verbalisation des procédures et la simulation mentale de l'action.

5- L'annonce de la structure du développement

La thèse est organisée en trois parties distinctes en comptant l'introduction et la conclusion.

Dans la première partie, il y a deux chapitres et cinq sous-chapitres. Nous présentons le contexte en proposant un état des lieux des recherches sur la question à partir de la problématique des apprentissages procéduraux spécifiques tout en sachant que la construction des faits numériques relève dans un premier temps du calcul mental et dans un deuxième temps, d'une bonne

compréhension et d'une bonne connaissance des propriétés des nombres et des opérations devant être enseignées et formalisées. Ensuite, nous faisons un détour en fermant cette première partie par les pratiques préconisées de manière à prendre la mesure de ce que propose l'institution et les didacticiens pour lutter contre ce problème qui interpelle de plus en plus.

Dans la deuxième partie, complètement dédiée à la question centrale et au cadre théorique, il y a trois chapitres et dix sous-chapitres. Nous mettons en exergue la problématique, les hypothèses et nous interrogeons les auteurs dans les domaines concernant d'une part la didactique des mathématiques et d'autre part la didactique professionnelle et la psychologie ergonomique. Ce questionnement a pour but de rechercher du sens dans les apprentissages, surtout ce qui conduit à se demander pourquoi on fait ce que l'on fait. Cela concerne aussi la question du rapport au savoir, une notion qui peut se définir comme un processus par lequel l'enseignant, à partir d'un savoir acquis, produit de nouveaux savoirs singuliers lui permettant de penser, de transformer en amenant les élèves vers un autre chemin.

Dans la troisième partie, l'une des plus importante de la thèse, car elle concerne l'étude empirique qui est composée de trois chapitres et sept sous-chapitres. Nous présentons d'abord la méthode d'analyse choisie avec les démarches priorisées pour ce type de recherche et les grilles construites pour le recueil de données. Il est évident qu'elles vont jouer un rôle déterminant dans l'analyse et l'interprétation des données pour répondre à la question centrale.

Après avoir introduit ce travail de recherche, nous terminerons par cette citation de Roland Poupon (1948), car elle donne l'espoir d'aller encore plus loin quand il dit que : « croire est une recherche qui se renouvelle chaque jour et à chaque instant ».

PREMIERE PARTIE – ORIENTATION ET AXE DE LA RECHERCHE

Depuis de très nombreuses années, une pléthore de réformes convoitant « la réussite de tous les élèves » est instaurée dans le but de lutter contre l'échec et la difficulté scolaires. Quoiqu'il en soit, force est de constater la piètre performance de la France, au regard des études de comparaison nationales et internationales sur la qualité d'assimilation des savoirs mathématiques par les élèves révélant « un niveau en baisse, une grande disparité et un déterminisme social croissant » (Villani, 2018). En examinant les choses de plus près, c'est « le métier d'enseignant [lui-même] qui est en crise d'identité et de reconnaissance, un peu partout en Europe » comme l'explique Bucheton (2020) qui soutient que « la complexité de ce métier, de ses missions d'instruction et d'éducation a besoin d'être défendue, expliquée » (p.19). En ce qui concerne le métier d'enseignant de mathématiques, sa complexité découle non seulement des mathématiques elles-mêmes (du savoir à enseigner), mais également de leur apprentissage ainsi que du contexte dans lequel intervient le professeur au quotidien.

En conséquence, l'analyse de l'enseignement des mathématiques est, par ricochet, complexifiée par les interactions multiples et non transparentes existant entre les facteurs déterminant les pratiques enseignantes : facteur épistémologique lié aux mathématiques elles-mêmes et à leur apprentissage individuel (Goasdoué, 2018) ; facteur institutionnel, notamment les programmes officiels (Robert, 2001) ; facteur social, en particulier, les inégalités dues à l'hétérogénéité des publics et des classes (Dubet et Duru-Bellat, 2000) et facteur individuel renforcé ou non par l'environnement culturel. En effet, Roditi (2005) observe et montre comment le déroulement des séquences d'enseignement de la multiplication des nombres décimaux de quatre professeurs en classe de sixième est émaillé de très nombreux incidents didactiques² (1 à 2 toutes les trois minutes en moyenne) déferlant de manière imprévisible dans la classe, y créant autant de micro-ruptures à l'ordre du cours. Par ailleurs, face aux différentes contraintes auxquelles sont soumis les professeurs des écoles, il y a aussi les tensions tangibles dans les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques relatives aux élèves dits en difficulté. Plus précisément, il s'agit des « tensions entre "la dimension cognitive et la dimension affective des élèves", entre "l'aide à l'apprentissage et l'aide à l'élève", entre "l'institutionnalisation et l'enseignement explicite" et enfin, entre les résultats de recherche et les besoins du milieu scolaire » (Mary, Squalli, Theis et Deblois, 2014, p.9). Par conséquent, en raison

² « Les incidents considérés ici ne sont pas des incivilités, mais des manifestations publiques (au sens où elle s'intègre à la dynamique de la classe) d'un élève ou d'un groupe, en relation avec l'enseignement, et en décalage négatif par rapport aux réponses envisageables compte tenu de la tâche proposée et du temps laissé pour produire une telle réponse. Quatre incidents ont été envisagés *a priori* : un élève ou un groupe d'élèves pose une question, commet une erreur, répond de manière incomplète ou reste silencieux alors que le professeur attend une réponse » (Roditi, 2008, p.73 in *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*).

des impératifs pédagogiques, les enseignants sont contraints de procéder à des adaptations et de « s'ajuster » pour répondre aux besoins d'apprentissage et aux besoins éducatifs des élèves dont ils ont la charge (Saillot, 2020). Autrement dit, « l'incertitude » liée à « l'imprévisibilité » due aux diverses combinaisons des variables en jeu (Hameline et Piveteau, 1981) fait en effet partie de la réalité de nombreux professeurs, débutants ou chevronnés, et il leur revient de chercher des solutions pour les apprenants qui rencontrent des difficultés dans leur posture d'élève afin qu'ils puissent toutefois apprendre et suivre un parcours scolaire plus stimulant, ce qui peut conduire à des pratiques pédagogiques situées « entre l'improvisation réglée et le bricolage » (Perrenoud, 1983, 1994). En somme, comme l'indique Saillot (2020), « l'activité d'enseignement-apprentissage est appréhendée comme une succession de "micro-décisions" de tous ordres pour l'enseignant, qui tente de gérer en même temps différentes dimensions : les dynamiques interindividuelles du climat de classe, les interactions langagières, les structurations des moments didactiques, les interventions d'une partie des élèves, celles de l'enseignant lui-même, les interruptions externes (quelqu'un qui frappe à la porte, quelque chose à regarder par la fenêtre, un bruit inattendu...), tout en gardant un œil sur l'horloge dans une gestion du temps toujours difficile » (p.23).

Par conséquent, chercher à comprendre comment les professeurs adoptent des savoir-faire aboutissant à des ajustements adaptés ou non pour enseigner le calcul mental constitue un véritable enjeu pédagogique pouvant contribuer à découvrir de nouvelles pratiques au regard de la gestion de l'hétérogénéité des publics d'élèves. De plus, bien qu'il soit admis que toutes les pratiques ne se valent pas, trouver des pistes concrètes étayées par la recherche sur celles à mettre en œuvre pour faire progresser tous les élèves dans leur hétérogénéité s'avère plus difficile (Toullec-Théry, 2017). Dès lors, au vu de cette réalité socio-scolaire, il convient de tenter d'appréhender comment les professeurs des écoles organisent et conduisent leur enseignement-apprentissage en calcul mental afin de permettre aux élèves d'acquérir des compétences en numération et en résolution de problèmes compte tenu d'une part de leur expérience et d'autre part des ressources institutionnelles et documentaires dont ils disposent. Cette problématique nous a interpellé tout au long de ces huit dernières années, et est devenue, au fil de notre questionnement et exploration, l'objet central de notre travail de recherche.

En outre, cette investigation est également une manière d'interroger l'ensemble des compétences professionnelles mobilisées dans l'exercice de la profession au regard de la forte proportion d'élèves en classe ordinaire à l'école élémentaire présentant de faibles capacités pour mener à bien un calcul mental (DEPP, 2018). D'après Butlen et Masselot (2014), il se caractérise par une difficile gestion de l'hétérogénéité au sein d'une même classe, l'exercice de la « vigilance didactique » (c'est-à-dire un

ajustement didactique permanent de la part du professeur mobilisant des connaissances mathématiques finalisées pour l'enseignement et des connaissances didactiques sur les enjeux d'apprentissage des situations et leur organisation transposées en savoirs d'action puis en savoirs pour le professeur), et l'installation de la « paix scolaire » combinant la « paix sociale » caractérisée par la mise en place d'un climat favorable à l'apprentissage et « l'adhésion des élèves au projet d'enseignement du professeur ». Autrement dit, pour répondre à ces trois questions interdépendantes du métier, les enseignants ont de véritables équations éducatives à résoudre qui mêlent étroitement le didactique et le pédagogique et réclament, d'une part, une réflexion sans cesse renouvelée sur les approches du savoir et d'autre part, une œuvre quotidienne de création d'un climat positif de communication et de travail ainsi qu'un climat de confiance, voire de complicité entre les élèves et le professeur.

Pour conclure, nous avons choisi ce thème sur les pratiques enseignantes en calcul mental à l'élémentaire car l'École n'arrive plus à assurer à tout citoyen la maîtrise des nombres et des calculs « de base » indispensables pour sa future insertion sociale et professionnelle (JDC, 2014). Nous sommes ici face à un véritable fait social scolaire du temps présent impliquant à l'évidence la nécessité de réfléchir non seulement sur le plan des pratiques pédagogiques, des itinéraires cognitifs et stratégies d'enseignement en calcul mental, mais aussi à la construction des compétences pour répondre aux difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques compte tenu de l'avènement de nouvelles générations d'apprenant avec des profils divers et variés, nécessitant une importante « flexibilité » des enseignants dans la planification ou l'interaction (Wanlin et Crahay, 2012), comparable à l'improvisation (Azéma, 2019) pour gérer à la fois le temps, les interactions individuelles, les variables didactiques et les registres pédagogiques liées aux prises de décisions (Saillot, 2020) qui viennent nourrir une grande partie des « réflexions en action » des enseignants (Perrenoud, 1994 ; Tochon, 1993). Dans le même ordre d'idées, la citation de Hasweh (1987) vient conforter la pensée de ces auteurs en soulignant que « plus l'enseignant est compétent, plus il prend de liberté à l'égard des contraintes très fortes du système. Ceci s'explique par la nécessité constante d'une adaptation au terrain pédagogique, à l'interaction avec l'apprenant ».

CHAPITRE 1 : SITUATION DANS LE CHAMP D'ÉTUDE

1. Orientation de la recherche en Sciences de l'éducation

Nous distinguons deux phases dans notre recherche :

- Une phase exploratoire nous permettant de cerner les points importants et de construire des outils d'étude. En effet, lectures et entretiens en complément de l'observation et l'analyse des publications (programmes scolaires, recherches en didactique des mathématiques, brochure à l'intention des enseignants et manuels scolaires) vont nous aider à constituer notre problématique de recherche et à faire le point sur les connaissances concernant le problème de départ.
- Une phase d'approfondissement visant à décrire et analyser les pratiques enseignantes pour mieux les comprendre et en apprécier les effets auprès des élèves en difficulté.

Ces phases nécessitent toutes deux le choix préalable d'une orientation d'étude que nous explicitons dans la section suivante.

1.1 Une approche suggérée

Les travaux francophones en didactiques des mathématiques se caractérisent par une grande diversité d'orientations avec, depuis les années 1990, une plus large ouverture vers les sciences de l'éducation. En effet, la multitude de travaux qui ont vu le jour sur les pratiques enseignantes montre qu'un tel sujet peut être étudié sous des angles de recherches aussi bien épistémologiques (focalisées sur les savoirs mathématiques, l'organisation de leur enseignement et leur apprentissage par les élèves) et psychologiques, que praxéologiques dans le paradigme élargi de la TSD³ et de la TAD⁴ (elles produisent des ressources pour les enseignants, construisent des outils conceptuels, des repères pour l'action, créent et diffusent des ingénieries « deuxième génération » communicables à « des enseignants ordinaires » pour des « classes ordinaires », Margolinas et al., 2011, p.57-78), psychanalytiques (Blanchard-Laville, 1997) ou encore ergonomiques, qui sont centrées sur le discours de l'enseignant, entrent dans le cadre de la « double approche » (Robert et Rogalski, 2002 ; 2005) et empruntent des outils du champ de l'ergonomie cognitive pour analyser le travail de l'enseignant.

En fait, en y regardant de plus près, nous avons choisi de conduire notre recherche en nous inscrivant objectivement lato sensu à la croisée des recherches en didactique des mathématiques et des recherches sur l'enseignant dans trois approches complémentaires : la première, épistémologique,

³ Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998)

⁴ Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1985)

indispensable à toute analyse didactique de ce qui se joue dans la classe, fait référence à la spécificité de l'enseignement du calcul mental quant aux savoirs à transmettre et à acquérir, la seconde, praxéologique, porte sur les manières réelles de faire travailler les élèves en calcul mental (la pédagogie) et l'appréciation de leurs effets sur les apprentissages des élèves, et la troisième, ergonomique, vise la compréhension du travail enseignant y compris du point de vue de l'enseignant lui-même pour mieux cerner ce qui est possible en classe, en fonction des enseignants et en fonction des élèves.

Peu importe le contexte, l'élaboration d'un cadre conceptuel (cernant l'ensemble des outils théoriques, idées, lois, concepts, spécifiques à la recherche qui permettra de l'orienter, de définir la question de recherche et d'en déduire les hypothèses) et méthodologique (pour recueillir et analyser les données) reste indispensable à toute recherche empirique. Prise au sens large, la recherche en éducation peut être, selon nous, définie comme « une activité complexe systématiquement originale » (Tomamichel, 2003) ou une démarche entreprise par une ou plusieurs personnes, qui recueillent et analysent des matériaux conceptuels et empiriques, pour produire des avancées par extension des espaces de compréhension en répondant aux questions soulevées par une problématique portant sur un ou plusieurs aspects d'une pratique d'éducation et de formation (Charlot, 2017). En somme, nous l'aurons compris, la recherche en éducation, issue d'une discipline (histoire de l'éducation), ancrée dans la didactique des disciplines (contenus, méthodes spécifiques) ou encore définie par un objet déterminé d'ampleur variable (inégalités liées à l'hétérogénéité sociale des élèves), couvre des dimensions multiples que Tomamichel (2005) regroupe en quatre champs renvoyant à ses caractéristiques fondamentales : « le champ du chercheur dans son environnement (la recherche est une pratique sociale), le champ de l'objet (la recherche porte sur des pratiques d'éducation et de formation), le champ de la finalité (la recherche vise un but) et le champ méthodologique (la recherche est une activité rationnelle) » (p.8).

Plus précisément, la recherche est considérée comme une pratique sociale dans le sens où « les enquêtes internationales placent la France parmi les pays les plus inégalitaires en matière de réussite scolaire corrélée à la situation sociale et familiale d'origine » (Saillot, 2020, p.21). Sans doute, la complexité de la difficulté scolaire soulève des tensions, des malentendus et des dissonances entre les institutions (famille, école, collectivité territoriale...), les acteurs (élèves, enseignants professeurs, décideurs) et les partenaires de l'école (parents, éducateurs, animateurs du monde péri-éducatif, chercheurs, formateurs...), pris dans un contexte où l'éducation se trouve devant une crise des modèles éducatifs et philosophiques, qui jusque-là, lui servaient de référence (Delalande, Dupont et Filisetti, 2015). D'ailleurs, la société contemporaine est de plus en plus consciente que les conditions

(politiques, sociales, économiques et culturelles) requises pour que l'École puisse jouer son rôle de démocratisation dépendent des autres institutions sociales. En effet, la mise en œuvre de certaines « garanties pré-scolaires » et en particulier « le travail d'éducation des tout petits enfants ne peut être assuré par l'Éducation nationale parce qu'il repose sur la relation avec la mère et le père, où se forme ce que Freud nomme l'identification primaire et Winnicott l'espace transitionnel » (Stiegler, 2010, p.178).

Ensuite, la recherche porte aussi sur les pratiques d'éducation car nous imbriquons des analyses des activités possibles des élèves à celles des activités observables de l'enseignant. En fait, il s'agit d'identifier les stratégies d'enseignement mises en œuvre d'un professeur à un autre et d'une classe à une autre dans le but de comprendre la complexité des pratiques enseignantes en calcul mental. En clair, la pratique ne peut être abordée ici comme la simple application d'une méthode car chaque enseignant investi des marges de manœuvre, qui peuvent elles-mêmes varier dans le temps, pour s'adapter aux contraintes de la gestion didactique, par-delà les directives de l'institution scolaire et les exigences inhérentes à son métier. Pour preuve, la comparaison des pratiques de professeurs de collèges socialement homogènes et sur un même chapitre de mathématiques, réalisée par Roditi (2001, 2005) a mis en exergue des régularités globales chez tous les enseignants, liés aux contraintes institutionnelles, laissant place à des variabilités à un niveau plus local, celui de la classe au quotidien.

D'autre part, au niveau de notre travail, nous prétendons à une certaine scientificité car il concilie l'aspiration scientifique qui traverse le champ des sciences de l'éducation et la diversité des recherches possibles. Plus concrètement, nous étudions les activités des enseignants et leurs prises de décision en tenant compte d'une part de leur contexte d'enseignement, de ses contraintes et d'autre part, de leurs expériences, savoirs, représentations et croyances recueillis par des entretiens et analysés pour apprécier leurs effets sur le travail en classe et les apprentissages des élèves.

En outre, notre recherche est aussi praxéologique : elle est à visée compréhensive et porte essentiellement sur le sens que les enseignants donnent à leur travail. En d'autres termes, elle rompt avec la dualité de la pensée et de la pratique, prend en considération la pensée de l'enseignant avant, pendant et après la classe et envisage la réflexion que le « praticien » développe sur sa pratique et sur ses propres pensées, en particulier celles qu'il élabore dans l'action mais qui demeurent implicites dans l'action (Schön, 1994). À vrai dire, dans la lignée de Leontiev (1975, 1984), nous considérons l'activité comme étant co-déterminée par le sujet et le contexte et comme source de développement du sujet. Autrement dit, nous sommes d'avis que pour comprendre les pratiques enseignantes telles qu'elles se font plutôt que telles qu'elles sont préconisées, il faut tenir compte du point de vue de

l'enseignant. De ce fait, notre intérêt porte moins sur la profession et son organisation que sur l'activité de l'enseignant dans son historicité et son contexte, dans ses dimensions personnelle et collective, en lien avec les orientations politiques et les valeurs qui les sous-tendent. Cependant, « les enseignants ne font pas toujours ce qu'ils disent, ou ne disent pas ce qu'ils font » (Clanet, 1998). Par conséquent, nous optons également pour des observations de pratiques de terrain à l'aide de protocoles et d'instruments clairement spécifiés et adaptés, de manière à réaliser, par la suite des comparaisons entre pratiques déclarées et pratiques observées. En somme, l'étude des pratiques enseignantes nécessite un double regard : celui du praticien et celui du chercheur extérieur. Toutefois, ce dernier doit rester conscient de l'écart irréductible entre les pratiques enseignantes et l'intelligibilité ou le savoir acquis dans le domaine de la recherche (Bru, 2002) mais également du risque de confusion des rôles que peut entraîner la proximité enseignants-chercheurs.

Par ailleurs, si selon les acceptions courantes, la pédagogie renvoie aux méthodes et pratiques d'enseignement et d'éducation ainsi qu'aux qualités requises pour transmettre une connaissance, un savoir ou un savoir-faire, notre recherche telle que nous la concevons, n'a pas de visée prescriptive mais présente bien un objectif de production de connaissances sur les pratiques d'enseignement en calcul mental. Pour ce faire, nous appuyons notre champ d'analyse sur quatre démarches. D'abord une démarche qualitative qui nous permettra de varier nos techniques d'analyse de données (Muchielli, 2011) pour mieux accéder aux choix résultants de nombreux compromis entre des finalités distinctes, interdépendantes et en lien avec les savoirs à transmettre aux élèves. Ensuite, une démarche empirico-inductive qui, partant de l'observation de séances, nous donnera la possibilité d'asseoir nos hypothèses et de reconstruire la cohérence interprétative des pratiques enseignantes de l'intérieur (Balsev et Saada-Robert, 2002). Les démarches déductive et hypothéco-déductive, quant à elles, faciliteront le test de nos hypothèses, la construction des connaissances sur le travail enseignant et l'émergence de nouveaux éléments susceptibles d'approfondir la compréhension des pratiques enseignantes en calcul mental. En effet, aucun professeur ne peut, même s'il le souhaite, exécuter fidèlement une progression ou la démarche préconisée par un quelconque support d'enseignement dans les conditions de contingence. Dans la réalité, il interprète et réinterprète constamment la situation imprévue survenant au cours des séances en classe et s'adapte pour la gérer en s'aidant de l'historique des interprétations réalisées au cours de ses expériences passées et des ressources disponibles dans l'instant. Ainsi, à l'instar de Saury Ria, Sève et Gal-Petitfaux (2006), nous pouvons considérer que « toute action est surtout dans une certaine mesure, une improvisation en situation y compris celles minutieusement préparées, planifiées et organisées comme par exemple, les séquences d'enseignement » (p.4). Autrement dit, la signification est construite en actes au cœur

de l'interaction en classe et est conçue comme une totalité organisée autour des processus d'enseignement et d'apprentissage étroitement imbriqués.

Par voie de conséquence, nous avons choisi de nous référer au modèle de la « double approche didactique et ergonomique des pratiques d'enseignement des mathématiques » élaboré par Robert et Rogalski (2002) pour mettre à jour les logiques qui sous-tendent le travail enseignant en classe de mathématiques. À vrai dire, la spécificité de ce modèle réside dans le fait que les moyens d'analyse des pratiques qu'il développe tiennent compte à la fois des aspects liés aux savoirs en jeu dans l'enseignement et des adaptations incontournables liées aux contraintes de la gestion didactique et plus globalement de l'exercice du métier. Ainsi, par un travail de rapprochement entre la didactique des mathématiques et la psychologie ergonomique, les auteurs montrent qu'il y a une certaine pertinence à examiner comment les composantes cognitive (choix des contenus, de l'organisation, de la quantité et de l'ordre des tâches des élèves, etc.) et médiative (improvisations, discours, enrôlement des élèves, dévolution des consignes, accompagnement des élèves dans la tâche, validations et expositions de connaissances, etc.) organisent de manière fondamentale la pratique de l'enseignant compte tenu de sa composante personnelle (représentations liées à ses connaissances, à ses expériences, à ses buts subjectifs...) et des composantes institutionnelle (programmes, horaires, supports d'enseignement...) et sociale (profil de la classe et de l'établissement scolaire, exigences des parents, des collègues...) liées à sa situation de travail. En outre, un tel modèle permet d'explorer davantage les phénomènes locaux ayant des conséquences importantes sur les apprentissages des élèves (Robert et Vandebrouck, 2014).

Par suite, envisager la didactique ici comme « le moyen d'étudier chacune des étapes de l'acte d'apprentissage en mettant en évidence l'importance du rôle de l'enseignant, comme médiateur entre l'élève et le savoir est sans doute pertinent pour analyser l'ensemble du processus construisant le rapport au savoir » (Vergnaud, 1994). Mais, face aux difficultés rencontrées par les élèves pour atteindre un niveau de conceptualisation nécessaire aux apprentissages de notions mathématiques, certains auteurs comme Amade-Escot et Monnier (2009) mettent en évidence la « part empêchée⁵ » de l'activité didactique, en identifiant les tensions et les conflits de la pratique enseignante en milieu difficile susceptible d'expliquer la minoration des savoirs maintes fois constatée par la littérature (Bautier, 2002 ; Butlen, Peltier-Barbier et Pézard, 2002 ; Kherroubi et Rochex, 2004). Autrement dit,

⁵ Les auteurs défendent l'idée que la problématisation de l'activité professorale en termes « d'activité didactique empêchée » (qui consiste à décrire et à analyser ce qui s'enseigne/ s'apprend en classe en s'attachant à la fois à la part réalisée et à la part empêchée de l'activité) donne accès à une compréhension générique de l'activité didactique des enseignants à même de renouveler l'analyse de l'enseignement et de ses difficultés, tout en permettant de rompre avec les discours d'impuissance du système ou d'accusation des enseignants.

l'enseignement en milieu difficile entraîne souvent professeur et élèves dans des cercles vicieux se traduisant souvent par une aide aux élèves transformant dans la majorité des cas les tâches initiales en les simplifiant avec une réduction des exigences et des savoirs fondamentaux (Perrin-Glorian, 1992 ; Butlen et al., 2002, 2004, 2010) au bénéfice de savoirs plus superficiels et de savoir-faire sociaux.

Par conséquent, le jeu du professeur ne se limite plus à bien « tenir sa classe » pour faire aboutir les enjeux du savoir (Brousseau, 1998). Désormais confronté à des empêchements d'un autre ordre, l'enseignant focalise son attention sur le maintien de la relation didactique coûte que coûte en créant des conditions d' enrôlement des élèves dans des tâches peu exigeantes relatives aux savoirs visés. D'ailleurs, la plupart des auteurs qui se sont penchés sur les pratiques d'enseignement en contexte dit difficile pointent les effets pervers des gestes professoraux spécifiquement mis en place pour aider les élèves en difficulté qui tiendraient à deux mécanismes étroitement liés (Piquée, 2010) : des exigences amoindries (centration sur les savoirs de base, couverture du programme moins accomplie, moindre recours à la documentation pédagogique, tâches réduites et algorithmisées, anticipations très rapides sur les difficultés potentielles des élèves) et des occasions d'apprentissage moins nombreuses (avec une étude des savoirs pilotée par les consignes de l'enseignant, un étayage oral ou de l'ostension et une absence fréquente voire systématique des phases d'institutionnalisation). Au final, la « dérive du curriculum » (Grisay, 1993) et l'environnement scolaire de moindre qualité qu'elles favorisent rendent inefficaces un certain nombre de pratiques destinées aux élèves en difficulté. En conséquence, les difficultés rencontrées par les élèves conjuguées voire renforcées par ce surajustement didactique aux caractéristiques supposées des élèves provoquent avec le temps « un phénomène de cumul conduisant à fragiliser leurs connaissances, voire à ne pouvoir bénéficier des acquis accompagnant la maîtrise du socle commun » (Butlen, Charles-Pézard et Masselot, 2015).

Ainsi, fort de ce constat réaliste et prégnant nous avons fait le choix de centrer nos analyses sur les stratégies d'enseignement du calcul mental mises en œuvre en ce qu'elles résultent dans la conception de situations adaptées aux différents fonctionnements cognitifs, aux différents types d'apprentissage tout en mobilisant différents types de rapports sociaux entre élèves (Brousseau, 1989). Autrement dit, il nous paraît intéressant d'examiner la manière dont l'enseignant organise la rencontre des élèves avec le savoir tout au long de la séquence d'apprentissage : comment avance le savoir ? Comment l'enseignant organise-t-il cette avancée ? Qui du professeur ou des élèves y participe réellement ? Ce

questionnement nous conduit à analyser les pratiques des enseignants à partir de l'étude des contrats⁶ didactiques successivement mis en place dans chacune des séances dans leurs mécanismes chronogénétiques⁷ et topogénétiques⁸ (Hersant, 2013). La description de ces mécanismes nous permettra de rendre compte de la dynamique de la relation didactique, relativement aux objets enseignés/appris et donc de mieux comprendre le fonctionnement des systèmes didactiques ordinaires (enseignant/ élèves/ tâche mathématique) inhérents à l'enseignement du calcul mental (Leutenegger, 2001). Dans cet ordre d'idées, Hersant (2013) postule que « pour un savoir donné, ces contrats caractérisent certains aspects de la pratique d'un enseignant et permettent d'interroger son impact sur les apprentissages des élèves » (p.89). D'autre part, notons que le contrat didactique est un faux contrat dans la mesure où il gère implicitement les échanges entre l'enseignant et ses élèves à propos des objets de savoir respectivement à enseigner et à apprendre. De plus, ce contrat n'est pas stable car il évolue au cours de l'enseignement avec le statut didactique du savoir. Le fait par exemple de rappeler simplement les règles du contrat didactique (*vous devez chercher une procédure de calcul pour trouver le résultat de $8 + 6$ sans dessiner ou compter sur les doigts*) est une forme de régulation pouvant leur permettre de réaliser la tâche telle que prévue. Ainsi, « la régulation est marquée par le contexte de son accomplissement tout en contribuant au développement de ce contexte » (Mottier Lopez, 2012). D'autre part, réguler le contrat didactique, c'est aussi prendre des décisions de manière proactive ou rétroactive, pour ajuster les différents éléments de la situation didactique (dispositif d'organisation, contenus d'enseignement, démarche d'apprentissage, repères utilisés pour évaluer l'action) en fonction du moment de la leçon, du savoir visé, des caractéristiques individuelles des élèves, ou plus généralement en cours d'activité lorsque se présente l'opportunité de modifier ou de changer une variable de la situation didactique pour faire avancer le savoir dans la classe.

Pour comprendre les phénomènes d'enseignement-apprentissage des mathématiques, Brousseau (1998) renvoie aux notions de dévolution et de milieu, dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Selon l'auteur, l'enseignement consiste à provoquer chez l'élève les apprentissages

⁶ Brousseau formule la définition « classique » de cette notion de la manière suivante : « Le maître doit donc effectuer non la communication d'une connaissance, mais la dévolution du bon problème [...]. Alors se note une relation qui se détermine -explicitement pour une petite part-, mais surtout implicitement.

⁷ « Chevallard (1991) a redécrit la notion en montrant comment le contrat didactique peut s'exprimer de la manière suivante : dans le processus didactique, le savoir est un savoir-temps. Depuis le milieu du XVII^e siècle, dans la perspective cartésienne s'est produite une élémentation du savoir, sous laquelle un corps de connaissances constitué se recomposait, par l'enseignement, en une séquence graduée selon un ordre logique, du simple au complexe. Enseigner, c'est donc parcourir avec les élèves une séquence, une suite orientée d'objets de savoir. Cette disposition du savoir sur l'axe du temps, c'est le temps didactique, aussi appelé chronogénèse » (Sensevy, 2001, p.209).

⁸ À chaque instant de la chronogénèse, le professeur et les élèves occupent un lieu précis, un topos, c'est-à-dire accomplissent un ensemble de tâches, dont certaines sont spécifiquement liées à la position de professeur, et d'autres à la position d'élève. Par exemple, dans le contrat didactique classique en mathématiques, la démonstration appartient au topos du professeur, la recherche d'exercices appartient au topos de l'élève, et une topogénèse particulière est ainsi décrite. À chaque instant de la chronogénèse correspond un état de la topogénèse (Sensevy, 2001, p.209).

projetés en les plaçant dans des situations appropriées auxquelles il va répondre « spontanément par des adaptations » (Brousseau, 1998, p.301). Il est donc nécessaire que l'enseignant amène l'élève à interagir avec la situation par un transfert de responsabilité appelé processus de dévolution⁹. Une fois ce transfert opéré, le système antagoniste de l'élève dans sa relation à la situation est le milieu¹⁰. Ainsi, une part importante de la régulation paraît consister en la réorganisation d'un milieu favorable aux adaptations a-didactiques. Il en est de même lorsque le professeur institutionnalise le savoir pour montrer aux élèves que les connaissances qu'ils ont construites se trouvent déjà dans la culture d'une discipline (Sensevy et Quilio, 2002b). Encore faut-il savoir quelles stratégies d'enseignement convient-il de mettre en œuvre pour que les élèves puissent entrer dans un tel contrat ? Au vu de cette explication, nous savons maintenant que l'enseignant effectue de nombreuses régulations et beaucoup d'entre elles modifient, tout au long du processus interactif, les milieux didactiques initialement agencés, et, par voie de conséquence, le contrat didactique (Garnier, Loquet et Amade-Escot, 2001). Par conséquent, le professeur a la charge d'organiser pour l'élève les conditions de son adaptation à ces différents milieux.

Paradoxalement, cette construction sans cesse réopérée d'un milieu pour l'élève (mésogenèse¹¹) oblige le professeur lui-même à s'adapter à certaines exigences du processus didactique, notamment les nécessités chronogénétiques et topogénétiques décrites supra (Sensevy, 2001). C'est cette réorganisation permanente du milieu, dans ses mécanismes et les adaptations qu'elle occasionnent, que nous étudions. C'est pourquoi nous avons opté pour un dispositif privilégiant l'analyse des trois grands moments structuraux de la relation didactique (dévolution, régulation et institutionnalisation) pour décrire l'activité du professeur. En effet, cette structuration prend sens à partir du moment où elle vient soutenir le milieu didactique relatif aux objets à enseigner et à apprendre, en permettant au professeur de s'adapter à certaines contraintes du processus didactique. De cette façon, par le croisement de la structure et de la technique mésogénétique permettant d'accéder à la « répartition des responsabilités » entre le professeur et les élèves, nous nous proposons d'étudier la part du travail mathématique que l'enseignant laisse à la charge des élèves pour leur permettre de construire, en

⁹ La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (adidactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert. » (Brousseau 1998, p. 303).

¹⁰ La notion de milieu a été proposée, en didactique, par Brousseau (1998). « Dans le processus didactique, les objets de savoir relatifs à une organisation de connaissance forment un milieu, qui peut être matériel (par exemple le compas et la règle en géométrie) ou symbolique (par exemple, tels systèmes d'axiomes, ou tel système de connaissances). Le milieu, dans ce sens particulier, peut donc se concevoir comme un générateur de nécessités (de ressources et de contraintes) : on ne peut pas faire n'importe quelle figure à la règle et au compas, un système de connaissances contient ses propres déterminations (Sensevy, 2001, p.210).

¹¹ Selon Chevallard, (1992), La *mésogenèse* (ou genèse du milieu comme contexte cognitif de l'action) « définit la dynamique des objets (physiques, scripturaux, langagiers au sens large) qui constituent la référence de l'action conjointe » (Ligozat et Leutenegger, 2008). Autrement dit, c'est le processus par lequel le professeur aménage un milieu avec lequel il attend que les élèves interagissent pour apprendre.

confrontation avec la situation, leurs connaissances en calcul mental. Pour conclure, il en ressort que « le travail du professeur ne peut guère être appréhendé qu'en référence à son interaction avec les élèves (Sensevy & Mercier, 2007) : que celle-ci soit observée en acte, dans la situation, [...] ou dans son anticipation à travers la préparation du cours » (Mathéron, 2011, p.24). Un tel travail, même s'il ne s'y réduit pas, nécessite la prise en compte de l'enseignant, son métier, sa formation initiale, ses expériences, les conditions et contraintes sous lesquelles se déploie son action.

1.2 Notre posture dans le champ d'étude

Nos interrogations de professeure des écoles enseignant le calcul mental à l'école élémentaire sont à l'origine de ce travail de recherche : pourquoi les élèves guadeloupéens sont aussi peu performants en mathématiques et par-delà en calcul mental ? Ma stratégie d'enseignement est-elle adaptée au profil de mes élèves ? Comment puis-je les rendre plus performants ? Comment aider les élèves rencontrant des difficultés ?

Nous sommes donc dans la posture d'un praticien-chercheur « menant sa recherche sur son terrain professionnel, dans un mode professoral présentant des similitudes ou des liens avec son domaine d'activité » (De Lavergne, 2007). Certes, cette double identité facilite notre accès au terrain mais s'accompagne également d'inconvénients nous obligeant à questionner en permanence notre implication, notre réflexivité, notre part de subjectivité et le mode de production des connaissances. En effet, il est dit que, le praticien est influencé par ses représentations, immergé dans l'action, soumis à une hiérarchie imposée et connue, hors du cadre de l'institution scientifique tandis que le chercheur se distancie du monde quotidien et de toutes ses implications pour conduire un travail méthodique, systématique, décontextualisé, contrôlé par la raison et soutenu par des méthodes d'étude. À cet égard, ces stéréotypes, pour le moins stigmatisants font état de la dichotomie classique affirmée par un bon nombre d'auteurs qui oppose le chercheur dépositaire du savoir et le praticien là pour apprendre véhiculant avec lui des représentations et des schémas de pensée réducteurs. Pourtant, par sa maîtrise des outils, des modèles et des cadres de référence inhérents à sa profession, le praticien, expert dans son domaine, permet un regard authentique et enrichissant pour tous. Par conséquent, « la recherche peut se trouver ainsi au service de la professionnalité, comme la professionnalité au service de la recherche, se découvrant, se métamorphosant mutuellement dans leurs aspects les plus irréductiblement vivants. » (Perrault Soliveres, 2001, p. 46). Ainsi, c'est dans ce double mouvement d'implication et de distanciation soutenu par une relation bilatérale entre pratique et recherche où la pratique alimente la recherche et la recherche transforme la pratique que s'est construite notre problématique. En réalité, cela a donné lieu à des réflexions, des tensions, des investigations approfondies sur la thématique étudiée, des questionnements méthodologiques, une exploration de notre expérience et parfois à des doutes et à de l'incertitude. C'est dire comment le fait de comprendre

ce qui nous lie à ces travaux a permis non seulement notre implication profonde dans la recherche mais également le passage d'une posture prescriptive et normative à une posture de chercheur, compréhensive, explicative et distanciée de l'objet de la recherche. Ainsi, à la lumière ces éléments, nous comprenons que le processus doctoral nous a ainsi aider à cheminer d'une posture de praticien à une réflexivité sur soi en tant que professionnel puis d'une posture de praticien-réflexif à celui de praticien-chercheur en prenant de la distance par rapport aux pratiques enseignantes par le biais d'une interrogation systématique éclairant les composantes déterminantes en jeu et leurs interactions.

Pour conclure, comme l'affirme Christine Mias, nous retenons que : « Marier deux positions, internes et externes, conjuguer deux postures, praticiens et chercheur, relève d'une position difficile à tenir, mais non impossible et plutôt enrichissante pour une compréhension des problèmes soulevés ».

2. La question des acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire

Voici quatorze ans que le rapport de l'IGEN¹² Jean Louis Durpaire et ses collaborateurs sur « L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire » (juin 2006) notait déjà les « cris d'alarme » poussés sur le niveau des élèves : « ils ne sauraient plus compter, ils n'apprendraient plus les tables d'addition et de multiplication, ils ne sauraient plus poser des opérations ; faire une division et résoudre un problème élémentaire poserait plus de difficultés aux élèves d'aujourd'hui qu'à ceux d'hier » (p.16). Au mois de septembre de la même année, ces constats étaient confirmés par les piètres résultats des élèves aux évaluations nationales en calcul mental, notamment « dans les exercices où il s'agit non pas de restituer un fait numérique automatisé mais de s'appuyer sur des résultats connus pour construire rapidement des procédures adaptées aux nombres en jeu, certaines de ces procédures pouvant elles-mêmes être automatisées » (COPIRELEM, 2012, p.9).

Entre-temps plusieurs rapports et plans se sont succédés pour traiter cette question dans l'urgence et « refonder l'École » sans effets visibles sur la baisse du niveau moyen des élèves en mathématiques et l'amplification des déterminismes sociaux, culturels et territoriaux. Aujourd'hui, force est de constater que malgré la politique d'élévation du niveau général des élèves, il y a bien péril en la demeure et pas seulement en mathématiques car toutes les évaluations standardisées nationales et internationales convergent vers des résultats inquiétants (Chesné, 2018). Pour preuve, selon TIMSS¹³ 2020, la France, avant dernière du classement international sur l'enseignement des mathématiques et des sciences, s'illustre par une « surreprésentation des élèves les plus faibles. 15% des élèves français

¹² Inspecteur Général de l'Éducation Nationale

¹³ Trends in international mathematics and science study. Les enquêtes TIMSS ne sont pas des enquêtes de l'OCDE ; elles sont portées par l'IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement).

n'atteignent pas le "niveau bas"¹⁴ en mathématiques contre 6% des élèves au niveau européen. Cela signifie que 15% n'ont pas atteint les connaissances élémentaires en CM1 », explique la directrice de la Depp¹⁵, Fabienne Rosenwald. En réalité, au-delà des contenus de ces évaluations plus ou moins révélateurs des apprentissages des élèves, les questions pour lesquelles nous souhaitons trouver des réponses sont les suivantes : Quels sont les acquisitions des élèves sur les nombres ? De quoi sont-ils capables en calcul ? Quelles connaissances ont-ils acquis partiellement ?

Pour éclairer ce débat, nous nous référons d'une part, au bilan sur « Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire » dressé par Chesné et Fischer (2015) et d'autre part à « l'Analyse critique des évaluations standardisées sur les apprentissages des élèves » de J.-F. Chesné (2018) dans le but d'en extraire, de manière non exhaustive, les résultats marquants sur les acquis à l'école primaire des élèves français dans le domaine des nombres et du calcul, avec un focus sur le calcul mental. Voyons maintenant, dans la section suivante, les informations que nous avons pu obtenir.

2.1 Les acquis des élèves dans le domaine des nombres

• *Des acquisitions et des progrès à l'entrée du CP et du CE1*

Si en 2011, les évaluations menées en début de CP révélaient de bonnes connaissances relatives aux nombres (suite des nombres au moins jusqu'à 30, dénombrement et correspondance entre la désignation orale et l'écriture chiffrée) avec une réduction des inégalités sociales¹⁶ à la sortie de l'école maternelle en laissant croire à un renforcement de ces acquis après 2008, deux ans plus tard, les résultats des élèves du CE2 montraient qu'il n'en était rien. En cause, des questions de méthodes suggérant une surestimation des acquisitions ou une complication de leur interprétation¹⁷ associée à une évaluation « superficielle » des connaissances acquises (les items évalués concernaient la lecture, l'écriture des nombres, le comptage de un en un sans éprouver la structure logico-arithmétique fondamentale d'itération numérique¹⁸).

¹⁴ L'enquête TIMSS définit trois seuils de performance : 1°) le seuil « avancé » qui est le meilleur ; 2°) le seuil « élevé » et 3°) le seuil intermédiaire. Le niveau « bas » mentionné ici correspond au niveau « faible ». Les élèves appartenant à ce groupe ne possèdent que quelques compétences de base qu'ils n'arrivent pas à utiliser même dans des situations simples.

¹⁵ Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance.

¹⁶ Le Cam et al. (2013) soulignent que « les enfants de père ouvrier ont progressé de 15 points de score entre 1997 et 2011 (de 45% à 60%) tandis que les enfants de père cadre n'ont progressé que de 12 points de score (de 59% à 71%). »

¹⁷ « La réussite des items pour lesquels il est demandé aux élèves de compléter une suite écrite de nombres marque au mieux la capacité des élèves à identifier la logique de l'écriture décimale des nombres, ou à défaut leur mémorisation de l'écriture d'une suite de symboles » (Chesné et Fischer, 2015).

¹⁸ « Un élève peut résoudre pratiquement toutes les questions (y compris les problèmes arithmétiques, vu le mode de réponse de l'évaluation) sans avoir compris que le suivant d'un nombre s'obtient par l'ajout de 1 à ce nombre » (Chesné et Fischer, 2015).

Sept ans plus tard, les évaluations repères de la Depp à l'entrée en CP attestent que la reconnaissance des nombres (92 % en 2018¹⁹ ; 92,2% en 2019²⁰ ; 91% en 2020²¹) et l'écriture des nombres jusqu'à 10 (82,7 % en 2018 ; 87,7% en 2019 ; 87% en 2020) affichent le meilleur taux de réussite avec une légère augmentation chaque année. En revanche, même s'ils croissent eux aussi d'une année à l'autre, les résultats dans le domaine de l'utilisation des nombres sont beaucoup plus hétérogènes : le dénombrement de collections est plutôt bien réussi (87 % en 2018 ; 85,4% en 2019 et 84,4% en 2020) et le placement d'un nombre sur une ligne numérique, n'est réussi de manière satisfaisante que par 44 % des élèves (46,6% en 2019 et 46,8% en 2020). À l'entrée au CE1 en 2018, le niveau de maîtrise est satisfaisant pour les items relatifs à la reconnaissance des nombres entiers (74,8 % contre 75,6% en 2018 et 74,7% en 2020), à leur écriture jusqu'à cent (69,4% contre 72,6% en 2019 et 71,8% en 2020) et à leur représentation (64,2% contre 59,6% en 2019 et 58,4% en 2020). Cependant, les items concernant le placement d'un nombre sur une ligne numérique sont moins bien réussis : 48 % des élèves se situent en dessous du seuil 2²² en 2020 (contre 55,7% en 2019 et 55,5% en 2018).

- ***Des compétences inégalement maîtrisées sur les « grands nombres entiers »***

Dès qu'il n'est plus possible de les associer à une collection concrète d'objets, lire et écrire des nombres entiers devient une difficulté pour un certain nombre d'élèves à la fin de l'école primaire. En effet, au moins 90% des élèves ayant participé aux évaluations nationales 2005, en et hors éducation prioritaire, savaient écrire un nombre entier inférieur à 1000 à l'entrée au CE2 et jusqu'à 9 999 à leur arrivée en sixième. Mais au-delà de 10 000, le taux de réussite décroît de 20 points pour les élèves hors éducation prioritaire et jusqu'à 30 points pour les autres. En somme, un tiers des élèves en éducation prioritaire (contre un quart hors éducation prioritaire) arrivant en sixième ne sont pas capables d'écrire « un grand nombre ».

- ***Un déficit de construction des nombres décimaux non spécifique aux élèves français***

La première évaluation Cedre²³ datant de 2008 et portant sur les mathématiques en fin d'école primaire estimait qu'au moins 40% des élèves ne maîtrisaient pas les principes de numération et encore moins les techniques opératoires lorsqu'il s'agissait de nombres décimaux. La conceptualisation de ces nombres est également source d'inégalités car l'écart, sauf cas particulier,

¹⁹ Note d'information n°19.13 – avril 2019 de la Depp.

²⁰ Note d'information n°20.05 – février 2020 de la Depp.

²¹ Document de travail 2020-E04 – novembre 2020 de la Depp, « Évaluations 2020, Repères CP, CE1 : premiers résultats ».

²² « Pour chaque évaluation, deux seuils de réussite, propres à chaque série d'exercices ont été déterminés : un seuil en deçà duquel on peut considérer, dès le début de l'année, que les élèves rencontrent des difficultés et donc qu'un besoin d'accompagnement est identifié (seuil 1). Un seuil pour des élèves dont les acquis semblent fragiles (seuil 2) » (Depp, Note n°19-14, avril 2019).

²³ Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur des échantillons, dont les items ne sont pas diffusés.

entre les taux de réussite éducation prioritaire/ hors éducation prioritaire est de l'ordre de 10 points pour les tâches portant principalement sur l'écriture ou le changement d'écriture d'un nombre décimal, le placement d'un nombre sur la droite graduée, l'intercalation d'un nombre entre deux nombres décimaux ou l'encadrement d'un nombre décimal entre deux nombres entiers, la comparaison des nombres décimaux, la multiplication et la division d'un nombre décimal par 10, 100, 1000 et enfin des calculs mentaux ou des opérations posées en ligne ou en colonnes.

Ainsi, à l'arrivée en sixième, passer d'une représentation du nombre décimal à une autre (de l'écriture décimale à une écriture fractionnaire et vice-versa) constitue une difficulté pour 50% des élèves. D'autre part, les travaux issus de la recherche internationale montrent que si comparer 73,34 et 73,81 ne constitue pas un obstacle, eu égard sans doute à leur assimilation des nombres entiers ou simplement à l'écriture de ces nombres, comparer 150,65 et 150,7 n'est pas évident pour les élèves français à l'entrée en sixième comme pour leurs condisciples étrangers. Dans le même ordre d'idées, un tiers des élèves, toutes nationalités confondues, peinent à assimiler qu'il existe au moins un nombre décimal entre deux autres, à plus forte raison pour en proposer un. Ces résultats nationaux viennent conforter ceux issus de nombreux travaux de recherches menés à l'étranger (Baturu et Cooper, 1995 ; Steinle, 2004 ; Roche et Clarke, 2006), notamment ceux de Stacey (2005) listant jusqu'à 11 règles erronées ou « conceptions erronées » (misconceptions) à l'origine des comparaisons incorrectes de décimaux. En effet, une étude internationale principalement menée en Australie et aux États-Unis montrent que pour 50% des élèves de 12 ans, il n'y a aucun nombre décimal entre 1,52 et 1,53 (McIntosh et al., 1997).

2.2 Les acquis des élèves dans le domaine du calcul

- ***Des taux de réussite aux calculs mentaux peu élevés, voire très peu élevés jusqu'en 2018***

Les taux de réussite aux calculs mentaux (i.e, les calculs effectués avec des procédures spécifiques distinctes des algorithmes standards utilisés en calcul posé) sont peu élevés, voire très peu élevés. En effet, aux évaluations nationales de septembre 2006, 48% des élèves de CE2 effectuent correctement le calcul mental « 40 moins 8 » qui s'appuie sur la connaissance des compléments à 10 (ici $8 + 2 = 10$ donc $32 + 8 = 40$). Ce score déjà faible tombe à moins de 38% lorsqu'il s'agit de calculer mentalement « 45 moins 9 » (calcul avec franchissement de la dizaine), en suggérant un manque d'adaptabilité aux procédures utilisant des décompositions additives et soustractives de 9 ainsi qu'une méconnaissance des propriétés de la soustraction. Du côté de la classe de 6^{ième}, si la situation s'améliore concernant le calcul de différence (75% des élèves ont correctement calculé $53 - 8$), le calcul de produits tels que 18×20 et 25×40 met les élèves en difficulté (respectivement 37% et 36% de réussite). De même, on constate un taux de réussite de seulement 41% au calcul « 60 divisé par

4 » qui peut s'effectuer en calculant la moitié de 60. Par ailleurs, certains élèves recourent à la stratégie du « calcul posé mental » ou « application mentale de l'algorithme écrit » en « posant mentalement un calcul écrit ». Mais, cette procédure de calcul atteint très vite ses limites quand le temps de réponse est court et/ou la taille des nombres en jeu augmente (par exemple : $58, 34 + 9,99$ ou 35×99). De ce fait, les difficultés pour résoudre des calculs du type 2, $3 + 4$, 12 et $15,4 - 1,7$ persistent en 6^{ième}, en attestent le faible taux de réussite des élèves (respectivement 34,7% et 34,6%) à l'évaluation nationale 2002 à l'entrée en 5^{ième} .

D'après la note d'information²⁴ de la Depp, en 2018, en ce qui concerne le calcul, seule la moitié des élèves atteignent le seuil fixé au début du CE1 (en réussissant quatre additions en ligne sur sept et trois soustractions en ligne sur huit). Cet obstacle se répercute sur la résolution de problèmes (avec seulement 42,9 % des élèves qui parviennent à résoudre trois problèmes sur cinq contre 46,1% en 2019 et 46,4% en 2020) qui reste l'un des domaines le plus échoués même au CP où il n'est réussi correctement que par 59,3 % des élèves (64,4% en 2019 et 66,1% en 2020). A contrario, les exercices de calcul mental sont mieux maîtrisés avec 76,1% des élèves qui réussissent à l'entrée au CE1 plus de sept opérations sur dix (contre 75% en 2019 et 75,9% en 2020).

- ***Une différence de performances entre addition/ soustraction et multiplication/division dans la connaissance des tables et leur utilisation dans des procédures opératoires***

Pour produire rapidement des faits numériques (« tables »), l'élève peut recourir soit à des connaissances déclaratives en récupérant le résultat en mémoire (par exemple, « huit fois sept, c'est cinquante-six »), soit à des connaissances procédurales en retrouvant le résultat par reconstruction instantanée (additionner sept fois le nombre huit par exemple). Par conséquent, même si le temps de réponse accordé est limité, il demeure néanmoins difficile d'identifier le type de connaissance mobilisée par l'élève lors d'une évaluation et donc celle qu'il a réellement acquise. C'est pour cette raison que les protocoles d'évaluations nationales excluaient la restitution des résultats mémorisés des tables jusqu'en 2002.

Nonobstant, les tentatives pour éprouver la connaissance des tables en 2002 et 2003 permettent à Chesné et Fischer (2015) de faire le constat d'une certaine stabilité des pourcentages de réussite pour la restitution des tables d'additions, qui évolue de 90% au CE2 à plus de 95% en début de 6^{ième}. Toutefois, lorsque la procédure de comptage devient inefficace, comme dans le cas de $8 + 7$ par exemple, le taux de réussite des élèves de CE2 chute à 81%, ce qui prouve qu'environ 20% d'entre eux ne connaissent pas les tables d'addition de 7 et de 8 mais qu'en plus, ils sont incapables de

²⁴ Note d'information n°19-14 -avril 2019 de la Depp.

reconstruire le résultat d'une addition nécessitant un franchissement de dizaine, un appui sur les procédures de référence (appui sur les doubles, compléments à 10) et surtout de mettre en œuvre de procédures variées utilisant les propriétés des nombres et des opérations pour effectuer des calculs complexes notamment, le retour au cinq, le calcul en appui sur les doubles ou le passage à 10.

En ce qui concerne la restitution des produits élémentaires issus des tables, elle reste encore à parfaire en début de CE2 même pour la table de 2 dont le pourcentage de réussite n'atteint pas les 100%, ce qui induit une conceptualisation des doubles fragile et une méconnaissance de leur lien avec la multiplication. Dans ce domaine, les performances ne s'améliorent pas avec le temps. En effet, le pourcentage de réponses correctes obtenues en 6^{ième} est bien inférieur à celui des additions. En outre, les produits complexes des tables (comme 7 fois 8) posés sous forme de « multiplications à trou » ne sont pas stockés en mémoire chez un peu plus de la moitié des élèves. Ces faibles acquisitions se répercutent sur les multiplications, les divisions posées et les calculs mentaux effectués lors d'estimation de l'ordre de grandeur d'un résultat. Pour preuve, lors des évaluations nationales en 2001, seuls 53,8% des élèves de 6^{ième} confrontés à la multiplication posée 64×39 (réactivant 4 multiplications et 6 additions des tables) étaient capables de donner la bonne réponse.

D'autre part, plus de 90% des élèves réussissent bien les multiplications d'un nombre entier par 10, 100, 1000 car ils appliquent pour la plupart la stratégie qui revient à ajouter des zéros pour trouver le résultat correct. A contrario, quand il s'agit de multiplier par 10, 100, 1000 un nombre décimal comportant autant ou plus de zéros que dans 10, 100, 1000 ($11,39 \times 10$ ou $3,256 \times 100$), un tiers des élèves n'y arrivent pas. Mais, lorsque ce n'est pas le cas, comme dans $35,2 \times 100$ par exemple, c'est plus de la moitié des élèves qui déclarent forfait. En outre, ce type de tâches est discriminant pour les filles (avec un écart en leur défaveur d'environ 8 points aux évaluations nationales de 2005 et 2008) et pour les élèves en éducation prioritaire (avec un écart éducation prioritaire / hors éducation prioritaire de 16,1 points pour l'item $35,2 \times 100$).

- ***Une performance aux techniques opératoires en baisse en défaveur des garçons***

Concernant le calcul posé, c'est une baisse considérable des élèves que les évaluations nationales en fin de CM2 à 20 ans d'intervalle (1987-2007) mettent en exergue (Rocher, 2008). Elle est cependant moins marquée à trente ans d'intervalle (1987-2017). Ainsi, le taux de réussite de l'addition $19\,786 + 215 + 3\,291$ est passé de 94% en 1987 à 83% en 2007. Une baisse de performance est également constatée pour la multiplication 247×36 dont le pourcentage de réussite chute de 84% en 1987 à 68% en 2007. Le pourcentage de réussite de la division décroît lui aussi en passant de 78% en 1999 à 76% en 2007. D'un point de vue global, cette régression soulève la question de l'enseignement

systématique des techniques opératoires compte tenu de l'utilisation de plus en plus courante d'instruments de calcul électroniques dans la vie quotidienne d'une part et d'autre part, laisse à réfléchir au regard des faibles aptitudes des élèves français en calcul mental qui s'avèrent indispensables pour contrôler la plausibilité du résultat donné par la machine.

D'un point de vue plus local, premièrement, il en ressort que les opérations sont moins réussies quand c'est l'élève qui les pose avec une aggravation encore plus marquée lorsque ces calculs mettent en jeu des nombres décimaux. Deuxièmement, le calcul posé est discriminant pour les garçons alors que le calcul mental est en leur faveur (Fischer, 2004). Cette dernière assertion est confirmée par les évaluations nationales 2000 qui illustrent la nette supériorité des garçons en calcul mental (42,6% de réussite contre 32,1% pour les filles au début du CE2 et 70,3% de réussite contre 58,3% pour les filles en début de 6^{ième}) et la nette supériorité des filles en calcul posé (59,4% de réussite contre 52,7% pour les garçons au début du CE2 et 71,2% de réussite contre 62,4% pour les garçons, en début de 6^{ième}).

Par ailleurs, la gestion de la retenue semble constituer un obstacle, dès le début de l'apprentissage des techniques opératoires. Pour preuve, l'évaluation 2011 réalisée par la DGESCO en fin de CE1 montre que la soustraction posée sans retenue $786 - 254$ est réussie par 76% des élèves alors que le pourcentage de réussite échoue à 47,9% quand il s'agit d'effectuer la soustraction posée avec retenue de $481 - 126$. D'autre part, en procédant par inférence, à partir de comparaisons des performances des filles et des garçons sur les calculs libres (i.e, des calculs non posés en colonnes que l'élève peut poser en ligne ou en colonnes), Chesné et Fischer (2015) soutiennent que « les filles, en utilisant davantage une technique s'apparentant à la technique opératoire posée en colonnes, vont davantage "souffrir" du problème de la retenue » (p.29). Cette hypothèse est validée par les évaluations nationales 2002 qui montrent qu'au début du CE2, « les filles ont mieux réussi (à 63,4%) la soustraction sans retenue $978 - 765$ que les garçons (56,0%) mais elles ont légèrement moins bien réussi (17,3%) la soustraction avec retenue $45 - 27$ que les garçons (19,0%) » (p.29).

2.3 Bilan sur les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire

- ***À partir des évaluations nationales***

- *Les tests portants sur la maîtrise des compétences du socle*

D'après « Repères et références statistiques 2012²⁵ », les évaluations pour les indicateurs de la LOLF²⁶ portant sur la maîtrise des compétences du socle (telles qu'elles sont déclinées dans les

²⁵ Repères et références statistiques 2012, pp.224-225. www.education.gouv.fr/cid57096/rep%C3%A8res-et-r%C3%A9f%C3%A9rences-statistiques.html

²⁶ LOLF : Loi Organique relative aux Lois de Finances. Depuis 2007, ces évaluations avaient lieu chaque année. Mais depuis 2014, les élèves en fin de CM2 et de 3^{ième} sont évalués tous les trois ans.

programmes officiels de 2008) réalisés en 2012 montraient qu'environ 91% des élèves maîtrisaient les « compétences de base » en mathématiques en fin de CM2 et 87% des élèves les maîtrisaient en fin de 3^{ème}. Paradoxalement, la même année, dans « État de l'École », la Depp, estimait le niveau d'acquisition pour la compétence 3 du socle²⁷ à seulement 69% en fin de CM2 et 75% en fin de 3^{ème}. Cette divergence entre acquisition des « compétences de base » et « compétence du socle » s'explique sûrement par une différence d'indicateurs²⁸ et du niveau d'exigence à chaque niveau scolaire. Cela ne rend pas pourtant plus facile son interprétation.

- Les évaluations Cedre

En ce qui concerne les évaluations Cedre²⁹ dont la finalité est d'approfondir la connaissance qu'à le système éducatif des élèves à une étape clé de la scolarité (en fin de CM2 ou en fin de 3^{ème}), la note d'information de 2008 faisait un double constat : d'un côté, l'hétérogénéité très importante du niveau des élèves en mathématiques à la fin de l'école primaire et de l'autre, le nombre conséquent d'élèves (41%) n'ayant que des acquis très fragiles en fin d'école primaire. En fait, l'évaluation Cedre, élaborée selon des modèles statistiques inspirés de ceux utilisés pour PISA³⁰, s'appuie sur une échelle de performance étalée sur six groupes pour caractériser les niveaux des élèves. Chacun de ces groupes correspondant à des acquis des élèves décrits en termes de connaissances et de compétences.

Selon la Depp (2010) les trois groupes définis par les résultats les plus bas (i.e, les élèves dont la maîtrise des notions mathématiques est trop faible pour réussir de manière autonome au collège) « représentent 37,7% des élèves » entrant en sixième. D'autre part, Cedre 2008 et Cedre 2014 confirment les résultats déjà observés lors des évaluations de début de cycle : des connaissances fragiles sur les nombres entiers accentuées quand il s'agit des nombres décimaux et de leur utilisation dans les procédures opératoires en particulier pour la multiplication et la division. En 2008, Cedre montraient également que 44% des élèves en fin de collège étaient encore en cours d'apprentissage sur tout ou partie des fondamentaux de la discipline³¹. La note d'information de 2014³² ne relève pas d'évolution marquante chez les élèves de fin de CM2 par rapport à 2008. Cependant, elle fait remarquer que : « le pourcentage d'élèves en difficulté³³ augmente sensiblement, passant de 15% à

²⁷ La compétence 3 du socle telle qu'elle est définie en 2005 inclut les « principaux éléments de mathématiques, la culture scientifique »

²⁸ Notes d'information de la DEPP n°08.37.

²⁹ Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillons. Elles ont lieu chaque année depuis 2003, 2008, 2014 en mathématiques et concernent les élèves de fin de CM2 et de troisième.

³⁰ « PISA est une enquête menée tous les trois ans auprès de jeunes de 15 ans dans les 34 pays membres de l'OCDE et dans de nombreux pays partenaires » (OCDE, 2015).

³¹ Note d'information 10.18 de la Depp.

³² MENESR-Depp, Note d'information n°18, mai 2015.

³³ À partir de références nationales et internationales, ce pourcentage avait été fixé arbitrairement à 15% en 2008.

16,3%. Le constat s'accroît entre les élèves "à l'heure" et ceux en retard dans le contexte d'une diminution des redoublements. Au-delà de la stabilité globale, les analyses complémentaires pointent quelques évolutions significatives : une baisse des performances en technique opératoire ; une amélioration concernant l'estimation des ordres de grandeur³⁴ » (Depp, mai 2015). Le bilan dressé par Cèdre 2014 pour la fin du collège n'est pas plus encourageant : le nombre d'élèves dans les groupes les plus faibles croît en passant de 15 à 19,5% tandis que celui des groupes les plus performants décroît en passant de 28,6% à 24,4%.

Pour finir, la dernière note d'information en date de la Depp³⁵ indique, en 2019, une baisse des performances des élèves en fin d'école primaire alors qu'elles étaient restées stables entre 2008 et 2014. Cette chute des performances concerne aussi bien les élèves « à l'heure » que ceux qui accusaient déjà un certain retard. Elle est aussi comparable chez les filles et les garçons avec une discrimination pour les filles. D'ailleurs, les écarts de performance selon le profil social des élèves sont maintenus sans pour autant affecter les élèves les plus favorisés. D'autre part, les élèves interrogés sur leur rapport aux mathématiques sont de moins en moins intéressés par cette discipline.

- *L'évolution des performances en calcul des élèves de CM2 à trente ans d'intervalle (1987-2017)*

La reprise en 2017 de l'enquête initiée en 1987 portant sur le calcul en fin de CM2 permet de comparer les performances des élèves à trente ans d'intervalle et d'avoir des résultats à quatre temps de mesure : 1987, 1999, 2007 et 2017. Bien que la baisse constatée entre 1987 et 1999 se soit atténuée entre 1999 et 2007, dix ans plus tard, la tendance est toujours à la baisse même si elle est moins marquée. Ainsi, « les taux de réussite moyens pour les additions s'élevaient à 90 % en 1987 et à 77 % en 2007. En 2017, ils sont à 69 %. Pour les soustractions, réussies autour de 83 % en 1987, elles ne le sont qu'à hauteur de 64 % en 2007 et de 55 % en 2017. La baisse est encore plus marquée pour les divisions : 74 % en 1987, 43 % en 2007 et 37 % en 2017. Concernant les problèmes, les taux de réussite moyens sont de 32 % en 2017. En 1987 et en 2007, ils s'élevaient respectivement à 52 % et 40 % » (Depp, note 19.08 – mars 2019, p.3). D'autre part, les écarts selon l'origine sociale sont restés les mêmes. Et, si l'écart entre les filles et les garçons restent à la faveur de ces derniers, il se réduit néanmoins en 2017.

³⁴ MENESR-Depp, Note d'information n°18, mai 2015.

³⁵ Note d'information n°20.33 – septembre 2020 de la Depp.

- *Les évaluations nationales de la Dgesco*

Entre 2009 et 2012, à la suite de la publication des nouveaux programmes 2008 et pour pallier l'abandon des évaluations à l'entrée en sixième, la Dgesco³⁶ planifie des évaluations nationales au CE1³⁷ et au CM2³⁸ afin de constituer des outils au service des maîtres pour la réussite de tous les élèves. Vivement contestées par les enseignants et les chercheurs pour leurs faiblesses méthodologiques (choix des exercices, moment retenu pour leur passation, modalités de codage) et surtout pour leur statut et leur finalité difficile à cerner, ces évaluations corroborent néanmoins les résultats locaux des évaluations nationales décrites en amont, à savoir des difficultés accentuées en ce qui concerne les décimaux et le champ multiplicatif. Par ailleurs, une analyse globale des évaluations nationales 2008 et 2009 montre que le pourcentage d'élèves domiens ayant des acquis suffisants (« « élèves ayant de bons acquis » et « élèves ayant des acquis solides ») en mathématiques, au CE1 comme au CM2, est inférieur à celui observé la même année au plan national (avec un écart de 13,4 points). En outre, « cette différence augmente au cours de la scolarité primaire passant d'une moyenne de -10,6 points au CE1 à une moyenne de -16,2 points au CM2 » (Arnéon et al., 2013, p.58).

- *Journée de défense et citoyenneté 2013 et 2014*

D'autre part, les tests réalisés lors de la Journée défense et citoyen (JDC) en 2013 annoncent que 9,7%³⁹ des jeunes ont des difficultés en « numératie », c'est-à-dire qu'ils sont peu aptes à utiliser des connaissances élémentaires sur les nombres et le calcul dans des situations qui peuvent être des situations de la vie quotidienne. Paradoxalement, on constate une inadéquation entre ces chiffres et ceux apportés par Cedre 2014 et PISA 2012 qui fixaient à 19,5% le pourcentage d'élèves en grande difficulté. Les items constituant les tests de la JDC ne sont pas connus. Néanmoins les résultats publiés font état eux aussi de difficultés portant sur la compréhension des nombres et leur écriture, en particulier celles des nombres décimaux, et sur des opérations autres que les additions mettant en jeu les nombres entiers (dont les calculs de pourcentages, même très simples). En conséquence, ces données nous poussent à croire que l'École n'arrive même plus à assurer à tout citoyen la maîtrise des nombres et des calculs « de base » indispensables pour sa future insertion sociale et professionnelle (JDC, 2014).

³⁶ Direction Générale de l'Enseignement Scolaire.

³⁷ Ces évaluations étaient programmées au mois de mai.

³⁸ Pendant trois années, la passation de ces évaluations avait lieu au janvier avant d'être différée à la fin de l'année scolaire à partir 2012-2013. Cette période a également marqué la fin progressive de ces évaluations.

³⁹ Note d'information n°13 – avril 2014 de la Depp.

- *Les évaluations nationales repères CP-CE1 et point d'étape CE1*

Depuis la rentrée scolaire 2018, la Depp organise chaque année des évaluations repères au CP (en début et milieu d'année) et au CE1 (en début d'année). Comme leur nom l'indique, elles ont pour but de proposer, dès le début de l'année, des repères permettant aux enseignants d'une part, de bien apprécier les acquis qui ancrent les apprentissages du cours préparatoire et d'autre part, d'identifier les besoins individuels de chaque élève le plus rapidement possible pour y apporter l'aide la mieux adaptée. Au cours préparatoire, deux attendus des programmes sont évalués : utiliser les nombres (évaluer et comparer, réaliser une collection, utiliser le nombre pour exprimer la position d'un objet, mobiliser des symboles analogiques, etc.) et étudier les nombres (lire, écrire en chiffres, quantifier des collections, composer et décomposer, dire combien il faut enlever ou ajouter pour obtenir des quantités, etc.). Au CE1, quatre attendus sont testés dans le domaine « nombres et calcul » : 1) comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer ; 2) nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers ; 3) résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul ; 4) calculer avec des nombres entiers (calcul en ligne, calcul mental). En 2018 comme en 2019, les résultats au début, à mi-parcours du CP et au début du CE1 pointent des difficultés en résolution de problèmes auxquelles s'ajoutent au CE1 des difficultés pour le calcul en ligne.

- ***À partir des évaluations internationales***

- *PISA*

Menées tous les trois ans auprès de jeunes de 15 ans dans les 34 pays membres de l'OCDE et dans de nombreux pays partenaires, les enquêtes PISA portent sur la compréhension de l'écrit et sur la « littératie mathématique » et la « littératie scientifique ». Leur spécificité réside dans le fait qu'elle teste davantage l'aptitude des élèves à appliquer les connaissances acquises à l'école et au collège aux situations de la vie réelle⁴⁰ que la maîtrise d'un programme scolaire précis (Cnesco, 2016). Autrement dit, PISA n'évalue pas la maîtrise des acquis mathématiques des élèves mais plutôt leur capacité à réinvestir ses connaissances dans des situations de la vie réelle. En ce qui concerne le niveau moyen des élèves scolarisés, la France, d'abord située à un niveau proche de la moyenne des pays de l'OCDE en 2000, chute de 24 points en 2015⁴¹ ce qui la classe dans le groupe des pays dont la performance est dans la moyenne de l'OCDE, comme le Royaume-Uni, la Norvège ou le Portugal. Au niveau local, les résultats de la France en mathématiques laissent apparaître des écarts importants entre les élèves de 3^{ième} (1 an de retard) et ceux de 2^{nde} générale et technologique, respectivement

⁴⁰ Acquis des élèves : comprendre les évaluations internationales PISA et TIMSS. Rapport du Cnesco, 2016. <http://www.cnesco.fr/fr/comparaison-pisa-timss/>

⁴¹ MENESR-DEPP, « Note d'information n°38 », décembre 2016.

classés au niveau des élèves des pays les moins performants et au rang de ceux qui obtiennent les scores moyens les plus élevés. De l'avis de Chesné (2018), c'est cette dispersion qui serait à l'origine de la baisse du score moyen de la France en mathématiques. En effet, le graphique sur la répartition des élèves de bas et haut niveaux en mathématiques dans la note d'information sur PISA 2018⁴² montre une augmentation de la proportion d'élèves en difficulté entre 2003 et 2018 qui passe de 16,6% à 21,3% et une diminution de la proportion des élèves composant les groupes les plus performants passant de 15,1% à 11,0%. Cependant, l'écart, proche de celui qui existait en moyenne dans les pays de l'OCDE en 2012 entre filles et garçons, légèrement en faveur de ces derniers, n'est plus en 2015.

À un niveau plus global, l'enquête PISA 2012 révèle à la fois une dégradation des performances des élèves les plus défavorisées sur le plan socio-économique et une stabilité des performances des élèves les plus favorisés. Cette aggravation des inégalités scolaires d'origine sociale recule la France au rang des pays dont la corrélation entre le milieu socio-économique et la performance est la plus marquée. Cependant, le système français n'accroît pas seulement les inégalités sociales, il amplifie aussi les inégalités migratoires (Cnesco, 2016). En effet, la proportion d'élèves issus de l'immigration dépasse les 43% en France alors qu'en Australie et au Canada, elle reste inférieure à 16%. Cette inégalité est également visible au niveau micro puisque même à milieu socio-économique équivalent en France, les élèves issus de l'immigration se caractérisent par des scores inférieurs de 37 points à ceux des élèves autochtones, ce qui équivaut à presque une année d'études (contre 27 points en moyenne, dans les pays de l'OCDE⁴³). En 2018, les résultats de la France restent parmi ceux des pays de l'OCDE les plus fortement corrélés avec le niveau socio-économique et culturel des familles. Cependant, cette corrélation est en baisse.

Par ailleurs, d'après les résultats de PISA 2012 comme pour ceux de PISA 2018, « la France compte parmi les pays où les élèves ont le moins confiance en eux concernant leurs compétences en mathématiques et font le moins preuve de persévérance pour résoudre des problèmes de mathématiques⁴⁴. En 2018, la France se classe toujours parmi les pays de l'OCDE où le niveau d'anxiété est le plus élevé, même si ce niveau n'a pas changé depuis 2003 ». Cela mis à part, au vu de la note d'information 08⁴⁵ de la Depp (2014), la France s'en sort plutôt bien dans la résolution de

⁴² Note d'information 19.50 – Décembre 2019 de la Depp.

⁴³ Note de l'OCDE pour la France.

⁴⁴ Idem

⁴⁵ Note d'information 08- avril 2014 de la Depp.

situations-problèmes⁴⁶ que l'on peut retrouver dans la vie réelle, avec un niveau supérieur au niveau moyen de l'OCDE. En effet, les élèves en difficulté dans ce type de tâche sont moins nombreux en France que dans la moyenne des pays de l'OCDE.

- *TIMSS*

Voyons maintenant ce que nous apprennent les enquêtes TIMSS⁴⁷ (Trends in international mathematics and science study) sur les acquis des élèves français dans le domaine des nombres et du calcul en fin d'école primaire. Focalisées uniquement sur les mathématiques et les sciences et fondées sur les programmes scolaires des pays participants, ces enquêtes réalisées tous les quatre ans depuis 1995⁴⁸ (TIMSS Advanced) concernent les niveaux équivalents à ceux du CM1, de la 4^{ème} et de la dernière année du secondaire (toutes les terminales, y compris BEP), avec une épreuve spécifique pour les terminales scientifiques (TIMSS Advanced). La France y prend part en 1995, en 2011, en 2015⁴⁹ et en 2019. D'après Pécal (1999), lors de sa participation en 1995, la France se classe première en mathématiques pour l'épreuve de fin de secondaire et septième pour la population globale. Selon lui, « il semblerait donc que le niveau en mathématiques, même s'il nous semble "avoir baissé" depuis quelques années, soit en fait resté très bon ». Ceci dit, aucun pays asiatique n'avait passé les épreuves cette année-là. Mais en 2011, comme pour PISA, les pays de l'est asiatique (Singapour, Corée, Japon) arrivent en tête du classement tandis que de nombreux pays (dont la Finlande) accusent des baisses importantes. En 2015, la France marque une baisse importante à l'épreuve TIMSS Advanced : 1% des élèves français (contre 15% en 1995) atteint le seuil « avancé » (le meilleur), 11 % (contre 64%) parviennent au seuil « élevé » et 43% (contre 96%) accèdent au seuil « intermédiaire ». En somme, selon TIMSS Advanced 2015, 57% des élèves de Terminale S n'arrivent même pas au seuil « intermédiaire (contre 4% en 1995) et restent ainsi dans le dernier groupe d'élèves en dessous du troisième seuil. Cependant, aux dires de Chesné (2018), plusieurs raisons permettent de relativiser ces résultats : d'abord, « le recrutement des classes définies comme scientifiques est beaucoup plus sélectif dans certains pays qu'en France ». Ensuite, « le taux de participation parmi les élèves sélectionnés pour être testés est très élevé en France (95%) contrairement à d'autre pays (66% seulement aux États-Unis) ». Et, enfin, « les questions posées très proches de celles de 1995 ne correspondent plus qu'à environ 60% des programmes actuels qui ont, eux, largement évolué » (p.133).

⁴⁶ Les situations-problèmes proposées par PISA n'ont rien à voir avec la résolution de problèmes dont on parle habituellement en mathématiques. Ici, les élèves ne mobilisent aucune connaissance spécifique.

⁴⁷ Les enquêtes TIMSS ne sont pas des enquêtes de l'OCDE ; elles sont portées par l'IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement).

⁴⁸ Sauf TIMSS Advanced qui est plus irrégulière.

⁴⁹ En 2015, la France y participe au niveau du CM1 et de la terminale scientifique.

De son côté, l'enquête TIMSS CM1 2015 vient confirmer les résultats de Cedre 2014. En effet, elle révèle que 42% des élèves ne parviennent pas au niveau « intermédiaire » (dont 13% restent en dessous du niveau « faible »). Ce pourcentage est encore plus préoccupant quand on le compare à celui des pays de l'OCDE ayant participé à l'enquête qui n'est que de 25%. En fait, ces élèves ne disposent que de quelques connaissances de base qu'ils sont incapables de transférer dans des situations simples. De plus, la proportion de bons et de très bons élèves est plus faible dans TIMSS 2015 que dans Cedre 2014 (21% contre 29%) mais également inférieure à la proportion moyenne des bons et très bons élèves des pays de l'OCDE (36%). En 2019, les élèves de CM1 se distinguent par leur surreprésentation (45%) parmi les élèves européens les plus faibles ce qui classe la France à l'avant-dernière place du classement international. À l'inverse, seuls 13% des élèves du CM1 atteignent le quartile européen le plus performant. De plus les garçons réussissent mieux que les filles avec un écart de 13 points. D'autre part, le domaine « Nombre » et plus encore le domaine « Présentation de données » restent les moins maîtrisés par ces élèves.

- **Synthèse**

À la lumière des informations issues de l'étude croisée du bilan de Chesné et Fischer (2015) sur « Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire », de « l'Analyse critique des évaluations standardisées sur les apprentissages des élèves » de Chesné (2018) et des dernières notes d'informations de la Depp parues entre 2018 et 2020, il apparaît qu'à l'entrée en sixième l'écriture des nombres entiers, leur comparaison, l'addition et la soustraction semblent acquises par la plus grande majorité des élèves tandis que le calcul mental et le calcul posé de la multiplication et de la division demeurent un réel obstacle pour les apprenants. De plus, la conceptualisation des nombres décimaux s'écrivant avec une virgule reste très fragile en témoigne la proportion importante d'élèves (pouvant aller jusqu'à 50%) se trouvant en situation d'échec quand il s'agit de calculer avec des décimaux. En fait, seule l'addition posée des nombres décimaux semble assimilée ou du moins a l'air de l'être. De plus, les performances des élèves sont très faibles quand il s'agit de calculer mentalement des sommes, des différences, des produits et des quotients (avec un taux d'échec pouvant avoisiner les 50% dans certains cas). Il en est de même pour le calcul posé de soustractions et de divisions avec une amplification des difficultés pour les multiplications. Inexorablement, ces difficultés spécifiques se répercutent sur les multiplications et les divisions des nombres décimaux par 10, 100 et 1000. Ce qui est encore plus préoccupant, c'est que près d'un quart des élèves peinent à écrire les « grands nombres » (supérieurs à 1000). D'ailleurs, cet obstacle comme les difficultés mentionnées supra nuisent au développement des compétences inhérentes à l'estimation de l'ordre de grandeur du résultat d'une opération. In fine, d'une manière générale, le calcul mental est discriminant pour les filles tandis que le calcul posé est à la défaveur des garçons.

Par ailleurs, le bilan des acquis sur les nombres et le calcul en fin d'école primaire ne peut être complet sans mentionner la résolution de problèmes. En effet, l'inégalité des performances entre addition/soustraction et multiplication/division résidant dans les techniques opératoires affectent également les opérations à mettre en œuvre pour solutionner un problème.

Comme l'a fait remarquer Chesné (2018), « ces résultats confirment et complètent donc les difficultés mises en avant par la recherche en didactique des mathématiques sur l'apprentissage des nombres décimaux (Brousseau, 1980, 1981 ; Grisvard et Léonard, 1981, 1983 ; Perrin-Glorian, 1986 ; Bolon, 1992, 1996 ; Roditi, 2001, 2007 ; Chesné, 2014), comme par exemple le prolongement aux décimaux de règles-en-actes issues du traitement des nombres entiers » (p.110). Par conséquent, certains apprenants arrivant au collège, qui aux premiers abords semblent être des « experts apparents » (Roche et Clarke, 2006) dans la réalisation de tâches spécifiques ne sont en fait que des imitateurs recourant à des astuces diverses (en ajoutant par exemple des zéros dans la partie décimale pour comparer deux nombres décimaux afin d'avoir le même nombre de chiffres) pour dissimuler une conceptualisation fragile des nombres décimaux et par-delà des nombres entiers, ce qui impacte fatalement l'enseignement-apprentissage du calcul mental.

D'un point de vue global, le système français augmente les inégalités sociales (les écarts éducation prioritaire / hors éducation prioritaire des scores moyens sont d'environ 10% mais peuvent atteindre plus de 20% pour certains items) et amplifie aussi les inégalités migratoires (les scores des élèves issus de l'immigration sont inférieurs de 37 points à ceux des élèves autochtones). Dans le même ordre d'idées, Arnéon, Bocéron et Flieller (2013) constatent que les performances moyennes des élèves domiens demeurent nettement plus faibles que celles des élèves métropolitains en mathématiques avec des écarts allant de 8,1 à 21,7 points. Pour preuve, à l'entrée en 6^{ème}, en 2002, le scores de réussite des élèves de métropole en mathématiques était de 65% contre 49,3% à la Réunion, 46% en Martinique et 43,3% en Guadeloupe. Par conséquent, les faibles performances de la France en nombres et calcul cachent des résultats encore plus alarmants pour les Départements d'Outre-mer. Ainsi, lors des tests effectués par la Depp en août 2018, la Guadeloupe se situait, loin derrière Amiens, la dernière académie de France hexagonale, juste avant Mayotte et la Guyane placées en fin de classement.

En fin de compte, les résultats des élèves du primaire apparaissent particulièrement faibles sur les nombres et le calcul (Chesné, 2018). À cet égard, la conférence de consensus organisée sur ce thème en 2015 par le Cnesco et l'Institut français de l'éducation (Ifé/ENS de Lyon) ont mis en exergue les principaux obstacles rencontrés par les élèves : le sens des nombres, les connaissances des tables de

multiplication et la maîtrise des fractions et des décimaux (Chesné et Fischer, 2015). En faisant le lien entre les préoccupations, les questions des praticiens et du grand public et les productions scientifiques, les chercheurs ayant pris part à ce consensus remettent en cause la formation des enseignants (les professeurs des écoles recrutés ne sont pas issus des filières scientifiques et ne sont pas suffisamment formés), les pratiques enseignantes (réductrices, voire différenciatrices), les supports d'enseignement (l'utilisation excessive des cahiers d'exercices ou "fichiers" réduit l'activité des élèves à de la technique) et les contraintes sociales inhérentes à l'exercice du métier (les marges de manœuvre des enseignants sont limitées par un contexte d'enseignement parfois difficile, en particulier pour les débutants souvent affectés dans des écoles en éducation prioritaire délaissés par leurs prédécesseurs) – (Chesné, 2018). Au regard de ces éléments, les évaluations apparaissent donc clairement en France comme des enjeux de recherche (Chesné, 2018). À ce sujet, nous partageons le point de vue de l'UNESCO (2011) que nous ne pouvons nous empêcher de citer : « L'évaluation est nécessaire à l'enseignement des mathématiques, à la fois dans sa dimension formative, pour piloter les apprentissages au cours de leur réalisation, et dans sa dimension sommative, pour situer les résultats obtenus par rapport aux attentes et évaluer l'écart entre le curriculum visé et le curriculum atteint. Elle doit pour cela savoir conjuguer des dimensions internes et externes, qualitatives et quantitatives, et s'appuyer sur des méthodologies et instruments appropriés. Il y a là un point de consensus sur lequel il nous semble inutile de nous appesantir ».

3. État des lieux de la recherche sur l'enseignement-apprentissage du calcul mental

Au cours des cent dernières années, l'injonction de pratiquer le calcul mental à tous les niveaux de l'école élémentaire n'a guère manqué dans les programmes où il apparaît comme une compétence utile qui permet, entre autres, de traiter plus facilement les situations impliquant les nombres et la résolution de problèmes. Pourtant, les recherches spécifiques, effectuées en France, dans ce domaine restent peu nombreuses (Fischer, 1987 ; Fayol, 1990 ; Douady, 1994 ; Butlen et Pézard, 1990, 1992, 2000, 2007 ; Boule ; 1997) et sont généralement orientées sur la construction des nombres et des opérations au début de l'école élémentaire.

3.1 Les recherches centrées sur les apprentissages des élèves

- En France

Depuis plus de vingt ans, l'enseignement-apprentissage du calcul mental suscite un grand intérêt chez deux français, Butlen et Pézard, chercheurs et praticiens du domaine de l'éducation, dans le but d'éclairer les liens existant entre le travail sur les techniques opératoires, le processus de conceptualisation et la résolution de problèmes arithmétiques (Butlen et Pézard, 1992b, 1997, 2000), les problèmes cruciaux relatifs à l'enseignement du calcul mental (Butlen 2004 ; Butlen et Masselot,

2010), les cheminements cognitifs empruntés par les élèves en difficulté (Butlen et Pézard, 2003) et les stratégies d'enseignement susceptibles d'améliorer les apprentissages des élèves, notamment ceux des enfants habituellement en difficulté en mathématiques (Butlen et Pézard, 1992a ; Butlen, Peltier et Pézard, 2002a ; 2002b ; Butlen, Masselot et Pézard, 2004).

En 2007, Butlen publie un ouvrage *Le calcul mental entre sens et technique* qui met en perspective l'ensemble de ses travaux menés en collaboration avec Pézard et permet une relecture enrichie par les résultats de ses études récentes sur les élèves en difficulté et l'enseignement en ZEP. Dans un premier temps, les études réalisées permettent de mieux cerner les liens existants entre travail sur les techniques opératoires et conceptualisation. Dans cette optique, l'auteur établit d'abord l'impact des connaissances numériques des élèves sur la construction de techniques opératoires standard écrites (multiplication) et sur la mobilisation de procédures de calcul mental adaptées (décompositions additives et multiplicatives des entiers). Ensuite, il montre comment la mise en place d'automatismes de calcul élémentaires peut accroître les répertoires additif ou multiplicatif ainsi que la disponibilité des faits numériques. Dans un deuxième temps, Butlen prouve qu'une plus grande habileté calculatoire acquise par une pratique régulière du calcul mental peut accélérer le processus d'automatisation de reconnaissance des opérations usuelles en favorisant une meilleure acquisition des structures additives et multiplicatives.

À l'instar de Butlen et Pézard (2000), plusieurs recherches sur les apprentissages mathématiques des élèves mettent en exergue les relations interdépendantes entre maîtrise de techniques de calcul, connaissances sur les nombres et les opérations, et résolution de problèmes arithmétiques. À ce sujet, Lethielleux (1992) démontre qu'en habituant les élèves à « jongler » avec les nombres en les exprimant de différentes manières, le calcul mental permet à l'élève de se familiariser non seulement avec les deux formes de numération (orale et écrite) et les propriétés des opérations mais également « avec une activité mathématique coupée de la réalité physique et qui trouve son sens en elle-même : trouver une procédure de calcul rapide, plus originale, nouvelle » (p.18-19). D'autres chercheurs français ont orienté leurs travaux sur le lien entre la pratique du calcul mental en classe et le développement des habiletés en résolution de problèmes (Butlen et Pézard, 1992, 2000 ; Douady, 2004). D'ailleurs, Fayol (2007) et Brissiaud (2019) s'accordent à dire que « le calcul mental est un déterminant de la réussite en résolution de problèmes ».

D'un autre point de vue, la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) s'efforce à prouver, dans son rapport paru sur le calcul en 2002, que raisonnement et calcul sont plus complémentaires qu'antagonistes et présente le calcul mental comme un moyen de les

mettre en relation en tenant les propos suivants : « Pour remplir la fonction que nous souhaitons lui voir jouer de lien entre calcul et raisonnement, il n'est pas souhaitable, que [le] calcul mental soit systématiquement routinisé, automatisé. Il est plus important qu'il soit associé à des stratégies de calcul diverses qu'il s'agira de valider, de comparer du point de vue des connaissances engagées, du point de vue du coût, de l'efficacité, dans des tâches non stéréotypées » (CREM, 2002, chap.4 »). Autrement dit, le choix des procédures adaptées au nombre témoigne d'un raisonnement qui nécessite une prise d'initiative de la part de l'élève. S'inscrivant dans la lignée de ces travaux, Artigue (2004) soutient que « calcul exact et calcul approché sont [...] deux facettes complémentaires du calcul ». De son côté, Boule (2002) se lance dans un plaidoyer pour l'extension des activités de calcul mental au calcul approché.

Dans le domaine de la psychologie cognitive, plusieurs chercheurs se sont intéressés à la représentation des nombres en mémoire et aux mécanismes de mémorisation des faits numériques. En France, les travaux de Fayol (1985) tendent à montrer qu'il y a un lien entre l'évolution de la représentation des nombres en mémoire et la pratique scolaire des opérations. Selon lui, « au fur et à mesure du développement et de la pratique scolaire, elle se complexifie et s'organise peu à peu en un réseau mental structuré comme les classiques tables de multiplication et d'addition ». En s'appuyant sur la représentation analogique des nombres en mémoire à long terme, l'auteur explique ce processus par la présence d'une ligne mentale numérique sur laquelle interviendraient des effets liés à la distance symbolique : par exemple $5 + 3 = 14$ est plus rapidement estimé faux que $5 + 3 = 9$. Boule (1997) partage ce point de vue et affirme avec Fayol (1985) que cette distance symbolique se retrouve chez l'enfant dès l'âge de cinq ans. D'autre part, la COPIRELEM (2012) déclare que la pratique du calcul mental permet et nécessite une mémorisation progressive de faits numériques dans une dynamique spiralaire. Cette interdépendance est également soutenue par Fisher (1985) et Fayol (1987) qui s'accordent sur un cheminement cognitif allant de la reconstruction de faits numériques à leur mémorisation et leur mise en réseau. Bernoussi (1996) va plus loin et préconise un itinéraire d'apprentissage incluant des temps de répétition visant l'automatisation et proposant à la fois des tâches de production et des tâches de vérification⁵⁰. Une fois le répertoire enrichi sa disponibilité se manifestera soit par rappel immédiat, soit par rappel par association. D'après Descaves (2007), « la création et le maintien de l'intensité de la force d'une association en mémoire à long terme [dépendent] non seulement de la fréquence de son activation, mais aussi des associations connexes qui permettent de la renforcer ». Par ailleurs, les recherches de Lemaire et Arnaud (2004) ont montré que pour trouver le résultat d'un calcul « la sélection d'une procédure reposerait à la fois sur la vitesse

⁵⁰ Par exemple, pour répondre à « $3 + 4 = ?$ » est une tâche de production, et juger de l'exactitude de l'égalité « $3 + 4 = 7$ » est une tâche de vérification.

relative des différentes procédures disponibles mais aussi sur l'histoire même de la procédure, notamment de ses réussites antérieures, du contexte où elle doit être mobilisée et du coût de sa mise en œuvre ».

Dans le cadre de la didactique des mathématiques, les représentations et les procédures des élèves ont également fait l'objet de nombreux travaux, notamment en ce qui concerne les décimaux et les rationnels (Brousseau ; 1980 ; Douady et Perrin-Glorian, 1986 ; Grisvard et Léonard, 1981, 1983). Parmi les plus anciens, citons l'étude expérimentale menée, à une grande échelle, par Bolon (1992, 1996) sur la double problématique de la conception des nombres et du calcul mental. Ayant pour objectif de « mettre en regard les textes officiels et les pratiques ordinaires [pour] les confronter aux résultats de la recherche pédagogique », le chercheur analyse les difficultés d'apprentissage mises en évidence par les évaluations nationales à l'entrée en sixième en 1991 et celles proposées par l'APMEP en fin de sixième 1987 et en 1989, de manière à « faire émerger des points de contradiction entre les attentes officielles, les performances des élèves, les pratiques courantes » avec une visée formative. Concrètement, l'étude de Bolon (1992) a porté sur l'ensemble des items relatifs à l'écriture d'un nombre décimal et les changements de registre, le placement d'un nombre sur la droite graduée, l'ordre des décimaux, l'intercalation d'un nombre entre deux décimaux, la multiplication et division d'un décimal par 10, 100, 1000 et des opérations posées en ligne et en colonnes. Les difficultés identifiées par le chercheur à l'époque (dichotomie dans le traitement des parties entières et des parties décimales, comparaison des nombres décimaux, techniques opérations, mauvaise conceptualisation des nombres décimaux, etc.) sont encore d'actualité aujourd'hui comme nous avons pu le voir supra en traitant la question des acquis des élèves.

Par ailleurs, Butlen (2007) a lui aussi porté un intérêt particulier aux obstacles rencontrés par les élèves en calcul mental. Le chercheur a établi que les erreurs commises par les élèves en difficulté sont semblables à celles de leurs pairs mais qu'elles sont plus résistantes aux « tentatives de traitement professorales ». Selon lui, les procédures primitives, coûteuses et/ou inadaptées utilisées par ces élèves (algorithmes écrits en "posant dans la tête" le calcul mental) perdurent plus longtemps tandis que les procédures expertes sont adoptées plus tardivement et entrent souvent en conflit avec les premières. L'auteur ajoute que les élèves en difficulté peinent à explorer la structure des problèmes car ils produisent peu de représentations ou ont besoin d'un temps plus long que leurs pairs pour les mobiliser. De plus, les institutionnalisations locales concomitantes des activités sont moins efficaces pour cette catégorie d'apprenants car ils ne perçoivent pas les enjeux des situations fréquentées. Par voie de conséquence, leur manque de recul par rapport à l'action se traduit par une difficulté à évaluer la pertinence des procédures qu'ils pourraient mettre en œuvre dans les calculs et dans les problèmes

auxquels ils sont confrontés. En fait, pour ces élèves toutes les solutions se valent et en trouver ne serait-ce qu'une c'est déjà pas mal. Pour finir, Denis Butlen (2007) porte une analyse fine sur les conditions susceptibles de permettre aux élèves en difficulté de bénéficier des effets positifs d'une pratique régulière en calcul mental associée à un travail sur les techniques opératoires qui l'accompagne. Selon lui, les enjeux des institutionnalisations des activités de calcul mental, plus difficiles à saisir, nécessiteraient des compétences et des capacités d'adaptation supplémentaires qui font défaut aux élèves en difficulté. Partant de cette hypothèse, Butlen expérimente, dans des classes de CE2, de CM2, de 6^{ième} et de 5^{ième}, plusieurs ingénieries alliant pratique régulière du calcul mental et travail sur les techniques opératoires à d'autres leviers tels que le recours à l'écrit, le débat entre pairs ou encore la pratique régulière de bilans de savoirs. Ces expérimentations in situ lui ont permis de déterminer des itinéraires cognitifs originaux ménageant des étapes profitables aux apprentissages des élèves en difficulté.

Dans le même ordre d'idées, suite à une étude menée dans une classe de CM2 avec des élèves socialement défavorisés, Douady (1994) conclut qu'un changement de contrat didactique formalisé par une dévolution du calcul mental peut, au bout de deux mois, faire évoluer les relations sociales au sein de la classe et les relations des élèves au savoir. De son côté, Fischer (1987) qui s'est lui aussi penché sur les difficultés et les erreurs des élèves souligne les soustractions non réussies, les difficultés rencontrées lors du franchissement de la dizaine, les erreurs dans les additions et les opérations inverses (soustractions, division) moins bien réussies que les opérations directes. Pour analyser ces obstacles, l'auteur s'intéresse à l'automatisation de certains calculs élémentaires et soutient que « seule une automatisation ou en tout cas un processus reproductif plutôt qu'un processus reconstructif du rappel des faits numériques conduira les élèves à estimer les ordres de grandeur et à remarquer certaines erreurs de calculs ». Ainsi, en s'inscrivant dans la lignée des travaux d'Allardice et Ginsburg (1983) désignant les non-automatisations comme une source de difficulté possible pour les élèves, Fischer (1987) insiste sur la nécessité de mettre en place un travail régulier et systématique de calcul mental. Puis, en s'appuyant sur les recherches de Léontiev (1959) et Resnick (1983) montrant qu'un apprentissage trop tardif laisse perdurer des procédures inutilement encombrantes, l'auteur conclut que « les habiletés procédurales ne sont nullement incompatibles avec -et peuvent sous-tendre – la compréhension ».

Partageant ce point de vue, Butlen (2007) soulève lui aussi la question de l'automatisation des calculs propres à l'école élémentaire. Des recherches relatives au calcul mental menées dans des classes de milieux défavorisés avec la collaboration de Pézard lui permettent de mettre en évidence le « paradoxe de l'automatisme » (Butlen et Pézard, 2007) qui veut que :

- d'un côté, un manque de faits arithmétiques mémorisés induit l'utilisation systématique de trop peu de procédures souvent coûteuses (par exemple de calculs « posés dans la tête ») ;
- et de l'autre, la connaissance d'un nombre suffisant de faits arithmétiques est indispensable pour que les élèves soient capables d'adapter leurs procédures de calcul aux nombres en jeu.

Par conséquent, « la mise en place des techniques de calcul automatisé (notamment les algorithmes écrits) semble imiter les possibilités d'adaptation des élèves au calcul du moment (...) (Butlen et Pézard, 2007). Butlen et Masselot (2012) en déduisent qu'« échapper à une posture d'automate nécessite des automatismes » et préconisent la précision du domaine de validité des procédures de calcul mental par l'enseignant lors de leur institutionnalisation pour dépasser « le paradoxe de l'automatisme ».

- *Dans l'espace anglo-saxon*

Dans l'espace anglo-saxon, le calcul mental (*mental calculation ou mental computation*) suscite un grand intérêt chez de nombreux chercheurs et praticiens aux États-Unis, au Canada, en Angleterre, en Australie, à Taïwan et Singapour ainsi qu'aux Pays-Bas. Nonobstant, en dépit de l'effet négatif qu'il attribue à la pratique régulière du calcul mental à l'école élémentaire sur l'anxiété des élèves, Biggs (1967) apparaît néanmoins comme l'un des pionniers de ces travaux. Selon lui, les tâches proposées en calcul mental augmenteraient ou pas l'anxiété des élèves selon leur nature. Toutefois, la très grande majorité des recherches s'évertuent à démontrer les avantages d'une pratique du calcul mental même si elles ne s'accordent pas sur son enseignement systématique (Bibby, Askew et Hodgen, 2003). Par ailleurs, partant de l'idée largement répandue du caractère utilitaire du calcul mental pour estimer un résultat dans les différentes situations de la vie de tous les jours (Bell, 1974 ; Northcote et McIntosh, 1999), certains chercheurs s'interrogent sur les savoir-faire des élèves et la spécificité de l'enseignement dispensé dans ce domaine, à l'école primaire ((Sowder 1988 ; Reys et Yang, 1998 ; Sowder et Wheeler, 1987) et au collège (Markovits et Sowder, 1994).

Cependant, un nombre conséquent de chercheurs dont Maclellan (2001) mettent en garde contre des pratiques réduisant le calcul mental à des exercices routiniers. D'ailleurs, au courant des années quatre-vingt-dix, on assiste à une progression des recherches sur les aspects relatifs au *number sense*⁵¹ notamment la connaissance des faits numériques et l'estimation d'un ordre de grandeur (Beishuizen, 1993, 19997 ; Reys, 1991, 1994 ; Sowder, 1990, 1991, 1992). Pour preuve, en 1999, un groupe de chercheurs anglais présidé par D. Reynolds développe, en appui sur un cadre théorique

⁵¹ D'après Reys, Reys, Mc Intosh, Emmanuelsson, Johnsson et Yang (1999), ce concept qui n'est pas associé exclusivement au calcul mental fait globalement référence à « la compréhension générale des nombres et des opérations, ainsi que la capacité d'utiliser cette compréhension de façon adaptée dans la gestion de situation numériques, pour porter des jugements mathématiques et élaborer des stratégies utiles et efficaces ».

(*evidence-based-framework*), un plan national d'enseignement des mathématiques à l'école primaire⁵², le programme « *National Numeracy Strategy* ». Les études réalisées par ce consortium, centrées sur les résultats d'évaluations nationales et internationales (TIMSS, en particulier) inspirent d'autres chercheurs qui s'attaquent essentiellement à l'apprentissage des nombres naturels (Brown, Askew, Millet et Rhodes, 2003) et des procédures qui y sont liées (Heirdsfeld, Cooper et Mulligan et Irons, 1999 ; Threlfall, 2002), au cours des premières années de la scolarité. Toutefois, certains didacticiens, à l'instar de Trelfall (2002), insistent néanmoins sur le fait qu'une bonne connaissance des nombres est préférable à l'enseignement d'un grand nombre de procédures parmi lesquelles l'élève épistémique devrait choisir pour exécuter un calcul. Cette idée est également partagée par Lethielleux (1992) et Butlen et Pézard (2007).

Généralement, les recherches menées concernent en priorité les premières années d'école primaire. Elles sont, de fait, beaucoup moins nombreuses au collège (*low secondary school ou middle school*) et plutôt rares au lycée même si certains chercheurs, à l'exemple de Rubistein (2001) militent pour qu'il en soit autrement. Pourtant, au regard des évaluations internationales, ce niveau de la scolarité apparaît comme une période critique de l'apprentissage de la numératie (Watson et Callingham, 2001). Ceci dit, certains chercheurs (MacIntosh, 2002 ; Norton, 2012) se sont tout de même penchés sur l'enseignement du calcul mental au secondaire, notamment Rézat (2011) qui a étudié les stratégies utilisées par huit élèves allemands de 4^{ième} (*grade 8*) pour effectuer 24 calculs mentaux comprenant des additions et des soustractions de nombres décimaux et relatifs. De son côté, Caney (2002) caractérise les pratiques de huit enseignants en calcul mental en Australie (grades 5 -8) et détermine celles perçues par les enseignants comme les plus efficaces. En outre, bien qu'elles ne soient pas directement liées au calcul mental, il convient de noter les études réalisées par McIntosh, Reys, Reys, Bana et Farelle (1997) en Australie, en Suède et à Taïwan pour identifier les erreurs des élèves et caractériser leurs représentations sur les décimaux et les rationnels. Dans le même ordre d'idées, Steinle (2004) mène des recherches sur les « conceptions erronées » résistantes des élèves à partir d'une étude longitudinale à grande échelle réalisé en 1997 sur un échantillon de plus de 3000 élèves de Melbourne répartis dans douze écoles (grades 4 à 10) avec une étude longitudinale d'une durée de trois ans pour six cents d'entre eux. Ainsi, comme Grisvard et Léonard (1981) avant elle, Steinle (2004) identifie deux procédures incorrectes dominantes sur la comparaison des nombres décimaux : 1) le plus grand nombre décimal est celui qui a le plus grand nombre de chiffres après la virgule ; 2) le plus grand nombre est celui qui a le moins de chiffres après la virgule. Selon l'auteure, les élèves qui n'utiliseraient aucune de ces stratégies seraient plus aptes à percevoir les enjeux de

⁵² Les travaux écrits concernant ce plan ne pas accessibles au grand public.

l'enseignement de la comparaison des décimaux et donc plus susceptibles de progresser rapidement. En conséquence, pour l'enseignement de cette notion, Steinle (2004) préconise d'une part, une certaine vigilance par rapport au langage employé (distinction nombres /chiffres) d'autre part, d'apporter une attention particulière aux unités en évitant de donner un rôle séparateur à la virgule.

Par ailleurs, nous constatons que les nombres décimaux constituent le domaine de prédilection des études citées supra, peut-être est-ce dû à la place accordée au calcul mental dans les programmes scolaires anglais qui sont sans doute eux-mêmes influencés par l'importance des tests standardisés dans certains pays anglo-saxons (Chesné, 2014). Dans le même ordre d'idées, Thompson (2000) plaide pour une prise en compte des résultats de la recherche avant toute transposition du savoir savant en savoirs à enseigner. De plus, le chercheur s'attaque aux fondements théoriques du cadre utilisé par la « *National Numeracy Strategy* », en critiquant certains de ses aspects (tels que la répartition du travail entre connaissances procédurales et connaissances structurales, l'articulation avec la droite numérique, le passage des entiers aux décimaux, le lien avec la résolution de problèmes) qui sont selon lui sérieusement à discuter, notamment pour les élèves en difficulté.

3.2 Les recherches centrées sur les pratiques enseignantes

Comme nous l'avons vu précédemment, les recherches réalisées sur l'apprentissage du calcul mental portent presque exclusivement sur les premières années de l'école primaire. Il est vrai que les apprentissages sur les premiers nombres favorisent plus facilement un travail avec les élèves en calcul mental d'autant plus que ces derniers disposent davantage d'habiletés à l'oral qu'à l'écrit. En outre, les programmes du secondaire accordent peu de place au calcul mental. Par conséquent, l'étude des pratiques enseignantes en calcul mental sont le plus souvent réalisées au cours des premières années de l'école primaire.

Du côté français, des études spécifiques sur les pratiques enseignantes ont pour l'essentiel été menées par Butlen et Pezard (1999). Sous le couvert de certaines conditions méthodologiques, les chercheurs mettent exergue les liens positifs entre la pratique régulière en calcul mental et la résolution d'un problème numérique par des élèves du cours moyen 2 (CM2), de sixième et de cinquième. D'après Butlen (2007), « tout se passe comme si un entraînement au calcul mental, en améliorant les habiletés calculatoires des élèves, favorisait une "prise de sens" et contribuait ainsi à accélérer le processus d'automatisation de la reconnaissance des opérations » (p.100). Ainsi, en se référant aux travaux des chercheurs en psychologie cognitive (Richard, 1982 ; Fayol, 1987, 1990 ; Conne, 1981 ; Julo, 1995), le chercheur donne trois éléments d'explication : 1°) Une plus grande familiarité avec les nombres et les propriétés des opérations s'accompagne d'une plus grande aisance calculatoire, ce qui allège la

charge en mémoire consacrée au traitement opératoire au profit du stockage des données et la représentation du problème ; 2) L'habileté à résoudre des problèmes numériques développent chez l'élève une plus grande initiative, l'habileté à changer rapidement de point de vue, de stratégies, à faire des essais etc. ; 3) Une meilleure maîtrise des techniques de calcul peut également se traduire par une meilleure aisance dans la reconnaissance de l'opération à effectuer.

Par la suite, pour mieux comprendre les relations existant entre le travail sur les techniques opératoires et la construction des structures additives et multiplicatives (Vergnaud, 1982), Butlen et al. (1999) entament des recherches sur les effets d'une pratique régulière du calcul mental sur les performances d'élèves de CM2 confrontés à la résolution de problèmes numériques standard. Ainsi, en appui sur des travaux en didactiques des mathématiques (Perrin-Glorian, 1992) et de sociolinguistique (Bautier, 1995 ; Lahire, 1993) et par le biais de l'expérimentation d'ingénieries⁵³ alliant pratique régulière du calcul mental et travail sur les techniques opératoires à d'autres leviers tels que le recours à l'écrit, le débat entre pairs ou encore la pratique régulière de bilan de savoirs, Butlen et Pézard (1999) ont déterminé les itinéraires cognitifs favorables aux apprentissages des élèves et en particulier des élèves en difficulté.

Un autre chercheur français, François Chesné, s'est également intéressé à l'étude des pratiques enseignantes en calcul mental avec pour objectif de constituer, à partir de l'évaluation des acquis des élèves, des outils de formation d'enseignants, ciblés, notamment par l'intermédiaire de projets locaux tel que le dispositif PACEM (Chesné, 2014). Il s'agit d'un « dispositif de formation continue qui s'appuie sur des évaluations standardisées *ad hoc*, vise explicitement l'amélioration des acquis des élèves en mathématiques en misant sur l'évolution des pratiques des enseignants. Plus exactement, le formateur organise la comparaison que sont amenés à faire les enseignants entre des évaluations standardisés et les résultats de certains items choisis passés dans leurs classes. Cela sert d'amorce à la formation, grâce aux questionnements qui découlent de ce travail et aux occasions ainsi données aux enseignants d'enrichir leur réflexion et leurs pratiques, qui peuvent ensuite les partager avec leurs collègues dans leurs écoles ou dans leurs établissements » (Chesné, 2018, p.141). Plus concrètement, ce dispositif a été expérimenté dans des classes de CM1 et de sixième entre 2010 et 2012, au moyen de pré-tests et de post-tests des élèves engagés dans l'action et des élèves des groupes-témoins. Aux dires de Chesné (2018), cette expérimentation qui s'est révélée positive, a confirmé la possibilité d'intégrer l'utilisation adaptée des évaluations standardisées dans les pratiques enseignantes tout en apportant un bénéfice certain aux apprentissages des élèves. En outre, ce travail de recherche a

⁵³ Il s'agit de dispositifs d'enseignement spécifiques d'un contenu donné, élaborés par le chercheur afin d'analyser les liens entre enseignement et apprentissage de ce contenu et construits pour améliorer les apprentissages des élèves concernés par l'expérimentation.

également fait l'objet d'une thèse, soutenue en 2014, intitulée « D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental ».

À l'étranger, les études menées concernent essentiellement l'acquisition du *number sense*⁵⁴ par les élèves. Verschaffel et De Corte (1996) engagent une réflexion sur les notions liées au *number sense* qui, selon eux, constituent un ensemble intégré de connaissances ayant entre elles d'étroites relations ne pouvant être cloisonnées ni dans les ouvrages scolaires, ni dans les programmes officiels. Pour Greeno (1991), le *number sense*, inscrit dans un continuum, s'acquiert plutôt de manière transversale car il affirme que son développement ne peut résulter d'activités organisées et planifiées dans une séquence d'apprentissage. Globalement, l'ensemble des didacticiens (Gravemeijer, 2003 ; Heirdsfield, et Cooper, 2004 ; Kamii et Dominick, 1997) s'accorde pour rejeter tout enseignement exclusif et mécanique des algorithmes standard. Actuellement, les préconisations des « réformateurs » de l'enseignement des mathématiques britanniques, néerlandais et américains (Anghileri, Beishuizen et Putten, 2002 ; Thompson, 1999, 2008 ; Van de Heuvel-Panhuizen, 2001 ; Yackel, 2001) recommandent aux professeurs de mettre en œuvre des stratégies d'enseignement axées sur la compréhension par les élèves des méthodes et procédures utilisées en calcul mental. Cette démarche d'enseignement a également été testée sur le terrain avec succès dans le cadre d'une recherche clinique réalisée par Heirdsfield et Lamb (2005) auprès des élèves (*grade 2*) d'une école de banlieue en Australie. Dans le même ordre d'idées, un autre groupe de chercheurs montrent qu'un enseignement axé sur la production des stratégies personnelles en lien avec la résolution de problèmes serait plus profitable aux progrès des élèves qu'un apprentissage des algorithmes sur un temps long. En outre, selon eux, un travail partant des procédures personnelles des élèves, une répartition plus pertinente des tâches réservées au calcul posé et des tâches potentiellement liées au calcul mental (Reys et al., 2009 ; Suggate, Davis et Goulding, 2010 ; Van de Walle, Karp et Bay-Williams, 2007, 2010) seraient plus efficaces pour les apprentissages des élèves.

Par ailleurs, Bibby, Askew et Brown (1995-1996) expérimentent une ingénierie sur un panel de 48 élèves faibles mais sans besoins particuliers de 3^{ème} année de scolarité primaire (7-8 ans) impliquant trois enseignants qui suivent en parallèle une formation. La scientificité de ce dispositif expérimental était assurée par un test initial, un test final et un groupe-témoin permettant de mesurer les résultats des élèves étudiés. À partir de l'analyse des résultats quantitatifs et qualitatifs de cette expérimentation,

⁵⁴ D'après Reys, Reys, Mc Intosh, Emmanuelsson, Johnsson et Yang (1999), ce concept qui n'est pas associé exclusivement au calcul mental fait globalement référence à « la compréhension générale des nombres et des opérations, ainsi que la capacité d'utiliser cette compréhension de façon adaptée dans la gestion de situations numériques, pour porter des jugements mathématiques et élaborer des stratégies utiles et efficaces ».

trois préconisations sont avancées : 1°) l'apprentissage de la compétence numérique doit être centrée sur la reconnaissance des stratégies mentales ; 2°) il est inutile d'attendre que les élèves soient « prêts » pour enseigner de nouvelles stratégies ; 3°) une structure-type de la séance de calcul mental en quatre composantes allant du comptage au travail dans un contexte de résolution de problèmes doit être mise en œuvre pour assurer l'acquisition des notions relatives au *number sense*. Huit ans plus tard ce même groupe de chercheurs s'associent à Hogden pour investiguer sur les pratiques mises en œuvre dans les classes pour enseigner le *number sens*. La recherche de Bibby, Askew, Brown et Hogden (2003) se déroule en Angleterre dans six classes composées d'élèves de 1^{ère}, 3^{ème} et 5^{ème} années d'école primaire reconnues par les autorités locales pour leur engagement dans la *National Numeracy Strategy* (NNS). Pour observer et comparer les pratiques des enseignants qui sont eux aussi engagé dans le NNS, les chercheurs retiennent trois critères d'observations pour étudier les 59 séances auxquelles ils ont assisté : le temps consacré au calcul mental, l'équilibre des opérations additives et multiplicatives et l'importance accordée à « l'intelligence du calcul » (*strategy thinking*). De plus, des analyses quantitatives ont été réalisées pour explorer les interactions entre les enseignants et les élèves. Les conclusions des chercheurs sont relayées par de nombreuses publications et recommandations officielles, soulèvent deux points négatifs lors des observations : 1) le temps consacré à l'introduction des séances de calcul mental est trop long par rapport à celui alloué aux bilans et institutionnalisations de fin de séance ; 2) les activités visées chez les élèves sont essentiellement des activités d'automatisation (mémorisation ou application de procédures).

D'autre part, la recherche menée par Caney (2004) poursuit, elle, un double objectif : étudier les pratiques enseignantes en calcul mental et accéder aux perceptions des élèves sur leur utilisation du calcul mental. Le panel de cette étude comportait 16 professeurs du primaire, 18 professeurs exerçant au collège, 83 écoliers et 89 collégiens. L'analyse et l'interprétation des résultats obtenus montrent d'une part, que contrairement à ce que pensent les enseignants les élèves n'utilisent pas souvent le calcul mental (surtout lorsqu'il faut multiplier, diviser, calculer une fraction ou un pourcentage) et d'autre part, les professeurs associent le calcul mental à l'estimation d'un ordre de grandeur alors que les élèves le relient plutôt à un calcul exact. D'ailleurs, les réponses des élèves ne laissent pas apparaître de divergence entre les conceptions des élèves du primaire et celles des élèves du secondaire.

Pour clore ce chapitre, ce travail de recherche est au fond une réflexion sur les pratiques mises en œuvre par les professeurs des écoles pour enseigner le calcul mental en considérant, comme l'exprime Roditi (2018), « qu'elles résultent de nombreux compromis aboutissant parfois à des choix entre des finalités à la fois distinctes, interdépendantes et jamais sans lien avec les savoirs à transmettre aux

élèves : réaliser ce qui est explicitement demandé aux enseignants ; tenir compte de l'environnement social où leur établissement scolaire est implanté, adapter leur enseignement à la réalité des acquis des élèves ; organiser la classe de manière à ce qu'il s'y développe de bonnes conditions de travail et de bonnes relations entre les élèves et avec l'enseignant, voire les parents ; se réaliser personnellement dans leur activité professionnelle, etc. » (p.99). De cette vision de la réalité, nous pouvons conclure que la situation didactique ne suffit pas à elle seule pour expliquer les apprentissages. Les manières réelles de faire travailler les élèves sur les notions mathématiques ont également une grande importance. De ce fait, pour bien cerner ce qui est possible en classe, en fonction des enseignants et en fonction des élèves, il faut bien comprendre le travail enseignant, y compris du point de vue de l'enseignant lui-même. En conséquence, l'enseignement du calcul mental induit des pratiques adaptées à la fois aux savoirs à transmettre aux élèves et aux contraintes inhérentes à l'exercice du métier. Ainsi, quels choix font-ils réellement sur le terrain à travers leurs manières de faire travailler les élèves ?

CHAPITRE 2 : PRATIQUES PRÉCONISÉES EN CALCUL MENTAL

1. Le constat des approches pédagogiques

« Actuellement, nombreux sont les professeurs des écoles qui se sentent fragiles, voire incompetents en mathématiques. Ils suivent alors une méthode qui les rassure, se raccrochent à des fichiers "emprisonnants" qui les font passer à côté des enjeux de la discipline », constataient Villani et Torossian (2018, p.13) dans leur rapport sur l'enseignement des mathématiques. Ainsi, commençons ce chapitre par ces extraits d'entretien de deux professeures des écoles enseignant le calcul mental au CP, faisant part de leur impuissance à agir, leur sentiment de solitude, leur usure morale et leur manque de satisfaction caractérisant leur pratique professionnelle :

- [...] « Le calcul mental, c'est un sujet qui m'intéresse mais ça ne le rend pas pour autant plus facile à enseigner. [...] Au départ, je me questionnais, je tâtonnais, mais mon tâtonnement n'était pas efficace et puis..., il y a eu une formation et là j'ai réalisé que ma pratique était loin de ce qui était recommandé donc j'ai réajusté comme j'ai pu mais je galère encore parfois. [...] ! Il y a beaucoup à faire, j'ai l'impression de courir après le temps tout le temps. Les enfants sont à peine mûrs pour aborder une notion qu'il faut déjà passer à la suivante [...] (Femme, professeure des écoles, douze ans d'exercice, dont huit au CP).
- [...] « Pour la littéraire que je suis, l'enseignement du calcul mental reste assez complexe et ce n'est pas toujours évident de le mettre en œuvre. Au CP, je suis encore moins à l'aise [...] Heureusement, que les manuels existent ! [...] C'est vrai que les programmes nous donnent des directives mais on ne se sait pas très bien dans quelle direction aller, ni les résultats qu'on doit atteindre en fonction des élèves car ils n'apprennent pas, ne mémorisent

pas et ne comprennent pas tous de la même manière. Donc, il nous faut des séances concrètes en plus du listing de compétences imposé dont on ne sait parfois quoi en faire ».

(Femme, professeure des écoles, douze ans d'exercice, dont cinq au CP, en REP).

Ces deux récits sont manifestes et posent le problème des actes professionnels face à la spécificité de l'enseignement du calcul mental et à l'hétérogénéité des élèves. Il y a déjà quatorze ans, le rapport de l'inspection générale sur « L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire » (juin 2006), soulignait qu'en ce qui concerne le calcul mental, les pratiques de classe se limitent souvent à des séances quasi exclusivement constituées d'activités d'entraînement ou d'évaluation dont la gestion stéréotypée s'inspire du procédé La Martinière⁵⁵. D'après la COPIRELEM (2012), « ces pratiques ne permettent pas, à elles seules, une réelle construction de connaissances : il est nécessaire d'aménager des temps d'explicitation et d'analyse qui permettent d'éclairer les procédures et les résultats avant de les réinvestir dans de nouvelles phases d'entraînement » (p.11).

Aujourd'hui, le problème est encore plus prégnant au regard de la réalité du terrain, car l'enseignant doit adapter ses choix didactiques et pédagogiques dans des conditions où il est amené à réagir en modifiant perpétuellement la dynamique des interactions et des relations entre ses comportements, ses caractéristiques individuelles et l'environnement dans lequel il évolue. Autrement dit, il est question ici d'ajustement pédagogique permanent pris sous l'angle des stratégies d'enseignement mises en œuvre en situation d'interaction professeur-élèves, pour faire apprendre aux élèves à calculer mentalement.

Toutefois, vue l'étendue de thématiques existant dans le domaine des pratiques pédagogiques⁵⁶, nous limitons notre champ d'investigation à l'étude des « gestes professionnels ajustés » pour appréhender l'agir enseignant (Bucheton, 2009). Pour plus d'explication, Bucheton définit la notion d'ajustement comme « la manière dont l'agir langagier et corporel de l'enseignant se règle sur la situation spécifique de la classe et plus encore sur l'évolution de cette situation pendant la leçon. Cet ajustement est d'autant plus complexe qu'il est un co-ajustement avec l'agir de un à vingt-cinq voire quarante élèves, eux-mêmes en train de s'ajuster tant à l'agir du maître qu'à celui de leurs pairs, qu'à l'évolution du milieu didactique » (2009, p.64). Altet (1994) va plus loin et étudie les malentendus et les difficultés des « modes d'ajustement » entre enseignant et élèves en

⁵⁵ Ce dispositif pédagogique tient son nom de l'institution dans laquelle il a été conçu et mis en œuvre à partir de 1825, l'Institution *La Martinière* (fondateur Claude Martin, 1735-1800). En 1899, l'inspecteur P. Labeyrie, en décrit les principes et la mise en œuvre dans le *Journal des Instituteurs*, n°37 du 11 juin 1899.

⁵⁶ De nombreuses recherches sur les interactions professeur-élèves ont été conduites depuis longtemps, dans le but de définir les fonctions de l'enseignant. En France, les travaux de Postic (1977, 1990) puis ceux de Altet (1985, 1991), Bru (1991), Tardif et Lessard C. (1999) ont tenté de montrer les effets de ces fonctions sur l'apprentissage des élèves.

classe, en analysant quelques épisodes réels significatifs. Selon elle, « l'analyse de ces ajustements et adaptations interpersonnelles montre que les difficultés des élèves ne sont pas complètement inhérentes aux élèves, elles se construisent en classe dans l'interaction pédagogique et sont le produit de non-ajustements entre enseignant et élèves » (1994, p.136).

De cette réalité et sachant que l'enseignant tente de s'adapter à « l'imprévisibilité » constitutive de la co-activité d'enseignement-apprentissage avec les élèves (Bucheton, 2009) et jamais sans lien avec les savoirs à transmettre, quelles sont les démarches pédagogiques entreprises par le professeur pour « s'ajuster » aux besoins mais aussi aux initiatives de l'apprenant autant que les siennes ? À savoir, quelles sont les actions, les gestes, les procédures mais aussi les choix, les stratégies et les décisions mises en œuvre par l'enseignant quand l'enrôlement des élèves dans la tâche se fait avec beaucoup de résistance, les règles de fonctionnement de la classe indispensables à la relation didactique ne sont pas acceptées par les élèves (chahut, prises de paroles non contrôlées, etc.), les réponses des élèves sont incomplètes ou erronées, les élèves posent des questions en lien ou sans lien avec la notion étudiée, les élèves sont en désaccord alors qu'aucun n'a tort, etc. ?

En 2005, le ministère publie des « Documents d'accompagnements » (MEN, 2005) conçus comme des aides pour les enseignants. L'un d'eux relatif au calcul mental, enrichi d'une bibliographie conséquente croisant les travaux et les ouvrages des enseignants-chercheurs (Boule, 1996 ; Butlen, 1987 ; Peltier, 2000) et des acteurs de terrain (APMEP, 1979 ; Lethielleux, 1992), précise « la place et le rôle du calcul mental dans l'apprentissage du calcul à l'école élémentaire » et fournit « des indications relatives à son enseignement pour les cycles 2 et 3 ». Malgré ses qualités, ce support d'enseignement semble être resté relativement méconnu des enseignants car le rapport de l'IGEN (2006), après plus d'une centaine d'observations réalisées dans les classes du cycle d'approfondissement, constatait qu'« une séance sur trois [de mathématiques] a commencé par un temps de calcul mental alors que cet entraînement devrait être quotidien » ce qui témoigne de « l'absence d'une pratique régulière du calcul mental dans un trop grand nombre de classes » (MEN, 2006),

D'après Butlen et al. (2002a), la majorité des professeurs qui enseignent le calcul mental en REP témoigne de pratiques différentes se caractérisant par des tâches partielles algorithmisées, des temps de recherche très courts, une baisse des exigences due à une anticipation sur les difficultés des élèves, une individualisation très rapide et non contrôlée de l'enseignement comme de la gestion des comportements, une quasi absence de phases de synthèses et d'institutionnalisation et

la mise en œuvre d'une pédagogie différenciée (systèmes de fiches) et d'un tutorat. Selon l'auteur, ces pratiques majoritaires se stabilisent très vite. Les enseignants en sont conscients mais déclarent ne pas pouvoir faire autrement. Et enfin, ces pratiques sont souvent basées sur la mise en œuvre d'une certaine différenciation et une volonté d'individualiser l'enseignement pouvant renforcer les difficultés des élèves. À l'évidence, bien que ces pratiques soient très largement majoritaires, elles ne sont pas pour autant exclusives. À cet égard, Butlen et Masselot (2014) notent également, chez une minorité de professeurs des écoles, l'exercice d'une « vigilance didactique⁵⁷ » favorable aux apprentissages des élèves et organisée sur quatre niveaux : la proposition de problèmes consistants (niveau 1) ; l'explicitation des procédures (niveau 2) ; la hiérarchisation des procédures et la synthèse (niveau 3) et l'institutionnalisation (niveau 4).

Dans la littérature, chercheurs et didacticiens (Condorcet, 1988 ; Fayol, 1990 ; Kuntzmann, 1987, Butlen et Pézard, 1987 ; Clavié, Peltier et Auber, 2005 ; Djament et Gamo, 2009) rappellent les enjeux de l'enseignement du calcul mental, définissent ce que recouvre ce savoir à enseigner et s'intéressent aux modalités de son enseignement. Au regard de l'attention soutenue exigée par l'apprentissage du calcul mental, Boule (2012) recommande la mise en place de séances brèves (cinq à dix minutes) et fréquentes (si possible quotidiennes), ce qui n'exclut pas un prolongement de ce travail sous d'autres formes dans d'autres domaines disciplinaires dès que l'occasion se présente. Ainsi, en classe entière ou par demi-groupe, l'auteur propose d'organiser les séances en trois phases. La première, quasi-rituelle, rapide et très facile, destinée à focaliser l'attention, vise la maîtrise du répertoire ou de la suite numérique avec sûreté. Ensuite, la seconde phase, organisée en grand groupe est consacrée à la mise en œuvre des procédures un peu plus complexes, à leur entraînement jusqu'à ce qu'elles deviennent routinières et se finalise par une synthèse. Enfin la dernière phase, confronte l'élève à un « "problème de calcul", c'est-à-dire une opération pour laquelle il n'existe pas de stratégie clairement privilégiée ». En conséquence, l'objectif de cette phase est davantage l'explicitation et la confrontation des stratégies des uns et des autres que la rapidité.

Les préconisations de Butlen et Masselot (2010) divergent de celle de Boule (2012) tant par le format des séances que par leur contenu et leur fréquence. Plus précisément, les chercheurs proposent une courte séance quotidienne de 10 à 15 minutes pour entraîner les élèves au calcul, les confronter à des exemples variés dans le but d'accroître leur rapidité, leur mémorisation et leur

⁵⁷ D'après Butlen et Masselot (2014), la « vigilance didactique », est un ajustement didactique permanent de la part du professeur mobilisant des connaissances mathématiques finalisées pour l'enseignement et des connaissances didactiques sur les enjeux d'apprentissage des situations et leur organisation transposées en savoirs d'action puis en savoirs pour le professeur.

maîtrise des techniques. À cela, Butlen et al. (2010) ajoutent une séance hebdomadaire d'une trentaine de minutes dédiée à l'explicitation et à la comparaison des différentes procédures suivie d'une hiérarchisation des connaissances et des données intervenant dans les calculs de manière à « mettre en regard l'économie de certaines procédures et les propriétés des nombres en jeu » dans le but de capitaliser l'exploration effectuée dans les activités précédentes. Bien entendu, le nombre de calculs proposés est réduit et le professeur introduit, si besoin, les procédures jugées efficaces non mentionnées par les élèves. Les chercheurs de la COPIRELEM (2012) vont plus loin et distinguent quatre types de séances :

- 1) Les séances qui visent les apprentissages par exemple d'une technique (multiplication par 10) ou d'un fait déclaratif (table de 7). Elles se déroulent sur un temps long et peuvent être complétées par une séance de production d'écrits si la règle découverte nécessite d'être transcrite ;
- 2) Les séances d'entraînement, courtes mais fréquentes pour acquérir des automatismes (restitution de résultats mémorisés, utilisation d'une règle déjà construite) ;
- 3) Les séances de réinvestissement offrant l'opportunité de mobiliser les connaissances dans d'autres contextes, sur des supports divers tels que les jeux ;
- 4) Les séances d'évaluation, qui selon les connaissances à évaluer peuvent prendre des formes très diverses. Ici, la rapidité et le résultat constituent les critères de réussite parmi d'autres (COPIRELEM, 2012, p.26).

Concernant la mise en œuvre des séances longues de type apprentissage, la commission permanente des IREM pour l'école élémentaire conseille de varier l'organisation de la classe ainsi que les supports, écrits ou oraux et formule quatre objectifs possibles pour ces séances d'apprentissage :

- « Rencontrer une première fois, dégager, identifier une procédure⁵⁸ ;
- Faire émerger et comparer des procédures ;
- Travailler sur l'écriture des règles, incluant leur domaine de validité ;
- Travailler sur des choix de procédures » (p.27).

En outre, les chercheurs proposent une phase d'appropriation des procédures émergées lors des mises en commun en procédant en deux temps :

- « Temps 1 : choisir des nombres adaptés et proposer à toute la classe de calculer « à la manière de » ;
- Temps 2 : laisser le choix de la procédure ».

⁵⁸ D'après la COPIRELEM (2012), « l'écriture explicite d'une règle lors de la première rencontre avec la technique est prématurée ».

In fine, pour remédier aux difficultés des élèves en difficulté repérés au cours des activités supra, la COPIRELEM indique aux enseignants que « le travail "à la manière de" doit être explicité, énoncé par ces élèves, systématisé, dans un dialogue spécifique avec eux » (p. 27).

Par ailleurs, à l'instar de Boule (2012), les chercheurs de la COPIRELEM (2012) invitent les professeurs à articuler le calcul mental aux autres séances de mathématiques, notamment pour observer et relever les connaissances, les représentations des élèves sur les nombres, leurs procédures spontanées, leurs capacités de mémorisation, etc. Selon eux, non seulement les compétences développées en calcul mental sont indispensables à la maîtrise des techniques opératoires et à la résolution de problèmes mais en retour ces activités permettent de transférer dans d'autres domaines les connaissances construites en calcul mental (résultats et procédures mémorisées, prise d'initiative, confiance en soi)⁵⁹ et donc d'en mesurer l'efficacité réelle. D'après ces chercheurs, les conditions favorables à une telle interconnexion entre les enseignements sont : une programmation des apprentissages en calcul mental articulée avec celle des opérations (tant pour leur sens que pour leurs techniques), l'existence de traces écrites spécifiques, la mise en lien explicite des différents savoirs, un encouragement à les utiliser et enfin, une attitude cohérente de l'enseignant favorable aux prises d'initiatives tout en installant des routines rassurantes pour les élèves.

À ces ressources, on peut notamment y ajouter les livres du maître de certaines collections mettant en évidence l'articulation entre les activités de calcul mental et la progression des autres apprentissages mathématiques. C'est le cas par exemple du groupe ERMEL (1990 à 1999) dont chacun des six volumes (de la grande section de maternelle au CM2) résume les partis pris théorique des chercheurs et propose des activités pour contribuer au développement des compétences des élèves en calcul mental.

Parallèlement, bien qu'ils ne soient pas considérés comme des travaux de recherche, un certain nombre d'ouvrages ou de brochures donnant des idées d'activités et/ou des exemples de progressions sur le calcul mental sont parus. Par exemple, dès 1979, l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP) consacre l'un des thèmes du chapitre « Activités numériques » de sa brochure à des activités de calcul ayant pour objectif d'amener les élèves à structurer le champ numérique en construisant des relations de voisinage, d'ordre et des relations additives, multiplicatives qu'elle complète par des remarques pédagogiques et

⁵⁹ Butlen et Pézard (2000) en partagent également ce point de vue.

didactiques. Dans ses ouvrages sur *Le calcul mental au cycle des apprentissages fondamentaux* et *Le calcul mental au cycle des approfondissements*, Claire Lethielleux (1992, 1993), professeur à l'école normale et au lycée, présente les différents aspects du calcul mental, propose des conseils méthodologiques pour conduire des séquences de classe et des progressions pour chaque niveau illustrées de nombreux exercices regroupés par thème. Dans le même ordre d'idées, Bolsius (2008), professeur et formateur, propose dans son ouvrage *Fort en calcul mental*, des pistes pédagogiques et des progressions pour chaque niveau autour des quatre opérations et de la numération.

En définitive, au regard des éléments exposés ci-dessus, « l'importance d'une programmation d'activités permettant aux élèves de construire progressivement les connaissances nécessaires et qui ménage des étapes bénéfiques pour les apprentissages notamment ceux des élèves en difficulté en mathématiques » fait relativement consensus (Butlen et Masselot, 2010, p. 15). Ainsi, parce qu'elles sont proposées par de nombreux auteurs de manuels et sous de multiples variantes, trois situations de calcul mental nous paraissent emblématiques et incontournables : le jeu du furet, les jeux du portrait et le jeu de la boîte. Le jeu du furet exerce les élèves à la récitation de la comptine numérique, en les motivant tous : le maître fait circuler la parole d'un élève à l'autre de façon rapide, ce qui a pour fonction d'impliquer tous les élèves dans une écoute active. Dans cette optique et dans le but de développer les compétences numériques des élèves, les différentes adaptations et évolutions de ce jeu élargissent le spectre des possibles aussi bien sur les contenus que sur les modalités d'organisation. En mathématiques, l'expression « Jeu du portrait » désigne une situation obéissant à des caractéristiques précises :

- Le répertoire des objets sur lesquels porte le jeu est communiqué au départ à l'ensemble des joueurs (fini ou infini) ;
- Le maître du jeu choisit un des éléments de ce répertoire sans le révéler aux joueurs ;
- Le but du jeu est de découvrir l'objet secret ;
- Pour y parvenir, les joueurs posent à tour de rôle au maître du jeu des questions auxquelles il ne peut répondre que par oui ou non ;
- Lorsqu'un joueur pense avoir identifié l'objet secret, il fait sa proposition uniquement au maître du jeu ; toute proposition fautive peut être pénalisée.

Bien qu'elles ne visent pas les objectifs spécifiques du calcul mental, ces activités restent pertinentes dans les moments de calcul mental car elles permettent une bonne connaissance des nombres qui est elle-même liée dialectiquement au développement des capacités calculatoires.

Proposé à l'origine par Brousseau (1998) dans le cadre d'une ingénierie d'apprentissage de la soustraction, le jeu de la boîte est actuellement une situation de référence pour une grande partie

des problèmes du champ additif. Plusieurs modalités existent en lien avec la typologie de Vergnaud (1990) : réunion de deux états, transformation d'états, composition de transformations d'états. La validation se fait par recours au matériel et dénombrement effectif.

D'autre part, certains auteurs comme la COPIRELEM (2012) accorde une importance toute particulière au cahier de calcul de l'élève dans le but de consigner les différents écrits indispensables, selon elle, au travail de mémorisation et de raisonnement inhérent au calcul mental : faits numériques, procédures, règles, algorithmes... utilisés au fil des séances de calcul y compris les techniques opératoires.

Pour terminer, nous ne pouvons conclure ce constat sur les approches pédagogiques préconisées en calcul mental sans mentionner une modalité spécifique pour travailler, entre autres, le calcul mental : l'utilisation des techniques usuelles de l'information et de la communication (TUIC). En effet, le BO n°10 de mars 2011 portant sur la Promotion des disciplines scientifiques et technologiques, recommandait déjà son usage en promettant la mise en ligne d'applications gratuites. Pour la Commission permanente des IREM pour l'école élémentaire « Les TUIC peuvent se révéler un outil pertinent dans le travail à réaliser en calcul mental. En proposant un environnement agréable, stimulant, dynamique, souvent ludiques, elles se prêtent à la pratique d'activités répétitives indispensables à l'acquisition d'automatismes et peuvent permettre à certains élèves d'associer certaines images mentales à des faits numériques ». De plus, « en permettant à l'enseignant de jouer sur le facteur temps, elles peuvent accompagner la progression de l'élève dans la construction de répertoires : passage du calcul réfléchi - qui nécessite du temps- au calcul automatisé – forcément rapide-» (p.115). Ainsi, pour permettre aux enseignants de se repérer parmi les nombreuses ressources logicielles disponibles en ligne, la COPIRELEM propose dans son ouvrage paru en 2012, une liste d'outils logiciels (*AbulÉdu*⁶⁰, *Calcul@tice*⁶¹, *LaboMep*⁶²,

⁶⁰ *AbulÉdu* (<http://www.abuledu.org/>) est un environnement éducatif complet (système d'exploitation et ressources pédagogiques). Le terrier d'AbulÉdu est une suite de logiciels libres destinés à l'éducation intégrant notamment l'application Calcul (Copirelem, 2012, p.118).

⁶¹ *Calcul@tice* (<http://calculatice.ac-lille.fr/calculatice/>) a été conçu par les équipes TICE et mathématiques de l'Inspection Académique du Nord et en partenariat avec Sésamath : « Ce projet a pour ambition de proposer, sous des formes originales et innovantes, des ressources numériques permettant une pratique régulière du calcul mental à l'école élémentaire » (voir <http://calculatice.ac-lille.fr/calculatice/>).

⁶² *LaboMep* (<http://www.labomep.net>) est l'un des nombreux outils proposés par l'association Sésamath (<http://www.sesamath.net>). C'est un laboratoire de mathématiques, où l'enseignant peut gérer ses classes, ses séances de travail en disposant de nombreux outils.

*Gomaths*⁶³, *Mathador*⁶⁴) assortie des critères d'analyse susceptibles d'éclairer les professeurs dans leurs choix.

2. Les dispositifs d'accompagnement du système éducatif

Lié à la démocratisation de l'enseignement et ayant pour origine les études relatives à la différenciation pédagogique initiées en France, en 1970, le traitement des difficultés est pris en charge au niveau politique depuis les années 1980 (Feyfant, 2016). Si la loi d'orientation de 1989 et celle de 2005 encourageaient une aide aux seuls élèves en difficulté, la dernière loi d'orientation et de programmation pour la refondation de l'école de la République de 2013 officialise le passage « de l'aide aux seuls élèves en difficulté à l'accompagnement pour tous » en rendant possible « l'accès de chacun en fonction de ses aptitudes et de ses besoins particuliers aux différents types ou niveaux de la formation scolaire » (Cour des comptes, 2015). De manière précise, cette réforme est stipulée dans les textes officiels en les termes suivants : « [...] de la maternelle à la fin du collège, les élèves doivent recevoir un accompagnement pédagogique adapté aux besoins de chacun afin de favoriser la réussite de leur scolarité et la validation du socle commun. Lorsque cela s'avère nécessaire, cet accompagnement prend la forme d'aide ». Autrement dit, l'accompagnement des élèves est omniprésent dans les discours institutionnels et doit faire partie du paysage ordinaire du système éducatif.

D'après Martin-Van der Haegen et Torres (2016), « l'enjeu est à la fois, dans une même urgence, quantitatif et qualitatif : il s'agit d'accompagner tous ces élèves, aux profils multiples, vers l'acquisition de compétences diverses. [Ainsi], la massification des publics se conjugue avec un objectif d'excellence pour tous, d'égalisation des conditions éducatives et de généralisation des prises en charge ». Par conséquent, cette innovation imposée suppose une personnalisation des enseignements qui prend notamment la forme de la diversification et de la différenciation en remettant fortement en question les pratiques, les identités et les relations professionnelles au sein des établissements scolaires.

La question soulevée par Pétreault (2016) se pose alors aux enseignants : « Comment faire réussir tous les élèves alors qu'ils sont si différents ? » En effet, il y a « un double objectif pédagogique : enseigner à tous les élèves et s'adapter à chaque cas dans sa singularité pour le faire réussir ». De ce point de vue, nous pouvons comprendre la perplexité des enseignants, car sans formalisation

⁶³ *Gomaths*, (<http://www.gomaths.ch/>) est un site d'entraînement au calcul mental.

⁶⁴ *Mathador* (<http://www.mathador.fr>) est d'abord un jeu de plateau mais une version en ligne est disponible. On parcourt des cases en répondant à des questions du type « compte est bon » (avec des contraintes sur les opérations) ou à des petits problèmes.

des pratiques pédagogiques attendues, face à des élèves dont les besoins sont complexes à cerner, sans disposer d'un accompagnement suffisant dans la mise en œuvre de ces dispositifs pédagogiques, certains professeurs peuvent se sentir professionnellement fragilisés. En fait, « les enseignants s'interrogent sur le bien-fondé des mesures qu'on leur demande de mettre en place. Aider, accompagner, personnaliser, individualiser, différencier, tutorer,... À quoi renvoie chacune de ces prescriptions ? Faut-il faire autre chose ou autrement que ce qui se fait en classe ? Quelles modalités de l'aide sont mis en œuvre dans la classe, hors la classe et en dehors de l'établissement scolaire ? » (Félix et al., 2012). De l'avis de Barrère (2013), la prise en compte de l'hétérogénéité des élèves constitue l'une des principales sources de crise du métier d'enseignant.

En définitive, nous pouvons légitimement faire l'hypothèse que l'accompagnement pédagogique est selon toute apparence une incertitude au sein de l'organisation scolaire qui doit être levée afin d'éviter tout autre problème multiforme. Néanmoins, d'après Coquin (2019), « au regard du contenu des différents dispositifs proposés par le législateur, et en attente d'une meilleure articulation entre méthodologie et discipline (s), il y a sans doute à co-construire les contours de ce nouvel enseignement à part entière avec l'ensemble des acteurs de la communauté éducative » (p.53). « En fait, qu'ils s'agissent de construction de progressions et de systèmes d'évaluation propres aux objectifs retenus, le positionnement didactique des disciplines mobilisées sont autant de contours à dessiner par les membres de la communauté scolaire » (p.53), conclut le chercheur. Pour plus de précisions, passons en revue les objets et la teneur de l'ensemble des dispositifs pédagogiques préconisés par l'institution, en vue d'aider les élèves les plus fragiles.

À l'école primaire, quatre dispositifs semblent répondre aux problématiques des élèves rencontrant des difficultés en calcul mental. Tout d'abord, nous trouvons « les activités pédagogiques complémentaires (APC) ». Actuellement en place, ce dispositif remplace, depuis 2013, l'aide personnalisée (créée en 2008). Bien qu'elles s'inscrivent dans l'ensemble des mesures contribuant à la maîtrise du socle commun de connaissances, de compétences et de culture et à la réussite de tous les élèves, ces activités « ne relèvent pas du temps d'enseignement obligatoire pour les élèves mais s'ajoutent aux 24 heures hebdomadaires d'enseignement dues à tous et nécessitent l'accord des parents concernés (Eduscol). Toutefois, leur volume horaire annuel ne peut excéder 36 heures. D'autre part, les APC offrent trois types d'aide aux élèves en difficulté. « Les enseignants peuvent ainsi aider les élèves lorsqu'ils rencontrent des difficultés dans leurs apprentissages, les accompagner dans leur travail personnel ou leur proposer une activité prévue dans le cadre du projet d'école, le cas échéant en lien avec le projet éducatif territorial de la

commune » (Eduscol). Cependant, depuis 2018, ce dispositif est consacré uniquement à la prise en charge des élèves en lecture.

Au regard de son domaine d'activités, le second dispositif pédagogique, « les stages de remise à niveau (SRAN), concernent les élèves en difficulté, au cours moyen 1 et 2 (depuis 2009) et au cours élémentaire 1 (depuis septembre 2018), présentant des lacunes importantes en mathématiques ou en français, particulièrement repérés lors des évaluations nationales, académiques ou locales. Ces stages gratuits sont proposés, durant cinq jours à raison de 3 heures dans les trois zones pendant la période des vacances scolaires : une semaine au printemps, la première semaine de juillet et la dernière semaine des vacances d'été. Des enseignants volontaires prennent en charge des petits groupes de cinq à six élèves, animent ces stages et en définissent le contenu. En outre, les SRAN « s'inscrivent dans le dispositif général de lutte contre la difficulté scolaire identifiée tout au long de l'année ou au moment des évaluations... » (BO du 6 avril 2008).

Dans la continuité des deux formes d'accompagnements présentées supra, « le programme personnalisé de réussite éducative (PPRE) », apparu en 2005, a pour vocation tout autant de prévenir la difficulté que d'y pallier. Dans cette optique, il est constitué d'une action spécifique d'aide et d'un ensemble d'autres aides coordonnées. Spécifique, intensive et de courte durée pour garantir son efficacité, « sa mise en œuvre est assortie d'un système d'évaluation permettant de dresser un état précis des compétences acquises par l'élève des objectifs à atteindre à la fin du cycle et de les situer au regard des exigences du socle commun » (BO n°31 du 31 août 2006). En corollaire, il s'agit d'un dispositif réfléchi visant une aide ciblée à atteindre dans un temps court. Il suppose donc de la part de l'enseignant, des capacités à repérer la difficulté et à choisir l'action spécifique à engager, une action dont il faudra mesurer l'efficacité.

Enfin, un quatrième dispositif, « le RASED (Réseau d'aide en difficulté) » est mobilisé immédiatement, dans le cadre de l'équipe pédagogique, dès qu'un élève attire l'attention de l'enseignant à travers son attitude envers l'activité scolaire, sa manière de répondre aux consignes, son mode d'adaptation à la vie collective qui peuvent être révélateurs de difficultés susceptibles de grever son avenir scolaire. « Pour aider ces élèves, les enseignants spécialisés des réseaux d'aides spécialisées aux élèves en difficulté viennent renforcer les équipes pédagogiques en apportant des compétences spécifiques permettant de mieux analyser ces situations particulières et de construire des réponses adaptées » (BO n°31 du 27 août 2009). Quand un élève relève successivement, voire simultanément de l'APC et de l'aide spécialisée, il convient de garantir la

complémentarité entre les deux modes d'action qui sont coordonnées et évaluées dans le cadre du PPRE.

Pour conclure sur le recensement des dispositifs de prise en charge des élèves les plus fragiles, nous avons vu qu'ils se sont largement développés depuis les années 2000 en visant concomitamment la prévention et la lutte contre l'échec scolaire. Aujourd'hui, force est de constater que la multiplication des dispositifs généralisée dans le système éducatif « indique un "nouvel âge de l'organisation scolaire" (Barrère 2013) au croisement de problématiques pédagogiques et organisationnelles, et favorisant des pratiques pédagogiques « en rupture avec le face-à-face habituel d'un enseignant et du groupe-classe » (Barrère, 2013). Par conséquent, que les enseignants fassent du soutien scolaire, de la remédiation, de l'aide, de l'accompagnement, de l'étayage ou encore de la différenciation (Feyfant, 2017), ce sont autant de gestes professionnels qui doivent contribuer à donner de l'efficacité à un temps d'accompagnement personnalisé.

DEUXIÈME PARTIE – QUESTION CENTRALE ET CADRE THÉORIQUE

CHAPITRE 3 : QUESTIONS DE RECHERCHE ET HYPOTHÈSES

1. Les fondements de notre question de recherche

Depuis une quinzaine d'années, les résultats des évaluations nationales (Cedre, 2008, 2014) et internationales (PISA 2003, 2006, 2012 ; TIMSS 2015) en mathématiques indiquent que la France glisse petit à petit vers le bas du classement. En effet, non seulement, les résultats des élèves français se dégradent (même pour les meilleurs d'entre eux) mais ils sont également en baisse par rapport à ceux des autres pays européens. En vérité, les faibles performances de la France cachent des résultats encore plus inquiétants pour les Départements d'Outre-mer. Lors des tests effectués par la DEPP en août 2018, la Guadeloupe se situait, loin derrière Amiens, la dernière académie de France hexagonale, juste avant Mayotte et la Guyane placées en fin de classement. Plus précisément, l'École n'arrive même plus à assurer à tout citoyen la maîtrise des nombres et des calculs « de base » indispensables pour sa future insertion sociale et professionnelle (JDC, 2014). Pour preuve, le monde politique en appelle à la mobilisation collective, en agissant au plus tôt, pour l'acquisition des savoirs fondamentaux par tous les élèves avant que les difficultés ne s'enracinent et n'obèrent l'avenir.

D'après le ministre de l'éducation nationale, Jean-Michel Blanquer, la tâche des enseignants constitue un levier majeur pour inverser la tendance et permettre aux Français de renouer avec l'agilité en calcul. Malheureusement, les professeurs semblent eux-mêmes démunis face aux erreurs persistantes de leurs élèves. « À chaque niveau de classe, les enseignants se plaignent des faibles capacités de leurs élèves à comprendre les nombres ou à mener à bien des calculs à cause de difficultés remontant des classes antérieures » (Villani et Torossian, 2018). Par conséquent, bien qu'il soit le plus beau métier du monde, le métier d'enseignant n'en est pas moins difficile. Actuellement, beaucoup de professeurs enseignant dans le réseau d'éducation prioritaire avouent rencontrer des problèmes de gestion de classe et estiment passer 16% du temps scolaire (21% en éducation prioritaire) à l'instauration d'un climat favorable au détriment des apprentissages (Enquête Talis, 2013).

Ainsi, confrontés aux comportements agressifs ou inadaptés des élèves souvent peu motivés, ils sont contraints d'enseigner en mode défensif ce qui génère beaucoup d'anxiété et un accroissement des démissions en début de carrière. Mais le sacerdoce ne s'arrête pas là. Une fois rentrés à la maison, une surcharge de travail vient s'ajouter à tout ce stress professionnel : il faut corriger les copies, préparer les cours à venir, constituer des projets d'aides spécifiques (PPRE, PPS, etc.), remplir le Livret Scolaire Unique en période d'évaluation... De surcroît, les professeurs ne sont pas reconnus et subissent stoïquement de plein fouet les affres liés à la détérioration de l'image de l'enseignant

dans la société. L'administration ne les épargne pas non plus : les salaires ne sont pas à la mesure de l'investissement, leurs résultats et leurs pratiques sont constamment critiqués. Placés en première ligne et bien qu'ils ne soient certainement pas la cause principale de cette préoccupante réalité, les professeurs des écoles sont pointés du doigt, voire même associés aux difficultés des élèves en calcul mental parce qu'on considère qu'ils contribuent négativement à la réussite des élèves, au regard de « l'absence de pratique régulière du calcul mental dans un trop grand nombre de classes » (MEN, 2006), de leur méconnaissance *des Documents d'accompagnements des programmes* mis à leur disposition, de leur manque de perméabilité aux travaux des didacticiens (Bolon, 1996) ou encore « des pratiques de classe souvent limitées à des séances quasi exclusivement constituées d'activités d'entraînement ou d'évaluation dont la gestion stéréotypée s'inspire du procédé Lamartinière » (MEN, 2006).

En tant qu'enseignant, nous reconnaissons une certaine impuissance même si nous ne pouvons pas nous réfugier derrière ce qui pourrait être un prétexte à l'inaction. En réalité, nous pensons que la difficulté d'enseigner ne réside pas dans la gestion même d'un public hétérogène mais plutôt dans la gestion nécessaire de la classe entière pour faire progresser tout le monde et prendre en compte toutes les difficultés et tous les profils d'élèves, en particulier pour le tiers des professeurs des écoles qui déclarent ne pas aimer enseigner les mathématiques ou pour ceux dont le niveau d'expertise ne leur permet pas d'être à l'aise dans la discipline. En effet, il ne suffit pas de mettre les élèves en « activité » pour qu'ils se centrent sur les savoirs à acquérir. Il faut prévoir un travail qui compte pour eux et pas seulement pour nous, individualiser voire personnaliser les apprentissages dans le groupe-classe, sans réduire les exigences ou tomber dans les travers d'une « individualisation non contrôlée » de l'enseignement et tout cela en accord avec les instructions officielles. Oui, mais, là encore, le professeur doit faire preuve d'une grande capacité d'adaptation pour suivre les programmes.

En effet, ces derniers changent, en moyenne, tous les cinq ans ce qui contraint les professeurs à revoir de manière quasi-permanente leurs progressions, leurs projets d'enseignement, les activités et les évaluations proposées aux élèves. « Le changement incessant des programmes ne peut avoir qu'un effet démobilisateur sur les enseignants. Même chevronnés, ceux-ci ne peuvent améliorer leurs pratiques qu'à partir de bases stables. Les apprentissages des élèves en pâtiront nécessairement », expliquait la COPIRELEM⁶⁵ (2008). Partageant le même point de vue, Briand (2006) souligne qu'il serait apaisant que les décideurs cessent de changer les programmes trop souvent ; cela a un effet pervers ; les enseignants ne suivent plus. La parole est, de fait, discréditée. Les professeurs ne peuvent

⁶⁵ Réaction de la COPIRELEM au projet de programme 2008. <http://www.univ-rem.fr/commissions/copirelem/index.php>

se repérer qu'à l'aide de manuels [...] », ajoute-t-il. Néanmoins, tous les manuels n'ont pas le même potentiel didactique et leur utilisation peut entraîner certaines dérives, notamment la non-conformité aux programmes (Durpaire, 2010), manque de cohérence dans les apprentissages, beaucoup d'applications directes développant chez l'élève « *un systématisme peu constructeur de sens* », peu d'exercices de raisonnement, enfermement dans une didactique trop rigide (Villani et Torossian ; 2018).

Et pourtant, si certains enseignants sont démunis face à la complexité du métier et à l'ampleur de la tâche, d'autres, à l'instar de Françoise Colsaët, professeure de mathématiques au lycée et Jean-Pierre Fournier, professeur d'histoire et géographie, sont expérimentés et restent cependant ambitieux et motivés. Ils « cuisinent les programmes, en évitant de les couper en tranches, mais en n'oubliant ni le temps de cuisson, ni surtout les convives » (Colsaët et Fournier, 2013), prennent des initiatives pédagogiques intéressantes et s'approprient les ressources institutionnelles et documentaires disponibles avec toute la distance critique nécessaire pour concevoir des situations d'enseignement riches. En fait, « ils développent, dans la marge de manœuvre qui leur reste, des pratiques originales, marquées par une cohérence certaine, et cela entraîne des décisions non aléatoires pour gérer le détail de la séance et l'imprévu » (Robert, 2005).

Dit autrement, nous cherchons à approcher le travail du professeur dans toute sa complexité à travers les choix qu'il fait à différents niveaux et qui vont intervenir dans ses préparations pour décider des contenus qui seront travaillés par les élèves, du cheminement cognitif ou pour improviser pendant les déroulements des séances de calcul mental. Qu'est-ce qui fait que le professeur des écoles enseigne de telle ou telle manière, à tel moment ou dans telle situation ? Précisément, l'enseignant doit à la fois, trouver des alternatives aux contraintes institutionnelles et sociales incontournables liées à son métier, tenir compte de la propension des élèves à accepter le jeu scolaire, s'adapter à eux sans trop dénaturer son projet d'enseignement pour atteindre un triple objectif : faire tourner la classe, faire les élèves réussir et apprendre à calculer de tête un résultat (acquérir des connaissances disponibles, les organiser, développer son sens de l'observation, de l'anticipation et l'intelligence du calcul). Il est évident que ces travaux de recherche s'intéressent de façon approfondie aux pratiques dans leur diversité et dans leurs rapports avec leur contexte de réalisation. Entre les programmes et les pratiques d'enseignement, il y a le travail de l'enseignant, son expérience, ses convictions personnelles sur ce qu'il doit enseigner, les besoins spécifiques de ses élèves, les ressources qu'il mobilise, le contexte dans lequel il évolue, son histoire personnelle, sa culture et ses propres buts subjectifs. L'enseignant va y puiser les différents éléments de sa logique d'action. Autrement dit, « sachant que les professeurs des écoles disposent de ressources institutionnelles (programmes, documents d'accompagnement,

formation continue, etc.), documentaires (manuels didactiques et pédagogiques, documentation numérique, etc.) et forts de leur expérience dans le domaine, nous cherchons à savoir quelles sont les pratiques enseignantes mises en œuvre pour enseigner le calcul mental selon le niveau des élèves ? ». En corollaire, les pratiques effectives des professeurs des écoles en calcul mental constituent l'axe central de notre recherche dans le but d'identifier leurs caractéristiques, d'expliquer les processus et de comprendre leurs dynamiques d'organisation et de fonctionnement.

2. De la question centrale aux hypothèses

2.1. La question de recherche

On ne peut aborder la question des pratiques ordinaires des professeurs des écoles en calcul mental sans porter un regard sur les acteurs associés à leur accompagnement à l'entrée dans le métier, à leur innovation et à leur transformation en classe : les formateurs en Écoles supérieures du professorat et de l'éducation (Espe), les tuteurs de terrain (maîtres formateur, MAT⁶⁶), les pairs (les membres de l'équipe pédagogique), les inspecteurs et surtout les conseillers pédagogiques mandatés pour soutenir les équipes enseignantes en favorisant l'application des nouveaux programmes, l'usage et la mutualisation de méthodes pédagogiques efficaces (Tardif et Lessard, 2004). Concrètement, ils accomplissent leur mission au quotidien à travers une diversité de rôles professionnels assortis de tâches compliquées, lourdes, souvent génératrices de stress exigeant un certain niveau d'expertise et des compétences spécifiques.

Au même titre que les enseignants, leur travail n'est pas facilité par les réécritures successives, dissemblables avec des degrés de précision contrastés des programmes puisqu'ils doivent en amont percevoir ces évolutions pour ensuite tenter de les expliciter et de mettre en exergue les nouveaux objectifs tout en les justifiant lors des actions de formation continue ou des animations pédagogiques. Dans les faits, un conseiller pédagogique est à la base un « bon » instituteur ou un « bon » professeur des écoles, reconnu par son institution, apte à devenir, « par glissement » un « bon » formateur suite à l'obtention d'une certification, le CAFIPEMF⁶⁷, validé à l'issue de deux épreuves⁶⁸ sans avoir reçu au préalable une formation de formateurs d'enseignants. Ainsi, l'absence de formation initiale pour devenir conseiller pédagogique et l'offre de formation continue très réduite proposée par la suite ne les préparent pas suffisamment à la gestion des situations complexes, peu définies et problématiques

⁶⁶ MAT : Maître d'Accueil Temporaire

⁶⁷ CAFIPEMF signifie Certificat d'Aptitude aux Fonctions de Professeur des Ecoles Maître Formateur.

⁶⁸ « À l'issue de deux épreuves d'admissibilité et d'admission, les enseignants experts sont reconnus aptes à devenir formateur. À noter que la partie professionnelle de l'épreuve consiste soit à mener une animation pédagogique face à un groupe d'enseignants, soit à mener une critique de leçon donc à se placer en situation de conseil face à un enseignant débutant. » (Sonzogni Eric, 2010, p.4).

liées à leur « métier ». Selon la double synthèse des tâches du conseiller pédagogique réalisée par Claire Duschene (2016), à partir de sources documentaires et d'entretiens menés auprès de onze conseillers oeuvrant en milieu francophone, ces enseignants experts assurent au moins neuf rôles différents dans l'exercice de leurs activités : formateur, accompagnateur, conseiller, agent de changement, expert (de contenu et de terrain), collaborateur, praticien réflexif et gestionnaire. Par conséquent, les conseillers pédagogiques débutants sont souvent submergés par « les diverses tâches relatives à leurs multiples rôles et cela sans compter la gestion des nombreux courriels qu'ils reçoivent, les déplacements à effectuer entre leur lieu de travail et les milieux où ils interviennent, puis les tâches administratives, qui requièrent tous un temps considérable » (Duschene, 2016).

De l'avis de Gagnon (2010), le conseiller intervient dans une diversité de champs, d'objets et de dossiers parfois non disciplinaires et « doit, pour bien jouer son rôle, poursuivre son développement professionnel, constamment à l'affût d'améliorer ses pratiques et d'enrichir son bagage de connaissances ». De plus, le statut de conseiller pédagogique demeure ambigu car il appartient au corps des professeurs des écoles, oeuvre auprès des équipes d'école tout en restant sous l'autorité directe de l'IEN ce qui le place dans une position intermédiaire délicate parfois inconfortable entre l'institution dont il doit relayer la politique et les enseignants qu'il accompagne sur le terrain et par voie de conséquence entre l'innovation et la conformité sans pouvoir pour autant exercer une relation d'autorité (Houle et Pratte, 2003).

En outre, le conseiller incarne au quotidien les ordres venus « d'en haut », il est donc perçu très négativement par certains enseignants qui vont résister à ses interventions, juste pour affirmer leur autonomie professionnelle vis-à-vis du ministère. Mais ce n'est pas toujours le cas, puisqu'actuellement nombreux sont les professeurs des écoles qui se sentent fragiles, voire incompetents en mathématiques et souhaitent recevoir, de la part des conseillers, des outils et des ressources pédagogiques pour mener à bien leur enseignement. Quoi qu'il en soit, le formateur se retrouve souvent face à un dilemme : offrir des solutions préconstruites aux enseignants ou les rendre autonome en développant leur réflexivité. À vrai dire, les professeurs ne sont pas toujours inexpérimentés et disposent de connaissances et de compétences acquises au cours de leurs années de pratique par le biais de l'autoformation. De ce fait, les conseillers pédagogiques autant ou parfois moins expérimentés qu'eux-mêmes le sont, ne jouissent pas d'un grand crédit auprès de ces enseignants qui « sont d'ailleurs convaincus, pour certains d'entre eux, de leur inutilité au sein de l'organisation scolaire » (Tardif et Lessard, 2004). Ainsi, vu le caractère oppressant du métier de conseiller pédagogique, nous serions tentés de chercher à comprendre si l'expertise supposée de ces formateurs leur permet réellement de soutenir les professeurs dans l'enseignement des mathématiques

et par-delà du calcul mental ? Mais, nous ne nous engagerons pas dans cette voie car notre recherche est plutôt orientée sur les apprentissages des élèves et les pratiques enseignantes en calcul mental à l'école élémentaire. Toutefois, évoquer les difficultés rencontrées par les formateurs impliqués dans la professionnalisation des enseignants est, selon nous, une manière de mettre en lumière la dimension systémique du problème pour mieux rappeler que l'amélioration de l'enseignement du calcul mental n'est pas uniquement l'affaire des enseignants, des savoirs et des élèves mais qu'elle requiert la mobilisation de l'ensemble des acteurs du système éducatif, à l'instar de Villani et Torossian (2018) qui expliquaient que : « sans une organisation stratégique conjuguant la classe, les écoles et établissements et l'encadrement, le système apparaît livré à lui-même, prisonnier de son inertie et il a tôt fait de transformer les préconisations en péripéties, pour poursuivre vers la conservation de l'existant » (p.16).

Par conséquent, au regard de la forte proportion d'élèves en classe ordinaire à l'école élémentaire présentant de faibles capacités pour mener à bien un calcul mental (DEPP, 2018) et dans la continuité de la présentation de notre sujet de recherche, notre problématique s'enquiert de mettre en évidence les pratiques des professeurs dans ce domaine sachant que chaque enseignant est « coincé » entre plusieurs impératifs, éventuellement contradictoires relatifs à l'institution, à la composition de sa classe, au métier, à lui-même, qui vont avoir des conséquences sur ses choix d'enseignement, d'organisation et le déroulement de ses séances. Autrement dit, l'intérêt de cette question de recherche est de découvrir empiriquement *« comment les professeurs des écoles organisent et conduisent leur enseignement-apprentissage dans ce domaine liant calcul et raisonnement afin de permettre aux élèves d'acquérir des compétences en numération et en résolution de problèmes »*. Il va sans dire que l'activité de l'enseignant apparaît alors comme l'aménagement d'un milieu⁶⁹ (Sensevy, 2002), dans lequel se développent les activités des élèves et qui conditionne leurs apprentissages, à partir des tâches précises qu'il leur propose. De ce fait, « toute intervention de l'enseignant et toutes les réactions des élèves concernant un objet de savoir sont à considérer comme des actions contribuant à aménager, respectivement réaménager le milieu » (Bochi, 2015).

Ainsi, garant du fonctionnement du système didactique, le professeur doit résoudre en permanence deux problèmes majeurs : réussir à concevoir des milieux adéquats où les objets de savoir pourront être appréhendés par les élèves et en même temps, répondre aux exigences de l'institution, aux attentes des collègues, des parents et aux habitudes du métier. C'est pourquoi, nous porterons une attention particulière sur le projet d'enseignement du professeur (l'ensemble des tâches qu'il prévoit

⁶⁹ D'après Sensevy (2002, p.30), le milieu est « *tout ce qui entre dans l'environnement d'apprentissage de l'élève, tout ce avec quoi l'élève se trouve en relation au moment de l'apprentissage* ».

de proposer aux élèves et leur ordonnancement) que nous appellerons scénario à l'instar d'Aline Robert, la fidélité de sa mise en œuvre en classe (le dit, le fait, l'écrit), ce qu'il déclare avoir enseigné, ce qu'il a réellement enseigné, les marges de manœuvre qu'il investies (tout ce que l'enseignant ajoute, pendant les déroulements, aux tâches prévues, y compris les aides ou l'organisation du travail pour modeler les activités possibles des élèves).

Notre thème de recherche n'est pas nouveau mais demeure d'actualité : le dernier rapport en date sur l'enseignement des mathématiques (Villani et Torossian, 2018) demande que la priorité soit accordée au premier degré pour redresser la situation et souligne la place fondamentale qu'occupent les enseignants dans le système éducatif en rappelant que « tous les professeurs des écoles devraient faire l'objet d'une attention particulière, notamment concernant leur formation en mathématiques ». Néanmoins, le travail que nous présentons ici, a l'originalité suivante : caractériser les scénarios de calcul mental qui peuvent être joués en classe avec de bons résultats et identifier ceux qui semblent les plus opérants pour les élèves en difficulté. Nous inscrivons ainsi notre démarche à la suite de Vergnaud, Robert, Rogalski, Butlen et Masselot, dans un cadrage théorique inspiré de la théorie de l'activité adapté aux mathématiques en situation scolaire. Donc, pour guider notre réflexion, nous avons formulé deux sous-questions s'appuyant sur des ressources théoriques empruntées à la didactique des mathématiques et à la psychologie ergonomique mais corrélées aux sciences de l'éducation dans la mesure où nous pensons, avec Robert et Rogalski, que l'accès à l'intelligibilité des pratiques d'un enseignant ne se limite pas à l'étude de la manière dont il choisit son scénario et l'implante dans sa classe mais qu'« il est nécessaire de tenir compte également de la manière dont il inscrit son travail en classe et pour la classe, dans son métier, avec les contraintes institutionnelles et sociales afférentes, mais aussi compte tenu de sa personnalité comme sujet » (Robert, 2014).

Primo, sachant que le scénario est élaboré à partir de la spécificité de la notion mathématique à enseigner, des difficultés répertoriées des élèves et que sa qualité, en amont de sa réalisation, tient à la fois à la nature des tâches proposées et à leur agencement, « *quels sont les principaux éléments didactiques et pédagogiques pris en considération par les professeurs des écoles pour concevoir leur projet d'enseignement en vue de permettre aux élèves d'acquérir les connaissances sur les nombres, les opérations et la maîtrise des techniques du calcul mental ?* » Il s'agira d'identifier, à différents niveaux, les choix du professeur, qui interviennent pendant ses préparations, pour décider des contenus qui seront travaillés, fixer la manière dont les notions seront introduites, leur organisation et les prévisions de gestion.

Deuxio, vu que la diversité voire l'hétérogénéité inévitable des écoliers est synonyme d'une entrée différente dans les apprentissages reposant en grande partie sur les conceptions et les représentations que l'enseignant se fait de l'origine des difficultés éprouvées par ses élèves, *« quelles sont les pratiques privilégiées par les enseignants lors des observations pour venir en aide aux élèves les plus fragiles en calcul mental au CP et mises en œuvre par les professeurs des écoles, tout au long des séquences d'enseignement de manière à favoriser l'acquisition pérenne des faits numériques et des procédures en calcul mental ? »*. Certains auteurs sont aujourd'hui favorables à une pédagogie explicite guidant fortement les élèves où la stratégie utilisée pour effectuer tel ou tel calcul mental, par exemple, est enseignée, alors que d'autres préconisent l'immersion des élèves dans des situations a-didactiques qui leur demandent de traiter, de produire du sens, de prendre des décisions, d'engager des stratégies et d'évaluer leur efficacité.

En conclusion, nous arrivons ici à la fin de notre questionnement. La section suivante concerne la formulation des hypothèses dont la validité sera d'abord testée sur le terrain avant d'être confirmée ou infirmée à l'issue de nos travaux.

2.2. Formulation des hypothèses

Notre première sous-question s'enquiert des scénarios⁷⁰ élaborés par les enseignants en amont de la classe, nous l'avons libellée ci-dessus comme suit : *« Quels sont les principaux éléments didactiques et pédagogiques pris en considération par les professeurs des écoles pour concevoir leur projet d'enseignement en vue de permettre aux élèves d'acquérir les connaissances sur les nombres, les opérations et la maîtrise des techniques du calcul mental ? »*. Pour y répondre, nous formulons l'hypothèse suivante (H1) : quand il conçoit son projet d'enseignement le professeur des écoles tient compte principalement de sa situation de travail (programmes, savoir prescrit, emploi du temps, ressources institutionnelles, documentaires et matérielles disponibles), des élèves (leurs savoirs, leurs compétences, leurs activités mathématiques en termes à la fois d'accès au sens des notions visées et de potentialités d'apprentissage, leurs comportements individuels et collectifs) et de lui-même (ses objectifs, ses savoirs et savoir-faire, ses conceptions, son expérience et sa formation, etc.). Autrement dit, les choix didactiques et pédagogiques des enseignants sont généralement assujettis et élaborés consciemment à partir des ressources et des contraintes issues de leur milieu de travail, du contexte institutionnel mais aussi directement liées à l'activité professionnelle en classe, notamment celles qui

⁷⁰ « Le scénario désigne l'ensemble ordonné des exercices et des cours prévus pour un chapitre ou une notion, y compris les évaluations et le travail à la maison, avec des prévisions grossières de gestion (durée, répartition de travail » (Robert, 2013).

viennent par anticipation des réactions des élèves, ou à des buts subjectifs qui vont peser sur leur décision lors de la préparation des cours.

Par conséquent, il existe autant de projets d'enseignement pour permettre aux élèves d'atteindre un même objectif d'acquisition de savoir défini par les programmes qu'il y a de professeurs des écoles car la disparité des scénarios s'explique sans doute par la diversité des élèves dont chaque enseignant a la charge et la représentation qu'il a de sa classe qui vient se croiser avec ses conceptions de l'enseignement et de l'apprentissage (Robert, 2001 ; Chesnais, 2014). Néanmoins, comme tous les autres métiers, le métier d'enseignant est régi par « *des règles qui ne sont pas écrites, qui sont conçues par les agents, négociées entre eux et, éventuellement, avec la hiérarchie* » (Leplat, 1997). Yves Clot (1999) regroupe ces schèmes sociaux sous l'appellation « genre » qu'il définit ainsi : « *Ce sont des règles de vie et de métiers pour réussir à faire ce qui est à faire, des façons de faire avec les autres, de sentir et de dire, des gestes impossibles dirigés à la fois avec les autres et vers l'objet. Finalement, ce sont les actions auxquelles nous invite un milieu et celles qu'il nous désigne comme incongrues ou déplacées : le système social des activités reconnues ou interdites dans un milieu professionnel donné* » (p.44). Ainsi, le genre va donc contraindre le professeur dans les choix qu'il va faire pour mener à bien son activité et en même temps le soutenir en lui évitant des erreurs grâce aux ressources qu'il met à sa disposition. En d'autres termes, selon Roditi (2005), les professeurs des écoles font des choix didactiques et pédagogiques à la fois convergents et divergents lors de la préparation des cours pour mener à bien le travail d'élaboration global de leurs projets en puisant dans le genre (c'est-à-dire le répertoire des actes convenus que l'histoire de leur métier a retenus), ce qui les conduit à faire des choix communs.

Par ailleurs, au-delà des contraintes communes qui s'exercent sur l'enseignement, il reste une marge de manœuvre qu'ils investissent différemment selon leur personnalité d'où la diversité des scénarios. En outre, il est opportun de savoir que les choix didactiques, même les plus infimes, sont déterminés par les grands organisateurs pédagogiques de l'action des maîtres (Goigoux, 2006). En effet, dans la lignée de Dubet et Martucelli (1996) et d'autres sociologues encore comme Berger (1979) ou Tardif et Lessard (1999), Goigoux (2007) considère que les instituteurs poursuivent trois objectifs principaux, parfois concurrentiels voire contradictoires, en interaction permanente : « 1) socialisation des élèves par l'intériorisation d'une discipline scolaire, 2) apprentissage de connaissances et de savoirs, et 3) subjectivation des enfants qui doivent s'épanouir à l'école, bref être des sujets à part entière (Dubet, 2002) ». Autrement dit, les décisions des enseignants sont motivées par l'obligation de régulation des tensions multiples entre principes d'action et principes de justice

(Goigoux, 2007) et la nécessité de remplir des besoins⁷¹ personnels immédiats (Tochon, 1993) et de répondre aux impératifs⁷² liés à l'animation même du projet (Rogalski, 2003). Cet état de fait vient expliquer, dans certains cas, l'enchaînement automatique et répétitif de différentes actions et de décisions sans qu'il y ait eu une prise d'informations précises sur la situation de la part du professeur, ce qui peut être analysé comme une routine pédagogique bien plus qu'une réaction aux activités des élèves.

En réponse à la deuxième sous-question posée, exprimée de la manière suivante : « *Quelles sont les pratiques privilégiées par les enseignants lors des observations pour venir en aide aux élèves les plus fragiles en calcul mental au CP et mises en œuvre par les professeurs des écoles, tout au long des séquences d'enseignement de manière à favoriser l'acquisition pérenne des faits numériques et des procédures en calcul mental ?* ». Notre hypothèse (H2) sous-tend que les professeurs des écoles mettent en œuvre des pratiques globales (enseignement explicite, activités collectives et rituelles, différenciation par les procédures, simulation mentale de l'action suivie d'une validation sur le matériel, verbalisation des procédures médiatisées par le maître, débat entre pairs, rédaction de traces écrites, institutionnalisations souples ou locales, etc.), des pratiques d'individualisation (différenciation par les ressources disponibles, les contraintes, la tâche, le rôle dans les jeux et les supports, encouragements, interventions du maître pour la concentration et la mise au travail) ou autres. Cependant, d'après l'analyse des travaux identifiant certaines pratiques comme propices à la réussite scolaire (Bressoux, 1994), « les pratiques pour lesquelles la recherche démontre des effets positifs sont plutôt des pratiques que l'on pourrait qualifier de générales ou globales (le temps d'apprentissage, le niveau d'exigence, l'importance des traces écrites, le niveau de directivité, etc.) », déclare Céline Piquée (2010). Il n'empêche que, à l'heure actuelle, les données dont on dispose ne permettent pas de savoir si ces pratiques globales ont une plus forte incidence sur les élèves en difficulté que sur les autres. En revanche, les pratiques d'individualisation mises en place à l'égard des élèves en difficulté semblent avoir des effets plutôt décevants : un accroissement des inégalités entre élèves forts et élèves faibles (Durut-Bellat et Mingat, 1997 ; Ireson, Hallam et Hurley, 2005), des occasions d'apprentissage moins nombreuses (Gamoran, 1993) et un abaissement net des exigences à l'égard des élèves en difficulté (Bautier, 2005 ; Butlen, Peltier-Barbier et Pézard, 2002). En parallèle, « certaines classes se distinguent dans leur capacité à faire plus ou moins progresser les

⁷¹ D'après François V. Tochon (1993), la planification des cours a pour fonction de « *de remplir des besoins personnels immédiats (diminuer l'anxiété, donner de l'assurance lors de l'interaction, donner une direction, un sens une sécurité et une certaine confiance)* ».

⁷² Pour Janine Rogalski, « *la préparation de la séance fournit à l'enseignant une enveloppe des trajectoires acceptables du déroulement de la classe. Elle lui sert aussi de trame repère, pour réguler la séance en classe ou a minima l'ordonnement de ses propres actions* ».

élèves en difficulté » (Piquée, 2010). Par conséquent, dans la lignée de certains auteurs tels que Crahay (1996), on pourrait penser que certains enseignants aident peu les élèves et limitent ainsi les effets pervers des pratiques différenciées tandis que d'autres leur portent une trop grande attention conduisant à des effets contre-productifs. Nonobstant, Piquée (2010) a montré dans son étude des pratiques enseignantes envers les élèves en difficulté dans des classes à efficacité contrastée, que ce n'est pas tant l'importance de l'aide apportée mais davantage sa nature qui détermine ses effets sur les acquisitions des élèves fragiles. En conséquence, au regard de la formulation de notre hypothèse, les pratiques globales, différenciatrices ou l'absence de pratiques en direction des élèves en difficulté peuvent être favorables à l'acquisition pérenne des notions de calcul mental par les élèves en difficulté.

Cependant, nous sommes conscients que le calcul mental n'est ni simple à enseigner, ni facile à apprendre car son enseignement – apprentissage se construit sur une dialectique subtile infiniment complexe entre sens et techniques nécessitant des passages et des étapes incontournables en numération à aborder dès le début du cycle 2 que certains chercheurs comme Boule (2012), Butlen et Masselot (2010) ou (Gamo et Djament, 2009) tentent de vulgariser auprès des enseignants. À vrai dire, cet enseignement se caractérise par une contradiction, que Butlen et Pézard (2007) nomment « *le paradoxe de l'automatisme* ». L'intelligibilité de cet illogisme passe par une distinction entre « *procédure automatisée* » et « *automatisme* ». Lorsqu'il effectue un calcul mental, l'élève met en œuvre une procédure, c'est-à-dire un ensemble univoque et ordonné d'actions (Boule, 1997). Cette procédure est automatisée quand il arrive à la restituer sans avoir à la reconstruire (Fischer, 1987 ; Boule, 1997). Paradoxalement, l'automatisme, quant à lui, peut, selon le contexte, correspondre à l'utilisation de procédures automatisées stockées en mémoire suite à un enseignement ou à une pratique préalable mais il peut aussi décrire le recours quasi systématique de l'élève à un seul type de procédure quelques soient les données numériques du calcul à effectuer. Et c'est justement ce paradoxe, entre adaptabilité et automatisme, qui constitue une source de difficulté pour les élèves : « trop peu d'automatismes (au sens de trop peu de procédures automatisées) peuvent renforcer l'automatisme (au sens du comportement automatisé) ; davantage d'automatismes peuvent permettre d'échapper à l'automatisme » (Butlen et Masselot, 2010).

De ce fait, pour réussir en calcul mental, « l'élève doit donc non seulement posséder une palette de décompositions des nombres entiers et de procédures de calcul suffisamment riches et accessibles, mais aussi apprendre à choisir rapidement parmi celles la plus adaptée au calcul du moment », explique Denis Butlen (2007). Ipso facto, « délivrer un enseignement approprié au développement de ces compétences est une tâche délicate », admet le didacticien. D'autant plus que

les résultats du diagnostic qu'il a réalisé, avec la collaboration de Pézard pendant deux ans, sur les performances et procédures des élèves du CP au CM2 lors de calculs mentaux de sommes, différences, produits et quotients ont montré, qu'en dépit des erreurs fréquentes, les élèves en difficulté mobilisaient systématiquement des procédures primitives, peu économiques (comptage, surcomptage avec utilisation éventuelle des doigts) ou des algorithmes écrits⁷³ (Butlen et Pézard, 1992).

Néanmoins, ces deux chercheurs ne s'avouent pas vaincus pour autant et soutiennent qu'un enseignement spécifique permettant d'une part, « d'installer des modules de calculs automatisés et d'accroître le répertoire de faits numériques mémorisés des élèves, et d'autre part, de développer des capacités d'adaptabilité en enrichissant et en hiérarchisant les procédures de calcul de chacun, peut aider au dépassement de cette contradiction (Butlen et Pézard, 2007 ; Butlen et Masselot, 2010). Dans la réalité, les élèves en difficulté peinent à bénéficier, au même titre que leurs pairs, des effets d'une pratique quotidienne en calcul mental. Plus précisément, l'absence de prérequis conduit ces élèves à se réfugier dans des procédures coûteuses menant à l'échec, à réduire le nombre et la richesse des expériences numériques qu'ils auraient pu faire et à limiter ainsi le développement de leurs connaissances. Concrètement, les difficultés rencontrées par les élèves sont de natures diverses. Parmi celles identifiées par Perrin-Glorian (1992 ; 1993), nous pouvons en citer quelques-unes relatives au calcul mental : manque de connaissances, incapacité à appréhender les enjeux d'apprentissages, faible familiarisation avec les propriétés spécifiques des nombres, déficit dans la disponibilité de décompositions numériques, etc. De plus, un élève en difficulté ne cumule pas forcément toutes ces lacunes : certaines sont plus marquées que d'autres. Dès lors, il va sans dire que des pratiques enseignantes efficaces ne peuvent être ni uniques, ni stabilisées (Talbot, 2012). Elles seraient plutôt contextualisées et coupleraient les activités de calcul mental stricto sensu à d'autres étapes dans le processus de conceptualisation⁷⁴ tenant compte des caractéristiques spécifiques de chaque apprenant (Butlen, 2007).

D'ailleurs, il n'y a pas une seule méthode d'apprentissage et encore moins un seul type de connaissances à construire en calcul mental. En fait, comme pour les pratiques enseignantes, il existe également une variabilité intra et inter apprenante (Gardner, 1996 ; Musial, Pradère et Tricot, 2012). Pour preuve, les résultats d'une ingénierie, basée sur la production de bilans de savoirs et une explicitation de méthodes, mise au point par Butlen et Charles-Pézard (2002) et visant à développer

⁷³ L'opération est posée dans la tête.

⁷⁴ D'après Butlen et Pézard (2007), le processus de conceptualisation est le processus d'appropriation d'un ou plusieurs concepts.

la capacité d'élèves en CM2, 6^{ième} et 5^{ième} à distinguer les moments où ils doivent reproduire les automatismes de ceux où ils devraient les mobiliser pour trouver de nouvelles procédures en vue d'un éventuel réinvestissement en résolution de problèmes, ont révélé d'une part, que cet enseignement avait permis seulement à certains d'entre eux (tous niveaux confondus) d'accéder à un niveau supérieur de conceptualisation et d'autre part, « qu'il semble exister un seuil minimum de connaissances mathématiques pour que les élèves puissent s'approprier un type de formulation produit collectivement ». Pour terminer, il est important de noter qu'une pratique enseignante en calcul mental quelle qu'elle soit peut contribuer efficacement à la construction de savoirs et de savoir-faire durables si elle remplit certaines conditions: être planifiée en équipe dans des projets intra et inter-cycle cohérents (pour respecter les passages et les étapes incontournables à aborder en numération dès le cycle 2), s'inscrire dans une continuité pédagogique (pour permettre aux élèves de dépasser les seuils, définissables en termes de pré-requis, indispensables aux apprentissages) et proposer des itinéraires cognitifs variés en adéquation avec les besoins contrastés des élèves.

CHAPITRE 4 : ANALYSE DES CONCEPTS

1. Le concept de nombre

1.1. Origine

« Dieu a créé les nombres entiers, le reste est l'œuvre de l'homme ». Cette citation du mathématicien Léopold Kronecker⁷⁵ (XIX^e siècle) nous laisse à penser que le concept de nombre a une très longue histoire, peut être aussi longue que celle de l'espèce humaine. Le chercheur et didacticien, Roland Charnay (2013) nous conforte dans notre conviction puisqu'il affirme que « l'invention des nombres est une aventure collective de l'humanité » (p.5). Effectivement, « il a fallu des millénaires à l'humanité pour parvenir à les maîtriser comme instrument de pensée, pour passer des objets à l'idée de quantité, puis à celle de nombre » (Charnay, 2018, p.24).

En fait, les repères historiques donnés par Ifrah (1994) dans son ouvrage intitulé *Histoire universelle des chiffres*⁷⁶, indiquent qu'à l'origine, l'être humain n'avait pas la notion de nombre, tout au plus était-il capable de percevoir de très petites quantités, jusqu'à trois ou quatre.

Dès -20 000, l'homme du paléolithique supérieur savait déjà exprimer des quantités en considérant que chaque élément peut être assimilé à une unité. Pour preuve, les entailles laissées sur l'os d'ishango probablement pour représenter des quantités par le biais d'une association terme à terme. Par la suite, il a fallu un long processus d'abstraction créatrice pour qu'ils se détachent des objets évoqués et

⁷⁵ Cité par CHARNAY R. dans *Comment enseigner les nombres entiers et la numération décimale ? De la PS au CM2*, Hatier, Paris, 2013.

⁷⁶ IFRAH G., *Histoire universelle des chiffres*, Robert Laffont, 1994.

accèdent à l'idée de nombre pur, explique Charnay (2018). Selon lui, c'est à ce moment-là, que « les nombres ont alors pu être considérés comme de nouveaux objets (même si ce sont des objets de pensée), organisés en une suite régulière, ordonnée et sans fin ».

Dès lors, on pourrait croire que l'histoire des nombres naturels est close. Mais, il n'en est rien dans la mesure où il fallait encore inventer un système commode pour permettre aux membres d'une même communauté de communiquer à l'oral ou à l'écrit, de façon efficace, à propos des quantités à l'aide d'un nombre réduit de symboles simples. Tout compte fait, c'est vers -9000/-2000, au Proche-Orient, qu'apparaissent les premiers systèmes de numération sous forme de *calculi*⁷⁷. Certains auteurs comme Ifrah (1994) et Charbonnier (2004) considèrent que les mathématiques ont implicitement participé, au moins à l'origine, au long processus de constitution des systèmes de numération. D'ailleurs, Crump (1990) soutient que ces numérations doivent leur opérationnalisation à l'évaluation et à l'utilisation pragmatique, expérimentale et culturelle de certains principes mathématiques. D'autre part, plusieurs historiens, archéologues et chercheurs comme Guitel (1975), Ifrah (1994), Cauty (1986), Guedj (1996) et Numa Bocage ont investigué sur les numérations et leur diversité. Cependant, pour porter quelques éléments d'analyse sur notre système de numération actuel, nous nous appuierons surtout sur les investigations d'Ifrah en raison de la vaste étendue de ses travaux et sur la thèse de Mounier (2010) qui nous semble plus appropriée au contexte de notre recherche.

De manière épistémique, pour Ifrah (1994), un système de numération est une numération ayant adopté le « principe de base », c'est-à-dire un système « dont la base n'est autre que le nombre d'unités qu'il est nécessaire de grouper à l'intérieur d'un ordre pour former une unité de l'ordre immédiatement supérieur » (p.73). Ainsi, au regard de cette définition, il appert que l'historien distingue numérations concrètes (bouliers, abaqes, quipus), orales ou écrites, « selon que ce principe a été appliqué à des intermédiaires matériels, à des mots d'une langue ou à des signes graphiques ». En outre, selon Georges Ifrah, notre système de numération écrite chiffrée est le résultat d'un brassage de plusieurs langues (le sanskrit en particulier) et écritures d'où son origine indienne. Mieux encore, l'historien le classe parmi les numérations écrites de type 3, c'est-à-dire les numérations de position fondées sur des principes liées à des bases et bases annexes (la base dix est la plus fréquente, soit en base principale, soit en base annexe). En conséquence, les signes utilisés dans ce type de numération, sont également les chiffres du système ce qui nous permet d'écrire tous les nombres entiers à l'aide d'un nombre fixe et limité de dix chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Dès lors, un ordre dans les groupements doit donc être fixé dès le départ (par exemple, un, cinquante, deux mille sept cents,

⁷⁷ Ce sont des objets en argile de différentes formes représentant les unités d'un premier système de numération.

etc.) de manière à ce que la position des signes dans l'écriture apporte une indication sur le type de groupement auquel ils se réfèrent. Par exemple, dans le nombre 645, chaque signe ou chiffre a une valeur qui dépend de sa position : $645 = 600 + 40 + 5$ ou encore $645 = 6 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$ (cette dernière expression est appelée la décomposition polynomiale du nombre 645). Par conséquent, ces numérations utilisent uniquement les coefficients de l'échelle de numération à laquelle les chiffres du système font référence.

De son côté, Mounier (2010) enchérit sur l'intelligibilité de la numération écrite de position en chiffres arabes, objet d'apprentissage dès le CP, en mettant en lumière les principes mathématiques qui rendent ce système cohérent et exhaustif. Autrement dit, l'auteur cherche à comprendre pourquoi ce système de numération permet de désigner tous les nombres entiers quels qu'ils soient (exhaustion), sachant qu'une écriture chiffrée ne désigne qu'un seul nombre à la fois (non ambiguïté) et qu'un nombre ne peut être désigné que par une seule écriture chiffrée (non redondance). Pour ce faire, Éric Mounier a recours au cadre de la théorie des langages pour interpréter *a priori* la numération écrite française et montre que ce système de numération décimale de position chiffrée est étroitement lié à la décomposition polynomiale qui est elle-même associée à l'organisation d'une collection d'objets. Concrètement, le chercheur résume le processus de mise en signes des nombres entiers en trois étapes. Tout d'abord, il faut comprendre que la numération écrite de position est fondamentalement liée au fait de coder une organisation. Par conséquent, le choix d'une organisation en base dix a constitué la première étape du processus d'élaboration de notre système de numération. Ensuite, il a fallu sélectionner le code d'où l'utilisation des coefficients du développement « polynomial » (spécifique aux numérations de type 3). In fine, le processus de codage a été finalisé par le choix d'une « présentation de ces coefficients : choix de la graphie pour les chiffres (0,1, ..., 9), indication de la correspondance chiffre/ordre (chiffres écrits sur une même ligne horizontale dont la lecture de droite à gauche est à coupler à une énumération croissante des ordres ».

Par ailleurs, les particularités et l'aspect écrit de notre système chiffré permettent de communiquer dans le temps et l'espace, d'assimiler les écritures chiffrées à des objets visibles et par conséquent d'aborder un panel de problèmes et d'explorations mathématiques. Néanmoins, si le caractère spécifique de ce système donne accès à des techniques particulières de résolution de problèmes engageant les quatre opérations, en revanche, son efficacité dans la réalisation de ces opérations génère non seulement « un coût » en raison de la complexité du code (contrairement aux autres systèmes) mais en plus, elle ne se vérifie que pour des opérations assez complexes et pour des

nombres relativement grands⁷⁸. C'est cet argument que présente Mounier (2010) pour expliquer le fait que le système chiffré décimal de position ait été aussi lent à s'imposer comme outil de calcul à la population et aux scientifiques alors qu'il était déjà introduit en Occident depuis bien longtemps. D'autant plus que la concurrence durable de la numération latine a également constitué un frein à son instauration en tant que « simple » système de notation écrit des nombres désignés dans la langue maternelle.

Pour aller plus loin quant à l'origine du nombre, il nous reste à étudier la numération parlée en France car c'est en priorité par son biais que les élèves de CP y accèdent. Elle vient directement de la numération parlée latine, d'où ses racines indo-européennes. D'un point de vue historique, pour définir les systèmes de numération parlée Ifrah (1994) prend pour archétype le système d'écriture chiffré actuel à base dix mais indique néanmoins qu'« il s'agit d'un principe purement théorique, que les peuples n'ont pas tous scrupuleusement suivi à la lettre au cours de l'histoire, chacun l'ayant adapté à ses propres traditions orales et aux règles de sa propre langue » (p.76). En effet, si certaines analogies sont décelables entre les systèmes écrits et oraux (prépondérance des nombres cinq, dix, vingt, soixante, recours aux mêmes ordres, aux mêmes coefficients et à la même mise en signe), des divergences, telles que des irrégularités et une plus grande variété dans la mise en mots dans les systèmes parlés, sont bien présentes.

De manière analytique, Collet et Grégoire (2008) décrivent notre numération parlée comme un système symbolique verbal composé de primitives lexicales qui isolément réfèrent à une quantité. Sous l'appellation « *primitives lexicales* », les chercheurs regroupent les mots désignant les *unités* (de un à neuf), les *noms des dizaines* (dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante), les *multiplicateurs* (cent, mille, million, milliard) et les *particuliers* (onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize). Mounier (2010) quant à lui, suit le même raisonnement mais change les termes et appelle « ces éléments du vocabulaire terminal de la numération⁷⁹ » : « les mots de base de la numération ». De la même manière, les nombres désignés par ces mots sont appelés « *les nombres de bases* ». Comme le fait remarquer Eric Mounier (2010), les nombres sont désignés soit par un de ces mots, soit par une concaténation utilisant ces mots. Par conséquent, la numération orale se construit lentement en progressant par étapes : « de nouveaux mots sont introduits au fur et à mesure des besoins des désignations des nombres de plus en plus grands, tout en utilisant des noms de nombres déjà introduits, de un à seize, puis vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, cent et enfin mille, million,

⁷⁸ Précision apportée par Mounier (2010) : « C'est-à-dire grands relativement au nombre de groupements à utiliser, ce qui dépend du système adopté ».

⁷⁹ D'après Mounier (2010), « le vocabulaire terminal de la numération correspond à l'alphabet dans la théorie des langages », p.51.

milliard », explique le chercheur (p.59). Néanmoins, il souligne que les énonciations de nombres respectent un ordre précis qu'il interprète comme le reflet d'une structure arithmétique ». Ainsi, à l'instar de Cauty (1986), Mounier⁸⁰ (2010) traduit cet ordre en règles liées à des décompositions additives et multiplicatives en démontrant que certains nombres peuvent être décomposés en somme (s) dont les termes peuvent être eux-mêmes décomposés en produits.

Dans une perspective épistémologique, Cauty (1986) associe le cadre de la linguistique à celui des mathématiques pour étudier la numération parlée en français. En fait, son analyse syntaxique consiste en « une étude de la formation des expressions numériques composées dans une rationalité arithmétique ou ordinale par concaténation de nombrants⁸¹ ou de repérants⁸² ». C'est pourquoi il qualifie cette numération parlée de « numération arithmétique (additivo-parenthésée) à caractère décimal et vicésimal ». En clair, il considère que tous les representamens sont soit des nombrants, soit des composés de nombrants analysables en termes d'addition, de multiplication et de parenthèse. Mieux encore, l'auteur distingue deux grands types de numération parlée, ordinales ou arithmétiques, sachant d'une part qu'une numération verbale peut être classée dans l'un ou l'autre type voire dans les deux à la fois et d'autre part qu'elle est régie par deux critères : la présence du principe ordinal et celle d'une ou de plusieurs opérations arithmétiques. Selon Cauty (1984), les numérations ordinales se caractérisent par le fait que « l'expression du nombre est in-analysable en termes d'opérations arithmétiques et que ces expressions ne peuvent être dites ou refléter par des processus conceptuels de nature arithmétique ». Concrètement, pour bien mettre en exergue cette relation d'ordre, André Cauty (1984) introduit la notion de comptine qu'il associe à « une liste (conventionnelle ou idiosyncrasique, parlée, écrite ou mimée) ayant la propriété que tous les items de la liste apparaissent dans un ordre stricte et immuable ». A contrario, les numérations arithmétiques sont construites à partir de composés arithmétiques par addition, multiplication ou élévation à une puissance. Fort des éléments cités supra, des travaux de Bezout et Reynaud (1821) et de l'étude linguistico-mathématique de Cauty (1986), Mounier (2010) propose sa propre analyse qu'il adapte à l'enseignement de la numération au CP. Selon lui, deux principes coexistent dans la numération parlée en France : « l'ordinal pour les nombres inférieurs à cent [...], le cardinal pour les nombres inférieurs à seize. Une zone mixte, de seize à cent, permet alors une interprétation arithmétique additive d'être plus pertinente qu'une interprétation arithmétique multiplicative, de fait puisqu'il n'y a qu'un seul type de groupement en jeu ». Dans le même ordre d'idées, il soutient l'hypothèse que l'initiation des

⁸⁰ Op.cit.

⁸¹ D'après Mounier (2010), « un nombrant est un representamen ayant une valeur numérique cardinale précise, qui n'est pas un composé arithmétique manifeste qui sert à interpréter une numération dans une vision cardinale ».

⁸² D'après Mounier (2010), « un repérant est un representamen ayant une valeur numérique ordinale, qui n'est

groupements réguliers grâce à la structure des nombres inférieurs à mille (et plus encore cent) a rendu possible la structuration de la numération en base mille.

En corollaire, les systèmes de numération écrite et parlée ont tous deux une filiation indo-européenne. À l'origine, la numération parlée a été « traduite » à partir du système de numération écrite. Néanmoins, ce dernier a évolué, au gré des époques, des utilisateurs et des problèmes à résoudre vers un système chiffré positionnel. De la même manière, le système de numération verbale s'est transformé sous l'influence de la culture, des règles propres à chaque langue et des solutions orales apportées aux problèmes rencontrés. Par conséquent, il n'existe pas de correspondance parfaite entre l'écriture des nombres en chiffres et leur verbalisation. Comme l'ont démontré de nombreux chercheurs (Brissiaud 2003, 2007 ; Mounier, 2010 ; Fayol, 2012 ; Charnay 2018), cette « non-congruence⁸³ » contribue à accroître les difficultés rencontrées pour apprendre le système d'écriture des nombres en chiffres. En effet, la base dix n'est pas mise en exergue par le système de représentation verbale pour les nombres qui font l'objet des tous premiers apprentissages (de 0 à 100). Par suite, le rythme d'acquisition des nombres et des quantités est plus lent chez les enfants occidentaux confrontés à des systèmes verbaux irréguliers que chez les enfants du sud-est de l'Asie disposant d'un système dont la base dix est saillante et facilitante pour la production des combinaisons (Fayol, 2002). En outre, la langue française, plus que les autres, complexifie davantage l'apprentissage du système de numération « *du fait que les dizaines au-delà de soixante ont des noms composés et pas des noms spécifiques comme septante, octante ou nonante, et du fait que certaines combinaisons renvoient à l'addition (cinquante-quatre, soixante-seize), d'autres à la multiplication (quatre-vingts) ou aux deux opérations (quatre-vingt-seize)* », explique Roland Charnay (p.47). À titre d'illustration, certaines erreurs des élèves, dans le passage entre nombres exprimés à l'oral et nombres écrits en chiffres résultent de leur tentative de traduction des mots entendus, comme dans soixante-dix-sept qu'ils écrivent « 6017 ». Par voie de conséquence, « *les élèves français doivent apprendre par coeur la suite des mots-nombres jusqu'à seize ce qui rend l'acquisition du nombre beaucoup plus lente pour eux que les élèves chinois, ce qui a un effet sur leurs compétences en calcul* », conclut le chercheur.

En définitif, le regard historique sur la notion de nombre, nous a permis de mieux appréhender l'évolution de son acquisition dans le temps : des quantités aux nombres, des nombres aux chiffres avec les premiers systèmes de numération et du chiffre 0 au nombre zéro. En fait, en nous donnant accès à ce qui a influé les Hommes dans leur quête pour construire les notions de numération y

⁸³ Terme utilisé par Mounier (2010).

compris les difficultés et les obstacles rencontrés, l'approche chronologique de ces processus peut avoir une résonance sur l'enseignement-apprentissage. En clair, elle nous aide à mieux comprendre pourquoi la maîtrise du concept de nombre qui semble être si simple aux premiers abords constitue une source de difficultés pour les élèves et peut donc influencer les pratiques enseignantes, notamment pour ce qui concerne les stratégies d'enseignement des nombres aux jeunes enfants.

In fine, la maîtrise de notre système de numération, qui permet d'écrire tous les nombres à l'aide de dix chiffres constitue un socle de connaissances fondamentales essentiel pour de nombreux autres apprentissages, des règles de comparaison des nombres aux techniques de calcul posé, jusqu'aux écritures à virgule des nombres décimaux. Réciproquement, si ces apprentissages sont conduits dans une perspective de compréhension des techniques ils peuvent renforcer la maîtrise de la numération décimale (Charnay, 2018). En conséquence, notre système d'écriture des nombres doit occuper une place centrale dans les apprentissages dès l'école maternelle car il constitue une étape fondamentale pour l'enseignement des mathématiques et par-delà, du calcul mental.

1.2. Définition

En partant de ce qui a été dit précédemment, le nombre semble être, comme le définit Nolwenn Guedin (2013) en psychologie cognitive, « un outil universel que toutes les civilisations ont été contraintes de mettre en place pour résoudre des situations de la vie quotidienne ». Dans le même ordre d'idées, Charnay (2018) l'associe à « un outil conceptuel efficace pour exprimer des quantités d'objets et communiquer à leur sujet ». Aujourd'hui, les mathématiciens s'accordent pour désigner les différents types de nombres par cinq grands ensembles inclus les uns dans les autres : $\mathbb{N}$ (ensemble des nombres entiers naturels), $\mathbb{Z}$ (ensemble des nombres entiers relatifs), $\mathbb{D}$ (ensemble des nombres décimaux), $\mathbb{Q}$ (ensemble des nombres rationnels), $\mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels). À simple titre d'illustration, 19 est à la fois un entier naturel, un entier relatif, un décimal, un rationnel et un réel. Ainsi, à partir de cet instant, lorsque nous utilisons le mot « nombre », nous faisons allusion aux nombres entiers naturels c'est-à-dire « les nombres les plus utilisés dans la vie courante qui permettent de dénombrer des collections d'objets, d'exprimer des quantités ou des rangs dans des listes ordonnées » (Charnay 2013).

Toutefois, définir le concept de nombre n'est pas aisé. En effet, beaucoup d'auteurs abordent des thématiques relatives à son acquisition, sa caractérisation ou sa conceptualisation...sans pour autant le définir. D'après le dictionnaire Larousse, il s'agit d'une « notion fondamentale des mathématiques dérivant du besoin de dénombrer, de classer des objets ou de mesurer des grandeurs,

mais qui ne peut faire l'objet d'une définition stricte ». Pour certains chercheurs, comme la pédagogue Stella Baruck (2003), le nombre, « objet appartenant à un ensemble de nombres », n'est ni un numéro, ni une quantité mais une idée qui permet de se représenter une quantité sans pour autant, la désigner, l'exprimer ou la représenter. En outre, selon elle, un nombre n'a pas besoin d'être chiffré pour exister car son premier mode d'expression est celui des mots (dits ou écrits). Conséquemment, il a deux écritures : l'une en mots (en numéral) et l'autre en chiffres (en numérique) transcrivant son énoncé linguistique dans le système choisi. Pour d'autres chercheurs, à l'instar de Piaget (1941), le nombre est « la synthèse de la classe et de la relation asymétrique », c'est-à-dire des structures de classification et des structures d'ordre. Cette approche du concept met en exergue deux aspects fondamentaux : « l'aspect cardinal, mobilisé lorsque les nombres désignent une quantité (deux ensembles ont le même cardinal s'ils peuvent être mis en correspondance terme à terme) et l'aspect ordinal, mobilisé lorsque les nombres désignent un rang dans une liste donnée » (Charnay, 2013). Vu sous un autre angle, « la notion de nombre relie de manière inextricable la représentation des quantités et l'ordre dans lequel elles sont engendrées. On ne peut donc parler des prétendues « dimensions » cardinales et ordinales du nombre parce qu'elles sont indistinctes. Le programme 2015 utilise toujours les mots cardinal et ordinal pour qualifier des usages et non des aspects du nombre », souligne Brissiaud⁸⁴ (2015) dans sa tentative d'éclaircissement.

Somme toute, la formalisation rigoureuse des définitions des nombres entiers s'est faite de manière tardive, dans la deuxième moitié du XIX^e siècle (Mounier, 2010). En réalité, d'après le professeur et chercheur Brice Halimi (2009), « la complexification de l'édifice arithmétique, ses profondes avancées et l'introduction de différentes sortes de nombres (généralisations successives de l'idée de nombres naturels) ont eu pour effet, par contrecoup, de demander une clarification générale, qui a pris la forme, indissociablement, d'une élucidation conceptuelle (plutôt philosophique) et d'une formalisation (plutôt mathématique) ». Nous pensons particulièrement à la tentative d'élucidation du mathématicien allemand Dedekind (1872)⁸⁵ qui, dans son essai intitulé « Continuité et nombres irrationnels », présente sa conception des nombres réels qu'il complexifie en 1887 en affirmant que « les nombres sont de libres créations de l'esprit humain, ils servent comme moyen permettant de saisir avec plus de facilité et de précision la diversité des choses ». Par la suite, des définitions purement mathématiques sont énoncées d'abord avec l'italien Peano⁸⁶ (1889) qui s'appuie sur des axiomes puis avec le développement de la théorie des ensembles considérant le nombre comme un

⁸⁴ Extrait de l'interview « Trois questions à Rémi Brissiaud : Composer-décomposer plutôt que compter-numéroter » réalisé le 9 mars 2015 par le Syndicat National Unitaire des Instituteurs et Professeurs des écoles et PEGC. Disponible sur <https://www.snuipp.fr/Trois-questions-a-Remi-Brissiaud>.

⁸⁵ BONNEVAL L.-M., « La construction des nombres réels par Dedekind », APMEP, 2008.

⁸⁶ Cité par Mounier (2010)

cardinal. En fait, ces définitions sont relativement complexes, morcelées et surtout peu adaptées aux savoirs visés par l'enseignement de la numération à l'école élémentaire. Par conséquent, nous adoptons pour notre travail de recherche la définition « pragmatique » du nombre de Mounier (2010) qu'il formule ainsi : le nombre entier « est une entité abstraite qui permet de rendre compte des quantités discrètes finies, manipulables, figurées, ou évoquées, c'est-à-dire qui permet de résoudre certains problèmes de comparaison et d'évaluation à l'aide si besoin est d'opérations élémentaires⁸⁷ » (p.26).

1.3. Conceptualisation

• Que signifie conceptualiser un nombre ?

Pour aborder cette question, le didacticien chercheur en psychologie cognitive Rémi Brissiaud et le neuropsychologue Stanislas Dehaene, dont les travaux sont souvent évoqués dans les débats relatifs aux premiers apprentissages numériques, se réfèrent tous deux à la conceptualisation du nombre chez l'adulte éduqué. L'idée sous-jacente est que de l'enfant à l'adulte, au fur et à mesure du développement et de la pratique scolaire, la représentation en mémoire des nombres se complexifie et s'organise peu à peu en un réseau mental structuré (Fayol, 1985 ; Butlen 2007). En effet, selon Dehaene (2008), « *le concept de nombre, chez l'adulte éduqué, consiste en l'intégration harmonieuse des différentes facettes symboliques* (l'écriture en base dix à l'aide des chiffres arabes, tels que « 23 » ou exprimés à l'aide de noms de nombres tels que « vingt-trois ») *et non-symboliques du nombre* (ou la quantité 13 est présentée sous la forme d'un nuage de 13 points ou d'une séquence de 13 sons) ».

Mais pour Brissiaud (2003), cela ne suffit pas. Certes, « l'adulte cultivé qui a conceptualisé le nombre désigné à l'oral par le mot-nombre « huit » sait lire et écrire le chiffre « 8 », construire une collection de 8 objets, taper 8 fois dans ses mains ... », confirme-t-il. Néanmoins, le didacticien fait également remarquer « qu'un adulte sait exécuter ces tâches de différentes façons : compter 1 à 1, bien sûr, mais aussi réunir 5 objets et encore 3, ou bien 7 objets et encore 1, savoir taper 8 fois dans ses mains sans compter 1 à 1 mais en rythmant son geste sous la forme 2, 2, 2 et encore 2, etc. ». À vrai dire, Rémi Brissiaud (2003) considère que « conceptualiser les premiers nombres nécessite d'être capable d'abstraire les unités numériques des collections correspondantes pour rendre compte de leur totalité ».

Pour clarifier son propos, l'auteur propose un dialogue type susceptible d'aider l'enfant à « *abstraire les unités numériques* » où l'adulte lui dit : « *Tu vois, il y a trois chiens, comme ça* », tout

⁸⁷ « Les opérations sont définies comme une abstraction des actions pouvant être codées à l'aide des signes opératoires usuels. Les problèmes que nous envisageons sont ceux décrits par Vergnaud (1991) et repris par Fénichel (2004-2005), ils concernent tous des collections manipulables, figurées ou évoquées », in Mounier (2010), p.27.

en construisant une collection-témoin de trois doigts. L'enjeu principal de cet échange étant que l'enfant comprenne que le mot « trois » a une signification quantitative et qu'il s'interroge sur la cohérence existant entre la quantité de chiens dont on lui parle et les doigts qu'on lui montre. De l'avis de Brissiaud, une telle situation peut conduire l'élève à faire abstraction « des unités numériques » correspondant à la collection de chiens car elle lui permet de se rendre compte qu'en montrant ses doigts, l'adulte ne se préoccupe pas des chiens en tant que tels mais de leur nombre. Et cela, « d'autant plus facilement que chacun d'eux aura été dénommé (« un ») et mis en correspondance terme à terme avec un doigt ».

Dès lors, nous pourrions penser que la conceptualisation des premiers nombres impose l'enseignement-apprentissage d'une correspondance terme à terme explicite. Cependant, en appui sur les travaux de Descouedres (1921) sur le développement de l'enfant et ceux de Briand (1993) sur l'énumération, Rémi Brissiaud (2003) montre que conceptualiser les nombres « nécessite, de façon plus générale, d'énumérer les unités, c'est-à-dire de les prendre toutes en compte une fois et une seule » (p.25). Toutefois, il minore l'intérêt de la correspondance terme à terme explicite en prouvant qu'elle n'est pas la seule possibilité de prendre toutes les unités une fois et une seule et suggère que l'énumération peut aussi se faire à l'aide d'une stratégie de décomposition-recomposition. En guise d'illustration, lorsque l'élève a reconnu un nombre dans une collection, il peut énumérer la totalité de cette collection en s'exemptant d'une énumération unité par unité, s'il inclut ce qu'il a déjà reconnu au préalable dans le processus d'énumération : « là, il y en a deux et il faut encore prendre en compte... ».

Aux dires de Brissiaud (2003), l'accès au niveau de la conceptualisation des nombres requis par l'école passe par l'acquisition de stratégies de décomposition-recomposition. En effet, « les mots-nombres et leurs écritures chiffrées symbolisent des équivalences entre des procédures de comptage et des procédures de décomposition-recomposition » (p.26). Par conséquent, « l'élève qui ne s'est approprié que les procédures de comptage n'a parcouru qu'un petit bout de chemin vers le nombre », explique-t-il. Autrement dit, conceptualiser un nombre, c'est être capable d'établir l'équivalence entre les procédures de comptage et celles de décomposition-recomposition. Toutefois, le chercheur rappelle que le mot « stratégie » désigne une procédure quand elle est choisie parmi un ensemble de possibles ».

En somme, « avoir conceptualisé le nombre 8, c'est accéder à un comportement stratégique dans la formation d'une collection comportant 8 unités » conclut le chercheur. Plus précisément, conceptualiser un nombre c'est d'une part, disposer de procédures de décomposition-recomposition

pour dénombrer ou construire une collection correspondant à ce nombre et d'autre part, choisir celle qui convient le mieux selon le contexte ou les critères préétablis (économie, fiabilité, etc.). Reste maintenant à savoir comment l'enfant acquiert le concept de nombre.

Comment l'enfant conceptualise-t-il les nombres ?

Depuis près d'une centaine d'années, de nombreux chercheurs ont réalisé des études et mis au point des méthodes d'observation pour mieux comprendre, comment, par quelles voies et avec quelles difficultés, l'enfant élabore ses premières habiletés numériques. D'ailleurs, s'il fallait n'en citer qu'un, Fayol (2012) établit une synthèse complète de tous ces travaux dans son ouvrage intitulé *L'acquisition du nombre* ». Dans les années 60-70, les pratiques d'enseignement concernant l'approche des nombres, au début de l'école primaire, étaient influencées par les travaux d'un célèbre psychologue genevois, Jean Piaget, qui soutenait à l'époque que l'intelligence de l'enfant se développait selon une succession déterminée de stades. Persuadés que « le nombre ne peut être compris que si une quantité demeure constante quelle que soit la disposition des unités qui la composent », Piaget et Szmeninska (1941) consacrent alors une partie de leurs études à ce qu'on appelle la conservation des quantités. Selon eux, « la mise en place du concept de nombre suppose la synthèse des opérations de classification⁸⁸, et de sériation⁸⁹ ainsi que la maîtrise de la conservation des quantités⁹⁰ », explique (Charnay⁹¹, 2013). Dès lors, émerge l'idée d'utiliser comme critère d'acquisition de la quantité le fait que les enfants soient « conservants ». L'expérience correspondante est bien connue : au départ, l'expérimentateur dispose 8 jetons noirs alignés devant lui et demande à l'enfant de prendre autant ou « pareil » de jetons gris en assurant la correspondance terme à terme entre les jetons. Puis, dès que l'enfant a construit la rangée, l'expérimentateur transforme sa configuration en écartant les jetons. Pour finir, il lui demande s'il y a « plus de noirs, plus de gris ou pareil » (voir schéma 1).

⁸⁸ D'après Charnay R. (2013), la classification est « l'opération de pensée qui permet de regrouper des éléments qui ont un caractère en commun (qui fait qu'ils se ressemblent d'un certain point de vue).

⁸⁹ D'après Charnay R. (2013), la sériation est « l'opération qui consiste à ordonner des éléments en fonction d'un critère (la longueur pour des baguettes, la quantité d'objets pour des collections ».

⁹⁰ D'après Charnay R. (2013), la conservation des quantités est « l'opération de pensée qui permet d'assurer l'invariance de la quantité lorsqu'une collection d'objets est modifiée dans son apparence, par exemple lorsque les objets sont rassemblés ou dispersés. Cela suppose, en particulier, la réversibilité de la pensée, c'est-à-dire la capacité à imaginer l'action inverse de celle qui a conduit à la modification de la collection ».

⁹¹ Op.cit.

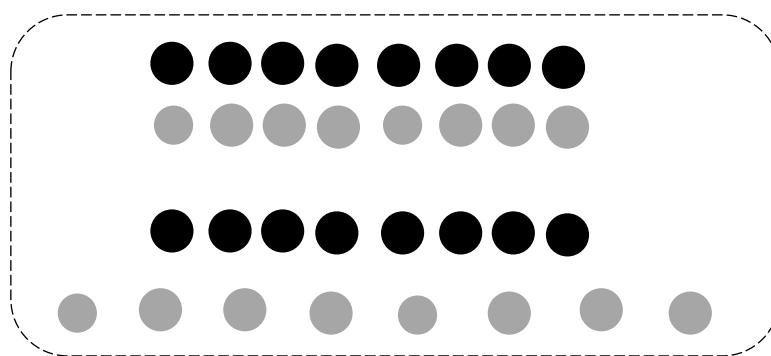


Schéma 1 : Un exemple d'épreuve de conservation, Charnay 2018.

Jusque vers six ans, les élèves répondent que la rangée de jetons écartés en contient plus. Par conséquent, la conception piagétienne sous-tend que la reconnaissance de l'égalité des quantités est conditionnée par la coordination de compétences logiques (classification, sériation) qui ne sont, selon lui, affirmées chez une majorité d'enfant que vers l'âge de sept ans. En d'autres termes, « dans cet esprit, un nombre naturel est conçu comme une propriété des ensembles qui permet de les regrouper l'un avec l'autre : deux ensembles sont considérés comme équivalents, du point de vue du nombre, si on peut réaliser entre eux une correspondance terme à terme. Le concept de nombre naturel sous-jacent à ce choix d'enseignement correspond à la définition du nombre naturel donnée dans la théorie des ensembles comme cardinal d'ensembles finis qui peuvent être mis en bijection (la bijection étant utilisée en classe par le biais de la correspondance terme à terme) » (p.24), analyse Charnay (2013). À cet égard, beaucoup de pédagogues ont préconisé d'attendre que l'enfant ait atteint la conservation de l'extension des collections pour enseigner la quantité ou le nombre (Brissiaud, 2003). De ce fait, l'étude des nombres a été reléguée au début du CP et de nouvelles activités pédagogiques dites pré-numériques telles que le classement et le rangement d'objets ou encore la correspondance termes à termes entre collection d'objets ont été mises en place (Charnay, 2018).

Par la suite, d'autres travaux (Gréco, 1962 ; Meljac, 1979 ; Barouillet et Camos, 2006 ; Dehaene, 2010 ; Fayol, 2012) remettent en cause le fondement, la méthodologie ainsi que l'interprétation de l'épistémologie piagétienne et amènent ainsi à repenser les propositions didactiques à l'école maternelle. Selon Piaget, le nouveau-né ignore tout du nombre. Toutefois, « les données cumulées au cours des trente dernières années suggèrent l'existence d'intuitions innées, souvent considérées comme héritées de l'histoire des espèces, qui guideraient l'enfant dans ses acquisitions et apprentissages mathématiques ultérieurs », soutient Fayol (2015). S'appuyant sur les travaux de Odic, Feigenson et Halberda, (2013), il décrit ces intuitions comme une « capacité présymbolique, portant sur la perception des grandeurs (longueurs, aires, volumes, mais aussi, intensité sonore et lumineuse, etc.) et des quantités (collections d'objets ou d'entités individualisées), les deux étant vraisemblablement initialement traitées de manière similaire (en fonction des caractéristiques

perceptives) » (p.2). En outre, d'après Michel Fayol (2015), cette capacité présymbolique donnerait elle-même, dans les mois qui suivent la naissance, accès à deux habiletés. Premièrement, la discrimination des quantités : les bébés et très jeunes enfants peuvent distinguer une entité de deux entités quelconques et, deux de trois. Deuxièmement, les relations de taille entre quantités : les nouveaux-nés seraient capables de différencier de grandes quantités ou grandeurs à condition que le rapport des deux quantités ou grandeurs équivaut à 3 (par exemple 18 et 6), puis 2 (18 et 9), avec un perfectionnement progressif tout au long du développement. De l'avis de Dehaene (2009), cette « capacité de base » rendrait également le jeune enfant capable d'estimer approximativement, de comparer rapidement des grandeurs ou des quantités et des percevoir des ajouts, des retraits de très petites quantités (jusqu'à 3) ainsi que leurs effets.

Par ailleurs, les travaux de Piaget accordaient beaucoup d'importance au fait que les capacités logiques précèdent nécessairement les capacités numériques. En réalité, l'expérience conduite par Douglas Clements et rapportée par Fayol (2012) a montré qu'à quatre ans et demi, la pratique d'activités logiques influait positivement dans le domaine de la logique mais pas dans celui du numérique alors que la pratique d'activités numériques avait un effet positif dans les deux domaines. Par voie de conséquence, « la corrélation entre accès au concept de nombre et développement des opérations logiques (en particulier classement et sériation) est contestée », insinue R. Charnay (2013). En outre, « l'idée selon laquelle la réussite aux tâches de conservation aurait un rôle crucial, plus important que la réussite à des tâches de dénombrement ou de résolution de problème ou de résolution de problèmes de réunion, de partage ou d'augmentation de collection, est battue en brèche », conclut le didacticien. D'autre part, il apparaît que Piaget a largement minimisé le rôle du langage dans l'acquisition des premières habiletés numériques. Pour Brissiaud (2003), l'usage des mots ne peut être relégué a priori à un second rôle. Le chercheur préfère substituer la conception piagétienne à une épistémologie inspirée de Vygotski et « pose comme principe heuristique fondamental que les processus mentaux sont profondément influencés par les moyens socio-culturels qui les médiatisent » (p.260). Aux dires de Fayol (2015), « l'apparition du langage (ou des systèmes symboliques en général) permet, seule, de dépasser ces limitations initiales (c'est-à-dire l'évaluation approximative des grandeurs et des quantités) en permettant d'exprimer toute quantité avec le même degré de précision » (p.3). Dans cet ordre d'idées, Baruck (1997) insiste sur le rôle du facteur langagier dans le progrès des enfants et plaide pour « un apprentissage du nombre et de la numération fondé sur la langue et le sens ».

Une quarantaine d'années après Piaget, la psychologie cognitive relance les débats relatifs aux premiers apprentissages numériques. En appui sur l'imagerie cérébrale, des neuroscientifiques tentent

de localiser les capacités numériques dans le cerveau. Pour relater la manière dont ce dernier traite les opérations fondamentales et en particulier les nombres et les quantités, ces chercheurs proposent le modèle du triple code postulant l'existence de trois types de représentations des nombres : 1°) une représentation analogique préverbale permettant à l'élève de se représenter mentalement les petits nombres ; 2°) une représentation verbale utilisée pour communiquer oralement mais également mobilisée pour le comptage un à un ou l'apprentissage de faits numériques ; 3°) une représentation symbolique ou chiffrée marquée par un système de codage simple en apparence mais très élaboré, mobilisée pour calculer des opérations en colonnes ou à l'aide d'une calculatrice (voir schéma 2).

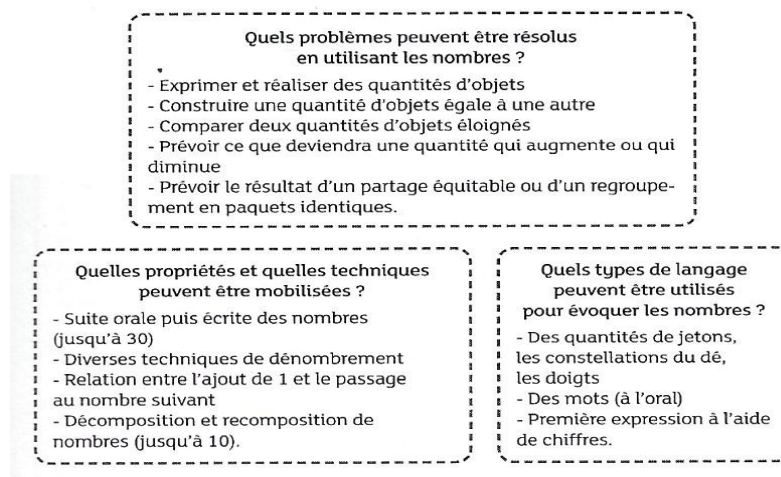


Schéma 2 : Schématisation du triple code, Charnay 2018

Comme le montrent les travaux de Stanislas Dehaene (2010), ces différentes représentations des nombres et leurs traitements correspondent bien, en imagerie cérébrale, à des zones différentes et à des circuits cérébraux spécifiques du cerveau. Aux dires de Roland Charnay (2018), « les progrès dans l'apprentissage des nombres et des calculs sont notamment marqués par la capacité de l'enfant à interconnecter ses diverses représentations » (c'est le transcodage). Dans la même veine que Piaget, Vergnaud (1994), lui, s'intéresse au contenu des enseignements et des apprentissages en mathématiques et consacre de nombreux travaux à la conceptualisation c'est-à-dire à la manière dont se forment les concepts. Selon lui, un concept n'est pas d'abord appris, il est d'abord construit par un sujet. Ainsi, il caractérise le concept par trois grandes composantes en étroite interaction que Roland Charnay (2018) résume ainsi : 1°) les situations et les problèmes qui peuvent être traités à l'aide de ce concept, ce qui lui donne sens ; 2°) les définitions, propriétés, résultats, techniques...qui le caractérisent et permettent d'opérer avec le concept ; 3°) les représentations du concept (imaginées, langagières, symboliques) qui permettent de l'exprimer et d'opérer avec lui » (voir schéma 3).

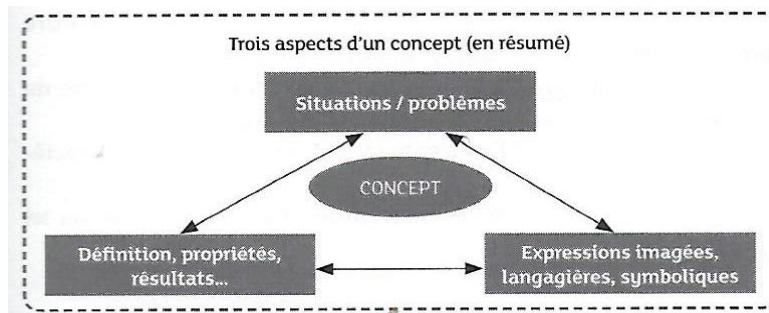


Schéma 3 : Schématisation des trois aspects d'un concept (en résumé), Charnay 2018, page 35.

D'après Charnay (2018), tout en permettant de caractériser des niveaux de conceptualisation, l'approche de G.Vergnaud, permet d'établir un programme d'actions et donc d'orienter les choix pédagogiques pour faire acquérir aux élèves chacune des composantes du concept visé. En guise d'exemple, l'auteur décrit ce qui peut être travaillé à propos des nombres en grande section d'école maternelle (5-6 ans) et en début de CP (6-7 ans) comme suit :

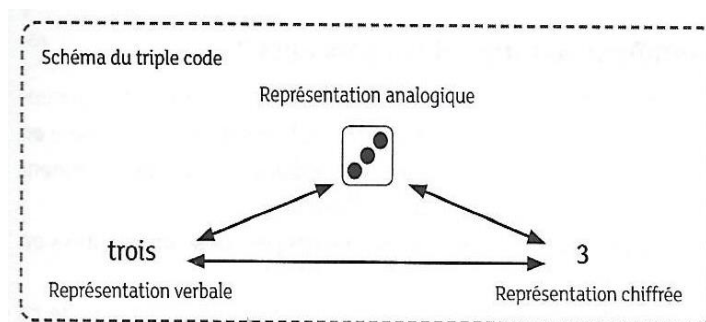


Schéma 4 : Schématisation des trois aspects du concept de nombre, Charnay 2018.

Comme nous avons pu le voir ut supra, l'aventure numérique commence dès la naissance. Très tôt, le jeune enfant est capable de faire du « subitizing » c'est-à-dire d'estimer très rapidement et de façon sûre et précise de très petites quantités (de 1 à 3 objets, parfois 4) même lorsque les configurations spatiales sont irrégulières (Fischer, 1991). Cependant, à l'instar des Mundurucu, peuplade d'Amazonie, l'amélioration de la précision des estimations chez l'enfant est tributaire de son exposition aux systèmes symboliques (les nombres) et de sa fréquentation de l'école (Piazza, Pica, Izard, Spelke et Dehaene, 2013).

Toutefois, si certains enfants sont capables dès 2 ans et demi de réciter sur demande la suite des noms de nombre en allant parfois relativement loin, ils n'arrivent pas encore à mettre en relation le comptage et le cardinal et se trompent souvent quand ils dénombrent avec trois et au-delà (Mix et al., 2012, cité par Fayol, 2015). Selon Charnay (2018), « considérer chaque objet comme autant d'unités identiques et envisager leur regroupement en une totalité dans une collection » conduisent

certes à l'idée de quantité mais ne suffisent pas pour accéder au nombre car « la pensée mathématique, comme la pensée en général, se construit par l'abstraction en élaborant des concepts » (p.73). Vu sous cet angle, le processus permettant de passer d'une collection de quatre objets au nombre 4 nécessite un travail d'abstraction qui va au-delà de l'observation de réalités concrètes et de la manipulation d'objets.

En fait, d'après l'auteur, les premières étapes de la conceptualisation, jusqu'à l'expression analogique, s'appuient sur l'abstraction conduisant à considérer chaque objet comme un « un » équivalent à chaque objet et à associer à chacun une barre ou un doigt. De ce fait, elles sont conçues assez naturellement car à ce stade, l'enfant n'a pas besoin de compter « *un, deux, trois, quatre* ». Les étapes suivantes, elles, réfèrent à la culture d'où proviennent les mots et les symboles utilisés. L'expression verbale n'évoque plus chaque objet. Elle exprime seulement la totalité par le mot « *quatre* ». Là où les choses se compliquent, c'est que pour déterminer que c'est le mot quatre qu'il convient d'utiliser ici, l'enfant doit mobiliser une compétence supplémentaire qui va se manifester de différentes manières selon ses connaissances : « compter les objets (un, deux, trois, quatre) et savoir que le dernier mot permet d'évoquer la quantité d'objets dans sa totalité ou avoir isolé un groupe de trois objets et un autre objet et savoir que un de plus que trois, c'est quatre ou encore avoir repéré deux groupes de deux fruits et savoir que « deux et deux, c'est quatre » (p.74). L'expression symbolique, quant à elle, évoque également la seule totalité et consiste à associer le symbole « 4 » à la quantité d'objets. Pour ce faire, l'élève devra donc connaître la relation existant entre ce symbole et le mot « *quatre* ».

En corollaire, bien que les enfants vivent dans cette culture, des exercices répétitifs seront pour beaucoup d'entre eux insuffisants pour acquérir le concept de nombre (Charnay, 2018). Par conséquent, l'école doit jouer un rôle primordial pour faciliter et favoriser le travail d'abstraction et de conceptualisation de mettre en réseau toutes les connaissances relatives aux apprentissages numériques. En outre, même si l'on ne peut en déduire une méthode d'enseignement, les travaux cités ut supra peuvent orienter les choix pédagogiques et donc les pratiques enseignantes pour l'apprentissage des nombres et du calcul.

2. Le concept de calcul mental

2.1. Origine

Omniprésent dans la longue histoire des mathématiques faite d'évolutions lentes et de découvertes rapides et inattendues, le calcul a depuis toujours joué un rôle primordial dans son développement pour résoudre des problèmes sans cesse renouvelés. En effet, dans son *Rapport d'étape sur le calcul*,

la Commission de réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), met l'accent sur l'intelligence du calcul aussi bien dans l'enseignement des mathématiques que pour l'invention de nouveaux concepts abstraits (dérivées premières et secondes, intégration des équations différentielles...) ou encore l'application en retour des mathématiques à la réalité (vitesse, accélération, détermination de trajectoires ou d'orbites...). Par conséquent, au regard de la diversité croissante de ses facettes et des objets qu'il engage, Georges Ifrah (1981) désigne le calcul comme « le symbole même de notre ère scientifique et technique ».

En fait, d'après lui, le mot *calcul* dérive du mot latin *calculus* signifiant *petits cailloux* en raison de leur utilisation par les Romains et avant eux les Grecs pour, à la fois symboliser, additionner ou soustraire des personnes, des animaux ou des mesures de grains. D'un point de vue historique et épistémologique, ces petits cailloux sont à l'origine d'un des plus anciens système comptable sumérien (3300 av.J.-C) connu à ce jour. Les premiers calculs ont d'abord porté sur des nombres entiers puis sur des nombres fractionnaires avec le développement des systèmes de numération (Benoît, Chemla et Ritter, 1992). Toutefois, aussi indispensable que semble être le calcul aujourd'hui, « il ne s'est introduit qu'assez tard et difficilement dans l'enseignement populaire », rappelle Buisson (1887).

En effet, jusqu'au milieu du XVIII^e siècle, les parents devaient payer pour cet enseignement dit de luxe à l'aide d'abaques, de gets (jetons), d'objets matériels quelconques ou à la plume car « l'usage des chiffres arabes était réservé aux études supérieures », explique Buisson (1887). Cependant, dès le XVI^e siècle, d'abord en Allemagne puis en France, un mode de notation plus rapide que le maniement des jetons, l'*algorithmus linealis* (*calcul par lignes*) puis plus tard le *numeratio calcularis* est appliqué. Vers la seconde moitié du XVIII^e siècle, un mouvement d'enthousiasme, dans les écoles bourgeoises, pour l'enseignement de l'arithmétique entraîne un excès de zèle qui prend différentes formes : châtements corporels pour les élèves les plus lents dans certaines écoles, mise en vers ou en musique des règles de calcul par Georges Meischneir (*arithmetica poetica*), invention de problèmes attrayants par M. Kher ou édition de livres pédagogiques rédigés par Christian Pescheck. De ce fait, le pédagogue suisse Pestalozzi tente de ramener « le calcul, comme tout l'enseignement primaire, à l'intuition, à la vue des objets concrets, aux procédés sensibles » (Buisson, 1887). À vrai dire, il va lui aussi pousser sa méthode à l'extrême et amener ses élèves à réaliser de véritables prouesses en exerçant leur mémoire et en les entraînant à la pratique des opérations usuelles mentalement et par écrit. Toutefois, en dépit de ses nombreux détracteurs, il n'est que de constater que la méthode Pestalozzi a conduit à la popularisation de l'enseignement du calcul mental, dans tous les pays et dans toutes les langues, dès l'école élémentaire.

2.2. Caractérisation

Fort de son origine, le calcul mental est encore perçu, à l'instar de M. Caboïs, inspecteur de l'enseignement primaire en 1909, comme « celui qui se fait sans le concours de l'écriture ». Il est le plus souvent réduit à « un calcul de tête » strict qui, conformément à la culture et aux pratiques anciennes associées, est dicté, effectué mentalement par les élèves selon une logistique préétablie et dont le résultat est écrit sur des ardoises levées d'un même mouvement à la demande de l'enseignant. En conséquence, « il en tire, à tort, une image d'objet suranné voir obsolète » alors qu'il ne l'est en rien, contestent les membres de la CREM (2001). Selon eux, « c'est parmi tous les modes de calcul dont nous disposons, le plus immédiatement, universellement disponible : nous en sommes en effet le seul instrument et, à ce titre, il est, de toute façon incontournable ».

En effet, admis dans les programmes depuis 1882, les auteurs (Taton, 1957 ; Lethielleux, 1992 ; Artigue, 2004 ; Butlen, 2007) désignent le concept de calcul mental, selon l'évolution des conceptions et la finalité qui lui est attribuée, sous des dénominations multiples : calcul oral, calcul rapide, calcul pensé, calcul raisonné, calcul automatisé, calcul approché, calcul réfléchi... Pour Lethielleux (1992), cette diversité terminologique n'est rien d'autre que le reflet des différentes caractéristiques du calcul mental qui serait d'ordre plus général et ferait « référence à l'effort d'attention, de mémoire, de réflexion sur les nombres et les opérations sur les nombres ». La preuve en est qu'il peut prendre diverses significations pour donner sens à la mémorisation de faits numériques, au développement des procédures originales de calcul ou encore à l'estimation du résultat d'un calcul.

En réalité, certaines expressions sont équivalentes mais sont plus ou moins usitées selon l'époque et les priorités éducatives. C'est le cas des expressions « *calcul rapide* » et « *calcul réfléchi* ». D'après Boule (2012), « l'expression calcul réfléchi est clairement préférable à celle de calcul rapide autrefois en usage » car « on signifie ainsi l'importance que l'on donne à la méthode plutôt qu'à la rapidité d'exécution, au moins en ce qui concerne les calculs complexes ». Parfois, la terminologie reste inchangée mais c'est l'acception qui évolue. Ainsi, longtemps utilisée pour relater les interrogations orales sur les tables ou les règles à appliquer de manière automatique, l'expression « *calcul oral* » était considérée comme une modalité d'évaluation des compétences de base nécessaires pour le calcul mental et écrit.

Aujourd'hui, elle est plutôt utilisée pour mentionner une technique autre que celle du calcul « posé » (Lethielleux ; 1992). En *calcul oral*, les procédures utilisées dépendent des connaissances, des routines et des capacités de mémorisation de chacun, précise la COPIRELEM (2012). Les

expressions « calcul pensé », « calcul raisonné », « calcul réfléchi » serviraient, elles, à traduire l'idée d'activité réflexive, à l'opposé du « calcul automatisé » qui correspondrait plutôt à la restitution de faits numériques ou des stratégies mémorisées et nécessiterait donc une réflexion moindre. Toutefois, la frontière entre ces deux formes de calcul reste ténue dans la mesure le calcul automatisé est une construction toujours en cours du calcul raisonné. En guise d'illustration, pour soustraire 9, on enlève d'abord 10 puis on rajoute 1 : cette procédure va d'abord faire l'objet d'une automatisation puis les résultats en émanant sont par la suite mémorisés et automatisés.

Par ailleurs, la comparaison avec le calcul « posé » mobilisant les techniques opératoires pourrait également induire une caractérisation du calcul mental. Cependant, d'après Claire Lethielleux (1992), il faudrait éviter toute approche quelque peu réductrice. En clair, « l'opposition entre les deux formes de calcul ne tient pas au fait que le calcul posé nécessite le support du papier-crayon alors que le calcul oral se passe de ce support », précise-t-elle. La distinction entre ces deux types de calcul se situe, selon elle, à un autre niveau : « le calcul posé se caractérise par l'utilisation d'une seule technique qui reste toujours identique, quelques soient les nombres, pour une opération donnée ; au contraire le calcul oral utilise plusieurs techniques de calcul ».

À simple titre d'illustration, pour effectuer la multiplication 26×12 ; à l'écrit, l'opération est posée en colonnes (soit une technique). À l'oral, au moins quatre méthodes permettent d'arriver au résultat :

- (1) $26 \times 12 = (26 \times 10) + (26 \times 2) = 260 + 52 = 312$;
- (2) $26 \times 12 = (20 \times 12) + (6 \times 12) = 240 + 72 = 312$;
- (3) $26 \times 12 = (26 \times 2) \times 6 = 52 \times 6 = (50 + 2) \times 6 = 300 + 12 = 312$;
- (4) $26 \times 12 = (25 + 1) \times 12 = (25 \times 4 \times 3) + 12 = 312$;

Boule (1997) s'accorde avec Lethielleux sur le manque de pertinence d'une association simpliste du calcul posé à l'utilisation du papier et du crayon mais justifie son point de vue par un tout autre raisonnement. « Le calcul mental [affirme F. Boule] est un calcul sur les nombres plutôt que sur les chiffres ». En effet, le calcul « posé » utilise des algorithmes usuels qui mobilisent chaque chiffre du nombre sans tenir compte de l'ordre de grandeur ou des propriétés arithmétiques alors qu'a priori les procédures de calcul mental sont induites par les nombres en jeu. Il illustre son propos avec l'exemple suivant : « Pour calculer $73 - 27$, si l'on pose l'opération, on fait agir un algorithme qui énonce des manipulations à opérer sur les chiffres des unités, puis les chiffres des dizaines. Les nombres 73 et 27 sont provisoirement perdus de vue, et aussi, par conséquent, l'ordre de grandeur du résultat » (Boule, 1998).

Du point de vue de Butlen et Masselot (2010), deux aspects du calcul mental sont à retenir : automatisme et raisonnement. D'après les chercheurs, « il convient de distinguer ce qu'il faut mémoriser ou automatiser (les tables, quelques moitiés, le calcul sur les dizaines et les centaines entières, les compléments à la dizaine supérieure...) et ce qu'il faut être capable de reconstruire (et qui relève du calcul réfléchi : idée de rendre plus simple un calcul, souvent en procédant par étapes plus nombreuses, mais en s'appuyant sur ce qui est connu » (p.33). Dans le même ordre d'idées, les membres de la COPIRELEM abordent, eux aussi, le calcul mental sous deux angles différents mais jugent plus opportun d'analyser le fonctionnement cognitif convoqué et le moyen utilisé pour calculer. Ainsi, à l'instar des programmes 2002, ils recensent deux types de fonctionnements cognitifs : le calcul automatisé consistant dans la restitution des faits numériques ou des stratégies mémorisées et le calcul raisonné⁹² qui, comme le laisse à penser son appellation, va nécessiter beaucoup plus de réflexion en engageant l'élève dans des activités intellectuelles telles que l'analyse des données, la recherche et la mise en œuvre des stratégies ou encore le contrôle des étapes et des résultats. Pour chacun des processus cognitifs cités ut supra, trois moyens de calcul sont envisagés (calcul écrit, calcul « de tête » et calcul instrumenté) ce qui rend alors possible l'appréhension des diverses procédures⁹³. Les chercheurs les synthétisent dans le tableau⁹⁴ ci-dessous :

MOYENS FUNCTIONNEMENT COGNITIF	CALCUL RAISONNÉ	CALCUL AUTOMATISÉ
Calcul écrit (papier / crayon)	Procédures construites ou reconstruites par des calculs exacts ou approchés	Techniques opératoires : calcul posé
Calcul de tête		Restitution immédiate des résultats mémorisés Mobilisation des procédures automatisées.
Calcul instrumenté		Utilisation usuelle d'instruments de calcul

Tableau 1 : Tableau de synthèse associant les types de fonctionnements cognitifs convoqués en calcul mental et les moyens utilisés pour calculer (COPIRELEM, 2012)

Au regard des éléments apportés par ce tableau, les différents types d'activités de « calcul mental », situées dans les cases grisées, sont définies en calcul automatisé de tête, qui est son acception commune, mais aussi en calcul raisonné quel que soit le moyen mobilisé. En outre, cette grille montre

⁹² Les expressions « calcul réfléchi » et « calcul raisonné » sont considérées comme équivalentes dans les programmes 2002. Les chercheurs de la COPIRELEM préfèrent la terminologie « calcul raisonné », la réflexion n'étant pas a priori absente du « calcul automatisé ».

⁹³ D'après Boule (1997), une procédure désigne « un ensemble univoque et ordonné d'actions en vue d'un but déterminé ».

⁹⁴ « Ce tableau permet de définir les différents types d'activités de « calcul mental ». Elles se situent dans les cases grisées de la grille ci-dessus : en calcul automatisé de tête, qui est son acception commune, mais aussi en calcul raisonné quel que soit le moyen de calcul mobilisé » (COPIRELEM, 2012)

également que la vérification de l'exactitude du résultat requiert l'usage du calcul mental pour rechercher l'ordre de grandeur. D'autre part, le croisement du fonctionnement cognitif et des moyens utilisés révèle que le calcul « posé » ne s'exempte pas de calcul mental. En effet, « le calcul écrit a vocation d'être effectué de façon automatique ; la maîtrise de ce mécanisme, fiable quels que soient les nombres, nécessite la mémorisation de ses différentes étapes et la connaissance des tables », souligne Claire Lethielleux (1992, p.13). De même, « la technique française traditionnelle de la division omet les soustractions intermédiaires, qui relèvent donc du calcul mental », comme le fait remarquer Boule (2012).

2.3. Définition

Somme toute, maintes définitions ont été avancées, au travers de cette variété d'expressions, pour expliquer ce concept au regard des objectifs principaux qui peuvent être assignés à l'enseignement du « calcul mental » : développer des habiletés calculatoires et des connaissances numériques, des capacités dans la résolution de problèmes et des compétences relatives au calcul approché. Nous pensons particulièrement aux travaux de la commission permanente des IREM pour l'école élémentaire où la définition de ce que l'on entend par « calcul mental », « faire du calcul mental » ou encore à quoi il ne peut être réduit ou se limiter reste relativement complexe et morcelé. Dans ce paragraphe, nous tenterons d'appréhender d'autres approches de chercheurs mais surtout celle de Jean-François Chesné pour l'étendue de ses travaux qui semble être en adéquation avec notre thème de recherche.

Dans un premier temps, Chesné (2014) définit le calcul mental comme suit : « nous entendons par calcul mental l'ensemble des activités qui consistent à effectuer des opérations avec des nombres, essentiellement sans aide matérielle externe » (p.192). Par la suite, persuadé que le calcul mental ne se limite pas à l'exécution stricte et rapide des procédures opératoires sur les nombres dans le but de les automatiser, il étend sa définition du calcul mental « à un travail explicite sur les désignations des nombres (écrites, orales, symboliques chiffrées ou non) et un travail participant, tout ou partie, à la résolution de problèmes mettant en jeu des données numériques » (p.192). Fort de cette aperception, également soutenue, entre autre, par Butlen et Pézard (2002), Butlen et Masselot (2010) et la commission permanente des IREM pour l'école élémentaire (2012), le chercheur s'inscrit dans la lignée des chercheurs anglo-saxons et leur emprunte le concept de « number sense ».

Ce concept n'est pas, à proprement parler, associé au calcul mental. Néanmoins, il en appelle à la « la compréhension générale des nombres et des opérations, ainsi qu'à la capacité d'utiliser cette compréhension générale des nombres et des opérations pour porter des jugements mathématiques et

élaborer des stratégies utiles et efficaces » (Reys R., Reys B., McIntosh, Emmanuelson, Jonhson et Yang, 1999). Plus particulièrement, Chesné s'approprie la notion d'« inclination⁹⁵ » qu'il interprète comme « la tendance et l'envie de recourir au calcul mental, associées à la disponibilité de connaissances sur les nombres et les opérations ». L'idée-force sous-jacente étant que plus l'on est « à l'aise » avec les nombres, mieux on peut leur donner du sens et en tirer parti (Tukel et Newman, 1988).

Pour Berch (2005), le concept de « number sense » englobe les notions de connaissances, d'habiletés, de compétences, de structures conceptuelles et de procédures, de représentation mentale de la droite numérique mais aussi d'intuition, de sensation et de désir (cité par Chesné, 2014). Dès lors, il appert que la conceptualisation de cette notion nécessite une appropriation progressive des nombres dans des situations diverses et cela en l'absence des contraintes liées aux algorithmes standards de calcul (Howden, 1989). Par conséquent, il n'est plus envisageable de percevoir le calcul mental comme un simple apprentissage mais également et surtout comme une modalité d'apprentissage allant au-delà, à l'instar de Case (1998) qui décrit sa mise en action chez les élèves de la manière suivante :

« Students with good number sense can move seamlessly between the real world of quantities and the mathematical world of numbers and numerical expressions. They can invent their own procedures for conducting numerical operations. They can represent the same number in multiple ways depending on the context and purpose of this representation. They can recognize benchmark numbers and number patterns: especially ones that derive from the deep structure of the number system. They have a good sense of numerical magnitude and can recognize gross numerical errors that is, errors that are off by an order of magnitude. Finally, they can think or talk in a sensible way about the general properties of a numerical problem or expression-- without doing any precise computation » (Cité par Chesné, 2014, p.194).

En somme, Jean-François Chesné retient que les capacités d'un élève ayant acquis le concept de number sense sont similaires à celles d'un élève ayant une bonne maîtrise en calcul mental : « passage du cadre des grandeurs au cadre numérique, choix d'une procédure ou d'un registre adapté au contexte, identification de repères ou de régularités, estimation d'un ordre de grandeur afin d'éviter de donner des réponses absurdes » (p.194). Pour aller plus loin et confirmer sa dialectique, le chercheur apporte un éclairage national institutionnel à son approche en reprenant à son compte le rapport, cité ut supra, rédigé par la CREM sur le calcul. Selon lui, la notion « d'intelligence du calcul » *interfère largement avec le concept anglo-saxon de « number sense »*. En un mot, la réflexion menée par la commission confirme à l'auteur que le calcul mental va bien au-delà des connaissances et des capacités à atteindre pour elles-mêmes, non seulement en intégrant et en rendant disponible les compétences nécessaires à la résolution de problèmes mais également car il représente un élément

⁹⁵ Terme anglais

constitutif du processus de conceptualisation des savoirs numériques attendues au cours de la scolarité obligatoire. Du coup, Chesné adopte la position de la commission de réflexion et précise son acception du calcul mental en ces termes :

« Un calcul mental peut être effectué à partir d'un support ou non (le calcul à faire peut-être lu ou entendu), et produit sur un support écrit ou non (le résultat peut être écrit ou dit). L'aptitude d'un individu en calcul mental dépend de ses connaissances sur les nombres, et se manifeste en particulier par sa facilité à passer de la désignation d'un nombre à une autre en fonction du contexte. Elle dépend aussi de sa maîtrise de procédures opératoires. Elle comprend non seulement la capacité à appliquer ces procédures, à passer du cadre des grandeurs au cadre numérique, mais aussi le fait de savoir quand et comment les utiliser à bon escient, de savoir les adapter en fonction des nombres en jeu. Elle se caractérise par son efficience⁹⁶, c'est-à-dire par le fait de produire un résultat correct avec des procédures adaptées dans une durée restreinte. Elle repose sur la mémorisation de faits numériques (number facts), et sur la disponibilité de procédures automatisées. Les opérations sur les faits numériques de base comprennent l'addition, la soustraction, la multiplication et la division des nombres de 0 à 9, c'est-à-dire sur l'exécution de calculs avec des nombres entiers convoquant de manière automatisée ce qu'on appelle les tables d'addition ou de multiplication. Ces faits numériques peuvent s'étendre à d'autres nombres – entiers naturels supérieurs ou égaux à 10, décimaux, écrits ou non en écriture décimale, rationnels ou réels –, et participent à l'aisance dont un individu fait preuve en calcul mental (procedural fluency). Cette maîtrise se manifeste également lors de calculs à la main, en ligne ou posés, numériques ou algébriques, qui nécessitent la mobilisation de faits numériques. Elle se reconnaît enfin à l'habileté dont fait preuve un individu pour déterminer un ordre de grandeur, dans un objectif d'anticipation ou de contrôle d'un résultat, lors de nombreuses occasions de la vie quotidienne, même s'il n'est plus aussi utile aujourd'hui que par le passé pour un individu de savoir effectuer des calculs à la main, ou dans une phase d'appréciation d'une quantité » (Chesné, 2014, p.197).

- **Conclusion**

Nous retenons qu'un calcul mental se caractérise par le fait qu'aucun algorithme n'est matérialisé entre l'énoncé du calcul ou du problème et l'énoncé du résultat ce qui n'empêche pas le recours au support écrit pour la consigne, la formulation du résultat ou au cours du calcul. En outre, le calcul mental est optimal pour un individu spécifique à un moment donné. Effectivement, il n'y a pas de « meilleure méthode » en calcul mental car chaque individu prend des initiatives, raisonne et choisit ses stratégies de calcul en fonction de ses automatismes, capacités et représentations mentales. Par ailleurs, nous avons vu que certains auteurs considèrent le calcul mental comme une modalité d'apprentissage qui va au-delà de l'acquisition de connaissances et de capacités spécifiques (mémoriser, récupérer en mémoire ou reconstruire des faits numériques et des procédures de référence, mettre en œuvre des stratégies pour effectuer des calculs complexes, anticiper ou vérifier le résultat d'un calcul mental). En effet, les recherches ont montré d'une part que la pratique du calcul mental met à disposition de l'élève des compétences qui libèrent son espace mental (automatisation des calculs, connaissances de faits numériques) et encourage ses capacités d'initiative (reconnaissance de la variété des procédures utilisables) lors de la résolution de problèmes et d'autre part que le calcul mental permet la conceptualisation des connaissances élémentaires (comptine orale, suite des écritures chiffrées, en avant ou à rebours)

⁹⁶ Remarque de Chesné : Un algorithme de calcul posé serait quant à lui qualifié plutôt d'efficace par son caractère généralisable.

sur les nombres et des relations arithmétiques qui les lient (14 c'est à la fois $10 + 4$, le suivant de 13, le double de 7, la moitié de 28, etc.). Dans la suite, avant de passer à l'étude des cheminements cognitifs empruntés par les élèves pour faire du calcul mental, nous menons une réflexion sur les relations entre maîtrise des techniques de calcul mental, connaissances sur les nombres et résolution de problèmes à partir des données issues de la recherche.

3. Calcul mental et connaissance des nombres

Au regard du constat préoccupant avancé supra concernant la baisse des performances des élèves en calcul aujourd'hui en fin du cycle de l'école élémentaire, de nombreux pédagogues, chercheurs, didacticiens, voire responsables du système éducatif confirment cette situation potentiellement problématique. En effet, les évaluations des compétences mathématiques réalisées par la DEPP durant plusieurs années scolaires sont sans équivoques et la note de recommandation du Conseil National d'Evaluation du Système Scolaire (CNESCO) sur les premiers apprentissages des nombres et des opérations à l'école primaire fournit des chiffres relativement alarmistes sur ce constat : « seuls 58% des élèves maîtrisent les compétences attendues en fin de CM2. Plus de 40% des élèves n'ont pas acquis les connaissances de base relatives au calcul mental et aux opérations sur les grands nombres et les décimaux » (CNESCO, 2015).

Selon Brissiaud (2013), parmi les facteurs pouvant expliquer cette baisse avérée, il y a particulièrement la manière d'enseigner les nombres. Autrement dit, l'auteur préconise que « l'accès au nombre requiert à la fois que l'enfant apprenne à compter⁹⁷ et qu'il utilise des collections-témoins⁹⁸ organisées (configurations de doigts ou constellations), analogiquement « l'accès au calcul requiert à la fois l'amélioration des procédures de comptage et l'usage de collections-témoins organisées ». Plus précisément, il distingue deux processus d'apprentissage du nombre, passant soit par un comptage-numérotage, soit par un comptage-dénombrer, dont les effets pédagogiques sont très différents selon qu'on enseigne l'une ou l'autre de ces deux formes de comptage. De manière précise, il faut comprendre que la première fait obstacle au progrès vers le calcul et la deuxième le favorise. Par conséquent, l'apprentissage de la représentation numérique des quantités par comptage de un à un⁹⁹

⁹⁷D'après Roland Charnay (2013) : *Compter les éléments d'une collection, c'est l'énumérer en désignant chacun de ses objets par un nombre, dans l'ordre de la suite des mots-nombres et en commençant par un.*

⁹⁸ La collection-témoin est une représentation analogique de la quantité représentée par l'ensemble des éléments mis en correspondance terme à terme.

⁹⁹ GELMAN et GALLISTEL dans *The child's understanding of number*, Harvard University Press, 1978, définissent cinq principes du dénombrement par comptage de un à un : 1°) principe d'ordre stable : les mots-nombres doivent être récités dans un ordre fixe ; 2°) principe de correspondance terme à terme : chaque élément de la collection doit être associé à un mot-nombre et à un seul ; 3°) principe de cardinalité : le dernier mot-nombre utilisé donne le cardinal de la collection ; 3°) principe d'abstraction : l'hétérogénéité éventuelle des éléments de la collection n'intervient pas (toute collection peut donc être dénombrée, par exemple une collection de crayons de cahiers et de gommes) ; principe de non-pertinence de

(ou par accumulation d'unités¹⁰⁰) mobilise le langage. C'est pourquoi que l'enfant qui apprend la comptine numérique (chaîne numérique verbale) apprend ainsi à compter, en mettant en correspondance terme à terme, les mots nombres de la comptine avec les objets d'une collection (voir schéma 5), et ceci dès l'âge de 4 ans.

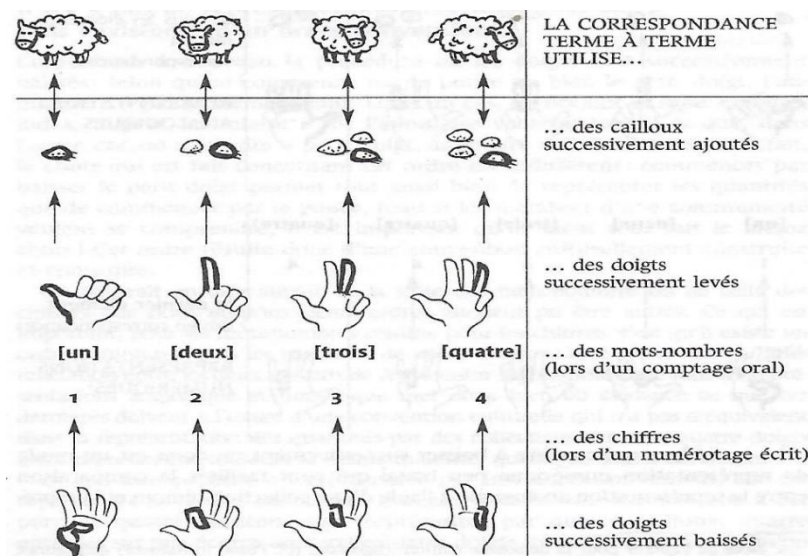


Schéma 5 : Schématisation des processus de mise en correspondance terme à terme, Brissiaud 2003.

Néanmoins, l'auteur précise que dans un premier temps, ce comptage n'est qu'un comptage-numérotage sachant que le dernier mot-nombre prononcé par l'élève reste un numéro qui n'a rien à voir avec la quantité correspondante. Par suite, ce n'est que dans un deuxième temps assez long, que l'enfant comprendra d'une part, à partir d'un comptage réussi, que le dernier mot-nombre prononcé représente la quantité totale des objets (principe cardinal¹⁰¹), et d'autre part, l'augmentation de la quantité d'objets (Charnay¹⁰², 2013), au fur et à mesure qu'il avance dans son énumération¹⁰³. Ainsi, le comptage de l'apprenant devient alors un dénombrement¹⁰⁴(voir schéma 6).

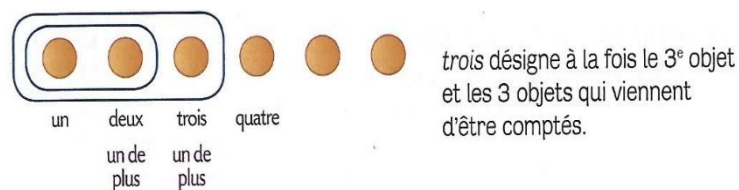


Schéma 6 : Schématisation du dénombrement par comptage de un à un, Charnay 2013.

l'ordre : les éléments de la collection peuvent être comptés dans n'importe quel ordre, In CHARNAY R., *Comment enseigner les nombres entiers et la numération décimale ? De la PS au CM2*, Hatier, Paris, 2013, p.17-18.

¹⁰⁰ Terminologie utilisée par Roland Charnay.

¹⁰¹ Principe de cardinalité : le dernier mot nombre utilisé donne le cardinal de la collection.

¹⁰² CHARNAY R., *Comment enseigner les nombres entiers et la numération décimale ? De la PS au CM2*, Hatier, Paris, 2013, p.32.

¹⁰³ D'après Roland Charnay (2013), op.cit., p.17 : *Énumérer une collection c'est la parcourir en désignant ses éléments l'un après l'autre (du doigt, du regard par pointage...), sans en oublier et sans désigner deux fois le même.*

¹⁰⁴ D'après Roland Charnay (2013), op.cit., p.17 : *Dénombrer un élément c'est en déterminer le nombre d'objets.*

Ensuite, dans le second processus d'apprentissage du nombre (comptage-dénombrement), l'élève initie son dénombrement en représentant les petites quantités par des collections-témoins¹⁰⁵ de doigts et nomme ces quantités directement sans compter (voir schéma 7).

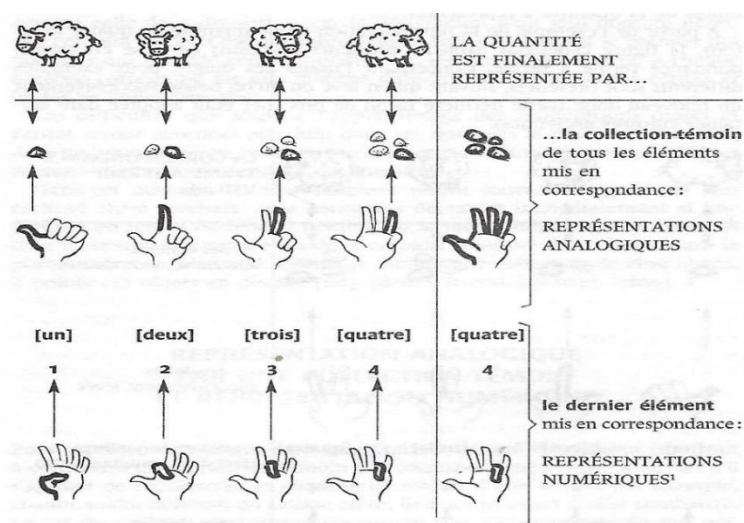


Schéma 7 : Schématisation du dénombrement de collections-témoins organisées, Brissiaud 2003.

À cet égard, nous le comprenons encore mieux avec les propos de Brissiaud (2003) : « Ce n'est que dans un deuxième temps qu'il apprend à compter pour pouvoir dénommer les collections-témoins de plus grande taille ». Certes, « l'enfant compte plus tard, mais dans son premier comptage, il sait déjà que le dernier mot nombre prononcé permet de représenter la quantité correspondante : il accède directement au dénombrement ». De l'avis de Fayol (2012), la collection organisée de doigts, à l'instar d'une mémoire externe, joue un rôle de médiateur. Il estime que cette habileté perceptivo-tactile, évaluée à 5 ans, augure les performances futures en calcul des élèves à ce même âge mais également à 6 ans, voire même à 8 ans. Dans le même ordre d'idées, Charnay (2013) démontre que l'usage des doigts pour représenter des objets de nature très différente peut être utile d'une part, pour favoriser une certaine abstraction et d'autre part, pour accompagner certains calculs (« par exemple pour trouver la décomposition $8 = 5 + 3$ à condition que la figuration à l'aide des doigts soit disponible très rapidement »). Mieux encore, le recours aux doigts, aux constellations usuelles ou à d'autres organisations (par exemple appuyées sur les doubles), « permet outre une figuration rapide des nombres, la mise en évidence de relations arithmétiques » (Charnay, 2013, p.31), rajoute-t-il (voir figure 4).

¹⁰⁵ D'après BRISSIAUD R. (2003), *Le mot « témoin » qui figure dans cette expression souligne la nature symbolique du procédé : une collection de traits gravés sur la paroi d'une prison, par exemple, « témoigne » d'un nombre de jours de leur emprisonnement ; une collection de billes d'argile enfermées dans une jarre témoigne par sa « taille » d'un nombre de berbis (procédé utilisé en Mésopotamie, par exemple)...*

Autrement dit, « l'emploi de collections-témoins organisées telles que les doigts ou les constellations facilitent le calcul pensé parce qu'il favorise la mémorisation des relations numériques utilisées par le calcul pensé » (Brissiaud, 2003, p.162). En fait, la maîtrise des nombres entiers naturels, comme le remarque Roland Charnay (2013), « ne peut être isolée de celle du système de numération qui permet de les exprimer, ni des calculs qui permettent d'opérer avec ces nombres » (Charnay, 2013,). D'après lui, il est facile de montrer comment la numération décimale intervient fréquemment dans la conduite d'un calcul réfléchi : « par exemple, pour multiplier mentalement 15 par 12, on peut multiplier 15 par 10, puis par 2 et ajouter les deux résultats. On fait appel alors principalement à la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition, mais aussi à la décomposition additive de l'un des nombres (ici 12 en appui sur 10 ». On a utilisé $15 \times 12 = 15 \times (10 + 2) = (15 \times 10) + (15 \times 2)$. Il faut donc être capable de multiplier directement 15 par 10.

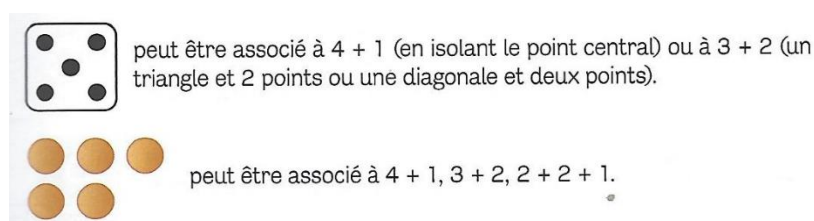


Schéma 8 : Mise en évidence des relations arithmétiques à partir des constellations, Charnay 2013.

A l'égard de ce qui vient d'être dit, Butlen (2007) prolonge la réflexion sur les liens entre connaissances sur les nombres et la maîtrise de techniques de calculs en s'appuyant sur l'analyse des performances des élèves de l'école élémentaire lors des activités additives et multiplicatives. En fait, pour interpréter les données recueillies, le chercheur s'appuie sur la synthèse des travaux de psychologues anglo-saxons, Fayol (1985) et Fischer (1987), car ces recherches, particulièrement celles de Fayol tendent à montrer une corrélation entre l'évolution de la structuration en mémoire des données numériques et la pratique scolaire des opérations. Ainsi, tout au long du développement de l'enfant et de la pratique scolaire, la représentation de la suite numérique en mémoire à long terme se complexifie et se structure peu à peu en un réseau mental organisé jusqu'à ce qu'elle soit similaire à celle d'un adulte. Fischer, quant à lui, continue à croire que seul un travail régulier et systématique de calcul mental garantit l'automatisation de calculs élémentaires à l'instar des travaux d'Allardice et de Ginsburg (1983) concernant les non-automatisations comme source de difficulté pour les élèves.

En somme, Butlen (2007) conclut sur ce point en préconisant que « la disponibilité de certaines procédures parfois mieux adaptées aux calculs mentaux dépend de plusieurs facteurs et en particulier de la familiarité des élèves avec les décompositions des nombres (additives ou multiplicatives) susceptibles d'être appelées », donc, construite lors d'activités spécifiques visant à

installer des automatismes (Butlen, 2007, p.53). Dans la continuité, convaincu du développement dialectique de la maîtrise de techniques de calcul mental, des connaissances des nombres et des opérations, l'auteur s'associe à Pézard (qui est cet auteur ?) pour préciser sa conception en annonçant que le calcul mental « semble être un moment privilégié de l'apprentissage pour enrichir les conceptions numériques et leur domaine de disponibilité, accroître la familiarisation de l'élève avec les nombres et les opérations, faire fonctionner et s'approprier les propriétés des opérations, enrichir, diversifier, étendre les procédures de calcul » (Butlen et Pézard, 2000).

Par la suite, ils confirment cette hypothèse par la mise en œuvre et l'analyse des effets d'une ingénierie reposant sur une pratique intensive du calcul mental dans plusieurs classes de cycle 3 et au début du collège. En effet, pour trouver une nouvelle procédure plus rapide, l'élève, contraint de laisser de côté les algorithmes écrits, doit à la fois manipuler les nombres pour les exprimer de différentes manières et adapter ses stratégies en fonction des nombres intervenant dans les calculs. Autrement dit, le calcul mental, comme le remarque Lethielleux (1992), offre systématiquement l'opportunité de s'entraîner à la traduction de la numération orale¹⁰⁶ en numération écrite¹⁰⁷ (c'est le cas dans les dictées de nombres), au passage d'un code à l'autre (le nombre est dicté à l'oral et le résultat écrit), ainsi qu'à l'emploi et au changement de désignations variées des nombres : les décompositions additives¹⁰⁸ et multiplicatives¹⁰⁹.

Concrètement, l'auteur ainsi montre la diversité des désignations numériques utilisées, leur relation avec la numération décimale et l'intérêt du calcul mental pour la connaissance et l'utilisation de ces décompositions en illustrant son propos comme suit :

« L'écriture $24 + 8$ représente un nombre, elle n'est pas une opération à effectuer ; ce nombre peut d'ailleurs s'écrire autrement 32 mais aussi 4×8 ou 2×16 ou $40 - 8$ ou $96/3$. L'égalité exprime exactement que toutes ces écritures désignent le même nombre :

$$24 + 8 = 32 = 4 \times 8 = 2 \times 16 = 40 - 8 = 96/3.$$

Les exercices de calcul mental nécessitent l'emploi de désignations variées et surtout le changement de désignations. Par exemple, le calcul conduit ainsi :

$$48 + 36 = (48 + 2) + 34 = 84 \text{ utilise une décomposition additive de } 36, 36 = 2 + 34.$$

$$\text{Le calcul de } 175 - 36 = (175 - 30) - 6 = 139 \text{ utilise une autre décomposition additive de } 36, 36 = 30 + 6. \text{ Ou } 175 - 36 = (175 - 40) + 4 = 139 \text{ utilise une écriture de } 36 \text{ sous la forme d'une différence } 36 = 40 - 4.$$

$$\text{De même } 15 \times 36 = 3 \times 5 \times 4 \times 9 = 27 \times 20 = 540 \text{ utilise une décomposition multiplicative de } 36, 36 = 4 \times 9. \text{ Ces décompositions sont en général choisies en liaison avec les groupements utilisés dans la}$$

¹⁰⁶ « La numération orale est caractérisée par l'utilisation des mots-nombres, par exemple deux cent trente-neuf ou quatre-vingt-treize, dans lesquels le mot-nombre est porteur de sa valeur (cent, trente, neuf, vingt, treize...) » In LETHIELLEUX C., *Op.cit.*, p.18.

¹⁰⁷ « La numération écrite est caractérisée par l'utilisation de l'écriture des chiffres, par exemple 39 ou 93, dans lesquels la position du chiffre permet de retrouver sa valeur : le 3 de 39 représente 3 dizaines, c'est-à-dire 30, le 3 de 93 représente 3 » In LETHIELLEUX C., *Op.cit.*, p.18.

¹⁰⁸ Décompositions additives : sous forme de sommes ou de différences

¹⁰⁹ Décompositions multiplicatives : sous forme de produits ou de quotients

numération décimale : il s'agit de faire apparaître la dizaine ou centaine supérieure, ou inférieure ou décomposer les nombres selon ces mêmes groupements ».

De plus, l'originalité des procédures conduit l'élève à changer l'ordre des termes d'une addition (commutativité de l'addition) ou des facteurs d'une multiplication (commutativité de la multiplication), à additionner ou multiplier trois nombres sans se soucier de l'ordre de traitement (associativité de l'addition et de la multiplication) et à utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction pour calculer mentalement des produits. Ainsi, par voie de conséquence, l'élève, qui calcule mentalement, se familiarise avec les nombres et leurs désignations, explore et mobilise alors les diverses propriétés des opérations. Par ailleurs, si la pratique régulière du calcul mental « contribue à une meilleure compréhension des opérations numériques et de leurs propriétés principales et de toutes connaissances nécessaires en particulier à l'amélioration du calcul écrit ou instrumenté » c'est avant tout parce qu'elle vise à établir et renforcer les représentations des nombres en mémoire, déclare Boule (2012, p.19). En fait, progressivement enrichi et utilisé pour l'élaboration de nouveaux faits numériques, le répertoire mis à disposition affleure soit par rappel immédiat soit par rappel par association, « la création et le maintien de l'intensité de la force d'une association en mémoire à long terme [dépendant] non seulement de la fréquence de son activation, mais aussi des associations connexes qui permettent de la renforcer », explique Descaves (2007). En d'autres termes, « la sélection d'une procédure reposerait à la fois sur la vitesse relative des différentes procédures disponibles mais aussi sur l'histoire même de la procédure, notamment de ses réussites antérieures, du contexte où elle doit être mobilisée et du coût de sa mise en œuvre » (Lemaire et Arnaud, 2004). En corollaire, à la lumière des relations dialectiques existant entre sens et techniques, la pratique régulière du calcul mental apparaît comme un moyen d'acquérir des techniques et d'obtenir un résultat mais aussi un levier pour tester, produire, enrichir et développer la connaissance des nombres. De manière réciproque, la maîtrise de la numération décimale de position conditionne l'apprentissage du calcul mental.

4. Calcul mental et résolution de problèmes

Précédemment, nous avons vu que le calcul mental était au centre du processus de conceptualisation des nombres. Comme l'a indiqué Tournès (2007), « c'est le calcul qui construit chez les enfants un univers mathématique dont les objets ne sont pas entièrement définis et ne peuvent pas l'être. Il en va de même à tous les niveaux de la scolarité comme dans l'histoire : ce sont les algorithmes de calcul qui définissent les nouveaux objets mathématiques et leur confèrent, au moins provisoirement de l'existence » (p.44). Par conséquent, tout ce qui précède, du concept de nombre à celui de calcul mental en passant par les liens entre calcul mental et développement des connaissances

numériques, est de nature à nous persuader que les pratiques de calcul mental, reflétant de multiples manières l'intelligence du calcul à l'école et mettant directement en jeu les propriétés des nombres et des opérations, ne peuvent constituer un but en soi.

Au regard des travaux de Roditi (2015), on calcule pour résoudre des problèmes numériques, mais cela ne consiste pas seulement à effectuer un calcul (i.e. poser une opération) et à rédiger une phrase de solution. En effet, pour résoudre un problème numérique, les élèves doivent se représenter une situation, effectuer, ce que l'auteur appelle un calcul relationnel, c'est-à-dire une mise en relation à l'aide d'opérations des grandeurs en jeu dans le problème à résoudre, planifier des actions dont des calculs numériques et à l'issue de ce calcul, contrôler le résultat pour sa valeur et pour sa cohérence avec le problème posé. Concrètement, « les travaux qui ont tenté d'établir le lien éventuel entre les techniques opératoires, les compétences que les élèves ont à trouver un résultat en effectuant un calcul et celui qu'ils auraient à résoudre un problème numérique, aboutissent finalement à des résultats montrant que ces liens sont assez peu étroits » tel que l'a expliqué Éric Roditi, lors de sa conférence sur « Le calcul et l'intelligence du calcul ». Pour aller dans le même sens, le chercheur rappelle également qu'à l'époque du certificat d'études, beaucoup d'élèves réussissaient les épreuves de calcul malgré des lacunes de base en résolution de problèmes. Inversement, on trouve, aujourd'hui, des élèves avec beaucoup de difficultés à calculer mais qui néanmoins arrivent à résoudre un problème à l'aide d'un outil électronique.

Malgré tout, à l'exemple des propos de Jérôme Proulx (2013) corrélés aux travaux de Butlen et Pézard (1992), il faut retenir que, « le travail du calcul mental permet de faire avancer des compréhensions mathématiques, que le calcul écrit traditionnel n'arrive que peu à faire car trop souvent cadré, avec l'apprentissage de techniques et d'algorithmes qui sont suffisamment performants et qui ne font pas ressortir le penser plus loin qu'eux ». Plus encore, « tout enseignant expérimenté sait qu'il est très rare que des élèves faibles en calcul mental se révèlent performants en résolution de problèmes », certifie Brissiaud (2019)¹¹⁰ dans son plaidoyer sur « Les recommandations de Blanquer et la résolution de problèmes arithmétiques à l'école » publié en ligne.

D'ailleurs, pour certains auteurs, le lien entre la pratique du calcul mental en classe et le développement des habiletés de résolution de problèmes est bien établi, aussi bien en France (Butlen et Pézard, 1992, 2000 ; Douady, 2004) qu'aux États-Unis (Schoen et Zweng, 1986), qu'au Japon (Reys et Nohda, 1994) ou encore en Angleterre (Thompson, 2000, 2009 ; Threlfall, 2002, 2009). Pour

¹¹⁰ BRISSIAUD R., « Rémi Brissiaud : Les recommandations Blanquer et la résolution de problèmes arithmétiques à l'école », L'EXPRESSO, Billet du 17 mars 2019. Consulté en ligne sur :

d'autres, à l'instar de Fayol (2007) ou Brissiaud (2019), l'habileté en calcul mental est « un déterminant de la réussite en résolution de problèmes ». En effet, d'après Rémi Brissiaud (2019), cela s'explique aisément car, « le calcul mental est un domaine privilégié pour permettre aux élèves de s'approprier les connaissances conceptuelles qui sont indispensables à la résolution de problèmes arithmétiques ».

En d'autres mots, résoudre un problème peut se résumer ainsi : comprendre la situation, faire usage de propriétés conceptuelles et calculer. Plus précisément, par « propriétés conceptuelles » d'un domaine de connaissance, l'auteur entend l'ensemble des connaissances structurant ce domaine. Dans le cas par exemple de l'addition/soustraction, les propriétés conceptuelles sont, pour l'essentiel, la commutativité de l'addition ($a + b = b + a$), l'associativité de cette opération (on peut réorganiser la somme de 3 termes), le complément pour calculer un manque ou une soustraction et la réversibilité de l'addition et de la soustraction ($a + b - b = a$). Par conséquent, pour formaliser sa théorie, Brissiaud s'appuie sur des recherches en psychologie cognitive (Torbeyns et al., 2011) démontrant que les adultes ne calculent pas mentalement $102 - 6$ de la même manière qu'ils calculent $102 - 94$ (retirer beaucoup). En fait, dans le cas de $102 - 6$, la démarche la plus commune revient à faire des retraits successifs en reculant sur la suite numérique : on soustrait d'abord 2 (en appui sur 100) puis 4 (le résultat est 96). Par contre, les adultes, eux, procèdent par complémentarité pour calculer $102 - 94$ en avançant sur la suite des nombres comme suit : 94 pour aller à 100, il faut 6. Et encore 2 pour aller à 102, il faut 8 en tout ($102 - 94 = 8$).

Aux dires de Rémi Brissiaud, les professeurs des écoles enseignent, dès le CP, la première stratégie (reculer sur la suite des nombres), mais rarement la deuxième. En effet, il précise « qu'enseigner la 2^{ième} stratégie, c'est enseigner la propriété conceptuelle selon laquelle un retrait ($102 - 94$) peut se calculer par une stratégie de recherche d'un complément (94 pour aller à 102) » par opposition. D'autant plus que le choix de ne pas enseigner d'emblée les deux stratégies pourraient avoir deux effets contre-productifs. Premièrement, ce choix pédagogique conduit à un enseignement sur un temps long de la soustraction qui se calculerait uniquement en reculant sur la suite des nombres, ce qui d'une part, est erroné, et de l'autre enferme les élèves les plus fragiles dans une « *stratégie de bas niveau* » entravant leurs performances futures en soustractions mentales.

Deuxièmement, le fait de ne pas mettre à profit le calcul mental pour enseigner l'une des propriétés fondamentales de la soustraction risquent de freiner le progrès des élèves les plus fragiles en résolution de problèmes soustractifs. Par conséquent, nous pouvons déduire que les compétences en calcul mental favorisent l'acquisition des compétences en résolution de problèmes grâce aux

connaissances conceptuelles qui constituent l'interface entre elles. Dans cet optique, la catégorie de problèmes désignés par Rémi Brissiaud sous l'appellation de CC-problèmes¹¹¹ revêtent un intérêt non négligeable, car leur profitabilité réside dans le fait « que leur résolution nécessite les mêmes connaissances conceptuelles que celles des problèmes classiques alors que, contrairement à ceux-ci, leur résolution ne nécessite pas la maîtrise d'algorithmes » et permettent ainsi « de tester l'accès des élèves aux connaissances conceptuelles indépendamment de leurs compétences en calcul posé » (Brissiaud, 2019)¹¹². En guise d'exemple, considérons le problème-CC suivant :

« Marie a 4 euros dans sa tirelire. Elle met d'autres euros dans sa tirelire. Maintenant elle a 31 euros dans sa tirelire. Combien a-t-elle mis d'euros dans sa tirelire ? »

Les élèves qui trouvent la solution écrivent $31 - 4 = 27$, ils utilisent la soustraction. Ce faisant, ils utilisent ce qu'on appelle en psychologie cognitive une « propriété conceptuelle » reliant l'addition et la soustraction : le nombre inconnu tel que $4 + ? = 31$ s'obtient en calculant $31 - 4 = ?$ Plus généralement : $b + ? = a$ s'obtient en calculant $a - b = ?$ Là encore, les élèves utilisent cette propriété sans la mentionner, ils ne font pas de l'algèbre » (Brissiaud, 2019).

Toutefois les CC-problèmes se distinguent des Si-problèmes¹¹³ qui eux aussi peuvent être résolus sans maîtriser les algorithmes mais permettent de simuler mentalement l'action décrite dans l'énoncé ou d'opter sur une stratégie basée sur la situation pour obtenir la solution. Plus concrètement, dans le problème-Si suivant :

« Luc a 27 euros dans sa tirelire. Il met d'autres euros dans sa tirelire. Maintenant il a 31 euros dans sa tirelire. Combien a-t-il mis d'euros dans sa tirelire ? »

Du fait que 27 et 31 sont proches, les élèves qui trouvent la solution écrivent $27 + 4 = 31$. Ils complètent l'addition dont le second terme est inconnu : $27 + ? = 31$ (ils font cela de façon informelle, ils n'écrivent pas cette addition à trou). La solution s'obtient sans recourir à la soustraction ».

D'un autre point de vue, Fayol, Habdi et Gombert (1987) considèrent que l'action décisive du calcul mental sur les performances des élèves en résolution de problème s'explique par le modèle de fonctionnement de l'espace mental qu'ils traduisent par l'équation $ET = ES + EO$. Aux dires des chercheurs, l'espace de traitement total (ET) peut soit demeurer statique, soit croître avec l'âge du sujet au fur et à mesure du développement et de la pratique scolaire tandis que l'espace requis pour les opérations (EO) diminue en même temps que l'automatisation progressive des opérations. En fait, cette décroissance se produit en faveur d'une meilleure capitalisation des informations dans l'espace de stockage des données et de construction de la représentation associée à un problème (ES) et conduit, par voie de conséquence, à un plus haut degré de qualité de la structuration des représentations des problèmes.

¹¹¹ Le préfixe CC renvoie à Connaissances Conceptuelles.

¹¹² Op.cit.

¹¹³ Le préfixe Si renvoie à Situation ou à Simulation.

De manière empirique, Butlen et Pézard (2000) ont pu vérifier ce postulat pour une certaine catégorie de problèmes « assez familiers aux élèves mais pas trop ». Les problèmes qu'ils qualifient de familiers sont soit des problèmes additifs complexes (en particulier faisant intervenir des compositions de transformations), soit des problèmes multiplicatifs faisant intervenir une addition répétée, une division ou un calcul d'aire. En d'autres mots, c'est un problème que l'élève a déjà rencontré mais dont la reconnaissance du modèle sous-jacent (i.e. l'opération arithmétique intervenant dans le problème) n'est pas automatisée. Concrètement, quand le problème n'est pas très familier à l'élève, il apparaît que la pratique régulière du calcul mental amenuise l'espace en mémoire affecté à la gestion des opérations et au stockage des données au bénéfice de la zone dédiée à la représentation du problème. Ainsi, en libérant de l'espace mental pour la résolution de problèmes numériques, « le calcul mental améliore non seulement les habiletés calculatoires mais favorise également une prise de sens dans le cas de modèles relativement familiers aux élèves sans pour autant que leur reconnaissance soit automatisée » expliquent Butlen et Pézard (2000).

De plus, cette plus grande habileté calculatoire a également des effets sur la reconnaissance de l'opération à effectuer. Par conséquent, « les performances des élèves sont ainsi nettement meilleures lors de la résolution mentale des problèmes additifs complexes et lors de la résolution écrite des problèmes additifs complexes et des problèmes multiplicatifs simples et plutôt familiers », affirme Denis Butlen (2007). En effet, mis à part le recours plus ou moins facile au mime de l'action, Fayol et al. (1987) reconnaissent également la familiarité plus ou moins grande avec le type de texte de l'énoncé comme un facteur influant sur la représentation globale du problème numérique de type « schéma » associé à des procédures que se construit le sujet.

Dans la vie courante, l'enfant résout des situations problèmes en contexte tandis qu'à l'école la situation est décrite par l'énoncé. C'est cet argument qu'avance Michel Fayol (2007b) pour expliquer que « la résolution nécessite d'abord que celui qui traite le problème parvienne à élaborer une représentation analogique de la situation décrite, ce qu'on appelle un modèle mental » (p.49). Selon lui, l'échec ou la réussite de l'élève tient, dans un premier temps, à la construction de cette représentation mentale, autrement dit, de sa capacité à passer de la formulation langagière à la représentation de la situation. De ce fait, suite à la lecture de l'énoncé du problème, l'élève « expert » va pouvoir sélectionner et activer le schéma adéquat tandis que l'apprenant « novice », ne disposant pas de schéma en mémoire à long terme, est contraint de stocker en mémoire à court terme les données pour en élaborer une représentation globale au risque de surcharger sa mémoire de travail. À ce sujet, Villani et Torossian (2018) semblent partager cette approche quand ils affirment que « les activités routinières de calcul permettent de gagner de l'aisance, de la fluidité, de la flexibilité, d'acquérir des automatismes (destinés à libérer la charge cognitive et la mémoire de travail) » (p.28).

Mais, concrètement que signifie se représenter un problème ? « C'est d'abord se représenter un objet particulier défini par un ensemble d'informations qui nous est fourni à son propos (...). C'est aussi se représenter la tâche particulière qui est associée à cet objet », précise Julo (1985). Sachant qu'en psychologie, la notion de tâche « sert à désigner l'ensemble formé par le but, les contraintes et les aides dans une situation où la production d'une action est attendue » (Julo, 1985). Dans le même ordre d'idées, Richard (1982) définit la représentation du problème comme « l'interprétation que le sujet se donne des trois catégories d'éléments le constituant : la situation initiale, la situation terminale ou but à atteindre et les transformations (matérielles ou symboliques) permises pour y parvenir ».

De l'avis de Julo (1985), trois processus interviennent dans la construction de représentations particularisées (ponctuelles et occasionnelles liées à une situation particulière) de problèmes : le processus d'interprétation et de sélection, le processus de structuration et le processus d'opérationnalisation et, c'est pourquoi, selon lui, le tâtonnement joue un rôle favorisant dans la construction de la représentation d'un problème. En fait, même si cette construction n'aboutit pas à une procédure de résolution immédiate, les différents essais provoquent néanmoins sa transformation et son évolution. Pour clarifier son propos, J. Julo (1985) évoque deux cas permettant de mieux comprendre comment l'élève élabore des procédures de résolution. Le premier semble convenir à l'expérimentation de Butlen et Pézard (2000) présentée ut supra : il s'agit de « la mobilisation d'un prototype de problème auquel se trouvent associées des connaissances opératoires immédiatement transformables en procédures de résolution ». Le second cas équivaut à un procédé heuristique dans lequel l'élève peut agir, faire des essais, tâtonner. En clair, « il s'agit de connaissances propres à la résolution de problèmes qui ne conduisent pas directement à la solution d'un problème donné mais qui augmentent la probabilité de découvrir celle-ci » (Julo, 1985).

En pratique, pour résoudre un problème, les élèves doivent surmonter deux obstacles : reconnaître l'opération à effectuer et obtenir le résultat de cette opération. Dans les faits, un grand nombre d'entre eux baissent les bras ou écrivent « au pifomètre » une opération sans raisonner. Or, il appert que les activités régulières de calcul mental instaurent dans la classe des habitudes de recherche qui vont d'une part, inciter l'élève à « jouer sur la taille des nombres (par exemple, simplifier les données numériques), à rechercher des procédures de résolution non standards, à faire des essais, à recommencer, à accepter de faire des erreurs... » et d'autre part légitimer l'usage des procédures d'exploration et d'essai (Butlen et Pézard, 2000).

Par voie de conséquence, les élèves qui seraient inhibés par un travail écrit régit par des normes de rédaction et de présentation trop rigides pourraient, en profitant d'une pratique régulière du calcul mental, explorer rapidement différentes modalités de résolution et avancer ainsi dans la compréhension du problème sans pour autant recourir à des algorithmes parfois chronophages et énergivores. En corollaire, les habitudes de recherche instaurées par le biais du calcul mental augmentent les tentatives, fructueuses ou non, des élèves qui en donnant du sens à la question posée peuvent être décisives pour trouver la ou les procédures amenant à la réussite lors de la résolution de problèmes.

En résumé, à la lumière des travaux cités ut supra, nous retenons d'une part que la maîtrise des faits numériques permet à l'élève de développer des connaissances conceptuelles sur les opérations, le dégage des préoccupations liées au calcul et libère de l'espace dans la mémoire de travail pour la construction de la représentation du problème et d'autre part, les habitudes de recherche (essais, explorations, tâtonnement) développées par la pratique régulière du calcul mental en classe accroît leurs capacités d'initiative en résolution de problèmes.

5. Calcul mental et élèves en difficulté

Nous avons vu supra qu'une pratique régulière du calcul mental contribue, chez les élèves, à l'enrichissement des conceptions numériques et de leur domaine de disponibilité, à leur familiarisation accrue avec les décompositions de nombres, le sens et les propriétés des opérations ce qui leur permet d'optimiser, de diversifier et d'étendre les procédures de calcul dont ils disposent. De plus, l'aisance calculatoire que leur confère cet entraînement augmente leurs performances en résolution mentale et écrite de problèmes « plutôt familiers ». En effet, une plus grande habileté en calcul accélère le processus de reconnaissance de l'opération arithmétique à effectuer en réduisant l'espace en mémoire affecté au traitement opératoire au bénéfice du stockage des données et de la représentation du problème, en favorisant le développement des capacités d'adaptation (prise d'initiative, essais, habitude au changement rapide de stratégie ou de point de vue) et en assurant une meilleure maîtrise des techniques de calcul.

Cependant, les effets d'un entraînement régulier en calcul mental ne deviennent sensibles que si les élèves arrivent à dépasser une logique contradictoire, entre adaptabilité et automatisme, propre à ce type de calcul que Butlen, Charles-Pézarid et Masselot (2015) nomment le *paradoxe de l'automatisme*. D'après ces chercheurs, l'une des caractéristiques importantes des élèves qui ne réussissant pas en calcul mental est de recourir systématiquement aux procédures de calcul automatisées, tel que l'algorithme écrit simulé mentalement, au désavantage d'autres procédures

moins coûteuses plus adaptées aux propriétés des nombres et des opérations en jeu. Nonobstant, pour choisir rapidement la stratégie la plus adaptée au calcul du moment, l'élève doit à la fois disposer d'une palette de décompositions des nombres entiers ainsi que de procédures riches et accessibles.

En clair, Butlen et Masselot (2010) expriment cette contradiction ainsi : pour échapper à l'automatisme « en général » (« comportement se caractérisant par une mobilisation quasi systématique de l'élève d'un seul type de procédure quelles que soient les nombres numériques du calcul à effectuer »), les élèves doivent posséder des automatismes « particuliers » (« recours à un ensemble de faits numériques et de procédures automatisées installées en mémoire et ayant fait l'objet d'un enseignement ou d'une pratique préalable »). À vrai dire, les recherches de Butlen et Pézard (2003) et Butlen (2007) ont montré que des apprentissages spécifiques peuvent, dans un premier temps, « mettre en place des automatismes élémentaires visant à étendre le domaine des décompositions additives ou multiplicatives susceptibles d'être convoquées par les élèves et d'accroître leur disponibilité », puis, dans un deuxième temps, « en fonction des nombres et des opérations en jeu, apprendre à choisir les décompositions mobilisables dans les calculs parmi toutes celles qui sont possibles » (Butlen, 2007). Cette dernière compétence requiert, d'après ces auteurs, des institutionnalisations locales souples, assez simples : ni trop rapides, ni trop « fortes » pour faciliter l'adaptabilité ; ni trop « faibles », ni trop tardives pour que les procédures ne semblent pas équivalentes. Mais, suffisamment explicites sur les critères de choix de stratégies, car elles peuvent permettre aux élèves d'une part, de distinguer les situations où ils doivent inventer de celles où il suffit de reproduire et d'autre part, de hiérarchiser l'éventail des procédures possibles.

En réalité, un tel dispositif d'enseignement visant l'installation des prérequis défaillants s'est révélé, comme l'ont remarqué Butlen et al. (2015), relativement efficace pour les élèves de niveau moyen et moyen faible » mais « a eu nettement moins d'effets sur les apprentissages comme sur les performances des élèves les plus en difficulté en calcul comme en mathématiques en général » (p.12). En effet, « tout se passe comme si les élèves les plus en difficulté conservaient une certaine incapacité à anticiper suffisamment pour se lancer dans une procédure partiellement nouvelle, privés très souvent de travailler sur des connaissances un peu proches des leurs (dans leur zone proximale de développement¹¹⁴) », expliquent les auteurs. En clair, ces analyses démontrent que les élèves empruntent des cheminements cognitifs différents et que le facteur temps jouait un rôle important. Autrement dit, une mobilisation plus longue des procédures de calcul non expertes est nécessaire pour

¹¹⁴ Précisions apportées par BUTLEN D., CHARLES-PEZARD M. et MASSELOT P., 2015, p. 13 : Zone proximale de développement (ZPD). Ce concept central dans les travaux de Vygotsky exprime la différence entre ce que l'enfant peut apprendre s'il est seul et ce qu'il peut, en potentiel, apprendre si on (notamment un adulte) lui fournit une aide.

certains élèves en difficulté, de même qu'un temps d'apprentissage plus long assorti d'activités préparatoires spécifiques pour mettre en place d'autres procédures en partie automatisées et renforcées par un grand nombre d'explicitations et d'institutionnalisations locales (Butlen, 2007).

Parmi les facteurs à l'origine des différences constatées chez les élèves en difficulté, Denis Butlen (2004) les caractérise de deux façons différentes. D'abord par les données statistiques issues des évaluations on situ, quand il précise qu'un « un élève est diagnostiqué en difficulté à un niveau donné de la scolarité quand il échoue de manière importante voire systématique aux items d'une évaluation réussis par au moins 80% de ses pairs ». En effet, nous trouvons des corrélations dans d'autres recherches parallèles menées dans des classes faibles du primaire et du collège comme celles de Perrin-Glorian (1992, 1993), Butlen et Pezard (1992) puis Butlen et Le Poche (1997). Ensuite, l'autre façon relève des difficultés observées et définies par l'auteur en les termes suivant : un élève en échec en mathématiques est perçu comme ayant « des difficultés à capitaliser les savoirs et un manque de confiance dans les connaissances anciennes ; une certaine carence dans les représentations mentales et une absence fréquente de projet implicite de réinvestissement se traduisant souvent par une grande difficulté à identifier les enjeux d'apprentissage des situations qui lui sont proposées ; une difficulté à changer de point de vue et un manque de flexibilité cognitive s'accompagnant souvent d'une recherche de règles, voire de recettes ; et pour finir, une difficulté à accomplir les tâches complexes et une demande de relation privilégiée à l'adulte » (p.11).

Bien évidemment, un même élève ne présente pas toutes ces insuffisances. Néanmoins, certaines peuvent converger ou se cumuler sur le long terme. Par conséquent, comme l'indiquent Butlen et Charles-Pézard (2007), toutes les procédures semblent alors être, pour ces élèves, équivalentes car le contenu des institutionnalisations reste souvent, pour eux, peu compréhensible. De plus, leur incapacité à percevoir la pertinence des procédures les empêche de les mettre en relation avec les propriétés des nombres intervenant dans les calculs. De ce fait, ils s'empêtrant petit à petit dans une dynamique qui va renforcer leurs carences. Ainsi, leur faible familiarisation avec les nombres et le fait qu'ils n'arrivent pas à donner sens aux opérations et à leurs propriétés les conduisent inexorablement vers des stratégies de calculs coûteuses ou inadaptées. En fait, ces apprenants ne saisissent pas les enjeux des moments de mise en commun ou des phases d'appropriation de certaines procédures ce qui les empêchent de comprendre l'intérêt des hiérarchies effectuées. En d'autres mots, ils ne tirent aucun avantage des procédures automatisées et installées à ces occasions. Et enfin, leur usage peu fréquent des décompositions des nombres n'enrichit pas suffisamment leurs connaissances pour leur permettre de se soustraire au paradoxe de l'automatisme.

En conséquence « certains élèves faibles du cours moyen mettent durablement en oeuvre des procédures primitives (énumération, opérations « posées dans la tête ») analogues à celles utilisées par une majorité d'élèves de CE1 qui ne mettent en œuvre qu'un seul type de procédures (voire aucun) » (p.53), constate Butlen (2007) au cours d'une observation des procédures disponibles d'élèves du CP au CM2, lors de calculs mentaux de sommes, de différences et de produits.

Autrement dit, l'enseignement des techniques de calcul élémentaires, l'appropriation des décompositions additives et multiplicatives des nombres ou encore les institutionnalisations occasionnant un travail sur l'écriture des règles en incluant leur domaine de validité s'avèrent insuffisants pour combler les besoins spécifiques de ce type d'élèves. Simplement, par ce qu'ils n'en perçoivent malheureusement pas les enjeux, révèlent plusieurs recherches en sociologie (Charlot, Bautier et Rochex, 1992 ; Bautier et Rayou, 2009) et en didactique des mathématiques (Perrin-Glorian, 1992 ; Coulange, 2011). Et c'est cette imperceptibilité qui va considérablement compliquer la tâche de l'enseignant. En effet, il ne peut expliciter directement ces enjeux car cela l'obligerait à faire à la place de l'élève tout en le réduisant à une forme de mimétisme dénuée de sens. On pourrait alors, logiquement, penser à différer l'explicitation du professeur mais c'est plus compliqué que cela. Aux premiers abords, cette clarification reportée dans le temps semble être plus accessible. Mais concrètement, l'élève en grande difficulté n'y comprend rien car il a besoin de l'expérimenter dans l'action pour lui donner du sens. Par conséquent, l'enseignant va user de stratagèmes pour tenter, malgré tout de l'amener à la réussite : « proposer des algorithmes simples de résolution, des règles ou des opérations, concentrer son discours sur l'apprentissage de résultats du cours ou de savoir-faire algorithmisés, réduire les situations à des répétitions d'autres situations non menées à terme ou à des activités algorithmisées, etc. », (Butlen et Pezard, 1996)¹¹⁵.

Réalistement, « les professeurs se retrouvent alors souvent impliqués dans un cercle vicieux : celui de la simplification des situations et de la négociation à la baisse des consignes », constate Perrin-Glorian (1992)¹¹⁶. Sur ce point, Butlen et Pezard (1999)¹¹⁷ renchérisent en disant : « ce cercle vicieux va amener un appauvrissement des apprentissages et un renforcement des difficultés : l'élève se représente plus difficilement le problème, n'assume pas la responsabilité de la recherche, est réduit à un rôle d'exécutant. L'enseignant a, de plus, tendance à se limiter à un domaine, le plus souvent

¹¹⁵BUTLEN D. et PEZARD M., « Rapports entre habileté calculatoire et prise de sens dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire, *Cahier de DIDIREM* n°27, IREM de Paris VII, Université de Paris VII, 1996.

¹¹⁶ Op.cit.

¹¹⁷ BUTLEN D. et PEZARD M., « Rôle de l'écrit collectif dans la conceptualisation de notions mathématiques et dans l'acquisition de méthodes de résolution de problèmes, 1999.

numérique, rendant ainsi encore plus difficile les changements de point de vue ; il juge alors plus sage de faire le moins de mélanges possibles pour ne pas compliquer davantage les choses ». De l'avis du chercheur (2007), une remédiation, adaptée à la diversité des élèves et répondant à des critères précis, pourrait permettre à chacun d'eux d'atteindre un niveau de conceptualisation nécessaire aux apprentissages des notions mathématiques. À la fois collective et individuelle, cette remédiation devrait s'appuyer sur divers modes d'intervention. En ce sens, « une dialectique du réinvestissement et de la réussite doit s'instaurer entre les apprentissages collectifs et le rattrapage individuel ou par petits groupes » de manière à intégrer la remédiation à l'apprentissage en cours. Construite autour de situations complexes (pour donner du sens aux notions) sans exiger trop d'effort pour ne pas décourager les élèves, elle prend appui sur leurs acquis et les valorise. In fine, il faut que cette remédiation soit d'une part, initialisée assez tôt dans l'année pour mieux instituer les diverses méthodes de travail et d'autre part, étendue aux autres disciplines.

Ainsi, souhaitant rendre plus explicite les enjeux de savoir des situations d'apprentissage, Butlen et Pézard, reprennent à leur compte l'approche du concept de rapport au savoir développée par Bautier et al. (1992) pour concevoir des situations spécifiques (Butlen et Pézard 2003 ; Butlen, 2007), à partir de la mise en relation des conditions dans lesquelles les activités de calcul mental sont susceptibles d'avoir des effets positifs sur la conceptualisation de notions mathématiques ou sur la résolution de problèmes et des caractéristiques manifestées par ces élèves. D'après Bautier, Charlot et Rochex (1992), si l'on veut venir en aide à ces élèves, il faut d'abord repenser leur rapport au savoir. Selon eux, deux types de rapport au savoir coexistent : le rapport identitaire et le rapport épistémique. Le premier coïncide avec la manière dont un individu utilise ou pense utiliser le savoir. Il est donc le plus souvent déterminé par son expérience et les situations dans lesquelles il peut lui donner du sens. Le rapport épistémique au savoir, lui, est détaché de tout aspect utilitaire. Le savoir y est construit en tant qu'objet par l'intermédiaire de questions du type : « savoir, c'est quoi ? » ou « apprendre c'est quoi ? ». Néanmoins, comme le remarquent ces chercheurs, « si tout le monde a un rapport identitaire au savoir, le rapport épistémique ne semble pas toujours présent ou mobilisé, tandis que le rapport identitaire au savoir n'a pas l'air de suffire pour permettre à un élève d'être en réussite scolaire ».

En effet, persuadé que c'est l'enseignant qui lui apprend et que son rôle se limite à faire consciencieusement ses tâches, l'élève en difficulté privilégie un rapport identitaire au savoir et s'inscrit dans « une logique de la tâche vécue en extériorité, et non dans une logique d'apprentissage » (Butlen, 2007, p.118). Fort de cette approche du rapport au savoir qu'ils adaptent au domaine des mathématiques, Butlen et Pézard (2003) reprennent, ipso facto, l'idée de bilans de savoirs exploitée

par Bautier et al. afin d'élaborer et d'expérimenter une situation favorable à une distanciation de l'élève par rapport à l'action. Ainsi, dans cette perspective, les auteurs vont manoeuvrer deux leviers : la production d'un écrit collectif et le recours au débat entre élèves. En effet, pour les sociolinguistes, à l'instar de Lahire (1993) et Bautier (1996), plusieurs arguments plaident pour un usage de l'écrit comme outil de distanciation compte tenu du fait qu'il est considéré comme un moyen d'objectiver le savoir, que la formule écrite est en elle-même productrice de savoir et que « le rapport épistémique au savoir se construit plus facilement dans l'écrit » (Bautier, 1996). De plus, pour parfaire leur ingénierie, Butlen et al. (2003) inscrivent leurs recherches dans la lignée des travaux en didactique des mathématiques sur le débat scientifique (Legrand, 1990) et sur la discussion collective (Bartolini bussi, 1996) autour de la comparaison des argumentations et des éléments de preuve à propos d'un problème mathématique précis. À l'inverse, l'objet du débat, pour ces chercheurs, est d'échanger autour de situations concrètement vécues en mathématiques afin que le savoir se construise sur une dialectique subtile entre apprentissage collectif et apprentissage individuel. Il s'agit d'amener les élèves à réfléchir « après coup » à ce qu'ils ont fait, à ce qu'ils ont appris afin qu'ils repensent l'action en termes d'apprentissage à travers la création et le développement d'une mémoire collective de classe. La finalité étant de favoriser au maximum l'objectivation du savoir en jeu et l'ancrage des savoirs nouveaux dans des savoirs anciens.

Pour Butlen (2007), « chez les élèves de 11 à 13 ans, la conceptualisation de certaines notions implique et est impliquée par différentes activités de décontextualisation : généralisation, changement de contexte, formalisation, etc. qui correspondent à des degrés différents » (p.125). Sous le terme de décontextualisation, l'auteur désigne « soit l'activité consistant à extraire la notion mathématique en jeu, soit le passage d'un énoncé donné à un énoncé davantage formalisé ou plus général (par exemple quand le domaine numérique de référence est plus étendu » (Butlen, 2007, p.129).

Par conséquent, les situations de bilan de savoir qu'il conçoit avec Monique Pezard mobilisent elles-mêmes deux types de situations de rappel définies par Perrin-Glorian (1992) : l'un est opportun « à l'homogénéisation de la classe et à la dépersonnalisation des solutions grâce à des institutionnalisations locales » et l'autre ambitionne la généralisation et la décontextualisation « des formulations rencontrées à propos d'un même thème » (Butlen, 2007, p.119). On retrouve ici les éléments de l'approche de Vygotsky (1985) qui décrit le processus de formation des concepts comme « le passage d'une structure de généralisation à une autre et définit le pseudo-concept comme un équivalent fonctionnel du concept, en apparence semblable au concept, mais qui en diffère quant au mode de généralisation et de catégorisation dont il résulte » (cité par Butlen, 2007, p.125).

Plus concrètement, l'ingénierie susceptible d'induire, des tâches de contextualisation s'est déroulée sur une à deux années. Dans toutes les classes y participant, du CM2 à la 5^e, deux types de séances de calcul mental sont proposées aux élèves. Les séances d'entraînement, de courte durée (10 minutes), comprennent des séries d'exercices nécessitant des réponses rapides mais ni l'explicitation des procédures mobilisées par les élèves, ni leurs erreurs ne sont traitées systématiquement. D'autres séances plus longues sont consacrées à l'émergence, à la comparaison et à l'institutionnalisation des stratégies les plus efficaces. L'enseignant en profite également pour attirer l'attention des élèves sur le domaine d'efficacité des procédures apparaissant comme les moins énergivores. Par la suite, toutes les deux ou trois semaines, des séances de bilan de savoirs sur le domaine numérique, le calcul mental et la résolution de problèmes sont organisées.

Au début, chaque élève produit d'abord son bilan de savoir. En fait, il extrait la notion mathématique en jeu dans l'activité proposée et procède ainsi à une première décontextualisation du savoir. Une deuxième étape intermédiaire lui permet de s'en détacher et d'atteindre un autre degré de décontextualisation en s'appropriant individuellement le texte produit par deux de ses pairs. La troisième étape intermédiaire lui donne la possibilité de décontextualiser à nouveau en passant d'un énoncé donné à un énoncé davantage formalisé ou plus général. Elle consiste en la production collective, au cours du débat entre pairs, d'une règle ou d'une propriété mathématique qui deviendra un savoir de référence reconnu et utilisable par les élèves et l'enseignant.

En fin d'année, les élèves sont invités à rédiger des textes individuels de bilan. En d'autres mots, la rédaction d'énoncés intermédiaires « permet aux élèves en difficulté de dépasser le contexte de l'apprentissage tout en donnant du sens aux énoncés formels » (Butlen, 2007, p.148). Ainsi, « le processus de transformations des connaissances privées en savoirs institutionnalisés » (Conne, 1992 ; Rouchier, 1996) accentue l'effet de distanciation par rapport au contexte des activités en poussant les élèves à dépasser le stade de l'action par un retour collectif et réflexif sur leurs activités. En effet, Butlen et Pézard (2003) ont constaté que ce travail sur les formulations et donc sur la décontextualisation permettait à certains élèves en difficulté d'accéder à une meilleure conceptualisation des notions mathématiques.

Comme l'explique Denis Butlen (2007), « tout se passe comme si l'appropriation des énoncés intermédiaires produits collectivement permettait aux élèves d'une part, de recontextualiser certains énoncés formels afin de leur donner du sens, d'autre part, de généraliser leurs exemples individuels afin de les dépersonnaliser tout en autorisant des appels éventuels à l'expérience » (p.129). En fait, « tout se passe comme si des élèves en difficulté devaient passer par l'étape du générique avant

d'accéder au formel », surenchérit le chercheur. Nonobstant, l'efficacité de l'aménagement de ces cheminements cognitifs particuliers s'ensuit de certaines contraintes institutionnelles (il faut du temps pour instaurer un débat productif de savoirs) et cognitives (l'élève doit disposer de compétences lui permettant de participer au débat et à la production collective pour se l'approprier et en bénéficier) (Butlen, 2007).

En corollaire, les recherches que nous venons d'exposer mettent en lumière le caractère paradoxal de l'enseignement du calcul mental et les difficultés d'apprentissage qu'il génère. En effet, elles ont révélé l'existence d'une tension entre automaticité des faits numériques, de certaines procédures et le développement des compétences permettant à l'élève d'élaborer, de reconstruire ou d'adapter ses procédures en fonction du contexte. Certes, des éléments de réponse, tels que des situations spécifiques installant des automatismes élémentaires ou les institutionnalisations souples pour apprendre à choisir les décompositions mobilisables selon les nombres et les opérations, peuvent contribuer au dépassement du paradoxe caractérisant l'enseignement-apprentissage du calcul mental.

Cependant, les élèves en difficulté ne semblent pas toujours bénéficier, autant que leurs pairs, des effets d'une pratique régulière en calcul mental. En réalité, ils ont dû mal à capitaliser ce qui a été découvert en classe car ils n'en perçoivent pas les enjeux, disposent de connaissances peu fiables ou encore peinent à se distancier de l'action pour conceptualiser les notions mathématiques. Curieusement, la rédaction de bilans de savoirs, à l'issue des exercices de calcul mental, constitue une activité structurante pour les élèves les plus faibles. En effet, les visites et les reformulations, au cours des productions collectives d'écrits, occasionnent différents degrés de décontextualisation du savoir permettant aux élèves en difficulté une meilleure conceptualisation des notions mathématiques, tout en les ancrant dans leur expérience personnelle et collective. Toutefois, ces cheminements cognitifs spécifiques aux élèves en difficulté restent tributaires du facteur temps et de leurs capacités à débattre ou à produire collectivement.

CHAPITRE 5 : NOS PARTIS PRIS THÉORIQUES

Le cadrage théorique, esquissé dans ce chapitre pour légitimer et orienter nos partis pris, découle des nombreuses recherches menées depuis plus de vingt ans par Aline Robert, Janine Rogalski et leurs collaborateurs dans le cadre de la double approche ergonomique et didactique des pratiques, inscrite dans la Théorie de l'Activité (Robert et Rogalski, 2002, 2005 ; Rogalski, 2008b, Vanderbrouck, 2008). Par conséquent, nous apportons d'emblée quelques précisions sur l'acception dans laquelle seront utilisés les concepts propres à l'étude des pratiques des enseignants et de leurs activités dans le cadrage de la double approche. Ainsi, dans ce qui suit :

« Le mot "pratiques" est utilisé pour qualifier tout ce qui se rapporte à ce que l'enseignant pense, que cela corresponde à quelque chose qu'il dit ou non, à quelque chose qu'il fait ou non. Le point de vue est relatif au temps long, que ce soit avant, pendant, après les séances de classe. Le mot "activités" est réservé à des moments précis de ces pratiques, référés à des situations spécifiques dans le travail de l'enseignant : activités en classe, activités de préparation, d'élaboration de contrôles pour les élèves, activités de concertation... Le "travail enseignant" est le mot réservé au sous ensemble des pratiques en classe de mathématiques et pour cette classe (préparation) qui constitue le cœur de nos analyses » (Robert et Hache, 2013, p.54).

Lorsqu'il s'agit de questionner les variations individuelles et collectives des pratiques enseignantes en lien avec les apprentissages mathématiques des élèves, le cadre théorique choisi doit permettre d'étudier aussi bien les enseignants et leurs pratiques que les élèves et leurs apprentissages (Chesnais, 2014). Dans cet effort de compréhension de l'apprentissage mathématique des élèves, dans le cadre de l'enseignement du calcul mental qu'ils reçoivent au cours préparatoire, nous avons opté pour une analyse du projet d'enseignement (ou scénario¹¹⁸) du professeur. En fait, dès l'instant où l'on étudie le projet installé par l'enseignant dans sa classe, ce sont effectivement les activités des élèves qui sont explicitement visées et mises en relation, par la suite, avec les résultats obtenus à l'issue de l'enseignement (Robert, 2008). En réalité, ces activités diffèrent d'un élève à l'autre et sont en partie inaccessibles surtout celles mettant en jeu leur pensées y compris « tout ce qui peut se jouer hors-classe mais aussi des aspects affectifs et sociaux dont nous reconnaissons l'importance », explique Robert (2008). Néanmoins, les activités des élèves laissent des « traces orales et écrites observables en classe - notamment au moment de l'exécution des tâches proposées par l'enseignant », braise l'auteure. Du coup, dans la lignée de ses nombreux travaux (Robert et Rogalski, 2002 ; Robert, 2008, Masselot et Robert, 2007 ; Robert et al., 2013), nous nous proposons d'étudier les apprentissages visés « à partir de l'enseignement dispensé et des activités possibles correspondantes des élèves, en donnant ainsi toute leur place aux sujets en situation scolaire. [...] L'adjectif "possibles" souligne [ici] la différence entre ce que propose l'enseignant, l'observable, et ce qui va en résulter pour les élèves » (Robert et Vivier, 2013, p.117). Autrement dit, le processus enseignement-apprentissage est abordé sous deux angles différents. Le premier est une mise en perspective des activités provoquées par les pratiques enseignantes avec un regard centré sur les élèves et leurs apprentissages en tenant compte dans une certaine mesure de la singularité de l'apprenant et de la zone où est localisé son

¹¹⁸ D'après Robert et Hache (2013), le projet d'enseignement ou scénario « désigne l'ensemble ordonné des exercices et des cours prévus pour un chapitre ou une notion, y compris les évaluations et le travail à la maison, avec des prévisions grossières de gestion (durée, répartition du travail). Un scénario est apprécié à la fois en relation avec ses qualités "internes", dont dépend l'ensemble des activités qu'on peut en attendre a priori des élèves, et en relation avec les déroulements qu'il autorise, au-delà de son propre contenu », p.45.

établissement. Pour mieux comprendre les mécanismes en jeu dans le premier angle, le deuxième est une vue rapprochée, focalisée sur le professeur, où les apprentissages des élèves sont considérés comme « des objectifs au moins partiels » de ses pratiques (Chesnais, 2014).

D'après Janine Rogalski (2008a), une telle approche « des activités articulées des enseignants et de leurs élèves » doit être légitimée et orientée par un cadre théorique d'ensemble. Et, pour ce faire, elle préconise un cadre où « l'objet d'étude est l'activité d'un individu mû par des motifs propres, dans une situation particulière ». C'est celui de la Théorie de l'Activité finalisée, « [d'abord] initiée par Leontiev, [ensuite] enrichie dans une lignée de recherche issue de Vygotski, [avant d'être] exploitée et développée dans une perspective ergonomique (Leplat, 1997 ; Rogalski, 2004) [...] puis en didactique professionnelle [pour finalement s'emboîter] à une approche didactique de l'enseignement des mathématiques dans la "double approche" (Robert et Rogalski, 2002 ; 2005 ; Robert et al., 2013) ». D'ailleurs, comme le stipulent Abboud-Blanchard, Robert, Rogalski et Vandebrouck (2017), le fait de choisir « d'étudier les activités (mathématiques) des élèves en classe - ce qu'ils font (ou non), disent (ou non), écrivent (ou non) - [...] traduit [automatiquement] l'inscription de la recherche dans la Théorie de l'Activité, adaptée à étudier des sujets en situation, en distinguant tâches et activités [tout] en se centrant sur les apprentissages » (p.3).

1. La Théorie de l'Activité finalisée : un cadre unificateur pour l'articulation des pratiques enseignantes et des apprentissages des élèves

L'un des soubassements de cette théorie est la distinction entre la tâche et l'activité. La tâche est le but que le sujet (enseignant ou élève) doit atteindre sous certaines conditions (Leplat, 1997). Autrement dit, comme l'indique Rogalski (2008), elle se situe du côté de l'objet de l'activité et donc de la situation. L'activité est alors « ce que développe un sujet lors de la réalisation d'une tâche en situation – ses actes extériorisés mais aussi les hypothèses, les décisions (ce qu'il pense) dans ce qu'il fait (dit) ou non- cela comprend son "état personnel", précisent Robert et Vivier (2013). Parallèlement, ce premier point met en exergue deux autres notions clés organisatrices de la Théorie de l'Activité qui retiennent également notre attention : le sujet et la situation. Dans le cadre de cette recherche, notre intérêt se porte sur un sujet individuel (un enseignant ou un élève) qui se caractérise par ses buts subjectifs, son potentiel et ses contraintes propres. De plus, l'élève comme le professeur ne sont pas les seuls à décider de leurs objectifs et des moyens dont ils disposent. En effet, la situation de l'apprenant comprend les tâches, prescrites par le professeur, définies par le contrat didactique ainsi que son contexte familial et social. De la même manière, l'activité de l'enseignant, contrainte par des responsabilités et le contrat partiellement implicite qui le lie à sa hiérarchie, est

essentiellement déterminée par l'élève individuel, qu'il soit intégré dans le collectif classe ou mobilisé dans un groupe.

Notre ancrage en théorie de l'activité permet une analyse spécifique de la tâche prescrite aux élèves par l'enseignant « en référence non seulement aux mathématiques en jeu, mais aussi aux connaissances supposées disponibles des élèves et aux caractéristiques de la situation (niveau scolaire considéré, programme en vigueur...) » (Vanderbrouck, 2017) sans omettre « ses choix de scénarios (organisation des tâches-élèves), de mise en œuvre en classe et les modes de fonctionnement qu'il évalue comme possibles dans la classe » (Rogalski, 2013). Bien qu'il soit adapté à la didactique des mathématiques, on reconnaît bien là, le découpage classique en trois niveaux de finalité (activité, actions, opérations) que les psychologues à l'origine de la Théorie de l'Activité, Galpérine et Leontiev décrivent comme suit : « l'activité a son motif d'une part, c'est le moteur direct de l'activité, que le sujet exerce afin de satisfaire ses "besoins", ce qui "pousse" l'activité ; l'action associée au but d'autre part, ce but étant la représentation mentale du résultat futur de l'activité, ce qui "tire" l'activité ; et enfin les opérations qu'il faut effectuer pour réaliser l'action sous certaines conditions » (Galpérine 1966 et Léontiev, 1984 cités par Vanderbrouck, 2017).

En outre, la manière dont les élèves réalisent les tâches et leur comportement entraînent non seulement, une rétroaction sur l'activité de l'enseignant, sur ses interventions didactiques individuelles ou collectives en classe, sur son ressenti (fatigue, plaisir, etc.) et par la suite, d'éventuels réajustements. Mais également un feed-back sur leur propre activité (Rogalski, 2013). Ce « retour » de l'activité des élèves sur celle de l'enseignant et sur la leur est schématisé par Leplat (1997) dans son modèle de double régulation de l'activité (voir figure 1) qui sera par la suite exploité en psychologie ergonomique. Janine Rogalski (2013) en explique le fonctionnement comme suit :

« La notion de régulation renvoie d'abord au fait que l'activité modifie l'état aussi bien de la situation que de l'acteur qui agit. La situation est à la fois un déterminant de l'activité et elle est modifiée par cette activité (au premier chef en ce qui concerne les objets visés par la tâche, mais aussi les ressources et les contraintes externes de sa réalisation). Le sujet lui-même est un déterminant de l'activité et est modifié par son activité, aussi bien dans son potentiel de connaissances et d'actions (en bref : ses compétences) – que dans son état physique : fatigue, sommeil, etc. ou psychique : plaisir, ennui, angoisse, etc. » (Rogalski, 2013, p.7).

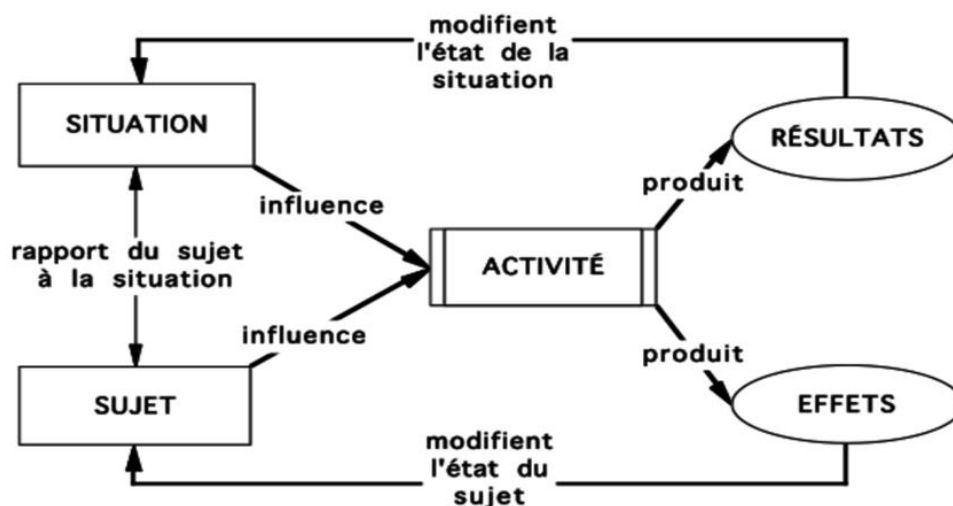


Schéma 9 : Schéma de double régulation de l'activité (d'après Leplat, 1997 et Rogalski, 2003)

In fine, de la Théorie de l'Activité et de son modèle de double régulation, nous retenons que les activités des élèves sont en partie induites par celles de l'enseignant. Ainsi, nous arrivons à la même conclusion qu'Aurélien Chesnais (2014) : « les pratiques des enseignants [c'est-à-dire l'ensemble de leurs activités avant, pendant et après la classe] influent sur les apprentissages des élèves via les activités qu'elles provoquent notamment par le choix des tâches mathématiques (situations) proposées aux élèves et l'accompagnement de la réalisation de ces tâches » (p.19). Par conséquent, notre premier parti pris théorique est d'accéder aux pratiques des professeurs des écoles en décodant leurs activités à partir de celles supposées des élèves et réciproquement, et en interprétant les renforcements ou les différences éventuelles entre ce qui était prévu et ce qui peut s'être passé pour décrire les activités (finalement) possibles (Robert et Vivier, 2013).

Pour ce faire, les activités des élèves, au coeur du projet d'enseignement, sont d'abord appréhendées au niveau global par le biais des tâches précises prescrites par le professeur afin de restituer le milieu mathématique dans lequel se développent leurs activités tout en les conditionnant (Robert, 2014). Ensuite, la compréhension des activités des élèves à partir de ces tâches passent par une analyse au niveau local de « la nature et de la forme du travail des élèves organisé par l'enseignant, notamment son caractère collectif éventuel, l'autonomie laissée aux élèves (sa durée), la part de l'oral et de l'écrit, la nature des échanges qui ont lieu, les aides et explicitations qui circulent, avec le moment de leur venue- qu'elles soient ou non sollicitées », indique Aline Robert (2014). Dans cet ordre d'idées, « la mise au travail des élèves, le repérage que l'enseignant en fait et la manière dont il s'appuie ensuite sur ce travail [ainsi que] la correction apportée, sont ainsi des indices importants pour apprécier les activités des élèves face aux tâches initialement proposées », rajoute-t-elle.

2. Emprunts et articulations des théories de Piaget et de Vygotski : conceptualisation, médiations et zone proximale de développement

Néanmoins, nous suivons toutefois Aurélie Chesnais (2014) quand elle affirme qu'« il est difficile de définir l'apprentissage même pour une notion donnée ». En effet, dans notre étude de cas, nous nous penchons sur la manière dont le professeur enseigne le calcul mental de sommes avec franchissement de la dizaine au CP. Mais, concrètement que signifie « savoir calculer mentalement des sommes avec franchissement de la dizaine » ? Dans cette thèse, cela fait référence à la conceptualisation de la notion visée par le programme concerné : une capacité à produire rapidement des faits numériques, à effectuer des calculs en utilisant des procédures de référence (compléments à la dizaine), à mettre en œuvre des procédures variées utilisant les propriétés des nombres et des opérations (la commutativité et l'associativité de l'addition), mais aussi, comme le mentionne Chesné (2014), « le fait de savoir quand et comment utiliser les procédures à bon escient y compris dans la résolution d'un certain nombre de problèmes mathématiques, de savoir les adapter aux nombres en jeu et de produire un résultat correct avec des procédures adaptées dans une durée restreinte ».

Ainsi, nous reprenons la conceptualisation dans la même acception que l'auteur de la théorie des champs conceptuels c'est-à-dire « un état des connaissances, qu'on peut définir à partir d'un ensemble de tâches, sur lesquelles on attend la disponibilité des connaissances correspondantes, que ce soit comme objets (définitions, théorèmes...) ou en tant qu'outils, pour résoudre les problèmes » Vergnaud (1990). D'après Robert (2014), « cette disponibilité implique la réorganisation des connaissances anciennes dans les nouvelles ». Par conséquent, « la qualité du scénario, en amont de sa réalisation, tient alors à la fois à la nature de l'ensemble des tâches proposées et à leur ordonnancement », renchérit l'auteure. D'où l'intérêt d'étudier le projet d'enseignement global, affirme-t-elle. C'est d'ailleurs l'objet de ma première sous-question qui s'intéresse aux principaux éléments didactiques et pédagogiques pris en considérations par les professeurs pour élaborer leur scénario. Cette référence à la conceptualisation est notre deuxième parti pris théorique. Elle s'articule directement avec les théories constructivistes de Piaget et de Vygotski qui, une fois resituées et adaptées au contexte de l'enseignement du calcul mental à l'école, vont nous permettre de caractériser les tâches proposées en termes de potentiel d'apprentissage et d'évaluer le degré de conceptualisation atteint par les élèves.

Ces théories constructivistes constituent notre troisième parti pris théorique. Mises en regard, elles peuvent, selon Rogalski (2008), par leur complémentarité apporter une contribution spécifique à la théorie didactique. En effet, si la théorie piagétienne « offre [...] un cadre théorique producteur pour étudier les acquisitions des élèves en mathématiques (et traiter la relation élèves-savoir dans le

triangle didactique) », la théorie de Vygotski, elle, favorise l'analyse de l'intervention du professeur dans le triangle didactique en permettant « de situer l'action et l'impact de l'action didactique » (p.443) sur le développement. Toute sa vie, Piaget a cherché la réponse à la question : « comment les connaissances viennent-elles aux individus ? ». Il y a répondu par le constructivisme : les connaissances ne sont ni acquises par le biais des sensations, ni transmises par quelqu'un qui « sait » vers quelqu'un qui « ne sait pas ». En réalité, « elles sont construites par l'individu par l'intermédiaire des actions qu'il accomplit sur les objets », rapportent Raynal et Rieunier (1997) dans leur dictionnaire sur les concepts clés de la pédagogie. Autrement dit, pour Piaget, la connaissance s'acquiert par l'intermédiaire du contact avec les objets et par l'intégration de ces objets à la structure mentale », commentent les auteurs. En d'autres termes plus simples, chaque individu possède dans son cerveau des schémas d'action (schèmes) qu'il utilise pour être efficace face à des objets ou des situations connues. S'il est confronté à une situation nouvelle, l'individu est déstabilisé car ses schèmes d'action sont inadaptés. Pour retrouver son équilibre, il va réguler en modifiant rétroactivement les schèmes résultant de son activité antérieure sur l'objet de manière à, assurer des compensations actives (accommodation) à l'instabilité générée par l'interaction conflictuelle de ses schèmes avec les objets afin d'intégrer ces derniers ou la situation nouvelle à sa structure mentale (assimilation). L'objet assimilé va à en retour modifier le schème et permettre ainsi à la personne de s'adapter à la situation nouvelle. Ces recherches à visée d'épistémologie génétique¹¹⁹ orientées sur l'étude du développement des connaissances chez un sujet épistémique sont fécondes pour l'avancée de nos travaux car elles mettent en lumière le processus par lequel l'enfant restructure ses connaissances lorsqu'il est confronté à de nouveaux objets d'apprentissage. Dans la lignée de Piaget, Vergnaud adapte les schèmes aux mécanismes liés à l'enseignement des mathématiques et les complète avec les notions de champs conceptuels pour mieux mettre en exergue le rôle de l'action et de la résolution de problème dans la conceptualisation (Vanderbrouck, 2017).

De son côté, Vygotski a plutôt une visée de théorisation psychologique dont l'utilisation transposée au cadre de la didactique des mathématiques peut, aux dires de Rogalski (2008), pourvoir le chercheur de concepts judicieux pour rendre compte des processus de développement chez l'enfant. À ce propos, elle rappelle que « l'approfondissement théorique du mode d'évolution de ces concepts est un apport fort de la théorie de Vygotski, directement pertinent pour toute didactique d'un domaine disciplinaire ». Pour étayer son discours, Janine Rogalski fait d'abord la distinction entre "concepts quotidiens" (ou "concepts spontanés") « issus de l'interaction de l'enfant avec le monde des objets sans qu'il y ait eu d'intervention didactique » et les « concepts scientifiques issus de la production

¹¹⁹ D'après Vanderbrouck (2017), ce terme signifie que Piaget étudie en particulier le développement des connaissances chez un sujet « épistémique » qui est ici proche du sujet dans la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau (1998).

collective antérieure [...] qui deviennent par la suite, ailleurs des objets d'enseignement » (p.438). Ensuite, l'auteure éclaire les perspectives de développement d'un individu déterminé en faisant un parallèle avec les modes de développement de ces concepts qu'elle décrit ainsi :

« Concepts quotidiens/spontanés et concepts scientifiques se développent en interaction, dans un processus de "double germination" [...]. D'une part, la germination des concepts quotidiens se fait du "bas" vers le "haut", vers ce qui est "général", à partir de l'interaction avec les objets du monde de l'action (comme dans le constructivisme piagétien). D'autre part, la germination des concepts scientifiques se fait du "haut" vers le "bas", avec "les mots pour le dire en général", en (se concrétisant ultérieurement. » (Rogalski, 2008, p.441).

Cependant, si pour Jean Piaget, le stade de développement conditionne les perspectives de développement à court terme d'un individu déterminé, a contrario, le psychologue soviétique met plutôt en avant l'influence de la marge de développement dont l'individu dispose réellement à partir de ce stade, si un adulte lui vient en aide. D'après Vygotski (1985), le type de problèmes d'un « stade » supérieur que l'individu arrive à résoudre avec la médiation de l'adulte permet d'évaluer l'étendue de sa zone proche de développement qui diffère d'un sujet à un autre. Partageant ce point de vue, Nuttin (1963) soutient que « la recherche montre que la zone de proche développement a une signification plus directe pour la dynamique du développement intellectuel et la réussite de l'apprentissage que le niveau présent de développement ». Rogalski (2008), elle, va plus loin en affirmant que :

« Pour la réussite de l'apprentissage, on ne peut faire apprendre que si on utilise des situations relevant de cette zone ; si les situations sont au-delà de la ZPD [zone proximale de développement], les aides ne produiront au mieux qu'un effet de copie immédiate (ou de "récitation", Vygotski parle de "mécanique verbale"), et pas un apprentissage ; si les situations sont en deçà de la ZPD l'enfant/l'élève n'a rien à apprendre : il fait fonctionner ce qu'il a déjà conçu. » (Rogalski, 2008, p.442).

Dans son plaidoyer sur la pertinence de l'approche vygotkienne pour la didactique des disciplines, l'auteure n'oublie pas de mentionner le principe de médiation qu'elle présente comme « un composant spécifique » de cette théorie et illustre par son rôle incontournable dans l'assimilation des concepts scientifiques.

Toutefois, selon que l'on se base sur le stade de développement atteint par l'élève pour savoir ce qu'il est susceptible d'apprendre (position piagétienne classique) ou que l'on identifie sa zone proximale de développement pour décider de ce qu'on peut lui enseigner, les choix que l'on fera en termes d'enseignement-apprentissage seront différents et auront logiquement des conséquences toutes aussi différentes. En fait, des conceptions proches de celles de Piaget peuvent conduire le

professeur à remettre à plus tard l'enseignement de notions qu'il jugerait inadaptées à la maturité intellectuelle de l'élève. À l'opposé, si l'enseignant se réfère à Vygotski, il va, au contraire, s'appuyer sur ces niveaux de maturité pour poursuivre le développement de l'enfant par l'intermédiaire de l'apprentissage. C'est en effet cette dernière option que l'on retrouve dans les propos tenus par Vygotski (1985) quand il déclare : « L'enseignement doit s'orienter sur les cycles déjà parcourus du développement, sur le seuil inférieur d'apprentissage. Cependant, il s'appuie non pas tant sur les fonctions déjà venues à maturité, que sur celles en maturation. Il a toujours pour point de départ ce qui chez l'enfant n'est pas encore venu à maturité. C'est la zone proche de développement de celui-ci qui détermine les possibilités de l'apprentissage » (p.270).

Par ailleurs, l'hypothèse de l'existence d'une zone proximale de développement nous interpelle car, si besoin était, elle justifie l'importance fondamentale du médiateur, donc de l'enseignant dans l'apprentissage et l'influence décisive de ses choix pour assurer la médiation. Cette dernière consiste notamment à la prise en compte par le professeur du « presque-là » (Aline Robert, 2010) des élèves, à l'anticipation positive de leurs compétences, à l'organisation des liens entre les connaissances anciennes et nouvelles, au repérage de leur travail en classe afin de leur proposer « au bon moment » les stimulations et les aides appropriées. Car, en effet, comme le stipule le psychologue, « l'enfant ne peut imiter que ce qui est dans la zone de ses propres possibilités intellectuelles ». Ainsi, par le biais des propositions de Vygotski et du concept de « zone proximale en particulier », nous pourrions pleinement développer, dans une perspective rénovée, le rôle essentiel de facilitateur des apprentissages et d'accompagnateur que l'enseignant rejoue, entre autres, lors de la mise en œuvre de ses pratiques de différenciation pédagogique. C'est d'ailleurs l'intérêt de notre deuxième sous-question dont l'objet porte sur les pratiques enseignantes perçues comme les plus favorables aux apprentissages des élèves les plus fragiles et mises en œuvre par les professeurs des écoles.

En corollaire, l'articulation de la théorie de l'activité aux deux constructivismes constitue un apport théorique fort, d'une grande pertinence pour aborder les pratiques des enseignants en calcul mental sous deux angles complémentaires et incontournables : les élèves par le biais de leur activité « possibles » et l'enseignant via la didactique des mathématiques. Assurément, le rapprochement fait entre l'étude épistémologique de Piaget sur le développement de la connaissance chez le sujet (l'élève) et l'approche vygotskienne de l'intervention didactique de l'enseignant en tant que médiateur (entre le savoir et l'élève) et facilitateur de l'activité de l'élève, nous apporte des éléments clés sur ce qui est susceptible « de faire apprendre » les élèves en calcul mental.

Malgré tout, Aline Robert (2010) nous met en garde en nous rappelant le caractère « "peu interprétable" de ses premières recherches sur les pratiques, exclusivement reliées aux apprentissages ». Selon ses dires, « la prise en compte de ce seul aspect [...] est insuffisant pour comprendre ce qui se joue dans les choix des enseignants » (p.118). De l'avis de Goigoux (1998, 2002), « les enseignants prennent quotidiennement de multiples décisions dans bien d'autres but que de favoriser les apprentissages des élèves : par exemple, pour favoriser l'affection que ceux-ci leur portent, pour maintenir la paix sociale dans la classe, pour entretenir leur propre motivation ou pour économiser leur force ». À vrai dire, comme le stipule Leplat (1992), l'activité du professeur est multifinalisée, « c'est-à-dire qu'elle est dirigée simultanément dans plusieurs directions ». Certes, vers les élèves, individuellement et collectivement, sans oublier ceux qui présentent des singularités. Oui, mais pas seulement. D'après Goigoux (2007), l'activité de l'enseignant est également orientée vers deux autres directions principales : vers les autres acteurs de la scène scolaire (pour rendre intelligible et faire valoir son action professionnelle aux yeux des parents, des collègues et de la hiérarchie ou l'emboîter à celle des professeurs des années antérieurs et des professeurs qui prendront le relais par la suite...) et vers lui-même (sauvegarder sa santé en minimisant la fatigue psychique ou physique, propulser sa carrière, augmenter son confort, gagner en estime de soi, s'intégrer dans l'équipe pédagogique...). Ainsi, bien que leur modèle d'analyse de l'activité des enseignants respectifs diffèrent sur certains points, le chercheur en didactique du français en arrive à une conclusion présentant une proximité certaine avec celle de Robert et Rogalski (2002) : 1) « considérer l'activité des maîtres comme étant exclusivement finalisée par les apprentissages des élèves est un écueil » (Goigoux, 2007, p.5) ; 2) « la didactique doit, d'une part tirer toutes les conséquences du fait qu'enseigner est un travail [dont il faut analyser toutes les facettes] » et d'autre part, replacer son analyse de certains phénomènes d'apprentissage et d'enseignement dans le contexte « du travail quotidien des enseignants et de ses multiples finalités » (*ibid.*).

3. Des références à la didactique professionnelle et à la psychologie ergonomique

Pour les mathématiques, Aline Robert et Janine Rogalski (2002, 2005) rajoutent la référence à la didactique professionnelle et à la psychologie ergonomique, et rapportent, ainsi, « les pratiques observées à l'exercice de leur métier par les enseignants, en tenant compte explicitement de leur inscription professionnelle et personnelle qui peut avoir des incidences sur la classe et les activités des élèves » (Robert et Vivier, 2013, p.118). Plus concrètement, les auteures considèrent que « les choix de contenus mathématiques sont certes impliqués par la nature même des mathématiques mais aussi par des impératifs de gestion de la classe concernée, par des considérations liées aux programmes, au temps long, à ses propres représentations et connaissances » (*ibid.*). En conséquence,

notre quatrième parti pris est donc de tenir compte du fait que l'enseignant exerce un métier singulier soumis à des contraintes en partie indépendantes des enjeux didactiques.

Cependant, cette approche ergonomique oblige Robert et Rogalski à renoncer, dans leurs analyses, au lien exclusif entre pratiques en classe et apprentissages visés pour s'immerger également dans le monde professionnel. Conséquemment, en admettant la complexité des pratiques enseignantes et leur cohérence (De Montmollin, 1984), elles élaborent, pour les étudier, une démarche théorique imbriquant des analyses didactiques des activités mathématiques des élèves et des analyses ergonomiques inspirées de l'analyse de l'exercice du métier (Robert et Rogalski, 2002, 2005 ; Masselot et Robert, 2007 ; Robert, 2008) : la « double approche ». Par la suite, d'autres chercheurs, tel que Pastré (2005) la complète par des éléments ergonomiques suggérées par les schémas de développement des activités de travail. Dans cet effort de compréhension de la complexité des pratiques enseignantes, Aline Robert et Janine Rogalski procèdent à l'analyse des séances en classe du professeur et des activités qu'il y développe en prenant comme observables les activités des élèves et la manière dont il les organise « avec une lecture orientée vers la reconstitution de ses divers choix ». C'est ainsi qu'à partir d'une séance en classe, analysée en relation avec les activités possibles des élèves, Robert et Rogalski (2005) mettent en exergue deux premières composantes des pratiques observées : la composante cognitive et la composante médiative. Dédutable de l'itinéraire choisi par l'enseignant, la première composante « traduit ce qui correspond aux choix de l'enseignant sur les contenus, les tâches leur organisation, leur quantité, leur ordre, leur insertion dans une progression qui dépasse la séance, et les prévisions de gestion pour la séance » (Robert et Hache, 2013). La composante médiative, elle, englobe « les choix correspondant aux déroulements, à l'installation effective en classe de cet itinéraire cognitif choisi, notamment les improvisations, les discours l'enrôlement des élèves, la dévolution des consignes, l'accompagnement des élèves dans la tâche, le repérage de leur travail et ce que l'enseignant en fait, les validations et les expositions de connaissances » (*ibid.*).

Parallèlement, les auteures de la double approche introduisent trois composantes supplémentaires pour mieux cerner le « métier » de l'enseignant. D'abord une composante personnelle qui regroupe toutes les caractéristiques personnelles du professeur dont « ses représentations liées à connaissances et à ses expériences, mais aussi les risques qu'il consent dans l'exercice de son métier, le confort dont il a besoin » (*ibid.*). Par contre, les éléments inconscients liés au psychisme ne sont pas pris en compte dans cette composante. Ensuite, la composante institutionnelle réunit les contraintes associées au contrat partiellement implicite qui lie le professeur à sa hiérarchie : « la nature des mathématiques à enseigner, les programmes, les horaires, certaines

ressources comme les manuels, l'existence d'une administration, les inspections » (*ibid.*). Enfin, la composante sociale permet d'apprécier les facteurs liés au profil de la classe et de l'établissement scolaire, aux exigences des parents, des collègues, à la situation de l'établissement dans une zone d'éducation prioritaire ou pas, etc. ».

Par la suite, la recomposition, « de manière raisonnée », des analyses en composantes effectuée lors des nombreuses recherches menées dans le cadre théorique de la double approche ont permis un certain nombre d'avancées : notamment l'accès aux logiques d'action, aux régularités et aux variabilités des pratiques, et surtout les travaux sur la stabilité des pratiques pour les enseignants expérimentés dans des conditions ordinaires et sans intervention particulière. Toujours dans la perspective de la double approche, Robert et Masselot (2007) vont plus loin et introduisent un deuxième type d'analyse, plus adapté, selon elles, pour trouver « les variabilités et les évolutions individuelles dans le travail réel » car il tient compte « des différentes échelles attachées à la fois à la temporalité et au grain des activités à analyser ». Ce complément d'analyse repose sur trois organisateurs des pratiques que les chercheuses décrivent ainsi :

- « Un niveau micro, qui consiste à étudier ce qui est automatique ; par exemple ce qui n'est pas préparé, les gestes élémentaires (Butlen, 2007) ;
- Un niveau local, celui de la classe au quotidien. Le niveau où se rencontrent les préparations et les improvisations ; le niveau de toutes les adaptations du professeur ;
- Un niveau macro, celui des projets, des préparations, qui se nourrit des connaissances, représentations et expériences de chacun » (Robert, Rogalski et al., 2013, p.60).

Pour finir, le schéma 10 récapitule nos orientations et nos partis-pris théoriques adaptés au contexte de la thèse.

NOS PARTIS-PRIS THÉORIQUES

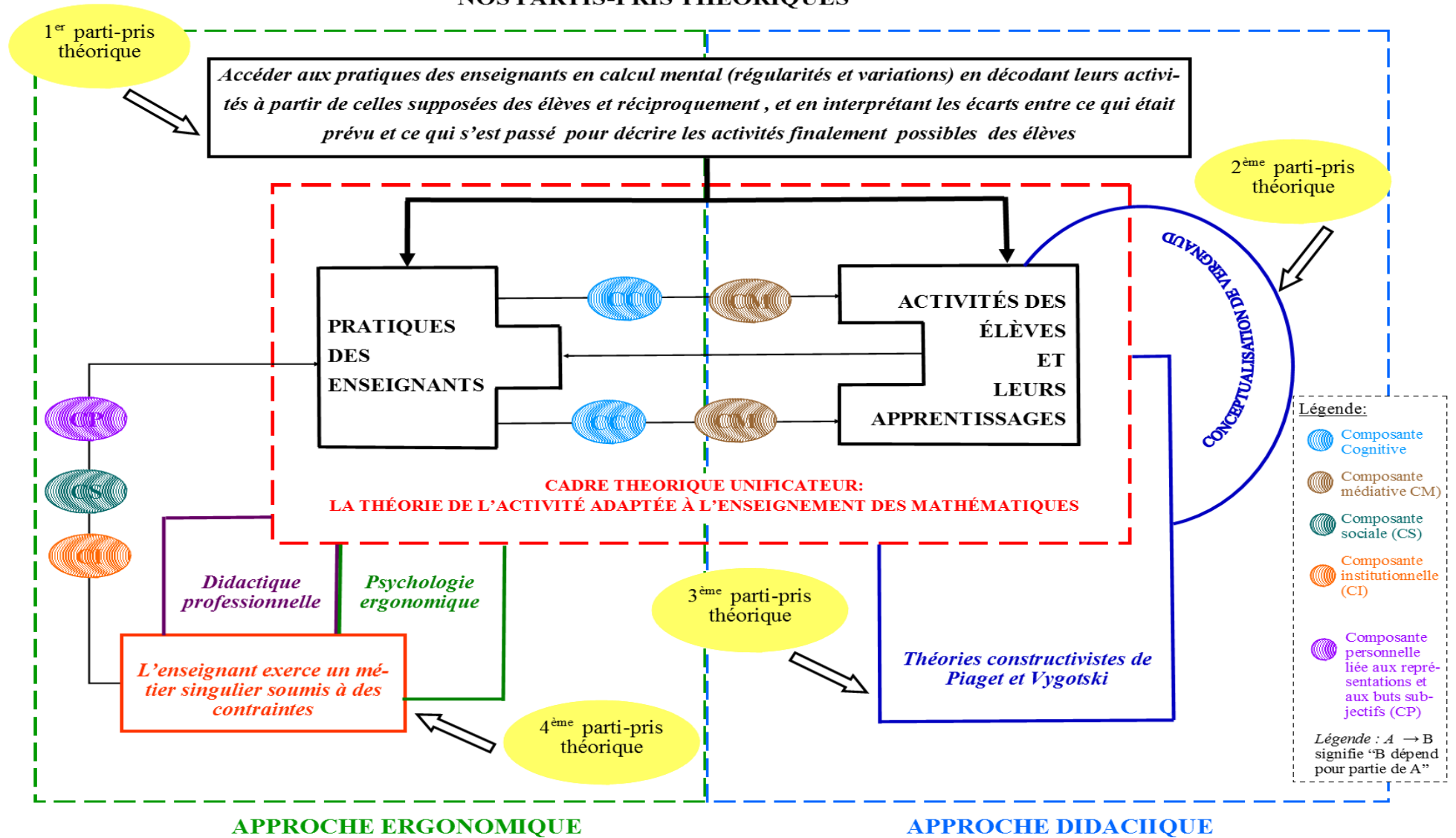


Schéma 10 : Schématisation de nos orientations et partis-pris théoriques adaptés au contexte de la thèse

TROISIÈME PARTIE – LES PRATIQUES ORDINAIRES DES ENSEIGNANTS AU CP : INVESTIGATIONS ET ANALYSE DES DONNÉES

Quels choix didactiques et pédagogiques fait le professeur pour élaborer son projet d'enseignement en calcul mental ? Quelles pratiques sont perçues comme les plus favorables aux apprentissages des élèves les plus fragiles ? Quelles approches majeures sont susceptibles de permettre aux élèves d'acquérir réellement des compétences en calcul mental ? Telles sont les questions sous-jacentes auxquelles notre travail de recherche tente d'apporter des réponses. Certes, de manière partielle seulement. En effet, nos investigations se limitent à l'enseignement-apprentissage d'une compétence (calculer mentalement des sommes avec franchissement de la dizaine) dans six classes du cours préparatoire. Néanmoins, dès lors où l'étude est bien précisée et orientée, nous sommes convaincus que les résultats obtenus méritent d'être interrogés, ne serait-ce que pour en inférer des hypothèses sur ce qui, dans les pratiques enseignantes, peut constituer un levier en termes d'apprentissages en calcul mental et ainsi induire une réflexion sur les alternatives possibles.

À cet égard, le premier chapitre de cette partie présente le « relief » relatif à notre objet d'étude c'est-à-dire « l'ensemble de ce qui permet de spécifier ce qui est utile à savoir pour le chercheur pour en analyser l'enseignement, attaché à un programme » (Robert et Hache, 2013, p.40). Puis, le suivant expose notre expérimentation sur le terrain et l'analyse des données collectées. Enfin, le troisième chapitre répond à notre question de recherche. Pour conclure, nous étendons la réflexion à de nouvelles questions et aux perspectives, en abordant succinctement un ultime point, peu travaillé dans la thèse mais néanmoins incontournable, celui de la formation.

CHAPITRE 6 : L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DU CALCUL MENTAL DE SOMMES AVEC LE FRANCHISSEMENT DE LA DIZAINES AU CP

Comme l'indique Roditi (2005), on ne peut étudier les pratiques des enseignants en situation de classe dans leurs liens avec les apprentissages des élèves sans avoir une connaissance précise de la notion enseignée, à la fois en tant qu'objet de savoir et en tant qu'objet d'enseignement. Cela inclut également d'envisager toutes les difficultés liées à sa construction et à son appropriation par de jeunes enfants d'une part et, d'autre part les contraintes inhérentes à l'acte d'enseigner (programme, horaire, gestion d'une classe...). Par conséquent, la première section de ce chapitre constitue un ensemble d'analyses préalables sur l'enseignement du calcul mental de deux nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine au CP, à partir des connaissances construites sur les processus d'enseignement, d'apprentissage et sur leurs relations, non pas de manière exhaustive mais dans leurs dernières évolutions au moment où la recherche empirique a lieu (de 2013 à 2016). L'objectif est de tenter de faire le bilan des propositions pour ce contenu, des points délicats et des outils fournis pour

les traiter figurant dans les publications : programmes scolaires, recherche en didactique des mathématiques, brochure à l'intention des enseignants et manuels scolaires.

- ***L'addition, quoi de plus simple ?***

Quoi de plus simple, en mathématiques, que l'addition : c'est la première opération enseignée aux enfants. Elle est donc perçue comme la plus facile et supposée être à leur portée. En d'autres termes, « plus une notion est familière, et culturellement connue, plus il semble en premier abord que son enseignement et son apprentissage par les élèves devraient "aller de soi" » (Dorier, Peltier et Roditi ; 2018, p.249). « C'est aussi clair que deux et deux font quatre, c'est aussi vrai que deux et deux font quatre dit-on couramment », biaise Stella Baruck (2003) pour illustrer cet axiome reçu. Or, poursuit-elle, ce que, dans l'état actuel des choses, les enfants nous montrent à l'évidence, c'est que cette évidence n'en est pas une » (p.39). D'après Baruck, en dehors de la "théorie mathématique", le terme "d'addition" reste flou et ambigu pour plusieurs raisons. Premièrement, il faut distinguer opération et calcul : en trouvant combien font $9 + 6$, « on ne fait pas une addition puis qu'elle est déjà faite ; on calcule une somme », soutient l'auteure (ibid.). Deuxièmement, pour que le principe du « deux et deux font quatre » s'applique il faut faire la distinction entre nombres et nombres-de, en évitant de proposer aux élèves des problèmes additifs dont l'énoncé induit des "pseudo-sommes" ("des pommes et des poires", ou des "chats et des chiens", par exemple) qui conduirait l'élève à additionner des "objets" qui ne vont pas ensemble, à calculer une somme impossible et donc à terme à la perte du sens de l'opération mathématique qu'est l'addition.

En outre, à l'instar de Baruck (2003), nous reconnaissons que lorsqu'on nous pose la question à quoi sert l'addition, y répondre n'est pas chose aisée. En effet, soit on déclare qu'elle sert à ajouter ce qui revient, il faut bien l'admettre, à dire qu'additionner sert à additionner ou soit on se raccroche aux bribes de nos anciens cours d'IUFM¹²⁰ en associant l'addition à une opération/action (en référence à Piaget) qui consiste à « réunir deux collections » (souvenir des "maths modernes"). Cependant, comme le fait remarquer Baruck (2003), « tant que le fameux "combien" n'est pas là pour donner son sens à cette "action", elle n'a pas plus de sens qu'un caprice ou qu'un effet du hasard » (p.43). En fait, l'addition sert à « compter à la suite d'un nombre, un autre nombre. Autrement dit, additionner c'est « vouloir "compter ensemble" deux nombres, lesquels à leur tour comptent des choses, ou rien qu'eux-mêmes », explique l'auteure.

Pour aller plus loin, prenons le cas d'une situation que l'on rencontre souvent cours préparatoire :

¹²⁰ Institut de Formation des Maîtres désormais désigné par l'acronyme INSPE (Institut National Supérieur du Professorat de l'Éducation)

« 65 petits cubes en plastique sont posés "en vrac" sur une table dans la classe. Paul et Erwan, deux élèves de CP, doivent les compter. Ils pointent les cubes un à un, chacun à leur tour, en disant « un, deux, trois... ». Finalement, Paul dit qu'il y a soixante-quatre cubes. Erwan dit qu'il y en a soixante-six¹²¹ »

Ces erreurs illustrent une difficulté liée à l'énumération des unités c'est-à-dire à la capacité à prendre toutes les unités, sans répétition ni oubli d'unités, l'une des conditions indispensables pour le dénombrement¹²²d'une collection. Cette difficulté se manifeste par « une absence de synchronisation effective entre une connaissance numérique et une organisation conjointe de la collection et qui empêche l'inventaire de la collection » (Briand, 2020). Par conséquent, comme on peut le voir ici, dénombrer s'avère plus ou moins difficile selon divers facteurs tels que la disposition (en vrac) des entités à compter. En outre, on comprend également qu'autour du nombre et de ce que l'on appelle compter s'ajoutent d'autres savoirs et compétences que les élèves doivent acquérir. Dès lors, on commence à réaliser qu'avant d'être capable de calculer mentalement des additions avec franchissement de la dizaine les élèves ont beaucoup à apprendre, et que les professeurs n'ont pas une tâche facile.

- ***Prendre en compte les compétences numériques des jeunes enfants***

Ainsi, bien que nos travaux ne concernent que les additions mentales au début du cycle 2, l'étude de ce thème interfère avec d'autres thématiques relevant du domaine numérique, et en particulier l'apprentissage des nombres. En effet, « la maîtrise des nombres entiers ne peut être isolée de celle du système de numération qui permet de les exprimer, ni des calculs qui permettent d'opérer avec ces nombres » (Charnay, 2013). D'ailleurs, comme l'indique Butlen (2007), en référence aux travaux de Fayol (1985), Fischer (1987), Allardice et Ginsburg (1983), « l'étude des procédures mobilisées par les élèves lors de calculs de sommes ou produits amène à traiter l'automatisation de ces calculs [qui est elle-même] liée à la représentation des nombres en mémoire » (Butlen, 2007, p.36).

En outre, « les connaissances ne s'entassent pas, ne s'accumulent pas, elles ne sont pas construites à partir de rien ; leur élaboration est soumise à des ruptures et à des restructurations. On apprend à partir de, mais aussi contre ce que l'on sait déjà » (Ermel, 1991). Ainsi, au regard de ce postulat, nous inférons qu'on ne peut aborder l'enseignement-apprentissage du calcul mental de sommes au CP, sans tenir compte des acquisitions possibles à l'école maternelle car elle est le creuset de la conceptualisation des premiers nombres et « tout ce qui s'y construit l'est pour longtemps »

¹²¹Cité par Dorier, Peltier et Roditi (2018) in « Les nombres, quoi de plus simple ? », p.254.

¹²²D'après, Brissiaud (après, Brissiaud (2007), « le mot "dénombrement" est formé à partir de "nombre", et nous appellerons donc ici "dénombrement" tout procédé (les psychologues disent toute "procédure") permettant d'accéder au nombre, dont la construction d'une collection-témoin de doigts et le comptage ».

(Bolsisus, 2011). Par conséquent, la prise en compte de l'articulation entre la grande section et le début du cours préparatoire devient donc cruciale. Dans cette optique, plusieurs questions se posent alors à l'enseignant qui veut enseigner le calcul mental de sommes avec passage de la dizaine au cours préparatoire :

- De quelles connaissances et compétences disposent l'élève au début du CP ?
- Comment prendre en compte ces connaissances et compétences dans l'organisation de la progression pédagogique ?
- Parmi celles-ci, lesquelles faut-il chercher à prioriser, développer ou faire évoluer ?
- Lesquelles faut-il amener l'élève à abandonner et comment provoquer cet abandon ?
- Quels sont les risques encourus dans les deux cas ?
- Quels savoirs et savoir-faire nouveaux l'élève doit-il construire et développer à ce moment-là ?

1. De la maternelle au cours préparatoire : Apprendre à quantifier

Pour apporter des éléments de réponse à ce questionnement, nous mettons en exergue les priorités pour la grande section de la maternelle et pour le début du CP, avant tout apprentissage systématisé du calcul. Pour ce faire, en appui sur la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990), nous envisageons la maîtrise du concept de nombre dans ces deux niveaux de classe en considérant les problèmes qu'il permet de résoudre efficacement, les propriétés qui caractérisent ce concept, les techniques qui le rendent opératoire et enfin les représentations langagières et non langagières qui le désignent. Cependant, il nous semble difficile d'aborder la transition entre la grande section et le CP sans tenir compte d'une part des enjeux de l'enseignement des nombres et d'autre part, des préconisations des textes officiels.

• À quoi servent les nombres ? : Construire du sens

Selon Charnay et al. (1995), l'un des enjeux décisifs de l'enseignement mathématique est que l'élève donne du sens aux concepts qu'il rencontre. À ce sujet, Charlot (1997) affirme néanmoins que le sens qu'un enfant donne à une activité ne suffit pas pour atteindre les objectifs fixés et qu'il revient donc à l'enseignant de construire ce sens avec lui. Cependant, pour De Vecchi et Carmona-Magnaldi (1996) même si le professeur permet à l'apprenant « d'être présent » et de comprendre « l'intérêt du savoir abordé » (p.22), il n'empêche que seul l'élève peut apprendre et qu'il doit par conséquent construire ses propres savoirs. Cela implique qu'il soit « actif mais aussi acteur et auteur », concluent les chercheurs. Partageant ce point de vue, Roland Charnay et ses collaborateurs (1995) soutiennent qu'au lieu de « chercher à fabriquer le concept de nombre » qu'il faudrait plutôt d'abord « permettre

aux élèves de les utiliser, d'en faire quelque chose...afin que les mots et les signes qui les désignent s'imprègnent de sens » (p.25). Autrement dit, aider les élèves à construire le sens du concept de nombre en leur permettant de « comprendre à quoi servent les nombres en même temps qu'ils apprennent à s'en servir ».

Au regard de cette approche, la construction par l'élève de ses connaissances numériques semble s'assimiler à une dialectique outil-objet comme le définit Douady (1984, 1992) « dans laquelle elles interviennent tour à tour comme des outils efficaces pour la résolution de certains problèmes et comme des objets identifiés pouvant être étudiés pour eux-mêmes ».

Ainsi, dès l'école maternelle, les élèves utilisent les nombres principalement pour communiquer des quantités et les mettre en relation. Les nombres entiers servent donc à mémoriser et à représenter « des quantités finies qu'en mathématiques on désigne par les qualificatifs de "discrètes" », expliquent Noirfalise et Mathéron (2009, p.107). Grâce à eux, l'élève peut répondre à la question « combien d'objets y a-t-il dans cette collection ? Ces nombres ont alors un aspect cardinal. En outre, les enfants font appel au nombre pour exprimer et mémoriser le rang occupé par un élément dans une liste ordonnée. Ils peuvent ainsi désigner par exemple, le troisième ou le cinquième élément d'une collection, etc. Il s'agit là de l'aspect ordinal des nombres. Enfin, les entiers permettent de calculer sur les quantités c'est-à-dire d'anticiper le résultat d'une réunion, d'un retrait, d'un partage, etc. On parle ici de l'aspect algébrique des nombres entiers naturels.

1.1. Quelles priorités pour les problèmes numériques en GS et en début de CP ?

1.1.1 Exprimer, mémoriser, comparer les quantités et communiquer à leur sujet

Les programmes 2008, en vigueur au moment de la recherche, présentent la maternelle comme « une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets » (p.15). Ainsi, on lit que l'enfant en fin de grande section doit avoir la compétence de « comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités » et de « dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus » (p.16). À cet effet, et de manière unanime, chercheurs (Brissiaud, 2003 ; Emprin et Emprin, 2010), didacticiens (Charnay, 1995, 2013) et formateurs (Bolsius, 2011) recommandent dès la petite section, la résolution de deux types de problèmes numériques : des problèmes de mémorisation liés à la reconnaissance ou à la réalisation de collections équipotentes et des problèmes de comparaison.

Pour s'assurer de la dévolution de ces problèmes, les auteurs les contextualisent dans des situations de la vie courante proche du vécu des élèves. Ainsi, par exemple, chez Brissiaud (2003), l'élève doit aller chercher des berlingots de lait chocolaté pour huit de ses camarades. À l'IUFM¹²³, la situation pédagogique recommandée aux professeurs des écoles stagiaires est similaire à celle de Rémi Brissiaud mais met en scène des oeufs et des coquetiers. Charnay et ses collaborateurs (2009), quant à eux, utilisent l'image d'un robot le Ziglotron, l'enjeu pour les élèves étant de rapporter juste ce qu'il faut de gommettes, ni trop ni pas assez, pour que tous les emplacements vides du robot soient recouverts. En réalité, même si les auteurs diversifient les supports et les contextes, dans tous les cas, l'activité revient à résoudre, à partir de deux collections éloignées l'une de l'autre, un problème d'égalisation (aller chercher une quantité objets égale à celle de la collection de référence) et un problème de comparaison (savoir si la collection d'objets récupérée est égale à la collection de référence avant de les placer). Par conséquent, « dès l'âge de l'école maternelle, et même s'ils ne connaissent évidemment pas le terme mathématique adéquat, les enfants savent généralement établir des bijections. Par exemple, ils savent que l'on peut mettre en rapport, relier, associer d'une certaine manière, des objets de deux collections : parce qu'il y a autant de doigts à la main droite qu'à la main gauche [...] ou qu'il faut autant de verres que d'assiettes quand on met la table » (Norfalise et Mathéron, 2009, p.109-110).

En outre, pour faire évoluer les procédures des élèves, Roland Charnay (2013) conseille au professeur des écoles d'élaborer un parcours d'enseignement à partir de cette activité en opérant des choix successifs adaptés en fonction des objectifs d'apprentissage visés qu'ils déclinent en six étapes à mettre en œuvre comme suit :

En petite et en moyenne section :

- Étape 1 : Des allers et retours sont possibles ;
- Étape 2 : Des allers et retours sont possibles, mais en nombre limité ;

En grande section et au début de CP :

- Étape 3 : Un seul déplacement est possible ;
- Étape 4 : Il faut demander les objets à un marchand ;
- Étape 5 : La comparaison doit être faite avant de placer les objets ;
- Étape 6 : Un mode d'expression est imposé.

Parallèlement, Charnay et Mante (2014) notent quatre principales variables sur lesquelles il peut jouer : 1°) la place respective des deux collections (sont-elles éloignées ou proches l'une de l'autre ?) ;

¹²³ Institut Universitaire de Formation des Maîtres désigné désormais par l'acronyme INSPE (Institut national supérieur du professorat et de l'éducation)

2°) l'organisation des objets en jeu (sont-ils fixes ou déplaçables ? comment sont-ils disposés ?) ; 3°) le nombre d'objets de la collection de référence (ce nombre est-il inférieur à 5, compris entre 5 et 10, ou supérieur à 10) ; 4°) les conditions de réalisation de la tâche (par exemple, le nombre d'essais possibles) . Ainsi, le croisement des variables didactiques va induire diverses procédures de résolution des problèmes d'équipotence (comptage un par un, par exemple) et conduire l'élève à rompre progressivement avec ses savoirs et savoir-faire antérieurs qui avaient leur domaine d'efficience, à renoncer à des procédures qui lui permettaient de réussir (correspondance terme à terme, subitizing) pour élaborer de nouvelles connaissances. De la même manière, les choix successifs que fait l'enseignant en fonction des objectifs fixés à chaque étape de son projet d'enseignement influent sur les modalités de validation qui à leur tour orientent les moyens que les élèves vont mettre en œuvre.

Pour conclure, chercheurs et didacticiens s'accordent à dire que le travail sur les problèmes d'équipotence et de comparaison déjà initié en moyenne section doit l'être à nouveau en grande section et au début du CP, avec deux approfondissements, d'une part, l'utilisation du dénombrement par comptage pour exprimer la quantité d'objets d'une collection et d'autre part, l'utilisation de l'écriture chiffrée pour communiquer une quantité d'objets au début du CP. Aux dires de Charnay (2013), les collections dénombrées peuvent être constituées de 8 à 15 objets en Grande Section et atteindre jusqu'à 20 objets au début du CP. Cependant, si le didacticien plaide avec Emprin et Emprin (2010) pour un apprentissage du dénombrement par comptage de un en un (comptage-numérotage), qui théâtralise la correspondance un mot – une unité (un, deux, trois, quatre,...), Rémi Brissiaud (2014) s'y oppose fermement et recommande plutôt un enseignement du dénombrement par comptage s'appuyant sur les décompositions des nombres (comptage-dénombrement) mettant en scène l'itération de l'unité : « 1 ; et-encore-1, 2 ; et-encore-1, 3 ; et-encore-1, 4... ». Nous reviendrons par la suite sur les tenants et les aboutissants de cette divergence de point de vue dans la section consacrée à l'étude des techniques et propriétés qui doivent être maîtrisées en GS et en début de CP.

En résumé :

Les premières connaissances des élèves, en grande section et au début du CP, sur les nombres leur permettent d'égaliser ou de comparer des quantités pour résoudre des problèmes de mémorisation liés à la reconnaissance de collections équipotentes et des problèmes de comparaison en utilisant :

- le dénombrement par comptage un par un (« *un, deux, trois...* ») ou par itération d'unité (« *1 ; et encore 1 ; 2 et encore 1, 3...* ») pour des collections comportant de 8 à 15 en GS et jusqu'à 20 au CP ;
- l'écriture chiffrée pour communiquer une quantité d'objets, en début de CP.

1.1.2 Anticiper le résultat d'actions portant sur des quantités

« Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but : jeux, activités de la classe, problèmes posés par l'enseignant de comparaison, d'augmentation, de réunion, de distribution, de partage » (Extrait du BO n° 3 du 19 juin 2008), p.15. En effet, les travaux de Carpenter, Hiebert et Moser (1981) montrent que bien avant tout apprentissage du symbolisme arithmétique (des signes « + », « - » ou « = », les jeunes enfants résolvent déjà des problèmes simples (d'ajout ou de retraits) à leur manière. Partageant ce point de vue, Brissiaud (2003) confirme que la quasi-totalité des élèves, en fin de grande section sont capables de calculer mentalement le résultat d'un ajout d'une unité à une quantité initiale de 2, ou d'un retrait à une quantité initiale de trois. Selon lui, pour anticiper le résultat d'actions portant sur les quantités, soit les enfants de 5-6 ans annoncent directement le résultat parce qu'ils l'ont déjà mémorisé (« *je sais que quatre et un, c'est cinq* »), soit ils utilisent deux sortes de procédures :

- a) Le comptage : les élèves miment les relations transcrites dans l'énoncé et reproduit à l'aide d'objets la situation de départ (cubes, dessin de jetons ou collection de doigts) puis matérialisent l'ajout (adjoignent d'autres cubes, dessinent d'autres jetons ou sortent d'autres doigts) ou le retrait (enlèvent des cubes, barrent des jetons dessinés ou baissent des doigts) avant de « recompter le tout » ou de « surcompter¹²⁴ » ou alors de « compter ce qui reste » ou de « décompter¹²⁵ » ;
- b) Le calcul : les élèves ne créent aucune collection, ne procèdent à aucun comptage apparent (ni les doigts, ni les lèvres ne remuent) et obtiennent directement le résultat « dans leur tête », à l'aide des seules représentations numériques des quantités en jeu dans le problème.

Concernant les problèmes de partage ou de réunion, Brissiaud affirme que les enfants de l'école maternelle et du cours préparatoire peuvent les résoudre également en mimant l'énoncé avec des jetons ou par le dessin. Ainsi, « dans les problèmes dits de division, ils forment une collection de jetons correspondant à l'effectif total, ils groupent les jetons par n (2 personnes par moto), et ils comptent les groupes de n ». D'une manière semblable, « dans les problèmes dits de multiplication, ils forment des groupes de n (des groupes de 2 galettes) et ils ne retiennent que le nombre de groupes de n nécessaires (12 groupes de 2 galettes) ; l'effectif total est déterminé en fin de procédure : il faut recompter le tout en prenant comme unité la galette » (Brissiaud, 2003, p.198).

¹²⁴ « Le surcomptage est une évolution du recomptage. [...] Dans le cas où on ajoute 3 objets à 4 objets, l'enfant retient le nombre 4 (sans le réaliser avec ses doigts) et compte en avançant de 3 au-delà de quatre : *cinq, six, sept*, éventuellement e s'aidant de 3 doigts levées » (Charnay et Mante, 2014, p.106)

¹²⁵ « Le décomptage est un voisin du surcomptage. [...] Le décomptage intervient lorsqu'il s'agit de trouver le nombre d'objets restants d'une collection qui contenait 8 objets après qu'on en a enlevé 3 ou quand on recule un pion sur une droite graduée : *sept, six, cinq* fournit la réponse » (Charnay et Mante, 2014, p.106)

De l'avis de Charnay (2013), « en GS, et encore en début de CP, les différents types de procédures sont acceptables. Un peu plus tard, au CP, elles seront remplacées par des procédures faisant appel au calcul » (p.105). Cependant, l'auteur précise que la transition des premières procédures de comptage à de nouvelles procédures relevant du calcul ne se fait « ni de manière linéaire, ni en même temps pour tous les élèves, ni de manière définitive pour un même élève » (Charnay, 1991, p.12). Par conséquent, Charnay et Mante (2014) recommandent aux enseignants d'agir principalement sur deux variables didactiques : la taille des nombres et le fait que les objets soient disponibles en totalité, partiellement ou pas du tout. Cette dernière variable étant, selon eux, primordiale dans la mesure où l'intérêt d'utiliser les nombres naît de l'incapacité de manipuler directement les objets ou les quantités.

- ***En résumé :***

En grande section de maternelle et en début de CP, les élèves peuvent anticiper le résultat d'une action sur des quantités : augmentation, diminution, réunion, partage, dans les cas suivants :

- « Cas de l'ajout ou du retrait de quelques objets, en particulier de 1 ou de 2 (état initial, état final, valeur de l'ajout ou du retrait) ;
- Cas de réunion de deux collections quand l'autre quantité et la quantité totale sont connues (complément) ;
- Cas de problèmes de partage ou de distribution, équitables ou non (en 2 ou en 3) de petites quantités (valeur de chaque part, nombre de parts) » (Extrait de Charnay, 2013, p.114).

1.1.3 Exprimer, mémoriser, comparer des rangs et communiquer à leur sujet

D'après Charnay (2014), les problèmes destinés à permettre aux élèves de comprendre que les nombres servent aussi à repérer des objets dans une liste ordonnée ou les situer les uns par rapport aux autres peuvent être nouveaux pour les élèves de grande section. En effet, les apprentissages numériques, en petite section, se font essentiellement sur des nombres évoquant des quantités (aspect cardinal). Ce n'est qu'à partir de l'année suivante que les enfants apprennent à communiquer une position dans une liste rangée de 10 objets au plus. De l'avis de Brissiaud (2003), le rituel de la date chaque matin dans la classe permet une pratique quotidienne de ces activités. Dans ce contexte, le pédagogue s'appuie sur la numérotation du jour pour permettre aux élèves de mieux gérer le temps qui passe tout en développant leurs compétences numériques. Dans tous les cas, la tâche proposée dans les problèmes incitant les élèves à utiliser les nombres comme mémoire de la position, consiste, aux dires de Charnay et Mante (2014), soit à « se souvenir de la position d'un objet (placé par exemple dans une série de boîtes identiques) pour pouvoir le retrouver ou le remettre à sa place », soit « à

fournir une information à quelqu'un pour qu'il puisse trouver un objet situé, par exemple, dans une série de boîtes identiques ». Conséquemment, les diverses procédures de résolution dépendent des choix que fait l'enseignant sur les variables didactiques qui sont, dans le cas d'un problème de repérage, la nature des boîtes (sont-elles toutes identiques ou non ?) et les modalités de leur repérage (peut-on les désigner du doigt ? Peut-on écrire sur les boîtes ?). Dans ce type d'activités, les difficultés rencontrées par l'apprenant proviennent soit de son incapacité à numéroter les éléments dans l'ordre ou du fait qu'il ne pense tout simplement pas à utiliser les nombres.

- ***En résumé***

Les élèves de la grande section de maternelle et au début de CP doivent être capables d'utiliser le numérotage pour communiquer une position dans une liste rangée de 15 objets ou plus en GS et jusqu'à 20 au début du CP (Charnay, 2013, p.114).

Par ailleurs, bien que les aspects cardinal et ordinal des nombres entiers soient imbriqués, ce dernier est souvent négligé. Et pourtant, affirme Charnay et al. (1995), « il faut noter que les pratiques "ordinales" sont souvent plus efficaces, en particulier pour le calcul mental. À titre d'exemple, « pour "additionner" 5 et 3, l'enfant va "avancer de 3" en partant de 5, comme il le ferait sur la piste de jeu de l'oie » (p.21). Ainsi, l'élève peut utiliser une procédure de nature ordinale, la suite numérique, en associant les actions « gagner ou perdre » aux actions « avancer ou reculer » pour anticiper le résultat d'une action (ajout ou retrait) et donc résoudre un problème de nature cardinale (ibid.).

En contexte ordinal, avant tout apprentissage du calcul, les élèves ont déjà les moyens de traiter des problèmes portant sur des déplacements en avant ou en arrière sur une file numérique, à travers des jeux de piste numérotée (jeux de l'oie) ou non numérotée (petits chevaux). Ce type de support favorise fortement les procédures de surcomptage et de décomptage. Toutefois, ces activités ne deviennent porteuses d'apprentissage que si la réponse (case d'arrivée, par exemple) est demandée avant le déplacement effectif même si une partie de la file numérotée est masquée, précise Charnay (2013). En outre, l'élève doit disposer d'une assez bonne maîtrise des écritures en chiffres pour réaliser ce type de tâche. Par conséquent, la résolution des problèmes d'anticipation liés au repérage d'objets ordonnés est le plus souvent renvoyée à la fin de la GS et au CP.

- ***En résumé :***

Les élèves de la grande section de maternelle et au début de CP doivent être capables à l'aide du surcomptage ou du décomptage d'anticiper le résultat d'une action sur une position dans le cas d'un

déplacement en avant ou en arrière de 1 à 5 (départ, arrivée, valeur et sens du déplacement) sur une file numérique jusqu'à 9 ou 10 en GS et jusqu'à 15 ou 20 au début du CP (Charnay, 2013, p.114).

1.2. Quelles techniques et quelles propriétés doivent être maîtrisées par les élèves en GS et en début de CP ?

1.2.1 Quantifier

« Quantifier, c'est répondre à la question : combien y en a-t-il ?¹²⁶ ». D'après Michel Fayol (2012), pour y répondre deux alternatives s'offrent à nous : soit on donne rapidement une estimation rapide précise avec les petites quantités ou approximative pour des quantités allant au-delà de 4, soit on fournit une réponse précise en recourant au dénombrement ou au calcul.

- **La correspondance terme à terme et la correspondance paquet par paquet**

Bien avant les nombres, le berger ajoutait un caillou sur un tas à chaque fois qu'un mouton sortait le matin de l'enclos. Inversement, le soir, il en enlevait un du tas à chaque fois qu'un ovine rentrait. Tout cela dans le but de savoir quelle était l'extension du troupeau ou si tous les ovins étaient bien rentrés le soir. Comme on peut le voir ici (schéma 11), le gardien utilisait la correspondance terme à terme pour associer un à un les ovins de son troupeau aux cailloux lui servant de collection témoin.

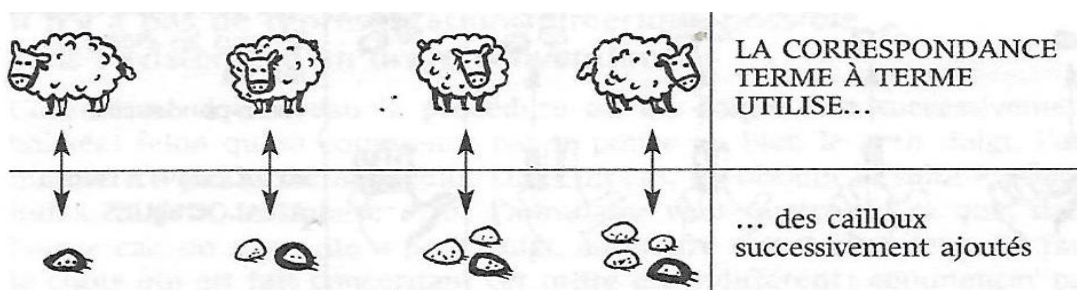


Schéma 11 : Schématisation de la correspondance terme à terme (Brissiaud, 2003, p.101)

Ainsi, dès cette époque, « l'idée de de quantité comme propriété abstraite est déjà présente dans ces activités, car le témoin est indépendant de la nature des objets à recenser », explique Noirfalise et Mathéron (2009, p.108). Par conséquent, on peut dire que la « correspondance terme à terme fut certainement la première technique de dénombrement », concluent les auteurs. La correspondance paquets par paquets en est une extension, « elle consiste à associer des paquets identiques d'objets en deux collections, en quantités souvent inférieures à 4, par exemple 3 objets de chaque collection, puis 2 objets de chaque collection » comme l'indique Charnay et Mante (2014).

¹²⁶ Fayol, 2012, p.40

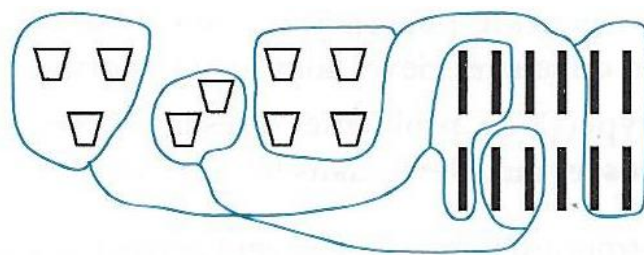


Schéma 12 : Schématisation de la correspondance paquets par paquets (Charnay et Mante, 2014, p.100)

Toutefois, bien que la correspondance terme à terme soit censée être la plus facile à mettre en œuvre car elle est souvent la seule procédure de résolution disponible pour des enfants qui ne savent pas encore utiliser les nombres, cela n'exempte pas les difficultés liées à son utilisation. Si les deux collections sont éloignées, l'enfant devra faire des allers retours. Dans les cas où les objets ne sont pas déplaçables, il doit imaginer un moyen pour relier entre elles les unités des deux collections. De plus, si les éléments à dénombrer (billes, perles, etc.) ont une trop grande mobilité, ils changent de place en permanence et l'enfant perd ses repères et donc les correspondances qu'il avait déjà établies.

- ***L'estimation approximative***

Certains travaux dont ceux de Whalen, Callistel et Gelman (1999) ont montré que les animaux, les nouveaux-nés et les adultes de toutes les cultures (s'ils ne peuvent dénombrer) y compris ceux d'Amazonie (en dépit de leurs systèmes numériques embryonnaires) bénéficient tous d'un système approximatif du nombre (SAN) c'est-à-dire « une représentation mentale analogique des quantités continues ou discrètes » qui peut être « assimilée (métaphoriquement à une ligne numérique mentale orientée de gauche (les petites quantités) à droite (les grandes quantités) » (Fayol, 2012, p.41). Selon Dehaene (2009), c'est cette connaissance de base qui rendrait l'élève capable non seulement d'effectuer une estimation approximative mais également de comparer rapidement des quantités ou encore de percevoir des ajouts, des retraits des quantités et leurs résultats. Par conséquent, « l'estimation approximative peut être considérée comme une forme de dénombrement qui permet l'évaluation approximative d'une quantité, avec la conscience que la quantification n'est pas nécessairement exacte, mais qu'elle donne un bon ordre de grandeur », indiquent Charnay et Mante (2014), (p.103). Cependant, la comparaison de deux ensembles ne peut se juger à vue que si le nombre d'objets qui les constitue est très différent ou encore si les deux ensembles contiennent très peu d'éléments (Noirfalise et Mathéron, 2009). En effet, plus les tailles des collections sont éloignées (2 et 7), plus la comparaison de leur quantité est facilitée. A contrario plus les quantités sont proches (2 et 6 ou 6 et 7), plus cela devient difficile de les comparer, c'est ce que l'on appelle l'effet de distance, explique Fayol (2012).

- ***L'estimation précise et rapide des petites quantités : Le subitizing***

Par ailleurs, en dehors de tout comptage ou de toute utilisation de la comptine numérique (« un, deux, trois... »), il est également possible d'estimer des petites quantités. En effet, vers 4^{1/2} les élèves sont très souvent capables d'exprimer précisément et immédiatement la quantité de très petites collections de 1, 2 ou 3 objets, parfois 4 sans les compter (Fayol, 2012). Et ceci, grâce à un phénomène connu sous le nom de subitizing dont le radical « subit » signifie instantané (Fischer, 1992). D'ailleurs, des expériences relatives aux performances des bébés et des nouveaux-nés confrontés aux petites quantités (1, 2, 3) montrent que cette habileté est déjà en germe de façon précoce (Antell et Keating, 1983 ; Starkey et Cooper, 1980 ; Straus et Curtis, 1981).

Pour certains chercheurs à l'instar de Gelman et Tucker (1975), le subitizing est un dénombrement très rapide (un, deux, trois...). Pour d'autres, comme Barth et Paladino (2011) ou Izard et al. (2009), c'est un cas particulier de perception approximative globale et immédiate. Les défenseurs de la troisième thèse dont Brissiaud (2007) postulent que les objets perçus seraient temporairement mémorisés individuellement en parallèle et optent pour une énumération de type un, encore un et encore un, c'est trois. Cependant, les neurosciences remettent en question certaines conceptions dominantes en prouvant que des patients atteints de troubles neurologiques donc incapables de compter de un en un parviennent néanmoins à dénombrer jusqu'à trois objets. En conséquence, Stanislas Dehaene (2010) émet l'hypothèse que « la subitisation ne passe pas par le comptage, mais seulement par une extraction parallèle et pré-attentive des objets de l'image ». Il apparaît donc que le subitizing ne serait pas le résultat d'un comptage rapide mais plutôt celui d'une énumération rapide ou d'une perception globale. Du point de vue de Brissiaud (2007) se référant aux travaux de Descouedres (1921) sur la capacité des enfants à montrer autant de doigts qu'il y a d'objets dans une collection donnée, le subitizing est une capacité d'énumération immédiate qui permet à l'être humain « de prendre en considération simultanément, c'est-à-dire dans un seul "focus de l'attention" 2 ou 3 entités mais pas au-delà. Et il le fait de manière automatique, sans s'en rendre compte. À partir de 4 entités, en revanche, deux focalisations de l'attention au moins sont nécessaires pour les prendre toutes en considération » (p.35).

Toutefois, « si le jeune enfant est capable d'estimer très tôt exactement des quantités jusqu'à trois, la question de l'expression de ces quantités par des mots-nombres demeure », objecte Charnay (2013, p.30). De ce fait, un apprentissage est, selon lui, nécessaire pour que l'enfant comprenne d'une part que le mot « trois » est associé à une configuration et correspond exactement à l'action de montrer trois doigts et d'autre part, qu'il évoque une pluralité de doigts et non le numéro du majeur (Charnay, 2013). De l'avis de Brissiaud, cet enseignement s'avère effectivement indispensable dans le contexte

d'un apprentissage du dénombrement par comptage, si le pédagogue veut que l'enfant profite du subitizing, il doit l'aider à accéder à l'idée qui lui manque à savoir que le comptage constitue une forme de totalisation des unités. Par contre, l'auteur reste convaincu que dans le cas d'un dénombrement par construction de constellation de doigts (utilisant des décompositions), le subitizing facilite la construction du système des trois premiers nombres car il permet à l'enfant de concevoir trois d'une part « comme le résultat de l'ajout de "un, un et encore un" ou de "deux et encore un" » et d'autre part, « comme résultant de la possibilité de totaliser les unités de deux façons différentes ». Dès lors, « on peut dire d'un tel enfant qu'il a construit le *système des trois premiers nombres* », affirme Brissiaud (p. 2007, p.35).

- ***L'emploi de constellations***

Quand la quantité d'objets à dénombrer devient importante, le subitizing n'est plus opérant mais cela reste encore possible de dénombrer sans compter si l'on souhaite seulement une représentation analogique de la quantité. En effet, le recours aux constellations de points (celles du dé) ou à d'autres organisations (celles qui privilégient le groupement par 2 ou par 5 comme les dominos) donnent accès simultanément à une figuration rapide des nombres et aux relations arithmétiques qui lui sont associées, comme le montre le schéma suivant :

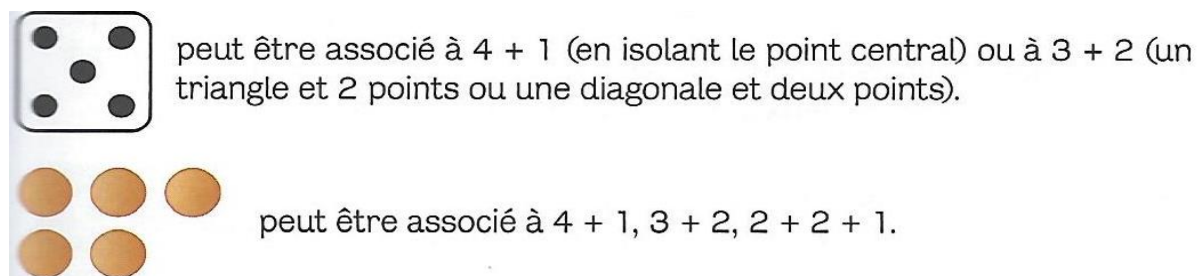


Schéma 13 : Schématisation du codage et du décodage d'une quantité (Charnay, 2013, p.31)

En fait, l'usage des constellations est également mentionné dans les programmes publiés en 2002 et en 2007 lorsqu'ils traitent des compétences numériques attendues en fin d'école maternelle. En effet, on peut lire que l'enfant doit être capable de « reconnaître globalement et exprimer des petites quantités organisées en configurations connues (doigts de la main, constellation du dé) ». En outre, Michel Fayol (2012) assimile les doigts à une mémoire externe qui confère à l'élève une habileté perceptivo-tactile (évaluée à 5 ans) témoignant de ses performances futures en calcul jusqu'à ses huit ans. En outre, les doigts favorisent l'abstraction et la création mentale des unités numériques car ils peuvent être utilisés pour représenter des objets de nature diverse. Par ailleurs, la disponibilité très rapide des figurations à l'aide des doigts donne accès aux décompositions (par exemple $8 = 5 + 3$) et favorise donc la réussite de certains calculs, affirme Roland Charnay (2013). Dans le même ordre

d'idées, un pédagogue français nommé Brachet, assurait déjà en 1955 que c'est « en contemplant, à bonne distance, et d'une vue d'ensemble, simultanée, la constellation de 4 objets, que l'enfant [comprend que] le nombre 4 est $2 + 2$ et $3 + 1$ ».

- **Une quantification précise : comptage et dénombrement**

Pour certains auteurs comme Noirfalise et Mathéron (2009), le comptage est synonyme de dénombrement quand il s'agit de « désigner l'activité qui consiste à associer un nombre entier à une collection donnée » (p.107). Pour d'autres, le comptage est une méthode (Emprin et Emprin, 2010), un moyen (Charnay et Mante, 2014), une procédure (en psychologie cognitive) ou encore un procédé (Brissiaud, 2007) utilisé pour dénombrer c'est-à-dire exprimer une quantité par un nombre. Autrement dit, pour répondre à des sollicitations comme « *Combien y a-t-il d'objets ?* » ou « *Donne-moi sept bonbons* », l'enfant peut compter de un à un pour dénombrer la collection. Cependant, comme le montre l'illustration infra (schéma 14), le comptage n'est pas la seule forme de dénombrement possible.

En réalité, dans le paysage pédagogique français, deux conceptions s'opposent à l'égard du choix pédagogique qui favorise le mieux la construction des nombres chez les enfants de 2-4 ans et l'accès au calcul :

- celle inspirée d'un article de vulgarisation d'une psychologue américaine, Rochel Gelman (1983), qui s'intitulait « Les bébés et le calcul » et défendue en France par une équipe de chercheurs de l'INRP dont Roland Charnay, connue sous le nom d'Ermel, selon laquelle le comptage doit être enseigné de manière précoce dès la Petite Section de l'école maternelle en attirant l'attention des enfants sur le « principe de correspondance terme à terme » (Gelman et Callistel, 1978) : lorsqu'on compte, chaque élément de la collection doit être associé à un mot-nombre et à un seul, on pointe un objet, on dit « un », ensuite, on pointe un autre objet, on dit « deux », après encore un autre objet, on dit « trois ». Le dernier mot-nombre énoncé pour le dernier objet est aussi le nombre d'objets composant la collection : c'est « trois ». Cette manière de faire apprendre à compter est également celle qu'utilise les parents à la maison d'où l'appellation de « pédagogie du comptage selon le sens commun » que lui confèrent certains chercheurs à l'instar de Brissiaud (2013) ;
- celle qu'on trouve dans *Comment les enfants apprennent à calculer ?* (Brissiaud, 1989) qui recommande de renouer avec la culture pédagogique de l'école maternelle française, en privilégiant l'usage de décompositions préconisé dans les textes officiels de 1923 à 1986. Dans cette conception, le choix pédagogique fait par l'auteur est le dénombrement par construction d'une collection-témoin de doigts accompagnée du mode d'expression verbale qui est celui de la décomposition en unités : on dit « un », « un » et encore « un », « c'est

trois ». Chaque nouvelle prononciation du mot-nombre « un » renvoie simultanément à la prise en compte d'un nouvel objet et au nouveau doigt levé. Concomitamment, l'enfant voit la collection de doigts s'agrandir, « c'est un indice supplémentaire important [lui] permettant de comprendre que l'adulte s'est engagé dans le projet de totaliser les unités : il est en train d'en construire le nombre. Et finalement, lorsque l'adulte prononce pour la première fois un mot différent de « un », à savoir « trois », l'enfant a la possibilité de comprendre que ce mot renvoie à ce qu'exprime la collection-témoin de doigts, c'est-à-dire le nombre, précise Brissiaud (2007, p.24-25). D'après Rémi Brissiaud, l'enseignant de PS devrait, dans un premier temps, « éviter tout enseignement du comptage-numérotage et même plus généralement [...] toute utilisation des mots-nombres en tant que numéros, afin de privilégier les décompositions des 3 premiers nombres » (Brissiaud, 2013, p. 20).



Schéma 14 : Deux façons de dénombrer une collection de livres
(Brissiaud, 2007, p.24)

D'autre part, qu'il soit fait par comptage ou par décomposition à l'aide d'une collection témoin de doigts, un dénombrement réussi reste, néanmoins, tributaire de trois conditions à remplir (Brissiaud ; 2007). Tout d'abord, l'élève doit créer mentalement les unités numériques, c'est-à-dire considérer comme « uns » tous les objets constituant la collection même s'ils sont dissemblables d'un point de vue perceptif. Par exemple, si l'on dénombre les animaux d'une ferme, une poule, un poussin, une vache, un cochon ou un lapin représentent chacun un animal quelque soit leur nature et donc une unité à part entière. Ensuite, l'apprenant va devoir énumérer toutes les unités numériques, à savoir parcourir la collection en désignant chaque élément l'un après l'autre (du doigt, du regard, par pointage...) sans répétition, ni oubli avant de totaliser toutes ces unités numériques « c'est-à-dire exprimer, d'une façon ou d'une autre, combien il y a en tout » (Brissiaud, 2007, p.22).

S'agissant de l'apprentissage du dénombrement par comptage de un à un recommandé par Roland Charnay (2013), dès l'âge de quatre ans, bien avant que l'enfant ne comprenne comment cette pratique permet la représentation numérique des quantités, il apprend à énoncer la suite des mots-nombres et à mettre ces mots (*un, deux, trois, quatre...*) en correspondance terme à terme avec les objets de la collection qu'il veut dénombrer. Cependant, il ne sait pas encore que le dernier mot prononcé désigne à la fois le 4^{ième} objet, les quatre objets qui viennent d'être comptés et la quantité totale d'objets. Ce n'est que dans un deuxième temps que « les jeux répétés de dés ou de dominos amènent petit à petit l'enfant à comprendre que le dernier-mot nombre a un rôle spécifique (garder la mémoire de ceux qui le précède) ce qui lui permet enfin d'accéder à la représentation numérique des quantités : « son comptage est devenu dénombrement » (Brissiaud, 2003, p.141). Ce type de dénombrement se met donc en place progressivement et le risque d'erreur est important (Charnay et Mante, 2014). Les erreurs des élèves peuvent être dues soit à un manque de « compétence conceptuelle nécessaire à la compréhension du nombre », soit « à des difficultés d'attention ou de mémoire rendant difficile la coordination de la remémoration des noms de nombres et du pointage digital ou visuel des entités à dénombrer » (Fayol, 2012, p.62). Ainsi, deux chercheuses américaines, Gellman et Gallistel (1978) ont mis en évidence les capacités indispensables au bon fonctionnement et à l'opérationnalité du dénombrement par comptage de un en un et définit les cinq principes fondamentaux du comptage dont Fayol (2012) propose une adaptation (voir tableau 2).

1/ Principe d'ordre stable	Les mots-nombres doivent être engendrés dans le même ordre à chaque comptage.
2/ Principe de stricte correspondance terme à terme	Chaque élément d'une collection doit être désigné par un mot-nombre et un seul.
3/ Principe cardinal	Le mot-nombre qui désigne le dernier élément d'une collection représente le nombre total d'éléments.
4/ Principe d'abstraction	Seules sont abstraites, des éléments comptés, leurs caractéristiques d'entités distinctes.
5/ Principe de non-pertinence de l'ordre	L'ordre dans lequel les éléments d'une collection sont énumérés n'affecte pas le résultat du comptage à condition que le principe de correspondance terme à terme soit respecté.

Tableau 2 : Les principes fondamentaux du comptage (Fayol, 2012, p.63)

De l'avis de Rémi Brissiaud (2007, 2013), l'enseignement du dénombrement par comptage dès la Petite Section (PS) est un choix pédagogique dangereux car en décrivant la collection sous la forme « un », « deux », « trois », l'enseignant ne permet pas à l'enfant de comprendre que le mot-nombre « trois » désigne une totalité. Du coup, la majorité des élèves « créent une nouvelle règle "après avoir attribué un numéro à chaque objet, il faut répéter le dernier numéro" » (ibid.p.29). Ainsi, à force d'entraînement, cette règle leur permet d'adopter un comportement en tout point identique à celui d'un enfant qui aurait compris pourquoi compter. Mais, en réalité, ils s'installent durablement dans

l'usage d'un comptage purement rituel qui va par la suite constituer un obstacle à leur progrès vers le calcul car les enfants utilisent les mots-nombres pour compter sans comprendre qu'ils désignent des pluralités successivement engendrées par l'ajout d'une unité : « *deux, c'est un et encore un* » ; « *trois, c'est un, un et encore un* » ou bien « *trois, c'est deux et encore un* », etc. (Brissiaud, 2013). Par voie de conséquence, aux cinq principes de Gelman et Gallistel (1978), Roland Charnay (2014) ajoute au comptage une autre propriété qu'il formule ainsi : « ajouter un objet revient à dire le nombre suivant [...]. Autrement dit, « un comptage bien compris se traduit, pour l'élève, par la conscience que, l'avance dans ce comptage s'accompagne du cumul des objets comptés, ce qui peut, par exemple être renforcé si on l'incite à dire : un et encore un : deux ; et encore un : trois ; et encore un : quatre... » (Charnay, 2014, p.18).

Concernant l'apprentissage du dénombrement par construction d'une collection-témoin de doigts décrite verbalement par une décomposition, le pédagogue veut, en premier lieu, que l'enfant comprenne que les mots-nombres expriment des quantités. Ainsi, dans cette stratégie de quantification, l'enfant cherche dans une quantité donnée des quantités plus petites qui sont immédiatement reconnues pour décrire la quantité totale. Dans le cas du dénombrement de la collection de livres, c'est 1 : « *un* », « *un* », « *un* » et « *encore un* », avant que l'adulte dénomme le nouveau nombre, c'est quatre. Par conséquent, on travaille d'abord sur de très petites quantités que l'enfant représente à l'aide de l'outil le plus simple, les collections-témoins de doigts et nomme directement sans compter jusqu'à ses 4 ans environ. Comptage et emploi des mots-nombres « en tant que numéros sont jusque-là évités. Ce n'est qu'après qu'il apprend à compter de façon à pouvoir dénommer de plus grandes quantités. « L'enfant compte plus tard mais dès son premier comptage, il sait que le dernier mot-nombre prononcé permet de représenter la quantité correspondante : il accède directement au dénombrement » (Brissiaud, 2003, p.141).

Une pratique pédagogique est-elle privilégiée dans les textes officiels et documents d'accompagnement pour l'apprentissage du dénombrement ?

Durant près d'un siècle, la vivacité des débats sur la place du comptage à l'école a induit de nombreux revirements dans les recommandations officielles quant à la manière dont il fallait faire apprendre le nombre à la maternelle et au CP. Deux textes ont vraisemblablement joué un rôle majeur dans l'évolution des programmes. La circulaire de 1986 s'avéra un tournant dans les pratiques pédagogiques en instaurant un enseignement du comptage selon la pédagogie du sens commun, c'est-à-dire en insistant sur la correspondance 1 mot – 1 objet (« un », « deux », « trois », « quatre »), comme le recommandent Charnay et ses collaborateurs (1990) qui se voient confier la rédaction des programmes 2002. Le projet de programme et de recommandations pour l'école maternelle du

Conseil Supérieur des programmes publié en juillet 2014, refonde la pédagogie des nombres et du calcul en renouant avec la culture pédagogique pour les apprentissages numériques qui était celle de l'école depuis 1923 environ jusqu'en 1986, à savoir privilégier l'usage des décompositions des nombres, éviter le comptage-numérotage pour lui préférer le comptage dénombrement « 1 et encore 1, 2; et encore 1, 3; et encore 1, 4» c'est-à-dire un comptage où « l'on cherche à faire comprendre le calcul sous-jacent au dénombrement » (Brissiaud, 2016, p.7). Si l'école a enseigné le comptage pendant près de 30 ans, c'est, entre autre, à cause d'une confusion entre le nombre et la quantité représentée par une collection de numéros, née d'un usage non consensuel des mots "quantité", "nombre", "numéro", "cardinal", "ordinal", etc., explique Brissiaud (2014a). Selon lui, victimes d'une forme de laxisme, psychologues et didacticiens « se sont mis à parler de "nombres" ou de "dénombrement" alors que seules des "quantités" étaient en jeu » (Brissiaud, 2014a, p.4).

• ***En résumé :***

Concernant le niveau de maîtrise de la composante techniques et propriétés du concept de nombre attendu en grande section et au début du CP, nous retenons des travaux de Charnay (2013, p.115) que pour quantifier les élèves doivent savoir :

- Dénombrer de très petites quantités jusqu'à 4 et des petites quantités de 1 à 6 objets (sous forme de constellations du dé), de 1 à 5 doigts (sur une main) en GS, puis au CP, progressivement de 1 à 10 doigts (sur 2 mains), sans compter ;
- Dénombrer, par comptage, des quantités jusqu'à 15 environ en GS et 20 environ au CP ;
- Exprimer ou réaliser de très petites quantités (1 à 4) et des petites quantités (1 à 10) par une collection-témoin ou un mot nombre puis progressivement par une écriture chiffrée ;
- Connaître pour certains nombres les relations (décompositions) entre eux leur prédécesseur et leur successeur jusqu'à 5 en GS et jusqu'à 10 au début du CP ;
- Comparer deux nombres ou ranger des nombres du plus petit au plus grand ;
- Utiliser le surcomptage, le décomptage, le calcul avec les doigts ou des résultats connus pour résoudre des problèmes ;
- Distinguer valeur et quantité dans des situations d'échange.

1.2.2 Maîtriser la comptine numérique

Les programmes 2008 précisent d'une part que « l'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification » et d'autre part que les élèves doivent mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30. En accord avec les textes, Bolsius (2011) reconnaît le caractère fondamental de cette connaissance car l'activité de dénombrement ainsi que le calcul sur les quantités et sur les nombres sont intimement liés à l'ordre conventionnel d'énonciation des nombres. Par voie de conséquence,

Emprin et Emprin (2010) recommandent un apprentissage spécifique de la suite des mots-nombres avec une mise en lien progressive de leurs désignations chiffrées. Au départ, l'enseignement de la chaîne orale ne semble pas différer d'une récitation. En effet, les auteurs (Charnay, 2013 ; Brissiaud, 2003 ; Emprin et Emprin, 2010) proposent des comptines enfantines tout en insistant sur le détachement des mots-nombres les uns des autres et en dehors de tout contexte pour éviter les confusions.

Cependant, les difficultés liées aux particularités de la langue française (Mounier, 2010) font que le rituel du dénombrement des élèves présents chaque matin en classe est intéressant mais pas suffisant pour assurer une bonne maîtrise de la chaîne orale. Ainsi, Charnay (2013) proposent dans un premier temps, dès la moyenne section d'apprendre aux élèves à réciter la comptine jusqu'à dix environ, à partir d'un nombre donné ou jusqu'à un nombre fixé ou à l'envers en partant de cinq ou six. Ensuite, dans un second temps, en grande section et au début du CP, il prévoit de renforcer la maîtrise de la chaîne numérique par deux capacités nouvelles : réciter la comptine jusqu'à environ trente (en repérant les régularités à partir de vingt) et la réciter à l'endroit ou à l'envers en avançant ou en reculant d'un nombre donné d'éléments (par exemple, avancer de cinq au-delà de sept : huit, neuf, dix, onze, douze).

- **En résumé :**

Concernant la maîtrise de la comptine numérique, Roland Charnay (Charnay, 2013, p.116) donne les indications suivantes pour ce qui est des connaissances et compétences attendues :

- En GS : réciter la comptine jusqu'à environ 30 (en repérant les régularités jusqu'à 20, la réciter jusqu'à un nombre fixé, à partir d'un nombre donné ou à l'envers ;
- Au début du CP : réciter la comptine numérique à l'endroit ou à l'envers en avançant ou en reculant d'un nombre donné d'éléments (par exemple, avancer de cinq au-delà de sept : huit, neuf, dix, onze, douze).

1.3. Quelles priorités pour la représentation des nombres en GS et au début du CP ?

L'histoire de l'humanité nous a montré que l'utilisation des mots-nombres n'est pas le seul moyen à disposition pour conserver la mémoire des quantités. Dans la Haute Antiquité, la correspondance terme à terme se faisait à l'aide d'une collection-témoin de cailloux, de billes d'argile enfermées dans une jarre, de doigts successivement levés ou d'entailles sur un bout de bois sous une forme très similaire à celle sous laquelle la quantité était perçue. Le nombre était alors représenté de manière analogique : un procédé ancestral non linguistique, gestuel ou graphique (voir schéma 15). Lorsque les unités numériques totalisées sont communiquées à l'oral par un mot-nombre [cinq] : on parle de

représentation verbale. Enfin, dans le cas où ce sont les chiffres qui sont mis en correspondance terme à terme avec les unités de la quantité à représenter, le principe de base reste le même, c'est le dernier élément mis en correspondance qui désigne la quantité. Cependant, la pluralité est signifiée par un signe unique (V) ou un seul chiffre (« 5 ») qui a une forme arbitraire et dépend des conventions culturelles (contrairement à la collection-témoin). Le nombre est alors représenté de manière symbolique. Reste à comprendre maintenant, « comment les enfants apprennent que les chiffres, comme les mots-nombres, ne sont pas seulement des numéros mais qu'ils représentent aussi des quantités ?

Rémi Brissiaud (2003) répond à cette question en évoquant le processus de « traduction » des mots-nombres en chiffres et inversement). Selon lui, « si 3 » apparaît à l'enfant comme le signe écrit qui correspond à [trois], il est très probable que « 3 » héritera en partie du sens de [trois]. Ainsi, la production-reconnaissance directe du graphisme des chiffres mais surtout l'usage de la file numérique facilite ce processus car, organisée dans l'ordre conventionnel des mots-nombres, elle met en relation l'ordre oral et l'ordre écrit et permet donc aux élèves de retrouver l'écriture ou la lecture d'un nombre et de le mémoriser. Cependant, comme l'indique le psychologue, cette traduction ne suffit pas pour rendre intelligible l'apprentissage de l'usage des chiffres. Pour y parvenir, il nous propose de nous pencher sur le problème suivant : « les enfants doivent passer une commande écrite pour obtenir autant de gommettes rondes qu'il y a de chiens dessinés sur une feuille : il faut que chaque chien ait une balle ». La passation a été réalisée, au mois de novembre dans une classe de grande section et le chercheur a recueilli les différentes commandes qu'il a classé en trois groupes.

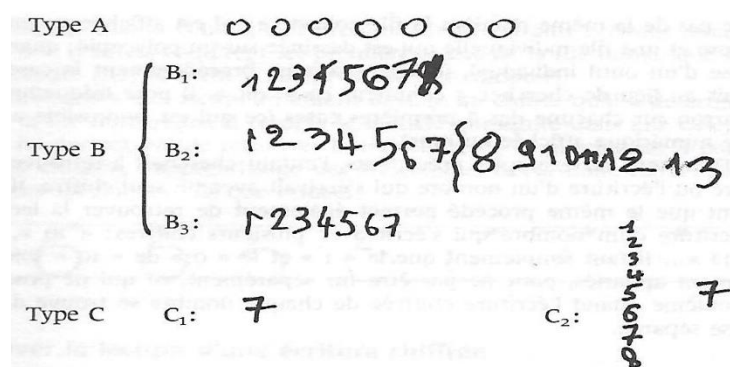


Schéma 15 : Production d'élèves (Brissiaud, 2003, p.132)

Dans la production de type A, la quantité est représentée sous une forme analogique tandis qu'elle l'est sous une forme symbolique dans les productions de type C. À mi-chemin entre les deux, les enfants qui ont proposé les commandes B1, B2 et B3 expriment la quantité par une collection de numéros : en B1 et en B2, l'enfant compte les chiens, les chiffres et ne conservent que la même

quantité de chiffres en les barrant ou en les séparant du reste de la file numérique tandis qu'en B3, il fait ce que Brissiaud appelle un « double pointage » (au fur et à mesure qu'un nouveau chien est pointé, il écrit le chiffre suivant en prenant modèle sur la file numérique, voir schéma 16). Toutefois, même si les chiffres sont présents, les élèves du groupe B, à l'instar de ceux du groupe A, n'ont pas pour autant fait de comptage.

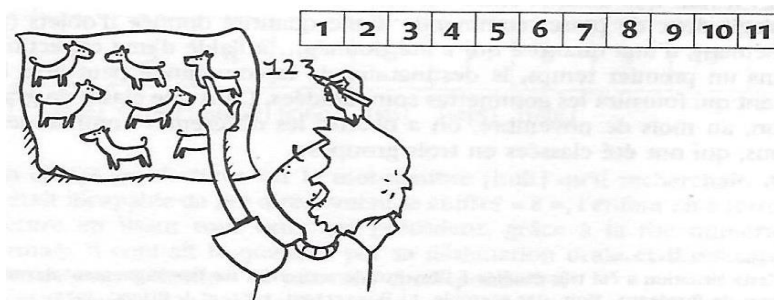


Schéma 16 : Schématisation du « double pointage » (Brissiaud, 2003, p.132)

D'après Brissiaud (2003), le simple fait de dire aux enfants que « les grands, pour passer une commande, utilisent des chiffres » (p.133) les amène à passer d'une commande de type A à une de type B. Pour ce qui est de la progression vers une commande de type C, la comparaison des différents messages permet aux élèves d'une part de découvrir que certains n'ont écrit que le « dernier numéro » et d'autre part, de comprendre qu'il suffit de mémoriser le dernier pour garder la mémoire de ceux qui précèdent. Parallèlement, l'entraînement avec des activités de décodage¹²⁷ (voir schéma 17) parfait l'accès à la quantité et la maîtrise des registres de représentation des nombres de ces élèves de grande section. Dès lors, ils disposent de trois registres de représentation des nombres (analogique, verbal et symbolique) qui leur permet de communiquer au sujet de l'extension des collections. En corollaire, en grande section et au début du CP, « l'enjeu essentiel se trouve dans une maîtrise progressive des désignations chiffrées » qui loin de se résumer au tracé correct des chiffres, vise plutôt « la capacité des élèves à pouvoir circuler entre les trois types de désignations évoquées [dans le schéma 17], donc à réaliser tous les transcodages possibles (Charnay, 2013, p.111).

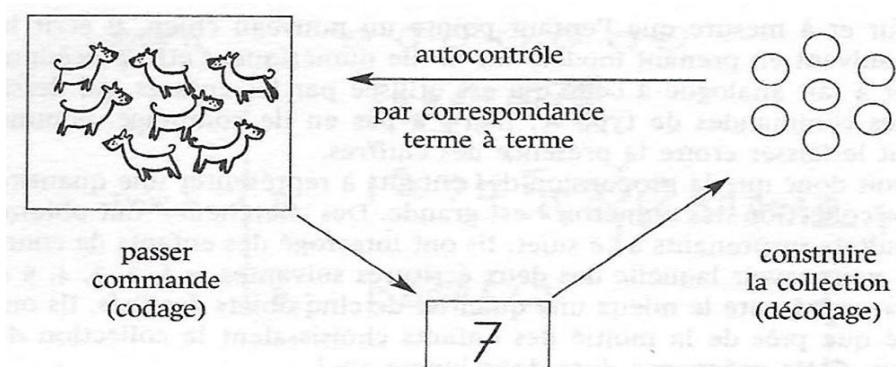


Schéma 17 : Schématisation du codage et du décodage d'une quantité (Brissiaud, 2009, p.134)

¹²⁷ Un chiffre étant donné et l'enfant doit dessiner la collection correspondante.

- **En résumé :**

S'agissant des connaissances et compétences attendues inhérentes à la composante Langage du concept de nombre entier naturel en Grande section et au CP, Roland Charnay (2013, p.116) donne les indications suivantes :

- Maîtriser le langage relatif à la comparaison des quantités (plus que, moins que, autant que) et des nombres à partir du CP (plus petit que, plus grand que, du plus petit au plus grand) ;
- Passer d'un registre d'expression des nombres à un autre : en GS, associer un type de collection-témoin (doigts) d'abord à un autre type de collection-témoin (constellations) puis à un mot-nombre jusqu'à 10. Au CP, associer constellations, mots-nombres et écritures chiffrées d'abord jusqu'à 10 puis au-delà avec un apprentissage du tracé des chiffres en parallèle.

- **Synthèse :**

Pour l'enseignement du calcul mental de sommes aux élèves du cours préparatoire, il convient de faire des choix didactiques et pédagogiques. Cependant, ces derniers ne peuvent être faits sans tenir compte, au préalable, des savoirs et savoir-faire numériques des élèves à la fin de la Grande Section. Bien qu'elle soit non exhaustive, la revue des programmes, documents officiels, ouvrages et publications réalisée supra, nous permet néanmoins d'avoir une idée précise des compétences et connaissances sur les nombres dont peut disposer un élève au début du CP. Ainsi, au regard des trois repères essentiels pour l'évaluation de la maîtrise du concept de nombre proposés par Charnay (2013, p.21), nous retenons que les élèves peuvent résoudre des problèmes de mémorisation, de comparaison et d'anticipation en mobilisant des procédures telles que :

- Le dénombrement jusqu'à 15 en GS et 20 environ au début du CP pour comparer des quantités, construire une quantité égale à une autre ou compléter une quantité pour la rendre égale à une autre ;
- Le comptage-numérotage pour communiquer une position dans une liste rangée de 15 objets ou plus en GS et jusqu'à 20 au début du CP ;
- Le surcomptage, le décomptage, le calcul avec les doigts ou la récupération en mémoire de résultats connus pour trouver le résultat d'une augmentation, d'une diminution (de 1 ou de 2), d'une réunion, d'un partage (en 2 ou en 3) ainsi que le déplacement en avant ou en arrière de 1 à 5 (départ, arrivée, valeur et sens du déplacement) sur une file numérique jusqu'à 9 ou 10 en GS et jusqu'à 15 ou 20 au début du CP.

La résolution des problèmes relevant de l'usage des nombres est donc le premier repère.

S'agissant du deuxième repère correspondant aux procédures et techniques que doivent maîtriser les élèves au début du CP, nous notons le subitizing, l'estimation approximative, la correspondance terme à terme ou paquets par paquets pour dénombrer, sans compter, de très petites quantités (jusqu'à 4) ou des petites quantités (1 à 6) à l'aide de constellation. D'ailleurs, la capacité de l'enfant à dénombrer par comptage de un en un ou en construisant des collections-témoin de doigts devrait lui permettre de dénombrer de quantifier jusqu'à 15 environ en GS et 20

environ au début du cours préparatoire. Pour ce faire, il doit avoir mémorisé la comptine numérique au moins jusqu'à 30. En outre, sa connaissance des relations arithmétiques lui donne accès aux décompositions des nombres jusqu'à 5 en GS et jusqu'à 10 au début du CP. D'autre part, à son entrée à l'école élémentaire, l'enfant peut comparer et ranger des nombres du plus petit au plus grand. Le troisième repère a trait aux moyens d'expression ou de représentation des nombres dont disposent les élèves à leur sortie de la maternelle. Pour les nombres envisagés à ce moment de la scolarité, l'enjeu essentiel est qu'ils puissent passer d'un registre d'expression des nombres à un autre, de l'écriture chiffrée aux représentations verbale ou analogique jusqu'à 10 en GS et au-delà de 10 au début du CP avec un apprentissage en parallèle du tracé des chiffres.

Le troisième repère a trait aux moyens d'expression ou de représentation des nombres dont disposent les élèves à leur sortie de la maternelle. Pour les nombres envisagés à ce moment de la scolarité, l'enjeu essentiel est qu'ils puissent passer d'un registre d'expression des nombres à un autre, de l'écriture chiffrée aux représentations verbale ou analogique jusqu'à 10 en GS et au-delà de 10 au début du CP avec un apprentissage en parallèle du tracé des chiffres.

1.4. Les obstacles à une « première rencontre réussie » avec les nombres à l'école maternelle

S'agissant des performances arithmétiques des élèves, la recherche scientifique a, en quatre décennies, progressé tant sur le plan des difficultés et des troubles que sur celui des « bases de l'intuition mathématique » (Dehaene, 2009) avec l'avènement de la neuropsychologie. En ce qui concerne l'apprentissage du calcul, des études réalisées en Israël, aux États-Unis et au Royaume-Uni ont révélé des difficultés sévères en arithmétique, chez 3 à 5% environ de la population scolaire et adulte (Fayol, 2010). D'après Michel Fayol (2010), l'intelligibilité de ces difficultés a permis le décèlement de leur origine multifactorielle et de différents profils : « certains éprouvent des difficultés dans l'apprentissage des noms des nombres et dans le transcodage (c'est-à-dire le passage de l'oral aux chiffres arabes) ; d'autres peinent à aligner les chiffres et à les placer dans la bonne position dans les nombres complexes (20010 au lieu de 210) ; d'autres encore ne parviennent pas à mémoriser les tables, ce qui les oblige à compter laborieusement lors de la résolution des opérations ; d'autres enfin échouent à comprendre les énoncés des problèmes mais sont en mesure de résoudre ces problèmes lorsque les données leur sont présentées de manière non verbale (Fayol, 2010, p.7-8).

Parallèlement, des recherches mettent en lumière les habiletés numériques élémentaires, chez les nouveaux-nés et les animaux. L'une des plus marquantes est celle de Stanislas Dehaene (1997) qui écrivait dans son ouvrage *La Bosse des maths* qu' : « Il est clair que , dès l'âge de 6 mois, le bébé est en possession d'un compteur arithmétique rudimentaire, capable de reconnaître les petits nombres et de les combiner en additions et en soustractions élémentaires » (p.70). Autrement dit, les bébés et donc, les jeunes enfants disposeraient d'une intuition primitive des grandeurs qui leur permettraient de percevoir les quantités et leurs transformations de types ajout, retrait, partage, etc., ainsi que la

capacité de les comparer sans qu'un apprentissage soit nécessaire, explique Fayol (2012). Cependant, certains chercheurs français (Bideaud, Lehalle et Villete, 2004) et américains (Carey, 2004) réfutent l'idée d'une reconnaissance perceptive des quantités en démontrant que le bébé bénéficierait plutôt d'une capacité à construire des modèles mentaux des très petites collections (trois éléments tout au plus) sans pour autant accéder au nombre ou à la quantité. Dans le même ordre d'idées, Brissiaud (2007) précise que cette capacité de subitisation donne seulement aux enfants la possibilité d'énumérer sans effort les unités d'une collection jusqu'à trois et de distinguer des collections de taille différente car pour accéder au nombre, ils doivent encore créer un symbole (collection-témoin et/ou nom de nombre) qui leur permettra de représenter la totalité des unités énumérées et donc d'accéder au nombre exprimant la taille de la collection donnée.

De l'opinion de Fayol (2012), « la première difficulté majeure tient du passage au symbolique » (p.8). Selon lui, l'association d'une quantité à un système de symboles quel qu'il soit (suite orale des noms de nombres, configurations de doigts, abaques, etc.) constitue une source de complication pour tous les enfants entre deux et cinq ans indépendamment de leur culture car ce n'est qu'au bout d'un apprentissage long et fastidieux qu'ils finissent par comprendre que « "trois" correspond à un cardinal précis, indépendant, des contenus (étoiles, voitures, fourmis...) , incluant "un" et "deux", etc. » (p.8). Par conséquent, « la façon dont les enseignants de petite section favorisent cette symbolisation est l'un des aspects cruciaux de la pédagogie renchérit, Brissiaud (2007, p.83). Pour Michel Fayol (2012), la connaissance de la suite des nombres contribue à cet apprentissage mais la composante primordiale, reste, selon lui, l'activité de dénombrement qui constitue une difficulté de taille et doit être, en conséquence, travaillée en ayant recours à l'usage des doigts, à la manipulation dans des situations diversifiées, à l'utilisation ou non du langage, etc. Partageant cet avis, Brissiaud reconnaît le rôle fondamental du dénombrement tout en insistant sur le fait qu'il faudrait surtout que l'enseignant de la maternelle sache qu'il existe :

- deux conceptions françaises opposées concernant la construction du nombre chez l'enfant et l'accès au calcul et par conséquent, deux manières différentes d'enseigner le dénombrement par comptage de un à un ou par décomposition de la collection, avec un effet pédagogique très différent selon qu'on enseigne l'un ou l'autre ;
- une distinction entre les configurations non-numériques et les collections-témoins. Lorsqu'un enfant lève trois doigts (le pouce, l'index et le majeur) sans savoir qu'il montre ainsi le nombre 3, il a recours à une configuration non numérique. A contrario, quand l'élève sait que chaque doigt levé, le pouce comme l'index vaut « un », et donc qu'il peut substituer un doigt à l'autre car il a compris que c'est un symbole numérique, il utilise une collection-témoin de

doigts. Cette dernière facilite la mise en relation des quantités et permet ainsi l'accès au calcul ;

- une distinction entre le comptage sur les doigts et le calcul sur les doigts. Pour donner le résultat de $6 + 3$, certains enfants comptent un à un 6 doigts sur une main puis 3 doigts sur l'autre avant de recompter le tout. « D'autres enfants sortent directement 6 doigts car ils savent comment 6 est formé sur les doigts ($6 = 5 + 1$). Ils lèvent 3 autres doigts et là encore ils reconnaissent directement 9 grâce au repère 5 ($9 = 5 + 4$). Il s'agit bien d'une procédure où chaque mot-nombre est directement associé à une quantité qui lui correspond, sans comptage 1 à 1 : ces enfants calculent sur leurs doigts » (Brissiaud, 2009, p.15).

D'après Brissiaud (2013), ces trois distinctions doivent faire partie de la culture professionnelle des enseignants de maternelle car elles permettent chacune « de différencier deux comportements qu'une personne non informée ne peut pas distinguer. Celle-ci voit seulement un enfant qui compte, un enfant qui regarde des points, un enfant qui utilise ses doigts pour résoudre un problème. Or, l'un de ces comportements est compatible avec un parcours d'échec alors que l'autre est typique d'un parcours de réussite » (p.81-82), explique l'auteur. Oui, mais le problème c'est que les textes officiels ne semblent pas prendre en compte les recherches scientifiques récentes. Les seuls textes pédagogiques institutionnels en vigueur, mis à disposition des professeurs pour l'enseignement du nombre à la maternelle sont les programmes 2008 et une brochure intitulée *le Nombre au cycle 2*, publiée en octobre 2010. Le BO n°5 du 19 juin 2008 ne proposent ni repères de progressivité, ni cheminement cognitif pour aborder les nombres. Parallèlement, l'un des chapitres de la brochure traite des premiers apprentissages numériques mais préconise uniquement le comptage de un à un pour enseigner le dénombrement qu'il décrit à travers les principes instaurés par Gelman (1983) sans pour autant mentionner la chercheuse. De ce fait, les auteurs de cette contribution, Emprin et Emprin (2010) mettent l'accent sur la correspondance 1 mot-1objet tout en présentant cette manière de faire apprendre le dénombrement comme une évidence sans préciser qu'ils ont fait un choix pédagogique parmi d'autres possibles, ni pourquoi ce dernier serait plus favorable à l'acquisition du nombre.

En outre, pour permettre à l'enfant de comprendre que le dernier mot-nombre prononcé correspond au cardinal de la collection, Emprin et Emprin (2010) conseillent de « développer cette compétence indépendamment du dénombrement par comptage, par exemple en utilisant le *subitizing*, qui est la capacité de percevoir globalement les petites quantités (inférieures à 4) ou suite à un apprentissage, des quantités organisées comme les constellations (les dés) – (p.24). Or, cette suggestion semble porteuse de contradictions ou au moins d'ambiguïtés puisqu'aux dires des chercheurs cités supra,

Bideaud, Lehalle et Villete (2004), (Carey, 2004) et Brissiaud (2007), la subitisation permettrait seulement d'énumérer les unités de la collection sans pour autant accéder au nombre.

D'autre part, si Emprin et Emprin (2010) parlent bien de l'usage des doigts, des constellations, et des collections-témoins non organisées, ils n'insistent pas pour autant sur « l'existence des symboles que sont les collections-témoins de doigts (l'expression n'est pas utilisée) », ni « sur le caractère symbolique du procédé qui consiste à construire une collection-témoin de doigts par correspondance terme à terme » (Brissiaud, 2007, p.80). De même, aucune distinction n'est faite entre comptage de un en un et dénombrement par construction de collection-témoin de doigts, ni entre configurations et collections-témoins et encore moins entre comptage sur les doigts et calculs sur les doigts.

En corollaire, les textes pédagogiques institutionnels réduisent l'apprentissage du dénombrement à une pédagogie du sens commun (comptage de un en un) sans préciser sa plus-value par rapport à l'autre conception présente dans le paysage français (le dénombrement par construction de collection-témoin de doigts), adoptent une définition du subitizing en contradiction avec celle des chercheurs et n'explicitent pas suffisamment les processus en jeu dans l'apprentissage du nombre et leur lien avec l'apprentissage du calcul pour permettre aux professeurs des écoles de choisir entre différents outils culturels comme le comptage, les décompositions, l'usage des configurations numériques (les points du dé, les doigts, etc.) ou encore celui des collections-témoins permettant de représenter et de manipuler symboliquement les quantités pour dénombrer et calculer. Par conséquent, les enseignants et à plus forte raison les néo-titulaires peuvent donc difficilement se situer face à la pluralité des approches pédagogiques proposées dans les manuels ou autres outils cognitifs ou didactiques mis à leur disposition.

1.5. Conséquences pour l'enseignement et l'apprentissage du calcul au CP

Quand l'élève arrive au CP, il dispose déjà de connaissances et compétences diverses les nombres acquises à l'école maternelle ou dans son environnement. Cependant, si certains acquis sont solides ou insuffisants, d'autres doivent être renforcés. Par conséquent, avant tout apprentissage systématisé du calcul, Roland Charnay (2013), conseillent aux enseignants « d'envisager des activités situées dans un domaine numérique assez étendu (jusqu'à dix, douze, seize ou vingt par exemple) » (p.113) en gardant en ligne de mire deux objectifs, l'un étant le repérage précis des acquis, lacunes et difficultés de chaque élève, l'autre la reprise de quelques problèmes déjà abordés en, grande section.

De l'avis de Brissiaud (2013), avant d'aborder l'enseignement du calcul mental au CP, il faudrait d'abord s'assurer que les élèves savent dire le nombre d'unités d'une collection jusqu'à 3 sans compter. Dans le cas contraire, l'auteur propose d'y remédier en proposant aux élèves des situations

favorisant les décompositions des nombres, telles que des dialogues fondamentaux (« *Donne-moi deux jetons ; comme ça, un et encore un* » en montrant deux doigts ; « *Donne-moi ça de jetons* » en montrant la face d'un dé ; « *Où il y a trois ? Et deux ? Et un* »), l'usage de diverses collections-témoins de doigts et de constellations pour les amener à comprendre les décompositions de 3, des activités de comparaison de collections à l'aide d'une collection-témoin de doigts ou du comptage.

2. Du comptage au calcul mental des additions

2.1. Les composantes du progrès vers le calcul mental

Aborder l'apprentissage du calcul ici, c'est tenter de synthétiser une très abondante littérature, car nombreux sont les modèles de cognition numérique proposés par la psychologie cognitive (Groen et Parkman, 1972 ; Siegler et Shipley, 1995) et les recherches « en arithmétique cognitive élémentaire » mettant en exergue les stratégies utilisées lors de la résolution des opérations (Svenson, 1975 ; Woods, Resnick et Groen, 1975). L'approche que nous privilégions dans le cadre de notre travail concerne les processus cognitifs impliqués dans la résolution d'additions mentales (telles que $3 + 8$). L'objectif étant de comprendre comment les habiletés cognitives et les stratégies évoluent et se modifient au cours du développement de l'enfant afin d'identifier les composantes du progrès vers le calcul mental.

2.1.1 L'amélioration des pratiques de comptage

L'ensemble des recherches sur la genèse et la mise en œuvre des additions simples montrent que les enfants passent par une série d'étapes qui va de l'utilisation des objets à la récupération directe du résultat en mémoire (Carpenter et Moser, 1983 ; Siegler, 1987). D'après Michel Fayol (2012), dès l'âge de trois ans, les enfants résolvent déjà des problèmes arithmétiques d'ajouts (tels que « combien font 3 billes et 2 billes ? », en matérialisant les nombres de la somme recherchée par des objets pour mieux les réunir physiquement avant de dénombrer tous les éléments de la collection obtenue pour trouver le résultat. À la fin de la moyenne section, vers 4-5 ans, la procédure qui revient le plus souvent pour solutionner ce type de problèmes est le comptage sur les doigts et le comptage verbal, explique le chercheur. Ainsi, quelques mois plus tard, dans certaines situations, un grand nombre des élèves de cette tranche d'âge donne spontanément la réponse car ils sont déjà capables d'aller récupérer les faits numériques dans la mémoire à long terme.

Bien avant d'arriver à cette ultime étape, aux dires de Baroody et Ginsburg (1986), les enfants de 4-5 ans recourent à un ensemble de stratégies très diversifiées en fonction de la taille des quantités en jeu et de l'expérience des opérations dont ils disposent. Pour donner une idée précise de l'évolution de ces stratégies, Brissiaud (2003) les illustre dans son ouvrage *Comment les enfants apprennent à calculer*, à partir des procédures mis en œuvre par un élève lors de la résolution d'un problème additif

pour anticiper le résultat d'un ajout de 3 objets à une quantité initiale de 4 objets. Au départ, le comptage de tous les éléments est effectif : l'enfant recompte le tout (« *concrete counting all* »). Si l'élève utilise une figuration de la somme avec ses doigts par exemple, il matérialise une collection de 4 doigts sur une main et de trois doigts sur l'autre puis dénombre la collection de doigts levés résultante (voir schéma 18).

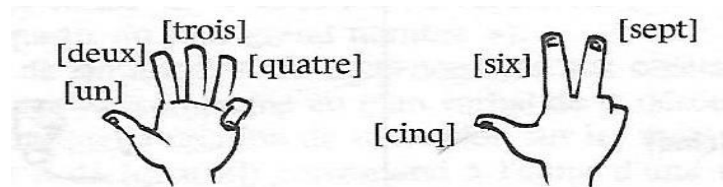


Schéma 18 : Schématisation du recomptage à l'aide de deux collections-témoins de doigts (Brissiaud, 2003)

Dans un deuxième temps, la figuration du premier terme de l'addition n'est plus nécessaire mais l'enfant a encore besoin de réciter la suite des mots-nombres jusqu'à quatre et commence à compter à partir de 1 avant de d'incrémenter les unités de la collection de trois doigts créée sur l'une de ses mains (« *counting on starting with the first addend* ») – (voir schéma 19).

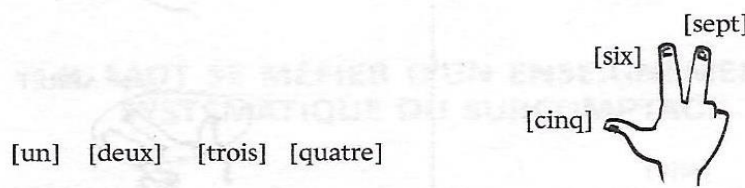


Schéma 19 : Schématisation du recomptage à l'aide d'une seule collection-témoin de doigts (Brissiaud, 2003)

Plus tard, la récitation du début de la comptine numérique n'est plus requise. L'enfant part directement du cardinal du premier terme, [quatre] et compte en avançant de 3 au-delà de 4 en s'aidant d'une collection de trois doigts (« *counting on from the first addend* »). La procédure employée s'appelle le surcomptage (voir schéma 20).

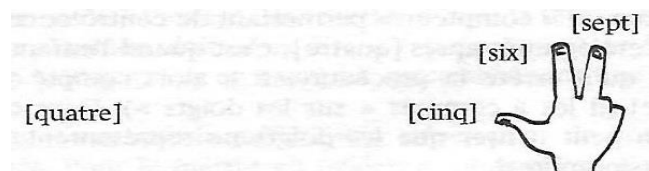


Schéma 20 : Schématisation du surcomptage (Brissiaud, 2003)

De l'avis de Brissiaud (2003), « schématiquement, un enfant qui surcompte de cette manière prend le comptage du tout « en cours de route » (p.155). D'un autre point de vue, pour Secada, Fuson et

Hall (1983), l'élève capable d'anticiper le résultat du comptage de quatre doigts levés, sait déjà que le dernier mot-nombre qu'il prononcera sera [quatre] donc il débute le comptage de la totalité à partir de ce numéro. Dans cet ordre d'idées, Thévenot (2018) assure que les stratégies de comptage « à partir de l'un des opérandes peuvent évoluer en stratégies purement mentales dans lesquelles le nombre de pas pour résoudre le problème est effectué "dans la tête" » (p.2). De plus, au cours de ses investigations, Rémi Brissiaud a également observé une autre forme de surcomptage. Comme on peut le voir sur le schéma infra, l'enfant ne forme aucune collection-témoin de doigts. Il commence aussi à compter à partir du cardinal du premier terme de l'addition et dit donc [quatre] sans rien faire puis « cinq en levant un doigt, « six » alors qu'il lève un autre doigt, « sept » en levant encore un autre doigt et s'arrête.

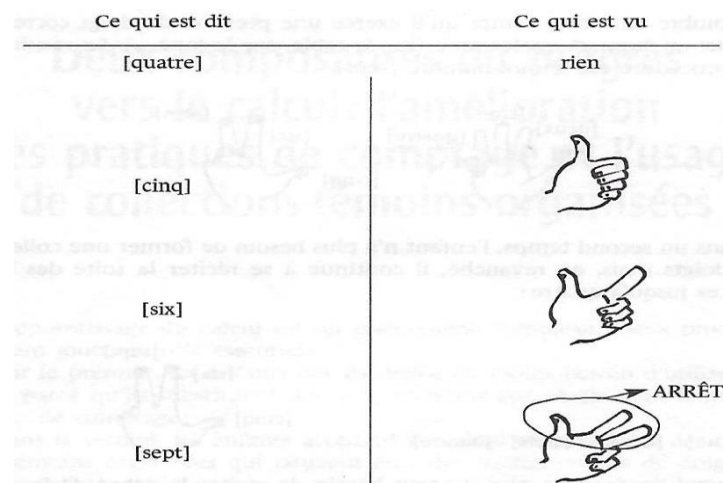


Schéma 21 : Schématisation du double comptage (Brissiaud, 2003)

Pour le chercheur en psychologie cognitive, l'enfant réalise un double comptage : les doigts levés successivement sont assimilés à un « compteur » qui permet de vérifier que trois mots-nombres ont bien été prononcés après [quatre]. Une fois, que l'enfant lit « trois » sur ce « compteur » il arrête la procédure (Brissiaud, 2003, p.156). De l'opinion de Steffe et al. (1983), dans le cas du double comptage, les doigts ne figurent plus des objets mais des mots-nombres. Et c'est justement cette substitution progressive des objets par des mots-nombres concernant « d'abord la quantité initiale (accès à la première forme de surcomptage), puis la quantité ajoutée (accès à la seconde forme de surcomptage), explique Rémi Brissiaud (2003, p.156).

Par la suite, la taille des quantités en jeu dans les problèmes proposés va pousser l'élève à abandonner ses premières procédures pour s'engager dans l'appropriation de nouvelles stratégies plus efficaces. À titre d'exemple, quand l'un des termes de la somme est supérieur à cinq, les doigts d'une main deviennent insuffisants pour le matérialiser. Cela peut entraîner le délaissement du recomptage total

qui, du coup, n'est plus aussi opérant qu'auparavant. En outre, dans le cas où il devrait transformer une quantité initiale de 3 en lui ajoutant 9 par exemple, l'enfant peut alors, comme l'indique le modèle de Groen et Parkman (1972), mettre en œuvre une stratégie dite du « *Min. m, n* » ou stratégie du « minimum à additionner » qui revient à amorcer le comptage à partir du plus grand des deux termes de l'addition (*m*) avant de rajouter le nombre d'unités du plus petit des deux termes (*n*). Ainsi, l'enfant « inverse l'ordre temporel et se met à surcompter au-dessus de 9, s'éloignant ainsi un peu plus d'un simple mime de la situation-problème » (Brissiaud, 2003, p.157). De manière concrète, cette « min stratégie » peut déboucher sur deux procédures : soit l'élève recompte le tout en commençant par le plus grand opérande et ajoute une après l'autre les unités du second terme (« *counting all starting with the larger term* »), soit, il surcompte à partir du plus grand opérande (« *counting from the larger term* »). De l'opinion de Siegler (1987), la « min stratégie » reste la plus perfectionnée en raison de sa rapidité et du moindre risque d'erreur qu'elle génère. En effet, les travaux de Baroody et Ginsburg (1986) suggèrent que les stratégies de résolution mobilisées par les élèves évoluent dans l'ordre présenté supra, dans un continuum allant des procédures les plus coûteuses aux procédures les moins coûteuses sur le plan cognitif. Pour Potter et Levy (1968), cette progression est due à la maîtrise de la comptine numérique et à une étroite coordination entre la récitation de la chaîne numérique et le pointage de chaque élément sans répétition, ni oubli. Du point de vue de Siegler et Jenkins (1989), trois paramètres déterminent les changements de stratégies au cours du développement de l'enfant : l'acquisition de nouvelles stratégies pour solutionner les situations-problèmes sans cesse complexifiées par le jeu des variables didactiques, le délaissement de stratégies anciennes au profit de l'adaptation de certaines d'entre elles pour les rendre plus rapides ou moins coûteuses et in fine l'optimisation de la pertinence des choix opérés en fonction des procédures disponibles.

Cependant, de l'avis de Fayol (2012), il faudrait se garder de considérer ces manipulations (« comptage avec des éléments physiques manipulables d'abord, et comptage mental plus ou moins assisté avec les doigts ensuite) comme des opérations. Selon lui, ce ne sont que des simulations jusqu'à ce que les enfants recourent au modèle de la « min stratégie » qui va les amener à appliquer malgré eux la commutativité sans qu'ils en soient conscients et avant tout enseignement spécifique. D'après Baroody et Ginsburg (1986), le processus d'acquisition de cette stratégie est long et complexe et ce n'est que vers 6 ans qu'elle parvient à se généraliser. Toutefois, même s'il n'en maîtrise pas encore tous les mécanismes, Michel Fayol reste néanmoins convaincu que « c'est sans doute au cours de cette phase que les manipulations physiques puis mentales deviennent, progressivement ou brutalement nous l'ignorons, des opérations : le traitement symbolique se libère des contraintes des situations dans des conditions encore mal connues » (Fayol, 2012, p.77). Ainsi, à son entrée au cours préparatoire, l'enfant a déjà une longue expérience de la pratique de l'addition et dispose de diverses

stratégies qui vont lui permettre de s'adapter à la complexité des opérations et au contexte proposé. Nonobstant, pour certains auteurs, à l'instar de Ashcraft et Fierman (1982), la stratégie de résolution privilégiée par l'adulte et l'enfant expert à partir de 9-10 ans, demeure la récupération des faits arithmétiques. Pour conforter cette idée, les chercheurs s'appuient sur trois arguments principaux : tout d'abord, les temps de résolution des additions sont trop courts pour qu'une procédure de comptage soit mise en œuvre (Siegler et Robinson, 1982). Ensuite, la majorité des individus interrogés sur leur stratégie de résolution déclarent « savoir » ou « connaître par cœur » la réponse aux problèmes simples (LeFevre, Sadesky et Bisanz, 1996). In fine, les aires cérébrales activées pour résoudre des problèmes par récupération en mémoire du résultat sont différentes de celles utilisées pour des problèmes nécessitant le recours à une procédure de comptage (Grabner et De Smedt, 2011).

Reste à savoir comment l'enfant passe d'une résolution procédurale (le comptage) à une résolution à dominante déclarative (les faits numériques). En accord avec la conception dominante en psychologie cognitive depuis 45 ans, l'hypothèse soutenue par Siegler et Shrager (1984) est qu'une pratique répétée du comptage permet à l'élève de mémoriser les relations entre les quantités et le résultat. D'après Ashcraft (1992), lorsque que le réseau de ces relations est suffisamment renforcé, la présentation des opérandes active la réponse qui est alors récupérée directement en mémoire. Ainsi, de manière consensuelle, plusieurs auteurs (Ashcraft, 1982 ; Ashcraft et Fierman, 1982 ; Siegler et Shrager, 1984 et Svenson et Broquist, 1975) affirment que dès l'âge de 10 ans, les élèves utilisent préférentiellement la récupération en mémoire des faits numériques pour calculer des additions dont la somme est inférieure ou égale à 18. Toutefois, la pertinence de cette affirmation a été remise en question par les travaux de Roussel et al. (2002) et Lépine et al. (2003) relatifs à l'effet de taille des termes de l'addition sur la vitesse de résolution et le risque d'erreurs qui suggèrent, à l'instar de Barouillet et Fayol (1998), que plus les opérandes sont grands, plus les élèves de 10 ans utilisent des procédures de comptage longues et coûteuses. De ce point de vue, il résulte que le passage de l'usage des algorithmes à celui des faits numériques pour résoudre les additions serait plutôt dû à un processus d'acquisition et de renforcement de stratégies, ce qui conforte Baroody (1983) dans son approche postulant que l'amélioration des performances des élèves relèverait davantage d'une automatisation progressive des procédures de comptage que d'une augmentation de la fréquence de récupération des faits arithmétiques en mémoire. Selon lui, c'est cette automatisation qui permet à l'adulte de mobiliser inconsciemment et à moindre coût cognitif, les stratégies les plus adaptées (Baroody, 1984). Conséquemment, le chercheur en arrive à la conclusion qu'il n'y a, en réalité, pas de récupération en mémoire mais que l'automatisation du comptage facilite tellement l'accès au résultat que le « calculateur » en est persuadé. Cependant, les tenants des modèles de récupération, à l'instar de

Ashcraft, 1992) réfutent ce postulat en avançant qu'il ne se vérifierait que pour une sous-catégorie de problèmes.

Par la suite, une série de travaux expérimentaux vient confirmer l'hypothèse du comptage automatisé en suggérant « que les enfants experts et adultes utiliseraient plutôt des procédures automatisées et inconscientes de comptage pour résoudre des additions aussi simples que $3 + 2$ » (Thevenot, 2018, p.2). L'un des plus marquants est celui de Fayol et Thevenot (2012) qui montrent que la présentation du signe « + » 150 ms avant les opérandes a un effet facilitateur sur la résolution des problèmes, à défaut du signe « x ». Sachant que le stockage dans la mémoire à long terme des tables de multiplication est unanimement reconnu (Campbell et Xue, 2001), les chercheurs en concluent que les faits additifs ne sont pas activés par un réseau mémoriel, mais mobilisés par une procédure ou un ensemble de procédures abstraites. En outre, l'augmentation régulière des temps de résolution de problème en fonction du nombre de pas à effectuer, observée chez des adultes induit l'utilisation des procédures de comptage très rapides de 1 en 1 pour calculer les additions les plus simples (Barouillet et Thevenot, 2013 ; Uittenhove, Thevenot, et Barouillet, 2016). D'autre part, Moyer et Landauer (1967) puis (Dehaene, Bossini et Giraux, 1993) avaient montré que dans les cultures où le sens de la lecture se faisait de la gauche vers la droite, les procédures de comptage pouvaient être assimilées à des déplacements sur une ligne mentale représentant les nombres suivant cette direction. Du coup, en partant des résultats de Fayol et Thevenot (2012), Catherine Thevenot (2018) en déduit que le signe « + » assurerait un rôle de pré-activateur de la ligne numérique mentale.

En effet, le postulat selon lequel l'attention des individus se déplacent le long d'une ligne numérique pour résoudre des problèmes simples est validé par Mathieu, Gourjon, Couderc, Thevenot et Prado (2016) à partir d'une présentation séquentielle du premier opérande, du signe numérique (+, -, x) et du 2^{ème} opérande à des emplacements différents tantôt à gauche, tantôt à droite d'un écran. En fait, cette expérimentation a révélé un effet facilitateur pour l'addition quand le second opérande est positionné à droite de l'écran plutôt qu'à gauche. Depuis, ces résultats et interprétations ont servi de terreau à de nombreuses recherches dont celle de Pineiro-Chagas, Dotan, Piazza et Dehaene (2017) qui a confirmé d'une part, la théorie du comptage automatisé et d'autre part, l'hypothèse d'une résolution des additions simples par déplacements mentaux pas à pas sur une ligne numérique.

En corollaire, l'ensemble des conclusions formulées sanctionne « la possibilité que les effets d'amorçage du signe + dans l'expérience de Fayol et Thevenot (2012) puissent être consécutifs à la pré-activation d'une ligne mentale dès la présentation du signe. [Ainsi,] Des procédures de comptage extrêmement rapides et échappant à la conscience des individus pourraient donc consister en des

déplacements pas à pas de gauche à droite sur cette ligne pour l'addition », argue Thevenot (2018, p.4). À vrai dire, Mathieu, Epinat-Duclos, Léone et al. (2018) ont mis en évidence une corrélation positive entre l'ampleur des effets de *priming* du signe + sur la résolution d'additions et la force de l'activité cérébrale d'une région de l'hippocampe droit, associée aux processus attentionnels spatiaux.

2.1.2 L'emploi des collections-témoins organisées

L'idée d'une amélioration des pratiques de comptage comme composante du progrès vers le calcul est également partagée par Brissiaud (2003). Ainsi, « par ce processus, les enfants ont de moins en moins besoin d'utiliser des objets parce qu'ils substituent des mots-nombres aux objets dans leurs procédures de comptage », explique-t-il (p.154). En outre, l'auteur va plus loin en inférant que si l'enfant peut, de manière précoce, faire des calculs sur de très petites quantités parce qu'il est capable de les « voir » à l'aide du subitizing, ses performances dans la résolution d'additions avec des termes de grande taille sont déterminées par son aisance à se représenter rapidement les quantités correspondantes sous forme visuelle ou kinesthésique. Autrement dit, l'emploi de collections-témoins organisées favoriserait l'accès au calcul car il facilite la représentation directe et rapide des quantités. Un travail de recherche important réalisé à partir d'entretiens et de vidéos par deux psychologues américains, Siegler et Robinson (1982), sur la manière dont des enfants de 5 ans trouvent le résultat de sommes inférieures ou égales à 10, vient conforter cette hypothèse. En effet, pour $6 + 3$, par exemple, certains « enfants sortent directement 6 doigts, en lèvent 3 autres et énoncent directement 9, sans recompter les doigts sortis ». De l'avis de Brissiaud (2009), « ce dernier comportement s'interprète facilement : ces enfants savent comment 6 est formé sur les doigts ($6 = 5 + 1$). Ils lèvent 3 autres doigts et là encore ils reconnaissent directement 9 grâce au repère 5 ($9 = 5 + 4$). Il s'agit bien d'une procédure où chaque mot-nombre est directement associé à une quantité qui lui correspond, sans comptage de 1 à 1 : ces enfants calculent sur leurs doigts » (Brissiaud, 2009, p.15). Dit autrement, ces enfants utilisent une configuration de doigts pour calculer.

Du coup, Brissiaud conclut que les configurations de doigts ainsi que les constellations constituent des collections-témoins « organisées » privilégiées car en offrant la possibilité de construire et de « lire » simultanément une quantité donnée sans passer par le comptage de un à un, elles permettent une mise en relation directe des quantités lorsqu'on anticipe le résultat d'une action. Dans le même ordre d'idées, de nombreuses études menées par les neuropsychologues révèlent une relation entre calcul et utilisation des doigts (Kinsbourne et Warrington, 1978 ; Strauss et Werner, 1938 ; Pebenito, 1987) et en particulier, celle de Marinthe, Fayol et Barouillet (2005) sur l'adéquation entre le score perceptivo-tactile d'enfants de 5 ans et leurs performances arithmétiques évaluées à 5 et à 6 ans qui

confirment « la liaison entre habiletés perceptivo-tactiles et capacités de représentation et de manipulation des quantités, indépendamment du niveau de développement » (Fayol, 2012, p.23).

Comment l'emploi de collections-témoins organisées facilite-t-il l'accès au calcul mental ?

Comme nous l'avons vu précédemment, l'évolution des pratiques de comptage de l'enfant vers le calcul passe par la mise en place d'un réseau de relation entre les quantités (Lethielleux, 1992 ; Emprin et Emprin, 2010 ; Boule, 2012 ; Brissiaud, 1989). À cet égard, Butlen (2007) confirme que « la disponibilité de certaines procédures parfois mieux adaptées aux calculs mentaux dépend de plusieurs facteurs et en particulier de la familiarité des élèves avec les décompositions des nombres (additives ou multiplicatives) susceptibles d'être appelées ». D'autre part, en dehors de tout enseignement spécifique, les premières relations numériques connues par l'enfant sont celles qui correspondent à l'ajout d'un élément à une collection déjà dénombrée : ce sont les relations « 2 plus 1 est égal à 3 », « 5 plus 1 est égal à 6 »..., c'est-à-dire les relations où le résultat s'obtient en donnant le successeur du nombre initial » (Charnay, 2013 ; Brissiaud, 2003). Par la suite, l'élève découvre les relations qui consistent à ajouter 2 unités (le résultat est obtenu en prenant le successeur du successeur) : « 3 plus 2 est égal à 5 » et ainsi de suite. En outre, les recherches de Groen et Parkman (1972) ont montré le processus pour déterminer le résultat de l'ajout de 2 est plus laborieux que pour celui d'une unité. De la même manière, l'enfant va mettre plus de temps à trouver le résultat de l'ajout de 3 unités qu'il n'a mis pour obtenir le résultat de 2 unités et ce sera pareil pour les relations suivantes. De plus, d'après Lethielleux (1992), les procédures de calcul réfléchi les plus courantes pour le calcul de sommes sont :

- « l'emploi des doubles : $6 + 7 = (6 + 6) + 1$ donc $(6 + 7 = 13)$ avec l'emploi du double de 6 ainsi que l'emploi d'un résultat voisin mémorisé ;
- le passage ou retour à 5 :
 $4 + 3 = (4 + 1) + 2$ donc $4 + 3 = 7$
 $5 + 6 = (5 + 5) + 1$ donc $5 + 6 = 11$;
- le passage à la dizaine ou retour à 10 :
 $9 + 6 = (9 + 1) + 5$, donc $9 + 6 = 15$
 $12 + 7 = 10 + (2 + 7)$, donc $12 + 7 = 19$ » (Lethielleux, 1992, p.38).

Ainsi, il apparaît que la mise en œuvre de certaines procédures nécessite l'appropriation « des doubles, des relations numériques qui comportent un 5 ou un 10 et plus généralement, la décomposition en dizaines et en unités (Brissiaud, 2003, p.164). De ce fait, l'enfant qui sait représenter directement les quantités sur ses doigts qui ont l'avantage de comporter le repère de 5 (une main complète) ou 10 (deux mains) ou encore qui utilise différents types de constellations de

dés ou de dominos ou tout autre support équivalent ¹²⁸ accède très rapidement aux relations de la forme $5 + x$ ou $10 + x$, même quand x est supérieur à 1 ou 2 (Lethielleux, 1992 ; Brissiaud, Clerc et Ouzoulias, 1991). Par conséquent, « l'emploi de collections-témoins organisées telles que les doigts ou les constellations facilite le calcul pensé parce qu'il favorise la mémorisation des relations numériques utilisées par le calcul pensé » (Brissiaud, 2003, p.162). Plus concrètement, le processus qui permet aux élèves d'apprendre à calculer mentalement des sommes y compris celles nécessitant un franchissement de la dizaine comprend trois étapes que Lethielleux décrit comme suit :

« Dans une première étape, les enfants doivent donc s'être habitués à reconnaître globalement, à constituer ou dessiner de telles collections organisées pour pouvoir assez rapidement les évoquer mentalement.

Après la phase d'initiation, dans la deuxième étape, l'évocation mentale de ces collections organisées aide à la construction de procédures de calcul réfléchi ; par exemple, le calcul de $4 + 3$ passe par la complétion de la constellation 4 à la constellation 5 et la reconnaissance globale du domino 7 :

On obtient un résultat analogue avec d'autres types de collections organisées qui comportent le repère de 5. De même, le calcul de $8 + 3$ passe par la complétion du domino 10 (double de 5) et la reconnaissance de la formation de 11 :

À ce stade, il convient de traduire ces méthodes à l'aide d'une description :

pour $4 + 3$: $4 + 1$ cela fait 5, il faut ajouter encore 2, cela fait 7.

pour $8 + 3$: $8 + 2$ cela fait 10, il faut ajouter encore 1, cela fait 11.

Ces exemples montrent également la nécessité de travailler séparément les compléments à 5 et à 10.

Dans la troisième étape, la mémorisation des petits résultats, la connaissance des décompositions des petits nombres et des compléments à 5 et à 10, l'augmentation de la taille des nombres permettent aux enfants de se passer de l'évocation des collections organisées et d'accéder directement à des procédures de calcul réfléchi » (Lethielleux, 1992, p.39).

En résumé, pour Brissiaud (2003), deux processus permettent aux élèves de progresser vers le calcul mental : l'un repose sur le perfectionnement des procédures de comptage qui favorise la mise en relation des quantités et l'autre sur l'usage de collections-témoins organisées qui facilite la mémorisation des relations numériques. Cependant, comme l'indique l'auteur, il faut se garder « d'enseigner aux enfants une procédure systématique qui leur permette d'obtenir le résultat de n'importe quelle addition, il faut surtout les aider à construire tout un réseau de relations entre quantités et cette construction nécessite l'utilisation de repères privilégiés » (p.158), d'où l'intérêt de la mémorisation du répertoire additif.

2.1.3 La mémorisation du répertoire additif

- ***L'organisation des nombres en mémoire***

Pour comprendre les processus en jeu dans la mémorisation du répertoire additif chez les enfants, il faut d'abord analyser comment les nombres sont organisés dans la mémoire d'un adulte, déclare Brissiaud (2009). En effet, aux dires de Fayol (1985), la représentation de la suite numérique dans la

¹²⁸ Les constellations Herbinier-Lebert utilisent les doubles, les réglettes de Brissiaud utilisent les repères 5 et 10.

mémoire à long terme chez l'adulte laisserait apparaître de grandes similitudes avec celle de l'enfant. En fait, l'auteur explique qu'« au fur et à mesure du développement et de la pratique scolaire, elle se complexifie et s'organise peu à peu en un réseau mental structuré comme les classiques tables de multiplication et d'addition : le délai d'accès à un résultat dépend du nombre de rangées et de colonnes à parcourir mentalement (Fayol, 1985, cité par Butlen, 2007, p.36-37).

De manière plus imagée, Brissiaud (2009) assimile notre mémoire des nombres à un réseau ferroviaire où chaque nombre est mis en relation de manière directe avec tous les autres. Le chercheur en psychologie cognitive poursuit en précisant d'une part que certaines relations numériques sont mieux maîtrisées que les autres et d'autre part que les nombres qui les constituent forment les nœuds du réseau. Par conséquent, plus la relation numérique est connue et plus le temps de récupération de son résultat en mémoire est court. Ainsi, dans le cas du nombre 8, la relation $2 + 6 = 8$ nécessite un délai de recherche beaucoup plus long que $4 + 4 = 8$ et $3 + 5 = 8$. À vrai dire, les travaux des neuropsychologues (Siegler et Robinson, 1982 ; Groen et Parkman, 1972) ont révélé que deux catégories de relations incluant des nombres inférieurs à 10 sont plus facilement mémorisées que les autres : les doubles et celles du type $5 + x$. Cette facilité de mémorisation perdure pour les nombres supérieurs à 10 mais s'étend à toutes les décompositions du type $10 + x$ (par exemple, $17 = 10 + 7$). Autrement dit, dans la mémoire d'un adulte, les nombres sont organisés en réseau de relations numériques « comportant des centres dont trois principaux : 2 (pour les doubles), 5 et 10 » (Brissiaud, 2009, p.20).

- ***Les mécanismes de mémorisation***

Cependant, si les doubles et les relations comportant 5 ou 10 sont tous deux rapidement et facilement stockées en mémoire, cela ne signifie pas pour autant que les mécanismes de mémorisation sont les mêmes. S'agissant des doubles, les formulations répétitives à l'exemple de « deux plus deux, quatre ; trois plus trois, six » d'une part et le fait qu'elles contiennent deux fois le même mot d'autre part, favorisent l'association verbale et donc leur apprentissage « par cœur », soutient Brissiaud (2009) en référence aux travaux d'Aschcraft (1985) ce que réfutent avec force certains psychologues comme Baroody (1985) qui rétorque que les résultats des tables perdraient tout leur sens s'ils étaient réduits aux simples produits d'associations verbales. Brissiaud (2003) à son tour, persiste en rappelant qu'à l'instar de la récitation des comptines, de certains jeux éducatifs et de beaucoup d'autres activités, le processus d'association verbale avantage la mémorisation précoce des doubles même s'il n'en est pas l'objectif principal au préalable et même si parfois cette mémorisation précède leur compréhension.

Concernant les relations utilisant 5 et 10 c'est un tout autre processus voire plusieurs mécanismes différents qui sont mis en jeu. De l'avis de Brissiaud (2009), c'est en comptant les quantités mises en relation directe grâce à l'utilisation de supports matériels et visuels et en particulier, les collections-témoins organisées qui offrent une représentation de 5 et de 10 reconnaissables immédiatement (doigts, constellations, réglettes de Brissiaud, etc.) et en interprétant le résultat de ce comptage en terme de calcul (c'est-à-dire sans recompter les unités qui le compose) que l'enfant mémorise les relations de la forme $5 + n$. Pour les relations de type $10 + n$ correspondant aux nombres 17, 18 et 19, la mémorisation est d'autant plus facile que 17 se dit « dix-sept ». Il en est de même pour 18 et 19, affirme l'auteur. Cependant, cette logique de mémorisation ne s'applique plus pour les relations numériques relatives aux nombres allant de 11 à 16. En effet, le moins qu'on puisse dire c'est qu'on ne peut évoquer onze ou douze en disant « dix-un » ou « dix-deux ». Par conséquent, pour ces nombres « la mémorisation des relations de la forme $10 + n$ se fait de manière similaire à celle de $5 + n$ » indique Brissiaud (2009). Il poursuit en expliquant que « l'enfant qui vient d'achever un comptage jusqu'à 13 sur ses doigts n'a plus que 3 doigts sortis à la fin de son comptage. Il peut interpréter les 13 doigts comptés comme la somme des 10 premiers doigts et des 3 doigts qu'il voit ». Ainsi, « c'est là encore, le comptage à l'intérieur d'un cadre structuré et l'interprétation de ce comptage en termes de calcul qui conduisent à mémoriser la relation correspondante, réitère le chercheur.

Quant aux autres relations numériques, leur stockage en mémoire à long terme est encore l'objet de vives controverses et les chercheurs ne sont toujours pas arrivés à un consensus car, pour certains auteurs comme Ashcraft (1992 ; 1995) et Campbell (1995), les faits numériques pour la résolution des additions de nombres à un chiffre seraient mémorisés, à l'instar des doubles, par association verbale avec certes, un temps d'apprentissage plus long et une vitesse de récupération du résultat beaucoup plus lente parce que les termes de l'opération ne sont pas répétitifs. Pour d'autres, à l'instar de Lethielleux (1992), c'est à partir des relations maîtrisées de manière précoce (doubles, $5 + n$, $10 + n$) que l'enfant mémorise les autres relations d'une part et d'autre part c'est l'automatisation de ces stratégies de calcul mental qui permettent à l'adulte de connaître « par cœur » le répertoire additif (Baroody, 1984 ; 1994). Concrètement, c'est comme si l'adulte faisait en quelque sorte un « passage de la dizaine fulgurant » pour trouver, par exemple, le résultat de $9 + 7$, commente Brissiaud (2009). En fait, c'est ce point de vue qui a longtemps prévalu dans les programmes de 1923 à 1970. À cette époque, le rapport des inspecteurs généraux Marijon et Leconte sur les conférences pédagogiques de 1928 accordait une place centrale au thème de la mémorisation des résultats d'additions (Savard, 1940). À vrai dire, ces conférences correspondaient plutôt à des ateliers incitant les instituteurs à porter une réflexion sur des questions d'enseignement formulées en ces termes : « Quelle doit être la

part de la réflexion et de la mémoire dans l'enseignement des premières notions de calcul ? « Convient-il d'apprendre par cœur la table d'addition ? Vaudrait-il mieux exercer les élèves à combiner les nombres en utilisant les notions de compensation, de voisinage, de symétrie et de décomposition que leur intuition conçoit sans effort ? »

Comme le rapporte Brissiaud (2013), les réponses laissaient peu de place à l'implicite et à l'égard de la mémorisation des additions dont le résultat est supérieur à dix, les préconisations des inspecteurs généraux sont également très précises : « Il convient, selon nous, d'arriver très vite à la formation, par voie purement mentale, de $8 + 7 = 15$, au moyen de $8 + 2 = 10$, $10 + 5 = 15$, étant entendu que ces exercices auraient été précédés de nombreuses réalisations manuelles et visuelles », conseillaient-ils. Ainsi, reprenant à son compte ces instigations et en référence à l'ouvrage de Fisher (1992) intitulé « *Connaissances procédurales et les connaissances déclaratives dans des apprentissages numériques élémentaires*, Brissiaud (2009) conclut que la mémorisation des relations numériques autres que celles comportant 5 ou 10, « ne précède donc pas leur compréhension, contrairement à ce qui se passe souvent avec les doubles. Dans ce cas c'est plutôt la compréhension qui est ici la source même de la mémorisation » (p.21). En résumé, les points d'appui pour la mémorisation du répertoire additif sont les doubles et les relations du type $5 + n$ et $10 + n$ car ils permettent de mémoriser toutes les autres.

2.1.4 L'enseignement de l'égalité numérique

Comme nous avons pu le voir précédemment lors de l'étude des activités proposées à l'école maternelle pour dénombrer une collection, à aucun moment les élèves n'étaient amenés à utiliser les signes « + », « - », ou « = ». Dans le même ordre d'idées, les écritures mathématiques n'étaient pas non plus requises pour anticiper le résultat d'une action. Par conséquent, il semble légitime de penser que l'emploi du symbolisme arithmétique n'est un préalable, ni à l'enseignement du calcul, ni à celui de la résolution de problèmes. Pourtant, l'apprentissage des signes mathématiques fait partie des attendus des programmes 2008 pour le cycle 2 et ils étaient déjà enseignés aux élèves bien avant les années 1970. En effet, dans les Instructions officielles de 1945, on trouvait les indications suivantes : « Dans les exercices, on devra toujours utiliser de préférence des nombres concrets, c'est-à-dire des nombres (entiers) suivis d'un nom d'objet (élève, bérêt...) ou d'une unité : franc, gramme, centimètre... Un nombre concret n'est qu'un renseignement sur une grandeur qui doit être complété par l'indication de ce qu'on veut faire de cette grandeur : 15 pommes, ce peut être 15 pommes qu'on ajoute à d'autres... ».

Par voie de conséquence, les écritures mathématiques enseignées avant 1970 prenaient alors cette forme : 7 billes + 6 billes = 13 billes. Comme l'indique Brissiaud (2003), cette position ramenait

le pédagogue à enseigner les symbolismes comme de simples « abréviations sténographiques du langage ordinaire ». Ainsi, le signe « + » était utilisé pour traduire en langage mathématique « j'en ajoute », « j'en gagne » ou « j'en achète » qu'il s'agisse de la composition de deux états (« *Paul a 7 billes dans sa main et 6 billes dans sa poche. Combien possède-t-il de billes ?* »), de la transformation d'un état (« *Jacques avait 7 billes. Il en a gagné 6. Combien en a-t-il maintenant ?* »), de comparaison d'états (« *Bernard possède 7 billes. Charles en a 6 de plus. Combien de billes possède Charles ?* ») ou de la composition de transformations (« *Gabriel a joué deux parties de billes. À la première partie, il gagne 7 billes et à la deuxième il en gagne 6. Combien en a-t-il gagné au total ?* ») au détriment évident du sens à donner à cette écriture symbolique dans chacune de ces situations. De la même manière, la locution « *je retire* », « *je donne* » ou « *je perds* » étaient traduites par le signe « - ». Ainsi, résoudre le problème où j'ai 9 billes et j'en retire 6 était solutionné par l'écriture mathématique suivante : $9 \text{ billes} - 6 \text{ billes} = 3 \text{ billes}$, ce qui créait un obstacle important à l'usage de la soustraction dans les cas où cette opération ne servait pas à déterminer le résultat d'un retrait (Brissiaud, 2003, p.206). En effet, « dans le cas de ce problème de recherche de complément où "*J'ai 6 billes, je fais une partie et après la partie j'ai 9 billes. Combien ai-je gagné de billes ?*" ». Là encore, la solution attendue est aussi l'égalité précédente : $9 \text{ billes} - 6 \text{ billes} = 3 \text{ billes}$. [Sauf que], J'ai gagné des billes, j'en ai plus et pourtant, il faut écrire "-" », explique Brissiaud (2003). En conséquence, les réformateurs de 1970 émettent un grand nombre de critiques qui vont conduire les auteurs des programmes à différer l'usage des signes des opérations et abandonner l'écriture des « nombres concrets ».

Ainsi, à partir de 1970, seul le signe « + » est enseigné au CP mais si on l'utilise c'est surtout parce qu'on en a besoin pour enseigner l'égalité. Conséquemment, si auparavant, le pédagogue focalisait l'attention de l'élève sur le sens des signes « + » et « - » en les opposant, désormais c'est le signe « = » qui doit retenir toute l'attention de l'élève, le signe + devient alors une évidence, relate Rémi Brissiaud (2003, p.208). De ce fait, la résolution des additions à trous du type $7 = 2 + \dots$ vont prendre une place importante dans les recommandations officielles. Nonobstant, les travaux de recherche de Conne (1984) révèlent que l'exercice $3 + \dots = 8$ (avec 60% de réussite) est bien mieux réussi que $7 = 2 + \dots$ (44%). Autrement dit, la place de la lacune influencerait sur la réussite des additions à trous. De l'avis de Brissiaud (2003), ce décalage est surtout dû au fait que les enfants lisent l'égalité $7 = 2 + \dots$ de gauche à droite comme il ferait lors de la lecture d'un texte sans tenir compte de la position du signe « = » qui, en quelque sorte, « commande une lecture efficace des égalités arithmétiques », ce qui les conduisent à additionner les nombres de l'énoncé comme le prouvent les 42% d'élèves qui ont répondu 9 à cet exercice. Il faudrait donc que le pédagogue enseigne une pratique de lecture spécifique en même temps qu'il enseigne l'égalité numérique. Ainsi, au regard du

faible taux de réussite à l'exercice $7 = 2 + \dots$, selon Rémi Brissiaud (2003), deux hypothèses peuvent être avancées : « soit le projet des réformateurs est trop ambitieux, soit c'est sa mise en œuvre qui est inappropriée » (p.209). Une expérimentation réussie menée dans huit classes d'Argenteuil (où le niveau socioculturel est inférieur au niveau national) à partir d'une progression pédagogique spécifique confirme la deuxième hypothèse et infirme la première. Il est donc possible d'enseigner l'égalité aux élèves du CP, même si le processus semble long et difficile. Reste à comprendre maintenant : pourquoi faut-il l'enseigner ?

Les partisans de la réforme des mathématiques modernes justifient l'enseignement des égalités numériques lacunaires par les deux fonctions qu'elles assurent lors de la résolution de « problèmes concrets¹²⁹ ». Leur première fonction serait de schématiser par une même égalité lacunaire des problèmes qui s'énoncent différemment en langage ordinaire (l'écriture $a - b = \dots$ peut être utilisée pour trouver un reste, une différence ou un complément). La seconde consisterait en une fonction d'aide au calcul car les égalités lacunaires sont jumelées à des techniques de calcul (addition en colonnes, à trou ou soustraction), rapporte Brissiaud (2003). Cependant, l'auteur n'approuve pas cet argumentaire et l'émousse en rétorquant d'une part, que les égalités numériques ne sont pas une aide au calcul lors de la résolution de problèmes « puisque les enfants abordent tout juste la technique de l'addition en fin de CP », et d'autre part qu'elles ne sont pas non plus une aide à la schématisation car les enfants ne sont pas en mesure de comprendre que les égalités lacunaires telles que $3 + \dots = 9$ puissent correspondre à la recherche d'un reste (Carpenter, Moser et Bebout, 1988).

Du point de vue de Charnay et al. (1995), « l'essentiel n'est pas dans la formulation mathématique (comme par exemple $3 + 2 = 5$), mais bien dans ce qu'elle traduit, ce qu'elle évoque (le niveau sémantique) et dans ce qu'elle permet (le niveau syntaxique, celui du calcul). D'où un objectif double : 1°) donner du sens aux écritures symboliques comme outils pour penser, décrire ou anticiper sur la réalité ; 2°) développer la capacité à manier des règles opératoires sur ces écritures symbolique » (p.123). De l'opinion de Brissiaud (2003), deux raisons justifient l'introduction du symbolisme arithmétique dès le début du cours préparatoire. Tout d'abord, l'enseignement des égalités numériques permet aux élèves d'apprendre à agencer des écritures chiffrées pour composer et décomposer des quantités et leur donne ainsi la possibilité de passer d'une logique du numéro induite par le contexte social (les dates, les dossards, les chaînes de télévision...) à une logique de calcul. La deuxième raison qui, selon l'auteur, revêt une importance primordiale est que les égalités numériques ont « une grande valeur pédagogique car elles constituent d'excellentes situations

¹²⁹ D'après Brissiaud (2003), les problèmes concrets sont des problèmes énoncés à partir de collection d'objets.

d'apprentissage du calcul » (p.219). En effet, lorsqu'un enfant a développé une conception du signe « = » fondée sur l'équivalence au sens où l'entendait Brousseau dans ses « travaux fondateurs » (1960-1970) c'est-à-dire qu'il lui est aussi facile de compléter « $? = 4 + 3$ » que « $4 + 3 = ?$ », ou de compléter « $4 + ? = 7$ » que « $7 = 4 + ?$ », etc., cet enfant dispose d'un nouveau langage symbolique qui permet qu'on lui propose de la manière la plus économique qui soit toutes les activités incitant au calcul sans qu'il ait besoin d'utiliser des collections pour « recréer mentalement » la situation elle-même, explique Rémi Brissiaud (2003). En outre, et c'est ce dernier levier qui retient toute notre attention, un enfant qui sait lire une égalité numérique peut traduire sous forme écrite les principales procédures de calcul mental, plaide Brissiaud (2003). En corollaire, tout en étant conscient des difficultés inhérentes à son enseignement, le chercheur plaide en faveur du maintien de l'enseignement de l'égalité au CP et conseille de mener en parallèle l'apprentissage du calcul de collections-témoins privilégiées et la résolution de problèmes par des procédures de comptage pour minimiser les éventuelles complications.

2.2. Deux conceptions de l'accès au calcul mental dans le paysage français

Dans le paysage pédagogique français, les figures de proue des deux conceptions en présence concernant la construction du nombre chez l'enfant, Charnay (1995) et Brissiaud (2003) s'accordent à dire que l'amélioration des procédures de comptage, la mémorisation du répertoire additif et l'enseignement de l'égalité numérique sont les composantes du progrès vers le calcul mais s'opposent, cependant quant aux processus qui permettraient aux élèves de progresser des procédures de comptage vers le calcul numérique.

2.2.1. Une première conception : du comptage au calcul numérique

Cette première conception, défendue par une équipe de l'INRP, connue sous le nom d'Ermel et dirigée par Roland Charnay, s'appuie sur les travaux d'une psychologue américaine R. Gelman. Pour les auteurs de l'équipe Ermel, beaucoup d'élèves au début du CP résolvent des problèmes additifs par dénombrement de la « quantité-résultat » (Ermel CP, 1995) à l'aide d'une représentation (matérielle, dessinée, sur les doigts, parfois mentale) de la situation. Selon eux, s'il est prématuré d'envisager pour ces élèves un passage du recomptage à l'usage de procédures relevant du calcul, il reste néanmoins possible de leur permettre de développer de nouvelles formes de comptage plus élaborées et plus rapides : le surcomptage et le décomptage (voir section 2.1.1 supra). Par conséquent, lorsqu'il s'agit de déterminer le résultat d'une addition, ces chercheurs distinguent trois sortes de stratégies : 1°) l'utilisation d'un résultat de table mémorisé ; 2°) le recomptage : l'enfant sort les doigts et les compte 1 à 1 ; 3°) le surcomptage. Cependant, Charnay et al. (1995) insistent sur le fait qu'une bonne disponibilité de la comptine orale connue conditionne la mise en œuvre efficace de ces procédures.

Par conséquent, ils proposent dans leur ouvrage Ermel CP de mener parallèlement un travail sur la suite numérique et des situations adaptées permettant aux élèves d'abandonner le recomptage en s'exerçant au surcomptage et au décomptage. De l'avis de ces chercheurs, ce sont essentiellement les activités d'entraînement basées sur le comptage et le sur-comptage qui conduisent à la mémorisation des premières relations numériques puis au calcul numérique dans un second temps. Optant pour définition proche de la définition épistémologique de Piaget (le nombre comme somme de ses parties), Charnay et ses collaborateurs (1995) désigne sous le terme « calcul numérique », tout calcul opérer directement sur les nombres en tant que signes linguistiques (les mots « deux », « un » et « trois »). Ainsi, comme l'indique le schéma infra, dans cette première conception pédagogique, le comptage précède nécessairement le calcul et le progrès de l'un à l'autre est pensé comme suit :

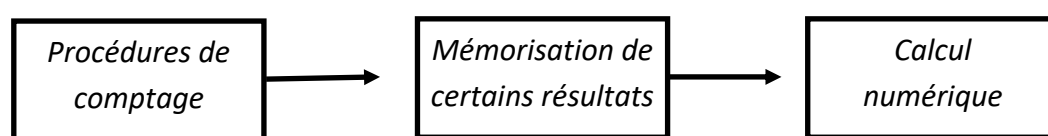


Schéma 22 : Schématisation du processus du progrès vers le calcul
pensé par le groupe Ermel (Brissiaud, 2001)

2.2.2. Une deuxième conception : du « calcul sur les objets » au calcul numérique

Cette deuxième conception est soutenue par le chercheur en psychologie cognitive, Rémi Brissiaud, auteur de l'ouvrage *Comment les enfants apprennent à calculer* (1989 ; 2003). Ici, c'est l'usage de décompositions (par exemple : « C'est 3 parce que c'est 2 et 1 ») qui est privilégiée, autrement dit un comptage qui théâtralise l'itération de l'unité (« 1 ; et-encore-1, 2 ; et-encore-1, 3 ; et-encore-1, 4 ») à l'opposé de la correspondance 1 mot – 1 unité¹³⁰ prônée par Charnay et ses collaborateurs. Il n'empêche que Brissiaud (2003) confirme, à l'instar de l'équipe Ermel, que le progrès de l'élève vers le calcul passe par l'évolution des procédures de recomptage en procédures de surcomptage au fur et à mesure que l'enfant délaisse les objets pour substituer d'abord la quantité initiale, puis la quantité ajoutée par des mots-nombres.

Cependant, l'auteur reste méfiant quant à un enseignement systématique du surcomptage qui selon lui, reste insuffisant pour développer de bonnes compétences numériques et met surtout l'accent sur l'utilisation de repères privilégiés pour aider les élèves à construire tout un réseau de relations entre quantités (Brissiaud, 2003). Conséquemment, persuadé que le comptage n'est pas la seule stratégie menant au calcul numérique, Brissiaud (2003) prend en considération un autre type de procédures observé par Siegler et Shrager (1984) lors de la résolution d'additions dont le résultat est inférieur ou

¹³⁰ Chacun des mots *un, deux, trois, quatre...* réfère à une unité et une seule.

égal à 10, chez les enfants de 5 ans : « les fingers strategies ». Dans cette procédure, les enfants utilisent leurs doigts mais ne les recomptent pas de un à un. Plus concrètement, pour donner le résultat de $4 + 3$, par exemple, « certains enfants sortent directement 4 doigts sur une main, 3 doigts sur l'autre et énoncent directement le résultat. Ils ne comptent pas. D'après Brissiaud (2001), vraisemblablement, « ces enfants savent reconnaître rapidement une quantité supérieure à 5 sur les doigts, mais, évidemment cette reconnaissance n'est immédiate que quand une main est complète (ce sont les configurations correspondant à $5 + n$ qui ont été mémorisées). Or, ils ont sorti 4 doigts sur une main et 3 sur l'autre. Ils complètent donc mentalement la première main avec un des doigts de la seconde ($4 + 1 = 5$) avant d'ajouter les 2 doigts restant sur l'autre main. Il s'agit en quelque sorte d'un « passage du cinq », $4 + 3 = (4 + 1) + 2$, c'est-à-dire une procédure analogue au "passage de la dizaine" : $9 + 3 = (9 + 1) + 2$ », explique l'auteur (Brissiaud, 2001, p.7).

En fait, ces « fingers strategies » sont des procédures de décomposition-recomposition dans lesquelles l'enfant utilise « une organisation spatiale des collections pour agencer aux mieux les parties qu'il a isolées au sein de la totalité » en appui sur le repère intermédiaire 5 ou 10 (Brissiaud, 2001, p.9). En outre, les mesures du temps de réponse relatif à la mise en œuvre de différentes stratégies réalisées par Siegler et Shrager (1984) ont révélé que les « fingers stratégies » étaient plus rapides que le comptage mental mais plus lentes que la récupération du résultat en mémoire. Ainsi, bien qu'elles recourent aux doigts ces stratégies semblent, aux dires de Brissiaud (2001), plus proches du calcul que le comptage mental. C'est pour cette raison que l'auteur parle de « calcul sur les doigts » à propos de ces stratégies car « elles peuvent être conçues comme un calcul sur des objets organisés avec les groupements de 5 et de 10 » (p.9). Par conséquent, l'auteur conclut que les « "fingers strategies" ou calcul sur les objets » constituent une étape importante vers la mémorisation des relations arithmétiques », ce qui l'amène comme on peut le voir sur le schéma infra à penser différemment l'accès au calcul numérique.

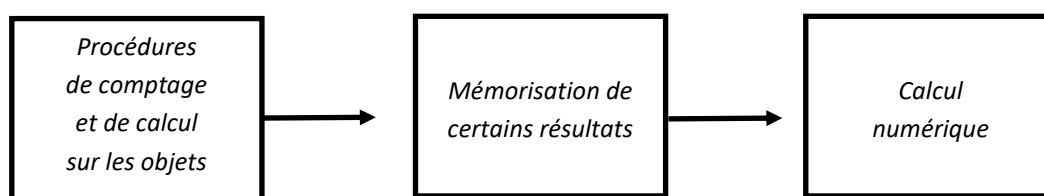


Schéma 23 : Schématisation du processus du progrès vers le calcul pensé (Brissiaud, 2001)

2.3. Conséquences pour l'enseignement du calcul mental de sommes au CP

Au regard des observations réalisées supra, un enseignement du calcul mental au CP conforme aux programmes et tenant compte des recherches scientifiques récentes doit nécessairement comporter à la fois un travail sur les procédures de type « comptage » (recomptage ou surcomptage avec figuration de la somme avec les doigts, par exemple) et des procédures de type « calcul » (calcul sur les objets ou restitution de résultats connus). En effet, la conclusion des études menées sur le développement des stratégies de résolution des additions suggère que, contrairement à ce qui est communément admis, les « calculateurs » experts ne récupèrent pas le résultat en mémoire mais utilisent plutôt des procédures de comptage inconscientes par déplacements pas à pas extrêmement rapides, de gauche à droite, sur une ligne numérique. Ipso facto, le développement des stratégies pour la résolution des additions ne consisterait donc pas en un passage du comptage à la récupération mais en l'accélération des procédures de comptage jusqu'à leur automatisisation (Thevenot, Barouillet, Castel et Uittenhove, 2016). Ainsi, le bon élève en calcul mental n'est pas celui qui connaît les faits numériques sur le bout des doigts mais plutôt celui qui a automatisé ses procédures de comptage et peut déplacer rapidement son attention sur des représentations numériques mentales précises et bien ordonnées (Thévenot, 2018).

Manifestement, les activités de déplacements sur une ligne numérique améliorent les performances en arithmétique des élèves (Moeller, Fischer, Nuerk et Cress, 2015). C'est pour cette raison qu'il faudrait que l'enseignant, comme dans l'étude de Siegler et Ramani (2009), soumette aux élèves des jeux de plateau où ils déplacent des pions sur une ligne droite numérique orientée de gauche à droite pour les rendre performants dans la résolution de problèmes additifs. À vrai dire, « ces activités ludiques permettent aux enfants de mieux se représenter la magnitude des nombres en les plaçant de manière plus précise sur leur ligne mentale », explique Catherine Thévenot (2018). Par suite, « ces meilleures représentations mentales des nombres viendraient positivement impacter la résolution de calculs simples », infère l'auteure. Toutefois, le fait que la corrélation directe entre « la clarté des représentations mentales numériques et les performances arithmétiques » ne soit pas établie oblige les chercheurs à faire preuve, pour l'instant, de parcimonie en attribuant les progrès des élèves en arithmétique à la théorie des procédures automatisées (Thévenot, 2018).

En outre, l'entraînement par comptage est plus efficace qu'un apprentissage mémoriel des faits arithmétiques mais en plus il garantit un meilleur stockage en mémoire de ces derniers (Fuchs et al., 2010). Conséquemment, il serait préférable que le professeur des écoles délaisse l'apprentissage par cœur des faits additifs au profit d'une pratique intensive du comptage et du surcomptage (Thevenot, 2018). Pour ce faire, l'équipe Ermel (1995) propose une série d'exercices assez courts mais fréquents

pour entraîner les élèves à utiliser et à retrouver des résultats additifs. De plus, ces activités peuvent être différenciées (selon les performances des enfants), contextualisées (jeux) ou non (exercices rapides). Par ailleurs, la théorie des procédures de comptage automatisées (Fayol et Thévenot, 2012 ; Uittenhove et al., 2016 ; Pinheiro-Chagas et al., 2017) sous-tend « que ce sont les pratiques de comptage elles-mêmes qui s'automatisent grâce à l'enseignement explicite d'une stratégie de comptage » (Thévenot, 2018, p.5). En effet, les résultats des travaux de Tournaki (2003) démontrent d'une part que l'apprentissage procédural de la stratégie « min »¹³¹ et sa pratique s'avèrent plus profitable aux élèves en difficulté qu'un entraînement par répétition intensive des faits additifs et d'autre part, qu'ils rendent les autres élèves capables de transférer leurs acquis à des problèmes différents de ceux qui ont servi de support durant l'apprentissage. Cependant, si Brissiaud et Charnay reconnaissent tous deux le caractère incontournable de l'enseignement du comptage dans le progrès vers le calcul, ils soulignent également l'effet délétère que peut avoir un entraînement systématique des procédures de type « comptage » sur l'apprentissage du calcul mental.

D'après Fayol (1990), « il ressort très clairement des données recueillies que le comptage joue un rôle fondamental dans toutes les activités d'estimation des quantités numériques ». De l'avis de Fischer (1981), « le comptage joue un rôle important dans la dénomination des premiers nombres et dans la résolution des premiers problèmes par l'enfant » et il est fort possible que le subitizing n'en soit que l'ultime étape de son intériorisation. Compte tenu de l'importance du comptage soulignée par ces chercheurs, Charnay et Valentin (1992) se rallient à cette vision et incitent l'enseignant du cours préparatoire à « assurer cette compétence, à en développer le domaine d'efficacité dans des situations qui lui donnent du sens » et à apporter leur aide aux élèves afin qu'ils acquièrent le principe cardinal¹³² du comptage. Paradoxalement, ces chercheurs conçoivent également qu'une maîtrise excessive des procédures de type « comptage » pourrait constituer un obstacle à l'appropriation des faits additifs et à l'apprentissage du calcul. Donc, ils seraient tentés de conseiller de ne pas « trop mettre en valeur les procédures de type "comptage". Or, la mise en œuvre des procédures de type « calcul » requiert un niveau d'abstraction plus élevé et des connaissances numériques. De ce fait, interdire ou dévaluer les stratégies de comptage reviendrait à nier les compétences de certains élèves ou à les exclure des apprentissages en les privant des moyens dont ils disposent pour résoudre une addition ou des problèmes additifs.

¹³¹ L'enfant compte explicitement (sur ses doigts ou mentalement) en commençant d'emblée par le plus grand nombre et en ne comptant que les items de la plus petite des collections ($3 + 6 = ?$ 6...7, 8, 9 !)

¹³² Le mot-nombre qui désigne le dernier élément d'une collection représente le nombre total d'éléments.

De son côté, Brissiaud (2001) admet que le comptage est indispensable dès la maternelle ne serait-ce que pour permettre aux enfants de mémoriser le nom des quantités car l'ordre conventionnel des nombres joue un rôle mnémotechnique considérable. Cependant, le chercheur en psychologie cognitive invite les pédagogues à se méfier d'un enseignement systématique du surcomptage qui selon lui, constituerait un véritable « piège pédagogique¹³³ » et avance trois arguments principaux pour défendre son idée. D'une part, l'enfant qui surcompte utilise la récitation des nombres dans l'ordre conventionnel et éventuellement le repère 5 pour représenter sur ses doigts le plus petit opérande mais ne recourt jamais à l'usage du repère 10. De cette manière, il obtient effectivement le résultat de n'importe quelle addition. Néanmoins, en l'absence des repères 5 et 10 favorisant la mémorisation des décompositions additives et donc à terme, la construction de tout un réseau de relations numériques il ne stocke, au final, en mémoire que les relations de voisinage correspondant à l'ajout d'une ou deux unités ($6 + 1 = 7$, $6 + 2 = 8$, par exemple). D'autre part, à force d'exercice, certains enfants maîtrisent tellement bien le surcomptage qu'ils offrent à l'enseignant un comportement en tout point identique à celui d'un élève qui aurait développé de bonnes compétences numériques alors qu'en réalité ses dernières sont limitées à la seule récitation de la suite verbale. Ainsi, d'un côté, l'enfant croit posséder un savoir inexistant et de l'autre, le professeur des écoles poursuit son enseignement sans réaliser que ce dernier n'a pas conceptualiser le nombre et qu'il ne pourra donc pas au final mentaliser les calculs. Enfin, les résultats des recherches d'Allardice et Ginsburg (1983) et Geary (2005) pour ne citer qu'eux, montrent que les enfants les plus fragiles rentrent dans le comptage de manière complètement rituelle sans comprendre pourquoi ils comptent. Conséquemment, leurs faibles connaissances du dénombrement empêchent l'évolution de leurs procédures de comptage et augmentent la fréquence des erreurs lors de l'exécution. Ainsi, à 12 ans, certains enfants, encore en grande difficulté avec les nombres, surcomptent pour reconstruire les résultats du répertoire additif sans jamais parvenir à les mémoriser.

En corollaire, du point de vue de l'élève, « comptage » et « calcul » sont deux outils complémentaires mis à sa disposition pour résoudre des problèmes. Ainsi, en fonction de ses connaissances numériques, de sa maîtrise des procédures, de ses expériences de réussite, de la taille des nombres, etc., il peut opter pour l'un ou l'autre lors de la résolution d'additions mentales (Charnay et Valentin, 1992). Pour le chercheur, « "comptage" et "calcul" s'opposent car relevant de processus différents qui, effectivement, ne correspondent pas au même niveau de symbolisation », résumant Roland Charnay et Dominique Valentin (1992). Du côté du professeur qui veut enseigner le calcul mental, c'est le casse-tête chinois car il doit trouver une stratégie qui lui permet à la fois d'enseigner

¹³³ Piège pédagogique : procédé qui conduit à la réponse attendue, qui permet donc d'« avoir tout bon », sans pour autant avoir développé une conception riche du matériau sur lequel on travaille (Brissiaud, 209, p.22).

les procédures de type « comptage » et de contourner l'effet délétère de leur apprentissage pour favoriser l'accès au calcul de tous les élèves.

La stratégie d'enseignement recommandée aux enseignants par Charnay et Valentin (1992) consiste à bien introduire et entraîner les procédures de type « comptage » puis progressivement amener les élèves à les dépasser et à les abandonner. Celle prônée par Brissiaud (2009) est de faire apprendre avec précaution seulement les surcomptages au-dessus des repères privilégiés 5, 10, 20, 30... à l'aide d'une boîte de jetons utilisant les repères 5 et 10. À titre d'exemple, s'il y a huit jetons dans la boîte, les enfants sont souvent amenés à surcompter : « *cinq sous le couvercle, 6, 7, 8* ». Selon lui, cette manière de faire favorise une authentique mentalisation avant que l'enfant ne récite les mots-nombres suivants et lui permet d'interpréter son surcomptage en termes de calculs : « *5 sous le couvercle et ces 3 là, ça fait 8* ». Par la suite, l'auteur propose aux enseignants de mener le même type d'activités pour construire les repères, 10, 20, 30... De l'avis de Brissiaud (2009), le fait que l'enfant apprennent de lui-même à surcompter au-dessus de 4, de 8, de 15, etc. doit être perçu comme une marque de progrès mais le professeur ne doit en aucun cas l'enseigner pour éviter tout enfermement : « il vaut mieux proposer régulièrement des situations-problèmes pour que les enfants inventent ces procédures, au moment où ils le peuvent, car c'est le gage qu'ils en ont une maîtrise conceptuelle suffisante, explique le chercheur (p.22). A contrario, s'agissant des procédures de calcul réfléchi servant de point d'appui pour calculer des sommes telles que « l'usage des doubles », « le retour au cinq » ou « le passage à 10 », Brissiaud (2003 ; 2009), à l'instar de Lethielleux (1992) et de Charnay (2018), encourage les professeurs des écoles à adopter une attitude assez volontariste « car leur enseignement est sans danger pour l'enfant » (p.22).

Par ailleurs, de l'opinion de Brissiaud (2003), l'enseignant de cours préparatoire ne doit en aucun retarder l'introduction des égalités arithmétiques. D'abord parce que leur enseignement permet aux élèves d'apprendre à agencer des écritures chiffrées pour composer et décomposer des quantités et leur donne ainsi accès à une logique de calcul. Ensuite, en raison de leur grande valeur pédagogique « car elles constituent d'excellentes situations d'apprentissage du calcul » (p.219). Enfin un enfant qui sait lire une égalité numérique peut traduire sous forme écrite les principales procédures de calcul mental, plaide Brissiaud (2003). Néanmoins conscient des difficultés inhérentes à l'enseignement du symbolisme arithmétique, le chercheur conseille de mener en parallèle l'apprentissage du calcul avec des collections-témoins privilégiées et la résolution de problèmes par des procédures de comptage pour minimiser les éventuelles complications.

En somme, ce qu'il faut retenir c'est que pour permettre aux élèves d'accéder au calcul mental, l'enseignant peut mettre en œuvre, parallèlement, dès le début du cours préparatoire trois sortes d'activités : « le calcul sur les premiers nombres, la résolution de problèmes par des procédures de comptage et l'apprentissage du symbolisme arithmétique (Brissiaud, 2003, p.165).

3. Les obstacles à l'apprentissage du calcul mental de l'addition au CP et les conséquences sur son enseignement

Notre objectif ici est de croiser l'analyse de la transposition didactique du calcul mental de sommes de nombres à un chiffre avec franchissement de la dizaine et les contraintes qui s'exercent sur la planification du projet d'enseignement du professeur des écoles. Pour ce faire, nous étudions les difficultés et les lacunes des élèves ainsi que les spécificités et paradoxes liés à l'apprentissage des connaissances et compétences associées à cette notion. Ainsi, loin d'être exhaustif, notre inventaire élaboré à partir des résultats de recherche en didactique, des documents pédagogiques institutionnels et des ouvrages nous permet néanmoins d'avoir une vision globale des obstacles relatifs à cet enseignement-apprentissage pour mieux appréhender, par la suite, les choix didactiques et pédagogiques des professeurs des écoles.

3.1. Difficultés liées à la conceptualisation du nombre et conséquences pour l'enseignement du calcul mental

- ***Méconnaissance de la ligne numérique***

L'idée que les additions soient résolues par procédures de comptage inconscientes consistant en des déplacements extrêmement rapides de gauche à droite sur une ligne mentale (Mathieu et al., 2016 ; Thévenot, 2018) suggère que « le concept de « ligne numérique » facilite la compréhension de l'arithmétique : additionner, c'est se déplacer d'un certain nombre d'unités vers la droite [...] » (CSEN¹³⁴, 2019). Cependant, la « comptine numérique » n'a de sens que si l'élève arrive à dire tous les mots dans le bon ordre. Or, c'est souvent la première fois que les élèves sont contraints de respecter un ordre conventionnel. D'autre part, la ligne mentale des enfants de cet âge est approximative et logarithmique car ils croient que les petits nombres sont plus espacés que les grands (CSEN¹³⁵, 2019). En outre, les irrégularités de notre système de numération décimale (irrégularité de 10 à 10, puis régularité de 20 à 69, et irrégularité de 70 à 99) et la proximité de certains mots (par exemple, entre trois et trente ; quatre et quarante, etc.) peuvent engendrer chez l'élève des difficultés à ordonner les nombres, à estimer une position, à maîtriser l'ordre des nombres et leur espacement sur la ligne ou

¹³⁴ Conseil Scientifique de l'éducation nationale

¹³⁵ Conseil Scientifique de l'éducation nationale

encore à comprendre la signification et la correspondance des graduations ainsi que le rôle de la droite. En conséquence, pour que l'élève se serve de la ligne numérique pour résoudre des opérations arithmétiques, il doit comprendre qu'elle est en réalité précise et linéaire et donc, qu'il y a le même espace entre tous les nombres consécutifs (n ; $n + 1$). De ce fait, avant et pendant l'enseignement systématisé du calcul mental, le professeur des écoles du CP doit par le biais de situations diverses (récitation de comptines numériques, mémorisation de la suite des nombres, segmentation des mots-nombres en unités linguistiques, jeux d'estimation, jeux de plateau, etc.) amener les élèves à comprendre et à utiliser les nombres pour dénombrer, ordonner, repérer et comparer (CSEN¹³⁶, 2019).

- ***Des difficultés liées au transcodage***

Pour calculer de façon efficace, une bonne connaissance des nombres à l'écrit comme à l'oral est indispensable. Néanmoins, le transcodage de la représentation verbale vers la représentation chiffrée ou vice versa est une source de difficultés pour les élèves dans la mesure où il n'y a pas toujours de correspondance exacte entre ce qui est dit et ce qui est écrit (par exemple, on dit un mot « douze » et on l'écrit avec deux chiffres « 12 ») ce qui compromet l'appropriation du code verbal et du code chiffré pour les nombres faisant l'objet des tous premiers apprentissages. En effet, les difficultés rencontrées généralement par les élèves sont une mauvaise mémorisation des noms des nombres, une écriture erronée des nombres en chiffres ou encore des confusions quand les sons sont proches (six/dix). Conséquemment, pour favoriser le passage rapide d'une désignation des nombres à l'autre, indispensable au calcul et à la résolution de problèmes, le professeur des écoles peut, au cours préparatoire, avant et parallèlement à l'apprentissage du calcul mental, assurer l'appropriation de la suite des nombres de 0 à 10 puis au-delà, à l'oral (récitation de comptine où les mots énumérés dans l'ordre croissant où décroissant sont séparés par un mot ou des amusettes, compter entre deux bornes, à l'envers, à partir ou jusqu'à un nombre donné) et à l'écrit (ritualisation des temps de lecture et d'écriture des nombres, recherche d'analogies de forme pour soutenir la mémorisation) tout en développant parallèlement la connaissance des quantités associées aux petits nombres jusqu'à dix à l'aide d'activités variées de décomposition et de recomposition.

3.2. Difficultés liées au comptage et conséquences pour l'enseignement

- ***Des erreurs liées à l'énumération***

« Un enfant sait compter quand il sait mettre en correspondance terme à terme les objets d'une collection avec les mots-nombres de la comptine-numérique (qu'il s'agisse d'un comptage-numérotage ou d'un dénombrement) » Brissiaud (2003, p.112). S'agissant des petites collections

¹³⁶ Conseil Scientifique de l'éducation nationale

jusqu'à 3 ou 4, ce savoir-faire est précoce grâce au subitizing (Gelman et Tucker, 1975 ; Fisher, 1992 ; Fayol, 2012). En revanche, quand la taille de la collection augmente, les complications aussi et le comptage de collections d'une trentaine d'objets reste souvent, une tâche ardue et non-réussie même au milieu du cours préparatoire. En fait, globalement, deux types d'erreurs sont généralement commises par les élèves dans la mise en correspondance terme à terme entre les mots-nombres et les objets :

- L'oubli d'un objet ou le double recomptage d'un même objet (Comiti, Bessot et Pariselle, 1980), que l'on retrouve même chez des élèves relativement âgés et qui relèvent plus du manque de méthode que d'un défaut de connaissance. Par conséquent, avant l'apprentissage du calcul mental, l'enseignant peut facilement les aider à les dépasser en leur proposant une stratégie de séparation des objets déjà comptés de ceux qui ne le sont pas encore quand ils sont déplaçables ou une stratégie de marquage en mettant une croix sous chaque objet dessiné comptabilisé ;
- Le manque de synchronisation entre le pointage des objets et la récitation de la suite numérique, plus récurrentes chez les enfants plus jeunes mais également plus gênantes car elles rendent toute représentation des quantités impossible (Brissiaud, 2003). Parfois, il s'agit de simples erreurs d'exécution : l'énonciation des mots-nombres (« un, deux, trois ») par l'enfant est plus rapide que le doigt qui montre chaque élément de la collection. Dans ce cas, le simple fait que l'enseignant lui demande de prendre son temps lui permet de réussir. D'autres fois, la remémoration de la suite des mots-nombres est tellement laborieuse que l'enfant s'y consacre entièrement au détriment du contrôle de son pointage. Dans ce cas de figure, Rémi Brissiaud (2003) propose aux enseignants de « mettre en place des activités où c'est l'adulte qui récite la comptine numérique, alors que la tâche de l'enfant consiste à pointer les objets correspondants » (p.114).

- ***Non acquisition du principe cardinal***¹³⁷

Même lorsque les enfants comptent correctement en énonçant la suite des mots-nombres tout en pointant de manière synchrone les objets et répètent le dernier mot-nombre de leur comptage, on n'a aucune assurance que ce dernier mot représente pour eux la quantité totale des objets. En effet, à force d'exercice certains enfants maîtrisent tellement bien le "comment compter " que leur comportement est en tout point identique à celui des enfants qui savent "pourquoi compter" » (Brissiaud, 2007, p.29) sans pour autant avoir compris le principe cardinal ou encore qu'au fur et à mesure qu'on avance dans le comptage, la quantité d'objets comptés augmente. Or, « l'entrée dans le calcul est évidemment impossible tant que les enfants n'ont pas compris que les mots qu'ils utilisent pour compter désignent

¹³⁷ Le mot-nombre qui désigne le dernier élément d'une collection représente le nombre total d'éléments (Fayol, 2013, p.63).

des pluralités successivement engendrées par l'ajout d'une unité » (Brissiaud, 2013, p.18). Pour aider les élèves à progresser, certains chercheurs, à l'exemple de Roland Charnay (2013) conseillent aux enseignants de soumettre aux élèves des tâches de dénombrement par comptage d'un par un de petites quantités évaluables par subitizing de manière à ce que le mot-nombre (trois, par exemple) associé au dernier objet point évoque également pour eux la quantité trois (p.33). De l'avis de Brissiaud (2003), la mise en place de jeux de dés, ou de dominos et l'intervention du professeur dans le jeu de l'enfant pour l'aider à prendre conscience de la double signification des mots-nombres désignant les constellations peut l'aider à accéder au dénombrement (p.114).

- ***Difficultés à comparer deux nombres***

L'enseignement explicite de la stratégie *min*¹³⁸ aux enfants et sa pratique sont plus profitables aux élèves en difficulté que l'entraînement par répétition des faits additifs (Tournaki, 2003). En outre, pour mettre en œuvre cette stratégie, il faut que les élèves sachent comparer les deux opérandes de l'addition pour déterminer lequel est le plus grand. Cependant, certains élèves rencontrent des difficultés pour comparer deux nombres à partir de leur écriture chiffrée. D'autres n'ont pas compris ce que représente l'ordre des nombres, ne connaissent pas la comptine numérique dans l'ordre ou encore font des confusions liées à des difficultés de discrimination visuelle (2 et 5 ou 6 et 9). Par conséquent avant tout apprentissage systématisé du calcul, l'enseignant peut développer ou renforcer au plus tôt la maîtrise de la lecture, de l'écriture, de l'ordre de succession des nombres (jusqu'à 10 puis au-delà) tout en s'assurant de la connaissance des quantités associées (CSEN¹³⁹, 2019).

- ***Difficultés liées au paradoxe de l'automatisme***

« Selon l'hypothèse des procédures de comptage automatisées, [défendue par Catherine Thévenot (2018, p.4)], un entraînement favorisant un balayage mental rapide de la chaîne numérique, comme la pratique intensive du comptage et du sur-comptage, serait à préférer à un apprentissage par cœur des faits additifs ». Toutefois, sa pertinence est remise en question par Brissiaud (2013) qui affirme qu'« un usage répété de procédures de comptage pour résoudre des additions élémentaires ne conduit pas les élèves les plus fragiles à la mémorisation de leurs résultats » (p.60). L'auteur conforte sa théorie en expliquant qu'entre les données du problème $8 + 5$ et le résultat 13, l'enfant qui surcompte prononce les mots neuf, dix, onze, douze et oublie au passage les données du problème ce qui fait obstacle à l'association : huit plus cinq, treize. Dans cet ordre d'idées, Charnay et Valentin (1992) font également remarquer que « des activités d'entraînement systématique sur des nombres

¹³⁸ L'enfant compte explicitement (sur ses doigts ou mentalement) en commençant d'emblée par le plus grand nombre et en ne comptant que les items de la plus petite des collections ($3 + 6 = ?$ 6...7, 8, 9 !)

¹³⁹ Conseil Scientifique de l'éducation nationale

"désincarnés" considérées par certains élèves comme une simple répétition verbale » conduisent à « une trop bonne compétence dans les procédures de type "comptage" [qui] risque d'être un obstacle à l'appropriation des résultats de la table et des procédures de type "calcul" » (p.18-19). En effet, « il est extrêmement difficile d'empêcher les élèves les plus fragiles de continuer à utiliser ce qu'ils ont appris initialement : les procédures de comptage », assure Brissiaud (2013, p.61).

Vu sous un autre angle, les effets d'un entraînement régulier en calcul mental ne deviennent sensibles que si les élèves arrivent à dépasser une logique contradictoire, entre adaptabilité et automatisme, propre à ce type de calcul que Butlen, Charles-Pézarid et Masselot (2015) nomment le *paradoxe de l'automatisme*. D'après ces chercheurs, l'une des caractéristiques importantes des élèves qui ne réussissant pas en calcul mental est de recourir systématiquement aux procédures de calcul automatisées, telles que le recomptage explicite (sur les doigts ou mentalement) ou le surcomptage au désavantage d'autres procédures basées sur le calcul sur les nombres et la mémorisation des résultats moins coûteuses plus adaptées aux propriétés des nombres et des opérations en jeu.

Par conséquent, il appartient au professeur des écoles de prendre en compte ce paradoxe, et d'organiser les conditions de son dépassement avant et après enseignement (Charnay et Valentin, 1992). Pour contourner cet obstacle, il devrait, d'après Brissiaud (2003) amener l'élève à un usage répété des procédures de décomposition-recomposition telle que $8 + 5 = 5 + 3 = 3 + 5 = 13$, qui mettent beaucoup plus directement en relation les données et le résultat et favorisent ainsi la mémorisation du répertoire additif. De l'avis de Butlen et Pézarid (2003) et Butlen (2007) des apprentissages spécifiques peuvent, dans un premier temps, « *mettre en place des automatismes élémentaires visant à étendre le domaine des décompositions additives ou multiplicatives susceptibles d'être convoquées par les élèves et d'accroître leur disponibilité* », puis, dans un deuxième temps, « *en fonction des nombres et des opérations en jeu, apprendre à choisir les décompositions mobilisables dans les calculs parmi toutes celles qui sont possibles* » (Butlen, 2007). Cette dernière compétence requiert, d'après ces auteurs, des institutionnalisations locales souples, assez simples : ni trop rapides, ni trop « fortes » pour faciliter l'adaptabilité ; ni trop « faibles », ni trop tardives pour que les procédures ne semblent pas équivalentes. Mais, suffisamment explicites sur les critères de choix de stratégies, car elles peuvent permettre aux élèves d'une part, de distinguer les situations où ils doivent inventer de celles où il suffit de reproduire et d'autre part, de hiérarchiser l'éventail des procédures possibles.

3.3. Difficultés liées à l'emploi du symbolisme arithmétique et conséquences pour l'enseignement

D'après Brissiaud (2003), enseigner l'égalité numérique aide à l'apprentissage du calcul au moins pour trois raisons. D'une part, cet enseignement favorise la conceptualisation du nombre car il permet aux élèves d'apprendre à agencer des écritures chiffrées pour composer et décomposer des quantités. D'autre part, l'enfant doté d'une bonne conception du signe « = » (c'est-à-dire qu'il lui est aussi facile de compléter « ? = 4 + 3 » que « 4 + 3 = ? », ou de compléter « 4 + ? = 7 » que « 7 = 4 + ? »), dispose d'un nouveau langage symbolique qui lui permet de « recréer mentalement » les données d'une situation-problème et facilite ainsi considérablement l'enseignement du calcul mental. Enfin, un enfant qui sait lire une égalité numérique peut traduire sous forme écrite les principales procédures de calcul mental. Cependant, l'apprentissage de l'égalité est loin d'être simple, car il nécessite, en premier lieu, une pratique de la lecture contraire à celle que les élèves s'efforcent d'acquérir pour lire un texte au cours préparatoire. En effet, les oralisations des égalités arithmétiques diffèrent chacune les unes des autres en fonction du signe « = ». De ce fait, la lecture efficace d'une égalité numérique commence par son repérage, ensuite suivant la place de la lacune, il faut exprimer la quantité de gauche pour qu'elle soit la même que celle de droite ou vice versa. Par conséquent, il n'y a plus a priori de sens conventionnel pour la lecture. Ainsi, il est plus facile de résoudre une égalité lacunaire si on lit « 2 plus quoi est égal à 7 ? » que quand on lit « 7 est égal à 2 plus quoi ? » car une lecture de gauche à droite de cette dernière égalité lacunaire conduit un certain nombre d'élèves à additionner les deux opérandes de l'énoncé et à répondre 9 (Conne, 1984).

En corollaire, l'enseignement de l'égalité numérique s'accompagne de l'enseignement d'une pratique de lecture spécifique car l'enfant doit apprendre à lire une égalité et du développement de stratégies de décomposition-recomposition des quantités. Pour ce faire, Brissiaud (2003) recommande aux enseignants du CP de mener en parallèle l'apprentissage du calcul de collections-témoins privilégiées et la résolution de problèmes par des procédures de comptage afin minimiser les éventuelles complications liées à l'apprentissage du symbolisme arithmétique.

3.4. Difficultés liées à la mémorisation des tables d'addition et conséquences pour l'enseignement

La disponibilité des décompositions additives lors de la résolution des additions mentales est tributaire d'une bonne maîtrise du répertoire additif (Butlen, 2007). Cependant, si pour certains enfants la mémorisation des résultats des tables d'addition est rapide, pour d'autres il va falloir beaucoup plus de temps, voire plusieurs années (Charnay, 2018). Ainsi, dès le cours préparatoire, l'enseignant va devoir développer la capacité à fabriquer les résultats inconnus ou incertains à partir

de ceux qui sont déjà mémorisés pour éviter que les élèves se sentent démunis et renoncent. En fait, comme l'indique Charnay (2018), « pour l'addition, une mémorisation partielle suffit à certains, dès lors, par exemple, ils sont capables, sachant que $7 + 7 = 14$, de retrouver $8 + 7$ en considérant que c'est 1 de plus que $7 + 7$ » (p.102). À vrai dire, c'est un peu plus compliqué que cela pour les élèves qui ne disposent pas d'une suite verbale régulière. En effet, selon Brissiaud (2003), l'irrégularité de la suite numérique verbale au-delà de 10 masque le rôle pivot de ce dernier notamment dans le but d'un éventuel passage à la dizaine ce qui ne favorise pas la conceptualisation des nombres et encore moins la mémorisation de l'association des opérandes au résultat. De ce fait, aux dires de Geary (1993), les enfants en difficulté dans leur apprentissage numérique restent prisonniers de leurs procédures de comptage et ne stockent pas en mémoire la partie comportant les grands nombres du répertoire additif. En conséquence, Brissiaud (2003) prône pour une action pédagogique volontariste de la part des enseignants pour permettre aux élèves de s'approprier des stratégies de décomposition-recomposition qui mettent beaucoup plus directement en relation les données et le résultat et facilitent ainsi la mémorisation.

Dès lors, on commence à percevoir que la mémorisation des tables est l'aboutissement d'un très long processus d'apprentissage soumis à de nombreuses conditions : tout d'abord, l'enfant doit comprendre les opérations en jeu. Ensuite, prendre conscience d'une part de l'intérêt d'avoir à sa disposition un répertoire de résultats et d'autre part, qu'il est en train de mémoriser certains résultats et que chemin faisant il constitue son répertoire mental. Après, sa capacité à utiliser ce qu'il sait pour reconstruire d'autres résultats doit être optimisée par l'enseignement explicite de points d'appui telles que les doubles, les décompositions, les relations $5 + n$ et $10 + n$, les stratégies telles que le retour au 5 ou le passage à 10. Et, c'est pour cette raison que ce n'est qu'au CE2, vers 8 - 9ans que cette compétence est véritablement établie pour la plupart des élèves (MEN, 2002).

4. Bilan intermédiaire sur l'étude de la notion

Notre étude sur les enjeux et les difficultés d'apprentissage liés à notre objet d'étude ainsi que les contraintes et les ressources pour son enseignement nous permet d'établir un premier bilan sur les choix qui s'offrent aux enseignants lors de l'élaboration de leur projet d'enseignement du calcul mental de sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine. Voir ci-dessous, le synopsis sur les processus d'apprentissage.

En s'appuyant sur les textes officiels et les travaux de certains auteurs comme Charnay et Valentin (1992) et Brissiaud (2001), il appert que les scénarios possibles d'enseignement du calcul mental de sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine s'inscrivent entre deux processus distincts.

- Dans le premier processus, le comptage et le décomptage précèdent le calcul. Le professeur des écoles va chercher à améliorer les procédures personnelles des élèves en ayant comme but l'acquisition du surcomptage et/ou décomptage à l'aide des doigts et de la piste numérique (Charnay et Valentin, 1992). L'objet principal est de permettre aux élèves d'acquérir suffisamment d'aisance pour abandonner ces procédures afin de progresser vers le calcul numérique, d'où une certaine consolidation de la mémorisation du répertoire additif.
- D'autre part, concernant le deuxième processus, certains auteurs comme Brissiaud (2001) associent ce dernier au premier en privilégiant le calcul sur les doigts ou les objets structurés en raison de sa plus grande proximité avec le calcul numérique ce qui laisse entendre qu'il joue un plus grand rôle dans la conceptualisation du nombre et la mémorisation des relations numériques.

Tableau 8 : Bilan intermédiaire sur l'enseignement du calcul mental de sommes de nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine au CP

5. Les projets d'enseignement possibles : Une étude comparative des manuels

5.1. Méthodologie d'analyse des manuels

Encore objet d'une littérature scientifique abondante plus de deux cents ans après son entrée massive dans les écoles (Priouret, 1977 ; Métoudi et Duchaufour, 2001 ; Priolet et Mounier, 2018), le manuel scolaire est présent en nombre suffisant pour chaque élève dans 75% des classes du cycle 3 pour l'apprentissage des mathématiques (Priolet, 2001, MEN, 2006). À l'instar de Mounier et Priolet (2015), nous entendons par manuel « tout support pédagogique (livres ou fiches) qui doit être acquis par l'élève (lycée) ou qui est mis à sa disposition par l'établissement (école primaire et collège) ». En outre, chaque manuel est souvent complété par des « moyens d'enseignement¹⁴⁰ » pour faciliter son utilisation : un guide pédagogique¹⁴¹, du matériel pédagogique et des ressources en ligne mises à disposition de l'enseignant. Sachant que le manuel conditionne les mathématiques enseignées (Chevallard, Bosch et Gascon, 2002) et peut donc influencer les pratiques (Butlen, 2004), nous ne pouvions faire l'impasse sur cet « *élément incontournable de l'environnement professionnel de l'enseignant* » (Margolinas et Wozniak, 2009). D'autant plus que son choix reste la plupart du temps,

¹⁴⁰ D'après Grapin et Mounier (2018), selon la terminologie employée en Suisse romande, l'ensemble constitué par le manuel, son guide pédagogique, le matériel pédagogique y compris les ressources disponibles sur internet et mises à disposition de l'enseignant peut être qualifié de « moyen d'enseignement ».

¹⁴¹ L'expression guide pédagogique est utilisée pour désigner la documentation annexée au manuel scolaire et destinée au professeur.

dans 66% des cas, une démarche individuelle (Mounier et Priolet, 2015). En effet, comme le soulignent Briand et Peltier (2008), sa conception et son écriture occupe une place importante dans la transposition des savoirs mathématiques et « *le nécessaire travail de vulgarisation de la recherche en didactique* » (Briand et Peltier, 2008). C'est pourquoi, l'examen des propositions figurant dans les manuels scolaires, en neutralisant au maximum les contraintes institutionnelles, peut nous offrir une palette des enseignements possibles pour une notion précise. En clair, il s'agit ici de caractériser les savoirs à enseigner et la manière de les transmettre proposée dans les manuels du CP dans le cadre de l'apprentissage de l'addition mentale avec franchissement de la dizaine. Dans cette optique, nous étudions les projets d'enseignement de cette notion figurant dans les manuels du cours préparatoire pour comprendre quelle transposition ont réalisé les auteurs, identifier les éléments didactiques et pédagogiques qu'ils prennent en considération pour élaborer leur scénario et recueillir les suggestions de mises en œuvre faites aux professeurs des écoles. Pour ce faire, nous procédons à une étude comparative de cinq manuels du cours préparatoire en nous limitant à cinq critères, à savoir, la progression, les séances, les activités proposées, la mise en commun et l'institutionnalisation. Nous présentons ci-dessous notre outil d'analyse des manuels, composé de cinq grilles, construit à partir des travaux de Mounier et Priolet (2015) et Grapin et Mounier (2018).

- *Notre outil d'analyse des manuels*

Grille 1 – Caractéristiques des manuels. Grille 2 – Progression proposée dans les manuels pour l'enseignement du calcul mental de sommes comprises entre 10 et 20 avec franchissement de la dizaine – (voir annexe II) :

Dans le cadre de notre analyse de manuels de CP, la notion clé que nous avons choisi d'étudier est l'addition mentale avec franchissement de la dizaine. D'après les repères donnés aux équipes pédagogiques par les programmes 2008¹⁴² dans le but d'organiser la progressivité des apprentissages, cette notion s'inscrit directement dans la compétence « calculer mentalement des sommes et des différences » mais se construit dialectiquement avec le développement d'autres connaissances et compétences telles que : « connaître les nombres entiers naturels inférieurs à 100 », « produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à vingt ("table d'addition") ou encore « connaître les doubles inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20 ». Par conséquent, s'il veut enseigner cette notion, le professeur peut définir différentes étapes dans un ordre chronologique précis qu'il va programmer sur un ensemble de séances (la séquence) afin d'amener progressivement les élèves à construire des procédures de calcul réfléchi de sommes en utilisant par paliers successifs les différents points d'appui mis en place : les faits numériques mémorisés, les

¹⁴² BO n°3 du 19 juin 2008.

décompositions des nombres, les propriétés des opérations et les relations entre les nombres. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés, en premier lieu, à la progression spécifique à cet apprentissage proposée par les manuels. Elle est appréhendée à travers quatre indicateurs : les objectifs intermédiaires anticipés et éléments constitutifs de la compétence à acquérir au cours du cycle, (sont-ils indiqués pour chaque séance ? sont-ils formulés de manière précise ? leur libellé est-il explicite ? fournissent-ils de vrais repères aux enseignants ?), le champ mathématique de la séquence et l'itinéraire d'apprentissage (les contenus et leur organisation), le type de dispositif prescrit à partir de la catégorisation de Grapin et Mounier¹⁴³ (2018) puis la gestion de l'hétérogénéité (est-elle abordée ? comment la différenciation est-elle construite ?).

Grille 3 – *Format et types des séances proposées dans les manuels pour l'enseignement du calcul mental de sommes comprises entre 10 et 20 avec franchissement de la dizaine* – (voir annexe II) :

En second lieu, à une échelle plus locale, nous nous sommes penchés sur l'apprentissage au quotidien proposé par les manuels c'est-à-dire à la séance de calcul mental proprement dite pour deux raisons. D'une part, l'étude des manuels scolaires de mathématiques à l'école primaire réalisée par Mounier et al. (2015) a montré que la présentation des séances d'un même manuel, voire d'une collection complète, est le plus souvent rythmée par un format stable influant « sur la gestion au quotidien de l'enseignant qui aura ainsi une ou plusieurs notions à traiter, ancienne ou nouvelle, par l'intermédiaire d'activités déjà connues ou non des élèves » (p.10). De ce fait, les formats de séance adoptés dans un manuel ont donc des incidences sur la manière dont le professeur gère sa classe au quotidien et « sur la façon dont il structure les apprentissages et l'ensemble des connaissances des élèves sur l'année » (Mounier et Grapin, 2018). D'autre part, mis à part les séances d'évaluation, les chercheurs (Lethielleux, 1992 ; Butlen et Masselot, 2010) préconisent, deux types de séances incontournables selon l'objectif visé prioritairement : des séances courtes de 10 à 15 minutes, pour entraîner les élèves au calcul, les confronter à des exemples variés et accroître leurs performances (rapidité, maîtrise de techniques) » et des séances plus longues, une fois par semaine, d'une trentaine de minutes, « consacrées à l'explicitation et à la comparaison des différentes procédures mobilisées par les élèves (y compris les procédures erronées quand elles révèlent une difficulté significative) » (Butlen et Masselot, 2010, p.16). Par conséquent, notre grille d'analyse (Grille 3 annexes II) permet de recueillir qualitativement des données sur les séances conseillées dans les manuels, à partir de deux indicateurs : le format (activités ritualisées, reprises de notions anciennes, introduction d'un savoir nouveau) et le type de séances (entraînement, apprentissage, évaluation, etc.).

¹⁴³ En appui sur les travaux de Rey (2001), Grapin et Mounier (2018) catégorisent trois types de dispositifs pédagogiques prescrits les manuels : « problème – compréhension – application », « observation – compréhension – application », « explication – application » (p.36).

Grille 4 – Activités proposées dans les manuels pour l'enseignement du calcul mental de sommes comprises entre 10 et 20 avec franchissement de la dizaine – (voir annexe II) :

En outre, le lien entre le travail des élèves et le savoir à faire émerger, particulièrement important dans le processus d'apprentissage, constitue également l'une des tâches d'enseignement les plus complexes (Mounier, 2013) qui pousse souvent l'enseignant à se référer au manuel pour y trouver les activités qu'il peut donner aux élèves. Il nous paraît donc intéressant d'appréhender les activités proposées dans les manuels en notant le type d'activités proposées (sont-elles réellement des activités de calcul mental ? permettent-elles d'atteindre l'objectif visé ?) et leur nombre par séance (y en a-t-il une ou plusieurs dans une même séance ?).

Grille 5 – Institutionnalisations proposées dans les manuels pour l'enseignement du calcul mental de sommes comprises entre 10 et 20 avec franchissement de la dizaine – (voir annexe II) :

Pour terminer, les recherches de Butlen et Pézard (2003) et Butlen (2007) ont montré que les effets d'un entraînement régulier en calcul mental deviennent sensibles uniquement si les apprentissages spécifiques permettent, dans un premier temps, de «mettre en place des automatismes élémentaires visant à étendre le domaine des décompositions additives [...] susceptibles d'être convoquées par les élèves et d'accroître leur disponibilité», puis, dans un deuxième temps, « en fonction des nombres et des opérations en jeu, d'apprendre à choisir les décompositions mobilisables dans les calculs parmi toutes celles qui sont possibles » (Butlen, 2007). Cette dernière compétence requiert, d'après ces auteurs, des institutionnalisations locales souples, assez simples : ni trop rapides, ni trop « fortes » pour faciliter l'adaptabilité ; ni trop « faibles », ni trop tardives pour que les procédures ne semblent pas équivalentes. Mais, suffisamment explicites sur les critères de choix de stratégies, car elles peuvent permettre aux élèves d'une part, de distinguer les situations où ils doivent inventer de celles où il suffit de reproduire et d'autre part, de hiérarchiser l'éventail des procédures possibles. Aux dires de Nathalie Pfaff (2018), l'un des problèmes récurrents chez les enseignants est de savoir comment institutionnaliser une procédure de calcul mental. À cet effet, nous regarderons dans le guide pédagogique la description de la mise en commun et de l'institutionnalisation dans les séances de calcul mental : le manuel propose-t-il une mise en commun ? l'ensemble des procédures possibles sont-elles montrées aux élèves ? des représentations différentes de ces procédures sont-elles proposées aux élèves ? tiennent-elles compte des connaissances et du niveau initial des élèves ? les conditions dans lesquelles les procédures s'avèrent plus ou moins "économiques" sont-elles institutionnalisées ? un travail sur l'écriture des règles, incluant leur domaine de validité est-il proposé ?

5.2. Le panel

À l'opposé de certains pays, la France ne propose à ce jour aucune liste de manuels officiellement approuvée par l'État pour l'enseignement des mathématiques au cours préparatoire. En réalité, les manuels scolaires sont conçus par des auteurs ayant des statuts institutionnels divers qui interprètent les instructions officielles, définissent les contenus et le mode opératoire sous la férule d'éditeurs privés, eux-mêmes soumis à des contraintes commerciales qui peuvent déterminer certains choix didactiques (Assude et Margolinas, 2005). À l'instar de Mounier et Priolet (2015), nous retenons comme définition du manuel scolaire celle donnée par les Inspecteurs Généraux dans un rapport qui lui est dédié (IGEN, 1998). Ainsi, dans le cadre de nos travaux, « tout support pédagogique (livres ou fiches) qui doit être acquis par l'élève (lycée) ou qui est mis à sa disposition par l'établissement (école élémentaire et collège) », est considéré comme un manuel scolaire.

Pour la sélection des ouvrages, notre premier critère était leur accord avec le programme scolaire en vigueur au moment de notre investigation (celui de 2008). Concrètement, l'inventaire de l'offre éditoriale dressée par Mounier et Priolet (2015) compte vingt-deux manuels, exclusivement en « support-livre », parus depuis 2008 à destination directe des élèves. S'agissant de notre recherche, loin de disposer des moyens de prétendre à une telle exhaustivité, mais souhaitant néanmoins avoir un aperçu représentatif des différentes approches proposées dans les manuels, nous avons opté pour une certaine diversité relative aux catégories socio-professionnelles des auteurs (voir tableau 3). Notre troisième critère de sélection est la manière dont la programmation est prescrite par les rédacteurs. En effet, certaines sont présentées jour après jour, au fur et à mesure de l'avancement des séances. D'autres sont structurées par domaines mathématiques ce qui laisse, certes à l'enseignant le choix de construire sa propre programmation mais nous privent au passage des informations sur le moment et la durée des apprentissages des notions-clés et des aspects spécifiques du calcul mental.

Par conséquent, nous avons retenu cinq manuels édités pour le cours préparatoire (CP) parus après la publication du BO n°3 hors-série du 19 juin 2008, programmes en vigueur en France au moment de l'investigation : *Cap maths* (Charnay et al., 2009) et *Pour comprendre les maths* (Bramand et al., 2008) rédigés par des formateurs, des enseignants du secondaire, des professeurs des écoles auxquels s'ajoute un IEN pour le deuxième ouvrage. *Euromaths* (Peltier et al., 2011) et *J'apprends les maths* (Brissiaud et al., 2009) sont tous deux écrits par des enseignants chercheurs - maîtres de conférences et des formateurs. Pour finir, exclusivement élaboré par des acteurs de terrain, une conseillère pédagogique et un IEN, *Litchi Mathématiques* (Vilaro et Fritz, 2011) se démarque des quatre autres ouvrages.

	Éditeurs	Manuels du CP sélectionnés	Catégories socio-professionnelles					
			EC-MCF	Form Maths	Prof Maths	PE	IEN	CPC
			ACTEURS DE TERRAIN EXCLUSIVEMENT					
1	Istra	Litchi Mathématiques					■	■
			ENSEIGNANTS CHERCHEURS OU FORMATEURS SPECIALISES EN DIDACTIQUE					
2	Hatier	Cap maths		■	■	■		
3	Hachette	Pour comprendre les maths		■	■	■	■	
4	Hatier	Euro Maths	■	■				
5	Retz	J'apprends les maths avec Tchou	■	■				

Légende : EC (Enseignant-Chercheur), MCF (Maître de conférence), Form Maths (Formateur), Prof (Enseignant du secondaire), IEN (Inspecteur de l'Éducation nationale), CPC (Conseiller pédagogique de circonscription)

Tableau 3 : Catégories socio-professionnelles des auteurs des manuels sélectionnés

- **Présentation générale des cinq manuels**

Par ailleurs, prenant tous la forme d'un fichier pour l'élève, les manuels retenus pour la constitution de ce panel sont complétés d'une part par des outils pédagogiques, un fascicule pour l'élève consacré au calcul mental (*Pour comprendre les maths*) ou à la synthèse des savoirs (*Cap maths* et *Euromaths*), du matériel détachable, photocopiable ou manipulable, un recueil d'exercices supplémentaires (*Pour comprendre les maths* et *Cap maths*), des ressources disponibles en ligne et d'autre part, par un ouvrage intitulé « guide pédagogique » ou « livre de l'enseignant » selon les collections donnant accès de manière plus ou moins explicite aux partis-pris théoriques, aux choix didactiques et pédagogiques des auteurs, à la programmation et à la progression séance par séance des apprentissages dans les différents domaines des mathématiques (voir annexes III Grille 42).

5.3. La programmation du calcul mental dans les manuels du CP : le cas de l'addition

Les manuels servent d'interface entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné dans le processus de transposition didactique. En effet, non seulement ils proposent une interprétation des programmes (Chesnais, 2014) mais ils donnent des exemples pour organiser les tâches prescrites aux élèves (Mounier et Priolet, 2016). Ainsi, considérés comme une ressource pour enseigner (Gueudet & Trouche, 2010), ces supports pédagogiques sont très largement utilisés dans les classes et peuvent donc potentiellement, au regard du processus d'instrumentation et d'instrumentalisation (Rabardel, 1995), déterminer la programmation des apprentissages mis en œuvre dans les classes même si chaque enseignant l'adapte à sa manière. En outre, les enseignants et en particulier, les néo-titulaires s'y réfèrent pour élaborer leur progression (Nicol et Crespo, 2006). Par conséquent, l'étude des manuels nous offrent une palette de programmations des progressions possibles pour enseigner les additions mentales de nombres à un chiffre incluant un passage à la dizaine, c'est-à-dire la répartition dans le temps des moments où sont prescrits les différentes étapes de leur apprentissage. Vu sous cet angle,

la structuration des apprentissages présentée dans le livre de l'élève et le guide pédagogique nous donne accès à la durée de travail des points notionnels spécifiques et à la vitesse à laquelle ils sont abordés au cours préparatoire (Remillard, 2010 ; Mounier et Priolet, 2015).

5.3.1. Méthodologie d'analyse de la programmation

a) Les indicateurs

Notre objectif est d'inférer de nos analyses, les choix possibles de programmations des additions mentales de nombres à un chiffre avec passage de la dizaine que peut faire un professeur des écoles au cours préparatoire. Dans cette optique, nous nous focalisons sur l'organisation globale de l'enseignement de ces opérations et sur l'articulation de ses quatre aspects : le sens de l'addition et les écritures additives, la connaissance de la suite numérique et des représentations des nombres, l'apprentissage des procédures de calcul et la mémorisation du répertoire additif. Pour ce faire, nous retenons six indicateurs relatifs à ces éléments, à partir desquels nous déduirons les « mises en calendrier » (Mounier et Priolet, 2016) envisageables pour cette notion.

Le premier indicateur est l'introduction de la séance sur les sommes du type $\square + \square$ avec franchissement de la dizaine. D'après les choix opérés par les manuels, le temps consacré à l'acquisition des prérequis pour l'apprentissage des procédures de calcul réfléchi (nombres, symboles, propriétés arithmétiques) peut être plus ou moins long par rapport au temps alloué à l'automatisation de leur exécution, des conditions de leur application et à l'étendue de leur champ d'utilisation à des nombres plus grands. Nous nous sommes également penchés sur le moment de l'année où sont introduites les écritures additives en contexte dynamique (avec manipulation), puis en contexte statique (sans matériel) car elles constituent la mémoire des actions (ajout ou retrait de deux sous-ensembles) et de leur résultat (cardinal de l'ensemble composé), participent à l'acquisition du sens de l'addition par le biais de la résolution de problèmes, permettent à l'élève de prendre conscience que plusieurs écritures additives peuvent correspondre à un même nombre et apportent ainsi les outils pour initier le travail sur la mémorisation de la table d'addition.

S'agissant du troisième indicateur, il relève de l'évolution du champ numérique. En effet, la compréhension du sens de l'addition passe par de bonnes connaissances numériques et donc par la capacité à se représenter les quantités. Par conséquent, le champ numérique restreint en début d'année pour faciliter les procédures de comptage beaucoup plus spontanées, s'étend au fur à mesure pour favoriser le passage à des procédures de calcul. De ce fait, le point suivant concerne donc le moment de l'année où a lieu le passage des procédures de comptage aux procédures de calcul. Il s'agit de repérer l'instant où l'utilisation de ces dernières est prescrite de manière explicite pour la résolution

des additions mentales avec franchissement de la dizaine. Nous avons aussi ciblé le type de procédures de calcul réfléchi et l'écart entre le moment de leur introduction et celui de la mémorisation des résultats. In fine, le sixième indicateur retenu est l'évolution de la construction du répertoire additif. Effectivement, elle constitue une source d'indications sur l'articulation entre l'introduction et la réactivation des procédures, des faits numériques spécifiques, le travail sur les écritures additives et la connaissance de la suite numérique.

b) La méthode utilisée pour comparer les programmations des manuels

Pour comparer, les programmations proposées dans les manuels, nous prenons, à l'instar d'Éric Mounier et Maryvonne Priolet (2016), comme unité d'observation la « séance-manuel » c'est-à-dire l'ensemble des pages (1 à 4) correspondant à une leçon identifiée par un numéro, un indice ou un curseur (numéro d'étape sur fond de couleur) notifié dans le sommaire ou la table des contenus du manuel. Toutefois, la durée indiquée pour chaque séance dans le guide pédagogique (quand c'est le cas) n'équivaut pas forcément au temps réel de mise en œuvre dans la classe par l'enseignant. Par conséquent, nous utilisons comme repère la place de chaque séance par rapport aux autres programmées dans l'année y compris les séances doubles. De cette manière, la 14^e séance sur les 140 de l'année sera positionnée à 10% de l'année. Ainsi, à l'exemple de ces chercheurs, nous pourrions procéder à une analyse comparative de la position relative de chaque séance dans les manuels constituant notre panel.

5.3.2. Organisation globale des manuels pour l'enseignement du calcul mental de l'addition

a) Litchi Mathématiques CP

Mathématiques Litchi CP programme, tous domaines confondus, l'enseignement des mathématiques sur cinq périodes au sein desquelles sont réparties cent-trente-trois séances. Les cinq premières séances de la période 1 préparent les élèves à l'utilisation du fichier en leur apportant des repères sur son organisation (séance 11) et sur les consignes (séance 10) d'une part et d'autre part, reprennent les notions étudiées à l'école maternelle telles que les mots pour se repérer dans l'espace (séance 12) et les nombres jusqu'à 5 (séance 14). À cela s'ajoute une séance de découverte d'un instrument de géométrie, la règle, à utiliser pour tracer des traits et des lignes droites (séance 13). Les cent-vingt-huit autres séances sont consacrées à l'acquisition des compétences attendues au CP et intègrent chacune une séance de calcul mental. Nous présentons ici une description succincte, période par période, de l'organisation globale du manuel Litchi en ce qui concerne l'enseignement du calcul mental de l'addition que nous avons détaillé en annexes III Grille 2.

La période 1 débute par la reconnaissance visuelle des nombres jusqu'à cinq avec un travail sur la suite numérique jusqu'à 10 associée au dénombrement de collections et aux décompositions additives des nombres de 6 à 10. En calcul, les maisons du 6 et du 7 sont construites, les doubles des nombres ≤ 5 sont mémorisés et le nombre zéro est introduit. Puis, l'addition des nombres jusqu'à 5, la symbolisation mathématique (signes + et =), l'addition en colonne, la construction des premiers éléments du répertoire additif et les sommes du type $5 + n \leq 9$ sont abordées tandis que la résolution de problème permet la mise en évidence du repère 5 en calcul réfléchi.

En période 2, les premiers calculs mentaux sont présentés aux élèves (ajout ou le retrait de 1 ou 2), addition du type $\square + \square \leq 12$, les compléments à 10 et petites sommes avec passage de la dizaine à l'aide de la monnaie. Concernant la mémorisation du répertoire additif, les doubles jusqu'à 6 sont consolidés et le répertoire additif est construit en appui sur la commutativité. S'agissant de la connaissance de la suite numérique, elle est élargie jusqu'à 19. Les problèmes additifs eux, restent simples et sont du type $a + b = ?$ $a + ? = c$ et $? + b = c$. Au cours de la période 3, les tables d'addition de 2 à 6 sont étudiées puis le répertoire additif correspondant est élaboré en appui sur la commutativité. Parallèlement, la suite numérique est étendue à 69 tandis que l'addition et la soustraction sont réinvesties pour résoudre des problèmes à 1 ou 2 étapes. D'autre part, les élèves sont entraînés à l'utilisation du complément à 10 afin de les inciter à passer par le nombre 10 lors de la résolution des additions du type $\square + \square$ avec franchissement de la dizaine. In fine, le sens de la technique opératoire de la soustraction et de l'addition de 2 nombres à 2 chiffres sans retenue est abordé.

Dès la période 4, la table d'addition de 9 et les doubles des nombres jusqu'à 10 sont stockés en mémoire. Il s'en suit l'appropriation des moitiés, l'extension de la suite numérique jusqu'à 89, l'apprentissage du sens et de la technique de l'addition de 2 nombres à 2 chiffres avec retenue, de la soustraction sans retenue, de l'addition et de la soustraction de dizaines entières et le calcul de sommes de 3 nombres en groupant 2 termes pour former une dizaine entière. D'autre part, des tâches sont proposées sur les sommes, les différences et les compléments de type $60 + 7$, $67 - 7$, 60 pour aller à 67. En période 5, la connaissance de la comptine numérique s'étend à 99. Les élèves s'entraînent à la mémorisation du répertoire additif et à l'addition posée de 3 nombres à 2 chiffres avec retenue. Le travail sur l'ajout des dizaines à un nombre donné est, lui, approfondi (séance 137).

b) Cap maths CP

Le fait d'être à l'aise avec les nombres, de maîtriser la table d'addition et de savoir établir un résultat à l'aide du calcul réfléchi est perçu par les auteurs du *Cap maths CP* comme étant essentiel pour la

résolution de problèmes et l'apprentissage de nouvelles notions. Par conséquent, ils proposent tout au long de l'année du cours préparatoire un enseignement quotidien et régulier du calcul mental consistant « à faire les élèves travailler sur des figurations variées des nombres, à aborder de manière progressive les tables d'addition, et à proposer une pratique régulière du calcul réfléchi, en les aidant à élaborer des stratégies appropriées » (*Cap maths CP*, 2009, p.X). Pour ce faire, les enseignements dans ce manuel sont programmés sur 30 semaines réparties en 15 unités, chacune subdivisée en 7 séances d'apprentissage d'une heure quinze minutes et une séance de bilan partiel de 45 minutes. Ainsi, les concepteurs de cet outil pédagogique proposent deux plages de travail quotidiennes déconnectées, l'une le matin avec 30 minutes pour le calcul mental et les révisions et l'autre l'après-midi avec 45 minutes pour les nouveaux apprentissages et vice versa en fonction des objectifs visés. Nous présentons ici une description succincte, période par période, de l'organisation globale du manuel *Cap maths* en ce qui concerne l'enseignement du calcul mental de l'addition que nous avons détaillé en annexes III Grille 3.

En première période, les « unités de travail » 1, 2 et 3 sont consacrées à une consolidation et à un approfondissement des acquis de la Grande Section. Les apprentissages concernent pour l'essentiel les quantités et les nombres de 1 à 19 et poursuivent cinq objectifs : 1) Faire prendre conscience de l'utilité des nombres ; 2) Assurer une bonne maîtrise de la suite orale des nombres jusqu'à 16, puis jusqu'à 19 (comptine numérique) ; 3) Consolider différentes stratégies de dénombrement, 4) Reconnaître les écritures chiffrées des nombres, 5) Varier les modes de représentation des nombres. En ce qui concerne la deuxième période, les unités de travail 4 à 6 « sont centrées sur la mise en évidence des régularités de la suite écrite des nombres. Parallèlement, les élèves apprennent à lire ces nombres, commencent à les comparer et à réaliser des collections associées à ces nombres » (Guide pédagogique du *Cap maths*, 2009, p. XXI). Dans cette optique, la suite écrite des nombres est travaillée en priorité dans le but d'apprendre aux élèves à repérer un rang par un nombre dans une liste ordonnée, lire ces nombres, en appui sur les mots vingt et trente et dénombrer des collections comportant jusqu'à 39 objets.

En période 3, les groupements par dix et la valeur positionnelle des chiffres constitue l'essentiel des apprentissages des unités 7 à 9. En conséquence, les activités proposées sont liées à la lecture et à l'écriture des nombres jusqu'à 59, les groupements par dix, la suite des nombres et l'évolution des quantités. La compréhension des écritures chiffrées permet, en période 4 (unités 10 à 12) permet un nouveau travail sur la comparaison des nombres avec le développement de deux procédures pour comparer les nombres : la référence ordinale (celle du compteur), la plus ancienne, indique que 37 est rencontré avant 54 lorsqu'on parcourt la suite des nombres depuis son début. La référence

cardinale (celle des quantités), plus récente, leur permet de comprendre que 37 objets c'est moins que 54 objets, puisque dans un cas il n'y a que 3 *groupements de dix* alors que dans l'autre il y en a 5. Ces acquis sont, par ailleurs, renforcés par une nouvelle présentation de l'organisation des nombres : le tableau des nombres (Guide pédagogique du Cap maths, 2009, p. XXII). Enfin, en période 5, les unités 13 à 15 proposent à l'enseignant de poursuivre la consolidation des connaissances mises en place au cours des périodes précédentes. Des calculs plus complexes avec des nombres à deux chiffres sont envisagés.

c) Pour comprendre les maths CP

D'après les auteurs de *Pour comprendre les maths CP*, la pratique quotidienne du calcul mental (sans appui de l'écrit) et du calcul réfléchi (avec appui de l'écrit) a pour « but essentiel [...] de familiariser l'enfant avec l'univers numérique des nombres entiers, de rendre ces derniers "concrets", c'est-à-dire de leur donner du sens indépendamment de contextes extérieurs. [Selon eux], il s'agit, en somme, de permettre à l'enfant de penser à l'intérieur des mathématiques » (*Pour comprendre les maths CP*, 2009, p.243). Par conséquent, ils proposent aux enseignants de « mettre le sens, la réflexion, la recherche avec les pairs au centre de l'activité pour élaborer les techniques, les mettre en œuvre et les mémoriser » (*ibid.*, p.5). Plus concrètement, tous domaines mathématiques confondus, 141 séances d'apprentissage comportant chacune une phase dédiée au calcul mental sont décrites dans ce manuel et précédées, en tout début de première période, par une séance unique consacrée à la compréhension des consignes et des pictogrammes associés pour faciliter la prise en main du fichier par l'élève. Nous présentons ici une description succincte, période par période, de l'organisation globale du manuel *Pour comprendre les maths* en ce qui concerne l'enseignement du calcul mental de l'addition que nous avons détaillé en annexes III Grille 4.

De la période 1 à la période 2, la comptine numérique jusqu'à 20, les procédures de comptage pour dénombrer ou réaliser des quantités ainsi que la reconnaissance globale et les différentes représentations des nombres sont abordés. C'est également à cette période que le symbolisme arithmétique (+, -, =) est introduit par le biais de la résolution de problèmes et d'un travail sur le sens des opérations, les écritures symboliques et les écritures additives des nombres jusqu'à 10. D'autre part, certaines activités visent l'amélioration des procédures de comptage des élèves, notamment du surcomptage pour progresser vers le calcul d'additions du type $\square + \square$ avec franchissement de la dizaine (séance 44). Parallèlement, les élèves apprennent à retrancher mentalement un petit nombre et la mémorisation du répertoire additif est initialisée par la compréhension de la table de Pythagore et son utilisation.

En période 3, la connaissance de la suite numérique des nombres est étendue jusqu'à 59. Parallèlement, les écritures additives des nombres jusqu'à 20 sont étudiées ainsi que le calcul de petites sommes ($R \leq 16$) et la résolution de petits problèmes additifs. D'autre part, le travail sur les compléments à 10 se poursuit. Puis deux nouvelles procédures de calcul réfléchi sont enseignées, l'une pour calculer des sommes du type $\square + \square$ avec et sans passage de la dizaine en appui sur l'utilisation des doubles et l'autre pour ajouter des dizaines entières. Concernant la maîtrise du répertoire additif, les élèves s'entraînent à la mémorisation des doubles des nombres ≤ 10 .

La période 4 démarre avec l'enseignement de nouvelles procédures de calcul réfléchi pour ajouter un nombre entier de dizaines à un nombre à un chiffre, ajouter ou retrancher 10 à un nombre à deux chiffres, calculer des sommes du type $\square\square + \square 0$ et additionner des dizaines entières. Par ailleurs, la maîtrise des compléments à 10 est renforcée et celle des compléments à la dizaine immédiatement supérieure est entamée. En outre, la technique de l'arbre à calcul est proposée aux élèves pour additionner des nombres à deux chiffres et l'étude de la comptine numérique est prolongée jusqu'à 99. En période, les apprentissages initiés à la période précédente sont consolidés.

d) Euromaths CP

Dans ce manuel, la programmation du calcul mental est structurée en cinq périodes et découpée en 86 étapes. Chaque étape étant elle-même organisée en une ou deux séances comportant chacune une séance de calcul mental d'une dizaine de minutes qui peut éventuellement être mise en oeuvre de manière déconnectée. Ce domaine est donc travaillé quotidiennement qu'il s'agisse de stabiliser des connaissances abordées les jours précédents ou de préparer un enseignement à venir. Plus précisément, l'apprentissage des notions se fait de manière « spiralaire », par approfondissements et élargissements successifs et s'étend souvent sur plusieurs périodes durant les lesquelles les phases de construction ou d'appropriation, les moments de structuration et les phases d'entraînement et de consolidation se succèdent. Nous présentons ici une description succincte, période par période, de l'organisation globale du manuel *Euromaths* en ce qui concerne l'enseignement du calcul mental de l'addition que nous avons détaillé en annexes III Grille 5.

En période 1, le lien entre les doigts des mains et les premiers nombres est développé corrélativement à un travail sur la comptine orale, la suite écrite des nombres, les représentations spatiales des premiers nombres et l'ordre local (successeur, prédécesseur) afin de structurer la suite numérique avec appui sur 5, 10, 15, 20... et favoriser ultérieurement la résolution des premiers calculs. En période 2, l'addition et la soustraction sont introduites parallèlement, d'abord dans un contexte dynamique à l'aide du jeu de la boîte puis en contexte statique (sans matériel) avec le jeu de la bonne carte,

permettent aux élèves travailler sur les écritures additives. Simultanément, les procédures de comptage, et en particulier, le surcomptage et le décomptage sont améliorées. Puis, la mémorisation de la table d'addition est entamée pour les nombres compris entre 1 et 5.

En période 3, la mémorisation des tables d'addition est prolongée par la recherche des différentes écritures additives à deux ou trois termes des nombres jusqu'à 10. Par la suite, des calculs tels que $7 + 5$ et $17 + 5$ ou $5 - 3$ et $15 - 3$ sont résolus à partir de procédures personnelles telles que le surcomptage ou le compte à rebours. Pour passer des procédures de comptage aux procédures de calcul, le manuel prévoit d'apprendre aux élèves à évaluer les distances d'un nombre aux deux dizaines qui l'encadrent à l'aide de la piste numérique avant d'enseigner le calcul de sommes d'un nombre quelconque (a) et d'un nombre compris entre 1 et 5 (b) lorsqu'avancer de b fait franchir une dizaine. Puis, la table d'addition ($a + b$) est étendue pour a compris entre 1 et 10 et b compris entre 1 et 5. En période 4, le travail de structuration de la suite des nombres se poursuit. La procédure de calcul étudiée précédemment est prolongée au calcul de sommes du type $a + b$ quand a et b compris entre 1 et 10 et avancer de b fait passer une dizaine. Par la suite, le calcul de sommes du type $\square + \square$ avec passage de la dizaine en appui sur les doubles. Puis, un travail sur la commutativité est lancé pour alléger le stockage en mémoire du répertoire additif. En période 5, la connaissance de la suite numérique au-delà de 69, les notions de doubles et de moitié et la mémorisation des tables d'addition sont renforcés.

e) J'apprends les maths avec Tchou CP

D'après les auteurs de *J'apprends les maths avec Tchou*, « apprendre les mathématiques, c'est apprendre à résoudre des problèmes, acquérir des savoir-faire fondamentaux (comme le calcul) et réinvestir ces savoir-faire dans la résolution de problèmes » (Brissiaud et al., 2009, p.3). Dans cette optique, ils proposent comme outil pour l'élève un fichier structuré en cinq périodes correspondant aux cinq phases de la progression arithmétique suivie tout au long du manuel mais qui paradoxalement, ne sont pas en adéquation avec les « périodes de l'année scolaire » délimitées par le calendrier. Chaque phase est organisée en doubles pages de telle manière qu'une page corresponde à une journée¹⁴⁴ de travail en mathématiques au cours préparatoire et un groupe de quatre pages à une semaine. En somme, la méthode *J'apprends les maths avec Tchou* (2009), propose 148 pages (8 à 155) soit 148 journées ou séquences¹⁴⁵ d'apprentissage intégrant chacune une à deux « activités de haut de page » consacrées au calcul mental à partir de la cinquième journée de travail. Nous

¹⁴⁴ Certaines séances sont parfois organisées sur une double page.

¹⁴⁵ Dans ce manuel une séquence de mathématiques correspond à un ensemble d'activités proposées au cours d'une journée de classe.

présentons ici une description succincte, période par période, de l'organisation globale du manuel *J'apprends les maths* en ce qui concerne l'enseignement du calcul mental de l'addition que nous avons détaillé en annexes III Grille 6.

En période 1, les activités numériques sur les petits nombres jusqu'à 5 sont introduites avec pour objectif premier d'amener les élèves d'une part, à reconnaître rapidement une petite quantité sans passer par le comptage de un à un. C'est donc un dénombrement des petites quantités par décompositions qui est privilégié. Vers la fin de la période, à l'apprentissage de la suite traditionnelle « Comme nous », la méthode *J'apprends les maths avec Tchou* (2009) ajoute celui d'une comptine numérique régulière « Comme Tchou », plus facile à apprendre et n'utilisant que dix mots différents jusqu'à 99 = « neuf dix et neuf » (séquence 28). En complément, des activités, à l'aide d'un outil pédagogique « la petite boîte de Tchou » pouvant contenir 5 jetons, sont proposées pour soutenir les élèves dans la structuration des nombres à l'aide du repère 5. Cette petite boîte est également mise à profit pour faire découvrir l'addition et le signe « + ». En période 2, la « petite boîte de Tchou » laisse place à la Grande boîte de Tchou pour structurer les nombres de 6 à 9 à l'aide des repères 5 et 10. Par la suite, l'écriture des nombres après 10 est mise en relation avec leur décomposition (par exemple, 14 c'est comme 10 et 4) et des procédures pour calculer mentalement des sommes du type $6 + 3$ sont instaurées. En outre, la commutativité est enseignée, de manière explicite, comme une propriété des additions facilitant le calcul. In fine, les nombres de 11 à 16 et leurs décompositions à l'aide de 10 sont mémorisés.

En période 3, la comptine numérique sera alors étendue jusqu'à 69 avec les nombres comme Tchou (séquence 88) tandis que les calculs de compléments sont prolongés à 10, à l'aide de situations-problèmes autocorrectives. Les élèves progressent ensuite vers l'idée de retrait avec le calcul de nouvelles soustractions du type $9 - 6$ puis du type $9 - 2$. En calcul réfléchi, une nouvelle stratégie, le « retour aux cinq », est enseignée pour calculer deux nombres quand l'un est 5 et l'autre compris entre 6 et 9. La période 4 est entamée par le calcul mental des additions de 2 nombres à 2 chiffres ($32 + 23$). Peu après, l'apprentissage du calcul réfléchi de l'addition est continué par le calcul des « grands doubles », de $6 + 6$ à $9 + 9$, puis des sommes du type $9 + n$ et $8 + n$. La période 5, quant à elle, marque le franchissement de deux étapes importantes dans la progression du calcul avec l'addition d'un nombre à 2 chiffres avec un nombre à 1 chiffre et l'addition de deux nombres à 2 chiffres. Du côté de la soustraction, les élèves apprennent à calculer celles du type $12 - 3$ puis du type $12 - 9$. Le champ numérique est d'abord prolongé à 100 puis la construction d'un répertoire additif permet aux élèves de s'entraîner à la mémorisation des tables 9, 8, 7 et 6.

5.3.3. Comparaison de la programmation des manuels

a) Le sens de l'addition et les écritures additives

✚ L'introduction du signe +

Notre sélection de manuels préconise l'introduction du signe « + » assez tôt dans l'année : dès la première période, pour certains (*J'apprends les maths*, *Pour comprendre les maths* et *Litchi*) ou en deuxième période pour d'autres (*Cap maths*, *Euromaths*) – (Tableau 4).

OUVRAGES	INTRODUCTION DU SIGNE +			
	N° de séances	Nbre total de séances ¹⁴⁶	Place de la séance	
			Moments (%)	Périodes
1 Litchi Mathématiques	18	150	12%	1
2 Cap maths	35	145	24%	2
3 Pour comprendre les maths	22	147	15%	1
4 Euro Maths	32	157	20%	2
5 J'apprends les maths	19	162	12%	1

Tableau 4 : Place d'introduction du signe + dans la programmation des manuels pour l'année scolaire

■ Commentaires :

En appui sur les travaux de Mounier et Priolet (2016), nous identifions le moment recommandé par les manuels pour enseigner le signe + en repérant la place de la séance correspondant à cet apprentissage au prorata des autres séances programmées dans l'année.

Plus concrètement, prenons par exemple le cas de l'ouvrage *Euromaths*. La séance intitulée « *L'addition, les signes + et =* » est la 32^e sur les 157 prévues par le manuel. Par conséquent, nous notons qu'elle se situe à 20% de l'année c'est-à-dire au cours de la deuxième période et plus précisément au début du mois de novembre.

En outre, la figure 1 ci-dessous nous montre d'une part que *Litchi* et *J'apprends les maths* introduisent tous deux le symbolisme arithmétique au même moment dans l'année et d'autre part, qu'ils sont les premiers à aborder l'apprentissage du signe +. *Cap maths* lui enseigne cette notion en deuxième période bien après les autres manuels.

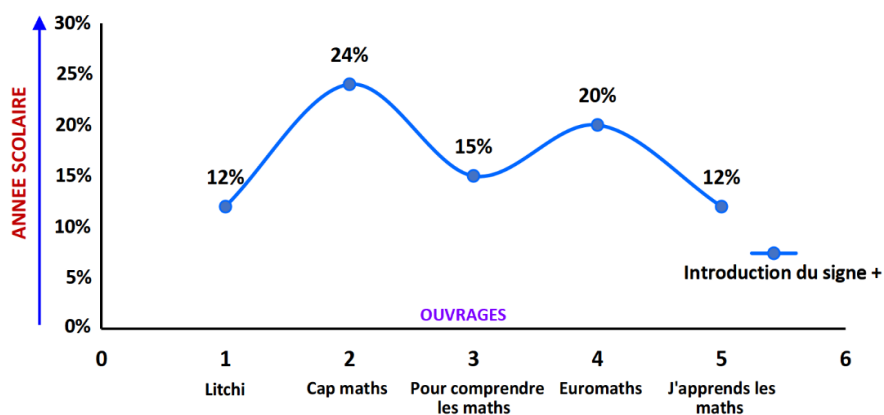


Figure 1- Place de l'introduction des signes « + » dans les manuels du CP constituant notre panel

¹⁴⁶ L'intégralité des séances constituant le manuel sont comptabilisées y compris les bilans, les évaluations, activités complémentaires, jeux ou autres.

Le travail sur le sens de l'addition

En théorie, avant l'installation des écritures symboliques, un laps de temps est laissé aux élèves afin qu'ils « fréquentent » les divers sens de l'addition. Par conséquent, l'une des raisons de cette variabilité peut être due à la mise en place d'un travail plus ou moins long sur le sens de l'addition avant l'enseignement des signes arithmétiques. Au regard des données apportées par le tableau ci-dessous, les manuels qui programment l'apprentissage du signe + le plus tard dans l'année proposent effectivement en amont un temps de travail sur le sens de l'addition.

OUVRAGES		Introduction du sens		Introduction du signe +		Travail sur le sens de l'addition avant l'introduction du signe +	
		Moments	Périodes	Moments	Périodes	N ^{bre} de séances	Thèmes travaillés
1	Litchi	12%	1	12%	1	0	-
2	Cap maths	7%	1	24%	2	10	Ajout et retrait d'un objet Utilisation du langage oral (+, -)
3	Pour comprendre les maths	14%	1	15%	1	1	Problèmes : situations additives et soustractives
4	Euro Maths	18%	1	20%	2	1	Problèmes additifs et soustractifs
5	J'apprends	12%	1	12%	1	0	-

Tableau 5 : Travail sur le sens de l'addition avant l'introduction du signe +

Cependant, nous constatons que cette durée est significativement différente d'un manuel à l'autre. En effet, si *Cap maths* accorde un temps relativement long (dix séances) à l'expérimentation effective des évolutions de collections (ajout et retrait d'un objet) et à la mise en place d'un langage oral (plus, moins) pour exprimer les relations entre les nombres, avant de passer au langage symbolique (+, -, =), il n'en est pas de même pour les autres méthodes. En fait, *Euromaths* et *J'apprends les maths* consacrent une séance à la compréhension du sens de l'opération peu avant la découverte des signes opératoires tandis que *Litchi* et *J'apprends les maths* mettent en place le langage symbolique, dans la foulée, au cours de la même séance, juste après la résolution du problème.

La stratégie utilisée pour introduire le symbolisme arithmétique

Par ailleurs, les cinq ouvrages introduisent l'apprentissage du symbolisme arithmétique par le biais d'une situation-problème où il faut anticiper le résultat d'un ajout. L'écriture symbolique apparaît alors à la fois comme une trace des actions effectuées et comme une procédure pour prévoir son résultat. De fait, les problèmes utilisés pour amorcer l'enseignement de l'égalité numérique mettent en jeu l'aspect cardinal des nombres. Ainsi, l'écriture additive est introduite, en contexte dynamique¹⁴⁷, comme la mémoire de l'action ou de la manipulation (ajout de jetons) et de son résultat. En outre, toutes méthodes confondues, ces nombres sont de petite taille pour favoriser d'une part, la

¹⁴⁷ Il y a une action de départ, une transformation et une situation d'arrivée.

mise en œuvre des procédures personnelles telles que le recomptage en dessinant les collections, en utilisant les doigts ou le surcomptage et d'autre part, la vérification directe du résultat en dénombrant par exemple les jetons dans la boîte. Par la suite, les manuels recommandent également un travail sur l'aspect ordinal des nombres dans le contexte de la piste des nombres où il s'agit d'anticiper la case atteinte à l'issue d'un déplacement en avant ou en arrière sur la file numérique.

D'autre part, on constate que *Cap maths* choisit d'aborder simultanément le signe « + » et le signe « - » et justifie ce parti-pris par trois considérations : 1°) les problèmes faisant intervenir l'addition et la soustraction portent sur les mêmes situations ; 2°) le fait d'utiliser deux opérations permet aux élèves de comprendre que tout problème ne se résout pas forcément par une addition ; 3°) la disponibilité des signes « + » et « - » permet de diversifier les représentations des nombres. Les quatre autres collections, quant à elles, optent pour une toute autre stratégie d'enseignement et programment une découverte successive de ces deux signes. Cependant, selon le manuel utilisé, l'introduction du signe « - » varie entre la première période de l'année scolaire (*Pour comprendre les maths*) et la deuxième période (*Litchi*, *J'apprends les maths*, *Cap maths* et *Euromaths*). Paradoxalement, les premiers manuels à avoir introduit l'apprentissage du signe « + » (*Litchi*, 12% ; *J'apprends les maths* ; 12%) sont aussi les derniers à enseigner les écritures soustractives (*Litchi*, 31% ; *J'apprends les maths* ; 34%) – (voir figure 2).

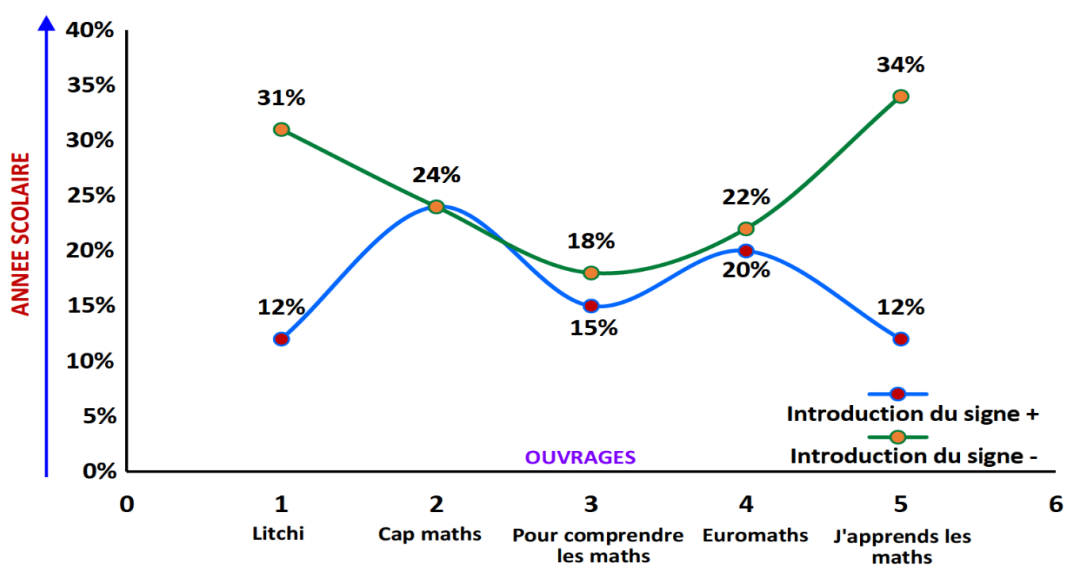


Figure 2- Durée entre la séance introduisant le signe « + » et celle qui introduit le signe « - »

Dans ce même ordre d'idées, la durée entre la séance introduisant les écritures additives et celle qui introduit les écritures soustractives révèle également une certaine variabilité d'un manuel à l'autre. En effet, si *Euromaths* laisse passer deux séances entre l'enseignement de l'addition et celui de la

soustraction, les auteurs de *Pour comprendre les maths* espacent ces deux apprentissages de cinq séances. Ce laps de temps entre les deux moments de découverte des signes arithmétiques « + » et « - », beaucoup plus important pour les deux autres ouvrages, est de l'ordre d'une vingtaine de leçons dans le *Litchi* (28) et d'une trentaine de séances dans *J'apprends les maths* (voir tableau 6).

OUVRAGES		Introduction du signe +			Introduction du signe -			Nbre de séances entre la séance d'introduction du signe + et celle qui introduit le signe -
		N° de séance	Moments	Périodes	N° de séance	Moments	Périodes	
1	Litchi	18	12%	1	46	31%	2	28
2	Cap maths	35	24%	2	35	24%	2	0
3	Pour comprendre les maths	22	15%	1	27	18%	1	5
4	Euro Maths	32	20%	2	34	22%	2	2
5	J'apprends	19	12%	1	55	34%	2	36

Tableau 6 : Place de l'introduction du signe « + » et du signe « - » dans les manuels du CP constituant notre panel

Entre autre choses, *Litchi mathématiques* se démarque en introduisant synchroniquement les deux écritures de l'addition, en ligne et en colonne afin, selon lui, « d'accoutumer les élèves à un dispositif de calcul efficace le plus tôt possible » et leur permettre de « développer des stratégies de calcul mental sur une disposition d'addition en colonne » pour les rendre capable de choisir entre « les stratégies de calcul mental et la stratégie de calcul expert » (Guide pédagogique *Litchi mathématiques*, 2011, p.38).

La progression de l'enseignement des décompositions ou écritures additives

D'autre part, pour permettre aux élèves de prendre conscience que des écritures additives différentes peuvent avoir le même résultat, trois collections proposent des activités en contexte statique (sans matériel) au cours desquelles ils sont amenés à écrire l'égalité qui correspond à une addition (*J'apprends les maths*), trouver une collection à partir d'une écriture additive ou la compléter pour qu'elle corresponde à une collection donnée (*Euromaths*) ou encore recenser toutes les écritures additives ou soustractives correspondant à un même nombre avant de vérifier leur compatibilité avec les résultats donnés par la calculatrice (*Cap maths*). D'ailleurs, parallèlement aux activités portant sur le sens de l'addition et les écritures symboliques, les cinq manuels fournissent aux élèves les outils nécessaires à la mémorisation des tables d'addition, en enrichissant les résultats additifs et soustractifs par un travail sur les décompositions des nombres engagé en amont et/ou en aval de l'introduction des signes opératoires. Une analyse croisée de la progression de l'enseignement des décompositions ou écritures additives proposées dans les cinq manuels est proposée en annexes III grille 1.

b) La suite des nombres jusqu'à 99 et la numération

La maîtrise des techniques de calcul et les connaissances sur les nombres et les opérations se développent dialectiquement (Butlen et Masselot, 2010). L'évolution du champ numérique est donc à considérer si l'on souhaite comprendre certains choix faits par les auteurs de manuel lors de la conception de la programmation en calcul mental. Nous présentons ici une synthèse de cette évolution qui est détaillée en annexes III pour chacun des manuels : *Litchi mathématiques* (grille 7), *Cap maths* (grille 8), *Pour comprendre les maths* (grille 9), *Euromaths* (grille 10) et *J'apprends les maths* (grille 11).

Synthèse

► *Évolution du champ numérique en fonction des phases d'apprentissage de la désignation des nombres*

Au cours préparatoire, « connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100 » est une des compétences essentielles visées par le programme en nombres et calcul.

Les stratégies globales adoptées par les ouvrages de notre panel pour enseigner les différents systèmes de désignation de nombres entiers de 0 à 99 présentent certaines similitudes. En effet, comme l'avait déjà fait remarquer Mounier (2010), les deux numérations (orale et écrite) sont « étudiées conjointement en faisant apparaître les principes décimaux » caractérisant chaque chiffre en fonction de sa position dans le nombre (Mounier et Priolet, 2015, p.31). En outre, l'approche didactique retenue pour enseigner la désignation des nombres jusqu'à 99, est semblable d'un manuel à l'autre et se décline en trois phases (voir tableau 7). La première est une approche globale dont l'objet est la prise de conscience des régularités de la suite numérique orale (phase I). Les mots-nombres sont étudiés et mémorisés soit de façon isolée, soit dans une suite ordonnée. Ensuite, un travail spécifique est mis en œuvre sur les écritures chiffrées étudiées de manière indépendante ou intégrées dans la suite écrite matérialisée par la bande numérique. La seconde phase concerne l'aspect algorithmique de la suite numérique et provoque de nouvelles prises de conscience à propos des régularités de la suite numérique écrite (phase II). La troisième phase, elle, attire l'attention des enfants sur la signification des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture du nombre, c'est-à-dire sur l'algorithme lié aux idées de groupements par dix et d'échange ainsi que sur la valeur positionnelle des chiffres. Plus précisément, il ne s'agit pas seulement pour l'élève de savoir que dans **42**, **4** est appelé chiffre des dizaines et **2** celui des unités mais surtout de comprendre que **4** indique qu'on a compté **4 groupements de dix unités** alors que **2** indique qu'on a compté **2 unités isolées**.

Ainsi, comme on peut le voir dans la grille 12 en annexes III, les cinq manuels débutent l'apprentissage de la désignation des nombres, dès la première période, par la prise de conscience des régularités de la suite numérique orale et poursuivent régulièrement la mémorisation de la comptine

jusqu'en période 5. Cependant, au moment où chaque phase est introduite, le champ numérique abordé diverge d'un ouvrage à l'autre. À titre d'exemple, pour la phase I, il s'étend de un à dix pour *Litchi mathématiques*, aux nombres jusqu'à quarante pour *J'apprends les maths*. Dans le même ordre d'idées, la place de chaque phase dans l'année et le temps de travail accordé à chacune d'elles sont distincts d'un manuel à l'autre. En effet, *Pour comprendre les maths* consacre sept séances, réparties sur trois périodes (3, 4 et 5), à la compréhension de notre système de désignation chiffrée des nombres, décimal et positionnel (phase III) tandis que *J'apprends les maths* affecte quarante-deux séances ventilées sur les périodes 2, 3 et 5 à l'enseignement de cette troisième phase qu'il considère comme décisif pour l'apprentissage du calcul, du système de mesure et par la suite des nombres décimaux.

Ces divergences mettent en exergue un travail spécifique concernant la manière dont chaque ouvrage articule l'enseignement des deux systèmes de numération. À vrai dire, *Litchi mathématiques* et *Pour comprendre les maths* entament l'apprentissage des groupements par dix et la valeur positionnelle des chiffres consécutivement à la phase I et dans le même champ numérique. Dans ces deux manuels, la phase III précède donc la phase II. *Cap maths* et *Euromaths*, eux, préfèrent traiter, à tour de rôle et dans l'ordre, les trois phases tandis que *J'apprends les maths* étudie simultanément les régularités des deux systèmes de numération orale et écrite en utilisant, en premier lieu, comme support une suite régulière « à l'asiatique¹⁴⁸ » (les nombres « comme Tchou » : dix-deux). Puis, procède de la même manière avec la suite traditionnelle¹⁴⁹ (« les nombres comme Nous » : douze) avant d'enseigner les groupements par dix d'abord avec les nombres « comme Tchou » puis avec « les nombres comme nous ». En résumé, *J'apprends les maths* aborde en même temps la phase I et la phase II pour chaque suite avant la phase III, mais la suite « à l'asiatique » est toujours travaillée en amont de la suite traditionnelle. Toutefois, en dépit de ces différences, nous constatons, tous manuels confondus, que dès que l'une de ces phases a été introduite, qu'il s'agisse de l'approche globale orale (I), de l'aspect algorithmique (II) ou du groupement par dix (III), son enseignement est poursuivi tout au long de l'année.

		PHASES D'APPRENTISSAGE DE LA DÉSIGNATION DES NOMBRES								
		Phase I : Approche globale de la suite numérique orale			Phase II : Aspect algorithmique de la suite numérique écrite			Phase III : Groupements par dix et valeur positionnelle		
OUVRAGES		Champ numérique	Périodes	Nbre de séances	Champ numérique	Périodes	Nbre de séances	Champ numérique	Périodes	Nbre de séances
1	Litchi	→ 10	1	8	→29	3	1	→10	2	7
		→ 16	2	1	→ 69	3 – 4	3 + 1	→ 69	3-4	7 +1
		→99	3-4-5	17	→89	4	4	→ 89	4	3
			T = 26	→99	5	8	→99	5	1	
							T = 17			T = 19

Tableau 7 : Évolution du champ numérique en fonction des phases d'apprentissage de la désignation des nombres dans le manuel Litchi (voir tableau complet en annexes III Grille 12)

¹⁴⁸ Suite régulière « à l'asiatique » avec les nombres comme Tchou : « un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six, dix-sept, dix-huit, dix-neuf, deux-dix-un, deux-dix-deux... »

¹⁴⁹ Suite traditionnelle avec les nombres comme Nous : « un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, »

Par ailleurs, la grille 12 en annexes III montre également que deux manuels prolongent l'apprentissage de la désignation des nombres au-delà de 99. En effet, *J'apprends les maths* va au-delà des attentes institutionnelles pour le CP et fait découvrir aux élèves le nombre 100 qu'il décrit à l'aide de la suite régulière « à l'asiatique » comme suit : « Après 99 [...], il y a un nouveau groupe de 10. 100, c'est 10 groupes de dix [...]. Dans **100**, on voit les **10** groupes de *dix* et il y a zéro jeton isolé » (Livre du maître, *J'apprends les maths CP*, 2009, p.175). De son côté, *Pour comprendre les maths* surenchérit et enseigne la suite numérique jusqu'à 119 en instaurant le nombre 100 de la façon suivante : « Il y a 9 dizaines et 9 unités. On ajoute une unité ; on procède à un échange. On obtient 10 dizaines [...] On procède de nouveau à un échange : les 10 dizaines contre une centaine » (*Pour comprendre les maths*, 2008, p.227).

► *Étendue du champ numérique en amont de la séance d'introduction du calcul de sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine*

Concernant, le champ numérique abordé en amont des séances introduisant la procédure de calcul réfléchi de sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine, les partis pris des manuels diffèrent également. En effet, il s'étend de 1 à 29 dans *Litchi* aux nombres jusqu'à soixante-neuf dans *J'apprends les maths*. Cependant, c'est sans surprise que nous constatons que les cinq ouvrages s'accordent sur le fait qu'il vaut mieux que les élèves aient d'abord compris les groupements par dix et la valeur positionnelle des chiffres avant d'introduire cette procédure en raison du rôle important de ces connaissances dans l'apprentissage du calcul mental (voir tableau 8).

OUVRAGES	Étendue du champ numérique en amont	Séance d'introduction du calcul de sommes de type a + b avec passage de la dizaine			Phase d'apprentissage des nombres au moment de l'introduction de la séance
		N° de séance	Moments (%)	Périodes	
1 Litchi	→29	67	45	3	III et II
2 Cap maths	→ 59	89	61	4	III :
3 Pour comprendre les maths	→ 59	76	52	3	III et II
4 Euro Maths	→40	74	47	3	III
5 J'apprends les maths	→ 69	94	58	3	III

Tableau 8 : Étendue du champ numérique et phase d'apprentissage de la désignation des nombres au moment de la séance d'introduction du calcul de sommes de type a + b avec passage de la dizaine

c) L'apprentissage du calcul mental de sommes et la mémorisation du répertoire additif

Au CP, savoir calculer mentalement c'est-à-dire maîtriser un ensemble de procédures qui s'appuient uniquement sur des nombres, des symboles, et sur des propriétés arithmétiques, suppose en premier lieu, la connaissance d'un répertoire structuré de résultats et la compréhension de son intérêt. En

second lieu, cette compétence nécessite le recours à des procédures de calcul réfléchi (mental ou écrit) pour retrouver des résultats inconnus à partir de résultats mémorisés, en utilisant les règles de fonctionnement des systèmes de numération orale et écrite et les propriétés des opérations concernées (la commutativité, par exemple), et, pour finir, l'usage approprié de ces outils pour résoudre des problèmes. La lecture croisée des programmations proposées par les différents manuels et détaillées en annexes III (Grilles 2 à 6) nous permet de distinguer quatre grandes étapes dans l'apprentissage des procédures de calcul mental de sommes et la mémorisation du répertoire additif.

Étape 1 : Améliorer les procédures liées au comptage ou favoriser le « calcul sur les objets »

Comme on l'a vu précédemment, c'est à partir de la résolution de problèmes que les ouvrages de notre panel permettent aux élèves de s'approprier les différents sens des opérations, instaurent les symboles et font évoluer les procédures de calcul. En effet, les cinq manuels introduisent l'addition et la soustraction, simultanément (*Cap maths*), en parallèle (*Pour comprendre les maths* et *Euromaths*) ou successivement (*Litchi* et *J'apprends les maths*), par un problème à résoudre en contexte dynamique lié à une augmentation ou à une diminution portant sur des quantités maîtrisées par les élèves (de 1 à 5). À ce stade, la majorité des enfants mettent en œuvre une procédure de type « recomptage » et procède à une résolution par dénombrement de la « quantité-résultat » en s'appuyant sur une « re-création » de la situation à l'aide d'une représentation matérielle, dessinée, sur les doigts ou même parfois mentale. Quatre ouvrages s'accordent à dire que bien qu'ils ne soient pas encore en mesure d'utiliser le calcul pour trouver une solution, l'enseignant peut néanmoins les aider à abandonner le recomptage pour élaborer d'autres procédures plus avancées telles que le surcomptage¹⁵⁰ et le décomptage¹⁵¹. Ne partageant pas ce point de vue, *J'apprends les maths* conseille de ne pas insister sur ces techniques mais de favoriser, en revanche, la mise en relation directe des quantités et donc le « calcul sur les objets¹⁵² ». Cependant, le surcomptage comme « le calcul sur les objets » d'ailleurs, exigent de l'élève une bonne disponibilité des représentations des nombres (constellations du dé, doigts, frise numérique, jeux de cartes) et de la comptine numérique (savoir

¹⁵⁰ « Le surcomptage est une évolution du recomptage. [...] Dans le cas où on ajoute 3 objets à 4 objets, l'enfant retient le nombre 4 (sans le réaliser avec ses doigts) et compte en avançant de 3 au-delà de quatre : *cinq, six, sept*, éventuellement e s'aidant de 3 doigts levées » (Charnay et Mante, 2014, p.106).

¹⁵¹ « Le décomptage est un voisin du surcomptage. [...] Le décomptage intervient lorsqu'il s'agit de trouver le nombre d'objets restants d'une collection qui contenait 8 objets après qu'on en a enlevé 3 ou quand on recule un pion sur une droite graduée : *sept, six, cinq* fournit la réponse » (Charnay et Mante, 2014, p.106)

¹⁵² « Le calcul sur les objets » est une stratégie de décomposition-recomposition mise en œuvre à l'aide des objets qui en l'occurrence peuvent être les doigts. « Considérons par exemple cet enfant qui, pour résoudre le problème précédent ($9 + 8 = ?$), sort 9 doigts devant lui (directement, sans les compter un à un), qui fixe attentivement son petit doigt baissé et qui annonce le résultat « 17 ». [...] Cet enfant ne compte pas puisqu'il n'égare pas ses doigts 1 à 1 en récitant la suite des nombres, mais il ne fait pas non plus du calcul mental puisqu'il a besoin de sortir ses doigts pour trouver la solution. Nous dirons que cet enfant « calcule sur des objets » (en l'occurrence, il « calcule sur ses doigts »). La stratégie qu'il utilise consiste à décomposer le second nombre, 8, en 1 (correspondant au doigt baissé) et encore 7 » (Extrait du livre du maître *J'apprends les maths avec Tchou CP*, 2009, p.13)

compter de 1 en 1 en croissant à partir de 1, à partir de n , en décroissant à partir de n , donner le successeur ou le prédécesseur d'un nombre). D'après Boule (2012), au fur et à mesure que ces représentations externes (imaginées ou verbales) sont pratiquées et associées les unes aux autres, elles s'intériorisent et deviennent progressivement des représentations mentales des nombres sur lesquelles s'appuie le calcul mental. C'est sans doute pour cette raison qu'en dépit de leur divergence d'opinion, tous les manuels consacrent la première période de l'année à la connaissance de la comptine numérique, au dénombrement ou à la réalisation des quantités d'objets, à la reconnaissance d'écritures chiffrées ainsi qu'à la résolution de problèmes portant sur les quantités.

Ainsi, les premières séances d'apprentissage ont pour objet les différentes représentations spatiales des premiers nombres et le passage de l'une à l'autre. L'ensemble des manuels utilisent des supports matériels et visuels et, en particulier, les collections organisées telles que les doigts et les constellations de dés offrant une représentation de 5 et de 10 reconnaissable immédiatement. À ces supports, *J'apprends les maths* rajoute une boîte, nommée la boîte de *Tchou*, pouvant contenir 5 billes ou 10 billes selon sa taille et dont le couvercle est fermé lorsqu'elle est pleine. En parallèle, ces manuels s'assurent, en début d'année, d'une bonne maîtrise de la comptine numérique orale de 1 à 10 dans *Pour comprendre les maths* jusqu'au nombre 40 dans *J'apprends les maths*.

Étape 2 : Calcul sur les petits nombres (sommes ≤ 5) et mise en place d'un premier répertoire additif

Dès que les moyens du calcul additif sont établis (disponibilité des représentations mentales et introduction du symbolisme arithmétique), les élèves sont entraînés à calculer sur les petits nombres (sommes inférieures à 5). Ils apprennent aussi à ajouter 1 et/ou retrancher 1 selon les manuels, ce qui revient à dire le nombre suivant et le nombre précédent (c'est une étape importante dans l'apprentissage du calcul). En outre, les premières décompositions de nombres sont également réalisées, de 4 à 5 (*J'apprends les maths*) ou jusqu'au nombre 10 (*Euromaths*, *Pour comprendre les maths*, *Litchi* et *Cap maths*) avec 1, 2 et 5 (*Cap maths*).

Plus tard, les résultats recensés contribuent à l'organisation d'un premier répertoire additif. *Litchi* entame ce travail très tôt dans l'année et dès la troisième semaine de classe, les élèves construisent déjà la « maison du 6 et du 7 ». En période 2, ce manuel et deux autres *Cap maths* et *Euromaths* proposent aux élèves de constituer le répertoire avec les sommes dont les deux termes sont compris entre 1 et 5. Cependant si *Euromaths* amène les élèves à s'approprier l'usage de la table de Pythagore, *Cap maths* opte, à l'instar de *Litchi*, pour un tableau organisé en fonction des résultats (les sommes égales à 2 sont dans la colonne 2, pareils pour celles égales à 3 et ainsi de suite jusqu'à celles égales

à 10) et en profite pour introduire le nombre 0. Dans la foulée, *Litchi* amène les élèves à élaborer la table d'addition jusqu'à 12. *Pour comprendre les maths* et *J'apprends les maths* attendent la troisième période pour commencer la construction du répertoire : le premier traite les doubles des nombres ≤ 10 après avoir appris aux élèves à calculer des petites sommes jusqu'à 20 tandis que le second conseille d'étudier d'abord les petits doubles jusqu'à $5 + 5$ et les décompositions avec 10 des nombres de 11 à 16. Pour aller plus loin, il faut que les élèves stockent en mémoire certains résultats. D'après Mazollier, Mounier et Pfaff (2016), « l'apprentissage "par cœur" est nécessaire mais non suffisant. Il s'effectue plus facilement si les résultats proviennent d'une compréhension. Autrement dit, avant de mémoriser des résultats de calcul ceux-ci doivent être trouvés par un calcul réfléchi », précisent les auteurs (p.6).

Étape 3 : S'appuyer sur des résultats connus pour en trouver d'autres : vers le calcul réfléchi

Ce point de vue semble être partagé par les cinq manuels de notre panel puisqu'à l'étape suivante la mémorisation des petits résultats, l'augmentation de la taille des nombres et l'acquisition de points d'appui tels que les doubles, les décompositions des petits nombres, les compléments à 5 et à 10 ainsi que l'utilisation de la commutativité de l'addition permettent aux élèves d'accéder directement aux premières procédures de calcul réfléchi.

- *Litchi* débute leur enseignement, dès la période 1, par la prise de conscience du rôle du nombre 5 dans le calcul réfléchi. Pour ce faire, les élèves apprennent à additionner 3 nombres dont le résultat est inférieur ou égal à 9 en regroupant d'abord 2 nombres pour faire 5 avant d'ajouter le 3^e terme en utilisant le surcomptage ou l'addition. Ensuite, les constellations du dé (dont celle représentant le nombre 5) sont mises à profit pour calculer des sommes de 2 nombres dont la somme est ≤ 9 et dont l'un des termes de l'addition est 5. En période 2, *Litchi* invite les élèves à exposer leur démarche de calcul pour additionner deux nombres dont le total est ≤ 10 ou à 12. En parallèle, un travail sur la commutativité de l'addition est engagé pour faciliter la construction des procédures. Les élèves ont maintenant les outils pour s'entraîner sur le répertoire additif de 2 et de 3 puis sur les tables de 4 et de 5.

- Dans le *Cap maths*, il faut attendre la troisième période pour que l'apprentissage du calcul réfléchi soit entamé. Son objectif premier est de permettre aux élèves de prendre conscience qu'ils peuvent à partir d'un résultat mémorisé en élaborer d'autres rapidement. Pour atteindre cet objectif, les activités proposées visent d'une part, au développement de la capacité des enfants à utiliser un résultat connu pour déterminer un résultat « voisin » (si $3 + 3$ est connu comme égal à 6, cela permet de calculer $4 + 3$ qui « vaut un de plus ») et d'autre part, la prise de conscience que si, par exemple, $5 + 2$ est connu, alors $2 + 5$ l'est aussi. Ainsi, le stock de résultats mémorisés ou retrouvés s'enrichit progressivement.

- *Pour comprendre les maths*, à l'instar de *Litchi*, introduit dès la période 1, une première procédure de calcul réfléchi. Mais la convergence entre les deux ouvrages s'arrête là, car *Pour comprendre les maths* se démarque en proposant d'abord d'enseigner la stratégie *min*. Il s'agit d'une procédure de comptage qui consiste à calculer une somme à partir du plus grand terme de l'addition et d'y ajouter le plus petit, soit grâce à la frise numérique, soit grâce à la collection témoin des doigts. En période 2, la stratégie *min* est reprise et améliorée. Ainsi, pour calculer la somme de deux petits nombres, l'enfant surcompte à partir du terme le plus élevé de la somme puis continue en ajoutant le second terme en comptant d'un en un.

- *Euromaths*, de son côté, conseille d'amener les élèves à recourir d'abord à des procédures personnelles telles que le dénombrement, le recomptage puis le surcomptage pour calculer des petites sommes dont le résultat est inférieur ou égal à 10. Dès qu'ils ont mémorisés les résultats des sommes dont les deux nombres sont compris entre 1 et 5 (première étape du travail de mémorisation), le manuel propose de préparer le passage des procédures de comptage aux procédures de calcul en rendant les enfants capables d'évaluer, au préalable, les écarts entre un nombre et les deux dizaines qui l'entourent à partir d'une représentation schématique évoquant la piste des nombres sans en dessiner toutes les cases.

- Dans *J'apprends les maths*, avant tout apprentissage des stratégies de calcul, les élèves s'exercent d'abord à la visualisation mentale par reconstitution de la vision d'autrui dans des situations d'anticipation. Il s'agit d'un procédé pédagogique qui les invite à simuler mentalement un ajout que le maître réalise de manière masquée. Ces situations d'anticipation vont être utilisées tout au long de l'année pour favoriser l'acquisition des procédures de calcul réfléchi. La première procédure enseignée, dès la période 1, concerne le calcul mental des sommes de deux ou trois nombres dont le résultat est inférieur ou égal à 5. Ces dernières servent également de prétexte pour introduire le cas de l'ajout de 0 et traiter le zéro comme un nombre à part entière.

En période 2, la mémorisation des résultats obtenus lors du calcul de sommes ≤ 5 et la prise de conscience qu'un même nombre peut être le résultat de plusieurs additions à travers l'étude des décompositions des nombres de 1 à 5 permet d'étendre l'enseignement du calcul réfléchi aux sommes dont le premier terme est supérieur ou égal à 5 et le second inférieur à 5 (cas du type $6 + 3$). Le manuel attire l'attention des élèves sur l'efficacité et la rapidité du calcul par rapport au comptage, grâce à la matérialisation des repères 5 et 10 avec la boîte de Tchou. La stratégie de calcul enseignée est « le retour au 5 » : $6 + 3 = (5 + 1) + 3$ donc $5 + 4 = 9$. À la séance suivante, les situations d'anticipation facilitent la mentalisation de la stratégie découverte. Parallèlement, des activités de recherche du

complément à 10 de n lorsque $1 \leq n \leq 10$ sont proposées aux élèves pour favoriser la construction d'images mentales à l'aide de la boîte de Tchou.

L'apprentissage des procédures de calcul réfléchi se poursuit avec l'enseignement d'une nouvelle stratégie pour calculer des sommes quand les deux nombres sont inférieurs à 5 : le « passage du 5 ». D'après *J'apprends les maths*, la mise en œuvre de cette procédure est plus complexe que « le retour au 5 » car elle nécessite de plus nombreuses décompositions (recherche du complément à 5 et décomposition du nombre ajouté à l'aide de ce complément à 5). Pour calculer $4 + 3$ par exemple, le manuel propose de s'y prendre en deux fois : d'abord on complète à 5 en ajoutant 1, puis on ajoute les 2 qui restent. Comme précédemment, la stratégie du « retour au 5 » est ensuite « mentalisée » à l'aide de la boîte de Tchou. Plus tard, la commutativité est enseignée comme une propriété des additions facilitant le calcul et les « petits doubles » jusqu'à $5 + 5$ sont mémorisés.

Étape 4 : Franchissement de la dizaine et calculs sur les dizaines entières

Les nouveaux résultats mémorisés à l'étape précédente permettent aux manuels d'aborder le calcul réfléchi de sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine et la résolution d'additions de dizaines entre elles.

- *Litchi* introduit à la troisième période une nouvelle méthode, l'utilisation du complément à 10 pour faciliter les calculs. Par exemple, pour calculer $8 + 4$, on peut faire $8 + (2 + 2)$ ou encore $8 + 2 = 10$, puis $10 + 2 = 12$. Une nouvelle phase de mémorisation du répertoire est alors amorcée avec la table d'addition de 6, à l'aide de la commutativité, juste avant d'étendre le répertoire additif jusqu'à 20. En outre, un autre point d'appui à la mémorisation, les compléments à 20, est travaillé et la table d'addition de 7 est mémorisée. La période 4 commence par la mémorisation de la table d'addition de 9 et des doubles des nombres jusqu'à 10 suivie de la recherche de la moitié des nombres pairs. Dès lors, les élèves sont outillés pour proposer et discuter des stratégies qu'ils mettent en œuvre pour calculer une somme de 3 nombres en groupant 2 nombres pour former une dizaine entière. Par la suite, l'augmentation de la taille des nombres jusqu'à 79 et des activités spécifiques sur les groupements par dix et la valeur positionnelle des chiffres préparent l'introduction de l'addition et de la soustraction sur les dizaines entières. *Litchi* propose ensuite aux élèves de chercher des compléments à la dizaine supérieure avant d'étendre les procédures à l'addition en ligne d'un nombre entier de dizaines à un nombre à deux chiffres. Dans le même temps, les élèves s'entraînent à la mémorisation des tables de 2 à 9 en s'appuyant sur la commutativité.

- *Cap maths*, de son côté, envisage, en période 4, le calcul réfléchi de sommes portant sur des nombres inférieurs à 10 (du type $8 + 7$) pour aboutir à la construction du répertoire additif complet (résultats

jusqu'à 18), à partir de la maîtrise du premier répertoire élaboré et du travail réalisé autour des nombres 5 et 10 (notamment la décomposition des nombres sous forme de sommes faisant intervenir 5, la mémorisation des compléments à 10 et le repérage du fait qu'une somme comme $10 + 6$ est facile à calculer). Plus précisément, le manuel met l'accent sur les procédures de calcul réfléchi les plus courantes pour le calcul de sommes : l'usage des doubles ($8 + 7 = 7 + 7 + 1 = 14 + 1$), le passage à dix ($8 + 7 = 8 + 2 + 5 = 10 + 5$) et le retour aux cinq ($8 + 7 = 5 + 3 + 5 + 2 = 10 + 5$). Peu après, le développement de la capacité à calculer sur les dizaines entières permet l'extension du calcul réfléchi aux sommes de nombres de 2 chiffres.

- *Pour comprendre les maths* opte, lui aussi, pour l'usage des doubles dans le calcul réfléchi de sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine. Cependant, contrairement, à *Cap maths*, il programme l'enseignement de cette procédure aux élèves, dès la période 3, à l'exemple du manuel *Litchi*. C'est également à ce moment de l'année que les élèves apprennent à ajouter des dizaines entières entre elles. En période 4, les élèves apprennent à les ajouter à un nombre de deux chiffres. Comme dans les manuels précédents, le développement de cette capacité sert de point d'appui pour l'enseignement du calcul de sommes de nombres de deux chiffres.

- *Euromaths* recommande de procéder en deux temps en ce qui concerne le calcul d'une somme de type $a + b$ lorsqu'avancer de b fait passer une dizaine (ce qu'on rencontre quand on calcule $8 + 5$, par exemple). « Le premier temps consiste à calculer l'écart entre le nombre a et la dizaine supérieure, puis à décomposer b en deux termes, le premier terme étant l'écart trouvé. Le deuxième consiste à additionner le deuxième terme » (Livre du professeur, *Euromaths CP*, 2011, p.29). En fait, la progression mise en œuvre dans *Euromaths* laisse apparaître quatre grandes phases : 1°) Calcul de $a + b$ et de $a - b$ avec a quelconque et b compris entre 1 et 5 ; 2°) Calcul de $a + b$ et de $a - b$ avec a quelconque et b compris entre 1 et 10 ; 3°) Calcul de $a + b$ et de $a - b$ avec a quelconque et b compris entre 10 et 20 ; 4°) Généralisation de la technique de l'addition par sauts et de la technique de la soustraction par sauts. Plus concrètement, dès que les élèves ont appris, en période 3, à ajouter un nombre entre 1 et 5 avec passage de la dizaine (par exemple $8 + 5$) en réalisant des sauts sur la suite des nombres (phase 1), ils sont confrontés à la seconde étape du travail de mémorisation de la table d'addition. Il s'agit, cette fois-ci, pour eux, de retenir les tables d'addition entre un nombre compris entre 1 et 10 et un nombre compris entre 1 et 5. L'acquisition de ces nouveaux résultats permet ensuite aux élèves de passer, en période 4, du surcomptage à la décomposition du nombre à ajouter en s'appuyant, s'il le faut, sur 10 ou sur la dizaine supérieure (phase 2). D'après le manuel, cette procédure s'avère particulièrement efficace pour calculer $a + b$ lorsque b est un nombre compris entre 1 et 10. Par exemple, $6 + 8 = (6 + 4) + 4 = 10 + 4 = 14$. Le travail entamé sur le répertoire additif est

finalisé par la mémorisation des tables d'addition pour les nombres compris entre 1 et 10 et des décompositions additives des nombres inférieurs à 20. Au cours des séances d'apprentissage qui suivent, les élèves étudient ce qui se passe quand on ajoute ou on soustrait des dizaines entières. Forts de ces acquis, ils s'exercent ensuite à ajouter un nombre quelconque à un autre compris entre 10 et 20 (phase 3) en procédant en deux temps : d'abord décomposer le nombre à ajouter en dizaines et unités (exemple : $25 + 17 = 25 + 10 + 7$), puis ajouter à tour de rôle chacun des termes de cette décomposition ($35 + 7 = 42$). Cette technique de calcul par sauts est ensuite étendue au calcul de sommes de deux nombres (exemple : $37 + 28 = 37 + 20 + 8 = 57 + 8 = 65$).

- *J'apprends les maths* entame la résolution d'additions avec franchissement de la dizaine en troisième période. À l'instar de son prédécesseur, la progression adoptée par ce manuel présente aussi quatre grandes phases : 1°) Calcul des sommes de deux nombres quand l'un est 5 et l'autre compris entre 6 et 9 (cas du type $7 + 5$) ; 2°) Calcul des « grands doubles » de $6 + 6$ à $9 + 9$; 3°) Calcul des additions de la forme $9 + n$; 4°) Calcul des additions de la forme $8 + n$. Pour apprendre aux élèves à calculer la somme de deux nombres quand l'un est 5 et l'autre compris entre 6 et 9 (cas du type $7 + 5$), *J'apprends les maths* privilégie l'enseignement du « retour au 5 » à l'aide de collections organisées. Il s'agit d'une *stratégie de décomposition-recomposition* qui amène à calculer $7 + 5$ sous la forme : $5 + 7 = 5 + 5 + 2$ donc $5 + 7 = 10 + 2$.

Entre cette première phase d'apprentissage des procédures de calcul réfléchi et la deuxième, *J'apprends les maths* intercale l'enseignement du calcul mental des sommes de deux nombres à deux chiffres. Au début de la période 4, les élèves trouvent le résultat des additions en dessinant des représentations analogiques et organisées en groupes de 10 des nombres. La progression sur le calcul réfléchi des sommes avec passage de la dizaine est reprise avec l'extension de la stratégie du « retour au 5 » aux « grands doubles ». Pour $7 + 7$ par exemple, si l'on effectue un retour aux 5, cela revient à calculer $5 + 2 + 5 + 2$, c'est-à-dire $10 + 4$. Peu après, un nouveau jeu « n , c'est 1 et encore... » est introduit pour préparer les élèves à l'apprentissage de la stratégie de calcul dite du « passage de la dizaine » dans les cas de la forme $9 + n$. Concrètement, on complète neuf à la dizaine en « empruntant » le complément à l'autre nombre. On se ramène alors à un calcul de la forme $10 + n$, qui est plus facile à réaliser. De manière consécutive, la commutativité de l'addition est à nouveau enseignée pour permettre aux élèves de réaliser que plus l'écart entre les nombres est grand, plus il est économique de l'utiliser. Par la suite, le manuel favorise l'appropriation de la procédure apprise en recourant à une tâche de simulation mentale d'un passage de la dizaine que l'enseignant effectue de manière masquée. Plus tard, une nouvelle variante du jeu « n , c'est 2 et encore... » permet d'appliquer la stratégie du « passage de la dizaine » aux cas où l'un des 2 nombres est 8 (cas du type $8 + n$).

Au début de la période 5, deux nouvelles étapes dans la progression en calcul sont franchies. La première consiste à faire apprendre à additionner un nombre à 2 chiffres avec un nombre à 1 chiffre sans dessiner les collections correspondantes. La seconde concerne l'addition de deux nombres à 2 chiffres. Cette notion avait déjà été introduite au début de la période précédente. À ce moment-là, les élèves utilisaient des représentations analogiques des nombres pour trouver le résultat. Désormais, il leur est demandé d'imaginer ce qu'ils dessinaient auparavant afin de calculer directement le résultat à partir des écritures chiffrées. Les dessins, eux, servent uniquement à la vérification. In fine, le travail sur la mémorisation s'achève par la construction d'un répertoire additif dont la forme est différente du tableau de Pythagore. Sa lecture ligne par ligne permet d'accéder aux décompositions d'un même nombre tandis que sa lecture en colonnes en cachant avec la main la colonne des résultats, permet aux élèves de s'entraîner à mémoriser les tables de 9, 8, 7 et 6.

5.4. Les scénarios proposés dans les manuels du CP pour enseigner les additions mentales de nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine

5.4.1. Le scénario de *Litchi*

a) *L'itinéraire cognitif et les contenus mathématiques*

► L'itinéraire cognitif de *Litchi Mathématiques*

Pour enseigner le calcul mental de sommes de nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine, *Litchi Mathématiques* propose, d'abord, de développer des points d'appui, notamment les décompositions des nombres et la connaissance de la suite numérique.

SÉANCE 1 Apprentissage P2 – SÉANCE 41	CALCUL MENTAL 5 min Temps 1 : Réciter la suite numérique : Ordre croissant (le plus loin possible) puis décroissant (à partir de 12)	APPRENTISSAGE 40 min Décomposition des nombres 11 et 12 Temps 2 : Découvrir les décompositions additives de 2 termes avec des objets concrets Temps 3 : Trouver les compléments à 11 et à 12 par la manipulation d'objets concrets Temps 4 : S'entraîner sur les décompositions à partir de représentations symboliques concrètes (cartes à points)	ENTRAÎNEMENT 15 min Décompositions additives de 12, en ligne et en colonne (ex.1), avec manipulation de carrés unités (ex.2), à l'aide des réglettes et de la règle à calculer (ex.3) Ex.4 : compléter des décompositions 11 et 12 Suite numérique : anticiper par le calcul le résultat d'un déplacement
	Pistes de remédiations : Difficultés à concevoir qu'une quantité puisse résulter de la réunion de 2 autres quantités et à percevoir que la réunion de 2 quantités < 10 donne une quantité finale > 10		

Tableau 9 : Séance 1 extraite du projet d'enseignement de *Litchi* détaillé en annexes III grille 15

En effet, dans son projet d'enseignement, il prévoit d'entamer la phase de travail préparatoire de la première séance par la récitation de la comptine numérique dans l'ordre croissant et décroissant puis d'enchaîner avec la découverte des décompositions des nombres 11 et 12 et la recherche de leurs compléments qu'il renforce par une phase d'entraînement avec des applications directes complétée par des pistes de remédiation. Dès la séance 2, le manuel programme le réinvestissement de ces premières connaissances dans la construction de la table d'addition jusqu'à 12. Une fois élaborée,

cette dernière est mise à profit pour travailler sur la commutativité et approfondir la suite numérique tout en confrontant les élèves au calcul par anticipation d'un déplacement sur la piste numérique. Les résultats des additions trouvés et reconstruits précédemment sont mémorisés au cours des activités ritualisées puis investis dans la résolution des problèmes d'addition et de complément, durant la troisième et la quatrième séance du scénario, avant d'être évalués lors d'un premier bilan (séance 5).

Au cours des séances 6, 7, et 8, la méthode *Litchi Mathématiques* recommande d'étendre le travail initié sur les décompositions des nombres de 13 à 16 dans un premier temps, puis de 17 à 19 dans un deuxième temps en suivant le même mode opératoire : découverte des différentes écritures additives à deux termes des nombres sans omettre les décompositions canoniques, recherche de leurs compléments et réinvestissement dans la résolution de problèmes. L'étude de ces décompositions additives s'achève elle aussi par un exercice d'évaluation (séance 9).

Les quatre séances suivantes (10, 11, 12 et 13) préconisées par le manuel visent un triple objectif : poursuivre le développement des points d'appui, notamment les décompositions additives de 10 et les compléments à 10 (séances 11), mémoriser le répertoire additif de 2 à 5 (séances 10 et 12) et introduire une procédure de calcul réfléchi pour calculer les sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine en appui sur les compléments à 10 (séances 13). À titre d'exemple, pour calculer $8 + 4$, *Litchi Mathématiques* recommande de « faire découvrir plusieurs stratégies de calcul : $8 + (2 + 2)$ ou encore $8 + 2 = 10$, puis $10 + 2 = 12$ » (Guide pédagogique, p.139). Les résultats stockés en mémoire sont d'abord organisés dans la table d'addition qui est elle-même complétée jusqu'à 20 (séance 14). Ensuite, la table de 6 est étudiée pendant que les élèves apprennent à utiliser le répertoire additif pour calculer rapidement des additions et s'entraîner à l'usage de la commutativité (séance 15). Puis, la mémorisation des tables d'addition de 4 et de 5 est contrôlée au cours de l'évaluation formative de mi-période 3 (séance 16). Plus tard, les tables d'addition de 7 et de 8 sont abordées juste avant celles de 6 et de 7 (séances 17 à 19).

À la séance 20, ce travail sur le répertoire additif finalisé par un entraînement sur la table de 9 précède l'introduction des doubles des nombres jusqu'à 10 et les moitiés des nombres pairs (séance 21). Les activités ritualisées des séances 22 et 23 viennent ensuite renforcer ces deux notions. Pour faciliter la mise en œuvre de la stratégie de décomposition-recomposition utilisant le complément à 10 pour calculer des sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine, le manuel propose, à la séance 24, de faire apprendre aux élèves à « calculer une somme de 3 nombres en groupant 2 nombres pour former une dizaine entière ». Les quatre séances suivantes (25, 27, 28 et 29), programmées par la méthode *Litchi*, exercent les élèves à l'utilisation de la commutativité à partir des tables d'addition de 2 à 9. Cet entraînement intensif est entrecoupé du bilan de mi-période 4 évaluant

la connaissance des doubles et des moitiés et de celui de fin de période 4 contrôlant la mémorisation des tables d'additions jusqu'à 7 (voir annexes III grille 15). Cependant, le projet d'enseignement de *Litchi Mathématiques* sur les sommes de nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine ne s'achève pas avec cette évaluation. En effet, cinq séances parmi celles proposées au cours de la cinquième période de l'année scolaire assurent la consolidation de cette compétence essentiellement durant les phases de calcul mental en réactivant régulièrement les points d'appui (doubles, moitiés, compléments à 10, capacité à additionner 3 nombres en ligne en groupant deux d'entre eux pour obtenir une dizaine entière) et la connaissance du répertoire additif. Pour finir, une dernière évaluation des acquis des élèves est réalisée lors du bilan exhaustif de la période 5 par l'intermédiaire d'un exercice portant sur la connaissance du répertoire additif. Le tableau synoptique du projet d'enseignement du Litchi est présenté dans son intégralité en annexes III grille 15.

- En corollaire, l'itinéraire cognitif programmé par *Litchi Mathématiques* peut être résumé en 20 étapes (voir annexes III Grille 15).

► Les contenus mathématiques du scénario

Au regard de l'itinéraire cognitif prescrit par *Litchi Mathématiques*, le champ mathématique déterminé par ce manuel pour enseigner le calcul mental de deux nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine peut se résumer ainsi : développement des connaissances sur les décompositions additives et les compléments des nombres de 11 à 19, maîtrise de la suite numérique, construction et utilisation de la table d'addition jusqu'à 12 puis jusqu'à 20, réinvestissement des résultats mémorisés dans la résolution des problèmes d'addition et de complément, utilisation du complément à 10 pour faciliter des additions mentales avec passage de la dizaine, utilisation de la commutativité de l'addition, connaître les doubles jusqu'à 10 et les moitiés des nombres ≤ 20 , calculer des sommes de 3 termes en groupant deux d'entre eux pour former une dizaine entière. Le descriptif détaillé des contenus mathématiques figure en annexes III grille 16.

b) *Démarche d'enseignement du calcul réfléchi*

La démarche d'enseignement choisie par les auteurs de *Litchi Mathématiques* consiste à aider les élèves à mémoriser le répertoire additif jusqu'à la table d'addition de 5 avant de les rendre capable de reconstruire les résultats non stockés en mémoire. Pour ce faire, le manuel prescrit, en premier lieu, la découverte des différentes décompositions et compléments des nombres de 11 à 19 tout en poursuivant en parallèle le travail sur la connaissance de la suite numérique. Les différents résultats collectés jusqu'à 12 sont organisés dans un répertoire que les élèves apprennent à utiliser pour calculer des sommes, anticiper le résultat de déplacement sur la droite numérique et résoudre des problèmes d'addition et de complément. Dès que les élèves ont mémorisé le répertoire additif jusqu'à 5, la

méthode *Litchi Mathématiques* propose de « faire découvrir plusieurs stratégies de calcul » pour calculer les sommes de 2 nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine : par exemple, on peut calculer $8 + 4$, en faisant $8 + (2 + 2)$ ou encore $8 + 2 = 10$, puis $10 + 2 = 12$ ». La nouvelle procédure est expliquée par le professeur puis mise en application par les élèves. Les nouveaux résultats collectés sont organisés dans la table d'addition qui est étendue jusqu'à 20 et le stockage en mémoire est prolongé jusqu'au répertoire de 9. Plus tard, le manuel parachève l'apprentissage du répertoire additif en introduisant les doubles des nombres jusqu'à 10 et moitiés des nombres pairs ≤ 20 . Pour faciliter la mise en œuvre de la procédure de calcul réfléchi en appui sur les compléments à 10, une séance est programmée pour faire apprendre aux élèves à calculer une somme de 3 nombres en groupant 2 nombres pour former une dizaine entière. In fine, quelques activités ritualisées viennent consolider les points d'appui étudiés (doubles, moitiés, décompositions des nombres, commutativité de l'addition) et la mémorisation du répertoire additif. Subséquemment et en nous référant à la typologie de Rey (2001), nous concluons que le dispositif pédagogique prescrit par les auteurs de *Litchi Mathématiques* est de type « explication – application ».

c) *Stratégies globales d'enseignement*

- 1) Mettre en œuvre un dispositif pédagogique de type « explication – application » ;
- 2) Faire découvrir les différentes décompositions et compléments des nombres de 11 à 19 et approfondir en parallèle la connaissance de la suite numérique ;
- 3) Réinvestir les nouvelles connaissances acquises dans la résolution de problèmes.
- 4) Introduire une nouvelle procédure utilisant les compléments à 10 pour calculer des sommes du type $\square + \square$ avec franchissement de la dizaine ;
- 5) Institutionnaliser en aval la procédure de calcul réfléchi que les élèves doivent mettre en œuvre ;
- 6) Poursuivre la mémorisation du répertoire additif jusqu'à 9 dès que les élèves sont capables de reconstruire les résultats non mémorisés ;
- 7) Procéder à des bilans réguliers et remédier aux difficultés rencontrées si besoin ;
- 8) Proposer des pistes de remédiation à l'issue de chaque séance ;
- 9) Exercer et réactiver régulièrement les connaissances pour les stabiliser et les mémoriser.

d) *Structure, format et type de séances du scénario*

► Structure et durée des séances

Par le terme « séance », nous désignons l'apprentissage des mathématiques au quotidien prescrit par le manuel. *Litchi Mathématiques* programme trente-sept séances (bilans compris) pour l'enseignement du calcul mental de sommes de 2 nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine. Mis à part, les évaluations, ces séances présentent toutes la même structure organisée en deux grands

moments d'enseignement : un temps de travail préparatoire scindé en deux phases, l'une pour le calcul mental, l'autre pour les apprentissages et un temps d'application et d'entraînement sur le fichier – (voir schéma 24).

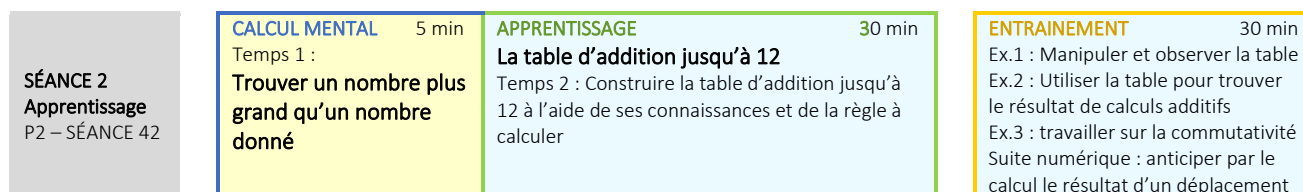


Schéma 24 : Structure de la séance 1 du scénario de Litchi Mathématiques

Globalement, dans cet ouvrage, 1h10 de mathématiques est dispensée en moyenne chaque jour aux élèves tous domaines confondus (voir grille 17 en annexes III). Ce choix est en accord avec les prescriptions officielles qui fixent, en moyenne et hors calcul mental, une heure d'enseignement (pour 4 séances par semaine) – (Mounier et Grapin, 2018). En ce qui concerne notre objet d'étude, son enseignement s'étale de la période 2 à la période 5. Plus précisément, le scénario proposé par *Litchi Mathématiques* prévoit 13h15 min (évaluations et remédiations non comprises) pour faire apprendre aux élèves le calcul réfléchi de sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine, soit 3h00 de calcul mental (23%), 6h50 min d'apprentissage (51%) et 3h25 d'entraînement sur le fichier (26%). En outre, comme on peut le voir dans le tableau supra, le scénario comprend beaucoup plus de séances courtes (26 sur 37) que de séances longues (11 sur 37).

► Type des séances

Les séances d'entraînement au cours desquelles les élèves s'exercent pour s'approprier les points d'appui, la procédure de calcul réfléchi et le répertoire additif sont les plus fréquentes (16 sur 39) mais aussi les plus courtes avec une durée n'excédant pas les 10 minutes. Viennent ensuite les séances d'apprentissage qui correspondent à 30% des séances programmées par le manuel pour notre objet d'étude et peuvent durer jusqu'à 70 minutes. Les moments d'évaluations formative et sommative, quant à eux, sont assez récurrents et jalonnent l'intégralité du scénario. On en compte huit au total. Enfin, les séances de consolidation, plus rares, ferment la marche (2 séances sur 37) avec une durée qui peut s'étendre au-delà de 60 minutes - (voir tableau 10).

	Effectifs	Pourcentage	Durée
Séances de consolidation	2	5%	5 à 65 min
Séances d'apprentissage	11	30%	55 à 70 min
Séances d'entraînement	16	43%	5 à 10 min
Séances d'évaluation	8	22%	-
TOTAL	37	100%	-

Tableau 10 : Type des séances du scénario de *Litchi Mathématiques*

► Format des séances

Dans les séances prescrites par *Litchi Mathématiques*, on retrouve en général deux grands moments. Le premier est réservé aux activités rituelles telles que le calcul mental (R). Le second concerne les nouveaux apprentissages abordés au cours de la séance (N). Ainsi, en reprenant à notre compte, la méthodologie et la nomenclature utilisées par Grapin et Mounier (2015) dans leur outil d'analyse des manuels, nous avons réparti dans le tableau suivant les différentes séances du scénario de *Litchi Mathématiques* selon leur format.

	R, N	R	Bilan	Total
Effectif	11	18	8	37
%	30%	48%	22%	100%
Légende : R tâches ritualisées (calcul mental) ; N : introduction d'un savoir nouveau				

Tableau 11 : Répartition des séances selon leur format

Excepté les bilans, l'ouvrage prescrit du calcul mental pour chacune des séances de son scénario. À vrai dire, 48 % d'entre elles qui sont pour l'essentiel des séances d'entraînement se limitent uniquement à cette activité ritualisée. Dans les autres séances composant ce projet d'enseignement (11 séances sur 37), ce rituel est associé à des activités d'investigation introduisant les nouveaux apprentissages et à des activités d'entraînement proposant, en plus des applications directes, des pistes de remédiation.

e) Les activités proposées au cours du scénario

Au regard des éléments apportés par le tableau infra, *Litchi Mathématiques* propose soixante-douze activités pour faire apprendre à calculer mentalement les sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine. Quinze d'entre elles contribuent à la découverte des différentes décompositions des nombres de 11 à 19, à l'introduction d'une nouvelle procédure de calcul réfléchi et à la mémorisation du répertoire additif. Mais, c'est en calcul mental (30 activités) et durant les moments d'entraînement (19 activités) qu'elles sont les plus nombreuses tandis que celles ayant pour but d'évaluer les progrès et les acquis des élèves représentent 11% des activités recommandées par le manuel (soit 8 activités sur 72). En calcul mental, seulement 6 % des activités visent l'appropriation de nouvelles stratégies de calcul mental. Les tâches proposées durant cette activité ritualisée se focalisent plutôt sur l'approfondissement de la connaissance de la suite numérique (24%), le renforcement des points d'appui tels que les décompositions additives de nombres de 11 à 19 et leurs compléments, les écritures additives de 10, les compléments à 10 (13%) et la maîtrise du répertoire additif (57%). D'autre part, 48% des activités préconisées durant les temps d'apprentissage concernent la découverte des décompositions des nombres de 11 à 19 et leurs compléments. Les

autres activités sont, elles, consacrées à leur réinvestissement dans la résolution de problèmes d'addition et d'addition à trou (14%), au calcul de sommes de 3 nombres en groupant 2 termes pour former une dizaine entière (7%) et à l'élaboration et au stockage en mémoire des tables d'addition (31%). Par ailleurs, 62% des exercices auxquels sont confrontés les élèves durant les phases d'entraînement assurent la consolidation des points d'appui (compléments à 10, décompositions additives des nombres de 11 à 19 et leurs compléments, connaissance de la suite numérique) tandis que les 38% restant participent à la mémorisation du répertoire additif. L'ensemble des résultats présentés dans ce paragraphe est détaillé en annexes III Grille 18.

	CALCUL MENTAL		APPRENTISSAGE		ENTRAÎNEMENT		BILAN		TOTAL	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
ACTIVITÉS										
TOTAL	30	42%	15	21%	19	26%	8	11%	72	100%

Tableau 12 : Répartition des activités proposées dans le scénario *Litchi*
(Voir tableau détaillé en annexes III grille 18)

En corollaire, 45% des activités prévues dans le projet d'enseignement concernent la mémorisation du répertoire additif contre seulement 5% pour l'apprentissage de la procédure de calcul réfléchi en appui sur les doubles. L'autre moitié des activités programmées ont pour objet le renforcement des points d'appui notamment les décompositions et les compléments des nombres de 10 à 19 (39%) et la connaissance de la suite numérique (11%). Subséquemment, nous pouvons dire non seulement que les activités proposées dans ce scénario sont réellement des activités de calcul mental, mais également qu'elles peuvent être susceptibles de permettre aux enseignants d'atteindre les objectifs visés.

In fine, le nombre d'activités proposées par ce manuel varie selon le type de séance mises en œuvre (voir tableau 13). En effet, le nombre moyen d'activités prescrites pour les séances d'apprentissage est de 4 tandis que celui des séances de consolidation est de 2. En ce qui concerne, les séances relatives à l'entraînement et à l'évaluation, la méthode *Litchi Mathématiques* recommande une activité en moyenne. Pour plus de détails, voir grille 19 en annexes III.

	Effectifs	Pourcentage	Nombre total d'activités	Nombre moyen d'activités / séance
Séances de consolidation	2	5%	4	2,00
Séances d'apprentissage	11	30%	43	3,90
Séances d'entraînement	16	43%	16	1,00
Séances d'évaluation	8	22%	9	1,12
TOTAL	37	100%	72	1,94

Tableau 13 : Nombre d'activités en fonction du type de séance

f) La gestion des moments d'institutionnalisation

Litchi Mathématiques ne prescrit pas de phase de synthèse et d'institutionnalisation stricto sensu. En effet, ce moment est réduit à une reformulation par les élèves de ce qui a été appris. À vrai dire, le manuel ne propose ni d'institutionnaliser les conditions dans lesquelles les procédures s'avèrent plus ou moins « économiques », ni de travailler sur l'écriture des règles en incluant leur domaine de validité. En réalité, la nouvelle procédure de calcul réfléchi à enseigner est explicitée en aval puis mise en application par les élèves sans qu'il y ait pour autant de conservation de traces écrites. Seules les fiches récapitulant les doubles des nombres jusqu'à 10 et les moitiés des nombres ≤ 20 sont sauvegardées. Les différents moments d'institutionnalisation préconisés par *Litchi* sont détaillés en en annexe III grille 20.

5.4.2. Le scénario du *Cap maths*

a) L'itinéraire cognitif d'enseignement et les contenus mathématiques

► L'itinéraire cognitif d'enseignement du *Cap maths*

D'après les auteurs du *Cap maths*, pour calculer des sommes du type $8 + 7$, les élèves doivent d'abord disposer de plusieurs points d'appui et en particulier les doubles, la commutativité de l'addition et les repères 5 et 10. Par conséquent, ils proposent, en premier lieu, une séance de consolidation pour renforcer la capacité des élèves à « reconnaître si une quantité ou un nombre sont ou non des doubles » et à « utiliser le vocabulaire "double" et "moitié" ».

SÉANCE 1 Consolidation P4 - U10 S1	CALCUL MENTAL ≈ 15 min Problème dicté Résoudre un problème additif (sommes de 3 nombres = 10)	REVISION ≈ 15 min Problèmes écrits Résoudre deux problèmes du domaine additif	APPRENTISSAGE ≈ 45 min Doubles et moitiés (jusqu'à 20) Reconnaître si une quantité ou un nombre sont ou non des doubles

Tableau 14 : Séance 1 extraite du projet d'enseignement de *Cap maths* détaillé en annexes III grille 21

Ainsi, à l'aide d'un problème déjà connu des élèves, ces derniers sont amenés à répartir équitablement un nombre donné de cubes (notamment compris entre 10 et 20) dans deux boîtes. L'intérêt de cette première séance étant que les élèves sachent d'une part, quels nombres peuvent être « partagés » exactement en deux et d'autre part, le résultat de l'addition d'un nombre avec lui-même. Au cours des trente premières minutes de la séance consacrées au calcul mental et à la révision, les élèves sont confrontés à la résolution d'un problème additif et de deux problèmes de complément.

Dès que les acquis sur les doubles (jusqu'à 20) sont consolidés, le manuel entame la deuxième séance par une phase de calcul mental pour évaluer leur maîtrise suivie d'un temps de révision sans lien direct avec la notion étudiée. La phase d'apprentissage consacrée au calcul de sommes « voisines de doubles » en utilisant diverses procédures (notamment l'appui sur des doubles connus) comprend

quatre étapes. Au cours de la première, les élèves doivent d'abord calculer mentalement « $5 + 5$ », puis « $6 + 6$ ». Ensuite, les résultats sont notés au tableau sous la forme d'égalités numériques ($5 + 5 = 10$ et $6 + 6 = 12$), les procédures utilisées sont explicitées et les « doubles constellations » sont affichées » sous les égalités. Enfin, les élèves sont soumis à la résolution de plusieurs calculs à traiter mentalement du type : $5 + 6$; $5 + 7$; $4 + 5$; $6 + 7$; $6 + 8$; $7 + 6$... Les différentes façons de trouver le résultat sont discutées (réponse directe quand le résultat est connu par cœur, surcomptage, recours à une matérialisation du calcul) afin de mettre en évidence la procédure souhaitée qui est explicitée à l'aide des doubles constellations (« $5 + 6$, c'est 1 de plus que $5 + 5$ ») et illustrée par un arbre de calcul. Cependant, les autres procédures ne sont pas pour autant rejetées. Une démarche pédagogique similaire est mise en œuvre pour les étapes 2 (sommes voisines du double $7 + 7$) et 3 (sommes voisines du double $8 + 8$). La dernière étape de cette séance est la réalisation d'un exercice d'entraînement sur le fichier sans indication de procédures pour compléter les égalités mais on leur rappelle qu'ils peuvent utiliser les doubles. Un répertoire est fourni aux élèves qui en ont besoin.

En début de séance 3, une série de calculs dictés portant sur les compléments et différences jusqu'à 10 est proposée aux élèves pour s'assurer de la maîtrise du répertoire additif jusqu'à 10. Les procédures verbalisées sont, si nécessaire mise en relation avec des actions sur des objets ou sur la file numérique. Comme dans la séance précédente, le temps de révision est sans lien direct avec la notion étudiée. Les nouveaux apprentissages, eux, concernent le calcul des sommes dont l'un des termes est 5, en s'appuyant sur le nombre 5 et sur le fait que $5 + 5 = 10$ et l'appropriation du répertoire additif avec des résultats supérieurs à 10. Ces apprentissages sont déclinés en 4 phases. Pendant la première, les élèves sont confrontés à une première série de sommes dont l'un des termes est toujours 5. Lors de la mise en commun, les procédures utilisées sont explicitées : le fait que le résultat soit mémorisé, le surcomptage, le recours aux doigts et la transformation du calcul « $5 + 1$ » c'est plus facile que « $1 + 5$ » et c'est pareil ». Le passage par 5 pour $5 + 7$ et $6 + 5$ est expliqué de plusieurs manières : avec les doigts, les constellations ou un arbre de calcul. C'est le même scénario pour la deuxième phase d'apprentissage mais avec d'autres sommes. La procédure de décomposition du terme différent de 5 est chaque fois explicitée. Cependant, pour éviter que les élèves attribuent un caractère obligatoire au « passage par 5 », *Cap maths* conseille de faire expliciter d'autres procédures et d'insister sur le fait qu'elles sont acceptées. Le même mode opératoire est repris au cours de la phase 3 mais il s'agit cette fois-ci pour les élèves de calculer des compléments de 5 à des nombres égaux ou supérieurs à 10. La quatrième phase est un entraînement individuel dans le fichier où des égalités et additions à trous sont à compléter. Contrairement à la séance précédente, aucun guidage n'est proposé pour éviter de conditionner les élèves.

SÉANCE 4 Apprentissage P4 - U10 S4	CALCUL MENTAL ≈ 15 min Problème dicté Résoudre un problème de complément	REVISION ≈ 15 min Problèmes écrits Résoudre deux problèmes du domaine additif	APPRENTISSAGE ≈ 45 min Calcul réfléchi - Calculer des sommes dont chaque terme est compris entre 5 et 10, en appui sur 5 et sur le fait que $5 + 5 = 10$ - Répertoire additif avec des résultats >10

En séance 4, la résolution d'un problème de complément et deux problèmes du domaine additif sont proposés pour le calcul mental et la révision. Le déroulement proposé pour cette deuxième séance sur l'enseignement des procédures de calcul réfléchi en appui sur 5 et 10 est similaire à la première mais cette fois-ci les termes des sommes à calculer sont compris entre 5 et 10. En outre, l'exercice proposé pour l'entraînement n'inclut pas de recherche de compléments et les calculs ne relèvent pas tous de l'apprentissage précédent, de façon à éviter tout conditionnement.

En séance 5, L'entraînement sur les compléments et différences (jusqu'à 10) est poursuivi en calcul mental avec une verbalisation des procédures mises en relation avec des actions sur des objets ou sur la file numérique quand cela s'avère nécessaire. Le temps de révision est attribué au calcul des sommes dont chaque terme est compris entre 5 et 10, en s'appuyant sur le nombre 5 et sur le fait que $5 + 5 = 10$. Pour les calculs qui constitueraient une difficulté, Cap maths recommande de faire expliciter les procédures efficaces (appui sur les doubles, passage par 10, appui sur des décompositions avec 5...) en les illustrant avec des figurations des nombres (doigts, constellations...). Le temps d'apprentissage focalisé sur la connaissance et l'usage du répertoire additif comprend trois grands moments : 1°) la recherche des décompositions des nombres de 11 à 18 sous forme de sommes de nombres inférieurs à 10 ; 2°) la mise en commun des décompositions trouvées et la recherche d'une organisation pour les recenser ; 3°) l'utilisation du répertoire additif pour compléter des additions et des égalités lacunaires.

La sixième séance du scénario du *Cap maths* est un bilan intermédiaire relatif aux principaux apprentissages abordés dans la première partie de la période 4. Un retour sur la notion abordée suivi d'une synthèse réalisée par l'enseignant permet de préparer le bilan au cours duquel les élèves devront résoudre un exercice sur le calcul de sommes de nombres inférieurs à 10, un autre nécessitant l'usage du répertoire pour compléter des égalités et les trois derniers sont sans lien direct avec les notions étudiées. Le manuel finalise ce bilan par des activités complémentaires qui peuvent être utilisées dans la perspective d'une action différenciée ou de remédiation. Pour les cinq séances qui suivent ce premier bilan intermédiaire (séances 8 à 12), le temps de calcul mental est réservé à la mémorisation du répertoire additif travaillée par le biais de calculs dictés sur les sommes jusqu'à $9 + 5$ (séances 8 et 9) et les différences jusqu'à $14 - 9$ (séances 10 et 11). Parallèlement, les connaissances sur les décompositions additives des nombres sont entretenues lors des moments de révisions des séances 9, 10, 11 et 12. Les nouveaux apprentissages, eux, concernent des notions mathématiques qui ne sont pas en lien direct avec notre objet d'étude.

À la séance 13, *Cap maths* propose de travailler le calcul de sommes inférieurs à 10 de manière contextualisée à travers la résolution d'un problème dicté en calcul mental et d'un problème écrit au cours du temps de révision. Par la suite, les phases de calcul mental des séances 14, 15 et 16 viennent renforcer la connaissance du répertoire additif par le biais de calculs dictés sur les sommes jusqu'à $9 + 5$ (séance 14) et les différences jusqu'à $14 - 9$ (séances 15 et 16). À la fin de la période 4, les acquis des élèves sont évalués par un bilan exhaustif. Sur les dix exercices proposés au cours cette évaluation, un seul concerne notre objet d'étude. Cependant le projet d'enseignement du *Cap maths* sur les sommes de nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine ne s'achève pas avec cette évaluation. En effet, un peu moins d'une dizaine de séances parmi celles proposées au cours de la période 5 assurent un entraînement régulier de cette compétence en incluant des phases de calcul mental ayant pour objet des problèmes de complément et la mémorisation du répertoire additif (compléments jusqu'à 14, sommes de nombres inférieurs à 10, résultats additifs jusqu'à 18) – (séances 18 à 21 puis 23 à 26- voir grille 21 annexes III). À ces activités d'entraînement s'ajoutent, une phase d'apprentissage et une phase de révision qui étendent les procédures de calcul réfléchi enseignées (appui sur les doubles et passage par 5) aux sommes de plusieurs nombres à l'aide du jeu de la cible (séances 20 et 22- voir grille 21 annexes III). Enfin, une dernière évaluation des acquis des élèves sur la notion étudiée est réalisée lors du bilan exhaustif de la période 5 par l'intermédiaire d'un exercice dont deux items portent sur les sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine. Le tableau synoptique du projet d'enseignement est proposé en annexes III grille 21.

En corollaire, l'itinéraire cognitif d'enseignement du *Cap maths* peut être résumé en 11 étapes (voir annexes III grille 21). Par ailleurs, les objectifs intermédiaires anticipés et les éléments constitutifs de la compétence à acquérir au cours du cycle sont indiqués pour chaque séance. En outre, leur formulation précise et leur libellé explicite semblent fournir de vrais repères aux enseignants (voir tableau synoptique du projet d'enseignement du *Cap maths*- Annexes III Grille 21).

► Les contenus mathématiques du scénario

Au regard de l'itinéraire cognitif d'enseignement prescrit par *Cap maths*, le champ mathématique déterminé par ce manuel pour enseigner le calcul mental de sommes de nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine peut se résumer ainsi : consolidation des doubles et moitiés jusqu'à 20, procédure de calcul réfléchi des sommes « voisines des doubles » en appui sur les doubles (un résultat connu), mobilisation du répertoire additif des compléments et différences jusqu'à 10, procédure de calcul réfléchi de sommes de nombres inférieurs à 10 en appui sur les nombres 5 et 10 (passage par 5), rechercher des décompositions des nombres de 11 à 18 sous forme de sommes de nombres < 10 puis les organiser dans un répertoire, mémorisation du répertoire additif des sommes (jusqu'à $9 + 5$)

et des différences (jusqu'à $14 - 9$), application des procédures de calcul réfléchi à la résolution de problèmes. Le descriptif détaillé des contenus mathématiques figure en annexes III grille 22.

b) Démarche d'enseignement des procédures préconisées par Cap maths

La démarche d'enseignement du calcul réfléchi de *Cap maths* se base sur l'apprentissage, une à une des différentes procédures impliquées dans la résolution des additions mentales de nombres : l'appui sur les doubles et le passage par 5. L'enseignement des procédures se déroule toujours selon le même mode opératoire. Les points d'appui (doubles ou compléments à 10) sont consolidés. Puis une série de calculs sont proposés aux élèves. Les différentes manières de déterminer le résultat sont mises en commun et discutées afin d'explicitier, entre autres, la procédure qui fait l'objet de l'apprentissage. Celle-ci est institutionnalisée. Ensuite, les élèves sont confrontés à d'autres sommes. La possibilité de s'appuyer sur un résultat connu (doubles ou compléments à 10) est rappelée sans être exigée car les autres procédures (résultat connu par cœur, surcomptage ou recours à la matérialisation du calcul) ne sont pas rejetées. Ainsi, au regard de ces éléments et en nous appuyant sur la typologie de Rey (2001), nous concluons que le dispositif pédagogique prescrit par les auteurs du *Cap maths* est de type « problème – compréhension – application ».

c) Stratégies globales d'enseignement

- 1) Mettre en œuvre un dispositif pédagogique de type « problème – compréhension – application » ;
- 2) Consolider les points d'appui : résultats < 10 , décompositions, compléments à 10, sommes du type $10 + 6$;
- 3) Introduire la notion à enseignée de manière décontextualisée par le biais de calculs dictés qui confrontent les élèves à la recherche d'une procédure de résolution ;
- 4) Faciliter l'appropriation des procédures utilisées par les autres ;
- 5) Institutionnaliser les procédures de calcul réfléchi et programmer des moments de synthèse ;
- 6) Conserver au tableau ou sur une affiche des écrits provisoires ;
- 7) Procéder à un bilan intermédiaire et remédier aux difficultés rencontrées ;
- 8) Procéder à un bilan exhaustif en fin de période pour évaluer les compétences des élèves ;
- 9) Accompagner les élèves, en certaines occasions, dans la réalisation d'un calcul ;
- 10) Exercer et entraîner régulièrement les connaissances pour les stabiliser et les mémoriser.
- 11) Réinvestir les procédures enseignées dans la résolution de problèmes ;
- 12) Faire un bilan exhaustif des acquis des élèves et des difficultés persistantes.

d) Structure, type et format des séances du scénario

► Structure et durée des séances

Par le terme « séance », nous désignons l'apprentissage des mathématiques au quotidien prescrit par le manuel. *Cap maths* programme vingt-sept séances (remédiations et évaluations formative et sommative comprises) pour l'enseignement du calcul mental de sommes de nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine. En outre, mises à part, les bilans ou les remédiations, ces séances présentent toutes la même structure organisée en trois grands moments d'enseignement : un temps de calcul mental (≈ 15 min), un temps de révision (≈ 15 min) et un temps pour les nouveaux apprentissages (≈ 45 min) – (voir schéma 25).

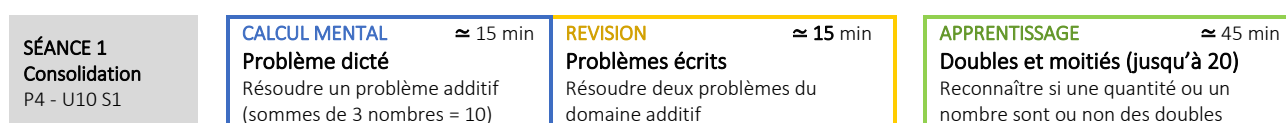


Schéma 25 : Structure de la séance 1 du scénario du *Cap maths*

En général, dans cet ouvrage, 1h15 de mathématiques sont dispensées chaque jour aux élèves tous domaines confondus. Ce choix est en accord avec les prescriptions officielles qui fixent, en moyenne et hors calcul mental, une heure d'enseignement (pour 4 séances par semaines) – (Mounier et Grapin ; 2018). Toutefois, le manuel précise qu'un découpage de séances en plusieurs blocs répartis à différents moments de la journée reste possible. Pour ce qui est de notre objet d'étude, son enseignement s'étale sur les trois unités de la période 4. Sachant qu'une période correspond à 28h30 de mathématiques (9h30 par unités), on peut dire que 32% des apprentissages de la quatrième période et 11% de la période 5 sont consacrés à la notion étudiée. Plus précisément, le scénario proposé par *Cap maths* prévoit environ 12h15min pour faire apprendre aux élèves le calcul réfléchi de sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine, soit environ 5h15 (43%) de calcul mental, environ 2h30 (20%) de révision sur des notions en lien direct avec l'objet d'apprentissage et environ 4h30 min (37%) pour l'apprentissage des procédures de calcul réfléchi dont 45 min environ pour l'organisation du répertoire additif. En outre, le scénario comprend quasiment autant de séances courtes (12) que de séances longues (11) – (voir tableau détaillé sur la durée des séances en annexes III grille 23).

► Type des séances

Les séances d'entraînement et de consolidation au cours desquelles les élèves s'exercent à des connaissances déjà vues en passant d'une procédure à une autre pour se les approprier et acquérir de la rapidité sont les plus fréquentes. Cependant, leur durée est variable : 15 à 30 min pour les entraînements tandis qu'une séance de consolidation peut s'étendre jusqu'à 75 minutes.

	Effectifs	Pourcentage	Durée
Séances de consolidation	8	30%	≈ 15 à 75 min
Séances de révision	2	7%	≈ 15 min
Séances d'apprentissage	5	18%	≈ 60 à 75 min
Séances d'entraînement	7	26%	≈ 15 à 30 min
Séances d'évaluation	3	11%	?
Séances de réinvestissement	1	4%	≈ 30 min
Séances de remédiation	1	4%	?
TOTAL	27	100%	-

Tableau 15 : Type des séances du scénario de *Cap maths*

Viennent ensuite, les séances d'apprentissage un peu moins fréquentes mais beaucoup plus longues en raison des différentes phases qui les composent (situation-problème, synthèse, entraînement) et durent 60 à 75 minutes. Les séances de consolidation, de révision, de remédiation et de réinvestissement des connaissances sont les plus rares. En outre, les séances de révision sont également les plus brèves avec une durée n'excédant pas les quinze minutes (voir tableau 15).

► Format des séances

Dans les séances du *Cap maths*, on retrouve en général trois grands moments. L'un est réservé aux activités rituelles telles que le calcul mental (R). L'autre revient sur des connaissances plus anciennes par le biais d'exercices de révision qui sont en lien direct (A+) ou totalement déconnectées des nouveaux apprentissages. Et enfin, le troisième moment concerne les nouveaux apprentissages abordés au cours de la séance (N). Ainsi, reprenant à notre compte, la méthodologie et la nomenclature utilisées par Grapin et Mounier (2015) dans leur outil d'analyse des manuels, nous avons réparti dans le tableau suivant les différentes séances du scénario de *Cap maths* selon leur format.

	R, A+, N	R, A, N	R, N	R, A+	R	A+	Bilan	Remédiation	Total
Effectif	3	2	1	5	10	2	3	1	27
%	11%	7%	4%	19%	37%	7%	11%	4%	100%

Légende : R (tâches ritualisées (calcul mental)) ; N : introduction d'un savoir nouveau ; A+ retour sur un savoir ancien en lien avec le nouvel apprentissage de la séance ; A retour sur un savoir ancien déconnecté du nouvel apprentissage

Tableau 16 : Répartition des séances selon leur format

Mis à part les bilans et remédiations, *Cap maths* prescrit dans 44% des séances de son scénario un moment de retour sur les notions anciennes. Pour 83% d'entre elles (10 sur 12), les tâches proposées sont liées à l'objet d'apprentissage. En outre, aucune des séances programmées dans ce projet d'enseignement ne se limitent uniquement à l'introduction d'un nouvel apprentissage. Cette introduction s'accompagne toujours d'un moment de calcul mental et 5 fois sur 6 d'un temps de révision et de calcul mental. A contrario, 63% séances n'instaurant pas de nouvelles connaissances,

il s'agit des séances de consolidation (17 sur 23) et de révision en lien avec la notion enseignée (2 sur 17).

e) *Les activités proposées au cours du scénario*

Au regard des éléments apportés par le tableau infra (détaillé en annexes III grille 24), *Cap maths* propose cinquante-cinq activités pour faire apprendre les additions mentales de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine. Quinze d'entre elles contribuent à l'introduction des nouvelles procédures de calcul réfléchi. Mais, c'est en calcul mental que ces activités sont les plus nombreuses (21) tandis que celles ayant pour but de revenir sur des connaissances plus anciennes représentent 24% des activités recommandées par le manuel (soit 13 activités sur 55). En calcul mental, 80 % des activités visent la mémorisation du répertoire additif. C'est également la connaissance des tables d'addition qui est concernée dans toutes les activités prescrites pour les bilans et la remédiation. D'autre part, les décompositions additives constituent plus de la moitié des exercices (54%) auxquels sont confrontés les élèves pendant le temps réservé aux révisions. En outre, 54% des activités prescrites durant les temps d'apprentissage concernent le calcul réfléchi de sommes en appui sur les doubles (2 activités) ou sur 5 et 10 (4 activités). Les autres activités sont, elles, consacrées au travail sur les notions servant de points d'appui pour développer les procédures de calcul réfléchi, notamment les doubles et moitiés (20%), les compléments à 10 ou à un nombre supérieur à 10 (13%) et l'utilisation du répertoire additif (13%). En corollaire, 60% des activités prévues sont consacrées à la mémorisation du répertoire additif (42%) et à l'apprentissage des procédures de calcul (18%). Les 40% restantes ont pour objet la consolidation des points d'appui (doubles, compléments, décompositions). Par conséquent, on peut dire non seulement que les activités proposées dans ce scénario sont réellement des activités de calcul mental, mais aussi qu'elles sont susceptibles de permettre aux enseignants d'atteindre les objectifs visés. Ces données viennent confirmer les partis-pris annoncés par les auteurs dans le guide de l'enseignant à savoir, « envisager le calcul réfléchi de sommes portant sur des nombres inférieurs à 10 (du type $8 + 7$) pour aboutir à la construction du répertoire additif complet » (p. XXIX) d'une part et d'autre part s'assurer que les élèves disposent d'une bonne mémorisation des résultats inférieurs à 10 et des compléments à 10, qu'ils soient capables de décomposer les nombres sous forme de sommes (notamment en faisant intervenir 5) et de comprendre qu'une somme comme $10 + 6$ est facile à calculer.

	CALCUL MENTAL		RÉVISION		APPRENTISSAGE		BILAN + REMEDIATION		TOTAL	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
ACTIVITÉS										
TOTAL	21	38%	13	24%	15	27%	6	11%	55	100%

Tableau 17 : Extrait de la répartition des activités proposées dans le scénario du *Cap maths* (voir tableau détaillé en annexes III grille 24)

Pour finir, le nombre d'activités proposées par *Cap maths* varie selon le type de séance mise en œuvre (voir tableau 18). En effet, le nombre moyen d'activités prescrites pour les séances d'apprentissage est de 4. En ce qui concerne, celles qui sont relatives à l'entraînement, au réinvestissement, à la consolidation ou à la remédiation, le manuel recommande deux activités en moyenne. Enfin, les séances de révision et d'évaluation comptent en moyenne une seule activité. Pour plus de détails, voir grille 25 en annexes III.

	Effectifs	Pourcentage	Nombre total d'activités	Nombre moyen d'activités / séance
Séances de consolidation	8	30%	13	1,62
Séances de révision	2	7%	2	1,00
Séances d'apprentissage	5	18%	19	3,80
Séances d'entraînement	7	26%	13	1,86
Séances d'évaluation	3	11%	4	1,33
Séances de réinvestissement	1	4%	2	2,00
Séances de remédiation	1	4%	2	2,00
TOTAL	27	100%	55	2,03

Tableau 18 : Nombre d'activités en fonction du type de séance

f) La gestion de l'institutionnalisation¹⁵³ préconisée par le manuel

Pour chacune des séances introduisant une procédure de calcul réfléchi, *Cap maths* prescrit une phase de synthèse et d'institutionnalisation. En effet, les descriptifs des séances proposés dans le guide de l'enseignant recommande une mise en commun et l'explicitation des procédures utilisées par les élèves. Ce guide conseille également de faire une démonstration de la procédure enseignée dont il illustre la mise en œuvre à l'aide de différentes représentations (avec les doigts, les constellations et un arbre à calcul) qui tiennent compte des connaissances et du niveau initial des élèves.

Cependant, les indications données par le manuel demeurent peu explicites quant aux « critères de choix des stratégies permettant aux élèves, à terme, de distinguer les situations où ils doivent inventer de celles où il suffit de reproduire » (Butlen et Masselot, 2010). À vrai dire, *Cap maths* ne propose ni d'institutionnaliser les conditions dans lesquelles les procédures s'avèrent plus ou moins "économiques", ni de travailler sur l'écriture des règles en incluant leur domaine de validité. En réalité, l'éventail des procédures possibles est présenté mais non hiérarchisé. De cette manière, la nouvelle procédure apprise est mise en évidence comme une possibilité pour trouver la solution, sans pour autant rejeter celles utilisées par les élèves. Les auteurs de *Cap maths* justifient leur choix en expliquant que les séances d'apprentissage d'une procédure de calcul réfléchi, en particulier, comporte un danger dans la mesure où les élèves peuvent croire qu'ils doivent obligatoirement l'appliquer quel que soit le calcul à résoudre. Selon eux, cet inconvénient peut être contourné en

¹⁵³ Pour rappel, « la phase d'institutionnalisation est le moment clé de la synthèse, qui permet de passer de la situation d'apprentissage à la formalisation du savoir universel, transférable » (Définition extraite du dossier de la DGESCO, « Enseigner plus explicitement, Situations et gestes professionnels au quotidien », 2016).

établissant avec les élèves un contrat clair : « Aujourd’hui on cherche à apprendre ce procédé ; ensuite, chacun reste libre de choisir le procédé le plus sûr pour lui » (Guide de l’enseignant, *Cap maths CP*, 2009, p.197). Les différents moments d’institutionnalisation préconisés par Cap maths sont détaillés en annexes III grille 26.

5.4.3. Le scénario de *Pour comprendre les maths*

a) *L’itinéraire cognitif d’enseignement et les contenus mathématiques*

► L’itinéraire cognitif d’enseignement de *Pour comprendre les maths*

D’après les auteurs de *Pour comprendre les maths*, le progrès des élèves vers le calcul passe d’abord par une amélioration de leurs procédures de comptage et de surcomptage. Par conséquent, ils proposent en premier lieu une séance d’apprentissage dans le contexte dynamique du jeu de la piste numérique, pour s’assurer de la capacité des élèves à compter.

SÉANCE 1 Apprentissage P2 – S42	CALCUL MENTAL Le plus grand nombre L’enseignant dit « huit, six » ; l’élève écrit 8.	ACTIVITÉS D’INVESTIGATION Jouons sur la piste numérique (1) Se déplacer sur la piste numérique et retrouver le nombre de sauts effectués sur la piste	ACTIVITÉS D’ENTRAÎNEMENT ▪ Ex.1 et 2 : applications directes ▪ Ex.3 : Ajout d’un dé

Tableau 19 : Séance 1 extraite du projet d’enseignement de *Pour comprendre les maths* détaillé en Annexes III- Grille 27

Dans cette situation ludique, la difficulté pour l’élève réside dans le bon comptage des cases (sans compter celle de départ) pour se déplacer sur la piste numérique. Dès que la règle du jeu et les critères de réussite sont compris, l’enseignant complexifie la tâche. Il cache le dé et annonce la case d’arrivée pour amener les élèves à retrouver le nombre de sauts à effectuer sur la piste. Cette phase d’investigation est suivie de trois exercices d’application pour exercer les élèves à la pratique du déplacement sur piste. Le temps de calcul mental, lui, est consacré à la recherche du « plus grand nombre » dans chaque couple de nombres énoncés oralement par le professeur. Cette activité ainsi que celles prescrites à la séance 2 (trouver le successeur du successeur d’un nombre donné, calculer des sommes inférieurs ou égales à 10, rechercher des compléments à 10) préparent à la consolidation de l’apprentissage d’une méthode pour calculer la somme de deux petits nombres prévue pour la séance suivante. « Il s’agit du surcomptage qui consiste à partir du terme le plus élevé de la somme avant de continuer en ajoutant le second terme en comptant d’un en un » (p.77).

La troisième séance du scénario constitue « une première étape dans les techniques de calcul pour permettre aux enfants de se débarrasser du comptage proprement dit avant d’accéder au calcul réfléchi, puis au calcul automatisé » (p.77). Pour provoquer cet abandon, les élèves sont confrontés à l’ajout d’une collection de 4 crabes, celle de Léa, à la collection de 9 crabes de Théo. Tout d’abord,

l'enseignant fait mimer et raconter la situation en donnant quatre cubes à un élève et neuf à un autre puis leur demande de les recompter et d'en faire part à la classe. Ensuite, les autres camarades sont invités à proposer une procédure pour trouver le nombre total de cubes. D'emblée, le professeur écarte la technique de comptage simple pour mieux attirer l'attention des enfants sur les « calculs effectués » par deux personnages du fichier. Léa utilise la piste numérique, place un jeton vert sur le 4, puis à partir de ce jeton ajoute le nombre de crabes de Théo et arrive sur la case d'arrivée qui correspond au total. De son côté, Théo sort 4 doigts et commence à les compter en partant de 9 (le plus grand des deux nombres). Les enfants, observent, explicitent, imitent Théo et complètent l'égalité avant de constater que les deux personnages ont trouvé le même nombre. Pour conclure cette séance, les activités d'entraînement préconisées sont des calculs simples (ajout d'un petit nombre) pour lesquels le surcomptage et l'usage de la commutativité sont particulièrement adaptés et une addition à résoudre en contexte dynamique à l'aide de la piste numérique. Le prolongement suggéré pour approfondir la notion étudiée est le calcul de sommes à trois termes.

La séance 4 fait le bilan des acquis des élèves sur le calcul de sommes et les écritures additives du nombre 10. Ce dernier débouche sur un temps remédiation qui d'une part, amène les élèves à expliciter leurs différentes démarches (surcomptage, dessin, jetons, etc.) et d'autre part, permet à l'enseignant de leur faire observer l'intérêt de la mémorisation des petites sommes. Les quatre leçons programmées à la suite de ce bilan (séances 5 à 8) ont un triple objectif approfondir la connaissance de la suite numérique (séances 5 et 8), consolider les techniques de surcomptage à l'aide de la piste numérique et des doigts (séances 5 à 8) et les réinvestir dans la résolution de problèmes (séance 5).

Subséquemment, la neuvième séance du scénario introduit la construction et l'utilisation de la table d'addition. Il s'en suit des activités d'entraînement telles que l'élaboration de la table de 4, son utilisation pour solutionner des calculs ou rechercher des compléments avec l'aide de la piste numérique. En prolongement, un travail similaire est conseillé avec les autres tables jusqu'à 6 ou 7. De la dixième à la douzième séance, le manuel prévoit le développement de points d'appui tels que les compléments à 10, la mémorisation des écritures soustractives des petits nombres jusqu'à 6 et la connaissance de la comptine numérique. Plus tard, juste avant l'évaluation sommative de fin de période 2 (séance 14), une seconde évaluation formative (séance 13) suivie d'une remédiation contrôle la capacité des élèves à compter à rebours à partir d'un point d'arrivée, à compléter les égalités numériques correspondantes, à réinvestir le surcomptage dans la résolution de problèmes additifs et le niveau d'acquisition des compléments à 10 (voir grille 27 annexes III).

Au cours des cinq séances qui suivent ces évaluations (séances 15 à 19), le manuel propose d'entraîner les élèves au calcul mental d'additions de type $10 + n$ et de sommes de nombres inférieurs à 10 avec ou sans passage de la dizaine. En parallèle, les déplacements sur la piste numérique sont renforcés, les compléments à 10 travaillés et la connaissance de la suite numérique approfondie (voir grille 27 annexes III). Dès que ces points d'appui sont consolidés, *Pour comprendre les maths* entame alors un apprentissage progressif des écritures additives (décompositions canoniques comprises) des nombres : d'abord de 11 à 13 (séance 20), puis de 14 à 16 (séance 21) et enfin de 17 à 19 (séance 22). Le mode opératoire est toujours le même. Durant la phase d'investigation, les élèves recherchent et mettent en commun les différentes décompositions des nombres. Les activités d'entraînement, elles, sont consacrées à la recherche de compléments, à la complétion des différentes décompositions des nombres étudiés, en contexte statique puis dans celui de la monnaie avant d'être réinvesties dans l'anticipation par le calcul du résultat de déplacements sur la piste numérique (voir grille 26 annexes III). Postérieurement, les écritures additives des nombres sont travaillées par le biais du calcul mental de petites sommes inférieures à 13 (séances 23 et 24) puis testées lors de l'évaluation formative de mi-période 3 (séance 25). C'est à ce moment du scénario (séance 26) que *Pour comprendre les maths* programme l'introduction d'une procédure de calcul réfléchi en appui sur les doubles pour calculer la somme de deux nombres consécutifs (du type $6 + 7$). Pour les activités d'entraînement, le manuel suggère l'élaboration du répertoire des doubles des nombres inférieurs à 10, l'application de la procédure enseignée pour calculer des sommes et son réinvestissement pour anticiper par le calcul le résultat des déplacements sur la piste numérique. Pour finir, les phases de calcul mental des treize dernières séances du scénario viennent renforcer la connaissance du répertoire additif par le biais du calcul de petites sommes inférieurs à 16 ou à 20 (séances 27, 28, 35 et 36) et des doubles (séances 29 et 37), les points d'appui avec la recherche de compléments à 10 (séances 34) ainsi que la maîtrise de la procédure de calcul réfléchi en appui sur les doubles pour calculer des sommes de nombres consécutifs (séances 31 et 38). Ces séances d'entraînement et de consolidation sont entrecoupées par des temps d'évaluation formative (séances 32 et 39) et sommative (séance 33). Le tableau synoptique du projet d'enseignement détaillé de *Pour comprendre les maths* est détaillé en annexes III grille 27).

- En corollaire, l'itinéraire cognitif d'enseignement de *Pour comprendre les maths* peut être résumé en 14 étapes (voir annexes III Grille 27). Par ailleurs, les objectifs intermédiaires anticipés et les éléments constitutifs de la compétence au cours du cycle sont indiqués pour chaque séance. Cependant, leur formulation manque de précision et leur libellé implicite peut entraîner chez l'enseignant quelques confusions quant à ce que l'on cherche réellement à faire apprendre aux élèves (voir tableau synoptique du projet d'enseignement de *Pour comprendre les maths* – Annexes III Grille 27).

► Les contenus mathématiques du scénario

Au regard de l'itinéraire cognitif d'enseignement prescrit par *Pour comprendre les maths*, le champ mathématique déterminé par ce manuel pour faire enseigner le calcul mental de sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine peut se résumer ainsi : amélioration des procédures de comptage et de surcomptage à l'aide des doigts et de la piste numérique en appui sur la commutativité de l'addition, réinvestissement de ces procédures dans la résolution de problèmes, approfondissement de la connaissance de la suite numérique, mobilisation des prérequis tels que les sommes du type $6 + 3$ ou $10 + n$ et les écritures additives du nombre 10, utilisation et construction du répertoire additif jusqu'à 7, mémorisation des compléments à 10, des écritures soustractives des petits nombres jusqu'à 6 et des doubles des nombres inférieurs à 10, connaître les écritures additives et les décompositions canoniques des nombres de 11 à 19, procédure de calcul réfléchi de sommes de nombres consécutifs du type $6 + 7$ en appui sur les doubles, application de la procédure dans la résolution de problèmes. Le descriptif détaillé des contenus mathématiques figure en annexes III grille 28.

b) *Démarche d'enseignement du calcul réfléchi*

Pour les auteurs de *Pour comprendre les maths*, les élèves doivent d'abord dépasser le comptage puis le surcomptage pour arriver au calcul. Par conséquent, la démarche d'enseignement proposée par le manuel propose d'abord d'améliorer les procédures de comptage et de surcomptage à l'aide de la piste numérique et à l'aide des doigts en appui sur la commutativité de l'addition. Ensuite, la connaissance de la suite numérique est approfondie. Puis, les notions acquises antérieurement sur le calcul de petites sommes (avec un résultat inférieur à 10) et les additions de type $10 + n$ sont réactualisées avant d'amener les élèves à utiliser et à construire la table d'addition jusqu'à 4 dans un premier temps, puis dans un second temps jusqu'à 7. Subséquemment, des points d'appui sont mis en place. Il s'agit des compléments aux nombres inférieurs à 10, des compléments à 10, des doubles des nombres inférieurs à 10 et des écritures additives (décompositions canoniques comprises) des nombres de 11 à 19. Dès que ces points d'appui sont consolidés et réinvestis dans la résolution de problèmes, la procédure de calcul réfléchi des sommes de nombres consécutifs de type $6 + 7$ en appui sur les doubles est introduite. L'acquisition de cette nouvelle stratégie rend les élèves capables de retrouver les résultats de la table d'addition et leur permet d'entamer le travail sur la mémorisation des doubles, des petites sommes inférieures à 16 ou à 20 pendant qu'ils s'exercent à mettre en œuvre la nouvelle procédure de calcul réfléchi. D'autre part, qu'il s'agisse des procédures de surcomptage ou de calcul réfléchi, le mode opératoire prescrit par le manuel reste le même. La procédure à enseigner est d'abord mise en scène par des personnages ou l'enseignant. Les élèves, eux, observent, explicitent la procédure avant de l'imiter pour trouver le résultat. Ainsi, au regard de ces éléments et

en nous appuyant sur la typologie de Rey (2001), nous concluons que le dispositif pédagogique prescrit par les auteurs de *Pour comprendre les maths* est de type « observation – compréhension – application ».

c) Stratégies globales d'enseignement

- 1) Mettre en œuvre un dispositif pédagogique de type « observation – compréhension – application » ;
- 2) Améliorer les procédures de comptage et de surcomptage pour favoriser leur dépassement ;
- 3) Réactualiser les notions : sommes < 10 , additions du type $10 + n$ et suite numérique ;
- 4) Utiliser et construire le répertoire additif jusqu'à la table de 7 ;
- 5) Consolider les points d'appui : compléments à 10, les écritures additives du nombre 10 et les écritures soustractives des petits nombres ($3 - 2$; $7 - 4$; etc.) ;
- 6) Introduire une procédure de calcul réfléchi pour calculer des sommes du type $6 + 7$;
- 7) Mettre en scène les procédures, les faire expliciter par les élèves pour s'assurer de leur compréhension avant de leur proposer de les appliquer ;
- 8) Procéder à des évaluations formative, sommative et à des remédiations si nécessaires ;
- 9) Accompagner les élèves dans la formulation des nouvelles notions apprises ;
- 10) Réinvestir les procédures enseignées dans la résolution de problèmes.

d) Structure, format et type de séances du scénario

► Structure des séances

Par le terme « séance », nous désignons l'apprentissage des mathématiques au quotidien prescrit par le manuel. *Pour comprendre les maths* programme trente-neuf séances (évaluations formative et sommative comprises) pour l'enseignement du calcul mental de sommes de nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine. Cet apprentissage s'étale sur les périodes 2, 3 et 4 de l'année scolaire mais la durée des séances n'est pas spécifiée. Néanmoins, mis à part les évaluations ou les consolidations, les séances prescrites par le manuel présentent toutes la même structure organisée en trois grands moments d'enseignement : un temps consacré au calcul mental, un temps pour les activités d'investigation et un autre pour les activités d'entraînement (voir schéma 26).

SÉANCE 1 Apprentissage P2 – S42	CALCUL MENTAL Le plus grand nombre L'enseignant dit « huit, six » ; l'élève écrit 8.	ACTIVITÉS D'INVESTIGATION Jouons sur la piste numérique (1) Se déplacer sur la piste numérique et retrouver le nombre de sauts effectués sur la piste	ACTIVITÉS D'ENTRAÎNEMENT ▪ Ex.1 et 2 : applications directes ▪ Ex.3 : Ajout d'un dé

Schéma 26 : Structure de la séance 1 du scénario du manuel *Pour comprendre les maths*

► Type des séances

Les séances d'entraînement et de consolidation au cours desquelles les élèves s'exercent pour s'approprier les techniques de calcul sont les plus fréquentes (21 sur 39) et représentent à elles seules 54% des leçons. Viennent ensuite les séances d'apprentissage de nouvelles procédures de surcomptage et de calcul réfléchi qui correspondent à 20% des séances programmées par le manuel pour notre objet d'étude. Les moments d'évaluations formative et sommative, quant à eux, sont assez récurrents et jalonnent l'intégralité du scénario. On en compte sept au total. Enfin, les séances de réinvestissement, plus rares, ferment la marche (3 séances sur 39) - (voir tableau 20).

	Effectifs	Pourcentage
Séances de consolidation	10	26%
Séances d'apprentissage	8	20%
Séances d'entraînement	11	28%
Séances de réinvestissement	3	8%
Séances d'évaluation	7	18%
TOTAL	39	100%

Tableau 20 : Type des séances du scénario de *Pour comprendre les maths*

► Format des séances

Dans les séances de *Pour comprendre les maths*, on retrouve en général trois grands moments. Le premier est réservé aux activités rituelles : le calcul mental (R). Le second concerne les nouveaux apprentissages abordés au cours des activités d'investigation (N). Enfin, le troisième réservé aux activités d'entraînement propose des exercices d'application directe sur la notion étudiée et revient, en parallèle, sur des connaissances plus anciennes en lien direct avec les nouveaux apprentissages (A*) ou totalement déconnectées (A). Ainsi, en reprenant à notre compte la méthodologie et la nomenclature utilisées par Grapin et Mounier (2015) dans leur outil d'analyse des manuels, nous avons réparti dans le tableau suivant les différentes séances du scénario de *Pour comprendre les maths* selon leur format.

	R, N	R, N, A	R, N, A*	R	R, A*	Bilan	Total
Effectif	11	1	2	11	7	7	39
%	28%	3%	5%	28%	18%	18%	100%

Légende : R (tâches ritualisées (calcul mental)) ; N : introduction d'un savoir nouveau ; A* : retour sur un savoir ancien en lien avec le nouvel apprentissage de la séance ; A : retour sur un savoir ancien déconnecté du nouvel apprentissage

Tableau 21 : Répartition des séances selon leur format

Excepté les bilans et évaluations, l'ouvrage prescrit du calcul mental pour chacune des séances de son scénario. À vrai dire, 28 % d'entre elles qui sont pour l'essentiel des séances d'entraînement et de consolidation se limitent uniquement à cette activité ritualisée. Mais, en général, dans plus de la

moitié des séances composant ce projet d'enseignement (54%), ce rituel est associé à des activités d'investigation introduisant les nouveaux apprentissages (11 séances sur 39) et à des activités d'entraînement qui proposent, en plus des applications directes, des tâches pour réactualiser des notions anciennes le plus souvent en relation direct avec l'objet d'apprentissage (9 séances sur 39) mais qui peuvent aussi être déconnectées (1 séance sur 39).

e) Les activités proposées au cours du scénario

Pour comprendre les maths propose quatre-vingt-dix activités pour faire apprendre à calculer mentalement les sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine (voir tableau 22 détaillé en annexes III Grille 29). Douze d'entre elles contribuent à l'introduction des procédures de surcomptage et de calcul réfléchi. Mais, c'est en calcul mental (31 activités) et durant les moments d'entraînement (32 activités) qu'elles sont les plus nombreuses tandis que celles ayant pour but d'évaluer les progrès et les acquis des élèves représentent 17% des activités recommandées par le manuel (soit 15 activités sur 90). En calcul mental, seulement 7 % des activités visent l'appropriation de nouvelles stratégies de calcul mental. Les tâches proposées durant cette activité ritualisée se focalisent plutôt sur l'approfondissement de la connaissance de la suite numérique (32%), le renforcement des points d'appui tels que les sommes de petits nombres, les écritures soustractives de nombres jusqu'à 6, les compléments à 10 (33%) et la maîtrise du répertoire additif (28%). D'autre part, 24% des activités préconisées durant les temps d'apprentissage concernent la découverte de nouvelles stratégies de calcul réfléchi. Les autres activités sont, elles, consacrées au complément à 10 (8%), aux écritures additives des nombres de 11 à 19 (24%), au réinvestissement des procédures apprises dans la résolution de problèmes (26%) et à l'utilisation et à la construction du répertoire additif (18%). Par ailleurs, 54% des exercices auxquels sont confrontés les élèves durant les phases d'entraînement assurent la consolidation des points d'appui (compléments à 10, décompositions additives, connaissance de la suite numérique, doubles des nombres inférieurs à 10, utilisation du répertoire additif) tandis que les 46% restant participent à l'appropriation des nouvelles stratégies de comptage et de calcul réfléchi.

En corollaire, la moitié des activités prévues dans le projet d'enseignement concernent l'apprentissage du surcomptage, de la procédure de calcul réfléchi des sommes de nombres consécutifs de type $6 + 7$ en appui sur les doubles (30%) et la mémorisation du répertoire additif (20%). Les 50% qui restent ont pour objet le renforcement des points d'appui (connaissance de la suite numérique et décompositions des nombres de 11 à 19, compléments à 10, etc.). Par voie de conséquence, nous pouvons dire non seulement que les activités proposées dans ce scénario sont réellement des activités de calcul mental, mais également qu'elles sont susceptibles de permettre aux enseignants d'atteindre les objectifs visés.

	CALCUL MENTAL		INVESTIGATION		ENTRAÎNEMENT		BILAN		TOTAL	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
ACTIVITÉS										
TOTAL	31	34%	12	13%	32	36%	15	17%	90	100%

Tableau 22 : Répartition des activités proposées dans le scénario de *Pour comprendre les maths* détaillée en annexes III Grille 29

In fine, le nombre d'activités proposées par ce manuel varie selon le type de séance mises en œuvre (voir tableau 23). En effet, le nombre moyen d'activités prescrites pour les séances d'apprentissage est de 4 tandis que celui des séances de réinvestissement est de 3. En ce qui concerne, les séances relatives à la consolidation et à l'évaluation, la méthode *Pour comprendre les maths* recommande deux activités en moyenne. Enfin, les séances d'entraînement comptent en moyenne une seule activité. Pour plus de détails, voir grille 30 en annexes III.

	Effectifs	Pourcentage	Nombre total d'activités	Nombre moyen d'activités / séance
Séances de consolidation	10	26%	17	1,70
Séances d'apprentissage	8	20%	35	4,37
Séances d'entraînement	11	28%	15	1,36
Séances de réinvestissement	3	8%	8	2,67
Séances d'évaluation	7	18%	15	2,14
TOTAL	39	100%	90	2,31

Tableau 23 : Nombre d'activités en fonction du type de séance

f) La gestion des moments d'institutionnalisation

Pour chacune des séances introduisant une procédure, *Pour comprendre les maths* prescrit une mise en commun, la démonstration de la procédure attendue et une présentation des différentes manières de la mettre en œuvre (à l'aide de la piste numérique ou à l'aide des doigts). Cependant, il n'y a pas réellement de phase de synthèse et d'institutionnalisation. En effet, ce moment est réduit à une reformulation par les élèves de ce qui a été appris avec l'étayage de l'enseignant. À vrai dire, le manuel ne propose ni d'institutionnaliser les conditions dans lesquelles les procédures s'avèrent plus ou moins « économiques », ni de travailler sur l'écriture des règles en incluant leur domaine de validité. En réalité, seule la procédure souhaitée est présentée, explicitée et mise en application sans qu'il y ait pour autant de conservation de traces écrites (voir Grille 31 en annexes III).

5.4.4. Le scénario d'*Euromaths*

a) L'itinéraire cognitif d'enseignement et les contenus mathématiques

► L'itinéraire cognitif d'enseignement d'*Euromaths*

Pour apprendre aux élèves à calculer une somme de type $a + b$ lorsqu'avancer de b fait passer une dizaine (comme c'est le cas pour $8 + 5$, par exemple), *Euromaths* se place du point de vue du sens

ordinal du nombre et fait le choix d'enseigner une procédure de calcul par sauts en l'abordant dans le contexte de la piste des nombres. Par conséquent, la première séance du scénario d'*Euromaths* a pour objectif d'apprendre aux élèves à anticiper par le calcul le résultat de déplacements sur cette représentation.

	1 ou 2x 10min	environ 30 min par séance	
SÉANCE 1 Apprentissage P3 - ÉTAPE 34	CALCUL MENTAL La bande numérique Écrire le nombre caché sur la piste numérique (nombres < 40)	ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE Jeu du poney (sauts sur la piste) Calculer mentalement des sommes et des différences	DÉCOUVERTE Additionner ou soustraire sur la piste des nombres Anticiper par le calcul le résultat de déplacements sur la piste des nombres

Tableau 24 : Séance 1 extraite du projet d'enseignement d'*Euromaths* détaillé annexes III Grille 32

Ainsi, afin de préparer l'apprentissage à venir, le temps du calcul mental est consacré au repérage de nombres cachés (inférieurs à 40) sur la bande numérique. En outre, souhaitant que les notions enseignées soient perçues par les élèves comme des réponses optimales à des questions présentant pour eux un certain enjeu, les auteurs d'*Euromaths* proposent d'introduire cette première situation d'apprentissage par une activité préparatoire qui prend la forme d'un jeu. Il s'agit ici du jeu du poney qui va permettre aux élèves de s'entraîner à calculer mentalement des sommes et des différences dont ils pourront valider les résultats en réalisant les sauts effectifs sur la piste. Cette activité est suivie d'un moment de découverte qui reprend le travail effectué précédemment et se subdivise lui-même en quatre phases : une phase d'entrée dans la tâche par le biais d'une illustration, une phase de recherche avec médiation individuelle si nécessaire, une mise en commun ou « correction » et enfin, une phase de conclusion et d'institutionnalisation. Cependant, dans cette première étape, les procédures attendues restent des procédures personnelles (dénombrement, recomptage sur les doigts, surcomptage).

La deuxième séance du scénario est une longue phase d'entraînement qui doit permettre aux élèves de s'approprier les nouvelles connaissances et de les mobiliser ultérieurement dans de nouveaux contextes. Au total, sur les huit exercices proposés, les cinq premiers sont des applications directes de la découverte et les trois derniers proposent de calculer en parallèle des sommes ($7 + 5$ et $17 + 5$), des différences ($5 - 3$ et $15 - 3$) et des compléments ($6 + \dots = 9$ et $16 + \dots = 19$), « de manière à faire repérer aux élèves les similitudes dans les procédures malgré le changement de champ numérique » (Livre du professeur, p.102). Pour favoriser le passage des procédures personnelles mises en œuvre précédemment (séance 1) aux procédures de calcul qui seront étudiées à la séance 4, *Euromaths* recommande, au préalable, une séance de transition (séance 3). Son objectif est de rendre les élèves capables d'évaluer les écarts entre un nombre et les deux dizaines qui l'entourent. Pour ce faire, l'activité proposée dans la rubrique « calcul mental » est une reprise du jeu du Poney. C'est ce même

jeu qui sert de support pour l'activité de découverte mais cette fois-ci la piste des nombres utilisée est réduite à une représentation schématique où seuls les dizaines entières (10, 20, 30 et 40) sont écrites dans les cases. Enfin, la séance est finalisée par un exercice permettant la mise en application de la découverte.

La quatrième séance du scénario d'*Euromaths* constitue une première phase dans l'apprentissage des procédures de calcul par sauts. En effet, les élèves vont apprendre à « construire une procédure qui s'appuie uniquement sur des nombres, des symboles et des propriétés arithmétiques » (Livre du professeur, p. 29). Ainsi, « pour calculer une somme de type $a + b$ lorsqu'avancer de b fait passer une dizaine (ce qu'on rencontre quand on calcule $8 + 5$ et non quand on calcule $5 + 4$) », le manuel conseille de procéder en deux temps. « Le premier temps consiste à calculer l'écart entre le nombre a et la dizaine supérieure, puis à décomposer b en deux termes, le premier terme étant l'écart trouvé. Le deuxième temps consiste à additionner le second terme » (Livre du professeur, p.36). Plus concrètement, la mise en œuvre de cette procédure conduit à la démarche suivante : $8 + 5 = 8 + 2 + 3 = 10 + 3$. À l'instar des séances antérieures, l'usage du jeu du poney permet « une représentation physique au fait d'avancer ou de reculer sur la piste des nombres (flèches vertes pour avancer, rouges pour reculer) » (ibid.). Mais désormais, le lancer de dé est remplacé par les indications du professeur qui décide de la valeur et du sens de déplacement. D'autre part, la rubrique « Exercices » confronte l'élève à une série de calculs qui vont lui permettre de s'approprier la procédure enseignée tout en ayant recours à la commutativité de l'addition. Le temps de calcul mental, lui, est sans lien direct avec l'objet d'étude.

L'acquisition de la procédure de calcul réfléchi par sauts est ensuite mise à profit pour permettre aux élèves de retrouver un résultat quand sa mémorisation n'est pas stabilisée. Ainsi, en appui sur cette nouvelle méthode de calcul, la cinquième séance du scénario d'*Euromaths* propose aux enseignants de mener un travail spécifique sur la mémorisation du répertoire additif. À ce stade des apprentissages, il s'agit d'amorcer le stockage en mémoire des tables d'addition entre un nombre compris entre 1 et 10 et un autre compris entre 1 et 5. Pour qu'il constitue un enjeu pour l'élève et « revête ainsi un caractère de nécessité », les auteurs l'introduisent au cours d'une activité préparatoire par le biais du jeu du recto verso. Composé d'un nombre quelconque de cartes dont le verso porte une écriture additive et le recto le résultat, ce jeu aide les élèves à mémoriser les tables d'addition, de manière autonome. Il est repris au moment de la découverte à partir d'une vignette où deux personnages du manuel (Lilou et Rémi) s'adonnent à ce jeu. Cette mise en scène sert de support aux tâches proposées aux élèves tandis que la mascotte du livre, Suricate, rappelle l'utilisation possible de la commutativité pour faciliter la résolution de certains calculs tout en allégeant le travail

de mémorisation. À la fin de la séance, un temps d'entraînement exerce les élèves à la recherche du résultat de la somme des deux nombres (par exemple : $7 + 4$, c'est combien ?) ou du deuxième terme d'une addition à trou (par exemple : 11, c'est 7 plus combien ?). Comme précédemment, les activités de calcul mental restent sans lien direct avec l'objet d'étude.

Pour donner suite à ce travail de mémorisation, *Euromaths* préconise une longue phase d'entraînement. Ainsi, la sixième séance du scénario consiste en une série de quatre exercices au cours desquels les élèves sont confrontés à la recherche de décompositions additives des nombres 6, 7, 8 et 9 et au calcul de sommes de deux termes en utilisant la commutativité de l'addition, de sommes de trois termes ($R \leq 10$) et de différences. En outre, le manuel recommande une correction individuelle qui permettra au professeur des écoles « de mieux connaître l'état de savoir de ses élèves, de repérer immédiatement les erreurs et d'apporter une aide individuelle » si nécessaire (Livre du professeur, p.12). Cependant, dans le cas où plusieurs méthodes ou procédures de calcul sont possibles, les auteurs du manuel suggèrent la confrontation des résultats entre deux élèves avant la mise en commun finale.

Précédée de deux séances intermédiaires sans lien direct avec la notion étudiée, la séance 7 est une évaluation formative proposée aux enseignantes par le manuel pour faire le point sur leurs connaissances et, éventuellement, les compléter. Cette évaluation est réalisée par le biais d'activités spécifiques portant sur la mémorisation du répertoire additif et le calcul de sommes et de différences. *Euromaths* propose ensuite un bilan intermédiaire (séance 8) pour évaluer les compétences de chacun. Ce bilan compte six exercices dont quatre sont en lien direct avec la notion étudiée. À la séance 9, le temps de calcul mental permet de mobiliser les résultats mémorisés au cours des séances précédentes. En ce qui concerne le temps d'apprentissage, il n'y a pas d'activité préparatoire, la mise en scène censée retenir l'intérêt des élèves est présentée directement au moment de la découverte. Ici, la situation choisie par le manuel est le dépôt successif de coquillages dans un seau. Une fois ce dernier recouvert, les élèves doivent additionner les mises consécutives pour retrouver le nombre total de coquillages de la collection. Ils sont alors confrontés à la résolution d'additions plus longues, donc plus complexes ce qui offre à l'enseignant l'opportunité de leur apprendre à regrouper certains termes d'une écriture additive pour retrouver d'éventuelles dizaines cachées, en s'appuyant sur la commutativité de l'addition. Bien que ce savoir-faire constitue un atout non négligeable pour l'acquisition des procédures de calcul réfléchi à venir, *Euromaths* reconnaît, néanmoins, que cette démarche peut s'avérer difficile pour les élèves qui resteraient proches de l'action qui a généré la situation (mises successives des coquillages dans le seau). Par conséquent, le manuel prescrit une phase d'entraînement qui reprend la découverte dans un contexte plus formel et introduit avec le

concours des élèves un codage pour marquer les termes qui une fois regroupés permettent d'obtenir 10 (signes différents, couleurs, entourages, arbres de calcul...). Au cours de la longue séance d'entraînement qui suit (séance 10), un exercice sur les six proposés entraîne les élèves au regroupement de certains termes d'une écriture additive pour retrouver des dizaines cachées ou à trouver les dizaines dans l'écriture d'un nombre. À la fin de la période 3, le manuel suggère d'abord de faire, par le biais d'un exercice (séance 11), le point sur la capacité des élèves à repérer des dizaines cachées dans une suite additive, dans le but de la renforcer si besoin. Paradoxalement, l'exercice en lien avec notre objet d'étude proposé à l'évaluation de fin de période (séance 12) concerne la complétion d'égalités numériques lacunaires.

La treizième séance du scénario d'*Euromaths* constitue une deuxième phase dans l'apprentissage des procédures de calcul par sauts. En effet, les élèves ont déjà appris à calculer des sommes du type $a + b$ avec a quelconque et b compris entre 1 et 5. Le manuel propose maintenant un prolongement de cette procédure au calcul de $a + b$, lorsqu'avancer de b fait passer une dizaine avec a quelconque et b compris entre 1 et 10. Cette nouvelle méthode de calcul réfléchi par sauts comprend également deux étapes : d'abord le calcul du complément du nombre a à 10 (ou à la dizaine supérieure) et la décomposition du nombre b en deux termes, le premier terme étant le complément trouvé. Ensuite, l'addition de a au complément trouvé donne 10 auquel on ajoute le deuxième terme de la décomposition de b . Appliquée à l'addition $6 + 8$, la mise en œuvre de la procédure se déroule comme suit : $6 + 8 = (6 + 4) + 4 = 10 + 4 = 14$. Durant le temps de découverte, le manuel propose de calculer en parallèle des sommes semblables (comme $26 + 8$) dans un champ numérique plus élargi de manière à faire repérer aux élèves les similitudes dans les procédures en dépit de ce changement : $26 + 8 = (26 + 4) + 4 = 30 + 4 = 34$. En outre, des activités en calcul mental et sur la lecture de l'heure sans lien avec l'objet d'étude complètent cette séance et sont également proposées à la suivante.

Le travail sur les procédures réalisé en amont permet, à la séance 14, de finaliser l'étude de la table d'addition. Il s'agit maintenant de créer les conditions pour permettre aux élèves de retenir les tables d'addition pour les nombres compris entre 1 et 10, les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 et les doubles des nombres inférieurs à 10. Pour mener à bien cette troisième étape de mémorisation du répertoire additif, *Euromaths* prescrit d'abord une activité préparatoire à l'aide du jeu recto verso pour permettre aux élèves de prendre conscience qu'un résultat mémorisé permet d'en élaborer d'autres très rapidement. Comme dans les séances précédentes, ce jeu est repris pendant le temps de découverte. La séance se termine par deux exercices d'entraînement : l'un portant sur la restitution des résultats en cours de mémorisation en appui si nécessaire sur les doubles et l'autre sur la recherche de compléments.

Au cours des deux séances qui suivent, les activités préparatoires et situations d'apprentissage sont sans lien direct avec la notion étudiée. Le travail sur le calcul de sommes de deux nombres est poursuivi uniquement durant le temps de calcul mental. La quinzième séance consolide la mémorisation de l'ensemble du répertoire additif tandis que la seizième propose d'entraîner les élèves au calcul de sommes de deux nombres consécutifs (par exemple, $7 + 8$) après un rappel de la procédure avec appui sur les doubles. À la séance 17, les procédures de calcul étudiées sont réinvesties dans la résolution de problèmes additifs et soustractifs. Sur les quatre problèmes auxquels sont confrontés les élèves, deux sont en lien direct avec notre objet d'étude. Dans le premier, l'état initial et la transformation positive est connue, les enfants doivent déterminer l'état final. Le second est un problème de comparaison. Faisant suite à cette séance de réinvestissement, une longue séance d'entraînement (séance 18) est préconisée par le manuel. Quatre exercices concernent notre objet d'étude : des calculs dictés, une recherche de compléments à 10 et deux problèmes additifs.

Peu avant la fin de son scénario, *Euromaths* propose une séance de révision (séance 19) des différentes procédures de calcul étudiées qui vont du calcul mental automatisé au calcul réfléchi, puis à la technique de l'addition posée en colonnes. Son objectif étant de faire une synthèse de ces méthodes afin de permettre aux élèves d'établir le lien entre elles. Ainsi, les quatre questions posées au moment de la découverte leur offrent l'opportunité de repérer les résultats qu'ils connaissent par cœur et de ceux qu'ils savent reconstruire et de revenir entre autres, sur les procédures utilisées pour calculer des sommes de type $8 + 5$: appui sur les doubles et calcul par sauts. Pour conclure la séance, les élèves sont invités à compléter dans leur aide-mémoire, notamment des calculs par cœur ($7 + 3$; $5 + 7$), des calculs faciles ($24 + 1$; $35 + 10$), des calculs astucieux ($6 + 7$ à partir de $6 + 6$) et des calculs par sauts ($8 + 5$; $35 + 5$; $38 + 25$) qui sont ensuite corrigés collectivement. À la séance suivante (séance 20), *Euromaths* recommande de faire le point sur la capacité des élèves à mettre en œuvre les ces différentes procédures de calcul réfléchi par le biais d'une série de calculs à résoudre organisée en quatre exercices. Il s'en suit une longue séance d'entraînement de huit exercices (séance 21). Un seul d'entre eux est en lien avec notre objet d'étude et la tâche des élèves consiste à effectuer des additions en repérant des régularités (quelques exemples des additions à réaliser : $8 + 5$; $18 + 5$; $38 + 5$, etc.). Le tableau synoptique du projet d'enseignement d'*Euromaths* est détaillé en annexes III grille 32.

Par ailleurs, les objectifs intermédiaires anticipés et les éléments constitutifs de la compétence à acquérir au cours du cycle sont indiqués pour chaque séance (voir tableau synoptique du projet d'enseignement d'*Euromaths*- Annexes III Grille 32). Cependant, bien que la formulation des objectifs soit précise et leur libellé explicite, nous notons parfois une inadéquation entre l'intitulé de

la séance, son objectif et la notion réellement enseignée, ce qui peut être susceptible d'entraîner une perte de repères pour les enseignants. Pour exemple, prenons le cas de la séance 13. Elle s'intitule « Ajouter un nombre entre 1 et 10 (procédures de calcul par sauts) ». Son objectif est libellé comme suit « Passer du surcomptage à la décomposition du nombre à ajouter en s'appuyant, s'il le faut, sur 10 ou sur la dizaine supérieure » tandis que les élèves découvrent au cours de cette séance comment « calculer une somme de type $a + b$, avec a quelconque et b compris entre 1 et 10 », à l'aide de la procédure de calcul par sauts.

► Les contenus mathématiques du scénario

Au regard de l'itinéraire cognitif d'enseignement prescrit par *Euromaths*, le champ mathématique déterminé par ce manuel pour enseigner le calcul mental de sommes de type $a + b$ lorsqu'avancer de b fait passer une dizaine peut se résumer ainsi : mobilisation de procédures personnelles (dénombrement, recomptage sur les doigts, surcomptage) pour anticiper par le calcul le résultat de déplacements sur la piste des nombres, évaluation des distances d'un nombre aux deux dizaines qui l'encadrent pour préparer le calcul par sauts, procédure de calcul par sauts pour résoudre des sommes du type $a + b$, lorsqu'avancer de b fait passer une dizaine avec a quelconque et b compris entre 1 et 5, mémorisation des tables d'addition entre un nombre compris entre 1 et 10 et un nombre compris entre 1 et 5, regroupement de certains termes d'une écriture additive pour trouver des dizaines cachées, complétion d'égalités numériques lacunaires, procédure de calcul par sauts pour résoudre des sommes du type $a + b$, lorsqu'avancer de b fait passer une dizaine avec a quelconque et b compris entre 1 et 10, mémorisation des tables d'addition pour les nombres compris entre 1 et 10 et des décompositions additives des nombres inférieurs à 20, procédure de calcul réfléchi de sommes de deux nombres consécutifs (exemple $7 + 8$) avec appui sur les doubles, application des procédures de calcul réfléchi à la résolution de problèmes additifs, faire une synthèse des procédures de calcul pour additionner en fonction des nombres en jeu. Le descriptif détaillé des contenus mathématiques figure en annexes III grille 33.

b) Démarche d'enseignement des procédures préconisées par Euromaths

Du point de vue des auteurs du manuel, les procédures des élèves évoluent dans le temps avec l'acquisition de nouvelles connaissances et la pratique. Par conséquent, pour enseigner le calcul mental de sommes du type $a + b$, lorsqu'avancer de b fait passer une dizaine, ils préconisent une construction progressive des procédures de calcul réfléchi en partant des procédures personnelles des élèves : le surcomptage, le calcul par sauts et le calcul astucieux en appui sur les doubles. Tout d'abord, les élèves sont confrontés à une somme à effectuer. Ils recherchent son résultat à l'aide de leurs procédures personnelles. Durant cette phase de recherche, l'enseignant les sollicite, veille à ce qu'ils se sentent concernés et relance la recherche. La méthode *Euromaths* conseille ensuite de

recueillir les informations sur les procédures des élèves et de procéder à une médiation individuelle, si besoin. Dans un deuxième temps, une vignette illustre la mise en œuvre de la nouvelle procédure de calcul réfléchi à découvrir par deux personnages du manuel. Cette procédure est reformulée par les élèves pour s'assurer de leur compréhension. Il s'en suit une mise en commun ou « correction » au cours de laquelle les procédures des élèves sont argumentées, comparées, validées ou rejetées. Quand c'est possible, le résultat attendu est contrôlé par une action effective. Enfin, lors de la phase de conclusion et d'institutionnalisation, le professeur officialise certains éléments avec le concours des élèves. Pour conclure, au regard de ces éléments et en nous appuyant sur la typologie de Rey (2001), nous concluons que le dispositif prescrit par les auteurs du *Cap maths* est de type « problème-compréhension – application ».

c) Stratégies globales d'enseignement

- 1) Dispositif pédagogique de type « problème – compréhension – application » ;
- 2) Proposer une activité préparatoire, le jeu du Poney ;
- 3) Installer les prérequis : suite numérique jusqu'à 40, anticiper par le calcul (addition, soustraction, addition à trou) le résultat de déplacements sur la piste des nombres en utilisant ses procédures personnelles (surcomptage) et évaluer les distances d'un nombre aux deux dizaines qui l'encadrent pour préparer le calcul par sauts ;
- 4) Introduire la notion à enseigner par le biais d'une somme dont les élèves doivent chercher le résultat avec leurs procédures personnelles pour faciliter leur décentration ;
- 5) Procéder à une médiation individuelle durant la phase de recherche si besoin ;
- 6) Proposer aux élèves une illustration « mettant en scène » deux personnages appliquant la nouvelle procédure qu'ils doivent ensuite reformuler ;
- 7) Mettre en commun les procédures variées trouvées pendant la phase de recherche que les élèves argumentent, comparent, valident ou rejettent avec l'aide du professeur puis contrôlent le résultat attendu par une action effective sur la piste numérique ;
- 8) Institutionnaliser : le professeur officialise certains éléments, formule ce qui a été découvert, ce que l'on a appris et fait formuler oralement certains points précis par les élèves eux-mêmes ;
- 9) Proposer dans l'immédiat un exercice pour mettre en application la nouvelle procédure puis une longue phase d'entraînement légèrement différée dans le temps ;
- 10) Procéder à une évaluation formative ;
- 11) Procéder à un bilan en fin de période pour évaluer les compétences des élèves ;
- 12) Réinvestir les procédures enseignées dans la résolution de problèmes additifs ;

- 13) Faire une synthèse des procédures de calcul étudiées tout au long de l'année pour additionner en fonction des nombres en jeu ;
- 14) Conserver une trace écrite de toutes les procédures de calcul réfléchi étudiées ;
- 15) Procéder à une évaluation sommative sur la mémorisation du répertoire additif.

d) *Structure, format et type de séances du scénario*

► Structure et durée des séances

Par le terme « séance », nous désignons l'apprentissage des mathématiques au quotidien prescrit par le manuel. Pour l'enseignement du calcul mental de sommes de type $a + b$ lorsqu'avancer de b fait passer une dizaine, *Euromaths* programme, évaluations comprises, vingt-et-unes séances et prévoit d'y consacrer 37% des apprentissages de la période 3 (douze séances), 20% des apprentissages de la quatrième période (six séances) et 10% de la cinquième (3 séances) - (voir grille 32 annexes III). En corollaire, l'enseignement de notre objet d'étude s'étale sur les trois dernières périodes de l'année et concerne 13% des leçons prévues par le manuel pour le cours préparatoire. D'un point de vue global, mis à part dans les séances d'entraînement ou d'évaluation, on retrouve tout au long de ce scénario trois grands moments d'enseignement : un temps de calcul mental (≈ 15 min), un temps d'apprentissage (≈ 30 min) et un temps d'entraînement (≈ 20 min). L'une des particularités de la méthode *Euromaths* est de proposer tout au long de son scénario de longues séances d'entraînement constituées uniquement d'exercices (voir schéma 27).

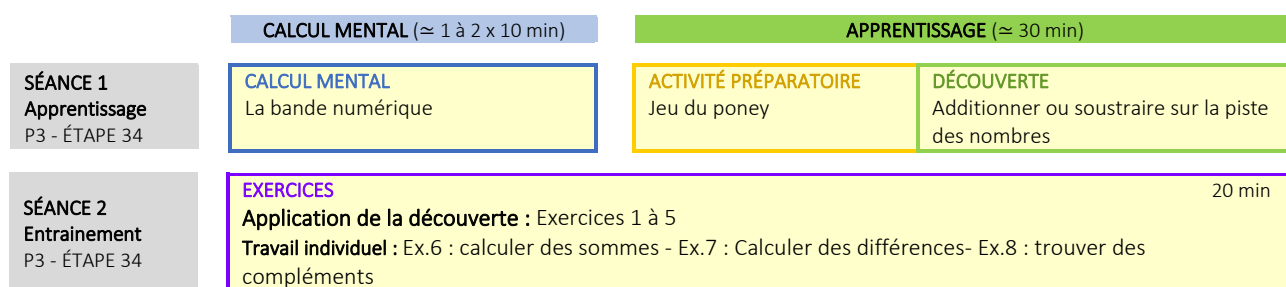


Schéma 27 : Structure des séances 1 et 2 du scénario d'*Euromaths*

Le schéma supra met en évidence deux structures différentes dans l'organisation des séances selon qu'elles introduisent une nouvelle procédure ou entraîne les élèves à sa mise en application (voir plus de détails, grille 32 annexes III). Cette variété dans la structure des séances s'associe à une différence dans la durée des différentes séances du scénario, ce que confirme également le schéma supra. Cependant, cela reste difficile d'évaluer, de manière précise le temps prévu par le manuel pour chaque séance car les prescriptions données, à ce sujet, restent, pour le moins, approximatives comme l'indique cet extrait du livre du professeur : « Généralement, les découvertes demandent plus de temps (de l'ordre d'une demi-heure) que les entraînements (de l'ordre de 20 minutes). Quant au calcul

mental, nous proposons au professeur d'y consacrer une séance d'une dizaine de minutes une ou deux fois par jour, éventuellement déconnectée de la séance de mathématiques » (p.11). Néanmoins, les indications apportées par le guide pédagogique nous permettent d'avoir une idée de la taille des séances du scénario (voir grille 34 en annexes III). Ainsi, *Euromaths* prévoit environ 8h30 min pour faire apprendre aux élèves le calcul réfléchi de sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine, soit environ 2h20 min (27%) de calcul mental, 4h30 min environ (53%) pour l'apprentissage des procédures de calcul réfléchi et environ 1h40 min (20%) d'entraînement. En outre, la majorité des séances du scénario d'*Euromaths* (87%) sont de longue durée.

SÉANCES	Type	Structure de la séance					Total	Taille de la séance
		Calcul mental	Familiarisation	Activité préparatoire	Découverte	Exercices		
Séance 1	Apprentissage	1 à 2 x 10 min	-	30 min	-	-	≈ 50 min	L (> 15min)
Séance 2	Entraînement	-	-	-	-	20 min	≈ 20 min	L (> 15min)

Tableau 25 : Durée des temps d'enseignement consacrés à notre objet d'étude (hors bilans et remédiations) dans *Euromaths* (voir détails grille 34 en annexes III)

► Type de séances

	Effectifs	Pourcentage	Durée
Séances de consolidation	2	9%	≈ 1 ou 2 x 10 min
Séances de révision	1	5%	≈ 30 min
Séances d'apprentissage	7	33%	≈ 50 min
Séances d'entraînement	5	24%	≈ 20 min
Séances d'évaluation	5	24%	?
Séances de réinvestissement	1	5%	≈ 30 min
TOTAL	21	100%	-

Tableau 26 : Type des séances du scénario d'*Euromaths*

Les séances d'apprentissage permettant de découvrir de nouvelles procédures de calcul réfléchi sont les plus fréquentes (7 sur 21). Ce sont également les plus longues avec une durée avoisinant les cinquante minutes. Viennent ensuite les séances d'entraînement dont la durée prescrite approximative est de vingt minutes. Elles représentent à parts égales avec les séances d'évaluation 48 % des séances prévues par le manuel dans son projet d'enseignement. Les plus rares sont les séances de révision (1 sur 21) et de réinvestissement (1 sur 21) qui ont néanmoins une plus grande taille que les séances d'entraînement et peuvent être prolongées pendant trente minutes. Enfin, les séances de consolidation au cours desquelles les activités proposées relèvent du calcul mental occupent une plage horaire d'une dizaine de minutes, une à deux fois par jour.

► Format des séances

D'un point de vue global, dans les séances du projet d'*Euromaths*, on retrouve en général trois grands moments. Il s'agit des activités rituelles telles que le calcul mental (R), des temps d'introduction de nouvelles procédures (N) et des temps d'entraînement (E). À ces trois moments, vient s'ajouter un temps de familiarisation avec des notions sans lien direct avec le nouvel apprentissage. Ainsi, en reprenant à notre compte, la méthodologie et la nomenclature utilisée par Grapin et Mounier (2015) dans leur outil d'analyse des manuels que nous complétons par un item pour les temps d'entraînement (E), nous avons réparti dans le tableau suivant les différentes séances du scénario d'*Euromaths* selon leur format.

	R, N	E	R	Bilan	Total
Effectif	14	5	2	5	21
%	43%	24%	9%	24%	100%

Tableau 27 : Répartition des séances selon leur format

Mis à part les bilans et les séances d'entraînement, *Euromaths* prescrit un temps de calcul mental dans plus de la moitié des séances de son scénario (52%). Certaines séances sont consacrées uniquement aux exercices d'entraînement (5 sur 21) ou au calcul mental (2 sur 21). Cependant, aucune séance de ce projet d'enseignement ne se limite seulement à l'introduction d'un nouvel apprentissage. Cette introduction s'accompagne toujours d'un moment de calcul mental et 3 fois sur 9 d'un temps de familiarisation avec un autre savoir sans lien direct avec la notion étudiée.

e) *Les activités proposées au cours du scénario*

Au regard des éléments apportés par le tableau infra (tableau 28 détaillé en annexes III Grille 35), *Euromaths* propose soixante-quatre activités pour faire apprendre les additions mentales de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine. Vingt-quatre d'entre elles contribuent à l'introduction des nouvelles procédures de calcul réfléchi, douze au calcul mental et aux évaluations tandis que les activités d'entraînement recommandées par le manuel sont au nombre de 16. En calcul mental, 59% des activités renforcent la connaissance de la suite numérique orale et écrite, 24% consolident les procédures de calcul réfléchi et 17 % visent la mémorisation du répertoire additif. En conséquence, même si elles facilitent la mise en œuvre du calcul par sauts, 16% des activités proposées en calcul mental n'en sont pas réellement (trouver un nombre caché sur la piste numérique : 4% ; comparer ou ordonner trois nombres dans l'ordre croissant ou décroissant : 12%). D'autre part, 50% des activités prescrites durant les temps d'apprentissage concernent le calcul réfléchi de sommes à l'aide des procédures personnelles (2 sur 12), des procédures de calcul par sauts (9 sur 12) ou en

appui sur les doubles (1 sur 12). L'autre moitié des activités est, elle, consacrée au travail sur les notions servant de points d'appui pour développer les procédures de calcul réfléchi, notamment le regroupement des termes d'une écriture additive pour former une dizaine (8%), l'évaluation d'un nombre aux dizaines qui l'encadrent (4%) et à la mémorisation du répertoire additif (38%). Cette dernière concerne 12% des activités d'entraînement et les 88% restants sont alloués à l'exercice des nouvelles procédures de calcul découvertes (38%) et au renforcement des points d'appui (50%).

En ce qui concernent les bilans intermédiaires et de fin de période, ils évaluent, les activités proposées évaluent tant les points d'appui (57%) que la mémorisation du répertoire additif (33%). En corollaire, 63% des activités prévues sont consacrées à l'apprentissage des procédures de calcul (36%) et à la mémorisation du répertoire additif (27%). Les 37% restantes ont pour objet la consolidation des points d'appui (compléments à 10, décompositions additives, recherche de dizaines cachées, etc.) - (27%) et renforcement de la connaissance de la suite numérique écrite et orale (10%). Ce travail sur la numération fait que 16% des activités proposées en calcul mental n'en sont pas réellement. Néanmoins, elles jouent un rôle important dans la mise en application des procédures de calcul par sauts. Pour finir, on peut dire que l'ensemble des activités proposées dans ce scénario sont susceptibles de permettre aux enseignants d'atteindre les objectifs visés.

	CALCUL MENTAL		APPRENTISSAGE		ENTRAÎNEMENT		BILAN		TOTAL	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
ACTIVITÉS										
TOTAL	12	19%	24	38%	16	24%	12	19%	64	100%

Tableau 28 : Répartition des activités proposées dans le scénario d'Euromaths
(voir détails en annexes III Grille 35)

Par ailleurs, l'une des particularités de la méthode *Euromaths* est sa volonté de rendre les moments de calcul mental et les activités préparatoires efficaces et divertissants en proposant plusieurs formes de travail, et notamment des jeux. En effet, tout au long de ce scénario, six jeux différents ont servi de supports d'apprentissage :

1. **La bande numérique** pour « travailler la structuration de la suite numérique chiffrée jusqu'à 40. Un ou plusieurs nombres sont cachés (par un papier collant) » et les élèves doivent les identifier (séance 1) ;
2. **Les jeux de mémoire** pour « entraîner les élèves à mémoriser plusieurs nombres sur un temps court, de manière à pouvoir plus tard effectuer mentalement des calculs sans difficulté ». Ils offrent également l'occasion de faire travailler les propriétés des nombres et des opérations : mise en ordre, notion de successeur, de prédécesseur, ajout ou retrait de 1) – (séances 4, 5, 15, 17 et 19) ;

3. **Le jeu du poney** qui permet aux élèves de s'entraîner à calculer mentalement des sommes et des différences en anticipant les déplacements (en avant ou en arrière sur la piste des nombres). Ils peuvent ensuite valider leurs résultats de manière autonome, en réalisant des sauts effectifs sur la piste (séances 1, 3, 4 et 13) ;
4. **Le jeu de cartes recto verso** qui aide les élèves à mémoriser les tables d'addition. Chaque jeu est composé d'un nombre quelconque de cartes. Chaque carte porte au recto une écriture additive, au verso le résultat. La validation est « assurée » par le jeu, ce qui permet une grande autonomie (séances 5, 9, 14) ;
5. **Le jeu du furet** au cours duquel les élèves, à tour de rôle, disent une suite de nombre suivant une règle choisie (de 2 en 2 dans le scénario) – (séances 13 et 14) ;
6. **Le jeu de la boîte opaque** (remplacée dans le scénario d'*Euromaths* par un seau et des coquillages) dont le but est d'entraîner les élèves à calculer mentalement des sommes dans un champ numérique restreint tandis que le matériel permet la validation (séance 9).

D'autre part, le nombre d'activités proposées par *Euromaths* varie selon le type de séance mise en œuvre. En effet, le nombre moyen d'activités prescrites pour les séances d'apprentissage et d'entraînement est de 3. Mais, c'est au cours des séances de réinvestissement qu'il est le plus important avec cinq activités proposées en moyenne. En ce qui concerne, celles qui sont relatives à l'évaluation, le manuel recommande en moyenne deux activités. Enfin, les séances de révision et de consolidation comptent en moyenne une seule activité. Pour plus de détails, voir grille 36 en annexes III.

	Effectifs	Pourcentage	Nombre total d'activités	Nombre moyen d'activités / séance
Séances de consolidation	2	9%	2	1,00
Séances de révision	1	5%	1	1,00
Séances d'apprentissage	7	33%	24	3,43
Séances d'entraînement	5	24%	16	3,20
Séances d'évaluation	5	24%	12	2,4
Séances de réinvestissement	1	5%	5	5,00
TOTAL	21	100%	64	3,05

Tableau 29 : Nombre d'activités en fonction du type de séance

f) *La gestion de l'institutionnalisation*¹⁵⁴ préconisée par le manuel

Euromaths préconise une mise en commun des procédures variées utilisées par les élèves pour leur permettre, avec l'aide de l'enseignant, de les argumenter, de les comparer et de les valider (par une action effective quand c'est possible) ou de les rejeter. Ce n'est qu'après cette phase que la nouvelle

¹⁵⁴ Pour rappel, « la phase d'institutionnalisation est le moment clé de la synthèse, qui permet de passer de la situation d'apprentissage à la formalisation du savoir universel, transférable » (Définition extraite du dossier de la DGESCO, « Enseigner plus explicitement, Situations et gestes professionnels au quotidien », 2016).

procédure à découvrir est enseignée par le biais d'une mise en scène, reformulée par les élèves pour s'assurer de leur compréhension. Pour les auteurs de ce manuel, les connaissances construites par le travail de confrontation à des situations d'apprentissage ne peuvent se rattacher aux connaissances déjà là et devenir des savoirs partagés, que si le professeur officialise certains éléments. Par conséquent, sur les sept séances d'apprentissage constituant son scénario, la méthode *Euromaths* prescrit pour quatre d'entre elles une phase de conclusion et d'institutionnalisation. Ainsi, comme on peut le voir dans la grille 37 en annexes III, ce moment est collectif : « le professeur formule ce qui a été découvert, ce que l'on a appris et fait formuler oralement certains points précis par les élèves eux-mêmes » (Livre du professeur, 2011, p.12). Cependant, au moment où les procédures de calcul réfléchi sont enseignées, *Euromaths* ne propose ni d'institutionnaliser les conditions dans lesquelles elles s'avèrent plus ou moins "économiques", ni de travailler sur l'écriture des règles en incluant leur domaine de validité, ni de traces écrites. Les différents moments d'institutionnalisation préconisés par *Euromaths* sont détaillés à la grille 37 en annexe III. À vrai dire, certains de ces éléments de gestion de l'institutionnalisation sont bel et bien abordés par le manuel mais de manière implicite et différée dans le temps. En effet, à la fin de la période 5, la méthode *Euromaths* propose une séance de révision des différentes procédures de l'addition dont l'objectif est de « faire une synthèse des procédures de calcul pour additionner en fonction des nombres en jeu » [...]. Le travail proposé dans cette étape permet de faire le lien entre les différentes procédures de calcul étudiées qui vont du calcul mental automatisé au calcul réfléchi, puis à la technique » (Livre du professeur, 2011, p.166). Cette synthèse est conclue par la complétion de l'aide-mémoire des élèves, qui comme on peut le voir dans l'extrait suivant, présente les conditions dans lesquelles les procédures s'avèrent « les moins coûteuses », inventorie les différentes procédures, tout en constituant une trace écrite. Toutefois, cet aide-mémoire ne propose qu'une seule représentation des procédures (voir institutionnalisation de la séance 19 annexes III Grille 37).

5.4.5. Le scénario de *J'apprends les maths*

a) L'itinéraire cognitif d'enseignement et les contenus mathématiques

Pour faire apprendre aux élèves à calculer des sommes de deux nombres inférieurs à 10, les auteurs de *J'apprends les maths* prennent le parti d'enseigner le comptage et le calcul sur les objets (voir projet d'enseignement détaillé en annexes III grille 38). En conséquence, la comparaison entre ces deux stratégies apparaît comme un élément fondamental dans le projet d'enseignement proposé par le manuel. Selon eux, « au-delà de 5 objets, calculer avec ces objets, c'est les avoir organisés à l'aide des groupements de 5 et de 10, et utiliser cette organisation pour trouver le résultat. L'opposition entre comptage et calcul est donc considérée comme une opposition entre organisation et inorganisation » (Livre du maître, 2009, p.19). Ainsi, en accord avec cette considération, la première

séance du scénario introduit le calcul de la somme de deux nombres quand l'un est 5 et l'autre compris entre 6 et 9 par une comparaison entre la stratégie du « retour aux cinq » et le comptage.

SÉANCE 1 Apprentissage P3 – L94	ACTIVITÉS DE HAUT DE PAGE 1. Furet de 10 en 10 avec la planche 2. Soustractions mentales du type $9 - 2$	APPRENTISSAGE Le retour aux 5 : comparaison du comptage et du calcul Somme de deux nombres : l'un est 5 et l'autre compris entre 6 et 9	ENTRETIEN Ecrire les nombres en lettres Nombres ≤ 10

Comme le montre le schéma suivant (28), la collection de noisettes de l'écureuil est inorganisée, ce qui l'oblige soit à recompter l'ensemble des noisettes une à une, soit à « surcompter au-dessus de 7 » en ne comptant que celles qui sont à l'extérieur du chariot. En revanche, Dédé organise sa collection en groupes de 5 jetons ce qui lui permet de remplir un compartiment d'une boîte de Tchou et de penser $7 + 5$ sous la forme $5 + 5 + 2$. Il s'agit donc d'une stratégie de décomposition-recomposition qui amène à calculer $7 + 5$ sous la forme : $5 + 7 = 10 + 2$.



Schéma 28 : Mise en scène de la première phase d'apprentissage de la séance 1 (leçon 94) dans *J'apprends les maths avec Tchou* (2009, p.134)

Cette première phase d'apprentissage est immédiatement suivie de la mise en place du processus de mentalisation dont l'objectif est de permettre aux élèves, à terme, de se passer des objets pour mieux progresser vers le calcul mental. Dans cette activité, ils sont invités à simuler mentalement un ajout que Dédé réalise de façon masquée (voir schéma 29). Pour les auteurs de *J'apprends les maths*, ce choix pédagogique oblige l'élève à reconstituer mentalement les données correspondant aux différentes étapes de la procédure et à enchaîner ces étapes ». Ainsi, par voie de conséquence, l'élève qui est capable de mentaliser cette procédure devient aussi capable de la mettre en œuvre, de manière autonome.

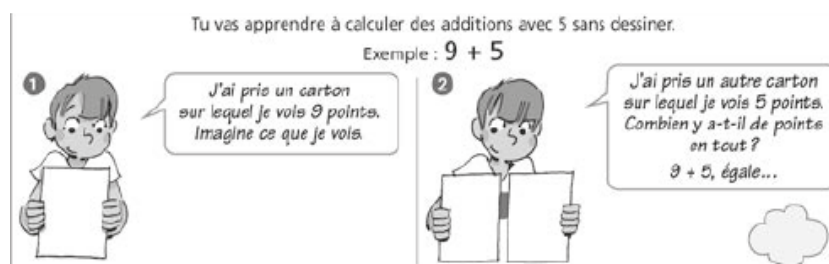


Schéma 29 : Illustration du processus de mentalisation du calcul sur les objets de la leçon 94 dans *J'apprends les maths avec Tchou* (2009, p.134)

Pour finir, le manuel, complète cette première leçon en amont par des activités de haut de page, le furet de 10 en 10 avec la planche, des soustractions mentales de type $9 - 2$ et en aval par un entretien sur l'écriture littérale des nombres inférieurs à 10. Au cours des trois séances suivantes (séances 2, 3 et 4), le manuel prescrit l'entraînement et la consolidation de la stratégie du « retour aux cinq » durant les temps de calcul mental et d'entretien. À la cinquième séance, un exercice sur les cinq proposés lors du bilan terminal de fin de période évalue le niveau d'acquisition de cette stratégie par les élèves. Pour donner suite à cette évaluation, *J'apprends les maths* propose en séance 6, une phase de consolidation des procédures de calcul déjà connues en confrontant les élèves aux sommes du type $6 + 3$, $10 + n$ et $9 + 5$.

À la séance 7, les activités de haut de page poursuivent l'entraînement des élèves à la mémorisation des relations multiplicatives (groupes de 2, 5 et 10) et à la résolution mentale des additions du type $8 + 5$ ou $5 + 8$. Le moment d'apprentissage lui, revient sur la stratégie du « retour aux 5 » qui est étendue aux « grands doubles » de $6 + 6$ à $9 + 9$. D'après *J'apprends les maths*, l'apprentissage de cette nouvelle procédure de calcul réfléchi ne présente pas de difficultés particulières dans la mesure où « les nombres sont identiques et leur composition l'est aussi. Pour $7 + 7$ par exemple, si l'on effectue un retour aux 5, cela revient à calculer $5 + 2 + 5 + 2$, c'est-à-dire $10 + 4$. Les deux nombres qui ne sont pas 5 forment un « petit double » (ici $2 + 2$), c'est-à-dire une addition bien connue à ce moment-là », expliquent les concepteurs du manuel. Ainsi, à l'instar de la séance 1, la méthode *J'apprends les maths* recommande d'abord aux enseignants de faire comparer la stratégie du « retour aux 5 » au comptage avant de proposer aux élèves les premiers calculs tout en les incitant d'une part, à évoquer les constellations de Dédé correspondantes et d'autre part, à chercher de combien le résultat dépasse 10 en simulant mentalement l'action de regrouper les deux 5 que l'enseignant dit réaliser. Dans l'activité suivante, le manuel propose d'entamer un travail sur la mémorisation des résultats faisant écrire la table des doubles jusqu'à $10 + 10$. Ultérieurement (à la séance 10), lors des activités complémentaires, cette table, organisée verticalement avec les égalités notées dans l'ordre, est affichée puis analysée avec les élèves avant d'être travaillée et mémorisée.

Les activités de haut de page et d'entretien des séances 8 et 9 poursuivent la consolidation des sommes du type $8 + 5$ et $10 + n$ ainsi que la mémorisation des doubles jusqu'à $10 + 10$. En ce qui concerne les apprentissages, *J'apprends les maths* propose aux enseignants d'introduire à la leçon 9, un nouveau jeu, « n , c'est 1 et encore... » pour préparer les élèves à l'apprentissage du passage de la dizaine qui sera enseignée à la séance suivante. L'intérêt de ce jeu est de favoriser la mémorisation des décompositions dans un contexte proche de celui dans lequel le passage de la dizaine sera enseigné ce qui facilitera également la mobilisation de ces connaissances lorsque l'élève sera amené à déterminer de combien $9 + n$ dépassera 10. Dès que ces prérequis sont installés, la méthode *J'apprends les maths* conseille d'enseigner, dans la foulée, la stratégie de calcul dite du « passage de

la dizaine » dans les cas de la forme $9 + n$ (séance 10). Selon lui, « cette stratégie facilite le calcul des additions de deux nombres quand l'un est très proche de 10 : on complète ce nombre à la dizaine en « empruntant » le complément à l'autre nombre. On se ramène alors à un calcul de la forme $10 + n$, qui est plus facile. En outre, le manuel prescrit un cadre imagé de 10, la boîte de Tchou » dont la dernière case est vide quand elle contient 9 jetons, ce qui, d'après le manuel, « "appelle" en quelque sorte le complément à 10 » et fait de la boîte de Tchou « un outil pédagogique particulièrement adaptée pour enseigner le passage à la dizaine » (Livre du maître CP, 2009, p.146).

À la séance 11, les élèves s'exercent aux groupements de 2, 5 et 10 et aux additions mentales du type $8 + 5$ ou $5 + 8$. Les activités de haut de page de la leçon suivante, elles, approfondissent la connaissance de la suite numérique à l'aide du jeu du furet « en reculant » et poursuivent le travail de mémorisation des décompositions des nombres à l'aide du jeu « n , c'est 1 et encore... » tandis que les activités d'entretien reviennent sur les sommes du type $5 + 5 + 5$ ou $10 + 5 + 5 + 3$. Les nouveaux apprentissages sont, eux, consacrés au passage de la dizaine et à la commutativité de l'addition. Cependant la démarche d'enseignement reste la même que dans les séances précédentes : d'abord une étude comparative du comptage et de la stratégie du « passage de la dizaine » suivie d'une série d'additions à résoudre en recourant à la mentalisation pour amener les élèves à calculer en se passant des objets. Pour favoriser l'appropriation de la stratégie du « passage de la dizaine », le manuel propose en séance 13, une tâche de « simulation mentale d'un passage de la dizaine que l'enseignant effectue de manière masquée » pour calculer mentalement les sommes du type $9 + n$. Plus concrètement, « l'enseignant effectue avec le matériel un passage de la dizaine qu'il est seul à voir et il demande aux élèves d'imaginer ce qu'il voit et de calculer mentalement les conséquences de ses actions : pour compléter la boîte, il a été obligé de prélever un certain nombre de jetons dans sa main ; combien en a-t-il encore dans la main ? ». Cet exercice de simulation est repris dans les activités de haut de page de la séance 14.

Au début de la séance 15, *J'apprends les maths* prévoit de renforcer la connaissance de la comptine numérique à l'aide du jeu du furet et d'entraîner les élèves à l'exercice de la simulation mentale entamée précédemment pour résoudre des additions mentales du type $9 + n$. C'est également à ce moment de son scénario que l'ouvrage prévoit d'introduire une nouvelle procédure de calcul réfléchi pour calculer les sommes de type $8 + n$. Pour ce faire, le manuel opte pour une démarche d'enseignement similaire à celle mise en œuvre pour faire apprendre la stratégie de passage à la dizaine dans les cas du type $9 + n$. Ainsi, il propose d'abord aux enseignants de préparer cet apprentissage, en introduisant le jeu « n , c'est 2 et encore... » (séance 15), puis, d'étendre cette stratégie aux cas où l'un des deux nombres est 8 ou 7. Lors de la mise en application de la procédure, le manuel préconise de suggérer aux élèves l'évocation d'une boîte qu'on complète avec 2 jetons (3

dans le cas $7 + n$) et qu'on ferme (séance 16). En outre, à l'instar des situations d'apprentissage précédentes, le professeur amène l'élève à chercher « "de combien ça dépassera dix" et la réponse est, dans un premier temps du moins, exprimée d'abord sous la forme "dix et encore quatre", par exemple, avant d'être traduite en "quatorze" » (Livre du maître, 2009, p. 152). Pour favoriser la mentalisation de cette stratégie de calcul, la méthode *J'apprends les maths* prescrit, à la séance 18, une « tâche de "simulation mentale d'un passage de la dizaine que l'enseignant réalise de façon masquée" » (ibid.). En parallèle, tout au long des séances 15 à 19 décrites supra, la maîtrise de la comptine numérique, les décompositions « n , c'est 2 et encore... », les moitiés, la table des doubles jusqu'à $10 + 10$ ainsi que les additions mentales du type $9 + n$ sont renforcées et entretenues.

De la vingtième à la vingt-quatrième leçon de son projet d'enseignement, le manuel programme l'entraînement et la consolidation simultanés des additions mentales de type $8 + n$ et du type $9 + n$ tout en approfondissant, en parallèle, la connaissance de la suite numérique avec le jeu du furet. Lors du bilan terminal de la période 4, deux exercices sur les six proposés vérifient le niveau d'acquisition des élèves sur l'objet d'étude : l'un porte sur les calculs du type $9 + n$, $8 + n$ et $7 + n$ tandis que l'autre contrôle la mémorisation des doubles jusqu'à $10 + 10$ (voir grille 38 en annexes III). Par ailleurs, tout au long de son scénario, *J'apprends les maths* introduit deux activités complémentaires pour aider à la mémorisation du répertoire additif que l'enseignant peut soumettre régulièrement à ses élèves en plus des activités programmées dans le fichier. Celle recommandée en période 4 vise l'usage d'une table des doubles qui est analysée collectivement, affichée au fond de la classe et dont la maîtrise est fréquemment contrôlée par des calculs rapides. La deuxième activité, prescrite pour la période 5, prend la forme d'un jeu, le « Mémoplus » qui permet d'entraîner les principaux calculs du type $9 + n$, $8 + n$ et $7 + n$ avec passage de la dizaine à l'aide de 25 cartons sur lesquels, au recto, figure une addition, et, au verso, son résultat.

En ce qui concerne, la découverte et l'utilisation du répertoire additif, *J'apprends les maths* fait le choix de les différer à la fin de la période 5 au moment où les élèves ont déjà acquis des stratégies permettant de retrouver chacun des résultats : passage de la dizaine et retour aux cinq, pour l'essentiel (séance 26). En outre, le manuel propose aux enseignants d'amener les élèves à construire un répertoire additif différent de celui qui est le plus souvent utilisé (la table de Pythagore) et dont le double avantage est de permettre d'une part, d'accéder aux décompositions d'un même nombre par une lecture en ligne et d'autre part, de s'exercer à la mémorisation des tables de 9, 8, 7 et 6 en lisant en colonnes. Enfin, le scénario de ce manuel est finalisé par deux dernières séances dont les activités de haut de page sont en partie consacrées à la consolidation des additions mentales de type $9 + n$ et $8 + n$.

► Les contenus mathématiques du scénario

Au regard de l'itinéraire cognitif d'enseignement prescrit par *J'apprends les maths*, le champ mathématique déterminé par ce manuel pour enseigner le calcul mental de deux nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine peut se résumer ainsi : sommes de deux nombres : l'un est 5 et l'autre compris entre 6 et 9 (le retour aux 5), sommes du type $6 + 3$ ou $3 + 6$, sommes du type $10 + n$ ou $n + 10$, « les grands doubles » de $6 + 6$ à $9 + 9$, passage de la dizaine du type $9 + n$, $8 + n$ et $7 + n$, écritures additives (n , c'est 1 et encore ; n , c'est 2 et encore), compter de 10 en 10, commutativité et associativité de l'addition, tables des doubles, Moitiés et problème de partage, mémorisation du répertoire additif (voir plus de détails en annexes III Grille 39).

b) Démarche d'enseignement du calcul réfléchi

La démarche d'enseignement de *J'apprends les maths* vise l'apprentissage des procédures de calcul réfléchi le plus souvent utilisées dans la résolution des additions mentales avec franchissement de la dizaine : « le retour aux cinq » et le « passage de la dizaine ». Dans cette optique, « l'option pédagogique fondamentale » retenue par le manuel consiste à faire comparer le comptage et le calcul sur les objets. Ces derniers étant dans le cadre de ce scénario la boîte de Tchou pouvant contenir jusqu'à dix jetons alignés et les constellations construites à l'aide du cinq (comme il est représenté sur le dé). À vrai dire, la méthode prescrite par *J'apprends les maths* pour enseigner « le retour aux cinq » permettant de calculer mentalement des sommes de type $5 + n$ et « les grands doubles » de $6 + 6$ à $9 + 9$ est la même. D'abord, faire comparer la stratégie de calcul réfléchi à apprendre au comptage pour amener les élèves à comprendre qu'au-delà de 5 objets, calculer avec ces objets, c'est les avoir organisés à l'aide des groupements de 5 et de 10, et utiliser cette organisation pour trouver le résultat. Par conséquent, l'opposition entre comptage et calcul est présentée aux élèves comme une opposition entre organisation (qui permet de trouver le résultat de manière sûre et économique) et inorganisation (plus chronophage et source d'erreurs éventuelles). Ensuite, à partir de calculs à effectuer, l'enseignant amène les élèves à mentaliser, la nouvelle stratégie en évoquant à la fois les constellations de Dédé correspondant à chaque terme de l'addition et l'action de regrouper les deux 5 (que l'enseignant dit réaliser sans montrer ce qu'il fait) avant de chercher de combien le résultat dépasse 10.

En ce qui concerne les sommes du type $9 + n$, $8 + n$, $7 + n$, le mode opératoire pour enseigner la stratégie du « passage de la dizaine » reste le même. Cependant, la comparaison entre la stratégie de calcul et le comptage est précédée d'un jeu qui entraîne les élèves à la décomposition des nombres sous la forme « n , c'est 1 et encore » (avant d'aborder les sommes du type $9 + n$), « n , c'est 2 et encore » (avant d'aborder les sommes du type $8 + n$) et « n , c'est 3 et encore » (avant d'aborder les sommes du type $7 + n$). Ensuite, dès que l'opposition entre le comptage et le « passage de la dizaine »

a été étudiée, des tâches de simulation mentale de cette stratégie réalisée par l'enseignant de manière masquée sont proposées aux élèves pour leur permettre de se l'approprier. Dans le cas de $8 + 6$, par exemple, il s'agit d'inciter les élèves à évoquer une boîte de Tchou qu'on complète avec 2 jetons (car l'addition est de type $8 + n$) et qu'on ferme. Puis, ils cherchent « "de combien ça dépassera dix" et la réponse est, dans un premier temps du moins, exprimée d'abord sous la forme "dix et encore quatre", par exemple, avant d'être traduite en "quatorze" ». En parallèle, tout au long du scénario, le manuel engage un travail sur la mémorisation de la table des doubles jusqu'à $10 + 10$. Toutefois, la mémorisation du répertoire additif est différée à la fin de la période 5, une fois que toutes les procédures de calcul réfléchi programmées pour l'année du CP ont été enseignées et que les élèves sont capables de retrouver chacun des résultats en mettant en œuvre les stratégies apprises. Ainsi, au regard de tous ces éléments et en nous appuyant sur la typologie de Rey (2001), nous concluons que le dispositif pédagogique prescrit par les auteurs de *J'apprends les maths* est de type 2 : « observation – compréhension - application ».

c) *Stratégies globales d'enseignement*

- 1) Mettre en œuvre un dispositif pédagogique de type 2 : « observation – compréhension - application ».
- 2) Comparer les stratégies de calcul sur les objets au comptage et présenter cette différence aux élèves comme une opposition entre organisation (qui permet de trouver le résultat de manière sûre et économique) et inorganisation (plus chronophage et source d'erreurs éventuelles).
- 3) Enseigner la stratégie du « retour aux cinq » pour apprendre aux élèves à calculer des sommes du type $5 + n$ et les « grands doubles » de $6 + 6$ à $9 + 9$.
- 4) Proposer des activités complémentaires pour favoriser la mémorisation de la table des doubles jusqu'à $10 + 10$: utilisation de la table des doubles et jeu *Mémoplus*.
- 5) Développer des points d'appui : faire apprendre par le jeu à décomposer des nombres sous la forme « n , c'est 1 et encore » ou « n , c'est 2 et encore » ;
- 6) Enseigner la stratégie du « passage de la dizaine » pour apprendre aux élèves à calculer des sommes du type $9 + n$, $8 + n$, $7 + n$, $6 + n$ et $5 + n$.
- 7) Proposer aux élèves des tâches de simulation mentale des stratégies que l'enseignant réalise de manière masquée pour leur permettre de se les approprier.
- 8) Procéder à un bilan après l'enseignement de chaque stratégie de calcul réfléchi.
- 9) Proposer en fin d'année, une organisation du répertoire additif facilitant une mémorisation des résultats (décompositions des nombres de 10 à 18 à partir des sommes du type $9 + n$, $8 + n$, $7 + n$, $6 + n$ et $5 + n$), dès que les élèves sont capables de les reconstruire à l'aide des procédures de calcul réfléchi étudiées.

d) Structure, format et type de séances du scénario

► Structure et durée des séances

Par le terme « séance », nous désignons l'apprentissage des mathématiques au quotidien prescrit par le manuel. *J'apprends les maths* programme vingt-huit séances (bilan terminal de fin de période compris) pour l'enseignement du calcul mental de sommes de nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine. Cet apprentissage s'étale sur les trois dernières périodes de l'année mais le manuel ne spécifie pas la durée de ses leçons. Néanmoins, mis à part les évaluations ou les consolidations, les séances prescrites par le manuel présentent toutes la même structure organisée en trois grands moments d'enseignement : un temps consacré aux activités de haut de page dont le calcul mental, un temps pour les nouveaux apprentissages et un temps pour l'entretien des notions anciennes et nouvelles (voir schéma 30).

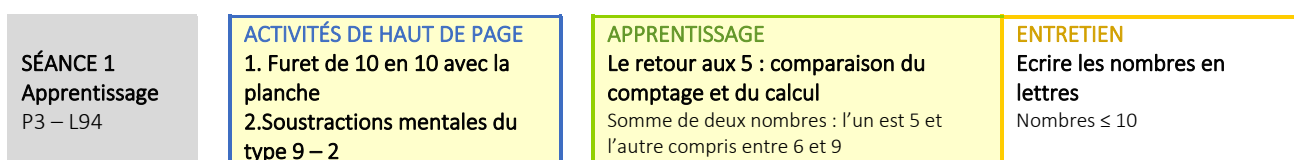


Schéma 30 : Structure de la séance 1 du scénario de *J'apprends les maths*

► Type des séances

Les séances d'apprentissage au cours desquelles les élèves apprennent de nouvelles procédures de calcul réfléchi sont les plus fréquentes et représentent 36% des leçons. Viennent ensuite les séances d'entraînement et de consolidation, au cours desquelles les élèves s'exercent, par le biais de calculs à effectuer, à mentaliser les stratégies enseignées pour mieux se les approprier. Elles correspondent à elles seules à 57% des séances prévues par le manuel dans son projet d'enseignement. Enfin, les séances d'évaluations moins fréquentes mais aussi moins nombreuses ferment la marche (2 sur 28) - (voir tableau 30).

	Effectifs	Pourcentage
Séances de consolidation	7	25%
Séances d'apprentissage	10	36%
Séances d'entraînement	9	32%
Séances d'évaluation	2	7%
TOTAL	28	100%

Tableau 30 : Type des séances du scénario de *Cap maths*

► Format des séances

Dans les séances de *J'apprends les maths*, on retrouve en général trois grands moments. Le premier est réservé aux activités rituelles (« de haut de page ») dont le calcul mental (R). Le second concerne les nouveaux apprentissages abordés au cours de la séance (N). Enfin, le troisième revient sur des connaissances plus anciennes par le biais d'exercices d'entretien qui sont en lien direct avec les

nouveaux apprentissages (A*) ou totalement déconnectés (A). Ainsi, en reprenant à notre compte la méthodologie et la nomenclature utilisées par Grapin et Mounier (2015) dans leur outil d'analyse des manuels, nous avons réparti dans le tableau suivant les différentes séances du scénario de *J'apprends les maths* selon leur format.

	R, N, A*	R, N, A	R	R, A*	A*	Bilan	Total
Effectif	4	6	9	5	2	2	28
%	14%	22%	32%	18%	7%	7%	100%

Légende : R tâches ritualisées (calcul mental) ; N : introduction d'un savoir nouveau ; A* retour sur un savoir ancien en lien avec le nouvel apprentissage de la séance ; A retour sur un savoir ancien déconnecté du nouvel apprentissage

Tableau 31 : Répartition des séances selon leur format

Excepté les bilans et quelques séances d'entraînement ou de consolidation, l'ouvrage prescrit pour chacune des séances de son scénario un retour sur les notions anciennes. Le plus souvent, dans 39% des cas, les tâches proposées sur ces notions sont en relation direct avec l'objet d'apprentissage) mais elles peuvent aussi être totalement déconnectées (dans 22% des cas). En outre, aucune séance programmée dans ce projet d'enseignement ne se limite uniquement à l'introduction d'un nouvel apprentissage. Cette introduction s'accompagne toujours d'activités ritualisées et d'exercices d'entretien. A contrario, certaines séances sont consacrées uniquement aux rituels (9 sur 28) ou à l'entretien des notions en lien avec la notion enseignée (2 sur 28).

e) Les activités proposées au cours du scénario

Au regard des éléments apportés par le tableau 32 (détaillé en annexes III Grille 40), *J'apprends les maths* propose soixante-six activités pour faire apprendre les additions mentales de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine. Dix-neuf d'entre elles contribuent à l'introduction des nouvelles procédures de calcul réfléchi. Mais, c'est en calcul mental que ces activités sont les plus nombreuses (30) tandis que celles ayant pour but de revenir sur des connaissances plus anciennes représentent 21% des activités recommandées par le manuel (soit 14 activités sur 66). En calcul mental, 49 % des activités visent l'appropriation des procédures de calcul réfléchi étudiées, 24% poursuivent le travail sur la connaissance de la suite numérique et 20% sont consacrées aux décompositions additives à l'aide des jeux « *n*, c'est 1 et encore » ou « *n*, c'est 2 et encore ». D'autre part, 65% des exercices auxquels sont confrontés les élèves pendant le temps réservé à l'entretien assurent la consolidation des nouvelles stratégies enseignées et d'autres plus anciennes mais pouvant servir de point d'appui tandis que les 35% restants participent à la mémorisation du répertoire additif. Par ailleurs, 90% des activités prescrites durant les temps d'apprentissage concernent la comparaison des stratégies du retour « aux cinq » et « du passage de la dizaine » aux procédures de comptage et

leur appropriation par le biais de la mentalisation. Les autres activités sont, elles, consacrées au répertoire additif, notamment son organisation (5%) et la mémorisation de la table des doubles jusqu'à $10 + 10$ (5%). En corollaire, 79% des activités prévues sont consacrées à l'apprentissage du « retour aux cinq », du « passage de la dizaine » (62%) et à la mémorisation du répertoire additif (17%). Les 21% qui restent ont pour objet la consolidation des points d'appui (connaissance de la suite numérique et décompositions des nombres 9, 8 et 7). Par voie de conséquence, nous pouvons dire non seulement que les activités proposées dans ce scénario sont réellement des activités de calcul mental, mais également qu'elles sont susceptibles de permettre aux enseignants d'atteindre les objectifs visés.

	ACTIVITÉS DE HAUT DE PAGE		APPRENTISSAGE		ENTRETIEN		BILAN		TOTAL	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
ACTIVITÉS										
TOTAL	30	45%	19	29%	14	21%	3	5%	66	100%

Tableau 32 : Répartition des activités proposées dans le scénario *de J'apprends les maths* (détaillée en annexes III Grille 40)

Pour finir, le nombre d'activités proposées par *J'apprends les maths* varie selon le type de séance mise en œuvre (voir tableau 33). En effet, le nombre moyen d'activités prescrites pour les séances d'apprentissage est de 4. En ce qui concerne, les séances relatives à la consolidation et à l'évaluation, le manuel recommande deux activités en moyenne. Enfin, les séances d'entraînement comptent en moyenne une seule activité. Pour plus de détails, voir grille 41 en annexes III.

	Effectifs	Pourcentage	Nombre total d'activités	Nombre moyen d'activités / séance
Séances de consolidation	7	25%	12	1,71
Séances d'apprentissage	10	36%	38	3,80
Séances d'entraînement	9	32%	13	1,44
Séances d'évaluation	2	7%	3	1,5
TOTAL	28	100%	66	2,29

Tableau 33 : Nombre d'activités en fonction du type de séance

f) La gestion des moments d'institutionnalisation

La méthode *J'apprends les maths* ne spécifie explicitement ni la place, ni le contenu, ni l'organisation des phases de synthèse et d'institutionnalisation. De la même manière, aucune trace écrite n'apparaît dans le fichier de l'élève ou le livre du maître.

5.4.6. Analyse comparative des projets d'enseignement proposés dans les manuels pour enseigner le calcul mental de sommes de nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine

- **Les points communs**

Les manuels travaillent conjointement calcul automatisé et calcul réfléchi. Les contenus mathématiques sont semblables au niveau structurel. De plus, la consolidation des points d'appui et le réinvestissement en résolution de problèmes restent incontournables. Des pistes de remédiation sont indiquées et des bilans réguliers jalonnent les scénarios finalisés par une évaluation sommative. Malgré ces similitudes apparentes, des différences notables singularisent les projets des manuels.

- **Des différences sur l'itinéraire d'enseignement**

Cap maths, *Euromaths* et *Pour comprendre les maths* empruntent l'itinéraire 1 consistant à améliorer les procédures personnelles en ayant comme but l'acquisition du surcomptage afin de favoriser la mémorisation des relations numériques et donc le progrès vers le calcul mental. *Litchi* et *J'apprends les maths* optent pour l'itinéraire 2 privilégiant le calcul sur les objets plus proche du calcul numérique car plus favorable à la conceptualisation du nombre et à la mémorisation des relations numériques.

- **Des différences sur la stratégie d'enseignement**

Litchi utilise le dispositif¹⁵⁵ « explication – application » : le professeur explique la procédure attendue puis les élèves l'appliquent. *Cap maths* et *Euromaths* prônent le dispositif « problème – compréhension – application » : les élèves résolvent le nouveau calcul et exposent leurs stratégies ensuite l'enseignant institutionnalise la procédure souhaitée. *J'apprends les maths* et *Pour comprendre* préconisent le dispositif « observation – compréhension – application » : deux personnages résolvant le calcul et les élèves imitent leurs procédures pour trouver la solution.

- **Des différences sur la gestion et les modes d'intégration¹⁵⁶ de l'institutionnalisation**

Pour comprendre les maths et *J'apprends les maths* choisissent le mode « apport » : le savoir institutionnalisé n'est pas construit en classe mais répond à un problème posé. Le mode « bilan » prévaut pour *Cap maths* et *Euromaths*, : seules les connaissances construites en classe acquièrent le statut de savoir. *Litchi* recourt au mode « déclaration » en énonçant un savoir non construit. En outre, *J'apprends les maths* n'en spécifie ni la place, ni le contenu, ni la gestion de l'institutionnalisation tandis que *Pour comprendre les maths* et *Litchi* les réduisent à une reformulation par les élèves de ce qui a été appris. *Cap maths* et *Euromaths* institutionnalisent le savoir prescrit et suggèrent une trace

¹⁵⁵ Les dispositifs sont catégorisés par Rey (2001)

¹⁵⁶ Roditi, 2005.

écrite sans qu'il y ait pour autant un travail sur les conditions d'utilisation des procédures et sur l'écriture des règles incluant leur domaine de validité.

- **Des différences sur la place scénario dans la programmation annuelle, l'introduction des procédures, leur type, leur nombre et leur place dans le scénario**

Trois manuels étalent leur projet d'enseignement sur les périodes 3, 4 et 5. Celui de *Pour comprendre les maths* débute à la période 2 tandis que *Cap maths* polarise le sien sur les périodes 4 et 5. Seul *J'apprends les maths* introduit les procédures de calcul de manière contextualisée. Cette introduction a lieu dès la première séance (*J'apprends les maths*) ou à la deuxième (*Cap maths*) mais peut aussi être reléguée à la seconde moitié du scénario (*Pour comprendre les maths*). D'autre part, une certaine variabilité est à noter quant au nombre de procédures de calcul réfléchi étudiées qui va de un (pour 2 manuels sur 5) à trois. Tous les manuels enseignent « le passage ou retour à 10 ». Trois sur cinq apprennent à calculer en appui sur les doubles tandis que deux sur cinq apprennent « le passage ou retour à 5 ». Enfin, deux manuels sur cinq privilégient l'aspect ordinal du nombre.

- **Des différences sur le format des séances**

Nonobstant une typologie et une organisation structurelle commune, les séances se distinguent par leur nombre qui s'étend de 21 (*Euromaths*) à 39 (*Pour comprendre les maths*) et leur format. *Litchi* et *Euromaths* ne préconisent pas de retour explicite sur les notions anciennes. Le calcul mental est prescrit dans l'intégralité ou la majorité des séances (*Cap maths* et *J'apprends les maths*, 93%). En outre, les manuels consacrent 9% à 48% des séances uniquement à ce rituel.

- **Des différences sur l'effectif des activités proposées, leur répartition et leur nature**

Le nombre total d'activités proposées varie de 55 à 90. Le nombre moyen d'activités par séance, tous types confondus est de 3 dans *Euromaths* contre 2 dans les autres manuels. La répartition des activités fluctue considérablement d'un manuel à l'autre : de 5 à 62% pour l'apprentissage des procédures de calcul, de 17 à 45% pour la mémorisation du répertoire additif et de 21% à 50% en ce qui concerne consolidation des points d'appui. *Litchi* ne propose aucun jeu alors qu'*Euromaths* en prescrit six.

En corollaire, les cinq manuels de CP, les contenus mathématiques et l'organisation des séances présentent des analogies au niveau structurel. Néanmoins, on trouve des divergences quant à l'itinéraire d'enseignement emprunté, au dispositif pédagogique, au format des séances, à l'effectif, la nature et la répartition des activités. Il en est de même pour la place du scénario et le choix des procédures de calcul réfléchi à enseigner. Peu d'informations explicites sont fournies sur les institutionnalisations à prévoir et à mettre en œuvre.

- Deux itinéraires d'enseignement : Trois manuels sur cinq empruntent l'itinéraire 1 prescrit par Charnay et Valentin (1992) consistant à améliorer les procédures personnelles en ayant comme but l'acquisition du surcomptage afin de favoriser la mémorisation des relations numériques et donc le progrès vers le calcul. Les autres optent pour l'itinéraire 2 prôné par Brissiaud (2001) privilégiant le calcul sur les objets plus proche du calcul numérique car plus favorable à la conceptualisation du nombre et à la mémorisation des relations numériques. Cependant, ces itinéraires peuvent être adaptés ou non et associés à diverses variables comme la composante cognitive (les contenus, les tâches, etc.) ou la composante institutionnelle (la nature des notions à enseigner, les programmes, habitus de la profession, etc.).
Les auteurs des manuels proposent trois stratégies d'enseignement : « *explication-application* » (l'enseignant énonce un savoir non construit), « *observation – compréhension – application* » (le savoir est introduit puis imité par les élèves) et « *problème – compréhension – application* » (seul le savoir construit en classe est institutionnalisé) – (Rey, 2001). Parallèlement, trois modes d'intégration de l'institutionnalisation (Roditi, 2005) sont utilisés dans les ouvrages : mode « déclaration » (1 sur 5), mode « bilan » (2 sur 5) et mode apport (2 sur 5). En outre, deux approches distinctes du nombre sont retenues pour faire apprendre à calculer mentalement : trois manuels sur cinq privilégient l'aspect cardinal. Les autres optent pour des pratiques « ordinales ».
- Une conception évolutionniste : Le modèle de Butlen et Masselot (2010) :
Pour dépasser le paradoxe de l'automatisme, des institutionnalisations locales souples, assez simples : ni trop rapides, ni trop « fortes » pour faciliter l'adaptabilité ; ni trop « faibles », ni trop tardives pour que les procédures ne semblent pas équivalentes. Mais suffisamment explicites sur les critères de choix de stratégies avec une hiérarchisation de l'éventail des procédures possibles. Au début de notre étude en 2014, l'itinéraire 1 primait dans les programmes 2008. Aujourd'hui, le deuxième itinéraire prend plus d'effets dans les textes institutionnels.
- Les recherches futures devront tirer toutes les conséquences du fait qu'enseigner est un travail avec de multiples facettes et replacer l'analyse de la didactique dans le contexte du travail quotidien des enseignants et de ses multiples finalités (Goigoux, 2007 ; Leplat, 1992 ; Robert, 2010). Les travaux futurs devraient également permettre de faire un état des lieux des marges de manœuvre, des contraintes et autres facteurs de variabilités des pratiques (composantes personnelle, sociale et médiative) à travers l'étude des diversités intra et inter-individuelles (Robert et Vivier, 2013 ; Roditi, 2003).

Tableau 34 : Synopsis des projets d'enseignement possibles du calcul mental de sommes de nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine au CP

CHAPITRE 7 : UNE ÉTUDE DE CAS DANS L'ACADEMIE DE GUADELOUPE

1. Méthodologie d'analyse des pratiques enseignantes

Notre cadre ergonomico-didactique et les théories d'apprentissage qui le sous-tendent rendent possible la visée descriptive et compréhensive du fonctionnement des pratiques enseignantes en calcul mental et des processus par lesquels elles conditionnent les apprentissages des élèves, que nous nous étions fixés au début de notre recherche. Il s'agit en particulier de renseigner la question centrale suivante : « *Sachant que les professeurs des écoles disposent de ressources institutionnelles, documentaires et forts de leur expérience en calcul mental, comment les professeurs des écoles organisent-ils et conduisent-ils leur enseignement-apprentissage dans cette activité liant calcul et raisonnement afin de permettre aux élèves d'acquérir des compétences en numération et en résolution de problèmes ?* ». Pour y répondre, à partir des observations réalisées en classe, nous croisons trois niveaux d'analyse (global, local, micro) afin de caractériser les pratiques, d'apprécier leurs effets sur les apprentissages et d'identifier les conditions professionnelles qui les déterminent.

En outre, les activités des élèves, interface entre les pratiques enseignantes dont elles sont la conséquence et les apprentissages dont elles sont la source, constituent l'élément central de notre étude. C'est pour cette raison que nous polarisons notre découpage de la réalité, nos analyses et nos interprétations autour de ces activités telles qu'elles peuvent être provoquées par l'enseignant en classe. Par conséquent, la méthodologie doit, d'une part permettre d'accéder aux activités des apprenants sur un contenu donné, en relation avec l'enseignement dispensé et d'autre part analyser le projet du professeur et sa mise en œuvre en conjuguant deux points de vue : l'apprentissage des élèves et l'exercice du métier. Pour ce faire, nous organisons notre méthodologie d'analyse des pratiques des professeurs des écoles en calcul mental en trois étapes : 1) Délimiter le champ d'analyse et sélectionner les unités d'observation ; 2) Identifier les éléments didactiques et pédagogiques pris en considération par les professeurs pour élaborer leur projet d'enseignement ; 3) Caractériser les pratiques privilégiées par les enseignants lors des observations pour venir en aide aux élèves les plus fragiles en calcul mental.

1.1. Délimiter le champ d'analyse et sélectionner les unités d'observation

1.1.1. Le champ d'analyse

Nous connaissons, d'ores et déjà, le type de données que nous devons rassembler pour répondre à notre question de recherche. Reste maintenant à « circonscrire le champ des analyses empiriques dans l'espace géographique et social et dans le temps » (Quivy et Van Campenhoudt, 2006).

a) Un contexte institutionnel propice à l'étude

Les limites géographiques de notre champ d'analyse sont fixées par notre propre marge de manœuvre. En effet, professeur des écoles à temps plein dans une école élémentaire de douze classes en Guadeloupe, nous devons tenir compte des délais, des ressources dont nous disposons, des contacts et des informations sur lesquelles nous pouvions raisonnablement compter. Par conséquent, notre champ de recherche est situé où nous vivons et travaillons nous-même c'est-à-dire dans l'académie de Guadeloupe. A priori, selon nous, cela constitue à la fois un inconvénient et un avantage. Un inconvénient, car l'insularité isole le chercheur et le prive de certains séminaires et colloques et des possibilités d'échanges de propositions, d'idées qu'il aurait pu avoir avec les différents membres du laboratoire de recherche, mis à part les entretiens avec son directeur de thèse. Toutefois, cet espace géographique représente également un atout non négligeable car il offre un contexte expérimental propice à la recherche. Effectivement, le calcul mental occupe une place centrale dans la politique académique régionale, depuis quinze ans. Dans ce qui suit, nous faisons un rapide détour historique pour mesurer ce fort ancrage institutionnel.

Confronté aux résultats préoccupants des évaluations nationales CE2 et sixième en mathématiques des élèves guadeloupéens, le Recteur Serge Guinchard lance le 03 décembre 2004, une vaste opération qu'il intitule la « Bataille des Maths ». Cette « Bataille », orchestrée par des IGEN¹⁵⁷, des IAIPR¹⁵⁸, des IEN¹⁵⁹ et de nombreux enseignants en exercice dans l'académie se donne pour objectif premier « *d'améliorer les résultats des élèves en trois ans* ». C'est au cours de cette opération que le GAM 1, Groupe Académique 1^{er} degré, voit le jour. Dirigé par un IEN référent et coordonné par un conseiller pédagogique généraliste, ce dispositif compte également seize animateurs à mi-temps répartis sur les différentes circonscriptions et relayés sur le terrain par des personnes ressources en mathématiques. Ces membres sont impliqués dans l'accompagnement des enseignants des écoles, l'animation des ateliers pédagogiques, la formation continue, la création d'outils d'aide à l'enseignement de la discipline ainsi que l'organisation de défis, de rallyes mathématiques intra et inter-circonscriptions. En fait, ce Groupe Académique 1^{er} degré poursuit quatre objectifs : 1) réduire de manière significative l'écart entre les résultats obtenus et les attendus aux évaluations nationales ; 2) promouvoir un enseignement des mathématiques de meilleure efficacité ; 3) faire évoluer les pratiques pédagogiques, optimiser la liaison école collège ; et pour finir, 4) harmoniser des actions au plan académique. Sur le terrain, ces actions prennent la forme de jeux mathématiques en maternelle ou d'échecs pour l'élémentaire, de défi maths et de championnats

¹⁵⁷ IGEN : Inspecteur Général de l'Éducation Nationale

¹⁵⁸ IA-IPR : Inspecteur d'Académie- Inspecteur Pédagogique Régional

¹⁵⁹ IEN : Inspecteur de l'Éducation Nationale

de calcul mental. En complément, des outils pour la classe tels qu'une banque de problèmes pour chercher, des pièces et des billets pour travailler sur la monnaie et des progressions de calcul mental pour chaque niveau des cycles 2 et 3 sont mis en ligne sur le site académique.

Ainsi, depuis 2007, l'académie Guadeloupe organise son championnat de calcul mental ouvert à toutes les classes du CP au CM2. Poursuivant des objectifs pour l'élève (acquérir des automatismes sur des calculs simples, diversifier les stratégies de calculs complexes) mais également pour l'enseignant (pratiquer régulièrement le calcul mental, dynamiser cet enseignement et évaluer régulièrement les acquis), ce concours organisé par le Groupe Académique 1^{er} degré (GAM) commence par une sélection des deux meilleurs élèves par niveau pour chaque école, étalée sur les trois dernières périodes de l'année scolaire, en trois manches (fin janvier, fin mars et début juin) : ces élèves sont sélectionnés en fonction du nombre de points totalisés sur l'ensemble des trois manches. Les épreuves contiennent 12 questions dictées au cycle 2 (7 calculs et 5 problèmes numériques). Au cycle 3, le contenu des épreuves est similaire avec un supplément de 3 questions dictées et totalise 10 calculs et 5 problèmes numériques. À la mi-juin, la finale de la circonscription entre les différents élèves sélectionnés affine la sélection. Fin juin, ce championnat s'achève par une finale académique radiodiffusée en direct en partenariat avec la première chaîne régionale pour permettre à tous les élèves de l'île et de ses dépendances, sélectionnés ou non, d'y prendre part. Les corrections sont effectuées dans la foulée et les résultats sont transmis en direct. In fine, tous les champions des différentes circonscriptions de l'Académie sont réunis dans un même lieu pour la remise des prix.

Paradoxalement, les performances des élèves guadeloupéens en mathématiques sont inquiétantes car les tests effectués par la DEPP en août 2018 situaient la Guadeloupe en fin de classement loin derrière la dernière académie de France hexagonale. Ainsi, en dépit d'un système scolaire centralisé, de programmes nationaux, de directives ministérielles et d'une politique académique volontariste, force est de constater que les élèves n'atteignent pas tous le même niveau de compétences (dans une même classe, une même école, une même circonscription) et n'apprennent donc pas tous les mêmes choses. De ce fait, l'académie Guadeloupe offre un bon terreau pour étudier les pratiques, caractériser celles perçues comme les plus favorables aux apprentissages des élèves les plus fragiles et celles mises en œuvre dans les classes les plus efficaces. En outre, à plus long terme les résultats de nos analyses pourraient permettre d'établir un diagnostic, d'appréhender ce qui existe, et de mieux cerner le problème pour ensuite, s'inscrire dans une visée prospective, celle de mener des expérimentations pour comprendre comment enrichir l'existant.

b) Un sujet mathématique commun et des séquences complètes

Quoi qu'il en soit, comme le préconisent Quivy et Van Campenhoudt (2006), « le champ d'analyse demande à être très clairement circonscrit » (p.147). Par conséquent, la situation d'enseignement sur laquelle portera nos analyses est la même pour tous les professeurs des écoles : le calcul mental de sommes avec franchissement de la dizaine au cours préparatoire, conformément aux programmes de 2008. Cet enseignement comprend la connaissance de la suite des nombres avec la numération décimale de position, le calcul réfléchi de sommes, la mémorisation de résultats et la résolution de problèmes oraux. Deux motivations dictent le choix de cet objet d'apprentissage. Premièrement, l'addition est une notion essentielle du programme de CP. C'est la première opération enseignée aux élèves et la plus simple que l'on peut faire avec deux nombres. Entre autres, elle organise la rencontre entre l'élève et les différentes manières de désigner un nombre, et, de ce fait, conduit, par le jeu des stratégies de décomposition-recomposition de ses termes, à approfondir la connaissance des nombres et à structurer les relations qu'ils ont entre eux (Rouche et al., 2006). Deuxièmement, cette notion n'est pas nouvelle pour les élèves du CP. En effet, dès 3 ans, ils peuvent déjà effectuer une addition simple en matérialisant chaque nombre à additionner par une collection d'objets et en dénombrant la collection résultante à l'aide du pointage manuel (Fuson, 1982). Puis, à 5 ans, ils utilisent déjà fréquemment le comptage verbal ou le comptage sur les doigts (Siegler et Shrager, 1984). Dans chaque classe observée, nous avons assisté à l'intégralité des séances relatives à l'enseignement de cette notion mises en œuvre par l'enseignant et procédé à une observation naturaliste¹⁶⁰ et « médiatisée » (De Ketele et Roegiers, 1996) grâce à un enregistrement audio, à l'aide d'un smartphone. De plus, il a fallu convaincre les collègues de participer aux entretiens individuels même s'ils adhéraient déjà totalement à ce travail de recherche et de notre côté, faire preuve de patience lorsque les rendez-vous fixés et confirmés au préalable étaient repoussés voire annulés et reportés pour des raisons diverses.

c) Une ressource académique : La progression minimum du GAM¹⁶¹

Du CP au CM2, le groupe académique propose une progression minimum pour l'enseignement du calcul mental (voir annexes I Fiche 7). En ce qui concerne le cours préparatoire, la progression 2011-2012¹⁶² indique le « quoi faire ? » par le biais du BO n°3 du 19 juin 2008 et de la circulaire du 02 mars

¹⁶⁰ "Naturaliste" dans le sens où l'enseignant est resté responsable de sa classe et a mené ses séances comme il a l'habitude de le faire sans intervention du chercheur. Bien évidemment, le simple fait d'observer n'est pas neutre. En effet, le fait d'être soumis à une observation extérieure peut avoir une influence sur la façon dont l'enseignant prépare ses cours, met en œuvre ses séances face aux élèves et avec les élèves selon les représentations qu'il a de ce que le chercheur attend ou encore la peur d'être jugé par ce dernier. Nous avons donc insisté sur le fait que le chercheur veut étudier les pratiques telles qu'elles sont au quotidien pour les comprendre et non pour les juger et proposer un contrat de confidentialité pour garantir l'anonymat de l'enseignant et de ses élèves.

¹⁶¹ GAM : Groupe académique de mathématiques

¹⁶² Progression en vigueur au moment de la recherche

2007. Puis, il s'en suit quelques pistes sur « le comment faire ? » rappelant les types de séances à mettre en œuvre et le lien existant entre l'installation des automatismes chez l'élève et sa capacité à résoudre des problèmes. Découpée en cinq périodes, cette progression englobe trois grands domaines : 1) la connaissance de la suite des nombres en relation avec la numération décimale de position ; 2) le calcul réfléchi de sommes, de différences et la mémorisation de résultats ; 3) les problèmes oraux d'addition et de soustraction. Les compétences à travailler relatives à ces domaines sont détaillées dans le tableau infra.

	PÉRIODE 1	PÉRIODE 2	PÉRIODE 3	PÉRIODE 4	PÉRIODE 5
Connaissance de la suite des nombres en relation avec la numération décimale de position	- structurer les nombres à l'aide du repère 5. - reconnaître les nombres correspondant aux constellations du dé - jeu du furet avec une main (1 de plus jusqu'à 5), (à partir de 5, 1 de moins)	- structurer les nombres à l'aide des repères 5 et 10 - jeu du furet avec 2 mains (1 de plus jusqu'à 10) (à partir de 10, 1 de moins) - compter de 2 en 2 sur les nombres pairs ≤ 22 - comparaison de 2 nombres	- compter de 2 en 2 jusqu'à 50 - compter de 5 en 5 jusqu'à 50 - comparaison de 3 nombres	- compter de 2 en 2 sur les nombres impairs - décompter de 2 en 2 à partir de 60 - comparaison de nombres	- compter de 10 en 10 jusqu'à 100 - connaître les formulations : « le double de ... » et « 2 fois... » sur les nombres de 1 à 9 - comparaison de nombres
Calcul réfléchi pour le calcul de sommes et de différences	- décomposition orale des nombres inférieurs à 10. - doubles de 1, 2 et 3	- doubles de 4 et 5 - calcul réfléchi de l'addition (ex : $4 + 3$) $2+2+2+1$, $4+2+1$, $4+4-1$ - sommes, $R = 20$	- doubles de 6 et 7 - valeur d'un domino (somme des points) - décomposition des nombres < 10 - $\square + \square + \square$, $R < 10$ - $n - \square$, $R \leq 10$	- doubles de 8, 9 et 10 - retrancher 2 à un nombre inférieur à 60 - calcul avec des nombres : $9 + n$ ($n = 9$) et aussi $8 + n$ ($n = 9$) - $DU + U$	- $DU + U$, $DU + DU$ - somme de 3 nombres ≤ 10 - sommes : $20 + 8$, $40 + 3...$ - $n + 10$, $n < 50$ - soustraction $a - b$ avec $0 = a = 19$ et $0 = b = 9$ - sommes du type $30 + 20$ - compléments à 20
Mémorisation de la table d'addition	- ajouter 1 à un nombre inférieur à 21 - compléments à 4, à 5 - addition : somme ≤ 5 - soustraction avec $n \leq 5$	- ajouter ou retrancher 1 ou 2 à n , $n < 21$ - $\square + \square$, $R \leq 10$ (constellations) - compléments à 10	- complément à 10 - $\square + \square$, $R = 10$	- trouver le complément d'un domino	
Problèmes oraux d'addition et de soustraction	- problèmes d'ajout et de retrait	- problèmes de réunion et de complément	- problèmes de comparaison	- tous problèmes	- tous problèmes

Tableau 35 : Déclinaison de la progression minimum pour le calcul mental du GAM

Enfin, des énoncés des problèmes additifs et soustractifs respectant une certaine hiérarchie d'acquisition complètent cette progression (voir progression minimum du CP en annexes 1 Fiche 7).

1.1.2. La sélection de l'échantillon

Les questions sous-jacentes de notre recherche et nos hypothèses de travail nous obligent à décrire les pratiques des professeurs des écoles et à en apprécier les effets sur les apprentissages des élèves. Avant toute chose, nous souhaitons étudier la manière différenciée dont les professeurs des écoles enseignent le calcul mental au CP à travers leur projet d'enseignement. En conséquence, le choix le plus pertinent, selon nous, consiste à analyser dans le détail, avec soin et à différents niveaux les pratiques en calcul mental d'un petit nombre de professeurs du cours préparatoire, dans les mêmes situations d'enseignement, toutes choses égales par ailleurs, de manière à procéder à des comparaisons significatives. Ensuite, certaines classes sont plus favorables aux progrès en calcul

mental des élèves en difficulté que d'autres. Pour comprendre ce qui les différencie, nous désirons analyser les pratiques à l'égard de ces élèves. Là encore, nous sommes convaincus que seule l'étude en profondeur du fonctionnement des pratiques dans un petit nombre de classes à performance contrastée nous permettra de caractériser les pratiques perçues lors des observations comme les plus favorables aux apprentissages des élèves en difficulté. Pour finir, nous nous intéressons aux classes les plus performantes, c'est-à-dire celles qui permettent aux apprenants d'obtenir de bons résultats, de progresser quel que soit leur niveau initial sans creuser davantage les inégalités entre les meilleurs et les plus fragiles.

En outre, nous voulons que les pratiques pédagogiques mises en œuvre fassent l'objet d'une observation directe dans ces classes efficaces mais également accéder au plus près à la composante personnelle des enseignants par le biais d'entretiens semi-directifs. Nous ne pouvons donc nous permettre d'interviewer qu'une dizaine d'individus seulement. En fait, dans notre cas, comme l'indique « le manuel de recherche en sciences sociales » (Quivy et Van Campenhoudt, 2006), « le critère de sélection de ces personnes est généralement la diversité maximale des profils en regard du problème étudié ». Ainsi, nous devons chercher à diversifier au maximum les types de classes observées, relativement à leur efficacité et par-delà les profils de professeurs interrogés à l'intérieur de cette population. Notre échantillon doit donc être non strictement représentatif mais caractéristique de la population étudiée. Cependant, dans la lignée de nombreux chercheurs (Duru-Bellat et Mingat, 1993, 1998 ; Bressoux, Coustère et Leroy-Audouin, 1997 ; Bressoux, 2007), Céline Piquet (2010) rappelle que la quantification des « effets du contexte scolaire, ici les pratiques enseignantes, sur les progrès des élèves suppose de respecter au moins deux principes fondamentaux : 1°) raisonner en termes de valeur ajoutées¹⁶³ ; 2°) recourir à des modélisations statistiques¹⁶⁴. Dans notre cas, ce deuxième principe constitue une réelle difficulté pour l'avancée de notre recherche dans la mesure où son respect nécessite de mener nos investigations sur de vastes échantillons ce qui risque d'obérer, par la suite, une caractérisation fine des pratiques effectives en calcul mental. Dans ce qui suit, nous décrivons comment nous avons procédé pour contourner cet obstacle et constituer notre échantillon.

¹⁶³D'après Céline Piquet (2010), raisonner en termes de valeur ajoutées consiste à « prendre en compte le caractère cumulatif des apprentissages et donc de distinguer dans le niveau des élèves, à un moment donné, ce qui résulte de l'influence du contexte scolaire auquel ils ont été soumis pendant l'année écoulée de ce qui résulte des années antérieures de scolarisation. Pour ce faire, il convient de borner temporellement l'analyse en procédant à une mesure des acquisitions des élèves en début et en fin de période étudiée » p.16.

¹⁶⁴ D'après Céline Piquet (2010), « L'estimation des effets de contexte doit tenir compte du fait que la réussite scolaire est liée à des facteurs contextuels mais aussi individuels (le milieu social des élèves par exemple). Pour démêler les liens entre les différents facteurs susceptibles d'intervenir dans l'explication des différences de réussite entre élèves, et en l'absence de possibilité de réaliser de véritables expérimentations, les modélisations statistiques multivariées constituent une alternative pertinente et désormais classique dans le champ de la sociologie quantitative » p.16.

a) Première phase de sélection des classes : Année 1 (2013-2014)

L'échantillon initial se composait de deux mille neuf cent soixante-six élèves ayant participé aux trois manches du championnat académique de calcul mental), répartis dans cent-vingt-cinq classes de cours préparatoire situées dans quatre-vingts écoles localisées dans quatre circonscriptions de l'académie Guadeloupe (voir détails en annexes I Grille 1). Les épreuves de chaque manche étaient construites sur le même modèle : quatre premiers calculs dictés à effectuer chacun en 10 secondes, trois autres à réaliser chacun en 5 secondes et cinq problèmes numériques oraux à résoudre chacun en 15 secondes (voir annexe I- Fiches 1, 2 et 3). Elles ont été administrées aux 2966 élèves, par leur enseignant, dans leur classe respective, au cours des trois trimestres : manche 1 (20 au 24 janvier 2014), manche 2 (17 au 22 mars 2014) et manche 3 (02 au 06 juin 2014). Toutes les fiches-élèves ont été corrigées par les enseignants : chaque bonne réponse valait un point (voir annexe I - fiche 4). Ils avaient également complété la grille des notes obtenues à chaque manche à renvoyer à la circonscription (voir annexe I - fiche 5). Ainsi, au début du mois de juin 2014, avec le concours des conseillers pédagogiques de circonscription et l'autorisation des IEN, nous avons pu récupérer une copie de l'intégralité des grilles des cent-vingt-cinq classes mentionnant le nombre de points obtenus par chacun des 2966 élèves, tout au long des trois manches.

Restait maintenant à distinguer, parmi les cent-vingt-cinq classes de notre échantillon initial, celles que l'on pouvait considérer comme les plus efficaces en calcul mental de celles qui semblaient l'être moins. À ce stade, la question demeurerait entière : que mesure-t-on ? comment le mesure-t-on ? et quels indicateurs peuvent être utilisés, concrètement, lorsqu'il s'agit d'évaluer l'efficacité d'une classe ? À vrai dire, la mesure de l'effet des pratiques pédagogiques fait, depuis longtemps, l'objet de nombreuses recherches parfois dénommées « processus-produits » (Cusset, 2014). Certes, plus développées dans les pays anglo-saxons (Rosen et Stevens, 1986 ; Doyle, 1986 ; Watkins, 1995 et Chall, 2000) que dans les pays francophones (Bressoux, 1994 ; Attali et Bressoux, 2002 ; Duru-Bellat et Mingat, 1994 ; Mellouki et al., 2003 ; Bissonnette et al., 2005) mais, néanmoins convergentes sur les résultats obtenus, précise Carette (2008). Déjà en 2008, John Hattie (2008) dénombrait 50 000 études relatives aux facteurs favorables à l'efficacité de l'enseignement, basées sur des méthodologies variées soutenues par des traitements statistiques sophistiqués et couvertes par 800 méta-analyses.

Toutefois, même si l'exigence méthodologique s'est accrue au fil des années, « il faut garder à l'esprit que ces études tout comme les méta-analyses censées les synthétiser sont de qualité très inégale », nous prévient Pierre-Yves Cusset (2014, p.7). Ainsi, fort de ses « Conclusions de

recherches récentes¹⁶⁵ » sur les pratiques pédagogiques efficaces, l'auteur explique qu'en principe, une évaluation « idéale » répondant aux critères de rigueur scientifique les plus exigeants, est construite sur le modèle canonique de l'évaluation expérimentale (constitution d'un groupe expérimental et d'un groupe de contrôle ; étude "randomisée" grâce à l'affectation aléatoire des élèves ou des classes aux deux groupes) et repose sur la mesure des progrès des élèves sur la base de pré-tests et de post-tests standardisés y compris « l'estimation de l'ampleur de l'effet du traitement en termes de capacité à faire progresser les élèves dans la hiérarchie des résultats » (p.8). Cependant, nous ne disposons ni du temps, ni des moyens qui nous seraient nécessaires pour répondre à toutes les exigences d'une telle méthodologie. En outre, comme l'indique Cusset (2014), « quand bien même une recherche respecterait ce cahier des charges exigeant, ses conclusions pourraient être discutées » en raison des limites méthodologiques inhérentes aux travaux de type processus-produit, à savoir : « la réalité des pratiques mises en œuvre par les enseignants, l'étroitesse du champ disciplinaire évalué, une focalisation sur les compétences de base au détriment des compétences de plus haut niveau » (Cusset, 2014, p. 12).

Dans ces conditions, nous sommes partis de ce dont nous disposons réellement dans le cadre de notre recherche pour tenter d'évaluer avec la plus grande rigueur scientifique possible le niveau d'efficacité des classes. Tout d'abord, nous pouvions tirer profit des scores obtenus aux trois manches du championnat par les deux-mille neuf cent-soixante-six élèves de notre échantillon. D'ailleurs, en procédant à une analyse fine des exercices proposés lors de ces épreuves (voir annexes I - Fiches 1, 2 et 3) nous avons constaté qu'elles semblaient conformes aux exigences d'une évaluation construite dans une approche par compétence, sur lesquelles s'accordent la plupart des chercheurs (Roegiers, 2001 ; Beckers, 2002 ; Scallon, 2004) qui ont travaillé sur ce thème. Nous en faisons la démonstration en annexes I Grille 2. D'autre part, nous proposons également une analyse des résultats obtenus pour les trois manches du championnat en annexes I Grille 3.

En somme, le fait que les épreuves du championnat soient élaborées sur le modèle d'une évaluation construite dans une approche par compétence suscite beaucoup d'intérêt pour notre recherche, car il nous offre la possibilité, à l'aide de la méthode utilisée par Vincent Carette (2008), de déterminer les classes performantes et donc d'identifier le niveau d'efficacité des cent-vingt-cinq classes de notre échantillon. Du point de vue de l'auteur, « huit critères différents faisant appel à des logiques différentes [permettent] d'envisager "la performance d'une classe". Ces critères sont les suivants :

¹⁶⁵ CUSSET Pierre-Yves, « Les pratiques pédagogiques efficaces. Conclusions de recherches récentes », *France Stratégie*, Document de travail n°2014-01, août, 2014.

- **Critère n°1** : « le résultat moyen de la classe en phase 1, est égal ou supérieur à 50% » ;
 - **Critère n°2** : « 50% d'élèves de la classe ont obtenu une note supérieure à 50% en phase 1 » ;
 - **Critère n°3** : « le résultat moyen "pondéré" (la moitié des points sont attribués aux résultats de la phase 1 ; $\frac{1}{3}$ aux résultats de la phase 2 et $\frac{1}{3}$ aux résultats de la phase 3) de la classe aux trois phases est égal ou supérieur à 50% » ;
 - **Critère n°4** : « le résultat moyen "pondéré" de la classe aux trois phases est égal ou supérieur à 60% » ;
 - **Critère n°5** : « la classe obtient à chaque phase un résultat égal ou supérieur à 50% ;
 - **Critère n°6** : « en moyenne, 50% des tâches proposées sont réussies par la classe » ;
 - **Critère n°7** : « au moins la moitié des élèves de la classe ont réussi au minimum une tâche » ;
 - **Critère n°8** : « au moins la moitié des élèves de la classe ont réussi au minimum deux tâches »
- (Carette, 2008, p.88).

Nous avons appliqué chaque critère cité supra à chacune des classes de notre échantillon, en procédant, néanmoins à quelques adaptations au préalable. À titre d'exemple, le résultat moyen en phase 1 correspond à la moyenne des scores obtenus en phase 1 pour les manches 1, 2 et 3. De même, le résultat moyen "pondéré" d'une classe est lui aussi calculé à partir des résultats de la phase 1, 2 et 3 des trois manches. Par la suite, une feuille de calcul « Excel », nous a permis, pour chacun des huit critères, de mettre en évidence les classes qui y répondaient et celles qui n'y répondaient pas. En résumé, sur les cent-vingt-cinq classes ayant participé aux trois manches du championnat de calcul mental, quatre-vingt-un ne satisfont à aucun des huit critères (groupe 1). Vingt-six classes comptabilisent un à quatre critères (groupe 2) et dix-huit en remplissent au moins cinq (groupe 3 - voir tableau 3).

	GROUPE 1	GROUPE 2	GROUPE 3
Classes de CP	Classes ne comptabilisant aucun des huit critères	Classes comptabilisant un à quatre critères	Classes comptabilisant cinq critères ou plus
	81	26	18

Tableau 36 : Répartition des classes de l'échantillon initial selon leur performance à partir des huit critères de sélection définis par Vincent Carette (2008)

Ainsi, à l'instar de Carette (2018) et en appui sur nos analyses, nous estimons que les classes comptabilisant cinq critères ou plus peuvent être considérées comme les plus performantes. Mises à part les résultats obtenus, ces classes se caractérisent par leur aptitude à rendre une majorité d'élèves capables de développer des habiletés calculatoires, des connaissances numériques et de les mobiliser dans de nouvelles circonstances à travers la résolution de problèmes complexes et « inédits ». Par

conséquent, après mûre réflexion, on pourrait envisager que ces classes qui permettent aux élèves d'être « compétent » sont plus efficaces que les autres en calcul mental.

Toutefois, d'après les recherches menées par Céline Piquée (2007b) sur les effets des choix didactiques et pédagogiques des enseignants sur les progrès en lecture et en mathématiques des élèves au cours préparatoire, « les caractéristiques socio-démographiques et scolaires des élèves exercent un impact sur leurs performances de fin d'année scolaire » (Piquée, 2010). Plus précisément, l'auteure note d'une part, une corrélation positive entre les performances des élèves, le niveau scolaire en début d'année, le fait d'être une fille et d'avoir une mère dont le métier appartient à une classe socio-professionnelle favorisée et d'autre part, l'influence de la taille (moins les élèves sont nombreux, plus ils progressent) de classe et du niveau initial moyen de la classe sur les progrès des élèves. Du point de vue de Cusset (2014), ce dernier déterminant « reste, et de loin, le premier facteur d'explication du niveau de maîtrise atteint par un élève une année donnée » (p.9). En revanche, pour Piquée (2010), l'impact des caractéristiques structurelles des classes demeure assez faible avec des effets-classes de l'ordre de 4%. « Reste donc, [selon elle], un solde inexpliqué important dont on peut supposer qu'il s'explique en partie par un effet-maître. Nous en sommes également convaincus.

Ainsi, en premier lieu, nous avons fait passer les trois groupes de classes à travers le filtre de la taille. De cette manière, les classes à double niveaux (CP-CE1) y compris celles comptant moins de 21 ou plus de 27 élèves ont été enlevées du panel. Incidemment, le ratio du nombre de filles par rapport à celui des garçons était quasiment le même dans les classes retenues donc il n'a pas occasionné le retrait de classes. En second lieu, il nous fallait contrôler l'influence des caractères socio-démographiques des élèves. Nous avons pu le faire grâce au concours des directeurs d'école qui nous ont permis d'accéder aux fiches de renseignements. La consultation de ces documents administratifs a révélé un pourcentage très minime d'élèves (2,02%) dont la mère est de milieu social favorisé. Nous avons extrait les deux classes concernées. Ces documents nous ont offert également la possibilité de mesurer le degré d'hétérogénéité sociale des 99 classes restantes. À ce stade de la sélection, notre échantillon comptait 50 classes pour le groupe 1, 16 pour le groupe 2 et 14 pour le groupe 3.

Troisièmement, nous avons examiné le facteur, considéré par les auteurs (Piquée, 2010 ; Cusset, 2014) comme le plus influant sur les performances des élèves : le niveau que les élèves avaient atteint l'année précédente. Selon nous, les résultats des élèves de cet échantillon aux évaluations diagnostiques en début d'année est peu exploitable dans la mesure les compétences et connaissances évaluées, les exercices proposés et les conditions de passation des évaluations diagnostiques divergent d'une classe à l'autre. Donc, dans ce cas, il devient difficile de comparer ce qui n'est pas comparable,

dirons-nous. Cependant, un retour aux constats énumérés à la suite de nos analyses des scores des élèves aux trois manches du championnat nous remet en mémoire que la différence entre les résultats obtenus en moyenne dans classes situées en REP ou REP+ et ceux des classes situées en milieu favorisé n'était plus significative lorsqu'on compare des classes atteignant un niveau de maîtrise équivalent en ce qui concerne les habiletés calculatoires et les connaissances numériques évaluées en phase 3. En conséquence, nous avons opté pour une technique d'appariement (« matching »). Cette méthode nous a permis de comparer, une à une, les classes du groupe 3 (moins nombreuses), à celles des groupes 1 et 2 et d'apparier chaque classe du groupe 3 à une ou plusieurs classes des groupes 1 et 2 qui se révèlent très proches d'elle du point de vue du pourcentage de réussite obtenu pour la phase 3 de la première manche du championnat. Grâce à ce « matching », nous avons sélectionné 36 classes : 12 dans chaque groupe.

Par ailleurs, comme le stipule Pierre-Yves Cusset (2014), « lorsqu'on souhaite comparer l'efficacité de différentes méthodes pédagogiques, il est plus aisé de raisonner en termes relatifs. Aussi, la performance de chaque élève est rapportée au niveau de performance des autres élèves [...]. Ainsi, rajoute Cusset (2014), « on ne mesure pas simplement les progrès de l'élève, mais on cherche à estimer dans quelle mesure l'élève exposé à une méthode pédagogique donnée progresse plus ou moins vite qu'un autre élève exposé à une autre méthode » (p.9). En clair, une classe qui permet à un élève d'augmenter son score de réussite de manière à s'élever dans le classement ou qui va faciliter sa progression rapide est considérée comme plus efficace que les autres classes. Partant de cette conjoncture, nous avons, en dernier lieu, examiné en détail le rythme de progression des élèves dans chacune de ces trente-six classes pour n'en retenir que 24 présentant des structures contrastées en termes de progrès des élèves : 8 classes de profil peu performante », 8 classes de profil « moyennement performante » et 8 classes de profil « performante ». À la fin du mois de juin 2014, nous avons pris contact avec les vingt-quatre professeurs des écoles afin d'une part leur exposer notre projet d'expérimentation pour l'année suivante et d'autre part, leur proposer d'y prendre part. Entre autres, nous avons également profiter de ces différents échanges pour mener de manière informelle des entretiens exploratoires avec les enseignants mais aussi avec les conseillers pédagogiques dans le but de mettre en lumière les aspects de l'enseignement du calcul mental auquel nous n'aurions pas pensé et de compléter les pistes de travail recueillies au cours de nos lectures (Quivy et Campenhoudt, 2006). In fine, dix-neuf professeurs se sont portés volontaires pour l'observation de l'année 2014-2015. Le tableau 37 récapitule les différentes étapes de notre sélection lors de cette première année d'observation.

	GROUPE 1	GROUPE 2	GROUPE 3	
	Classes ne comptabilisant aucun des huit critères	Classes comptabilisant 1 à 4 critères	Classes comptabilisant 5 critères ou plus	TOTAL
Echantillon initial	81	26	18	125
1 ^{er} filtre : Taille de la classe	64	22	15	101
2 ^{ème} filtre : Ratio filles/garçons	64	22	15	101
3 ^{ème} filtre : CSP de la mère	63	21	15	99
4 ^{ème} filtre : Hétérogénéité sociale de la classe	50	16	14	80
5 ^{ème} filtre : « Matching » à partir du niveau initial des élèves	12	12	12	36
6 ^{ème} filtre : Structure de progression des classes	Profil « peu performante » ▪ Classe hétérogène en début d'année ▪ Le rang des élèves n'est pas modifié entre le début et la fin de l'année : les élèves dont le score initial est faible en début d'année restent les plus faibles en fin d'année et les élèves initialement les meilleurs conservent leur statut. ▪ Certains élèves qui se situaient en début d'année au-dessus de la moyenne de l'échantillon ont tous un score inférieur en fin d'année.	Profil « moyennement performante » ▪ Classe hétérogène en début d'année. ▪ Le rang des élèves les plus faibles n'est pas modifié entre le début et la fin de l'année. ▪ Les élèves initialement les meilleurs conservent leur statut et certains améliorent leurs résultats. ▪ L'écart se creuse entre les élèves les plus faibles et les meilleurs. ▪ Les élèves dont le score initial est faible en début d'année restent les plus faibles en fin d'année.	Profil « performante » ▪ Classe hétérogène en début d'année ▪ En fin d'année, l'écart entre les élèves les plus faibles et les meilleurs est du même ordre. ▪ Les plus faibles et les meilleurs améliorent leurs résultats. ▪ Tous les élèves (sauf 3 ou 4) se situent au moins au niveau de la moyenne de l'échantillon à la fin de l'année.	
Classes retenues	8	8	8	24
Professeurs volontaires	6	5	8	19
Echantillon final (2013-2014)	6	5	8	19

Tableau 37 : Les étapes de la sélection de l'échantillon (Année 2013-2014)

b) Deuxième phase de sélection des classes : Année 2 (2014-2015)

Au début de la deuxième année d'observation (2014-2015), notre échantillon était constitué de dix-neuf professeurs. Bien évidemment, il s'agissait des enseignants qui s'étaient portés volontaires l'année précédente et exerçaient toujours au cours préparatoire. Mais, entre-temps, les classes ont changé ainsi que leurs caractéristiques à partir desquelles toutes les mesures d'efficacité ont été opérées l'année d'avant. Cependant, ce changement de situation n'a pas obéré la suite de nos

investigations car nous avons admis que la sélection des classes s'appuyait sur deux hypothèses : celle de la stabilité des pratiques enseignantes d'une année à l'autre et celle de la stabilité des effets de ces pratiques sur les progrès des élèves. Cela va sans dire, les données expérimentales dont nous disposons ne nous offrait pas la possibilité de confirmer ces hypothèses. Néanmoins, de nombreux travaux de recherches récents (Butlen, Masselot et Pézard, 2003 ; Clanet, 2005 ; 2007 ; Pariès, Robert et Rogalski, 2008 ; Robert et Rogalski, 2002) priorisent des configurations relativement stables pour caractériser les pratiques enseignantes. De l'avis d'Orsola-Mangiante (2007), cette hypothèse de stabilité des pratiques « paraît raisonnable car un professionnel dont les choix et les actes seraient désorganisés, incohérents, sans logique auraient trop de difficultés à assumer de manière durable ses fonctions ». En effet, comme elle l'a souvent démontré dans ses recherches, ces quinze dernières années, Aline Robert (2004) soutient que « l'enseignant prend des décisions analogues dans des situations analogues... [et qu'] Il y a souvent trois ou quatre types de séances assez bien caractérisées pour un enseignant donné dans une classe donnée ». Elle va plus loin en affirmant que même s'il est plus difficile de l'admettre, il n'empêche que les prémisses de cette stabilité sont déjà perceptibles chez les enseignants débutants (Robert, 2005). De leur côté, les chercheurs français du réseau OPEN (Observation des pratiques enseignantes) s'accordent sur le caractère variable et stable des pratiques (Altet, 2003) mais Marc Bru (1997) objecte, néanmoins, que cette stabilité ne permet ni de décrire les pratiques en termes de méthode, ni de « s'installer dans un "fixisme" typologique » (Bru, 1997). Paradoxalement, si les travaux de Bru (1992) et ceux d'Altet et al. (1996) mettent en évidence, sans équivoque, des variations dans les profils d'action des professeurs durant l'année en cours et l'année suivante, concomitamment, ils démontrent une certaine stabilité de ces pratiques du point de vue de l'organisation temporelle, de la passation des consignes et des interactions maître-élève.

À propos de l'efficacité des pratiques pédagogiques, Bressoux (2001) déclare que les premiers travaux anglo-saxons sur les effets-maîtres (Acland, 1976 ; Mandeville, 1988 ; Raudenbush, 1989) témoignaient déjà d'une certaine stabilité de leur effet. Plus récemment, Sammons et al. (2007) ont confirmé la relative stabilité de l'efficacité des pratiques dans le temps car s'il est possible qu'un professeur passe du statut « enseignant efficace » à celui d' « enseignant inefficace », cela ne se produit que très rarement. A contrario, Koedel et Betts (2007) puis Sass (2008) soulèvent quelques objections. Partant d'un classement d'enseignants en cinq catégories allant « des 20% d'enseignants les moins efficaces » aux « 20% les plus efficaces », les chercheurs démontrent que le passage d'un professeur, d'un extrême à l'autre, dans les deux sens, est, certes peu fréquent mais que cela n'avait rien d'exceptionnel. Ce qui nous interpelle encore davantage, c'est qu'ils ont prouvé que seuls $\frac{1}{3}$ des enseignants classés parmi les moins efficaces l'étaient encore l'année d'après, entre temps, les deux tiers restants avaient gagné en efficacité et donc changé de catégorie. De la même manière, $\frac{2}{3}$ des

enseignants considérés comme les plus efficaces avaient perdu en efficacité l'année suivante. Toutefois, l'augmentation nette, d'une année à l'autre, des corrélations entre les mesures d'efficacité, passant de 0,2 ou 0,3 à 0,5 voire 0,8 observée par Sass (2008) puis par Mc Caffrey, Sass et Lockwood (2009) apportent un sérieux bémol aux constats supra. À vrai dire, « ces auteurs nuancent fortement leurs propos en insistant sur le fait que cette instabilité est davantage due à des modifications des caractéristiques scolaires du groupe d'élèves auquel s'adresse l'enseignant d'une année sur l'autre qu'à l'enseignant lui-même », nous rassure Céline Piquée (2010, p.48). En clair, « il suffit qu'un ou deux élèves soit particulièrement en difficulté une année pour que la mesure de la valeur ajoutée associée à l'enseignant soit différente de celle de l'année précédente », précise l'auteure.

Somme toute, notre objectif de caractériser et de comparer, toutes choses égales par ailleurs, des pratiques pédagogiques en calcul mental mises en œuvre dans des classes à efficacité contrastée requiert un contrôle des effets des caractéristiques socio-démographiques et scolaires des nouveaux élèves et des caractéristiques structurelles des nouvelles classes. Ainsi, dès la pré-rentrée 2014-2015, nous avons effectué les démarches administratives pour obtenir les autorisations des inspecteurs de l'éducation nationale des quatre circonscriptions et des enseignants. Ensuite, à l'aide d'un tableau à double entrée remis aux dix-neuf professeurs des écoles en début d'année, nous avons pu collecter les données relatives à la classe socio-professionnelle de la mère, la taille de la classe, l'hétérogénéité sociale. Restait à évaluer le niveau initial des élèves. Pour ce faire, nous avons opté pour une évaluation diagnostique commune dont nous avons assuré nous-même la passation et la correction afin d'éliminer autant que possible les biais éventuels. En outre, ce bilan initial nous a permis de rencontrer les élèves et leur enseignant et donc de provoquer une première familiarisation à notre présence.

Cette évaluation s'est étalée sur les deux dernières semaines du mois de septembre 2014. Dans un souci d'efficacité, nous avons opté pour un protocole « robuste » à fort potentiel didactique proposé par les auteurs du guide pédagogique du manuel *Cap maths CP* (une formatrice en ESPE, Marie-Paule Dussuc et un professeur des écoles Dany Madier sous la direction de Roland Charnay, didacticien spécialiste des mathématiques et professeur agrégé en ESPE). En fait, le but de l'évaluation initiale du *Cap maths* était de déterminer, parmi les compétences en numération attendues à la fin de l'école maternelle dans les programmes 2008, celles que chaque élève maîtrise réellement et celles qui doivent être consolidées. Plus précisément, ces compétences sont au nombre de quatre : 1°) comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités ; 2°) mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30 ; 3°) dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus ; 4°) associer le nom de nombres connus avec leur écriture chiffrée.

Concrètement, la première partie, exclusivement orale, s’est déroulée individuellement. Nous avons interrogé chaque élève à partir des consignes fournies (exercices 1 à 7) puis noté leurs réponses sur une fiche. En revanche, la passation de la deuxième partie de l’évaluation (exercices 8 à 11) a été beaucoup moins chronophage car les élèves ont pu répondre par écrit après notre lecture à voix haute des consignes. Par la suite, les propositions de codage des réponses et des procédures fournies par les auteurs (voir annexe 1- Fiche 6) nous ont permis d’évaluer le niveau initial des élèves dans chaque classe. En dernier lieu, nous avons comparé les dix-neuf classes, une à une, puis apparié les classes du groupe 1 à une ou plusieurs classes des groupes 2 et 3 se révélant très proches d’elle du point de vue du pourcentage de réussite obtenu à l’évaluation diagnostique. Grâce à ce « matching », nous avons sélectionné les neuf classes à efficacité contrastée, observées de manière directe et indirecte sur le terrain : 3 à profil « peu performante », 3 à profil « moyennement performante » et 3 à profil « performante ». Le tableau 38 synthétise la sélection de l’échantillon final.

	GROUPE 1	GROUPE 2	GROUPE 3	TOTAL
	Classes ne comptabilisant aucun des huit critères	Classes comptabilisant 1 à 4 critères	Classes comptabilisant 5 critères ou plus	
	Profil « peu performante »	Profil « moyennement performante »	Profil « performante »	
Echantillon initial (2014-2015)	6	5	8	19
1 ^{er} filtre : Taille de la classe	5	5	7	18
2 ^{ème} filtre : Ratio sexe	5	5	7	18
3 ^{ème} filtre : CSP de la mère	5	5	7	18
4 ^{ème} filtre : Hétéro. sociale	5	5	7	18
5 ^{ème} filtre : « Matching » niveau initial	5	5	7	18
Echantillon final	3	3	3	9

Tableau 38 : Les étapes de la sélection de l’échantillon final (Année 2014-2015)

Au début du mois d’octobre 2014, une rencontre individuelle avec chacun des neuf professeurs dont la classe a été retenue nous a permis de finaliser notre sélection en leur expliquant l’objet de la recherche, la manière dont nous allions procéder pour collecter les données, les outils utilisés lors de l’observation, l’organisation de la recherche sur les deux années à venir, la temporalité de notre présence, le type et la teneur des différents entretiens, et en particulier le planning de nos visites tout au long de l’année scolaire, sachant que nous projections, dans la mesure du possible, de voir l’intégralité des séances relatives à l’enseignement du calcul mental de sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine. À partir de la mi-octobre 2014, nous avons rencontré toutes les classes et leur enseignant et assisté à plusieurs séances, de manière informelle, toutes disciplines confondues dans le but de poursuivre la familiarisation des acteurs avec notre présence d’une part et

d'autre part, de nous rendre invisible pendant les séances pour mieux échapper dans les mois à venir à l'attention des élèves lors de l'apprentissage de notre objet d'étude.

Malheureusement, « nous savons que tout échantillon réalisé s'accompagne toujours de défauts et d'incertitudes dus soit à des fluctuations d'échantillonnage..., ou soit à des non-réponses totales ou partielles (à cause du refus du chef d'établissement ou du désaccord de l'enseignant qui refuse d'être filmé ou interviewé, etc...) » (Coquin, 2019, p.202). Pour preuve, en cours d'expérimentation, un professeur des écoles du groupe 3 et deux du groupe 1 se sont désengagés pour des raisons diverses et variées. Par voie de conséquence, nos analyses et interprétations ont porté, en fin de compte, sur l'observation de six classes : une du groupe 1, trois du groupe 2 et deux du groupe 3. Néanmoins, ces revirements n'ont pas eu de conséquences néfastes sur la structure de notre échantillon car le seuil de saturation théorique était déjà atteint (Quivy et Campenhoudt, 2006, p.151). En somme, comme le stipulent Miles et Huberman (1994), nous gardons à l'esprit que : « Peu importe ce que vous ferez, vous ne réussirez jamais à étudier tout le monde partout et dans toutes leurs activités. Les choix que vous faites (les personnes à qui vous parlerez, où, quand, à quel sujet et pourquoi) sont autant de limites aux conclusions que vous pourrez tirer, à la confiance avec laquelle vous les formulerez et au crédit que les autres leur accorderont ».

1.1.3. Caractéristiques individuelles des enseignants de l'échantillon

Pour rendre les données directement accessibles et faciliter leur exploitation, les différents tableaux jalonnant cette section sont des synthèses des grilles de données mises en annexe.

	Femme	Homme	Total
Âge des professeurs observés			
Âge moyen	45,3	46,0	45,7
Moins de 35 ans	0	1	1
Entre 35 et 44 ans	2	0	2
Entre 45 et 54 ans	1	0	1
55 ans et plus	1	1	2
Total	4	2	6

Tableau 39 : Caractéristiques sociodémographiques en fonction du sexe des enseignants

Le tableau récapitulatif supra révèle une composition démographique largement féminisée de notre panel avec près de deux tiers de femmes, dont un quart est âgée de 55 ans ou plus et la moitié a un âge compris entre 35 et 44 ans. L'âge moyen des professeurs des écoles est de 45 ans avec une faible disparité entre les hommes et les femmes du fait qu'ils soient plus âgés d'un an en moyenne.

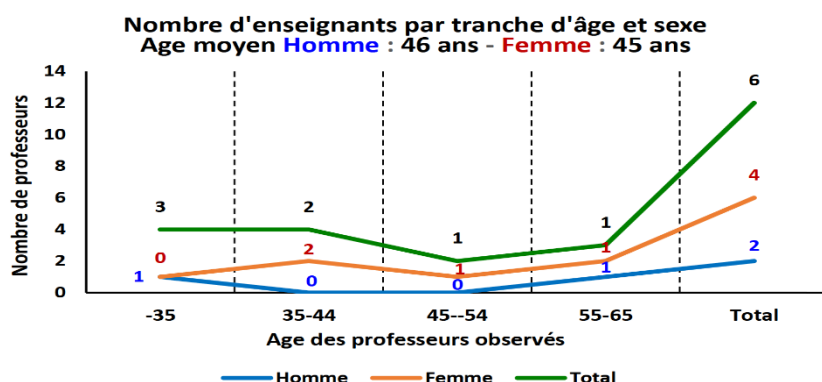


Schéma 31 : Nombre d'enseignants par tranche d'âge et sexe

Tous sexes confondus, un enseignant sur six a soit moins de 35 ans, soit un âge compris entre 45 et 54 ans. Les tranches d'âge des 35-44 ans et des 55 ans ou plus sont les mieux représentées avec un tiers des enseignants dans chacune d'elles.

	Femme	Homme	Total
Formation initiale des professeurs observés			
Bac littéraire	1		1
Bac scientifique		1	1
Licence en économie	1		1
Licence en sciences de l'éducation	1		1
Maîtrise scientifique	1	1	2
Total	4	2	6

Tableau 40 : Caractéristiques professionnelles

En ce qui concerne les caractéristiques professionnelles, tous les professeurs de notre panel ont intégré le corps enseignant avant la réforme de la mastérisation. La moitié des hommes et un quart des femmes ont été recrutés après le baccalauréat. Seuls deux enseignants du panel, un homme et une femme disposent d'une maîtrise scientifique. En somme, tous sexes confondus, un tiers des professeurs ont été engagés à l'éducation nationale à l'aide de leur diplôme du bac tandis que les autres détiennent soit sur licence (2 sur 6), soit une maîtrise scientifique (2 sur 6).

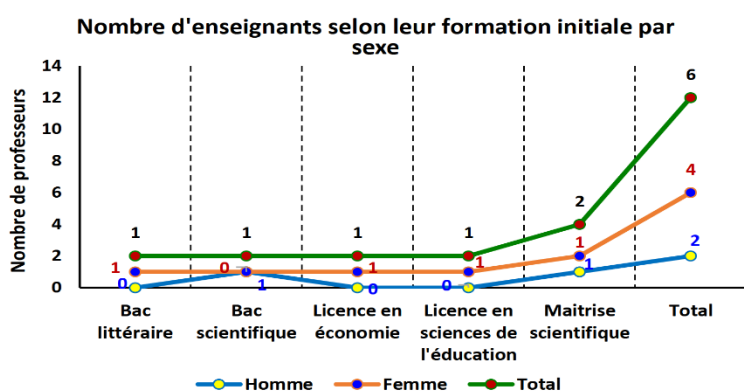


Schéma 32 : Nombre d'enseignant selon leur formation initiale par sexe

La maîtrise est la principale réponse apportée par les décideurs politiques pour faire face à l'évolution des curricula et à la transformation des publics (inclusion des élèves à besoins particuliers) – (Bouchetal et Lantheaume, 2015). Cependant, comme l'indique Roux-Perez (2006), l'obtention du concours du plus haut niveau ne garantit en rien les effets attendus par l'institution. En effet, « nombreux sont les professeurs des écoles qui, actuellement, se sentent fragiles voire incompetents en mathématiques » et « ont besoin d'une formation capable de les aider à renouer (voire se reconcilier) avec les mathématiques » (Villani et Torossian, 2018, p.13).

	Femme	Homme	Total
Nombre d'années d'ancienneté dans le corps professionnel			
<i>Nombre moyen</i>			
Entre 10 et 20 ans	3	1	4
Entre 21 et 31 ans	1		1
Entre 32 et 42 ans		1	1
Total	4	2	6
Nombre d'années d'ancienneté au cours préparatoire			
<i>Nombre moyen</i>			
Entre 5 et 10 ans	3	1	4
Entre 11 et 16 ans	1		1
Entre 17 et 22 ans		1	1
Nombre d'années d'ancienneté dans le poste			
<i>Nombre moyen</i>			
Moins de 5 ans	2		2
Entre 5 et 10 ans	1	1	2
Entre 11 et 16 ans	1	1	2

Tableau 41 : Nombre d'années d'ancienneté des enseignants dans le corps de métier et au CP par sexe

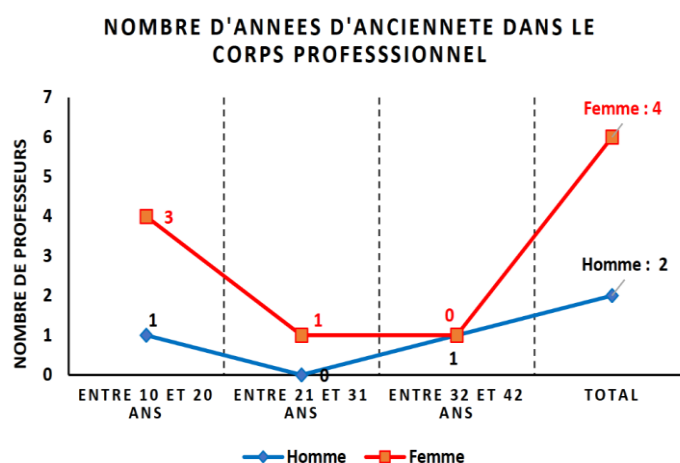


Schéma 33 : Nombre d'ancienneté des enseignants par sexe

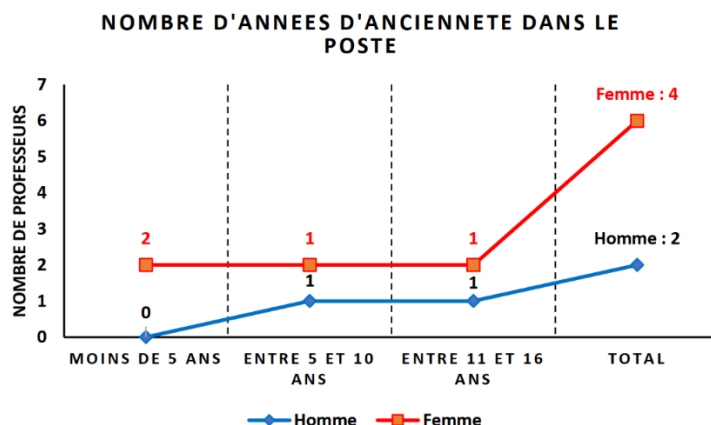


Schéma 34 : Nombre d'ancienneté des enseignants au cours préparatoire par sexe

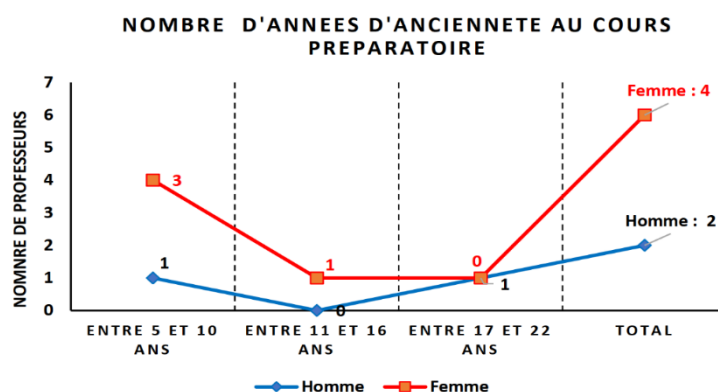


Schéma 35 : Nombre d'ancienneté des enseignants dans le poste par sexe

À la lecture du schéma 33 concernant l'ancienneté des enseignants du panel, nous constatons que tous genres confondus, deux tiers des professeurs des écoles ont entre dix et vingt ans d'ancienneté dans le métier, ce qui dans la profession leur confère une certaine expérience. De même qu'au regard des schéma 34 et 35 concernant respectivement l'ancienneté au cours préparatoire et l'ancienneté dans le poste respectif, deux tiers des enseignants exercent dans ce niveau de classe et sont dans le même établissement depuis au moins 5 ans.

Certains chercheurs, à l'instar de Talbot (2012), réfutent toute corrélation significative entre les performances des élèves et des « éléments facilement objectivables » tels que l'âge, la formation initiale ou encore l'ancienneté de service de l'enseignant. Sur ce point, nous pouvons évoquer la citation de Felouzis (1997) : « Les caractéristiques individuelles des enseignants n'ont pas d'effet sur les acquisitions des élèves : le « bon professeur » type n'existe pas de ce point de vue. L'âge, le sexe, l'origine sociale ou le statut n'ont pas d'effet sur l'efficacité » (Felouzis, 1997, p. 32). Toutefois, plus qu'en sciences de l'éducation, et de manière variée, plusieurs travaux (Bourdieu, 1980 ; Demailly, 1984 et Mabilly, 1994) ont mis en exergue des cohérences individuelles ou collectives entre certaines variables biographiques et les pratiques professionnelles qui pourraient en dépendre en partie. En prenant appui sur l'approche croisée de Sayac (2003) révélant les influences du sexe, de l'âge et du

cursus sur les pratiques des professeurs de mathématiques au lycée, nous comprenons comment les caractéristiques professionnelles et sociodémographiques des enseignants peuvent, en agissant sur les cinq composantes¹⁶⁶ des pratiques, déterminer certaines régularités et stabilités individuelles et donc à terme les logiques d'action. D'après l'auteure, le sexe influencerait le type de savoirs transmis, les aides apportées aux élèves, l'ouverture du professeur aux innovations pédagogiques ou aux ressources numériques, la « sociabilité professionnelle¹⁶⁷ » et la conformité des pratiques vis-à-vis des attentes institutionnelles. L'âge, quant à lui, agirait sur l'implication dans le travail en équipe, la prise en compte du paramètre « élève », l'intérêt pour les ressources numériques, l'achèvement du programme en fin d'année et l'attitude vis-à-vis des instructions officielles. Enfin, le cursus aurait, lui, plutôt un impact sur le rapport du professeur au manuel et son ouverture professionnelle.

	Femme	Homme	Total
Type d'établissement des professeurs observés			
REP	2	1	3
École classique	1	1	2
École d'application	1	0	1
Total	4	2	6
Zone d'implantation			
Urbaine	2	1	3
Rurale	2	1	3
Total	4	2	6
	Fille	Garçon	Total
Effectif moyen par classe observée tous niveaux confondus			
<i>Effectif moyen</i>	11,7	12,5	24,2
REP	33	34	67
École classique	25	27	52
École d'application	12	14	26

Tableau 42 : Environnement de travail

Un tiers des femmes et la moitié des hommes du panel travaillent dans un établissement implanté en REP. Un quart des femmes exercent dans une école classique ou en école d'application. En ce qui concerne la zone d'implantation des établissements en milieu urbain ou rural, la parité complète est observée entre hommes et femmes. D'autre part, les tailles des classes sont relativement proches et varient de 22 à 26, tous types d'établissements confondus. Le sexe ratio est en faveur des garçons quel que soit le type d'établissement. En effet, on compte 75 garçons pour 70 filles. Cependant, les classes ne sont pas déséquilibrées pour autant car le ratio reste de l'ordre de 1,07.

¹⁶⁶ Composantes cognitive, médiative, personnelle, sociale et institutionnelle (Robert et Rogalski, 2002).

¹⁶⁷ Sayac (2003) apprécie la sociabilité professionnelle des professeurs dans l'exercice de leur métier, à travers des pratiques empreintes de cette caractéristique : travail en équipe, implication en formation continue, élaboration de progressions en collaboration (p.377).

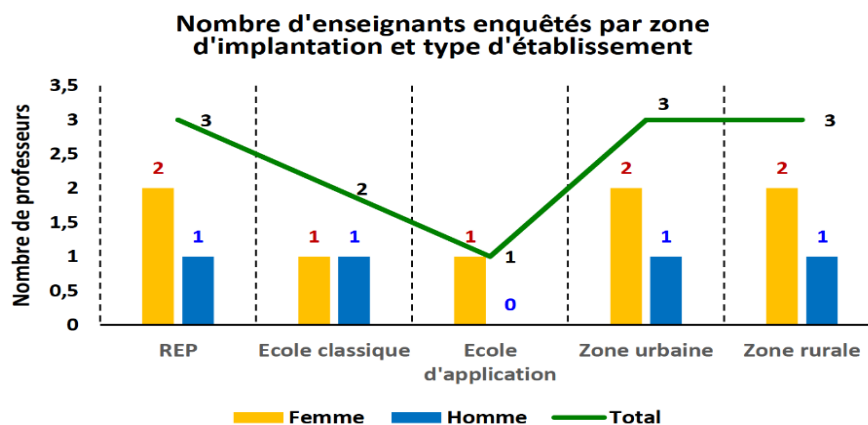


Schéma 36 : Nombre d'enseignants enquêtés
par zone d'implantation et type d'établissement

Par ailleurs, certains dispositifs, comme la réduction de la taille des classes, ont démontré une relative efficacité en particulier auprès des élèves les plus faibles (Meuret, 2001 ; Piketty et Valdenaire, 2006). C'est pourquoi, les effectifs des classes observées en REP nous semble assez élevés compte tenu des différents profils et des problématiques (retard scolaire, grande difficulté sociale, catégorie socioprofessionnelle défavorisée des parents) caractérisant le public d'élèves de ces zones, ce qui demande à l'enseignant de participer à une réponse collective de l'échec scolaire (travail en équipe, partenariats multiples avec d'autres acteurs du système éducatif, différenciation pédagogique, etc.) qui vient s'ajouter à « la complexité de l'activité au quotidien des professeurs des écoles, particulièrement caractérisée par la polyvalence des enseignements » (Bouchetal et Lantheaume, 2015, p.82).

En somme, la variété des cursus universitaires, les expériences personnelles en dehors de l'enseignement et les logiques d'individuation engendrées par le caractère aléatoire des premiers postes obtenus font que les trajectoires professionnelles des enseignants du premier degré ne peuvent plus être étudiées comme un « phénomène social total » (Geay, 1999). Dans le même ordre d'idées, Dubar (1992) affirme que la construction de l'identité du professeur relève d'une dynamique, caractérisée par des « transactions » qui selon Perez-Roux (2011) lui permettent de s'engager dans le métier tout en sauvegardant ses valeurs, de tirer parti ou non des retours sur sa pratique et de maintenir son individualité en restant à l'écoute des différentes ressources mises à sa disposition. De l'avis de Bouchetal et Lantheaume (2015), « la dimension biographique (parcours personnel, motivations et représentations par rapport au métier, éléments des sphères familiales) et la dimension située (environnement de travail des différents postes occupés, effets croisés des politiques nationales et locales d'éducation) ont des conséquences sur l'identité professionnelle des maîtres du premier degré » (p.85). Selon eux, « les dynamiques identitaires sont fluctuantes et elles ne s'apparentent pas en totalité avec des cycles successifs d'une trajectoire qui conduirait de débutant à expert ». En fait,

dans la lignée de Lantheaume et Hélou (2008), les auteurs décrivent l'identité enseignante comme « un processus dynamique, entre permanence et reconfigurations », avec « des pertes et des reconquêtes de sens selon des temporalités très variables » (p.89).

1.2. Identifier les éléments pris en considération par les professeurs pour élaborer leur projet d'enseignement

Le projet d'enseignement ou scénario englobe la succession chronologique des leçons, des exercices (en classe et à la maison), les évaluations ainsi que la logistique prévue (durée, répartition du travail, etc.) par le professeur pour enseigner un contenu précis (Robert et Hache, 2013). Autrement dit, le projet du professeur concerne son travail de préparation, avant la classe ou hors-classe, depuis la manière dont il souhaite l'introduire, les dynamiques entre les cours, les exercices, le sens, les signes et la technique jusqu'aux évaluations. Dans le cadre de notre recherche, en référence aux travaux de Margolinas (2002), nous tentons d'identifier les choix qu'effectuent l'enseignant lorsqu'il prépare sa séquence d'apprentissage du calcul mental de sommes avec franchissement de la dizaine en caractérisant son projet global (ce qu'il prévoit de faire apprendre à ses élèves, la progression qu'il a retenue, les contenus à travailler, les savoirs qu'il envisage d'institutionnaliser, etc.) et son projet local (la préparation d'une séance ou d'un moment particulier, les choix d'organisation de la séance, etc.). Cependant, l'accès direct au travail de préparation de l'enseignant est compromis par l'absence de traces écrites. En effet, les enseignants expérimentés ne rédigent pas toujours leur fiche de préparation d'autant plus que cette activité relève complètement du domaine privé. À vrai dire, nous avons collecté les rares fiches qui nous ont été généreusement remises mais nous ne les avons pas réclamées afin d'éviter tout formalisme et de rester au plus près de la réalité « des pratiques ordinaires » au CP en calcul mental. En effet, une exigence en ce sens pourrait, comme l'indique Roditi (2005) pousser le professeur à « répondre à ce qu'il pense être l'attente d'un chercheur ou à des consignes données par des formateurs ou des inspecteurs » (p.34).

Par ailleurs, aux dires de Claire Margolinas (2002), tout changement de conception du professeur sur l'enseignement des mathématiques peut transformer la façon dont il compte enseigner une notion, conduire à des projets de leçon différents, modifier le type d'explication qu'il donne en classe, changer la fréquence et la nature de ses interventions y compris sa manière d'interpréter le travail des élèves. Dans le même ordre d'idée, Robert et Robinet (1989) déduisent des modifications effectuées en toute bonne foi par les professeurs sur les séquences d'apprentissage transmises au cours d'expérimentation allant jusqu'à dénaturer le projet initial, qu'il y a « [...] chez tout enseignant, implicitement ou explicitement, des conceptions sur l'enseignement, en relation avec ses conduites (sortes de théorèmes en acte du professeur), sur ce qu'il faut faire (resp.dire) ou ne pas faire (resp.dire)

en classe, sur ce que veut dire tel indice dans la conduite chez les élèves, sur ce qu'il faut avant tout favoriser ou empêcher chez les élèves, en somme sur la "bonne" manière d'enseigner les mathématiques... » (p.1). Par conséquent, la première étape de notre recueil de données est la collecte des représentations conscientes et formulées des professeurs des écoles du CP sur le calcul mental, son enseignement et en particulier celui du calcul mental de sommes avec franchissement de la dizaine.

1.2.1 Les représentations des professeurs du CP et le profil de leur classe

D'après Blanchet et Gotman (2007), « l'enquête par entretien est particulièrement pertinente lorsque l'on veut analyser le sens que les acteurs donnent à leurs pratiques [...] lorsque l'on veut mettre en évidence les systèmes de valeurs et les repères normatifs à partir desquels ils s'orientent et s'animent ». Au regard des données que nous souhaitons recueillir, nous avons opté pour un entretien semi-directif pour favoriser l'installation d'un climat de confiance propice à l'exploration de la pensée tout en permettant d'obtenir des informations sur des thèmes prédéfinis à l'avance (Berthier, 2010). À cet égard, « ni entièrement ouvert, ni canalisé par un grand nombre de questions précises » (Quivy et Van Campenhoudt, 2006), notre entretien semi-dirigé était organisé en cinq grilles correspondants chacune à l'une des composantes des pratiques¹⁶⁸ mises en évidence par Robert et Rogalski (2002). Notre objectif étant d'évaluer ces dernières en abordant les thèmes qui les caractérisent. Nous présentons ci-dessous les grilles numérotées de 6 à 10 qui ont servi de guide à cet entretien.

Grille 6 – Entretien préalable : Composante personnelle liée aux représentations et aux buts subjectifs : Pour apprécier la composante personnelle, trois thèmes ont été abordés : l'expérience professionnelle, l'expérience personnelle, les représentations sur l'enseignement du calcul mental. Le tableau ci-dessous présente un extrait de cette grille dont on peut voir le détail en annexes II Grille 6.

Grille 7 – Entretien préalable : Composante institutionnelle

Trois thèmes évaluent également la composante institutionnelle : les programmes officiels sur le calcul mental, les adaptations aux contraintes institutionnelles, l'influence de ces contraintes sur les pratiques (voir annexes II Grille 7).

Grille 8 – Entretien préalable : Composante sociale

La composante sociale, elle est appréhendée par quatre thématiques : les élèves et la classe, les difficultés des élèves en calcul mental, les contraintes liées au contexte socio-culturel et leur influence

¹⁶⁸ Ces composantes sont détaillées au point b de la section 1 du chapitre 6.

sur la pratique (voir *annexe II Grille 8*). Adjointes aux résultats de l'évaluation diagnostique proposée en début d'année¹⁶⁹, l'ensemble des données collectées sur la composante sociale des pratiques lors de cet entretien, nous a permis d'établir le profil des classes observées.

Grille 9 – Entretien préalable : Composante cognitive

Le quatrième tableau de la grille d'entretien, concordant avec la composante cognitive avait pour objet de connaître le projet planifié par le professeur pour enseigner le calcul mental de sommes avec franchissement de la dizaine, la place de la séquence dans la progression annuelle, les ressources utilisées pour préparer le projet, les routines de l'enseignant (voir *annexe II Grille 9*).

Grille 10 – Entretien préalable : Composante médiative

In fine, le dernier tableau relatif à la composante médiative, abordait les modalités de mise en œuvre du projet en classe : les prévisions en termes de gestion ou d'organisation des activités des élèves et la place de la remédiation (voir *annexe II Grille 10*).

Une fois construites, les grilles d'entretien ont d'abord été testée et jaugée par une dizaine de professeurs composant l'échantillon initial au début de la deuxième année d'observation. Nous avons également pris l'attache de l'inspecteur de l'éducation nationale en charge des mathématiques, d'un conseiller pédagogique départemental, d'un conseiller pédagogique de circonscription et d'un formateur en INSPE. Cela nous a permis de rendre certaines questions plus polysémiques en les reformulant avec des mots ou des expressions plus fréquemment utilisées par les enseignants, d'ouvrir les questions trop rigides pour faciliter les associations d'idées, de supprimer celles qui étaient redondantes ou encore d'en rajouter pour traiter les thèmes oubliés. Concrètement, les entretiens, d'une durée d'une heure en moyenne, ont précédé d'une semaine la première leçon. En fait, à partir d'une question de départ ouverte, nous avons laissé les professeurs des écoles s'exprimer, en les coupant le moins possible, puis nous les avons relancés à l'aide d'une série de « questions – guides » (Huberman et Miles, 1991), relativement ouvertes, à propos desquelles nous souhaitions impérativement recevoir une information de leur part. Ces questions de relance apparaissent toutes dans les cinq grilles constituant le guide d'entretien préalable (*Grilles 6, 7, 8, 9 et 10 – annexe II*). Néanmoins, elles n'ont été posées ni dans l'ordre noté, ni sous la formulation initialement prévue car elles servaient juste de pense-bête pour recentrer l'entretien sur les attendus quand l'enseignant s'en éloignait trop ou pour obtenir des données sur les thèmes non abordés. Les données extraites de ces

¹⁶⁹ Pour plus de détails concernant cette évaluation, voir le point b. section 2.1.2. du chapitre 6.

entretiens sont détaillées pour les professeurs 2, 3 et 6, respectivement à la grille 1 des annexes (VII, VIII et VI).

Grille 11 – Profil des classes observées (annexe II grille 11) :

Par ailleurs, l'évolution du système scolaire (massification, diminution sensible des redoublements, etc.) associée à une évolution sociale, économique et culturelle de la société provoquant des changements dans le rapport des individus à l'école s'est traduite sur le terrain par une population d'apprenants qui se conforme moins à la norme scolaire traditionnelle, la diversification du public d'élèves et donc des modifications dans la composition des classes de la maternelle à l'université « tout en donnant lieu à une plus grande difficulté dans l'exercice du métier d'enseignant » (Suchaut, 2007). Paradoxalement, bien qu'elle soit l'une des causes du désarroi exprimé par les enseignants (Feyfant, 2016), c'est cette hétérogénéité qui est recherchée par les équipes pédagogiques lors de la constitution des classes au primaire pour garantir l'égalité de « traitement » entre les professeurs, leur assurer « des conditions de travail comparables (dont la gestion de l'hétérogénéité du groupe classe est un élément important) » et permettre aux élèves de « bénéficier de contextes d'apprentissages similaires » (Leroy-Audouin et Suchaut, 2005). En général, quatre critères régissent la répartition équitable des élèves entre les classes : l'effectif, le ratio fille/garçon, le niveau initial et le comportement des élèves. Ainsi, fruit du hasard ou au contraire longuement réfléchi, il est admis que la composition de toute classe est par nature hétérogène car « les élèves n'apprennent pas à la même vitesse, ils ne font pas, ils n'agissent pas de la même manière ; ils ne rencontrent ni les mêmes réussites, ni les mêmes obstacles » (Toullec-Théry, 2017, p.1).

D'ailleurs, les résultats majeurs de la recherche en éducation sur cette question concluent que le meilleur compromis pour réduire les inégalités sociales sans pour autant affecter le niveau moyen reste l'hétérogénéité du groupe classe car elle favorise une plus grande progression des élèves fragiles sans que cela soit préjudiciable aux élèves les plus performants (Gamoran, 1993 ; Duru-Bellat et Mingat, 1997 ; Venkatakrishan et Wiliam, 2003 ; Ireson, Hallam et Hurley, 2005 ; Piquée, 2007a). En effet, la constitution de classes homogènes n'a pas démontré son efficacité auprès des élèves en difficulté, mais plutôt un faible avantage (le programme proposé était plus riche et plus ambitieux) chez les élèves forts (Withburn, 2001). Ceci dit, même si aucune étude française portant sur l'enseignement primaire n'a montré d'effet significatif de l'hétérogénéité de la classe sur les progressions des élèves (Suchaut, 2007), il n'empêche que les caractéristiques des élèves influent sur les pratiques pédagogiques. En attestent le départ des « meilleurs professeurs » vers les contextes d'enseignement les plus favorables (Davezies, 2005) ou encore le niveau d'exigence des professeurs sur les acquis scolaires revu à la baisse pour s'adapter à la population des élèves de la classe (Perrin-Glorian, 1992 ; Bautier, 2005 ; Butlen, Peltier-Barbier et Pézard, 2002). Entre autres, nous pouvons

rappelé ici le cas extrême, relaté par Robert et Hache (2013), d' « un jeune enseignant fortement découragé de faire travailler ses élèves en petits groupes en classe parce que "ça fait trop de bruit", alors qu'il serait très motivé pour le faire » (p.59).

Par conséquent, au regard du mélange plus ou moins harmonieux ou explosif de la vingtaine d'enfants que l'enseignant devra faire fonctionner pour créer une synergie autour des apprentissages, favoriser la coopération et les interactions entre élèves pour construire collectivement le savoir et mieux faire apprendre chacun, la démarche de caractérisation des classes semble plus que nécessaire car la prise en compte de la composante sociale des pratiques non directement observable reste néanmoins incontournable pour comprendre certains choix de l'enseignant (Robert et Hache, 2013). Dès lors, le repérage des points forts, des acquis et des faiblesses des élèves initié par les enseignants et objectivé par l'élaboration de profils de classe singularisés va permettre à chacun de collecter suffisamment d'informations pour ajuster son action et sa progression pour rendre plus accessible les attentes et les contenus d'apprentissage, s'assurer que les notions apprises soient clairement identifiées par tous les élèves en fin de séance, anticiper l'évaluation intermédiaire des acquis, envisager des itinéraires cognitifs adaptés à la nature des erreurs recensées et à l'élève lui-même pour répondre à ses besoins spécifiques, et surtout suite à l'évaluation sommative, assurer le suivi en proposant un travail spécifique à ceux qui n'auraient pas atteint la compétence.

En corollaire, à partir des informations apportées par chaque professeur des écoles sur sa classe lors de l'entretien préalable et des résultats de l'évaluation diagnostique, nous avons élaboré une grille de données afin d'avoir une connaissance générale du groupe-classe à travers leurs caractéristiques socio-démographiques (catégorie socio-professionnelle, structure familiale, origine culturelle), scolaires (score aux évaluations en nombres et calcul à l'entrée du CP, retard scolaire, avance sur le cycle, rapport au calcul mental, motivation, travail fourni, attitudes) et structurelles (taille, établissement), c'est-à-dire les déterminants de la classe pouvant nous apporter assez d'éléments sur ses forces, les conditions d'enseignement et les contraintes dans le but d'appréhender les mécanismes en jeu dans la dynamique des classes et dans le travail des élèves afin de mieux comprendre les logiques d'action des enseignants, les régularités et les variabilités des pratiques en calcul mental. Des exemples de profils de classe des professeurs 2, 3 et 6, sont proposés respectivement à la grille 2 des annexes VII, VIII et VI.

1.2.2 L'observation des séances dans les classes

Certes, l'entretien avant séance nous apporte des informations non négligeables sur le scénario prévu par l'enseignant. Mais, en réalité, elles ne sont pas suffisantes pour répondre à notre visée descriptive

et compréhensive des pratiques enseignantes. Par conséquent, il nous faut reconstruire le projet des professeurs à partir de ce qu'ils ont effectivement enseigné dans leur classe. D'après Quivy et Campenhoudt (2006), « les méthodes d'observation directe constituent les seules méthodes de recherche sociale qui captent les comportements au moment où ils se produisent sans l'intermédiaire d'un document ou d'un témoignage » (p.177). Cependant, en dépit du climat de confiance instauré entre le chercheur et les professeurs volontaires, l'observation des pratiques s'est heurtée à une difficulté d'ordre méthodologique de taille. En effet, bien que le contrat d'observation inscrive « la relation chercheur / enseignant et la relation observateur / observé dans le champ de la recherche, et non dans celui du contrôle » (Comiti et al., 1995), les enseignants ont à l'unanimité refusé d'être filmés. Ils ne nous ont pas fournis de vraies raisons mais nous supposons que les croyances culturelles et la peur du jugement y sont pour beaucoup. D'ailleurs, lors de nos échanges avec un maître de conférences en didactique des mathématiques à l'INESPE¹⁷⁰ de Guadeloupe sur cet état de fait, ce dernier nous a avoué que les chercheurs, doctorants et formateurs étaient également confrontés à cette difficulté lorsqu'ils s'agissaient de mener des observations dans le premier degré.

Par voie de conséquence, nous avons contourné le problème en optant pour une observation, « médiatisée » (De Ketele et Roegiers, 1996) à l'aide d'un smartphone de façon à perturber la classe le moins possible, et « naturaliste », dans le sens où l'enseignant est resté responsable de sa classe et a mené ses séances comme il a l'habitude de le faire sans l'intervention du chercheur¹⁷¹. Ainsi, tout au long de l'année 2014-2015, les six professeurs et leur classe ont été observés « de l'extérieur » durant l'intégralité de la séquence d'enseignement portant sur le calcul mental de sommes avec franchissement de la dizaine. Dans les faits, l'enregistrement commençait dès la première interaction entre le professeur des écoles et les élèves. En somme, les séances observées ont duré entre 20 et 40 minutes et l'ensemble des enregistrements audio nous ont conduit à archiver en fin de compte cent-vingt-cinq bandes d'une durée moyenne de 30 minutes correspondant aux cent-vingt-cinq séances effectivement observées. En réalité, nous avons assisté à chacune des séances, pris des notes sur les énoncés des exercices, les déplacements, les postures de l'enseignant et photographié l'ensemble des éléments notés au tableau, les documents distribués et les productions des élèves. Au cours de l'année scolaire qui a suivi cette première année d'observation (2015-2016) et bien que la classe ait à nouveau changé, nous sommes revenus sur le terrain et avons assisté à une dizaine de séances avec chacun des

¹⁷⁰ Institut National Supérieur du Professorat de l'Éducation

¹⁷¹ Bien évidemment, le simple fait d'observer n'est pas neutre. En effet, le fait d'être soumis à une observation extérieure peut avoir une influence sur la façon dont l'enseignant prépare ses cours, met en œuvre ses séances face aux élèves et avec les élèves selon les représentations qu'il a de ce que le chercheur attend ou encore la peur d'être jugé par ce dernier. Nous avons donc insisté sur le fait que le chercheur veut étudier les pratiques telles qu'elles sont au quotidien pour les comprendre et non pour les juger et proposer un contrat de confidentialité pour garantir l'anonymat de l'enseignant et de ses élèves.

six enseignants du panel dans le but de confirmer, d'approfondir ou de réajuster nos premières analyses et interprétations.

1.2.3. Des entretiens à chaud

En complément, nous avons réalisé, successivement, après chaque séance, des entretiens à chaud suivis d'une analyse de contenu afin « d'effectuer un travail d'investigation en profondeur qui, lorsqu'il est mené avec lucidité et les précautions d'usage, présente un degré de validité satisfaisant » (Quivy et Campenhoudt, 2006, p.180). Comme l'ont expliqué Schubauer-Léoni et Leutenegger (2002) : « il s'agit de se donner les moyens empiriques de revisiter la séance à travers la reconstruction discursive de l'acteur ayant tenu un des rôles majeurs dans la séance. Dans tous les cas, le but de cet entretien n'est ni de s'assurer que l'enseignant a bien vu et perçu les éventuels "défauts" de son intervention, ni de vérifier qu'il estime avoir effectivement réalisé son projet initial ». Ici, l'entretien à chaud a une fonction de bilan de la séance et consiste en une analyse réflexive de l'enseignant, a posteriori, sur ses pratiques dont nous présentons le guide ci-après.

Grille 12 – Grille d'entretien à chaud à l'issue des séances (annexe II Grille 12)

Pour mener à bien cet entretien centré d'une vingtaine de minutes en moyenne, nous avons repris à notre compte les questions posées par Marie-Toullec-Théry (2006), dans la grille d'entretien à chaud de sa thèse portant sur l'aide donnée par les professeurs aux élèves peu performants en mathématiques à l'école primaire. En fait, notre entretien était structuré en trois temps : le premier temps (quelques minutes) invitait le professeur des écoles à nous donner ses premières impressions sans que nous lui posions trop de questions. Le deuxième temps de l'entretien s'est déroulé sur le modèle d'un entretien d'explicitation (au sens de Vermesch, 1990 ; 1994). In fine, les dernières questions étaient destinées à mettre en exergue les éléments invariants de son activité. Ces entretiens à chaud ont été enregistrés à l'aide d'un smartphone afin d'optimiser leur exploitation ultérieure. Les données extraites de ces entretiens sont détaillées pour les professeurs 2, 3 et 6, respectivement à la grille 7 des annexes (VII, VIII et VI).

1.2.4. La reconstitution du projet d'enseignement

Le croisement des données extraites des observations en classe par celles apportées par les entretiens menés avec les enseignants avant et après séance nous permet de reconstituer chronologiquement le projet d'enseignement. Nous présentons ci-dessous les grilles utilisées pour la reconstitution.

Grille 13 – Découpage en épisodes du protocole de la séance (annexe II) - Grille 14 – Synthétique réduit de la séance (annexe II) - Grille 15 – Reconstitution du projet d'enseignement (annexe II)

À l'instar d'Éric Roditi (2001) dans sa thèse sur les pratiques enseignantes en mathématiques, cette reconstitution passe par le découpage du protocole de chaque séance en étapes, en épisodes et en sous-épisodes en fonction de la nature de la tâche demandée ou effectivement réalisée par les élèves (voir des exemples de découpage de séances à la grille 4 des annexes VI, VII et VIII). Chaque épisode correspond à « un enchaînement d'actes pédagogiques et d'échanges entre le professeur et les élèves en vue de parvenir à un but donné qui est en général la réalisation d'une tâche » (Hache et Robert, 1997 ; Roditi, 2005). Les verbatims sont retranscrits et complétés par des observations. Les durées sont également indiquées. Subséquemment, pour faciliter la gestion et l'appréhension de l'ensemble de ces données, ce découpage (voir grille 13 annexes II) répartit les épisodes et les sous-épisodes selon les trois grands moments de l'activité de l'enseignant¹⁷² (dévolution, régulation et institutionnalisation) et précise la nature de cette activité et les tâches des élèves. De cette manière, l'analyse des énoncés traduits en « tâches mathématiques » à résoudre donne accès aux activités des élèves qu'elles sont susceptibles de provoquer (Chesnais, 2014). Chaque séance a ensuite été réduite à un synopsis (voir exemples à la grille 5 des annexes VI, VII et VIII).

Forts de tous ces éléments, nous avons restitué la séquence d'apprentissage programmée par les enseignants pour enseigner le calcul mental de sommes avec franchissement de la dizaine au CP à partir d'un tableau (grille 15 annexes II) reprenant les étapes, l'ensemble des objectifs ou intentions du professeur, les activités et les tâches proposées pour y arriver ainsi que les supports et les modalités d'organisation. Dès lors, le scénario intégral reconstitué permet d'accéder aux choix de l'enseignant (les contenus, les tâches, leur organisation, le cheminement cognitif retenu) que les informations extraites des entretiens viennent ensuite corroborer. Toutefois, en partant du principe que « seul le sujet peut dire quelque chose sur la part qu'il prend dans ce qui lui arrive » (Terrisse, 2000), nous soumettons à l'approbation du professeur, par le biais d'un entretien, le projet d'enseignement reconstruit afin de nous assurer de sa fiabilité (Van Der Maren ; 1995). Cet entretien, d'environ une

¹⁷² Les concepts de dévolution et d'institutionnalisation sont introduits en didactique des mathématiques par Brousseau (1986) dans le cadre de sa théorie des situations pour caractériser l'ensemble du processus d'enseignement-apprentissage. Sensevy (2001) met à profit ce couple de concept pour analyser l'action du professeur et les définit comme suit : « *La dévolution est le processus par lequel le professeur confie aux élèves, pour un temps, la responsabilité de leur apprentissage. La dévolution est toujours, d'une certaine manière, dévolution d'un rapport à un milieu : l'élève doit assumer de travailler d'une manière déterminée dans un milieu déterminé, et accepter le fait que le professeur ne lui transmettra pas directement, pour un temps les connaissances [...]* L'institutionnalisation est, au sens strict, le processus par lequel le professeur montre aux élèves que les connaissances qu'ils ont construites se trouvent déjà dans la culture (d'une discipline), et par lequel il les invite à se rendre responsables de savoir ces connaissances » (Sensevy, 2001, p.211). La notion de régulation, quant à elle, est ancrée dans la didactique du français et fait partie des quatre « gestes fondamentaux¹⁷² » ou dispositifs didactiques identifiés par Schneuwly et Dolz (2009) au cours de la mise en œuvre des séquences d'enseignement. D'après Schneuwly et Bain¹⁷² (1993), les régulations peuvent être internes¹⁷² ou locales. Ces dernières retiennent davantage notre attention car elles sont liées aux échanges avec l'élève en face à face ou en groupe. Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni¹⁷² (2000) se réfère également au terme régulation pour décrire « *les comportements que le professeur produit en vue d'amener l'élève à élaborer des stratégies gagnantes* » (...). Sensevy et al. (2000) vont plus loin en expliquant que : « *c'est aussi dans le cadre de son action de régulation qu'il pourra garantir une forme de progression du temps didactique en jouant sur le partage des tâches initialement défini entre le professeur et les élèves* » (p. 269).

heure, s'est déroulé un mois après l'observation de la dernière séance pour nous accorder un temps de transcription et d'analyse.

En définitive, le scénario recomposé, résultant du recoupement du projet élaboré par l'enseignant durant sa préparation et de sa mise en œuvre avec les élèves, fait office de traces objectives des mises en œuvre et devient la base de discussions entre le professeur et le chercheur puisqu'il est sujet à des interprétations de part et d'autre, tout en dévoilant les contraintes liées à l'exercice en classe du métier d'enseignant. Effectivement, ce point méthodologique du travail de reconstitution du projet a permis aux professeurs des écoles de préciser ce qui a influencé leurs choix lors de l'élaboration du scénario de la séquence sur l'addition mentale avec franchissement de la dizaine : « ce qui est légitime et valorisé dans leur milieu professionnel et ce qui ne l'est pas, [...] ce qu'ils faisaient auparavant mais qu'ils ont abandonné, ce qu'ils refusent de faire bien qu'on le leur demande, ce qu'ils cherchent à faire sans y parvenir, ce qu'ils pourraient faire en d'autres circonstances ou avec un autre coût, ce qu'ils font sans véritablement désirer le faire [...] » (Goigoux, 2007, p.54). C'est pourquoi, quelques jours avant l'entretien différé, nous avons transmis par mail le scénario reconstruit à chaque enseignant ce qui leur a permis de le découvrir en privé, de le lire attentivement, de l'analyser à sa façon pour en discuter avec nous par la suite. Au début de l'entretien, la parole a donc été laissée au professeur des écoles afin qu'il s'exprime et commente librement le projet reconstitué avant de nous confirmer ou pas qu'il correspond bien à ce qu'il avait prévu. Certes, comme l'indique Roditi (2001), cette introspection donne « aux professeurs l'occasion de procéder à quelques rationalisations *a posteriori* » (p.34). Néanmoins, l'auteur précise également que « cela n'a pas d'incidence sur la recherche fondée principalement sur le déroulement des séquences » (ibid.). Des exemples de tableaux synoptiques des projets d'enseignements reconstitués des professeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6 sont proposés respectivement en annexes IV Grilles 1, 15, 25, 36, 44 et 55.

1.2.5 L'étude du projet d'enseignement reconstitué

L'étape suivante est l'étude du projet tel qu'il a été effectivement mis en œuvre dans la classe afin de déterminer les activités d'élèves qu'il est susceptible de provoquer. Elle comprend trois niveaux d'analyse : la progression, les activités proposées et la mise en commun. Pour rendre compte des choix globaux des professeurs, nous considérons en premier lieu le scénario dans son ensemble à travers l'analyse des objectifs intermédiaires fixés, des contenus et de leur organisation, du dispositif pédagogique retenu, de la différenciation construite, du format et du type des séances, tels qu'ils apparaissent dans le scénario. Par la suite, les grands choix didactiques et pédagogiques mis en exergue sont complétés et confortés par les propos tenus par les professeurs lors des entretiens avant

d'être confrontés aux résultats obtenus lors de l'analyse a priori de l'objet d'apprentissage et des scénarios proposés dans les manuels.

En second lieu, nous nous intéressons au type et au nombre d'activités proposées aux élèves à chaque séance en référence aux mathématiques visées pour « reconstituer ce que les élèves "reçoivent" comme cours et ce qu'ils ont à faire avec ce savoir, ces (futures) connaissances » (Perrin-Glorian et Robert, 2005). Cette analyse des tâches mathématiques effectivement proposées en classe est menée après plusieurs écoutes des bandes audio des séances enregistrées en classe et tient compte des informations apportées par l'enseignant pour mieux comprendre certains de ses choix. En fait, suivant l'exemple de Perrin-Glorian et Robert (2005) dans leur « Analyse didactique de séances de mathématiques au collège », nous « traquons dans les activités que pourront avoir les élèves à la fois les "gammes", familiarisant les élèves avec des contextes précis, et ce qui peut impliquer des reconnaissances, des modifications, des mises en relation, favorisant les décontextualisations qui sont des précurseurs de la contextualisation et de l'organisation corrélative des connaissances » (p.101). Nous terminons notre recherche sur les éléments pris en considération par les professeurs pour construire leur scénario par l'analyse des moments de mises en commun et d'institutionnalisation car ils sont essentiels pour permettre à l'élève de dépasser le paradoxe de l'automatisme¹⁷³ spécifique à l'apprentissage du calcul mental. In fine, en appui sur les justifications données lors des différents entretiens, des analyses comparatives des projets des six professeurs des écoles vont permettre d'une part, de détecter les choix communs et les divergences concernant les éléments didactiques et pédagogiques pris en considération par les enseignants pour construire leurs projets d'enseignement et d'autre part, d'évaluer le rapport qu'entretiennent les enseignants avec les manuels.

1.3. Caractériser les pratiques privilégiées par les enseignants pour venir en aide aux élèves les plus en difficulté dans l'apprentissage du calcul mental

Ici, notre visée est de progresser dans la connaissance des pratiques enseignantes propices aux progrès en calcul mental des élèves en difficulté. Cet objectif nécessite à la fois de décrire les pratiques enseignantes à l'égard de ces apprenants et d'en apprécier les effets. Toutefois, avant d'aborder la présentation concrète de nos instruments d'enquête et de recueil de données, quelques précisions s'imposent. Tout d'abord, quand nous utilisons l'expression « élèves en difficulté », nous l'employons ici, au sens où l'entend Bautier (2015), c'est-à-dire : des « élèves ordinaires en difficultés (et non en grande difficulté) scolaires et continues parce qu'ils ne partagent pas les évidences cognitives et langagières de l'École, et qui dès lors ne s'inscrivent pas dans les dynamiques

¹⁷³ Voir chapitre 4 de la thèse section 5 (calcul mental et élève en difficulté) page 108 pour plus de détails sur le paradoxe de l'automatisme lié à l'enseignement-apprentissage du calcul mental.

d'apprentissage qui leur permettraient d'en comprendre les enjeux, en particulier dans la perspective d'une scolarité longue. Il ne s'agit donc pas de difficultés ponctuelles dans l'appropriation de telle ou telle notion ou de telle ou telle procédure. Il s'agit de manières de faire de l'élève avec les objets scolaires, dans les situations de travail proposées, manières de faire qui font obstacle à la construction des savoirs, à leur cumul, leur organisation, leur articulation, mais qui font obstacle à ces apprentissages du fait des situations scolaires telles quelles leur sont proposées actuellement. Plus précisément, il est question des modes d'être au langage, à l'apprendre, à l'école, dans les situations scolaires auxquelles les pratiques scolaires et enseignantes les confrontent, et qui ne permettent pas à l'élève d'identifier des objets de savoir et ce faisant, d'acquérir les savoirs eux-mêmes, ni les habitudes intellectuelles et langagières nécessaires¹⁷⁴ » (Bautier, 2015, p.15). Pour plus d'informations, une analyse plus approfondie sur les caractéristiques des élèves en difficulté ainsi que l'impact et les limites d'une pratique régulière en calcul mental en classe pour ce type d'élèves rencontrant en général des difficultés en mathématiques sont explicités à la section 5 du chapitre 5.

1.3.1. Les pratiques à l'égard des élèves en difficulté

Faisons maintenant le point sur ce dont il est question, lorsque nous parlons de « pratiques à l'égard des élèves en difficulté ». Tout élève en difficulté demeure avant toute chose un élève à part entière, au sens large du terme, membre d'un collectif classe auquel s'adresse le professeur. De ce fait, il peut être concerné par tout ce qui se passe dans la classe qu'il s'agisse de pratiques différenciatrices spécifiquement mises en place à son égard (regroupement en groupe de niveau ou de besoin, pratiques d'individualisation...) ou de pratiques générales ou globales en classe entière (enseignement explicite, activités collectives rituelles, institutionnalisations souples ou locales...). De la même manière, comme l'indique Céline Piquée (2010), le fait « qu'un enseignant n'organise rien de spécifique pour les élèves en difficulté, constitue aussi une pratique à l'égard de ces élèves. Ces organisations pédagogiques laissent apparaître une tension entre l'enseignement « tout collectif », exclusivement en classe entière et l'enseignement « tout individualisé » pour faire réussir les élèves fragiles en calcul mental. Faut-il pour mieux leur faire acquérir des savoirs et des savoir-faire les séparer des autres élèves ou les intégrer au groupe classe pour favoriser leur progrès ?

Comme l'expliquait Legrand (1995), « il s'agit dans tous les cas, de prendre en compte la réalité individuelle de l'élève. Mais cette prise en compte peut se faire en considération de deux objectifs différents : ou bien il s'agit d'adapter l'enseignement à la destination sociale et

¹⁷⁴ « La contextualisation des travaux opérée n'est pas seulement sociale ; elle est aussi socio-historique en ce qu'elle porte sur les évolutions de l'École, sur les évolutions de ses conceptions et de ses pratiques, et qui vient éclairer les contraintes qui pèsent sur l'enseignant comme sur les élèves dans un troisième niveau de contexte de l'action, celui des situations quotidiennes de classe (Bautier, 2006).

professionnelle des élèves ; ou bien, un objectif commun étant défini et affiché, il convient de prendre en compte la diversité individuelle pour y conduire » (Legrand, 1995, p.6). Ce sont donc toutes ces pratiques, mis à part les dispositifs d'aide qui s'éloignent du quotidien de la classe (APC¹⁷⁵, accompagnement éducatif, RASED¹⁷⁶, etc.) que nous avons analysé dans des classes à efficacité contrastée¹⁷⁷ afin de caractériser celles qui optimisent la progression en calcul mental des élèves en difficulté. Toutefois, cette perspective n'implique en aucun cas de parler de « bonnes » ou de « mauvaises » pratiques en soi puisque celles-ci sont indissociables du contexte, de la situation proposée, des activités des élèves et encore moins de porter un regard critique sur les actions des professeurs des écoles. Dans le même ordre d'idées, les mesures de performances réalisées sur la population initiale de cent-vingt-cinq classes pour sélectionner notre échantillon final de six classes (voir section 2.1.2. de ce chapitre) évaluaient l'efficacité pédagogique des classes et non pas celles des enseignants. D'autant plus, qu'ils sont aux prises de contraintes, de doxas, de préconisations institutionnelles et d'évolutions qui « rendent le travail des enseignants plus complexe, plus difficile et mettent les enseignants en contradiction si l'objectif de faire accéder tous les élèves aux mêmes apprentissages est maintenu et que le manque de formation dans ce domaine ne leur permet pas de l'atteindre » (Bauthier, 2015, p.16). Au regard de la complexité de ces phénomènes scolaires, nous étions contraints d'examiner les pratiques sous un certain angle pour mieux les décrire même si cela devient forcément réducteur. Ainsi à l'instar de Céline Piquée (2010), nous avons étudié ces pratiques du point de vue de l'élève en difficulté : « c'est lui le sujet observé et non l'enseignant, l'objectif étant de savoir ce que vit cet élève » (p.46).

1.3.2. Le repérage des élèves en difficulté

Nous avons donc débuté nos investigations par le repérage, dans chacune des six classes composant l'échantillon, des trois élèves les plus en difficulté qui ont fait l'objet de l'observation (voir Annexes V Grille 2 rubrique « les élèves en difficulté en calcul mental »). Pour ce faire, nous avons demandé aux enseignants un classement des élèves indiquant le niveau de chacun sans pour autant leur expliquer le but de la manœuvre afin d'une part, qu'il conserve leur fonctionnement habituel et d'autre part, éviter tout regain d'attention vis-à-vis de ces élèves qui fatalement biaiserait l'interprétation des résultats. Au total, dix-huit élèves ont été observés : six dans les classes à profil « haute efficacité », neuf dans les classes à profil « efficacité moyenne » et trois autres dans celles à profil « basse efficacité ». La sélection des classes et la détermination de leur profil sont détaillées à la section 1.1.2 du chapitre 7 de la thèse.

¹⁷⁵ Activités Pédagogiques Complémentaires

¹⁷⁶ Réseau d'Aides Spécialisées Aux Élèves en Difficulté

¹⁷⁷ Des classes qui se distinguent par leur capacité à faire progresser plus ou moins les élèves en difficulté.

1.3.3. L'observation des pratiques enseignantes à l'égard des élèves en difficulté

Bien qu'elle soit loin d'être une problématique neuve, nous abordons ici la notion de différenciation pédagogique pour questionner les formes d'enseignement ainsi que les modèles d'action et d'activités mises en œuvre pour favoriser le progrès des élèves fragiles en calcul mental. Tout d'abord, il est intéressant de remarquer que les recherches menées sur « les logiques qui sous-tendent le travail différencié et potentiellement différenciateur des élèves » (Bautier et al., 1992 ; Bautier et Rochex, 1998, 2001 ; Butlen, 2002 ; Perrin-Glorian, 1998 ; Rochex et Crinon, 2011) mettent en évidence l'existence d'une cohérence et d'une récurrence des pratiques¹⁷⁸ qui, cumulées, expliquent pourquoi certains élèves n'identifient pas « les enjeux cognitifs des tâches et du travail engagé » et « passent à côté des apprentissages "sans s'en rendre compte" », contrairement à d'autres qui les saisissent avec plus ou moins de clarté (Bautier, 2015, p.15). En conséquence, l'appréciation des effets des pratiques sur la progression des élèves passe, aux dires d'Elisabeth Bautier (2015), par la prise en compte de leurs dimensions « cumul », « cohérence » et « récurrence » et nécessite des observations inscrites dans une temporalité longue. Par conséquent, les classes investiguées ont été observées durant plusieurs séances, à trois moments différents de l'année (premier, deuxième et troisième trimestre) sur des séquences d'apprentissage distinctes et d'une année à l'autre car nous sommes revenus sur le terrain l'année d'après pour conforter nos premières interprétations.

D'autre part, si la littérature (Bru, 1991 ; Pariès, Robert et Rogalski, 2008) révèle l'existence d'un certain degré de variabilité des pratiques enseignantes, elle confirme également qu'il est possible d'en repérer des éléments constitutifs qui peuvent être relativement stables (Vandebrouck, 2002 ; Beziaud, 2003 ; Butlen, Masselot et Pézard, 2003). Les interactions verbales maître-élève(s) en font partie et sont considérées comme l'une des variables constitutives des pratiques les plus prégnantes témoignant d'une certaine stabilité au cours d'une même année scolaire et d'une année à l'autre (Bru, 1992, Altet et al., 1996). À tel point que la manière dont agit et interagit l'enseignant avec ses élèves semble avoir des liens avec un nombre impressionnant de thématiques liées à l'enseignement. Citons pour exemples, le fonctionnement interne des classes (Bru, 2001), l'efficacité pédagogique ou l'effet-maître (Genelot et Tupin, 2003), la manière dont s'articulent les interactions et les apprentissages (Nonnon, 1999 ; Sarrazy, 2001) ou encore les traitements différentiels dont les élèves sont susceptibles de faire l'objet (Jarlégan, 1999). À son tour, partant du fait qu'« enseigner consiste, entre autre choses, à proposer une tâche à ses élèves et à faire en sorte qu'à travers l'activité qu'ils vont être amenés à déployer ils atteignent les performances escomptées », Clanet (2007) montre d'une part que les « interactions maître-élève(s) et élève-maître » sont un organisateur de pratiques puissant et

¹⁷⁸ Mode de présentation de ce qu'il s'agit d'apprendre, construction de la situation de travail, utilisation du langage ou de certains supports, organisation du temps de la classe, etc.

d'autre part qu'il existe des liens corrélatifs cumulatifs et linéaires entre interactions enseignant-apprenant et performances scolaires. C'est pourquoi, nous portons en premier lieu notre attention sur les échanges maître-élèves pour étudier les pratiques enseignantes à l'égard des élèves en difficulté. N'ayant pas été autorisés à filmer, nous avons d'abord intégralement retranscrit les bandes audios des séances enregistrées, à l'aide d'un smartphone, afin de recueillir les propos échangés entre le professeur et les élèves. Pour terminer, la liste des indicateurs de contacts¹⁷⁹ verbaux entre enseignants et élèves (Grille 23 en annexes II) établie par Piquée (2010), nous a servi de base pour définir des catégories et construire a posteriori à partir de nos observations sur le terrain les grilles d'analyse présentées infra.

1.3.4 Présentation des grilles

Grille 16 – Retranscription des séances (voir annexe II)

Les activités des élèves ne sont pas directement observables et ne restent que partiellement accessibles par le biais des traces laissées par chacun d'eux. Pour les mettre en évidence, Robert et Perrin-Glorian¹⁸⁰ (2005) proposent une solution intermédiaire : « *reconstituer les activités que peuvent avoir les élèves à travers ce que nous pouvons observer des pratiques de l'enseignant en classe et des interventions d'élèves en phase collective, à l'échelle des séances (ou d'extraits)* » (p.98). Ainsi, sur l'exemple des didacticiennes, nous ne nous penchons pas sur ce que fait chaque élève en difficulté *hic et nunc* en étudiant les ardoises ou les feuilles, par exemple. D'abord, parce que l'élève réalise la tâche proposée par la pensée¹⁸¹ et ensuite parce que l'expression écrite de son activité se limite à un résultat. Nous nous focalisons plutôt sur « *l'analyse des relations qui peuvent (ou non) se nouer entre des pratiques réelles et des élèves réels, en classe*¹⁸² » (p.98). Cependant, comme l'ont expliqué les auteures (2005) : « *Cela ne livre que les activités d'élèves possibles dans le groupe classe, déterminées à partir de la situation observée, des cadres théoriques de didactique et d'autres travaux s'appuyant sur des observations directes d'élèves. Mais cela délimite déjà beaucoup ce que chaque élève a pu faire dans le temps étudié*¹⁸³ » (p.98). En résumé, en ce qui concerne les élèves en difficulté observés, nous analysons uniquement leur activité potentielle. Nous faisons donc apparaître dans les transcriptions des séances ce qu'ils doivent faire, disent, proposent et ce qu'ils font avec une lecture orientée vers les pratiques de leur professeur à leur égard pour en dégager les caractéristiques.

¹⁷⁹ D'après Céline Piquée (2010), il est préférable d'utiliser « les termes de contacts verbaux ou d'actions verbales à celui d'interactions, fréquemment utilisé, mais qui renvoie implicitement à l'idée d'échange. Or, l'enseignant peut délivrer un message sans que l'élève soit amené à répondre, ou inversement » (p.48).

¹⁸⁰ Ibid.

¹⁸¹ La pensée de l'élève reste sous l'influence de nombreux facteurs tels que les manifestations conscientes par rapport au savoir ou le simple fait que l'élève puisse penser à plusieurs choses à la fois.

¹⁸² Ibid.

¹⁸³ Ibid.

De fait, les verbatims des enregistrements audios sont intégralement transcrits ainsi que les gestes des acteurs et leurs notations de toutes sortes à l'aide d'un tableau organisé en quatre colonnes indiquant les tours de paroles, le temps, le nom de l'émetteur et les différents énoncés (annexes II grille 16). Pour faciliter la lecture, nous adoptons certaines conventions d'écritures pour transcrire les marques discursives ainsi que les actes du professeur des écoles et des élèves. Ainsi, les rires, soupirs et autres sonorités sont indiqués entre parenthèses et en écriture standard : (rires). Les gestes, les mimiques et les actions des acteurs, relevés par le chercheur lors de l'observation en classe, sont eux aussi mentionnés entre parenthèses mais écrits en italiques. Les propos inaudibles sont eux aussi notés entre parenthèses (xxx). Les marques d'accord hors phonologie (ah...euh...mm...) sont notées. Les énoncés sont rédigés en respectant la grammaire spécifique du langage oral et ponctués dans la cohérence du récit. De plus, les pauses dans le discours sont matérialisées par des points de suspension. En corollaire, les séances observées donnent lieu à un verbatim au milieu duquel sont intercalés entre parenthèses et/ou en italique, les actions des acteurs, la posture, les déplacements de l'enseignant de manière à rendre compréhensible ce qu'il dit, fait réellement et en référence à quoi il le dit et il le fait. Des exemples de retranscription de séances sont proposés à la grille 3 en annexes VI, VII et VIII.

Grille 17 – *Intensité des contacts verbaux* (voir annexe II)

Cette grille permet d'évaluer l'importance des contacts verbaux entre l'enseignant et les trois élèves en difficulté au prorata de ses échanges avec l'ensemble de la classe. Reprenant à notre compte la méthodologie de Céline Piquée (2010), nous mesurons l'intensité de la relation maître-élève à l'aide de deux indicateurs : le nombre moyen d'actions verbales relevées en une heure (témoignant de l'intensité de la relation) et la durée écoulée entre le début de la classe et la première interaction avec l'élève (témoignant de la rapidité de la prise de contact). Par ailleurs, les travaux de Sinclair et Coulthard (1975) ont révélé que l'échange discursif pédagogique avait une structure ternaire, « c'est-à-dire composée de trois actes : un acte initiateur de l'enseignant, un acte en réaction de l'élève et un acte en retour de l'enseignant ». D'après Jarlégan et al. (2010), « l'acte initiateur est appréhendé par des interventions du maître visant à solliciter un élève, à le désigner pour répondre ou à faciliter sa réponse. L'acte en retour de l'enseignant correspond à des feedbacks de différents types, des prolongements de l'interaction ou encore à des soutiens durant les temps de travail individuel » (p.70). Par conséquent, la grille 9 laisse une place pour notifier l'initiateur du contact verbal, que ce soit le professeur ou l'élève en difficulté. Le tableau synoptique de l'intensité des contacts verbaux selon les profils de classe est proposé en annexes V Grille 12.

Grille 18 – *Nature des contacts verbaux* (voir annexe II)

Selon Joël Clanet (2007), « ce premier niveau d'appréhension des interactions peut être complété par un deuxième niveau rendant compte des stabilités dans les changements » (p.63) : les contenus des interactions enseignant-élève (s). C'est donc l'objet de la grille 10. Sur le modèle de Piquée (2010), cette grille propose un classement du contenu des échanges en trois catégories : 1°) les actions verbales en lien avec le comportement des élèves ayant pour but de placer l'élève dans sa posture d'écoulier ; 2°) les actions verbales centrées sur la personne de l'élève ; 3°) les actions verbales centrées sur la tâche. En outre, l'auteure rappelle que les contacts verbaux maître- élève(s) orientés vers la tâche peuvent avoir deux finalités, soit « la vérification du travail en cours (compréhension des consignes, de l'état d'avancement de la tâche), soit le « guidage de l'élève dans la réalisation de cette tâche » (p.49). Le tableau synoptique concernant la nature des contacts verbaux selon les profils de classe est proposé en annexes V Grille 13.

Grille 19 – *Nature du guidage* (voir annexe II)

Ceci dit, ce guidage peut être à dominante explicative ou à dominante réflexive. Nous en tenons compte dans la grille 11 qui recense d'une part, « le nombre d'actions verbales à dominante explicative : apports complémentaires de la part de l'enseignant sur la tâche et sur les conditions de réalisation (opérations, matériels, reformulation de consignes...) » et d'autre part, « le nombre d'actions verbales à dominante réflexive : toutes les types d'actions verbales qui ont pour objectif de faire réfléchir et verbaliser l'élève sur la (ou les) opération (s) qu'il utilise ou doit utiliser pour avancer dans la tâche ». Le tableau synoptique concernant la nature du guidage selon les profils de classe est proposé en annexes V Grille 14.

Grille 20 – *Intensité du temps de travail en groupe* (voir annexe II)

D'un autre point de vue, la note de synthèse publiée par Bressoux (1994) sur les pratiques propices à la réussite scolaire laisse apparaître que les activités d'enseignement dirigées vers l'ensemble de la classe seraient plus favorables aux apprentissages des élèves en difficulté que celles qui leur sont spécifiquement adressées. En effet, les regroupements entre eux selon leur niveau et leurs besoins sont plus bénéfiques pour les élèves forts (Duru-Bellat et Mingat, 1997 ; Ireson, Hallam et Hurley, 2005, et Slavin, 1987). De même, les pratiques différenciatrices abaissent le niveau des exigences des enseignants pour les élèves en difficulté (Bautier, 2005, Butlen, Peltier-Barbier et Pézard, 2002 ; Piquée et Suchaut, 2002) et conduisent irrémédiablement à une « dérive du curriculum » et à une qualité moindre de l'environnement scolaire (Grisay, 1993). Pour toutes ces raisons et à la manière de Piquée (2010), la grille 12 permet d'évaluer le « degré de collectif » et le « degré de différenciation » en recueillant quantitativement les indicateurs de différenciation du travail. Il s'agit du temps passé par chaque élève en difficulté sur une tâche identique à celle de l'ensemble de la

classe et celui passé sur une tâche différente. Deux autres indicateurs sont également retenus pour saisir l'importance du travail en groupe : « le temps passé par les trois élèves observés à travailler au sein d'un petit groupe d'élèves en difficulté, ainsi que « le temps passé à travailler sur des contenus ou avec des conditions différentes de ceux du reste du groupe classe (matériel supplémentaire par exemple) » (Piquée, 2010, p.47). À ce stade, pour aller plus loin, il nous semble utile d'entamer une démarche qualitative à visée double, descriptive et compréhensive, afin de pointer plus avant les caractéristiques des pratiques enseignantes à l'égard des élèves en difficulté dans les classes à efficacité contrastée. Le tableau synoptique concernant l'intensité du temps de travail en groupe selon les profils de classe est proposé en annexes V Grille 15.

Grille 21 – *Grille d'observation des pratiques à l'égard des élèves en difficulté dans les classes à efficacité contrastée* (voir annexe II)

Nous cherchons à décrire d'une manière aussi fidèle que possible, les pratiques enseignantes et en apprécier les effets auprès des élèves fragiles. Considérant l'enseignant comme un professionnel exerçant son métier dans un environnement dynamique complexe (Rogalski, 2003) où il est soumis à des déterminants personnels, sociaux, institutionnels et culturels (Robert et Rogalski, 2002), ce sont donc bien les faits, les interactions maître-élèves, les comportements des professeurs, leur apparition ou leur transformation en réaction aux attitudes ou aux activités des élèves, les contextes qui les génèrent et leurs effets sur les apprenants que nous voulons recueillir. Aux dires de Quivy et Campenhoudt (2006), seules les méthodes d'observation directe sont susceptibles de « capter les comportements au moment où ils se produisent sans l'intermédiaire d'un document ou d'un témoignage » car elles ont l'avantage de saisir les événements sur le vif et de collecter un matériau d'analyse relativement spontané.

Par conséquent, l'observation en situation semble convenir pour identifier d'une part les comportements des professeurs à l'égard des élèves fragiles ce qui nous permettra certainement de mieux comprendre les choix des enseignants et nous aidera à expliquer comment et pourquoi certaines pratiques, par leur singularité favorisent mieux que d'autres, dans des contextes précis, une meilleure progression de ces élèves en calcul mental. Cependant, l'usage de l'observation directe requiert de la rigueur si l'on souhaite échapper aux pièges du verbalisme et de l'impressionnisme et recueillir des faits plutôt que des représentations (Antoine, 1975) compte tenu de la multiplicité et de la variété des observables surtout dans un contexte classe. D'après de Ketele (1987), un système d'observation peut garantir la détermination, le plus rigoureusement possible, « des procédures de sélection, de provocation, d'enregistrement et de codage des "attributs" à observer » (p.127). Ainsi, en nous inspirant des travaux de Medley et Mitzel, (1963), nous avons construit notre grille d'observation

fondée sur un système de catégories ce qui revient à « limiter son observation à un aspect du comportement de la classe, déterminer une unité de comportement, et construire un ensemble fini de catégories dans lesquelles chaque unité peut être classée dans une et une seule de ces dernières » Medley et Mitzel (1963, p.105).

De manière opérationnelle, avant de commencer les observations dans les classes des six professeurs des écoles retenus pour l'expérimentation, nous avons en premier lieu nous avons cherché à atteindre une certaine qualité d'information sur les comportements des enseignants à l'égard des élèves en difficulté en procédant à des opérations de lecture, des entretiens et des observations exploratoires à l'aide d'un carnet de bord consignait les propos les éclairants, les phénomènes et événements observés ainsi que toutes les données recueillies dans la littérature. Le but de cette exploration était de tendre vers une forme d'exhaustivité ou plutôt de complétude pour obtenir un large panel sur l'attitude des professeurs en direction des élèves fragiles et les actions différenciatrices pédagogique mises en œuvre au cours des séances d'apprentissage en calcul mental. En outre, ces moments nous ont permis d'aller à la rencontre des collègues, des classes, de nous pénétrer des ambiances, d'entendre plusieurs points de vue pour finalement discerner les éléments essentiels du problème étudié, mettre en exergue ses aspects les plus révélateurs et les approches les plus pertinentes. Par la suite, nous avons soumis ce premier jet à deux conseillers pédagogiques, deux formateurs à l'INSPE¹⁸⁴ et trois PEMF¹⁸⁵. Trois d'entre eux l'ont expérimenté in situ et émis des commentaires telles que le caractère redondant de quelques items, le manque de précision dans la formulation des difficultés rencontrées par les élèves, des réponses apportées par les professeurs et sur le format de la grille. Forts de ces recommandations pertinentes, nous avons repensé les corrections préconisées puis soumis à nouveau l'outil d'observation reconstruit à deux d'entre eux pour valider sa nouvelle version. Par la suite, muni de notre système d'observation, nous avons réalisé des observations souples dans trois classes de CP, hors expérimentation, pour le tester in situ et le finaliser avant de mener nos observations directes dans les six classes de notre échantillon (voir des exemples de fiches d'observation de séances à la grille 8 des annexes VI, VII et VIII).

Grille 24 – Grille d'entretien à chaud suite à l'observation des pratiques à l'égard des élèves en difficulté dans les classes à efficacité contrastée (voir annexe II)

En définitive, l'observation directe des séances en classe permet d'étudier les configurations que les pratiques ont effectivement prises sans pour autant indiquer les causes externes ou internes et les raisons, intentions et motivations pour lesquelles il en a été ainsi (Bru, 2014). Par conséquent, notre

¹⁸⁴ Institut National Supérieur du Professorat de l'Éducation.

¹⁸⁵ Professeur des écoles Maître Formateur

projet d'expliquer et de comprendre ce qui est observé nous a amené, juste après les observations dans les classes, à conduire un entretien semi-directif pour appréhender la conception globale dans laquelle le professeur inscrit sa pratique en apportant un éclairage supplémentaire sur ce qui a été observé, sa fréquence et sa régularité ce qui ne l'a pas été grâce à son discours et aux arguments qu'il avance pour justifier telle ou telle action plutôt qu'une autre à l'égard des élèves fragiles. De fait, le discours des enseignants à propos de leur activité comporte, outre leurs représentations, la part de conscientisation de leur propre activité et une part de ce qu'ils ont intégré sur ce qu'il convient de faire (Altet, 2017). À les entendre, la différenciation pédagogique a un caractère chronophage, il est difficile de réserver du temps à ceux qui en ont le plus besoin ou encore les enseignants ne s'occuperaient plus que des élèves en difficulté et moins des bons élèves (Toullec-Théry, 2017). D'ailleurs, beaucoup de professeurs évoquent, à de multiples égards, leur grand désarroi face aux classes hétérogènes (Feyfant, 2016). Le concept d'hétérogénéité est alors réduit à une inégalité de « niveaux scolaires » (Ott, 2007) et la pédagogie différenciée est considérée comme une réponse pour éliminer ces « différences » et résoudre ainsi une situation négative qui perturbe les pratiques d'enseignement. En réalité, « des croyances, des doxas existent depuis longtemps dans le monde enseignant, sans avoir fait preuve de leur pertinence. Elles associent ainsi souvent différenciation et aide aux élèves les plus fragiles, ce qui conduit majoritairement les enseignants à plutôt remédier aux difficultés des élèves a posteriori des séances en classe, dans des groupes homogènes très restreints et souvent hors de la classe » (Conférence de consensus du Cnesco, 2017, p.5).

C'est pourquoi, il nous semble intéressant et porteur de sens d'interviewer les enseignants pour accéder aux critères qui les a conduits à choisir une forme de travail ou un type d'aide, plutôt qu'un autre et comprendre les stratégies centrées sur les élèves fragiles observées dans leur classe et les comportements observés. Par conséquent, nous avons conçu une grille d'entretien semi-directif (grille 24 annexes II) que nous avons au préalable testé, corrigé et validé auprès de cinq professeurs non-participants à l'enquête. Elle démarre l'interview par une question de départ ouverte laissant l'enseignant s'exprimer librement complétées par des questions-guides pour relancer le débat. L'enregistrement audio de chaque entretien a été réécouté plusieurs fois. Puis nous avons extrait les propos relatifs aux élèves en difficulté. Une fois collectés, ces verbatims sont classés en deux grandes thématiques : les représentations de l'enseignant sur les élèves fragiles et leurs difficultés en calcul mental (conceptions sur l'élève en difficulté, diagnostic des difficultés, description des élèves en difficulté de la classe, jugements, impact de la prise en charge de ces élèves sur ses pratiques...) et ce qu'il fait pour les amener à réussir leurs apprentissages (moyens mis en œuvre, pratiques perçues lors des observations comme les plus efficaces...). Le tableau synoptique des représentations des enseignants du panel sur l'élève en difficulté en calcul mental et le tableau synoptique des pratiques

perçues par ces professeurs comme les plus favorables pour tenter de pallier les difficultés des élèves en calcul mental sont en annexes V Grilles 2 et 3.

In fine, toutes les grilles présentées dans les paragraphes précédents sont annexées pour apporter toutes les informations nécessaires à l'appréciation de notre travail de recherche. En corollaire, notre méthodologie d'analyse des pratiques s'appuyait concrètement sur un recueil de données scindé en deux types de données (*voir tableau 43 ci-dessous*). La première était focalisée sur la personne de l'enseignant afin d'examiner ses conceptions, valeurs et croyances, savoirs et savoir-faire, expérience et formation, stratégie d'enseignement, finalités et objectifs...en résumé toutes les informations qui caractérisent le professeur des écoles. Pour ce faire, nous avons construit des grilles d'entretien préalable et à chaud pour mettre en exergue les similitudes et les particularités qualitatives dans la représentation du calcul mental et de son enseignement, les causes externes ou internes et les raisons, intentions et motivations du comportement et des choix de l'enseignant ce qui nous a permis de rendre intelligible les pratiques observées. Concernant l'autre type de données l'accent a été mis sur l'aspect didactique des pratiques à travers la reconstitution des projets d'enseignement, l'observation sur le terrain, le profil des classes et les pratiques à l'égard des élèves en difficulté. Ce sont donc les croisements de l'ensemble de ces informations analysés sous différents angles qui nous permettront de répondre dans un premier temps aux sous-questions et dans un deuxième temps à la question centrale de notre recherche.

Recueil de données de type 1	
Conceptions et caractéristiques des professeurs des écoles	Contraintes liées à l'exercice du métier
Grille 6 Annexe II - Composante personnelle	Grille 1 Annexe II- Caractéristiques des manuels Grille 2 Annexe II - Progression des manuels Grille 3 Annexe II - Format et types de séances dans les manuels Grille 4 Annexe II - Activités dans les manuels Grille 5 Annexe II - Institutionnalisation dans les manuels Grille 7 Annexe II - Composante institutionnelle Grille 8 Annexe II - Composante sociale Grille 11 Annexe II - Profil de la classe observée

Recueil de données de type 2	
Projet d'enseignement	Pratiques à l'égard des élèves en difficulté
Grille 9 Annexe II - Composante cognitive Grille 10 Annexe II - Composante médiative Grille 12 Annexe II - Entretien à chaud Grille 13 Annexe II - Découpage en épisodes Grille 14 Annexe II - Synoptique réduit de la séance Grille 15 Annexe II - Reconstitution du projet d'enseignement	Grille 16 Annexe II - Retranscription de séance Grille 17 Annexe II - Intensité des contacts verbaux Grille 18 Annexe II - Nature des contacts verbaux Grille 19 Annexe II - Nature du guidage Grille 20 Annexe II - Intensité du travail en groupe Grille 21 Annexe II – Fiche d'observation de séance Grille 22 Annexe II - Fréquence moyenne des difficultés rencontrées au cours de la séquence Grille 23 Annexe II – Liste des indicateurs des interactions maître-élève Grille 24 Annexe II – Grille d'entretien à chaud

Tableau 43 : Recueil de données de type 1 et 2

2. Analyses et interprétations des résultats

2.1. Principaux éléments didactiques et pédagogiques pris en considération par les enseignants pour concevoir leur projet d'enseignement

En réponse à la première sous-question, il s'agit ici de repérer les principaux éléments didactiques et pédagogiques du projet d'enseignement pris en considération par les professeurs des écoles du panel observés ou questionnés en vue de permettre aux élèves d'acquérir les connaissances sur les nombres, les opérations et la maîtrise des techniques du calcul mental. Pour mieux appréhender le constat qui suit concernant les choix didactiques et pédagogiques faits par les professeurs des écoles pour concevoir leur projet d'enseignement, nous cernons d'abord la manière singulière avec laquelle ils interprètent les prescriptions (en fonction de leurs représentations, de l'apprentissage visé, des contraintes, des moyens dont ils disposent et de leurs exigences) à partir de la notion de *tâche redéfinie* (Leplat, 1980 ; Amalberti et al., 1991 ; Rabardel et al., 1998) préconisée par Goigoux (2007) pour lequel l'analyse « peut permettre d'inférer les objectifs que les maîtres se donnent, loin parfois de ceux que les chercheurs leur prêtent et d'éviter, ainsi, de graves contresens sur leur activité » (p.57).

Cependant, l'activité de l'enseignant ne se limite pas à la tâche redéfinie. À vrai dire, une fois confrontée à la réalité, cette dernière subit des réajustements in situ dans le but de faire face à la contingence (Vannier, 2013). Ainsi, l'activité effective correspond en fait à la tâche réalisée (Rogalski, 2003). Toutefois, tâche réalisée et activité effective ne sont, ni l'une ni l'autre, directement observables (Vannier, 2013). Par voie de conséquence, nous inférons la tâche redéfinie à partir de la double analyse de l'action effective en classe et des verbalisations de l'enseignant au cours des entretiens (Goigoux, 2007). Ensuite, nous décrivons les stratégies d'enseignement élaborées par les professeurs autrement dit l'organisation des contenus mathématiques. Puis, nous étudions les apprentissages visés à partir des activités possibles¹⁸⁶ des élèves en adéquation avec l'enseignement dispensé. Enfin, nous appréhendons le rapport du professeur des écoles aux manuels dans son travail de préparation.

Pour rappel, à l'instar de Roditi (2005), l'ensemble des textes rédigés pour argumenter les choix des enseignants et présentés infra tout au long de cette section sont le résultat de la transcription des séances observées et des notes prises durant le déroulement. Une fois construits, ces récits ont été soumis à la fin de la deuxième année d'observation (juin 2015) au professeur afin qu'il corrige, modifie et critique les arguments avancés concernant sa pratique de sorte qu'ils communiquent au plus juste le projet qu'il s'était fixé et la manière dont il l'a mis en œuvre. Toutes les remarques de

¹⁸⁶ L'adjectif "possibles" souligne [ici] la différence entre ce que propose l'enseignant, l'observable, et ce qui va en résulter pour les élèves » (Robert et Vivier, 2013, p.117).

l'enseignant ont été discutées lors d'un entretien avant d'être prises en compte dans la réécriture des récits. Pour finir, la troisième année d'observation a permis de préciser et de renforcer la cohérence du réseau d'arguments avant de l'entériner au cours d'un dernier entretien avec l'enseignant (mars 2016). Forts de cette explication préalable sur la recherche d'identification d'outils pédagogiques relatifs à la première question, nous émettons l'hypothèse que le professeur des écoles tient compte principalement de sa situation de travail, des élèves et de lui-même, quand il conçoit son projet d'enseignement. C'est pour cette raison que nous avons jugé utile de présenter et d'expliquer infra les approches et actions réfléchies de chaque enseignant compte tenu des difficultés des élèves et supports utilisés pour donner corps à l'hypothèse retenue.

2.1.1 Éléments pris en considération par Astride pour concevoir son projet d'enseignement

a) Redéfinition de la tâche prescrite

Pour commencer, voilà une enseignante de 46 ans, ayant de nombreuses années d'expérience aussi bien dans le corps enseignant (22 ans) que dans la gestion du cours préparatoire (15 ans). Son esprit scientifique développé par une licence de biologie constitue selon, elle, un atout majeur pour amener ses élèves à réfléchir et à élaborer des stratégies mais elle reconnaît également avoir acquis ses compétences professionnelles au contact de ses pairs car elle exerce en école d'application depuis 11 ans. Astride a une conception utilitaire du calcul mental qui, selon elle, est en relation étroite avec les nécessités de la vie : les élèves doivent apprendre à calculer rapidement et avec justesse pour résoudre des problèmes de la vie courante. « *Je leur dis toujours, il faut savoir compter parce qu'on va vous "kouyonné" ("escroquer" en créole guadeloupéen)* », explique-t-elle.

Du point de vue d'Astride, les prescriptions sont « *explicites sans être explicites* » et assez succinctes comme le laissent entendre les propos suivants : « *quand tu prends le BO, au niveau du CP en calcul mental c'est rapide hein, très rapide tu as ...calculer mentalement des sommes et des différences c'est tout. À toi de te débrouiller pour trouver comment faire acquérir la compétence* ». Astride décrit son cours préparatoire de 14 garçons et 12 filles comme une « *classe bavarde qu'il faut tenir* » dont le niveau est « *plutôt moyen* » mais qui aime le calcul mental et a développé des attitudes ritualisées « *même si, mis à part les très bons élèves, ils ne réussissent pas tous forcément* ». Compte tenu du profil de sa classe, l'enseignante pense que l'addition avec passage de la dizaine risque de « *poser problème à certains élèves* » : ceux qui ne perçoivent pas le passage de la dizaine ou ont une représentation erronée du nombre. D'autres, « *parce qu'ils ne maîtrisent pas les décompositions de 10 ou les tables d'addition ou mettent encore trop de temps pour les mobiliser* ». Par voie de conséquence, Astride se donne un triple objectif : 1°) amener l'élève à « *construire lui-même son savoir... en trouvant une stratégie quelle qu'elle soit mais qui lui permette d'arriver rapidement à*

la solution» ; 2°) l'aider à « expliciter sa procédure pour permettre aux autres de la comprendre et de se l'approprier » ; 3°) l'entraîner à « construire du sens » en les rendant capable de résoudre des problèmes (écrire et effectuer l'opération en ligne puis donner une phrase de solution).

- **En résumé :** La professeure prévoit d'abord de confronter les élèves à des calculs dictés et de les « laisser libres » pour qu'ils « se débrouillent ». [...] *La fois d'après, ils vont expliquer leurs stratégies. En séance 3, ceux qui n'ont pas réussi vont tenter de s'approprier les procédures des autres. Ensuite, ils vont ranger les résultats "dans les maisons". Pour aller plus loin, je vais mettre "un enrobage", on va dire, on fait de l'application mais contextualisée dans des problèmes. Après, j'adapte, je rajoute ou je réduis les séances en fonction des progrès ».*

b) Stratégie d'enseignement

- Itinéraire d'enseignement

Le projet d'enseignement d'Astride s'étale sur les trois dernières périodes de l'année. La première séance est une situation de référence organisée en quatre séries de calculs dictés et poursuivant un triple objectif : réactiver les procédures de résolution des additions mentales dont le résultat est inférieur ou égal à 10 (comme $5 + 4$ ou $8 + 2$ par exemple), confronter les élèves à la nécessité de trouver une nouvelle stratégie pour calculer des sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine et évaluer le niveau initial de chacun grâce au procédé Lamartinière (voir tableau 44).

Tour de parole	Temps	Nom de l'émetteur	Énoncés
Première série de calculs dictés			
10	1 : 27	Professeure	Alors...Attention... $2 + 5$... $2 + 5$ (La professeure se promène dans les rangs avec son triangle en main).
11	1 :34	Professeure	Josuah... $2 + 5$
12	1 :36		(La professeure fait tinter son triangle et les élèves écrivent la réponse sur leur ardoise).
...			
14	1 :50	Professeure	Levez-moi vos ardoises, s'il vous plaît !
...			
18	2 :07	Professeure	Donc, $2 + 5$ égal...
19		Plusieurs élèves	7
Deuxième série de calculs dictés			
59	4 :48	Professeure	Bien. Attention !
60	4 :55	Professeure	$2 + 9$... $2 + 9$
66	5 :36	Professeure	$2 + 9$...Alors ?
67	5 :39	Professeure	$2 + 9$, ça fait combien ?
68	5 :42	Une élève	11
69		Professeure	Ça fait... ?
70		Plusieurs élèves	11

Tableau 44 : Extrait de la séance 1 d'Astride

Lors de la séance 2, les façons déterminées par les élèves pour trouver le résultat sont discutées.

Tour de parole	Temps	Nom de l'émetteur	Énoncés
45	04 :36	Professeure	Alors pour les calculs, je vous ai demandé... $2 + 9$, c'est ça ? Alors j'ai demandé $2 + 9$. J'ai demandé $5 + 7$ euh... $5 + 7$ et j'ai demandé $8 + 6$ et le dernier c'était $9 + 7$ (La professeure réécrit en même temps les calculs dictés au tableau) <u>Trace écrite au tableau</u> $2 + 9$$8 + 6$ $5 + 7$$9 + 7$
...			
50		Professeure	D'accord. Parmi ceux qui ont tout trouvé, y –a-t-il un élève qui peut venir au tableau pour nous expliquer comment il a fait pour trouver aussi rapidement la réponse. Comment vous faites pour trouver ? Qui peut venir expliquer sa démarche ?
...			
100	09 :33	Yanelle	J'ai gardé 9 dans ma tête et sur mes doigts, j'ai compté jusqu'à 2.
101	09 :43	Professeure	Peux-tu simuler et faire ce que tu fais sur ta chaise ? Vas-y fait.
102	09 :50	Professeure	Donc tu dis que tu mets...
103	09 :52	Yanelle	9 dans ma tête et 2 sur mes doigts
...			
106	09 :59	Professeure	Vas-y fait
107	10 :00	Yanelle	Je mets 9 dans ma tête et je compte 10, 11
...			
162	13 :06	Professeure	Quelqu'un a une autre possibilité ? Quelqu'un a-t-il une autre manière de faire ?
163	13 :08	Professeure	(Un élève lève le doigt) Ethan, vas-y.
165	13 :13	Ethan	Je peux faire des bonds sur la file numérique comme Litchi. Je me positionne sur 9 comme c'est le plus grand et après pour ajouter 2, je fais deux bonds. Je saute une fois ça fait 10 et je saute encore une fois ça fait 11.
166	13 :18	Professeure	Ok, ça c'est une deuxième technique. Est-ce que vous avez compris ?

Tableau 45 : Premier extrait de la séance 2 d'Astride

Ensuite, l'enseignante amène les élèves à construire la procédure de calcul souhaitée.

Tour de parole	Temps	Nom de l'émetteur	Énoncés
305	20 :21	Professeure	Il n'y pas une autre façon de faire ?
306			
307	20 :25	Professeure	Alors, je vous donne une petite indication. 9 est proche de quoi ?
308		Un élève	De 10.
309		Professeure	Ah bon !
310		Yanelle	9 est proche de 10
311		Professeure	9 est proche de...
312		Plusieurs élèves	De 10
313	20 :36	Professeure	C'est vrai ? et comment on passe de 9 à 10 ?
314	20 :38	Ethan	En ajoutant 1.
315	20 :40	Professeure	En ajoutant 1 que je vais prendre ou ça ?
316	20 :43	Ethan	Dans les 2
317	20 :46	Professeure	Dans les 2. Et si je prends 1 qu'est ce qui va me rester ?
318		Ethan	1
319	20 :48	Professeure	Ah ! Et qu'est-ce qu'il me suffira de faire alors ?
320	20 :49	Ethan	D'ajouter 1
321	20 :50	Professeure	D'ajouter, combien ?
322	20 :51	Ethan	D'ajouter 1
323	20 :56	Pascal	D'ajouter 1. Ethan est ce que tu peux mieux expliquer aux enfants ?
324		Ethan	Oui.

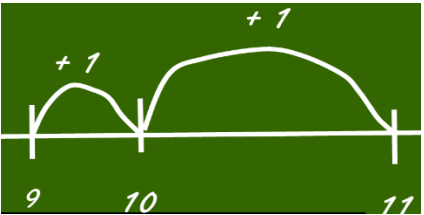
325	20 :57	Professeure	Vas-y. (Ethan se déplace et va au tableau) Bien. C'est une nouvelle technique.	

Tableau 46 : Deuxième extrait de la séance 2 d'Astride

Enfin, la professeure institutionnalise puis hiérarchise les stratégies de calcul identifiées lors de la mise en commun.

Tour de parole	Temps écoulé	Intervenants	Verbatims
257	17 :08	Professeure	Alors, on va noter. Première technique, les enfants m'ont dit qu'ils comptent sur les doigts. (La professeure écrit en même temps au tableau).
...			
262	17 :29	Professeure	La technique d'Ethan. Qu'est-ce qu'Ethan fait lui ?
		Inès	Il fait des bonds comme Litchi
		Professeure	Donc, j'écris, calculer en faisant des sauts sur la file numérique
...			
479		Professeure	Et la troisième méthode, c'était quoi encore ?
480		Axelle	Tu prends des unités dans le plus petit nombre pour le donner au plus grand
481		Professeure	Pourquoi je fais ça ?
482		Kyllian	Pour arriver à 10
483		Professeure	Et ensuite ?
484		Kyllian	Tu ajoutes le reste des unités du petit nombre à 10
485		Professeure	D'accord, je note
486	28 :48	Professeure	Trace écrite au tableau 1) compter sur les doigts de 1 en 1 2) calculer par sauts sur la file numérique 3) je prends des unités dans le plus petit nombre pour compléter le plus grand nombre jusqu'à 10. Puis je rajoute à 10 ce qui reste Alors, entre les deux premières techniques laquelle va plus vite. La première ou la deuxième ?
487	28 :50	Ethan	Celle d'en bas !
488	28 :51	Professeure	Non, entre ces deux-là (La professeure montre avec une règle les deux premières procédures)
489	28 :53	Professeure	La première ou la deuxième ?
490		Plusieurs élèves	La deuxième
491	29 :05	Professeure	La deuxième va déjà plus vite que la première. On est bien d'accord. Qu'est-ce qu'il faut connaître ici ?
		Yanelle	Les dizaines
493	29 :12	Professeure	Non ! Il faut connaître ...
494	29 :14	Plusieurs élèves	La file numérique
495	29 :24	Professeure	Il faut connaître la file numérique. On est bien d'accord. Là, j'irai plus vite que si je compte sur mes doigts un à un
...			
500	29 :38	Professeure	Bon ! Troisième technique maintenant qu'est-ce qu'il me faut connaître ?
501		Professeure	Par quoi je passe ? Par quoi je dois passer ?
502	29 :40	Ethan	Par la dizaine
503		Professeure	Je dois passer par 10...

...			
505	29 :42	Professeure	Je suis un nombre quel qu'il soit. [...]. Je suis un nombre quel qu'il soit je dois arriver à la dizaine entière qui est juste après.
506	29 :50	Professeure	Qu'est-ce qu'il me faut connaître pour faire ça rapidement ?
507	29 :52	Killian	Les tables d'addition
508	29 :53	Professeure	Quelles tables ?
509			Laquelle ?
510	30 :00	Ethan	La table des dizaines entières
512	30 :14	Professeure	Quelle table, il me faut connaître parfaitement ? La table de ...
513	30 :16	Axelle	La table de 10.
514	30 :17	Professeure	C'est la table de 10. Exactement, si je connais parfaitement ma table de 10, je vais deux fois plus vite. Première étape, je connais ma table de 10, donc j'arrive vite à la dizaine entière. On est d'accord ?
515		Professeure	Deuxième étape, qu'est-ce qu'il me faut connaître ?
516		Un élève	La table de 10
517	30 :18	Professeure	Oui mais il me faut connaître aussi les décompositions. Il faut que je sache que 7 c'est 5 + combien. Donc il faut que je connaisse les maisons de...
518	30 :22	Les élèves et Professeure	5, 6, 7, 8, 9, 10.
519	30 :26	Professeure	Donc avec ça je fais tous mes calculs vite fait. Qu'est ce qui va plus vite ? ça, ça ou ça (<i>La professeure désigne successivement les trois procédures avec sa règle</i>).
520	30 :30	Ethan	La dernière
...			
522	30 :32	Professeure	Vous êtes d'accord avec Ethan ? Vous êtes sûrs
523		Quelques élèves	Oui !

Tableau 47 : Troisième extrait de la séance 2 d'Astride

La troisième séance, quant à elle, est centrée sur le choix des procédures : dans un premier temps, les élèves calculent « à la manière de », puis dans un second temps, la procédure utilisée est laissée à leur appréciation. Lors de la séance 4, les résultats connus et reconstruits à partir des différentes décompositions des nombres de 11 à 18 sont organisés pour compléter le répertoire additif. Il s'en suit deux séances (5 et 6) offrant l'opportunité de mobiliser les nouvelles connaissances en résolution de problèmes avec, en parallèle, des entraînements à la mémorisation du répertoire additif et sur les compléments à 10. Une évaluation formative avec un format similaire aux manches du championnat constitue la septième séance. Durant les séances 8 et 9, ceux qui ont réussi travaillent sur des activités complémentaires tandis que les autres sont engagés dans un dialogue avec l'enseignant pour expliciter le travail « à la manière de » et essayer de le systématiser. Sur le même mode opératoire présenté supra, les séances 10 à 13 introduisent une nouvelle procédure en appui sur les doubles pour calculer des sommes de deux nombres consécutifs juste avant une phase de préparation (séance 14) et la passation de la première manche du championnat académique (séance 15).

L'enseignante continue le travail engagé sur l'apprentissage de la procédure de calcul des sommes de type $6 + 7$ avec l'élaboration de la table des doubles (séance 16), le réinvestissement des nouvelles

connaissances dans la résolution de problèmes (séance 17), un temps d'évaluation formative et de remédiation (séances 18 et 19) avant de procéder à l'évaluation sommative de la notion. Durant les semaines qui suivent Astride propose chaque semaine une séance de révision sur les résultats du répertoire additif complet à l'aide de la commutativité (séances 21 à 24) jusqu'à la phase de préparation et la passation de la deuxième manche (séances 25 et 26). Ainsi, suivant le même schéma, l'enseignante va alterner renforcement de la mémorisation du répertoire additif complet, phase de préparation et passation de la manche 3 jusqu'à la finale académique radiodiffusée le 19 juin 2015 (voir tableau synoptique du projet d'enseignement reconstitué d'Astride à l'annexe IV- Grille 1).

- Les contenus mathématiques

Au regard de l'itinéraire choisi par Astride, le champ mathématique de son scénario peut se résumer ainsi : sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec et sans passage à la dizaine, mémorisation du répertoire additif, complément à 10, doubles des nombres jusqu'à 20, commutativité, procédure du « passage à 10 », procédure de calcul réfléchi en appui sur les doubles, résolution de problèmes.

- Gestion et modes d'intégration de l'institutionnalisation

« *Moi, j'aime bien que l'enfant construise lui-même son savoir [...] Je ne suis pas là pour te donner la réponse, avant que quiconque ne te donne une réponse tu vas devoir toi-même chercher. Donc, dans ce sens, je fais beaucoup appel à la démarche d'investigation, à la démarche de recherche...* », expliquait Astride, lors de l'entretien préalable. Conformément à ses conceptions et à sa stratégie d'enseignement, elle institutionnalise les savoirs uniquement en mode « bilan » : seules les connaissances construites en classe acquièrent le statut de savoir (Roditi, 2005). Plus concrètement, Astride débute systématiquement¹⁸⁷ les séances introduisant une nouvelle procédure par un calcul ou un problème à résoudre avec un temps de recherche individuel relativement significatif assorti parfois d'une aide matérielle. Puis, les élèves explicitent leurs procédures lors d'une phase collective avec un étayage de l'enseignante qui les note au tableau quand elles sont validées. Cette dernière fait émerger celles qui n'ont pas été évoquées avant de les hiérarchiser avec le concours des élèves en tenant compte de leur efficacité, de leur validité, de leur coût cognitif et en termes de temps d'exécution et des savoirs à mobiliser pour les mettre en œuvre. En somme, Astride organise trois phases d'institutionnalisation dans le déroulement de sa séquence (voir un exemple tableau 47). De plus, les séances de consolidation du répertoire additif se terminent aussi par une mise en commun des procédures.

¹⁸⁷ Ce mode opératoire a été observé lors des deux années d'observation : 2014-2015 et 2015-2016.

- **Bilan sur la stratégie globale d'enseignement d'Astride**

- 1) Emprunter un itinéraire de type 1 (Charnay et Valentin, 1992) : améliorer les procédures personnelles (le surcomptage) pour favoriser la mémorisation des relations numériques et le progrès vers le calcul ;
- 2) Opter pour un dispositif pédagogique de type : « problème – compréhension – application » ;
- 3) Introduire la procédure à enseigner de manière décontextualisée par le biais de calculs dictés ;
- 4) Conjuguer deux approches distinctes du nombre, pour développer des procédures de calcul réfléchi : l'aspect cardinal et l'aspect ordinal ;
- 5) Dévoluer et institutionnaliser : confronter les élèves à une recherche réelle, leur permettre d'exposer leurs stratégies, de hiérarchiser les procédures trouvées et faire une synthèse écrite ;
- 6) Procéder à des évaluations diagnostique, formative (suivie de remédiations) et sommative ;
- 7) Réinvestir les procédures enseignées dans la résolution de problèmes.

c) Les tâches possibles des élèves dans les activités proposées

À l'instar de Roditi (2005), nous avons catégorisé¹⁸⁸ les tâches possibles s'effectuant sous la responsabilité du professeur. Ainsi, au regard du tableau 48 (détaillé en annexes IV Grille 2) les récapitulants, le nombre total de tâches constituant la séquence d'Astride s'élève à cent-soixante-douze dont plus de la moitié (63%) est consacrée au développement des procédures de calcul réfléchi, 23% favorisent la consolidation des points d'appui (doubles, complément à 10, etc.) et 14% sont allouées à la mémorisation du répertoire additif. En ce qui concerne l'apprentissage des procédures, le tableau 71 révèle une dominance des tâches relevant de l'explicitation des procédures (EXPP et EXPR : 38%), de la résolution de problèmes (RPA, RPCT, et RPCN : 37%) et du calcul mental ou réfléchi (CMCR : 15%) conformément à la stratégie d'enseignement de l'enseignante consistant à « *faire l'élève construire son savoir* » en mettant en œuvre « *une démarche d'investigation* » d'une part et d'autre part, à travailler les techniques de calcul en intelligence avec le sens des opérations. D'ailleurs, ce parti pris d'Astride est corroboré par le nombre de tâches de la catégorie « recherche » (141 sur 172) cinq fois plus grand que celui de la catégorie « application » (28 sur 172) - (voir tableau détaillé en annexes IV- Grille 3). D'autre part, bien qu'elles soient en faible effectif, les tâches relatives au

¹⁸⁸ Concrètement, nous identifions trois grands types de tâches :

- 1) Tâches liées au développement des procédures de calculs : *effectuer un calcul mental ou un calcul réfléchi (CMCR) ; résolution de problèmes additifs (RPA), résolution de problèmes de complément (RPCT), résolution de problèmes de comparaison (RPCN), expliciter ses procédures personnelles (EXPP), effectuer des calculs en utilisant des procédures de référence (ECPR), expliciter une procédure de référence (EXPR) ;*
- 2) Tâches liées à la consolidation des points d'appui : *utiliser les propriétés des opérations (UPO), produire rapidement des faits numériques sur les doubles (PRFD), produire rapidement des faits numériques sur les compléments (PRFC), retrouver les différentes décompositions des nombres (RDN) ;*
- 3) Tâches liées à la mémorisation du répertoire additif : *retrouver les résultats du répertoire additif (RRRA), construire et utiliser le répertoire additif (CURA).*

comptage (1%) viennent confirmer l'itinéraire cognitif emprunté : améliorer le surcomptage pour favoriser le progrès vers le calcul. Pour ce qui est de la consolidation des points d'appui, trois catégories de tâches sont prépondérantes : l'utilisation des propriétés des opérations (35%), la production rapide de faits numériques tels que les compléments à 10 (28%) et les doubles (20%). Enfin, la recherche des résultats des tables d'addition reste une tâche primordiale dans la mémorisation du répertoire (92%).

Développer des procédures de calcul			Consolider les points d'appui			Mémoriser le répertoire additif		
Tâches	Effectif	%	Tâches	Effectif	%	Tâches	Effectif	%
CMCR	16	15%	UPO	14	35%	RRRA	22	92%
RPA	15	14%	PRFD	8	20%			
RPCT	14	13%						
RPCN	11	10%						
EXPP	20	18%	PRFC	11	28%			
EXPR	22	20%						
Autres	10	10%	Autres	7	17%	Autres	2	8%
TOTAL	108	63%	TOTAL	40	23%	TOTAL	24	14%

Tableau 48 : Effectifs et répartition des tâches possibles des élèves suivant leur catégorie dans le scénario d'Astride (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 2)

Globalement, le déroulement du scénario s'étend sur une durée de 11,5 heures, qui, rapportée au nombre de tâches proposées (172) nous permet de conclure à une moyenne horaire de 15 tâches pour le projet d'enseignement d'Astride (voir tableau détaillé en annexes IV- Grille 1).

d) Le rapport de l'enseignant au manuel dans son activité de préparation

Pour élaborer son projet d'enseignement, Astride déclare tenir compte de trois ressources : la progression en calcul mental proposée par la mission académique organisatrice du championnat et deux manuels (l'un imposé par l'équipe pédagogique, l'autre choisi par l'enseignant). Voici ce qu'elle nous disait à leur sujet lors de l'entretien préalable :

« Mes élèves ont le fichier "Litchi Mathématiques" mais je t'avoue que je ne l'aime pas tellement. Il n'y a pas de situation de recherche...Enfin...non faut pas que je dise ça..., il y en a mais... je trouve qu'elles ne sont pas suffisamment complexes pour que les élèves soient réellement confrontés à un problème même s'ils aiment bien [...]. Moi, j'apprécie plutôt le Cap maths parce qu'on met systématiquement les enfants en situation de recherche. Mais ça ne plait pas forcément à mes collègues qui ont opté pour Litchi en concertation. Faut admettre aussi qu'il propose plus d'applications surtout pour la numération alors que dans le Cap maths, on passe très vite sur certains points. Donc j'utilise Cap maths plus pour construire les leçons en rajoutant ce qui manque et je garde Litchi pour les applications. En fait, je fais d'une pierre deux coups : je fais ce que je veux, le fichier ne reste pas vide même si on ne remplit pas les cases réservées au calcul mental et les parents ne rouspètent pas en fin d'année. En plus, pour être en phase avec le championnat, il faut suivre la progression proposée pour que les enfants aient vu les notions avant chaque manche sinon tu les mets en échec. Mais je tiens à ma liberté pédagogique donc j'arrange les choses à ma sauce, je fais ce qui m'arrange quand ça m'arrange. [...] Faut dire aussi que je trouve qu'un grand nombre

d'activités suggérées relèvent plus de la numération que du calcul mental dans la progression du GAM, même si ça me gêne un peu de le dire parce que les conseillers et les formateurs font quand même un super boulot... » [...].

La teneur de cet extrait significatif nous laisse croire que l'enseignante procède à une adaptation des ressources fondée davantage sur des ajouts que sur des modifications ce que confirme son jugement à la fois positif et négatif des supports d'enseignement utilisés (Leroy¹⁸⁹, 2013). En effet, en dépit de ses critiques, la professeure indique qu'elle se réfère plus particulièrement au *Cap maths* pour construire les apprentissages tout en « *ajoutant ce qu'il manque* ». Ainsi, à l'instar de cet ouvrage, elle emprunte l'itinéraire cognitif 1 (améliorer les procédures de surcomptage pour favoriser le progrès vers le calcul), met en œuvre une stratégie de type « *problème – compréhension – application* » (voir supra tableaux 45, 46 et 47) et imite le manuel « apprécié » en s'appuyant sur l'aspect cardinal des nombres pour développer les procédures de calcul réfléchi. Toutefois, elle offre à ses élèves un cheminement cognitif supplémentaire en utilisant aussi l'aspect ordinal des nombres (calcul par sauts) comme dans *Litchi*.

En ce qui concerne l'ordre chronologique des phases¹⁹⁰ de son scénario (voir annexes IV grille 4), Astride se démarque du *Cap maths* en supprimant la phase préparatoire (A) préconisée pour consolider les doubles des nombres inférieurs à 10. Par voie de conséquence, son scénario démarre d'emblée par une première phase de construction de connaissances (B) pour enseigner une procédure sur les trois prescrites par *Cap maths* durant ce même temps d'apprentissage : le passage à 10. Cependant, au même titre que ce manuel, la phase B d'Astride comporte, bien qu'en proportions plus réduites, des tâches de calcul réfléchi (CMCR), d'explicitation de procédures (EXPP et EXPR), de décompositions des nombres (RDN) et de construction du répertoire additif (CURA) complétées par un travail sur le choix des procédures (TCHP) comme le préconisent les

¹⁸⁹ La typologie a posteriori du travail de préparation en fonction du rapport au support de l'enseignant de Leroy (2013) est présentée en annexes IV Grille 62.

¹⁹⁰ Suivant l'exemple de Roditi (2005), nous avons, dans un premier temps, scindé la séquence d'apprentissage de l'enseignante et celles de ses manuels en cinq phases :

- la phase A (Phase préparatoire) amorce la séquence d'apprentissage et se termine juste avant la première séance qui introduit l'objet d'apprentissage (i.e, les sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine). Cette phase permet, généralement, à l'enseignant de mobiliser des prérequis ou connaissances anciennes (résultats mémorisés, procédures de calcul...) nécessaires au développement des nouvelles connaissances ;
- la phase B (Première phase de construction de connaissances) commence par la première activité qui introduit la nouvelle notion (sommes du type $\square + \square$ avec franchissement de la dizaine), permet de découvrir de nouvelles procédures de calcul, d'organiser les nouveaux résultats trouvés dans une table d'addition ou un répertoire additif et se termine avec la dernière application directe de cette notion ;
- la phase C (Première phase d'entraînement) correspond à une succession d'activités permettant de consolider la notion découverte, de s'approprier les nouvelles procédures de calcul et de travailler les points d'appui (compléments à 10, doubles, décompositions des nombres, suite des nombres) et de s'entraîner à la mémorisation des résultats trouvés ;
- la phase D (Deuxième phase de construction de connaissances) débute avec la première activité qui introduit une ou des nouvelle(s) procédure(s) de calcul pour calculer des sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine. Cette phase, structurellement analogue à la phase B, poursuit la construction du répertoire additif et se termine par la dernière application directe ;
- la phase E (Deuxième phase d'entraînement) est analogue à la phase C. Elle commence par la première activité d'entraînement ou de renforcement des nouvelles procédures enseignées et poursuit la mémorisation du répertoire additif.

auteurs de la progression académique en appui sur les travaux de Butlen. Mis à part le travail sur le choix et l'explicitation des procédures, on retrouve les mêmes tâches dans la phase B de *Litchi* (décompositions additives des nombres de 11 à 19 : RDN ; résolution de problèmes additifs : RPA ; construction de la table d'addition jusqu'à 9 : CURA et RRRRA) qui est beaucoup plus longue. Suit une phase d'entraînement (C) d'1h47 min constituée de tâches permettant de réinvestir les procédures découvertes en résolution de problèmes (RPA et RPCT) à l'exemple du *Cap maths*. Ce dernier étend à plus de 6h sa première phase d'entraînement (C) en y ajoutant la mémorisation du répertoire additif (RRRA) et la consolidation des points d'appui (RDN et RPC). Dans *Litchi*, la phase C, d'une durée de deux heures et cinq minutes, consolide l'ensemble des notions abordées dans la phase précédente.

En dépit de sa prédilection pour le *Cap maths*, la professeure ne le copie pas pour autant car, à l'opposé de ce manuel, elle adjoint à sa séquence une deuxième phase de construction de connaissances (D) et d'entraînement (E). La phase D d'Astride dure plus de deux heures et introduit une nouvelle procédure de calcul en appui sur les doubles à la manière du *Cap maths* avec des tâches de production de faits numériques sur les doubles (PRFD), de calcul réfléchi (CMCR), d'explicitation de procédures (EXPP et EXPR) et un travail sur le choix des procédures (TCHP). Enfin, la séquence d'Astride se termine par une assez longue phase d'entraînement (E) de 5h30 min répartie entre des tâches de mémorisation du répertoire additif (RRRA), l'explicitation des procédures (EXPP et EXPR), la consolidation des points d'appui (UPO, PRFD et PRFC) et la passation des manches du championnat jusqu'à la finale académique (voir plus de détails en annexes IV – Grilles 4, 5 et 8). En fin de compte, la durée de la phase de construction des savoirs dans la séquence d'Astride (4h 08min) est beaucoup plus courte que celle de son manuel de prédilection le *Cap maths* (5h 45min) et du manuel *Litchi* (11h 10 min) imposé par l'équipe pédagogique (voir tableau 49).

PHASES	LITCHI		ASTRIDE		CAP MATHS	
Phases de construction des connaissances	B 84%	B 670min	B + D 36%	B + D 248 min	A + B 47%	A + B 345 min
Phases d'entraînement	C 16%	C 545 min	C + E 64%	C + E 442 min	C 53%	C 390 min
Position relative de la phase de construction de connaissances	Diagramme de position relative de la phase de construction des savoirs : Échelle : 30, 40, 50, 60, 70, 80 Points marqués : Astride : à environ 35 Cap maths : à environ 48 Litchi : à 80					

Tableau 49 : Position relative de la phase de construction des savoirs dans le scénario d'Astride par rapport aux manuels utilisés (voir plus de détails en annexes IV – Grille 11)

On peut y voir ici une marge de manœuvre de l'enseignante pour tenter de concilier ses composantes cognitive et personnelle (« l'élève doit être mis en situation de recherche pour qu'il construise lui-

son savoir ») et les contraintes institutionnelles (« voir toutes les notions programmées par le GAM avant chaque manche et entraîner les élèves sur un temps suffisamment long pour ne pas les mettre en échec lors du championnat »). En outre, la mesure de la variété des tâches possibles des élèves dans la séquence d'Astride révèle un plus grand nombre de tâches par rapport à la moyenne chez l'enseignante que dans les manuels utilisés (voir tableau 50).

	LITCHI	ASTRIDE	CAP MATHS
Nombre total de tâches	156	172	115
Écart à la moyenne (moyenne = 148)	+ 8	+24	-33
Position relative du scénario d'Astride par rapport à celle des manuels utilisés	Le diagramme illustre la position relative de la séquence d'Astride par rapport à celle des manuels utilisés. L'axe horizontal est gradué de -40 à +30. Trois points sont marqués : Cap maths à -33, Litchi à +8, et Astride à +24. Les étiquettes 'Cap maths', 'Litchi' et 'Astride' sont placées au-dessus de leurs respectifs points.		

Tableau 50 : Position relative de la séquence d'Astride par rapport aux manuels utilisés (voir plus de détails en annexes IV – Grille 12)

Enfin, le graphique associé à l'organisation chronologique de la séquence d'Astride met en évidence un déroulement conforme à sa stratégie d'enseignement (voir annexes IV Grille 13). L'enseignante confronte les élèves au calcul réfléchi de sommes pour aboutir assez vite à l'élaboration de nouvelles procédures avant de proposer de nombreux exercices pour les préparer au championnat académique en consolidant les points d'appui et la mémorisation du répertoire additif.

- **En résumé :** En appui sur les travaux de Leroyer (2013), l'analyse croisée des entretiens et des interactions entre Astride et les supports édités, dans son activité de préparation, nous permet de conclure que son rapport aux ressources relève de l'adaptation fondée exclusivement sur l'ajout et la sélection (d'activités) associée à une réorganisation. Plus précisément, la professeure se réfère au projet d'enseignement proposé par *Cap maths* (son manuel de prédilection) pour construire le sien. Elle y sélectionne des activités qu'elle réorganise et adapte au profil de ses élèves mais n'hésite pas à rajouter d'autres activités quand elle le juge nécessaire. En parallèle, la professeure utilise le fichier *Litchi* (imposé par l'équipe pédagogique) pour les activités d'entraînement et prépare les élèves au championnat académique en tenant compte de la progression proposée par le Groupe Académique de Mathématiques sans pour autant la suivre pas à pas.

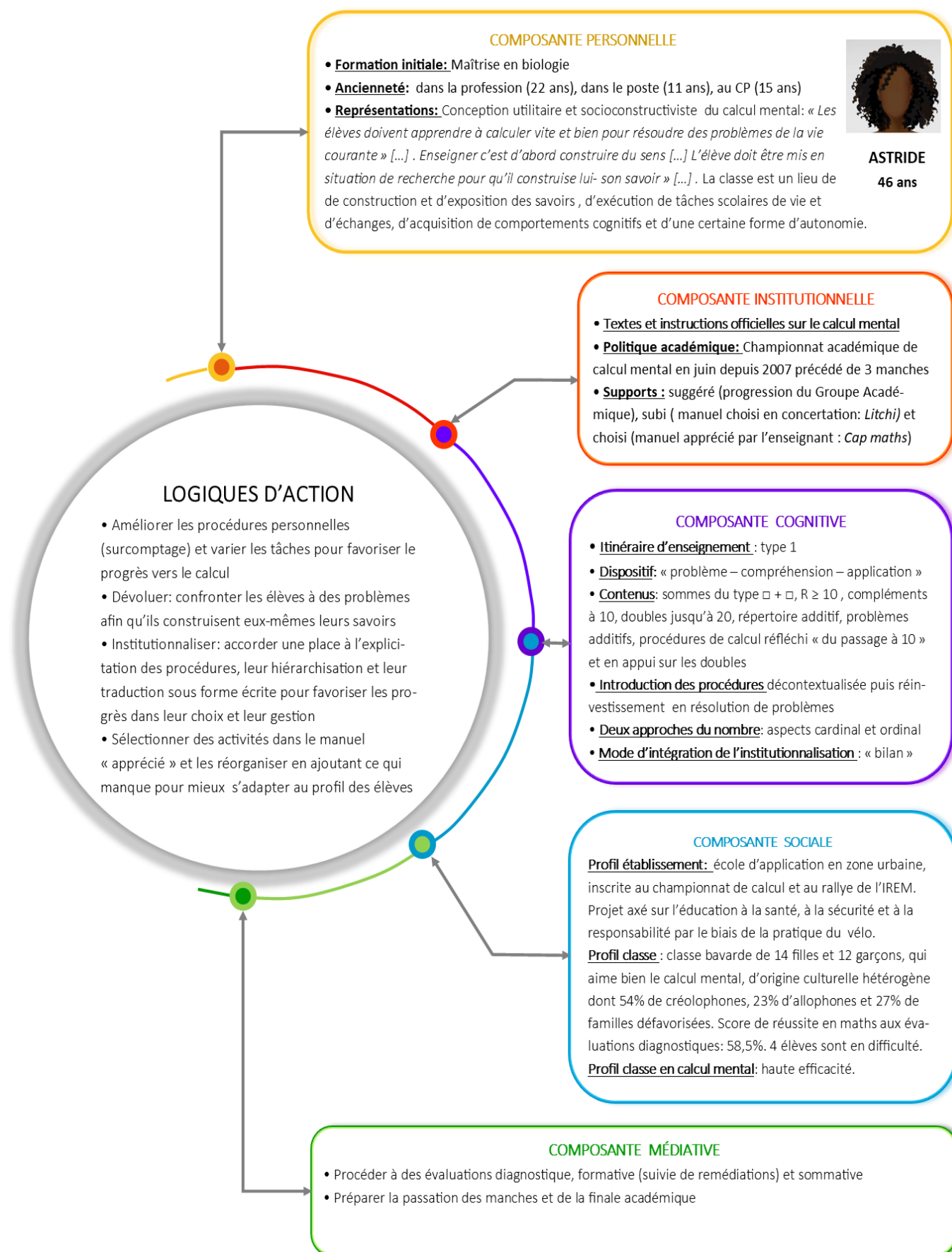


Schéma 37 : Bilan intermédiaire du profil d'Astride

2.1.2 Éléments pris en considération par Séverine pour concevoir son projet d'enseignement

a) Redéfinition de la tâche prescrite

Titulaire d'une licence en économie, Séverine, âgée de 41 ans, a d'abord travaillé dans une entreprise d'assurances avant d'intégrer le corps enseignant où elle exerce depuis quatorze ans. En 2014, elle enseignait pour la sixième fois au CP et prenait ses fonctions dans une école située en REP pour la quatrième année consécutive. « *Personnellement convaincue que les mathématiques sont faciles* », la professeure déclare que « *l'enseignement du calcul mental n'est pas une contrainte* » car elle dispose d'un atout personnel, son affection pour les maths, et de compétences professionnelles acquises grâce à l'autoformation. Pour cette enseignante, le calcul mental sert avant tout à développer la réflexion, la concentration et l'efficacité des élèves sans pour autant rechercher la rapidité dans les calculs.

De l'avis de Séverine, « *le programme de CP en calcul mental n'est pas assez précis* ». « *J'aurais aimé qu'il y ait vraiment une rubrique "calcul mental" et qu'on décline dedans tout ce que l'élève doit savoir faire, ça aurait été mieux, on aurait été plus à l'aise et on n'en aurait fait ni trop ni trop peu* », expliquait-elle, lors de l'entretien préalable. Globalement, sa classe de 10 garçons et 12 filles apprécie cette activité : « *ils participent et même ceux qui traînent un peu des pieds s'y mettent après quelques rappels à l'ordre* ». Aux dires de l'enseignante, sa classe se caractérise par une forte hétérogénéité avec d'un côté « *les excellents élèves* » et de l'autre « *ceux qui peinent à comprendre quelque chose* ». Par voie de conséquence, l'apprentissage du calcul de sommes de nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine peut, selon Séverine, entraîner différentes réactions chez ses élèves : « *les bons y arriveront car le calcul mental est devenu pour eux presque intuitif* ». Pour les autres, « *calculer des sommes du type $9 + n$ ou $8 + n$ ou les « presque doubles » en utilisant le complément à 10 ou les doubles risquent de leur sembler difficile d'autant plus qu'ils n'apprennent pas les tables à la maison...sans oublier ceux qui rêvassent au lieu de suivre les explications* ». Subséquemment, l'enseignante borne son ambition en se fixant deux niveaux d'exigence : 1°) pour les bons élèves, « *acquérir des méthodes de calcul pour ne pas être pénalisés lors du championnat* ; 2°) pour « *les « moins débrouillés* » : « *utiliser le comptage sur les doigts ou le dessin si cela peut les aider à trouver le bon résultat* ».

- **En résumé :** Suivant la progression académique, la professeure prévoit d'abord, en premier lieu, « *les décompositions de 10, le complément à 10 et les doubles* ». Ensuite, de « *donner aux élèves un premier calcul pour voir comment ils se débrouillent avant de leur expliquer une méthode pour calculer les "presque doubles"* ». Puis, de « *leur proposer des exercices d'application et une séance décrochée en résolution de problèmes pour les habituer au raisonnement logique* ». Plus tard, sera enseignée « *une méthode qui utilise le complément à 10 pour les sommes du type $9 + n$ et $8 + n$* ».

b) Stratégie d'enseignement

• Itinéraire d'enseignement

Souhaitant suivre de près la progression proposée par le Groupe Académique de Mathématiques (GAM), organisateur du championnat, Séverine calque son itinéraire d'enseignement sur son modèle en y intégrant à la fois toutes les notions programmées par le GAM et celles en lien avec les additions mentales de nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine qu'elle répartit sur les trois dernières périodes de l'année. Ainsi, les deux premières séances de son scénario visent la consolidation des points d'appui avec un travail sur les décompositions additives de 10 et la recherche de complément à 10.

Tour de parole	Temps	Nom de l'émetteur	Énoncés
11	00 :44	Enseignante	On y va. Temps de réponse 10 secondes. La semaine prochaine se sera 5 secondes. Combien je dois ajouter à 3 pour arriver à 10 ?
12	00 :50	Enseignante	Combien je dois ajouter à 3 pour arriver à 10 ?
13	00 :57	Enseignante	Levez !
14	01 :00	Enseignante	Ryan-Dominique, tu lèves !
15	01 :02	Enseignante	C'est trop tard !
16	01 :04	Enseignante	Eden, non ! Tessa, non ! Ryan-Dominique, non ! Non pour Eden !
17	01 :15	Enseignante	Alors, combien je dois ajouter à 3 pour arriver à 10 ? Même si je ne connais pas ma table. J'ai le temps de chercher en dix secondes.
18	01 :22	Enseignante	Tessa comme tu n'as pas trouvé. Tu nous dis ce que tu aurais dû faire. Combien je dois ajouter à 3 pour arriver à 10 ?
19	01 :31	Tessa	J'ouvre mes mains pour avoir mes dix doigts
20	01 :33	Enseignante	Et ensuite ?
21	01 :37	Tessa	Et je plie trois doigts
22	01 :38	Enseignante	Oui
23	01 :40	Tessa	<i>Inaudible</i>
24	01 :51	Enseignante	Comment tu fais ? Je veux tout entendre
25	01 :54	Enseignante	Ça va aider les autres camarades qui n'ont pas trouvé. Alors, je mets mes dix doigts et après
26	02 :00	Tessa	J'ajoute 3
27	02 :01	Enseignante	J'ajoute 3 ! 10...plus...3 ?
28	02 :05	Tessa	Euh... j'enlève 3
29	02 :07	Enseignante	Oui tu enlèves 3
30	02 :16	Enseignante	Comment tu fais pour enlever 3 ?
31	02 :22	Ethan	Maîtresse, on n'a plus de mouchoir. (2 élèves se mettent debout).
32	02 :24	Enseignante	Alors vous vous asseyez et on continue le calcul mental.
33	02 :34	Enseignante	Alors qui peut aider Tessa ?
34	02 :36	Enseignante	(Une élève lève le doigt) Vas-y Djaïna.
35	02 :38	Djaïna	J'ouvre mes dix doigts et je plie trois doigts
36	02 :43	Enseignante	Regarde Tessa ! Utilise tes doigts j'ouvre mes dix doigts comme dit Djaïna et je plie trois doigts. Alors on y va Tessa, ça fait combien ?
37		Tessa	6
38	02 :51	Enseignante	Non ! Compte bien tes doigts !
39	02 :55	Tessa	(Tessa compte ses doigts) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
40	02 :57	Enseignante	Oui, ton résultat, c'est 7. Donc, combien je dois ajouter à 3 pour arriver à 10 ?
41		Tessa	7

Tableau 51 : Extrait de la séance 1 de Séverine

La troisième séance ayant pour but d'introduire une procédure de calcul réfléchi des « presque doubles » commence par une recherche des résultats de $6 + 6$ et $7 + 7$ validée par un comptage sur la piste numérique et précédée d'une réactivation des doubles jusqu'à $5 + 5$. Faisant suite à la mobilisation de ces connaissances, une première somme voisine des doubles est résolue par les élèves pour « voir comment ils se débrouillent ». Juste après, l'enseignante suggère une méthode qu'elle explicite et met en œuvre à partir de quelques exemples puis propose des activités d'entraînement pour permettre aux élèves de se l'approprier.

Tour de parole	Temps	Nom de l'émetteur	Énoncés
63	08 :18	Professeure	On continue.
64	08 :21	Professeure	$6 + 7$
65	08 :24		(Brouhaha)
66	08 :34	Professeure	Levez
67	08 :39	Professeure	Trop tard pour ceux qui n'ont pas levé, les dix secondes sont passées.
68	08 :45	Professeure	Très bien. Tous ceux qui ont levé ont trouvé.
69	08 :49	Ethan	Wé !
70	08 :51	Professeure	Je ne considère pas que tu as bien travaillé Ethan parce que quand j'ai dit que c'était trop tard, tu étais encore en train d'écrire.
71	08 :55	Professeure	Alors pour trouver le résultat, on pouvait compter sur les doigts. Je mets 7 dans ma tête et six sur mes doigts et je compte après 8, 9, 10, 11, 12, 13. $6 + 7$ égal 13. Mais il y a une autre technique qui va encore plus vite pour calculer $6 + 7$. Regardez bien. 7 c'est $6 + 1$ donc je remplace 7 par $6 + 1$. Donc $6 + 7$ c'est $6 + 6 + 1$. $6 + 6$, on a vu ça tout à l'heure c'est 12 et je rajoute 1, ça fait 13. Trace écrite au tableau

Tableau 52 : Extrait de la séance 3 de Séverine (voir séance complète en annexes VII Grille 3)

En accord avec la progression du GAM¹⁹¹, les trois séances suivantes (4 à 6) développent des procédures de calcul de sommes ou de différences de deux nombres dont le résultat est inférieur ou égal à 10, exercent les élèves à la résolution de problèmes de comparaison et approfondissent en parallèle la connaissance de la suite numérique et des écritures additives des nombres inférieurs à 10. La manche liminaire du championnat de calcul mental marque la fin cette phase de construction de connaissances et le début d'une longue phase d'entraînement de six séances (séances 9 à 14) qui s'achève par une évaluation de fin de période 3 contrôlant à la fois le niveau d'acquisition des compétences visées par la progression académique et la capacité des élèves à calculer des doubles et des sommes « voisines des doubles » avec passage de la dizaine.

¹⁹¹ Voir en annexes I Fiche 7

En se conformant aux indications données par le GAM, Séverine initie la deuxième phase de construction de connaissances de son scénario par la découverte des doubles $8 + 8$ et $9 + 9$, une révision de la procédure enseignée en début de séquence (séance 16) et un renforcement des points d'appui par le biais de la recherche de compléments et le décompte de 2 en 2 de la suite numérique à partir de 60 (séance 17). Sur le même mode opératoire présenté supra, les séances 18 et 19 introduisent la procédure du « passage à 10 » pour calculer les sommes du type $9 + n$ et $8 + n$. Peu après, une séance sur la résolution de problèmes de tous types et la manche 2 du championnat finalisant cette seconde phase d'apprentissage. Au cours des semaines qui suivent, six séances d'entraînement (22 à 27) viennent conforter les acquis avant l'évaluation de fin de période 4 (séance 28), la passation de la troisième manche et de la finale académique (voir tableau synoptique du projet d'enseignement reconstitué de Séverine à l'annexe IV- Grille 15).

- Les contenus mathématiques

Au regard de l'itinéraire retenu par Séverine, le champ mathématique de son scénario peut se résumer de la manière suivante : doubles jusqu'à $9 + 9$, décompositions additives des nombres jusqu'à 10, complément à 10, récitation de la suite numérique de 5 en 5 ou de 2 en 2, procédure de calcul réfléchi en appui sur les doubles, procédure du « passage à 10 », sommes et différences de deux nombres (avec $R \leq 10$), résolution de problèmes additif, de complément et de comparaison.

- Gestion et mode d'intégration de l'institutionnalisation

D'après Séverine, « faire du calcul mental revient à appliquer une méthode et derrière toute méthode, il y a une explication et, une fois qu'on a compris comment ça fonctionne tout devient facile » (extrait de l'entretien préalable). « En fait, ce serait juste un soulagement si les élèves arrivaient à comprendre qu'il suffit juste d'appliquer la méthode pour trouver le bon résultat » admet-elle (ibid.). Ainsi, en accord avec ses représentations et sa stratégie d'enseignement, l'enseignante organise trois phases d'institutionnalisation dans le déroulement de sa séquence en utilisant deux modes d'intégration¹⁹² (Roditi, 2005). À la séance 3, elle propose un premier calcul de « presque double », valide (ou pas) les résultats trouvés sur les ardoises et institutionnalise alors, avec le mode « apport », une méthode en appui sur les doubles à partir de quelques exemples, qui est ensuite appliquée par les élèves. Puis, lors de la correction, la professeure aide les élèves qui n'ont pas réussi en leur proposant de compter sur les doigts ou de dessiner. La séance est clôturée par un exemple illustrant la stratégie de calcul réfléchi de sommes du type $6 + 7$ en appui sur les doubles. Pour introduire la procédure du « passage à 10 » permettant de calculer des sommes du type $9 + n$ et $8 + n$ (séances 18 et 19), Séverine recourt au mode « déclaration » : elle note au tableau plusieurs exemples démontrant la procédure

¹⁹² Ce mode opératoire a été observé lors des deux années d'observation : 2014 - 2015 et 2015 - 2016.

puis les élèves tentent de se l'approprier lors d'une série de calculs dictés. L'enseignante finalise ces séances en suivant la même démarche que précédemment.

- **Bilan sur la stratégie globale d'enseignement de Séverine**

- 1) Emprunter un itinéraire de type 1 (Charnay et Valentin, 1992) : améliorer les procédures personnelles (le surcomptage) pour favoriser le progrès vers le calcul ;
- 2) Opter pour un dispositif pédagogique de type : « explication - application » ;
- 3) Introduire la procédure à enseigner de manière décontextualisée à partir d'exemples ;
- 4) Utiliser les aspects cardinal et ordinal du nombre pour développer des procédures de calcul ;
- 5) Institutionnaliser les procédures en mode « apport » ou « déclaration », à partir d'exemples ;
- 6) Proposer aux élèves rencontrant des difficultés de recourir au surcomptage ou au dessin ;
- 7) Procéder à des évaluations sommatives ;
- 8) Réaliser des « séances décrochées » de résolution de problèmes.

c) Les tâches possibles des élèves dans les activités proposées

À l'exemple de Roditi (2005), les tâches possibles réalisées sous la responsabilité du professeur ont été catégorisées¹⁹³. Le tableau récapitulatif infra fixe à cent-trente-six le nombre total de tâches composant la séquence de Séverine avec 54% des tâches centrées sur le développement des procédures de calcul réfléchi, 38% allouées à la consolidation des points d'appui et 8% consacrées à la mémorisation du répertoire additif. Pour ce qui est de l'apprentissage des procédures, nous constatons la prépondérance des tâches ayant trait à la résolution de problèmes (RPA, RPCN et RPCN : 42%) et au calcul mental ou réfléchi (34%). Influencée par ses représentations et la composante sociale de sa classe située en REP, Séverine est convaincue de l'incapacité de ses élèves à trouver d'eux-mêmes une procédure et à l'expliquer. En conséquence, elle opte pour l'introduction d'une « *méthode fiable et facile* » plutôt que de tenter de faire émerger celles des élèves comme en témoigne l'absence de tâches liées à l'explicitation des procédures personnelles (EXPP). Ce parti-pris se répercute également sur la proportion des tâches de la catégorie « application » (60%) comparée à celles de la catégorie « recherche » (36%) – (voir tableau en annexes IV- Grille 17). D'autre part, en dépit de leur effectif réduit (7%), les tâches relatives au comptage (CPC) confirment l'itinéraire cognitif emprunté : améliorer le surcomptage pour favoriser le progrès vers le calcul. Concernant la consolidation des points d'appui, trois types de tâches prédominent : l'approfondissement de la suite numérique (37%), la production de faits numériques sur les compléments (28%) et sur les doubles (20%). In fine, les tâches en adéquation avec la mémorisation

¹⁹³ Cette catégorisation est détaillée à la page 308 de la thèse (note de bas de page n°187).

du répertoire additif sont réparties presque équitablement entre la construction des tables (CURA : 55%) et la recherche des résultats du répertoire additif (RRRA : 45%).

Développer des procédures de calcul			Consolider les points d'appui			Mémoriser le répertoire additif		
Tâches	Effectif	%	Tâches	Effectif	%	Tâches	Effectif	%
CMCR	25	34%	ACSN	19	37%	CURA	6	55%
RPCN	15	20%						
RPA	10	14%						
RPCT	6	8%	PRFD	10	20%	RRRA	5	45%
Autres	18	24%	Autres	9	18%			
TOTAL	74	54%	TOTAL	51	38%	TOTAL	11	8%

Légende : Les catégories de tâches sont désignées par les abréviations suivantes : Effectuer un calcul mental ou un calcul réfléchi (CMCR) ; Jeux mathématiques (JM) ; Résolution de problèmes additifs (RPA), de complément (RPCT) et de comparaison (RPCN) ; Expliciter une procédure de référence (EXPR) ; Utiliser les propriétés des opérations (UPO) ; Consolider les procédures de comptage (CPC) ; Approfondir la connaissance de la suite numérique (ACSN) ; Produire rapidement des faits numériques sur les doubles (PRFD), sur les compléments (PRFC) ; Retrouver les différentes décompositions des nombres (RDN) ; Retrouver les résultats du répertoire additif (RRRA), Construire et utiliser le répertoire additif (CURA).

Tableau 53 : Effectifs et répartition des tâches possibles des élèves suivant leur catégorie dans le scénario de Séverine (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 16)

Globalement, le déroulement de la séquence s'étend sur une durée 8h 06 min, qui, rapportée au nombre de tâches proposées (136) nous permet de conclure à une moyenne horaire de 17 tâches pour le projet d'enseignement de Séverine (voir tableau détaillé en annexes IV- Grille 15).

d) *Le rapport de l'enseignant au manuel dans son activité de préparation*

« Cela fait quatre ans que j'exerce dans cette école et quand je suis arrivée, l'équipe pédagogique travaillait déjà avec "Compagnon maths CP" », déclare Séverine lors de l'entretien préalable. Elle poursuit en disant : « Mais moi, je ne suis pas fan de ce manuel. Je trouve qu'il ne facilite pas la tâche de l'enseignant et demande beaucoup trop de travail de préparation. Rien que pour l'année du CP, les élèves ont trois fichiers à remplir. Donc, imagine la perte de temps et d'énergie pour corriger tout ça. Et, en plus, ils ne traitent même pas certaines notions de géométrie comme les solides ou les reproductions de dessins et l'utilisation de la règle graduée, ce qui t'oblige à chercher encore d'autres supports. Donc, sincèrement moi je ne m'embête pas : je ne l'utilise pas et mes élèves non plus [...]. Pour enseigner le calcul mental, la progression académique me sert de guide sans ça je risquerais d'aborder peut-être les mêmes compétences mais dans un ordre différent ce qui pourrait pénaliser mes élèves pour le championnat. Pour éviter ça, je m'oblige à suivre fidèlement le cheminement de la progression minimum pour que les enfants aient au moins vu ces points-là et ensuite je vais plus loin [...]. Parfois, j'avoue que j'ai du mal à donner sens aux suggestions du GAM. Quand tu prends les doubles par exemple, je ne vois pas trop l'intérêt de les répartir sur les cinq périodes. On voit tout d'un coup et puis c'est fini ! Mais bon ! Rien n'est parfait dirons-nous. [...] Donc, j'utilise la progression académique comme fil directeur et je construis moi-même mes séances en piochant les exercices dans "Pour comprendre les maths CP". Les situations proposées sont concrètes, il y a beaucoup d'activités d'entraînement ce qui me permet de gagner du temps dans mes préparations » (extrait de l'entretien préalable).

À la lecture de cet extrait significatif, nous comprenons qu'en dépit d'un avis mitigé, l'enseignante élabore l'ossature de son projet d'enseignement à partir des contenus mathématiques définis par la progression académique et construit chacune de ses séances en sélectionnant certaines situations et exercices préconisés par *Pour comprendre les maths* pour gagner du temps. À vrai dire, Séverine procède intentionnellement à une adaptation de ce manuel dans un souci de confort (Leroyer¹⁹⁴, 2013). Ainsi à l'instar de ce support fondateur qu'elle exploite partiellement, elle emprunte l'itinéraire cognitif 1 (améliorer les procédures de surcomptage pour favoriser le progrès vers le calcul), s'appuie à la fois sur les aspects cardinal et ordinal du nombre pour développer les procédures de calcul réfléchi, mais à son opposé met en œuvre une stratégie de type « *explication – application* » (le professeur explique la procédure attendue puis les élèves l'appliquent).

En ce qui concerne l'ordre chronologique de son scénario¹⁹⁵, Séverine se démarque de sa ressource en supprimant la phase préparatoire¹⁹⁶ (A) prescrite par le manuel pour améliorer le comptage sur la piste numérique, consolider les compléments à 10 et les procédures de calcul de sommes dont le résultat est inférieur ou égal à 10. De ce fait, sa séquence commence par une première phase de construction de connaissances (B) qui approfondit la connaissance de la suite numérique (comptage de 5 en 5 jusqu'à 50 ou de 2 en 2 jusqu'à 60), consolide les écritures additives des nombres de 6 à 10, amène les élèves à raisonner sur des problèmes de comparaison et introduit, sous l'influence de la progression académique, une première procédure pour calculer des sommes du type $6 + 7$ en appui sur les doubles qui est pourtant programmée beaucoup plus tard dans le scénario du manuel. En effet, pour la phase (B), ce dernier recommande plutôt la consolidation de l'apprentissage du surcomptage et des procédures de calcul par sauts sur la piste numérique pour calculer la somme de deux petits nombres, associée à un travail sur le sens des opérations, les décompositions additives de 10 et la construction de la table d'addition. Malgré ces divergences de contenus, dans la phase B de Séverine, on retrouve comme dans celle du manuel, bien qu'en effectif plus restreint, des tâches de calcul réfléchi (CMCR), de construction du répertoire additif (CURA), de comptage (CDC), de décompositions de nombre (RDN), de résolution de problèmes additifs (RPA), d'explicitation et d'application de procédures de référence (EXPR et ECPR). Peu après, une première phase d'entraînement (C) vient renforcer aussi bien dans la séquence de Séverine que dans celle du manuel toutes les notions enseignées lors de la phase précédente. Par la suite, tandis que *Pour comprendre les maths* centre la deuxième phase de construction de connaissances (D) sur les écritures additives de nombres de 11 à 19, les doubles et l'apprentissage du calcul de sommes du type $6 + 7$ en appui sur

¹⁹⁴ La typologie a posteriori du travail de préparation en fonction du rapport au support de l'enseignant de Leroyer (2013) est présentée en annexes IV Grille 62.

¹⁹⁵ Voir annexes IV Grille 18

¹⁹⁶ Les différentes phases identifiées sont explicitées à la page 310 (note de bas de page n° 189).

les doubles. La professeure, elle, entame au même titre que la « progression minimum », les doubles $8 + 8$ et $9 + 9$, un travail sur les nombres pairs, la résolution de tous types de problèmes et enseigne une procédure utilisant le complément à 10 pour calculer des sommes du type $9 + n$ et $8 + n$. Comme précédemment, on retrouve dans cette phase d'apprentissage (D) des tâches communes au scénario de Séverine et à celle de son manuel « ressource » mais dans des proportions différentes telles que le calcul réfléchi (CMCR), la production de faits numériques sur les doubles (PRFD), la résolution de problèmes additifs (RPA), l'approfondissement de la connaissance de la suite numérique (ACSN), l'explicitation et l'application des procédures de référence (EXPR et ECPR). In fine, la deuxième phase d'entraînement (E) qui est aussi la dernière de la séquence, conforte, chez l'enseignante comme dans son manuel, l'apprentissage des compétences travaillées durant la phase (D) (voir plus de détails en annexes IV – Grilles 18 et 19). En fin de compte, la séquence de Séverine a duré 8 heures et 6 min dont 5h et 51 min (72%) consacrées à la phase de construction des savoirs (voir tableau 54).

SÉVERINE			Construction des connaissances		Entraînement	
Phases de la séquence						
B	45%	220 min	B + D = 72 %	B + D = 351 min	C + E = 28%	C + E = 135 min
C	18%	86 min				
D	27%	131 min				
E	10%	49 min				

Tableau 54 : Durée des phases de la séquence de Séverine (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 22)

L'absence d'indications sur le temps accordé aux différentes activités dans *Pour comprendre les maths* ne permet pas d'établir la position relative de Séverine par rapport au manuel utilisé. Néanmoins, la mesure de la variété des tâches des élèves dans la séquence de l'enseignante montre d'une part, une certaine proximité avec celle du manuel malgré la forte contrainte institutionnelle exercée par la progression académique et d'autre part, une légère supériorité de la diversité des tâches proposées par l'ouvrage utilisé par rapport à la moyenne (voir tableau 55).

	POUR COMPRENDRE LES MATHS	SÉVERINE
Nombre total de tâches	143	136
Écart à la moyenne (moyenne = 139)	+ 4%	- 3%
Position relative du scénario d'Astride par rapport à celle des manuels utilisés	Séverine PCLM	

Tableau 55 : Position relative de la séquence de Séverine par rapport au manuel utilisé (voir plus de détails en annexes IV – Grille 23)

Pour finir, le graphique¹⁹⁷ relatif à l'organisation chronologique de la séquence de Séverine met en exergue un déroulement conforme à sa stratégie d'enseignement. Des points d'appui sans lien direct avec la notion visée sont d'abord étudiés pour suivre la progression minimum. Ensuite, l'enseignante confronte les élèves à un premier calcul de sommes voisines des doubles mais propose rapidement une méthode que les élèves mettent application (phase A). Puis, le travail de consolidation des points d'appui, auquel s'ajoute l'enseignement de nouvelles compétences se poursuit avant d'entamer une longue phase d'entraînement (phase B). Les deux dernières phases (C et D) de la séquence introduisent une procédure de calcul pour les sommes du type $9 + n$ et $8 + n$ et se déroulent selon le même mode opératoire que les phases précédentes (voir schéma 38).

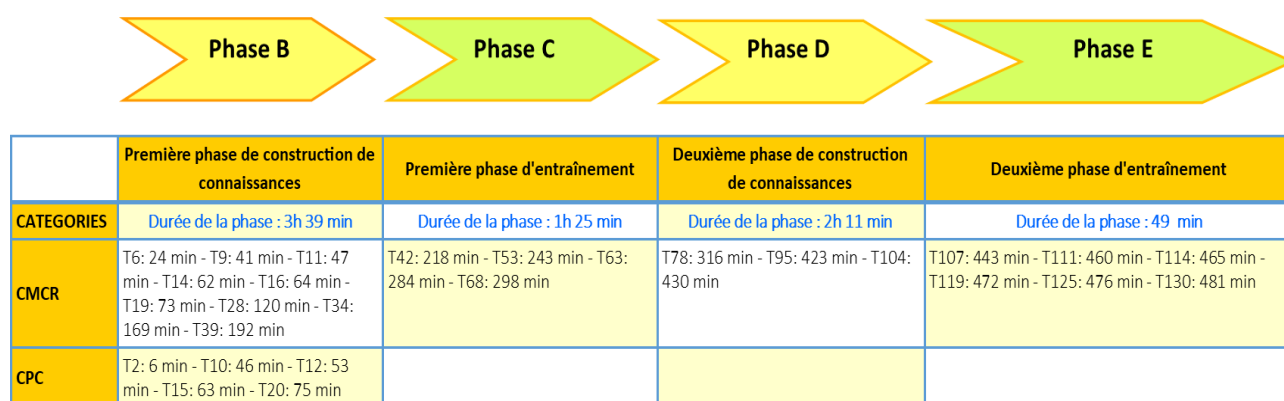


Schéma 38 : Extrait de la chronologie des tâches les plus significatives de la séquence de Séverine (voir plus de détails en annexes IV – Grille 24)

- **En résumé :** En appui sur les travaux de Leroyer¹⁹⁸ (2013), l'analyse croisée des entretiens et des interactions entre Séverine et les supports édités, dans la complexité de son activité de préparation, nous permet de conclure que son rapport aux ressources relève, dans un souci de confort, de l'adaptation d'un manuel « apprécié » (*Pour comprendre les maths*) fondée sur la sélection et la combinaison des activités prescrites par ce dernier afin d'assurer un suivi systématique de la progression minimum proposée par le Groupe Académique de Mathématiques.

¹⁹⁷ Pour construire ce graphique, chaque tâche a été numérotée par ordre d'apparition et associée à l'instant t où elle se produit. Par exemple, T2 : 6 min placé en phase B dans la catégorie CPC signifie qu'au cours du déroulement de la séquence d'apprentissage, la deuxième tâche possible de l'élève dans la première phase de construction de connaissances est la consolidation des procédures de comptage (CPC). Elle se produit au bout de six minutes après le début de la première séance d'apprentissage.

¹⁹⁸ Voir typologie de Leroyer (2013) en annexes IV Grille 62.



Schéma 39 : Bilan intermédiaire du profil de Séverine

2.1.3 Éléments pris en considération par Béatrice pour concevoir son projet d'enseignement

a) Redéfinition de la tâche prescrite

Au moment où Béatrice réussit le concours du professorat des écoles, elle a une licence en sciences de l'éducation et exerce au collège en tant que contractuelle. Âgée de 39 ans, cette professeure avait, en 2014, 12 ans d'ancienneté à son actif et prenait ses fonctions pour la sixième année consécutive dans une école élémentaire urbaine et la huitième fois au CP. Selon l'enseignante, le calcul mental « est un outil du quotidien » nécessaire (« pour évaluer un temps de cuisson ou le prix approximatif des courses ») mais « pas indispensable » (« avec une calculatrice c'est vite fait »). « C'est un sujet qui m'intéresse mais ça ne le rend pas pour autant facile à enseigner », nous confie Béatrice. « Pour tout te dire, au départ, je me questionnais, je tâtonnais, mais mon tâtonnement n'était pas efficace et puis après, il y a eu une formation et là j'ai réalisé que ma pratique était loin de ce qui était recommandé donc j'ai réajusté comme j'ai pu mais je galère encore parfois », ajoute -t-elle.

À la question, que pensez-vous des programmes du CP en calcul mental ? Voilà ce qu'elle nous a répondu : « Mince, je m'étais dit qu'il fallait que je les relise avant que tu viennes mais bon... j'ai oublié [...]. En un mot, je dirais... "chargé" ! Il y a beaucoup à faire, j'ai l'impression de courir après le temps tout le temps. Les enfants sont à peine mûrs pour aborder une notion qu'il faut déjà passer à la suivante donc...il y a beaucoup de choses qui passent à l'as (rires) ». En ce qui concerne sa classe de 14 garçons et 12 filles, constituée en concertation, Béatrice la décrit comme « une assez bonne classe, trop dynamique par moment, avec de très bons élèves, des moyens et des faibles » dont elle est « satisfaite » même si elle n'est « pas toujours aidée par les parents quand il s'agit de mémoriser les tables à la maison ». S'agissant des additions mentales de petits nombres avec passage de la dizaine, Béatrice pense que ce ne sera pas évident car « la moitié d'entre eux a besoin de temps et de faire des dessins car ils n'arrivent pas à se représenter mentalement les opérations ». Par voie de conséquence, elle baisse le niveau d'exigence en estimant que « ce sera déjà pas mal s'ils peuvent compter sur leurs doigts ou faire des dessins jusqu'à ce que cela devienne un automatisme ». « Mais, je ne m'attends pas spécialement à ce que cela se produise », déclare -t-elle.

- **En résumé :** Persuadée que « le calcul mental et la résolution de problèmes suivent le même cheminement », la professeure prévoit de contextualiser l'introduction des additions avec passage de la dizaine en confrontant les élèves à une situation-problème afin qu'« ils donnent du sens aux nouveaux calculs réalisés et soient capables, par la suite, de les reconnaître dans un problème ». Selon elle, à force de représenter régulièrement par un dessin les différentes situations où ils ont à mettre en pratique ce type d'additions, leur résolution deviendra pour les élèves « un mécanisme, un automatisme ».

b) Stratégie d'enseignement

• Itinéraire d'enseignement

Dans un souci de rigueur, Béatrice s'appuie sur les repères chronologiques et notionnels fournis par la progression minimum du Groupe Académique de Mathématiques (GAM). Soumis à cet objet de référence, son itinéraire d'enseignement s'étale, ipso facto, sur les périodes 4 et 5. Cependant, « submergée par la charge de travail », l'enseignante prend du retard sur l'apprentissage de certaines notions programmées en période 3 (notamment les sommes de 3 nombres inférieurs à 10 ou des points d'un domino, la suite numérique de 2 en 2 jusqu'à 50 ou sur les nombres impairs et la résolution de problèmes de comparaison) et tente de le rattraper au cours des cinq premières séances de son projet d'enseignement. La sixième séance débute par le calcul du « grand double $6 + 6$ » introduit par le biais d'un problème que les élèves s'approprient d'abord avec l'aide de la professeure avant de disposer d'une dizaine de secondes pour trouver individuellement le résultat.

Tour de parole	Temps	Nom de l'émetteur	Énoncés
1		Enseignante	Aujourd'hui, on va faire des calculs comme on fait d'habitude à partir d'une situation et il faudra réfléchir. Je vais vous raconter une petite histoire. Une petite histoire très courte c'est comme quand on joue au détective.
2	01 :19	Enseignante	Je commence : « Dans son panier, Géraldine a 6 pommes vertes. Sa maman lui donne 6 pommes rouges. Je recommence : « Dans son panier, Géraldine a 6 pommes vertes. Sa maman lui donne 6 pommes rouges.
3		Enseignante	Qu'est-ce que Géraldine a dans son panier, Roberto ?
4		Roberto	6 pommes rouges
5		Plusieurs élèves	Vertes !
6		Alan	6 pommes vertes et 6 pommes rouges.
7		Enseignante	Amandine
8		Amandine	C'est ce que je voulais dire.
9	02 :42	Enseignante	C'est ce que tu voulais dire. Je reprends. (<i>Une élève lève le doigt</i>). Enjoya, vas-y. Il y a.... ?
10		Enjoya	Il y a 6 pommes dans son panier.
11		Enseignante	Tamesha, tu entends, il y a combien de pommes ?
12		Tamesha	Il y a 6 pommes rouges et 6 pommes euh...vertes.
13	03 :16	Enseignante	Je reprends. Écoutez, écoutez.
...			
41	05 :46	Enseignante	Oui, il y a 6 pommes vertes et 6 pommes rouges. Je veux savoir...À votre avis, qu'est-ce que je peux chercher à savoir ?
42		Louane	Combien ça fait de pommes en tout ?
43		Enseignante	Combien de fruits possède Géraldine en tout ?
44		Louane	Il y en a...
45	05 :56	Enseignante	Vous allez sur votre ardoise me mettre combien de fruits possède Géraldine en tout ?
46	06 :05	Enseignante	On écrit. On cache.
47	06 :09	Enseignante	On écrit, on cache. Combien il y a de fruits en tout ?
48	06 :34	Enseignante	On écrit et on cache.

Tableau 56 : Extrait 1 de la séance 6 de Béatrice (voir séance complète annexes VIII Grille 3)

Ensuite, l'enseignante collecte les réponses puis relance la recherche en petits groupes (« pour favoriser l'émulation et l'esprit de compétition ») en mettant en place un contrat didactique

(Brousseau, 1998) : les élèves s'accordent pour produire un seul dessin représentant la situation et notent le calcul qui permet de solutionner le problème.

Tour de parole	Temps	Nom de l'émetteur	Énoncés
49	07 :17	Enseignante	C'est bon, levez ! Combien de fruits Géraldine possède-t-elle en tout ?
...			
54	07 :52	Enseignante	Je vois que vous n'êtes pas d'accord. Je vois 6, je vois 12, je vois 13, je vois 11. Il y a plusieurs réponses différentes
55		Aymerick	Et tu vois 4 aussi
56	08 :19	Enseignante	Donc vous formez les groupes de recherche et à l'intérieur du groupe, vous allez vous mettre d'accord pour que je puisse avoir une seule réponse dans chaque groupe.
57		Enseignante	Cameron va dans ton groupe. Mettez-vous d'accord.
58			(Brouhaha)
59	08 :52	Enseignante	Je rappelle. Amandine ! Je rappelle. (La maîtresse distribue une feuille réponse dans chaque groupe). Je veux que sur la feuille, on me dessine la situation. Je veux que ce soit clair sur la feuille. Au travail ! Mettez l'ardoise dans le casier. Vous avez juste quelques minutes.

Tableau 57 : Extrait 2 de la séance 6 de Béatrice (voir séance complète annexes VIII Grille 3)

Lors de la mise en commun, les résultats sont validés à l'aide du surcomptage et/ou des dessins (voir annexes VIII Grille 3). Cette leçon se poursuit par un rappel sur les doubles de $1 + 1$ à $5 + 5$, la recherche en petits groupes des résultats de $7 + 7$ à $9 + 9$ et se termine par l'élaboration de la table des doubles. Au cours des deux séances consécutives, les élèves apprennent à calculer des sommes du type $9 + n$ (séance 7) et $8 + n$ (séance 8) avec $n \leq 9$. Comme précédemment, l'enseignement de ces nouvelles sommes se fait de manière contextualisée avec une résolution individuelle puis collective associée à l'élaboration en petits groupes d'un dessin illustrant la situation et à l'écriture du calcul résolvant le problème puis s'achève par une correction collective qui valide les résultats trouvés en recourant au surcomptage et à la schématisation. Les groupes d'élèves dont les réponses sont validées sont valorisés par des bons points.

L'enseignante poursuit sa séquence par une longue phase d'entraînement de dix séances dans le but d'exercer les élèves au calcul de doubles et de sommes du type $9 + n$ et $8 + n$ (séances 9, 13), de leur donner l'occasion de mobiliser les nouvelles connaissances dans d'autres contextes (séances 12 et 14) et de renforcer la connaissance de la suite numérique (séances 10 et 11). À la fin de la période 4, la professeure évalue les acquis des élèves sur l'ensemble des notions travaillées tout au long du scénario. Au cours des semaines qui suivent, trois séances de révision, deux sur le calcul de sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine (séances 16 et 19) et l'une sur la résolution de problèmes de comparaison (séance 17) s'intercalent entre la passation de la troisième manche du championnat (séance 18) et la finale académique (séance 20) - (voir tableau synoptique du projet d'enseignement reconstitué de Béatrice à l'annexe VIII- Grille 6).

- Les contenus mathématiques

Au regard de l'itinéraire retenu par Béatrice, le champ mathématique de son scénario peut se résumer de la manière suivante : sommes de 3 nombres inférieurs à 10, sommes des points d'un domino, doubles jusqu'à $9 + 9$, suite numérique de 2 en 2 jusqu'à 50 ou sur les nombres impairs, sommes du type $9 + n$ et $8 + n$ (avec $n \leq 9$), résolution de problèmes additif, de complément et de comparaison.

- Gestion et mode d'intégration de l'institutionnalisation

De l'avis de Béatrice, c'est la confrontation régulière des élèves à la résolution de problèmes mettant en jeu des sommes de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine qui leur permet à terme d'accéder à l'automatisme même s'il n'est pas son objectif premier. En effet, elle s'estime satisfaite de son enseignement dès que les élèves sont capables de solutionner ce type d'additions à l'aide d'un schéma ou du surcomptage. Conformément à ses représentations et à sa stratégie d'enseignement, la professeure fait une présentation collective du problème introduisant les additions avec franchissement de la dizaine, organise ensuite des phases de recherche individuelle et en petits groupes hétérogènes ou de besoin (avec un étayage conséquent) puis procède à une correction publique durant laquelle les résultats sont validés en recourant à la schématisation et/ou au surcomptage. Cependant, aucune phase de synthèse ni d'institutionnalisation ne viennent ponctuer le déroulement de la séquence de Béatrice.

- Bilan sur la stratégie globale d'enseignement de Béatrice

- 1) Emprunter un itinéraire de type 1 (Charnay et Valentin, 1992) : améliorer les procédures personnelles (le surcomptage) pour favoriser le progrès vers le calcul ;
- 2) Opter pour un dispositif pédagogique de type : « problème – compréhension – application » ;
- 3) Introduire les nouveaux calculs de sommes à enseigner de manière contextualisée par le biais de la résolution de problèmes ;
- 4) Organiser ses séances selon le schéma suivant : présentation collective du problème, résolution individuelle puis en petits groupes hétérogènes (« pour favoriser l'émulation et l'esprit de compétition ») ou de besoin (avec un étayage conséquent) avant la correction publique ;
- 5) Anticiper sur les difficultés des élèves en revoyant à la baisse le niveau d'exigence : la priorité est donnée à la schématisation et au surcomptage au détriment du développement des procédures de calcul réfléchi attendues au CP ;
- 6) Ne mettre en œuvre ni phase de synthèse, ni phase d'institutionnalisation ;
- 7) Procéder à des évaluations de fin de période.

c) Les tâches possibles des élèves dans les activités proposées

À la manière de Roditi (2005), nous avons catégorisé¹⁹⁹ les tâches possibles s'effectuant sous la responsabilité du professeur. Le tableau récapitulatif infra fixe à quatre-vingt-onze le nombre de tâches constituant la séquence de Béatrice dont 78% concernent le développement des procédures de calcul réfléchi, 15% sont allouées à la consolidation des points d'appui et 7% sont consacrées à la mémorisation du répertoire additif. Concernant l'apprentissage des procédures, les tâches les plus significatives sont liées au calcul mental ou réfléchi (34%) et à la résolution de problèmes (RPA, RPCT et RPCN : 29%) avec, toutefois, une prédominance de celles relatives à l'amélioration des procédures personnelles (EXPP et CPC : 37%) qui corrobore le parti pris de l'enseignante consistant à donner la priorité à la schématisation et au sucrcomptage plutôt que de développer les procédures de calcul réfléchi qu'elle juge inutilement complexes au regard de cette déclaration faite au cours de l'entretien préalable : « *Moi je suis logique. Ce n'est pas la peine de faire le forcing pour qu'un enfant abandonne sa procédure pour lui apprendre une méthode plus rapide mais qui le met en difficulté* ». Pour ce qui est de la consolidation des points d'appui, trois types de tâches sont prépondérantes : l'approfondissement de la suite numérique (50%), la production de faits numériques sur les doubles (29%) et sur les compléments (21%). Enfin, les tâches en adéquation avec la mémorisation du répertoire additif sont réparties de manière équitable entre la construction des tables (CURA : 50%) et la recherche des résultats du répertoire additif (RRRA : 50%). Par ailleurs, la proportion des tâches de la catégorie « recherche » (58%) comparée à celles de la catégorie « application » (34%) réaffirme son choix d'introduire les additions mentales avec passage de la dizaine de manière contextualisée par le biais de la résolution de problèmes – (voir tableau en annexes IV- Grille 27).

Développer des procédures de calcul			Consolider les points d'appui			Mémoriser le répertoire additif		
Tâches	Effectif	%	Tâches	Effectif	%	Tâches	Effectif	%
CMCR	24	34%	ACSN	7	50%	RRRA	3	50%
RPA + RPCT + RPCN	21	29%						
EXPP	15	21%						
CPC	11	16%						
TOTAL	71	78%	TOTAL	14	15%	TOTAL	6	7%
Légende : Les catégories de tâches sont désignées par les abréviations suivantes : Effectuer un calcul mental ou un calcul réfléchi (CMCR) ; Résolution de problèmes additifs (RPA), de complément (RPCT) et de comparaison (RPCN) ; Expliciter une procédure de référence (EXPP) ; Consolider les procédures de comptage (CPC) ; Approfondir la connaissance de la suite numérique (ACSN) ; Produire rapidement des faits numériques sur les doubles (PRFD), sur les compléments (PRFC) ; Retrouver les résultats du répertoire additif (RRRA), Construire et utiliser le répertoire additif (CURA).								

Tableau 58 : Effectifs et répartition des tâches possibles des élèves suivant leur catégorie dans le scénario de Béatrice (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 26)

¹⁹⁹ Cette catégorisation est détaillée à la page 308 de la thèse (note de bas de page n°187).

Globalement, le déroulement de la séquence s'étend sur une durée de 5h32 min, qui, rapportée au nombre de tâches proposées (91) nous permet de conclure à une moyenne horaire de 16 tâches pour dans la séquence de Béatrice (voir tableau détaillé en annexes IV- Grille 25).

d) Le rapport de l'enseignant au manuel dans son activité de préparation

Au sujet des ressources utilisées pour élaborer son projet d'enseignement, Béatrice tenait, lors de l'entretien préalable, les propos suivants :

« Les trois autres collègues du CP étaient d'accord pour prendre "J'aime les maths" donc j'ai laissé filer parce que je me voyais mal ramener ma fraise et dire : "Non, je ne veux pas de ça" sans rien proposer en retour. Si ça ne tenait qu'à moi, les élèves n'auraient pas de fichier parce que c'est un piège ce truc-là. On se sent coincé entre les parents qui réclament que le fichier soit rempli et les collègues qui, limite, veulent t'imposer la manière dont tu dois penser ton enseignement sans compter la circonscription et ses suggestions. Donc, pris entre deux feux, tu cours...tu cours pour essayer de satisfaire tout le monde et c'est comme ça toute l'année. Moi j'en ai eu marre et depuis deux ans j'ai arrêté ça ! Je dis aux parents dès le début que je n'utiliserai pas le fichier puisque après tout je ne l'ai pas choisi et basta ! [...] J'utilise l'aide²⁰⁰ qu'on te donne en début d'année pour te dire ce qu'il faut voir avec les élèves avant le championnat. Je me base là-dessus pour savoir quelle compétence travailler et je vais chercher dans « J'apprends les maths » les situations qui correspondent à ce que je veux faire. [...] Il n'y a pas trop de fioritures, l'auteur va à l'essentiel mais je ne me casse pas la tête avec le guide pédagogique, je prends juste les exercices qui m'intéressent sinon j'y passerais trop temps ».

Le discours tenu par Béatrice laisse transparaître son adaptation intuitive du manuel *J'apprends les maths* sur lequel elle a un avis positif. À vrai dire, cet ouvrage lui sert uniquement de banque de données car elle y puise les situations en adéquation avec les compétences listées par la progression minimum du GAM²⁰¹ sans pour autant suivre la démarche proposée par les auteurs du manuel *J'apprends les maths*. De fait, la structure et les contenus mathématiques de son projet d'enseignement sont similaires à cette progression. En outre, à l'opposé de son manuel « ressource », Béatrice emprunte l'itinéraire cognitif 1 (améliorer les procédures de surcomptage pour favoriser le progrès vers le calcul), met en œuvre une stratégie de type « problème - compréhension – application ». Néanmoins, la professeure rejoint son manuel de prédilection en s'appuyant uniquement sur l'aspect cardinal du nombre pour développer les procédures de calcul.

Concernant, l'ordre chronologique du scénario, la séquence de Béatrice commence au même titre que *J'apprends les maths* par une phase²⁰² de construction de connaissances (B) – (voir annexes IV Grille 28). Néanmoins, si ce dernier consacre cette première phase à l'enseignement de la stratégie du

²⁰⁰ L'enseignante fait allusion à la progression minimum proposée par le Groupe Académique de Mathématiques (GAM).

²⁰¹ Voir Annexes I Fiche 7.

²⁰² Les différentes phases identifiées sont explicitées à la page 316 (note de bas de page n° 187).

« retour aux cinq » en la comparant au comptage, l'enseignante, elle, préoccupée par le retard accumulé, tente de le rattraper en enseignant quelques notions programmées à l'origine pour la période 3 (sommes de 3 nombres inférieurs à 10 ou des points d'un domino, suite numérique de 2 en 2 jusqu'à 50 ou sur les nombres impairs, résolution de problèmes de comparaison) avant d'introduire le calcul des « grands doubles et des sommes du type $9 + n$ et $8 + n$ ($n \leq 9$) par le biais de la résolution de problèmes. Pour cette première phase, entre Béatrice et son manuel, le choix des tâches divergent tant par leur nombre que par leur type. En effet, dans la phase (B), on compte 9 tâches dans *J'apprends les maths* contre 38 chez Béatrice avec une dominance des tâches d'explicitation et d'application de procédures de référence (EXPR et ECPR) dans le manuel tandis que la professeure donne la priorité aux tâches liées aux procédures personnelles (EXPP et CPC) et à la résolution de problèmes (RPCN et RPA).

Au même titre que le manuel utilisé, Béatrice poursuit sa séquence par une phase d'entraînement (C) des notions travaillées lors de la phase antérieure. Cependant, si cette phase marque la fin de la séquence de l'enseignante, il n'en est pas de même pour son manuel « ressource » qui enchaîne par une nouvelle phase de construction de connaissance (D) pour développer des stratégies de calcul réfléchi des « grands doubles », des sommes du type $9 + n$ et $8 + n$ associées à un travail sur la commutativité et l'organisation du répertoire additif. In fine, *J'apprends les maths* parfait sa séquence par une nouvelle phase d'entraînement (E) qui vient consolider les compétences travaillées lors de la phase D – (voir plus de détails en annexes IV – Grilles 28 et 29). En fin de compte, la séquence de Béatrice aura duré 5h 32min dont 3h et 12 min (52%) consacrées à la phase de construction des savoirs (voir tableau 59).

BÉATRICE			Construction des connaissances		Entraînement	
Phases de la séquence						
B	58%	192 min	B = 58 %	B = 192 min	C = 48%	C = 140min
C	42%	140 min				

Tableau 59 : Durée des phases de la séquence de Béatrice (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 32)

L'absence d'indications sur le temps accordé aux différentes activités dans *J'apprends les maths* ne permet pas d'établir la position relative de Béatrice par rapport au manuel utilisé. Toutefois, la mesure de la variété des tâches des élèves dans la séquence de l'enseignante montre d'une part, une certaine distance avec celle du manuel, sans doute en raison de la forte contrainte institutionnelle exercée par la progression académique, et d'autre part, une supériorité de la diversité des tâches proposées par l'ouvrage utilisé par rapport à la moyenne (voir tableau 60).

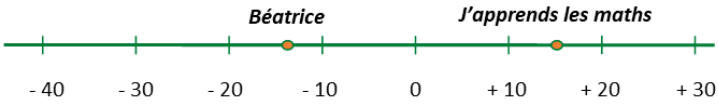
	J'APPRENDS LES MATHS	BÉATRICE
Nombre total de tâches	120	91
Écart à la moyenne (moyenne = 105)	+15	-14
Position relative du scénario de Béatrice par rapport à celle du manuel utilisé		

Tableau 60 : Position relative de la séquence de Béatrice
par rapport au manuel utilisé (voir plus de détails en annexes IV – Grille 33)

Pour finir, le graphique relatif à l'organisation chronologique de la séquence de Béatrice met en exergue un déroulement conforme à sa stratégie d'enseignement (voir annexes IV Grille 35). Des points d'appui sans lien direct avec la notion visée sont d'abord étudiés pour tenter de rattraper le retard accumulé en période 3. Ensuite, l'enseignante confronte les élèves au calcul de grands doubles et de sommes du type $9 + n$ et $8 + n$ par le biais de problèmes à résoudre qu'ils solutionnent en mettant à profit leurs procédures personnelles (phase B). Puis, la séquence s'achève sur une longue phase d'entraînement (phase C) pour consolider les points d'appui étudiés en début de scénario et la capacité à calculer les nouvelles sommes découvertes.

- **En résumé :** En appui sur les travaux de Leroyer²⁰³ (2013), l'analyse croisée des entretiens et des interactions entre Béatrice et les supports édités, dans la complexité de son activité de préparation, nous permet de conclure que son rapport aux ressources relève, d'un suivi pas à pas de la progression minimum proposée par le Groupe Académique de Mathématiques dans un souci de rigueur pour ne pas pénaliser ses élèves lors du championnat de calcul mental. Pour concevoir son projet d'enseignement, la professeure sélectionne, combine et exploite partiellement les activités prescrites dans un manuel apprécié (*J'apprends les maths*) pour tenter de s'approprier l'enseignement du calcul mental qu'elle maîtrise imparfaitement ou partiellement. Béatrice est donc une adaptatrice intuitive des manuels.

²⁰³ La typologie a posteriori du travail de préparation en fonction du rapport au support de l'enseignant est présentée en annexes IV Grille 62.

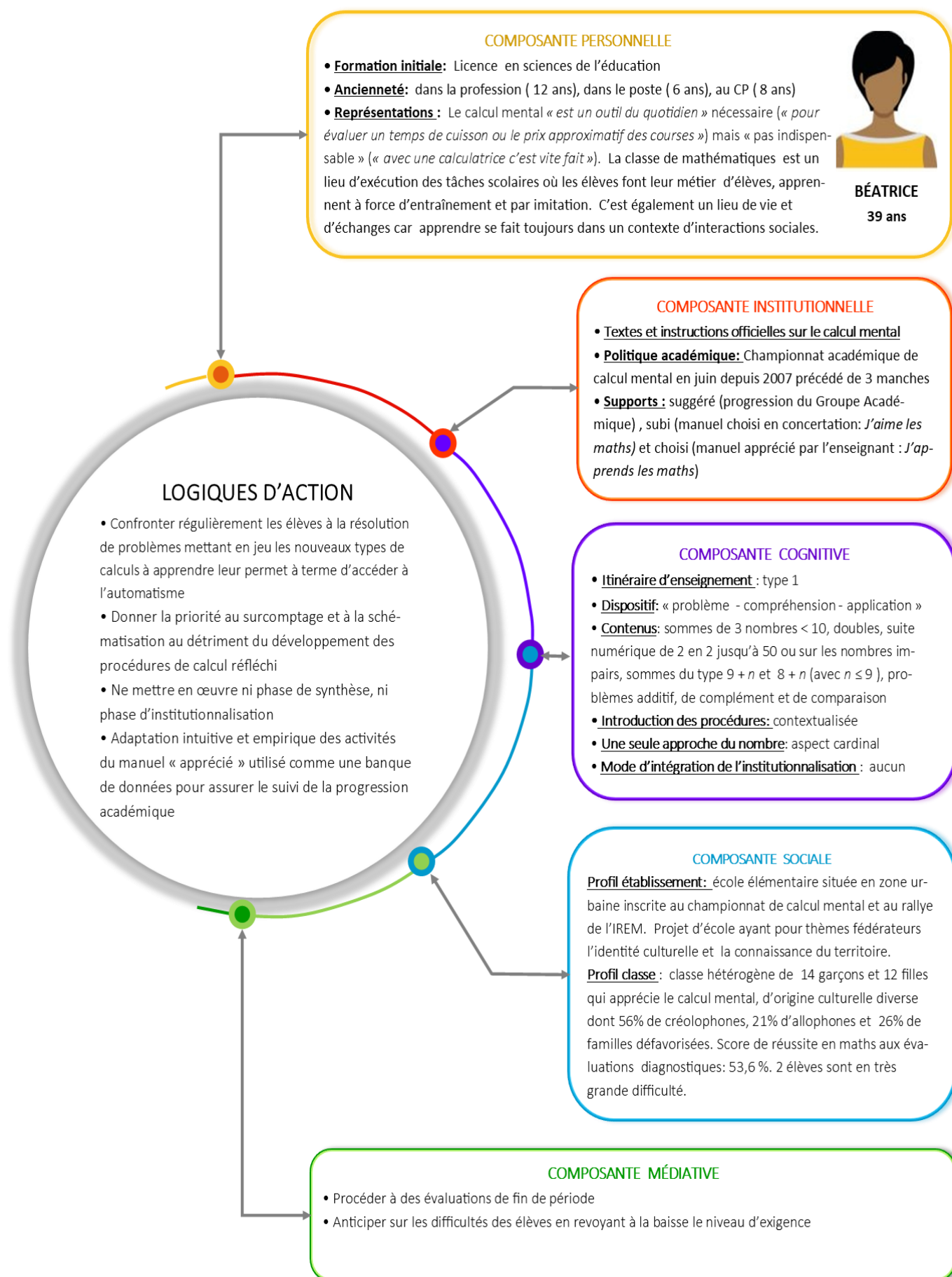


Schéma 40 : Bilan intermédiaire du profil de Béatrice

2.1.4 Éléments pris en considération par Sophie pour concevoir son projet d'enseignement

a) Redéfinition de la tâche prescrite

Voilà une enseignante âgée de 55 ans exerçant pour la cinquième année au CP malgré sa « *nette préférence pour le cycle 3* ». Douze ans plus tôt, Sophie intègre le corps enseignant après la fermeture de la compagnie aérienne où elle assurait la profession d'hôtesse de l'air depuis l'obtention de son baccalauréat littéraire. En 2014, elle prend, pour la troisième année consécutive, son poste dans une école élémentaire classée en REP et située en zone rurale. De l'avis de cette professeure, le calcul mental est « *une aide qui facilite l'introduction des autres apprentissages mathématiques en leur donnant du sens comme dans le cas de l'addition posée, par exemple. Mais c'est aussi un outil parce qu'on peut l'utiliser pour travailler la comptine numérique* ». Cependant, elle semble mal à l'aise avec cette discipline et son enseignement car lors de l'entretien préalable elle tient les propos suivants : « *pour la littéraire que je suis, l'enseignement du calcul mental reste assez complexe et ce n'est pas toujours évident de le mettre en œuvre. Au CP, je suis encore moins à l'aise donc je m'appuie beaucoup sur le Cap maths qu'on nous avait recommandé à l'IUFM pour éviter de passer à côté de l'essentiel...Heureusement, que les manuels existent ! [...]* C'est vrai que les programmes nous donnent des directives mais on ne se sait pas très bien dans quelle direction aller, ni les résultats qu'on doit atteindre en fonction des élèves car ils n'apprennent pas, ne mémorisent pas et ne comprennent pas tous de la même manière. Donc, il nous faut des séances concrètes en plus du listing de compétences imposé dont on ne sait parfois quoi en faire ».

Aux dires de l'enseignante, les élèves composant sa classe au moment de la recherche (12 garçons et 11 filles) « *sont plus intéressants que ceux de l'an dernier même s'il y en a quelque-uns qui sont particulièrement agités ...Ils apprécient le calcul mental et progressent bien dans l'ensemble même si certains n'aiment pas montrer leurs lacunes* ». Selon elle, les difficultés rencontrées par ces élèves sont dues à une mauvaise représentation des nombres et à une méconnaissance de la numération décimale mais également au fait qu'« *ils ne comprennent pas toujours ce que l'on attend d'eux* ». De ce fait, elle prévoit d'aider les élèves de manière proactive en schématisant à l'aide de constellations les additions à calculer mentalement lors de la phase de recherche.

• **En résumé :** Sophie estime ne pas maîtriser suffisamment l'enseignement du calcul mental au CP et décide d'appliquer le scénario proposé par le *Cap maths* (préconisé lors de sa formation initiale). Par voie de conséquence, elle prévoit d'abord de consolider les points d'appui (doubles et moitiés), puis de confronter les élèves aux nouveaux calculs réfléchis qu'elle représentera au tableau sous forme de constellations pour anticiper les difficultés possibles. Ensuite, les différentes procédures seront discutées afin d'explicitier, entre autres, la procédure souhaitée qui sera enfin institutionnalisée.

b) Stratégie d'enseignement

• Itinéraire d'enseignement

Souhaitant suivre pas à pas le projet d'enseignement proposé par *Cap maths*, Sophie étale le sien, au même titre que le manuel, sur les deux dernières périodes de l'année. Cependant, pour chacune des séances de son scénario, elle se démarque du support édité en faisant figurer au tableau les additions à résoudre sous forme de constellations pour faciliter leur calcul. La professeure introduit sa première séance par la résolution mentale d'un problème additif. Les activités suivantes visent à répartir dans deux boîtes et en quantité égale 8, 11, 14, 16 et 15 cubes. Cependant, la phase de synthèse censée récapituler les procédures est écourtée par le chahut persistant des élèves. L'enseignante supprime alors la phase d'abstraction consistant à rechercher doubles et « non doubles » avec des nombres et passe directement aux exercices d'entraînement.

Tour de parole	Temps	Nom de l'émetteur	Énoncés
1	00 :00	Enseignante	Bon, maintenant chut, je ne veux plus rien entendre. Tout le monde retourne à sa place. Je ne veux voir personne debout.
2	02 :32	Enseignante	Les mains sur la table, vous ne touchez plus à rien.
3		Enseignante	On va d'abord décrire le matériel que j'ai mis sur la table.
4		Enseignante	Mélina, dis-nous ce que tu vois sur la table ?
5		Mélina	Je vois des cubes
6		Sidgie	... et deux boîtes
7		Enseignante	Sidgie tu n'es pas interrogé. Mélina, viens compter combien il y a de cubes.
		Mélina	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ça fait 8 cubes.
8	03 :27	Enseignante	Oui, il y a 8 cubes. Sur la table, vous avez aussi deux boîtes : une pour Arthur et une pour Zoé. Je veux répartir ces cubes entre Arthur et Zoé, autant pour Arthur que pour Zoé. Combien faut-il en mettre dans chaque boîte ? Lina arrête de chantonner et suis, tu nous déranges-là.
9		Enseignante	Je reprends : vous devez répartir les cubes pour qu'il y ait la même quantité de cubes dans la boîte de Zoé et dans la boîte d'Arthur. Combien faut-il en mettre dans chaque boîte ?
10			Evan, tu n'arrêtes pas de t'amuser, qu'est-ce qu'il faut faire ?
11		Evan	Il faut euh...
12			Qui peut lui expliquer ce qu'il faut faire ? Alan assieds-toi bien !
13	04 :00	Sidgie	Il faut mettre les cubes dans les boîtes
14			Oui mais est-ce qu'on les met n'importe comment ?
15		Les élèves	Non
16			Qu'est-ce qu'il faut faire ? Alan arrête de te balancer ! Tu vas tomber !
17	04 :22		(Un élève lève le doigt). Oui Nicholas, on t'écoute ?
18	04 :33	Nicholas	Il faut chercher combien il faut mettre de cubes dans la boîte de Zoé et dans la boîte d'Arthur pour qu'ils aient le même nombre de cubes.
19			Vous cherchez la réponse sur votre ardoise allez-y.
			
36	07 :26		Sidgie a trouvé 8 cubes pour Zoé et 8 pour Arthur. Est-ce que c'est possible ?
37		Alan	Non.
38		Enseignante	Pourquoi ? (Deux élèves se chamaillent. Lina chantonne et Brian va chercher un livre dans la bibliothèque. On entend un grand bruit, la chaise d'Alan bascule et il se retrouve au sol. Toute la classe rigole. La maîtresse s'assure qu'il n'a rien, redresse la chaise et l'aide à s'asseoir).
39		Enseignante	Bon, on ne va pas pouvoir travailler dans ces conditions. Vous deux vous arrêtez, toi va à ta place et sortez- moi le fichier de mathématiques.

Tableau 61 : Extrait de la séance 1 de Sophie

La deuxième séance commence par le calcul de doubles, se poursuit par la résolution de sommes voisines des doubles en appui sur les doubles de 5 et de 6, puis s'achève par une correction publique.

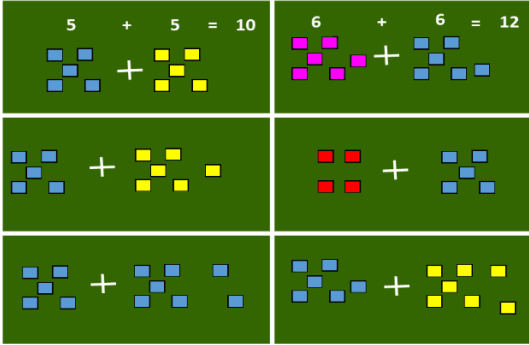
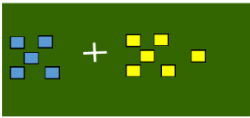
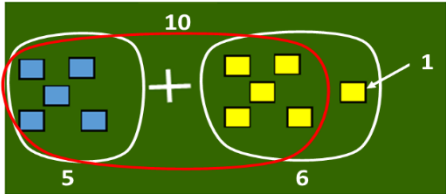
Tour de parole	Temps	Nom de l'émetteur	Énoncés
29	03 :07	Enseignante	Bon, on continue. (<i>L'enseignante dispose une nouvelle série de quatre additions à calculer au tableau</i>). 
30	03 :40	Enseignante	(<i>L'enseignante tape dans ses mains</i>). C'est parti.
31	06 :16	Enseignante	(<i>L'enseignante passe dans les rangs pendant que les élèves complètent les cases sur leur ardoise</i>) Retournez vos ardoises quand vous avez terminé.
32	06 :31	Enseignante	Levez vos ardoises même si vous n'avez pas terminé. Non, on montre l'ardoise. Le temps est écoulé.
33		Enseignante	(<i>Les élèves lèvent les ardoises. La professeure récupère l'ardoise d'un élève, se positionne devant le tableau face aux élèves et leur montre l'ardoise</i>). Ceux qui ont trouvé ça, c'est bien. Explications pour les autres.
34	07 :16	Enseignante	(<i>L'enseignante désigne l'élève dont elle a récupéré l'ardoise pour montrer aux autres</i>). Comme tu as trouvé Nicolas, Viens nous expliquer pour le premier. 
35		Nicolas	Quand j'ai vu 10, je savais que c'était 10 et quand j'ai vu 1. J'ai fait 10 + 1
36			(<i>Brouhaha</i>) Un élève se lève et se promène dans la classe
37		Enseignante	Chut, on n'entend pas ce que dit Nicolas. Sidgie va t'asseoir, dépêche-toi.
38		Enseignante	Celui qui ne sait pas que c'est 10 + 1. Comment peux-tu l'aider ? Quelle explication peux-tu lui donner ? Qu'est ce qui t'a permis de trouver 10 + 1
39		Nicolas	J'ai mis les deux cinq ensemble, ça m'a fait 10 et après j'ai rajouté le 1.
40	09 :16	Enseignante	Hé oh ! il y a beaucoup trop de bavardage. Je ne m'entends plus parler. Déposez-moi les craies et suivez un peu.
41		Enseignante	D'accord, regardez bien. Ici, j'ai combien ? (<i>La professeure entoure le lot de cubes bleus</i>)
42		Quelques élèves	5
43	10 :24	Enseignante	Oui j'ai 5 cubes ici. (<i>La professeure écrit 5 sous le lot de cubes bleus</i>)
44		Enseignante	Et de l'autre côté, j'ai combien de cubes jaunes ?
45		Quelques élèves	6
46		Enseignante	(<i>La professeure écrit 6 sous le lot de cubes jaunes</i>)
47	12 :30	Enseignante	Si je compte ces deux lots ensemble ça fait 10. Donc, on peut dire que 5 + 6, c'est 1 de plus que 5 + 5. 

Tableau 62 : Extrait de la séance 2 de Sophie

À la séance 3, la professeure reprend le travail sur le calcul de sommes voisines des doubles en appui cette fois-ci sur les doubles de 7 et 8 et le finalise par un exercice de complétion d'égalités. Ce sont des calculs de compléments et de différences (jusqu'à 10) qui débute la séance 4. Il s'en suit deux séries d'additions (dont un terme est 5, en s'appuyant sur le nombre 5 et sur le fait que $5 + 5 = 10$), une phase de calcul de compléments de 5 à un nombre supérieur ou égal à 10. Suivant la même structure, la séance 5 aborde les sommes dont chaque terme est compris entre 5 et 10 et entraîne les élèves à la mémorisation des résultats supérieurs à 10 par le biais de calcul de compléments et de sommes. À la séance 6, l'enseignante revient sur les compléments et différences (jusqu'à 10) et les additions dont chaque terme est compris entre 5 et 10 avant de lancer une recherche des décompositions des nombres de 11 à 18 sous forme de sommes de nombres inférieurs à 10. Lors de la séance 7, les décompositions trouvées sont mises en commun et organisées dans un répertoire additif utilisé ensuite pour compléter des additions et des égalités lacunaires. La séance 8 est un bilan intermédiaire comptant deux exercices : l'un sur le calcul de sommes de nombres inférieurs à 10 et l'autre fait appel au répertoire additif pour compléter des égalités.

Pour finir, Sophie poursuit l'apprentissage des sommes de deux nombres avec passage de la dizaine en alternant des activités complémentaires (séance 9), la mémorisation du répertoire additif par le biais de calculs dictés et des décompositions de nombres (séances 10, 11 et 16 puis de 23 à 28), la recherche de différences jusqu'à $14 - 9$ (séances 12, 13, 17 et 18) et de compléments jusqu'à 14 (séances 21 et 22) et la résolution de problèmes dictés (séances 15 et 20). Enfin, l'enseignante consacre les trois dernières séances de son projet au bilan exhaustif des acquis (séance 29), à la passation de la manche 3 du championnat (séance 29) et de la finale académique (séance 30) – (voir tableau synoptique du projet d'enseignement reconstitué de Sophie à l'annexe IV – Grille 36).

- Les contenus mathématiques

Au regard de l'itinéraire choisi par Sophie, le champ mathématique de son scénario peut se résumer ainsi : doubles des nombres jusqu'à 20, mémorisation du répertoire additif, compléments et différences, décompositions additives, commutativité de l'addition, résolution de problèmes procédures de calcul réfléchi : en appui sur les doubles, « retour au 5 » et « passage par 10 ».

- Gestion et modes d'intégration de l'institutionnalisation

En accord avec la stratégie d'enseignement du *Cap maths* qu'elle déclare « suivre à la lettre pour être sûre de dispenser le bon enseignement », Sophie « s'applique » (Leroyer²⁰⁴, 2013) pour tenter d'institutionnaliser les savoirs uniquement en mode « bilan » (Roditi, 2005) : seules les connaissances

²⁰⁴ La typologie a posteriori du travail de préparation en fonction du rapport au support de l'enseignant de Leroyer (2013) est présentée en annexes IV Grille 62.

construites en classe acquièrent le statut de savoir. Ainsi, à l'exemple de ce support, l'enseignante introduit une nouvelle procédure par un calcul avec un temps de recherche individuel significatif. Cependant, dès la phase d'investigation, elle annule inconsciemment les effets « constructifs » de la dévolution et abaisse le niveau d'exigence de la tâche à réaliser en apportant systématiquement²⁰⁵ une aide conséquente consistant à figurer au tableau les sommes sous forme de constellations dans le but de « *permettre aux élèves qui ont du mal à se représenter les nombres de trouver le résultat* ». Le deuxième frein à l'institutionnalisation prévue par Sophie est lié à ses difficultés de gestion de classe. En effet, toutes les séances se déroulent dans un chahut persistant y compris durant la phase de recherche. De ce fait, la professeure dépense beaucoup d'énergie dès le début de séance pour essayer de conserver une relative « paix scolaire » (Butlen et Masselot, 2010) mais finit par abdiquer lors des phases de synthèse. En conséquence, les mises en commun prennent la forme d'une correction publique peu suivie par la classe. Les moments d'institutionnalisation, eux, sont soit supprimés en raison du bruit, soit réduits à de courtes synthèses où l'enseignante explicite de manière succincte et expéditive la procédure attendue.

- **Bilan sur la stratégie globale d'enseignement de Sophie**

- 1) Emprunter un itinéraire de type 1 (Charnay et Valentin, 1992) : améliorer les procédures de comptage pour favoriser la mémorisation des relations numériques et le progrès vers le calcul ;
- 2) Opter pour un dispositif pédagogique de type : « problème – compréhension – application » ;
- 3) Introduire la procédure à enseigner de manière décontextualisée par le biais de calculs dictés ;
- 4) Utiliser l'approche cardinale du nombre pour développer des procédures de calcul réfléchi ;
- 5) Dévoluer : confronter les élèves à une recherche réelle mais avec une aide conséquente ;
- 6) Supprimer ou limiter les temps d'institutionnalisation pour s'adapter au dynamisme des élèves ;
- 7) Procéder à des évaluations formative (suivie de remédiations) et sommative ;
- 8) Réinvestir les procédures enseignées dans la résolution de problèmes.

c) Les tâches possibles des élèves dans les activités proposées

À l'instar de Roditi (2005), nous avons catégorisé²⁰⁶ les tâches possibles réalisées sous la responsabilité du professeur. Le tableau récapitulatif infra fixe à quatre-vingt-trois le nombre total des tâches constituant la séquence de Sophie avec 46% des tâches centrées sur le développement des procédures de calcul réfléchi, 36% allouées à la consolidation des points d'appui et 18% consacrées à la mémorisation du répertoire additif. En ce qui concerne l'apprentissage des procédures, nous

²⁰⁵ Ce mode opératoire a été observé lors des deux années d'observation : 2014-2015 et 2015-2016.

²⁰⁶ Cette catégorisation est détaillée à la page 308 de la thèse (note de bas de page n°187).

remarquons la prépondérance des tâches relatives au calcul mental ou réfléchi (45%) et à la résolution de problèmes (RPA, RPCT et RPCN : 39%). Ce parti-pris se répercute sur la proportion des tâches de la catégorie « recherche » (87%) comparée à celle de la catégorie « application » (12%) – (voir tableau en annexes IV – Grille 38). Débordée par le dynamisme de la classe, Sophie se voit obligée de s'adapter en supprimant ou en réduisant les mises en commun et phases d'institutionnalisation à une rapide explicitation de la procédure de référence comme en témoigne l'absence de tâches liées à l'explicitation des procédures personnelles (EXPP) ou de référence (EXPR). Pour ce qui est de la consolidation des points d'appui, trois types de tâches prédominent : la production de faits numériques sur les doubles (PRFD : 33%) et sur les compléments (PRFC : 27%) ainsi que la recherche des différentes décompositions des nombres (RDN : 30%). Pour finir, les tâches en adéquation avec la mémorisation du répertoire additif sont focalisées sur la recherche des résultats des tables d'addition (RRRA : 87%).

Développer des procédures de calcul			Consolider les points d'appui			Mémoriser le répertoire additif		
Tâches	Effectif	%	Tâches	Effectif	%	Tâches	Effectif	%
CMCR	17	45%	PFRD	10	33%	RRRA	13	87%
RPA + RPCT + RPCN	15	39%	RDN	9	30%			
			PRFC	8	27%			
			UPO	2	7%			
ECPR	6	16%	ACSN	1	3%	CURA	2	13%
TOTAL	38	46%	TOTAL	30	36%	TOTAL	15	18%
Légende : Les catégories de tâches sont désignées par les abréviations suivantes : Effectuer un calcul mental ou un calcul réfléchi (CMCR) ; Résolution de problèmes additifs (RPA), de complément (RPCT) et de comparaison (RPCN) ; Effectuer des calculs en utilisant des procédures de référence (ECPR) ; Utiliser les propriétés des opérations (UPO) Approfondir la connaissance de la suite numérique (ACSN); Produire rapidement des faits numériques sur les doubles (PRFD), sur les compléments (PRFC) ; Retrouver les résultats du répertoire additif (RRRA), Construire et utiliser le répertoire additif (CURA).								

Tableau 63 : Effectifs et répartition des tâches possibles des élève suivant leur catégorie dans le scénario de Sophie (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 37)

Globalement, le déroulement de la séquence de Sophie s'étend sur une durée de 11heures et 46 minutes qui, rapportée au nombre de tâches proposées (83) nous permet de conclure à une moyenne horaire de 7 tâches pour le projet d'enseignement de cette enseignante (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 36).

d) Le rapport de l'enseignante au manuel dans son activité de préparation

« Malgré mes cinq ans d'enseignement au CP, je vous avoue que ne me suis pas encore vraiment habituée à ce niveau de classe. J'étais beaucoup plus à l'aise au cycle 3 mais lors de mon arrivée dans cette école, le CP était le seul niveau qui restait donc j'ai fait avec... », explique Sophie lors de l'entretien préalable. Elle déclare également : « je me débrouille pour enseigner les maths mais ce n'est pas la matière que je préfère, même lorsque j'étais à l'école je trouvais ça complexe et le fait de l'enseigner n'a rien changé ». [...] En plus, j'ai l'impression d'être submergée par tout ce qu'on nous demande de faire. Prenez le

championnat de calcul mental, par exemple, on nous donne une progression mais elle n'englobe pas tout le programme de CP, on n'a pas de séances ou d'activités concrètes...je pataugeais pour essayer de voir toutes les notions... Ça me stressait plus qu'autre chose donc je l'ai mise de côté et ça n'empêche pas mes très bons élèves d'être toujours bien classés au championnat donc...allez y comprendre quelque chose. D'autre part, la professeure précise : « J'ai à cœur la réussite de mes élèves donc je m'appuie beaucoup sur le Cap maths qu'on nous avait conseillé à l'IUFM pour être sûre de dispenser le bon enseignement. Mais, ce n'est pas un manuel facile à utiliser parce qu'il faut bien comprendre sa logique... ça demande de la réflexion et du temps pour préparer les séances et le matériel qui va avec. C'est sans doute pour cette raison que mes collègues préfèrent "Compagnon maths". Moi, je le trouve peu abordable pour les élèves en difficulté donc je l'utilise surtout pour les très bons élèves en autonomie. Ils peuvent travailler tranquillement pendant que je reprends les explications et la manipulation avec d'autres...C'est vrai que certaines explications données dans le guide du Cap maths sont très compliquées mais j'aime bien l'utiliser...ça me donne le sentiment de bien faire... » (extrait de l'entretien préalable).

La lecture de cet extrait significatif laisse à penser que le manuel *Cap maths* sert de référence à Sophie qui en a un avis très positif. À vrai dire, l'enseignante procède à une utilisation de ce support proche de l'imitation (Leroyer, 2013) pour s'assurer de mettre en œuvre les bonnes pratiques. Concrètement, elle suit pas à pas la stratégie d'enseignement du manuel sans tenir compte de la progression minimum en calcul mental du groupe académique (GAM). En conséquence, la structure et les contenus mathématiques de son projet d'enseignement sont similaires à celui du manuel. Ainsi, à l'instar de son manuel ressource, Sophie emprunte un itinéraire cognitif de type 1 (améliorer les procédures de surcomptage pour favoriser le progrès vers le calcul), tente de mettre en œuvre une stratégie de type « problème – compréhension – application » et s'appuie sur l'aspect cardinal du nombre pour développer les procédures de calcul.

Pour ce qui est de l'ordre chronologique du scénario, la séquence de Sophie commence, au même titre que *Cap maths*, par une phase²⁰⁷ préparatoire (A) préconisée pour consolider les doubles des nombres inférieurs à 10. Il s'en suit une phase de construction de connaissances (B) visant l'apprentissage des trois procédures de calcul réfléchi prescrites par le manuel : le calcul de sommes voisines des doubles en appui sur les doubles, « le retour au 5 » et le « passage à 10 ». Comme dans le support édité de référence, on retrouve dans le déroulement de la séquence de Sophie et dans les mêmes proportions des tâches de calcul réfléchi (CMCR), de décompositions des nombres (RDN) et de construction du répertoire additif (CURA). À l'opposé, les tâches d'explicitation de procédures personnelles (EXPP) et de procédures de référence (EXPR) conseillées par le manuel lors des mises

²⁰⁷ Les différentes phases identifiées sont explicitées à la page 310 (note de bas de page n° 189).

en commun et moments de synthèse sont supprimées pour permettre à l’enseignante de s’adapter aux empêchements liés au dynamisme débordant de la classe. Ces tâches d’explicitation (EXPP et EXPR) sont également absentes de la longue phase d’entraînement de sept heures et une minute finalisant le scénario de Sophie alors que le *Cap maths* en compte 26 pour cette même phase dont la durée prévue par le support édité est de six heures et trente minutes. Toutefois, les tâches permettant de réinvestir les procédures découvertes en résolution de problèmes (RPA et RPCT), de mémoriser le répertoire additif (RRRA) et de consolider les points d’appui (RDN et RPC) apparaissent aussi bien dans la séquence de Sophie que dans l’ouvrage suivi (voir plus de détails en annexes IV – Grilles 5 et 39). En fin de compte, la durée de la phase de construction des savoirs dans la séquence de Sophie (3h 54min) est plus courte que celle du *Cap maths*, son manuel de prédilection (5h 45min) - (voir tableau 64).

PHASES	CAP MATHS		SOPHIE	
Phase de construction de connaissances	A + B 47%	A + B 345 min	A + B 40%	A + B 285 min
Phase d'entraînement	C 53%	C 390 min	C 60%	C 421 min
Position relative de la phase de construction de connaissances				

Tableau 64 : Position relative de la phase de construction des savoirs dans le scénario de Sophie par rapport aux manuels utilisés (voir plus de détails en annexes IV – Grille 40)

On peut y voir ici une marge de manœuvre de l’enseignante qui se voit obliger de supprimer ou de limiter les temps d’institutionnalisation pour tenter de s’adapter à la composante sociale de sa classe. En outre, la mesure de la variété des tâches des élèves dans la séquence de Sophie révèle d’une part, une certaine distance avec celle du *Cap maths* et d’autre part, la supériorité de la diversité des tâches proposées par le manuel par rapport à la moyenne (voir tableau 65).

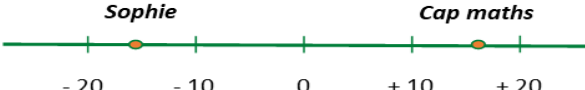
	CAP MATHS	SOPHIE
Nombre total de tâches	115	83
Écart à la moyenne (moyenne = 99)	+ 16	-16
Position relative du scénario de Sophie par rapport à celle du manuel utilisé		

Tableau 65 : Position relative de la séquence de Sophie par rapport à celle du Cap maths (voir plus de détails en annexes IV – Grille 41)

Enfin, le schéma²⁰⁸ associé à l'organisation chronologique de la séquence de Sophie met en évidence un déroulement conforme à sa stratégie d'enseignement. L'enseignante confronte les élèves au calcul réfléchi de sommes pour aboutir assez vite à l'élaboration de nouvelles procédures avant de proposer de nombreux exercices pour consolider les points d'appui et la mémorisation du répertoire additif (voir schéma 41).

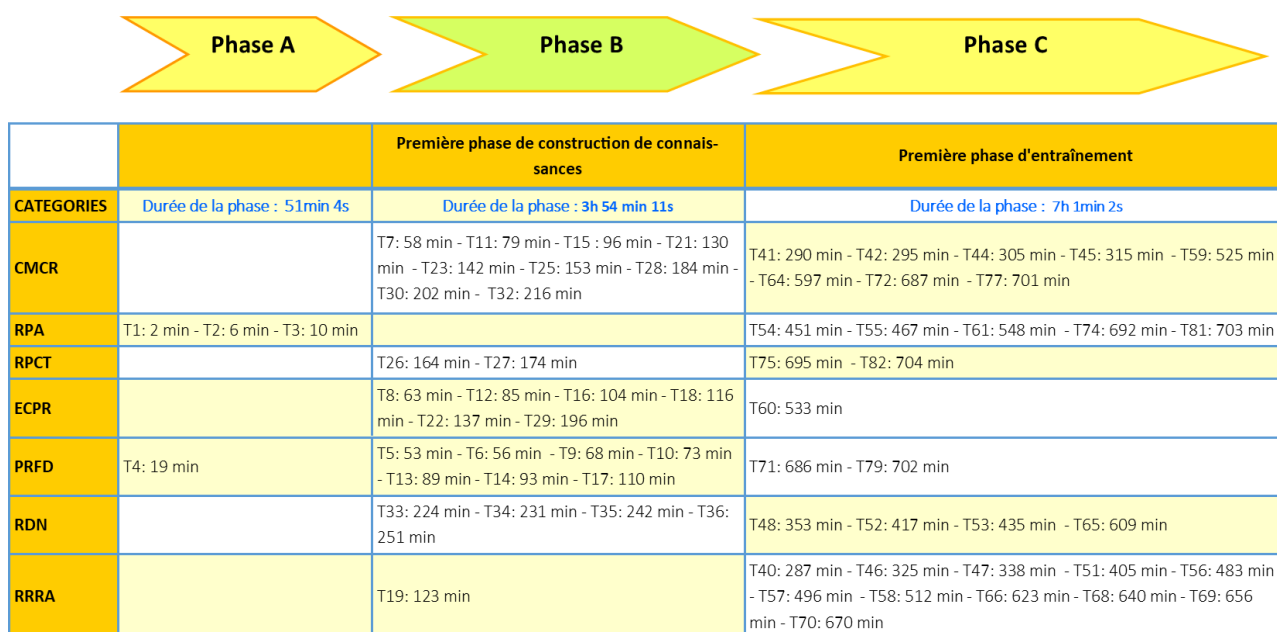


Schéma 41 : Extrait de la chronologie des tâches les plus significatives de la séquence de Sophie (voir plus de détails en annexes IV – Grille 43)

- **En résumé :** En appui sur les travaux de Leroyer (2013), l'analyse croisée des entretiens et des interactions entre Sophie et son manuel apprécié (*Cap maths*), dans son activité de préparation, nous permet de conclure que son rapport à cette ressource relève d'une utilisation proche de l'imitation. Autrement dit, Sophie suit pas à pas le projet d'enseignement préconisé par le *Cap maths* pour s'assurer de mettre en œuvre les bonnes pratiques.

²⁰⁸ Pour construire ce graphique, chaque tâche a été numérotée par ordre d'apparition et associée à l'instant t où elle se produit. Par exemple, T5 : 53 min est placé en phase B dans la catégorie PRFD signifie qu'au cours du déroulement de la séquence d'apprentissage, la cinquième tâche possible de l'élève lors de la première phase de construction de connaissances est la production rapide des faits numériques sur les doubles (PRFD). Elle se produit cinquante-trois minutes après le début de la séquence d'apprentissage.



Schéma 42 : Bilan intermédiaire du profil de Sophie

2.1.5 Éléments pris en considération par José pour concevoir son projet d'enseignement

a) Redéfinition de la tâche prescrite

José, âgé de 58 ans, débute sa carrière d'enseignant trente-neuf ans plus tôt directement sur le terrain dans une classe de CP de l'académie de Guyane avant d'intégrer l'IUFM l'année suivante. Cependant, il reconnaît avoir acquis ses compétences professionnelles grâce à l'autoformation et au contact de ses pairs. En 2014, ce professeur, titulaire d'un baccalauréat scientifique, enseignait pour la vingt-deuxième fois au cours préparatoire et prenait son poste pour la seizième année consécutive dans une école urbaine en Guadeloupe. José a une conception utilitaire du calcul mental, qui, selon lui, est « *un formidable outil de la vie quotidienne à condition qu'on l'utilise vite et bien* ». D'après ses dires, il ne rencontre aucune difficulté pour enseigner cette discipline et y prend même du plaisir en raison de son « *adaptation aux enfants, de la recherche de techniques de réflexion mentale et d'outils pour pouvoir accéder au résultat* » et de ses « *grandes capacités à transmettre, enseigner et expliquer les méthodes* ». « *Chez moi, c'est inné et ça me vient tout naturellement* », ajoutait-il lors de l'entretien préalable.

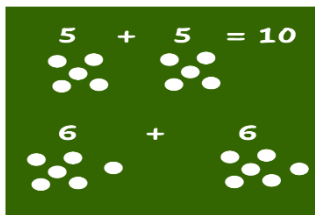
De l'avis de cet enseignant, les programmes de CP en calcul mental sont « *adaptés aux enfants de six ans* » mais « *manquent d'ambition quant aux capacités réelles des élèves* ». En conséquence, « *il n'hésite pas à aller plus loin* » quand il le juge nécessaire car selon lui, « *le programme n'est ni plus ni moins qu'un repère donc rien n'oblige de le suivre à la lettre* ». José décrit sa classe de 13 garçons et 13 filles comme un groupe d'élèves motivés, dynamiques et compétitifs qui explose de joie « *dès qu'il s'agit de calcul mental peu importe la notion* » et dont cinq d'entre eux sont en difficulté. Compte tenu du profil de sa classe, si l'addition de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine ne posera aucun problème à la majorité de ses élèves, José pense néanmoins que cet apprentissage peut être difficile pour certains, notamment ceux qui « *ne comprennent pas encore le sens de l'addition ou ce à quoi correspond une dizaine, ne maîtrisent pas la première famille de nombres de 0 à 9 ou qui comptent encore...* ». « *Si l'élève compte ce n'est pas bon parce qu'il est incapable de se représenter les quantités sur les doigts à l'aide des repères 5 ou 10 donc il aura du mal à faire du calcul mental* », explique le professeur.

- **En résumé :** Suivant la progression académique pour préparer ses élèves au championnat, José prévoit d'abord de consolider les points d'appui (« *représentations des nombres, connaissance de la suite numérique, compléments à 10, petites sommes, écritures additives* »). Puis, « *d'expliquer des techniques de calcul mental pour calculer les doubles de $6 + 6$ à $9 + 9$ et les sommes du type $8 + n$ et $9 + n$* ». Et enfin, d'entraîner les élèves à « *visualiser mentalement les nombres et les méthodes de calcul* ».

b) Stratégie d'enseignement

• Itinéraire d'enseignement

« *Compétiteur dans l'âme* », José veut absolument qu'au moins un des ses élèves soit classé parmi les cinq premiers lors du championnat de calcul mental donc il suit la progression minimum du Groupe académique (GAM) « *compétence par compétence pour être sûr que les élèves soient bien préparés* ». En conséquence, les deux premières séances de son scénario visent la consolidation des points d'appui (doubles jusqu'à 10, comparaison de nombres, décompositions de 10), la recherche des compléments à 10 à l'aide d'une technique de visualisation mentale, les additions de nombres représentés par des constellations et un premier travail sur les problèmes de comparaison. La troisième séance commence par une dictée de nombres jusqu'à 50, introduit une stratégie pour calculer les grands doubles $6 + 6$ et $7 + 7$ explicitée par le professeur puis entraîne les élèves à évoquer les constellations du dé pour chercher de combien le résultat dépasse 10 et se termine par la résolution de deux problèmes de comparaison.

Tour de parole	Temps	Nom de l'émetteur	Énoncés
138	02 :06	Professeur	Maintenant. Attention ! Calculs
139		Les élèves	Wééééééééééh !
140		Professeur	Attention ! On y va. Écoutez ! On va commencer par des calculs faciles. Mademoiselle dépêchez-vous d'effacer ça. Merci. On est prêt attention. 2 et 2, on y va 2 et 2 j'ai dit, écrivez le résultat. On se dépêche.
141		Professeur	Très bien ok Kenny, bravo.
142	02 :53	Professeur	Attention ! On écoute Mr Kenny, 4 et 4. (<i>Le maître est debout devant le tableau avec les deux bras levés et montre avec ses doigts 4 doigts dans une main et 4 doigts dans l'autre</i>). On y va. Eh ! on ne parle pas. On lève l'ardoise.
143	03 :10	Professeur	Ok. Attention ! Si je vous dis 5 et 5, écrivez sur l'ardoise.
144	03 :21	Professeur	Très bien, très bien, tourne l'ardoise, tourne l'ardoise, voilà.
145	03 :24	Professeur	On lève l'ardoise. Très bien, très bien, très bien, attention Kenny tu as écrit sur l'ardoise. Ah non ! tu n'as rien écrit. Tu n'as pas triché, très bien Mr. Andy.
146	03 :32	Professeur	Attention, regardez, regardez. Écoutez bien, écoutez bien. 2 et 2 : 4... 3 et 3... 6. 4 et 4 ...8. Pour trouver le résultat, je compte de 2 en 2.
147		Professeur	Attention ! Si je dis 6 et 6. (Les élèves utilisent l'ardoise). Non, non, non, dites-moi.
148		Plusieurs élèves	12
149		Professeur	Raisonnement, raisonnement. Maintenant, on va écrire sur l'ardoise. Maintenant, 7 et 7, on va écrire sur l'ardoise. Écrivez sur l'ardoise. Écrivez, réfléchissez et écrivez le résultat.
150		Professeur	Non, réfléchis, jeune homme, il n'y a rien à voir là. Ce n'est pas écrit là, tu réfléchis mentalement. 6 et 6 ça fait 12, d'accord. On a dit qu'on compte de 2 en 2 à chaque fois. Tu as écrit ?
151	04 :43	Professeur	Levez l'ardoise. Très bien, très bien, très bien. Non, toi tu as regardé une ardoise toi. Ok. La réponse ça fait. Tu as regardé jeune homme.
152		Plusieurs élèves	14.
153		Professeur	Quand je dis 5 et 5 ça fait 10. Pour 6 et 6... Regardez le tableau Il y a 1 là et 1 là donc au total ça fait 2 donc 6 et 6 ça fait 12. 

154		Professeur	Donc, attention, 6 et 6 ça fait...
155		Les élèves	12
156		Professeur	7 et 7 ça fait...
157		Les élèves	14
158	05 :26	Professeur	8 et 8, écrivez le résultat. Écrivez le résultat (<i>Le maître se déplace avec les bras croisés, il reste devant le tableau</i>).
159	06 :04	Professeur	8 et 8 ça fait quoi ?
160	00 :04	Professeur	Très bien Mr Mathis. Toi, tu as mis 17 c'est pas 17, c'est 16. Toi tu as trouvé tout seul ou tu as copié ?
161		L'élève	Je n'ai pas copié, maître.
162		Professeur	Ok, je te félicite, c'est bon. Et Mr. Kenny faites voir l'ardoise. Il a fait ?
163		AVSI*	Oui, mais il a regardé.
164		Professeur	Alors, on a compris. 6 et 6 : 12. 7 et 7...
165		Les élèves	14
166		Professeur	8 et 8
167		Les élèves	16
168	00 :22	Professeur	9 et 9 ? (<i>Bras croisés, le maître se déplace jusqu'au 2^{ième} rang</i>).
169	00 :52	Professeur	Levez l'ardoise. Très bien, super. Félicitations, bravo. Erreur de 1 unité, ce n'est pas 17 c'est 18, d'accord.
170	01 :21	Professeur	Alors maintenant, on va revenir dessus après, il faut s'entraîner et il faut prendre conscience que chaque fois je rajoute 2. La différence entre 5 et 5 et 6 et 6 c'est que 12 c'est 10 + 2 d'accord donc au résultat j'ajoute 2.
* AVSI : Accompagnant des élèves en situation de handicap			

Tableau 66 : Extrait de la séance 3 de José

De la quatrième à la septième séance, José renforce la maîtrise de la suite numérique (visualisation mentale des nombres, comptage de 5 en 5 ou de 2 en 2 et dictée de nombres jusqu'à 60 et) et des résultats mémorisés (calcul de petites sommes inférieures ou égales à 10), poursuit les activités sur la résolution de problèmes de comparaison et aborde les écritures additives des nombres de 6 à 9 et les soustractions de nombres inférieurs ou égales à 10.

Tour de parole	Temps	Nom de l'émetteur	Énoncés
87	10 : 50	Professeur	Alors attention, maintenant qui veut donner la règle pour compter de 2 en 2. Mademoiselle. (Brouhaha). On écoute.
88		Élève	Quand on compte de 2 en 2, on tombe toujours sur des nombres qui ont pour unité 0, 2, 4, 6, 8.
89		Professeur	Ok. D'accord 0, 2, 4, 6, 8. Ça veut dire quoi. Si je vous dis 12, d'accord, en comptant de 2 en 2, le nombre qui est devant c'est quoi ?
90		Élève 1	14
91		Professeur	14. Je suis à 12, je compte de 2 en 2, le nombre qui est devant c'est 14 parce que 12 a 2 unités donc 2 + 2 ça fait 4. Si je dis 10, quel nombre qui est devant ?
92		Plusieurs élèves	Douze !
93		Professeur	On a compris ? Si je dis 8 quel est le nombre qui est devant ?
94		Plusieurs élèves	Dix !
95		Professeur	Vous avez compris ?
96		Les élèves	Oui maître.
97		Professeur	Si je dis 16
98		Les élèves	Dix-huit
102	12 :22	Professeur	Ok. On a compris alors c'est parti. On écoute et on applique la règle. Je dis 22 écrivez le nombre devant je compte de 2 en 2. J'ai dit 22.
103		Un élève	Ah ouais !

Tableau 67 : Extrait de la séance 4 de José

Un temps de préparation de la manche 1 (séance 8) et sa passation (séance 9) initient la longue phase d'entraînement de douze séances (8 à 19) clôturant la période 3. En se conformant aux préconisations données par le groupe académique²⁰⁹ (GAM), José entame la deuxième phase de construction de connaissances de son scénario par le calcul réfléchi des « grands doubles » $8 + 8$ et $9 + 9$, la recherche de complément en appui sur les constellations (séance 20), un renforcement des points d'appui par le biais du retranchement de 2 à un nombre inférieur à 60 et la poursuite du travail sur la résolution de problèmes de tous types (séance 21). Suivant le mode opératoire présenté supra, les séances 22 et 23 introduisent la procédure du « passage à 10 » explicitée par l'enseignant pour calculer des sommes du $9 + n$ et $8 + n$ avec $n \leq 9$ et consolident en parallèle, les acquis sur la résolution de problèmes, peu avant la préparation de la manche 2 (séance 25) et sa passation (séance 26). Au cours des semaines qui suivent, neuf séances d'entraînement (27 à 35) viennent conforter les apprentissages avant la préparation de la manche 3 (séance 36), sa passation (séance 37) et la finale académique (séance 38) – (voir tableau synoptique du projet d'enseignement reconstitué de José à l'annexe IV- Grille 44).

- Les contenus mathématiques

Au regard de l'itinéraire retenu par José, le champ mathématique de son scénario peut se résumer de la manière suivante : doubles jusqu'à $9 + 9$, décompositions additives des nombres jusqu'à 10, complément à 10, récitation de la suite numérique de 5 en 5 ou de 2 en 2, procédure de calcul réfléchi en appui sur les doubles, procédure du « passage à 10 », sommes et différences de deux nombres (avec $R \leq 10$), résolution de problèmes additif, de complément et de comparaison.

- Gestion et mode d'intégration de l'institutionnalisation

D'après José, « l'idéal serait que l'enfant mette en place une méthode à lui ou découverte par lui-même pour trouver le résultat mais en réalité peu d'élèves y arrivent tous seuls [...] ». « Donc, pour éviter que l'enfant se retrouve en échec et se désintéresse de l'activité, je préfère lui donner d'emblée une procédure qui va l'amener à coup sûr à la réussite pour renforcer son intérêt et son estime de soi. Après, on répète, on applique autant de fois que nécessaire la technique jusqu'à ce que l'entraînement porte ses fruits... Pour qu'ils abandonnent leurs doigts et calculent réellement avec la tête, j'applique la technique de visualisation mentale...J'atteins un haut niveau de satisfaction quand je vois que l'enfant exécute la technique avec rapidité et accède au bon résultat », expliquait le professeur lors de l'entretien à chaud. Ainsi, en accord avec ses représentations et sa stratégie d'enseignement, l'enseignant institutionnalise uniquement en mode « déclaration²¹⁰ » (Roditi, 2005). Il introduit la procédure attendue dès le début de la séance et l'explique avec plusieurs exemples avant

²⁰⁹ Voir Annexes I Fiche 7

²¹⁰ En mode « déclaration », le savoir est énoncé mais non construit en classe.

de proposer aux élèves de la mettre en application. Il s'en suit des exercices de visualisation mentale avec reconstitution de la vision d'autrui (Brissiaud, 2009) pour inciter les élèves à évoquer les constellations du dé correspond aux nombres à additionner et les amener ainsi à chercher de combien le résultat dépasse 10. Plus simplement, il s'agit de la « simulation mentale de l'action de l'enseignant de regrouper les deux 5 que l'enseignant dit réaliser mentalement » (Brissiaud, 2009, p.144). In fine, José termine ses séances d'introduction de nouvelles procédures par une correction publique des exercices d'application et la reprise d'un exemple illustrant la procédure souhaitée sans qu'il y ait pour autant synthèse, institutionnalisation ou rédaction de traces écrites.

- **Bilan sur la stratégie globale d'enseignement de José**

- 1) Emprunter un itinéraire de type 2 (Brissiaud, 2001) : le calcul sur les doigts ou les objets structurés et les stratégies de décomposition-recomposition sont privilégiés en raison de leur plus grande proximité avec le calcul numérique ;
- 2) Opter pour un dispositif pédagogique de type : « explication – application » ;
- 3) Introduire la procédure à enseigner de manière décontextualisée à partir d'exemples ;
- 4) Utiliser les aspects cardinal et ordinal du nombre pour développer les procédures de calcul ;
- 5) Donner du sens aux écritures additives par le biais de la résolution de problèmes
- 6) Procéder à une correction publique sans synthèse, institutionnalisation ou trace écrite ;
- 7) Encourager et féliciter publiquement les élèves en difficulté à chaque réussite ;

c) Les activités prévues

À l'exemple de Roditi (2005), les tâches possibles réalisées sous la responsabilité du professeur ont été catégorisées²¹¹. Le tableau récapitulatif infra fixe à cent-quatre-vingt-quatre le nombre total de tâches composant la séquence de José avec 63% des tâches centrées sur le développement des procédures de calcul réfléchi, 32% allouées à la consolidation des points d'appui et 5% consacrées à la mémorisation du répertoire additif. Pour ce qui est de l'apprentissage des procédures, nous constatons la prépondérance des tâches ayant trait à la résolution de problèmes (RPA, RPCN et RPCN : 44%) et au calcul mental ou réfléchi (44%). Influencé par ses représentations et la composante sociale de sa classe, José est persuadé que peu d'élèves sont capables de trouver d'eux-mêmes une procédure de calcul réfléchi et qu'il vaut mieux leur « proposer d'emblée une stratégie qui va les amener à coup sûr à la réussite afin d'éviter qu'ils ne soient en échec et se désintéressent de l'activité », ce qui explique sans doute l'absence de tâches liées à l'explicitation de procédures personnelles (EXPP) et de procédures de référence (EXPR). Ce parti-pris se répercute également sur

²¹¹ Cette catégorisation est détaillée à la page 314 de la thèse (note de bas de page n°185).

la proportion des tâches de la catégorie « application » (51%) comparée à celles de la catégorie « recherche » (32%) – (voir tableau en annexes IV- Grille 46). Concernant la consolidation des points d'appui, trois types de tâches prédominent : l'approfondissement de la suite numérique (54%), la production de faits numériques sur les doubles (20%) et sur les compléments (19%). In fine, les tâches en adéquation avec la mémorisation du répertoire additif sont consacrées uniquement à la recherche des résultats du répertoire additif (RRRA : 100%) sans doute parce que le professeur est convaincu qu' « *il est difficile pour des enfants de CP de retenir par cœur des additions. Donc, il vaut mieux, [selon lui], qu'ils apprennent à les reconstruire au CP puisqu'ils auront largement le temps de les mémoriser au CE1* » (extrait de l'entretien préalable).

Développer des procédures de calcul			Consolider les points d'appui			Mémoriser le répertoire additif		
Tâches	Effectif	%	Tâches	Effectif	%	Tâches	Effectif	%
CMCR	51	44%	ACSN	32	54%	RRRA	10	100%
RPA+ RPCT + RPCN	51	44%	PRFD	12	20%			
ECPR	13	11%	PRFC	11	19%			
TOTAL	115	63%	Autres	4	7%			
			TOTAL	51	38%	TOTAL		

Légende : Les catégories de tâches sont désignées par les abréviations suivantes : Effectuer un calcul mental ou un calcul réfléchi (CMCR) ; Résolution de problèmes additifs (RPA), de complément (RPCT) et de comparaison (RPCN) ; Effectuer des calculs en utilisant des procédures de référence (ECPR) ; Approfondir la connaissance de la suite numérique (ACSN); Produire rapidement des faits numériques sur les doubles (PRFD), sur les compléments (PRFC) ; Retrouver les différentes décompositions des nombres (RDN) ; Retrouver les résultats du répertoire additif (RRRA).

Tableau 68 : Effectifs et répartition des tâches possibles des élèves suivant leur catégorie dans le scénario de José (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 45)

Globalement, le déroulement de la séquence s'étend sur une durée de 12h 47 min et 52s, qui, rapportée au nombre de tâches proposées (184) nous permet de conclure à une moyenne horaire de 14 tâches pour le projet d'enseignement de José (voir tableau détaillé en annexes IV- Grille 44).

d) *Le rapport de l'enseignant au manuel dans son activité de préparation*

« Il faut bien comprendre une chose quand on enseigne en Guadeloupe c'est que les manuels qui sont sur le marché ne sont pas adaptés à la réalité locale. Quel que soit le manuel que vous utilisez, y compris ceux recommandés par les formateurs, vous n'arrivez jamais à faire une leçon complète sur le temps prévu ou encore à finir le fichier en entier pour la fin de l'année. Il y a toujours un décalage pour la simple et bonne raison que ces supports ne sont pas faits pour nos élèves... Mais, comme il n'y a rien d'autres nous sommes bien obligés de nous en contenter [...] La collègue de l'autre CP voulait qu'on prenne "Maths tout terrain" cette année, j'ai dit ok parce que je sais pertinemment que ne je l'utiliserai pas donc à quoi bon m'opposer...En ce qui me concerne, il n'est pas question de rester coincé dans une fiche pédagogique proposée par un manuel quelconque. Je ne suis pas dans cette dynamique-là. Je suis très ouvert, je m'adapte à la classe par rapport à ce que je vois... Pour tout vous dire, je prends le temps que je juge nécessaire pour chaque compétence de la progression minimum du groupe académique. Je suis un créatif donc je concocte moi-même mes séances en piochant les exercices qui correspondent dans

trois manuels différents "*J'apprends les maths*", "*Litchi*" et "*Euromaths*" et chaque année, j'ai au moins un élève classé parmi les dix premiers au championnat, mes élèves sont contents et réussissent et je prends du plaisir à enseigner donc ma méthode est bonne » (extrait de l'entretien préalable).

Le discours tenu par José révèle une utilisation intuitive de trois manuels, *J'apprends les maths*, *Litchi* et *Euromaths* sur lesquels il a un avis négatif mais qui lui servent néanmoins de banque d'exercices pour mettre en œuvre la progression minimum recommandée par le groupe académique (GAM). En effet, à partir de la lecture de ces trois supports, le professeur opère une sélection parmi les activités proposées par ces supports édités qu'il combine et réorganise pour construire ses séances de calcul mental sans pour autant privilégier aucun de ces manuels. Par voie de conséquence, la structure et les contenus mathématiques de son projet d'enseignement sont similaires à la progression du GAM. Cependant, à l'instar de deux de ses ressources, *Litchi* et *J'apprends les maths*, José emprunte l'itinéraire de type 2 conseillé par Brissiaud (le calcul sur les objets structurés et les stratégies de décomposition-recomposition sont privilégiés pour développer les procédures de calcul réfléchi en raison de leur plus grande proximité avec le calcul numérique), met en œuvre une stratégie d'enseignement de type « *explication -application* » et s'appuie sur l'aspect cardinal du nombre pour développer les procédures de calcul réfléchi. Pourtant, il se démarque de ces supports en offrant à ses élèves un cheminement cognitif supplémentaire en utilisant aussi l'aspect ordinal des nombres (calcul par sauts sur la piste numérique) comme dans *Euromaths*.

En ce qui concerne l'ordre chronologique des phases²¹² de son scénario, José s'éloigne d'*Euromaths* en supprimant la phase préparatoire (A) préconisée pour consolider la capacité des élèves additionner et soustraire sur la piste des nombres. Par voie de conséquence, son scénario démarre par une première phase de construction (B) de sept séances qui met en place quelques points d'appui (suite numérique jusqu'à 60, compléments à 10, petites sommes ≤ 10) et instaure de nouvelles notions, notamment les doubles $6 + 6$ et $7 + 7$ (PFRD), les écritures additives des nombres de 6 à 9 (RDN) et la résolution de problèmes de comparaison (RPCN). Si les deux autres manuels initient également leur scénario par une phase B, celle de *J'apprends les maths*, composée de deux séances introduit la procédure du retour aux cinq tandis que la phase B de *Litchi* beaucoup plus longue (24 séances) aborde les décompositions additives des nombres de 11 à 19 (RDN), la résolution de problèmes additifs (RPA), la construction de la table d'addition jusqu'à 9 (CURA et RRRA), introduit la procédure du « passage à 10 » et renforce quelques points d'appui (décompositions de 10, complément à 10). *Euromaths*, lui, profite de la phase B pour apprendre aux élèves à ajouter un nombre entre 1 et 5 à l'aide de la

²¹² Les différentes phases identifiées sont explicitées à la page 310 (note de bas de page n° 189).

procédure de calcul par sauts. José poursuit sa séquence par une phase d’entraînement (C) de 12 séances qui vient, à l’exemple des trois manuels, consolider l’ensemble des notions découvertes au cours de la phase précédente. Cette phase (C) compte 13 séances chez *Litchi* (contre 4 pour *J’apprends les maths* et 7 chez *Euromaths*) et marque aussi la fin de la séquence proposée par ce manuel. La deuxième phase de construction de connaissances du scénario du professeur (D) introduit, au même titre que *J’apprends les maths*, bien qu’en proportions plus réduites des tâches sur le calcul des sommes du type $9 + n$ et $8 + n$ (avec $n \leq 9$) et des grands doubles ($8 + 8$ et $9 + 9$). De son côté, *Euromaths* étend la procédure du calcul par sauts à l’ajout de nombre entre 1 et 10, aborde les additions de deux nombres consécutifs inférieurs à 10 en appui sur les doubles et la mémorisation du répertoire additif qui sont réinvestis dans la résolution de problèmes additifs. In fine, suivant la même démarche que précédemment, José et les deux supports édités (*Euromaths* et *J’apprends les maths*) finalisent son scénario par une deuxième phase d’entraînement (E) qui renforcent les apprentissages de la phase (D) – (voir plus de détails en annexes IV – Grilles 8, 29, 47 et 48).

PHASES	LITCHI		J'APPRENDS LES MATHS		JOSÉ		EUROMATHS	
Phases de construction de connaissances	B = 670 min	B = 84%	B + D = ?	B + D = ?	B + D = 374min	B + D = 49%	A + B + D = 320 min	A + B + D = 50%
Phases d'entraînement	C = 125 min	C = 16%	C + E = ?	C + E = ?	C + E = 394 min	C + E = 51%	C + E = 320 min	C + E = 50%
Position relative de la phase de construction de connaissances	Timeline: 40 ————— 50 ————— 60 ————— 70 ————— 80 Labels: José (at ~48), Euromaths (at 50), Litchi (at 80)							
Légende : NI (Temps accordé non indiqué dans le guide pédagogique du manuel)								

Tableau 69 : Position relative de la phase de construction des savoirs dans le scénario de José par rapport aux manuels utilisés (voir plus de détails en annexes IV – Grille 51)

En fin de compte, la durée de la phase de construction des savoirs de José (6h 14min) est beaucoup plus courte que celle du *Litchi* (11h 10min) mais se rapproche davantage de celle d’*Euromaths* (5h 20 min) - (voir tableau 69). Toutefois, l’absence d’indications relatives au temps d’apprentissage dans *J’apprends les maths* ne permet pas d’établir la position relative du scénario de José par rapport à celui du manuel. De plus, la mesure de la variété des tâches de la séquence de José révèle d’une part, une certaine distance avec celle des manuels et d’autre part, la supériorité de la diversité des tâches proposées par l’enseignant par rapport à la moyenne (voir tableau 70).

	LITCHI	J'APPRENDS LES MATHS	JOSÉ	EUROMATHS
Nombre total de tâches	156	120	184	122
Écart à la moyenne (moyenne = 145)	+11	-25	+39	-23
Position relative du scénario de José par rapport à celle des manuels utilisés	Le diagramme illustre la position relative du scénario de José par rapport à la moyenne (145) et aux manuels utilisés. L'axe horizontal est gradué de -30 à +40. Les points de référence sont : J'apprends Euromaths (environ -25), Litchi (environ +10), et José (environ +39).			

Tableau 70 : Position relative de la séquence de José par rapport aux manuels utilisés (voir plus de détails en annexes IV – Grille 52)

Enfin, l'organisation chronologique²¹³ de la séquence de José révèle un déroulement conforme à sa stratégie d'enseignement. En effet, il opte pour une pédagogie de la réussite, explicite au préalable les procédures de calcul que les élèves appliquent et met en œuvre des phases d'entraînement les préparer au championnat académique en consolidant les points d'appui (voir schéma 43).

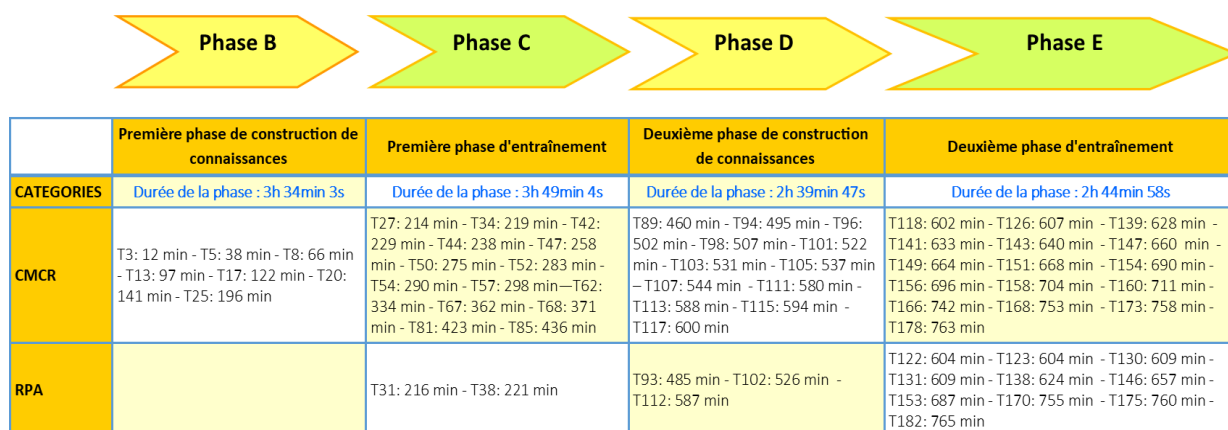


Schéma 43 : Extrait de la chronologie des tâches les plus significatives de la séquence de José (voir plus de détails en annexes IV – Grille 54)

• **En résumé** : En appui sur les travaux de Leroyer²¹⁴ (2013), l'analyse croisée des entretiens et des interactions entre José et les supports édités dans son activité de préparation, nous permet de conclure que son rapport aux ressources relève d'un suivi pas à pas de la progression académique associé à une adaptation intuitive et empirique de trois manuels (*J'apprends les maths*, *Euromaths* et *Litchi*). Plus précisément, pour concevoir son projet d'enseignement, le professeur sélectionne, combine et exploite partiellement les activités prescrites dans trois manuels différents sans en privilégier aucun.

²¹³ Pour construire ce graphique, chaque tâche a été numérotée par ordre d'apparition et associée à l'instant t où elle se produit. Par exemple, T118 : 602 min est placé en phase E dans la catégorie CMCR signifie qu'au cours du déroulement de la séquence d'apprentissage, la cent-dix-huitième tâches possibles de l'élève lors de la deuxième phase d'entraînement est un calcul mental ou réfléchi (CMCR). Elle se produit six-cent-deux minutes après le début de la séquence d'apprentissage.

²¹⁴ La typologie a posteriori du travail de préparation en fonction du rapport au support de l'enseignant de Leroyer (2013) est présentée en annexes IV Grille 62.

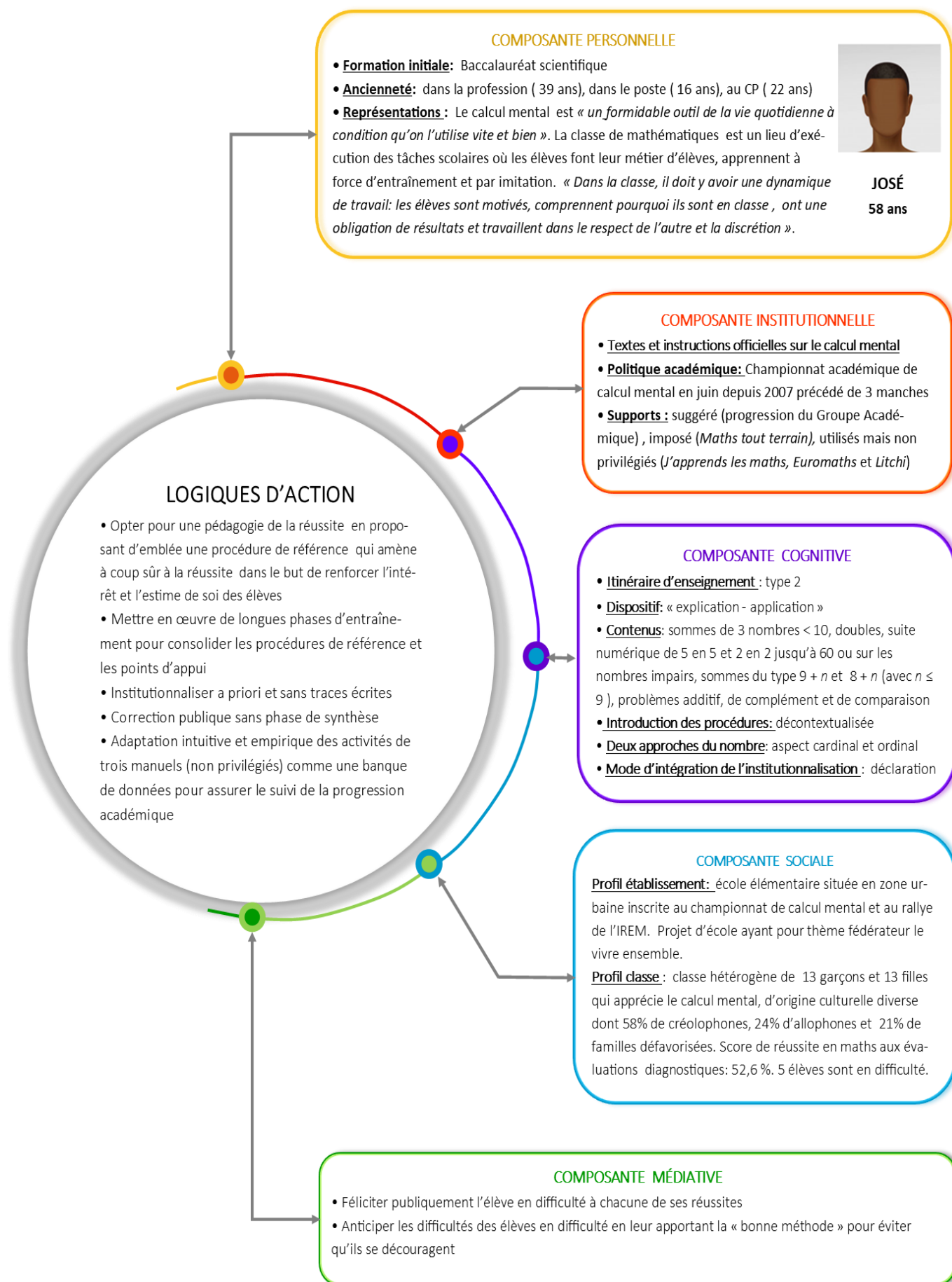


Schéma 44 : Bilan intermédiaire du profil de José

2.1.6 Éléments pris en considération par Pascal pour concevoir son projet d'enseignement

a) Redéfinition de la tâche prescrite

C'est d'abord en tant que contractuel en mathématiques dans un collège de Saint-Martin²¹⁵ que Pascal, 34 ans, le plus jeune professeur de notre panel, titulaire d'une maîtrise en mathématiques, fait ses premiers pas dans le corps enseignant. Peu après, il échoue au CAPES²¹⁶ mais passe avec succès le concours du professorat des écoles. En 2014, il avait onze ans d'ancienneté, enseignait pour la sixième fois au CP et prenait ses fonctions dans une école rurale située en REP pour la sixième année consécutive. Selon lui, le calcul mental *« est incontournable. C'est la base des mathématiques. C'est aussi l'une des rares disciplines qui par son côté ludique arrive à retenir l'attention des élèves en difficulté »*. *« Si tu ne sais pas calculer mentalement, tu peux difficilement réussir une opération posée. Donc faire l'impasse sur le calcul mental aura forcément des conséquences négatives sur les apprentissages en mathématiques »*, expliquait l'enseignant lors de l'entretien préalable.

Du point de vue de Pascal, *« le programme n'est pas assez explicite, pas assez précis...il est trop vague. On te dit, tu dois faire ça au CP et puis voilà. Sans te dire comment faire et sans les étapes pour y arriver. En fait, chacune des compétences données correspond au moins à trois autres sous-compétences implicites sous-jacentes...donc si tu n'as pas le recul pour aller chercher dans les documents d'accompagnement et les autres outils mis à disposition, tu passes à côté de ce qui est réellement attendu »*, conclut le professeur. S'agissant de sa classe de 12 garçons et 10 filles, Pascal souligne son dynamisme et son caractère hétérogène avec *« de très bons élèves et d'autres très en difficulté qui ne connaissent pas la suite numérique jusqu'à 20, peinent à mémoriser les tables d'addition, à se représenter mentalement les nombres ou se réfugient systématiquement dans le comptage »*. Compte tenu du profil de sa classe, Pascal se donne trois objectifs pour l'enseignement du calcul mental de deux nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine : 1°) Mettre à profit l'aspect ludique du calcul mental pour développer l'intéressement des élèves ; 2°) Introduire des stratégies efficaces pour favoriser le progrès vers le calcul et l'abandon progressif du comptage ; 3°) Rendre l'élève capable de réinvestir les procédures acquises en résolution de problèmes.

- **En résumé :** Comme dans *J'apprends les maths*, son manuel de prédilection, Pascal prévoit d'introduire, à l'aide des repères 5 et 10 utilisés pour représenter les quantités, des stratégies de calcul réfléchi telles que le « passage de la dizaine » et « le « retour au cinq » en réalisant les actions correspondantes avec des collections organisées (calcul sur les objets) avant d'amener les élèves à simuler mentalement ces actions.

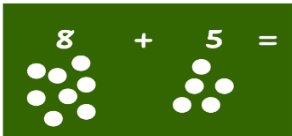
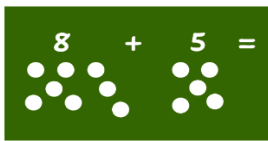
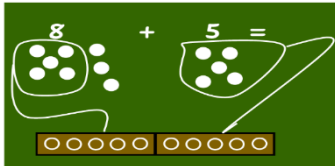
²¹⁵ Saint-Martin est une dépendance située au nord de la Guadeloupe.

²¹⁶ Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second degré.

b) Stratégie d'enseignement

• Itinéraire d'enseignement

Pour apprendre aux élèves à calculer des sommes avec passage de la dizaine, Pascal fait le choix, à l'instar de *J'apprends les maths*, d'enseigner le calcul sur les objets organisés en groupements de 5 et de 10 en l'opposant au comptage (d'objets inorganisés). En conséquence, la première séance de son scénario commence par des activités mentales (furet de 10 en 10, soustractions de type $9 - 2$) puis introduit le calcul de sommes du type $5 + 7$ ou $7 + 5$ par une comparaison entre le comptage et la stratégie du « retour au 5 » (voir séance 1 complète en annexes VI Grille 3).

Tour de parole	Temps	Nom de l'émetteur	Énoncés
37	08 :27	Professeur	Aujourd'hui, on va apprendre à calculer des additions avec 5. Vous allez me chercher le résultat de cette addition (<i>Le professeur écrit au tableau $8 + 5$ puis dessine une collection inorganisée de 8 points et une autre de 5 points.</i> 
38	08 :43	Professeur	Allez, on se dépêche.
39		Professeur	Levez l'ardoise s'il vous plaît. Ceux qui ont terminé.
40		Professeur	On y va.
41		Professeur	Tout le monde ne trouve pas le même résultat donc on va réfléchir ensemble.
42		Professeur	On va d'abord dessiner 8 et 5 comme Dédé. 
43	10 :06	Professeur	Si j'avais une boîte de Tchou vide qu'est ce qui se passerait ?
44		Millie	Tu vas ranger les jetons dans la boîte
45		Professeur	Oui, alors qu'est-ce qu'on range d'abord dans la boîte ?
46		Max	Les 5
47		Professeur	Tu as raison, on va ranger les cinq. Donc, les cinq du nombre 8 je les mets dans la boîte et je range aussi les cinq du nombre 5. 
48		Professeur	Alors une fois que ma boîte est remplie. J'ai une boîte pleine. Une boîte pleine ça fait combien ?
49		Djaïna	10
50		Professeur	Oui ça fait dix et je rajoute ...
51		Professeur	Qu'est-ce que je rajoute ?
52		Max	Tu rajoutes 3
53		Professeur	Donc $10 + 3$ ça fait ...
54		Max	13
55		Professeur	Oui, ça fait 13. Donc $8 + 5$ c'est égal à...
56		Plusieurs élèves	13
57		Professeur	Prenez vos fichiers à la page 94 (<i>Le professeur écrit 94 au tableau</i>). Tout le monde y est ?
58		Les élèves	Oui
59	11 :25	Professeur	Alors, que fait l'écureuil ?
60		Dorian	Il compte des noisettes
...			
78		Millie	Pour trouver le résultat, on compte toutes les noisettes

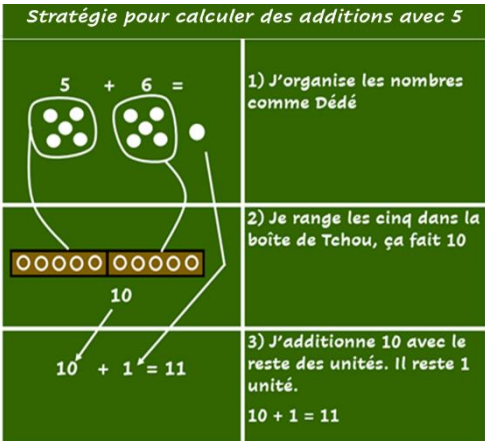
79		Professeur	Oh la la ça fait beaucoup de noisettes à compter vas-y Millie compte, on t'écoute
80		Millie	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Ouf...Ça fait douze.
81		Professeur	Ah oui, ouf c'est très long et très fatigant de tout recompter pour trouver le résultat. Et on risque même de se tromper comme Dorian tout à l'heure.
82		Max	Faut toujours faire comme Dédé pour aller plus vite
83		Professeur	Ah bon ? Allons voir ce que font Dédé et Tchou pour aller plus vite ?
84		Max	Tchou et Dédé calculent $7 + 5$
85	13 :02	Professeur	Avant de calculer, qu'est-ce qu'ils font d'abord ?
86		Max	Ils rangent les jetons par groupe de 5 comme sur le dé
87		Professeur	D'accord, est ce que ça permet d'aller plus vite quand on les range Josué
88		Josué	Oui
...			
104		Professeur	Donc, quand on range les objets comme Dédé, on calcule et on va beaucoup plus vite. Dès que j'ai rangé dans la boîte je sais tout de suite que c'est dix. Et après je rajoute ce qui reste.
105	14 :06	Professeur	Donc, on récapitule, si je veux calculer $5 + 6$, comment je fais ?
106		Max	Je range d'abord les nombres comme Dédé
107		Professeur	<i>(Le maître dessine au tableau)</i> Donc, j'écris un, j'organise les nombres comme Dédé et je fais le dessin.
108		Professeur	Une fois que j'ai organisé les nombres comme Dédé qu'est-ce que je fais après ? Quelqu'un d'autre ? Dorian on t'écoute. <i>(Une élève lève le doigt).</i>
109		Professeur	Vas-y Millie.
110		Millie	Je range les cinq dans la boîte, ça fait 10
111		Professeur	D'accord, deux, je range les 5 de cinq et les 5 de six dans la boîte, ça fait dix. <i>(Le maître dessine au tableau)</i> et après ?
112		Max	Tu rajoutes le un qui reste à 10, ça fait 11.
113	15 :56	Professeur	Trois, j'additionne dix avec le reste des unités ça fait 11.  Stratégie pour calculer des additions avec 5 1) J'organise les nombres comme Dédé 2) Je range les cinq dans la boîte de Tchou, ça fait 10 3) J'additionne 10 avec le reste des unités. Il reste 1 unité. $10 + 1 = 11$

Tableau 71 : Extrait de la séance 1 de Pascal (voir séance complète en annexes VI grille 3)

Les séances 2 à 4 visent l'appropriation de cette dernière et le renforcement des points d'appui (suite numérique et soustractions mentales) ainsi que les procédures de calcul développées précédemment (sommations du type $6 + 3$ et $10 + n$) tandis que la séance 5 procède à une évaluation formative. Les acquis constatés poussent le professeur à mettre en œuvre une remédiation en EPS à l'aide des jeux traditionnels (séances 6 et 7) et un réinvestissement en résolution de problème (séances 8 et 10) entrecoupés par la manche 1 du championnat académique (séance 9).

Cette séance de remédiation se déroule dans la cour de récréation. Le maître a installé quatre ateliers autour des jeux traditionnels dont trois tournants :

- Atelier 1 (groupe jaune) : *Jé a woulet*²¹⁷
- Atelier 2 (groupe bleu) : *Kabwa*²¹⁸
- Atelier 3 (groupe vert) : *Banza*²¹⁹
- Atelier 4 (groupe rouge) : *I ka I pa ka*²²⁰

Les élèves sont donc répartis en quatre groupes : les jaunes (5 élèves), les bleus (6 élèves), les verts (6 élèves) et les rouges (7 élèves). Ce dernier groupe constitué des élèves les plus fragiles est pris en charge par l'enseignant tandis que les autres groupes sont autonomes. L'extrait qui suit retranscrit le déroulement des échanges dans l'atelier 4 (*I ka I pa ka*). Sept élèves participent à cet atelier : Temmy, Jayann, Laurédy, Djaly, Malik, Mélina et Malaïka.



Image issue du mémoire de DEA de QUIKO Jean-Paul, « Les jeux et jouets traditionnels en Guadeloupe » (2004)

Tour de parole	Temps	Nom de l'émetteur	Énoncés
32	05 :02	Professeur	Qui peut me rappeler le nom de ce jeu traditionnel ?
33		Jayann	I ka i pa ka
34		Professeur	Très bien, Jayann.
35		Professeur	Témmy, peux-tu nous rappeler le but du jeu, s'il te plaît ?
36		Temmy	Il faut lancer la boule pour qu'elle puisse passer par le trou et rentrer dans la boîte. Quand elle est rentrée, on dit « i ka ». Si elle est pas rentrée, on dit « i pa ka ».
37		Professeur	Est-ce que tout le monde est d'accord ?
38		Les élèves	Oui
39		Professeur	Je remets à chacun une boule.
40		Professeur	Bon, maintenant regardez bien votre boule. Qu'est-ce que vous remarquez ?
41		Djaly	Il y des choses écrites dessus
42		Professeur	Des choses ?!
43		Professeur	Lis-nous ce qui est écrit sur ta boule Djaly
44		Djaly	$5 + 8 =$
45		Professeur	Alors $5 + 8 = \dots$ c'est quoi Djaly ?
46		Professeur	Les autres ?
47		Malaïka	C'est un calcul
48		Malik	Une addition
49		Professeur	Oui, on peut dire aussi une égalité. Donc à chaque fois que la boule ne rentre pas, le lanceur a un gage. Il doit trouver le résultat de l'égalité.
50		Professeur	Vas-y Djaly, lance ta boule
51		Les élèves	<i>(Djaly lance sa boule mais elle ne rentre pas dans la boîte. I pa ka ! i pa ka !</i>
52		Djaly	Pow, il faut calculer !
53		Professeur	Bon ! I pa ka ! Rapprochez-vous. Alors, Djaly, quelle somme tu dois calculer ?
54		Djaly	$5 + 8$
55		Professeur	On t'écoute

Tableau 72 : Extrait de la séance 6 de Pascal

Une évaluation sommative (séance 11) et une séance de consolidation (séance 12) parfait l'apprentissage du calcul de sommes du type $5 + n$ et le développement des points d'appui. Au cours de la deuxième phase de son scénario, Pascal étend la stratégie du « retour au cinq » au calcul des « grands doubles » de $6 + 6$ à $9 + 9$ avant d'amener les élèves à construire la table des doubles jusqu'à

²¹⁷ Jé a woulet : voir description en annexes IV Grille 63.

²¹⁸ Kabwa : voir description en annexes IV Grille 63.

²¹⁹ Banza : voir description en annexes IV Grille 63.

²²⁰ I ka i pa ka : voir description en annexes IV Grille 63.

10 + 10 qui est ensuite organisée, analysée et mémorisée (séance 13). La séance 14 reprend ces deux activités et entretient les sommes du type $10 + n$ tandis que la quinzième prépare les élèves à l'apprentissage du passage de la dizaine à l'aide du jeu « n , c'est 1 et encore » pour favoriser la mémorisation des décompositions et leur mobilisation lorsque l'élève sera amené à déterminer de combien les sommes de deux nombres inférieurs à 10 dépasseront 10 pour trouver leur résultat. Dans la foulée, la séance 16 enseigne la stratégie de calcul dite du « passage de la dizaine » dans les cas de la forme $9 + n$. Il s'en suit quatre séances (17 à 20) dont le but est de favoriser l'appropriation de cette stratégie tout en travaillant en parallèle sur les moitiés, les problèmes de partage, la commutativité de l'addition et la connaissance de la suite numérique. Par la suite, en suivant le mode opératoire décrit supra, le professeur étend la stratégie du passage de la dizaine aux sommes du type $8 + n$ (21 à 27), évalue d'abord la progression des acquis (séance 28) puis remédie aux difficultés des élèves en EPS avec les jeux traditionnels (séances 29), procède successivement à la passation de la manche 2 du championnat académique (séance 33) et consolide l'acquisition des additions mentales du type $9 + n$ et $8 + n$ (séances 31 à 36) avant de l'évaluer (séance 37). In fine, les résultats mémorisés sont organisés dans un répertoire (séance 38), les élèves sont confrontés à la manche 3 du championnat (séance 39) et Pascal finalise son scénario par une extension de la stratégie du passage à la dizaine aux sommes du type $28 + n$ et $29 + n$ (séances 40 et 42) peu de temps avant la finale académique (séance 42). Le projet d'enseignement de Pascal est détaillé en annexes VI Grille 6.

- Les contenus mathématiques

Au regard de l'itinéraire retenu par Pascal, le champ mathématique de son scénario peut se résumer de la manière suivante : sommes du type $6 + 3$, $10 + n$, $5 + n$, $8 + n$, $9 + n$, $28 + n$ et $29 + n$; doubles et moitiés, suite numérique jusqu'à 99, décompositions additives (n , c'est 1 et encore..., n c'est 2 et encore...), commutativité de l'addition, procédure du « retour au 5 » et du « passage à 10 », problèmes additifs, de partage, de complément et de comparaison.

- Gestion et modes d'intégration de l'institutionnalisation

« Ça fait dix ans que je travaille en REP et s'il y a une chose dont je suis sûre concernant ces élèves c'est qu'il manque de méthodes et sont souvent démunis face à la tâche à réaliser... Un enfant qui ne sait pas comment faire pour trouver la réponse, se démotive et se désintéresse de l'activité si on ne lui donne pas en amont les moyens de la réaliser », affirmait Pascal lors de l'entretien préalable. Ainsi, en accord avec ses conceptions, l'enseignant fait de la dévolution guidée et institutionnalise en mode « apport » et « bilan ». D'abord, il écrit au tableau le nouveau calcul à résoudre, par exemple, $8 + 5 = \dots$. Puis, dessine une collection inorganisée de 8 noix de coco et une autre de 5 avant de demander aux élèves de chercher le résultat. Ensuite, il dessine 8 et 5 « comme Dédé » (sous la forme

de constellations du dé) et demande ce qui se passerait si on rangeait « les 5 » de la constellation de 8 et « les 5 » de la constellation de 5 dans une boîte de Tchou vide en entourant les 10 jetons formés par « les deux 5 » : on obtiendrait une boîte pleine et 3 jetons, c'est-à-dire 10 et 3 ou 13. Le professeur conclut alors : dans un cas on a compté (c'est long et on risque de se tromper), dans l'autre on a organisé et calculé (c'est rapide et on est sûr du résultat). Il s'en suit une série de calculs durant laquelle les élèves apprennent à mentaliser la stratégie en évoquant le regroupement « des deux 5 » puis cherche de combien le résultat dépasse 10. Enfin, l'enseignant institutionnalise et traduit sous forme écrite la procédure de référence.

- **Bilan sur la stratégie globale d'enseignement de Pascal**

- 1) Emprunter un itinéraire de type 2 (Brissiaud, 2001) : le calcul sur les objets structurés est privilégié en raison de leur plus grande proximité avec le calcul numérique ;
- 2) Opter pour un dispositif pédagogique de type : « observation – compréhension- application » ;
- 3) Introduire la procédure à enseigner de manière contextualisée ;
- 4) Utiliser l'aspect cardinal du nombre pour développer les procédures de calcul ;
- 5) Dévoluer et institutionnaliser : dévolution guidée du nouveau calcul, explicitation et traduction sous forme écrite de la procédure de référence ;
- 6) Procéder à des évaluations formative (suivie de remédiations transversales avec les jeux traditionnels en EPS) et sommative ;
- 7) Réinvestir les procédures enseignées dans la résolution de problèmes.

c) Les tâches possibles des élèves dans les activités proposées

À l'exemple de Roditi (2005), les tâches possibles réalisées sous la responsabilité du professeur ont été catégorisées²²¹. Le tableau récapitulatif infra fixe à deux cent soixante-quatre le nombre total de tâches composant la séquence de Pascal avec 74% des tâches centrées sur le développement des procédures de calcul réfléchi, 18% allouées à la consolidation des points d'appui et 8% consacrées à la mémorisation du répertoire additif. Pour ce qui est de l'apprentissage des procédures, nous constatons la prépondérance des tâches ayant trait à la mise en application des procédures de référence (ECPR : 32%), à l'explicitation des procédures de référence (EXPR : 29%) et la résolution de problème (RPA, RPCT et RPCN : 21%). Influencé par ses représentations et la composante sociale de sa classe située en REP, Pascal est convaincu de l'incapacité de ses élèves à trouver d'eux-mêmes une procédure et à l'expliquer. En conséquence, il opte pour la dévolution guidée des nouveaux calculs et l'introduction « d'une stratégie sûre et économique » plutôt que d'essayer de faire émerger

²²¹ Cette catégorisation est détaillée à la page 308 de la thèse (note de bas de page n°187).

celles des élèves comme en témoigne l'absence de tâches liées à l'explicitation des procédures personnelles (EXPP) et la dominance de celles relatives à l'application et à l'explicitation des procédures de référence (EXPR et ECPR). Ce parti-pris se répercute également sur la proportion des tâches de la catégorie « application » (57%) comparée à celles de la catégorie « recherche » (38%) – (voir tableau en annexes IV- Grille 57). Concernant la consolidation des points d'appui, trois types de tâches prédominent : la production de faits numériques sur les doubles (37%), l'approfondissement de la suite numérique (29%), l'utilisation des propriétés des opérations (13%) et la recherche des décompositions de nombres (13%). In fine, les tâches en adéquation avec la mémorisation du répertoire additif sont centrées sur la recherche des résultats du répertoire additif (RRRA : 80%).

Développer des procédures de calcul			Consolider les points d'appui			Mémoriser le répertoire additif		
Tâches	Effectif	%	Tâches	Effectif	%	Tâches	Effectif	%
ECPR	63	32%	PRFD	18	37%	RRRA	16	80%
EXPR	56	29%	ACSN	14	29%			
RPA + RPCT + RPCN	42	21%	UPO	6	13%			
Autres	35	18%	Autres	10	21%	CURA	4	20%
TOTAL	196	74%	TOTAL	48	18%	TOTAL	20	8%

Légende : Les catégories de tâches sont désignées par les abréviations suivantes : Effectuer un calcul mental ou un calcul réfléchi (CMCR) ; Résolution de problèmes additifs (RPA), de complément (RPCT) et de comparaison (RPCN) ; Expliciter une procédure de référence (EXPR) ; Effectuer des calculs en utilisant des procédures de référence (ECPR) ; Utiliser les propriétés des opérations (UPO) ; Approfondir la connaissance de la suite numérique (ACSN) ; Produire rapidement des faits numériques sur les doubles (PRFD) ; Retrouver les différentes décompositions des nombres (RDN) ; Retrouver les résultats du répertoire additif (RRRA), Construire et utiliser le répertoire additif (CURA).

Tableau 73 : Effectifs et répartition des tâches possibles des élèves suivant leur catégorie dans le scénario de Pascal (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 56)

Globalement, le déroulement de la séquence s'étend sur une durée 12h 47min et 31s, qui, rapportée au nombre de tâches proposées (264) nous permet de conclure à une moyenne horaire de 20 tâches pour le projet d'enseignement de Pascal (voir tableau détaillé en annexes IV- Grille 55).

d) Le rapport de l'enseignant au manuel dans son activité de préparation

« A l'opozé a sa on lo pwofèsè ka kwè, sé ti moun la sa ka kompwann byen lojilk a kalkil mantal-la davwa yo ni labitid konté lajan kan yo kay fè konmision pou fanmi a yo : ni bon dé ou twa aden yo ki kay achte tou lé maten, pen, lèt ou sik an boutik-la... Mé pwoblèm a yo sé kè yò pa ni métòd, yo ka lagé vit kan yo pa sav fè on biten padavwa yo pa ni onlo konfyans adan yo. Kifè kan ou ka fè lékòl adan sé klas-lasa prèmyé zouti pou ni sé on bon métòd a matématik. An lékòl an mwen yo ka sèvi èvè « Maths tout terrain » mè mwen an mè sa a koté pas y pa adapté a pwofil a zélèv an mwen. An plis enmè "J'apprends les maths" a Bwisyo. Sé on bon liv, byen maké, byen ranjé é ki ka baw dékatman a tout sé pwòcésis là. I ka jis di-w kijan pouw fè pou apwann sé ti-moun la a vizualizé mantalman mannèv la pou trouvé bon rézilta-la...Mé konm ayen pa olendeng, liv-lasa ni kan menm dé vis : yon, i pa ka institutionalysé savwa-la kifè an oblijé rajouté-y é fè on tras ékrit kè an ka kolé an klas-la. Dézyèm bémòl la sé kè sé on liv ké yo ékri an frans

donk i pa ka tyenn kont dè réalité lokal a ti-gwadeloupéen-la sa kifè kè on ka complété-y épi jé twadisyonnèl, an ka rèvin si sèten nosyon an kréyòl, an ka twansfowmé sé sityasyon pwolblèm la pou yo kowespònn a sa sé ti moun la ka viv chak jou ...²²² »

La teneur de cet extrait significatif nous laisse croire que le manuel *J'apprends les maths* sert de référence à Pascal qui en a un avis très positif. À vrai dire, l'enseignant procède à une adaptation de ce support fondée essentiellement sur des ajouts (Leroy, 2013) notamment, des moments d'institutionnalisation, de remédiations à l'aide de jeu traditionnels et des problèmes dont l'énoncé est adapté au contexte local. Par voie de conséquence, la structure et les contenus mathématiques du projet d'enseignement de Pascal sont similaires à son manuel de prédilection. Et, au même titre que ce dernier, le professeur emprunte un itinéraire de type 2 (le calcul sur les objets structurés et les stratégies de décomposition-recomposition sont privilégiées en raison de leur plus grande proximité avec le calcul numérique), met en œuvre une stratégie d'enseignement du type « *observation - explication- application* » et s'appuie sur l'aspect cardinal du nombre pour développer des procédures de calcul réfléchi.

En ce qui concerne l'ordre chronologique du déroulement de son scénario, Pascal entame sa séquence par une première phase²²³ de construction de connaissances (B) de deux séances qui introduit la stratégie du « retour au cinq » en consolidant la connaissance de la suite numérique et les soustractions mentales de petits nombres. Il se démarque de son manuel en la complétant par un moment d'institutionnalisation et l'élaboration d'une trace écrite qu'il affiche dans la classe. Pour cette première phase, les tâches proposées par Pascal et son manuel sont de même type mais divergent par leur nombre (9 chez *J'apprends les maths* contre 13 pour Pascal). Le support édité enchaîne par une première phase d'entraînement (C) sur les notions découvertes précédemment, Pascal en fait de même mais s'éloigne de sa référence pour mieux s'adapter à ses élèves en ajoutant six séances supplémentaires à cet entraînement : une évaluation formative pour tester les acquis, deux séances de remédiation, la manche 1 du championnat académique et deux séances de réinvestissement de la

²²² [Traduction] : « Contrairement à ce que pensent certains professeurs, les élèves scolarisés en ZEP comprennent bien la logique du calcul mental parce qu'ils ont l'habitude de compter la monnaie quand ils vont à la boutique pour acheter du pain, du lait ou du sucre. Leur principale difficulté est liée à leur absence de méthode et ils abandonnent vite quand ils ne savent pas comment s'y prendre car ils manquent de confiance en eux. Donc, le premier outil que doit avoir l'enseignant qui travaille en ZEP c'est une bonne méthode en mathématiques... L'équipe pédagogique a opté pour "Maths tout terrain" mais moi, je l'ai mis de côté parce qu'il n'est pas adapté au profil de mes élèves. Je préfère utiliser "J'apprends les maths" de Brissiaud. C'est un bon livre, bien écrit, bien structuré et qui explique tous les processus et mécanismes en jeu dans les apprentissages. De surcroît, il va jusqu'à expliciter une technique pour faire apprendre à visualiser mentalement les procédures de calcul réfléchi... Mais ce manuel présente quand même deux bémols : le premier c'est l'absence d'institutionnalisation et de traces écrites donc je suis obligé de les élaborer moi-même. Le deuxième, c'est qu'il ne tient pas compte de la réalité locale du petit gwadeloupéen donc je complète les leçons par des remédiations avec les jeux traditionnels, je réexplique les stratégies de calcul en créole ou encore je transforme les énoncés de problème pour qu'ils correspondent davantage au vécu de l'enfant ».

²²³ Les différentes phases identifiées sont explicitées à la page 310 (note de bas de page n° 189).

procédure du « retour au 5 » en résolution de problèmes. En conséquence, pour cette phase (C), le nombre de tâches de la séquence de Pascal (71) était dix fois supérieur à celui de son manuel qui n'en comptait que 7.

Fidèle à la démarche de *J'apprends les maths*, l'enseignant consacre la deuxième phase de construction de connaissances (D) de sa séquence au calcul « des grands doubles de $6 + 6$ à $9 + 9$ » et à l'apprentissage du passage de la dizaine pour les cas de la forme $9 + n$ et $8 + n$. Bien qu'en proportions plus importantes chez Pascal, les tâches proposées aux élèves dans le support édité sont les mêmes avec une prépondérance de celles liées à l'explicitation des procédures de référence (EXPR), l'application des procédures de référence (ECPR) et la production de faits numériques sur les doubles (PRFD). Enfin, la séquence de Pascal se termine par une assez longue phase d'entraînement (E) qui compte neuf séances de plus et trois fois plus de tâches que le manuel privilégié réparties entre les tâches d'explicitation et d'application des procédures (EXPR et ECPR), de consolidation des points d'appui (UPO, PRFD et PRFC), de recherche des résultats du répertoire additif (RRRA) et la passation des manches 2 et 3 du championnat jusqu'à la finale académique (voir plus de détails en annexes IV – Grilles 29 et 58). En fin de compte, la séquence de Pascal aura duré 12h 47min et 31s dont 5h et 49min (46%) consacrées à la phase de construction des savoirs (voir tableau 74).

PASCAL			Construction des connaissances		Entraînement	
Phases de la séquence						
B	5%	42 min	B + D = 46 %	B + D = 349 min	C + E = 54%	C + E = 418 min
C	18%	137 min				
D	40%	307 min				
E	37%	281 min				
TOTAL	100%	767 min				

Tableau 74 : Durée des phases de la séquence de Pascal (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 59)

L'absence d'indications sur le temps accordé aux différentes activités dans *J'apprends les maths* ne permet pas d'établir la position relative de Pascal par rapport à ce manuel. Toutefois, la mesure de la variété des tâches des élèves dans la séquence de l'enseignant montre d'une part, une certaine distance avec celle du manuel, sans doute en raison de la forte contrainte sociale exercée par le profil de sa classe, et d'autre part, une supériorité de la diversité des tâches proposées par Pascal par rapport à la moyenne (voir tableau 75).

	J'APPRENDS LES MATHS	PASCAL
Nombre total de tâches	120	264
Écart à la moyenne (moyenne = 192)	-72	+72
Position relative du scénario de Pascal par rapport à celle du manuel utilisé		

Tableau 75 : Position relative de la séquence de Pascal par rapport au manuel utilisé (voir plus de détails en annexes IV – Grille 60)

Pour finir, le graphique²²⁴ relatif à l'organisation chronologique de la séquence de Pascal met en exergue un déroulement conforme à sa stratégie d'enseignement. En effet, il adopte la même démarche que *J'apprends les maths*, fait de la dévolution guidée, explicite la procédure de référence que les élèves appliquent mais se démarque de son manuel en prolongeant ses phases d'entraînement en y ajoutant des moments d'institutionnalisation et des séances de remédiation à l'aide de jeux traditionnels dans la langue maternelle des élèves (voir schéma 51).

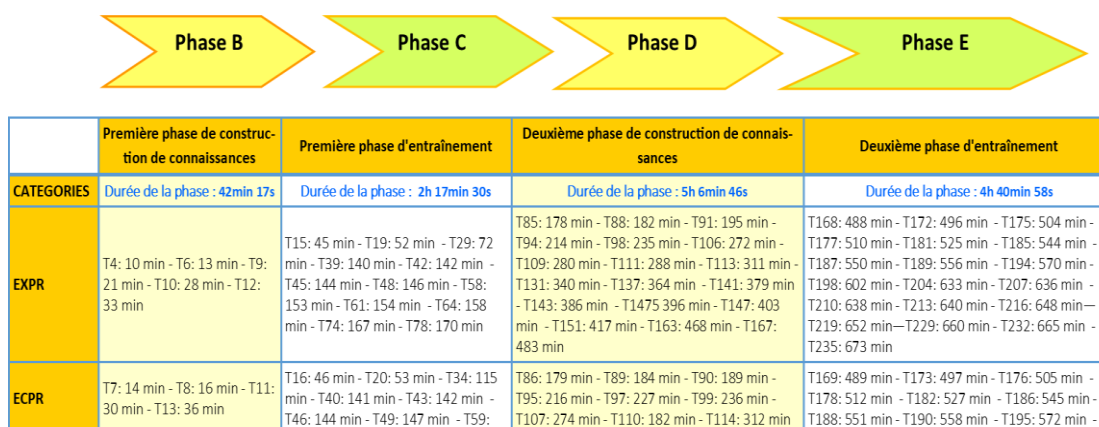


Schéma 51 : Extrait de la chronologie des tâches les plus significatives de la séquence de Pascal (voir plus de détails en annexes IV – Grille 61)

- **En résumé** : En appui sur les travaux de Leroyer²²⁵ (2013), l'analyse croisée des entretiens et des interactions entre Pascal et le manuel privilégié dans son activité de préparation, nous permet de conclure que son rapport aux ressources relève de l'adaptation fondée exclusivement sur l'exploitation totale d'un manuel fondateur et l'ajout de moments d'institutionnalisation, d'évaluation formative et de remédiations.

²²⁴ Pour construire ce graphique, chaque tâche a été numérotée par ordre d'apparition et associée à l'instant t où elle se produit. Par exemple, T16 : 46 min est placé en phase C dans la catégorie ECPR signifie qu'au cours du déroulement de la séquence d'apprentissage, la seizième tâche possible de l'élève lors de la première phase d'entraînement est la réalisation d'un calcul à l'aide d'une procédure de référence (ECPR) comme « le passage à 10 », par exemple. Elle se produit quarante-six minutes après le début de la séquence d'apprentissage.

²²⁵ La typologie a posteriori du travail de préparation en fonction du rapport au support de l'enseignant de Leroyer (2013) est présentée en annexes IV Grille 62.

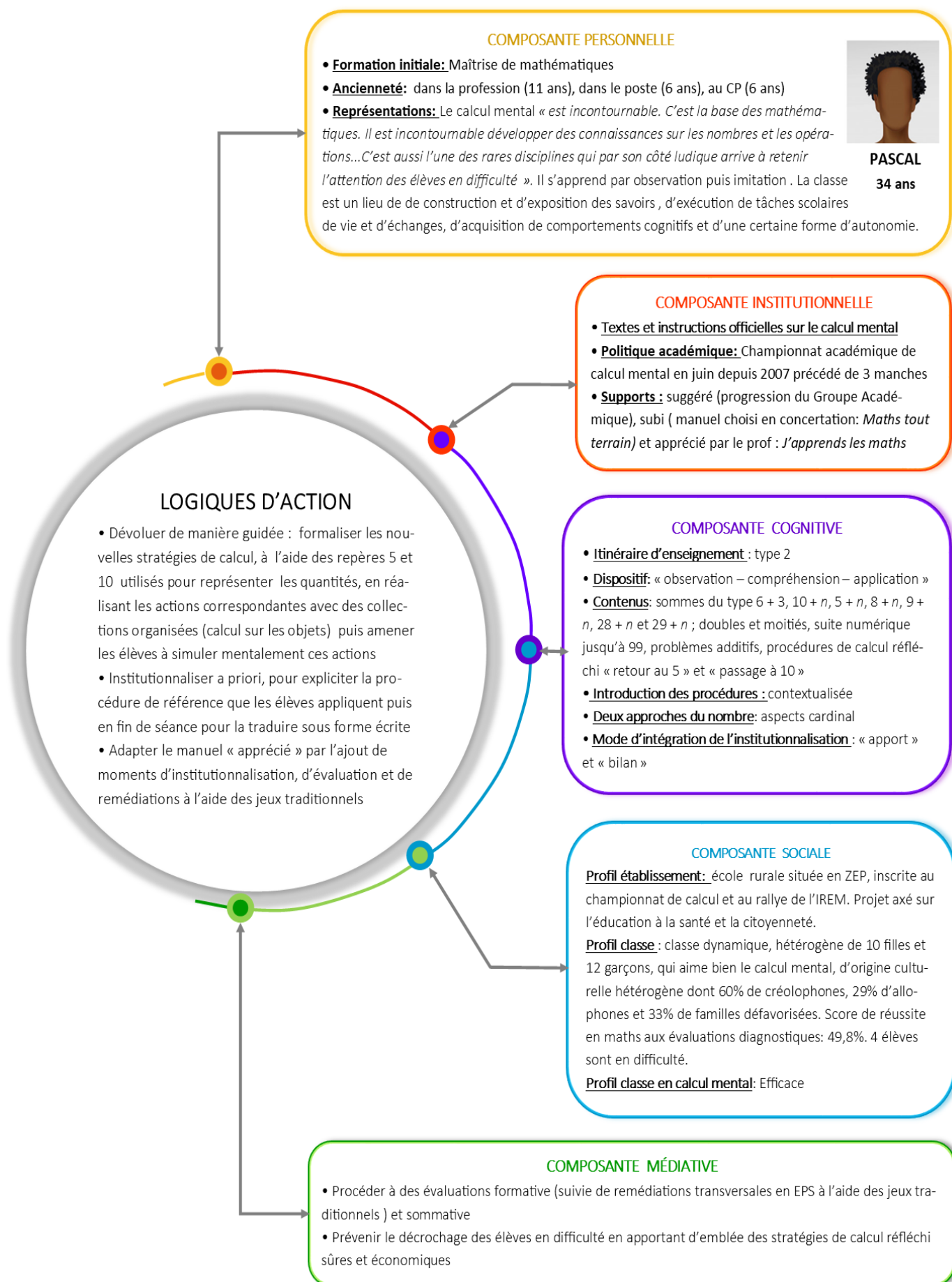


Schéma 52 : Bilan intermédiaire du profil de Pascal

2.1.7 Analyse comparative des principaux éléments pris en considération par les enseignants pour concevoir leur projet d'enseignement

Identifier les choix didactiques et pédagogiques, ce sont les éléments de base qui nous permettront de voir comment les enseignants ont construit leur projet d'enseignement aussi bien dans les classes performantes que moyennement performantes et peu performantes (Robert et Coulange, 2009). C'est une vision théorique que l'on peut qualifier de standard au regard de toute la logistique mise en œuvre par l'enseignant pour asseoir sa pédagogie, disons son enseignement dans des conditions normales. En d'autres termes, si les modèles didactiques permettent d'éclairer ce qui se passe dans une situation d'enseignement, ils ne sauraient en garantir l'efficacité de la même façon qu'une lampe ne saurait nous conduire assurément dans l'obscurité même si la lumière permet de repérer sûrement les obstacles (voir tableau synoptique en annexes V Grille 1). Autrement dit, c'est une manière de percevoir comment le panel s'organise à travers les actions mises en œuvre par les enseignants afin de saisir le particularisme de chacun dans ses choix, ses décisions et ses applications au regard des problèmes posés par les élèves. Cela rejoint sensiblement ce que Gaston Bachelard (1934) exprimait sur la formation de l'esprit scientifique quand il dit : « Le monde où l'on pense n'est pas le monde où l'on vit ». Mieux encore, c'est une manière de dire que « l'enseignement n'est ni partage, ni communication comme il est pourtant habituel. Et pourtant, toute pratique d'enseignement nécessite toujours cette double illusion » (Bernard Sarrazy, 2001).

- ***Pour les professeurs 2 (Séverine), 4 (Sophie) et 5 (José) catégorisés dans les classes moyennement performantes***

En premier lieu, concernant les classes moyennement performantes²²⁶, nous avons jugé utile de faire ressortir comme explicité supra la nature des adaptations par rapport au manuel (Leroy, 2013) et l'itinéraire d'enseignement (Grapin et Mounier, 2018) qui vont déboucher sur les stratégies d'enseignement. De manière concrète, au regard du premier critère visant l'utilisation du support, les professeurs n°2 et n°5 (Séverine et José) apparaissent comme des enseignants « adaptateurs²²⁷ » dans la mesure où ils suivent pas à pas la progression proposée par l'académie avec un choix de support livresque à faible potentiel didactique pour l'un (Séverine) associé à deux ouvrages à fort potentiel didactique pour l'autre (José) et une fidélisation dans les orientations pédagogiques peu innovantes²²⁸

²²⁶ Voir catégorisation 57 page 272.

²²⁷ La typologie a posteriori du travail de préparation en fonction du rapport au support de l'enseignant de Leroy (2013) est présentée en annexes IV Grille 62.

²²⁸ Nous pensons particulièrement aux routines pédagogiques. Dans l'orientation de Butlen, Masselot et Pézard (2009), les routines sont définies comme des schèmes professionnels, « des manières de réaliser des tâches plus complexes comme par exemple, gérer une phase d'explicitation, de synthèse de productions d'élèves débouchant sur une institutionnalisation ou encore gérer dans la durée mais aussi dans l'instant les comportements des élèves ». Mais, ici, nous employons le mot « routine » avec une connotation négative : « C'est faire les choses mécaniquement, être l'exécuteur d'un programme que l'on conduit sans savoir pourquoi » (Chartier, 2006).

dans les directions adaptées aux élèves, ce qui laisse à penser que le rapport privilégié montre l'inconscience des enseignants sur ce qui guide leur choix. C'est d'autant plus important que le choix des méthodes et des démarches suppose des capacités de réflexion sur leurs pratiques et leurs effets. Il est vrai aussi que « les supports d'enseignement diffusés par les éditeurs ne sont pas totalement "ajustés" aux contraintes effectives de la classe de chaque enseignant » (Leroy, 2013). Ainsi, on peut se questionner sur l'utilisation de ces supports en tant qu'outils sur l'avancée des connaissances d'un plus grand nombre d'élèves. Plus précisément, la question pourrait être posée en ces termes-là : « Dans quelle mesure ces supports permettent-ils aux enseignants d'analyser et de réguler les "hétérogénéités didactiques" ? » (Sarrazy, 2002).

Quant au professeur n°4 (Sophie) qui est une utilisatrice plus portée sur l'application systématique du guide pédagogique, elle respecte le déroulé proposé par l'ouvrage mais éprouve des difficultés lors de l'institutionnalisation malgré une tentative de choix pertinent au niveau des exercices proposés. La différence avec les deux professeurs précédents pour les classes moyennement performantes est qu'il y a une absence de prise en considération de la progression académique et un accent porté sur l'entraînement avec les élèves. Néanmoins, la problématique demeure, comme pour les autres professeurs, sur l'utilisation des supports ayant comme objet l'avancée des connaissances pour un plus grand nombre d'élèves, dans un temps relativement limité. Par inférence, au niveau pédagogique, les formes de contrats didactiques doivent être nécessairement privilégiées afin de pouvoir élaborer des séquences pour conduire à une variabilité de ce dit-contrat, ce qui nécessite une cohérence dans le choix des méthodes, des démarches induisant des capacités de réflexion sur les pratiques et la nécessité de préparation selon qu'elle privilégie l'utilisation, l'adaptation ou la conception²²⁹. En effet, la lecture pédagogique de cette professeure donne à penser qu'elle a porté une certaine réflexion au prorata de ses possibilités d'adaptation ce qui n'est pas négligeable car c'est une forme de remise en question qui peut être porteuse de réponse surtout pour ce type de classe.

Concernant le deuxième critère portant sur l'itinéraire de l'enseignant mettant en valeur les procédures de calcul dans les apprentissages, nous constatons en effet deux profils : d'abord le type 1 explicité supra où le comptage précède le calcul corrélé à l'amélioration du surcomptage dans le but d'acquérir l'aisance favorisant le progrès vers le calcul (Charnay et Valentin, 1992). Et puis, le type 2 où le calcul sur les objets précède le calcul par une mise en œuvre où les stratégies de décomposition-recomposition favorisent le progrès vers le calcul (Brissiaud, 2001). Par conséquent, au regard du choix des manuels des professeurs n°2 (*Pour comprendre les maths*) et n°4 (*Cap maths*),

²²⁹ Voir typologie a posteriori du travail de préparation en fonction du rapport au support de l'enseignant de Leroy (2013) en annexes IV Grille 62.

nous comprenons pourquoi l'itinéraire de leur enseignement se porte particulièrement sur le type 1. Effectivement, au vu de leur relation avec les manuels dans la rubrique « opinion sur les manuels » (voir tableau synoptique 76), le suivi pas à pas est valorisé par Sophie (professeure n°4) et apprécié pour Séverine (professeur n°2) tout en ayant un avis mitigé dans le choix de ses pratiques enseignantes. À bien y regarder, nous pouvons également associer leur itinéraire d'enseignement à leur cursus de formation compte tenu de la pensée logique nécessaire dans l'enseignement des mathématiques. Possédant un bac littéraire pour l'une (Sophie, professeure n°4) et une licence en économie pour l'autre (Séverine, professeure n°2), nous pouvons comprendre, suivant les règles de déduction, l'influence signifiée au niveau de la logique et de la conception didactique (Sayac, 2003).

Pour José, le professeur n°5, l'itinéraire d'enseignement choisi où le calcul sur les objets précède le calcul en favorisant la mise en œuvre des stratégies de décomposition-recomposition semble plus facilement répondre aux attentes des élèves ayant justement des difficultés de mémorisation effectives. D'ailleurs Brissiaud (2001) l'explicite très bien en disant : « Enseigner diverses stratégies, ce n'est pas seulement permettre aux enfants d'obtenir le résultat exact, car le comptage, de ce point de vue, conviendrait tout aussi bien : il conduit lui aussi au résultat exact. Enseigner ces stratégies de calcul, c'est faire reconstruire les résultats en prenant appui sur les repères 5 et 10, c'est faire reconstruire les résultats sous une forme qui favorise leur mémorisation » (p.21). En outre, si nous associons le profil de l'enseignant à son itinéraire pédagogique, nous constatons effectivement que contrairement aux deux professeurs précédents, son cursus est d'abord scientifique où la pensée logique a été développée dans un esprit de construction, d'innovation et d'évaluation. On le comprend bien à travers son récit : *« pour enseigner le calcul mental, je dispose de deux atouts professionnels : « l'adaptation aux enfants et la recherche de techniques de réflexion mentale et d'outils pour pouvoir accéder au résultat pour le calcul mental » [...] Tout ce que je sais, je l'ai appris sur le terrain en expérimentant ou au contact des pairs, on partage et puis on essaie de mettre en pratique ce qui marche on garde et puis ce qui ne marche pas on met de côté ou on essaie de le transformer ».*

En conséquence, si l'itinéraire pédagogique de ces trois enseignants est relativement différencié, cela prouve que pour acquérir véritablement la notion de nombre plusieurs ingrédients sont indispensables. À commencer par la manipulation d'objets pour en aligner, en ajouter et faire disparaître soi-même. Mais surtout, arriver à amplifier l'attention des élèves est le prérequis à toute compétence numérique sensible, donc à savoir élaborer les lois relativement abstraites à partir de données sensibles. À vrai dire, c'est un travail cognitif qui sollicite l'observation et l'abstraction réfléchissante, c'est-à-dire la capacité pour l'élève d'élaborer intérieurement. Il est de rigueur que pour fertiliser ce travail de pensée chez l'élève, rien de tel que les interactions que ce soit au niveau

de l'itinéraire de type 1 ou 2 où le développement des capacités numériques participent au développement général de l'intelligence de l'enfant et singulièrement du langage mathématique.

Pour arriver au troisième critère d'appréciation et de comparaison des choix didactiques et pédagogiques des classes moyennement performantes, c'est-à-dire au sujet des stratégies d'enseignement, nous nous trouvons dans le cadre des dispositifs pédagogiques finalisés par l'institutionnalisation. Là aussi, la différenciation entre ces trois professeurs est de mise. De manière concrète, les enseignants 2 (Séverine) et 5 (José) mettent en avant le paradigme « explication-application » avec une institutionnalisation en mode « apport » et en mode « déclaration » pour le professeur n°2 et une quasi-absence de phases de synthèse, contrairement au professeur n°5 qui reste en mode « déclaration » sans phase de synthèse. Par suite, nous voyons déjà dans les stratégies d'enseignement de ces deux enseignants une variable non négligeable sur les procédures déclaratives qui ont leur importance dans les différentes approches si et seulement si elles sont finalisées par des actions pratiques et pragmatiques. S'agissant de la professeure n°4 (Sophie) caractérisée par une stratégie d'enseignement basée sur un dispositif pédagogique « problème - compréhension - application » avec anticipation des difficultés, elle se place en mode « bilan » au niveau de l'institutionnalisation avec, paradoxalement, une quasi-absence des phases de synthèse. Nous pouvons ainsi déduire le caractère procédural de ses actions d'apprentissage totalement personnalisées au vu de son itinéraire d'enseignement et de son rapport au manuel. Tout bien considéré, nous sommes d'avis que la gestion de la différence entre les élèves relève ici de la mise en œuvre personnalisée par l'enseignante des trois critères d'appréciation. Nous le constatons par exemple, au niveau institutionnel où la gestion des différences entre les élèves est prise en compte par un dispositif pédagogique qui est censé répondre à leur problématique. Autrement dit, le rapport entre ces différents critères ne peut être ignoré, ne serait-ce que parce que les effets de l'un sur les autres sont indéniables.

Pour terminer ici avant de passer aux autres profils de classe, nous disons simplement que les relations entre les apprentissages implicites et les apprentissages explicites semblent bien constituer un des nœuds de difficulté que peuvent rencontrer les élèves dans leur apprentissage. C'est très clairement le cas en ce qui concerne aussi bien l'apprentissage de la lecture et de l'orthographe que celui de la résolution des problèmes mathématiques. Cependant, nous sommes conscients des difficultés rencontrées dans le triangle pédagogique et dans les rapports élèves-enseignant.es- savoir, ne serait-ce que parce que le professeur doit abandonner toute illusion de toute-puissance lorsqu'il (elle) accepte de présenter un savoir en construction et non une réponse immédiate et universelle.

- **Pour les professeurs 1 (Astride) et 6 (Pascal) catégorisés dans les classes performantes**

Voilà deux enseignants qui ont un rapport au manuel relativement intéressant dans la mesure où ils s'inscrivent dans la catégorisation des « adaptateurs²³⁰ » (ajouter/ compléter). En effet, la professeure n°1 (Astride) se distingue par la nature de ses approches portées surtout sur l'aspect procédural donc pratique de ses actions. En fait, elle donne une opinion relativement critique concernant la progression académique en mettant en avant le surplus d'activités de numération proposées avec comme explication une forme de brouillamini dans les choix effectués jugée inopérante pour la pratique. Néanmoins, elle valorise le *Cap maths* d'une part pour son fort potentiel didactique et d'autre part pour la cohérence observée dans les différentes progressions mises en œuvre. Ipso facto, il n'est pas surprenant que la relation avec le *Cap maths* lui donne une certaine liberté particulièrement pour les pratiques éloignées qui ne nécessitent pas de suivi pas à pas. C'est exactement ce qu'elle nous laisse à comprendre dans le récit suivant : *« Peu importe le manuel choisi par les collègues, je reviens toujours à mon petit Cap maths parce qu'il met systématiquement les élèves en situation de recherche et tout ce qui manque je fais moi-même [...] Je fais ce qui m'arrange en fonction du moment, si ça ne m'arrange pas, je ne le fais pas. Après, je ne te dis pas que je fais bien, entendons-nous bien mais ce que je fais ça me convient ».*

D'ailleurs, Alin Choppin (1992) nous fait remarquer que chaque enseignant est maître de l'usage qu'il fait des manuels en fonction de ses choix pédagogiques, du contexte dans lequel il enseigne, de ses préférences (suivi fidèle, utilisation partielle ou occasionnelle, voire non- utilisation). Autrement dit, c'est une part laissée à l'appréciation individuelle dans le cadre du choix collectif. *« Ce qui importe, ce n'est pas l'action du livre c'est la vôtre. Il ne faudrait pas que le livre vint en quelque sorte s'interposer entre les élèves et vous [...]. Le livre est fait pour vous et non vous pour le livre. Il est votre conseiller et votre guide mais c'est vous qui devez rester le guide et le conseiller de vos élèves, pour vous donner tous les moyens de nourrir votre enseignement personnel de la substance des meilleurs ouvrages [...] (Champy, 2019, p.63 à 85).* De ce constat, il nous semble évident que cette professeure s'inscrive dans un itinéraire d'enseignement de type 1 au vu de son opinion sur l'utilisation des manuels mais surtout la recherche mise en œuvre pour l'amélioration du surcomptage dans le but d'obtenir une certaine aisance pour le bon usage des doigts sans compter les dispositifs mis en place ou le comptage précède le calcul pour progresser enfin vers le calcul.

Dans la continuité, cette enseignante s'inscrit dans l'approche « problème-compréhension-application » au niveau du dispositif pédagogique avec un mode « bilan » et une gestion basée sur

²³⁰ Voir typologie a posteriori du travail de préparation en fonction du rapport au support de l'enseignant de Leroyer (2013) en annexes IV Grille 62.

l'explication, la hiérarchisation sans oublier l'apport des traces écrites des procédures. De toute évidence, nous avons explicité ici la dynamique de sa stratégie d'enseignement entendue selon Legendre (1993) comme « l'ensemble d'opérations et de ressources planifiées ou décidées par le professeur visant l'atteinte d'un but compte tenu d'une situation dont seulement certains paramètres sont connus ». Que ce soit possible pour le comptage précédé du calcul ou l'amélioration du surcomptage en enseignant le bon usage des doigts pour obtenir l'aisance permettant leur abandon pour progresser vers le calcul, ils seront toujours référés à un fonctionnement cognitif rationnel. À bien y regarder, nous cherchons à comparer une action à un modèle censé rendre intelligible notre explication surtout lorsqu'une tâche inhabituelle proposée par l'enseignant supposée être un invariant opératoire caractéristique de sa mise en œuvre. Cette appréciation se confirme par le récit de la professeure en ces termes : « *Moi, j'aime bien que l'enfant construise lui-même son savoir, donc je ne suis pas là pour te donner la réponse. Et avant que quiconque ne te donne aucune réponse tu vas devoir toi-même chercher, donc dans ce sens, je fais beaucoup appel à la démarche d'investigation, à la démarche de recherche [...] Je vais lui donner un calcul pour lui permettre de s'intéresser à ce qu'il faudrait faire. C'est pour ça que lorsque j'aborde une notion pour la première fois, ma démarche est toujours celle-là : il fait seul, il se débrouille, il trouve ou il ne trouve pas mais il fait seul. Je ne lui dis rien d'accord et c'est dans un deuxième temps on va dire qu'on va faire appel à des stratégies* ».

Concernant le professeur n°6 (Pascal), tout aussi « adaptateur » que l'enseignante précédente, son approche peut déjà s'expliciter par une opinion divergente et critique sur l'utilisation des manuels, dans la mesure où la progression académique lui paraît minorée par rapport aux compétences attendues par la tutelle. De manière concrète, ce professeur note l'absence de procédures de calcul réfléchi et de cohérence entre le développement des habiletés calculatoires et le développement des connaissances numériques. Cela peut se comprendre car pour que l'élève puisse réellement apprendre et acquérir une certaine dextérité, il faut qu'il soit capable de produire rapidement des faits numériques, d'utiliser des procédures de référence, d'effectuer des calculs complexes en mettant en œuvre des procédures variées utilisant les propriétés des nombres et des opérations et de résoudre des problèmes oraux simples. Nous pouvons penser que cette approche tombe des théories de la logique mentale comme le laisse à penser cet enseignant dans le discours suivant : « *J'aborde l'addition en expliquant aux enfants que c'est une écriture différente du nombre qui peut avoir de multiples facettes. Un nombre peut être écrit en chiffres, peut être représenté en collections, peut être codé en décompositions additives donc j'apprends aux enfants que l'addition est un nombre écrit sous une forme différente. Ensuite pour que les élèves accèdent au calcul mental, je fais des exercices de*

simulation mentale pour les entraîner à penser les collections sous forme organisée en utilisant les décompositions correspondantes ».

Là encore, le cursus du professeur mettant en exergue son implacable logique mathématique où pour lui penser c'est raisonner et raisonner c'est appliquer les lois rigoureuses et universelles de la logique. À cet effet, pour la petite histoire, c'est la thèse qui a gouverné une grande partie de la philosophie occidentale pendant vingt siècles. Pour dire simple, la raison serait sans doute l'outil suprême de l'intelligence humaine et cette raison repose sur les principes formulés par Aristote dans son organon (mot grec pour « outil »). À cet égard, nous ne sommes donc pas surpris du choix du support de l'enseignant n°6 (Pascal) car avec l'ouvrage *J'apprends les maths* de Brissiaud (2001), nous comprenons que ce n'est pas à force de compter ou à force de répéter que les élèves apprennent à calculer. Le mode d'apprentissage est tout autre où l'enfant apprend d'abord à représenter les quantités à l'aide des repères 5 et 10 (utilisation des doigts, des constellations...) ensuite utilise des stratégies de calcul réfléchi tels que par exemple le passage de la dizaine en réalisant d'abord les actions correspondantes avec les collections organisées (c'est le calcul sur les objets) puis en simulant mentalement les mêmes actions. C'est ce que l'auteur appelle le processus de mentalisation qui à terme aboutit à se passer des doigts.

Globalement, cette explication met en valeur le choix livresque de ce professeur qui s'inscrit indubitablement dans un itinéraire d'enseignement de type 2 mais, avec des caractéristiques aussi bien procédurales que déclaratives par le calcul sur les objets et surtout la mise en œuvre des stratégies de décomposition-recomposition pour contribuer au progrès des apprenants vers le calcul. En ce qui concerne sa stratégie d'enseignement, le dispositif pédagogique est manifeste car l'on trouve « l'observation- compréhension- application » de manière prégnante dans ses choix caractérisés par un mode d'institutionnalisation « apport » et « bilan » avec une gestion basée sur l'explication et les traces écrites de la procédure souhaitée. En conclusion, cet enseignant se distingue des autres par une recherche d'efficience et de pragmatisme où l'entraînement demeure réellement des phases de construction pour les élèves et des réponses aux problématiques observées.

- ***Pour la professeure 3 (Béatrice) catégorisée dans la classe peu performante***

Si la compréhension de l'enseignement du calcul mental passe par le développement de la connaissance de la chaîne verbale et l'utilisation du dénombrement, c'est-à-dire compter des objets en les pointant du doigt par exemple, la professeure n°3 (Béatrice) gérant le troisième profil de classe (classe « peu performante ») semble présenter un discours et des actions pédagogiques quelque peu incohérents dans la formation du concept de nombre chez les élèves. Des incompréhensions

relativement difficiles à détecter intelligiblement dans la mesure où elles affectent la capacité de l'élève à dénombrer et à acquérir progressivement le concept de la cardinalité et les symboles numériques. En regardant son rapport au manuel, son opinion sur la progression académique tombe d'un suivi pas à pas tout en ayant tendance à valoriser le support à fort potentiel didactique *J'apprends les maths*. À cet égard, nous nous sommes trouvés dans un questionnaire faisant appel à l'utilisation d'outils par un traitement approximatif afin de permettre l'émergence des représentations numériques exactes et du raisonnement chez les élèves. C'est pour cela que la relation au dit manuel nous paraît inopérante au regard de la distribution et de la nature des exercices proposés aux élèves. C'est à se demander comment les activités mises en place par cette enseignante permettent aux élèves de développer des stratégies pour résoudre les problèmes posés (additions et soustractions simples).

Pour aller plus loin, dans les situations observées, nous pensons que le comptage des doigts ou des objets pourrait aider simplement à dénombrer plus rapidement que chercher à mettre en place une stratégie plus élaborée consistant à avancer dans la chaîne numérique. Par conséquent, même si la relation au manuel est analogue aux professeurs n°1 et n°5, les résultats de ses actions sont totalement différenciés et le comportement des élèves est proche d'un manque d'adaptabilité. Cela peut en partie se justifier dans l'expression de ses récits particulièrement lorsqu'elle nous fait comprendre que le calcul mental est un outil du quotidien, pas vraiment indispensable pour le développement de l'élève. Pour preuve, voilà un extrait significatif de son récit : *« Aucun enfant ne redouble le CP ou n'est pris en charge par le RASED parce qu'il a des difficultés en calcul mental, c'est plutôt l'acquisition de la lecture qui est mise en avant. De la même manière le calcul mental n'est pas une épreuve du brevet ou du bac et les élèves ont droit à la calculatrice [...]. Donc, s'ils peuvent compter sur leurs doigts, faire des dessins ça ne me dérange pas du moment qu'ils trouvent le résultat [...] Moi, je n'attends pas spécialement qu'il y ait d'automatismes »*.

Au niveau de son itinéraire d'enseignement, c'est un dispositif de type 1 donnant la priorité au surcomptage et à la schématisation au détriment du développement des procédures de calcul. Donc ce n'est pas étonnant que les élèves éprouvent des difficultés dans la résolution de problèmes, ne serait-ce qu'à trouver le résultat d'une addition en prenant appui sur les repères 5 et 10. D'ailleurs, il est dit dans une des conclusions de la COPIRELEM (2012) que « la familiarisation avec les nombres et les calculs élémentaires enrichit les outils heuristiques des élèves » : des tâches fondamentales et nécessaires que nous n'avons pas observées chez cette enseignante. Un manque de dynamisme que Vergnaud et Durand (1976) tentent d'expliquer lorsqu'ils comparent « le calcul relationnel » par opposition au « calcul numérique » qui pour eux est l'une des composantes de la résolution qui pose le plus de difficultés aux élèves. C'est pourquoi, selon les didacticiens (Butlen et Pézard, 2000 ; Fayol,

2007), l'automatisation des calculs et la connaissance de nombreux faits numériques libèrent de l'espace mental pour la résolution de problèmes. En d'autres mots, c'est une manière de dire que « reformuler, imager, concrétiser le problème par exemple, des éléments externes (i.e, doigts, bâtonnets, cubes) ou bien encore le représenter sous forme graphique sont autant de méthodes qui facilitent la construction d'une représentation mentale de la situation décrite dans l'énoncé et maximisent ainsi les chances d'une résolution correcte » (Barouillet et Thévenot, 2009).

Concernant les stratégies d'enseignement, il semble évident que les problèmes que lui pose l'apprentissage du calcul chez les élèves sont donc à la fois d'ordre procédural et conceptuel avec une absence totale de mode d'institutionnalisation. Plus précisément, ils prennent souvent leur origine dans la fragilité des acquisitions des plus précoces qui compromettent la compréhension que les élèves ont du nombre et se prolongent au-delà des premiers apprentissages. Après cette réflexion profonde, nous notons que les difficultés les plus importantes chez cette enseignante concerne l'utilisation du nombre dans la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux. Bien entendu, l'apprentissage d'autres notions est ici proscrit compte tenu des problèmes et surtout quand les difficultés des élèves ne sont pas clairement identifiées. Par conséquent, nous voyons qu'apprendre aux élèves exige un travail de l'esprit et parfois du corps, cependant pour persévérer, il faut sans doute de la volonté, une forme de discipline, une tolérance à la frustration, voire une forme de souffrance constatée chez cette enseignante. Il faut aussi une capacité de se projeter dans l'avenir, de se représenter les bénéfices qui en découleront des connaissances, des compétences nouvelles ou des résolutions de problèmes. Il est certain que certains élèves peuvent différer longtemps une satisfaction, d'autres, un besoin particulier souvent de nature exogène, parfois sans rapport avec le contenu spécifique de l'apprentissage : des ressources propres passant par un travail d'écoute, un travail de mise en ordre et de réorganisation des connaissances afin de permettre à l'apprenant de se reconstruire par une activité mentale adaptée moyennant certains obstacles au gré d'une expérience et d'une réflexion sur l'expérience.

- ***Conclusion sous couvert d'un principe comparatiste***

Comparaison n'est pas raison, dit l'adage, c'est pour cette raison que nous avons cherché d'abord les points communs, les différences et leurs causes doublées d'une démarche explicative dans le rapport au manuel, l'itinéraire d'enseignement et les stratégies d'enseignement. En toute simplicité, si la comparaison envisagée ici se distingue de l'analogie²³¹, de l'homologie²³² et de l'analyse

²³¹ L'analogie (du grec analogia) est une « ressemblance, établie par l'imagination [...] entre deux ou plusieurs objets de pensée essentiellement différents » (*Petit Robert*, 1998).

²³² L'homologie désigne la « qualité de ce qui est homologue ». Homologue vient des mots grecs « homos », semblable, et « logos », discours. Cet adjectif qualifie « des éléments qui, dans des figures semblables, sont disposés de la même

contrefactuelle²³³, elle renvoie, quant à elle, à « l'action de comparer », c'est-à-dire à l'établissement d'un rapport qui existe entre les objets d'enseignement, leur mise en parallèle et leur confrontation. Globalement, elle désigne une action et non un constat car elle n'est pas a priori orientée, contrairement à l'analogie et surtout à l'homologie, plus particulièrement vers la recherche des ressemblances (Vigour, 2005). Ainsi, la comparaison telle que nous l'entendons peut être considérée comme une mise en regard explicite dans la quête tant des ressemblances que des différences. Autrement dit, il n'y aura pas lieu de s'étonner de la quasi-absence d'effets cumulatifs des réflexions sur la comparaison, du fait que les comparatistes « continuent de réinventer la roue » (Scheuch, 1989). Donc, l'important pour nous est de retenir que « comparer, c'est à la fois assimiler et différencier par rapport à un critère. C'est donc relever les différences et les points communs en fonction d'un critère qu'il convient de définir au préalable et qui orientent notre regard. Ainsi, partant de ce principe, si l'on conçoit la comparaison comme un ensemble de démarches que suit l'esprit pour découvrir et démontrer la vérité et, plus largement un ensemble de démarches raisonnées suivies pour parvenir à un but, alors la comparaison constitue bien une méthode (Vigour, 2005).

De manière concrète, si nous observons les points communs et les différences au regard des critères de comparaison tels que le rapport au manuel, nous découvrons que les professeurs n° 1 et 6 (Astride et Pascal) assurant la gestion des « classes performantes », ont en commun une opinion relativement critique et divergente concernant la progression académique en mettant en avant le surplus d'activités de numération pour l'un et un aspect très minoré, pour l'autre, par rapport aux compétences attendues par la tutelle sans oublier une certaine absence de procédures de calcul réfléchi. Disons, un regard totalement dichotomique par rapport à l'importance apportée sur le développement des habiletés calculatoires et le développement des connaissances numériques qui selon eux, est tout à fait appréciable. Nous notons également que l'un comme l'autre valorise des manuels à fort potentiel didactique (*Cap maths* et *J'apprends les maths*) avec une absence de suivi pas à pas en ayant des pratiques éloignées. Des différences que nous retrouvons également au niveau de l'itinéraire d'enseignement de type 1 pour Astride (prof n°1) et de type 2 pour Pascal (prof n°6). Par contre, cette différenciation n'est pas aussi visible dans les stratégies d'enseignement car, ce sont tous deux des enseignants fonctionnant avec une gestion totalement procédurale pour l'un (par l'explicitation, la hiérarchisation et la trace écrite des procédures) et en plus pour l'autre, un aspect déclaratif avec la

façon » : en chimie, « se dit de corps organiques qui remplissent les mêmes fonctions et suivent les mêmes métamorphoses ».

²³³ La méthode d'analyse contrefactuelle, introduite par Robert W. Fogel, prix Nobel d'économie en 1993, « consiste à mesurer l'influence d'un facteur sur une évolution par la différence entre cette évolution réellement observée et celle, hypothétique, à laquelle on aurait assisté si le facteur concerné n'avait pas existé. Cette dernière situation est construite économétriquement à partir des autres facteurs » [*Problèmes économiques*, 1999].

mise en œuvre de stratégies de décomposition-recomposition favorisant le progrès vers le calcul. In fine, nous constatons que les approches pédagogiques de chaque enseignant sont au centre du patrimoine de l'enseignement des mathématiques. En fait, elles sont essentielles pour notre action de chercheur, car elles sont plus importantes que les idées pour faire progresser la discipline même si le calcul mental ne bénéficie pas encore d'une grande reconnaissance au niveau de l'académie.

Quant aux professeurs n°3, Béatrice, (gérant la classe « peu performante ») et 5, José, (gérant la classe « moyennement performante »), qui sont tous deux des « adaptateurs », le suivi pas à pas de la progression académique les place parfois dans un non-sens pédagogique car les compétences à travailler sont souvent très éloignées des exercices proposés dans les manuels utilisés. À cet effet, ils valorisent tous deux des supports à fort potentiel didactique comme *J'apprends les maths* pour l'un et *Euromaths* pour l'autre associé à un ouvrage à faible potentiel didactique comme *Litchi*. Par conséquent, nous ne sommes pas surpris de constater des pratiques éloignées quant au choix des exercices et des objectifs à atteindre sans évidemment de suivi pas à pas. Une fois de plus, se pose ici l'utilité réelle de l'ouvrage car les manuels en mathématiques ne sont pas toujours neutres et constituent bien souvent le seul matériel pédagogique disponible, ce qui accroît son importance sur le plan de la réussite scolaire et sa légitimité concernant les valeurs diffusées (Montagne, 2001). Par suite, au niveau de l'itinéraire d'enseignement, la différence semble évidente entre ces deux enseignants, à l'instar des professeurs n°1 et 6, où l'un privilégie le surcomptage et la schématisation au détriment des procédures de calcul (Béatrice) et l'autre le calcul sur les objets (José) pour tenter de permettre aux élèves de développer la mémorisation chez les élèves.

Concernant leur stratégie d'enseignement, l'incohérence discursive et opérationnelle est de mise surtout chez la professeure n°3 (Béatrice), ce qui provoque des problèmes de compréhension-application chez les élèves. C'est à se demander parfois quelles sont les bases fondamentales de son enseignement en calcul mental. Tandis que le professeur n°5 (José) plus porté sur un dispositif « explication-application », comme explicité supra, s'attache quand même à institutionnaliser en mode « déclaration » sans phase de synthèse. Nous voyons en effet que les sources de difficulté résident chez cet enseignant (José) à développer la capacité des élèves à appréhender les enjeux des situations, notamment pour ce qui concerne notre recherche des moments où ils doivent reproduire des automatismes et des moments où ils doivent également les mobiliser pour produire des procédures spécifiques voire nouvelles. Cependant, nous sommes convaincus qu'une pratique régulière de calcul mental pouvait permettre aux élèves de combler leur manque de connaissances initiales en ayant des objectifs visant à installer d'une part des modules de calcul automatisés et accroître un répertoire de faits numériques mémorisés des élèves et d'autre part, développer des capacités d'adaptabilité en

enrichissant et en hiérarchisant les procédures de calcul de chaque élève. Pour conclure ici, c'est une manière de dire qu'il faut insister sur la nécessité d'institutionnaliser certaines procédures et leur domaine de validité (Butlen et Masselot, 2010).

Pour conclure cette analyse comparative, au regard du panel identifié, les professeures 2 (Séverine) et 4 (Sophie) gérant des classes « moyennement performantes » sont l'une « adaptatrice » et l'autre « utilisatrice²³⁴ ». Nous dénotons chez elles des opinions divergentes quant à la progression académique ou l'une dénonce un manque de précision associé à trop de simplicité (Sophie) et l'autre au contraire apprécie le suivi pas à pas (Séverine). Nous constatons également une différence notable à propos de leur opinion sur les manuels quand la professeure n°2 (Séverine) valorise l'ouvrage à faible potentiel didactique *Pour comprendre les maths* en corrélation avec la progression académique et la professeure n°4 (Sophie) privilégie *Cap maths*, support à fort potentiel didactique, en valorisant son suivi pas à pas et en confirmant ainsi son point de vue arrêté sur la progression²³⁵ du GAM²³⁶.

Certes, il va de soi qu'il n'y a pas de suivi pas à pas, dans la relation avec le manuel utilisé chez l'enseignante n°2 (Séverine) compte tenu de son opinion préalable signifiée paradoxalement par des pratiques proches de l'ouvrage valorisé. C'est une ambivalence qui peut s'expliquer par l'absence éventuelle d'expérimentation correspondant soit à des manques de connaissances, soit à une difficulté à prendre en compte les enjeux des apprentissages. Au regard avisé de la professeure n°4 (Sophie), nous trouvons une certaine imbrication entre ses relations au manuel utilisé et ses opinions sur la progression académique. Cependant, malgré le suivi pas à pas observé en corrélation avec l'ouvrage privilégié (*Cap maths*), ses pratiques demeurent éloignées car l'enseignante fait fit d'une part, des phases d'institutionnalisation par des difficultés à installer une certaine paix scolaire et d'autre part, annule la phase de dévolution par l'affichage direct au tableau des nouveaux calculs à résoudre sous forme de constellations pour soi-disant anticiper les difficultés possibles, ce qui défavorise l'atteinte des objectifs attendus.

Compte tenu de ce qui vient d'être dit, on aurait pu s'attendre à avoir des itinéraires d'enseignement différents mais comme nous l'avons explicité supra, elles se retrouvent toutes deux dans le type 1 avec des dispositifs pédagogiques « explication-application » pour Séverine (professeur n°2) axé quasiment en mode déclaratif au niveau de l'institutionnalisation avec une quasi-absence des phases de synthèse. Quant à Sophie, il est clair que son dispositif pédagogique « problème- compréhension-

²³⁴ Voir la typologie a posteriori du travail de préparation en fonction du rapport au support de l'enseignant de Leroyer (2013) en annexes IV Grille 62.

²³⁵ Voir Annexes I Fiche 7

²³⁶ GAM : Groupe Académique de Mathématiques

application » avec anticipation des difficultés la place en mode « bilan » donc procédural avec bien entendu une quasi-absence des phases de synthèse.

Pour terminer ici, nous avons mis en évidence les opinions et les relations par rapport au support pédagogique et aux différentes directions entreprises par les enseignants pour assurer la réussite des élèves dans l'apprentissage du calcul mental. En effet, nous sommes d'avis que la décomposition des nombres dans l'apprentissage des opérations mentales mais aussi dans la connaissance des nombres eux-mêmes peut combler le manque d'adaptabilité observé chez certains élèves, tout ceci moyennant la mobilisation des procédures de calcul mental les mieux adaptées aux nombres mis en jeu. Ensuite, nous avons essayé de dégager les apports et les limites de l'enseignement visant à développer les compétences attendues au moyen de la production d'éléments structurants pour exploiter les savoirs construits. De plus, cette recherche a également montré la nécessité de prévoir un enseignement proposant des cheminements cognitifs différents en utilisant des outils personnalisés et adaptés aux manques ainsi révélés.

Profil de classe	PROF	RAPPORT AU MANUEL			Itinéraire d'enseignement	STRATÉGIE D'ENSEIGNEMENT	
		Opinion sur la progression académique	Opinion sur les manuels	Relation avec le manuel utilisé		Dispositif pédagogique	Institutionnalisation
Peu performante	N°3 Béatrice 39 ans Licence Classique	+	+	Pas de suivi pas à pas, pratiques éloignées	Type 1 Surcomptage et schématisation, pas de calcul	« problème – compréhension – application »	Mode: aucun Gestion: correction publique, pas phase de synthèse
		Suivie pas à pas	Valorisé: J'apprends les maths				
Moyennement performante	N°2 Séverine 41 ans Licence - REP	+	+	Pas de suivi pas à pas, pratiques proches	Type 1	« explication – application »	Mode: « apport et déclaration » Gestion: quasi-absence des phases de synthèse
		Suivie pas à pas	Valorisé: Pour comprendre les maths				
	N°4 Sophie 55 ans Bac L REP	--	+	Suivi pas à pas, pratiques éloignées	Type 1	« problème – compréhension – application » avec anticipation des difficultés	Mode: « bilan » Gestion: quasi-absence des phases de synthèse
		Manque de précisions, trop implicite	Privilegié: Cap maths Suivi pas à pas				
	N°5 José 58 ans Bac S Classique	+	--	Pas de suivi pas à pas, pratiques éloignées	Type 2	« explication – application »	Mode: « déclaration » Gestion: pas de phase synthèse
		Suivie pas à pas	Utilisés : Litchi, Euromaths, J'apprends les maths aucun privilégié				
Performante	N°1 Astride 46 ans Maîtrise S. Application	+	+	Pas de suivi pas à pas, pratiques éloignées	Type 1	« problème – compréhension – application »	Mode: « bilan » Gestion: explication, hiérarchisation et trace écrite des procédures
		Trop d'activités de numération	Valorisé: Cap maths Suivi partiel				
	N°6 Pascal 34 ans Maîtrise S. REP	--	+	Pas de suivi pas à pas, pratiques proches	Type 2	« observation-compréhension-application »	Mode: « apport et bilan » Gestion: explication et trace écrite de la procédure de référence
		Exigence revue à la baisse, peu explicite	Valorisés: J'apprends les maths Suivi pas à pas				

Tableau 76 - Synopsis : Choix didactiques et pédagogiques des enseignants du CP

2.1.8 Réponse à la première sous-question de recherche

Au regard des résultats obtenus lors de l'enquête de terrain et du nombre important des variables observées chez les enseignants tous profils de classe confondus, l'hypothèse proposée où l'ensemble des enseignants tient compte principalement de leur situation de travail, des élèves et d'eux-mêmes est globalement confirmée avec certes des points divergents quant à la situation de travail où l'on constate par exemple un faible suivi des programmes chez certains ou encore une non utilisation des ressources institutionnelles quand d'autres exploitent intelligiblement les documentaires et matériaux disponibles. Il est vrai aussi que nous trouvons pratiquement la même hétérogénéité quant à l'apprentissage et au suivi des élèves concernant l'accès au sens des notions, les compétences visées ou encore les comportements individuels ou collectifs mis en œuvre dans les situations d'apprentissage. Nous avons observé également que tous les enseignants ont fait l'objet de quelques recherches sur les contenus des savoirs en jeu et leur mise en textes sans les lier pour certains d'entre eux aux obstacles rencontrés dans leur pédagogie. En définitive, nous confirmons cette hypothèse que nous qualifions d' « aide didactique » à l'instar de certains didacticiens qui considèrent les projets d'enseignement comme des « instruments » sélectionnés ou élaborés par l'enseignant pour constituer des facilitateurs, à différents moments des activités didactiques (Astolfi, Darot, Ginsburger-Vogel et Toussaint, 1997).

In fine, nous gardons pour la postérité une réflexion à porter sur les activités choisies et le feed-back des élèves que nous considérons comme des éléments indispensables à l'appropriation des savoirs et savoir-faire en mathématiques. D'autre part, il serait peut-être judicieux de reconsidérer un travail autonome et adapté à chaque élève en cherchant à englober les aides didactiques définies comme la catégorie réflexive pensée ou choisie par l'enseignant. Nous terminons enfin par l'expression mise en valeur par Bernard Schneuwly (1987) quand il avance que « [...] l'outil devient le lieu privilégié de la transformation des comportements : explorer leurs possibilités, les enrichir, les transformer sont autant de manière de transformer l'activité qui est liée à leur utilisation » (p.158).

2.2. Pratiques privilégiées par les enseignants pour venir en aide aux élèves les plus fragiles en calcul mental au CP

À la lecture de la deuxième question, il s'agit ici de répondre par identification des pratiques privilégiées par les enseignants lors des observations pour venir en aide aux élèves les plus fragiles en calcul mental au CP. En effet, chaque enseignant devrait construire un enseignement adapté aux apprentissages effectifs des élèves de manière à répondre à leurs difficultés et à favoriser ainsi l'acquisition pérenne des faits numériques et des procédures en calcul mental, comme il est attendu par l'institution. Concrètement, s'agit-il de dispositifs institutionnels comme nous invite à le

considérer Piquée (2007) pour les élèves en difficulté ou encore des actions ponctuelles mises en œuvre dans le quotidien des classes ordinaires ou enfin d'une méthode pédagogique censée répondre aux besoins particuliers des élèves les plus nécessiteux (pédagogie différenciée, par exemple) ?

Il va sans dire que la notion d'aide aux élèves présentée dans ce cadre de recherche nous permet de mettre en exergue l'aide mathématique prodiguée aux élèves ayant des difficultés variées car cette notion peut être aussi disparate que multiple par ses aspects d'ordre pédagogique, spécialisé, éducatif, méthodologique, individualisé, personnalisé, cognitif, métacognitif, didactique et stratégique. C'est une manière de dire que cela interroge tout autant le dispositif institué que les actions professorales au regard des programmes pédagogiques de type « projet d'aide » que des « postures » professionnelles relevant d'une éthique revendiquée (éducabilité, considération positive inconditionnelle).

Pour ce faire, nous faisons l'hypothèse que dans le champ de la question posée, les professeurs des écoles du panel mettent en œuvre des pratiques globales (enseignement explicite, activités collectives et rituelles, différenciation par les procédures, simulation mentale de l'action suivie d'une validation par le matériel, verbalisation des procédures médiatisées par le maître, débat entre pairs, rédaction de traces écrites, institutionnalisations souples ou locales, etc.), des pratiques d'individualisation (différenciation par les ressources disponibles, les contraintes, la tâche, le rôle dans les jeux et les supports, encouragements, interventions du maître pour la concentration et la mise au travail) ou autres. Nous voyons déjà à travers le fondement de cette hypothèse que notre démarche se situe ici au croisement de deux champs théoriques : l'un, didactique qui étudie les phénomènes d'enseignement en considérant le rôle central que joue la structure conceptuelle du savoir et l'organisation du milieu de la recherche, et l'autre, anthropologique qui situe sa focale sur la dimension culturelle qui préside aux logiques pratiques des enseignants et des élèves, en considérant notamment l'arrière-plan qui comme l'habitus, inscrit ses logiques dans un univers de capacités (ce qu'il est possible de faire) et de procédures (comment faire dans tel contexte). Le tableau synoptique des représentations des enseignants du panel sur l'élève en difficulté en calcul mental et le tableau synoptique des pratiques perçues par ces professeurs comme les plus favorables pour tenter de pallier les difficultés des élèves en calcul mental sont en annexes V Grilles 2 et 3.

Après cette clarification, il est opportun de préciser l'ensemble des problèmes rencontrés généralement par le groupe des enseignants. C'est une manière de dire qu'il y a autant de difficultés d'apprentissage qu'il y a d'élèves. Mais, y aura-t-il autant de réponses favorables apportées par les professeurs tout au long des séquences d'enseignement observées ? Pour être plus précis, voyons

ensemble et commençons par lister les situations alambiquées rencontrées par les professeurs. Concrètement, nous identifions cinq catégories de difficultés rencontrées chez les élèves des différents profils de classe (voir annexes V grilles 4 et 5) :

- Première catégorie : Difficultés liées à la production rapide des faits numériques (« tables ») par récupération ou reconstruction instantanée :
 - *Difficultés liées à la mémorisation des résultats des tables d'addition ;*
 - *Manque de disponibilité des faits numériques lors des calculs ;*
 - *Difficultés à mémoriser les tables en raison des difficultés de langage.*
- Deuxième catégorie : Difficultés liées à l'utilisation des points d'appui pour effectuer des calculs :
 - *Difficultés liées l'utilisation des procédures de référence (complément à 5 et à 10) ;*
 - *Difficultés liées à la mise en fonction des propriétés des opérations (commutativité et associativité de l'addition) ;*
 - *Méconnaissance des décompositions additives variées des petits nombres ;*
 - *Connaissance et disponibilité des compléments à 10 insuffisantes ;*
 - *Difficultés pour décomposer et recomposer les nombres jusqu'à 10.*
- Troisième catégorie : Difficultés liées à la connaissance de la suite numérique :
 - *Méconnaissance de la suite numérique orale des nombres dans l'ordre ;*
 - *Absence de maîtrise de la notion de cardinal au-delà de trois ;*
 - *Erreurs dans le comptage de deux en deux ou de dix en dix ;*
 - *Méconnaissance des relations entre les nombres.*
- Quatrième catégorie : Difficultés liées à la mise en œuvre de procédures variées utilisant les propriétés des nombres et des opérations pour effectuer des calculs complexes :
 - *Recours systématique aux procédures de calcul automatisées tels que le recomptage ou le surcomptage au détriment des procédures de calcul sur les nombres ;*
 - *Manque d'adaptabilité : Appropriation difficile des procédures les moins coûteuses et les plus adaptées aux propriétés des nombres et des opérations en jeu ;*
 - *Parasitage d'un résultat mémorisé erroné dans la mise en œuvre des procédures (par exemple, "l'appel $8 + 4$ " active la réponse " $8 + 4 = 11$ ").*

- Cinquième catégorie : Difficultés liées à la résolution de problèmes :
 - *Manque d'automatisation des calculs et méconnaissance des faits numériques freinent la résolution des problèmes ;*
 - *Absence de prise d'initiative lors de la résolution de problème dues à la méconnaissance de la variété des procédures utilisables ou à un manque de familiarisation avec les nombres et les calculs élémentaires.*

Parmi la diversité des problèmes identifiés ci-dessus, il est devenu classique de distinguer, selon les travaux de Vergnaud (1983) et Riley, Greeno et Heller (1983) résumés par Fayol (1990), plusieurs groupes de problèmes face auxquels les élèves doivent apprendre à recourir avec discernement aux opérations additives et soustractives. Plus précisément, cette catégorie de problèmes se différencie en fonction de la relation sémantique impliquée : changement, combinaison, comparaison et égalisation. C'est pour cela, qu'il est possible de distinguer les difficultés liées à la production rapide des faits numériques, liées également à l'utilisation des points d'appui pour effectuer les calculs, liées aussi à la connaissance de la suite numérique. Par ailleurs, il existe aussi des problèmes auxquels nous réservons le qualificatif de complexe pour signifier que leur solution, la combinaison de plusieurs procédures et ceci sans qu'existe un schéma canonique de résolution. C'est le cas par exemple où le professeur doit faire preuve de créativité quand il se trouve face à des élèves ayant un manque d'automatisation des calculs lié à une méconnaissance des faits numériques, ce qui freine, bien entendu, la résolution de problèmes.

Par conséquent, pour donner un sens pratique à la deuxième question posée, nous avons jugé utile d'organiser notre discours autour de deux axes afin de confirmer ou infirmer notre hypothèse car son présupposé demande à être évalué au regard des facteurs qui nous préoccupent ici agissant rarement indépendamment les uns des autres. C'est une manière de dire, au vu d'une certaine logique, que l'élève épistémique doit mobiliser, exécuter et coordonner plusieurs procédures mentales, autrement dit, face à un problème complexe, ce dernier doit planifier sa démarche de manière autonome, ce qui suppose selon Schoenfeld (1994) une fonction cognitive de planification. C'est un paramètre que nous jugeons important car une fois l'ordre des procédures décidé, il faut non seulement mobiliser chacune d'elles mais aussi les exécuter correctement et, parallèlement examiner dans quelle mesure l'enchaînement des procédures conduit réellement à la solution du problème. Sur ce point, l'auteur pense qu'il est important que l'élève pilote le processus de résolution, car cette fonction, désignée

généralement par le terme de « self-monitoring » ou « self-monitorage »²³⁷ contribue de façon déterminante à l'autorégulation cognitive absolument nécessaire à la bonne fin de toute tâche.

Concrètement, au prorata de ce qui vient d'être dit, nous allons relever :

- Dans le premier axe, les difficultés identiques rencontrées chez l'ensemble des élèves quel que soit le profil de classe (voir annexes V Grille 7) et les réponses apportées par les enseignants pour tenter d'amener les élèves à les résoudre et acquérir des procédures mnémoniques durablement (voir tableau de synthèse en annexes V Grille 9) ;
- Ensuite, le deuxième axe nous permettra d'identifier les difficultés singulières rencontrées chez les élèves au regard des différents profils de classe (voir annexes V Grille 8) et les réponses didactiques et pédagogiques apportées par les professeurs (voir tableau de synthèse en annexes V Grille 10).

Suite à ce constat, nous tenterons de découvrir quelles sont les pratiques perçues par les professeurs comme les plus opérationnelles et le plus fréquemment mises en œuvre par les enseignants pour permettre aux élèves en difficulté de réussir compte tenu des écueils rencontrés dans l'apprentissage des opérations mentales.

a) Premier axe : difficultés identiques rencontrées chez l'ensemble des élèves quel que soit le profil de classe et réponses apportées par les enseignants

Cet axe-là est d'autant plus important, car il nous permet de faire émerger les problèmes d'apprentissage récurrents rencontrés par les élèves en difficulté, de manière systématique, quel que soit le profil de classe, ce qui nous permet d'identifier la prégnance de l'ensemble des obstacles majeurs, et de découvrir leur niveau répétitif observé au cours des différentes leçons. D'emblée, nous remarquons une variabilité séquentielle de difficultés très prononcée d'un professeur à l'autre (voir annexes V Grille 7).

• *Difficultés liées à la mémorisation des faits numériques*

Concrètement, concernant la première catégorie (difficultés liées à la production rapide des faits numériques par récupération ou reconstruction instantanée), les professeurs n°4 (Sophie), 2 (Séverine) et 3 (Béatrice) rencontrent à un rythme constant des difficultés liées à la mémorisation des résultats des tables d'addition, quand les autres enseignants n°5 (José), 6 (Pascal) et 1 (Astride) gèrent

²³⁷ Selon Hartman (2001), le self-monitoring ou self-monitorage de l'élève est favorisé par la présentation explicite des buts poursuivis dans une leçon donnée, l'interaction de l'enseignant avec les élèves (questions, suivi de la compréhension, etc.) et les stratégies de « modélisation » du maître et de l'élève par verbalisation de toutes les étapes de son raisonnement.

les mêmes obstacles pédagogiques de manière épisodique (voir annexes V Grilles 6 et 7). De ce fait, nous inférons que les effets produits sont à l'inverse de ce qui est recherché : du côté de l'élève, cet axe-là agit comme une complexification qui perturbe les conditions mêmes de l'apprentissage. Nous assistons à ce que Roiné (2012) nomme « effet pharmakia » en référence au terme grec classique signifiant tout à la fois « remède » et « poison ». En fait, les dispositifs mis en place surtout par les enseignants n°4 (Sophie), 2 (Séverine) et 3 (Béatrice) supposés « remèdes » aux difficultés des élèves apparaissent bien comme un « poison » dans la mesure où les conditions didactiques des enseignants semblent être ignorées. Cette ignorance que nous retrouvons par ailleurs semble manifester une certaine « cécité didactique », à savoir l'impossibilité pour les enseignants de considérer les paramètres (didactiques et situationnels) sur lesquels ils pourraient effectivement agir pour aider leurs élèves. À bien y regarder, les apprentissages sont considérés en soi, non interrogés didactiquement car ils contribuent à compliquer le travail des élèves au point que celui-ci devienne incertain. À cet effet, nous faisons l'hypothèse ici que les professeurs ne peuvent s'abstraire de la culture qui inscrit leur logique pratique dans les « toiles de signification » (Geertz, 1973) que l'institution, la noosphère et plus prosaïquement le « sens commun » (Geertz, 1986) imposent à leur raison d'agir (Bourdieu, 1994).

À partir de cette analyse interprétative, peut-on voir ici la question que pose Piquée (2010) sur la manière d'aider les élèves en difficulté, le rôle des enseignants, leur mission, leur éthique professionnelle intégrée à leur engagement dans des actions où tout est mis en œuvre pour assurer réussite et progrès aux élèves dont ils ont la charge. Pour aller plus loin, nous trouvons également dans la catégorie précitée d'autres difficultés mais de manière minorée chez les enseignants du panel (voir annexes V Grille 7). Il s'agit effectivement d'un manque de disponibilité de faits numériques lors des calculs autrement dit les élèves ne perçoivent pas et ne comprennent pas facilement les effets des transformations affectant la quantité (ajout, retrait, partage) et ne maîtrisent pas de ce fait les opérations d'additions et de soustractions. En fait, cette incapacité est d'autant plus fréquente que lesdites opérations ne font qu'atténuer le déroulement des transformations, au fur et à mesure de leur survenue.

D'ailleurs, les travaux de certains auteurs relatifs à la résolution des additions simples par les élèves en difficulté montrent que ceux-ci passent par une série d'étapes telle que la réunion physique des entités dont la somme est recherchée. Par exemple, rassembler trois billes et deux billes puis dénombrer l'ensemble résultant (stratégie dite du tout compter) pour la re-mémorisation directe et automatique de cette somme est problématique. C'est sans doute au cours de cette phase que les manipulations physiques puis mentales doivent devenir progressivement des opérations où le

traitement symbolique doit libérer l'élève des contraintes des situations dans des conditions encore mal connues (Fayol, 2012). Butlen (2007) et Butlen et Pézard (2003) expliquent ces difficultés par un défaut de prérequis surtout chez les élèves de niveau moyen et faible. Plus précisément, ils pensent que si l'on demande à un élève de calculer mentalement $9 + 4$, il ne doit pas reproduire une technique automatisée mais mobiliser par exemple le résultat automatisé pour mettre en œuvre une procédure adaptée. Selon les auteurs, cela nécessite donc que l'élève perçoive très vite la qualité de la tâche qui lui est demandée, c'est-à-dire produire un résultat automatisé (installer en mémoire à long terme) pour adapter une connaissance de ce type dans le cadre d'un calcul plus complexe. Autrement dit, l'élève doit pouvoir faire la différence entre les calculs qui nécessitent une réponse automatisée et ceux qui demandent une adaptation. Néanmoins, les auteurs précisent que « si une pratique régulière de calcul mental permet progressivement aux élèves, en général, d'apprendre à déterminer ces enjeux et donc de profiter de ce type d'activité, les élèves les plus en difficulté s'en révèlent malheureusement souvent incapables même dans un dispositif palliant les prérequis absents » (Butlen, Charles-Pézard et Masselot, 2014). Il va de soi que cette dite difficulté corrobore avec des difficultés de langage ce qui représente un épineux problème rencontré à des intensités variables chez les enseignants du panel (annexes V Grilles 6 et 7). À cette fin, nous pensons que l'enseignement du calcul mental, au regard de cette catégorie de problèmes doit être le lieu d'un travail lent, quotidien, conscient, explicité aux élèves pour les faire accéder à une posture distanciée face au langage (et au monde) : ce en quoi les mathématiques peuvent contribuer grandement à l'appropriation par les élèves d'usages scripturaux de la langue (Baudart, 2011).

Suite à la pluralité des difficultés observées chez les élèves, nous constatons des aménagements individuels (chemins cognitifs) pour répondre à leur besoin d'aide (soutien individualisé, matériel spécifique, etc.) avec comme objectifs une réussite dans la progression de chaque élève compte tenu de son potentiel individuel. Pour ce faire, les professeurs n°4 (Sophie), 2 (Séverine) et 3 (Béatrice) font le choix d'une série d'entraînement de calcul dictés sur les tables d'addition et de coloriages de pièces de puzzle sur lesquels sont placés des sommes tout comme l'utilisation de jeux de bataille (chaque enfant tire deux cartes et calcule le total des points) - (annexes V Grilles 9). Cette approche présente, certes, une forte cohérence dans les tâches proposées mais pose le problème de la gestion existant à ce niveau de classe entre processus de dévolution et processus d'institutionnalisation. Par conséquent, les modes de réponse choisis ne semblent pas relever de la dévolution des conditions de leur réalisation, la prise d'informations sur les élèves et leur production mises en regard des adaptations effectuées ou non dans la hiérarchie des procédures mises en œuvre. Il serait sans doute plus opportun de repenser le choix des situations d'apprentissage, le degré de complexité et la durée des situations, le découpage de la tâche, le contexte des situations et l'ancrage

du nouveau dans l'ancien. C'est une manière de dire qu'il ne s'agit pas ici de se précipiter à poser les opérations sans compréhension au contexte, mais plutôt d'explorer des situations qui donnent du sens aux actions liées aux opérations de base d'addition et de soustraction de les mettre en action puis d'évoluer progressivement vers le calcul mental. Nous pensons que cette mise en place est fondamentale, car il faut prendre le temps nécessaire pour installer les opérations en alternant le travail sur le sens (comprendre pourquoi on le fait, le mettre en acte puis en mots) et celui sur l'acquisition nécessaire des automatismes.

Nous retrouvons les mêmes difficultés chez les professeurs n°5 (José), 6 (Pascal) et 1 (Astride) mais avec beaucoup moins de récurrence car ils ont compris que chaque opération doit être parfaitement maîtrisée (voir annexe V Grille 7). Mais, sont encore loin d'aborder le calcul mental en mettant en confiance les élèves tout en sachant que cette matière demande du temps pour s'approprier, mémoriser et s'entraîner. De ce point de vue, nous partageons l'idée de Vergnaud (1985) selon laquelle « les nombres ne sont pas des nombres sans l'addition et la soustraction », car les situations faisant intervenir implicitement ces deux opérations, mais sans avoir recours à des écritures de calculs ou à des dispositions spatiales doivent être considérées comme primordiales au niveau de la mémorisation. Il est à noter aussi en arrière-plan l'importance de la prise en considération des différences entre élèves face aux difficultés rencontrées par les professeurs de l'échantillon dans l'apprentissage du calcul mental. Nous posons ici la problématique de la différenciation pédagogique faisant depuis longtemps l'unanimité, tant chez les décideurs que chez les chercheurs mais c'est une démarche pédagogique qui reste quelque peu absconse pour certains enseignants dans la mesure où « il n'y a pas deux élèves qui progressent à la même vitesse, qui soient prêt à apprendre en même temps, qui utilisent les mêmes techniques d'étude, qui résolvent les mêmes problèmes de la même manière, qui possèdent le même répertoire de comportements et le même profil d'intérêt et surtout qui soient motivés pour atteindre les mêmes buts » (Forget, 2017). Nous voyons donc une hétérogénéité de fait dépassant le seul niveau pédagogique (nous pensons notamment à l'hétérogénéité culturelle, linguistique, sociale, affective). Pour preuve, les causes des difficultés rencontrées selon les enseignants sont variables et multiples et rentrent dans des actions isolées, voire morcelées ce qui augmente leur degré de difficulté dans les tâches proposées. En effet, pour les professeurs n°4 (Sophie), 2 (Séverine) et 3 (Béatrice), ils sont unanimes à dire que « *l'élève n'a pas le goût de l'effort* », « *manque d'attention et de concentration dans la classe* », « *manque de maturité* » et surtout « *ne comprend pas vraiment ce qu'on attend de lui* » (annexes V Grilles 2 et 3).

Chez les enseignants n°5 (José), 6 (Pascal) et 1 (Astride), leurs appréciations sont aussi radicales concernant le comportement des élèves. Par contre, concernant leurs observations sur ce

qu'il faudrait mettre en œuvre pour leur permettre de progresser, ils privilégient le travail en groupe détaché, l'utilisation de matériel et d'outils adaptés au niveau des exigences, la disposition de matériel particulièrement pour la manipulation afin de faciliter la schématisation des calculs à réaliser pour permettre à l'élève de s'approprier la situation (annexes V Grilles 3). Au niveau pédagogique, ils mettent en avant les mises en place d'un contrat de réussite soutenu par l'instauration d'un climat de travail et de compétition sans oublier l'utilisation du jeu et éventuellement de la langue créole pour que les stratégies semblent plus proches et familières à l'élève (annexes V Grilles 3). Cependant, au regard de leur dire au sujet des pratiques perçues favorablement, nous sommes agréablement surpris de la pertinence de leur vision surtout quand ils mettent l'accent sur la temporalité du temps d'apprentissage, l'importance des explications dans la mise en œuvre des stratégies, des procédures et des points d'appui de manière transversale, les valorisations des élèves pour leur donner confiance en eux, disons tout un registre de solutions qui devrait ouvrir l'accès à la réussite à tous les élèves quel que soit leur niveau de capacité (annexes V Grille 3). Nonobstant, nous restons quelque peu dubitatifs par rapport à ces affirmations, car en nous appuyant sur De Beauvoir (1976) nous savons combien la question des différences entre élèves touchent des enjeux totalement sociaux et appelle un traitement approfondi pour ne pas déboucher sur des positions faussement démocratiques. En fait, précise l'auteur, « il n'y a qu'un pas à franchir pour passer du droit à la différence de droit ».

En conséquence, pour revenir à la mémorisation des faits numériques qui est le problème majeur de ce type d'élèves, nous pensons que s'ils n'ont pas débuté, dès le cours préparatoire, avec les tables d'addition en commençant à mémoriser très tôt dans les deux sens les sommes de deux nombres inférieures ou égales à 10 ($7 + 3 = ?$ ou $6 + ? = 9$) et les tables des doubles des nombres inférieurs à 10, ils auront systématiquement des problèmes pour poursuivre au CE1 et au CE2 avec les tables de multiplications. Il va de soi que l'apprentissage des faits numériques ne peut être simplement renvoyé aux familles dans le cadre « des leçons ». En fait, ils doivent faire l'objet d'un travail en classe, car chaque résultat est d'abord exploré et construit en classe, récité et réinvesti, noté dans le cahier de référence en mathématiques. En définitive, selon Lethielleux (1992), Boule (2012), Butlen et Masselot (2010), le calcul mental doit faire l'objet d'une pratique quotidienne d'au moins quinze minutes en privilégiant l'alternance de séries d'entraînement courtes (10 à 15 minutes) avec des séances longues (30 à 45 minutes) visant des apprentissages procéduraux et spécifiques.

Après cette simple analyse, nous pensons que le choix des situations d'apprentissage doit être pertinent pour aider l'enseignant à repérer comment chaque élève de sa classe évolue conceptuellement afin qu'il puisse déterminer pour chacun la « zone de développement prochain »

dans laquelle il peut inscrire son action de médiation didactique, de prévention de la difficulté ou de remédiation (Nima Bocage et Larere, 2006, p.79-94).

- ***Difficultés liées à la disponibilité des compléments à 10***

Cette deuxième difficulté commune, vécue par le panel des enseignants, repose sur l'insuffisance de connaissance et de disponibilité des compléments à 10. En effet, pour conceptualiser les opérations arithmétiques, les élèves doivent comprendre les situations qui fondent ces opérations et apprendre à les utiliser dans les situations où leur usage n'est pas banal : la recherche d'un complément concerne l'addition et les situations de retrait. De manière concrète, les élèves doivent s'approprier la face stratégique de cette conceptualisation, c'est-à-dire savoir calculer de différentes façons une même opération et choisir une stratégie économique en fonction du contexte numérique. En clair, la pratique du calcul mental n'est pas automatisée, donc est inopérationnelle pour acquérir un calcul sûr et rapide avec des procédures simples.

En résumé, les élèves ont des difficultés à mémoriser le répertoire additif élémentaire pour mettre en jeu l'apprentissage des doubles, du complément à 10, mais aussi tout un entraînement à la décomposition et la recomposition. Pour y remédier, Boule (2012) tout comme Butlen (2007) préconisent une pratique régulière pour développer la connaissance des propriétés des opérations, se familiariser avec les nombres et diversifier les procédures de calcul tout en sachant que l'entraînement intensif permet à l'élève de résoudre des problèmes de manière plus efficiente. Tandis qu'un apprentissage tardif est nocif à la compréhension des nombres. De la même manière, une institutionnalisation trop faible ne permet pas la mémorisation des procédures (Butlen, 2007). À cet effet, l'auteur a mis en place une démarche qui consiste dans un premier temps à recueillir sur une fiche les procédures mises en œuvre de façon individuelle, puis dans un second temps, il a relevé à l'oral, les résultats des élèves au fur et à mesure. Les résultats de sa démarche ont été très édifiants et ont mis en évidence trois procédures utilisées par les élèves :

1. Les élèves optent pour le comptage et le décomptage (frise numérique) ;
2. Les élèves appliquent mentalement l'algorithme écrit ;
3. Les élèves utilisent la décomposition canonique.

À la suite de cette expérimentation, il en ressort que l'explication des stratégies ne suffit pas pour les retenir car il est nécessaire que l'élève s'exerce à la décomposition afin de l'ancrer dans sa mémoire à long terme. Au regard de ces éléments de référence, voyons maintenant les réponses apportées par les enseignants. Concernant le professeur n°2 (Séverine) gérant une classe moyennement performante, elle reprend avec l'élève une quantité de dix objets concrets (objets de la classe) et deux boîtes en lui demandant de trouver toutes les manières de ranger les dix objets dans les deux boîtes et

de verbaliser ce rangement : « J'ai 10 craies. J'en mets 6 dans cette boîte et 4 dans l'autre. 6 et 4, ça fait 10 ; $6 + 4 = 10$ ». Ensuite, l'enseignante aide l'élève à noter l'écriture additive pour bien lui montrer le lien entre le nombre et les objets (annexes V Grille 9). Au regard de cette tâche, l'élève commence à utiliser des aides externes et notamment, des objets concrets pour résoudre le problème. Il va ensuite progressivement comprendre qu'il ne peut pas représenter toutes les quantités avec les objets et qu'un comptage purement verbal est possible. Par conséquent, nous pensons que la stratégie la plus sophistiquée sans recours à des aides externes consiste à compter verbalement à partir du plus grand des opérands (ce que l'enseignante ne fait pas). Ainsi, un problème tel que celui-là ($6 + 4$) peut être résolu en prononçant à haute voix et mentalement (7, 8, 9, 10). C'est une manière de dire que l'utilisation répétitive des procédures de comptage résulterait finalement en construction de connaissances arithmétiques en mémoire à long terme (Thévenot et Fanget, 2018). Selon Ashcraft (cité par Thévenot et Fanget, 2018) notamment, « la transition entre procédures de comptage et utilisation massive de la récupération se ferait aux alentours de 8-10 ans pour les opérations de deux nombres à un chiffre ». Dans le même ordre d'idées et de procédures, la professeure n°4 (Sophie) utilise tout d'abord des dés et des dominos pour avoir le domino double cinq. Elle propose quasiment le même exercice en utilisant la représentation des nombres à l'aide des doigts et pose la question à l'élève : « combien manque-t-il pour avoir 10 ? », soit deux mains complètes (voir annexe V Grille 9).

Quant à José, le professeur n°5, gérant comme les autres une classe moyennement performante, il propose à l'élève de trouver le complément d'un nombre pour aller à 10, à l'aide de jetons, de dessins à compléter, de « frappés de mains » à compléter par d'autres « frappés de mains » (voir annexes V Grille 9). Au regard de ces différentes approches, s'il est vrai que les élèves récupèrent bien en mémoire le résultat des additions dont les opérands sont compris entre 1 et 10, nous notons quand même des difficultés sur le plan verbal dans la comptine numérique et la mémoire des faits numériques. C'est une manière de dire que le comptage est déficitaire avec une chaîne numérique verbale moins élaborée que ce que l'on pourrait attendre à cet âge avec toutefois une grande disparité interindividuelle des performances.

S'il fallait établir une comparaison avec les professeurs n°2 (Séverine), 4 (Sophie) et 5 (José) par rapport aux réponses apportées face aux difficultés liées à la disponibilité des compléments à 10, le professeur n°1 (Astride) et 6 (Pascal) gérant des classes performantes, portent un accent intéressant sur la maîtrise de la composition additive des nombres. En effet, ils privilégient d'une part, les exercices de visualisation mentale par reconstitution de la vision d'autrui avec par exemple la boîte de Tchou, mais surtout des jeux de vingt cartes recto verso de manière à s'entraîner à la mémorisation

des décompositions de 10 et la reconstruction rapide des résultats qui en découlent (voir annexes V Grille 9). Sur ce point, le choix des procédures de dénombrement des élèves (comptage, estimation visuelle, essais suivis de vérifications, inférences à partir de faits numériques connus) peut s'interpréter en relation avec les conceptualisations des enseignants bien entendu différentes d'un élève à l'autre sur l'ensemble des séquences d'apprentissage. Nous inférons qu'une telle prise en compte des différents niveaux atteints par chaque élève renvoie au concept vygotskien de « zone de proche développement », c'est-à-dire l'écart entre ce que l'élève sait faire seul et ce qu'il peut faire avec l'aide de l'enseignant (Numa Bocage et Larere, 2006, p.79-94). Suite à ces réponses pédagogiques diverses et variées, nous retenons qu'un élève de cet âge au CP observé en difficulté en classe choisit de raisonner à partir des propositions mathématiques plutôt que d'agir comme un autre directement sur des jetons, des billes ou des buchettes faciles à manipuler. En fait, nous pensons qu'il est capable de prendre des informations, de prévoir les résultats de l'action évoquée avant de réaliser cette action et de vérifier le résultat obtenu si et seulement si, il donne sens aux différentes opérations. D'ailleurs, les réponses apportées par Béatrice (professeur n°3) gérant la classe peu performante montre effectivement, avec son jeu du furet en avant, en arrière (à partir d'un nombre quelconque), les limites de l'enjeu didactique permettant à l'élève d'extraire des invariants opératoires et raisonner à partir de stratégies initiales pour lui donner la possibilité de faire des essais et de vérifier ses réponses. En conclusion, nous nous appuyons sur Barouillet (2006) quand il laisse à penser « que le développement de l'arithmétique élémentaire semble facilité par la compréhension des concepts sous-jacents aux opérations élémentaires et aux nombres qu'elles impliquent ».

- ***Erreurs dans le comptage de 2 en 2 ou de 10 en 10***

Au regard des constats réalisés in situ, il n'y a de cesse d'observer des erreurs dans le comptage de deux en deux ou de de 10 en 10 chez les élèves ayant un comptage déficitaire avec une chaîne numérique moins élaborée que ce que l'on pourrait attendre et un lexique numérique oral tendant à être également déficitaire avec toutefois une grande disparité interindividuelle des performances. Les enseignants observés en sont pleinement conscients d'une manière générale et les réponses apportées sont basées davantage sur le jeu à partir de la connaissance du système numérique oral. C'est pour cela que la maîtrise de la comptine numérique est d'autant plus importante pour travailler le niveau des chaînes sécables chez les élèves afin de les faire réussir dans le comptage de 2 en 2 et éviter si possible des erreurs dans le comptage de 10 en 10. C'est de même dans le dénombrement où il est important de faire comprendre à l'élève l'intérêt du cardinal dans la construction d'une collection équivalente, ce qui évitera à l'élève de faire des erreurs de marquage avec double pointage et surtout à se rappeler des éléments déjà comptés. Il ne faut pas non plus oublier l'intérêt du système en base 10 surtout pour l'entraînement dans l'épreuve avec manipulation car il sollicite positivement la

mémoire de travail. Certains auteurs comme Barry (2013, p.13-35) préconisent également l'utilisation des opérations logiques pour ce type de difficulté dans la mesure où la sériation numérique correcte avec une représentation analogique peut faciliter la classification numérique, c'est-à-dire le classement possible sur une base numérique, par exemple, dans un jeu proche du jeu traditionnel *Zizipan* en Guadeloupe tel que le jeu de la chandelle en France consistant à former un cercle avec huit ou dix joueurs, chacun ayant une pierre à la main. Le but est de passer l'objet à son voisin au rythme du son du tambour, en comptant de 5 en 5 ou de 10 en 10 à chaque changement de main jusqu'à ce qu'un joueur perde le rythme et se retrouve avec deux pierres. A ce moment-là, il est exclu du cercle et le jeu continue jusqu'au gagnant. Nous voyons ici que la verbalisation orale permet à l'élève d'avancer dans la résolution du problème et développe probablement des compétences langagières spécifiques à la narration de recherche de solution en mathématiques. En conséquence, l'ensemble des enseignants du panel est unanime à penser que passer par le jeu peut susciter de l'intérêt pour l'élève (voir annexe V Grille 9), tout comme utiliser le créole pour que les stratégies semblent plus proches et familières, ce qui aidera probablement à bannir les groupes de besoin et les dyades professeur-élève. De plus, l'utilisation de supports locaux pour la mémorisation du répertoire additif est motivante, car ils peuvent être source de motivation entre les tâches d'exploration visuelle et celles du dénombrement. Quoique l'on dise la bonne réussite de l'intervention du professeur repose nécessairement sur une collaboration étroite avec l'élève afin de veiller au transfert des nouvelles compétences de manière adéquate en situation d'apprentissage et de permettre une harmonisation des aides pédagogiques proposées aux élèves.

- ***Recours systématique aux procédures de calcul automatisées tels que le recomptage ou le surcomptage au détriment des procédures de calcul sur les nombres***

À la suite des trois catégories de difficulté déjà identifiées, les enseignants du panel ont souvent recours aux procédures de calcul automatisées telles que le surcomptage ou le recomptage au détriment des procédures de calcul sur les nombres. C'est une manière de dire que l'apprentissage des techniques de calcul mental standard et automatisées rentre en conflit avec le recours à des procédures de calcul plus primitives mobilisées par les élèves. Butlen et Pézard (1992) en parlaient déjà dans leurs travaux en mettant en avant un défaut d'adaptabilité des élèves et un manque de faits numériques mémorisés. Il faut comprendre ici que la mise en place de techniques et de calcul automatisés semble limiter leurs possibilités d'adaptation au calcul du moment, notamment quand l'enseignement ne les prend pas suffisamment en compte. Cela peut se comprendre dans la mesure où pour Fischer (1987) et Boule (1997), une procédure est automatisée quand elle est restituée par l'élève pour résoudre un calcul sans que celui-ci la reconstruise.

En effet, d'une manière générale, nous constatons que trop d'élèves au CP manifestent un retard du développement de l'utilisation des procédures de calcul qui demeurent immatures, ainsi qu'une difficulté à mémoriser, maintenir et récupérer les faits arithmétiques. En fait, nous pensons que les faibles capacités en mémoire de travail²³⁸ rendraient les procédures de comptage particulièrement lentes ce qui favoriserait à la fois les erreurs et l'oubli des opérandes. Par exemple, lorsque le comptage est lent dans l'opération $(7 + 5)$, l'élève qui parvient au résultat en surcomptant (7, 8, 9, 10, 11, 12) risque d'avoir « oublier » au moins l'un des deux opérandes. De ce fait, nous pouvons inférer que ces faibles capacités de mémoire de travail ont un impact négatif et en cascade sur les procédures de calcul, mais aussi sur les activités de transcodage comme dans la résolution de problèmes et surtout sur l'apprentissage.

Certains auteurs comme Michelle Mazeau (2000), vont plus loin et pensent que les difficultés de ces élèves-là sont fortement associées à un déficit des habiletés visuo-spatiales (ou visuo-constructives), ce qui entraîne un impact négatif sur la résolution des opérations posées (mauvais alignement des chiffres, saut de colonne) ou sur le transcodage et notamment le calcul posé. En y regardant de plus près, précise l'auteure, « leur impact est essentiellement périphérique, n'affectant pas le sens du nombre mais seulement le traitement des codes ». C'est une manière de dire que les troubles de l'espace auraient une influence plus profonde, portant sur la représentation ou sur l'utilisation de la ligne numérique correspondant au sens du nombre. D'un autre côté, Fayol (2012) parle de la situation du langage dans ce type de difficultés car il pense que certaines acquisitions paraissent ne pas pouvoir s'effectuer en l'absence d'un système verbal (ou d'équivalent en langue des signes) dans par exemple le dénombrement ou le calcul précis.

Après tout, nous sommes persuadés, que la manipulation reste un moyen de passer du plus concret pour l'élève à une abstraction progressive permettant l'apprentissage du calcul automatisé. C'est aussi un moyen de différenciation car il est vrai que le rythme des élèves étant différent, certains pourront vite abandonner la manipulation d'objets pour faire abstraction, alors que d'autres auront toujours besoin de toucher les objets pour en calculer le nombre total. Par conséquent, nous comprenons pourquoi le recomptage et le surcomptage peuvent être acceptés comme solution face à la faiblesse des acquisitions numériques et arithmétiques des élèves compte tenu de leur âge au CP, du niveau intellectuel et surtout de l'enseignement reçu au préalable. Aujourd'hui, les données convergent suffisamment pour faire apparaître que les troubles en mathématiques sont souvent associés à d'autres

²³⁸ De nombreuses études ont montré que de plus en plus d'élèves ont des capacités en mémoire de travail ou en mémoire à court terme très disparates pour obtenir des performances normales (Fayol, 2012).

troubles que l'on nomme les comorbidités (trouble du langage oral mais surtout écrit, troubles de l'attention, faible capacité de la mémoire de travail, troubles visuo-spatiaux, etc.).

En retour, que font les enseignants du panel face à cette catégorie de difficulté ? Les professeurs n°4 (Sophie) et n°5 (José), gérant les classes moyennement performantes, donnent plusieurs exemples aux élèves pour la mise en application de la procédure souhaitée dans le but de chercher à préciser les domaines d'efficacité associé à une résolution (annexes V Grilles 9). Ainsi, l'élève peut s'avérer alors capable de mobiliser à bon escient le modèle le plus adapté pour résoudre le problème. Nous pensons que la mémoire de l'élève s'organise ici grâce à une certaine catégorisation en s'appuyant sur la connaissance des nombres et les opérations mises en œuvre.

Pour Astride (professeur n°1), ayant une classe performante en gestion, elle réexplique la procédure de calcul souhaitée, ensuite, schématise et affiche différentes étapes de mise en œuvre de la procédure attendue. Puis, met en place un travail « à la manière de... » individuel de mise en application systématique de la procédure souhaitée sur plusieurs exemples, hiérarchisant bien entendu les procédures et surtout en proposant un autre travail sur le domaine de validité de ces procédures. Là encore, c'est une manière de permettre aux élèves en difficulté de mieux capitaliser leurs acquis en vue d'un éventuel réinvestissement dans la résolution de problèmes numériques. Concernant Pascal (professeur n°6) gérant le même type de classe, il va dans le même sens qu'Astride mais avec quelques variables et un nombre plus important de tâches proposées. En effet, il réexplique et réentraîne les procédures de calcul réfléchi qui doivent être automatisées et surappries. Il guide aussi et supervise la mise en œuvre des nouvelles procédures en proposant un travail sur les cas de figure dans lesquels elles sont les plus efficaces. Dans la continuité, il propose également un travail sur l'identification et l'association de chaque type de procédure à un type de calcul (« retour au cinq » pour les sommes du type $5 + n$, « passage à la dizaine » pour les sommes du type $9 + n ; 8 + n$). Puis, tout au long de la séquence, il engage toujours une discussion entre lui et les élèves et entre élèves sur les différentes étapes de la procédure en incitant les élèves à s'auto-expliquer comment il faut s'y prendre pour appliquer la procédure. Ainsi, le professeur joue essentiellement un rôle d'animateur lors du débat et peut être demandeur de nouvelles formulations chaque fois qu'un élève produit un énoncé mathématiquement erroné. Pour terminer dans les solutions proposées, il utilise les procédures enseignées (« retour au cinq », « passage à 10 », « grands doubles ») pour calculer les points obtenus pendant le jeu traditionnel mis en œuvre « I ka i pa ka » (voir annexes V grille 9). Globalement, les réponses apportées par les enseignants ici mettent en évidence des cheminements cognitifs différents selon les classes, en passant pour certaines par des solutions originales que nous avons interprétées comme des tâches se rapprochant de certaines notions mathématiques.

- ***Absence de prise d'initiative lors de la résolution de problèmes dues à la méconnaissance de la variété des procédures utilisables ou à un manque de familiarisation avec les nombres et les calculs élémentaires***

Nous arrivons enfin à la dernière catégorie des difficultés rencontrées chez les élèves quel que soit le profil de classe s'identifiant en les termes suivants : il s'agit de l'absence de prise d'initiative lors de la résolution de problèmes due probablement à la méconnaissance de la variété des procédures utilisables ou à un manque de familiarisation avec les nombres et les calculs élémentaires. Cela consiste en effet aux difficultés de mise en œuvre par l'élève de procédures de résolution portant sur des situations de calculs différentes souvent liées à l'influence des composantes du contenu du problème porté sur des caractéristiques relatives aux accroissements, aux diminutions de quantité, aux combinaison et comparaison d'ensemble d'éléments. Des problèmes que l'on retrouve également dans les analyses de Fayol (1990).

A dire vrai, les techniques élémentaires de calcul mises en application par les enseignants ne jouent pas leur rôle de module de calcul pouvant être mobilisé pour construire les procédures, ce qui fait que leur utilisation et leur valorisation les rendent indisponibles. Par conséquent, les élèves ne peuvent pas les utiliser dans les calculs de sommes et ne peuvent pas non plus prendre de la distance par rapport aux procédures qui auraient pu leur apparaître plus sûres dans un premier temps. Ainsi, pour tenter d'atténuer ces difficultés, cela nécessite sans doute de la part du professeur des institutionnalisations souples afin de pouvoir expliciter les procédures mobilisées en ayant comme objectif d'amener l'élève à percevoir leur domaine d'efficacité. En clair, on peut supposer que les procédures activées par les élèves en situation dépendent d'abord de leur décodage du problème à résoudre, ce qui laisse à comprendre qu'il est dès lors possible qu'ils échouent à résoudre certains problèmes, non parce qu'ils ne maîtrisent pas les procédures requises mais, parce que leur décodage de la situation n'évoque pas la ou les procédures idoines. Selon Schoenfeld (1994), « une fois l'ordre des procédures décidé, il faut non seulement mobiliser chacune d'elles mais aussi les exécuter correctement et, parallèlement examiner dans quelle mesure leur enseignement conduit réellement à la solution du problème ». Autrement dit, comme explicité supra en début d'analyse, face à une situation problème, l'élève doit planifier sa démarche dans la mesure où il doit mobiliser plusieurs procédures pour arriver à la solution. En d'autres termes, nous inférons ici que le « sujet-pilote » est le processus de résolution. Certains auteurs comme Focant et Grégoire (2008), désignent généralement par le terme de « monitoring », la manière de contribuer de façon déterminante à l'autorégulation cognitive absolument nécessaire à la bonne fin de toute tâche.

En corollaire, face à l'absence de prise d'initiative des élèves lors de la résolution de problèmes due à la méconnaissance de la variété des procédures concernées par le type du problème, nous retenons que plus la structure du problème demande de brasser des informations et de mobiliser des procédures, plus il est probable que certains d'entre eux se retrouvent en situation de surcharge cognitive. D'ailleurs, cela nous rappelle les travaux de Baddley (1986) et Miller (1956) sur la capacité limitée de l'esprit humain à gérer des informations. Streri (1994), pour sa part, parle de « goulot de l'attention » pour souligner les limites imposées par les caractéristiques de fonctionnement de la mémoire de travail à la somme d'informations que l'individu humain est capable de traiter de façon simultanée.

En conséquence, si l'importance des nombres à traiter affecte la résolution de l'opération, il est probable que la complexité du problème affecte la capacité des élèves à mobiliser et à exécuter correctement les procédures nécessaires, ce qui laisse à supposer que la probabilité de mobilisation des procédures est d'autant plus faible que le nombre de procédures à activer est élevé. Ainsi, il va de soi que la maîtrise affirmée des procédures mathématiques est indispensable à la compétence mathématique, tout comme la familiarisation avec les nombres et les calculs élémentaires est nécessaire avec également les relations rapprochant contexte et mathématiques. En d'autres mots, la familiarité avec le contexte exige une implication soutenue et constante fondée sur un processus de modélisation simple. En fait, il s'agit d'explorer en profondeur et dans plusieurs directions des relations fondamentales à l'aide de représentations différentes mais efficaces.

C'est pour cela que Séverine (professeure n°2) et Sophie (professeure n°4), gérant des classes moyennement performantes, mettent à disposition des élèves en difficulté tantôt des tables d'addition pendant la résolution de problèmes et tantôt des affichages de la liste récapitulative des différentes opérations pouvant être mises en œuvre en résolution de problèmes pour faire face à cette cinquième catégorie de difficultés rencontrées chez les élèves (voir annexes V Grille 9). Béatrice (professeure n°3), à son tour, gérant la classe peu performante, utilise les mêmes approches mais de manière minorée en accordant une grande importance au contexte de la résolution des problèmes concrets. En conclusion, au regard des cinq catégories des difficultés rencontrées chez les élèves tous profils de classe confondus, les enseignants ont donc besoin d'un support non négligeable pour assumer avec aisance ce rôle renouvelé sur une base individuelle, mais de manière à le rendre pédagogiquement efficace, car c'est toute la gestion de la classe qui s'en trouve transformée. Chaque élève devrait ainsi pouvoir disposer d'outils et de méthodes lui permettant de construire, de mesurer, d'estimer, de prédire en relation avec les contextes divers qui sont retenus. Ainsi, si le raisonnement est

correctement contextualisé, il doit s'établir comme un objectif à atteindre en ayant les moyens d'évaluer sa maîtrise en créant une pédagogie qui en assurera son développement.

b) Deuxième axe : difficultés singulières rencontrées chez les élèves au regard des différents profils de classe et réponses apportées par les enseignants

Ici, nous abordons la question des différences entre les problèmes d'apprentissage du calcul mental vécus par les élèves qui est une situation de plus en plus préoccupante au regard de l'hétérogénéité cognitive dans les classes, même si les hétérogénéités sociale et culturelle ont des statuts variables à l'école. En fait, il est d'une évidence que tous les élèves ne soient pas au même niveau de compétences, ce qui n'entraîne pas systématiquement qu'ils ne soient pas au niveau dans la prise en compte pédagogique des différences entre élèves. Quoi qu'il en soit, le quotidien des enseignants, c'est la diversité des élèves. Et, cela est le paradoxe de l'enseignement, car les élèves sont différents et, pourtant l'enseignant se doit d'avoir pour tous, la même ambition : les accompagner au plus loin sur les chemins de l'apprentissage. L'objectif étant que tous les élèves réussissent à apprendre tous les savoirs selon le même agenda et selon les méthodes les plus adaptées. Nous sommes d'avis que la tâche est parfois insurmontable et se proposer pareilles finalités soulève la problématique de l'apprentissage pour tous. En ce sens, nous avons rencontré chez le panel des enseignants autant de réponses singulières que de difficultés identifiées par rapport aux cinq catégories précitées dans le chapitre précédent (annexes V Grilles 10).

- ***Difficultés liées à la mise en fonction des propriétés des opérations (commutativité et associativité de l'addition)***

Partant du postulat où résoudre les opérations arithmétiques équivaut à manipuler des symboles en respectant des règles plutôt que de réaliser des transformations sur les quantités concrètes associées à ces symboles, la commutativité comme l'associativité constituent une étape nécessaire dans les progrès des élèves dans la maîtrise des algorithmes. C'est-à-dire que les élèves modélisent des situations à partir du premier nombre fourni ($2 + 5$? 2, 3, 4, 5, 6, 7) puis à partir du plus grand des deux ($2 + 5$? 5, 6, 7), ce qui nécessite la mise en œuvre de la commutativité avant que celle-ci ait été enseignée voire même qu'elle fasse l'objet d'une prise de conscience chez l'élève. C'est sans doute au cours de cette phase que les manipulations physiques puis mentales se libèrent des contraintes des situations du traitement symbolique. Pour preuve, le professeur n°3 (Béatrice), gérant la classe peu performante, procède à des entraînements à l'aide de calculs dictés (annexes V Grille 10). Concernant l'associativité, selon Fayol (2012), les résultats sont encore plus alarmants car les données posent le problème des relations entre utilisation des procédures et disponibilité de connaissances conceptuelles. En effet, en proposant à l'élève de résoudre $6 + 25 - 22$ en effectuant d'abord $25 - 22$

puis $6 + 3$ plutôt que d'additionner $6 + 25$ avant de soustraire 22, seulement 20% des élèves y recourent car la résolution des soustractions et celles des additions suivent des trajectoires proches mais les premières ne semblent pas aboutir à la mémorisation d'associations récupérées en mémoire, peut-être parce qu'elles ne sont pas aussi souvent utilisées que les additions. Nous sommes d'avis que tout se passe ici comme si les élèves mettaient en œuvre des procédures sans maîtriser les connaissances conceptuelles qui leur sont associées.

- ***Difficultés liées à l'utilisation des procédures de référence (complément à 5 et à 10)***

Face à ces difficultés particulières, le professeur n°4 (Sophie) gérant la classe moyennement performante se base sur l'entraînement en montrant aux élèves une quantité de doigts ou de constellations, puis oralise les nombres ou les écrit au tableau. Astride (professeur n°1) et Pascal (professeur n°6), gérant les classes performantes, utilisent des jeux du recto verso pour s'entraîner à la mémorisation des décompositions de 5 et de 10 et à la reconstruction rapide des résultats. Nous trouvons également chez eux des exercices de visualisation mentale à l'aide de la boîte de *Tchou* (annexes V Grille 10).

- ***Manque d'adaptabilité : Appropriation difficile des procédures les moins coûteuses et les plus adaptées aux propriétés des nombres et des opérations en jeu***

Au regard de cette difficulté, on peut supposer que les procédures activées par les élèves en situation d'apprentissage dépendent d'abord du décodage du problème à résoudre en sélectionnant les indices isolés, en essayant d'identifier les mots-clés, la recherche de relation entre les données et la distinction des états et des transformations. À ce stade d'adaptation des opérations en jeu, l'élève en difficulté reste souvent focalisé sur les indices isolés, car l'absence ou la présence de prérequis numériques peut conduire à un déficit en termes d'apprentissage et faire preuve de moins d'adaptabilité. Selon Butlen et Masselot (2010), « les élèves doivent savoir détecter les moments où il faut inventer de ceux où il faut reproduire, ce qui nécessite de la part du professeur des institutionnalisations souples ». C'est pour cela que l'entraînement au calcul mental doit amener l'élève à des procédures économiques mais aussi à percevoir le domaine d'efficacité de ces procédures. Par conséquent, pour amener les élèves à réussir, le professeur n°1 (Astride) gérant les classes performantes réexplique souvent les différentes procédures de calcul en les hiérarchisant à partir de choix réfléchis et propose un travail sur leur domaine de validité. Quant à Pascal (professeur n°6) gérant, le même type de classe, il propose un travail sur les cas de figure dans lesquels la procédure de calcul est la plus efficace en les réexpliquant et en réentraînant les procédures qui doivent être automatisées et surappries (annexes V Grille 10).

c) Réponse à la deuxième sous-question de recherche

Dans la continuité de la première sous-question, nous avons soulevé dans la seconde la problématique des pratiques privilégiées par les enseignants pour venir en aide aux élèves les plus fragiles dans l'apprentissage du calcul mental. Concrètement, nous avons procédé à l'exploration et à l'identification des tâches mises en œuvre par les professeurs pour recueillir soit des généralités, soit des singularités permettant à ces élèves de réussir quel que soit leur niveau de départ. Pour cela, nous avons porté une attention particulière sur ce que les apprenants doivent progressivement mémoriser, à savoir les faits numériques à travers les décompositions-recompositions additives, les procédures de calcul élémentaires et les connaissances nécessaires pour développer des procédures de calcul adaptées aux nombres en jeu pour les additions et les soustractions au CP. Il va de soi que les situations pédagogiques mises en œuvre et les activités qui y sont associées doivent permettre aux élèves de développer des compétences en mathématiques. Il est aussi de mise, comme le préconise l'institution, que celles-ci peuvent très bien prendre une forme ludique tout en permettant de travailler les mécanismes cognitifs fondamentaux, car il s'agit bien de cela quand on parle d'activités numériques. Par conséquent, l'hypothèse émise pour répondre à cette question où nous avons suggéré que les enseignants mettent en œuvre des pratiques globales comme des pratiques d'individualisation ou autres, est validée (voir Annexes V grilles 9, 10 et 11). En effet, à travers les catégorisations proposées (voir annexes V grilles 4 et 5) permettant d'analyser les obstacles rencontrés chez les élèves par le biais de deux axes orientés (voir annexes V grilles 7 et 8), nous avons relevé d'une part, cinq groupes de difficultés quel que soit le profil de classe touchant à la mémorisation des résultats des tables d'addition, ensuite à la connaissance et disponibilité des compléments à 10, puis aux erreurs dans le comptage de 2 en 2 ou de 10 en 10, sans oublier le recours systématique aux procédures de calcul automatisées telles que le recomptage ou surcomptage aux détriments des procédures de calcul sur les nombres. Et pour terminer, l'absence de prise d'initiative lors de la résolution de problèmes due à la méconnaissance de la variété des procédures utilisables ou à un manque de familiarisation avec les nombres et les calculs élémentaires.

Pour y faire face, nous avons montré dans notre analyse que les enseignants ont mis en œuvre globalement des institutionnalisations souples ou locales, des verbalisations de procédures médiatisées, un enseignement explicite et des activités collectives et ritualisées, etc. (voir Annexes V Grilles 9 et 10). Toutefois, nous sommes d'avis que la résolution de problèmes arithmétiques constitue la principale difficulté en mathématiques chez l'enfant à l'école primaire car résoudre un problème arithmétique ne consiste pas simplement à effectuer un calcul mais, avant tout à comprendre les relations qu'entretiennent entre eux les différents éléments du texte. C'est ce que Gérard Vergnaud qualifie de « calcul relationnel » par opposition au calcul numérique qui est l'une des composantes

de la résolution qui pose le plus de difficultés aux élèves. En fait, cela s'est vérifié au niveau du deuxième axe concernant les réponses singulières apportées par les enseignants pour les élèves en grande difficulté. En effet, nous avons identifié des difficultés liées à l'utilisation des procédures de référence (compléments à 5 et à 10), des difficultés liées à la mise en fonction des propriétés des opérations (commutativité et associativité de l'addition) et des difficultés liées au manque d'adaptabilité, c'est-à-dire l'appropriation difficile des procédures les moins coûteuses et les plus adaptées aux propriétés des nombres et des opérations en jeu. Pour y faire face, là aussi, les enseignants concernés ont privilégié dans la mesure du possible la différenciation par les ressources disponibles avec une utilisation accrue des supports et une place importante pour le jeu. En résumé, nous retenons après cette investigation la formule de Barouillet et Thévenot (2009) quand ils affirment que « reformuler, imaginer, concrétiser le problème par des éléments externes (i.e. doigts, bâtonnets, cubes) ou bien encore le représenter sous forme graphique sont autant de méthodes qui facilitent la construction d'une représentation mentale de la situation décrite dans l'énoncé et maximise ainsi les chances d'une résolution correcte.

CHAPITRE 8 : RÉPONSE À LA QUESTION DE RECHERCHE

Après avoir répondu aux deux sous-questions afférentes à l'enseignement du calcul mental et relatives à l'utilisation du projet d'enseignement pour la première, et aux pratiques privilégiées mises en œuvre pour les élèves les plus fragiles pour la deuxième, et avoir confirmé les hypothèses émises avec moult variables, nous pouvons maintenant répondre à la question centrale de la thèse interrogeant l'organisation et la conduite des pratiques d'enseignement-apprentissage dans le but de permettre aux élèves d'acquérir des compétences en numération et en résolution de problèmes. Il s'agissait pour nous d'observer et d'analyser comment les enseignants du panel ont conçu leurs situations d'enseignement-apprentissage tout en sachant que c'est la base de tout processus d'apprentissage visant le développement de compétences. C'est une manière de dire, selon Vergnaud (2000), que l'intervention de l'enseignant ici est analogue à un rôle de médiateur, mais aussi celui de créateur de situations didactiques.

En fait, il doit gérer ses propres interactions avec les contenus, avec les élèves et l'utilisation réfléchie de ce dit contenu. Incontestablement, il est à la recherche de sens par rapport à ce qu'il propose et aussi aux objectifs déclarés, mais surtout implicitement à travers ses modes de fonctionnement. Dans cette planification, cela concerne aussi la question du rapport au savoir (Charlot, 2000) que l'on peut définir comme un processus par lequel l'élève, à partir d'un savoir acquis, produit de nouveaux savoirs singuliers lui permettant de penser et de transformer ses connaissances. Selon Beillerot (2000), « il s'agit d'un processus dynamique qui implique avant tout de porter un regard critique sur

les raisons d'apprendre ce que l'on apprend, sur les raisons d'apprendre de la façon dont on apprend ». Nous comprenons ainsi que le sens pour les professeurs provient particulièrement du fait que les savoirs enseignés sont des savoirs validés par l'institution et la recherche. Certains vous diront que ce sens émane du lien entre les savoirs et les contextes particuliers, mais nous restons convaincus qu'il existe plusieurs approches, plusieurs théories qui sont mises en tension lors des cours. C'est en partie pour cela que nous avons validé la première hypothèse car les enseignants ont mis un accent particulier sur le traitement didactique qui est à l'origine de la formulation des contenus organisant les différents paliers du processus d'apprentissage adapté aux différents élèves. C'est pour cela aussi que nous avons choisi volontairement l'expression « traitement didactique » parce qu'elle convient mieux à celle de « transposition didactique » empruntée à Chevallard (1985) où les savoirs savants sont transformés en savoir à enseigner.

Par conséquent, nous avons en effet identifié à différents niveaux de pratiques chez les enseignants observés des pratiques globales à l'instar des réponses apportées aux problèmes collectifs rencontrés par tous les enseignants tels que nous les avons présentés supra (voir annexes V Grilles 9 et 10). Ainsi, que ce soient la mise en œuvre d'un enseignement explicite, la différenciation par les procédures, des activités collectives et ritualisées, de la simulation mentale de l'action suivie d'une validation sur le matériel, etc., l'objectif était double : contribuer à finaliser les savoirs mis en place et éviter de se limiter au savoir savant d'où l'utilisation d'une institutionnalisation souple ou locale. De même pour les pratiques d'individualisation où les enseignants ont cherché à apporter des réponses différenciées impliquant des choix et des connaissances. C'est ce que Chapelle et Crahay (2009) tentent de nous faire comprendre quand ils affirment qu'« il est indispensable de s'interroger sur les apprentissages à prioriser eu égard aux valeurs auxquelles nous adhérons et à l'état du niveau des élèves en mathématiques dans les classes actuelles et à venir ». Il va sans dire que cette réflexion se situe au carrefour de considérations d'ordre didactique et pédagogique et renvoie à l'analyse des résultats obtenus par les élèves au vu des différentes évaluations nationales, internationales, et aussi à une réflexion prospective. Les auteurs mettent en vue également la problématique de la mobilisation des connaissances à privilégier pour permettre de répondre à toutes les questions qui se posent au niveau des élèves. Nous avons trouvé d'ailleurs un peu de cet esprit de bien faire chez deux des enseignants observés quand ils ont mis l'accent sur la différenciation par les ressources disponibles, les contraintes et surtout le rôle des élèves dans les jeux choisis ainsi que les supports d'encouragements. C'était de véritables interventions permettant d'aborder les obstacles à surmonter et plus précisément les difficultés que pose l'apprentissage du calcul mental dans la chaîne numérique verbale, c'est-à-dire la suite des mots-nombres qui permettent aux élèves de nommer les quantités de dénombrement (la capacité à déterminer de manière précise combien d'objets contient un ensemble),

ou encore les habiletés de comptage leur permettant de résoudre des petits problèmes tels que « combien font 4 et 3 ? » ;

En guise de conclusion, l'ensemble des enseignants du panel organisent et conduisent leurs enseignement-apprentissage avec des variables significatives, contextuelles et différenciées d'un professeur à un autre en tenant compte des connaissances des élèves sur le nombre et de leur capacité à les utiliser ou non dans la résolution de problèmes. Cependant, trop d'élèves se trouvent dans des situations préoccupantes et ont du mal à surmonter leur mauvaise compréhension des nombres et de leurs écritures. Pour terminer, face à la récurrence de ces difficultés, nous sommes persuadés que résoudre un problème arithmétique ne consiste pas simplement à effectuer un calcul mais, avant tout, à comprendre les relations qu'entretiennent entre eux les différents objets d'enseignement. Pour tout dire, nous nous sommes interrogés sur l'apprentissage d'une activité aussi complexe que le calcul mental chez les élèves du cours préparatoire à travers ces deux questions : comment utilisent-ils les stratégies enseignées ? Et, comment évoluent-ils dans leur apprentissage ?

Ce questionnement ouvre probablement un débat intéressant mais après cette investigation et les résultats obtenus par la recherche empirique, nous retenons deux données majeures : d'une part, l'apprentissage des stratégies provoque chez les élèves un coût en termes de ressources cognitives car cela entraîne toujours l'élaboration de nouvelles stratégies de manière perpétuelle. D'autre part, il est important de considérer les performances des élèves dans leur ensemble et pas uniquement à un moment donné.

CONCLUSION

1) Rappel de la question centrale

Notre recherche sur l'enseignement du calcul mental nous a amené à mettre en évidence une caractéristique importante manifestée par les élèves en difficulté dans ce domaine : la forte tendance à toujours se réfugier dans des procédures de calcul automatisées au détriment d'autres procédures prenant en compte les propriétés des nombres et des opérations. Il va sans dire que les procédures mobilisées par les élèves du cours préparatoire autour du comptage ou surcomptage avec utilisation éventuelle des doigts pose problème car elles sont peu sûres et coûteuses par rapport aux procédures mieux adaptées aux calculs en jeu, ce qui est une preuve de moins d'adaptabilité. Par conséquent, si l'enseignement du calcul mental a pour but notamment de développer cette posture d'adaptabilité en confrontant les élèves à des calculs divers, en jouant sur l'économie des procédures mobilisées, il est donc indispensable que ces derniers disposent de suffisamment de faits numériques et de procédures de calcul automatisées pour éviter de se réfugier dans « le paradoxe de l'automatisme ». C'est pourquoi la question centrale de la recherche interrogeant les pratiques des enseignants disposant de ressources institutionnelles, documentaires et d'un capital expérience en calcul mental, s'intitule comme suit : comment les professeurs des écoles organisent-ils et conduisent-ils leur enseignement-apprentissage dans cette activité liant calcul et raisonnement afin de permettre aux élèves d'acquérir des compétences en numération et en résolution de problèmes ?

2) La spécificité de notre démarche

Au regard du thème et de l'enjeu de notre recherche, nous avons choisi de l'inscrire objectivement lato sensu dans trois catégories : la première fait référence à une démarche qui nous est nécessaire afin d'être dans une logique de savoir. La seconde porte sur le « comment-faire », par sa finalité, c'est la combinaison des choix méthodologiques d'analyse et des actions mises en œuvre. Et la troisième élabore des savoirs validés par la teneur des résultats obtenus, du discours produit dans une visée de propositions critiques, se caractérisant par son objet dans le contexte de l'éducation. Plus précisément, lorsqu'il est question parfois d'apporter des preuves scientifiques, force est de constater que soit aucune preuve n'est encore disponible, soit les preuves disponibles ne sont pas toujours transférables au contexte de l'enseignement ou des apprentissages scolaires (Kohn et Christiaens, 2014). C'est pourquoi nous avons eu recours à une démarche spécifique contenant l'étude comparative des manuels, l'analyse des pratiques enseignantes, l'observation des séances, l'entretien à chaud pour les parties qualitatives et la nature des contacts verbaux et du guidage.

a) *L'étude comparative des manuels*

Il s'agit ici de faire l'examen des manuels afin de caractériser les savoirs à enseigner et la manière préconisée dans le cadre de l'apprentissage de l'addition mentale de deux nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine au cours préparatoire (CP). Pour ce faire, il est nécessaire d'étudier les projets d'enseignement figurant dans les manuels pour comprendre la nature des transpositions réalisées par les auteurs afin d'identifier les éléments didactiques et pédagogiques pris en considération par l'enseignant épistémique pour élaborer les scénarii et recueillir les suggestions de mises en œuvre faites aux professeurs des écoles. De manière concrète, nous procédons à une étude comparative de cinq manuels du cours préparatoire (CP) en nous limitant à cinq critères, à savoir la progression, les séances, les activités proposées, la mise en commun et l'institutionnalisation. En fait, mieux comprendre les contenus des ouvrages et les rendre plus intelligibles par le biais de la comparaison conduit à en établir une présentation ordonnée. De plus, comparer, comme l'explique Vigour (2005), « c'est aussi étymologiquement, mettre ensemble des objets semblables plus ou moins explicitement en distinguant le même du différent sachant que la comparaison tend à opérer un classement des phénomènes observés ». En clair, l'objectif ici est de pouvoir mettre en avant la plus-value de chaque ouvrage afin d'avoir accès à une description détaillée des mises en œuvre, aux stratégies adoptées, ce qui appuie notre méthodologie dans la présente recherche.

b) *Analyse des pratiques enseignantes*

Si l'analyse des pratiques enseignantes permet de développer la connaissance objective (en termes de catégories, logiques et stratégies inhérentes aux situations d'enseignement) à travers la connaissance subjective (en termes de compréhension du sens) que chaque enseignant donne à ses conduites (Blanchard-Laville et Nadot, 2004), notre cadre d'analyse tend vers une visée descriptive et compréhensive du fonctionnement des enseignants du panel. L'objet ici est de renseigner la question centrale à partir d'observations, réalisées en classe, croisées sur trois niveaux (global, local et micro) afin de caractériser les pratiques, d'apprécier leurs effets sur les apprentissages et d'identifier les conditions professionnelles qui les déterminent. À bien y regarder, l'étude d'une situation réelle en classe et la recherche des logiques produites par les enseignants peuvent être considérées comme les représentations de chacun, ce qui nous permet d'interroger les prises de décision donnant lieu à un dialogue à travers un questionnement, un commentaire au sens de l'objectivation. C'est une manière de dire qu'à partir d'un ensemble de séances ou d'une séquence les conduites et les événements se structurent de manière à créer une anamorphose du réel. Par conséquent, les activités des élèves constituent ici l'élément central de notre étude et c'est pour cette raison que nous polarisons notre découpage de la réalité, nos analyses et nos interprétations autour des activités telles qu'elles peuvent être provoquées par l'enseignant en classe. De ce fait, l'analyse mise en place doit permettre d'une

part, d'accéder au travail possible des élèves sur un contenu donné en relation avec l'enseignement dispensé et d'autre part, d'étudier la corrélation entre la mise en œuvre de l'enseignant et le rendu des élèves. De manière précise, notre méthodologie d'analyse des pratiques en calcul mental des professeurs du panel s'organise en trois étapes : 1) Délimiter le champ d'analyse et sélectionner les unités d'observation ; 2) Identifier les éléments didactiques et pédagogiques pris en considération par les professeurs pour élaborer leur projet d'enseignement ; 3) Caractériser les pratiques privilégiées par les enseignants lors des observations pour venir en aide aux élèves les plus fragiles en calcul mental.

Par la suite, nous pouvons réaliser la comparaison des pratiques à partir des données relevées afin de saisir le particularisme de chacun dans ses choix, ses décisions et ses applications au regard des problèmes posés par les élèves. Cela rejoint sensiblement ce que Gaston Bachelard (1934) exprimait sur la formation de l'esprit scientifique quand il dit : « Le monde où l'on pense n'est pas le monde où l'on vit ». Mieux encore, c'est une manière de dire que « l'enseignement n'est ni partage, ni communication comme il est pourtant habituel. Et pourtant, toute pratique d'enseignement nécessite toujours cette double illusion » (Bernard Sarrazy, 2001). Ainsi partant de ce principe, si l'on conçoit la comparaison comme un « ensemble de démarches qui suit l'esprit pour découvrir et démontrer la vérité » et, plus largement, un « ensemble de démarches raisonnées, suivies, pour parvenir à un but » (selon les définitions du Petit Robert, 1998), alors la comparaison constitue bien une méthode (Vigour, 2005).

c) L'étude des projets d'enseignement

Au regard du projet d'école qui offre un cadre suffisamment sécurisant pour tenter de mettre en commun les approches didactiques, le travail en module, les décroissements temporaires, les groupes d'intérêt ou encore les tentatives nouvelles de différenciation pédagogique, le projet d'enseignement quant à lui permet à l'enseignant de préciser les contenus, les tâches, leur organisation, le chemin cognitif retenu, un panel d'outils mis au service des séquences d'apprentissage. C'est pour cela que nous l'avons retenu comme un levier nécessaire à notre démarche d'analyse car il nous permet d'identifier suffisamment d'éléments tels que les objectifs intermédiaires fixés, les contenus et leur organisation, le dispositif pédagogique retenu, la différenciation construite, le format et le type des séances, le type et le nombre d'activités proposées aux élèves à chaque séance en référence aux mathématiques visées pour « reconstituer ce que les élèves "reçoivent" comme cours et ce qu'ils ont à faire avec ce savoir, ces (futurs) connaissances » (Perrin-Glorian et Robert, 2005). En somme, le projet élaboré par l'enseignant fait office de traces objectives, de mises en œuvre et devient la base de discussions entre le professeur et le chercheur puisqu'il est sujet à des interprétations de part et d'autre, tout en dévoilant les contraintes liées à

l'exercice en classe du métier d'enseignant. Disons, ce support de nature méthodologique permet également au professeur des écoles de préciser ce qui a influencé leurs choix lors de l'élaboration des différents scénarii des séquences mises en place.

d) L'observation des séances

Concernant l'observation directe nécessaire et utile à notre démarche de recherche, elle vient rendre compte d'une configuration globale des enseignants dans les actions entreprises face aux élèves. En effet, elle se confronte à des situations réelles d'apprentissage ou à de multiples circonstances et « effets de contexte » (Burawoy, 2003) venant se croiser et s'influençant en étant au service d'une construction d'objets dont les limites sont tracées par la problématique. Par conséquent, les pratiques perçues par les observations ont pour visée de progresser dans la connaissance des pratiques enseignantes propices au progrès en calcul mental des élèves particulièrement en difficulté. Ainsi, cet objectif nécessite à la fois de décrire les pratiques enseignantes à l'égard de ces apprenants et d'en apprécier les effets. Globalement, ce procédé consiste à être le témoin des comportements sociaux des enseignants et des élèves durant les séances de calcul mental, en modifiant le moins possible le déroulement ordinaire. C'est pour cela que l'observation tel que nous la concevons a pour objet le recueil et l'enregistrement de toutes les composantes du déroulement des apprentissages souffrant la perception de ce témoin particulier qu'est l'observateur. Dans cette optique, les grilles d'observation élaborées nous permettent de décrire de manière aussi fidèle que possible les pratiques enseignantes ou leur transformation en réaction aux attitudes ou aux activités des élèves au regard du contexte qui les génère et les effets recueillis sur les apprenants. Pour ce faire, nous avons construit nos grilles sur un système d'indicateurs de manière à limiter nos observations à un aspect du comportement de la classe en vue de pouvoir saisir les comportements singuliers et construire un ensemble fini de catégories dans lesquelles chaque unité peut être classée dans une et une seule de ces dernières (Meddley et Mitzel, 1963). De manière précise, avant de commencer les observations des six professeurs des écoles, nous avons cherché en premier lieu à obtenir certaines informations sur l'attitude des enseignants à l'égard des élèves en difficulté en procédant à des opérations de lecture, d'entretiens et des observations exploratoires préalables à l'aide d'un carnet de bord consignant les propos, les phénomènes et événements observés ainsi que toutes les données recueillies pouvant nous aider par la suite dans les différentes analyses. Pour terminer ici, d'après Combessie (2007), l'observation directe met en œuvre une diversité de compétences sociales et intellectuelles telles que la capacité d'adapter à une situation et à un milieu plus ou moins familier une attention sans cesse renouvelée faisant appel à ces différents sens, une faculté pour mémoriser les différentes propriétés de la situation, une certaine habileté à rédiger clairement et rapidement des notes et enfin, une culture générale et sociologique apte à interpréter les données recueillies et à les présenter dans un compte-

rendu. Disons, toute une myriade de savoir-faire qui nous permettront d'accomplir avec détermination les tâches qui nous sont dévolues.

e) Entretien à chaud

Hier comme aujourd'hui, l'entretien dans l'enquête se distingue par ses différentes formes, mais surtout par la mise en œuvre des processus fondamentaux de communication et d'interactions humaines. En effet, selon les propos de Sauvayre (2013), « l'entretien est une rencontre, voire un moyen offert aux chercheurs pour retirer de ses répondants des informations et des éléments de réflexion très riches et nuancés, caractérisés par un contact direct et une faible directivité ». Selon Boudon (2003), c'est méthode la plus adaptée pour recueillir le « sens subjectif visé » ou les « raisons » des enquêtés comme le souligne pareillement Blanchet et Gotman (2007) : « l'enquête par entretien est ainsi particulièrement pertinente lorsqu'on veut analyser le sens que les acteurs donnent à leurs pratiques, aux événements dont ils ont pu être les témoins actifs ; lorsqu'on veut mettre en évidence le système de valeurs et les repères normatifs à partir desquels ils s'orientent et se déterminent ». En partant de ce principe, nous avons structuré notre entretien à chaud en trois temps : le premier temps (quelques minutes) invitait le professeur des écoles à nous donner ses premières impressions sans que nous lui posions trop de questions. Le deuxième temps s'est déroulé sur le modèle d'un entretien d'explicitation (au sens de Vermesh, 1990 ; 1994). In fine, les dernières questions étaient destinées à mettre en exergue les éléments invariants de son activité. Il va sans dire que ces entretiens à chaud ont été enregistrés l'aide d'un smartphone afin d'optimiser leur exploitation ultérieure. Dans tous les cas, il s'est instauré un véritable échange au cours duquel les enseignants ont exprimé leurs conceptions, leurs interprétations et leurs expériences à la suite de questions ouvertes et de nos différentes réactions. Nous avons veillé à toutes formes de digression afin de permettre aux enseignants de s'exprimer à un degré maximum d'authenticité et de profondeur en restant continuellement en éveil de sorte que leur propre intervention amène des éléments d'analyse aussi féconds que possible comme le suggèrent Quivy et Van Campenhoudt (2009). Par conséquent, nous avons tenté d'effectuer le bon choix méthodologique sachant qu'il y aurait toujours des avantages et des inconvénients à prendre en considération pour anticiper les limites des résultats obtenus.

f) Nature des contacts verbaux et du guidage

Les contacts verbaux tels que nous l'entendons sont hérités de la conception de Piquée (2010) qui renvoie implicitement cette relation à l'idée d'échanges appréhendée à travers deux indicateurs : 1) le nombre moyen d'actions verbales relevé en une heure (témoignant de l'intensité de la relation) et la durée écoulée entre le début de la classe et la première interaction avec l'élève (témoignant de la rapidité de la prise de contact). L'utilisation de ce moyen d'action est intéressante, car il nous permet

d'apprécier la nature et la qualité des interventions de l'enseignant en fonction de la performance des classes à travers les différentes postures des écoliers. Au niveau du panel, le nombre de contacts verbaux entre le professeur et les élèves en difficulté, tous profils de classes confondus varient de 3 à 17 tandis que le premier contact peut mettre un peu plus d'une à vingt-deux minutes avant de s'établir entre l'enseignant et l'élève en difficulté. Cependant, l'étude des distributions en fonction de la performance des classes ne révèle pas de divergences significatives (voir annexes V Grille 12). Dans le même ordre d'idées, le temps moyen de travail en petits groupes d'élèves en difficulté n'est pas statistiquement différent d'un profil de classe à l'autre (voir annexes V Grille 15). De plus, ni les actions verbales liées au comportement des élèves (dans le but de le placer dans sa posture d'écolier), ni celles centrées sur la personne de l'élève ne présentent de différences significatives selon le profil de classe. En revanche, on trouve de manière plus importante des actions verbales centrées sur la tâche dans les classes performantes (en moyenne plus de trois quarts des actions verbales) que dans les classes moyennement performantes (environ deux tiers) ou peu performantes (moins de deux tiers) - (Annexes V Grille 13). En outre, quel que soit le profil de classe, les échanges élève en difficulté-professeur est dans 86% des cas à l'initiative de l'enseignant.

Par conséquent, ces données recueillies sont non négligeables et elles nous ont permis de mieux apprécier les réponses proposées par les enseignants face aux différents problèmes rencontrés surtout dans la verbalisation des procédures et la simulation mentale de l'action. Ce fut une manière de pousser les élèves à travailler au prorata de leurs ressources disponibles face aux contraintes de la tâche en insistant sur la compréhension des consignes et en procédant parfois à un guidage de l'élève dans la réalisation de cette dite-tâche. En fait, nous avons remarqué que dans les classes performantes, il y a plus de guidage à dominante explicative que de guidage à dominante réflexive (voir Annexes V Grille 14). En définitive, les contacts et guidages verbaux sont davantage centrés sur la tâche dans les classes les plus performantes et leurs objectifs fixent davantage l'explication et la réalisation de la tâche que la compréhension des processus et la réflexivité.

3) Réponse à la question centrale de la recherche

Après avoir répondu aux deux sous-questions afférentes à l'enseignement du calcul mental et relatives à l'utilisation du projet d'enseignement pour la première, et aux pratiques privilégiées mises en œuvre pour les élèves les plus fragiles pour la deuxième, et avoir confirmé les hypothèses émises avec moults variables, nous avons répondu à la question centrale de la thèse interrogeant l'organisation et la conduite des pratiques d'enseignement-apprentissage dans le but de permettre aux élèves d'acquérir des compétences en numération et en résolution de problèmes. Pour ce faire, nous avons observé et analysé la manière dont les enseignants du panel ont conçu leurs situations d'enseignement-

apprentissage. De ce fait, nous avons validé la première hypothèse relative à l'élaboration et à la nécessité du projet d'enseignement compte tenu des situations de travail, des élèves et de l'enseignant lui-même. Ainsi, que ce soit avec la mise en œuvre des pratiques globales (enseignement explicite, différenciation par les procédures, activités collectives et ritualisées, simulation mentale des actions suivies d'une validation avec le matériel, etc.) ou encore des pratiques d'individualisation (différenciation par les ressources disponibles, intervention du professeur pour la concentration et la mise au travail des élèves, etc.), l'ensemble des enseignants du panel organisent et conduisent leurs enseignement-apprentissage avec des variables significatives, contextuelles et différenciées d'un professeur à un autre en tenant compte des connaissances des élèves sur le nombre et de leur capacité à les utiliser ou non dans la résolution de problèmes. Cependant, trop d'élèves se trouvent dans des situations préoccupantes et ont du mal à surmonter leur mauvaise compréhension des nombres et de leurs écritures.

Pour terminer, face à la récurrence de ces difficultés, nous sommes persuadés que résoudre un problème arithmétique ne consiste pas simplement à effectuer un calcul mais, avant tout, à comprendre les relations qu'entretiennent entre eux les différents objets d'enseignement. Pour tout dire, nous nous sommes interrogés sur l'apprentissage d'une activité aussi complexe que le calcul mental chez les élèves du cours préparatoire à travers ces deux questions : comment utilisent-ils les stratégies enseignées ? Et, comment évoluent-ils dans leur apprentissage ?

Ce questionnement ouvre probablement un débat intéressant mais après cette investigation et les résultats obtenus par la recherche empirique, nous retenons deux données majeures : d'une part, l'apprentissage des stratégies provoque chez les élèves un coût en termes de ressources cognitives car cela entraîne toujours l'élaboration de nouvelles stratégies de manière perpétuelle. D'autre part, il est important de considérer les performances des élèves dans leur ensemble et pas uniquement à un moment donné.

4) Limites de la recherche

Selon Barouillet et Thévenot (2009), « l'apprentissage systématique du calcul présente cette particularité, contrairement à d'autres apprentissages comme celui de l'orthographe, par exemple, de pouvoir s'appuyer sur un ensemble de connaissances et habiletés numériques acquises et pour certaines construites par l'élève bien avant son entrée à l'école primaire ». Nous comprenons ici que cela concerne particulièrement la chaîne numérique verbale, c'est-à-dire la suite des mots-nombres qui nous permettent de nommer les quantités, le dénombrement ou encore, les habiletés de comptage. C'est un problème récurrent rencontré chez tous les enseignants du panel car, selon les auteurs, « de la qualité des connaissances et des acquisitions précoces, dépendra en partie la réussite des

apprentissages ultérieurs ». En effet, n'ayant pas les élèves en début de scolarité, nous n'avons pas le contrôle de l'ensemble des facteurs qui ne sont pas liés à l'enseignant malgré la prégnance et les rendus des différentes évaluations mises en œuvre. C'est d'ailleurs ce que Piquée laisse entendre quand elle suggère que les classes ne sont pas strictement comparables, tant au niveau du profil « peu performante » c'est-à-dire avec des élèves considérés comme très faibles et à l'inverse « performante », aucun élève n'est aussi faible que les précédents. Selon l'autrice, cette caractérisation du niveau des élèves n'est pas objective car sachant que les enseignants ont une capacité de discrimination généralement bien corrélée à partir des tests standardisés (Crahay, 1996), il est tout à fait probable que certains élèves dans certaines classes soient davantage en difficulté que d'autres élèves dans d'autres classes ce qui pourrait expliquer les différences de pratiques et de niveaux entre les classes. Par conséquent, le discours et les données relevées lors des observations peuvent être remis en question par rapport à l'effet maître attestant probablement d'un manque de stabilité de l'efficacité de l'enseignant (Bressoux, 2001). Ce constat a été également établi par Sass (2008) en reconnaissant que le passage d'un enseignant du « statut efficace » au « statut inefficace » est effectivement faible mais pas exceptionnel. Par conséquent, au niveau de la recherche, c'est une situation d'instabilité que nous pouvons considérer comme une limite pour espérer obtenir des résultats fiables. Mieux encore, ce sujet sur la stabilité des pratiques enseignantes dans le temps fait encore controverse aujourd'hui. Disons plutôt que les chercheurs en particulier, en France, au sein du réseau OPEN (Observation des pratiques enseignantes) s'accordent sur l'aspect paradoxal des pratiques enseignantes, à la fois stables et variables (Altet, 2003). Les travaux de Bru (1992 ; Altet et al. 1996) montrent clairement qu'il existe des variations dans les profils d'action des enseignants d'une année sur l'autre mais aussi au cours d'une même année scolaire. C'est pour cela que de nombreux travaux récents cherchent désormais à caractériser les pratiques enseignantes non plus à partir des pratiques isolées mais plutôt à partir de configurations relativement stables (Butlen, Masselot et Pezard, 2003 ; Clanet, 2005, 2007 ; Pariès, Robert, Rogalski, 2008 ; Robert et Rogalski, 2002).

5) Mise en perspective de la recherche

Ce travail de recherche n'est que le début d'une longue quête, car depuis ma vie d'écolière, d'élève, d'étudiante et aujourd'hui en milieu de carrière, l'apprentissage et les problèmes posés par l'enseignement du calcul mental m'ont toujours interpellée jusqu'à être une fervente défenseuse et militante pour la réussite de tous les élèves dans la discipline mathématique. En effet, la capacité de traitement des grandeurs et des quantités ainsi que l'apprentissage des composantes du dénombrement (les noms de nombres) et les conduites de dénombrement ont toujours posé problème chez certains élèves dans leur incapacité à les réciter sur demande ou encore à dénombrer trois et au-delà en ayant

l'impression de ne pas comprendre la relation entre le comptage et le cardinal. Ce constat laisse ouvertes deux questions : l'éventuelle existence de mécanismes initialement communs intervenant pour le traitement des grandeurs comme pour celui des quantités, puis la possibilité que l'acuité de la discrimination des grandeurs et des quantités soient reliée aux habiletés de manipulations des symboles mathématiques. Telles sont les deux interrogations qui me motivent dans ma quête afin de pouvoir trouver des systèmes de résolution d'opérations simples ou de problèmes arithmétiques.

Il est vrai que la méta-analyse conduite par Chen et Li (2014) portant sur des études transversales, montre que les performances aux comparaisons non symboliques comme aux comparaisons symboliques sont significativement corrélées aux performances ultérieures en mathématiques. Ainsi, si l'amélioration des performances en mathématiques est consécutive aux entraînements, nous sommes d'avis qu'entraîner les élèves à affiner l'acuité des discriminations de quantités non symboliques (des collections de jetons) améliore les performances en discrimination de ces quantités (mais pas des grandeurs : longueur, par exemple). Toutefois, selon Fayol (2015) la prise en compte des effets des entraînements sur les performances des élèves exige que soit abordé préalablement l'acquisition des systèmes de représentations symboliques. En effet, certains auteurs priorisent l'apprentissage de manière implicite en pratiquant des activités et en s'appuyant sur l'observation des comportements d'élèves. D'autres font appel à un apprentissage explicite sous-tendu par un code verbal (1, 2, 3, etc.) qui associe directement les concepts numériques aux unités qui leur correspondent. Pour ce faire, nous sommes en train de réfléchir sur les lignes directrices à prendre car les codes d'une part, doivent être compatibles avec les propriétés des quantités qu'ils représentent et les modifications qu'elles sont susceptibles de recevoir (ajout, partage, retrait, etc.) et d'autre part, un élément de code ne doit correspondre qu'à une seule quantité afin d'éviter les confusions dans les manipulations comme en mémoire. Ainsi, la difficulté c'est de pouvoir trouver comment présenter les codes dans une organisation logique sous-jacente, invariante, en respectant les contraintes de relations de classes et d'ordre. Telle est ma quête aujourd'hui pour faire évoluer ma pratique afin de voir établir des représentations externes perceptibles par nos sens et manipulables et les représentations internes gérées en mémoire à long terme ou de travail.

BIBLIOGRAPHIE

A

- ABBOUD-BLANCHARD Maha, Robert Aline, ROGALSKI Janine et VANDERBROUCK Fabrice, « Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques : Un résumé des fondements partagés, des développements récents et des perspectives », *Cahiers du laboratoire de didactique André Révuz*, n°18, IREM, Paris, Université de Paris Diderot, mai 2017.
- ACLAND Henry, « Stability of teacher effectiveness : a replication », *The journal of educational research*, vol.69, n°8, 1976, p.289-292.
- ALLARDICE Barbara et GINSBURG Herbert, «Children's psychological difficulties in mathematics », in Herbert GINSBURG (Ed), *The development of mathematical thinking*, New York Academic Press 1983, cité par BUTLEN D., 2007.
- ALTET Marguerite, *La formation professionnelle des enseignants*, Paris, P.U.F., 1994, p. 123.
- ALTET Marguerite, BRESSOUX PAUL et BRU Marc et al., « Etude exploratoire des pratiques d'enseignement au CE2 », *Les Dossiers d'Education et formations*, n°70, 1996.
- ALTET Marguerite, « Caractériser, expliquer et comprendre les pratiques enseignantes pour aussi contribuer à leur évaluation », *Les dossiers de sciences de l'éducation*, n°10, 2003, p.31-43.
- ALTET Marguerite, « L'observation des pratiques enseignantes effectives en classe : Recherche et formation », *Cadernos de Pesquisa* v.47 n°166, 2017, p.1196-1223.
- AMADE-ESCOT Chantal et MONNIER Nathalie, « L'activité didactique empêchée : outil d'intelligibilité de la pratique enseignante en milieu difficile », *Revue française de pédagogie*, 168, 2009, pp. 59-73.
- AMALBERTI René, MONTMOLLIN Maurice & THEUREAU Jacques, *Modèles en analyse du travail*, Liège, Mardaga, 1991.
- ANGHILERI Julia, BEISHUIZEN Meindert & PUTTEN Kees Van, « From informal strategies to structured procedures: Mind the gap! », *Educational Studies in Mathematics*, 49, 2002, p.149-170.
- ANTELL Sue & KEATING Daniel, « Perception of numerical invariance in neonates », *Child Development*, 54(3), 1983, p.695-701.
- ANTOINE Léon, « Les grilles d'observation des situations pédagogiques. Moyen de diagnostic ou instrument de formation des maîtres », *Revue française de pédagogie*, n°30, 1975, p.5-13.
- APMEP, « Actibités de calcul, calcul rapide, calcul mental, *Aides pédagogiques pour le cours élémentaire*, 1979, p.77-94.
- ARNETON Mélissa, BOCERAN Christine et FLIELLER André, « Les performances en mathématiques des élèves des départements d'Outre-Mer », *L'orientation scolaire et professionnelle*, 42/1, 2013, p.58.

- ARTIGUE Michèle, « L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives », *Repères, IREM*, n°54, 2004, p.23-39.
- ASHCRAFT Mark, « The development of mental arithmetic: A chronometric approach », *Developmental Review*, 2, 1982, p.213-236.
- ASHCRAFT Mark, & FIERMAN Bennett, « Mental addition in third, fourth, and sixth graders », *Journal of Experimental Child Psychology*, 33(2), 1982, p.216-234.
- ASHCRAFT Mark, « Cognitive arithmetic: A review of data and theory », *Cognition*, 1992, p.44, 75-106.
- ASSUDE Thérèse et MARGOLINAS Claire, Aperçu sur les rôles des manuels dans les recherches en didactique des mathématiques. In BRUILLARD Éric (Dir.) : *Manuels scolaires, regards croisés*. Caen, France : CRDP Basse-Normandie, 2005.
- ATTALI Alain et BRESSOUX Pascal, *L'évaluation des pratiques éducatives dans les premiers et seconds degrés*, Rapport établi à la demande du Haut conseil de l'évaluation de l'école, Paris, 2002.
- ASTOLFI Jean-Pierre, Darot Éliane, Ginsburger-Vogel Yvette et Toussaint Jacques, *Mots-clés de la didactique des sciences : repères, définitions, bibliographies*. Paris/Bruxelles : De Boeck Université, 1997.
- AZEMA Guillaume, « Improvisation et travail ordinaire des enseignants entrant dans le métier. Quelle activité ? Quels enjeux ? », *Activités*, 16-1 2019.

B

- BACHELARD Gaston, *La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*, Paris, Vrin, 1934.
- BADDELEY Alan, Working memory and comprehension, in D. BROADBENT, J. MCGAUGH, M. KOSSLYN, N. MACKINTOSH, E. TULVING, & L. WEISKRANTZ (Eds.), *Working memory*. U.K. : Oxford University Press, Oxford, 1986, pp. 75-108.
- BALSLEV Kristine et SAADA-Robert Madelon, « Expliquer l'apprentissage situé de la littéracie : une démarche inductive/déductive », in Madelon SAADA-Robert (éd), *Expliquer et comprendre en sciences de l'éducation*, Bruxelles, De Boeck Supérieur, 2002, pp. 89-110.
- BATURO Annette et COOPER Thomas, « Strategies for comparing decimal numbers with the same whole-number part », in *Proceedings of the 18th Annual Conference of The Mathematics Education Research Group of Australia*, 1995.
- BAUDART Fabrice, « Monde de l'oral et monde de l'écrit en mathématiques », *Le français aujourd'hui*, 2011/3 (n°174), p. 107-118.
- BAUTIER Élisabeth, « Les élèves et le rapport au savoir » in *Actes du stage d'Angers de la COPIRELEM, Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques*, Paris, IREM Paris 7, Université D. Diderot, 1996, p.213-223.
- BAUTIER Élisabeth, *Pratiques langagières, pratiques sociales. De la sociolinguistique à la sociologie du langage*, Paris, L'harmattan, 1995.

- BAUTIER Élisabeth et ROCHEX Jean-Yves, *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens. Démocratisation ou massification*, Paris, Armand Colon, 1998.
- BAUTIER Élisabeth et ROCHEX Jean-Yves, « Rapport au savoir et travail d'écriture en philosophie et sciences économiques et sociales », *Les jeunes et le savoir*, p.133-154, 2001.
- BAUTIER Elisabeth, « L'enseignement en ZEP et les recherches en didactique du français », *Revue Française de Pédagogie*, 140, 2002, pp. 53-64.
- BAUTIER Élisabeth, « L'adaptation des formes scolaires aux élèves : aide ou leurre ? », in Laurent TALBOT, *Pratiques d'enseignement et difficultés d'apprentissage*. Toulouse : Éd. Érès, 2005, p.145-156.
- BAUTIER Élisabeth et RAYOU Patrick, *Les inégalités d'apprentissage, Programmes, pratiques et malentendus scolaires*, Paris, PUF, 2009.
- BAUTIER Élisabeth, « Pratiques scolaires dominantes et inégalités sociales au sein de l'école », in CNESCO, *Comment l'école amplifie les inégalités sociales et migratoires ? Rapport scientifique*, 2015, p.15.
- BARRAY Valérie, « Prise en charge des difficultés mathématiques des enfants porteurs de troubles spécifiques des apprentissages en ergothérapie », *Développements*, 2013/3-4 (n° 16-17).
- BAROODY Arthur, « The development of procedural knowledge: An alternative explanation for chronometric trends of mental arithmetic », *Developmental Review*, 3(2), 1983, 225-230.
- BAROODY Arthur, « A reexamination of mental arithmetic models and data: A reply to Ashcraft », *Developmental Review*, 4, 1984, 148-156.
- BAROODY Arthur & GINSBURG Herbert, « The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic », *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, 1986.
- BARROUILLET Pierre & FAYOL Michel, « From algorithmic computing to direct retrieval. Evidence from number- and alphabetic-arithmetic in children and adults », *Memory & Cognition*., 26, 1998, 355-368.
- BARROUILLET Pierre, « L'émergence des outils arithmétiques », in BARROUILLET Pierre et CAMOS Valérie, *La Cognition mathématique chez l'enfant*, Solal, 2006.
- BARROUILLET Pierre et CAMOS Valérie, *La Cognition mathématique chez l'enfant*, Solal, 2006.
- BARROUILLET Pierre et THEVENOT Catherine, « Chapitre 9. Quels problèmes pose l'apprentissage du calcul ? », dans : CHAPELLE Gaëtane éd., *Réussir à apprendre*. Paris cedex 14, Presses Universitaires de France, « Apprendre », 2009, p. 141-152.
- BARROUILLET Pierre & THEVENOT Catherine, On the problem size effect in small additions: Can we really discard any counting-based account? », *Cognition*, 2013, 128, 35-44.
- BARRERE Anne, « Les établissements scolaires à l'heure des « dispositifs », *Carrefours de l'éducation*, n° 36, 2013, p. 9-13.

- BARTH Hilary et PALADINO Annie, « The development of numerical estimation: evidence against a representational shift » *Dev Sci*, 2011.
- BARTOLINI BUSSI Maria, « Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School », *Educational Studies in Mathematics*, 39, 1996, p.67-87.
- BARUCK Stella, *Comptes pour petits et grands : Volume 1, Pour un apprentissage du nombre et de la numération fondée sur la langue et le sens*, 2003.
- BASQUE Josianne, « Le transfert d'apprentissage : qu'en disent les contextualistes ? in Annie PRESSEAU et Mariane FRENAY, *Le transfert des apprentissages, comprendre pour mieux intervenir*, Québec, Les Presses de l'université de Laval, 2004.
- BECKERS Jacqueline, *Développer et évaluer des compétences à l'école : vers plus d'efficacité et d'équité*. Bruxelles : Labor, 2002.
- BEILLEROT Jacky, « L'analyse des pratiques professionnelles : pourquoi cette expression ? in *Cahiers pédagogiques*, n°346 ,1996, réédité in BLANCHARD-LAVILLE Claudine et FABLET Dominique (dir.), *Analyser les pratiques professionnelles*. Paris : L'Harmattan, 2000, p. 21-26.
- BEISHUIZEN Meindert, « Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second class », *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(4), 1993, p.294-323.
- BEISHUIZEN Meindert,, « Mental arithmetic: Mental recall or mental strategies? *Mathematics Teaching*, 160, 1997, p.16–19.
- BELL Max, « What does "everyman" really need from school mathematics? », *Mathematics Teacher*, 67, 1974, p.196-202.
- BENOIT Paul, CHEMLA Karine et RITTER Jim, *Histoire des fractions, fractions d'histoire*, Birkhäuser, 1992.
- BERCH Daniel, « Making Sense of Number Sense : Implications for Children With Mathematical Disabilities», *Journal of learning disabilities*, 38, 4, 2005, p.333-339, cité par CHESNÉ J.-F., 2014.
- BERNOUSSI Mohammed, « La relation entre les faits additifs et multiplicatifs : une approche par les confusions associatives », in *L'année psychologique*, vol. 96, n°1, 1996, pp. 53-65.
- BERGER Ida, *Les instituteurs d'une génération à l'autre*, Paris, PUF, 1979.
- BERTHIER Nicole, *Les techniques d'enquête en sciences sociales ; méthode et exercices corrigés*, 4^{ème} édition, Paris, Armand Colin, Collection Cursus, 2010, pp. 124-136.
- BEZIAUD Patrick, DUMORTIER Dominique, ROBERT Aline et VANDEBROUCK Fabrice, « Un questionnaire sur l'utilisation du tableau noir en classe de mathématiques (collège et lycée) : portée, limites, perspectives en formation », Document n°1 pour la formation des enseignants, Université Paris 7, 2003.

- BEZOUT Etienne, REYNAUD Antoine André Louis, *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*, par Bezout ; avec des notes et des tables de logarithmes, par A. A. L. Reynaud. Paris : Librairie pour les sciences, 1821. Disponible sur [http : //gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table](http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table).
- BIBBY Tamara, ASKEW Mike et HODGEN Jeremy, « Strategic Thinking and the National Numeracy Strategy: an Oxymoron? », Paper presented at the *British Educational Research Association Annual Conference*, Heriot-Watt University,Edinburgh,2003.
- BIDEAUD Jacqueline, LEHALLE Henry & VILETTE Bruno, *La conquête du nombre et ses chemins chez l'enfant*, Lille : Presses Universitaires du Septentrion, 2004.
- BIGGS John, *Mathematics and the conditions of learning*, Slough: National Foundation for Educational Research, 1967.
- BISSONNETTE Steve, RICHARD Mario et GAUTHIER Clermont, « Interventions pédagogiques efficaces et réussite scolaire des élèves provenant de milieux défavorisés », *Revue française de pédagogie*, n°150, 2005, p.87-141.
- BLANC Jean-Paul, BRAMAND Paul, DEBU Patrick, Dubois A., LAFONT E., PEYNICHOU Danièle, TRUANT D., VARGAS Antoine, *Pour comprendre les mathématiques CP*, Paris, Hachette Éducation, 2008.
- BLANCHARD-LAVILLE Claudine, *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence* : « L'écriture des grands nombres ». Paris : L'Harmattan, 1997.
- BLANCHARD-LAVILLE Claudine, « Les enseignants entre plaisir et souffrance », Paris, PUF, Éducation et Formation, 2001.
- BLANCHARD-LAVILLE Claudine, NADOT Suzanne, « Analyse de pratiques et professionnalisation Entre affect et représentation », *Connexions*, 2004/2 (n°82), p. 119-142.
- BLANCHET Alain et GOTMAN Anne, *L'enquête et ses méthodes : L'entretien*, Paris, Armand Colin, 2007. p. 24.
- BOCCHI Pier Carlo, *Gestes d'enseignement, L'agir didactique dans les premières pratiques de l'écrit* », Exploration Recherches en Sciences de l'Éducation, Peter Lang, Berne, 2015, p.71.
- BOLON Jeanne, « L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire », *Grand N*, IREM de Grenoble, 52,1992, p.49-79.
- BOLON Jeanne, *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école – collège*, Thèse de didactique des mathématiques de l'Université Paris 5, 1996.
- BOLSIUS Christophe, *Fort en calcul mental*, CRDP Lorraine, 2008.
- BOLSIUS Christophe, *Fort en calcul mental*, CRDP Lorraine, 2011.
- BONNEVAL Louis-Marie, « La construction des nombres réels par Dedekind », APMEP, 2008.

- BOUCHETAL Thierry et LANTHEAUME Françoise, « Approche biographique et située de parcours professionnels d'enseignants du premier degré : entre permanence et reconfiguration identitaires », *Le sujet dans la cité*, 2015/2 (N° 6), 2015, p. 81-91.
- BOUDON Raymond, *Raison, Bonnes Raisons*, Paris, PUF, 2003.
- BOULE François, « Performances et démarches de calcul mental au cycle III. Éléments pour une pédagogie du calcul mental », *Thèse de doctorat*, Villeneuve d'Asq, Presses universitaires du Septentrion, 1997.
- BOULE François, « Étapes du calcul mental, *Grand N*, 62,15-34, IREM de Grenoble, 1998.
- BOULE François, « Le calcul mental, constructeur et révélateur des représentations numériques à l'école », *Nombres et calculs à l'école élémentaire*, IREM de Lille, 2002.
- BOULE François, *Le calcul mental au quotidien, cycles 2 et 3*, au Quotidien, Scérén CNDP-CRDP, Dijon, 2012.
- BOURDIEU Pierre, *Le sens Pratique*, Minuit, Paris, 1980
- BOURDIEU Pierre, *Raisons pratiques : Sur la théorie de l'action*, Paris : Seuil, 1994.
- BRACKE Danièle., « Vers un modèle théorique du transfert : les contraintes à respecter », *Revue des sciences de l'éducation*, vol. XXIX, 1998, p.235-266.
- BRESSOUX Pascal, « Les recherches sur les effets-écoles et les effets maîtres », *Revue française de pédagogie*, n°108, 1994, p.91-137.
- BRESSOUX Pascal, « Réflexions sur l'effet-maître et l'étude des pratiques enseignantes », *Les dossiers des sciences de l'éducation*, n°5, 2001, p.35-52.
- BRESSOUX Pascal, COUSTERE Paul et LEROY-AUDOUIN Christine, « Les modèles multiniveaux dans l'analyse écologique : le cas de la recherche en éducation », *Revue française de sociologie*, vol.38, n°1, 1997, p.67-96.
- BRESSOUX Pascal, « L'apport des modèles multiniveaux à la recherche en éducation », *Éducation et didactique*, vol.1, n°2, 2007, p.73-88.
- BRIAND Joël, « L'énumération dans le mesurage des collections », thèse de doctorat, dir. Gérard Vergnaud, Université de Bordeaux I, 1993.
- BRIAND Joël et PELTIER Marie-Lise, « Le manuel scolaire carrefour des tensions mais aussi outil privilégié de vulgarisation des recherches en didactique des mathématiques », *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Paris, IREM, 2008.
- BRIAND Joël, 2006, cité par Jean-François CHESNE, « D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental », Thèse de doctorat, dir. Aline Robert, Université Paris 7, Denis Diderot, 2014, p.44.
- BRIAND Joël, « Les activités spatiales dans et hors du domaine du numérique », 2020 En ligne sur ddm.joel.briand.free.fr.

- BRISSIAUD Rémi, *Comment les enfants apprennent à calculer : Au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles*, Paris : Retz, 1989.
- BRISSIAUD Rémi, CLERC Pierre et OUZOULIAS André, *J'apprends les maths CP*, Paris, Retz, 1991.
- BRISSIAUD Rémi, « *J'apprends les maths Grande section de maternelle* », Paris, éditions Retz, 2001.
- BRISSIAUD Rémi, *Comment les enfants apprennent à calculer ? Le rôle du langage, des représentations et du calcul dans la conceptualisation des nombres*, Paris, éditions Retz, 2003, p.146.
- BRISSIAUD Rémi, « *Premiers pas vers les maths, Les chemins de la réussite à l'école maternelle* », Paris, éditions Retz, 2007.
- BRISSIAUD Rémi, « *J'apprends les maths avec Tchou* », Paris, éditions Retz, 2009.
- BRISSIAUD Rémi, *Apprendre à calculer à l'école – Les pièges à éviter en contexte francophone*. Paris : Retz, 2013.
- BRISSIAUD Rémi, « Vers la fin de la confusion entre le nombre et la quantité représentée par une collection de numéros ? », Textes mis en ligne sur le site de la Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques (Cfem), décembre 2014a.
- BRISSIAUD Rémi, « Pourquoi l'école a-t-elle enseigné le comptage-numérotage pendant près de 30 années ? », Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C2, C3 et C4, Laboratoire Paragraphe-Université Paris 8, 2014.
- BRISSIAUD Rémi, *J'apprends les maths avec Picbille*, Paris, Éditions Retz, 2016, p.7.
- BRISSIAUD Rémi, « Les recommandations Blanquer et la résolution de problèmes arithmétiques à l'école », *Le Café pédagogique* , 2019.
- BROUSSEAU Guy, « Problèmes de l'enseignement des décimaux », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1.1, 11-59. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1980, p.11-59.
- BROUSSEAU Guy, « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques », *Recherches en didactique des mathématiques*, 7/2, 1986, p.33-115.
- BROUSSEAU Guy, « Le contrat didactique et le concept de milieu », Rennes, *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, n°S6, 1989, pp. 95-101.
- BROUSSEAU Guy, *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 1998.
- BROWN Margaret, ASKEW Mark, MILLETT Alison. et RHODES Valérie., « The key role of educational research in the development and evaluation of the national numeracy strategy », *British Educational Research Journal*, 29, 5, 2003, pp. 655-672.
- BRU Marc, *Les variations didactiques dans l'organisation des conditions d'apprentissage*, Toulouse, Editions Universitaires du Sud, 1991.

- BRU Marc, *Les variations didactiques dans l'organisation des conditions d'apprentissage*, Toulouse, Editions universitaires du Sud, 1992.
- BRU Marc, « Pour un nouveau regard sur les pratiques enseignantes », Colloque Défendre et transformer l'Ecole pour tous [CD-ROM]. Marseille, l'IUFM d'Aix-Marseille, université de Provence-Aix-Marseille 1, 1997.
- BRU Marc, « Étudier les pratiques enseignantes : les raisons d'un choix », *Les dossiers des sciences de l'éducation*, n° 5, 2001, p. 5-7.
- BRU Marc, « Pratiques enseignantes : des recherches à conforter et à développer », in *Revue française de pédagogie*, volume 138, Recherches sur les pratiques d'enseignement et de formation, 2002, pp. 63-73.
- BRU Marc, « Le choix de l'observation pour l'étude des pratiques enseignantes », in Line NUMA-BOCAGE, Jean-François MARCEL et Philippe CHAUSSECOURTE, « De l'observation des pratiques enseignantes », *Recherches en éducation*, n°19, juin 2014.
- BUCHETON Dominique, *L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés*, Toulouse : Octares Éditions, 2009.
- BUCHETON Dominique, *Les gestes professionnels dans la classe. Éthique et pratiques pour les temps qui viennent*, Collection Pédagogies, Paris : ESF, 2020.
- BUISSON Ferdinand, *Dictionnaire de pédagogie d'instruction primaire*, Tome 1 de la première partie, Hachette, 1887, p.314-316.
- BURAWOY Michael, « L'étude de cas élargie. Une approche réflexive, historique et comparée de l'enquête de terrain », in Daniel CEFALI (dir.), *L'enquête de terrain*, Paris, La Découverte, « Recherches », 2003, p. 425-464.
- BUTLEN Denis. et al., *Calcul mental, calcul rapide*, IREM de Paris VII, 1987
- BUTLEN Denis et PEZARD Monique, « Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté, *Cahier de DIDIREM*, n°13, Paris, IREM de Paris VII, Université de Paris VII, 1992a.
- BUTLEN Denis et PEZARD Monique, « Calcul mental et résolutions de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2 », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 12-2-3, La pensée sauvage, pp. 319-368, 1992b.
- BUTLEN D. et PEZARD M., « Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée », *Grand N* 50, 1992, p.29-58.
- BUTLEN D. et PEZARD M., « Rapports entre habileté calculatoire et prise de sens dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire, *Cahier de DIDIREM* n°27, IREM de Paris VII, Université de Paris VII, 1996.

- BUTLEN Denis et LE POCHÉ Guy, « Deux exemples de situations d'enseignement de mathématiques s'adressant aux élèves en difficulté », *Ministère de l'Éducation nationale, Texte d'accompagnement des programmes*, Paris, 1997.
- BUTLEN D. et PEZARD M., « Rôle de l'écrit collectif dans la conceptualisation de notions mathématiques et dans l'acquisition de méthodes de résolution de problèmes, 1999.
- BUTLEN Denis et PEZARD Monique, « Le rôle du calcul mental dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution de problèmes », *Repères Irem*, 41, Topiques éditions, 2000, p.5-24.
- BUTLEN Denis, PELTIER-BARBIER Marie-Lise et PEZARD Monique, « Nommés en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP : contradiction et cohérence », *Revue française de pédagogie*, n°140, 2002a, p.41-52.
- BUTLEN Denis, MASSELOT Pascale et PEZARD Monique, « De l'analyse de pratiques effectives de professeurs d'école débutants nommés en ZEP-REP à des stratégies de formation », *Recherche et formation*, n°44, 2002b, p.45-62.
- BUTLEN Denis et PEZARD Monique, « Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques », *Recherches en didactique des mathématiques* 23 (1), 2003, p.41-78.
- BUTLEN Denis, « Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs des écoles », *Habilitation à diriger des Recherches en Sciences*, Université de Paris 8, 2004.
- BUTLEN Denis, « Deux points de vue pour analyser les pratiques », Dans Marie-Lise PELTIER (dir.), *Dur d'enseigner en ZEP*, Grenoble, Grenoble : La pensée sauvage éditions, 2004.
- BUTLEN Denis, *Le calcul mental entre sens et techniques, Recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution de problèmes numériques*, Presses universitaires, Franche-Comté, 2007, p.105-106.
- BUTLEN Denis et CHARLES – PEZARD Monique, « Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté, Le calcul mental entre sens et technique », *Grand N*, n°79, 2007, p.7-32.
- BUTLEN Denis et MASSELOT Pascale, « Dialectique entre sens et techniques, L'exemple du calcul mental », In *Le nombre au cycle 2*, CNDP, p.14, août 2010.
- BUTLEN Denis et MASSELOT Pascale, « Des réponses de professeurs débutants nommés dans des écoles de milieux défavorisés à deux grandes questions de la profession », in MARY Claudine, SQUALLI Hassane, THEIS Laurent et DEBLOIS Lucie, *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage. Regard didactique*, Qu2bec, Presses de l'université du Québec, 2014, p.63-77.
- BUTLEN Denis et CHARLES – PEZARD Monique et MASSELOT Pascale, « Apprentissage et inégalités au primaire : le cas de l'enseignement des mathématiques en éducation prioritaire », Contribution dans le cadre du rapport Cnesco sur les inégalités scolaires d'origine sociale et ethnoculturelle, Laboratoire de didactique André-Revuz, Université Cergy-Pontoise, novembre 2015.

C

- CAMPBELL Jamie., « Mechanisms of simple addition and multiplication: A modified network-interference theory and simulation. Mathematical », *Cognition*, 1 , 1995, 121-164
- CAMPBELL Jamie & XUE Quilin, « Cognitive arithmetic across cultures », *Journal of Experimental Psychology: General*, 130, 2001, p.299-315.
- CANEY Annaliese « Exploring mental computation in the middle years », in B. BARTON, K. C. IRWIN, M. PFANNKUCH, & M. O. J. THOMAS (Eds.). *Mathematics education in the South Pacific. Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Auckland, Sydney : MERGA*, 2002, p. 163- 170.
- CARETTE Vincent, « Les caractéristiques des enseignants efficaces en question », *Revue française de pédagogie*, [En ligne], 162, janvier-mars 2008, mis en ligne le 1^{er} janvier 2012, URL : <http://journals.openedition.org/rfp/851>.
- CARPENTER Thomas, HIEBERT James, and MOSER James, « First-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems », *Journal for Research in Mathematics Education* 12, 1981, p.27–39.
- CARPENTER Thomas, & MOSER James, « The acquisition of addition and subtraction concepts », in R. Lesch & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes*, New York : Academic Press, 1983.
- CARPENTER Thomas, MOSER James & BEBOUT Harriett, « Representation of addition and subtraction word problems », *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(4), 1988, 345–357.
- CASE Robbie, « Changing views of knowledge and their impact on educational research and practice, in OLSON David et TORRANCE Nancy (Eds.), *Handbook of education and human development*, Malden, MA : Blackwell, 1998, p.75-99.
- CAUTY André, *Taxinomie, syntaxe et économie des numérations parlées*, Amérindia, n°9, 1984. Disponible sur : <http://celia.cnrs.fr/Fr/Amerindia.htm>.
- CAUTY André, *Taxinomie, syntaxe et économie des numérations parlées*, Amérindia, n°11, 1986. Disponible sur <http://celia.cnrs.fr/Fr/Amerindia.htm>.
- CEBE Sylvie et GOIGOUX Roland, « L'influence des pratiques d'enseignement sur les apprentissages des élèves en difficulté », *Cahiers Alfred Binet*, Vol. 661, 4, 1999, pp.49-68.
- CHALL Jeanne, *The academic Achievement Challenge : What Really Works in the classroom ?* New-York, Guilford Press, 2000.
- CHAMPY Philippe, *Vers une nouvelle guerre scolaire. Quand les technocrates et les neuroscientifiques mettent la main sur l'Éducation nationale*. La Découverte, « Cahiers libres », 2019, p.63-85.
- CHAPELLE Gaëtane et CRAHAY Marcel, *Réussir à apprendre*, Presses Universitaires de France, « Apprendre », 2009.

- CHARBONNIER Robert, *La route des chiffres*, Irem de Clermont – Ferrand, 1994.
- CHARLOT Bernard, BAUTIER Élisabeth et ROCHEX Jean-Yves, *École et savoirs dans les banlieues...et ailleurs*, Paris, Armand Colin, 1992.
- CHARLOT Bernard, *Du rapport au savoir, éléments pour une théorie*, Paris : Anthropos, 1997, p.112.
- CHARLOT Bernard, *Le rapport au Savoir en milieu populaire. Une recherche dans les lycées professionnels de banlieue*, In *Revue française de pédagogie*, volume 131, 2000. Les formations professionnelles entre l'Ecole et l'Entreprise, 2000, pp. 136-138.
- CHARLOT Bernard, « Formes et enjeux des recherches en éducation et formation », *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*, 50, 2017, 17-30.
- CHARNAY Roland, DOUAIRE Jacques, GUILLAUME Jean- Claude & VALENTIN Dominique, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cycle des apprentissages, Grande Section de Maternelle*, Collection ERMEL. Paris : Hatier,1990.
- CHARNAY Roland et VALENTIN Dominique, « Calcul ou comptage ? Calcul et comptage ! », *Grand N*, n°50, 1991-1992, p.11-20.
- CHARNAY et al., « Un tous, ...différemment ! Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages », *Rencontres pédagogiques*, n°34, INRP, Paris, 1995.
- CHARNAY Roland, DUSSUC Marie-Paule et MADIER Dany, *Cap maths. Guide de l'enseignant, Nouveaux programmes*, Paris, Éditions Hatier, 2009.
- CHARNAY Roland, DUSSUC Marie-Paule et MADIER Dany, *Cap maths CP. Guide de l'enseignant*, Paris, Hatier, 2010.
- CHARNAY Roland dans *Comment enseigner les nombres entiers et la numération décimale ? De la PS au CM2*, Hatier, Paris, 2013.
- CHARNAY Roland et Mante Michel, *Mathématiques T.1, Épreuve d'admissibilité, CRPE, Professeur des écoles*, Paris, Hatier, 2014.
- CHEN Qihuong et LI Jie, « Association between individual differences in non-symbolic number acuity and math performance : A meta-analysis », *Acta Psychologica*, 148, 2014, 163-172.
- CHESNAIS Aurélie, *Enseigner les mathématiques en ZEP : Recherche sur la géométrie en sixième*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes, Collection Paideia, 2014, p.18.
- CHESNE Jean-François, « D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental », thèse de doctorat en Sciences de l'Education, dir.Aline Robert, Université Paris 7, Denis Diderot, 2014.
- CHESNE Jean-François et FISCHER Jean-Paul, « Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire », Cnesco - Université de Lorraine, Laboratoire InterPsy, Novembre 2015.

- CHESNE Jean-François, « Analyse critique des évaluations standardisées sur les apprentissages des élèves, in Jean-Luc DORIER, Ghislaine GUEUDET, Marie-Lise PELTIER, Aline ROBERT et Éric RODITI, *Enseigner les mathématiques*, Paris, Belin Éducation, 2018, pp.105-141.
- CHEVALLARD Yves, BOSCH Marianna et GASCON Josep, « Organiser l'étude », Dans Jean-Luc DORIER, Michèle Artaud, Michèle ARTIGUE René BERTHELOT et René FLORIS (dir.), *Actes de la XI^{ème} école d'été de didactique des mathématiques Corps*, Grenoble, Ed. La pensée Sauvage, 2002, p.3-56.
- CHEVALLARD Yves, « La transposition didactique et leur théorisation » La Pensée Sauvage Editions, 1985.
- CHOPPIN Alain, *Les Manuels scolaires : histoire et actualité*, Pédagogies pour demain, Paris : Hachette Éducation, 1992
- CLANET Joël, « Les compétences de l'enseignant. Entre pratiques déclarées et pratiques effectives ». *Actes du REF 98, Savoirs, rapports aux savoirs et professionnalisation*, Lyon : INSA, 1998.
- CLANET Joël, « Contribution à l'étude des pratiques d'enseignement : caractérisation des interactions maître-élève(s) », *Recherche et formation*, n°14, 2005, p.11-28.
- CLANET Joël, « Un organisateur des pratiques d'enseignement : les interactions maître-élève(s), *Recherche et formation*, n°56, 2007, p.47-65.
- CLAVIE Claudette, PELTIER Marie-Lise et AUBERT Patrick, *Calcul mental au cycle 2 : Des activités pour un entraînement quotidien*, Paris : Hatier, 2005.
- CLOT Yves, *La fonction psychologique du travail*, Paris, PUF, 1999, p.44.
- CNESCO (Conseil national d'évaluation du système scolaire), « Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire », Recommandations du jury, Conférence de consensus, 26 novembre 2015, p.5.
- COLLET Isabelle et GREGOIRE Jacques, « Le développement du système en base dix chez les enfants de première et de deuxième primaire », in Marcel CRAHAY et al., *Enseignement et apprentissage mathématiques*, De Boeck Supérieur, Pédagogies en développement, 2008, p.79-103.
- COLSAËT Françoise et FOURNIER Jean-Pierre, « Questions au(x) programme(s) », *Cahiers Pédagogiques*, n°507, Septembre 2013, p.10.
- COMBESSIE Jean-Claude, « L'observation », *La méthode en sociologie*, La Découverte, 2007, pp. 12-23.
- COMITI Claude, BESSOT Annie, & PARISELLE Claude, « Analyse de comportements d'élèves en cours préparatoire confrontés à une tâche de construction d'un ensemble équipotent à un ensemble donné », *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 1(2), 1980, 173–224.
- COMITI Claude, GRENIER Denis et MARGOLINAS Claire, « Niveaux de connaissance en jeux lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques, in Gilbert

ARSAC, GREA Jean, Denis Grenier et TIBERGHIEU Andrée (Eds.), *Différents types de savoirs et leur articulation*, Grenoble, La Pensée sauvage, 1995, p.98.

- COMMISSION DE REFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, « Rapport d'étape sur le calcul », 2001.
- COMMISSION DE REFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, « Le calcul. L'enseignement des sciences mathématiques », Chap.4, in KAHANE Jean-Pierre (dir.), Odile Jacob/ CNDP, Paris, 2002.
- COPIRELEM, *Calcul mental à l'école primaire. Ressources et formation*, ARPEME, juin 2012.
- CONDORCET, *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité. Art, Culture, Lecture* - Editions, Paris, 1988
- CONNE François, « La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième années de l'école primaire, Histoire et perspectives sur les mathématiques », [math. HO]. University of Geneva, 1981.
- CONNE François, « Une épreuve de calcul en première primaire : analyses détaillées de productions d'élèves ». *Interactions Didactiques* 6, 1984, p.193.
- CONNE François, « Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12/2.3, Grenoble, La Pensée Sauvage, 1992, p.221-270.
- COPIRELEM - COMMISSION PERMANENTE DES IREM POUR L'ECOLE ELEMENTAIRE, *Calcul mental à l'école primaire, Ressources et formation*, ARPEME, Juin 2012.
- COQUIN René-Jean, « Des stratégies au service des professeurs d'EPS pour faire face à la violence des collégiens », Thèse de doctorat, LESCOUARCH Laurent (dir.) et RINAUDO Jean-Luc (dir.), Université de Rouen-Normandie, 2019.
- CORE KNOWLEDGE : DEHAENE Stanislas, « Origins of mathematical intuitions. The Year in Cognitive Neuroscience », *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1156, 2009, p.232-259.
- COULANGE Lalina, « Quand les savoirs mathématiques à enseigner deviennent des incidents. Étude des pratiques d'enseignement des mathématiques d'une enseignante de CM2 », in Jean-Yves ROCHEX ET Jacques CRINON (Eds.), *La construction des inégalités scolaires*, Rennes PUR, 2011.
- COUR DES COMPTES, *Le suivi individualisé des élèves : une ambition à concilier avec l'organisation du système éducatif*. Paris : Cour des comptes, 2015.
- CRAHAY MARCEL, *Peut-on lutter contre l'échec scolaire ?* Bruxelles : De Boeck, 1996.
- CRESPO Sandra & NICOL Cynthia, « Challenging Preservice Teachers' Mathematical Understanding: The Case of Division by Zero », *School Science and Mathematics*, 106, 2010, 84 - 97.

- CRUMP Thomas, *The Anthropology of Numbers*, Cambridge University Press. Compte-rendu de CAVEING M., *L'Homme*, Volume 34, Numéro 130, pp.155-158, 1990.
- CUSSET Pierre-Yves, « Les pratiques pédagogiques efficaces. Conclusions de recherches récentes », *France Stratégie*, Document de travail n°2014-01, août, 2014.

D

- DAVEZIES Laurent, « Influence des caractéristiques du groupe des pairs sur la scolarité élémentaire, *Éducation & formations*, n° 72, septembre 2005, p.172.
- DEDEKIND Richard (1887), *Les nombres : que sont-ils et à quoi servent-ils ?* traduction de Judith Milner et Hourya Sinaceur, Bibliothèque d'Ornicar, Seuil, 1978.
- DEHAENE Stanislas, BOSSINI Serge & GIRAUX Pascal, « The mental representation of parity and number magnitude », *Journal of Experimental Psychology-General*, 122, 1993, p.371-396.
- DEHAENE Stanislas, « Psychologie cognitive expérimentale » in *L'annuaire du Collège de France 2007-2008*, p.277-301, 2008.
- DEHAENE Stanislas, *La bosse des maths*, Odile Jacob, 2010.
- DE KETELE Jean-Marie, *Méthodologie de l'observation*, Bruxelles : De Boeck, 1987.
- DE KETELE Jean-Marie et ROEGIERIS Xavier, *Méthodologie du recueil d'information*, Bruxelles, De Boeck, 1996.
- DELALANDE Julie, DUPONT Nathalie et FILISETTI Laurence, « Partager les responsabilités en éducation », *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*, vol. 48 n°1, 2015.
- DE LAVERGNE Catherine, « La posture du praticien-chercheur : un analyseur de l'évolution de la recherche qualitative », Université Paul Valéry – Montpellier III, 2007.
- DEMAILLY Lise, « Contribution à une sociologie des pratiques pédagogiques », in *Revue française de sociologie*, 26-1.,1985 pp. 96-119.
- DE MONTMOLLIN Maurice, *L'intelligence de la tâche, Éléments d'ergonomie cognitive*, collection Sciences pour la communication, Peter Lang Verlag, 1984.
- DESCAVES Alain, *Le manuel du PE2. Mathématiques*, Paris : Hachette Éducation, 2007.
- DESCOEUDRES Alice, *Le développement de l'enfant de deux à sept ans*, Neufchâtel, Paris, Delachaux et Niestlé, 1921.
- DE VECCHI Gérard et CARMONA-MAGNALDI Nicole *Faire construire des savoirs*, Paris, Hachette, 1996.
- DJAMENT Daniel et GAMO Sylvie, *Le calcul mental à l'école élémentaire, les bases du calcul nécessaires à l'apprentissage des mathématiques*, Hachette Éducation, 2009.
- DORIER, Ghislaine GUEUDET, Marie-Lise PELTIER, Aline ROBERT et Éric RODITI, *Enseigner les mathématiques*, Paris, Belin Éducation, 2018, p.249.

- DOUADY Régine, « Jeu de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques », Thèse de doctorat, Université de Paris VII, 1984.
- DOUADY Régine et PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne, « *Liaison école-collège : les nombres décimaux* », Brochure de l'IREM de Paris 7, 1986.
- DOUADY Régine, Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères IREM, n°6. Topiques Editions, Pont à Mousson, 1992.
- DOUADY Régine, « Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir », *Repères IREM* n° 15, 1994.
- DOYLE Wellington, « Paradigmes de recherche sur l'efficacité des enseignants », in Marcel CRAHAY et Dominique LAFONTAINE, (éd.), *L'art et la science de l'enseignement*, Bruxelles, Labor, 1986.
- DUBAR Claude, « Formes identitaires et socialisation professionnelle », *Revue Française de Sociologie*, 1992, 33-4, p.505-529.
- DUBET François et MARTUCELLI Danilo, *À l'école, Sociologie de l'expérience scolaire*, Paris, Seuil, 1996.
- DUBET François, *Le déclin de l'institution*. Paris, PUF, 2002.
- DUBET François et DURU-BELLAT Marie, *L'hypocrisie scolaire*, Paris, Seuil. 2000.
- DURAND Catherine et VERGNAUD Gérard, « Structures additives et complexité psychogénétique », *Revue française de pédagogie*, volume 36, 1976. pp. 28-43.
- DURPAIRE Jean-Louis (2010), cité par Cédric VILLANI et Charles TOROSSIAN, « 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques », Rapport remis le 12 février 2018.
- DURU-BELLAT Marie et MINGAT Alain, *Pour une approche analytique du fonctionnement du système éducatif*, Paris : PUF, 1993.
- DURU-BELLAT Marie et MINGAT Alain, « La variété du fonctionnement de l'école : identification et analyse des "effets-maîtres", in Marcel CRAHAY (éd.), *Évaluation et analyse des établissements de formation, problématique et méthodologie*, Bruxelles, De Boeck Université, 1994.
- DURU-BELLAT Marie et MINGAT Alain, « La constitution des classes de niveau dans les collèges ; les effets pervers d'une pratique à visée égalisatrice », *Revue française de sociologie*, vol.38, n°4, 1997, p.759-789.
- DURU-BELLAT Marie et MINGAT Alain, « Vérification et falsification dans la recherche en éducation », in Charles HADJI et Jacques BAILLE, *Recherche et éducation. Vers une "nouvelle alliance". La démarche de preuve en 10 questions*, Bruxelles, De Boeck, 1998, p.161-190.
- DUSCHENE Claire, « Complexité et défis associés aux rôles de conseiller pédagogique », *McGill Journal of Education*, 51(1), 2016, p.635-656.<https://doi.org/10.7202/1037363rar>

E

- EMPRIN Fabien et EMPRIN Fabienne, Premières compétences pour accéder au dénombrement, *Le nombre au cycle 2*, CRDP du Centre, 2010.
- ERMEL, *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle préparatoire*, Paris, Éd. Hatier, 1991.

F

- FAYOL Michel, « Nombre, numération, et dénombrement. Que sait-on de leur acquisition ? », *Revue Française de Pédagogie*, n°70, Paris, INRP, 1985, p.59-77.
- FAYOL Michel, HABDI Hervé et GOMBERT Jean Emile, « Arithmetic Problems Formulation and Working Memory Load », Laboratoire de Psychologie Université de Bourgogne, Dijon, 1987.
- FAYOL Michel, *L'enfant et le nombre*, Neuchâtel : Delachaux et Niestlé, 1990
- FAYOL Michel., « La résolution de problèmes : de la compréhension aux opérations » *Actes du séminaire national « L'enseignement des mathématiques à l'école primaire »*, DGESCO-Eduscol, 2007.
- FAYOL Michel, « La résolution de problèmes : de la compréhension aux opérations », in MEN, *L'enseignement des mathématiques à l'école primaire, Actes du séminaire national*, Paris le 13 et 14 novembre 2007b, p.49.
- FAYOL Michel, *L'acquisition du nombre*, Que sais-je ? Presses Universitaires de France, Paris, 2012.
- FAYOL Michel & THEVENOT Catherine, « The use of procedural knowledge in simple addition and subtraction problems », *Cognition*, 123, 2012, p.392-403.
- FAYOL Michel, « Nombres et opérations : Premiers apprentissages à l'école primaire », Un bilan scientifique, Conférence de consensus, novembre 2015.
- FELIX Christine *et al.*, « Des élèves en difficulté aux dispositifs d'aide : une nouvelle organisation du travail enseignant ? *Recherches en éducation*, hors-série n° 4, 2012, p. 19-30.
- FELOUZIS Georges, « L'efficacité des enseignants. Sociologie de la relation pédagogique », *Recherche & Formation*, n°25, 1997.
- FEYFANT Annie, « La différenciation pédagogique en classe », *Dossier de veille de l'IFÉ*, n°113, novembre 2016.
- FEYFANT Annie, « L'accompagnement à l'école : dispositifs et réussite des élèves », Dossier de veille de l'IFÉ, n° 119, Lyon, ENS de Lyon, juin 2017, p. 2.
- FISCHER Jean-Paul, « Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de trois à six ans », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.2-3, Grenoble La Pensée Sauvage, 1981, p.277-302 ;
- FISCHER Jean-Paul, « L'automatisation des calculs élémentaires à l'école », *Revue française de Pédagogie*, n°80, Paris, 1987, p.17-24.

- FISCHER Jean-Paul, *Apprentissages numériques*, Nancy Presses universitaires de Nancy, 1992.
- FISCHER Jean- Paul, « Les différences cognitives entre sexes : une autre approche et d'autres observations », *Pratiques psychologiques* 10(4), 2004, p.401–413.
- FISCHER Jean-Paul, « Le subitizing et la discontinuité après 3 ans », in Jacqueline BIDEAUD, Claire MELJAC, et Jean-Paul FISCHER (Eds.), *Les chemins du nombre*, Lille : Presses Universitaires du Septentrion, 1991, pp. 235-258, in Manuela PIAZZA, Pierre PICA, Véronique Izard, Elisabeth SPELKE, & Stanislas DEHAENE, « Education enhances the acuity of the non-verbal approximate number system», *Psychological Science*, 24 (6), 2013, p.1037-1043.
- FOCANT Jérôme et Grégoire Jacques, « Chapitre 8. Les stratégies d'autorégulation cognitives : une aide à la résolution de problèmes arithmétiques », CRAHAYE Marcel éd., *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* De Boeck, Supérieur, 2008, pp.201-221.
- FORGET Aexia, « La différenciation dans l'enseignement : état des lieux et questionnement », CNESCO et ifé, *Conférence de consensus, Différenciation pédagogique : Comment adapter l'enseignement pour la réussite de tous les élèves*, mars 2017, p.16.
- FRENAY Mariane, « Du transfert des apprentissages au transfert des connaissances », in Annie PRESSEAU et Mariane FRENAY, *Le transfert des apprentissages, comprendre pour mieux intervenir*, Québec, Les Presses de l'université de Laval, 2004.
- FUSON Karen, RICHARDS John, BRIARS Diane., «The acquisition and elaboration of the number word sequence», In *Children's logical and mathematical cognition: Progress in cognitive developmental research*, BRAINERD CJ (ed), Springer-Verlag, New-York, 1982, pp.33-92.

G

- GAGNON Bernard, « Le conseiller pédagogique, un partenaire pour vivre les changements en éducation au Québec », *Vie pédagogique*, (153), 2010, p.13-18.
- GALPERINE P., « Essai sur la formation par étapes des actions et des concepts », in Alexis LEONTIEV, Alexandre LURIA et Anatoli Smirnov (Eds), *Recherches psychologiques en URSS*, Moscow, Editions du progrès, 1966, p.114-132.
- GAMO Sylvie et DJAMENT Daniel, *Le calcul mental à l'école élémentaire : Les bases du calcul nécessaire à l'apprentissage des mathématiques*, Hachette Éducation, Paris, 2009.
- GAMORAN Andrea, « Alternatives uses of ability grouping in secondary schools : can web ring high-quality instruction to low-ability classes ? », *American journal of education*, vol.102, n°1, 1993, p.1-22.
- GARDNER Howard, *Les intelligences multiples. Pour changer l'école : la prise en compte des différentes formes d'intelligence*, Paris, Retz, 1996.
- GARNIER Annie, LOQUET Monique, AMADE-ESCOT Chantal, avec la contribution de DUFOR Francine, « Analyse comparée de trois systèmes didactiques en APSA : enseignement scolaire, entraînement sportif, transmission chorégraphique », Communication au Symposium de Didactique Comparée, CD-Rom des actes du Congrès de l'AECSE, Lille, France, 5-8 septembre 2001.

- GEAY Bertrand, *Profession : instituteur*, Paris, Liber, 1999.
- GEERTZ Clifford, *The Interpretation of Cultures*, Basic Books, 1973.
- GEERTZ Clifford, *Savoir local, savoir global les lieux du savoir*, Paris : Presses universitaires de France, 1986.
- GELMAN Rochel & TUCKER Marsha, « Further Investigations of the Young Child's Conception of Number », *Child Development*, 46, 1975, p.167-175.
- GELMAN Rochel, « Les bébés et le calcul », *La recherche*, n°149, volume 14, 1983, p.1382-1389.
- GENELOT Sophie & TUPIN Frédéric, « Dynamique de classe et efficacité scolaire », *Les dossiers des sciences de l'éducation*, n° 10, 2003, p. 109-130.
- GOASDOUE Rémi, « Regards psychologiques sur les apprentissages mathématiques », in Jean-Luc DORIER, Ghislaine GUEUDET, Marie-Lise PELTIER, Aline ROBERT et Éric RODITI, *Enseigner les mathématiques*, Paris, Belin Éducation, 2018, pp.165-212.
- GOIGOUX Roland, « Les élèves en grande difficulté de lecture et les enseignements adaptés », Rapport de recherche DLC CI n°97 1184 remis à la direction des enseignements scolaires (DESCO) du Ministère de l'Éducation Nationale, de la Recherche et de la Technologie. Édité en 2000 sous le titre *Apprentissage et enseignement de la lecture dans l'enseignement adapté*, Suresnes : CNEFEI, 1998.
- GOIGOUX Roland, « Analyser l'activité d'enseignement de la lecture : une monographie », *Revue française de Pédagogie*, n°138, 2002, p.125-134.
- GOIGOUX Roland, « Ressources et contraintes dans le travail d'enseignement de la lecture au cours préparatoire. (Symposium de didactique du français au colloque du REF à Genève), in Bernard SCHNEUWLY et Thérèse THEVENAZ (Eds.) : *Le travail de l'enseignant et l'objet enseigné : le cas du français langue première*, Bruxelles : De Boeck et Lancier, 2006, p.67-92.
- GOIGOUX Roland, « Un modèle d'analyse de l'activité des enseignants », *Éducation et didactique*, vol.1, n°3, Presses Universitaires de Rennes, Décembre 2007, p.54. Consulté le 28 février 2016. URL : <http://educationdidactique.revues.org/232>.
- GRABNER Roland & DE SMEDT Bert, « Neurophysiological evidence for the validity of verbal strategy reports in mental arithmetic », *Biological Psychology*, 87, 2011, p.128-136.
- GRAPIN Nadine et MOUNIER ÉRIC, « Vers un outil d'analyse des manuels : Exemple d'étude en 1^{ère} année d'école élémentaire, RMé, n°230, octobre 2018.
- GRAVEMEIJER Koen, « Facts and algorithms as products of students' own mathematical activity », in KILPATRICK, J., MARTIN, W. G., & SCHIFTER, D.(Eds.), *A research companion to Principles and Standards for school mathematics*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 114–122.
- GRECO Pierre, « Quantité et Quotité », in Pierre GRECO et Albert MOREF, *Structures numériques élémentaires*, Paris, PUF, 1962.

- GREENO James, COLLINS Allan et RESNICK Lauren., « Cognition and learning » in David BERLINER et Robert CALFEE, (éd.), *Handbook of Education Psychology*, New-York, Simon and Schuster Macmillan, 1996.
- GRISAY Aletta, « Hétérogénéité des classes et équité éducative ». *Enjeux*, n° 30, 1993, p. 69-95.
- GRISVARD Catherine et LEONARD François, « Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison des nombres décimaux positifs », *Bulletin de l'A.P.M.E. P*, 327, 1981, p.47-60.
- GRISVARD Catherine et LEONARD François, « Résurgences de règles implicites dans la comparaison des nombres décimaux positifs », *Bulletin de l'A.P.M.E. P*, 340, 1983, p.450-459.
- GROEN Guy & PARKMAN John, « A chronometric analysis of simple arithmetic », *Psychological Review*, 79, 1972, p.329-343.
- GUEDJ Denis, *L'empire de nombres*, Gallimard, 1996.
- GUEDIN Nolwenn, *Remédiation en mathématiques au quotidien*, CRDP de Bourgogne, au Quotidien, 2013, p.48.
- GUEUDET Gislaine et TROUCHE Luc, *Ressources vives : Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, Rennes : Presses universitaires de Rennes, 2010.
- GUITEL Geneviève, *Histoire comparée des numérations écrites*, Flammarion, coll. « Nouvelle bibliothèque scientifique », Paris, 1975.

H

- HACHE Christophe et ROBERT Aline, « Analyse des pratiques effectives en classe de seconde », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 17, n°3, 1997, pp.103-150.
- HALIMI Brice, « Qu'est-ce qu'un nombre ? », Université Paris Nanterre, Second semestre 2009.
- HAMELINE Daniel et PIVETEAU Didier-Jacques, Préface à l'ouvrage de Neil POSTMAN. In Neil POSTMAN, *Enseigner c'est résister*, Paris : Le Centurion, 1981.
- HASHWEH Maher, « Effects of subject-matter knowledge in the teaching of biology and physics », *Teaching and Teacher Education*, vol. 3, n° 2, pp. 109-120, 1987.
- HATTIE John, *Visible Learning : A synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement*, Londres, Routledge, 2008.
- HEIRDSFIELD Ann et COOPER Thomas, « Inaccurate Mental addition and subtraction: Causes and Compensation », *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26, 3, 2004, p.43-65.
- Heirdsfield Ann et Lamb Janeen, « Mental Computation : The Benefits of Informed Teacher Instruction » in Clarkson, Philip and Downtown, Ann and Gronn, Donna and Horne, Marj and McDonough, Andrea and Pierce, Robyn and Roche, Ann (Eds). *Proceedings MERGA 28 - 2005 Building connections: Theory, research and practice*, 2, Melbourne, 2005, p.419-426.

- HERSANT Magali et MORIN Christiane, *Pratiques enseignantes en mathématiques : expérience, savoir et normes*, Bordeaux : Presses Universitaires de Bordeaux, 2013.
- HOULE Hélène et PRATTE Marielle, « Les conseillères et les conseillers pédagogiques. Qui sont-ils ? Que font-ils ? », *Pédagogie collégiale*, 17 (2), 2003, p.20-26.
- HOUSSAYE Jean, *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui*, Paris, ESF, 1993.
- HOWDEN Hilde, « Teaching number sense », *Arithmetic Teacher*, 36, 6, 1989, p. 6-11, cité par CHESNÉ J.-F., 2014.
- HUBERMAN Michael et MILES Matthew., *Analyse de données qualitatives*, Bruxelles, De Boeck Université, 1991.

I

- IFRAH Georges, *Histoire universelle des chiffres*, Seghers, vol. II, chap.5, 1981, p.99.
- IFRAH Georges, *Histoire universelle des chiffres*, Robert Laffont, 1994.
- IRESON Judith, HALLAM Susan et HURLEY Clare, « What are the effects of ability grouping on CSGE attainment ? », *British educational research journal*, vol.31, n°4, 2005, p.443-456.
- IZARD Veronique, SANN Coralie, SPELKE Elizabeth & STRERI Arlette, Newbor infants perceive abstract numbers », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2009.

J

- JARLEGAN Annette, « La fabrication des différences : sexe et mathématiques à l'école élémentaire », Thèse de doctorat, Sciences de l'éducation, dir. Marie Duru-Bellat et Michel Fayol, Université de Bourgogne, 1999.
- JARLEGAN Annette, TAZOUTI Youssef, FLIELLER André, KERGER Sylvie et MARTIN Romain, « Les interactions individualisées maître-élève : une comparaison entre la France et le Luxembourg », *Revue française de pédagogie*, 173, octobre-décembre 2010, p.70.Consulté le 01 mai 2019. URL : <http://journals.openedition.org/rfp/2573> ; DOI : 10.4000/rfp.2573
- JULO Jean, *Représentations des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaires de Rennes, Rennes, 1995.

K

- KAMII Constance et DOMINICK Ann, « To teach or not to teach algorithms », *Journal of Mathematical Behaviour*, 16, 1,1997, p.51-61.
- KHERROUBI Martine et ROCHEX Jean-Yves, « La recherche en éducation et les ZEP en France. Apprentissages et exercice professionnel en ZEP : résultats, analyses, interprétations », *Revue française de pédagogie*, 2004.
- KINSBOURNE Marcel et WARRINGTON Elizabeth, 1978 cités par FAYOL Michel, *L'acquisition du nombre*, Que sais-je ? Presses Universitaires de France, Paris, 2012.

- KOEDEL Cory et BETTS Julian, « Re-exalining the role of teacher quality in the educational production function », *Working Paper*, n°07-08, university of Missouri-Columbia, 2007. Disponible sur Internet à l'adresse : http://economics/missouri.edu/working-papers/2007/wp0708_koedel/pdf
- KOHN Laurence et CHRISTIAENS Wendy, « Les méthodes de recherches qualitatives dans la recherche en soins de santé : apports et croyances », in *Reflets et perspectives de la vie économique*, n°4, Tome LIII, Bruxelles, De Boeck Supérieur, 2014, pp. 67 à 82.
- KUNTZMANN Jean, *Calcul mental de 10 à 90 ans*, IREM de Grenoble, 1987.

L

- LAHIRE Bernard, *Culture écrite et inégalités scolaires*, Lyon, Presses universitaires de Lyon, 1993.
- LANTHEAUME Françoise et HELOU Christophe, « Conclusion », in Françoise LANTHEAUME & Christophe HELOU (dir.), *La souffrance des enseignants : Une sociologie pragmatique du travail enseignant*, Presses Universitaires de France, pp. 161-166. 2008.
- LEFEVRE Jo-Anne, SADESKY Gregory & BISANZ Jeffrey, « Selection of procedures in mental addition: Reassessing the problem size effect in adults », *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 22, 1996, p.216-230.
- LEGENDRE Renald, *Dictionnaire actuel de l'éducation*, Montréal, Guérin, 1993.
- LEGRAND Michel, « Un exemple de discours sur les mathématiques et leur apprentissage », in *Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A, première année*, Lyon, IREM de Lyon, 1990.
- LEGRAND L, *Les différenciations de la pédagogie*, Paris, France, PUF, 1995.
- LEONTIEV Alexis, « Principles of mental development and the problem of intellectual backwardness », in SIMON B. J. (Ed), *Educational Psychology in the URSS*, London : Routledge Kegan, 1959.
- LEONTIEV Alexis, *Activité, conscience, personnalité*. Moscou : Editions du Progrès, 1975.
- LEONTIEV Alexis, *Activité Conscience Personnalité*, Moscou : Editions du Progrès (1^{ère} édition, 1975, en russe), 1984.
- LEMAIRE Patrick et ARNAUD Laurence, « Le calcul mental et la question des stratégies in Mauro PESENTI et Xavier SERON (eds), *La cognition numérique*, Paris, Hermès Lavoisier, 2004.
- LEPLAT Jacques, *La psychologie ergonomique*, Paris, Presses Universitaires de France, 1980
- LEPLAT Jacques, *L'analyse du travail en psychologie ergonomique*, (2 tomes), Toulouse Octares, 1992.
- LEPLAT Jacques, *Regards sur l'activité en situation de travail*, Paris, Presses Universitaire de France, 1997.

- LEPINE Raphaëlle, ROUSSEL Jean-Louis, & FAYOL Michel, « Résolution procédurale ou récupération en mémoire des additions et multiplications élémentaires chez les enfants ? », *L'Année Psychologique*, 2003, 103, 51-80.
- LEROY-AUDOUIN Christine et SUCHAUT Bruno, « À chaque classe ses élèves : procédures et critères d'affectation à l'école élémentaire », *Revue française de pédagogie*, n°152, 2005, pp.89-105.
- LEROYER Laurence, « Le rapport au support dans le travail de préparation en mathématiques des enseignants du premier degré », *Éducation & didactique*, 2013/1 (vol.7), p. 147-164.
- LESCOUARCH Laurent, « Modélisation des pratiques pédagogiques de maître E en RASED », *Actes du congrès international de l'Actualité de la recherche en éducation et en formation (AREF)*, Strasbourg, 2007. Disponible sur Internet à l'adresse : <http://www.congresintaref.org/actes_pdf/AREF2007_Laurent_LESCOUARCH_493.pdf> (consulté le 04 novembre 2019).
- LETHIELLEUX Claire, *Le calcul mental au cycle des apprentissages fondamentaux CP-CE1*, Paris, Armand Colin, 1992.
- LEUTENEGGER Francia, « Un atelier de mathématiques : pratiques enseignantes », in BRU Marc et MAURICE Jean-Jacques, *Les pratiques enseignantes : contributions plurielles*, Les dossiers des sciences de l'éducation, n°5, 2001, pp. 79-95

M

- MABILLE Albert, *Profils de profs : portraits et styles d'enseignants en sciences*, Bruxelles, De Boeck Université, 1994.
- MANDEVILLE Garrett, « School effectiveness revisited : cross-year stability », *Journal of educational measurement*, vol.25, n°4, 1988, p.349-356.
- MARGOLINAS Claire, « Situations, milieux, connaissances : Analyse de l'activité du professeur », in Jean-Luc DORIER, Michèle Artaud, Michèle ARTIGUE René BERTHELOT et René FLORIS (dir.), *Actes de la 11^{ième} école d'été de didactique des mathématiques*, Éditions La pensée sauvage, 2002.
- MARGOLINAS Claire et WOZNIAC Floriane, « Usage des manuels dans le travail de l'enseignant : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire », *Revue des sciences de l'éducation*, n°352, 2009, p.59-82.
- MARGOLINAS Claire, ABOUD-BLANCHARD Maha, BUENO-RAVEL Laetitia, DOUEK Nadia, FLUCKIGER Annick, GIBEL Patrick, VANDEBROUCK Fabrice et WOZNIAC Floriane « En amont et en aval des ingénieries didactiques », Grenoble : La pensée sauvage, 2011.
- MARINTHE Catherine, FAYOL Michel & BARROUILLET Pierre, « Gnosies digitales et développement des performances arithmétiques » in A. VAN HOUT, C. MELJAC, & J.-P. FISCHER, *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant*, Issy-les-Moulineaux : Masson, 2005, p. 255-270.
- MARKOVITS Zvia, et SOWDER Judith, « Developing number sense: An intervention study in Grade 7 », *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 1994, p.4-29.

- MARTIN-VAN DER HAEGEN Françoise & TORRES Jean-Christophe, Éditorial, *Administration & Éducation*, n° 150, 2016, p. 5-8.
- MARY Claudine, SQUALLI Hassane, THEIS Laurent et DEBLOIS Lucie, *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage. Regard didactique*, Qu2bec, Presses de l'université du Québec, 2014, p.9.
- MASSELOT Pascale et ROBERT Aline, « Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de pratiques de professeurs enseignant les mathématiques », *Recherche et, Formation*, 56, 2007, p.15-31.
- MATHERON Yves, « Le travail du professeur de mathématiques relatif à la conception et la réalisation des phases de dévolution », *Éducation et didactique*, 5-3, 2011, p.24.
- MATHIEU Romain, GOURJON Audrey, COUDERC Auriane, THEVENOT Catherine & PRADO Jérôme, « Running the number line: Rapid shifts of attention in single-digit arithmetic » *Cognition*, 146, 2016, 229-239.
- MATHIEU Robert, EPINAT-Duclos Justine, SIGOVAN Monica, BRETON Audrey CHEYLUS Anne, FAYOL Michel, THEVENOT Catherine & PRADO Jérôme, « What's behind a '+' sign? Perceiving an arithmetic operator recruits brain circuits for spatial orienting », *Cerebral Cortex*, 5, 2018, 673-1684.
- MAZEAU Michèle, « Déficits visuo-spatiaux et dyspraxies de l'enfant du trouble à la rééducation », Paris, Masson, 2000.
- Mc CAFFREY Daniel, SASS Tim et LOCKWOOD J. R., « The intertemporal variability of teacher effect estimates », *Education finance and policy*, vol.4, n°4, 2009, p.572-606.
- MCINTOSH Alistair, REYS Barbara, REYS Robert, BANA Jack et FARRELL Brian, *Number sense in school mathematics : Student performance in four countries*, Perth : MASTEC, Edith Cowan University, 1997.
- MCINTOSH Alistair, « Common errors in mental computation of students in grade 3 – 10 », in B. BARTON, K. C. IRWIN, M. PFANNKUCH & M. O. J. THOMAS (Eds.), *Mathematics education in the South Pacific* (Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated, 2, Sydney : MERGA, 2002, p.1457-464.
- MEDLEY Donald & MITZEL Harold, Measuring classroom behavior by systematic observation, in Nathaniel GAGE (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (1re éd), Chicago : Rand McNally, 1963, p. 247-328.
- MEIRIEU Philippe, *L'école, mode d'emploi : Des « méthodes actives » à la pédagogie différenciée*. Paris : ESF. 3ème éd., 1988.
- MELJAC Claire, *Décrire, agir et compter*, Paris, PUF, 1979.
- MELLOUKI M'hammed., GAUTHIER Clermont et BELLEHUMEUR Valérie, *Enseignants, que faites-vous ?* Québec, Presses de l'université de Laval, 2003.
- MEN-DEPP, « Les élèves de 15 ans – Premiers résultats de l'évaluation internationale PISA 2003 », *Note Évaluation*, 04.12, décembre 2004.

- MEN- Ministère de l'Éducation Nationale, *Documents d'accompagnement des programmes 2002*, SCEREN-CNDP, 2005.
- MEN- Ministère de l'Éducation Nationale, « L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire », Rapport de l'IGEN, n°2006-034. [[Http://media.education.gouv.fr/file/46/0/3460.pdf](http://media.education.gouv.fr/file/46/0/3460.pdf)].
- MEN-DEPP, « Les élèves de 15 ans – Premiers résultats de l'évaluation internationale PISA 2006 en culture scientifique », *Note Évaluation*, 07.42, décembre 2007.
- MEN, *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire* », BO n°3 du 19 juin 2008
- MENJVA-DEPP, « Les compétences en mathématiques des élèves en fin de collège », *Note d'information*, 10.18, octobre 2010.
- MEN-DEPP, « Les élèves de 15 ans en France selon PISA 2012 en culture mathématique : baisse des performances et augmentation des inégalités depuis 2003 », *Note d'information*, 13.31, décembre 2013.
- MENJVA-DEPP, « TALIS 2013 – Enseignant en France : un métier solitaire ? », *Note d'information*, n°23, Juin 2014.
- MENJVA-DEPP, « CEDRE 2014 – Mathématiques en fin d'école primaire : les élèves qui arrivent au collège ont des niveaux très hétérogènes », *Note d'information*, n°18, MENJVA-DEPP, Mai 2015.
- MEN-DEPP, « Repères et références statistiques », août 2018.
- MEN-DEPP, « Journée Défense et Citoyenneté 2014 : un jeune sur dix handicapés par ses difficultés en lecture », *Note d'information*, n°16, Mai 2015.
- MENJVA-DEPP, « TIMSS 2015 mathématiques et sciences, Évaluation internationale des élèves de CM1 », *Note d'information*, n°33, Novembre 2016.
- METOUDI Michèle et DUCHAUFFOUR Hervé, *Des manuels et des maîtres*, Paris, France : Éditions Savoir Livre, 2001.
- MEURET Denis, « Les recherches sur la réduction de la taille des classes », Rapport établi à la demande du Haut Conseil de l'évaluation de l'école, Université de Bourgogne, IREDU Janvier 2001.
- MILLER George, « The magical number seven, plus or minus two : Some limits on our capacity for processing information », *Psychological Review*, vol. 63, n° 2, 1956, p. 81–97.
- MIX Kelly, SANDHOFER Catherine, MOORE Julie Anne & RUSSELL Christina, « Acquisition of the cardinal word principle: The role of input », *Early Childhood Research Quarterly*, 27, 2012, p. 274-283.
- MOELLER Korbinian, FISHER Ursula, NUERK Hans-Christoph & CRESS Ulrike, « Computers in mathematics education - Training the mental number line », *Computers in Human Behavior*, 48, 2015, 597-607.

- MOTTIER LOPEZ Lucie, *La régulation des apprentissages en classe*, Bruxelles : De Boeck, 2012.
- MOUNIER Eric, « Une analyse de l'enseignement de la numération. Vers de nouvelles pistes., thèse de doctorat, dir. Marie-Jeanne Perrin-Glorian et Denis Butlen, Université Paris-Diderot 7, 2010
- MOUNIER Eric et PRIOLET Maryvonne, *Les manuels scolaires de mathématiques à l'école primaire – De l'analyse descriptive de l'offre éditoriale à son utilisateur en classe élémentaire*, Paris : CNESCO, Lyon : IFÉ-ENS, novembre 2015.
- MOUNIER Eric et PRIOLET Maryvonne, « La programmation des techniques opératoires dans les manuels scolaires de l'école élémentaire : Le cas de l'addition et de la soustraction », *Grand N* - n° 98, 2016 - pp. 5 à 26
- MOYER, Robert & LANDAUER Thomas, « Time required for judgments of numerical inequality », *Nature*, 215, 1967, 1519-1520.
- MUCCHIELLI Alex, *Dictionnaire des méthodes qualitatives en sciences humaines*, Paris, Armand Colin, 2011.
- MUSIAL Manuel, PRADERE Fabienne et TRICOT André, *Comment concevoir un enseignement ?* », Bruxelles.DeBoeck, 2012.

N

- NOIRFALISE Annie et MATHERON Yves, *Enseigner les mathématiques à l'école primaire. Les 4 opérations sur les nombres entiers. Formation initiale et continue des professeurs des écoles*, Éd. Vuibert, Paris, 2009.
- NONNON Élisabeth, « L'enseignement de l'oral et les interactions verbales en classe : champs de référence et problématiques », *Revue française de pédagogie*, n° 129, 1999, p. 87-131.
- NORTHCOTE Maria et MCINTOSH Alistair, « What Mathematics Do Adults Really Do in Everyday Life? », *Australian Primary Mathematics Classroom*, 4, 1, 1999, p.19-21
- NORTON Stephen, « The use of alternative algorithms in whole number computation », *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, 2012, p.2-16.
- NUMA BOCAGE Line, *Étude de la médiation dans l'enseignement de la numération*. Thèse de doctorat, Université René Descartes, Paris 5, 1997.
- NUMA-BOCAGE Line et LARERE Christiane, « Apprentissage du nombre au CP ; sur quelques difficultés de conceptualisation », *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, 2006/1 (N° 33), p. 79-94.
- NUTTIN Joseph, « La motivation », in Paul FRAISSE et Jean PIAGET, *Traité de psychologie expérimentale*, PUF, t.V, Motivation, Émotion et Personnalité, 1963, p.70-71.

O

- OAKSFORD L. et JONES, *Differentiated instruction abstract*, Tallahassee, FL : Leon County Schools, 2001.
- ORSOLA-MANGIANTE Christine., « Une étude de la genèse des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques : prédétermination et développement », thèse de doctorat, dir. Denis Butlen, Université de Paris VII, 2007.
- ODIC Darko, LIBERTUS Méliissa, FEIGENSON Lisa, & HALBERDA Justin, « Developmental change in the acuity of approximate number and area representations », *Developmental Psychology*, 49 (6), 2013, p.1103-1112.
- OTT Laurent, « L'hétérogénéité n'est pas une maladie », in Sabine KAHN et Dominique SEGHECHIAN (coord.), « Actualité de la pédagogie différenciée », *Cahiers pédagogiques*, n°503, février 2013.

P

- PARIES Monique, ROBERT Aline et ROGALSKI Janine, « Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré », *Educational studies in mathematics*, vol.68, n°1, 2008, p.55-80.
- PASTRE Pierre, *Apprendre par la stimulation. De l'analyse du travail aux apprentissages professionnels*, Toulouse, Octarès, 2005.
- PIAGET Jean, *Genèse du Nombre chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, 1941.
- PIAGET Jean et SZEMINSKA Alina, *La genèse du nombre chez l'enfant*, Neufchâtel, Delachaux et Niestlé, 1941.
- PIAZZA Manuela, PICA Pierre, Izard, Véronique, SPELKE Elisabeth, & DEHAENE, Stanislas, « Education enhances the acuity of the non-verbal approximate number system », *Psychological Science*, 24 (6), 2013, p.1037-1043.
- PIKETTY Thomas et VALDENAIRE Mathieu, « L'impact de la taille des classes sur la réussite scolaire dans les écoles, collèges et lycées français : Estimations à partir du panel primaire 1997 et du panel secondaire 1995 », Direction de l'évaluation et de la prospective, *Les Dossiers de l'Education Nationale*, n°173, mars 2006.
- PIQUEE Céline, « Pratiques enseignantes envers les élèves en difficulté dans des classes à efficacité contrastée », *Revue française de pédagogie*, 2010/1 (n° 170), p. 43-60.
- PEBENITO Rhandy, « Developmental Gerstmann syndrome: Case report and review of the literature », *Journal of Developmental and Behavioral Pediatrics*, 8(4), 1987, 229–232.
- PECAL Michèle « À propos de l'étude internationale Timss » (APMEP), SMF – Gazette – 82, octobre 1999.
- PELTIER Marie-Lise, BRIAND Joël, NGONO Bernadette, VERGNES Danielle, *Euromaths CP*, Paris, Hatier, 2011.

- PEREZ-ROUX Thérèse, *Identité(s) professionnelle(s) des enseignants : les professeurs d'EPS entre appartenance et singularité*, Paris : Editions EPS, Collection Recherche et Formation, 2011.
- PERRAULT SOLIVERES Anne, « Praticien-chercheur : défricher la nuit », in MACKIEWICZ, Marie-Pierre (Éd.), *Praticien et chercheur. Parcours dans le champ social*, Paris : L'Harmattan, 2001, pp.41-53.
- PERRENOUD Philippe, « La pratique pédagogique entre l'improvisation réglée et le bricolage. Essai sur les effets indirects de la recherche en éducation », Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation Université de Genève, 1983.
- PERRENOUD Philippe, *Métier d'élève et sens du travail scolaire*, Paris, ESF éditeur, 1994.
- PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne, *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6^{ème}*, Thèse de doctorat d'état, Paris, Université Paris 7, 1992.
- PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne, « Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 13/1.2, Grenoble, La Pensée Sauvage, 1993, p.95-118.
- PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne, « Les mathématiques en ZEP, un moyen de réussir à l'école et par l'école, XY ZEP, (3), 1998, p.3-6.
- PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne et ROBERT Aline, « Analyse didactique de séances de mathématiques au collège : pratiques d'enseignants et activités mathématiques d'élèves », in Yves LENOIR, *Les pratiques enseignantes : Analyse des données empiriques*, Les dossiers des sciences de l'éducation, n°14, 2005, p. 95-110.
- PETREAULT Françoise, « Mise en perspective et typologie des différentes réponses de l'institution », *Administration & Éducation*, n° 150, 2016, p. 97-101.
- PINHEIRO-CHAGAS, Pedro, DOTAN Dror, PIAZZA, Manuela & DEHAENE Stanislas, « Finger tracking reveals the covert stages of mental arithmetic », *Open Mind: Discoveries in Cognitive Science*, 1, 2017.
- PIQUEE Céline & SUCHAUT Bruno, « Les opinions des acteurs confrontées à l'évaluation externe. Le cas d'une action d'accompagnement scolaire au CP », *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*, vol. 35, n° 3, 2002, p. 103-127.
- PIQUET Céline, « Effets des pratiques à l'égard des élèves en difficulté au cours préparatoire », *Actes du congrès international de l'Actualité de la recherche en éducation et en formation (AREF)*, Strasbourg, 2007a.
- PIQUET Céline, « Pratiques déclarées des enseignants et progrès des élèves au cours préparatoire. Une analyse empirique des effets des choix pédagogiques et didactiques, in Gérard SENSEVY, *Caractérisation des pratiques d'enseignement et détermination de leur efficacité. La lecture et les mathématiques au cours préparatoire*, Rapport de recherche au PIREF, 2007b.
- PIQUET Céline, « Pratiques enseignantes envers les élèves en difficulté dans des classes à efficacité contrastée », *Revue française de pédagogie*, Recherches en éducation, ENS Éditions, mars 2010.

- POTTER Mary & LEVY Ellen, « Spatial enumeration without counting », *Child Development*, 39(1), 1968, 265–272.
- PRESSEAU Annie, « Analyse de l'efficacité d'interventions sur le transfert des apprentissages en mathématiques », *Revue des sciences de l'éducation*, vol. XXVI, 2000, p.515-544.
- PRZESMYCKI Halina, *La pédagogie différenciée*. Paris : Hachette, 2004.
- PRIOLET Maryvonne, *Vecteurs d'apprentissage et résolution de problèmes numériques*, Mémoire de D.E.A. en Sciences de l'Éducation, sous la direction de F. Clerc, Université Lumière Lyon 2, 2001.
- PRIOLET Maryvonne et MOUNIER Éric, « Le manuel scolaire : une ressource au « statut paradoxal. Rapport de l'enseignant au manuel scolaire de mathématiques à l'école élémentaire », *Éducation et didactique*, vol.12, n°I, 2018, p.79-100.
- PRIOURET Jacques, « Réflexion sur le statut paradoxal du livre scolaire », Thèse de Doctorat d'État, dir. Guy Avanzini, Université Lyon 2, 1977.
- PROULX Jérôme, « Le calcul mental au-delà des nombres : Conceptualisations et illustrations avec la résolution d'équations algébriques », *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Volume 18, IREM de Strasbourg, 2013, p.61-90.

Q

- QUIVY Raymond et VAN CAMPENHOUDT Luc, *Manuel de recherche en sciences sociales*, 3^{ème} édition, Paris, Dunod, 2006, p.147-151.

R

- RABARDEL Pierre, CARLIN Nicole, CHESNAIS Marion & LANG Nathalie, *Ergonomie : concepts et méthodes*. Toulouse : Octarès, 1998.
- RAUDENBUSH S., « The analysis of longitudinal multilevel data », *International journal of educational research*, vol.13, n°7, 1989, p.721-740.
- RAYNAL Françoise et RIEUNIER Alain, *pédagogie : dictionnaire des concepts clés : apprentissages, formation et psychologie cognitive*, Paris, ESF éditeur, 1997.
- REMILLARD Janine, « Modes d'engagement : comprendre les transactions des professeurs avec les ressources curriculaires en mathématiques », in GUEUDET Gishlaine et TROUCHE Luc (Eds.), *Ressources vives : Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, Rennes : Presses universitaires de Rennes, 2010, pp. 201–216.
- REY Bernard, *Les compétences transversales en question*, Paris, ESF, 1996.
- REY Bernard, « Manuels scolaires et dispositifs didactiques », in Yves LENOIR, Bernard REY, Gérard-Raymond ROY et Johanne LEBRUN (Ed.), *Le manuel scolaire et l'intervention éducative : regards critiques sur ses apports et ses limites*, Sherbrooke, Éditions du CRP, 2001, p. 25-40.

- REY Bernard, CARETTE Vincent, DEFRANCE Anne et VAN LINT Sylvie, « Création d'un outil d'évaluation des compétences des élèves à travailler en groupes destiné aux enseignants de l'école fondamentale et construit au regard des nouveaux socles de compétences », Rapport de recherche, ministère de la Communauté française de Belgique, 2004.
- REYS Robert, « Number sense: Building on student's intuitive knowledge », in C. J. IRONS (Ed.), *Challenging children to think when they compute: Developing number sense, mental computation and computational estimation*, Proceedings of the 1st annual conference on Mathematics Teaching and Learning presented by The Centre for Mathematics and Science Education, Queensland University of Technology, Brisbane, 1991.
- REYS Robert & NOHDA Nobuhiko et al., *Computational alternatives for the 21st century: Cross-cultural perspectives from Japan and the United States*. Reston, VA: NCTM, 1994.
- REYS Robert et YANG Der-Shing, « Relationships between the computational performance and number sense among sixth and eighth grades in Taiwan », *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (2), 1998, p.225-237.
- REYS Robert, LINDQUIST Mary, LAMBDIN Diana et SMITH Nancy, *Helping children learn mathematics*. Kendalville : John Wiley & Sons, 2009.
- REYS Robert, REYS Barbara, MCINTOSH Alistair, EMANUELSSON Goran, JOHNSON Bengt et YANG Der Ching, « Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States », *School Science and Mathematics*, 99 (2), 1999, p.61-70, cité par CHESNÉ J.-F.,(2014).
- RESNICK Lauren, « A developmental theory of number understanding » in GINSBURG Herbert, (Ed), *The development of mathematical thinking*, New York, New York Academic Press, 1983.
- REZAT Sebastian, « Mental calculation strategies for addition and subtraction on the set of rational numbers », Justus-Liebig-University, Giessen, 2011.
- RICHARD Jean-François, « Mémoire et résolution de problèmes », *Revue Française de Pédagogie*, n° 60, 1982.
- ROBERT Aline et ROBINET Jacqueline, « Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement », *Cahier de DIDIREM*, IREM, Didactique des mathématiques, Université – Paris VII, n°1, mars 1989.
- ROBERT Aline, « Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant », *Recherches en didactique des mathématiques*, 21/1-2, 2001, p.57-80.
- ROBERT Aline et ROGALSKI Janine, « Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double-approche », *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2/4, 2002, p.505-528.
- ROBERT Aline, « Une analyse de séance de mathématiques au collège, à partir d'une vidéo filmée en classe, La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants, Perspectives en formation d'enseignants », *Petit x*, n°65, 2004, pp.52-79.

- ROBERT Aline, « Sur la formation des pratiques des enseignants de mathématiques du second degré », *Recherche et formation*, n°50, 2005, pp.75-89.
- ROBERT Aline et ROGALSKI Janine, « A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class », *Educational studies in mathematics*, 59/1, 2005, p.269-298.
- ROBERT Aline, « La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe » in Fabrice VANDERBROUCK (Éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse, Octarès, 2008, p.45-68.
- ROBERT Aline et COULANGE Lalina, « La double approche didactique et ergonomique », *Tangente Éducation*, n°11, décembre 2009.
- ROBERT Aline, « Formation professionnelle des enseignants du second degré », *Repères-IREM*, 80, 2010, p.87-103.
- ROBERT Aline et HACHE Christophe, « Activités des élèves et pratiques des enseignants en classe de mathématiques », in *Cahiers du laboratoire de didactique André Révuz*, n°5, février 2013, p.54.
- ROBERT Aline & HACHE Christophe, « Why and How to understand what is at stake in a mathematics class », in VANDEBROUCK Fabrice (dir.), *Mathematics Classrooms: Students' Activities and Teachers' Practices*, The Netherlands: Sense Publisher, 2013, pp. 23-74.
- ROBERT Aline et VIVIER Laurent, « Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques : des utilisations contrastées en recherche en didactique et en formation de formateurs- quelle transposition ? », *Éducation et didactique*, 7-2, Presses Universitaires de Rennes, 30 octobre 2013, p.117.
- ROBERT Aline et VANDERBROUCK Fabrice, « Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34 (2-3), 2014, p.239-283.
- ROCHE Anne et CLARKE Douglas, « When successful comparison of decimals doesn't tell the full story », in J. NOVOTNA, H. MORAOVA, M. KRATKA, et N. STEHLIKOVA (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 425–432. Prague : PME, 2006.
- ROCHEX Jean-Yves et CRINON Jacques, *La construction des inégalités scolaires*, Rennes, PUR, 2011.
- RODITI Eric, « L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième, Étude des pratiques ordinaires », Thèse de doctorat, Université de Paris VII, 2001.
- RODITI Eric, « Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique », Préface d'Aline Robert, Paris, L'harmattan, 2005, p.11.
- RODITI Éric, « Le calcul et l'intelligence du calcul », Conférence du CNET « *Quels enjeux du calcul à l'école primaire ?* », Nombres et opérations : Premiers apprentissages, Lycée Buffon, Paris XV, 12-13 novembre 2015.

- RODITI Éric, « in Jean-Luc DORIER, Ghislaine GUEUDET, Marie-Lise PELTIER, Aline ROBERT et Éric RODITI, *Enseigner les mathématiques*, Paris, Belin Éducation, 2018, pp.165-212.
- ROEGIERS Xavier, *Une pédagogie de l'intégration, Compétences et intégration des acquis dans l'enseignement*, Bruxelles, De Boeck-Université, 2001.
- ROGALSKI Janine, « Y a-t-il un pilote dans la classe ? », *Recherches en didactique des mathématiques*, n°23/3, 2003, pp.343-388.
- ROGALSKI Janine, « La didactique professionnelle : une alternative aux approches de "cognition située" et "cognitiviste" en psychologie des acquisitions, @ctivité, Vol.1 (2), 2004, pp.103-120. Consulté en ligne sur <http://www.activities.org/v1n2/Rogalski.pdf>.
- ROGALSKI Janine, « Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Des compléments sur les théories de l'activité et du développement, pour l'analyse des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves » in Fabrice VANDERBROUCK (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse, Octarès, 2008a, p.23-30 et p.429-459.
- ROGALSKI Janine, « Mise en regard des théories de Piaget et de Vygotski sur le développement et l'apprentissage » in Fabrice VANDERBROUCK (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse, Octarès, 2008b, p.431-446.
- ROGALSKI Janine, « Theory of Activity and Developmental Frameworks for an Analysis of Teacher's Practices and Student's Learning » in Fabrice VANDERBROUCK (Éd.), *Students Activities and Teacher's Practices*, Rotterdam : Sense Publishers, 2013, p.3-20.
- ROINE Christophe « Analyse anthro-po-didactique de l'aide mathématique aux « élèves en difficulté » : L'effet Pharmakéia », *Carrefours de l'Éducation*, 33, 2012, 133-148.
- ROSENSHINE Barak et STEVENS Robert, « Teaching Functions », in Merlin C. WITTRICK, (éd.), *Handbook of Research on Teaching*, New-York, Macmillan, 1986.
- ROUCHE Nicolas (dir.), DE LAET Lucie, DOCQ Christine, GANTOIS Jean-YVES, HAUCHART Christiane, TANCRE Manoëlle et TOSSUT Rosane, *Du quotidien aux mathématiques*, Paris, Ellipses, 2006, p.35.
- ROUCHIER André, « Connaissances et savoirs dans le système didactique », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 16/2, Grenoble, La Pensée Sauvage, 1996, p.177.
- ROUSSEL Jean-Louis., FAYOL Michel & BARROUILLET Pierre, « Procedural vs. direct retrieval strategies in arithmetic: A comparison between additive and multiplicative problem solving », *European Journal of Cognitive Psychology*, 14, 2002, p.61-104.
- ROUX-PEREZ Thérèse, « Processus identitaires dans la carrière des enseignants : deux études de cas en Éducation Physique et Sportive (EPS) », *Staps*, 2006/2 (n° 72), p. 35-47.

S

- SAILLOT Éric, (*S'*) *ajuster au coeur de l'activité d'enseignement-apprentissage, Construire une posture d'ajustement*, Pédagogie : crises, mémoires, repères, Paris, L'Harmattan, 2020.

- SAMMONS Pam, DAY Christopher, KINGTON Alison et al., « Exploring variations in teachers' work, lives and their effects on pupils : ket findings and implications from a longitudinal mixed-method study », *British educational research journal*, vol.33, n°5, 2007, p.681-701.
- SARRAZY Bernard, « Les interactions maître-élèves dans l'enseignement des mathématiques. Contribution à une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement », *Revue française de pédagogie*, n° 136, 2001, p. 117-132.
- SARRAZY Bernard, « Les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques », *Educational Studies in Mathematics*, 49, 1, 2002, 89-117.
- SASS Tim, *The stability of value-added measures of teacher quality and implications for teacher compensation policy*, Brief 4, Washington : National center for analysisi of longitudinal data in education research, 2008.
- SAURY Jacques, RIA Luc, SEVE Carole et GAL-PETITFAUX Nathalie, « Action ou cognition située : enjeux scientifiques et intérêts pour l'enseignement de l'EPS », *Revue EPS*, 321, 2006, pp. 5-11.
- SAVARD C., *Pages choisies de pédagogie contemporaine*. Paris : Delagrave, 1940.
- SAUVAYRE Romy (dir.), *Les méthodes de l'entretien en sciences sociales*, Paris, Dunod, 2013, pp. 1-47.
- SAYAC Nathalie, « Les pratiques des professeurs de mathématiques de lycée : une approche croisée des influences du sexe, de l'âge et du cursus », ROBERT Aline (dir.), Thèse de doctorat, décembre 2003.
- SCALLON Gérard, *L'évaluation des apprentissages dans une approche par compétences*, Bruxelles, De Boeck, 2004.
- SCHOEN Harold & ZWENG Marilyn (Eds.), *Estimation and mental computation.1986 NCTM Yearbook*. Reston, VA : NCTM. SIMMT, E. (2000). *Mathematics knowing in action: A fully embodied interpretation*. Thèse de doctorat. University of Alberta, Canada, 1986.
- SCHOENFELD Alan H. (Ed.), *Studies in mathematical thinking and learning.Mathematical thinking and problem solving*, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1994.
- SCHÖN Donald A., *Le praticien réflexif, à la recherche du savoir caché dans l'agir professionnel*, Montréal, Les Éditions Logiques, 1994.
- SCHNEUWLY Bernard, « Les capacités humaines sont des constructions sociales. Essai Sur La Théorie De Vygotsky », *European Journal of Psychology of Education*, vol. 1, no. 4, 1987, pp. 5-16.
- SCHNEUWLY Bernard et BAIN Daniel, « Des activités textuelles : stratégies d'intervention dans les séquences didactiques », in Linda ALLAL, Daniel BAIN et Philippe PERRENOUD (éd.), *Évaluation formative et didactique du français*, Neuchâtel : Delachaux et Niestlé, 1993, p.219-238.

- SCHNEUWLY Bernard et DOLZ Joaquim, *Des objets enseignés en classe de français : le travail de l'enseignant sur la rédaction des textes argumentatifs et sur le subordonnée relative*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes, 2009.
- SCHUBAUER Maria-Luisa et LEUTENEGGER Francia, « Expliquer et comprendre dans une approche clinique/ expérimentale du didactique ordinaire », Université de Genève, 2002.
- SECADA Walter, FUSON Karen & HALL James, « The transition from counting-all to counting-on in addition », *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(1), 1983, p.47–57.
- SENSEVY Gérard, MERCIER Alain et SCHUBAUER-LEONI Maria-Luisa, « Vers un modèle de l'action didactique du professeur. À propos de la course à 20 », in *Recherches en Didactiques des mathématiques*, vol.20, n°3, Grenoble : La Pensée Sauvage, 2000, pp.263-304.
- SENSEVY Gérard, « Théories de l'action et action du professeur », in BAUDOUIN Jean-Michel, éd., *Théories de l'action et éducation*. Louvain-la-Neuve, De Boeck Supérieur, « Raisons éducatives », 2001, p. 203-224.
- SENSEVY Gérard, « Des catégories pour l'analyse comparée de l'action du professeur : un essai de mise à l'épreuve », in Patrice VENTURINI, Chantal Amande-ESCOT et André TERRISSE (Ed.), *Études des pratiques effectives : l'approche des didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 2002a, pp.25-46.
- SENSEVY Gérard et QUILIO Serge, « Les discours du professeur. Vers une pragmatique didactique », in *Revue française de pédagogie, Vers une didactique comparée*, 2002b, pp. 47-56.
- SENSEVY Gérard et MERCIER Alain, *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*, Rennes, Presses universitaires de Rennes, 2007.
- SIEGLER Robert, ROBINSON Myra, « The development of numerical understanding », in H. W. REESE et L. P. LIPSITT (Edit.), *Advances in child development and behavior*, Vol. 16, New York, Academic Press, 1982, 242-312.
- SIEGLER Robert et SHRAGER Jeff, «Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In *Origins of cognitive skills*, SOPHIAN C (ed), Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1984.
- SIEGLER Robert, The perils of averaging data over strategies : An example from children's addition. *Journal of Experimental Psychology : General*, 116(3), 1987, p.250–264.
- SIEGLER Robert & JENKINS Eric, *How children discover new strategies*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc, 1989.
- SIEGLER Robert & SHIPLEY Christopher, « Variation, selection, and cognitive change », in G. HALFORD & T. SIMON (Eds.), *Developing cognitive competence : New approaches to process modeling*, Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1995, p. pp. 31-76.
- SIEGLER Robert & RAMANI, Geetha, « Playing linear number board games -but not circular ones -improves low-income preschoolers' numerical understanding », *Journal of Educational Psychology*, 101, 2009, 545-560.

- SINCLAIR John & COULTHARD Malcolm, *Towards an analysis of discourse: The English used by teachers and pupils*, Londres : Oxford university Press, 1975.
- SLAVIN Robert, « Ability grouping and student achievement in elementary schools: a best-evidence synthesis », *Review of educational research*, vol. 57, n° 3, 1987, p. 293-336.
- SONZOGNI Eric., « Une analyse de l'activité de conseil pédagogique au service de la formation des formateurs, Processus de hiérarchisation des conseils donnés aux enseignants débutants par les conseillers pédagogiques de Haute Savoie », Master International Francophone des métiers de la formation, IUFM d'Auvergne, 2010.
- SOWDER Judith, « Mental computation and number comparisons: Their roles in the development of number sense and computational estimation », in J. HIEBERT & M. BEHR (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1988.
- SOWDER Judith et WHEELER Margariete, « The Development of Concepts and Strategies Used in Computational Estimation », *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 1989, p.130-146.
- SOWDER Judith, « Mental computation and number sense », *Arithmetic Teacher*, 37, 7, 1990, p.18-20.
- SOWDER Judith, « Teaching computation in ways that promote number sense », in C. J. Irons (Ed.), *Challenging children to think when they compute: Developing number sense, mental computation and computational estimation, Proceedings of the 1st annual conference on Mathematics Teaching and Learning*. Queensland University of Technology, Brisbane, 1991.
- SOWDER Judith, « Estimation and related topics » in D. GROUWS (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan, 1992, p. 371-389.
- STACEY Kaye, « Travelling the road to expertise : A longitudinal study of learning », in H. L. CHICK et J. L. VINCENT (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Volume 1, Melbourne : PME., 2005, pp. 19-36.
- STARKEY Prentice & COOPER Robert, « Perception of numbers by human infants », *Science*, 210 (4473), 1980, p.1033–1035.
- STEFFE Leslie., VON GLASERFELD Ernst, RICHARDS John et COBB Paul, *Children's counting type : Philosophy, theory and application*, New York: Praeger Scientific, 1983.
- STEINLE Vicki « Changes with age in students' misconceptions of decimal numbers ». Ph. D. thesis, Thèse, Université de Melbourne, 2004.
- STIEGLER Bernard, « Entretien III. L'école et l'idéal démocratique » in Kambouchner Denis, Meirieu Philippe, Stiegler Bernard et al., *L'école, le numérique et la société qui vient*, Paris, Éditions Mille et une nuits, 2010, p.178.
- STRAUSS Alfred, & WERNER Heinz, Deficiency in the finger schema in relation to arithmetic disability (finger agnosia and acalculia). *American Journal of Orthopsychiatry*, 8(4), 1938, 719–725.

- STRAUSS Mark and CURTIS Lynne, « Infant Perception of Numerosity », *Child Development*, vol. 52, no. 4, 1981, pp. 1146–1152.
- STRERI Arlette, « Perceptual-motor and sensorimotor development / Développement perceptif moteur et sensori-moteur », *Psychologie Française*, 39, 1994, 23-28.
- SUCHAUT Bruno, « Le meilleur compromis pour tous », *Cahiers Pédagogiques*, n°454, 2007, pp.18-19.
- SUGGATE Jennifer, DAVIS Andrew, & GOULDING Maria, *Mathematical knowledge for primary teachers*. New York : Routledge, 2010.
- SVENSON Ola, « Analysis of time required by children for simple additions », *Acta Psychologica*, 39, 1975, p.289-302.
- SVENSON Ola & BROQUIST Stig, « Strategies for solving simple addition problems: A comparison of normal and subnormal children », *Scandinavian Journal of Psychology*, 16(2), 1975, p.143–148.

T

- TALBOT Laurent, « Les recherches sur les pratiques enseignantes efficaces », *Questions Vives*, Vol.6 n°18, 2012.
- TARDIF Maurice et LESSARD Claude., *Le travail enseignant au quotidien*, Bruxelles : De Boeck, 1999.
- TARDIF Maurice et LESSARD Claude, *Le travail enseignant au quotidien* (2èd.), Saint-Nicolas, QC : Presses de l'Université Laval, 2004.
- TATON René, *Le calcul mental, Que sais-je ?* n°605, 2^{ième} Ed., 1957.
- TERRISSE André, « Epistémologie de la recherche clinique en sports de combat. In TERRISSE (dir.), *Recherches en sports de combat et en arts martiaux : états des lieux*, Ed. Revue EPS, 2000.
- THEVENOT Catherine, BARROUILLET Pierre, CASTEL Caroline & UITTENHOVE Kim, « Ten-year-old children strategies in mental addition: A counting model account », *Cognition*, 146, 2016, 48-57.
- THEVENOT Catherine, « La résolution d'additions simples par procédures de comptage automatisées », *ANAE - Approche Neuropsychologique des Apprentissages chez l'Enfant*, 30, 2018.
- THEVENOT Catherine et FANGET Muriel, « Chapitre 15. Apprendre les procédures de calcul : l'addition », dans : Ludovic Ferrand éd., *Psychologie cognitive des apprentissages scolaires. Apprendre à lire, écrire, compter*. Paris, Dunod, « Univers Psy », 2018, p. 215-224.
- THOMPSON Ian, « Mental calculation strategies for addition and subtraction - Part 1 », *Mathematics in School*, 28, 5, 1999, p.22-25.

- THOMPSON Ian, *Understanding and assessing children mathematical understanding through mental calculations*, texte présenté à ICME, 2000, p.9-10.
- THOMPSON Ian, « Mental Calculation », *Mathematics Teaching*, 213, 2008, p.40-42.
- THOMPSON Ian, «Mental calculation », *Mathematics Teaching*, 213, 2009, p.40-42.
- THRELFALL John, «Flexible mental calculations», *Educational Studies in Mathematics*, 50, 2002, p.29-47.
- THRELFALL John, «Strategies and flexibility in mental calculation», *ZDM*, 41, 2009, p.541-555.
- TOCHON François., *L'enseignant expert*, Paris : Nathan, 1993.
- TOMLINSON Carol Ann, *La classe différenciée*. Montréal : Chenelière Education inc.2004.
- TORBEYNS Joke, DE SMEDT Bert, PETERS Greet, GHESQUIÈRE Pol, VERSCHAFFEL Lieven., «Use of indirect addition in adults' mental subtraction in the number domain up to 1,000 », *British Journal of Psychology*, 102(3), 2011, p.585-597.
- TOULLEC-THERY Marie, « Aider les élèves peu performants en mathématiques à l'école primaire : quelles actions des professeurs ? Etude in situ de professeurs des écoles de classes "ordinaires" et de maîtres spécialisés à dominante pédagogique », Thèse de doctorat, Université de Rennes 2006.
- TOULLEC-THERY Marie, « Différenciation pédagogique. Comment adapter l'enseignement pour la réussite de tous les élèves ? Recommandations du jury », in CNESCO, *Conférence de consensus*, mars 2017, p.1.
- TOMAMICHEL Serge, « La recherche empirique en éducation », in Guy LEBOUDEC et Serge TOMAMICHEL (dir.), *Former à la recherche en éducation et formation*, L'Harmattan, 2003.
- TOMAMICHEL Serge, « La recherche en sciences de l'éducation. État des lieux et points de vue ». *Recherche en soins infirmiers*, vol. 83, n° 4, 2005, p. 4-17.
- TOURNAKI, Nelly, « The differential effects of teaching addition through strategy instruction versus drill and practice to students with and without learning disabilities », *Journal of Learning Disabilities*, 36, 2003, 449-458.
- TOURNES Dominique, « L'intelligence du calcul », In MEN, *L'enseignement des mathématiques à l'école primaire, Actes du séminaire national*, Paris le 13 et 14 novembre 2007, p.44.
- TURKEL, S. & NEWMAN, C., « What's your number? Developing number sense». *Arithmetic Teacher*, 36(6), 1998, p.53-55.

U

- UITTENHOVE Kim, THEVENOT Catherine BARROUILLET Pierre, « Fast automated counting procedures in addition problem solving: When are they used and why are they mistaken for retrieval? », *Cognition*, 146, 2016, 289-303.

V

- VAN DE HEUVEL-PANHUIZEN Marja, « Realistic mathematics education in the Netherlands », in J. ANGHILERI (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching: Innovative approaches for the primary classroom*, Buckingham: Open University Press, 2001, p. 49-64.
- VANDEBROUCK Fabrice, « Utilisation du tableau et gestion de la classe de mathématiques : à la recherche d'invariants dans les pratiques d'enseignants », *Cahiers de Didirem*, n°42, Université Paris 7, 2002.
- VANDERBROUCK Fabrice (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse, Octarès, 2008.
- VANDERBROUCK Fabrice, « Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques : Vers une théorie didactique de l'activité (TDA) », *Cahiers du laboratoire de didactique André Révuz*, n°17, IREM, Paris, Université de Paris Diderot, février 2017.
- VAN DER MAREN Jean-Marie, *Méthodes de recherche pour l'éducation*, Bruxelles, De Boeck, 1995.
- VANNIER Marie-Paule, « Enrôlement et transfert de responsabilité : des conduites mises en œuvre aux buts poursuivis in Hersant Magali et MORIN Christiane, *Pratiques enseignantes en mathématiques : expérience, savoir et normes*, Bordeaux : Presses Universitaires de Bordeaux, 2013, p.134.
- VENKATAKRISHNAN Hamsa et WILIAM Dylan, « Tracking and Mixed-ability Grouping in Secondary School Mathematics Classroom », *British Educational Research Journal*, 29, n° 2, 2003, p. 189-204.
- VERGNAUD Gérard et DURAND Catherine et, « Structures additives et complexité psychogénétique », *Revue française de pédagogie*, volume 36, 1976. pp. 28-43.
- VERGNAUD Gérard, « A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems », in CARPENTER T.P., MOSER J.M., et ROMBERG T.A. (Eds), *Addition and subtraction : a cognitive perspective*, Hillsdale, Earlbaum, 1982.
- VERGNAUD Gérard, « Qu'est-ce que le GRECO « Didactique ? », in *Enfance*, tome 38, n°2-3, *L'ordinateur et l'écolier (II) : recherches expérimentales*, 1985 pp. 309-310.
- VERGNAUD Gérard, « La théorie des champs conceptuels », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, (2-3), 1990, p.133-170.
- VERGNAUD Gérard, « Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, in ARTIGUE Michèle (coord.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble : La pensée sauvage, 1994, p. 176-191.
- VERMESCH Pierre, « Questionner l'action : l'entretien d'explicitation, *Psychologie française*, 35 (3), pp.227-235, 1990.
- VERMESCH Pierre, *L'entretien d'explicitation en formation initiale et en formation continue*, Paris, ESF, 1994.

- VERSCHAFFEL Lieven. et DE CORTE Erik, « Number and arithmetic », in A. J. BISHOP, K. CLEMENTS, C. KEITEL, J. KILPATRICK, & C. LABORDE (Eds.), *International handbook of mathematics education*, Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer, 1996, p. 99–137.
- VIGOUR Cécile, « Produire une analyse comparée des données », in Cécile VIGOUR (éd.), *La comparaison dans les sciences sociales. Pratiques et méthodes*, La Découverte, 2005, pp. 223-298.
- VILARO Catherine et FRITZ Didier, *Litchi Mathématiques CP*, Paris, Istra, Hachette Livre, 2011.
- VILLANI Cédric et TOROSSIAN Charles, « 21 mesures pour l’enseignement des mathématiques », Rapport remis le 12 février 2018.
- VYGOTSKI Lev Semionovitch, *Pensée et langage*, trad. Franç.Éd. Sociales/Messidor, Paris, 1985, p.270-273.

W

- WANLIN Philippe et CRAHAY Marcel, « La pensée des enseignants pendant l’interaction en classe. Une revue de la littérature anglophone », *Éducation et didactique*, 6, 2012, p. 9-46.
- WATKINS Kathy L., « Follow Throught : why didn’t we ? », *Effective School Practices*, vol. XV, n°1, p.57-66.
- WHALEN John, GALLISTEL Charles & GELMAN Rochel, « Nonverbal counting in humans : The psychophysics of number representation », *Psychological Science*, 10(2), 1999, p.130–137.
- WHITBURN Julia, *Effective classroom organisation in primary schools: mathematics*. Oxford Review of Education, 27(3), 2001, p. 411-428.
- WOODS Shirley, RESNICK Lauren & GROEN Guy, « An Experimental Test of Five Process Models for Subtraction », *Journal of Educational Psychology*, 67(1), 1975, p.17–21.

Y

- YACKEL Erna, « Perspectives on arithmetic from classroom-based research in the United States of America », in J. ANGHILERI (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching: Innovative approaches for the primary classroom*, Buckingham: Open University Press, 2001, p.15-32.

Z

- ZAKHARTCHOUCK Jean-Michel *Au risque de la pédagogie différenciée*, INRP, 2001.

TABLE DES ILLUSTRATIONS

1) Schémas

- Schéma 1 : Un exemple d'épreuve de conservation, Charnay 2018.....	84
- Schéma 2 : Schématisation du triple code, Charnay 2018.....	87
- Schéma 3 : Schématisation des trois aspects d'un concept (Charnay 2018, p 35).....	88
- Schéma 4 : Schématisation des trois aspects du concept de nombre (Charnay, 2018.....	88
- Schéma 5 : Schématisation des processus de mise en correspondance terme à terme (Brissiaud 2003).....	98
- Schéma 6 : Schématisation du dénombrement par comptage de un à un (Charnay 2013)....	98
- Schéma 7 : Schématisation du dénombrement de collections-témoins organisées (Brissiaud, 2003).....	99
- Schéma 8 : Mise en évidence des relations arithmétiques à partir des constellations (Charnay, 2013)	100
- Schéma 9 : Schéma de double régulation de l'activité (Leplat, 1997 et Rogalski, 2003)...	119
- Schéma 10 : Schématisation de nos orientations et partis-pris théoriques adaptés au contexte de la thèse.....	127
- Schéma 11 : Schématisation de la correspondance terme à terme (Brissiaud, 2003, p.101).....	138
- Schéma 12 : Schématisation de la correspondance paquets par paquets (Charnay et Mante, 2014, p.100).....	139
- Schéma 13 : Schématisation du codage et du décodage d'une quantité (Charnay, 2013, p.31).....	141
- Schéma 14 : Deux façons de dénombrer une collection de livres (Brissiaud, 2007, p.24).....	143
- Schéma 15 : Production d'élèves (Brissiaud, 2003, p.132).....	148
- Schéma 16 : Schématisation du « double pointage » (Brissiaud, 2003, p.132).....	149
- Schéma 17 : Schématisation du codage et du décodage d'une quantité (Brissiaud, 2009, p.134).....	149
- Schéma 18 : Schématisation du recomptage à l'aide de deux collections-témoins de doigts (Brissiaud, 2003).....	156
- Schéma 19 : Schématisation du recomptage à l'aide d'une seule collection-témoin de doigts (Brissiaud, 2003).....	156
- Schéma 20 : Schématisation du surcomptage (Brissiaud, 2003).....	156
- Schéma 21 : Schématisation du double comptage (Brissiaud, 2003).....	157

- Schéma 22 : Schématisation du processus du progrès vers le calcul pensé par le groupe Ermel (Brissiaud, 2001).....	170
- Schéma 23 : Schématisation du processus du progrès vers le calcul pensé par Rémi Brissiaud (Brissiaud, 2001).....	171
- Schéma 24 : Structure de la séance 1 du scénario de Litchi Mathématiques.....	215
- Schéma 25 : Structure de la séance 1 du scénario du <i>Cap maths</i>	223
- Schéma 26 : Structure de la séance 1 du scénario du manuel <i>Pour comprendre les maths</i>	231
- Schéma 27 : Structure des séances 1 et 2 du scénario d' <i>Euromaths</i>	242
- Schéma 28 : Mise en scène de la première phase d'apprentissage de la séance 1 (leçon 94) dans <i>J'apprends les maths avec Tchou</i> (2009, p.134).....	248
- Schéma 29 : Illustration du processus de mentalisation du calcul sur les objets de la leçon 94 dans <i>J'apprends les maths avec Tchou</i> (2009, p.134).....	248
- Schéma 30 : Structure de la séance 1 du scénario de <i>J'apprends les maths</i>	254
- Schéma 31 : Nombre d'enseignants par tranche d'âge et sexe.....	276
- Schéma 32 : Nombre d'enseignant selon leur formation initiale par sexe.....	276
- Schéma 33 : Nombre d'ancienneté des enseignants par sexe.....	277
- Schéma 34 : Nombre d'ancienneté des enseignants au cours préparatoire par sexe.....	278
- Schéma 35 : Nombre d'ancienneté des enseignants dans le poste par sexe.....	278
- Schéma 36 : Nombre d'enseignants enquêtés par zone d'implantation et type d'établissement.....	280
- Schéma 37 : Bilan intermédiaire du profil d'Astride.....	313
- Schéma 38 : Extrait de la chronologie des tâches les plus significatives de la séquence de Séverine (voir plus de détails en annexes IV – Grille 24).....	322
- Schéma 39 : Extrait de la chronologie des tâches les plus significatives de la séquence de Séverine (voir plus de détails en annexes IV – Grille 24).....	323
- Schéma 40 : Bilan intermédiaire du profil de Béatrice.....	332
- Schéma 41 : Extrait de la chronologie des tâches les plus significatives de la séquence de Sophie (voir plus de détails en annexes IV – Grille 43).....	341
- Schéma 42 : Bilan intermédiaire du profil de Sophie.....	342
- Schéma 43 : Extrait de la chronologie des tâches les plus significatives de la séquence de José (voir plus de détails en annexes IV – Grille 54).....	351
- Schéma 44 : Bilan intermédiaire du profil de José.....	352
- Schéma 51 : Extrait de la chronologie des tâches les plus significatives	

de la séquence de Pascal (voir plus de détails en annexes IV – Grille 61).....	362
- Schéma 52 : Bilan intermédiaire du profil de Pascal.....	363

2) Tableaux

- Tableau 1 : Tableau de synthèse associant les types de fonctionnements cognitifs convoqués en calcul mental et les moyens utilisés pour calculer (COPIRELEM, 2012).....	93
- Tableau 2 : Les principes fondamentaux du comptage (Fayol, 2012, p.63).....	144
- Tableau 3 : Catégories socio-professionnelles des auteurs des manuels sélectionnés.....	188
- Tableau 4 : Place d'introduction du signe + dans la programmation des manuels pour l'année scolaire.....	197
- Tableau 5 : Travail sur le sens de l'addition avant l'introduction du signe +.....	198
- Tableau 6 : Place de l'introduction du signe « + » et du signe « - » dans les manuels du CP constituant notre panel.....	200
- Tableau 7 : Évolution du champ numérique en fonction des phases d'apprentissage de la désignation des nombres dans le manuel Litchi (voir tableau complet en annexes III Grille 12).....	202
- Tableau 8 : Étendue du champ numérique et phase d'apprentissage de la désignation des nombres au moment de la séance d'introduction du calcul de sommes de type $a + b$ avec passage de la dizaine.....	203
- Tableau 9 : Séance 1 extraite du projet d'enseignement de Litchi détaillé en annexes III grille 15.....	211
- Tableau 10 : Type des séances du scénario de <i>Litchi Mathématiques</i>	215
- Tableau 11 : Répartition des séances selon leur format.....	216
- Tableau 12 : Répartition des activités proposées dans le scénario <i>Litchi</i> (voir tableau détaillé en annexes III grille 18).....	217
- Tableau 13 : Nombre d'activités en fonction du type de séance.....	217
- Tableau 14 : Séance 1 extraite du projet d'enseignement de Litchi détaillé en annexes III grille 21.....	218
- Tableau 15 : Type des séances du scénario de <i>Cap maths</i>	224
- Tableau 16 : Répartition des séances selon leur format.....	224
- Tableau 17 : Extrait de la répartition des activités proposées dans le scénario <i>Cap maths</i> (voir tableau détaillé en annexes III grille 24).....	225
- Tableau 18 : Nombre d'activités en fonction du type de séance.....	226

- Tableau 19 : Séance 1 extraite du projet d'enseignement de <i>Pour comprendre les maths</i> détaillé en Annexes III- Grille 27.....	227
- Tableau 20 : Type des séances du scénario de <i>Pour comprendre les maths</i>	232
- Tableau 21 : Répartition des séances selon leur format.....	232
- Tableau 22 : Répartition des activités proposées dans le scénario de <i>Pour comprendre les maths</i>	234
- Tableau 23 : Nombre d'activités en fonction du type de séance.....	234
- Tableau 24 : Séance 1 extraite du projet d'enseignement d'Euromaths détaillé annexes III Grille 32.....	235
- Tableau 25 : Durée des temps d'enseignement consacrés à notre objet d'étude (hors bilans et remédiations) dans <i>Euromaths</i> (voir détails grille 34 en annexes III).....	243
- Tableau 26 : Type des séances du scénario d' <i>Euromaths</i>	243
- Tableau 27 : Répartition des séances selon leur format.....	244
- Tableau 28 : Répartition des activités proposées dans le scénario d'Euromaths (voir détails en annexes III Grille 35).....	245
- Tableau 29 : Nombre d'activités en fonction du type de séance.....	246
- Tableau 30 : Type des séances du scénario de <i>Cap maths</i>	254
- Tableau 31 : Répartition des séances selon leur format.....	255
- Tableau 32 : Répartition des activités proposées dans le scénario de <i>J'apprends les maths</i> (détaillée en annexes III Grille 40).....	256
- Tableau 33 : Nombre d'activités en fonction du type de séance.....	256
- Tableau 34 : Synopsis des projets d'enseignement possibles du calcul mental de sommes de nombres inférieurs à 10 avec franchissement de la dizaine au CP.....	259
- Tableau 35 : Déclinaison de la progression minimum pour le calcul mental du GAM.....	264
- Tableau 36 : Répartition des classes de l'échantillon initial selon leur performance à partir des huit critères de sélection définis par Vincent Carette (2008).....	268
- Tableau 37 : Les étapes de la sélection de l'échantillon (Année 2013-2014).....	271
- Tableau 38 : Les étapes de la sélection de l'échantillon final (Année 2014-2015).....	274
- Tableau 39 : Caractéristiques sociodémographiques en fonction du sexe des enseignants.....	275
- Tableau 40 : Caractéristiques professionnelles.....	276
- Tableau 41 : Nombre d'années d'ancienneté des enseignants dans le corps de métier et au CP par sexe.....	277
- Tableau 42 : Environnement de travail.....	279

- Tableau 43 : Recueil de données de type 1 et 2.....	300
- Tableau 44 : Extrait de la séance 1 d’Astride.....	303
- Tableau 45 : Premier extrait de la séance 2 d’Astride.....	304
- Tableau 46 : Deuxième extrait de la séance 2 d’Astride.....	305
- Tableau 47 : Troisième extrait de la séance 2 d’Astride	306
- Tableau 48 : Effectifs et répartition des tâches les plus significatives du projet d’Astride suivant leur catégorie (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 21).....	309
- Tableau 49 : Position relative de la phase de construction des savoirs dans le scénario d’Astride par rapport aux manuels utilisés (voir plus de détails en annexes IV – Grille 30).....	311
- Tableau 50 : Position relative de la séquence d’Astride par rapport aux manuels utilisés (voir plus de détails en annexes IV – Grille 30).....	312
- Tableau 51 : Extrait de la séance 1 de Séverine.....	315
- Tableau 52 : Extrait de la séance 3 de Séverine.....	316
- Tableau 53 : Effectifs et répartition des tâches les plus significatives du projet de Séverine suivant leur catégorie (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 34).....	319
- Tableau 54 : Durée des phases de la séquence de Séverine (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 22).....	321
- Tableau 55 : Position relative de la séquence de Séverine par rapport au manuel utilisé (voir plus de détails en annexes IV – Grille 23).....	321
- Tableau 56 : Extrait 1 de la séance 6 de Béatrice.....	325
- Tableau 57 : Extrait 2 de la séance 6 de Béatrice.....	326
- Tableau 58 : Effectifs et répartition des tâches les plus significatives du projet de Béatrice suivant leur catégorie (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 30).....	328
- Tableau 59 : Durée des phases de la séquence de Béatrice (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 32).....	330
- Tableau 60 : Position relative de la séquence de Béatrice par rapport au manuel utilisé (voir plus de détails en annexes IV – Grille 33).....	331
- Tableau 61 : Extrait de la séance 1 de Sophie.....	334
- Tableau 62 : Extrait de la séance 2 de Sophie.....	335
- Tableau 63 : Effectifs et répartition des tâches les plus significatives du projet de Sophie suivant leur catégorie (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 37).....	338
- Tableau 64 : Position relative de la phase de construction des savoirs dans le scénario de Sophie par rapport aux manuels utilisés (voir plus de détails en annexes IV – Grille 40).....	340

- Tableau 65 : Position relative de la séquence de Sophie par rapport à celle du Cap maths (voir plus de détails en annexes IV – Grille 41).....	340
- Tableau 66 : Extrait de la séance 3 de José.....	345
- Tableau 67 : Extrait de la séance 4 de José.....	345
- Tableau 68 : Effectifs et répartition des tâches les plus significatives du projet de José suivant leur catégorie (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 45).....	348
- Tableau 69 : Position relative de la phase de construction des savoirs dans le scénario de José par rapport aux manuels utilisés (voir plus de détails en annexes IV – Grille 51).....	350
- Tableau 70 : Position relative de la séquence de José par rapport aux manuels utilisés (voir plus de détails en annexes IV – Grille 52)	351
- Tableau 71 : Extrait de la séance 1 de Pascal.....	355
- Tableau 72 : Extrait de la séance 6 de Pascal.....	356
- Tableau 73 : Effectifs et répartition des tâches les plus significatives du projet de Pascal suivant leur catégorie (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 56).....	359
- Tableau 74 : Durée des phases de la séquence de Pascal (voir tableau détaillé en annexes IV – Grille 59).....	361
- Tableau 75 : Position relative de la séquence de Pascal par rapport au manuel utilisé (voir plus de détails en annexes IV – Grille 60).....	362
- Tableau 76 - Synopsis : Choix didactiques et pédagogiques des enseignants du CP.....	376

3) Figures

- Figure 1 : Place de l'introduction des signes « + » dans les manuels du CP constituant notre panel.....	197
- Figure 2- Durée entre la séance introduisant le signe « + » et celle qui introduit le signe « - ».....	199

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS.....	2
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	5
1- Définition du sujet.....	5
2- Historique du contexte actuel.....	5
3- Les problèmes auxquels répond notre thèse.....	6
4- La méthodologie pour répondre au problème.....	8
5- L’annonce de la structure du développement.....	10
PREMIERE PARTIE – ORIENTATION ET AXE DE LA RECHERCHE.....	12
CHAPITRE 1 : SITUATION DANS LE CHAMP D’ÉTUDE.....	15
1. Orientation de la recherche en Sciences de l’éducation.....	15
1.1 Une approche suggérée.....	15
1.2 Notre posture dans le champ d’étude.....	23
2. La question des acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l’école primaire.....	24
2.1 Les acquis des élèves dans le domaine des nombres.....	25
2.2 Les acquis des élèves dans le domaine du calcul.....	27
2.3 Bilan sur les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l’école primaire.....	30
3. État des lieux de la recherche sur l’enseignement-apprentissage du calcul mental.....	39
3.1 Les recherches centrées sur les apprentissages des élèves.....	39
3.2 Les recherches centrées sur les pratiques enseignants.....	46
CHAPITRE 2 : PRATIQUES PRÉCONISÉES EN CALCUL MENTAL.....	50
1. Le constat des approches pédagogiques.....	51
2. Les dispositifs d’accompagnement du système éducatif.....	58
DEUXIÈME PARTIE – QUESTION CENTRALE ET CADRE THÉORIQUE.....	62
CHAPITRE 3 : QUESTIONS DE RECHERCHE ET HYPOTHÈSES.....	62
1. Les fondements de notre question de recherche.....	62
2. De la question centrale aux hypothèses.....	65

2.1. La question de recherche.....	65
2.2. Formulation des hypothèses.....	69
CHAPITRE 4 : ANALYSE DES CONCEPTS.....	74
1. Le concept de nombre.....	74
1.1. Origine.....	74
1.2. Définition.....	80
1.3. Conceptualisation.....	82
2. Le concept de calcul mental.....	89
2.1. Origine.....	89
2.2. Caractérisation.....	91
2.3. Définition.....	94
3. Calcul mental et connaissance des nombres.....	97
4. Calcul mental et résolution de problèmes.....	102
5. Calcul mental et élèves en difficulté.....	108
CHAPITRE 5 : NOS PARTIS PRIS THÉORIQUES.....	115
1. La Théorie de l'Activité finalisée : un cadre unificateur pour l'articulation des pratiques enseignantes et des apprentissages des élèves.....	117
2. Emprunts et articulations des théories de Piaget et de Vygotski : conceptualisation médiations et zone proximale de développement.....	120
3. Des références à la didactique professionnelle et à la psychologie ergonomique.....	124
 TROISIÈME PARTIE – LES PRATIQUES ORDINAIRES	
DES ENSEIGNANTS AU CP : INVESTIGATIONS ET ANALYSE DES DONNÉES.....	128
CHAPITRE 6 : L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DU CALCUL MENTAL DE SOMMES AVEC LE FRANCHISSEMENT DE LA DIZAINES AU CP.....	128
1. De la maternelle au cours préparatoire : Apprendre à quantifier.....	131
1.1. Quelles priorités pour les problèmes numériques en GS et en début de CP ?.....	132
1.1.1 Exprimer, mémoriser, comparer les quantités et communiquer à leur sujet.....	132
1.1.2 Anticiper le résultat d'actions portant sur des quantités.....	135
1.1.3 Exprimer, mémoriser, comparer des rangs et communiquer à leur sujet.....	136
1.2. Quelles techniques et quelles propriétés doivent être maîtrisées par les élèves en GS et en début de CP ?.....	138
1.2.1 Quantifier.....	138
1.2.2 Maîtriser la comptine numérique.....	146
1.3. Quelles priorités pour la représentation des nombres en GS et au début du CP ?.....	147

1.4. Les obstacles à une « première rencontre réussie » avec les nombres à l'école maternelle....	151
1.5. Conséquences pour l'enseignement et l'apprentissage du calcul au CP.....	154
2. Du comptage au calcul mental des additions.....	155
2.1. Les composantes du progrès vers le calcul mental.....	155
2.1.1 <i>L'amélioration des pratiques de comptage.....</i>	<i>155</i>
2.1.2 <i>L'emploi des collections-témoins organisées.....</i>	<i>161</i>
2.1.3 <i>La mémorisation du répertoire additif.....</i>	<i>163</i>
2.1.4 <i>L'enseignement de l'égalité numérique.....</i>	<i>166</i>
2.2. Deux conceptions de l'accès au calcul mental dans le paysage français.....	169
2.2.1. <i>Une première conception : du comptage au calcul numérique.....</i>	<i>169</i>
2.2.2. <i>Une deuxième conception : du « calcul sur les objets » au calcul numérique.....</i>	<i>170</i>
2.3. Conséquences pour l'enseignement du calcul mental de sommes au CP.....	172
3. Les obstacles à l'apprentissage du calcul mental de l'addition au CP	
et les conséquences sur son enseignement.....	176
3.1. Difficultés liées à la conceptualisation du nombre et conséquences pour l'enseignement du calcul mental.....	176
3.2. Difficultés liées au comptage et conséquences pour l'enseignement.....	177
3.3. Difficultés liées à l'emploi du symbolisme arithmétique et conséquences pour l'enseignement.....	181
3.4. Difficultés liées à la mémorisation des tables d'addition et conséquences pour l'enseignement.....	181
4. Bilan intermédiaire sur l'étude de la notion.....	182
5. Les projets d'enseignement possibles : Une étude comparative des manuels.....	183
5.1. Méthodologie d'analyse des manuels.....	183
5.2. Le panel.....	187
5.3. La programmation du calcul mental dans les manuels du CP : le cas de l'addition.....	188
5.3.1. <i>Méthodologie d'analyse de la programmation.....</i>	<i>189</i>
a) Les indicateurs.....	189
b) La méthode utilisée pour comparer les programmations des manuels.....	190
5.3.2. <i>L'organisation globale des manuels en ce qui concerne l'enseignement du calcul mental de l'addition.....</i>	<i>190</i>
a) Litchi Mathématiques.....	190
b) Cap maths.....	191
c) Pour comprendre les maths.....	193
d) Euromaths.....	194

e) J'apprends les maths avec Tchou.....	195
5.3.3. <i>Comparaison de la programmation des manuels</i>	197
a) Le sens de l'addition et les écritures additives.....	197
b) La suite des nombres jusqu'à 99 et la numération.....	201
c) L'apprentissage du calcul mental de sommes et la mémorisation du répertoire additif.....	203
5.4. Les scénarios proposés dans les manuels pour enseigner les additions mentales de nombres inférieurs à 10 avec passage de la dizaine.....	211
5.4.1. <i>Le scénario de Litchi</i>	211
a) L'itinéraire cognitif et les contenus mathématiques.....	211
b) Démarche d'enseignement du calcul réfléchi.....	213
c) Stratégies globales d'enseignement.....	214
d) Structure, format et type de séances du scénario.....	214
e) Les activités proposées au cours du déroulement.....	216
f) La gestion des moments d'institutionnalisation.....	218
5.4.2. <i>Le scénario du Cap maths</i>	218
a) L'itinéraire cognitif et les contenus mathématiques.....	218
b) Démarche d'enseignement du calcul réfléchi.....	222
c) Stratégies globales d'enseignement.....	222
d) Structure, format et type de séances du scénario.....	223
e) Les activités proposées au cours du déroulement.....	225
f) La gestion des moments d'institutionnalisation.....	226
5.4.3. <i>Le scénario de Pour comprendre les maths</i>	227
a) L'itinéraire cognitif et les contenus mathématiques.....	227
b) Démarche d'enseignement du calcul réfléchi.....	230
c) Stratégies globales d'enseignement.....	231
d) Structure, format et type de séances du scénario.....	231
e) Les activités proposées au cours du déroulement.....	233
f) La gestion des moments d'institutionnalisation.....	234
5.4.4. <i>Le scénario d'Euromaths</i>	234
a) L'itinéraire cognitif et les contenus mathématiques.....	234
b) Démarche d'enseignement du calcul réfléchi.....	240
c) Stratégies globales d'enseignement.....	241
d) Structure, format et type de séances du scénario.....	242

e) Les activités proposées au cours du déroulement.....	244
f) La gestion des moments d'institutionnalisation.....	246
5.4.5. <i>Le scénario de J'apprends les maths</i>	247
a) L'itinéraire cognitif et les contenus mathématiques.....	247
b) Démarche d'enseignement du calcul réfléchi.....	252
c) Stratégies globales d'enseignement.....	253
d) Structure, format et type de séances du scénario.....	254
e) Les activités proposées au cours du déroulement.....	255
f) La gestion des moments d'institutionnalisation.....	256
5.4.6. <i>Analyse comparative des projets d'enseignement</i> <i>proposés dans les manuels</i>	257
CHAPITRE 7 : UNE ÉTUDE DE CAS DANS L'ACADEMIE DE GUADELOUPE	260
1. Méthodologie d'analyse des pratiques enseignantes	260
1.1. Délimiter le champ d'analyse et sélectionner les unités d'observation.....	260
1.1.1. <i>Le champ d'analyse</i>	260
a) Un contexte institutionnel propice à l'étude.....	261
b) Un sujet mathématique commun et des séquences complètes.....	263
c) Une ressource académique : La progression minimum du GAM.....	263
1.1.2. <i>La sélection de l'échantillon</i>	264
a) Première phase de sélection des classes : Année 1 (2013 - 2014).....	266
b) Deuxième phase de sélection des classes : Année 2 (2014-2015).....	271
1.1.3. <i>Caractéristiques individuelles des enseignants de l'échantillon</i>	275
1.2. Identifier les éléments pris en considération par les professeurs pour élaborer leur projet d'enseignement.....	281
1.2.1 <i>Les représentations des professeurs du CP et le profil de leur classe</i>	282
1.2.2 <i>L'observation des séances dans les classes</i>	285
1.2.3. <i>Des entretiens à chaud</i>	287
1.2.4. <i>La reconstitution du projet d'enseignement</i>	287
1.2.5 <i>L'étude du projet d'enseignement reconstitué</i>	289
1.3. Caractériser les pratiques privilégiées par les enseignants Pour venir en aide aux élèves en difficulté	290
1.3.1. <i>Les pratiques à l'égard des élèves en difficulté</i>	291
1.3.2. <i>Le repérage des élèves en difficulté</i>	292
1.3.3. <i>L'observation des pratiques enseignantes à l'égard des élèves en difficulté</i>	293
1.3.4 <i>Présentation des grilles</i>	294

2. Analyses et interprétations des résultats.....	301
2.1. Principaux éléments didactiques et pédagogiques pris en considération	
par les enseignants pour concevoir leur projet d'enseignement.....	301
2.1.1 <i>Éléments pris en considération par Astride</i>	
<i>pour concevoir son projet d'enseignement.....</i>	302
a) Redéfinition de la tâche prescrite.....	302
b) Stratégie d'enseignement.....	303
c) Les tâches possibles des élèves dans les activités proposées.....	308
d) Le rapport de l'enseignant au manuel dans son activité de préparation.....	309
2.1.2 <i>Éléments pris en considération par Séverine</i>	
<i>pour concevoir son projet d'enseignement.....</i>	314
a) Redéfinition de la tâche prescrite.....	314
b) Stratégie d'enseignement.....	315
c) Les tâches possibles des élèves dans les activités proposées.....	318
d) Le rapport de l'enseignant au manuel dans son activité de préparation.....	319
2.1.3 <i>Éléments pris en considération par Béatrice</i>	
<i>pour concevoir son projet d'enseignement.....</i>	324
a) Redéfinition de la tâche prescrite.....	324
b) Stratégie d'enseignement.....	325
c) Les tâches possibles des élèves dans les activités proposées.....	328
d) Le rapport de l'enseignant au manuel dans son activité de préparation.....	329
2.1.4 <i>Éléments pris en considération par Sophie</i>	
<i>pour concevoir son projet d'enseignement.....</i>	333
a) Redéfinition de la tâche prescrite.....	333
b) Stratégie d'enseignement.....	334
c) Les tâches possibles des élèves dans les activités proposées.....	337
d) Le rapport de l'enseignant au manuel dans son activité de préparation.....	338
2.1.5 <i>Éléments pris en considération par José</i>	
<i>pour concevoir son projet d'enseignement.....</i>	343
a) Redéfinition de la tâche prescrite.....	343
b) Stratégie d'enseignement.....	344
c) Les tâches possibles des élèves dans les activités proposées.....	347
d) Le rapport de l'enseignant au manuel dans son activité de préparation.....	348
2.1.6 <i>Éléments pris en considération par Pascal</i>	

pour concevoir son projet d'enseignement.....	353
a) Redéfinition de la tâche prescrite.....	353
b) Stratégie d'enseignement.....	354
c) Les tâches possibles des élèves dans les activités proposées.....	358
d) Le rapport de l'enseignant au manuel dans son activité de préparation.....	359
2.1.7 Analyse comparative des principaux éléments pris en considération par les enseignants pour concevoir leur projet d'enseignement.....	364
2.1.8 Réponse à la première sous-question de recherche.....	377
2.2. Pratiques privilégiées par les enseignants pour venir en aide aux élèves les plus fragiles en calcul mental.....	377
a) Premier axe : difficultés identiques rencontrées chez l'ensemble des élèves quel que soit le profil de classe et réponses apportées par les enseignants.....	381
b) Deuxième axe : difficultés singulières rencontrées chez les élèves au regard des différents profils de classe et réponses apportées par les enseignants.....	394
c) Réponse à la deuxième sous-question de recherche.....	396
CHAPITRE 8 : RÉPONSE À LA QUESTION DE RECHERCHE.....	397
CONCLUSION.....	400
1- Rappel de la question centrale.....	400
2- La spécificité de notre démarche.....	400
a) L'étude comparative des manuels.....	401
b) Analyse des pratiques enseignantes.....	401
c) L'étude des projets d'enseignement	402
d) L'observation des séances.....	403
e) Entretien à chaud.....	404
f) Nature des contacts verbaux et du guidage.....	404
3- Réponse à la question centrale de la recherche.....	405
4- Limites de la recherche.....	406
5- Mise en perspective de la recherche.....	407
BIBLIOGRAPHIE.....	409
TABLE DES ILLUSTRATIONS.....	447
1- Schémas.....	447
2- Tableaux.....	449
3- Figures.....	452
TABLE DES MATIERES.....	453

Le calcul mental au CP : Un regard sur les pratiques enseignantes dans l'académie de Guadeloupe

Résumé

Au regard du constat préoccupant sur la nature des acquis des élèves en mathématiques dans l'académie de Guadeloupe, nous avons mené, dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique, une recherche dont l'objectif est la construction des connaissances sur les pratiques d'enseignement en calcul mental. Dans cette optique, nous avons étudié les pratiques effectives de six professeurs du CP dans des classes à performance contrastée, par le biais de méthodes qualitative et quantitative. Concrètement, nous avons identifié les éléments didactiques et pédagogiques pris en compte par les enseignants pour élaborer leur projet d'enseignement et les pratiques privilégiées pour aider les élèves en difficulté. Globalement, les résultats montrent une singularité des professeurs dans leurs pratiques avec des variables significatives, contextuelles et différenciées d'un professeur à un autre en tenant compte des connaissances des élèves sur le nombre et de leur capacité à les utiliser ou non dans la résolution de problèmes.

Mots-clés : calcul mental, procédures de calcul réfléchi, élèves en difficulté, pratiques enseignantes, didactique, addition

Mental Math in CP : A look at Teaching Practices in the Academy of Guadeloupe

Abstract

In view of the worrying observation about the nature of students' achievements in mathematics in the Guadeloupe academy, we have conducted, within the framework of the dual didactic and ergonomic approach, a research whose objective is the construction of knowledge on the practices teaching in mental arithmetic. With this in mind, we have studied the actual practices of six teachers of the first grade in classes with contrasting performance, through qualitative and quantitative methods. Concretely, we have identified the didactic and pedagogical elements taken into account by the teachers to develop their teaching project and the preferred practices to help pupils in difficulty. Overall, the results show a singularity of teachers in their practices with significant, contextual and differentiated variables from one teacher to another, taking into account the students' knowledge of the number and their ability to use them or not in the resolution of problems.

Keywords : mental arithmetic, reflective arithmetic procedures, pupils in difficulty, teaching practices, didactics, addition
