

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Simulation et validation par l'expérience	1
1.1.1	Vérification et validation	2
1.1.2	Écart entre jumeau numérique et cœur fabriqué	3
1.2	Problématique industrielle	4
1.2.1	Marges de conception	4
1.2.2	Incertitudes et tolérance de fabrication	5
1.2.3	Enjeu de la calibration du jumeau numérique	5
1.3	Données d'entrée incertaines	6
1.3.1	Incertitude globale	6
1.3.2	Incertitudes technologiques	7
1.3.3	Incertitudes de calcul	7
1.3.4	Comment quantifier l'incertitude globale?	8
1.3.5	Grandeur d'intérêt : Facteur de puissance	8
1.4	Essais expérimentaux dédiés à la mesure de distribution de flux neutronique	8
1.5	Simulation numérique et interprétation des mesures	9
1.6	Enjeux de la vérification, validation et calibration des outils de simulation . .	10
1.7	Problématiques et solutions envisagées	11
1.7.1	Contraintes	11
1.7.2	Solutions	11
1.8	Plan du manuscrit	12
2	Cœur étudié et simulateur neutronique	14
2.1	Cœur d'étude	14
2.1.1	Cœur Fictif	14
2.1.2	Outils permettant la modélisation du cœur fictif	16
2.1.3	Conditions expérimentales	17
2.1.4	Mesure dans un tube-guide	20
2.1.5	Obtention des cartographies des taux de fission	22
2.2	Simulateur Monte-Carlo de transport de particules	23
2.2.1	TRIPOLI-4®	23
2.2.2	Considérations	24
2.3	Synthèse	25
3	Méthodologie générale d'émulation et de calibration du simulateur	26
3.1	Formalisation du problème	27
3.2	Principe du calage par inférence bayésienne	29

3.2.1	Formule de Bayes	30
3.2.2	Vraisemblance	30
3.2.3	Lois <i>a priori</i> et <i>a posteriori</i> conjuguées	30
3.2.4	Cas général avec estimation par méthode MCMC et émulateur	31
3.3	Construction d'un émulateur global par additivité et émulateurs élémentaires	31
3.3.1	Hypothèse d'additivité	31
3.3.2	Traitement neutronique spécifique par partition de paramètres	32
3.3.3	Construction de l'émulateur global	32
3.3.4	« Relèvement » des émulateurs élémentaires	32
3.3.5	Mise en oeuvre	33
3.4	Analyse de sensibilité en support à la calibration	34
3.4.1	Analyse de sensibilité de l'émulateur global	34
3.4.2	Calibration	34
3.5	Modèle linéaire bayésien	35
3.5.1	Calcul avec un modèle de lois conjuguées	36
3.5.2	Calcul avec distribution <i>a priori</i> non informative	37
3.5.3	Maximum <i>a posteriori</i> $(\hat{\theta}, \hat{\sigma}^2)^{MAP}$	38
3.5.4	Loi <i>a posteriori</i> prédictive de \mathbf{z}	39
3.6	Considérations pratiques pour l'application aux paramètres technologiques	40
3.6.1	Impossibilité de traiter tous les paramètres technologiques	40
3.6.2	Identification des paramètres influents	41
3.7	Synthèse	42
4	Calcul de perturbation	43
4.1	Estimation directe	44
4.1.1	Principe	44
4.1.2	Problématique statistique	44
	Partie 1 : Paramètres géométriques	46
4.2	Reprise surfacique appliquée à la position des tubes-guides	46
4.2.1	Principe de la méthode	46
4.2.2	Validation numérique de la méthode	49
4.2.3	Étude de l'effet des perturbations à l'aide de la méthode de reprise surfacique	52
4.2.4	Avantages et inconvénients de la méthode	54
4.3	Reprise surfacique appliquée à la position des éléments combustibles	56
4.3.1	Première étape : stockage des sources	56
4.3.2	Deuxième étape : relance des sources	57
4.3.3	Validation numérique et analyse de sensibilité	57
4.3.4	Hypothèse de linéarité	60
4.4	Synthèse partie 1	63
	Partie 2 : Paramètres associés au bilan de matière	64
4.5	Echantillons corrélés	64
4.5.1	Principe de fonctionnement	64
4.5.2	Calcul des facteurs correctifs	65
4.5.3	Mise en oeuvre	67
4.5.4	Hypothèse d'additivité	69
4.5.5	Hypothèse de linéarité	73
4.6	Synthèse partie 2	76

5	Transfert instrumentation in-core vers facteurs de puissance	77
5.1	Contexte	77
5.1.1	Convergence des calculs	78
5.1.2	Validation numérique	78
5.2	Matrice de fission	79
5.2.1	Formalisme	79
5.2.2	Estimation de la matrice	82
5.2.3	Illustration sur le cœur d'étude	83
5.3	Transposition	84
5.3.1	Estimation des coefficients de passage	85
5.3.2	Mise en œuvre	85
5.3.3	Validation numérique	88
5.4	Synthèse	91
6	Calibration	92
	Partie 1 : Paramètres associés au bilan de matière	94
6.1	Problème direct	94
6.2	Calibration	94
6.2.1	Modèle linéaire bayésien	94
6.2.2	Outils informatiques	95
6.3	Premier groupe de paramètres technologiques : les joues borées	95
6.3.1	Données à disposition	95
6.3.2	Mise en œuvre	97
6.3.3	Calibration à partir de mesures de sensibilité directes au niveau des éléments combustibles	99
6.3.4	Utilisation de la matrice de fission	101
6.3.5	Synthèse des résultats	102
6.4	Études relatives à un groupe de paramètres technologiques	103
6.4.1	Équivalence entre paramètre technologique géométrique et paramètre associé aux compositions	103
6.4.2	Groupe de paramètres relatifs à l'enrichissement du combustible	104
6.4.3	Groupe de paramètres relatifs à l'efficacité des lattes absorbantes	104
6.4.4	Modification de la géométrie et convergence associée	105
6.4.5	Groupe de paramètres technologiques relatifs à l'efficacité des joues borées	106
6.4.6	Groupe de paramètres relatifs à la densité du modérateur intérieur	107
6.5	Extension à deux groupes de paramètres technologiques	109
6.5.1	Modèle	109
6.5.2	Calibration jointe	109
6.5.3	Analyse des résultats	110
6.5.4	Loi <i>a posteriori</i>	112
6.6	Synthèse partie 1	114
	Partie 2 : Paramètres géométriques	115
6.7	Rappels	115
6.7.1	Sondes sensibles	115
6.7.2	Modèles linéaires indépendants	115
6.7.3	Modèle linéaire bayésien	116
6.8	Problématique posée par la calibration des paramètres technologiques incertains	117

6.9	Réduction des incertitudes et simplification du modèle bayésien	119
6.9.1	Analyse de sensibilité par estimation des indices de Sobol	119
6.9.2	Calcul analytique des indices de Sobol	120
6.9.3	Mise en œuvre	122
6.10	Calibration bayésienne	122
6.11	Résultats	124
6.11.1	Mise en œuvre	124
6.11.2	Convergence des calculs	125
6.11.3	Analyse des lois <i>a posteriori</i> estimées	126
6.12	Synthèse partie 2	127
7	Calibration jointe des paramètres technologiques incertains	128
7.1	Modèle et configuration étudiée	129
7.1.1	Modèle linéaire	129
7.1.2	Simulation d'une campagne expérimentale	130
7.2	Calibration des paramètres technologiques incertains	131
7.2.1	Distributions <i>a priori</i>	131
7.2.2	Distribution <i>a posteriori</i> des paramètres géométriques	132
7.2.3	Calibration des paramètres relatifs au bilan de matière	134
7.3	Prédictions du simulateur sur le réacteur calibré	137
7.3.1	Définition du cœur calibré	137
7.3.2	Performances sur les écarts calculs/mesures observés sur les sondes .	139
7.3.3	Performances sur les écarts calculs/mesures observés « hypothétique- ment » sur les éléments combustibles	140
7.3.4	Performances sur les écarts calculs/mesures observés sur les facteurs de puissance issus de la transposition des mesures des sondes	141
7.4	Synthèse	143
8	Conclusion	145
	Bibliographie	149
	A Plan d'expériences	153
	B Image complémentaires	154
	C Détails du calcul des indices de Sobol	155

Table des figures

1.1	Problématique de la prise en compte des incertitudes technologiques lors de la validation expérimentale.	3
1.2	Principe d'une étude de conception et de sûreté.	4
2.1	(Figures de gauche) Coupe axiale d'une sonde de mesure, d'un assemblage nu et d'un assemblage de contrôle. (Figure de droite) Coupe axiale du cœur d'étude.	16
2.2	Nomenclature des mécanismes de contrôle.	19
2.3	Mesure du taux de fission axial au niveau du tube-guide B3 pour quatre conditions expérimentales différentes (la cote axiale 0 correspond au bas du cœur).	21
2.4	Cartographie des taux de fission intégrés et normalisés pour une température de 100 °C, un titre en bore de 0 ppm et une insertion des lattes de 184 cm. .	22
2.5	Représentation schématique de l'histoire d'une particule avec l'approche de Monte-Carlo.	25
3.1	Construction de l'émulateur global composé d'une combinaison linéaire d'émulateurs élémentaires.	33
3.2	Calibration des paramètres technologiques et estimation de la discrédance à l'aide de l'émulateur global.	35
4.1	Principe de la reprise surfacique appliquée aux sondes de mesure.	47
4.2	Comparaison entre estimation de référence et estimation utilisant la méthodologie pour une sonde périphérique (sonde A3). (Gauche) étude des « perturbations extrêmes ». (Droite) étude des « petites perturbations ». Les résultats présentés ont été simulés dans deux conditions expérimentales différentes pour la même sonde. Les barres d'erreur sont données à deux sigmas.	51
4.3	Carte de sensibilité associée aux paramètres technologiques relative à la position de la sonde A3 dans le plan xy . Perturbation appliquée dans la plage de variation $\pm 0,15$ mm selon les axes x et y , pour un pas de 0,05 mm.	53
4.4	Principe de la méthode de reprise surfacique appliquée aux paramètres technologiques associés aux éléments combustibles	56
4.5	Sensibilité observée sur les 49 sondes placées dans le cœur suite à une translation de l'assemblage combustible CD34 de $(\Delta x = 0, \Delta y = -0,75)$ mm. . .	59
4.6	Comparaison des estimations de référence et de celles provenant de la seconde méthode pour la sonde B3, pour une perturbation de la position de l'élément combustible AB34. Les perturbations des éléments combustibles appartiennent à l'intervalle $\pm 0,075$ mm. L'incertitude est donnée à deux sigmas.	60

4.7	Sensibilités observées sur les sondes C3, D3, C4 et D4 suite à une perturbation de la position de l'assemblage CD34 dans la gamme $\pm 0,75$ mm, selon les axes x et y pour un pas de 0,375 mm.	61
4.8	Principe de fonctionnement de la méthode des échantillons corrélés.	65
4.9	(Gauche) Sensibilité estimée sur les éléments combustibles associée à l'augmentation de 4 % de la densité des joues borées de l'élément combustible EF23. (Droite) Sensibilité estimée sur les tubes-guides pour la même perturbation.	68
4.10	Illustration de l'hypothèse d'additivité. Extrapolation d'une configuration où les éléments combustibles BC34, DE56, EF23 sont perturbés, à partir de la base de vecteur de sensibilité.	71
4.11	Illustration de la validation numérique relative à l'hypothèse d'additivité. (Image de droite) Écart absolu entre les sensibilités de référence (image de gauche) et les sensibilités extrapolées (image centrale) sur une configuration à trois éléments combustibles perturbés	72
4.12	Illustration de la validation numérique relative à l'hypothèse de linéarité. De gauche à droite : perturbations appliquées au cœur, sensibilité de référence, sensibilité extrapolée sous les hypothèses de linéarité et d'additivité, écart absolu entre référence et extrapolation.	75
5.1	Estimations des éléments de la matrice de fission K à la fin de la simulation d'un lot de particules.	82
5.2	Illustration d'une matrice de fission.	84
5.3	Calcul des coefficients de passage et transfert de l'information des sondes de mesure vers les éléments combustibles.	86
5.4	Comparaison entre calculs de référence et transpositions de mesures issues des sondes.	89
6.1	Répartition spatiale des paramètres technologiques relatifs aux joues borées. Calibration déterministe (en-haut) et calibration bayésienne (en-bas). Les perturbations à retrouver ont été échantillonnées aléatoirement selon une loi uniforme $U(-4,4)$	98
6.2	Calibration bayésienne des paramètres technologiques relatifs aux joues borées à l'aide des mesures de sensibilité réalisées directement au niveau des éléments combustibles.	100
6.3	Calibration bayésienne des paramètres technologiques relatifs aux joues borées à l'aide des mesures de sensibilité estimées sur les sondes puis transposées vers les éléments combustibles grâce aux matrices de fission.	102
6.4	Calibration bayésienne jointe des paramètres technologiques relatifs aux joues borées (en haut) et aux modérateurs des éléments combustibles (en bas) à l'aide des grandeurs d'intérêt estimées sur les sondes de mesure.	110
6.5	Distributions <i>a posteriori</i> des paramètres technologiques incertains : densité des joues borées (gauche) et densité des modérateurs intérieurs (droite).	113
6.6	Boxplot des indices de Sobol calculés analytiquement pour les 240 modèles linéaires (Éq. 6.4), sur la nouvelle géométrie des sondes de mesure.	122
6.7	Distribution <i>a posteriori</i> associée à la perturbation appliquée à la sonde de mesure A2. (Gauche) Utilisation d'une loi <i>a priori</i> uniforme non bornée. (Droite) Loi <i>a priori</i> uniforme bornée sur $[-0, 15; 0, 15]$ mm.	126

Table des figures

7.1	Distributions <i>a posteriori</i> des perturbations appliquées à la position des sondes de mesure. (Gauche) Étude 1 : <i>a priori</i> uniforme borné. (Droite) Étude 2 : <i>a priori</i> gaussien. Les curseurs rouges correspondent à la position à retrouver et les curseurs noirs aux valeurs considérées comme calibrées dans la Section 7.3.	133
7.2	Calibration bayésienne des paramètres technologiques relatifs aux joues borées (en haut) et aux modérateurs intérieurs (en bas) à l'aide des grandeurs d'intérêt estimées sur les sondes de mesure. Configuration à trois groupes de paramètres technologiques perturbés simultanément.	135
7.3	Distribution <i>a posteriori</i> des paramètres technologiques incertains. Configuration à trois groupes de paramètres technologiques perturbés. (Gauche) Densité des joues borées. (Droite) Densité des modérateurs.	136
7.4	Écarts relatifs entre mesures expérimentales et prédictions réalisées sur les sondes. (À gauche) Écart relatif avant calibration. (À droite) Écart relatif après calibration.	139
7.5	Écarts relatifs entre mesures expérimentales et prédictions réalisées des facteurs de puissance. (À gauche) Écart relatif avant calibration. (À droite) Écart relatif après calibration.	140
7.6	Écarts relatifs entre mesures expérimentales transposées et prédictions des facteurs de puissance. (À gauche) Écart relatif avant calibration. (À droite) Écart relatif après calibration.	143
B.1	Calibration de la densité des joues borées, configuration où seul le bore est perturbé.	154
B.2	Calibration de la densité des modérateurs intérieurs, configuration où seul le modérateur intérieur est perturbé.	154

Liste des tableaux

2.1	Plage de variation des paramètres de contrôle relatifs au plan d'expériences traité.	20
3.1	Paramètres technologiques relatifs au positionnement des éléments composant le cœur.	41
3.2	Paramètres technologiques relatifs au bilan matière des éléments composant le cœur.	41
4.1	Incertitude Monte-Carlo moyenne des résultats utilisés pour la validation numérique.	49
4.2	Résultats de la validation numérique.	50
4.3	Sensibilité minimale et maximale (en %) observée pour les 27 sondes placées dans la moitié inférieure du réacteur. Les perturbations appliquées font partie de la plage de variation $\pm 0,15$ mm. Les cases grisées mettent en évidence les 15 sondes sensibles.	53
4.4	Paramètres des modèles linéaires associés aux 15 sondes préalablement identifiées comme sensibles.	54
4.5	Résultats de la validation numérique de la méthode de reprise surfacique appliquée à la perturbation de la position des assemblages.	59
4.6	Coefficients de régression des modèles linéaires estimés sur les sensibilités des sondes dues à une perturbation d'un assemblage environnant.	62
4.7	Validation numérique où une perturbation de la densité des joues borées de +4 % a été appliquée à un nombre variable d'éléments combustibles.	72
4.8	Validation numérique, hypothèse de linéarité.	75
5.1	Validation numérique des hypothèses d'additivité et de linéarité réalisée directement sur les taux de fission mesurés dans les éléments combustibles. . .	79
5.2	Validation numérique où une perturbation de la densité des joues borées de +4 % a été appliquée à un nombre variable d'éléments combustibles.	90
5.3	Validation numérique de la méthode de transfert pour une même configuration et 16 conditions expérimentales différentes.	91
6.1	Résultats des calibrations relatives à une configuration du cœur et à un seul groupe de paramètres technologiques perturbés. Élément Combustible (EC), Instrumentation In-Core (IIC), transposition des sondes vers les éléments combustibles (IIC \rightarrow EC).	102

Liste des tableaux

6.2	Résultats de la calibration relative aux joues borées sur la géométrie disposant de sondes de mesure dont la partie active est agrandie. Élément Combustible (EC), Instrumentation In-Core (IIC), transposition des sondes vers les éléments combustibles (IIC \rightarrow EC).	107
6.3	Résultats de la calibration relative aux modérateurs intérieurs. Élément Combustible (EC), Instrumentation In-Core (IIC).	108
6.4	Résultats de la calibration bayésienne simultanée de deux groupes de paramètres technologiques indépendants.	112
7.1	Lois <i>a priori</i> utilisées pour réaliser l'inversion bayésienne pour les deux calibrations notées « Étude 1 et 2 ».	132
7.2	Résultats des calibrations bayésiennes jointes des paramètres associés au bilan de matière du cœur. Configuration à trois groupes de paramètres perturbés simultanément.	136
7.3	Facteurs d'amélioration estimés pour les sondes pour chacune des conditions expérimentales.	139
7.4	Facteurs d'amélioration pour les facteurs de puissance estimés directement pour chacune des conditions expérimentales du plan d'expériences.	141
7.5	Facteurs d'amélioration estimés à partir des facteurs de puissance extrapolés pour chacune des conditions expérimentales du plan d'expériences.	143
A.1	Plan d'expériences utilisée lors des campagnes expérimentales.	153

Acronymes

CEA Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives. 23

Cœur F Cœur Fictif. 14–17, 21, 25

DNB Données Nucléaires de Base. 24, 145

EC Élément Combustible. xiii, xiv, 58, 62, 102, 103, 107, 108, 112

IFP Iterated Fission Probability. 47

IIC Instrumentation In-Core. iv, xiii, xiv, 8–10, 22, 43, 58, 62, 78, 79, 84, 93, 98, 100, 102, 103, 107, 108, 110–112, 114, 115, 118, 136, 140, 145–147

MAP Maximum *A Posteriori*. 34, 38, 39, 97, 126, 127, 134–137, 144

MC Moindres Carrés. 28

MCMC Markov Chain Monte-Carlo. 31, 34, 95, 97, 99, 119, 129, 132, 133

MTR Material Testing Reactor. 14, 15, 25

MV Maximum de Vraisemblance. 29

OCS Outils de Calculs Scientifiques. iv, 4–9, 113, 138, 145

pcm Pour Cent Milles. 17, 18, 20

PDF Probability Density Function. 28

ppm Partie Par Million. x, 18, 20–22, 74, 88

RCA Réacteur Critique Associé. 17, 18

REP Réacteurs à Eau Pressurisée. 8, 18

RES Réacteur d'Essais à Terre. 8

RJH Réacteur Jules Horowitz. 15, 79

TA TechnicAtome. 14, 17

TLB Toutes Lattes Basses. 18

TLH Toutes Lattes Hautes. 17, 18, 20, 75, 79, 91, 139, 141, 143, 153

U5 Uranium 235. 16, 20

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Simulation et validation par l'expérience	1
1.1.1	Vérification et validation	2
1.1.2	Écart entre jumeau numérique et cœur fabriqué	3
1.2	Problématique industrielle	4
1.2.1	Marges de conception	4
1.2.2	Incertitudes et tolérance de fabrication	5
1.2.3	Enjeu de la calibration du jumeau numérique	5
1.3	Données d'entrée incertaines	6
1.3.1	Incertitude globale	6
1.3.2	Incertitudes technologiques	7
1.3.3	Incertitudes de calcul	7
1.3.4	Comment quantifier l'incertitude globale ?	8
1.3.5	Grandeur d'intérêt : Facteur de puissance	8
1.4	Essais expérimentaux dédiés à la mesure de distribution de flux neutronique	8
1.5	Simulation numérique et interprétation des mesures	9
1.6	Enjeux de la vérification, validation et calibration des outils de simulation	10
1.7	Problématiques et solutions envisagées	11
1.7.1	Contraintes	11
1.7.2	Solutions	11
1.8	Plan du manuscrit	12

1.1 Simulation et validation par l'expérience

Un cœur de réacteur nucléaire est conçu selon des exigences portant d'une part sur ses performances (durée de vie, puissance, compacité, suivi de charge...) et d'autre part sur sa sûreté [1]. Pour répondre à ces exigences, il est nécessaire de s'assurer que les phénomènes neutroniques, thermiques, hydrauliques et mécaniques soient bien modélisés [2]¹. Pour ga-

1. Cette thèse porte uniquement sur le domaine de la neutronique.

rantir cette bonne modélisation, une multitude de simulations numériques est réalisée lors de la définition du cœur ou lors de la conception de chacun des éléments le composant.

L'utilisation intensive de simulations numériques permet d'évaluer les effets de nouvelles optimisations, voire de nouvelles esquisses de réacteurs, sur des scénarios de fonctionnement nominaux, incidentels et accidentels. Pour l'ingénierie du nucléaire, ces simulations se substituent à la mise en œuvre d'autant de prototypes réels de réacteurs et permettent de s'affranchir des problématiques de sûreté qui seraient liées à de telles campagnes d'essais.

Ce n'est que lorsque la définition précise d'un réacteur est fixée qu'une tête de série entre en production. Des campagnes d'essais sont alors réalisées pour vérifier que le cœur tel que fabriqué et les grandeurs physiques d'intérêts sont conformes aux prédictions des simulations numériques.

1.1.1 Vérification et validation

« Cependant, par méconnaissance de certains phénomènes physiques ou pour des contraintes de temps de calcul élevés, les modèles physiques implémentés au sein des codes reposent sur des hypothèses simplificatrices plus ou moins fortes » [3]. Par conséquent, ces simulations fournissent des prédictions entachées d'une erreur associée à la modélisation numérique des phénomènes physiques.

De ce fait, les outils utilisés doivent au préalable être qualifiés pour s'assurer, que le cœur conçu soit conforme aux critères de performance et de sûreté. La capacité du simulateur à prédire une grandeur physique d'intérêt pour un champ d'application défini doit pour cela être vérifiée puis validée.

Dans un premier temps, la **vérification** de l'outil numérique consiste à comparer les prédictions du simulateur à des problèmes solubles analytiquement ou à des codes de référence. Cette étape permet de s'assurer que les équations des modèles physiques implémentés sont résolues correctement, du point de vue mathématique, numérique et informatique.

Les codes de référence utilisés doivent avoir préalablement passé les étapes de vérification, de validation et de quantification d'incertitude. Durant cette étape de vérification, les données d'entrée utilisées par les simulateurs ne sont pas d'importance cruciale, il est suffisant qu'elles soient identiques dans les simulations comparées [2].

La deuxième étape est celle de la **validation**². Elle permet de s'assurer que les prédictions réalisées à l'aide du simulateur sont en accord avec des mesures réalisées lors d'expériences. Durant cette étape, la qualité des données d'entrée utilisées par le simulateur est caractérisée. Elles doivent par conséquent, être d'une extrême qualité. De ce fait, il est nécessaire d'avoir à disposition un jumeau numérique³ décrivant au mieux l'installation expérimentale.

Définition 1.1.1. Un jumeau numérique est un clone numérique d'une expérience permettant de réaliser un ensemble de prédictions.

2. Cette thèse porte essentiellement sur ce domaine.

3. La définition à venir est l'une des multiples définitions existantes de ce concept [4].

1.1.2 Écart entre jumeau numérique et cœur fabriqué

Des écarts entre prédictions et mesures peuvent néanmoins apparaître si le jumeau numérique utilisé en entrée du simulateur diffère du cœur fabriqué. C'est par exemple le cas dans le cadre de la validation des simulateurs de neutronique. En effet, le jumeau numérique utilisé suit généralement les caractéristiques nominales du réacteur. Cependant, lors de la construction du cœur, de petites variations à la configuration nominale (variations inconnues par le modélisateur du jumeau numérique) peuvent apparaître du fait des tolérances de fabrication et d'usinage. Ces écarts à la configuration nominale sont appelés **incertitudes technologiques** dans la suite du document.

L'incertitude de calcul est composée de l'incertitude sur les données nucléaires de base, de l'incertitude due à la modélisation de phénomènes physiques et de l'incertitude Monte-Carlo⁴ associée au code de calcul. Ainsi, lors de la validation du simulateur, elle sera plus importante du fait des incertitudes technologiques. Une illustration de ce principe est fournie par la Figure 1.1.

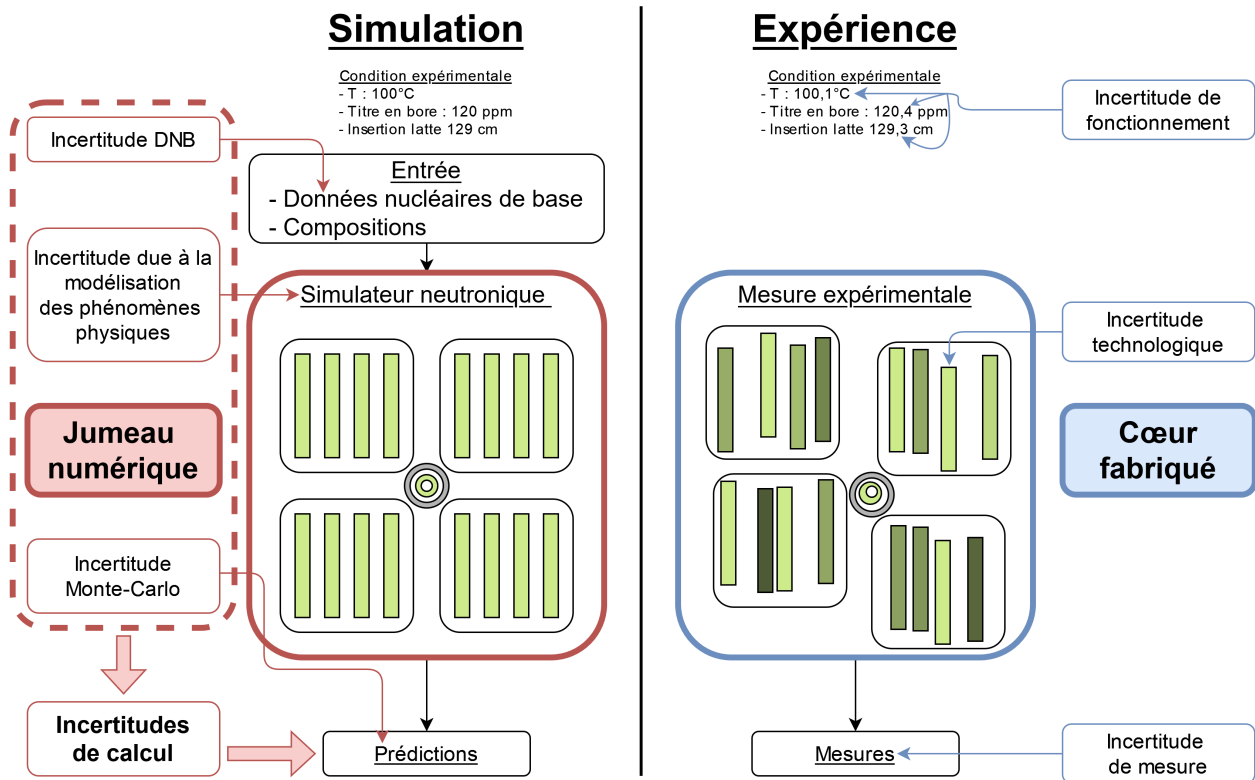


FIGURE 1.1 – Problématique de la prise en compte des incertitudes technologiques lors de la validation expérimentale.

Ainsi, si le jumeau numérique n'est pas calibré sur le cœur tel que fabriqué lors de la phase de validation du simulateur, une incertitude de calcul plus importante sera obtenue. Du fait de l'utilisation de ce simulateur pendant les études de conception et de sûreté, il sera alors nécessaire de fournir de plus grandes marges de conception afin de répondre aux critères de sûreté et de performances.

Pour répondre à cette problématique, notre travail de thèse consiste à **calibrer le jumeau numérique donné en entrée du simulateur sur le cœur tel que fabriqué**. Le but est

4. Le détail de ces différents types d'incertitudes est décrit dans la Section 1.3.3.

de **réduire les écarts calculs/expériences** et de fournir ainsi une estimation de l'incertitude de calculs dépourvue au mieux d'incertitude technologique.

1.2 Problématique industrielle

D'un point de vue plus général, les études de conception et de sûreté d'un cœur de réacteur nucléaire (dont les étapes sont schématisées Figure 1.2) nécessitent la prédiction du comportement de la population neutronique présente dans le cœur pour l'ensemble des configurations de fonctionnement du domaine d'exploitation. Pour ce faire, les ingénieurs chargés de la conception des cœurs de réacteurs nucléaires utilisent des Outils de Calculs Scientifiques (OCS) capables de simuler et prédire, par le calcul, le comportement du cœur étudié.

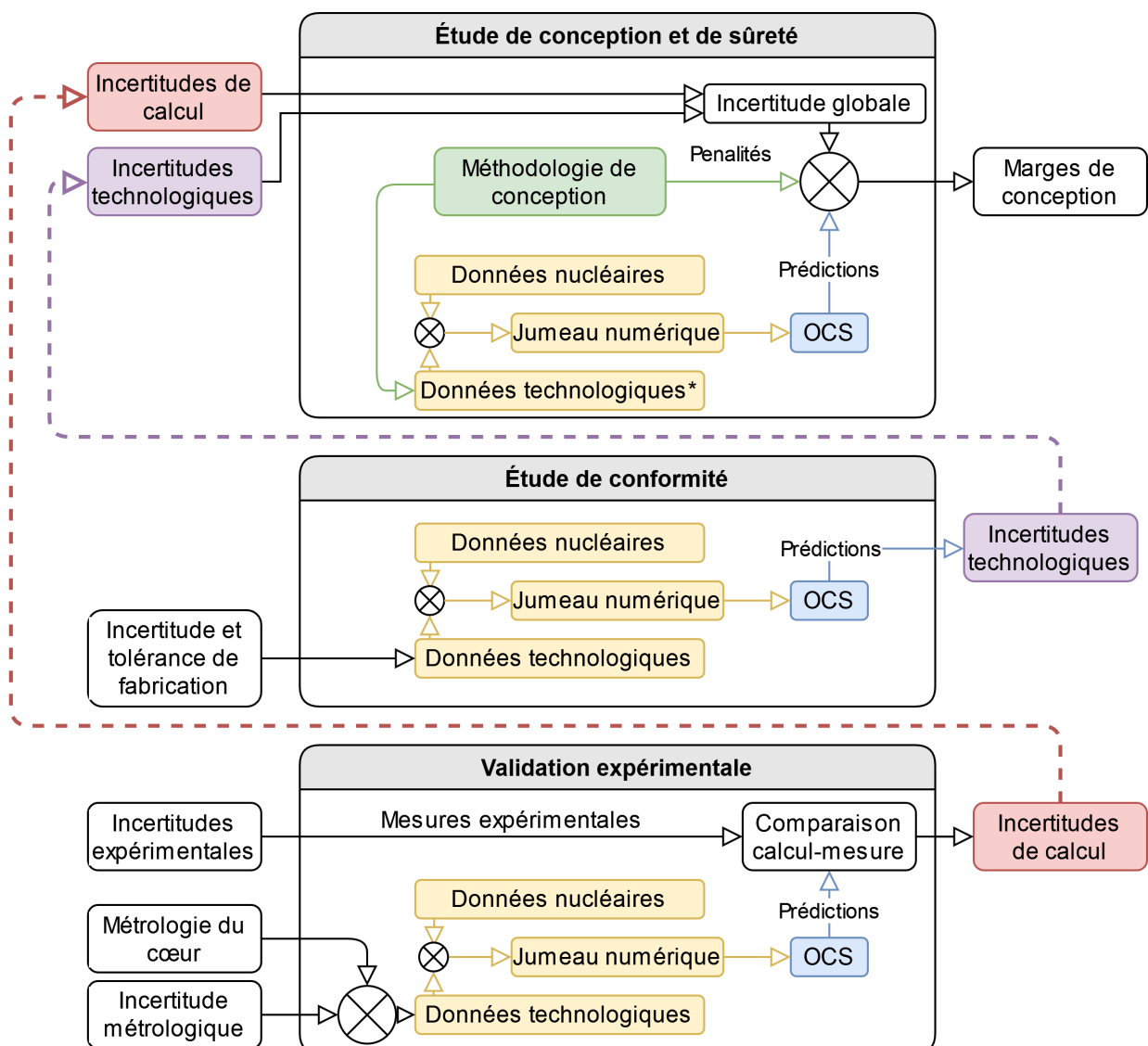


FIGURE 1.2 – Principe d'une étude de conception et de sûreté.

1.2.1 Marges de conception

Différents paramètres en entrée de l'OCS doivent être spécifiés afin de produire ces prédictions. Cependant, ces paramètres sont entachés d'incertitudes. Une estimation du paramètre

d'intérêt est ainsi obtenue en sortie du simulateur, à laquelle est ajoutée une marge de conception issue de l'incertitude sur les paramètres d'entrée. **L'un des objectifs de notre travail est ainsi de permettre une meilleure quantification des incertitudes de calcul pour que les marges de conception soient les plus raisonnablement conservatives⁵ par rapport au problème étudié.** Pour ce faire, ces incertitudes sont quantifiées lors de la validation expérimentale par confrontation de grandeurs prédites par l'OCS à des grandeurs issues de mesures expérimentales équivalentes effectuées sur un cœur tel que fabriqué.

1.2.2 Incertitudes et tolérance de fabrication

Le cœur d'un réacteur nucléaire est fabriqué à partir d'une multitude d'éléments. Les géométries de ces éléments, leurs compositions et leurs emplacements sont établis lors des études de conception. Ces études permettent d'établir un corpus documentaire servant à la définition du cœur « nominal ». Cependant, lors de la fabrication du dit cœur, les tolérances résultant de l'usinage des composants et de leur assemblage entraînent de petites différences par rapport aux valeurs initialement prévues (valeurs nominales). Ainsi, après fabrication, des mesures métrologiques sont réalisées sur le cœur fabriqué pour s'assurer que ces écarts soient inférieurs à des valeurs limites, permettant de prononcer la « conformité » des éléments fabriqués. Ces mesures métrologiques sont néanmoins incertaines (bien que plus précises que les tolérances de fabrication). Par conséquent, **une incertitude technologique résiduelle reste associée aux éléments composant le cœur.**

L'impact de ces incertitudes technologiques sur le comportement physique des cœurs fabriqués est évalué lors d'études de conformités. Ces études sont conduites en parallèle des études de conception avec en général les mêmes OCS. Ces études permettent de fixer les « limites de conformité » par rapport au cœur nominal pour que le cœur fabriqué soit jugé conforme. Ces « limites » sont estimées par des méthodes de propagation d'incertitudes associées aux paramètres technologiques incertains (généralement très conservatives) [1], et ce, à l'aide d'un grand nombre de calculs de sensibilité (cf. Chapitre 4).

1.2.3 Enjeu de la calibration du jumeau numérique

Lors de la validation expérimentale, l'évaluateur des incertitudes de calcul va tenter de réduire, autant que faire se peut, la part d'incertitude due aux données technologiques du cœur tel que fabriqué. Il doit pour cela calibrer le jumeau numérique utilisé en entrée de l'OCS (cf. Figure 1.2) à l'aide des données technologiques du cœur tel que fabriqué⁶.

L'incertitude globale utilisée dans les études de conception et de sûreté consiste en un cumul des incertitudes de calcul et des incertitudes technologiques. Or, si la calibration du jumeau numérique n'est pas réalisée lors de l'estimation de l'incertitude de calcul de l'OCS, toute part d'incertitude technologique encore présente au niveau des données technologiques sera ajoutée au terme d'incertitude de calcul (cf. Figure 1.1). Lors de la construction de l'incertitude globale (cf. Figure 1.2), l'incertitude technologique sera comptabilisée par conséquent deux fois. Une part provenant de l'incertitude technologique elle-même, et une autre part provenant de l'incertitude technologique résiduelle du cœur tel que fabriqué présent dans

5. En sûreté nucléaire, « se dit d'un procédé de calcul ou d'une démarche fondés sur des hypothèses qui majorent les effets des phénomènes pouvant altérer les performances d'un matériau, d'un équipement ou d'une installation et affecter la sûreté nucléaire ou la radioprotection ».

6. À noter que, les incertitudes technologiques du cœur tel que fabriqué sont beaucoup plus faibles que les incertitudes technologiques des études de conception évaluées avant fabrication des cœurs.

l'incertitude de calcul. L'incertitude finale des études de sûreté sera alors surestimée. Cette démarche a néanmoins l'avantage de fournir une incertitude globale conservative pour les études de sûreté.

1.3 Données d'entrée incertaines

Les paramètres ou données d'entrée de l'OCS utilisé sont communément classés en trois catégories. Ces données sont matérialisées en jaune sur la Figure 1.2. La première catégorie concerne les **données nucléaires**. Ces grandeurs physiques sont principalement des sections efficaces. Elles représentent la probabilité d'interaction d'un neutron pour une réaction donnée. Elles sont ainsi indépendantes du cœur d'étude et de l'OCS utilisé. Ces données sont issues de différentes campagnes de mesures internationales et constituent les estimations les plus précises des sections efficaces que l'on connaît à ce jour. Pour chaque estimation d'une section efficace, une incertitude est renseignée en amont de leur utilisation dans l'OCS. Dans le cadre d'une étude de conception, ces données nucléaires sont figées en entrée du simulateur pour l'ensemble des calculs réalisés. Ces incertitudes sont ainsi à considérer comme épistémiques. Elles caractérisent une incertitude systématique liée à un manque de connaissance sur les phénomènes considérés ou à un nombre de données limité. Ces incertitudes peuvent être réduites à l'aide d'efforts supplémentaires. Elles sont à distinguer de l'incertitude aléatoire irréductible, représentative de la variabilité naturelle des phénomènes étudiés.

La seconde catégorie de paramètres concerne les **données technologiques**. Elles caractérisent les dimensions et les compositions des différents éléments constituant le cœur d'étude. Parmi ces données technologiques, on distinguera les **données géométriques** et les **données de bilan matière**.

- Les données géométriques caractérisent par exemple les dimensions des plaques des éléments combustibles, l'épaisseur des structures qui maintiennent les plaques de combustibles, les dimensions des lattes de contrôle, etc.
- Les données de bilan matière concernent les compositions isotopiques et les densités des différents matériaux présents dans le cœur. Il s'agit par exemple des enrichissements en ^{235}U dans le combustible, de la composition isotopique des alliages des structures, des plaques, des absorbants de contrôle, mais aussi des densités des matériaux combustibles, des densités des aciers des plaques ou des structures, voire de la quantité d'eau dans les éléments combustibles.

Les incertitudes sur ces données technologiques sont liées aux incertitudes et tolérances de fabrication des éléments constituant le cœur tel que fabriqué.

La dernière catégorie de paramètres d'entrée concerne les **données de fonctionnement** caractérisant l'état du cœur à un instant donné. Il s'agit par exemple de la température, de la pression, de la position des absorbants de contrôles, de la puissance ou encore du taux de combustion du cœur. Ces incertitudes de données de fonctionnement sont pour la plupart liées à la précision des instruments de mesure de l'installation.

1.3.1 Incertitude globale

Les études de conception et de sûreté prennent en compte ces différentes sources d'incertitude à travers deux contributions s'appliquant à chacune des observables d'intérêt : les

incertitudes technologiques et les **incertitudes de calcul**. À chaque observable d'intérêt provenant d'une simulation numérique est associée une marge de conception, issue du cumul de ces deux termes d'incertitudes, que l'on nommera **incertitude globale**.

Cette incertitude globale peut éventuellement être complétée de pénalités supplémentaires propres aux méthodes des études de conception. Ces pénalités ne seront pas discutées dans ce document car elles ne sont pas du ressort des OCS, mais de la méthodologie d'étude choisie par le concepteur.

1.3.2 Incertitudes technologiques

Les **incertitudes technologiques** sont estimées par les ingénieurs chargés de la conception lors d'**études de conformité**. Leur estimation est réalisée par des méthodes de propagation d'incertitudes des données technologiques, et ce, à l'aide du même OCS que celui utilisé pour les études de conception. L'incertitude technologique représente le cumul des impacts que peuvent avoir les incertitudes et tolérances de fabrication prises individuellement sur une prédiction issue de l'OCS.

1.3.3 Incertitudes de calcul

Les incertitudes de calcul sont quant à elles évaluées par les modélisateurs et développeurs des OCS sur la base de validations expérimentales, complétées par de la validation numérique. **Ces incertitudes de calcul sont issues des comparaisons réalisées entre les prédictions issues de l'OCS**, ayant pour données d'entrée un jumeau numérique de l'expérience, et **la mesure expérimentale**. Ces incertitudes de calcul permettent de quantifier la qualité des prédictions réalisées à l'aide de l'OCS par comparaison aux résultats expérimentaux.

Ces comparaisons calcul-expérience sont cependant entachées de plusieurs sources d'incertitude. Concernant les mesures, nous retrouvons trois types d'incertitude :

- Les incertitudes de fonctionnement. Elles correspondent à l'incertitude sur les conditions expérimentales de fonctionnement du cœur pendant lesquelles la mesure est réalisée.
- Les incertitudes technologiques. Le cœur est fabriqué selon les données technologiques définies dans sa note de conception. Cependant, les tolérances issues de l'usinage des éléments le composant et de leur assemblage entraînent une incertitude affectant les mesures réalisées.
- Les incertitudes expérimentales liées à l'instrumentation.

Concernant les prédictions issues de l'OCS, trois types d'incertitude sont recensés :

- Les incertitudes de convergence Monte-Carlo. Les calculs sont entachés d'incertitudes statistiques liées à la résolution Monte-Carlo du simulateur étudié.
- Les incertitudes issues d'éventuelles hypothèses simplificatrices des phénomènes physiques modélisés.
- L'incertitude associée aux données nucléaires de base.

L'ensemble de ces incertitudes est illustré sur la Figure 1.1. Rappelons que les données nucléaires sont figées pour tous les calculs. L'incertitude associée aux données nucléaires peut ainsi être considérée comme un biais identique à toutes les prédictions réalisées. Des travaux antérieurs [5] ont montré que les incertitudes relatives aux données nucléaires pouvaient être

considérées comme indépendantes des données technologiques en entrée de l'OCS (cf. Figure 1.2).

1.3.4 Comment quantifier l'incertitude globale ?

Les performances des cœurs conçus sont en partie pilotées par les incertitudes globales appliquées aux prédictions des simulations. Nous avons vu précédemment que ces marges sont essentiellement constituées de deux leviers, à savoir les incertitudes de calcul et technologiques. Concernant les incertitudes technologiques, les concepteurs sont à ce jour en mesure de piloter les processus de fabrication de manière à contraindre les intervalles des incertitudes technologiques. L'optimisation des incertitudes de calcul et leur maîtrise nécessitent quant à elles, à la fois des campagnes d'essais dédiées à leur estimation et des méthodes d'interprétation rigoureuses.

1.3.5 Grandeur d'intérêt : Facteur de puissance

Parmi les grandeurs d'intérêt des études de conception et de sûreté, nous nous intéressons dans cette thèse au « **facteur de puissance** ». Ce paramètre correspond à la **distribution spatiale de la puissance dans un cœur** et plus particulièrement au sein des éléments combustibles le constituant. Il se trouve qu'à ce jour, à l'issue des études de conception et de sûreté, il apparaît être l'un des paramètres d'intérêt dont les incertitudes actuelles sont des plus limitantes pour les performances des cœurs en service et à venir. Dans ce contexte, **l'objectif de ces travaux sera d'améliorer la maîtrise des incertitudes de calcul affectant les facteurs de puissance**.

Pour répondre à ce besoin, des programmes d'essais dédiés à la validation expérimentale des OCS de neutronique ont vu le jour. C'est par exemple le cas des essais du programme HIP-POCAMPE dans le Réacteur d'Essais à Terre (RES) [6] qui dispose d'une Instrumentation In-Core (IIC) permettant la mesure de la distribution spatiale du flux neutronique dans le cœur.

1.4 Essais expérimentaux dédiés à la mesure de distribution de flux neutronique

Plusieurs techniques d'**Instrumentation In-Core (IIC)** peuvent être mises en œuvre pour la mesure de la distribution de flux neutronique dans le cœur. Dans ces travaux, nous nous intéresserons plus particulièrement à des mesures par sondes mobiles similaires à l'IIC des Réacteurs à Eau Pressurisée (REP) électrogènes [7], permettant la mesure de cartographies spatiales du flux neutronique dans le cœur.

Cette Instrumentation In-Core est constituée de détecteurs de type chambres à fission. Ces sondes sont insérées dans certains des tubes-guides positionnés entre les éléments combustibles du cœur. Des mesures de la nappe de flux expérimentale peuvent alors être reconstruites en trois dimensions pour chaque tube-guide accueillant une sonde. Ces mesures réalisées en plusieurs points du cœur pour les mêmes conditions expérimentales sont alors regroupées dans ce que l'on appellera dans la suite du document une « cartographie ». Ces cartographies nécessitent chacune quelques heures d'acquisition, pendant lesquelles les conditions expérimentales du cœur sont maintenues constantes par l'équipe chargée de l'exploitation.

Réaliser ces cartographies est ainsi un processus long et onéreux. Face à cette problématique, on considérera que l'on dispose tout au plus de 16 cartographies dans diverses conditions de fonctionnement.

À l'issue d'une cartographie, les signaux acquis dans le temps à l'aide d'une sonde de mesure permettent de reconstruire l'équivalent d'une mesure instantanée de la distribution des neutrons dans le tube-guide sondé. À ces mesures sont associées des incertitudes liées au bruit de mesure et de reconstruction. Dans ce travail de thèse, nous ne traiterons pas des méthodes de reconstruction et de traitement du signal. Nous considérerons simplement que nous **disposons d'une mesure pour chaque tube-guide instrumenté auquel est associée une incertitude expérimentale** regroupant les incertitudes de mesure et de reconstruction.

Bien que les travaux soient généralement focalisés sur les mesures de l'Instrumentation In-Core, il faut remarquer que les grandeurs physiques relevées entre les éléments combustibles ne sont pas directement les facteurs de puissance (grandeur d'intérêt des études de conception et de sûreté). Néanmoins, il est possible à partir des mesures des sondes de reconstruire ces facteurs de puissance au sein même des éléments combustibles. La maîtrise des incertitudes associées à l'Instrumentation In-Core peut ainsi être transposée aux facteurs de puissance lors de la validation expérimentale de l'OCS.

1.5 Simulation numérique et interprétation des mesures

Afin de prédire les différentes grandeurs d'intérêt mesurées lors d'une campagne d'essais, les modélisateurs ont à leur disposition des OCS de neutronique. Pour interpréter l'ensemble de ces mesures expérimentales, **un jumeau numérique du cœur expérimental** et de l'instrumentation utilisée lors de la campagne de mesure est modélisé à l'aide du simulateur à disposition. Ce simulateur résout alors des équations de la neutronique pour fournir des prédictions, qui sont ensuite comparées aux mesures expérimentales. Cependant, un simulateur n'est qu'une représentation partielle des phénomènes physiques en jeu. Il fournit une prédiction entachée d'une erreur lorsqu'on la compare à une mesure expérimentale équivalente. Cette erreur est constituée de deux sources :

- Une première, purement expérimentale, provient de la différence existant entre la mesure de l'expérimentateur et le phénomène physique observé. Il est le seul à pouvoir minimiser cette source d'erreur en améliorant la précision et la calibration de son instrumentation ou en répétant les mesures.
- La seconde, qualifiée d'erreur de modèle, provient des différences existant entre le modèle de la physique implémenté dans le simulateur et le phénomène physique réel.

Pour diminuer cette seconde erreur, les modélisateurs peuvent implémenter des modèles physiques plus précis, mais rendant généralement les résolutions (et donc la simulation) plus chronophages. Un simulateur de ce type, à la résolution quasi exacte, est ici utilisé afin d'interpréter les mesures issues de l'Instrumentation In-Core. Il s'agit, plus précisément de l'OCS TRIPOLI-4[®], qui base sa résolution de l'équation du transport des neutrons sur une méthode Monte-Carlo. L'utilisation d'un simulateur de ce type a l'avantage de nous garantir que l'erreur de modèle ne sera pas entachée d'un biais dû à la simplification de la physique. Un calcul Monte-Carlo classique nécessite cependant un temps de calcul plus long que le temps d'acquisition d'une mesure, c'est-à-dire de quelques heures à plusieurs jours. Ces temps de

calcul très importants limitent ainsi considérablement l'utilisation des méthodes d'analyse statistique classiques.

1.6 Enjeux de la vérification, validation et calibration des outils de simulation

Lors de l'interprétation des mesures de l'Instrumentation In-Core ayant lieu pendant la validation expérimentale, il est possible de **comparer les distributions de flux prédites** par le simulateur aux mesures locales des sondes In-Core. **S'inscrivant dans une démarche de validation des outils de simulation, cette confrontation des résultats simulés et expérimentaux doit être réalisée en tenant compte des différentes sources d'incertitude, qu'elles soient expérimentales, technologiques ou relatives aux données nucléaires.** Cette comparaison permet ainsi d'évaluer l'éventuelle erreur de modèle associée à la modélisation numérique de phénomènes physiques dans le simulateur, à la lumière des différentes sources d'incertitude.

Afin d'estimer et de mieux maîtriser cette erreur de modèle, il est nécessaire de **minimiser les différentes sources d'incertitude** pouvant exister au niveau du modèle numérique du cœur considéré. Des études antérieures [5] ont montré que dans notre cas d'application, les incertitudes relatives aux données nucléaires peuvent être négligées en première approximation face à la prédominance des incertitudes technologiques.

Nos travaux visent ainsi à quantifier la principale source d'incertitude associée aux prédictions fournies par le simulateur : les incertitudes technologiques. Ces incertitudes sont issues des écarts entre le cœur réel, tel que fabriqué, et le cœur nominal, défini dans les études de conception (cf. Figure 1.1). Dans la suite du document, le terme « paramètre technologique » fait référence à l'ensemble des paramètres incertains du cœur d'étude pouvant donner lieu à une incertitude technologique.

Actuellement, lors de la validation expérimentale, certains paramètres technologiques du modèle numérique sont corrigés par des données métrologiques mesurées sur le cœur expérimental tel que fabriqué. Ces corrections permettent de réduire la part d'incertitude technologique contenue dans l'estimation de l'incertitude de calcul. Cependant, ces données métrologiques sont issues de mesures expérimentales (par exemple, mesure des dimensions des éléments combustibles, de leur masse, etc.). La calibration réalisée est ainsi également entachée d'incertitudes relatives à la précision des mesures métrologiques.

Il se trouve qu'à ce jour, l'incertitude relative à ces mesures métrologiques n'est généralement pas prise en compte lors de la calibration du modèle numérique. Cette incertitude se retrouve par conséquent, dans la variance associée à l'incertitude de calcul, issue des comparaisons calculs-mesures. Nous proposons d'exploiter ces incertitudes métrologiques dans une **démarche de calibration bayésienne des paramètres technologiques incertains, afin de fournir des intervalles de prédiction associés aux incertitudes de calcul,** dans lesquels l'incertitude technologique a été réduite au mieux.

Ce cadre probabiliste, mathématiquement rigoureux, permet de considérer une connaissance *a priori* des incertitudes. D'autre part, l'hypothèse d'un modèle probabiliste paramétrique permet de lier les résultats expérimentaux et les simulations. L'application du théorème de Bayes permet alors de fournir une loi *a posteriori*, mettant à jour les incertitudes technologiques au vu des données expérimentales recueillies, en maximisant la vraisemblance du

modèle probabiliste supposé. Dans ce cadre, les paramètres technologiques incertains seront considérés comme des variables aléatoires continues, caractérisées par leur densité de probabilité.

Afin de réaliser une calibration optimale, la démarche proposée s’articule autour des grandes étapes suivantes :

- Réaliser une **analyse de sensibilité** afin d’identifier les paramètres technologiques les plus influents sur les résultats de la simulation.
- **Calibrer les paramètres technologiques** en prenant en compte l’ensemble des sources d’incertitude : incertitudes associées aux paramètres technologiques, aux mesures expérimentales et au processus de calibration lui-même.

Ces étapes s’appuient sur l’utilisation d’**outils statistiques** adaptés à la problématique et au cas d’application traité.

1.7 Problématiques et solutions envisagées

1.7.1 Contraintes

A priori, les observables mesurées ne dépendent pas linéairement des paramètres technologiques incertains. De plus, nous ne disposons pas de méthodes adjointes permettant d’estimer les dérivées partielles. Il n’est ainsi pas possible de trouver des optimums de calibration par des méthodes simples dites du type « descente de gradients ».

D’autre part, le simulateur à disposition résout le problème du transport de particules par une méthode Monte-Carlo (code TRIPOLI-4®). Compte tenu de la précision attendue, un nombre important de particules doit être simulé, ce qui rend chaque simulation très coûteuse en temps de calcul. En pratique, le simulateur nécessite plusieurs heures de calcul sur une centaine de processeurs pour fournir des résultats ayant des taux de convergences Monte-Carlo acceptables.

Finalement, le nombre de paramètres à considérer lors de la calibration du jumeau numérique peut théoriquement concerner un millier de paramètres du fait de la complexité du cœur étudié. De ce fait, notre simulateur ne peut pas être directement utilisé dans le cadre d’une calibration bayésienne (qui nécessite de l’ordre de plusieurs milliers de simulations).

1.7.2 Solutions

Pour pallier à ces limitations, **nous proposons de développer un émulateur du simulateur associé au cœur étudié.**

Définition 1.7.1. Un émulateur est un modèle mathématique de substitution approchant le plus fidèlement possible le simulateur seulement à partir de quelques-unes de ses évaluations.

Une fois construit, cet émulateur doit avoir un coût en temps de calcul négligeable pour de nouvelles évaluations. Dans la suite du document, nous appellerons **base d’apprentissage** le regroupement des prédictions du simulateur permettant de construire l’émulateur associé.

La particularité de notre travail de thèse sera donc de **construire cet émulateur** en support à la calibration des paramètres technologiques du cœur étudié **en combinant judicieusement des considérations physiques et des techniques d'apprentissage statistique**.

Deux problèmes se posent cependant lors de la construction de cet émulateur. D'une part, le simulateur est coûteux en temps de calcul, ce qui limite grandement la taille des bases d'apprentissage. D'autre part, nous verrons que l'ordre de grandeur du nombre de paramètres technologiques à calibrer se rapproche du millier, ce qui rend l'estimation directe d'un émulateur global inaccessible (en un temps de calcul raisonnable), si le simulateur est utilisé comme une boîte noire.

Pour résoudre ces problèmes, il est nécessaire de mettre en œuvre différentes méthodes de neutronique permettant d'augmenter significativement le budget de calcul à disposition. Pour cela, nous ferons une hypothèse d'additivité.

Hypothèse 1.7.1. L'émulateur global est un modèle additif d'émulateurs élémentaires indépendants, s'appuyant chacun sur des groupes disjoints de paramètres technologiques.

Sous cette hypothèse d'additivité des émulateurs élémentaires, il devient possible d'utiliser et de développer des méthodologies de neutronique permettant de construire des bases d'apprentissage par groupe, suffisamment informatives pour construire chacun des émulateurs élémentaires.

Afin de construire l'ensemble des émulateurs élémentaires, qui permettront de simuler les effets associés à un groupe de paramètres technologiques indépendamment, il est nécessaire d'avoir à disposition une base d'apprentissage suffisamment grande. Pour ce faire, et sous l'hypothèse d'additivité, de multiples simulations rapides sont réalisées à l'aide des « **simulateurs physiques simplifiés** », issus des **méthodologies de neutronique**.

Une fois l'ensemble des émulateurs élémentaires estimé, une agrégation de ces modèles est alors réalisée sous l'hypothèse d'additivité. Ce regroupement permet la construction d'un émulateur global, permettant de fournir instantanément une estimation des sorties d'intérêt et ce quel que soit le jeu de paramètres technologiques incertains utilisé en entrée. **L'émulateur global est alors utilisé de manière intensive dans une seconde étape de calibration**, afin d'estimer le jeu de paramètres technologiques représentant au mieux le cœur tel que fabriqué. Une fois cette calibration réalisée, il devient alors possible d'estimer l'incertitude de calcul résiduelle du simulateur, que l'on appellera *discrépance* dans la suite du document.

1.8 Plan du manuscrit

Dans le Chapitre 2, le cœur étudié, les grandeurs d'intérêt ainsi que le simulateur numérique utilisé sont décrits en détail.

La **méthodologie générale de calibration bayésienne** combinant des méthodes de neutronique et d'apprentissage statistique fait l'objet du Chapitre 3. Par la suite sont introduits

le formalisme associé au **modèle linéaire bayésien**, ainsi que les paramètres technologiques identifiés *a priori* comme influents.

Le Chapitre 4 est consacré aux **méthodologies de neutronique développées** pour construire les émulateurs élémentaires relatifs aux paramètres technologiques géométriques et au bilan de matière. Plus précisément, le principe de la **reprise surfacique** est utilisé pour traiter les positions des tubes-guides et des éléments combustibles, respectivement développées en Section 4.2 et 4.3. La méthode des **échantillons corrélés** est ensuite décrite et mise en œuvre en Section 4.5. Elle permet d'estimer l'effet d'une perturbation de la composition du cœur d'étude sur les grandeurs prédites.

En complément du Chapitre 4, le Chapitre 5, présente une méthode de neutronique basée sur une **estimation de la matrice de fission du cœur**. Cette méthode permet l'extrapolation des mesures réalisées à l'aide des sondes de mesure vers les éléments combustibles et inversement. Son utilisation conduit à une amélioration des résultats des méthodes de reprise surfacique et des échantillons corrélés, tout en réduisant les coûts de calcul.

S'appuyant sur les méthodes de neutronique présentées aux Chapitres 4 et 5, la **calibration individuelle des différents groupes de paramètres technologiques** incertains est mise en œuvre dans le Chapitre 6. Des configurations perturbées du cœur fictif sont considérées pour les paramètres associés au bilan de matière, puis pour les paramètres géométriques. La calibration bayésienne s'appuie notamment sur l'**estimation d'émulateurs élémentaires** (pour les différents groupes de paramètres), ainsi que sur une **analyse de sensibilité** permettant de réduire les incertitudes à prendre en compte (incertitudes sur les émulateurs estimés).

Finalement, dans le Chapitre 7, une **calibration conjointe** est réalisée : tous les paramètres technologiques sont perturbés simultanément. L'effet de l'incertitude résiduelle des paramètres technologiques, obtenue après calibration, est alors propagé et quantifié sur les prédictions du simulateur et en conséquence sur les écarts calculs/expériences.

Chapitre 2

Cœur étudié et simulateur neutronique

Sommaire

2.1	Cœur d'étude	14
2.1.1	Cœur Fictif	14
2.1.2	Outils permettant la modélisation du cœur fictif	16
2.1.3	Conditions expérimentales	17
2.1.4	Mesure dans un tube-guide	20
2.1.5	Obtention des cartographies des taux de fission	22
2.2	Simulateur Monte-Carlo de transport de particules	23
2.2.1	TRIPOLI-4®	23
2.2.2	Considérations	24
2.3	Synthèse	25

2.1 Cœur d'étude

Les méthodes développées dans ce travail de thèse sont appliquées au modèle d'étude d'un réacteur de type Material Testing Reactor (MTR) proposé par TechnicAtome (TA) [8]. Ce cœur fictif, dit Cœur F, offre un mélange de caractéristiques communes aux réacteurs de recherche du monde entier. Il permet ainsi d'étendre facilement l'ensemble des méthodes développées à la quasi-totalité des petits réacteurs à eau légère.

Ce modèle se veut également simple, facilement modélisable et modulable. Son utilisation permet d'une part de tester les fonctionnalités du simulateur à disposition et d'autre part de simuler des campagnes de mesure afin de mettre à l'épreuve l'ensemble de la méthodologie de calibration que nous proposons.

Une fois cette méthodologie éprouvée, elle pourra être appliquée à toute autre campagne issue d'un cœur aux caractéristiques équivalentes au Cœur F.

2.1.1 Cœur Fictif

Ce modèle numérique dispose d'une multitude d'avantages :

- Il ne dispose d'aucune contrainte concernant la diffusion de résultats.
- Ce modèle est relativement classique. La conception du cœur a été réalisée en mélangeant des fonctionnalités couramment trouvées dans des réacteurs de recherche. Ce cœur est ainsi représentatif des petits réacteurs à eau légère de type MTR.
- Ce cœur est modulable : il dispose d'une « infinité » de plans de chargement.
- Ce cœur est facilement modélisable à l'aide de l'ensemble des outils de création de géométrie à disposition.

Ce cœur présente également l'avantage de la simplicité. Il n'est en effet, composé que de deux types d'assemblages :

- Des assemblages « nus » disposant de 24 plaques combustibles standard de U_3Si_2 enrichies à 27 % et contenues dans une gaine d'aluminium inspirée de celles présentes dans le Réacteur Jules Horowitz (RJH) (même épaisseur de plaques et de lames d'eau intra-assemblage).
- Des assemblages de contrôle, disposant de 18 de ces plaques combustibles et de deux lattes de contrôle en hafnium.

La Figure 2.1 illustre le plan de chargement du Cœur F. On y voit les assemblages bi-lattes (assemblage de contrôle) dont les lattes absorbantes sont visibles en jaune. Les autres assemblages étant les assemblages standard.

Plan de chargement

Dans le cadre de ce travail de thèse, un plan de chargement à 32 éléments combustibles est utilisé lors des différentes études de validation (16 assemblages « nus » et 16 assemblages de contrôle). Cette configuration a l'avantage de présenter deux axes de symétrie en configuration toutes lattes basses et toutes lattes hautes, et une symétrie par moitié de cœur quand les lattes absorbantes sont insérées selon le mode de pilotage présenté sur la Figure 2.2.

Caractéristiques générales du cœur

La dimension de chacun de ces assemblages est de 9×9 cm. Les lames d'eau interassemblage font quant à elles 1 cm d'épaisseur, permettant d'obtenir un pas de réseau de 10 cm (les dimensions de la configuration étudiée sont donc de 60×60 cm dans le plan xy). Afin de contrôler la réactivité¹, du poison consommable est ajouté sur les parties externes de la crémaillère sous forme d'aluminium boré (1 % massique de bore), parallèlement aux plaques combustibles. Ces joues borées sont visibles en vert sur la Figure 2.1. Les crémaillères sont visibles en gris foncé.

Axialement, les plaques combustibles et les lattes de contrôle ont une hauteur de 80 cm. Les autres structures (crémaillère, gaine, et plaques d'aluminium boré) ont une hauteur de 84 cm. Le réflecteur présent dans ce cœur est de l'eau, identique au modérateur interne des éléments combustibles.

Description de l'instrumentation In-Core permettant les mesures

Afin de réaliser les mesures locales de la nappe de flux, 49 tubes-guides sont insérés à proximité des éléments combustibles. Une coupe transversale d'un tube-

1. La *réactivité* est une grandeur permettant de mesurer l'écart d'un cœur par rapport à l'état dans lequel une réaction nucléaire en chaîne est auto-entretenu.

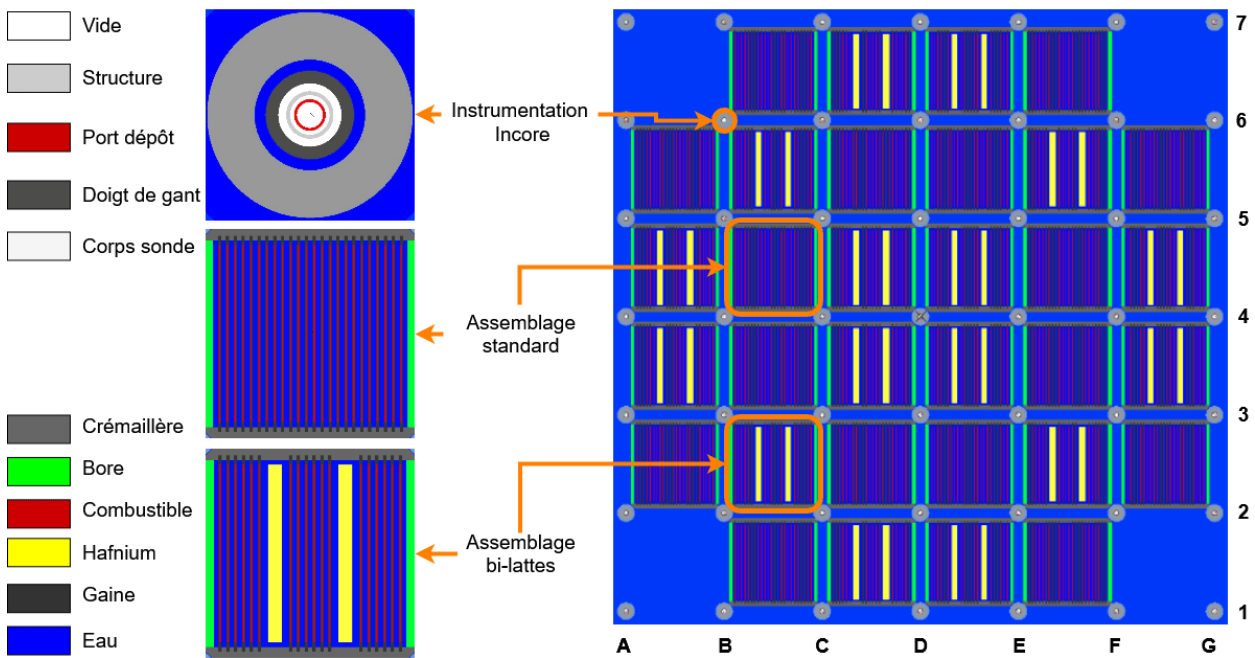


FIGURE 2.1 – (Figures de gauche) Coupe axiale d’une sonde de mesure, d’un assemblage nu et d’un assemblage de contrôle. (Figure de droite) Coupe axiale du cœur d’étude.

guide est visible sur la partie supérieure gauche de la Figure 2.1.

Ces tubes-guides permettent l’insertion de sondes, afin de réaliser des mesures locales de la nappe de flux. Pour cela, des sondes de type « chambre à fission » [9], sont insérées dans les tubes-guides. Ces sondes sont composées d’un tube (cathode) sur lequel un dépôt fissile d’Uranium 235 (U5) est présent en faible quantité. Une anode est placée au centre de la sonde. Le traitement du signal électrique entre l’anode et la cathode permet alors de remonter à une image du taux de fission dans le dépôt U5, et d’estimer la nappe de flux [7].

Le diamètre extérieur de la structure du tube-guide est de 13 mm et son diamètre intérieur de 7 mm. Concernant le doigt de gant, son diamètre extérieur est de 5,6 mm et son diamètre intérieur de 4 mm. Le diamètre extérieur du corps de la sonde est quant à lui de 3 mm et son diamètre intérieur de 2,5 mm. Finalement, le diamètre extérieur du porte-dépôt est de 1,99 mm et son diamètre intérieur de 1,64 mm.

Ces tubes-guides dépassent respectivement du cœur fictif de 20 cm en haut et en bas selon l’axe z et mesurent 124 cm de long (le cœur fictif mesurant 84 cm selon l’axe z).

2.1.2 Outils permettant la modélisation du cœur fictif

Afin de modéliser le Cœur F dans le simulateur et d’y réaliser une prédiction relative à une grandeur de neutronique, différentes informations doivent être fournies dans un fichier communément nommé « jeu de données ». Ces informations sont :

- la géométrie de chaque élément composant le cœur ;
- le bilan matière de chacun des matériaux du cœur ainsi que leur température ;
- les observables d’intérêt. Dans notre cas, elles correspondent aux taux de fission mesurés par les sondes introduites dans les tubes-guides ;
- des options de calcul permettant la résolution du problème numérique. Cela inclut

notamment le nombre de particules à simuler, les particules d'intérêt (les neutrons) et le type de calcul réalisé tel que le mode « Réacteur Critique Associé (RCA) ».

Il est possible d'utiliser le langage natif du simulateur afin d'y décrire manuellement l'ensemble des informations caractérisant le modèle d'étude. Cependant, face au nombre de volumes importants à dessiner et à la complexité relative d'un cœur complet (géométries très hétérogènes), l'utilisation d'outils d'aide à la conception a été privilégiée.

Dans ce cadre, un premier outil est le code de création de géométrie fourni par TA [8]. Il est grâce à lui possible de générer le cœur fictif selon le plan de chargement désiré en quelques lignes de commandes. Cette solution est tout à fait viable et permet de rendre nos modèles comparables avec les études de TA.

Toutefois, dans le souci de rendre nos développements compatibles avec des applications industrielles, nous avons préféré adapter les outils de génération de jeu de données en exploitation, tout en bénéficiant de l'outil de TA pour vérifier nos développements. Le Cœur F est ainsi modélisé à l'aide du code interne dénommé PERCEVAL. Cet outil permet de générer automatiquement la géométrie du Cœur F à partir des caractéristiques présentées précédemment. La définition du cœur, sa géométrie et son bilan matière sont définis de manière paramétrique. Cela permet de ne s'intéresser qu'aux données technologiques telles qu'elles sont disponibles dans le corpus documentaire des données de métrologie après fabrication des cœurs. Quelques légères modifications ont cependant dû être apportées à PERCEVAL pour l'adapter aux spécificités du Cœur F. Ces dernières portent sur :

- Le chanfreinage des quatre coins de chaque élément combustible.
- L'ajout d'une surface « fictive » dans le modérateur, dont l'utilité est présentée dans la Section 4.3 du document.

Enfin, afin d'instrumenter le cœur et d'y ajouter les lattes absorbantes permettant son pilotage, l'option d'import du code PERCEVAL a été massivement utilisée. Cette option permet de ne pas se limiter aux objets géométriques présents dans la base du générateur de géométrie.

2.1.3 Conditions expérimentales

Les cartographies sont mesurées lorsque le cœur est à « l'état critique »². Plusieurs conditions expérimentales peuvent satisfaire l'état critique selon les valeurs prises par la température, le titre en bore ou l'insertion des lattes absorbantes. Ainsi, nous avons établi un plan d'expériences réaliste d'une campagne d'essais sur le Cœur F, fixant un certain nombre de ces conditions expérimentales.

Organes de contrôle de la réactivité

Pour contraindre le flux neutronique du Cœur F, 7 mécanismes de contrôle sont à disposition. Chacun de ces 7 mécanismes pilote l'insertion des lattes d'un couple d'assemblage de contrôle, soit 4 lattes au total. Comme visible sur la Figure 2.1, les assemblages de contrôle constituent la moitié des éléments combustibles du cœur d'étude.

En configuration Toutes Lattes Hautes (TLH)³, une réactivité de 9 000 pcm est observée

2. État du réacteur dans lequel une réaction nucléaire en chaîne s'entretient à niveau constant.

3. C.-à-d. lorsque l'ensemble des lattes absorbantes est extrait du cœur.

pour un titre en bore de 0 ppm et une température de 100 °C. En configuration Toutes Lattes Basses (TLB)⁴, une réactivité de -27 000 pcm est observée pour les mêmes conditions expérimentales. Cette conception de cœur permet une bonne marge de contrôle de la réactivité⁵. Précisons que nous ne cherchons pas à définir un cœur performant, mais simplement un cœur a minima pilotable pour rendre le plan d'expériences réaliste.

Du bore soluble peut également être dilué dans le modérateur, mais contrairement aux REP électrogènes, ce mécanisme n'a pas pour objectif le contrôle de la réactivité. En effet, l'introduction de bore lors d'une campagne expérimentale permet d'étendre le plan d'expériences. Son introduction permet par exemple de réaliser des mesures en configuration Toutes Lattes Hautes, configuration qui entraînerait une divergence du cœur en eau claire (non borée).

Mécanisme d'insertion

La procédure d'insertion des lattes absorbantes consiste à actionner au maximum deux mécanismes de contrôle à la fois.

En partant d'une configuration du cœur à l'arrêt où toutes les lattes sont insérées :

- tout d'abord, les lattes correspondant au premier mécanisme sélectionné sont extraites (cf. Éq. (2.1), pour l'ordre).
- Lorsqu'elles atteignent la mi-hauteur, le second mécanisme sélectionné est actionné. Nous avons alors un décalage d'une demi-hauteur entre les mécanismes actionnés. Les mécanismes correspondants commencent alors à être extraits, et ce, avec le même pas d'extraction.
- Finalement, lorsque le premier mécanisme arrive en fin de course haute, le second arrive à mi-hauteur. C'est à ce moment qu'un troisième mécanisme est sélectionné et commence à être extrait.

Ce fonctionnement est le même jusqu'à la configuration TLH.

Mode de pilotage

L'ordre d'extraction des mécanismes est appelé « mode de pilotage ». Un seul mode de pilotage a été utilisé pour cette étude. L'ordre de sélection des mécanismes considérés lors de la campagne expérimentale est le suivant :

$$C1 \rightarrow I3 \rightarrow I1 \rightarrow D2 \rightarrow D1 \rightarrow I4 \rightarrow C2. \quad (2.1)$$

Les lattes absorbantes qui correspondent à ces mécanismes de contrôle (notés C1, I3...) sont présentées sur la Figure 2.2. Chaque mécanisme de contrôle peut être inséré de 80 cm. La « cote-critique » correspond à la cote d'extraction des mécanismes pour laquelle la réactivité est de 0 pcm.

4. C.-à-d. lorsque l'ensemble des lattes absorbantes est inséré.

5. En toute rigueur, la marge de contrôle en réactivité devrait être estimée sur une configuration à froid (20°C) en considérant un défaut d'insertion d'un, ou des deux mécanismes les plus anti-réactifs. Dans ce cas, il est usuellement considéré qu'un cœur est « contrôlable » à partir d'une marge de contrôle de plus de 5 300 pcm (k_{eff} en RCA inférieur à 0,95).

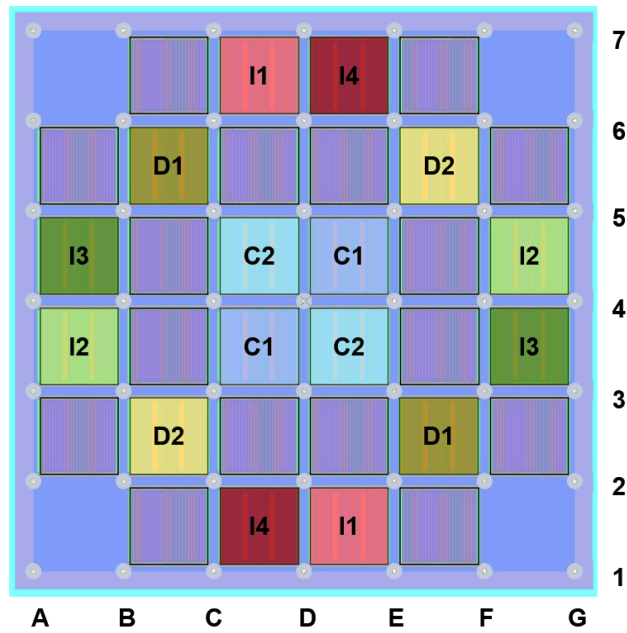


FIGURE 2.2 – Nomenclature des mécanismes de contrôle.

Cœur neuf

Précisons que dans le cas de nos travaux de thèse, seule la configuration « neuve » du cœur F est étudiée. C'est en partie pour cette raison qu'un seul mode de pilotage est utilisé. En effet, sur un cœur en exploitation et en puissance, l'usure du combustible dans un seul mode de pilotage amène à un déséquilibre des usures (taux de combustion). Afin de réduire ces déséquilibres, des permutations de mode de pilotage sont régulièrement opérées (en général par symétrie). Ces dernières ne sont ainsi pas nécessaires lors de l'étude sur ce cœur neuf.

Plan d'expériences pour les paramètres de contrôle

En plus des mécanismes de contrôle, l'expérimentateur est capable de choisir d'autres paramètres pour jouer sur la réactivité et placer le cœur en configuration critique. Nous appellerons ces variables « **paramètres de contrôle** ». Ces paramètres à disposition, dont un résumé est présenté dans le Tableau 2.1 sont :

- **La température du cœur** : ce paramètre est global à l'ensemble du cœur. Une modification de la température du cœur n'engendre pas de perturbations locales du flux neutronique. La perturbation de la température introduit toutefois une « bascule » centre/périphérie de la distribution de flux, impactant la répartition spatiale de la nappe de flux. Une augmentation de température entraîne une diminution de la réactivité dans le cœur étudié. Pour conserver l'état critique, l'expérimentateur doit ainsi jouer sur les autres paramètres de contrôle à sa disposition. La température varie ici de 100,85 °C à 250,85 °C, avec un pas de 50 °C.
- **Le titre de bore** : Le bore est un poison neutronique (absorbeur de neutrons) qui est dilué dans l'eau du réacteur, que ce soit dans le modérateur ou dans l'eau des éléments combustibles. Ce paramètre est également global à l'ensemble du cœur et peut introduire une bascule centre/périphérie. Une augmentation du titre en bore entraîne une diminution de la réactivité. De la même manière que pour la température, une compensation de l'effet en réactivité doit alors être réalisée à l'aide des autres

paramètres de contrôle. Le titre en bore varie de 0 à 768 ppm dans le plan d'expériences utilisé.

- **L'insertion des lattes** : ce paramètre détermine la position des lattes absorbantes. Il est défini en termes de centimètres d'insertion cumulée des 7 mécanismes de contrôle. L'insertion successive de ces mécanismes induit des déformations locales de la distribution de flux. Ce paramètre varie ici de 0 à 184 cm (0 cm correspondant à la configuration TLH). Quelle que soit la configuration d'étude, il n'a jamais été nécessaire d'actionner les mécanismes D2, D1, I4 et C2, qui ont toujours été maintenus en configuration haute.

Paramètres de contrôle	Valeurs
Insertion des lattes	[0 - 184] cm
Température du modérateur	[100,85 - 250,85] °C
Titre en bore	[0 - 768] ppm

TABLEAU 2.1 – Plage de variation des paramètres de contrôle relatifs au plan d'expériences traité.

Un plan d'expériences a été mis en place pour le cœur fictif à l'aide de ces paramètres de contrôle. Grâce au simulateur à disposition, 16 configurations critiques ont été calculées à plus ou moins 50 pcm. Ce plan d'expériences est donné en annexe par le Tableau A.1. À noter que la pression est donnée à titre indicatif ; elle est directement définie par la température de l'eau dans la configuration d'étude.

Précisons que ce plan d'expériences n'est pas établi de manière à être optimal du point de vue de la calibration. Il se veut simplement représentatif d'une véritable campagne de mesures réalisée sur une installation ayant ses propres contraintes d'exploitation.

2.1.4 Mesure dans un tube-guide

Les mesures d'intérêt réalisées à l'aide de l'instrumentation In-Core sont des mesures du taux de réaction de fission τ_f . Le taux de réaction de fission correspond au nombre d'interactions de fission ayant lieu dans un centimètre cube en une seconde. Il est le produit du flux neutronique noté $\Phi(E)$ (compris entre les énergies E et $E + dE$) par la section efficace macroscopique de fission notée $\Sigma_f(E)$ (pour une particule incidente d'énergie E) :

$$\tau_f = \int_E \Phi(E) \Sigma_f(E) dE.$$

La mesure de ces taux sur les matériaux combustibles permet notamment la détermination de la puissance instantanée du cœur P (en MeV.s^{-1}). Pour cela, le volume combustible total du cœur V (cm^3), l'énergie récupérable moyenne par fission E_m (MeV par fission) et le taux de fission sont utilisés tels que :

$$P = \tau_f E_m V.$$

On considère que ces mesures sont réalisées par des chambres à fission (de type CFUR du fournisseur PHOTONIS) ayant un dépôt d'U5, parcourant de haut en bas (puis de bas en haut) chaque tube-guide. Par commodité, le déplacement du détecteur le long du tube-guide n'a pas été modélisé. Un détecteur aussi long que le tube-guide a été modélisé pour simplifier les simulations.

Un exemple illustratif de profil axial mesuré dans le Cœur F au niveau du tube-guide B3 (cf. Figure 2.1 pour avoir la correspondance entre tube-guide et position dans le cœur) pour quatre conditions expérimentales différentes est visible sur la Figure 2.3. La condition expérimentale « 100_0_184 » (courbe rouge sur cette figure) correspond à une mesure réalisée à 100 °C, pour un titre en bore de 0 ppm et une insertion des lattes de 184 cm.

Chaque profil axial se découpe en trois parties. Une première, visible entre les cotes 13 et 50, correspond aux mesures réalisées dans la hauteur active du cœur. Les deux autres parties correspondent aux mesures réalisées dans le modérateur, au-dessus et en-dessous du cœur. Il s'agit des remontées du taux de fission liées aux neutrons « thermiques »⁶. La remontée thermique en-dessous du cœur (pic entre les cotes 0 et 11) est plus importante que celle au-dessus (pic entre les cotes 50 et 61). En effet, par leur présence, les lattes absorbantes au-dessus du cœur diminuent fortement les taux de fission mesurés. Une variabilité des profils axiaux est également observée sur la Figure 2.3 en fonction de la configuration expérimentale d'étude.

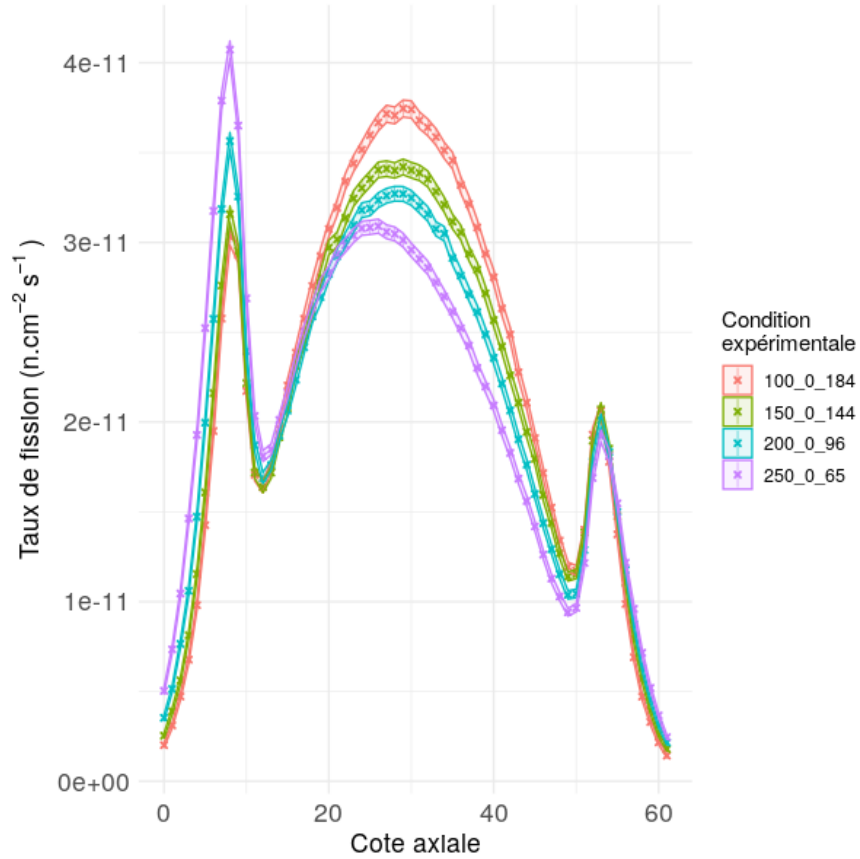


FIGURE 2.3 – Mesure du taux de fission axial au niveau du tube-guide B3 pour quatre conditions expérimentales différentes (la cote axiale 0 correspond au bas du cœur).

La simulation numérique de ces mesures axiales pose cependant un problème. Malgré des temps de calcul importants (61 h sur 50 processeurs), des problèmes sur la convergence Monte-Carlo sont observés. On peut remarquer que les différents profils ne sont pas « lisses ».

6. En neutronique, la dénomination « neutrons thermiques » fait référence aux neutrons dont l'énergie se situe dans le domaine dit « thermique ». Par convention, il s'agit des neutrons dont l'énergie moyenne est d'environ 0,025 eV. À l'opposé, on nommera « neutrons rapides » ceux dont l'énergie est supérieure à 0,907 MeV. La fission des noyaux d'uranium entraîne la production de neutrons rapides.

L'incertitude associée à ces mesures est par conséquent trop importante pour être prise en compte lors de la démarche statistique envisagée. L'impact des incertitudes technologiques étant du même ordre de grandeur que celui des incertitudes Monte-Carlo, il n'est donc pas envisageable ici de travailler directement sur les profils axiaux.

Afin de contourner cet obstacle, **le travail de calibration est réalisé sur des taux de fission intégrés axialement**. Ces taux de fission intégrés ont l'avantage de posséder une incertitude Monte-Carlo plus faible par nature, puisque l'ensemble de l'information apportée par la sonde de mesure est condensé en une unique grandeur obtenue par sommation. En contrepartie, cette agrégation entraîne la perte de l'information axiale.

2.1.5 Obtention des cartographies des taux de fission

En utilisant cette grandeur, il est possible de représenter l'ensemble des profils axiaux intégrés au niveau de chaque tube-guide en une représentation à deux dimensions. Un exemple de ce type de cartographie est proposé en Figure 2.4 pour une température de 100 °C, un titre en bore de 0 ppm et une insertion des lattes de 184 cm.

Chaque profil axial $\tau_{f,IIC}^7$ est intégré sur l'ensemble des tranches axiales t , normalisé, puis reporté sur une cartographie à 2 dimensions du cœur à l'emplacement du tube-guide sondé. Soit N_{IIC} le nombre de tubes-guides sondés et N_t le nombre de tranches axiales mesurées. La grandeur intégrée $\tilde{\tau}_{f,IIC}$ se calcule pour la sonde IIC par la formule :

$$\tilde{\tau}_{f,IIC} = \frac{\sum_{t=1}^{N_t} \tau_{f,IIC}(t)}{\frac{1}{N_{IIC}} \sum_{i=1}^{N_{IIC}} \sum_{t=1}^{N_t} \tau_{f,i}(t)}.$$

En particulier on a : $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_{IIC}} \tilde{\tau}_{f,IIC} = 1$.

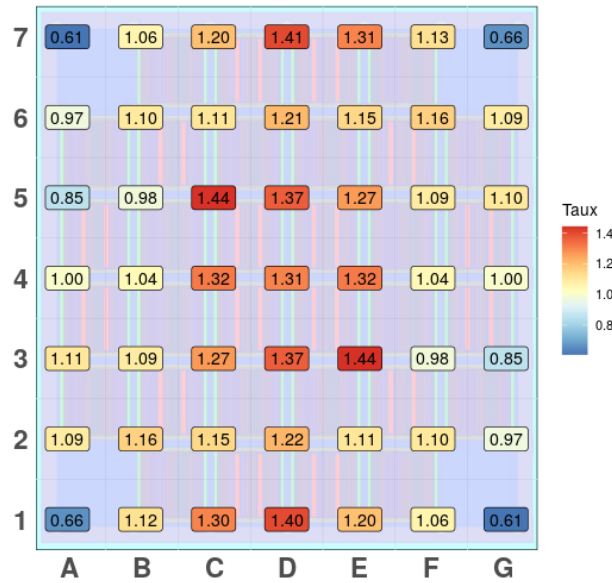


FIGURE 2.4 – Cartographie des taux de fission intégrés et normalisés pour une température de 100 °C, un titre en bore de 0 ppm et une insertion des lattes de 184 cm.

7. L'indice IIC correspond à la mesure réalisée au niveau de l'Instrumentation In-Core IIC .

2.2 Simulateur Monte-Carlo de transport de particules

Deux classes de méthodes numériques sont à disposition pour résoudre les équations de la neutronique : les méthodes dites « déterministes » (par discrétisations des équations) et les méthodes dites « stochastiques » (simulation Monte-Carlo quasi analogue).

Dans ce document, nous nous intéresserons essentiellement à **un simulateur basé sur des méthodes Monte-Carlo**. Bien que plus contraignante en matière de temps de calcul⁸, la méthode Monte-Carlo utilise moins d'approximations que la résolution déterministe. Les résultats obtenus par résolution Monte-Carlo sont par conséquent moins nombreux que par une résolution déterministe mais sont considérés comme des résultats de référence.

En effet, les équations de neutronique des simulations quasi analogues Monte-Carlo sont considérées exactes sous certaines hypothèses présentées dans la suite de cette section. Il est supposé qu'elles n'introduisent pas d'approximation au niveau du modèle physique implémenté ou d'approximation numérique susceptible d'introduire un biais dans les résultats de calculs. La seule incertitude liée à cette méthode de résolution est l'incertitude statistique du calcul Monte-Carlo. La magnitude de cette incertitude est cependant connue et maîtrisable, notamment grâce au temps de calcul alloué par les ingénieurs lors de la résolution des équations de la neutronique.

2.2.1 TRIPOLI-4[®]

Le simulateur utilisé pour calculer l'ensemble des grandeurs de neutronique est le code TRIPOLI-4[®] [10], code Monte-Carlo de transport de particules développé au CEA. Ce simulateur permet de résoudre l'équation du transport de particules au plus proche de la physique en utilisant un minimum d'approximations. Cette particularité permet à ce type de solveur de se positionner comme code de référence dans le domaine du transport de particules.

Ainsi, un ensemble de grandeurs physiques tels que le flux neutronique ϕ ou les taux de fission τ_f peut être estimé pour une géométrie donnée. Le résultat du calcul également appelé « score » est alors une estimation de la grandeur physique réelle à laquelle est associée une incertitude Monte-Carlo.

Calcul Monte-Carlo de transport de particules

Le transport des particules neutres (neutrons, photons...), est décrit par l'équation de Boltzmann, appelée équation du transport. Ce transport, intrinsèquement stochastique en raison des interactions des particules avec la matière, appelle immédiatement à une résolution probabiliste.

Cette résolution consiste à simuler individuellement chaque particule en utilisant peu d'approximations. Pour cela, la trace de chaque particule est simulée de son point d'émission à son point de disparition à l'aide des lois physiques modélisées au plus proche de la réalité. En augmentant le nombre de particules simulées, il devient possible de former un échantillon de valeurs de la quantité d'intérêt qui sera analysé par des méthodes statistiques. En utilisant ces méthodes, une valeur moyenne et une incertitude associée peuvent être estimées.

8. Nous verrons que pour les observables d'intérêt de nos cas d'application, les temps de calcul nécessaires aux simulations sont de l'ordre de plusieurs heures sur plusieurs dizaines de processeurs.

La dépendance faible des particules entraîne que l'incertitude en terme d'écart-type (σ) associée à chaque grandeur estimée est proportionnelle à l'inverse de la racine carrée du nombre de particules (N) présentes dans l'échantillon. Plus formellement :

$$\sigma^2 \propto \frac{1}{N}.$$

Par conséquent, il est nécessaire de simuler 4 fois plus de particules afin de diminuer l'écart-type d'une grandeur estimée d'un facteur 2. Cette méthode peut donc rapidement devenir contraignante du fait des temps de calcul nécessaires à son déploiement [11]. Elle utilise cependant peu d'approximations et permet d'obtenir des résultats de référence, qui seront utilisés pour valider les modèles simplifiés.

Simulation Monte-Carlo en pratique

Pour estimer les différentes grandeurs d'intérêt, une simulation Monte-Carlo doit être configurée. Il faut dans un premier temps définir la géométrie du problème étudié ainsi que l'ensemble des compositions utilisées, puis faire appel aux différentes bibliothèques de données nucléaires afin de définir la physique du problème. Finalement, N particules distinctes sont simulées afin de réaliser une étude statistique sur l'ensemble des trajectoires des particules présentes au niveau de la zone d'intérêt (les tubes-guides) pour y estimer les différents scores.

L'ensemble des phénomènes physiques intervenant dans un calcul est simulé à l'aide d'un échantillonnage aléatoire. Cet échantillonnage consiste à sélectionner aléatoirement un sous-ensemble (un événement) d'une distribution caractérisant les probabilités du phénomène physique à simuler.

Histoire d'une particule

La vie d'une particule est caractérisée par une suite de transports et de collisions entre sa création et sa disparition. Une particule peut disparaître à la suite d'une absorption ou d'une fuite du système étudié. Si le déplacement d'une particule ne conduit pas à une fuite du système, une collision est réalisée en accord avec les sections efficaces du milieu où elle survient. Si la particule n'est pas absorbée, un nouveau déplacement est simulé, et ce jusqu'à la disparition de la particule. Ce processus est décrit dans la Figure 2.5 [12]

2.2.2 Considérations

Le simulateur Monte-Carlo de transport de particules est utilisé sous les hypothèses suivantes :

- le simulateur considère les particules comme ponctuelles et suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre deux particules transportées (aucune interaction neutron-neutron) ;
- il n'introduit pas d'approximation de modélisation (hormis des détails négligeables d'origine géométrique et de composition isotopique) ;
- il estime des grandeurs physiques modélisées par des gaussiennes, caractérisées par une moyenne et un écart-type. L'écart-type sera d'autant plus faible qu'un grand nombre de particules sera simulé, et par conséquent que le temps de calcul sera long ;
- il utilise en données d'entrée un jeu de Données Nucléaires de Base (DNB) incertain, pouvant introduire une erreur et dont l'influence sur la sortie est considérée comme

linéaire (rappelons qu'il n'est pas envisagé d'ajuster ces données nucléaires dans le cadre de nos travaux de thèse).

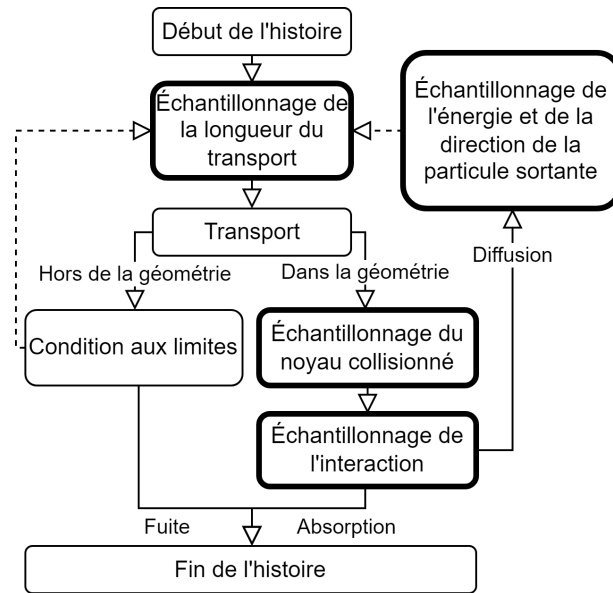


FIGURE 2.5 – Représentation schématique de l'histoire d'une particule avec l'approche de Monte-Carlo.

2.3 Synthèse

Le cœur d'étude, Cœur F [8], est un cœur de type MTR, relativement simple. Il permet de tester et de développer la méthodologie de calibration envisagée afin de répondre aux problèmes discutés dans le Chapitre 1.

Ce cœur se veut représentatif des petits cœurs à eau légère. Les dimensions du réacteur sont de $60 \times 60 \times 80$ cm dans le plan xyz. Le plan de chargement défini est composé de **32 éléments combustibles**. Il est de plus instrumenté à l'aide de **49 sondes de mesure**. Ces sondes permettent la réalisation de mesures locales de la nappe de flux à proximité des éléments combustibles, grandeur expérimentale utilisée pour calibrer les paramètres technologiques.

À l'aide de ce modèle et du **simulateur Monte-Carlo** de transport de particule TRIPOLI-4[®], une campagne de mesure a pu être simulée pour 16 conditions expérimentales. Ce type de résolution coûteuse en temps de calcul permet néanmoins de fournir des estimations de référence. En effet, la résolution Monte-Carlo du transport de particules dans un réacteur nucléaire utilise un minimum d'approximations et permet ainsi de résoudre le problème au plus proche de la physique.

Chapitre 3

Méthodologie générale d'émulation et de calibration du simulateur

Sommaire

3.1	Formalisation du problème	27
3.2	Principe du calage par inférence bayésienne	29
3.2.1	Formule de Bayes	30
3.2.2	Vraisemblance	30
3.2.3	Lois <i>a priori</i> et <i>a posteriori</i> conjuguées	30
3.2.4	Cas général avec estimation par méthode MCMC et émulateur . .	31
3.3	Construction d'un émulateur global par additivité et émulateurs élémentaires	31
3.3.1	Hypothèse d'additivité	31
3.3.2	Traitement neutronique spécifique par partition de paramètres . .	32
3.3.3	Construction de l'émulateur global	32
3.3.4	« Relèvement » des émulateurs élémentaires	32
3.3.5	Mise en oeuvre	33
3.4	Analyse de sensibilité en support à la calibration	34
3.4.1	Analyse de sensibilité de l'émulateur global	34
3.4.2	Calibration	34
3.5	Modèle linéaire bayésien	35
3.5.1	Calcul avec un modèle de lois conjuguées	36
3.5.2	Calcul avec distribution <i>a priori</i> non informative	37
3.5.3	Maximum <i>a posteriori</i> $(\hat{\theta}, \hat{\sigma}^2)^{MAP}$	38
3.5.4	Loi <i>a posteriori</i> prédictive de \mathbf{z}	39
3.6	Considérations pratiques pour l'application aux paramètres technologiques	40
3.6.1	Impossibilité de traiter tous les paramètres technologiques	40
3.6.2	Identification des paramètres influents	41
3.7	Synthèse	42

Ce chapitre décrit en détail la méthodologie développée pour réaliser la calibration bayésienne du simulateur neutronique, à partir de son émulation.

Après avoir donné une formulation mathématique du problème de calage des paramètres, nous rappellerons les principes de la calibration par inférence bayésienne. Nous présenterons ensuite la construction d'un émulateur du simulateur. Celle-ci s'appuie sur :

- différentes hypothèses simplificatrices permettant de construire cet émulateur à partir d'« émulateurs élémentaires » (cf. Section 3.2.4) ;
- l'établissement de simulateurs physiques simplifiés dédiés à chaque groupe de paramètres ;
- l'utilisation de méthodes d'apprentissage statistique et d'analyse de sensibilité afin d'estimer les émulateurs élémentaires et de prendre en compte les incertitudes d'estimation.

3.1 Formalisation du problème

Soit $\mathbf{x} = (x(1), x(2), x(3))^T \in \mathbb{R}^3$ le vecteur des paramètres de contrôle présenté au Tableau 2.1. Ce vecteur regroupe l'ensemble des conditions expérimentales du système physique étudié pour la réponse d'intérêt $y(\mathbf{x})$ ([3], [13]). Dans le cadre de notre travail, cette réponse physique d'intérêt correspond aux taux de fission ayant lieu dans les différents tubes-guides.

Afin d'accéder à ces grandeurs, un ensemble de mesures est réalisé pour $n = 16$ conditions expérimentales \mathbf{x}_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Les résultats mesurés correspondants sont regroupés dans une base expérimentale d'intérêt, notée $z = (z(\mathbf{x}_1), \dots, z(\mathbf{x}_n))^T \in \mathbb{R}^n$.

Les résultats mesurés $z(\mathbf{x}_i)$ ne sont pas identiques à la grandeur physique d'intérêt correspondante $y(\mathbf{x}_i)$. Un ensemble de facteurs liés au dispositif expérimental entraîne une incertitude que nous nommerons $e(\mathbf{x}_i)$. Ainsi, pour l'ensemble des conditions expérimentales $1 \leq i \leq n$, nous avons d'une part :

$$z(\mathbf{x}_i) = y(\mathbf{x}_i) + e(\mathbf{x}_i).$$

D'autre part, nous avons à disposition un simulateur noté $f_{\boldsymbol{\theta}}$, dépendant des paramètres technologiques incertains $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ et permettant d'estimer la grandeur physique d'intérêt. Dans le cadre du travail de thèse, le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ représente un ensemble de constantes (enrichissement du combustible, position des éléments composant le cœur...). En supposant que l'ensemble des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ soient calibrés à leur vraie valeur $\boldsymbol{\theta}^*$, on obtient :

$$y(\mathbf{x}_i) = f_{\boldsymbol{\theta}^*}(\mathbf{x}_i) + \delta(\mathbf{x}_i),$$

où $\delta(\mathbf{x}_i)$ désigne l'erreur de modèle.

En effet, le simulateur n'est qu'un modèle mathématique du système physique réel. C'est pourquoi une erreur de modélisation est présente (il s'agit de l'écart entre la grandeur physique et son estimation à l'aide du simulateur). Cette erreur, aussi appelée discrédance est liée au fait que la totalité des phénomènes physiques ne peut être modélisée à l'aide d'un modèle mathématique, aussi complexe soit-il. Elle dépend des paramètres de contrôle \mathbf{x} .

En combinant les deux expressions précédentes, on obtient ([14], [15], [16]) :

$$z(\mathbf{x}_i) = f_{\boldsymbol{\theta}^*}(\mathbf{x}_i) + e(\mathbf{x}_i) + \delta(\mathbf{x}_i). \quad (3.1)$$

En pratique, la vraie valeur $\boldsymbol{\theta}^*$ des paramètres n'est pas connue. Il convient dans un premier temps d'estimer cette valeur. Cette étape de calibration est l'un des objectifs du travail de

thèse. À l'issue de la calibration, l'erreur de modélisation du système physique $\delta(\mathbf{x}_i)$ peut alors être estimée dans le cadre de la calibration modulaire ([17], [18], [19]). Cependant des phénomènes de compensation non souhaitables entre $\boldsymbol{\theta}$ et $\delta(\mathbf{x}_i)$ peuvent apparaître et rendre l'estimation de ces deux paramètres relativement compliquée.

Une première approche de calibration pour estimer $\boldsymbol{\theta}^*$ est la calibration par la méthode des Moindres Carrés (MC). L'on parle alors de calage déterministe.

Afin de simplifier les notations pour la section à venir, les termes d'incertitude expérimentale et de modèle sont regroupés de sorte que : $\epsilon(\mathbf{x}_i) = e(\mathbf{x}_i) + \delta(\mathbf{x}_i)$. En supposant que ces erreurs sont indépendantes et de moyenne nulle, il est possible de réaliser directement une estimation du jeu de paramètres incertains $\boldsymbol{\theta}$ à partir de la comparaison des observations $y(\mathbf{x}_i)$ et des simulations $f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i)$. La calibration par la méthode des Moindres Carrés peut être réalisée : l'estimateur des Moindres Carrés $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{MC}$ est défini par :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{MC} = \underset{(\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p)}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n (y(\mathbf{x}_i) - f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i))^2.$$

où argmin est la fonction donnée par la définition 3.1.1.

Définition 3.1.1. Pour une fonction $f : X \rightarrow Y$, avec Y un ensemble totalement ordonné, l' argmin de f est défini par :

$$\operatorname{Argmin}_x f = \{x \in X \mid \forall x' \in X, f(x') \geq f(x)\}.$$

De même, l' argmax de f est défini par :

$$\operatorname{Argmax}_x f = \{x \in X \mid \forall x' \in X, f(x') \leq f(x)\}.$$

Cette méthode permet de fournir une première estimation du jeu de paramètres technologiques. Néanmoins, ses inconvénients sont de ne pas fournir de bornes d'incertitude associées à l'estimation et de ne pas prendre en compte d'information *a priori* associée aux paramètres technologiques incertains. Afin d'aller plus loin dans la quantification de l'erreur, il est possible de supposer que les termes d'erreur sont indépendants et identiquement distribués selon une loi normale centrée d'écart-type σ_{ϵ_i} :

$$\epsilon(\mathbf{x}_i) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\epsilon_i}^2).$$

Cette hypothèse conduit à des mesures expérimentales conditionnellement à $\boldsymbol{\theta}$ suivant une distribution gaussienne de moyenne $f_{\boldsymbol{\theta}}$ et d'écart-type σ_{ϵ} . En d'autres termes, pour $1 \leq i \leq n$, on a¹ :

$$z(\mathbf{x}_i) \mid \boldsymbol{\theta} \sim \mathcal{N}(f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i), \sigma_{\epsilon_i}^2).$$

En utilisant la notation $p_{\mathcal{N}}$ pour la fonction de densité (PDF) de la loi normale standard, la densité de probabilité associée à l'échantillon des n mesures (c.-à-d. la vraisemblance) est donc celle d'une loi normale multivariée, définie comme suit :

1. Dans la suite du document, la notation « $A \mid B$ » fait référence à la loi de probabilité conditionnelle de la variable aléatoire A sachant la variable aléatoire B .

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{z} \mid \boldsymbol{\theta}) &= p(z(\mathbf{x}_1), \dots, z(\mathbf{x}_n) \mid \boldsymbol{\theta}) = \bigotimes_{i=1}^n p_{\mathcal{N}}\left(\frac{z(\mathbf{x}_i) - f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i)}{\sigma_{\epsilon_i}} \mid \boldsymbol{\theta}\right) \\
 &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\epsilon_i}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{[z(\mathbf{x}_i) - f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i)]^2}{\sigma_{\epsilon_i}^2}\right). \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Il est alors possible d'estimer par Maximum de Vraisemblance (MV) le jeu de paramètres technologiques $\boldsymbol{\theta}$ optimal. L'estimateur obtenu, noté $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{MV}$, est défini par :

$$\begin{aligned}
 \hat{\boldsymbol{\theta}}^{MV} &= \underset{(\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p)}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{z} \mid \boldsymbol{\theta}) = \underset{(\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p)}{\operatorname{argmax}} \log(p(\mathbf{z} \mid \boldsymbol{\theta})) \\
 &= \underset{(\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p)}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n \frac{[z(\mathbf{x}_i) - f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_i)]^2}{\sigma_{\epsilon_i}^2}.
 \end{aligned}$$

Il est possible de montrer que cet estimateur est asymptotiquement gaussien (c.-à-d. quand $n \rightarrow \infty$). Cette propriété permet de construire un intervalle de confiance asymptotique associé à un risque de niveau α pour l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{MV}$.

3.2 Principe du calage par inférence bayésienne

Le cadre bayésien permet d'obtenir davantage d'informations qu'une simple estimation des paramètres $\boldsymbol{\theta}^*$, mais aussi de prendre en compte une information *a priori* sur $\boldsymbol{\theta}^*$. Le calage statistique par inférence bayésienne consiste ainsi à mettre à jour l'incertitude affectant la valeur des paramètres incertains $\boldsymbol{\theta}$ à partir des mesures disponibles de la quantité physique d'intérêt.

Dans ce cadre, le jeu de paramètres technologiques $\boldsymbol{\theta}$ est considéré comme incertain et est modélisé par une variable aléatoire suivant une distribution de probabilité donnée $p(\boldsymbol{\theta})$, dite loi *a priori*. Cette loi de probabilité *a priori* peut être interprétée comme une loi de méconnaissance **quantifiant** une incertitude épistémique [13] et non pas comme la limite de la fréquence d'occurrence d'un événement incertain par nature. La loi *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$ peut quant à elle être interprétée comme un pari probabiliste des valeurs optimales de $\boldsymbol{\theta}$, conditionnellement aux mesures expérimentales \mathbf{z} [3].

Notre cadre d'étude nous pousse à utiliser l'inférence bayésienne et à ne pas nous limiter à l'approche fréquentiste précédemment décrite. En effet, les données à disposition ne sont pas abondantes, ainsi il n'est pas possible d'appliquer rigoureusement les théorèmes limites. Dans ce cadre, l'expérimentateur peut ajouter des informations *a priori* (et leur degré d'imprécision) relatives à l'expérience. Cela conduit à une inférence plus précise et plus riche.

D'autre part, face à la faible quantité d'informations à disposition, il est intéressant et nécessaire de quantifier l'influence de données mesurées sur l'estimation des paramètres technologiques optimaux. Il s'agit, en d'autres termes de quantifier quel degré d'information apportent les mesures sur l'incertitude associée à $\boldsymbol{\theta}$. Le cadre bayésien permet cette quantification grâce à la comparaison des lois à *a priori* et *a posteriori*.

Remarque : L'approche bayésienne conduit à des résultats similaires à l'estimation par maximum de vraisemblance, dès lors que la loi a priori sur $\boldsymbol{\theta}$ est un prior non informatif (prior impropre).

3.2.1 Formule de Bayes

Afin d'inférer sur les distributions associées aux paramètres technologiques incertains θ , connaissant les différentes mesures expérimentales réalisées z , il est dans un premier temps nécessaire de définir la vraisemblance jointe de ces deux variables :

$$p(\theta, z) = p(\theta)p(z | \theta) = p(z)p(\theta | z).$$

La formule de Bayes découle directement de la loi des probabilités conditionnelles :

$$p(\theta | z) = \frac{p(\theta, z)}{p(z)} = \frac{p(\theta)p(z | \theta)}{p(z)}.$$

Où $p(z) = \int p(\theta)p(z | \theta)d\theta$ est l'intégral sur toutes les valeurs possibles de θ (ou $p(z) = \sum_{\theta} p(\theta)p(z | \theta)$ dans le cas où θ est discret). On omet souvent le dénominateur qui ne dépend pas de θ et qui correspond à une constante de normalisation. On écrit alors la distribution *a posteriori* non normalisée de θ [20] sous la forme :

$$p(\theta | z) \propto p(\theta)p(z | \theta). \quad (3.3)$$

où « \propto » signifie « proportionnel à ».

3.2.2 Vraisemblance

En appliquant la formule de Bayes, il est possible d'utiliser la loi *a priori* $p(\theta)$ du vecteur de paramètres incertains θ , à la lumière des mesures réalisées et au travers du modèle statistique supposé (Éq. 3.1). La relation entre mesures réalisées et modèle supposé est quantifiée par la vraisemblance $p(z | \theta)$.

Dans notre cadre, la vraisemblance suit une distribution gaussienne multivariée de dimension n , de moyenne :

$$f_{\theta}(x) := (f_{\theta}(x_1), \dots, f_{\theta}(x_n))^T.$$

et de matrice de variance-covariance diagonale (sous l'hypothèse d'indépendance des incertitudes expérimentales) :

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_{\epsilon_1}^2, \dots, \sigma_{\epsilon_n}^2). \quad (3.4)$$

L'équation (3.2) peut ainsi être réécrite :

$$p(z | \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}[z - f_{\theta}(x)]^T \Sigma^{-1}[z - f_{\theta}(x)]\right). \quad (3.5)$$

3.2.3 Lois *a priori* et *a posteriori* conjuguées

Définition 3.2.1. Soit F une classe de distribution associée à $p(z | \theta)$ et P une classe de distribution *a priori* associée au paramètre θ . La classe P est dite conjuguée à la classe F si :

$$p(\theta | z) \in P \text{ pour tout } p(\cdot | \theta) \in F \text{ et } p(\cdot) \in P.$$

En d'autres termes, cela signifie que les lois des distribution *a posteriori* sont dans la même famille P des distributions *a priori*, pour des vraisemblances dans la famille F .

3.3. Construction d'un émulateur global par additivité et émulateurs élémentaires

Lorsque la loi *a posteriori* est conjuguée à la loi *a priori*, il est possible, pour certaines familles de distribution *a priori* et sous certaines hypothèses sur le modèle f_{θ} , de faire un calcul analytique de la loi *a posteriori* (cf. Section 3.5).

3.2.4 Cas général avec estimation par méthode MCMC et émulateur

Dans le cas général où le calcul analytique de la loi *a posteriori* n'est pas possible, celle-ci doit être estimée. Des méthodes du type « Markov Chain Monte-Carlo (MCMC) » ([21], [22]) sont pour cela utilisées, afin de fournir une approximation de la loi *a posteriori*. Dans le cas d'un modèle f_{θ} (simulateur) **coûteux en temps** de calcul, il n'est cependant **pas possible d'utiliser directement les méthodes MCMC**, qui nécessitent des milliers d'évaluations de la vraisemblance et donc d'appels au modèle.

Pour contourner ce problème, une solution consiste à approcher le modèle f_{θ} par un émulateur \hat{f}_{θ} , construit sur un nombre restreint M de simulations du modèle f_{θ} ([23], [24], [25]). Ce modèle mathématique de substitution doit approcher le plus fidèlement possible le modèle f_{θ} , tout en nécessitant un temps d'évaluation négligeable pour faire de nouvelles prédictions. Une fois construit, l'émulateur \hat{f}_{θ} peut être utilisé de manière intensive pour appliquer les méthodes MCMC et réaliser la calibration bayésienne des paramètres θ .

La calibration du simulateur fait face à une seconde problématique. En plus d'avoir un simulateur coûteux, un demi-millier de paramètres incertains doivent être calibrés afin de reproduire le plus fidèlement possible le cœur d'étude. Une calibration simultanée de l'ensemble de ces paramètres n'est par conséquent pas envisageable. Pour contourner ce problème de la **très grande dimension du paramètre θ** , nous proposons de **construire plusieurs émulateurs**, dits « élémentaires », chacun d'eux prenant en compte un seul groupe de paramètres technologiques (groupes disjoints). Une calibration peut ensuite être réalisée en s'appuyant sur **une hypothèse d'additivité pour construire un émulateur global**.

3.3 Construction d'un émulateur global par additivité et émulateurs élémentaires

3.3.1 Hypothèse d'additivité

Pour construire un émulateur (modèle physique simplifié) du simulateur, une hypothèse d'additivité forte est préalablement réalisée. Nous supposons qu'il est possible de séparer les p paramètres technologiques $\{\theta_1, \dots, \theta_p\}$ en k partitions de paramètres $\{\theta_{J_1}, \dots, \theta_{J_k}\}$, tel qu'il n'existe aucune interaction entre les groupes (interaction dite intergroupe). L'interaction intragroupe est néanmoins possible. Ainsi :

$$\forall j, j' \in \{1, \dots, k\}, \text{ on a } J_j \cap J_{j'} = \emptyset \text{ pour } j \neq j' \text{ et } \bigcup_{l=1}^k \theta_{J_l} = \{\theta_1, \dots, \theta_p\}.$$

3.3.2 Traitement neutronique spécifique par partition de paramètres

Chaque sous-ensemble de la partition peut alors être traité indépendamment. Il devient ainsi possible de développer (ou utiliser, si disponible) une méthode de neutronique permettant l'étude (séparée) d'une unique partition de paramètres technologiques θ_{J_i} . De cette sorte, des simulateurs physiques simplifiés sont obtenus pour modéliser l'impact de ces paramètres sur les sorties d'intérêt. Ces modèles simplifiés ont l'avantage de nécessiter un temps de calcul moins important que le simulateur complet pour traiter une partition de paramètres technologiques.

L'avantage de l'utilisation de ces simulateurs simplifiés est l'augmentation significative du budget de calcul à disposition. À partir de ces simulateurs physiques simplifiés, il devient possible de réaliser un nombre suffisamment important de simulations où le groupe de paramètres θ considéré est tiré aléatoirement selon sa plage de variation *a priori*. On obtient alors des bases d'apprentissage pour chaque sous-modèle physique, sur lesquelles des émulateurs élémentaires \hat{f}_{J_i} peuvent être estimés par des techniques d'apprentissage statistique.

3.3.3 Construction de l'émulateur global

Une hypothèse d'additivité (basée sur l'hypothèse de non interaction intergroupe) est ensuite utilisée pour construire un émulateur global à partir des émulateurs élémentaires. Les interactions potentielles entre les paramètres technologiques de deux groupes différents sur la grandeur d'intérêt prédite sont alors négligées lors de la construction de l'émulateur global à partir des émulateurs élémentaires. En contrepartie, ces émulateurs élémentaires peuvent être construits sur davantage de simulations issues des simulateurs physiques simplifiés.

3.3.4 « Relèvement » des émulateurs élémentaires

Afin de pouvoir construire l'émulateur global à partir des émulateurs élémentaires, une condition d'identifiabilité doit être respectée. Notons $f_l(\cdot, \theta_{J_l})$ la contribution pour le groupe de paramètres J_l . On suppose que :

$$\int f_l(\mathbf{x}, \theta_{J_l}) d\theta_{J_l} = 0, \forall \theta_{J_l} \text{ pour } l = 1, \dots, k.$$

Sous cette condition, lorsque l'ensemble des émulateurs élémentaires est estimé, l'émulateur global peut être construit comme une somme des émulateurs élémentaires sous la condition d'additivité, de telle sorte que :

$$\hat{f}_{\theta}(\mathbf{x}) = \hat{f}_0 + \sum_{l=1}^k \hat{f}_l(\mathbf{x}, \theta_{J_l}).$$

où $\int \hat{f}_{\theta}(\mathbf{x}) d\theta = \hat{f}_0(\mathbf{x})$

Ces différentes étapes sont décrites sur la Figure 3.1. Sur cette figure, la notation $\theta_{-J_i} = \{\theta \setminus \theta_{J_i}\}$ désigne l'ensemble des paramètres technologiques θ privé du groupe de paramètres technologiques θ_{J_i} .

3.3. Construction d'un émulateur global par additivité et émulateurs élémentaires

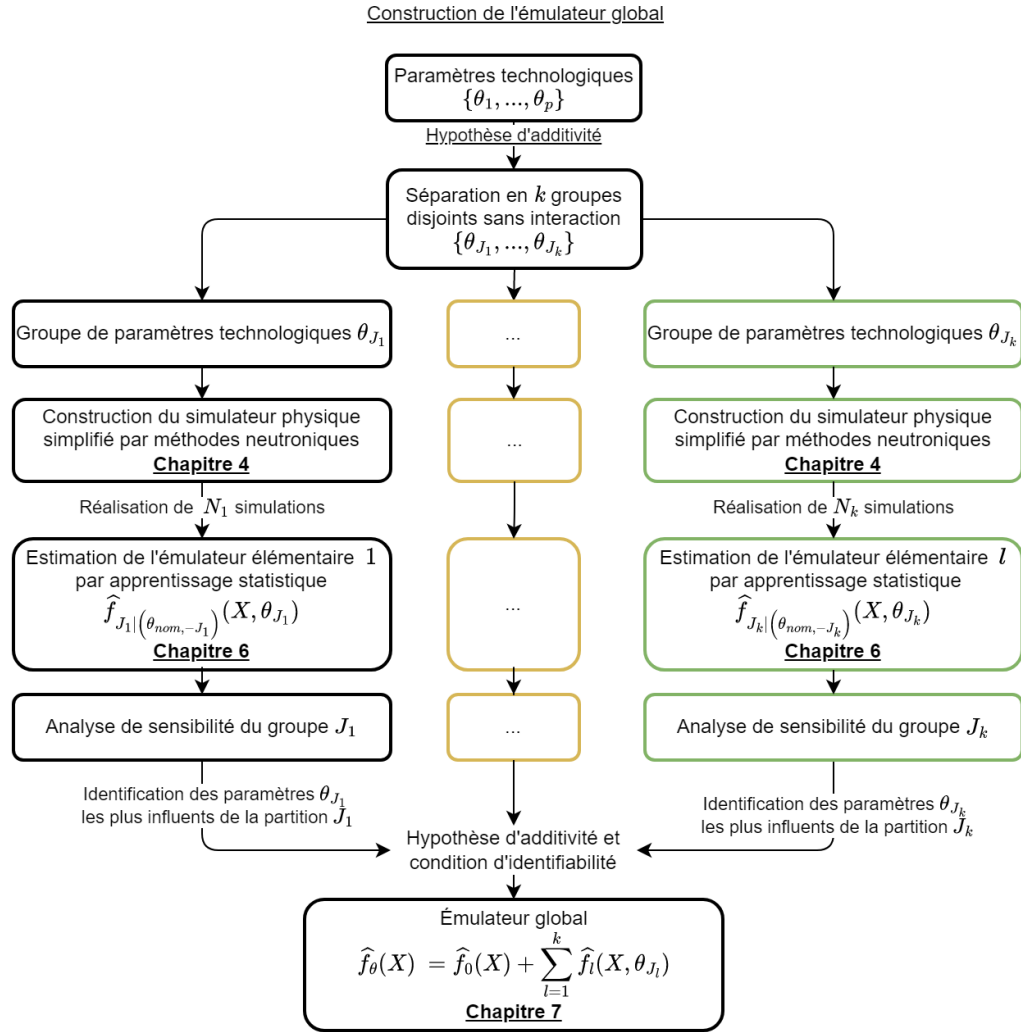


FIGURE 3.1 – Construction de l'émulateur global composé d'une combinaison linéaire d'émulateurs élémentaires.

3.3.5 Mise en oeuvre

La méthodologie proposée pour construire un émulateur élémentaire associé à un groupe de paramètres technologiques $\theta_e = (\theta_j)_{j \in J_l}$ se décompose en trois étapes.

1. Tout d'abord, un simulateur physique simplifié est construit à l'aide d'une méthode de neutronique. Ce simulateur est plus rapide que le simulateur complet. Il ne dépend que d'un groupe de paramètres technologiques θ_{J_l} . Ce simulateur est utilisable pour des petites perturbations de θ_{J_l} autour de leur valeur nominale, afin de ne pas introduire d'erreur liée à l'utilisation du simulateur simplifié.
2. Dans un second temps, ce simulateur simplifié est utilisé pour réaliser N_l simulations correspondant à des valeurs perturbées du groupe de paramètres θ_{J_l} étudié. Le but est de couvrir au mieux le domaine de variation des paramètres θ_{J_l} .
3. Finalement, à l'aide de cette base d'apprentissage (plus conséquente qu'avec le simulateur complet), un émulateur $\hat{f}_{\theta_{J_l}}$ est estimé par apprentissage statistique. Grâce à cet émulateur $\hat{f}_{\theta_{J_l}}$ nécessitant un temps de prédiction négligeable, il devient possible d'estimer la grandeur physique d'intérêt pour n'importe quelle valeur des paramètres θ_{J_l} (dans le domaine de variation des paramètres θ_{J_l}).

Dans une dernière étape, l'ensemble des émulateurs élémentaires est agrégé sous l'hypothèse d'additivité pour former un émulateur global.

3.4 Analyse de sensibilité en support à la calibration

A partir des différents émulateurs élémentaires ou directement des simulateurs physiques simplifiés, il est possible de réaliser des analyses de sensibilité afin d'identifier les paramètres technologiques qui, au sein de chaque groupe, ont une réelle influence sur les grandeurs d'intérêt simulées. Des stratégies de réduction de la dimension des paramètres θ peuvent alors être déployées, permettant de concentrer les efforts de calibration du cœur complet sur les paramètres les plus pertinents.

3.4.1 Analyse de sensibilité de l'émulateur global

À l'aide de l'émulateur global, il est à présent possible de prédire **instantanément** la grandeur d'intérêt, et ce quel que soit le vecteur de paramètres technologiques donné en entrée de l'émulateur. Il est ainsi possible d'envisager une calibration à l'aide d'un algorithme MCMC. Pour ne pas subir le « fléau de la dimension » lors du calcul de la loi *a posteriori* associée aux paramètres technologiques θ , nous proposons de réaliser une analyse de sensibilité de l'émulateur global \hat{f}_θ . Cette dernière permet de hiérarchiser les groupes de paramètres technologiques ayant la plus forte influence sur les sorties de l'émulateur.

À son issue, nous aurons à disposition l'ensemble des groupes de paramètres technologiques ordonnés selon leur influence sur l'estimateur global. Ces groupes de paramètres technologiques ordonnés du plus au moins influent sont notés :

$$\{\theta_{\tilde{j}_1}, \dots, \theta_{\tilde{j}_l}\}.$$

3.4.2 Calibration

L'émulateur global est utilisé extensivement pour la calibration bayésienne des paramètres technologiques θ (en utilisant des algorithmes MCMC). Cela permet d'estimer le jeu de paramètres $\hat{\theta}_{optimal}$ représentant au mieux le cœur tel que fabriqué. Ces paramètres sont définis comme le maximum de la distribution jointe *a posteriori*, associée aux variables aléatoires θ . Pour estimer cette distribution jointe, les mesures expérimentales \mathbf{z} , sont comparées aux prédictions issues de l'émulateur global \hat{f}_θ , et ce pour les mêmes paramètres de contrôle.

À l'issue de ce travail de calibration, il est alors possible d'estimer l'effet de la calibration des paramètres incertains sur les prédictions réalisées à l'aide du simulateur Monte-Carlo. Pour ce faire, une configuration **calibrée** du réacteur est construite à l'aide des paramètres technologiques $\hat{\theta}_{optimal}$. De nouvelles prédictions « calibrées » sont alors réalisées avec le simulateur Monte-Carlo. Il devient ainsi possible de comparer les écarts entre les prédictions et les mesures expérimentales avant calibration (utilisation du cœur « nominal » dans le simulateur) et après calibration (utilisation du cœur « calibré »).

Ce travail de calibration est schématisé par la Figure 3.2. Sur cette figure, le terme $\mathcal{L}(\theta)$ désigne la loi de probabilité, associée à la variable aléatoire θ . Le terme MAP fait quant à lui référence au Maximum *a posteriori* d'une distribution.

Calibration des paramètres technologiques à l'aide de l'émulateur global

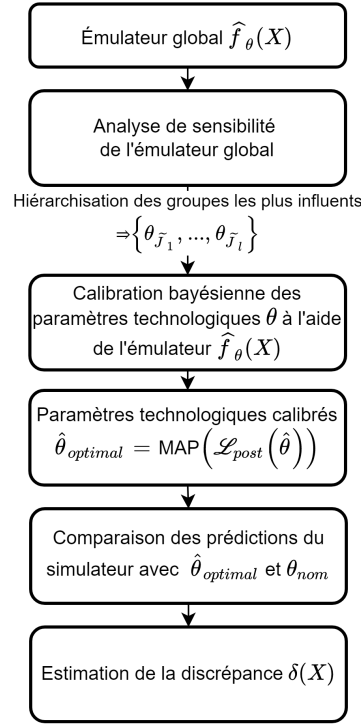


FIGURE 3.2 – Calibration des paramètres technologiques et estimation de la discrédance à l'aide de l'émulateur global.

3.5 Modèle linéaire bayésien

Au vu des profils des bases d'apprentissage construits à l'aide des modèles physiques simplifiés (cf. Chapitre 4), nous proposons de construire l'ensemble des émulateurs élémentaires associés (cf. Section 3.3) l'émulateur global (cf. Section 3.4) par un apprentissage statistique utilisant le modèle linéaire bayésien. Son formalisme est présenté dans cette section.

Nous supposons maintenant que f_θ est une fonction linéaire par rapport à θ . Rappelons que l'estimation de la loi *a posteriori* $p(\theta | z)$ s'appuie sur l'équation (3.5). En remplaçant f_θ dans l'équation (3.1) par sa forme paramétrique, on obtient alors :

$$z = H\theta + \epsilon. \quad (3.6)$$

Le vecteur $z = [z_i]_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ représente les n mesures expérimentales indépendantes. Pour simplifier les notations, on pose $z_i := z(\mathbf{x}_i)$. Associé à une mesure z_i , nous avons le vecteur des p fonctions de régression $h_i^T \in \mathbb{R}^p$. Les n mesures donnant lieu à la matrice des régresseurs² $H = [h_i^T]_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n,p}$. Le vecteur $\theta \in \mathbb{R}^p$ des paramètres technologiques incertains, est défini comme le vecteur des coefficients du modèle linéaire que l'on cherche à estimer pour construire l'émulateur. Finalement, $\epsilon = [\epsilon_i]_{i=1}^n$ représente le terme d'erreur. Il est supposé que l'erreur ϵ suit également une loi normale multivariée de matrice de covariance $\sigma^2 I_n$. Le paramètre σ^2 est supposé être inconnu. L'hypothèse d'homoscédasticité³ (σ^2 constant) plutôt

2. Dans les exemples disponibles dans la bibliographie, la matrice des régresseurs est souvent notée X . Cette lettre étant utilisée pour faire référence aux paramètres de contrôle, la notation H a été préférée.

3. L'homoscédasticité correspond au cas où la variance des résidus est la même pour chaque observation.

que d'hétéroscédasticité permet d'éviter l'introduction dans la modélisation de distributions de type inverse-Wishart [20].

L'objectif est d'inférer par une approche bayésienne la loi *a posteriori* pour le vecteur des paramètres incertains $\boldsymbol{\theta}$. Puisque nous ne connaissons pas l'écart-type σ associé au terme d'erreur, l'inférence sera réalisée sur la distribution jointe du couple $(\boldsymbol{\theta}, \sigma)$. La formule de Bayes s'écrit alors :

$$p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \mathbf{z}) = \frac{p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}, \sigma^2)p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)}{p(\mathbf{z})}. \quad (3.7)$$

Le cadre linéaire et l'hypothèse d'homoscédasticité présentée conduisent à une fonction de vraisemblance $p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$, gaussienne multivariée de dimension n , de moyenne $H\boldsymbol{\theta}$ et de variance $\sigma^2 I_n$. L'équation (3.5) se réécrit alors :

$$p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}, \sigma^2) \sim \mathcal{N}(\mathbf{z} | H\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 I_n). \quad (3.8)$$

Pour calculer la distribution *a posteriori* $p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \mathbf{z})$, nous utiliserons dans un premier temps la distribution *a priori* conjuguée du couple $p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$ de type gaussien inverse-gamma. Une fois ce calcul réalisé, une extension à la distribution *a priori* non informative $p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}$ sera discutée. C'est cette mesure *a priori* que nous utiliserons en pratique.

3.5.1 Calcul avec un modèle de lois conjuguées

Une loi *a priori* très populaire utilisée dans le cadre de la régression bayésienne linéaire est la loi conjuguée normale inverse-gamma :

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2) &= p(\boldsymbol{\theta} | \sigma^2)p(\sigma^2) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta} | m_{\boldsymbol{\theta}}, \sigma^2 V_{\boldsymbol{\theta}})IG(\sigma^2 | a, b) \\ &\Rightarrow (\boldsymbol{\theta}, \sigma^2) \sim NIG(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | m_{\boldsymbol{\theta}}, V_{\boldsymbol{\theta}}, a, b). \end{aligned}$$

où $m_{\boldsymbol{\theta}}$ et $\sigma^2 V_{\boldsymbol{\theta}}$ sont respectivement la moyenne et la matrice de covariance de la loi *a priori* gaussienne de $p(\boldsymbol{\theta} | \sigma^2)$, et a et b représentent respectivement les paramètres de forme et d'échelle de la loi *a priori* inverse-gamme de $p(\sigma^2)$. Le vecteur $m_{\boldsymbol{\theta}}$, la matrice $V_{\boldsymbol{\theta}}$ et les nombres $a > 0$ et $b > 0$ sont appelés hyperparamètres et sont choisis par le statisticien à l'aide des connaissances éventuelles sur $\boldsymbol{\theta}$ et σ^2 [13].

Définition 3.5.1. Soit X une variable aléatoire continue à valeurs positives suivant une loi de type inverse-gamma de paramètre de forme a et de paramètre d'échelle b . Sa densité de probabilité s'écrit :

$$p_{IG}(x | a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-(a+1)} \exp \frac{-b}{x}. \quad (3.9)$$

Pour cette loi *a priori*, on obtient alors :

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2) &= \frac{|V_{\boldsymbol{\theta}}|^{-1/2}}{(2\pi)^{p/2}\sigma^p} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{\theta} - m_{\boldsymbol{\theta}})^T V_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - m_{\boldsymbol{\theta}})\right] \times \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{a+1} \exp\left(\frac{-b}{\sigma^2}\right) \\ &\propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{a+\frac{p}{2}+1} \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}\left(b + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - m_{\boldsymbol{\theta}})^T V_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - m_{\boldsymbol{\theta}})\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

En appliquant la formule de Bayes Eq. (3.7), il est possible de calculer analytiquement la distribution *a posteriori* $p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \mathbf{z})$ comme suit :

$$p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \mathbf{z}) \propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{a^* + \frac{p}{2} + 1} \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}\left(b^* + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - m_{\boldsymbol{\theta}}^*)^T V_{\boldsymbol{\theta}}^{-1*}(\boldsymbol{\theta} - m_{\boldsymbol{\theta}}^*)\right)\right]$$

avec

$$m_{\boldsymbol{\theta}}^* = V_{\boldsymbol{\theta}}^*(V_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}m_{\boldsymbol{\theta}} + H^T \mathbf{z}), V_{\boldsymbol{\theta}}^* = (V_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} + H^T H)^{-1},$$

$$a^* = \frac{n}{2} + a \text{ et } b^* = b + \frac{1}{2}(\mathbf{z}^T \mathbf{z} + m_{\boldsymbol{\theta}}^T V_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} m_{\boldsymbol{\theta}} - m_{\boldsymbol{\theta}}^{*T} V_{\boldsymbol{\theta}}^{*-1} m_{\boldsymbol{\theta}}^*).$$

Ainsi, $p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \mathbf{z})$ suit également une loi normale inverse-gamma :

$$(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \mathbf{z}) \sim NIG(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | m_{\boldsymbol{\theta}}^*, V_{\boldsymbol{\theta}}^*, a^*, b^*) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta} | m_{\boldsymbol{\theta}}^*, \sigma^2 V_{\boldsymbol{\theta}}^*) IG(\sigma^2 | a^*, b^*). \quad (3.11)$$

Pour plus de détail sur le modèle linéaire bayésien, nous renvoyons à ([13], [26], [27], [28]).

3.5.2 Calcul avec distribution *a priori* non informative

Lorsqu'aucune information *a priori* n'est disponible, il peut être compliqué et discutable de construire une loi *a priori*. De plus, il peut arriver que l'expérimentateur souhaite laisser « les données parler d'elles-mêmes », de sorte que l'inférence ne soit pas affectée par des informations extérieures [20]. Pour ce faire, des distributions vagues, plates, diffuses ou non informatives sont utilisées. En faisant tendre $V_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} \rightarrow 0$ (la matrice nulle), $a \rightarrow -\frac{p}{2}$ et $b \rightarrow 0$, on obtient en condition limite d'après l'équation (3.10) une mesure impropre *a priori* non informative :

$$p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}.$$

En utilisant les résultats de l'Eq. (3.11) obtenus à partir d'une distribution *a priori* informative et en faisant tendre les hyperparamètres vers les limites présentées précédemment, on obtient directement la distribution *a posteriori* issue de cette mesure *a priori* (impropre) non informative. On montre que cette distribution est une loi normale inverse-gamma de la forme :

$$(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | \mathbf{z}) \sim NIG(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 | m_{\boldsymbol{\theta}}^*, V_{\boldsymbol{\theta}}^*, a^*, b^*) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta} | m_{\boldsymbol{\theta}}^*, \sigma^2 V_{\boldsymbol{\theta}}^*) IG(\sigma^2 | a^*, b^*). \quad (3.12)$$

Avec

$$m_{\boldsymbol{\theta}}^* = (H^T H)^{-1} H^T \mathbf{z} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \text{ et } V_{\boldsymbol{\theta}}^* = (H^T H)^{-1}$$

$$a^* = \frac{n-p}{2} \text{ et } b^* = \frac{n-p}{2} s^2 \text{ ou } s^2 = \frac{1}{n-p} (\mathbf{z} - H \hat{\boldsymbol{\theta}})^T (\mathbf{z} - H \hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

On reconnaît les estimateurs du maximum de vraisemblance. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est l'estimateur classique des moindres carrés et s^2 l'estimateur classique non biaisé de la variance σ^2 .

Loi marginale *a posteriori* de σ^2

De la distribution *a posteriori* issue de cette mesure *a priori*, il est possible d'identifier immédiatement la distribution marginale *a posteriori* de σ^2 sans avoir besoin de réaliser une quelconque intégration. On obtient ainsi :

$$\sigma^2 \mid \mathbf{z} \sim IG(\sigma^2 \mid a^*, b^*). \quad (3.13)$$

Loi marginale *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$

Afin d'obtenir la loi marginale *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$, il est nécessaire d'intégrer la loi *a posteriori* (3.12) du couple $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$ selon σ^2 . On obtient ainsi la distribution multivariée de Student ($MVSt^4$) :

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{z}) &= \int p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 \mid \mathbf{z}) d\sigma^2 = \int NIG(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 \mid m_{\boldsymbol{\theta}}^*, V_{\boldsymbol{\theta}}^*, a^*, b^*) d\sigma^2 \\ \Rightarrow \boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{z} &\sim MVSt_{2a^*}(m_{\boldsymbol{\theta}}^*, \frac{b^*}{a^*} V_{\boldsymbol{\theta}}^*) = MVSt_{n-p}[\hat{\boldsymbol{\theta}}, s^2(H^T H)^{-1}] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Explicitement, on a :

$$\Rightarrow p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{z}) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(\frac{n-p}{2}) \pi^{\frac{p}{2}} (n-p)^{\frac{p}{2}} |s^2(H^T H)^{-1}|^{\frac{1}{2}}} \times \left[1 + \frac{(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T (H^T H) (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})}{(n-p)s^2} \right]^{-\frac{n}{2}}.$$

3.5.3 Maximum *a posteriori* $(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\sigma}^2)^{MAP}$

À l'aide des différentes distributions *a posteriori* présentées dans la Section 3.5.2, il est possible de calculer analytiquement l'estimateur du Maximum (de vraisemblance) *A Posteriori* noté (MAP), du couple de paramètres $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$. Cet estimateur noté $(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\sigma}^2)^{MAP}$ est ainsi défini par :

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\sigma}^2)^{MAP} = \underset{[(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2) \in \mathbb{R}^{p,1}]}{\operatorname{argmax}} p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 \mid \mathbf{z}).$$

On a $p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 \mid \mathbf{z}) = p(\boldsymbol{\theta} \mid \sigma^2, \mathbf{z}) p(\sigma^2 \mid \mathbf{z})$. Or, d'après l'Éq. (3.14), on constate que $p(\boldsymbol{\theta} \mid \sigma^2, \mathbf{z})$ ne dépend pas de σ^2 . On obtient ainsi $p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 \mid \mathbf{z}) = p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{z}) p(\sigma^2 \mid \mathbf{z})$. D'après les propriétés des distributions de Student multivariées, on obtient directement :

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\sigma}^2)^{MAP} = ((H^T H)^{-1} H^T \mathbf{z}, \underset{(\sigma^2 \in \mathbb{R})}{\operatorname{argmax}} p(\sigma^2 \mid \mathbf{z})).$$

D'autre part, en utilisant les propriétés de la distribution inverse-gamma, on obtient directement :

$$\underset{(\sigma^2 \in \mathbb{R})}{\operatorname{argmax}} p(\sigma^2 \mid \mathbf{z}) = \frac{b^*}{a^* + 1}.$$

où a^* et b^* sont donnés par l'Eq. 3.12.

4. La notation $MVSt_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ correspond à une loi multivariée de Student de degré de liberté n , de paramètre de position $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice d'échelle $\boldsymbol{\Sigma}$.

On en déduit l'estimateur complet du MAP :

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\sigma}^2)^{MAP} = [(H^T H)^{-1} H^T \mathbf{z}, \frac{1}{n-p+2} (\mathbf{z} - H\hat{\boldsymbol{\theta}}^{MLE})^T (\mathbf{z} - H\hat{\boldsymbol{\theta}}^{MLE})].$$

3.5.4 Loi *a posteriori* prédictive de \mathbf{z}

Supposons à présent que nous voulons utiliser le modèle présenté afin de prédire m nouvelles mesures notées $\tilde{\mathbf{z}}$ pour un nouveau plan d'expériences $\tilde{H} \in \mathbb{R}^{m,p}$. Si les coefficients $\boldsymbol{\theta}$ et σ^2 étaient parfaitement connus, la distribution prédictive *a posteriori* suivrait une loi normale qui, d'après l'équation (3.8), serait de la forme $\tilde{\mathbf{z}} \mid \boldsymbol{\theta}, \sigma^2 \sim \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{z}} \mid \tilde{H}\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 I_m)$. À noter que dans cette situation, les prédictions $\tilde{\mathbf{z}}$ seraient totalement indépendantes des précédentes mesures \mathbf{z} . Pour prendre en compte l'information apportée par \mathbf{z} et l'incertitude « résiduelle » sur les paramètres $(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2)$, la loi *a posteriori* de ces paramètres doit être « propagée » dans la loi des prédictions. On obtient ainsi la loi conditionnelle pour les prédictions $\tilde{\mathbf{z}}$, sachant les observations \mathbf{z} :

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{z}} \mid \mathbf{z}) &= \int p(\tilde{\mathbf{z}} \mid \boldsymbol{\theta}, \sigma^2) p(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 \mid \mathbf{z}) d\boldsymbol{\theta} d\sigma^2 \\ &\sim \int \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{z}} \mid \tilde{H}\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 I_m) \times NIG(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 \mid m_{\boldsymbol{\theta}}^*, V_{\boldsymbol{\theta}}^*, a^*, b^*) d\boldsymbol{\theta}, d\sigma^2. \end{aligned}$$

Cette distribution prédictive *a posteriori* peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{z}} \mid \mathbf{z}) &= \int p(\tilde{\mathbf{z}} \mid \sigma^2) p(\sigma^2 \mid \mathbf{z}) d\sigma^2 \\ &= \int \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{z}} \mid \tilde{H}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \sigma^2(I_m + \tilde{H}(H^T H)^{-1}\tilde{H}^T)) \times IG(\sigma^2 \mid a^*, b^*) d\sigma^2 \\ &= \int NIG(\tilde{H}\hat{\boldsymbol{\theta}}, (I_m + \tilde{H}(H^T H)^{-1}\tilde{H}^T), a^*, b^*) d\sigma^2. \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{z}} \mid \mathbf{z} \sim MVSt_{n-p}(\tilde{H}\hat{\boldsymbol{\theta}}, s^2(I + \tilde{H}(H^T H)^{-1}\tilde{H}^T)). \quad (3.15)$$

Le lecteur intéressé peut se référer à la référence [26] pour les calculs détaillés qui conduisent à l'Eq. (3.15). L'étape principale de ce calcul est la définition de la distribution $p(\tilde{\mathbf{z}} \mid \sigma^2)$, qui découle directement du modèle utilisé. On a :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}} &= \tilde{H}\boldsymbol{\theta} + \epsilon_1, \text{ avec } \epsilon_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_m) \\ \boldsymbol{\theta} &= \hat{\boldsymbol{\theta}} + \epsilon_2, \text{ avec } \epsilon_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 (H^T H)^{-1}), \end{aligned}$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont indépendants. Directement, on obtient :

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{z}} \mid \sigma^2) &= p(\tilde{H}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{H}\epsilon_2 + \epsilon_1 \mid \sigma^2) \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{z}} \mid \sigma^2 &\sim \mathcal{N}(\tilde{H}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \sigma^2(I_m + \tilde{H}(H^T H)^{-1}\tilde{H}^T)). \end{aligned}$$

Il est à présent possible de prédire l'ensemble des grandeurs d'intérêt associées à un simulateur simplifié à l'aide de la distribution prédictive *a posteriori* donnée par l'équation (3.15).

Cette expression tient compte de l'incertitude due au terme d'erreur ϵ et de l'incertitude dans les estimations des coefficients réalisées sur un échantillon fini de mesures \mathbf{z} . À noter que plus le nombre de mesures \mathbf{z} sera grand, plus l'incertitude associée à l'estimation des paramètres de la distribution *a posteriori* diminue. En effet, la variance de la loi de Student multivariée caractérisant leur incertitude décroît avec n , cf. Éq. (3.14).

3.6 Considérations pratiques pour l'application aux paramètres technologiques

Différents paramètres technologiques incertains θ sont susceptibles d'influencer la sortie du simulateur. Des plages de variation de ces paramètres sont cependant connues *a priori*. Cela signifie qu'ils sont choisis dans un intervalle autour de leur valeur nominale.

Pour fixer les plages de variation de ces paramètres technologiques, la métrologie du cœur tel que fabriqué est utilisée, soit un ensemble de mesures directes des paramètres technologiques. Néanmoins, l'ensemble de la variabilité des paramètres incertains ne peut pas être quantifié par des mesures métrologiques. La variabilité associée à ces paramètres est fixée par avis d'expert. Ces informations, issues de la connaissance de l'expérimentateur ou de l'avis des experts, sont utilisées pour construire les lois *a priori* des paramètres technologiques incertains.

3.6.1 Impossibilité de traiter tous les paramètres technologiques

Les réacteurs nucléaires sont des systèmes physiques complexes, car composés d'une multitude d'éléments. Chaque élément composant le cœur du réacteur souffre d'incertitudes liées à sa fabrication. Ces incertitudes proviennent des tolérances de fabrication prises par le constructeur afin de pouvoir assembler le réacteur, ainsi que des incertitudes liées à l'usage des éléments le composant.

Pour quantifier l'incertitude globale de fabrication associée à un réacteur nucléaire, il est théoriquement nécessaire de considérer l'ensemble des paramètres technologiques incertains provenant de l'ensemble des éléments composant le réacteur nucléaire. Par exemple, bien que le cœur d'étude soit relativement simple, il est malgré tout composé de 1500 volumes différents (dans un plan de chargement à 32 éléments combustibles).

Pour chaque élément le composant, le cœur souffre de deux types d'incertitude liés à sa conception. Le premier type d'incertitude technologique est purement géométrique. Lors de la fabrication du cœur, ses éléments sont d'une part placés avec une certaine incertitude. D'autre part, lors de la phase d'assemblage, il est nécessaire de laisser des tolérances au niveau des éléments le composant, afin de répondre aux contraintes mécaniques liées à la construction. Il est par exemple nécessaire de laisser du jeu au niveau des dimensions des plaques combustibles pour pouvoir les insérer dans les assemblages. Finalement, s'ajoute à ces imprécisions une incertitude liée à l'usinage de ses éléments. Les éléments composant le cœur sont construits selon la note de conception, mais à une incertitude de fabrication près.

On retrouve de plus des incertitudes liées au bilan matière des éléments composant le cœur. Comme pour les incertitudes géométriques, les éléments sont conçus selon la note de conception, mais à une incertitude près. À titre illustratif, prenons l'exemple de la teneur en bore des joues borées, jouant le rôle d'absorbants neutroniques connu à une incertitude près.

3.6. Considérations pratiques pour l'application aux paramètres technologiques

Il est dans ce sens inenvisageable de considérer et de calibrer simultanément l'ensemble des paramètres technologiques incertains, compte tenu de la dimension du problème de calibration qui en résulterait.

3.6.2 Identification des paramètres influents

Pour diminuer la dimension du problème et rendre réalisable la calibration, une identification des paramètres influents a été réalisée. Ainsi, seuls les paramètres technologiques incertains relatifs à la géométrie et au bilan de matière recensés respectivement dans les Tableaux 3.1 et 3.2 ont été retenus.

Chaque ligne de ces tableaux correspond à un groupe de paramètres technologiques supposés indépendants (cf. Section 3.3). Une méthodologie de neutronique, permettant la conception d'un simulateur physique simplifié (cf. Figure 3.1) sera développée ou utilisée pour chacun de ces groupes. Ce simulateur sera exploité afin de construire une base d'apprentissage permettant l'estimation d'un émulateur élémentaire. L'ensemble des émulateurs élémentaires sera alors utilisé pour calibrer l'ensemble des paramètres technologiques identifiés comme influents.

Paramètres à caler	Nombre de paramètres
Positions (x, y) des 49 tubes-guides	49×2
Positions (x, y) des 32 éléments combustibles	32×2

TABLEAU 3.1 – Paramètres technologiques relatifs au positionnement des éléments composant le cœur.

Paramètres à caler	Nombre de paramètres
Densité des modérateurs intérieurs	32
Densité lattes absorbantes	16×2
Densité des joues borées	32×2
Enrichissement combustible	32×2

TABLEAU 3.2 – Paramètres technologiques relatifs au bilan matière des éléments composant le cœur.

Au regard des Tableaux 3.1 et 3.2, on constate que 162 paramètres sont des paramètres géométriques et que 192 sont relatifs au bilan matière. Malgré une première sélection des paramètres technologiques identifiés comme les plus influents, la dimension du problème de calibration est toujours trop grande (face au coût en temps de calcul du simulateur à disposition). Les émulateurs élémentaires développés pour chaque partition de paramètres technologiques seront ainsi utilisés lors d'analyses de sensibilité et permettront de réaliser une seconde réduction du nombre de paramètres à traiter lors la résolution du problème de calibration.

3.7 Synthèse

Nous avons vu au travers de chapitre qu'il n'est pas possible de réaliser une calibration directe des paramètres technologiques incertains du jumeau numérique utilisé en entrée du simulateur à l'aide des mesures expérimentales. En effet, la dimension du problème de calibration et les temps de calcul du simulateur font obstacle à cette calibration directe.

Pour contourner ces problèmes, nous proposons d'approcher le simulateur par un émulateur construit sur un nombre limité de ces simulations. Cependant, du fait des deux problématiques précédentes, il n'est pas possible de construire une base d'apprentissage suffisamment grande pour réaliser son estimation par apprentissage statistique.

S'appuyant sur une hypothèse d'additivité, nous proposons d'estimer cet émulateur global en agrégeant des émulateurs élémentaires indépendants se basant sur des modèles physiques simplifiés. En utilisant ces modèles physiques, il devient possible de construire des bases d'apprentissage suffisantes pour estimer ces émulateurs élémentaires selon le formalisme du modèle linéaire bayésien.

Suite à leur estimation, ces émulateurs élémentaires sont finalement agrégés sous une hypothèse d'additivité pour construire l'émulateur global. Il devient alors possible d'identifier les paramètres les plus influents pour répondre à la problématique de la dimension du travail de calibration. Du fait de la résolution des deux problématiques identifiées, l'émulateur global peut finalement être utilisé pour calibrer les paramètres technologiques incertains afin d'estimer l'erreur purement numérique du simulateur à disposition.

Chapitre 4

Calcul de perturbation

Sommaire

4.1	Estimation directe	44
4.1.1	Principe	44
4.1.2	Problématique statistique	44
Partie 1 : Paramètres géométriques		46
4.2	Reprise surfacique appliquée à la position des tubes-guides . .	46
4.2.1	Principe de la méthode	46
4.2.2	Validation numérique de la méthode	49
4.2.3	Étude de l'effet des perturbations à l'aide de la méthode de reprise surfacique	52
4.2.4	Avantages et inconvénients de la méthode	54
4.3	Reprise surfacique appliquée à la position des éléments combustibles	56
4.3.1	Première étape : stockage des sources	56
4.3.2	Deuxième étape : relance des sources	57
4.3.3	Validation numérique et analyse de sensibilité	57
4.3.4	Hypothèse de linéarité	60
4.4	Synthèse partie 1	63
Partie 2 : Paramètres associés au bilan de matière		64
4.5	Echantillons corrélés	64
4.5.1	Principe de fonctionnement	64
4.5.2	Calcul des facteurs correctifs	65
4.5.3	Mise en œuvre	67
4.5.4	Hypothèse d'additivité	69
4.5.5	Hypothèse de linéarité	73
4.6	Synthèse partie 2	76

Dans ce chapitre est présenté l'ensemble des méthodes de neutronique développées et utilisées pour estimer l'effet d'une perturbation d'un paramètre technologique (écart au nominal), sur les grandeurs mesurées par l'Instrumentation In-Core. Dans une première partie, nous discutons les méthodologies développées pour traiter des paramètres technologiques **géométriques**. Dans une seconde partie, les méthodes présentées permettent le traitement de

paramètres technologiques associés au **bilan de matière** des éléments composant le réacteur.

4.1 Estimation directe

4.1.1 Principe

La méthode dite « directe » pour réaliser ces estimations à partir du simulateur de référence (code Monte-Carlo de transport de particules) consiste à réaliser deux simulations. Une première sur la configuration nominale et une seconde sur une configuration perturbée.

En pratique, une configuration perturbée est créée en perturbant les paramètres technologiques d'intérêts dans des intervalles représentatifs de leurs incertitudes. Les prédictions obtenues à l'issue de ces calculs perturbés sont ensuite comparées aux résultats de référence issus d'un calcul sur la configuration nominale. Finalement, cette comparaison permet d'estimer l'effet d'une perturbation d'un paramètre technologique (ou d'un groupe de paramètres) sur les prédictions du simulateur, sans introduire d'hypothèses de calcul.

4.1.2 Problématique statistique

Ces comparaisons peuvent cependant s'avérer difficiles à réaliser en raison de la petitesse des effets associés à la perturbation des paramètres technologiques sur les prédictions réalisées.

L'incertitude Monte-Carlo sur la prédiction réalisée peut être plus grande que l'effet de la perturbation elle-même. Ainsi, lors de la comparaison entre les résultats nominaux et perturbés, l'effet de la perturbation appliquée peut être non détectable du fait des incertitudes Monte-Carlo.

Plus formellement, soit deux variables aléatoires Nom et $Pert$ de variance $\text{Var}[Nom]$ et $\text{Var}[Pert]$ associées à une estimation d'une grandeur d'intérêt sur la configuration nominale et sur la configuration perturbée. Pour obtenir une estimation fiable de l'effet de la perturbation introduite, il est nécessaire de respecter l'inégalité suivante :

$$(\mathbb{E}[Nom - Pert])^2 \gg \text{Var}[Nom - Pert] = \text{Var}[Nom] + \text{Var}[Pert]. \quad (4.1)$$

L'égalité dans le terme de droite de l'équation (4.1) provient de l'indépendance des deux calculs Monte-Carlo réalisés sur la configuration nominale et perturbée (covariance nulle).

Ainsi, pour fournir une évaluation significative de l'influence de la perturbation appliquée, la précision des calculs Monte-Carlo doit être considérablement augmentée. Pour y parvenir, une possibilité est de simuler un plus grand nombre de particules. Cependant, en raison du temps de calcul élevé pour réaliser ces simulations, cette solution n'est souvent pas viable.

Cette estimation directe est ainsi conceptuellement facile à mettre en œuvre et dépourvue d'approximations, mais dispose d'une forte limitation. Elle nécessite des estimateurs disposant d'une faible variance. Un nombre important de particules doit par conséquent être simulé. Cette limitation peut rapidement s'avérer prohibitive concernant les temps de calcul nécessaires à son déploiement.

Pour répondre aux limitations de l'estimation directe de l'effet d'une perturbation, il est nécessaire d'utiliser des méthodes permettant de répondre spécifiquement aux contraintes

du modélisateur. Ces méthodes doivent permettre de quantifier l'effet d'une perturbation d'un paramètre technologique, et ce à un moindre coût en temps de calcul en comparaison d'une estimation par calcul Monte-Carlo directe.

Partie 1 : Paramètres géométriques

La première partie de ce chapitre présente les méthodes de neutronique développées pour estimer l'effet de perturbation appliquée à des paramètres technologiques géométriques. La Section 4.2 aborde le problème de l'estimation de l'effet introduit par une petite perturbation de la position des sondes de mesure. La Section 4.3 aborde quant à elle l'estimation des effets introduits par une perturbation de la position des éléments combustibles. Pour répondre à ces problèmes, une approche en deux étapes se basant sur le principe de la reprise surfacique est présentée.

La première étape de ces méthodes est conduite sur l'ensemble de la géométrie du cœur étudié. Pendant cette étape, toutes les caractéristiques des particules traversant des surfaces d'intérêts définies par l'utilisateur sont enregistrées dans des fichiers « sources ». Dans une deuxième étape, ces particules précédemment enregistrées sont relancées sur des géométries simplifiées afin d'estimer les grandeurs d'intérêt. Cela conduit à une diminution considérable du temps de calcul. Cette diminution permet alors une estimation rapide de l'effet des perturbations appliquées sur les grandeurs d'intérêt.

Cette approche n'est cependant pas limitée à des perturbations géométriques des sondes de mesure ou des éléments combustibles. Elle peut également être utilisée lors d'études paramétriques concernant la géométrie ou les compositions des éléments du cœur étudié.

4.2 Reprise surfacique appliquée à la position des tubes-guides

Pour estimer avec une précision suffisante les effets d'une perturbation en un temps de calcul raisonnable, la méthodologie en 2 étapes présentées ci-dessous est mise en application. En utilisant cette méthodologie, une diminution importante du temps de calcul des simulations est obtenue. Il devient par conséquent, possible de réaliser des estimations fiables de l'effet des perturbations introduites sur les grandeurs d'intérêt.

4.2.1 Principe de la méthode

La méthode présentée est inspirée des calculs permettant l'estimation de l'effet d'une perturbation par l'utilisation d'un corps noir, décrite en détail dans [29]. Cette méthode suit le formalisme exact de la théorie des perturbations (c'est-à-dire non limitée au premier ordre) [30]. Elle permet d'estimer les effets des perturbations sur les réactivités du réacteur étudié.

Dans ces travaux antérieurs, la variation de réactivité associée à la perturbation ¹ d'un élé-

1. Tout type de perturbation peut être opéré : concentration, géométrie, milieu, sections efficaces, ... ,

ment composant le réacteur entre une configuration nominale et perturbée est estimée à l'aide d'une troisième configuration. Dans cette troisième configuration, un corps noir substitue le volume d'intérêt où la perturbation est appliquée. Chaque neutron entrant dans le corps noir est alors enregistré puis pondéré à l'aide d'une source d'importance calculée par la méthode des probabilités itérées de fission (IFP) ([31], [32]). Cette pondération conduit à une estimation exacte de l'effet introduit par la perturbation.

La méthodologie présentée dans cette section consiste en un calcul en deux étapes, basé sur le principe de reprise surfacique [33]. Cette méthode approxime certains aspects de la théorie des perturbations exacte pour accéder à des diminutions des temps de calcul significatives.

La première étape de cette nouvelle méthode consiste en un calcul réalisé sur le modèle complet du réacteur. Durant cette étape, toutes les particules entrantes dans un volume d'intérêt sont enregistrées. Au cours de la seconde étape de cette méthodologie, dite « locale », l'ensemble des particules précédemment enregistrées sont utilisées comme sources pour un calcul de propagation à l'intérieur du volume d'intérêt. Le principe de fonctionnement de la méthodologie est illustré sur la Figure 4.1.

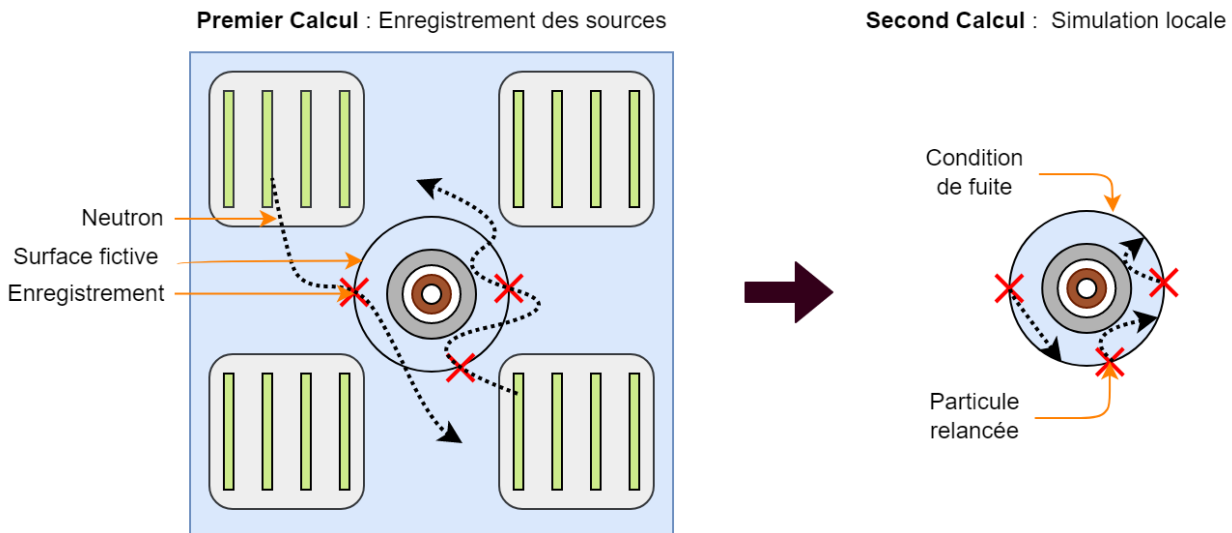


FIGURE 4.1 – Principe de la reprise surfacique appliquée aux sondes de mesure.

Premier calcul : Enregistrement des sources

Durant la première étape de calcul, effectuée une unique fois, une simulation Monte-Carlo classique, relativement longue, est menée sur le modèle complet du réacteur. Le code Monte-Carlo TRIPOLI-4[®] est utilisé pour enregistrer l'ensemble des caractéristiques des particules entrant dans une « sous-géométrie », définie par des surfaces de reprise. Cette sous-géométrie est utilisée lors de la seconde étape de calcul. Elle permet d'estimer l'effet de la perturbation d'un paramètre technologique de la sonde incluse dans la sous-géométrie.

Lors de cette phase d'enregistrement, une source secondaire est créée à l'emplacement de la surface fictive, comme illustré sur l'image gauche de la Figure 4.1. Cette source secondaire est ensuite utilisée lors de la seconde étape de calcul, pour estimer l'effet associé à la perturbation introduite.

Cependant, pour produire une estimation non biaisée de la grandeur d'intérêt et bénéficier d'une diminution maximale des temps de calcul, diverses considérations doivent être prises

en compte lors du positionnement de la surface de reprise.

- La surface de reprise doit intégralement séparer la source émettrice de particules de l'emplacement où la grandeur d'intérêt est estimée. Une particule ne doit pas pouvoir être émise par la source et arriver au niveau du point de calcul sans avoir traversé la surface de reprise.
- Seules les particules entrant dans le volume défini par la surface de reprise doivent être enregistrées. Un manquement à cette règle entraînerait une surestimation importante de la grandeur d'intérêt lors de la simulation locale.
- Cette surface doit être placée au plus proche de l'objet étudié pour améliorer les performances de la méthodologie. Elle doit néanmoins être placée suffisamment loin pour permettre l'application de la perturbation envisagée. Cette surface doit également être placée suffisamment loin de l'objet étudié pour éviter l'apparition de biais, du fait d'un écart au régime des petites perturbations. Un compromis doit donc être trouvé concernant le positionnement optimal de cette surface de reprise.
- Finalement, pour éviter un biais dû à un sous-échantillonnage d'un événement rare, un nombre suffisant de particules doit être enregistré. Cela permet la création d'une source de reprises représentative du problème physique en espace, angle et énergie.

Second calcul : Simulation locale

Lors de la simulation « locale » de la méthodologie, les particules précédemment enregistrées sont relancées de multiples fois sur la sous-géométrie définie par les surfaces de reprise. Le principe de fonctionnement de la simulation dite « locale » est illustré sur l'image droite de la Figure 4.1.

Pour ne pas surestimer la quantité d'intérêt, toutes les particules quittant la sous-géométrie doivent être détruites. Pour ce faire, il est possible de construire une nouvelle géométrie indépendante représentant uniquement le volume à l'intérieur de la surface de reprise. Cette considération permet de s'assurer que les conditions de fuite sont satisfaites.

La simulation locale réalisée sur la sous-géométrie présente un avantage considérable en ce qui concerne le temps de calcul par rapport à l'étape d'enregistrement. Tous les événements n'ayant pas un lien direct avec la quantité d'intérêt sont simulés lors de la phase d'enregistrement sur la géométrie complète du cœur. Ainsi, seuls les événements ayant une influence directe sur la grandeur d'intérêt, moins nombreux par nature, sont simulés lors de la simulation locale. En se « concentrant » sur la zone d'intérêt, une diminution massive du nombre d'événements à simuler et ainsi du temps de calcul sont obtenus.

Estimation de l'effet de la perturbation appliquée : Simulation locale

Pour profiter de l'accélération observée lors de la simulation locale, une hypothèse est néanmoins nécessaire. Nous supposons qu'une petite perturbation appliquée à un élément de la sous-géométrie lors de la simulation locale ne conduit pas à un changement significatif de la distribution des particules stockées lors de l'étape d'enregistrement.

Sous cette hypothèse, pour étudier l'effet d'une perturbation d'un élément de la sous-géométrie sur les taux de fission mesurés par la sonde, il suffit d'appliquer la perturbation envisagée à un élément composant la sous-géométrie et d'y réaliser un calcul Monte-Carlo rapide. L'utilisation de cette méthode de reprise surfacique, permet donc d'estimer rapidement l'effet d'une perturbation.

4.2.2 Validation numérique de la méthode

Comparaisons références/méthodologies

Pour garantir la validité de la méthodologie, une campagne de validation numérique a été effectuée pour un paramètre technologique géométrique lié aux sondes de mesure. À cette fin, des calculs de criticité conventionnels, appelés calculs de référence, ont été comparés à des simulations équivalentes utilisant la méthode précédente. Ces simulations ont été réalisées à l'aide du code TRIPOLI-4®.

Lors d'une première campagne de validation numérique, la position dans le plan xy des 16 sondes appartenant au quart de cœur inférieur gauche (cf. Figure 2.1) a été perturbée. Les critères de symétrie du réacteur ont été utilisés pour réduire le nombre de sondes à étudier lors de cette analyse.

Pour chacune de ces 16 sondes, 48 configurations perturbées et 1 configuration nominale ont été étudiées. Ainsi $16 \times 49 = 784$ points de comparaison sont disponibles. Chaque translation $(\Delta x, \Delta y)$ a été appliquée par rapport à la configuration nominale $(\Delta x = 0, \Delta y = 0)$. La position des sondes de mesure selon l'axe x et y a été perturbée dans la plage de variation ± 1 mm, avec un pas de 0,33 mm. Ce pas et cette plage de variation conduisent à une « grille de perturbation » à deux dimensions composée de 49 points. Les translations appliquées aux sondes de mesure sont présentées sur l'abscisse de l'image gauche de la Figure 4.2. Cette étude est appelée : analyse des perturbations « extrêmes ».

Une seconde campagne de validation numérique a été effectuée pour de plus petites perturbations. Durant cette étude, 15 sondes identifiées comme influencées par une translation de leur position (cf. Tableau 4.3) ont été considérées. Les translations appliquées à la position des sondes lors de cette seconde étude appartiennent à la plage de variation $\pm 0,15$ mm, pour un pas de 0,15 mm. L'ensemble des translations appliquées à la position des sondes sont présentées en abscisse de l'image droite de la Figure 4.2. Une grille à deux dimensions composée de 9 points est ainsi à disposition. Nous avons ainsi, $15 \times 9 = 135$ points de comparaison pour cette étude dite des « petites » perturbations.

Comme le montre le Tableau 4.1, les incertitudes Monte-Carlo² des simulations de référence et celles utilisant la méthodologie ont été réduites lors de validation numérique menée sur les petites perturbations. Cette réduction des incertitudes Monte-Carlo permet la production d'estimations plus fiables des effets des perturbations. Cela permet par conséquent la validation des observations réalisées. Les calculs de référence pour l'étude réalisée sur les petites perturbations ont nécessité 45 heures sur 100 processeurs.

	Référence	Méthode
Perturbations extrêmes	0,25 %	0,08 %
Petites perturbations	0,06 %	0,05 %

TABLEAU 4.1 – Incertitude Monte-Carlo moyenne des résultats utilisés pour la validation numérique.

2. Dans ce document, les incertitudes Monte-Carlo des grandeurs estimées sont données à un écart-type (1σ). À savoir : $\sigma\% = 100 \times \frac{\sigma}{\text{score}}$, avec σ l'écart-type « absolu » et score l'estimation de la grandeur d'intérêt.

Hypothèse d'indépendance

Pour simuler les résultats présentés dans la Figure 4.2 et utilisés lors de la validation numérique à un moindre coût en temps de calcul, une hypothèse d'indépendance est faite. Nous supposons que la perturbation appliquée à une sonde n'influence pas les mesures des sondes adjacentes. En effet, les sondes sont placées à 10 cm de distance. Connaissant le libre parcours moyen d'un neutron (quelques millimètres à quelques centimètres selon les milieux traversés), cette hypothèse peut être considérée comme légitime. Il devient donc possible de traiter chaque sonde de mesure indépendamment.

L'hypothèse d'indépendance est utilisée lors des calculs de référence afin de diminuer le nombre de simulations à réaliser. En effet, sous cette hypothèse, il est possible pour chaque calcul de référence de traduire toutes les sondes de mesure selon le même couple $(\Delta x, \Delta y)$. Cette astuce permet de ne réaliser qu'une seule simulation par perturbation envisagée, soit 49 simulations au total lors de l'étude des perturbations extrêmes au lieu de $784 = \underbrace{16}_{IIC} \times \underbrace{49}_{Perturbation}$ calculs si l'hypothèse d'indépendance n'avait pas été utilisée.

Cette hypothèse d'indépendance est également utile à la méthodologie. Sous cette dernière, il suffit d'effectuer une unique simulation sur la configuration nominale du cœur complet pour créer les « sources de reprise ». À la fin de cette unique simulation, toutes les sources de reprise utilisées lors des simulations locales sont disponibles. Comme il est supposé que les perturbations appliquées aux sondes n'influencent pas les sondes voisines, chaque sonde de mesure peut alors être traitée indépendamment à l'aide de la méthode de reprise surfacique.

Résultats

Les résultats des deux campagnes de validation numérique sont présentés dans le Tableau 4.2. La méthodologie de reprise présentée fournit des résultats convenables. Un faible biais est observé lors de l'étude réalisée sur les perturbations extrêmes. Un écart relatif moyen de 0,17 % entre les estimations de référence et celles provenant de la méthodologie est observé pour les 784 points de comparaison. La méthode surestime légèrement les calculs de référence.

Concernant l'étude relative aux « petites perturbations », aucun biais n'est observé. Compte tenu des taux de convergence des calculs utilisés pour cette étude (cf. Tableau 4.1), il est possible que l'écart entre le calcul de référence et le calcul utilisant la méthode résulte seulement de la nature stochastique du simulateur.

	Écart relatif moyen (%)	Écart-type	Points de comparaison
Perturbations extrêmes	-0,17	0,51	784
Petites perturbations	5.10^{-4}	0,13	135

TABLEAU 4.2 – Résultats de la validation numérique.

La partie gauche de la Figure 4.2 illustre le biais observé lors de l'étude des perturbations dites « extrêmes ». Les résultats sont présentés pour la sonde A3 placée en périphérie du réacteur (cf. Figure 2.1). Un biais équivalent est observé sur les autres sondes dont les mesures sont influencées par une perturbation de leur position.

Les taux de fission estimés à l'aide de la méthode pour les perturbations les plus extrêmes ne sont pas en accord avec les estimations de référence. Les estimations obtenues à l'aide de

4.2. Reprise surfacique appliquée à la position des tubes-guides

la méthode sont « amplifiées » en comparaison des calculs de référence. Les taux de fission estimés par la méthodologie sont inférieurs à la référence pour de faibles taux de fission et supérieurs pour des taux de fission élevés.

La partie droite de la Figure 4.2 illustre le bon accord entre estimation réalisée à l'aide de la méthode et estimation de référence lors de l'étude dite des « petites perturbations ».

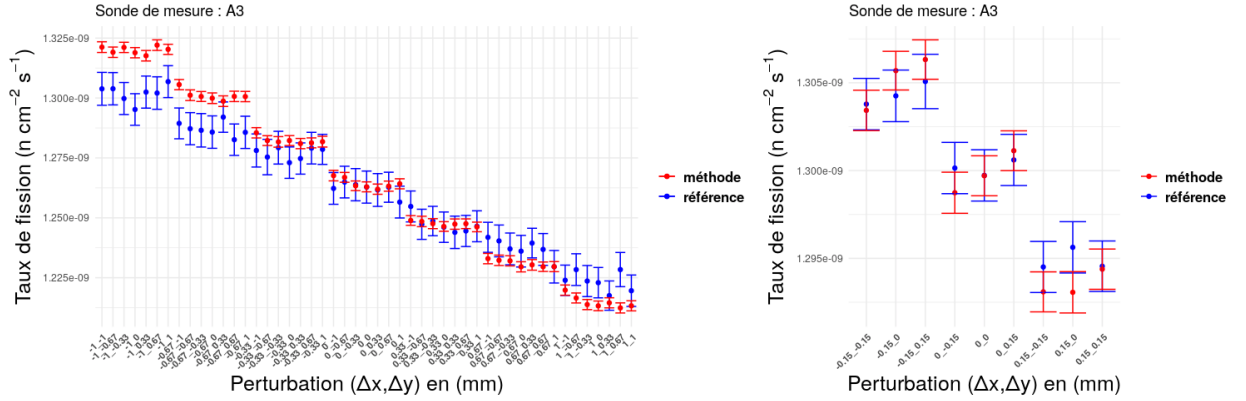


FIGURE 4.2 – Comparaison entre estimation de référence et estimation utilisant la méthodologie pour une sonde périphérique (sonde A3). (Gauche) étude des « perturbations extrêmes ». (Droite) étude des « petites perturbations ». Les résultats présentés ont été simulés dans deux conditions expérimentales différentes pour la même sonde. Les barres d'erreur sont données à deux sigmas.

La cause probable du dysfonctionnement de cette méthodologie lors de l'étude des perturbations extrêmes est la déviation par rapport au régime des petites perturbations. En effet, pour cette étude, la surface de reprise a été placée à 2,5 mm de la partie externe de la sonde de mesure (le rayon de la surface de reprise est de 9 mm et le rayon extérieur de la sonde de mesure est de 6,5 mm). Ainsi, une translation de 1 mm de la position de la sonde selon l'axe x ou y réduit cet écart à 1,5 mm. Ainsi, pour cette perturbation, l'espace entre la surface extérieure de la sonde et la surface de reprise est réduit de 40 %.

De ce fait, cette perturbation ne peut plus être considérée dans le cadre du régime des petites perturbations. En effet, la surestimation des résultats obtenus à l'aide de la méthodologie provient de la proximité de la sonde d'une partie de la surface de reprise, où un nombre important de particules est enregistré. La cause des surestimations observées provient simplement d'une exposition trop importante de la sonde de mesure aux neutrons préalablement enregistrés. À l'inverse, les sous-estimations observées sont liées à la proximité de la sonde d'une zone de la surface de reprise où peu de particules sont enregistrées.

Pour la validation numérique concernant l'étude des petites perturbations, la distance entre la surface de reprise et la partie externe de l'instrumentation a été réduite de 6 %. Cette gamme de perturbations appartient au régime des petites perturbations. Ainsi nous obtenons un bon accord entre les estimations de référence et celles calculées par la méthode proposée.

4.2.3 Étude de l'effet des perturbations à l'aide de la méthode de reprise surfacique

Sensibilité

Afin de quantifier l'effet des perturbations introduites, la notion de sensibilité à une perturbation est utilisée extensivement dans la suite du document.

Définition 4.2.1. Notons *nominal* la mesure sur la configuration de référence et *perturbé* la mesure sur celle où l'on cherche à quantifier l'effet de la perturbation d'un paramètre technologique. La sensibilité est alors définie par :

$$Sensibilité = \frac{perturbé - nominal}{nominal}.$$

Identification des sondes sensibles

Nous présentons ici, une première analyse de sensibilité locale dans le régime des petites perturbations. Les 27 sondes présentes dans la moitié inférieure du réacteur ont été étudiées. Leur position dans le plan xy a été perturbée dans la plage de variation $\pm 0,15$ mm selon les axes x et y , et ce, pour un pas de 0,05 mm. Une « grille de perturbation » à deux dimensions composée de 49 points est ainsi obtenue pour chacune des sondes considérées.

Pour chacune des perturbations appliquée aux sondes, les taux de fission « perturbés » ont été estimés en utilisant la méthodologie précédemment discutée. Ensuite, en utilisant l'estimation faite pour la configuration nominale, également réalisée à l'aide la méthodologie, l'ensemble des sensibilités a pu être déduit. Ces sensibilités sont finalement regroupées dans une « carte de sensibilité » dont chaque point correspond à l'estimation de la sensibilité associée à la translation appliquée selon les axes x et y .

Un exemple d'une de ces cartes de sensibilité est illustré sur la Figure 4.3. Cette carte de sensibilité est associée aux translations appliquées à la sonde A3. Pour cette sonde de mesure, la sensibilité la plus importante (écart relatif de 0,62 % par rapport au taux de fission nominal) est observée pour une translation de $(-0,15 ; 0,15)$ mm selon l'axe x et y .

La même étude a été effectuée pour les 27 autres sondes présentes dans la moitié inférieure du réacteur. Les sensibilités maximales et minimales observées pour l'ensemble de ces sondes sont reportées dans le Tableau 4.3.

Grâce à cette analyse de sensibilité, il est possible de classer les sondes de mesure en deux groupes. D'une part, les sondes sensibles et d'autres par les sondes dont les mesures ne sont pas influencées par une perturbation de leur position. Les 15 sondes identifiées comme sensibles sont les sondes périphériques proches du modérateur (cf. Figure 2.1). Ce sont ces 15 sondes qui ont été utilisées lors de la campagne de validation numérique, au cours de l'étude dite des « petites perturbations ».

Modélisation des sensibilités observées

Dans un second temps, une modélisation des tendances linéaires (cf. Figure 4.3) observées sur les cartes de sensibilité associées aux 15 sondes identifiées comme sensibles (cf. Tableau 4.3) a été réalisée.

4.2. Reprise surfacique appliquée à la position des tubes-guides

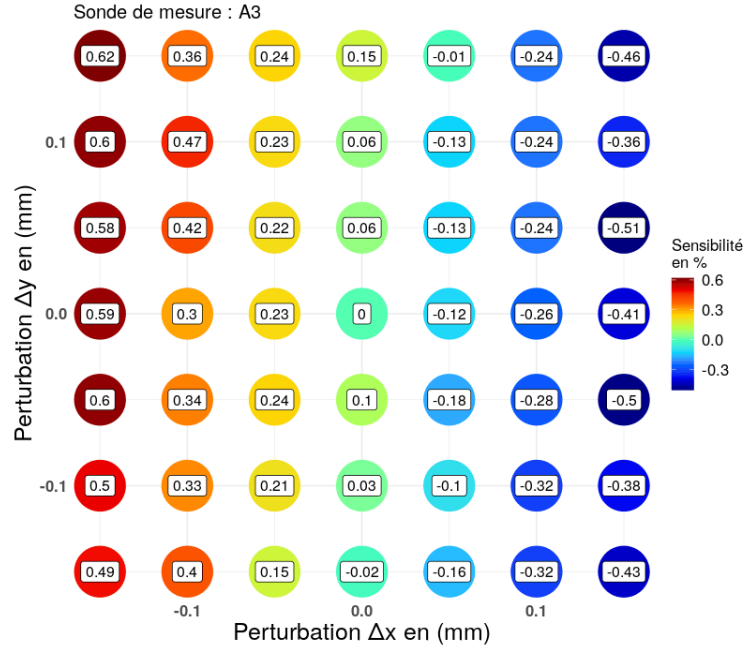


FIGURE 4.3 – Carte de sensibilité associée aux paramètres technologiques relative à la position de la sonde A3 dans le plan xy . Perturbation appliquée dans la plage de variation $\pm 0,15$ mm selon les axes x et y , pour un pas de $0,05$ mm.

IIC	MAX	MIN	IIC	MAX	MIN	IIC	MAX	MIN	IIC	MAX	MIN
A1	0,5	-0,5	A2	0,4	-0,4	A3	0,6	-0,5	A4	0,6	-0,6
B1	0,5	-0,3	B2	0,5	-0,6	B3	0,1	-0,1	B4	0,1	-0,2
C1	0,7	-0,6	C2	0,1	-0,1	C3	0,1	-0,1	C4	0,2	-0,1
D1	0,5	-0,5	D2	0,0	-0,1	D3	0,1	-0,1	D4	0,1	-0,1
E1	0,7	-0,6	E2	0,1	-0,2	E3	0,1	-0,1	E4	0,1	-0,2
F1	0,4	-0,4	F2	0,7	-0,3	F3	0,2	-0,1	F4	0,1	-0,2
G1	0,4	-0,6	G2	0,5	-0,4	G3	0,6	-0,6	G4	0,7	-0,4

TABLEAU 4.3 – Sensibilité minimale et maximale (en %) observée pour les 27 sondes placées dans la moitié inférieure du réacteur. Les perturbations appliquées font partie de la plage de variation $\pm 0,15$ mm. Les cases grisées mettent en évidence les 15 sondes sensibles.

Une relation linéaire entre la *Sensibilité* estimée pour une sonde de mesure (la variable expliquée) et la perturbation appliquée selon l'axe x : $Perturbation_X$ et l'axe y : $Perturbation_Y$ (variables explicatives) a été supposée à l'aide d'un terme d'erreur ϵ . Ce terme d'erreur modélise le biais introduit par l'utilisation d'un modèle linéaire. Il est supposé que ce biais a une loi normale du type : $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Pour chacune des cartes de sensibilité composée de 49 estimations réalisées pour les 49 positions d'une sonde de mesure ($i \in [1, \dots, 49]$) nous considérons un modèle linéaire de la forme suivante :

$$Sensibilité_i = Perturbation_{X,i} \cdot \beta_x + Perturbation_{Y,i} \cdot \beta_y + \epsilon_i,$$

Ici, β_x et β_y sont les paramètres du modèle.

L'utilisation de ce modèle sur la carte de sensibilité visible Figure 4.3 conduit à un coefficient

de détermination³ R^2 de 0,96. Le modèle linéaire modélisant les sensibilités en fonction des perturbations appliquées explique ainsi la quasi-totalité de la variabilité des sensibilités observées pour la sonde de mesure A3.

Lors de la construction du modèle linéaire associé à la sonde A3, les paramètres (β_x, β_y) ont été estimés à la valeur de $(-0,33; 0,02)$. Cela signifie que traduire la position de cette sonde périphérique selon l'axe y n'a pratiquement aucun effet sur le taux de fission estimé. On constate aussi que le déplacement de cette sonde le long de l'axe x entraîne une diminution des taux de fission de -0,33 %, pour une translation de 0,1 mm selon l'axe x par rapport au taux de fission nominal.

Les résultats associés aux modèles linéaires construits pour chacune des 15 sondes sensibles sont présentés dans le Tableau 4.4. Les valeurs du coefficient de détermination R^2 associé à chacun de ces modèles confirment que l'hypothèse de linéarité est bien adaptée pour modéliser les sensibilités observées en fonction des perturbations appliquées.

IIC	β_x	β_y	R^2	IIC	β_x	β_y	R^2	IIC	β_x	β_y	R^2
A1	0,16	0,14	0,86	F1	0,15	-0,12	0,95	G2	0,09	-0,18	0,89
B1	-0,16	-0,13	0,93	G1	-0,15	0,17	0,85	A3	-0,33	0,02	0,96
C1	0,05	-0,35	0,99	A2	-0,08	-0,16	0,89	G3	0,38	0,00	0,98
D1	0,00	-0,36	0,98	B2	-0,16	-0,18	0,96	A4	-0,35	-0,05	0,99
E1	-0,03	-0,36	0,99	F2	0,15	-0,17	0,89	G4	0,35	0,04	0,98

TABLEAU 4.4 – Paramètres des modèles linéaires associés aux 15 sondes préalablement identifiées comme sensibles.

4.2.4 Avantages et inconvénients de la méthode

Avantages

Le principal avantage de la méthode est le gain considérable du budget de calcul disponible. Des estimations plus nombreuses et plus précises des sensibilités peuvent ainsi être obtenues en un temps moins important. Pour illustrer cette accélération, prenons l'exemple de l'analyse de sensibilité présentée à la Section 4.2.3. Par rapport à un calcul⁴ Monte-Carlo classique, l'application de la méthode a permis d'augmenter le budget de calcul d'un facteur **5000** pour la sonde A3.

Le gain du budget de calcul qu'il est possible d'obtenir est à relier directement à la diminution du volume de la sous-géométrie utilisée lors de la simulation locale. Cette estimation *a priori*, permet de fournir un ordre de grandeur des augmentations du budget de calcul susceptible d'être obtenu lors de l'utilisation de notre méthode. La sous-géométrie utilisée lors de l'analyse de sensibilité menée sur la sonde A3 dispose par exemple d'un volume 5000 fois inférieur au modèle complet.

3. Le coefficient de détermination est un indicateur permettant de quantifier la qualité de la prédiction d'une régression linéaire

4. Dans ce document, l'augmentation du budget de calcul est définie comme l'augmentation de la figure de mérite ($Fom = \frac{1}{Temps \times Convergence^2}$) par rapport à une simulation Monte-Carlo classique.

Inconvénients

Bien que la méthode accélère considérablement les études de sensibilité, elle présente néanmoins certaines limites.

- Elle ne peut être utilisée que pour étudier de petites perturbations. Comme nous l'avons vu lors de la validation numérique (cf. Section 4.2.2), si les perturbations appliquées entraînent une déviation trop importante par rapport à la configuration nominale, des biais peuvent apparaître. Ces biais proviennent de l'effet de la perturbation introduite sur les sources de reprise non pris en compte lors de l'utilisation de la méthode, du fait de son principe de fonctionnement. En effet, les effets des perturbations sur les mesures réalisées par les sondes ne sont estimés qu'au premier ordre. Actuellement, aucune prise en compte de ces effets sur les sources de reprise n'est proposée pour suivre la théorie des perturbations exactes.
- Deuxièmement, la méthode proposée ne diminue significativement les temps de calcul que si la zone d'intérêt est petite et localisée. Cette considération est nécessaire pour permettre la création d'une petite sous-géométrie utilisée lors du calcul « local ».

La méthode présente également des inconvénients liés à sa mise en œuvre et aux ressources informatiques nécessaires à son déploiement.

- Son utilisation peut nécessiter la modification de la géométrie du modèle complet du réacteur étudié. Cette modification est parfois nécessaire à l'introduction de surfaces fictives permettant l'enregistrement des particules. Elle peut se révéler fastidieuse pour des géométries complexes.
- Il peut être nécessaire de créer un modèle indépendant ne décrivant que la sous-géométrie associée à la zone d'intérêt. La création de cette sous-géométrie peut également être relativement fastidieuse.
- La méthode utilise un important espace disque. Les fichiers utilisés pour enregistrer les caractéristiques des particules traversant les surfaces de reprise peuvent atteindre des tailles de plusieurs giga-octets. Il est néanmoins possible de contourner ce problème en relançant plusieurs fois les mêmes particules sur la sous-géométrie. Cette manipulation conduit à des estimations non biaisées si la distribution des sources stockées est représentative du problème étudié.

Pour contourner les problèmes d'espace disque, il est possible de réaliser l'étape de simulation locale à l'aide d'une reprise par courant surfacique. Des courants surfaciques sont pour cela estimés lors du calcul global afin d'être transformés en sources secondaires, utilisées lors du calcul local [33]. L'espace disque nécessaire est ainsi moindre. Cette méthode nécessite cependant une discrétisation en énergie, espace et angle pouvant entraîner des biais.

4.3 Reprise surfacique appliquée à la position des éléments combustibles

La seconde méthode proposée permet une estimation rapide de la sensibilité associée à la perturbation de la position d'un élément combustible. Le cas d'application traité porte sur une perturbation de la position d'un élément combustible dans le plan xy . Comme pour la méthode présentée en Section 4.2, nous proposons une approche en deux étapes utilisant le principe de la reprise surfacique.

Tout d'abord, un calcul Monte-Carlo classique est effectué sur le modèle complet du réacteur. Ce calcul permet l'enregistrement de l'ensemble des caractéristiques des particules traversant, cette fois-ci, plusieurs types de surfaces de reprise. Cette étape est suivie d'un calcul de « reprise ». Chaque particule préalablement enregistrée est alors relancée sur une géométrie simplifiée, conduisant à une diminution des temps de calcul. Le principe de fonctionnement de cette méthode est illustré par la Figure 4.4.

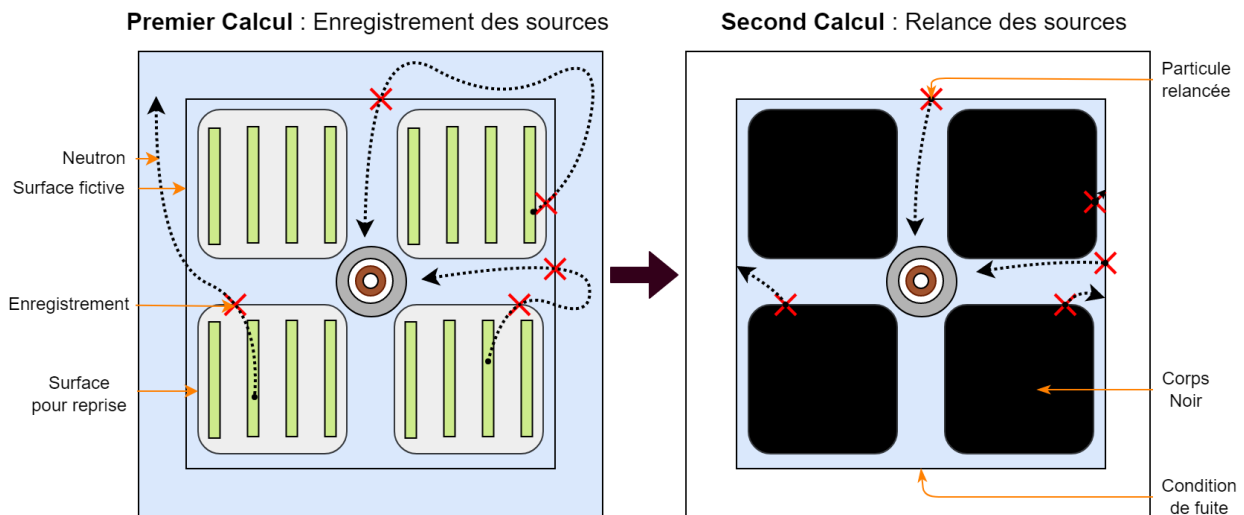


FIGURE 4.4 – Principe de la méthode de reprise surfacique appliquée aux paramètres technologiques associés aux éléments combustibles

4.3.1 Première étape : stockage des sources

La première étape de cette méthode — réalisée une unique fois — est un calcul « d'enregistrement » pour le modèle complet du cœur d'étude. Cette étape permet la création de sources secondaires par l'enregistrement de l'ensemble des caractéristiques des particules traversant plusieurs surfaces de reprise définies par l'utilisateur. Ces particules sont utilisées lors de la seconde étape de reprise pour estimer la quantité d'intérêt sur une géométrie simplifiée.

La principale différence entre cette méthode et celle présentée en Section 4.2 provient du positionnement des surfaces de reprise. Lorsque cette méthode est utilisée, les surfaces de reprise n'entourent plus la sonde de mesure. Il n'est donc plus possible de définir une sous-géométrie. Lors de l'utilisation de cette nouvelle méthode, ces surfaces permettent ici, la simplification de la géométrie utilisée lors de l'étape de reprise. Pour ce faire, deux types de surfaces sont utilisés :

1. Une surface positionnée à la jonction du modérateur et d'une frontière « fictive »

4.3. Reprise surfacique appliquée à la position des éléments combustibles

englobant le réacteur. Son utilisation permet de ne pas modéliser les phénomènes physiques se produisant dans le modérateur (ayant un impact minime sur les grandeurs d'intérêt) lors de l'étape de reprise.

2. Des surfaces positionnées à la jonction des boîtiers des éléments combustibles et des lames d'eau les entourant. Une surface de reprise est donc associée à chaque élément combustible. Leur utilisation permet de ne pas modéliser l'ensemble des phénomènes physiques se produisant à l'intérieur des éléments combustibles lors de la phase de reprise.

Ces substitutions simplifient la géométrie du réacteur utilisé pendant la phase de reprise. Elles permettent de diminuer le nombre d'événements que le simulateur doit modéliser. On observe ainsi une diminution du temps de calcul pour cette seconde phase de la méthode.

Certaines considérations sont néanmoins nécessaires lors de la phase d'enregistrement pour obtenir une estimation non biaisée des quantités d'intérêt au cours de la phase de relance.

- Chaque particule sortant des éléments combustibles doit être enregistrée au niveau des surfaces de reprise.
- Chaque particule entrant dans le cœur doit être enregistrée au niveau de la surface fictive englobante, pour ne pas introduire de biais lié à une mauvaise représentation des phénomènes physiques sous-jacents.

4.3.2 Deuxième étape : relance des sources

Lors de la phase de reprise, les particules préalablement enregistrées sont relancées sur un modèle simplifié du réacteur. Ce modèle représente le cœur complet où le modérateur n'est pas modélisé et où les éléments combustibles ont été substitués par des corps noirs.

Pour effectuer une analyse de sensibilité à l'aide de cette méthode, deux hypothèses doivent être faites :

1. On suppose qu'une petite perturbation de la position d'un élément combustible n'entraîne pas de modification de la distribution des sources au niveau du boîtier de l'élément combustible perturbé.
2. On suppose qu'une translation des sources de reprise « nominales » au niveau de l'élément combustible perturbé est suffisant pour construire la source secondaire utilisée lors de la phase de relance. La translation appliquée aux sources englobant l'élément combustible perturbé doit être identique à la translation appliquée à cet élément combustible.

Sous ces hypothèses, il suffit d'effectuer l'étape de reprise sur une géométrie simplifiée et perturbée du réacteur. Les sources de reprise englobant l'élément combustible perturbé doivent néanmoins être traduites d'une perturbation identique à la perturbation appliquée à l'élément combustible considéré.

4.3.3 Validation numérique et analyse de sensibilité

Des comparaisons entre des calculs Monte-Carlo de référence et des calculs utilisant la seconde méthode ont été effectuées afin de valider cette dernière. Pour cette campagne de validation, le paramètre technologique géométrique considéré est la position dans le plan xy

des 8 éléments combustibles appartenant à un quart de cœur (cf. Figure 2.1). Lors de cette étude, un seul élément combustible a été perturbé à la fois. L'influence de ces perturbations a été quantifiée sur les taux de fission mesurés par les 49 sondes placées dans le cœur.

Pour chacun des 8 éléments combustibles considérés, 8 configurations perturbées et 1 configuration nominale ont été étudiées. Chaque configuration perturbée a été créée en translatant un unique élément combustible dans le plan xy . Les perturbations appliquées aux éléments combustibles selon les axes x et y appartiennent à la plage de variation $\pm 0,75$ mm, pour un pas de 0,75 mm. Une grille à deux dimensions composée de 9 points est par conséquent à disposition. Les 9 perturbations appliquées à la position des Éléments Combustibles (EC) sont reportées sur l'abscisse de la Figure 4.6.

Pour cette campagne de validation numérique $\overbrace{49}^{IIC} \times \overbrace{9}^{Perturbations} \times \overbrace{8}^{EC} = 3528$ points de comparaison sont disponibles.

Le taux de convergence moyen des taux de fission mesurés par les sondes de mesure pour les simulations de référence s'élève à 0,27 %. Le taux de convergence moyen de ces mêmes grandeurs pour les simulations utilisant la méthodologie est de 0,23 %.

Analyse de sensibilité

Pour discriminer les points de comparaison significatifs parmi les 3528 disponibles, une première analyse de sensibilité a été réalisée sur les estimations issues des simulations de référence.

Cette étude montre que seules les 4 sondes entourant l'élément combustible dont la position a été perturbée sont affectées par sa translation. Un exemple illustrant cette observation est présenté sur la Figure 4.5. Sur cette figure, les sensibilités des 49 sondes placées dans le réacteur suite à une translation de l'élément combustible CD34 (matérialisé par le carré rouge) de $(\Delta x = 0, \Delta y = -0,75)$ mm sont présentées. En arrière-plan est affichée une image de réacteur afin de faciliter la représentation spatiale des sensibilités observées au niveau des sondes de mesure.

Les sensibilités observées sur cette figure sont de l'ordre de ± 2 % pour les sondes placées à proximité de l'élément combustible perturbé. La translation de cet élément influence donc les taux de fission que ces sondes adjacentes mesurent.

Pour les sondes qui ne sont pas adjacentes à l'élément combustible perturbé, en raison de la faible amplitude et du caractère aléatoire des sensibilités observées, on suppose que les sensibilités observées ne sont pas dues à la perturbation appliquée, mais à la nature stochastique du simulateur utilisé. Ainsi, ces sensibilités sont négligées.

Pour chacun des $\overbrace{9}^{Perturbations} \times \overbrace{8}^{EC} = 81$ calculs de référence réalisés lors de cette analyse de sensibilité, il a également été identifié que seules les 4 sondes adjacentes à l'élément combustible perturbé sont sensibles à la perturbation appliquée. Grâce à cette analyse de sensibilité, nous avons pu segmenter les 3528 points de comparaison en deux groupes :

- Le premier groupe concerne les $\overbrace{4}^{IIC\ Sensibles} \times \overbrace{9}^{Perturbations} \times \overbrace{8}^{EC} = 288$ points de comparaison associés aux sondes sensibles.

4.3. Reprise surfacique appliquée à la position des éléments combustibles

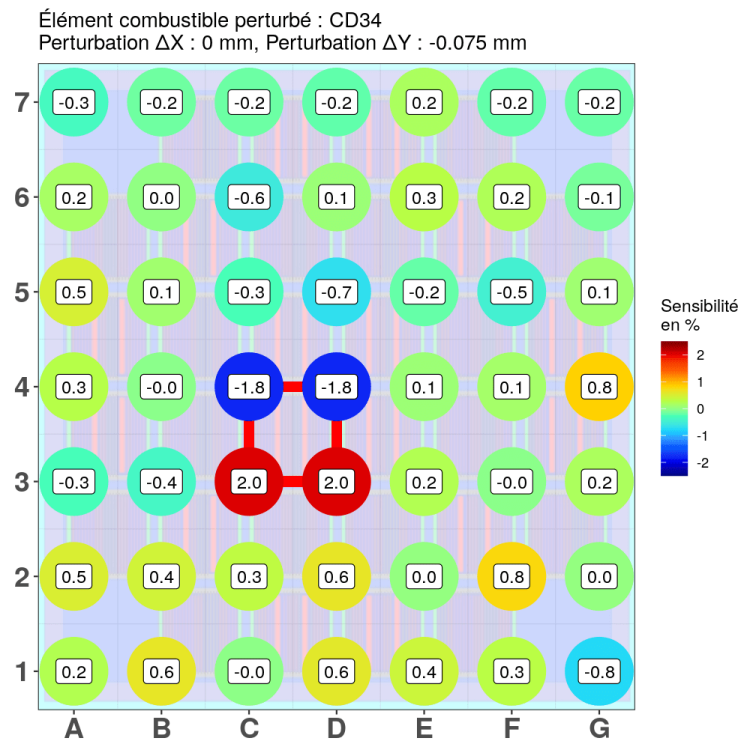


FIGURE 4.5 – Sensibilité observée sur les 49 sondes placées dans le cœur suite à une translation de l'assemblage combustible CD34 de ($\Delta x = 0, \Delta y = -0,75$) mm.

- Le second groupe est associé aux mesures qui ne sont pas influencées par les perturbations appliquées.

Validation numérique

En utilisant l'ensemble des points de comparaison, nous avons obtenu un écart relatif moyen de 0,03 % entre la simulation de référence et la simulation utilisant la méthode (cf. Tableau 4.5). Cependant, parmi ces points, 3240 sont associés à des mesures insensibles aux perturbations appliquées. Ces points de comparaison ne sont donc pas pertinents pour quantifier un éventuel biais associé à la méthode.

	Écart relatif moyen (%)	Écart-type	Points de comparaison
Tous les points de comparaison	0,028	0,4730	3528
Points de comparaison sensibles	0,047	0,711	288

TABLEAU 4.5 – Résultats de la validation numérique de la méthode de reprise surfacique appliquée à la perturbation de la position des assemblages.

Dans un second temps, seuls les 288 points de comparaison associés aux sondes influencées par les perturbations introduites ont été utilisés pour quantifier le biais de la méthode. Un biais moyen de 0,05 % est observé pour un écart-type de 0,71 % (cf. Tableau 4.5). Cette validation numérique montre donc que cette seconde méthode introduit un biais négligeable.

À titre d'illustration, des taux de fission estimés à l'aide de la méthodologie et lors de simulations de référence sont présentés sur la Figure 4.6. Ces taux de fission ont été estimés

sur la sonde B3 pour 9 positions différentes de l'élément combustible AB34. Les perturbations appliquées à cet élément combustible sont visibles en abscisse de cette figure. Un bon accord est visible entre simulation de référence et simulation utilisant la méthode.

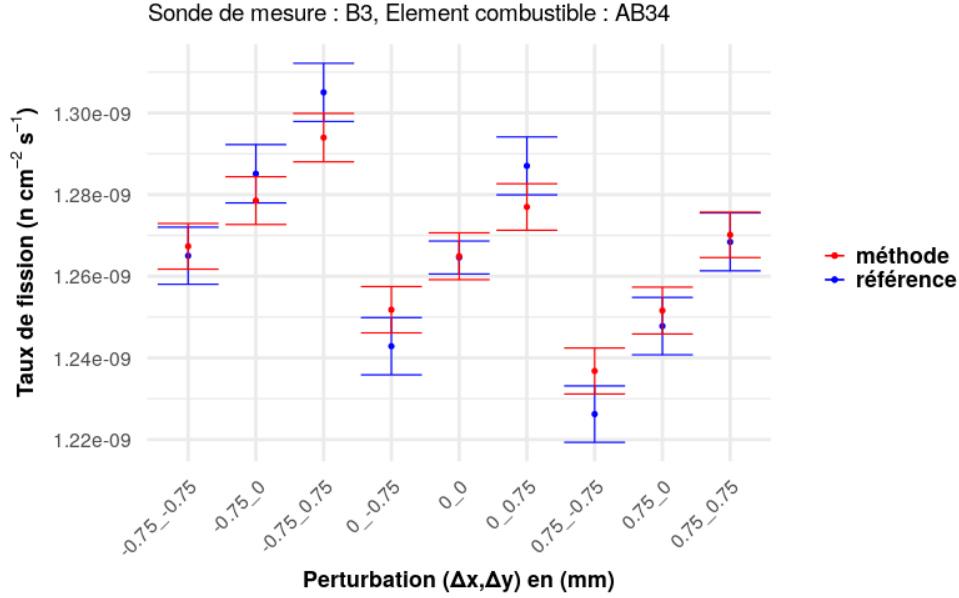


FIGURE 4.6 – Comparaison des estimations de référence et de celles provenant de la seconde méthode pour la sonde B3, pour une perturbation de la position de l'élément combustible AB34. Les perturbations des éléments combustibles appartiennent à l'intervalle $\pm 0,075$ mm. L'incertitude est donnée à deux sigmas.

4.3.4 Hypothèse de linéarité

Suite à la validation numérique de la méthode présentée, une analyse de sensibilité relative aux effets engendrés par la translation de la position d'un unique élément combustible dans le plan xy a été réalisée sur les mesures de ses sondes adjacentes. Du fait de la diminution des temps de calcul obtenue grâce à l'utilisation de la méthodologie (cf. Section 4.3.4), un « pas de perturbation » plus fin a pu être utilisé lors de cette étude.

Les translations appliquées aux 8 éléments combustibles présents dans le quart de cœur inférieur gauche (cf. Figure 2.1) sont comprises dans la plage de variation $\pm 0,75$ mm. Le pas utilisé est néanmoins de $0,375$ mm contre $0,75$ mm lors de la validation numérique précédente (cf. Section 4.3.3). Les perturbations appliquées conduisent à une grille à deux dimensions composée de 25 points. Cette grille plus fine permet une meilleure étude de la sensibilité associée aux paramètres technologiques considérés. Les 25 perturbations appliquées à la position des éléments combustibles sont visibles en abscisse et en ordonnées de la Figure 4.7.

Observations

La Figure 4.7 présente 4 cartes de sensibilité obtenues à l'aide de cette méthode de reprise. Les sensibilités des 4 sondes (C3, D3, C4 et D4) adjacentes à l'élément combustible perturbé (CD34) sont présentées sur cette figure. Chaque point correspond à l'estimation de la sensibilité d'une sonde en fonction de la translation (rapportée sur les axe x et y) appliquée à l'élément combustible. Pour une translation de $(\Delta x = 0,75, \Delta y = 0,75)$ mm de l'élément

4.3. Reprise surfacique appliquée à la position des éléments combustibles

combustible CD34, une sensibilité de 0,23 % est observée pour la sonde C4 et -2,14 % pour la sonde D4.

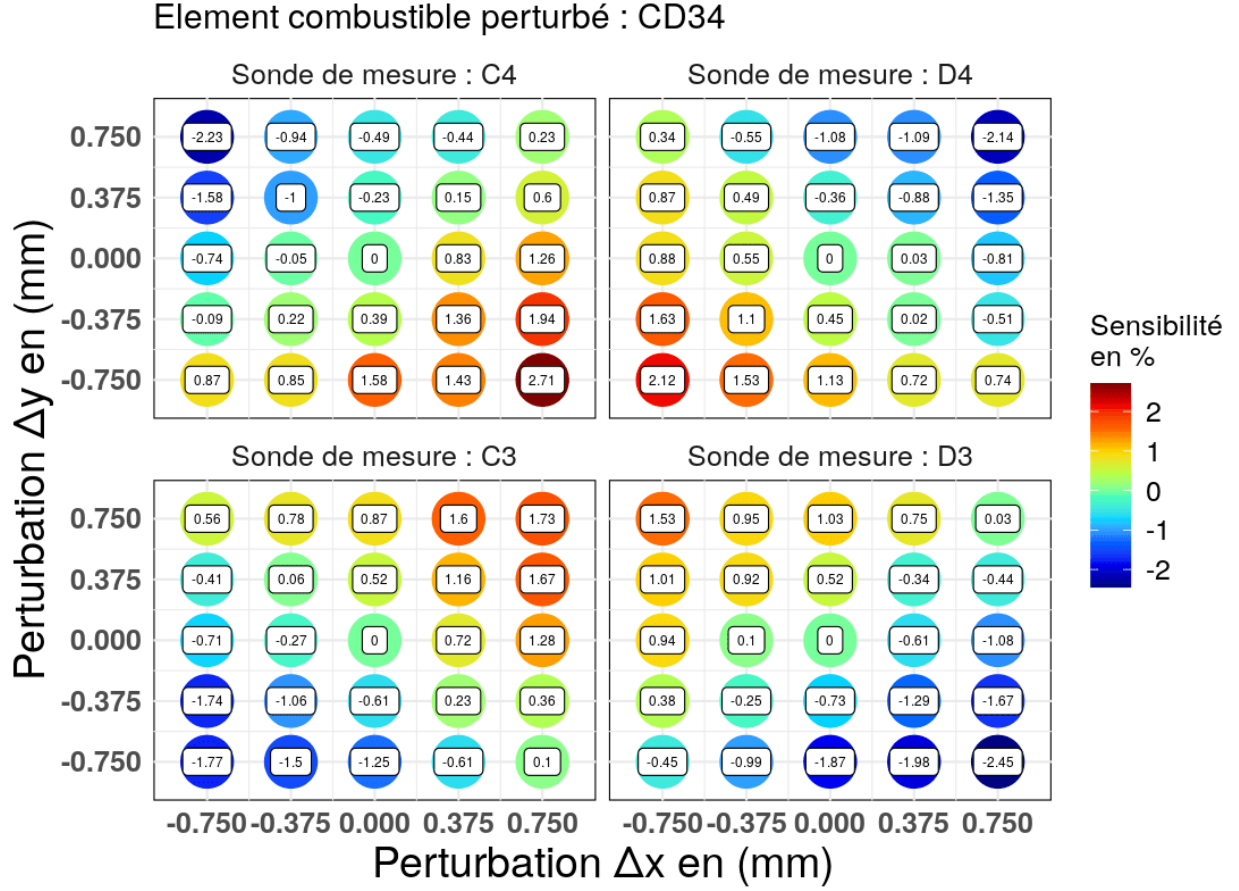


FIGURE 4.7 – Sensibilités observées sur les sondes C3, D3, C4 et D4 suite à une perturbation de la position de l'assemblage CD34 dans la gamme $\pm 0,75$ mm, selon les axes x et y pour un pas de 0,375 mm.

L'analyse de la Figure 4.7 conduit à une modélisation par une tendance linéaire entre les translations appliquées à l'élément combustible et les sensibilités estimées sur les sondes adjacentes. Cette même observation est réalisée pour les 7 autres éléments combustibles étudiés ainsi que leurs sondes adjacentes.

Pour modéliser ces tendances, un total de $\overbrace{8}^{EC} \times \overbrace{4}^{IIC} = 32$ modèles linéaires indépendants ont été construits.

Modèle linéaire

Pour construire ces modèles, une relation linéaire entre la perturbation appliquée à l'élément combustible selon l'axe x : $Perturbation_x$ et l'axe y : $Perturbation_y$ (grandeur explicative) et la sensibilité observée sur une sonde adjacente Sensibilité (grandeur expliquée) a été supposée au travers d'un terme d'erreur ϵ .

Un modèle linéaire a été construit pour chacune des cartes de sensibilité associées aux sondes sensibles. Ces cartes sont composées de 25 estimations réalisées pour 25 perturbations ($i \in$

Chapitre 4. Calcul de perturbation

[1, ..., 25]) d'un unique élément combustible adjacent. Le modèle s'écrit :

$$Sensibilité_i = Perturbation_{X,i} \cdot \beta_x + Perturbation_{Y,i} \cdot \beta_y + \epsilon_i,$$

Les termes β_x et β_y sont les paramètres du modèle linéaire supposé. Ces paramètres peuvent être interprétés comme la sensibilité associée aux mesures réalisées par une sonde due à la perturbation d'un élément combustible adjacent.

Les coefficients de régression associés aux 32 modèles linéaires construits sont reportés dans le Tableau 4.6. Pour chaque modèle linéaire nous précisons : l'élément combustible perturbé (*EC*), la sonde de mesure influencée (*IIC*), les paramètres du modèle estimés (β_x, β_y) et le coefficient de détermination R^2 .

Par exemple, la modélisation de l'influence de la perturbation de la position de l'élément combustible CD34, sur les mesures réalisées par la sonde C3, conduit aux sensibilités ($\beta_x = 1,25; \beta_y = 1,44$) % par mm et au coefficient de détermination $R^2 = 0,96$.

<i>EC</i>	<i>IIC</i>	β_x	β_y	R^2	<i>EC</i>	<i>IIC</i>	β_x	β_y	R^2	<i>EC</i>	<i>IIC</i>	β_x	β_y	R^2	<i>EC</i>	<i>IIC</i>	β_x	β_y	R^2
BC12	B1	1,58	1,43	0,98	AB23	A2	1,06	1,76	0,94	CD23	C2	1,04	1,17	0,91	BC34	B3	1,09	1,36	0,95
BC12	C1	-1,00	1,62	0,85	AB23	B2	-1,11	2,05	0,95	CD23	D2	-1,17	1,27	0,93	BC34	C3	-1,19	1,35	0,96
BC12	B2	2,05	-1,34	0,97	AB23	A3	1,58	-1,29	0,90	CD23	C3	0,97	-1,46	0,93	BC34	B4	0,74	-1,42	0,96
BC12	C2	-1,12	-1,47	0,93	AB23	B3	-1,32	-1,41	0,95	CD23	D3	-1,17	-1,35	0,91	BC34	C4	-1,06	-1,34	0,90
CD12	C1	0,99	1,76	0,84	BC23	B2	1,25	1,44	0,95	AB34	A3	1,87	1,53	0,87	CD34	C3	1,25	1,44	0,96
CD12	D1	-1,12	1,86	0,87	BC23	C2	-1,42	1,35	0,91	AB34	B3	-1,51	1,56	0,97	CD34	D3	-1,19	1,56	0,92
CD12	C2	1,25	-1,51	0,91	BC23	B3	1,19	-1,54	0,95	AB34	A4	1,95	-1,32	0,88	CD34	C4	1,35	-1,52	0,90
CD12	D2	-1,12	-1,66	0,93	BC23	C3	-1,31	-1,35	0,97	AB34	B4	-1,59	-1,44	0,98	CD34	D4	-1,29	-1,36	0,93

TABLEAU 4.6 – Coefficients de régression des modèles linéaires estimés sur les sensibilités des sondes dues à une perturbation d'un assemblage environnant.

Avantages et inconvénients

Le principal avantage de cette méthode est de réduire le temps de calcul de l'étude des effets d'une translation des éléments combustibles, sur les mesures réalisées par les sondes placées dans le réacteur. Suite à l'application de cette méthode, un gain du budget de calcul d'un facteur 5 a été obtenu.

Cette augmentation du budget de calcul doit être considérée à la lumière de la réduction du volume de la géométrie simplifiée utilisée lors de la phase de reprise. La géométrie simplifiée dispose d'un volume 6 fois inférieur au cœur complet. Ainsi, cette méthode ne peut atteindre les facteurs d'amélioration obtenus avec la première méthode présentée en Section 4.2.4.

Inconvénients

Les inconvénients associés au déploiement de cette démarche sont similaires à ceux de la méthode permettant l'étude d'une translation des sondes de mesure.

- Il peut être nécessaire de modifier le modèle du cœur complet pour introduire des surfaces fictives, afin d'enregistrer l'ensemble des particules d'intérêt lors de l'étape de stockage.
- Il peut être nécessaire de construire une géométrie simplifiée indépendante où le modérateur n'est pas modélisé et où les assemblages sont remplacés par des corps noirs. Ces modifications peuvent être fastidieuses pour des géométries complexes.

- Pour effectuer l'analyse de sensibilité, il est nécessaire de traduire au préalable toutes les particules enregistrées d'une translation équivalente à la perturbation envisagée. Un grand nombre de particules doit cependant être traité. Ce traitement peut prendre plusieurs minutes et engendrer des ralentissements du fait d'un nombre important de lectures et d'écritures à réaliser.
- Pour réaliser une simulation sur une géométrie perturbée, il est nécessaire de créer une nouvelle source équivalente. Or, les fichiers de stockage où sont enregistrées toutes les caractéristiques des particules pèsent plusieurs dizaines de gigas. Ainsi, si plusieurs calculs de perturbation sont effectués en parallèle, plusieurs sources secondaires doivent être créées et stockées. Durant le temps de la simulation associée, un espace disque important est par conséquent occupé.

4.4 Synthèse partie 1

Dans la première partie de ce chapitre, deux méthodes basées sur le principe de la reprise surfacique ont été présentées. Ces nouvelles méthodes permettent d'une part le traitement rapide de perturbations associées à des petits volumes et d'autre part, de perturbations associées aux éléments combustibles.

La première méthode a été appliquée au paramètre technologique relatif à la position des sondes de mesure. De bons résultats ont été obtenus lorsque le régime des petites perturbations est respecté. De faibles biais ont été révélés lorsque les perturbations appliquées entraînent une déviation par rapport à ce régime.

La seconde méthode a permis de perturber la position des éléments combustibles et d'en étudier l'influence sur les mesures réalisées par les sondes. Cette validation a montré un bon accord entre les simulations Monte-Carlo de référence et celles utilisant la méthodologie.

Un gain du budget de calcul d'un facteur 5000 a été obtenu pour la première méthode. Cette augmentation est liée à la diminution du volume de la sous-géométrie utilisée lors de la simulation locale et a permis de réaliser une étude de sensibilité. Nous avons observé que seules les sondes périphériques sont sensibles à une perturbation de leur position. Enfin, nous avons montré qu'il est possible de modéliser la sensibilité associée à ces perturbations par un modèle linéaire.

Lors de l'utilisation de la seconde méthode, un gain du budget de calcul d'un facteur 5 a été observé. Cette amélioration doit être considérée à la lumière de la réduction du volume de la géométrie simplifiée utilisée lors du calcul de reprise (diminution d'un facteur 6). Lors de la campagne de validation numérique, nous avons observé que seules les sondes adjacentes à un élément combustible sont sensibles à la perturbation de sa position. Une analyse de sensibilité réalisée à l'aide de la méthode a également montré qu'il est possible de modéliser ces sensibilités par un modèle linéaire.

Partie 2 : Paramètres associés au bilan de matière

Dans cette deuxième partie nous présentons la méthode de neutronique utilisée pour estimer l'effet de perturbation appliquée à des paramètres technologiques associés au bilan de matière des éléments composant le réacteur. Cette méthode dite des échantillons corrélés ([34], [35]) rend l'estimation de l'effet de la perturbation accessible en un temps de calcul raisonnable. Formellement, cette procédure est similaire à l'échantillonnage préférentiel [36].

Présente historiquement dans le code TRIPOLI-4[®] [10], elle n'utilise pas d'hypothèse de calculs simplificatrice pour faciliter l'estimation de l'effet des perturbations appliquées. Ainsi, aucune approximation des modèles physiques implémentés dans le simulateur n'est réalisée lors des estimations des effets des perturbations. La méthode des échantillons corrélés fournit donc des estimations qui peuvent être considérées comme exactes. Nous verrons que son intérêt réside dans l'introduction d'une corrélation entre une configuration nominale et perturbée, au bénéfice de la précision associée à l'estimateur de l'effet de la perturbation introduite [37].

Dans cette partie sont également présentées certaines hypothèses simplificatrices d'additivité (Section 4.5.4) et de linéarité (Section 4.5.5). Elles permettent le déploiement de la méthode des échantillons corrélés sur un cœur complet à un moindre coût en temps de calcul.

4.5 Echantillons corrélés

4.5.1 Principe de fonctionnement

La technique des échantillons corrélés permet l'estimation des sensibilités associées à des perturbations de paramètres relatifs au bilan de matière. Cette méthode consiste à réaliser, lors d'une même simulation, l'estimation de la grandeur de référence et de sa version perturbée (ou plusieurs grandeurs perturbées si nécessaire). Pour ce faire, la méthode force les neutrons perturbés à suivre les mêmes vies (transport et interactions) que les neutrons nominaux. Étant donné que les histoires des particules simulées sont identiques pour la condition de référence et la condition perturbée, un unique calcul est nécessaire pour estimer l'effet de la perturbation.

Pour estimer la grandeur perturbée à partir des histoires des neutrons nominaux, un poids est associé à chacun des neutrons transportés sur la configuration de référence. Ce poids est alors modifié à chaque événement de la vie d'une particule à l'aide de facteurs correctifs. Ces facteurs permettent de prendre en compte l'effet de la perturbation. Ils découlent directement de la modification des phénomènes physiques introduits par la perturbation conduisant ainsi

à des estimations dites exactes des effets des perturbations.

4.5.2 Calcul des facteurs correctifs

La vie de chaque particule est régie par deux phénomènes physiques. Ces phénomènes sont d'une part le transport des particules et d'autre part l'interaction entre ces particules. Un exemple illustrant la vie d'une particule est représenté schématiquement sur la Figure 4.8.

Pour estimer la grandeur perturbée à partir des neutrons simulés sur la configuration nominale, il est nécessaire de perturber ces deux phénomènes (transport et interaction). Pour ce faire, des facteurs correctifs sont utilisés. Ces facteurs sont calculés en prenant en compte le changement des propriétés des milieux introduits par la perturbation. La grandeur perturbée peut ainsi être estimée par la correction de l'histoire des neutrons nominaux ayant traversé les milieux définis comme perturbés par le modélisateur.

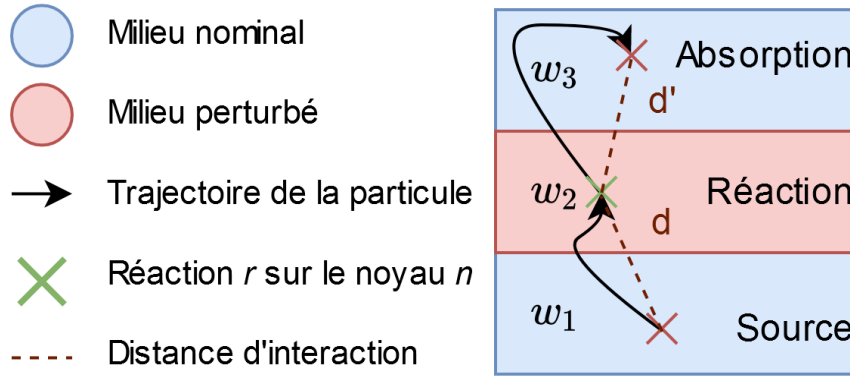


FIGURE 4.8 – Principe de fonctionnement de la méthode des échantillons corrélés.

Transport des particules

Le premier type de facteur correctif permet de prendre en compte la perturbation du transport des particules à la suite de la perturbation de la composition des milieux constituant le réacteur.

Considérons un neutron en un point quelconque de l'espace. Lors d'un calcul Monte-Carlo classique, la probabilité que ce neutron interagisse à une distance d du point où il se situe est égale à l'expression suivante :

$$\Sigma_{tot} \exp(-d \cdot \Sigma_{tot}).$$

Dans cette expression, Σ_{tot} correspond à la section efficace totale du milieu où a lieu l'interaction sur la configuration de référence. Supposons à présent que le milieu hôte de l'interaction soit défini par le modélisateur comme un milieu perturbé. La section efficace de ce milieu est donc différente. Cette section efficace totale perturbée est notée Σ_{tot}^{pert} . Comme le veut le principe de fonctionnement de la méthode des échantillons corrélés, le neutron perturbé doit suivre la même vie que le neutron nominal. La distance à laquelle ce neutron perturbé interagit est ainsi préalablement fixée à la distance d , et ce malgré la section efficace totale perturbée. Un facteur correctif doit ainsi être appliqué pour prendre en compte cette modification des propriétés du milieu.

Ce facteur correctif est calculé en divisant la probabilité d'atteindre la distance d en configuration perturbée, par la probabilité d'atteindre cette même position en configuration nominale. Si l'on considère l'exemple simplifié visible sur la Figure 4.8, les facteurs correctifs associés au transport s'écrivent comme suit :

$$w_1 = \frac{\Sigma_{tot}^{pert} \exp(-d \cdot \Sigma_{tot}^{pert})}{\Sigma_{tot} \exp(-d \cdot \Sigma_{tot})} \text{ ou } w_3 = \frac{\Sigma_{tot}^{pert} \exp(-d' \cdot \Sigma_{tot}^{pert})}{\Sigma_{tot} \exp(-d' \cdot \Sigma_{tot})}.$$

Par l'application de ce facteur correctif, il devient possible de prendre en compte la perturbation du transport d'un neutron sur une configuration perturbée lors de l'estimation de la grandeur d'intérêt.

Interaction des particules

Le second type de facteur correctif présenté permet de prendre en compte l'effet de la perturbation des milieux composant le cœur sur les interactions des particules dans les milieux perturbés.

Considérons la réaction r sur le noyau n . Cette réaction est définie sur la configuration nominale par la section efficace $\Sigma_{n,r}$. Lors de la simulation de l'histoire d'une particule, la probabilité que cette réaction soit choisie parmi toutes les réactions existantes est alors égale au ratio :

$$\frac{\Sigma_{n,r}}{\Sigma_{tot}}.$$

La probabilité que cette même réaction ait lieu sur la configuration perturbée est quant à elle égale au ratio $\Sigma_{n,r}^{pert} / \Sigma_{tot}^{pert}$ avec $\Sigma_{n,r}^{pert}$ la section efficace de cette même réaction sur la configuration perturbée et Σ_{tot}^{pert} la section efficace totale perturbée. Cependant, comme pour le transport de particule, les interactions des neutrons perturbés sont préalablement fixées par la vie des neutrons nominaux. Pour prendre en compte cette information lors de l'estimation de la grandeur perturbée, un facteur correctif doit être appliqué. Ce facteur correctif est calculé en divisant la probabilité que la réaction r sur le noyau n ait lieu sur la configuration perturbée, par la probabilité que cette même interaction ait lieu sur la configuration de référence. Plus formellement, en considérant l'exemple visible Figure 4.8, le facteur correctif associé à la prise en compte de la perturbation des interactions du neutron dans le milieu perturbé s'écrit :

$$w_2 = \frac{\Sigma_{n,r}^{pert} \cdot \Sigma_{tot}}{\Sigma_{tot}^{pert} \cdot \Sigma_{n,r}}.$$

À l'aide de ce facteur correctif, il devient possible d'estimer la grandeur perturbée à partir des interactions des particules simulées en configuration nominale.

Estimation du score d'intérêt sur le système perturbé

Finalement, l'ensemble des facteurs correctifs est regroupé pour estimer la grandeur perturbée à partir de la vie des neutrons nominaux. À la fin de leur vie, tous les facteurs correctifs prenant en compte l'effet des perturbations appliquées par le modélisateur viennent pondérer la contribution des particules nominales à l'estimateur de la grandeur d'intérêt. De ce processus multiplicatif de pondérations découle l'estimation de la grandeur perturbée.

De plus, sachant que la grandeur perturbée est déduite directement de la vie des particules nominales, il est possible d'estimer l'effet de plusieurs perturbations indépendantes lors d'une unique simulation. Il suffit de calculer l'ensemble des facteurs correctifs associés aux configurations perturbées étudiées.

4.5.3 Mise en œuvre

Nous présentons la méthode des échantillons corrélés sur une étude traitant la sensibilité associée à une perturbation d'un paramètre technologique. Ce paramètre correspond à la densité des joues borées placées dans les éléments combustibles (en vert sur la Figure 2.1). Pour rappel, le bore est un poison consommable permettant de contrôler la réactivité du cœur lorsqu'il est ajouté aux parties externes de la crémaillère, parallèlement aux plaques combustibles.

Simplification du problème

Dans un premier temps et dans la suite du document, nous proposons une simplification du problème pour faciliter la mise en œuvre de la méthode des échantillons corrélés. Dans les études réalisées, les deux joues borées d'un même élément combustible sont systématiquement perturbées de la même manière. Cette simplification permet de diminuer la dimension du problème. En effet, le cœur est composé de 32 éléments combustibles. La dimension du problème passe ainsi de 64 à 32 paramètres technologiques à étudier lors de l'étude des joues borées⁵.

Effet d'une perturbation

Un premier exemple de mise en œuvre de la méthode des échantillons corrélés est donné en Figure 4.9. Pour cette étude, les deux joues borées d'un unique élément combustible ont été perturbées par une augmentation de leur densité de 4 %.

Pour faciliter la visualisation de la perturbation appliquée lors de cette première étude, l'élément combustible perturbé est encadré en rouge. Il s'agit de l'élément EF23 entouré par les sondes E2, F2, E3 et F3. Nous donnons également en arrière-plan de cette figure une coupe axiale du cœur d'étude afin de faciliter la représentation spatiale de la perturbation appliquée au cœur d'étude.

Grandeur mesurée

La grandeur d'intérêt systématiquement étudiée ici est le taux de fission intégré axialement (selon l'axe z), que ce soit au niveau des tubes-guides ou des éléments combustibles. Pour plus de détails concernant la mesure réalisée au niveau des sondes de mesure, nous renvoyons à la Section 2.1.4. Concernant les éléments combustibles, la grandeur d'intérêt correspond à la somme des taux de fission ayant lieu dans chacune des plaques d'un élément combustible.

Observations

Sur la Figure 4.9 est représentée la sensibilité associée aux estimations des taux de fission suite à une perturbation de la densité des joues borées de l'élément combustible EF23. On

5. Cette diminution de la dimension du problème prendra tout son sens lors de la présentation du problème de calibration.

retrouve sur la partie gauche de cette figure les sensibilités à cette perturbation pour les taux de fission estimés sur l'ensemble des éléments combustibles. Sur la partie droite de la figure est représenté l'effet de cette même perturbation sur toutes les sondes de mesure placées dans le cœur.

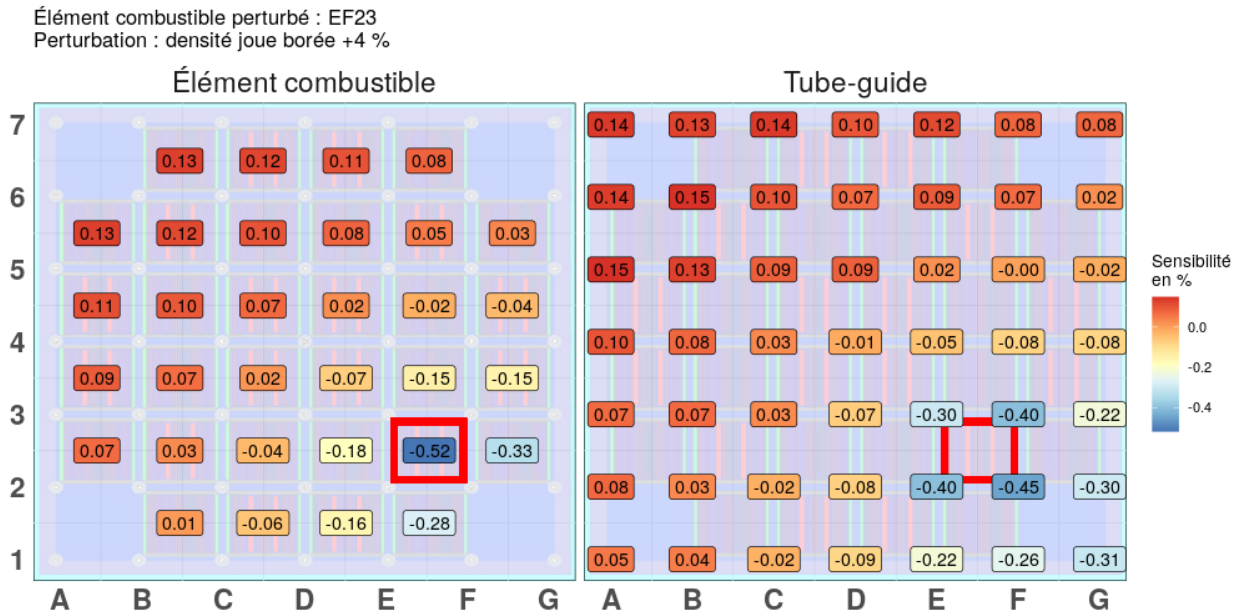


FIGURE 4.9 – (Gauche) Sensibilité estimée sur les éléments combustibles associée à l'augmentation de 4 % de la densité des joues borées de l'élément combustible EF23. (Droite) Sensibilité estimée sur les tubes-guides pour la même perturbation.

Premier constat

À l'observation de la Figure 4.9, on constate que l'élément combustible perturbé est le plus sensible (en valeur absolue) à la perturbation appliquée. Une étude équivalente a été conduite pour l'ensemble des 32 éléments placés dans le cœur. On constate également pour l'ensemble de ces études que l'élément combustible perturbé est systématiquement le plus sensible.

Comme on peut le voir sur la Figure 4.9, augmenter la densité en bore de l'élément combustible EF23 de 4 % entraîne une diminution du taux de fission mesuré au sein même de cet élément de -0,52 %. Les éléments combustibles adjacents subissent également, mais dans une moindre mesure, une diminution de leur taux de fission mesuré. Des bascules sont également observées. On constate par exemple, que l'élément combustible BC56, placé à l'opposé de l'élément perturbé, voit son estimation augmenter de 0,12 %.

Concernant l'effet de ces perturbations sur les mesures réalisées à l'aide des sondes de mesure, on constate que les sondes de mesure adjacentes à l'élément combustible perturbé sont les sondes les plus influencées. Sur la Figure 4.9, une diminution des taux de fission mesurés de -0,3 % à -0,4 % est observée pour les sondes adjacentes à l'élément perturbé (E2, E3, F2 et F3). Comme pour les éléments combustibles, une bascule est visible pour les sondes placées à l'opposé de l'élément combustible perturbé avec une augmentation pouvant aller jusqu'à 0,15 % pour la sonde B6.

4.5.4 Hypothèse d'additivité

L'étude précédente a permis d'étudier l'effet d'une perturbation d'un unique élément combustible. Afin d'enrichir le problème, il serait intéressant de pouvoir étudier un cœur pour lequel plusieurs éléments combustibles sont perturbés en même temps et de la même façon. Finalement, pour répondre à la problématique associée à un cœur tel que fabriqué, il serait intéressant d'avoir à disposition une méthode permettant d'estimer les sensibilités d'un cœur où chaque élément combustible est perturbé aléatoirement dans une plage de variation représentative de ses incertitudes technologiques.

Problème

Nous étudions dans cette partie l'effet d'une unique perturbation (augmentation de la densité des joues borées de 4 %), mais appliquée à plusieurs éléments combustibles.

Rappelons que la méthode des échantillons corrélés permet de diminuer le temps de calcul nécessaire par rapport à la méthode directe. Elle permet également d'augmenter le nombre de perturbations réalisable par calcul en comparaison à une estimation directe. Malgré ces avantages, cette méthode se base sur une résolution du problème à l'aide d'un calcul Monte-Carlo. L'estimation d'une sensibilité d'intérêt reste donc coûteuse en temps de calcul.

À titre illustratif, considérons les calculs de sensibilité réalisés pour traiter les problèmes de calibration présentés dans le Chapitre 6, Section 6.4.5. Chaque calcul utilisant la méthode des échantillons corrélés a permis d'estimer l'effet de quatre perturbations indépendantes. Cependant, chaque simulation a nécessité 36 heures de calcul sur 30 processeurs. Les incertitudes Monte-Carlo associées aux estimations des sensibilités étaient de l'ordre de 0,7 % pour les éléments combustibles perturbés.

On comprend que ces différentes limitations empêchent la réalisation d'un nombre important de calculs Monte-Carlo malgré l'utilisation de la méthode des échantillons corrélés.

D'autre part, considérons un cas d'étude où un seul type de perturbation peut être appliqué aux 32 éléments combustibles. Supposons que pour chacune de ces configurations il est nécessaire de réaliser un calcul Monte-Carlo afin d'estimer les quantités d'intérêt. Ainsi, pour estimer le temps de calcul nécessaire afin de traiter toutes les configurations, le nombre de configurations existantes doit tout d'abord être dénombré. Ainsi :

- Si aucun élément combustible n'est perturbé, $\binom{32}{0} = 1$ configuration, correspondant au cœur nominal doit être traitée.
- Si 1 élément combustible est perturbé parmi les 32, $\binom{32}{1} = 32$ configurations doivent être étudiées.
- Si 2 éléments combustibles sont perturbés parmi les 32, $\binom{32}{2} = 496$ calculs doivent être réalisés.
- Si $0 \leq i \leq 32$ éléments combustibles sont perturbés parmi les 32, $\binom{32}{i}$ calculs doivent être réalisés.

Ainsi, si aucune hypothèse simplificatrice n'est avancée, il est théoriquement nécessaire d'estimer la sensibilité de $\sum_{i=0}^{32} \binom{32}{i} = 2^{32}$ configurations différentes, soit plus de 4 milliards de configurations. Il n'est donc pas envisageable de réaliser toutes ces estimations uniquement à l'aide de la méthode des échantillons corrélés. Une hypothèse simplificatrice doit être formulée pour pouvoir étudier l'éventuelle interaction pouvant exister sur une configuration où plusieurs éléments combustibles sont perturbés simultanément.

Formalisation de l'hypothèse d'additivité

Afin de traiter un cœur où plusieurs éléments combustibles sont perturbés, et ceci malgré le nombre de configurations existantes, nous proposons une hypothèse simplificatrice.

Hypothèse 4.5.1. Il est possible de sommer chacune des sensibilités estimées sur une configuration où un seul élément combustible a été perturbé à la fois, afin d'interpoler la sensibilité de n'importe quelle configuration. Cette hypothèse d'additivité revient en d'autres termes à négliger l'éventuelle interaction pouvant exister entre les perturbations appliquées au cœur d'étude.

Pour tester cette hypothèse, il est tout d'abord nécessaire de réaliser un calcul de sensibilité par élément combustible⁶. Ces estimations fournissent 32 vecteurs de sensibilité indépendants notées $(Sensi_{BC12}, \dots, Sensi_{EF67})$, formant une « base » sur laquelle se fonde l'hypothèse d'additivité. À partir de cette base et en fonction de la configuration à interpoler, ces sensibilités sont sommées pour interpoler n'importe quelle sensibilité associée à une configuration d'intérêt. Plus formellement, cette hypothèse d'additivité peut s'écrire :

$$Sensibilité\ extrapolée = \mathbb{I}_{BC12}.Sensi_{BC12} + \dots + \mathbb{I}_{EF67}.Sensi_{EF67}.$$

Avec $\mathbb{I}_{EC} = 1$ si l'élément combustible EC est perturbé dans la configuration à interpoler et 0 sinon.

Illustration

Considérons une configuration où les éléments combustibles (BC34, DE56 et EF23) sont perturbés. La sensibilité de cette configuration est interpolée en sommant les trois vecteurs de sensibilité $(Sensi_{BC34}, Sensi_{DE56}, Sensi_{EF23})$, issus d'un calcul par la méthode des échantillons corrélés. La Figure 4.10 illustre cette interpolation appliquée aux sensibilités estimées au niveau des sondes de mesure. Les trois figures de gauche représentent les sensibilités indépendantes $(Sensi_{BC34}, Sensi_{DE56}, Sensi_{EF23})$, dont l'élément combustible perturbé est encadré en rouge. La figure de droite représente la somme des sensibilités individuelles. Cette carte de sensibilité est ainsi extrapolée en utilisant l'hypothèse d'additivité. Grâce à cette hypothèse, il est possible de reconstruire n'importe quelle configuration à partir de la base de vecteurs de sensibilité, estimée préalablement sans avoir à réaliser de nouveaux calculs Monte-Carlo.

Validation numérique

Pour valider l'hypothèse d'additivité, une campagne de mesures numériques a été conduite. Durant cette campagne, des calculs de référence ont été réalisés pour quantifier l'erreur du modèle additif. Les résultats obtenus ont permis de montrer que l'erreur due à l'hypothèse d'additivité est suffisamment faible en comparaison de la magnitude des grandeurs physiques pour pouvoir déployer cette méthode sur notre cas d'étude.

La validation numérique a été menée par comparaison des grandeurs prédites à l'aide du modèle additif à des sensibilités de référence. Ces sensibilités de référence ont été estimées

6. Les critères de symétrie du cœur d'étude ont été utilisés afin de diviser par deux le nombre de calculs de sensibilité à réaliser. Soit 16 estimations par condition expérimentale plutôt que 32.

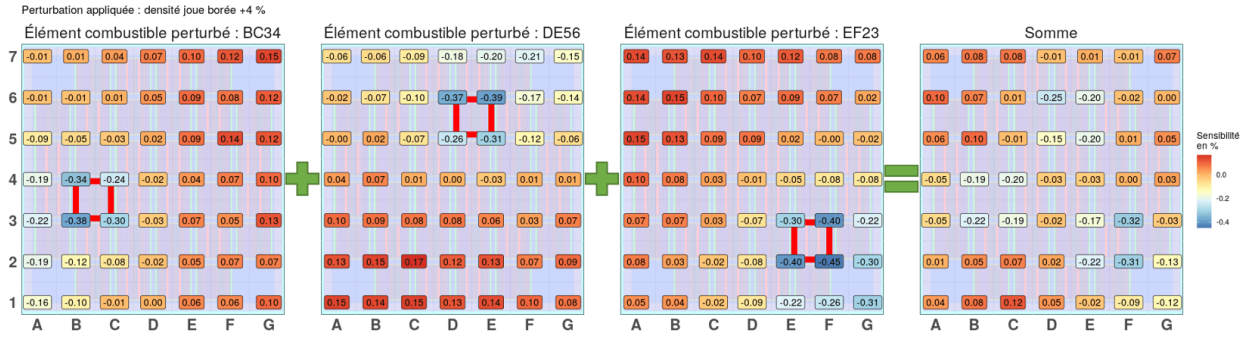


FIGURE 4.10 – Illustration de l’hypothèse d’additivité. Extrapolation d’une configuration où les éléments combustibles BC34, DE56, EF23 sont perturbés, à partir de la base de vecteur de sensibilité.

sur plusieurs configurations perturbées à l’aide de la méthode des échantillons corrélés, sans utiliser l’hypothèse d’additivité. L’hypothétique interaction a ainsi été directement traitée.

Des calculs de sensibilité par échantillons corrélés ont été menés en parallèle en perturbant tous les éléments combustibles du cœur indépendamment. Ces calculs permettent d’estimer la sensibilité associée à la perturbation d’un unique élément combustible. Ils fournissent les vecteurs de sensibilité permettant de construire la base sur laquelle repose l’hypothèse d’additivité mise à l’épreuve.

Ces différents calculs (en configuration de référence et configuration « individuelle ») ont nécessité 11 jours de simulation sur 30 processeurs. Chaque simulation a fourni 4 estimations de configurations perturbées. Les incertitudes Monte-Carlo pour la grandeur d’intérêt nominale⁷ estimée au niveau des sondes de mesure sont de l’ordre de 0,1 % pour les calculs de référence et les calculs individuels.

Une configuration étudiée lors de la validation numérique correspond à un cœur où les densités des joues borées de trois éléments combustibles ont été perturbées. Les sensibilités de *référence* tenant compte des interactions, associées à cette configuration sont illustrées sur l’image de gauche de la Figure 4.11. Les sensibilités *extrapolées* issues de l’utilisation de l’hypothèse d’additivité sont également représentées au niveau de l’image centrale sur cette figure. Cette dernière correspond à l’image intitulée « Somme » de la Figure 4.10⁸. Finalement, est représenté sur la partie droite de cette figure l’écart absolu entre l’estimation de référence et l’estimation extrapolée. L’écart absolu est défini comme suit :

$$Ecart\ absolu = Référence - Extrapolé.$$

Au regard de l’image relative aux écarts absolus entre référence et extrapolation de la Figure 4.11, on constate visuellement qu’aucun biais significatif ne semble apparaître. De plus, comme le montrent les légendes de ces différentes figures, l’écart observé est faible au regard des mesures de sensibilité réalisées. Sur cette configuration, un des écarts absolus parmi les plus importants observés est de 0,05 % au niveau de la sonde de mesure F2 pour une sensibilité observée sur la configuration de référence de -0,26 %.

7. Un calcul par échantillons corrélés fournit une estimation de l’effet de la perturbation, mais également une estimation de la grandeur nominale.

8. Les échelles utilisées dans ces deux figures sont légèrement différentes.

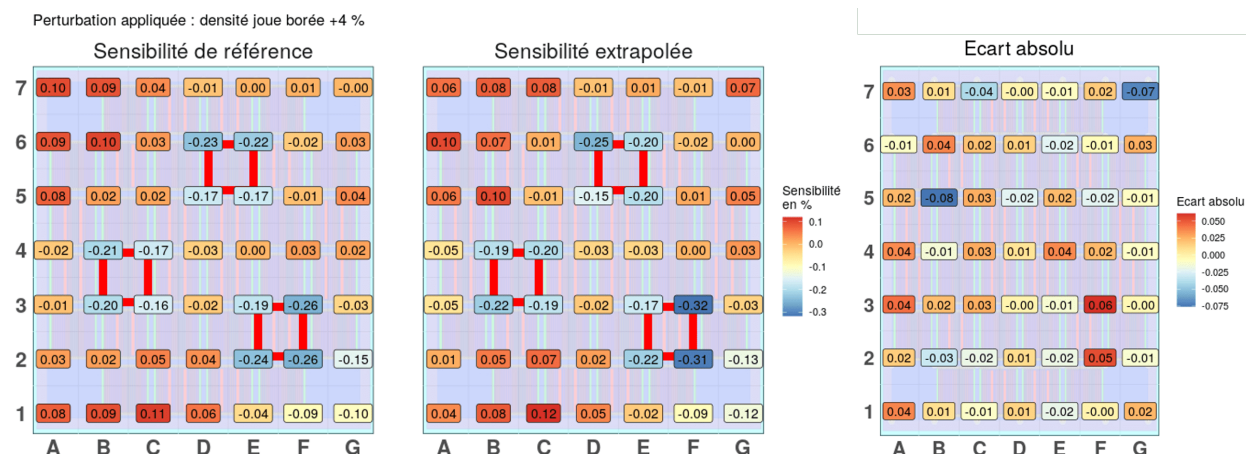


FIGURE 4.11 – Illustration de la validation numérique relative à l'hypothèse d'additivité. (Image de droite) Écart absolu entre les sensibilités de référence (image de gauche) et les sensibilités extrapolées (image centrale) sur une configuration à trois éléments combustibles perturbés

Pour valider cette observation réalisée sur la configuration à trois éléments combustibles perturbés, 11 configurations supplémentaires ont été étudiées. Pour chacune de ces configurations, un nombre variable i d'éléments combustibles a été perturbé. Une configuration a aléatoirement été sélectionnée parmi les $\binom{32}{i}$ configurations existantes⁹. En pratique, pour les 12 configurations appartenant à la base de validation numérique, nous avons fait varier le nombre d'éléments combustibles perturbés de 3 à 32. Les écarts absolus moyens entre référence et extrapolation relatifs à ces 12 configurations sont reportés dans le Tableau 4.7.

Au vu des écarts absolus moyens observés, on constate un léger biais entre sensibilité de référence et sensibilité extrapolée. Si l'on considère les 12 comparaisons réalisées, l'écart absolu moyen est de -0,022 %. Les écarts absolus obtenus sont suffisamment faibles en comparaison des sensibilités estimées pour utiliser cette hypothèse d'additivité. Ainsi, n'importe quelle sensibilité associée à une configuration où plusieurs éléments combustibles ont subi une même perturbation peut instantanément être interpolée à partir d'un nombre limité de calculs Monte-Carlo.

Nombre d'EC perturbés	Écart absolu moyen	Nombre d'EC perturbés	Écart absolu moyen	Nombre d'EC perturbés	Écart absolu moyen
3	-0,005	7	-0,020	11	-0,020
4	-0,007	8	-0,026	12	-0,025
5	-0,004	9	-0,024	16	-0,032
6	-0,014	10	-0,022	32	-0,067

TABLEAU 4.7 – Validation numérique où une perturbation de la densité des joues borées de +4 % a été appliquée à un nombre variable d'éléments combustibles.

Les écarts relatifs moyens ne sont pas utilisés comme grandeur quantitative permettant de valider les méthodes présentées dans ce document. Du fait des incertitudes Monte-Carlo,

9. Une unique et même perturbation est appliquée à chaque élément combustible. Il est par conséquent possible de dénombrer le nombre de configurations existantes.

certaines des grandeurs de référence sont estimées à des valeurs compatibles avec une valeur nulle. Ces faibles valeurs de référence proches de la valeur nulle peuvent par conséquent rendre les écarts relatifs inexploitable. Plus formellement, il est possible d'obtenir le cas suivant du fait de faibles grandeurs de référence :

$$Ecart\ relatif = \frac{Référence - Extrapolé}{Référence} \xrightarrow{Réf \rightarrow \pm 0} \pm \infty.$$

4.5.5 Hypothèse de linéarité

Limitation

L'hypothèse d'additivité présentée dans la section précédente permet de diminuer significativement le nombre de calculs nécessaires pour étudier une configuration où plusieurs éléments combustibles subissent une même perturbation. Néanmoins, cette hypothèse ne permet pas de traiter des configurations où des perturbations du même paramètre technologique sont appliquées, pour plusieurs valeurs. Ainsi, si aucune hypothèse additionnelle n'est avancée, il est théoriquement nécessaire de réaliser un calcul d'échantillon corrélé par valeur de perturbation, et ceci pour tous les éléments combustibles. Cependant, comme discuté précédemment, l'utilisation de la méthode des échantillons corrélés a de multiples avantages, mais reste lourde en temps de calcul. Il n'est donc pas envisageable d'estimer l'effet d'une perturbation de chaque élément combustible dans toute la plage de variation représentative de leur incertitude technologique.

Formalisation de l'hypothèse

Hypothèse 4.5.2. Les perturbations appliquées sont petites. Elles engendrent des effets linéaires dans les plages de variation considérées.

Sous l'hypothèse d'additivité et de linéarité, il est suffisant de réaliser un unique calcul d'échantillons corrélés par élément combustible pour les perturbations maximales notées : $(Pert_{BC12max}, \dots, Pert_{EF67max})$. À partir de ces calculs réalisés sur une configuration où un seul élément combustible est perturbé, une « base » est formée $(Sensi_{BC12max}, \dots, Sensi_{EF67max})$. Cette base est alors utilisée afin d'interpoler chaque sensibilité associée à n'importe quelle configuration perturbée. Les perturbations appliquées aux éléments combustibles doivent néanmoins appartenir aux plages de variation représentatives des incertitudes technologiques.

Plus formellement, connaissant le jeu de perturbation appliqué aux 32 éléments combustibles $(Pert_{BC12}, \dots, Pert_{EF67})$, il est possible d'extrapoler la sensibilité associée à n'importe quelle configuration perturbée à l'aide de la base de vecteur de sensibilité selon le modèle additif linéaire suivant :

$$Sensi\ extrapolée = \mathbb{I}_{BC12} \frac{Pert_{BC12}}{Pert_{BC12max}} Sensi_{BC12max} + \dots + \mathbb{I}_{EF67} \frac{Pert_{EF67}}{Pert_{EF67max}} Sensi_{EF67max}. \quad (4.2)$$

On constate dans l'équation précédente que des coefficients de normalisation $1/Pert_{ECmax}$ interviennent. Ces coefficients proviennent directement de l'hypothèse de linéarité avancée. Ces termes transcrivent la relation linéaire existant entre la sensibilité estimée pour les

perturbations maximales envisagées et toutes les autres sensibilités associées à des perturbations appartenant à la plage de variation $[Pert_{EC\ min}; Pert_{EC\ max}]$, définie par la perturbation maximale. Il s'agit donc d'un développement de Taylor au premier ordre.

Sous l'hypothèse de linéarité, il est possible d'extrapoler toutes les sensibilités associées à des perturbations notées $Pert_{EC}$ appartenant à l'intervalle $[Pert_{EC\ min}, Pert_{EC\ max}]$, à partir d'un unique calcul Monte-Carlo réalisé pour la perturbation maximale $Pert_{EC\ max}$. On obtient ainsi les pondérations intervenant dans l'équation 4.2 :

$$\frac{Pert_{EC}}{Pert_{EC\ max}}.$$

Validation numérique

Pour valider numériquement l'hypothèse de linéarité couplée à l'hypothèse d'additivité, une configuration du cœur a été construite pour laquelle chaque joue borée a été perturbée aléatoirement selon une loi uniforme $U(-4\ %, 4\ \%)$. Les bornes choisies pour la distribution uniforme proviennent de la connaissance métrologique des cœurs tels que fabriqués. À noter que cette connaissance se traduira en connaissance *a priori* lors du traitement d'un problème de calibration présenté dans le Chapitre 6. La configuration du cœur ainsi construite est représentée sur l'image de gauche de la Figure 4.12. Sur cette image nommée « perturbation appliquée » sont représentées les perturbations appliquées aux 32 éléments combustibles composant le cœur d'étude.

Durant la campagne de validation numérique, des taux de fission ont été mesurés au niveau des sondes de mesure et ceci pour 16 conditions expérimentales¹⁰ différentes. Ces mesures ont été comparées à des mesures équivalentes réalisées sur le cœur nominal. Ces comparaisons issues de simulations Monte-Carlo classiques ont permis d'estimer par la méthode directe les sensibilités de référence utilisées lors de la validation numérique de l'hypothèse de linéarité.

Convergence des calculs Pour cette étude, les incertitudes Monte-Carlo des taux de fission relevés au niveau des sondes pour les calculs de référence étaient en moyenne de 0,11%, tout comme les taux de fission mesurés sur les configurations perturbées. Ces calculs ont nécessité 50 processeurs pendant 28 h de calcul pour estimer les grandeurs de référence et 31 h pour les grandeurs perturbées. Les incertitudes Monte-Carlo des grandeurs nominales estimées lors des calculs par échantillons corrélés étaient en moyenne de 0,29%. Durant ces calculs, l'effet de quatre perturbations a systématiquement été quantifié. Ces calculs ont nécessité 30 processeurs pendant 32 h de calculs.

Un exemple des sensibilités de référence obtenues est illustré en Figure 4.12. Ces sensibilités ont été obtenues pour une condition expérimentale réalisée à 100 °C, 0 ppm pour le titre en bore et 184 cm pour l'insertion des lattes. La sensibilité extrapolée connaissant les perturbations appliquées au cœur pour cette même condition expérimentale est également illustrée sur l'image « Sensibilité extrapolée » de cette figure. Finalement, nous représentons sur la partie droite de cette figure l'écart absolu entre sensibilité de référence et extrapolée.

Après analyse des sensibilités de référence et des sensibilités extrapolées de la Figure 4.12, un premier constat peut être donné. Il semble que l'utilisation de l'hypothèse de linéarité couplée à l'hypothèse d'additivité n'entraîne pas de biais significatif. Cependant, comme

10. Pour plus de détails concernant les conditions expérimentales et le plan d'expériences considéré, nous renvoyons à la Section 2.1.3.

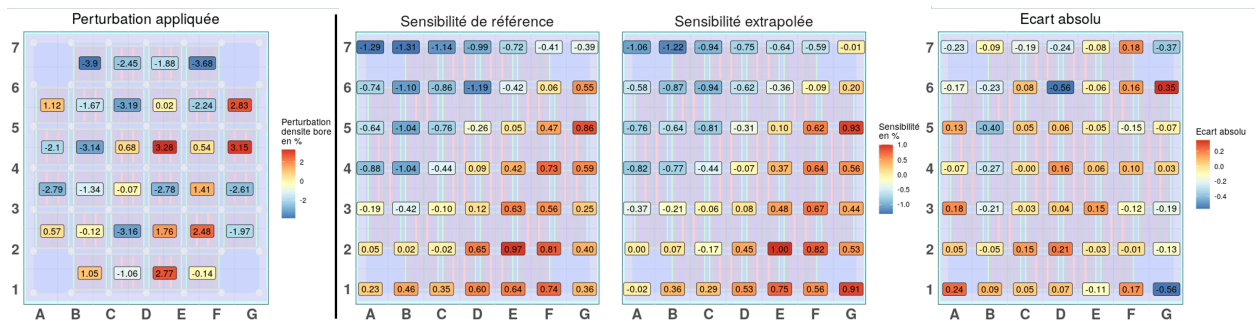


FIGURE 4.12 – Illustration de la validation numérique relative à l'hypothèse de linéarité. De gauche à droite : perturbations appliquées au cœur, sensibilité de référence, sensibilité extrapolée sous les hypothèses de linéarité et d'additivité, écart absolu entre référence et extrapolation.

l'illustre l'image relative aux écarts absolus, on constate que les écarts entre référence et extrapolation ne sont pas négligeables. Cet écart atteint par exemple 0,56 % pour le tube-guide G1. Cet écart est à considérer à la lumière de la sensibilité de référence estimée au niveau de ce tube-guide, c'est-à-dire 0,36 %.

Une partie des écarts observés peut néanmoins être imputable aux incertitudes Monte-Carlo associées aux grandeurs utilisées lors de la validation numérique. Bien que ces estimations proviennent d'une campagne numérique très coûteuse en temps de calcul, les incertitudes Monte-Carlo associées aux taux de fission mesurés sont importantes comparées aux sensibilités estimées comme on peut le voir sur la Figure 4.12.

Les comparaisons entre grandeurs de référence et extrapolées ont été réalisées pour 16 conditions expérimentales différentes. Les écarts absolus moyens relatifs à ces comparaisons sont présentés dans le Tableau 4.8. Au vu de ces résultats, nous pouvons conclure que l'introduction de l'hypothèse de linéarité conduit à un biais moyen de -0,05%.

Condition expérimentale	Écart absolu moyen	Condition expérimentale	Écart absolu moyen	Condition expérimentale	Écart absolu moyen	Condition expérimentale	Écart absolu moyen
100 0 184	-0,04	150 0 144	0,00	200 0 96	-0,03	250 0 65	0,04
100 120 129	-0,01	150 120 96	-0,01	200 120 71	0,03	250 120 45	-0,03
100 400 59	-0,23	150 400 46	-0,20	200 400 32	-0,09	250 400 7	-0,14
100 768 TLH	-0,03	150 695 TLH	-0,04	200 580 TLH	0,00	250 411 TLH	0,01

TABLEAU 4.8 – Validation numérique, hypothèse de linéarité.

Cette campagne de validation numérique permet de valider nos hypothèses simplificatrices. L'utilisation de l'hypothèse de linéarité couplée à celle d'additivité permet de fournir des tendances moyennes convaincantes concernant les sensibilités extrapolées. En moyenne, un écart absolu relatif entre grandeur de référence et extrapolée de 13 % est observé. Un biais conséquent peut néanmoins être observé si l'on considère les sensibilités extrapolées prises indépendamment comme cela peut être le cas pour les sondes G1 ou D6 (voir Figure 4.12).

4.6 Synthèse partie 2

Dans la seconde partie de ce chapitre, l'introduction d'hypothèses simplificatrices de linéarité et d'additivité conduisent à l'apparition d'un léger biais entre les calculs de référence et leurs extrapolations lors de l'utilisation de la méthode des échantillons corrélés. Ces hypothèses permettent néanmoins, à partir d'un nombre limité de calculs Monte-Carlo, de fournir une estimation des sensibilités de façon instantanée, et ce quelle que soit la configuration du cœur perturbé.

Chapitre 5

Transfert instrumentation in-core vers facteurs de puissance

Sommaire

5.1	Contexte	77
5.1.1	Convergence des calculs	78
5.1.2	Validation numérique	78
5.2	Matrice de fission	79
5.2.1	Formalisme	79
5.2.2	Estimation de la matrice	82
5.2.3	Illustration sur le cœur d'étude	83
5.3	Transposition	84
5.3.1	Estimation des coefficients de passage	85
5.3.2	Mise en œuvre	85
5.3.3	Validation numérique	88
5.4	Synthèse	91

Dans ce cinquième chapitre du document, nous présentons une méthode de transposition permettant le transfert de l'information mesurée au niveau des sondes vers les éléments combustibles. Nous introduisons d'abord le contexte scientifique. Nous présentons ensuite le formalisme des matrices de fission sur lequel se base la méthodologie, puis nous détaillons la méthode de transposition. Finalement, la méthode est mise à l'épreuve lors d'une campagne de validation numérique pour quantifier le biais qu'introduit son utilisation.

5.1 Contexte

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la méthodologie et les hypothèses envisagées pour traiter l'effet d'une perturbation de la composition d'un élément du cœur sur les mesures réalisées au niveau des sondes de mesure. Cependant, comme on peut le remarquer sur la Figure 2.1 ces sondes ont un faible diamètre. Ce faible diamètre permet aux sondes :

- d'être insérées dans les tubes-guides positionnés entre les éléments combustibles où elles ne disposent que de peu d'espace ;

- de perturber au minimum la quantité d'eau¹ inter-assemblage. Cette considération doit être prise en compte pour ne pas perturber la distribution du flux dans les éléments combustibles lors des mesures à l'aide des sondes².

En pratique, ces sondes ont un volume 3000 fois inférieur au volume des éléments combustibles. Cette contrainte bien que nécessaire pour répondre à la problématique expérimentale complique l'estimation par calcul Monte-Carlo. Comme les sondes occupent de petits volumes, un nombre moins important de neutrons contribue au score estimé en comparaison aux éléments combustibles. L'incertitude Monte-Carlo associée aux estimations des taux de fission dans les sondes est par conséquent plus importante que celles estimées au niveau des éléments combustibles.

Ce chapitre vise à présenter une méthode permettant de tirer profit des estimations disposant d'une faible incertitude Monte-Carlo, réalisées au niveau des éléments combustibles. Pour ce faire, la méthode proposée dans [38] et présentée ici, permet de tirer avantage de cette propriété par le transfert des estimations réalisées au niveau des sondes de mesure vers les éléments combustibles.

5.1.1 Convergence des calculs

Pour illustrer notre propos, considérons les calculs présentés à la Section 4.5.5 permettant d'estimer les taux de fission au niveau des sondes de mesure. Lors de ces simulations, des estimations des taux de fission ont également été réalisées au niveau des éléments combustibles. Les incertitudes Monte-Carlo de ces estimations lors des calculs de référence étaient en moyenne de 0,013 %, soit une incertitude dix fois plus faible que l'estimation équivalente sur les tubes-guides (0,11 %, cf. Section 4.5.5). Pour les grandeurs nominales estimées lors des calculs par échantillons corrélés, l'incertitude était en moyenne de 0,035 %, soit une diminution là aussi d'un facteur dix en comparaison aux tubes-guides (0,29 %, cf. Section 4.5.5).

5.1.2 Validation numérique

Pour illustrer l'intérêt du transfert de l'information mesurée à l'aide des sondes vers les éléments combustibles, la campagne de validation numérique présentée à la Section 4.5.5 a été reconduite à partir des estimations réalisées sur les éléments combustibles. Lors de cette analyse, les hypothèses d'additivité et de linéarité ont été testées pour les sensibilités des taux de fission estimés directement au niveau des éléments combustibles. Les grandeurs issues de ces estimations disposent d'une incertitude Monte-Carlo dix fois plus faible que celles sur les sondes. Ainsi, si les hypothèses de linéarité et d'additivité sont également légitimes pour les éléments combustibles, un meilleur accord est attendu entre les mesures de référence et leur extrapolation en comparaison à la validation numérique présentée Section 4.5.5. Cette réduction des écarts doit être obtenue du fait des faibles incertitudes Monte-Carlo associées aux estimations utilisées lors de cette étude. Les résultats de cette analyse sont rapportés dans le Tableau 5.1.

Ces résultats obtenus sur les éléments combustibles valident l'utilisation des hypothèses

1. En comparaison à un cœur non instrumenté, l'insertion d'une Instrumentation In-Core modifie localement le rapport de modération.

2. Lors de l'insertion de la sonde dans le tube-guide, les propriétés neutroniques des matériaux de la sonde sont également susceptibles de modifier localement le flux.

Condition expérimentale	Écart absolu moyen	Condition expérimentale	Écart absolu moyen	Condition expérimentale	Écart absolu moyen	Condition expérimentale	Écart absolu moyen
100 0 184	0,0071	150 0 144	-0,0006	200 0 96	-0,0019	250 0 65	0,0064
100 120 129	-0,0021	150 120 96	0,0055	200 120 71	0,0042	250 120 45	0,0059
100 400 59	0,0100	150 400 46	0,0103	200 400 32	0,0138	250 400 7	0,0124
100 768 TLH	0,0028	150 695 TLH	0,0050	200 580 TLH	-0,0004	250 411 TLH	-0,0006

TABLEAU 5.1 – Validation numérique des hypothèses d’additivité et de linéarité réalisée directement sur les taux de fission mesurés dans les éléments combustibles.

d’additivité et de linéarité. En moyenne, un écart absolu de 0,005 % est obtenu sur les 16 conditions expérimentales considérées. Ce biais est inférieur d’un facteur 10 lorsque les hypothèses sont testées directement sur les éléments combustibles en comparaison à la validation numérique conduite sur les sondes de mesure (cf. Tableau 4.8). Ainsi, les hypothèses d’additivité et de linéarité sont plus fiables lorsque les études sont réalisées au niveau des éléments combustibles.

Dans une installation expérimentale, les mesures directes de ces grandeurs (taux de fission dans le combustible) ne sont cependant pas réalisables. De plus, dans le cadre de nos travaux de thèse, seules les mesures réalisées à l’aide des sondes sont à disposition³. Afin de valider la distribution de puissance dans le combustible à partir des mesures de l’Instrumentation In-Core, et ce quelle que soit l’instrumentation utilisée, il est ainsi nécessaire de disposer d’une méthode de transposition.

Cette méthode doit permettre le transfert des informations expérimentales mesurées au niveau des sondes vers les éléments combustibles. Elle permet ainsi de profiter des incertitudes Monte-Carlo moindres, associées aux prédictions réalisées au niveau des éléments combustibles. Pour ce faire, cette méthode de transposition (cf. Section 5.3) s’appuie sur l’information contenue dans la « matrice de fission », présentée dans la section suivante.

5.2 Matrice de fission

La matrice de fission notée K ([34], [39], [40], [41]), est un outil permettant de caractériser la propagation des neutrons dans un cœur sur une génération. Cet outil se base sur une discrétisation spatiale du cœur. Cette matrice est la « liste » des nombres de neutrons produits par fission dans le volume i à partir d’un neutron émis dans le volume j . Cette quantité notée k_{ij} est l’élément de la matrice de fission K à la ligne i et à la colonne j .

5.2.1 Formalisme

Soit⁴ $P = (\vec{r}, E, \Omega)$, l’espace des phases. Cet espace est à 6 dimensions. Il est défini à l’aide du vecteur position à trois dimensions \vec{r} , du vecteur donnant la direction de déplacement de la particule Ω , vecteur unitaire de dimension 2 et de l’énergie E , grandeur à 1 dimension.

3. En pratique, d’autres dispositifs expérimentaux existent mais ne permettent pas nécessairement de réaliser la mesure directement. Par exemple, quelques assemblages du RJH seront possiblement instrumentés de fils de cuivre, dont l’activité sera comptabilisée après irradiation et permettra ainsi d’estimer les taux de fission des assemblages instrumentés.

4. Cette section reprend le formalisme présenté dans la référence [39].

Dans les travaux présentés, les configurations critiques du cœur sont considérées comme stationnaires. De ce fait, la variable temporelle n'intervient pas dans la description de l'espace des phases.

Équation du transport

Dans cet espace, en utilisant le flux neutronique Ψ exprimé en $[\text{n.cm}^{-2}.\text{s}^{-1}]$, il est possible d'écrire l'équation aux λ -valeurs propres caractérisant le transport des neutrons selon l'expression suivante :

$$M.\Psi(\vec{r}, E, \Omega) = \frac{1}{\lambda} \frac{\chi(E)}{4\pi} S(\vec{r}). \quad (5.1)$$

$\chi(E)$ est le spectre d'énergie d'émission des neutrons de fission, $S(\vec{r})$ est la source de neutrons de fission. Elle est définie par :

$$S(\vec{r}) = \iint dE' d\Omega' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E') \Psi(\vec{r}, E', \Omega'). \quad (5.2)$$

Ici M , désigne l'opérateur de perte défini par :

$$\begin{aligned} M.\Psi(\vec{r}, E, \Omega) = & \Omega.\nabla\Psi(\vec{r}, E, \Omega) + \Sigma_t(\vec{r}, E)\Psi(\vec{r}, E, \Omega) \\ & - \iint dE' d\Omega' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \Psi(\vec{r}, E', \Omega'). \end{aligned}$$

Dans les deux dernières équations, ν correspond au nombre de neutrons libérés par fission, Σ_f désigne la section efficace de fission, Σ_s la section de diffusion et Σ_t la section efficace totale.

Fonction de Green

Pour obtenir l'expression de la matrice de fission, introduisons les fonctions de Green. Les fonctions de Green associent le point de l'espace des phases (\vec{r}, E, Ω) à un point initial de l'espace des phases $(\vec{r}_0, E_0, \Omega_0)$, de sorte que :

$$M.G(\vec{r}_0, E_0, \Omega_0 \rightarrow \vec{r}, E, \Omega) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \delta(E - E_0) \cdot \delta(\Omega - \Omega_0).$$

En utilisant les fonctions de Green et en se basant sur les propriétés de linéarité de l'équation du transport (5.1) et sur le principe de superposition, on obtient :

$$\Psi(\vec{r}, E, \Omega) = \frac{1}{\lambda} \iiint d\vec{r}_0 dE_0 d\Omega_0 \frac{\chi(E_0)}{4\pi} S(\vec{r}_0) G(\vec{r}_0, E_0, \Omega_0 \rightarrow \vec{r}, E, \Omega). \quad (5.3)$$

En multipliant l'expression (5.3) par $\nu \Sigma_f(\vec{r}, E)$ et en l'intégrant sur l'énergie et l'angle, on obtient à partir de l'équation (5.2) :

$$S(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda} \int d\vec{r}_0 \cdot S(\vec{r}_0) \cdot H(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}). \quad (5.4)$$

Ici H est la fonction de Green moyennée en énergie et en angle de telle sorte que :

$$H(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}) = \iiint dE d\Omega dE_0 d\Omega_0 \cdot \nu \Sigma_f(\vec{r}, E) \frac{\chi(E_0)}{4\pi} \cdot G(\vec{r}_0, E_0, \Omega_0 \rightarrow \vec{r}, E, \Omega). \quad (5.5)$$

L'équation (5.4) est une expression analytique intégrale de la source de neutrons positionnée au point \vec{r} , exprimée à l'aide des fonctions de Green intégrées sur les angles et les énergies. Ces dernières sont pondérées par les sources de neutrons initiaux et par le taux de production finale de neutrons au point \vec{r} .

Matrice de fission

Finalement, considérons un problème discrétisé en N régions spatiales recouvrant toutes les régions fissiles du cœur étudié. Soit $j \in \{1, \dots, N\}$ le numéro de la région initiale et $i \in \{1, \dots, N\}$ celui de la région finale. En exprimant l'équation (5.4) sur ce maillage, on obtient pour la source de fission dans le volume i notée (s_i) :

$$s_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^N k_{i,j} s_j, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Où, } k_{ij} &= \int_{\vec{r} \in V_i} d\vec{r} \int_{\vec{r}_0 \in V_j} d\vec{r}_0 \frac{s(\vec{r}_0)}{s_j} H(\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}), \\ \text{et } s_j &= \int_{\vec{r} \in V_j} s(\vec{r}) d\vec{r}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

La matrice de fission K est une matrice pleine de dimension $N \times N$. Elle est composée des éléments k_{ij} qui décrivent le nombre de neutrons produits dans le volume i à partir d'un neutron originaire du volume j .

Forme matricielle

La valeur propre fondamentale de l'équation (5.1) est égale au facteur de multiplication effectif du cœur (k_{eff}). Le vecteur propre fondamental associé correspond à la distribution des sources de fission sur l'ensemble des N régions spatiales. Ainsi, $S = \{s_1, \dots, s_N\}^T$ et il est possible de réécrire l'équation (5.6) sous forme matricielle pour le mode fondamental :

$$S = \frac{1}{k_{eff}} K S. \quad (5.8)$$

Mode d'ordre supérieur

L'équation (5.8) découle de l'équation (5.4). L'équation (5.4) est cependant spécifique au mode fondamental. Ainsi, si l'on considère des distributions de sources de fission d'ordre supérieur pour l'équation (5.4), l'équation (5.8) peut être écrite pour ces modes d'ordre supérieur et donne lieu à l'équation (5.9).

Lors de cette réécriture sous forme matricielle, les indices $l = 0, \dots, N - 1$ correspondent aux modes de l'équation aux valeurs propres, de sorte que :

$$S_l = \frac{1}{\lambda_l} K S_l. \quad (5.9)$$

Les valeurs propres associées à ces modes sont notées : $k_{eff} = \lambda_0 > |\lambda_1| > \dots > |\lambda_{N-1}|$. Comme la matrice de fission K est une matrice non symétrique, les valeurs et vecteurs propres peuvent être complexes, bien que le mode fondamental soit un réel strictement positif.

5.2.2 Estimation de la matrice

« Les différents éléments de la matrice de fission définis par l'équation (5.7) et notamment les fonctions de Green H , peuvent être estimés par des calculs Monte-Carlo à énergie continue sans coûts supplémentaires en temps de calcul. En effet, la fonction de Green G (cf. Eq. 5.3) est fournie directement par la simulation. Son intégration en angle et en énergie (cf. Eq. 5.5) est réalisée à l'aide d'un score calculé par la simulation. Ce score est alors classé grâce aux indices de départ et d'arrivée des particules, afin d'estimer chaque élément de la matrice de fission » [40].

Ainsi, lors d'un calcul d'une matrice de fission, les estimations des termes k_{ij} de la matrice de fission sont mises à jour à la fin de chaque lot de particules simulées. Un exemple illustratif de l'estimation de ces éléments est proposé en Figure 5.1. Chaque neutron causant une fission dans le lot de particules simulées est tout d'abord identifié. Les informations relatives à la maille de naissance j du neutron causant une fission dans la maille i sont ensuite répertoriées. Finalement, l'élément k_{ij} de la matrice K est simplement incrémenté pour chaque neutron causant une fission dans la maille i originaire de la maille j . En réalisant ce processus à la fin de chaque lot de particules, pour toutes les mailles de la discrétisation spatiale utilisée, on estime chaque élément de la matrice de fission.

À la fin de la simulation Monte-Carlo, conformément à l'équation (5.7), les éléments k_{ij} de la matrice de fission sont normalisés en les divisant par la source de fission initiale associée. En d'autres termes, chaque colonne $j = 1, \dots, N$ de la matrice K est divisée par la source de fission équivalente. C'est-à-dire, la source s_j pour la colonne j .

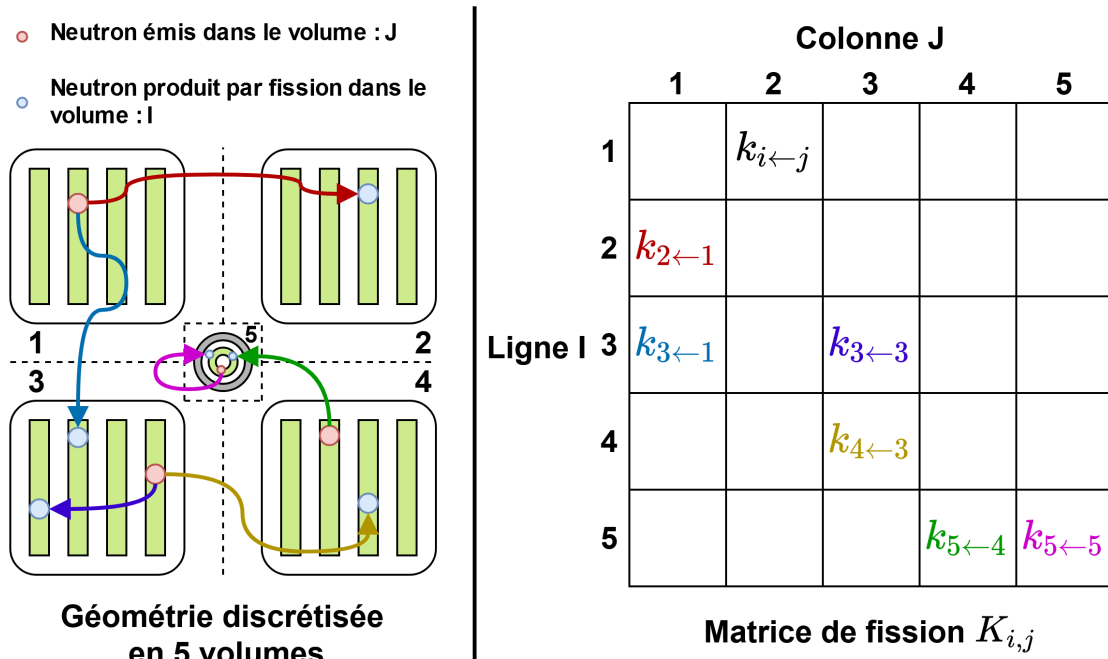


FIGURE 5.1 – Estimations des éléments de la matrice de fission K à la fin de la simulation d'un lot de particules.

5.2.3 Illustration sur le cœur d'étude

Discretisation spatiale et base utilisée

Pour appliquer la méthode de transposition présentée dans la section suivante et estimer la matrice de fission, une discrétisation spatiale du cœur en N régions est effectuée. Chaque élément combustible et chaque tube-guide sont placés dans une unique maille. La matrice de fission du cœur étudié est donc de dimension $(N_{EC} + N_{IIC}) \times (N_{EC} + N_{IIC}) = 81 \times 81$ lors de l'utilisation de cette discrétisation (à savoir $N = N_{EC} + N_{IIC}$). Cette matrice dispose ainsi de 81 modes propres⁵.

Pour faciliter les différentes représentations graphiques, une base de visualisation a arbitrairement été choisie. Cette base notée B regroupe d'une part les 32 mailles associées aux éléments combustibles $\{EC_{BC12}, EC_{CD12}, \dots, EC_{EF67}\}$, et d'autre part les 49 associées aux tubes-guides $\{IIC_{A1}, IIC_{B1}, \dots, IIC_{G7}\}$.

$$B = \{EC_{BC12}, \dots, EC_{EF67}, IIC_{A1}, \dots, IIC_{G7}\}.$$

En utilisant cette base, la matrice de fission du cœur étudié peut se décomposer en une matrice par blocs :

$$K = \begin{pmatrix} K_{EC \leftarrow EC} & K_{EC \leftarrow IIC} \\ K_{IIC \leftarrow EC} & K_{IIC \leftarrow IIC} \end{pmatrix}.$$

Les éléments $K_{i \leftarrow j}$ correspondent à la quantification du nombre de neutrons originaires des mailles j causant des fissions dans les mailles i .

Description du transport des neutrons

La représentation graphique de cette matrice de fission associée au cœur étudié utilisant la base B est proposée en Figure 5.2. L'analyse des éléments de cette matrice donne des informations relatives au transport des neutrons sur la configuration du cœur étudié.

Concernant le bloc $K_{EC \leftarrow EC}$, on observe tout d'abord que les maxima de cette matrice sont ses éléments diagonaux. Les fissions des éléments combustibles sont par conséquent essentiellement causées par des neutrons originaires du même élément combustible. Les termes non diagonaux de cette matrice indiquent que les contributeurs secondaires aux fissions d'un élément combustible sont originaires d'éléments combustibles adjacents. Le bloc $K_{IIC \leftarrow EC}$ indique, quant à lui, que les neutrons causant des fissions dans un tube-guide sont essentiellement originaires des quatre éléments combustibles l'entourant. Ces observations découlent du libre parcours moyen des neutrons dans le cœur étudié (de quelques millimètres à quelques centimètres selon les milieux traversés).

Incertitudes des éléments de la matrice de fission

Un dernier point concerne les incertitudes Monte-Carlo associées aux éléments de cette matrice de fission. Le simulateur utilisé (TRIPOLI-4[®]) ne fournit pas cette information. On observe néanmoins visuellement sur les différents blocs de la matrice de fission (cf. Figure

5. Ce cœur comporte 32 éléments combustibles et 49 tubes-guides. Les notations N_{IIC} et N_{EC} sont également utilisées dans la suite du document pour définir le nombre de tubes-guides et d'éléments combustibles du cœur.

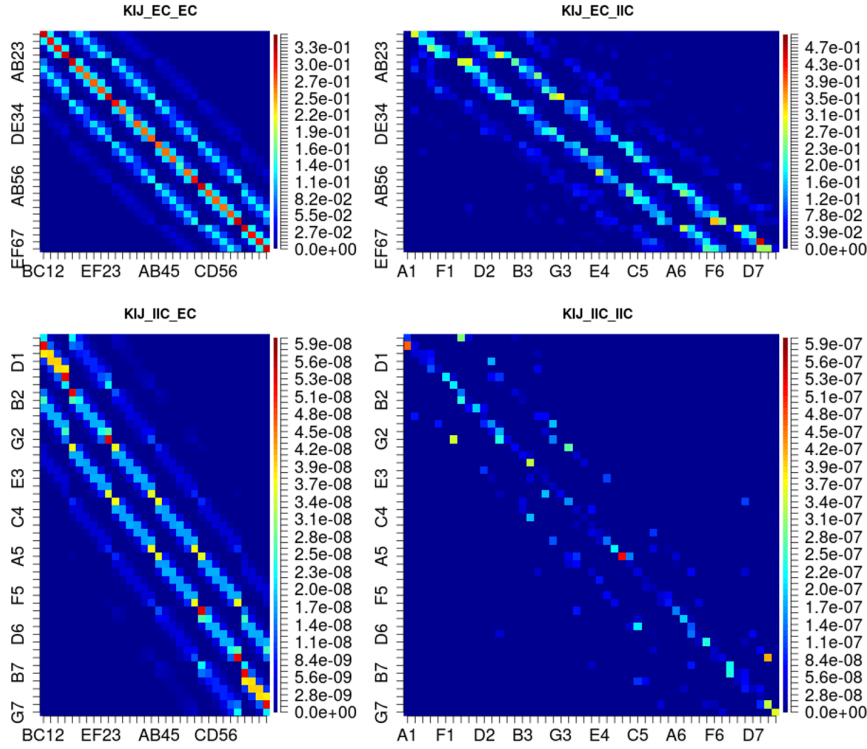


FIGURE 5.2 – Illustration d'une matrice de fission.

5.2) que le bloc $K_{IIC \leftarrow IIC}$ et dans une moindre mesure le bloc $K_{EC \leftarrow IIC}$ semblent plus bruités que les blocs $K_{EC \leftarrow EC}$ et $K_{IIC \leftarrow EC}$.

Les mailles dans lesquelles sont placées les sondes utilisées pour estimer la matrice de fission sont en effet significativement plus petites que celles des éléments combustibles. Par conséquent, un nombre moins important de neutrons causant une fission dans le cœur sont originaires des mailles de l'Instrumentation In-Core. Les estimations des éléments des blocs $K_{IIC \leftarrow IIC}$ et $K_{EC \leftarrow IIC}$, se trouvent dans ce sens plus coûteuses en temps de calcul (du fait de la nécessité de devoir simuler un nombre plus important de neutrons) que les blocs $K_{IIC \leftarrow EC}$ et $K_{EC \leftarrow EC}$ ⁶.

5.3 Transposition

Usuellement, il est difficilement envisageable de résoudre l'équation aux λ -valeurs propres (cf. Éq. (5.1)) caractérisant le transport des neutrons dans un réacteur à l'aide d'une résolution déterministe pour des modes autres que le fondamental.

En effet, lors de ce type de résolution, la discrétisation spatiale réalisée nécessite plusieurs milliers de mailles. La décomposition utilisant les vecteurs propres de la matrice de transport intervenant dans l'Éq. (5.1) est donc difficilement envisageable du fait de la dimension du problème d'inversion.

À l'inverse, lors d'une résolution Monte-Carlo, cette inversion est indirectement réalisable par l'estimation de la matrice de fission du système étudié. En effet, la résolution Monte-Carlo de cette équation permet la condensation spatiale de l'information associée au transport

6. Le calcul à l'origine de la Figure 5.2 a néanmoins nécessité deux semaines de calcul sur 50 processeurs.

des particules par l'utilisation de mailles plus grossières (matrice de fission de dimension 81×81 sur le cas d'application). De cette façon, l'inversion matricielle intervenant dans la décomposition en éléments propres devient numériquement réalisable.

Bien que la matrice de fission ne soit qu'indirectement liée à la matrice de transport, la disponibilité de ses vecteurs propres permet la formation d'une base. Cette base est utilisée pour projeter les mesures réalisées à l'aide des sondes vers les éléments combustibles. La méthode de transposition est présentée en détail dans cette section. Pour plus d'informations relatives à son formalisme, nous renvoyons à la référence [38].

5.3.1 Estimation des coefficients de passage

On suppose que la matrice de fission du cœur perturbé K_p est proche de celle du cœur nominal K . Sous le régime des petites perturbations, l'écart entre la source de fission nominale et perturbée (δS_0) peut alors être approché comme une combinaison linéaire des vecteurs propres de la matrice de fission nominale K , de telle sorte que :

$$\underbrace{\delta S_0}_{\text{Ecart}} = \sum_{l=1}^{N-1} \underbrace{\frac{S_l^{-1} \delta K S_0}{\lambda_0 - \lambda_l}}_{\text{coefficient de passage}} \underbrace{S_l}_{\text{Vecteur Propre } l} . \quad (5.10)$$

Ici, δK désigne la différence entre la matrice de fission perturbée K_p et la matrice nominale K . Pour parvenir à cette relation, les termes $\delta \lambda_l \cdot \delta S_l$ et $\delta K \cdot \delta S_l$ sont négligés (cf. [38]).

5.3.2 Mise en œuvre

Données à dispositions

Pour mettre en œuvre la transposition des taux de fission mesurés à l'aide des sondes de mesure vers les éléments combustibles, les données suivantes sont à notre disposition :

- les mesures expérimentales réalisées à l'aide des sondes de mesure sur le cœur perturbé $(S_0)_{IIC,Pert}$.
- la matrice de fission K calculée sur la configuration nominale ainsi que ses vecteurs propres (S_l) pour $l = 0, \dots, N - 1$.

Rappelons que, N est le nombre de mailles utilisées dans la discrétisation spatiale du cœur permettant le calcul de la matrice de fission. Chaque vecteur propre S_l de la matrice de fission est ainsi composé de N éléments pour tous les modes ($l = 0, \dots, N - 1$). Ces éléments peuvent être répartis en deux catégories. La première est relative aux N_{EC} éléments correspondant aux éléments combustibles notés $(S_{l,EC})$ et la seconde est relative aux N_{IIC} éléments associés à l'instrumentation in-core notés $(S_{l,IIC})$.

Écart entre configurations nominale et perturbée

Pour réaliser cette transposition, il est tout d'abord nécessaire d'estimer le jeu de coefficients de passage. L'écart entre la source de fission nominale⁷ et la source perturbée est calculée comme suit :

$$\delta S_{0,IIC} = (S_{0,IIC})_{Pert} - (S_{0,IIC})_{Nom}.$$

⁷ Le terme $(S_{0,IIC})_{Nom}$ est la partie du vecteur fondamental de la matrice de fission associée aux tubes-guides

Un exemple illustratif de cet écart entre grandeur nominale et perturbée estimée au niveau des sondes de mesure, est donné en Figure 5.3 (image placée dans le coin supérieur gauche). Sur cet exemple, une perturbation de 4 % des joues borées de l'élément combustible DE34 est appliquée au système.

Estimation des coefficients de passage

Par la suite, les coefficients de passage sont estimés numériquement. Ces coefficients (β_1, \dots, β_l) sont estimés en projetant l'écart entre les sources de fission nominale et perturbée sur les vecteurs propres de la matrice de fission relative aux tubes-guides pour différents modes l ⁸. Plus formellement, cela revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \delta S_{0,IIC\ A1} = \beta_1 S_{1,IIC\ A1} + \dots + \beta_l S_{l,IIC\ A1} \\ \delta S_{0,IIC\ G7} = \beta_1 S_{1,IIC\ G7} + \dots + \beta_l S_{l,IIC\ G7} \end{cases} \quad (5.11)$$

La partie haute de la Figure 5.3 illustre l'estimation de ces coefficients.

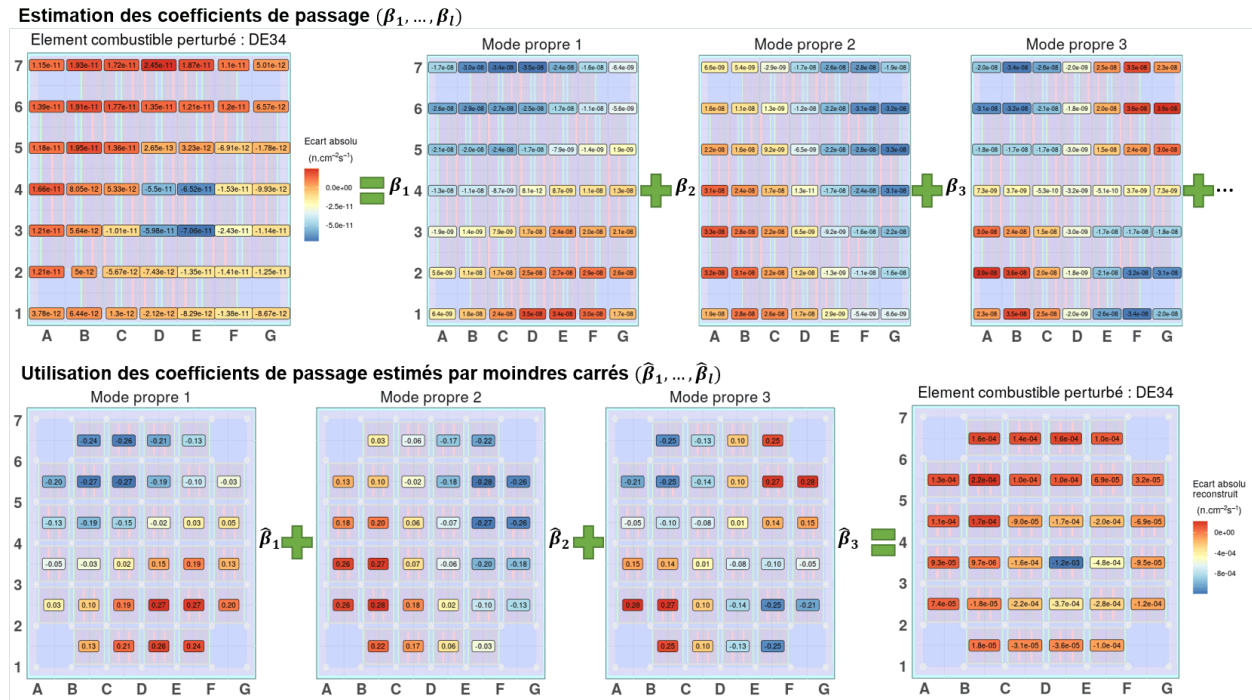


FIGURE 5.3 – Calcul des coefficients de passage et transfert de l'information des sondes de mesure vers les éléments combustibles.

Nombre de vecteurs propres

Dans l'équation (5.10), on constate que les contributions des vecteurs propres S_l à la perturbation du mode fondamentale sont amplifiées par l'inverse des séparations des valeurs propres $\lambda_0 - \lambda_l$. Il est donc raisonnable de penser que la perturbation du mode fondamental est explicable essentiellement par les vecteurs propres dont les valeurs propres associées sont

8. Pour une définition des modes propres utilisés en pratique pour estimer les coefficients de passage (β_1, \dots, β_l), se référer à la section suivante.

proches de celle du mode fondamental. Pour rappel, l'ordre des vecteurs est défini par l'amplitude des valeurs propres associées (cf. Eq. 5.9). Les vecteurs propres qui auront le plus de poids sont par conséquent ceux dont l'ordre est le plus faible.

Au maximum, tous les vecteurs propres de la matrice de fission peuvent être pris en compte pour estimer les coefficients de passage. Sur le cas d'application, il est donc théoriquement possible d'utiliser l'ensemble des $(N - 1)$ vecteurs propres de sorte à avoir $l \in \{1, \dots, N - 1\}$.

Cependant, pour résoudre le système d'équations (5.11) par moindres carrés, il est nécessaire d'avoir à disposition un nombre supérieur ou égal de mesures sur les tubes-guides que de vecteur propre pour estimer les coefficients de passage. Au maximum, il est ainsi possible d'utiliser $l \in \{1, \dots, N_{IIC}\}$ vecteurs propres.

Lors de la mise en œuvre de la transposition, seuls les modes $l \in \{1, \dots, N_{EC}\}$ avec $N_{EC} = 32 < N_{IIC}$ ont été utilisés afin d'estimer ce jeu de coefficient de passage. Ce choix est purement qualitatif. En effet, lors de l'estimation des intervalles de confiance associés à cette transposition, l'utilisation d'un grand nombre de vecteurs propres entraîne un faible degré de liberté et donc un coefficient d'élargissement de Student élevé. L'utilisation d'un faible nombre de vecteurs propres conduit également à des variances résiduelles élevées. Le nombre de vecteurs propres peut ainsi être optimisé de manière à réduire la taille des intervalles de confiance associés à la transposition réalisée.

Enfin, il a été supposé que les modes sélectionnés pour réaliser la transposition disposent d'une incertitude Monte-Carlo suffisamment faible pour pouvoir être utilisés.

Estimations des perturbations des assemblages à partir des observations réalisées sur les sondes

Une fois ce jeu de coefficients estimé, il devient possible de transférer l'information vers les éléments combustibles. Les estimations $(\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_l)$ des coefficients pondérant les $l \in \{1, \dots, N_{EC}\}$ vecteurs propres sont utilisées lors de la projection. Cette projection est cette fois-ci appliquée uniquement à la partie des vecteurs propres relative aux éléments combustibles notés $(S_{1,EC}, \dots, S_{l,EC})$. Les perturbations au niveau des éléments combustibles peuvent ainsi être prédites par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \delta S_{0,EC \ BC12} &= \hat{\beta}_1 S_{1,EC \ BC12} + \dots + \hat{\beta}_l S_{l,EC \ EF67} \\ \delta S_{0,EC \ EF67} &= \hat{\beta}_1 S_{1,EC \ BC12} + \dots + \hat{\beta}_l S_{l,EC \ EF67}. \end{cases} \quad (5.12)$$

L'utilisation de ces coefficients pour prédire les taux de fission dans les éléments combustibles à partir des taux observés par les sondes est illustrée sur la partie basse de la Figure 5.3. Cette projection permet d'obtenir le vecteur $\delta S_{0,EC}$ correspondant à l'écart des distributions des sources de fission entre la configuration nominale et la configuration perturbée au niveau des éléments combustibles.

En conclusion, à partir des vecteurs propres de la matrice de fission $(S_l)_{l=1,\dots,N-1}$ et des écarts observés entre la configuration nominale et perturbée $\delta S_{0,IIC}$ mesurée sur les tubes-guides, il est possible de transposer l'information sur les éléments combustibles $\delta S_{0,EC}$.

Transfert directement à partir des taux de fission mesurés

Cette projection peut également être réalisée directement sur la grandeur perturbée mesurée au niveau des sondes de mesure (soit $(S_{0,IIC})_{Pert}$). Dans ce cas, les coefficients de passage

$(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l)$ doivent être estimés. Comme on peut le constater, le coefficient β_0 associé au vecteur fondamental S_0 est utilisé lors de cette estimation. La distribution des sources de fission perturbées au niveau des éléments combustibles $(S_{0,EC})_{Pert}$ est alors obtenue à l'issue de la transposition. En pratique, la transposition a directement été réalisée à partir des grandeurs perturbées et non pas sur l'écart entre la grandeur perturbée et la grandeur nominale.

5.3.3 Validation numérique

Données d'entrée

Pour valider l'utilisation de cette méthode de transposition, une campagne de simulations s'appuyant sur deux types de calculs a été conduite. La condition expérimentale pour cette campagne de validation était de 150 °C, 120 ppm pour le titre en bore et 96 cm d'insertion pour les lattes de contrôle.

Le premier type de calcul a permis de fournir la matrice de fission nécessaire à la transposition. Cette simulation réalisée sur la configuration nominale a nécessité 13 jours de calculs sur 50 processeurs. Par ailleurs, ce calcul a également permis de fournir une estimation des taux de fission au niveau des éléments combustibles et des tubes-guides. Les incertitudes Monte-Carlo étaient en moyenne de $4,6 \cdot 10^{-3} \%$ au niveau des éléments combustibles et de $3,7 \cdot 10^{-2} \%$ pour les tubes-guides. Le second type de simulation nécessaire à la campagne de validation numérique concerne les estimations des taux de fission mesurés sur le cœur perturbé. Ces simulations ont été présentées dans la Section 4.5.4. Les incertitudes des taux de fission mesurés au niveau des sondes étaient en moyenne de 0,1%.

Rappelons que les données utilisées en entrées de la méthode de transposition correspondent aux taux de fission mesurés au niveau des sondes, lors des différentes simulations. Ces mesures sont alors transposées sur les éléments combustibles à l'aide de la méthode basée sur la matrice de fission estimée sur la configuration nominale.

Grandeur de référence

La campagne de validation est conduite sur un modèle numérique. Les grandeurs expérimentales à reconstruire à l'aide de la méthode de transposition sont ainsi directement à disposition à l'issue de la simulation numérique. Elles peuvent ainsi être utilisées comme grandeurs de référence pour valider la méthode de transposition. Lors des simulations réalisées sur le cœur numérique, l'incertitude sur ces quantités de référence était en moyenne de 0,013%.

À l'inverse, lors d'une campagne expérimentale réalisée sur un cœur fabriqué, les taux de fission mesurés au niveau des éléments combustibles ne sont pas à disposition (grandeurs expérimentales à reconstruire), d'où le développement de la méthode présentée.

Analyse qualitative

Afin de réaliser la campagne de validation, plusieurs configurations perturbées du cœur ont été étudiées. Comme pour la validation numérique relative aux hypothèses d'additivité et de linéarité présentées dans la section précédente, les densités des joues borées de plusieurs éléments combustibles ont été augmentées de 4 %.

Pour construire ces configurations, un nombre N_{EC} d'éléments combustibles allant de 3 à 32 a été considéré. Pour chacune de ces configurations, N_{EC} éléments combustibles ont aléatoirement été sélectionnés parmi 32 pour subir la perturbation. Le nombre d'éléments combustibles perturbé pour chacune des 12 configurations étudiées est illustré dans le Tableau 5.2.

Une illustration des sensibilités estimées lors d'un calcul de référence sur une configuration où les éléments combustibles (EF23, BC34 et DE56) sont perturbés est donnée sur l'image gauche de la Figure 5.4. Rappelons que des estimations équivalentes réalisées au niveau des sondes de mesure sur la même configuration et pour la même condition expérimentale sont visibles sur l'image de gauche de la Figure 4.11.

En parallèle de ces estimations de référence, la méthode de transposition a été appliquée aux taux relevés sur les sondes. L'application de cette transposition a permis de transférer cette information vers les éléments combustibles. Ces différentes sensibilités sont illustrées sur l'image centrale de la Figure 5.4.

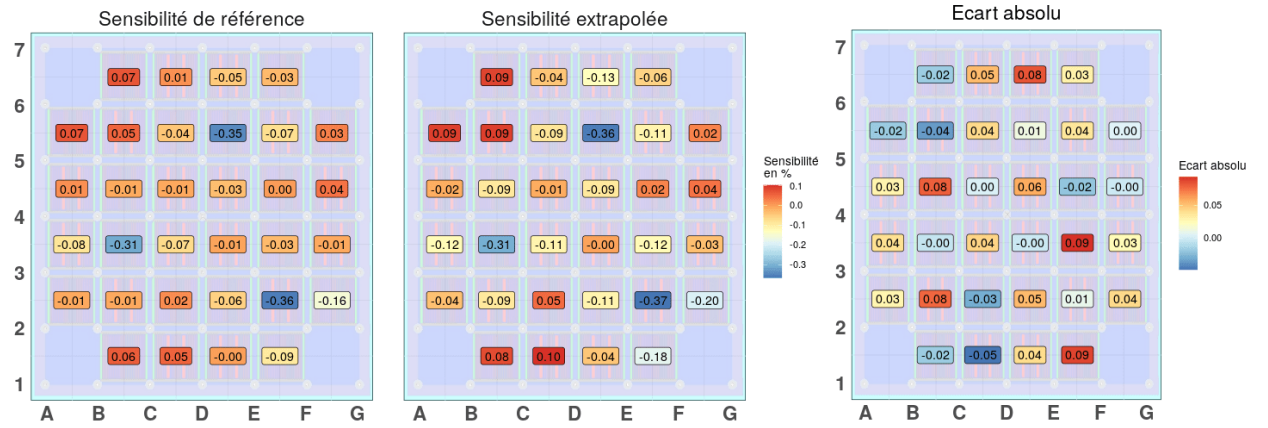


FIGURE 5.4 – Comparaison entre calculs de référence et transpositions de mesures issues des sondes.

Lorsque'on analyse les cartes de sensibilité obtenues au niveau des éléments combustibles, on identifie facilement les éléments ayant subi la perturbation. Ces éléments sont ceux étant les plus sensibles aux perturbations appliquées. Ils apparaissent sur la Figure 5.4 avec les sensibilités maximales (de l'ordre de -0,35 %). Rappelons que le bore est un poison neutronique. Il absorbe les neutrons présents dans le cœur, notamment dans le spectre thermique. Sa présence donne donc lieu à une diminution du flux neutronique à proximité des éléments combustibles ayant leurs joues borées plus enrichies que la normale. Enrichir les joues borées entraîne par conséquent une diminution des taux de fission relevés au niveau des éléments combustibles perturbés, d'où des sensibilités négatives⁹.

Concernant les sensibilités extrapolées à l'aide de la matrice de fission. Une simple inspection visuelle montre que les résultats obtenus à l'issue de cette extrapolation concordent avec les sensibilités de référence. Un écart absolu moyen de 0,02 % est observé. Les sensibilités associées aux trois éléments combustibles perturbés concordent avec les sensibilités de référence, avec un écart absolu constaté de 0,01 %.

9. D'autant plus que la section efficace de fission de l'uranium 235 présent dans les sondes est plus importante dans le domaine thermique et que le bore 10 dispose d'une section efficace de capture importante dans ce même domaine.

adjacents à un élément perturbé semblent quant à elles légèrement biaisées. Un écart absolu moyen de 0,06 % est observé au niveau des éléments adjacents à un élément perturbé.

Cette première analyse montre que la méthode de transposition fournit des tendances générales pertinentes. Cependant, lors de l'utilisation de la transposition, des biais importants peuvent être observés. Si l'on considère l'élément combustible EF34 de cette configuration, un écart absolu de 0,09 % est observé pour une sensibilité de référence de -0,03 %.

Analyse quantitative

Afin de confirmer le constat précédent, 12 configurations ont été traitées. Les résultats de cette étude sont donnés dans le Tableau 5.2.

Nombre d'EC perturbés	Écart absolu moyen	Nombre d'EC perturbés	Écart absolu moyen	Nombre d'EC perturbés	Écart absolu moyen
3	0,02	7	0,02	11	-0,05
4	0,02	8	0,03	12	0,05
5	0,02	9	0,03	16	0,04
6	0,04	10	0,02	32	0,11

TABLEAU 5.2 – Validation numérique où une perturbation de la densité des joues borées de +4 % a été appliquée à un nombre variable d'éléments combustibles.

Ces comparaisons confirment les observations réalisées. En moyenne, un écart absolu de 0,04% est observé sur les 12 configurations perturbées analysées.

Seconde campagne de validation numérique

Une seconde campagne de validation numérique a ensuite été conduite sur la configuration de cœur perturbé présentée pour 16 conditions expérimentales différentes, comme présenté en Section 4.5.5 (chaque joue borée est perturbée aléatoirement selon une loi uniforme $U(-4\%, +4\%)$, cf. Figure 4.12). Lors de cette étude, la méthode des échantillons corrélés n'a pas été utilisée et les sensibilités associées aux grandeurs d'intérêts ont été estimées par la méthode directe.

Pour cela, 16 calculs ont donc été réalisés en configurations perturbées. Les convergences associées à ces calculs ont été présentées en Section 4.5.5. Rappelons qu'ils ont nécessité 50 processeurs pendant 28 h de calculs. Les incertitudes Monte-Carlo des taux de fission perturbés estimées au niveau des sondes sont de 0,11 %. De plus, un calcul par condition expérimentale a été réalisé sur la configuration nominale. Ces calculs ont permis de fournir les matrices de fission utilisées lors de la transposition. Ils ont nécessité 50 processeurs pendant 30 h afin de fournir une incertitude de 0,11 % sur les taux de fission estimés au niveau des sondes et de 0,014 % sur ceux estimés au niveau des éléments combustibles.

Les résultats de cette validation numérique sont reportés dans le Tableau 5.3. L'écart absolu moyen correspond à la différence des sensibilités estimée directement au niveau des éléments combustibles et des sensibilités transposées. Les sensibilités ont été transposées vers les éléments combustibles à partir des mesures réalisées par les sondes.

Condition expérimentale	Écart absolu moyen	Condition expérimentale	Écart absolu moyen	Condition expérimentale	Écart absolu moyen	Condition expérimentale	Écart absolu moyen
100 0 184	0,02	150 0 144	0,02	200 0 96	0,0	250 0 65	0,01
100 120 129	0,0	150 120 96	0,02	200 120 71	-0,04	250 120 45	0,07
100 400 59	0,22	150 400 46	0,22	200 400 32	0,10	250 400 7	0,12
100 768 TLH	0,04	150 695 TLH	0,07	200 580 TLH	-0,01	250 411 TLH	0,01

TABLEAU 5.3 – Validation numérique de la méthode de transfert pour une même configuration et 16 conditions expérimentales différentes.

Au vu de ces résultats, la méthode de transposition appliquée avec N_{EC} vecteurs propres fournit des résultats convaincants pour les 16 conditions expérimentales étudiées. Un écart absolu moyen de 0,05 % est néanmoins observé entre les sensibilités de référence et les sensibilités extrapolées. Au vu de l'ordre de grandeur des sensibilités estimées, ce biais est suffisamment faible pour pouvoir déployer la méthode. L'écart relatif moyen entre référence et extrapolation pour les 16 conditions expérimentales est de 3 %.

5.4 Synthèse

Une méthode de transposition de l'information mesurée au niveau des sondes vers les éléments combustibles est proposée dans cette section. Elle consiste à projeter les données observées sur une configuration perturbée, à l'aide d'une base des vecteurs propres associée à la matrice de fission calculée dans la configuration nominale. L'utilisation cette transposition permet de traiter n'importe quelle configuration moyennant l'utilisation d'une discrétisation spatiale du cœur étudié.

Nous avons pu vérifier que cette méthode permet la réalisation du transfert de l'information des sondes vers les éléments combustibles. L'éventuel biais introduit est jugé suffisamment faible pour pouvoir déployer la méthode de transposition dans la suite de nos travaux.

Chapitre 6

Calibration

Sommaire

Partie 1 : Paramètres associés au bilan de matière	94
6.1 Problème direct	94
6.2 Calibration	94
6.2.1 Modèle linéaire bayésien	94
6.2.2 Outils informatiques	95
6.3 Premier groupe de paramètres technologiques : les joues borées	95
6.3.1 Données à disposition	95
6.3.2 Mise en œuvre	97
6.3.3 Calibration à partir de mesures de sensibilité directes au niveau des éléments combustibles	99
6.3.4 Utilisation de la matrice de fission	101
6.3.5 Synthèse des résultats	102
6.4 Études relatives à un groupe de paramètres technologiques . .	103
6.4.1 Équivalence entre paramètre technologique géométrique et para- mètre associé aux compositions	103
6.4.2 Groupe de paramètres relatifs à l'enrichissement du combustible .	104
6.4.3 Groupe de paramètres relatifs à l'efficacité des lattes absorbantes .	104
6.4.4 Modification de la géométrie et convergence associée	105
6.4.5 Groupe de paramètres technologiques relatifs à l'efficacité des joues borées	106
6.4.6 Groupe de paramètres relatifs à la densité du modérateur intérieur	107
6.5 Extension à deux groupes de paramètres technologiques	109
6.5.1 Modèle	109
6.5.2 Calibration jointe	109
6.5.3 Analyse des résultats	110
6.5.4 Loi <i>a posteriori</i>	112
6.6 Synthèse partie 1	114
Partie 2 : Paramètres géométriques	115
6.7 Rappels	115
6.7.1 Sondes sensibles	115
6.7.2 Modèles linéaires indépendants	115

6.7.3	Modèle linéaire bayésien	116
6.8	Problématique posée par la calibration des paramètres technologiques incertains	117
6.9	Réduction des incertitudes et simplification du modèle bayésien	119
6.9.1	Analyse de sensibilité par estimation des indices de Sobol	119
6.9.2	Calcul analytique des indices de Sobol	120
6.9.3	Mise en œuvre	122
6.10	Calibration bayésienne	122
6.11	Résultats	124
6.11.1	Mise en œuvre	124
6.11.2	Convergence des calculs	125
6.11.3	Analyse des lois <i>a posteriori</i> estimées	126
6.12	Synthèse partie 2	127

Les méthodes de neutronique présentées dans les Chapitres 4 et 5 sont appliquées dans ce chapitre pour mettre en œuvre la méthodologie de calibration décrite au Chapitre 3 (cf. Figure 3.1 et 3.2). Pour réaliser cette calibration, ne sont considérés que les paramètres technologiques incertains du jumeau numérique ayant une influence significative sur les prédictions du simulateur pour les grandeurs mesurées par l'Instrumentation In-Core.

Dans la première partie de ce chapitre, seuls les paramètres associés au bilan de matière sont perturbés (par rapport à leurs valeurs nominales) pour constituer les mesures expérimentales (fictives) et réaliser la calibration du simulateur. Des méthodes de calcul de sensibilité, des mesures métrologiques permettant de définir les incertitudes technologiques et des campagnes de mesures sur des cœurs « fabriqués » sont en effet à disposition. Il devient ainsi possible de réaliser une calibration sur un cas simple, où un unique groupe de paramètres technologiques est considéré comme incertain. S'en suit une présentation d'études permettant de définir des modèles raisonnablement simplifiés utilisés lors du processus de calibration. Finalement, une configuration à deux groupes de paramètres incertains est présentée.

Dans la deuxième partie, le même processus est appliqué à une configuration où seuls les paramètres géométriques sont perturbés. Certaines hypothèses de linéarité seront ici vérifiées à l'aide d'une analyse de sensibilité globale. Cette analyse permettra alors la réalisation d'une inversion à partir des expressions analytiques des lois *a posteriori* des paramètres incertains considérés.

Partie 1 : Paramètres associés au bilan de matière

La calibration est tout d'abord mise en œuvre sur une configuration du cœur où seuls les paramètres technologiques associés au bilan de matière sont perturbés. Par la suite, pour améliorer la qualité de cette calibration, la méthode de transposition présentée dans le Chapitre 5 est appliquée aux grandeurs mesurées par les sondes. Puis, à la suite d'études permettant d'identifier certains paramètres technologiques influents, la calibration est étendue à une configuration où deux groupes de paramètres technologiques (relatifs au bilan de matière) sont perturbés simultanément. Cette calibration constitue un premier traitement de l'éventuelle interaction pouvant exister entre plusieurs groupes de paramètres technologiques indépendants.

6.1 Problème direct

Dans la Section 4.5 (cf. Éq. (4.2)), il a été montré à l'aide d'hypothèses simplificatrices qu'il est possible de prédire instantanément l'effet d'une perturbation d'un paramètre technologique associé au bilan de matière par la méthode des échantillons corrélés. Ces prédictions sont possibles quel que soit le jeu de variables explicatives ($Pert_{BC12}, \dots, Pert_{EF67}$) envisagé. Nous avons montré qu'il est possible d'expliquer une variable (en l'occurrence les sensibilités sur cette configuration perturbée) à partir des paramètres du modèle linéaire. Les paramètres de ce modèle sont les sensibilités estimées sur une configuration où un seul élément combustible a été perturbé à la fois.

Ces résultats valident numériquement le modèle additif linéaire et permettent d'envisager la résolution du problème inverse. Cette résolution consiste à estimer les grandeurs explicatives du modèle linéaire (les perturbations appliquées aux paramètres technologiques) pour rendre compte au mieux des mesures réalisées au niveau des sondes (grandeurs expliquées).

6.2 Calibration

6.2.1 Modèle linéaire bayésien

Pour résoudre ce problème inverse, une calibration par une approche bayésienne a été mise en œuvre en plus d'une calibration déterministe (cf. Section 3.1). Pour rappel, le cadre bayésien a l'avantage de fournir des informations *a posteriori* plus riches que des estimations ponctuelles des paramètres optimaux. Lors de la calibration bayésienne, il est possible d'ajouter des informations *a priori* supplémentaires. Dans ce cadre, les paramètres technologiques in-

certaines sont considérées comme des variables aléatoires caractérisées par des lois *a priori* pouvant être interprétées comme une loi de méconnaissance quantifiant une incertitude épistémique.

6.2.2 Outils informatiques

En pratique, ces différentes calibrations ont été réalisées à l'aide du langage de programmation R [42], dédié à la statistique et à la science des données. La fonction `lm` (`lm` : Fitting Linear Models) est utilisée pour estimer les valeurs des paramètres par moindres carrés lors de la calibration déterministe. Cette fonction est un protocole de base de ce langage de calcul.

Pour la calibration bayésienne, la librairie RStan [43] a été utilisée. Cette librairie est une interface vers le langage Stan. Dans ce langage des méthodes Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC) sont implémentées permettant de réaliser l'inférence bayésienne envisagée.

6.3 Premier groupe de paramètres technologiques : les joues borées

Le premier problème de calibration traité concerne une configuration où un unique groupe de paramètres a été perturbé. Il s'agit des **32 paramètres technologiques relatifs à la densité des joues borées des éléments combustibles**. Pour chacun de ces paramètres, une perturbation a été générée aléatoirement selon une loi uniforme $U(-4\%, 4\%)$. Une illustration du jeu de perturbations qui a été généré aléatoirement dans le cadre de ces travaux (et qui devra être retrouvé lors du processus de calibration) est présentée sur l'image gauche de la Figure 6.1.

6.3.1 Données à disposition

Plan d'expériences et mesures

Pour réaliser la calibration de ces paramètres incertains, nous avons simulé une campagne de mesures sur la configuration perturbée. Le plan d'expériences de cette campagne est présenté en annexe dans le Tableau A.1.

Pour rappel, lors de ces 16 conditions expérimentales, une mesure a été réalisée sur chacune des sondes placées dans le cœur, soit 49 mesures par condition expérimentale. En conséquence $49 \times 16 = 784$ mesures sont à disposition pour estimer ces 32 paramètres incertains.

Simulation de mesures fictives et convergence des calculs

L'ensemble du processus de calibration est conduit sur le cœur numérique. Ainsi, les mesures dites « expérimentales » réalisées lors de la campagne de mesures sont en réalité issues de simulations. Il s'agit en quelque sorte des mesures « fictives » générées à partir d'un jumeau numérique où les paramètres technologiques sont perturbés. Il en est de même pour les sensibilités estimées par échantillons corrélés. De ce fait, les données à disposition sont toutes entachées d'une incertitude Monte-Carlo décrite dans la Section 4.5.5. Ces incertitudes sont de :

- 0,11 % pour les grandeurs estimées à l'aide des sondes sur la configuration nominale et perturbée ;

- 0,29 % pour les grandeurs nominales estimées au niveau des sondes lors des calculs permettant l'estimation des sensibilités.

Pour rappel, ces calculs ont permis la validation des hypothèses simplificatrices pour établir le modèle linéaire additif (cf. Éq. (4.2)) introduit dans le Chapitre 4 du document.

Modèle

Pour résoudre le problème inverse, il est nécessaire d'avoir à disposition un modèle permettant d'extrapoler instantanément les sensibilités expérimentales associées à n'importe quelle configuration perturbée. Nous utilisons ici le modèle donné par l'équation (6.1), introduit dans le Chapitre 4, Section 4.5.5. Ce modèle linéaire additif relie les sensibilités observées sur une configuration perturbée (sensibilités « expérimentales »), aux perturbations appliquées ($Pert_{BC12}, \dots, Pert_{EF67}$) à l'aide de sensibilités estimées sur des configurations où un seul élément combustible a été perturbé ($Sensi_{BC12}, \dots, Sensi_{EF67}$). Ce modèle s'écrit :

$$Sensibilité\ exp = \mathbb{I}_{BC12} \frac{Pert_{BC12}}{Pert_{BC12\ max}} Sensi_{BC12\ max} + \dots + \mathbb{I}_{EF67} \frac{Pert_{EF67}}{Pert_{EF67\ max}} Sensi_{EF67\ max}. \quad (6.1)$$

Dans le cadre de la résolution du problème inverse considéré dans ce chapitre, les inconnues de ce modèle (c.-à-d. les paramètres du modèle à estimer) sont les perturbations appliquées au cœur ($Pert_{BC12}, \dots, Pert_{EF67}$) et les grandeurs explicatives sont les sensibilités ($Sensi_{BC12}, \dots, Sensi_{EF67}$).

Estimations des sensibilités

Pour réaliser l'inversion, il est nécessaire d'estimer toutes les grandeurs explicatives de l'équation (6.1). En pratique, ces estimations ont été produites à l'aide de simulations Monte-Carlo utilisant la méthode des échantillons corrélés. Les hypothèses d'additivité et de linéarité présentées dans le Chapitre 4, Sections 4.5.4 et 4.5.5, ont été utilisées afin de limiter le nombre de calculs nécessaire.

L'effet des perturbations sur les taux de fission a été calculé pour chaque élément combustible et pour chaque condition expérimentale. Ces calculs ont été réalisés pour la perturbation maximale envisageable, soit une augmentation de la densité des joues borées de +4 %. Ainsi, $512 = \underbrace{32}_{elt.comb.} \times \underbrace{16}_{cond.exp.}$ estimations de l'effet d'une perturbation individuelle des joues borées ont dû être réalisées pour les éléments combustibles.

Chaque calcul Monte-Carlo a fourni quatre jeux de sensibilités en utilisant la méthode des échantillons corrélés (cf. Section 4.5.2). De plus, la condition de symétrie du cœur a été utilisée afin de diviser par deux le nombre d'éléments à étudier, soit $16 (= 32/2)$ éléments combustibles pour chaque condition expérimentale. Au total $512 / (\underbrace{4}_{éch.corrélées} \times \underbrace{2}_{symétrie}) = 64$ calculs Monte-Carlo ont été nécessaires pour estimer les 512 perturbations individuelles des joues borées.

Estimations des écarts à la référence

Parallèlement à ces calculs, les sensibilités expérimentales ont été estimées sur la configuration du cœur perturbée par la méthode Monte-Carlo directe. Deux types de données ont

été utilisés. D'une part les taux de fission « mesurés expérimentalement » sur le cœur tel que fabriqué noté ($\tau_{f,exp}$) et d'autre part les taux de fission estimés sur la configuration nominale notée ($\tau_{f,nom}$). Ces taux de fission sont alors comparés afin d'estimer les sensibilités expérimentales utilisées lors de la résolution du problème inverse, de telle sorte que :

$$Sensibilité\ expérimentale = \frac{\tau_{f,exp} - \tau_{f,nom}}{\tau_{f,nom}}.$$

Évaluation de la qualité de l'inversion

Le problème d'inversion est ici résolu sur un « cœur numérique » perturbé. Le modélisateur de cette configuration construit ce cœur en perturbant aléatoirement (selon des connaissances *a priori*) le groupe de paramètres technologiques considéré. Le modélisateur connaît donc les perturbations appliquées à la configuration perturbée.

Dès lors, il est possible de valider la calibration réalisée en confrontant les Maximum *A Posteriori* (MAP) des paramètres technologiques issus de la calibration aux perturbations appliquées à la configuration étudiée. Un bon accord entre ces valeurs permet alors de juger de la qualité de la calibration.

Par ailleurs, les perturbations des paramètres technologiques sur un cœur réellement fabriqué sont *a priori* inconnues. Cette comparaison ne peut donc être menée en pratique.

6.3.2 Mise en œuvre

À présent que l'ensemble des paramètres relatifs à l'équation (6.1) a été introduit, une première tentative de résolution du problème inverse est présentée dans ce qui suit. Selon le processus classique de résolution proposé dans [28], nous discutons tout d'abord de la calibration déterministe présentant l'avantage d'être instantanée. Le modèle sur lequel se base l'inversion peut donc être rapidement éprouvé en testant de nombreuses spécifications du modèle.

Une fois validé, ce modèle peut être enrichi lors de la réalisation de l'inversion bayésienne, plus robuste et permettant de prendre en compte une connaissance *a priori*. Cette calibration a l'avantage de fournir des estimations *a posteriori* plus riches. L'inversion nécessite cependant le choix de lois *a priori* et est plus lourde d'un point de vue computationnel du fait des algorithmes utilisés. Il faut également s'assurer de la bonne convergence de ces algorithmes. En pratique, du fait de l'utilisation d'algorithmes de type MCMC, sur les cas traités, cette inversion bayésienne a pu nécessiter une minute (vingt chaînes de 2000 itérations, dont 1000 de chauffe, ont été simulées sur vingt nœuds en parallèle afin d'obtenir une « taille effective d'échantillon » significative [44]).

Remarque : réaliser au préalable une inversion déterministe (rapide) permet de s'assurer de la validité des résultats obtenus lors d'une inversion bayésienne utilisant des lois a priori non informatives.

Calibration déterministe

Un premier essai de calibration déterministe des joues borées est illustré sur la partie haute de la Figure 6.1, sous l'image représentant la répartition spatiale des « Perturbations estimées ». Cette première inversion consiste en une calibration déterministe de 32 paramètres incertains

(perturbations appliquées à la densité des joues borées de chaque assemblage), à l'aide des mesures de l'Instrumentation In-Core réalisées lors des 16 conditions expérimentales du plan d'expériences.

Une première analyse visuelle laisse apparaître que la répartition des résultats de la calibration déterministe est similaire aux perturbations à retrouver. On observe un écart absolu moyen de 0,83% entre les perturbations à retrouver et les perturbations estimées par moindres carrés lors de cette calibration. Néanmoins, lorsque l'on considère la calibration réalisée pour l'élément combustible central DE34, on observe un écart absolu de 2,58 %. D'autres écarts relativement importants sont observés pour les éléments combustibles centraux (CD23, DE45 et CD56). Ainsi, lorsque l'on ne considère que ces quatre éléments combustibles, l'écart absolu moyen observé est de 2,15 %.

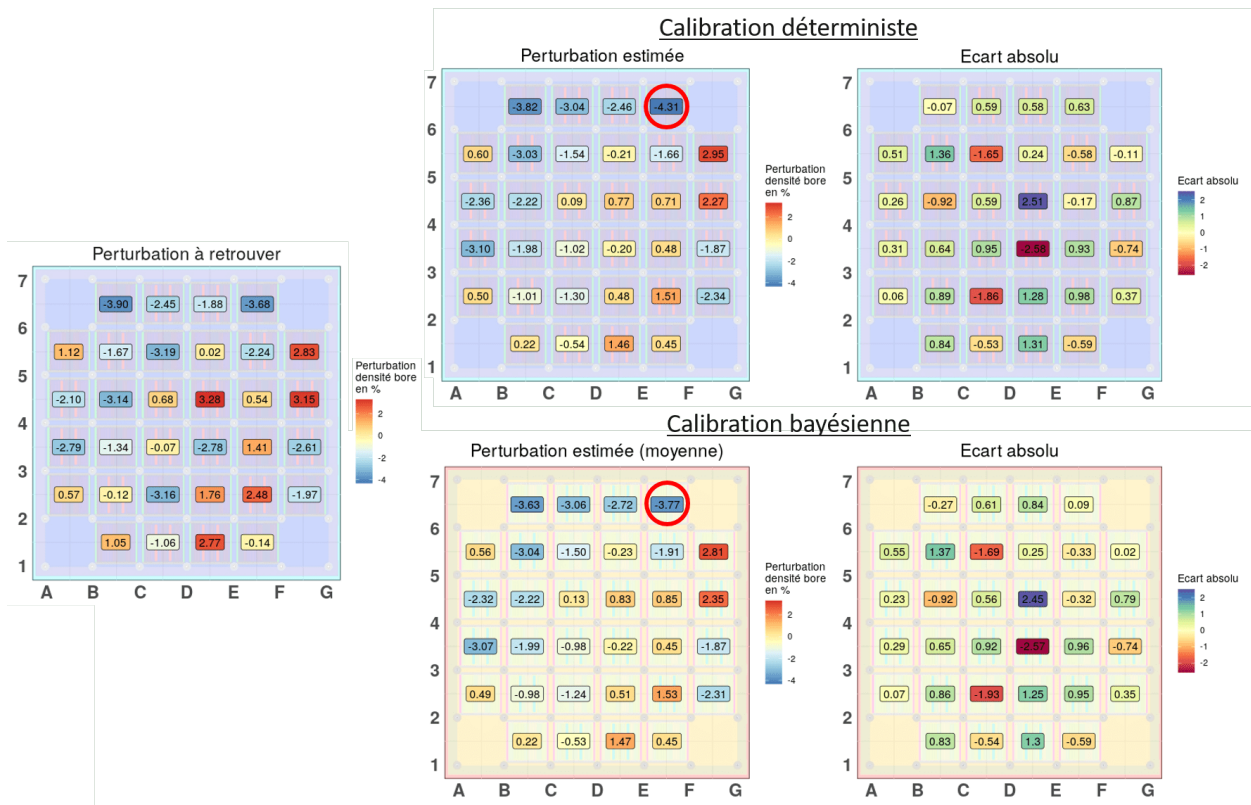


FIGURE 6.1 – Répartition spatiale des paramètres technologiques relatifs aux joues borées. Calibration déterministe (en-haut) et calibration bayésienne (en-bas). Les perturbations à retrouver ont été échantillonnées aléatoirement selon une loi uniforme $U(-4,4)$.

De plus, on sait lors de la conception du cœur que les perturbations doivent nécessairement appartenir à l'intervalle ± 4 %. Cependant, on constate que la valeur estimée au niveau de l'élément combustible EF67 est hors de cet intervalle avec une valeur calibrée à -4,31 %.

Pour contourner ce problème d'optimisation de la calibration déterministe, une solution serait de le transformer en un problème d'optimisation sous contraintes afin de rester dans l'intervalle de définition des paramètres. Une alternative plus intéressante et plus robuste est offerte par la calibration bayésienne à travers la définition d'une loi *a priori*.

Calibration bayésienne

Pour prendre en compte la connaissance *a priori* relative à la métrologie du cœur fabriqué, nous présentons une calibration bayésienne qui se base sur le modèle défini par l'équation (6.1). Cette calibration suit le formalisme relatif au modèle linéaire bayésien. L'inversion présentée est ainsi un prolongement de la calibration déterministe basée sur le modèle linéaire additif ayant fourni des premiers résultats convaincants.

Concernant les informations *a priori* relatives à cette calibration, on sait que les perturbations appliquées aux joues borées appartiennent à l'intervalle ± 4 %. Il est ainsi intéressant d'ajouter cette information à la résolution du problème inverse afin d'en améliorer la qualité. Dans l'étude considérée, seule la plage de variation de la perturbation à retrouver est *a priori* connue. Rien ne permet de justifier l'utilisation d'une distribution *a priori* plus informative. Nous avons donc utilisé un *a priori* uniforme borné $U(-4 \%, 4 \%)$ lors de l'inversion par algorithme MCMC.

Les résultats de la calibration bayésienne ainsi réalisée sont illustrés sur la partie basse de la Figure 6.1, sous l'image représentant la répartition spatiale des « Perturbations estimées ». À noter que nous avons choisi de représenter, sur ces figures, les moyennes des distributions *a posteriori* associées aux paramètres technologiques. Ces estimateurs sont également utilisés pour définir les écarts absolus représentés sur cette figure. Dans la suite du document, **les paramètres technologiques estimés par calibration bayésienne sont représentés par la moyenne de leur distribution *a posteriori*.**

On constate que l'ajout de l'information *a priori* permet de contraindre les lois *a posteriori* associées aux paramètres à calibrer à se situer dans les bornes $[Pert_{min}, Pert_{max}]$, définies par la métrologie et les tolérances de fabrication. L'estimation illustrant le mieux cette contrainte concerne l'élément combustible EF67. Le paramètre est estimé à une valeur de $-3,77$ % lors de cette calibration, contre une valeur en dehors de l'intervalle des possibles lors de la calibration déterministe. De plus, la prise en compte de cette information a permis de réduire l'écart entre la référence et l'extrapolation à une valeur de $0,09$ %, contre $0,63$ % lors de l'inversion déterministe.

Plus généralement, si l'on considère la moyenne des écarts absolus : $|Perturbation \text{ à retrouver} - perturbation \text{ calibrée}|$, on constate que la prise en compte des informations *a priori* permet de réduire cette quantité d'une valeur de $0,83$ % lors de l'inversion déterministe à $0,82$ % lors de la calibration bayésienne.

Cependant, malgré l'ajout de l'information *a priori*, les écarts sur les paramètres au niveau des éléments combustibles centraux (CD23, DE34, DE45 et CD56) restent élevés et comparables à ceux de la calibration déterministe, avec un écart absolu moyen de $2,16$ %. L'apport de la connaissance *a priori* n'a pas permis ici d'améliorer les estimations de ces paramètres.

6.3.3 Calibration à partir de mesures de sensibilité directes au niveau des éléments combustibles

Considérons à présent une étude purement illustrative traitant le problème d'inversion appliqué à des mesures de sensibilité qui seraient relevées directement sur les éléments combustibles. Bien entendu, ces « mesures » (fictives) sont ici accessibles, car le cœur étudié est un objet purement numérique¹. Dans notre cas, il est ainsi possible d'accéder artificiellement à

1. Sur un cœur réellement fabriqué, de telles mesures sont difficilement envisageables.

ces grandeurs, avec une incertitude Monte-Carlo bien moindre que celles issues des sondes de mesure.

Nous avons mis en œuvre une calibration équivalente à l'inversion réalisée à l'aide des mesures estimées sur les tubes-guides. Cette calibration est néanmoins différente en deux points en comparaison de la calibration réalisée à partir des sondes.

- D'une part, les « sensibilités expérimentales » sont estimées directement sur les éléments combustibles. Ainsi, seulement $32 \times 16 = 512$ mesures sont disponibles pour estimer les 32 paramètres technologiques incertains (contre 784 pour les sondes de mesure).
- D'autre part, les effets associés à la perturbation de l'un des paramètres technologiques d'un unique élément combustible (paramètres du modèle Éq. (6.1)) ont été estimés directement sur ces éléments combustibles. Ainsi, comme l'a montré l'étude présentée dans la Section 5.1.2, les extrapolations réalisées à l'aide du modèle linéaire additif sont plus fiables lorsqu'elles sont directement prédites sur les éléments combustibles.

Les résultats de cette inversion bayésienne sont présentés sur la Figure 6.2. Malgré le nombre inférieur de données expérimentales disponibles pour l'inversion, on constate que la calibration est quasiment parfaite.

L'écart absolu moyen entre la perturbation à retrouver et les perturbations estimées est de 0,09 %, en comparaison des 0,82 % observés en Section 6.3.2. L'écart maximal observé au niveau de l'élément combustible BC56 n'est cette fois-ci que de 0,28 %.

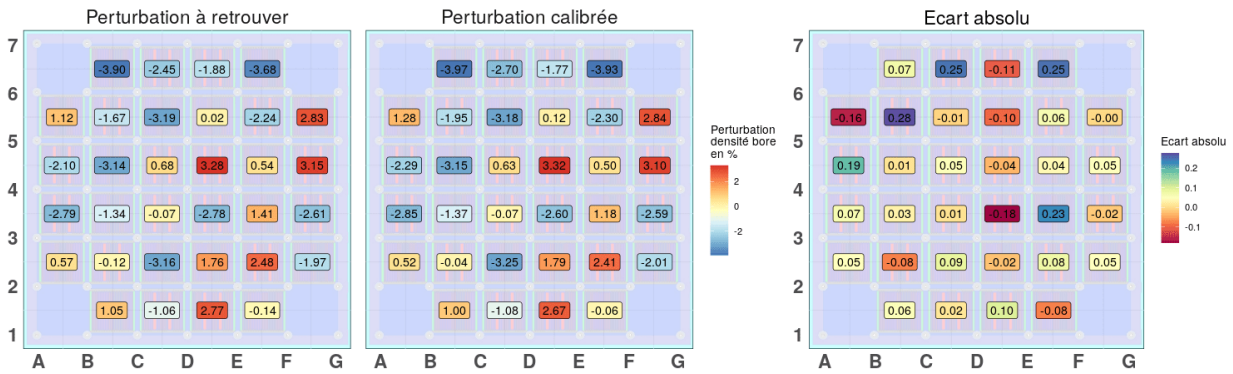


FIGURE 6.2 – Calibration bayésienne des paramètres technologiques relatifs aux joues borées à l'aide des mesures de sensibilité réalisées directement au niveau des éléments combustibles.

Cette étude illustre que la qualité de calibration est fortement dépendante de l'incertitude Monte-Carlo associée aux sensibilités utilisées comme paramètre du modèle décrit en équation (6.1). Dans la section suivante, nous proposons de transférer les mesures réalisées à l'aide l'IIC par l'utilisation de la méthode de transposition (cf. Chapitre 5). Cette transposition doit permettre de profiter des faibles incertitudes Monte-Carlo associées aux sensibilités estimées directement sur les éléments combustibles, dans l'objectif d'améliorer les performances de la calibration.

6.3.4 Utilisation de la matrice de fission

Pour réaliser la calibration (à l'aide de l'équation (6.1)) et grâce aux mesures expérimentales relevées par les sondes puis transposées sur les éléments combustibles, trois types de grandeurs sont utilisés.

- Le premier type de grandeur utilisé correspond aux 784 mesures « expérimentales » réalisées sur les sondes pour les 16 conditions expérimentales du plan d'expériences.
- Le second type correspond aux grandeurs explicatives du modèle (Éq. 6.1) à savoir les sensibilités indépendantes ($Sensi_{BC12}, \dots, Sensi_{EF67}$). Ces grandeurs ont été estimées par des calculs Monte-Carlo lors d'une étude de conception préalable utilisant la méthode des échantillons corrélés. Ces sensibilités sont estimées directement sur les éléments combustibles pour profiter des avantages mis en évidence précédemment en Section 6.3.3.
- Le dernier type de grandeur utilisé permet de réaliser le transfert des mesures expérimentales des sondes vers les éléments combustibles. Ces grandeurs sont les matrices de fission de chaque condition expérimentale. Ces matrices de fission ont été estimées lors des calculs de référence sur les configurations nominales. Les convergences de ces différentes grandeurs sont présentées en Section 4.5.5.

Remarque : bien que la campagne de mesures soit réalisée sur un cœur numérique, des données équivalentes seront à disposition lors d'une campagne réalisée sur un cœur réellement fabriqué (sensibilités mesurées expérimentalement à l'aide des sondes et matrices de fission estimées sur un jumeau numérique du cœur).

Les résultats de cette calibration bayésienne utilisant la méthode de transposition sont illustrés sur la Figure 6.3. Malgré la diminution du nombre de données expérimentales à notre disposition liée à la transposition des sondes vers les éléments combustibles (passage de 784 à 512 points de mesure) et à l'introduction d'un biais de reconstruction associé à la méthode de transposition, **nous constatons une adéquation entre les perturbations appliquées et les perturbations calibrées.**

En moyenne, un écart absolu de 0,72 % entre les perturbations à retrouver et calibrées est obtenu à l'issue de cette étude. **Une diminution de 12 %** de cet écart est observée en comparaison de l'inversion bayésienne réalisée directement sur les mesures issues des sondes sans transposition.

Une nette amélioration des estimations réalisées au niveau de ces éléments est donc obtenue. Lors de cette calibration, les quatre éléments combustibles centraux (CD23, DE34, DE45 et CD56) disposent d'un écart absolu moyen de 0,51 %. Rappelons que lors de l'inversion bayésienne sur les résultats issus des sondes, l'écart moyen était de 2,16 %. À l'issue de cette nouvelle procédure, les quatre éléments combustibles les moins bien reconstruits sont les éléments (BC56, BC34, DE12 et DE56). Ces éléments proches du modérateur ont un écart absolu moyen de 1,74 %.

Sur le cas d'étude traité, **l'utilisation de la méthode de transposition permet ainsi de réduire les écarts absolus moyens et maximaux entre les perturbations de référence et celles estimées par calibration.** Cependant comme l'illustre la Figure 6.3, des écarts de l'ordre de 2 % sont toujours observés, et ce, malgré l'utilisation de la méthode de transposition.

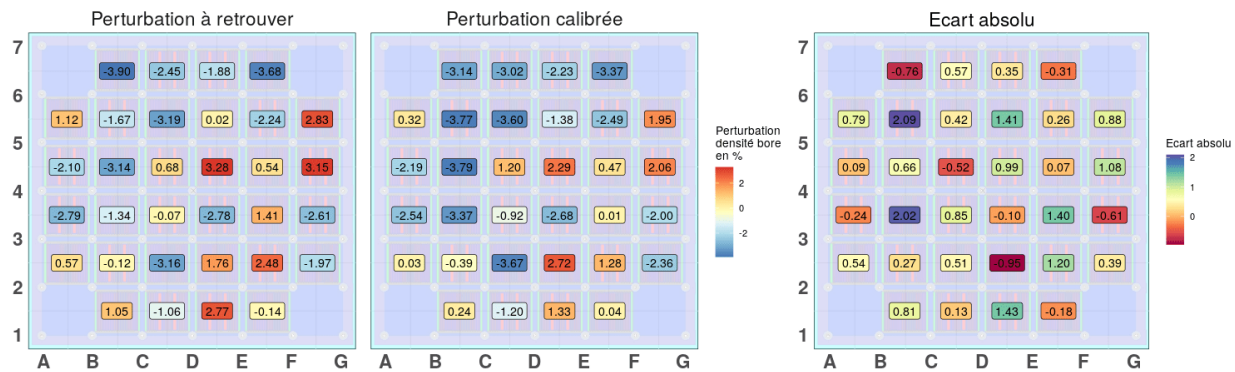


FIGURE 6.3 – Calibration bayésienne des paramètres technologiques relatifs aux joues borées à l’aide des mesures de sensibilité estimées sur les sondes puis transposées vers les éléments combustibles grâce aux matrices de fission.

6.3.5 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus lors de la résolution du problème inverse sur cette configuration ayant un unique groupe de paramètres technologiques perturbés sont synthétisés dans le Tableau 6.1.

Type de calibration	Moyenne $ référence - calibration $	Écart Type
Déterministe sur EC	0,092	0,080
Bayésien sur EC	0,088	0,079
Déterministe sur IIC	0,829	0,628
Bayésien sur IIC	0,814	0,632
Déterministe sur transfert IIC \rightarrow EC	0,792	0,597
Bayésien sur transfert IIC \rightarrow EC	0,715	0,529

TABLEAU 6.1 – Résultats des calibrations relatives à une configuration du cœur et à un seul groupe de paramètres technologiques perturbés. Élément Combustible (EC), Instrumentation In-Core (IIC), transposition des sondes vers les éléments combustibles (IIC \rightarrow EC).

Tout d’abord, on constate que l’introduction d’une connaissance *a priori* lors des calibrations bayésiennes a pour effet systématique de diminuer les écarts moyens entre les valeurs de référence et celles calibrées.

On observe également que la calibration sur les éléments combustibles conduit aux plus faibles écarts entre les références et les sorties calibrées. Cette calibration n’est cependant qu’illustrative. Rappelons qu’il est difficilement envisageable de réaliser des mesures directes des taux de fission dans le combustible. Ainsi, seule la calibration à partir des mesures de l’IIC peut être applicable à une démarche de validation expérimentale.

Il a également été montré que la précision des sensibilités utilisées lors de l’inversion impacte fortement les performances des calibrations réalisées. Ces études illustrent ainsi l’intérêt de transposer l’information mesurée par l’IIC vers les EC, afin de réduire les incertitudes Monte-Carlo des grandeurs utilisées pour **améliorer les performances de la calibration**. Malgré

cette transposition, la qualité de la calibration réalisée reste cependant encore éloignée de celle conduite directement sur les EC disposant d'une faible incertitude Monte-Carlo.

Nous arrivons cependant aux limites qu'offre la puissance de nos calculateurs afin de réduire les incertitudes Monte-Carlo des sensibilités associées à l'IIC utilisées directement dans le modèle de l'équation (6.1) pour améliorer les performances de la calibration. L'utilisation d'un simulateur déterministe peut être une solution judicieuse pour passer outre cette limite. Cette possibilité nécessite néanmoins d'importants efforts de développement (notamment liés à la mise en œuvre d'un schéma de calcul dédié), dépassant le contexte de nos travaux de thèse.

6.4 Études relatives à un groupe de paramètres technologiques

Afin d'enrichir le modèle étudié lors du processus de calibration, il est tout d'abord nécessaire d'identifier quels sont les paramètres technologiques ayant une influence sur les taux de fission mesurés au niveau des sondes. Cette identification doit être réalisée préalablement à l'inversion pour que le problème d'inversion soit identifiable². Nous présentons dans cette section, les résultats de différentes études menées sur des configurations où un unique groupe de paramètres technologiques a été perturbé.

6.4.1 Équivalence entre paramètre technologique géométrique et paramètre associé aux compositions

Pour les études suivantes, les paramètres technologiques traités sont relatifs à une perturbation des compositions ou des densités des milieux composant le cœur. Ce choix est motivé par la facilité de réaliser des analyses à l'aide de la méthode des échantillons corrélés. Comme présenté en première partie du Chapitre 4, l'étude de l'effet des perturbations géométriques peut nécessiter la mise en œuvre de méthodes relativement lourdes. Pour contourner cette difficulté, il est possible de considérer une équivalence entre l'effet d'une perturbation des dimensions d'un élément composant le cœur et celui d'une perturbation de sa densité ou de sa composition.

Prenons l'exemple d'une perturbation géométrique conduisant à l'augmentation du volume d'un élément composant le cœur. En raisonnant sur le bilan de matière de cet élément, on comprend qu'il est possible de traiter cette perturbation géométrique en jouant sur la densité des matériaux composant le volume. De cette façon, on obtient une équivalence entre la perturbation géométrique et la perturbation du bilan de matière de cet élément.

En pratique, cette équivalence est utilisée pour traiter certaines perturbations des dimensions des éléments composant le cœur. Il suffit de considérer l'élément perturbé à ses dimensions nominales, mais avec une densité modifiée (à l'aide de la méthode des échantillons corrélés) afin qu'il corresponde à la perturbation géométrique. L'estimation de l'effet d'une perturbation des dimensions d'un élément composant le cœur devient ainsi facilement accessible.

2. « Un modèle est dit identifiable s'il est possible d'apprendre la vraie valeur des paramètres à partir d'un nombre infini d'observations ».

6.4.2 Groupe de paramètres relatifs à l'enrichissement du combustible

Afin d'enrichir le problème de calibration, il serait intéressant de pouvoir traiter l'effet d'une méconnaissance associée à la composition du combustible sur les taux de fission estimés au niveau des sondes. La concentration en uranium 235 des éléments combustibles d'une nouvelle configuration a ainsi été perturbée aléatoirement, selon une loi uniforme $U(-2\%, 2\%)$. En pratique, chaque plaque de combustible composant un même élément combustible a subi la même perturbation. Cette simplification permet de ne considérer que 32 paramètres incertains contre 672 si une perturbation par plaque était appliquée.

Remarque : certains résultats aberrants ont néanmoins été obtenus lors de l'estimation des effets de ces perturbations à l'aide de la méthode des échantillons corrélés disponible dans la version 11.1 du code TRIPOLI-4[®]. En effet, il s'avère qu'il n'est actuellement pas possible d'obtenir une estimation cohérente des taux de fission macroscopiques estimés au niveau de l'élément combustible dont la composition a été perturbée à l'aide de la méthode des échantillons corrélés³. L'effet de ces perturbations estimées au niveau des sondes et des éléments combustibles non perturbés fournit cependant des résultats cohérents.

Il semble difficile de réaliser l'étude préliminaire relative au problème de calibration à partir des grandeurs estimées directement sur les éléments combustibles disposant d'une faible incertitude Monte-Carlo. Comme nous l'avons montré dans la Section 6.3.3, les résultats obtenus à l'issue de ce type d'étude peuvent être considérés comme des résultats de référence face aux faibles écarts de reconstruction obtenus.

Lors de l'étude de l'effet d'une perturbation de la composition du combustible, il est alors difficile, avant de traiter les mesures issues des sondes, de prouver la faisabilité de l'inversion sur ce cas simplifié. **L'analyse de ce paramètre est donc reportée en attendant la correction du problème observé** (dans une version future du simulateur).

6.4.3 Groupe de paramètres relatifs à l'efficacité des lattes absorbantes

Un autre groupe de paramètres technologiques permettant d'enrichir le problème de calibration pour être plus représentatif d'un cœur tel que fabriqué concerne la densité des lattes absorbantes. Pour étudier ce paramètre, l'ensemble des lattes absorbantes placées dans les éléments combustibles de contrôle a aléatoirement été perturbé selon une loi uniforme $U(-2\%, 2\%)$, pour être représentatif d'un cœur tel que fabriqué. En pratique, les deux lattes absorbantes placées dans chaque élément combustible ont subi la même perturbation. Ainsi, 16 perturbations différentes ont été appliquées aux lattes du cœur d'étude.

Le potentiel en réactivité du cœur d'étude n'est cependant pas très important vis-à-vis de l'efficacité des absorbants. Rappelons qu'en configuration toutes lattes hautes (cf. Section 2.1.3), lorsque l'ensemble des lattes absorbantes est extrait du cœur, on observe une réactivité de +9000 pcm pour un titre en bore de 0 ppm et une température de 100°C. Afin de ramener le cœur dans une configuration critique et d'absorber ces 9000 pcm, il n'est pas nécessaire d'insérer un nombre important de lattes de contrôle.

Ainsi, pour la configuration la plus réactive lors de la campagne de mesure seuls 3 mécanismes

3. Le taux de fission macroscopique estimé au niveau de l'élément combustible perturbé est négatif.

6.4. Études relatives à un groupe de paramètres technologiques

sur 8 ont été actionnés. C'est pourquoi seules 6 croix sur les 16 disponibles ont été introduites dans le cœur lors de la campagne de mesure. De plus, face aux réactivités observées, il a été nécessaire d'actionner uniquement le premier mécanisme dans sa totalité.

Pour résoudre le problème inverse, l'ensemble des sensibilités associées aux lattes absorbantes a été estimé, et ce pour chaque condition expérimentale. En pratique, la méthode des échantillons corrélés a été utilisée pour perturber une unique paire de lattes présente dans un élément combustible de contrôle. Chaque calcul a permis d'estimer l'effet de quatre perturbations indépendantes. Finalement $32 = \underbrace{16}_{\text{lattes}} \times \underbrace{16}_{\text{cond.exp}} / (\underbrace{4}_{\text{ech.corrélées}} \times \underbrace{2}_{\text{symétrie}})$ calculs⁴ ont été nécessaires.

Ces calculs ont nécessité 30 processeurs pour un temps de calcul moyen de 34 h. En moyenne, les taux de fission nominaux estimés sur les tubes-guides lors de ces calculs disposent d'une incertitude 0,29 % et de 0,04 % pour les taux estimés directement sur les éléments combustibles. Les convergences des calculs nominaux utilisés pour résoudre le problème inverse ont été présentées Section 4.5.5. Les calculs sur les configurations perturbées ont nécessité en moyenne 50 processeurs pendant 29 h. Les incertitudes Monte-Carlo de ces calculs étaient en moyenne de 0,11 % pour les taux de fission estimés sur les sondes de mesure.

Ces calculs, coûteux en temps CPU, rendent possible l'estimation de faibles sensibilités associées aux perturbations appliquées. Lors de ces calculs, un nombre important de particules a été simulé. L'incertitude Monte-Carlo des sensibilités associées aux perturbations a de ce fait été significativement diminuée. Ainsi, de faibles effets associés aux perturbations ont pu être estimés.

Malgré cela, peu d'effets associés à ces perturbations ont été observés. En effet, une grande majorité des lattes absorbantes introduites dans le cœur n'est pas suffisamment insérée pour qu'une perturbation de leur densité influence significativement sur les mesures réalisées au niveau des sondes. D'autre part, la concentration des lattes absorbantes est initialement élevée sur la configuration nominale. La quasi-totalité des neutrons traversant ces lattes est par conséquent absorbée. Une légère modification de la densité de ces absorbants sur la configuration perturbée n'a donc aucun effet sur le comportement des neutrons. La totalité des neutrons traversant ces lattes perturbées est toujours absorbée. Cette perturbation ne modifie donc pas le comportement du réacteur.

Le problème inverse n'a par conséquent pas été résolu sur ce cas d'étude. L'écart absolu moyen des six lattes introduites dans le cœur lors de l'inversion réalisée directement sur les taux de fission estimés sur les éléments combustibles était de 0,33 %, contre 0,66 % lors de l'étude se basant sur les mesures obtenues à l'aide des sondes. De ce fait, **le groupe de paramètres technologiques relatif à l'efficacité des lattes absorbantes est fixé à sa valeur nominale lors de la résolution du problème de calibration.**

6.4.4 Modification de la géométrie et convergence associée

Afin de faciliter les études suivantes, une modification de la géométrie des sondes a été réalisée, à savoir l'agrandissement du porte-dépôt (cf. Figure 2.1).

Cet élément correspond à la zone de la sonde contenant le dépôt d'uranium. Le vide préala-

4. La condition de symétrie du cœur a été utilisée afin de diminuer par deux le nombre de calculs nécessaires.

blement présent au centre de la sonde a été transformé en milieu actif disposant d'un dépôt d'uranium. De ce fait, le volume de la partie active de la sonde a été augmenté d'un facteur trois. Cette modification permet d'augmenter le nombre de neutrons réagissant au niveau des sondes de mesure sans pour autant impacter le flux de neutrons dans les éléments combustibles. Ainsi, pour un même nombre de particules simulé, l'incertitude Monte-Carlo des taux de fission estimés au niveau des sondes de mesure est donc diminuée en comparaison à la géométrie précédente.

6.4.5 Groupe de paramètres technologiques relatifs à l'efficacité des joues borées

Du fait de la modification de la géométrie des sondes, il est nécessaire de s'assurer qu'il est toujours possible de résoudre le problème inverse. C'est pourquoi le paramètre relatif à la densité des joues borées a été à nouveau étudié. Il est donc nécessaire de recalculer d'une part l'ensemble des sensibilités relatives à une perturbation de ce paramètre technologique sur cette nouvelle géométrie, et d'autre part toutes les matrices de fission des configurations nominales.

Convergence

Chaque calcul de sensibilité a permis d'estimer l'effet de 4 perturbations. Ces calculs ont nécessité 30 processeurs pendant 36 h. Les incertitudes Monte-Carlo des grandeurs nominales estimées sur les sondes lors des calculs par échantillons corrélés étaient en moyenne de 0,17%. La modification de la géométrie des sondes de mesure a donc permis d'améliorer artificiellement l'efficacité⁵ des calculs d'un facteur 2,6 en comparaison des calculs équivalents réalisés sur la géométrie originale présentée en Section 4.5.5.

Les calculs menés sur les configurations nominales ont de plus été réalisés sur 50 processeurs pendant 55 h. Durant ces simulations, deux fois plus de neutrons ont été simulés en comparaison des calculs équivalents présentés à la Section 4.5.5. Les taux de fission estimés sur les sondes de mesure ont en moyenne une incertitude Monte-Carlo de 0,05%, soit une incertitude deux fois inférieure à celles présentées en Section 4.5.5.

Finalement, des estimations des taux de fission mesurés sur les sondes ont été réalisées pour les configurations perturbées. Ces calculs ont nécessité 50 processeurs pendant 29 h pour obtenir une incertitude Monte-Carlo moyenne de 0,07%.

Différences par rapport à l'étude précédente du paramètre technologique relatif à la densité des joues borées (Section 6.3)

À la différence de l'étude précédente traitant du paramètre technologique relatif à la densité des joues borées (cf. Section 6.3), un nouveau jeu de perturbations a ici été généré. Une illustration de ces perturbations est présentée sur la partie haute de la Figure 6.4 (image intitulée « Perturbation à retrouver »). Une loi uniforme $U(-4\%, 4\%)$ a été conservée pour le tirage aléatoire de ces 32 perturbations. Par ailleurs, les incertitudes Monte-Carlo de l'ensemble des calculs utilisés pour réaliser cette nouvelle calibration sont inférieures à celles de la calibration précédente. Les résultats obtenus sont reportés dans le Tableau 6.2 et une illustration des paramètres calibrés est donnée en Annexe sur la Figure B.1.

5. Le terme « efficacité » est relatif au rapport des figures de mérite ($FOM = \frac{1}{t \times \sigma^2}$) des calculs comparés.

Résultats

Type de calibration	Moyenne référence - calibration	Écart Type
Déterministe sur EC	0,067	0,051
Bayésien sur IIC	0,605	0,521
Bayésien sur transfert IIC \rightarrow EC	0,690	0,550

TABLEAU 6.2 – Résultats de la calibration relative aux joues borées sur la géométrie disposant de sondes de mesure dont la partie active est agrandie. Élément Combustible (EC), Instrumentation In-Core (IIC), transposition des sondes vers les éléments combustibles (IIC \rightarrow EC).

On constate, en comparaison aux calibrations équivalentes (cf. Tableau 6.1), que les écarts absolus moyens entre paramètres à reconstruire et paramètres reconstruits sont inférieurs de **26 % pour les calibrations réalisées directement sur les sondes et sur les éléments combustibles**. Cette diminution provient probablement des incertitudes Monte-Carlo moindres associées aux grandeurs utilisées lors de cette étude.

Lors de l'application de la méthode de transposition (ligne IIC \rightarrow EC), une dégradation de la qualité de la calibration est observée (augmentation de 14 % de l'écart absolu moyen ; 0,690 contre 0,605) en comparaison à la calibration réalisée directement sur les mesures estimées sur les sondes (ligne IIC bayésienne). Cette dégradation est probablement liée à l'erreur de modèle introduit par la méthode de transposition. Les sensibilités estimées sur les sondes lors de cette étude sont entachées d'une incertitude Monte-Carlo suffisamment faible pour que le transfert de l'information vers les éléments combustibles ne soit plus pertinent.

Cette étude montre ainsi qu'il est possible de réaliser l'inversion après le changement de géométrie des sondes de mesure.

6.4.6 Groupe de paramètres relatifs à la densité du modérateur intérieur

Une dernière étude concernant la densité du modérateur intérieur de chaque élément combustible a été réalisée. Ce paramètre permet de traduire une incertitude sur le rapport de modulation relative à une méconnaissance de l'épaisseur exacte et de la non-conformité géométrique des plaques de combustible. Pour prendre en compte ces différentes variations, les perturbations appliquées aux densités des modérateurs intérieurs ont été échantillonnées aléatoirement selon une loi uniforme $U(-1 \%, 1 \%)$. Une illustration des perturbations appliquées est présentée sur la partie basse de la Figure 6.4 sous l'image intitulée « Perturbation à retrouver ».

Convergence

Afin de réaliser ce travail d'inversion, les calculs nominaux présentés en Section 6.4.5 ont été utilisés. Les sensibilités associées à ces perturbations ont été estimées par échantillons corrélés et chaque calcul a fourni 4 estimations de perturbations. Ces calculs ont nécessité 30 processeurs pendant 76 h de calculs. Deux fois plus de particules ont été simulées en

comparaison aux sensibilités de la Section 6.4.5. La convergence moyenne des taux de fission nominaux estimés sur les sondes à l'issue de ces calculs de sensibilité était de 0,12 %. Les taux de fission estimés sur les sondes de la configuration perturbée ont nécessité 50 processeurs pendant 29 h. L'incertitude Monte-Carlo moyenne qui découle de ces calculs est de 0,05 %. Les résultats relatifs à la qualité de la calibration de ce groupe de paramètres sont présentés dans le Tableau 6.3 ainsi qu'en annexe sur la Figure B.2.

Résultats

Type de calibration	Moyenne référence - calibration	Écart Type
Déterministe sur EC	0,009	0,005
Bayésien sur IIC	0,234	0,158

TABLEAU 6.3 – Résultats de la calibration relative aux modérateurs intérieurs. Élément Combustible (EC), Instrumentation In-Core (IIC).

Le premier constat réalisé pour cette étude est **la difficulté d'utiliser la méthode de transposition lors du traitement de ce paramètre technologique**. La validation numérique présentée en Section 5.3.3 a été reconduite sur ce paramètre technologique. Les sensibilités transférées des sondes vers les éléments combustibles à l'aide des matrices de fission ont été comparées aux sensibilités estimées directement sur les éléments combustibles à l'aide de la méthode des échantillons corrélés. Les résultats obtenus montrent que ce transfert est difficilement réalisable lors du traitement de ce paramètre technologique.

On suppose que le transfert de l'information à l'aide des matrices de fission n'est possible que lors du traitement de paramètres technologiques ayant une influence directe sur le transport des neutrons. Une perturbation de la densité du modérateur intérieur d'un élément combustible a pour effet de modifier son spectre d'émission, et donc ses taux de fission (plutôt que le transport des neutrons). Ceci explique le dysfonctionnement de la méthode de transfert.

Lors du traitement de ce paramètre, la calibration se basant sur les mesures issues des éléments combustibles fournit un écart absolu moyen de 0,009 % pour une plage de variation des paramètres incertains de ± 1 %. Afin de comparer ce résultat à l'étude équivalente conduite sur la densité des joues borées (cf. Tableau 6.2), il est nécessaire de normaliser l'écart absolu associé aux joues borées. La plage de variation relative à ces paramètres, décrite par leur loi *a priori* a donc été utilisée. Ainsi, comme la plage de variation associée aux joues borées est de ± 4 %, on obtient un écart absolu normalisé de : $0,067/4 = 0,01675$ %.

Lors de la calibration à l'aide des mesures estimées sur les éléments combustibles, on observe donc que l'écart absolu normalisé associé aux modérateurs intérieurs est inférieur de 54% à l'écart associé aux joues borées. En revanche, cet écart est supérieur de 65% si la calibration est réalisée sur les mesures issues des sondes de mesure.

Les résultats de l'étude montrent néanmoins qu'il est possible de résoudre le problème inverse à l'aide des mesures issues des sondes sur une configuration du cœur où seule la densité du modérateur intérieur a été perturbée.

6.5 Extension à deux groupes de paramètres technologiques

À la suite des résultats obtenus lors des études précédentes, une configuration avec un nombre plus important de paramètres technologiques incertains a été construite. Deux groupes de paramètres technologiques indépendants identifiés préalablement comme ayant une influence sur les taux de fission estimés au niveau des sondes de mesure ont ainsi été perturbés. **L'objectif est de réaliser la calibration simultanée de ces paramètres technologiques et d'évaluer une éventuelle dépendance sur les valeurs calibrées.**

Les perturbations appliquées à ces paramètres sont identiques aux perturbations étudiées lors des analyses présentées dans les Sections 6.4.5 et 6.4.6. L'utilisation de ces perturbations a pour intérêt de faciliter la compréhension des phénomènes pouvant apparaître lors du traitement de l'interaction de plusieurs groupes de paramètres technologiques. Ainsi, sur cette nouvelle configuration, 64 paramètres sont considérés comme incertains. Les 32 premiers paramètres sont associés à la densité des joues borées. La connaissance *a priori* de ces paramètres est représentée par une loi *a priori* uniforme sur $U(-4\%, 4\%)$. Les 32 paramètres suivants sont associés à la densité du modérateur intérieur de chaque élément combustible, avec une incertitude *a priori* suivant une loi uniforme : $U(-1\%, 1\%)$.

6.5.1 Modèle

Comme pour les inversions précédentes, il est nécessaire d'avoir à sa disposition un modèle permettant d'extrapoler instantanément les sensibilités mesurées sur une configuration où plusieurs groupes de paramètres technologiques indépendants sont perturbés.

Considérons alors k groupes de paramètres technologiques disjoints sans interaction. Pour $i \in \{1, \dots, k\}$, le modèle (6.2), inspiré du modèle linéaire (Éq. 6.1) permet d'extrapoler instantanément les sensibilités d'une configuration perturbée en fonction des perturbations appliquées. Ce modèle s'écrit :

$$Sensi_{exp} = \mathbb{I}_{BC12} \frac{Pert_{BC12,i}}{Pert_{BC12,max,i}} Sensi_{BC12,max,i} + \dots + \mathbb{I}_{EF67} \frac{Pert_{EF67,i}}{Pert_{EF67,max,i}} Sensi_{EF67,max,i}. \quad (6.2)$$

6.5.2 Calibration jointe

Pour résoudre ce problème inverse traitant deux groupes de paramètres technologiques indépendants, il est tout d'abord nécessaire d'estimer l'ensemble des paramètres intervenant dans le modèle donné en équation (6.2). Ces paramètres ont préalablement été estimés lors des études réalisées dans les Sections 6.4.5 et 6.4.6. Les taux de fission des configurations nominales intervenant dans ce modèle ont également été estimés lors de ces calculs.

Seuls les calculs permettant d'estimer les grandeurs d'intérêt sur la configuration perturbée pour les différentes conditions expérimentales ont été réalisés pour cette étude. Ces calculs ont nécessité 50 processeurs pendant 53 h. Les incertitudes Monte-Carlo associées aux taux de fission estimés sur les sondes découlant de ces calculs sont de l'ordre de 0,05%.

Les résultats obtenus à l'issue de la mise en œuvre de cette calibration et s'appuyant sur le modèle linéaire (6.2) sont présentés sur la Figure 6.4. Cette calibration est réalisée à l'aide des

« mesures expérimentales » issues de l'Instrumentation In-Core sans utiliser de la méthode de transposition présentée Chapitre 5.

La partie haute de cette figure concerne la densité des joues borées et la partie basse décrit la densité des modérateurs intérieurs. Les 64 perturbations appliquées à la configuration d'étude sont illustrées par les deux images intitulées « *Perturbations à retrouver* ». Les résultats de la calibration bayésienne simultanée de ces deux groupes de paramètres sont illustrés par les images intitulées « *Perturbation calibrée* ». Finalement, la partie droite de cette figure représente l'écart de reconstruction entre perturbation appliquée et calibrée.

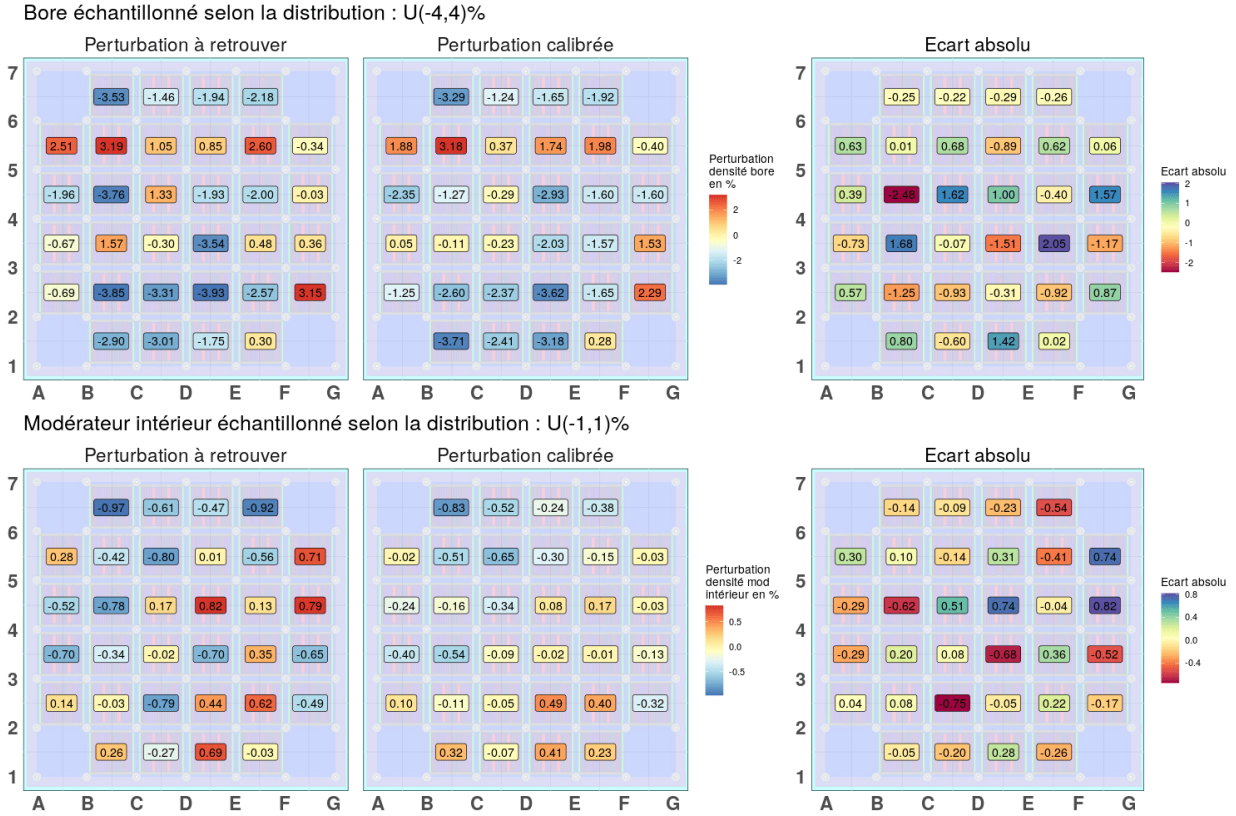


FIGURE 6.4 – Calibration bayésienne jointe des paramètres technologiques relatifs aux joues borées (en haut) et aux modérateurs des éléments combustibles (en bas) à l'aide des grandeurs d'intérêt estimées sur les sondes de mesure.

6.5.3 Analyse des résultats

On observe sur la Figure 6.4 un bon accord entre les perturbations appliquées et calibrées (quel que soit le paramètre technologique considéré). La calibration relative au bore semble fournir cependant de meilleurs résultats que celle associée aux densités des modérateurs intérieurs.

Rappelons que nous représentons sur cette figure les moyennes des distributions *a posteriori* associées aux paramètres technologiques calibrés.

Comparaison entre la qualité de la calibration du bore et du modérateur intérieur

Pour valider le fait que la calibration relative au bore fournit de meilleurs résultats que celle associée au modérateur intérieur, considérons les écarts absolus moyens obtenus entre

les perturbations appliquées et calibrées. Ces résultats sont présentés dans le Tableau 6.4 (lignes IIC). Pour comparer la qualité de la calibration associée aux joues borées et au modérateur intérieur, il est d'abord nécessaire de normaliser ces écarts, comme présenté en Section 6.4.6.

On obtient alors un écart normalisé de 0,21 % pour le bore contre 0,32 % pour le modérateur intérieur. **L'écart absolu moyen est ainsi inférieur de 34 % pour le bore par rapport au modérateur intérieur.**

Comparaison de la calibration jointe par rapport aux calibrations univariées

Cette étude montre **une dégradation de la qualité de la calibration jointe en comparaison aux calibrations univariées** (traitant d'un unique groupe de paramètres incertains). On observe notamment que l'écart absolu moyen a augmenté de 36 % (0,82 % pour la calibration jointe cf. Tableau 6.4, contre 0,605 % pour la calibration univariée cf. Tableau 6.2) et de 37 % pour le modérateur intérieur (0,32 % pour la calibration jointe cf. Tableau 6.4, contre 0,234 % pour la calibration univariée cf. Tableau 6.3).

Ces résultats ont été obtenus pour des perturbations et des sensibilités identiques disposant d'incertitudes Monte-Carlo équivalentes, voire égales. Il est donc possible d'identifier les origines les plus probables des dégradations observées lors du traitement d'une configuration où deux groupes de paramètres technologiques indépendants sont perturbés.

Ces dégradations peuvent être causées par l'utilisation du modèle (6.2) qui néglige les interactions. Pour corriger ce modèle, il serait nécessaire d'estimer l'ensemble des sensibilités associées à chacun des termes d'interaction. Un nombre important de calculs de sensibilité devrait alors être réalisé. De plus, il est actuellement impossible de perturber plus d'une composition lors d'un calcul utilisant la méthode des échantillons corrélés à l'aide du simulateur à disposition (TRIPOLI-4[®], version 11.1). Ces contraintes rendent ainsi la correction du modèle (6.2) impossible.

Ces dégradations peuvent par ailleurs être liées à la dimension du problème de calibration. Pour cette étude, 64 paramètres sont considérés comme incertains contre 32 lors des études univariées précédentes. Cependant, le même nombre de mesures est à disposition pour l'inversion. Il est ainsi possible que trop peu de mesures expérimentales suffisamment informatives soient à disposition pour rendre le problème identifiable. D'où les dégradations observées.

Calibration partielle des paramètres technologiques

Un travail d'inversion illustratif a été conduit pour montrer la nécessité de calibrer tous les paramètres technologiques incertains ayant une influence significative sur les grandeurs d'intérêt. Nous considérons une étude où un seul des deux groupes de paramètres technologiques est calibré. Le second groupe de paramètres incertains est quant à lui fixé à ses valeurs nominales.

Si l'on calibre les densités des joues borées en fixant les densités des modérateurs intérieurs à leur valeur nominale, on obtient un écart absolu moyen de 1,03 % pour le bore soit une augmentation de 26 % en comparaison à la calibration simultanée des deux groupes de paramètres incertains (0.82 %, Tableau 6.4). À l'inverse, si l'on calibre le modérateur intérieur en fixant les densités des joues borées à leur valeur nominale, on obtient un écart absolu moyen de 0,57 %, soit une augmentation de 78 %.

Calibration sur les données issues directement des éléments combustibles

Comme pour les études dites univariées, une calibration illustrative sur les grandeurs estimées directement sur les éléments combustibles a été menée. Les résultats de cette calibration sont présentés dans le Tableau 6.4 (ligne EC). On observe, en comparaison des résultats obtenus pour l'étude univariée (cf. Tableau 6.2) que l'écart absolu moyen du bore a augmenté d'un facteur 13. Pour le modérateur, en comparaison des résultats du Tableau 6.3, on observe que l'écart absolu moyen a augmenté d'un facteur 35.

On peut donc raisonnablement supposer que **négliger les termes d'interaction dans le modèle (6.2) n'est pas adapté à la résolution du problème inverse se basant sur les taux de fission estimés directement sur les éléments combustibles**. Pour les raisons expliquées précédemment, il n'est actuellement pas possible de corriger cette lacune.

Malgré la dégradation importante de la qualité des calibrations, nous pouvons émettre une conclusion. Après normalisation des écarts absolus moyens, on observe, à l'inverse de la calibration réalisée à partir des mesures issues des sondes, que **le groupe de paramètres technologiques le mieux calibré est celui associé aux densités des modérateurs**. Un écart normalisé de 0,18 % est obtenu pour le modérateur intérieur contre 0,24 % pour le bore.

Une analyse de sensibilité des paramètres intervenant dans le modèle (6.2) permet de donner des éléments de justification. Cette analyse a d'une part été conduite sur ce modèle traitant des mesures issues des sondes de mesure et d'autre part sur ce même modèle traitant des mesures estimées sur les éléments combustibles. Nous observons que les paramètres relatifs aux joues borées ont plus d'impact (que ceux associés aux modérateurs intérieurs) sur les valeurs au niveau des sondes, et inversement pour les éléments combustibles. D'où une meilleure calibration des joues borées sur les mesures estimées par les sondes et du modérateur intérieur sur les mesures estimées dans les éléments combustibles.

Paramètre calibré	Type de calibration	Moyenne référence - calibration	Écart Type
Bore	EC	0,97	0,92
Mod. intérieur	EC	0,18	0,14
Bore	IIC	0,82	0,62
Mod. intérieur	IIC	0,32	0,24

TABLEAU 6.4 – Résultats de la calibration bayésienne simultanée de deux groupes de paramètres technologiques indépendants.

6.5.4 Loi *a posteriori*

La Figure 6.5 présente les lois marginales *a posteriori* de l'ensemble des paramètres incertains (bore et modérateur intérieur) obtenues à l'issue de la calibration bayésienne sur les mesures obtenues par l'Instrumentation In-Core.

L'estimation ponctuelle représentée sur cette figure (repères verticaux bleus) est la médiane de la distribution. Rappelons que pour les calibrations bayésiennes précédentes, l'estimateur utilisé pour définir les « perturbations calibrées » était la moyenne de la distribution.

6.5. Extension à deux groupes de paramètres technologiques

Les régions bleutées comprennent 50 % de la masse de probabilité de ces distributions. Ces régions de crédibilité⁶ sont construites grâce aux quantiles *a posteriori* de niveau 0,25 et 0,75. Les courbes extérieures représentent les régions de crédibilité à 99 % (c.-à-d. bornées par les quantiles à 0,005 et 0,995).

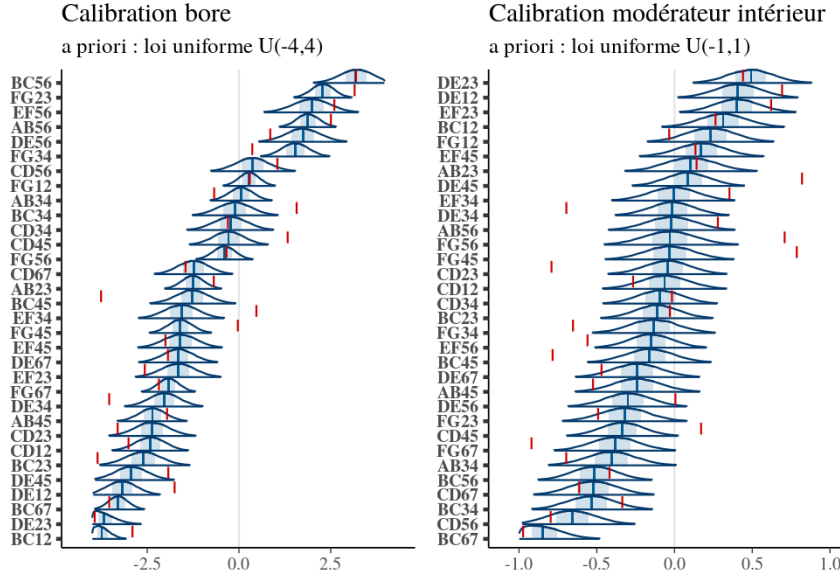


FIGURE 6.5 – Distributions *a posteriori* des paramètres technologiques incertains : densité des joues borées (gauche) et densité des modérateurs intérieurs (droite).

Notons que ces courbes de densité sont mises à l'échelle de manière à ce que leurs maxima soient à la même hauteur. Cela permet une lecture plus aisée. Les « vrais » jeux de perturbation appliqués sont également matérialisés sur ces figures par des repères verticaux rouges.

Avantage de la calibration bayésienne

Cette figure permet de visualiser l'effet de la calibration sur les régions de crédibilité associées aux paramètres technologiques incertains. En effet, les plages de variation représentées sur cette figure correspondent aux connaissances *a priori*. Les distributions représentées correspondent quant à elles aux distributions marginales *a posteriori*. On constate ainsi que la calibration permet de réduire l'incertitude technologique associée aux paramètres incertains de façon significative et d'agir directement sur les distributions associées à ces paramètres (passage de lois *a priori* uniformes à des lois *a posteriori* gaussiennes tronquées). Rappelons que la réduction de ces incertitudes est de première importance lors de la validation expérimentale des OCS car elle se répercute directement sur les écarts calculs/expériences.

Un second avantage de la bayésienne est l'estimation des éventuelles corrélations pouvant exister entre les paramètres technologiques calibrés. En effet, à l'issue de la calibration, la loi jointe *a posteriori* associée à ces paramètres est disponible (bien que des lois *a priori*

6. En calibration bayésienne, parler d'intervalles ou de régions de confiance n'a pas réellement de sens. Dans le formalisme bayésien, les paramètres à calibrer sont des variables aléatoires, il n'existe pas de « vraie » valeur pour ces paramètres, comme dans le cas fréquentiste. Pour ces raisons, le terme « région de crédibilité » est préféré.

indépendantes sont utilisées). Ainsi, il devient possible d'étudier d'éventuelles corrélations à l'aide de figures communément appelées « pairplot ⁷ ».

Écarts observés

Lorsqu'on étudie la Figure 6.5, on observe que plusieurs des distributions *a posteriori* ne correspondent pas avec les vraies perturbations appliquées. Cette observation est probablement liée aux incertitudes Monte-Carlo associées aux paramètres du modèle utilisé lors de la calibration. En effet, comme observé dans la Section 6.3.5, il a été montré que ces incertitudes ont un effet important sur la qualité de la calibration.

L'utilisation de calculs de sensibilité plus précis, ou dont l'incertitude est propagée lors du processus de calibration, peut permettre un meilleur accord entre les régions de crédibilité et les perturbations appliquées. Ces corrections peuvent se traduire d'une part, par une translation des lois *a posteriori*, de sorte que les médianes de ces distributions se rapprochent des perturbations appliquées, et d'autre part, par l'élargissement des régions de crédibilité.

Néanmoins, nous retiendrons les performances convaincantes de la calibration en ce qui concerne la réduction des incertitudes technologiques.

6.6 Synthèse partie 1

Dans cette première partie, nous avons montré qu'il est possible de résoudre le problème inverse lors de l'étude d'une configuration où un seul groupe de paramètres technologiques associés au bilan de matière est perturbé. Lors de cette étude, nous avons également montré qu'il pouvait être intéressant de transposer les mesures issues de l'Instrumentation In-Core vers les Éléments Combustibles pour améliorer la qualité de l'inversion. Néanmoins, cette transposition peut dégrader les résultats de l'inversion lorsque l'incertitude Monte-Carlo des grandeurs estimées au niveau des sondes est suffisamment faible.

Par la suite, d'autres études ont été menées sur des configurations où un seul groupe de paramètres technologiques est perturbé. Ces études ont permis d'identifier que la densité des joues borées et la densité des modérateurs intérieurs influent significativement sur les mesures estimées au niveau des sondes.

À la suite de cette identification, une configuration du cœur a été construite où ces deux groupes de paramètres technologiques sont perturbés simultanément. Sur cette configuration, nous avons montré qu'il est possible de calibrer conjointement plusieurs groupes de paramètres technologiques indépendants associés aux compositions des éléments composant le cœur. Nous observons néanmoins une détérioration de la qualité de la calibration en comparaison aux calibrations univariées où un unique groupe de paramètres technologiques est perturbé. Les performances relatives à la réduction des incertitudes *a priori* associées aux paramètres incertains restent néanmoins toujours importantes.

7. Ces figures ne sont pas représentées dans ce document.

Partie 2 : Paramètres géométriques

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous présentons la calibration du groupe de paramètres technologiques relatif à la position des sondes placées dans le cœur. Cette calibration se base sur le formalisme du modèle linéaire bayésien (cf. Chapitre 3). Dans notre cas et conditionnellement à certaines hypothèses, des expressions analytiques des distributions *a posteriori* des paramètres incertains peuvent être obtenues.

Pour calculer ces lois, nous rappelons d'abord le modèle permettant d'obtenir les sensibilités mesurées à l'aide de l'Instrumentation In-Core en fonction des perturbations appliquées, ainsi que le modèle linéaire bayésien permettant la résolution analytique du problème inverse. Pour pouvoir inverser ce problème de façon analytique, il est nécessaire d'utiliser certaines hypothèses simplificatrices. Nous présentons ainsi une analyse de sensibilité basée sur l'utilisation des indices de Sobol, permettant de s'assurer de la validité des hypothèses avancées. Après cette validation, nous calculons les expressions analytiques des distributions *a posteriori*. Finalement, l'inversion est mise en œuvre pour estimer les perturbations appliquées aux sondes. L'ensemble des mesures de sensibilité « expérimentales » réalisées lors d'une campagne de mesures menée sur le cœur d'étude est alors utilisé pour réaliser cette inversion.

6.7 Rappels

Le travail de calibration présenté dans cette partie fait suite au développement de la méthode de neutronique présentée dans la Section 4.2. Rappelons que cette méthode permet d'estimer rapidement les effets d'une perturbation appliquée à la position dans le plan xy des sondes de mesure.

6.7.1 Sondes sensibles

Comme identifié lors de l'étude 4.2.3, seules les sondes périphériques placées à proximité du modérateur sont sensibles à une perturbation de leur position. Le travail de calibration présenté ici porte donc uniquement sur ces sondes. Dans la suite du document, l'ensemble $IIC = \{A1, \dots, G7\}$ composé de 28 éléments fait référence à ces sondes sensibles.

6.7.2 Modèles linéaires indépendants

Nous avons de plus montré, lors de cette précédente étude, qu'il est possible de modéliser l'effet d'une perturbation de la position de chacune des sondes ($Sensibilité_{IIC}$) par un modèle linéaire indépendant en fonction de deux variables explicatives. Ces variables sont la

perturbation appliquée à la position de la sonde selon l'axe x et selon l'axe y , respectivement notées ($Perturbation_x$, $Perturbation_y$). Rappelons que ces modèles linéaires prennent la forme suivante :

$$Sensibilité_{IIC} = Perturbation_{x,IIC} \cdot S_{x,IIC} + Perturbation_{y,IIC} \cdot S_{y,IIC} + \epsilon_{IIC}. \quad (6.3)$$

Les paramètres de ces modèles linéaires ($S_{x,IIC}$, $S_{y,IIC}$) sont les sensibilités à une perturbation de la sonde d'indice (IIC) selon les axes x et y .

6.7.3 Modèle linéaire bayésien

Avant de présenter le travail de calibration du groupe de paramètres technologiques relatif à la position des tubes-guides, nous rappelons le formalisme associé au modèle linéaire bayésien (cf. Section 3.5). À la suite de ce rappel, les lois *a posteriori* obtenues seront directement appliquées au modèle (6.3).

Présentation du modèle linéaire

Le modèle linéaire (6.3) utilisé lors de l'étude 4.2.3 peut s'écrire pour chaque sonde (IIC) sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{Y}_{n_{sim}} = \mathbf{\Theta} \cdot \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}. \quad (6.4)$$

Le vecteur $\mathbf{Y}_{n_{sim}} = [Y_i]_{i=1}^{n_{sim}} \in \mathbb{R}^{n_{sim}}$ représente les n_{sim} simulations indépendantes associées aux perturbations de la position d'une sonde. Lors de l'étude préliminaire, le nombre de données à disposition pour chaque modèle étudié était de $n_{sim} = 49$. Ces grandeurs mesurées sur une sonde sont décrites à la Figure 4.3. Chacune de ces données correspond à la mesure de sensibilité associée à la perturbation dans le plan xy de la position d'une sonde. Nous avons ainsi en lien avec le modèle (6.3) :

$$\mathbf{Y}_{n_{sim}} = [Y_i]_{i=1}^{n_{sim}=49} = [Sensibilité_{i,IIC}]_{i=1}^{n_{sim}=49}.$$

Pour chacune des mesures Y_i effectuée sur une sonde, nous avons un vecteur de $p = 2$ variables explicatives. Ce vecteur est noté pour une sonde : $\boldsymbol{\theta}_i^T = (Perturbation_{x_i}, Perturbation_{y_i}) \in \mathbb{R}^p$. L'indice i fait référence à une des 49 perturbations appliquées à la position de la sonde. Si l'on considère les $n_{sim} = 49$ simulations, cette écriture conduit à la matrice $\mathbf{\Theta} = [\boldsymbol{\theta}_i^T]_{i=1}^{n_{sim}} \in \mathbb{R}^{n_{sim},p}$. Cette matrice définit le plan d'expériences suivant :

$$\mathbf{\Theta} = [\boldsymbol{\theta}_i^T]_{i=1}^{n_{sim}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1^1 & \dots & \boldsymbol{\theta}_1^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{n_{sim}=49}^1 & \dots & \boldsymbol{\theta}_{n_{sim}=49}^p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_{sim},p}.$$

En lien avec ces simulations et les variables explicatives, nous avons le vecteur des paramètres du modèle noté $\boldsymbol{\beta} = (S_x, S_y) \in \mathbb{R}^p$. Ce vecteur est défini comme le vecteur des coefficients du modèle linéaire. Ces coefficients sont estimés par régression linéaire bayésienne sur les données $\mathbf{Y}_{n_{sim}}$.

Finalement, afin de lier ces différentes variables par un modèle linéaire, un terme d'erreur noté $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_i]_{i=1}^{n_{sim}}$ est utilisé. On suppose que l'erreur $\boldsymbol{\epsilon}$ suit une loi normale multivariée de matrice de variance-covariance $\sigma^2 I_{n_{sim}}$ (hypothèse d'homoscédasticité et d'indépendance) avec un écart-type σ inconnu :

$$\boldsymbol{\epsilon} \mid \sigma^2 \sim N_{n_{sim}}(0, \sigma^2 I_{n_{sim}}). \quad (6.5)$$

Régression linéaire bayésienne

La loi *a posteriori* relative au vecteur des paramètres incertains β est inférée par approche bayésienne. Cependant, l'écart-type σ associé au terme d'erreur est inconnu. Dans un cadre entièrement bayésien, l'écart-type σ doit également être décrit par une variable aléatoire. L'inférence doit ainsi être réalisée sur un modèle décrivant la loi jointe du couple (β, σ) .

Concernant le modèle utilisé, le cadre linéaire et l'hypothèse d'homoscédasticité conduisent à une loi conditionnelle $p(\mathbf{Y}_{n_{sim}} \mid \beta, \sigma^2)$, gaussienne multivariée de dimension n_{sim} , de moyenne $\Theta \cdot \beta$ et de variance $\sigma^2 I_{n_{sim}}$:

$$p(\mathbf{Y}_{n_{sim}} \mid \beta, \sigma^2) \sim N_{n_{sim}}(\mathbf{Y}_{n_{sim}} \mid \Theta \cdot \beta, \sigma^2 I_{n_{sim}}). \quad (6.6)$$

Lors de la réalisation de l'inversion bayésienne appliquée à l'étude préliminaire, aucune connaissance *a priori* n'était disponible concernant les paramètres du modèle β . De ce fait, nous avons utilisé une distribution non informative comme loi *a priori*. Il s'agit de la mesure *a priori* impropre (cf. 3.5.2) (β, σ^2) :

$$p(\beta, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}. \quad (6.7)$$

Loi *a posteriori*

La fonction de vraisemblance (6.6) utilisée afin de décrire les données expérimentales ainsi que l'information *a priori* définie par l'expression (6.7) conduit aux lois marginales *a posteriori* suivantes :

$$\beta \mid \mathbf{Y}_{n_{sim}} \sim MVSt_{n_{sim}-p}(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2(\Theta^T \Theta)^{-1}), \quad (6.8)$$

$$\sigma^2 \mid \mathbf{Y}_{n_{sim}} \sim IG\left(\frac{n_{sim}-p}{2}, \frac{n_{sim}-p}{2} \hat{\sigma}^2\right), \quad (6.9)$$

$$\text{avec } \hat{\beta} = (\Theta^T \Theta)^{-1} \Theta^T \mathbf{Y}_{n_{sim}} \text{ et } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_{sim}-p} (\mathbf{Y}_{n_{sim}} - \Theta \hat{\beta})^T (\mathbf{Y}_{n_{sim}} - \Theta \hat{\beta}). \quad (6.10)$$

Supposons maintenant que nous utilisons le modèle (6.4) pour prédire m_{sim} nouvelles simulations $\tilde{\mathbf{Y}}_{m_{sim}}$ liées à un nouveau plan d'expériences $\tilde{\Theta} \in \mathbb{R}^{m_{sim} \times p}$. Sachant les n_{sim} simulations $\mathbf{Y}_{n_{sim}}$, liées au plan d'expériences $\Theta \in \mathbb{R}^{n_{sim} \times p}$, on obtient la loi prédictive :

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{m_{sim}} \mid \mathbf{Y}_{n_{sim}} \sim MVSt_{n_{sim}-p}(\tilde{\Theta} \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2(I_{m_{sim}} + \tilde{\Theta}(\Theta^T \Theta)^{-1} \tilde{\Theta}^T)). \quad (6.11)$$

Il est donc possible de prédire l'ensemble des grandeurs d'intérêt à l'aide de la distribution prédictive *a posteriori* donnée par l'équation (6.11).

6.8 Problématique posée par la calibration des paramètres technologiques incertains

Après l'étude 4.2.3 réalisée pour une seule condition expérimentale, nous avons construit un modèle du type (6.3) pour chacune des sondes et pour chacune des $n_{exp} = 16$ conditions

expérimentales appartenant à une campagne de mesure réalisée sur un cœur tel que fabriqué. La condition de symétrie du cœur a été utilisée afin de réduire l'étude aux 15 sondes sensibles présentes dans la moitié du cœur (cf. Tableau 4.3).

Les paramètres estimés lors de la construction de ces modèles sont les sensibilités associées à la translation de l'Instrumentation In-Core selon les axes x et y notées (S_x, S_y) ou β dans le cas plus général pour chacune des conditions expérimentales. La loi conditionnelle de ces sensibilités a été estimée à l'aide de l'équation (6.8).

Lors d'une campagne de mesure réalisée sur un cœur tel que fabriqué, les paramètres technologiques (notés θ dans le cas général), variables explicatives du modèle (6.4), sont identiques pour chacune des n_{exp} conditions expérimentales mais sont à présent **incertains**. Les perturbations appliquées à chacune des sondes de mesure $\theta_{IIC}^T = (Perturbation_{x,IIC}, Perturbation_{y,IIC})$ sont alors inconnues. Il est ainsi nécessaire de modéliser ces paramètres θ par des variables aléatoires suivant une distribution caractérisée par la méconnaissance leur étant associée.

A priori issu de la métrologie

Une connaissance *a priori* relative à la position exacte des sondes est disponible grâce à un ensemble de mesures métrologiques. Afin de prendre en compte cette information, une loi *a priori* uniforme a été utilisée pour modéliser l'incertitude sur ces variables. Les bornes de ces distributions proviennent directement de la métrologie réalisée sur le cœur tel que fabriqué⁸. On obtient ainsi les lois *a priori* indépendantes suivantes pour la position de chacune des sondes (IIC) dans le plan xy :

$$\theta_{IIC} \sim \bigotimes_{(x,y)} U[\theta_{IIC}^{min}, \theta_{IIC}^{max}]. \quad (6.12)$$

Nouveaux paramètres explicatifs

À la suite d'une campagne de mesure réalisée sur un cœur tel que fabriqué, il serait intéressant de fournir une estimation des paramètres technologiques incertains $\theta^T = (Perturbation_x, Perturbation_y) \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ de chaque sonde à partir des mesures de sensibilité réalisées pour les ($n_{exp} = 16$) conditions expérimentales notées $\mathbf{Y}_{n_{exp}} = [Y_i]_{i=1}^{n_{exp}} \in \mathbb{R}^{n_{exp}}$. Pour rester dans le cadre du modèle linéaire bayésien, il est alors nécessaire de réécrire le modèle (6.4) de la façon suivante :

$$\mathbf{Y}_{n_{exp}} = \beta \cdot \theta + \epsilon. \quad (6.13)$$

Dans cette équation (dédiée à une unique sonde), on constate que les paramètres à estimer sont maintenant la perturbation appliquée à la sonde notée θ . Les sensibilités préalablement estimées pour chaque condition expérimentale $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_{n_{exp}}]^T \in \mathbb{R}^{n_{exp} \times p}$ jouent à présent le rôle de variables explicatives. Chacun des termes β_i pour $i \in \{1, \dots, n_{exp}\}$ suit la distribution (6.8). Pour chaque sonde de mesure, ces variables s'écrivent :

$$\beta = \begin{pmatrix} S_x^1 & S_y^1 \\ \vdots & \vdots \\ S_x^{n_{exp}=16} & S_y^{n_{exp}=16} \end{pmatrix}.$$

8. Le cœur tel que fabriqué est un objet numérique. Il n'est donc pas possible de réaliser des mesures métrologiques sur cet objet. La métrologie relative à des cœurs réellement fabriqués a par conséquent été utilisée.

Incertitude relative aux sensibilités

Remarquons que les variables explicatives β utilisées dans le modèle (6.13) sont estimées lors d'études préliminaires décrites en Section 4.2.3, mais pour toutes les conditions expérimentales du plan d'expériences. Ainsi, ces variables explicatives sont entachées d'incertitudes⁹. Il est donc nécessaire, lors de la calibration de la position des sondes de mesure notée θ , de propager l'incertitude relative à β . **L'ensemble des variables $(\beta, \theta, \epsilon, \sigma^2)$ composant le modèle (6.13) doit alors être considéré comme aléatoire.**

Ce cadre d'application ne suit plus le formalisme du modèle linéaire bayésien classique. Il n'existe plus d'expression analytique relative à la distribution *a posteriori* des paramètres à calibrer. Il est alors nécessaire de faire appel à des algorithmes du type MCMC pour le calcul des lois *a posteriori*.

Approximation plug-in

Pour éviter le déploiement de ces algorithmes, nous proposons de négliger l'incertitude relative aux paramètres (β, σ^2) en utilisant une approche de type « plug-in ». Cette approximation consiste à fixer les valeurs de (β, σ^2) à leur maximum *a posteriori* noté $(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$. Cette simplification n'est évidemment acceptable que si l'incertitude de ces variables est négligeable devant l'incertitude relative aux paramètres technologiques à calibrer. Pour justifier cette approximation, nous effectuons dans ce qui suit, une analyse de sensibilité permettant la validation de cette hypothèse simplificatrice.

6.9 Réduction des incertitudes et simplification du modèle bayésien

L'analyse de sensibilité est conduite sur le modèle (6.13) dont toutes les variables sont supposées être aléatoires. Cette analyse de sensibilité a pour intérêt d'étudier la façon dont les incertitudes sur les paramètres $(\beta, \theta, \epsilon, \sigma^2)$ impactent quantitativement l'incertitude de la sortie du modèle \mathbf{Y}_{exp} . Cette information peut être obtenue à l'aide d'indices de sensibilité. Si certains paramètres s'avèrent avoir un effet négligeable sur l'incertitude de la sortie, il devient alors possible de simplifier le modèle étudié en fixant la valeur de ces paramètres non influents à une valeur nominale ou la plus probable.

Cette analyse de sensibilité fait référence à la théorie probabiliste de l'analyse de sensibilité « globale » ([45], [46], [47]). Elle ne doit pas être confondue avec les sensibilités « locales » notées β et obtenues grâce aux méthodes de neutronique.

6.9.1 Analyse de sensibilité par estimation des indices de Sobol

Avant de réaliser cette analyse de sensibilité, nous discutons d'abord le formalisme relatif aux indices de Sobol. Ces indices sont issus de la décomposition de la variance de la sortie d'un modèle en fonction des variables d'entrée ou de groupes d'entrées incertaines [48].

Soit le modèle $Y = f(\mathbf{X})$. Ce modèle f lie une sortie scalaire Y avec $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$, un vecteur de d variables d'entrée incertaines et indépendantes. On fait l'hypothèse que f est de carré intégrable.

9. L'incertitude relative à ces variables est décrite par l'expression (6.8).

D'après la décomposition d'Hoeffding [49], f admet une unique décomposition orthogonale hiérarchique de la forme :

$$f(\mathbf{X}) = f_0 + \sum_{i=1}^d f_i(X_i) + \sum_{i<j}^d f_{ij}(X_i, X_j) + \dots + f_{1,2,\dots,d}(X_1, X_2, \dots, X_d), \quad (6.14)$$

avec : $\int f_{i_1, i_2, \dots, i_s}(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_s}) d\mathbb{P}_{\mathbf{X}_J} = 0, \forall \mathbf{J} \subset \{i_1, \dots, i_s\}$, ici $\mathbb{P}_{\mathbf{X}_J}$ désigne la loi de \mathbf{X}_J . En d'autres termes, $\mathbb{E}(f_J(\mathbf{X}_J) | \mathbf{X}_I) = 0, \forall \mathbf{J} \subset \{1, \dots, d\}$ et $\mathbf{I} \subsetneq \mathbf{J}$. Cette condition entraîne que deux termes disjoints de la décomposition fonctionnelle sont orthogonaux. On montre facilement que ces différents termes peuvent être réécrits sous ces conditions à l'aide des espérances conditionnelles :

$$\begin{aligned} f_0 &= \mathbb{E}(f(\mathbf{X})), \\ f_i(X_i) &= \mathbb{E}(f(\mathbf{X}) | X_i) - f_0, \\ f_j(\mathbf{X}_J) &= \mathbb{E}(f(\mathbf{X}) | \mathbf{X}_J) - \sum_{\mathbf{I} \subsetneq \mathbf{J}} f_{\mathbf{I}}(\mathbf{X}_I), \forall \mathbf{J} \subset \{1, \dots, d\}. \end{aligned}$$

En prenant la variance de $f(\mathbf{X})$ (cf. Éq. 6.14) et grâce aux conditions d'orthogonalité des termes, on obtient la décomposition dite ANOVA :

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \sum_{i=1}^d V_i + \sum_{i<j}^d V_{ij} + \dots + V_{12\dots d}, \\ \text{Avec } V_i &= \text{Var}(f_i(X_i)) = \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X_i)) \\ \text{et } V_{ij} &= \text{Var}(f_{ij}(X_i, X_j)) = \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X_i, X_j)) - V_i - V_j. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Finalement, les indices de Sobol [48] sont définis par normalisation des termes de la décomposition :

$$S_i = \frac{V_i}{\text{Var}(Y)}, S_{ij} = \frac{V_{ij}}{\text{Var}(Y)}, \text{ avec } \sum_{i=1}^d S_i + \sum_{i=1}^d S_{ij} + \dots + S_{12\dots d} = 1. \quad (6.16)$$

Les indices du premier ordre S_i sont également appelés « indices d'effet principal » et représentent la part de variance de la sortie expliquée par chaque variable d'entrée seule, indépendamment des autres. Les indices d'ordre 2 notés S_{ij} expriment quant à eux la part de la variance de Y due à l'interaction des variables X_i et X_j , indépendamment de leurs effets principaux et ainsi de suite pour les indices d'ordre supérieur.

6.9.2 Calcul analytique des indices de Sobol

Les indices de Sobol sont maintenant calculés pour le modèle (6.13) dont tous les paramètres sont supposés aléatoires. Les lois associées aux paramètres $(\epsilon, \beta, \sigma^2, \theta)$ sont respectivement données par les équations (6.5), (6.8), (6.9) et (6.12).

L'objectif de ce calcul est de montrer que l'indice de Sobol impliquant le groupe de variables $\mathbf{W} = (\beta, \epsilon, \sigma^2)$ est négligeable par rapport à l'indice n'impliquant que la variable θ . Cela va justifier l'approximation de type « plug-in » envisagée, permettant de simplifier le modèle (6.13) où seul le paramètre θ relatif à la position des tubes-guides est considéré comme aléatoire.

6.9. Réduction des incertitudes et simplification du modèle bayésien

Sachant que, dans le cadre de l'étude d'application, nous avons deux groupes de variables d'entrée incertaines indépendantes ($d = 2$), il est suffisant de calculer les deux effets primaires ainsi que celui d'interaction pour avoir l'ensemble de la décomposition de la variance. Les indices à calculer sont donc les indices (S_1 , S_2 , et $S_{1,2}$), cf. Éq. (6.16).

On se place donc dans le cas où on a ($d = 2$) groupes de variables disjointes (\mathbf{W} et $\boldsymbol{\theta}$) pour réaliser la décomposition ANOVA de $\mathbf{Y}_{n_{exp}}$ et estimer les indices de Sobol relatifs à chacun des groupes ainsi qu'à leur interaction éventuelle. On cherche donc à estimer les termes de la décomposition suivante :

$$\text{Var}[\mathbf{Y}_{n_{exp}}] = V_{\mathbf{W}} + V_{\boldsymbol{\theta}} + V_{\mathbf{W},\boldsymbol{\theta}},$$

$$\begin{aligned} \text{avec } V_{\boldsymbol{\theta}} &= \text{Var}[\mathbb{E}(\mathbf{Y}_{n_{exp}} \mid \boldsymbol{\theta})], V_{\mathbf{W}} = \text{Var}[\mathbb{E}(\mathbf{Y}_{n_{exp}} \mid \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\epsilon}, \sigma^2)] \\ \text{et } V_{\mathbf{W},\boldsymbol{\theta}} &= \text{Var}[\mathbb{E}(\mathbf{Y}_{n_{exp}} \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\epsilon}, \sigma^2)] - V_{\boldsymbol{\theta}} - V_{\mathbf{W}}. \end{aligned}$$

L'objectif est ensuite d'évaluer si l'influence totale de \mathbf{W} est négligeable devant celle de $\boldsymbol{\theta}$, c.-à-d. :

$$V_{\mathbf{W}} + V_{\mathbf{W},\boldsymbol{\theta}} \ll V_{\boldsymbol{\theta}}. \quad (6.17)$$

Le calcul analytique de ces indices avec les distributions *a priori* discutées précédemment, appliqué au modèle (6.13) conduit aux expressions suivantes¹⁰ :

$$\begin{aligned} V_{\boldsymbol{\theta}} &= \sum_{i=1}^p \frac{(\theta_{max}^i - \theta_{min}^i)^2}{12} \hat{\beta}_i^2, \\ V_{\mathbf{W}} &= \frac{n_{sim} - p}{n_{sim} - p - 2} \hat{\sigma}^2 \mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}]^T (\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta})^{-1} \mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}] + \frac{n_{sim} - p}{n_{sim} - p - 1} \hat{\sigma}^2, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{W},\boldsymbol{\theta}} &= \frac{n_{sim} - p}{n_{sim} - p - 2} \hat{\sigma}^2 \cdot \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}} (\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta})^{-1}), \\ \text{Avec } \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}} &= \begin{bmatrix} \frac{(\theta_{max}^1 - \theta_{min}^1)^2}{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{(\theta_{max}^p - \theta_{min}^p)^2}{12} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On suppose que la loi *a priori* de $\boldsymbol{\theta}$ est centrée, c.-à-d. $\mathbb{E}[\boldsymbol{\theta}] = 0$. Ainsi, l'Éq. (6.17) revient à montrer que :

$$\frac{n_{sim} - p}{n_{sim} - p - 1} \hat{\sigma}^2 + \frac{n_{sim} - p}{n_{sim} - p - 2} \hat{\sigma}^2 \cdot \text{Tr}[\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}} (\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta})^{-1}] \ll \sum_{i=1}^p \frac{(\theta_{max}^i - \theta_{min}^i)^2}{12} \hat{\beta}_i^2. \quad (6.19)$$

10. Le détail des calculs permettant de dériver ces expressions est présenté dans l'annexe C.

6.9.3 Mise en œuvre

Rappelons que les sensibilités des 15 sondes d'intérêt présentes dans la moitié du cœur¹¹ pour les 16 conditions expérimentales ont été estimées lors d'études préliminaires du type 4.2.3. Ainsi, $15 \times 16 = 240$ modèles linéaires du type (6.4) ont pu être construits par l'estimation des paramètres (β, σ^2) de ces modèles.

À la suite de ces estimations et en supposant que les paramètres technologiques θ suivent la distribution *a priori* (6.12), nous avons réalisé une analyse de sensibilité pour chacun de ces modèles linéaires pour valider l'approximation de type « Plug-in ».

Les numérateurs des différents indices de Sobol dont les expressions analytiques sont données par les équations (6.18) ont été calculés pour chacun de ces 240 modèles linéaires. Les répartitions de ces indices sont représentées sous forme de boxplot sur la Figure 6.6 dans une version normalisée (somme égale à 1) correspondant aux indices de Sobol notés S_θ , S_W , $S_{W,\theta}$.

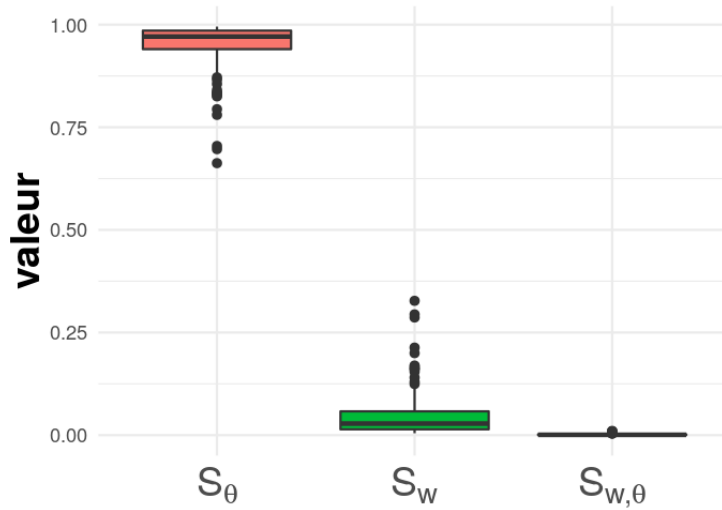


FIGURE 6.6 – Boxplot des indices de Sobol calculés analytiquement pour les 240 modèles linéaires (Éq. 6.4), sur la nouvelle géométrie des sondes de mesure.

Pour chaque variable $(W; \theta)$, ou groupe de variables (W, θ) , la représentation par boxplot (ou boîte à moustache) permet de visualiser la médiane (trait noir) et les quartiles (limites de la boîte) des 240 indices estimés (pour chaque modèle). Les médianes de ces indices sont ainsi : $\bar{S}_\theta = 0,953$, $\bar{S}_W = 0,045$ et $\bar{S}_{W,\theta} = 0,001$.

On observe que les valeurs des indices S_W et $S_{W,\theta}$ sont bien négligeables devant celles de S_θ . Ainsi, l'hypothèse (6.19) est bien vérifiée et justifie l'approximation du type « plug-in » pour la calibration.

6.10 Calibration bayésienne

Nous avons mis en œuvre une première approximation classique de la loi *a posteriori* prédictive (cf. Éq. (6.11)) relative au modèle (6.4) avant d'utiliser les résultats de l'analyse

11. La condition de symétrie du cœur a été utilisée afin de ne considérer que la moitié des sondes sensibles lors de la mise en pratique de l'étude et non pas les 28 sondes périphériques sensibles.

de sensibilité. Cette analyse de sensibilité permet la calibration du groupe de paramètres technologiques incertains à l'aide du modèle (6.13).

Lors de cette étude préliminaire, pour chacun des $240 = \overbrace{15}^{\text{sondes}} \times \overbrace{16}^{\text{cond. exp.}}$ modèles linéaires du type (6.4), ($n_{sim} = 49$) simulations étaient à disposition pour estimer le maximum de vraisemblance du couple (β, σ^2) , noté $(\hat{\beta}_{EMV}, \hat{\sigma}_{EMV}^2) \in (\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ (cf. Éq. (6.10)).

Le nombre de degrés de liberté ($n_{sim} - p$) associé à ces estimations est supérieur au seuil classique de 30. On fait donc raisonnablement une approximation multivariée gaussienne de la loi prédictive *a posteriori* des $\tilde{\mathbf{Y}}_{m_{sim}}$ (cf. Éq. (6.11)) (m_{sim} nouvelles simulations correspondant à un nouveau plan d'expériences $\tilde{\Theta} \in \mathbb{R}^{m_{sim}, p}$, pour une condition expérimentale) :

$$p(\tilde{\mathbf{Y}}_{m_{sim}} \mid \mathbf{Y}_{n_{sim}}, \tilde{\Theta}, \beta, \sigma) \approx N_{m_{sim}}(\tilde{\Theta} \cdot \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2(I_{m_{sim}} + \tilde{\Theta}(\Theta^T \Theta)^{-1} \tilde{\Theta}^T)). \quad (6.20)$$

D'autre part, les résultats de l'analyse de sensibilité ont permis de montrer qu'il est possible d'utiliser l'approximation de type « plug-in » pour le couple de variables (β, σ^2) . Ainsi, ces variables sont fixées à leur maximum de vraisemblance noté $(\hat{\beta}_{EMV}, \hat{\sigma}_{EMV}^2)$ de telle sorte que :

$$p(\tilde{\mathbf{Y}}_{m_{sim}} \mid \mathbf{Y}_{n_{sim}}, \tilde{\Theta}, \beta, \sigma) \approx p(\tilde{\mathbf{Y}}_{m_{sim}} \mid \mathbf{Y}_{n_{sim}}, \tilde{\Theta}, \beta = \hat{\beta}_{EMV}, \sigma = \hat{\sigma}_{EMV}).$$

De ce fait, l'expression (6.20) se réécrit en négligeant l'incertitude relative au couple de variables (β, σ^2) , sous la forme suivante :

$$p(\tilde{\mathbf{Y}}_{m_{sim}} \mid \mathbf{Y}_{n_{sim}}, \tilde{\Theta}) \approx N_{m_{sim}}(\tilde{\Theta} \cdot \hat{\beta}_{EMV}, \hat{\sigma}_{EMV}^2 \cdot I_{m_{sim}}). \quad (6.21)$$

Pour estimer la distribution *a posteriori* relative à la position des tubes-guides, il est donc possible d'utiliser la vraisemblance approximée définie par l'équation (6.21) ainsi que l'information *a priori* définie par l'équation (6.12).

Obtention des lois *a posteriori*

À présent, considérons l'ensemble des mesures expérimentales $\mathbf{Y}_{n_{exp}}$ réalisées lors des n_{exp} conditions expérimentales. Pour rappel, dans le cadre d'une campagne de mesure, les positions exactes des sondes $\theta \in \mathbb{R}^p$ sont inconnues. La fonction de vraisemblance (6.21) se réécrit ainsi :

$$\mathbf{Y}_{n_{exp}} \mid \mathbf{Y}_{n_{sim}}, \theta \sim N_{n_{exp}}[\hat{\beta}_{EMV} \cdot \theta, \hat{\sigma}_{EMV}^2 I_{n_{exp}}]. \quad (6.22)$$

Dans cette expression, le couple $(\hat{\beta}_{EMV}, \hat{\sigma}_{EMV}^2) \in (\mathbb{R}^{n_{exp} \times p}, \mathbb{R}^{n_{exp}})$ représente l'ensemble des estimations réalisées pour toutes les n_{exp} conditions expérimentales lors des études préliminaires¹².

Cependant, l'ensemble des expressions précédentes a été obtenu dans le cadre hypothétique de mesures directes et sans incertitude des grandeurs physiques d'intérêt \mathbf{Y} . Lors d'une campagne expérimentale, ces mesures notées $\mathbf{Y}_{n_{exp}}$ sont cependant toujours entachées d'une incertitude.

Cette erreur de mesure est notée ϵ_{mes} . On suppose que ces termes d'erreur sont indépendants et identiquement distribués selon une loi normale centrée d'écart-type σ_{mes}^2 , de sorte

12. Pour simplifier les notations, le terme $\mathbf{Y}_{n_{sim}}$ fait à présent référence à l'ensemble des simulations réalisées pour les n_{exp} conditions expérimentales. Une notation plus précise serait $[\mathbf{Y}_{n_{sim}, j}]_{j=1}^{n_{exp}}$.

que $\epsilon_{mes} \sim N_{n_{exp}}(0, \sigma_{mes}^2 I_{n_{exp}})$. L'écart-type σ_{mes}^2 est supposé connu et fourni par l'expérimentateur. Il est donc possible de lier la mesure expérimentale au phénomène physique par l'expression suivante :

$$\mathbf{Y}_{n_{exp}} = \mathbf{Y} + \epsilon_{mes}.$$

Ainsi, lors du processus de calibration réalisé sur n_{exp} mesures expérimentales, l'incertitude relative à ces mesures peut être propagée dans l'expression (6.22). On obtient :

$$\mathbf{Y}_{n_{exp}} | \mathbf{Y}_{n_{sim}}, \boldsymbol{\theta} \sim N_{n_{exp}}[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EMV} \cdot \boldsymbol{\theta}, (\hat{\sigma}_{EMV}^2 + \sigma_{mes}^2) I_{n_{exp}}]. \quad (6.23)$$

L'application de la formule de Bayes permet d'en déduire la distribution *a posteriori* suivante pour les paramètres technologiques $\boldsymbol{\theta}$ à calibrer :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{n_{exp}}) \propto \mathcal{L}(\mathbf{Y}_{n_{exp}} | \boldsymbol{\theta}) \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}). \quad (6.24)$$

L'indépendance des ($n_{exp} = 16$) mesures expérimentales, conduit à :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{n_{exp}}) \propto \prod_{i=1}^{n_{exp}} \mathcal{L}(Y_i | \boldsymbol{\theta}) \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}).$$

Finalement, en utilisant une loi *a priori* uniforme bornée présentée dans l'équation (6.12) ainsi que la vraisemblance (6.23), on obtient la distribution *a posteriori* pour la position des sondes. Il s'agit de la loi normale tronquée suivante :

$$\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}_{n_{exp}} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}_{post}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}_{post}}) \times \prod_{i=1}^p \mathbb{U}[\theta_i^{min}, \theta_i^{max}], \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}_{post}} &= (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EMV}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{EMV})^{-1}, \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\theta}_{post}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}_{post}} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{EMV}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Y}_{n_{exp}} \\ \text{et } \boldsymbol{\Sigma} &= (\hat{\sigma}_{EMV}^2 + \sigma_{mes}^2) I_{n_{exp}}. \end{aligned}$$

où $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EMV}$ et $\hat{\sigma}_{EMV}^2$ sont donnés par l'équation (6.10).

6.11 Résultats

Les résultats obtenus avec la calibration bayésienne précédente sont mis en œuvre dans cette section. Pour rappel, le travail d'inversion réalisé a pour but d'estimer la perturbation de la position dans le plan (x, y) noté $(\Delta\hat{x}, \Delta\hat{y})$ de chacune des sondes préalablement identifiées comme sensibles. Nous avons à disposition ($n_{exp} = 16$) cartographies issues d'une campagne d'expériences conduite sur une configuration du cœur où seule la position des tubes-guides a été perturbée.

6.11.1 Mise en œuvre

La mise en œuvre de l'inversion présentée dans ce chapitre est réalisée en trois étapes.

Estimation des sensibilités par méthode neutronique de reprise surfacique

La méthode de neutronique de reprise surfacique appliquée aux sondes de mesure (cf. Section 4.2) est tout d'abord utilisée pour réaliser un nombre important de simulations. Cela permet de construire des bases d'apprentissage importantes. Ces différentes bases d'apprentissage permettent l'estimation de la sensibilité associée à une perturbation de la position des sondes pour chacune des conditions expérimentales du plan d'expériences. Ainsi (7×7) calculs de perturbations¹³ sont réalisés pour les 15 sondes placées dans la moitié du cœur. Elles ont été identifiées comme sensibles, et ce, pour chacune des 16 conditions expérimentales du plan d'expériences. Au total, 11 760 calculs ont été réalisés.

Les bases d'apprentissage construites à l'aide de ces simulations permettent l'estimation des distributions marginales *a posteriori* des paramètres (β, σ^2) pour chacun des 240 modèles linéaires (6.4) par un apprentissage statistique cf. Éq. (6.8) et (6.9). Pour réaliser l'inversion envisagée à partir des mesures expérimentales issues d'un cœur tel que fabriqué, il est néanmoins nécessaire de considérer le groupe de paramètres θ associé à la perturbation appliquée à la position des sondes de mesure comme une variable aléatoire. L'ensemble des variables composant le modèle (6.13) est alors supposé aléatoire.

Réduction des incertitudes de modèle par analyse de sensibilité

Les indices de Sobol associés à ce modèle sont alors calculés analytiquement. Les résultats obtenus confirment la possibilité de négliger l'incertitude sur les variables (β, σ^2) de chacun des 240 modèles linéaires. Ces variables sont alors fixées à la valeur estimée par maximum de vraisemblance.

Calibration et obtention des lois *a posteriori* de θ

La simplification du modèle (6.13) ainsi obtenue permet ensuite de calculer les expressions analytiques associées à la loi *a posteriori* (6.25) du groupe de paramètres technologiques incertains θ . Cette loi est alors calculée pour chacune des sondes de mesures sensibles et pour chacune des conditions expérimentales.

6.11.2 Convergence des calculs

Toutes les estimations des sensibilités (étape 1 ci-dessus) sont issues de calculs Monte-Carlo. Les 11 760 calculs qui ont permis de construire les bases d'apprentissage disposent ainsi d'une incertitude Monte-Carlo moyenne de 0,03 % pour le taux de fission intégré axialement au niveau des sondes. Chacun de ces calculs a nécessité 1 processeur pendant 1 heure et 30 minutes.

De plus, les 16 calculs réalisés pour chacune des conditions expérimentales sur la configuration perturbée ont nécessité 50 processeurs. Ces calculs ont duré en moyenne 49 heures pour obtenir une convergence Monte-Carlo moyenne de 0,05 % pour les taux de fission estimés au niveau des sondes.

13. La Figure 4.3 représente ces ($n_{sim} = 49$) perturbations appliquées à une sonde de mesure pour une condition expérimentale.

6.11.3 Analyse des lois *a posteriori* estimées

Les résultats de l'inversion sont illustrés sur la Figure 6.7 pour la sonde de mesure A2. Les lois *a posteriori* associées à deux inversions bayésiennes différentes des mêmes paramètres incertains sont présentées sur cette figure. L'image de gauche correspond à un tirage de 1000 points de la loi *a posteriori* du groupe de paramètres caractérisant la perturbation appliquée à la sonde de mesure A2. Pour cette inversion, **une loi *a priori* uniforme non bornée** a été utilisée. L'image de droite représente la distribution *a posteriori* de ce même paramètre issu de l'utilisation **d'une loi *a priori* uniforme bornée sur $[-0,15; 0,15]$ mm.**

Pour chacune de ces figures, les points noirs correspondent aux 1000 points échantillonnés suivant la loi *a posteriori* (6.25). Les lignes bleues correspondent aux lignes de niveau de la densité estimée pour cette loi (estimation par méthode à noyau à partir des échantillons simulés). Le curseur rouge visible sur ces deux images correspond à la perturbation appliquée à la position de la sonde perturbée. Ce curseur représente la perturbation « théorique » à retrouver. Par exemple, comme visible sur la Figure 6.7, la translation $(\Delta x, \Delta y)$ appliquée à la sonde de mesure A2 sur le cœur tel que fabriqué est de $(-0,099; 0,006)$ mm. La différence d'échelle entre ces deux images peut être appréciée par les deux carrés rouges délimitant le domaine $[-0,15; 0,15]^2$ mm.

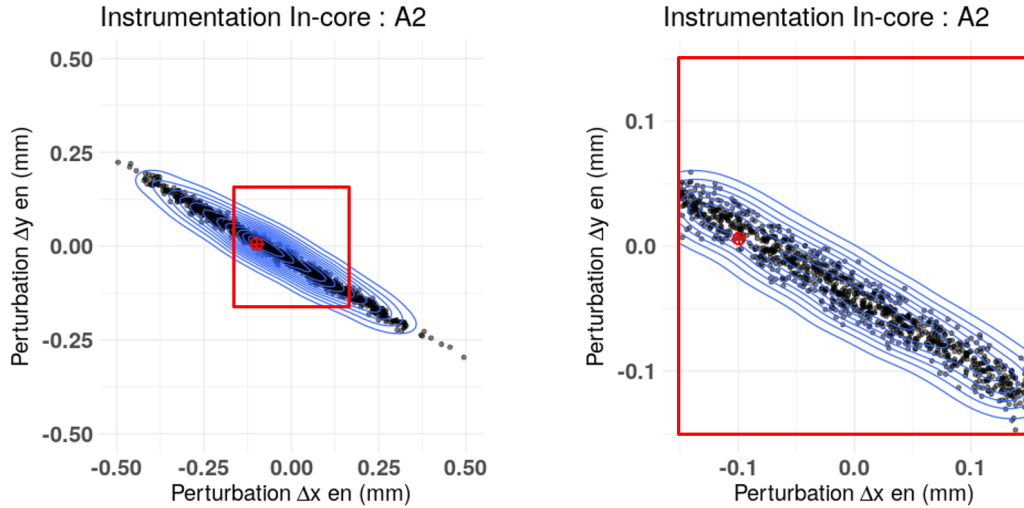


FIGURE 6.7 – Distribution *a posteriori* associée à la perturbation appliquée à la sonde de mesure A2. (Gauche) Utilisation d'une loi *a priori* uniforme non bornée. (Droite) Loi *a priori* uniforme bornée sur $[-0,15; 0,15]$ mm.

Observations

À noter que l'ensemble des observations décrites dans ce qui suit pour la sonde A2 est aussi valable pour les autres sondes calibrées.

Le premier constat observable sur cette figure est que le problème d'inversion n'est pas identifiable lors de l'utilisation d'une loi *a priori* uniforme. À l'aide des lignes de niveau de densité, on observe qu'une crête d'équidensité est obtenue pour le maximum *a posteriori* (MAP) associé à ces paramètres technologiques. Il n'y a donc pas unicité du MAP (infinité de couples $(\Delta x, \Delta y)$ de vraisemblance maximale).

Rappelons que l'estimateur du maximum *a posteriori* $\hat{\theta}_{MAP}$ d'un paramètre inconnu θ , à

partir d'un ensemble d'observations Y , correspond au mode de la distribution *a posteriori* estimée pour θ . Si l'on note $\mathcal{L}(\theta | Y)$ cette distribution *a posteriori*, $\hat{\theta}_{MAP}$ est ainsi défini par : $\hat{\theta}_{MAP} = \operatorname{argmax}_{\theta} \mathcal{L}(\theta | Y)$.

La seconde observation est relative à l'utilisation d'un prior informatif. On constate que l'ajout de la connaissance issue de mesures métrologiques par l'utilisation d'un *a priori* uniforme borné a un effet significatif sur la loi *a posteriori*. Utiliser cette connaissance permet de diminuer la plage de variation de la distribution *a posteriori*. Pour la sonde A2, elle permet notamment de diminuer cette plage d'un facteur trois en comparaison d'une inversion utilisant un prior non informatif.

Finalement, même s'il n'est pas possible d'identifier un unique MAP pour $(\Delta x, \Delta y)$ lors de ce problème d'inversion en utilisant des lois *a priori* uniformes, on constate qu'il est possible de réduire l'espace de recherche associé à la position exacte de la sonde de mesure étudiée. En effet, l'espace de recherche est réduit à une ligne d'équidensité. Ce phénomène s'explique par les sensibilités ($\hat{\beta}$) issues des bases d'apprentissage et sur lesquelles s'appuie la calibration. Les cartes de sensibilité construites pour une sonde de mesure sont en effet « colinéaires », et ce, pour les 16 conditions expérimentales du plan d'expériences. Ceci empêche l'identifiabilité du problème d'inversion.

6.12 Synthèse partie 2

Dans cette seconde partie, nous avons montré qu'il est possible de réaliser une calibration de paramètres technologiques relatifs à la géométrie du réacteur. Pour ce faire, une approximation « plug-in » du modèle utilisé lors de la calibration a été réalisée. Pour justifier cette approximation, une analyse de sensibilité globale a été menée afin de quantifier l'effet de l'approximation introduite, et ainsi réaliser la calibration à partir d'un modèle simplifié. En effet, du fait de l'utilisation de ce modèle simplifié, il a été possible de mener cette calibration directement à partir des expressions analytiques *a posteriori* des paramètres incertains.

Chapitre 7

Calibration jointe des paramètres technologiques incertains

Sommaire

7.1	Modèle et configuration étudiée	129
7.1.1	Modèle linéaire	129
7.1.2	Simulation d'une campagne expérimentale	130
7.2	Calibration des paramètres technologiques incertains	131
7.2.1	Distributions <i>a priori</i>	131
7.2.2	Distribution <i>a posteriori</i> des paramètres géométriques	132
7.2.3	Calibration des paramètres relatifs au bilan de matière	134
7.3	Prédictions du simulateur sur le réacteur calibré	137
7.3.1	Définition du cœur calibré	137
7.3.2	Performances sur les écarts calculs/mesures observés sur les sondes	139
7.3.3	Performances sur les écarts calculs/mesures observés « hypothéti- quement » sur les éléments combustibles	140
7.3.4	Performances sur les écarts calculs/mesures observés sur les fac- teurs de puissance issus de la transposition des mesures des sondes	141
7.4	Synthèse	143

Dans ce dernier chapitre du document, nous présentons le travail d'inversion réalisé sur une configuration où trois groupes de paramètres technologiques indépendants ont été simultanément perturbés.

Ces groupes de paramètres sont ceux étudiés lors des chapitres précédents. Il s'agit pour chaque élément combustible, de la densité des joues borées, de la densité du modérateur intérieur ainsi que de la position dans le plan xy de chaque sonde de mesure. La configuration étudiée est ainsi composée de 162 paramètres technologiques incertains. Sur ces 162 paramètres, 64 sont associés au bilan de matière des assemblages composant le cœur et $98 = \underbrace{49}_{IIC} \times \underbrace{2}_{(x,y)}$ sont associés à des paramètres géométriques.

L'analyse de sensibilité présentée dans la Section 4.2.3 a permis d'identifier que les mesures réalisées sur 21 des 49 sondes ne sont pas affectées par une perturbation de leur position. Ainsi, ces paramètres, dont les indices de sensibilité sont négligeables, sont fixés à leur valeur

nominale pour diminuer la dimension du problème de calibration. Il en résulte que le travail de calibration porte sur $120 = 162 - (\underbrace{21}_{IIC} \times \underbrace{2}_{(x,y)})$ paramètres incertains.

Pour réaliser le travail d'inversion associé à cette nouvelle configuration, les méthodes de neutronique de reprise surfacique et des échantillons corrélés respectivement présentées en Sections 4.2 et 4.5 sont utilisées. Ces méthodes permettent d'estimer les effets de perturbation d'un paramètre technologique sur les grandeurs mesurées au niveau des sondes. Pour faciliter la mise en œuvre de ces méthodes, les hypothèses simplificatrices présentées dans les Sections 4.5.4 et 4.5.5 ont été utilisées. Ainsi, les sensibilités utilisées lors du processus de calibration ne proviennent pas directement du simulateur global, mais de modèles physiques simplifiés.

Le modèle linéaire bayésien présenté dans le Chapitre 3 est ensuite utilisé pour réaliser l'inversion à l'aide des sensibilités préalablement estimées. Pour faciliter la mise en œuvre de cette inversion, des algorithmes du type MCMC sont utilisés. L'inversion est ainsi réalisée sur un modèle linéaire additif, somme sans interaction des modèles (6.2) et (6.3). L'inversion présentée est donc un prolongement du travail de calibration présenté dans le Chapitre 6 sur une configuration disposant d'un nombre plus important de groupes et de paramètres incertains.

À la suite de cette calibration, le jumeau numérique du cœur étudié est « corrigé » (cf. Figure 1.1, Chapitre 1). Les paramètres incertains de ce modèle sont fixés à leur maximum *a posteriori* obtenu après calibration à partir des mesures expérimentales¹. Pour s'assurer de la qualité de la calibration obtenue, les mesures expérimentales réalisées au niveau des sondes sont alors comparées aux prédictions réalisées sur ce modèle « calibré ».

Finalement, les mesures expérimentales réalisées au niveau des sondes sont transposées vers les éléments combustibles à l'aide de la méthode présentée dans le Chapitre 5. Cette transposition permet d'extrapoler les valeurs expérimentales des facteurs de puissance. Ils peuvent alors être comparés aux facteurs de puissance prédits à l'aide du modèle calibré. L'apport de la calibration sur la réduction de l'écart entre calcul et expérience estimé au niveau des éléments combustibles peut ainsi être quantifié.

7.1 Modèle et configuration étudiée

7.1.1 Modèle linéaire

Pour réaliser le travail d'inversion, nous décrivons le modèle linéaire utilisé. Ce modèle découle d'une addition sans interaction des équations (6.2) et (6.3).

Il permet de prédire les $784 = \underbrace{16}_{cond.exp} \times \underbrace{49}_{IIC}$ sensibilités observées lors de la campagne de mesures au niveau des sondes notées $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{784 \times 1}$. Il utilise les sensibilités associées aux perturbations des paramètres technologiques calculées au préalable et notées $\beta \in \mathbb{R}^{784 \times 120}$ comme grandeurs explicatives. Les paramètres de ce modèle sont les paramètres technologiques incertains notés :

$$\Theta^T = (\underbrace{\Theta_{bore}^T}_{1 \times 32}, \underbrace{\Theta_{mod.int}^T}_{1 \times 32}, \underbrace{\Theta_{IIC}^T}_{1 \times 56}) \in \mathbb{R}^{1,120}.$$

1. Rappelons qu'une « campagne expérimentale » est ici une campagne de simulations numériques sur le cœur perturbé.

On peut ainsi écrire le modèle linéaire sous la forme suivante :

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (7.1)$$

avec

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{bore}^1 & \mathbf{S}_{Modint}^1 & \mathbf{S}_{IIC}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}_{bore}^{16} & \mathbf{S}_{Modint}^{16} & \mathbf{S}_{IIC}^{16} \end{pmatrix},$$

où

$$\mathbf{S}_{bore}^i = \begin{pmatrix} S_{ECBC12, IIC_{A1}}^i & \cdots & S_{ECFG56, IIC_{A1}}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{ECBC12, IIC_{G7}}^i & \cdots & S_{ECFG56, IIC_{G7}}^i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{49 \times 32}$$

et

$$\mathbf{S}_{IIC}^i = \begin{pmatrix} S_{x, IIC_{A1}}^i, S_{y, IIC_{A1}}^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & S_{x, IIC_{G7}}^i, S_{y, IIC_{G7}}^i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{49 \times 56}.$$

L'indice $i \in \{1, \dots, 16\}$ fait référence à l'une des 16 conditions expérimentales. Le terme d'erreur noté $\boldsymbol{\epsilon}$ est supposé suivre une loi normale multivariée de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance $\sigma^2 I_n$ avec $n = 784$ et σ^2 inconnu.

Dans ces expressions :

- $S_{ECBC12, IIC_{A1}}^i$ désigne la sensibilité estimée pour la i -ème condition expérimentale sur la sonde A1, suite à la perturbation de l'élément combustible BC12;
- $S_{x, IIC_{A1}}^i$ est la sensibilité associée à une perturbation de la position du tube-guide A1, selon l'axe x et pour la i -ème condition expérimentale.

Les matrices de sensibilité \mathbf{S}_{IIC}^i relatives à une perturbation de la position des sondes de mesure sont composées uniquement de zéro, à l'exception des termes diagonaux (S_x, S_y). Les sensibilités associées aux modérateurs intérieurs \mathbf{S}_{Modint}^i ont la même structure que les sensibilités associées au bore.

7.1.2 Simulation d'une campagne expérimentale

Une campagne « expérimentale » est simulée pour mettre à l'épreuve le modèle linéaire proposé (7.1). Cette campagne consiste en une série de simulations réalisées pour chacune des 16 conditions expérimentales du plan d'expériences (cf. tableau A.1) sur une configuration perturbée du cœur. **L'objectif est d'estimer le jeu de perturbations appliquées au cœur « expérimental » à partir d'une série de mesures.**

Jeu de perturbations appliquées au cœur nominal

Pour ce faire, une configuration d'un cœur expérimental (et de l'instrumentation) est proposée. Un jeu de perturbations est ainsi appliqué à 162 paramètres technologiques.

- Les perturbations appliquées à la position des sondes sont identiques à celles discutées dans la Section 6.7 (seul ce groupe de paramètres technologiques géométrique était alors étudié).

- Les perturbations appliquées à la densité des joues borées et des modérateurs intérieurs sont identiques à celles de la Section 6.5. Durant cette précédente étude, seuls les paramètres relatifs au bilan de matière du cœur étaient perturbés.

L'objectif de l'utilisation de ces mêmes perturbations est de faciliter la compréhension des phénomènes pouvant apparaître quand la dimension du problème de calibration augmente mais aussi quand les paramètres géométriques et ceux associés au bilan de matière du cœur sont traités simultanément.

Convergences des simulations

Après la définition du cœur expérimental (c'est-à-dire du jeu de perturbations appliquées au cœur nominal), une campagne de mesures « fictive » pour les 16 conditions expérimentales du plan d'expériences a été réalisée (cf. Tableau A.1). Ces mesures permettent de construire le vecteur \mathbf{Y} du modèle (7.1). Ces calculs ont nécessité en moyenne 51 heures sur 30 processeurs. Ils ont fourni des estimations des grandeurs d'intérêt au niveau des sondes disposant d'une incertitude Monte-Carlo moyenne de 0,07 %.

Pour réaliser la calibration, il est au préalable nécessaire d'estimer les sensibilités (β) associées aux perturbations des paramètres technologiques. Ces grandeurs ont été estimées à l'aide de calculs Monte-Carlo. Les incertitudes Monte-Carlo associées au bore, au modérateur intérieur et aux paramètres géométriques ont été présentées respectivement en Sections 6.4.5, 6.4.6 et 6.11.2.

Il est finalement nécessaire d'utiliser les grandeurs d'intérêt estimées sur la configuration nominale pour réaliser la calibration. Les incertitudes Monte-Carlo associées à ces calculs ont été présentées dans la Section 6.4.5. Ces calculs ont également permis d'estimer les matrices de fission qui seront utilisées dans la Section 7.3.4.

7.2 Calibration des paramètres technologiques incertains

Les termes \mathbf{Y} et β de l'équation (7.1) sont à présent définis. Il est ainsi possible d'estimer l'ensemble des paramètres du vecteur Θ . Dans cette section, nous présentons les résultats de deux études (identifiées 1 et 2, cf. Tableau 7.1).

7.2.1 Distributions *a priori*

Pour ces deux cas, une même connaissance *a priori* est utilisée pour caractériser les connaissances métrologiques associées au **bilan de matière**. Ces *a priori* permettent de définir la plage de variation des paramètres technologiques incertains. Ainsi, comme pour les études précédentes, des **lois *a priori* uniformes** sont utilisées :

- lois sur $[-4\%; 4\%]$ pour les joues borées ;
- lois sur $[-1\%; 1\%]$ pour les modérateurs intérieurs.

Pour traiter la connaissance *a priori* relative à la **position des sondes de mesure** dans le plan xy , deux lois *a priori* différentes sont considérées.

- D'une part, une inversion bayésienne a été réalisée en utilisant des **lois uniformes sur l'intervalle $\pm 0,15$ mm**. Ces bornes sont définies à partir des mesures métrologiques

réalisées sur le cœur tel que fabriqué. Ces lois *a priori* sont identiques à celles utilisées lors de l'étude présentée en Section 6.11.3.

- D'autre part, lors d'une seconde calibration, des lois *a priori* **gaussiennes de moyenne nulle et d'écart-type 0,05 mm** ont été choisies. L'incertitude associée à ces paramètres est liée à une erreur de fabrication. Il est ainsi raisonnable de décrire ces paramètres et leur incertitude par des lois normales centrées sur les valeurs nominales. Comme la configuration nominale n'est pas perturbée, la moyenne de ces lois *a priori* est nulle. D'autre part, l'écart-type σ de ces lois normales est défini de telle sorte que $3\sigma=0,15$ mm. Ainsi, 99,7 % des points échantillonnés avec ces lois *a priori* appartiennent aux plages de variation définies par les mesures métrologiques.

Paramètres calibrés	<i>A priori</i>	Étude	Nombre de paramètres
Joues borées	U[-4, 4] %	1 & 2	32
Modérateur intérieur	U[-1, 1] %	1 & 2	32
Position des sondes dans le plan xy	U[-0,15 ; 0,15] mm	1	2×28
	N[0 ; 0,05] mm	2	2×28

TABLEAU 7.1 – Lois *a priori* utilisées pour réaliser l'inversion bayésienne pour les deux calibrations notées « Étude 1 et 2 ».

7.2.2 Distribution *a posteriori* des paramètres géométriques

Lors de l'inversion bayésienne utilisant des algorithmes du type MCMC, la loi jointe *a posteriori* associée aux groupes de variables à calibrer est échantillonnée simultanément pour l'ensemble des paramètres du groupe. Nous présentons d'abord les résultats associés aux paramètres géométriques.

Présentation des résultats

Les distributions marginales *a posteriori* relatives aux perturbations ($Pert_x, Pert_y$) appliquées aux 28 sondes de mesure identifiées comme sensibles sont illustrées sur la Figure 7.1. Ces distributions sont présentées pour les deux inversions bayésiennes utilisant les lois *a priori* définies au Tableau 7.1 (Études 1 et 2). La figure de gauche correspond à l'étude 1, la figure de droite à l'étude 2.

Chaque distribution est obtenue à partir d'un échantillon de 10 000 points de la distribution marginale *a posteriori*² associée à la perturbation appliquée à une sonde dans le plan xy . Ces figures représentent les distributions *a posteriori* associées aux couples de paramètres incertains $\Theta_{IIC} = (Pert_{x,IIC}, Pert_{y,IIC})$ relatifs aux perturbations appliquées aux positions des sondes.

À noter que pour éviter des problèmes de superposition de ces 10 000 points et pour faciliter la visualisation, une estimation non paramétrique (estimateur à noyaux) de chaque densité à 2D est utilisée afin de tracer les lignes de niveau de la densité *a posteriori*. De plus, l'échelle est normalisée de telle sorte que le niveau de densité maximale corresponde à la valeur 1.

2. Vingt chaînes de 1000 itérations ayant un temps de chauffe de 500 itérations ont été utilisées par l'algorithme MCMC pour échantillonner la loi jointe *a posteriori*.

7.2. Calibration des paramètres technologiques incertains

Enfin, pour chacune de ces distributions marginales, un curseur rouge indique les perturbations « vraies » appliquées aux sondes de mesure. Par exemple, la perturbation ($Pert_{x,A2}$, $Pert_{y,A2}$) appliquée à la sonde de mesure A2 est de $(-0,099; 0,006)$ mm dans le plan xy . Les curseurs noirs visibles sur la figure de droite correspondent quant à eux aux maxima *a posteriori* des distributions marginales issues de l'utilisation d'une loi *a priori* normale pour les paramètres géométriques. Ces valeurs seront utilisées dans la Section 7.3 comme valeur calibrée.

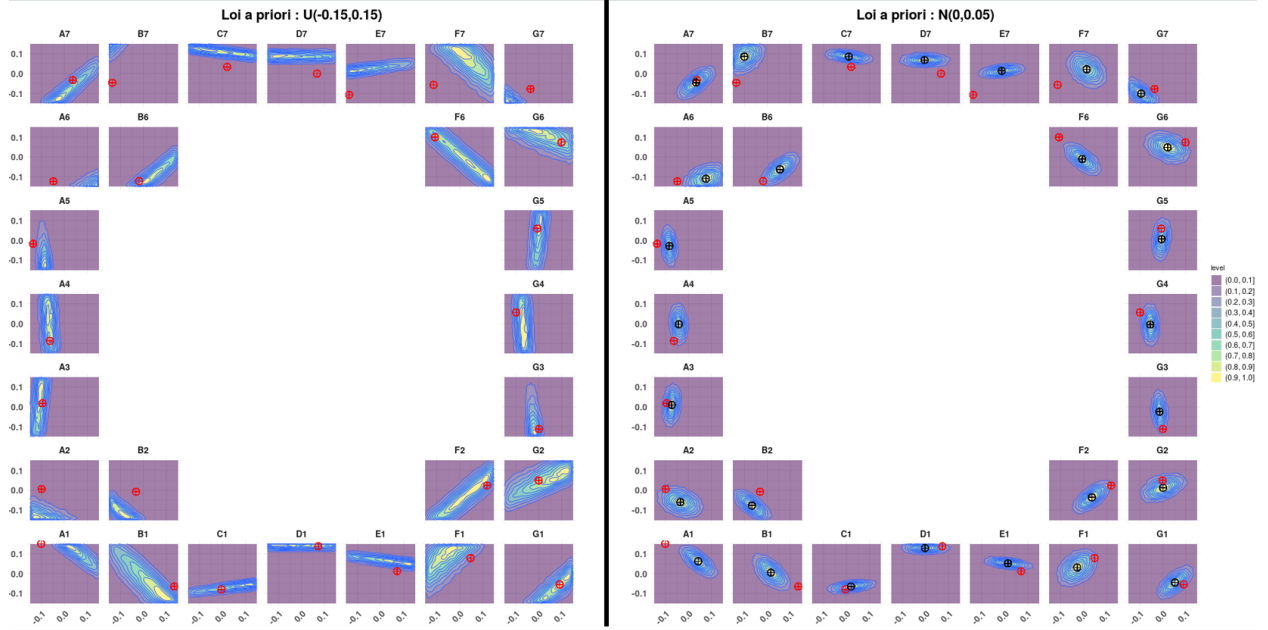


FIGURE 7.1 – Distributions *a posteriori* des perturbations appliquées à la position des sondes de mesure. (Gauche) Étude 1 : *a priori* uniforme bornée. (Droite) Étude 2 : *a priori* gaussien. Les curseurs rouges correspondent à la position à retrouver et les curseurs noirs aux valeurs considérées comme calibrées dans la Section 7.3.

Remarque : la distribution *a posteriori* associée à la sonde A2 visible sur la partie gauche de la Figure 7.1 correspond à la distribution *a posteriori* associée à cette même sonde de mesure visible sur l'image droite de la Figure 6.7. Les inversions ont été réalisées en utilisant une même connaissance *a priori* (loi uniforme bornée). Cependant, ces études ont été conduites sur des configurations du cœur différentes. En effet, seuls les paramètres géométriques ont été perturbés dans l'étude présentée en Section 6.7 et l'inversion y a été réalisée directement à partir des expressions analytiques des distributions *a posteriori*. Pour l'inversion présentée ici, des algorithmes de type MCMC ont cependant été utilisés pour estimer la loi jointe *a posteriori*.

Observations

Les observations relatives aux distributions présentées sur la partie gauche de la Figure 7.1 sont identiques à celles présentées dans la Section 6.11.3. En effet, une même connaissance *a priori* a été utilisée pour réaliser la calibration de ces paramètres géométriques incertains. L'utilisation de ces lois *a priori* conduit ainsi à des distributions *a posteriori* similaires, et ce malgré les différences entre les configurations des cœurs étudiées. Par exemple pour cette nouvelle étude utilisant également comme connaissance *a priori* des lois uniformes bornées, on observe à nouveau qu'il n'est pas possible d'identifier un unique maximum *a posteriori*.

Pour certaines sondes, les positions attendues (en rouge) ne sont pas compatibles avec la région de crédibilité. C'est par exemple le cas pour la sonde A2 lors de l'étude 1 (image gauche de la Figure 7.1). Les niveaux de haute densité associés à ce paramètre ne sont pas en accord avec la perturbation appliquée. Ce défaut de calibration n'apparaissait pas lors de l'inversion utilisant la même connaissance *a priori* présentée sur l'image droite de la Figure 6.7. Des défauts de calibration similaires sont également visibles pour la sonde B2 et pour celles placées en périphérie « haute » du cœur, telles que les sondes A6, B7, D7, E7, F7, G7, ... **L'apparition de ces défauts est probablement due à l'augmentation de la dimension du problème de calibration, rendant l'inversion plus complexe.**

On observe de plus pour l'étude 2 (partie droite de la Figure 7.1), que **l'utilisation d'une loi *a priori* normale permet d'obtenir un unique maximum *a posteriori*.** Ce changement de loi, cohérent avec les connaissances métrologiques, a permis d'obtenir des maxima *a posteriori* associés aux paramètres incertains calibrés. Des écarts sont néanmoins observés entre ces MAP (curseur noir) et les perturbations appliquées (curseur rouge) pour une majorité des sondes de mesure.

Ces écarts ont cependant peu d'influence sur les prédictions réalisées à l'aide du modèle (7.1). En effet, du fait des sensibilités associées à une perturbation de la position des sondes, nous avons observé (cf. Figure 4.3) que deux perturbations différentes peuvent avoir le même effet sur la sensibilité obtenue³. Ces écarts ont un effet significatif sur les prédictions réalisées à l'aide du modèle (7.1), seulement si la perturbation appliquée ne se situe pas dans le prolongement des lignes « d'équisensibilité » associées au MAP du paramètre technologique calibré.

C'est par exemple le cas pour les sondes E7 et F7 lors de l'étude 2. En effet, les lignes d'équisensibilité sont colinéaires aux lignes bleues « d'équidensité » visibles sur la Figure 7.1. On constate ainsi que les perturbations appliquées à ces deux sondes ne se situent pas dans le prolongement de ces lignes. À l'inverse, les défauts de calibration associés aux sondes D1, F2, G3 et F6 ne sont pas significatifs. On observe que les perturbations à retrouver sont dans le prolongement des lignes d'équidensité associées à ces sondes.

On peut conclure que **l'utilisation de lois *a priori* normales permet de rendre le problème identifiable** sans engendrer d'erreurs significatives lors de la réalisation de prédictions à l'aide du modèle (7.1).

7.2.3 Calibration des paramètres relatifs au bilan de matière

La Figure 7.2 présente la calibration des paramètres technologiques relatifs au bilan de matière. Rappelons qu'une loi uniforme et une loi normale sont respectivement utilisées comme lois *a priori* pour le bilan de matière du cœur et pour les paramètres géométriques (c.f. étude 2, Tableau 7.1).

La partie haute de la Figure 7.2 présente les résultats de la calibration associée aux joues borées. La partie basse présente ce même travail pour les densités des modérateurs intérieurs.

3. Ce phénomène est à l'origine du problème d'identifiabilité observé lors de l'inversion utilisant des lois *a priori* uniformes.

7.2. Calibration des paramètres technologiques incertains

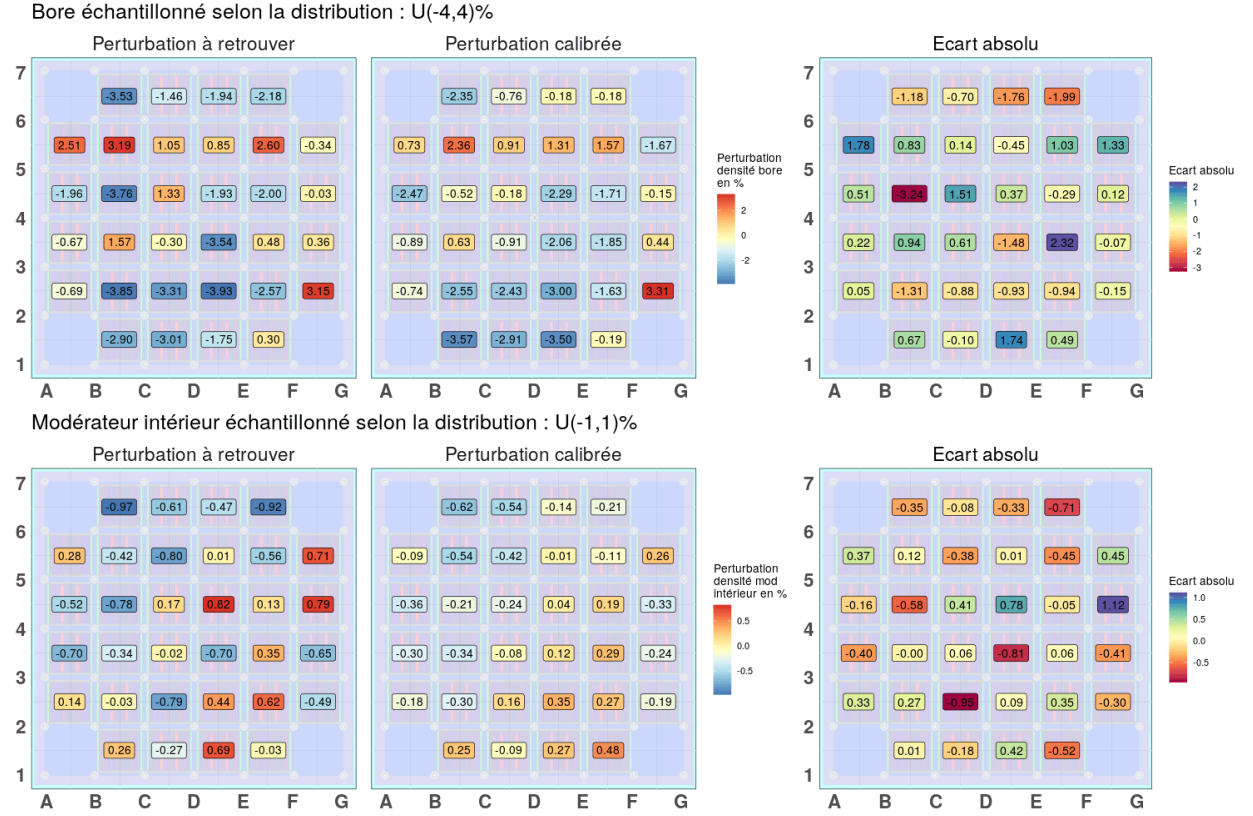


FIGURE 7.2 – Calibration bayésienne des paramètres technologiques relatifs aux joues borées (en haut) et aux modérateurs intérieurs (en bas) à l’aide des grandeurs d’intérêt estimées sur les sondes de mesure. Configuration à trois groupes de paramètres technologiques perturbés simultanément.

Analyse qualitative

On pourra vérifier sur la Figure 6.4 que les perturbations appliquées aux paramètres associés au bilan de matière lors de l’étude présentée en Section 6.5 sont identiques à celles appliquées à cette nouvelle configuration.

Du fait de l’augmentation de la dimension du problème de calibration, on observe une détérioration de la qualité de l’inversion réalisée. Les écarts entre les perturbations appliquées et les MAP des paramètres calibrés sont plus importants sur cette nouvelle configuration en comparaison de ceux de l’étude présentée en Section 6.5. Comme visible sur la Figure 7.3 représentant l’ensemble des distributions marginales *a posteriori* associées à ces paramètres, on observe de plus que les régions de crédibilité sont plus larges en comparaison à la Figure 6.5.

Analyse quantitative

Les écarts absolus moyens pour les deux inversions bayésiennes réalisées dans cette section sont présentés dans le Tableau 7.2. Rappelons que ces inversions diffèrent seulement du fait des lois *a priori* utilisées pour caractériser l’incertitude relative à la position des sondes de mesure.

Tout d’abord, l’utilisation d’une loi *a priori* normale plutôt qu’une loi uniforme

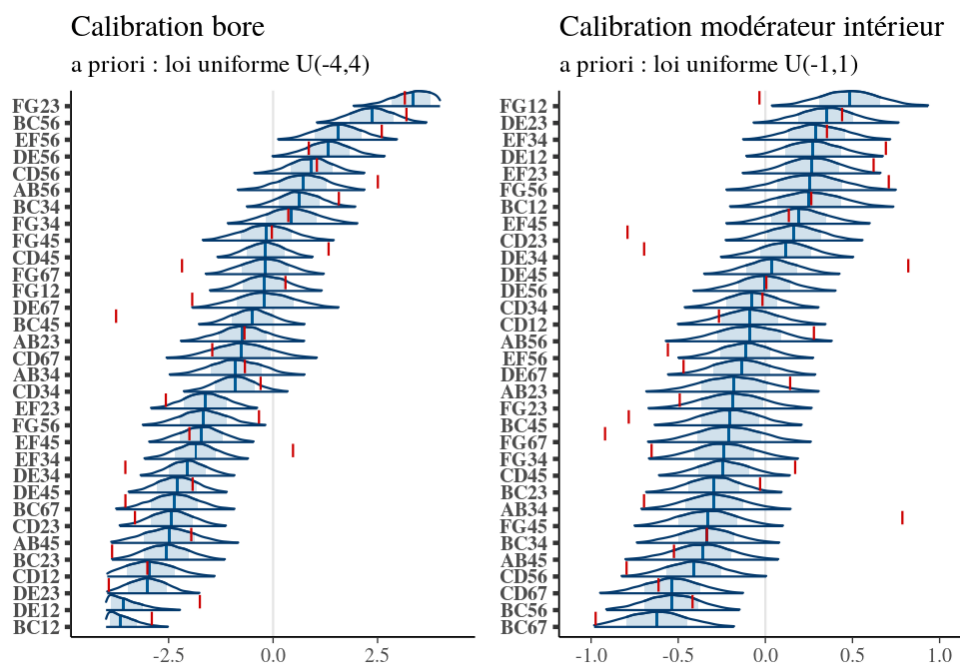


FIGURE 7.3 – Distribution *a posteriori* des paramètres technologiques incertains. Configuration à trois groupes de paramètres technologiques perturbés. (Gauche) Densité des joues borées. (Droite) Densité des modérateurs.

Étude	<i>A priori</i> pour la position des sondes	Paramètres calibrés	Moyenne référence - MAP	Écart Type
1	U(-0,15 ; 0,15)	Joues borées	1,03	0,81
		Mod. intérieur	0,37	0,28
2	$\mathcal{N}(0 ; 0,05)$	Joues borées	0,94	0,75
		Mod. intérieur	0,36	0,28

TABEAU 7.2 – Résultats des calibrations bayésiennes jointes des paramètres associés au bilan de matière du cœur. Configuration à trois groupes de paramètres perturbés simultanément.

pour la position des sondes améliore la qualité de la calibration réalisée pour les paramètres associés aux joues borées. Plus précisément, une diminution de 9 % de l'écart absolu entre les perturbations appliquées et les MAP est observée. Le choix de la loi *a priori* pour la position des sondes n'a cependant pas d'effet sur les performances des paramètres associés à la densité des modérateurs intérieurs.

De plus, la comparaison des Figures 6.4 et 7.2 **montre une détérioration de la qualité de la calibration réalisée sur la configuration à trois groupes de paramètres perturbés simultanément** (pour les paramètres technologiques relatifs au bilan de matière du cœur). Pour étayer cette constatation, nous avons réalisé une comparaison des écarts absolus moyens issus de ces deux études, cf. Tableau 7.2 (étude 2) et Tableau 6.4 (lignes relatives à la calibration réalisée avec l'Instrumentation In-Core). Ainsi, des augmentations de l'écart absolu moyen de 15 % et 13 % sont respectivement observées pour les joues borées et la densité des modérateurs intérieurs. Ces augmentations peuvent s'expliquer par l'augmenta-

tion de la dimension du problème associée à cette nouvelle configuration conduisant à une calibration moins précise.

Finalement, concernant les écarts absolus maximum observés pour les joues borées, les éléments combustibles disposant des plus grands écarts sont les éléments BC45, EF34. Ce constat est identique lors de l'analyse de la Figure 6.4. Si l'on considère uniquement l'élément combustible le moins bien reconstruit, c'est-à-dire l'élément combustible BC45, on note une augmentation de l'écart absolu de 31 % entre ces deux calibrations. Pour la densité des modérateurs intérieurs, l'élément combustible le moins bien reconstruit est l'élément FG45, pour lequel l'écart augmente de 37 %.

La détérioration des résultats obtenus pour la calibration jointe reste néanmoins à nuancer face à la dimension du problème d'inversion. Rappelons que **120 paramètres technologiques** sont calibrés avec 784 mesures expérimentales, provenant de 16 conditions expérimentales.

Par ailleurs, il convient d'évaluer l'impact de ces résultats sur les écarts entre mesures « expérimentales » et les prédictions ayant été réalisées à l'aide du simulateur et du jumeau numérique calibré. Cette quantification n'est réalisée que pour les maxima *a posteriori* de la loi jointe des paramètres technologiques incertains. En effet, du fait des temps de calcul du simulateur Monte-Carlo utilisé, il n'est pas possible d'étudier les configurations pour l'ensemble de la loi jointe *a posteriori* associée à ces paramètres.

7.3 Prédiction du simulateur sur le réacteur calibré

Dans cette dernière partie, nous présentons l'effet de la correction des paramètres technologiques incertains du cœur sur les grandeurs d'intérêt prédites à l'aide du simulateur. Pour cela, la distribution jointe *a posteriori* associée à la calibration présentée dans la Section 7.2 est utilisée. Pour rappel, elle est obtenue avec une loi *a priori* normale pour la position des sondes et une loi *a priori* uniforme pour les autres paramètres (cf. Étude 2, Tableau 7.1). Comme illustré précédemment, l'utilisation de ces lois *a priori* permet de rendre le problème de calibration identifiable et d'obtenir un unique MAP pour ces différents paramètres.

7.3.1 Définition du cœur calibré

Les MAP sont utilisés pour définir le cœur calibré. Les paramètres technologiques incertains du jumeau numérique ont pour cela été fixés aux valeurs des MAP. Cette nouvelle définition du cœur, dite « calibrée », est alors utilisée dans le code TRIPOLI-4® pour prédire chacune des mesures expérimentales du plan d'expériences.

Convergence des simulations

Ainsi, 16 nouveaux calculs ont été réalisés pour cette configuration calibrée. Ces calculs ont nécessité en moyenne 30 processeurs pendant 57 heures. Ils ont fourni des estimations des taux de fission mesurés au niveau de l'instrumentation in-core disposant d'une incertitude Monte-Carlo de 0,07 %.

Démarche pour l'analyse des écarts calculs/expériences

À l'aide de ces nouvelles estimations obtenues sur la configuration calibrée, nous avons réalisé une quantification des effets de la calibration sur les écarts calculs/expériences.

Tout d'abord, ces effets ont été quantifiés sur les mesures réalisées à l'aide de l'instrumentation in-core. Rappelons que la calibration menée à l'aide de ces mesures est véritablement réalisable sur un cœur en exploitation.

Ensuite, les effets de la calibration ont été quantifiés pour une campagne d'essais hypothétique, pour laquelle les facteurs de puissance expérimentaux seraient mesurables⁴. Ces grandeurs expérimentales estimées au niveau des éléments combustibles ont alors été comparées aux prédictions équivalentes réalisées sur le jumeau numérique de l'expérience.

Finalement, cette quantification a été réalisée dans un cadre représentatif d'une campagne de mesures conduite sur un cœur réellement fabriqué. Dans ce cadre, les facteurs de puissance expérimentaux ne sont pas directement à disposition. Seules les mesures expérimentales au niveau de l'instrumentation in-core sont disponibles. Il est ainsi nécessaire d'utiliser la méthode de transposition présentée dans le Chapitre 5 pour transposer ces mesures expérimentales réalisées sur les sondes vers les éléments combustibles.

À la suite de cette transposition, les facteurs de puissance expérimentaux extrapolés sont comparés aux facteurs de puissance prédits par le jumeau numérique nominal. Cette comparaison permet ainsi de quantifier l'effet de la calibration sur les écarts observés entre calculs et expériences avant et après calibration, pour une grandeur d'intérêt utilisée lors de la validation expérimentale de l'OCS.

Critères d'évaluation de la qualité des prédictions

Pour quantifier les performances de la calibration sur les écarts calculs/expériences, un ensemble d'observables est tout d'abord introduit. Nous définissons d'une part **l'écart relatif avant calibration**. Il correspond à l'écart entre la mesure expérimentale sur le cœur tel que fabriqué (notée E) et la grandeur prédite sur la configuration nominale (notée C_{nom}) :

$$\text{Écart relatif avant calibration} = \frac{C_{nom} - E}{E}. \quad (7.2)$$

D'autre part, nous définissons **l'écart relatif après calibration**. Il correspond à l'écart entre la mesure expérimentale et la grandeur prédite sur la configuration calibrée (notée C_{calib}) :

$$\text{Écart relatif après calibration} = \frac{C_{calib} - E}{E}. \quad (7.3)$$

Finalement, le rapport des sommes des valeurs absolues des écarts relatifs avant et après calibration est utilisé pour quantifier les performances de la calibration. Ce rapport est nommé « **facteur d'amélioration** ». Il porte sur l'ensemble des N_{obs} grandeurs observées lors d'une condition expérimentale :

$$\text{Facteur d'amélioration} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{obs}} \left| \frac{C_{nom,i} - E_i}{E_i} \right|}{\sum_{j=1}^{N_{obs}} \left| \frac{C_{calib,j} - E_j}{E_j} \right|}. \quad (7.4)$$

4. Pour rappel, la campagne de mesures « expérimentales » est réalisée sur un objet numérique. De ce fait, ces grandeurs sont à disposition, ce qui n'est pas le cas lors de la « réelle » campagne de mesures.

7.3.2 Performances sur les écarts calculs/mesures observés sur les sondes

Nous présentons, sur la Figure 7.4, l'ensemble des écarts relatifs estimés sur les 49 sondes de mesure avant et après calibration pour une unique condition expérimentale. Lors de cette condition expérimentale, les mesures ont été réalisées pour une température de 150 °C, un titre en bore de 695 ppm et une configuration où toutes les lattes sont en position haute.

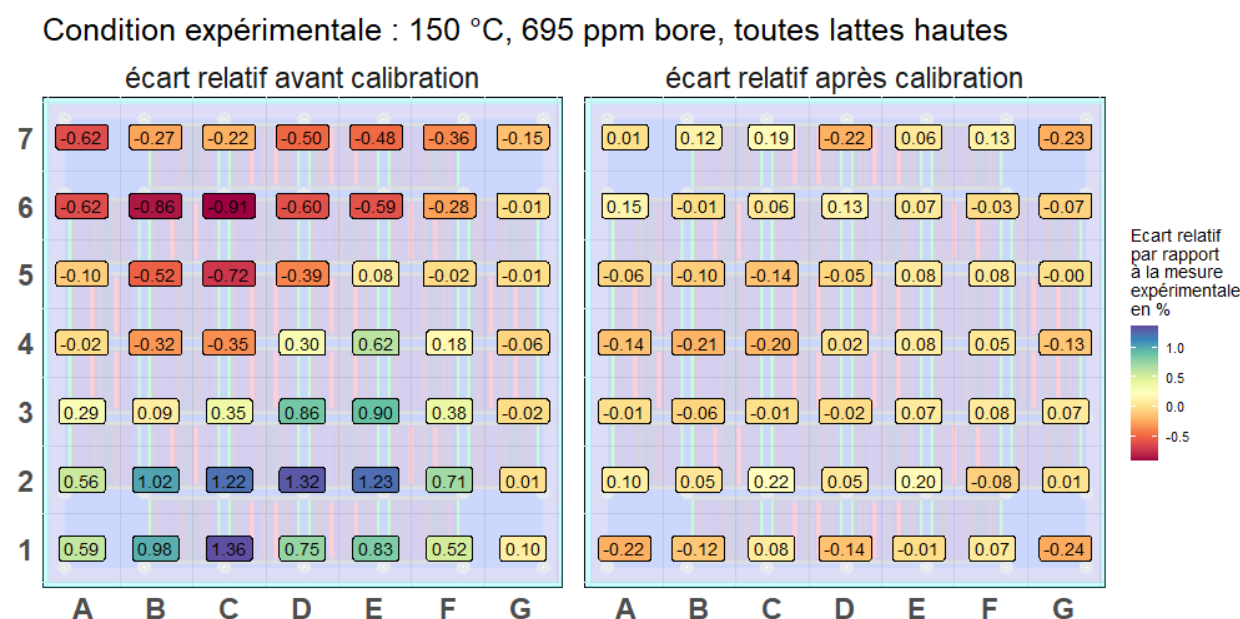


FIGURE 7.4 – Écarts relatifs entre mesures expérimentales et prédictions réalisées sur les sondes. (À gauche) Écart relatif avant calibration. (À droite) Écart relatif après calibration.

On observe sur cette figure que la calibration a permis de diminuer les écarts relatifs de façon significative. Pour cette condition expérimentale, l'écart maximum avant calibration était de 1,36 % au niveau de la sonde C1, contre 0,24 % après calibration pour la sonde G1. La valeur moyenne des écarts relatifs absolus avant calibration était de 0,494 %, contre 0,096 % après calibration. Le facteur d'amélioration relatif à la calibration sur les grandeurs d'intérêt estimées au niveau des sondes de mesure est ainsi de 5,1 pour cette condition expérimentale.

Une diminution des écarts relatifs après calibration pour chacune des 15 autres conditions du plan d'expériences apparaît également, comme le montrent les facteurs d'amélioration donnés par le Tableau 7.3.

Condition expérimentale	Amélioration	Condition expérimentale	Amélioration	Condition expérimentale	Amélioration	Condition expérimentale	Amélioration
100 0 184	11,9	150 0 144	7,8	200 0 96	8,0	250 0 65	6,2
100 120 129	8,0	150 120 96	8,7	200 120 71	7,8	250 120 45	7,5
100 400 59	7,0	150 400 46	7,8	200 400 32	6,6	250 400 7	6,1
100 768 TLH	5,0	150 695 TLH	5,1	200 580 TLH	5,5	250 411 TLH	5,2

TABLEAU 7.3 – Facteurs d'amélioration estimés pour les sondes pour chacune des conditions expérimentales.

Ainsi, le facteur d'amélioration moyen des différentes conditions expérimentales associé à cette campagne de mesures est de 7,1. La construction de la configuration « calibrée »

permet, en moyenne de réduire les valeurs absolues des écarts relatifs entre calculs et expériences d'un facteur 7,1 pour les mesures réalisées à l'aide de l'Instrumentation In-Core, en comparaison des prédictions réalisées sur la configuration nominale.

7.3.3 Performances sur les écarts calculs/mesures observés « hypothétiquement » sur les éléments combustibles

L'analyse précédente est à présent conduite sur les 32 facteurs de puissance estimés directement sur les éléments combustibles. Cette étude fait suite à une campagne expérimentale hypothétique où les facteurs de puissance expérimentaux seraient mesurables.

Nous présentons sur la Figure 7.5, l'ensemble des écarts relatifs estimés directement sur les éléments combustibles avant et après calibration pour une unique condition expérimentale. Cette condition expérimentale a été réalisée à 250 °C, pour un titre en bore de 411 ppm en configuration toutes lattes hautes.

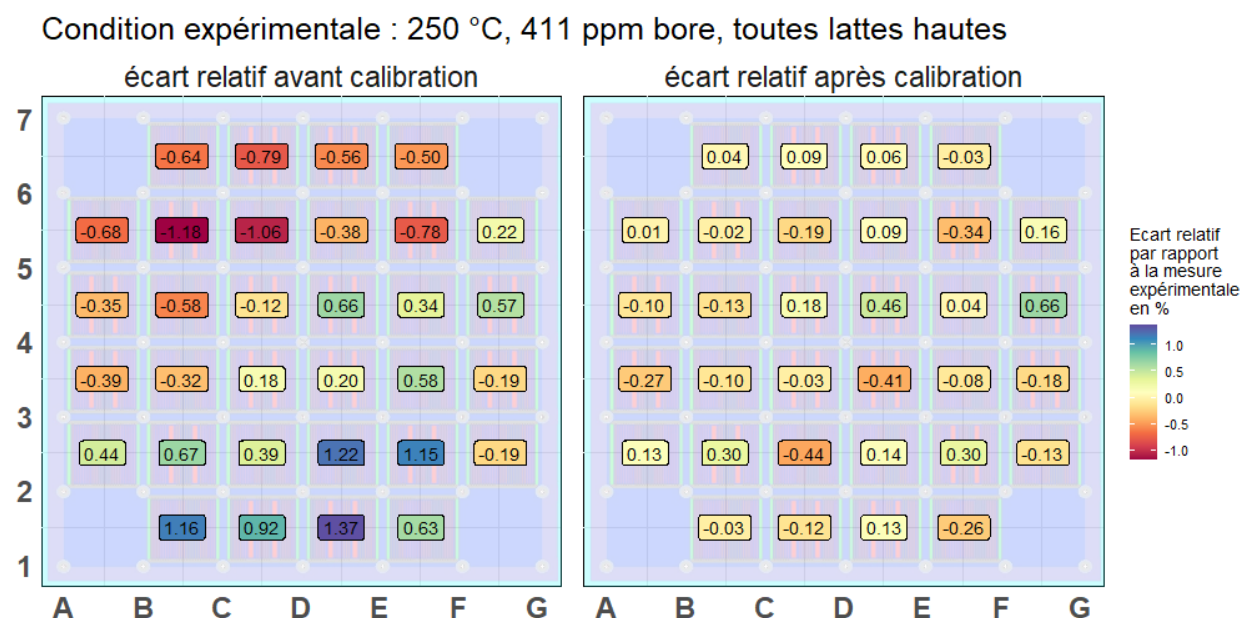


FIGURE 7.5 – Écarts relatifs entre mesures expérimentales et prédictions réalisées des facteurs de puissance. (À gauche) Écart relatif avant calibration. (À droite) Écart relatif après calibration.

Comme pour l'étude précédente réalisée sur les sondes, on constate que la calibration permet de réduire les écarts entre prédictions et mesures expérimentales au niveau des éléments combustibles. On observe pour cette condition expérimentale que l'écart relatif maximum avant calibration était de 1,37 % pour l'élément combustible DE12, contre 0,66 % après calibration pour l'élément FG45. Soit une diminution de l'écart maximal de 52 %.

Il est intéressant de noter que les écarts relatifs les plus importants obtenus après calibration correspondent aux éléments combustibles où le modérateur intérieur est mal calibré (cf. Figure 7.2, image « Écart absolu »). Sur cette figure précédente, nous avons observé que les modérateurs intérieurs les moins bien calibrés étaient parmi les éléments combustibles FG45, CD23 et DE34. Lorsque l'on analyse la Figure 7.5, on constate que ces éléments sont ceux pour lesquels les écarts relatifs absolus après calibration sont les plus importants.

7.3. Prédictions du simulateur sur le réacteur calibré

Malgré une diminution moins importante des écarts relatifs pour ces éléments combustibles, on observe un facteur d'amélioration de 3,4 pour cette condition expérimentale. En effet, avant calibration, la moyenne des valeurs absolues de ces écarts était de 0,607 %, contre 0,178 % après calibration. Malgré l'introduction de biais associés à la calibration, on observe ainsi, une diminution significative des écarts calculs/expériences pour cette condition expérimentale.

Cette diminution des écarts à la suite de la calibration est également observée pour chacune des conditions expérimentales du plan d'expériences, comme le montrent les facteurs d'amélioration reportés dans le Tableau 7.4.

Condition expérimentale	Amélioration	Condition expérimentale	Amélioration	Condition expérimentale	Amélioration	Condition expérimentale	Amélioration
100 0 184	4,6	150 0 144	4,6	200 0 96	4,1	250 0 65	4,1
100 120 129	4,6	150 120 96	4,3	200 120 71	4,0	250 120 45	3,9
100 400 59	4,0	150 400 46	3,9	200 400 32	3,8	250 400 7	3,4
100 768 TLH	3,5	150 695 TLH	3,6	200 580 TLH	3,5	250 411 TLH	3,4

TABLEAU 7.4 – Facteurs d'amélioration pour les facteurs de puissance estimés directement pour chacune des conditions expérimentales du plan d'expériences.

En moyenne pour chacune des conditions expérimentales, **le facteur d'amélioration obtenu est de 4,0**. Le facteur d'amélioration moyen obtenu est ainsi inférieur de 44 % par rapport à celui obtenu lors de l'étude sur les mesures issues de l'instrumentation in-core.

Cette performance reste néanmoins à nuancer, car la configuration calibrée est construite à l'aide des taux de fission mesurés au niveau des sondes. Les facteurs de puissance estimés au niveau des éléments combustibles n'interviennent donc pas directement dans le modèle (7.1) permettant de construire la configuration calibrée.

Néanmoins, comme le montre le facteur d'amélioration moyen obtenu en réalisant cette calibration sur une grandeur indirectement influencée par les éléments combustibles, on obtient une réduction significative des écarts calculs/expériences pour les facteurs de puissance estimés sur les éléments combustibles.

7.3.4 Performances sur les écarts calculs/mesures observés sur les facteurs de puissance issus de la transposition des mesures des sondes

Dans cette dernière étude, la quantification de l'effet de la calibration sur les écarts calculs/expériences est présentée dans un cadre représentatif d'une campagne de mesures réalisée sur un cœur réellement fabriqué. Dans ce cadre, les facteurs de puissance expérimentaux ne sont pas directement mesurables. Il est ainsi tout d'abord nécessaire de transférer l'information mesurée à l'aide de l'instrumentation in-core vers les éléments combustibles. Pour cela, nous utilisons la méthode de transposition présentée dans le Chapitre 5. Cette méthode permet ainsi de réaliser le transfert des mesures suivantes :

$$E_{IIC} \rightarrow E_{EC}$$

avec E_{IIC} la mesure expérimentale réalisée sur l'instrumentation in-core et E_{EC} la mesure expérimentale extrapolée sur les éléments combustibles. Une fois que cette grandeur est à

disposition, il devient possible de quantifier les performances de la calibration sur les écarts calculs/expériences.

Comme discuté dans le Chapitre 5, l'utilisation de cette méthode de transposition entraîne cependant l'apparition d'un biais au niveau des facteurs de puissance extrapolés⁵. Pour quantifier ce biais de transposition, les sensibilités expérimentales obtenues avant transposition ($E = E_{EC}$)⁶ sont comparées à celles obtenues après transposition des mesures de l'instrumentation in-core ($E = E_{EC,extrapolé}$). Rappelons que les sensibilités sont définies de la façon suivante :

$$\frac{C_{nom} - E}{C_{nom}}.$$

Sont ainsi à disposition d'une part les sensibilités estimées directement sur les éléments combustibles et d'autre part les sensibilités estimées à la suite de la transposition. Il est donc possible de quantifier le biais introduit par l'utilisation de la grandeur transposée ($E_{EC,extrapolé}$) lors de l'estimation des sensibilités.

Ce biais est quantifié pour chacune des 16 conditions expérimentales et chacun de 32 éléments combustibles. En moyenne, **l'écart absolu entre sensibilité estimée directement et sensibilité estimée à la suite de la transposition des mesures expérimentales est de 0,23 %**.

En dépit de ce biais imputable à la transposition, les écarts relatifs entre les facteurs de puissance expérimentaux extrapolés à l'aide de la méthode de transposition et les prédictions équivalentes de ces grandeurs ont été estimés pour chacune des conditions expérimentales. Un exemple d'une de ces estimations réalisées pour une température de 250 °C, un titre en bore de 411 ppm, en configuration toutes lattes hautes est présenté sur la Figure 7.6.

On observe, comme dans la section précédente, une **réduction des écarts calculs/expériences après calibration**. Pour cette condition expérimentale, le facteur d'amélioration obtenu est de 4,0.

Contrairement à l'étude précédente où les facteurs de puissance étaient directement disponibles, **nous n'observons néanmoins pas d'écarts relatifs (après calibration), plus importants parmi les éléments combustibles les moins bien calibrés** (FG45, CD23 et DE34). L'utilisation de la méthode de transposition semble induire un biais suffisamment important pour ne plus permettre de lier directement les paramètres technologiques « mal calibrés » aux écarts calculs/expériences observés après calibration.

L'ensemble des facteurs d'amélioration pour toutes les conditions expérimentales est présenté dans le Tableau 7.5.

On observe dans le Tableau 7.5 que le travail de calibration, réalisé uniquement à partir des mesures issues de l'instrumentation in-core, permet de réduire les écarts calculs/expériences associés aux facteurs de puissance issus de la méthode de transposition, pour chacune des conditions expérimentales. Il est donc possible, uniquement à partir des mesures réalisées sur un cœur tel que fabriqué et en s'appuyant sur un ensemble de méthodes de neutronique

5. Comme cette étude est réalisée sur un objet numérique, les facteurs de puissance expérimentaux sont à disposition. Contrairement à une campagne de mesures réalisée sur un cœur réellement fabriqué, il est ainsi possible d'estimer le biais introduit par l'utilisation de la transposition.

6. Ces sensibilités ne sont pas disponibles à l'issue d'une campagne de mesures réalisée sur un cœur réellement fabriqué.

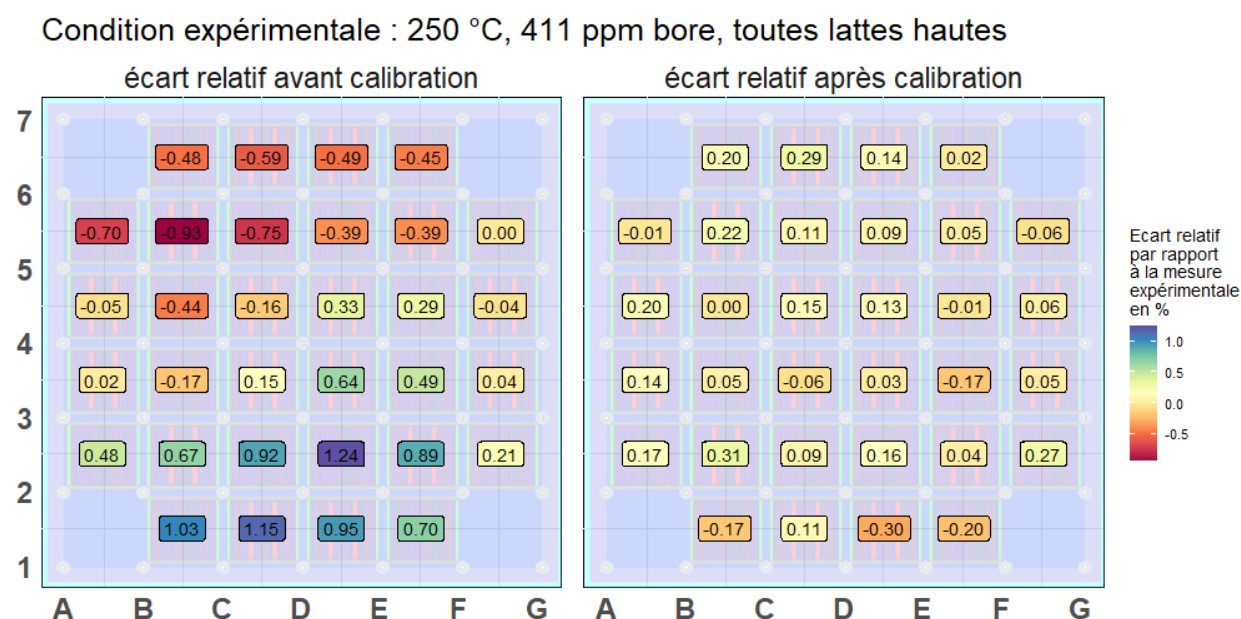


FIGURE 7.6 – Écarts relatifs entre mesures expérimentales transposées et prédictions des facteurs de puissance. (À gauche) Écart relatif avant calibration. (À droite) Écart relatif après calibration.

Condition expérimentale	Amélioration	Condition expérimentale	Amélioration	Condition expérimentale	Amélioration	Condition expérimentale	Amélioration
100 0 184	4,8	150 0 144	4,6	200 0 96	4,2	250 0 65	4,4
100 120 129	5,0	150 120 96	4,1	200 120 71	4,3	250 120 45	4,1
100 400 59	3,4	150 400 46	4,4	200 400 32	4,2	250 400 7	3,4
100 768 TLH	3,6	150 695 TLH	3,8	200 580 TLH	4,2	250 411 TLH	4,0

TABEAU 7.5 – Facteurs d'amélioration estimés à partir des facteurs de puissance extrapolés pour chacune des conditions expérimentales du plan d'expériences.

et d'une calibration bayésienne, **de réduire les écarts relatifs calculs/expériences au niveau des éléments combustibles en moyenne d'un facteur 4.2**, par rapport aux prédictions réalisées sur la configuration nominale.

7.4 Synthèse

Dans ce dernier chapitre, nous avons considéré une configuration du cœur où 162 paramètres technologiques sont incertains. Parmi ces paramètres, 98 sont associés à des paramètres géométriques et 64 au bilan de matière des assemblages composant le cœur. Une analyse de sensibilité globale a été réalisée pour diminuer la dimension du problème de calibration à 120 paramètres technologiques identifiés comme influents. Les 42 paramètres géométriques restants ont été fixés à leur valeur nominale.

Pour étudier cette configuration, nous avons simulé une campagne de mesures « fictive » constituée de 784 valeurs de taux de fission, mesurées en différents points du cœur à l'aide d'une instrumentation in-core.

Grâce aux méthodes de neutronique présentées dans les précédents chapitres, nous avons pu bâtir un émulateur permettant de prédire les taux de fission mesurés au niveau des

sondes en fonction des perturbations appliquées aux paramètres incertains. Cet émulateur est constitué de plusieurs modèles de régression linéaire, estimés séparément pour chaque groupe de paramètre et agrégés sous une hypothèse d'additivité. À partir de cet émulateur, nous avons réalisé un travail de calibration pour estimer les perturbations les plus probables donnant lieu aux taux de fission observés. Deux calibrations bayésiennes se basant sur des lois *a priori* différentes (uniforme et gaussienne), ont alors été conduites. **La calibration basée sur une loi *a priori* gaussienne permet d'améliorer l'identifiabilité du modèle. On observe en effet l'unicité des maxima *a posteriori* (MAP) pour les paramètres à calibrer.**

Finalement, ces MAP ont été utilisés dans une dernière partie afin de construire un jumeau numérique « calibré » et de calculer de nouvelles prédictions des grandeurs d'intérêt. Ces grandeurs sont d'une part les taux de fission prédits au niveau des sondes de mesure et d'autre part les facteurs de puissance prédits au niveau des éléments combustibles. Les prédictions ont alors été utilisées pour quantifier l'apport de la calibration sur les écarts entre calculs et mesures expérimentales. Nous avons ainsi montré que **la calibration réalisée à partir des mesures des sondes permet de réduire les écarts calculs/mesures observés pour les facteurs de puissance d'une valeur de 4,2.**

Chapitre 8

Conclusion

Nos travaux s'inscrivent dans le cadre de la validation expérimentale des Outils de Calculs Scientifiques (OCS). Nous avons pu voir (Chapitre 1) que cette validation consiste en une comparaison d'un ensemble de mesures expérimentales avec des prédictions provenant d'un jumeau numérique du cœur tel que fabriqué, utilisé en entrée de l'OCS considéré.

Du fait de la modélisation des phénomènes physiques, des écarts peuvent cependant apparaître. Ces écarts sont d'une part liés aux incertitudes des Données Nucléaires de Base (considérées comme épistémiques dans ces travaux) et d'autre part aux écarts de modélisation entre la configuration expérimentale et le modèle numérique utilisé en entrée du simulateur, appelés « incertitudes technologiques ». La validation expérimentale d'un OCS a ainsi pour objectif de quantifier les incertitudes de calcul découlant des différences entre prédictions et mesures expérimentales. Ces incertitudes sont en effet utilisées pour définir les marges de conception appliquées aux prédictions des simulateurs lors des études de conception et de sûreté des cœurs de réacteur nucléaire.

Dans ce cadre, il a été envisagé de calibrer certains paramètres technologiques incertains du jumeau numérique. Une campagne de mesures « expérimentales » a pour cela été simulée. Ces « mesures » ont alors été utilisées dans un processus de calibration pour réduire les écarts entre le jumeau numérique et le cœur fabriqué. En effet, il est actuellement connu que l'incertitude sur les paramètres technologiques est l'un des principaux contributeurs aux incertitudes de calcul. La calibration de ces paramètres a pour objectif de fournir des incertitudes de calcul plus représentatives du problème étudié, dépourvues au mieux de l'incertitude technologique.

Pour répondre à cet objectif, nous nous sommes intéressés à un ensemble de mesures locales de la distribution des taux de fission relevée à l'aide d'une Instrumentation In-Core. Ces mesures ont été réalisées lors d'une campagne de mesures conduite sur un cœur numérique, à savoir le cœur F (Chapitre 2).

Dès lors, des questions sous-jacentes sont apparues. Est-il possible de réaliser cette calibration à partir de ce type de mesures ? La calibration des paramètres technologiques incertains permet-elle de réduire significativement l'incertitude de calcul ?

Le code Monte-Carlo de transport de particules TRIPOLI-4[®] a été utilisé pour étudier ces différentes problématiques. Ce simulateur permet de s'affranchir des biais de modèles dus aux hypothèses de modélisation que l'on peut rencontrer lors de l'utilisation de simulateur

déterministe. Cependant, du fait des temps de calculs associés à la résolution Monte-Carlo du problème étudié, seul un nombre limité d'appels au simulateur est réalisable. De plus, un demi-millier de paramètres technologiques doivent être théoriquement calibrés pour reproduire le cœur fabriqué le plus fidèlement possible.

Pour réaliser la calibration, il a alors été nécessaire de construire un émulateur de ce simulateur basé sur une hypothèse d'additivité. Nous avons supposé qu'il est possible de construire cet émulateur global comme une somme d'émulateurs élémentaires dédiés à des groupes de paramètres technologiques indépendants (Chapitre 3). Du fait de cette décomposition, un appel à des modèles physiques simplifiés, plus rapides, se basant sur des méthodes de neutronique spécifiquement développées a pu être réalisé. Ces modèles physiques ont alors été utilisés pour construire des bases d'apprentissage conséquentes, permettant l'estimation des émulateurs élémentaires. Sous l'hypothèse d'additivité, l'émulateur global a finalement pu être construit comme une somme de ces émulateurs élémentaires.

Les méthodes de neutronique spécifiquement développées et utilisées pour construire ces modèles physiques simplifiés sont ensuite présentées dans le Chapitre 4. Ces méthodes permettent d'estimer l'effet d'une perturbation des paramètres composant le cœur sur les grandeurs mesurées par des sondes introduites au plus près des éléments combustibles. Dans un second temps (Chapitre 6), les émulateurs élémentaires construits à l'aide de ces modèles simplifiés ont été utilisés pour réaliser une calibration de paramètres technologiques incertains. À la suite de cette calibration, les modes *a posteriori* des paramètres ont été utilisés pour réduire les écarts entre prédictions dites « calibrées » et résultats expérimentaux.

Plus précisément, deux méthodes de neutronique basées sur le principe de la reprise surfacique ont tout d'abord été introduites dans la première partie du Chapitre 4. Ces méthodes permettent d'estimer l'effet des perturbations géométriques des éléments du réacteur. Des diminutions significatives des temps de calcul ont été observées du fait du déploiement de ces méthodes. Des bases d'apprentissage de taille importante ont ainsi pu être construites pour estimer de multiples émulateurs élémentaires. Ces derniers ont alors été utilisés pour identifier les paramètres technologiques ayant une réelle influence sur les mesures réalisées par l'Instrumentation In-Core.

Dans la deuxième partie du Chapitre 4, nous avons donné une technique permettant d'optimiser les calculs des sensibilités associées à une perturbation du bilan de matière des éléments du réacteur. Cette technique se base sur la méthode des échantillons corrélés et présente l'avantage de nécessiter un moindre coût en temps de calcul en comparaison à une estimation Monte-Carlo directe. Nous avons ensuite présenté deux hypothèses simplificatrices d'additivité et de linéarité. L'utilisation de ces hypothèses a permis d'extrapoler l'effet associé à n'importe quel jeu de perturbations sur les sondes à partir d'un nombre limité de calculs Monte-Carlo.

Malgré l'introduction des hypothèses simplificatrices précédentes permettant de réduire significativement le volume de calculs à réaliser, les incertitudes Monte-Carlo associées aux estimations sur les sondes restent importantes. Pour profiter des estimations réalisées au niveau des éléments combustibles disposant d'une incertitude moindre, nous avons mis en œuvre une méthode de transposition (Chapitre 5). En projetant les mesures des sondes sur les vecteurs propres de la matrice de fission du cœur étudié, nous avons pu extrapoler les facteurs de puissance associés aux éléments combustibles et profiter ainsi d'incertitudes Monte-Carlo diminuées.

À la suite de cette première partie orientée sur le développement et l'utilisation de méthodes de neutronique, nous avons réalisé une calibration des paramètres technologiques incertains du cœur étudié. La résolution de ce problème a consisté à estimer les perturbations des paramètres technologiques à partir des mesures réalisées par une Instrumentation In-Core sur le cœur fabriqué.

Nous avons montré dans la première partie du Chapitre 6, la faisabilité de cette inversion sur une configuration du cœur où un seul type de paramètre technologique est perturbé (les paramètres du bilan matière du cœur). Afin d'en améliorer la qualité, la méthode de transposition a été utilisée. Nous avons ensuite montré la faisabilité de l'inversion sur une configuration traitant l'interaction entre deux groupes de paramètres technologiques associés au bilan de matière du cœur (le titre en bore des joues et la densité du modérateur de chaque assemblage).

Dans la seconde partie du Chapitre 6, un autre groupe de paramètres technologiques (les paramètres géométriques), a été étudié, toujours dans le cadre de la résolution du problème de calibration. Le formalisme relatif au modèle linéaire bayésien a été utilisé afin de réaliser une analyse de sensibilité se basant sur des indices de Sobol calculés analytiquement. Les résultats obtenus ont permis de justifier de ne pas considérer l'incertitude d'estimation des paramètres du modèle linéaire, au regard de l'incertitude des paramètres à calibrer. Le problème de calibration de ces derniers paramètres a ainsi pu être simplifié.

Dans le Chapitre 7, une calibration jointe de trois groupes de paramètres technologiques a été proposée. Les résultats obtenus sont convaincants. Les valeurs des paramètres technologiques ainsi calibrés ont pu être intégrées dans le jumeau numérique afin de construire une configuration du cœur dite « calibrée ». À partir de cette configuration l'effet de la calibration des paramètres technologiques incertains sur les écarts entre les expériences et les prédictions du simulateur a pu être estimé. Une réduction d'un facteur 4 a été observée pour ces écarts grâce à l'utilisation de la configuration calibrée. Cette configuration illustre ainsi le grand intérêt de l'ensemble de la méthodologie proposée qui couple des méthodes de neutronique à des méthodes statistiques avancées.

On retiendra que la méthode présentée montre la faisabilité de la calibration jointe de plusieurs groupes de paramètres technologiques, dans le cadre d'une campagne de mesures sur un cœur neuf disposant d'une Instrumentation In-Core. La réduction des écarts observés à la suite de la calibration du jumeau numérique ouvre ainsi une perspective sérieuse sur l'amélioration des méthodes d'interprétation de telles mesures dans le contexte de la validation expérimentale.

Afin d'enrichir la méthode proposée et poursuivre les travaux d'interprétation des mesures expérimentales, il pourrait être intéressant de réaliser la calibration sur des grandeurs multidimensionnelles [50]. Dans ces travaux, les calibrations ont été réalisées sur des taux de fission intégrés axialement (cf. Figure 2.3). Cependant, cette intégration conduit à une perte d'information. L'utilisation de grandeurs multidimensionnelles non intégrées pourrait potentiellement permettre de réaliser une calibration plus riche susceptible de répondre aux problèmes d'identifiabilité observés lors des calibrations réalisées.

Concernant le modèle utilisé pour la calibration (cf. Éq. 3.1), les mesures expérimentales considérées sont issues du même simulateur numérique que celui utilisé lors de la calibration. L'erreur de modèle associée au simulateur a donc été supposée nulle lors de ces travaux et n'a pas été modélisée (cette approche a néanmoins conduit à des résultats convaincants).

Pour appliquer cette méthode dans un contexte réel, un soin particulier devra être apporté au traitement de l'erreur de modèle avec si besoin la modélisation d'un terme de discrédance. Cela pourra engendrer de nouvelles difficultés lors de la mise en œuvre de la calibration ([14], [16]).

Faire appel à d'autres méthodes d'apprentissage statistique que le modèle linéaire bayésien permettrait également d'enrichir la méthode proposée. En effet, pour modéliser des comportements non linéaires, il est envisageable de faire appel à d'autres techniques d'apprentissage statistique (selon le nombre de simulations dans les bases d'apprentissage) : processus gaussien [51], polynômes du chaos [52], réseaux de neurones ([53], [54]), etc. Il sera aussi intéressant de modéliser explicitement l'erreur introduite par l'émulation du simulateur afin de prendre en compte (et d'évaluer l'impact) dans la calibration.

Pour traiter l'ensemble de l'information expérimentale à disposition et ainsi réaliser une calibration plus riche, il serait intéressant d'appliquer la méthode proposée à des mesures réalisées en évolution (taux de combustion du réacteur non nul). En effet, lors des campagnes expérimentales, des mesures sur des cœurs en évolution sont généralement réalisées. L'utilisation de cette information permettrait de discriminer les effets associés aux paramètres géométriques ne variant pas en évolution aux paramètres associés au bilan de matières étant eux influencés. Cependant, du fait des problématiques relatives aux temps de calcul des simulations Monte-Carlo évoluant, il serait intéressant de faire appel à des simulateurs déterministes, et ce, malgré l'introduction d'une erreur de modèle plus importante (d'où la modélisation du terme d'erreur évoqué précédemment).

L'appel à ce type de simulateurs permettrait une industrialisation de la méthode proposée. En effet, il serait ainsi plus aisé d'estimer les effets associés à la perturbation d'un paramètre technologique du fait de la plus grande disponibilité de méthodes de neutronique dédiées. Par conséquent, il pourrait être possible d'enrichir le modèle utilisé pour la calibration en utilisant un nombre plus important de sensibilités, permettant notamment de traiter des configurations de cœurs plus complexes. Par exemple, il serait possible de modéliser explicitement d'éventuelles interactions pouvant exister entre groupes de paramètres technologiques. De plus, du fait des temps de calculs moindres associés à ce type de simulateur, il serait possible de construire des bases d'apprentissage plus conséquentes pour faire appel à une nouvelle variété de méthodes d'apprentissage lors de l'émulation du simulateur, comme évoqué précédemment.

La disponibilité d'un simulateur disposant de temps de calcul moindres permettrait également de tester la robustesse de la méthode proposée. Pour ce faire, une batterie de tests pourrait être réalisée sur différents concepts et configurations de réacteur. La méthode proposée pourrait alors être comparée à des méthodes concurrentes, incluant en particulier des variantes de l'approche proposée.

Finalement, pour appliquer la méthode à un contexte réel, en plus de modéliser l'erreur de modèle existant, il serait intéressant d'utiliser l'ensemble de l'information provenant des études de conformité et de la métrologie des cœurs tels que fabriqués. L'utilisation de ces informations permettrait d'identifier *a priori* l'ensemble des paramètres technologiques ayant une influence sur les grandeurs d'intérêts et leur plage de variation associée. Suite à une analyse de sensibilité globale sur l'ensemble des paramètres technologiques (afin de diminuer la dimension du problème de calibration), un émulateur global pourrait alors être construit et utilisé pour réaliser la calibration d'un cœur fabriqué, estimer l'erreur de modèle du simulateur et réduire les écarts entre mesures et prédictions.

Bibliographie

- [1] Laurent MANIFACIER : Conformité neutronique des coeurs : Méthodologie de démonstration. Communication interne.
- [2] Mireille COSTE-DELCLAU, Cheikh DIOP, Anne NICOLAS et Bernard BONIN : *Neutronique*. E-den, Une monographie de la Direction de l'énergie nucléaire. CEA Saclay ; Groupe Moniteur, 2013.
- [3] Guillaume DAMBLIN : Inférence bayésienne des paramètres incertains contenus dans les modèles physiques. Communication interne.
- [4] Elisa NEGRI, Luca FUMAGALLI et Marco MACCHI : A review of the roles of digital twin in cps-based production systems. *Procedia Manufacturing*, 11:939–948, 2017.
- [5] Thomas FROSIO : *Propagation des incertitudes dues aux données nucléaires couplées Bateman/Boltzmann et inférence Bayésienne. Application aux réacteurs à plaques*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes, 2015.
- [6] André CHABRE et Bernard BONIN : *Réacteurs nucléaires expérimentaux*. CEA Saclay ; Groupe Moniteur, 2012.
- [7] Jean-Lucien MOURLEVAT : *Instrumentation interne des réacteurs*. Ed. Techniques Ingénieur, 2001. BN3452 v1.
- [8] S NICOLAS, A NOGUÈS, L MANIFACIER et L CHABERT : A dummy core for v&v and education and training purposes at techniatome : in and ex-core calculations. *IGORR, Sydney*, 2017.
- [9] Stéphane NORMAND : *Instrumentation Nucleaire pour les systemes industriels de mesure*. Thèse de doctorat, Université de CAEN, 2010.
- [10] E. BRUN, F. DAMIAN, C.M. DIOP, E. DUMONTEIL, F.X. HUGOT, C. JOUANNE, Y.K. LEE, F. MALVAGI, A. MAZZOLO, O. PETIT, J.C. TRAMA, T. VISONNEAU et A. ZOIA : Tripoli-4®, cea, edf and areva reference monte carlo code. *Annals of Nuclear Energy*, 82:151–160, 2015.
- [11] Pierre-louis ALZIEU : *Évaluation et extrapolation des incertitudes epistemiques dans les calculs neutroniques des coeurs de type REL*. Thèse de doctorat, Université de Aix-Marseille, 2021.
- [12] Henri LOUVIN : *Development of an adaptive variance reduction technique for Monte Carlo particle transport*. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, 2017.
- [13] Guillaume DAMBLIN : Calage statistique des paramètres d'un modèle physique de condensation en thermohydraulique à l'échelle système. Communication interne.
- [14] Marc C KENNEDY et Anthony O'HAGAN : Bayesian calibration of computer models. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, 63(3):425–464, 2001.

- [15] Dave HIGDON, Marc KENNEDY, James C CAVENDISH, John A CAFEO et Robert D RYNE : Combining field data and computer simulations for calibration and prediction. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2):448–466, 2004.
- [16] Thomas J SANTNER, Brian J WILLIAMS, William I NOTZ et Brian J WILLIAMS : *The design and analysis of computer experiments*, volume 1. Springer, 2003.
- [17] Xu WU, Tomasz KOZLOWSKI, Hadi MEIDANI et Koroush SHIRVAN : Inverse uncertainty quantification using the modular bayesian approach based on gaussian process, part 1 : Theory. *Nuclear Engineering and Design*, 335:339–355, 2018.
- [18] Chen JIANG, Zhen HU, Yixuan LIU, Zissimos P MOURELATOS, David GORSICH et Paramsothy JAYAKUMAR : A sequential calibration and validation framework for model uncertainty quantification and reduction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 368:113172, 2020.
- [19] Maria J BAYARRI, James O BERGER, Rui PAULO, Jerry SACKS, John A CAFEO, James CAVENDISH, Chin-Hsu LIN et Jian TU : A framework for validation of computer models. *Technometrics*, 49(2):138–154, 2007.
- [20] Andrew GELMAN, John B CARLIN, Hal S STERN, David B DUNSON, Aki VEHTARI et Donald B RUBIN : *Bayesian data analysis Third Edition*. Chapman and Hall/CRC, 2013.
- [21] Jim ALBERT : *Bayesian computation with R*. Springer, 2007.
- [22] John KRUSCHKE : *Doing Bayesian data analysis : A tutorial with R, JAGS, and Stan*. Academic Press, 2014.
- [23] Mathieu CARMASSI : *Uncertainty quantification and calibration of a photovoltaic plant model : warranty of performance and robust estimation of the long-term production*. Thèse de doctorat, Université Paris Saclay (COMUE), 2018.
- [24] Guillaume DAMBLIN : *Contributions statistiques au calage et à la validation des codes de calcul*. Thèse de doctorat, Paris, AgroParisTech, 2015.
- [25] Matthias DE LOZZO : Substitution de modèle et approche multifidélité en expérimentation numérique. *Journal de la Société Française de Statistique*, 156(4):21–55, 2015.
- [26] Sudipto BANERJEE : Bayesian linear model : Gory details. 2008.
- [27] Kevin P MURPHY : Conjugate bayesian analysis of the gaussian distribution. 2007.
- [28] Andrew GELMAN et Jennifer HILL : *Data analysis using regression and multilevel/hierarchical models*. Cambridge university press, 2006.
- [29] Guillaume TRUCHET : *Développements et validation de calculs à énergie continue pondérés par l'importance*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes, 2015.
- [30] G TRUCHET et P LECONTE : Small sample reactivity worths calculation exact perturbation theory and monte carlo transport. In *M&C*, 2019.
- [31] Yasushi NAUCHI et Takanori KAMEYAMA : Development of calculation technique for iterated fission probability and reactor kinetic parameters using continuous-energy monte carlo method. *Journal of nuclear science and technology*, 47(11):977–990, 2010.
- [32] G TRUCHET, P LECONTE, Y PENELIAU, A SANTAMARINA et F MALVAGI : Continuous-energy adjoint flux and perturbation calculation using the iterated fission probability method in monte carlo code tripoli-4® and underlying applications. In *ARRAY, éditeur : Joint International Conference on Supercomputing in Nuclear Applications + Monte Carlo*, page 03504. EDP Sciences, 2014.

-
- [33] S. BOURGANEL : Ateliers tripoli-4, reprise surfacique., 22-23 mars 2016.
- [34] A LAUREAU, L BUIRON, B FONTAINE et V PASCAL : Fission matrix interpolation for the tfm approach based on a local correlated sampling technique for fast spectrum heterogeneous reactors. *In M&C-2017 International Meeting on Mathematics and Computation Supercomputing, Reactor Physics and Nuclear and Biological Applications*, 2017.
- [35] G. DEJONGHE, J. GONNORD et J. C. NIMAL : Perturbation calculations by the correlated samples method. *In Monte-Carlo Methods and Applications in Neutronics, Photonics and Statistical Physics*, pages 311–323. Springer, 1985.
- [36] Herbert RIEF : A synopsis of monte carlo perturbation algorithms. *Journal of Computational Physics*, 111(1):33–48, 1994.
- [37] Herbert RIEF : Generalized monte carlo perturbation algorithms for correlated sampling and a second-order taylor series approach. *Annals of nuclear energy*, 11(9):455–476, 1984.
- [38] Thomas BONACCORSI : Une méthode de reconstruction des distributions de puissance radiale à partir des mesures de taux de fission dans l’instrumentation in-core. Communication interne.
- [39] Sean CARNEY, Forrest BROWN, Brian KIEDROWSKI et William MARTIN : Theory and applications of the fission matrix method for continuous-energy monte carlo. *Annals of Nuclear Energy*, 73:423–431, 2014.
- [40] Forrest B BROWN, Sean E CARNEY, Brian C KIEDROWSKI et William R MARTIN : Fission matrix capability for mcnp, part i-theory. *In M&C 2013, Sun Valley*, 2013.
- [41] Axel LAUREAU, Laurent BUIRON et Bruno FONTAINE : Local correlated sampling monte carlo calculations in the tfm neutronics approach for spatial and point kinetics applications. *EPJ Nuclear Sciences & Technologies*, 3:16, 2017.
- [42] R Core TEAM *et al.* : R : A language and environment for statistical computing. 2013.
- [43] Stan Development TEAM *et al.* : Rstan : the r interface to stan. r package version 2.21.2. Online : <http://mc-stan.org>, 2020.
- [44] Bob CARPENTER, Andrew GELMAN, Matthew D HOFFMAN, Daniel LEE, Ben GOODRICH, Michael BETANCOURT, Marcus BRUBAKER, Jiqiang GUO, Peter LI et Allen RIDDELL : Stan : A probabilistic programming language. *Journal of statistical software*, 76(1), 2017.
- [45] Bertrand IOOSS et Paul LEMAÎTRE : *A review on global sensitivity analysis methods*, pages 101–122. Springer US, 2015.
- [46] Gabriella DELLINO et Carlo MELONI : *Uncertainty management in simulation-optimization of complex systems*. Springer, 2015.
- [47] Sébastien DA VEIGA, Fabrice GAMBOA, Bertrand IOOSS et Clémentine PRIEUR : *Basics and Trends in Sensitivity Analysis : Theory and Practice in R*. SIAM, 2021.
- [48] I.M. SOBOL : Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, 1:407–414., 1993.
- [49] Ilya M SOBOL : Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their monte carlo estimates. *Mathematics and computers in simulation*, 55(1-3):271–280, 2001.

- [50] Dave HIGDON, James GATTIKER, Brian WILLIAMS et Maria RIGHTLEY : Computer model calibration using high-dimensional output. *Journal of the American Statistical Association*, 103(482):570–583, 2008.
- [51] C.E. RASMUSSEN et C.K.I. WILLIAMS : *Gaussian Processes for Machine Learning*. Adaptive Computation and Machine Learning series. MIT Press, 2005.
- [52] Bruno SUDRET : Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability engineering & system safety*, 93(7):964–979, 2008.
- [53] Kai-Tai FANG, Runze LI et Agus SUDJANTO : *Design and modeling for computer experiments*. Chapman and Hall/CRC, 2005.
- [54] Guillaume KRIVTCHIK, Patrick BLAISE et Christine COQUELET-PASCAL : Artificial neural network surrogate development of equivalence models for nuclear data uncertainty propagation in scenario studies. *EPJ Nuclear Sciences & Technologies*, 3:22, 2017.
- [55] Danica ([HTTPS ://STATS.STACKEXCHANGE.COM/USERS/9964/DANICA](https://stats.stackexchange.com/users/9964/danica)) : Variance of product of 2 independent random vector. Cross Validated. URL :[https ://s-tats.stackexchange.com/q/405723](https://stats.stackexchange.com/q/405723) (version : 2019-04-29).

Annexe A

Plan d'expériences

Température (°C)	Pression (bar)	Titre en bore (ppm)	Insertion latte (cm)
100,85	8	768	TLH
100,85	8	400	59
100,85	8	120	129
100,85	8	0	184
150,85	30	695	TLH
150,85	30	400	46
150,85	30	120	96
150,85	30	0	144
200,85	80	580	TLH
200,85	80	400	32,5
200,85	80	120	71
200,85	80	0	96
250,85	145	411	TLH
250,85	145	400	7
250,85	145	120	45
250,85	145	0	65

TABLEAU A.1 – Plan d'expériences utilisée lors des campagnes expérimentales.

Annexe B

Image complémentaires

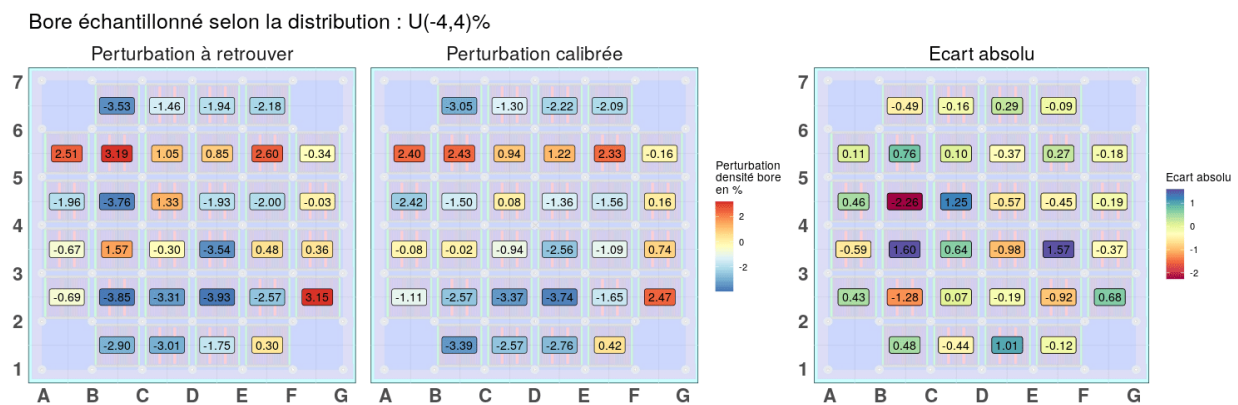


FIGURE B.1 – Calibration de la densité des joues borées, configuration où seul le bore est perturbé.

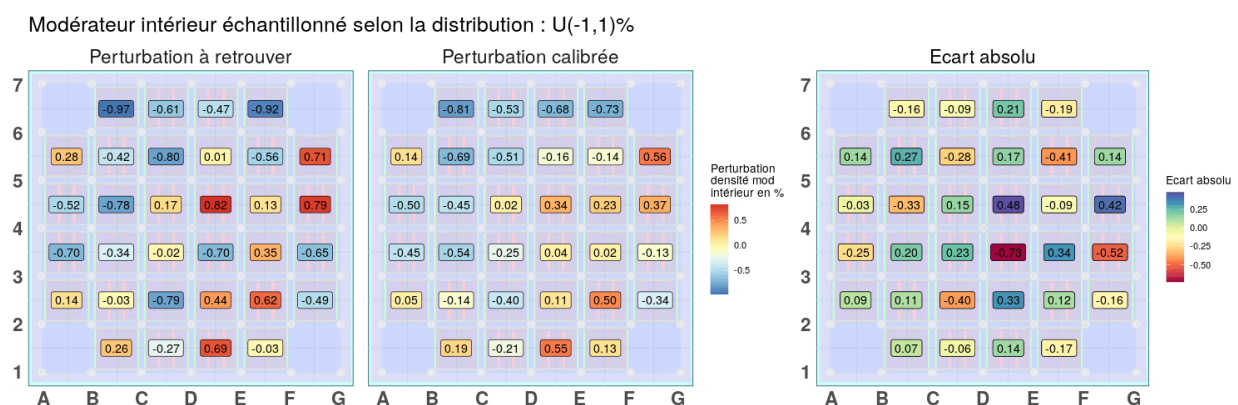


FIGURE B.2 – Calibration de la densité des modérateurs intérieurs, configuration où seul le modérateur intérieur est perturbé.

Annexe C

Détails du calcul des indices de Sobol

On suppose que n_{sim} simulations indépendantes de la grandeur d'intérêt $\mathbf{Y}_{n_{sim}} \in \mathbb{R}^{n_{sim}}$ suivent le modèle linéaire suivant (cf. Éq (6.4)) pour chacune des $i \in \{1, \dots, n_{exp}\}$ conditions expérimentales :

$$\mathbf{Y}_{n_{sim},i} = \mathbf{\Theta} \cdot \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i. \quad (\text{C.1})$$

Paramètres du modèle

Dans ce modèle $\mathbf{\Theta} = [\boldsymbol{\theta}_j^T]_{j=1}^{n_{sim}} \in \mathbb{R}^{n_{sim} \times p}$ représente la matrice du plan d'expériences. Cette matrice est composée de n_{sim} perturbations d'un paramètre technologique à p dimensions noté $\boldsymbol{\theta}^T \in \mathbb{R}^{1,p}$. Ce plan d'expériences est identique pour chacune des n_{exp} conditions expérimentales.

Le vecteur $\boldsymbol{\beta}_i \in \mathbb{R}^p$, représente le vecteur de paramètre d'un des n_{exp} modèles linéaires. Finalement, le vecteur $\boldsymbol{\epsilon}_i$ représente le terme d'erreur associé au modèle linéaire i .

Hypothèse d'indépendance

Deux hypothèses d'indépendance sont supposées concernant ces modèles linéaires. Il est supposé que les vecteurs de paramètres des n_{exp} modèles linéaires sont indépendants. Plus formellement :

$$\forall i, k \in \{1, \dots, n_{exp}\}, (\boldsymbol{\beta}_i \mid \mathbf{Y}_{n_{sim},i}) \perp (\boldsymbol{\beta}_k \mid \mathbf{Y}_{n_{sim},k}).$$

D'autre part, on suppose que chaque terme d'erreur $\boldsymbol{\epsilon}_i$ suit une loi normale multivariée de matrice de variance-covariance $\sigma_i^2 \mathbf{I}_{n_{sim}}$ (hypothèse d'homoscédasticité et d'indépendance) avec un écart-type σ_i inconnu. Chacun des termes d'erreur associés aux n_{exp} modèles linéaires est supposé indépendant. Plus formellement :

$$\forall i, k \in \{1, \dots, n_{exp}\}, (\boldsymbol{\epsilon}_i, \sigma_i) \mid \mathbf{Y}_{n_{sim},i} \perp (\boldsymbol{\epsilon}_k, \sigma_k) \mid \mathbf{Y}_{n_{sim},k}.$$

Régression bayésienne et loi *a posteriori*

Selon le formalisme de la régression linéaire bayésienne, les paramètres $(\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\epsilon}_i, \sigma_i)$ composant ces n_{exp} modèles sont modélisés par des variables aléatoires. La fonction de vraisemblance est définie par l'équation (6.6). La loi *a priori* est non informative (cf. équation (6.7)). Les lois *a posteriori* sont donc :

- $\beta_i \mid \mathbf{Y}_{n_{sim},i} \sim MVSt_{n_{sim}-p}(\hat{\beta}_i, \hat{\sigma}_i^2(\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta})^{-1})$: Vecteur de p paramètres associés à la condition expérimentale i (cf. Éq. 6.8), avec $\hat{\beta}_i$ et $\hat{\sigma}_i^2$ définis par l'équation (6.10).
- $\epsilon_i \mid \sigma_i^2 \sim N_{n_{sim}}(0, \sigma_i^2 I_{n_{sim}})$: Terme d'erreur (Éq. 6.5).
- $\sigma_i^2 \mid \mathbf{Y}_{n_{sim},i} \sim IG(\frac{n_{sim}-p}{2}, \frac{n_{sim}-p}{2} \hat{\sigma}_i^2)$: Variance du terme d'erreur (Éq. 6.9).

Les lois *a posteriori* de chacun de ces n_{exp} modèles sont indépendantes.

Prédictions

Ces distributions sont estimées à l'aide des n_{sim} simulations réalisées pour chacune des $i \in \{1, \dots, n_{exp}\}$ conditions expérimentales. Elles sont ensuite utilisées pour prédire les grandeurs d'intérêt observées lors d'une campagne de mesures, notamment à l'aide de la distribution prédictive (6.11).

Cependant, lors de cette campagne, une unique mesure de la grandeur d'intérêt est réalisée pour chacune des n_{exp} conditions expérimentales. Ainsi, $\mathbf{Y}_{n_{exp}} \in \mathbb{R}^{n_{exp}}$ mesures sont disponibles à l'issue de cette campagne.

Méconnaissance des paramètres technologiques

Cette campagne de mesures est conduite sur un cœur « réellement fabriqué ». Les paramètres technologiques $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ sont donc ici identiques pour toutes les n_{exp} conditions expérimentales, mais inconnus par l'expérimentateur.

Il est ainsi nécessaire de modéliser cette méconnaissance par une variable aléatoire permettant de décrire la connaissance *a priori* relative à ce paramètre technologique. Il est choisi comme connaissance *a priori* (cf. Éq. (6.12)), la loi :

$$\boldsymbol{\theta} \sim \bigotimes U[\theta^{min}, \theta^{max}].$$

Modèle utilisé lors de la calibration à l'issue d'une campagne expérimentale

Ces différentes considérations conduisent au modèle linéaire suivant (cf. Éq (6.13)) :

$$\mathbf{Y}_{n_{exp}} = \beta \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon}. \quad (\text{C.2})$$

Dans ce modèle, la variable explicative est à présent $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_{n_{exp}}]^T \in \mathbb{R}^{n_{exp} \times p}$, où chaque terme β_i suit la loi *a posteriori* $\beta_i \mid \mathbf{Y}_{n_{sim},i}$ donnée précédemment. La variable $\boldsymbol{\epsilon}$ suit également la loi conditionnelle à $\mathbf{Y}_{n_{sim}}$ précitée. L'objectif de l'inversion étant de calibrer le paramètre technologique incertain $\boldsymbol{\theta}$.

Du fait de la méconnaissance de $\boldsymbol{\theta}$, l'ensemble des variables $(\beta, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\epsilon}, \sigma^2)$ doit être considéré comme aléatoire. Pour rendre l'inversion réalisable à partir des distributions *a posteriori* précédemment présentées, il est alors nécessaire de réaliser une analyse de sensibilité afin de valider la simplification du modèle (C.2).

Objectif de l'analyse de sensibilité

L'objectif de l'analyse de sensibilité est de montrer que l'indice de Sobol impliquant le groupe de variables $\mathbf{W} = (\beta, \boldsymbol{\epsilon}, \sigma^2)$ est négligeable par rapport à l'indice n'impliquant que la variable

θ . Cela pourra justifier l'approximation de type « plug-in » envisagée dans la deuxième partie du Chapitre 6. Cette approximation permet de passer du modèle (6.4) au modèle simplifié (6.13) où seul le paramètre θ relatif à la position des tubes-guides est considéré comme aléatoire.

On cherche donc à estimer les termes de la décomposition suivante¹ :

$$\begin{aligned}\text{Var}[\mathbf{Y}] &= V_{\mathbf{W}} + V_{\theta} + V_{\mathbf{W},\theta}, \\ \text{avec } V_{\theta} &= \text{Var}[\mathbb{E}(\mathbf{Y} \mid \theta)], \\ V_{\mathbf{W}} &= \text{Var}[\mathbb{E}(\mathbf{Y} \mid \beta, \epsilon, \sigma^2)] \text{ et } V_{\mathbf{W},\theta} = \text{Var}[\mathbb{E}(\mathbf{Y} \mid \theta, \beta, \epsilon, \sigma^2)] - V_{\theta} - V_{\mathbf{W}}.\end{aligned}$$

Calcul de la covariance

Pour calculer analytiquement les indices de Sobol relatifs à cette décomposition, il est tout d'abord nécessaire de démontrer que $\text{Cov}(\beta, \epsilon) = 0$:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\beta, \epsilon \mid \mathbf{Y}) &= \mathbb{E}(\beta\epsilon \mid \mathbf{Y}) - \mathbb{E}(\beta \mid \mathbf{Y})\mathbb{E}(\epsilon \mid \mathbf{Y}) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(\beta\epsilon \mid \epsilon, \mathbf{Y}) \mid \mathbf{Y}] - \hat{\beta}\mathbb{E}(\epsilon \mid \mathbf{Y}) \quad (\text{Théorème de l'espérance totale}) \\ &= \mathbb{E}[\epsilon\mathbb{E}(\beta \mid \epsilon, \mathbf{Y}) \mid \mathbf{Y}] - \hat{\beta}\mathbb{E}(\epsilon \mid \mathbf{Y}) \quad (\mathbb{E}(X \mid X) = X) \\ &= \mathbb{E}[\epsilon\hat{\beta} \mid \mathbf{Y}] - \hat{\beta}\mathbb{E}(\epsilon \mid \mathbf{Y}) \\ &= \hat{\beta}\mathbb{E}[\epsilon \mid \mathbf{Y}] - \hat{\beta}\mathbb{E}(\epsilon \mid \mathbf{Y}) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{C.3}$$

Calcul de V_{θ}

Calculons tout d'abord l'indice de Sobol relatif à la variable θ :²

$$\begin{aligned}V_{\theta} &= \text{Var}[\mathbb{E}(\mathbf{Y} \mid \theta)] \\ &= \text{Var}[\mathbb{E}(\beta.\theta + \epsilon \mid \theta)] \\ &= \text{Var}[\mathbb{E}(\beta.\theta \mid \theta) + \mathbb{E}(\epsilon)]. \quad (\epsilon \perp\!\!\!\perp \theta)\end{aligned} \tag{C.4}$$

Or d'après l'Éq. (6.5), nous avons $\mathbb{E}(\epsilon) = 0$. Par conséquent :

$$V_{\theta} = \text{Var}[\mathbb{E}(\beta)\theta \mid \theta] \underbrace{=} \text{Var}[\hat{\beta}\theta] = \hat{\beta}^T \text{Var}[\theta] \hat{\beta}. \tag{C.5}$$

cf. Éq. (6.8)

Finalement, en utilisant la variance de la loi uniforme (cf. Éq. 6.12), on obtient :

$$V_{\theta} = \hat{\beta}^T \begin{bmatrix} \frac{(\theta_{max}^1 - \theta_{min}^1)^2}{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{(\theta_{max}^p - \theta_{min}^p)^2}{12} \end{bmatrix} \hat{\beta} = \sum_{i=1}^p \frac{(\theta_{max}^i - \theta_{min}^i)^2}{12} \hat{\beta}_i^2. \tag{C.6}$$

Comme les paramètres technologiques θ sont tous indépendants, seuls les paramètres diagonaux de la matrice de covariance $\text{Var}[\theta]$ sont non nuls.

1. Dans la suite de la démonstration la notation $\mathbf{Y}_{n_{exp}}$ est simplifiée par la notation \mathbf{Y} afin d'alléger les notations.

2. La notation $A \perp\!\!\!\perp B$, fait référence à l'indépendance des variables A et B .

Calcul de V_W

Dans un second temps, le calcul de l'indice de Sobol relatif au groupe de variables $\mathbf{W} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\epsilon}, \sigma^2)$ se déroule de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 V_W &= \text{Var}[\mathbb{E}(\mathbf{Y} \mid \mathbf{W})] \\
 &= \text{Var}[\mathbb{E}(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\epsilon}, \sigma^2) + \mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon} \mid \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\epsilon}, \sigma^2)] \\
 &= \text{Var}[\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\epsilon}] && (\boldsymbol{\theta} \perp \mathbf{W}) \\
 &= \text{Var}[\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbb{E}(\boldsymbol{\theta})] + \text{Var}[\boldsymbol{\epsilon}] && (\text{Cov}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\epsilon}) = 0) \\
 &= \mathbb{E}(\boldsymbol{\theta})^T \cdot \text{Var}[\boldsymbol{\beta}] \cdot \mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}) + \text{Var}[\boldsymbol{\epsilon}]
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

Or, par le théorème de la variance totale, on a :

$$\text{Var}[\boldsymbol{\epsilon}] = \text{Var}[\mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon} \mid \sigma^2)] + \underbrace{\mathbb{E}(\text{Var}[\boldsymbol{\epsilon} \mid \sigma^2])}_{\text{cf. Éq. (6.5)}} = 0 + \mathbb{E}(\sigma^2) \tag{C.8}$$

Propriété C.0.1. L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi inverse-gamma de paramètre de forme a et de paramètre d'échelle b (cf. définition 3.5.1) est :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\beta}{\alpha - 1}, \text{ pour } \alpha > 1. \tag{C.9}$$

On peut ainsi réécrire, le terme $\text{Var}[\boldsymbol{\epsilon}] = \mathbb{E}(\sigma^2)$, on obtient ainsi :

$$V_W = \mathbb{E}(\boldsymbol{\theta})^T \cdot \text{Var}[\boldsymbol{\beta}] \cdot \mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}) + \hat{\sigma}^2 \frac{n_{sim} - p}{n_{sim} - p - 1} \tag{C.10}$$

Propriété C.0.2. La variance d'une variable aléatoire \mathbf{X} suivant une loi de Student non standardisée et multivariée $MVSt_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ de degré de liberté n , de paramètre de position $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice d'échelle $\boldsymbol{\Sigma}$ est donnée par :

$$\text{Var}[\mathbf{X}] = \frac{n}{n - 2} \boldsymbol{\Sigma}, \text{ pour } n > 2. \tag{C.11}$$

Ainsi, le terme $\text{Var}[\boldsymbol{\beta}]$ associé à la distribution (6.8) se réécrit :

$$V_W = \mathbb{E}(\boldsymbol{\theta})^T \left[\frac{n_{sim} - p}{n_{sim} - p - 2} \cdot \hat{\sigma}^2 (\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta})^{-1} \right] \mathbb{E}(\boldsymbol{\theta}) + \hat{\sigma}^2 \frac{n_{sim} - p}{n_{sim} - p - 1}. \tag{C.12}$$

Calcul de $V_{W, \boldsymbol{\theta}}$

Finalement pour l'indice de Sobol d'interaction des variables \mathbf{W} et $\boldsymbol{\theta}$, on a :

$$\begin{aligned}
 V_{W, \boldsymbol{\theta}} &= \text{Var}[\mathbb{E}(\mathbf{Y} \mid \mathbf{W}, \boldsymbol{\theta})] - V_{\boldsymbol{\theta}} - V_W \\
 &= \text{Var}[\mathbb{E}(\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon} \mid \mathbf{W}, \boldsymbol{\theta})] - V_{\boldsymbol{\theta}} - V_W \\
 &= \text{Var}[\mathbb{E}(\boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{W}) \mathbb{E}(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}) + \mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon} \mid \mathbf{W})] - V_{\boldsymbol{\theta}} - V_W \quad ((\boldsymbol{\beta} \perp \boldsymbol{\theta}), (\boldsymbol{\theta} \perp \mathbf{W}) \text{ et } (\boldsymbol{\epsilon} \perp \boldsymbol{\theta})) \\
 &= \text{Var}[\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon}] - V_{\boldsymbol{\theta}} - V_W \\
 &= \text{Var}[\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\theta}] + \text{Var}[\boldsymbol{\epsilon}] - V_{\boldsymbol{\theta}} - V_W
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

Or, nous avons, d'après [55] :

$$\text{Var}[\beta\theta] = \hat{\beta}^T \text{Var}[\theta] \hat{\beta} + \mathbb{E}(\theta)^T \cdot \text{Var}[\beta] \cdot \mathbb{E}(\theta) + \text{Tr}(\text{Var}[\theta] \cdot \text{Var}[\beta]) \quad (\text{C.14})$$

En utilisant les expressions des termes V_θ (cf. C.5) et V_W (cf. C.7), il est possible de réécrire le terme $V_{W,\theta}$ décrit par l'équation (C.13) de la façon suivante :

$$V_{W,\theta} = \text{Tr}(\text{Var}[\theta] \cdot \text{Var}[\beta]). \quad (\text{C.15})$$

On obtient :

$$V_{W,\Theta} = \frac{n_{sim} - p}{n_{sim} - p - 2} \cdot \hat{\sigma}^2 \text{Tr} \left(\begin{bmatrix} \frac{(\theta_{max}^1 - \theta_{min}^1)^2}{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{(\theta_{max}^p - \theta_{min}^p)^2}{12} \end{bmatrix} (\Theta^T \Theta)^{-1} \right). \quad (\text{C.16})$$