

Table des matières

Table des matières	ix
Introduction	1
I Modélisation mathématique du neurone	3
1 Physiologie du neurone	5
1 La structure du neurone	5
2 L'influx nerveux	7
2 Modélisation mathématique du neurone	13
1 Le modèle de Hodgkin-Huxley	13
2 Le modèle de FitzHugh-Nagumo	17
II Réseau complexe de neurones modélisé par des EDO de type FitzHugh-Nagumo	21
3 Dynamique et bifurcations du modèle de FitzHugh-Nagumo	23
1 Étude des points d'équilibre	23
2 Existence et direction de la bifurcation de Hopf	28
4 Synchronisation identique de systèmes d'EDO de type FitzHugh-Nagumo	35
1 Réseau de neurones	36
2 Étude de l'attracteur	39
3 La synchronisation	43
4 Différentes topologies de réseaux	52
III Réseau complexe de neurones modélisé par des EDP de type FitzHugh-Nagumo	57
5 Étude d'un neurone isolé de type FitzHugh-Nagumo	59
1 Étude mathématique de l'EDP	60
2 Existence et unicité des solutions	62
3 Existence d'un attracteur du système	68
4 Simulations numériques	74
5 Stabilité des états d'équilibre	78
6 Existence de travelling wave en dimension 1	81

6 Synchronisation identique des systèmes de Réaction-Diffusion de type FitzHugh-Nagumo	89
1 Existence et unicité des solutions	92
2 Existence d'un attracteur global pour le réseau coplexe	98
3 Synchronisation identique d'un réseau de n systèmes de réaction-diffusion	108
4 Effet de l'ajout de la dimension spatiale sur la synchronisation	136
Conclusion et perspectives	143
IV Annexes	157
Bibliographie	169
Index	175

INTRODUCTION

D'une manière générale, cette thèse porte sur l'analyse du comportement asymptotique de réseaux complexes de systèmes de réaction-diffusion. L'idée est la suivante : connaissant des propriétés d'un système particulier de réaction-diffusion, que peut-on attendre du comportement d'un réseau constitué de systèmes de même type ? Cette problématique est étudiée en mathématiques ou en physique théorique mais principalement dans le cadre des équations différentielles ordinaires (EDO) (voir par exemple [9, 18, 19]), mais très peu dans le cadre des équations aux dérivées partielles (EDP). L'aspect novateur de ce travail est donc d'étendre les questions traitées dans le cadre des EDO au cas des EDP.

Les applications de ce type de questions sont nombreuses : de nombreux systèmes fonctionnent en effet comme des réseaux de systèmes dynamiques : par exemple l'évolution d'une maladie dans des zones données connectées, peut être modélisée par des systèmes dynamiques de type SIR (Susceptible-Infected-Recovered), sur chaque noeud du réseau. C'est donc le cas où on inclut plusieurs régions avec des voyageurs qui transitent entre les régions (noeud du graphe). On obtient ainsi un système de systèmes dynamiques. La thèse [60] soutenue en 2011 a d'ailleurs étudié ce problème particulier dans le cas de la fièvre du Chikungunya. On pourrait citer de nombreuses autres applications : réseaux d'oscillateurs mécaniques, chimiques ou biologiques, évolution de l'activité des réseaux informatiques, comportement d'individus (humains ou animaux) groupés en sociétés ... Un domaine particulièrement intéressant est celui des neurosciences. En effet, le cerveau est composé de neurones connectés entre eux par des liaisons synaptiques. Il est donc naturel d'essayer de modéliser les systèmes neuronaux comme des réseaux de systèmes dynamiques (voir par exemple [30]). C'est ce choix d'application qui a été fait dans cette thèse, qui est entamé par la présentation de la modélisation mathématique classique en neuroscience. On y développe essentiellement pour une étude théorique et numérique de réseaux de systèmes de réaction-diffusion de type FitzHugh-Nagumo.

Le modèle fondateur de la discipline des "neurosciences mathématiques" est sans doute le modèle de Hodgkin-Huxley (HH). En effet, Hodgkin et Huxley ont proposé dans les années 1950 un modèle de quatre EDO couplées et une version EDP pour modéliser la formation et la propagation de l'influx électrique le long de l'axone géant du calmar (voir [44, 45]). Ils ont introduit l'idée de portes dépendantes du voltage et ont utilisé la technique du patch-clamp pour estimer les paramètres du modèle grâce à leurs observations. Ces travaux leur ont valu le prix Nobel de physiologie en 1963, conjointement avec Eccles pour son travail sur les synapses. Aujourd'hui encore ce modèle est largement utilisé, sous différentes versions, sur les plans théorique et numérique. Une dizaine d'années plus tard un modèle d'EDO est introduit par R. FitzHugh (voir [32]), pour reproduire les caractéristiques principales du modèle (HH). A la même période J. Nagumo (voir [63]) propose le modèle électrique correspondant au modèle de FitzHugh qui est maintenant connu sous le nom de modèle de FitzHugh-Nagumo (FHN). Le modèle de (FHN) a été largement étudié depuis (voir [48, 49, 62, 61, 73]). Une étude numérique et théorique a notamment été faite dans [4]. Dans cette thèse nous étendons certains résultats de [4, 57] et à portant de nouveaux résultats sur la synchronisation du réseau d'EDP.

Ce travail est divisé en trois parties comportant chacune deux chapitres. Dans la première partie, on s'intéresse à la modélisation du neurone. On décrit dans le chapitre 1 les propriétés physiologiques du neurone et du système nerveux, en présentant notamment le mécanisme de formation du potentiel d'action à partir des différents flux ioniques. Puis, dans le chapitre 2, on explicite la modélisation HH. On présente ensuite de manière détaillée le passage du modèle HH au modèle FHN.

La seconde partie de la thèse porte sur l'analyse qualitative de réseaux de systèmes d'EDO de type (FHN). On commence par décrire, dans le chapitre 3, l'analyse mathématique du système (FHN), et en particulier une des bifurcations classiques, celle de Hopf. On montre notamment en détail l'apparition d'une bifurcation de Hopf surcritique dans le modèle (FHN). Dans le chapitre 4, on considère un ensemble de systèmes de FitzHugh-Nagumo couplés. On se place dans différentes situations de couplage et on s'intéresse à un phénomène particulier, la *synchronisation*. On s'intéresse ici à la synchronisation identique des neurones d'un réseau, caractérisée par le fait que les différentes entités en interaction ont le même comportement au même moment. Ainsi, différents types de réseaux sont considérés. En particulier, on se penche sur des réseaux composés de neurones identiques tous couplés mutuellement les uns aux autres par des fonctions linéaires ou non-linéaires, de différentes topologies de connectivité. Les neurones sont couplés unidirectionnellement ou bidirectionnellement par des fonctions de couplage linéaires ou non-linéaires. Ce travail est centré sur l'étude de l'évolution de la force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation identique en fonction du nombre de neurones couplés ou du degré de chaque neurone au sein du réseau. Il apparaît ainsi que certaines lois heuristiques émergent du couplage de plusieurs neurones.

Enfin la troisième et dernière partie (en particulier le chapitre 6) constitue la contribution majeure de la thèse, et s'attèle à l'étude de réseaux complexes de systèmes de type (FHN). Après avoir rappelé les principales propriétés d'un système d'EDP de type (FHN) (existence et unicité, attracteur, stabilité des états d'équilibre, existence de travelling waves), on s'intéresse aux réseaux de systèmes de type (FHN). On montre en particulier l'existence de l'attracteur global dans $(L^2(\Omega)^d)^n$ pour des topologies quelconques (théorème 11) et les propriétés de synchronisation (théorèmes 14, 15, 16). Ces résultats théoriques sont complétés par de nombreuses simulations numériques dans lesquelles on retrouve dans le cas des EDP des lois heuristiques émergentes de synchronisation (par exemple une loi en $\frac{1}{n}$ dans le cas des réseaux avec couplage complet). Les simulations numériques permettent aussi une étude de l'influence de l'hétérogénéité spatiale sur la synchronisation. Elles montrent que généralement, l'hétérogénéité spatiale dans les conditions initiales, permettant la formation de patterns complexes, n'influe pas sur les lois heuristiques de synchronisation.

Première partie

Modélisation mathématique du neurone

PHYSIOLOGIE DU NEURONE

Sommaire

1	La structure du neurone	5
2	L'influx nerveux	7

Ce travail s'inscrit dans le cadre des mathématiques des neurosciences. Les *neurosciences* se définissent comme l'étude scientifique du système nerveux. Elles concernent donc principalement la biologie et la médecine, mais attirent aujourd'hui d'autres disciplines telles que la physique, la chimie, la psychologie, mais aussi l'informatique et les mathématiques.

L'unité de base du système nerveux est le *neurone* ou cellule nerveuse. Afin de pouvoir présenter les modèles mathématiques pertinents dans le prochain chapitre, on présente ici la description biologique structurelle et électrique du neurone.

1. La structure du neurone

Le *neurone* est un mot issu du grec ancien *νεῦρον* qui signifie nerf ou fibre. Il fut introduit dans le vocabulaire médical en 1881 par l'anatomiste allemand H.W. Waldeyer. Il désigne aujourd'hui une cellule du système nerveux qui assure la transmission d'un signal bioélectrique appelé *influx nerveux* et qui permet la communication et le traitement de l'information à partir du cerveau à travers tout le corps. La figure 1.1 donne la présentation schématique d'un neurone. Le nombre de neurones dans le cerveau humain est estimé à 100 milliards. Ils sont capables de créer un réseau complexe, avec parfois plus de 100.000 synapses par neurone. La concentration en neurones peut également être importante dans d'autres organes. Ainsi, le nombre de neurones dans l'intestin est estimé à 200 millions.

A l'instar de toutes les cellules, le corps cellulaire du neurone contient un cytoplasme, un noyau et une membrane plasmique. On rappelle ci-dessous les notions de base sur cette cellule nerveuse qu'est le neurone afin de faciliter la lecture de cette thèse. Mais la littérature est très riche sur ce plan, voir par exemple [30, 37, 39, 47, 48, 52, 79, 88, 89], et les références qui y sont citées. Commençons ce lexique par :

La *membrane cellulaire*, appelée aussi membrane plasmique, qui délimite une cellule et sépare le cytoplasme du milieu extérieur. Elle est composée d'une bicouche de lipides. Chaque

lipide membranaire est constitué d'une tête polaire hydrophile orientée vers l'extérieur de la membrane et d'une queue hydrophobe orientée vers l'intérieur. L'épaisseur d'une membrane est d'environ 7.5nm . Elle fusionne à quelques endroits, laissant des ouvertures appelées "pores nucléaires", permettant l'échange de molécules entre le cytoplasme et le noyau.

Le **cytoplasme** désigne le contenu d'une cellule vivante et la région comprise entre la membrane plasmique et le noyau.

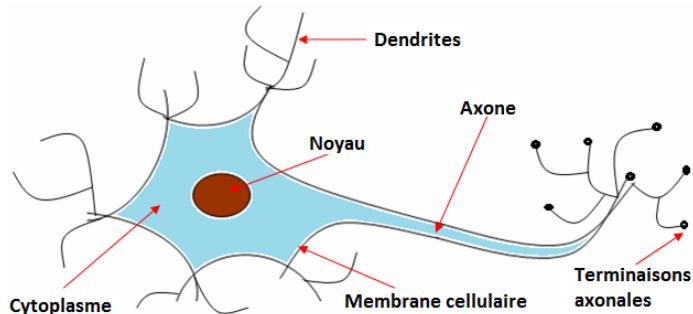


Figure 1.1. Représentation schématique d'un neurone, la taille peut mesurer entre 4μ et 130μ .

Le **noyau** est une grosse structure entourée d'une double membrane, qui la sépare du cytoplasme. Le noyau contient le génome nucléaire, constitué d'ADN, il est donc indispensable à la vie du neurone.

Les **dendrites** prolongent le corps cellulaire des neurones. Ils ont pour fonction de recevoir et de conduire l'influx nerveux (signal) provenant d'autres cellules nerveuses, vers le corps cellulaire du neurone. S'il est excité, il enverra alors un influx nerveux par le biais de l'axone, vers un autre neurone, vers un muscle ou un autre type tissulaire. Elles s'opposent à l'axone pour plusieurs raisons :

- les dendrites reçoivent l'influx nerveux, tandis que l'axone le transmet ;
- les dendrites sont nombreuses tandis que l'axone est unique.

L'**axone** est un long prolongement qui émerge du corps cellulaire du neurone. Il est aussi prolongé par des terminaisons axonales. Sa longueur est variable et peut atteindre plus d'un mètre (par exemple, l'axone du calmar géant). Son extrémité se divise en "branches" qui se connectent à d'autres neurones par l'intermédiaire d'une structure particulière : la synapse. L'axone transmet les messages de notre organisme (une douleur, un mouvement), sous forme de signaux de nature électrique.

La **synapse** est la zone de connexion permettant la transmission de l'influx nerveux entre deux neurones, ou entre un neurone et un muscle. Il existe deux sortes de synapses :

- les synapses *électriques* où le signal est transmis électriquement par l'intermédiaire d'une jonction communicante (en anglais *gap-junction*), qu'on trouve surtout chez les invertébrés et les vertébrés inférieurs, rarement chez les mammifères ;
- les synapses *chimiques*, très majoritaires chez les mammifères et l'homme, qui utilisent des neurotransmetteurs pour transmettre l'information.

Les neurones sont classés selon leur nombre de prolongements, leur forme anatomique, leur fonction et leur type de neurotransmetteurs.

Selon le nombre de prolongements (voir figure 1.2), on distingue des neurones unipolaires (qui

n'ont qu'un seul prolongement), bipolaires (qui ont un prolongement afférent et un prolongement efférent) ou multipolaires (qui ont des prolongements multiples : un seul axone, mais de nombreux dendrites).

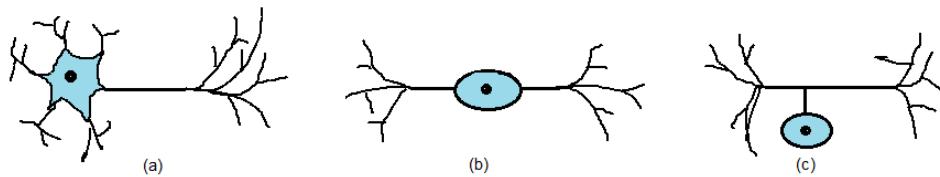


Figure 1.2. (a) neurone multipolaire, (b) neurone bipolaire, (c) neurone unipolaire.

En ce qui concerne la forme anatomique, on distingue par exemple dans le cerveau, les cellules *pyramidales* qui se trouvent dans la matière grise ou cortex cérébral ; les cellules en *étoile* qui se trouvent également dans le cortex cérébral et les cellules de *Purkinje*, très nombreuses que l'on trouve exclusivement dans le cervelet (voir figure 1.3).

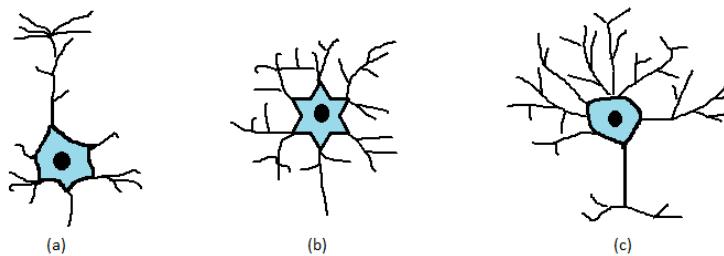


Figure 1.3. (a) neurone pyramidale, (b) neurone en étoile, (c) neurone de Purkinje.

Quant à la fonction, on distingue :

- le neurone *efférent* qui est aussi appelé neurone moteur. Il transmet des impulsions en direction centrifuge. C'est à dire, le système nerveux central vers la périphérie ;
- le neurone *afférent* qui est aussi appelé neurone sensitif. C'est une cellule nerveuse qui transporte les influx de la périphérie vers le système nerveux central ;
- l'*interneurone* est un neurone multipolaire qui établit de multiples connexions entre un réseau afférent et un réseau efférent. Comme les motoneurones, leur corps cellulaire est toujours situé dans le Système nerveux central. La majorité des interneurones sont inhibiteurs et秘ètent un neurotransmetteur caractéristique.

2. L'influx nerveux

L'*influx nerveux* est le potentiel électrique se déplaçant sur l'axone après que le neurone ait été stimulé. L'excitabilité est la propriété à la base du fonctionnement du neurone. Elle est la capacité à réagir à un stimulus et à le convertir en influx nerveux. La conductivité est la capacité de propagation et de transmission de l'influx nerveux (voir [88]).

La transmission de l'influx nerveux se fait des dendrites jusqu'à l'axone. En effet, l'arbre

somato-dendritique représente le pôle récepteur du neurone et l'axone (ou collatérales) représente le pôle émetteur du neurone. Notons que cela ne veut pas dire que l'axone ne peut pas jouer le rôle de récepteur.

La communication entre neurones se fait grâce :

- aux potentiels d'action conduits au niveau des axones sur de longues distances avec peu de pertes ;
- aux potentiels gradués conduits au niveau des dendrites sur de courtes distances avec des pertes importantes.

Le potentiel de repos

Les neurones, comme toutes les cellules de l'organisme, sont soumises à une différence de potentiel membranaire (ddp) dûe aux différences de concentration ioniques de part et d'autre de la membrane. Les ions Na_+ et Cl^- sont présents surtout au milieu extracellulaire, et du côté intracellulaire ce sont surtout les ions K_+ et les protéines qui le sont.

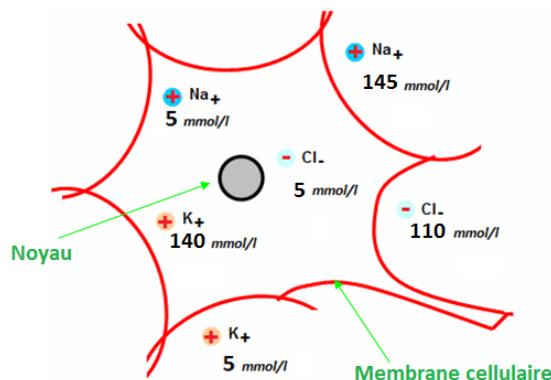


Figure 1.4. Concentrations intracellulaire et extracellulaire des ions (voir aussi [87]).

On note que les ions K_+ sont ceux qui possèdent la plus grande conductance au sein de la membrane (5 fois plus élevé que les autres ions), ils attirent donc le potentiel de membrane vers son potentiel d'équilibre ($-80mV$) donné par l'équation de Nernst. Le gradient de concentration des ions potassiques les pousse à sortir de la cellule, mais l'existence de charge positive dans le milieu extracellulaire crée un gradient électrique de sens contraire au gradient de concentration des ions K_+ . Autrement dit le potentiel de repos est atteint à l'équilibre, lorsque les forces dues au gradient électrique (qui poussent à faire rentrer les ions K_+ dans la cellule) sont égales aux forces dues au gradient de concentration (qui poussent à faire sortir les ions K_+ de la cellule). Ainsi, on arrive à un équilibre des forces.

La différence de potentiel est alors de $-70mV$ (voir figure 1.5). Elle se maintient même si Na_+ parvient à rentrer dans la cellule, et ceci par régulation des pompes Na_+/K_+ . Notons que le potentiel de membrane est nul lorsque la concentration en ions chargés négativement est égale à la concentration en ions chargés positivement entre le milieu intracellulaire et extracellulaire.

Il y a ainsi un léger surplus d'ions chargés positivement dans le milieu extracellulaire et un léger surplus d'ions chargés négativement dans le milieu intracellulaire. Ces excès d'ions s'accumulent contre la membrane (tel un condensateur électrique) et sont à l'origine du potentiel

de repos de -70mV qui existe entre l'intérieur et l'extérieur de la cellule. Notons que la valeur du potentiel de repos n'est pas toujours de -70mV , sa valeur est caractéristique du type de cellules.

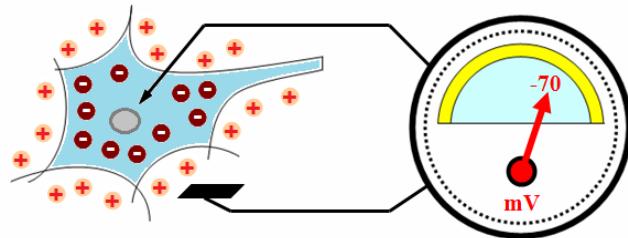


Figure 1.5. Mesure du potentiel de repos. A l'équilibre, il est de -70mV (voir aussi [86]).

Les canaux ioniques

Un *canal ionique* est une protéine membranaire permettant le passage d'un ou plusieurs ions. Les canaux ioniques sont présents dans la membrane de toutes les cellules (voir figure 1.6). Ils peuvent être sélectivement perméables à un ion tel que le sodium, le potassium ou l'ion chlorure, ou bien à plusieurs ions à la fois.

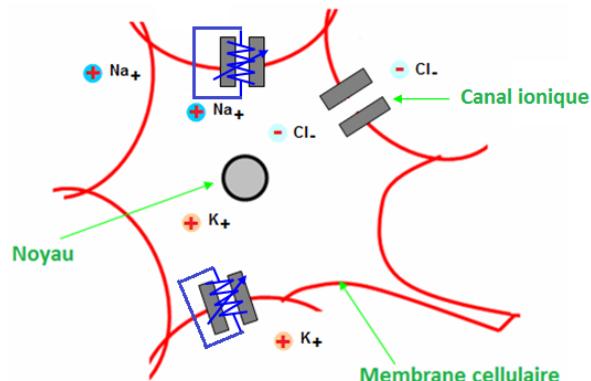


Figure 1.6. La membrane neuronale au repos peut être considérée comme une pile électrique, dont le pôle négatif serait situé à l'intérieur de la cellule et le pôle positif à l'extérieur. Dans cette analogie, les canaux ioniques peuvent être vus comme des résistances variables en fonction de leur ouverture ou fermeture.

On distingue plusieurs types de canaux ioniques selon le stimulus gouvernant leur ouverture. Deux groupes sont majoritaires : certains restent toujours ouverts et contribuent donc à établir le *potentiel de repos* (par exemple les canaux à chlorure), tandis que l'ouverture d'autres canaux est déterminée par le potentiel transmembranaire, appelés *canaux voltage-dépendants* (par exemple les canaux sodiques et potassiques). Ces canaux ioniques voltage-dépendants ont un nombre important de propriétés qui déterminent leur arrivée. Pour pouvoir répondre à un stimulus, ils doivent posséder certains types de capteurs de différences de potentiel qui, lorsqu'ils sont déclenchés, peuvent ouvrir le canal. Ce taux d'activation est variable en fonction du type de canal étudié.

Le potentiel d'équilibre

Le *potentiel d'équilibre* se réfère en général à un ion donné tel que Na_+ , K_+ ou Cl_- , etc. Il est donné par l'*équation de Nernst* et dépend, par conséquent, des concentrations extra et intra-cellulaires à un moment donné. Lorsqu'un canal membranaire existe pour cet ion donné, un équilibre ou un gradient est créé de part et d'autre de la membrane créant à la fois :

- une différence transmembranaire de concentration, appelée *gradient chimique* ;
- une différence transmembranaire de potentiel électrique, appelée *gradient électrique*.

Lorsque cet ion passe d'un milieu à un autre, ce double gradient est créé. Posons l'hypothèse que l'ion S chargé positivement soit plus important dans le milieu intracellulaire :

- le gradient chimique tend à faire passer l'ion S dans le milieu extracellulaire par diffusion simple pour tenter d'équilibrer les concentrations, le milieu extracellulaire va s'enrichir d'une charge positive, tandis que la charge du milieu intracellulaire devient plus négative qu'avant ;
- le gradient électrique tend à faire rapatrier l'ion S dans le milieu intracellulaire pour annuler la différence de charges apparue.

Ces deux forces sont donc opposées en direction. Lorsqu'elles auront atteint un équilibre dans leur valeur absolue, alors il ne pourra plus y avoir de mouvements de l'ion S : on dit que l'ion S aura atteint son équilibre électrochimique. Si on calcule, à l'aide de l'équation de Nernst, le potentiel de membrane que l'ion S aura créé quand l'équilibre électrochimique aura été atteint, la valeur donnée sera celle du potentiel d'équilibre pour l'ion S ,

$$E_S = \frac{RT}{ZF} \ln \left(\frac{[S]_{\text{ext}}}{[S]_{\text{int}}} \right),$$

où E_S est le *potentiel d'équilibre*, ou *potentiel de Nernst* de l'ion S , les quantités $[S]_{\text{ext}}$ et $[S]_{\text{int}}$ sont les concentrations d'ion S de part et d'autre de la membrane cellulaire, R est la constante des gaz parfaits ($R = 8.314 \text{ J.K}^{-1}.\text{Mol}^{-1}$), T est la température en Kelvin, F est la constante de Faraday en Coulomb ($F = 9600 \text{ C}$) et Z est l'électrovalence, par exemple, $Z(K_+) = +1$, $Z(Na_+) = +1$, $Z(Cl_-) = -1$.

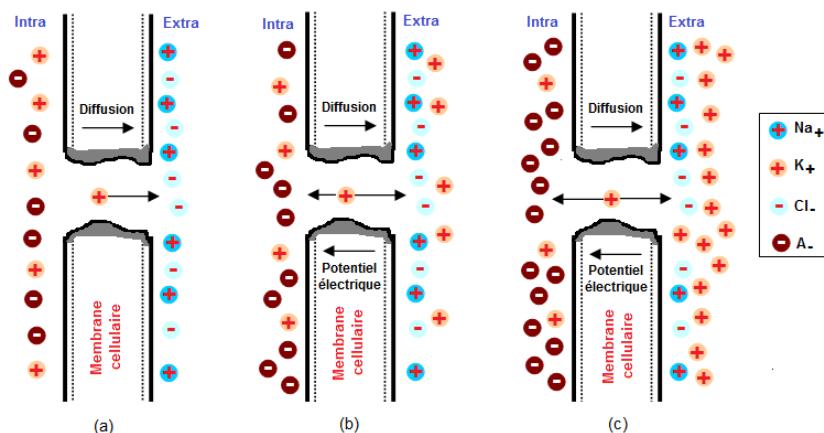


Figure 1.7. Exemple de la formation du potentiel d'équilibre pour les ions K_+ . La diffusion des ions K_+ sous le gradient de concentration à travers la membrane (a) crée une force de potentiel électrique orientée dans la direction opposée (b) jusqu'à ce que la force de diffusion et la force électrique soient de même valeur absolue (c).

Le potentiel gradué

Le potentiel gradué est une inversion locale et de courte durée du potentiel membranaire. Il apparaît au niveau des dendrites et des corps cellulaires, il est déclenché par une stimulation extérieure à la cellule (inversion locale de la polarité membranaire). Suite à cette stimulation, il apparaît un courant électrique local qui se propage bilatéralement par rapport au point de stimulation et dont l'intensité diminue avec la distance.

Il est dit gradué, car son voltage est proportionnel à l'intensité de la stimulation. Ce potentiel gradué arrivera jusqu'au corps cellulaire et si son voltage est suffisant, il y aura formation d'un potentiel d'action.

Le potentiel d'action

L'activité d'un neurone est provoquée par un stimulus qui peut être très variable. Lorsque le stimulus est suffisamment important, il déclenche un *potentiel d'action*. Le potentiel d'action est un changement transitoire du potentiel membranaire par rapport à son niveau de repos. Il ne se déclenche que si le stimulus est supérieur à une valeur seuil. L'amplitude du potentiel d'action est alors bien plus importante que celle du stimulus. Si le stimulus est inférieur à la valeur seuil, le potentiel d'action n'est pas déclenché. Ainsi, lorsque la valeur seuil du stimulus est atteinte, les phénomènes membranaires ne dépendent plus de la force du stimulus, c'est la *loi du tout ou rien*. Le potentiel d'action se propage ainsi le long de la membrane cellulaire, la polarité électrique passant de part en part d'environ -70mV à environ $+40\text{mV}$. Cette inversion de polarité est provoquée par des mouvements d'ions à travers la membrane cellulaire grâce à des canaux ioniques.

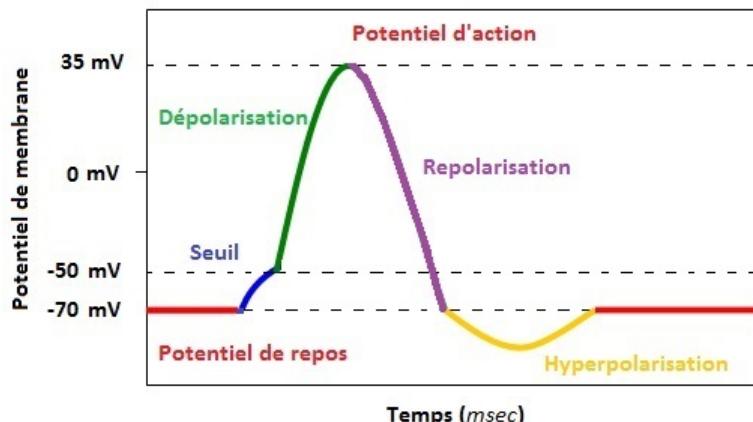


Figure 1.8. Un potentiel d'action (voir aussi [88]).

Le potentiel d'action est initié par une modification transitoire de la perméabilité membranaire permettant la diffusion des ions Na^+ et K^- le long de leur gradient de concentration. Au repos, ce sont principalement les canaux potassiques qui sont ouverts et le potentiel de repos est proche du potentiel d'équilibre du potassium. Suite à un stimulus, une *dépolarisation* graduelle est initiée par des mouvements d'ions sodiques et potassique. Lorsque la dépolarisation atteint un seuil donné, des canaux sodiques potentiels dépendants s'ouvrent sous l'action de protéines. Le potentiel de membrane s'inverse alors et se rapproche du potentiel d'équilibre du sodium sans l'atteindre. Au sommet du potentiel d'action, les canaux sodiques se ferment, les canaux

potassiques s'ouvrent, et le potentiel se rapproche de la valeur de repos. C'est la période de *repolarisation*. A la fermeture des canaux sodiques, certains canaux potassiques sont encore ouverts ce qui induit une *hyperpolarisation*. Une fois les canaux potassiques fermés le potentiel retrouve sa valeur de repos. A noter que la fermeture des canaux potassiques est dûe à la fermeture de l'extrémité intracellulaire du canal par une portion de l'une des protéines du canal. L'ouverture des canaux potassiques est déclenchée par les détecteurs qui répondent à la même dépolarisation qui ouvrent les canaux sodiques mais avec du retard. Le potentiel d'action se propage le long des tissus excitables (voir [4]).

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DU NEURONE

Sommaire

1	Le modèle de Hodgkin-Huxley	13
2	Le modèle de FitzHugh-Nagumo	17

Un modèle scientifique est une représentation simplifiée d'un phénomène. Il permet de décrire et de prévoir l'évolution du phénomène sous certaines conditions fixées. Dans le cadre mathématique, il s'agit d'un ensemble d'équations mettant en relation différents grandeurs, telles que la pression, la température, etc. Ainsi, de nombreux phénomènes physiques ou biologiques sont décrits par des systèmes dynamiques, par exemple, un système d'équations différentielles ordinaires, d'équations aux dérivées partielles ou encore d'équations à retard.

Le modèle de Hodgkin-Huxley constitué de quatre équations, écrit en 1952 [45], décrit la formation et la propagation de l'influx nerveux le long de l'axone géant du calmar. Il a été proposé à partir d'expériences utilisant la technique du Patch-Clamp. La modélisation de type Hodgkin-Huxley fut reprise dans de nombreux modèles, voir par exemple [21, 26, 46, 48, 59]. En 1961, R. FitzHugh réduit le modèle de Hodgkin-Huxley pour obtenir un modèle de deux équations du type appelé *Bonhoeffer-Van Der Pol* [32, 67]. En 1962, J. Nagumo propose un circuit électrique équivalent [63]. Ainsi, ce modèle est souvent appelé *modèle de FitzHugh-Nagumo*. On présente dans ce chapitre le détail du passage du modèle de Hodgkin-Huxley au modèle de FitzHugh-Nagumo.

1. Le modèle de Hodgkin-Huxley

En 1963, Hodgkin et Huxley reçoivent le Prix Nobel de médecine pour leurs travaux sur les mécanismes ioniques qui permettent l'initiation et la propagation des potentiels d'action dans l'axone géant du calmar. Pour simplifier, l'axone est un long tube partant de chaque neurone et sa membrane extérieure, sensible aux courants et potentiels électrochimiques, permet la propagation des signaux électriques. En particulier, elle présente une différence de potentiel au repos et on mesure la perturbation de ce potentiel suite à un changement chimique ou électrique. Cette perturbation peut se propager le long de l'axone pour transmettre une information entre neurones.

Dans cette section, l'explication des différentes équations de ce modèle sera donnée.

Pour la facilité de la lecture de cette thèse, on résume ici la modélisation conduisant aux équations de Hodgkin-Huxley, et qu'on peut trouver par exemple dans [30, 47] et reprise dans beaucoup de travaux (voir par exemple [18]).

Hodgkin et Huxley ont considéré le courant sodique I_{Na} et le courant potassique I_K comme les deux principaux courants qui circulent le long des axones. L'hypothèse de base du modèle de Hodgkin-Huxley est de considérer la cellule comme un circuit électrique. La membrane est représentée par un condensateur tandis que les flux d'ions sodium et potassium sont modélisés comme des conductances électriques variables en fonction du potentiel de membrane.

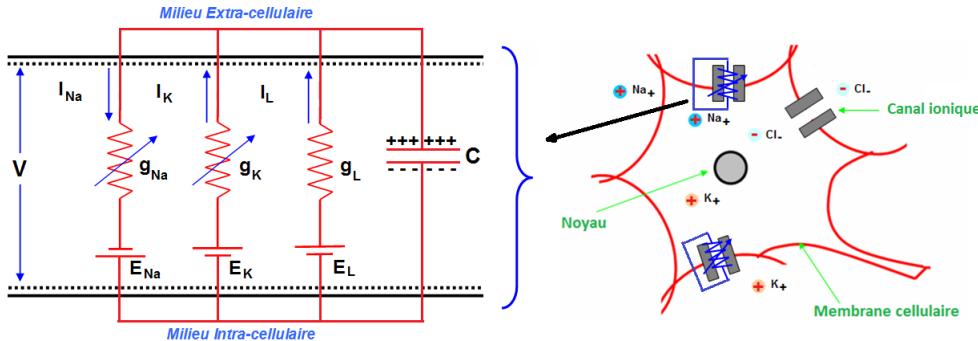


Figure 2.1. La membrane cellulaire est considérée comme un circuit électrique (voir aussi [30, 47]).

Soit I_K le flux potassique, alors il est donné en utilisant la loi d'Ohm par,

$$I_K = g_K(V)(V - E_K),$$

où V est le potentiel de membrane, E_K le potentiel d'équilibre des ions potassium et $g_K(V)$ est la conductance des canaux à potassium.

De même, soit I_{Na} le flux sodique,

$$I_{Na} = g_{Na}(V)(V - E_{Na}),$$

où E_{Na} le potentiel d'équilibre des ions sodium et g_{Na} est la conductance des canaux à sodium.

Hodgkin-Huxley ont supposé que les conductances $g_{Na}(V)$ et $g_K(V)$ vont varier selon l'ouverture ou la fermeture de canaux. Ils ont considéré que chaque canal devait être composé de quatre composants indépendants, chacun pouvant être ouvert ou fermé. Pour les canaux à potassium, ces quatre composants sont identiques avec une probabilité d'ouverture n . La probabilité que les quatre composants soient ouverts est donc n^4 .

Ainsi, on écrit $g_K(V) = n^4(V)\bar{g}_K$. On a donc,

$$I_K = n^4\bar{g}_K(V - E_K),$$

où \bar{g}_K est la conductance maximale du potassium.

Similairement, on peut décrire le courant sodique I_{Na} . Dans ce cas, il existe un état supplémentaire actif ou inactif, c'est à dire qu'un canal à sodium peut être ouvert et actif, ouvert et inactif, ou fermé. Hodgkin et Huxley ont considéré qu'un canal sodique était constitué de quatre composants, trois composants qui contrôlent l'ouverture et la fermeture et un quatrième contrôle

l'activation ou l'inactivation. On note m la probabilité d'ouverture de chacun des trois premiers composant, et h la probabilité d'activation du dernier composant. Alors la probabilité qu'un canal sodique soit ouvert et actif est m^3h . On a donc,

$$I_{Na} = m^3h\bar{g}_{Na}(V - E_{Na}),$$

où \bar{g}_{Na} est la conductance maximale du sodium. Maintenant, les variables m, h et n sont elles même décrites par des équations différentielles que l'on décrit ci-dessous.

Pour les canaux à potassium, chaque composant passe de l'état fermé (avec la probabilité $1 - n$) à l'état ouvert (avec la probabilité n) suivant le coefficient α_n et de l'état ouvert à celui fermé suivant le coefficient β_n . Ce sont des coefficients qui dépendent aussi du potentiel de membrane,

$$1 - n \xrightarrow[\beta_n]{\alpha_n} n.$$

L'équation décrivant l'évolution de n dans le temps est donnée de la manière suivante,

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(1 - n) - \beta_n n.$$

On pose,

$$n_\infty = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n} \quad \text{et} \quad \tau_n = \frac{1}{\alpha_n + \beta_n},$$

où n_∞ n'est autre que la valeur n d'équilibre et τ_n est la constante de temps d'approche de cet équilibre. Ils dépendent aussi du voltage. On peut réécrire l'équation différentielle de n :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty - n}{\tau_n}.$$

Comme le cas précédent pour les canaux à potassium, la transition de l'état ouvert (de probabilité m) à celui fermé (de probabilité $1 - m$) de chaque composant est donnée par les coefficients α_m et β_m ,

$$1 - m \xrightarrow[\beta_m]{\alpha_m} m.$$

Similairement pour h , la transition de l'état actif (de probabilité h) à celui inactif (de probabilité $1 - h$) est donné par les coefficients α_h et β_h ,

$$1 - h \xrightarrow[\beta_h]{\alpha_h} h.$$

On a ainsi les évolutions de m et h données par,

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(1 - m) - \beta_m m = \frac{m_\infty - m}{\tau_m},$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(1 - h) - \beta_h h = \frac{h_\infty - h}{\tau_h}.$$

Comme précédemment, on a ici les notations,

$$m_\infty = \frac{\alpha_m}{\alpha_m + \beta_m}, \quad \tau_m = \frac{1}{\alpha_m + \beta_m},$$

$$h_\infty = \frac{\alpha_h}{\alpha_h + \beta_h}, \quad \tau_h = \frac{1}{\alpha_h + \beta_h}.$$

En utilisant la loi de Kirchhoff, le bilan des charges électriques est donné par,

$$I = C \frac{dV}{dt} + I_{Na} + I_K + I_L,$$

où I_{Na} est le courant de sodium, I_K est le courant de potassium et I_L est le courant de fuite pour désigner l'ensemble des ions qui circulent au travers des canaux ioniques toujours ouverts.

On a donc,

$$-C \frac{dV}{dt} = I_{Na} + I_K + I_L - I.$$

En remplaçant des équations précédentes dans cette expression, on obtient,

$$-C \frac{dV}{dt} = m^3 h \bar{g}_{Na}(V - E_{Na}) + n^4 \bar{g}_K(V - E_K) + \bar{g}_L(V - E_L) - I.$$

Ainsi, le modèle de Hodgkin-Huxley est le suivant,

$$(2.1) \quad \begin{cases} -C \frac{dV}{dt} = m^3 h \bar{g}_{Na}(V - E_{Na}) + n^4 \bar{g}_K(V - E_K) + \bar{g}_L(V - E_L) - I \\ \frac{dn}{dt} = \alpha_n(1 - n) - \beta_n n = \frac{n_\infty - n}{\tau_n} \\ \frac{dm}{dt} = \alpha_m(1 - m) - \beta_m m = \frac{m_\infty - m}{\tau_m} \\ \frac{dh}{dt} = \alpha_h(1 - h) - \beta_h h = \frac{h_\infty - h}{\tau_h} \end{cases}$$

Dans ce modèle, les valeurs des paramètres sont déterminées expérimentalement et on retrouve dans la littérature, par exemple [47],

$$C = 1 \mu F/cm^2;$$

$$E_{Na} = 120 mV; \quad E_K = -12 mV; \quad E_L = 10.6 mV;$$

$$\bar{g}_{Na} = 120 mOhms^{-1}/cm^2; \quad \bar{g}_K = 36 mOhms^{-1}/cm^2; \quad \bar{g}_L = 0.3 mOhms^{-1}/cm^2;$$

$$\alpha_n = \frac{0.01(10 - V)}{\exp(\frac{10 - V}{10}) - 1}; \quad \beta_n = 0.125 \exp(-\frac{V}{80});$$

$$\alpha_m = \frac{0.1(25 - V)}{\exp(\frac{25 - V}{10}) - 1}; \quad \beta_m = 4 \exp(-\frac{V}{18});$$

$$\alpha_h = 0.07 \exp(-\frac{V}{20}); \quad \beta_h = \frac{1}{\exp(\frac{30 - V}{10}) + 1}.$$

En utilisant la méthode de Runge-Kutta classique d'ordre quatre en $C++$, on obtient la solution du système (2.1) présentée sur la figure 2.2.

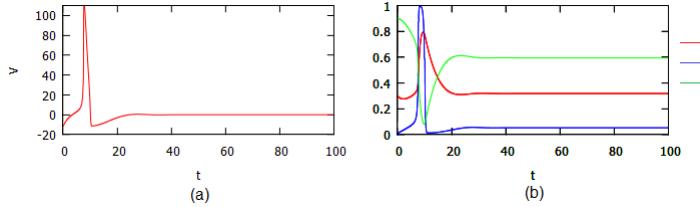


Figure 2.2. La solution du système (2.1) avec $I = 0$ et les autres paramètres comme ceux au dessus. La figure (a) est l'évolution de V ; la figure (b) est les évolutions de n en rouge, m en bleu et h en vert. D'après (b), on trouve que le courant à sodium (le bleu) est beaucoup plus rapide que les autres par rapport à la période de naissance du potentiel d'action V dans la figure (a).

2. Le modèle de FitzHugh-Nagumo

Dans cette section, on présente le modèle de FitzHugh-Nagumo qui est une simplification du modèle de Hodgkin-Huxley en dimension quatre présenté précédemment. En particulier, on étudie le passage du modèle de Hodgkin-Huxley au modèle de FitzHugh-Nagumo.

Rappelons que le système de Hodgkin-Huxley est donné par,

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{C}[m^3 h \bar{g}_{Na}(V - E_{Na}) + n^4 \bar{g}_K(V - E_K) + \bar{g}_L(V - E_L) - I] \\ \frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty(V) - n}{\tau_n(V)} \\ \frac{dm}{dt} = \frac{m_\infty(V) - m}{\tau_m(V)} \\ \frac{dh}{dt} = \frac{h_\infty(V) - h}{\tau_h(V)} \end{cases}$$

Biologiquement, on sait que l'activation du sodium est très rapide (voir figure 2.2(b) et 2.3(b)). On peut donc faire l'approximation suivante (voir figure 2.3(d)),

$$m \approx m_\infty(V).$$

Ainsi, m peut être assimilée à une constante et l'équation $\frac{dm}{dt}$ n'a plus lieu d'être.

Expérimentalement, la somme des deux variables h et n est à peu près constante au cours du potentiel d'action,

$$h_\infty(V) + n_\infty(V) = 0.8.$$

On observe qu'il existe deux constantes a et b (voir figure 2.3(c)) telles que,

$$h(V) + a n(V) = b,$$

Soit w une nouvelle variable qui est définie comme suit,

$$w(V) = b - h(V) = a n(V).$$

On a alors,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{w_\infty(V) - w}{\tau_w(V)}.$$

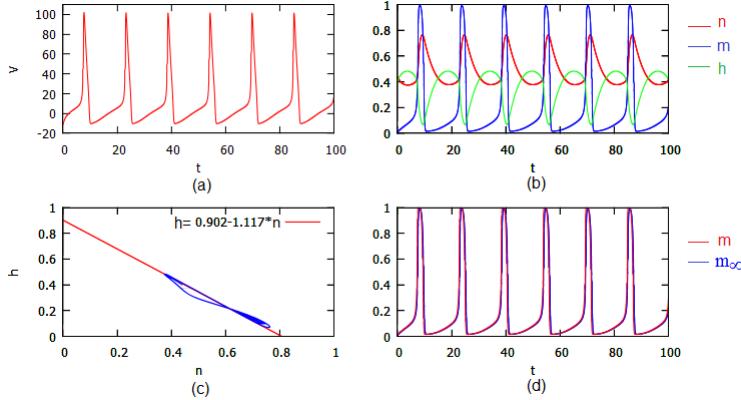


Figure 2.3. La solution du système (2.2) avec $I = 8$ et les autres paramètres comme ceux précédents. La figure (a) est l'évolution de V ; la figure (b) est les évolutions de n en rouge, m en bleu et h en vert- on trouve que le courant à sodium (le bleu) est beaucoup plus rapide que les autres par rapport à la période de naissance du potentiel V dans la figure (a); la figure (c) montre la relation en bleu entre n et h dans l'espace (n, h)- on trouve que cette relation est peut-être faite approcher la droite en rouge $h = 0.902 - 1.117n$; la figure (d) est l'approximation $m \approx m_\infty(V)$.

Le système (2.2) se réduit donc au système suivant,

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{C} [m_\infty(V)^3(b - w)\bar{g}_{Na}(E_{Na} - V) + (\frac{w}{a})^4\bar{g}_K(E_K - V) + \bar{g}_L(E_L - V) + I] \\ \frac{dw}{dt} = \frac{w_\infty(V) - w}{\tau_w(V)} \end{cases}$$

Numériquement, on a vu que la V -nullcline (i.e., $\dot{V} = 0$) avait la forme d'une fonction cubique et que la w -nullcline (i.e., $\dot{w} = 0$) pouvait être approximée par une droite (voir figure 2.4).

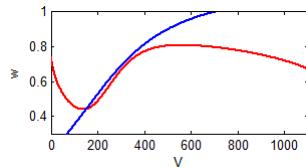


Figure 2.4. Les nullclines du système (2.3) avec $I = 8$, la V -nullcline est la courbe en rouge et la w -nullcline est celle en bleu.

On obtient ainsi un modèle polynomial de la forme,

$$(2.4) \quad \begin{cases} \dot{V} = V(V - \alpha)(1 - V) - w + I \\ \dot{w} = \epsilon(V - \gamma w) \end{cases}$$

où V correspond au potentiel de membrane et w correspond aux flux lents d'ions à travers la membrane. Les paramètres α, γ et ϵ sont des constantes avec par exemple $0 < \alpha < 1$ et $0 < \epsilon \ll 1$ et le paramètre I correspond au courant externe appliqué.

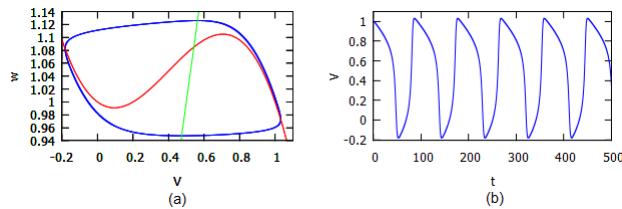


Figure 2.5. (a) Simulation numérique du système (2.4) avec $\alpha = 0.2, \gamma = 0.5, \epsilon = 0.01$ et $I = 1$, $\dot{V} = 0$ en rouge et $\dot{w} = 0$ en vert. Le point d'intersection des nullclines est le point d'équilibre. La courbe bleue est obtenue en tracant la dynamique asymptotique d'une solution du système partant d'une condition initiale. (b) Série temporelle (t, V) correspondante.

Deuxième partie

Réseau complexe de neurones
modélisé par des EDO de type
FitzHugh-Nagumo

DYNAMIQUE ET BIFURCATIONS DU MODÈLE DE FITZHUGH-NAGUMO

Sommaire

1	Étude des points d'équilibre	23
2	Existence et direction de la bifurcation de Hopf	28

Ce chapitre porte sur l'analyse du système de FitzHugh-Nagumo. Comme on l'a vu au chapitre précédent, c'est un système de deux équations différentielles ordinaires obtenues par une réduction du système de Hodgkin-Huxley à quatre équations. Ce chapitre est divisé en deux paragraphes, on s'intéresse d'abord à l'existence des points stationnaires et à leur stabilité. On se place dans le cas où le système n'admet qu'un unique point d'équilibre stable. Plus précisément, selon les valeurs des paramètres, le système de FitzHugh-Nagumo admet entre 1 et 3 points stationnaires. On caractérise la région des paramètres pour que le système n'admette qu'un seul point d'équilibre, et on précise sa stabilité. On s'intéresse ensuite dans le deuxième paragraphe à la bifurcation de Hopf qui correspond à l'apparition d'un cycle limite (stable ou instable) à partir d'un point d'équilibre (stable ou instable) lorsqu'on faire varier un paramètre. Plus précisément, on démontre l'existence d'une bifurcation de Hopf surcritique lorsqu'on fait varier le paramètre I . Rappelons que les propriétés oscillatoires et excitables jouent un rôle important dans la modélisation neuronale. On s'inspire de la démarche utilisée dans [18].

1. Étude des points d'équilibre

Considérons le système de FitzHugh-Nagumo à deux équations donné sous la forme [49],

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = \dot{u} = f(u, v) = u - \frac{u^3}{3} - v + I, \\ \frac{dv}{dt} = \dot{v} = g(u, v) = \frac{1}{\tau}(u + a - bv), \end{cases}$$

où u correspond au potentiel de membrane, tandis que v correspond aux flux lents d'ions à travers la membrane, I correspond au courant externe appliqué, et a, b, τ ($\tau > 0$) sont des paramètres.

Les points d'équilibre du système (3.1) sont donnés par la résolution du système suivant,

$$\begin{cases} f(u, v) = 0 \\ g(u, v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - \frac{u^3}{3} - v + I = 0 \\ v = \frac{u + a}{b} \end{cases}$$

On obtient,

$$(3.2) \quad u^3 - \frac{3(b-1)}{b}u + \frac{3a}{b} - 3I = 0,$$

où $b \neq 0$ (voir le cas $b = 0$ à la remarque 1).

Posons, $p = -\frac{3(b-1)}{b}$ et $q = \frac{3a}{b} - 3I$. L'équation (3.2) peut donc s'écrire,

$$u^3 + pu + q = 0.$$

Ponsons maintenant,

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2.$$

Si $\Delta > 0$ alors l'équation (3.2) n'admet qu'une seule racine et donc le système (3.1) n'admet qu'un unique point d'équilibre. Si maintenant, $\Delta = 0$, alors le système (3.1) admet deux points d'équilibre et enfin, si $\Delta < 0$, le système (3.1) admet trois points d'équilibre (voir figure 3.1).

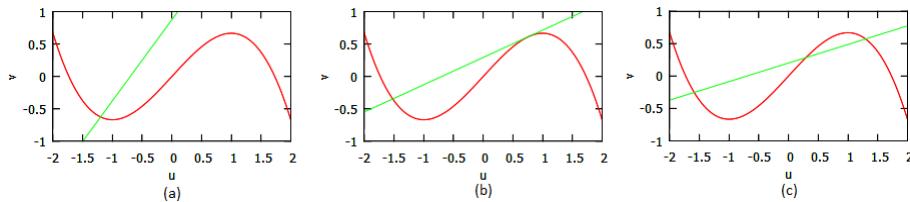


Figure 3.1. Simulations numériques obtenues pour les deux nullclines du système (3.1) avec $a = 0.7, \tau = 13$ et $I = 0$, $\dot{u} = 0$ en rouge et $\dot{v} = 0$ en vert. La figure (a) représente un seul point d'équilibre du système (3.1) pour $b = 0.8$; la figure (b) représente ses deux points d'équilibre pour $b \simeq 2.3791$; et la figure (c) montre ses trois points d'équilibre pour $b = 3.5$.

La matrice jacobienne du système (3.1) s'écrit,

$$A(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial g(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - u^2 & -1 \\ \frac{1}{\tau} & -\frac{b}{\tau} \end{pmatrix}.$$

On note (u^*, v^*) un point d'équilibre de (3.1), on a :

$$\text{Det}(A(u^*) - \lambda I) = \lambda^2 - \text{Tr}(A(u^*))\lambda + \text{Det}(A(u^*)),$$

$$\text{où } \text{Tr}(A(u)) = -u^2 + 1 - \frac{b}{\tau} \text{ et } \text{Det}(A(u)) = -\frac{b}{\tau}(1 - u^2) + \frac{1}{\tau} = \frac{b}{\tau}u^2 + \frac{1-b}{\tau}.$$

On voit que, si $\tau > b$, alors $Tr(A(u))$ admet deux racines réelles données par,

$$u_{Tr1} = \sqrt{1 - \frac{b}{\tau}} \quad \text{et} \quad u_{Tr2} = -\sqrt{1 - \frac{b}{\tau}}.$$

Le discriminant de $Det(A(u))$ est $\Delta = -\frac{4b(1-b)}{\tau^2}$. Ainsi, si $b(1-b) < 0 \Leftrightarrow b < 0$ ou $b > 1$, alors $Det(A(u))$ admet deux racines réelles données par,

$$u_{Det1} = \sqrt{1 - \frac{1}{b}} \quad \text{et} \quad u_{Det2} = -\sqrt{1 - \frac{1}{b}}.$$

Ici, on se place dans le cas où il n'y a qu'un seul point d'équilibre. Or, on remarque que si $b \in (0, 1)$, alors $p > 0$, et donc $\Delta > 0$. Ainsi, on choisit la valeur de b dans l'intervalle $(0, 1)$.

On peut résumer la nature des points d'équilibre grâce aux tableaux suivants.

- Dans le cas où $b < \tau$ et $0 < b < 1$.

u	$-\infty$	$-\sqrt{1 - \frac{b}{\tau}}$	$\sqrt{1 - \frac{b}{\tau}}$	$+\infty$
$Tr(A(u))$	–	0	+	0
$Det(A(u))$	+	+	+	+
Nature	foyer stable nœud stable	foyer instable nœud instable	foyer stable nœud stable	

Table 3.1. Stabilité du point d'équilibre.

Remarque 1. Lorsque $b = 0$, on obtient un point d'équilibre $E = (-a, -a + \frac{a^3}{3} + I)$. L'étude des points d'équilibre dans ce cas est faite comme dans le tableau au-dessus en appliquant $b = 0$. Autrement, le point E est stable si $|a| > 1$, il est instable si $|a| < 1$, et il devient un centre si $|a| = 1$.

- Dans le cas où $b \geq \tau$ et $0 < b < 1$.

u	$-\infty$	$+\infty$
$Tr(A(u))$	–	–
$Det(A(u))$	+	+
Nature	foyer stable nœud stable	foyer stable nœud stable

Table 3.2. Stabilité du point d'équilibre.

On se place dans le cadre des dynamiques lentes-rapides, on choisit donc $\tau \gg 0$ (en particulier, $\tau \gg b$). Avec $0 < b < 1$ et $\tau \gg 0$, on cherche une condition suffisante sur le paramètre a pour que le point stationnaire soit stable et reste sur la branche infinie gauche de la cubique. D'après

le tableau 3.1, il suffit d'avoir pour le point stationnaire (u^*, v^*) , $u^* \leq -1$. Or, d'après l'équation (3.2), on a,

$$a = bu - \frac{b}{3}u^3 - u + Ib.$$

En dérivant l'expression de a par rapport à u , on trouve,

$$a' = b - bu^2 - 1 < 0, \forall b \in (0, 1).$$

On en déduit le tableau suivant,

u	$-\infty$	-1	$+\infty$
a'	—	$-$	hatched
a	$+\infty$	$1 - \frac{2}{3}b + Ib$	hatched

Table 3.3. Variation du paramètre a .

Une condition suffisante est donc, $1 - \frac{2}{3}b + Ib < a$. Pour assurer la caractère d'excitabilité, on choisit, $-2 < u^* \leq -1$. Cela implique que,

$$1 - \frac{2}{3}b + Ib < a < \frac{2}{3}b + 2 + Ib.$$

En particulier, si $I = 0$, on a,

$$1 - \frac{2}{3}b < a < \frac{2}{3}b + 2.$$

Cette condition permet d'avoir un point d'équilibre qui n'est pas trop loin du minimum local de u -nullcline. Parce que, si la valeur de a est assez grande, par exemple $a > \frac{2}{3}b + 2$, le point d'équilibre est situé loin du minimum local de la fonction de u -nullcline. Par conséquent, la période réfractaire du potentiel d'action disparaît, comme on peut le voir sur la figure 3.2,

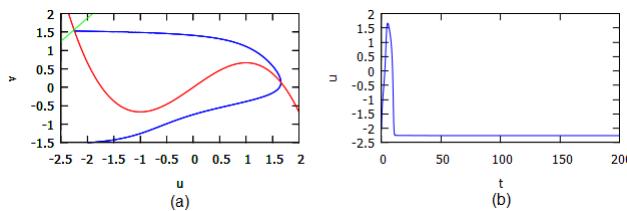


Figure 3.2. (a) Résultat numérique obtenu pour les deux nullclines du système (3.1) avec $a = 3.5, b = 0.8, \tau = 13$ et $I = 0$, $\dot{u} = 0$ en rouge et $\dot{v} = 0$ en vert. Le point d'intersection des nullclines est le point d'équilibre. La courbe bleue est obtenue en tracant la dynamique asymptotique d'une solution du système partant d'une condition initiale. (b) Série temporelle (t, u) correspondante.

Finallement, on obtient le modèle de FitzHugh-Nagumo à deux équations donné sous la forme,

$$(3.3) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = \dot{u} = f(u, v) = u - \frac{u^3}{3} - v + I \\ \frac{dv}{dt} = \dot{v} = g(u, v) = \frac{1}{\tau}(u + a - bv) \end{cases}$$

avec

$$0 < b < 1, \quad b \ll \tau, \quad 1 - \frac{2}{3}b + Ib < a < \frac{2}{3}b + 2 + Ib,$$

où u correspond au potentiel de membrane, tandis que v correspond aux flux lents d'ions à travers la membrane et I correspond au courant externe appliqué.

Dans (3.3), on fixe $a = 0.7, b = 0.8, \tau = 13, I = 0$ (voir [49] et figure 3.3). On obtient,

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = u - \frac{u^3}{3} - v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{13}(u + 0.7 - 0.8v) \end{cases}$$

On a donc un point d'équilibre $B = (-1, 1994, -0.62426)$. Dans la figure 3.3, on a tracé les deux nullclines, $\dot{u} = 0$ en rouge et $\dot{v} = 0$ en vert. Le point d'intersection de ces deux nullclines est un point fixe du système (3.4). En bleu, on a représenté une orbite. Au point B , on a $\text{Det}(A) = 0.1039$ et $\text{Tr}(A) = -0.5001$ donc $\text{Tr}(A)^2 - 4\text{Det}(A) < 0$. Ainsi, B est un foyer stable.

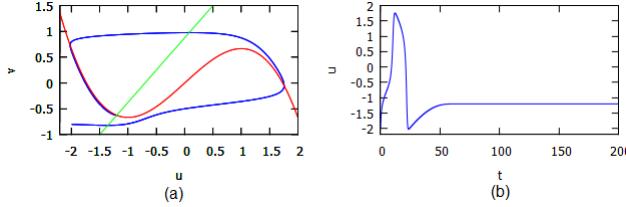


Figure 3.3. (a) Résultat numérique obtenu pour les deux nullclines du système (3.4), $\dot{u} = 0$ en rouge et $\dot{v} = 0$ en vert. Le point d'intersection des nullclines est le point d'équilibre B . La courbe bleue est obtenue en tracant la dynamique asymptotique d'une solution du système partant d'une condition initiale, où l'on peut voir que le point B est un foyer stable. (b) Série temporelle (t, u) correspondante.

En particulier, ce système a la propriété d'excitabilité, grâce au phénomène suivant : on choisit la condition initiale $(u(0), v(0))$, à gauche de la branche infinie gauche de la cubique. Alors,

- si $(u(0), v(0))$ est tel que la trajectoire reste assez proche du minimum local de la cubique (voir la courbe bleue dans la figure 3.4(a)), ou elle ne va pas en dessous de cette valeur (voir la courbe violette dans la figure 3.4(a)), alors la solution se rapproche rapidement du point stationnaire. Plus précisément, au départ on a, $\dot{u} > 0, \dot{v} < 0$, et sous l'effet de la dynamique rapide, la trajectoire se rapproche de la branche infinie gauche. La solution tend alors vers le point stationnaire sous l'effet de la dynamique lente ;

- si on choisit $(u(0), v(0))$ de telle sorte que la trajectoire aille en dessous et assez loin du minimum local, alors cette fois la trajectoire n'est plus bloquée par la branche infinie gauche et atteint la branche infinie droite sous l'effet de la dynamique rapide. Elle remonte ensuite cette branche (car $\dot{v} > 0$), sous l'effet de la dynamique lente, jusqu'à ce que v dépasse le maximum

local, elle rejoint alors rapidement la branche gauche, avant de finalement tendre lentement vers l'état d'équilibre. Ce système est donc dit excitable, puisque lorsque la solution est proche de son état d'équilibre, une perturbation peut l'amener à changer considérablement de valeurs avant de retourner à son état d'équilibre (voir figure 3.4(c)). Ce système constitue ainsi un modèle simple de l'excitabilité que l'on observe dans diverses cellules (neurones, cardiomyocytes, etc).

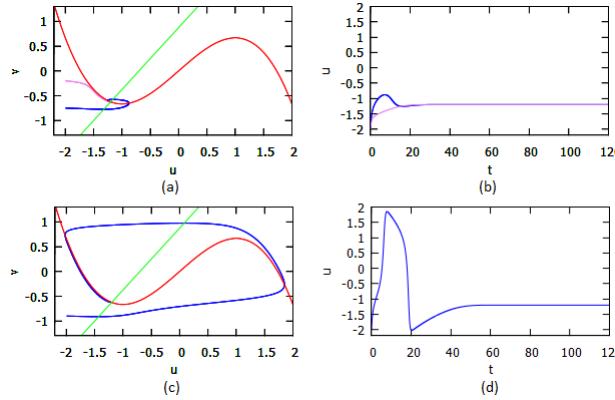


Figure 3.4. Solutions du système (3.4). La figure (a) représente les solutions lorsque $(u(0), v(0))$ est choisi afin que la trajectoire reste assez proche du minimum local de la cubique (voir la courbe bleue), ou elle n'aille pas en dessous de cette valeur (voir la courbe violette) ; la figure (b) représente les séries temporelles (t, u) correspondantes. La figure (c) représente la solution lorsque $(u(0), v(0))$ est choisi de telle sorte que la trajectoire aille en dessous et assez loin du minimum local ; la figure (d) représente la série temporelle (t, u) correspondante.

2. Existence et direction de la bifurcation de Hopf

On s'intéresse ici à l'existence et la direction de la bifurcation de Hopf, qui correspond au passage d'un point fixe à un cycle limite sous l'effet de la variation d'un paramètre. Rappelons le théorème de Hopf (voir [18, 22]).

Théorème 1. Soit le système à deux équations différentielles ordinaires,

$$(3.5) \quad \begin{cases} \dot{u} = f(u, v, a) \\ \dot{v} = g(u, v, a) \end{cases}$$

Soit (u^*, v^*) un équilibre du système (3.5) pour tout a . Si la matrice jacobienne du système (3.5) en (u^*, v^*) admet deux valeurs propres imaginaires conjuguées, $\lambda_{1,2}(a) = \alpha(a) \pm iw(a)$ et s'il existe un certain $a = a_c$ tel que,

$$\alpha(a_c) = 0, w(a_c) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \alpha(a)}{\partial a}(a_c) \neq 0.$$

Alors, une bifurcation de Hopf survient lorsque la valeur du paramètre de bifurcation a passe

a_c et $((u^*, v^*), a_c)$ est un point de bifurcation de Hopf. Par ailleurs, soit c_1 tel que,

$$(3.6) \quad \begin{aligned} c_1 = \frac{1}{16w(a_c)} & \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} \right. \\ & - \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \Big) \\ & + \left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v^2} + \frac{\partial^3 G}{\partial u^2 \partial v} + \frac{\partial^3 G}{\partial v^3} \right), \end{aligned}$$

où F et G sont données par la méthode de Hassard, Kazarinoff et Wan.

On peut distinguer différents cas,

		$c_1 < 0$	$c_1 > 0$
$\frac{\partial \alpha}{\partial a}(a_c) > 0$	$a < a_c$	équilibre stable et pas d'orbite périodique	équilibre stable et orbite périodique instable
	$a > a_c$	équilibre instable et orbite périodique stable	équilibre instable et pas d'orbite périodique
$\frac{\partial \alpha}{\partial a}(a_c) < 0$	$a < a_c$	équilibre instable et orbite périodique stable	équilibre instable et pas d'orbite périodique
	$a > a_c$	équilibre stable et pas d'orbite périodique	équilibre stable et orbite périodique instable

Table 3.4. Stabilité des points d'équilibre selon une bifurcation de Hopf.

On va appliquer ce théorème au système de FitzHugh-Nagumo dans lequel I représente le paramètre de bifurcation,

$$(3.7) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = u - \frac{u^3}{3} - v + I \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{13}(u + 0.7 - 0.8v) \end{cases}$$

Soit (u^*, v^*) un point d'équilibre du système (3.7). On pose $u = u_1 + u^*$ et $v = v_1 + v^*$, on obtient,

$$\begin{cases} u_1 = f(u_1, v_1, I) = (u_1 + u^*) - \frac{(u_1 + u^*)^3}{3} - (v_1 + v^*) + I \\ v_1 = g(u_1, v_1, I) = \frac{1}{13}[u_1 + u^* + 0.7 - 0.8(v_1 + v^*)] \end{cases}$$

Avec un développement des fonctions f et g au voisinage de $(0, 0, I)$, on obtient,

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1}(0, 0, I) + v_1 \frac{\partial f}{\partial v_1}(0, 0, I) + \widehat{F}(u_1, v_1, I) \\ \dot{v}_1 = u_1 \frac{\partial g}{\partial u_1}(0, 0, I) + v_1 \frac{\partial g}{\partial v_1}(0, 0, I) + \widehat{G}(u_1, v_1, I) \end{cases}$$

où $\widehat{F}(u_1, v_1, I)$ et $\widehat{G}(u_1, v_1, I)$ sont les termes non-linéaires. On a alors,

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = (1 - u^{*2})u_1 - v_1 + \widehat{F}(u_1, v_1, I) \\ \dot{v}_1 = \frac{1}{13}u_1 - \frac{4}{65}v_1 + \widehat{G}(u_1, v_1, I) \end{cases}$$

avec $\widehat{F}(u_1, v_1, I) = -\frac{u_1^3}{3} - (u_1^2 - 1)u^* - \frac{u^{*3}}{3} - v^* + I$ et $\widehat{G}(u_1, v_1, I) = \frac{1}{13}u^* + \frac{7}{130} - \frac{4}{65}v^*$.

Maintenant, $(0, 0, I)$ est un point d'équilibre du système. La matrice jacobienne est donnée par,

$$A = \begin{pmatrix} 1 - u^{*2} & -1 \\ \frac{1}{13} & -\frac{4}{65} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique,

$$\text{Det}(A - \lambda Id) = \lambda^2 + (u^{*2} - \frac{61}{65})\lambda + \frac{1}{65} + \frac{4}{65}u^{*2}.$$

Soient $P(I) = -\text{Tr}(A)$ et $Q(I) = \text{Det}(A)$. On a,

$$\lambda^2 + P(I)\lambda + Q(I) = 0.$$

Ainsi, la matrice jacobienne admet une paire de valeurs propres complexes conjuguées si $\text{Det}(A) > \frac{1}{4}\text{Tr}(A)^2$ et on a,

$$\lambda_{1,2} = \alpha(I) \pm iw(I),$$

avec $\alpha(I) = -\frac{1}{2}u^{*2} + \frac{61}{130}$ et $w(I) = \sqrt{\frac{1}{65} + \frac{4}{65}u^{*2} - \alpha(I)^2}$. Rappelons que u^* est la solution de l'équation (3.2) qui peut s'écrire, $u^3 + pu + q = 0$ ou $p = \frac{3}{4}$ et $q = \frac{21}{8} - 3I$. Cette équation n'admet qu'une seule racine, grâce aux formules de Cardan, qui est donnée sous la forme,

$$u^*(I) = m(I) + n(I),$$

avec

$$\begin{cases} m(I) = \sqrt[3]{-\frac{21}{16} + \frac{3}{2}I + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{21}{8} - 3I\right)^2}} \\ n(I) = \sqrt[3]{-\frac{21}{16} + \frac{3}{2}I - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{21}{8} - 3I\right)^2}} \end{cases}$$

De plus, la valeur I_c de I pour laquelle la partie réelle de ces valeurs propres s'annule est donnée par les équations $P(I_c) = 0$ et $Q(I_c) > 0$. On a donc,

$$u^*(I_c)^2 - \frac{61}{65} = 0 \Rightarrow u^*(I_c) = \pm\sqrt{\frac{61}{65}}.$$

On considère d'abord $u^*(I_c) = -\sqrt{\frac{61}{65}}$. On obtient, grâce à l'équation (3.2), $I_c = \frac{7}{8} - \frac{439}{780}\sqrt{\frac{61}{65}}$.

Par ailleurs, on a,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial I}(I_c) &= -u^*(I_c) \left[\frac{dm(I)}{dI}(I_c) + \frac{dn(I)}{dI}(I_c) \right] \\ &= -\frac{1}{3}u^*(I_c) \left[\frac{1}{m(I_c)^{2/3}} \left(\frac{3}{2} - \left(\frac{63}{16} - \frac{9}{2}I_c \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{21}{8} - 3I_c \right)^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n(I_c)^{2/3}} \left(\frac{3}{2} + \left(\frac{63}{16} - \frac{9}{2}I_c \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{21}{8} - 3I_c \right)^2}} \right) \right] \\ &\approx 0.8788 \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha(I_c) = 0$, $w(I_c) \neq 0$ et $\frac{\partial \alpha(I)}{\partial I}(I_c) \neq 0$, donc I_c est une valeur de bifurcation de Hopf du paramètre I .

Dans la suite, on s'intéresse à la direction, la stabilité et la période de la bifurcation de Hopf. Pour cela, déterminons maintenant un vecteur propre v_1 associé à la valeur propre λ_1 , obtenue en résolvant le système,

$$(A - \lambda_1 Id) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1 - u^{*2} + iw_0)u - v = 0 \\ \frac{1}{13}u - \left(\frac{4}{65} + iw_0 \right)v = 0 \end{cases}$$

où $w_0 = w(I_c)$. Une solution de ce système est un vecteur propre associé à λ_1 donné par,

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - u^{*2} - iw_0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de changement de base est donc donnée par,

$$P = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(V_1) & \operatorname{Im}(V_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - u^{*2} & w_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a,

$$P^{-1} = \frac{1}{w_0} \begin{pmatrix} w_0 & 0 \\ u^{*2} - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant le changement de variable,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Alors, on a,

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} \hat{F}(u_2, v_2, I) \\ \hat{G}(u_2, v_2, I) \end{pmatrix}.$$

Soit $A'(I) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha(I) & -w(I) \\ w(I) & \alpha(I) \end{pmatrix}$. Ainsi, pour $I = I_c$, on a,

$$A'(I_c) = \begin{pmatrix} 0 & -w(I_c) \\ w(I_c) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u}_2 = -w(I_c)v_2 + F(u_2, v_2, I) \\ \dot{v}_2 = w(I_c)u_2 + G(u_2, v_2, I) \end{cases}$$

avec

$$\begin{pmatrix} F(u_2, v_2, I_c) \\ G(u_2, v_2, I_c) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{F}(u_2, v_2, I_c) \\ \widehat{G}(u_2, v_2, I_c) \end{pmatrix}.$$

On a donc,

$$\begin{cases} F(u_2, v_2, I_c) = -\frac{1}{3}u_2^3 - (u_2^2 - 1)u^* - \frac{1}{3}u^{*3} - v^* + I_c = M \\ G(u_2, v_2, I_c) = M \left(\frac{u^{*2} - 1}{w_0} \right) + \frac{1}{w_0} \left(\frac{u^*}{13} + \frac{7}{130} - \frac{4}{65}v^* \right) \end{cases}$$

Soit c_1 donné par l'équation (3.6). Les fonctions F et G ne dépendent que u_2 , le coefficient c_1 est donné par,

$$c_1 = -\frac{1}{16w(I_c)} \frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2}(0, 0, I_c) \frac{\partial^2 G}{\partial u_2^2}(0, 0, I_c) + \frac{\partial^3 F}{\partial u_2^3}(0, 0, I_c).$$

Au point $(u_2, v_2) = (0, 0)$ et pour $I = I_c$, on a, $w(I_c) = \sqrt{\frac{1}{65} + \frac{4}{65}u^{*2}}$, et

$$c_1 = -\frac{u^{*2}(u^{*2} - 1)}{4w_0^2} - 2 = -\frac{557}{309} < 0,$$

avec $u^* = -\sqrt{\frac{61}{65}}$. On applique le théorème 1 qui permet de déduire la direction et la stabilité de bifurcation de Hopf à partir des signes de $\frac{\partial \alpha}{\partial I}(I_c)$ et c_1 . Puisque, $\frac{\partial \alpha}{\partial I}(I_c) > 0$ et $c_1 < 0$, on obtient que (u^*, v^*, I_c) est un point de bifurcation de Hopf surcritique.

De plus, pour $I > I_c$, le point d'équilibre est instable avec une orbite périodique stable, tandis que pour $I < I_c$, le point d'équilibre est stable et il n'y a pas d'orbite périodique.

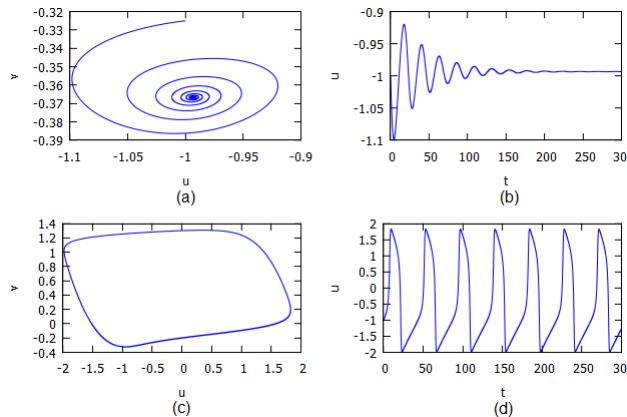


Figure 3.5. (a) Portrait de phase dans le plan (u, v) du système (3.7) avec $I = 0.3$, montrant un foyer stable pour une valeur $I = 0.3 < I_c$. (b) Série temporelle (t, u) correspondante. (c) Portrait de phase dans le plan (u, v) du système (3.7) avec $I = 0.4$, montrant un cycle stable pour une valeur $I = 0.4 > I_c$. (d) Série temporelle (t, u) correspondante.

Similairement, on refait la procédure précédente pour $u^{*'}(I'_c) = \sqrt{\frac{61}{65}}$. On peut aussi trouver la valeur de I associée,

$$I'_c = \frac{439}{780} \sqrt{\frac{61}{65}} + \frac{7}{8}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial I}(I'_c) &= -u^{*'}(I'_c) \left[\frac{dm(I)}{dI}(I'_c) + \frac{dn(I)}{dI}(I'_c) \right] \\ &= -\frac{1}{3} 4u^{*'}(I'_c) \left[\frac{1}{m(I'_c)^{2/3}} \left(\frac{3}{2} - \left(\frac{63}{16} - \frac{9}{2} I'_c \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{21}{8} - 3I'_c \right)^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n(I'_c)^{2/3}} \left(\frac{3}{2} + \left(\frac{63}{16} - \frac{9}{2} I'_c \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} + \left(\frac{21}{8} - 3I'_c \right)^2}} \right) \right] \\ &\approx -0.8788 \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha(I'_c) = 0$, $w(I'_c) \neq 0$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial I}(I'_c) \neq 0$, donc I'_c est une valeur de bifurcation de Hopf du paramètre I . Et on a aussi alors, $c_1 = -\frac{557}{309} < 0$.

On est donc dans le cas où $\frac{\partial \alpha}{\partial I}(I'_c) < 0$ et $c_1 < 0$. Ainsi, d'après le théorème 1, $(u^{*'}, v^{*'}, I'_c)$ est un point de bifurcation de Hopf surcritique.

De plus, pour $I < I'_c$, le point d'équilibre est instable avec une orbite périodique stable, tandis que pour $I > I'_c$, le point d'équilibre est stable et il n'y a pas d'orbite périodique.

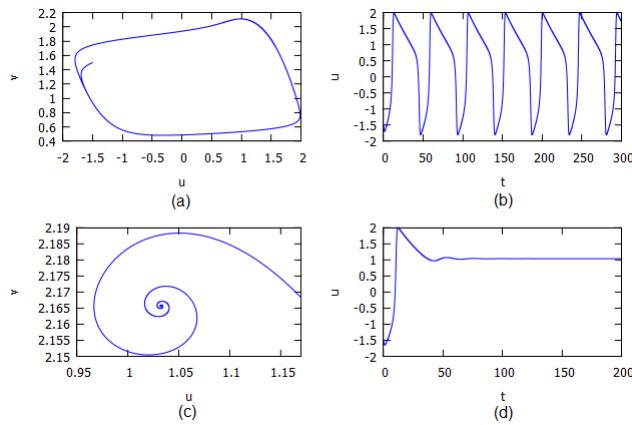


Figure 3.6. (a) Portrait de phase dans le plan (u, v) du système (3.7) avec $I = 1.4$, montrant un cycle stable pour une valeur $I = 1.4 < I'_c$. (b) Série temporelle (t, u) correspondante. (c) Portrait de phase dans le plan (u, v) du système (3.7) avec $I = 1.5$, montrant un foyer stable pour une valeur $I = 1.5 > I'_c$. (d) Série temporelle (t, u) correspondante.

Dans la suite, on a tracé le diagramme de bifurcation en fonction de I sur le plan (I, u) .

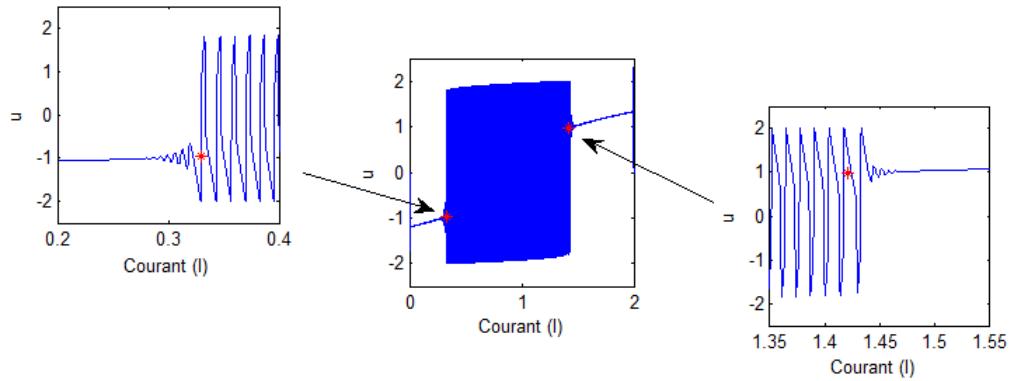


Figure 3.7. Diagramme de bifurcation en fonction de I sur le plan (I, u) .

La figure 3.7 montre les valeurs d'adhérence des orbites pour différentes valeurs de I . Cela illustre la bifurcation de Hopf surcritique : aux points de bifurcation trouvés analytiquement, on voit apparaître un cycle limite attractif. On observe une bifurcation ou changement de stabilité, lorsque I traverse les valeurs I_c et I'_c (deux étoiles rouges dans la figure 3.7). Si I est compris entre ces deux valeurs, le système évolue asymptotiquement autour d'un cycle limite, tandis que si I est en dehors de l'intervalle $[I_c, I'_c]$, alors le système converge vers un point d'équilibre stable.

SYNCHRONISATION IDENTIQUE DE SYSTÈMES D'EDO DE TYPE FITZHUGH-NAGUMO

Sommaire

1	Réseau de neurones	36
2	Étude de l'attracteur	39
2.1	Etude générale de l'attracteur	39
2.2	Bornage des solutions du modèle de FitzHugh-Nagumo	41
2.3	Bornage des solutions du réseau de différentes topologies	42
3	La synchronisation	43
3.1	La synchronisation et les assemblées de neurones	43
3.2	Stabilité de la variété de synchronisation	44
4	Différentes topologies de réseaux	52

Dans ce chapitre, on s'intéresse au phénomène de synchronisation identique au sein de réseaux composés de modèles d'équations différentielles ordinaires (EDO) de type FitzHugh-Nagumo (FHN) couplés. On commence par rappeler l'analogie existante entre le réseau de neurones et les modèles de réseaux d'EDO que l'on étudie : essentiellement, un réseau de neurones est un graphe dans lequel chaque sommet représente un neurone modélisé par un système FHN et chaque arête représente une connexion synaptique entre deux neurones. Remarquons que la connection synaptique peut être modélisée par une fonction linéaire ou non-linéaire. Dans la deuxième section, on présente une étude de l'attracteur et on montre qu'il existe un bornage pour les solutions du modèle de FHN et aussi du réseau de différentes topologies. Ensuite, dans la troisième section, on présente une étude de synchronisation et de stabilité de la variété de synchronisation avec deux méthodes connues dites *Master stability function* et *Connection graph stability*. Enfin, dans la dernière section, on s'intéresse à la synchronisation identique du cas de différentes topologies simples de réseaux pour un couplage bidirectionnel mais aussi unidirectionnel, linéaire et non-linéaire. Dans chacune des situations présentées, on s'intéresse à la valeur de la force de couplage nécessaire pour obtenir un phénomène de synchronisation.

1. Réseau de neurones

Les neurones ne sont pas indépendants les uns des autres. Ils établissent entre eux des liaisons et forment des chaînes de neurones constituant un fantastique réseau. Un réseau de neurones décrit donc une population de cellules nerveuses physiquement interconnectés. La communication entre les cellules est principalement dûe à des processus électrochimiques.

Le transfert d'information d'un neurone à l'autre s'effectue au niveau des synapses. À ce niveau, les membranes des neurones "en communication" sont proches l'une de l'autre mais séparées par un espace synaptique. Les signaux électriques ne pouvant franchir cet espace, la communication entre deux neurones se fait par l'intermédiaire de substances chimiques appelées neurotransmetteurs. Ces substances diffèrent suivant les synapses. Elles sont produites par le neurone qui envoie le message et reconnues par le neurone qui le reçoit.

La communication dans une chaîne de neurones se fait dans un seul sens. Un neurone est en contact avec plusieurs autres neurones, donc il reçoit en permanence de nombreux messages chimiques au niveau des différentes synapses. Il les prend en compte pour élaborer, à son tour, un nouveau message nerveux original qu'il va transmettre. Ainsi le neurone n'est pas un simple relais mais une unité de traitement de l'information.

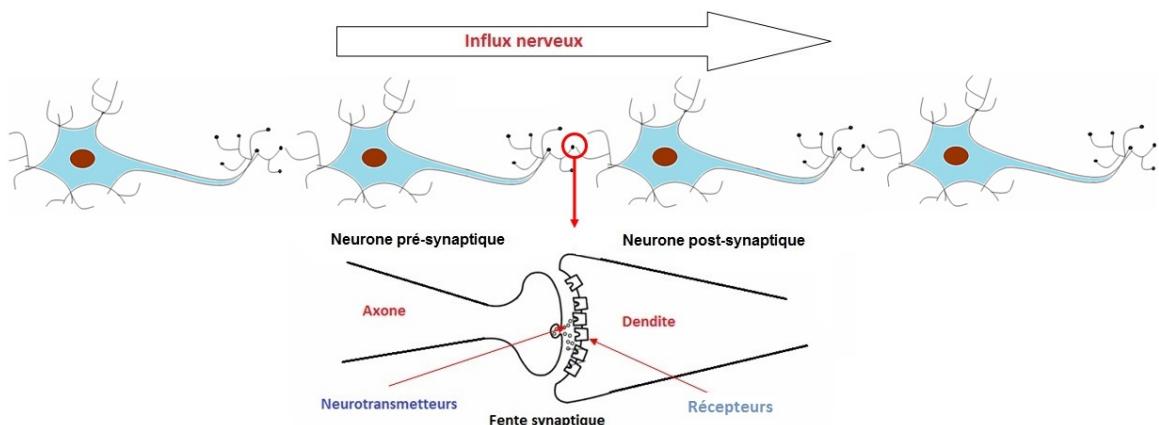


Figure 4.1. Schéma d'une synapse.

Le fonctionnement d'un neurone est modélisé par un système d'équations différentielles, et un réseau peut être représenté par un graphe dans lequel les nœuds représentent des systèmes dynamiques et les arêtes représentent des fonctions de couplage. Ce couplage peut être unidirectionnel-c'est à dire que la dynamique de l'un des systèmes dépend de celle de l'autre, ou bidirectionnel-c'est à dire que la dynamique de chaque système dépend de celle de l'autre.

On distingue habituellement deux types de synapses : les *synapses chimiques*, très majoritaires, qui utilisent des neurotransmetteurs pour la circulation de l'information et les *synapses électriques* à travers lesquelles le signal est transmis électriquement par l'intermédiaire d'une jonction communicante (*gap junction*). Elles peuvent être *excitatriques* ou *inhibitrices*. Si la somme des entrées au niveau du neurone post-synaptique dépasse le seuil synaptique, une synapse inhibitrice va empêcher le déclenchement d'un potentiel d'action tandis qu'une synapse excitatrice va le favoriser.

Dans la suite, une synapse chimique sera modélisée par une fonction de couplage non-linéaire et plus précisément par une fonction sigmoïde permettant de modéliser le comportement d'un

mécanisme à seuil. Une synapse électrique sera modélisée par une fonction de couplage linéaire, car alors c'est une connexion directe entre les neurones. La caractéristique inhibitrice ou excitatrice d'une synapse sera donnée par la valeur de certains paramètres de la fonction de couplage.

Enfin, les synapses chimiques peuvent être *lentes* ou *rapides*. On dit alors que la synapse est rapide, si elle peut "s'éteindre" brutalement une fois le neurone post-synaptique activé lorsque le seuil synaptique est atteint, ou elle peut s'éteindre progressivement et rester active un certain temps et la synapse est alors dite lente.

On a étudié dans le chapitre précédent le modèle de FitzHugh-Nagumo sous la forme,

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = \dot{u} = f(u, v) = u - \frac{u^3}{3} - v + I, \\ \frac{dv}{dt} = \dot{v} = g(u, v) = \frac{1}{\tau}(u + a - bv), \end{cases}$$

où u est le potentiel de membrane, et v représente les flux lents d'ions à travers la membrane.

Soit maintenant le changement de variables suivant : $v = \frac{v}{3} + I$, $u = u$, qui permet de faire disparaître le paramètre I dans la première équation du système (4.1).

Ensuite, on fait le changement de temps : $\xi = \frac{t}{\tau}$, et on introduit les nouveaux paramètres : $\epsilon = \frac{3}{\tau}$, $b = \frac{b}{3}$, $c = a - bI$. De ces changements, on obtient le système comme suit,

$$(4.2) \quad \begin{cases} \epsilon \dot{u} = \epsilon \frac{du}{dt} = f(u) - v \\ \dot{v} = \frac{dv}{dt} = u - bv + c. \end{cases}$$

Mais, on considère en général la forme suivante,

$$(4.3) \quad \begin{cases} \epsilon \dot{u} = \epsilon \frac{du}{dt} = f(u) - v \\ \dot{v} = \frac{dv}{dt} = au - bv + c, \end{cases}$$

où $f(u) = -u^3 + 3u$ et ϵ, a, b et c sont des paramètres fixés, $a, b > 0$. Le paramètre ϵ représente l'échelle de temps entre l'évolution des deux variables u et v . On préfère donc $0 < \epsilon \ll 1$.

Considérons maintenant un réseau de n neurones (4.3) couplés par leur première variable. Un modèle de ce réseau est donné par,

$$(4.4) \quad \begin{cases} \epsilon \dot{u}_i = f(u_i) - v_i - h(u_i, u_j) & i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j. \\ \dot{v}_i = au_i - bv_i + c \end{cases}$$

La fonction h est la fonction de couplage qui détermine le type de connexion entre les neurones i et j . Les connexions entre les neurones sont essentiellement de deux types : chimiques, largement majoritaires, et électriques.

Dans le cas où les connexions se font par des synapses électriques, on utilise la fonction de couplage linéaire,

$$(4.5) \quad h(u_i, u_j) = g_{syn} \sum_{j=1}^n c_{ij}(u_i - u_j), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Le paramètre g_{syn} représente la force de couplage. Les coefficients c_{ij} sont les coefficients de la matrice de connectivité $C_n = (c_{ij})$ de taille $n \times n$, définie par,

$$\begin{cases} c_{ij} = 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont couplés} \\ c_{ij} = 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ ne sont pas couplés} \end{cases} \quad i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j.$$

Si le couplage entre les neurones est bidirectionnel, cette matrice sera donc symétrique. La matrice C_n est donc la matrice d'incidence des sommets du graphe.

Dans le cas de neurones connectés par des synapses chimiques rapides, la fonction de couplage h est donnée dans [14],

$$(4.6) \quad h(u_i, u_j) = (u_i - V_{syn})g_{syn} \sum_{j=1}^n c_{ij}\Gamma(u_j),$$

où g_{syn} est la force de couplage synaptique et la fonction Γ est une fonction non-linéaire à seuil,

$$\Gamma(u_j) = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(u_j - \theta_{syn}))}.$$

Les paramètres ont les significations physiologiques suivantes :

- θ_{syn} est le seuil synaptique. Sa valeur est prise au "milieu" des spikes d'un burst et donc c'est un seuil atteint par tous les potentiels d'action. C'est le seuil au-delà duquel la synapse "s'allume".

- V_{syn} est le potentiel d'inversion (reversal potential). Cette valeur est supérieure à la valeur maximale d'un spike si la synapse est excitatrice et en-dessous si la synapse est inhibitrice. C'est donc le seuil qui rend la synapse excitatrice ou inhibitrice.

- λ est définie dans [14]. Plus λ est grand et plus on approche de la fonction de Heaviside.

Dans [18], l'auteur s'intéresse à la génération d'oscillations de bursts, à partir d'un réseau d'équations de type Hindmarsh-Rose. Les valeurs de ces paramètres sont déterminées numériquement. Par exemple, θ_{syn} est choisie comme une valeur centrale au milieu des bursts sur une période donnée. La figure 4.2 représente les valeurs de paramètres θ_{syn} et V_{syn} sur une série temporelle et sur une projection en dimension 2 du portrait de phase.

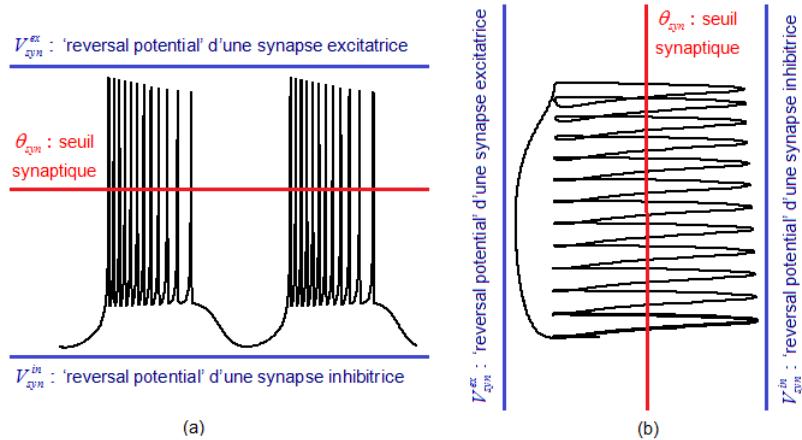


Figure 4.2. La figure (a) représente le seuil synaptique θ_{syn} ainsi que les valeurs excitatrices et inhibitrices de "reversal potential" V_{syn}^{ex} et V_{syn}^{in} , sur une série temporelle de bursts. La figure (b) représente les mêmes paramètres mais dans une projection en dimension 2 du portrait de phase. Au delà de la valeur de potentiel θ_{syn} , la synapse s'active. La valeur de V_{syn}^{ex} est supérieure à la valeur maximale du potentiel de membrane et est utilisée dans la modélisation de synapses excitatrices. La valeur V_{syn}^{in} est inférieure à la valeur minimale du potentiel de membrane et est utilisée dans la modélisation de synapses inhibitrices.

Conformément aux articles [3, 14], lors des simulations numériques, on utilisera les valeurs de paramètres suivants,

$$(4.7) \quad \epsilon = 0.1, a = 1, b = 0.001, c = 0, \lambda = 10, V_{syn} = 2, \theta_{syn} = -0.25.$$

2. Étude de l'attracteur

Cette partie regroupe les théorèmes utilisés dans l'analyse des EDP et aussi des EDO. Elle donne un aperçu du cadre mathématique dans lequel on peut s'inscrire les simulations numériques. En particulier, les simulations exhibent des solutions qui attirent les conditions initiales pour un temps grand, c'est donc naturellement qu'apparaît la définition d'attracteur (voir [4]).

2.1. Etude générale de l'attracteur

Soit \mathcal{H} un espace métrique.

Définition 1. Un C^0 semi-groupe sur \mathcal{H} est une famille d'opérateurs $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de \mathcal{H} dans \mathcal{H} qui vérifie les propriétés suivantes :

- $S(0) = Id$.
- $S(t)S(s) = S(s)S(t) = S(t + s)$.
- $S(t)u_0$ est continu en u_0 et en t .

On rappelle la notion de w -limite d'un point u_0 de \mathcal{H} et d'un sous ensemble \mathcal{A} de \mathcal{H} .

Définition 2. $w(u_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)u_0}$ et $w(\mathcal{A}) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{A}}$.

Lemme 1. $\phi \in w(\mathcal{A})$ si et seulement si il existe une suite (t_n, ϕ_n) avec $t_n \rightarrow +\infty$, $\phi_n \in \mathcal{A}$ tels que,

$$S(t_n)\phi_n \rightarrow \phi \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Définition 3. Un sous ensemble X de \mathcal{H} est un ensemble invariant pour $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si,

$$S(t)X = X, \forall t \geq 0.$$

Les ensembles w -limite constituent un exemple d'ensemble invariant.

Lemme 2. On suppose que pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et pour tout $t_0 > 0$, l'ensemble $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{A}$ est relativement compact dans \mathcal{H} . Alors, $w(\mathcal{A})$ est non vide compact et invariant.

On donne maintenant les définitions permettant de présenter un théorème sur l'existence d'attracteurs. Voici d'abord la définition d'un attracteur.

Définition 4. Un attracteur est un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- \mathcal{A} est invariant.
- \mathcal{A} possède un voisinage ouvert U tel que pour tout u_0 dans U , $S(t)u_0$ converge dans \mathcal{A} quand t tend vers $+\infty$, c'est à dire que,

$$\inf_{y \in \mathcal{A}} d(S(t)u_0, y) \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Définition 5. On dit que $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ est un attracteur global pour le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si \mathcal{A} est un attracteur compact qui attire tous les ensembles bornés de \mathcal{H} .

Définition 6. Soit \mathcal{B} un sous ensemble de \mathcal{H} et U un ouvert contenant \mathcal{B} . On dit que \mathcal{B} est absorbant dans U si la trajectoire issue d'un ensemble borné quelconque de U rentre dans \mathcal{B} après un certain temps,

$$\forall \mathcal{B}_0 \in U \text{ borné}, \exists t_0(\mathcal{B}_0) \text{ tel que } S(t)\mathcal{B}_0 \in \mathcal{B}, \forall t \geq t_0.$$

On dit aussi que \mathcal{B} attire les ensembles bornés de U .

Le théorème donnant l'existence d'attracteurs nécessite des propriétés de compacité du semi-groupe.

Définition 7. On dit que les opérateurs $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sont uniformément compacts pour t assez grand si pour tout ensemble borné \mathcal{B} , il existe t_0 dépendant éventuellement de \mathcal{B} tel que,

$$(4.8) \quad \bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B} \text{ est relativement compact dans } \mathcal{H}.$$

Lorsque \mathcal{H} est un espace de Banach, la condition de compacité pour le semi-groupe peut être remplacée par les conditions suivantes :

1. $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$.
2. Les opérateurs $S_1(t)$ sont uniformément compacts pour t assez grand.
3. Pour tout ensemble borné $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$, $r_{\mathcal{C}}(t) = \sup_{\phi \in \mathcal{C}} |S_2(t)\phi|_{\mathcal{H}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

On peut alors énoncer le théorème suivant, qui donne l'existence d'attracteurs.

Théorème 2. *On suppose que \mathcal{H} est un espace métrique et que les opérateurs $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ satisfont (4.8) ou les propriétés 1, 2, 3 précédentes. On suppose de plus qu'il existe un ouvert U et un ensemble borné \mathcal{B} de U tel que \mathcal{B} est absorbant dans U . Alors, l'ensemble w -limite de \mathcal{B} , $\mathcal{A} = w(\mathcal{B})$ est un attracteur compact qui attire tous les bornés de U . C'est l'attracteur maximal dans U . De plus, si \mathcal{H} est un espace de Banach et U est convexe et connexe, alors \mathcal{A} est également connexe.*

2.2. Bornage des solutions du modèle de FitzHugh-Nagumo

Développons l'idée de l'attracteur sur le système (4.3), on a le théorème suivant.

Théorème 3. *Il existe une constante positive K telle que, pour tout $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe $T(u_0, v_0)$,*

$$|(u(t), v(t))| < K, \quad \text{pour tout } t > T.$$

Démonstration. Multipliant la première équation par au , la deuxième par v et en sommant, on obtient,

$$\frac{d}{2dt}(\epsilon au^2 + v^2) = a(-u^4 + 3u^2) - bv^2 + cv.$$

Mais on peut trouver alors $\beta > 0$ et $K > 0$ tels que,

$$\frac{d}{2dt}(\epsilon au^2 + v^2) \leq -\beta u^4 + K - bv^2 + cv.$$

Puisque $u^2 \leq \frac{1}{2}u^4 + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow -\beta u^4 \leq -2\beta u^2 + \beta$. On a, $\forall \delta > 0$,

$$\frac{d}{2dt}(\epsilon au^2 + v^2) \leq -2\beta u^2 + \beta + K - bv^2 + \frac{\delta v^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}.$$

Finalement, on peut trouver d'autres constantes $\beta > 0$ et $K > 0$ telles que,

$$\frac{d}{dt}(\epsilon au^2 + v^2) \leq -\beta(\epsilon au^2 + v^2) + K.$$

Multipliant les deux membres par $\exp(\beta t)$, on obtient,

$$\frac{d}{dt}(\exp(\beta t)(\epsilon au^2 + v^2)) \leq K \exp(\beta t).$$

En intégrant,

$$\exp(\beta t)(\epsilon au^2 + v^2)(t) \leq (\epsilon au^2 + v^2)(0) + \frac{K}{\beta}(\exp(\beta t) - 1).$$

Enfin, on a alors,

$$(\epsilon au^2 + v^2)(t) \leq \exp(-\beta t)(\epsilon au^2 + v^2)(0) + \frac{K}{\beta}(1 - \exp(-\beta t)).$$

□

Dans la suite, on s'intéresse à l'existence d'attracteur des réseaux de neurones identiques couplés linéairement et aussi non-linéairement avec topologie quelconque.

2.3. Bornage des solutions du réseau de différentes topologies

Rappelons qu'un réseau de n neurones (4.3) couplés par leur première variable peut être modélisé comme suit,

$$(4.9) \quad \begin{cases} \epsilon \dot{u}_i = f(u_i) - v_i - h(u_i, u_j) \\ \dot{v}_i = au_i - bv_i + c \end{cases} \quad i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j,$$

où h est la fonction de couplage qui détermine le type de connexion entre les neurones i et j .

Théorème 4. *Il existe une constante positive K telle que, pour tout $(u_{i0}, v_{i0}) \in \mathbb{R}^2$, il existe $T(u_{i0}, v_{i0})$,*

$$|(u_i(t), v_i(t))| < K, \quad \text{pour tout } t > T.$$

Démonstration. En utilisant la même technique que celle utilisée dans la démonstration du théorème 3, on peut observer que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n (\epsilon a u_i^2 + v_i^2) \right) &= \sum_{i=1}^n (\epsilon a u_i \dot{u}_i + v_i \dot{v}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n [a u_i (f(u_i) - v_i - h(u_i, u_j)) + v_i (a u_i - b v_i + c)] \\ &= \sum_{i=1}^n [a u_i f(u_i) - a u_i h(u_i, u_j) - b v_i^2 + c v_i]. \end{aligned}$$

Puisque h peut être sous la forme (4.5) ou (4.6). Donc, on peut trouver une constante α telle que,

$$|h(u_i, u_j)| \leq \alpha(1 + \sum_{j=1}^n |u_j|).$$

Ainsi, on a,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n (\epsilon a u_i^2 + v_i^2) \right) &\leq \sum_{i=1}^n \left[a u_i f(u_i) + a \alpha |u_i| + a \alpha \sum_{j=1}^n |u_i| |u_j| - b v_i^2 + c v_i \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[-a u_i^4 + 3 a u_i^2 + a \alpha \left(\frac{u_i^2}{2} + \frac{1}{2} \right) + a \alpha n u_i^2 - b v_i^2 + c v_i \right]. \end{aligned}$$

On peut trouver $\beta > 0$ et $K > 0$ tels que, $\forall \delta > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n (\epsilon a u_i^2 + v_i^2) \right) &\leq \sum_{i=1}^n \left(-\beta u_i^4 + K - b v_i^2 + c v_i \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(-2 \beta u_i^2 + \beta + K - b v_i^2 + \frac{h v_i^2}{2} + \frac{c^2}{2h} \right). \end{aligned}$$

Finalement, on peut trouver alors d'autres constantes $\beta > 0$ et $K > 0$ telles que,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n (\epsilon a u_i^2 + v_i^2) \right) \leq -\beta \left(\sum_{i=1}^n (\epsilon a u_i^2 + v_i^2) \right) + K.$$

Ce qui implique,

$$\left(\sum_{i=1}^n (\epsilon a u_i^2 + v_i^2) \right) (t) \leq \exp(-\beta t) \left(\sum_{i=1}^n (\epsilon a u_i^2 + v_i^2) \right) (0) + \frac{K}{\beta} (1 - \exp(-\beta t)).$$

□

3. La synchronisation

3.1. La synchronisation et les assemblées de neurones

L'étude de synchronisation est omniprésente dans beaucoup de systèmes naturels et dans les sciences non-linéaires. Le mot synchronisation vient du grec *syn* (commun) et *chronos* (temps) et signifie avoir le même comportement au même moment (voir par exemple [9, 10, 66]). Il existe plusieurs types de synchronisation, par exemple :

- la synchronisation identique, qui signifie généralement que l'un des systèmes copie le comportement de l'autre. Les systèmes dont tous les éléments sont synchronisés sont dits synchrones. On sait que beaucoup d'oscillateurs couplés, grâce à de faibles interactions, font apparaître un phénomène de synchronisation ;
- la synchronisation généralisée, qui est une extension de la synchronisation identique impliquant une relations fonctionnelles entre les deux systèmes couplés. Dans le cas où cette relation est l'identité, on retrouve la synchronisation identique ;
- la synchronisation de phase, qui permet à au moins deux systèmes couplés de se réaliser avec une même période et simultanément.

Depuis la découverte de Huygen C. [43] sur la synchronisation, elle a trouvé beaucoup d'applications, dans des domaines variés tels que la biologie, la physique, la mathématique, l'informatique, les télécommunications, l'électronique et le traitement du signal (voir [1, 11, 27, 28, 29, 34, 35, 36, 40, 54, 55, 71, 72, 74, 75, 76]), etc.

On donne ici quelques motivations de l'étude du phénomène de synchronisation dans le cas particulier du cerveau. Plusieurs travaux récents (voir [33, 64, 70]) indiquent que la capacité impressionnante de calcul et de stockage du cerveau sont permises par la capacité des différentes populations de neurones à se synchroniser. Ainsi, la synchronisation a été identifiée comme jouant un rôle fondamental dans la communication en augmentant la capacité d'interaction entre les différentes zones du cerveau. Il y a un maintenant un consensus sur le fait qu'elle joue un rôle dans plusieurs aspects de la fonction cognitive du cerveau.

Plusieurs travaux avaient déjà émis l'hypothèse que la synchronisation de différentes régions de neurones indiquaient la perception du même objet (voir [29, 71, 72]). Il convient de préciser ce qu'on entend par synchronisation. Dans le cadre de la synchronisation des neurones, on s'intéresse plus généralement à la synchronisation de fréquences. Ainsi, dans [82] : "le concept de synchronisation neuronale renvoie à l'idée que les oscillations de l'activité d'un groupe de neurones, dans une certaine bande, étroite, de fréquences, peuvent se mettre transitoirement en phase avec celles d'un autre groupe de neurones. Ce verrouillage de phase passager joue différents rôles et peut notamment faciliter la communication d'information entre les groupes neuraux, et même remplir des fonctions computationnelles. On a montré que dans l'électroencéphalographie (EEG) et le magnétoencéphalographie (MEG), les modulations de la synchronisation de thêta (4-7 hertz), alpha (8-15 hertz), et gamma (30-50 hertz), à la fois à l'intérieur des régions cérébrales et entre elles, sont toutes associées à des fonctions cognitives, y compris la perception, la mémoire, l'attention et la conscience". La synchronisation identique que l'on considère ici, est intrinsèquement liée au phénomènes de synchronisation mais devrait être affinée pour s'appliquer exactement aux applications.

Citons pour terminer ce paragraphe un exemple de synchronisation pathologique : l'*épilepsie*. L'épilepsie est un problème neurologique avec une hyperactivité cérébrale qui se manifeste par des convulsions ou même une perte de conscience (voir [84]). Elle est causée par un dysfonctionnement passager du cerveau. Lors d'une crise d'épilepsie, les neurones produisent soudainement une

décharge électrique anormale dans certaines zones cérébrales. Un grand nombre de neurones déchargent alors des potentiels d'action de manière synchronisée. Pourtant comme on l'a dit, la synchronisation des neurones est une propriété intrinsèque de l'activité normale du cerveau. Il semblerait que dans le cas de l'épilepsie, cette synchronisation s'emballe. Plusieurs causes peuvent expliquer cet "emballlement" :

- une surexcitabilité des neurones ;
- une diminution du niveau d'inhibition du réseau neuronal.

D'une manière mathématique, on utilise des fonctions de couplage pour modéliser des connexions synaptiques entre plusieurs neurones. Biologiquement, on s'intéresse à appliquer ces fonctions de couplage à la première variable, qui représente le potentiel de membrane. Par ailleurs, rappelons que les synapses électriques seront ici modélisées par une fonction linéaire de la forme $k(u_i - u_j)$. Les synapses chimiques, quant à elle, seront modélisées par une fonction non-linéaire et plus particulièrement une fonction sigmoïde. Les synapses chimiques peuvent être lentes ou rapides, mais on ne s'intéresse ici qu'au cas des synapses chimiques rapides excitatrices.

Dans la suite, on étudie la synchronisation identique de neurones et on dira que deux neurones u_1 et u_2 sont synchronisés, si l'on a $|u_1(t) - u_2(t)| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, pour une force de couplage assez importante. Cette propriété est représentée par la présence d'une diagonale dans le plan (u_1, u_2) (voir figure 4.3). L'objectif ici est donc de trouver la force de couplage minimale pour obtenir cette propriété.

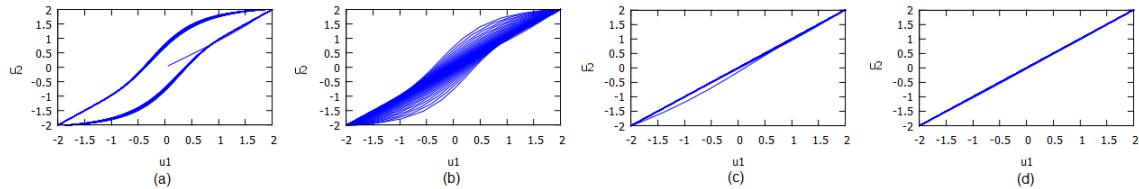


Figure 4.3. Exemple de la simulation de l'activité de neurones représentés par les variables (u_1, v_1) et (u_2, v_2) . On illustre l'évolution de deux couples des variables dans l'espace de phase pour différentes forces de couplage. On observe que pour une force de couplage assez importante, on a la synchronisation de deux neurones, voir (d). La synchronisation survient pour $\sigma^* \geq 1.4$. Avant la synchronisation : (a) $\sigma^* = 0.0001$, (b) $\sigma^* = 0.01$, (c) $\sigma^* = 0.5$, et (d) $\sigma^* = 1.4$.

3.2. Stabilité de la variété de synchronisation

Dans cette section, on étudie la stabilité de la variété de synchronisation au sein de réseau de systèmes dynamiques. On se demande que sous quelles conditions sur la force et la configuration de couplage, la variété de synchronisation est elle stable ? Cette question a été traitée en terme de condition nécessaire dans [65] ou suffisante dans [12]. On rappelle ici brièvement les méthodes donnant les conditions suffisantes ou nécessaires de stabilité globale ou locale de la variété de synchronisation (voir aussi [9, 18]).

On définit un système (le maître) dans le cas d'un configuration maître-esclave,

$$(4.10) \quad \frac{dX}{dt} = F(X), X \in \mathbb{R}^n,$$

qui commande un autre système (l'esclave),

$$(4.11) \quad \frac{dY}{dt} = F(X, Y), Y \in \mathbb{R}^m.$$

La synchronisation a lieu lorsque Y copie asymptotiquement d'une certaine manière un sous-ensemble X_p de X . C'est à dire qu'il existe une relation entre ces deux systèmes couplés, qui pourrait être une fonction ψ régulière inversible.

Ainsi, si l'on connaît, après un état transitoire, l'état du premier système, cela nous permet de prévoir l'état du second,

$$Y(t) = \psi(X(t)).$$

On a généralement $n > m$, mais pour faciliter la lecture, on va s'intéresser au cas où $m = n$, et où $X = X_p$. Soit la notation,

$$X_{\perp}(t) = Y(t) - \psi(X(t)).$$

Les systèmes (4.10) et (4.11) sont synchronisés si,

$$(4.12) \quad \|X_{\perp}(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

- Si ψ est la fonction identité, ce processus s'appelle *synchronisation identique*.

Le système (4.11) synchronise avec le système (4.10) si l'ensemble $\mathcal{M} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, Y = X\}$ est un ensemble attracteur avec un bassin d'attraction \mathcal{B} ($\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$) tel que,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - Y(t)\| = 0, \forall (X(0), Y(0)) \in \mathcal{B}.$$

Ainsi, ce régime correspond à la situation où toutes les variables des deux (ou plus) systèmes couplés convergent vers \mathcal{M} .

- Si ψ n'est pas la fonction identité, le phénomène est plus général et on l'appelle *synchronisation généralisée*.

Plus généralement, le système (4.11) synchronise avec le système (4.10), s'il existe une transformation $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, une variété $\mathcal{M} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^{m+n}, Y = \psi(X)\}$ et un sous-ensemble \mathcal{B} (avec $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$) tels que pour tout $(X_0, Y_0) \in \mathcal{B}$, la trajectoire issue des conditions initiales (X_0, Y_0) , s'approche de \mathcal{M} quand $t \rightarrow +\infty$.

Dans le cas de la synchronisation identique, l'équation (4.11) signifie qu'un certain hyperplan \mathcal{M} , appelé variété de synchronisation, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{2n}$, est asymptotiquement stable. C'est à dire que l'on doit montrer qu'il n'y a plus de mouvement transversal à la variété de synchronisation.

Pour l'étude de la stabilité de la synchronisation, on peut utiliser, par exemple, les exposants conditionnels de Lyapunov ou encore la stabilité asymptotique.

Soit l'équation variationnelle correspondant au système transverse X_{\perp} ,

$$(4.13) \quad \frac{dX_{\perp}}{dt} = DF(X)X_{\perp},$$

où $DF(X)$ est la jacobienne du champ de vecteurs évaluée sur la trajectoire X . Cette équation donne la dynamique du mouvement transverse à la variété de synchronisation. Ainsi, l'exposant conditionnel de Lyapunov nous dira si ce mouvement va disparaître ou non et si l'état de synchronisation est stable ou non.

Dans le cas d'une synchronisation identique, la stabilité de la synchronisation est assurée par la condition,

$$L_{\max}^{\perp} < 0,$$

où L_{\max}^{\perp} est le plus grand exposant conditionnel de Lyapunov.

Exemple 1. On montre ici les exposants conditionnels de Lyapunov du système linéarisé au réseau de deux neurones couplés bidirectionnellement et aussi unidirectionnellement.

Rappelons qu'un réseau de deux neurones couplés bidirectionnellement par première variable est décrit comme suit,

$$(4.14) \quad \begin{cases} \epsilon \dot{u}_1 = f(u_1) - v_1 + \sigma^*(u_2 - u_1) \\ \dot{v}_1 = au_1 - bv_1 + c \\ \epsilon \dot{u}_2 = f(u_2) - v_2 + \sigma^*(u_1 - u_2) \\ \dot{v}_2 = au_2 - bv_2 + c, \end{cases}$$

et le réseau de deux neurones couplés unidirectionnellement par première variable est décrit comme suit,

$$(4.15) \quad \begin{cases} \epsilon \dot{u}_1 = f(u_1) - v_1 \\ \dot{v}_1 = au_1 - bv_1 + c \\ \epsilon \dot{u}_2 = f(u_2) - v_2 + \sigma^*(u_1 - u_2) \\ \dot{v}_2 = au_2 - bv_2 + c, \end{cases}$$

où σ^* est la force de couplage, $f(u) = -u^3 + 3u$, $a = 1$, $b = 0.001$, $c = 0$ et $\epsilon = 0.1$. Avec ce choix des paramètres, les exposants conditionnels de Lyapunov du système (4.14) et (4.15) sont présentés en rouge et en bleu sur la figure 4.4, respectivement.

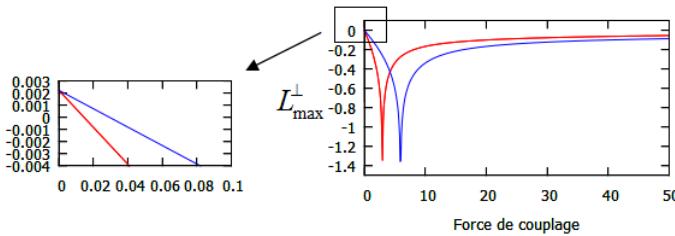


Figure 4.4. La figure montre le plus grand exposant conditionnel de Lyapunov L_{max}^\perp en fonction de la force de couplage σ^* . La courbe rouge représente l'évolution de cet exposant en fonction de σ^* pour le système bidirectionnel (4.14), la courbe bleue représente la même chose pour le système unidirectionnel (4.15). On trouve que L_{max}^\perp devient négatif plus vite pour le système bidirectionnel que le système unidirectionnel. Cela signifie qu'il est plus simple de synchroniser le système bidirectionnel par rapport au système unidirectionnel.

3.2.1. Critère de synchronisation basé sur les valeurs propres

Wu et Chua ont proposé un critère de synchronisation basé sur les valeurs propres dans un réseau de systèmes dynamiques couplés linéairement, qui donne une relation entre les coefficients de couplage dans différents réseaux (voir [92]). Pour deux réseaux de systèmes dynamiques couplés linéairement de N_1 et N_2 individus identiques, de topologies quelconques A_1 et A_2 et de forces de couplage σ_1 et σ_2 , ils ont montré la relation suivante,

$$\sigma_1 \lambda(A_1) = \sigma_2 \lambda(A_2),$$

où $\lambda(A_1)$ et $\lambda(A_2)$ sont les deux plus grandes valeurs propres négatives des matrices de couplage A_1 et A_2 . Le réseau A_1 est globalement synchronisé si et seulement si le réseau A_2 est globalement synchronisé. Dans cet article, la matrice laplacienne est symétrique avec la somme de chaque ligne nulle, et les éléments hors diagonale positifs.

A partir de ce résultat, on peut prédire la synchronisation d'un réseau de toute taille grâce au seuil de synchronisation d'un réseau constitué de deux systèmes dynamiques mutuellement couplés. Ainsi, si σ^* est le seuil de couplage pour synchroniser deux systèmes mutuellement couplés, alors le seuil de couplage σ_N^* , pour un réseau de N systèmes couplés et la plus grande valeur propre négative de la matrice de couplage λ_N^* , est donné par,

$$\sigma_N^* = \frac{2\sigma^*}{|\lambda_N^*|}.$$

3.2.2. La méthode dite *Master-Stability-function*

Pecora et Carroll ont proposé la méthode dite *Master-Stability-function* dans [65], qui donne des conditions nécessaires pour la stabilité locale de la variété de synchronisation (voir aussi [77]),

$$\mathcal{M} = \{x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = s(t)\}.$$

On considère un ensemble de n systèmes dynamiques couplés,

$$\dot{x}_i = F_i(x_i) - \sigma \sum_{j=1}^n c_{ij} \Gamma_{ij}(x_j).$$

Dans cette équation, $\dot{x}_i = F_i(x_i)$ représente la dynamique de l'oscillateur x_i , σ est la force de couplage, Γ_{ij} est la fonction de couplage entre les systèmes i et j et $C = (c_{ij})$ est la matrice de connexion dont coefficient c_{ij} n'est nul que dans le cas où les systèmes i et j ne sont pas couplés. Dans la suite, on se place dans le cas où tous les systèmes sont identiques et couplés par la même fonction de couplage. On a donc,

$$(4.16) \quad \dot{x}_i = F(x_i) - \sigma \sum_{j=1}^n c_{ij} \Gamma(x_j).$$

On considère ici le cas où $c_{ii} = -\sum_{i \neq j} c_{ij}$. La stabilité de la variété de synchronisation peut être déterminée par les équations variationnelles, c'est à dire que l'on suppose chaque système dynamique subit une très légère perturbation ζ_i de l'état de synchronisation $s(t)$, on a donc $x_i(t) = s(t) + \zeta_i$. Puis, F et Γ sont écrits sous la forme de la série de Taylor comme suit,

$$F(x_i) \simeq F(s) + DF(s)\zeta_i \quad \text{et} \quad \Gamma(x_i) \simeq \Gamma(s) + D\Gamma(s)\zeta_i,$$

où $DF(s)$ et $D\Gamma(s)$ sont des matrices jacobienes de F et Γ en s , respectivement.

Les équations variationnelles sont données par,

$$(4.17) \quad \dot{\zeta}_i = DF(s)\zeta_i - \sigma D\Gamma(s) \sum_{j=1}^n c_{ij} \zeta_j, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Ainsi, on a alors,

$$\dot{\zeta} = [I_n \otimes DF(s) - \sigma C \otimes D\Gamma(s)]\zeta,$$

où $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ et \otimes représente le produit de Kronecker.

Bien que (4.17) permet de considérer tous les types de graphes, c'est à dire les graphes unidirectionnels et bidirectionnels, on suppose le couplage bidirectionnel et on considère la

matrice C symétrique. On peut donc écrire $C = \Phi\Omega\Phi^T$, où Ω est la matrice diagonale des valeurs propres et Φ est la matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs propres réels correspondants de C . Soit maintenant $\eta = (\Phi^T \otimes I_n)\zeta$ où $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$. Alors,

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= (\Phi^T \otimes I_n)\dot{\zeta} = (\Phi^T \otimes I_n)(I_n \otimes DF(s) - \sigma C \otimes D\Gamma(s))(\Phi^T \otimes I_n)^{-1}\eta \\ &= (I_n \otimes DF(s) - \sigma\Omega \otimes D\Gamma(s))\eta.\end{aligned}$$

Finalement, on peut dire que (4.17) est équivalent à,

$$(4.18) \quad \dot{\eta}_i = DF(s)\eta_i - \sigma\lambda_i D\Gamma(s)\eta_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

où les λ_i sont les valeurs propres de C , ordonnées de telle sorte que $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, avec λ_1 la valeur propre associée à la variété de synchronisation $s(t)$. En effet, η_i est la force de couplage du i ème vecteur propre de C pour la perturbation ζ .

Le plus grand exposant de Lyapunov de l'équation variationnelle (4.18) donné en fonction de la force de couplage \bar{a} , $L_{\max}^\perp(\bar{a} = \sigma\lambda_i)$, $i \geq 2$, appelé *Master-stability-function*, donne la stabilité linéaire de la variété de synchronisation, c'est à dire que si $L_{\max}^\perp(\bar{a}) < 0$, l'état synchrone est linéairement stable. Cette fonction ne dépend que de la configuration de couplage définie par Γ et de la dynamique individuelle des systèmes dynamiques exprimée par $F(\cdot)$. En d'autres termes, cette méthode permet de déterminer la stabilité de la variété de synchronisation en fonction à la fois de la dynamique individuelle de chaque composant, c'est à dire la *Master-stability-function* et de la structure du réseau, c'est à dire les λ_i . On a ainsi obtenu une condition nécessaire pour la stabilité locale de la variété de synchronisation. Il est alors intéressant de noter que la *Master-stability-function* est calculée pour un système dynamique avec un certain Γ et il ne reste qu'à calculer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de C pour déterminer les conditions de synchronisation de (4.16).

En général, la *Master-stability-function* peut prendre deux formes lorsque les systèmes couplés synchronisent. Par exemple,

- pour les systèmes de Lorenz couplés par leur première variable, la fonction $L_{\max}^\perp(\bar{a})$ s'annule pour une valeur de la force de couplage $\bar{a} = a^*$ et reste négative pour tous les $\bar{a} > a^*$. C'est à dire que les systèmes restent synchronisés lorsque l'on dépasse la valeur critique de synchronisation,
- pour les systèmes de Rössler couplés par leur première variable, $L_{\max}^\perp(\bar{a})$ reste négatif juste pour $a_1^* < \bar{a} < a_2^*$. C'est à dire que les systèmes peuvent se désynchroniser si la force de couplage dépasse une certaine valeur.

On illustre ici la méthode *Master stability function* dans le cadre de deux systèmes de Lorenz et de deux systèmes de Rössler couplés bidirectionnellement par première variable.

Rappelons que le système de Lorenz est décrit par,

$$\begin{cases} \dot{x} = s(y - x) \\ \dot{y} = rx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

où $s = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$, et tandis que le système de Rössler est décrit par,

$$\begin{cases} \dot{x} = -wy - z \\ \dot{y} = wx + ay \\ \dot{z} = d + z(x - c), \end{cases}$$

où $\omega = 1, a = 0.3, d = 0.2, c = 10$. Avec ce choix des paramètres, les deux systèmes ont un comportement chaotique. Les *Master stability functions* pour deux systèmes de Lorenz et ceux de Rössler couplés par première variable sont représentés à la figure 4.5(a) et 4.5(b), respectivement.

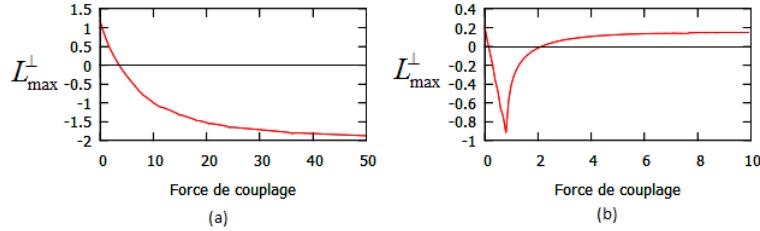


Figure 4.5. *Master stability function* pour le système de Lorenz (a) et de Rössler (b).

A la figure 4.6, on illustre la méthode *Master stability function* pour deux systèmes de Fitzhugh-Nagumo (4.3) couplés bidirectionnellement par leur première variable.

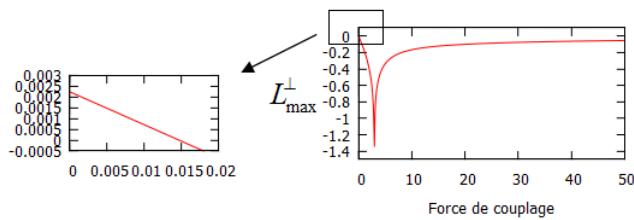


Figure 4.6. *Master stability function* pour deux systèmes de Fitzhugh-Nagumo couplés par leur première variable.

3.2.3. La méthode dite *Connection-graph-stability*

La méthode dite *Connection-graph-stability* développée par Belykh et al permet d'obtenir des conditions suffisantes pour la stabilité globale de la variété de synchronisation (voir [12]). Elle est basée sur le calcul de la longueur des chemins dans les graphes de connection. L'étape principale de cette méthode est de déterminer un chemin P_{ij} du nœud i au nœud j ($P_{ij} = P_{ji}$ pour des graphes non-orientés) pour chaque paire des nœuds (i, j) et calculer ensuite la longueur totale de tous les chemins choisis en empruntant les arêtes $e_k \in \mathbf{E}$ du graphe de connection du réseau. La force de couplage σ_k associée à l'arête e_k , qui garantit la synchronisation identique du réseau, vérifie l'inégalité suivante (voir le théorème 2 dans [12]),

$$\sigma_k > \frac{a}{n} b_k, \quad k \in \{1, \dots, m\},$$

où m est le nombre d'arêtes dans le réseau, n est le nombre de nœuds du réseau, et $a = 2\sigma^*$ tel que σ^* est la force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation identique de deux systèmes dynamiques couplés mutuellement. La quantité $b_k = \sum_{j>i, e_k \in P_{ij}} z(P_{ij})$ calculée pour chaque arête e_k , est la somme des longueurs de tous les chemins P_{ij} qui passent par e_k .

Exemple 2. Considérons un réseau composé de 5 nœuds et 8 arêtes $e_k, k \in \{1, \dots, 8\}$ (voir figure 4.7). On suppose que tous les forces de couplage sont égales à g .

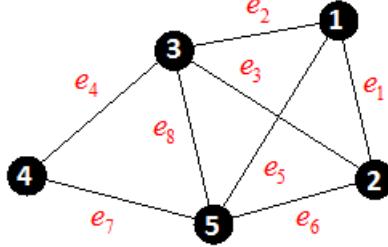


Figure 4.7. Réseau composé de 5 nœuds et 8 arêtes (figure obtenue grâce à Graphstream [90]).

On peut alors facilement déterminer le chemin le plus court entre chaque couple de nœuds dans le graphe,

$$\begin{aligned} P_{12} &= e_1, & P_{13} &= e_2, & P_{14} &= e_2 e_4, & P_{15} &= e_5, \\ P_{23} &= e_3, & P_{24} &= e_6 e_7, & P_{25} &= e_6, \\ P_{34} &= e_4, & P_{35} &= e_8, \\ P_{45} &= e_7. \end{aligned}$$

On calcule maintenant la somme b_k des chemins passant par l'arête e_k ,

$$\begin{aligned} b_1 &= |P_{12}| = 1, & b_2 &= |P_{13}| + |P_{14}| = 3, \\ b_3 &= |P_{23}| = 1, & b_4 &= |P_{14}| + |P_{34}| = 3, \\ b_5 &= |P_{15}| = 1, & b_6 &= |P_{24}| + |P_{25}| = 3, \\ b_7 &= |P_{24}| + |P_{45}| = 3, & b_8 &= |P_{35}| = 1. \end{aligned}$$

Donc, si $g > \frac{3a}{5}$, alors la synchronisation est globalement stable.

Notons que l'on a choisi ici les chemins les plus courts mais l'utilisation de tout autre chemin aurait également donné des résultats corrects.

Calculons maintenant la force de couplage de synchronisation pour deux systèmes de FitzHugh-Nagumo couplés mutuellement. On calcule ici analytiquement la borne σ^* de la force de couplage pour obtenir la synchronisation. Pour cela, on considère deux systèmes de FitzHugh-Nagumo couplés bidirectionnellement par leur première variable comme suit,

$$(4.19) \quad \begin{cases} \epsilon \dot{u}_1 = f(u_1) - v_1 + \sigma^*(u_2 - u_1) \\ \dot{v}_1 = au_1 - bv_1 + c \\ \epsilon \dot{u}_2 = f(u_2) - v_2 + \sigma^*(u_1 - u_2) \\ \dot{v}_2 = au_2 - bv_2 + c, \end{cases}$$

où σ^* est la force de couplage.

Afin d'étudier la stabilité de la variété de synchronisation, $\mathcal{M} = \{u_1 = u_2, v_1 = v_2\}$, on considère la fonction de Lyapunov suivante,

$$W = \frac{a\epsilon}{2}(u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2}(v_2 - v_1)^2.$$

Soit $M = \sup_{u \in \mathcal{B}, x \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^3 \frac{f^{(k)}(u)}{k!} x^{k-1}$, où \mathcal{B} est un intervalle compact dans lequel u reste inclus.

Alors, la variété de synchronisation \mathcal{M} est globalement asymptotiquement stable si la dérivée par rapport au temps le long des trajectoires de (4.19) de W est définie négative. Or, la dérivée de W est,

$$\begin{aligned}\dot{W} &= a\epsilon(u_2 - u_1)(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + (v_2 - v_1)(\dot{v}_2 - \dot{v}_1) \\ &= a(u_2 - u_1)[f(u_2) - f(u_1) - 2\sigma^*(u_2 - u_1)] - b(v_2 - v_1)^2.\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor pour la fonction f , on a,

$$f(u_2) = f(u_1) + \sum_{k=1}^3 \frac{f^{(k)}(u_1)}{k!} (u_2 - u_1)^k.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\dot{W} &= a(u_2 - u_1) \left[\sum_{k=1}^3 \frac{f^{(k)}(u_1)}{k!} (u_2 - u_1)^k - 2\sigma^*(u_2 - u_1) \right] - b(v_2 - v_1)^2 \\ &= a(u_2 - u_1)^2 \left[\sum_{k=1}^3 \frac{f^{(k)}(u_1)}{k!} (u_2 - u_1)^{k-1} - 2\sigma^* \right] - b(v_2 - v_1)^2 \\ &\leq a(u_2 - u_1)^2(M - 2\sigma^*) - b(v_2 - v_1)^2.\end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de W est définie négative si la condition suivante est vérifiée,

$$\sigma^* \geq \frac{M}{2}.$$

Cette condition suffisante donne une sur-estimation du seuil de la valeur de la force de couplage pour laquelle les deux systèmes synchronisent. Cependant, elle nous garantit la stabilité de la synchronisation lorsque la force de couplage est supérieure à ce seuil.

Grâce à la simulation numérique, on peut alors voir le phénomène de synchronisation de ce réseau par la présence d'une diagonale sur la figure 4.8.

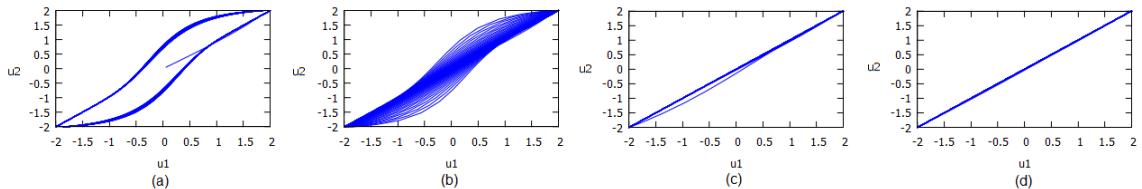


Figure 4.8. Les deux neurones représentés par les variables (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont couplés et on observe ici le potentiel de membrane u_1 d'un neurone en fonction du potentiel de membrane u_2 de l'autre neurone pour des forces de couplage croissantes. La présence d'une diagonale indique que $u_1 \approx u_2$. Les mêmes figures sont obtenues lorsque l'on observe v_1 en fonction de v_2 . On peut dire que pour une force de couplage suffisamment importante, le fonctionnement de deux neurones est identique. La synchronisation survient pour $\sigma^* \geq 1.4$. Avant la synchronisation : (a) $\sigma^* = 0.0001$, (b) $\sigma^* = 0.01$, (c) $\sigma^* = 0.5$, et (d) $\sigma^* = 1.4$.

4. Différentes topologies de réseaux

Dans cette section, l'étude numérique de la synchronisation identique de neurones au sein de réseaux de différentes topologies et pour différentes fonctions de couplage est traité. On s'intéresse ici à l'évolution de la force de couplage minimale pour obtenir la synchronisation en fonction du nombre de neurones, ou du degré des nœuds dans des réseaux.

Cinq types de réseaux ont été présentés : les *réseaux complets* dans lesquels tous les neurones sont couplés entre eux, les *réseaux en chaîne*, les *réseaux en étoile*, les réseaux en *anneaux* dans lesquels chaque neurone est couplé à ses deux plus proches voisins et enfin les réseaux dits *réguliers*, dans lesquels chaque nœud est relié à ses k plus proches voisins de droite et ses k plus proches voisins de gauche.

Réseau complet

Sur la figure 4.9, on peut voir des graphes complets de 2 à 10 noeuds. Chaque nœuds est connecté à tous les autres nœuds.

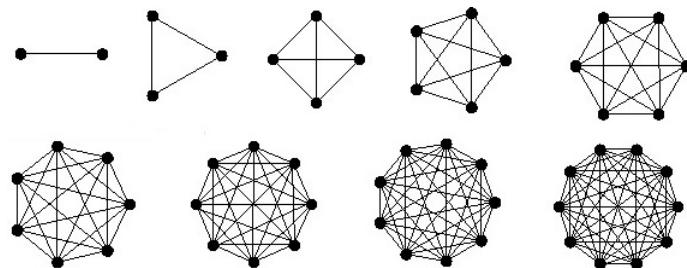


Figure 4.9. Graphes complets de 2 à 10 noeuds.

Réseau en chaîne avec couplage uni-directionnel



Figure 4.10. Réseau en chaîne composé de 10 nœuds dans lequel le nœud i , ($i > 1$) ne reçoit le signal que du nœud $i - 1$.

Réseau en étoile avec couplage bi-directionnel

Dans une topologie de réseau en étoile, les nœuds du réseau sont reliés à un nœud matériel central. Celui-ci a pour rôle d'assurer la communication entre les différents nœuds du réseau.

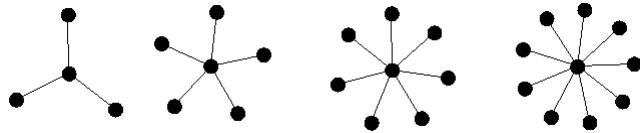


Figure 4.11. La figure représente les réseaux en étoile composés de 4, 6, 8, 10 nœuds.

Réseau en anneau avec couplage bi-directionnel

On s'intéresse d'abord à des réseaux en anneau dans lesquels chaque nœud est connecté à ces deux plus proches voisins. Chaque nœud est donc couplé à exactement deux autres nœuds. La figure 4.12 présente des réseaux de structure en anneaux de différentes tailles. On s'intéresse aux conséquences de l'ajout de noeuds sur la force de couplage.

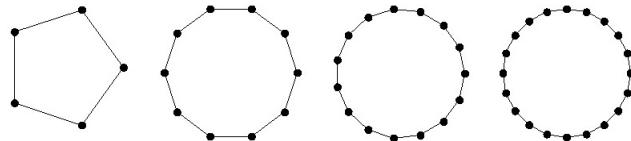


Figure 4.12. Réseaux de topologie de type "anneau" composés de 5, 10, 15 et 20 nœuds, chacun étant couplé à ses deux plus proches voisins.

Ensuite, on s'intéresse à des réseaux dans lesquels, en partant de la topologie en anneau, le degré de chaque nœud du graphe est augmenté. Tous les nœuds du graphe reste de même degré. La figure 4.13 présente certains de ces réseaux dans le cas où le nombre de noeuds est fixé à 20. Le degré de chaque noeud est ensuite augmenté de 2 sur chacune des figures, jusqu'à atteindre 18 connections. Ce sont donc des réseaux réguliers qui généralisent le cas des anneaux. Dans ces réseaux, chaque sommet est connecté à ses k ($k \in \mathbb{N}$, $k < \frac{n}{2}$) plus proches voisins de gauche et à ses k plus proches voisins de droite. Ainsi, chaque nœud est de degré $2k$.

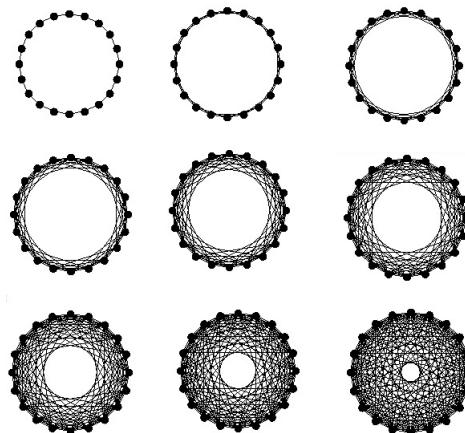


Figure 4.13. Réseaux composés de 20 nœuds, chacun ayant le même nombre de connections aux autres. Ces figures présentent les cas où, pour un nombre de noeuds fixés (20), le degré de chacun d'eux augmente de 2 à 18.

Réseau en anneau avec couplage unidirectionnel

Dans le cas d'un couplage unidirectionnel, les topologies en anneau (figure 4.14) et les graphes dont on augmente le degré de chaque nœud (figure 4.15) sont également étudiés.

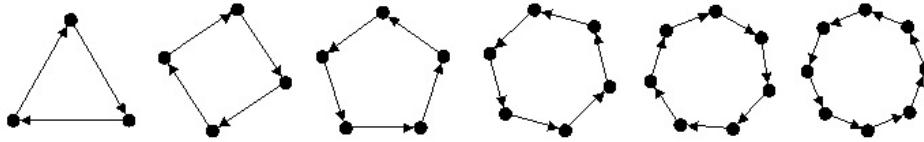


Figure 4.14. Réseaux de topologie de type "anneau" orientés composés de 3, 4, 5, 6, 7 et 8 nœuds, chacun étant couplé à un de ses plus proches voisins.

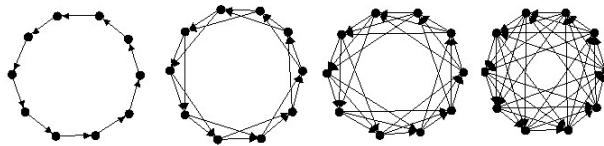


Figure 4.15. Réseaux orientés composés de 10 nœuds, chacun de degré entrant 1, 2, 3 et 4.

Numériquement, on trouve l'évolution de la force de couplage nécessaire afin d'obtenir la synchronisation selon différentes topologies de réseaux. Et on peut alors récapituler les lois obtenues dans le tableau suivant.

Couplage	Unidirectionnel		Bidirectionnel	
	linéaire	non-linéaire	linéaire	non-linéaire
Complet			$\frac{2\sigma^*}{n}$	$\frac{\sigma^*}{d}$
Chaîne	$0.1n + 2.4$			
Etoile			$-\frac{6}{n} + 3.2$	
Anneaux	$2.2.10^{-3}n^2$ $+0.228n + 2.28$	constante	$9.5.10^{-4}n^2$ $+0.027n + 1.075$	constante
Réguliers	$\frac{0.2808}{d} + \frac{4.352}{d^2}$	$\frac{1.2596}{d} + \frac{5.0424}{d^2}$	$\frac{2}{d} + \frac{2}{d^2}$	$\frac{2\sigma_n^{(2)}}{d}$

Table 4.1. Tableau donnant les résultats des lois de la force de couplage dans cette partie selon la topologie des réseaux, où n est le nombre de nœuds dans le graphe, σ^* est la force de couplage nécessaire pour avoir la synchronisation dans le réseau de deux nœuds couplés mutuellement, d est le degré de chaque nœud, et $\sigma_n^{(2)}$ est la force de couplage nécessaire pour faire synchroniser les nœuds de degré 2.

Troisième partie

Réseau complexe de neurones
modélisé par des EDP de type
FitzHugh-Nagumo

ÉTUDE D'UN NEURONE ISOLÉ DE TYPE FITZHUGH-NAGUMO

Sommaire

1	Étude mathématique de l'EDP	60
2	Existence et unicité des solutions	62
3	Existence d'un attracteur du système	68
4	Simulations numériques	74
5	Stabilité des états d'équilibre	78
5.1	Stabilité locale des états d'équilibre	79
5.2	Stabilité globale de l'équilibre homogène	80
6	Existence de travelling wave en dimension 1	81

Les signaux électriques se propagent à travers tout le système nerveux via des potentiels d'action. L'une des grandes réussites du modèle de Hodgkin-Huxley est qu'il permet de simuler la propagation du potentiel d'action le long d'un neurone. Mathématiquement, cela se traduit par l'ajout d'un terme de diffusion à la première équation du système d'équations différentielles ordinaires (EDO) de Hodgkin-Huxley présenté dans le chapitre 2. On obtient ainsi un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) de type de réaction-diffusion. La propagation du potentiel d'action correspond à une solution d'ondes progressives ; autrement dit, il s'agit d'une solution qui "bouge" avec une forme constante et la vitesse. A partir du modèle de Hodgkin-Huxley, dans les années 1970 et 1980, beaucoup de mathématiciens ont développé des techniques sophistiquées pour analyser rigoureusement l'existence, l'unicité et les propriétés de stabilité des solutions d'ondes des équations de réaction-diffusion. Dans ce chapitre, on se concentre sur le système d'EDP de type de réaction-diffusion de FitzHugh-Nagumo.

Tout d'abord, dans la première section, on présente une étude mathématique de l'EDP. Dans la deuxième section, on montre l'existence et l'unicité des solutions du système d'EDP de type de réaction-diffusion de FitzHugh-Nagumo. Ensuite, dans la troisième section, on montre qu'il existe un attracteur global connexe. La section suivante nous présente des solutions numériques en dimension 2 selon différentes conditions initiales. On obtient ainsi des patterns sous plusieurs formes tels que le *spirale*, le *miroir*, etc. Dans la cinquième section, on présente des conditions pour lesquelles on obtient la stabilité locale et aussi globale des solutions stationnaires non-trivales. Enfin, dans la dernière section, on montre l'existence de travelling wave en dimension 1.

Ce chapitre et le suivant montrent qu'il est beaucoup plus difficile de prouver l'existence de l'attracteur pour le réseau d'EDP que pour le réseau d'EDO. Par ailleurs, ces résultats sont indispensables pour démontrer la synchronisation. Enfin, les modèles diffusifs introduisent la dimension spatiale ce qui amène une richesse potentielle incomparable : propagations d'ondes, formations de patterns. Ce type de question a été étudié numériquement mais pas théoriquement dans le délai imparti (sauf l'existence de travelling wave en dimension 1 que l'on présente dans la dernière section de ce chapitre).

1. Étude mathématique de l'EDP

Considérons un système de réaction-diffusion sur un domaine borné Ω de \mathbb{R}^N ,

$$(5.1) \quad U_t = \frac{dU}{dt} = F(U, t) + D\Delta U,$$

avec les conditions initiales,

$$(5.2) \quad U(x, 0) = U_0(x), \quad x \in \Omega,$$

où $U = (U_1(x, t), \dots, U_p(x, t))$ est à valeurs dans \mathbb{R}^p , $F(U, t)$ est une fonction régulière de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R}^p , et D est une matrice semi-définie positive de taille $p \times p$ (voir [73] page 199, [4, 81, 80]).

On suppose que U satisfait les conditions aux bords de Neumann et le système (5.1) a une solution locale dans un ensemble \mathcal{B} des fonctions régulières de Ω dans \mathbb{R}^p , i.e., avec les conditions initiales données $U_0 \in \mathcal{B}$, il existe une constante $\tau > 0$ et une fonction régulière $U(x, t)$ de (5.1), (5.2) définie pour tout $x \in \Omega$ et $t \in [0, \tau)$, telle que $U(., t) \in \mathcal{B}, t \in [0, \tau)$.

Définition 8 (Région invariante). *Un sous espace fermé Σ de \mathbb{R}^p est appelé une région (positivement) invariante pour (5.1) si toutes les solutions $U(x, t)$ de (5.1) définies sur $[0, \tau(U(0, x))]$ ayant leur valeur aux bords et initial dans Σ vérifient $U(x, t) \in \Sigma, \forall x \in \Omega$ et $\forall t \in [0, \tau]$.*

Lemme 3. *On suppose que D est une matrice diagonale. Alors toute région de la forme,*

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^p \{U : a_i \leq U_i \leq b_i\},$$

où a_i et b_i sont constantes, est invariante pour (5.1) dès que F pointe strictement à l'intérieur de Σ sur $\partial\Sigma$ ¹. Si par ailleurs $D = I$, alors toute région convexe Σ pour laquelle F pointe à l'intérieur de Σ sur $\partial\Sigma$ est invariante.

Un théorème d'existence locale de solutions classiques

On suppose que Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^N de classe $C^{2+\alpha}$, où $\alpha \in (0, 1)$. On considère le système (5.1). On suppose que $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$. Soit $0 \leq r \leq s \leq p$. Pour $s \leq l \leq p$, on note b_l des fonctions de $C^{1+\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^+)$. On suppose que les conditions aux bords sont données par,

$$\begin{aligned} d_l &= 0 && \text{pour } 1 \leq l \leq r, \\ U_l(x, t) &= 0 && \text{pour } r < l \leq s, \\ b_l U_l(x, t) + \frac{\partial U_l}{\partial \nu}(t, x) &= 0 && \text{pour } s < l \leq p. \end{aligned}$$

1. Ce qui veut dire que pour Σ défini par $\Sigma = \bigcap_{i=1}^p \{U \in \mathbb{R}^p : G_i(U) \leq 0\}$, où G_i sont des fonctions réelles régulières définies dans les sous-ensembles de Ω . On suppose que, pour tout point $U_0 \in \partial\Sigma$ tel que $G_i(U_0) = 0$ pour certains i , on a $dG_i(F(U_0, t)) < 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Pour les conditions initiales, on suppose que,

$$\begin{aligned}
 U_l(x, 0) &\in C^\alpha(\bar{\Omega}) & \text{pour } 1 \leq l \leq r, \\
 U_l(x, 0) &\in C^{\alpha+2}(\bar{\Omega}) & \text{pour } r < l \leq p, \\
 U_l(x, 0) &= 0 & \text{pour } r < l \leq s, \\
 -d_l \Delta U_l(x, 0) &= F_l(0, x, U(0, x)) & \text{pour } r < l \leq s, \\
 b_l U_l(x, 0) + \frac{\partial U_l}{\partial \nu}(0, x) &= 0 & \text{pour } s < l \leq p.
 \end{aligned}$$

On suppose aussi que pour tout ensemble borné \mathcal{B} de $\bar{\Omega} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}^p$, il existe une constante $L(\mathcal{B})$ telle que,

$$\begin{aligned}
 |F(x, t, U)| &\leq L(\mathcal{B}) \quad \text{pour tout } (x, t, U) \in \mathcal{B}, \\
 |F(x, t, U) - F(y, s, V)| &\leq L(\mathcal{B}) (|x - y|^\alpha + |t - s|^{\frac{\alpha}{2}} + |U - V|).
 \end{aligned}$$

Théorème 5. *Avec les conditions initiales et aux bords précédemment décrites, il existe un temps maximal $T_{\max} \in]0, +\infty]$, tel que le problème (5.1) a une unique solution classique sur l'intervalle $[0, T_{\max}[$. Cette solution vérifie,*

$$\begin{aligned}
 U_l &\in C^{\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times [0, T_{\max}]) \quad \text{pour } 1 \leq l \leq r, \quad \text{pour tout } t \in (0, T_{\max}), \\
 U_l &\in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times [0, T_{\max}]) \quad \text{pour } r < l \leq p, \quad \text{pour tout } t \in (0, T_{\max}).
 \end{aligned}$$

Lemme de Gronwall et Lemme de Gronwall uniforme

Lemme 4 (Lemme de Gronwall). *Soient g, h, k, y quatre fonctions intégrables scalaires positives définies sur $[0, T[$ vérifiant,*

$$\frac{dy}{dt} \in L^1((0, T)) \text{ et } \frac{dy}{dt} + k \leq gy + h \text{ pour presque tout } t \in (0, T).$$

Alors, pour presque tout $t \in [0, T[$,

$$y(t) + \int_0^t k(s)ds \leq y(0) \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right) + \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right) \left(\int_0^t h(s)ds\right).$$

Lemme 5 (Lemme de Gronwall uniforme). *Soient g, h, y trois fonctions localement intégrables scalaires définies sur $(t_0, +\infty)$ vérifiant pour tout $t \geq t_0$,*

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &\in L^1_{loc}((t_0, +\infty)) \text{ et } \frac{dy}{dt} \leq gy + h, \\
 \int_t^{t+r} g(s)ds &\leq a_1, \int_t^{t+r} h(s)ds \leq a_2, \int_t^{t+r} y(s)ds \leq a_3,
 \end{aligned}$$

où r, a_1, a_2 et a_3 sont des constantes positives. Alors,

$$y(t) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) \exp(a_1), \quad \forall t \geq t_0 + r.$$

Lemme 6 (Lemme de Gronwall uniforme, version simplifiée). *Soit y une fonction localement intégrable scalaire définie sur $(t_0, +\infty)$ vérifiant,*

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &\in L^1_{loc}((t_0, +\infty)) \text{ et } \frac{dy}{dt} \leq a_1, \forall t \geq t_0, \\
 \int_t^{t+r} y(s)ds &\leq a_2, \quad \forall t \geq t_0,
 \end{aligned}$$

où r, a_1 et a_2 sont des constantes positives. Alors,

$$y(t) \leq \frac{a_2}{r} + a_1 r, \quad \forall t \geq t_0 + r.$$

2. Existence et unicité des solutions

Dans cette partie, on s'inspire du chapitre 8 du livre [68] et du [56] pour donner des théorèmes d'existence de solutions faibles et fortes pour le système suivant,

$$(5.3) \quad \begin{cases} \epsilon u_t = -u^3 + 3u - v + d\Delta u \\ v_t = au - bv + c \end{cases}$$

avec les conditions initiales et les conditions aux bords,

$$(5.4) \quad \begin{cases} u(0, x) = u_0 \\ v(0, x) = v_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où ν est la normale extérieure au domaine Ω borné de \mathbb{R}^N , $\epsilon > 0$, $d > 0$, a, b et c sont des constantes (a et b sont strictement positifs).

On trouve en effet dans [68] les démonstrations de théorème portant sur ce type de solutions pour une équation de Réaction-Diffusion scalaire $\epsilon u_t = f(u) - v + d\Delta u$, dans laquelle la non-linéarité de f est soumise à des conditions vérifiées par la fonction $-u^3 + 3u$ apparaissant dans (5.3). La démonstration est faite pour les conditions aux bords de Dirichlet mais reste valable pour notre système moyennant les changements dûs aux conditions au bord de Neumann, et au fait que l'on ait un système et non une équation scalaire. Le même problème est traité dans [78].

On pose $V = (H^1(\Omega))^2$ et $\mathcal{H} = (L^2(\Omega))^2$. Et on identifie de manière usuelle \mathcal{H} et son dual \mathcal{H}' de sorte que l'on a, $V \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}' \subset V'$, dual de V . On pose également pour toute fonction u de H^1 ,

$$|u|^2 = \int_{\Omega} u^2 \quad \text{et} \quad \|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

Au lieu de travailler sur le système (5.3), on va étudier un système plus général par rapport à la fonction f comme suit,

$$(5.5) \quad \begin{cases} \epsilon u_t = f(u) - v + d\Delta u \\ v_t = au - bv + c \end{cases}$$

où $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $d > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné régulier, et avec les conditions aux bords de Neumann. La fonction f est supposée être deux fois continûment différentiable pour toutes les variables et satisfait,

$$(5.6) \quad \delta_1 |u|^p - \delta_3 \leq -f(u)u \leq \delta_2 |u|^p + \delta_3, \quad p > 2, p \in \mathbb{N}, \forall u,$$

$$(5.7) \quad |f(u)| \leq \delta_4(1 + |u|^{p-1}), \quad \forall u \in \mathbb{R}, \forall x \in \Omega.$$

$$(5.8) \quad f'(u) \leq l, \quad \forall u,$$

où $\delta_i, i = 1, \dots, 4$ et l sont des constantes positives (voir [68]).

On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité dans H^1 ou dans H^s . Et par (\cdot, \cdot) le produit scalaire classique de L^2 . On note $\|\cdot\|$ la norme de L^2 et $\|\cdot\|_E$ (où $E = L^p$ ou H^k) les normes usuelles dans les espaces considérés. Alors, on a le théorème suivant.

Théorème 6. *On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné. On suppose de plus que Ω est de classe C^s , où s est le plus petit entier tel que $s \geq \frac{N(p-2)}{2p}$. On suppose que $(u_0, v_0) \in \mathcal{H}$, alors le système (5.5) admet une unique solution faible vérifiant,*

$$(u, v) \in L^2(0, T; V)^2 \cap C(0, T; \mathcal{H})^3, u \in L^p(\Omega_T),$$

où $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$. La première égalité du système (5.5) est valable dans $L^q(0, T; (H^s)')$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; tandis que la deuxième l'est dans $L^2(0, T; (H^1)')$. Enfin, l'application,

$$(u_0, v_0) \mapsto (u(t), v(t))$$

est continue dans \mathcal{H} .

Dire que l'égalité a lieu dans $L^q(0, T; (H^s)') \times L^2(0, T; (H^1)')$ équivaut à dire que l'on a pour tout $\phi_1, \phi_2 \in L^p(0, T; H^s) \times L^2(0, T; H^1)$ ([68] lemme 7.4),

$$\begin{cases} \epsilon \int_0^T \langle u_t, \phi_1 \rangle = \int_0^T \langle f(u) - v + d\Delta u, \phi_1 \rangle \\ \int_0^T \langle v_t, \phi_2 \rangle = \int_0^T \langle au - bv + c, \phi_2 \rangle \end{cases}$$

Démonstration. La preuve, basée sur la méthode de compacité de Faedo-Galerkin, suit le schéma suivant : existence locale des approximations de Galerkin, existence globale de ces approximations, passage à la limite, unicité et continuité par rapport aux conditions initiales. Les détails et bases théoriques non précisés peuvent être trouvés dans les références citées plus haut. On pose,

$$A = -\Delta \text{ avec conditions de Neumann, } D(A) = \{v \in L^2(\Omega) / \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2 (v, w_i)^2 < +\infty\},$$

où $(w_j)_{1 \leq j < +\infty}$ est la base de $L^2(\Omega)$ formée des fonctions propres de A , et λ_i sont les valeurs propres associées.

Existence locale

On pose,

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n u_{ni}(t) w_i, \quad v_n(t) = \sum_{i=1}^n v_{ni}(t) w_i$$

et on résoud,

$$(5.9) \quad \begin{cases} \epsilon (u_{nt}, w_i) = (f(u_n) - v_n - dAu_n, w_i) \\ (v_{nt}, w_i) = (au_n - bv_n + c, w_i) \end{cases}$$

avec $u_{ni}(0) = (u_n(0), w_i) = (u(0), w_i)$ et $v_{ni}(0) = (v_n(0), w_i) = (v(0), w_i)$.

On obtient un système de $2n$ équations dans lequel le terme non linéaire est localement Lipschitz, la solution est alors donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz sur un intervalle de temps T_n .

2. $L^2(0, T; V)$ est l'espace des L^2 -fonctions de $(0, T)$ dans V avec la norme : $\|\cdot\|_{L^2(0, T; V)} = \left(\int_0^T \|\cdot\|_V^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$, où $0 < T < +\infty$.

3. $C(0, T; \mathcal{H})$ est l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans \mathcal{H} .

Existence globale

Pour avoir l'existence globale, il faut borner les u_n indépendamment de n . Multipliant la première et la deuxième équation de (5.9) par u_{ni}, v_{ni} en sommant de 1 à n , on obtient,

$$\begin{cases} \epsilon(u_{nt}, u_n) = (f(u_n) - v_n - dAu_n, u_n) \\ (v_{nt}, v_n) = (au_n - bv_n + c, v_n) \end{cases}$$

En sommant les deux équations, on obtient après quelques calculs algébriques,

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \frac{d}{2dt}(a\epsilon|u_n|^2 + |v_n|^2) + ad\|u_n\|^2 + b|v_n|^2 + a\delta_1 \int_{\Omega} |u_n|^p \\ &= \int_{\Omega} [au_n(f(u_n) + d\Delta u_n - v_n) + v_n(au_n - bv_n + c) + ad(\nabla u_n)^2 + bv_n^2 + a\delta_1|u_n|^p] \\ &= \int_{\Omega} [au_n f(u_n) + cv_n + a\delta_1|u_n|^p] \\ &\leq \int_{\Omega} [-a\delta_1|u_n|^p + a\delta_3 + cv_n + a\delta_1|u_n|^p] \\ &\leq \int_{\Omega} [a\delta_3 + cv_n] \\ &\leq \int_{\Omega} \left[k_1 + \frac{b}{2}v_n^2 \right]. \end{aligned}$$

On a ainsi,

$$(5.10) \quad \frac{d}{2dt}(a\epsilon|u_n|^2 + |v_n|^2) + ad\|u_n\|^2 + \frac{b}{2}|v_n|^2 + a\delta_1 \int_{\Omega} |u_n|^p \leq k_1 |\Omega|,$$

où $|\Omega|$ est la mesure de Ω . En utilisant l'inégalité de Young, on a,

$$\frac{b}{2} \int_{\Omega} u_n^2 \leq \frac{a\delta_1}{2} \int_{\Omega} |u_n|^p + k_2.$$

Donc (5.10) implique,

$$(5.11) \quad \frac{d}{dt}(a\epsilon|u_n|^2 + |v_n|^2) + 2ad\|u_n\|^2 + b(|u_n|^2 + |v_n|^2) + a\delta_1 \int_{\Omega} |u_n|^p \leq k_3,$$

où $k_3 = 2(k_1|\Omega| + k_2)$.

En intégrant (5.11) entre 0 et T , on a,

$$\begin{aligned} (a\epsilon|u_n|^2 + |v_n|^2)(T) + \int_0^T 2ad\|u_n\|^2 + \int_0^T b(|u_n|^2 + |v_n|^2) + a\delta_1 \int_0^T \int_{\Omega} |u_n|^p \\ \leq a\epsilon|u_n(0)|^2 + |v_n(0)|^2 + k_3 T. \end{aligned}$$

Cela implique que,

$$\sup_{t \in [0, T]} |u_n|^2 \leq K,$$

$$\sup_{t \in [0, T]} |v_n|^2 \leq K,$$

$$\int_0^T \|u_n\|^2 \leq \frac{K}{2ad},$$

et

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u_n|^p \leq \frac{K}{a\delta_1},$$

où $K = a\epsilon|u_0|^2 + |v_0|^2 + k_3 T$ borné pour les ensembles bornés des conditions initiales dans \mathcal{H} . On a donc, (u_n, v_n) est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; \mathcal{H})$, u_n est uniformément bornée dans $L^2(0, T; H^1)$, et u_n est uniformément bornée dans $L^p(\Omega_T)$.

Grâce à (5.7), on a,

$$\begin{aligned} \|f(u_n)\|_{L^q(\Omega_T)}^q &= \int_0^T \int_{\Omega} |f(u_n)|^q \\ &\leq \delta_4^q \int_0^T \int_{\Omega} (|u_n|^{p-1} + 1)^q \\ &\leq k_4 \int_0^T \int_{\Omega} (|u_n|^{(p-1)q} + 1). \end{aligned}$$

Car $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q(p-1) = p$. Donc, on a $f(u_n)$ est uniformément bornée dans $L^q(\Omega_T)$.

On peut aussi montrer que v_n est uniformément bornée dans $L^2(0, T; H^1)$ (voir la démonstration du théorème 8).

Notons que, $k_i, i \in \{1, \dots, 4\}$ sont constantes positives qui dépend des donnés.

Passage à la limite

On extrait des sous suites qui convergent faiblement,

$$\begin{aligned} (u_n, v_n) &\rightharpoonup (u, v) \quad \text{dans } L^2(0, T; V), \\ u_n &\rightharpoonup u \quad \text{dans } L^p(\Omega_T), \\ f(u_n) &\rightharpoonup \Phi \quad \text{dans } L^q(\Omega_T). \end{aligned}$$

On borne maintenant u_{nt} et v_{nt} . Puisque $s \geq \frac{N(p-2)}{2p}$, on a d'après le théorème des injections de Sobolev (par exemple le théorème 5.26 page 137 dans [68]), $H^s \hookrightarrow L^p$ et donc $L^q \hookrightarrow (H^s)'$. On a aussi, $(H^1)' \hookrightarrow (H^s)'$ et $L^2 \hookrightarrow L^q$ (car $p > 2 \Rightarrow q < 2$). Donc,

$$L^2(0, T; (H^1)') \hookrightarrow L^q(0, T; (H^s)'), L^q(0, T; L^q) \hookrightarrow L^q(0, T; (H^s)').$$

Mais puisque (u_n, v_n) est uniformément bornée dans $L^2(0, T; V)$, et Au_n est uniformément bornée dans $L^2(0, T; (H^1)')$, alors, comme,

$$\epsilon u_{nt} = f(u_n) - v_n - dAu_n, \quad v_{nt} = au_n - bv_n + c,$$

u_{nt} est uniformément bornée dans $L^q(0, T; (H^s)')$, et v_{nt} est uniformément bornée dans $L^2(0, T; (H^1)')$.

On a donc⁴,

4. En fait, on a que $u_{nt} \rightharpoonup \mu$ dans $L^q(0, T; (H^s)')$. Donc, $\int_0^T \langle u_{nt}, \phi \rangle \rightarrow \int_0^T \langle \mu, \phi \rangle$ pour tout $\phi \in L^p(0, T; H^s)$, mais $\forall \phi \in C_c^\infty(0, T; H^s)$, $\int_0^T \langle u_{nt}, \phi \rangle = - \int_0^T \langle u_n, \phi_t \rangle \rightarrow - \int_0^T \langle u, \phi_t \rangle$, donc $\mu = u_t$ par définition de la dérivée faible.

$$\begin{aligned} \epsilon u_{nt} &\rightharpoonup \epsilon u_t \text{ dans } L^q(0, T; (H^s)'), \\ v_{nt} &\rightharpoonup v_t \text{ dans } L^2(0, T; (H^1)'). \end{aligned}$$

De plus,

$$Au_n \rightharpoonup Au \text{ dans } L^2(0, T; (H^1)').$$

D'où la convergence de tous les termes dans $L^q(0, T; (H^s)')$, et ainsi,

$$\begin{cases} \epsilon u_t = \Phi - v - dAu & \text{dans } L^q(0, T; (H^s)') \\ v_t = au - bv + c & \text{dans } L^2(0, T; (H^1)') \end{cases}$$

Il faut maintenant montrer que $\Phi = f(u)$. Mais puisque u_n et u_{nt} sont uniformément bornées dans $L^2(0, T; H^1)$ et $L^q(0, T; (H^s)')$, on peut extraire une sous suite ([68], Théorème 8.1 page 214) telle que,

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega_T).$$

Donc $u_n \rightarrow u$ presque partout (après extraction de sous-suite). Par la continuité de $f, f(u_n)$ tend vers $f(u)$ presque partout. Mais, $f(u_n)$ est uniformément bornée dans $L^q(\Omega_T)$. Grâce au lemme 8.3 de [68], on peut conclure que $f(u_n) \rightharpoonup f(u)$ dans $L^q(\Omega_T)$ et donc $\Phi = f(u)$.

Pour la continuité des solutions de $[0, T]$ dans \mathcal{H} . On remarque que,

$$u \in L^2(0, T; H^1) \cap L^p(\Omega_T) \text{ et } u_t \in L^2(0, T; (H^1)') \oplus L^q(\Omega_T)^5 = (L^2(0, T; H^1) \cap L^p(\Omega_T))'.$$

D'autre part, $v \in L^2(0, T; H^1)$ et $v_t \in L^2(0, T; (H^1)')$. On en déduit le résultat par l'exercice 8.2 et le théorème 7.2 de [68] (remplaçant H^{-1} par $(H^1)'$, H^{-s} par $(H^s)'$, ...). Ainsi, on a alors $(u, v) \in C(0, T; \mathcal{H})$.

Pour montrer que $(u_n(0), v_n(0)) \rightarrow (u_0, v_0)$, on revoie alors à [68], page 225.

Pour l'unicité et la dépendance aux conditions initiales, on considère deux solutions du problème $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$. On a alors,

$$\begin{cases} \epsilon(u_1 - u_2)_t = f(u_1) - f(u_2) - (v_1 - v_2) + d\Delta u_1 - d\Delta u_2 \\ (v_1 - v_2)_t = a(u_1 - u_2) - b(v_1 - v_2) \end{cases}$$

En multipliant les deux équations par $(u_1 - u_2)$ et $(v_1 - v_2)$, et en sommant, on obtient que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{2dt}(a\epsilon|u_1 - u_2|^2 + |v_1 - v_2|^2) + ad\|u_1 - u_2\|^2 &\leq \int_{\Omega} [a(u_1 - u_2)(f(u_1) - f(u_2)) - b(v_1 - v_2)^2] \\ &\leq \int_{\Omega} a \left(\int_{u_2}^{u_1} f'(s)ds \right) (u_1 - u_2) \\ &\leq \int_{\Omega} al(u_1 - u_2)^2 \\ &\leq al|u_1 - u_2|^2. \end{aligned}$$

En particulier, on a,

$$\frac{d}{dt}(a\epsilon|u_1 - u_2|^2 + |v_1 - v_2|^2) \leq 2al|u_1 - u_2|^2.$$

5. La notation \oplus signifie la somme directe.

Grâce à Lemme de Gronwall, on obtient,

$$\|u_1 - u_2\|^2(t) + \|v_1 - v_2\|^2(t) \leq \left(\|u_1 - u_2\|^2(0) + \|v_1 - v_2\|^2(0) \right) \exp\left(\frac{2lt}{\epsilon}\right).$$

D'où l'unicité et la continuité par rapport aux conditions initiales. \square

Voici maintenant la version forte du théorème 10.

Théorème 7. *On suppose les hypothèses du théorème 10 vérifiées. On suppose de plus que $(u_0, v_0) \in ((H^1 \cap L^p) \times H^1)$. Alors, le système (5.5) admet une unique solution forte,*

$$u \in L^2(0, T; D(A)) \cap C(0, T; H^1); u \in L^\infty(0, T; L^p); v \in L^\infty(0, T; H^1).$$

De plus, si $N \leq 3$, l'application $(u_0, v_0) \mapsto (u(t), v(t))$ est continue dans V .

Démonstration. Il faut faire d'autres estimations. On reprend le système (5.9), et on remplace w_i par $-\Delta u_n$ dans la première équation et par $-\Delta v_n$ dans la seconde⁶ et en sommant, on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{d}{2dt} (a\epsilon\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2) + ad|Au_n|^2 &= - \int_{\Omega} [a(f(u_n) - v_n)\Delta u_n + (au_n - bv_n + c)\Delta v_n] \\ &= \int_{\Omega} [af'(u_n)(\nabla u_n)^2 - b(\nabla v_n)^2] \\ &\leq al\|u_n\|^2, \end{aligned}$$

où l est donné par (5.8). En intégrant cette inégalité entre 0 et T , on a,

$$\frac{1}{2}(a\epsilon\|u_n(T)\|^2 + \|v_n(T)\|^2) + \int_0^T ad|Au_n|^2 \leqslant al \int_0^T \|u_n\|^2 + \frac{1}{2}(a\epsilon\|u_n(0)\|^2 + \|v_n(0)\|^2).$$

Donc, u_n est uniformément bornée dans $L^2(0, T; D(A))$; (u_n, v_n) est dans $L^\infty(0, T; V)$ compte tenu des estimations précédentes. On a ensuite besoin d'autres estimations sur u_{nt} et v_{nt} . On multiplie les deux équations de (5.9) par u_{nt} et v_{nt} . En intégrant et en sommant, on a alors,

$$\begin{aligned} (a\epsilon|u_{nt}|^2 + |v_{nt}|^2) + \frac{d}{2dt} ad\|u_n\|^2 &= \int_{\Omega} [au_{nt}(f(u_n) - v_n) + v_{nt}(au_n - bv_n + c)] \\ &= \int_{\Omega} [af(u_n)u_{nt} - au_{nt}v_n + v_{nt}(au_n - bv_n + c)]. \end{aligned}$$

Soit $\bar{\Gamma}(s) = \int_0^s f(\sigma)d\sigma$, on a, $\forall \delta > 0$,

$$\begin{aligned} a\epsilon|u_{nt}|^2 + |v_{nt}|^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{ad}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} a\bar{\Gamma}(u_n) \right) &\leq \int_{\Omega} [-au_{nt}v_n + v_{nt}(au_n - bv_n + c)] \\ &\leq \int_{\Omega} [\delta(a\epsilon u_{nt}^2 + v_{nt}^2) + k(u_n^2 + v_n^2 + 1)] \\ &\leq \delta(a\epsilon|u_{nt}|^2 + |v_{nt}|^2) + k(|u_n|^2 + |v_n|^2 + |\Omega|), \end{aligned}$$

où k est une constante positive.

En choisissant δ assez petit, on a,

$$(1 - \delta)(a\epsilon|u_{nt}|^2 + |v_{nt}|^2) + \frac{d}{dt} \left(\frac{ad}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} a\bar{\Gamma}(u_n) \right) \leq k(|u_n|^2 + |v_n|^2 + |\Omega|).$$

6. Ce qui est valable car $-\Delta u_n$ et $-\Delta v_n$ sont dans le sous espace engendré par les $(w_i)_{1 \leq i \leq N}$.

En intégrant cette inégalité entre 0 et T , on obtient,

$$\begin{aligned} (1 - \delta) \int_0^T (a\epsilon|u_{nt}|^2 + |v_{nt}|^2) + \left(\frac{ad}{2} \|u_n(T)\|^2 - \int_{\Omega} a\bar{\Gamma}(u_n(T)) \right) \\ \leq k \int_0^T (|u_n|^2 + |v_n|^2 + |\Omega|) + \frac{ad}{2} \|u_n(0)\|^2 - \int_{\Omega} a\bar{\Gamma}(u_n(0)). \end{aligned}$$

Grâce à (5.6) et (5.7), on a,

$$-\bar{\delta}_1|u|^p - \bar{\delta}_3 \leq \bar{\Gamma}(u) \leq -\bar{\delta}_2|u|^p + \bar{\delta}_3,$$

où $\bar{\delta}_i, i = 1, 2, 3$ sont constantes positives.

Donc,

$$\begin{aligned} (1 - \delta) \int_0^T (a\epsilon|u_{nt}|^2 + |v_{nt}|^2) + \left(\frac{ad}{2} \|u_n(T)\|^2 + a\bar{\delta}_2 \int_{\Omega} |u_n(T)|^p \right) \\ \leq 2\bar{\delta}_3 |\Omega| + k \int_0^T (|u_n|^2 + |v_n|^2 + |\Omega|) + \frac{ad}{2} \|u_n(0)\|^2 + a\bar{\delta}_1 \int_{\Omega} |u_n(0)|^p. \end{aligned}$$

Donc u_{nt} et v_{nt} sont uniformément bornées dans $L^2(0, T; L^2)$ et u_n est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; L^p)$. Par extraction de sous suite, on a finalement que,

$$u \in L^\infty(0, T; L^p), u \in L^2(0, T; D(A)) \text{ et } u_t \in L^2(0, T; L^2).$$

Par le corollaire 7.3 de [68] page 193, on en déduit que $u \in C^0([0, T]; H^1)$, et $v \in L^\infty(0, T; H^1)$. L'unicité de la solution se démontre comme il est présenté au Théorème 10, puisque une solution forte est automatiquement une solution faible. \square

3. Existence d'un attracteur du système

On montre maintenant l'existence d'un attracteur global du système dynamique (5.5). Un attracteur global est un ensemble compact invariant pour le flux qui attire toutes les trajectoires (voir [2, 31, 57]). L'étude de l'attracteur est fondamentale, celui-ci étant un ensemble près duquel les solutions évoluent asymptotiquement.

Théorème 8. *Le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ associé au système (5.5) possède un attracteur global connexe dans \mathcal{H} .*

Démonstration. Pour montrer le résultat, on montre l'existence d'un ensemble absorbant dans \mathcal{H} . On montre ensuite l'existence d'un ensemble absorbant dans V , qui attire tous les bornés de \mathcal{H} . Ceci implique que les opérateurs $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sont uniformément compacts grâce à l'injection compacte de H^1 dans L^2 et permet de conclure par application du théorème 1.1 page 23 dans [78].

Ensemble absorbant dans \mathcal{H}

On multiplie la première équation de (5.5) par u , la seconde par v et on intègre sur Ω . En utilisant la formule de Green et (5.6), on obtient,

$$\begin{aligned}
 \Lambda(t) &= \frac{d}{dt}(a\epsilon|u|^2 + |v|^2) + ad\|u\|^2 + b|v|^2 + a\delta_1 \int_{\Omega} |u|^p \\
 &= \int_{\Omega} [au(f(u) + d\Delta u - v) + v(au - bv + c) + ad(\nabla u)^2 + bv^2 + a\delta_1|u|^p] \\
 &= \int_{\Omega} [auf(u) + cv + a\delta_1|u|^p] \\
 &\leq \int_{\Omega} [-a\delta_1|u|^p + a\delta_3 + cv + a\delta_1|u|^p] \\
 &\leq \int_{\Omega} [a\delta_3 + cv] \\
 &\leq \int_{\Omega} \left[k_1 + \frac{b}{2}v^2 \right].
 \end{aligned}$$

On a ainsi,

$$(5.12) \quad \frac{d}{dt}(a\epsilon|u|^2 + |v|^2) + ad\|u\|^2 + \frac{b}{2}|v|^2 + a\delta_1 \int_{\Omega} |u|^p \leq k_1 |\Omega|.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on a,

$$\frac{b}{2} \int_{\Omega} u^2 \leq \frac{a\delta_1}{2} \int_{\Omega} |u|^p + k_2.$$

Donc (5.12) implique,

$$(5.13) \quad \frac{d}{dt}(a\epsilon|u|^2 + |v|^2) + 2ad\|u\|^2 + b(|u|^2 + |v|^2) + a\delta_1 \int_{\Omega} |u|^p \leq k_3,$$

où $k_3 = 2(k_1|\Omega| + k_2)$; (5.13) donne en particulier,

$$\frac{d}{dt}(a\epsilon|u|^2 + |v|^2) + b(|u|^2 + |v|^2) \leq k_3,$$

Soit $m = \min(\frac{b}{a\epsilon}, b)$, on a,

$$\frac{d}{dt}(a\epsilon|u|^2 + |v|^2) + m(a\epsilon|u|^2 + |v|^2) \leq k_3,$$

ce qui implique, en utilisant Lemme de Gronwall,

$$(5.14) \quad (a\epsilon|u|^2 + |v|^2) \leq (a\epsilon|u(0)|^2 + |v(0)|^2) \exp(-mt) + \frac{k_3}{m}(1 - \exp(-mt)).$$

Cette inégalité (5.14) nous donne l'existence d'un ensemble absorbant dans \mathcal{H} : Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout ensemble borné \mathcal{B} de \mathcal{H} , il existe un temps $T(\mathcal{B})$ tel que $S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$ pour tout $t > T$, où \mathcal{B}_0 est la boule de rayon β dans \mathcal{H} . Soit $r > 0$, dans la suite K désigne une constante générique qui ne dépend que de $\Omega, a, b, c, f, \epsilon, r$. Maintenant, en intégrant (5.13) entre t et $t + r$, on obtient,

$$(5.15) \quad 2ad \int_t^{t+r} \|u\|^2 + a\delta_1 \int_t^{t+r} \int_{\Omega} |u|^p \leq rk_3 + (a\epsilon|u|^2 + |v|^2) \leq rk_3 + K.$$

On intègre encore (5.13) en t , on obtient aussi pour $(u(0, x), v(0, x)) = (u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \in \mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$,

$$\int_0^t \|u\|^2 \leq \frac{k_3 t + K}{2ad}, \quad \forall t \geq 0.$$

La solution v de (5.5) peut être écrite $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ avec,

$$(5.16) \quad \begin{cases} v_1(t) = \int_0^t (au + c) \exp(-b(t-s)) ds \\ v_2(t) = v(0) \exp(-bt) \end{cases}$$

et on définit les familles S_1, S_2 des opérateurs de \mathcal{H} dans \mathcal{H} comme suit,

$$(5.17) \quad \begin{cases} S_1 : (u(0), v(0)) \rightarrow (u(t), v_1(t)) \\ S_2 : (u(0), v(0)) \rightarrow (0, v_2(t)) \end{cases}$$

On peut voir que S_2 satisfait, pour tout ensemble borné $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$,

$$r_{\mathcal{B}}(t) \leq \exp(-bt) \sup_{\varphi \in \mathcal{B}} \|\varphi\|_{\mathcal{H}}.$$

Compacité uniforme des opérateurs $\{S(t)\}_{t \geq 0}$

Notre objectif est maintenant de vérifier la compacité uniforme des opérateurs $S_1(t)$ en utilisant des estimations *à priori* uniforme en temps de $u(t)$ et $v_1(t)$ (voir aussi dans [57]).

On multiplie la première équation de (5.5) par $-\Delta u$ et intègre sur Ω . Grâce à la formule de Green, on a,

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= \left[\frac{d}{2dt} (a\epsilon\|u\|^2) + ad \int_{\Omega} (\Delta u)^2 \right] \\ &= \int_{\Omega} [a\nabla u \nabla (f(u) - v)] \\ &= \int_{\Omega} [-af(u)\Delta u + av\Delta u]. \end{aligned}$$

Dû à (5.7), on obtient,

$$\Pi(t) \leq \int_{\Omega} \left[(a|v| + a\delta_4(1 + |u|^{p-1})) |\Delta u| \right].$$

Soit $k_4 = \max(a, a\delta_4)$, on a,

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\leq k_4 \int_{\Omega} \left[(1 + |u|^{p-1} + |v|) |\Delta u| \right] \\ &\leq \frac{k_4^2}{2ad} \int_{\Omega} (1 + |u|^{p-1} + |v|)^2 + \frac{ad}{2} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 \\ &\leq \frac{3k_4^2}{2ad} \int_{\Omega} (1 + |u|^{2(p-1)} + |v|^2) + \frac{ad}{2} \int_{\Omega} (\Delta u)^2. \end{aligned}$$

En particulier, on a,

$$\frac{d}{dt} (a\epsilon\|u\|^2) \leq k_5 \int_{\Omega} (1 + |u|^{2(p-1)} + |v|^2),$$

$$\text{où } k_5 = \frac{3k_4^2}{ad}.$$

En utilisant la technique du lemme 7 ci-dessous pour $k = 1$ et (5.15), on peut vérifier l'existence d'une constante k_6 telle que, $\forall t \geq T + r$,

$$\int_t^{t+r} \int_{\Omega} |u|^{2(p-1)} \leq k_6.$$

Cela implique que, grâce au lemme de Gronwall uniforme,

$$(5.18) \quad a\epsilon \|u\|^2 \leq k_7, \quad \forall t \geq T + 2r.$$

On considère maintenant une estimation du temps uniforme de $v_1(t)$ dans $H^1(\Omega)$. Grâce à (5.14) et (5.16), on peut montrer qu'il existe une constante $k_8 > 0$ telle que, $\forall t \geq 0$,

$$(5.19) \quad |v_1|^2 \leq k_8.$$

Alors, on suppose que,

$$w_j = \frac{\partial v_1}{\partial x_j}, \quad j \in \{1, \dots, N\}$$

et w_j satisfait,

$$(5.20) \quad \begin{cases} \frac{\partial w_j}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x_j} - bw_j \\ w_j(0) = 0 \end{cases}$$

En multipliant (5.20) par w_j et en intégrant sur Ω , on a,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |w_j|^2 + b|w_j|^2 &= \int_{\Omega} \left(w_j \left(a \frac{\partial u}{\partial x_j} - bw_j \right) + bw_j^2 \right) \\ &\leq \int_{\Omega} aw_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ &\leq \frac{b}{2} |w_j|^2 + k_9 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2. \end{aligned}$$

Ceci implique que,

$$(5.21) \quad \frac{d}{dt} |w_j|^2 + b|w_j|^2 \leq 2k_9 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2.$$

En sommant (5.21) de $j = 1$ à $j = N$, on obtient finalement,

$$\frac{d}{dt} \|v_1\|^2 + b\|v_1\|^2 \leq 2k_9 \|u\|^2.$$

On intègre alors cette inégalité ; cela donne, car $v_1(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \|v_1\|^2 &\leq 2k_9 \int_0^t \|u(s)\|^2 \exp(b(s-t)) ds \\ (5.22) \quad &\leq 2k_9 \int_0^{T+2r} \|u(s)\|^2 \exp(b(s-t)) ds + 2k_9 \int_{T+2r}^t \|u(s)\|^2 \exp(b(s-t)) ds \\ &\leq 2k_9 \frac{k_3(T+2r) + K}{2ad} + \frac{2k_9 k_7}{ba\epsilon}. \end{aligned}$$

Notons que, $k_i, i \in \{1, \dots, 9\}$ sont constantes positives qui dépend des donnés.

Les estimations (5.14), (5.18), (5.19) et (5.22) nous donnent la compacité uniforme des opérateurs S_1 . En effet, si $(u(0), v(0))$ est dans un sous-ensemble borné et pour tout $t \geq T + 2r$, alors $S_1(u(0), v(0))$ est dans un ensemble borné de $H^1(\Omega)$ indépendamment de t , et est relativement compact dans \mathcal{H} . On a donc montré l'existence d'un ensemble absorbant borné. \square

Lemme 7. L'attracteur \mathcal{A} défini au théorème 10 est borné dans $(L^q(\Omega))^2$ pour tout $q \in [1, +\infty)$.

Démonstration. Soit $\alpha(k) = k(p-2) + 2$. Puisque $\alpha(k) \rightarrow +\infty$ quand $k \rightarrow +\infty$, il suffit de prouver que \mathcal{A} est borné dans $(L^{\alpha(k)}(\Omega))^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $r > 0$ fixé; on montre par récurrence sur k que,

$$(5.23) \quad \mathcal{A} \text{ est borné dans } (L^{\alpha(k)}(\Omega))^2,$$

et que,

$$(5.24) \quad \sup_{(u_0, v_0) \in \mathcal{A}} \int_t^{t+r} \int_{\Omega} |u|^{\alpha(k+1)} \leq K, \quad \forall t \geq 0,$$

où (u, v) est la solution de (5.5)-(5.8) (voir [57]). Dans la suite, on note par K une constante quelconque qui dépend des donnés du problème (5.5)-(5.4) et de k .

- Pour $k = 0$: on a, $\alpha(0) = 2$ et $\alpha(1) = p$.

Alors, (5.23) est prouvé grâce au théorème 8. Soit $(u_0, v_0) \in \mathcal{A}$, grâce à (5.15), on a,

$$\left(a\delta_1 \int_t^{t+r} \int_{\Omega} |u|^p \right) \leq rk_3 + (a\epsilon|u|^2 + |v|^2) \leq K,$$

ce qui prouve (5.24).

- On suppose que (5.23) et (5.24) sont vraies pour $k-1$ ($k \geq 1$). En particulier, il existe une constante $K > 0$ telle que,

$$(5.25) \quad \int_{\Omega} |v|^{\alpha(k-1)} \leq K, \quad \forall (u, v) \in \mathcal{A},$$

puisque \mathcal{A} est borné dans $(L^{\alpha(k-1)}(\Omega))^2$. Soit $(u_0, v_0) \in \mathcal{A}$. En multipliant la première équation de (5.5) par $u|u|^{\alpha(k)-2}$ et en intégrant sur Ω , on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha(k)} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^{\alpha(k)} &= \int_{\Omega} [f(u)u|u|^{\alpha(k)-2} + du|u|^{\alpha(k)-2}\Delta u - vu|u|^{\alpha(k)-2}] \\ &= \int_{\Omega} [f(u)u|u|^{\alpha(k)-2} - (\alpha(k)-1)d|u|^{\alpha(k)-2}(\nabla u)^2 - vu|u|^{\alpha(k)-2}] \\ &\leq \int_{\Omega} [f(u)u|u|^{\alpha(k)-2} - vu|u|^{\alpha(k)-2}] \\ &\leq \int_{\Omega} [-vu|u|^{\alpha(k)-2} - |u|^{\alpha(k)-2}\delta_1|u|^p + |u|^{\alpha(k)-2}\delta_3]. \end{aligned}$$

Cela implique que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha(k)} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^{\alpha(k)} + \delta_1 \int_{\Omega} |u|^{\alpha(k+1)} &\leq \int_{\Omega} [-vu|u|^{\alpha(k)-2} + \delta_3|u|^{\alpha(k)-2}] \\ &\leq \int_{\Omega} [\delta_3|u|^{\alpha(k)-2} + |v||u|^{\alpha(k)-1}] \\ &\leq (\frac{\delta_1}{4} \int_{\Omega} |u|^{\alpha(k+1)} + K + \int_{\Omega} |v||u|^{\alpha(k)-1}). \end{aligned}$$

Ainsi on a,

$$\frac{1}{\alpha(k)} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^{\alpha(k)} + \frac{3\delta_1}{4} \int_{\Omega} |u|^{\alpha(k+1)} \leq K + \int_{\Omega} |v||u|^{\alpha(k)-1}.$$

Soit $\bar{p} = \frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)-1}$ et soit \bar{q} est tel que $\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = 1$, on peut vérifier que $\bar{q} < \alpha(k-1)$. Grâce à l'inégalité de Young, on a,

$$\int_{\Omega} |v| |u|^{\alpha(k)-1} \leq \frac{\delta_1}{4} \int_{\Omega} |u|^{\alpha(k+1)} + K \int_{\Omega} |v|^{\bar{q}}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et grâce à (5.25), on a,

$$\int_{\Omega} |v|^{\bar{q}} \leq |\Omega|^{1-\frac{\bar{q}}{\alpha(k-1)}} \left(\int_{\Omega} |v|^{\alpha(k-1)} \right)^{\frac{\bar{q}}{\alpha(k-1)}} \leq K.$$

En combinant les inégalités au-dessus, on obtient,

$$(5.26) \quad \frac{1}{\alpha(k)} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^{\alpha(k)} + \frac{\delta_1}{2} \int_{\Omega} |u|^{\alpha(k+1)} \leq K.$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence (5.24) pour $k-1$, on applique Lemme de Gronwall à (5.26), on conclut que,

$$\int_{\Omega} |u|^{\alpha(k)} \leq K, \quad \forall t \geq r.$$

Car $S(r)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ (où $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est le semi-groupe associé à (5.5)), ceci implique,

$$(5.27) \quad \int_{\Omega} |u|^{\alpha(k)} \leq K, \quad \forall (u, v) \in \mathcal{A}.$$

En intégrant (5.26) entre t et $t+r$, et en utilisant (5.27), on a,

$$\sup_{(u_0, v_0) \in \mathcal{A}} \int_t^{t+r} \int_{\Omega} |u|^{\alpha(k+1)} \leq K, \quad \forall t \geq 0.$$

Il reste à vérifier le bornage pour v . Il suffit de montrer que,

$$(5.28) \quad \int_{\Omega} |v|^{\alpha(k)} \leq K, \quad \forall (u, v) \in \mathcal{A}, \forall t \geq 0.$$

Soit $(u, v) \in \mathcal{A}$. Il existe une suite $(u_m, v_m) \in \mathcal{A}$ et une suite $t_m \rightarrow +\infty$ telles que,

$$S_1(t_m).(u_m, v_m) \rightarrow (u, v), \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty$$

où $S_1(t)$ est donné par (5.17). En effet, ceci vient de l'invariance fonctionnelle de \mathcal{A} et de la propriété $S_2(t) = S(t) - S_1(t)$.

Ainsi, par (5.16) et (5.27), on a, $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|v_{1m}(t)\|_{L^{\alpha(k)}(\Omega)} &\leq \int_0^t \|au_m + c\|_{L^{\alpha(k)}(\Omega)} \exp(-b(t-s)) ds \\ &\leq K \int_0^t \||u_m| + 1\|_{L^{\alpha(k)}(\Omega)} \exp(-b(t-s)) ds \\ &\leq \frac{K}{b}. \end{aligned}$$

ce qui implique (5.28), car il existe une sous suite m_l telle que,

$$\|v(t)\|_{L^{\alpha(k)}(\Omega)} \leq \liminf_{l \rightarrow +\infty} \|v_{1m_l}(t_{m_l})\|_{L^{\alpha(k)}(\Omega)}.$$

- Ce qui complète la démonstration du lemme. \square

Théorème 9. *Sous les hypothèses (5.6)-(5.8), l'attracteur global \mathcal{A} défini au théorème 10 est borné dans $(L^\infty(\Omega))^2$.*

Démonstration. Soit $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{A}$ et soit $\bar{t} > 0$. Puisque \mathcal{A} est un ensemble invariant, il existe une solution (u, v) de (5.5)-(5.4) vérifiant (5.6)-(5.8) qui satisfait $(u_0, v_0) \in \mathcal{A}$ et $(u(\bar{t}), v(\bar{t})) = (\bar{u}, \bar{v})$. Soit $\Sigma(t)$ le semi-groupe associé à l'opérateur linéaire $\frac{\epsilon\partial}{\partial t} - d\Delta + I$ et avec une condition aux bords de Neumann, alors on peut écrire u comme suit,

$$(5.29) \quad u(t) = \Sigma(t)u_0 + \int_0^t \Sigma(t-s) \{f(u(s)) - v(s) + u(s)\} ds, \quad t \geq 0.$$

Le semi-groupe $\Sigma(t)$ satisfait la propriété régulière (voir Rothe [69]),

$$\|\Sigma(t)\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq km(t)^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}\|\varphi\|_{L^N(\Omega)},$$

où $m(t) = \min(1, t)$, λ est la plus petite valeur propre de l'opérateur $-d\Delta + I$ associé, avec condition aux bords de Neumann, et k une constante positive. Alors, grâce au Lemme 7 (avec $q = N$), il existe une constante $K > 0$ telle que,

$$\begin{cases} \|u\|_{L^N(\Omega)} \leq K \\ \|f(u) - v + u\|_{L^N(\Omega)} \leq K \end{cases}$$

On a, grâce à (5.29),

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq kK \left\{ m(t)^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}m(t-s)^{-\frac{1}{2}}ds \right\}, \quad \forall t \geq 0 \\ &\leq kK \left\{ m\left(\frac{\bar{t}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 2 + \frac{1}{\lambda} \right\}, \quad \forall t \geq \frac{\bar{t}}{2}. \end{aligned}$$

En particulier, $\bar{u} = u(\bar{t})$ satisfait,

$$\|\bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq kK \left\{ m\left(\frac{\bar{t}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 2 + \frac{1}{\lambda} \right\}, \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{A}.$$

Finalement, la borne de $\|\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}$ vient de celle de $\|\bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)}$ comme il est montré au Lemme 7. Ceci complète la démonstration. \square

4. Simulations numériques

Une onde spirale

On a vu que les spirales apparaissent dans de nombreuses applications. Des ondes spirales ont pu être observées dans le cœur et le cerveau. Dans le cœur, ces patterns n'apparaissent pas lors d'un fonctionnement normal et sont donc liés aux arythmies. Des auteurs comme A.T. Winfree, ont étudié les modèles d'oscillations en vue de leur application aux arythmies. C'est une perspective de grand intérêt. On renvoie à [61] pour quelques références sur ce sujet. On y trouvera également une illustration de spirales produites dans un cœur de lapin, et dans le

cortex cérébral lésionné d'un rat. Dans [23], on met également en évidence des spirales dans le cœur d'un mouton.

On considère le système (5.3)-(5.4) avec $f(u) = -u^3 + 3u$, $a = 1$, $b = 0.001$, $c = 0$, $\epsilon = 0.1$, $d = 0.05$ et Ω est un carré. On divise le domaine en quatre parties d'aires à peu près égales. On prend comme conditions initiales une fonction $(u(x, 0), v(x, 0))$ constante sur chacune de ces parties, de telle sorte que ces constantes soient régulièrement déphasées sur le cycle limite du système sans diffusion. Ces conditions initiales sont illustrées sur la figure 5.1. On simule alors le système numériquement en discrétilisant le domaine en 100×100 carrés et on utilise la méthode des Différences finies. On obtient alors la solution asymptotique de la figure 5.2.

$(u, v)(0) = (0, -1)$	$(u, v)(0) = (-1, 0)$
$(u, v)(0) = (1, 0)$	$(u, v)(0) = (0, 1)$

Figure 5.1. *Conditions initiales donnant lieu à la solution "Onde spirale".*

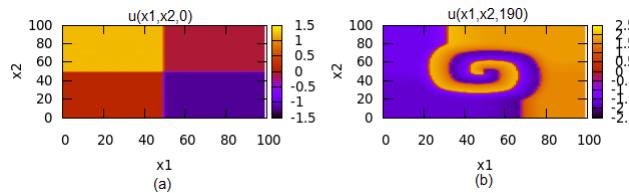


Figure 5.2. Onde spirale : la figure (a) représente, pour $t = 0$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 0)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). La figure (b) représente, pour $t = 190$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 190)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). Ce type d'onde spirale est obtenu par un choix de conditions initiales de la figure 5.1.

Plusieurs ondes spirales

Maintenant, on divise le domaine Ω en 16 et en 64, pour reproduire les configurations précédentes symétriquement (voir la figure 5.3 et 5.5). On peut ainsi obtenir 4 et 16 spirales (voir la figure 5.4 et 5.6).

$(0, -1)$	$(-1, 0)$	$(-1, 0)$	$(0, -1)$
$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$
$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$
$(0, -1)$	$(-1, 0)$	$(-1, 0)$	$(0, -1)$

Figure 5.3. *Conditions initiales donnant lieu à la solution "Onde spirale".*

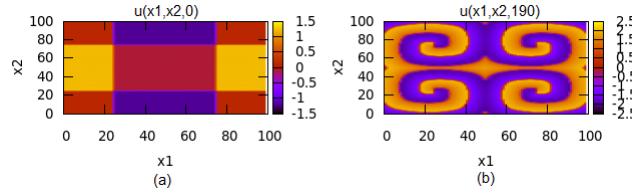


Figure 5.4. 4 spirales : la figure (a) représente, pour $t = 0$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 0)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). La figure (b) représente, pour $t = 190$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 190)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). Ce type d'onde spirale est obtenu par un choix de conditions initiales de la figure 5.3.

(0, -1)	(-1, 0)	(-1, 0)	(0, -1)	(0, -1)	(-1, 0)	(-1, 0)	(0, -1)
(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)
(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)
(0, -1)	(-1, 0)	(-1, 0)	(0, -1)	(0, -1)	(-1, 0)	(-1, 0)	(0, -1)
(0, -1)	(-1, 0)	(-1, 0)	(0, -1)	(0, -1)	(-1, 0)	(-1, 0)	(0, -1)
(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)
(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 1)	(1, 0)
(0, -1)	(-1, 0)	(-1, 0)	(0, -1)	(0, -1)	(-1, 0)	(-1, 0)	(0, -1)

Figure 5.5. Conditions initiales donnant lieu à la solution "Onde spirale".

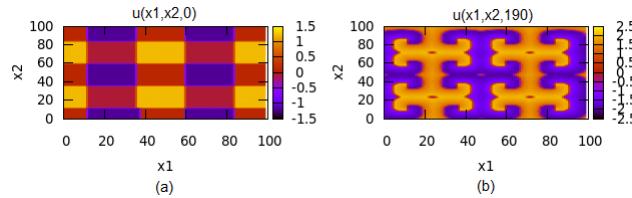


Figure 5.6. 16 spirales : la figure (a) représente, pour $t = 0$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 0)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). La figure (b) représente, pour $t = 190$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 190)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). Ce type d'onde spirale est obtenu par un choix de conditions initiales de la figure 5.5.

Miroir

On divise verticalement ou horizontalement le domaine Ω en deux parties (voir la figure 5.7 et 5.9), et on prend comme condition initiale une fonction $(u(0), v(0))$ constante sur chacune de ces divisions du domaine. Visuellement, on peut difficilement parler de propagation d'ondes mais plutôt d'oscillations en opposition de phase. Ces observations sont illustrées sur la figure 5.8, et 5.10, on a intitulé ces solutions "Miroir".

$(u, v)(0) = (-1, 1)$	$(u, v)(0) = (1, -1)$
-----------------------	-----------------------

Figure 5.7. Conditions initiales donnant lieu à la solution "Miroir", le domaine Ω est divisé verticalement en deux parties.

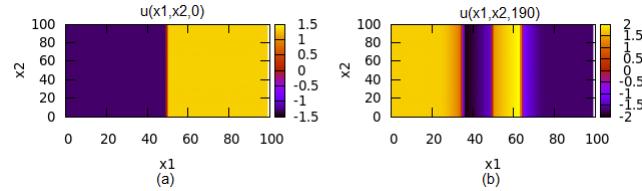


Figure 5.8. Miroir vertical : la figure (a) représente, pour $t = 0$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 0)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). La figure (b) représente, pour $t = 190$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 190)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). Ce type d'onde miroir est obtenu par un choix de conditions initiales de la figure 5.7.

$(u, v)(0) = (-1, 1)$
$(u, v)(0) = (1, -1)$

Figure 5.9. Conditions initiales donnant lieu à la solution "Miroir", le domaine Ω est divisé horizontalement en deux parties.

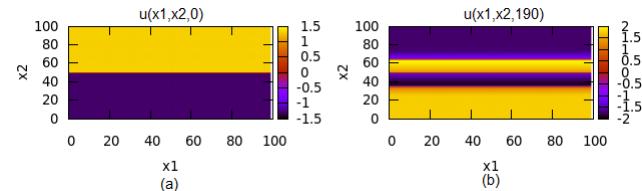


Figure 5.10. Miroir horizontal : la figure (a) représente, pour $t = 0$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 0)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). La figure (b) représente, pour $t = 190$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 190)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). Ce type d'onde miroir est obtenu par un choix de conditions initiales de la figure 5.9.

Conditions initiales homogènes

Dans ce cas, on prend les conditions initiales homogènes pour le domaine Ω (voir la figure 5.11). On observe alors une seule couleur dans le domaine, ce qui correspond à une valeur de la

solution stationnaire du système (voir la figure 5.12).

$$(u, v)(0) = (1, 1)$$

Figure 5.11. Conditions initiales homogènes pour le domaine Ω .

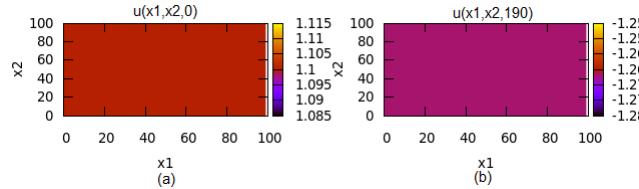


Figure 5.12. *Solution stationnaire* : la figure (a) représente, pour $t = 0$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 0)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). La figure (b) représente, pour $t = 190$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 190)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). Cette solution est obtenue par un choix de conditions initiales homogènes de la figure 5.11.

Conditions initiales aléatoires

Maintenant, on prend la condition initiale comme une fonction $(u(0), v(0))$ qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Visuellement, on peut difficilement parler de propagation d'ondes mais plutôt d'oscillations. Ces observations sont illustrées sur la figure 5.13, on a intitulé ces solutions "aléatoires".

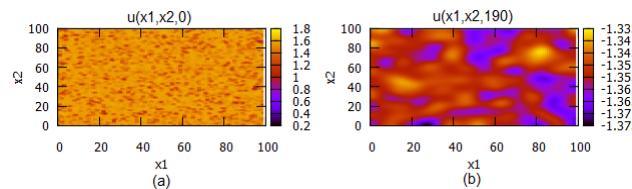


Figure 5.13. *Solution aléatoire* : la figure (a) représente, pour $t = 0$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 0)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). La figure (b) représente, pour $t = 190$ fixé, les isovaleurs $u(x_1, x_2, 190)$ d'une solution du système (5.3)-(5.4). Cette solution est obtenue par un choix de conditions initiales de la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

5. Stabilité des états d'équilibre

Dans ce paragraphe, on va étudier la stabilité des états d'équilibre du système (5.30),

$$(5.30) \quad \begin{cases} \epsilon u_t = -u^3 + 3u - v + d\Delta u \\ v_t = au - bv + c \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

c'est à dire la stabilité des solutions du système (5.31),

$$(5.31) \quad \begin{cases} -u^3 + 3u - v + d\Delta u = 0 \\ au - bv + c = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, u correspond au potentiel de membrane, tandis que v correspond aux flux lents d'ions à travers la membrane, et a, b, c, d et τ sont des paramètres fixés, $a, b, d, \tau > 0$.

On établit aisément que toute solution $E = (u^*, v^*)$ du système (5.30) vérifie le système suivant,

$$\begin{cases} -u^3 + 3u - v = 0 \\ au - bv + c = 0 \end{cases}$$

5.1. Stabilité locale des états d'équilibre

Proposition 1. Si $\frac{3}{\epsilon} < b < \frac{a}{3}$, l'équilibre $E = (u^*, v^*)$ est localement stable.

Démonstration. Soit $(u(x, t), v(x, t))$ une solution du système (5.30), on peut l'écrire sous la forme suivante,

$$(u(x, t), v(x, t)) = E + W(x, t) = E + (w_1(x, t), w_2(x, t)).$$

En utilisant cette dernière expression dans le système (5.30), on obtient,

$$(5.32) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = D\Delta W + \Sigma W,$$

où $D = \text{diag}(\frac{d}{\epsilon}, 0)$ et $\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{-3u^{*2} + 3}{\epsilon} & -1 \\ a & -b \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne du système au point stationnaire E .

Soit ϕ_j la j ème fonction propre définie sur Ω du problème dont l'opérateur associé est $-\Delta$ et dont les conditions aux bords sont de type Neumann homogène. En d'autres termes, le problème considéré est,

$$\begin{cases} -\Delta \phi_j = \lambda_j \phi_j, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial \nu} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où les λ_j sont des scalaires vérifiant $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$

D'après l'équation (5.32), le système linéarisé du problème (5.30) au voisinage de (u^*, v^*) est,

$$(5.33) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = D\Delta W + \Sigma W,$$

où l'expression développée de la solution W de (5.33) est la suivante,

$$(5.34) \quad W = \sum_{j=0}^{\infty} z_j(t) \phi_j(x),$$

où chaque $z_j(t) \in \mathbb{R}^2$. En substituant l'expression (5.34) dans l'équation (5.33) puis en égalisant les coefficients de chaque ϕ_j , on obtient,

$$\frac{dz_j}{dt} = C_j z_j, \quad \text{où } C_j = \Sigma - \lambda_j D.$$

Ainsi, l'équilibre homogène (u^*, v^*) est stable si et seulement si chaque $z_j(t)$ décroît vers zéro. Ce qui revient à dire que toutes les valeurs propres de chaque C_j sont de parties réelles négatives. Les valeurs propres $\eta_{1,2}$ de C_j sont déterminées en résolvant l'équation suivante,

$$\eta^2 - \eta \left(\frac{-3u^{*2} + 3 - \lambda_j d}{\epsilon} - b \right) - b \cdot \frac{-3u^{*2} + 3 - \lambda_j d}{\epsilon} + \frac{a}{\epsilon} = 0.$$

Remarquons que,

$$\text{Tr}(C_j) = \frac{-3u^{*2} + 3 - \lambda_j d}{\epsilon} - b$$

et

$$\text{Det}(C_j) = -b \cdot \frac{-3u^{*2} + 3 - \lambda_j d}{\epsilon} + \frac{a}{\epsilon} > 0,$$

pour $a > 3b$. Par conséquent, la partie réelle de chaque valeur propre de C_j est négative si on a,

$$\text{Tr}(C_j) < 0, \text{ Det}(C_j) > 0.$$

Condition satisfaite si, $\frac{3}{\epsilon} < b < \frac{a}{3}$. Ainsi, E est localement stable. \square

5.2. Stabilité globale de l'équilibre homogène

Soit $E = (u^*, v^*)$ est une solution du système (5.30), $b_1 = f'(u^*)$ et $b_2 = \frac{f''(u^*)}{2}$, où $f(u) = -u^3 + 3u$.

Proposition 2. Si $\frac{b_2^2}{9} + 8 + \frac{4b_1}{3} < 0$, l'équilibre E est globalement stable.

Démonstration. La preuve du théorème est basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov. Pour cela, on considère la fonction W définie par,

$$W(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[a\epsilon(u - u^*)^2 + (v - v^*)^2 \right] dx.$$

Notre objectif est de montrer que W est une fonction de Lyapunov, avec une dérivée orbitale négative. Pour toute solution de (5.30) et la condition initiale (u_0, v_0) , on a,

$$W(u^*, v^*) = 0,$$

et

$$W(u, v) > 0, \forall (u, v) \neq (u^*, v^*).$$

Il nous reste à vérifier l'inégalité suivante, $\frac{dW(u, v)}{dt} < 0$. En effet,

$$\begin{aligned}
 \frac{dW(u, v)}{dt} &= \int_{\Omega} [a\epsilon(u - u^*)u_t + (v - v^*)v_t] dx \\
 &= \int_{\Omega} [a(u - u^*)(-u^3 + 3u - v + d\Delta u) + (v - v^*)(au - bv + c)] dx \\
 &= \int_{\Omega} [a(u - u^*)(-u^3 + 3u - v + (u^*)^3 - 3u^* + v^* + d\Delta u) \\
 &\quad + (v - v^*)(au - bv - au^* + bv^*)] dx \\
 &= -a \int_{\Omega} (u - u^*)^2(u^2 + uu^* + (u^*)^2 - 3) dx - b \int_{\Omega} (v - v^*)^2 dx + ad \int_{\Omega} (u - u^*)\Delta u dx \\
 &= -a \int_{\Omega} (u - u^*)^2(u^2 - \frac{b_2}{3}u - 2 - \frac{b_1}{3}) dx - b \int_{\Omega} (v - v^*)^2 dx - ad \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx.
 \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse $\frac{b_2^2}{9} + 8 + \frac{4b_1}{3} < 0$, on a $\frac{dW(u, v)}{dt} < 0$. Par conséquent d'après le théorème de La Salle [53], E est globalement asymptotiquement stable. \square

6. Existence de travelling wave en dimension 1

Dans cette partie, on étudie le modèle de FitzHugh-Nagumo en prenant en compte le potentiel de membrane $u(x, t)$, les flux lents d'ions à travers la membrane $v(x, t)$, sous la forme,

$$(5.35) \quad \begin{cases} \epsilon \frac{\partial u}{\partial t} = f(u) - v + d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < +\infty, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = au - bv + c \end{cases}$$

où $f(u) = -u^3 + 3u$ et $0 < \epsilon \ll 1$, a, b, c et d sont des constantes (a, b et d sont strictement positifs).

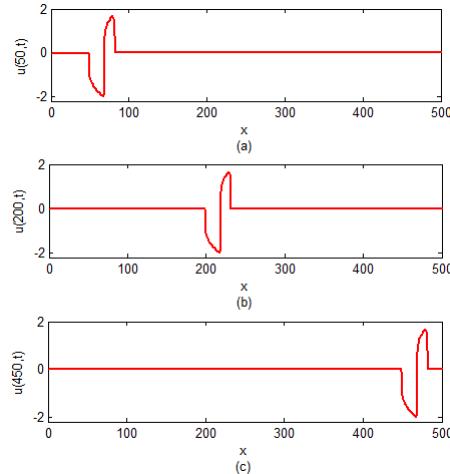


Figure 5.14. Comportement temporel d'une traveling wave du système (5.35), avec $a = 1, b = 0.001, c = 0, d = 0.005$ et $\epsilon = 0.1$.

On a besoin d'une solution sous la forme,

$$u(x, t) = U(\xi) \quad \text{et} \quad v(x, t) = V(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi = x + \tau t,$$

où τ est la vitesse de la propagation des ondes.

Finalement, on trouve l'équation de propagation des ondes comme suivante,

$$(5.36) \quad \begin{cases} \dot{U} = W \\ \dot{W} = \frac{1}{d}[\tau\epsilon W - f(U) + V] \\ \dot{V} = \frac{1}{\tau}(aU - bV + c) \end{cases}$$

avec les conditions en frontière $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} (U, W, V)(\xi) = (U_E, W_E, V_E)$, où $E = (U_E, W_E, V_E)$ est le point d'équilibre du système (5.36).

On étudie l'existence d'une bifurcation homocline dans le système (5.36). Rappelons donc tout d'abord la définition d'une orbite homocline.

Une orbite homocline est une solution γ bornée d'un système qui tend vers un point d'équilibre du système lorsque $t \rightarrow \pm\infty$. Ainsi, si E est un point d'équilibre, alors γ est une orbite homocline au point E si,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma = E.$$

Afin de montrer l'existence d'une orbite homocline dans le système (5.36), on utilise la méthode des coefficients indéterminés, comme utilisée dans [50] ou [93].

Remarque 2. L'existence et la stabilité des *travelling waves* dans le système FHN est un sujet qui a été très étudié depuis les années 70, avec les travaux [38, 42] et jusqu'à nos jours (voir [41] et les références qui y sont citées). Ici, on a juste voulu calculer les premiers coefficients du développement asymptotique. Il ne s'agit donc ici que d'un travail préliminaire, à la marge du travail de cette thèse, qui devrait être approfondi, en le reliant aux analyses lent-rapide existantes et en l'étendant aux cas des réseaux.

Temps positifs

Pour $\xi > 0$, supposons que les solutions peuvent s'écrire sous la forme,

$$(5.37) \quad \begin{cases} U(\xi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\alpha\xi} \\ W(\xi) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{k\alpha\xi} \\ V(\xi) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{k\alpha\xi} \end{cases}$$

où a_k, b_k et c_k sont coefficients indéterminés.

On peut alors substituer l'expression de U, W et V de (5.37) dans (5.36) et, on obtient le

système suivant,

$$\begin{cases} \dot{U} = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{k\alpha\xi} \\ \dot{W} = \frac{1}{d} \left[\tau \epsilon \left(b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{k\alpha\xi} \right) + \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\alpha\xi} \right)^3 \right. \\ \quad \left. - 3 \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\alpha\xi} \right) + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{k\alpha\xi} \right] \\ \dot{V} = \frac{1}{\tau} \left[a \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\alpha\xi} \right) - b \left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{k\alpha\xi} \right) + c \right] \end{cases}$$

Parallèlement, on dérive (5.37) et on obtient,

$$\begin{cases} \dot{U} = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha a_k e^{k\alpha\xi} \\ \dot{W} = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha b_k e^{k\alpha\xi} \\ \dot{V} = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha c_k e^{k\alpha\xi} \end{cases}$$

Lorsque l'on identifie les membres de droite de deux systèmes précédents, on obtient,

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha a_k e^{k\alpha\xi} = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{k\alpha\xi} \\ \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha b_k e^{k\alpha\xi} = \frac{1}{d} \left[\epsilon \tau b_0 + c_0 + a_0^3 - 3a_0 + \epsilon \tau \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{k\alpha\xi} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{k\alpha\xi} \right. \\ \quad \left. + (3a_0^2 - 3) \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\alpha\xi} + 3a_0 \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\alpha\xi} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\alpha\xi} \right)^3 \right] \\ \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha c_k e^{k\alpha\xi} = \frac{1}{\tau} \left(aa_0 - bc_0 + c + a \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\alpha\xi} - b \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{k\alpha\xi} \right) \end{cases}$$

On peut donc identifier les termes de même ordre dans les membres de gauche et de droite et pour les termes constants, on obtient,

$$(5.38) \quad \begin{cases} b_0 = 0 \\ \epsilon \tau b_0 + c_0 + a_0^3 - 3a_0 = 0 \\ \frac{1}{\tau} (aa_0 - bc_0 + c) = 0 \end{cases}$$

La résolution de (5.38) a déjà été faite lors de l'étude des points d'équilibre et on sait donc que a_0, b_0 et c_0 sont les coordonnées d'un point d'équilibre du système (5.36),

$$(5.39) \quad (a_0, b_0, c_0) = (U_E, W_E, V_E).$$

Ainsi, en temps positif, pour que la trajectoire définie par $(U(\xi), W(\xi), V(\xi))$ dans (5.37) soit homocline au point d'équilibre E , il est nécessaire d'avoir,

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\alpha\xi} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{k\alpha\xi} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{k\alpha\xi} = 0.$$

Par ailleurs, l'identification des termes en $e^{\alpha\xi}$ nous permet d'obtenir le système,

$$\begin{cases} \alpha a_1 e^{\alpha\xi} = b_1 e^{\alpha\xi} \\ \alpha b_1 e^{\alpha\xi} = \frac{1}{d} (\epsilon \tau b_1 e^{\alpha\xi} + c_1 e^{\alpha\xi} + (3a_0^2 - 3)a_1 e^{\alpha\xi}) \\ \alpha c_1 e^{\alpha\xi} = \frac{1}{\tau} a a_1 e^{\alpha\xi} - \frac{b}{\tau} c_1 e^{\alpha\xi} \end{cases}$$

et on a donc le système suivant, que l'on constate équivalent au système donné par,

$$(\alpha I - J_{(U_E, W_E, V_E)})(a_1, b_1, c_1)^T = (0, 0, 0)^T$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 - b_1 = 0 \\ \alpha b_1 - \frac{1}{d} \epsilon \tau b_1 - \frac{1}{d} c_1 - \frac{1}{d} (3a_0^2 - 3)a_1 = 0 \\ \alpha c_1 - \frac{a}{\tau} a_1 + \frac{b}{\tau} c_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha I - J_{(U_E, W_E, V_E)}) \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $J_{(U_E, W_E, V_E)}$ est la matrice jacobienne du système (5.36) au point (U_E, W_E, V_E) .

Afin de s'assurer que $A_1 = (a_1, b_1, c_1) \neq (0, 0, 0)$, on va procéder par l'absurde et supposer que $A_1 = (a_1, b_1, c_1) = (0, 0, 0)$, pour montrer que dans ce cas, $A_k = (a_k, b_k, c_k) = (0, 0, 0), \forall k > 1$. L'identification des termes en $e^{2\alpha\xi}$ permet d'obtenir le système,

$$\begin{cases} 2\alpha a_2 e^{2\alpha\xi} = b_2 e^{2\alpha\xi} \\ 2\alpha b_2 e^{2\alpha\xi} = \frac{1}{d} (\epsilon \tau b_2 e^{2\alpha\xi} + c_2 e^{2\alpha\xi} + (3a_0^2 - 3)a_2 e^{2\alpha\xi} + 3a_0 a_1^2 e^{2\alpha\xi}) \\ 2\alpha c_2 e^{2\alpha\xi} = \frac{1}{\tau} a a_2 e^{2\alpha\xi} - \frac{b}{\tau} c_2 e^{2\alpha\xi} \end{cases}$$

C'est à dire par,

$$(5.40) \quad \begin{cases} 2\alpha a_2 - b_2 = 0 \\ 2\alpha b_2 - \frac{1}{d} \epsilon \tau b_2 - \frac{1}{d} c_2 - \frac{1}{d} (3a_0^2 - 3)a_2 - \frac{1}{d} 3a_0 a_1^2 = 0 \\ 2\alpha c_2 - \frac{a}{\tau} a_2 + \frac{b}{\tau} c_2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, si $(a_1, b_1, c_1) = (0, 0, 0)$, alors le système (5.40) devient,

$$\begin{cases} 2\alpha a_2 - b_2 = 0 \\ 2\alpha b_2 - \frac{1}{d} \epsilon \tau b_2 - \frac{1}{d} c_2 - \frac{1}{d} (3a_0^2 - 3)a_2 = 0 \\ 2\alpha c_2 - \frac{a}{\tau} a_2 + \frac{b}{\tau} c_2 = 0 \end{cases}$$

L'écriture matricielle est $MA_2 = \mathbf{0}$ où,

$$M = \begin{pmatrix} 2\alpha & -1 & 0 \\ -\frac{1}{d} (3a_0^2 - 3) & 2\alpha - \frac{1}{d} \epsilon \tau & -\frac{1}{d} \\ -\frac{a}{\tau} & 0 & 2\alpha + \frac{b}{\tau} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\det(M) \neq 0$, alors M est inversible et donc $MA_2 = \mathbf{0}$ si seulement si $A_2 = \mathbf{0}$. Montrons donc que $\det(M) \neq 0$.

$$\det(M) = 2\alpha(2\alpha - \frac{1}{d}\tau\epsilon)(2\alpha + \frac{b}{\tau}) = 8\alpha^3 + (\frac{4b}{\tau} - \frac{1}{d}4\tau\epsilon)\alpha^2 - 2\frac{1}{d}b\epsilon\alpha,$$

ce qui implique que c'est impossible d'avoir $\det(M) = 0, \forall \alpha$. Ainsi, on en conclut que si $A_1 = 0$ alors $A_2 = 0$ et on peut montrer de la même façon que $A_1 = 0 \Rightarrow A_k = 0, \forall k > 1$.

Donc, on a montré que $(a_1, b_1, c_1)^T \neq (0, 0, 0)^T$.

Calcul de (a_1, b_1, c_1)

On a vu précédemment que les coefficients (a_1, b_1, c_1) sont donnés par la résolution du système,

$$\begin{cases} \alpha a_1 - b_1 = 0 \\ \alpha b_1 - \frac{1}{d}\epsilon\tau b_1 - \frac{1}{d}c_1 - \frac{1}{d}(3a_0^2 - 3)a_1 = 0 \\ \alpha c_1 - \frac{a}{\tau}a_1 + \frac{b}{\tau}c_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\alpha I - J_{(U_E, W_E, V_E)} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or, si $\left(\alpha I - J_{(U_E, W_E, V_E)} \right)$ était inversible, on aurait $(a_1, b_1, c_1) = (0, 0, 0)$. Trouvons donc les conditions pour lesquelles $\det\left(\alpha I - J_{(U_E, W_E, V_E)}\right) = 0$, de telle sorte que $(a_1, b_1, c_1) \neq (0, 0, 0)$.

$$\left(\alpha I - J_{(U_E, W_E, V_E)} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -\frac{1}{d}(3a_0^2 - 3) & \alpha - \frac{1}{d}\epsilon\tau & -\frac{1}{d}b \\ -\frac{a}{\tau} & 0 & \alpha + \frac{b}{\tau} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a,

$$\begin{aligned} \det\left(\alpha I - J_{(U_E, W_E, V_E)}\right) &= \alpha(\alpha - \frac{1}{d}\tau\epsilon)(\alpha + \frac{b}{\tau}) = \alpha^3 + (\frac{b}{\tau} - \frac{1}{d}\epsilon\tau)\alpha^2 - \frac{1}{d}b\epsilon\alpha \\ &= \alpha[\alpha^2 + (\frac{b}{\tau} - \frac{1}{d}\epsilon\tau)\alpha - \frac{1}{d}b\epsilon]. \end{aligned}$$

Comme on cherche une orbite homocline, il faut que,

$$\begin{cases} U(\xi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{k\alpha\xi} \xrightarrow[\xi \rightarrow +\infty]{} a_0 = U_E \\ W(\xi) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{k\alpha\xi} \xrightarrow[\xi \rightarrow +\infty]{} b_0 = W_E \\ V(\xi) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{k\alpha\xi} \xrightarrow[\xi \rightarrow +\infty]{} c_0 = V_E \end{cases}$$

Il est donc nécessaire d'avoir $\alpha < 0$ pour $\xi > 0$. Trouvons donc les conditions sous lesquelles un $\alpha < 0$ vérifiant $\alpha[\alpha^2 + (\frac{b}{\tau} - \frac{1}{d}\epsilon\tau)\alpha - \frac{1}{d}b\epsilon] = 0$ existe. Ainsi, on doit résoudre,

$$(5.41) \quad \alpha^2 + (\frac{b}{\tau} - \frac{1}{d}\epsilon\tau)\alpha - \frac{1}{d}b\epsilon = 0.$$

Posons $\Delta = (\frac{b}{\tau} - \frac{1}{d}\epsilon\tau)^2 + 4\frac{1}{d}b\epsilon > 0$. Donc, (5.41) a deux racines réelles et la condition vérifiée si l'une de ces deux racines est négative.

Afin de déterminer l'expression analytique de (a_1, b_1, c_1) , revenons au système,

$$\begin{cases} \alpha a_1 - b_1 = 0 \\ \alpha b_1 - \frac{1}{d}\epsilon\tau b_1 - \frac{1}{d}c_1 - \frac{1}{d}(3U_E^2 - 3)a_1 = 0 \\ \alpha c_1 - \frac{a}{\tau}a_1 + \frac{b}{\tau}c_1 = 0 \end{cases}$$

On a donc,

$$(5.42) \quad \begin{cases} b_1 = \alpha a_1 \\ 0 = \alpha^2 - \frac{1}{d}\alpha\epsilon\tau - \frac{a}{\tau\alpha + b} + 3 - 3U_E^2 \\ c_1 = \frac{aa_1}{\tau\alpha + b} \end{cases}$$

Le système (5.41) donne les coefficients b_1 et c_1 en fonction de a_1 et o a,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \frac{a}{\tau\alpha + b} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \frac{a}{\tau\alpha + b} \end{pmatrix}$$

Calcul de (a_2, b_2, c_2)

Rappelons que les termes en $e^{2\alpha\xi}$ sont donnés par le système (5.40),

$$\begin{cases} 2\alpha a_2 - b_2 = 0 \\ 2\alpha b_2 - \frac{1}{d}\epsilon\tau b_2 - \frac{1}{d}c_2 - \frac{1}{d}(3U_E^2 - 3)a_2 - \frac{1}{d}3U_E a_1^2 = 0 \\ 2\alpha c_2 - \frac{a}{\tau}a_2 + \frac{b}{\tau}c_2 = 0 \end{cases}$$

On a donc,

$$\begin{cases} a_2 = \frac{3U_E a_1^2}{(2\alpha d - \epsilon\tau)2\alpha - \frac{a}{2\alpha\tau + b} - (3U_E^2 - 3)} \\ b_2 = 2\alpha a_2 \\ c_2 = \frac{aa_2}{2\alpha\tau + b} \end{cases}$$

Ainsi, les coefficients a_2, b_2 et c_2 sont donc donnés par,

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mu^2 \begin{pmatrix} \frac{3U_E}{(2\alpha d - \epsilon\tau)2\alpha - \frac{a}{2\alpha\tau + b} - (3U_E^2 - 3)} \\ \frac{6\alpha U_E}{(2\alpha d - \epsilon\tau)2\alpha - \frac{a}{2\alpha\tau + b} - (3U_E^2 - 3)} \\ \frac{3aU_E}{(2\alpha\tau + b) \left[(2\alpha d - \epsilon\tau)2\alpha - \frac{a}{2\alpha\tau + b} - (3U_E^2 - 3) \right]} \end{pmatrix}$$

On peut utiliser l'identification pour tous les coefficients a_k, b_k et c_k pour tout $k > 1$ et on a,

$$(k\alpha I - J_{(U_E, W_E, V_E)}) \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_k = \phi_k^{(1)}(a, b, c, d, \epsilon, \alpha, \tau, U_E) \\ b_k = \phi_k^{(2)}(a, b, c, d, \epsilon, \alpha, \tau, U_E) \\ c_k = \phi_k^{(3)}(a, b, c, d, \epsilon, \alpha, \tau, U_E) \end{cases}$$

Le début du développement de la solution donnée dans (5.37) est donc,

$$\begin{cases} U(\xi) = U_E + \mu e^{\alpha\xi} + \mu^2 \frac{3U_E}{(2\alpha d - \epsilon\tau)2\alpha - \frac{a}{2\alpha\tau + b} - (3U_E^2 - 3)} e^{2\alpha\xi} + \dots \\ W(\xi) = W_E + \mu \alpha e^{\alpha\xi} + \mu^2 \frac{6\alpha U_E}{(2\alpha d - \epsilon\tau)2\alpha - \frac{a}{2\alpha\tau + b} - (3U_E^2 - 3)} e^{2\alpha\xi} + \dots \\ V(\xi) = V_E + \mu \frac{a}{\tau\alpha + b} e^{\alpha\xi} \\ \quad + \mu^2 \frac{3aU_E}{(2\alpha\tau + b) \left[(2\alpha d - \epsilon\tau)2\alpha - \frac{a}{2\alpha\tau + b} - (3U_E^2 - 3) \right]} e^{2\alpha\xi} + \dots \end{cases}$$

Temps négatifs

Pour l'étude de la limite en temps négatifs, on fait le changement de variable $\lambda = -\xi$ avec $\xi > 0$. Le système (5.36) devient,

$$(5.43) \quad \begin{cases} \dot{U} = W \\ \dot{W} = \frac{1}{d} (-\tau\epsilon W - f(U) + V) \\ \dot{V} = -\frac{1}{\tau} (aU - bV + c) \end{cases}$$

De même que dans le cas $t > 0$, on suppose que les solutions du système (5.43) peuvent s'écrire sous la forme suivante,

$$(5.44) \quad \begin{cases} U(\tau) = a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a'_k e^{-k\beta\lambda} \\ W(\tau) = b'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k e^{-k\beta\lambda} \\ V(\tau) = c'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c'_k e^{-k\beta\lambda} \end{cases}$$

où a'_k, b'_k et c'_k sont coefficients indéterminés.

En comparant les coefficients constants, on obtient,

$$(a'_0, b'_0, c'_0) = (a_0, b_0, c_0)$$

En comparant les termes en $e^{-\beta\lambda}$, on obtient,

$$\begin{cases} \beta a'_1 - b'_1 = 0 \\ \beta b'_1 - \frac{1}{d}\epsilon\tau b'_1 - \frac{1}{d}c'_1 - \frac{1}{d}(3a'_0)^2 - 3)a'_1 = 0 \Leftrightarrow (\beta I - J_{(U_E, W_E, V_E)}) \begin{pmatrix} a'_1 \\ b'_1 \\ c'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta c'_1 - \frac{a}{\tau}a'_1 + \frac{b}{\tau}c'_1 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on se retrouve dans le même cas que lors de l'étude en temps positifs et on a donc $\alpha = \beta$. Les autres paramètres peuvent donc de même être déterminés de façon unique, tout comme dans le cas de temps positifs.

Finalement, l'orbite homocline est donnée par,

$$(5.45) \quad \begin{cases} U(\xi) = \begin{cases} U_E + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(a, b, c, d, \epsilon, \alpha, \tau, U_E) e^{k\alpha\xi} & \text{si } \xi > 0 \\ U_E + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(a, b, c, d, \epsilon, -\alpha, \tau, U_E) e^{-k\alpha\xi} & \text{si } \xi < 0 \end{cases} \\ W(\xi) = \begin{cases} W_E + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(a, b, c, d, \epsilon, \alpha, \tau, U_E) e^{k\alpha\xi} & \text{si } \xi > 0 \\ W_E + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(a, b, c, d, \epsilon, -\alpha, \tau, U_E) e^{-k\alpha\xi} & \text{si } \xi < 0 \end{cases} \\ V(\xi) = \begin{cases} V_E + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(a, b, c, d, \epsilon, \alpha, \tau, U_E) e^{k\alpha\xi} & \text{si } \xi > 0 \\ V_E + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(a, b, c, d, \epsilon, -\alpha, \tau, U_E) e^{-k\alpha\xi} & \text{si } \xi < 0 \end{cases} \end{cases}$$

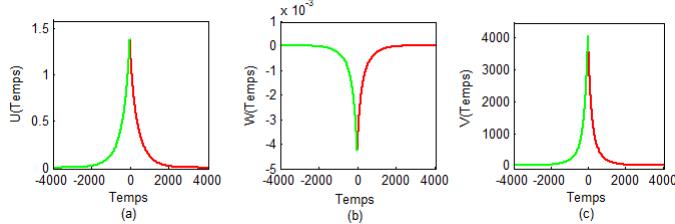


Figure 5.15. Exemple du comportement temporel d'une **travelling wave** modélisée par (5.45), avec $a = 1, b = 0.001, c = 0, d = 0.005, \epsilon = 0.1, \tau = 0.1, \mu = 1, k = 3, \alpha = -0.002$ et $(U_E, W_E, V_E) = (0, 0, 0)$. On note que les courbes en vert correspondent au temps négatif, et celles en rouge correspondent au temps positif.

SYNCHRONISATION IDENTIQUE DES SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION DE TYPE FITZHUGH-NAGUMO

Sommaire

1	Existence et unicité des solutions	92
2	Existence d'un attracteur global pour le réseau coplexe	98
3	Synchronisation identique d'un réseau de n systèmes de réaction-diffusion	108
3.1	Synchronisation dans des réseaux couplés symétriquement	108
3.2	Synchronisation dans des réseaux couplés asymétriquement	119
4	Effet de l'ajout de la dimension spatiale sur la synchronisation	136

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement en temps long de réseaux de systèmes de réaction-diffusion. D'une manière générale, les réseaux de systèmes dynamiques apparaissent dans la modélisation en physique, biologie, ingénierie, informatique, ou même sociologie. Un domaine d'application particulièrement pertinent est le traitement de l'information dans le cerveau. Une approche d'étude consiste à détecter les phénomènes généraux de synchronisation dans différentes régions du cerveau. Dans notre travail, on va considérer la plus simple des synchronisations à savoir la synchronisation identique. Toute fois, on débutera par poser un cadre mathématique précis pour l'étude de ce phénomène. Ainsi, dans ce chapitre, on étudie d'abord l'existence, l'unicité des solutions et l'existence de l'attracteur global du réseau dans l'espace $(L^2(\Omega)^d)^n$ pour une topologie quelconque, sous des conditions sur les fonctions de couplage et sur les fonctions non-linéaires de réaction. Ensuite, on présente la synchronisation identique du réseau pour une topologie quelconque dans le cas d'un couplage linéaire. Une question centrale est de déterminer le seuil minimal de la force de couplage de sorte que la stabilité de la synchronisation soit assurée. On obtient des résultats théoriques grâce à la méthode *connection graph stability*, que l'on illustre par des simulations numériques. On applique ces résultats aux réseaux particuliers, par exemple, réseau complet, réseau en anneau, réseau en étoile, etc. Enfin, on étudie l'effet de l'ajout de la dimension spatiale sur la synchronisation. Ce travail a aboutit à la soumission de l'article [7].

Soit Ω un ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^N avec la frontière $\partial\Omega$. On considère le problème suivant en modélisant un réseau impliquant un vecteur $U_{n \times 1} = (U_1, U_2, \dots, U_n)^T$ de $\Omega \times \mathbb{R}^+$ dans

\mathbb{R}^{nd} ; U_i satisfait,

$$(6.1) \quad U_{it} = F(U_i) + Q\Delta U_i + PH_i(U),$$

où U_{it} signifie la dérivée de U_i par rapport au temps t , ΔU_i signifie l'opérateur laplacien de U_i , $F(U_i) = (F^1(U_i), \dots, F^d(U_i))^T$ est un vecteur de fonctions non-linéaires définissant les dynamiques de l'oscillateur individuel de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d , $U_i = (U_i^1, \dots, U_i^d)^T$ est un d -vecteur qui contient les coordonnées de l'oscillateur i ème, et $H_i(U) = (H_i^1(U), \dots, H_i^d(U))^T$ représente la fonction de couplage de \mathbb{R}^{nd} dans \mathbb{R}^d . Les éléments non-zéros de la matrice $P_{d \times d}$ définissent les variables de couplage des oscillateurs. Pour plus de clarté, on considère une version vectorielle de couplage avec la matrice diagonale $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_d)$, où

$$p_l = \begin{cases} 1 & \text{pour } l \in \{1, 2, \dots, s\}, \\ 0 & \text{pour } l \in \{s+1, \dots, d\}. \end{cases}$$

La matrice $Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_d)$, où $q_1 > 0, q_2 > 0, \dots, q_s > 0$ et $q_l = 0$ pour $l \in \{s+1, \dots, d\}$, présente qu'il y a s termes de diffusion dans les s premières équations de (6.1). On considère le système (6.1) avec les conditions initiales $U_i(x, 0) = U_{i0}(x)$, et une condition aux bords de Neumann, $\frac{\partial U_i}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$ (ν est la normale extérieure au domaine Ω).

Afin de simplifier les calculs à venir et de généraliser la présentation donnée dans l'article de Marion M. [57], on va séparer le système (6.1) en deux parties. La première contient les s premières équations avec termes diffusifs et fonctions de couplage. La seconde contient les $d - s$ dernières équations sans termes diffusifs et fonctions de couplage. Soit $L_{d \times d} = I_{d \times d} - P$, où $I_{d \times d}$ est la matrice identité. Supposons qu'on peut écrire les $d - s$ dernières équations du système (6.1) comme suit,

$$LU_{it} = LF(U_i) = -L\sigma(x)U_i - L\Phi(x, PU_i),$$

où $\sigma(x) = \text{diag}(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_d(x))$, $\sigma_i(x) \geq \delta > 0, i \in \{s+1, \dots, d\}$, $\sigma_i(x) = 0, i \in \{1, \dots, s\}$, et $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_d)^T$, où $\Phi_l = 0, l \in \{1, \dots, s\}$; $\Phi_l = \Phi_l(x, PU_i), l \in \{s+1, \dots, d\}$.

Alors, le réseau (6.1) donc peut être réécrit comme suit,

$$\begin{cases} PU_{it} = PF(U_i) + Q\Delta U_i + PH_i(U) \\ LU_{it} = -L\sigma(x)U_i - L\Phi(x, PU_i) \end{cases}$$

Les fonctions F, H_i, σ et Φ sont supposées être deux fois continûment différentiable pour toutes les variables et satisfaire,

$$(6.2) \quad \sum_{l=1}^s \bar{\delta}_1^l |U_i^l|^p + \sum_{m=s+1}^d \bar{\delta}_1^m |U_i^m|^2 - \bar{\delta}_3 \leq -U_i^j F^j(U_i) \leq \sum_{l=1}^s \bar{\delta}_2^l |U_i^l|^p + \sum_{m=s+1}^d \bar{\delta}_2^m |U_i^m|^2 + \bar{\delta}_3,$$

pour tout $j \in \{1, \dots, s\}$, $p > 2, p \in \mathbb{N}$, et

$$(6.3) \quad |PH_i(U)| \leq \delta_4 (P\mathbf{1}_{d \times 1} + \sum_{j=1}^n P|U_j|^{p_1}), \quad p_1 < p - 1,$$

$$(6.4) \quad |\Phi'_{x_j}(x, PU_i)| \leq \delta_5 (\mathbf{1}_{d \times 1} + MP|U_i|), \quad j \in \{1, \dots, N\},$$

$$(6.5) \quad |\Psi(x, PU_i)| \leq \delta_6 M,$$

$$(6.6) \quad P |F(U_{in})| \leq \delta_7 P \left(\mathbf{1}_{d \times 1} + \bar{P} |U_{in}|^{p-1} + \bar{L} |U_{in}| \right),$$

$$(6.7) \quad \frac{\partial F^j}{\partial U_i^j} \leq l_1, \quad \frac{\partial H_i^j}{\partial U_i^j} \leq l_2, \quad \left| \frac{\partial \Phi_l}{\partial U_i^j} \right| \leq l_3, \quad i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, d\}, l \in \{s+1, \dots, d\}.$$

Grâce à (6.2), on a,

$$(6.8) \quad \delta_1^T P |U_i|^p + \delta_1^T L |U_i|^2 - \delta_3 \leq -U_i^T P F(U_i) \leq \delta_2^T P |U_i|^p + \delta_2^T L |U_i|^2 + \delta_3,$$

et à partir de (6.4) et (6.5), il existe une constante $k_1 > 0$ telle que,

$$(6.9) \quad |\Phi(x, PU_i)| \leq k_1 (\mathbf{1}_{d \times 1} + M P |U_i|),$$

où $\delta_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^d)^T, i \in \{1, 2\}, \delta_i^j > 0$ pour $j \in \{1, \dots, s\}, \delta_i^j \geq 0$ pour $j \in \{s+1, \dots, d\}$; $l_i, i \in \{1, 2, 3\}, \bar{\delta}_i^j, i \in \{1, 2\}, j \in \{1, \dots, s\}, \delta_i$ ($i \in \{3, \dots, 7\}$), $\bar{\delta}_3$ et k_1 sont constantes positives ; $\bar{\delta}_i^j \geq 0$, pour $i \in \{1, 2\}, j \in \{s+1, \dots, d\}$,

$$M_{d \times d} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi(x, PU_i) = \begin{pmatrix} \Phi'_{1U_i^1} & \dots & \Phi'_{1U_i^d} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi'_{dU_i^1} & \dots & \Phi'_{dU_i^d} \end{pmatrix},$$

$$\bar{P}_{d \times d} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{d \times s} \quad \text{et} \quad \bar{L}_{d \times d} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \underbrace{1 & \dots & 1}_{d \times (d-s)} \end{pmatrix}}_{d \times d}.$$

On utilise les notations suivantes, pour $v = (v_1, \dots, v_d)^T, a = (a_1, \dots, a_d)^T$,

$$|v|^k = (|v_1|^k, \dots, |v_d|^k)^T; v^k = (v_1^k, \dots, v_d^k)^T, \quad \forall k \geq 1,$$

et $v \leq a$ veut dire que $v_i \leq a_i, i \in \{1, 2, \dots, d\}$ (cette notation est aussi utilisée pour la matrice carrée). On utilise aussi les notations, $\text{Tr}(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii}$, où $B = (b_{ij})_{n \times n}$ est une matrice carrée ;

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_1}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial v_d}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_d}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \text{le gradient matriciel.}$$

Soit $\mathcal{H} = ((L^2(\Omega))^d)^n$ et $V = ((H^1(\Omega))^d)^n$.

Remarque 3. Dans l'article de Marion M. [57], le résultat a été obtenu pour $d = 2, s = 1$. C'est à dire que, la diffusion apparaît uniquement dans la première équation. Dans cette thèse, on s'intéresse à la version EDP du système de FitzHugh-Nagumo dans laquelle le terme diffusif apparaît seulement dans la première équation. C'est en général le choix qui est fait, pour indiquer que la diffusion porte sur le potentiel membranaire, représenté par la première variable. De manière analogue, on ne considère de la diffusion et le couplage que sur les s premières équations.

1. Existence et unicité des solutions

On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité dans H^1 ou dans H^γ . Et par (\cdot, \cdot) le produit scalaire classique de L^2 . On note $\|\cdot\|$ la norme de L^2 et $\|\cdot\|_E$ (où $E = L^p$ ou H^k) les normes usuelles dans les espaces considérés. Alors, on a le théorème suivant.

Théorème 10. *On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné. On suppose de plus que Ω est de classe C^γ , où γ est le plus petit entier tel que $\gamma \geq \frac{N(p-2)}{2p}$. On suppose que $U_{i0} \in L^2(\Omega)^d$, alors le système (6.1) admet une unique solution faible vérifiant,*

$$U_i \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^d) \cap C(0, T; L^2(\Omega)^d), U_i^j \in L^p(\Omega_T), j \in \{1, \dots, s\}, i \in \{1, \dots, n\}.$$

Les s premières égalités du système (6.1) sont valables dans $L^q(0, T; (H^\gamma)')$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; tandis que les $d - s$ dernières les sont dans $L^2(0, T; (H^1)')$. Enfin, l'application,

$$U_{i0} \longmapsto U_i(t)$$

est continue dans \mathcal{H} .

Dire que l'égalité a lieu dans $L^q(0, T; (H^\gamma)') \times L^2(0, T; (H^1)')$ équivaut à dire que l'on a, pour tout $\phi_1, \phi_2 \in L^p(0, T; H^\gamma) \times L^2(0, T; H^1)$ ([68] lemme 7.4),

$$\begin{cases} \int_0^T \langle U_{it}^j, \phi_1 \rangle = \int_0^T \langle F^j(U_i) + q_j \Delta U_i^j + H_i^j(U), \phi_1 \rangle, & j \in \{1, \dots, s\}, \\ \int_0^T \langle U_{it}^l, \phi_2 \rangle = \int_0^T \langle -\sigma_l(x)U_i^l - \Phi_l(x, PU_i), \phi_2 \rangle, & l \in \{s+1, \dots, d\}. \end{cases}$$

Démonstration. La preuve, basée sur la méthode de compactité de Faedo-Galerkin, suit le schéma suivant : existence locale des approximations de Galerkin, existence globale de ces approximations, passage à la limite, unicité et continuité par rapport aux conditions initiales. Les détails et bases théoriques non précisés peuvent être trouvés dans les références citées plus haut. On pose,

$$A = -\Delta \text{ avec conditions de Neumann, } D(A) = \{v \in L^2(\Omega) / \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2(v, w_i)^2 < +\infty\},$$

où $(w_j)_{1 \leq j < +\infty}$ est la base de $L^2(\Omega)$ formée des fonctions propres de A , et λ_i sont les valeurs propres associées.

Existence locale

On pose,

$$U_{in}^j(t) = \sum_{m=1}^n U_{inm}^j(t)w_m, \quad U_{in}^l(t) = \sum_{m=1}^n U_{inm}^l(t)w_m, \quad j \in \{1, \dots, s\}, l \in \{s+1, \dots, d\},$$

et on résoud,

$$(6.10) \quad \begin{cases} \langle U_{int}^j, w_m \rangle = \langle F^j(U_{in}) - q_j A U_{in}^j + H_i^j(U_{in}), w_m \rangle, & j \in \{1, \dots, s\}, \\ \langle U_{int}^l, w_m \rangle = \langle -\sigma_l(x)U_{in}^l - \Phi_l(x, PU_{in}), w_m \rangle, & l \in \{s+1, \dots, d\}, \end{cases}$$

avec $U_{inm}^j(0) = (U_{in}^j(0), w_m) = (U_i^j(0), w_m)$ et $U_{inm}^l(0) = (U_{in}^l(0), w_m) = (U_i^l(0), w_m)$.

On obtient un système de $2n$ équations pour chaque i, j, l dans lequel le terme non linéaire est localement Lipschitz, la solution est alors donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz sur un intervalle de temps T_n .

Existence globale

Pour avoir l'existence globale, il faut borner les U_{in} indépendamment de n . Multipliant les s premières et les $d-s$ dernières équations de (6.10) par $U_{inm}^j, j \in \{1, \dots, s\}$ et $U_{inm}^l, l \in \{s+1, \dots, d\}$, respectivement et en sommant de 1 à n , on obtient,

$$\begin{cases} (U_{int}^j, U_{in}^j) = (F^j(U_{in}) + q_j \Delta U_{in}^j + H_i^j(U_n), U_{in}^j), & j \in \{1, \dots, s\}, \\ (U_{int}^l, U_{in}^l) = (-\sigma_l(x)U_{in}^l - \Phi_l(x, PU_{in}), U_{in}^l), & l \in \{s+1, \dots, d\}. \end{cases}$$

En sommant tous les équations, en utilisant la formule de Green et (6.2), (6.3), (6.8), (6.9), on obtient après quelques calculs algébriques,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} U_{in}^T U_{in} \right] &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[U_{in}^T (F(U_{in}) + Q \Delta U_{in} + P H_i(U_n)) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[U_{in}^T F(U_{in}) + U_{in}^T P H_i(U_n) - \text{Tr}[(\nabla U_{in})^T Q \nabla U_{in}] \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[U_{in}^T (P F(U_{in}) + L F(U_{in})) + U_{in}^T P H_i(U_n) - \text{Tr}[(\nabla U_{in})^T Q \nabla U_{in}] \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[-\delta_1^T P |U_{in}|^p - \delta_1^T L |U_{in}|^2 + \delta_3 + U_{in}^T (-L \sigma(x) U_{in} - L \Phi(x, PU_{in})) \right. \\ &\quad \left. + \delta_4 \left| U_{in}^T \right| (P \mathbf{1}_{d \times 1} + \sum_{j=1}^n P |U_{jn}|^{p_1}) - \text{Tr}[(\nabla U_{in})^T Q \nabla U_{in}] \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[-\delta_1^T P |U_{in}|^p - \delta_1^T L |U_{in}|^2 + \delta_3 - \delta \mathbf{1}_{1 \times d} L |U_{in}|^2 - \text{Tr}[(\nabla U_{in})^T Q \nabla U_{in}] \right. \\ &\quad \left. + k_1 \mathbf{1}_{1 \times d} L |U_{in}| (1 + \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_{in}|) + \delta_4 \left| U_{in}^T \right| (P \mathbf{1}_{d \times 1} + \sum_{j=1}^n P |U_{jn}|^{p_1}) \right]. \end{aligned}$$

Soit,

$$B(t) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} U_{in}^T U_{in} + \text{Tr}[(\nabla U_{in})^T Q \nabla U_{in}] \right].$$

On a,

$$\begin{aligned} B(t) &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[-\delta_1^T P |U_{in}|^p - \delta_1^T L |U_{in}|^2 + \delta_3 - \delta \mathbf{1}_{1 \times d} L |U_{in}|^2 \right. \\ &\quad \left. + k_1 \mathbf{1}_{1 \times d} L |U_{in}| (1 + \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_{in}|) + \delta_4 \left| U_{in}^T \right| (P \mathbf{1}_{d \times 1} + \sum_{j=1}^n P |U_{jn}|^{p_1}) \right]. \end{aligned}$$

On définit,

$$D(t) = B(t) + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\delta_1^T P |U_{in}|^p + (\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d}) L |U_{in}|^2 \right].$$

Alors, on a,

$$(6.11) \quad D(t) \leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\delta_3 + k_1 \mathbf{1}_{1 \times d} L |U_{in}| (1 + \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_{in}|) + \delta_4 \left| U_{in}^T \right| (P \mathbf{1}_{d \times 1} + \sum_{j=1}^n P |U_{jn}|^{p_1}) \right].$$

En utilisant l'inégalité de Young, on a après quelques calculs algébriques,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k_1 \mathbf{1}_{1 \times d} L |U_{in}| (1 + \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_{in}|) &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} L |U_{in}|^2 + k_2 (1 + \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_{in}|^2) \right] \\ &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} L |U_{in}|^2 + \frac{\delta_1^T}{16} P |U_{in}|^p + k_3 \right]. \end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned} \delta_4 \int_{\Omega} |U_{in}^T| P \mathbf{1}_{d \times 1} &\leq k_4 \int_{\Omega} \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_{in}|^2 + k_5 |\Omega| \\ &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{\delta_1^T}{16} P |U_{in}|^p + k_6 \right] + k_5 |\Omega|. \end{aligned}$$

Car $p_1 < p - 1$, soit $\bar{p} = \frac{p}{p_1}$, et \bar{q} tel que $\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = 1$. Cela implique $\bar{q} = \frac{p}{p - p_1} < p$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \delta_4 \int_{\Omega} |U_{in}^T| \sum_{j=1}^n P |U_{jn}|^{p_1} &= \delta_4 \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |U_{in}^T| P |U_{jn}|^{p_1} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(k_7 \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_{in}|^{\bar{q}} + \frac{\delta_1^T}{16n} P |U_{jn}|^p \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} \frac{\delta_1^T}{16n} P |U_{in}|^p + \frac{\delta_1^T}{16n} P |U_{jn}|^p + k_8 \right). \end{aligned}$$

Donc, on obtient,

$$\begin{aligned} (6.12) \quad D(t) &\leq \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} L |U_{in}|^2 + \frac{\delta_1^T}{8} P |U_{in}|^p \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\delta_1^T}{16n} P |U_{in}|^p + \frac{\delta_1^T}{16n} P |U_{jn}|^p \right) \right] + k_9 \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} L |U_{in}|^2 + \frac{\delta_1^T}{8} P |U_{in}|^p + \frac{\delta_1^T}{8} P |U_{in}|^p \right] + k_{10} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} L |U_{in}|^2 + \frac{\delta_1^T}{4} P |U_{in}|^p \right] + k_{10}. \end{aligned}$$

En combinant les inégalités (6.11) et (6.12), on a,

$$(6.13) \quad B(t) + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{3\delta_1^T}{4} P |U_{in}|^p + \frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} L |U_{in}|^2 \right) \leq k_{10}.$$

En utilisant encore l'inégalité de Young, on a,

$$\int_{\Omega} \frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} P |U_{in}|^2 \leq \int_{\Omega} \frac{\delta_1^T}{4} P |U_{in}|^p + k_{11}.$$

Ainsi (6.13) implique,

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} U_{in}^T U_{in} + 2 \text{Tr}[(\nabla U_{in})^T Q \nabla U_{in}] + (\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})(P |U_{in}|^2 + L |U_{in}|^2) + \delta_1^T P |U_{in}|^p \right] \leq k_{12},$$

où $k_{12} = 2k_{10} + 2k_{11}$.

On peut récrire cette inégalité comme suit,

$$(6.14) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} U_{in}^T U_{in} + 2\text{Tr}[(\nabla U_{in})^T Q \nabla U_{in}] + (\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d}) |U_{in}|^2 + \delta_1^T P |U_{in}|^p \right] \leq k_{12}.$$

En intégrant (6.14) entre 0 et t , on a,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega} U_{in}(t)^T U_{in}(t) + \int_0^t \int_{\Omega} \left[2\text{Tr}[(\nabla U_{in})^T Q \nabla U_{in}] + (\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d}) |U_{in}|^2 + \delta_1^T P |U_{in}|^p \right] \right\} \\ \leq k_{12}t + \int_{\Omega} U_{in}(0)^T U_{in}(0). \end{aligned}$$

Cela implique que,

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} |U_{in}^j|^2 \leq K, \quad j \in \{1, \dots, d\},$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |U_{in}^j|^2 \leq \frac{K}{\delta_1^j + \delta}, \quad j \in \{1, \dots, d\},$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla U_{in}^j|^2 \leq \frac{K}{2q_j}, \quad j \in \{1, \dots, s\},$$

et

$$\int_0^T \int_{\Omega} |U_{in}^j|^p \leq \frac{K}{\delta_1^j}, \quad j \in \{1, \dots, s\},$$

où $K = \int_{\Omega} U_i(0)^T U_i(0) + k_{12}T$ borné pour les ensembles bornés des conditions initiales dans H . On a donc, U_{in} est uniformément bornée dans $L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d)$; $U_{in}^j, j \in \{1, \dots, s\}$ est uniformément bornée dans $L^2(0, T; H^1)$; $U_{in}^j, j \in \{1, \dots, d\}$ est uniformément bornée dans $L^2(\Omega_T)$, et $U_{in}^j, j \in \{1, \dots, s\}$ est uniformément bornée dans $L^p(\Omega_T)$.

Grâce à (6.6), on obtient, pour $j \in \{1, \dots, s\}$,

$$\begin{aligned} \|F^j(U_{in})\|_{L^q(\Omega_T)}^q &= \int_0^T \int_{\Omega} |F^j(U_{in})|^q \\ &\leq \delta_1^q \int_0^T \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^s |U_{in}^j|^{p-1} + \sum_{j=s+1}^d |U_{in}^j| + 1 \right)^q \\ &\leq k_{13} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^s |U_{in}^j|^{(p-1)q} + \sum_{j=s+1}^d |U_{in}^j|^q + 1 \right). \end{aligned}$$

Car $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q(p-1) = p$ et $q = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1} < 2$. Donc, il existe une constante $k_{14} > 0$ telle que,

$$\|F^j(U_{in})\|_{L^q(\Omega_T)}^q \leq k_{14}.$$

Ainsi, on a que $F^j(U_{in}), j \in \{1, \dots, s\}$ est uniformément bornée dans $L^q(\Omega_T)$.

Aussi, pour $j \in \{1, \dots, s\}$,

$$\begin{aligned} \|H_i^j(U_n)\|_{L^q(\Omega_T)}^q &= \int_0^T \int_{\Omega} |H_i^j(U_n)|^q \\ &\leq \delta_4^q \int_0^T \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^n |U_{kn}^j|^{p_1} + 1 \right)^q \\ &\leq k_{15} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^n |U_{kn}^j|^{p_1 q} + 1 \right). \end{aligned}$$

Car $0 < p_1 < p - 1 \Rightarrow p_1 q < (p - 1)q = p$. Donc, on peut trouver une constante $k_{16} > 0$ telle que,

$$\|H_i^j(U_n)\|_{L^q(\Omega_T)}^q \leq k_{16}.$$

Donc, $H_i^j(U_n), j \in \{1, \dots, s\}$ est uniformément bornée dans $L^q(\Omega_T)$.

Similairement, on considère, pour $j \in \{s + 1, \dots, d\}$,

$$\begin{aligned} \|\Phi_j(x, PU_{in})\|_{L^2(\Omega_T)}^2 &= \int_0^T \int_{\Omega} |\Phi_j(x, PU_{in})|^2 \\ &\leq k_1^2 \int_0^T \int_{\Omega} \left(\sum_{l=1}^s |U_{in}^l| + 1 \right)^2 \\ &\leq k_{17} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\sum_{l=1}^s |U_{in}^l|^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\Phi_j(x, PU_{in}), j \in \{1, \dots, s\}$ est uniformément bornée dans $L^2(\Omega_T)$.

On peut aussi montrer que $U_{in}^l, l \in \{s + 1, \dots, d\}$ est uniformément bornée dans $L^2(0, T; H^1)$ (voir la démonstration du théorème 11).

Notons que, $k_i, i \in \{1, \dots, 17\}$ sont constantes positives qui dépend des donnés.

Passage à la limite

On extrait des sous suites qui convergent faiblement,

$$\begin{aligned} U_{in} &\rightharpoonup U_i \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)^d), \\ U_{in}^j &\rightharpoonup U_i^j \text{ dans } L^p(\Omega_T), j \in \{1, \dots, s\}, \\ F^j(U_{in}) &\rightharpoonup \Gamma^j \text{ dans } L^q(\Omega_T), j \in \{1, \dots, s\}, \\ H_i^j(U_n) &\rightharpoonup \Psi^j \text{ dans } L^q(\Omega_T), j \in \{1, \dots, s\}, \\ \Phi_j(x, PU_{in}) &\rightharpoonup \Sigma^j \text{ dans } L^2(\Omega_T), j \in \{s + 1, \dots, d\}. \end{aligned}$$

On borne maintenant $U_{int}^j, j \in \{1, \dots, d\}$. Puisque $\gamma \geq \frac{N(p-2)}{2p}$, on a d'après le théorème des injections de Sobolev (par exemple le théorème 5.26 page 137 dans [68]), $H^\gamma \hookrightarrow L^p$ et donc $L^q \hookrightarrow (H^\gamma)'$. On a aussi, $(H^1)' \hookrightarrow (H^\gamma)'$ et $L^2 \hookrightarrow L^q$ (car $p > 2 \Rightarrow q < 2$). Donc,

$$L^2(0, T; (H^1)') \hookrightarrow L^q(0, T; (H^\gamma)'), L^q(0, T; L^q) \hookrightarrow L^q(0, T; (H^\gamma)').$$

Mais puisque U_{in} est uniformément bornée dans $L^2(0, T; H^1(\Omega)^d)$, et $AU_{in}^j, j \in \{1, \dots, s\}$ est uniformément bornée dans $L^2(0, T; (H^1)')$, alors, comme,

$$U_{int}^j = F^j(U_{in}) - q_j AU_{in}^j + H_i^j(U_n), \quad U_{int}^l = -\sigma_l(x)U_{in}^l - \Phi_l(x, PU_{in}), \quad j \in \{1, \dots, s\}, l \in \{s+1, \dots, d\},$$

On a ainsi, U_{int}^j est uniformément bornée dans $L^q(0, T; (H^\gamma)')$, U_{int}^l est uniformément bornée dans $L^2(0, T; (H^1)')$.

On a donc,

$$\begin{cases} U_{int}^j \rightharpoonup U_{it}^j \text{ dans } L^q(0, T; (H^\gamma)'), j \in \{1, \dots, s\}, \\ U_{int}^l \rightharpoonup U_{it}^l \text{ dans } L^2(0, T; (H^1)'), l \in \{s+1, \dots, d\}. \end{cases}$$

De plus,

$$AU_{in}^j \rightharpoonup AU_i^j \text{ dans } L^2(0, T; (H^1)'), j \in \{1, \dots, s\}.$$

D'où la convergence de tous les termes dans $L^q(0, T; (H^\gamma)')$, et ainsi,

$$\begin{cases} U_{it}^j = \Gamma^j + \Psi^j - q_j AU_i^j \text{ dans } L^q(0, T; (H^\gamma)'), j \in \{1, \dots, s\}, \\ U_{it}^l = -\sigma_l(x)U_i^l - \Sigma^l \text{ dans } L^2(0, T; (H^1)'), l \in \{s+1, \dots, d\}. \end{cases}$$

Il faut maintenant montrer que $F^j(U_i) = \Gamma^j(U_i)$, $H_i^j(U) = \Psi^j(U)$, $\Phi_l(x, PU_i) = \Sigma^l(x, PU_i)$, $j \in \{1, \dots, s\}$, $l \in \{s+1, \dots, d\}$. Mais puisque U_{in}^j et $U_{int}^j, j \in \{1, \dots, d\}$ sont uniformément bornées dans $L^2(0, T; H^1)$ et $L^q(0, T; (H^\gamma)')$, on peut extraire une sous suite ([68], Théorème 8.1 page 214) telle que,

$$U_{in}^j \rightarrow U_i^j \text{ dans } L^2(\Omega_T), j \in \{1, \dots, d\}.$$

Donc $U_{in}^j \rightarrow U_i^j$ presque partout (après extraction de sous-suite). Par la continuité de $F^j, F^j(U_{in})$ tend vers $F^j(U_i)$ presque partout. Mais, $F^j(U_{in})$ est uniformément bornée dans $L^q(\Omega_T)$. Grâce au lemme 8.3 de [68], on peut conclure que $F^j(U_{in}) \rightharpoonup F^j(U_i)$ dans $L^q(\Omega_T)$ et donc $\Gamma^j = F^j(U_i)$. On refait similairement pour H^j et Φ_l .

Pour la continuité des solutions de $[0, T]$ dans \mathcal{H} . On a que, $j \in \{1, \dots, s\}$,

$$U_i^j \in L^2(0, T; H^1) \cap L^p(\Omega_T) \text{ et } U_{it}^j \in L^2(0, T; (H^1)') \oplus L^q(\Omega_T) = (L^2(0, T; H^1) \cap L^p(\Omega_T))'.$$

D'autre part, $U_i^l \in L^2(0, T; H^1)$ et $U_{it}^l \in L^2(0, T; (H^1)'), l \in \{s+1, \dots, d\}$. On en déduit le résultat par l'exercice 8.2 et le théorème 7.2 de [68] (remplaçant H^{-1} par $(H^1)'$, $H^{-\gamma}$ par $(H^\gamma)', \dots$). Ainsi, on a alors $U_i \in C(0, T; L^2(\Omega)^d)$.

Pour montrer que $U_{in}(0) \rightarrow U_{i0}$, on revoie alors à [68], page 225.

Pour l'unicité et de la dépendance aux conditions initiales, on considère deux solutions du problème $(U_{i1}^j, U_{i1}^l), (U_{i2}^j, U_{i2}^l), j \in \{1, \dots, s\}, l \in \{s+1, \dots, d\}$. On a alors,

$$\begin{cases} (U_{i1}^j - U_{i2}^j)_t = F^j(U_{i1}) - F^j(U_{i2}) + (H_i^j(U_1) - H_i^j(U_2)) + q_j \Delta U_{i1}^j - q_j \Delta U_{i2}^j \\ (U_{i1}^l - U_{i2}^l)_t = -\sigma_l(x)(U_{i1}^l - U_{i2}^l) - \Phi_l(x, PU_{i1}) + \Phi_l(x, PU_{i2}) \end{cases}$$

En multipliant les deux équations par $(U_{i1}^j - U_{i2}^j)$ et $(U_{i1}^l - U_{i2}^l)$, et en sommant, on obtient que,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left\{ \frac{d}{2dt} \left[(U_{i1}^j - U_{i2}^j)^2 + (U_{i1}^l - U_{i2}^l)^2 \right] + q_j (\nabla(U_{i1}^j - U_{i2}^j))^2 \right\} \\
 &= \int_{\Omega} \left[(U_{i1}^j - U_{i2}^j)(U_{i1t}^j - U_{i2t}^j) + (U_{i1}^l - U_{i2}^l)(U_{i1t}^l - U_{i2t}^l) + q_j (\nabla(U_{i1}^j - U_{i2}^j))^2 \right] \\
 &= \int_{\Omega} \left[(U_{i1}^j - U_{i2}^j)(F^j(U_{i1}) + q_j \Delta U_{i1}^j + H_i^j(U_1) - F^j(U_{i2}) - q_j \Delta U_{i2}^j - H_i^j(U_2)) \right. \\
 &\quad \left. + (U_{i1}^l - U_{i2}^l)(-\sigma_l U_{i1}^l - \Phi_l(x, PU_{i1}) + \sigma_l U_{i2}^l + \Phi_l(x, PU_{i2})) + q_j (\nabla(U_{i1}^j - U_{i2}^j))^2 \right] \\
 &\leq \int_{\Omega} \left[(U_{i1}^j - U_{i2}^j)(F^j(U_{i1}) - F^j(U_{i2}) + H_i^j(U_1) - H_i^j(U_2)) \right. \\
 &\quad \left. + (U_{i1}^l - U_{i2}^l)(-\Phi_l(x, PU_{i1}) + \Phi_l(x, PU_{i2})) \right] \\
 &\leq \int_{\Omega} \left[\left(\int_{U_{i2}^j}^{U_{i1}^j} \frac{\partial F^j}{\partial U_i^j} + \int_{U_{i2}^l}^{U_{i1}^l} \frac{\partial H_i^j}{\partial U_i^j} \right) (U_{i1}^j - U_{i2}^j) - \left(\int_{U_{i2}^j}^{U_{i1}^j} \frac{\partial \Phi_l}{\partial U_i^j} \right) (U_{i1}^l - U_{i2}^l) \right] \\
 &\leq \int_{\Omega} \left[(l_1 + l_2) (U_{i1}^j - U_{i2}^j)^2 + l_3 |U_{i1}^j - U_{i2}^j| \cdot |U_{i1}^l - U_{i2}^l| \right].
 \end{aligned}$$

Donc, on peut trouver une constante $K > 0$ telle que,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left\{ \frac{d}{2dt} \left[(U_{i1}^j - U_{i2}^j)^2 + (U_{i1}^l - U_{i2}^l)^2 \right] + q_j (\nabla(U_{i1}^j - U_{i2}^j))^2 \right\} \\
 &\leq \int_{\Omega} K \left[(U_{i1}^j - U_{i2}^j)^2 + (U_{i1}^l - U_{i2}^l)^2 \right].
 \end{aligned}$$

En particulier, on a,

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left[(U_{i1}^j - U_{i2}^j)^2 + (U_{i1}^l - U_{i2}^l)^2 \right] \leq \int_{\Omega} 2K \left[(U_{i1}^j - U_{i2}^j)^2 + (U_{i1}^l - U_{i2}^l)^2 \right].$$

Grâce au lemme de Gronwall, on obtient,

$$\int_{\Omega} \left[(U_{i1}^j - U_{i2}^j)^2 + (U_{i1}^l - U_{i2}^l)^2 \right] (t) \leq \int_{\Omega} \left[(U_{i1}^j - U_{i2}^j)^2 + (U_{i1}^l - U_{i2}^l)^2 \right] (0) \exp(2Kt).$$

D'où l'unicité et la continuité par rapport aux conditions initiales. \square

2. Existence d'un attracteur global pour le réseau coplexe

Théorème 11. *Le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ associé au système (6.1) possède un attracteur global connexe dans \mathcal{H} .*

Démonstration. Pour montrer le résultat, on montre l'existence d'un ensemble absorbant dans \mathcal{H} . On montre ensuite l'existence d'un ensemble absorbant dans V , qui attire tous les bornés de \mathcal{H} . Ceci implique que les opérateurs $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sont uniformément compacts grâce à l'injection compacte de H^1 dans L^2 et permet de conclure par application du théorème 1.1 page 23 dans [78].

Ensemble absorbant dans \mathcal{H}

On multiplie le système (6.1) par U_i^T et on intègre sur Ω . En utilisant la formule de Green et (6.2), (6.3), (6.8), (6.9), on obtient,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{d}{2dt} U_i^T U_i \right] &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[U_i^T (F(U_i) + Q\Delta U_i + P H_i(U)) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[U_i^T F(U_i) + U_i^T P H_i(U) - \text{Tr}[(\nabla U_i)^T Q \nabla U_i] \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[U_i^T (P F(U_i) + L F(U_i)) + U_i^T P H_i(U) - \text{Tr}[(\nabla U_i)^T Q \nabla U_i] \right] \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[-\delta_1^T P |U_i|^p - \delta_1^T L |U_i|^2 + \delta_3 + U_i^T (-L \sigma(x) U_i - L \Phi(x, P U_i)) \right. \\
&\quad \left. + \delta_4 \left| U_i^T \right| (P \mathbf{1}_{d \times 1} + \sum_{j=1}^n P |U_j|^{p_1}) - \text{Tr}[(\nabla U_i)^T Q \nabla U_i] \right] \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[-\delta_1^T P |U_i|^p - \delta_1^T L |U_i|^2 + \delta_3 - \delta \mathbf{1}_{1 \times d} L |U_i|^2 - \text{Tr}[(\nabla U_i)^T Q \nabla U_i] \right. \\
&\quad \left. + k_1 \mathbf{1}_{1 \times d} L |U_i| (1 + \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_i|) + \delta_4 \left| U_i^T \right| (P \mathbf{1}_{d \times 1} + \sum_{j=1}^n P |U_j|^{p_1}) \right].
\end{aligned}$$

Soit,

$$A(t) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{d}{2dt} U_i^T U_i + \text{Tr}[(\nabla U_i)^T Q \nabla U_i] \right].$$

On a,

$$\begin{aligned}
A(t) &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[-\delta_1^T P |U_i|^p - \delta_1^T L |U_i|^2 + \delta_3 - \delta \mathbf{1}_{1 \times d} L |U_i|^2 \right. \\
&\quad \left. + k_1 \mathbf{1}_{1 \times d} L |U_i| (1 + \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_i|) + \delta_4 \left| U_i^T \right| (P \mathbf{1}_{d \times 1} + \sum_{j=1}^n P |U_j|^{p_1}) \right].
\end{aligned}$$

On définit,

$$B(t) = A(t) + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\delta_1^T P |U_i|^p + (\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d}) L |U_i|^2 \right].$$

Alors, on a,,

$$(6.15) \quad B(t) \leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\delta_3 + k_1 \mathbf{1}_{1 \times d} L |U_i| (1 + \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_i|) + \delta_4 \left| U_i^T \right| (P \mathbf{1}_{d \times 1} + \sum_{j=1}^n P |U_j|^{p_1}) \right].$$

En utilisant l'inégalité de Young, on a après quelques calculs,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} k_1 \mathbf{1}_{1 \times d} L |U_i| (1 + \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_i|) &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} L |U_i|^2 + k_2 (1 + \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_i|^2) \right] \\
&\leq \int_{\Omega} \left[\frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} L |U_i|^2 + \frac{\delta_1^T}{16} P |U_i|^p + k_3 \right].
\end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
\delta_4 \int_{\Omega} \left| U_i^T \right| P \mathbf{1}_{d \times 1} &\leq k_4 \int_{\Omega} \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_i|^2 + k_5 |\Omega| \\
&\leq \int_{\Omega} \left[\frac{\delta_1^T}{16} P |U_i|^p + k_6 \right] + k_5 |\Omega|.
\end{aligned}$$

Car $p_1 < p - 1$, soit $\bar{p} = \frac{p}{p_1}$, et \bar{q} tels que $\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = 1$. Cela implique $\bar{q} = \frac{p}{p - p_1} < p$. On a donc,

$$\begin{aligned} \delta_4 \int_{\Omega} \left| U_i^T \right| \sum_{j=1}^n P|U_j|^{p_1} &= \delta_4 \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| U_i^T \right| P|U_j|^{p_1} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(k_7 \mathbf{1}_{1 \times d} P|U_i|^{\bar{q}} + \frac{\delta_1^T}{16n} P|U_j|^p \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} \frac{\delta_1^T}{16n} P|U_i|^p + \frac{\delta_1^T}{16n} P|U_j|^p + k_8 \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient,

$$\begin{aligned} (6.16) \quad B(t) &\leq \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} L|U_i|^2 + \frac{\delta_1^T}{8} P|U_i|^p + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\delta_1^T}{16n} P|U_i|^p + \frac{\delta_1^T}{16n} P|U_j|^p \right) \right] + k_9 \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} L|U_i|^2 + \frac{\delta_1^T}{8} P|U_i|^p + \frac{\delta_1^T}{8} P|U_i|^p \right] + k_{10} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} L|U_i|^2 + \frac{\delta_1^T}{4} P|U_i|^p \right] + k_{10}. \end{aligned}$$

En combinant les inégalités (6.15) et (6.16), on a,

$$(6.17) \quad A(t) + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{3\delta_1^T}{4} P|U_i|^p + \frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} L|U_i|^2 \right) \leq k_{10}.$$

En utilisant encore l'inégalité de Young, on a,

$$\int_{\Omega} \frac{(\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})}{2} P|U_i|^2 \leq \int_{\Omega} \frac{\delta_1^T}{4} P|U_i|^p + k_{11}.$$

Ainsi (6.17) implique,

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} U_i^T U_i + 2\text{Tr}[(\nabla U_i)^T Q \nabla U_i] + (\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})(P|U_i|^2 + L|U_i|^2) + \delta_1^T P|U_i|^p \right] \leq k_{12},$$

où $k_{12} = 2k_{10} + 2k_{11}$.

On peut réécrire cette inégalité comme suit,

$$(6.18) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} U_i^T U_i + 2\text{Tr}[(\nabla U_i)^T Q \nabla U_i] + (\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})|U_i|^2 + \delta_1^T P|U_i|^p \right] \leq k_{12}.$$

Alors, (6.18) donne en particulier,

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} U_i^T U_i + (\delta_1^T + \delta \mathbf{1}_{1 \times d})|U_i|^2 \right] \leq k_{12}.$$

Soit $\alpha = \min\{\delta_1^j + \delta, j = 1, \dots, d\}$, on a,

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} U_i^T U_i + \alpha U_i^T U_i \right] \leq k_{12},$$

qui donne, en utilisant Lemme de Gronwall,

$$(6.19) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} U_i^T U_i \leq \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} U_i^T U_i \right) (0) \exp(-\alpha t) + \frac{k_{12}}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha t)).$$

Cette inégalité (6.19) nous donne l'existence d'un ensemble absorbant dans \mathcal{H} : Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout ensemble borné \mathcal{B} de \mathcal{H} , il existe un temps $T(\mathcal{B})$ tel que $S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$ pour tout $t > T$, où \mathcal{B}_0 est la boule de rayon β dans \mathcal{H} . Soit $r > 0$, dans la suite K désigne une constante générique qui ne dépend que de Ω, F, Q, H_i, r . Maintenant, en intégrant (6.18) entre t et $t + r$, on obtient,

$$(6.20) \quad \sum_{i=1}^n \int_t^{t+r} \int_{\Omega} \left(2\text{Tr}[(\nabla U_i)^T Q \nabla U_i] + \delta_1^T P |U_i|^p \right) \leq k_{12}r + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} U_i^T U_i \leq k_{12}r + K.$$

En intégrant encore (6.18) entre 0 et t , on obtient aussi pour une condition initiale $U_{i0} \in \mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$,

$$\int_0^t \int_{\Omega} \text{Tr}[(\nabla U_i)^T Q \nabla U_i] \leq \frac{k_{12}t + K}{2}, \quad \forall t \geq 0.$$

Car les $d - s$ dernières équations de (6.1) ne contiennent pas de termes de diffusion, la solution LU_i peut être écrit $LU_i(t) = LU_{i1}(t) + LU_{i2}(t)$, where,

$$(6.21) \quad \begin{cases} LU_{i1}(x, t) = - \int_0^t L e^{-\sigma(x)(t-s)} \Phi(x, PU_i(x, s)) ds, \\ LU_{i2}(x, t) = L e^{-\sigma(x)t} U_{i0}(x). \end{cases}$$

On définit les familles S_i, S_{i1}, S_{i2} des opérateurs de $L^2(\Omega)^d$ dans $L^2(\Omega)^d$ comme suit,

$$(6.22) \quad \begin{cases} S_i(t) : U_{i0} \rightarrow U_i, \\ S_{i1}(t) : U_{i0} \rightarrow PU_i + LU_{i1}, \\ S_{i2}(t) : U_{i0} \rightarrow LU_{i2}. \end{cases}$$

On définit,

$$r_B(t) = \sup_{\varphi \in B} \|S_{i2}(t)\varphi\|_{\mathcal{H}}.$$

On peut voir que $S_{i2}(t)$ satisfait, pour tout ensemble borné $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$,

$$r_B(t) \leq \exp(-\delta t) \sup_{\varphi \in \mathcal{B}} \|\varphi\|_{\mathcal{H}}.$$

Compacité uniforme des opérateurs $\{S(t)\}_{t \geq 0}$

Notre objectif est maintenant de vérifier la compacité uniforme des opérateurs $S_{i1}(t)$ en utilisant des estimations *à priori* uniforme en temps de $PU_i(t)$ et $LU_{i1}(t)$ (voir aussi dans [57]).

On multiplie le système (6.1) par $-(P\Delta U_i)^T$ et intègre sur Ω . Grâce à la formule de Green, on a,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{d}{2dt} \text{Tr}[(\nabla U_i)^T P \nabla U_i] \right] &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \text{Tr} \left[(\nabla U_i)^T P \nabla (F(U_i) + Q\Delta U_i + PH_i(U)) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \text{Tr} \left[(\nabla U_i)^T P \nabla F(U_i) + (\nabla U_i)^T P Q \nabla \Delta U_i + (\nabla U_i)^T P \nabla H_i(U) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\text{Tr}[(\nabla U_i)^T P \nabla F(U_i) + (\nabla U_i)^T P \nabla H_i(U)] - (\Delta U_i)^T Q \Delta U_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[-F(U_i)^T P \Delta U_i - H_i(U)^T P \Delta U_i - (\Delta U_i)^T Q \Delta U_i \right]. \end{aligned}$$

Soit,

$$\bar{A}(t) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{d}{2dt} \text{Tr}[(\nabla U_i)^T P \nabla U_i] + (\Delta U_i)^T Q \Delta U_i \right].$$

On a,

$$\bar{A}(t) \leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[-F(U_i)^T P \Delta U_i - H_i(U)^T P \Delta U_i \right].$$

Ainsi, en utilisant (6.3) et (6.6), on a,

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(|F(U_i)^T| + |H_i(U)^T| \right) P |\Delta U_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\delta_7 (\mathbf{1}_{d \times 1} + \bar{P} |U_i|^{p-1} + \bar{L} |U_i|)^T + \delta_4 (P \mathbf{1}_{d \times 1} + \sum_{j=1}^n P |U_j|^{p_1})^T \right] P |\Delta U_i|. \end{aligned}$$

On peut trouver une constante $k_{13} > 0$ telle que,

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[k_{13} (\mathbf{1}_{d \times 1} + \bar{P} |U_i|^{p-1} + \bar{L} |U_i| + \sum_{j=1}^n P |U_j|^{p_1})^T \right] P |\Delta U_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{k_{13}^2}{2} \bar{Q}^T (\mathbf{1}_{d \times 1} + \bar{P} |U_i|^{p-1} + \bar{L} |U_i| + \sum_{j=1}^n P |U_j|^{p_1})^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\Delta U_i)^T Q \Delta U_i, \end{aligned}$$

où $\bar{Q}_{d \times 1} = \left(\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \dots, \frac{1}{q_s}, 0, \dots, 0 \right)^T$.

Cela implique,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{d}{2dt} \text{Tr}[(\nabla U_i)^T P \nabla U_i] + \frac{1}{2} (\Delta U_i)^T Q \Delta U_i \right] \\ \leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{k_{13}^2}{2} \bar{Q}^T (\mathbf{1}_{d \times 1} + \bar{P} |U_i|^{p-1} + \bar{L} |U_i| + \sum_{j=1}^n P |U_j|^{p_1})^2. \end{aligned}$$

Car $p_1 < p - 1$, on a,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \text{Tr}[(\nabla U_i)^T P \nabla U_i] &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} k_{13}^2 \bar{Q}^T (\mathbf{1}_{d \times 1} + \bar{P} |U_i|^{p-1} + \bar{L} |U_i| + \sum_{j=1}^n P |U_j|^{p_1})^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} 4k_{13}^2 \max(s, d-s, n) \bar{Q}^T (\mathbf{1}_{d \times 1} + \bar{P} |U_i|^{2(p-1)} + \bar{L} |U_i|^2 + \sum_{j=1}^n P |U_j|^{2p_1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} 4k_{13}^2 \max(s, d-s, n) \bar{Q}^T (\mathbf{1}_{d \times 1} + \bar{P} |U_i|^{2(p-1)} + \bar{L} |U_i|^2 + nP |U_i|^{2p_1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} k_{14} (1 + \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_i|^{2(p-1)} + \mathbf{1}_{1 \times d} L |U_i|^2). \end{aligned}$$

En utilisant la technique du lemme 8 ci-dessous pour $k = 1$ et (6.20), on peut vérifier l'existence d'une constante $k_{15} > 0$ telle que, $\forall t \geq T + r$,

$$\int_t^{t+r} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{1 \times d} P |U_i|^{2(p-1)} \leq k_{15}.$$

Cela implique qu'en utilisant le lemme uniforme de Gronwall,

$$(6.23) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \text{Tr}[(\nabla U_i)^T P \nabla U_i] \leq k_{16}, \quad \forall t \geq T + 2r.$$

On obtient maintenant une estimation du temps uniforme de $LU_{i1}(t)$ dans $(H^1(\Omega))^d$. Grâce à (6.19) et (6.21), on peut montrer qu'il existe une constante $k_{17} > 0$ telle que, $\forall t \geq 0$,

$$(6.24) \quad \int_{\Omega} (LU_{i1})^T (LU_{i1}) \leq k_{17}.$$

Soit,

$$LW_j = \frac{\partial}{\partial x_j} LU_{i1}, \quad j = 1, \dots, N,$$

où $W_j = (W_j^1, \dots, W_j^d)^T$ et LW_j satisfait,

$$(6.25) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} LW_j + \sigma(x) LW_j = -\sigma'_{x_j}(x) LU_{i1} - L\Phi'_{x_j}(x, PU_i) - \Psi(x, PU_i) \frac{\partial}{\partial x_j} PU_i, \\ LW_j(0) = 0. \end{cases}$$

La partie à droite de (6.25) satisfait les inégalités (6.4) et (6.5),

$$\begin{aligned} \left| \sigma'_{x_j}(x) LU_{i1} + L\Phi'_{x_j}(x, PU_i) + \Psi(x, PU_i) \frac{\partial PU_i}{\partial x_j} \right| \leq \\ (k_{19} + \delta_5) (\mathbf{1}_{d \times 1} + |LU_{i1}| + M |PU_i|) + \delta_5 M \left| \frac{\partial PU_i}{\partial x_j} \right|, \end{aligned}$$

où $k_{19} = \max_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq N} \max_{x \in \bar{\Omega}} |\sigma'_{ix_j}(x)|$.

En multipliant (6.25) par $(LW_j)^T$ et en intégrant sur Ω , on obtient,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{d}{2dt} (LW_j)^T (LW_j) + \delta (LW_j)^T (LW_j) \right) \leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{1 \times d} (LW_j)^2 \\ + \frac{1}{2\delta} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{1 \times d} \left\{ (k_{18} + \delta_5) (\mathbf{1}_{d \times 1} + M |PU_i| + |LU_{i1}|) + \delta_6 M \left| \frac{\partial PU_i}{\partial x_j} \right| \right\}^2. \end{aligned}$$

Cela implique,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} (LW_j)^T (LW_j) + \delta (LW_j)^T (LW_j) \right) \leq \\ \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{1 \times d} \left\{ (k_{18} + \delta_5) (1 + M |PU_i| + |LU_{i1}|) + \delta_6 M \left| \frac{\partial PU_i}{\partial x_j} \right| \right\}^2 \\ \leq \frac{2}{\delta} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{1 \times d} (k_{18} + \delta_5)^2 (1 + M |PU_i| + |LU_{i1}|)^2 + \frac{2\delta_6^2}{\delta} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{1 \times d} (M \left| \frac{\partial PU_i}{\partial x_j} \right|)^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(6.26) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} (LW_j)^T (LW_j) + \delta (LW_j)^T (LW_j) \right) \leq k_{19} + \frac{2\delta_6^2 ds}{\delta} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{1 \times d} \left(\frac{\partial PU_i}{\partial x_j} \right)^2.$$

En sommant (6.26) de $j = 1$ à $j = N$, on obtient finalement,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} \text{Tr}[(\nabla LU_{i1})^T (\nabla LU_{i1})] + \delta \text{Tr}[(\nabla LU_{i1})^T (\nabla LU_{i1})] \right) \leq N k_{19} \\ + \frac{2\delta_6^2 ds}{\delta} \int_{\Omega} \text{Tr}[(\nabla PU_i)^T (\nabla PU_i)]. \end{aligned}$$

On intègre cette inégalité ; cela donne, car $LU_{i1}(0) = 0$,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \text{Tr}[(\nabla LU_{i1})^T (\nabla LU_{i1})] &\leq \frac{Nk_{19}}{\delta} + \frac{2\delta_6^2 ds}{\delta} \int_0^t \int_{\Omega} \text{Tr}[(\nabla PU_i)^T (\nabla PU_i)] e^{\delta(\tau-t)} d\tau \\
 &\leq \frac{Nk_{19}}{\delta} + \frac{2\delta_6^2 ds}{\delta} \int_0^{T+2r} \int_{\Omega} \text{Tr}[(\nabla PU_i)^T (\nabla PU_i)] e^{\delta(\tau-t)} d\tau \\
 (6.27) \quad &+ \frac{2\delta_6^2 ds}{\delta} \int_{T+2r}^t \int_{\Omega} \text{Tr}[(\nabla PU_i)^T (\nabla PU_i)] e^{\delta(\tau-t)} d\tau \\
 &\leq \frac{Nk_{19}}{\delta} + \frac{\delta_6^2 ds}{\delta \min_{1 \leq j \leq s} \{q_j\}} [k_{12}(T+2r) + K] + \frac{2\delta_6^2 ds}{\delta^2} k_{16}.
 \end{aligned}$$

Notons que, $k_i, i \in \{1, \dots, 19\}$ sont constantes positives qui dépend des donnés.

Les estimations (6.19), (6.23), (6.24) et (6.27) nous donnent la compacité uniforme des opérateurs S_{i1} . En effet, si $U_i(0)$ est dans un sous-ensemble borné et pour tout $t \geq T + 2r$, alors $S_{i1}U_i(0)$ est dans un ensemble borné de $((H^1(\Omega))^d)^n$ indépendemment de t et compact relativement dans \mathcal{H} . On a donc montré l'existence d'un ensemble absorbant borné. Ceci nous donne le théorème 11. \square

Lemme 8. *L'attracteur \mathcal{A} défini au théorème 11 est borné dans $((L^q(\Omega))^d)^n$ pour tout $q \in [1, +\infty)$.*

Démonstration. Soit $\alpha(k) = k(p-2) + 2$. Puisque $\alpha(k) \rightarrow +\infty$ alors que $k \rightarrow +\infty$, il suffit de montrer que \mathcal{A} est borné dans $((L^{\alpha(k)}(\Omega))^d)^n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $r > 0$ fixé ; on montre par récurrence sur k que,

$$(6.28) \quad \mathcal{A} \text{ est borné dans } ((L^{\alpha(k)}(\Omega))^d)^n,$$

et que,

$$(6.29) \quad \sup_{(U_{i0}) \in \mathcal{A}} \int_t^{t+r} \int_{\Omega} |U_i^j|^{\alpha(k+1)} \leq K, \quad \forall t \geq 0, j \in \{1, 2, \dots, s\},$$

où $(U_i), i = \overline{1, n}$ est la solution de (6.1)-(6.5) (voir [57]). Dans la suite, on note par K une constante quelconque qui dépend des donnés du problème (6.1)-(6.7) et de k .

- Pour $k = 0$: on a, $\alpha(0) = 2$ et $\alpha(1) = p$.

Alors, (6.28) est prouvé grâce au théorème 11. Soit $(U_{i0}) \in \mathcal{A}, i \in \{1, \dots, n\}$, grâce à (6.20), on a,

$$\sum_{i=1}^n \left(\delta_1^T \int_t^{t+r} \int_{\Omega} P |U_i|^p \right) \leq rk_{12} + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} U_i^T U_i \leq K,$$

ce qui prouve (6.29).

- Supposons que (6.28) et (6.29) sont vraies pour $k-1$ ($k \geq 1$). En particulier, il existe une constante $K > 0$ telle que,

$$(6.30) \quad \int_{\Omega} |U_i^j|^{\alpha(k-1)} \leq K, \quad \forall (U_i) \in \mathcal{A}, j \in \{s+1, \dots, d\},$$

puisque \mathcal{A} est borné dans $((L^{\alpha(k)}(\Omega))^d)^n$. Soit $(U_{i0}) \in \mathcal{A}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. En multipliant l'équation j ème de (6.1) par $U_i^j |U_i^j|^{\alpha(k)-2}$, $j \in \{1, \dots, s\}$, et en intégrant sur Ω , on obtient,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha(k)} \frac{d}{dt} |U_i^j|^{\alpha(k)} &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |U_i^j|^{\alpha(k)-2} U_i^j U_{it}^j \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |U_i^j|^{\alpha(k)-2} U_i^j (F^j(U_i) + q_j \Delta U_i^j + H_i^j(U)) \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(|U_i^j|^{\alpha(k)-2} U_i^j F^j(U_i) + q_j \Delta U_i^j |U_i^j|^{\alpha(k)-2} U_i^j \right. \\
 &\quad \left. + H_i^j(U) |U_i^j|^{\alpha(k)-2} U_i^j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(|U_i^j|^{\alpha(k)-2} U_i^j F^j(U_i) - (\alpha(k)-1) q_j (\nabla U_i^j)^2 |U_i^j|^{\alpha(k)-2} \right. \\
 &\quad \left. + H_i^j(U) |U_i^j|^{\alpha(k)-2} U_i^j \right) \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(|U_i^j|^{\alpha(k)-2} U_i^j F^j(U_i) + H_i^j(U) |U_i^j|^{\alpha(k)-2} U_i^j \right) \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[|U_i^j|^{\alpha(k)-2} \left(- \sum_{l=1}^s \bar{\delta}_1^l |U_i^l|^p - \sum_{m=s+1}^d \bar{\delta}_1^m |U_i^m|^2 + \bar{\delta}_3 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \delta_4 |U_i^j|^{\alpha(k)-1} (1 + \sum_{h=1}^n |U_h^j|^{p_1}) \right].
 \end{aligned}$$

Alors ceci implique,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\alpha(k)} \frac{d}{dt} |U_i^j|^{\alpha(k)} + \sum_{l=1}^s \bar{\delta}_1^l |U_i^l|^p |U_i^j|^{\alpha(k)-2} + \sum_{m=s+1}^d \bar{\delta}_1^m |U_i^m|^2 |U_i^j|^{\alpha(k)-2} \right] \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\bar{\delta}_3 |U_i^j|^{\alpha(k)-2} + \delta_4 |U_i^j|^{\alpha(k)-1} + \delta_4 \sum_{h=1}^n |U_h^j|^{p_1} |U_i^j|^{\alpha(k)-1} \right) \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\bar{\delta}_1^j}{4} |U_i^j|^{\alpha(k+1)} + K + \delta_4 \sum_{h=1}^n |U_h^j|^{p_1} |U_i^j|^{\alpha(k)-1} \right).
 \end{aligned}$$

On a donc,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\alpha(k)} \frac{d}{dt} |U_i^j|^{\alpha(k)} + \frac{3\bar{\delta}_1^j}{4} |U_i^j|^{\alpha(k+1)} + \sum_{l=1, l \neq j}^s \bar{\delta}_1^l |U_i^l|^p |U_i^j|^{\alpha(k)-2} \right. \\
 \left. + \sum_{m=s+1}^d \bar{\delta}_1^m |U_i^m|^2 |U_i^j|^{\alpha(k)-2} \right) \leq \delta_4 \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n \int_{\Omega} |U_h^j|^{p_1} |U_i^j|^{\alpha(k)-1} + K.
 \end{aligned}$$

Soit $\bar{p} = \frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)-1}$ et soit \bar{q} tel que $\frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = 1$, on peut vérifier que $\bar{q}p_1 \leq \alpha(k+1)$. En utilisant

l'inégalité de Young, on a,

$$\begin{aligned}
 \delta_4 \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n \int_{\Omega} |U_h^j|^{p_1} |U_i^j|^{\alpha(k)-1} &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n \int_{\Omega} \left(K |U_h^j|^{\bar{q}p_1} + \frac{\bar{\delta}_1^j}{4n} |U_i^j|^{\alpha(k+1)} \right) + K \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(nK |U_i^j|^{\bar{q}p_1} + \frac{\bar{\delta}_1^j}{4} |U_i^j|^{\alpha(k+1)} \right) + K \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\bar{\delta}_1^j}{2} |U_i^j|^{\alpha(k+1)} + K \right) + K.
 \end{aligned}$$

En combinant les inégalités au-dessus, on obtient finalement,

$$\begin{aligned}
 (6.31) \quad &\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\alpha(k)} \frac{d}{dt} |U_i^j|^{\alpha(k)} + \frac{\bar{\delta}_1^j}{4} |U_i^j|^{\alpha(k+1)} + \sum_{l=1, l \neq j}^s \bar{\delta}_1^l |U_i^l|^p |U_i^j|^{\alpha(k)-2} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=s+1}^d \bar{\delta}_1^m |U_i^m|^2 |U_i^j|^{\alpha(k)-2} \right) \leq K
 \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence (6.29) pour $k-1$, on applique le lemme de Gronwall uniforme à (6.31), on conclut que,

$$\int_{\Omega} |U_i^j|^{\alpha(k)} \leq K, \quad j \in \{1, \dots, s\}, \forall t \geq r.$$

Car $S(r)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ (où $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est le semi-groupe associé à (6.1)), cela implique,

$$(6.32) \quad \int_{\Omega} |U_i^j|^{\alpha(k)} \leq K, \quad \forall (U_i) \in \mathcal{A}, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, s\}.$$

En intégrant (6.31) entre t et $t+r$, et en utilisant (6.32), on a,

$$\sup_{(U_{i0}) \in \mathcal{A}} \int_t^{t+r} \int_{\Omega} |U_i^j|^{\alpha(k+1)} \leq K, \quad \forall t \geq 0.$$

Il reste à vérifier le bornage pour v . Il suffit de montrer que,

$$(6.33) \quad \int_{\Omega} |U_i^j|^{\alpha(k)} \leq K, \quad \forall (U_i) \in \mathcal{A}, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{s+1, \dots, d\}, \forall t \geq 0.$$

Soit $(U_i) \in \mathcal{A}, i \in \{1, \dots, n\}$. Il existe une suite $(U_{im}) \in \mathcal{A}, i \in \{1, \dots, n\}$ et une suite $t_m \rightarrow +\infty$ telles que,

$$S_{i1}(t_m) \cdot (U_{im}) \rightarrow (U_i), \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty,$$

où $S_{i1}(t)$ est défini par (6.21). En effet, ceci vient de l'invariance fonctionnelle de \mathcal{A} et de la propriété $S_{i2}(t) = S_i(t) - S_{i1}(t)$.

Ainsi, par (6.21) et (6.32), on a, $\forall t \geq 0, j \in \{s+1, \dots, d\}$,

$$\begin{aligned}
 \|U_{i1m}^j(t)\|_{L^{\alpha(k)}(\Omega)} &\leq \int_0^t \|\Phi_j\|_{L^{\alpha(k)}(\Omega)} \exp(-\delta(t-s)) ds \\
 &\leq K \int_0^t \left\| \sum_{j=1}^s |U_{im}^j| + 1 \right\|_{L^{\alpha(k)}(\Omega)} \exp(-\delta(t-s)) ds \\
 &\leq \frac{K}{\delta}.
 \end{aligned}$$

qui implique (6.33), car il existe une sous-suite m_l telle que,

$$\|U_i^j(t)\|_{L^{\alpha(k)}(\Omega)} \leq \liminf_{l \rightarrow +\infty} \|U_{i1m_l}^j(t_{m_l})\|_{L^{\alpha(k)}(\Omega)}.$$

- Ce qui complète la démonstration du lemme. \square

Théorème 12. *Sous les hypothèses (6.1)-(6.7), l'attracteur global \mathcal{A} définit au théorème 11 est borné dans $((L^\infty(\Omega))^d)^n$.*

Démonstration. Soit $(\bar{U}_i) \in \mathcal{A}$ et soit $\bar{t} > 0$. Puisque \mathcal{A} est un ensemble invariant, il existe une solution (U_i) de (6.1)-(6.7) qui satisfait $(U_{i0}) \in \mathcal{A}$ et $(U_i(\bar{t})) = (\bar{U}_i)$. Soit $\Sigma(t)$ le semi-groupe associé à l'opérateur linéaire $\frac{\partial}{\partial t} - q\Delta + I$ et avec une condition aux bords de Neumann, alors on peut écrire $U_i^j, j \in \{1, \dots, s\}$ comme suivant,

$$(6.34) \quad U_i^j(t) = \Sigma(t)U_{i0}^j + \int_0^t \Sigma(t-s) \left\{ F^j(U_i(s)) + H_i^j(U(s)) + U_i^j(s) \right\} ds, \quad t \geq 0.$$

Le semi-groupe $\Sigma(t)$ satisfait la propriété régulière (voir Rothe [69]),

$$\|\Sigma(t)\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq km(t)^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}\|\varphi\|_{L^N(\Omega)},$$

où $m(t) = \min(1, t)$, λ est la plus petite valeur propre de l'opérateur $-q\Delta + I$ associé avec une condition aux bords de Neumann, et k est une constante positive. Alors, grâce à Lemme 8, il existe une constante $K > 0$ telle que,

$$\begin{cases} \|U_i^j\|_{L^N(\Omega)} \leq K \\ \|F^j(U_i) + H_i^j(U) + U_i^j\|_{L^N(\Omega)} \leq K \end{cases}$$

On a gâcé à (6.34) que,

$$\begin{aligned} \|U_i^j(t)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq kK \left\{ m(t)^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}m(t-s)^{-\frac{1}{2}}ds \right\}, \quad \forall t \geq 0 \\ &\leq kK \left\{ m\left(\frac{\bar{t}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 2 + \frac{1}{\lambda} \right\}, \quad \forall t \geq \frac{\bar{t}}{2}. \end{aligned}$$

En particulier, $\bar{U}_i^j = U_i^j(\bar{t})$ satisfait,

$$\|\bar{U}_i^j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq kK \left\{ m\left(\frac{\bar{t}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 2 + \frac{1}{\lambda} \right\}, \quad \forall (\bar{U}_i) \in \mathcal{A}.$$

Finalement, la borne de $\|\bar{U}_i^l\|_{L^\infty(\Omega)}$, $l \in \{s+1, \dots, d\}$ vient de celle de $\|\bar{U}_i^j\|_{L^\infty(\Omega)}$, $j \in \{1, \dots, s\}$ comme il est montré au Lemme 8. Ceci complète la démonstration. \square

3. Synchronisation identique d'un réseau de n systèmes de réaction-diffusion

Dans cette section, on s'intéresse à la synchronisation identique dans des réseaux couplés symétriquement et asymétriquement avec couplage linéaire. On va utiliser la méthode appelée *Connection graph stability* pour calculer les seuils de la force de couplage pour obtenir la synchronisation (voir [3, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 17, 24, 25]).

Définition 9. Soit $U(t) = (U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t))$ un réseau d'oscillateurs. On dit que $U(t)$ synchronise identiquement si,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^d \left(\left\| U_i^j(t) - U_{i+1}^j(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \right) = 0.$$

On appelle *norme de l'erreur de synchronisation de U* , la quantité,

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^d \left\| U_i^j(t) - U_{i+1}^j(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.1. Synchronisation dans des réseaux couplés symétriquement

On considère un réseau,

$$(6.35) \quad U_{it} = F(U_i) + Q\Delta U_i + \sum_{j=1}^n \epsilon_{ij}(t)PU_j, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

où U_i, F, Q et P sont définis comme avant. Soit $E = (\epsilon_{ij}(t))_{n \times n}$ une matrice vérifiant,

$$\epsilon_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \epsilon_{ij}, \text{ et } \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}, \epsilon_{ij} \geq 0, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j.$$

C'est donc un réseau arbitraire des systèmes couplés mutuellement grâce à la matrice symétrique de couplage. La somme de chaque ligne de E vaut zéro. Cette condition est nécessaire pour l'existence de l'état synchronisé [14]. Supposons que le réseau (6.35) vérifie les hypothèses (6.2)-(6.7), alors il existe un ensemble compact \mathcal{B} qui attire tous les trajectoires du système. Donc, il y a aucune trajectoire qui converge à l'infini.

La matrice E définit un graphe avec n noeuds et m arêtes. Ici, le nombre d'arêtes m , à partir de tous $N = \frac{n(n-1)}{2}$ liens possibles entre n oscillateurs, vaut le nombre d'éléments non-zéros au-dessus de la diagonale de la matrice E , $\epsilon_{i_k j_k} > 0$ pour $k \in \{1, \dots, m\}$ et $\epsilon_{i_k j_k} = 0$ pour $k \in \{m+1, \dots, N\}$. Ces m éléments non-zéros de E représentent la topologie et la force de couplage. Les noeuds du graphe correspondent à des oscillateurs individuels et les arêtes correspondent à des éléments non-zéros hors de la diagonale de E . Alors, le graphe a une arête entre le noeud i et le noeud j si $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} > 0$. Supposons que le graphe est connecté.

Notre objectif principal est d'obtenir les conditions pour la stabilité globale asymptotique de synchronisation du système (6.35). On veut déterminer les seuils de la force de couplage nécessaire pour la synchronisation, et de montrer qu'ils dépendent du nombre d'oscillateurs, la configuration de couplage, et les propriétés de l'individuel.

La variété de synchronisation du système (6.35) est définie par $\mathcal{M} = \{U_1 = U_2 = \dots = U_n\}$.

Soit $X_{ij} = U_j - U_i, i, j \in \{1, \dots, n\}$, on obtient,

$$(6.36) \quad X_{ijt} = F(U_j) - F(U_i) + Q\Delta X_{ij} + \sum_{k=1}^n (\epsilon_{jk}PX_{jk} - \epsilon_{ik}PX_{ik}), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

On a, $F^{(l)}(U_j) - F^{(l)}(U_i) = DF^{(l)}(U^*)X_{ij}$, où $l \in \{1, \dots, d\}$ et $DF^{(l)}$ est un vecteur jacobien de d -colonnes de $F(U^*(t))$, où $U^* \in [U_i, U_j]$. De plus, on préfère la notation vectorielle plus compacte, et on obtient,

$$F(U_j) - F(U_i) = \int_0^1 \frac{d}{d\sigma} F(\sigma U_j + (1 - \sigma)U_i) d\sigma = \left[\int_0^1 DF(\sigma U_j + (1 - \sigma)U_i) d\sigma \right] X_{ij},$$

où DF est une matrice jacobienne de taille $d \times d$ de F .

On peut alors écrire,

$$(6.37) \quad X_{ijt} = \left[\int_0^1 DF(\sigma U_j + (1 - \sigma)U_i) d\sigma \right] X_{ij} + Q\Delta X_{ij} + \sum_{k=1}^n (\epsilon_{jk}PX_{jk} - \epsilon_{ik}PX_{ik}),$$

où $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

En utilisant la technique développée dans les documents [11, 12, 13, 14] pour la stabilité du système. On va additionner et soustraire un terme supplémentaire AX_{ij} dans le système (6.37), on obtient,

$$(6.38) \quad \begin{aligned} X_{ijt} = & \left[\int_0^1 DF(\sigma U_j + (1 - \sigma)U_i) d\sigma - A \right] X_{ij} + AX_{ij} \\ & + Q\Delta X_{ij} + \sum_{k=1}^n (\epsilon_{jk}PX_{jk} - \epsilon_{ik}PX_{ik}), \end{aligned}$$

où $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et la matrice $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_d)$, où $a_l \geq 0$ pour $l \in \{1, \dots, s\}$, et $a_l = 0$ pour $l \in \{s+1, \dots, d\}$. Notons ici que le choix de la matrice A est strictement définie par la fonction F .

Notre but est d'obtenir les conditions sous lesquelles les solutions du système couplé (6.38) convergent vers 0 quand $t \rightarrow \infty$ et la variété de synchronisation du système (6.35) est globalement asymptotiquement stable.

La matrice $-A$ est additionnée pour embêter l'instabilité causée par des valeurs propres avec leur partie réelle non-négative de DF . En même temps, l'instabilité introduite par la matrice définie positive $+A$ dans (6.38) peut être embêtée par les termes de couplage. Les coefficients positifs a_k sont mis dans la matrice A à la place correspondante à des variables par lesquelles des oscillateurs sont couplés, et donc les influences de désynchronisation $+a_k$ peuvent être compensées par les termes de couplage négatifs.

Pour aller plus loin, on devrait faire quelques hypothèses et introduire le système auxiliaire,

$$(6.39) \quad X_{ijt} = \left[\int_0^1 DF(\sigma U_j + (1 - \sigma)U_i) d\sigma - A \right] X_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

On suppose qu'il existe des fonctions de Lyapunov sous la forme,

$$(6.40) \quad W_{ij} = \frac{1}{2} X_{ij}^T H X_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

où $H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_s, H_1)$, $h_1 > 0, \dots, h_s > 0$, H_1 est une matrice de taille $(d-s) \times (d-s)$, symétrique et définie positive.

Leurs dérivées par rapport au système (6.39) sont obligées d'être négatives,

$$(6.41) \quad \dot{W}_{ij} = X_{ij}^T H \left[\int_0^1 DF(\sigma U_j + (1-\sigma)U_i) d\sigma - A \right] X_{ij} < 0, \quad X_{ij} \neq 0.$$

C'est une condition essentielle pour la méthode. Cela implique que les paramètres a_1, a_2, \dots, a_s sont suffisamment grands.

Remarque 4. Les détails de la preuve de l'hypothèse (6.41) pour le réseau (6.35) en appliquant aux systèmes de FitzHugh-Nagumo (aussi ceux de Lorenz) couplés par leur première variable sont présentés dans l'[annexe B](#).

On peut maintenant étudier la stabilité globale de la variété de synchronisation par la construction de la fonction de Lyapunov pour le système (6.38),

$$(6.42) \quad V = \frac{1}{4} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H X_{ij},$$

où H est la matrice définie dans (6.40).

La dérivée de V par rapport au temps a la forme,

$$(6.43) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H X_{ijt} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H \left\{ \left[\int_0^1 DF(\sigma U_j + (1-\sigma)U_i) d\sigma - A \right] X_{ij} + AX_{ij} \right. \\ &\quad \left. + Q\Delta X_{ij} + \sum_{k=1}^n (\epsilon_{jk} P X_{jk} - \epsilon_{ik} P X_{ik}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{W}_{ij} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H A X_{ij} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H Q \Delta X_{ij} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H \sum_{k=1}^n (\epsilon_{jk} P X_{jk} - \epsilon_{ik} P X_{ik}) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{W}_{ij} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H A X_{ij} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H \sum_{k=1}^n (\epsilon_{jk} P X_{jk} - \epsilon_{ik} P X_{ik}). \end{aligned}$$

Notre objectif est de trouver les conditions pour que \dot{V} soit négatif. La première somme S_1 est définie négative grâce à des hypothèses (6.39)-(6.41), alors il reste d'étudier les deux dernières sommes. Car $X_{ii}^2 = 0$, $X_{ij}^2 = X_{ji}^2$, on peut calculer la seconde somme comme suit,

$$(6.44) \quad S_2 = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} H A X_{ij}^2.$$

Cette somme est toujours définie positive et devrait être compensée par la troisième somme,

$$\begin{aligned}
 (6.45) \quad S_3 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H \sum_{k=1}^n (\epsilon_{jk} P X_{jk} - \epsilon_{ik} P X_{ik}) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\epsilon_{jk} X_{ji}^T H P X_{jk} + \epsilon_{ik} X_{ij}^T H P X_{ik}).
 \end{aligned}$$

En renommant dans le second terme i par j et vice versa, le second terme est identique au premier et on obtient,

$$S_3 = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \epsilon_{jk} X_{ji}^T H P X_{jk}.$$

En utilisant $X_{jj} = 0$, on a,

$$S_3 = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k} \epsilon_{jk} X_{ji}^T H P X_{jk} - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j<k} \epsilon_{jk} X_{ji}^T H P X_{jk}.$$

En renommant dans le second terme j par k et vice versa, et en utilisant la symétrique de E , on obtient,

$$\begin{aligned}
 S_3 &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k} \epsilon_{jk} X_{ji}^T H P X_{jk} - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k<j} \epsilon_{jk} X_{ki}^T H P X_{kj} \\
 &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k} \epsilon_{jk} (X_{ji}^T + X_{ik}^T) H P X_{jk}.
 \end{aligned}$$

Car $X_{ji}^T + X_{ik}^T = [U_i^T - U_j^T + U_k^T - U_i^T] = X_{jk}^T$, on obtient,

$$(6.46) \quad S_3 = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k} \epsilon_{jk} X_{jk}^T H P X_{jk} = - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k} n \epsilon_{jk} X_{jk}^T H P X_{jk}.$$

On a maintenant,

$$\begin{aligned}
 S_2 + S_3 &\leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} X_{ij}^T H A X_{ij} - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} n \epsilon_{ij} X_{ij}^T H P X_{ij} \\
 &\leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} X_{ij}^T H (A - n \epsilon_{ij} P) X_{ij}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on arrive à conclure que, dans notre cas, la dérivée $\dot{V} < 0$ si la forme $S_2 + S_3$ est définie négative. Il est vrai si l'inégalité suivante est vérifiée,

$$(6.47) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} n \epsilon_{ij} X_{ji}^T H P X_{ji} > \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} X_{ij}^T H A X_{ij}.$$

Rappelons que $X_{ij} = \{X_{ij}^{(1)}, \dots, X_{ij}^{(d)}\}$. On arrive enfin à l'affirmation de base suivante.

Théorème 13. *Sous les hypothèses (6.41), (6.47), et supposons que,*

$$(6.48) \quad \sum_{k=1}^m \epsilon_{i_k j_k} X_{j_k i_k}^2 > \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} X_{ij}^2,$$

où m est le nombre d'éléments non-zéros de la matrice de couplage E et $X_{i_k j_k}$, $k \in \{1, \dots, m\}$ est défini par des arêtes où les coefficients de couplage sont présents. Alors, la variété de synchronisation du système (6.35) est globalement asymptotiquement stable.

Au delà, le $X_{i_k j_k}$ représente les scalaires $X_{i_k j_k}^{(l)}$, $l \in \{1, \dots, s\}$ et $a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ tels que dans l'inégalité (6.48), on a s inégalités similaires pour les scalaires $X_{i_k j_k}^{(l)}$.

Exemple 3 (Réseau complet). On suppose que, $\epsilon_{i_k j_k}(t) > 0$, $k \in \{1, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\}$, pour tout $i_k, j_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout t , i.e., chaque noeud est connecté à tous les autres. Ainsi, grâce au théorème 13, le seuil de synchronisation est,

$$\epsilon_{i_k j_k}(t) > \frac{a}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} X_{ij}^2}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} X_{ij}^2} = \frac{a}{n}.$$

Dans le cas où $n = 3$, $d = 2$, $s = 1$, $F^1(u, v) = \frac{1}{\epsilon}(-u^3 + 3u - v)$, $\sigma_2(x) = 0.001$, $\Phi_2(x, u) = -u$, $\epsilon = 0.1$, $Q = \text{diag}(0.5, 0)$, $\forall i, j, i \neq j$, $\epsilon_{ij} = g_3$. On s'intéresse à la valeur minimale de force de couplage pour obtenir la synchronisation du réseau. On montre aussi des patterns de trois noeuds (voir figure 6.1), et on observe que la synchronisation survient pour $g_3 \geq 0.025$.

Remarque 5. Pour calculer la valeur de a dans cet exemple, on peut voir dans l'[annexe B](#), pages 166 – 167 ($a = a_1$).

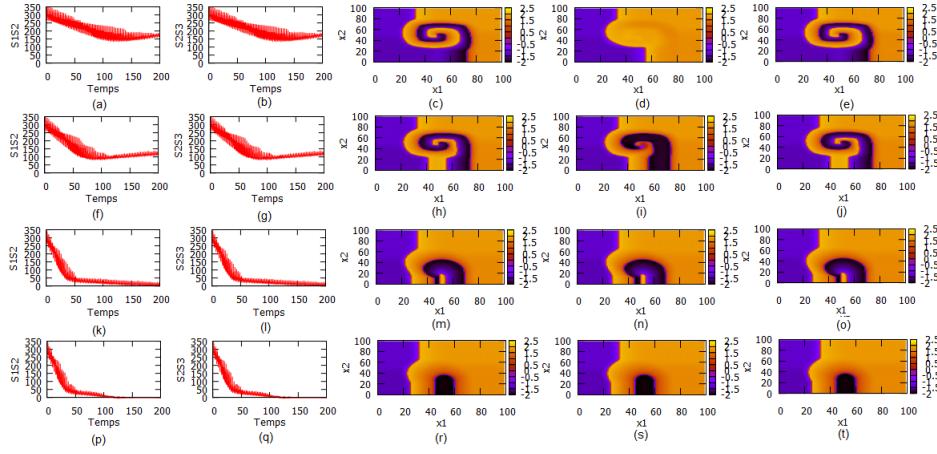


Figure 6.1. *Synchronisation d'un réseau complet de trois nœuds couplés linéairement de type (6.35) avec $n = 3$, $d = 2$, $s = 1$, $F^1(u, v) = \frac{1}{\epsilon}(-u^3 + 3u - v)$, $\sigma_2(x) = 0.001$, $\Phi_2(x, u) = -u$, $\epsilon = 0.1$, $Q = \text{diag}(0.5, 0)$, $\forall i, j, i \neq j$, $\epsilon_{ij} = g_3$. On prend deux conditions initiales en spirale et une homogène. La synchronisation survient pour $g_3 \geq 0.025$. Avant synchronisation, pour $g_3 = 0.005$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, t)$ et $u_3(x_1, x_2, t)$; des simulations similaires sont reproduites pour $g_3 = 0.01$ (figures (f), (g), (h), (i), (j)), $g_3 = 0.023$ (figures (k), (l), (m), (n), (o)) et $g_3 = 0.025$ (figures (p), (q), (r), (s), (t)). Pour la valeur $g_3 = 0.025$, on observe la synchronisation de trois nœuds.*

En augmentant le nombre de noeuds dans le graphe, on peut alors trouver un tableau suivant.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g_n	0.025	0.015	0.012	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.0045
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20
g_n	0.004	0.0038	0.0035	0.0032	0.003	0.0028	0.0026	0.0024	0.0023

Table 6.1. *Tableau donnant les forces de couplage minimales nécessaires g_n afin d'observer un phénomène de synchronisation entre n nœuds dans le réseau complet.*

Grâce à ces expérimentations numériques, on constate que la force de couplage nécessaire pour observer la synchronisation de n noeuds dépend à la fois du nombre de noeuds. En effet, les points de la figure 6.2 représentent la force de couplage de synchronisation en fonction du nombre de noeuds dans le réseau complet avec couplage linéaire et la courbe représente la loi suivante,

$$g_n = \frac{0.051}{n-1} - 0.00041,$$

où n est le nombre de noeuds du réseau. Ainsi, la force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation suit cette loi. On peut aussi voir que la valeur critique de synchronisation est diminué en augmentant le nombre de noeuds dans le réseau.

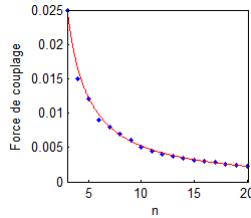


Figure 6.2. Evolution de la force de couplage g_n pour laquelle la synchronisation a lieu en fonction du nombre n de nœuds dans le réseau complet et elle suit la loi $g_n = \frac{0.051}{n-1} - 0.00041$. Il apparaît ici une propriété émergente qui peut être retrouvé dans la nature et les systèmes dynamiques artificiels (voir [10, 19]).

Remarque 6. Dans un réseau complet, chaque nœud est connecté à l'ensemble des nœuds du réseau. Intuitivement, l'influence de chacun sur les autres, et des autres sur chacun est plus importante. Cela se concrétise d'un point de vue mathématique avec la technique de *connection graph stability*. En effet, cette technique pénalise la synchronisation des réseaux faiblement connectés en ajoutant un terme comptant la somme de la longueur de tous les chemins minimaux passant par une arête donnée. En même temps, la partie réactive de chaque nœud reste la même, tandis qu'un facteur en $\frac{1}{n}$ apparaît. Dans un réseau complet, lorsque le nombre de nœuds du réseau augmente, la pénalité liée à la connectivité du réseau est d'ordre 1, on obtient ainsi un seuil de synchronisation décroissant en $\frac{1}{n}$. Dans les réseaux à plus faible connectivité, les termes de pénalité introduits par la méthode de *connection graph stability* pour les couples de nœuds non-connectés, ne sont plus nécessairement compensés par le terme en $\frac{1}{n}$. Ainsi, par exemple dans les réseaux en anneau, un facteur d'ordre n^3 intervient qui n'est compensé que par un terme d'ordre $\frac{1}{n}$ correspondant au nombre de nœuds du réseau. Dans ce cas, la synchronisation devient plus difficile lorsque le nombre de nœuds augmente. Il est particulièrement remarquable que les simulations numériques confirment les lois de synchronisation données par la méthode de *connection graph stability*, ce qui tend à montrer qu'il ne s'agit pas d'un artifice mathématique introduit par une condition suffisante de synchronisation.

L'idée ensuite est d'établir un seuil de force de couplage sur la longueur de tous les chemins passant par une arête dans le graphe. Cette méthode lie directement la *synchronisation* avec la *théorie de graphe*, et elle nous permet d'éviter de calculer les exposants de Lyapunov et les valeurs propres de la matrice de connection. De plus, cela garantit la synchronisation dans le réseau issue des conditions initiales arbitraires. Notre méthode est aussi valable pour des réseaux avec un couplage du temps varié, et elle est peut-être étendue pour l'étude de synchronisation identique dans des réseaux appelés *small world* (voir dans [14]).

Alors, on peut retrouver les mêmes résultats dans [14] comme suit.

Théorème 14. *Sous les hypothèses (6.41), (6.47), et supposons que,*

$$(6.49) \quad \epsilon_k(t) > \frac{a}{n} b_k(n, m) \quad \text{pour } k \in \{1, \dots, m\} \text{ et pour tout } t,$$

où $b_k(n, m) = \sum_{j>i; k \in P_{ij}}^n z(P_{ij})$ est la somme de longueurs de tous les chemins choisis P_{ij} qui passent par une arête donnée k qui appartient à la configuration de couplage. Alors, la variété de synchronisation du système (6.35) est globalement asymptotiquement stable.

Démonstration. On a,

$$X_{ij}^2 \leq z(P_{ij}) \sum_{k \in P_{ij}} X_{i_k j_k}^2,$$

où $z(P_{ij})$ est la longue de P_{ij} . Alors, la somme à droite dans Eq. (6.48) est majorée comme suit,

$$(6.50) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} X_{ij}^2 \leq \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i; k \in P_{ij}} z(P_{ij}) \right) X_{i_k j_k}^2.$$

En substituant les estimations (6.50) à l'inégalité (6.48), on a des conditions,

$$\epsilon_k(t) > \frac{a}{n} \sum_{j>i; k \in P_{ij}} z(P_{ij}), \text{ pour } k \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

□

Remarque 7. Théorème 14 conduit directement à la méthode suivante pour établir notre condition suffisante pour la synchronisation identique.

- Choisir l'ensemble de chemins $\{P_{ij} | i, j = 1, \dots, n, j > i\}$, un chemin pour chaque paire des nœuds i et j . Déterminer leurs longueurs $z(P_{ij})$, le nombre d'arêtes comprenant chaque P_{ij} .
- Pour chaque arête k du graphe, déterminer la somme $b_k(n, m)$ de longueurs de tous les chemins choisis P_{ij} qui passent par une arête donnée k qui appartient à la configuration de couplage.

Exemple 4 (Réseau en étoile). Dans une topologie de réseau en étoile, les nœuds du réseau sont reliés à un nœud matériel central. Celui-ci a pour rôle d'assurer la communication entre les différents nœuds du réseau. On peut voir une illustration de ce type de réseau sur la figure 6.3(a).

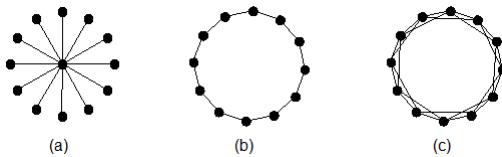


Figure 6.3. La figure (a) représente un réseau en étoile ; (b) représente un réseau en anneau ; (c) représente un réseau régulier dans lequel chaque nœud couplé avec ses $2k$ plus proches voisins ($k = 2$ dans ce cas).

Corollaire 1. Pour la topologie de réseau en étoile, la condition de synchronisation (6.49) devient,

$$\epsilon_{1j}(t) > \epsilon^* = \frac{a(2n-3)}{n}, \text{ pour } j \in \{2, \dots, n\} \text{ et pour tout } t.$$

Comme précédemment, on montre des patterns de synchronisation du réseau en étoile de deux nœuds (voir figure 6.4), et les valeurs minimales de force de couplage en augmentant le nombre de nœuds du graphe emportées dans le tableau 6.2.

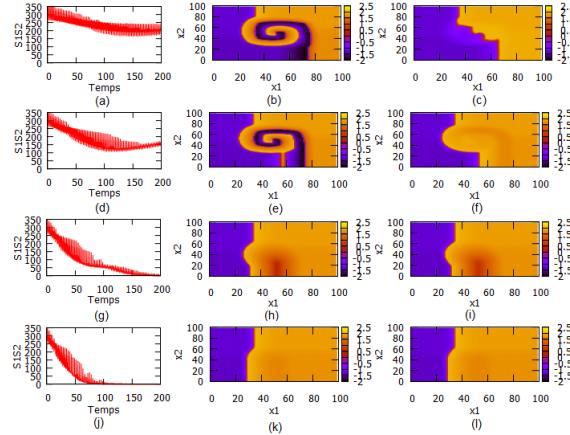


Figure 6.4. Synchronisation d'un réseau en étoile de deux nœuds couplés linéairement de type (6.35) avec $n = 2$, $d = 2$, $s = 1$, $F^1(u, v) = \frac{1}{\epsilon}(-u^3 + 3u - v)$, $\sigma_2(x) = 0.001$, $\Phi_2(x, u) = -u$, $\epsilon = 0.1$, $Q = \text{diag}(0.5, 0)$, $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = g_2$, et $\epsilon_{ii} = -g_2$ autrement. On prend une condition initiale en spirale et une homogène. La synchronisation survient pour $g_2 \geq 0.027$. Avant synchronisation, pour $g_2 = 0.005$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; la figure (b) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même la figure (c) représente le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, t)$; des simulations similaires sont reproduites pour $g_2 = 0.01$ (figures (d), (e), (f)), $g_2 = 0.02$ (figures (g), (h), (i)) et $g_2 = 0.027$ (figures (j), (k), (l)). Pour la valeur $g_2 = 0.027$, on observe la synchronisation de deux nœuds.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_n	0.027	0.035	0.04	0.043	0.045	0.046	0.047	0.048	0.0486
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
g_n	0.049	0.0495	0.0498	0.05	0.0504	0.0506	0.0508	0.051	0.0512

Table 6.2. Tableau donnant les forces de couplage minimales nécessaires afin d'observer un phénomène de synchronisation du réseau en étoile de n nœuds.

Grâce à ces expérimentations numériques, on constate que la force de couplage nécessaire pour observer la synchronisation de n nœuds dépend à la fois du nombre de nœuds. En effet, les points de la figure 6.5 représentent la force de couplage de synchronisation en fonction du nombre de nœuds dans le réseau en étoile et la courbe représente la loi,

$$g_n = -\frac{0.054}{n} + 0.054,$$

où n est le nombre de nœuds du réseau. Ainsi, la force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation suit cette loi. On peut aussi voir que la valeur critique de synchronisation est montée en augmentant le nombre de nœuds dans le réseau.

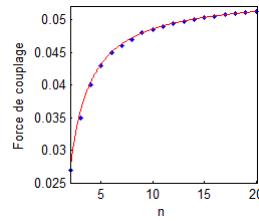


Figure 6.5. Evolution de la force de couplage g_n pour laquelle la synchronisation a lieu en fonction du nombre n de nœuds du réseau en étoile et elle suit la loi $g_n = -\frac{0.054}{n} + 0.054$.

Remarque 8. Dans le réseau en étoile, chaque noeud partage l'information avec les autres grâce au noeud central. Donc, plus le nombre de noeuds est élevé, plus cela perturbe le noeud central. Cette problématique est bien connue dans les réseaux informatiques. Dans la méthode de *connection graph stability*, cela se manifeste par la pénalisation des couples de noeuds non-connectés par un terme d'ordre n . Cela est compensé par un terme d'ordre $\frac{1}{n}$ correspondant au nombre de noeuds du réseau. Au départ le seuil de synchronisation augmente avec le nombre de noeuds, mais pour des tailles très grandes on observe une asymptote.

Exemple 5 (Réseau en anneau). Dans un réseau en anneau, tous les noeuds sont reliés entre eux dans une boucle fermée (voir figure 6.3(b)).

Corollaire 2. Pour la topologie de réseau en anneau, la condition de synchronisation (6.49) devient, pour tout t ,

$$\epsilon(t) > \epsilon^* = \begin{cases} a \left(\frac{n^2}{24} - \frac{1}{24} \right) & \text{pour } n \text{ impair,} \\ a \left(\frac{n^2}{24} + \frac{1}{12} \right) & \text{pour } n \text{ pair.} \end{cases}$$

Comme précédemment, on peut trouver des résultats numériques dans ce cas-là comme suit.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g_n	0.025	0.027	0.03	0.035	0.04	0.048	0.05	0.065	0.075
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20
g_n	0.088	0.1	0.12	0.13	0.15	0.17	0.18	0.2	0.23

Table 6.3. Tableau donnant les forces de couplage minimales nécessaires afin d'observer un phénomène de synchronisation entre n nœuds en anneau couplés bidirectionnellement linéairement.

Grâce à ces expérimentations numériques, on constate que la force de couplage nécessaire pour observer la synchronisation de n nœuds dépend à la fois du nombre de nœuds. En effet, les points de la figure 6.6 représentent la force de couplage de synchronisation en fonction du nombre de nœuds dans le réseau en anneau couplé bidirectionnellement avec couplage linéaire et la courbe représente la loi suivante,

$$g_n = 0.00065n^2 - 0.0027n + 0.027,$$

où n est le nombre de nœuds du réseau. Ainsi, la force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation suit cette loi. On peut aussi voir que la valeur critique de synchronisation est montée en augmentant le nombre de nœuds dans le réseau.

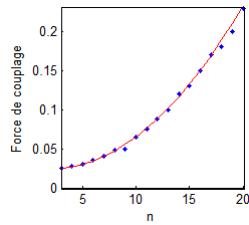


Figure 6.6. Evolution de la force de couplage g_n pour laquelle la synchronisation a lieu en fonction du nombre n de nœuds couplés bidirectionnellement avec couplage linéaire du réseau en anneau et elle suit la loi $g_n = 0.00065n^2 - 0.0027n + 0.027$.

Remarque 9. Dans ce type de réseau, chaque unité est uniquement reliée à deux voisins les plus proches. C'est pour cela que plus le nombre de nœuds dans le réseau est augmenté, plus le contact entre eux devient faible. Ainsi, la force de couplage est plus importante quand le nombre de nœuds dans le réseau est élevé.

Exemple 6 (Réseau régulier). Un réseau régulier est un type de réseau qui généralise le cas des anneaux. Dans ce réseau, chaque sommet est connecté à ses k ($k \in \mathbb{N}, k < n/2$) plus proches voisins de gauche et à ses k plus proches voisins de droite. Ainsi, chaque noeud est de degré $2k$ (voir figure 6.3(c)).

Corollaire 3. Pour la topologie de réseau régulier, la condition de synchronisation (6.49) devient, pour tout t ,

$$\epsilon(t) > \epsilon^* = \frac{a}{n} \left(\frac{n}{2k} \right)^3 \left(1 + \frac{65}{4} \cdot \frac{k}{n} \right).$$

On s'intéresse aussi à la valeur minimale de force de couplage pour obtenir le phénomène de synchronisation du réseau. On fixe le nombre de nœuds à 20. Le degré de chaque nœud est ensuite augmenté de 2, jusqu'à atteindre 18 connections. Comme précédemment, on trouve des résultats numériques comme suit.

d	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$g_{20}^{(d)}$	0.02	0.012	0.008	0.0065	0.005	0.004	0.0037	0.0035	0.003

Table 6.4. Tableau donnant les forces de couplage minimales nécessaires afin d'observer un phénomène de synchronisation entre 20 nœuds du réseau régulier couplés bidirectionnellement linéairement.

Grâce à ces expérimentations numériques, on constate que la force de couplage nécessaire $g_{20}^{(d)}$ pour observer la synchronisation de 20 nœuds dépend à la fois du degré d de nœuds du graphe. En effet, les points de la figure 6.7 représentent la force de couplage de synchronisation en fonction du nombre de nœuds dans le réseau régulier couplé bidirectionnellement avec couplage linéaire et la courbe représente la loi suivante,

$$g_{20}^{(d)} = \frac{0.0375}{d} + 0.00125,$$

où d est le degré de nœuds du réseau. Ainsi, la force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation de 20 noeuds suit cette loi. On peut aussi voir que la valeur critique de synchronisation est diminuée en augmentant le degré des nœuds dans le réseau.

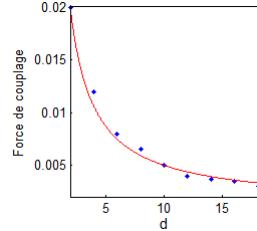


Figure 6.7. Evolution de la force de couplage $g_{20}^{(d)}$ pour laquelle la synchronisation de 20 nœuds a lieu en fonction du degré des nœuds du réseau régulier couplés bidirectionnellement avec couplage linéaire, et elle suit la loi $g_{20}^{(d)} = \frac{0.0375}{d} + 0.00125$.

Remarque 10. Pour ce type de réseau, chaque nœud est de degré $2k$. Avec un nombre de nœuds de réseau fixé, plus k est élevé, plus chaque nœud partage facilement l'information avec ses voisins et les voisins de ses voisins. Ainsi, la force de couplage est moins importante quand le nombre de nœuds dans le réseau est élevé.

3.2. Synchronisation dans des réseaux couplés asymétriquement

Dans cette section, on présente un cadre général pour l'étude de la synchronisation identique dans des réseaux de systèmes dynamiques avec connexions asymétriques. On étend la méthode appelée *Connection graph stability*, développée à l'origine pour les réseaux couplés symétriquement, au cas asymétrique. L'idée principale de la méthode est de transformer le graphe orienté en graphe non-orienté (voir [15]).

On considère le réseau,

$$(6.51) \quad U_{it} = F(U_i) + Q\Delta U_i + \sum_{j=1}^n c_{ij}(t)PU_j, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

où U_i, F, Q et P sont définis comme avant. Soit $G = (c_{ij})_{n \times n}$ une matrice vérifiant,

$$c_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij}, \text{ et } c_{ij} \geq 0, i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j.$$

La matrice G est supposée être asymétrique, donc elle représente un graphe orienté \mathcal{G} avec n nœuds et m arêtes. Le graphe possède une arête entre le nœud i et le nœud j si au moins un des deux coefficients de couplage c_{ij} et c_{ji} est non-zéro.

La variété de synchronisation du système (6.51) est définie par $\mathcal{M} = \{U_1 = U_2 = \dots = U_n\}$. Pour avoir la synchronisation identique de tous les oscillateurs, le graphe est supposé être connecté. Supposons que le réseau (6.51) vérifie les hypothèses (6.2)-(6.7), alors il existe un ensemble compact \mathcal{B} qui attire tous les trajectoires du système. Donc, il y a aucune trajectoire qui converge à l'infini.

Ce n'est pas comme des réseaux couplés mutuellement dans lesquels n'importe quelle configuration de connection du graphe permet de la synchronisation pour tous les nœuds, la synchronisation dans des réseaux couplés asymétriquement est seulement possible s'il existe au moins un nœud qui influence directement ou indirectement sur les autres.

Remarque 11. La matrice asymétrique de connectivité $G = (c_{ij})$ peut être décomposée en deux matrices E et E' de taille $n \times n$:

$$(6.52) \quad G = E + E',$$

où E est une matrice symétrique,

$$(6.53) \quad E = (\epsilon_{ik}) : \begin{cases} \epsilon_{ik} = \epsilon_{ki} = \frac{1}{2}(c_{ik} + c_{ki}) & \text{pour } k \neq i, \\ \epsilon_{ii} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1, k \neq i}^n (c_{ik} + c_{ki}) & \text{pour } k = i, \end{cases}$$

et E' est une matrice antisymétrique,

$$(6.54) \quad E' = (\delta_{ik}) : \begin{cases} \delta_{ik} = \frac{1}{2}(c_{ik} - c_{ki}) & \text{pour } k \neq i, \\ \delta_{ii} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1, k \neq i}^n (c_{ik} - c_{ki}) & \text{pour } k = i. \end{cases}$$

Remarque 12. Les matrices E et E' ont la somme de chaque ligne nulle, i.e., $\sum_{k=1}^n \epsilon_{ik} = 0$ et $\sum_{k=1}^n \delta_{ik} = 0$. Les éléments diagonaux de E' sont $\delta_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_{ki}$. Autrement, δ_{ii} est une demie somme d'éléments du colonne i ème de G .

La preuve est simple. On va additionner et soustraire le terme $\frac{1}{2}c_{ii}$ dans

$$\delta_{ii} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1, k \neq i}^n (c_{ik} - c_{ki}).$$

On obtient $\delta_{ii} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_{ki}$. Le premier terme vaut zéro, car la somme de chaque ligne de G est nulle. Donc, $\delta_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_{ki}$.

Notre objectif est de trouver une classe de réseaux couplés asymétriquement pour laquelle la méthode *Connection graph stability* peut être appliquée directement.

En utilisant la décomposition (6.52), on peut récrire Eq. (6.51) sous la forme,

$$(6.55) \quad U_{it} = F(U_i) + Q\Delta U_i + \sum_{k=1}^n \epsilon_{ik} P U_k + \sum_{k=1}^n \delta_{ik} P U_k, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Soit $X_{ij} = U_j - U_i$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Comme précédemment, on obtient le système,

$$(6.56) \quad \begin{aligned} X_{ijt} &= \left[\int_0^1 DF(\sigma U_j + (1 - \sigma) U_i) d\sigma \right] X_{ij} + Q\Delta X_{ij} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n (\epsilon_{jk} P X_{jk} - \epsilon_{ik} P X_{ik}) + \sum_{k=1}^n (\delta_{jk} P X_{jk} - \delta_{ik} P X_{ik}). \end{aligned}$$

Après additionner et soustraire un terme $A X_{ij}$ dans le système (6.56), on a,

$$(6.57) \quad \begin{aligned} X_{ijt} &= \left[\int_0^1 DF(\sigma U_j + (1 - \sigma) U_i) d\sigma - A \right] X_{ij} + A X_{ij} + Q\Delta X_{ij} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n (\epsilon_{jk} P X_{jk} - \epsilon_{ik} P X_{ik}) + \sum_{k=1}^n (\delta_{jk} P X_{jk} - \delta_{ik} P X_{ik}), \end{aligned}$$

où A est défini comme avant. Similairement, on devrait faire quelques assumptions et introduire le système auxiliaire,

$$(6.58) \quad X_{ijt} = \left[\int_0^1 DF(\sigma U_j + (1 - \sigma) U_i) d\sigma - A \right] X_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

On suppose qu'il existe des fonctions de Lyapunov sous la forme,

$$(6.59) \quad W_{ij} = \frac{1}{2} X_{ij}^T H X_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

où $H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_s, H_1)$, $h_1 > 0, \dots, h_s > 0$, H_1 est une matrice de taille $(d-s) \times (d-s)$, symétrique et définie positive.

Leurs dérivées par rapport au système (6.58) sont obligées d'être négatives,

$$(6.60) \quad \dot{W}_{ij} = X_{ij}^T H \left[\int_0^1 DF(\sigma U_j + (1-\sigma)U_i) d\sigma - A \right] X_{ij} < 0, \quad X_{ij} \neq 0.$$

On construit aussi la fonction de Lyapunov pour le système (6.57),

$$(6.61) \quad V = \frac{1}{4} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H X_{ij},$$

où H est défini dans (6.59).

La dérivée de V par rapport au temps a la forme,

$$(6.62) \quad \begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{W}_{ij} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H A X_{ij} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H Q \Delta X_{ij} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H \sum_{k=1}^n (\epsilon_{jk} P X_{jk} - \epsilon_{ik} P X_{ik}) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H \sum_{k=1}^n (\delta_{jk} P X_{jk} - \delta_{ik} P X_{ik}) \\ \leq & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{W}_{ij} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H A X_{ij} \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H \sum_{k=1}^n (\epsilon_{jk} P X_{jk} - \epsilon_{ik} P X_{ik}) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H \sum_{k=1}^n (\delta_{jk} P X_{jk} - \delta_{ik} P X_{ik}). \end{aligned}$$

Notre objectif est de trouver les conditions pour que \dot{V} soit négatif. La première somme S_1 est définie négative grâce à des assumptions (6.58)-(6.60), donc il reste d'étudier les trois dernières sommes. Grâce à des travaux précédents, on peut récrire la seconde somme qui est toujours définie positive comme suit,

$$(6.63) \quad S_2 = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} H A X_{ij}^2,$$

et comme précédemment, on a,

$$(6.64) \quad S_3 \leq - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k} n \epsilon_{jk} X_{jk}^T H P X_{jk}.$$

Considérons la quatrième somme,

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}^T H \sum_{k=1}^n (\delta_{jk} P X_{jk} - \delta_{ik} P X_{ik}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\delta_{jk} X_{ji}^T H P X_{jk} + \delta_{ik} X_{ij}^T H P X_{ik}). \end{aligned}$$

En renommant dans le second terme de S_4 , l'indice i par j et vice versa, celui-ci devient identique au premier, et on a,

$$S_4 = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{jk} X_{ji}^T H P X_{jk}.$$

En utilisant $X_{jk} = X_{ji} + X_{ik}$, on décompose S_4 en deux sommes,

$$\begin{aligned} (6.65) \quad S_4 &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{jk} X_{ji}^T H P X_{ji} - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{jk} X_{ji}^T H P X_{ik} \\ &\equiv S_{41} + S_{42}. \end{aligned}$$

La première somme dans Eq. (6.65),

$$S_{41} = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ji}^T H P X_{ji} \sum_{k=1}^n \delta_{jk} = 0,$$

car la somme de chaque ligne de E' est nulle.

On décompose le second terme dans Eq. (6.65),

$$S_{42} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{jj} X_{ij}^T H P X_{ij} - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{k \neq j} \delta_{jk} X_{ji}^T H P X_{ik} \right\}.$$

Pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, la somme dans le second terme de S_{42} égale à zéro,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k \neq j} \delta_{jk} X_{ji}^T H P X_{ik} = 0,$$

grâce à l'anti-symétrie de E' : $\{\delta_{jk} = -\delta_{kj}\}$ et l'égalité $X_{ji}^T H P X_{ik} = X_{ki}^T H P X_{ij}$.

Par conséquent, on obtient,

$$S_{42} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{jj} X_{ij}^T H P X_{ij}.$$

En utilisant la symétrie de la forme quadratique S_{42} , on a,

$$(6.66) \quad S_{42} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \mu_{ij} X_{ij}^T H P X_{ij},$$

où $\mu_{ij} = \delta_{ii} + \delta_{jj}$ est une demie somme d'éléments du colonne i ème et j ème de G .

Ainsi, en recueillant les sommes S_2, S_3 et S_{42} dans Eqs. (6.63), (6.64) et (6.66), on obtient la condition pour que la dérivée \dot{V} soit négative,

$$(6.67) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} X_{ij}^T H (A - n\epsilon_{ij} P + \mu_{ij} P) X_{ij} < 0.$$

Cette inégalité est une condition suffisante pour la stabilité globale de la variété de synchronisation.

Ensuite, pour pouvoir appliquer la méthode *Connection graph stability*, on considère deux cas suivants.

Cas 1 : $c_{ii} = - \sum_{i=1, i \neq j}^n c_{ij}, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Dans ce cas, on tombe sur des réseaux de nœuds balancés couplés asymétriquement. *Nœud balancé* veut dire que la somme des coefficients de couplage de tous les arêtes entrant à un nœud est égale à celle des coefficients de couplage de tous les arêtes sortant du même nœud.

Ainsi, $\mu_{ij} \equiv 0$, et la condition de stabilité (6.67) devient,

$$(6.68) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} X_{ij}^T H (A - n\epsilon_{ij} P) X_{ij} < 0.$$

Ici, le terme négatif de couplage, défini par la matrice symétrique $E = (\epsilon_{ij})$, devrait surmonter la contribution du terme positif $X_{ij}^T H A X_{ij}$.

Le critère de stabilité (6.68) est pour des réseaux de nœuds couplés *asymétriquement*, mais la matrice E est symétrique. Donc, la méthode *connection graph stability* (voir dans [14, 17]) peut être appliquée directement à cette classe des graphes orientés.

Théorème 15. *Sous les hypothèses (6.60), (6.67), la variété de synchronisation du système (6.51) est globalement asymptotiquement stable si l'inégalité suivante est vérifiée, pour $k \in \{1, \dots, m\}$ et pour tout t ,*

$$(6.69) \quad \frac{c_{ij}(t) + c_{ji}(t)}{2} = \epsilon_{ij}(t) = \epsilon_k(t) > \frac{a}{n} b_k(n, m),$$

où au moins un coefficient du couple (c_{ij}, c_{ji}) n'est pas zéro et définit une arête dans le graphe de connection orienté \mathcal{G} ; le coefficient de couplage $\epsilon_{ij} = \epsilon_k$ définit l'arête k dans le graphe non-orienté \mathcal{E} associé à la matrice symétrique E ; et $b_k(n, m)$ est la somme de longueur de tous les chemins choisis qui passent par une arête k donnée qui appartient au graphe non-orienté \mathcal{E} . Ici, m est le nombre d'arêtes du graphe non-orienté.

Remarque 13. On trouve que les réseaux couplés symétriquement sont des réseaux de nœuds balancés. Car la somme de chaque ligne de G est nulle, et celle de chaque colonne aussi. Donc, le théorème 15 est applicable à tels réseaux. Autrement, le théorème 15 est plus général que le théorème 13.

Exemple 7. On considère un réseau en anneau d'oscillateurs couplés unidirectionnellement, avec coefficient de couplage c (voir figure 6.8(a)). A chaque nœud du graphe, une arête entre et l'autre sort. Ainsi, les nœuds balancés sont réalisés. Le réseau couplé symétriquement associé est un

anneau avec coefficient de couplage $c/2$ (voir figure 6.8(b)). La synchronisation dans ce réseau est déjà étudiée avant par la méthode *connection graph stability*. Cela est prouvé que,

$$\frac{c}{2} = \epsilon^* > \begin{cases} a \left(\frac{n^2}{24} - \frac{1}{24} \right) & \text{pour } n \text{ impair,} \\ a \left(\frac{n^2}{24} + \frac{1}{12} \right) & \text{pour } n \text{ pair,} \end{cases}$$

est une condition suffisante pour la synchronisation du réseau en anneau couplé unidirectionnellement.

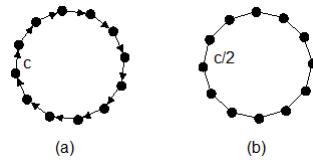


Figure 6.8. La figure (a) représente un réseau en anneau couplé unidirectionnellement ; (b) représente son réseau associé symétrique avec moitié de force de couplage par arête. La flèche veut dire la direction de couplage le long d'une arête et l'arête sans flèche est couplée bidirectionnellement.

Comme la partie précédente, on présente aussi des résultats numériques pour les réseaux en anneau couplé unidirectionnellement.

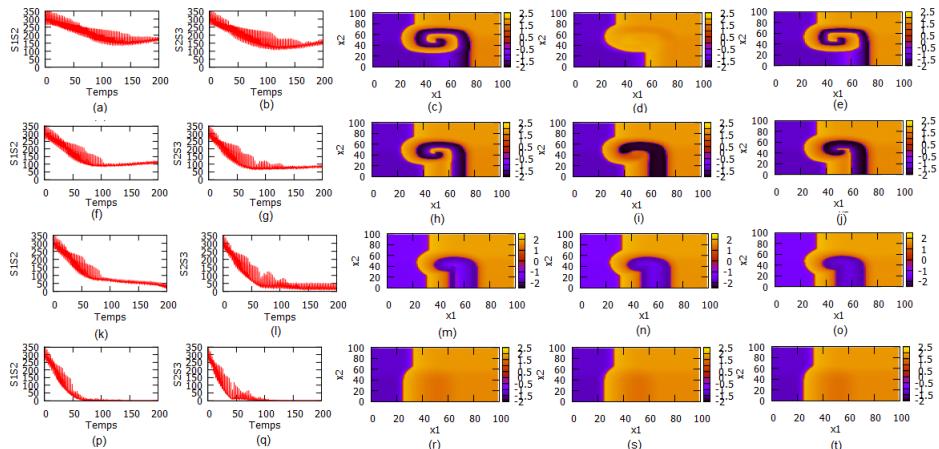


Figure 6.9. Synchronisation d'un réseau en anneau de trois nœuds couplés linéairement de type (6.51) avec $n = 3$, $d = 2$, $s = 1$, $F^1(u, v) = \frac{1}{\epsilon}(-u^3 + 3u - v)$, $\sigma_2(x) = 0.001$, $\Phi_2(x, u) = -u$, $\epsilon = 0.1$, $Q = \text{diag}(0.5, 0)$, $\epsilon_{i(i+1)} = \epsilon_{n1} = \frac{g_3}{2}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, et $\epsilon_{ij} = 0$, $i \neq j$ autrement. On prend deux conditions initiales en spirale et une homogène. La synchronisation survient pour $g_3 \geq 0.04$. Avant synchronisation, pour $g_3 = 0.01$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, t)$ et $u_3(x_1, x_2, t)$; des simulations similaires sont reproduites pour $g_3 = 0.02$ (figures (f), (g), (h), (i), (j)), $g_3 = 0.03$ (figures (k), (l), (m), (n), (o)) et $g_3 = 0.04$ (figures (p), (q), (r), (s), (t)). Pour la valeur $g_3 = 0.04$, on observe la synchronisation de trois nœuds.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g_n	0.04	0.045	0.053	0.065	0.08	0.095	0.11	0.13	0.15
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20
g_n	0.17	0.2	0.22	0.25	0.28	0.32	0.35	0.38	0.42

Table 6.5. Tableau donnant les forces de couplage minimales nécessaires afin d'observer un phénomène de synchronisation entre n nœuds en anneau couplés unidirectionnellement linéairement.

Grâce à ces expérimentations numériques, on constate que la force de couplage nécessaire pour observer la synchronisation de n noeuds dépend à la fois du nombre de noeuds. En effet, les points de la figure 6.10 représentent la force de couplage de synchronisation en fonction du nœuds dans le réseau en anneau couplé unidirectionnellement avec couplage linéaire et la courbe représente la loi suivante,

$$g_n = 0.00094n^2 + 0.00063n + 0.03,$$

où n est le nombre de noeuds du réseau. Ainsi, la force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation suit cette loi. On peut aussi voir que la valeur critique de synchronisation est montée en augmentant le nombre de nœuds dans le réseau.

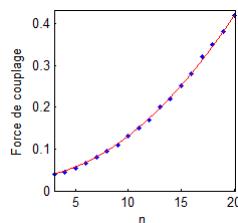


Figure 6.10. Evolution de la force de couplage g_n pour laquelle la synchronisation a lieu en fonction du nombre n de nœuds couplés unidirectionnellement avec couplage linéaire du réseau en anneau et elle suit la loi $g_n = 0.00094n^2 + 0.00063n + 0.03$.

Exemple 8. Considérons un réseau régulier, on obtient des résultats similaires en analysant ce type de réseau couplé unidirectionnellement à ses k plus proches voisins (sur la figure 6.11, $k = 2$), et on peut voir son réseau couplé symétriquement associé sur la figure 6.11(b). En appliquant la méthode *connection graph stability*, on obtient la condition suffisante pour la synchronisation,

$$\frac{c}{2} > \frac{a}{n} \left(\frac{n}{2k} \right)^3 \left(1 + \frac{65}{4} \cdot \frac{k}{n} \right).$$

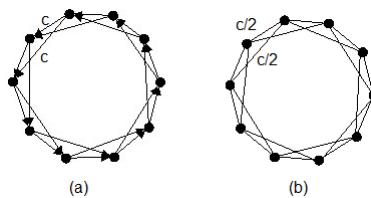


Figure 6.11. La figure (a) représente un réseau régulier dans lequel chaque nœud est connecté à ses k plus proches voisins ; (b) représente son réseau associé symétrique ($k = 2$ dans ce cas).

On prend le cas où le nombre de noeuds est fixé à 20 avec le degré entrant des noeuds qui augmente, la force de couplage nécessaire à la synchronisation de tous les noeuds évolue avec le degré des noeuds comme présenté dans le tableau 6.6 et la figure 6.12.

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g_{20}^{(d)}$	0.03	0.02	0.013	0.011	0.0088	0.008	0.0068	0.0064	0.006

Table 6.6. Tableau donnant les forces de couplage minimales nécessaires afin d'observer un phénomène de synchronisation entre 20 noeuds en réseau régulier couplés unidirectionnellement linéairement.

Grâce à ces expérimentations numériques, on constate que la force de couplage nécessaire pour observer la synchronisation de 20 noeuds dépend à la fois du degré de noeuds du graphe. En effet, les points de la figure 6.12 représentent la force de couplage de synchronisation en fonction du nombre de noeuds dans le réseau régulier couplé unidirectionnellement avec couplage linéaire et la courbe représente la loi suivante,

$$g_{20}^{(d)} = \frac{0.0265}{d} + 0.0035,$$

où d est le degré de noeuds du réseau. Ainsi, la force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation suit cette loi. On peut aussi voir que la valeur critique de synchronisation est montée en augmentant le degré de noeuds dans le réseau.

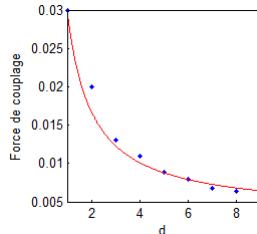


Figure 6.12. Evolution de la force de couplage $g_{20}^{(d)}$ pour laquelle la synchronisation de 20 noeuds a lieu en fonction du degré de noeuds du réseau régulier couplés unidirectionnellement avec couplage linéaire et elle suit la loi $g_{20}^{(d)} = \frac{0.0265}{d} + 0.0035$.

Cas 2 : $c_{ii} \neq -\sum_{i=1, i \neq j}^n c_{ij}, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

D'après (6.67), on obtient,

$$(6.70) \quad \sum_{k=1}^m \epsilon_{i_k j_k} X_{j_k i_k}^2 > \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} (1 + \frac{\mu_{ij}}{a}) X_{ij}^2,$$

où m est le nombre d'éléments non nuls de G et $X_{i_k j_k}, k \in \{1, \dots, m\}$ sont définis par des arêtes où les coefficients de couplage sont présents (voir [16]).

Donc, on peut réécrire (6.70) comme suit,

$$(6.71) \quad \sum_{\alpha=1}^s \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \left(\frac{c_{ij} + c_{ji}}{2} \right) (X_{ij}^\alpha)^2 > \frac{a}{n} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \left(1 + \frac{D_i^\alpha + D_j^\alpha}{2a} \right) (X_{ij}^\alpha)^2,$$

où $D_i^c = \sum_{k=1}^n c_{ki}$ et $D_j^c = \sum_{k=1}^n c_{kj}$ sont les sommes de colonnes i ème et j ème de G , respectivement.

En termes de graphes, $D_i^c = \sum_{k=1}^n c_{ki} = \sum_{k \neq i} c_{ki} + c_{ii} = \sum_{k \neq i} c_{ki} - \sum_{k \neq i} c_{ik} = d_{out} - d_{in}$, équivaut à la différence entre la somme des coefficients de couplage de tous les arêtes sortant du i et celle de tous les arêtes entrant au même nœud i (voir figure 6.13). On appelle cette quantité le *nœud non-balancé*.

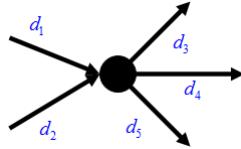


Figure 6.13. *nœud non-balancé*. Ici, $D_i^c = d_{out} - d_{in} = (d_3 + d_4 + d_5) - (d_1 + d_2)$.

Les coefficients de couplage $\frac{c_{ij} + c_{ji}}{2}$ définissent les arêtes dans le graphe symétrisé obtenu en remplaçant une arête orientée du nœud i au nœud j et une autre dans la direction inverse par une arête non-orientée. Par conséquent, les variables X_{ij} dans la partie à gauche (LHS) de l'inégalité (6.71) correspondent à des paires de nœuds reliés directement par une arête dans le graphe symétrisé. En même temps, la partie à droite (RHS) contient les variables qui correspondent à deux nœuds quelconques. L'idée essentielle de la méthode *Connection graph stability* est d'exprimer tous les variables $X_{ij}, j \in \{1, \dots, n\}$ dans le RHS à travers les variables X_{ij} dans le LHS de l'inégalité (6.71). Ceci est réalisé en calculant la longueur de tous les trajets choisis passant par une arête sur le graphe de connexion. Contrairement au cas symétrique, ces longueurs de trajets seront différentes en raison de la présence de facteurs non unitaires $\left(1 + \frac{D_i^c + D_j^c}{2a}\right)$ dans le RHS de l'inégalité (6.71).

Les termes $\frac{a}{n} \cdot \frac{D_i^c + D_j^c}{2a}$ dans le RHS de l'inégalité (6.71) sont associés à la somme des nœuds non-balancés i et j . Si le terme $\frac{a}{n} \cdot \frac{D_i^c + D_j^c}{2a}$ est négatif pour i et j , alors il est favorable pour abaisser l'inégalité (6.71). Donc, on va passer tous les termes négatifs $\frac{a}{n} \cdot \frac{D_i^c + D_j^c}{2a}$ à LHS.

Pourtant, il vaut mieux, en général, incorporer le terme $\frac{a}{n} \cdot \frac{D_i^c + D_j^c}{2a}$ en forme quadratique dans le LHS seulement s'il est négatif et si i et j sont liés directement par une arête k du graphe symétrisé. On note alors $-\frac{1}{n} \cdot \frac{D_i^c + D_j^c}{2}$ par D_k . Donc, la force de couplage à l'arête k entre i et j est $\frac{c_{ij} + c_{ji}}{2} + D_k$.

Si le terme $\frac{1}{n} \cdot \frac{D_i^c + D_j^c}{2}$ est négatif, mais il y a aucune arête reliant directement entre i et j , on le laisse dans le RHS de l'inégalité (6.71) avec des termes $\frac{1}{n} \cdot \frac{D_i^c + D_j^c}{2}$ qui sont positifs. Notons que $\left(1 + \frac{D_i^c + D_j^c}{2a}\right)$ peut devenir négatif. Dans ce cas, on le mets simplement à 0 pour que le RHS reste une forme quadratique positive.

La redistribution des termes $\frac{D_i^c + D_j^c}{2} (X_{ij}^\alpha)^2$ revient à ce qui suit :

- Pour chaque arête du graphe symétrisé, on associe la quantité D_k définie par,

$$(6.72) \quad D_k = \begin{cases} \left| \frac{D_i^c + D_j^c}{2n} \right|, & \text{si } D_i^c + D_j^c < 0 \text{ et il y a une arête } k \text{ entre } i \text{ et } j, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

- Pour tout couple de noeuds (i, j) , on choisit un chemin P_{ij} et on associe à chaque chemin P_{ij} sa longueur $z(P_{ij})$ définie par,

$$(6.73) \quad z(P_{ij}) = \begin{cases} |P_{ij}|, & \text{si } D_i^c + D_j^c < 0, \text{ et il y a une arête } k \text{ entre } i \text{ et } j, \\ |P_{ij}| \chi \left(1 + \frac{D_i^c + D_j^c}{2a} \right) = |P_{ij}| \chi \left(1 + \frac{D_{ij}}{a} \right), & \text{autrement,} \end{cases}$$

où $D_{ij} = \frac{D_i^c + D_j^c}{2}$ et $|P_{ij}|$ est le nombre d'arêtes dans P_{ij} . La fonction,

$$\chi(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc, l'inégalité (6.71) devient,

$$(6.74) \quad \sum_{\alpha=1}^s \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} (d_k + D_k) (X_{ij}^\alpha)^2 > \frac{a}{n} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \left(1 + \frac{D_{ij}}{a} \right) (X_{ij}^\alpha)^2,$$

où $d_k = \frac{c_{ij} + c_{ji}}{2}$.

Comme dans [12], on remplace maintenant la variable $(X_{ij}^\alpha)^2, j > i$ dans le LHS de l'inégalité (6.74) par $(X_k^\alpha)^2, k \in \{1, \dots, m\}$, où m est le nombre d'arêtes du graphe symétrisé et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc un théorème comme suit.

Théorème 16. *La variété de synchronisation du réseau (6.51) est globalement asymétriquement stable si,*

$$(6.75) \quad d_k + D_k > \frac{a}{n} b_k, \quad k \in \{1, \dots, m\},$$

où $b_k = \sum_{j>i; k \in P_{ij}} z(P_{ij})$ est la somme de longueurs $z(P_{ij})$ de tous les chemins choisis P_{ij} qui passent par une arête donnée k qui appartient au graphe non-orienté symétrisé. Cette longueur de trajets $z(P_{ij})$ est définie dans Eq.(6.73) comme suit,

$$z(P_{ij}) = \begin{cases} |P_{ij}|, & \text{si } D_i^c + D_j^c < 0, \text{ et il y a une arête } k \text{ entre } i \text{ et } j, \\ |P_{ij}| \chi \left(1 + \frac{D_i^c + D_j^c}{2a} \right) = |P_{ij}| \chi \left(1 + \frac{D_{ij}}{a} \right), & \text{autrement,} \end{cases}$$

où la fonction χ est l'identité pour arguments positifs et 0 pour négatifs.

Le coefficient $d_k = \frac{c_{ij} + c_{ji}}{2}$ définit une arête k dans le graphe non-orienté symétrisé. Une force de couplage supplémentaire $D_k = \left| \frac{D_i^c + D_j^c}{2n} \right|$ est ajoutée à des arêtes du graphe symétrisé pour la quantité $D_i^c + D_j^c$ négative.

Théorème 16 conduit directement à la méthode suivante pour établir notre condition suffisante pour la synchronisation identique.

- **Etape 1 :** Déterminer $D_i^c = \sum_{j=1}^n c_{ji}, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- **Etape 2 :** Symétriser le graphe de connection en remplaçant l'arête orientée du noeud i au noeud j par une arête non-orientée avec coefficient de couplage $\frac{c_{ij}}{2}$. Dans le cas où il y a une arête orientée du noeud i au noeud j et une autre arête dans la direction inverse, cette paire d'arêtes orientées est remplacée par une arête non-orientée avec coefficient $d_k = \frac{c_{ij} + c_{ji}}{2}$.

• **Etape 3 :** Choisir un chemin P_{ij} entre chaque paire de noeuds. Souvent, le plus court chemin est choisi. Parfois, le différent choix de chemins peut conduire à des bornes inférieures.

- **Etape 4 :** Pour chaque P_{ij} , identifier les chemins de longeur 1, i.e. des arêtes du graphe symétrisé avec $D_i^c + D_j^c < 0$. Pour ces arêtes, calculer et ajouter la force supplémentaire $D_{ij} = \left| \frac{D_i^c + D_j^c}{2n} \right|$ au couplage symétrisé d_k .

Pour tous les autres chemins P_{ij} , les chemins de longeur 1 avec $D_i^c + D_j^c \geq 0$ et chemins quelconques composés d'au moins deux noeuds, calculer les quantités $D_{ij} = \frac{D_i^c + D_j^c}{2}$ et $1 + \frac{D_{ij}}{a}$. Associer le coefficient $1 + \frac{D_{ij}}{a}$ à la longeur de chemin P_{ij} si $1 + \frac{D_{ij}}{a} > 0$, et cela vaut zéro, sinon.

- **Etape 5 :** Pour chaque arête k du graphe symétrisé, déterminer l'inégalité,

$$d_k + D_k > \frac{a}{n} b_k, \quad \text{où} \quad b_k = \sum_{j>i, k \in P_{ij}} z(P_{ij}).$$

- **Etape 6 :** En combinant les inégalités dans l'étape 5, on trouve la valeur commune pour tous les coefficients de connexion qui garantissent la synchronisation identique.

On applique cette méthode à quelques exemples de réseaux asymétriques concrètes.

Exemple 9 (Réseau en chaîne). Considérons un réseau asymétrique en chaîne de 2 noeuds (voir figure 6.14(a)). On suppose que la force de couplage est égale à g .



Figure 6.14. (a) Réseau couplé asymétriquement en chaîne dans lequel le noeud 2 reçoit le signal du noeud 1, (b) réseau symétrisé de (a) avec connection bidirectionnelle.

On utilise la procédure de 6 étapes pour étudier la condition de synchronisation.

- **Etape 1 :** Calculer la différence entre la somme des coefficients de couplage de tous les arêtes sortant du noeud i et celle de tous les arêtes entrant au noeud $i, i \in \{1, 2\}$. Donc, on obtient,

$$D_1^c = d_{out} - d_{in} = g, \quad D_2^c = -g.$$

- **Etape 2 :** Symétriser le graphe en remplaçant chaque arête orientée par une arête non-orientée avec une demie force de couplage (voir figure 6.14(b)),

$$d_1 = \frac{g}{2}.$$

• **Etape 3 :** Choisir un chemin P_{ij} entre une paire quelconque des noeuds i, j du graphe symétrisé. Ici, il existe un seul chemin, $P_{12} = e_1$.

• **Etape 4 :** Pour chaque chemin P_{ij} , déterminer les coefficients $\frac{D_i^c + D_j^c}{2}$. On obtient alors,

$$P_{12} : D_{12} = \frac{D_1^c + D_2^c}{2} = 0.$$

Donc, $D_1 = 0$.

• **Etape 5 :** On détermine l'inégalité (6.75). Considérons l'arête e_1 entre le noeud 1 et le noeud 2. On a,

$$d_1 + D_1 = \frac{g}{2} > \frac{a}{n} b_1,$$

où $b_1 = z(P_{12}) = |P_{12}| \chi \left(1 + \frac{D_{12}}{a} \right) = 1$.

• **Etape 6 :** Ainsi, on obtient,

$$g > a.$$

Donc, $g > a$ est le seuil de synchronisation dont on a besoin.

Comme précédemment, les résultats numériques dans ce cas-là sont représentés comme suit.

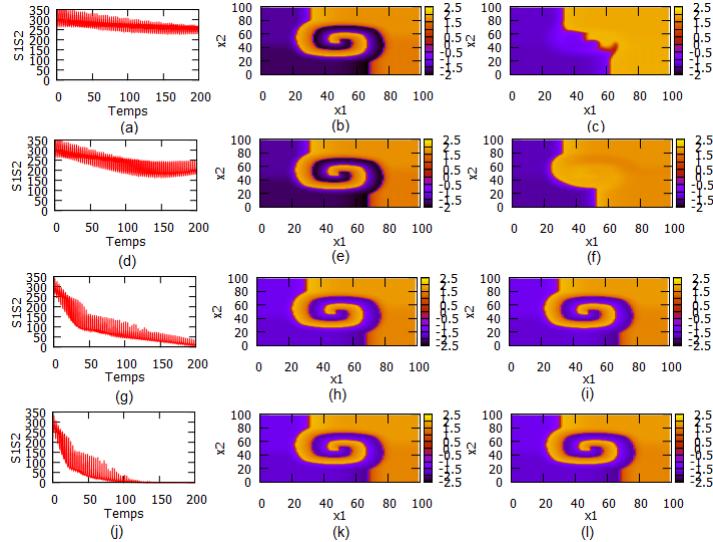


Figure 6.15. Synchronisation d'un réseau en chaîne de deux noeuds couplés linéairement de type (6.51) avec $n = 2$, $d = 2$, $s = 1$, $F^1(u, v) = \frac{1}{\epsilon}(-u^3 + 3u - v)$, $\sigma_2(x) = 0.001$, $\Phi_2(x, u) = -u$, $\epsilon = 0.1$, $Q = \text{diag}(0.5, 0)$, $\epsilon_{i(i+1)} = \frac{g_2}{2}$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, et $\epsilon_{ij} = 0$, $i \neq j$ autrement. On prend une condition initiale en spirale et une homogène. La synchronisation survient pour $g_2 \geq 0.08$. Avant synchronisation, pour $g_2 = 0.005$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; la figure (b) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même la figure (c) représente le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, t)$; des simulations similaires sont reproduites pour $g_2 = 0.01$ (figures (d), (e), (f)), $g_2 = 0.05$ (figures (g), (h), (i)) et $g_2 = 0.08$ (figures (j), (k), (l)). Pour la valeur $g_2 = 0.08$, on observe la synchronisation de deux noeuds.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_n	0.08	0.1	0.11	0.13	0.14	0.15	0.17	0.18	0.2
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
g_n	0.21	0.23	0.24	0.26	0.27	0.29	0.3	0.32	0.33

Table 6.7. Tableau donnant les forces de couplage minimales nécessaires afin d'observer un phénomène de synchronisation du réseau en chaîne de n noeuds.

Grâce à ces expérimentations numériques, on constate que la force de couplage nécessaire pour observer la synchronisation de n noeuds dépend à la fois du nombre de noeuds. En effet, les points de la figure 6.16 représentent la force de couplage de synchronisation en fonction du nombre de noeuds dans le réseau en chaîne et la courbe représente la loi suivante,

$$g_n = 0.015n + 0.05,$$

où n est le nombre de noeuds du réseau. Ainsi, la force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation suit cette loi. On peut aussi voir que la valeur critique de synchronisation est montée en augmentant le nombre de noeuds dans le réseau.

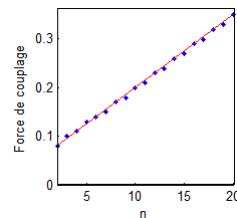


Figure 6.16. Evolution de la force de couplage g_n pour laquelle la synchronisation a lieu en fonction du nombre n de noeuds du réseau en chaîne et elle suit la loi $g_n = 0.015n + 0.05$.

Remarque 14. Pour ce type de réseau, chaque noeud partage l'information avec les voisins de ses voisins indirectement. C'est pour cela que plus le nombre de noeuds dans le réseau est augmenté, plus le contact entre eux devient faible. Ainsi, la force de couplage est plus importante quand le nombre de noeuds dans le réseau est élevé.

Exemple 10 (Réseau irrégulier). Considérons un réseau asymétrique de 5 noeuds et 8 arêtes (voir figure 6.17(a)). Supposons que tous les coefficients de couplage sont égales à g .

Similairement, on utilise la procédure de 6 étapes pour étudier la condition de synchronisation.

• **Etape 1 :** Calculer la différence entre la somme des coefficients de couplage de tous les arêtes sortant du noeud i et celle de tous les arêtes entrant au noeud i , $i \in \{1, \dots, 5\}$. Donc, on obtient,

$$D_1^c = g; \quad D_2^c = g; \quad D_3^c = 0; \quad D_4^c = -2g; \quad D_5^c = 0.$$

• **Etape 2 :** Symétriser le graphe en remplaçant chaque arête orientée par une arête non-orientée avec une demie force de couplage (voir figure 6.17(b)),

$$d_k = \frac{g}{2}, \quad k \in \{1, \dots, 8\}.$$

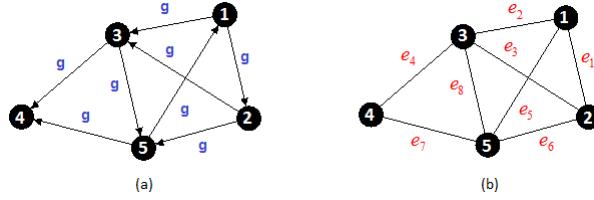


Figure 6.17. (a) Réseau couplé unidirectionnellement avec force de couplage g . (b) Réseau symétrisé de (a) avec connections bidirectionnelles. Les flèches indiquent la direction de couplage le long d'une arête; les arêtes sans flèches sont couplées bidirectionnellement.

- **Etape 3 :** Choisir un chemin P_{ij} entre une paire quelconque des noeuds i, j du graphe symétrisé. Il vaut mieux choisir les chemins qui contiennent des arêtes avec $D_i^c + D_j^c < 0$ (cette quantité est calculée dans l'étape 4).

Notre choix de chemins est :

$$\begin{aligned} P_{12} &= e_1; & P_{13} &= e_2; & P_{14} &= e_2 e_4; & P_{15} &= e_5; \\ P_{23} &= e_3; & P_{24} &= e_6 e_7; & P_{25} &= e_6; \\ P_{34} &= e_4; & P_{35} &= e_8; \\ P_{45} &= e_7. \end{aligned}$$

- **Etape 4 :** Pour chaque chemin P_{ij} , déterminer $\frac{D_i^c + D_j^c}{2}$. On obtient alors,

$$\begin{aligned} P_{12} : D_{12} &= \frac{D_1^c + D_2^c}{2} = g; & P_{13} : D_{13} &= \frac{D_1^c + D_3^c}{2} = \frac{g}{2}; \\ P_{14} : D_{14} &= \frac{D_1^c + D_4^c}{2} = -\frac{g}{2}; & P_{15} : D_{15} &= \frac{D_1^c + D_5^c}{2} = \frac{g}{2}; \\ P_{23} : D_{23} &= \frac{D_2^c + D_3^c}{2} = \frac{g}{2}; & P_{24} : D_{24} &= \frac{D_2^c + D_4^c}{2} = -\frac{g}{2}; \\ P_{25} : D_{25} &= \frac{D_2^c + D_5^c}{2} = \frac{g}{2}; & P_{34} : D_{34} &= \frac{D_3^c + D_4^c}{2} = -g; \\ P_{35} : D_{35} &= \frac{D_3^c + D_5^c}{2} = 0; & P_{45} : D_{45} &= \frac{D_4^c + D_5^c}{2} = -g. \end{aligned}$$

On va classer ces termes comme suit,

- Si $\frac{D_i^c + D_j^c}{2} < 0$ et il y a une arête k du graphe symétrisé reliant directement i et j , on met $D_k = \left| \frac{D_i^c + D_j^c}{2n} \right|$ et on ajoute cette quantité à d_k . Ceci concerne à des arêtes e_4 et e_7 .
Donc,

$$D_4 = \left| \frac{D_3^c + D_4^c}{2.5} \right| = \frac{g}{5}; \quad D_7 = \left| \frac{D_4^c + D_5^c}{2.5} \right| = \frac{g}{5}.$$

- Si les termes $\frac{D_i^c + D_j^c}{2}$ sont non-négatifs ou négatifs mais il n'y a pas d'arête reliant directement entre i et j , tous ces termes deviennent D_{ij} .

- **Etape 5 :** Pour chaque arête du graphe, déterminer l'inégalité (6.75).

- Pour l'arête e_1 entre le nœud 1 et le nœud 2,

$$d_1 = \frac{g}{2} > \frac{a}{5} \cdot b_1,$$

où $b_1 = z(P_{12})$, car le seul chemin qui passe par l'arête e_1 est P_{12} .

Alors,

$$z(P_{12}) = |P_{12}| \cdot \chi \left(1 + \frac{D_{12}}{a} \right) = \chi \left(1 + \frac{g}{a} \right) = 1 + \frac{g}{a},$$

On obtient,

$$d_1 = \frac{g}{2} > \frac{a}{5} z(P_{12}) = \frac{a}{5} \left(1 + \frac{g}{a} \right) \implies g > \frac{2a}{3}.$$

Ainsi, on a, $g > \frac{2a}{3}$ qui est la condition de synchronisation pour l'arête e_1 .

- Pour l'arête e_2 entre le nœud 1 et le nœud 3,

$$d_2 = \frac{g}{2} > \frac{a}{5} \cdot b_2,$$

où $b_2 = z(P_{13}) + z(P_{14})$, car les chemins qui passent par l'arête e_2 sont P_{13}, P_{14} .

Alors,

$$z(P_{13}) = |P_{13}| \cdot \chi \left(1 + \frac{D_{13}}{a} \right) = \chi \left(1 + \frac{g}{2a} \right) = 1 + \frac{g}{2a},$$

$$z(P_{14}) = |P_{14}| \cdot \chi \left(1 + \frac{D_{14}}{a} \right) = 2 \cdot \chi \left(1 - \frac{g}{2a} \right) = 0,$$

en supposant : $g > 2a$.

On obtient,

$$d_2 = \frac{g}{2} > \frac{a}{5} (z(P_{13}) + z(P_{14})) = \frac{a}{5} \left(1 + \frac{g}{2a} \right) \implies g > \frac{a}{2}.$$

Ainsi, on a, $g > 2a$ qui est la condition de synchronisation pour l'arête e_2 .

- Pour l'arête e_3 entre le nœud 2 et le nœud 3,

$$d_3 = \frac{g}{2} > \frac{a}{5} \cdot b_3,$$

où $b_3 = z(P_{23})$, car le seul chemin qui passe par l'arête e_3 est P_{23} .

Alors,

$$z(P_{23}) = |P_{23}| \cdot \chi \left(1 + \frac{D_{23}}{a} \right) = \chi \left(1 + \frac{g}{2a} \right) = 1 + \frac{g}{2a}.$$

On obtient,

$$d_3 = \frac{g}{2} > \frac{a}{5} z(P_{23}) = \frac{a}{5} \left(1 + \frac{g}{2a} \right) \implies g > \frac{a}{2}.$$

Ainsi, on a, $g > \frac{a}{2}$ qui est la condition de synchronisation pour l'arête e_3 .

- Pour l'arête e_4 entre le nœud 3 et le nœud 4,

$$d_4 + D_4 = \frac{g}{2} + \frac{g}{5} = \frac{7g}{10} > \frac{a}{5} \cdot b_4,$$

où $b_4 = z(P_{14}) + z(P_{34})$, car les chemins qui passent par l'arête e_4 sont P_{14}, P_{34} .

Alors,

$$z(P_{34}) = |P_{34}| \cdot \chi \left(1 + \frac{D_{34}}{a} \right) = |P_{34}| = 1,$$

car $D_{34} = -g < 0$ et il y a une arête entre le nœud 3 et le nœud 4.

$$z(P_{14}) = |P_{14}| \cdot \chi \left(1 + \frac{D_{14}}{a} \right) = |P_{14}| \cdot \chi \left(1 - \frac{g}{2a} \right) = 0,$$

en supposant : $g > 2a$.

En sommant tous les longueurs, on obtient,

$$\frac{7}{10}g > \frac{a}{5}(z(P_{14}) + z(P_{34})) = \frac{a}{5} \implies g > \frac{2a}{7}.$$

Ainsi, on a, $g > 2a$ qui est la condition de synchronisation pour l'arête e_4 .

- Pour l'arête e_5 entre le noeud 1 et le noeud 5,

$$d_5 = \frac{g}{2} > \frac{a}{5} \cdot b_5,$$

où $b_5 = z(P_{15})$, car le seul chemin qui passe par l'arête e_3 est P_{15} .

Alors,

$$z(P_{15}) = |P_{15}| \cdot \chi\left(1 + \frac{D_{15}}{a}\right) = \chi\left(1 + \frac{g}{2a}\right) = 1 + \frac{g}{2a}.$$

On obtient,

$$d_5 = \frac{g}{2} > \frac{a}{5}z(P_{15}) = \frac{a}{5}\left(1 + \frac{g}{2a}\right) \implies g > \frac{a}{2}.$$

Ainsi, on a, $g > \frac{a}{2}$ qui est la condition de synchronisation pour l'arête e_5 .

- Pour l'arête e_6 entre le noeud 2 et le noeud 5,

$$d_6 = \frac{g}{2} > \frac{a}{5} \cdot b_6,$$

où $b_6 = z(P_{24}) + z(P_{25})$, car les chemins qui passent par l'arête e_6 sont P_{24}, P_{25} .

Alors,

$$z(P_{25}) = |P_{25}| \cdot \chi\left(1 + \frac{D_{25}}{a}\right) = \chi\left(1 + \frac{g}{2a}\right) = 1 + \frac{g}{2a},$$

$$z(P_{24}) = |P_{24}| \cdot \chi\left(1 + \frac{D_{24}}{a}\right) = 2 \cdot \chi\left(1 - \frac{g}{2a}\right) = 0,$$

en supposant : $g > 2a$.

On obtient,

$$d_6 = \frac{g}{2} > \frac{a}{5}(z(P_{24}) + z(P_{25})) = \frac{a}{5}\left(1 + \frac{g}{2a}\right) \implies g > \frac{a}{2}.$$

Ainsi, on a, $g > 2a$ qui est la condition de synchronisation pour l'arête e_6 .

- Pour l'arête e_7 entre le noeud 4 et le noeud 5,

$$d_7 + D_7 = \frac{g}{2} + \frac{g}{5} = \frac{7g}{10} > \frac{a}{5} \cdot b_7,$$

où $b_7 = z(P_{24}) + z(P_{45})$, car les chemins qui passent par l'arête e_7 sont P_{24}, P_{45} .

Alors,

$$z(P_{24}) = |P_{24}| \cdot \chi\left(1 + \frac{D_{24}}{a}\right) = |P_{24}| \cdot \chi\left(1 - \frac{g}{2a}\right) = 0,$$

en supposant : $g > 2a$.

$$z(P_{45}) = |P_{45}| \cdot \chi\left(1 + \frac{D_{45}}{a}\right) = |P_{45}| = 1,$$

car $D_{45} = -g < 0$ et il y a une arête entre le noeud 4 et le noeud 5.

En sommant tous les longueurs, on obtient,

$$\frac{7}{10}g > \frac{a}{5}(z(P_{24}) + z(P_{45})) = \frac{a}{5} \implies g > \frac{2a}{7}.$$

Ainsi, on a, $g > 2a$ qui est la condition de synchronisation pour l'arête e_7 .

- Pour l'arête e_8 entre le nœud 3 et le nœud 5,

$$d_8 = \frac{g}{2} > \frac{a}{5} \cdot b_8,$$

où $b_8 = z(P_{35})$, car le seul chemin qui passe par l'arête e_8 est P_{35} .

Alors,

$$z(P_{35}) = |P_{35}| \cdot \chi \left(1 + \frac{D_{35}}{a} \right) = 1.$$

On obtient,

$$d_8 = \frac{g}{2} > \frac{a}{5} z(P_{35}) = \frac{a}{5} \implies g > \frac{2a}{5}.$$

Ainsi, on a, $g > \frac{2a}{5}$ qui est la condition de synchronisation pour l'arête e_8 .

- **Etape 6 :** En combinaisant les conditions de synchronisation obtenues, on obtient $g > 2a$ qui garantit la synchronisation identique du réseau.

On peut alors récapituler les lois obtenues dans le tableau suivant.

Couplage	Unidirectionnel	Bidirectionnel
Complet		$\frac{0.051}{n-1} - 0.00041$
Chaîne	$0.015n + 0.05$	
Etoile		$-\frac{0.054}{n} + 0.054$
Anneaux	$0.00094n^2 + 0.00063n + 0.03$	$0.00065n^2 - 0.0027n + 0.027$
Réguliers	$\frac{0.0265}{d} + 0.0035$	$\frac{0.0375}{d} + 0.00125$

Table 6.8. Tableau donnant les résultats des lois de la force de couplage dans cette partie selon la topologie des réseaux, où n est le nombre de nœuds dans le graphe, et d est le degré de nœuds dans le réseaux réguliers.

Remarque 15. On a présenté les résultats numériques pour les réseaux couplés linéairement selon différentes topologies dans lesquels chaque nœud est modélisé par un système de réaction-diffusion de type FitzHugh-Nagumo comme suit,

$$(6.76) \quad \begin{cases} \epsilon u_t = f(u) - v + d\Delta u & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_t = au - bv + c & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

où $u = u(x, t), v = v(x, t), d > 0, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné régulier, et avec les conditions aux bords de Neumann.

On utilise la fonction $f(u) = -u^3 + 3u$, et les paramètres : $a = 1, b = 0.001, c = 0, \epsilon = 0.1, d = 0.05$. L'intégration du système est réalisée en utilisant $C++$, dans $\Omega \times [0, T] = [0, 100] \times [0, 100] \times [0, 200]$ avec la méthode des différences finies.

4. Effet de l'ajout de la dimension spatiale sur la synchronisation

Cette section nous donne des résultats numériques dans certains cas. Mathématiquement, on a montré que pour une force de couplage assez importante, on avait la synchronisation. Par ailleurs, l'augmentation du nombre de noeuds, la force de couplage évolue différemment selon la topologie du réseau. Et l'ajout de la dimension spatiale n'importe pas de grandes difficultés car au fait de la formule de Green,

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

On s'intéresse ici à l'effet de la dimension spatiale sur la synchronisation. On trouve la loi de la force minimale de couplage selon le nombre de noeuds et la topologie du réseau. On considère deux types de réseaux : réseau complet et réseau en anneau couplé unidirectionnellement.

Nos simulations montrent que la forme générale de la loi est indépendante des conditions initiales. Pour pouvoir observer l'effet de l'ajout de la dimension spatiale sur la synchronisation. On travaille pour différentes conditions initiales sur chaque type de réseau, par exemple :

- (a) Conditions initiales (CI) homogènes en espace.
- (b) Certains noeuds en CI homogènes et d'autres en spirale.
- (c) Certains noeuds en CI homogènes et d'autres en miroir.
- (d) Certains noeuds en CI homogènes et d'autres suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
- (e) Certains noeuds en CI homogènes et d'autres suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$.
- (f) Conditions initiales en spirale en espace.
- (g) Conditions initiales suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$ en espace.

Dans chaque cas considéré, on travaille d'abord avec la constante $c = 0$, ensuite on prendra un paramètre c qui dépend de l'espace comme l'un des trois exemples sur la figure 6.18. Dans cette section, le système d'un noeud isolé est modélisé comme suit,

$$(6.77) \quad \begin{cases} \epsilon u_t = f(u) - v + d\Delta u \\ v_t = au - bv + c(x), \end{cases}$$

avec les conditions initiales et les conditions aux bords de Neumann,

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0 \\ v(0, x) = v_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où ν est la normale extérieure au domaine Ω et $f(u) = -u^3 + 3u$, $\epsilon > 0$, $d > 0$, a et b sont des constantes strictement positives, c est un paramètre qui dépend de $x \in \Omega$.

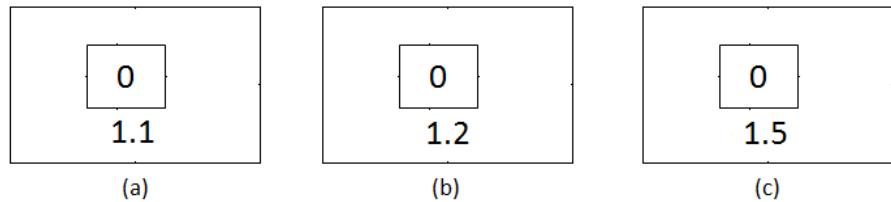


Figure 6.18. Paramètre c dépend de l'espace et il est oscillant au milieu, excitable ailleurs.

Sur la figure 6.18, on prend $c(x)$ tel que le système soit oscillant au centre et suffisamment excitable ailleurs pour que les oscillations centrales excitent, via la diffusion, les noeuds voisins de la discréétisation spatiale et que les ondes se propagent ensuite sur tout le domaine grâce à l'excitabilité et à la diffusion. Par exemple, sur la figure 6.18(a), on prend,

$$c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est dans l'un des quatre noeuds centraux de la discréétisation spatiale,} \\ 1.1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même manière, on peut alors définir pour les figures 6.18(b), (c).

On observe que tous les noeuds dans les réseaux deviennent synchrones à partir d'un seuil de la force de couplage. On trouve que l'évolution de la force de couplage en variation de la taille du réseau ne dépend pas de conditions initiales, ni de paramètre c qui est constante ou dépend de l'espace. Par exemple, dans le réseau complet, plus le nombre de noeuds augmente, plus c'est facile d'obtenir la synchronisation. Tandis que, pour le réseau en anneau couplé unidirectionnellement, on obtient le résultat opposé.

Réseau complet

On s'intéresse ici à l'évolution de force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation en augmentant le nombre de noeuds dans le réseau complet de 3 à 20, selon différentes types de conditions initiales et le paramètre c . On peut alors récapituler les lois obtenues dans le tableau suivant.

Topologie du réseau	Les types de conditions initiales	Les lois de la force de couplage			
		$c(x) = 0$	$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.1$ ailleurs	$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.2$ ailleurs	$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.5$ ailleurs
Complet	homogène	$\frac{0.0288}{n}$ +0.0004	$\frac{0.015}{n}$	$\frac{0.0075}{n}$ +0.0005	$\frac{0.01125}{n}$ +0.00025
	spirale +homogène	$\frac{0.051}{n-1}$ -0.00041	$\frac{0.02205}{n}$ +0.00185	$\frac{0.0144}{n}$ +0.0003125	$\frac{0.0159}{n}$ +0.000286
	mirroir + homogène	$\frac{0.056}{n-1}$ -0.00125	$\frac{0.0193}{n}$ -0.0000714	$\frac{0.01425}{n}$ -0.00075	$\frac{0.012}{n}$ -0.0005
	uniforme sur [0; 1] + homogène	$\frac{0.0429}{n}$ -0.00129	$\frac{0.0193}{n}$ -0.00043	$\frac{0.01344}{n}$ -0.00048	$\frac{0.009}{n}$
	uniforme sur [-1, 1] +homogène	$\frac{0.07098}{n}$ -0.00016	$\frac{0.0194}{n}$ +0.0005375	$\frac{0.015}{n}$	$\frac{0.0135}{n}$
	tout en spirale	$\frac{0.03}{n}$	$\frac{0.02496}{n}$ -0.00032	$\frac{0.0102}{n}$ +0.0044	$\frac{0.0102}{n}$ +0.0036
	tout en uniforme sur [-1, 1]	$\frac{0.096}{n}$ +0.006	$\frac{0.032}{n}$ +0.00229	$\frac{0.0086}{n}$ +0.000643	$\frac{0.0088}{n}$ +0.00047

Table 6.9. Tableau donnant les résultats des lois de la force de couplage en fonction du nombre de nœuds dans le réseau complet selon différentes types de conditions initiales et paramètre c .

Réseau en anneau couplé unidirectionnellement

Comme le cas précédent, on s'intéresse à l'évolution de force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation en augmentant le nombre de nœuds dans le réseau en anneau couplé unidirectionnellement de 3 à 20, selon différentes types de conditions initiales et paramètre c . On peut alors récapituler les lois obtenues dans le tableau suivant.

Topologie du réseau	Les types de conditions initiales	Les lois de la force de couplage			
		$c(x) = 0$	$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.1$ ailleurs	$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.2$ ailleurs	$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.5$ ailleurs
Anneau	homogène	$1.33.10^{-3}n^2$ $-0.00027n$ $+0.014$	$1.1.10^{-3}n^2$ $-0.00492n$ $+0.0148$	$1.79.10^{-3}n^2$ $-0.016n$ $+0.0395$	$1.37.10^{-3}n^2$ $-0.012n$ $+0.0325$
	spirale +homogène	$9.4.10^{-4}n^2$ $+0.00063n$ $+0.03$	$2.63.10^{-4}n^2$ $-0.0014n$ $+0.0218$	$6.79.10^{-6}n^2$ $+0.00000714n$ $+0.00992$	$1.04.10^{-5}n^2$ $+0.000396n$ $+0.00872$
	mirroir +homogène	$9.3.10^{-4}n^2$ $-0.003n$ $+0.03$	$1.17.10^{-4}n^2$ $-0.0000667n$ $+0.00915$	$2.08.10^{-6}n^2$ $+0.0000167n$ $+0.00693$	$4.38.10^{-6}n^2$ $-0.00004n$ $+0.00758$
	uniforme sur $[0, 1]$ +homogène	$2.55.10^{-4}n^2$ $-0.00083n$ $+0.023$	$5.73.10^{-5}n^2$ $-0.0000729n$ $+0.0097$	$5.21.10^{-6}n^2$ $+0.000198n$ $+0.00436$	$3.13.10^{-6}n^2$ $+0.000044n$ $+0.00434$
	uniforme sur $[-1, 1]$ +homogène	$3.10^{-4}n^2$ $+0.0015n$ $+0.0378$	$1.13.10^{-4}n^2$ $+0.003095n$ $+0.004696$	$8.33.10^{-6}n^2$ $+0.000933n$ $+0.007125$	$1.79.10^{-5}n^2$ $+0.000357n$ $+0.00777$
	tout en spirale	$1.17.10^{-3}n^2$ $-0.00217n$ $+0.016$	$2.25.10^{-3}n^2$ $-0.0088n$ $+0.021$	$5.3.10^{-4}n^2$ $+0.0023n$ $+0.00313$	$9.82.10^{-4}n^2$ $-0.0021n$ $+0.0123$
	tout en uniforme sur $[-1, 1]$	$2.5.10^{-3}n^2$ $+0.0025n$ $+0.025$	$6.46.10^{-4}n^2$ $-0.00117n$ $+0.0197$	$1.36.10^{-4}n^2$ $+0.00105n$ $+0.00364$	$1.875.10^{-4}n^2$ $+0.00125n$ $+0.0021$

Table 6.10. Tableau donnant les résultats des lois de la force de couplage en fonction du nombre de nœuds dans réseau en anneau couplé unidirectionnellement selon différentes types de conditions initiales et paramètre c .

Remarque 16. On sait bien d'après la définition de synchronisation du réseau, qu'il faut regarder les comportements des sous-systèmes dans le réseau lorsque le temps tend vers l'infini. Mais avec programmation en $C++$, cela nous coûte beaucoup de temps, et même trop longtemps lorsque le nombre de sous-systèmes dans le réseau augmente. C'est pour cela, dans les parties précédentes, on a pris le temps de simulation $T = 200$.

Notre objectif dans cette section est de refaire la même procédure comme avant sauf que la valeur du temps T soit différente, et d'observer le changement par rapport aux lois de force de couplage selon la topologie du réseau et les conditions initiales données. Ici, on prend $T = 3000$, et on applique la même procédure comme avant au réseau complet et réseau en anneau couplé unidirectionnellement. On observe aussi que la synchronisation dans le réseau survient lorsque la

valeur de force de couplage est assez importante. Et on trouve que, pour avoir la synchronisation dans le cas où $T = 200$, on a besoin d'une force de couplage beaucoup plus grande que celle dans le cas $T = 3000$, voir la figure 6.19 et 6.20.

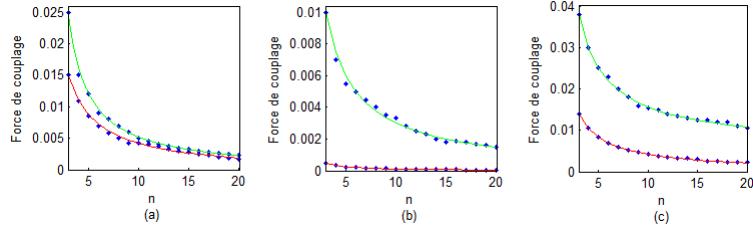


Figure 6.19. Evolution de la force de couplage pour laquelle la synchronisation a lieu en fonction du nombre n de nœuds du réseau complet. Les courbes en rouge sont pour $T = 3000$ et celles en vert sont pour $T = 200$. La figure (a) correspond aux conditions initiales mélangées entre spirale et homogène, la figure (b) correspond à celles en spirale, et la figure (c) correspond à celles suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

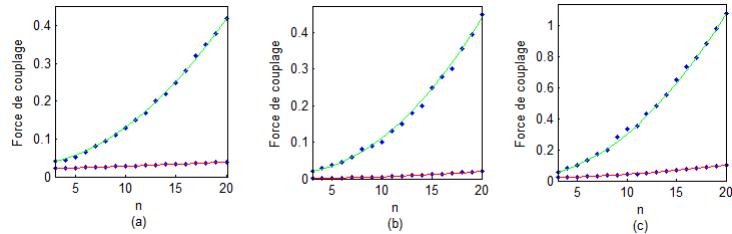


Figure 6.20. Evolution de la force de couplage pour laquelle la synchronisation a lieu en fonction du nombre n de nœuds du réseau en anneau couplé unidirectionnellement. Les courbes en rouge sont pour $T = 3000$ et celles en vert sont pour $T = 200$. La figure (a) correspond aux conditions initiales mélangées entre spirale et homogène, la figure (b) correspond à celles en spirale, et la figure (c) correspond à celles suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Remarque 17. Pour tous les deux types de réseaux : réseau complet et réseau en anneau couplé unidirectionnellement, on prend deux conditions initiales en spirale et une homogène. Lorsque la force de couplage est assez importante, on va perdre la spirale dans le domaine Ω , tous les trois nœuds se synchronisent, et ils évoluent vers l'état synchrone d'un espace homogène comme présenté sur la figure 6.21.

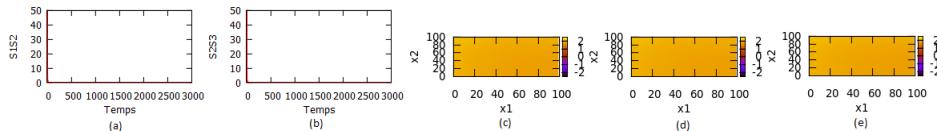


Figure 6.21. Synchronisation d'un réseau complet de trois nœuds couplés linéairement de type (6.35) avec $n = 3$, $d = 2$, $s = 1$, $F^1(u, v) = \frac{1}{\epsilon}(-u^3 + 3u - v)$, $\sigma_2(x) = 0.001$, $\Phi_2(x, u) = -u$, $\epsilon = 0.1$, $Q = \text{diag}(0.5, 0)$, $\forall i, j, i \neq j$, $\epsilon_{ij} = g_3 = 0.5$. On prend deux conditions initiales en spirale et une homogène. La figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 2999)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, 2999)$ et $u_3(x_1, x_2, 2999)$.

Remarque 18. Pour tous les deux types de réseaux : réseau complet et réseau en anneau couplé unidirectionnellement, quand on prend les conditions initiales comme montrées sur la figure 6.22, par exemple, dans le réseau de deux noeuds : noeud 1 prend les conditions initiales comme la figure 6.22(a), et noeud 2 prend les condition initiales comme la figure 6.22(b). On trouve que, avec la force de couplage assez importante, la syncrhonisation survient dans le réseau, mais les spirales dans le domaine disparaissent. C'est à dire que les solutions du réseau évoluent vers l'état synchrone d'un espace homogène (voir figure 6.23). Notons que ces résultats sont valables pour le nombre de noeuds du réseau qui est paire. Cela veut dire que, si le nombre de noeuds du réseau est impair, les spirales surviennent encore dans l'espace considéré (voir figure 6.25).

(-1,0)	(0,1)
(0,-1)	(1,0)

(a)

(1,0)	(0,-1)
(0,1)	(-1,0)

(b)

Figure 6.22. Conditions initiales.

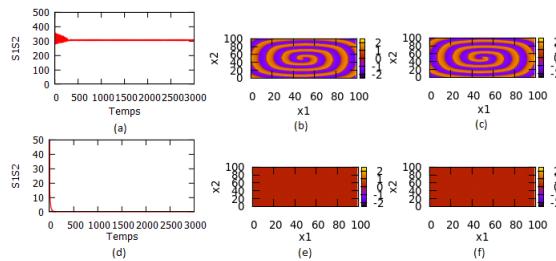


Figure 6.23. Synchronisation d'un réseau complet de deux noeuds couplés linéairement de type (6.35) avec $n = 2$, $d = 2$, $s = 1$, $F^1(u, v) = \frac{1}{\epsilon}(-u^3 + 3u - v)$, $\sigma_2(x) = 0.001$, $\Phi_2(x, u) = -u$, $\epsilon = 0.1$, $Q = \text{diag}(0.5, 0)$, $\forall i, j, i \neq j$, $\epsilon_{ij} = g_2$. La synchronisation survient pour $g_2 \geq 1.51$. Avant synchronisation, pour $g_2 = 0.5$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; la figure (b) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 2999)$; de même la figure (c) représente le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, 2999)$; des simulations similaires sont reproduites pour $g_2 = 1.51$ (figures (d), (e), (f)). Pour la valeur $g_2 = 1.51$, on observe la synchronisation de deux noeuds.

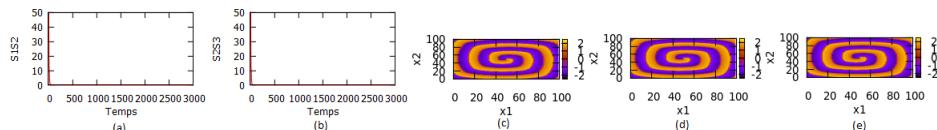


Figure 6.24. Synchronisation d'un réseau complet de trois noeuds couplés linéairement de type (6.35) avec $n = 3$, $d = 2$, $s = 1$, $F^1(u, v) = \frac{1}{\epsilon}(-u^3 + 3u - v)$, $\sigma_2(x) = 0.001$, $\Phi_2(x, u) = -u$, $\epsilon = 0.1$, $Q = \text{diag}(0.5, 0)$, $\forall i, j, i \neq j$, $\epsilon_{ij} = g_3$. Pour la valeur $g_3 = 1.3$, on observe la synchronisation de trois noeuds. La figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 2999)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, 2999)$ et $u_3(x_1, x_2, 2999)$.

Remarque 19. Dans le cas où $c(x) = 0$ si x est dans un petit voisinage de $(0, 0)$, et $c(x) = -1.1$ sinon. On montre la synchronisation d'un réseau complet de trois nœuds couplés linéairement de type (6.35) avec $n = 3$, $d = 2$, $s = 1$, $F^1(u, v) = \frac{1}{\epsilon}(-u^3 + 3u - v)$, $\sigma_2(x) = 0.001$, $\Phi_2(x, u) = -u$, $\epsilon = 0.1$, $Q = \text{diag}(0.5, 0)$, $\forall i, j, i \neq j$, $\epsilon_{ij} = g_3$. Pour la valeur $g_3 = 0.005$, on observe la synchronisation de trois noeuds. Il existe des impulsions périodiques à partir de $(0, 0)$ provoquées par l'oscillateur excitable du système FHN. Asymptotiquement, tous les trois sous-systèmes évoluent avec patterns spirals.

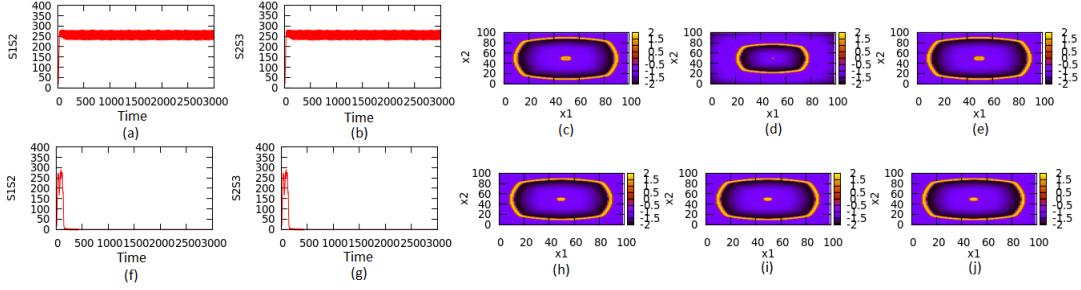


Figure 6.25. Synchronisation d'un réseau complet de trois nœuds couplés linéairement de type (6.35) avec $n = 3$, $d = 2$, $s = 1$, $F^1(u, v) = \frac{1}{\epsilon}(-u^3 + 3u - v)$, $\sigma_2(x) = 0.001$, $\Phi_2(x, u) = -u$, $\epsilon = 0.1$, $Q = \text{diag}(0.5, 0)$, $\forall i, j, i \neq j$, $\epsilon_{ij} = g_3$. Pour la valeur $g_3 = 0.005$, la synchronisation survient. Avant synchronisation, pour $g_3 = 0.0045$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, 190)$ et $u_3(x_1, x_2, 190)$. Des simulations similaires sont reproduites pour $g_3 = 0.005$ (figures (f), (g), (h), (i), (j)).

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Conclusion

Dans ce travail, on a, dans un premier temps, présenté les notations de biologie et de neurophysiologie qui permettent de comprendre les différentes étapes de la modélisation mathématique du fonctionnement des neurones. Plusieurs modèles, tels que le modèle de Hodgkin-Huxley ou encore celui de FitzHugh-Nagumo ont été présentés. C'est sur ce dernier que l'on s'est intéressé dans la suite.

Une première étude présente l'analyse qualitative ainsi que l'existence d'une bifurcation de Hopf pour le système de FitzHugh-Nagumo à deux équations. L'étude de la dynamique transitoire et de la dynamique asymptotique de ce modèle fait apparaître la diversité des comportements possibles et les conséquences sur ce comportement de la perturbation de certains paramètres. De l'étude des points d'équilibre à celle de la bifurcation de Hopf, ce travail présente à la fois des preuves théoriques, mais également une analyse numérique précise.

Cette étude du comportement d'un neurone individuel nous a naturellement conduit à l'étude des conséquences du couplage de plusieurs d'entre eux. C'est ainsi que l'on s'est intéressé au phénomène de synchronisation qui peut apparaître au sein de réseaux de neurones. La synchronisation identique dans des réseaux de différentes topologies et pour différentes fonctions de couplage est donc étudiée. La force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation identique des neurones d'un réseau est observée et certaines lois heuristiques approchant l'évolution de cette force de couplage en fonction du nombre de noeuds ou du degré de chaque noeud sont données.

Ensuite, on s'est intéressé aux réseaux complexes de neurones modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP) de type FitzHugh-Nagumo. D'abord, on s'est concentré sur l'étude d'un neurone isolé de type FHN composée de l'étude mathématique d'EDP, existence et unicité des solutions, existence d'un attracteur global et existence d'une orbite homocline en dimension 1. De plus, on a montré des simulations numériques qui nous permet de voir des solutions en patterns dans certains cas sous l'effet de la variation des conditions initiales du système. A partir de ces études là, comme dans la partie précédente, on s'est intéressé au phénomène de synchronisation identique dans des réseaux de systèmes de réaction-diffusion de type FHN. Mais, plus généralement, on a étudié l'existence de l'attracteur global des réseaux dans l'espace $(L^2(\Omega)^d)^n$ pour une topologie quelconque, sous des conditions sur les fonctions de couplage et les fonctions non-linéaires de réaction. On a présenté la synchronisation identique du réseau pour une topologie quelconque dans le cas d'un couplage linéaire. Une question centrale est de déterminer le seuil minimal de la force de couplage de sorte que la stabilité de la synchronisation soit assurée. On a obtenu des résultats théoriques à l'aide de la méthode appellée *connection graph stability*, que l'on a illustré par des simulations numériques. On applique ces résultats aux réseaux particuliers, par exemple, réseau complet, réseau en anneau, réseau en étoile..., avec l'étude de l'évolution de la force de couplage nécessaire pour obtenir la synchronisation en fonction du nombre de noeuds couplés ou du degré de chaque noeud au sein du réseau. On s'est

intéressé aussi à l'effet de la dimension spatiale sur la synchronisation dans le réseau.

Perspectives

Nos perspectives seront d'étudier la synchronisation dans des réseaux plus réalistes et la bifurcation des réseaux selon différentes topologies. Par exemple, on s'intéresse ici à la bifurcation dans un réseau complet de trois noeuds (6.78), et aussi un réseau en anneau couplé unidirectionnellement (6.79). Dans chaque réseau, on travaille sur les différentes conditions initiales. Et avec une condition initiale donnée, on prendra une constante $c = 0$, ou un paramètre c qui dépend de l'espace comme l'un des trois exemples sur la figure 6.18, et aussi un mélange entre eux. Dans tous les cas, on peut alors tracer l'évolution du potentiel membranaire au cours du temps de tous les trois noeuds du réseau à partir de certains points dans le domaine Ω . On trouvera dans certains cas, qu'il y a une bifurcation dépendante de la valeur de force de couplage. C'est à dire que, lorsqu'on monte la valeur de force de couplage, l'évolution du potentiel membranaire change de l'état stationnaire à l'état de l'émission régulière de potentiels d'action par la présence d'un cycle limite, ou l'inverse. Par contre, on n'a pas la synchronisation dans ces cas.

Rappelons que le réseau complet de trois noeuds peut être modélisé comme suit,

$$(6.78) \quad \begin{cases} u_{1t} = f(u_1) - v_1 + d\Delta u_1 - g_3(u_1 - u_2) - g_3(u_1 - u_3) \\ v_{1t} = au_1 - bv_1 + c_1(x) \\ u_{2t} = f(u_2) - v_2 + d\Delta u_2 - g_3(u_2 - u_1) - g_3(u_2 - u_3) \\ v_{2t} = au_2 - bv_2 + c_2(x) \\ u_{3t} = f(u_3) - v_3 + d\Delta u_3 - g_3(u_3 - u_1) - g_3(u_3 - u_2) \\ v_{3t} = au_3 - bv_3 + c_3(x), \end{cases}$$

où g_3 est la force de couplage.

Et le réseau de trois noeuds en anneau couplés unidirectionnellement peut être modélisé comme suit,

$$(6.79) \quad \begin{cases} u_{1t} = f(u_1) - v_1 + d\Delta u_1 - g_3(u_1 - u_3) \\ v_{1t} = au_1 - bv_1 + c_1(x) \\ u_{2t} = f(u_2) - v_2 + d\Delta u_2 - g_3(u_2 - u_1) \\ v_{2t} = au_2 - bv_2 + c_2(x) \\ u_{3t} = f(u_3) - v_3 + d\Delta u_3 - g_3(u_3 - u_2) \\ v_{3t} = au_3 - bv_3 + c_3(x), \end{cases}$$

où g_3 est la force de couplage.

On trouve que, quand on prend $c_1 = c_2 = c_3$, alors la synchronisation peut survenir dans le réseau. Dans les cas contraires, alors on n'a pas la synchronisation, mais on a une bifurcation particulière qui change de l'état stationnaire à l'état de l'émission de potentiels d'action par la présence d'un cycle limite, ou l'inverse.

- On prend $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Dans ce cas, on a la synchronisation entre les trois noeuds quand la force de couplage est assez grande. Lorsque la synchronisation survient, les comportements spatiaux des isovaleurs de trois noeuds sont identiques. On trouve qu'il n'y a pas de bifurcation particulière, car les dynamiques des sous systèmes restent toujours dans le même état par la présence des cycles limites.

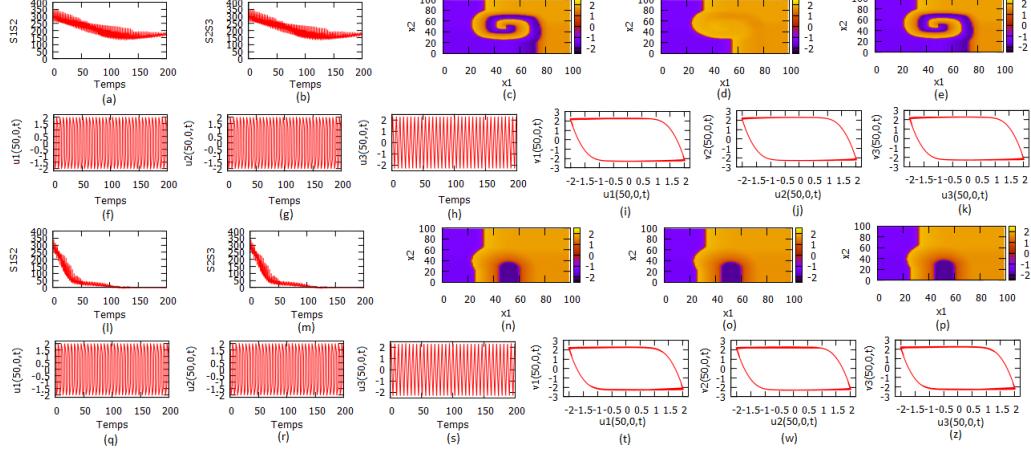


Figure 6.26. Synchronisation d'un réseau complet de trois nœuds couplés linéairement avec $f(u) = -u^3 + 3u$, $a = 1$, $b = 0.001$, $\epsilon = 0.1$, $d = 0.05$. La synchronisation survient pour $g_3 \geq 0.025$. Avant synchronisation, pour $g_3 = 0.005$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, t)$ et $u_3(x_1, x_2, t)$; les figures (f), (g), (h) représentent les dynamiques temporelles de $u_1(50, 0, t)$, $u_2(50, 0, t)$ et $u_3(50, x_2, t)$; les figures (i), (j), (k) représentent les dynamiques des sous systèmes dans les plans $(u_1(50, 0, t), v_1(50, 0, t))$, $(u_2(50, 0, t), v_2(50, 0, t))$ et $(u_3(50, 0, t), v_3(50, 0, t))$. Des simulations similaires sont reproduites pour $g_3 = 0.025$ (figures (l), (m), (n), (o), (p), (q), (r), (s), (t), (w), (z)). Pour la valeur $g_3 = 0.025$, on observe la synchronisation de trois nœuds.

- On prend $c_1 = 0$, et $c_2 = c_3$ dépendant de l'espace dans la figure 6.18(b).

Dans ce cas, on n'a pas la synchronisation entre les trois nœuds même si la force de couplage est assez grande. Alors, les comportements spatiaux des isovaleurs de trois nœuds ne sont pas identiques. Mais on trouve ici qu'il y a une bifurcation particulière. On voit que l'un des trois nœuds reste toujours en état de l'émission régulière de potentiels d'action par la présence d'un cycle limite, tandis que les deux autres changent de l'état stationnaire à l'état de l'émission régulière de potentiels d'action.

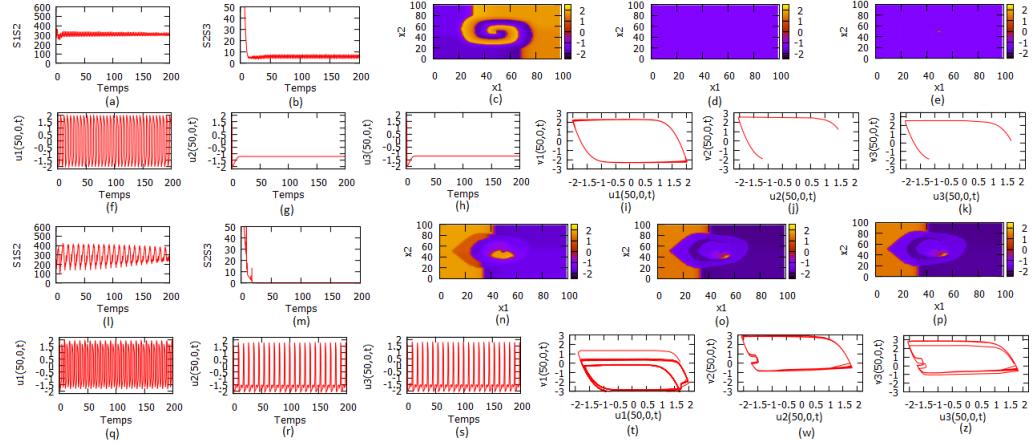


Figure 6.27. Désynchronisation d'un réseau complet de trois nœuds couplés linéairement avec $f(u) = -u^3 + 3u$, $a = 1$, $b = 0.001$, $\epsilon = 0.1$, $d = 0.05$. Aucune synchronisation dans ce cas même si la force de couplage est assez grande. Pour $g_3 = 0.0001$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, t)$ et $u_3(x_1, x_2, t)$; les figures (f), (g), (h) représentent les dynamiques temporelles de $u_1(50, 0, t)$, $u_2(50, 0, t)$ et $u_3(50, 0, t)$; les figures (i), (j), (k) représentent les dynamiques des sous systèmes dans les plans $(u_1(50, 0, t), v_1(50, 0, t))$, $(u_2(50, 0, t), v_2(50, 0, t))$ et $(u_3(50, 0, t), v_3(50, 0, t))$. Des simulations similaires sont reproduites pour $g_3 = 0.5$ (figures (l), (m), (n), (o), (p), (q), (r), (s), (t), (w), (z)).

- On prend $c_1 = 0$, et $c_2 = c_3$ dépendant de l'espace dans la figure 6.18(c).

Dans ce cas, on n'a pas la synchronisation entre les trois nœuds même si la force de couplage est assez grande. Alors, les comportements spatiaux des isovaleurs de trois nœuds ne sont pas identiques. Et on trouve ici qu'il n'y a pas de bifurcation particulière. On voit que l'un des trois nœuds reste toujours en état de l'émission régulière de potentiels d'action par la présence d'un cycle limite, tandis que les deux autres évoluent toujours vers l'état stationnaire.

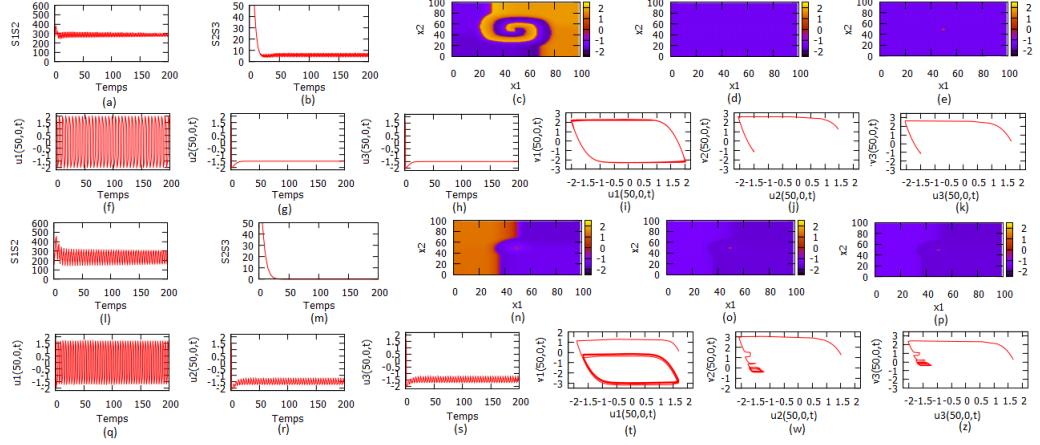


Figure 6.28. Désynchronisation d'un réseau complet de trois nœuds couplés linéairement avec $f(u) = -u^3 + 3u$, $a = 1$, $b = 0.001$, $\epsilon = 0.1$, $d = 0.05$. Aucune synchronisation dans ce cas même si la force de couplage est assez grande. Pour $g_3 = 0.0001$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, t)$ et $u_3(x_1, x_2, t)$; les figures (f), (g), (h) représentent les dynamiques temporelles de $u_1(50, 0, t)$, $u_2(50, 0, t)$ et $u_3(50, 0, t)$; les figures (i), (j), (k) représentent les dynamiques des sous systèmes dans les plans $(u_1(50, 0, t), v_1(50, 0, t))$, $(u_2(50, 0, t), v_2(50, 0, t))$ et $(u_3(50, 0, t), v_3(50, 0, t))$. Des simulations similaires sont reproduites pour $g_3 = 0.5$ (figures (l), (m), (n), (o), (p), (q), (r), (s), (t), (w), (z)).

- On prend $c_1 = c_2 = c_3$ qui dépend de l'espace dans la figure 6.18(c).

Dans ce cas, on a la synchronisation entre les trois nœuds quand la force de couplage est assez grande. Lorsque la synchronisation survient, les comportements spatiaux des isovaleurs de trois nœuds sont identiques. On trouve qu'il n'y a pas de bifurcation particulière, car les dynamiques des sous systèmes restent toujours dans le même état par la présence des solutions stationnaires.

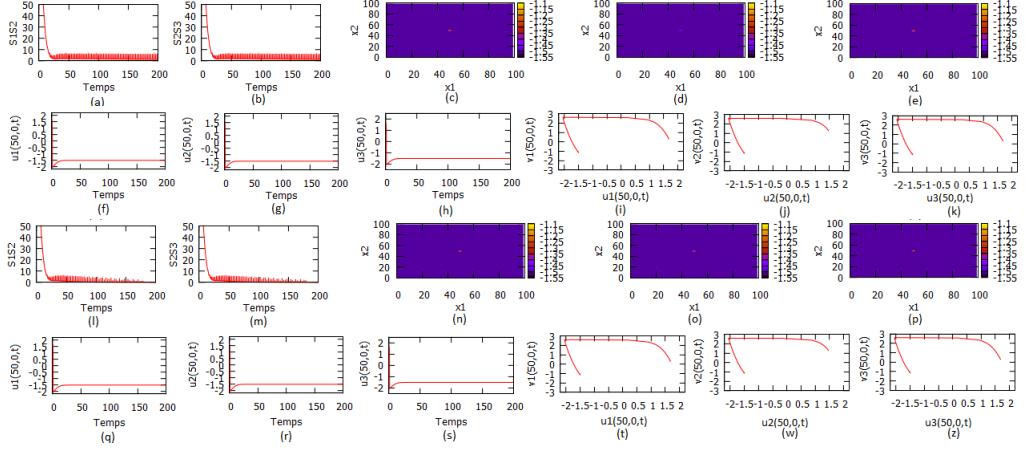


Figure 6.29. Synchronisation d'un réseau complet de trois nœuds couplés linéairement avec $f(u) = -u^3 + 3u$, $a = 1$, $b = 0.001$, $\epsilon = 0.1$, $d = 0.05$. La synchronisation survient pour $g_3 \geq 0.005$. Avant synchronisation, pour $g_3 = 0.001$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, t)$ et $u_3(x_1, x_2, t)$; les figures (f), (g), (h) représentent les dynamiques temporelles de $u_1(50, 0, t)$, $u_2(50, 0, t)$ et $u_3(50, 0, t)$; les figures (i), (j), (k) représentent les dynamiques des sous systèmes dans les plans $(u_1(50, 0, t), v_1(50, 0, t))$, $(u_2(50, 0, t), v_2(50, 0, t))$ et $(u_3(50, 0, t), v_3(50, 0, t))$. Des simulations similaires sont reproduites pour $g_3 = 0.005$ (figures (l), (m), (n), (o), (p), (q), (r), (s), (t), (w), (z)). Pour la valeur $g_3 = 0.005$, on observe la synchronisation de trois nœuds.

- On prend $c_1 = c_2 = 0$ et c_3 qui dépend de l'espace dans la figure 6.18(a).

Dans ce cas, on n'a pas la synchronisation entre les trois nœuds même si la force de couplage est assez grande. Alors, les comportements spatiaux des isovaleurs de trois nœuds ne sont pas identiques. On trouve aussi qu'il n'y a pas de bifurcation particulière, car les dynamiques des sous systèmes restent toujours dans le même état par la présence des cycles limites. Mais, les cycles limites ne sont plus lisses en augmentant la force de couplage.

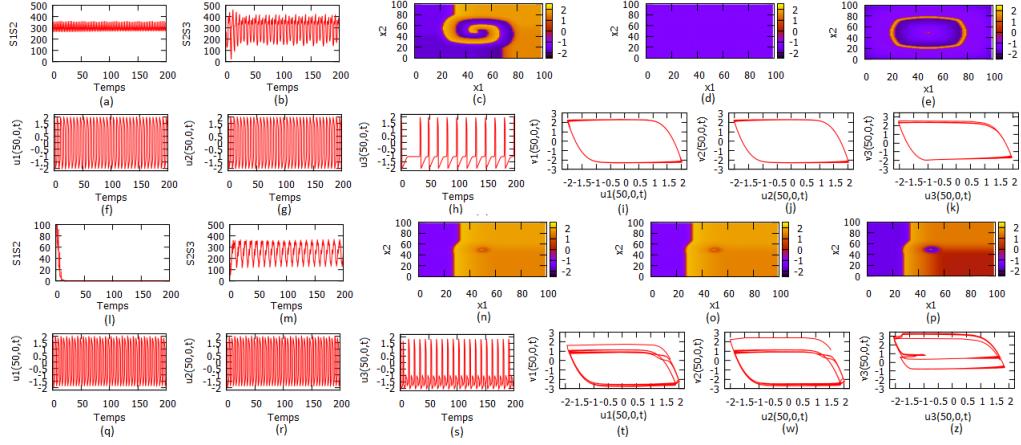


Figure 6.30. Désynchronisation d'un réseau complet de trois nœuds couplés linéairement avec $f(u) = -u^3 + 3u$, $a = 1$, $b = 0.001$, $\epsilon = 0.1$, $d = 0.05$. Aucune synchronisation dans ce cas même si la force de couplage est assez grande. Pour $g_3 = 0.0001$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, t)$ et $u_3(x_1, x_2, t)$; les figures (f), (g), (h) représentent les dynamiques temporelles de $u_1(50, 0, t)$, $u_2(50, 0, t)$ et $u_3(50, 0, t)$; les figures (i), (j), (k) représentent les dynamiques des sous systèmes dans les plans $(u_1(50, 0, t), v_1(50, 0, t))$, $(u_2(50, 0, t), v_2(50, 0, t))$ et $(u_3(50, 0, t), v_3(50, 0, t))$. Des simulations similaires sont reproduites pour $g_3 = 0.5$ (figures (l), (m), (n), (o), (p), (q), (r), (s), (t), (u), (v), (w), (x), (y), (z)).

- On prend $c_1 = c_2$ dépendant de l'espace dans la figure 6.18(a), et c_3 qui dépend de l'espace dans la figure 6.18(c).

Dans ce cas, on n'a pas la synchronisation entre les trois nœuds même si la force de couplage est assez grande. Alors, les comportements spatiaux des isovaleurs de trois nœuds ne sont pas identiques. Mais on trouve qu'il y a une de bifurcation particulière. On voit que l'un des trois nœuds reste toujours en état stationnaire, tandis que les deux autres changent de l'état de l'émission régulière de potentiels d'action à l'état stationnaire.

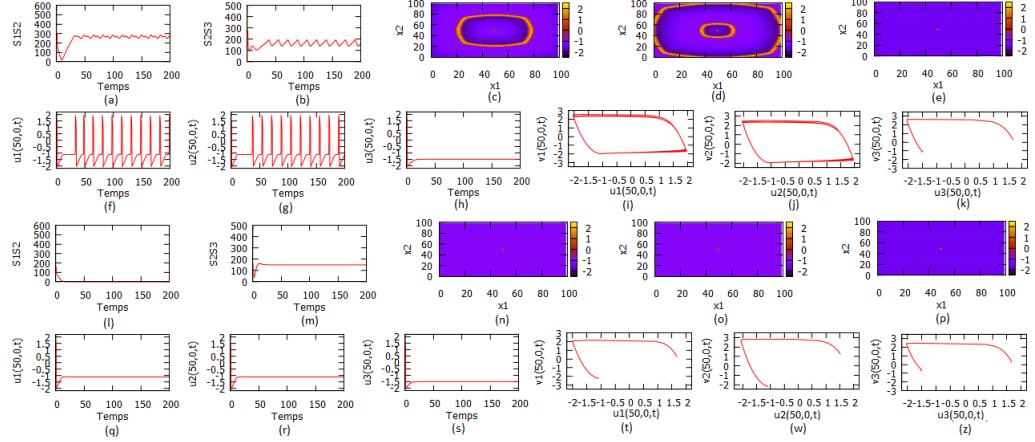


Figure 6.31. Désynchronisation d'un réseau complet de trois nœuds couplés linéairement avec $f(u) = -u^3 + 3u$, $a = 1$, $b = 0.001$, $\epsilon = 0.1$, $d = 0.05$. Aucune synchronisation dans ce cas même si la force de couplage est assez grande. Pour $g_3 = 0.0001$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, t)$ et $u_3(x_1, x_2, t)$; les figures (f), (g), (h) représentent les dynamiques temporelles de $u_1(50, 0, t)$, $u_2(50, 0, t)$ et $u_3(50, 0, t)$; les figures (i), (j), (k) représentent les dynamiques des sous systèmes dans les plans $(u_1(50, 0, t), v_1(50, 0, t))$, $(u_2(50, 0, t), v_2(50, 0, t))$ et $(u_3(50, 0, t), v_3(50, 0, t))$. Des simulations similaires sont reproduites pour $g_3 = 0.5$ (figures (l), (m), (n), (o), (p), (q), (r), (s), (t), (w), (z)).

- On prend $c_1 = 0$, c_2 dépendant de l'espace dans la figure 6.18(a), et c_3 qui dépend de l'espace dans la figure 6.18(b).

Dans ce cas, on n'a pas la synchronisation entre les trois nœuds même si la force de couplage est assez grande. Alors, les comportements spatiaux des isovaleurs de trois nœuds ne sont pas identiques. Mais on trouve qu'il y a une bifurcation particulière. Car on voit que la dynamique de $u_3(50, 0, t)$ change de l'état stationnaire à l'état de l'émission régulière de potentiels d'action par la présence d'un cycle limite (voir figure 6.32(k), (z)).

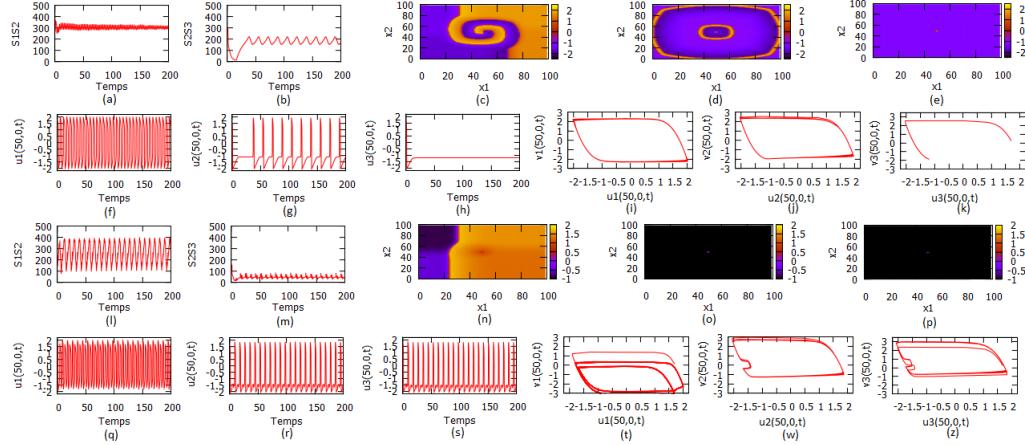


Figure 6.32. Désynchronisation d'un réseau complet de trois nœuds couplés linéairement avec $f(u) = -u^3 + 3u$, $a = 1$, $b = 0.001$, $\epsilon = 0.1$, $d = 0.05$. Aucune synchronisation dans ce cas même si la force de couplage est assez grande. Pour $g_3 = 0.0001$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, t)$ et $u_3(x_1, x_2, t)$; les figures (f), (g), (h) représentent les dynamiques temporelles de $u_1(50, 0, t)$, $u_2(50, 0, t)$ et $u_3(50, 0, t)$; les figures (i), (j), (k) représentent les dynamiques des sous systèmes dans les plans $(u_1(50, 0, t), v_1(50, 0, t))$, $(u_2(50, 0, t), v_2(50, 0, t))$ et $(u_3(50, 0, t), v_3(50, 0, t))$. Des simulations similaires sont reproduites pour $g_3 = 0.5$ (figures (l), (m), (n), (o), (p), (q), (r), (s), (t), (w), (z)).

- On prend c_1, c_2 dépendant de l'espace dans la figure 6.18(b), et c_3 qui dépend de l'espace dans la figure 6.18(c).

Dans ce cas, on n'a pas la synchronisation entre les trois nœuds même si la force de couplage est assez grande. Alors, les comportements spatiaux isovaleurs de trois nœuds sont identiques à partir d'une valeur de force de couplage assez importante. Car on peut voir sur les figures 6.33(l), (m), que les erreurs de synchronisation devient stable. On n'a pas de bifurcation particulière dans ce cas, car tous les trois nœuds restent toujours en état stationnaire.

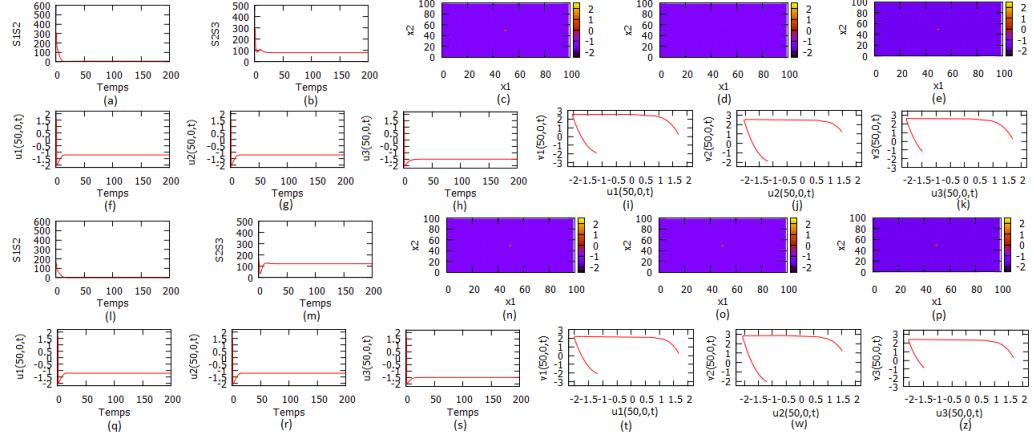


Figure 6.33. Désynchronisation d'un réseau complet de trois nœuds couplés linéairement avec $f(u) = -u^3 + 3u$, $a = 1$, $b = 0.001$, $\epsilon = 0.1$, $d = 0.05$. Aucune synchronisation dans ce cas même si la force de couplage est assez grande. Pour $g_3 = 0.0001$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, t)$ et $u_3(x_1, x_2, t)$; les figures (f), (g), (h) représentent les dynamiques temporelles de $u_1(50, 0, t)$, $u_2(50, 0, t)$ et $u_3(50, 0, t)$; les figures (i), (j), (k) représentent les dynamiques des sous systèmes dans les plans $(u_1(50, 0, t), v_1(50, 0, t))$, $(u_2(50, 0, t), v_2(50, 0, t))$ et $(u_3(50, 0, t), v_3(50, 0, t))$. Des simulations similaires sont reproduites pour $g_3 = 0.5$ (figures (l), (m), (n), (o), (p), (q), (r), (s), (t), (w), (z)).

- On prend c_1, c_2 et c_3 dépendant de l'espace dans la figure 6.18(a), 6.18(b) et 6.18(c), respectivement.

Dans ce cas, on n'a pas la synchronisation entre les trois nœuds même si la force de couplage est assez grande. Alors, les comportements spatiaux isovaleurs de trois noeuds sont identiques à partir d'une valeur de force de couplage assez importante. Car on peut voir sur les figures 6.34(l), (m), que les erreurs de synchronisation devient stable. Spécialement, on trouve qu'il y a une bifurcation particulière. Car on voit que la dynamique de $u_1(50, 0, t)$ change de l'état de l'émission régulière de potentiels d'action par la présence d'un cycle limite à l'état stationnaire (voir figures 6.34(i), (t)).

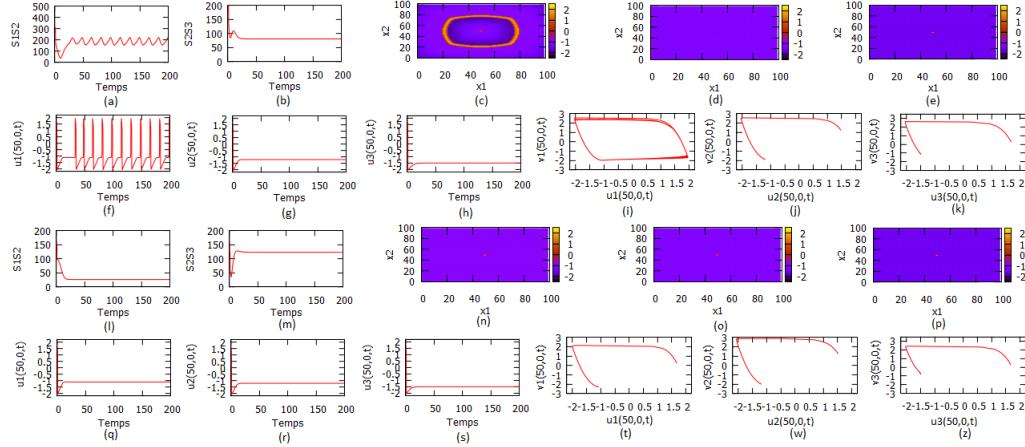


Figure 6.34. Désynchronisation d'un réseau complet de trois nœuds couplés linéairement avec $f(u) = -u^3 + 3u$, $a = 1$, $b = 0.001$, $\epsilon = 0.1$, $d = 0.05$. Aucune synchronisation dans ce cas même si la force de couplage est assez grande. Pour $g_3 = 0.0001$: la figure (a) montre la dynamique temporelle de l'erreur de synchronisation entre u_1 et u_2 , pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega$; de manière analogue la figure (b) représente celle entre u_3 et u_2 ; la figure (c) représente les isovaleurs de $u_1(x_1, x_2, 190)$; de même les figures (d) et (e) représentent le comportement spatial des isovaleurs de $u_2(x_1, x_2, t)$ et $u_3(x_1, x_2, t)$; les figures (f), (g), (h) représentent les dynamiques temporelles de $u_1(50, 0, t)$, $u_2(50, 0, t)$ et $u_3(50, 0, t)$; les figures (i), (j), (k) représentent les dynamiques des sous systèmes dans les plans $(u_1(50, 0, t), v_1(50, 0, t))$, $(u_2(50, 0, t), v_2(50, 0, t))$ et $(u_3(50, 0, t), v_3(50, 0, t))$. Des simulations similaires sont reproduites pour $g_3 = 0.5$ (figures (l), (m), (n), (o), (p), (q), (r), (s), (t), (w), (z)).

Similairement, on peut refaire ces travaux avec d'autres conditions initiales et d'autres mélanges entre c_i , $i = 1, 2, 3$. Pour le réseau complet de trois nœuds, et même pour le réseau en anneau couplé unidirectionnellement, on trouve toujours les résultats comme on peut alors récapituler dans le tableau suivant.

	$c(x) = 0$ partout	$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.1$ ailleurs	$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.2$ ailleurs	$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.5$ ailleurs	
$c(x) = 0$ partout	G	H	A	A	$c(x) = 0$ partout
$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.1$ ailleurs	H	G	A	D	$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.1$ ailleurs
$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.2$ ailleurs		E	F	I	$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.2$ ailleurs
$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.5$ ailleurs	C		I	F	$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.5$ ailleurs
$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.2$ ailleurs		A	B	B	$c(x) = 0$ partout
$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.5$ ailleurs	A		E	E	$c(x) = 0$ au centre, $c(x) = 1.1$ ailleurs

Table 6.11. Tableau donnant les résultats sur la bifurcation dans le réseau complet de trois nœuds selon le mélange de différents paramètres c . On note que les résultats ne dépendent pas de conditions initiales et restent les même choses dans le cas du réseau en anneau couplé unidirectionnellement.

On note que :

A : Cela veut dire qu'il y a une bifurcation dans le réseau. L'un des trois noeuds change de l'état stationnaire à l'état de l'émission régulière de potentiels d'action en augmentant la force de couplage. Tandis que les deux autres restent en état de l'émission régulière de potentiels d'action par la présence des cycles limites. Par contre, on n'a pas la synchronisation dans le réseau.

B : Cela veut dire qu'il y a une bifurcation dans le réseau. Les deux des trois nœuds changent de l'état stationnaire à l'état de l'émission régulière de potentiels d'action en augmentant la force de couplage. Tandis que l'autre reste en état de l'émission régulière de potentiels d'action par la présence d'un cycle limite. Par contre, on n'a pas la synchronisation dans le réseau.

C : Cela veut dire qu'il n'y a pas la synchronisation dans le réseau, et on n'a pas non plus de bifurcation particulière. Plus clairement, alors l'un des trois nœuds reste toujours en état de l'émission de potentiels d'action, tandis que les deux autres restent toujours en état stationnaire ou évoluent vers l'état stationnaire en augmentant la force de couplage.

D : Cela veut dire qu'il y a une bifurcation dans le réseau en augmentant la force de couplage. Plus clairement, alors les deux des trois nœuds changent de l'état de l'émission régulière à l'état stationnaire, tandis que l'autre reste toujours en état stationnaire. Par contre, on n'a pas la

synchronisation dans le réseau.

E : Cela veut dire qu'il y a une bifurcation dans le réseau en augmentant la force de couplage. Plus clairement, alors l'un des trois nœuds changent de l'état de l'émission régulière à l'état stationnaire, tandis que les deux autres restent toujours en état stationnaire. Par contre, on n'a pas la synchronisation dans le réseau.

F : Dans ce cas, on a la synchronisation dans le réseau avec une force de couplage assez importante. Par contre, on n'a pas de bifurcation particulière dans le réseau, alors tous les trois nœuds restent toujours en état stationnaire.

G : Dans ce cas, on a la synchronisation dans le réseau avec une force de couplage assez importante. Par contre, on n'a pas de bifurcation particulière dans le réseau, alors tous les trois nœuds restent toujours en état de l'émission régulière de potentiels d'actions par la présence des cycles limites.

H : Dans ce cas, on n'a pas de synchronisation, ni de bifurcation particulière. Et tous les trois nœuds restent toujours en état de l'émission régulière de potentiels d'action par la présence des cycles limites.

I : Dans ce cas, on n'a pas de synchronisation, ni de bifurcation particulière. Et tous les trois nœuds restent toujours en état stationnaire.

Quatrième partie

Annexes

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Beaucoup de problèmes en sciences modernes et en ingénierie peuvent être aujourd’hui analysés et stimulés de façon relativement réaliste grâce aux outils de la dynamique non-linéaire. L’analyse de phénomènes réels en biologie, écologie ou en physique par exemple, fait souvent appel à des modèles mathématiques, qui peuvent prendre la forme, entre autre, de système d’*équations différentielles*. Le temps et l’espace jouant un rôle d’une grande importance, le *comportement spatio-temporel* des solutions et l’étude des équations de réaction-diffusion sont également important à étudier.

A. Les systèmes d’équations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont omniprésentes dans toutes les sciences, puisqu’elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation ou de l’électromagnétisme, par exemple, les *équations de Maxwell*. Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d’images, la prévision météorologique, la démographie, ou les finances. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP. Ce sont des équations indispensables pour la résolution de presque la totalité des problèmes dans ces domaines. On peut citer, par exemple.

- L’*équation d’advection* qui décrit comment une quantité est transportée dans un courant (par exemple, un polluant dans de l’eau) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f(x, t),$$

où c étant la vitesse du milieu qui est souvent une constante.

- L’*équation d’ondes* décrivant les phénomènes de propagation des ondes sonores et des ondes électromagnétiques comme la lumière dans des milieux comme l’air ou le vide physique :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

où c représente la célérité pour le cas de la lumière ou la vitesse de propagation de l’onde u .

- L’*équation de Fourier* ou *équation de la chaleur* qui décrit l’évolution de la température en fonction du temps et de l’espace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t},$$

où α est appelé diffusivité thermique du milieu.

Certaines de ces EDP ont été résolues analytiquement et leurs solutions sont connues. Toutefois, un nombre important d'autres existent sans solutions analytiques. C'est dans cette optique que les recherches se sont penchées sur les méthodes numériques pour arriver à approximer les solutions de ces équations.

Notons que malgré ces efforts indéniables, il n'existe pas de méthodes universelles pour la résolution numérique des EDP. L'algorithme de résolution dépend très étroitement du type de problème posé. C'est pour cela que l'on va restreindre notre champs d'étude. On exigera que l'équation satisfasse quelques propriétés comme la linéarité pour que la résolution soit possible.

Définition

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, *une équation aux dérivées partielles* ou *équation différentielle partielle* (EDP) est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. C'est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (u dans les cas suivants) des variables indépendantes $(x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme :

$$F(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots) = 0.$$

Exemple 1. On a,

- L'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ qui admet comme solutions : $u(x, y) = (x + y)^3, u(x, y) = \sin(x - y), \dots$
- L'équation de la Laplace $\Delta u = 0$, en dimensions 2 (2D), qui admet aussi au moins deux solutions dont $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = e^x \sin(y)$.

Les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire ; les problèmes incluent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Pour assurer donc l'unicité de la solution, comme on le fait avec les équations différentielles ordinaires, EDO, on tiendra compte des conditions prédonnées comme les conditions aux limites et les conditions initiales.

Classification des EDP linéaires du second ordre

Comme il est dit plus haut, il n'existe pas de méthodes universelles pour la résolution des EDP, on va se contenter de celles qui sont linéaires et du second ordre. Quand on pose $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, une équation aux dérivées partielles du second ordre sera de la forme :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(X) + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(X) + Cu = G(X),$$

avec A_{ij}, B_i, C, G des fonctions indépendantes de u ne s'annulant pas toutes simultanément posée prend la forme de :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y).$$

La classe d'une telle équation est déterminée par calcul de,

$$\Delta = B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0).$$

- Si $\Delta < 0$, on parle d'une équation elliptique.
- Si $\Delta = 0$, l'EDP est dite parabolique.
- Si $\Delta > 0$, on a une équation hyperbolique.

Remarque 1. Notons que les méthodes numériques passent toujours par des discrétisations des problèmes analytiques en des problèmes numériques et qu'il existe une infinité des méthodes de discrétisation d'une équation. On peut jamais les énumérer toutes mais les plus couramment utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles sont :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des éléments finis.
- La méthode des volumes finis.
- La méthode des caractéristiques.

Dans notre travail, on n'utilise que la méthode des *différences finies*. La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage. L'avantage de cette méthode est qu'il y a une grande simplicité d'écriture et un faible coût de calcul. Elle est couramment pratique et facile d'accès. Elle repose sur deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation ou différentiation et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu. Son inconvénient est qu'on se limite à des géométries simples, et qu'il y a des difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

Maillage

Puisqu'on a évoqué le mot *maillage* dans le paragraphe précédent et qu'on en aura tout le temps besoin, définissons-le ici. On appelle maillage un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer la méthode des différences finies. Pour une application définie sur un segment de \mathbb{R} , on ajoutera en général les deux extrémités du segment ; pour un maillage en dimension supérieure, on sera amené à choisir, éventuellement, des points du contours du domaine de définition. On appelle le pas du maillage la distance entre deux points successifs du maillage voisins. En dimension 1, cela se simplifie en différence des abscisses. Ce pas n'est pas nécessairement constant, il peut même être judicieux de ne pas le fixer comme tel. Le pas (global) de l'approximation peut être défini comme le plus grand pas du maillage. Ainsi, si ce pas global tend vers 0, cela veut dire que la répartition des points du maillage dans l'intervalle choisi tend à se faire sur tout le domaine d'étude par densité.

Exemple 2. Pour un intervalle $[0, 2]$, avec n le nombre des pas, on aura $n + 1$ points qui sont donnés par la relation $x_i = ih$ avec $h = \frac{2}{n}$ constant, $0 \leq i \leq n$.

Notation indicelle

Durant ces projets on utilisera souvent la *notation indicelle*. C'est pourquoi on veut en rappeler le principe. Si x est un des vecteurs de base du repère (quadrillage) discrétisé, on notera le point $x(i)$, qui est la i ème abscisse par x_i et de même la j ème ordonnée $y(j)$ sera noté y_j et si u est maintenant la fonction, ici la solution de l'équation aux dérivées partielles dépendant seulement des variables de l'espace, on remplacera $u(x_i, y_j)$ par $u_{i,j}$. Si, en plus des variables de l'espace, il existe une variable temporelle $t(k) = t_k$, alors la fonction $u(x_i, y_j, t_k)$ sera notée $u_{i,j}^k$. En résumé, les indices des variables spatiales resteront en indices et celui du temps sera en exposant. C'est ce qu'on appellera la notation indicelle.

Discrétisation de l'EDP

Soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d].$$

On prendra h_x et h_y les pas de discrétisation des intervalles $[a, b] \times [c, d]$.

- Discrétisation de l'intervalle $[a, b]$, $h_x = \frac{b-a}{n_x}$ (n_x étant le nombre d'intervalles dans $[a, b]$).

Ce qui implique, $x(i) = x_i = a + ih_x, i = 0, 1, \dots, n_x$.

- Discrétisation de l'intervalle $[c, d]$, $h_y = \frac{d-c}{n_y}$ (n_y étant le nombre d'intervalles dans $[c, d]$).

Ce qui implique, $y(i) = y_i = c + ih_y, i = 0, 1, \dots, n_y$.

Remarque 2. Constatons que $x_{i+1} = a + (i+1)h_x = (a + ih_x) + h_x = x_i + h_x$. Dans la suite, on remplacera chaque fois $x_i + h_x, x_i - h_x, y_j + h_y, y_j - h_y$ succéssivement par $x_{i+1}, x_{i-1}, y_{i+1}, y_{i-1}$.

Méthode des Différences finies

Cette méthode consiste à approximer les dérivées partielles d'une équation au moyen des développements de Taylor et ceci se déduit directement de la définition de la dérivée. Soit $f(x, y)$ une fonction continue et dérivable de classe C^∞ , alors la dérivée partielle première de f par rapport à x est calculée par la formule :

$$f'_x(x, y) = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x}.$$

Si $h_x \ll 1$, le développement de Taylor au voisinage de 0 de $f(x + h_x, y)$ donne :

$$f(x + h_x, y) = f(x, y) + h_x \frac{\partial f}{\partial x} + \theta(h_x) \simeq f(x, y) + h_x \frac{\partial f}{\partial x},$$

avec une erreur de l'ordre de h_x . Donc,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \simeq \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x}.$$

Ceci est appelé le *schéma avant*.

De la même manière, on peut aussi donner le schéma arrière qui est de la forme :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x - h_x, y)}{h_x},$$

avec la formule de Taylor, ceci nous donne :

$$f(x, y) = f(x - h_x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \theta(h_x) \simeq f(x - h_x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},$$

avec une erreur de h_x . Donc,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \simeq \frac{f(x, y) - f(x - h_x, y)}{h_x}.$$

La somme de ces deux schémas nous donne le schéma centré suivant :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \simeq \frac{f(x + h_x, y) - f(x - h_x, y)}{2h_x}.$$

En résumé, on a les trois approximations suivantes pour la dérivée partielle première de $f(x, y)$ par rapport à x avec la formule de Taylor :

$$f'_x(x, y) = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x} \simeq \begin{cases} \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x} & \text{schéma avant.} \\ \frac{f(x, y) - f(x - h_x, y)}{h_x} & \text{schéma arrière.} \\ \frac{f(x + h_x, y) - f(x - h_x, y)}{2h_x} & \text{schéma centré.} \end{cases}$$

La dérivée seconde f''_x de $f(x, y)$ sera alors de la forme :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \simeq \frac{\frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)}{h_x} - \frac{f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)}{h_x}}{h_x}.$$

Ainsi,

$$(6.80) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \simeq \frac{f(x_{i+1}, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2}.$$

On utilisera tour à tour ces égalités dans la suite pour approximer les dérivées partielles.

Approximation de l'équation différentielle partielle

Soit l'équation de Laplace :

$$(6.81) \quad \Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

On pose $u(x_i, y_i) = u_{i,j}$ (en notation indicelle). Compte tenu de la relation (6.80) du paragraphe précédent,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}.$$

Puisque x_i et y_i jouent un rôle symétrique dans l'équation du potentiel (de Laplace), un raisonnement analogue à celui de l'approximation de f''_x nous donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}.$$

Rapportons ces approximations dans l'EDP (6.81), on a,

$$\Delta u \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = 0.$$

Dans ce cas particulier où $h_x = h_y = h$, on a finalement,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0. \\ i = 0, 1, \dots, n_x \text{ et } j = 0, 1, \dots, n_y. \end{cases}$$

Remarque 3. A chaque étape, on remarque que pour calculer la valeur de $u_{i,j}$ au point (x_i, y_j) , on a besoin de connaître les points $u_{i-1,j}$, $u_{i,j-1}$, $u_{i+1,j}$ et $u_{i,j+1}$ comme l'indique le dessin suivant :

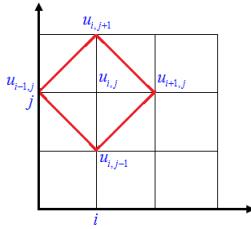


Figure 6.35. Schéma de la formule à 5 points.

C'est pour cela qu'on appelle cette formule **la formule à 5 points** qui peut être représentée comme suit :

$$\Delta u = 0 \Rightarrow \frac{1}{h^2} \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & & 1 \end{Bmatrix} u_{i,j} = 0.$$

Les formules de Green

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ensemble ouvert borné, $k \in \{1, 2, \dots\}$. On dit que $\partial\Omega$ est de classe C^k si pour tout point $x_0 \in \partial\Omega$, il existe $r > 0$ et une fonction de classe C^k , $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que,

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) | x_n > \gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)\}.$$

Egalement, $\partial\Omega$ est de classe C^∞ si $\partial\Omega$ est de classe C^k pour $k = 1, 2, \dots$, et $\partial\Omega$ est analytique si γ est analytique.

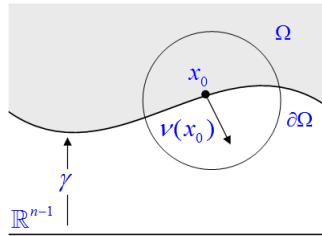


Figure 6.36. Frontière de Ω .

Soit $\partial\Omega$ de classe C^1 , alors le long de $\partial\Omega$ est défini le champ extérieur de *vecteur normal* de l'unité de pointage, $\nu = (\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^n)$. L'unicité normale en point $x_0 \in \partial\Omega$ est $\nu(x_0) = \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$.

Soit $u \in C^1(\bar{\Omega})$. On appelle, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot Du$, la *dérivée normale* vers l'extérieur de u .

Soit $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Alors,

- $\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$.

- $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS.$
- $\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$

B. Aide à montrer le théorème 13

Le choix de la matrice A

- Ici, on donne les détails de la preuve de l'hypothèse (6.41) pour le réseau (6.35) en appliquant aux systèmes de Lorenz couplés par leur première variable (voir [12]) comme suit,

$$(6.82) \quad \begin{cases} \dot{x}_i = \sigma(y_i - x_i) + d\Delta x_i + \sum_{j=1}^n \epsilon_{ij}(t)x_j & i \in \{1, \dots, n\}, \\ \dot{y}_i = rx_i - y_i - x_i z_i \\ \dot{z}_i = -bz_i + x_i y_i \end{cases}$$

pour lequel la matrice $P = \text{diag}(1, 0, 0)$ et le vecteur (x_i, y_i, z_i) présente pour le vecteur U_i dans (6.35). Les paramètres σ, r and b sont standards. Tous les notations sont similaires à celles du système (6.35). Rappelons que $\epsilon_{ii} = \sum_{j=1; j \neq i}^n \epsilon_{ij}, i \in \{1, \dots, n\}$.

Pour prouver que la condition (6.41) est vraie pour le système couplé (6.82), on va suivre les étapes de l'étude précédente.

- Le système individuel de Lorenz non-perturbé ($\epsilon_{ij} \equiv 0$) est éventuellement dissipatif et a un domaine absorbant,

$$\mathcal{B} = \left\{ x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2 < \frac{b^2(r + \sigma)^2}{4(b - 1)} \right\}.$$

Ainsi, les coordonnées de l'attracteur du système individuel de Lorenz sont estimées pour être bornées par,

$$(6.83) \quad |\varphi| < \frac{b(r + \sigma)}{2\sqrt{b - 1}}, \quad \varphi = x, y, (z - r - \sigma).$$

Cela peut être facilement montré dans [12] que les estimations (6.83) sont valables pour les coordonnées de chaque oscillateur du système couplé (6.82).

- Le système auxiliaire (6.39) écrit pour les variables $X_{ij} = x_j - x_i, Y_{ij} = y_j - y_i$ et $Z_{ij} = z_j - z_i$ du système couplé (6.82) et ayant la matrice $A = \text{diag}(a_1, 0, 0)$, prend la forme,

$$(6.84) \quad \begin{cases} \dot{X}_{ij} = \sigma(Y_{ij} - X_{ij}) - a_1 X_{ij} \\ \dot{Y}_{ij} = (r - U_{ij}^{(z)})X_{ij} - Y_{ij} - U_{ij}^{(x)}Z_{ij} & i, j \in \{1, \dots, n\}, \\ \dot{Z}_{ij} = U_{ij}^{(y)}X_{ij} + U_{ij}^{(x)}Y_{ij} - bZ_{ij} \end{cases}$$

où $U_{ij}^{(\xi)} = \frac{\xi_i + \xi_j}{2}$ pour $\xi = x, y, z$ sont les sommes des variables correspondantes, et le terme $-a_1 X_{ij}$ du système auxiliaire représente la contribution du terme de couplage dans le système original. Dans le système (6.84), on obtient les termes croisés grâce à la formule,

$$\xi_j \eta_j - \xi_i \eta_i = U^{(\eta)}(\xi_j - \xi_i) + U^{(\xi)}(\eta_j - \eta_i).$$

Pour montrer que l'équilibre trivial du système auxiliaire (6.84) devient globalement stable à condition que le paramètre a_1 soit suffisamment grand, on considère la fonction de Lyapunov (6.40) avec matrice identique $H = \mathbf{I}$,

$$(6.85) \quad W_{ij} = \frac{1}{2}(X_{ij}^2 + Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2), \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Leurs dérivées associées au système (6.84) sont calculées comme suit,

$$(6.86) \quad \dot{W}_{ij} = -[(a_1 + \sigma)X_{ij}^2 + (U^{(z)} - r - \sigma)X_{ij}Y_{ij} + Y_{ij}^2 - U^{(y)}X_{ij}Z_{ij} + bZ_{ij}^2].$$

Ainsi, en appliquant le critère de Sylvester à la définitivité négative des formes quadratiques, on obtient les conditions $a_1 + \sigma > 0$,

$$\begin{vmatrix} a_1 + \sigma & \frac{1}{2}(U^{(z)} - r - \sigma) \\ \frac{1}{2}(U^{(z)} - r - \sigma) & 1 \end{vmatrix} > 0,$$

et

$$\begin{vmatrix} a_1 + \sigma & \frac{1}{2}(U^{(z)} - r - \sigma) & -\frac{1}{2}U^{(y)} \\ \frac{1}{2}(U^{(z)} - r - \sigma) & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}U^{(y)} & 0 & b \end{vmatrix} > 0.$$

En tenant compte de l'estimation (6.83) pour les coordonnées $U^{(y)}$ et $U^{(z)}$, on obtient finalement la condition suffisante comme suit,

$$(6.87) \quad a_1 > \frac{b(b+1)(r+\sigma)^2}{16(b-1)-\sigma}.$$

Ainsi, sous cette condition, la solution triviale du système auxiliaire (6.39) est globalement asymptotiquement stable et la condition (6.41) est vraie pour des réseaux des systèmes de Lorenz couplés par la première variable.

• Maintenant, on applique la procédure au réseau des systèmes de FitzHugh-Nagumo couplés par leur première variable comme suit,

$$(6.88) \quad \begin{cases} \epsilon \dot{u}_i = -u_i^3 + 3u_i - v_i + d\Delta u_i + \sum_{j=1}^n \epsilon_{ij}(t)u_j & i \in \{1, \dots, n\}, \\ \dot{v}_i = au_i - bv_i + c \end{cases}$$

pour lequel la matrice $P = \text{diag}(1, 0)$ et le vecteur (u_i, v_i) présente pour le vecteur U_i dans (6.35). Les paramètres a, b, c et ϵ sont standards. Tous les notations sont similaires à celles du système (6.35). Rappelons que $\epsilon_{ii} = \sum_{j=1; j \neq i}^n \epsilon_{ij}, i \in \{1, \dots, n\}$.

Pour prouver que la condition (6.41) est vraie pour le système couplé (6.88), on va suivre les étapes de l'étude précédente.

– Le système individuel de FitzHugh-Nagumo non-perturbé ($\epsilon_{ij} \equiv 0$) a un domaine absorbant \mathcal{B} . Ainsi, les coordonnées de l'attracteur du système individuel de FitzHugh-Nagumo sont estimées pour être bornées par une constante.

Soit $K = \sup_{u \in \mathcal{B}, x \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^3 \frac{f^{(k)}(u)}{k!} x^{k-1}$, où $f(u) = -u^3 + 3u$, et \mathcal{B} est un intervalle compact dans lequel u reste inclus.

- Le système auxiliaire (6.39) écrit pour les variables $X_{ij} = u_j - u_i$, et $Y_{ij} = v_j - v_i$ du système couplé (6.88) et ayant la matrice $A = \text{diag}(a_1, 0)$, prend la forme,

$$(6.89) \quad \begin{cases} \epsilon \dot{X}_{ij} = (3 - U_{ij})X_{ij} - Y_{ij} - a_1 X_{ij} & i, j \in \{1, \dots, n\}, \\ \dot{Y}_{ij} = aX_{ij} - bY_{ij} \end{cases}$$

où $U_{ij} = u_j^2 + u_i u_j + u_i^2$, et le terme $-a_1 X_{ij}$ du système auxiliaire représente la contribution du terme de couplage dans le système original.

Pour montrer que l'équilibre trivial du système auxiliaire (6.89) devient globalement stable à condition que le paramètre a_1 soit suffisamment grand, on considère la fonction de Lyapunov (6.40) avec matrice identique $H = \mathbf{I}$,

$$(6.90) \quad W_{ij} = \frac{1}{2}(X_{ij}^2 + Y_{ij}^2), \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Leurs dérivées associées au système (6.89) sont calculées comme suit,

$$(6.91) \quad \dot{W}_{ij} = -\left[\frac{(a_1 + U_{ij} - 3)}{\epsilon} X_{ij}^2 + \left(\frac{1}{\epsilon} - a\right) X_{ij} Y_{ij} + b Y_{ij}^2\right].$$

Ainsi, en appliquant le critère de Silvester à la définitivité négative des formes quadratiques, on obtient les conditions $a_1 + U_{ij} - 3 > 0$, et

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1 + U_{ij} - 3}{\epsilon} & \frac{1 - a\epsilon}{2\epsilon} \\ \frac{1 - a\epsilon}{2\epsilon} & b \end{vmatrix} > 0.$$

On trouve alors,

$$(6.92) \quad a_1 > \frac{(1 - a\epsilon)^2}{4b\epsilon} + 3 - U_{ij}.$$

Pour la définitivité négative des formes quadratiques, on a besoin de la condition suffisante suivante,

$$(6.93) \quad a_1 > \frac{(1 - a\epsilon)^2}{4b\epsilon} + K.$$

Ainsi, sous cette condition, la solution triviale du système auxiliaire (6.39) est globalement asymptotiquement stable et la condition (6.41) est vraie pour des réseaux des systèmes de FitzHugh-Nagumo couplés par la première variable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Afraimovich V.S., Verichev N.N., Rabinovich M.I., *Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems*, Radiophys.Quant.Electron.29, p. 795-802 (1986).
- [2] Alikakos N.D., *An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations*, Journal of Differential Equations 33, p. 201-225 (1979).
- [3] Ambrosio B., Aziz-Alaoui M.A., *Synchronization and control of coupled reaction-diffusion systems of the FitzHugh-Nagumo-type*, Computers and Mathematics with Applications 64, p. 934-943 (2012).
- [4] Ambrosio B., *Propagation d'ondes dans un milieu excitable : simulations numériques et approche analytique*, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie-Paris 6 (2009).
- [5] Ambrosio B., Aziz-Alaoui M.A., *Synchronisation dans un réseau d'équations aux dérivées partielles de type FitzHugh-Nagumo*, Actes du colloque EDP-Normandie, Le Havre, p. 119-131 (2012).
- [6] Ambrosio B., Aziz-Alaoui M.A., *Synchronization and control of a network of coupled reaction-diffusion systems of generalized FitzHugh-Nagumo type*, ESAIM : Proceedings, Vol. 39, p. 15-24 (2013).
- [7] Ambrosio B., Aziz-Alaoui M.A., Phan V.L.E., *Attractor and synchronization for a complex network of reaction-diffusion systems of FitzHugh-Nagumo type*, arXiv :1504.07763, submission (2015).
- [8] Ambrosio B., Françoise J. P., *Propagation of Bursting Oscillations*, Phil. Trans. R. Soc. A, p. 4863-4875 (2009).
- [9] Aziz-Alaoui M.A., *Synchronization of Chaos*, Encyclopedia of Mathematical Physics, Elsevier, Vol. 5, p. 213-226 (2006).
- [10] Aziz-Alaoui M.A., *Emergent Properties in Natural and Artificial Dynamical Systems*, Complex Emergent Properties and Chaos (De-)synchronization, in M.Aziz-Alaoui, et C.Bertelle (eds.), Understanding Complex Systems. Springer-Verlag, Heidelberg, p. 129-147 (2006).
- [11] Belykh I., Belykh V., Hasler M., *Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems*, Physical Review E, V. 62, N5, p. 6332-6345 (2000).
- [12] Belykh V., Belykh I., Hasler M., *Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems*, Physica D 159, p. 159-187 (2004).
- [13] Belykh I., Hasler M., Mauret M., Nijmeijer H., *Synchronization and graph topology*, Int. Jour. Bif. Chaos, vol 15, n11, p. 3423-3433 (2005).
- [14] Belykh I., De Lange E., Hasler M., *Synchronization of bursting neurons : What matters in the network topology*, Phys. Rev. Lett. 188101 (2005).
- [15] Belykh I., Belykh V., Hasler M., *Synchronization in asymmetrically coupled networks with node balance*, Chaos 16, 015102 (2006).
- [16] Belykh I., Belykh V., Hasler M., *Generalized connection graph method for synchronization in asymmetrical network*, Phys. D 224, p. 42-51 (2006).

[17] Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D.L., Zhou C.S., *The Synchronization of Chaotic Systems*, Physics Reports 366, p. 1-101 (2002).

[18] Corson N., *Dynamique d'un modèle neuronal, synchronisation et complexité*, Thèse de l'Université du Havre (2009).

[19] Corson N. and Aziz-Alaoui, *Complex emergent properties in Synchronized neuronal oscillations*, in M.A.A and C.Bertell (eds.) : From System Complexity to Emergent Properties, Pringer, p. 243-259 (2009).

[20] Corson N., Aziz-Alaoui M.A., Ghnemat R., Balev S. et Bertelle C., *Modelling the Dynamics of Complex Interaction Systems : from Morphogenesis to Control*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 22(2), pp : 1250025 (2012).

[21] Corson N. et Aziz-Alaoui M.A., *Asymptotic Dynamics for Slow-Fast Hindmarsh-Rose Neuronal System, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, series B, Vol. 16(4), pp : 535-549 (2009).

[22] Dang-Vu H., Delcarte C., *Bifurcations et Chaos, une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortan et Mathematica*, Eds Ellipses, Université - Mécanique (2000).

[23] Davidenko J.M., Pertsov A.V., Salomonsz W., Baxter R. and Jalife J., *Stationary and drifting spiral waves of excitation in isolated cardiac muscle*, Nature, 355 :349-351, (1992).

[24] Dorfler F., Bullo F., *On the Critical Coupling for Kuramoto Oscillators*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 10(3), 10701099 (2011).

[25] Dorfler F., Bullo F., *Synchronization and Transient Stability in Power Networks and Nonuniform Kuramoto Oscillators* SIAM J. Control Optim., 50(3), 16161642 (2011).

[26] Dtchetgnia S.R., Yamapi R., Kofane T.C. et Aziz-Alaoui M.A., *Deterministic and stochastic bifurcations in the Hindmarsh-Rose neuronal model with and without random signal*, CHAOS. An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, Vol. 23, pp : 033125 (2013).

[27] Elble R.J., Koller W.C., *Tremor*, John Hopkins University Press, Baltimore (1990).

[28] Elson R.C., Selverston A.I., Huerta R., Rulkov N.F., Rabinovich M.I., Abarbanel H.D.I., *Synchronization behaviour of two coupled biological neurons*, Phys.Rev.Lett., 81(25) :5692-5695 (1998).

[29] Engel J., Pedley T.A., *Epilepsy : A comprehensive textbook*, Lippincott-Raven, Philadelphia (1975).

[30] Ermentrout B.G., Terman D. H. , *Mathematical Foundations of Neurosciences*, Springer (2009).

[31] Evans L.C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society (1999).

[32] FitzHugh R., *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane*, Biophysical J. 1, p. 445-466 (1961).

[33] Fries P., *A mechanism for cognitive dynamics : neural communications through neuronal coherence*, Trends Cogn. Neurosci. 9, p. 474-480. (doi : 10.1016/j.tics.2005.08.011) (2005).

[34] Fuji H., Tsuda I., *Itinerant dynamics of class I* neurons coupled by gap juctions*, Cortical Dynamics, eds. Erdi, P., Esposito, A., Marinaro, M., Scarpetta, S. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3146 (Springer-Verlag), p. 140-160 (2004).

[35] Fujisaka H., Yamada T., *Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems*, Prog.Theor.Phys. 69(1), p. 32-47 (1983).

[36] Fujisaka H., Yamada T., *Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems III*, Prog.Theor.Phys. 72(5), p. 885-894 (1984).

- [37] Gabbiani F. et Cox S., *Mathematics for Neuroscientists*, 1st Edition, Academic Press (2010).
- [38] Gail A. Carpenter, *A geometric approach to singular perturbation problems with applications to nerve impulse equations*, Journal of Differential Equations 23, 335-367 (1977).
- [39] Gerstner W. et Kistler W. M., *Spiking Neuron Models, single neurons, populations, plasticity*, Cambridge University Press (2002).
- [40] Gray C.M., Konig P., Engel A.K., Singer W., *Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties*, Nature 338, p. 334-337 (1989).
- [41] Guckenheimer J., Kuehn C., *Homoclinic orbits of the Fitzhugh-Nagumo equation : the singular limit*, Discrete and continuous dynamical systems series S, Volume 2, Number 4, pp. 851-872 (2009).
- [42] Hastings P., *On the existence of homoclinic and periodic orbits in the FitzHugh-Nagumo equations*, Quart. J. Math. Oxford 2, 123-134 (1976).
- [43] Huygens C., *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstaciones geometricae*, Parissis, Muguet (France), 1973, traduction anglaise *The pendulum clock*, Iowa State University Press, Ames (1986).
- [44] Hodgkin A.L., Huxley A.F., Katz B., *Ionic currents underlying activity in the giant axon of the squid*, Arch. Sci. physiol. 3, p. 129-150 (1949).
- [45] Hodgkin A.L., Huxley A.F., *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*, J. Physiol 117, p. 500-544 (1952).
- [46] Izhikevich E.M., *Which model to use for cortical spiking neurons*, IEEE Trans. on Neuron Net. 15(5), p. 1063-1070 (2004).
- [47] Izhikevich E.M., *Dynamical Systems in Neuroscience : The Geometry of Excitability and Bursting*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England (2005).
- [48] Izhikevich E.M., *Dynamical systems in Neuroscience*, MIT Press, Cambridge (2007).
- [49] Izhikevich E.M., FitzHugh Richard, *FitzHugh-Nagumo model*, Scholarpedia, 1(9) :1349 (2006).
- [50] Jiang Y., Sun J., *Shilnikov homoclinic orbits in a chaotic system*, Chaos Solutions and Fractals, 32, p. 150-159 (2007).
- [51] Jones CKRT., *Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system*, Transactions of the american mathematical society, Volume 286, Number 2 (1984).
- [52] Keener J. P. and Sneyd J., *Mathematical Physiology*, Springer (2009).
- [53] Khalil H. K., *Nonlinear systems*, Macmillon, New York edition (1992).
- [54] Koshita N., Smith J.C., *Neuronal pacemaker for breathing visualized in vivo*, Nature, 400 :360-363 (1997).
- [55] Lehnertz K., Bialonski S., Horstmann M. T., D. Krug D., A. Rothkegel A., Staniek M., Wagner T. *Synchronization phenomena in human, epileptic brain networks*, Journal of Neuroscience Methods, 183(1), p. 42-48 (2009).
- [56] Lions J.L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod (1969).
- [57] Marion M., *Finite-dimensional attractors associated with partly dissipative reaction-diffusion systems*, SIAM J. Appl. Math., 20(4), p.816-844 (1989).
- [58] Mora X., *Semilinear Parabolic Problems define semiflows on C^k spaces*, Transactions of the AMS, 278, p. 21-54 (1983).

[59] Morris C., Lecar H., *Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber*, Biophys. J.35, p. 193-213 (1981).

[60] Moulay D., *Modélisation et analyse mathématique de systèmes dynamiques en épidémiologie. Application au cas du Chikungunya*, Mathematics, Université du Havre, France (2011).

[61] Murray J.D., *Mathematical Biology*, Tome 1, Springer (2003).

[62] Murray J. D., *Mathematical Biology*, Tome 2, Springer (2010).

[63] Nagumo J., Arimoto S., and Yoshizawa S., *An active pulse transmission line stimulating nerve axon*, Proc IRE.50, p. 2061-2071 (1962).

[64] Papo D., Buldu J. M., Boccaletti S., Bullmore E. T., *Complex network theory and the brain*, Phil. Trans. R. Soc. B 369, 20130520 (2014).

[65] Pecora L.M., Carroll T.L., *Master stability functions for synchronized coupled systems*, Phys.Rev.Lett.80, p. 2109-2112 (1998).

[66] Pikovsky A., Rosenblum M., Kuths J., *Synchronization*, Cambridge University Press (2003).

[67] Rauch J., Smoller J., *Qualitative Theory of the FitzHugh Nagumo Equations*, Advances in Mathematics, 27, p. 12-44 (1978).

[68] Robinson J., *Infinite-Dimensional Systems*, Cambridge University Press (2001).

[69] Rothe F., *Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems*, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[70] Sarpeshkar R., *Analog versus digital : extrapolating from electrics to neurobiology*, Neural Comput. 10, 1601-1638, (doi : 10.1162/089976698300017052) (1998).

[71] Singer W., Gray C.M., *Visual feature intergration and the temporal correlation hypothesis*, Annu.Rev.Neurosci., 18, p. 555-586 (1995).

[72] Singer W., *Striving for coherence*, Nature, 397(4), p. 391-393 (1999).

[73] Smoller J., *Shock waves and Reaction-Diffusion equations*, Springer-Verlag (1994).

[74] Stopfer M., Bhagavan S., Smith B.H., Laurent G., *Impaired odour descrimination on desynchronization of odour-encoding neuronal assemblies*, Nature, 390(6), p. 70-74 (1997).

[75] Steinmetz P., Roy A., Fitzgerald P.J., Hsiao S.S., Johnson K.O., Niebur E., *Attention modulates synchronized neuronal firing in primate somatosensory cortex*, Nature 404(9), p. 187-190 (2000).

[76] Stern E.A., Jaeger D., Wilson C.J., *Membrane potential synchrony of simultaneously recorded striatal spiny neurons in vivo*, Nature 394, p. 475-478 (1998).

[77] Sun J., Boltt E. M. and Nishikawa T., *Master Stability functions for coupled nearly identical dynamical systems*, A letters Journal Exploring the Frontiers of Physics, EPL, 85-0011, (2009).

[78] Temam R., *Infinite Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer (1988).

[79] Trappenberg T.P., *Fundamentals of Computational Neuroscience*, 2nd edition, Oxford University Press, ISBN13 : 9780199568413, ISBN10 : 0199568413 (2010).

[80] Valéncia M., *Invariant regions and asymptotic bounds for a hyperbolic version of the nerve equation*, nlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, Pages 1035 - 1052, Volume 16 Issue 11 (1991).

[81] Verhulst F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Second Edition, Universitext, Springer (1996).

[82] Ward L., *Cognition, attention et conscience : la synchronie dans l'esprit*, La lettre du Collège de France, 29 juillet 2010, mis en ligne le 20 mai 2011, consulté le 10 novembre 2015. URL : <http://lettre-cdf.revues.org/916>.

- [83] Website : <http://lecerveau.mcgill.ca/flash/i/i12/i12cl/i12clcon/i12clcon.html>.
- [84] Website : <http://cerveau.pagesperso-orange.fr/Maladies/MaladiesMentalespilepsie.html>.
- [85] Website : http://www.bbc.co.uk/schools/gcsebitesize/science/edexcel/responses_to_environment/thennervoussystemrev2.shtml.
- [86] Website : <http://www.ebiologie.fr/cours/s/15/transport-a-travers-les-membranes-cellulaires>.
- [87] Website : <http://www.bio-top.net/La%20douleur/PAIN.htm>.
- [88] Website : <http://www.cours-pharmacie.com/physiologie/systeme-nerveux.html>.
- [89] Website : <http://www.futura-sciences.com/>.
- [90] Website : <http://graphstream-project.org/>.
- [91] Williams G.P., *Chaos Theory Tamed*, Taylor and Francis (1997).
- [92] Wu C., Chua L., *On a conjecture regarding the synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I Fundamental theory and Application 43, p. 161-165 (1996).
- [93] Zhou T., Chen G., Yang Q., *Constructing a new chaotic system based on the Shilnikov criterion*, Chaos Solution and Fractals, 19, p. 985-993 (2004).

INDEX

A

Alan Lloyd Hodgkin	13
Andrew Feilding Huxley	13
Attracteur	39
Axone	6

B

Bifurcation de Hopf	28
---------------------------	----

C

Canal ionique	9
Cytoplasme	6

D

Dendrite	6
Diagramme de bifurcation	33

E

Equation de Nernst	10
--------------------------	----

I

Influx nerveux	7
----------------------	---

L

Lemme de Gronwall	61
Lyapunov (exposants)	45

M

Membrane cellulaire	5
Méthode Connection-graph-stability	49
Méthode Master-Stability-function	47

N

Neurone	5
Noyau	6

O

Onde miroire	76
Onde spirale	74

P

Point d'équilibre	23
Point stationnaire	23
Potentiel d'action	11
Potentiel d'équilibre	10

R

Réseau complet	52
Réseau de neurones	36
Réseau en anneau	53
Réseau en chaîne	52
Réseau en étoile	52
Réseau régulier	53

S

Solution aléatoire (uniforme)	78
Synapse	5
Synchronisation	43
Synchronisation de phase	43
Synchronisation généralisée	43
Synchronisation identique	43
Système de Lorenz	48
Système de Rössler	48

T

Travelling wave	81
-----------------------	----

V

Variété de synchronisation et stabilité	44
-----------------------------------------------	----

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE RÉSEAUX COMPLEXES DE SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION

Mots clés

Systèmes dynamiques non-linéaires, équations différentielles ordinaires (EDO), équations aux dérivées partielles (EDP), modélisation, bifurcations, synchronisation, systèmes complexes, applications, neurosciences.

Résumé

Le fonctionnement d'un neurone, unité fondamentale du système nerveux, intéresse de nombreuses disciplines scientifiques. Il existe ainsi des modèles mathématiques qui décrivent leur comportement par des systèmes d'EDO ou d'EDP. Plusieurs de ces modèles peuvent ensuite être couplés afin de pouvoir étudier le comportement de réseaux, systèmes complexes au sein desquels émergent des propriétés.

Ce travail présente, dans un premier temps, les principaux mécanismes régissant ce fonctionnement pour en comprendre la modélisation. Plusieurs modèles sont alors présentés, jusqu'à celui de FitzHugh-Nagumo (FHN), qui présente une dynamique très intéressante.

C'est sur l'étude théorique mais également numérique de la dynamique asymptotique et transitoire du modèle de FHN en EDO, que se concentre la seconde partie de cette thèse. A partir de cette étude, des réseaux d'interactions d'EDO sont construits en couplant les systèmes dynamiques précédemment étudiés. L'étude du phénomène de synchronisation identique au sein de ces réseaux montre l'existence de propriétés émergentes pouvant être caractérisées par exemple par des lois de puissance.

Dans une troisième partie, on se concentre sur l'étude du système de FHN dans sa version EDP. Comme la partie précédente, des réseaux d'interactions d'EDP sont étudiés. On entreprend dans cette partie une étude théorique et numérique. Dans la partie théorique, on montre l'existence de l'attracteur global dans l'espace $(L^2)^{nd}$ et on donne des conditions suffisantes de synchronisation. Dans la partie numérique, on illustre le phénomène de synchronisation ainsi que l'émergence de lois générales telles que les lois puissances ou encore la formation de patterns, et on étudie l'effet de l'ajout de la dimension spatiale sur la synchronisation.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF COMPLEX NETWORKS OF REACTION-DIFFUSION SYSTEMS

Key words

Nonlinear dynamical systems, ordinary differential equations (ODE), partial differential equations (PDE), modeling, bifurcations, synchronization, complex systems, applications, neurosciences.

Abstract

The neuron, a fundamental unit in the nervous system, is a point of interest in many scientific disciplines. Thus, there are some mathematical models that describe their behavior by ODE or PDE systems. Many of these models can then be coupled in order to study the behavior of networks, complex systems in which the properties emerge.

Firstly, this work presents the main mechanisms governing the neuron behaviour in order to understand the different models. Several models are then presented, including the FitzHugh-Nagumo one, which has a interesting dynamic.

The theoretical and numerical study of the asymptotic and transitory dynamics of the aforementioned model is then proposed in the second part of this thesis. From this study, the interaction networks of ODE are built by coupling previously dynamic systems. The study of identical synchronization phenomenon in these networks shows the existence of emergent properties that can be characterized by power laws.

In the third part, we focus on the study of the PDE system of FHN. As the previous part, the interaction networks of PDE are studied. We have in this section a theoretical and numerical study. In the theoretical part, we show the existence of the global attractor on the space $(L^2)^{nd}$ and give the sufficient conditions for identical synchronization. In the numerical part, we illustrate the synchronization phenomenon, also the general laws of emergence such as the power laws or the patterns formation. The diffusion effect on the synchronization is studied.