

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES	i
NOMENCLATURE	iii
LISTE DES FIGURES	vi
LISTE DES ANNEXES	vii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : GENERALITES.....	3
1.1 Description de la méthode des éléments finis	3
1.1.1 Principe général.....	3
1.1.2 Maillage et discrétisation	5
1.1.3 :Linéarisation	7
1.2 Equations de Navier Stokes	8
1.2.1 Quelques outils différentiels et intégraux	8
1.2.2 Equation de continuité	10
1.2.3 Equation de conservation de la quantité de mouvement.....	12
CHAPITRE 2 : MATERIELS ET METHODES.....	15
2.1 Matériels	15
2.1.1 Matlab	15
2.1.2 Free fem++.....	15
2.2 Méthodes.....	15
2.2.1 Position du problème	15
2.2.2 Discrétisation en temps.	17
2.2.3 Formulation variationnelle.....	18
CHAPITRE 3 : RESULTATS ET DISCUSSIONS.....	24
3.1 Résultats.....	24
3.1.1 Situations observées avec des vitesses spécifiques.....	24
3.1.2 Coefficient de traînée du cylindre en fonction de nombre de Reynolds	31
3.2 Discussions	31
3.2.1 Différent régime de l'écoulement autour du cylindre	32
3.2.2 Champ de vitesses et champ de pression	36
3.2.3 Comparaison	37
CONCLUSION.....	39

LISTES DES ACRONYMES

EDP : Equations aux Dérivées Partielles

C_D : Coefficient de traînée

MEF : Méthode des Eléments Finis



NOMENCLATURE

Notations latines

a : Accélération

g : Accélération de la pesanteur

h : la plus grande dimension d'un élément

divu : Divergence de la vitesse

$\frac{d}{dt}$: Dérivée par rapport au temps t

v : Fonction test

f : Force de volume gravité

$a(u,v)$: Forme bilinéaire

L : Longueur caractéristique

m : Masse du fluide

Re : Nombre de Reynolds

x, u, p :Nouvelle valeur longueur, vitesse, pression

$\| \cdot \|$: norme

p : Pression

P : le degré du polynôme décrivant le côté ou l'arête

p^n, p^{n+1} : Pression à l'itération n

Notations grecques

ε_{ij} : Composante du tenseur des déformations

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: Coordonnées barycentriques

Ω : Domaine fluide

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$: Domaine sur la frontière

ρ : Masse volumique du fluide

$\overline{\delta}$: Tenseur des Contraintes

\overline{I} : Tenseur unité

$\overline{\tau}$: Tenseur des Contraintes de viscosité

τ_k :Triangulation du domaine

t : Variable temps

μ : viscosité dynamique

u : vitesse du fluide

ν : viscosité cinématique

U: vitesse caractéristique

$u|_{\Gamma}$: vitesse à la frontière

Les opérateurs :

div: Opérateur divergence

$\vec{\nabla} = \overrightarrow{grad}$: Opérateur gradient

$\Delta = div(\overrightarrow{grad})$: Opérateur laplacien

Les espaces fonctionnels :

V : espaces de Banach

$K \subset V$: sous ensemble non vide

$L^2(\Omega)$: Espace des fonctions de carré sommable

$$H_0(\Omega) : \{v \in H(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

$$H^1(\Omega) : \left\{ u \in L^2(\Omega) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d \right. \right\}$$

$$H_0^1(\Omega) : \{u \mid u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma} = 0\}$$

$$V(\Omega) : \{v \in H_0(\Omega), \nabla \cdot v = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

$$M_h = \left\{ v_h \in C^0(\Omega_h); \forall k \in \{1, \dots, nbt\} v_h|_{T_k} \in P^1 \right\}$$

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\Omega_h); \forall k \in \{1, \dots, nbt\} v_h|_{T_k} \in P^2 \right\}$$

\mathbb{R} : corps des nombres réels.

LISTE DES FIGURES

Figure 1: Ecoulement unidirectionnel.....	11
Figure 2: Présentation du domaine.....	16
Figure 3: Repérage du domaine	24
Figure 4: : Champ de vitesse pour une vitesse d'entrée $U_m=0,15$	25
Figure 5: Champ de pression pour une vitesse d'entrée $U_m=0,15$	26
Figure 6: Champ de vitesse pour une vitesse d'entrée $U_m=1,5$	27
Figure 7: : Champ de pression pour une vitesse d'entrée $U_m=1,5$	28
Figure 8:: Champ de vitesse pour une vitesse d'entrée $U_m=1,5$	29
Figure 9: Champ de pression pour une vitesse d'entrée $1,5$	30
Figure 10: Coefficient de trainée en fonction de Reynolds.....	31
Figure 11: Vecteur champ de vitesse pour $Re=10$	33
Figure 12: Vecteur Champ de vitesses pour $Re=100$	34
Figure 13: Vecteur champ de vitesse pour $Re=1000$	35
Figure 14: Coefficient de trainée en fonction de Reynolds issue de la littérature	37
Figure 15: comparaison entre C_D expérimentale et littérature	38

LISTE DES ANNEXES

A₁ : Problème variationnelle abstrait : théorème de Lax-Milgram

A₂ : Coordonnées barycentriques

Rapport-Gratuit.com

INTRODUCTION

L'écoulement des fluides en présence d'un obstacle est largement utilisé dans l'industrie, et son application est extrêmement variée. Beaucoup de travaux de recherche ont été réalisés pour modéliser l'écoulement autour des obstacles. Nous pouvons les rencontrer dans le cas des problèmes d'environnement liés à la dispersion des polluants à travers les routes, les ailettes de refroidissement des engins thermiques, les chicanes des échangeurs de chaleur ou des capteurs solaires, les canalisations urbaines, etc.. Pour cela, plusieurs expériences dans le domaine ont été réalisées et confrontées aux méthodes numériques. Pour cette dernière, une large gamme de méthodes mathématiques ont été développées afin de s'approcher de la réalité de l'écoulement et de fournir le maximum d'information qui peuvent se produire.

La **problématique** est la suivante : Comment se comporte alors un écoulement face à un obstacle ?

L'étude de l'écoulement autour d'un obstacle peut se faire suivant deux approches :

L'approche numérique où l'on simule l'écoulement en s'appuyant sur un modèle mathématique ; et l'approche expérimentale où on doit acquérir des mesures sur un banc d'essai.

- L'approche numérique consiste à discrétiser l'équation gouvernant l'écoulement par une méthode numérique en utilisant différentes formulations ;

- L'approche expérimentale peut être traitée suivant deux aspects, le premier aspect est qualitatif où on utilise les techniques de visualisation pour analyser les différentes structures tourbillonnaires naissantes au sein de l'écoulement. Le deuxième aspect est quantitatif où les zones de recirculation en aval de l'obstacle sont quantifiées en

fonction des paramètres dynamiques de l'écoulement tels que le nombre de Reynolds.

Ce qui nous intéresse ici c'est l'approche numérique. Ceci nous amène à notre travail intitulé : «Simulation numérique d'un écoulement face à un obstacle cylindrique par la méthode des éléments finis ».

L'**objectif** principal de ce mémoire est de développer un code de simulation numérique afin de déterminer les paramètres(vitesse et pression) d'un écoulement face à un obstacle.

La structure de ce travail est divisée en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à une étude théorique où nous allons décrire la méthode des éléments finis, suivi par l' établissement des équations de Navier stokes.

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire nous allons citer les matériels utilisés puis développer la méthode de résolution du problème .

Au dernier chapitre, nous allons donner les résultats suivis par des discussions. Enfin, ce travail s'achèvera par une conclusion et une perspective

CHAPITRE 1 : GENERALITES

1.1 Description de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments-finis (MEF) est une méthode d'approximation numérique de solutions de problèmes aux limites statiques ou dynamiques tels que :

- La diffusion thermique.
- La mécanique des milieux continus (solides et fluides).
- L' électromagnétisme.

mais en fait, tous les problèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) aux limites se résolvent par le MEF. Il s'agit, comme dans toutes les méthodes numériques, de trouver une approximation discrète. Bref, la résolution d'un problème différentiel aux limites linéaire, a toujours besoin d' une formulation variationnelle associée équivalente et c'est ainsi que nous pouvons calculer une approximation de la solution en projetant sur un espace de dimensions finies, ce qui revient à résoudre un système linéaire(Grégoire Allaire Analyse Numérique et optimisation)[10]

1.1.1 Principe général

Considérons un domaine Ω (typiquement une portion de l'espace) dont la frontière est notée $\delta\Omega$ ou Σ . Nous cherchons à déterminer une fonction u définie sur Ω , qui est une solution d'une équation aux dérivées partielles (ÉDP) pour des conditions aux limites données. La méthode des éléments finis (MÉF) permet de résoudre de manière discrète et approchée ce problème ; nous cherchons une solution approchée « suffisamment » fiable.(Méthode des éléments-finis par l'exemple Daniel Choi LMNO Groupe Mécanique Modélisation Mathématique et Numérique Université de Caen, Bld Maréchal Juin, 14032 Caen Cedex, France. Version Avril 2010) [1]

La discrétisation consiste à « découper » le domaine Ω , c'est-à-dire à chercher une solution du problème sur un domaine polygonal ou polyédrique par morceaux ; il y a donc une redéfinition de la géométrie. Une fois la géométrie approchée, il faut choisir un espace d'approximation de la solution du problème. Dans la MÉF, cet espace est défini à l'aide du maillage du domaine (ce qui explique aussi pourquoi il est nécessaire d'approcher la géométrie). Le maillage du domaine permet d'en définir un pavage dont les pavés sont les éléments finis.

Sur chacun des éléments finis, il est possible de linéariser l'ÉDP, c'est-à-dire de remplacer l'équation aux dérivées partielles par un système d'équations linéaires, par approximation. Ce système d'équations linéaires peut se décrire par une matrice ; il y a donc une matrice par élément fini. Cependant, les conditions aux frontières sont définies sur les frontières du système global et pas sur les frontières de chaque élément fini ; il est donc impossible de résoudre indépendamment chaque système. Les matrices sont donc réunies au sein d'une matrice globale. Le système d'équations linéaires global est résolu par l'ordinateur (des systèmes simples peuvent être résolus à la main et constituent en général des exercices d'apprentissage).

L'ÉDP est résolue aux nœuds du maillage, c'est-à-dire que la solution est calculée en des points donnés (résolution discrète) et non en chaque point du domaine Ω . Cela nécessite de pouvoir interpoler, c'est-à-dire déterminer les valeurs en tout point à partir des valeurs connues en certains points. On utilise en général des fonctions polynomiales. (Projet : Cours DEA C++ et éléments finis. Présenté à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) par Nadia MHIOUAH et Eric DALISSIER) [3]

Un élément fini est la donnée d'une cellule élémentaire et de fonctions de base de l'espace d'approximation dont le support est l'élément qui est défini de manière à être interpolant

Nous voyons ici poindre trois sources d'erreur, c'est-à-dire d'écart entre la solution calculée et les valeurs réelles :

- la modélisation de la réalité : le domaine Ω correspond en général à des pièces matérielles, le calcul se fonde sur des versions idéales (sans défaut) des pièces, de la matière et des conditions aux limites ; cette source d'erreur n'est pas spécifique à la méthode des éléments finis, et peut être prise en compte par la méthode contrainte-résistance ;
- la géométrie idéale et continue est remplacée par une géométrie discrète, et les valeurs sont interpolées entre des points ; plus les points sont espacés, plus la fonction d'interpolation risque de s'écarter de la réalité, mais à l'inverse, un maillage trop fin conduit à des temps de calculs extrêmement longs et nécessite des ressources informatiques (en particulier mémoire vive)

importante, il faut donc trouver un compromis entre coût du calcul et précision des résultats ;

- s'agissant de calcul numérique, il se produit inévitablement des erreurs d'arrondi, les nombres étant représentés par un nombre fini d'octets.

Toute l'habileté de l'ingénieur consiste à maîtriser ces erreurs notamment :

- en simplifiant la géométrie (*defeaturing*), en enlevant des détails qui se situent loin des zones que l'on veut étudier et ayant une faible influence sur le résultat ;
- en choisissant des maillages adaptés, par exemple, des maillages de type poutre pour des pièces élancées, ou de type coque pour des pièces fines, en découpant la pièce pour pouvoir faire des maillages réguliers sur certaines zones, en affinant le maillage dans les zones critiques...
- en ayant un regard critique sur le résultat.

Bien qu'il existe de nombreux logiciels exploitant cette méthode et permettant de « résoudre » des problèmes dans divers domaines, il est important que l'utilisateur ait une bonne idée de ce qu'il fait, notamment quant au choix du maillage et du type d'éléments qui doivent être adaptés au problème posé : aucun logiciel ne fait tout pour l'utilisateur, et il faut toujours garder un œil critique vis-à-vis de solutions approchées. Pour cela il existe des indicateurs d'erreur et des estimateurs d'erreur qui permettent d'ajuster les différents paramètres.

Une fois la solution trouvée, il reste cependant à déterminer les caractéristiques de la méthode ainsi développée, notamment l'unicité de l'éventuelle solution ou encore la stabilité numérique du schéma de résolution. Il est essentiel de trouver une estimation juste de l'erreur liée à la discrétisation et montrer que la méthode ainsi écrite converge, c'est-à-dire que l'erreur tend vers 0 si la finesse du maillage tend elle aussi vers 0.

Dans le cas d'une ÉDP linéaire avec opérateur symétrique (comme l'est l'opérateur laplacien), il s'agit finalement de résoudre une équation algébrique linéaire, inversible dans le meilleur des cas.

1.1.2 Maillage et discrétisation

➤ Maillage

La méthode des éléments finis repose sur un découpage de l'espace selon un maillage. D'habitude l'on choisit un maillage carré ou triangulaire mais rien n'interdit

de choisir des maillages plus complexes. Il n'est pas non plus nécessaire que le maillage soit régulier et l'on a tendance à resserrer le maillage près des endroits d'intérêt (par exemple aux endroits où l'on pense que la solution va beaucoup varier) ; cependant, il faut veiller à avoir des éléments faiblement distordus (se rapprocher d'un polygone régulier). Plus ce maillage est resserré, plus la solution que l'on obtient par la méthode des éléments finis sera précise et proche de la « vraie » solution de l'équation aux dérivées partielles. (Grégoire Allaire Analyse Numérique et optimisation) [10]

Nous appelons traditionnellement h la plus grande dimension d'un élément (le diamètre de la sphère dans laquelle s'inscrit l'élément), et p le degré du polynôme décrivant le côté ou l'arête ($p = 1$ pour des côtés/arêtes droits, $p = 2$ pour des côtés/arête présentant une courbure).

Dans l'idéal, le maillage doit donc épouser les contours $\delta\Omega$ du domaine. Si $\delta\Omega$ est courbe, alors on peut :

- soit utiliser des éléments plus petits, on parle de raffinement de type h ;
- soit utiliser des éléments dont les côtés (en 2D) ou arêtes (en 3D) sont courbes, on parle de raffinement de type p .

Lorsque le degré des polynômes p est élevé, on parle de méthode des éléments spectraux.

Nous devons après prendre une base de fonctions « adaptées » au maillage. Plusieurs choix sont alors possibles. En général, les fonctions de base utilisées pour les éléments finis sont interpolantes, c'est-à-dire que les valeurs nodales sont les valeurs des grandeurs inconnues aux nœuds.

➤ Discrétisation

Soit le maillage M et la base $b=(e_1,...e_n)$ associée. Puisque la condition de Dirichlet impose des fonctions nulles aux bords, on utilise uniquement la sous-base b limitée aux points intérieurs de Ω (Cahouet J. and Chabard J. P. . Somefast 3-D solvers for the generalized Stokes) [18] .

Nous cherchons la solution \bar{u} du problème discrétisé ainsi :

$$\bar{u} \in V_n^0 \mid \forall v \in V_n^0; a(\bar{u}, v) = L(v)$$

Avec V_n^0 espace discret ; $a(\bar{u}, v)$ bilinéaire en v et $L(v)$ linéaire en v

Or dans cet espace discrétisé, dire que tout vecteur v vérifie la proposition précédente est équivalent à dire que tous les vecteurs de la base vérifient la proposition. Si l'on décompose la solution \bar{u} dans la base des e_i intérieurs, en composantes u_i , on obtient :

$$\forall j \in [1, \dots, n] \sum_{i=1}^n u_i a(e_i, e_j) = L(e_j)$$

L'idée est que quand le maillage se resserre et que le nombre de fonctions de base n tend vers l'infini (et que l'espace engendré par cette base V_n^0 tend vers V_0), les solutions u_n devront converger vers la solution u de l'équation aux dérivées partielles de départ.

1.1.3 : Linéarisation

Sur chacun des éléments finis, il est possible de linéariser l'ÉDP, c'est-à-dire de remplacer l'équation aux dérivées partielles par un système d'équations linéaires, par approximation. Ce système d'équations linéaires peut se décrire par une matrice ; il y a donc une matrice par élément fini. Cependant, les conditions aux frontières sont définies sur les frontières du système global et pas sur les frontières de chaque élément fini ; il est donc impossible de résoudre indépendamment chaque système. Les matrices sont donc réunies au sein d'une matrice globale. Le système d'équations linéaires global est résolu par l'ordinateur (des systèmes simples peuvent être résolus à la main et constituent en général des exercices d'apprentissage).

L'ÉDP est résolue aux nœuds du maillage, c'est-à-dire que la solution est calculée en des points donnés (résolution discrète) et non en chaque point du domaine Ω . Cela nécessite de pouvoir interpoler, c'est-à-dire déterminer les valeurs en tout point à partir des valeurs connues en certains points. Les fonctions polynomiales sont généralement utilisées .

Un élément fini est la donnée d'une cellule élémentaire et de fonctions de base de l'espace d'approximation dont le support est l'élément, et défini de manière à être interpolant (Sébastien Tordeux et Victor Péron : Analyse numérique fondamentale. UNIVERSITE DE PAU, MASTER 1 MMS, 2013-2014. <http://stordeux.perso.univpau.fr/COURS/AN1.pdf>)[6]

1.2 Equations de Navier Stokes

Les équations de Navier-Stokes est l'une des plus importantes de toute la physique. Si elle n'a pas la chance d'être aussi connue que $E = m.c^2$, elle nous sert pourtant à prédire la météo, simuler les océans, optimiser les ailes des avions et même améliorer le réalisme des jeux vidéos. Le principal objectif de ces équations est de décrire le mouvement des fluides visqueux newtoniennes. Puisqu'un fluide peut être un liquide ou un gaz, nous comprenons que les équations de Navier-Stokes concernent beaucoup de phénomènes qui nous entourent. Nous allons établir ces équations à partir de l'équation de continuité et de conservation de la quantité de mouvement.

1.2.1 Quelques outils différentiels et intégraux

Nous allons rappeler quelques outils utiles sur les opérateurs différentiels intervenant en mécanique des fluides et les différentes formules d'intégration et dérivation utilisées pour la modélisation des équations de Navier-Stokes.

➤ Opérateurs différentiels

Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 1$, de frontière $\partial\Omega$ régulière... On considère les fonctions $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ régulière avec $u(x) = (u_1, \dots, u_d)$ pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

Nous allons définir alors les opérateurs différentiels suivants

- Opérateur ∇ ("nabla") :

- $\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_d} \right) \in \mathbb{R}^d$ est le gradient de v (vecteur)

- $\nabla u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_d}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_d}{\partial x_d} \end{pmatrix}$ est la matrice Jacobienne

de u (taille dx dx)

- $(u \cdot \nabla)u = \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in R^d$ est un vecteur

- Divergence :

- $\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \in R$ est un scalaire

- Si $M = M(x)$ désigne une matrice de taille $d \times d$ définie pour $x \in R$, alors

$$\operatorname{div} M = \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial M_{1j}}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^d \frac{\partial M_{dj}}{\partial x_j} \right) T \in R^d \text{ est un vecteur et } (\operatorname{div} M)_i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j} \text{ pour } 1 \leq i \leq d$$

- Laplacien (vectoriel): $\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in R^d$ est un vecteur

On a aussi les formules suivantes :

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$$

$$\operatorname{div}(v \cdot u) = v \cdot \operatorname{div} u + \nabla v \cdot u$$

$$\nabla(f \cdot g) = f \nabla g + g \nabla f \quad (f \text{ et } g \text{ sont des fonctions scalaires})$$

➤ Formules d'intégration

- Formules de Green:

Pour toutes fonctions scalaires $v, w : \Omega \subset R^d \rightarrow R$ régulières, on a

$$-\int_{\Omega} \Delta w \cdot v \, dx = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial w}{\partial n} v \, d\sigma, \text{ où } n \text{ est la normale unitaire extérieure à } \partial \Omega.$$

Pour toutes fonctions vectorielles $V, W : \Omega \subset R^d \rightarrow R^d$ régulières, on a

$$-\int_{\Omega} \Delta W \cdot V \, dx = \int_{\Omega} \nabla W : \nabla V \, dx - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial W}{\partial n} \cdot V \, d\sigma, \text{ où } n \text{ est la normale unitaire extérieure à } \partial \Omega.$$

$$\text{Avec } \nabla W : \nabla V = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

➤ **Formules de la divergence :**

Pour toute fonction vectorielle $v: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ régulière, on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot n d\delta, \text{ où } n \text{ est la normale unitaire extérieure à } \partial\Omega$$

Pour toute fonction vectorielle $v: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ régulière, on a

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} v dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot \nabla f dx + \int_{\partial\Omega} f \cdot v \cdot n d\delta, \text{ où } n \text{ est la normale unitaire extérieure à } \partial\Omega$$

➤ **Formule de transport de Reynolds**

Equation de Jacobi. Soit une fonction vectorielle $u: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ régulière avec $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Le flot X associé à u (encore appelé fonction caractéristique) est défini comme la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau}(\tau; t, x) = u(X(\tau; t, x), \tau) \\ X(t; t, x) = x \end{cases}$$

La caractéristique $X(t; t, x) = x$ représente la position à l'instant τ d'une particule se trouvant en x à l'instant t

1.2.2 Equation de continuité

Il est facile d'imaginer que dans tout volume, en l'absence de sources ou de puits, tout ce qui entre doit sortir et inversement. C'est ce qu'illustrent ces équations de conservation. Considérons un volume élémentaire, fixé dans l'espace, de fluide de densité ρ . La masse de ce volume élémentaire s'écrit :

$$m = \rho \cdot \Delta_x \cdot \Delta_y \cdot \Delta_z \tag{1.1}$$

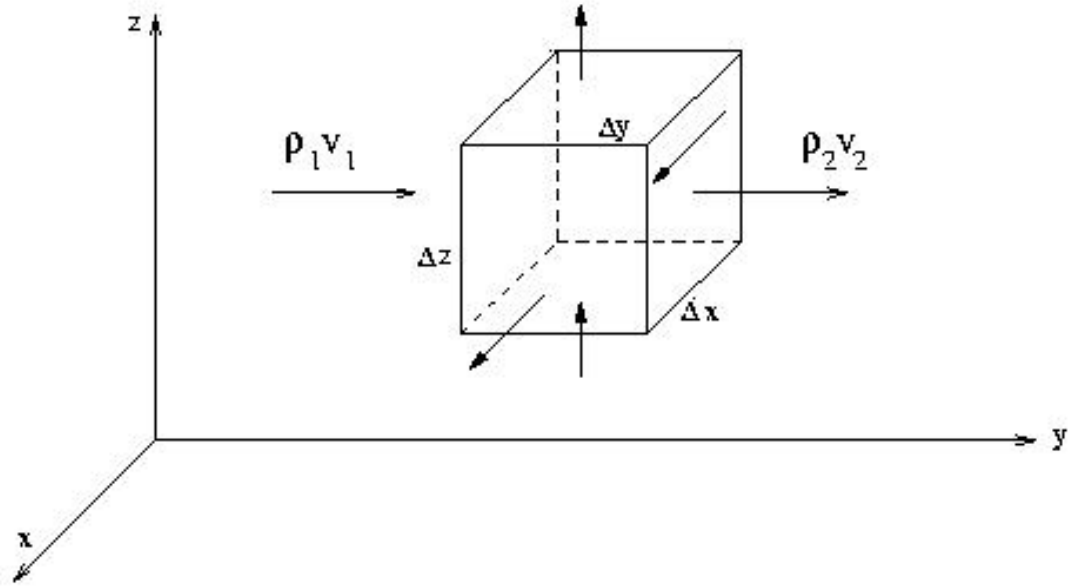


Figure 1: Ecoulement unidirectionnel

Considérons, pour simplifier, un écoulement unidirectionnel (selon Ox par exemple) à travers ce volume. Le débit massique (flux de masse) s'écrit dans la direction Ox (ce qui entre est positif, ce qui sort est négatif):

- débit massique entrant:

$$Q_1 = \frac{\Delta_m}{\Delta_t} = \rho_1 \cdot u_1 \cdot \Delta_y \cdot \Delta_z \quad (1.2)$$

- débit sortant:

$$Q_2 = \rho_2 \cdot u_2 \cdot \Delta_y \cdot \Delta_z \quad (1.3)$$

D'où la variation de masse, à l'intérieur du volume élémentaire, par unité de temps:

$$\frac{\Delta_m}{\Delta_t} = \frac{\Delta(\rho \cdot \Delta_x \cdot \Delta_y \cdot \Delta_z)}{\Delta_t} = \rho_1 \cdot u_1 \cdot \Delta_y \cdot \Delta_z - \rho_2 \cdot u_2 \cdot \Delta_y \cdot \Delta_z \quad (1.4)$$

Les dimensions du volume fluide étant supposées constantes dans le petit intervalle de temps considéré, il vient:

$$\frac{\Delta_\rho}{\Delta_t} = \frac{\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2}{\Delta_x} \quad (1.5)$$

Qui peut s'écrire si les dimensions du volume tendent vers l'infiniment petit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \quad (1.6)$$

Appliquant ce même raisonnement dans les 3 directions, nous pouvons alors écrire l'équation de conservation de la masse (aussi appelée équation de continuité):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.7)$$

Soit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.8)$$

Une convergence (divergence) doit être compensée par une compression (dilatation) du fluide.

La dérivée totale de la masse volumique $\rho(x, y, z, t)$ s'écrit:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (1.9)$$

En combinant ces deux équations on obtient:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.10)$$

Soit

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.11)$$

Pour un fluide incompressible le premier terme est nul et l'équation de continuité pour un fluide incompressible s'écrit:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.12)$$

1.2.3 Equation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement se déduit de la relation fondamentale de la dynamique (Arnold Reusken Numerical Methods for the Navier-Stokes equations January 6, 2012) [2]

$$m \vec{a} = \sum \vec{F} \quad (1.13)$$

Les forces extérieures agissant sur $\Omega(t)$ sont :

- Poids du volume de fluide : $\int_{\Omega(t)} \rho \vec{g} dV$
- Force agissant sur la surface : $\int_{\Gamma(t)} \vec{T}(\vec{n}) dS$ où \vec{n} normale à l'extérieur à $\Gamma(t)$

\vec{T} est une contrainte liée aux force de pression et une contrainte liée aux effets visqueux.

Soit :

$$\int_{\Gamma(t)} \vec{T}(\vec{n}) dS = \int_{\Gamma(t)} \vec{\delta}(\vec{n}) dS \quad (1.14)$$

Où $\vec{\delta}$ est un tenseur de contrainte

En utilisant le théorème de transport pour une grandeur vectorielle, le théorème de la divergence, l'équation de continuité et la définition de la dérivée particulaire.

L'équation de conservation de quantité de mouvement est de la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} \vec{u} \right) = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \vec{\delta} \quad (1.15)$$

Pour obtenir l'équation de Navier stokes nous allons introduire la loi de comportement pour le tenseurs de contraintes.

La loi de comportement de fluide se traduit par une relation entre les contraintes et la déformation .La loi de comportement la plus simple est une loi linéaire de la forme (Jacques PADET, 2008)[8] :

$$\vec{\delta} = -p \vec{I} + \eta \text{div} \vec{u} \vec{I} + 2\mu \vec{D} \quad (1.16)$$

$$\text{Avec } \vec{D} = \frac{1}{2} \left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right]$$

η : viscosité de dilatation de fluide

Donc l'équation de Navier Stokes sous forme tensorielle s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \vec{\nabla} \vec{u} \right) = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} (-p \vec{I} + \eta \text{div} \vec{u} \vec{I} + 2\mu \vec{D}) \quad (1.17)$$

Remarque : Lorsque $\eta \text{div}\vec{v}$ n'est pas négligeable, c'est-à-dire que la masse volumique est fortement variable, on admet assez souvent la relation de stokes

$$\eta = -\frac{2}{3}\mu \quad (\text{Jacques PADET, 2008})[8]$$

Donc :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right) = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \left(-p + \eta \text{div}\vec{u} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (1.18)$$

Pour tous fluides incompressibles $\text{div}\vec{u} = 0$;

Pour alléger l'écriture nous allons omettre les vecteurs, donc on a :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) + \nabla p - \mu \Delta u = f \quad \text{avec } f = \rho g \quad (1.19)$$

Nous considérons ici l'écoulement dans un plan horizontal donc $f=0$

Finalement l'équation qui décrit l'écoulement d'un fluide visqueuse incompressible est définie par :

$$\begin{cases} \nabla u = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) + \nabla p - \mu \Delta u = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

CHAPITRE 2 : MATERIELS ET METHODES

Dans ce chapitre nous allons décrire les outils numériques pour que nous puissions traiter les équations précédentes et après nous allons présenter les méthodes de discrétisation de ces équations.

2.1 Matériels

2.1.1 Matlab

Matlab est un logiciel de calcul numérique produit par MathWorks. Il est disponible sur plusieurs plateformes. Matlab est un langage simple et très efficace, optimisé pour le traitement des matrices, d'où son nom. Matlab contient également une interface graphique puissante, ainsi qu'une grande variété d'algorithmes scientifiques. Nous pouvons enrichir Matlab en ajoutant des « toolbox », profilées pour des applications particulières (traitement des images, analyses statistiques, optimisation, etc.).

Dans ce mémoire nous allons utiliser le logiciel matlab pour représenter la variation du coefficient de traînée en fonction de nombre de Reynolds.

2.1.2 Free fem++

Free fem++ est un logiciel Open Source gratuit permettant de résoudre numériquement des équations différentielles par éléments finis. Il possède son propre langage de script, inspiré du C++, pour décrire le type de problème différentiel, les équations aux dérivées partielles et les conditions initiales et aux limites. Il peut ainsi résoudre des problèmes dits multi-physiques, présentant des non-linéarités, en bi-comme en tri-dimensionnel, sur des maillages pouvant aller au million de nœuds (ordinateur de calcul standard) jusqu'à quelques milliards de nœuds (gros système multiprocesseurs dédié au calcul).

2.2 Méthodes

2.2.1 Position du problème

Soit un fluide incompressible de vitesse $u \in H^1(\Omega)^2$ et de pression $p \in L^2(\Omega)$, solution des équations de Navier-Stokes incompressibles dans un domaine de R^2 . L'objectif ici est de déterminer les paramètres (vitesse et pression) de l'écoulement face à l'obstacle. L'écoulement va de la gauche vers la droite (Fig.2)

$$\begin{cases} \nabla u = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u \right) + \nabla p - \mu \Delta u = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

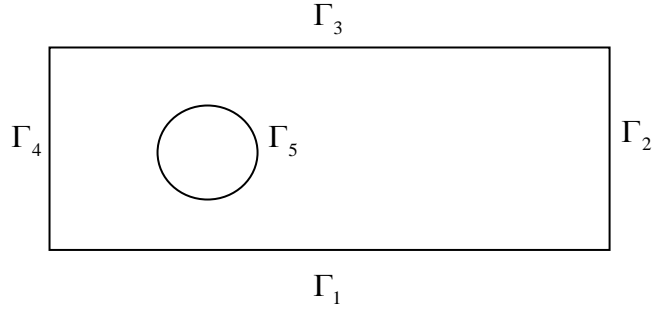


Figure 2: Présentation du domaine

Définissons les bords du domaine en utilisant la figure 2 :

Γ_1 le bord inférieur

Γ_2 le bord de sortie

Γ_3 le bord supérieur

Γ_4 le bord d'entrée

Γ_5 le bord de l'obstacle

Avec les conditions aux bords notre système d'équations devient :

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u \right) + \nabla p - \mu \Delta u = 0 \\ \nabla u = 0 \\ u_{\Gamma_1} = u_{\Gamma_3} = u_{\Gamma_5} = 0 \\ u_{\Gamma_4} = g(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

Afin de mettre en évidence le rapport des forces de viscosité $\nu \Delta u$ sur les forces d'inertie $(u \cdot \nabla) u$, il est nécessaire d'écrire les équations de Navier-Stokes sous forme adimensionnée. Nous allons introduire une vitesse caractéristique $U \in \mathbb{R}$ de l'écoulement étudié ainsi qu'une longueur caractéristique L . Considérons alors le temps caractéristique $T = L / U$ et posons :

$$x = \frac{x}{L}; \tilde{t} = \frac{t}{T}; u(x, \tilde{t}) = \frac{u(x, t)}{U}; p(x, \tilde{t}) = \frac{p(x, t)}{\rho U^2}$$

Dans ce cas notre système d'équations devient :

$$\begin{cases} \nabla u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u - \frac{1}{R_e} \Delta u + \nabla p = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Omettons les tildes et remplaçons $\frac{1}{R_e} = \nu$ donc nos équations deviennent :

$$\begin{cases} \nabla u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u - \nu \Delta u + \nabla p = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2.2 Discrétisation en temps.

Nous allons d'abord définir la caractéristique $X = X(\tau; t, x)$ associée au champ de vitesse u , vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau}(\tau; t, x) = u(X(\tau; t, x), \tau) \\ X(t; t, x) = x \end{cases} \quad (2.5)$$

La caractéristique $X(t; t, x) = x$ représente la position à l'instant τ d'une particule se trouvant en x à l'instant t . L'introduction des caractéristiques permet de faire apparaître la dérivée matérielle de la vitesse dans les équations de Navier-Stokes et d'absorber ainsi la non linéarité. On a :

$$\frac{d}{d\tau} [u(X(\tau; t, x), \tau)] = \left(\frac{dX}{d\tau}(\tau; t, x) \cdot \nabla \right) u(X(\tau; t, x), \tau) + \frac{\partial u}{\partial \tau}(X(\tau; t, x), \tau) \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{d\tau} [u(X(\tau; t, x), \tau)]_{\tau=t} = (u \cdot \nabla) u + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.7)$$

D'après la relation (2.7) l'équation (2.4) devient :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} [u(X(\tau; t, x), \tau)]_{\tau=t} + \nabla p - \mu \Delta u = 0 \\ \nabla u = 0 \\ u_{\Gamma_1} = u_{\Gamma_3} = u_{\Gamma_5} = 0 \\ u_{\Gamma_4} = g(x) \end{cases} \quad (2.5)$$

Passons maintenant à la discrétisation

$$\begin{cases} \frac{U^{n+1} - U^n o X^n}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} - \mu \Delta u^{n+1} = 0 \\ \nabla u^{n+1} = 0 \\ u_{\Gamma_1}^{n+1} = u_{\Gamma_3}^{n+1} = u_{\Gamma_5}^{n+1} = 0 \\ u_{\Gamma_4}^{n+1} = g((n+1)\tau) \end{cases} \quad (2.6)$$

Posons $\Delta t = \tau$ et considérons l'approximation

$$\begin{cases} \frac{U^{n+1} - U^n o X^n}{\tau} + \nabla p^{n+1} - \mu \Delta u^{n+1} = 0 \\ \nabla u^{n+1} = 0 \\ u_{\Gamma_1}^{n+1} = u_{\Gamma_3}^{n+1} = u_{\Gamma_5}^{n+1} = 0 \\ u_{\Gamma_4}^{n+1} = g((n+1)\tau) \end{cases} \quad (2.7)$$

2.2.3 Formulation variationnelle

Les équations linéaires correspondent à la recherche du minimum d'une fonctionnelle grâce au théorème de Lax-Milgram.

Soient :

- $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur (Ω) muni du produit

scalaire : $(u, v) = \int_{\Omega} u v d\Omega$ et la norme correspondant $|v|_0 = (v, v)^{1/2}$

- $H^1(\Omega) = \left\{ v / v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, m \right\}$ muni de la norme

$$\|v\|_1 = \left(|v|_0^2 + \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_0^2 \right)^{1/2}$$

- $H_0^1(\Omega) = \{v / v \in H^1(\Omega)\}$, v_Γ respectant les conditions limites muni de la norme

$$\|v\|_1 = \left(\sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_0^2 \right)^{1/2}$$

- $v = \{v / v \in (H^1(\Omega))^m, \nabla \cdot v = 0\}$. Pour $v \in V$, on note $\|v\|_1^2 = \sum_{i=1}^m \|v_i\|_1^2$

Nous obtenons la formulation variationnelle de notre problème en multipliant (2.8) par une fonction $v \in V$ (fonction test) et en intégrant sur (Ω) :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(\frac{U^{n+1} - U^n \circ X^n}{\tau} + \nabla p^{n+1} - \mu \Delta u^{n+1} \right) v d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} d\Omega = 0 \\ u^{n+1}_{\Gamma_1} = u^{n+1}_{\Gamma_3} = u^{n+1}_{\Gamma_5} = 0 \\ u^{n+1}_{\Gamma_4} = g((n+1)\tau) \end{cases} \quad (2.8)$$

Avec :

$$\begin{aligned} (\Delta u^{n+1}, v) &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 \Delta u_k^{n+1} v_k d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 \nabla \cdot (\nabla u_k^{n+1}) v_k d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 \nabla \cdot (\nabla u_k^{n+1} v_k) d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 \nabla u_k^{n+1} \nabla v_k d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^2 \nabla u_k^{n+1} v_k n \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 \nabla u_k^{n+1} \nabla v_k d\Omega \end{aligned}$$

où n est le vecteur unitaire normal extérieur à la frontière Γ

$$\begin{aligned} (\nabla p, v) &= \int_{\Omega} \nabla p v \cdot d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (p v) d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} p v \cdot n d\Gamma - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v d\Omega \end{aligned}$$

Comme $v \in V$; c'est à dire $\nabla \cdot v = 0$ et $v_\Gamma = 0$ il vient $(\nabla p, v) = 0$ et nous avons la formulation variationnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tau} (u^{n+1} - u^n \circ X^n, v) + a(u^{n+1}, v) + b(v, p^{n+1}) = 0 \\ b(u^{n+1}, q) = 0 \\ u^{n+1}_{\Gamma_1} = u^{n+1}_{\Gamma_3} = u^{n+1}_{\Gamma_5} = 0 \\ u^{n+1}_{\Gamma_4} = g((n+1)\tau) \end{array} \right. \quad (2.9)$$

$$\text{Avec } a(u^{n+1}, v) = \nu \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \nabla v - \nu \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} v \text{ et } b(v, p^{n+1}) = - \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla v + \int_{\partial\Omega} (p^{n+1} \cdot n) v$$

Définition des espaces V_h et M_h

Donnons nous une triangulation régulière de Ω et définissons $\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{nbt} T_k$ et notons $v^i, i \in \{1, \dots, nbv\}$ les sommets de cette triangulation.

Avec T_k élément du triangulation.

Définissons alors les espaces discrets V_h et M_h par :

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\Omega_h); \forall k \in \{1, \dots, nbt\} v_h|_{T_k} \in P^2 \right\}$$

$$M_h = \left\{ v_h \in C^0(\Omega_h); \forall k \in \{1, \dots, nbt\} v_h|_{T_k} \in P^1 \right\}$$

où P^k désigne l'espace vectoriel des polynômes de deux variables de degré global inférieur ou égal à k .

Les fonctions de V_h sont entièrement déterminées par leurs valeurs en chacun des sommets $v^i, i \in \{1, \dots, nbv-1\}$ ainsi qu'aux points milieux de toutes les arêtes du maillage. La dimension de l'espace V_h est égale au nombre total $nbv + nbe - 1$ (où nbe désigne le nombre d'arêtes) des nœuds du maillage. Les fonctions de M_h , elles, sont entièrement déterminées par leurs valeurs en chacun des sommets $v^i, i \in \{1, \dots, nbv-1\}$. La dimension de M_h est égale au nombre total nbv des sommets du maillage

Fonctions de base

Une base de M_h est formée des fonctions de M_h qui valent 1 en un nœud et 0 pour tous les autres.

Dans le cas des polynômes de degré 1 (P^1), nous pouvons utiliser les coordonnées

barycentriques des sommets des triangles comme fonctions de base. Nous noterons

$\lambda^i, i \in \{0, \dots, 2\}$ la fonction de base associée aux sommets v^i du maillage vérifiant :

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, 2\}^2; \lambda_i(v^j) = \delta_{ij}$$

Nous obtenons donc par calcul :

$$\lambda_0 = 1 - x_1 - x_2 \quad (2.10)$$

$$\lambda_1 = x_1$$

$$\lambda_2 = x_2$$

Avec $X = (x_1, x_2)$ un point du maillage

Remarque : Les coordonnées barycentriques sont conservées par transformation affine. Cf (A₂).

Une base de V_h est formée des fonctions de V_h qui valent 1 en un nœud et 0 pour tous les autres.

Nous noterons $\phi^i, i \in \{0, \dots, 2\}$ la fonction de base associée aux sommets v_i du maillage, et $\phi^{3+i}, i \in \{0, \dots, 2\}$ la fonction de base associée aux milieux des arêtes d'indice i du maillage. Par analogie, le milieu de la i -ème arête sera aussi noté v_i , avec $i \in \{3, \dots, 5\}$. On déduit donc :

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, 5\}^2; \phi_i(v^j) = \delta_{ij}$$

$$\phi_0 = \lambda_0(2\lambda_0 - 1) \quad (2.11)$$

$$\phi_1 = \lambda_1(2\lambda_1 - 1)$$

$$\phi_2 = \lambda_2(2\lambda_2 - 1)$$

$$\phi_3 = 4\lambda_1\lambda_2$$

$$\phi_4 = 4\lambda_1\lambda_2$$

$$\phi_5 = 4\lambda_1\lambda_2$$

$$\text{Posons } u_h = \sum_{i=1}^{nbv+nbe} u_i \phi^i(x), \quad v_h = \phi^j(x), \quad p_h = \sum_{i=1}^{nbv} p_i \lambda_i(x) \text{ et } q_h = \lambda^j(x)$$

Donc passons maintenant à la discrétisation

$$b(u_h, q_h) = - \sum_{k=1}^{nbt} \text{div} u_h q_h dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_h} \text{div} \sum_{i=1}^{nbv+nbe} u_i \phi^i(x) \lambda^j(x) \\
&= \sum_{i=1}^{nbv+nbe} u_i \sum_{k=1}^{nbt} -\text{div} \phi^i(x) \lambda^i(x)
\end{aligned}$$

$$b(u_h, q_h) = B_{ij} U \quad (2.12)$$

$$\text{avec } B_{ij} = (B_{x_{ij}}, B_{y_{ij}}) \text{ où } B_{x_{ij}} = -\sum_{k=1}^{nbt} \frac{\partial \phi^j}{\partial x} \lambda^i(x) \text{ et } B_{y_{ij}} = -\sum_{k=1}^{nbt} \frac{\partial \phi^j}{\partial y} \lambda^i(x)$$

$$b(v_h, p_h) = \int_{\Gamma} p_h v_h . n . d\Gamma - \int_{\Omega} p_h \nabla . v_h . d\Omega \text{ or } \int_{\Gamma} p_h v_h . n . d\Gamma = 0$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_k} p_h \nabla . v_h . dx \\
&= -\sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_k} \sum_{i=1}^{nbv} p_i \lambda_i(x) \nabla . \phi^j(x) \\
&= \sum_{i=1}^{nbv} p_i \sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_k} -\lambda_i(x) \nabla . \phi^j(x) dx
\end{aligned}$$

$$b(v_h, p_h) = B_{ij}^T P \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
a(u_h, v_h) &= v \int_{\Omega} \Delta u_h v_h d\Omega \\
&= -v \int_{\Gamma} \nabla u_h v_h . n . d\Gamma + v \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h d\Omega \text{ or } \int_{\Gamma} \nabla u_h v_h . n . d\Gamma = 0 \\
&= v \int_{\Omega} \nabla \sum_{i=1}^{nbv+nbe} u_i \phi^i(x) . \nabla . \phi^j(x) dx \\
&= v \sum_{i=1}^{nbv+nbe} u_i \sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_k} \nabla \phi^i(x) \nabla \phi^j(x) dx \\
a(u_h, v_h) &= A_{ij} . U \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{\tau} (u_h - u_h \circ X), v_h \right] = \frac{1}{\tau} \left[\sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_k} \left(\sum_{i=1}^{nbv+nbe} u_i \phi^i(x) - \sum_{i=1}^{nbv+nbe} u_i \phi^i(x) \circ X \right) \phi^j(x) dx \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{nbv+nbe} u_i \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_k} \phi^i(x) . \phi^j(x) dx - \sum_{i=1}^{nbv+nbe} u_i \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_k} \phi^i(x) \circ X^n \phi^j(x) dx$$

$$\left[\frac{1}{\tau} (u_h - u_h \circ X), v_h \right] = C_{ij} \cdot U - f_{ij} \quad (2.15)$$

D'après (2.15) et (2.16) on a :

$(A_{ij} + C_{ij})U - f_{ij}$, posons $(A_{ij} + C_{ij}) = \mathfrak{R}_{ij}$ donc l'équation (2.10) devient :

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_{ij} U^{n+1} + B_{ij} P^{n+1} = f \\ B_{ij} U^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Sous forme matricielle on a :

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{R}_{ij} & B_{ij}^T \\ B_{ij} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U^{n+1} \\ P^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{ij} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Nous résolvons le problème de Navier Stokes sans pénalité. La méthode itérative classique de Uzawa est décrite par l'algorithme suivante :

A t_n on se donne $p_h^{0,n}$

On calcul u_h^0 à partir de :

$$U_h^{0,n} = \mathfrak{R}^{-1}(f - BP^{0,n}) \quad (2.18)$$

puis on détermine $P_h^{1,n}$ à partir de :

$$P_h^{1,n} = P_h^{0,n} + \alpha B U_h^{0,n} \quad (2.19)$$

où $0 \leq \alpha \leq 2$

$$\forall k \left| P_h^{k+1,n} - P_h^{k,n} \right| \leq 10^{-6}$$

Solution $U_h^{k,n}; P_h^{k,n}$

CHAPITRE 3 : RESULTATS ET DISCUSSIONS

3.1 Résultats

Le domaine d'écoulement est illustrée par la figure 3 ci-dessous :

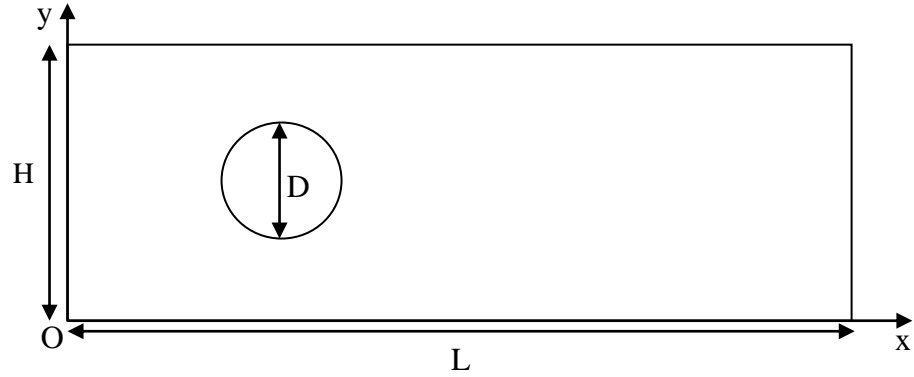


Figure 3: Repérage du domaine

Le profil de vitesse à l'entrée est défini par :

$$U_0 = \frac{4 \cdot U_m \cdot y(H - y)}{H^2} \quad (3.1)$$

avec U_m (vitesse d'entrée) et $H = 0,41[m]$

Nous avons aussi :

$D = 0,1[m]$ (diamètre du cylindre)

$L = 2,2 [m]$ (longueur du domaine rectangulaire)

Les coordonnées du centre du cylindre est $(0,2 ; 0,2)$

3.1.1 Situations observées avec des vitesses spécifiques

- Champ de vitesse et de pression pour une vitesse d'entrée $U_m = 0,15(m / s)$ ce qui correspond à $Re = 10$

- **Champ de vitesses :**

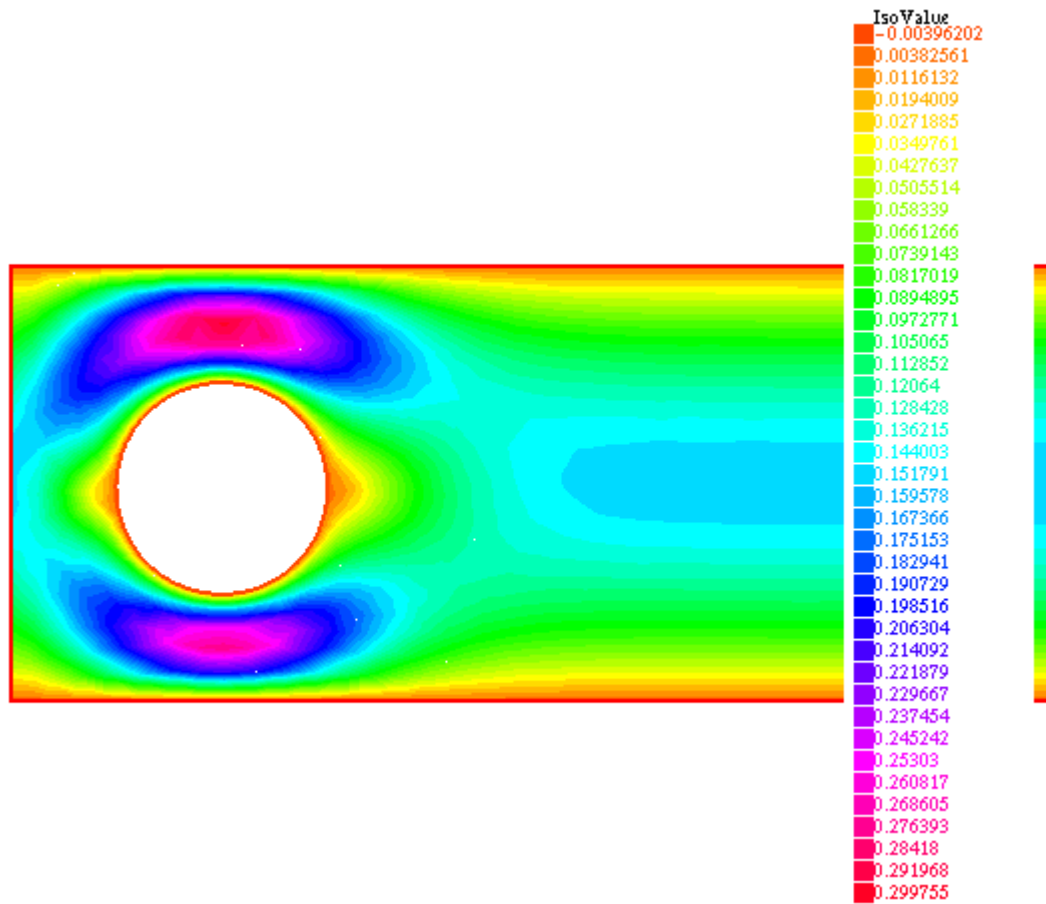


Figure 4: : Champ de vitesse pour une vitesse d'entrée $U_m=0,15$

A droite de la figure 4 nous observons la palette de couleur qui caractérise la distribution du champ de vitesses dans le domaine.

Nous pouvons remarquer une accélération de la vitesse entre l'espace paroi-obstacle, ceci est dû à la diminution de la section du passage du fluide

- Champ de pression

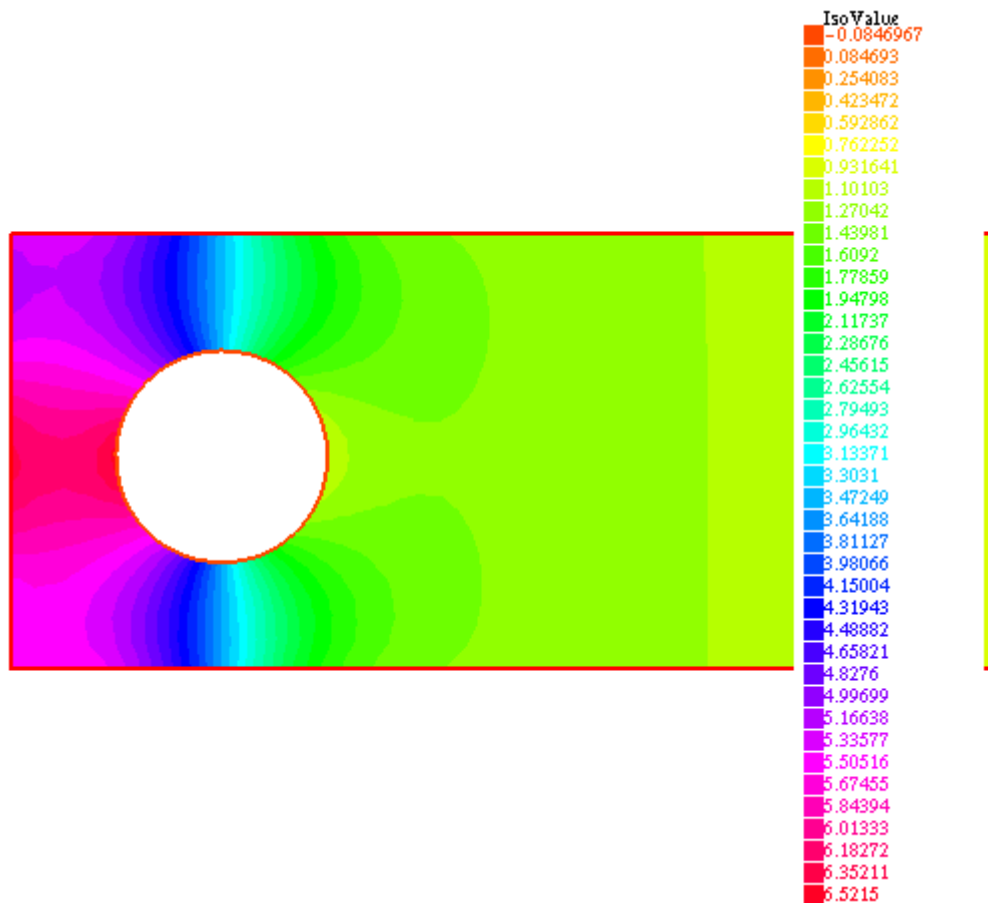


Figure 5: Champ de pression pour une vitesse d'entrée $U_m=0,15$

A droite de la figure 5 nous observons la palette de couleur qui caractérise la distribution du champ de pression dans le domaine.

La légère chute de pression de l'entrée à la sortie due au frottement du fluide avec les parois de l'obstacle et de canal est mise en évidence.

➤ Champ de vitesse et de pression pour une vitesse d'entrée

$$U_m = 1,5(m/s) \text{ ce qui correspond à } Re = 100$$

- **Champ de vitesse :**

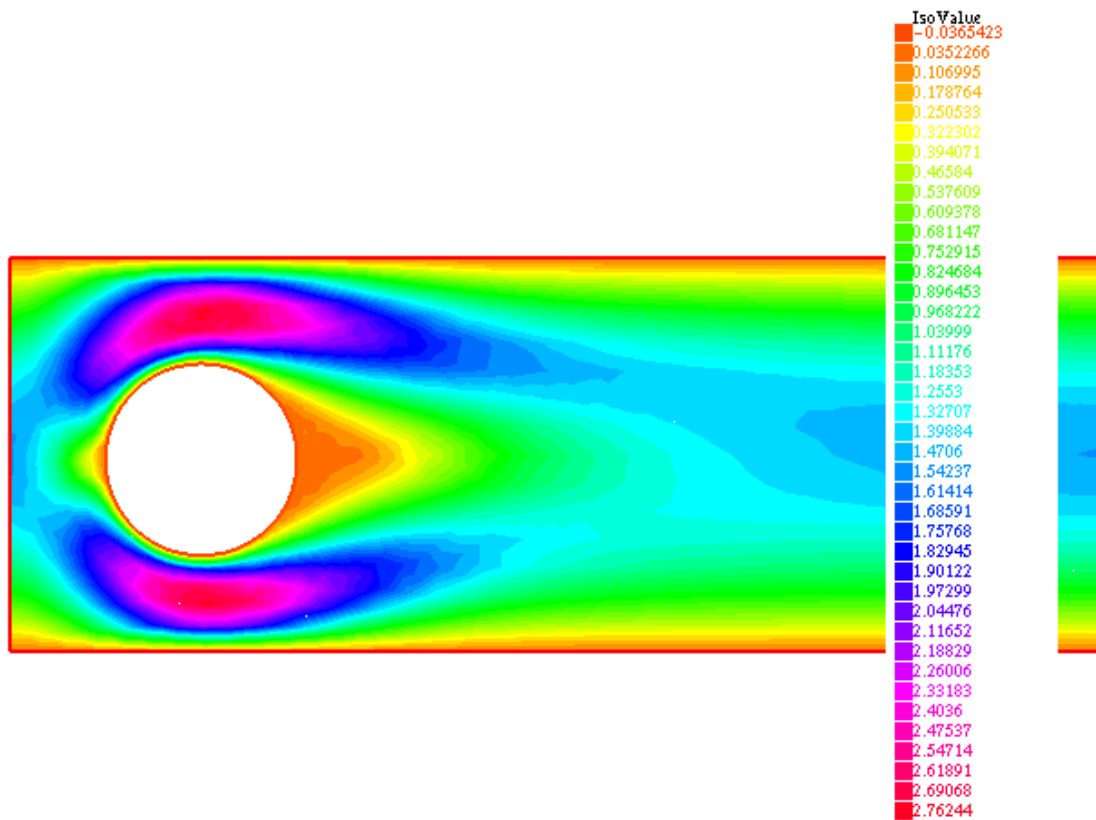


Figure 6: Champ de vitesse pour une vitesse d'entrée $U_m=1,5$

A droite de la figure 6 nous observons la palette de couleur qui caractérise la distribution du champ de vitesses dans le domaine.

Les forces d'inertie qui augmentent et empêchent la couche limite de rester attachée au cylindre et commence à favoriser une dépression dans la zone de sillage

- **Champ de pression**

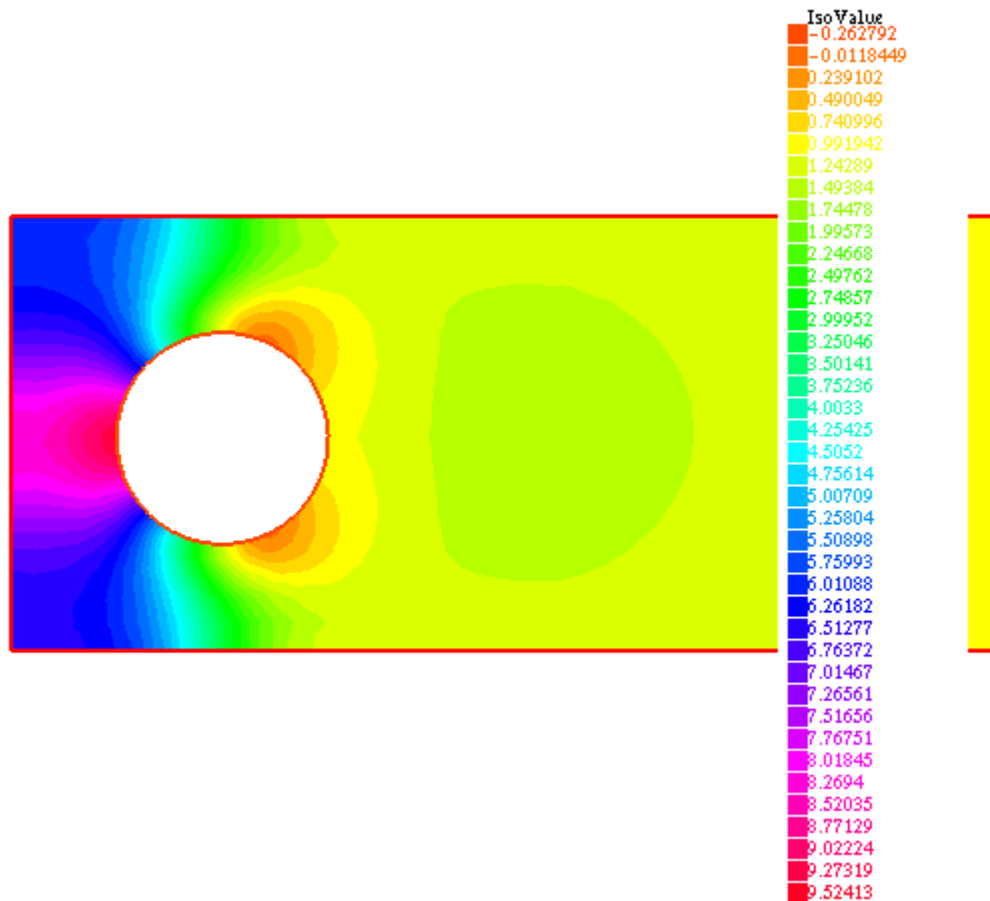


Figure 7: : Champ de pression pour une vitesse d'entrée $U_m=1,5$

A droite de la figure 7 nous observons la palette de couleur qui caractérise la distribution du champ de pression dans le domaine.

La légère chute de pression de l'entrée à la sortie due au frottement du fluide avec les parois de l'obstacle et de canal est mise en évidence.

➤ Champ de vitesse et de pression pour une vitesse d'entrée

$$U_m = 15(m/s) \text{ ce qui correspond à } Re = 1000$$

- **Champ de vitesse :**

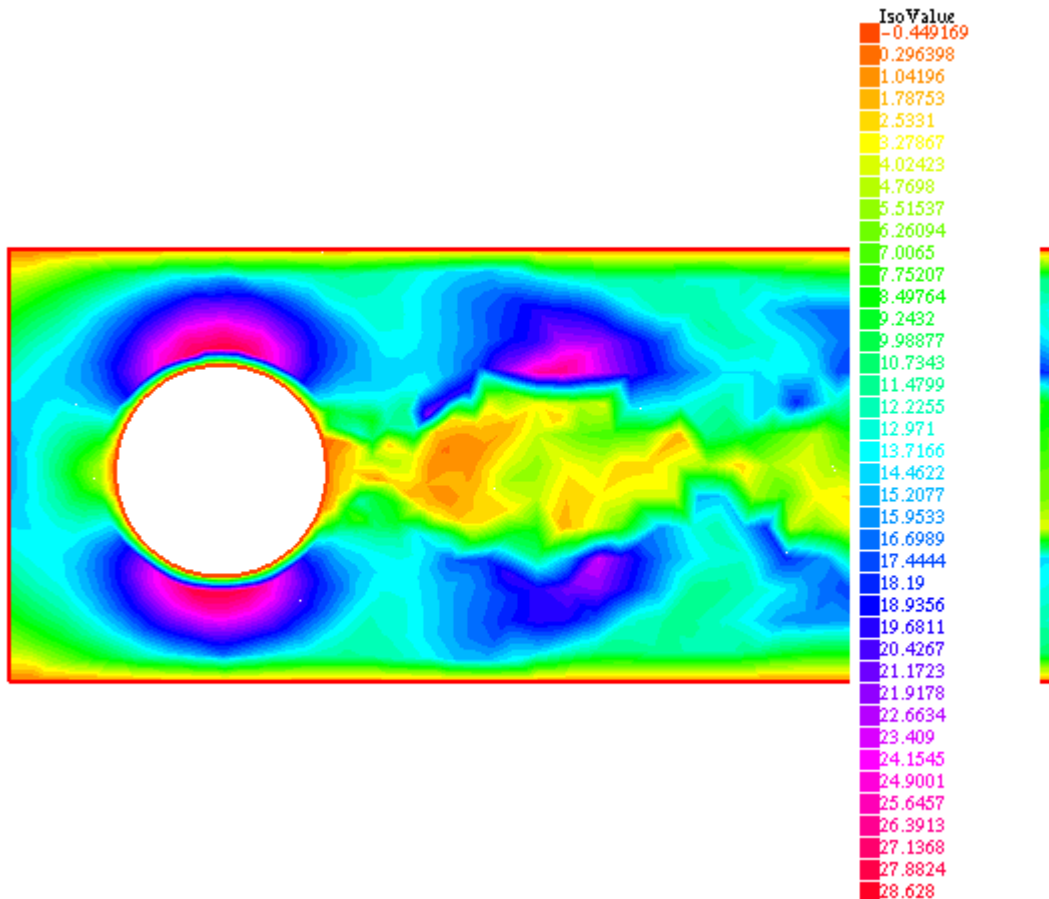


Figure 8:: Champ de vitesse pour une vitesse d'entrée $U_m=1,5$

A droite de la figure 8 nous observons la palette de couleur qui caractérise la distribution du champ de vitesses dans le domaine.

L'écoulement devient instationnaire. Les différentes perturbations possibles ne peuvent plus être amorties et une instabilité se déclenche

- **Champ de pression**

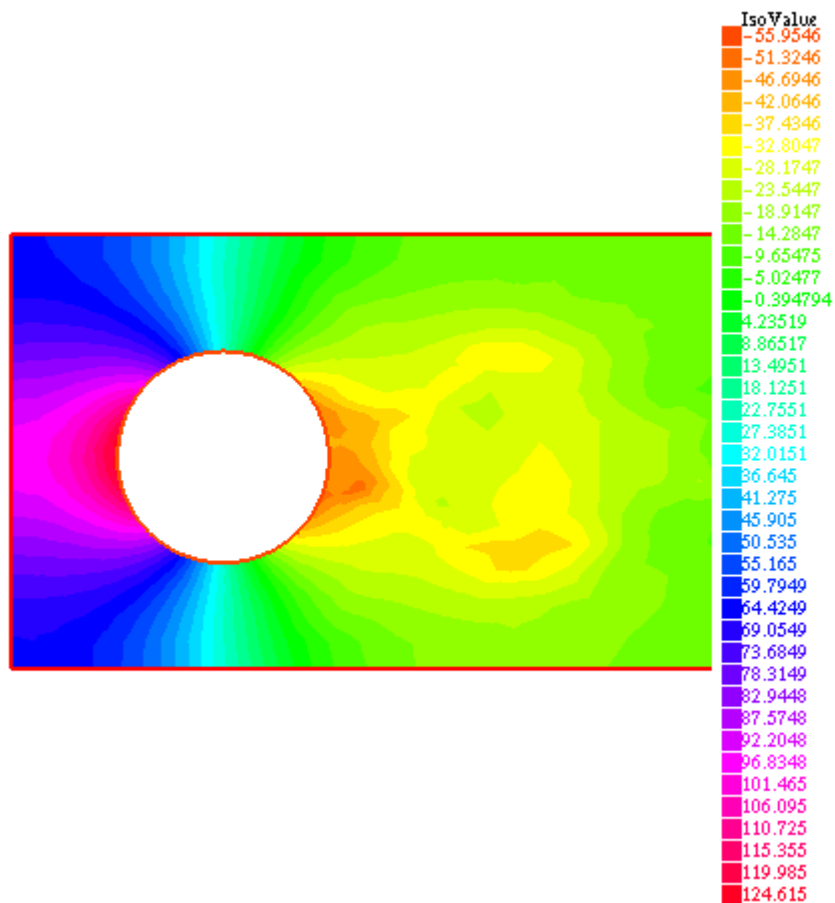


Figure 9: Champ de pression pour une vitesse d'entrée 1,5

A droite de la figure 9 nous observons la palette de couleur qui caractérise la distribution du champ de pression dans le domaine.

La légère chute de pression de l'entrée à la sortie due au frottement du fluide avec les parois de l'obstacle et de canal est mise en évidence.

3.1.2 Coefficient de traînée du cylindre en fonction de nombre de Reynolds

Le coefficient de traînée d'un corps, en mécanique des fluides, en aérodynamique ou en hydrodynamique permet de quantifier la force de résistance d'une surface

(M. Coutanceau, J.R. Defaye).[15]

Pour calculer le coefficient de traînée, nous utilisons la formule suivante :

$$C_D = \frac{F}{\rho U^2 D} \quad (3.2)$$

Où la force F est obtenue par la simulation numérique et C_D le coefficient de traînée , D le diamètre du cylindre, ρ la masse volumique du fluide et U la vitesse en entrée du domaine.

A l'aide du logiciel Matlab, nous pouvons alors tracer la courbe $C_D = f(\text{Re})$

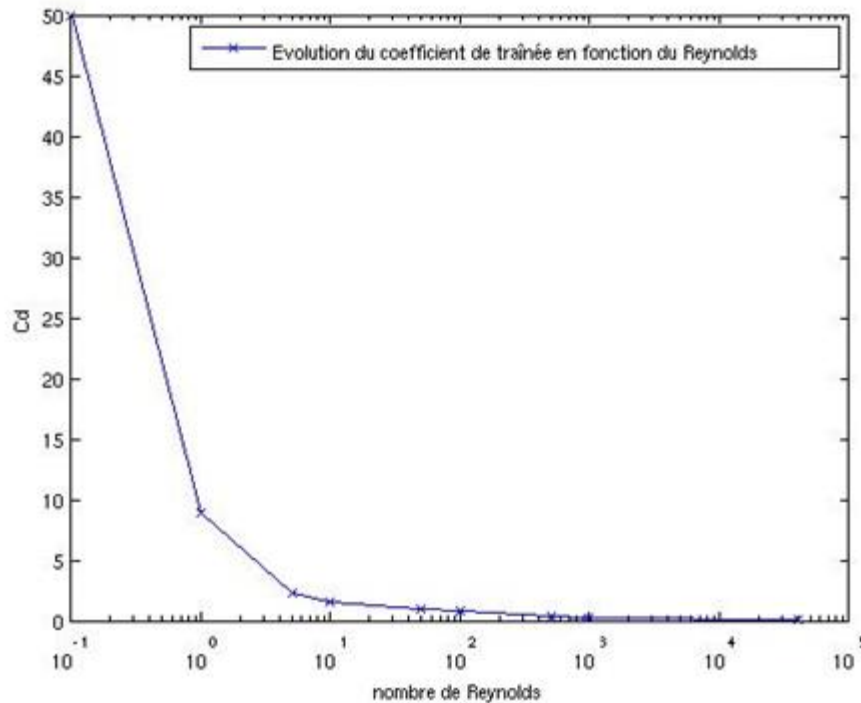


Figure 10: Coefficient de traînée en fonction de Reynolds

3.2 Discussions

L'obstacle utilisé est le cylindre, malgré la simplicité de la géométrie cylindrique, l'écoulement fait intervenir des mécanismes complexes. Ceci a suscité beaucoup d'intérêt pour la communauté scientifique.

3.2.1 Différent régime de l'écoulement autour du cylindre

L'écoulement d'un fluide est considéré incompressible et obéit aux équations de Navier Stokes. L'adimensionnalisation de ces équations avec une échelle de vitesse U_0 et une échelle de longueur D implique que l'écoulement dépend du nombre de Reynold et des conditions limites initiales. L'écoulement autour d'un cylindre est présenté dans ce paragraphe pour des conditions limites telles que la surface du cylindre est la plus lisse possible. Dans ces conditions, l'écoulement autour du cylindre dépend uniquement du nombre du Reynolds défini par :

$R_e = \frac{U_0 \cdot D}{\nu}$ avec $U_0 = \frac{2 \cdot U_m}{3}$, ν (viscosité cinématique du fluide) et D (diamètre du cylindre)

Ce nombre adimensionnel caractérise le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses.

➤ Pour $U_m = 0,15$

On a $Re = 10$, l'écoulement est dit rampant. Les forces de viscosité étant prépondérantes, le fluide reste « attaché » au cylindre et il n'y a pas de décollement (I. Khabbouchi, M.S. Guellouz)[9]. L'écoulement est symétrique par rapport à l'axe central du courant (axe longitudinal) et également entre l'amont et l'aval du cylindre. La figure 5 précédente nous donne le champ de vecteurs vitesses dans le domaine étudié avec $Re=10$.

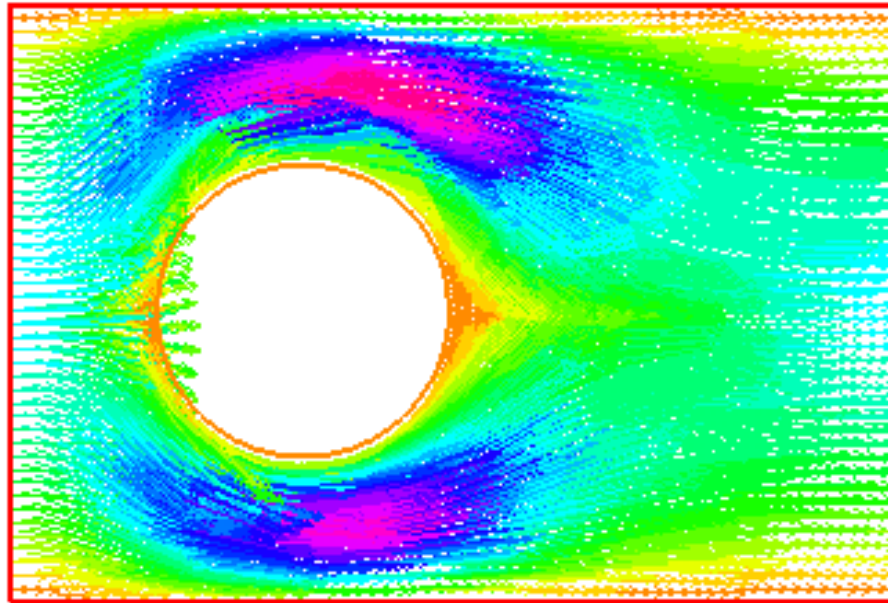


Figure 11: Vecteur champ de vitesse pour $Re=10$

➤ Pour $U_m = 1,5$

Nous avons $Re = 100$ les forces d'inertie qui augmentent et empêchent la couche limite de rester attachée au cylindre et commence à favoriser une dépression dans la zone de sillage (Fig 6 précédent). Ainsi, nous observons un décollement de chaque côté du cylindre (I. Khabbouchi, M.S. Guellouz) [9]. Le point de décollement se déplace vers l'amont du cylindre quand le nombre de Reynolds augmente. L'écoulement est stable et reste stationnaire et symétrique par rapport à l'axe longitudinal. En aval du décollement, se forment deux lobes presque symétriques de recirculation contrarotatifs attachés au cylindre. Le point de rattachement, qui est défini comme le lieu où la vitesse longitudinale est nulle sur l'axe central du sillage, s'éloigne du cylindre quand le nombre de Reynolds augmente.

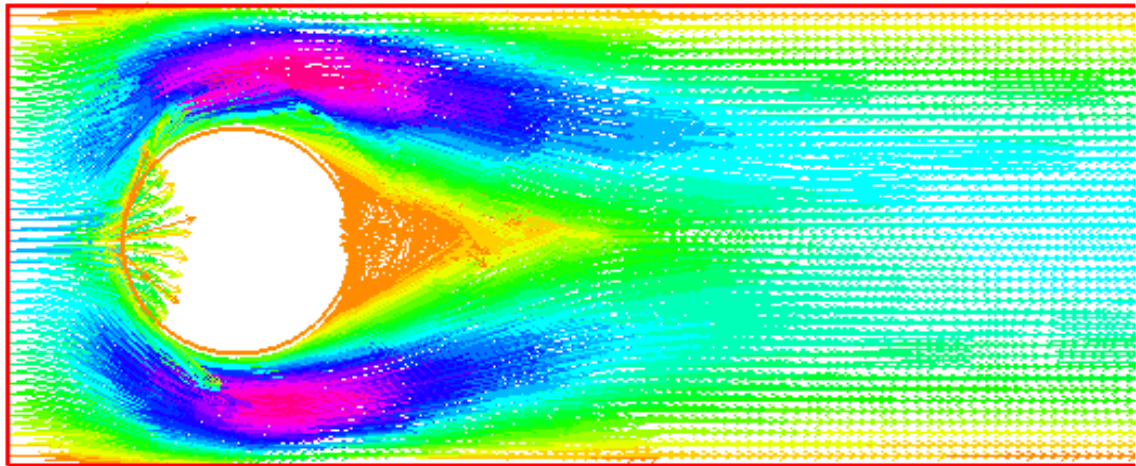


Figure 12: Vecteur Champ de vitesses pour $Re=100$

➤ Pour $U_m = 15$

Nous avons $Re = 1000$ l'écoulement devient instationnaire. Les différentes perturbations possibles ne peuvent plus être amorties et une instabilité se déclenche (Fig 8 précédent)(I. Khabbouchi, M.S. Guellouz)[9]. Les deux tourbillons perdent leur symétrie par rapport à l'axe longitudinal, se détache du cylindre et sont connectés dans le sillage pour former l'allée tourbillonnaire de Von-Karman

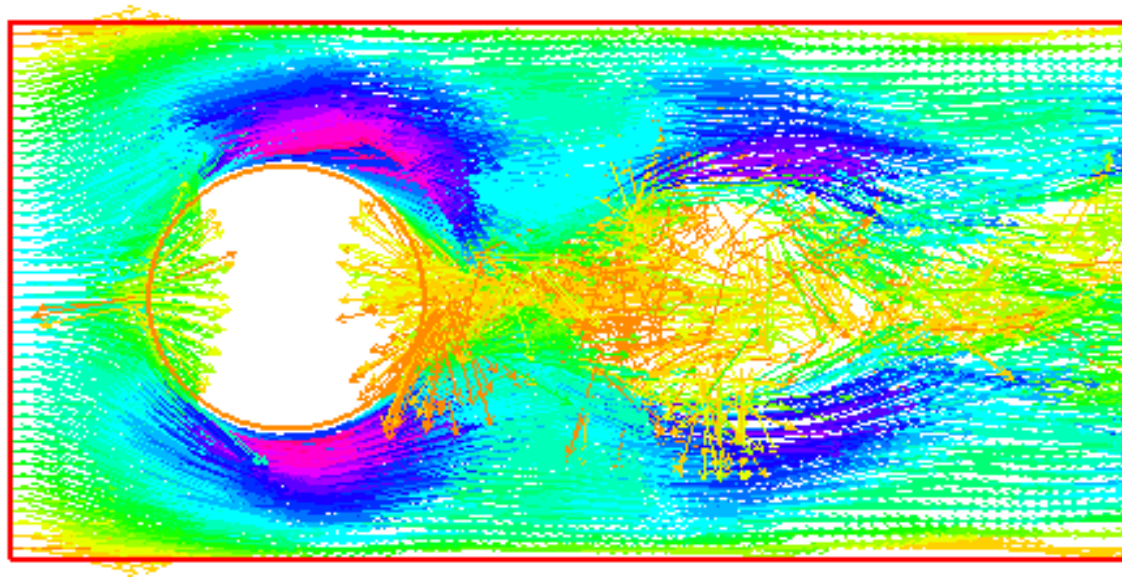


Figure 13: Vecteur champ de vitesse pour $Re=1000$

3.2.2 Champ de vitesses et champ de pression

➤ Champ de vitesses

Les figures (4,6 et 8) précédentes montrent les contours ainsi que le champ de la grandeur de la vitesse et les lignes de courant autour de l'obstacle cylindrique. À l'entrée, la vitesse est uniforme (profil de vitesse imposée), comme condition aux limites.

Nous pouvons remarquer une accélération de la vitesse entre l'espace paroi-obstacle, ceci est dû à la diminution de la section du passage du fluide (M. Coutanceau, J.R. Defaye, Circular cylinder wake configurations: a flow visualization)[15]

. Là, il y a une conversion d'énergie du fluide provoquant un coefficient de frottement important. Puis en aval de l'obstacle et selon le régime et le nombre de Reynolds apparaît un écoulement particulier et entraînant à chaque fois un nouveau point de décollement du fluide avec évidence de changement de la zone de sillage.

Nous pouvons noter aussi que le fluide se détache de l'obstacle en fonction du Nombre de Reynolds.

➤ Champ de pression

Les figures (5,7 et 9) précédentes montrent les contours de la pression statique dans le domaine d'étude. La légère chute de pression de l'entrée à la sortie due au frottement du fluide avec les parois de l'obstacle et de canal est mise en évidence. Le ralentissement de l'écoulement en aval du cylindre induit un gradient de pression inverse (Schafer M. and Turek S. Benchmark computations of laminar flow around a cylinder. Notes Numer. FluidMech., 52:547-566, 1996) [19].

Ce dernier produit un écoulement de retour qui dévie l'écoulement incident et cause ainsi un décollement de chaque côté du cylindre. Plus le nombre de Reynolds augmente, plus les points de décollements remontent vers le point d'arrêt amont. Les deux couches minces décollées de part et d'autre du cylindre se rejoignent à une certaine distance du point d'arrêt en aval du cylindre, sur l'axe de symétrie.

3.2.3 Comparaison

Dans cette dernière paragraphe nous allons comparer le coefficient de traînée théorique à celle que nous avons vue précédemment.

La figure ci-dessous représente le Coefficient de traînée en fonction de Reynolds issu de la littérature cf.(G.Durand, J.E.Wesfried, P.Jenffer.)[5]

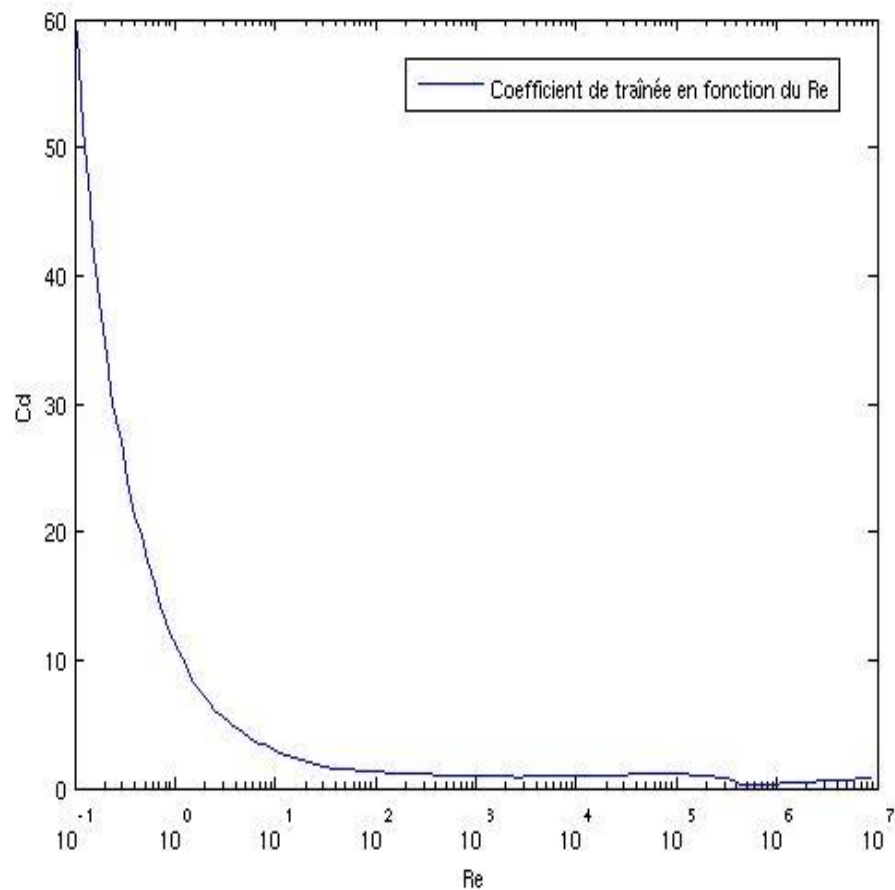


Figure 14: Coefficient de trainée en fonction de Reynolds issue de la littérature

En superposant les courbes précédentes, le résultat est le suivant :

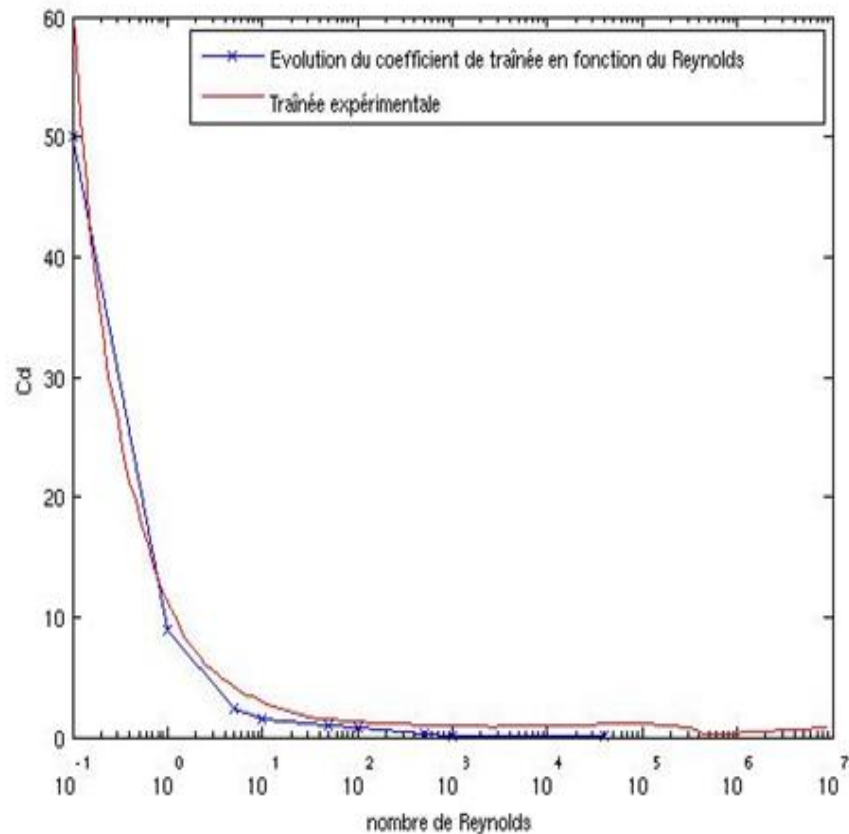


Figure 15: comparaison entre C_D expérimentale et littérature

Les résultats semblent bien coller avec les résultats de la littérature ce qui est satisfaisant pour la suite de notre projet. Pour améliorer ces résultats, il faudrait obtenir plus de points, c'est-à-dire refaire plus de simulations, mais avec un maillage plus raffiné que celui employé.

CONCLUSION

L'étude des écoulements laminaires autour d'un obstacle cylindrique a été l'objectif du présent travail. La simulation numérique par Free fem++ a été adoptée pour un écoulement instationnaire d'un fluide newtonien et incompressible en régime laminaire.

Nous avons adopté cette simulation numérique par la MEF. Après avoir décrit la MEF, nous avons établi les équations de Navier Stokes qui décrit le mouvement du fluide en question. En tant que simulation numérique nous avons cité les matériels nécessaires afin de détailler la méthode de résolution de l'équation de Navier Stokes.

Ce travail, nous a permis de tirer de très riches observations pour différents nombres de Reynolds. Pour $Re = 10$, un écoulement rampant est examiné. Puis à partir de $Re = 100$ les forces d'inertie augmentent et empêchent la couche limite de rester attachée au cylindre et pour $Re = 1000$, l'écoulement devient instationnaire c'est-à-dire que les différentes perturbations possibles ne peuvent plus être amorties et une instabilité se déclenche

Les résultats du champ de pression nous a aussi permis de tracer la courbe de coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds. Ce dernier a été comparé par le coefficient de traînée théorique, et nous avons observé que les résultats restent similaires.

Plusieurs travaux futurs, concernant la simulation numérique de l'écoulement tridimensionnel, instationnaire d'un fluide newtonien et incompressible autour d'un cylindre reste à faire. Il serait très intéressant d'introduire les modèles de turbulence comme perspective.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Méthode des éléments-finis par l'exemple Daniel Choï LMNO Groupe Mécanique Modélisation Mathématique et Numérique Université de Caen, Bld Maréchal Juin, 14032 Caen Cedex, France. Version Avril 2010.
- [2] Arnold Reusken Numerical Methods for the Navier-Stokes equations January 6, 2012
- [3] Projet : Cours DEA C++ et éléments finis. Présenté à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) par Nadia MHIOUAH et Eric DALISSIER
- [4] S.C. Luo, T. Chew, Y.T. Ng. Characteristis of square cylinder wake transition flows, Phys. Fluids, vol. 8, 2549-2559 , 2003.
- [5] G.Durand, J.E.Wesfried, P.Jenffer. *Contrôle d'actif du sillage autour d'un cylindre oscillant*. Ecole Supérieure de Physique et Chimie Industrielles de Paris (ESPCI), PMMH.10 Rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France.2001.
- [6] Sébastien Tordeux et Victor Péron : Analyse numérique fondamentale. UNIVERSITE DE PAU, MASTER 1 MMS, 2013-2014. <http://stordeux.perso.univpau.fr/COURS/AN1.pdf>
- [7] N.Mahir.*Three-dimensional flow around a square cylinder near a wall*.Ocean Engineering. Vol 36 PP 357–367. 2009.
- [8] Jacques PADET, Professeur émérite à l'université de Reims « fluide en écoulement méthode et modèles », second Edition revue et augmenté, septembre 2008
- [9] I. Khabbouchi, M.S. Guellouz. Ecoulement autour d'un cylindre circulaire proche d'une paroi. Laboratoire d'Etude des Systèmes Thermiques et Energétiques Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir Rue Ibn El Jazzar 5019 Monastir, Tunisie. (2008).
- [10] GrégoireAllaire.AnalyseNumériqueetoptimisation
- [11] N.Mahir. *Three-dimensional flow around a square cylinder near a wall*. Ocean Engineering. Vol 36 PP 357–367. 2009.

- [12] N. Roquet, P. Saramito. *An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. VOL192 PP3317–3341.2003.
- [13] A. Roshko, On the development of turbulent wakes from vortex streets, Ph.D. Thesis,
California Institute of Technology Pasadena, California, (1952).
- [14] B. Kumar, S. Mittal, Prediction of the critical Reynolds number for flow past a circular cylinder. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006) 6046–6058.
- [15] M. Coutanceau, J.R. Defaye, Circular cylinder wake configurations: a flow visualization survey, AppliedMechanicsReviews 44 (1991) 255–305.
- [16] Projet cours DEA C++ et élément finis présenté à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) par Nadia MHIOUAH et Eric DALISSIER
- [17] Alberty J., Carstensen C. and Funken S.A. Remarks around 50 lines of matlab: short _nite element implementation. Numer. Algorithms, 20:117-137, 1999.
- [18] Cahouet J. and Chabard J. P. . Some fast 3-D solvers for the generalized Stokes problem. Internat. J. Numer. Methods Fluids, 8:269-295, 1988.
- [19] Schafer M. and Turek S. Benchmark computations of laminar flow around a cylinder. Notes Numer. Fluid Mech., 52:547-566, 1996.
- [20] O. Ladyzhenskaya. Funktionalanalytische Untersuchungen der Navier-Stokesschen Gleichungen. Akademie-Verlag, Berlin, 1965.

- [21] J. Heywood and R. Rannacher. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem, III. smoothing property and higher order estimates for spatial discretization. *SIAM J.Numer. Anal.*, 25:489–512, 1988.
- [22] R. Rannacher. On the numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations. *Z. Angew. Math. Mech.*, 73(9):203–216, 1993.
- [23] C. Schwab. *p and hp–Finite Element Methods*. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [24] P. Wesseling. *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 2000.
- [25] J. Wloka. *Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

ANNEXES

A1 :Problème variationnel abstrait : théorème de Lax-Milgram

On considère dans cette section un espace de Hilbert V et un sous-espace affine fermé $V_{adm} \subset V$. On note V_{admh} l'espace vectoriel associé à V_{adm} , c'est-à-dire

$$\forall u, u^* \in V_{adm}, (u^* - u) \in V_{admh}. \text{ On a naturellement } V_{adm} \subset V$$

Travailler dans un espace affine signifie que le problème aux limites n'est pas homogène. Nous allons voir que via une translation il est facile de se ramener à un problème aux limites homogènes. Néanmoins il est important en pratique de considérer les problèmes non homogène

théorème de Lax-Milgram :

Soit $a(., .)$ une forme bilinéaire continue sur V et soit L une forme linéaire définie et continue sur V , définissant le problème variationnel abstrait suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ tel que} \\ a(u, u^* - u) = L(u^* - u) \forall u^* \in V_{adm} \end{cases} \quad (i)$$

Si a est coercive sur V_{admh} , c'est-à-dire $\exists c > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq c \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V_{admh} \text{ alors (i) est un problème bien posé,}$$

Si de plus a est symétrique, alors l'unique solution de (i) minimise dans V_{adm} la fonctionnelle dite d'énergie :

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \text{ autrement dit } J(u) \leq J(u^*) \forall u^* \in V_{adm}$$

A2 : Coordonnées barycentriques (relatif à un triangle)

Les coordonnées barycentrique d'un point $x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ par rapport aux sommets $a_i (i = 1, 3)$ d'un triangle sont les solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x) a_i = x \\ \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x) = 1 \end{cases}$$

La transformation affine

Soit T le triangle de référence qui a pour sommets les points :

$$a^1 = (1, 0); a^2 = (0, 1); a^3 = (0, 0)$$

Soit T un triangle non-dégénéré de sommets a^1, a^2, a^3 . Il existe une et une seule

matrice inversible B_T de $R^{2,2}$ et un seul vecteur b_T de R^2 tels que

$$\forall 1 \leq i \leq 3, a^i = B_T a^i + b_T$$

En effet, $i = 3$ donne $b_T = a^3$ et $i = 1, i = 2$ donnent la colonne i de B_T : $B_T^i = a^i - a^3$. Donc B_T est inversible si et seulement si T n'est pas dégénéré. On note F_T l'application

affine de R^2 dans R^2

$$\forall x \in R^2, x = F_T(x) = B_T x + b_T$$

F_T est inversible, car B_T l'est et $\forall x \in R^2, x = F_T(x) = B_T x + b_T$

De plus,

$$T = F_T(T) \text{ . On déduit, } \int_{T_k} f(x) dx = |T_K| \int_T f(x) dx$$

SIMULATION NUMERIQUE D'UN ECOULEMENT FACE A UN OBSTACLE CYLINDRIQUE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Résumé :

Ce travail de mémoire, à pour but d'étudier le comportement de l'écoulement du fluide autour d'un obstacle cylindrique, vu à sa large application industrielle. Pour avoir plus d'information sur le phénomène d'écoulement bidimensionnel en régime laminaire, une étude a été entamé par simulation numérique. Dans ce cas, on a développé un code afin de déterminer les paramètres (vitesse et pression) d'un écoulement face à l'obstacle.

Mots clés : écoulement laminaire, fluide, obstacle cylindrique, simulation.

NUMERICAL SIMULATION OF A FLOW FACING A CYLINDRICAL OBSTACLE BY THE METHOD OF FINITE ELEMENTS

Abstract :

The aim of this work is to studying the behaviour of the flow of fluid around cylindrical obstacle, having regarded its wide range of industrial applications.

In order to get more informations about two-dimensional flow phenomena with laminar rate, it was decided to organise a study based on digital simulation.

In this case, we have developed a simulation code to determinate parameters (speed, pressure) of a flow faced an obstacle.

keywords : laminar rate, cylindrical obstacle, simulation, fluid

Encadreur : RASOLOARIJAONA Mamy Nirina, Maître de Conférence	Impétrant : RAHAGASON Manoa Hariliva e-mail : manoharliva@gmail.com Tel : +261343735876 Adress : Lot II A 14 M Amboditsiry
--	---