Table des matières

Abstract

Dans cette thèse, nous examinons plusieurs questions arithmétiques concernant les points périodiques et les multiplicateurs d'une fraction rationnelle.

Nous étudions l'ensemble des paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels deux points donnés $a, b \in \mathbb{C}$ sont simultanément prépériodiques pour le polynôme $f_c \colon z \mapsto z^2 + c$. En combinant des arguments d'analyse complexe et de théorie des nombres, Baker et DeMarco ont montré que cet ensemble de paramètres est infini si et seulement si $a^2 = b^2$. Récemment, Buff a répondu à une de leurs questions, en prouvant que l'ensemble des paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels 0 et 1 sont tous deux prépériodiques pour f_c est égal à $\{-2, -1, 0\}$. Nous complétons la description de ces ensembles quand a et b sont deux entiers tels que $|a| \neq |b|$.

Nous examinons également une conjecture de Milnor concernant les fractions rationnelles dont le multiplicateur en chaque cycle est entier. Nous montrons que la conjecture est vraie dans le cas des polynômes cubiques avec symétries, en prouvant que tout polynôme cubique avec symétries dont tous les multiplicateurs sont entiers est soit une application puissance soit une application de Tchebychev. Nous étudions aussi certaines généralisations de la question de Milnor. Ainsi, nous montrons que tout polynôme unicritique qui n'a que des multiplicateurs rationnels est soit une application puissance soit une application de Tchebychev. Nous prouvons également que toute fraction rationnelle quadratique dont tous les multiplicateurs sont dans l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire donné est une application puissance, une application de Tchebychev ou un exemple de Lattès.

Nous sommes ainsi amenés à étudier les points périodiques et les multiplicateurs d'une fraction rationnelle d'un point de vue algébrique avec les notions de polynômes dynatomiques et de polynômes multiplicateurs. Nous examinons aussi certaines propriétés de ces polynômes, et notamment les coefficients des polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle.

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 37P05, 37P35 ; Secondary 37F10, 37F44.

Introduction

Nous abordons dans cette thèse plusieurs questions concernant les propriétés arithmétiques de certaines suites associées à des systèmes dynamiques complexes. Ce travail s'inscrit ainsi dans le domaine de la dynamique arithmétique, qui est un sujet de recherche relativement récent et très actif au croisement de la dynamique holomorphe et de la théorie des nombres.

Étant donnés une fraction rationnelle $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de degré $d \geq 2$ et un point $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, on s'intéresse à la suite $\left(f^{\circ n}(z_0)\right)_{n\geq 0}$ des itérées de f en z_0. L'ensemble $\{f^{\circ n}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}$ est appelé l'*orbite future* de z_0 pour f.

Certains points jouent un rôle particulièrement important dans l'étude de la dynamique de f. On dit que z_0 est un point *périodique* pour f s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{\circ n}(z_0) = z_0$. Dans ce cas, le plus petit tel entier n est appelé la *période* de z_0 et on dit que l'orbite future de z_0 est un *cycle* pour f. Plus généralement, on dit que z_0 est un point *prépériodique* pour f si son orbite future est finie ou, de manière équivalente, s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^{\circ m}(z_0)$ est périodique pour f. Dans ce cas, le plus petit tel entier m est appelé la *prépériode* de z_0 et on appelle *période* de z_0 la période de $f^{\circ m}(z_0)$.

Une autre notion fondamentale en dynamique holomorphe est celle de multiplicateur d'une fraction rationnelle en un point périodique. Supposons que z_0 est un point périodique pour f avec période n. On appelle *multiplicateur* de f en z_0 l'unique valeur propre λ_0 de l'application tangente $T_{z_0} f^{\circ n}$, qui est un endomorphisme de la droite vectorielle complexe $T_{z_0}\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La fraction rationnelle f a le même multiplicateur en chaque point d'un cycle. De plus, le multiplicateur est invariant par conjugaison : si $g\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est une fraction rationnelle et $\phi\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est une transformation de Möbius telles que $g \circ \phi = \phi \circ f$, alors $\phi(z_0)$ est un point périodique pour g avec période n et multiplicateur λ_0.

Nous étudions ici plusieurs questions liées aux points prépériodiques et aux multiplicateurs d'une fraction rationnelle.

0.1. Entiers simultanément prépériodiques pour un polynôme quadratique

Un sujet récent en dynamique arithmétique est l'étude des intersections improbables, qui tire son origine de la géométrie arithmétique. De manière imprécise, le principe des intersections improbables affirme que des variétés algébriques ne peuvent avoir une intersection plus grande que ce que l'on pourrait attendre à moins que celles-ci ne soient reliées. Le premier résultat inspiré par ce principe en dynamique arithmétique est dû à Baker et DeMarco et concerne les paires de points qui sont simultanément prépériodiques pour un polynôme unicritique.

Fixons un entier $d \geq 2$. Pour $c \in \mathbb{C}$, considérons le polynôme complexe

$$f_c \colon z \mapsto z^d + c\,.$$

Pour $a \in \mathbb{C}$, définissons

$$\mathcal{S}_a = \{c \in \mathbb{C} : a \text{ est prépériodique pour } f_c\}\,.$$

Pour tout $a \in \mathbb{C}$, l'ensemble $\mathcal{S}_a$ est infini dénombrable. On peut alors se demander si les ensembles $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$, sont infinis. Baker et DeMarco ont répondu à cette question, en montrant le résultat suivant :

Théorème 0.1 ([**BD11**, Theorem 1.1]). *Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Alors $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$ est infini si et seulement si $a^d = b^d$.*

Comme Baker et DeMarco l'ont souligné, leur démonstration n'est pas effective. Ainsi, ils ont conjecturé que, lorsque $d = 2$, l'ensemble $\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{S}_1$ est égal à $\{-2, -1, 0\}$. Récemment, Buff a donné une preuve élémentaire de leur conjecture (voir [**Buf18**, Proposition 6]). En examinant les ensembles $\mathcal{S}_a$, avec $d = 2$ et $a \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$, nous complétons ici la description des ensembles $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$, avec $d = 2$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a^2 \neq b^2$. Plus précisément, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 0.2 ([**Hug21b**, Theorem 1.7]). *Supposons que $d = 2$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ sont tels que $|a| < |b|$. Alors*
— *soit $a = 0$, $|b| = 1$ et $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b = \{-2, -1, 0\}$,*
— *soit $a = 0$, $|b| = 2$ et $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b = \{-2\}$,*
— *soit $|a| \geq 1$, $|b| = |a| + 1$ et $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b = \left\{-a^2 - |a| - 1, -a^2 - |a|\right\}$,*
— *soit $|b| > \max\{2, |a| + 1\}$ et $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b = \varnothing$.*

Mentionnons que le théorème 0.1 dû à Baker et DeMarco a été généralisé de différentes manières (voir [**FG20**, Theorem F] et [**GHT13**, Theorem 2.3]). Notons aussi que de nouvelles techniques pour prouver des résultats effectifs en dynamique arithmétique ont été introduites très récemment (voir [**DKY19**] et [**DKY20**]).

0.2. Fractions rationnelles avec multiplicateurs entiers ou rationnels

Nous étudions aussi dans cette thèse certaines questions liées aux multiplicateurs d'une fraction rationnelle. Mentionnons d'abord que certaines questions concernant les points prépériodiques rationnels pour une fraction rationnelle ont été et sont encore beaucoup étudiées en dynamique arithmétique. Par exemple, le résultat ci-dessous est bien connu en dynamique arithmétique (voir [**Nor50**]).

Proposition 0.3. *Soient K un corps de nombres et $f \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$ définie sur K. Alors f n'a qu'un nombre fini de points prépériodiques dans $\mathbb{P}^1(K)$.*

Une conjecture très étudiée en dynamique arithmétique concerne l'existence de bornes uniformes sur le nombre de points prépériodiques rationnels (voir [**MS94**]).

En revanche, les questions analogues liées aux multiplicateurs d'une fraction rationnelle ont reçu beaucoup moins d'attention. Notons que celles-ci ont la propriété d'être bien définies dans le contexte de la dynamique holomorphe, au sens où le multiplicateur est invariant par conjugaison complexe.

Au vu de la proposition 0.3, on peut d'abord se demander s'il existe une fraction rationnelle qui admet une infinité de cycles avec multiplicateur rationnel. Cette question admet une réponse positive. En fait, les *applications puissances* – c'est-à-dire, les fractions rationnelles conjuguées à $z \mapsto z^{\pm d}$, avec $d \geq 2$ – ont un multiplicateur entier en chaque cycle. Les *applications de Tchebychev* – c'est-à-dire, les fractions rationnelles conjuguées à $\pm T_d$, avec $d \geq 2$, où T_d désigne le d-ième polynôme de Tchebychev – ont également cette propriété. Ainsi, on peut se demander si on peut trouver d'autres tels exemples. Nous montrons que la réponse est négative dans le cas des *polynômes unicritiques* – c'est-à-dire, des polynômes conjugués à $f_c\colon z \mapsto z^d + c$, avec $d \geq 2$ et $c \in \mathbb{C}$.

Théorème 0.4 ([**Hug21c**, Theorem 6]). *Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme unicritique dont le multiplicateur en chaque cycle est rationnel. Alors f est soit une application puissance soit une application de Tchebychev.*

Afin de démontrer le théorème 0.4, nous étudions les multiplicateurs d'une fraction rationnelle de manière algébrique avec la notion de polynômes multiplicateurs. Nous nous ramenons ainsi à déterminer l'ensemble des paramètres $c \in \mathbb{C}$ tels que tous les polynômes multiplicateurs de f_c sont scindés sur $\mathbb{Q}$.

En utilisant des arguments similaires, nous montrons également un résultat analogue pour les *polynômes cubiques avec symétries* – c'est-à-dire, les polynômes conjugués à $g_a\colon z \mapsto z^3 + az$, avec $a \in \mathbb{C}$.

Théorème 0.5 ([**Hug21c**, Theorem 8]). *Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme cubique avec symétries dont le multiplicateur en chaque cycle est entier. Alors f est soit une application puissance soit une application de Tchebychev.*

En général, les applications puissances et les applications de Tchebychev ne sont pas les seules fractions rationnelles dont tous les multiplicateurs sont entiers. Les exemples de Lattès flexibles ont également cette propriété. Dans [**Mil06**], Milnor a conjecturé que, réciproquement, toute fraction rationnelle qui a un multiplicateur entier en chaque cycle appartient à l'une de ces trois classes.

On dit qu'une fraction rationnelle $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de degré $d \geq 2$ est un *exemple de Lattès* s'il existe un tore $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$, avec Λ un réseau de $\mathbb{C}$, une application holomorphe $L\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ et une application holomorphe non constante $p\colon \mathbb{T} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tels que $p \circ L = f \circ p$. De plus, si L est de la forme

$$L\colon z + \Lambda \mapsto az + b + \Lambda\,, \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{C}\,,$$

et p est de degré 2, alors on dit que f est un exemple de Lattès *flexible*.

Nous pouvons décrire les multiplicateurs d'un exemple de Lattès en ses cycles. Pour $D \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré, notons A_D l'anneau des entiers du corps $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{D}\right)$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 0.6 ([**Mil06**, Corollary 3.9 et Lemma 5.6]). *Soit f un exemple de Lattès. Alors il existe $D \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré tel que le multiplicateur de f en chaque cycle est dans A_D. De plus, f n'a que des multiplicateurs entiers rationnels si et seulement si il est flexible.*

On peut généraliser la conjecture de Milnor et se demander si les applications puissances, les applications de Tchebychev et les exemples de Lattès sont les seules fractions rationnelles dont tous les multiplicateurs sont dans l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire donné. Nous répondons à cette question dans le cas des fractions rationnelles quadratiques.

Théorème 0.7 ([**Hug21a**, Theorem 9]). *Soient $D \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré et $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une fraction rationnelle quadratique dont le multiplicateur en chaque cycle est dans A_D. Alors f est une application puissance, une application de Tchebychev ou un exemple de Lattès.*

En particulier, comme il n'existe pas d'exemple de Lattès flexible de degré 2, on a le résultat ci-dessous, qui démontre la conjecture de Milnor dans le cas des fractions rationnelles quadratiques.

Corollaire 0.8. *Soit $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une fraction rationnelle quadratique dont le multiplicateur en chaque cycle est entier. Alors f est soit une application puissance soit une application de Tchebychev.*

On peut également poser la question plus générale ci-dessous, qui encadre les théorèmes 0.4, 0.5 et 0.7.

Question 0.9. Soient K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers et $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$ dont le multiplicateur en chaque cycle est dans $\mathcal{O}_K$ – ou K. Alors f est-elle nécessairement une application puissance, une application de Tchebychev ou un exemple de Lattès ?

Mentionnons que Eremenko et van Strien ont étudié les fractions rationnelles dont tous les multiplicateurs sont réels. Ils ont montré que, si $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est une telle fraction rationnelle, alors soit f est un exemple de Lattès flexible soit son ensemble de Julia $\mathcal{J}_f$ est contenu dans un cercle (voir [**EvS11**, Theorem 1]).

0.3. Quelques propriétés des polynômes dynatomiques et des polynômes multiplicateurs

La question 0.9 nous a amené à étudier les points périodiques et les multiplicateurs d'une fraction rationnelle d'un point de vue algébrique. Nous avons ainsi examiné les polynômes dynatomiques et les polynômes multiplicateurs associés à une fraction rationnelle (voir [**MP94**], [**Sil07**] et [**VH92**]).

Étant donnés un polynôme unitaire $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de degré $d \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, le n-ième *polynôme dynatomique* $\Phi_n^f \in \mathbb{C}[z]$ de f est le polynôme unitaire dont les racines sont précisément les points périodiques pour f avec période n – à quelques exceptions bien comprises près. Pour une fraction rationnelle $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de degré $d \geq 2$, on a également des polynômes dynatomiques Φ_n^F, avec $n \in \mathbb{N}^*$, associés à un relevé polynomial homogène $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ de f.

Fixons un entier $d \geq 2$. Dans le cas particulier de la famille des polynômes unicritiques $f_c\colon z \mapsto z^d + c$, les coefficients des polynômes dynatomiques $\Phi_n^{f_c} \in \mathbb{C}[z]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont des polynômes à coefficients entiers en c. On peut alors considérer les polynômes $\Phi_n \in \mathbb{Z}[c, z]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, donnés par $\Phi_n(c, z) = \Phi_n^{f_c}(z)$. On a le résultat ci-dessous, qui a été démontré avec différentes approches.

Théorème 0.10 ([**Bou92**, Chapitre 3, Théorème 1]). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le polynôme Φ_n est irréductible sur $\mathbb{C}$.*

On peut alors se demander quels sont les couples $(n, a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Q}$ tels que le polynôme spécialisé $\Phi_n(c, a) \in \mathbb{Q}[c]$ est réductible. Dans [**Mil14**], Milnor a conjecturé que les polynômes $\Phi_n(c, 0)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$ lorsque $d = 2$. Nous prouvons le résultat ci-dessous, qui montre en particulier que le polynôme $\Phi_n\left(c, \frac{-1}{4}\right)$ est réductible sur $\mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 3$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\nu(n) = \sum_{k \mid n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) d^k \,,$$

où $\mu\colon \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$ désigne la fonction de Möbius.

Proposition 0.11. *Supposons que $d = 2$. Alors il existe des uniques suites $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(B_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathbb{Q}[c]$ telles que*

$$A_1(c) = 1 \quad \text{et} \quad B_1(c) = f_c\left(\frac{-1}{4}\right) - \left(\frac{-1}{4}\right)$$

et, pour tout $n \geq 2$, on a

$$f_c^{\circ(n-1)}\left(\frac{-1}{4}\right) - f_c^{\circ(n-2)}\left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \prod_{k \mid n} A_k(c)$$

et

$$f_c^{\circ(n-1)}\left(\frac{-1}{4}\right) + f_c^{\circ(n-2)}\left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \prod_{k \mid n} B_k(c) \,.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Phi_n\left(c, \frac{-1}{4}\right) = A_n(c) B_n(c)$$

et les polynômes A_n et B_n sont unitaires de degrés $\frac{\nu(n)}{4} - \frac{\mu(n)}{2}$ et $\frac{\nu(n)}{4} + \frac{\mu(n)}{2}$.

Notre démonstration de la proposition 0.11 repose sur la factorisation du polynôme $f_c^{\circ 2}(z) - \left(\frac{-1}{4}\right)$ dans $\mathbb{Q}[c, z]$. Ceci nous a alors naturellement amené à examiner les couples $(n, a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$ pour lesquels la courbe algébrique affine sur $\mathbb{C}$ donnée par $f_c^{\circ n}(z) = a$ est réductible. Nous montrons le résultat d'irréductibilité ci-dessous, qui précise [**FHI+09**, Proposition 2.5] et démontre une observation faite dans [**FHI+09**, Remark 2.6].

Proposition 0.12. *Supposons que $d \neq 2$ ou $a \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{-1}{4}\right\}$. Alors le polynôme $f_c^{\circ n}(z) - a \in \mathbb{C}[c, z]$ est irréductible pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Nous montrons également le résultat complémentaire ci-dessous, qui était aussi conjecturé dans [**FHI+09**, Remark 2.6].

Proposition 0.13. *Supposons que $d = 2$. Alors, pour tout $n \geq 2$, on a*

$$f_c^{\circ n}(z) - \left(\frac{-1}{4}\right) = \left(f_c^{\circ(n-1)}(z) - f_c^{\circ(n-2)}(z) + \frac{1}{2}\right)\left(f_c^{\circ(n-1)}(z) + f_c^{\circ(n-2)}(z) + \frac{1}{2}\right)$$

et les polynômes

$$f_c^{\circ(n-1)}(z) - f_c^{\circ(n-2)}(z) + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f_c^{\circ(n-1)}(z) + f_c^{\circ(n-2)}(z) + \frac{1}{2}$$

sont irréductibles sur $\mathbb{C}$.

Notons que nos démonstrations des propositions 0.12 et 0.13 reposent sur le résultat [**HJM15**, Theorem 2.2], qui concerne l'irréductibilité d'un polynôme composé avec un polynôme unicritique.

Nous avons également étudié les multiplicateurs d'une fraction rationnelle d'un point de vue algébrique. Étant donnés une fraction rationnelle $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de degré $d \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, le n-ième *polynôme multiplicateur* $M_n^f \in \mathbb{C}[\lambda]$ de f est le polynôme unitaire dont les racines sont précisément les multiplicateurs de f en ses cycles avec période n – à quelques exceptions bien comprises près. En particulier, la question 0.9 se ramène à l'étude des fractions rationnelles dont tous les polynômes multiplicateurs sont scindés sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres donné.

Plus généralement, on peut définir les polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle sur un corps quelconque. Fixons un entier $d \geq 2$. Soient $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d$ et $\mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_d$ des indéterminées sur $\mathbb{Z}$, et posons

$$\mathfrak{A} = \mathbb{Z}\left[\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d, \mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_d\right] \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}(x, y) = \left(\sum_{j=0}^{d} \mathfrak{a}_j x^j y^{d-j}, \sum_{j=0}^{d} \mathfrak{b}_j x^j y^{d-j}\right) .$$

Notons aussi $\mathfrak{K}$ le corps des fractions de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{f}\colon \mathbb{P}^1(\mathfrak{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathfrak{K})$ la fraction rationnelle induite par $\mathfrak{F}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les coefficients du polynôme multiplicateur $M_n^{\mathfrak{f}}$ sont des éléments homogènes de degré 0 dans $\mathfrak{K}$ dont les dénominateurs sont des puissances de $\operatorname{res}(\mathfrak{F})$ (voir [**Sil98**, Theorem 4.5] et [**Sil07**, Theorem 4.50]). En d'autres termes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{res}(\mathfrak{F})^{m_n} M_n^{\mathfrak{f}}$ est dans $\mathfrak{A}[\lambda]$. En particulier, ceci montre que les fonctions symétriques élémentaires des multiplicateurs définissent des fonctions régulières sur l'espace des fractions rationnelles de degré d et que l'on peut obtenir les polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle quelconque de degré d par spécialisation des polynômes $M_n^{\mathfrak{f}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Nous montrons le résultat ci-dessous, qui détermine en particulier les plus petits tels entiers m_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\nu(n) = \sum_{k \mid n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) d^k ,$$

où $\mu\colon \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$ désigne la fonction de Möbius.

Théorème 0.14. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le polynôme $\operatorname{res}(\mathfrak{F})^{\frac{\nu(n)}{d}} M_n^{\mathfrak{f}}$ est dans $\mathfrak{A}[\lambda]$ et son coefficient constant n'est pas divisible par $\operatorname{res}(\mathfrak{F})$.*

Afin de prouver le théorème 0.14, nous étudions le comportement asymptotique des multiplicateurs d'une famille de fractions rationnelles complexes de degré d qui dégénère en une fraction rationnelle de degré $d - 1$ vérifiant certaines hypothèses.

Organisation de la thèse

Nous structurons cette thèse en deux parties. Dans la partie 1, qui regroupe les chapitres 1 et 2, nous étudions les points périodiques et les multiplicateurs d'un polynôme, pour lesquels les polynômes dynatomiques et les polynômes multiplicateurs sont plus simples à définir. Dans la partie 2, qui regroupe les chapitres 3 et 4, nous traitons le cas général des fractions rationnelles.

Dans le chapitre 1, nous rappelons les notions de polynômes dynatomiques et de polynômes multiplicateurs d'un polynôme unitaire. Nous étudions plus en détail le cas des polynômes unicritiques. La plupart des résultats de ce chapitre sont déjà connus (comparer à [**Mor96**], [**MP94**] et [**VH92**]).

Dans le chapitre 2, nous étudions plusieurs questions arithmétiques concernant les points prépériodiques et les multiplicateurs d'un polynôme. Dans la section 2.1, nous démontrons la proposition 0.11, qui concerne la réductibilité de spécialisations de polynômes dynatomiques, et les propositions 0.12 et 0.13, qui concernent l'irréductibilité de courbes préimages. Dans la section 2.2, nous étudions les polynômes quadratiques pour lesquels un point donné est prépériodique et nous démontrons le théorème 0.2. Dans la section 2.3, nous examinons la conjecture de Milnor dans le cas des polynômes et nous prouvons les théorèmes 0.4 et 0.5.

Dans le chapitre 3, nous généralisons l'étude algébrique des points périodiques et des multiplicateurs au cas des fractions rationnelles. Plus précisément, nous rappelons la notion de polynômes dynatomiques d'un relevé d'une fraction rationnelle (voir [**Sil07**, Section 4.1]) et nous construisons les polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle (comparer à [**Sil98**, Section 4] et [**Sil07**, Section 4.5]).

Dans le chapitre 4, nous abordons deux questions concernant les multiplicateurs d'une fraction rationnelle. Dans la section 4.1, nous examinons le comportement asymptotique des multiplicateurs de certaines familles de fractions rationnelles qui dégénèrent afin de démontrer le théorème 0.14. Dans la section 4.2, nous prouvons le théorème 0.7, qui démontre en particulier la conjecture de Milnor dans le cas des fractions rationnelles quadratiques.

Première partie

Points périodiques et multiplicateurs d'un polynôme

Chapitre 1

Quelques préliminaires algébriques sur la dynamique d'un polynôme

Nous rappelons ici certaines notions algébriques liées à la dynamique d'un polynôme. Plus précisément, l'objectif de ce chapitre est d'introduire les polynômes dynatomiques et les polynômes multiplicateurs d'un polynôme, qui sont reliés à ses points périodiques et ses multiplicateurs. Comme tout polynôme complexe est conjugué à un polynôme unitaire, nous limitons ici notre étude aux polynômes unitaires. Les polynômes non unitaires étant en particulier des fractions rationnelles, leurs polynômes dynatomiques et polynômes multiplicateurs seront définis dans le chapitre 3. Aussi, afin d'obtenir des résultats sur les coefficients des polynômes dynatomiques et des polynômes multiplicateurs, nous considérons ici des polynômes unitaires à coefficients dans un anneau commutatif quelconque. Enfin, nous étudions plus en détail le cas des polynômes unicritiques.

Décrivons avec plus de détails le contenu de ce chapitre. Soient A un anneau intègre, $f \in A[z]$ un polynôme unitaire de degré $d \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous définissons le n-ième polynôme dynatomique Φ_n^f de f, qui est un polynôme unitaire dans $A[z]$ dont les racines sont – à quelques exceptions près – les points périodiques pour f avec période n. Nous explicitons ensuite ces exceptions en décrivant précisément les racines du polynôme Φ_n^f. Dans le cas où A est de caractéristique nulle, nous donnons aussi les multiplicités de ces racines. Nous définissons ensuite le n-ième polynôme multiplicateur M_n^f de f, qui est un polynôme unitaire dans $A[\lambda]$ dont les racines sont les multiplicateurs de f en ses cycles avec période n – à quelques exceptions près, là encore. Nous explicitons ensuite les racines du polynôme M_n^f, ainsi que leurs multiplicités dans le cas où A est de caractéristique nulle. Dans le cas où $A = \mathbb{Z}[c]$ et $f(z) = z^d + c$, nous étudions plus précisément le polynôme M_n^f, et en particulier ses coefficients et son discriminant. Enfin, nous relions la dynamique de ce dernier polynôme f à celle du décalage dans l'ensemble des suites de racines d-ièmes de l'unité afin de démontrer l'irréductibilité des polynômes Φ_n^f et M_n^f.

La plupart des résultats présentés ici sont déjà connus. Nous incluons néanmoins leurs démonstrations dans l'objectif que ce chapitre puisse servir d'introduction aux polynômes dynatomiques et aux polynômes multiplicateurs d'un polynôme unitaire.

1.1. Espace des polynômes, points périodiques et multiplicateurs

Rappelons ici certaines définitions concernant la dynamique d'un polynôme.

1.1.1. Le cas général. Soit A un anneau commutatif. Dans ce chapitre, A désignera souvent un anneau de polynômes à coefficients entiers. Ceci nous permettra d'étudier la dynamique d'un polynôme dont les coefficients sont des indéterminées et ainsi d'obtenir des résultats sur les coefficients des polynômes dynatomiques et des polynômes multiplicateurs.

Pour $d \in \mathbb{N}$, notons

$$\mathrm{Poly}_d(A) = \{f \in A[z] : \deg(f) = d\}$$

l'ensemble des polynômes de degré d à coefficients dans A et

$$\mathrm{Poly}_d^U(A) = \{f \in A[z] : f \text{ unitaire et } \deg(f) = d\}$$

la partie de $\mathrm{Poly}_d(A)$ formée des polynômes unitaires.

Remarque 1.1. Si B est un anneau commutatif et A est un sous-anneau de B, alors $\mathrm{Poly}_d^U(A)$ est une partie de $\mathrm{Poly}_d^U(B)$ et $\mathrm{Poly}_d(A)$ est une partie de $\mathrm{Poly}_d(B)$ pour tout $d \in \mathbb{N}$. En particulier, si A est un anneau commutatif et $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$, avec $d \in \mathbb{N}$, alors on pourra considérer par exemple l'action de f par évaluation sur tout anneau commutatif B contenant A.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans A est muni d'une loi de composition interne $\circ$ définie par

$$f \circ g(z) = f\left(g(z)\right)$$

Pour $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$, on note

$$f^{\circ n} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} \in \{0\} \sqcup \bigsqcup_{e=0}^{d^n} \mathrm{Poly}_e(A)$$

pour $n \in \mathbb{N}$, avec la convention

$$f^{\circ 0} = I \in \mathrm{Poly}_1^U(A)\,, \quad \text{où} \quad I(z) = z\,.$$

Pour tous $d, e \in \mathbb{N}$, la loi $\circ$ vérifie

$$\mathrm{Poly}_d^U \circ \mathrm{Poly}_e^U(A) \subset \mathrm{Poly}_{de}^U(A)\,,$$

et, si A est intègre, alors on a aussi

$$\mathrm{Poly}_d \circ \mathrm{Poly}_e(A) \subset \mathrm{Poly}_{de}(A)\,.$$

Remarque 1.2. Si A est un anneau commutatif non intègre et $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$ et $g \in \mathrm{Poly}_e(A)$ ne sont pas unitaires, avec $d, e \in \mathbb{N}$, alors le polynôme $f \circ g$ n'est pas nécessairement de degré de. Par exemple, si

$$A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad f(z) = 2z^2 + z \in \mathrm{Poly}_2(A)\,,$$

alors on a $f^{\circ 2} = I$.

Introduisons maintenant la notion de conjugaison. Soit K un corps. Alors $\circ$ est une loi de composition interne sur l'ensemble

$$\mathrm{Poly}_1(K) = \left\{az + b : a \in K^\times,\, b \in K\right\}$$

et celle-ci le munit d'une structure de groupe dont l'élément neutre est I. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le groupe $\mathrm{Poly}_1(K)$ agit sur l'ensemble $\mathrm{Poly}_d(K)$ par l'application

$$\rho_d \colon \mathrm{Poly}_1(K) \times \mathrm{Poly}_d(K) \to \mathrm{Poly}_d(K)$$

définie par

$$\rho_d(\phi, f) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}\,.$$

Pour $d \in \mathbb{N}$, on dit que deux polynômes f et g dans $\mathrm{Poly}_d(K)$ sont *conjugués sur* K s'ils sont dans la même orbite pour l'action ρ_d ou, de manière équivalente, s'il existe $\phi \in \mathrm{Poly}_1(K)$ tel que

$$g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}\,.$$

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, la conjugaison sur K est une relation d'équivalence sur $\mathrm{Poly}_d(K)$.

Plus généralement, pour $d \in \mathbb{N}$, on dit que deux polynômes f et g dans $\mathrm{Poly}_d(K)$ sont *conjugués* s'ils sont conjugués sur une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_d(K)$ l'ensemble quotient de $\mathrm{Poly}_d(K)$ par la relation de conjugaison.

REMARQUE 1.3. Si K est un corps, $d \in \mathbb{N}$ et f et g sont deux polynômes conjugués dans $\mathrm{Poly}_d(K)$, alors f et g ne sont pas nécessairement conjugués sur K. Par exemple, si

$$K = \mathbb{Q}\,, \quad f(z) = -z^3 \in \mathrm{Poly}_3(K) \quad \text{et} \quad g(z) = z^3 \in \mathrm{Poly}_3(K)\,,$$

alors f et g sont conjugués puisque $g(z) = \frac{f(iz)}{i}$ mais ne sont pas conjugués sur K.

Si $f \in \mathrm{Poly}_d^U(K)$, avec $d \in \mathbb{N}^*$, et $\phi(z) = az + b$, avec $a \in K^\times$ et $b \in K$, alors $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est unitaire si et seulement si a est une racine $(d-1)$-ième de l'unité.

REMARQUE 1.4. Si K est un corps, $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K, $d \in \mathbb{N}$ et f et g sont deux polynômes conjugués dans $\mathrm{Poly}_d^U(K)$, alors il n'existe pas nécessairement $\phi \in \mathrm{Poly}_1^U\left(\overline{K}\right)$ tel que $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$. Par exemple, si

$$K = \mathbb{C}\,, \quad f(z) = z^3 - 1 \in \mathrm{Poly}_3(K) \quad \text{et} \quad g(z) = z^3 + 1 \in \mathrm{Poly}_3(K)\,,$$

alors f et g sont conjugués puisque $g(z) = -f(-z)$ mais on a $g \neq \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ pour tout $\phi \in \mathrm{Poly}_1^U\left(\overline{K}\right)$.

Enfin, si K est algébriquement clos, $d \geq 2$ et $f \in \mathrm{Poly}_d(K)$, alors f est conjugué à un polynôme unitaire centré

$$g(z) = z^d + \sum_{j=0}^{d-2} a_j z^j \in \mathrm{Poly}_d(K)\,,$$

et celui-ci est unique à conjugaison par une rotation d'ordre divisant $d-1$ près.

Considérons maintenant l'action d'un polynôme par évaluation. Soit A un anneau commutatif. Pour $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$, le polynôme f induit une application de A dans lui-même par évaluation, que l'on appelle sa fonction polynomiale et que l'on note encore f. De plus, si A est intègre et infini, alors l'application qui à un polynôme à coefficients dans A associe sa fonction polynomiale est injective. En particulier, si A est intègre et $\overline{K}$ est une clôture algébrique du corps des fractions de A, alors un polynôme à coefficients dans A est caractérisé par son action par évaluation sur $\overline{K}$.

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$. On peut alors s'intéresser à la suite des itérées de la fonction polynomiale associée à f en un point et définir les points périodiques pour f comme ceux de sa fonction polynomiale associée. Soit $z_0 \in A$. On appelle *orbite future* de z_0 pour f l'ensemble $\{f^{\circ n}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}$. On dit que z_0 est un point *périodique* pour f s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{\circ n}(z_0) = z_0$. Dans ce cas, le plus petit tel entier n est appelée la *période* de z_0 et on dit que l'orbite de z_0 est un *cycle* pour f. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines du polynôme $f^{\circ n}(z) - z$ sont précisément les points périodiques pour f avec période divisant n. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les points périodiques pour f avec période n sont précisément les racines de $f^{\circ n}(z) - z$ qui ne sont pas racines des polynômes $f^{\circ k}(z) - z$, avec k un diviseur propre de n.

EXEMPLE 1.5. Soit $d \geq 2$ un entier, et posons

$$f_0(z) = z^d \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_0^{\circ n}(z) = z^{d^n}$, et donc

$$f_0^{\circ n}(z) - z = z\left(z^{d^n-1} - 1\right) .$$

Par conséquent, le point 0 est fixe pour f_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les points périodiques pour f_0 avec période n dans $\mathbb{C}^*$ sont précisément les racines $(d^n - 1)$-ièmes de l'unité qui ne sont pas une racine $\left(d^k - 1\right)$-ième de l'unité, avec k un diviseur propre de n.

Remarque 1.6. Si A est un anneau commutatif, $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$, alors f n'admet pas nécessairement un point périodique. Par exemple, si

$$A = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f(z) = z^2 + 1 \in \mathrm{Poly}_2(A) ,$$

alors, pour tout $z \in A$, la suite $\left(f^{\circ n}(z)\right)_{n \geq 0}$ est strictement croissante, et donc z n'est pas périodique pour f.

Remarque 1.7. Si A est un anneau commutatif non intègre et infini, $d \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'ensemble des points périodiques pour f avec période n n'est pas nécessairement fini. Par exemple, si p est un nombre premier, $A = \mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$ est muni de l'addition et de la multiplication terme à terme et

$$f(z) = z^p \in \mathrm{Poly}_p(A) ,$$

alors A est infini et tout point de A est fixe pour f.

Soient A un anneau commutatif, $d \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$ et $z_0 \in A$ un point périodique pour f avec période $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *multiplicateur* de f en z_0 la dérivée de $f^{\circ n}$ en z_0. D'après la formule de dérivation d'un polynôme composé, il est égal au produit des dérivées de f le long du cycle contenant z_0. En particulier, f a le même multiplicateur en chaque point d'un cycle.

Exemple 1.8. Soit $d \geq 2$ un entier, et rappelons que

$$f_0(z) = z^d \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C}) .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_0^{\circ n}(z) = z^{d^n}$, et donc

$$\left(f_0^{\circ n}\right)'(z) = d^n z^{d^n-1} .$$

Par conséquent, le multiplicateur de f_0 au point fixe 0 est égal à 0 et, pour tout point périodique $z_0 \in \mathbb{C}^*$ pour f_0 avec période $n \in \mathbb{N}^*$, le multiplicateur de f_0 en z_0 est égal à d^n puisque z_0 est une racine $(d^n - 1)$-ième de l'unité d'après l'exemple 1.5.

Remarque 1.9. Si A est un anneau commutatif, $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$, avec $d \in \mathbb{N}$, et $z_0 \in A$ est un point périodique pour f, alors le multiplicateur de f en z_0 dépend du polynôme f et pas seulement de sa fonction polynomiale. Par exemple, si p est un nombre premier,

$$A = \mathbb{F}_p , \quad f(z) = z^{p+1} \in \mathrm{Poly}_{p+1}(A) \quad \text{et} \quad g(z) = z^{p+1} - z^p + z \in \mathrm{Poly}_{p+1}(A) ,$$

alors f et g ont la même fonction polynomiale mais 0 est un point fixe pour f avec multiplicateur 0 et un point fixe pour g avec multiplicateur 1.

Enfin, décrivons l'action de la conjugaison sur les points périodiques et les multiplicateurs d'un polynôme. Soient K un corps, $d \in \mathbb{N}$ et f et g deux polynômes dans $\mathrm{Poly}_d(K)$ tels qu'il existe $\phi \in \mathrm{Poly}_1(K)$ tel que $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$. Alors ϕ induit une bijection de l'ensemble des points périodiques pour f sur l'ensemble des points périodiques pour g qui préserve les périodes. De plus, d'après la formule de dérivation d'un polynôme composé, celle-ci préserve aussi les multiplicateurs.

1.1.2. Le cas des polynômes unicritiques. Examinons ici les polynômes unicritiques à coefficients complexes, qui nous intéresseront particulièrement dans la partie 1 de cette thèse.

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})$. On dit que $z_0 \in \mathbb{C}$ est un *point critique* pour f si $f'(z_0)$ est nul, et, dans ce cas, on dit que $f(z_0)$ est une *valeur critique* pour f. On dit que le polynôme f est *unicritique* si il admet un unique point critique.

Fixons un entier $d \geq 2$. Pour $c \in \mathbb{C}$, posons

$$f_c(z) = z^d + c \in \mathrm{Poly}_d^U(\mathbb{C}) \,.$$

Pour tout $c \in \mathbb{C}$, le polynôme f_c est unicritique avec point critique 0 et valeur critique c. De plus, on a le résultat bien connu suivant :

PROPOSITION 1.10. *Soit $f \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})$ un polynôme unicritique. Alors il existe un paramètre $c \in \mathbb{C}$ tel que f est conjugué à f_c. De plus, celui-ci est unique à multiplication par une racine $(d-1)$-ième de l'unité près.*

DÉMONSTRATION. Il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$f(z) = a(z-w)^d + b \,,$$

où $w \in \mathbb{C}$ est l'unique point critique de f. Pour tout $\phi(z) = \alpha z + \beta$ dans $\mathrm{Poly}_1(\mathbb{C})$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = \frac{a}{\alpha^{d-1}}(z - \beta - \alpha w)^d + \alpha b + \beta \,,$$

qui est unitaire avec point critique 0 si et seulement si $\alpha^{d-1} = a$ et $\beta = -\alpha w$. Par conséquent, pour tout $c \in \mathbb{C}$, les polynômes f et f_c sont conjuguées si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $\alpha^{d-1} = a$ et $c = \alpha(b-w)$, ce qui se produit si et seulement si $c^{d-1} = a(b-w)^{d-1}$. Ceci complète la démonstration de la proposition. □

REMARQUE 1.11. Dans le cas où $d = 2$, la proposition 1.10 affirme que l'application qui à c associe f_c induit une bijection de $\mathbb{C}$ sur l'ensemble $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ des classes de conjugaison de polynômes quadratiques complexes.

1.2. Polynômes dynatomiques d'un polynôme unitaire

Rappelons ici la définition et certaines propriétés des polynômes dynatomiques d'un polynôme unitaire, qui sont en correspondance avec ses points périodiques.

Dans toute cette section, d désigne un entier fixé supérieur ou égal à 2.

1.2.1. Le cas général. Soient A un anneau commutatif et $f \in \mathrm{Poly}_d^U(A)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines du polynôme $f^{\circ n}(z) - z$ sont précisément les points périodiques pour f avec période divisant n. Ainsi, il est naturel d'essayer de factoriser ces polynômes afin de séparer leurs racines selon leurs périodes, et on obtient le résultat ci-dessous (comparer à [**MP94**, Section 2 et Section 3]).

On note $\mu\colon \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$ la fonction de Möbius, qui est définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{si } n \text{ a un facteur carré} \end{cases} .$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons également

$$\nu(n) = \sum_{k \mid n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) d^k \,.$$

PROPOSITION 1.12. *Soient A un anneau commutatif et $f \in \mathrm{Poly}_d^U(A)$. Alors il existe une unique suite $\left(\Phi_n^f\right)_{n \geq 1}$ d'éléments de $A[z]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$f^{\circ n}(z) - z = \prod_{k \mid n} \Phi_k^f(z) .$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme Φ_n^f est unitaire de degré $\nu(n)$.

DÉFINITION 1.13. Soient A un anneau commutatif, $f \in \mathrm{Poly}_d^U(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme Φ_n^f est appelé le n-ième *polynôme dynatomique* de f.

Afin de démontrer la proposition 1.12, énonçons d'abord deux lemmes d'algèbre générale. Le premier assure l'unicité de la suite des polynômes dynatomiques.

LEMME 1.14. *Soient A un anneau commutatif et $(P_n)_{n \geq 1}$ une suite de polynômes unitaires dans $A[X]$. Alors il existe au plus une suite $(Q_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $A[X]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$P_n = \prod_{k \mid n} Q_k .$$

De plus, si $(Q_n)_{n \geq 1}$ est une telle suite, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme Q_n est unitaire et on a

$$\deg Q_n = \sum_{k \mid n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) \deg P_k .$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.14. Supposons que $(Q_n)_{n \geq 1}$ est une telle suite. On a $Q_1 = P_1$, qui est unitaire. Soit $n \geq 2$, et supposons que les polynômes Q_j, avec $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, sont unitaires et entièrement déterminés par la suite $(P_n)_{n \geq 1}$. Alors le polynôme

$$R_n = \prod_{k \mid n,\, k \neq n} Q_k$$

est unitaire et entièrement déterminé par la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ et on a $P_n = Q_n R_n$. Par conséquent, le polynôme Q_n est unitaire et est le quotient dans la division euclidienne de P_n par R_n, qui est donc entièrement déterminé par la suite $(P_n)_{n \geq 1}$. Ainsi, la suite $(Q_n)_{n \geq 1}$ est l'unique telle suite et est formée de polynômes unitaires.

Enfin, comme les polynômes Q_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont unitaires, on a

$$\deg P_n = \sum_{k \mid n} \deg Q_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, d'après la formule d'inversion de Möbius, on a

$$\deg Q_n = \sum_{k \mid n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) \deg P_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, le lemme est démontré. □

REMARQUE 1.15. Si A est un anneau intègre et $(P_n)_{n \geq 1}$ et $(Q_n)_{n \geq 1}$ sont deux suites d'éléments de $A[X]$ comme dans le lemme 1.14, alors on a

$$Q_n = \prod_{k \mid n} P_k^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la formule d'inversion de Möbius.

Le second lemme d'algèbre générale suivant permet d'établir l'existence de la suite des polynômes dynatomiques d'un polynôme unitaire lorsque l'anneau est intègre et les points périodiques sont tous simples.

LEMME 1.16. *Soient A un anneau intègre, K son corps des fractions, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $A[X]$ qui vérifie les trois conditions suivantes :*

(1) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est unitaire ;

(2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est séparable ;

(3) pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, les racines communes aux polynômes P_m et P_n dans $\overline{K}$ sont précisément les racines du polynôme $P_{\mathrm{pgcd}(m,n)}$.

Alors il existe une unique suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $A[X]$ telle que

$$P_n = \prod_{k|n} Q_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme Q_n est unitaire et séparable et ses racines dans $\overline{K}$ sont précisément les racines de P_n qui ne sont pas racines des polynômes P_k, avec k un diviseur propre de n.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.16. Comme les polynômes P_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont unitaires, il suffit de démontrer l'existence d'une suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ ayant les propriétés désirées d'après le lemme 1.14.

Pout $n \in \mathbb{N}^*$, notons X_n l'ensemble des racines de P_n dans $\overline{K}$, de sorte que

$$P_n = \prod_{x\in X_n} (X - x)$$

d'après les conditions (1) et (2). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$Y_n = X_n \setminus \bigcup_{k|n,\, k\neq n} X_k \quad \text{et} \quad Q_n(X) = \prod_{x\in Y_n} (X - x)\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme Q_n est unitaire et séparable et ses racines dans $\overline{K}$ sont précisément les racines de P_n qui ne sont pas racines des polynômes P_k, avec k un diviseur propre de n.

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P_n = \prod_{k|n} Q_k\,.$$

Pour cela, il suffit de prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$X_n = \bigsqcup_{k|n} Y_k\,.$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in X_n$, alors il existe un plus petit diviseur k de n tel que $x \in X_k$, et on a $x \in Y_k$. Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}^*$ et k est un diviseur de n, alors on a $Y_k \subset X_n$ d'après la condition (3) puisque $k = \mathrm{pgcd}(k, n)$. Enfin, si $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in Y_m \cap Y_n$, alors on a $x \in X_{\mathrm{pgcd}(m,n)}$ d'après la condition (3), ce qui entraîne $\mathrm{pgcd}(m, n) = m$ et $\mathrm{pgcd}(m, n) = n$ puisque $x \in Y_m \cap X_{\mathrm{pgcd}(m,n)}$ et $x \in Y_n \cap X_{\mathrm{pgcd}(m,n)}$, et donc $m = n$. Ainsi, on a montré les égalités désirées.

Il reste à démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $Q_n \in A[X]$. Pour cela, raisonnons par récurrence. On a $Q_1 = P_1 \in A[X]$. Soit $n \geq 2$, et supposons que $Q_j \in A[X]$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Alors le polynôme

$$R_n = \prod_{k \mid n,\, k \neq n} Q_k$$

est dans $A[X]$ et est unitaire et on a $P_n = Q_n R_n$. Par suite, d'après le théorème de la division euclidienne, il existe des polynômes S_n et T_n dans $A[X]$ tels que $P_n = R_n S_n + T_n$ et $\deg S_n < \deg R_n$. D'après l'unicité de la division euclidienne de P_n par R_n dans $\overline{K}[X]$, on a $Q_n = S_n \in A[X]$ et $T_n = 0$. Ainsi, la récurrence est achevée, et le lemme est démontré. □

Remarque 1.17. Chacune des conditions (1), (2) et (3) est nécessaire dans le lemme 1.16. Par exemple,

— si $A = \mathbb{Z}$ et $(P_n)_{n \geq 1}$ est la suite d'éléments de $A[X]$ définie par

$$P_n(X) = \begin{cases} X & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases},$$

alors la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ vérifie les conditions (1) et (2) mais il n'existe pas de polynômes Q_1 et Q_2 dans $A[X]$ tels que $P_1 = Q_1$ et $P_2 = Q_1 Q_2$;

— si $A = \mathbb{Z}$ et $(P_n)_{n \geq 1}$ est la suite d'éléments de $A[X]$ définie par

$$P_n(X) = \begin{cases} X^2 & \text{si } n = 1 \\ X & \text{si } n \geq 2 \end{cases},$$

alors la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ vérifie les conditions (1) et (3) mais il n'existe pas de polynômes Q_1 et Q_2 dans $A[X]$ tels que $P_1 = Q_1$ et $P_2 = Q_1 Q_2$;

— si $A = \mathbb{Z}$ et $(P_n)_{n \geq 1}$ est la suite d'éléments de $A[X]$ définie par

$$P_n(X) = \begin{cases} 2X & \text{si } n = 1 \\ X & \text{si } n \geq 2 \end{cases},$$

alors la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ vérifie les conditions (2) et (3) mais il n'existe pas de polynômes Q_1 et Q_2 dans $A[X]$ tels que $P_1 = Q_1$ et $P_2 = Q_1 Q_2$.

Étant donnés un anneau intègre A et un polynôme $f \in \mathrm{Poly}_d^U(A)$, on ne peut pas directement appliquer le lemme 1.16 à la suite $(f^{\circ n}(z) - z)_{n \geq 1}$ pour prouver la proposition 1.12 car les termes de cette suite ne sont pas nécessairement séparables. Nous pouvons néanmoins utiliser cette stratégie dans le cas du polynôme unitaire dont les coefficients sont des indéterminées puis démontrer l'existence de la suite des polynômes dynatomiques dans le cas général avec un argument de spécialisation.

Soient $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_{d-1}$ des indéterminées sur $\mathbb{Z}$, et posons

$$\mathfrak{A} = \mathbb{Z}\left[\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_{d-1}\right] \quad \text{et} \quad \mathfrak{f}(z) = z^d + \sum_{j=0}^{d-1} \mathfrak{a}_j z^j \in \mathrm{Poly}_d^U(\mathfrak{A}).$$

Notons aussi $\mathfrak{K}$ le corps des fractions de $\mathfrak{A}$ et $\overline{\mathfrak{K}}$ une clôture algébrique de $\mathfrak{K}$.

On peut appliquer le lemme 1.16 à la suite $(\mathfrak{f}^{\circ n}(z) - z)_{n \geq 1}$ pour établir la proposition 1.12 dans le cas de l'anneau $\mathfrak{A}$ et du polynôme $\mathfrak{f}$.

Lemme 1.18. *Il existe une unique suite* $\left(\Phi_n^{\mathfrak{f}}\right)_{n\geq 1}$ *d'éléments de* $\mathfrak{A}[z]$ *telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$\mathfrak{f}^{\circ n}(z) - z = \prod_{k\mid n} \Phi_k^{\mathfrak{f}}(z)\,.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, le polynôme* $\Phi_n^{\mathfrak{f}}$ *est unitaire et séparable et ses racines dans* $\overline{\mathfrak{K}}$ *sont précisément les points périodiques pour* $\mathfrak{f}$ *avec période* n*.*

Démonstration du lemme 1.18. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$P_n(z) = \mathfrak{f}^{\circ n}(z) - z \in \mathfrak{A}[z]\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n dans $\overline{\mathfrak{K}}$ sont précisément les points périodiques pour $\mathfrak{f}$ avec période divisant n. Par suite, il suffit de montrer que la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ vérifie les conditions (1), (2) et (3) du lemme 1.16. Comme $\mathfrak{f} \in \operatorname{Poly}_d^U(\mathfrak{A})$ et $d \geq 2$, les polynômes P_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont unitaires. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, les racines communes aux polynômes P_m et P_n sont précisément les points périodiques pour $\mathfrak{f}$ avec période divisant $\operatorname{pgcd}(m, n)$, qui sont précisément les racines de $P_{\operatorname{pgcd}(m,n)}$. Il reste à démontrer que la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ vérifie la condition (2) du lemme 1.16. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le polynôme P_n n'est pas séparable. Alors on a $\operatorname{disc} P_n = 0$, où disc désigne le discriminant. Soit $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ l'unique morphisme d'anneaux qui vérifie $\varphi(\mathfrak{a}_j) = 0$ pour tout $j \in \{0, \ldots, d-1\}$, de sorte que $\varphi(\mathfrak{f})(z) = z^d$. On a $\varphi(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}) = \varphi(\mathfrak{g}) \circ \varphi(\mathfrak{h})$ pour tous $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \in \mathfrak{A}[z]$, et donc

$$\varphi\left(P_n\right)(z) = \varphi(\mathfrak{f})^{\circ n}(z) - z = z^{d^n} - z\,.$$

Par conséquent, comme P_n est unitaire, on a

$$\operatorname{disc}\left(z^{d^n} - z\right) = \varphi\left(\operatorname{disc} P_n\right) = 0\,,$$

ce qui est absurde puisque le polynôme $z^{d^n} - z \in \mathbb{C}[z]$ est séparable. Ainsi, le lemme est démontré. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 1.12.

Démonstration de la proposition 1.12. Écrivons

$$f(z) = z^d + \sum_{j=0}^{d-1} a_j z^j \in \operatorname{Poly}_d^U(A)\,.$$

Soit $\varphi\colon \mathfrak{A} \to A$ l'unique morphisme d'anneaux qui vérifie $\varphi(\mathfrak{a}_j) = a_j$ pour tout $j \in \{0, \ldots, d-1\}$, de sorte que $\varphi(\mathfrak{f}) = f$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Phi_n^f = \varphi\left(\Phi_n^{\mathfrak{f}}\right) \in A[z]\,.$$

On a $\varphi(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}) = \varphi(\mathfrak{g}) \circ \varphi(\mathfrak{h})$ pour tous $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \in \mathfrak{A}[z]$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f^{\circ n}(z) - z = \varphi\left(\mathfrak{f}^{\circ n}(z) - z\right) = \varphi\left(\prod_{k\mid n} \Phi_k^{\mathfrak{f}}(z)\right) = \prod_{k\mid n} \Phi_k^f(z)\,.$$

De plus, comme $f \in \operatorname{Poly}_d^U(A)$ et $d \geq 2$, les polynômes $f^{\circ n}(z) - z$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont unitaires de degré d^n. Par conséquent, d'après le lemme 1.14, la suite $\left(\Phi_n^f\right)_{n\geq 1}$ ainsi définie est l'unique suite vérifiant les égalités ci-dessus et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme Φ_n^f est unitaire de degré $\nu(n)$. Ainsi, la proposition est démontrée. □

Remarque 1.19. Si A est un anneau intègre et $f \in \mathrm{Poly}_d^U(A)$, alors on a

$$\Phi_n^f(z) = \prod_{k|n} \left(f^{\circ k}(z) - z\right)^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la formule d'inversion de Möbius.

Remarque 1.20. Si A est un anneau commutatif et $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$ n'est pas unitaire, alors il existe encore une suite $\left(\Phi_n^f\right)_{n\geq 1}$ comme dans la proposition 1.12 mais celle-ci n'est pas nécessairement unique lorsque A n'est pas intègre. Par exemple, si

$$A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad f(z) = 2z^2 + z \in \mathrm{Poly}_2^U(A)\,,$$

alors on a

$$f^{\circ n}(z) = \begin{cases} 2z^2 + z & \text{si } n \text{ est impair} \\ z & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc toute suite $\left(\Phi_n^f\right)_{n\geq 1}$ d'éléments de $A[z]$ vérifiant

$$\Phi_1^f(z) = 2z^2\,, \quad \Phi_2^f \in 2A[z] \quad \text{et} \quad \Phi_n^f(z) = 1 \quad \text{pour} \quad n \geq 3$$

est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f^{\circ n}(z) - z = \prod_{k|n} \Phi_k^f(z)\,.$$

Exemple 1.21. Considérons le polynôme

$$f_0(z) = z^d \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f_0^{\circ n}(z) - z = z^{d^n} - z = z \prod_{k|d^n-1} C_k(z)\,,$$

où $C_k \in \mathbb{Z}[z]$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, désigne le k-ième polynôme cyclotomique. Par conséquent, d'après l'unicité dans la proposition 1.12, on a

$$\Phi_n^{f_0}(z) = \tau_n(z) \prod_{k\in D_n} C_k(z)\,, \quad \text{où} \quad \tau_n(z) = \begin{cases} z & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

et D_n est l'ensemble des diviseurs de $d^n - 1$ qui ne divisent pas $d^k - 1$, avec k un diviseur propre de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Le résultat ci-dessous décrit l'action de la conjugaison sur les polynômes dynatomiques d'un polynôme unitaire. Il traduit l'action de la conjugaison sur les points périodiques d'un polynôme.

Proposition 1.22. *Soient K un corps, $f \in \mathrm{Poly}_d^U(K)$ et $\phi(z) = az + b$ dans $\mathrm{Poly}_1(K)$, avec $a, b \in K$ tels que $a^{d-1} = 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Phi_n^{\phi\circ f\circ\phi^{-1}}(z) = \alpha_n \Phi_n^f\left(\phi^{-1}(z)\right)\,, \quad \textit{où} \quad \alpha_n = \begin{cases} a & \textit{si } n = 1 \\ 1 & \textit{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\phi\circ f\circ\phi^{-1}\right)^{\circ n}(z) - z = \phi\circ f^{\circ n}\circ\phi^{-1}(z) = af^{\circ n}\left(\frac{z-b}{a}\right) + b - z\,,$$

et donc

$$\left(\phi \circ f \circ \phi^{-1}\right)^{\circ n}(z) - z = a\left(f^{\circ n}\left(\frac{z-b}{a}\right) - \frac{z-b}{a}\right) = a \prod_{k \mid n} \Phi_k^f\left(\frac{z-b}{a}\right).$$

Par conséquent, d'après l'unicité dans la proposition 1.12, on a

$$\Phi_n^{\phi\circ f\circ\phi^{-1}}(z) = \alpha_n \Phi_n^f\left(\frac{z-b}{a}\right) = \alpha_n \Phi_n^f\left(\phi^{-1}(z)\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, la proposition est démontrée. □

Étudions maintenant les racines des polynômes dynatomiques. Soient A un anneau commutatif, $f \in \mathrm{Poly}_d^U(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors toute racine du polynôme Φ_n^f est un point périodique pour f avec période divisant n puisqu'elle est aussi racine du polynôme $f^{\circ n}(z) - z$. Réciproquement, si A est intègre, alors tout point périodique pour f avec période n est une racine de Φ_n^f. Cependant, il peut arriver que certaines racines du polynôme Φ_n^f aient une période strictement inférieure à n.

Remarque 1.23. Si A est un anneau commutatif non intègre, $f \in \mathrm{Poly}_d^U(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors les points périodiques pour f avec période n ne sont pas nécessairement racines du polynôme Φ_n^f. Par exemple, si

$$A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad f(z) = z^2 + 3z + 2 \in \mathrm{Poly}_2^U(A),$$

alors 0 est un point périodique pour f avec période 2 mais il n'est pas racine du polynôme

$$\Phi_2^f(z) = z^2 + 2 \in A[z].$$

Montrons d'abord le résultat ci-dessous, qui donne des informations sur les racines des polynômes dynatomiques.

Proposition 1.24 ([MP94, Theorem 3.3]). *Soient A un anneau commutatif, $f \in \mathrm{Poly}_d^U(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le polynôme Φ_n^f divise le polynôme $\Phi_n^f \circ f$ dans $A[z]$.*

Démonstration. Démontrons d'abord le résultat dans le cas de l'anneau $\mathfrak{A}$ et du polynôme $\mathfrak{f}$. Comme le polynôme $\Phi_n^{\mathfrak{f}}$ est unitaire et séparable d'après le lemme 1.18, il suffit pour cela de prouver que toute racine de $\Phi_n^{\mathfrak{f}}$ dans $\overline{\mathfrak{K}}$ est également racine de $\Phi_n^{\mathfrak{f}} \circ \mathfrak{f}$. Si $z_0 \in \overline{\mathfrak{K}}$ est une racine du polynôme $\Phi_n^{\mathfrak{f}}$, alors z_0 est un point périodique pour $\mathfrak{f}$ avec période n d'après le lemme 1.18, et donc $\mathfrak{f}(z_0)$ est une racine du polynôme Φ_n^f puisqu'il est également périodique pour $\mathfrak{f}$ avec période n. Ainsi, on a montré qu'il existe un polynôme $P \in \mathfrak{A}[z]$ tel que $\Phi_n^{\mathfrak{f}} \circ \mathfrak{f} = P\Phi_n^{\mathfrak{f}}$.

Afin de prouver le résultat dans le cas général, écrivons

$$f(z) = z^d + \sum_{j=0}^{d-1} a_j z^j \in \mathrm{Poly}_d^U(A).$$

Soit $\varphi\colon \mathfrak{A} \to A$ l'unique morphisme d'anneaux qui vérifie $\varphi(\mathfrak{a}_j) = a_j$ pour tout $j \in \{0, \ldots, d-1\}$, de sorte que $\varphi(\mathfrak{f}) = f$. On a

$$\Phi_n^f \circ f = \varphi\left(\Phi_n^{\mathfrak{f}} \circ \mathfrak{f}\right) = \varphi(P)\Phi_n^f.$$

Ainsi, la proposition est démontrée. □

Si A est un anneau commutatif, $P, Q \in A[z]$, $z_0 \in A$ et $m \in \mathbb{N}$, alors on note

$$\begin{aligned} P(z) = Q(z) + O_{z_0}\left((z-z_0)^m\right) &\Longleftrightarrow \operatorname{ord}_{z_0}(P-Q) \geq m \\ &\Longleftrightarrow (z-z_0)^m \text{ divise } P(z)-Q(z) \text{ dans } A[z]\,. \end{aligned}$$

Le résultat suivant se déduit facilement de la proposition 1.24.

Corollaire 1.25. *Soient A un anneau intègre, $f \in \operatorname{Poly}_d^U(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors f induit une permutation des racines du polynôme Φ_n^f qui préserve les multiplicités et dont l'ordre divise n.*

Démonstration. Comme Φ_n^f divise $\Phi_n^f \circ f$ dans $A[z]$ d'après la proposition 1.24, f induit une application de l'ensemble des racines du polynôme Φ_n^f dans lui-même. De plus, comme les racines du polynôme Φ_n^f sont des points périodiques pour f avec période divisant n, celle-ci est en fait une permutation dont l'ordre divise n. Enfin, pour montrer que f préserve les multiplicités des racines de Φ_n^f, il suffit de prouver que, pour toute racine $z_0 \in A$ du polynôme Φ_n^f, on a

$$\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f \leq \operatorname{ord}_{f(z_0)} \Phi_n^f\,.$$

Soit $z_0 \in A$ une racine du polynôme Φ_n^f. Il existe $P \in A[z]$ tel que

$$\Phi_n^f(z) = \left(z - f\left(z_0\right)\right)^m P(z) \quad \text{et} \quad P\left(f\left(z_0\right)\right) \neq 0\,,$$

où $m = \operatorname{ord}_{f(z_0)} \Phi_n^f$. On a

$$\Phi_n^f \circ f(z) = \left(f(z) - f\left(z_0\right)\right)^m P \circ f(z)\,,$$

et donc

$$\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f \circ f = m \operatorname{ord}_{z_0}\left(f(z) - f\left(z_0\right)\right)$$

puisque A est intègre. Par suite, si $f'\left(z_0\right) \neq 0$, alors on a

$$\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f \leq \operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f \circ f = m = \operatorname{ord}_{f(z_0)} \Phi_n^f$$

puisque Φ_n^f divise $\Phi_n^f \circ f$ dans $A[z]$ d'après la proposition 1.24. Enfin, si $f'\left(z_0\right) = 0$, alors on a $\left(f^{\circ n}\right)'\left(z_0\right) = 0$, et donc

$$\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f \leq \operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ n}(z) - z\right) = 1 \leq \operatorname{ord}_{f(z_0)} \Phi_n^f\,.$$

Ainsi, le corollaire est démontré. □

Décrivons maintenant précisément les racines des polynômes dynatomiques.

Proposition 1.26 ([MS95, Proposition 3.2]). *Soient A un anneau intègre, $f \in \operatorname{Poly}_d^U(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $z_0 \in A$ est une racine du polynôme Φ_n^f si et seulement si z_0 est un point périodique pour f avec période $k \in \mathbb{N}^*$ et multiplicateur $\lambda_0 \in A$ qui vérifient*
- *— $k = n$,*
- *— ou il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = kl$ et λ_0 est une racine primitive l-ième de l'unité,*
- *— ou A a une caractéristique $p > 0$ et il existe $l, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = klp^m$ et λ_0 est une racine primitive l-ième de l'unité.*

La proposition 1.26 est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 1.27. *Soient A un anneau intègre, $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$ et $z_0 \in A$ un point fixe pour f avec multiplicateur $\lambda_0 \in A$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ n}(z) - z\right) \geq 1\,,$$

et cette inégalité est stricte si et seulement si λ_0 est une racine n-ième de l'unité. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ n}(z) - z\right) \geq \mathrm{ord}_{z_0}\left(f(z) - z\right)\,,$$

et cette inégalité est stricte si et seulement si
- *soit λ_0 est une racine n-ième de l'unité différente de 1,*
- *soit λ_0 est égal à 1 et la caractéristique de A divise n.*

Démonstration du lemme 1.27. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le point z_0 est une racine du polynôme $f^{\circ n}(z) - z$ puisqu'il est fixe pour f, et celle-ci est multiple si et seulement z_0 est aussi racine du polynôme dérivé de $f^{\circ n}(z) - z$, ce qui se produit si et seulement si $\lambda_0^n = \left(f^{\circ n}\right)'(z_0) = 1$.

Enfin, supposons que $\lambda_0 = 1$. Alors il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que

$$f(z) = z + a\,(z - z_0)^m + O_{z_0}\left((z - z_0)^{m+1}\right)\,, \quad \text{où} \quad m = \mathrm{ord}_{z_0}\left(f(z) - z\right) \geq 2\,.$$

Un raisonnement par récurrence montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f^{\circ n}(z) = z + na\,(z - z_0)^m + O_{z_0}\left((z - z_0)^{m+1}\right)\,.$$

Ceci complète la démonstration du lemme. □

Démonstration de la proposition 1.26. Soit $z_0 \in A$ un point périodique pour f avec période un diviseur k de n et multiplicateur $\lambda_0 \in A$. D'après la formule d'inversion de Möbius, on a

$$\mathrm{ord}_{z_0} \Phi_n^f = \sum_{j \mid n} \mu\left(\frac{n}{j}\right) \mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ j}(z) - z\right)\,.$$

Par suite, comme z_0 n'est pas racine de $f^{\circ j}(z) - z$ si k ne divise pas j, on a

$$\mathrm{ord}_{z_0} \Phi_n^f = \sum_{j \mid \frac{n}{k}} \mu\left(\frac{n}{jk}\right) \mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ jk}(z) - z\right)\,.$$

Si λ_0 n'est pas une racine $\frac{n}{k}$-ième de l'unité, alors, d'après le lemme 1.27, on a

$$\mathrm{ord}_{z_0} \Phi_n^f = \sum_{j \mid \frac{n}{k}} \mu\left(\frac{n}{jk}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}\,.$$

Supposons que λ_0 est une racine primitive l-ième de l'unité avec l qui divise $\frac{n}{k}$. Alors, d'après le lemme 1.27, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{ord}_{z_0} \Phi_n^f &= \sum_{j \mid \frac{n}{k},\, l \mid j} \mu\left(\frac{n}{jk}\right) \mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ jk}(z) - z\right) + \sum_{j \mid \frac{n}{k},\, l \nmid j} \mu\left(\frac{n}{jk}\right) \mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ k}(z) - z\right) \\
&= \sum_{j \mid \frac{n}{kl}} \mu\left(\frac{n}{jkl}\right) \left(\mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ jkl}(z) - z\right) - \mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ k}(z) - z\right)\right) \\
&\quad + \sum_{j \mid \frac{n}{k}} \mu\left(\frac{n}{jk}\right) \mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ k}(z) - z\right)\,.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.27, si A est de caractéristique nulle, alors ceci entraîne

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f &= \sum_{j \mid \frac{n}{kl}} \mu\left(\frac{n}{jkl}\right)\left(\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ kl}(z)-z\right)-\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ k}(z)-z\right)\right)\\ &\quad+\sum_{j \mid \frac{n}{k}} \mu\left(\frac{n}{jk}\right)\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ k}(z)-z\right)\\ &=\begin{cases}\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ kl}(z)-z\right) & \text{si } k=n\\ \operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ kl}(z)-z\right)-\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ k}(z)-z\right) & \text{si } k\neq n \text{ et } n=kl\\ 0 & \text{si } n\neq kl\end{cases},\end{aligned}$$

et donc $\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f \geq 1$ si et seulement si $n = kl$. D'après le lemme 1.27, si A a une caractéristique $p > 0$ et $m = \operatorname{ord}_p \frac{n}{kl}$, alors on a

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f &= \sum_{e=0}^{m} \sum_{\substack{j \mid \frac{n}{kl}\\ \operatorname{ord}_p j=e}} \mu\left(\frac{n}{jkl}\right)\left(\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ klp^e}(z)-z\right)-\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ k}(z)-z\right)\right)\\ &\quad+\sum_{j \mid \frac{n}{k}} \mu\left(\frac{n}{jk}\right)\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ k}(z)-z\right),\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f &= \sum_{j \mid \frac{n}{klp^m}} \mu\left(\frac{n}{jklp^m}\right)\left(\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ klp^m}(z)-z\right)-\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ klp^{m-1}}(z)-z\right)\right)\\ &\quad+\sum_{j \mid \frac{n}{k}} \mu\left(\frac{n}{jk}\right)\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ k}(z)-z\right)\\ &=\begin{cases}\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ klp^m}(z)-z\right) & \text{si } k=n\\ \quad\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ klp^m}(z)-z\right) & \\ -\operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ klp^{m-1}}(z)-z\right) & \text{si } k\neq n \text{ et } n=klp^m\\ 0 & \text{si } n\neq klp^m\end{cases}\end{aligned}$$

puisque l'on a

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j \mid \frac{n}{kl}\\ \operatorname{ord}_p j=e}} \mu\left(\frac{n}{jkl}\right) &= \sum_{j \mid \frac{n}{klp^e}} \mu\left(\frac{n}{jklp^e}\right)-\sum_{j \mid \frac{n}{klp^{e+1}}} \mu\left(\frac{n}{jklp^{e+1}}\right)\\ &=\begin{cases}0 & \text{si } e\in\{0,\dots,m-2\}\\ -\sum_{j\mid \frac{n}{klp^m}} \mu\left(\frac{n}{jklp^m}\right) & \text{si } e=m-1\\ \sum_{j\mid \frac{n}{klp^m}} \mu\left(\frac{n}{jklp^m}\right) & \text{si } e=m\end{cases}\end{aligned}$$

pour tout $e \in \{0, \dots, m\}$, et donc $\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f \geq 1$ si et seulement si $n = klp^m$. Ceci complète la démonstration de la proposition puisque toute racine du polynôme Φ_n^f est un point périodique pour f avec période divisant n. □

Le résultat ci-dessous met en évidence l'importance de la caractéristique dans l'étude de la dynamique d'un polynôme. Celui-ci se déduit facilement du lemme 1.27.

Corollaire 1.28. *Soient A un anneau intègre, $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$ et $z_0 \in A$ un point périodique pour f. Alors la suite $\left(\mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ n}(z) - z\right)\right)_{n \geq 1}$ est bornée si et seulement si A est de caractéristique nulle ou le multiplicateur de f en z_0 n'est pas une racine de l'unité.*

Démonstration. Notons $k \in \mathbb{N}^*$ la période de z_0 et $\lambda_0 \in A$ le multiplicateur de f en z_0. Si λ_0 n'est pas une racine de l'unité, alors on a

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ n}(z) - z\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \mid n \\ 0 & \text{si } k \nmid n \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le lemme 1.27. Si A est de caractéristique nulle et λ_0 est une racine primitive l-ième de l'unité, avec $l \in \mathbb{N}^*$, alors on a

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ n}(z) - z\right) = \begin{cases} m & \text{si } kl \mid n \\ 1 & \text{si } k \mid n \text{ et } kl \nmid n \\ 0 & \text{si } k \nmid n \end{cases}, \quad \text{où} \quad m = \mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ kl}(z) - z\right),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le lemme 1.27. Enfin, si A a une caractéristique $p > 0$ et λ_0 est une racine primitive l-ième de l'unité, avec $l \in \mathbb{N}^*$, alors un raisonnement par récurrence montre que

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ klp^n}(z) - z\right) \geq n + 2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, le corollaire est démontré. □

Dans le cas des polynômes unitaires à coefficients dans un anneau intègre de caractéristique nulle, on peut préciser la proposition 1.26. Pour cela, introduisons la notion suivante :

Proposition 1.29. *Soient A un anneau intègre, $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$ et $z_0 \in A$ un point périodique pour f avec période $k \in \mathbb{N}^*$ et multiplicateur une racine primitive l-ième de l'unité. Alors on a*

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ kl}(z) - z\right) \equiv 1 \pmod{l}.$$

Définition 1.30. Soient A un anneau intègre, $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$ et $z_0 \in A$ un point périodique pour f avec période $k \in \mathbb{N}^*$ et multiplicateur une racine primitive l-ième de l'unité. L'unique $\nu \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ kl}(z) - z\right) = \nu l + 1$$

est appelé *multiplicité parabolique* de f en z_0.

Démonstration. Notons λ_0 le multiplicateur de f en z_0, qui est une racine primitive l-ième de l'unité dans A. Il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que

$$f^{\circ kl}(z) = z + a\left(z - z_0\right)^m + O_{z_0}\left(\left(z - z_0\right)^{m+1}\right), \quad \text{où} \quad m = \mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ kl}(z) - z\right) \geq 2.$$

Montrons que $m \equiv 1 \pmod{l}$. Pour cela, écrivons

$$f^{\circ k}(z) = z_0 + \lambda_0\left(z - z_0\right) + \sum_{j=2}^{m} b_j\left(z - z_0\right)^j + O_{z_0}\left(\left(z - z_0\right)^{m+1}\right).$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} f^{\circ k(l+1)}(z) &= f^{\circ k} \circ f^{\circ kl}(z) \\ &= z_0 + \lambda_0 (z - z_0) + a\lambda_0 (z - z_0)^m \\ &\quad + \sum_{j=2}^{m} b_j (z - z_0)^j + O_{z_0}\left((z - z_0)^{m+1}\right) \ ; \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} f^{\circ k(l+1)}(z) &= f^{\circ kl} \circ f^{\circ k}(z) \\ &= z_0 + \lambda_0 (z - z_0) + a\lambda_0^m (z - z_0)^m \\ &\quad + \sum_{j=2}^{m} b_j (z - z_0)^j + O_{z_0}\left((z - z_0)^{m+1}\right) . \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\lambda_0 = \lambda_0^m$, et donc $m \equiv 1 \pmod{l}$. Ainsi, la proposition est démontrée. $\square$

Remarque 1.31. Si $f \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ est un point périodique parabolique pour f, alors la multiplicité parabolique ν de f en z_0 est égale au nombre de cycles de bassins paraboliques pour f en z_0 (voir [**Bea91**, Theorem 6.5.10]).

On peut expliciter les multiplicités des racines des polynômes dynatomiques d'un polynôme unitaire à coefficients dans un anneau intègre de caractéristique nulle. Plus précisément, on a le résultat ci-dessous, qui précise la proposition 1.26.

Proposition 1.32. *Soient A un anneau intègre dont la caractéristique est nulle, $f \in \mathrm{Poly}_d^U(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $z_0 \in A$ est une racine du polynôme Φ_n^f si et seulement si*

- *soit z_0 est un point périodique pour f avec période n et multiplicateur différent de 1, auquel cas $\mathrm{ord}_{z_0} \Phi_n^f = 1$,*
- *soit z_0 est un point périodique pour f avec période n et multiplicateur 1, auquel cas $\mathrm{ord}_{z_0} \Phi_n^f = \nu + 1$, où ν est la multiplicité parabolique de f en z_0,*
- *soit z_0 est un point périodique pour f avec période un diviseur propre k de n et multiplicateur une racine primitive $\frac{n}{k}$-ième de l'unité, auquel cas $\mathrm{ord}_{z_0} \Phi_n^f = \frac{\nu n}{k}$, où ν est la multiplicité parabolique de f en z_0.*

La proposition 1.32 se déduit facilement du lemme ci-dessous, qui est une conséquence immédiate du lemme 1.27.

Lemme 1.33 ([**Bea91**, Theorem 6.511]). *Soient A un anneau intègre dont la caractéristique est nulle, $f \in \mathrm{Poly}_d(A)$ et $z_0 \in A$ un point périodique pour f avec période $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ n}(z) - z\right) = \begin{cases} 1 & \textit{si } k \mid n \\ 0 & \textit{si } k \nmid n \end{cases}$$

si le multiplicateur de f en z_0 n'est pas une racine de l'unité et

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(f^{\circ n}(z) - z\right) = \begin{cases} \nu l + 1 & \textit{si } kl \mid n \\ 1 & \textit{si } k \mid n \textit{ et } kl \nmid n \\ 0 & \textit{si } k \nmid n \end{cases}$$

si le multiplicateur de f en z_0 est une racine primitive l-ième de l'unité, avec $l \in \mathbb{N}^*$, où ν est la multiplicité parabolique de f en z_0.

Démonstration de la proposition 1.32. Si $z_0 \in A$ est une racine du polynôme Φ_n^f, alors elle est aussi racine de $f^{\circ n}(z) - z$, et donc z_0 est un point périodique pour f avec période divisant n.

Réciproquement, soit $z_0 \in A$ un point périodique pour f avec période un diviseur k de n. D'après la formule d'inversion de Möbius, on a

$$\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f = \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ m}(z) - z\right) .$$

Par suite, comme z_0 n'est pas racine de $f^{\circ m}(z) - z$ si k ne divise pas m, on a

$$\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f = \sum_{m|\frac{n}{k}} \mu\left(\frac{n}{km}\right) \operatorname{ord}_{z_0}\left(f^{\circ km}(z) - z\right) .$$

Si le multiplicateur de f en z_0 n'est pas une racine $\frac{n}{k}$-ième de l'unité, alors, d'après le lemme 1.33, on a

$$\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f = \sum_{m|\frac{n}{k}} \mu\left(\frac{n}{km}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases} .$$

Si le multiplicateur de f en z_0 est une racine primitive l-ième de l'unité avec l qui divise $\frac{n}{k}$ et ν est la multiplicité parabolique de f en z_0, alors, d'après le lemme 1.33, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^f &= \sum_{m|\frac{n}{k},\, l|m} \mu\left(\frac{n}{km}\right)(\nu l + 1) + \sum_{m|\frac{n}{k},\, l\nmid m} \mu\left(\frac{n}{km}\right) \\ &= \nu l \sum_{m|\frac{n}{kl}} \mu\left(\frac{n}{klm}\right) + \sum_{m|\frac{n}{k}} \mu\left(\frac{n}{km}\right) \\ &= \begin{cases} \nu + 1 & \text{si } k = n \\ \frac{n}{k} & \text{si } k \neq n \text{ et } l = \frac{n}{k} \\ 0 & \text{si } l \neq \frac{n}{k} \end{cases} . \end{aligned}$$

Ainsi, la proposition est démontrée. □

Remarque 1.34. D'après le corollaire 1.25 et la proposition 1.32, si A est un anneau intègre de caractéristique nulle et $f \in \operatorname{Poly}_d^U(A)$, alors f a la même multiplicité parabolique en chaque point d'un cycle parabolique.

1.2.2. Le cas des polynômes unicritiques. Étudions maintenant plus en détail les polynômes dynatomiques associés à la famille $(f_c)_{c \in \mathbb{C}}$ définie par

$$f_c(z) = z^d + c \in \operatorname{Poly}_d^U(\mathbb{C}) .$$

On peut préciser la proposition 1.32 dans le cas des polynômes unicritiques. Soit $c \in \mathbb{C}$. Comme tout cycle de bassins paraboliques pour f_c contient l'unique point critique 0 (voir [Bea91, Theorem 9.3.2]), la multiplicité de f_c en tout point périodique parabolique est égale à 1. Ainsi, on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.35. *Soient $c \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $z_0 \in \mathbb{C}$ est une racine du polynôme $\Phi_n^{f_c}$ si et seulement si*

— *soit* z_0 *est un point périodique pour* f_c *avec période* n *et multiplicateur différent de* 1*, auquel cas* $\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^{f_c} = 1$,
— *soit* z_0 *est un point périodique pour* f_c *avec période* n *et multiplicateur* 1*, auquel cas* $\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^{f_c} = 2$,
— *soit* z_0 *est un point périodique pour* f_c *avec période un diviseur propre* k *de* n *et multiplicateur une racine primitive* $\frac{n}{k}$*-ième de l'unité, auquel cas* $\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^{f_c} = \frac{n}{k}$.

Soit c une indéterminée sur $\mathbb{Z}$, et posons

$$\boldsymbol{A} = \mathbb{Z}[c] \quad \text{et} \quad \boldsymbol{f}(z) = z^d + c \in \operatorname{Poly}_d^U(\boldsymbol{A}) .$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\Phi_n \in \mathbb{Z}[c, z]$ l'image de $\Phi_n^{\boldsymbol{f}}$ par l'isomorphisme d'anneaux canonique de $\boldsymbol{A}[z]$ sur $\mathbb{Z}[c, z]$.

D'après l'unicité dans la proposition 1.12, pour tout $c \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Phi_n^{f_c}(z) = \Phi_n(c, z) \in \mathbb{C}[z] .$$

En particulier, les coefficients des polynômes $\Phi_n^{f_c}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont des polynômes en c à coefficients entiers.

Exemple 1.36. On a

$$\Phi_1(c, z) = z^d - z + c \quad \text{et} \quad \Phi_2(c, z) = \sum_{j=0}^{d-1} \left(z^d + c\right)^{d-1-j} z^j + 1 .$$

Exemple 1.37. Supposons que $d = 2$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\Phi_1(c, z) &= z^2 - z + c ,\\
\Phi_2(c, z) &= z^2 + z + c + 1 ,\\
\Phi_3(c, z) &= z^6 + z^5 + (3c + 1)z^4 + (2c + 1)z^3 + \left(3c^2 + 3c + 1\right) z^2\\
&\quad + \left(c^2 + 2c + 1\right) z + c^3 + 2c^2 + c + 1 ,\\
\Phi_4(c, z) &= z^{12} + 6cz^{10} + z^9 + \left(15c^2 + 3c\right) z^8 + 4cz^7 + \left(20c^3 + 12c^2 + 1\right) z^6\\
&\quad + \left(6c^2 + 2c\right) z^5 + \left(15c^4 + 18c^3 + 3c^2 + 4c\right) z^4 \left(4c^3 + 4c^2 + 1\right) z^3\\
&\quad + \left(6c^5 + 12c^4 + 6c^3 + 5c^2 + c\right) z^2 + \left(c^4 + 2c^3 + c^2 + 2c\right) z\\
&\quad + c^6 + 3c^5 + 3c^4 + 3c^3 + 2c^2 + 1 .
\end{aligned}$$

Finalement, énonçons le résultat ci-dessous, dû à Bousch. Celui-ci a également été démontré avec différentes approches par Buff et Tan (voir [**BL14**, Theorem 1.2]), Morton (voir [**Mor96**, Corollary 1]) et Schleicher (voir [**Sch17**, Theorem 7.1]).

Théorème 1.38 ([**Bou92**, Chapitre 3, Théorème 1]). *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*, et notons* $\Phi_n \in \mathbb{Z}[c, z]$ *le polynôme défini par* $\Phi_n(c, z) = \Phi_n^{f_c}(z)$*, où* $\Phi_n^{f_c}$ *désigne le* n*-ième polynôme dynatomique de* $f_c(z) = z^d + c$*. Alors* Φ_n *est irréductible sur* $\mathbb{C}$*.*

Afin d'être complet, nous prouverons le théorème 1.38 à la fin de ce chapitre. Notre démonstration, qui emploie la même stratégie que celle utilisée par Bousch dans le cas $d = 2$ puis par Morton dans le cas général, utilise de manière cruciale la proposition 1.58.

1.3. Polynômes multiplicateurs d'un polynôme unitaire

Rappelons la définition et certaines propriétés des polynômes multiplicateurs d'un polynôme unitaire, qui sont en correspondance avec les multiplicateurs en ses points périodiques.

Dans toute cette section, d désigne encore un entier fixé supérieur ou égal à 2.

1.3.1. Le cas général. Soient A un anneau intègre, K son corps des fractions, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $f \in \operatorname{Poly}_d^U(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a

$$\operatorname{res}_z\left(\Phi_n^f(z), \lambda - \left(f^{\circ n}\right)'(z)\right) = \prod_{j=1}^{\nu(n)} \left(\lambda - \left(f^{\circ n}\right)'(z_j)\right)\,,$$

où res_z désigne le résultant par rapport à z et $z_1, \dots, z_{\nu(n)}$ sont les racines du polynôme Φ_n^f dans $\overline{K}$ répétées avec multiplicités. Par conséquent, si les racines du polynôme Φ_n^f dans $\overline{K}$ sont précisément les points périodiques pour f avec période n, alors le polynôme

$$\operatorname{res}_z\left(\Phi_n^f(z), \lambda - \left(f^{\circ n}\right)'(z)\right) \in A[\lambda]$$

est la puissance n-ième d'un certain polynôme unitaire dans $A[\lambda]$ puisque f a le même multiplicateur en chaque point d'un cycle. En fait, comme cette hypothèse est vérifiée dans le cas de l'anneau $\mathfrak{A}$ et du polynôme $\mathfrak{f}$, ceci est vrai dans le cas général (comparer à [**MP94**, Section 5]). Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 1.39. *Soient A un anneau intègre, $f \in \operatorname{Poly}_d^U(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique polynôme unitaire $M_n^f \in A[\lambda]$ qui vérifie*

$$M_n^f(\lambda)^n = \operatorname{res}_z\left(\Phi_n^f(z), \lambda - \left(f^{\circ n}\right)'(z)\right)\,.$$

De plus, le polynôme M_n^f est de degré $\frac{\nu(n)}{n}$.

Définition 1.40. Soient A un anneau intègre, $f \in \operatorname{Poly}_d^U(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme M_n^f est appelé le n-ième *polynôme multiplicateur* de f.

Démonstration. Rappelons que

$$\mathfrak{A} = \mathbb{Z}\left[\mathfrak{a}_0, \dots, \mathfrak{a}_{d-1}\right] \quad \text{et} \quad \mathfrak{f}(z) = z^d + \sum_{j=1}^{d-1} \mathfrak{a}_j z^j \in \operatorname{Poly}_d^U(\mathfrak{A})\,.$$

Montrons d'abord l'existence d'un tel polynôme multiplicateur dans le cas de l'anneau $\mathfrak{A}$ et du polynôme $\mathfrak{f}$. Notons $\overline{\mathfrak{K}}$ une clôture algébrique du corps des fractions de $\mathfrak{A}$. Comme le polynôme $\Phi_n^{\mathfrak{f}}$ est unitaire, on a

$$\operatorname{res}_z\left(\Phi_n^{\mathfrak{f}}(z), \lambda - \left(\mathfrak{f}^{\circ n}\right)'(z)\right) = \prod_{j=1}^{\nu(n)} \left(\lambda - \left(\mathfrak{f}^{\circ n}\right)'(z_j)\right)\,,$$

où $z_1, \dots, z_{\nu(n)}$ sont les racines répétées avec multiplicités du polynôme $\Phi_n^{\mathfrak{f}}$ dans $\overline{\mathfrak{K}}$. D'après le lemme 1.18, ces racines sont simples et sont précisément les points périodiques pour $\mathfrak{f}$ avec période n. Par conséquent, comme $\mathfrak{f}$ a le même multiplicateur en chaque point d'un cycle, on a

$$\operatorname{res}_z\left(\Phi_n^{\mathfrak{f}}(z), \lambda - \left(\mathfrak{f}^{\circ n}\right)'(z)\right) = \prod_{j=1}^{\frac{\nu(n)}{n}} \left(\lambda - \left(\mathfrak{f}^{\circ n}\right)'(w_j)\right)^n\,,$$

où $w_1, \ldots, w_{\frac{\nu(n)}{n}}$ forment un système de représentants des cycles pour $\mathfrak{f}$ avec période n. Posons

$$M_n^{\mathfrak{f}}(\lambda) = \prod_{j=1}^{\frac{\nu(n)}{n}} \left(\lambda - \left(\mathfrak{f}^{\circ n}\right)'(w_j)\right) \in \overline{\mathfrak{K}}[\lambda]\,.$$

Le polynôme $M_n^{\mathfrak{f}}$ est unitaire de degré $\frac{\nu(n)}{n}$ et vérifie

$$M_n^{\mathfrak{f}}(\lambda)^n = \operatorname{res}_z\left(\Phi_n^{\mathfrak{f}}(z), \lambda - \left(\mathfrak{f}^{\circ n}\right)'(z)\right)\,.$$

De plus, comme $\mathfrak{A}$ est intégralement clos et de caractéristique nulle, $M_n^{\mathfrak{f}} \in \overline{\mathfrak{K}}[\lambda]$ est unitaire et $\left(M_n^{\mathfrak{f}}\right)^n \in \mathfrak{A}[\lambda]$, on a $M_n^{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{A}[\lambda]$ d'après le corollaire A.5. Ainsi, l'existence d'un polynôme $M_n^{\mathfrak{f}}$ ayant les propriétés désirées est établie.

Afin de prouver le résultat dans le cas général, écrivons

$$f(z) = z^d + \sum_{j=0}^{d-1} a_j z^j \in \operatorname{Poly}_d^U(A)\,.$$

Soit $\varphi\colon \mathfrak{A} \to A$ l'unique morphisme d'anneaux qui vérifie $\varphi(\mathfrak{a}_j) = a_j$ pour tout $j \in \{0, \ldots, d-1\}$, de sorte que $\varphi(\mathfrak{f}) = f$. Posons

$$M_n^f = \varphi\left(M_n^{\mathfrak{f}}\right) \in A[\lambda]\,,$$

qui est unitaire de degré $\frac{\nu(n)}{n}$. On a

$$M_n^f(\lambda)^n = \varphi\left(\operatorname{res}_z\left(\Phi_n^{\mathfrak{f}}(z), \lambda - \left(\mathfrak{f}^{\circ n}\right)'(z)\right)\right) = \operatorname{res}_z\left(\Phi_n^f, \lambda - \left(f^{\circ n}\right)'(z)\right)$$

puisque $\varphi\left(\Phi_n^{\mathfrak{f}}\right) = \Phi_n^f$ et on a $\varphi(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}) = \varphi(\mathfrak{g}) \circ \varphi(\mathfrak{h})$ et $\varphi(\mathfrak{g}') = \varphi(\mathfrak{g})'$ pour tous $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \in \mathfrak{A}[z]$. Enfin, comme l'anneau A est intègre, M_n^f est l'unique polynôme unitaire dans $A[\lambda]$ vérifiant l'égalité ci-dessus d'après le lemme A.6. Ainsi, la proposition est démontrée. $\square$

Remarque 1.41. Si A est un anneau commutatif non intègre, $f \in \operatorname{Poly}_d^U(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors il existe encore un polynôme M_n^f comme dans la proposition 1.39 mais celui-ci n'est pas nécessairement unique. Par exemple, si

$$A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad f(z) = z^2 \in \operatorname{Poly}_2(A)\,,$$

alors on a $\left(f^{\circ 2}\right)'(z) = 0$, et donc

$$\operatorname{res}_z\left(\Phi_2^f(z), \lambda - \left(f^{\circ 2}\right)'(z)\right) = \lambda^2 = (\lambda + 2)^2\,.$$

Exemple 1.42. Rappelons que

$$f_0(z) = z^d \in \operatorname{Poly}_d(\mathbb{C})\,.$$

D'après l'exemple 1.21, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Phi_n^{f_0}(z) = \tau_n(z) \prod_{k \in D_n} C_k(z)\,, \quad \text{où} \quad \tau_n(z) = \begin{cases} z & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}\,,$$

$C_k \in \mathbb{Z}[z]$, avec $k \in D_n$, est le k-ième polynôme cyclotomique et D_n est l'ensemble des diviseurs de $d^n - 1$ qui ne divisent pas $d^k - 1$, avec k un diviseur propre de n. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(f_0^{\circ n}\right)'(z) = d^n z^{d^n - 1}\,.$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$M_n^{f_0}(\lambda)^n = \mathrm{res}_z\left(\Phi_n^{f_0}(z), \lambda - \left(f_0^{\circ n}\right)'(z)\right) = \begin{cases} \lambda(\lambda - d)^{d-1} & \text{si } n = 1 \\ (\lambda - d^n)^{\nu(n)} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

puisque toute racine du k-ième polynôme cyclotomique C_k, avec k divisant $d^n - 1$, est une racine $(d^n - 1)$-ième de l'unité. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$M_n^{f_0}(\lambda) = \begin{cases} \lambda(\lambda - d)^{d-1} & \text{si } n = 1 \\ (\lambda - d^n)^{\frac{\nu(n)}{n}} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

Le résultat suivant traduit l'invariance des multiplicateurs par conjugaison.

Proposition 1.43. *Soient K un corps, f et g deux polynômes dans $\mathrm{Poly}_d^U(K)$ qui sont conjugués et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a $M_n^f = M_n^g$.*

Démonstration. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Il existe $\phi(z) = az + b$ dans $\mathrm{Poly}_1\left(\overline{K}\right)$, avec $a, b \in \overline{K}$ tels que $a^{d-1} = 1$, qui vérifie

$$g(z) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = af\left(\frac{z-b}{a}\right) + b\,.$$

D'après la proposition 1.22, on a

$$\Phi_n^g = \alpha_n \Phi_n^f\left(\phi^{-1}(z)\right) = \alpha_n \Phi_n\left(\frac{z-b}{a}\right)\,, \quad \text{où} \quad \alpha_n = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

Par conséquent, on a

$$M_n^g(\lambda)^n = \mathrm{res}_z\left(\alpha_n \Phi_n^f\left(\frac{z-b}{a}\right), \lambda - \left(f^{\circ n}\right)'\left(\frac{z-b}{a}\right)\right)\,,$$

ce qui entraîne

$$M_n^g(\lambda)^n = \frac{\alpha_n^{d^n-1}}{a^{\nu(n)(d^n-1)}}\,\mathrm{res}_z\left(\Phi_n^f(z), \lambda - \left(f^{\circ n}\right)'(z)\right) = M_n^f(\lambda)^n$$

puisque a est une racine $(d-1)$-ième de l'unité, et donc on a $M_n^f = M_n^g$ d'après le lemme A.6. Ainsi, la proposition est démontrée. $\square$

Le résultat suivant établit une correspondance entre les polynômes multiplicateurs d'un polynôme unitaire et les multiplicateurs en ses points périodiques.

Proposition 1.44. *Soient K un corps algébriquement clos, $f \in \mathrm{Poly}_d^U(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\lambda_0 \in K$ est une racine du polynôme M_n^f si et seulement si*

- *λ_0 est le multiplicateur de f en un cycle avec période n,*
- *ou λ_0 est égal à 1 et il existe $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = kl$ et f a un cycle avec période k et multiplicateur une racine primitive l-ième de l'unité,*
- *ou λ_0 est égal à 1, K a une caractéristique $p > 0$ et il existe $k, l, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = klp^m$ et f a un cycle avec période k et multiplicateur une racine primitive l-ième de l'unité.*

Démonstration. Comme Φ_n^f est unitaire et K est algébriquement clos, on a

$$M_n^f(\lambda)^n = \prod_{j=1}^{\nu(n)}\left(\lambda - \left(f^{\circ n}\right)'(z_j)\right)\,,$$

où $z_1, \ldots, z_{\nu(n)}$ sont les racines du polynôme Φ_n^f dans K répétées avec multiplicités. Si $z_0 \in K$ est un point périodique pour f avec période un diviseur k de n et multiplicateur une racine $\frac{n}{k}$-ième de l'unité, alors on a

$$\left(f^{\circ n}\right)'(z_0) = \left(f^{\circ k}\right)'(z_0)^{\frac{n}{k}} = 1\,.$$

D'après la proposition 1.26, ceci complète la démonstration de la proposition. □

Une conséquence immédiate de la proposition 1.44 est le résultat ci-dessous, qui nous sera très utile pour répondre à la question 2.44 dans le cas des polynômes unicritiques et des polynômes cubiques avec symétries.

Corollaire 1.45. *Soient K un corps algébriquement clos, A un sous-anneau de K, $f \in \operatorname{Poly}_d^U(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors tous les multiplicateurs de f en ses cycles avec période n sont dans A si et seulement si le polynôme M_n^f est scindé sur A.*

Enfin, on peut préciser la proposition 1.44 dans le cas des polynômes unitaires à coefficients dans un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

Proposition 1.46. *Soient K un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, $f \in \operatorname{Poly}_d^U(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $\lambda_0 \in K$,*
- *soit λ_0 est différent de 1 et $\operatorname{ord}_{\lambda_0} M_n^f$ est égal au nombre de cycles pour f avec période n et multiplicateur λ_0,*
- *soit λ_0 est égal à 1 et on a*

$$\operatorname{ord}_{\lambda_0} M_n^f = p + \sum_{j=1}^{p} \mu_j + \sum_{j=1}^{q} \nu_j\,,$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_p$, avec $p \in \mathbb{N}$, sont les multiplicités paraboliques de f en ses cycles avec période n et multiplicateur 1 et $\nu_1, \ldots, \nu_q$, avec $q \in \mathbb{N}$, sont les multiplicités paraboliques de f en ses cycles avec période un diviseur propre k de n et multiplicateur une racine primitive $\frac{n}{k}$-ième de l'unité.

Démonstration. Comme Φ_n^f est unitaire et K est algébriquement clos, on a

$$M_n^f(\lambda)^n = \prod_{j=1}^{\nu(n)} \left(\lambda - \left(f^{\circ n}\right)'(z_j)\right)\,,$$

où $z_1, \ldots, z_{\nu(n)}$ sont les racines du polynôme Φ_n^f dans K répétées avec multiplicités. Par suite, comme f a le même multiplicateur en chaque point d'un cycle et on a

$$\left(f^{\circ n}\right)'(z_0) = \left(f^{\circ k}\right)'(z_0)^{\frac{n}{k}} = 1$$

pour tout point périodique $z_0 \in K$ pour f avec période un diviseur k de n et multiplicateur une racine $\frac{n}{k}$-ième de l'unité, on a, d'après la proposition 1.32,

$$M_n^f(\lambda)^n = (\lambda - 1)^m \prod_{j=1}^{r} \left(\lambda - \left(f^{\circ n}\right)'(w_j)\right)^n\,,$$

où $w_1, \ldots, w_r$, avec $r \in \mathbb{N}$, forment un système de représentants des cycles pour f avec période n et multiplicateur différent de 1 et

$$m = \sum_{j=1}^{p} n\left(\mu_j + 1\right) + \sum_{j=1}^{q} k_j \frac{\nu_j n}{k_j} = n\left(p + \sum_{j=1}^{p} \mu_j + \sum_{j=1}^{q} \nu_j\right)\,,$$

où k_j, avec $j \in \{1, \ldots, q\}$, désigne la période du cycle parabolique pour f avec multiplicité parabolique ν_j. Par conséquent, on a

$$M_n^f(\lambda) = (\lambda - 1)^{\frac{m}{n}} \prod_{j=1}^{r} \left(\lambda - (f^{\circ n})'(w_j)\right) .$$

Ainsi, la proposition est démontrée. □

1.3.2. Le cas des polynômes unicritiques. Étudions plus en détail les polynômes multiplicateurs associés à la famille de polynômes unicritiques $(f_c)_{c \in \mathbb{C}}$.

On peut préciser la proposition 1.46 dans le cas des polynômes unicritiques. Soit $c \in \mathbb{C}$. Comme tout cycle de bassins paraboliques pour f_c contient l'unique point critique 0 (voir [**Bea91**, Theorem 9.3.2]), le polynôme f_c admet au plus un cycle parabolique et la multiplicité parabolique associée est égale à 1. Ainsi, on obtient le résultat suivant :

Proposition 1.47. *Soient $c \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ est racine du polynôme $M_n^{f_c}$ si et seulement si*

— *soit λ_0 est différent de 1 et est le multiplicateur de f_c en un cycle avec période n, auquel cas $\operatorname{ord}_{\lambda_0} M_n^{f_c}$ est égal au nombre de cycles pour f_c avec période n et multiplicateur λ_0,*

— *soit λ_0 est égal à 1 et est le multiplicateur de f_c en un cycle avec période n, auquel cas $\operatorname{ord}_{\lambda_0} M_n^{f_c} = 2$,*

— *soit λ_0 est égal à 1 et f_c a un cycle avec période un diviseur propre k de n et multiplicateur une racine primitive $\frac{n}{k}$-ième de l'unité, auquel cas* $\operatorname{ord}_{\lambda_0} M_n^{f_c} = 1$.

Soit c une indéterminée sur $\mathbb{Z}$, et rappelons que

$$\boldsymbol{A} = \mathbb{Z}[c] \quad \text{et} \quad \boldsymbol{f}(z) = z^d + c \in \operatorname{Poly}_d^U(\boldsymbol{A}) .$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $M_n \in \mathbb{Z}[c, z]$ l'image de $M_n^{\boldsymbol{f}}$ par l'isomorphisme d'anneaux canonique de $\boldsymbol{A}[\lambda]$ sur $\mathbb{Z}[c, \lambda]$.

D'après l'unicité dans la proposition 1.39, pour tout $c \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$M_n^{f_c}(\lambda) = M_n(c, \lambda) \in \mathbb{C}[\lambda] .$$

En particulier, les coefficients des polynômes $M_n^{f_c}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont des polynômes en c à coefficients entiers.

Exemple 1.48. On a

$$M_1(c, \lambda) = \operatorname{res}_z\left(z^d - z + c, \lambda - dz^{d-1}\right) = (-d)^d \prod_{j=1}^{d-1} \left(z_j^d - z_j + c\right) ,$$

où $z_1, \ldots, z_{d-1}$ sont les racines répétées avec multiplicités du polynôme $dz^{d-1} - \lambda$ dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}(\lambda)$. Par suite, on a

$$\begin{aligned} M_1(c, \lambda) &= (-d)^d \prod_{j=1}^{d-1} \left(d^{-1}(\lambda - d) z_j + c\right) \\ &= (-d)^d \left(c^{d-1} + \sum_{j=1}^{d-1} d^{-j} (\lambda - d)^j \sigma_j c^{d-1-j}\right) , \end{aligned}$$

où $\sigma_1, \ldots, \sigma_{d-1}$ sont les fonctions symétriques élémentaires de $z_1, \ldots, z_{d-1}$. Par conséquent, d'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme, on a

$$M_1(c, \lambda) = \lambda(\lambda - d)^{d-1} + (-d)^d c^{d-1}\,.$$

Exemple 1.49. Supposons que $d = 2$. Alors, en utilisant SageMath, on obtient

$$\begin{aligned}
M_1(c, \lambda) &= \lambda^2 - 2\lambda + 4c\,,\\
M_2(c, \lambda) &= \lambda - 4c - 4\,,\\
M_3(c, \lambda) &= \lambda^2 + (-8c - 16)\lambda + 64c^3 + 128c^2 + 64c + 64\,,\\
M_4(c, \lambda) &= \lambda^3 + \left(16c^2 - 48\right)\lambda^2 + \left(-256c^4 - 256c^3 + 256c^2 + 768\right)\lambda\\
&\qquad - 4096c^6 - 12288c^5 - 12288c^4 - 12288c^3 - 8192c^2 - 4096\,.
\end{aligned}$$

Exemple 1.50. Supposons que $d = 3$. Alors, en utilisant SageMath, on obtient

$$M_1(c, \lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 27c^2$$

et

$$M_2(c, \lambda) = \lambda^3 - 27\lambda^2 + \left(162c^2 + 243\right)\lambda - 729c^4 - 1458c^2 - 729\,.$$

En fait, comme le suggèrent les exemples 1.48, 1.49 et 1.50, les polynômes M_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, ne sont pas seulement des polynômes à coefficients entiers en c et λ. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 1.51. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme M_n est dans $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}, \lambda\right]$, est de coefficient dominant $\pm d^{\nu(n)}$ et de degré $\frac{(d-1)\nu(n)}{d}$ en c et est unitaire de degré $\frac{\nu(n)}{n}$ en λ.*

Démonstration. Soit $\overline{\boldsymbol{K}}$ une clôture algébrique du corps des fractions de $\boldsymbol{A}$. On a

$$M_n(c, \lambda) = \lambda^{\frac{\nu(n)}{n}} + \sum_{j=1}^{\frac{\nu(n)}{n}} (-1)^j \sigma_j(c) \lambda^{\frac{\nu(n)}{n} - j}\,,$$

où $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\frac{\nu(n)}{n}} \in \boldsymbol{A}$ sont les fonctions symétriques élémentaires des racines du polynôme $M_n^{\boldsymbol{f}}$ dans $\overline{\boldsymbol{K}}$ répétées avec multiplicités. De plus, pour tout $c \in \mathbb{C}$, comme

$$M_n(c, \lambda) = M_n^{f_c}(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]\,,$$

$\sigma_1(c), \ldots, \sigma_{\frac{\nu(n)}{n}}(c)$ sont les fonctions symétriques élémentaires des racines du polynôme $M_n^{f_c}$ répétées avec multiplicités.

Montrons d'abord que, pour tout $j \in \left\{1, \ldots, \frac{\nu(n)}{n}\right\}$, on a $\sigma_j \in \mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ une racine primitive $(d-1)$-ième de l'unité. Pour tout $c \in \mathbb{C}$, comme les polynômes f_c et $f_{\omega c}$ sont conjugués, on a $M_n^{f_c} = M_n^{f_{\omega c}}$ d'après la proposition 1.43. Par conséquent, pour tout $j \in \left\{1, \ldots, \frac{\nu(n)}{n}\right\}$, on a $\sigma_j(c) = \sigma_j(\omega c)$ pour tout $c \in \mathbb{C}$, et donc σ_j est dans le sous-anneau $\mathbb{Z}\left[c^{d-1}\right]$ de $\boldsymbol{A}$. Comme $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$ est intégralement clos dans $\mathbb{Z}\left[c^{d-1}\right]$ et chaque racine de $M_n^{\boldsymbol{f}}$ dans $\overline{\boldsymbol{K}}$ est de la forme

$$\left(\boldsymbol{f}^{\circ n}\right)'(z_0) = \prod_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{f}'\left(\boldsymbol{f}^{\circ j}(z_0)\right)\,,$$

où $z_0 \in \overline{\boldsymbol{K}}$est un point périodique pour $\boldsymbol{f}$, il suffit de prouver l'affirmation ci-dessous (comparer à [Mil14, Theorem 1.1]) pour conclure que $\sigma_j \in \mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$ pour tout $j \in \left\{1, \ldots, \frac{\nu(n)}{n}\right\}$. Ainsi, le polynôme M_n est dans $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}, \lambda\right]$.

Affirmation 1.52. Si $z_0 \in \overline{K}$ est un point périodique pour $\boldsymbol{f}$, alors $\boldsymbol{f}'(z_0)$ est entier sur $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$.

Démonstration de l'affirmation 1.52. Soit $d^{\frac{1}{d-1}}$ une racine $(d-1)$-ième de d dans $\overline{\boldsymbol{K}}$, et, pour $m \in \mathbb{Z}$, notons $d^{\frac{m}{d-1}} = \left(d^{\frac{1}{d-1}}\right)^m$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$d^{\frac{d^k}{d-1}} \boldsymbol{f}^{\circ k}\left(\frac{z}{d^{\frac{1}{d-1}}}\right) = \left(d^{\frac{d^{k-1}}{d-1}} \boldsymbol{f}^{\circ(k-1)}\left(\frac{z}{d^{\frac{1}{d-1}}}\right)\right)^d + d^{\frac{d^k}{d-1}} c\,.$$

Par suite, un raisonnement par récurrence montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le polynôme $d^{\frac{d^k}{d-1}} \boldsymbol{f}^{\circ k}\left(\frac{z}{d^{\frac{1}{d-1}}}\right)$ est unitaire de degré d^k et à coefficients dans $\mathbb{Z}\left[d^{\frac{d}{d-1}} c\right]$. Par conséquent, $d^{\frac{1}{d-1}} z_0$ est entier sur $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$ puisqu'il annule le polynôme unitaire

$$d^{\frac{d^k}{d-1}} \boldsymbol{f}^{\circ k}\left(\frac{z}{d^{\frac{1}{d-1}}}\right) - d^{\frac{d^k-1}{d-1}} z \in \mathbb{Z}\left[d^{\frac{d}{d-1}} c\right][z]$$

et $d^{\frac{d}{d-1}} c$ est entier sur $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$, où k désigne la période de z_0, et donc

$$\boldsymbol{f}'(z_0) = d z_0^{d-1} = \left(d^{\frac{1}{d-1}} z_0\right)^{d-1}$$

l'est également. Ainsi, l'affirmation est démontrée. □

Il reste à déterminer le terme dominant du polynôme M_n en c. Pour cela, démontrons d'abord le fait suivant :

Affirmation 1.53. Si $c \in \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ est un point périodique pour f_c, alors $|z_0| \leq 1 + |c|^{\frac{1}{d}}$.

Démonstration de l'affirmation 1.53. L'application $\varphi_c \colon x \mapsto x^d - x - |c|$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et vérifie $\varphi_c\left(1 + |c|^{\frac{1}{d}}\right) \geq 0$. Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1 + |c|^{\frac{1}{d}}$, on a

$$|f_c(z)| \geq |z|^d - |c| > |z|\,.$$

Par suite, si $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifie $|z_0| > 1 + |c|^{\frac{1}{d}}$, alors la suite $\left(f_c^{\circ k}(z_0)\right)_{k \geq 0}$ tend vers ∞, et donc z_0 n'est pas périodique f_c. Ainsi, l'affirmation est démontrée. □

Maintenant, si $c \in \mathbb{C}$ et $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ est une racine du polynôme $M_n^{f_c}$, alors il existe un point périodique $z_0 \in \mathbb{C}$ pour f_c tel que

$$\lambda_0 = \left(f_c^{\circ n}\right)'(z_0) = d^n \prod_{j=0}^{n-1} f^{\circ j}(z_0)^{d-1}\ .$$

Si $c \in \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ est un point périodique pour f_c, alors on a $|f_c(z_0)| \leq 1 + |c|^{\frac{1}{d}}$ d'après l'affirmation 1.53, et donc

$$\left||z_0| - |c|^{\frac{1}{d}}\right| \leq \left(1 + |c|^{\frac{1}{d}}\right)^{\frac{1}{d}}\ .$$

Par suite, il existe une application $\eta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+^*$ qui vérifie

$$\eta(c) = O_\infty\left(|c|^{\frac{(d-1)n}{d} - \frac{d-1}{d^2}}\right)$$

et

$$\left||\lambda_0| - d^n |c|^{\frac{(d-1)n}{d}}\right| \leq \eta(c)$$

pour tout $c \in \mathbb{C}$ et toute racine $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ du polynôme $M_n^{f_c}$. Par conséquent, pour tout $j \in \left\{1, \ldots, \frac{\nu(n)}{n}\right\}$, le polynôme $\sigma_j \in \mathbb{Z}[c]$ est de degré au plus $\frac{j(d-1)n}{d}$, avec égalité et coefficient dominant $\pm d^{\nu(n)}$ si $j = \frac{\nu(n)}{n}$. Ceci complète la démonstration de la proposition. □

On a également le résultat ci-dessous, qui donne des informations supplémentaires sur les coefficients des polynômes M_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 1.54. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme*

$$\widetilde{M}_n(c, \lambda) = d^{-\nu(n)} M_n\left(c, d^n \lambda\right)$$

est dans $\mathbb{Z}\left[c^{d-1}, \lambda\right]$, est de coefficient dominant ± 1 et de degré $\frac{(d-1)\nu(n)}{d}$ en c et est unitaire de degré $\frac{\nu(n)}{n}$ en λ.

Démonstration. Le polynôme $\widetilde{M}_n$ est dans $\mathbb{Q}\left[c^{d-1}, \lambda\right]$, est de coefficient dominant ± 1 et de degré $\frac{(d-1)\nu(n)}{d}$ en c et est unitaire de degré $\frac{\nu(n)}{n}$ en λ d'après la proposition 1.51. De plus, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_n(c, \lambda)^n &= d^{-n\nu(n)} \operatorname{res}_z\left(\Phi_n(c, z), d^n \lambda - \left(f_c^{\circ n}\right)'(z)\right) \\ &= \operatorname{res}_z\left(\Phi_n(c, z), \lambda - \prod_{j=0}^{n-1} f_c^{\circ j}(z)^{d-1}\right)\end{aligned}$$

puisque Φ_n est de degré $\nu(n)$ en z et

$$\left(f_c^{\circ n}\right)'(z) = \prod_{j=0}^{n-1} f_c'\left(f_c^{\circ j}(z)\right) = d^n \prod_{j=0}^{n-1} f_c^{\circ j}(z)^{d-1}.$$

Par conséquent, comme $\mathbb{Z}[c]$ est intégralement clos, $\widetilde{M}_n \in \mathbb{Q}[c, \lambda]$ est unitaire en λ et $\widetilde{M}_n^n \in \mathbb{Z}[c, \lambda]$, on a $\widetilde{M}_n \in \mathbb{Z}[c, \lambda]$ d'après le lemme A.1. Ceci complète la démonstration de la proposition. □

Exemple 1.55. D'après l'exemple 1.48, on a

$$\widetilde{M}_1(c, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{d-1} + (-1)^d c^{d-1}.$$

Exemple 1.56. Supposons que $d = 2$. Alors on a

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_1(c, \lambda) &= \lambda^2 - \lambda + c, \\ \widetilde{M}_2(c, \lambda) &= \lambda - c - 1, \\ \widetilde{M}_3(c, \lambda) &= \lambda^2 + (-c - 2)\lambda + c^3 + 2c^2 + c + 1, \\ \widetilde{M}_4(c, \lambda) &= \lambda^3 + \left(c^2 - 3\right)\lambda^2 + \left(-c^4 - c^3 + c^2 + 3\right)\lambda \\ &\quad - c^6 - 3c^5 - 3c^4 - 3c^3 - 2c^2 - 1.\end{aligned}$$

Exemple 1.57. Supposons que $d = 3$. Alors on a

$$\widetilde{M_1}(c,\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - c^2$$

et

$$\widetilde{M_2}(c,\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \left(2c^2 + 3\right) - c^4 - 2c^2 - 1\,.$$

Considérons maintenant l'ensemble de Mandelbrot

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : 0 \text{ a une orbite bornée pour } f_c\}\ .$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *composante hyperbolique* de $\mathcal{M}$ avec période n une composante connexe W de l'ensemble des paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels le polynôme f_c a un cycle attractif avec période n. Étant donnés une composante hyperbolique W de $\mathcal{M}$ et un paramètre $c \in W$, on note $\lambda_W(c)$ le multiplicateur de f_c en son unique cycle attractif. Pour toute composante hyperbolique W de $\mathcal{M}$, l'application $\lambda_W \colon W \to D(0,1)$ est un revêtement ramifié holomorphe à $d-1$ feuillets, son unique point critique est l'unique paramètre $c_W \in W$ pour lequel le point 0 est périodique pour f_{c_W} et λ_W se prolonge en une unique application $\widetilde{\lambda_W} \colon \overline{W} \to \overline{D(0,1)}$ qui induit un revêtement de $\overline{W} \setminus \{c_W\}$ sur $\overline{D(0,1)} \setminus \{0\}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les composantes hyperboliques de $\mathcal{M}$ avec période n ont des adhérences deux à deux disjointes (voir [**DH85**, Exposé XIV et Exposé XIX] ou [**Mil00**, Theorem 6.5])). En combinant ces faits, on obtient (comparer à [**MV95**, Proposition 3.2]) :

Proposition 1.58. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |\lambda_0| \leq 1$, le polynôme $M_n(c,\lambda_0) \in \mathbb{C}[c]$ est séparable. De plus, on a*

$$M_n(c,0) = \pm d^{\nu(n)} \Phi_n(c,0)^{d-1}$$

et le polynôme $\Phi_n(c,0) \in \mathbb{Z}[c]$ est séparable.

La proposition 1.58 constitue un argument essentiel dans notre démonstration du théorème 1.38, qui est prouvé à la fin de ce chapitre et affirme que les polynômes Φ_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont irréductibles sur $\mathbb{C}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme $\Phi_n^{\boldsymbol{f}}$ est irréductible sur $\mathbb{C}(c)$ d'après le théorème 1.38, et donc ses racines dans une clôture algébrique de $\mathbb{C}(c)$ sont deux à deux conjuguées sur $\mathbb{C}(c)$. Par suite, les racines du polynôme $M_n^{\boldsymbol{f}}$ le sont également, et donc M_n est la puissance d'un certain polynôme irréductible dans $\mathbb{C}[c,\lambda]$. Par conséquent, comme le polynôme $M_n(c,1) \in \mathbb{Z}[c]$ est séparable d'après la proposition 1.58, on obtient :

Proposition 1.59 ([**Mor96**, Corollary 1]). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le polynôme M_n est irréductible sur $\mathbb{C}$.*

1.3.3. Discriminants des polynômes multiplicateurs. Finalement, étudions les discriminants des polynômes multiplicateurs associés à la famille $(f_c)_{c\in\mathbb{C}}$. Ceux-ci apparaitront lorsque nous répondrons à la question 2.44 dans le cas des polynômes unicritiques.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Delta_n(c) = \operatorname{disc}_\lambda M_n(c,\lambda) \in \mathbb{Z}[c]\,,$$

où $\operatorname{disc}_\lambda$ désigne le discriminant par rapport à λ. En fait, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme Δ_n est dans $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$ d'après la proposition 1.51. De plus, pour tout $c \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Delta_n(c) = \operatorname{disc} M_n^{f_c} \in \mathbb{C}\,.$$

EXEMPLE 1.60. D'après l'exemple 1.48, on a

$$M_1(c,\lambda) = \lambda(\lambda-d)^{d-1} + (-d)^d c^{d-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial M_1}{\partial \lambda}(c,\lambda) = d(\lambda-1)(\lambda-d)^{d-2}\,.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\Delta_1(c) &= (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} \operatorname{res}_\lambda\left(M_1(c,\lambda), \frac{\partial M_1}{\partial \lambda}(c,\lambda)\right)\\ &= (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} d^d M_1(c,1) M_1(c,d)^{d-2}\\ &= (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} d^{d(d-1)} c^{(d-1)(d-2)} \left(d^d c^{d-1} - (d-1)^{d-1}\right)\,.\end{aligned}$$

EXEMPLE 1.61. Supposons que $d=2$. Alors, en utilisant SageMath, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_1(c) &= -2^2(4c-1)\,,\\ \Delta_2(c) &= 1\,,\\ \Delta_3(c) &= -2^6(4c+7)c^2\,,\\ \Delta_4(c) &= -2^{24}\left(64c^3+144c^2+108c+135\right)(c+2)^2c^6\,.\end{aligned}$$

EXEMPLE 1.62. Supposons que $d=3$. Alors, en utilisant SageMath, on obtient

$$\Delta_1(c) = -3^6\left(27c^2-4\right)c^2 \quad \text{et} \quad \Delta_2(c) = -3^{12}\left(27c^2+32\right)c^6\,.$$

Enfin, expliquons les factorisations observées dans les exemples 1.61 et 1.62.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la proposition 1.47, les racines du polynôme Δ_n sont précisément les paramètres $c_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquels f_{c_0} a un cycle avec période n et multiplicateur 1 ou f_{c_0} a deux cycles distincts avec période n et le même multiplicateur. Ainsi, afin de factoriser Δ_n, il est naturel d'essayer de définir un polynôme qui s'annule précisément aux paramètres $c_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquels f_{c_0} a un cycle avec période n et multiplicateur 1. D'après la proposition 1.47, les racines du polynôme $M_n(c,1) \in \mathbb{Z}[c]$ sont précisément les paramètres $c_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquels soit f_{c_0} a un cycle avec période n et multiplicateur 1 soit f_{c_0} a un cycle avec période un diviseur propre k de n et multiplicateur une racine primitive $\frac{n}{k}$-ième de l'unité, ce qui suggère de factoriser ce polynôme.

Pour tout $k \geq 1$ et tout $l \geq 2$, posons

$$P_{k,l}(c) = \operatorname{res}_\lambda\left(C_l(\lambda), M_k(c,\lambda)\right) \in \mathbb{Z}[c]\,,$$

où $C_l \in \mathbb{Z}[\lambda]$ désigne le l-ième polynôme cyclotomique. Soient $k \geq 1$ et $l \geq 2$. On a

$$P_{k,l}(c) = \prod_{j=1}^{\varphi(l)} M_k\left(c,\omega_j\right)\,,$$

où $\varphi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ désigne l'indicatrice d'Euler et $\omega_1, \dots, \omega_{\varphi(l)}$ sont les racines primitives l-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Par suite, d'après les propositions 1.47 et 1.51, le polynôme $P_{k,l}$ est dans $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$, est de coefficient dominant ± 1 en $d^d c^{d-1}$ et ses racines sont précisément les paramètres $c_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquels le polynôme f_{c_0} a un cycle avec période k et multiplicateur une racine primitive l-ième de l'unité. De plus, d'après la proposition 1.58 et comme tout cycle de bassins paraboliques contient un point critique (voir [**Bea91**, Theorem 9.3.2]), le polynôme $P_{k,l}$ est séparable et, pour tout $k' \geq 1$ et tout $l' \geq 2$ tels que $(k,l) \neq (k',l')$, les polynômes $P_{k,l}$ et $P_{k',l'}$ n'ont pas de racine commune.

Remarque 1.63. Soient $k \geq 1$ et $l \geq 2$. Les paramètres $c_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquels le polynôme f_{c_0} a un cycle avec période k et multiplicateur une racine primitive l-ième de l'unité sont précisément les paramètres en lesquels un cycle avec période kl dégénère en un cycle avec période k. Ce sont les paramètres qui sont dans l'intersection des adhérences d'une composante hyperbolique de $\mathcal{M}$ avec période k et d'une composante hyperbolique de $\mathcal{M}$ avec période kl.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les propositions 1.47, 1.51 et 1.58, le polynôme $M_n(c,1)$ est dans $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$, est de coefficient dominant ± 1 en $d^d c^{d-1}$ et ses racines sont simples et sont précisément les racines des polynômes $P_{k,\frac{n}{k}}$, avec k un diviseur propre de n, et les paramètres $c_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquels le polynôme f_{c_0} a un cycle avec période n et multiplicateur 1. De plus, d'après ce qui précède, le polynôme

$$\prod_{k \mid n,\, k \neq n} P_{k,\frac{n}{k}} \in \mathbb{Z}[c]$$

est dans $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$, est de coefficient dominant ± 1 en $d^d c^{d-1}$ et est séparable. Par conséquent, il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{Z}[c]$ tel que

$$M_n(c,1) = Q_n(c) \prod_{k \mid n,\, k \neq n} P_{k,\frac{n}{k}}(c)$$

et le polynôme Q_n est dans $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$, est de coefficient dominant ± 1 en $d^d c^{d-1}$ et ses racines sont simples et sont précisément les paramètres $c_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquels le polynôme f_{c_0} a un cycle avec n et multiplicateur 1.

Remarque 1.64. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les paramètres $c_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquels le polynôme f_{c_0} a un cycle avec période n et multiplicateur 1 sont précisément les paramètres en lesquels deux cycles avec période n se percutent. Ce sont les paramètres aux points de rebroussement des composantes hyperboliques de $\mathcal{M}$ avec période n.

Remarque 1.65. Dans [**MV95**], Morton et Vivaldi généralisent la construction des polynômes $P_{k,l}$, avec $k \geq 1$ et $l \geq 2$, et des polynômes Q_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, au cas de l'anneau $\mathfrak{A}$ et du polynôme $\mathfrak{f} \in \operatorname{Poly}_d^U(\mathfrak{A})$. De plus, ils expriment les résultants et discriminants des polynômes $\Phi_n^{\mathfrak{f}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de ces éléments de $\mathfrak{A}$.

Comme les polynômes Q_n et Δ_n sont dans $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$ et le polynôme Q_n est de coefficient dominant ± 1 en $d^d c^{d-1}$ et ses racines sont simples et sont aussi racines de Δ_n, le polynôme Q_n divise le polynôme Δ_n dans $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$. En fait, on a le résultat plus précis ci-dessous (comparer à [**Mor96**, Proposition 9]).

Proposition 1.66. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe des uniques entier sans facteur carré a_n et polynôme $R_n \in \mathbb{Z}[c]$ avec coefficient dominant positif qui vérifient*

$$\Delta_n = a_n Q_n R_n^2 \,.$$

De plus, le polynôme R_n est dans $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$ et ses racines sont précisément les paramètres $c_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquels le polynôme f_{c_0} a deux cycles distincts avec période n et le même multiplicateur.

Démonstration. Comme les polynômes Q_n et Δ_n sont dans $\mathbb{Z}\left[d^d c^{d-1}\right]$ et le polynôme Q_n est de coefficient dominant ± 1 en $d^d c^{d-1}$, est séparable et ses racines sont aussi racines de Δ_n, il suffit de montrer que, pour tout paramètre $c_0 \in \mathbb{C}$, on a

$$\operatorname{ord}_{c_0} \Delta_n = \varepsilon_n(c_0) + 2\kappa_n(c_0) \,,$$

où $\varepsilon_n(c_0) \in \{0,1\}$ est égal à 1 si et seulement si f_{c_0} a un cycle avec période n et multiplicateur 1 et $\kappa_n(c_0) \in \mathbb{N}$ est strictement positif si et seulement si f_{c_0} a deux cycles distincts avec période n et le même multiplicateur.

Soit $c_0 \in \mathbb{C}$. Soient $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$, avec $r \in \mathbb{N}$, qui forment un système de représentants des cycles pour f_{c_0} avec période n et multiplicateur différent de 1. Pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a $\operatorname{ord}_{z_j} \Phi_n^{f_{c_0}} = 1$ d'après la proposition 1.35, et donc $\frac{\partial \Phi_n}{\partial z}(c_0, z_j) \neq 0$. Par suite, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ contenant c_0 et des applications holomorphes

$$\zeta_1, \ldots, \zeta_r \colon U \to \mathbb{C}$$

tels que, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a $\zeta_j(c_0) = z_j$ et $\Phi_n(c, \zeta_j(c)) = 0$ pour tout $c \in U$. L'anneau $\boldsymbol{A} = \mathbb{Z}[c]$ s'injecte naturellement dans l'anneau $\boldsymbol{B} = \mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur U. Pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a $\Phi_n^{\boldsymbol{f}}(\zeta_j) = 0$, et donc ζ_j est un point périodique pour le polynôme $\boldsymbol{f}$ avec période un diviseur de n. Par suite, comme les points $\zeta_j(c_0) = z_j$, avec $j \in \{1, \ldots, r\}$, sont périodiques pour f_{c_0} avec période n et appartiennent à des cycles deux à deux disjoints, les points ζ_j, avec $j \in \{1, \ldots, r\}$, sont des points périodiques pour $\boldsymbol{f}$ avec période n qui appartiennent à des cycles deux à deux disjoints. Par conséquent, il existe un unique polynôme unitaire $\Psi_n \in \boldsymbol{B}[z]$ tel que

$$\Phi_n^{\boldsymbol{f}}(z) = \Psi_n(z) \prod_{j=1}^{r} \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \boldsymbol{f}^{\circ k}(\zeta_j)\right),$$

et on a

$$M_n^{\boldsymbol{f}}(\lambda)^n = \operatorname{res}_z\left(\Psi_n(z), \lambda - \left(\boldsymbol{f}^{\circ n}\right)'(z)\right) \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)^n,$$

où $\lambda_j = \left(\boldsymbol{f}^{\circ n}\right)'(\zeta_j)$ est le multiplicateur de $\boldsymbol{f}$ en ζ_j, avec $j \in \{1, \ldots, r\}$. Par suite, d'après le corollaire A.5, il existe un unique polynôme unitaire $N_n \in \boldsymbol{B}[\lambda]$ qui vérifie

$$M_n^{\boldsymbol{f}}(\lambda) = N_n(\lambda) \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j).$$

Maintenant, posons

$$\kappa_n(c_0) = \sum_{1 \leq j < k \leq r} \operatorname{ord}_{c_0}(\lambda_j - \lambda_k) \in \mathbb{N},$$

qui est strictement positif si et seulement si le polynôme f_{c_0} a deux cycles distincts avec période n et le même multiplicateur puisque $\lambda_j(c_0) = \left(f_{c_0}^{\circ n}\right)'(z_j)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$. Distinguons trois cas distincts.

Supposons que f_{c_0} n'a aucun cycle avec période un diviseur propre k de n et multiplicateur une racine primitive $\frac{n}{k}$-ième de l'unité ni aucun cycle avec période n et multiplicateur 1. Alors, d'après la proposition 1.47, on a

$$M_n^{f_{c_0}}(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} \left(\lambda - \left(f_{c_0}^{\circ n}\right)'(z_j)\right) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j(c_0)),$$

et donc $r = \frac{\nu(n)}{n}$ et $N_n(\lambda) = 1$. Par conséquent, on a

$$\Delta_n = \operatorname{disc} M_n^{\boldsymbol{f}} = \prod_{1 \leq j < k \leq \frac{\nu(n)}{n}} (\lambda_j - \lambda_k)^2,$$

et donc $\operatorname{ord}_{c_0} \Delta_n = 2\kappa_n(c_0)$.

Supposons maintenant que f_{c_0} a un cycle avec période un diviseur propre k de n et multiplicateur une racine primitive $\frac{n}{k}$-ième de l'unité. Alors, d'après la proposition 1.47, on a

$$M_n^{f_{c_0}}(\lambda) = (\lambda - 1) \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j(c_0)) \,,$$

et donc $r = \frac{\nu(n)}{n} - 1$ et il existe une application holomorphe $\rho\colon U \to \mathbb{C}$ telle que $\rho(c_0) = 1$ et $N_n(\lambda) = \lambda - \rho$. Par conséquent, on a

$$\Delta_n = \prod_{j=1}^{\frac{\nu(n)}{n}-1} (\rho - \lambda_j)^2 \prod_{1 \le j < k \le \frac{\nu(n)}{n}-1} (\lambda_j - \lambda_k)^2 \,,$$

et donc $\operatorname{ord}_{c_0} \Delta_n = 2\kappa_n(c_0)$ puisque

$$\prod_{j=1}^{\frac{\nu(n)}{n}-1} (\rho - \lambda_j)(c_0)^2 = \prod_{j=1}^{\frac{\nu(n)}{n}-1} \left(1 - \left(f_{c_0}^{\circ n}\right)'(z_j)\right)^2 \neq 0 \,.$$

Finalement, supposons que f_{c_0} a un cycle avec période n et multiplicateur 1. Alors, d'après la proposition 1.47, on a

$$M_n^{f_{c_0}}(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j(c_0)) \,,$$

et donc $r = \frac{\nu(n)}{n} - 2$ et il existe des fonctions holomorphes $\sigma_1, \sigma_2\colon U \to \mathbb{C}$ telles que

$$\sigma_1(c_0) = 2 \,, \quad \sigma_2(c_0) = 1 \quad \text{et} \quad N_n(\lambda) = \lambda^2 - \sigma_1\lambda + \sigma_2 \,.$$

Par conséquent, on a

$$\Delta_n = \left(\sigma_1^2 - 4\sigma_2\right) \prod_{j=1}^{\frac{\nu(n)}{n}-2} \left(\lambda_j^2 - \sigma_1\lambda_j + \sigma_2\right)^2 \prod_{1 \le j < k \le \frac{\nu(n)}{n}-2} (\lambda_j - \lambda_k)^2 \,,$$

et donc

$$\operatorname{ord}_{c_0} \Delta_n = \operatorname{ord}_{c_0} \left(\sigma_1^2 - 4\sigma_2\right) + 2\kappa_n(c_0)$$

puisque l'on a

$$\prod_{j=1}^{\frac{\nu(n)}{n}-2} \left(\lambda_j^2 - \sigma_1\lambda_j + \sigma_2\right)(c_0)^2 = \prod_{j=1}^{\frac{\nu(n)}{n}-2} \left(\left(f_{c_0}^{\circ n}\right)'(z_j) - 1\right)^4 \neq 0 \,.$$

On a $\left(\sigma_1^2 - 4\sigma_2\right)(c_0) = 0$. De plus, comme le polynôme $M_n(c, 1) \in \mathbb{Z}[c]$ est séparable d'après la proposition 1.58, on a

$$\frac{\partial M_n}{\partial c}(c_0, 1) = \left(-\sigma_1'(c_0) + \sigma_2'(c_0)\right) \prod_{j=1}^{\frac{\nu(n)}{n}-2} (1 - \lambda_j(c_0)) \neq 0 \,,$$

et donc

$$\left(\sigma_1^2 - 4\sigma_2\right)'(c_0) = -4\left(-\sigma_1'(c_0) + \sigma_2'(c_0)\right) \neq 0 \,.$$

Par conséquent, on a $\operatorname{ord}_{c_0} \left(\sigma_1^2 - 4\sigma_2\right) = 1$, et donc

$$\operatorname{ord}_{c_0} \Delta_n = 1 + 2\kappa_n(c_0) \,.$$

Ceci complète la démonstration de la proposition. □

Exemple 1.67. D'après les exemples 1.48 et 1.60, on a

$$Q_1(c) = M_1(c,1) = (-1)^d \left(d^d c^{d-1} - (d-1)^{d-1}\right)$$

et

$$\Delta_1(c) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} d^{d(d-1)} c^{(d-1)(d-2)} \left(d^d c^{d-1} - (d-1)^{d-1}\right) .$$

Par conséquent, on a

$$a_1 = (-1)^{\frac{d(d+1)}{2}} \quad \text{et} \quad R_1(c) = d^{\frac{d(d-1)}{2}} c^{\frac{(d-1)(d-2)}{2}} .$$

Remarquons que les polynômes Q_1 et R_1 n'ont pas de racine commune, ce qui montre qu'il n'existe pas de paramètre $c_0 \in \mathbb{C}$ pour lequel le polynôme f_{c_0} a à la fois un point fixe avec multiplicateur 1 et deux points fixes distincts avec le même multiplicateur. En utilisant le logiciel SageMath, on observe que les polynômes Q_n et R_n n'ont également aucune racine commune pour des petites valeurs de d et n. Ainsi, il est vraisemblable que la question suivante admet une réponse négative.

Question 1.68. Existe-t-il $n \in \mathbb{N}^*$ tel que les polynômes Q_n et R_n ont une racine commune ? De manière équivalente, existent-ils $n \in \mathbb{N}^*$ et un polynôme unicritique $f \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})$ qui a à la fois un cycle avec période n et multiplicateur 1 et deux cycles distincts avec période n et le même multiplicateur ?

Enfin, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $c_0 \in \mathbb{C}$ est un paramètre tel que le polynôme f_{c_0} a un multiplicateur rationnel en chaque cycle avec période 1 ou n, alors c_0^{d-1} est rationnel d'après l'exemple 1.48 et $\Delta_n(c_0)$ est le carré d'un nombre rationnel puisque les polynômes $M_1^{f_{c_0}}$ et $M_n^{f_{c_0}}$ sont scindés sur $\mathbb{Q}$ d'après le corollaire 1.45, et donc $R_n(c_0)$ est nul ou $a_n Q_n(c_0)$ est le carré d'un nombre rationnel. Par suite, afin d'étudier les polynômes unicritiques avec multiplicateurs rationnels, il serait intéressant de déterminer les entiers a_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On a prouvé dans l'exemple 1.67 que $a_1 = \pm 1$. En utilisant le logiciel SageMath, on obtient également $a_n = \pm 1$ pour des petites valeurs de d et n, ce qui suggère la question suivante :

Question 1.69. A-t-on $a_n = \pm 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

Nous verrons dans la remarque 1.78 que la question ci-dessus admet une réponse positive dans le cas où $d = 2$.

1.4. Dynamique des polynômes unicritiques et dynamique du décalage

Dans cette section, nous établissons une correspondance entre la dynamique des polynômes unicritiques et celle du décalage. En particulier, ceci nous permet de démontrer le théorème 1.38, qui affirme que les polynômes Φ_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont irréductibles sur $\mathbb{C}$. Ceci nous permet également de démontrer que la question 1.69 admet une réponse positive dans le cas où $d = 2$.

Dans toute cette section, d désigne encore un entier fixé supérieur ou égal à 2.

Soit c une indéterminée sur $\mathbb{Z}$, et rappelons que

$$\boldsymbol{A} = \mathbb{Z}[c] \quad \text{et} \quad \boldsymbol{f}(z) = z^d + c \in \mathrm{Poly}_d^U(\boldsymbol{A}) .$$

Nous pouvons examiner la dynamique de $\boldsymbol{f}$ dans différents anneaux commutatifs $\boldsymbol{B}$ contenant $\boldsymbol{A}$ et nous intéresser en particulier aux points périodiques pour $\boldsymbol{f}$ dans $\boldsymbol{B}$, qui sont les racines des polynômes $\boldsymbol{f}^{\circ n}(z) - z$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, il est souvent intéressant de considérer une clôture algébrique $\overline{\boldsymbol{K}}$ du corps des fractions $\boldsymbol{K}$ de $\boldsymbol{A}$

afin que ces polynômes soient scindés. En fait, nous verrons qu'il suffit pour cela d'examiner la dynamique de $\boldsymbol{f}$ dans une extension non algébriquement close de $\boldsymbol{K}$ que l'on peut décrire simplement.

Par souci de commodité, étudions plutôt la dynamique du polynôme

$$\boldsymbol{g}(z) = z^d - c^d \in \operatorname{Poly}_d^U(\boldsymbol{A})\,.$$

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ une racine primitive d-ième de l'unité, et définissons

$$\boldsymbol{L} = \mathbb{Q}(\omega)\left(\left(\frac{1}{c}\right)\right) = \left\{\sum_{n \geq N} \frac{a_n}{c^n} : N \in \mathbb{Z} \text{ et } a_n \in \mathbb{Q}(\omega) \text{ pour tout } n \geq N\right\}$$

le corps des séries de Laurent centrées à l'infini à coefficients dans $\mathbb{Q}(\omega)$, qui est un corps non algébriquement clos contenant $\boldsymbol{A}$. Nous verrons que les polynômes $\boldsymbol{g}^{\circ n}(z) - z$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont scindés sur $\boldsymbol{L}$.

Notons $\mathbb{U}$ l'ensemble des racines d-ièmes de l'unité et $\sigma\colon \mathbb{U}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ le *décalage* qui à une suite $\boldsymbol{\varepsilon} = (\epsilon_n)_{n\geq 0}$ associe $(\epsilon_{n+1})_{n\geq 0}$.

Pour $P, Q \in \boldsymbol{L}$ et $N \in \mathbb{Z}$, on note

$$P(c) = Q(c) + O_\infty\left(\frac{1}{c^N}\right) \Longleftrightarrow \exists\, (a_n)_{n\geq N} \in \mathbb{Q}(\omega)^{\mathbb{Z}_{\geq N}},\ P(c) - Q(c) = \sum_{n\geq N} \frac{a_n}{c^n}\,.$$

On a le résultat ci-dessous, qui relie l'action de $\boldsymbol{g}$ dans $\boldsymbol{L}$ à celle de σ sur $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ (comparer à [**Mor96**, Lemma 1]).

Proposition 1.70. *Il existe une unique application $\psi\colon \mathbb{U}^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{L}$ qui rend le diagramme ci-dessous commutatif et vérifie $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \epsilon_0 c + O_\infty(1)$ pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$.*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{U}^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbb{U}^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\psi"] \\ \boldsymbol{L} \arrow[r, "\boldsymbol{g}"'] & \boldsymbol{L} \end{tikzcd}$$

De plus, l'application ψ est donnée par

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = c \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n(\boldsymbol{\varepsilon})}{c^{n(d-1)}}\,,$$

où $(a_n)_{n\geq 0}$ est la suite d'applications de $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Q}(\omega)$ définie par $a_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \epsilon_0$ et

$$a_n(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\epsilon_0}{d}\left(a_{n-1}\left(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon})\right) - \sum_{\substack{0\leq j_1,\dots,j_d\leq n-1\\ j_1+\dots+j_d=n}} \prod_{k=1}^{d} a_{j_k}(\boldsymbol{\varepsilon})\right) \quad \textit{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Démonstration. Supposons que $\psi\colon \mathbb{U}^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{L}$ est une application qui vérifie $\boldsymbol{g}\circ\psi = \psi\circ\sigma$ et $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \epsilon_0 c + O_\infty(1)$ pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$. Alors il existe des applications $b_n\colon \mathbb{U}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Q}(\omega)$, avec $n \in \mathbb{N}$, telles que

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = c \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n(\boldsymbol{\varepsilon})}{c^n} \quad \text{et} \quad b_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \epsilon_0$$

pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$. Montrons que $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ non divisible par $d-1$. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ minimal qui n'est pas divisible par $d-1$ et tel que $b_n \neq 0$. Alors, en examinant les termes d'ordre c^{d-n} dans l'égalité $\boldsymbol{g} \circ \psi = \psi \circ \sigma$, on obtient

$$d\epsilon_0^{d-1} b_n(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_d \in \mathbb{N} \\ j_1+\dots+j_d=n}} \prod_{k=1}^{d} b_{j_k}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq d-2 \\ b_{n-d+1}\left(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon})\right) & \text{si } n \geq d \end{cases}$$

pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$, et donc $b_n = 0$ puisque $n-d+1$ est strictement inférieur à n et n'est pas divisible par $d-1$. Ceci est absurde.

Soit $\psi\colon \mathbb{U}^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{L}$ une application de la forme

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = c \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n(\boldsymbol{\varepsilon})}{c^{n(d-1)}} \quad \text{avec} \quad a_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \epsilon_0\,,$$

où a_n est une application de $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Q}(\omega)$, avec $n \in \mathbb{N}$. D'une part, on a

$$\boldsymbol{g} \circ \psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = c \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{\substack{j_1,\dots,j_d \in \mathbb{N} \\ j_1+\dots+j_d=n}} \prod_{k=1}^{d} a_{j_k}(\boldsymbol{\varepsilon}) \right) \frac{1}{c^{(n-1)(d-1)}}$$

pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$. D'autre part, on a

$$\psi \circ \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}) = c \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n\left(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon})\right)}{c^{n(d-1)}}$$

pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$. Par conséquent, on a $\boldsymbol{g} \circ \psi = \psi \circ \sigma$ si et seulement si

$$\sum_{\substack{j_1,\dots,j_d \in \mathbb{N} \\ j_1+\dots+j_d=n}} \prod_{k=1}^{d} a_{j_k}(\boldsymbol{\varepsilon}) = a_{n-1}\left(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon})\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ ou, de manière équivalente, si et seulement si

$$a_n(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\epsilon_0}{d} \left(a_{n-1}\left(\sigma(\boldsymbol{\varepsilon})\right) - \sum_{\substack{0 \leq j_1,\dots,j_d \leq n-1 \\ j_1+\dots+j_d=n}} \prod_{k=1}^{d} a_{j_k}(\boldsymbol{\varepsilon}) \right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$. De plus, on a $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \epsilon_0 c + O_\infty(1)$ pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$. Ceci complète la démonstration de la proposition. $\square$

Exemple 1.71. Pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned}
a_0(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \epsilon_0\,, \\
a_1(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{\epsilon_0\epsilon_1}{d}\,, \\
a_2(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2}{d^2} - \frac{(d-1)\epsilon_0\epsilon_1^2}{2d^2}\,, \\
a_3(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}{d^3} - \frac{(d-1)\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2^2}{2d^3} - \frac{(d-1)\epsilon_0\epsilon_1^2\epsilon_2}{d^3} + \frac{(d-1)(2d-1)\epsilon_0\epsilon_1^3}{6d^3}\,.
\end{aligned}$$

L'application $\psi\colon \mathbb{U}^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{L}$ ainsi définie établit une correspondance entre la dynamique de $\boldsymbol{g}$ dans $\boldsymbol{L}$ et celle de σ dans $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$, comme le montre le résultat suivant :

TABLE 1. Points périodiques pour $\boldsymbol{g}$ dans $\boldsymbol{L}$ avec période inférieure ou égale à 3 lorsque $d = 2$.

Période	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\psi(\boldsymbol{\varepsilon})$
1	$(-1, \dots)$	$-c + \frac{1}{2} - \frac{1}{8c} + \frac{1}{128c^3} - \frac{1}{1024c^5} + O_\infty\left(\frac{1}{c^6}\right)$
1	$(1, \dots)$	$c + \frac{1}{2} + \frac{1}{8c} - \frac{1}{128c^3} + \frac{1}{1024c^5} + O_\infty\left(\frac{1}{c^6}\right)$
2	$(-1, 1, \dots)$	$-c - \frac{1}{2} + \frac{3}{8c} + \frac{9}{128c^3} + \frac{27}{1024c^5} + O_\infty\left(\frac{1}{c^6}\right)$
2	$(1, -1, \dots)$	$c - \frac{1}{2} - \frac{3}{8c} - \frac{9}{128c^3} - \frac{27}{1024c^5} + O_\infty\left(\frac{1}{c^6}\right)$
3	$(-1, -1, 1, \dots)$	$-c + \frac{1}{2} + \frac{3}{8c} + \frac{25}{128c^3} + \frac{1}{16c^4} + \frac{203}{1024c^5} + O_\infty\left(\frac{1}{c^6}\right)$
3	$(-1, 1, -1, \dots)$	$-c - \frac{1}{2} + \frac{3}{8c} - \frac{1}{4c^2} + \frac{9}{128c^3} - \frac{3}{16c^4} + \frac{91}{1024c^5} + O_\infty\left(\frac{1}{c^6}\right)$
3	$(-1, 1, 1, \dots)$	$-c - \frac{1}{2} - \frac{1}{8c} + \frac{1}{4c^2} - \frac{15}{128c^3} + \frac{1}{8c^4} - \frac{49}{1024c^5} + O_\infty\left(\frac{1}{c^6}\right)$
3	$(1, -1, -1, \dots)$	$c - \frac{1}{2} + \frac{1}{8c} + \frac{1}{4c^2} + \frac{15}{128c^3} + \frac{1}{8c^4} + \frac{49}{1024c^5} + O_\infty\left(\frac{1}{c^6}\right)$
3	$(1, -1, 1, \dots)$	$c - \frac{1}{2} - \frac{3}{8c} - \frac{1}{4c^2} - \frac{9}{128c^3} - \frac{3}{16c^4} - \frac{91}{1024c^5} + O_\infty\left(\frac{1}{c^6}\right)$
3	$(1, 1, -1, \dots)$	$c + \frac{1}{2} - \frac{3}{8c} - \frac{25}{128c^3} + \frac{1}{16c^4} - \frac{203}{1024c^5} + O_\infty\left(\frac{1}{c^6}\right)$

PROPOSITION 1.72. *L'application ψ est injective. De plus, celle-ci induit une bijection de l'ensemble des points périodiques pour σ sur l'ensemble des points périodiques pour $\boldsymbol{g}$ dans $\boldsymbol{L}$ qui préserve les périodes.*

Afin de démontrer la proposition 1.72, énonçons le lemme ci-dessous, qui se déduit immédiatement de la proposition 1.70 par récurrence. Il nous sera également utile pour démontrer le théorème 1.38.

LEMME 1.73. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{Q}[X_0, \dots, X_{n-1}]$ tel que, pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$, on a*

$$a_n(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\prod_{j=0}^n \epsilon_j}{d^n} + P_n(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}) .$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.72. Si $\boldsymbol{\varepsilon} = (\epsilon_n)_{n\geq 0}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}' = (\epsilon'_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ sont tels que $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}')$, alors un raisonnement par récurrence montre que $\epsilon_n = \epsilon'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le lemme 1.73. Ainsi, ψ est injective.

Il reste à prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les points périodiques pour $\boldsymbol{g}$ dans $\boldsymbol{L}$ avec période n sont précisément les images par ψ des points périodiques pour σ avec période n. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\boldsymbol{\Sigma}^n$ l'ensemble des points périodiques pour σ avec période divisant n et $\mathcal{X}^n$ l'ensemble des points périodiques pour $\boldsymbol{g}$ dans $\boldsymbol{L}$ avec période divisant n, de sorte que

$$\boldsymbol{\Sigma}^n = \left\{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}} : \sigma^{\circ n}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon}\right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{X}^n = \{z \in \boldsymbol{L} : \boldsymbol{g}^{\circ n}(z) = z\} .$$

Il suffit de démontrer que $\psi(\boldsymbol{\Sigma}^n) = \mathcal{X}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\boldsymbol{g}^{\circ n} \circ \psi = \psi \circ \sigma^n$, on a $\psi(\boldsymbol{\Sigma}^n) \subset \mathcal{X}^n$. D'une part, l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}^n$ contient exactement d^n éléments – chacun d'entre eux étant entièrement déterminé par le choix de ses n premiers termes – et ψ est injective, et donc $\psi(\boldsymbol{\Sigma}^n)$ contient exactement d^n éléments. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{X}^n$ contient au plus d^n éléments puisque ceux-ci sont précisément les racines du polynôme $\boldsymbol{g}^{\circ n}(z) - z \in \boldsymbol{L}[z]$, qui est de degré d^n. Par conséquent, on a $\psi(\boldsymbol{\Sigma}^n) = \mathcal{X}^n$. Ainsi, la proposition est démontrée. $\square$

On peut alors calculer récursivement des développements des points périodiques pour $\boldsymbol{g}$ dans $\boldsymbol{L}$ (voir les tables 1 et 2).

TABLE 2. Points périodiques pour $\boldsymbol{g}$ dans $\boldsymbol{L}$ avec période 1 ou 2 lorsque $d=3$, où $j=\exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

Période	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\psi(\boldsymbol{\varepsilon})$
1	$(1,\dots)$	$c+\frac{1}{3c}-\frac{1}{81c^5}+\frac{1}{243c^7}+O_\infty\left(\frac{1}{c^9}\right)$
1	$(j,\dots)$	$jc+\frac{-1-j}{3c}-\frac{j}{81c^5}+\frac{-1-j}{243c^7}+O_\infty\left(\frac{1}{c^9}\right)$
1	$\left(j^2,\dots\right)$	$(-1-j)c+\frac{j}{3c}+\frac{1+j}{81c^5}+\frac{j}{243c^7}+O_\infty\left(\frac{1}{c^9}\right)$
2	$(1,j,\dots)$	$c+\frac{j}{3c}+\frac{1+2j}{9c^3}+\frac{8}{81c^5}+\frac{6-5j}{243c^7}+O_\infty\left(\frac{1}{c^9}\right)$
2	$\left(1,j^2,\dots\right)$	$c+\frac{-1-j}{3c}+\frac{-1-2j}{9c^3}+\frac{8}{81c^5}+\frac{11+5j}{243c^7}+O_\infty\left(\frac{1}{c^9}\right)$
2	$(j,1,\dots)$	$jc+\frac{j}{3c}+\frac{-1-2j}{9c^3}+\frac{8j}{81c^5}+\frac{-6-11j}{243c^7}+O_\infty\left(\frac{1}{c^9}\right)$
2	$\left(j,j^2,\dots\right)$	$jc+\frac{1}{3c}+\frac{1+2j}{9c^3}+\frac{8j}{81c^5}+\frac{-11-6j}{243c^7}+O_\infty\left(\frac{1}{c^9}\right)$
2	$\left(j^2,1,\dots\right)$	$(-1-j)c+\frac{-1-j}{3c}+\frac{1+2j}{9c^3}+\frac{-8-8j}{81c^5}+\frac{5+11j}{243c^7}+O_\infty\left(\frac{1}{c^9}\right)$
2	$\left(j^2,j,\dots\right)$	$(-1-j)c+\frac{1}{3c}+\frac{-1-2j}{9c^3}+\frac{-8-8j}{81c^5}+\frac{-5+6j}{243c^7}+O_\infty\left(\frac{1}{c^9}\right)$

TABLE 3. Multiplicateurs de $\boldsymbol{g}$ en ses cycles dans $\boldsymbol{L}$ avec période inférieure ou égale à 4 lorsque $d=2$.

Période	$\boldsymbol{\varepsilon}$	Multiplicateur de $\boldsymbol{g}$ en $\psi(\boldsymbol{\varepsilon})$
1	$(-1,\dots)$	$-2c+1-\frac{1}{4c}+O_\infty\left(\frac{1}{c^2}\right)$
1	$(1,\dots)$	$2c+1+\frac{1}{4c}+O_\infty\left(\frac{1}{c^2}\right)$
2	$(-1,1,\dots)$	$-4c^2+4+O_\infty\left(\frac{1}{c^2}\right)$
3	$(-1,-1,1,\dots)$	$8c^3-4c^2-7c+8-\frac{49}{16c}+O_\infty\left(\frac{1}{c^2}\right)$
3	$(-1,1,1,\dots)$	$-8c^3-4c^2+7c+8+\frac{49}{16c}+O_\infty\left(\frac{1}{c^2}\right)$
4	$(-1,-1,-1,1,\dots)$	$-16c^4+16c^3+8c^2-22c+20-\frac{57}{8c}+O_\infty\left(\frac{1}{c^2}\right)$
4	$(-1,-1,1,1,\dots)$	$16c^4-16c^2+8+O_\infty\left(\frac{1}{c^2}\right)$
4	$(-1,1,1,1,\dots)$	$-16c^4-16c^3+8c^2+22c+20+\frac{57}{8c}+O_\infty\left(\frac{1}{c^2}\right)$

TABLE 4. Multiplicateurs de $\boldsymbol{g}$ en ses cycles avec période inférieure ou égale à 2 lorsque $d=3$, où $j=\exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

Période	$\boldsymbol{\varepsilon}$	Multiplicateur de $\boldsymbol{g}$ en $\psi(\boldsymbol{\varepsilon})$
1	$(1,\dots)$	$3c^2+2+\frac{1}{3c^2}-\frac{2}{27c^4}+O_\infty\left(\frac{1}{c^8}\right)$
1	$(j,\dots)$	$(-3-3j)c^2+2+\frac{j}{3c^2}+\frac{2+2j}{27c^4}+O_\infty\left(\frac{1}{c^8}\right)$
1	$\left(j^2,\dots\right)$	$3jc^2+2+\frac{-1-j}{3c^2}-\frac{2j}{27c^4}+O_\infty\left(\frac{1}{c^8}\right)$
2	$(1,j,\dots)$	$(-9-9j)c^4-6jc^2+9+\frac{-8-8j}{9c^2}+\frac{16j}{27c^4}+O_\infty\left(\frac{1}{c^8}\right)$
2	$\left(1,j^2,\dots\right)$	$9jc^4+(6+6j)c^2+9+\frac{8j}{9c^2}+\frac{-16-16j}{27c^4}+O_\infty\left(\frac{1}{c^8}\right)$
2	$\left(j,j^2,\dots\right)$	$9c^4-6c^2+9+\frac{8}{9c^2}+\frac{16}{27c^4}+O_\infty\left(\frac{1}{c^8}\right)$

On peut également calculer les multiplicateurs de $\boldsymbol{g}$ en ses cycles dans $\boldsymbol{L}$ (voir les tables 3 et 4). Pour tout $\boldsymbol{\varepsilon}\in\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ périodique pour σ avec période $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\boldsymbol{g}^{\circ n}\right)'(\psi(\boldsymbol{\varepsilon}))=\prod_{j=0}^{n-1}\boldsymbol{g}'\left(\boldsymbol{g}^{\circ j}(\psi(\boldsymbol{\varepsilon}))\right)=d^n\prod_{j=0}^{n-1}\psi\left(\sigma^{\circ j}(\boldsymbol{\varepsilon})\right)^{d-1}\ .$$

Exemple 1.74. Pour tout point périodique $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ pour σ avec période $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\boldsymbol{g}^{\circ n}\right)'\left(\psi\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right) = d^n \left(\prod_{j=0}^{n-1} \epsilon_j^{d-1}\right)\left(c^{n(d-1)} + \frac{(d-1)\sum_{j=0}^{n-1}\epsilon_j}{d} c^{(n-1)(d-1)}\right) + O_\infty\left(c^{(n-2)(d-1)}\right) .$$

Étudions les polynômes dynatomiques et les polynômes multiplicateurs de $\boldsymbol{g}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'image de $\Phi_n^{\boldsymbol{g}}$ par l'isomorphisme d'anneaux canonique de $\boldsymbol{A}[z]$ sur $\mathbb{Z}[c, z]$ est égale à $\Phi_n\left(-c^d, z\right)$ et l'image de $M_n^{\boldsymbol{g}}$ par l'isomorphisme canonique de $\boldsymbol{A}[\lambda]$ sur $\mathbb{Z}[c, \lambda]$ est égale à $M_n\left(-c^d, \lambda\right)$.

On a le résultat ci-dessous (voir [**Mor96**, Lemma 2]).

Proposition 1.75. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a*

$$\Phi_n^{\boldsymbol{g}}(z) = \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{T}^n} \left(z - \psi(\boldsymbol{\varepsilon})\right) ,$$

où $\boldsymbol{T}^n$ désigne l'ensemble des points périodiques pour σ avec période n.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\boldsymbol{\Sigma}^n$ l'ensemble des points périodiques pour σ avec période divisant n. D'après la proposition 1.72, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les $\psi(\boldsymbol{\varepsilon})$, avec $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}^n$, sont des points périodiques deux à deux distincts pour $\boldsymbol{g}$ avec période divisant n ou, en d'autres termes, sont des racines deux à deux distinctes du polynôme $\boldsymbol{g}^{\circ n}(z) - z$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}^n$ contient exactement d^n éléments et le polynôme $\boldsymbol{g}^{\circ n}(z) - z$ est de degré d^n, on a

$$\boldsymbol{g}^{\circ n}(z) - z = \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}^n} \left(z - \psi(\boldsymbol{\varepsilon})\right) = \prod_{k \mid n} \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{T}^k} \left(z - \psi(\boldsymbol{\varepsilon})\right) ,$$

où $\boldsymbol{T}^k$ désigne l'ensemble de points périodiques pour σ avec période k, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, d'après l'unicité dans la proposition 1.12, on a

$$\Phi_n^{\boldsymbol{g}}(z) = \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{T}^n} \left(z - \psi(\boldsymbol{\varepsilon})\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, la proposition est démontrée. □

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 1.75.

Proposition 1.76. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a*

$$M_n^{\boldsymbol{g}}(\lambda) = \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{T}^n} \left(\lambda - \left(\boldsymbol{g}^{\circ n}\right)'\left(\psi(\boldsymbol{\varepsilon})\right)\right) ,$$

où $\boldsymbol{T}^n$ désigne l'ensemble des points périodiques pour σ avec période n.

Énonçons également le résultat ci-dessous, qui se déduit immédiatement de la proposition 1.76 et permet de répondre à la question 1.69 dans le cas où $d = 2$.

Proposition 1.77. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a*

$$\Delta_n\left(-c^d\right) = \prod_{\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'\} \subset \boldsymbol{T}^n} \left(\left(\boldsymbol{g}^{\circ n}\right)'\left(\psi(\boldsymbol{\varepsilon})\right) - \left(\boldsymbol{g}^{\circ n}\right)'\left(\psi\left(\boldsymbol{\varepsilon}'\right)\right)\right)^2 ,$$

où $\boldsymbol{T}^n$ désigne l'ensemble des points périodiques pour σ avec période n.

Remarque 1.78. Supposons que $d = 2$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Examinons ici la question 1.69, qui concerne la factorisation du polynôme $\Delta_n \in \mathbb{Z}[c]$. D'une part, le coefficient dominant de $\Delta_n\left(-c^2\right)$ est le carré d'un nombre rationnel d'après la proposition 1.77. D'autre part, le coefficient dominant de $Q_n\left(-c^2\right)$ est égal à $\pm 2^{m_n}$ et m_n est pair, où

$$m_n = \nu(n) - \sum_{k \mid n,\, k \neq n} \varphi\left(\frac{n}{k}\right) \nu(k)$$

et $\varphi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ désigne l'indicatrice d'Euler. Par conséquent, on a $a_n = \pm 1$. Ainsi, la question 1.69 admet une réponse positive dans le cas où $d = 2$.

Nous sommes enfin en mesure de démontrer le théorème 1.38, qui affirme que les polynômes Φ_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont irréductibles sur $\mathbb{C}$. Nous suivons l'approche employée dans [**Bou92**] et utilisons de manière cruciale la proposition 1.58.

Notons $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $\varphi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ l'indicatrice d'Euler. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons aussi $C_n \in \mathbb{Z}[z]$ le n-ième polynôme cyclotomique, qui est irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré $\varphi(n)$. Étant donnée une extension finie L/K, notons enfin $[L\colon K]$ son degré et $N_{L/K}\colon L \to K$ sa norme, qui sont donnés par

$$[L\colon K] = \dim_K(L) \quad \text{et} \quad N_{L/K}(x) = \det(y \in L \mapsto xy \in L)\,.$$

Montrons d'abord le lemme d'arithmétique bien connu ci-dessous.

Lemme 1.79. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega_n \in \mathbb{C}$ une racine primitive n-ième de l'unité. Alors*

(1) pour toutes racines n-ièmes de l'unité distinctes $\zeta_n, \zeta_n' \in \mathbb{C}$, on a

$$N_{\mathbb{Q}(\omega_n)/\mathbb{Q}}\left(\zeta_n - \zeta_n'\right) = \begin{cases} \pm p^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p^r)}} & \text{si } \zeta_n' \zeta_n^{-1} \text{ est une racine primitive } p^r\text{-ième} \\ & \text{de l'unité, avec } p \in \mathscr{P} \text{ et } r \in \mathbb{N}^* \\ \pm 1 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

(2) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ premier avec n, le polynôme C_k est irréductible sur $\mathbb{Q}\left(\omega_n\right)$.

Démonstration du lemme 1.79. Soient $\zeta_n, \zeta_n' \in \mathbb{C}$ des racines n-ièmes de l'unité distinctes. Alors $\zeta_n' \zeta_n^{-1}$ est une racine primitive k-ième de l'unité, avec k un diviseur de n différent de 1, et on a

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{Q}(\omega_n)/\mathbb{Q}}\left(\zeta_n - \zeta_n'\right) &= N_{\mathbb{Q}(\omega_n)/\mathbb{Q}}\left(\zeta_n\right) N_{\mathbb{Q}(\omega_n)/\mathbb{Q}}\left(1 - \zeta_n' \zeta_n^{-1}\right) \\ &= \pm N_{\mathbb{Q}\left(\zeta_n' \zeta_n^{-1}\right)/\mathbb{Q}}\left(1 - \zeta_n' \zeta_n^{-1}\right)^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(k)}} \end{aligned}$$

puisque ζ_n est une unité algébrique et

$$\left[\mathbb{Q}\left(\omega_n\right) : \mathbb{Q}\left(\zeta_n' \zeta_n^{-1}\right)\right] = \frac{\left[\mathbb{Q}\left(\omega_n\right) : \mathbb{Q}\right]}{\left[\mathbb{Q}\left(\zeta_n' \zeta_n^{-1}\right) : \mathbb{Q}\right]} = \frac{\varphi(n)}{\varphi(k)}$$

car les polynômes C_k et C_n sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$ de degrés $\varphi(k)$ et $\varphi(n)$. Par conséquent, comme $1 - \zeta_n' \zeta_n^{-1}$ est racine du polynôme $C_k(1 - z) \in \mathbb{Q}[z]$, qui est irréductible de coefficient dominant $(-1)^{\varphi(k)}$ et de degré $\varphi(k)$, on a

$$N_{\mathbb{Q}(\omega_n)/\mathbb{Q}}\left(\zeta_n - \zeta_n'\right) = \pm C_k(1)^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(k)}}\,.$$

Par suite, il suffit de démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$C_k(1) = \begin{cases} p & \text{si } k = p^r, \text{ avec } p \in \mathscr{P} \text{ et } r \in \mathbb{N}^* \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Cela peut se prouver par récurrence en utilisant le fait que, pour tout $k \geq 2$, on a

$$\prod_{l|k,\, l\neq 1} C_l(1) = k$$

puisque

$$\prod_{l|k,\, l\neq 1} C_l(z) = \frac{z^k - 1}{z - 1} = \sum_{j=0}^{k-1} z^j\,.$$

Ainsi, le point (1) du lemme est démontré.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ premier avec n et $\omega_k \in \mathbb{C}$ une racine primitive k-ième de l'unité. Montrons que le polynôme C_k est irréductible sur $\mathbb{Q}(\omega_n)$. Comme le polynôme C_k est de degré $\varphi(k)$ et s'annule en ω_k, il suffit pour cela de prouver que

$$[\mathbb{Q}(\omega_k, \omega_n) : \mathbb{Q}(\omega_n)] = \varphi(k)\,.$$

Comme k et n sont premiers entre eux, on a $\mathbb{Q}(\omega_k, \omega_n) = \mathbb{Q}(\omega_{kn})$, avec $\omega_{kn} \in \mathbb{C}$ une racine primitive kn-ième de l'unité. Par conséquent, on a

$$[\mathbb{Q}(\omega_k, \omega_n) : \mathbb{Q}(\omega_n)] = \frac{[\mathbb{Q}(\omega_{kn}) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\omega_n) : \mathbb{Q}]} = \frac{\varphi(kn)}{\varphi(n)} = \varphi(k)$$

puisque C_n et C_{kn} sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$ de degrés $\varphi(n)$ et $\varphi(kn)$ et k et n sont premiers entre eux. Ainsi, le point (2) du lemme est démontré. □

Montrons enfin que les polynômes Φ_n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont irréductibles sur $\mathbb{C}$.

Démonstration du théorème 1.38. Notons que le polynôme

$$\Phi_1(c, z) = z^d - z + c$$

est irréductible sur $\mathbb{C}$ puisqu'il est unitaire de degré 1 en c.

Supposons que $n \geq 2$. Raisonnons par l'absurde, et supposons que le polynôme Φ_n est réductible sur $\mathbb{C}$. Alors, comme Φ_n est unitaire en z, il existe des polynômes non constants $A_n, B_n \in \mathbb{C}[c, z]$ qui sont unitaires en z et vérifient $\Phi_n = A_n B_n$. Définissons

$$R_n(c) = \operatorname{res}_z (A_n(c, z), B_n(c, z)) \in \mathbb{C}[c]\,.$$

Montrons d'abord l'affirmation ci-dessous, que nous obtenons en utilisant la correspondance entre la dynamique du décalage σ dans $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ et celle de $\boldsymbol{g}$ dans $\boldsymbol{L}$. Rappelons que ω désigne une racine primitive d-ième de l'unité.

Affirmation 1.80. Les polynômes A_n et B_n sont dans $\mathbb{Q}(\omega)[c, z]$ et le coefficient dominant $\alpha_n \in \mathbb{Q}(\omega)^\times$ de R_n a une norme de la forme

$$N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}(\alpha_n) = \pm \prod_{p \in \mathscr{P},\, p|d} p^{r_p}\,, \quad \text{avec} \quad r_p \in \mathbb{Z}\,.$$

Démonstration de l'affirmation 1.80. Notons ψ l'unique morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathbb{C}[c, z]$ dans $\mathbb{C}[c][z]$ qui vérifie $\psi(c) = -c^d$ et $\psi(z) = z$, et posons

$$A_n^{\boldsymbol{g}} = \psi(A_n) \in \mathbb{C}[c][z] \quad \text{et} \quad B_n^{\boldsymbol{g}} = \psi(B_n) \in \mathbb{C}[c][z]\,.$$

D'après la proposition 1.75, on a

$$A_n^{\boldsymbol{g}}(z) B_n^{\boldsymbol{g}}(z) = \Phi_n^{\boldsymbol{g}}(z) = \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{T}^n} (z - \psi(\boldsymbol{\varepsilon}))\,,$$

où $\boldsymbol{T}^n$ désigne l'ensemble des points périodiques pour σ avec période n. Par suite, comme $A_n^{\boldsymbol{g}}$ et $B_n^{\boldsymbol{g}}$ sont unitaires et non constants, il existe une partition $\{\boldsymbol{T}_A^n, \boldsymbol{T}_B^n\}$ de $\boldsymbol{T}^n$ telle que

$$A_n^{\boldsymbol{g}}(z) = \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{T}_A^n} (z - \psi(\boldsymbol{\varepsilon})) \quad \text{et} \quad B_n^{\boldsymbol{g}} = \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{T}_B^n} (z - \psi(\boldsymbol{\varepsilon}))\ .$$

En particulier, les coefficients de $A_n^{\boldsymbol{g}}$ et $B_n^{\boldsymbol{g}}$ sont dans $\mathbb{C}[c] \cap \boldsymbol{L} = \mathbb{Q}(\omega)[c]$, et donc les polynômes A_n et B_n sont $\mathbb{Q}(\omega)[c, z]$. De plus, on a

$$R_n\left(-c^d\right) = \operatorname{res}\left(A_n^{\boldsymbol{g}}, B_n^{\boldsymbol{g}}\right) = \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{T}_A^n} \prod_{\boldsymbol{\varepsilon}' \in \boldsymbol{T}_B^n} \left(\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \psi\left(\boldsymbol{\varepsilon}'\right)\right)\ .$$

D'après le lemme 1.73, pour tous $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}' \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ distincts, on a

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \psi\left(\boldsymbol{\varepsilon}'\right) = \left(\frac{\left(\epsilon_m - \epsilon_m'\right) \prod_{j=0}^{m-1} \epsilon_j}{d^m}\right) \frac{c}{c^{m(d-1)}} + O_\infty\left(\frac{c}{c^{(m+1)(d-1)}}\right)\ ,$$

où $m \in \mathbb{N}$ désigne l'entier minimal tel que $\epsilon_m \neq \epsilon_m'$. Par conséquent, on a

$$\alpha_n = (-1)^{\deg R_n} \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{T}_A^n} \prod_{\boldsymbol{\varepsilon}' \in \boldsymbol{T}_B^n} \frac{\left(\epsilon_{m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}')} - \epsilon'_{m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}')}\right) \prod_{j=0}^{m\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'\right)-1} \epsilon_j}{d^{m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}')}} \in \mathbb{Q}(\omega)^\times\ ,$$

où $m\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'\right)$ est l'entier minimal tel que $\epsilon_{m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}')} \neq \epsilon'_{m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}')}$, avec $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{T}_A^n$ et $\boldsymbol{\varepsilon}' \in \boldsymbol{T}_B^n$, et donc

$$N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}\left(\alpha_n\right) = \pm \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{T}_A^n} \prod_{\boldsymbol{\varepsilon}' \in \boldsymbol{T}_B^n} \frac{N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}\left(\epsilon_{m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}')} - \epsilon'_{m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}')}\right)}{d^{\varphi(d) m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}')}}\ .$$

Ainsi, l'affirmation est démontrée d'après le point (1) du lemme 1.79. □

Montrons également le fait ci-dessous, que nous obtenons avec un argument de spécialisation en $c = 0$.

Affirmation 1.81. Le coefficient constant $R_n(0)$ de R_n est différent de ± 1 et est de la forme

$$R_n(0) = \pm \prod_{q \in \mathscr{P},\, q \mid d^n - 1} q^{s_q}\ , \quad \text{avec} \quad s_q \in \mathbb{N}\,.$$

De plus, il existe des uniques polynômes $N_n^A, N_n^B \in \mathbb{C}[c, \lambda]$ qui sont unitaires en λ et vérifient

$$N_n^A(c, \lambda)^n = \operatorname{res}_z\left(A_n(c, z), \lambda - \left(f_c^{\circ n}\right)'(z)\right)$$

et

$$N_n^B(c, \lambda)^n = \operatorname{res}_z\left(B_n(c, z), \lambda - \left(f_c^{\circ n}\right)'(z)\right)\ .$$

Démonstration de l'affirmation 1.81. D'après l'exemple 1.21, on a

$$A_n(0, z) B_n(0, z) = \Phi_n(0, z) = \prod_{k \in D_n} C_k(z)\,,$$

où D_n est l'ensemble des diviseurs de $d^n - 1$ qui ne divisent pas $d^k - 1$, avec k un diviseur propre de n. De plus, $A_n(0, z)$ et $B_n(0, z)$ sont des polynômes unitaires et non constants dans $\mathbb{Q}(\omega)[z]$ d'après l'affirmation 1.80 et les polynômes $C_k \in \mathbb{Z}[z]$, avec $k \in D_n$, sont irréductibles sur $\mathbb{Q}(\omega)$ d'après le point (2) du lemme 1.79. Par conséquent, il existe une partition $\left\{D_n^A, D_n^B\right\}$ de D_n telle que

$$A_n(0,z) = \prod_{k \in D_n^A} C_k(z) \quad \text{et} \quad B_n(0,z) = \prod_{l \in D_n^B} C_l(z)\,.$$

Examinons d'abord le coefficient constant de R_n. On a

$$R_n(0) = \prod_{k \in D_n^A} \prod_{l \in D_n^B} \operatorname{res}\left(C_k, C_l\right) = \prod_{\zeta_A \in \mathbb{U}_n^A} \prod_{\zeta_B \in \mathbb{U}_n^B} \left(\zeta_A - \zeta_B\right) \in \mathbb{Z}\,,$$

où $\mathbb{U}_n^A$ et $\mathbb{U}_n^B$ désignent les ensembles de racines primitives k-ièmes et l-ièmes de l'unité, avec $k \in D_n^A$ et $l \in D_n^B$, et donc

$$R_n(0)^{\varphi(d^n-1)} = \prod_{\zeta_A \in \mathbb{U}_n^A} \prod_{\zeta_B \in \mathbb{U}_n^B} N_{\mathbb{Q}(\omega_{d^n-1})}\left(\zeta_A - \zeta_B\right)\,,$$

où $\omega_{d^n-1} \in \mathbb{C}$ est une racine primitive (d^n-1)-ième de l'unité. Par conséquent, d'après le point (1) du lemme 1.79, le coefficient constant de R_n est de la forme

$$R_n(0) = \pm \prod_{q \in \mathscr{P},\, q \mid d^n-1} q^{s_q}\,, \quad \text{avec} \quad s_q \in \mathbb{N}\,,$$

et, pour montrer qu'il est différent de ± 1, il suffit de prouver qu'il existe $\zeta_A \in \mathbb{U}_n^A$ et $\zeta_B \in \mathbb{U}_n^B$ tels que $\zeta_B \zeta_A^{-1}$ est une racine primitive q^s-ième de l'unité, avec $q \in \mathscr{P}$ et $s \in \mathbb{N}^*$. Notons que, si $k = mq^r$ et $l = mq^s$, avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathscr{P}$ premiers entre eux et $r, s \in \mathbb{N}$ tels que $r < s$, alors il existe $u \in \mathbb{Z}$ non divisible par q tel que $uq^{s-r} \equiv 1 \pmod{m}$, et $\zeta_k = \exp\left(\frac{2iu\pi}{k}\right)$ et $\zeta_l = \exp\left(\frac{2i\pi}{l}\right)$ sont des racines primitives k-ième et l-ième de l'unité telles que $\zeta_l \zeta_k^{-1}$ est une racine primitive q^s-ième de l'unité. Par suite, pour montrer que $R_n(0)$ est différent de ± 1, il suffit de prouver qu'il existe $k \in D_n^A$ et $l \in D_n^B$ tels que $l = kq^{\pm s}$, avec $q \in \mathscr{P}$ et $s \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in D_n^A$, et supposons sans perte de généralité que $d^n - 1 \in D_n^B$. Comme k divise d^n-1, il existe $k_0, \dots, k_r \in \mathbb{N}^*$, avec $r \in \mathbb{N}^*$, tels que $k_0 = k$, $k_r = d^n - 1$ et $k_{j+1} = k_j q_j^{s_j}$, avec $q_j \in \mathscr{P}$ et $s_j \in \mathbb{N}^*$, pour tout $j \in \{0, \dots, r-1\}$. On a $k_j \in D_n$ pour tout $j \in \{0, \dots, r\}$, et donc il existe $j \in \{0, \dots, r-1\}$ tel que $k_j \in D_n^A$ et $k_{j+1} \in D_n^B$ puisque $k_0 \in D_n^A$ et $k_r \in D_n^B$. Ainsi, $R_n(0)$ est différent de ± 1.

Il reste à démontrer qu'il existe un unique polynôme $N_n^A \in \mathbb{C}[c, \lambda]$ qui est unitaire en λ et vérifie

$$N_n^A(c,\lambda)^n = \operatorname{res}_z\left(A_n(c,z), \lambda - \left(f_c^{\circ n}\right)'(z)\right)\,.$$

Notons $A_n^{\boldsymbol{f}} \in \mathbb{C}[c][z]$ et $B_n^{\boldsymbol{f}} \in \mathbb{C}[c][z]$ les images de A_n et B_n par l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres canonique de $\mathbb{C}[c,z]$ sur $\mathbb{C}[c][z]$ et $\overline{\mathbb{C}(c)}$ une clôture algébrique de $\mathbb{C}(c)$. Montrons d'abord que $\boldsymbol{f}$ induit une permutation des racines du polynôme $A_n^{\boldsymbol{f}}$ dans $\overline{\mathbb{C}(c)}$ et que celles-ci sont simples et sont des points périodiques pour $\boldsymbol{f}$ avec période n. Notons $\psi_0 \colon \mathbb{C}[c] \to \mathbb{C}$ le morphisme d'évaluation en 0. On a

$$\psi_0\left(\operatorname{disc} A_n^{\boldsymbol{f}}\right) = \operatorname{disc}_z A_n(0,z) \neq 0$$

puisque le polynôme $A_n(0,z)$ est séparable, et donc les racines de $A_n^{\boldsymbol{f}}$ dans $\overline{\mathbb{C}(c)}$ sont simples. On a $A_n^{\boldsymbol{f}} B_n^{\boldsymbol{f}} = \Phi_n^{\boldsymbol{f}}$ et, pour tout diviseur propre k de n, on a

$$\psi_0\left(\operatorname{res}\left(A_n^{\boldsymbol{f}}(z), \boldsymbol{f}^{\circ k}(z) - z\right)\right) = \operatorname{res}_z\left(A_n(0,z), f_0^{\circ k}(z) - z\right) \neq 0$$

puisque les racines du polynôme $A_n(0,z)$ sont des points périodiques pour f_0 avec période n. Par conséquent, les racines de $A_n^{\boldsymbol{f}}$ dans $\overline{\mathbb{C}(c)}$ sont des points périodiques pour $\boldsymbol{f}$ avec période n. Enfin, le polynôme $A_n^{\boldsymbol{f}}$ divise $\left(A_n^{\boldsymbol{f}} \circ \boldsymbol{f}\right)\left(B_n^{\boldsymbol{f}} \circ \boldsymbol{f}\right)$ dans $\mathbb{C}[c][z]$ d'après la proposition 1.24 et on a

$$\psi_0\left(\operatorname{res}\left(A_n^{\boldsymbol{f}}, B_n^{\boldsymbol{f}} \circ \boldsymbol{f}\right)\right) = \operatorname{res}_z\left(A_n(0,z), B_n\left(0, f_0(z)\right)\right) \neq 0$$

puisque $A_n(0,z)$ et $B_n(0,z)$ sont premiers entre eux et f_0 induit une permutation des racines du polynôme $B_n(0,z)$. Par conséquent, le polynôme $A_n^{\boldsymbol{f}}$ divise $A_n^{\boldsymbol{f}} \circ \boldsymbol{f}$ dans $\mathbb{C}[c][z]$, et donc $\boldsymbol{f}$ induit une permutation des racines de $A_n^{\boldsymbol{f}}$ dans $\overline{\mathbb{C}(c)}$. Ainsi, il existe des racines $z_1, \ldots, z_r$ du polynôme $A_n^{\boldsymbol{f}}$ dans $\overline{\mathbb{C}(c)}$ telles que

$$A_n^{\boldsymbol{f}}(z) = \prod_{j=1}^{r} \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \boldsymbol{f}^{\circ k}\left(z_j\right)\right),$$

et on a

$$\operatorname{res}_z\left(A_n^{\boldsymbol{f}}(z), \lambda - \left(\boldsymbol{f}^{\circ n}\right)'(z)\right) = \prod_{j=1}^{r} \left(\lambda - \left(\boldsymbol{f}^{\circ n}\right)'\left(z_j\right)\right)^n$$

puisque $\boldsymbol{f}$ a le même multiplicateur en chaque point d'un cycle. Posons

$$N_n^{A,\boldsymbol{f}}(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} \left(\lambda - \left(\boldsymbol{f}^{\circ n}\right)'\left(z_j\right)\right) \in \overline{\mathbb{C}(c)}[\lambda].$$

Le polynôme $N_n^{A,\boldsymbol{f}}$ est unitaire et vérifie

$$N_n^{A,\boldsymbol{f}}(\lambda)^n = \operatorname{res}_z\left(A_n^{\boldsymbol{f}}(z), \lambda - \left(\boldsymbol{f}^{\circ n}\right)'(z)\right).$$

De plus, le polynôme $N_n^{A,\boldsymbol{f}}$ est dans $\mathbb{C}[c][\lambda]$ d'après le corollaire A.5 et est l'unique polynôme unitaire dans $\mathbb{C}[c][\lambda]$ vérifiant l'égalité ci-dessus d'après le lemme A.6. Par conséquent, l'image $N_n^A \in \mathbb{C}[c,\lambda]$ de $N_n^{A,\boldsymbol{f}}$ par l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres canonique de $\mathbb{C}[c][\lambda]$ sur $\mathbb{C}[c,\lambda]$ est l'unique polynôme dans $\mathbb{C}[c,\lambda]$ qui est unitaire en λ et vérifie

$$N_n^A(c,\lambda)^n = \operatorname{res}_z\left(A_n(c,z), \lambda - \left(f_c^{\circ n}\right)'(z)\right).$$

Ainsi, l'affirmation est démontrée. □

On a $\alpha_n \neq R_n(0)$ puisque d et $d^n - 1$ sont premiers entre eux, et donc le polynôme R_n n'est pas constant. Par suite, le polynôme R_n admet une racine $c_0 \in \mathbb{C}$, et il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$A_n\left(c_0, z_0\right) = B_n\left(c_0, z_0\right) = 0.$$

Par conséquent, z_0 est une racine multiple du polynôme

$$\Phi_n^{f_{c_0}}(z) = A_n\left(c_0, z\right) B_n\left(c_0, z_0\right) \in \mathbb{C}[z],$$

ce qui entraîne $\left(f_{c_0}^{\circ n}\right)'\left(z_0\right) = 1$, et donc c_0 est une racine multiple de

$$M_n(c,1) = N_n^A(c,1) N_n^B(c,1) \in \mathbb{C}[c].$$

Ceci contredit le fait que le polynôme $M_n(c,1) \in \mathbb{Z}[c]$ est séparable d'après la proposition 1.58. Ainsi, le théorème est démontré. □

Chapitre 2

Étude de spécialisations de polynômes dynatomiques et de polynômes multiplicateurs

Nous abordons dans ce chapitre plusieurs questions concernant des spécialisations des polynômes dynatomiques et des polynômes multiplicateurs associés à la famille des polynômes unicritiques $(f_c)_{c\in\mathbb{C}}$ définie par $f_c(z) = z^d + c$, où $d \geq 2$.

Soit $d \geq 2$ un entier. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\Phi_n \in \mathbb{Z}[c, z]$ et $M_n \in \mathbb{Z}[c, \lambda]$ les polynômes définis par $\Phi_n(c, z) = \Phi_n^{f_c}(z)$ et $M_n(c, \lambda) = M_n^{f_c}(\lambda)$, où $\Phi_n^{f_c}$ et $M_n^{f_c}$ sont les n-ièmes polynômes dynatomique et multiplicateur de f_c.

Dans la section 2.1, nous nous intéressons aux factorisations des polynômes $\Phi_n(c, a) \in \mathbb{Q}[c]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Q}$. Plus précisément, nous montrons que les polynômes $\Phi_n\left(c, \frac{-1}{4}\right)$, avec $n \geq 3$, sont réductibles sur $\mathbb{Q}$ lorsque $d = 2$. Ceci nous amène également à étudier les factorisations des polynômes $f_c^{\circ n}(z) - a \in \mathbb{C}[c, z]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. Nous montrons que ceux-ci sont irréductibles sauf si $d = 2$ et $a = \frac{-1}{4}$, auquel cas ils ont exactement deux facteurs irréductibles lorsque $n \geq 2$.

Dans la section 2.2, nous étudions les racines communes aux polynômes $\Phi_m(c, a)$ et $\Phi_n(c, b)$, avec $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$ des points fixés, lorsque $d = 2$. En d'autres termes, nous examinons les paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels deux points donnés $a, b \in \mathbb{C}$ sont simultanément périodiques pour le polynôme quadratique f_c. Plus généralement, nous considérons les points prépériodiques. Ces ensembles de paramètres ont d'abord été étudiés par Baker et DeMarco, qui ont montré que ceux-ci sont infinis si et seulement si $a^2 = b^2$. Nous décrivons précisément ici les paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels deux entiers a et b tels que $|a| \neq |b|$ sont tous deux prépériodiques pour f_c. Ceci complète un résultat dû à Buff.

Dans la section 2.3, nous déterminons les paramètres $c_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquels les polynômes $M_n(c_0, \lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont scindés sur $\mathbb{Q}$. En d'autres termes, nous décrivons les polynômes unicritiques dont le multiplicateur en chaque cycle est rationnel. Plus précisément, nous montrons que tout tel polynôme est soit une application puissance soit une application de Tchebychev. Nous démontrons également un résultat analogue pour les polynômes cubiques avec symétries dont tous les multiplicateurs sont entiers. Nous répondons ainsi à une question de Milnor dans ces cas particuliers.

2.1. Spécialisations de polynômes dynatomiques et courbes préimages

2.1.1. Introduction. Fixons un entier $d \geq 2$, et rappelons que $f_c(z) = z^d + c$ et $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ est l'unique suite d'éléments de $\mathbb{Z}[c, z]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f_c^{\circ n}(z) - z = \prod_{k|n} \Phi_k(c, z)\,.$$

Nous nous intéressons aux couples $(n, a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Q}$ pour lesquels le polynôme $\Phi_n(c, a) \in \mathbb{Q}[c]$ est réductible. Nous démontrons que, si $a \in \mathbb{Q}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $f_c^{\circ p}(z) - a \in \mathbb{Q}[c, z]$ est réductible, alors le polynôme $\Phi_n(c, a) \in \mathbb{Q}[c]$ est réductible pour tout n assez grand (voir la proposition 2.8).

Ainsi, nous sommes amenés à examiner les décompositions des courbes affines sur $\mathbb{C}$ définies par $f_c^{\circ n}(z) = a$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. Dans [**FHI+09**], les auteurs ont montré que, si une de ces courbes est lisse, alors elle est irréductible. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il n'y a qu'un nombre fini de points $a \in \mathbb{C}$ pour lesquels la courbe définie par $f_c^{\circ n}(z) = a$ est réductible. Lorsque $d = 2$, ces auteurs ont aussi observé que, pour $n \in \{1, \ldots, 4\}$, cette courbe est irréductible sauf quand $a = \frac{-1}{4}$, auquel cas elle admet deux composantes irréductibles lorsque $n \in \{2, \ldots, 6\}$. Nous démontrons que ces observations restent vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Plus précisément, en nous appuyant sur le résultat [**HJM15**, Corollary 2.3], nous prouvons que les polynômes $f_c^{\circ n}(z) - a \in \mathbb{C}[c, z]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$, sont irréductibles sauf lorsque $d = 2$, $a = \frac{-1}{4}$ et $n \geq 2$, auquel cas ils admettent exactement deux facteurs irréductibles qui sont dans $\mathbb{Q}[c, z]$ (voir les propositions 2.9 et 2.10).

D'après ce qui précède, lorsque $d = 2$, les polynômes $\Phi_n\left(c, \frac{-1}{4}\right)$ sont réductibles sur $\mathbb{Q}$ pour tout n assez grand. Nous précisons ce fait en exhibant une factorisation de $\Phi_n\left(c, \frac{-1}{4}\right)$ en un produit de deux polynômes non constants pour tout $n \geq 3$ (voir la proposition 2.3). Nous ne démontrons pas que les facteurs explicités sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

2.1.2. Réductiblité de spécialisations de polynômes dynatomiques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème 1.38, le polynôme Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Par conséquent, d'après le théorème d'irréductibilité de Hilbert, l'ensemble des points $a \in \mathbb{Q}$ pour lesquels le polynôme $\Phi_n(c, a) \in \mathbb{Q}[c]$ est irréductible est dense dans $\mathbb{Q}$ pour la topologie usuelle et toutes les topologies p-adiques, avec p un nombre premier (voir [**Lan83**, Chapter 9, Corollary 2.5]). On peut alors s'intéresser à la question suivante :

Question 2.1. Quels sont les couples $(n, a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Q}$ pour lesquels le polynôme $\Phi_n(c, a) \in \mathbb{Q}[c]$ est réductible ?

Dans [**Mil14**], Milnor a conjecturé que les polynômes $\Phi_n(c, 0)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$ lorsque $d = 2$.

Remarque 2.2. Soit $a \in \mathbb{Q}$. Notons $\overline{\mathbb{Q}}$ la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Alors les racines des polynômes $\Phi_n(c, a) \in \mathbb{Q}[c]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, forme une partie de $\overline{\mathbb{Q}}$ de hauteur bornée. Par conséquent, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \min\left\{\deg P : P \text{ facteur irréductible de } \Phi_n(c, a) \text{ dans } \mathbb{Q}[c]\right\} = +\infty\,.$$

Supposons que $d = 2$. Pour tout $a \in \mathbb{Q}$, les polynômes $\Phi_1(c, a)$ et $\Phi_2(c, a)$ sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$ puisqu'ils sont de degré 1. Pour tout $a \in \mathbb{Q}$, comme le polynôme $\Phi_3(c, a) \in \mathbb{Q}[c]$ est de degré 3, celui-ci est réductible si et seulement si il a une racine rationnelle, ce qui se produit si et seulement si il existe $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1\}$ tel que $a = \frac{r^3 + r^2 - r + 7}{4(r^2 - 1)}$ by [**Mor92**, Theorem 4].

Pour tout $a \in \mathbb{Q}$, les polynômes $\Phi_4(c, a)$ et $\Phi_5(c, a)$ n'ont aucune racine rationnelle d'après [**Mor98**, Theorem 4] et [**FPS97**, Theorem 1], bien qu'ils puissent être réductibles puisqu'ils sont de degrés 6 et 15. En utilisant le logiciel SageMath, on observe que $\frac{-1}{4}$ est à la fois l'unique point $a \in \mathbb{Q}$ de hauteur au plus 10^3 pour lequel le polynôme $\Phi_4(c,a)$ est réductible sur $\mathbb{Q}$ et l'unique point $a \in \mathbb{Q}$ de hauteur au plus 10^3 pour lequel le polynôme $\Phi_5(c,a)$ est réductible sur $\mathbb{Q}$.

Montrons ici que le polynôme $\Phi_n\left(c, \frac{-1}{4}\right)$ est réductible sur $\mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 3$. Plus précisément, on a le résultat ci-dessous, qui exhibe une factorisation particulière de ces polynômes.

Notons encore $\mu\colon \mathbb{N}^* \to \{-1,0,1\}$ la fonction de Möbius et rappelons que

$$\nu(n) = \sum_{k \mid n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) d^k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 2.3. *Supposons que $d = 2$. Alors il existe des uniques suites $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathbb{Q}[c]$ telles que*

$$A_1(c) = 1 \quad \textit{et} \quad B_1(c) = f_c\left(\frac{-1}{4}\right) - \left(\frac{-1}{4}\right)$$

et, pour tout $n \geq 2$, on a

$$f_c^{\circ(n-1)}\left(\frac{-1}{4}\right) - f_c^{\circ(n-2)}\left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \prod_{k \mid n} A_k(c)$$

et

$$f_c^{\circ(n-1)}\left(\frac{-1}{4}\right) + f_c^{\circ(n-2)}\left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \prod_{k \mid n} B_k(c)\,.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Phi_n\left(c, \frac{-1}{4}\right) = A_n(c)B_n(c)$$

et les polynômes A_n et B_n sont unitaires de degrés $\frac{\nu(n)}{4} - \frac{\mu(n)}{2}$ et $\frac{\nu(n)}{4} + \frac{\mu(n)}{2}$.

Notre preuve de la proposition 2.3 repose sur l'égalité

$$f_c^{\circ 2}(z) - \left(\frac{-1}{4}\right) = \left(f_c(z) - z + \frac{1}{2}\right)\left(f_c(z) + z + \frac{1}{2}\right)\,. \tag{2.1}$$

Afin de démontrer la proposition 2.3, énonçons d'abord le résultat d'algèbre générale suivant :

Lemme 2.4. *Soient K un corps, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $(P_n)_{n\geq 1}$, $(Q_n)_{n\geq 1}$ et $(R_n)_{n\geq 1}$ des suites d'élements non nuls de $K[X]$ qui vérifient les trois conditions suivantes :*

(1) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P_n Q_n = \prod_{k \mid n} R_k\ ;$$

(2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les polynômes P_n et Q_n sont premiers entre eux ;

(3) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout diviseur k de n, toute racine de P_k dans $\overline{K}$ est aussi racine de P_n et toute racine de Q_k dans $\overline{K}$ est aussi racine de Q_n.

Alors il existe des uniques suites $(A_n)_{n\geq 1}$ *et* $(B_n)_{n\geq 1}$ *d'éléments de* $K[X]$ *telles que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$P_n = \prod_{k|n} A_k \quad \textit{et} \quad Q_n = \prod_{k|n} B_k \,.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$A_n = \prod_{k|n} P_k^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)} \,, \quad B_n = \prod_{k|n} Q_k^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)} \quad \textit{et} \quad R_n = A_n B_n \,.$$

Démonstration du lemme 2.4. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ sont des suites d'éléments de $K[X]$ qui vérifient

$$P_n = \prod_{k|n} A_k \quad \text{et} \quad Q_n = \prod_{k|n} B_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors, d'après la formule d'inversion de Möbius, on a

$$A_n = \prod_{k|n} P_k^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)} \quad \text{et} \quad B_n = \prod_{k|n} Q_k^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, de telles suites sont nécessairement uniques.

Ainsi, il reste à prouver qu'il existe des suites $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $K[X]$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P_n = \prod_{k|n} A_k \,, \quad Q_n = \prod_{k|n} B_k \quad \text{et} \quad R_n = A_n B_n \,.$$

Définissons $A_1 = P_1 \in K[X]$ et $B_1 = Q_1 \in K[X]$, qui vérifient $R_1 = A_1 B_1$ d'après la condition (1). Soit $n \geq 2$, et supposons qu'il existe des polynômes $A_1, \dots, A_{n-1}$ et $B_1, \dots, B_{n-1}$ dans $K[X]$ tels que, pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$, on a

$$P_j = \prod_{k|j} A_k \,, \quad Q_j = \prod_{k|j} B_k \quad \text{et} \quad R_j = A_j B_j \,.$$

Posons

$$\mathcal{A}_{<n} = \prod_{k|n,\, k\neq n} A_k \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{<n} = \prod_{k|n,\, k\neq n} B_k \,,$$

et montrons qu'il existe des polynômes A_n et B_n dans $K[X]$ tels que

$$P_n = \mathcal{A}_{<n} A_n \,, \quad Q_n = \mathcal{B}_{<n} B_n \quad \text{et} \quad R_n = A_n B_n \,.$$

D'après l'hypothèse de récurrence et la condition (1), on a

$$\mathcal{A}_{<n} \mathcal{B}_{<n} R_n = \prod_{k|n} R_k = P_n Q_n \,. \tag{2.2}$$

En particulier, les polynômes $\mathcal{A}_{<n}$ et $\mathcal{B}_{<n}$ divisent $P_n Q_n$ dans $K[X]$. De plus, si k est un diviseur propre de n et $x_0 \in \overline{K}$ est une racine de A_k, alors x_0 est racine de P_k, puisque A_k divise P_k d'après l'hypothèse de récurrence, et aussi de P_n d'après la condition (3), et donc x_0 n'est pas racine de Q_n d'après la condition (2). Ainsi, les polynômes $\mathcal{A}_{<n}$ et Q_n sont premiers entre eux, et de même les polynômes $\mathcal{B}_{<n}$ et P_n sont premiers entre eux. Par conséquent, d'après le lemme de Gauss, il existe des polynômes A_n et B_n dans $K[X]$ tels que $P_n = \mathcal{A}_{<n} A_n$ et $Q_n = \mathcal{B}_{<n} B_n$, et ils vérifient $R_n = A_n B_n$ d'après l'égalité (2.2). Ainsi, on a construit récursivement des

suites $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $K[X]$ ayant les propriétés désirées, ce qui complète la démonstration du lemme. $\square$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.3. Définissons

$$P_1(c) = 1 \in \mathbb{Q}[c] \quad \text{et} \quad Q_1(c) = f_c\left(\frac{-1}{4}\right) - \left(\frac{-1}{4}\right) \in \mathbb{Q}[c]$$

et, pour $n \geq 2$, définissons

$$P_n(c) = f_c^{\circ(n-1)}\left(\frac{-1}{4}\right) - f_c^{\circ(n-2)}\left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}[c]$$

et

$$Q_n(c) = f_c^{\circ(n-1)}\left(\frac{-1}{4}\right) + f_c^{\circ(n-2)}\left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}[c]\,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons aussi

$$R_n(c) = \Phi_n\left(c, \frac{-1}{4}\right) \in \mathbb{Q}[c]\,.$$

Il suffit de prouver que les conditions (1), (2) et (3) du lemme 2.4 sont vérifiées.

D'après l'égalité (2.1), on a

$$P_n(c)Q_n(c) = f_c^{\circ n}\left(\frac{-1}{4}\right) - \left(\frac{-1}{4}\right) = \prod_{k|n} R_k \tag{2.3}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui montre que la condition (1) est vérifiée.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tels que P_n et Q_n ont une racine commune $c_0 \in \mathbb{C}$. Alors $n \geq 2$ puisque $P_1(c) = 1$, et donc on a

$$f_{c_0}^{\circ(n-2)}\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{1}{2}Q_n(c_0) - \frac{1}{2}P_n(c_0) = 0$$

et

$$c_0 + \frac{1}{2} = P_n(c_0) - f_{c_0}^{\circ(n-2)}\left(\frac{-1}{4}\right)^2 + f_{c_0}^{\circ(n-2)}\left(\frac{-1}{4}\right) = 0\,.$$

Par conséquent, on a $f_{\frac{-1}{2}}^{\circ(n-2)}\left(\frac{-1}{4}\right) = 0$, ce qui contredit le fait que

$$\operatorname{ord}_2 f_{\frac{-1}{2}}^{\circ j}\left(\frac{-1}{4}\right) = -2^{j+1}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, qui peut être prouvé par récurrence, où ord_2 désigne la valuation 2-adique. Ainsi, la condition (2) est vérifiée.

Enfin, si $n \geq 2$, $k \geq 2$ divise n et $c_0 \in \mathbb{C}$ vérifie $f_{c_0}^{\circ k}\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{-1}{4}$, alors on a

$$f_{c_0}^{\circ(n-2)}\left(\frac{-1}{4}\right) = f_{c_0}^{\circ(k-2)} \circ \left(f_{c_0}^{\circ k}\right)^{\circ\left(\frac{n}{k}-1\right)}\left(\frac{-1}{4}\right) = f_{c_0}^{\circ(k-2)}\left(\frac{-1}{4}\right)$$

et

$$f_{c_0}^{\circ(n-1)}\left(\frac{-1}{4}\right) = f_{c_0}^{\circ(k-1)} \circ \left(f_{c_0}^{\circ k}\right)^{\circ\left(\frac{n}{k}-1\right)}\left(\frac{-1}{4}\right) = f_{c_0}^{\circ(k-1)}\left(\frac{-1}{4}\right),$$

et donc $P_n(c_0) = P_k(c_0)$ et $Q_n(c_0) = Q_k(c_0)$. Par suite, si $n \geq 2$ et $k \geq 2$ divise n, alors toute racine de P_k dans $\mathbb{C}$ est aussi de P_n et toute racine de Q_k dans $\mathbb{C}$ est aussi racine de Q_n puisque toute racine $c_0 \in \mathbb{C}$ de P_k ou Q_k vérifie $f_{c_0}^{\circ k}\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{-1}{4}$ d'après l'égalité (2.3). De plus, si $c_0 \in \mathbb{C}$ est une racine de Q_1, alors on a $f_{c_0}\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{-1}{4}$, et donc, pour tout $n \geq 2$, on a

$$Q_n\left(c_0\right) = \frac{-1}{4} + \left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{1}{2} = 0\,.$$

Ainsi, la condition (3) est vérifiée, et la proposition est démontrée. □

Exemple 2.5. En utilisant le logiciel SageMath, on obtient

$$\begin{aligned}
A_1(c) &= 1\,,\\
A_2(c) &= c + \frac{13}{16}\,,\\
A_3(c) &= c^2 + \frac{1}{8}c + \frac{113}{256}\,,\\
A_4(c) &= c^3 + \frac{23}{16}c^2 - \frac{229}{256}c + \frac{2501}{4096}\,,\\
A_5(c) &= c^8 + \frac{9}{2}c^7 + \frac{487}{64}c^6 + \frac{3967}{512}c^5 + \frac{169123}{32768}c^4 + \frac{41855}{131072}c^3\\
&\quad - \frac{1072665}{4194304}c^2 - \frac{293879}{33554432}c + \frac{2147418113}{4294967296}\,.
\end{aligned}$$

Exemple 2.6. En utilisant le logiciel SageMath, on obtient

$$\begin{aligned}
B_1(c) &= c + \frac{5}{16}\,,\\
B_2(c) &= 1\,,\\
B_3(c) &= c + \frac{29}{16}\,,\\
B_4(c) &= c^3 + \frac{31}{16}c^2 + \frac{427}{256}c + \frac{6605}{4096}\,,\\
B_5(c) &= c^7 + \frac{67}{16}c^6 + \frac{1613}{256}c^5 + \frac{23671}{4096}c^4 + \frac{350963}{65536}c^3 + \frac{3298617}{1048576}c^2\\
&\quad + \frac{21945727}{16777216}c + \frac{429509837}{268435456}\,.
\end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 3$, les polynômes A_n et B_n ne sont pas constants, et donc la proposition 2.3 fournit une factorisation non triviale de $\Phi_n\left(c, \frac{-1}{4}\right)$ dans $\mathbb{Q}[c]$. En utilisant SageMath, on observe que les polynômes A_n et B_n sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$ pour tout $n \in \{3, \ldots, 15\}$. Ainsi,la question suivante est naturelle.

Question 2.7. Les polynômes A_n et B_n sont-ils irréductibles sur $\mathbb{Q}$ pour tout entier $n \geq 3$?

En fait, toute égalité semblable à (2.1) fournit une factorisation de spécialisations de polynômes dynatomiques. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 2.8. *Soient K un sous-corps de $\mathbb{C}$, $a \in K$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que le polynôme $f_c^{\circ p}(z) - a \in K[c,z]$ est réductible. Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que le polynôme $\Phi_n(c,a) \in K[c]$ est réductible pour tout $n \geq N$.*

Démonstration. Il existe des polynômes non constants P et Q dans $K[c,z]$ tels que

$$f_c^{\circ p}(z) - a = P(c,z)Q(c,z)\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\prod_{k|n} \Phi_k(c,a) = f_c^{\circ n}(a) - a = P\left(c, f_c^{\circ(n-p)}(a)\right) Q\left(c, f_c^{\circ(n-p)}(a)\right) .$$

Par conséquent, si $n \in \mathbb{N}^*$ est tel que le polynôme $\Phi_n(c,a) \in K[c]$ est irréductible, alors $\Phi_n(c,a)$ divise $P\left(c, f_c^{\circ(n-p)}(a)\right)$ ou $Q\left(c, f_c^{\circ(n-p)}(a)\right)$, et donc

$$\deg \Phi_n(c,a) \leq \max\left\{\deg P\left(c, f_c^{\circ(n-p)}(a)\right), \deg Q\left(c, f_c^{\circ(n-p)}(a)\right)\right\} .$$

D'une part, on a

$$\deg \Phi_n(c,a) = \frac{\nu(n)}{d} = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) d^{k-1} \geq d^{n-1} - \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} d^{k-1} = d^{n-1} - \frac{d^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} - 1}{d-1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$d^{n-1} - \frac{d^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} - 1}{d-1} \sim d^{n-1} .$$

D'autre part, comme le polynôme $f_c^{\circ p}(z) - a$ est unitaire de degré d^p en z, les polynômes P et Q vus comme éléments de $K[c][z]$ ont des coefficients dominants dans $K^\times$ et des degrés dans $\{1, \ldots, d^p - 1\}$, et donc il existe $M \geq p$ tel que

$$\deg P\left(c, f_c^{\circ(n-p)}(a)\right) = d^{n-p-1} \deg_z P \leq d^{n-p-1}\left(d^p - 1\right)$$

et

$$\deg Q\left(c, f_c^{\circ(n-p)}(a)\right) = d^{n-p-1} \deg_z Q \leq d^{n-p-1}\left(d^p - 1\right)$$

pour tout $n \geq M$. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\deg \Phi_n(c,a) > \max\left\{\deg P\left(c, f_c^{\circ(n-p)}(a)\right), \deg Q\left(c, f_c^{\circ(n-p)}(a)\right)\right\}$$

pour tout $n \geq N$, et le polynôme $\Phi_n(c,a) \in K[c]$ est réductible pour tout $n \geq N$. Ainsi, la proposition est démontrée. □

2.1.3. Irréductibilité de courbes préimages. Au vu de la proposition 2.8, il est naturel d'essayer de déterminer les couples $(n,a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Q}$ pour lesquels le polynôme $f_c^{\circ n}(z) - a \in \mathbb{Q}[c,z]$ est réductible. Plus généralement, on peut chercher les couples $(n,a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$ pour lesquels la courbe algébrique affine sur $\mathbb{C}$ donnée par $f_c^{\circ n}(z) = a$ est réductible. Dans [**FHI**$^+$**09**], les auteurs montrent que, si cette courbe est lisse, alors elle est irréductible (voir [**FHI**$^+$**09**, Proposition 2.5]). Ils remarquent également que la réciproque est fausse et observent que $\frac{-1}{4}$ est l'unique point $a \in \mathbb{C}$ pour lequel ces courbes préimages sont réductibles lorsque $d = 2$ et $n \in \{1, \ldots, 4\}$ (voir [**FHI**$^+$**09**, Remark 2.6]). Nous démontrons ici que ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 2.9. *Supposons que $d \neq 2$ ou $a \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{-1}{4}\right\}$. Alors le polynôme $f_c^{\circ n}(z) - a \in \mathbb{C}[c,z]$ est irréductible pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Dans [**FHI**$^+$**09**, Remark 2.6], les auteurs observent également que les courbes préimages du point $\frac{-1}{4}$ admettent deux composantes irréductibles lorsque $d = 2$ et $n \in \{2, \ldots, 6\}$. Nous démontrons que cela est aussi vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

PROPOSITION 2.10. *Supposons que $d = 2$. Alors, pour tout $n \geq 2$, on a*

$$f_c^{\circ n}(z) - \left(\frac{-1}{4}\right) = \left(f_c^{\circ(n-1)}(z) - f_c^{\circ(n-2)}(z) + \frac{1}{2}\right)\left(f_c^{\circ(n-1)}(z) + f_c^{\circ(n-2)}(z) + \frac{1}{2}\right)$$

et les polynômes

$$f_c^{\circ(n-1)}(z) - f_c^{\circ(n-2)}(z) + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f_c^{\circ(n-1)}(z) + f_c^{\circ(n-2)}(z) + \frac{1}{2}$$

sont irréductibles sur $\mathbb{C}$.

Nos démonstrations des propositions 2.9 et 2.10 utilisent de manière cruciale le lemme ci-dessous, dont nous reproduisons la preuve pour être complet.

LEMME 2.11 ([**HJM15**, Theorem 2.2]). *Soient K un corps, $\omega \in K$ une racine primitive d-ième de l'unité, $f(z) = z^d + c$, avec $c \in K$, et $g \in K[z]$ un polynôme unitaire, irréductible et séparable. Alors le polynôme $g \circ f$ est séparable si et seulement si $g \circ f(0) \neq 0$. Dans ce cas, il existe un diviseur e de d et un polynôme irréductible $h \in K[z]$ tels que*

$$g \circ f(z) = \epsilon \prod_{j=0}^{e-1} h\left(\omega^j z\right) ,$$

où $\epsilon \in \{-1, 1\}$ est égal à -1 si et seulement si e est pair et $\deg g$ est impair.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.11. Soit L un corps de décomposition de $g \circ f$ sur K. Si $\overline{L}$ est une clôture algébrique de L et $\alpha \in \overline{L}$ est une racine de g, alors le polynôme $g(z) - \alpha$ admet une racine $\beta \in \overline{L}$, qui est en fait dans L puisqu'elle est aussi racine de $g \circ f$, et donc $\alpha = f(\beta) \in L$. Ainsi, le polynôme g est scindé sur L. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\deg g}$ ses racines, qui sont simples par hypothèse. On a

$$g \circ f(z) = \prod_{j=1}^{\deg g} \left(f(z) - \alpha_j\right) .$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, \deg g\}$, on a

$$f(z) - \alpha_j = z^d + c - \alpha_j = \prod_{k=0}^{d-1} \left(z - \omega^k \beta_j\right) ,$$

où $\beta_j \in L$ est une racine de $f(z) - \alpha_j$, et donc le polynôme $f(z) - \alpha_j$ est séparable si et seulement si $\beta_j \neq 0$ ou, de manière équivalente, si et seulement si $\alpha_j \neq c$. De plus, les polynômes $f(z) - \alpha_j$, avec $j \in \{1, \ldots, \deg g\}$, sont deux à deux premiers entre eux. Par conséquent, le polynôme $g \circ f$ est séparable si et seulement si $\alpha_j \neq c$ pour tout $j \in \{1, \ldots, \deg g\}$, ce qui se produit si et seulement si $g(c) \neq 0$ ou, de manière équivalente, si et seulement si $g \circ f(0) \neq 0$.

Supposons maintenant que $g \circ f(0) \neq 0$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, \deg g\}$, il existe $\sigma_j \in \mathrm{Gal}(L/K)$ tel que $\sigma_j\left(\alpha_1\right) = \alpha_j$ puisque le polynôme $g \in K[z]$ est irréductible. L'application φ de $\mathrm{Gal}\left(L/K\left(\alpha_1\right)\right)$ dans l'ensemble des racines d-ièmes de l'unité dans K donnée par $\varphi(\tau) = \frac{\tau(\beta_1)}{\beta_1}$ est bien définie puisque $\beta_1 \neq 0$, car $g \circ f(0) \neq 0$, et est un morphisme de groupes. Par suite, son image est un sous-groupe du groupe des racines d-ièmes de l'unité dans K, et donc il existe un diviseur e de d tel que

$$\left\{\tau\left(\beta_1\right) : \tau \in \mathrm{Gal}\left(L/K\left(\alpha_1\right)\right)\right\} = \left\{\omega^{ke}\beta_1 : k \in \left\{0, \ldots, \frac{d}{e} - 1\right\}\right\} .$$

Posons
$$h(z) = \prod_{j=1}^{\deg g} \prod_{k=0}^{\frac{d}{e}-1} \left(z - \omega^{ke} \sigma_j\left(\beta_1\right)\right) \in L[z]\,.$$
On a
$$f(z) - \alpha_j = \sigma_j\left(f(z) - \alpha_1\right) = \prod_{k=0}^{d-1} \left(z - \omega^k \sigma_j\left(\beta_1\right)\right)$$
pour tout $j \in \{1, \ldots, \deg g\}$, et donc
$$g \circ f(z) = \prod_{j=1}^{\deg g} \prod_{k=0}^{d-1} \left(z - \omega^k \sigma_j\left(\beta_1\right)\right) = \prod_{l=0}^{e-1} \prod_{j=1}^{\deg g} \prod_{k=0}^{\frac{d}{e}-1} \left(z - \omega^{ke-l} \sigma_j\left(\beta_1\right)\right)\,.$$
Par conséquent, on a
$$g \circ f(z) = \prod_{l=0}^{e-1} \omega^{\frac{-dl \deg g}{e}} h\left(\omega^k z\right) = \omega^{\frac{-d(e-1)\deg g}{2}} \prod_{l=0}^{e-1} h\left(\omega^l z\right) = \epsilon \prod_{l=0}^{e-1} h\left(\omega^l z\right)\,.$$
Il reste à prouver que h est dans $K[z]$ et est irréductible sur K. Comme $g \circ f$ est séparable, le polynôme h l'est aussi et l'extension L/K est galoisienne. Par suite, il suffit de montrer que les racines de h forment une orbite pour l'action de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur L. On a
$$\mathrm{Gal}(L/K) = \bigsqcup_{j=1}^{\deg g} \left\{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) : \sigma\left(\alpha_1\right) = \alpha_j\right\} = \bigsqcup_{j=1}^{\deg g} \sigma_j \,\mathrm{Gal}\left(L/K\left(\alpha_1\right)\right)$$
puisque, pour tout $j \in \{1, \ldots, \deg g\}$, l'application $\tau \mapsto \sigma_j \tau$ induit une bijection de $\mathrm{Gal}\left(L/K\left(\alpha_1\right)\right)$ sur l'ensemble des éléments $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ tels que $\sigma\left(\alpha_1\right) = \alpha_j$. Par conséquent, on a
$$\begin{aligned}\left\{\sigma\left(\beta_1\right) : \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)\right\} &= \bigsqcup_{j=1}^{\deg g} \left\{\sigma_j \tau\left(\beta_1\right) : \tau \in \mathrm{Gal}\left(L/K\left(\alpha_1\right)\right)\right\} \\ &= \bigsqcup_{j=1}^{\deg g} \left\{\omega^{ke} \sigma_j\left(\beta_j\right) : k \in \left\{0, \ldots, \frac{d}{e} - 1\right\}\right\}\,.\end{aligned}$$
Ainsi, le lemme est démontré. □

Le résultat suivant se déduit immédiatement du lemme 2.11 par récurrence.

Lemme 2.12 ([HJM15, Corollary 2.3]). *Soient K un corps qui contient une racine primitive d-ième de l'unité, $f(z) = z^d + c$, avec $c \in K$, et $g \in K[z]$ un polynôme unitaire, irréductible et séparable tels que $\epsilon_n g \circ f^{\circ n}(0)$ n'est pas une puissance p-ième dans K pour tout diviseur premier p de d et tout $n \in \mathbb{N}^*$, où $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ est égal à -1 si et seulement si $n = 1$, d est pair et $\deg g$ est impair. Alors le polynôme $g \circ f^{\circ n} \in K[z]$ est unitaire, irréductible et séparable pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Nous sommes maintenant en mesure de prouver les propositions 2.9 et 2.10.

Démonstration de la proposition 2.9. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que le polynôme $f_c^{\circ n}(z) - a \in \mathbb{C}[c, z]$ est réductible, et montrons que $d = 2$ et $a = \frac{-1}{4}$. Posons
$$K = \mathbb{C}(c)\,, \quad f(z) = z^d + c \in K[z] \quad \text{et} \quad g(z) = z - a \in K[z]\,.$$

Alors le polynôme $g \in K[z]$ est unitaire, irréductible et séparable. De plus, le polynôme $g \circ f^{\circ n} \in \mathbb{C}[c][z]$ est unitaire et réductible puisqu'il est l'image de $f_c^{\circ n}(z) - a$ par l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres canonique de $\mathbb{C}[c,z]$ sur $\mathbb{C}[c][z]$, et donc il est aussi réductible sur K. Par suite, d'après le lemme 2.12, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et un diviseur premier p de d tels que $g \circ f^{\circ N}(0)$ est une puissance p-ième dans K. Par conséquent, comme $g \circ f^{\circ N}(0)$ est un polynôme unitaire dans $\mathbb{C}[c]$ de degré d^{N-1}, on a $N \geq 2$ et il existe un polynôme unitaire $h \in \mathbb{C}[c]$ tel que

$$h(c)^p = g \circ f^{\circ N}(0) = f_c^{\circ N}(0) - a = f_c^{\circ (N-1)}(0)^d + c - a\,.$$

On a

$$\prod_{j=0}^{p-1} \left(h(c) - \omega_p^j f_c^{\circ (N-1)}(0)^{\frac{d}{p}} \right) = h(c)^p - f_c^{\circ (N-1)}(0)^d = c - a\,,$$

où $\omega_p \in \mathbb{C}$ est une racine primitive p-ième de l'unité, et

$$\deg \left(h(c) - \omega_p^j f_c^{\circ (N-1)}(0)^{\frac{d}{p}} \right) \geq \deg f_c^{\circ (N-1)}(0)^{\frac{d}{p}} = \frac{d}{p} d^{N-2}$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, p-1\}$ puisque $h(c)$ et $f_c^{\circ (N-1)}(0)^{\frac{d}{p}}$ sont unitaires et $\omega_p^j \neq 1$. Par suite, on a

$$(p-1)\frac{d}{p} d^{N-2} \leq \sum_{j=1}^{p-1} \deg \left(h(c) - \zeta_p^j f_c^{\circ (N-1)}(0)^{\frac{d}{p}} \right) \leq \deg(c-a) = 1\,,$$

et donc $p = d = 2$ et $N = 2$. Par conséquent, il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $h(c) = c + b$, ce qui entraîne

$$c - a = (h(c) - c)\,(h(c) + c) = b(2c + b)\,,$$

et donc $b = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{-1}{4}$. Ainsi, la proposition est démontrée. □

Démonstration de la proposition 2.10. D'après l'égalité (2.1), on a

$$f_c^{\circ n}(z) - \left(\frac{-1}{4} \right) = \left(f_c^{\circ (n-1)}(z) - f_c^{\circ (n-2)}(z) + \frac{1}{2} \right) \left(f_c^{\circ (n-1)}(z) + f_c^{\circ (n-2)}(z) + \frac{1}{2} \right)$$

pour tout $n \geq 2$.

Raisonnons par l'absurde, et suppose qu'il existe $n \geq 2$ et $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tels que le polynôme

$$f_c^{\circ (n-1)}(z) + \epsilon f_c^{\circ (n-2)}(z) + \frac{1}{2} \in \mathbb{C}[c,z]$$

est réductible. Posons

$$K = \mathbb{C}(c)\,, \quad f(z) = z^2 + c \in K[z] \quad \text{et} \quad g(z) = z^2 + \epsilon z + c + \frac{1}{2} \in K[z]\,.$$

Alors le polynôme $g \in K[z]$ est unitaire, irréductible et séparable. De plus, le polynôme $g \circ f^{\circ (n-2)} \in \mathbb{C}[c][z]$ est unitaire et réductible, et donc il est aussi réductible sur K. Par suite, d'après le lemme 2.12, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $g \circ f^{\circ N}(0)$ est un carré dans K. Par conséquent, comme

$$g \circ f^{\circ N}(0) = f_c^{\circ N}(0)^2 + \epsilon f_c^{\circ N}(0) + c + \frac{1}{2}$$

est un polynôme unitaire dans $\mathbb{C}[c]$, il existe un polynôme unitaire $h \in \mathbb{C}[c]$ tel que

$$h(c)^2 = f_c^{\circ N}(0)^2 + \epsilon f_c^{\circ N}(0) + c + \frac{1}{2}\,.$$

On a

$$\left(h(c) - f_c^{\circ N}(0)\right)\left(h(c) + f_c^{\circ N}(0)\right) = \epsilon f_c^{\circ N}(0) + c + \frac{1}{2}$$

et

$$\deg\left(h(c) + f_c^{\circ N}(0)\right) \geq \deg f_c^{\circ N}(0) \geq \deg\left(\epsilon f_c^{\circ N}(0) + c + \frac{1}{2}\right)$$

puisque $h(c)$ et $f_c^{\circ N}(0)$ sont unitaires. Par conséquent, il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $h(c) - f_c^{\circ N}(0) = b$, ce qui entraîne

$$b\left(2f_c^{\circ N}(0) + b\right) = \epsilon f_c^{\circ N}(0) + c + \frac{1}{2}\,,$$

et donc

$$(2b - \epsilon)f_c^{\circ N}(0) + b^2 = c + \frac{1}{2}\,.$$

Par suite, on a $N = 1$ puisque $f_c^{\circ N}(0)$ est de degré 2^{N-1}, et donc $2b - \epsilon = 1$ et $b^2 = \frac{1}{2}$, ce qui est impossible. Ainsi, la proposition est démontrée. $\square$

2.2. Entiers simultanément prépériodiques pour un polynôme quadratique

2.2.1. Introduction. Pour $c \in \mathbb{C}$, considérons le polynôme quadratique

$$f_c(z) = z^2 + c \in \mathrm{Poly}_2^U(\mathbb{C})\,.$$

Nous nous intéressons ici aux racines communes à des spécialisations de polynômes dynatomiques $\Phi_m(c, a)$ et $\Phi_n(c, b)$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ fixés et $m, n \in \mathbb{N}^*$. De manière équivalente, nous examinons les paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels deux points donnés $a, b \in \mathbb{C}$ sont simultanément périodiques pour le polynôme f_c. Plus généralement, nous considérons les points prépériodiques pour les polynômes f_c, avec $c \in \mathbb{C}$.

Étant donnés $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})$, on dit qu'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est *prépériodique* pour f si son orbite future est finie ou, de manière équivalente, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{\circ m}(z_0)$ est périodique pour f. Dans ce cas, le plus petit tel entier m est appelé la *prépériode* de z_0 et on appelle *période* de z_0 la période de $f^{\circ m}(z_0)$.

Pour $a \in \mathbb{C}$, posons

$$\mathcal{S}_a = \{c \in \mathbb{C} : a \text{ est prépériodique pour } f_c\}\,.$$

Dans cette section, nous nous intéressons à ces ensembles de paramètres.

Dans cette section, nous considérerons différentes spécialisations des polynômes $f_c^{\circ n}(z) \in \mathbb{Z}[c, z]$, avec $n \in \mathbb{N}$. Remarquons maintenant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $f_c^{\circ n}(z)$ est unitaire de degré 2^{n-1} en c et unitaire de degré 2^n en z.

Soit $a \in \mathbb{C}$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, définissons

$$\mathcal{S}_a^{m,n} = \left\{c \in \mathbb{C} : f_c^{\circ(m+n)}(a) = f_c^{\circ m}(a)\right\}\,,$$

qui est l'ensemble des paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels le point a est prépériodique pour f_c avec prépériode inférieure ou égale à m et période divisant n. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathcal{S}_a^{m,n}$ contient au plus 2^{m+n-1} éléments puisque ceux-ci sont précisément les racines d'un polynôme de degré 2^{m+n-1}.

Par conséquent, pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathcal{S}_a = \bigcup_{m \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{S}_a^{m,n}$$

et cet ensemble est au plus dénombrable. On a le résultat plus précis suivant :

PROPOSITION 2.13 ([BD11, Lemma 3.5]). *Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors l'ensemble $\mathcal{S}_a$ est infini dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde, et supposons que l'ensemble $\mathcal{S}_a$ est fini. Alors, comme la suite $\left(\mathcal{S}_a^{m,1}\right)_{m\geq 0}$ est croissante, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{S}_a^{m+1,1} = \mathcal{S}_a^{m,1}$ pour tout $m \geq M$. Pour $m \in \mathbb{N}$, posons

$$P_m(c) = f_c^{\circ m}(a) \in \mathbb{C}[c]\,.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, les éléments de $\mathcal{S}_a^{m,1}$ sont précisément les racines du polynôme $P_{m+1} - P_m$. De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$P_{m+2} - P_{m+1} = \left(P_{m+1} - P_m\right)\left(P_{m+1} + P_m\right)\,.$$

Par suite, si $m \geq M$ et $c_0 \in \mathbb{C}$ est une racine du polynôme $P_{m+1} + P_m$, alors

$$P_{m+1}\left(c_0\right) - P_m\left(c_0\right) = P_{m+1}\left(c_0\right) + P_m\left(c_0\right) = 0$$

puisque $\mathcal{S}_a^{m+1,1} = \mathcal{S}_a^{m,1}$, et donc

$$P_m\left(c_0\right) = P_{m+1}\left(c_0\right) = 0 \quad \text{et} \quad c_0 = P_{m+1}\left(c_0\right) - P_m\left(c_0\right)^2 = 0\,.$$

Par conséquent, pour tout $m \geq M$, on a

$$P_m(0) = 0 \quad \text{et} \quad P_{m+1}(c) + P_m(c) = c^{2^m}\,.$$

En particulier, on obtient

$$0 = P'_{M+2}(0) + P'_{M+1}(0) = 2P'_{M+1}(0)P_{M+1}(0) + 2P'_M(0)P_M(0) + 2 = 2\,,$$

ce qui est absurde. Ainsi, la proposition est démontrée. □

EXEMPLE 2.14 (voir la figure 1). Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_a^{0,1} &= \left\{-a^2 + a\right\}\,,\\
\mathcal{S}_a^{1,1} &= \left\{-a^2 - a, -a^2 + a\right\}\,,\\
\mathcal{S}_a^{0,2} &= \left\{-a^2 - a - 1, -a^2 + a\right\}\,,\\
\mathcal{S}_a^{1,2} &= \left\{-a^2 - a - 1, -a^2 - a, -a^2 + a - 1, -a^2 + a\right\}\,.
\end{aligned}$$

REMARQUE 2.15. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, comme $f_c(a) = f_c(-a)$ pour tout $c \in \mathbb{C}$, on a $\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{-a}$ et $\mathcal{S}_a^{m,n} = \mathcal{S}_{-a}^{m,n}$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Nous souhaiterions décrire ici les ensembles $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.

EXEMPLE 2.16 (voir la figure 2). Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a

$$-a^2 - a - 1 = -(a+1)^2 + (a+1) - 1 \in \mathcal{S}_a^{0,2} \cap \mathcal{S}_{a+1}^{1,2}$$

et

$$-a^2 - a = -(a+1)^2 + (a+1) \in \mathcal{S}_a^{1,1} \cap \mathcal{S}_{a+1}^{0,1}\,.$$

EXEMPLE 2.17 (voir la figure 3). On a $-2 \in \mathcal{S}_0^{2,1} \cap \mathcal{S}_1^{1,1}$, $-1 \in \mathcal{S}_0^{0,2} \cap \mathcal{S}_1^{1,2}$ et $0 \in \mathcal{S}_0^{0,1} \cap \mathcal{S}_1^{0,1}$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop right, "f_c"] \end{tikzcd} \qquad \text{pour } c = -a^2 + a,$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f_c"] & -a \arrow[loop right, "f_c"] \end{tikzcd} \qquad \text{pour } c = -a^2 - a,$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f_c"] & -a-1 \arrow[l, bend left, "f_c"] \end{tikzcd} \qquad \text{pour } c = -a^2 - a - 1,$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f_c"] & a-1 \arrow[r, bend left, "f_c"] & -a \arrow[l, bend left, "f_c"] \end{tikzcd} \qquad \text{pour } c = -a^2 + a - 1.$$

FIGURE 1. Quelques paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels un point donné $a \in \mathbb{C}$ est prépériodique pour f_c.

$$\begin{tikzcd} a+1 \arrow[r, bend left, "f_c"] & a \arrow[r, bend left, "f_c"] & -a-1 \arrow[l, bend left, "f_c"] \end{tikzcd} \qquad \text{pour } c = -a^2 - a - 1,$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f_c"] & -a \arrow[loop right, "f_c"] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} a+1 \arrow[loop right, "f_c"] \end{tikzcd} \qquad \text{pour } c = -a^2 - a.$$

FIGURE 2. Deux paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels a et $a+1$ sont simultanément prépériodiques pour f_c, avec $a \in \mathbb{C}$ un point donné.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "f_{-2}"] & -2 \arrow[r, bend left, "f_{-2}"] & 2 \arrow[loop right, "f_{-2}"] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "f_{-2}"] & -1 \arrow[loop right, "f_{-2}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "f_{-1}"] & 0 \arrow[r, bend left, "f_{-1}"] & -1 \arrow[l, bend left, "f_{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop right, "f_0"] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right, "f_0"] \end{tikzcd}$$

FIGURE 3. Trois paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels 0 et 1 sont tous deux prépériodiques pour f_c.

Comme les ensembles $\mathcal{S}_a$, avec $a \in \mathbb{C}$, sont infinis dénombrables (voir la proposition 2.13), on peut se demander si les ensembles $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$, sont infinis. Baker et DeMarco ont répondu à cette question dans [**BD11**]. En utilisant des arguments de théorie du potentiel et un résultat d'équidistribution de points de petite hauteur par rapport à une hauteur adélique, ils ont montré que, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, l'ensemble $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$ est infini si et seulement si $a^2 = b^2$.

Comme ils l'ont souligné, leur démonstration n'est pas effective et ne permet pas d'estimer le cardinal de ces ensembles lorsque ceux-ci sont finis. Dans leur article, Baker et DeMarco ont conjecturé que -2, -1 et 0 sont les seuls paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels 0 et 1 sont simultanément prépériodiques pour f_c (voir l'exemple 2.17). En localisant les paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels 0 et 1 ont tous deux une orbite future bornée pour f_c et en utilisant le fait que 0 est l'unique paramètre $c \in \mathbb{C}$ qui est contenu dans la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot et pour lequel le point 0 est prépériodique pour f_c, Buff a donné une preuve élémentaire de leur conjecture dans [**Buf18**].

En suivant son approche, nous complétons ici la description des ensembles $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$ lorsque a et b sont deux entiers tels que $|a| \neq |b|$. Plus précisément, nous prouvons le résultat ci-dessous, qui affirme que les exemples 2.16 et 2.17 présentent tous les paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels deux entiers distincts et non opposés sont simultanément prépériodiques pour f_c.

Théorème 2.18. *Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $|a| < |b|$. Alors*
— *soit $a = 0$, $|b| = 1$ et $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b = \{-2, -1, 0\}$,*
— *soit $a = 0$, $|b| = 2$ et $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b = \{-2\}$,*
— *soit $|a| \geq 1$, $|b| = |a| + 1$ et $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b = \left\{-a^2 - |a| - 1, -a^2 - |a|\right\}$,*
— *soit $|b| > \max\{2, |a| + 1\}$ et $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b = \varnothing$.*

Afin de démontrer le théorème 2.18, nous rappelons d'abord certains résultats bien connus concernant la dynamique des polynômes quadratiques avant d'exploiter ceux-ci dans l'espace des paramètres. Notre démonstration est élémentaire et n'utilise que des arguments basiques d'analyse et d'arithmétique.

2.2.2. La dynamique des polynômes quadratiques. Nous étudions ici les points prépériodiques pour les polynômes f_c, avec $c \in \mathbb{C}$.

Soit $c \in \mathbb{C}$. Définissons

$$\mathcal{X}_c = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ est prépériodique pour } f_c\}$$

et, pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\mathcal{X}_c^{m,n} = \left\{z \in \mathbb{C} : f_c^{\circ(m+n)}(z) = f_c^{\circ m}(z)\right\} .$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathcal{X}_c^{m,n}$ est invariant par f_c, contient au plus 2^{m+n} éléments et ceux-ci sont précisément les points prépériodiques pour f_c avec prépériode inférieure ou égale à m et période divisant n. En particulier, on a

$$\mathcal{X}_c = \bigcup_{m \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{X}_c^{m,n} .$$

De plus, l'ensemble $\mathcal{X}_c$ est complètement invariant par f_c – c'est-à-dire, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $f_c(z) \in \mathcal{X}_c$ si et seulement si $z \in \mathcal{X}_c$.

Remarque 2.19. Pour tout $c \in \mathbb{C}$, comme $f_c(z) = f_c(-z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, les ensembles $\mathcal{X}_c$ et $\mathcal{X}_c^{m,n}$, avec $m, n \in \mathbb{N}^*$, sont symétriques par rapport à l'origine.

Les ensembles $\mathcal{X}_c$, avec $c \in \mathbb{C}$, sont bornés. Plus précisément, on a :

PROPOSITION 2.20. *Soit $c \in \mathbb{C}$. Alors on a*
$$\mathcal{X}_c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} : |f_c^{\circ n}(z)| \leq \rho_c\} \ , \quad \textit{où} \quad \rho_c = \frac{1 + \sqrt{1 + 4|c|}}{2} \ .$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \rho_c$, on a
$$|f_c(z)| \geq |z|^2 - |c| > |z| \ .$$
Par conséquent, si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| > \rho_c$, alors la suite $\left(f_c^{\circ n}(z)\right)_{n \geq 0}$ tend vers ∞, et donc z n'est pas prépériodique pour f_c. Comme l'ensemble $\mathcal{X}_c$ est invariant par f_c, ceci complète la démonstration de la proposition. □

Étudions maintenant la dynamique de f_c lorsque c est réel. Soit $c \in \left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$. Alors l'application $f_c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, paire et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, a deux points fixes $\alpha_c \leq \beta_c$ – avec égalité si et seulement si $c = \frac{1}{4}$ – donnés par
$$\alpha_c = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} \quad \text{et} \quad \beta_c = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$$
et vérifie $f_c(z) > z$ pour tout $z \in \left]\beta_c, +\infty\right[$. Par conséquent, on a
$$f_c\left([-\beta_c, \beta_c]\right) = [c, \beta_c]$$
et la suite $\left(f_c^{\circ n}(z)\right)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$ pour tout $z \in \mathbb{R} \setminus [-\beta_c, \beta_c]$.

En particulier, si $c \in \left[-2, \frac{1}{4}\right]$, alors on a
$$f_c\left([-\beta_c, \beta_c]\right) \subset [-\beta_c, \beta_c] \ ,$$
et donc, pour tout $z \in \mathbb{R}$, le point z a une orbite future bornée si et seulement si $z \in [-\beta_c, \beta_c]$.

REMARQUE 2.21. Pour tout $c \in \mathbb{C}$, on a $\rho_c = \beta_{-|c|}$.

Décrivons de manière plus précise la dynamique de f_c lorsque $c \in \left]-\infty, -2\right]$. Celle-ci est en correspondance avec la dynamique du décalage dans l'ensemble des suites d'éléments de $\{-1, 1\}$.

On appelle *décalage* l'application σ de $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même qui à une suite $\boldsymbol{\varepsilon} = (\epsilon_n)_{n \geq 0}$ associe $(\epsilon_{n+1})_{n \geq 0}$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons
$$\boldsymbol{\Sigma}^{m,n} = \left\{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} : \sigma^{\circ(m+n)}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^{\circ m}(\boldsymbol{\varepsilon})\right\} \ ,$$
qui est l'ensemble des suites d'éléments de $\{-1, 1\}$ prépériodiques pour σ avec prépériode inférieure ou égale à m et période divisant n. Définissons également
$$\boldsymbol{\Sigma} = \bigcup_{m \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{N}^*} \boldsymbol{\Sigma}^{m,n} \ ,$$
qui est l'ensemble des suites prépériodiques d'éléments de $\{-1, 1\}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}^{m,n}$ est invariant par σ et contient exactement 2^{m+n} éléments – chacun d'entre eux étant entièrement déterminé par le choix de ses $m+n$ premiers termes. De plus, l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}$ est complètement invariant par σ.

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 2.22. *Pour tout $c \in \left]-\infty, -2\right]$, il existe une unique application $\psi_c \colon \boldsymbol{\Sigma} \to \mathbb{R}$ qui rend le diagramme ci-dessous commutatif et vérifie $\epsilon_0 \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) \geq 0$ pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$.*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{\Sigma} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\psi_c"'] & \boldsymbol{\Sigma} \arrow[d, "\psi_c"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "f_c"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

De plus, pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$, on a

$$\epsilon_0 \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) \in \left[\sqrt{-\beta_c - c}, \beta_c\right]$$

pour tout $c \in \left]-\infty, -2\right]$ et l'application $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \colon \left]-\infty, -2\right] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(c) = \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon})$$

est continue.

Pour $c \in \left]-\infty, -2\right]$ et $\epsilon \in \{-1, 1\}$, notons $g_c^\epsilon \colon \left[c, +\infty\right[\to \mathbb{R}_\epsilon$ la bijection réciproque de $f_c \colon \mathbb{R}_\epsilon \to \left[c, +\infty\right[$, qui est donnée par

$$g_c^\epsilon(z) = \epsilon\sqrt{z - c}\,.$$

Pour tout $c \in \left]-\infty, -2\right]$ et tout $\epsilon \in \{-1, 1\}$, l'application g_c^ϵ est bien définie sur $[-\beta_c, \beta_c]$ et on a

$$g_c^\epsilon\left([-\beta_c, \beta_c]\right) = \left[\epsilon\sqrt{-\beta_c - c}, \epsilon\beta_c\right] \subset [-\beta_c, \beta_c]\ .$$

Pour $c \in \left]-\infty, -2\right]$ et $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1, 1\}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, notons alors $g_c^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ l'application de $[-\beta_c, \beta_c]$ dans lui-même définie par

$$g_c^{\boldsymbol{\varepsilon}}(z) = g_c^{\epsilon_0} \circ \cdots \circ g_c^{\epsilon_{n-1}}(z)\,.$$

Afin de démontrer la proposition 2.22, énonçons d'abord le lemme ci-dessous.

LEMME 2.23. *Pour tout $c \in \left]-\infty, -2\right]$ et tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1, 1\}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $g_c^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ admet un unique point fixe $\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(c)$. De plus, pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1, 1\}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $c \mapsto \mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(c)$ est continue.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.23. Montrons d'abord le fait suivant :

AFFIRMATION 2.24. Si $c \in \left]-\infty, -2\right]$, $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1, 1\}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathfrak{z}$ est un point fixe pour $g_c^{\boldsymbol{\varepsilon}}$, alors $\mathfrak{z} \in \mathcal{X}_c^{0,n}$ et on a $\epsilon_j f_c^{\circ j}(\mathfrak{z}) > 0$ pour tout $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

DÉMONSTRATION DE L'AFFIRMATION 2.24. On a

$$f_c^{\circ n}(\mathfrak{z}) = f_c^{\circ n} \circ g_c^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}\,.$$

De plus, $\mathcal{X}_c^{0,n}$ est invariant par f_c. Par suite, pour tout $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a

$$f_c^{\circ j}(\mathfrak{z}) = g_c^{\epsilon_j} \circ \cdots \circ g_c^{\epsilon_{n-1}}(\mathfrak{z}) \in g_c^{\epsilon_j}\left([-\beta_c, \beta_c]\right) \cap \mathcal{X}_c^{0,n}\,,$$

et donc

$$\epsilon_j f_c^{\circ j}(\mathfrak{z}) \in \left]\sqrt{-\beta_c - c}, \beta_c\right] \subset \mathbb{R}_+^*$$

puisque $\epsilon_j\sqrt{-\beta_c - c}$ est prépériodique pour f_c avec prépériode 2 et période 1. Ainsi, l'affirmation est démontrée. $\square$

Soient $c \in \left]-\infty,-2\right]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1,1\}^n$, l'application $g_c^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ admet un point fixe $\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(c)$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. D'après l'affirmation 2.24, les points $\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(c)$, avec $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1,1\}^n$, sont dans $\mathcal{X}_c^{0,n}$ et sont deux à deux distincts. Par suite, comme $\mathcal{X}_c^{0,n}$ contient au plus 2^n éléments, on a

$$\mathcal{X}_c^{0,n} = \left\{\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(c) : \boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1,1\}^n\right\} .$$

De plus, pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1,1\}^n$, tout point fixe pour $g_c^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est dans $\mathcal{X}_c^{0,n}$ et est différent de $\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}'}(c)$, avec $\boldsymbol{\varepsilon}' \in \{-1,1\}^n \setminus \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$, d'après l'affirmation 2.24. Par conséquent, $\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(c)$ est l'unique point fixe pour $g_c^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1,1\}^n$.

Soient $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1,1\}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et $c_0 \in \left]-\infty,-2\right]$. Il reste à démontrer que l'application $c \mapsto \mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(c)$ est continue en c_0. Pour tout $c \in \left]-\infty,-2\right]$, les racines du polynôme $f_c^{\circ n}(z) - z$ sont simples et sont précisément les $\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}'}(c)$, avec $\boldsymbol{\varepsilon}' \in \{-1,1\}^n$, d'après ce qui précède, et donc

$$f_c^{\circ n}(z) - z = \prod_{\boldsymbol{\varepsilon}' \in \{-1,1\}^n} \left(z - \mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}'}(c)\right) .$$

Concluons alors avec un argument de continuité des racines. Pour $c \in \left]-\infty,-2\right]$, choisissons $\boldsymbol{\varepsilon}_c \in \{-1,1\}^n$ pour lequel $\left|\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(c_0\right) - \mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}_c}(c)\right|$ est minimal. Alors on a

$$\left|\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(c_0\right) - \mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}_c}(c)\right| \leq \prod_{\boldsymbol{\varepsilon}' \in \{-1,1\}^n} \left|\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(c_0\right) - \mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}'}(c)\right|^{\frac{1}{2^n}} = \left|f_c^{\circ n}\left(\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(c_0\right)\right) - \mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(c_0\right)\right|^{\frac{1}{2^n}}$$

pour tout $c \in \left]-\infty,-2\right]$, et donc $\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}_c}(c)$ tend vers $\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(c_0\right)$ quand c tend vers c_0 puisque $\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(c_0\right) \in \mathcal{X}_{c_0}^{0,n}$. Par suite, d'après l'affirmation 2.24, pour tout c assez proche de c_0, on a $\epsilon_j f_c^{\circ j}\left(\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}_c}(c)\right) > 0$ pour tout $j \in \{0,\dots,n-1\}$, et donc $\boldsymbol{\varepsilon}_c = \boldsymbol{\varepsilon}$. Par conséquent, $\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(c)$ tend vers $\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(c_0\right)$ quand c tend vers c_0. Ainsi, le lemme est démontré. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la proposition 2.22.

Démonstration de la proposition 2.22. Soit $c \in \left]-\infty,-2\right]$. Supposons que $\psi_c \colon \boldsymbol{\Sigma} \to \mathbb{R}$ est une application qui vérifie $f_c \circ \psi_c = \psi_c \circ \sigma$ et $\epsilon_0 \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) \geq 0$ pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$. Alors, pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) = g_c^{\epsilon_0} \circ \dots \circ g_c^{\epsilon_{n-1}}\left(\psi_c\left(\sigma^{\circ n}(\boldsymbol{\varepsilon})\right)\right) .$$

Par suite, si $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$ est périodique avec période $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\psi_c(\boldsymbol{\varepsilon})$ est un point fixe pour $g_c^{\boldsymbol{\varepsilon}_n}$, où $\boldsymbol{\varepsilon}_n = (\epsilon_0,\dots,\epsilon_{n-1})$, et donc $\psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n}(c)$. Par conséquent, pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$ avec prépériode $m \in \mathbb{N}$ et période $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) = g_c^{\boldsymbol{\varepsilon}_m}\left(\psi_c\left(\sigma^{\circ m}(\boldsymbol{\varepsilon})\right)\right) = g_c^{\boldsymbol{\varepsilon}_m}\left(\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n}(c)\right) ,$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_m = (\epsilon_0,\dots,\epsilon_{m-1})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_n = (\epsilon_m,\dots,\epsilon_{m+n-1})$, avec la convention que $g_c^{\varnothing}$ désigne l'application identité de $[-\beta_c,\beta_c]$. En particulier, une telle application $\psi_c \colon \boldsymbol{\Sigma} \to \mathbb{R}$ est nécessairement unique.

Pour $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$ avec prépériode $m \in \mathbb{N}$ et période $n \in \mathbb{N}^*$, définissons

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = (\epsilon_0,\dots,\epsilon_{m-1}) , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_n = (\epsilon_m,\dots,\epsilon_{m+n-1}) \quad \text{et} \quad \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) = g_c^{\boldsymbol{\varepsilon}_m}\left(\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n}(c)\right) .$$

Si $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$ est périodique avec période $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \sigma(\boldsymbol{\varepsilon})_m = \varnothing , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_n = (\epsilon_0,\dots,\epsilon_{n-1}) \quad \text{et} \quad \sigma(\boldsymbol{\varepsilon})_n = (\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n-1},\epsilon_0) ,$$

ce qui entraîne

$$g_c^{\sigma(\boldsymbol{\varepsilon})_n}\left(f_c \circ \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon})\right) = g_c^{\epsilon_1} \circ \dots \circ g_c^{\epsilon_{n-1}}\left(\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n}(c)\right) = f_c \circ g_c^{\boldsymbol{\varepsilon}_n}\left(\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n}(c)\right) = f_c \circ \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) ,$$

et donc
$$f_c \circ \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathfrak{z}_{\sigma(\boldsymbol{\varepsilon})_n} = \psi_c \circ \sigma(\boldsymbol{\varepsilon})\,.$$
Si $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$ a pour prépériode $m \in \mathbb{N}^*$ et période $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a
$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = (\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{m-1})\ , \quad \sigma(\boldsymbol{\varepsilon})_m = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{m-1}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_n = \sigma(\boldsymbol{\varepsilon})_n\,,$$
et donc
$$f_c \circ \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) = g_c^{\epsilon_1} \circ \cdots \circ g_c^{\epsilon_{m-1}}\left(\mathfrak{z}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n}(c)\right) = \psi_c \circ \sigma(\boldsymbol{\varepsilon})\,.$$
De plus, pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$, on a
$$\psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) \in g_c^{\epsilon_0}\left([-\beta_c, \beta_c]\right) = \left[\epsilon_0\sqrt{-\beta_c - c}, \epsilon_0\beta_c\right] \subset \mathbb{R}_{\epsilon_0}\,.$$
Ainsi, l'application $\psi_c \colon \boldsymbol{\Sigma} \to \mathbb{R}$ ainsi définie a les propriétés demandées.

Enfin, pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$, l'application $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \colon c \mapsto \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon})$ est continue d'après le lemme 2.23. Ainsi, la proposition est démontrée. □

REMARQUE 2.25. Si $c \in \,]-\infty, -2]$ et $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}' \in \boldsymbol{\Sigma}$ sont tels que $\epsilon_0 = -\epsilon'_0$ et $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}')$, alors $\psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) = -\psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}')$.

Remarquons que la démonstration de la proposition 2.22 donne des formules explicites pour les applications $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ avec $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}^{m,1}$ et $m \in \mathbb{N}$.

EXEMPLE 2.26. Soit $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Alors

— pour $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}^{1,1}$ donné par $\epsilon_0 = \epsilon$ et $\epsilon_1 = -1$, on a
$$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \colon c \mapsto \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) = -\epsilon\alpha_c\ ;$$
— pour $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}^{1,1}$ donné par $\epsilon_0 = \epsilon$ et $\epsilon_1 = 1$, on a
$$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \colon c \mapsto \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) = \epsilon\beta_c\ ;$$
— pour $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}^{2,1}$ donné par $\epsilon_0 = \epsilon$, $\epsilon_1 = 1$ et $\epsilon_2 = -1$, on a
$$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \colon c \mapsto \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) = \epsilon\sqrt{-\alpha_c - c}\ ;$$
— pour $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}^{2,1}$ donné par $\epsilon_0 = \epsilon$, $\epsilon_1 = -1$ et $\epsilon_2 = 1$, on a
$$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \colon c \mapsto \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon}) = \epsilon\sqrt{-\beta_c - c}\,.$$

Le résultat suivant établit un lien entre les points prépériodiques pour f_c, avec $c \in \,]-\infty, -2]$, et les suites prépériodiques d'éléments de $\{-1, 1\}$ (voir la figure 4).

PROPOSITION 2.27. *Soit $c \in \,]-\infty, -2]$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathcal{X}_c^{m,n}$ est inclus dans $\mathbb{R}$ et on a*
$$\mathcal{X}_c^{m,n} = \psi_c\left(\boldsymbol{\Sigma}^{m,n}\right) \subset [-\beta_c, \beta_c]\ .$$
De plus, si $c \in \,]-\infty, -2[$, alors l'application $\psi_c \colon \boldsymbol{\Sigma} \to \mathbb{R}$ est injective.

DÉMONSTRATION. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_c^{\circ n} \circ \psi_c = \psi_c \circ \sigma^{\circ n}$. Par conséquent, on a $\psi_c\left(\boldsymbol{\Sigma}^{m,n}\right) \subset \mathcal{X}_c^{m,n}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que $c \in \,]-\infty, -2[$. Alors, pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\epsilon_n f_c^{\circ n}\left(\psi_c(\boldsymbol{\varepsilon})\right) = \epsilon_n \psi_c\left(\sigma^{\circ n}(\boldsymbol{\varepsilon})\right) \in \left[\sqrt{-\beta_c - c}, \beta_c\right] \subset \mathbb{R}_+^*\,.$$
Par suite, l'application ψ_c est injective. Par conséquent, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\mathcal{X}_c^{m,n}$ contient au plus 2^{m+n} éléments, on a $\psi_c\left(\boldsymbol{\Sigma}^{m,n}\right) = \mathcal{X}_c^{m,n}$.

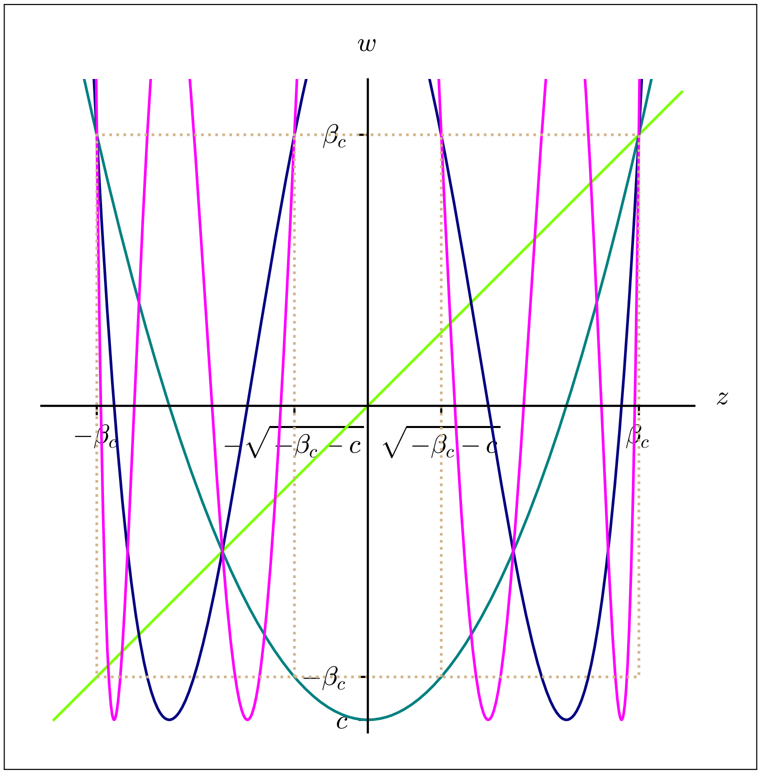

FIGURE 4. Courbes représentatives des applications $z \mapsto f_c^{\circ n}(z)$, avec $c \in]-\infty, -2]$ fixé et $n \in \{0, \dots, 3\}$.

Soient $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_0 \in \mathcal{X}_{-2}^{m,n}$. Il reste à démontrer que $z_0 \in \psi_{-2}\left(\mathbf{\Sigma}^{m,n}\right)$. Pour tout $c \in]-\infty, -2[$, les racines du polynôme $f_c^{\circ(m+n)}(z) - f_c^{\circ m}(z)$ sont simples et sont précisément les $\psi_c(\boldsymbol{\varepsilon})$, avec $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{\Sigma}^{m,n}$, d'après ce qui précède, et donc

$$f_c^{\circ(m+n)}(z) - f_c^{\circ m}(z) = \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{\Sigma}^{m,n}} \left(z - \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon})\right) .$$

Par suite, pour tout $c \in]-\infty, -2[$, on a

$$\min_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{\Sigma}^{m,n}} |z_0 - \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon})| \leq \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{\Sigma}^{m,n}} |z_0 - \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon})|^{\frac{1}{2^{m+n}}} = \left| f_c^{\circ(m+n)}(z_0) - f_c^{\circ m}(z_0) \right|^{\frac{1}{2^{m+n}}} .$$

Par conséquent, comme $z_0 \in \mathcal{X}_{-2}^{m,n}$ et les applications $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \colon c \mapsto \psi_c(\boldsymbol{\varepsilon})$, avec $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{\Sigma}^{m,n}$, sont continues en -2, on a $z_0 \in \psi_{-2}\left(\mathbf{\Sigma}^{m,n}\right)$. Ainsi, la proposition est démontrée. $\square$

REMARQUE 2.28. En utilisant la proposition 2.27 et le théorème de Montel, on peut montrer que, pour tout $c \in]-\infty, -2]$, l'ensemble de Julia $\mathcal{J}_{f_c}$ du polynôme f_c est contenu dans $[-\beta_c, \beta_c]$.

Notons que l'application ψ_{-2} n'est pas injective. Plus précisément, on a :

PROPOSITION 2.29. *Pour tous $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}' \in \mathbf{\Sigma}$ distincts, on a $\psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}')$ si et seulement si il existe un entier $m \geq 2$ tel que $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}' \in \mathbf{\Sigma}^{m,1}$, $\epsilon_j = \epsilon_j'$ pour tout $j \in \{0, \dots, m-3\}$, $\epsilon_{m-2} = -\epsilon_{m-2}'$, $\epsilon_{m-1} = \epsilon_{m-1}' = -1$ et $\epsilon_m = \epsilon_m' = 1$.*

Démonstration. Soient $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}' \in \boldsymbol{\Sigma}$ distincts tels que $\psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}')$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\epsilon_n f_{-2}^{\circ n}(\psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon})) \geq 0 \quad \text{et} \quad \epsilon_n' f_{-2}^{\circ n}(\psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon})) \geq 0\,.$$

Par suite, comme $\boldsymbol{\varepsilon} \neq \boldsymbol{\varepsilon}'$, il existe $m \in \mathbb{N}$, que l'on peut supposer minimal, tel que $f_{-2}^{\circ m}(\psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon})) = 0$. Pour tout $n \in \{0, \ldots, m-1\}$, les inégalités ci-dessus sont strictes, et donc $\epsilon_n = \epsilon_n'$. De plus, on a $f_{-2}^{\circ(m+1)}(\psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon})) = -2$ et $f_{-2}^{\circ n}(\psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon})) = 2$ pour tout $n \geq m+2$, et donc $\epsilon_{m+1} = \epsilon_{m+1}' = -1$ et $\epsilon_n = \epsilon_n' = 1$ pour tout $n \geq m+2$. Ainsi, les suites $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}'$ ont les relations désirées.

Réciproquement, notons que, pour $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}^{2,1}$ tel que $\epsilon_1 = -1$ et $\epsilon_2 = 1$, on a

$$\psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \epsilon_0 \sqrt{-\beta_{-2} - (-2)} = 0\,.$$

Par conséquent, si $m \geq 2$ et $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}^{m,1}$ vérifie $\epsilon_{m-1} = -1$ et $\epsilon_m = 1$, alors on a

$$\psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}) = g_{-2}^{(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{m-3})}\left(\psi_{-2}\left(\sigma^{\circ(m-2)}(\boldsymbol{\varepsilon})\right)\right) = g_{-2}^{(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{m-3})}(0)\,,$$

qui ne dépend pas de ϵ_{m-2}. Ceci complète la démonstration de la proposition. $\square$

Remarque 2.30. D'après les propositions 2.27 et 2.29, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathcal{X}_{-2}^{m,n}$ admet exactement 2^n éléments si $m = 0$ et $2^{m+n} - 2^{m-1} + 1$ éléments si $m \geq 1$.

Remarque 2.31. On peut en fait décrire l'application ψ_{-2} de manière explicite. Pour $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$, notons $(\delta_n(\boldsymbol{\varepsilon}))_{n \geq 0}$ la suite d'éléments de $\{0, 1\}$ définie par

$$\delta_n(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{cases} \delta_{n-1}(\boldsymbol{\varepsilon}) & \text{si } \epsilon_n = 1 \\ 1 - \delta_{n-1}(\boldsymbol{\varepsilon}) & \text{si } \epsilon_n = -1 \end{cases},$$

où $\delta_{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ par convention. Alors l'application $\psi_{-2} \colon \boldsymbol{\Sigma} \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$\psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 2\cos\left(\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta_n(\boldsymbol{\varepsilon})}{2^{n+1}}\right).$$

2.2.3. Retour à l'espace des paramètres. Nous exploitons ici les résultats obtenus dans l'espace dynamique pour en déduire des énoncés concernant l'espace des paramètres.

Notons que, pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $c \in \mathbb{C}$, on a $c \in \mathcal{S}_a$ si et seulement si $a \in \mathcal{X}_c$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $c \in \mathcal{S}_a^{m,n}$ si et seulement si $a \in \mathcal{X}_c^{m,n}$.

Les ensembles $\mathcal{S}_a$, avec $a \in \mathbb{C}$, sont bornés. Plus précisément, en utilisant la proposition 2.20, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.32. *Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors on a*

$$\mathcal{S}_a \subset \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq R_a\}\,, \quad \text{où} \quad R_a = |a|^2 + \sqrt{|a|^2 + 1} + 1\,.$$

Démonstration. Si $c \in \mathcal{S}_a$, alors on a

$$|c| - |a|^2 \leq |f_c(a)| \leq \rho_c$$

d'après la proposition 2.20, et donc $\varphi(|c|) \leq |a|^2$, où $\varphi \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$\varphi(x) = x - \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}\,.$$

De plus, l'application φ est strictement croissante et vérifie $\varphi(R_a) = |a|^2$. Ceci complète la démonstration de la proposition. $\square$

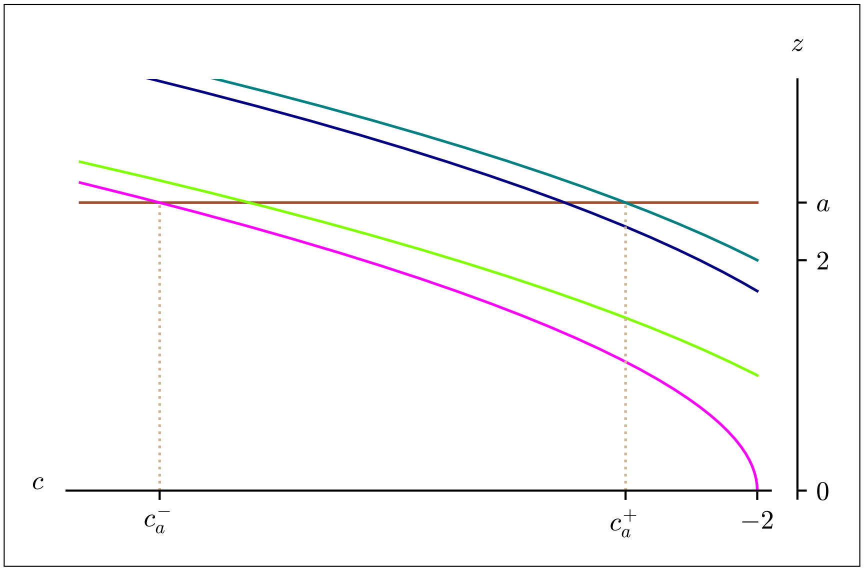

FIGURE 5. Courbes représentatives des applications $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}$, avec $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}_1^{2,1}$.

Décrivons plus précisément l'ensemble $\mathcal{S}_a$ lorsque $a \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$.

Soit $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{m,n} = \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} = (\epsilon_l)_{l \geq 0} \in \boldsymbol{\Sigma}^{m,n} : \epsilon_0 = \epsilon \right\} .$$

Définissons également

$$\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon = \bigcup_{m \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{N}^*} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{m,n} = \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} = (\epsilon_l)_{l \geq 0} \in \boldsymbol{\Sigma} : \epsilon_0 = \epsilon \right\} .$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{m,n}$ contient exactement 2^{m+n-1} éléments – chacun d'entre eux étant entièrement déterminé par le choix de ses termes avec indices dans $\{1, \ldots, m+n-1\}$.

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$. Alors

— pour $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}_{\operatorname{sgn}(a)}^{2,1}$ donné par $\epsilon_1 = -1$ et $\epsilon_2 = 1$, l'application

$$\operatorname{sgn}(a)\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \colon c \mapsto \sqrt{-\beta_c - c}$$

est strictement décroissante sur $]-\infty, -2]$ et on a $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(c_a^-\right) = a$, où

$$c_a^- = -a^2 - \sqrt{a^2+1} - 1 \in \mathcal{S}_a^{2,1} \;;$$

— pour $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}_{\operatorname{sgn}(a)}^{1,1}$ donné par $\epsilon_1 = 1$, l'application

$$\operatorname{sgn}(a)\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}} \colon c \mapsto \beta_c$$

est strictement décroissante sur $]-\infty, -2]$ et on a $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(c_a^+\right) = a$, où

$$c_a^+ = -a^2 + |a| \in \mathcal{S}_a^{1,1} .$$

REMARQUE 2.33. Pour tout $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \geq 2$, on a $R_a = -c_{|a|}^-$.

Le résultat suivant établit un lien entre les éléments de $\mathcal{S}_a$, avec $a \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$, et les suites prépériodiques d'éléments de $\{-1, 1\}$ (voir les figures 5 et 6).

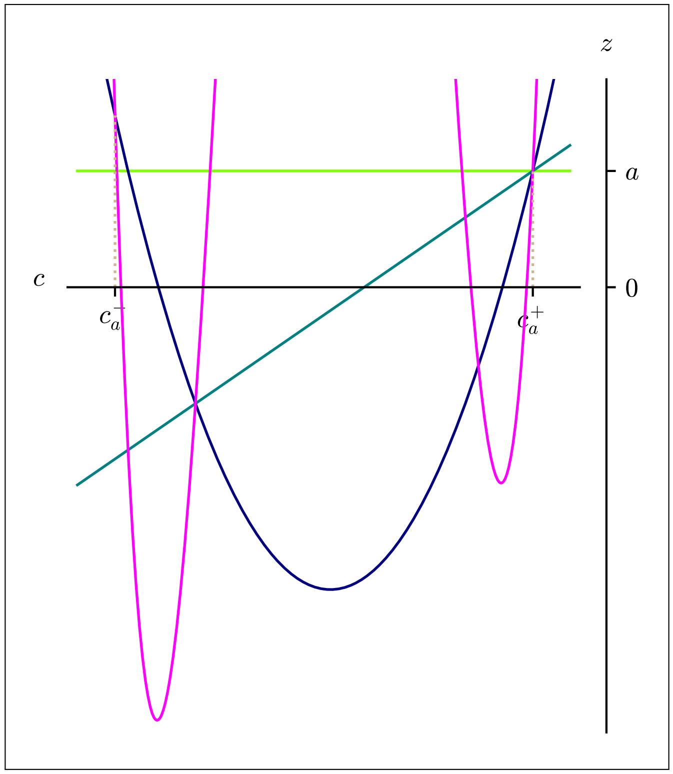

FIGURE 6. Courbes représentatives des applications $c \mapsto f_c^{\circ n}(a)$, avec $a \in [2, +\infty[$ fixé et $n \in \{0, \dots, 3\}$.

PROPOSITION 2.34. *Soit $a \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$. Alors il existe une unique application*

$$\gamma_a \colon \mathbf{\Sigma}_{\mathrm{sgn}(a)} \to \left]-\infty, -2\right]$$

qui vérifie $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\gamma_a(\boldsymbol{\varepsilon})\right) = a$ pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{\Sigma}_{\mathrm{sgn}(a)}$. De plus, l'application γ_a est injective et, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathcal{S}_a^{m,n}$ est inclus dans $\mathbb{R}$ et on a

$$\mathcal{S}_a^{m,n} = \gamma_a\left(\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{sgn}(a)}^{m,n}\right) \subset \left[c_a^-, c_a^+\right] .$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{\Sigma}_{\mathrm{sgn}(a)}$, on a

$$\mathrm{sgn}(a)\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(c_a^-\right) \geq \sqrt{-\beta_{c_a^-} - c_a^-} = |a| \quad \text{et} \quad \mathrm{sgn}(a)\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(c_a^+\right) \leq \beta_{c_a^+} = |a|,$$

et donc il existe $\gamma_a(\boldsymbol{\varepsilon}) \in \left[c_a^-, c_a^+\right]$ tel que $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\gamma_a(\boldsymbol{\varepsilon})\right) = a$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Montrons maintenant le fait ci-dessous, qui se déduit des propositions 2.27 et 2.29.

AFFIRMATION 2.35. Si $\gamma \in \left]-\infty, -2\right]$, alors il existe au plus un $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{\Sigma}$ tel que $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\gamma) = a$. De plus, si $\gamma \in \left]-\infty, -2\right]$ et $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{\Sigma}^{m,n}$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, vérifient $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\gamma) = a$, alors $\gamma \in \mathcal{S}_a^{m,n}$.

DÉMONSTRATION DE L'AFFIRMATION 2.35. Soient $\gamma \in \left]-\infty, -2\right]$ et $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{\Sigma}$ qui vérifient $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\gamma) = a$. Alors on a $\psi_\gamma(\boldsymbol{\varepsilon}) = a$, et en particulier $\gamma \in \mathcal{S}_a^{m,n}$ si $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{\Sigma}^{m,n}$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\gamma < -2$, alors un tel $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}$ est nécessairement unique puisque l'application ψ_γ est injective d'après la proposition 2.27. Si $\gamma = -2$, alors

$$2 \leq |a| = |\psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon})| \leq \beta_{-2} = 2\,,$$

ce qui entraîne $\psi_{-2}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \operatorname{sgn}(a)\beta_{-2}$, et donc $\boldsymbol{\varepsilon}$ est l'élément de $\boldsymbol{\Sigma}_{\operatorname{sgn}(a)}^{1,1}$ défini par $\epsilon_1 = 1$ d'après la proposition 2.29. Ainsi, l'affirmation est démontrée. □

D'après l'affirmation 2.35, l'application γ_a ainsi définie est injective et vérifie $\gamma_a\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\operatorname{sgn}(a)}^{m,n}\right) \subset \mathcal{S}_a^{m,n}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par suite, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme l'ensemble $\mathcal{S}_a^{m,n}$ contient au plus 2^{m+n-1} éléments, on a $\gamma_a\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\operatorname{sgn}(a)}^{m,n}\right) = \mathcal{S}_a^{m,n}$. Par conséquent, pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{\Sigma}_{\operatorname{sgn}(a)}$, le paramètre $\gamma_a(\boldsymbol{\varepsilon})$ est l'unique élément $\gamma \in \left]-\infty, -2\right]$ tel que $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\gamma) = a$ d'après l'affirmation 2.35. Ainsi, la proposition est démontrée. □

Remarque 2.36. En utilisant la proposition 2.34 et le théorème de Montel, on peut montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$, l'ensemble des paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels le point a a une orbite future bornée pour f_c est contenu dans $[c_a^-, c_a^+]$.

Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors les éléments de $\mathcal{S}_a$ sont précisément les racines des polynômes $f_c^{\circ(m+n)}(a) - f_c^{\circ m}(a)$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, qui sont unitaires et dans $\mathbb{Z}[c]$. Par conséquent, on a le résultat ci-dessous.

Notons $\overline{\mathbb{Q}}$ la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$.

Proposition 2.37. *Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors $\mathcal{S}_a$ est inclus dans l'ensemble des entiers algébriques et est invariant pour l'action de* $\operatorname{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right)$.

Afin de prouver le théorème 2.18, énonçons également le lemme ci-dessous, qui est un cas particulier d'un théorème de Kronecker.

Lemme 2.38. *Soient $n \in \mathbb{Z}$ et c un entier algébrique dont tous les conjugués de Galois sont dans $\left]n-2, n\right]$. Alors $c = n - 1$ ou $c = n$.*

Démonstration. Posons $\gamma = c - n + 1$. Alors γ est un entier algébrique dont tous les conjugués de Galois $\gamma_1, \dots, \gamma_d$, avec $d \in \mathbb{N}^*$, sont dans l'intervalle $\left]-1, 1\right]$. Par conséquent, on a

$$\prod_{j=1}^{d} \gamma_j \in \left]-1, 1\right] \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}\,,$$

et donc soit il existe $j \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\gamma_j = 0$, auquel cas $\gamma = 0$, soit $\gamma_j = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$. Ainsi, soit $c = n - 1$ soit $c = n$. □

Enfin, démontrons le théorème 2.18.

Démonstration du théorème 2.18. Supposons que $a = 0$ et $|b| = 1$. Pour tout $c \in \mathcal{S}_0$, on a $|c| \leq 2$ d'après la proposition 2.32, et donc $\rho_c \leq 2$. Par conséquent, pour tout $c \in \mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$, on a $\left|f_c^{\circ n}(0)\right| \leq 2$ et $\left|f_c^{\circ n}(1)\right| \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la remarque 2.19 et la proposition 2.20. Posons

$$\mathcal{E}_0 = \{c \in \mathbb{C} : |c+1| \geq 1\} \cap \{c \in \mathbb{C} : \Re(c) \leq -1\}$$

et

$$\mathcal{E}_1 = \{c \in \mathbb{C} : |c+1| \geq 1\} \cap \left\{c \in \mathbb{C} : \left|c + \frac{1}{4}\right| \geq \frac{1}{2}\right\} \cap \{c \in \mathbb{C} : \Re(c) \geq -1\}\,.$$

En utilisant le principe du maximum, on peut montrer que $\left|f_c^{\circ 3}(0)\right| \geq 2$ pour tout $c \in \mathcal{E}_0$, avec égalité si et seulement si $c = -2$, et que $\left|f_c^{\circ 3}(1)\right| > 2$ pour tout $c \in \mathcal{E}_1$. Par conséquent, on a

$$\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b \subset \{-2\} \cup \{c \in \mathbb{C} : |c+1| < 1\} \cup \left\{c \in \mathbb{C} : \left|c + \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{2}\right\}.$$

Soit $c \in \mathbb{C}$ non nul tel que $\left|c + \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{2}$. Définissons

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = \left(\lambda - 1 - \sqrt{2}\right)\left(\lambda - 1 + \sqrt{2}\right) \in \mathbb{C}[\lambda].$$

On a $M_1^{f_c}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 4c$, et donc $M_1^{f_c}(0) \neq 0$ et

$$\left|M_1^{f_c}\left(e^{i\theta}\right) - P\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 = |4c+1|^2 < 4 \leq 4\sin(\theta)^2 + 4 = \left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|^2$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Par suite, f_c admet un point fixe attractif $z_0 \in \mathbb{C}$ qui n'est pas superattractif d'après le théorème de Rouché, et l'orbite future du point critique 0 pour f_c admet z_0 comme unique point d'accumulation (voir [**CG93**, Chapter III, Theorem 2.2]). En particulier, 0 n'est pas prépériodique pour f_c. Ainsi, on a

$$\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b \subset \{-2\} \cup \{c \in \mathbb{C} : |c+1| < 1\} \cup \{0\}.$$

De plus, $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$ est inclus dans l'ensemble des entiers algébriques et est invariant pour l'action de $\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right)$ d'après la proposition 2.37. Par conséquent, $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$ est inclus dans $\{-2, -1, 0\}$ d'après le théorème de Kronecker. Réciproquement, on a

$$-2 \in \mathcal{S}_a^{2,1} \cap \mathcal{S}_b^{1,1}, \quad -1 \in \mathcal{S}_a^{0,2} \cap \mathcal{S}_b^{1,2} \quad \text{et} \quad 0 \in \mathcal{S}_a^{0,1} \cap \mathcal{S}_b^{1,1}.$$

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [**Buf18**, Proposition 6].

Supposons donc que $|b| \geq 2$. D'après les propositions 2.32, 2.34 et 2.37, $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$ est contenu dans l'ensemble des entiers algébriques, est invariant par l'action de $\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right)$ et vérifie

$$\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b \subset \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq R_a\} \cap \left[c_b^-, c_b^+\right].$$

Supposons que $a = 0$. Alors on a

$$c_b^+ = -b^2 + |b| \leq -2 = -R_a,$$

avec égalité si et seulement si $|b| = 2$. Par conséquent, $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b \subset \{-2\}$ si $|b| = 2$ et $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b = \varnothing$ sinon. Réciproquement, on a $-2 \in \mathcal{S}_a^{2,1} \cap \mathcal{S}_b^{1,1}$ si $|b| = 2$.

Supposons maintenant que $|a| \geq 1$. Alors on a

$$c_b^+ - 2 < -R_a = -a^2 - \sqrt{a^2+1} - 1 < -a^2 - |a| = c_b^+ \quad \text{si} \quad |b| = |a| + 1$$

et

$$c_b^+ = -b^2 + |b| < -a^2 - \sqrt{a^2+1} - 1 = -R_a \quad \text{si} \quad |b| \geq |a| + 2.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b \subset \left\{-a^2 - |a| - 1, -a^2 - |a|\right\} \quad \text{si} \quad |b| = |a| + 1$$

d'après le lemme 2.38 et $\mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b = \varnothing$ sinon. Réciproquement, on a

$$-a^2 - |a| - 1 \in \mathcal{S}_a^{1,2} \cap \mathcal{S}_b^{1,2} \quad \text{et} \quad -a^2 - |a| \in \mathcal{S}_a^{1,1} \cap \mathcal{S}_b^{1,1} \quad \text{si} \quad |b| = |a| + 1.$$

Ainsi, le théorème est démontré. $\square$

2.3. Polynômes avec multiplicateurs entiers ou rationnels

2.3.1. Introduction. Nous examinons ici les polynômes complexes dont tous les multiplicateurs sont entiers – ou rationnels. Comme tout polynôme complexe est conjugué à un polynôme unitaire et le multiplicateur est invariant par conjugaison, cela revient à étudier les polynômes unitaires complexes dont tous les polynômes multiplicateurs sont scindés sur $\mathbb{Z}$ – ou $\mathbb{Q}$ – d'après le corollaire 1.45.

Nous étudierons cette même question dans le cadre plus général des fractions rationnelles complexes au chapitre 4.

Fixons un entier $d \geq 2$. Introduisons deux classes de conjugaison particulières.

DÉFINITION 2.39. On dit qu'un polynôme $f \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})$ est une *application puissance* s'il est conjugué à $f_0(z) = z^d$.

Il existe un unique polynôme $T_d \in \mathrm{Poly}_d^U(\mathbb{C})$ qui vérifie

$$T_d\left(z + z^{-1}\right) = z^d + z^{-d}\,.$$

On l'appelle le d-ième *polynôme de Tchebychev*.

EXEMPLE 2.40. On a $T_2(z) = z^2 - 2$ et $T_3(z) = z^3 - 3z$.

DÉFINITION 2.41. On dit qu'un polynôme $f \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})$ est une *application de Tchebychev* s'il est conjugué à $\pm T_d$.

REMARQUE 2.42. Les polynômes $-T_d$ et T_d sont conjugués si et seulement si d est pair.

Ces classes de conjugaison de polynômes ont la propriété bien connue suivante :

PROPOSITION 2.43. *Soit $f \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})$ une application puissance ou une application de Tchebychev. Alors f a un multiplicateur entier en chaque cycle.*

DÉMONSTRATION. D'après l'exemple 1.8, le multiplicateur de f_0 au point fixe 0 est égal à 0 et, pour tout point périodique $z_0 \in \mathbb{C}^*$ pour f_0 avec période $n \in \mathbb{N}^*$, le multiplicateur de f_0 en z_0 est égal à d^n.

Soit $\epsilon \in \{-1, 1\}$, et examinons les multiplicateurs du polynôme ϵT_d. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ une racine $(d-1)$-ième de ϵ, et posons

$$\phi(z) = \omega z + \omega^{-1} z^{-1} \in \mathbb{C}(z)\,.$$

Alors on a

$$\epsilon T_d \circ \phi(z) = \epsilon\left((\omega z)^d + (\omega z)^{-d}\right) = \omega z^d + \omega^{-1} z^{-d} = \phi \circ f_0(z)\,.$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ un point périodique pour ϵT_d avec période $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $w_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $z_0 = \phi\left(w_0\right)$, et on a

$$\phi^{-1}\left(\{z_0\}\right) = \begin{cases} \{w_0\} & \text{si } w_0 = \pm\omega^{-1} \\ \left\{w_0, \omega^{-2} w_0^{-1}\right\} & \text{sinon} \end{cases}\,.$$

De plus, on a $\left(\epsilon T_d\right)^{\circ n} \circ \phi = \phi \circ f_0^{\circ n}$, et donc $f_0^{\circ n}$ induit une permutation de $\phi^{-1}\left(\{z_0\}\right)$.

Supposons que $w_0 = \pm\omega^{-1}$. Alors on a $\phi'\left(w_0\right) = 0$ et $\phi''\left(w_0\right) = \pm 2\omega^2$ et w_0 est un point fixe pour $f_0^{\circ n}$. Par conséquent, en dérivant deux fois de suite l'égalité $\left(\epsilon T_d\right)^{\circ n} \circ \phi = \phi \circ f_0^{\circ n}$ en w_0, on obtient

$$\left(\left(\epsilon T_d\right)^{\circ n}\right)'\left(z_0\right) \phi''\left(w_0\right) = \left(f_0^{\circ n}\right)'\left(w_0\right)^2 \phi''\left(w_0\right) = d^{2n} \phi''\left(w_0\right)\,,$$

et donc le multiplicateur de ϵT_d en z_0 est égal à d^{2n}.

Supposons que $w_0 \neq \pm\omega^{-1}$. Alors on a $\phi'(w_0) \neq 0$ et w_0 est un point fixe pour $f_0^{\circ 2n}$. Par conséquent, en dérivant l'égalité $(\epsilon T_d)^{2n} \circ \phi = \phi \circ f_0^{\circ 2n}$ en w_0, on obtient

$$\left((\epsilon T_d)^{\circ n}\right)'(z_0)^2 \phi'(w_0) = \left(f_0^{\circ 2n}\right)'(w_0)\,\phi'(w_0) = d^{2n}\phi'(w_0)\ ,$$

et donc le multiplicateur de ϵT_d en z_0 est égal à $\pm d^n$. Ceci complète la démonstration de la proposition. □

On s'intéresse ici à la réciproque de la proposition 2.43. Dans [**Mil06**], Milnor a conjecturé que les applications puissances et les applications de Tchebychev sont les seuls polynômes complexes qui n'ont que des multiplicateurs entiers. On peut également poser la question plus générale suivante :

Question 2.44. Soient K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers et $f \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})$ dont le multiplicateur en chaque cycle est dans $\mathcal{O}_K$ – ou K. Alors f est-il nécessairement une application puissance ou une application de Tchebychev ?

À la connaissance de l'auteur, cette question n'a pas étudiée auparavant. Celle-ci est analogue aux questions concernant les points prépériodiques rationnels pour un polynôme, qui ont reçu beaucoup d'attention (voir [**BIJ$^+$19**] et [**Sil07**]).

Dans [**EvS11**], Eremenko et van Strien ont étudié les polynômes complexes dont tous les multiplicateurs sont réels. Plus précisément, ils ont montré qu'un polynôme $f \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})$ a cette propriété si et seulement si son ensemble de Julia $\mathcal{J}_f$ est contenu dans un segment ou un cercle.

Nous répondons ici à la question 2.44 dans le cas des nombres rationnels et des polynômes unicritiques.

Théorème 2.45. *Soit $f \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})$ un polynôme unicritique dont tous les multiplicateurs sont rationnels. Alors f est soit une application puissance soit une application de Tchebychev.*

Remarque 2.46. Le polynôme T_d admet exactement $d-1$ points critiques, qui sont donnés par $2\cos\left(\frac{j\pi}{d}\right)$ avec $j \in \{1, \ldots, d-1\}$. En particulier, une application de Tchebychev est unicritique si et seulement si elle est de degré 2.

D'après la proposition 1.10 et le corollaire 1.45, pour prouver le théorème 2.45, nous sommes ramenés à déterminer l'ensemble des paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels les polynômes $M_n^{f_c}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont scindés sur $\mathbb{Q}$. En fait, nous verrons que, pour démontrer le théorème 2.45, il suffit d'examiner les polynômes M_n pour seulement quelques petites valeurs de n.

En utilisant des arguments similaires, nous montrons que la question 2.44 admet également une réponse positive dans le cas des entiers et des polynômes cubiques avec symétries. En fait, on a le résultat plus précis ci-dessous.

On dit que $f \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})$ est un *polynôme avec symétries* s'il existe $\phi \in \mathrm{Poly}_1(\mathbb{C})$ différent de I tel que $\phi \circ f = f \circ \phi$.

Théorème 2.47. *Soit $f \in \mathrm{Poly}_3(\mathbb{C})$ un polynôme cubique avec symétries qui a un multiplicateur entier en chaque cycle avec période inférieure ou égale à* 3. *Alors f est soit une application puissance soit une application de Tchebychev.*

2.3.2. Le cas des polynômes quadratiques. Étudions ici les polynômes quadratiques dont les multiplicateurs sont entiers – ou rationnels.

Supposons que $d = 2$. Alors, pour tout $c \in \mathbb{C}$, le polynôme f_c est une application puissance si et seulement $c = 0$ et est une application de Tchebychev si et seulement si $c = -2$.

Examinons d'abord les polynômes quadratiques avec multiplicateurs entiers. D'après le corollaire 1.45, pour tout $c \in \mathbb{C}$, le polynôme f_c a un multiplicateur entier en chaque cycle avec période 1 ou 2 si et seulement si les polynômes

$$M_1^{f_c}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 4c \quad \text{et} \quad M_2^{f_c}(\lambda) = \lambda - 4c - 4$$

sont scindés sur $\mathbb{Z}$, ce qui se produit si et seulement il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $c = \frac{1-m^2}{4}$. En particulier, il existe une infinité de tels paramètres $c \in \mathbb{C}$. En revanche, en considérant également les multiplicateurs aux cycles avec période 3, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.48. *Soit $f \in \mathrm{Poly}_2(\mathbb{C})$ qui a un multiplicateur entier en chaque cycle avec période inférieure ou égale à 3. Alors f est soit une application puissance soit une application de Tchebychev.*

Démonstration. D'après la proposition 1.10, il existe un paramètre $c \in \mathbb{C}$ tel que f est conjugué à f_c. D'après le corollaire 1.45, les polynômes

$$M_1^{f_c}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 4c \quad \text{et} \quad M_3^{f_c}(\lambda) = \lambda^2 + (-8c - 16)\lambda + 64c^3 + 128c^2 + 64c + 64$$

sont scindés sur $\mathbb{Z}$, et donc $4c$ est un entier et

$$\Delta_1(c) = -2^2(4c - 1) \quad \text{et} \quad \Delta_3(c) = -2^2(4c + 7)(4c)^2$$

sont des carrés d'entiers. Par conséquent, soit $c = 0$ soit il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que

$$-(4c - 1) = a^2 \quad \text{et} \quad -(4c + 7) = b^2 .$$

Dans le second cas, on a $(a - b)(a + b) = 8$, ce qui entraine

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 8 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 4 \end{cases},$$

et donc $(a, b) = (3, 1)$ et $c = -2$. Ainsi, la proposition est démontrée. □

Examinons maintenant les polynômes quadratiques dont les multiplicateurs sont rationnels. Il existe une infinité de paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels le polynôme f_c a un multiplicateur rationnel en chaque cycle avec période inférieure ou égale à 3. Plus précisément, un paramètre $c \in \mathbb{C}$ a cette propriété si et seulement si c est rationnel et $\Delta_1(c)$ et $\Delta_3(c)$ sont des carrés de nombres rationnels, ce qui se produit si et seulement si $c = 0$ ou il existe $r \in \mathbb{Q}^*$ tel que $c = \frac{-\left(r^4+3r^2+4\right)}{4r^2}$. En revanche, en considérant aussi les multiplicateurs aux cycles avec période 4, nous sommes amenés à examiner les points rationnels sur une certaine courbe elliptique et on obtient le résultat ci-dessous, qui précise le théorème 2.45 dans le cas des polynômes quadratiques.

Proposition 2.49. *Soit $f \in \mathrm{Poly}_2(\mathbb{C})$ qui a un multiplicateur rationnel en chaque cycle avec période inférieure ou égale à 4. Alors f est soit une application puissance soit une application de Tchebychev.*

Démonstration. D'après la proposition 1.10, il existe un paramètre $c \in \mathbb{C}$ tel que f est conjugué à f_c. D'après le corollaire 1.45, les polynômes

$$M_2^{f_c}(\lambda) = \lambda - 4c - 4$$

et

$$M_4^{f_c}(\lambda) = \lambda^3 + \left(16c^2 - 48\right)\lambda^2 + \left(-256c^4 - 256c^3 + 256c^2 + 768\right)\lambda \\ - 4096c^6 - 12288c^5 - 12288c^4 - 12288c^3 - 8192c^2 - 4096$$

sont scindés sur $\mathbb{Q}$, et donc c est rationnel et

$$\Delta_4(c) = -2^{24}\left(64c^3 + 144c^2 + 108c + 135\right)(c+2)^2c^6$$

est le carré d'un nombre rationnel. S'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$-\left(64c^3 + 144c^2 + 108c + 135\right) = r^2\,,$$

alors $c \neq \frac{-3}{4}$ et les nombres rationnels $a = \frac{r-18}{3(4c+3)}$ et $b = \frac{-(r+18)}{3(4c+3)}$ vérifient

$$a^3 + b^3 - 4 = \frac{-4\left(64c^3 + 144c^2 + 108c + 135 + r^2\right)}{(4c+3)^3} = 0\,,$$

ce qui contredit le fait que l'équation diophantienne $x^3 + y^3 = 4z^3$ n'admet pas de solution $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ avec $z \neq 0$ d'après le lemme B.1. Par conséquent, soit $c = -2$ soit $c = 0$. Ainsi, la proposition est démontrée. □

Remarque 2.50. En utilisant [**EvS11**, Theorem 1], on peut montrer que, pour tout $c \in \mathbb{C}$, le polynôme f_c a un multiplicateur réel en chaque cycle si et seulement si $c \in \left]-\infty, -2\right] \cup \{0\}$. En particulier, la propriété de n'avoir que des multiplicateurs réels ne caractérise pas les applications puissances et les applications de Tchebychev parmi les polynômes quadratiques.

2.3.3. Le cas des polynômes unicritiques de degré au moins 3. Nous verrons ici que, contrairement au cas des polynômes quadratiques, les applications puissances sont les seuls polynômes unicritiques de degré au moins 3 qui n'ont que des multiplicateurs réels. Notons que, pour tout $c \in \mathbb{C}$, le polynôme f_c est une application puissance si et seulement si $c = 0$.

Supposons que $d = 3$. D'après le corollaire 1.45, pour tout $c \in \mathbb{C}$, le polynôme f_c a un multiplicateur réel en chaque point fixe si et seulement si le polynôme

$$M_1^{f_c}(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 27c^2$$

est scindé sur $\mathbb{R}$, ce qui se produit si et seulement si c^2 est réel et

$$\Delta_1(c) = -3^6\left(27c^2 - 4\right)c^2 \geq 0$$

ou, de manière équivalente, si et seulement si $c^2 \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$. En particulier, les applications puissances ne sont pas les seuls polynômes unicritiques de degré 3 dont le multiplicateur en chaque point fixe est réel.

Il existe aussi une infinité de paramètres $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels le polynôme f_c a un multiplicateur rationnel en chaque point fixe. Plus précisément, en examinant ces paramètres, nous sommes amenés à déterminer l'ensemble des points rationnels sur une ellipse, et on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.51. *Pour tout $c \in \mathbb{C}$, le polynôme f_c a un multiplicateur rationnel en chaque point fixe si et seulement si il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $c^2 = \frac{4\left(r^2-1\right)^2}{\left(r^2+3\right)^3}$.*

Démonstration. Soit $c \in \mathbb{C}$. D'après le corollaire 1.45, le polynôme f_c a un multiplicateur rationnel en chaque point fixe si et seulement si le polynôme $M_1^{f_c}$ est scindé sur $\mathbb{Q}$, ce qui se produit si et seulement si $M_1^{f_c}$ est dans $\mathbb{Q}[\lambda]$ et admet une racine rationnelle et $\Delta_1(c)$ est le carré d'un nombre rationnel. Le polynôme $M_1^{f_c}$ admet une racine rationnelle si et seulement si il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que

$$27c^2 = a^3 - 6a^2 + 9a = a(a-3)^2\,,$$

auquel cas on a $M_1^{f_c} \in \mathbb{Q}[\lambda]$ et

$$\Delta_1(c) = -3^3 a(a-4)(a-1)^2(a-3)^2\,.$$

De plus, pour tout $a \in \mathbb{Q}$, le nombre

$$-3^3 a(a-4)(a-1)^2(a-3)^2$$

est le carré d'un nombre rationnel si et seulement si $-3a(a-4)$ l'est aussi puisque $-3a(a-4) = 3^2$ lorsque $a \in \{1,3\}$. Par suite, le polynôme f_c a un multiplicateur rationnel en chaque point fixe si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que

$$27c^2 = a(a-3)^2 \quad \text{et} \quad 3a(a-4) + b^2 = 0\,.$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{Q}$, on a $3a(a-4) + b^2 = 0$ si et seulement si soit $(a,b) = (0,0)$ soit $a \neq 0$ et il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $b = ra$ et $3a(a-4) + r^2a^2 = 0$, ce qui se produit si et seulement si soit $(a,b) = (0,0)$ soit il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $(a,b) = \left(\frac{12}{r^2+3}, \frac{12r}{r^2+3}\right)$. Par conséquent, le polynôme f_c a un multiplicateur rationnel en chaque point fixe si et seulement si $c^2 = 0$ ou il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $c^2 = \frac{4\left(r^2-1\right)^2}{(r^2+3)^3}$. De plus, on a $\frac{4\left(r^2-1\right)^2}{(r^2+3)^3} = 0$ lorsque $r = \pm 1$. Ainsi, la proposition est démontrée. □

En revanche, en considérant également les multiplicateurs aux cycles avec période 2, on obtient le résultat ci-dessous, qui précise le théorème 2.45 dans le cas des polynômes unicritiques de degré 3.

Proposition 2.52. *Soit $f \in \mathrm{Poly}_3(\mathbb{C})$ qui a un multiplicateur réel en chaque cycle avec période 1 ou 2. Alors f est une application puissance.*

Démonstration. D'après la proposition 1.10, il existe un paramètre $c \in \mathbb{C}$ tel que f est conjugué à f_c. D'après le corollaire 1.45, les polynômes

$$M_1^{f_c}(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 27c^2$$

et

$$M_2^{f_c}(\lambda) = \lambda^3 - 27\lambda^2 + \left(162c^2 + 243\right)\lambda - 729c^4 - 1458c^2 - 729$$

sont scindés sur $\mathbb{R}$, et donc c^2 est réel et

$$\Delta_1(c) = -3^6\left(27c^2 - 4\right)c^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \Delta_2(c) = -3^{12}\left(27c^2 + 32\right)c^6 \geq 0\,.$$

Par conséquent, on a

$$c^2 \in \left[\frac{-32}{27}, 0\right] \cap \left[0, \frac{4}{27}\right] = \{0\}\,.$$

Ainsi, la proposition est démontrée. □

Examinons enfin les polynômes unicritiques de degré au moins 4 avec multiplicateurs réels. Contrairement au cas des polynômes unicritiques de de degré 3, la propriété d'avoir un multiplicateur réel en chaque point fixe caractérise ici les applications puissances.

Proposition 2.53. *Soit $f \in \mathrm{Poly}_d(\mathbb{C})$, avec $d \geq 4$, qui a multiplicateur réel en chaque point fixe. Alors f est une application puissance.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 1.10, il existe un paramètre $c \in \mathbb{C}$ tel que f est conjugué à f_c. D'après le corollaire 1.45 et l'exemple 1.48, le polynôme

$$M_1^{f_c}(\lambda) = \lambda(\lambda - d)^{d-1} + (-d)^d c^{d-1}$$

est scindé sur $\mathbb{R}$, et donc il en est de même du polynôme

$$L(\lambda) = \lambda^d M_1^{f_c}\left(\lambda^{-1} + d\right) = (-d)^d c^{d-1} \lambda^d + d\lambda + 1$$

et, d'après le théorème de Rolle, de son polynôme dérivé

$$L'(\lambda) = (-1)^d d^{d+1} c^{d-1} \lambda^{d-1} + d\,.$$

Par conséquent, on a $c = 0$ puisque l'ensemble des racines de L' est invariant par multiplication par une racine $(d-1)$-ième de l'unité et $d \geq 4$. Ainsi, la proposition est démontrée. □

Finalement, nous avons démontré le théorème 2.45, qui est une conséquence immédiate des propositions 2.49, 2.52 et 2.53.

2.3.4. Le cas des polynômes cubiques avec symétries. Nous employons ici la même stratégie pour démontrer le théorème 2.47.

Pour cela, déterminons d'abord une forme normale pour les polynômes cubiques avec symétries. Pour $a \in \mathbb{C}$, posons

$$g_a(z) = z^3 + az \in \operatorname{Poly}_3^U(\mathbb{C})\,.$$

Pour tout $a \in \mathbb{C}$, le polynôme g_a est un polynôme cubique avec symétries puisque $g_a(-z) = -g_a(z)$ et il fixe le point 0 avec multiplicateur a. De plus, on a le résultat bien connu suivant :

PROPOSITION 2.54. *Soit $f \in \operatorname{Poly}_3(\mathbb{C})$ un polynôme cubique avec symétries. Alors il existe un unique paramètre $a \in \mathbb{C}$ tel que f est conjugué à g_a.*

DÉMONSTRATION. Il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que f est conjugué à

$$g_{a,b}(z) = z^3 + az + b \in \operatorname{Poly}_3(\mathbb{C})\,.$$

Pour tout $\phi(z) = \alpha z + \beta$ dans $\operatorname{Poly}_1(\mathbb{C})$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\phi \circ g_{a,b} \circ \phi^{-1}(z) = \frac{z^3}{\alpha^2} - \frac{3\beta z^2}{\alpha^2} + \left(\frac{3\beta^2}{\alpha^2} + a\right) z - \frac{\beta^3}{\alpha^2} - a\beta + \alpha b + \beta\,,$$

qui est unitaire centré si et seulement si $\alpha = \pm 1$ et $\beta = 0$. De plus, si $\phi(z) = -z$, alors on a $\phi \circ g_{a,b} \circ \phi^{-1} = g_{a,-b}$. Ceci complète la preuve de la proposition. □

Contrairement à la famille des polynômes unicritiques de degré 3, la famille des polynômes cubiques avec symétries contient à la fois les applications puissances et les applications de Tchebychev de degré 3. Plus précisément, pour tout $a \in \mathbb{C}$, le polynôme g_a est une application puissance si et seulement si $a = 0$ et est une application de Tchebychev si et seulement si $a = \pm 3$.

En utilisant le logiciel SageMath, on peut calculer les polynômes $M_n^{g_a}$, avec $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \{1, 2, 3\}$.

EXEMPLE 2.55. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
M_1^{g_a}(\lambda) &= (\lambda - a)(\lambda + 2a - 3)^2\,,\\
M_2^{g_a}(\lambda) &= \left(\lambda - 4a^2 - 12a - 9\right)\left(\lambda + 2a^2 - 9\right)^2\,,\\
M_3^{g_a}(\lambda) &= N_3(a, \lambda)^2\,,
\end{aligned}$$

où $N_3 \in \mathbb{Z}[a, \lambda]$ est défini par

$$\begin{aligned} N_3(a, \lambda) = \lambda^4 &+ \left(2a^3 + 12a^2 - 18a - 108\right)\lambda^3 \\ &+ \left(-48a^6 - 72a^5 + 396a^4 + 486a^3 - 324a^2 + 1458a + 4374\right)\lambda^2 \\ &+ \left(32a^9 - 792a^7 - 432a^6 + 5832a^5 + 5832a^4 - 7290a^3 - 8748a^2 \right. \\ &\left. - 39366a - 78732\right)\lambda + 256a^{12} + 384a^{11} - 4608a^{10} - 6912a^9 \\ &+ 24624a^8 + 36936a^7 - 23328a^6 - 34992a^5 - 131220a^4 \\ &- 196830a^3 + 236196a^2 + 354294a + 531441\,. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\operatorname{disc}_\lambda N_3(a, \lambda) = 2^{12} 3^{12} D_3(a) \left(4a^3 + 12a^2 - 3a - 27\right)^2 (a-3)^4 (a+3)^4 a^{12}\,,$$

où $\operatorname{disc}_\lambda$ désigne le discriminant par rapport à λ et $D_3 \in \mathbb{Z}[a]$ est donné par

$$D_3(a) = 4a^8 + 16a^7 - 35a^6 - 206a^5 - 113a^4 + 376a^3 + 715a^2 + 1690a + 2197\,.$$

D'après le corollaire 1.45, pour tout $a \in \mathbb{C}$, le polynôme g_a a un multiplicateur entier en chaque cycle avec période 1 ou 2 si et seulement si a est entier. En revanche, en considérant également les multiplicateurs aux cycles avec période 3, on obtient le théorème 2.47.

Démonstration du théorème 2.47. D'après la proposition 2.54, il existe un paramètre $a \in \mathbb{C}$ tel que f est conjugué à g_a. D'après le corollaire 1.45, les polynômes $M_1^{g_a}$ et $M_3^{g_a}$ sont scindés sur $\mathbb{Z}$, et donc a est un entier et

$$\operatorname{disc}_\lambda N_3(a, \lambda) = 2^{12} 3^{12} D_3(a) \left(4a^3 + 12a^2 - 3a - 27\right)^2 (a-3)^4 (a+3)^4 a^{12}$$

est le carré d'un entier. Remarquons que, si

$$D_3(a) = 4a^8 + 16a^7 - 35a^6 - 206a^5 - 113a^4 + 376a^3 + 715a^2 + 1690a + 2197$$

est le carré d'un entier, alors sa classe résiduelle dans $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ est un carré, et donc $a \equiv 1 \pmod 8$. De plus, notons que $D_3(1+8b)$ n'est pas le carré d'un entier lorsque $b \in \{-7, \ldots, 13\}$ et on a

$$L(b)^2 < D_3(1+8b) < \left(L(b)+1\right)^2$$

pour tout $b \in \mathbb{Z} \setminus \{-7, \ldots, 13\}$, où

$$L(b) = 8192b^4 + 6144b^3 + 720b^2 - 252b - 50\,.$$

Par conséquent, $D_3(a)$ n'est pas le carré d'un entier, et donc $a \in \{-3, 0, 3\}$. Ainsi, la proposition est démontrée. □

En utilisant le logiciel SageMath, on observe que $D_3(a)$ n'est pas le carré d'un nombre rationnel lorsque a est un nombre rationnel de hauteur au plus 10^4. Ainsi, il est vraisemblable que la question ci-dessous admet une réponse négative, ce qui impliquerait que tout polynôme cubique avec symétries qui a un multiplicateur rationnel en chaque cycle avec période inférieure ou égale à 3 est soit une application puissance soit une application de Tchebychev.

Question 2.56. La courbe hyperelliptique de genre 3 définie par $b^2 = D_3(a)$ admet-elle un point rationnel en dehors des deux points à l'infini ?

Remarque 2.57. Notons que la courbe de genre 1 donnée par $N_3(a, \lambda) = 0$ munie du point $\left(\frac{9}{2}, \frac{1647}{4}\right)$ définit une courbe elliptique E sur $\mathbb{Q}$. En utilisant le logiciel Magma, on obtient que son groupe des points rationnels $E(\mathbb{Q})$ est un groupe abélien libre de rang 1. En particulier, il existe une infinité de paramètres $a \in \mathbb{C}$ pour lesquels le polynôme g_a a un multiplicateur rationnel en chaque cycle avec période 1 ou 2 et en un cycle avec période 3. Une autre approche pour prouver que les applications puissances et les applications de Tchebychev sont les seuls polynômes cubiques avec symétries qui ont un multiplicateur rationnel en chaque cycle avec période inférieure ou égale à 3 pourrait être de montrer que le groupe $E(\mathbb{Q})$ ne contient pas 4 points distincts avec la même coordonnée a.

Deuxième partie

Points périodiques et multiplicateurs d'une fraction rationnelle

Chapitre 3

Quelques préliminaires algébriques sur la dynamique d'une fraction rationnelle

Nous généralisons dans ce chapitre les notions algébriques introduites dans le chapitre 1 au cas des fractions rationnelles. Plus précisément, nous rappelons ici la définition des polynômes dynatomiques d'un couple de polynômes homogènes et nous construisons les polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle. Afin d'obtenir des résultats sur les coefficients de ces polynômes, nous considérons des couples de polynômes homogènes à coefficients dans un anneau intègre quelconque.

Décrivons de manière plus détaillée le contenu de ce chapitre. Soient $d \geq 2$ un entier, A un anneau intègre et K son corps des fractions. Nous notons $\mathrm{Hom}_d^2(A)$ l'ensemble des couples de polynômes homogènes de degré d à coefficients dans A qui sont premiers entre eux dans $K[x, y]$. Nous définissons l'ensemble $\mathrm{Rat}_d(K)$ des fractions rationnelles de degré d sur K comme l'ensemble quotient de $\mathrm{Hom}_d^2(K)$ par la relation de colinéarité, de manière à travailler avec des coordonnées homogènes. Nous rappelons d'abord certaines notions de dynamique, et notamment celle de multiplicateur d'une fraction rationnelle en un point périodique, que nous exprimons en termes de coordonnées non homogènes. Soient $F \in \mathrm{Hom}_d^2(A)$, $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$ la fraction rationnelle induite par F et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous rappelons la définition du n-ième polynôme dynatomique Φ_n^F, qui est un polynôme homogène dans $A[x, y]$ dont les racines sont – à quelques exceptions près – les points périodiques pour f avec période n. Nous décrivons ensuite ces exceptions en décrivant précisément les racines du polynôme Φ_n^F, ainsi que leurs multiplicités quand A est de caractéristique nulle. Nous définissons ensuite le n-ième polynôme multiplicateur de f, qui est un polynôme unitaire dans $K[\lambda]$ dont les racines sont les multiplicateurs de f en ses cycles avec période n – à quelques exceptions près, là encore. Notons que notre définition donne une formule explicite permettant de calculer ce polynôme. Enfin, nous décrivons précisément les racines du polynôme M_n^f.

La plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont déjà connus. Notons que notre définition du polynôme multiplicateur d'une fraction rationnelle n'est, à la connaissance de l'auteur, pas présente sous cette forme dans la littérature.

3.1. Espace des fractions rationnelles, points périodiques et multiplicateurs

Rappelons ici certaines définitions concernant les couples de polynômes homogènes et les fractions rationnelles (voir [Sil98]).

3.1.1. Espaces projectifs. Rappelons d'abord certains points sur l'espace projectif d'un espace vectoriel qui nous seront utiles dans la suite.

Soient K un corps et E un K-espace vectoriel non nul. On appelle *espace projectif* de E, que l'on note $\mathbb{P}(E)$, l'ensemble quotient de $E \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $\sim$ définie par

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists t \in K^\times,\, y = tx\,.$$

Pour $z \in \mathbb{P}(E)$, notons $L_z = z \cup \{0\}$ la droite vectorielle de E engendrée par z. Alors l'application $z \mapsto L_z$ est une bijection canonique de $\mathbb{P}(E)$ sur l'ensemble des droites vectorielles de E. Notons $\pi\colon E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ la projection canonique.

Remarque 3.1. Si K un corps, E est un K-espace vectoriel et F est un sous-espace vectoriel non nul de E, alors l'inclusion de F dans E induit une injection canonique de $\mathbb{P}(F)$ dans $\mathbb{P}(E)$.

Soient K un corps et $n \in \mathbb{N}$. On appelle *espace projectif* de dimension n sur K, que l'on note $\mathbb{P}^n(K)$, l'espace projectif de K^{n+1}. Pour $x \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, on note

$$[x_0\colon \ldots : x_n] = \pi(x) \in \mathbb{P}^n(K)\,, \quad \text{où} \quad x = (x_0, \ldots, x_n)\,.$$

Notons que, si K est un corps et ∞ est un ensemble n'appartenant pas à K, alors la droite projective $\mathbb{P}^1(K)$ s'identifie à $K \cup \{\infty\}$ par la bijection $\iota\colon \mathbb{P}^1(K) \to K \cup \{\infty\}$ et sa réciproque ι^{-1} données par

$$\iota\left([x\colon y]\right) = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ \infty & \text{si } y = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \iota^{-1}(z) = \begin{cases} [z\colon 1] & \text{si } z \in K \\ [1\colon 0] & \text{si } z = \infty \end{cases}.$$

On parle de coordonnées non homogènes quand on utilise cette identification.

Enfin, rappelons une construction de l'espace tangent à un espace projectif en un point. Ceci nous sera utile pour définir le multiplicateur d'une fraction rationnelle en un point périodique. Soient K un corps et E un K-espace vectoriel non nul. Pour $z \in \mathbb{P}(E)$, on appelle *espace tangent* à $\mathbb{P}(E)$ en z le K-espace vectoriel

$$T_z\mathbb{P}(E) = \mathscr{L}\left(L_z, E/L_z\right)$$

des applications linéaires de L_z dans E/L_z. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, la projection canonique $\pi\colon E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ induit une application linéaire

$$T_x\pi\colon E \to T_{\pi(x)}\mathbb{P}(E)\,,$$

appelée *application tangente* à π en x, qui est donnée par

$$T_x\pi(v)(x) = v + L_{\pi(x)}\,.$$

Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, l'application $T_x\pi$ est surjective et son noyau est $L_{\pi(x)}$, et donc elle induit un isomorphisme

$$\overline{T_x\pi}\colon E/L_{\pi(x)} \to T_{\pi(x)}\mathbb{P}(E)\,.$$

Remarque 3.2. Soient K un corps, E un K-espace vectoriel non nul, $z \in \mathbb{P}(E)$ et $x \in z$. Alors l'isomorphisme $\overline{T_x\pi}$ de E/L_z sur $T_z\mathbb{P}(E)$ dépend de x et non seulement de z. Plus précisément, pour tout $t \in K^\times$, l'application $\overline{T_{tx}\pi}^{-1} \circ \overline{T_x\pi}$ est l'homothétie de E/L_z de rapport t.

3.1.2. Couples de polynômes homogènes et fractions rationnelles. Soit A un anneau commutatif. Pour $d \in \mathbb{N}$, notons $A[x,y]_d$ le A-module des polynômes homogènes de degré d à coefficients dans A. Notons également $\circ$ la loi de composition sur l'ensemble des couples de polynômes homogènes de même degré à coefficients dans A, qui vérifie

$$A[x,y]_d^2 \circ A[x,y]_e^2 \subset A[x,y]_{de}^2$$

pour tous $d, e \in \mathbb{N}$. Pour $d \in \mathbb{N}$ et $F \in A[x,y]_d^2$, on note

$$F^{\circ n} = \left(G_n^F, H_n^F\right) = \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n \text{ fois}} \in A[x,y]_{d^n}^2$$

pour $n \in \mathbb{N}$, avec la convention

$$F^{\circ 0} = I_2 \in A[x,y]_1^2\,, \quad \text{où} \quad I_2(x,y) = (x,y)\,.$$

Pour tout $d \in \mathbb{N}$ et tout $F = (G,H) \in A[x,y]_d^2$, les suites $\left(G_n^F\right)_{n\geq 0}$ et $\left(H_n^F\right)_{n\geq 0}$ vérifient les relations

$$G_0^F(x,y) = x \quad \text{et} \quad G_n^F(x,y) = G\left(G_{n-1}^F(x,y), H_{n-1}^F(x,y)\right) \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

et

$$H_0^F(x,y) = y \quad \text{et} \quad H_n^F(x,y) = H\left(G_{n-1}^F(x,y), H_{n-1}^F(x,y)\right) \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Soient A un anneau intègre, K son corps des fractions et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Pour tous polynômes homogènes $G, H \in A[x,y]$, les conditions suivantes sont équivalentes :
— le résultant $\operatorname{res}(G,H)$ est non nul,
— G et H sont premiers entre eux dans $K[x,y]$,
— G et H n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$.
Pour $d \in \mathbb{N}$, notons

$$\operatorname{Hom}_d^2(A) = \left\{F \in A[x,y]_d^2 : \operatorname{res}(F) \neq 0\right\}$$

l'ensemble des couples de polynômes homogènes de degré d à coefficients dans A vérifiant ces conditions.

Remarque 3.3. Si B est un anneau intègre et A est un sous-anneau de B, alors $\operatorname{Hom}_d^2(A)$ est inclus dans $\operatorname{Hom}_d^2(B)$ pour tout $d \in \mathbb{N}$. En particulier, si A est un anneau intègre, K est son corps des fractions, $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K et $F \in \operatorname{Hom}_d^2(A)$, avec $d \in \mathbb{N}$, alors on pourra considérer F en tant qu'élément de $\operatorname{Hom}_d^2(K)$ ou de $\operatorname{Hom}_d^2\left(\overline{K}\right)$.

D'après le lemme A.10, pour tout $F \in A[x,y]_d^2$ et tout $G \in A[x,y]_e^2$, avec $d, e \in \mathbb{N}$, on a

$$\operatorname{res}(F \circ G) = \operatorname{res}(F)^e \operatorname{res}(G)^{d^2}\,.$$

En particulier, pour tous $d, e \in \mathbb{N}$, on a

$$\operatorname{Hom}_d^2(A) \circ \operatorname{Hom}_e^2(A) \subset \operatorname{Hom}_{de}^2(A)\,.$$

Exemple 3.4. Soient A un anneau intègre, $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \operatorname{Poly}_d(A)$. Posons

$$F(x,y) = \left(y^d f\left(\frac{x}{y}\right), y^d\right) \in A[x,y]_d^2\,.$$

Alors on a $F \in \operatorname{Hom}_d^2(A)$ puisque $\operatorname{res}(F) = a^d$, où $a \in A \setminus \{0\}$ désigne le coefficient dominant de f. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$F^{\circ n}(x,y) = \left(y^{d^n} f^{\circ n}\left(\frac{x}{y}\right), y^{d^n}\right) \in \operatorname{Hom}_{d^n}^2(A)\,.$$

REMARQUE 3.5. Si A est un anneau intègre, $d \in \mathbb{N}$ et $F \in \mathrm{Hom}_d^2(A)$ est un couple de polynômes homogènes premiers entre eux dans $A[x, y]$, alors les polynômes G_n^F et H_n^F, avec $n \in \mathbb{N}$, ne sont pas nécessairement premiers entre eux dans $A[x, y]$. Par exemple, si

$$A = \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad F(x, y) = \left(2x^2 - 2xy + 2y^2, x^2 - xy - 2y^2\right) \in \mathrm{Hom}_2^2(A)\,,$$

alors G_1^F et H_1^F sont premiers entre eux dans $A[x, y]$ mais les polynômes

$$G_2^F = 6x^4 - 12x^3y + 18x^2y^2 - 12xy^3 + 24y^4 \quad \text{et} \quad H_2^F(x, y) = 18x^2y^2 - 18xy^3$$

ne le sont pas puisqu'ils sont tous deux multiples de 6.

Soit K un corps. Alors $\circ$ est une loi de composition interne sur l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_1^2(K) = \{(ax + by, cx + dy) : a, b, c, d \in K,\ ad - bc \neq 0\}$$

et celle-ci le munit d'une structure de groupe dont l'élément neutre est I_2. De plus, ce groupe est canoniquement isomorphe au groupe linéaire $\mathrm{GL}_2(K)$. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le groupe $\mathrm{Hom}_1^2(K)$ agit sur $K[x, y]_d^2$ par l'application

$$\rho_d \colon \mathrm{Hom}_1^2(K) \times K[x, y]_d^2 \to K[x, y]_d^2$$

définie par

$$\rho_d(\phi, F) = \phi \circ F \circ \phi^{-1}\,.$$

De plus, pour tout $d \in \mathbb{N}$, l'application ρ_d induit par restriction une action de $\mathrm{Hom}_1^2(K)$ sur $\mathrm{Hom}_d^2(K)$. Pour $d \in \mathbb{N}$, on dit que deux éléments F et G de $K[x, y]_d^2$ sont *conjugués sur* K s'ils sont dans la même orbite pour l'action ρ_d ou, de manière équivalente, s'il existe $\phi \in \mathrm{Hom}_1^2(K)$ tel que

$$G = \phi \circ F \circ \phi^{-1}\,.$$

Plus généralement, pour $d \in \mathbb{N}$, on dit que deux éléments F et G de $K[x, y]_d^2$ sont *conjugués* s'ils sont conjugués sur une clôture algébrique $\overline{K}$ de K.

Enfin, considérons l'action d'un couple de polynômes homogènes de même degré par évaluation. Soit A un anneau commutatif. Pour $d \in \mathbb{N}$ et $F \in A[x, y]_d^2$, le couple F induit une application de A^2 dans lui-même par évaluation, que l'on note encore F, qui est homogène de degré d – c'est-à-dire, on a $F(tx) = t^d F(x)$ pour tout $x \in A^2$ et tout $t \in A$. De plus, si A est intègre et infini, alors l'application qui à un couple de polynômes homogènes de même degré associe son action sur A^2 est injective. Enfin, si A est intègre et $F \in \mathrm{Hom}_d^2(A)$, avec $d \in \mathbb{N}$, alors on a $F^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Définissons et étudions maintenant les fractions rationnelles. Soit K un corps. Considérons l'espace projectif $\mathbb{P}\left(K[x, y]^2\right)$ de $K[x, y]^2$ et la projection canonique

$$\mathrm{pr} \colon K[x, y]^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}\left(K[x, y]^2\right)\,.$$

Pour $d \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mathrm{Rat}_d(K) = \mathrm{pr}\left(\mathrm{Hom}_d^2(K)\right)$$

et on appelle *fraction rationnelle* de degré d sur K tout élément de $\mathrm{Rat}_d(K)$. Pour $d \in \mathbb{N}$ et $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, nous noterons

$$[F] = \mathrm{pr}(F) \in \mathrm{Rat}_d(K)\,.$$

EXEMPLE 3.6. Soient K un corps, $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathrm{Poly}_d(K)$. Alors

$$\widehat{f} = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)\ , \quad \text{où} \quad F(x, y) = \left(y^d f\left(\frac{x}{y}\right), y^d\right) \in \mathrm{Hom}_d^2(K)\,.$$

Pour $d \in \mathbb{N}$, notons $V_d \subset \mathbb{P}^{2d+1}(K)$ l'ensemble des zéros du polynôme

$$\operatorname{res}\left(\sum_{j=0}^{d} \mathfrak{a}_j x^j y^{d-j}, \sum_{j=0}^{d} \mathfrak{b}_j x^j y^{d-j}\right) \in K\left[\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d, \mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_d\right]_d .$$

Alors, pour tout $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathrm{Rat}_d(K)$ s'identifie à $\mathbb{P}^{2d+1}(K) \setminus V_d$ par la bijection φ_d de $\mathbb{P}^{2d+1}(K) \setminus V_d$ sur $\mathrm{Rat}_d(K)$ définie par

$$\varphi_d\left([a_0\colon \ldots \colon a_d\colon b_0\colon \ldots \colon b_d]\right) = \left[\left(\sum_{j=0}^{d} a_j x^j y^{d-j}, \sum_{j=0}^{d} b_j x^j y^{d-j}\right)\right] .$$

Nous pouvons aussi décrire les fractions rationnelles en termes de coordonnées non homogènes. En identifiant $K[x,y]_0$ à K, l'ensemble $\mathrm{Rat}_0(K)$ est canoniquement identifié à $\mathbb{P}^1(K)$, qui s'identifie lui-même à $K \cup \{\infty\}$ par la bijection ι. Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathrm{Rat}_d(K)$ s'identifie canoniquement à

$$K(z)_d = \left\{\frac{G}{H} \in K(z) : \max\{\deg G, \deg H\} = d \text{ et } \operatorname{res}(G,H) \neq 0\right\}$$

par la bijection ψ_d de $\mathrm{Rat}_d(K)$ sur $K(z)_d$ et sa réciproque ψ_d^{-1} données par

$$\psi_d\left([(G,H)]\right) = \frac{G(z,1)}{H(z,1)} \quad \text{et} \quad \psi_d^{-1}\left(\frac{G}{H}\right) = \left[\left(y^d G\left(\frac{x}{y}\right), y^d H\left(\frac{x}{y}\right)\right)\right] .$$

Remarque 3.7. Si K est un corps et L est une extension de K, alors l'injection canonique de $\mathrm{Hom}_d^2(K)$ dans $\mathrm{Hom}_d^2(L)$ induit une injection de $\mathrm{Rat}_d(K)$ dans $\mathrm{Rat}_d(L)$ pour tout $d \in \mathbb{N}$.

Pour tout $F \in K[x,y]_d^2$, tout $G \in K[x,y]_e^2$, avec $d, e \in \mathbb{N}$, et tous $s, t \in K$, on a

$$(sF) \circ (tG) = st^d F \circ G .$$

Par conséquent, pour tous $d, e \in \mathbb{N}$, la composition $\circ$ induit une loi

$$\circ\colon\ \mathrm{Rat}_d(K) \times \mathrm{Rat}_e(K) \to \mathrm{Rat}_{de}(K) .$$

Pour $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$, on note

$$f^{\circ n} = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}} \in \mathrm{Rat}_{d^n}(K)$$

pour $n \in \mathbb{N}$, avec la convention

$$f^{\circ 0} = I \in \mathrm{Rat}_1(K) , \quad \text{où} \quad I = [I_2] .$$

L'ensemble $\mathrm{Rat}_1(K)$ muni de sa loi de composition interne $\circ$ est un groupe dont l'élément neutre est I. De plus, celui-ci est canoniquement isomorphe au groupe projectif linéaire $\mathrm{PGL}_2(K)$. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, l'action ρ_d de $\mathrm{Hom}_1(K)$ sur $K[x,y]_d^2$ induit une action $\overline{\rho}_d$ de $\mathrm{Rat}_1(K)$ sur $\mathrm{Rat}_d(K)$, qui est donnée par

$$\overline{\rho}_d(\phi, f) = \phi \circ f \circ \phi^{-1} .$$

Pour $d \in \mathbb{N}$, on dit que deux fractions rationnelles f et g dans $\mathrm{Rat}_d(K)$ sont *conjuguées* sur K si elles sont dans la même orbite pour $\overline{\rho}_d$ ou, de manière équivalente, s'il existe $\phi \in \mathrm{Rat}_1(K)$ tel que

$$g = \phi \circ f \circ \phi^{-1} ,$$

ce qui se produit si et seulement si il existe $F \in f$ et $G \in g$ qui sont conjugués sur K. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, la conjugaison sur K est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathrm{Rat}_d(K)$.

Plus généralement, pour $d \in \mathbb{N}$, on dit que f et g dans $\mathrm{Rat}_d(K)$ sont *conjuguées* si elles sont conjuguées sur une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{M}_d(K)$ l'ensemble quotient de $\mathrm{Rat}_d(K)$ par la relation de conjugaison.

Enfin, considérons l'action d'une fraction rationnelle sur la droite projective. Si $d \in \mathbb{N}$ et $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, alors l'application associée $F\colon K^2 \to K^2$ est homogène de degré d et vérifie $F^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, et donc elle induit une application de $\mathbb{P}^1(K)$ dans lui-même. De plus, cette dernière application ne dépend que de la fraction rationnelle induite. Ainsi, pour $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$, il existe une unique application de $\mathbb{P}^1(K)$ dans lui-même, que l'on note encore f, telle que, pour tout $F \in f$, le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{tikzcd} K^2 \setminus \{0\} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & K^2 \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{P}^1(K) \arrow[r, "f"'] & \mathbb{P}^1(K) \end{tikzcd}$$

où $\pi\colon K^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1(K)$ désigne la projection canonique. De plus, une fraction rationnelle sur K est caractérisée par son action sur $\mathbb{P}^1(K)$ si K est infini.

Enfin, on peut également décrire l'application associée à une fraction rationnelle en termes de coordonnées non homogènes. Plus précisément, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ et tout $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$, l'application associée de $\mathbb{P}^1(K)$ dans lui-même est caractérisée par le digramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1(K) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathbb{P}^1(K) \arrow[d, "\iota"] \\ K \cup \{\infty\} \arrow[r, "\psi_d(f)"'] & K \cup \{\infty\} \end{tikzcd}$$

où $\psi_d(f) \in K(z)_d$ agit naturellement sur $K \cup \{\infty\}$.

3.1.3. Points périodiques pour un couple de polynômes homogènes et pour une fraction rationnelle. Ayant défini les applications associées à un couple de polynômes homogènes de même degré et à une fraction rationnelle, nous pouvons alors nous intéresser aux itérées de celles-ci en un point.

Soient A un anneau commutatif, $F \in A[x, y]_d^2$, avec $d \in \mathbb{N}$, et $x_0 \in A^2$. On appelle *orbite future* de x_0 pour F l'ensemble $\{F^{\circ n}(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$. On dit que x_0 est un point *périodique* pour F s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $F^{\circ n}(x_0) = x_0$. Dans ce cas, le plus petit tel entier n est appelé la *période* de x_0 et on dit que l'orbite future de x_0 est un *cycle* pour F.

On peut également définir les notions analogues pour les fractions rationnelles. Soient K un corps, $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$, avec $d \in \mathbb{N}$, et $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$. On appelle *orbite future* de z_0 pour f l'ensemble $\{f^{\circ n}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}$. On dit que z_0 est un point *périodique* pour f avec *période* $n \in \mathbb{N}^*$ si $f^{\circ n}(z_0) = z_0$ et n est minimal avec cette propriété. On appelle *cycle* pour f l'orbite future d'un point périodique.

Soient K un corps, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, avec $d \in \mathbb{N}$, $x_0 \in K^2 \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $z_0 = \pi(x_0) \in \mathbb{P}^1(K)$. Alors z_0 est un point périodique pour f avec période divisant n si et seulement si $f^{\circ n}(z_0) = z_0$ ou, de manière équivalente, si et seulement si il existe $t \in K^\times$ tel que $F^{\circ n}(x_0) = tx_0$, ce qui se produit si et seulement si z_0 est racine du polynôme

$$yG_n^F(x,y) - xH_n^F(x,y) \in K[x,y]_{d^n+1}^2 \,.$$

En particulier, si x_0 est un point périodique pour F avec période n, alors z_0 est un point périodique pour f avec période divisant n.

Remarque 3.8. Si K est un corps, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$ et $x_0 \in K^2 \setminus \{0\}$ est un point périodique pour F avec période $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\pi(x_0)$ n'est pas nécessairement périodique pour $[F]$ avec période n. Par exemple, si

$$K = \mathbb{C} \quad \text{et} \quad F(x,y) = \left(-x^3, y^3\right) \in \mathrm{Hom}_3^2(K)\,,$$

alors $(1,0)$ est un point périodique pour F avec période 2 mais $[1\colon 0]$ est un point fixe pour $[F]$.

Soient K un corps, $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$, avec $d \in \mathbb{N}$, et $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ un point périodique pour f avec période $n \in \mathbb{N}^*$. Fixons d'abord $F \in f$. Pour tout $x_0 \in z_0$, il existe $s \in K^\times$ tel que $F^{\circ n}(x_0) = sx_0$, et, pour tout $t \in K^\times$, le point tx_0 est périodique pour F avec période n si et seulement si $t^{d^n-1} = s^{-1}$ puisque

$$F^{\circ n}(tx_0) = t^{d^n} F^{\circ n}(x_0) = st^{d^n} x_0 \,.$$

Par conséquent, si K est algébriquement clos et $d \geq 2$, alors il existe un point périodique $x_0 \in z_0$ pour F avec période n.

Fixons maintenant $x_0 \in z_0$. Pour tout $F \in f$, il existe $s \in K^\times$ qui vérifie $F^{\circ n}(x_0) = sx_0$, et, pour tout $t \in K^\times$, on a

$$(tF)^{\circ n}(x_0) = t^{\sum_{j=0}^{n-1} d^j} F^{\circ n}(x_0) = st^{\sum_{j=0}^{n-1} d^j} x_0 \,.$$

Par conséquent, si K est algébriquement clos, alors il existe $F \in f$ tel que x_0 est périodique pour F avec période n.

Remarque 3.9. Si K est un corps non algébriquement clos, $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$, avec $d \in \mathbb{N}$, et $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ est un point périodique pour f avec période $n \in \mathbb{N}^*$, alors il n'existe pas nécessairement $F \in f$ et $x_0 \in z_0$ tels que x_0 est périodique pour F avec période n. Par exemple, si

$$K = \mathbb{Q}\,, \quad F(x,y) = \left(2y^2, x^2\right) \in \mathrm{Hom}_2^2(K) \quad \text{et} \quad f = [F] \in \mathrm{Rat}_2(K)\,,$$

alors $[1\colon 0]$ est un point périodique pour f avec période 2 mais on a

$$(sF)^{\circ 2}(t,0) = \left(2s^3t^4, 0\right) \neq (t,0)$$

pour tous $s, t \in K^\times$ puisque 2 n'est pas un cube dans $\mathbb{Q}^\times$.

Enfin, on peut décrire l'action de la conjugaison sur les points périodiques d'un couple de polynômes homogènes de même degré ou d'une fraction rationnelle. Soient K un corps et $d \in \mathbb{N}$. Si $F \in K[x,y]_d^2$ et $\phi \in \mathrm{Hom}_1^2(K)$, alors ϕ induit une bijection de l'ensemble des points périodiques pour F sur l'ensemble des points périodiques pour $\phi \circ F \circ \phi^{-1}$ qui préserve les périodes. De même, si $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et

$\phi \in \mathrm{Rat}_1(K)$, alors ϕ induit une bijection de l'ensemble des points périodiques pour f sur l'ensemble des points périodiques pour $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ qui préserve les périodes.

3.1.4. Multiplicateurs d'une fraction rationnelle. Intéressons-nous ici aux valeurs propres des applications tangentes à un couple de polynômes homogènes de même degré ou à une fraction rationnelle en ses points périodiques.

Commençons par rappeler les notions d'applications tangentes dans ces cas particuliers. Soit K un corps. Pour $F \in K[x,y]^2$ et $(x_0,y_0) \in K^2$, on appelle *application tangente* à F en (x_0,y_0), que l'on note $T_{(x_0,y_0)}F$, l'application linéaire de K^2 dans K^2 définie par

$$T_{(x_0,y_0)}F\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial H}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial H}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad F = (G,H)\,.$$

Pour tout $(x_0,y_0) \in K^2$, l'application $T_{(x_0,y_0)}I_2$ est l'identité de K^2 et, pour tous $F, G \in K[x,y]^2$, on a

$$T_{(x_0,y_0)}(F \circ G) = T_{G(x_0,y_0)}F \circ T_{(x_0,y_0)}G\,.$$

De plus, pour tout $F \in K[x,y]_d^2$, avec $d \in \mathbb{N}$, et tout $(v_x,v_y) \in K^2$, l'application

$$(x_0,y_0) \mapsto T_{(x_0,y_0)}F\,(v_x,v_y)$$

est homogène de degré $d-1$.

Soient $d \in \mathbb{N}$, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$, $(x_0,y_0) \in K^2 \setminus \{0\}$ et $z_0 = [x_0 \colon y_0]$. D'après la formule d'Euler, on a

$$T_{(x_0,y_0)}F\,(x_0,y_0) = d \cdot F\,(x_0,y_0)\;,$$

et en particulier $T_{(x_0,y_0)}F$ induit une application linéaire

$$\overline{T_{(x_0,y_0)}F} \colon K^2/L_{z_0} \to K^2/L_{f(z_0)}\,.$$

On appelle *application tangente* à f en z_0, que l'on note $T_{z_0}f$, l'application linéaire de $T_{z_0}\mathbb{P}^1(K)$ dans $T_{f(z_0)}\mathbb{P}^1(K)$ donnée par

$$T_{z_0}f(\varphi)\,(F\,(x_0,y_0)) = \overline{T_{(x_0,y_0)}F}\,(\varphi\,(x_0,y_0))\;,$$

de sorte que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{tikzcd}
K^2 \arrow[r, "T_{(x_0,y_0)}F"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{z_0}"'] \arrow[dd, bend right=60, "T_{(x_0,y_0)}\pi"'] & K^2 \arrow[d, "\mathrm{pr}_{f(z_0)}"] \arrow[dd, bend left=60, "T_{F(x_0,y_0)}\pi"] \\
K^2/L_{z_0} \arrow[r, "\overline{T_{(x_0,y_0)}F}"] \arrow[d, "\overline{T_{(x_0,y_0)}\pi}"'] & K^2/L_{f(z_0)} \arrow[d, "\overline{T_{F(x_0,y_0)}\pi}"] \\
T_{z_0}\mathbb{P}^1(K) \arrow[r, "T_{z_0}f"'] & T_{f(z_0)}\mathbb{P}^1(K)
\end{tikzcd}$$

où pr_{z_0} et $\mathrm{pr}_{f(z_0)}$ désignent les projections canoniques. Pour tous $s, t \in K^\times$, on a

$$(sF)\left(t\left(x_0, y_0\right)\right) = st^d F\left(x_0, y_0\right)$$

et, pour tout $\varphi \in T_{z_0}\mathbb{P}^1(K)$, on a

$$\overline{T_{t(x_0,y_0)}(sF)}\left(\varphi\left(t\left(x_0, y_0\right)\right)\right) = st^d \overline{T_{(x_0,y_0)}F}\left(\varphi\left(x_0, y_0\right)\right) .$$

Par conséquent, l'application $T_{z_0}f$ ainsi définie ne dépend que de f et z_0.

Pour tout $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$, l'application $T_{z_0}I$ est l'identité de $T_{z_0}\mathbb{P}^1(K)$ et, pour tout $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et tout $g \in \mathrm{Rat}_e(K)$, avec $d, e \in \mathbb{N}$, on a

$$T_{z_0}(f \circ g) = T_{g(z_0)}f \circ T_{z_0}g\,.$$

Utilisons maintenant la dualité pour décrire les applications tangentes à une fraction rationnelle. Soient $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$, $(x_0, y_0) \in K^2 \setminus \{0\}$ et $z_0 = [x_0 \colon y_0]$, avec $d \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, l'application transposée ${}^tT_{(x_0,y_0)}F$ induit par restriction une application linéaire de $L_{f(z_0)}^\perp$ dans $L_{z_0}^\perp$, l'application ${}^tT_{(x_0,y_0)}\pi$ induit un isomorphisme de $T_{z_0}\mathbb{P}^1(K)^*$ sur $L_{z_0}^\perp$, l'application ${}^tT_{F(x_0,y_0)}\pi$ induit un isomorphisme de $T_{f(z_0)}\mathbb{P}^1(K)^*$ sur $L_{z_0}^\perp$ et on a le diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
T_{f(z_0)}\mathbb{P}^1(K)^* \arrow[r, "{}^tT_{z_0}f"] \arrow[d, "{}^tT_{F(x_0,y_0)}\pi"'] & T_{z_0}\mathbb{P}^1(K)^* \arrow[d, "{}^tT_{(x_0,y_0)}\pi"] \\
L_{f(z_0)}^\perp \arrow[r, "{}^tT_{(x_0,y_0)}F"'] & L_{z_0}^\perp
\end{tikzcd}$$

Par suite, étudions l'application linéaire ${}^tT_{(x_0,y_0)}F$.

Pour cela, introduisons d'abord de manière formelle les champs de vecteurs polynomiaux et les formes différentielles polynomiales de degré 1 sur K^2. On définit le $K[x,y]$-module

$$\mathfrak{X}\left(K^2\right) = K[x,y]^2$$

et on appelle *champ de vecteurs polynomial* sur K^2 tout élément de $\mathfrak{X}\left(K^2\right)$. Pour $X = (P, Q)$ un champ de vecteurs polynomial sur K^2, on note

$$X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}\left(K^2\right) .$$

et, pour $(x_0, y_0) \in K^2$, on a l'évaluation

$$X\left(x_0, y_0\right) = \left(P\left(x_0, y_0\right), Q\left(x_0, y_0\right)\right) \in K^2\,.$$

On définit aussi le $K[x,y]$-module

$$\Omega^1\left(K^2\right) = K[x,y]^2$$

et on appelle *forme différentielle polynomiale* de degré 1 sur K^2 tout élément de $\Omega^1\left(K^2\right)$. Pour $\omega = (P, Q)$ une forme différentielle polynomiale de degré 1 sur K^2, on note

$$\omega = Pdx + Qdy \in \Omega^1\left(K^2\right)$$

et, pour $(x_0, y_0) \in K^2$, on note $\omega(x_0, y_0)$ l'élément de $\left(K^2\right)^*$ défini par

$$\omega(x_0, y_0)(v_x, v_y) = P(x_0, y_0)\, v_x + Q(x_0, y_0)\, v_y\,.$$

Étant donnés

$$F = (G, H) \in K[x, y]^2 \quad \text{et} \quad \omega = Pdx + Qdy \in \Omega^1\left(K^2\right),$$

on définit également la forme différentielle

$$F^*\omega = \left(P \circ F \frac{\partial G}{\partial x} + Q \circ F \frac{\partial H}{\partial x}\right) dx + \left(P \circ F \frac{\partial G}{\partial y} + Q \circ F \frac{\partial H}{\partial y}\right) dy\,,$$

de sorte que, pour tout $(x_0, y_0) \in K^2$, on a

$$F^*\omega(x_0, y_0) = {}^tT_{(x_0, y_0)}F\left(\omega\left(F(x_0, y_0)\right)\right) = \omega\left(F(x_0, y_0)\right) \circ T_{(x_0, y_0)}F\,.$$

Enfin, on peut aussi évaluer une forme différentielle de degré 1 en un champ de vecteurs. Plus précisément, étant donnés

$$\omega = Pdx + Qdy \in \Omega^1\left(K^2\right) \quad \text{et} \quad X = R\frac{\partial}{\partial x} + S\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}\left(K^2\right),$$

on définit

$$\omega(X) = PR + QS \in K[x, y]\,,$$

de sorte que, pour tout $(x_0, y_0) \in K^2$, on a

$$\omega(X)(x_0, y_0) = \omega(x_0, y_0)\left(X(x_0, y_0)\right).$$

Définissons le champ de vecteurs radial

$$X_r(x, y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}\left(K^2\right)$$

et la forme différentielle de degré 1

$$\omega_\perp(x, y) = ydx - xdy \in \Omega^1\left(K^2\right).$$

Alors on a $\omega_\perp(X_r) = 0$, et donc la forme linéaire $\omega_\perp(x_0, y_0)$ engendre $L^\perp_{[x_0\,:\,y_0]}$ pour tout $(x_0, y_0) \in K^2 \setminus \{0\}$. De plus, si $\omega \in \Omega^1\left(K^2\right)$ vérifie $\omega(X_r) = 0$, alors il existe un unique $\delta \in K[x, y]$ tel que $\omega = \delta\omega_\perp$.

Revenons maintenant aux couples de polynômes homogènes premiers entre eux de même degré. Soient $d \in \mathbb{N}$ et $F = (G, H)$ dans $K[x, y]_d^2$. Alors on a

$$F^*\omega_\perp = \left(H\frac{\partial G}{\partial x} - G\frac{\partial H}{\partial x}\right) dx + \left(H\frac{\partial G}{\partial y} - G\frac{\partial H}{\partial y}\right) dy\,,$$

et donc

$$\begin{aligned} F^*\omega_\perp(X_r)(x, y) &= H(x, y)\left(x\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial G}{\partial y}(x, y)\right) \\ &\quad - G(x, y)\left(x\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial H}{\partial y}(x, y)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après la formule d'Euler. Par suite, il existe un unique $D^F \in K[x, y]$ qui vérifie $F^*\omega_\perp = D^F\omega_\perp$. On a

$$xD^F(x, y) = G(x, y)\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) - H(x, y)\frac{\partial G}{\partial y}(x, y)$$

et

$$yD^F(x,y) = H(x,y)\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) - G(x,y)\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\,.$$

D'après la formule d'Euler, on a aussi

$$d \cdot D^F = \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}\,.$$

De plus, si A est un sous-anneau de K et $F \in A[x,y]_d^2$, alors $D^F \in A[x,y]_{2d-2}$. Notons également que, pour tout $(x_0,y_0) \in K^2 \setminus \{0\}$, on a le développement

$$\begin{aligned} H(x_0,y_0)\,G(x,y) - G(x_0,y_0)\,H(x,y) = {} & D^F(x_0,y_0)\,(y_0x - x_0y) \\ & + O_{[x_0\colon y_0]}\left((y_0x - x_0y)^2\right)\,. \end{aligned}$$

Pour tout $\phi \in K[x,y]_1^2$, on a

$$D^\phi(x,y) = \operatorname{res}(\phi) = \det(\phi)\,.$$

De plus, pour tout $F \in K[x,y]_d^2$ et tout $G \in K[x,y]_e^2$, avec $d,e \in \mathbb{N}$, on a

$$(F \circ G)^*\omega_\perp = G^*F^*\omega_\perp = \left(D^F \circ G\right)G^*\omega_\perp = \left(D^F \circ G\right)D^G\omega_\perp\,,$$

et donc

$$D^{F\circ G} = \left(D^F \circ G\right)D^G\,.$$

En particulier, pour tout $F \in K[x,y]_d^2$, avec $d \in \mathbb{N}$, et tout $\phi \in \operatorname{Hom}_1^2(K)$, on a

$$D^{\phi\circ F\circ\phi^{-1}}(x,y) = D^F\left(\phi^{-1}(x,y)\right)\,.$$

Notons aussi que $D^{tF} = t^2D^F$ pour tout $F \in K[x,y]_d^2$, avec $d \in \mathbb{N}$, et tout $t \in K$.

Exemple 3.10. Soient K un corps, $d \in \mathbb{N}$, $f \in \operatorname{Poly}_d(K)$ et

$$F(x,y) = \left(y^d f\left(\frac{x}{y}\right), y^d\right) \in \operatorname{Hom}_d^2(K)\,.$$

Alors on a

$$D^F(x,y) = y^{2d-2}f'\left(\frac{x}{y}\right) \in K[x,y]_{2d-2}\,.$$

Soient $F \in \operatorname{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \operatorname{Rat}_d(K)$, $(x_0,y_0) \in K^2 \setminus \{0\}$ et $z_0 = [x_0\colon y_0]$, avec $d \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, l'application linéaire ${}^tT_{z_0}f$ est équivalente à l'application linéaire de $L_{f(z_0)}^\perp$ dans $L_{z_0}^\perp$ induite pat ${}^tT_{(x_0,y_0)}F$. De plus, $L_{z_0}^\perp$ est engendré par $\omega_\perp(x_0,y_0)$ et $L_{f(z_0)}^\perp$ est engendré par $\omega_\perp(F(x_0,y_0))$ et on a

$${}^tT_{(x_0,y_0)}F\left(\omega_\perp\left(F(x_0,y_0)\right)\right) = F^*\omega_\perp(x_0,y_0) = D^F(x_0,y_0)\,\omega_\perp(x_0,y_0)\,.$$

Enfin, introduisons le multiplicateur d'une fraction rationnelle en un point périodique. Soient $d \in \mathbb{N}$, $f \in \operatorname{Rat}_d(K)$ et $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ un point périodique pour f avec période $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *multiplicateur* de f en z_0 l'unique valeur propre de l'endomorphisme $T_{z_0}f^{\circ n}$ de la droite $T_{z_0}\mathbb{P}^1(K)$. D'après la formule donnant l'application tangente à une composée de fractions rationnelles, on a

$$T_{z_0}f^{\circ n} = T_{f^{\circ(n-1)}(z_0)}f \circ \cdots \circ T_{z_0}f\,,$$

Par suite, f a le même multiplicateur en chaque point d'un cycle. De plus, le multiplicateur est invariant par conjugaison. Plus précisément, pour tout $\phi \in \operatorname{Rat}_1(K)$, le multiplicateur de $\phi\circ f\circ\phi^1$ en $\phi(z_0)$ est égal au multiplicateur de f en z_0 puisque

$$T_{\phi(z_0)}\left(\phi\circ f\circ\phi^{-1}\right)^{\circ n} = T_{\phi(z_0)}\left(\phi\circ f^{\circ n}\circ\phi^{-1}\right) = T_{z_0}\phi \circ T_{z_0}f^{\circ n} \circ \left(T_{z_0}\phi\right)^{-1}\,.$$

Exprimons maintenant le multiplicateur d'une fraction rationnelle en un point périodique en fonction d'un relevé. Pour $F \in K[x,y]_d^2$, avec $d \in \mathbb{N}$, et $n \in \mathbb{N}$, posons

$$D_n^F = D^{F^{\circ n}} = \prod_{j=0}^{n-1} D^F \circ F^{\circ j} \in K[x,y]_{2d^n-2}$$

et

$$T_n^F = \frac{\partial G_n^F}{\partial x} + \frac{\partial H_n^F}{\partial y} \in K[x,y]_{d^n-1}\,.$$

Soient $d \geq 2$, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ un point périodique pour f avec période $n \in \mathbb{N}^*$ et multiplicateur $\lambda_0 \in K$. Alors il existe un point périodique $(x_0, y_0) \in z_0$ pour F avec période n puisque $d \geq 2$. D'après ce qui précède, l'isomorphisme de $T_{z_0}\mathbb{P}^1(K)^*$ sur $L_{z_0}^{\perp}$ induit par $T_{(x_0,y_0)}\pi$ conjugue ${}^tT_{z_0}f^{\circ n}$ à l'endomorphisme de $L_{z_0}^{\perp}$ induit par ${}^tT_{(x_0,y_0)}F^{\circ n}$ et $\omega_{\perp}(x_0,y_0)$ est un vecteur propre pour ${}^tT_{(x_0,y_0)}F^{\circ n}$ avec valeur propre $D_n^F(x_0,y_0)$. Par conséquent, comme un endomorphisme et sa transposée ont les mêmes valeurs propres, on a

$$\lambda_0 = D_n^F(x_0,y_0) = \prod_{j=0}^{n-1} D^F\left(F^{\circ j}(x_0,y_0)\right)\,.$$

D'autre part, notons que (x_0, y_0) est un vecteur propre pour $T_{(x_0,y_0)}F^{\circ n}$ avec valeur propre d^n d'après la formule d'Euler. De plus, l'endomorphisme $\overline{T_{(x_0,y_0)}F^{\circ n}}$ de K^2/L_{z_0} induit par $T_{(x_0,y_0)}F^{\circ n}$ est conjugué à $T_{z_0}f^{\circ n}$ par l'isomorphisme $\overline{T_{(x_0,y_0)}\pi}$. Par conséquent, les valeurs propres de $T_{(x_0,y_0)}F^{\circ n}$ répétées avec multiplicités sont d^n et λ_0. En particulier, on a aussi

$$\lambda_0 + d^n = \operatorname{tr} T_{(x_0,y_0)}F^{\circ n} = T_n^F(x_0,y_0)\,.$$

On peut aussi exprimer le multiplicateur d'une fraction rationnelle en un point périodique en termes de coordonnées non homogènes. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ est un point périodique pour f avec période $n \in \mathbb{N}^*$ et multiplicateur $\lambda_0 \in K$. Comme le multiplicateur est invariant par conjugaison, supposons sans perte de généralité que $z_0 \neq [1\colon 0]$, de sorte $\iota(z_0) \in K$. Alors il existe $F \in f$ tel que $(\iota(z_0), 1)$ est périodique pour F avec période n. On a

$$\lambda_0 = D_n^F(\iota(z_0), 1) \quad \text{et} \quad H_n^F(\iota(z_0), 1) = 1\,.$$

Par conséquent, comme

$$\begin{aligned} yD_n^F(x,1) &= H_n^F(x,y)\frac{\partial G_n^F}{\partial x}(x,y) - G_n^F(x,y)\frac{\partial H_n^F}{\partial x}(x,y) \\ &= H_n^F(x,y)^2 \frac{\partial\left(\frac{G_n^F}{H_n^F}\right)}{\partial x}(x,y)\,, \end{aligned}$$

on a finalement

$$\lambda_0 = \left(\psi_d(f)^{\circ n}\right)'(\iota(z_0))\,.$$

Enfin, rappelons la formule reliant les multiplicateurs d'une fraction rationnelle en ses points fixes. Soient K un corps algébriquement clos, $d \geq 2$ et $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$ dont tous les multiplicateurs en ses points fixes sont différents de 1. Alors on a

$$\sum_{j=1}^{d+1} \frac{1}{1-\lambda_j} = 1\,,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$ sont les multiplicateurs de f en ses points fixes.

3.2. Polynômes dynatomiques d'un couple de polynômes homogènes

Rappelons ici la définition et certaines propriétés des polynômes dynatomiques d'un couple de polynômes homogènes de même degré, qui sont liés aux points périodiques de la fraction rationnelle induite (voir [Sil07, Section 4.1]).

Dans toute cette section, d désigne un entier fixé supérieur ou égal à 2.

Soient K un corps, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$ et $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines du polynôme

$$yG_n^F(x,y) - xH_n^F(x,y) \in K[x,y]_{d^n+1}$$

sont précisément les points périodiques pour f avec période divisant n. Ainsi, il est naturel d'essayer de factoriser ces polynômes afin de séparer leurs racines selon leurs périodes, ce qui nous amène à définir des polynômes dynatomiques.

Afin d'examiner les coefficients des polynômes multiplicateurs, nous étudierons dans la section 4.1 la dégénérescence de fractions rationnelles. Définissons pour cela les polynômes dynatomiques d'un couple de polynômes homogènes de même degré non nécessairement premiers entre eux.

Soit A un anneau intègre. Définissons

$$\widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ F \in A[x,y]_d^2 : yG_n^F(x,y) - xH_n^F(x,y) \neq 0 \right\} .$$

Nous définirons les polynômes dynatomiques d'un élément de $\widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(A)$ quelconque. Notons que, si $F \in \mathrm{Hom}_d^2(A)$, alors on a $f^{\circ n} \neq I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puisque $d \geq 2$, où K est le corps des fractions de A et $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$. Par conséquent, $\mathrm{Hom}_d^2(A)$ est inclus dans $\widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(A)$.

Soit K un corps. On peut décrire précisément $\widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(K)$. Soit $F \in K[x,y]_d^2$ non nul. Alors il existe $F_0 \in \mathrm{Hom}_e^2(K)$ et $\delta \in K[x,y]_{d-e}$, avec $e \in \{0, \dots, d\}$, tels que $F = \delta F_0$. De plus, ceux-ci sont uniques à multiplication par un élément de $K^\times$ près. Un raisonnement par récurrence montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$F^{\circ n} = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \left(\delta \circ F_0^{\circ j} \right)^{d^{n-1-j}} \right) F_0^{\circ n} .$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$yG_n^F(x,y) - xH_n^F(x,y) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \left(\delta \circ F_0^{\circ j} \right)^{d^{n-1-j}} \right) \left(yG_n^{F_0}(x,y) - xH_n^{F_0}(x,y) \right) .$$

Par conséquent, le couple F n'est pas $\widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(K)$ si et seulement si soit F_0 est constant et est une racine de δ soit il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $[F_0]^{\circ n} = I$. En particulier, si F n'est pas $\widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(K)$, alors $e \in \{0, 1\}$.

On a le résultat ci-dessous, qui est analogue à la proposition 1.12.

Rappelons que

$$\nu(n) = \sum_{k \mid n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) d^k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où $\mu \colon \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$ désigne la fonction de Möbius.

PROPOSITION 3.11. *Soient A un anneau intègre et $F \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(A)$. Alors il existe une unique suite $\left(\Phi_n^F\right)_{n\geq 1}$ d'éléments de $A[x,y]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$yG_n^F(x,y) - xH_n^F(x,y) = \prod_{k|n} \Phi_k^F(x,y)\,.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Phi_n^F(x,y) = \prod_{k|n} \left(yG_k^F(x,y) - xH_k^F(x,y)\right)^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)}\,,$$

et en particulier le polynôme Φ_n^F est homogène et on a

$$\deg \Phi_n^F = \begin{cases} d+1 & \textit{si } n = 1 \\ \nu(n) & \textit{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

DÉFINITION 3.12. Soient A un anneau intègre, $F \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme est appelé le n-ième *polynôme dynatomique* de F.

Afin de démontrer la proposition 3.11, procédons comme dans le cas des polynômes unitaires. Plus précisément, énonçons d'abord un lemme d'algèbre générale permettant d'établir l'existence de la suite des polynômes dynatomiques dans certains cas particuliers, montrons ensuite que ce lemme s'applique au couple de polynômes homogènes de degré d dont les coefficients sont des indéterminées sur $\mathbb{Z}$ et enfin concluons avec un argument de spécialisation.

LEMME 3.13. *Soient A un anneau factoriel, K son corps des fractions, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite de polynômes homogènes dans $A[X,Y]$ qui vérifient les trois conditions suivantes :*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est primitif ;*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est séparable ;*
3. *pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, les racines communes aux polynômes P_m et P_n dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ sont précisément les racines du polynôme $P_{\mathrm{pgcd}(m,n)}$.*

Alors il existe une unique suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $A[X,Y]$ telle que

$$P_n = \prod_{k|n} Q_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme Q_n est homogène, primitif et séparable et ses racines dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ sont précisément les racines de P_n qui ne sont pas racines des polynômes P_k, avec k un diviseur propre de n.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.13. Si $(Q_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $A[X,Y]$ qui vérifie

$$P_n = \prod_{k|n} Q_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors, d'après la formule d'inversion de Möbius, on a

$$Q_n = \prod_{k|n} P_k^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, une telle suite est nécessairement unique.

Ainsi, il reste à démontrer l'existence d'une suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ ayant les propriétés désirées. Définissons $Q_1 = P_1 \in A[X,Y]$, qui est homogène, primitif et séparable d'après les conditions (1) et (2). Soit $n \geq 2$, et supposons qu'il existe des polynômes $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ homogènes, primitifs et séparables dans $A[X,Y]$ tels que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a

$$P_j = \prod_{k|j} Q_k$$

et les racines du polynôme Q_j dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ sont précisément les racines de P_j qui ne sont pas racines des polynômes P_k, avec k un diviseur propre de j. Posons

$$R_n = \prod_{k|n,\, k\neq n} Q_k \in A[X,Y]\,,$$

et montrons qu'il existe un polynôme homogène, primitif et séparable $Q_n \in A[X,Y]$ tel que $P_n = Q_n R_n$ et dont les racines dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ sont précisément les racines de P_n qui ne sont pas racines des polynômes P_k, avec k un diviseur propre de n. Si k est un diviseur propre de n et $z_0 \in \mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ est une racine de Q_k, alors z_0 est racine de P_k puisque Q_k divise P_k d'après l'hypothèse de récurrence, et donc aussi de P_n d'après la condition (3). Ainsi, toute racine du polynôme R_n dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ est également racine de P_n. De plus, si k et l sont deux diviseurs propres de n et $z_0 \in \mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ est une racine commune aux polynômes Q_k et Q_l, alors z_0 est racine de P_k et P_l d'après l'hypothèse de récurrence et aussi racine de $P_{\mathrm{pgcd}(k,l)}$ d'après la condition (3), ce qui entraîne $\mathrm{pgcd}(k,l) = k$ et $\mathrm{pgcd}(k,l) = l$ d'après l'hypothèse de récurrence sur les racines de Q_k et Q_l, et donc $k = l$. Par suite, comme les polynômes Q_k, avec k un diviseur propre de n, sont séparables d'après l'hypothèse de récurrence, le polynôme R_n est séparable. Par conséquent, il existe un polynôme homogène $Q_n \in K[X,Y]$ tel que $P_n = Q_n R_n$. Comme Q_n divise P_n, le polynôme Q_n est séparable d'après la condition (2) et ses racines dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ sont aussi racines de P_n. De plus, si $z_0 \in \mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ est racine de P_k, avec k un diviseur propre de n minimal pour cette propriété, alors z_0 est racine de Q_k d'après l'hypothèse de récurrence, et donc z_0 n'est pas racine de Q_n d'après la condition (2). Ainsi, les racines du polynôme Q_n dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ sont précisément les racines de P_n qui ne sont pas racines des polynômes P_k, avec k un diviseur propre de n. Enfin, comme les polynômes P_n et R_n sont primitifs d'après la condition (1) et l'hypothèse de récurrence, le polynôme Q_n est dans $A[X,Y]$ et est primitif d'après le lemme de Gauss. Ainsi, on a construit récursivement une suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $A[X,Y]$ ayant les propriétés désirées, ce qui complète la démonstration du lemme. □

Soient $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d$ et $\mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_d$ des indéterminées sur $\mathbb{Z}$, et posons

$$\mathfrak{A} = \mathbb{Z}\left[\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d, \mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_d\right] \quad \text{et} \quad \mathfrak{F} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) \in \mathrm{Hom}_d^2(\mathfrak{A})\,,$$

où $\mathfrak{G}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{A}[x,y]_d$ sont donnés par

$$\mathfrak{G}(x,y) = \sum_{j=0}^{d} \mathfrak{a}_j x^j y^{d-j} \quad \text{et} \quad \mathfrak{H}(x,y) = \sum_{j=0}^{d} \mathfrak{b}_j x^j y^{d-j}\,.$$

Notons aussi $\mathfrak{K}$ le corps des fractions de $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ une clôture algébrique de $\mathfrak{K}$ et

$$\mathfrak{f} = [\mathfrak{F}] \in \mathrm{Rat}_d(\mathfrak{K})\,.$$

On peut appliquer le lemme 3.13 pour établir la proposition 3.11 dans le cas de l'anneau $\mathfrak{A}$ et du couple $\mathfrak{F}$. Plus précisément, on a le résultat suivant :

LEMME 3.14. *Il existe une unique suite* $\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}\right)_{n\geq 1}$ *d'éléments de* $\mathfrak{A}[x,y]$ *telle que*

$$yG_n^{\mathfrak{F}}(x,y) - xH_n^{\mathfrak{F}}(x,y) = \prod_{k\mid n} \Phi_k^{\mathfrak{F}}(x,y)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *De plus, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *le polynôme* $\Phi_n^{\mathfrak{F}}$ *est homogène, primitif et séparable et ses racines dans* $\mathbb{P}^1\left(\overline{\mathfrak{K}}\right)$ *sont précisément les points périodiques pour* $\mathfrak{f}$ *avec période* n.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.14. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$P_n(x,y) = yG_n^{\mathfrak{F}}(x,y) - xH_n^{\mathfrak{F}}(x,y) \in \mathfrak{A}[x,y]_{d^n+1}\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{\mathfrak{K}}\right)$ sont précisément les points périodiques pour $\mathfrak{f}$ avec période divisant n. Par suite, il suffit de montrer que la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ vérifie les conditions (1), (2) et (3) du lemme 3.13.

Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, les racines communes aux polynômes P_m et P_n sont précisément les point périodiques pour $\mathfrak{f}$ avec période divisant $\operatorname{pgcd}(m,n)$, qui sont précisément les racines de $P_{\operatorname{pgcd}(m,n)}$.

Montrons maintenant que la condition (1) est vérifiée. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\delta_n \in \mathfrak{A}$ un pgcd des coefficients de P_n. Il existe un polynôme primitif $\widetilde{P}_n \in \mathfrak{A}[x,y]$ tel que $P_n = \delta_n \widetilde{P}_n$. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^{2d+2}$ un zéro de δ_n, et notons $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ l'unique morphisme d'anneaux qui vérifie $\varphi(\mathfrak{a}_j) = a_j$ et $\varphi(\mathfrak{b}_j) = b_j$ pour tout $j \in \{0,\dots,d\}$. Alors on a

$$yG_n^{\varphi(\mathfrak{F})}(x,y) - xH_n^{\varphi(\mathfrak{F})}(x,y) = \varphi\left(P_n\right)(x,y) = \varphi\left(\delta_n\right)\varphi\left(\widetilde{P}_n\right)(x,y) = 0\,,$$

et donc

$$\varphi\left(\operatorname{res}(\mathfrak{F})\right) = \operatorname{res}\left(\varphi(\mathfrak{F})\right) = 0$$

puisque $\operatorname{Hom}_d^2(\mathbb{C})$ est inclus dans $\widetilde{\operatorname{Hom}_d^2}(\mathbb{C})$. Ainsi, tout zéro de δ_n dans $\mathbb{C}^{2d+2}$ est aussi zéro de $\operatorname{res}(\mathfrak{F})$. Par conséquent, comme le polynôme $\operatorname{res}(\mathfrak{F}) \in \mathfrak{A}$ est primitif et irréductible sur $\mathbb{C}$ d'après le lemme A.9, il existe $c_n \in \mathbb{Z}$ et $m_n \in \mathbb{N}$ tels que $\delta_n = c_n \operatorname{res}(\mathfrak{F})^{m_n}$. Soit $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{Z}$ l'unique morphisme d'anneaux tel que

$$\varphi(\mathfrak{F})(x,y) = \left(x^d, x^d\right) \in \widetilde{\operatorname{Hom}_d^2}(\mathbb{Z})\,.$$

On a

$$c_n\varphi\left(\operatorname{res}(\mathfrak{F})\right)\varphi\left(\widetilde{P}_n\right)(x,y) = \varphi\left(P_n\right)(x,y) = yx^{d^n} - x^{d^n+1}\,,$$

et donc $c_n = \pm 1$ et $m_n = 0$ puisque le polynôme $yx^{d^n} - x^{d^n+1}$ est primitif et

$$\varphi\left(\operatorname{res}(\mathfrak{F})\right) = \operatorname{res}\left(\varphi(\mathfrak{F})\right) = 0\,.$$

Ainsi, on a $\delta_n = \pm 1$, et le polynôme P_n est primitif.

Enfin, raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le polynôme P_n n'est pas séparable. Alors, comme $\mathfrak{A}$ est factoriel et de caractéristique nulle, il existe deux polynômes homogènes Q_n et R_n dans $\mathfrak{A}[x,y]$ tels que R_n n'est pas constant et $P_n = Q_n R_n^2$. Soit $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ l'unique morphisme d'anneaux tel que

$$\varphi(\mathfrak{F})(x,y) = \left(x^d, y^d\right) \in \operatorname{Hom}_d^2(\mathbb{C})\,.$$

Alors le polynôme $\varphi(R_n) \in \mathbb{C}[x,y]$ est homogène et non constant et on a

$$\varphi(Q_n)(x,y)\varphi(R_n)(x,y)^2 = \varphi(P_n)(x,y) = yx^{d^n} - xy^{d^n},$$

ce qui contredit le fait que le polynôme

$$yx^{d^n} - xy^{d^n} = xy \prod_{j=0}^{d^n-2} \left(x - \omega^j y\right) \in \mathbb{C}[x,y]_{d^n+1}$$

est séparable, où $\omega \in \mathbb{C}$ est une racine (d^n-1)-ième de l'unité. Ainsi, la condition (2) est vérifiée, et le lemme est démontré. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 3.11.

Démonstration de la proposition 3.11. Écrivons

$$F(x,y) = \left(\sum_{j=0}^{d} a_j x^j y^{d-j}, \sum_{j=0}^{d} b_j x^j y^{d-j}\right) \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(A).$$

Soit $\varphi\colon \mathfrak{A} \to A$ l'unique morphisme d'anneaux qui vérifie $\varphi(\mathfrak{a}_j) = a_j$ et $\varphi(\mathfrak{b}_j) = b_j$ pour tout $j \in \{0,\ldots,d\}$, de sorte que $\varphi(\mathfrak{F}) = F$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Phi_n^F = \varphi\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}\right) \in A[x,y].$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$yG_n^F(x,y) - xH_n^F(x,y) = \varphi\left(yG_n^{\mathfrak{F}}(x,y) - xH_n^{\mathfrak{F}}(x,y)\right) = \prod_{k|n} \Phi_k^F(x,y).$$

Ainsi, l'existence d'une telle suite est établie.

Enfin, si $\left(\Phi_n^F\right)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $A[x,y]$ qui vérifie

$$yG_n^F(x,y) - xH_n^F(x,y) = \prod_{k|n} \Phi_k^F(x,y)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors, d'après la formule d'inversion de Möbius, on a

$$\Phi_n^F(x,y) = \prod_{k|n} \left(yG_k^F(x,y) - xH_k^F(x,y)\right)^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puisque $F \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(A)$. En particulier, si $\left(\Phi_n^F\right)_{n\geq 1}$ est une telle suite, alors elle est nécessairement unique et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme Φ_n^F est homogène et on a

$$\deg \Phi_n^F = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right)\left(d^k+1\right) = \begin{cases} d+1 & \text{si } n = 1 \\ \nu(n) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

Ainsi, la proposition est démontrée. $\square$

Remarque 3.15. Si A est un anneau intègre et $F \in A[x,y]_d^2$ n'appartient pas à $\widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(A)$, alors il existe encore une suite $\left(\Phi_n^F\right)_{n\geq 1}$ comme dans la proposition 3.11 mais celle-ci n'est pas unique.

Exemple 3.16. Soient A un anneau intègre, $f \in \mathrm{Poly}_d^U(A)$ et

$$F(x, y) = \left(y^d f\left(\frac{x}{y}\right), y^d\right) \in \mathrm{Hom}_d^2(A)\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$yG_n^F - xH_n^F(x, y) = y^{d^n+1}\left(f^{\circ n}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}\right) = y^{d^n+1} \prod_{k \mid n} \Phi_k^f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Par conséquent, on a

$$\Phi_n^F(x, y) = y^{\deg \Phi_n^F} \Phi_n^f\left(\frac{x}{y}\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après l'unicité dans la proposition 3.11.

Le résultat ci-dessous nous sera utile lorsque nous étudierons la dégénérescence de fractions rationnelles dans la section 4.1.

Proposition 3.17. *Soient A un anneau intègre, $F \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(A)$ et $\delta \in A[x, y]_e$, avec $e \in \mathbb{N}$. Alors δF est dans $\widetilde{\mathrm{Hom}}_{d+e}^2(A)$ si et seulement si $\delta \circ F \neq 0$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Phi_n^{\delta F} = \left(\prod_{k \mid n} \prod_{l=0}^{k-1} \left(\delta \circ F^{\circ l}\right)^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)(d+e)^{k-1-l}}\right) \Phi_n^F\,.$$

Démonstration. Soit K le corps des fractions de A. Il existe $F_0 \in \mathrm{Hom}_{d_0}^2(K)$ et $\delta_0 \in K[x, y]_{d-d_0}$, avec $d_0 \in \{0, \ldots, d\}$, tels que $F = \delta_0 F_0$, et on a $\delta F = \delta\delta_0 F_0$. Par suite, comme $F \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(A)$, le couple δF n'est pas dans $\widetilde{\mathrm{Hom}}_{d+e}^2(A)$ si et seulement si δ est nul ou F_0 est constant et est une racine de δ, ce qui se produit si et seulement si $\delta \circ F$ est nul.

Supposons maintenant que $\delta \circ F \neq 0$. Un raisonnement par récurrence montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(\delta F)^{\circ n} = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \left(\delta \circ F^{\circ j}\right)^{(d+e)^{n-1-j}}\right) F^{\circ n}\,.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$yG_n^{\delta F}(x, y) - xH_n^{\delta F}(x, y) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \left(\delta \circ F^{\circ j}\right)^{(d+e)^{n-1-j}}\right) \left(yG_n^F(x, y) - xH_n^F(x, y)\right).$$

Par conséquent, on a $\delta \circ F^{\circ n} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque $\delta F \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_{d+e}^2(A)$ et, d'après la formule d'inversion de Möbius, on a

$$\Phi_n^{\delta F} = \left(\prod_{k \mid n} \prod_{l=0}^{k-1} \left(\delta \circ F^{\circ l}\right)^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)(d+e)^{k-1-l}}\right) \Phi_n^F$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, la proposition est démontrée. □

Une conséquence immédiate de la proposition 3.17 est le cas particulier suivant :

Corollaire 3.18. *Soient A un anneau intègre, $F \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(A)$ et $t \in A \setminus \{0\}$. Alors $tF \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(A)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Phi_n^{tF} = t^{l_n} \Phi_n^F , \quad \text{où} \quad l_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ \frac{\nu(n)}{d-1} & \text{si } n \geq 2 \end{cases} .$$

Étudions maintenant l'action de la conjugaison sur les polynômes dynatomiques d'un couple de polynômes homogènes de même degré. On a le résultat ci-dessous, qui est analogue à la proposition 1.22.

Proposition 3.19. *Soient K un corps, $F \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(K)$ et $\phi \in \mathrm{Hom}_1^2(K)$. Alors $\phi \circ F \circ \phi^{-1}$ est dans $\widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(K)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Phi_n^{\phi \circ F \circ \phi^{-1}}(x,y) = \alpha_n \Phi_n^F\left(\phi^{-1}(x,y)\right) , \quad \text{où} \quad \alpha_n = \begin{cases} \mathrm{res}(\phi) & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} .$$

Démonstration. Écrivons

$$\phi(x,y) = (a_1 x + a_0 y, b_1 x + b_0 y) \in \mathrm{Hom}_1^2(K) .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$G_n^{\phi \circ F \circ \phi^{-1}}(x,y) = a_1 G_n^F\left(\phi^{-1}(x,y)\right) + a_0 H_n^F\left(\phi^{-1}(x,y)\right)$$

et

$$H_n^{\phi \circ F \circ \phi^{-1}}(x,y) = b_1 G_n^F\left(\phi^{-1}(x,y)\right) + b_0 H_n^F\left(\phi^{-1}(x,y)\right) ,$$

et donc

$$\begin{aligned} yG_n^{\phi \circ F \circ \phi^{-1}}(x,y) - xH_n^{\phi \circ F \circ \phi^{-1}}(x,y) &= \mathrm{res}(\phi) H_1^{\phi^{-1}}(x,y) G_n^F\left(\phi^{-1}(x,y)\right) \\ &\quad - \mathrm{res}(\phi) G_1^{\phi^{-1}}(x,y) H_n^F\left(\phi^{-1}(x,y)\right) \\ &= \mathrm{res}(\phi) \prod_{k \mid n} \Phi_k^{\phi \circ F \circ \phi^{-1}}(x,y) . \end{aligned}$$

Par conséquent, $\phi \circ F \circ \phi^{-1}$ est dans $\widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(K)$ et on a

$$\Phi_n^{\phi \circ F \circ \phi^{-1}}(x,y) = \alpha_n \Phi_n^F\left(\phi^{-1}(x,y)\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après l'unicité dans la proposition 3.11. Ainsi, la proposition est démontrée. ☐

Étudions maintenant les racines des polynômes dynatomiques d'un couple de polynômes homogènes premiers entre eux de même degré, qui sont liées aux points périodiques de la fraction rationnelle induite. Soient K un corps, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors toute racine du polynôme Φ_n^F est un point périodique pour f avec période divisant n. Réciproquement, tout point périodique pour f avec période n est une racine de Φ_n^F. Cependant, il peut arriver que certaines racines du polynôme Φ_n^F aient une période strictement inférieure à n.

Montrons d'abord le résultat ci-dessous, qui est analogue à la proposition 1.24.

Proposition 3.20. *Soient A un anneau intègre, $F \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_d^2(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le polynôme Φ_n^F divise le polynôme $\Phi_n^F \circ F$ dans $A[x,y]$.*

Démonstration. Démontrons d'abord le résultat dans le cas de l'anneau $\mathfrak{A}$ et du couple $\mathfrak{F}$. Comme le polynôme $\Phi_n^{\mathfrak{F}}$ est homogène, primitif et séparable d'après le lemme 3.14, il suffit pour cela de prouver que toute racine du polynôme $\Phi_n^{\mathfrak{F}}$ dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{\mathfrak{K}}\right)$ est aussi racine de $\Phi_n^{\mathfrak{F}} \circ \mathfrak{F}$. Si $z_0 \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathfrak{K}}\right)$ est une racine de $\Phi_n^{\mathfrak{F}}$, alors z_0 est un point périodique pour $\mathfrak{f}$ avec période n d'après le lemme 3.14, ce qui entraîne que $\mathfrak{f}(z_0)$ est racine de $\Phi_n^{\mathfrak{F}}$ puisqu'il est aussi périodique pour $\mathfrak{f}$ avec période n, et donc z_0 est racine de $\Phi_n^{\mathfrak{F}} \circ \mathfrak{F}$. Ainsi, on a montré qu'il existe un polynôme homogène $P \in \mathfrak{A}[x, y]$ tel que $\Phi_n^{\mathfrak{F}} \circ \mathfrak{F} = P \Phi_n^{\mathfrak{F}}$.

Afin de prouver le résultat dans le cas général, écrivons

$$F(x, y) = \left(\sum_{j=0}^{d} a_j x^j y^{d-j}, \sum_{j=0}^{d} b_j x^j y^{d-j}\right) \in \widetilde{\operatorname{Hom}}_d^2(A)\,.$$

Soit $\varphi\colon \mathfrak{A} \to A$ l'unique morphisme d'anneaux qui vérifie $\varphi(\mathfrak{a}_j) = a_j$ et $\varphi(\mathfrak{b}_j) = b_j$ pour tout $j \in \{0, \ldots, d\}$, de sorte que $\varphi(\mathfrak{F}) = F$. On a

$$\Phi_n^F \circ F = \varphi\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}} \circ \mathfrak{F}\right) = \varphi(P) \Phi_n^F\,.$$

Ainsi, la proposition est démontrée. □

Une conséquence de la proposition 3.20 est le résultat ci-dessous, qui est analogue au corollaire 1.25 et dont la démonstration est similaire.

Corollaire 3.21. *Soient K un corps, $F \in \operatorname{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \operatorname{Rat}_d(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors f induit une permutation des racines du polynôme Φ_n^F qui préserve les multiplicités et dont l'ordre divise n.*

Démonstration. Comme Φ_n^F divise $\Phi_n^F \circ F$ d'après la proposition 3.20, f induit une permutation de l'ensemble des racines du polynôme Φ_n^F dans lui-même. De plus, comme les racines du polynôme Φ_n^F sont des points périodiques pour f avec période divisant n, celle-ci est en fait une permutation dont l'ordre divise n. Enfin, pour montrer que f préserve les multiplicités des racines de Φ_n^F, il suffit de prouver que, pour toute racine $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ du polynôme Φ_n^F, on a

$$\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^F \leq \operatorname{ord}_{f(z_0)} \Phi_n^F\,.$$

Soit $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ une racine du polynôme Φ_n^F. Comme z_0 est un point périodique pour f avec période divisant n, il existe un point périodique $(x_0, y_0) \in z_0$ pour F avec période divisant n. De plus, il existe $P \in K[x, y]$ tel que

$$\Phi_n^F(x, y) = \left(H_1^F(x_0, y_0)\, x - G_1^F(x_0, y_0)\, y\right)^m P(x, y) \quad \text{et} \quad P\left(F(x_0, y_0)\right) \neq 0\,,$$

où $m = \operatorname{ord}_{f(z_0)} \Phi_n^F$. On a

$$\Phi_n^F \circ F = \left(H_1^F(x_0, y_0)\, G_1^F - G_1^F(x_0, y_0)\, H_1^F\right)^m P \circ F\,,$$

et donc

$$\operatorname{ord}_{f(z_0)} \Phi_n^F \circ F = m \operatorname{ord}_{z_0}\left(H_1^F(x_0, y_0)\, G_1^F - G_1^F(x_0, y_0)\, H_1^F\right)\,.$$

Par suite, si $D^F(x_0, y_0) \neq 0$, alors on a

$$\operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^F \leq \operatorname{ord}_{z_0} \Phi_n^F \circ F = m = \operatorname{ord}_{f(z_0)} \Phi_n^F$$

puisque Φ_n^F divise $\Phi_n^F \circ F$ d'après la proposition 3.20 et

$$H_1^F(x_0, y_0)\, G_1^F(x, y) - G_1^F(x_0, y_0)\, H_1^F(x, y) = D^F(x_0, y_0)\,(y_0 x - x_0 y) + O_{z_0}\left((y_0 x - x_0 y)^2\right).$$

Enfin, si $D^F(x_0, y_0) = 0$, alors on a

$$\mathrm{ord}_{z_0} \Phi_n^F \leq \mathrm{ord}_{z_0}\left(y G_n^F(x, y) - x H_n^F(x, y)\right) = 1 \leq \mathrm{ord}_{f(z_0)} \Phi_n^F$$

puisque

$$y G_n^F(x, y) - x H_n^F(x, y) = \left(D_n^F(x_0, y_0) - 1\right)(y_0 x - x_0 y) + O_{z_0}\left((y_0 x - x_0 y)^2\right),$$

car (x_0, y_0) est un point fixe pour $F^{\circ n}$, et

$$D_n^F(x_0, y_0) = \prod_{j=0}^{n-1} D^F\left(F^{\circ j}(x_0, y_0)\right) = 0\,.$$

Ainsi, le corollaire est démontré. $\square$

Décrivons maintenant les racines des polynômes dynatomiques. On a le résultat ci-dessous, qui est analogue à la proposition 1.26.

Proposition 3.22 ([MS95, Proposition 3.2]). *Soient K un corps, $n \in \mathbb{N}^*$, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$ et $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$. Alors $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ est une racine du polynôme Φ_n^F si et seulement si z_0 est un point périodique pour f avec période $k \in \mathbb{N}^*$ et multiplicateur $\lambda_0 \in K$ qui vérifient*

- *$k = n$,*
- *ou il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = kl$ et λ_0 est une racine primitive l-ième de l'unité,*
- *ou K a une caractéristique $p > 0$ et il existe $l, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = klp^m$ et λ_0 est une racine primitive l-ième de l'unité.*

La proposition 3.22 est une conséquence du lemme ci-dessous, qui est analogue au lemme 1.27. En fait, notre preuve de proposition 3.22 à partir du lemme 1.27 s'adapte sans modification substantielle pour démontrer la proposition 3.22.

En identifiant $\mathbb{P}^1(K)$ à $K \cup \{\infty\}$ et $\mathrm{Rat}_d(K)$ à $K(z)_d$ par les bijections ι et ψ_d, avec K un corps, notre preuve du lemme 1.27 s'adapte aussi immédiatement pour démontrer le lemme ci-dessous. Plus précisément, si K est un corps, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(y G_n^F(x, y) - x H_n^F(x, y)\right) = \mathrm{ord}_{\iota(z_0)}\left(\psi_d(f)^{\circ n}(z) - z\right).$$

Lemme 3.23. *Soient K un corps, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ un point fixe pour f avec multiplicateur $\lambda_0 \in K$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(y G_n^F(x, y) - x H_n^F(x, y)\right) \geq 1\,,$$

et cette inégalité est stricte si et seulement si λ_0 est une racine n-ième de l'unité. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(y G_n^F(x, y) - x H_n^F(x, y)\right) \geq \mathrm{ord}_{z_0}\left(y G_1^F(x, y) - x H_1^F(x, y)\right),$$

et cette inégalité est stricte si et seulement si

- *soit λ_0 est une racine n-ième de l'unité différente de 1,*
- *soit λ_0 est égal à 1 et la caractéristique de K divise n.*

On peut encore préciser la proposition 3.22 dans le cas des couples de polynômes homogènes à coefficients dans un corps de caractéristique nulle. Pour cela, énonçons d'abord le résultat ci-dessous, qui est analogue à la proposition 1.29. En identifiant $\mathbb{P}^1(K)$ à $K \cup \{\infty\}$ et $\mathrm{Rat}_d(K)$ à $K(z)_d$, notre démonstration de la proposition 1.29 s'adapte directement pour prouver l'énoncé qui suit.

Proposition 3.24. *Soient K un corps, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ un point périodique pour f avec période $k \in \mathbb{N}^*$ et multiplicateur une racine primitive l-ième de l'unité. Alors la multiplicité*

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(yG_{kl}^F(x,y) - xH_{kl}^F(x,y)\right) \in \mathbb{N}^*$$

ne dépend que de f et est congrue à 1 modulo l.

Définition 3.25. Soient K un corps, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ un point périodique pour f avec période $k \in \mathbb{N}^*$ et multiplicateur une racine primitive l-ième de l'unité. L'unique entier $\nu \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(yG_{kl}^F(x,y) - xH_{kl}^F(x,y)\right) = \nu l + 1$$

est appelé *multiplicité parabolique* de f en z_0.

Remarque 3.26. Si $f \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ et $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un point périodique parabolique pour f, alors la multiplicité parabolique ν de f en z_0 est égale au nombre de cycles de bassins paraboliques pour f en z_0 (voir [**Bea91**, Theorem 6.5.10]).

On peut expliciter les multiplicités des racines des polynômes dynatomiques d'un couple de polynômes homogènes à coefficients dans un corps de caractéristique nulle. Plus précisément, on a le résultat ci-dessous, qui précise la proposition 3.22 et est analogue à la proposition 1.32.

Proposition 3.27. *Soient K un corps de caractéristique nulle, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ est une racine du polynôme Φ_n^F si et seulement si*

- *soit z_0 est un point périodique pour f avec période n et multiplicateur différent de 1, auquel cas $\mathrm{ord}_{z_0} \Phi_n^F = 1$,*
- *soit z_0 est un point périodique pour f avec période n et multiplicateur 1, auquel cas $\mathrm{ord}_{z_0} \Phi_n^F = \nu + 1$, où ν est la multiplicité parabolique de f en z_0,*
- *soit z_0 est un point périodique pour f avec période un diviseur propre k de n et multiplicateur une racine primitive $\frac{n}{k}$-ième de l'unité, auquel cas $\mathrm{ord}_{z_0} \Phi_n^F = \frac{\nu n}{k}$, où ν est la multiplicité parabolique de f en z_0.*

La proposition se déduit facilement du lemme ci-dessous, qui est analogue au lemme 1.33 et est une conséquence immédiate du lemme 3.23. En fait, notre preuve de la proposition 1.32 s'adapte directement pour démontrer la proposition 3.27.

Lemme 3.28 ([**Bea91**, Theorem 6.511]). *Soient K un corps de caractéristique nulle, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ un point périodique pour f avec période $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\mathrm{ord}_{z_0}\left(yG_n^F(x,y) - xH_n^F(x,y)\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \mid n \\ 0 & \text{si } k \nmid n \end{cases}$$

si le multiplicateur de f en z_0 n'est pas une racine de l'unité et

$$\operatorname{ord}_{z_0}\left(yG_n^F(x,y) - xH_n^F(x,y)\right) = \begin{cases} \nu l + 1 & \textit{si } kl \mid n \\ 1 & \textit{si } k \mid n \textit{ et } kl \nmid n \\ 0 & \textit{si } k \nmid n \end{cases}$$

si le multiplicateur de f en z_0 est une racine primitive l-ième de l'unité, avec $l \in \mathbb{N}^*$, où ν est la multiplicité parabolique de f en z_0.

Remarque 3.29. D'après le corollaire 3.21 et la proposition 3.27, si K est un corps de caractéristique nulle et $f \in \operatorname{Rat}_d(K)$, alors f a la même multiplicité parabolique en chaque point d'un cycle parabolique.

Enfin, énonçons l'égalité ci-dessous, qui nous sera utile lorsque nous étudierons les polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle.

Proposition 3.30. *Soient A un anneau intègre, $F \in \widetilde{\operatorname{Hom}_d^2}(A)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $e \in \mathbb{N}$ et tout $P \in A[x,y]_e$, on a*

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^F, P \circ F^{\circ n}\right) = \epsilon_n^{(e)} \operatorname{res}\left(\Phi_n^F, P\right) \operatorname{res}(F)^{\frac{e\nu(n)\left(d^n-1\right)}{d(d-1)}},$$

où $\epsilon_n^{(e)} \in \{-1,1\}$ est égal à -1 si et seulement si $n=1$, d est pair et e est impair.

Afin de démontrer la proposition 3.30, énonçons d'abord le résultat suivant :

Lemme 3.31. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(0,1)$ et $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(1,0)$ sont premiers entre eux dans $\mathfrak{A}$.*

Démonstration du lemme 3.31. Montrons d'abord que $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(0,1) \in \mathfrak{A}$ est primitif. Soit $\delta_n \in \mathbb{Z}$ un pgcd des coefficients de $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(0,1)$. Il existe un polynôme primitif $\widetilde{\Phi}_n^F \in \mathfrak{A}$ tel que $\Phi_n^{\mathfrak{F}} = \delta_n \widetilde{\Phi}_n^{\mathfrak{F}}$. Si $n=1$ et $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{Z}$ est l'unique morphisme d'anneaux tel que

$$\varphi(\mathfrak{F})(x,y) = \left(x^d - y^d, x^d + y^d\right) \in \operatorname{Hom}_d^2(\mathbb{Z}),$$

alors on a

$$\delta_n \varphi\left(\widetilde{\Phi}_n^{\mathfrak{F}}\right)(0,1) = \Phi_n^{\varphi(\mathfrak{F})}(0,1) = -1,$$

et donc $\delta_n = \pm 1$. Si $n \geq 2$ et $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{Z}$ est l'unique morphisme d'anneaux tel que

$$\varphi(\mathfrak{F})(x,y) = \left(x^d, y^d\right) \in \operatorname{Hom}_d^2(\mathbb{Z}),$$

alors on a

$$\delta_n \varphi\left(\widetilde{\Phi}_n^{\mathfrak{F}}\right)(0,1) = \Phi_n^{\varphi(\mathfrak{F})}(0,1) = \prod_{k \in D_n} C_k(0) = 1,$$

où D_n est l'ensemble des diviseurs de $d^n - 1$ qui ne divisent pas $d^k - 1$, avec k un diviseur propre de n, et C_k, avec $k \in \mathbb{N}^*$, désigne le k-ième polynôme cyclotomique, et donc $\delta_n = \pm 1$. Ainsi, le polynôme $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(0,1) \in \mathfrak{A}$ est primitif, et en particulier $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(0,1)$ et $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(1,0)$ n'ont pas de facteur commun non inversible dans $\mathbb{Z}$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(0,1)$ et $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(1,0)$ ont un facteur commun non constant $\delta_n \in \mathfrak{A}$. Posons

$$\mathfrak{B} = \mathbb{C}\left[\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d, \mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_d\right].$$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tel que $x_0 \neq 0$. Alors il existe $\phi_0 \in \mathrm{Hom}_1^2(\mathbb{C})$ tel que $\phi_0(0,1) = (0,1)$ et $\phi_0(x_0, y_0) = (1, 0)$, et il existe un unique automorphisme ρ_0 de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathfrak{B}$ qui vérifie

$$\rho_0(\mathfrak{F}) = \phi_0 \circ \mathfrak{F} \circ \phi_0^{-1} .$$

D'après la proposition 3.19, on a

$$\rho_0\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}(0,1)\right) = \mathrm{res}\,(\phi_0)^{\epsilon_n}\, \Phi_n^{\mathfrak{F}}(0,1) \quad \text{et} \quad \rho_0\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}(1,0)\right) = \mathrm{res}\,(\phi_0)^{\epsilon_n}\, \Phi_n^{\mathfrak{F}}(x_0, y_0) ,$$

où $\epsilon_n \in \{0,1\}$ est égal à 1 si et seulement si $n = 1$. Par suite, $\rho_0(\delta_n)$ est un facteur commun non constant à $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(0,1)$ et $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(x_0, y_0)$ dans $\mathfrak{B}$. Par conséquent, il existe un facteur irréductible θ_n de $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(0,1)$ dans $\mathfrak{B}$ et une partie infinie E de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tels que θ_n divise $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(x_0, y_0)$ dans $\mathfrak{B}$ pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tel que $[x_0 \colon y_0] \in E$. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^{2d+2}$ un zéro de θ_n, et notons $\varphi \colon \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ l'unique morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres qui vérifie $\varphi(\mathfrak{a}_j) = a_j$ et $\varphi(\mathfrak{b}_j) = b_j$ pour tout $j \in \{0, \ldots, d\}$. Alors tout élément de E est racine de $\varphi\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}\right)$, et donc $\varphi\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}\right) = 0$ puisque E est infini. Ainsi, tout zéro de θ_n dans $\mathbb{C}^{2d+2}$ est aussi zéro des coefficients de $\Phi_n^{\mathfrak{F}}$. Par conséquent, comme $\theta_n \in \mathfrak{B}$ est irréductible, il divise tous les coefficients de $\Phi_n^{\mathfrak{F}}$. Ceci contredit le fait que le polynôme $\Phi_n^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{A}[x,y]$ est primitif d'après le lemme 3.14 puisque tout pgcd des coefficients de $\Phi_n^{\mathfrak{F}}$ dans $\mathfrak{A}$ est également un pgcd de ceux-ci dans $\mathfrak{B}$. Ainsi, le lemme est démontré. □

Enfin, prouvons la proposition 3.30.

Démonstration de la proposition 3.30. Soit $e \in \mathbb{N}$, et posons

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\left[\mathfrak{c}_0, \ldots, \mathfrak{c}_e\right] \quad \text{et} \quad \mathfrak{P}(x,y) = \sum_{j=0}^{e} \mathfrak{c}_j x^j y^{e-j} \in \mathfrak{B}[x,y]_e ,$$

où $\mathfrak{c}_0, \ldots, \mathfrak{c}_e$ sont des indéterminées. Il suffit de démontrer que

$$\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n}\right) = \epsilon_n^{(e)}\, \mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P}\right) \mathrm{res}(\mathfrak{F})^{\frac{e\nu(n)\left(d^n - 1\right)}{d(d-1)}} .$$

Comme les racines du polynôme $\Phi_n^{\mathfrak{F}}$ dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{\mathfrak{K}}\right)$ sont des points périodiques pour $\mathfrak{f}$ avec période divisant n, il existe $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}^{\times}$ et des points périodiques $(x_j, y_j) \in \overline{\mathfrak{K}}^2 \setminus \{0\}$ pour $\mathfrak{F}$ avec période divisant n, avec $j \in \left\{1, \ldots, \deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}\right\}$, tels que

$$\Phi_n^{\mathfrak{F}}(x,y) = \alpha \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}} (y_j x - x_j y) .$$

Alors on a

$$\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n}\right) = \alpha^{ed^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}} \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n}(x_j, y_j) = \alpha^{ed^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}} \mathfrak{P}(x_j, y_j) ,$$

et donc

$$\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n}\right) = \alpha^{e(d^n - 1)}\, \mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P}\right) .$$

Il reste à expliciter le terme $\alpha^{e(d^n-1)}$. Soient φ_0 et φ_∞ les uniques morphismes de $\overline{\mathfrak{K}}$-algèbres de $\overline{\mathfrak{K}}\left[\mathfrak{c}_0, \ldots, \mathfrak{c}_e\right]$ dans $\overline{\mathfrak{K}}$ qui vérifient

$$\varphi_0(\mathfrak{P})(x,y) = (-1)^e x^e \in \overline{\mathfrak{K}}[x,y]_e \quad \text{et} \quad \varphi_\infty(\mathfrak{P})(x,y) = y^e \in \overline{\mathfrak{K}}[x,y]_e .$$

Alors on a

$$\alpha^{e(d^n-1)} \Phi_n^{\mathfrak{F}}(0,1)^e = \varphi_0\left(\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n}\right)\right) = \mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, -G_n^{\mathfrak{F}}\right)^e \in \mathfrak{A}$$

et

$$\alpha^{e(d^n-1)}\Phi_n^{\mathfrak{F}}(1,0)^e = \varphi_\infty\left(\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P}\circ\mathfrak{F}^{\circ n}\right)\right) = \mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, H_n^{\mathfrak{F}}\right)^e \in \mathfrak{A}\,.$$

Par suite, comme $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(0,1)$ et $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(1,0)$ sont premiers entre eux dans $\mathfrak{A}$ d'après le lemme 3.31, on a $\alpha^{e(d^n-1)} \in \mathfrak{A}$. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^{2d+2}$ qui n'est pas zéro de $\mathrm{res}(\mathfrak{F}) \in \mathfrak{A}$, et notons $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ l'unique morphisme d'anneaux qui vérifie $\varphi(\mathfrak{a}_j) = a_j$ et $\varphi(\mathfrak{b}_j) = b_j$ pour tout $j \in \{0,\ldots,d\}$. Alors les racines du polynôme $\Phi_n^{\varphi(\mathfrak{F})}$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont des points périodiques pour $[\varphi(\mathfrak{F})] \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ avec période divisant n, et donc il existe $\gamma \in \mathbb{C}^*$ et des points périodiques $(x_j,y_j) \in \mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ pour $\varphi(\mathfrak{F})$ avec période divisant n, avec $j \in \left\{1,\ldots,\deg\Phi_n^{\mathfrak{F}}\right\}$, tels que

$$\Phi_n^{\varphi(\mathfrak{F})}(x,y) = \gamma\prod_{j=1}^{\deg\Phi_n^{\mathfrak{F}}}(y_jx - x_jy)\ .$$

Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ tel que $[x_0\colon y_0] \neq [x_j\colon y_j]$ pour tout $j \in \left\{1,\ldots,\deg\Phi_n^{\mathfrak{F}}\right\}$, et notons encore $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ l'unique morphisme d'anneaux qui prolonge φ et vérifie

$$\varphi(\mathfrak{P})(x,y) = (y_0x - x_0y)^e \in \mathbb{C}[x,y]_e\,,$$

de sorte que $\varphi(\mathfrak{P})(x_j,y_j) \neq 0$ pour tout $j \in \left\{1,\ldots,\deg\Phi_n^{\mathfrak{F}}\right\}$. Alors on a

$$\begin{aligned}\varphi\left(\alpha^{e(d^n-1)}\right)\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\varphi(\mathfrak{F})}, \varphi(\mathfrak{P})\right) &= \mathrm{res}\left(\Phi_n^{\varphi(\mathfrak{F})}, \varphi(\mathfrak{P})\circ\varphi(\mathfrak{F})^{\circ n}\right)\\ &= \gamma^{ed^n}\prod_{j=1}^{\deg\Phi_n^{\mathfrak{F}}}\varphi(\mathfrak{P})\circ\varphi(\mathfrak{F})^{\circ n}(x_j,y_j)\\ &= \gamma^{ed^n}\prod_{j=1}^{\deg\Phi_n^{\mathfrak{F}}}\varphi(\mathfrak{P})(x_j,y_j)\ ,\end{aligned}$$

et donc (a,b) n'est pas un zéro de $\alpha^{e(d^n-1)}$. Ainsi, tout zéro de $\alpha^{e(d^n-1)}$ dans $\mathbb{C}^{2d+2}$ est aussi zéro de $\mathrm{res}(\mathfrak{F})$. Par conséquent, comme le polynôme $\mathrm{res}(\mathfrak{F}) \in \mathfrak{A}$ est primitif et irréductible sur $\mathbb{C}$ d'après le lemme A.9, il existe $c_n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ et $m_n \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha^{e(d^n-1)} = c_n\,\mathrm{res}(\mathfrak{F})^{m_n}$, et on a

$$\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P}\circ\mathfrak{F}^{\circ n}\right) = c_n\,\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P}\right)\mathrm{res}(\mathfrak{F})^{m_n}\,.$$

Il reste à déterminer c_n et m_n. Soit $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ l'unique morphisme d'anneaux qui vérifie

$$\varphi(\mathfrak{F}) = 2\mathfrak{F} \in \mathrm{Hom}_d^2(\mathfrak{A}) \quad \text{et} \quad \varphi(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P} \in \mathfrak{B}[x,y]_e\,.$$

Alors on a

$$\mathrm{res}\left(\Phi_n^{2\mathfrak{F}}, \mathfrak{P}\circ(2\mathfrak{F})^{\circ n}\right) = \varphi\left(\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P}\circ\mathfrak{F}^{\circ n}\right)\right) = c_n\,\mathrm{res}\left(\Phi_n^{2\mathfrak{F}}, \mathfrak{P}\right)\mathrm{res}(2\mathfrak{F})^{m_n}\,,$$

ce qui entraîne

$$2^{el_nd^n + \frac{e(d^n-1)\deg\Phi_n^{\mathfrak{F}}}{d-1}}\,\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P}\circ\mathfrak{F}^{\circ n}\right) = 2^{el_n+2dm_n}c_n\,\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P}\right)\mathrm{res}(\mathfrak{F})^{m_n}$$

puisque

$$(2\mathfrak{F})^{\circ n} = 2^{\frac{d^n-1}{d-1}}\mathfrak{F}^{\circ n} \quad \text{et} \quad \Phi_n^{2\mathfrak{F}} = 2^{l_n}\Phi_n^{\mathfrak{F}}\,, \quad \text{où} \quad l_n = \begin{cases}1 & \text{si } n = 1\\ \frac{\nu(n)}{d-1} & \text{si } n \geq 2\end{cases}\,,$$

et donc

$$m_n = \frac{e\,(d^n-1)\left(l_n(d-1) + \deg\Phi_n^{\mathfrak{F}}\right)}{2d(d-1)} = \frac{e\nu(n)\,(d^n-1)}{d(d-1)}\,.$$

Si $n = 1$ et $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathbb{Z}$ est l'unique morphisme d'anneaux tel que

$$\varphi(\mathfrak{F})(x, y) = \left(y^d, x^d\right) \in \mathrm{Hom}_d^2(\mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad \varphi(\mathfrak{P})(x, y) = y^e \in \mathbb{Z}[x, y]_e \,,$$

alors on a

$$\varphi\left(\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n}\right)\right) = 1 \,, \quad \varphi\left(\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P}\right)\right) = (-1)^e \quad \text{et} \quad \varphi\left(\mathrm{res}(\mathfrak{F})\right) = (-1)^d \,,$$

et donc $c_n = (-1)^{e(d+1)}$. Enfin, si $n \geq 2$ et $\varphi\colon \mathfrak{B} \to \mathbb{Z}$ est l'unique morphisme d'anneaux tel que

$$\varphi(\mathfrak{F})(x, y) = \left(x^d, y^d\right) \in \mathrm{Hom}_d^2(\mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad \varphi(\mathfrak{P})(x, y) = y^e \in \mathbb{Z}[x, y]_e \,,$$

alors on a

$$\varphi\left(\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n}\right)\right) = 1 \,, \quad \varphi\left(\mathrm{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P}\right)\right) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi\left(\mathrm{res}(\mathfrak{F})\right) = 1$$

puisque

$$\varphi(\mathfrak{F})^{\circ n}(x, y) = \left(x^{d^n}, y^{d^n}\right) \quad \text{et} \quad \Phi_n^{\varphi(\mathfrak{F})}(x, y) = y^{\nu(n)} \prod_{k \in D_n} C_k\left(\frac{x}{y}\right) \,,$$

où D_n est l'ensemble des diviseurs de $d^n - 1$ qui ne divisent pas $d^k - 1$, avec k un diviseur propre de n, et C_k, avec $k \in \mathbb{N}^*$, désigne le k-ième polynôme cyclotomique, et donc $c_n = 1$. Ceci complète la démonstration de la proposition. $\square$

Remarque 3.32. Soient K un corps algébriquement clos, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $\alpha \in K^\times$ et des points périodiques $(x_j, y_j) \in K^2 \setminus \{0\}$ pour F avec période n, avec $j \in \left\{1, \dots, \deg \Phi_n^F\right\}$, tels que

$$\Phi_n^F(x, y) = \alpha \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} (y_j x - x_j y) \,.$$

D'après la démonstration de la proposition 3.30, on a

$$\alpha^{d^n - 1} = \epsilon_n^{(1)} \, \mathrm{res}(F)^{\frac{\nu(n)\left(d^n - 1\right)}{d(d-1)}} \,,$$

où $\epsilon_n^{(1)} \in \{-1, 1\}$ est égal à -1 si et seulement si $n = 1$ et d est pair.

3.3. Polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle

Introduisons ici les polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle, qui sont en correspondance avec ses multiplicateurs (comparer à [Sil07, Section 4.5]).

Dans toute cette section, d désigne encore un entier supérieur ou égal à 2.

Soient K un corps algébriquement clos, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $z_1, \dots, z_{\deg \Phi_n^F}$ les racines du polynôme Φ_n^F dans $\mathbb{P}^1(K)$ répétées avec multiplicités. Pour tout $j \in \left\{1, \dots, \deg \Phi_n^F\right\}$, il existe un point périodique $(x_j, y_j) \in z_j$ pour F avec période divisant n. Il existe $\alpha \in K^\times$ tel que

$$\Phi_n^F(x, y) = \alpha \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} (y_j x - x_j y) \,.$$

Soit $P \in K[x,y]_2$ un polynôme premier avec Φ_n^F. Alors on a

$$\begin{aligned}\operatorname{res}\left(\Phi_n^F, \lambda P \circ F^{\circ n} - PD_n^F\right) &= \alpha^{2d^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} \left(\lambda P \circ F^{\circ n} - PD_n^F\right)(x_j, y_j) \\ &= \alpha^{2d^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} P(x_j, y_j)\left(\lambda - D_n^F(x_j, y_j)\right) .\end{aligned}$$

En particulier, les racines du polynôme

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^F, \lambda P \circ F^{\circ n} - PD_n^F\right) \in K[\lambda]$$

sont précisément les $D_n^F(x_j, y_j)$, avec $j \in \left\{1, \ldots, \deg \Phi_n^F\right\}$, puisque $P(x_j, y_j) \neq 0$ pour tout $j \in \left\{1, \ldots, \deg \Phi_n^F\right\}$. Rappelons maintenant que, si $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ est un point périodique pour f avec période n et $(x_0, y_0) \in z_0$ est un point périodique pour F avec période n, alors $D_n^F(x_0, y_0)$ est égal au multiplicateur de f en z_0 puisque l'endomorphisme ${}^tT_{(x_0,y_0)}F^{\circ n}$ de $\left(K^2\right)^*$ induit une homothétie de $L_{z_0}^{\perp}$ de rapport $D_n^F(x_0, y_0)$ qui est naturellement conjuguée à ${}^tT_{z_0}f^{\circ n}$. Par conséquent, si les racines du polynôme Φ_n^F sont précisément les points périodiques pour f avec période n, alors les racines du polynôme ci-dessus sont précisément les multiplicateurs de f en ses cycles avec période n et leurs multiplicités sont des multiples de n puisque f a le même multiplicateur en chaque point d'un cycle. En fait, comme cette hypothèse est vérifiée dans le cas du corps $\mathfrak{K}$ et de la fraction rationnelle $\mathfrak{f}$, ceci est vrai dans le cas général. Plus précisément, on le résultat suivant :

Proposition 3.33. *Soient K un corps, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $n \in \mathbb{N}^*$, $F \in \operatorname{Hom}_d^2(K)$ et $f = [F] \in \operatorname{Rat}_d(K)$. Alors il existe un unique polynôme unitaire $M_n^f \in K[\lambda]$ tel que, pour tout $P \in \overline{K}[x,y]_2$, on a*

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^F, P \circ F^{\circ n}\right) M_n^f(\lambda)^n = \operatorname{res}\left(\Phi_n^F, \lambda P \circ F^{\circ n} - PD_n^F\right) .$$

De plus, le polynôme M_n^f ne dépend que de f et on a

$$\deg M_n^f = \begin{cases} d+1 & si\ n = 1 \\ \frac{\nu(n)}{n} & si\ n \geq 2 \end{cases} .$$

Définition 3.34. Soient K un corps, $f \in \operatorname{Rat}_d(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme M_n^f est appelé le n-ième *polynôme multiplicateur* de f.

Avant de démontrer la proposition 3.33, rappelons que

$$\mathfrak{A} = \mathbb{Z}\left[\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d, \mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_d\right] \quad \text{et} \quad \mathfrak{F} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) \in \operatorname{Hom}_d^2(\mathfrak{A}),$$

où $\mathfrak{G}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{A}[x,y]_d$ sont donnés par

$$\mathfrak{G}(x,y) = \sum_{j=0}^{d} \mathfrak{a}_j x^j y^{d-j} \quad \text{et} \quad \mathfrak{H}(x,y) = \sum_{j=0}^{d} \mathfrak{b}_j x^j y^{d-j} .$$

Notons encore $\mathfrak{K}$ le corps des fractions de $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ une clôture algébrique de $\mathfrak{K}$ et

$$\mathfrak{f} = [\mathfrak{F}] \in \operatorname{Rat}_d(\mathfrak{K}) .$$

Enfin, soient $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}_1$ et $\mathfrak{c}_2$ des indéterminées sur $\mathfrak{A}$, et définissons aussi

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\left[\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2\right] \quad \text{et} \quad \mathfrak{P}(x,y) = \mathfrak{c}_2 x^2 + \mathfrak{c}_1 xy + \mathfrak{c}_0 y^2 \in \mathfrak{B}[x,y]_2.$$

Le résultat suivant permet de démontrer la proposition 3.33 avec un argument de spécialisation (comparer à [**Sil98**, Theorem 4.5] et [**Sil07**, Theorem 4.50]).

LEMME 3.35. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique polynôme $M_n^{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{K}[\lambda]$ qui est unitaire et vérifie*

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n}\right) M_n^{\mathfrak{f}}(\lambda)^n = \operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \lambda \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n} - \mathfrak{P} D_n^{\mathfrak{F}}\right) .$$

De plus, il existe $m_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{res}(\mathfrak{F})^{m_n} M_n^{\mathfrak{f}}$ est dans $\mathfrak{A}[\lambda]$ et on a

$$\deg M_n^{\mathfrak{f}} = \begin{cases} d+1 & si\ n = 1 \\ \frac{\nu(n)}{n} & si\ n \geq 2 \end{cases} .$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.35. Soient $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathfrak{K}}\right)$, avec $r \in \mathbb{N}$, les points périodiques pour $\mathfrak{f}$ avec période n. Pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, il existe un point périodique $(x_j, y_j) \in z_j$ pour $\mathfrak{F}$ avec période n. D'après le lemme 3.23, les racines du polynôme $\Phi_n^{\mathfrak{F}}$ sont simples et sont précisément $z_1, \dots, z_r$. Par suite, on a $r = \deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}$ et il existe $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}^\times$ tel que

$$\Phi_n^{\mathfrak{F}}(x, y) = \alpha \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}} (y_j x - x_j y) .$$

Alors on a

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n}\right) = \alpha^{2d^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}} \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n}(x_j, y_j) = \alpha^{d^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}} \mathfrak{P}(x_j, y_j) \neq 0$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \lambda \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n} - \mathfrak{P} D_n^{\mathfrak{F}}\right) &= \alpha^{2d^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}} \left(\lambda \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n} - \mathfrak{P} D_n^{\mathfrak{F}}\right)(x_j, y_j) \\ &= \alpha^{2d^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}} \mathfrak{P}(x_j, y_j) \left(\lambda - D_n^{\mathfrak{F}}(x_j, y_j)\right) . \end{aligned}$$

De plus, pour tout $j \in \left\{1, \dots, \deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}\right\}$, le terme $D_n^{\mathfrak{F}}(x_j, y_j)$ est égal au multiplicateur de $\mathfrak{f}$ en z_j. Par conséquent, comme $\mathfrak{f}$ a le même multiplicateur en chaque point d'un cycle, on a

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \lambda \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n} - \mathfrak{P} D_n^{\mathfrak{F}}\right) = \operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n}\right) \prod_{j=1}^{\frac{\deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}}{n}} (\lambda - \lambda_j)^n ,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_{\frac{\deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}}{n}}$ sont les multiplicateurs de $\mathfrak{f}$ en ses cycles avec période n. Posons

$$M_n^{\mathfrak{f}}(\lambda) = \prod_{j=1}^{\frac{\deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}}{n}} (\lambda - \lambda_j) \in \overline{\mathfrak{K}}[\lambda] .$$

Alors, d'après le lemme A.6, $M_n^{\mathfrak{f}}$ est l'unique polynôme unitaire dans $\overline{\mathfrak{K}}[\lambda]$ qui vérifie

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n}\right) M_n^{\mathfrak{f}}(\lambda)^n = \operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \lambda \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n} - \mathfrak{P} D_n^{\mathfrak{F}}\right) .$$

De plus, on a

$$\deg M_n^{\mathfrak{f}} = \frac{\deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}}{n} = \begin{cases} d+1 & \text{si } n = 1 \\ \frac{\nu(n)}{d-1} & \text{si } n \geq 2 \end{cases} .$$

Il reste à démontrer qu'il existe $m_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{res}(\mathfrak{F})^{m_n} M_n^{\mathfrak{f}}$ est dans $\mathfrak{A}[\lambda]$. D'après la proposition 3.30, on a

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \mathfrak{P}\right) \operatorname{res}(\mathfrak{F})^{m_n} M_n^{\mathfrak{f}}(\lambda)^n = \operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \lambda \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n} - \mathfrak{P} D_n^{\mathfrak{F}}\right) ,$$

où $m_n = \frac{2\nu(n)(d^n-1)}{d(d-1)}$. Notons φ_0 et φ_∞ les uniques morphismes de $\overline{\mathfrak{K}}$-algèbres de $\overline{\mathfrak{K}}[\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2]$ dans $\overline{\mathfrak{K}}$ tels que

$$\varphi_0(\mathfrak{P})(x,y) = x^2 \in \mathfrak{A}[x,y]_2 \quad \text{et} \quad \varphi_\infty(\mathfrak{P})(x,y) = y^2 \in \mathfrak{A}[x,y]_2 .$$

Alors on a

$$\Phi_n(0,1) \operatorname{res}(\mathfrak{F})^{m_n} M_n^{\mathfrak{f}}(\lambda)^n = \operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \lambda \varphi_0(\mathfrak{P}) \circ \mathfrak{F}^{\circ n} - \varphi_0(\mathfrak{P}) D_n^{\mathfrak{F}}\right) \in \mathfrak{A}[\lambda]$$

et

$$\Phi_n(1,0) \operatorname{res}(\mathfrak{F})^{m_n} M_n^{\mathfrak{f}}(\lambda)^n = \operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \lambda \varphi_\infty(\mathfrak{P}) \circ \mathfrak{F}^{\circ n} - \varphi_\infty(\mathfrak{P}) D_n^{\mathfrak{F}}\right) \in \mathfrak{A}[\lambda] .$$

En particulier, $\left(M_n^{\mathfrak{f}}\right)^n$ est dans $\mathfrak{K}[\lambda]$, et donc $M_n^{\mathfrak{f}}$ l'est aussi d'après le lemme A.3. Par suite, comme $M_n^{\mathfrak{f}}$ est également unitaire, il existe $q_n \in \mathfrak{A} \setminus \{0\}$ et un polynôme primitif $\widetilde{M_n^{\mathfrak{f}}} \in \mathfrak{A}[\lambda]$ tels que $M_n^{\mathfrak{f}} = \frac{1}{q_n} \widetilde{M_n^{\mathfrak{f}}}$. D'après ce qui précède et le lemme de Gauss, q_n^n divise $\Phi_n(0,1) \operatorname{res}(\mathfrak{F})^{m_n}$ et $\Phi_n(1,0) \operatorname{res}(\mathfrak{F})^{m_n}$, et donc il divise aussi $\operatorname{res}(\mathfrak{F})^{m_n}$ puisque $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(0,1)$ et $\Phi_n^{\mathfrak{F}}(1,0)$ sont premiers entre eux d'après le lemme 3.31. Par conséquent, q_n divise $\operatorname{res}(\mathfrak{F})^{\left\lfloor \frac{m_n}{n} \right\rfloor}$, et donc $\operatorname{res}(\mathfrak{F})^{\left\lfloor \frac{m_n}{n} \right\rfloor} M_n^{\mathfrak{f}}$ est dans $\mathfrak{A}[\lambda]$. Ainsi, le lemme est démontré. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 3.33.

Démonstration de la proposition 3.33. Écrivons

$$F(x,y) = \left(\sum_{j=0}^{d} a_j x^j y^{d-j}, \sum_{j=0}^{d} b_j x^j y^{d-j} \right) \in \operatorname{Hom}_d^2(K) .$$

Soit $\varphi\colon \mathfrak{A} \to K$ l'unique morphisme d'anneaux qui vérifie $\varphi(\mathfrak{a}_j) = a_j$ et $\varphi(\mathfrak{b}_j) = b_j$ pour tout $j \in \{0, \ldots, d\}$, de sorte que $\varphi(\mathfrak{F}) = F$. Comme $\operatorname{res}(F) \in K^\times$, il existe un unique morphisme d'anneaux $\varphi\colon \mathfrak{A}\left[\frac{1}{\operatorname{res}(\mathfrak{F})}\right] \to K$ qui prolonge φ, où

$$\mathfrak{A}\left[\frac{1}{\operatorname{res}(\mathfrak{F})}\right] = \left\{ \frac{a}{\operatorname{res}(\mathfrak{F})^m} : a \in \mathfrak{A} \text{ et } m \in \mathbb{N} \right\}$$

est la sous-$\mathfrak{A}$-algèbre de $\mathfrak{K}$ engendrée par $\frac{1}{\operatorname{res}(\mathfrak{F})}$. Posons

$$M_n^f = \varphi\left(M_n^{\mathfrak{f}}\right) \in K[\lambda] ,$$

qui est bien défini, unitaire et de degré désiré. De plus, pour tout $P \in \overline{K}[x,y]_2$, il existe un unique morphisme d'anneaux $\varphi_P\colon \mathfrak{B}\left[\frac{1}{\operatorname{res}(\mathfrak{F})}\right] \to \overline{K}$ qui prolonge φ et vérifie $\varphi_P(\mathfrak{P}) = P$, et on a

$$\begin{aligned} \operatorname{res}\left(\Phi_n^F, P \circ F^{\circ n}\right) M_n^f(\lambda)^n &= \varphi_P\left(\operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, \lambda \mathfrak{P} \circ \mathfrak{F}^{\circ n} - \mathfrak{P} D_n^{\mathfrak{F}}\right)\right) \\ &= \operatorname{res}\left(\Phi_n^F, \lambda P \circ F^{\circ n} - P D_n^F\right) . \end{aligned}$$

Montrons maintenant que M_n^f est l'unique polynôme unitaire dans $K[\lambda]$ qui vérifie l'égalité ci-dessus. D'après le lemme A.6, il suffit pour cela de montrer qu'il existe $P_0 \in \overline{K}[x,y]_2$ tel que

$$\mathrm{res}\left(\Phi_n^F, P_0 \circ F^{\circ n}\right) \neq 0\,.$$

Comme $\overline{K}$ est infini, il existe $(x_0, y_0) \in \overline{K}^2 \setminus \{0\}$ tel que $[x_0 \colon y_0]$ n'est pas racine du polynôme Φ_n^F, et on a

$$\mathrm{res}\left(\Phi_n^F, P_0 \circ F\right) = \mathrm{res}\left(\Phi_n^F, P_0\right) \mathrm{res}(F)^{\frac{\nu(n)\left(d^n-1\right)}{d(d-1)}} \neq 0$$

d'après la proposition 3.30, où

$$P_0(x,y) = \left(y_0 x - x_0 y\right)^2 \in \overline{K}[x,y]_2\,.$$

Ainsi, l'unicité d'un tel polynôme M_n^f est démontrée.

Enfin, montrons que le polynôme M_n^f ne dépend que de f. Pour tout $t \in K^\times$, on a

$$(tF)^{\circ n} = t^{\frac{d^n-1}{d-1}} F^{\circ n} \quad \text{et} \quad D_n^{tF} = t^{\frac{2\left(d^n-1\right)}{d-1}} D_n^F$$

et, d'après le corollaire 3.18, on a

$$\Phi_n^{tF} = t^{l_n} \Phi_n^F\,, \quad \text{où} \quad l_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ \frac{\nu(n)}{d-1} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

Par conséquent, pour tout $t \in K^\times$ et tout $P \in \overline{K}[x,y]_2$, on a

$$\mathrm{res}\left(\Phi_n^{tF}, \lambda P \circ (tF)^{\circ n} - P D_n^{tF}\right) = t^{m_n} \mathrm{res}\left(\Phi_n^F, \lambda P \circ F^{\circ n} - P D_n^F\right)$$

et

$$\mathrm{res}\left(\Phi_n^{tF}, P \circ (tF)^{\circ n}\right) = t^{m_n} \mathrm{res}\left(\Phi_n^F, P \circ F^{\circ n}\right)\,,$$

où

$$m_n = 2 l_n d^n + \frac{2\left(d^n - 1\right) \deg \Phi_n^F}{d-1}\,,$$

et donc

$$\mathrm{res}\left(\Phi_n^{tF}, P \circ (tF)^{\circ n}\right) M_n^f(\lambda)^n = \mathrm{res}\left(\Phi_n^{tF}, \lambda P \circ (tF)^{\circ n} - P D_n^{tF}\right)\,.$$

Ceci complète la démonstration de la proposition. □

Remarque 3.36. Si K est un corps fini, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(K)$, $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors il n'y a pas nécessairement unicité d'un polynôme unitaire $M_n^f \in K[\lambda]$ tel que, pour tout $P \in K[x,y]_2$, on a

$$\mathrm{res}\left(\Phi_n^F, P \circ F^{\circ n}\right) M_n^f(\lambda)^n = \mathrm{res}\left(\Phi_n^F, \lambda P \circ F^{\circ n} - P D_n^F\right)\,.$$

Par exemple, si p est un nombre premier,

$$K = \mathbb{F}_p\,, \quad F(x,y) = \left(x^{p^2}, y^{p^2}\right) \in \mathrm{Hom}_{p^2}^2(K) \quad \text{et} \quad f = [F] \in \mathrm{Rat}_{p^2}(K)\,,$$

alors, pour tout polynôme unitaire $M_1^f \in K[\lambda]$ et tout $P \in K[x,y]_2$, on a

$$\mathrm{res}\left(\Phi_1^F, P \circ F\right) M_1^f(\lambda) = \mathrm{res}\left(\Phi_1^F, \lambda P \circ F - P D_1^F\right) = 0$$

puisque les racines de P dans $\mathbb{P}^1\left(\mathbb{F}_{p^2}\right)$ sont des racines communes aux polynômes

$$\Phi_1^F \in K[x,y]_{p^2+1} \quad \text{et} \quad \lambda P \circ F - P D_1^F \in K[\lambda][x,y]_{2p^2}\,.$$

EXEMPLE 3.37. Soient K un corps, $f \in \mathrm{Poly}_d^U(K)$,

$$F(x,y) = \left(y^d f\left(\frac{x}{y}\right), y^d\right) \in \mathrm{Hom}_d^2(K) \quad \text{et} \quad \widehat{f} = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)\,.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a

$$F^{\circ n}(x,y) = \left(y^{d^n} f^{\circ n}\left(\frac{x}{y}\right), y^{d^n}\right) \quad \text{et} \quad D_n^F(x,y) = y^{2d^n-2}\left(f^{\circ n}\right)'\left(\frac{x}{y}\right)$$

et, d'après la proposition 3.11 et l'exemple 3.16, on a

$$\Phi_n^F(x,y) = y^{\deg \Phi_n^F}\Phi_n^f\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \deg \Phi_n^F = \begin{cases} d+1 & \text{si } n=1 \\ \nu(n) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

Par suite, en posant $P(x,y) = y^2$, on a

$$\mathrm{res}\left(\Phi_n^F, P \circ F^{\circ n}\right) = \mathrm{res}\left(y^{\deg \Phi_n^F}\Phi_n^f\left(\frac{x}{y}\right), y^{2d^n}\right) = 1$$

puisque le polynôme $\Phi_n^f \in K[z]$ est unitaire et

$$\begin{aligned} \mathrm{res}\left(\Phi_n^F, \lambda P \circ F^{\circ n} - PD_n^F\right) &= \mathrm{res}\left(y^{\deg \Phi_n^F}\Phi_n^f\left(\frac{x}{y}\right), y^{2d^n}\left(\lambda - \left(f^{\circ n}\right)'\left(\frac{x}{y}\right)\right)\right) \\ &= \begin{cases} \lambda\,\mathrm{res}_z\left(\Phi_1^f, \lambda - f'(z)\right) & \text{si } n=1 \\ \mathrm{res}_z\left(\Phi_n^f(z), \lambda - \left(f^{\circ n}\right)'(z)\right) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$M_n^{\widehat{f}}(\lambda) = \mu_n(\lambda) M_n(\lambda)\,, \quad \text{où} \quad \mu_n(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \text{si } n=1 \\ 1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

Notons qu'une conséquence immédiate du lemme 3.14 est le résultat ci-dessous, que nous préciserons dans la section 4.1.

PROPOSITION 3.38. *Soient A un anneau intègre, K son corps des fractions, $F \in \mathrm{Hom}_d^2(A)$, $f = [F] \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $m_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{res}(F)^{m_n} M_n^f$ est dans $A[\lambda]$.*

REMARQUE 3.39. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme le polynôme $M_n^{\mathfrak{f}}$ ne dépend que de $\mathfrak{f}$, ses coefficients sont des éléments homogènes de degré 0 dans $\mathfrak{A}\left[\frac{1}{\mathrm{res}(\mathfrak{F})}\right]$.

On a le résultat ci-dessous, qui est analogue à la proposition 1.43 et traduit l'invariance des multiplicateurs par conjugaison.

PROPOSITION 3.40. *Soient K un corps, f et g deux fractions rationnelles dans $\mathrm{Rat}_d(K)$ qui sont conjuguées et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a $M_n^f = M_n^g$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Il existe $F \in f$, $G \in g$ et $\phi \in \mathrm{Hom}_1^2\left(\overline{K}\right)$ tels que $G = \phi \circ F \circ \phi^{-1}$. On a

$$D^G = \left(D^\phi \circ F \circ \phi^{-1}\right)\left(D^F \circ \phi^{-1}\right) D^{\phi^{-1}} = D^F \circ \phi^{-1}$$

puisque $D^\phi = \mathrm{res}(\phi)$ et $D^{\phi^{-1}} = \mathrm{res}(\phi)^{-1}$ et, d'après la proposition 3.19, on a

$$\Phi_n^G = \alpha_n \Phi_n^F \circ \phi^{-1}\,, \quad \text{où} \quad \alpha_n = \begin{cases} \mathrm{res}(\phi) & \text{si } n=1 \\ 1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

Par suite, pour tout $P \in \overline{K}[x,y]_2$, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}\left(\Phi_n^G, P \circ G^{\circ n}\right) M_n^g(\lambda)^n &= \alpha_n^{2d^n} \operatorname{res}\left(\Phi_n^F \circ \phi^{-1}, P \circ \phi \circ F^{\circ n} \circ \phi^{-1}\right) M_n^g(\lambda)^n \\
&= \frac{\alpha_n^{2d^n}}{\operatorname{res}(\phi)^{2d^n \deg \Phi_n^F}} \operatorname{res}\left(\Phi_n^F, P \circ \phi \circ F^{\circ n}\right) M_n^g(\lambda)^n
\end{aligned}$$

d'une part et

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}\left(\Phi_n^G, P \circ G^{\circ n}\right) M_n^g(\lambda)^n &= \operatorname{res}\left(\Phi_n^G, \lambda P \circ G^{\circ n} - P D_n^G\right) \\
&= \alpha_n^{2d^n} \\
&\qquad \operatorname{res}\left(\Phi_n^F \circ \phi^{-1}, \left(\lambda P \circ \phi \circ F^{\circ n} - (P \circ \phi) D^F\right) \circ \phi^{-1}\right) \\
&= \frac{\alpha_n^{2d^n}}{\operatorname{res}(\phi)^{2d^n \deg \Phi_n^F}} \operatorname{res}\left(\Phi_n^F, \lambda P \circ \phi - (P \circ \phi) D^F\right) \\
&= \frac{\alpha_n^{2d^n}}{\operatorname{res}(\phi)^{2d^n \deg \Phi_n^F}} \operatorname{res}\left(\Phi_n^F, P \circ \phi \circ F^{\circ n}\right) M_n^f(\lambda)^n
\end{aligned}$$

d'autre part d'après le lemme A.10. Par conséquent, on a $M_n^f = M_n^g$ d'après le lemme A.6. Ainsi, la proposition est démontrée. $\square$

Le résultat suivant donne une autre description des polynômes multiplicateurs. Il permet aussi de les calculer de manière plus efficace que la proposition 3.33 car il fait intervenir un résultant avec un polynôme de degré deux fois plus petit.

Proposition 3.41. *Soient K un corps, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $n \in \mathbb{N}^*$, $F \in \operatorname{Hom}_d^2(K)$ et $f = [F] \in \operatorname{Rat}_d(K)$. Alors, pour tout $P \in \overline{K}[x,y]_1$, on a*

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^F, P \circ F^{\circ n}\right) M_n^f(\lambda)^n = \operatorname{res}\left(\Phi_n^F, (\lambda + d^n)\, P \circ F^{\circ n} - P T_n^F\right) .$$

Afin de démontrer la proposition 3.41, énonçons le lemme suivant, qui décrit les racines des polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle.

Lemme 3.42. *Soient K un corps, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $n \in \mathbb{N}^*$, $F \in \operatorname{Hom}_d^2(K)$ et $f = [F] \in \operatorname{Rat}_d(K)$. Alors on a*

$$M_n^f(\lambda)^n = \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^{\mathfrak{F}}} (\lambda - \lambda_j) ,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_{\deg \Phi_n^F}$ sont les multiplicateurs de $f^{\circ n}$ en les racines du polynôme Φ_n^F dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ répétées avec multiplicités.

Démonstration du lemme 3.42. Soient $z_1, \dots, z_{\deg \Phi_n^F}$ les racines du polynôme Φ_n^F dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ répétées avec multiplicités. Pour tout $j \in \left\{1, \dots, \deg \Phi_n^F\right\}$, comme z_j est un point périodique pour f avec période divisant n, il existe un point périodique $(x_j, y_j) \in z_j$ pour F avec période divisant n. Il existe $\alpha \in \overline{K}^\times$ tel que

$$\Phi_n^F(x,y) = \alpha \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} (y_j x - x_j y) .$$

Alors, pour tout $P \in \overline{K}[x,y]_2$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{res}\left(\Phi_n^F, P \circ F^{\circ n}\right) M_n^f(\lambda)^n &= \operatorname{res}\left(\Phi_n^F, \lambda P \circ F^{\circ n} - P D_n^F\right) \\ &= \alpha^{2d^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} P\left(x_j, y_j\right)\left(\lambda - D_n^F\left(x_j, y_j\right)\right) \\ &= \operatorname{res}\left(\Phi_n^F, P \circ F^{\circ n}\right) \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} \left(\lambda - D_n^F\left(x_j, y_j\right)\right) .\end{aligned}$$

De plus, comme $\overline{K}$ est infini, il existe $P \in \overline{K}[x,y]_2$ tel que

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^F, P \circ F^{\circ n}\right) = \alpha^{2d^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} P\left(x_j, y_j\right) \neq 0 .$$

Par conséquent, on a

$$M_n^f(\lambda)^n = \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^f} \left(\lambda - D_n^F\left(x_j, y_j\right)\right) = \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} \left(\lambda - \lambda_j\right) ,$$

où λ_j est le multiplicateur de $f^{\circ n}$ en son point fixe z_j, avec $j \in \left\{1, \ldots, \deg \Phi_n^F\right\}$. Ainsi, le lemme est démontré. □

Démonstration de la proposition 3.41. Soient $z_1, \ldots, z_{\deg \Phi_n^F}$ les racines de Φ_n^F dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ répétées avec multiplicités. Pour tout $j \in \left\{1, \ldots, \deg \Phi_n^F\right\}$, comme z_j est un point périodique pour f avec période divisant n, il existe un point périodique $(x_j, y_j) \in z_j$ pour F avec période n. Il existe $\alpha \in \overline{K}^\times$ tel que

$$\Phi_n^F(x,y) = \alpha \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} \left(y_j x - x_j y\right) .$$

Alors, pour tout $P \in \overline{K}[x,y]_1$, on a

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^F, P \circ F^{\circ n}\right) = \alpha^{d^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} P \circ F^{\circ n}\left(x_j, y_j\right) = \alpha^{d^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} P\left(x_j, y_j\right)$$

et

$$\begin{aligned}\operatorname{res}\left(\Phi_n^F, \lambda P \circ F^{\circ n} - P D_n^F\right) &= \alpha^{d^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} \left(\left(\lambda + d^n\right) P \circ F^{\circ n} - P T_n^F\right)\left(x_j, y_j\right) \\ &= \alpha^{d^n} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^F} P\left(x_j, y_j\right)\left(\lambda + d^n - T_n^F\left(x_j, y_j\right)\right) .\end{aligned}$$

De plus, pour tout $j \in \left\{1, \ldots, \deg \Phi_n^F\right\}$, le terme $T_n^F\left(x_j, y_j\right) - d^n$ est égal au multiplicateur de $f^{\circ n}$ en z_j. Par conséquent, d'après le lemme 3.42, on a

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^F, P \circ F^{\circ n}\right) M_n^f(\lambda)^n = \operatorname{res}\left(\Phi_n^F, \left(\lambda + d^n\right) P \circ F^{\circ n} - P T_n^F\right)$$

pour tout $P \in \overline{K}[x,y]_1$. Ainsi, la proposition est démontrée. □

Enfin, décrivons la correspondance entre les multiplicateurs et les polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle. Le résultat suivant est analogue à la proposition 1.44 et se déduit directement de la proposition 3.22 et du lemme 3.42.

PROPOSITION 3.43. *Soient K un corps algébriquement clos, $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\lambda_0 \in K$ est une racine du polynôme M_n^f si et seulement si*
- *λ_0 est le multiplicateur de f en un cycle avec période n,*
- *ou λ_0 est égal à 1 et il existe $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = kl$ et f a un cycle avec période k et multiplicateur une racine primitive l-ième de l'unité,*
- *ou λ_0 est égal à 1, K a une caractéristique $p > 0$ et il existe $k, l, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = klp^m$ et f a un cycle avec période k et multiplicateur une racine primitive l-ième de l'unité.*

Une conséquence immédiate de la proposition 3.43 est le résultat ci-dessous, qui est analogue au corollaire 1.45 et nous sera utile pour répondre à la question 4.15 dans le cas des fractions rationnelles quadratiques.

COROLLAIRE 3.44. *Soient K un corps algébriquement clos, A un sous-anneau de K, $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors tous les multiplicateurs de f en ses cycles avec période n sont dans A si et seulement si le polynôme M_n^f est scindé sur A.*

Enfin, on peut préciser la proposition 3.43 dans le cas des fractions rationnelles sur un corps définies sur un corps de caractéristique nulle. Plus précisément, on a le résultat ci-dessous, qui est analogue à la proposition 1.46 et est une conséquence immédiate de la proposition 3.27 et du lemme 3.42.

PROPOSITION 3.45. *Soient K un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, $f \in \mathrm{Rat}_d(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $\lambda_0 \in K$,*
- *soit λ_0 est différent de 1 et $\mathrm{ord}_{\lambda_0} M_n^f$ est égal au nombre de cycles pour f avec période n et multiplicateur λ_0,*
- *soit λ_0 est égal à 1 et on a*

$$\mathrm{ord}_{\lambda_0} M_n^f = p + \sum_{j=1}^{p} \mu_j + \sum_{j=1}^{q} \nu_j \,,$$

où $\mu_1, \dots, \mu_p$, avec $p \in \mathbb{N}$, sont les multiplicités paraboliques de f en ses cycles avec période n et multiplicateur 1 et $\nu_1, \dots, \nu_q$, avec $q \in \mathbb{N}$, sont les multiplicités paraboliques de f en ses cycles avec période un diviseur propre k de n et multiplicateur une racine primitive $\frac{n}{k}$-ième de l'unité.

Chapitre 4

Étude des polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle

Nous abordons dans ce chapitre deux questions concernant les polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle.

Soit $d \geq 2$ un entier, et rappelons que $\mathfrak{A}$ est un anneau de polynômes à coefficients entiers, $\mathfrak{K}$ est son corps des fractions, $\mathfrak{F} \in \mathrm{Hom}_d^2(\mathfrak{A})$ est le couple de polynômes homogènes de degré d dont les coefficients sont des indéterminées et $\mathfrak{f} \in \mathrm{Rat}_d(\mathfrak{K})$ est la fraction rationnelle induite par $\mathfrak{F}$. Dans la section 4.1, nous examinons les coefficients des polynômes multiplicateurs $M_n^{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{K}[\lambda]$ de $\mathfrak{f}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons montré dans le chapitre 4 que les coefficients des polynômes $M_n^{\mathfrak{f}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont des éléments homogènes de degré 0 dans $\mathfrak{K}$ ayant pour dénominateurs des puissances de $\mathrm{res}(\mathfrak{F})$. Nous étudions la dégénérescence de certaines familles de fractions rationnelles afin d'identifier la puissance maximale de $\mathrm{res}(\mathfrak{F})$ apparaissant dans ces dénominateurs. En d'autres termes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous déterminons l'entier m_n minimal tel que $\mathrm{res}(\mathfrak{F})^{m_n} M_n^{\mathfrak{f}}$ est dans $\mathfrak{A}[\lambda]$. Enfin, nous donnons également une expression des coefficients constants $M_n^{\mathfrak{f}}(0)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, des polynômes multiplicateurs de $\mathfrak{f}$.

Dans la section 4.2, nous examinons les fractions rationnelles dont tous les polynômes multiplicateurs sont scindés sur certains anneaux d'entiers. Plus précisément, nous montrons que toute fraction rationnelle quadratique dont tous les multiplicateurs sont dans l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire donné est une application puissance, une application de Tchebychev ou un exemple de Lattès. En particulier, ceci répond à une question de Milnor dans le cas des fractions rationnelles quadratiques.

4.1. Résultant et coefficients des polynômes multiplicateurs

Nous étudions ici les dénominateurs des coefficients des polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle.

Dans toute cette section, d désigne un entier fixé supérieur ou égal à 2.

Rappelons que

$$\mathfrak{A} = \mathbb{Z}\left[\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d, \mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_d\right] \quad \text{et} \quad \mathfrak{F} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) \in \mathrm{Hom}_d^2(\mathfrak{A}),$$

où $\mathfrak{G}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{A}[x, y]_d$ sont donnés par

$$\mathfrak{G}(x, y) = \sum_{j=0}^{d} \mathfrak{a}_j x^j y^{d-j} \quad \text{et} \quad \mathfrak{H}(x, y) = \sum_{j=0}^{d} \mathfrak{b}_j x^j y^{d-j}.$$

Notons encore également $\mathfrak{K}$ le corps des fractions de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{f} = [\mathfrak{F}] \in \mathrm{Rat}_d(\mathfrak{K})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le lemme 3.35, il existe $m_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{res}(\mathfrak{F})^{m_n} M_n^{\mathfrak{f}}$ est dans $\mathfrak{A}[\lambda]$ (comparer à [**Sil98**, Theorem 4.5] et [**Sil07**, Theorem 4.50]). On souhaite ici déterminer l'entier m_n minimal avec cette propriété. De manière équivalente, les coefficients de $M_n^{\mathfrak{f}}$ sont dans $\mathfrak{A}\left[\frac{1}{\operatorname{res}(\mathfrak{F})}\right]$ et on cherche la puissance maximale m_n de $\operatorname{res}(\mathfrak{F})$ apparaissant dans leurs dénominateurs. On a le résultat ci-dessous.

Rappelons que

$$\nu(n) = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) d^k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où $\mu\colon \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$ désigne la fonction de Möbius.

THÉORÈME 4.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons*

$$\mathfrak{A} = \mathbb{Z}\left[\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d, \mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_d\right] \quad \textit{et} \quad \mathfrak{F} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) \in \operatorname{Hom}_d^2(\mathfrak{A}),$$

où $\mathfrak{G}, \mathfrak{H} \in \mathfrak{A}[x, y]_d$ sont donnés par

$$\mathfrak{G}(x, y) = \sum_{j=0}^{d} \mathfrak{a}_j x^j y^{d-j} \quad \textit{et} \quad \mathfrak{H}(x, y) = \sum_{j=0}^{d} \mathfrak{b}_j x^j y^{d-j}.$$

Notons aussi $\mathfrak{K}$ le corps des fractions de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{f} = [\mathfrak{F}] \in \operatorname{Rat}_d(\mathfrak{K})$. Alors le polynôme $\operatorname{res}(\mathfrak{F})^{\frac{\nu(n)}{d}} M_n^{\mathfrak{f}}$ *est dans $\mathfrak{A}[\lambda]$ et son coefficient constant n'est pas divisible par* $\operatorname{res}(\mathfrak{F})$.

Afin de démontrer le théorème 4.1, nous comparons les comportements asymptotiques du résultant et des multiplicateurs lorsqu'une certaine famille de fractions rationnelles complexes de degré d dégénère en une fraction rationnelle de degré $d-1$ vérifiant certaines hypothèses. Nous montrons ensuite ces hypothèses sont en un certain sens génériques pour conclure.

Pour étudier la dégénérescence d'une famille de fractions rationnelles quadratiques, introduisons les polynômes dynatomiques d'un élément $F \in \operatorname{Hom}_1^2(K)$ dont aucune itérée n'induit la fraction I, qui induit l'application identité, où K est un corps. Soient K un corps, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $F \in \operatorname{Hom}_1^2(K)$ et $f = [F] \in \operatorname{Rat}_1(K)$ tels que $f^{\circ n} \neq I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$P_n^F(x, y) = y G_n^F(x, y) - x H_n^F(x, y) \in K[x, y]_2.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n^F est non nul et ses racines dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ sont précisément les points périodiques pour f avec période divisant n. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute racine de P_1^F dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ est aussi racine de P_n^F. De plus, si $z_0 \in \mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ est une racine double de P_1^F et $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a $D^F(x_0, y_0) = 0$, ce qui entraîne $D_n^F(x_0, y_0) = 0$, et donc z_0 est racine double de P_n^F. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n^F \in K^\times$ tel que $P_n^F = \alpha_n^F P_1^F$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Phi_n^F = \prod_{k|n} P_k^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)} = \begin{cases} P_1^F & \text{si } n = 1 \\ \prod_{k|n} \left(\alpha_n^F\right)^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

Alors $\left(\Phi_n^F\right)_{n \geq 1}$ est l'unique suite d'éléments de $K[x, y]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$y G_n^F(x, y) - x H_n^F(x, y) = \prod_{k|n} \Phi_k^F(x, y).$$

De plus, pour tout $\delta \in A[x, y]_e$ non nul, avec $e \in \mathbb{N}$, on a

$$\Phi_n^{\delta F} = \left(\prod_{k|n} \prod_{l=0}^{k-1} \left(\delta \circ F^{\circ l}\right)^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)(e+1)^{k-1-l}}\right) \Phi_n^F$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la formule d'inversion de Möbius.

Afin de démontrer le théorème 4.1, énonçons d'abord le résultat ci-dessous, qui décrit le comportement asymptotique des multiplicateurs d'une certaine famille de fractions rationnelles de degré d qui dégénère en une fraction rationnelle de degré $d-1$ envoyant $[0\colon 1]$ sur $[1\colon 0]$.

Lemme 4.2. *Soient $f_0 \in \mathrm{Rat}_{d-1}(\mathbb{C})$, $F_0 \in f_0$ de la forme*

$$F_0(x,y) = (G_0(x,y), x^e H_0(x,y)) \ , \quad \textit{avec} \quad e \in \{1,\dots,n-1\} \quad \textit{et} \quad H_0(0,1) \neq 0\,,$$

et $n \in \mathbb{N}^*$ qui vérifient les trois conditions suivantes :

(1) $[0\colon 1]$ n'est pas un point périodique pour f_0 avec période au plus n,

(2) $[0\colon 1]$ n'est pas une valeur critique pour $f_0^{\circ n}$,

(3) f_0 n'a pas de cycle superattractif avec période n.

Posons

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(xG_0(x,y), \left(x^{e+1} + ty^{e+1}\right) H_0(x,y)\right) \in \mathrm{Hom}_d^2\left(\mathbb{C}[t]\right) \,.$$

Alors on a

$$\mathrm{ord}_0 \,\mathrm{res}(\boldsymbol{F}) = 1 \quad \textit{et} \quad \mathrm{ord}_0\, c_j \geq \frac{-\nu(n)}{d}$$

pour tout $j \in \left\{0,\dots,\deg M_n^{\boldsymbol{f}}\right\}$, avec égalité si $j=0$, où

$$\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{F}] \in \mathrm{Rat}_d\left(\mathbb{C}(t)\right) \quad \textit{et} \quad M_n^{\boldsymbol{f}}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\deg M_n^{\boldsymbol{f}}} c_j \lambda^j \in \mathbb{C}(t)[\lambda]\,.$$

Démonstration du lemme 4.2. On a

$$\mathrm{res}(\boldsymbol{F})(t) = tH_0(0,1)\,\mathrm{res}\left(G_0(x,y), x^{e+1}+ty^{e+1}\right)\mathrm{res}\left(G_0,H_0\right)$$

pour tout $t \in \mathbb{C}$ et

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{res}\left(G_0(x,y), x^{e+1}+ty^{e+1}\right) = (-1)^{(d-1)(e+1)} G_0(0,1)^{e+1}\,.$$

Par conséquent, on a $\mathrm{ord}_0\,\mathrm{res}(\boldsymbol{F}) = 1$ puisque $G_0(0,1)$, $H_0(0,1)$ et $\mathrm{res}\left(G_0,H_0\right)$ sont non nuls d'après l'hypothèse. En particulier, $\boldsymbol{F}$ est bien dans $\mathrm{Hom}_d^2\left(\mathbb{C}[t]\right)$.

Il reste à démontrer que $\mathrm{ord}_0\, c_j \geq \frac{-\nu(n)}{d}$ pour tout $j \in \left\{0,\dots,\deg M_n^{\boldsymbol{f}}\right\}$, avec égalité si $j=0$. Pour $t \in \mathbb{C}$, notons $\varphi_t\colon \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$ le morphisme d'évaluation en t. Étudions d'abord le comportement asymptotique des racines du polynôme $\Phi_n^{\varphi_t(\boldsymbol{F})}$ quand t tend vers 0. Notons $z_1,\dots,z_{\deg \Phi_n^{\boldsymbol{F}}}$ les racines de $\Phi_n^{\varphi_0(\boldsymbol{F})}$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ répétées avec multiplicités. D'après ce qui précède le lemme si $d=2$ ou la proposition 3.17 si $d\geq 3$, on a

$$\Phi_n^{\varphi_0(\boldsymbol{F})} = \left(\prod_{k\mid n}\prod_{l=0}^{k-1}\left(G_l^{F_0}\right)^{\mu\left(\frac{n}{k}\right)d^{k-1-l}}\right)\Phi_n^{F_0}\,.$$

De plus, pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$, les racines du polynôme $G_k^{F_0}$ sont précisément les antécédents de $[0\colon 1]$ par $f_0^{\circ k}$. Par suite, quitte à ré-indexer, on peut supposer que, pour tout $j \in \left\{1,\dots,\deg \Phi_n^{\boldsymbol{F}}\right\}$, on a $z_j = [0\colon 1]$ si $j \leq \frac{\nu(n)}{d}$ et z_j est soit une racine de $\Phi_n^{F_0}$ soit un antécédent de $[0\colon 1]$ par $f_0^{\circ k}$ avec $k \in \{1,\dots,n-1\}$ si $j > \frac{\nu(n)}{d}$. Par continuité des racines de $\Phi_n^{\varphi_t(\boldsymbol{F})}$, il existe des applications $\zeta_j\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, avec $j \in \left\{1,\dots,\deg \Phi_n^{\boldsymbol{F}}\right\}$, telles que $\lim_{t\to 0}\zeta_j(t) = z_j$ pour tout $j \in \left\{1,\dots,\deg \Phi_n^{\boldsymbol{F}}\right\}$ et

$\zeta_1(t), \dots, \zeta_{\deg \Phi_n^{\boldsymbol{F}}}(t)$ sont précisément les racines du polynôme $\Phi_n^{\varphi_t(\boldsymbol{F})}$ répétées avec multiplicités pour tout $t \in \mathbb{C}$.

Examinons enfin le comportement asymptotique de $c_j(t)$ quand t tend vers 0, avec $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\boldsymbol{f}}\right\}$. Pour $t \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{res}(\boldsymbol{F})(t) \neq 0$, posons

$$f_t = [\varphi_t(\boldsymbol{F})] \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C}) \,,$$

de sorte que

$$M_n^{f_t}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\deg M_n^{\boldsymbol{f}}} c_j(t) \lambda^j \,.$$

D'après la proposition 3.27, pour tout $t \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{res}(\boldsymbol{F})(t) \neq 0$, il existe une partie $I(t)$ de $\left\{1, \dots, \deg \Phi_n^{\boldsymbol{F}}\right\}$ de cardinal $\deg M_n^{\boldsymbol{f}}$ telle que les $f^{\circ k}\left(\zeta_j(t)\right)$, avec $j \in I(t)$ et $k \in \{0, \dots, n-1\}$, sont précisément les $\zeta_j(t)$, avec $j \in \left\{1, \dots, \deg \Phi_n^{\boldsymbol{F}}\right\}$, répétés avec multiplicités. D'après le lemme 3.42, on a

$$M_n^{f_t}(\lambda) = \prod_{j \in I(t)} \left(\lambda - \lambda_j(t)\right)$$

pour tout $t \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{res}(\boldsymbol{F})(t) \neq 0$, où $\lambda_j(t)$ est le multiplicateur de $f_t^{\circ n}$ en son point fixe $\zeta_j(t)$, avec $j \in I(t)$. Par souci de simplicité, identifions maintenant $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ à $\widehat{\mathbb{C}}$ et $\mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}(z)_d$, de manière à travailler en coordonnées non homogènes. Choisissons $\phi \in \mathrm{Rat}_1(\mathbb{C})$ telle que $\phi\left(z_j\right) \neq \infty$ pour tout $j \in \left\{1, \dots, \deg \Phi_n^{\boldsymbol{F}}\right\}$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{C}$ avec $0 < |t| < \eta$, on a $\mathrm{res}(\boldsymbol{F})(t) \neq 0$, $\zeta_j(t) \neq \infty$ pour tout $j \in \left\{1, \dots, \frac{\nu(n)}{d}\right\}$ et $\phi \circ \zeta_j(t) \neq \infty$ pour tout $j \in \left\{1, \dots, \deg \Phi_n^{\boldsymbol{F}}\right\}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |t| < \eta$ et tout $j \in I(t)$, on a

$$\lambda_j(t) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\phi \circ f_t \circ \phi^{-1}\right)' \left(\phi \circ f_t^{\circ k}\left(\zeta_j(t)\right)\right) \,.$$

Par conséquent, pour tout $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\boldsymbol{f}}\right\}$ et tout $t \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |t| < \eta$, il existe des parties $J_1(t), \dots, J_{r_j}(t)$ de $\left\{1, \dots, \deg \Phi_n^{\boldsymbol{F}}\right\}$ de cardinal $n\left(\deg M_n^{\boldsymbol{f}} - j\right)$, avec $r_j = \binom{\deg M_n^{\boldsymbol{f}}}{j}$, telles que

$$c_j(t) = (-1)^{\deg M_n^{\boldsymbol{f}} - j} \sum_{k=1}^{r_j} \prod_{l \in J_k(t)} \left(\phi \circ f_t \circ \phi^{-1}\right)' \left(\phi \circ \zeta_l(t)\right)$$

d'après les relations entre coefficients et racines de $M_n^{f_t}$. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |t| < \eta$, on a

$$c_0(t) = (-1)^{\deg M_n^{\boldsymbol{f}}} \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^{\boldsymbol{F}}} \left(\phi \circ f_t \circ \phi^{-1}\right)' \left(\phi \circ \zeta_j(t)\right) \,.$$

Par conséquent, pour montrer que $\mathrm{ord}_0\, c_j \geq \frac{-\nu(n)}{d}$ pour tout $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\boldsymbol{f}}\right\}$, avec égalité si $j = 0$, il suffit de prouver que, pour tout $j \in \left\{1, \dots, \deg \Phi_n^{\boldsymbol{F}}\right\}$, on a

$$\left(\phi \circ f_t \circ \phi^{-1}\right)' \left(\phi \circ \zeta_j(t)\right) \underset{0}{\sim} \begin{cases} \frac{\alpha_j}{t} & \text{si } j \leq \frac{\nu(n)}{d} \\ \alpha_j & \text{si } j > \frac{\nu(n)}{d} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \alpha_j \in \mathbb{C}^* \,.$$

Soit $j \in \left\{1, \dots, \deg \Phi_n^{\boldsymbol{F}}\right\}$ tel que $j > \frac{\nu(n)}{d}$, de sorte que z_j est soit une racine de $\Phi_n^{F_0}$ soit un antécédent de 0 par $f_0^{\circ k}$ avec $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Alors on a $z_j \neq 0$ d'après la condition (1), et donc

$$\lim_{t \to 0} \left(\phi \circ f_t \circ \phi^{-1}\right)' (\phi \circ \zeta_j(t)) = \left(\phi \circ f_0 \circ \phi^{-1}\right)' (\phi \circ z_j)$$

puisque f_t, avec $0 < |t| < \eta$, converge localement uniformément vers f_0 sur $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ quand t tend vers 0. De plus, on a

$$\left(\phi \circ f_0 \circ \phi^{-1}\right)' (\phi \circ z_j) \neq 0$$

puisque z_j n'est pas un point critique pour f_0 d'après les conditions (2) et (3).

Soit $j \in \left\{1, \dots, \frac{\nu(n)}{d}\right\}$, de sorte que $z_j = 0$. Notons

$$g_0(z) = G_0(z, 1) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{et} \quad h_0(z) = H_0(z, 1) \in \mathbb{C}[z]\,,$$

de sorte que

$$f_0(z) = \frac{g_0(z)}{z^e h_0(z)} \quad \text{et} \quad f_t(z) = \frac{g_0(z)}{(z^{e+1} + t)\, h_0(z)}$$

pour tout $t \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |t| < \eta$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |t| < \eta$, on a

$$\begin{aligned}\left(\phi \circ f_t \circ \phi^{-1}\right)' (\phi \circ \zeta_j(t)) &= f_t' (\zeta_j(t)) \\ &= \frac{t - e\zeta_j(t)^{e+1}}{\left(\zeta_j(t)^{e+1} + t\right)^2} \left(\frac{g_0}{h_0}\right) (\zeta_j(t)) \\ &\quad + \frac{\zeta_j(t)}{\zeta_j(t)^{e+1} + t} \left(\frac{g_0}{h_0}\right)' (\zeta_j(t))\,.\end{aligned}$$

Par suite, il suffit de démontrer que $\zeta_j(t) = O_0(t)$ puisque cela entraîne

$$\left(\phi \circ f_t \circ \phi^{-1}\right)' (\phi \circ \zeta_j(t)) \underset{0}{\sim} \frac{g_0(0)}{h_0(0)t}\,.$$

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe une suite $(t_p)_{p \geq 0}$ qui vérifie $0 < |t_p| < \eta$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{p \to +\infty} t_p = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{p \to +\infty} \frac{t_p}{\zeta_j(t_p)} = 0\,.$$

D'une part, on a

$$\lim_{p \to +\infty} f_{t_p}^{\circ n} (\zeta_j(t_p)) = \lim_{p \to +\infty} \zeta_j(t_p) = 0$$

puisque $\zeta_j(t_p)$ est périodique pour f_{t_p} avec période divisant n pour tout $p \in \mathbb{N}$. D'autre part, on a

$$\lim_{p \to +\infty} f_{t_p} (\zeta_j(t_p)) = \lim_{p \to +\infty} \frac{g_0(\zeta_j(t))}{\left(\zeta_j(t_p)^e + \frac{t_p}{\zeta_j(t_p)}\right) h_0(\zeta_j(t))} = \infty = f_0(0)\,,$$

et donc

$$\lim_{p \to +\infty} f_{t_p}^{\circ n} (\zeta_j(t_p)) = f_0^{\circ n}(0)$$

puisque $f_{t_p}^{\circ(n-1)}$ converge uniformément vers $f_0^{\circ(n-1)}$ au voisinage de $f_0(0)$ car f_{t_p} converge localement uniformément vers f_0 sur $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ et $f_0(0)$ n'est pas un antécédent de 0 par $f_0^{\circ k}$ avec $k \in \{0, \dots, n-2\}$ d'après la condition (1). Par conséquent, on a $f_0^{\circ n}(0) = 0$, ce qui contredit la condition (1). Ainsi, le lemme est démontré. $\square$

Avec un argument de conjugaison, on déduit du lemme 4.2 le résultat ci-dessous, dans lequel on ne suppose plus que la fraction rationnelle dégénérée envoie $[0\colon 1]$ sur $[1\colon 0]$.

LEMME 4.3. *Soient* $f_0 \in \mathrm{Rat}_{d-1}(\mathbb{C})$, $F_0 \in f_0$, $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $(x_0, y_0) \in z_0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *qui vérifient les trois conditions suivantes :*

(1) z_0 *n'est pas un point périodique pour* f_0 *avec période au plus* n*,*

(2) z_0 *n'est pas une valeur critique pour* $f_0^{\circ n}$*,*

(3) f_0 *n'a pas de cycle superattractif avec période* n*.*

Alors il existe $\boldsymbol{F} \in \mathrm{Hom}_d^2(\mathbb{C}[t])$ *tel que*

$$\varphi_0(\boldsymbol{F}) = (y_0 x - x_0 y)\, F_0(x, y)\,, \quad \mathrm{ord}_0 \operatorname{res}(\boldsymbol{F}) = 1 \quad \textit{et} \quad \mathrm{ord}_0\, c_j \geq \frac{-\nu(n)}{d}$$

pour tout $j \in \left\{0, \ldots, \deg M_n^{\boldsymbol{f}}\right\}$*, avec égalité si* $j = 0$*, où* $\varphi_0\colon \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$ *désigne le morphisme d'évaluation en* 0 *et*

$$\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{F}] \in \mathrm{Rat}_d\left(\mathbb{C}(t)\right) \quad \textit{et} \quad M_n^{\boldsymbol{f}}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\deg M_n^{\boldsymbol{f}}} c_j \lambda^j \in \mathbb{C}(t)[\lambda]\,.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.3. Comme z_0 n'est pas un point fixe pour f_0 d'après la condition (1), il existe un unique $\phi \in \mathrm{Hom}_1^2(\mathbb{C})$ tel que $\phi(0,1) = (x_0, y_0)$ et $\phi(1,0) = F_0\,(x_0, y_0)$. Posons

$$\overline{F}_0 = \phi^{-1} \circ F_0 \circ \phi \in \mathrm{Hom}_{d-1}^2(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \overline{f}_0 = \left[\overline{F}_0\right] = [\phi]^{-1} \circ f_0 \circ [\phi] \in \mathrm{Rat}_{d-1}(\mathbb{C})\,.$$

Alors on a $\overline{f}_0\left([0\colon 1]\right) = [1\colon 0]$, et donc il existe $\overline{G}_0 \in \mathbb{C}[x,y]_{d-1}$ et $\overline{H}_0 \in \mathbb{C}[x,y]_{d-1-e}$, avec $e \in \{1, \ldots, d-1\}$, tels que

$$\overline{F}_0(x,y) = \left(\overline{G}_0(x,y), x^e \overline{H}_0(x,y)\right) \quad \text{et} \quad \overline{H}_0(0,1) \neq 0\,.$$

De plus, $\overline{f}_0$ vérifie les conditions (1), (2) et (3) du lemme 4.2. Posons

$$\overline{\boldsymbol{F}}(x,y) = \left(x\overline{G}_0(x,y), \left(x^{e+1} + t y^{e+1}\right) \overline{H}_0(x,y)\right) \in \mathrm{Hom}_d^2\left(\mathbb{C}[t]\right)$$

et $\overline{\boldsymbol{f}} = \left[\overline{\boldsymbol{F}}\right] \in \mathrm{Rat}_d\left(\mathbb{C}(t)\right)$. Définissons également

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{res}(\phi)\phi \circ \overline{\boldsymbol{F}} \circ \phi^{-1} \in \mathrm{Hom}_d^2\left(\mathbb{C}[t]\right) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{f} = [\boldsymbol{F}] \in \mathrm{Rat}_d\left(\mathbb{C}(t)\right)\,.$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
\varphi_0(\boldsymbol{F})(x,y) &= \operatorname{res}(\phi)\phi \circ \varphi_0\left(\overline{\boldsymbol{F}}\right) \circ \phi^{-1}(x,y) \\
&= \operatorname{res}(\phi) G_1^{\phi^{-1}}(x,y)\phi \circ \overline{F}_0 \circ \phi^{-1}(x,y) \\
&= (y_0 x - x_0 y)\, F_0(x,y)\,,
\end{aligned}$$

où $\varphi_0\colon \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$ désigne le morphisme d'évaluation en 0. De plus, on a $M_n^{\boldsymbol{f}} = M_n^{\overline{\boldsymbol{f}}}$ d'après la proposition 3.40 puisque $\boldsymbol{f} = [\varphi] \circ \overline{\boldsymbol{f}} \circ [\phi]^{-1}$. Enfin, on a aussi

$$\operatorname{res}\left(\boldsymbol{F}\right) = \operatorname{res}(\phi)^{3d-d^2} \operatorname{res}\left(\overline{\boldsymbol{F}}\right)$$

d'après le lemme A.10, et en particulier

$$\mathrm{ord}_0 \operatorname{res}(\boldsymbol{F}) = \mathrm{ord}_0 \operatorname{res}\left(\overline{\boldsymbol{F}}\right)\,.$$

D'après le lemme 4.2, ceci complète la démonstration du lemme. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 4.1.

Démonstration du théorème 4.1. D'après le lemme 3.35, on peut écrire

$$M_n^{\mathfrak{f}}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \frac{\gamma_j}{\operatorname{res}(\mathfrak{F})^{e_j}} \lambda^j \in \mathfrak{K}[\lambda]\,,$$

avec $\gamma_0, \dots, \gamma_{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \in \mathfrak{A}$ non divisibles par $\operatorname{res}(\mathfrak{F})$ et $e_0, \dots, e_{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \in \mathbb{N}$. Montrons que $e_j \leq \frac{\nu(n)}{d}$ pour tout $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\mathfrak{f}}\right\}$, avec égalité si $j = 0$. Pour cela, démontrons d'abord l'existence de $F_0 \in \operatorname{Hom}_{d-1}^2(\mathbb{C})$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ qui vérifient les conditions (1), (2) et (3) du lemme 4.3 et tels que $\psi(\gamma_j) \neq 0$ pour tout $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\mathfrak{f}}\right\}$, où $\psi \colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ désigne l'unique morphisme d'anneaux tel que

$$\psi(\mathfrak{F})(x, y) = (y_0 x - x_0 y)\, F_0(x, y)\,.$$

Soient $\overline{\mathfrak{a}}_0, \dots, \overline{\mathfrak{a}}_{d-1}$ et $\overline{\mathfrak{b}}_0, \dots, \overline{\mathfrak{b}}_{d-1}$ des indéterminées sur $\mathbb{C}$, et posons

$$\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C}\left[\overline{\mathfrak{a}}_0, \dots, \overline{\mathfrak{a}}_{d-1}, \overline{\mathfrak{b}}_0, \dots, \overline{\mathfrak{b}}_{d-1}\right] \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}_0 = (\mathfrak{G}_0, \mathfrak{H}_0) \in \operatorname{Hom}_{d-1}^2(\mathfrak{A}_0)\,,$$

où $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{H}_0 \in \mathfrak{A}_0[x, y]_{d-1}$ sont donnés par

$$\mathfrak{G}_0(x, y) = \sum_{j=0}^{d-1} \overline{\mathfrak{a}}_j x^j y^{d-1-j} \quad \text{et} \quad \mathfrak{H}_0(x, y) = \sum_{j=0}^{d-1} \overline{\mathfrak{b}}_j x^j y^{d-1-j}\,.$$

Comme $\gamma_0, \dots, \gamma_{\deg M_n^{\mathfrak{f}}}$ ne sont pas divisibles par $\operatorname{res}(\mathfrak{F})$ dans $\mathfrak{A}$ et $\operatorname{res}(\mathfrak{F}) \in \mathfrak{A}$ est primitif et irréductible sur $\mathbb{C}$ d'après le lemme A.9, il existe un zéro $(a, b) \in \mathbb{C}^{2d+2}$ de $\operatorname{res}(\mathfrak{F})$ qui n'est pas zéro de γ_j, avec $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\mathfrak{f}}\right\}$. Notons $\psi_{(a,b)} \colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ l'unique morphisme d'anneaux qui vérifie $\psi_{(a,b)}(\mathfrak{a}_j) = a_j$ et $\psi_{(a,b)}(\mathfrak{b}_j) = b_j$ pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$. Alors il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tel que $\psi_{(a,b)}(\mathfrak{F})(x_0, y_0) = 0$ car $\operatorname{res}\left(\psi_{(a,b)}(\mathfrak{F})\right) = 0$. Notons $\chi \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_0$ l'unique morphisme d'anneaux tel que

$$\chi(\mathfrak{F}) = \delta_0 \mathfrak{F}_0\,, \quad \text{où} \quad \delta_0(x, y) = y_0 x - x_0 y \in \mathbb{C}[x, y]_1\,.$$

Alors, pour tout $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\mathfrak{f}}\right\}$, on a $\chi(\gamma_j) \neq 0$ puisque $\psi_{(a,b)}(\gamma_j) \neq 0$. Par suite, il existe $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \in \mathbb{C}^{2d}$ qui n'est pas zéro de

$$\operatorname{res}(\mathfrak{F}_0) \left(\prod_{j=1}^{n} \Phi_n^{\mathfrak{F}_0}(x_0, y_0) \right) \operatorname{res}\left(\delta_0 \circ \mathfrak{F}_0^{\circ n}, D_0^{\mathfrak{F}}\right) \operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}_0}, D^{\mathfrak{F}_0}\right) \left(\prod_{j=0}^{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \chi(\gamma_j) \right).$$

Notons $\psi_0 \colon \mathfrak{A}_0 \to \mathbb{C}$ l'unique morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres qui vérifie $\psi_0(\overline{\mathfrak{a}}_j) = \overline{a}_j$ et $\psi_0\left(\overline{\mathfrak{b}}_j\right) = \overline{b}_j$ pour tout $j \in \{0, \dots, d-1\}$, et posons $F_0 = \psi_0(\mathfrak{F}_0)$. Alors F_0 est dans $\operatorname{Hom}_{d-1}^2(\mathbb{C})$, les conditions (1), (2) et (3) du lemme 4.3 sont vérifiées par F_0 et (x_0, y_0) et on a $\psi(\gamma_j) \neq 0$ pour tout $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\mathfrak{f}}\right\}$, où $\psi = \psi_0 \circ \chi$ est l'unique morphisme d'anneaux tel que

$$\psi(\mathfrak{F})(x, y) = (y_0 x - x_0 y)\, F_0(x, y)\,.$$

D'après le lemme 4.3, il existe $\boldsymbol{F} \in \operatorname{Hom}_d^2(\mathbb{C}[t])$ tel que

$$\varphi_0(\boldsymbol{F}) = (y_0 x - x_0 y)\, F_0(x, y)\,, \quad \operatorname{ord}_0 \operatorname{res}(\boldsymbol{F}) = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{ord}_0 c_j \geq \frac{-\nu(n)}{d}$$

pour tout $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\boldsymbol{f}}\right\}$, avec égalité si $j = 0$, où $\varphi_0 \colon \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$ désigne le morphisme d'évaluation en 0 et

$$\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{F}] \in \operatorname{Rat}_d(\mathbb{C}(t)) \quad \text{et} \quad M_n^{\boldsymbol{f}}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\deg M_n^{\boldsymbol{f}}} c_j \lambda^j \in \mathbb{C}(t)[\lambda]\,.$$

Notons $\boldsymbol{\psi}\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}[t]$ l'unique morphisme d'anneaux tel que $\boldsymbol{\psi}(\mathfrak{F}) = \boldsymbol{F}$. Alors, pour tout $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\boldsymbol{f}}\right\}$, on a $c_j = \frac{\boldsymbol{\psi}(\gamma_j)}{\operatorname{res}(\boldsymbol{F})^{e_j}}$, et donc $\operatorname{ord}_0 c_j = -e_j$ puisque

$$\boldsymbol{\psi}\left(\gamma_j\right)(0) = \psi\left(\gamma_j\right) \neq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{ord}_0 \operatorname{res}(\boldsymbol{F}) = 1\,.$$

Par conséquent, on a $e_j \leq \frac{\nu(n)}{d}$ pour tout $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\mathfrak{f}}\right\}$, avec égalité si $j = 0$. Ainsi, le théorème est démontré. $\square$

Une conséquence du lemme 4.3 et du théorème 4.1 est le résultat ci-dessous, qui décrit le comportement asymptotique des multiplicateurs d'une famille quelconque de fractions rationnelles de degré d qui dégénère en une fraction rationnelle de degré $d-1$ vérifiant les conditions du lemme 4.3.

Corollaire 4.4. *Soient $f_0 \in \operatorname{Rat}_{d-1}(\mathbb{C})$, $F_0 \in f_0$, $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $(x_0, y_0) \in z_0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ qui vérifient les trois conditions suivantes :*

(1) z_0 n'est pas un point périodique pour f_0 avec période au plus n,

(2) z_0 n'est pas une valeur critique pour $f_0^{\circ n}$,

(3) f_0 n'a pas de cycle superattractif avec période n.

Alors, pour tout $\boldsymbol{F} \in \operatorname{Hom}_d^2\left(\mathbb{C}[t]\right)$ tel que

$$\varphi_0(\boldsymbol{F}) = \left(y_0 x - x_0 y\right) F_0(x, y)\,,$$

où $\varphi_0\colon \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$ désigne le morphisme d'évaluation en 0, on a

$$\operatorname{ord}_0 c_j \geq \frac{-\nu(n)}{d} \operatorname{ord}_0 \operatorname{res}(\boldsymbol{F})$$

pour tout $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\boldsymbol{f}}\right\}$, avec égalité si $j = 0$, où

$$\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{F}] \in \operatorname{Rat}_d\left(\mathbb{C}(t)\right) \quad \textit{et} \quad M_n^{\boldsymbol{f}}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\deg M_n^{\boldsymbol{f}}} c_j \lambda^j \in \mathbb{C}(t)[\lambda]\,.$$

Démonstration. D'après le théorème 4.1, on peut écrire

$$M_n^{\mathfrak{f}}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \frac{\gamma_j}{\operatorname{res}(\mathfrak{F})^{e_j}} \lambda^j \in \mathfrak{K}[\lambda]\,,$$

avec $\gamma_0, \dots, \gamma_{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \in \mathfrak{A}$ non divisibles par $\operatorname{res}(\mathfrak{F})$ et $e_0, \dots, e_{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \in \mathbb{N}$ tels que $e_j \leq \frac{\nu(n)}{d}$ pour tout $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\mathfrak{f}}\right\}$, avec égalité si $j = 0$. Notons $\psi\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ l'unique morphisme d'anneaux tel que

$$\psi(\mathfrak{F})(x, y) = \left(y_0 x - x_0 y\right) F_0(x, y)\,.$$

Soit $\boldsymbol{F} \in \operatorname{Hom}_d^2\left(\mathbb{C}[t]\right)$ tel que

$$\varphi_0(\boldsymbol{F}) = \left(y_0 x - x_0 y\right) F_0(x, y)\,,$$

où $\varphi_0\colon \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$ désigne le morphisme d'évaluation en 0, et écrivons

$$\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{F}] \in \operatorname{Rat}_d\left(\mathbb{C}(t)\right) \quad \text{et} \quad M_n^{\boldsymbol{f}}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\deg M_n^{\boldsymbol{f}}} c_j \lambda^j \in \mathbb{C}(t)[\lambda]\,.$$

Notons aussi $\boldsymbol{\psi}\colon \mathfrak{A} \to \mathbb{C}[t]$ l'unique morphisme d'anneaux tel que $\boldsymbol{\psi}(\mathfrak{F}) = \boldsymbol{F}$. Alors, pour tout $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\boldsymbol{f}}\right\}$, on a $c_j = \frac{\boldsymbol{\psi}(\gamma_j)}{\operatorname{res}(\boldsymbol{F})^{e_j}}$. Par suite, on a

$$\operatorname{ord}_0 c_j = \operatorname{ord}_0 \boldsymbol{\psi}\left(\gamma_j\right) - e_j \operatorname{ord}_0 \operatorname{res}(\boldsymbol{F}) \geq \frac{-\nu(n)}{d} \operatorname{ord}_0 \operatorname{res}(\boldsymbol{F})\,,$$

et on a égalité si $j = 0$ si et seulement si $\psi\left(\gamma_j\right) = \boldsymbol{\psi}\left(\gamma_j\right)(0)$ n'est pas nul. Par conséquent, comme $\psi\left(\gamma_j\right)$ ne dépend que de F_0 et (x_0, y_0), on a

$$\operatorname{ord}_0 c_j \geq \frac{-\nu(n)}{d} \operatorname{ord}_0 \operatorname{res}(\boldsymbol{F})$$

pour tout $j \in \left\{0, \dots, \deg M_n^{\boldsymbol{f}}\right\}$, avec égalité si $j = 0$, si et seulement si il existe un tel $\boldsymbol{F} \in \operatorname{Hom}_d^2\left(\mathbb{C}[t]\right)$ pour lequel ceci est vérifié. D'après le lemme 4.3, ceci complète la démonstration du corollaire. $\square$

Avec un argument de spécialisation, on déduit immédiatement du théorème 4.1 le résultat ci-dessous, qui précise la proposition 3.38.

Proposition 4.5. *Soient A un anneau intègre, K son corps des fractions, $F \in \operatorname{Hom}_d^2(A)$, $f = [F] \in \operatorname{Rat}_d(K)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le polynôme $\operatorname{res}(F)^{\frac{\nu(n)}{d}} M_n^f$ est dans $A[\lambda]$.*

Finalement, donnons une expression des coefficients constants des polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle.

Proposition 4.6. *Soient K un corps, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $n \in \mathbb{N}^*$, $F \in \operatorname{Hom}_d^2(K)$ et $f = [F] \in \operatorname{Rat}_d(K)$. Alors on a*

$$M_n^f(0) = (-1)^{\deg M_n^f} \prod_{j=1}^{r} \lambda_j = (-1)^{\deg M_n^f} \frac{\operatorname{res}\left(\Phi_n^F, D^F\right)}{\operatorname{res}(F)^{\frac{2\nu(n)}{d}}}\,,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, avec $r \in \mathbb{N}$, sont les multiplicateurs de f en ses cycles dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ avec période n répétés avec multiplicités.

Démonstration. D'après le lemme 3.42, on a

$$M_n^f(\lambda)^n = \prod_{j=1}^{\deg \Phi_n^f} \left(\lambda - \mu_j\right)\,,$$

où $\mu_1, \dots, \mu_{\deg \Phi_n^F}$ sont les multiplicateurs de $f^{\circ n}$ en les racines du polynôme Φ_n^F dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ répétées avec multiplicités. D'après la proposition 3.22, si $z_0 \in \mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ est une racine du polynôme Φ_n^F, alors soit z_0 est un point périodique pour f avec période n, auquel cas le multiplicateur de $f^{\circ n}$ en z_0 est égal au multiplicateur de f en z_0, soit z_0 est un point périodique pour f avec période un diviseur propre k de n et multiplicateur une racine $\frac{n}{k}$-ième de l'unité, auquel cas le multiplicateur de $f^{\circ n}$ en z_0 est égal à 1. Réciproquement, tout point périodique pour f avec période n est racine de Φ_n^F. Par conséquent, comme f a le même multiplicateur en chaque point d'un cycle et f induit une permutation des racines de Φ_n^F qui préserve les multiplicités d'après le corollaire 3.21, on a

$$M_n^f(\lambda) = (\lambda - 1)^{\deg M_n^f - r} \prod_{j=1}^{r} \left(\lambda - \lambda_j\right)\,,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, avec $r \in \mathbb{N}$, sont les multiplicateurs de f en ses cycles dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ avec période n répétés avec multiplicités. En particulier, on a

$$M_n^f(0) = (-1)^{\deg M_n^f} \prod_{j=1}^{r} \lambda_j \,.$$

Montrons enfin que

$$M_n^f(0) = (-1)^{\deg M_n^f} \frac{\operatorname{res}\left(\Phi_n^F, D^F\right)}{\operatorname{res}(F)^{\frac{2\nu(n)}{d}}} \,.$$

Avec un argument de spécialisation, il suffit pour cela de démontrer que

$$\operatorname{res}(\mathfrak{F})^{\frac{2\nu(n)}{d}} M_n^{\mathfrak{f}}(0) = (-1)^{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, D^{\mathfrak{F}}\right) \,.$$

Soient $z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{P}^1\left(\overline{\mathfrak{K}}\right)$, avec $s \in \mathbb{N}$, qui forment un système de représentants des cycles pour $\mathfrak{f}$ avec période n. Pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$, il existe un point périodique $(x_j, y_j) \in z_j$ pour $\mathfrak{F}$ avec période n. D'après le lemme 3.14, les racines du polynôme $\Phi_n^{\mathfrak{F}}$ dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{\mathfrak{K}}\right)$ sont simples et sont précisément les $\mathfrak{f}^{\circ k}(z_j)$, avec $j \in \{1, \ldots, s\}$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Par suite, on a $s = \deg M_n^{\mathfrak{f}}$ et il existe $\alpha \in \overline{\mathfrak{K}}^{\times}$ tel que

$$\Phi_n^{\mathfrak{F}}(x, y) = \alpha \prod_{j=1}^{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \prod_{k=0}^{n-1} \Big(H_k^{\mathfrak{F}}(x_j, y_j)\, x - G_k^{\mathfrak{F}}(x_j, y_j)\, y \Big) \,.$$

De plus, d'après ce qui précède, on a

$$M_n^{\mathfrak{f}}(0) = (-1)^{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \prod_{j=1}^{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} D_n^{\mathfrak{F}}(x_j, y_j) = (-1)^{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \prod_{j=1}^{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \prod_{k=0}^{n-1} D^{\mathfrak{F}}\left(\mathfrak{F}^{\circ k}(x_j, y_j)\right)$$

car le multiplicateur de $\mathfrak{f}$ en z_j est égal à $D_n^{\mathfrak{F}}(x_j, y_j)$ pour tout $j \in \left\{1, \ldots, \deg M_n^{\mathfrak{f}}\right\}$. Par suite, on a

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, D^{\mathfrak{F}}\right) = \alpha^{2(d-1)} \prod_{j=1}^{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \prod_{k=0}^{n-1} D^{\mathfrak{F}}\left(\mathfrak{F}^{\circ k}(x_j, y_j)\right) = (-1)^{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \alpha^{2(d-1)} M_n^{\mathfrak{f}}(0) \,.$$

D'après la remarque 3.32, on a

$$\alpha^{2(d^n-1)} = \operatorname{res}(\mathfrak{F})^{\frac{2\nu(n)\left(d^n-1\right)}{d(d-1)}} \,.$$

Par conséquent, il existe $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, D^{\mathfrak{F}}\right) = \epsilon_n (-1)^{\deg M_n^{\mathfrak{f}}} \operatorname{res}(\mathfrak{F})^{\frac{2\nu(n)}{d}} M_n^{\mathfrak{f}}(0) \,.$$

Il reste à prouver que $\epsilon_n = 1$. Si $n = 1$ et $\varphi \colon \mathfrak{A} \to \mathbb{Z}$ est l'unique morphisme d'anneaux tel que

$$\varphi(\mathfrak{F})(x, y) = \left(y^d, x^d\right) \in \operatorname{Hom}_d^2(\mathbb{Z}) \,,$$

alors on a

$$\varphi\left(\operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, D^{\mathfrak{F}}\right)\right) = (-d)^{d+1} \,, \quad \varphi\left(\operatorname{res}(\mathfrak{F})\right) = (-1)^d \quad \text{et} \quad \varphi\left(M_n^{\mathfrak{f}}(0)\right) = d^{d+1} \,,$$

et donc $\epsilon_n = 1$. Si $n \geq 2$ et $\varphi \colon \mathfrak{A} \to \mathbb{Z}$ est l'unique morphisme d'anneaux tel que

$$\varphi(\mathfrak{F})(x, y) = \left(x^d, y^d\right) \in \operatorname{Hom}_d^2(\mathbb{Z}) \,,$$

alors on a

$$\varphi\left(\operatorname{res}\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}, D^{\mathfrak{F}}\right)\right) = d^{\nu(n)} \,, \quad \varphi\left(\operatorname{res}(\mathfrak{F})\right) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi\left(M_n^{\mathfrak{f}}(0)\right) = (-1)^{\frac{\nu(n)}{n}} d^{\nu(n)}$$

puisque

$$\varphi\left(\Phi_n^{\mathfrak{F}}\right)(x,y) = y^{\nu(n)} \prod_{k \in D_n} C_k\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \varphi\left(M_n^{\mathfrak{f}}\right)(\lambda) = (\lambda - d^n)^{\frac{\nu(n)}{n}} \;,$$

où D_n est l'ensemble des diviseurs de $d^n - 1$ qui ne divisent pas $d^k - 1$, avec k un diviseur propre de n, et C_k, avec $k \in \mathbb{N}^*$, désigne le k-ième polynôme cyclotomique, et donc $\epsilon_n = 1$. Ceci complète la démonstration de la proposition. □

4.2. Fractions rationnelles quadratiques avec multiplicateurs entiers

4.2.1. Introduction. Nous examinons ici les fractions rationnelles complexes dont tous les multiplicateurs sont entiers, comme nous l'avions fait avec les polynômes dans le chapitre 2. D'après le corollaire 3.44, ceci est équivalent à étudier les fractions rationnelles complexes dont tous les polynômes multiplicateurs sont scindés sur $\mathbb{Z}$.

Fixons un entier $d \geq 2$. Nous identifions ici $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ à $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et $\mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}(z)_d$, de manière à travailler en coordonnées non homogènes.

Introduisons d'abord des classes de conjugaison particulières.

Définition 4.7. On dit que $f \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ est une *application puissance* si elle est conjuguée à $z^{\pm d}$.

Rappelons que le d-ème polynôme de Tchebychev est l'unique $T_d \in \mathrm{Poly}_d^U(\mathbb{C})$ qui vérifie

$$T_d\left(z + z^{-1}\right) = z^d + z^{-d} \,.$$

Définition 4.8. On dit que $f \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ est une *application de Tchebychev* si elle est conjuguée à $\pm T_d$.

Ces deux classes de conjugaison de fractions rationnelles ont la propriété bien connue suivante :

Proposition 4.9. *Soit $f \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ une application puissance ou une application de Tchebychev. Alors f a un multiplicateur entier en chaque cycle.*

En fait, les applications puissances et les applications de Tchebychev ne sont pas les seules fractions rationnelles n'ayant que des multiplicateurs entiers.

Définition 4.10. On dit que $f \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ est un *exemple de Lattès* si il existe un tore $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$, avec Λ un réseau de $\mathbb{C}$, une application holomorphe $L\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ et une application holomorphe non constante $p\colon \mathbb{T} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui rendent le diagramme ci-dessous commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{T} \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \arrow[r, "f"'] & \mathbb{P}^1(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Remarque 4.11. Soient Λ est un réseau de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$. Alors les applications holomorphes $L\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ sont précisément les applications de la forme

$$L_{a,b}^{\Lambda}\colon z + \Lambda \mapsto az + b + \Lambda \,,$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a\Lambda \subset \Lambda$. De plus, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a\Lambda \subset \Lambda$, l'application holomorphe $L_{a,b}^{\Lambda} \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est de degré $|a|^2$.

On distingue deux sortes d'exemples de Lattès. On dit $f \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ est un exemple de Lattès *flexible* si il existe un tore $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$, avec Λ un réseau de $\mathbb{C}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{C}$ et une application holomorphe $p \colon \mathbb{T} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de degré 2 tels que

$$p \circ L_{a,b}^{\Lambda} = f \circ p\,, \quad \text{où} \quad L_{a,b}^{\Lambda} \colon z + \Lambda \mapsto az + b + \Lambda\,.$$

Un exemple de Lattès non flexible est dit *rigide*. Nous renvoyons le lecteur à [**Mil06**] ou [**Sil07**, Chapter 6] pour plus d'informations sur les exemples de Lattès.

Remarque 4.12. Si d n'est pas un carré d'entier, alors tout exemple de Lattès de degré d est rigide.

Pour $D \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré, notons A_D l'anneau des entiers du corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{D}\right)$.

Les exemples de Lattès ont la propriété remarquable suivante :

Proposition 4.13 ([**Mil06**, Corollary 3.9 et Lemma 5.6]). *Soit $f \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ un exemple de Lattès. Alors il existe $D \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré tel que le multiplicateur de f en chaque cycle est dans A_D. De plus, f n'a que des multiplicateurs entiers rationnels si et seulement si il est flexible.*

On s'intéresse ici à la réciproque des propositions 4.9 et 4.13. Dans [**Mil06**], Milnor a conjecturé que les applications puissances, les applications de Tchebychev et les exemples de Lattès flexibles sont les seules fractions rationnelles dont le multiplicateur en chaque cycle est un entier rationnel. Plus généralement, on peut se demander si les applications puissances, les applications de Tchebychev et les exemples de Lattès sont les seules fractions rationnelles dont tous les multiplicateurs sont dans l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire donné. Nous répondons à cette question dans le cas des fractions rationnelles quadratiques.

Théorème 4.14. *Soient $D \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré et $f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$ dont le multiplicateur en chaque cycle avec période inférieure ou égale à 5 est dans A_D. Alors f est une application puissance, une application de Tchebychev ou un exemple de Lattès.*

De manière encore plus générale, on peut poser la question suivante :

Question 4.15. Soient K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers et $f \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ dont le multiplicateur en chaque cycle est dans $\mathcal{O}_K$ – ou K. Alors f est-elle nécessairement une application puissance, une application de Tchebychev ou un exemple de Lattès ?

Notons que Eremenko et van Strien ont étudié les fractions rationnelles complexes dont tous les multiplicateurs sont réels. Plus précisément, ils ont prouvé que, si $f \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ a cette propriété, alors soit f est un exemple de Lattès soit son ensemble de Julia $\mathcal{J}_f$ est contenu dans un cercle (voir [**EvS11**, Theorem 1]).

Finalement, on peut également poser des variantes de la question 4.15, comme celle ci-dessous.

Question 4.16. Soient K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers et $f \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$ qui a une infinité de cycles avec multiplicateur dans $\mathcal{O}_K$ – ou K. Alors f est-elle nécessairement une application puissance, une application de Tchebychev ou un exemple de Lattès ?

Afin de démontrer le théorème 4.14, nous remarquons que la formule reliant les multiplicateurs d'une fraction rationnelle en ses points fixes nous permet de se ramener à l'étude de deux familles à un paramètre de fractions rationnelles et d'un nombre fini d'autres cas. Nous examinons ensuite les polynômes multiplicateurs associés à ces deux familles et aux cas restants pour conclure.

4.2.2. Quelques préliminaires sur l'espace de modules des fractions rationnelles quadratiques. Rappelons ici certains faits concernant les classes de conjugaison de fractions rationnelles quadratiques complexes.

Soit $f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$, et notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ses multiplicateurs en ses points fixes répétés avec multiplicités. Si f n'a que des points fixes simples ou, de manière équivalente, si $\lambda_j \neq 1$ pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, alors on a

$$\frac{1}{1-\lambda_1} + \frac{1}{1-\lambda_2} + \frac{1}{1-\lambda_3} = 1\,.$$

En particulier, notons que $\lambda_1\lambda_2 = 1$ si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Pour $f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$, notons

$$\sigma_1^f = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\,, \quad \sigma_2^f = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \quad \text{et} \quad \sigma_3^f = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

les fonctions symétriques élémentaires des multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de f en ses points fixes répétés avec multiplicités, de sorte que

$$M_1^f(\lambda) = \lambda^3 - \sigma_1^f\lambda^2 + \sigma_2^f\lambda - \sigma_3^f \in \mathbb{C}[\lambda]\,.$$

D'après la relation entre les multiplicateurs d'une fraction rationnelle en ses points fixes, pour tout $f \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$, on a

$$\sigma_3^f = \sigma_1^f - 2\,.$$

Explicitons maintenant une forme normale pour les classes de conjugaison de fractions rationnelles quadratiques. Pour $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $ab \neq 1$, posons

$$g_{a,b}(z) = \frac{z(z+a)}{bz+1} \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})\,.$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $ab \neq 1$, la fraction rationnelle $g_{a,b}$ fixe le point 0 avec multiplicateur a et fixe le point ∞ avec multiplicateur b. Définissons aussi

$$h(z) = z + \frac{1}{z} \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})\,.$$

Alors h admet ∞ comme unique point fixe. De plus, on a le résultat suivant :

Proposition 4.17 ([Mil93, Lemma 3.1]). *Soit $f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$. Si f admet deux points fixes distincts avec multiplicateurs $a, b \in \mathbb{C}$, alors $ab \neq 1$ et f est conjuguée à $g_{a,b}$. Si f admet un unique point fixe, alors f est conjuguée à h.*

Nous utiliserons également une autre forme normale. Pour $c \in \mathbb{C}$, posons

$$f_c(z) = z^2 + c \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})\,.$$

Pour tout $c \in \mathbb{C}$, la fraction rationnelle f_c admet ∞ comme point fixe superattractif. De plus, si $f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$ a un point fixe superattractif, alors il existe un unique paramètre $c \in \mathbb{C}$ tel que f est conjuguée à f_c. Notons aussi que, pour tout $c \in \mathbb{C}$, la fraction rationnelle f_c est une application puissance si et seulement si $c = 0$ et est une application de Tchebychev si et seulement si $c = -2$.

Soit $d \geq 2$. Rappelons que $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des classes de conjugaison de fractions rationnelles de degré d. Pour $f \in \mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$, notons $[f] \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ la classe de conjugaison de f.

Une conséquence immédiate de la proposition 4.17 est le résultat suivant :

Corollaire 4.18 ([Mil93, Lemma 3.1]). *L'application* $\mathrm{Mult}_2^{(1)} \colon \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ *donnée par*

$$\mathrm{Mult}_2^{(1)}([f]) = \left(\sigma_1^f, \sigma_2^f\right)$$

est bien définie et bijective.

Mentionnons également un résultat analogue au corollaire 4.18, dû à McMullen. Soit $d \geq 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $\mathrm{Mult}_d^{(n)} \colon \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}[\lambda]^n$ donnée par

$$\mathrm{Mult}_d^{(n)} \colon [f] \mapsto \left(M_1^f, \ldots, M_n^f\right)$$

est bien définie d'après la proposition 3.40. Notons $\mathcal{L}_d(\mathbb{C})$ l'ensemble des classes de conjugaison des exemples de Lattès flexibles de degré d. On a le résultat ci-dessous, qui souligne l'importance de la notion de multiplicateur.

Théorème 4.19 ([McM87, Corollary 2.3]). *Soit* $d \geq 2$ *un entier. Alors il existe* $N_d \in \mathbb{N}^*$ *tel que tout élément de* $\mathbb{C}[\lambda]^{N_d}$ *n'admet qu'un nombre fini d'antécédents dans* $\mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{L}_d(\mathbb{C})$ *par l'application* $\mathrm{Mult}_d^{(N_d)}$.

D'après la proposition 3.40 et le corollaire 4.18, les polynômes multiplicateurs de f, avec $f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$, ne dépendent que de σ_1^f et σ_2^f. Pour préciser ce fait, rappelons que

$$\mathfrak{A} = \mathbb{Z}\left[\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\right] \quad \text{et} \quad \mathfrak{f}(z) = \frac{\mathfrak{a}_2 z^2 + \mathfrak{a}_1 z + \mathfrak{a}_0}{\mathfrak{b}_2 z^2 + \mathfrak{b}_1 z + \mathfrak{b}_0} \in \mathrm{Rat}_2(\mathfrak{K}),$$

où $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ et $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ sont des indéterminées et $\mathfrak{K}$ est le corps des fractions de $\mathfrak{A}$. Notons aussi σ_1, σ_2 et σ_3 les éléments de $\mathfrak{K}$ tels que

$$M_1^{\mathfrak{f}}(\lambda) = \lambda^3 - \sigma_1\lambda^2 + \sigma_2\lambda - \sigma_3 \in \mathfrak{K}[\lambda].$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 4.20 ([Sil98, Corollary 5.2]). *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Alors le polynôme* $M_n^{\mathfrak{f}}$ *est dans* $\mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2][\lambda]$.

Avec un argument de spécialisation, on déduit de la proposition 4.20 que les coefficients des polynômes multiplicateurs de f, avec $f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$, sont des polynômes à coefficients entiers – indépendants de f – en σ_1^f et σ_2^f.

En particulier, si f et $\overline{f}$ dans $\mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$ ont pour multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et $\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \overline{\lambda_3}$ en leurs points fixes, alors on a $M_n^{\overline{f}} = \overline{M_n^f}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant le logiciel SageMath et la proposition 3.41, on peut calculer les premiers polynômes multiplicateurs des fractions rationnelles $g_{a,b}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $ab \neq 1$. Ceci nous permet d'exprimer les premiers polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle $f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$ en fonction de σ_1^f et σ_2^f.

Exemple 4.21. Soit $f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$. Par souci de simplicité, notons $\sigma_1 = \sigma_1^f$ et $\sigma_2 = \sigma_2^f$, de sorte que

$$M_1^f(\lambda) = \lambda^3 - \sigma_1\lambda^2 + \sigma_2\lambda - (\sigma_1 - 2) \in \mathbb{C}[\lambda].$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrivons aussi

$$M_n^f(\lambda) = \lambda^{\deg M_n^f} + \sum_{j=1}^{\deg M_n^f} (-1)^j \sigma_j^{(n)} \lambda^{\deg M_n^f - j} \in \mathbb{C}[\lambda]\,.$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
\sigma_1^{(2)} &= 2\sigma_1 + \sigma_2\,,\\
\sigma_1^{(3)} &= \sigma_1\left(2\sigma_1 + \sigma_2\right) + 3\sigma_1 + 2\,,\\
\sigma_2^{(3)} &= \left(2\sigma_1 + \sigma_2\right)\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)^2 - \sigma_1\left(\sigma_1 + 2\sigma_2\right) + 12\sigma_1 + 28\,,\\
\sigma_1^{(4)} &= \left(2\sigma_1 + \sigma_2\right)\sigma_1^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_2\right)\left(3\sigma_1 + \sigma_2\right) + 10\sigma_1\,,\\
\sigma_2^{(4)} &= \left(2\sigma_1 + \sigma_2\right)\sigma_1^2\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_2\right)\left(7\sigma_1^3 + 9\sigma_1^2\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_2^3\right)\\
&\quad + \left(26\sigma_1 - \sigma_2\right)\sigma_1^2 + 4\sigma_1\left(16\sigma_1 - 5\sigma_2\right) + 4\left(10\sigma_1 - 13\sigma_2\right) + 48\,,\\
\sigma_3^{(4)} &= \sigma_2^2\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)^2\left(2\sigma_1 + \sigma_2\right)^2 + \sigma_1\left(2\sigma_1 + \sigma_2\right)\left(\sigma_1^3 - 2\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3\right)\\
&\quad + \sigma_1\left(27\sigma_1^3 + 30\sigma_1^2\sigma_2 + 68\sigma_1\sigma_2^2 + 28\sigma_2^3\right) + 4\left(26\sigma_1^3 + \sigma_1^2\sigma_2 + 32\sigma_1\sigma_2^2 + 15\sigma_2^3\right)\\
&\quad + 8\left(37\sigma_1^2 - 19\sigma_1\sigma_2 - 6\sigma_2^2\right) + 32\left(20\sigma_1 + 3\sigma_2\right) + 304\,.
\end{aligned}$$

Notons que les expressions générales des premiers polynômes multiplicateurs deviennent plus simples lorsque l'on effectue une translation.

Exemple 4.22. Soit $f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$, et notons $\sigma_1 = \sigma_1^f$ et $\sigma_2 = \sigma_2^f$. Alors on a

$$\begin{aligned}
M_1^f(\lambda + 1) &= \lambda^3 + \left(-\sigma_1 + 3\right)\lambda^2 + Q_1\left(\sigma_1, \sigma_2\right)\lambda + Q_1\left(\sigma_1, \sigma_2\right)\,,\\
M_2^f(\lambda + 1) &= \lambda + P_{1,2}\left(\sigma_1, \sigma_2\right)\,,\\
M_3^f(\lambda + 1) &= \lambda^2 - \sigma_1 Q_3\left(\sigma_1, \sigma_2\right)\lambda + P_{1,3}\left(\sigma_1, \sigma_2\right) Q_3\left(\sigma_1, \sigma_2\right)\,,\\
M_4^f(\lambda + 1) &= \lambda^3 + \left(-2\sigma_1^3 - \sigma_1^2\sigma_2 - 3\sigma_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - 10\sigma_1 + 3\right)\lambda^2\\
&\quad + \left(\sigma_1^2 - \sigma_2 + 1\right) Q_4\left(\sigma_1, \sigma_2\right)\lambda + P_{1,4}\left(\sigma_1, \sigma_2\right) P_{2,2}\left(\sigma_1, \sigma_2\right) Q_4\left(\sigma_1, \sigma_2\right)\,,
\end{aligned}$$

où les Q_n, avec $n \in \{1, 3, 4\}$, et les $P_{k,l}$, avec $l \in \{2, 3, 4\}$ si $k = 1$ et $l = 2$ si $k = 2$, sont donnés par

$$\begin{aligned}
P_{1,2}\left(\sigma_1, \sigma_2\right) &= -2\sigma_1 - \sigma_2 + 1,\\
P_{1,3}\left(\sigma_1, \sigma_2\right) &= \sigma_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - 3\sigma_1 - 3\sigma_2 + 9,\\
P_{1,4}\left(\sigma_1, \sigma_2\right) &= \sigma_2^2 - 2\sigma_2 + 5,\\
P_{2,2}\left(\sigma_1, \sigma_2\right) &= -2\sigma_1 - \sigma_2 - 1,\\
Q_1\left(\sigma_1, \sigma_2\right) &= -2\sigma_1 + \sigma_2 + 3\,,\\
Q_3\left(\sigma_1, \sigma_2\right) &= 2\sigma_1 + \sigma_2 + 3\,,\\
Q_4\left(\sigma_1, \sigma_2\right) &= 2\sigma_1^3 + 5\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_2^3 + 7\sigma_1^2 + 4\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + 20\sigma_1 - \sigma_2 + 51\,.
\end{aligned}$$

Notons que, pour tout (k, l) avec $l \in \{2, 3, 4\}$ si $k = 1$ et $l = 2$ si $k = 2$, le terme $P_{k,l}\left(\sigma_1, \sigma_2\right)$ est nul si et seulement si f a un cycle avec période k et multiplicateur une racine primitive l-ième de l'unité.

Enfin, explicitons les classes de conjugaison d'exemples de Lattès de degré 2. Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$, et notons $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$. Rappelons que la fonction de Weierstrass

$\wp_\Lambda\colon \mathbb{T}\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ donnée par

$$\wp_\Lambda(z+\Lambda)=\frac{1}{z^2}+\sum_{w\in\Lambda\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right)$$

est bien définie, paire et holomorphe de degré 2. Par suite, pour tous $a,b\in\mathbb{C}$ tels que $a\Lambda\subset\Lambda$ et $2b\in\Lambda$, il existe un unique $\mathrm{Lat}_{a,b}^{\Lambda,2}\in\mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$, avec $d=|a|^2$, tel que

$$\wp_\Lambda\circ L_{a,b}^\Lambda=\mathrm{Lat}_{a,b}^{\Lambda,2}\circ\wp_\Lambda\,,\quad \text{où}\quad L_{a,b}^\Lambda\colon z+\Lambda\mapsto az+b+\Lambda\,,$$

puisque $L_{a,b}^\Lambda$ commute avec la multiplication par -1 dans $\mathbb{T}$.

Notons que certains réseaux de $\mathbb{C}$ sont invariants par des rotations non triviales autour de d'origine, ce qui fait apparaître d'autres exemples de Lattès. Supposons que $\Lambda=\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{T}=\mathbb{C}/\Lambda$. Alors, pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a

$$\wp_\Lambda(iz+\Lambda)=-\wp_\Lambda(z+\Lambda)\,.$$

Par suite, pour tous $a,b\in\mathbb{C}$ tels que $a\in\Lambda$ et $(1+i)b\in\Lambda$, il existe un unique $\mathrm{Lat}_{a,b}^{\Lambda,4}\in\mathrm{Rat}_d(\mathbb{C})$, avec $d=|a|^2$, tel que

$$\wp_\Lambda^2\circ L_{a,b}^\Lambda=\mathrm{Lat}_{a,b}^{\Lambda,4}\circ\wp_\Lambda^2$$

puisque $L_{a,b}^\Lambda$ commute avec la multiplication par i dans $\mathbb{T}$.

On peut alors décrire tous les exemples de Lattès de degré 2 à conjugaison près.

Proposition 4.23 ([Mil06, Subsection 8.1]). *Soit $f\in\mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$ un exemple de Lattès. Alors f est soit conjuguée à $\mathrm{Lat}_{1+i,0}^{\mathbb{Z}[i],4}$ soit conjuguée à $\mathrm{Lat}_{a,b}^{\Lambda,2}$, avec*

$$\Lambda\in\left\{\mathbb{Z}[i],\mathbb{Z}\left[i\sqrt{2}\right],\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right]\right\}$$

et

$$(a,b)\in\begin{cases}\{(1-i,0),(1+i,0)\} & \text{si } \Lambda=\mathbb{Z}[i]\\ \left\{\left(i\sqrt{2},0\right)\right\} & \text{si } \Lambda=\mathbb{Z}\left[i\sqrt{2}\right]\\ \left\{\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2},0\right),\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2},0\right),\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}\right)\right\} & \text{si } \Lambda=\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right]\end{cases}.$$

On peut calculer les multiplicateurs des exemples de Lattès apparaissant dans la proposition 4.23 en leurs points fixes (voir la table 1). On a alors le résultat ci-dessous, qui caractérise les exemples de Lattès de degré 2 et est une conséquence immédiate du corollaire 4.18 et de la proposition 4.23.

Corollaire 4.24. *Soit $f\in\mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$. Alors f est un exemple de Lattès si et seulement si ses multiplicateurs en ses points fixes répétés avec multiplicités sont*
- *soit -4, $-1-i$ et $-1+i$,*
- *soit $-1-i$, $-1-i$ et $2i$,*
- *soit $-1+i$, $-1+i$ et $-2i$,*
- *soit -2, $-i\sqrt{2}$ et $i\sqrt{2}$,*
- *soit $\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$, $\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$,*
- *soit $\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}$, $\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$,*
- *soit $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$, $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$,*
- *soit $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$, $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$.*

TABLE 1. Multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de $\mathrm{Lat}_{a,b}^{\Lambda,n}$ en ses points fixes.

Λ	n	a	b	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
$\mathbb{Z}[i]$	2	$1-i$	0	$-1+i, -1+i, -2i$
$\mathbb{Z}[i]$	2	$1+i$	0	$-1-i, -1-i, 2i$
$\mathbb{Z}[i]$	4	$1+i$	0	$-4, -1-i, -1+i$
$\mathbb{Z}\left[i\sqrt{2}\right]$	2	$i\sqrt{2}$	0	$-2, -i\sqrt{2}, i\sqrt{2}$
$\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right]$	2	$\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$	0	$\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$
$\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right]$	2	$\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$
$\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right]$	2	$\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$	0	$\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-3+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$
$\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right]$	2	$\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$

4.2.3. Quelques préliminaires sur les anneaux d'entiers quadratiques imaginaires. Rappelons maintenant certains faits concernant l'anneau A_D des entiers du corps $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{D}\right)$, avec $D \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré.

Soit $D \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré. Alors on a

$$A_D = \mathbb{Z}\left[\alpha_D\right], \quad \text{où} \quad \alpha_D = \begin{cases} i\sqrt{D} & \text{si } D \equiv 1, 2 \pmod 4 \\ \frac{1+i\sqrt{D}}{2} & \text{si } D \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}.$$

L'anneau A_D est intégralement clos. En particulier, si $a, b \in A_D$ sont tels que ab^2 est un carré dans A_D, alors a est un carré dans A_D ou b est nul. Cette propriété nous sera utile dans notre démonstration du théorème 4.14.

Les éléments de A_D forment un réseau de $\mathbb{C}$. Décrivons les intersections de A_D avec les disques euclidiens centrés en l'origine. Notons $N \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ l'application donnée par $N(z) = |z|^2$, qui est multiplicative et dont la restriction coïncide avec la norme de l'extension $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{D}\right)/\mathbb{Q}$.

Supposons que $D \equiv 1, 2 \pmod 4$. Alors, pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$, on a

$$N\left(x + y\alpha_D\right) = x^2 + Dy^2 \in \mathbb{N}\,.$$

Par conséquent, pour tout $R \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\left\{z \in A_D : N(z) \leq R\right\} \subset \left\{x + y\alpha_D : x, y \in \mathbb{Z},\ |x| \leq \sqrt{R} \text{ et } |y| \leq \sqrt{\frac{R}{D}}\right\},$$

et en particulier

$$\left\{z \in A_D : N(z) \leq R\right\} \subset \mathbb{Z} \quad \text{si} \quad R < D\,.$$

Supposons que $D \equiv 3 \pmod 4$. Alors, pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$, on a

$$N\left(x + y\alpha_D\right) = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{D}{4}y^2 = x^2 + xy + \frac{D+1}{4}y^2 \in \mathbb{N}\,.$$

Par conséquent, pour tout $R \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\left\{z \in A_D : N(z) \leq R\right\} \subset \left\{x + y\alpha_D : x, y \in \mathbb{Z},\ |x| \leq \sqrt{R} + \sqrt{\frac{R}{D}} \text{ et } |y| \leq 2\sqrt{\frac{R}{D}}\right\},$$

et en particulier

$$\{z \in A_D : N(z) \leq R\} \subset \mathbb{Z} \quad \text{si} \quad 4R < D\,.$$

Ainsi, l'ensemble des entiers quadratiques imaginaires forme une partie discrète de $\mathbb{C}$ et, pour tout $R \in \mathbb{R}_+$, on peut déterminer tous les couples $(D, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$ tels que D est sans facteur carré, $z \in A_D$ et $N(z) \leq R$.

4.2.4. Démonstration du résultat. Afin de prouver le théorème 4.14, énonçons les trois lemmes ci-dessous, qui impliquent immédiatement le résultat désiré.

Lemme 4.25. *Soient $D \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré et $f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$ qui n'a pas de point fixe superattractif ou multiple et dont le multiplicateur en chaque cycle avec période inférieure ou égale à 5 est dans A_D. Alors f est soit une application puissance soit un exemple de Lattès.*

Démonstration. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les multiplicateurs de f en ses points fixes, qui sont dans $A_D \setminus \{0, 1\}$ d'après l'hypothèse. Alors les $1 - \lambda_j$, avec $j \in \{1, 2, 3\}$, sont dans $A_D \setminus \{0, 1\}$ et on a

$$\frac{1}{1-\lambda_1} + \frac{1}{1-\lambda_2} + \frac{1}{1-\lambda_3} = 1\,.$$

Si μ_1, μ_2, μ_3 sont des éléments de $A_D \setminus \{0, 1\}$ tels que

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = 1 \quad \text{et} \quad \Re\left(\frac{1}{\mu_1}\right) \leq \Re\left(\frac{1}{\mu_2}\right) \leq \Re\left(\frac{1}{\mu_3}\right)\,,$$

alors on a

$$\Re\left(\frac{1}{\mu_3}\right) \geq \frac{1}{3}\,, \quad \Re\left(\frac{1}{\mu_2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \Re\left(\frac{1}{\mu_3}\right)\right) \geq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mu_1} = 1 - \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_3}$$

puisque $\Re\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $z \in A_D \setminus \{0, 1\}$. Par conséquent, il n'y a qu'un nombre fini de triplets (μ_1, μ_2, μ_3) d'éléments de $A_D \setminus \{0, 1\}$ tels que $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = 1$. Si $D = 1$, alors il y a exactement 23 tels triplets à permutation près (voir la figure 1) ; si $D = 2$, alors il y en a 9 ; si $D = 3$, alors il y en a 27 (voir la figure 2) ; si $D = 7$, alors il y en a 14 ; si $D = 11$, alors il y en 3 ; si $D = 15$, alors il y en a 5. Dans les autres cas, 2, 3 et 4 sont les seuls éléments $z \in A_D \setminus \{0, 1\}$ tels que $\Re\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{4}$, et donc les seuls triplets (μ_1, μ_2, μ_3) d'éléments de $A_D \setminus \{0, 1\}$ tels que $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = 1$ sont $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$ et $(3, 3, 3)$ à permutation près (voir les figures 3 et 4). Ainsi, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, et celles-ci sont $(-5, -2, -1)$, $(-3, -3, -1)$ et $(-2, -2, -2)$ à permutation près si D est différent de 1, 2, 3, 7, 11 et 15. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont $-5, -2, -1$, alors on a

$$M_4^f(\lambda) = \lambda^3 - 159\lambda^2 + 7419\lambda - 84221\,,$$

qui n'est pas scindé sur A_D puisqu'il est irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré 3 et $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{D}\right)$ est une extension de $\mathbb{Q}$ de degré 2. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont $-3, -3, -1$, alors on a

$$M_5^f(\lambda) = \left(\lambda^3 + 267\lambda^2 + 20871\lambda + 414157\right)^2\,,$$

qui n'est pas scindé sur A_D puisqu'il est le carré d'un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré 3 et $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{D}\right)$ est une extension de $\mathbb{Q}$ de degré 2. Par conséquent, comme

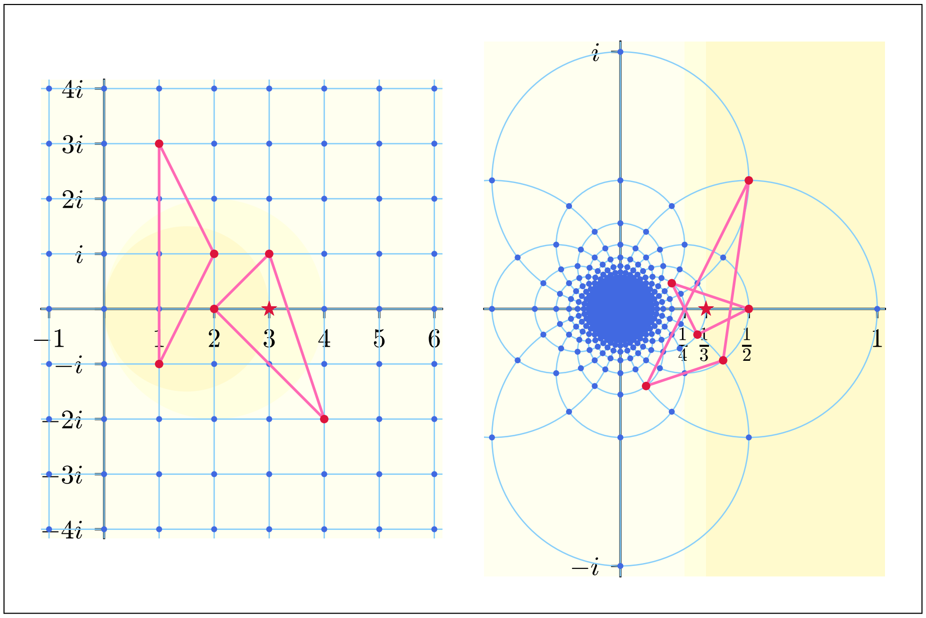

FIGURE 1. À gauche : Le réseau A_1 et 3 des 23 triplets non ordonnés μ_1, μ_2, μ_3 d'éléments de $A_1 \setminus \{0,1\}$ tels que $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = 1$. À droite : Image de A_1 et de ces trois triplets par l'inversion. Si μ_1, μ_2, μ_3 est un tel triplet, alors, quitte à ré-indexer, on a $\Re\left(\frac{1}{\mu_3}\right) \geq \frac{1}{3}$, $\Re\left(\frac{1}{\mu_2}\right) \geq \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ est le centre de gravité du triangle de sommets $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \frac{1}{\mu_3}$. Il y a exactement 6 éléments $z \in A_1 \setminus \{0,1\}$ tels que $\Re\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{3}$ et 11 éléments $z \in A_1 \setminus \{0,1\}$ tels que $\Re\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{4}$.

les polynômes M_n^f, avec $n \in \{3,4,5\}$, sont scindés sur A_D d'après le corollaire 3.44, on a

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \begin{cases} \begin{array}{c}\{(-4,-1-i,-1+i),(-2,-2,-2),\\ (-1-i,-1-i,2i),(-1+i,-1+i,-2i)\}\end{array} & \text{si } D=1 \\ \left\{(-2,-2,-2),\left(-2,-i\sqrt{2},i\sqrt{2}\right)\right\} & \text{si } D=2 \\ \begin{array}{c}\left\{(-2,-2,-2),\left(\frac{-3-i\sqrt{7}}{2},\frac{-3-i\sqrt{7}}{2},\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right),\right.\\ \left(\frac{-3+i\sqrt{7}}{2},\frac{-3+i\sqrt{7}}{2},\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right),\left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2},\frac{-1-i\sqrt{7}}{2},\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right),\\ \left.\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2},\frac{-1+i\sqrt{7}}{2},\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)\right\}\end{array} & \text{si } D=7 \\ \{(-2,-2,-2)\} & \text{sinon}\end{cases}$$

quitte à ré-indexer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (voir les tables 2, 3 et 4). Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont $-2,-2,-2$, alors f est une application puissance ; dans les autres cas, f est un exemple de Lattès d'après le corollaire 4.24. Ainsi, le lemme est démontré. □

D'après le lemme 4.25, nous sommes ramenés à étudier les fractions rationnelles quadratiques qui ont un point fixe superattractif ou multiple.

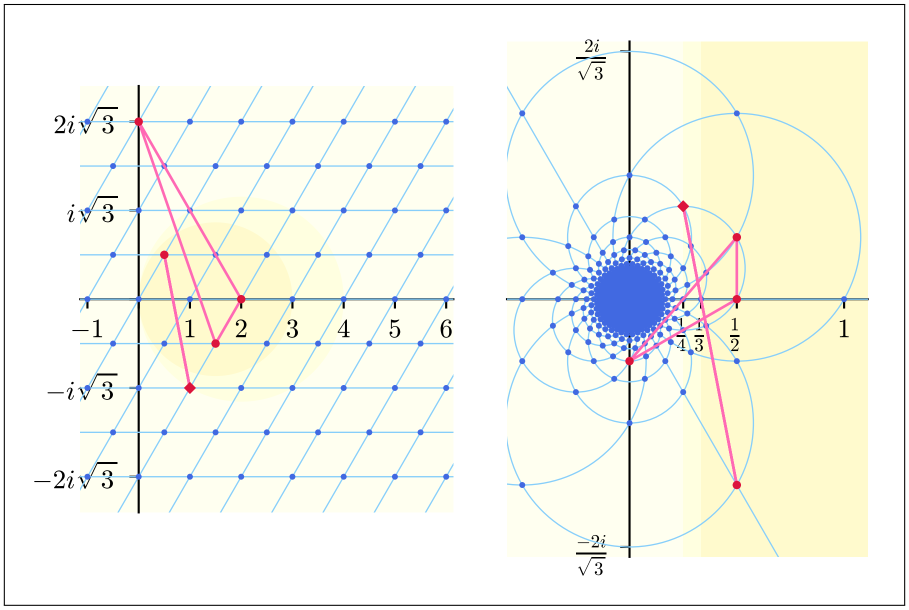

FIGURE 2. À gauche : Le réseau A_3 et 2 des 27 triplets non ordonnés μ_1, μ_2, μ_3 d'éléments de $A_3 \setminus \{0,1\}$ tels que $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = 1$. À droite : Image de A_3 et de ces deux triplets par l'inversion.

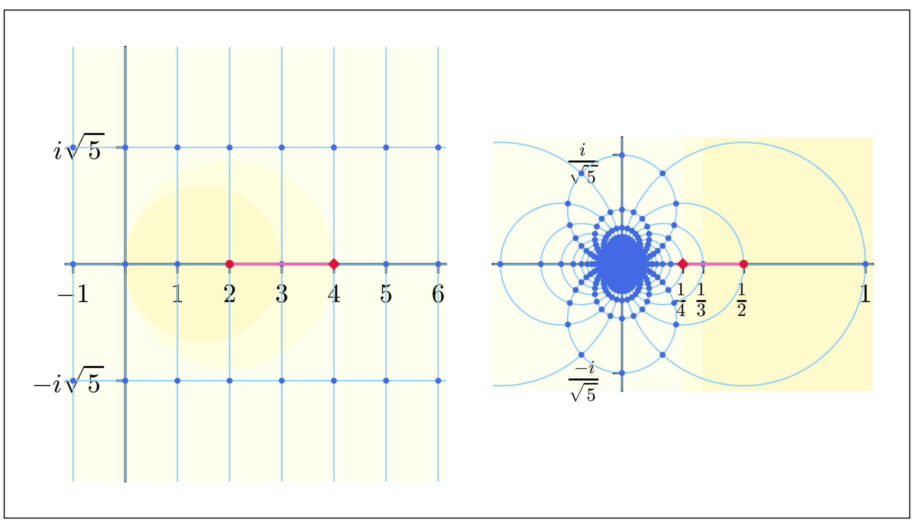

FIGURE 3. À gauche : Le réseau A_5 et 1 des 3 triplets non ordonnés μ_1, μ_2, μ_3 d'éléments de $A_5 \setminus \{0,1\}$ tels que $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = 1$. À droite : Image de A_5 et de ce triplet par l'inversion. Les seuls éléments $z \in A_5 \setminus \{0,1\}$ tels que $\Re\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{4}$ sont 2, 3 et 4.

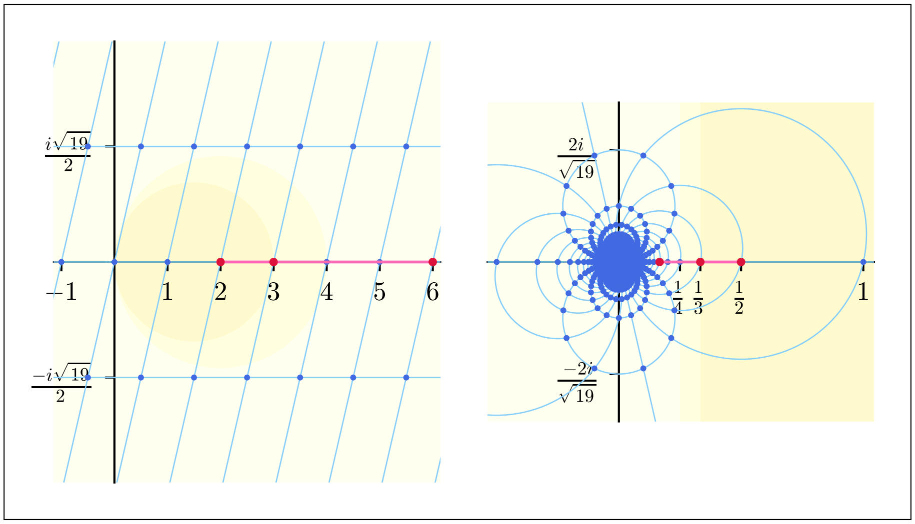

FIGURE 4. À gauche : Le réseau A_{19} et 1 des 3 triplets non ordonnés μ_1, μ_2, μ_3 d'éléments de $A_{19} \setminus \{0, 1\}$ tels que $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = 1$. À droite : Image de A_{19} et de ce triplet par l'inversion.

TABLE 2. Décomposition de M_3^f en facteurs irréductibles dans $A_D[\lambda]$ pour tous les triplets non ordonnés $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ d'éléments de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, à conjugaison complexe près, tels que M_1^f et M_2^f sont scindés sur A_D mais M_3^f ne l'est pas.

D	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Factorisation de M_3^f dans $A_D[\lambda]$
1	$-3-2i, -2+i, -1$	$\lambda^2 + (22+4i)\lambda + 121 + 40i$
1	$-1-4i, -1, -1+i$	$\lambda^2 + (10+12i)\lambda + 5 + 48i$
1	$-1-i, -3i, i$	$\lambda^2 + (12+2i)\lambda + 15 - 28i$
1	$-1, -i, 1+2i$	$\lambda^2 + (-2-4i)\lambda + 25 + 8i$
2	$-1-2i\sqrt{2}, -1, -1+i\sqrt{2}$	$\lambda^2 + \left(10+4i\sqrt{2}\right)\lambda + 33 + 16i\sqrt{2}$
3	$-3-2i\sqrt{3}, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, -1$	$\lambda^2 + \left(20+6i\sqrt{3}\right)\lambda + 79 + 54i\sqrt{3}$
3	$-2-i\sqrt{3}, -2+i\sqrt{3}, -1$	$\lambda^2 + 18\lambda + 89$
3	$-1, -i\sqrt{3}, i\sqrt{3}$	$\lambda^2 + 2\lambda + 25$
7	$\frac{-5-i\sqrt{7}}{2}, \frac{-5+i\sqrt{7}}{2}, -1$	$\lambda^2 + 22\lambda + 125$
7	$-2-i\sqrt{7}, \frac{-3+i\sqrt{7}}{2}, -1$	$\lambda^2 + \left(16+2i\sqrt{7}\right)\lambda + 67 + 14i\sqrt{7}$
7	$-1, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}, i\sqrt{7}$	$\lambda^2 + \left(4-2i\sqrt{7}\right)\lambda + 19 - 2i\sqrt{7}$
15	$\frac{-3-i\sqrt{15}}{2}, \frac{-3+i\sqrt{15}}{2}, -1$	$\lambda^2 + 14\lambda + 61$
15	$-1, \frac{-1-i\sqrt{15}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{15}}{2}$	$\lambda^2 + 6\lambda + 29$

LEMME 4.26. *Soient $D \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré et $f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$ qui a un point fixe superattractif et dont le multiplicateur en chaque cycle avec période inférieure ou égale à 4 est dans A_D. Alors f est soit une application puissance soit une application de Tchebychev.*

TABLE 3. Décomposition de M_4^f en facteurs irréductibles dans $A_D[\lambda]$ pour tous les triplets non ordonnés $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ d'éléments de $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ hormis $-5, -2, -1$, à conjugaison complexe près, tels que M_n^f est scindé sur A_D, avec $n \in \{1,2,3\}$, mais M_4^f ne l'est pas.

D	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Factorisation de M_4^f dans $A_D[\lambda]$
1	$-2-i, -2i, i$	$(\lambda-1)\left(\lambda^2+(6+12i)\lambda+41+60i\right)$
1	$-1-2i, -1, -1+2i$	$(\lambda-11)\left(\lambda^2+12\lambda+211\right)$
2	$-2, -1-i\sqrt{2}, -1+i\sqrt{2}$	$(\lambda-1)\left(\lambda^2+2\lambda+37\right)$
3	$\frac{-7-i\sqrt{3}}{2}, -1-i\sqrt{3}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\lambda^3+\frac{99-3i\sqrt{3}}{2}\lambda^2 + \frac{1449+9i\sqrt{3}}{2}\lambda+4267+768i\sqrt{3}$
3	$-2-2i\sqrt{3}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\left(\lambda+\frac{1+7i\sqrt{3}}{2}\right) \left(\lambda^2+\left(5-i\sqrt{3}\right)\lambda+\frac{95-17i\sqrt{3}}{2}\right)$
3	$-2-i\sqrt{3}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, i\sqrt{3}$	$\left(\lambda+8+5i\sqrt{3}\right) \left(\lambda^2+\left(-19-i\sqrt{3}\right)\lambda-62+65i\sqrt{3}\right)$
3	$-2, \frac{-1-3i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\lambda^3+\frac{39-7i\sqrt{3}}{2}\lambda^2 + \frac{261-19i\sqrt{3}}{2}\lambda+449-302i\sqrt{3}$
3	$-1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, 1+2i\sqrt{3}$	$\lambda^3+\left(33-12i\sqrt{3}\right)\lambda^2 + \left(-297-132i\sqrt{3}\right)\lambda+103+1392i\sqrt{3}$
3	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, 1-i\sqrt{3}$	$\lambda^3+\frac{27+27i\sqrt{3}}{2}\lambda^2 + \frac{-423+39i\sqrt{3}}{2}\lambda+883+624i\sqrt{3}$
7	$-3, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$	$\lambda^3+25\lambda^2+187\lambda+587$
7	$-1, \frac{1-i\sqrt{7}}{2}, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$	$\lambda^3+\lambda^2-5\lambda-413$

DÉMONSTRATION. Il existe un paramètre $c \in \mathbb{C}$ tel que f est conjuguée à f_c. Montrons que $c \in \{-2, 0\}$. D'après le corollaire 3.44, les polynômes

$$M_1^{f_c}(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 4c\lambda \quad \text{et} \quad M_3^{f_c}(\lambda) = \lambda^2 + (-8c-16)\lambda + 64c^3 + 128c^2 + 64c + 64$$

sont scindés sur A_D, et donc $4c$ est dans A_D et

$$\operatorname{disc} M_1^{f_c} = -2^2(4c-1)(4c)^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{disc} M_3^{f_c} = -2^2(4c+7)(4c)^2$$

sont des carrés dans A_D. Par conséquent, on a $c = 0$ ou il existe $a, b \in A_D$ tels que

$$-(4c-1) = a^2 \quad \text{et} \quad -(4c+7) = b^2\,.$$

Dans le second cas, on a $(a-b)(a+b) = 8$, ce qui entraîne

$$a = \frac{(a-b)^2+8}{2(a-b)} \in A_D \cap \left\{ \frac{e^2+8}{2e} : e \in A_D \text{ et } N(e) \text{ divise } 64 \right\},$$

Table 4. Décomposition de M_5^f en facteurs irréductibles dans $A_D[\lambda]$ pour tous les triplets non ordonnés $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ d'éléments de $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ hormis $-3, -3, -1$, à conjugaison complexe près, tels que M_n^f est scindé sur A_D, avec $n \in \{1, \ldots, 4\}$, mais M_5^f ne l'est pas.

D	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Factorisation de M_5^f dans $A_D[\lambda]$
1	$-2-i, -2-i, -1+i$	$\big(\lambda^3 + (10+23i)\lambda^2 + (33+188i)\lambda + 758 + 1703i\big)^2$
1	$-1-2i, -1-2i, i$	$\big(\lambda^3 + (-5+32i)\lambda^2 + (-633-640i)\lambda + 605 - 11584i\big)^2$
1	$-i, -i, 1+i$	$\big(\lambda^3 + (4+31i)\lambda^2 + (-171-176i)\lambda - 700 + 1699i\big)^2$
2	$-1-i\sqrt{2}, -1-i\sqrt{2}, i\sqrt{2}$	$\big(\lambda^3 + \big(3+3i\sqrt{2}\big)\lambda^2 + \big(-27-42i\sqrt{2}\big)\lambda + 3 - 343i\sqrt{2}\big)^2$
3	$-2-i\sqrt{3}, -2-i\sqrt{3}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\big(\lambda^3 + \big(-12-21i\sqrt{3}\big)\lambda^2 + \big(-573+36i\sqrt{3}\big)\lambda - 8380 + 2709i\sqrt{3}\big)^2$
3	$\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}, -1+i\sqrt{3}$	$\left(\lambda^3 + \frac{15-5i\sqrt{3}}{2}\lambda^2 + \frac{-87-169i\sqrt{3}}{2}\lambda - 320 - 709i\sqrt{3}\right)^2$
3	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, 1+i\sqrt{3}$	$\left(\lambda^3 + \frac{3-3i\sqrt{3}}{2}\lambda^2 + \frac{-147+45i\sqrt{3}}{2}\lambda - 577 - 720i\sqrt{3}\right)^2$
3	$-i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$	$\big(\lambda^3 + \big(42-29i\sqrt{3}\big)\lambda^2 + \big(-1329-232i\sqrt{3}\big)\lambda - 7742 + 4897i\sqrt{3}\big)^2$

et donc

$$a \in \begin{cases} \{-3,-2,-i,i,2,3\} & \text{si } D = 1 \\ \{-3,0,3\} & \text{si } D = 2 \\ \left\{-3, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{3-i\sqrt{3}}{2}, \frac{3+i\sqrt{3}}{2}, 3\right\} & \text{if } D = 3 \\ \{-3,-1,1,3\} & \text{si } D = 7 \\ \{-3,3\} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Par conséquent, dans le second cas, on a

$$c = \frac{1-a^2}{4} \in \begin{cases} \left\{-2, \frac{-3}{4}, \frac{1}{2}\right\} & \text{si } D = 1 \\ \left\{-2, \frac{1}{4}\right\} & \text{si } D = 2 \\ \left\{-2, \frac{-1-3i\sqrt{3}}{8}, \frac{-1+3i\sqrt{3}}{8}\right\} & \text{si } D = 3 \\ \{-2,0\} & \text{si } D = 7 \\ \{-2\} & \text{sinon} \end{cases},$$

et donc $c \in \{-2, 0\}$ puisque le polynôme $M_4^{f_c}$ est scindé sur A_D d'après le corollaire 3.44 (voir la table 5). Ainsi, le lemme est démontré. □

TABLE 5. Décomposition de $M_4^{f_c}$ en facteurs irréductibles dans $A_D[\lambda]$ pour les valeurs de D et c apparaissant dans notre démonstration du lemme 4.26.

D	c	Factorisation de $M_4^{f_c}$ dans $A_D[\lambda]$
1	$\frac{-3}{4}$	$\lambda^3 - 39\lambda^2 + 939\lambda - 5221$
1	$\frac{1}{2}$	$\lambda^3 - 44\lambda^2 + 784\lambda - 8896$
2	$\frac{1}{4}$	$\lambda^3 - 47\lambda^2 + 779\lambda - 4861$
3	$\frac{-1-3i\sqrt{3}}{8}$	$\lambda^3 + \frac{-109+3i\sqrt{3}}{2}\lambda^2 + \frac{1177+15i\sqrt{3}}{2}\lambda - 2983 - 1218i\sqrt{3}$
3	$\frac{-1+3i\sqrt{3}}{8}$	$\lambda^3 + \frac{-109-3i\sqrt{3}}{2}\lambda^2 + \frac{1177-15i\sqrt{3}}{2}\lambda - 2983 + 1218i\sqrt{3}$

D'après les lemmes 4.25 et 4.26, il nous reste à examiner les fractions rationnelles quadratiques qui ont un point fixe multiple et dont les multiplicateurs sont dans l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire donné. Nous montrons qu'il n'existe aucune.

LEMME 4.27. *Soient $D \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré et $f \in \mathrm{Rat}_2(\mathbb{C})$ dont le multiplicateur en chaque cycle avec période inférieure ou égale à 5 est dans A_D. Alors les points fixes pour f sont simples.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde, et supposons que f admet un point fixe multiple. Si f admet un unique point fixe, alors f est conjuguée à h d'après la proposition 4.17, et donc le polynôme

$$M_5^h(\lambda) = \left(\lambda^3 - 309\lambda^2 + 27399\lambda - 696691\right)^2$$

est scindé sur A_D d'après le corollaire 3.44, ce qui est impossible puisqu'il est le carré d'un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ de degré 3 et $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{D}\right)$ est une extension de $\mathbb{Q}$ de degré 2. Ainsi, f admet exactement deux points fixes, et par suite f est conjuguée à $g_{a,1}$ d'après la proposition 4.17, où $a \in A_D \setminus \{1\}$ désigne le multiplicateur de f en son point fixe simple. D'après le corollaire 3.44, le polynôme

$$M_3^{g_{a,1}}(\lambda) = \lambda^2 + \left(-4a^2 - 16a - 18\right)\lambda + 36a^3 + 112a^2 + 124a + 89$$

est scindé sur A_D, et donc

$$\operatorname{disc} M_3^{g_{a,1}} = 2^4(a+2)(a-1)^3$$

est un carré dans A_D. Par suite, il existe $b \in A_D$ tel que $(a-1)(a+2) = b^2$, et on a

$$(2a - 2b + 1)(2a + 2b + 1) = 9\,.$$

Par conséquent, comme

$$a = \frac{(2a - 2b + 1)^2 - 2(2a - 2b + 1) + 9}{4(2a - 2b + 1)}\,,$$

on a

$$a \in (A_D \setminus \{1\}) \cap \left\{\frac{c^2 - 2c + 9}{4c} : c \in A_d \text{ et } N(c) \text{ divise } 81\right\}\,,$$

et donc

$$a \in \begin{cases} \{-3, -2, -1, 0, 2\} & \text{si } D = 2 \\ \left\{-3, -2, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, 2\right\} & \text{si } D = 3 \\ \{-3, -2, 2\} & \text{sinon} \end{cases}.$$

TABLE 6. Décomposition de $M_4^{g_{a,1}}$ en facteurs irréductibles dans $A_D[\lambda]$ pour les valeurs de D et a apparaissant dans notre démonstration du lemme 4.27.

D	a	Factorisation de $M_4^{g_{a,1}}$ dans $A_D[\lambda]$
2	-1	$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 255\lambda - 1457$
2	0	$\lambda^3 - 47\lambda^2 + 779\lambda - 4861$
3	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	$\lambda^3 + \left(-21 + 14i\sqrt{3}\right)\lambda^2 + \left(99 - 124i\sqrt{3}\right)\lambda - 1279 + 542i\sqrt{3}$
3	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\lambda^3 + \left(-21 - 14i\sqrt{3}\right)\lambda^2 + \left(99 + 124i\sqrt{3}\right)\lambda - 1279 - 542i\sqrt{3}$

Notons que le polynôme

$$M_4^{g_{-3,1}}(\lambda) = (\lambda - 31)\left(\lambda^2 + 80\lambda + 1231\right)$$

n'est pas scindé sur A_D puisqu'il admet deux racines réelles non entières. De plus, les polynômes

$$M_4^{g_{-2,1}}(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 123\lambda + 1307 \quad \text{et} \quad M_3^{g_{2,1}}(\lambda) = \lambda^3 - 231\lambda^2 + 17211\lambda - 407861$$

ne le sont pas non plus puisqu'ils sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$ de degré 3 et $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{D}\right)$ est une extension de $\mathbb{Q}$ de degré 2. Ceci contredit le fait que le polynôme $M_4^{g_{a,1}}$ est scindé sur A_D d'après le corollaire 3.44 (voir la table 6). Ainsi, le lemme est démontré. $\square$

Ainsi, nous avons démontré le théorème 4.14, qui est une conséquence immédiate des lemmes 4.25, 4.26 et 4.27.

Annexe A

Quelques résultats d'algèbre générale

Nous rassemblons ici plusieurs résultats bien connus concernant les polynômes dont nous avons besoin dans cette thèse.

A.1. Quelques lemmes généraux sur les polynômes

Énonçons d'abord le résultat ci-dessous. Il généralise un lemme de Gauss qui affirme que, si le produit de deux polynômes unitaires à coefficients rationnels est à coefficients entiers, alors chacun des facteurs est à coefficients entiers.

Lemme A.1 ([Mal85, Chapitre 5, Lemme 3.11]). *Soient A un anneau intégralement clos, K son corps des fractions et $P, Q \in K[X]$ des polynômes unitaires tels que $PQ \in A[X]$. Alors P et Q sont dans $A[X]$.*

Remarque A.2. Si A est un anneau intègre, K est son corps des fractions et $P, Q \in K[X]$ sont des polynômes unitaires tels que $PQ \in A[X]$, alors P et Q ne sont pas nécessairement dans $A[X]$ lorsque A n'est pas intégralement clos. Par exemple, si

$$A = \mathbb{F}_2\left[T^2, T^3\right] \subset \mathbb{F}_2[T], \quad K = \mathbb{F}_2(T) \quad \text{et} \quad P(X) = X + T \in K[X],$$

alors K est le corps des fractions de A et on a

$$P(X)^2 = X^2 + T^2 \in A[X]$$

puisque K est de caractéristique 2, mais P n'est pas dans $A[X]$.

On a également le résultat suivant :

Lemme A.3. *Soient K un corps, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $P \in \overline{K}[X]$ un polynôme unitaire et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P^n \in K[X]$. Si les racines de P dans $\overline{K}$ sont séparables sur K ou si la caractéristique de K ne divise pas n, alors $P \in K[X]$.*

Démonstration. Notons $x_1, \ldots, x_m$ les racines de P dans $\overline{K}$ répétées avec multiplicités, qui sont algébriques sur K puisqu'elles sont racines de $P^n \in K[X]$. Supposons que $x_1, \ldots, x_m$ sont séparables sur K, et montrons que $P \in K[X]$. Posons $L = K(x_1, \ldots, x_m)$. Alors l'extension L/K est galoisienne finie puisque $x_1, \ldots, x_m$ sont séparables sur K et L est un corps de décomposition de P^n sur K. Comme P est unitaire, on a

$$P(X) = X^m + \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \sigma_j X^{m-j},$$

où $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in L$ désignent les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, \ldots, x_m$. Montrons que $\sigma_1, \ldots, \sigma \in K$. Si $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$, alors on a

$$\prod_{j=1}^{m} (X - \tau(x_j))^n = \tau(P(X)^n) = P(X)^n = \prod_{j=1}^{m} (X - x_j)^n$$

puisque $P^n \in K[X]$, et donc τ induit une permutation des racines de P qui préserve les multiplicités. Par conséquent, pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, on a $\tau(\sigma_j) = \sigma_j$ pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$, et donc $\sigma_j \in K$ puisque L/K est galoisienne. Ainsi, $P \in K[X]$.

Supposons maintenant que la caractéristique de K ne divise pas n. Écrivons

$$P(X) = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j \in \overline{K}[X]\,, \quad \text{avec} \quad a_m = 1\,.$$

Montrons que $P \in K[X]$. Raisonnons par récurrence descendante, et montrons que $a_j \in K$ pour tout $j \in \{0, \ldots, m\}$. On a $a_m = 1 \in K$. Soit $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, et supposons que $a_k \in K$ pour tout $k \in \{j+1, \ldots, m\}$. On a

$$P(X)^n = \sum_{l=0}^{mn} b_l X^l \in K[X]\,, \quad \text{où} \quad b_l = \sum_{\substack{0 \leq j_1, \ldots, j_n \leq m \\ j_1 + \cdots + j_n = l}} \prod_{k=1}^{n} a_{j_k}$$

pour tout $l \in \{0, \ldots, mn\}$. En particulier, on a

$$b_{m(n-1)+j} = n a_j + \sum_{\substack{j+1 \leq j_1, \ldots, j_n \leq m \\ j_1 + \cdots + j_n = l}} \prod_{k=1}^{n} a_{j_k} \in K\,,$$

et donc $n a_j \in K$ d'après l'hypothèse de récurrence. Par conséquent, on a $a_j \in K$ puisque la caractéristique de K ne divise pas n. Ainsi, la récurrence est achevée, et le lemme est démontré. $\square$

Remarque A.4. Si K est un corps, $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \overline{K}[X]$ est un polynôme unitaire tel que $P^n \in K[X]$, alors P n'est pas nécessairement dans $K[X]$. Par exemple, si p est un nombre premier,

$$K = \mathbb{F}_p(T) \quad \text{et} \quad P(X) = T^{\frac{1}{p}} \in \overline{K}[X]\,,$$

où $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K et $T^{\frac{1}{p}}$ est une racine p-ième de T dans $\overline{K}$, alors on a

$$P(X)^p = X^p + T \in K[X]$$

puisque $\overline{K}$ est de caractéristique p mais P n'est pas dans $K[X]$ car, si $T^{\frac{1}{p}} \in K[X]$, alors il existe $q, r \in \mathbb{F}_p[T]$ tels que $r \neq 0$ et $T^{\frac{1}{p}} = \frac{q(T)}{r(T)}$, et on a $Tr(T)^p = q(T)^p$, et donc $1 + p \deg r = p \deg q$, qui est absurde.

Une conséquence directe des lemmes A.1 et A.3 est le résultat ci-dessous. Il nous est notamment utile pour établir l'existence de polynômes multiplicateurs M_n^f dans $A[\lambda]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, d'un polynôme $f \in \mathrm{Poly}_d^U(A)$, avec $d \geq 2$ et A un anneau intègre.

Corollaire A.5. *Soient A un anneau intégralement clos de caractéristique nulle, K son corps des fractions, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $P \in \overline{K}[X]$ un polynôme unitaire et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P^n \in A[X]$. Alors $P \in A[X]$.*

Le résultat ci-dessous nous permettra d'établir l'unicité des polynômes multiplicateurs d'une fraction rationnelle.

Lemme A.6. *Soient A un anneau intègre, $P, Q \in A[X]$ des polynômes unitaires et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $P^n = Q^n$. Alors $P = Q$.*

Démonstration. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique du corps des fractions de A. On a

$$\prod_{j=1}^{n}(P-\zeta_j Q)=P^n-Q^n=0\,,$$

où $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ sont les racines de X^n-1 dans $\overline{K}$ répétées avec multiplicités. Pour tout $\zeta\in\overline{K}\setminus\{1\}$, le polynôme $P-\zeta Q$ n'est pas nul puisque P est unitaire et ζQ est de coefficient dominant ζ. Par conséquent, comme $\overline{K}[X]$ est intègre, $P-Q=0$. Ainsi, le lemme est démontré. □

Remarque A.7. Si A est un anneau commutatif, $n\in\mathbb{N}^*$ et $P,Q\in A[X]$ sont des polynômes unitaires tels que $P^n=Q^n$, alors P et Q ne sont pas nécessairement égaux lorsque A n'est pas intègre. Par exemple, dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$, on a $X^2=(X+2)^2$.

Rappelons enfin le lemme de Gauss. Soit A un anneau factoriel. La relation d'association $\sim$ sur A définie par

$$x\sim y\iff \exists u\in A^\times,\, x=uy$$

est une relation d'équivalence compatible avec la multiplication. Étant donné un polynôme $P\in A\,[X_1,\ldots,X_n]$, avec $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle *contenu* de P, que l'on note $\mathrm{cont}(P)$, la classe d'équivalence formée par les pgcd de ses coefficients. On dit qu'un polynôme $P\in A\,[X_1,\ldots,X_n]$, avec $n\in\mathbb{N}^*$, est *primitif* si son contenu est $A^\times$ ou, de manière équivalente, si ses coefficients sont premiers entre eux. On a le résultat ci-dessous connu sous le nom de lemme de Gauss, qui permet notamment de démontrer que l'anneau $A\,[X_1,\ldots,X_n]$ est factoriel pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Lemme A.8. *Soient A un anneau factoriel, $n\in\mathbb{N}^*$ et $P,Q\in A\,[X_1,\ldots,X_n]$. Alors on a*

$$\mathrm{cont}(PQ)=\mathrm{cont}(P)\,\mathrm{cont}(Q)\,.$$

A.2. Polynômes homogènes

Soient A un anneau commutatif et $n\in\mathbb{N}^*$. L'ensemble $A\,[X_1,\ldots,X_n]$ est naturellement muni d'une structure de A-algèbre commutative. Pour $d\in\mathbb{N}$, notons $A\,[X_1,\ldots,X_n]_d$ le sous-A-module de $A\,[X_1,\ldots,X_n]$ engendré par

$$\left\{\prod_{j=1}^{n}X_j^{m_j}\,:\,(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}^n,\ \sum_{j=1}^{n}m_j=d\right\}\,,$$

Si A est non nul, alors $A\,[X_1,\ldots,X_n]_d$ est un A-module libre de rang $\binom{d+n-1}{n-1}$ pour tout $d\in\mathbb{N}$. De plus, la famille $(A\,[X_1,\ldots,X_n]_d)_{d\in\mathbb{N}}$ est une graduation de l'algèbre $A\,[X_1,\ldots,X_n]$ – c'est-à-dire, on a

$$A\,[X_1,\ldots,X_n]=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}A\,[X_1,\ldots,X_n]_d$$

et, pour tous $d,e\in\mathbb{N}$,

$$A\,[X_1,\ldots,X_n]_d\times A\,[X_1,\ldots,X_n]_e\subset A\,[X_1,\ldots,X_n]_{d+e}\,.$$

Pour $d\in\mathbb{N}$, on appelle *polynôme homogène* de degré d dans $A\,[X_1,\ldots,X_n]$ tout élément de $A\,[X_1,\ldots,X_n]_d$. Notons que le polynôme nul dans $A\,[X_1,\ldots,X_n]$ est homogène de tout degré.

Si $d \in \mathbb{N}$ et $P \in A\left[X_1, \ldots, X_n\right]_d$, alors l'application polynomiale associée à P est homogène de degré d – c'est-à-dire, on a $P(tx) = t^d P(x)$ pour tout $x \in A^n$ et tout $t \in A$. De plus, la réciproque est vraie si A est intègre et infini – c'est-à-dire, si $d \in \mathbb{N}$ et $P \in A\left[X_1, \ldots, X_n\right]$ est un polynôme dont l'application polynomiale est homogène de degré d, alors $P \in A\left[X_1, \ldots, X_n\right]_d$.

Si $d \in \mathbb{N}^*$ et $P \in A\left[X_1, \ldots, X_n\right]_d$, alors $\frac{\partial P}{\partial X_j}$ est un polynôme homogène de degré $d-1$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. De plus, pour tout $d \in \mathbb{N}$ et tout $P \in A\left[X_1, \ldots, X_n\right]_d$, on a l'égalité

$$dP = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial P}{\partial X_j}\,,$$

qui est appelée formule d'Euler.

L'ensemble $A\left[X_1, \ldots, X_n\right]^n$ est aussi muni d'une loi de composition interne associative $\circ$ définie par

$$\left(P_1, \ldots, P_n\right) \circ \left(Q_1, \ldots, Q_n\right) = \left(P_1\left(Q_1, \ldots, Q_n\right), \ldots, P_n\left(Q_1, \ldots, Q_n\right)\right)\,.$$

Pour tous $d, e \in \mathbb{N}$, on a

$$A\left[X_1, \ldots, X_n\right]_d \circ A\left[X_1, \ldots, X_n\right]_e \subset A\left[X_1, \ldots, X_n\right]_{de}\,.$$

Définissons enfin les racines d'un polynôme homogène à deux indéterminées à coefficients dans un corps. Soient K un corps, $d \in \mathbb{N}$ et $P \in K[X, Y]_d$. On dit que $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$ est une *racine* de P si $P\left(x_0, y_0\right) = 0$, où $\left(x_0, y_0\right) \in z_0$. Pour $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$, on appelle *multiplicité* de z_0 comme racine de P la quantité

$$\operatorname{ord}_{z_0} P = \sup\left\{m \in \mathbb{N} : \left(y_0 X - x_0 Y\right)^m \text{ divise } P(X, Y)\right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\,,$$

où $\left(x_0, y_0\right) \in z_0$, qui est finie si le polynôme P est non nul. Pour tout $z_0 \in \mathbb{P}^1(K)$, on a $\operatorname{ord}_{z_0} P \geq 1$ si et seulement si z_0 est racine de P. Si K est algébriquement clos, P est non nul, $z_1, \ldots, z_r$ sont les racines de P dans $\mathbb{P}^1(K)$ et $\left(x_j, y_j\right) \in z_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, alors il existe un unique $\alpha \in K^\times$ tel que

$$P(X, Y) = \alpha \prod_{j=1}^{r} \left(y_j X - x_j Y\right)^{m_j}\,, \quad \text{où} \quad m_j = \operatorname{ord}_{z_j} P\,.$$

Ainsi, les polynômes homogènes à deux indéterminées ont des propriétés analogues à celles des polynômes à une indéterminée.

A.3. Résultants et discriminants

Soient A un anneau commutatif et

$$P(X) = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j \in A[X] \quad \text{et} \quad Q(X) = \sum_{j=0}^{e} b_j X^j \in A[X]$$

des polynômes de degrés $d, e \in \mathbb{N}$. On appelle *résultant* de P et Q la quantité

$$\operatorname{res}(P, Q) = \begin{vmatrix} a_d & \dots & \dots & a_0 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & a_d & \dots & \dots & a_0 \\ b_e & \dots & \dots & b_0 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & b_e & \dots & \dots & b_0 \end{vmatrix} \in A\,,$$

qui est le déterminant d'une matrice carrée de taille $d+e$ dans laquelle les coefficients de P apparaissent sur les e premières lignes et ceux de Q sur les d dernières.

Soient B un anneau commutatif et $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux tel que $\varphi(P)$ et $\varphi(Q)$ sont non nuls. Notons d' et e' les degrés de $\varphi(P)$ et $\varphi(Q)$. Alors on a

$$\varphi\left(\operatorname{res}(P,Q)\right) = (-1)^{e\left(d-d'\right)}\varphi\left(a_d\right)^{e-e'}\varphi\left(b_e\right)^{d-d'}\operatorname{res}\left(\varphi(P),\varphi(Q)\right)\,,$$

avec la convention $0^0 = 1$. En particulier, si $d = d'$ et $e = e'$, alors on a

$$\varphi\left(\operatorname{res}(P,Q)\right) = \operatorname{res}\left(\varphi(P),\varphi(Q)\right)\,.$$

Supposons maintenant que A est intègre. Soient K le corps des fractions de A et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Notons $x_1,\dots,x_d$ et $y_1,\dots,y_d$ les racines de P et Q dans $\overline{K}$ répétées avec multiplicités, de sorte que

$$P(X) = a_d\prod_{j=1}^{d}\left(X-x_j\right) \quad \text{et} \quad Q(X) = b_e\prod_{j=1}^{e}\left(X-y_j\right)\,.$$

Alors on a

$$\operatorname{res}(P,Q) = a_d^e\prod_{j=1}^{d}Q\left(x_j\right) = (-1)^{de}b_e^d\prod_{j=1}^{e}P\left(y_j\right) = a_d^eb_e^d\prod_{j=1}^{d}\prod_{k=1}^{e}\left(x_j-y_k\right)\,.$$

En particulier, on a $\operatorname{res}(P,Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont une racine commune dans $\overline{K}$ ou, de manière équivalente, si et seulement si P et Q ne sont pas premiers entre eux dans $K[X]$.

Définissons maintenant le discriminant d'un polynôme non constant à coefficients dans un anneau intègre. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème fondamental des polynômes symétriques, il existe un unique polynôme $\Delta_d \in \mathbb{Z}\left[X_1,\dots,X_d\right]$ tel que

$$\prod_{1\le j<k\le d}\left(X_j-X_k\right)^2 = \Delta_d\left(\Sigma_1\left(X_1,\dots,X_d\right),\dots,\Sigma_d\left(X_1,\dots,X_d\right)\right)\,,$$

où $\Sigma_1,\dots,\Sigma_d$ sont les polynômes symétriques élémentaires donnés par

$$\Sigma_k\left(X_1,\dots,X_d\right) = \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le d}\prod_{l=1}^{k}X_{j_l}\,.$$

Soient A un anneau intègre et

$$P(X) = \sum_{j=0}^{d}a_jX^j \in A[X]$$

un polynôme de degré d. On appelle *discriminant* de P la quantité

$$\operatorname{disc}P = a_d^{2d-2}\Delta_d\left(\frac{-a_{d-1}}{a_d},\dots,\frac{(-1)^da_0}{a_d}\right) \in A\,.$$

Si $\overline{K}$ est une clôture algébrique du corps des fractions de A et $x_1,\dots,x_d$ sont les racines de P dans $\overline{K}$ répétées avec multiplicités, alors on a

$$\operatorname{disc}P = a_d^{2d-2}\prod_{1\le j<k\le d}\left(x_j-x_k\right)^2\,.$$

En particulier, on a $\operatorname{disc}P = 0$ si et seulement si P n'est pas séparable.

Notons d' le degré du polynôme dérivé P' de P. Alors on a

$$\operatorname{disc} P = \begin{cases} (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_d^{d-d'-2} \operatorname{res}(P, P') & \text{si } P' \neq 0 \\ 0 & \text{si } P' = 0 \end{cases} .$$

En particulier, si $d' = d - 1$, alors on a

$$\operatorname{disc} P = \frac{(-1)^{\frac{d(d-1)}{2}}}{a_d} \operatorname{res}(P, P') \ .$$

Si B est un anneau intègre et $\varphi\colon A \to B$ est un morphisme d'anneaux tel que $\varphi(P)$ est de degré d, alors on a

$$\varphi(\operatorname{disc} P) = \operatorname{disc} \varphi(P) \, .$$

Définissons enfin le résultant de deux polynômes homogènes à deux indéterminées. Soient A un anneau commutatif, $d, e \in \mathbb{N}$ et

$$P(X,Y) = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j Y^{d-j} \in A[X,Y]_d \quad \text{et} \quad Q(X,Y) = \sum_{j=0}^{e} b_j X^j Y^{e-j} \in A[X,Y]_e \, .$$

On appelle *résultant* de P et Q la quantité

$$\operatorname{res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_d & \dots & \dots & a_0 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & a_d & \dots & \dots & a_0 \\ b_e & \dots & \dots & b_0 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & b_e & \dots & \dots & b_0 \end{vmatrix} \in A \, ,$$

qui est égale au résultant des polynômes à une indéterminée $P(X,1)$ et $Q(X,1)$ dans $A[X]$ si a_d et b_e sont non nuls.

Si B est un anneau commutatif et $\varphi\colon A \to B$ est un morphisme d'anneaux, alors on a

$$\varphi\left(\operatorname{res}(P,Q)\right) = \operatorname{res}\left(\varphi(P), \varphi(Q)\right) \ .$$

Supposons maintenant que A est intègre et P et Q sont non nuls. Soient K le corps des fractions de A et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Notons $w_1, \dots, w_d$ et $z_1, \dots, z_e$ les racines de P et Q dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ répétées avec multiplicités, et écrivons

$$P(X,Y) = \alpha \prod_{j=1}^{d} (v_j X - u_j Y) \quad \text{et} \quad Q(X,Y) = \beta \prod_{j=1}^{e} (y_j X - x_j Y) \ ,$$

avec $(u_j, v_j) \in w_j$ pour $j \in \{1, \dots, d\}$ et $(x_j, y_j) \in z_j$ pour $j \in \{1, \dots, e\}$. Alors

$$\operatorname{res}(P,Q) = \alpha^e \prod_{j=1}^{d} Q\left(u_j, v_j\right) = (-1)^{de} \beta^d \prod_{j=1}^{e} P\left(x_j, y_j\right) \ .$$

En particulier, on a $\operatorname{res}(P,Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont eu une racine commune dans $\mathbb{P}^1\left(\overline{K}\right)$ ou, de manière équivalente, si et seulement si P et Q ne sont pas premiers entre eux dans $K[X,Y]$.

Comme la fonction det est polynomiale en ses coefficients, le résultant de deux polynômes homogènes dont les coefficients sont des indéterminées est un polynôme. De plus, on a le résultat suivant :

LEMME A.9 ([**vdW70**, Section 5.9]). *Soient* $d, e \in \mathbb{N}$ *et* $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d$ *et* $\mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_e$ *des indéterminées sur* $\mathbb{Z}$*. Notons*

$$\mathfrak{A} = \mathbb{Z}\left[\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d, \mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_e\right]$$

et posons

$$\mathfrak{P}(x,y) = \sum_{j=0}^{d} \mathfrak{a}_j x^j y^{d-j} \in \mathfrak{A}[x,y]_d \quad et \quad \mathfrak{Q}(x,y) = \sum_{j=0}^{e} \mathfrak{b}_j x^j y^{e-j} \in \mathfrak{A}[x,y]_e\,.$$

Alors le polynôme $\operatorname{res}(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \in \mathfrak{A}$ *est primitif et irréductible sur tout corps.*

Enfin, concluons avec le résultat ci-dessous.

LEMME A.10 ([**Lan02**, Chapter IX, Theorem 3.13]). *Soient* A *un anneau commutatif,* $F_1 \in A[X,Y]_{d_1}$*,* $F_2 \in A[X,Y]_{d_2}$ *et* $G \in A[X,Y]_e^2$*, avec* $d_1, d_2, e \in \mathbb{N}$*. Alors on a*

$$\operatorname{res}\left(F_1 \circ G, F_2 \circ G\right) = \operatorname{res}\left(F_1, F_2\right)^e \operatorname{res}(G)^{d_1 d_2}\,.$$

Annexe B

Résolution d'une équation diophantienne

Nous démontrons ici l'énoncé ci-dessous, qui est un argument crucial dans notre preuve de la proposition 2.49.

LEMME B.1. *Soient* $x, y, z \in \mathbb{Z}$ *tels que* $x^3 + y^3 = 4z^3$. *Alors* $z = 0$.

Remarquons que la courbe algébrique projective donnée par $x^3+y^3 = 4z^3$ munie du point $[-1\colon 1\colon 0]$ définit une courbe elliptique E sur $\mathbb{Q}$. De plus, l'application

$$(x, y, z) \mapsto (12z, 18(y - x), x + y)$$

induit un isomorphisme de E sur la courbe elliptique définie par $y^2z = x^3 - 108z^3$. D'après [**LMF**], le groupe des points rationnels de cette dernière est trivial, ce qui prouve le lemme B.1.

Notre démonstration du lemme B.1 est adaptée de la preuve du grand théorème de Fermat pour l'exposant 3 présentée dans [**Hin11**] et utilise le principe de descente infinie.

Considérons l'anneau des entiers d'Eisenstein $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[j]$, où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right) \in \mathbb{C}$. L'anneau $\mathbb{A}$ est un anneau euclidien pour la norme

$$N\colon x + jy \mapsto |x + jy|^2 = x^2 - xy + y^2$$

et son groupe des inversibles

$$\mathbb{A}^\times = \{a \in \mathbb{A} : N(a) = 1\} = \left\{\pm 1, \pm j, \pm j^2\right\}$$

est formé des racines 6-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

Remarquons d'abord que

$$\lambda = 1 - j \in \mathbb{A}$$

est irréductible puisque $N(\lambda) = 3$ est premier et la norme N est multiplicative. Notons également que $2 \in \mathbb{A}$ est irréductible puisque $N(2) = 4$ et $\mathbb{A}$ n'admet pas d'élément de norme 2.

AFFIRMATION B.2. L'anneau quotient $\mathbb{A}/\lambda\mathbb{A}$ est formé des classes résiduelles de -1, 0 et 1 (voir la figure 1).

DÉMONSTRATION. Tout élément de $\mathbb{A}$ est congru à un élément de $\mathbb{Z}$ modulo λ puisque $j \equiv 1 \pmod{\lambda}$ et tout élément de $\mathbb{Z}$ est congru à -1, 0 ou 1 modulo $3 = -j^2\lambda^2$. □

AFFIRMATION B.3. L'anneau $\mathbb{A}/\lambda^3\mathbb{A}$ contient exactement 3 cubes, qui sont les classes résiduelles de -1, 0 et 1 (voir la figure 2). Plus précisément, pour tout $a \in \mathbb{A}$,
— soit $a \equiv -1 \pmod{\lambda}$ et $a^3 \equiv -1 \pmod{\lambda^3}$,
— soit $a \equiv 0 \pmod{\lambda}$ et $a^3 \equiv 0 \pmod{\lambda^3}$,
— soit $a \equiv 1 \pmod{\lambda}$ et $a^3 \equiv 1 \pmod{\lambda^3}$.

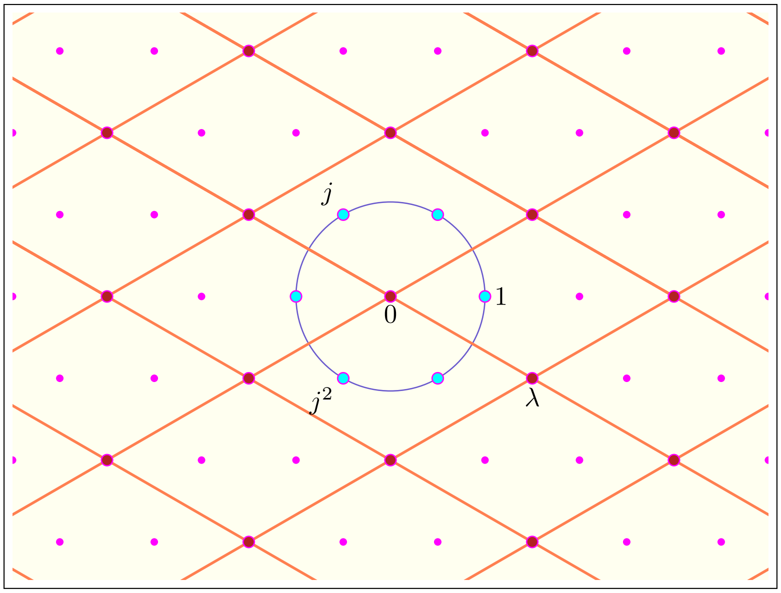

FIGURE 1. L'anneau des entiers d'Eisenstein, ses éléments inversibles et son idéal $\lambda\mathbb{A}$.

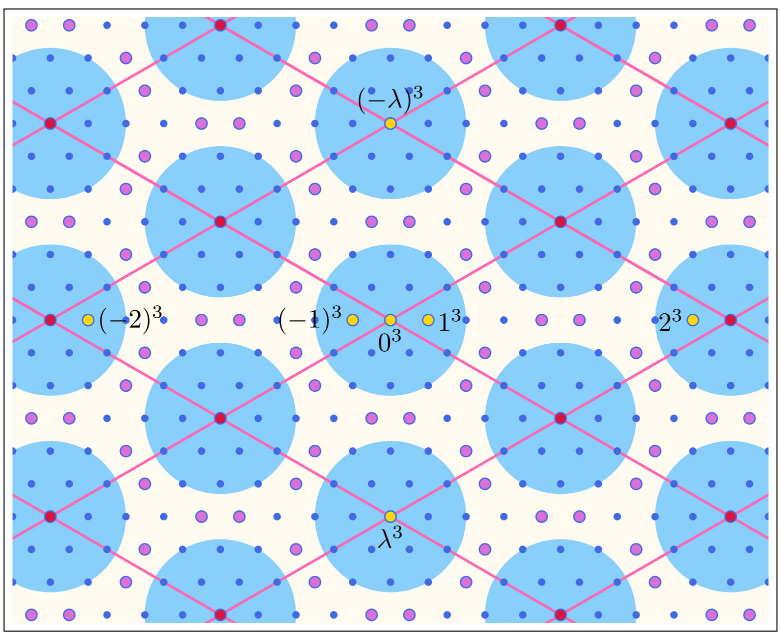

FIGURE 2. L'anneau des entiers d'Eisenstein, ses cubes et son idéal $\lambda^3\mathbb{A}$. Les éléments de la forme $x^3 + uy^3$, avec $x, y \in \mathbb{A}$ et $u \in \mathbb{A}^\times$, sont dans des disques bleus. L'ensemble $4\mathbb{A}^\times + \lambda^3\mathbb{A}$ est représenté par des points violets.

Démonstration. Si λ divise a, alors λ^3 divise a^3. Si $a \equiv 1 \pmod{\lambda}$, alors il existe $b \in \mathbb{A}$ tel que $a = 1 + \lambda b$, et on a

$$a^3 - 1 = (a-1)(a-j)\left(a - j^2\right) = \lambda^3 b(b+1)(b+1+j)\,.$$

Si $a \equiv -1 \pmod{\lambda}$, alors $a^3 \equiv -1 \pmod{\lambda^3}$ puisque $a^3 = -(-a)^3$. □

Le lemme B.1 est une conséquence immédiate du résultat plus général suivant :

Lemme B.4. *Soient $x, y, z \in \mathbb{A}$ et $u, v \in \mathbb{A}^\times$ qui vérifient $x^3 + uy^3 = 4vz^3$. Alors $z = 0$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe des éléments $x, y, z \in \mathbb{A}$, avec $z \neq 0$, qui sont premiers entre eux et $u, v \in \mathbb{A}^\times$ tels que $x^3 + uy^3 = 4vz^3$ et la valuation $\mathrm{ord}_\lambda(z)$ est minimale. Alors x, y et z sont deux à deux premiers entre eux. D'après l'affirmation B.3, $x^3 + uy^3$ est à distance au plus 2 de $\lambda^3\mathbb{A}$, alors que la distance entre $4\mathbb{A}^\times$ et $\lambda^3\mathbb{A}$ est égale à $\sqrt{7} > 2$. Par conséquent, on a $z \equiv 0 \pmod{\lambda}$, $u = \pm 1$ et $x \equiv -uy \pmod{\lambda}$. Par suite, on a

$$x + uy \equiv jx + j^2uy \equiv j^2x + juy \equiv 0 \pmod{\lambda}\,,$$

et donc il existe $a, b, c, d \in \mathbb{A}$ tels que

$$x + uy = \lambda a\,, \quad jx + j^2uy = \lambda b\,, \quad j^2x + juy = \lambda c \quad \text{et} \quad z = \lambda d\,.$$

On a $a + b + c = 0$ et $abc = 4vd^3$. De plus, comme

$$x = -ja + j^2b = a - j^2c = -b + jc \quad \text{et} \quad uy = a - j^2b = -ja + j^2c = jb - c\,,$$

a, b et c sont deux à deux premiers entre eux. Par conséquent, il existe $X, Y, Z \in \mathbb{A}$, qui sont nécessairement deux à deux premiers entre eux, $u_X, u_Y, u_Z \in \mathbb{A}^\times$ et une permutation σ de $\{a, b, c\}$ tels que

$$\sigma(a) = u_X X^3\,, \quad \sigma(b) = u_Y Y^3 \quad \text{et} \quad \sigma(c) = 4u_Z Z^3\,.$$

On a

$$X^3 + UY^3 = 4VZ^3\,,$$

où $U = u_X^{-1}u_Y \in \mathbb{A}^\times$ et $V = -u_X^{-1}u_Z \in \mathbb{A}^\times$, et

$$3\,\mathrm{ord}_\lambda(Z) = \mathrm{ord}_\lambda\left(\sigma(c)\right) = \mathrm{ord}_\lambda(abc) = \mathrm{ord}_\lambda\left(d^3\right) = 3\,\mathrm{ord}_\lambda(z) - 3\,.$$

Ceci contredit la minimalité de $\mathrm{ord}_\lambda(z)$, et ainsi le lemme est démontré. □

Bibliographie

[BD11] Matthew Baker and Laura DeMarco, *Preperiodic points and unlikely intersections*, Duke Math. J. **159** (2011), no. 1, 1–29. MR 2817647

[Bea91] Alan F. Beardon, *Iteration of rational functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 132, Springer-Verlag, New York, 1991, Complex analytic dynamical systems. MR 1128089

[BIJ+19] Robert Benedetto, Patrick Ingram, Rafe Jones, Michelle Manes, Joseph H. Silverman, and Thomas J. Tucker, *Current trends and open problems in arithmetic dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **56** (2019), no. 4, 611–685. MR 4007163

[BL14] Xavier Buff and Tan Lei, *The quadratic dynatomic curves are smooth and irreducible*, Frontiers in complex dynamics, Princeton Math. Ser., vol. 51, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2014, pp. 49–72. MR 3289906

[Bou92] Thierry Bousch, *Sur quelques problèmes de dynamique holomorphe*, 1992, Thèse (Ph.D.)–Université de Paris-Sud.

[Buf18] Xavier Buff, *On postcritically finite unicritical polynomials*, New York J. Math. **24** (2018), 1111–1122. MR 3890968

[CG93] Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin, *Complex dynamics*, Universitext : Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993. MR 1230383

[DH85] A. Douady and J. H. Hubbard, *Étude dynamique des polynômes complexes. Partie II*, Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay], vol. 85, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985, With the collaboration of P. Lavaurs, Tan Lei and P. Sentenac. MR 812271

[DKY19] Laura DeMarco, Holly Krieger, and Hexi Ye, *Common preperiodic points for quadratic polynomials*, Prépublication, https ://arxiv.org/abs/1911.02458, 2019.

[DKY20] ———, *Uniform Manin-Mumford for a family of genus 2 curves*, Ann. of Math. (2) **191** (2020), no. 3, 949–1001. MR 4088354

[EvS11] Alexandre Eremenko and Sebastian van Strien, *Rational maps with real multipliers*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 12, 6453–6463. MR 2833563

[FG20] Charles Favre and Thomas Gauthier, *The arithmetic of polynomial dynamical pairs*, Prépublication, https ://arxiv.org/abs/2004.13801, 2020.

[FHI+09] Xander Faber, Benjamin Hutz, Patrick Ingram, Rafe Jones, Michelle Manes, Thomas J. Tucker, and Michael E. Zieve, *Uniform bounds on pre-images under quadratic dynamical systems*, Math. Res. Lett. **16** (2009), no. 1, 87–101. MR 2480563

[FPS97] E. V. Flynn, Bjorn Poonen, and Edward F. Schaefer, *Cycles of quadratic polynomials and rational points on a genus-*2 *curve*, Duke Math. J. **90** (1997), no. 3, 435–463. MR 1480542

[GHT13] Dragos Ghioca, Liang-Chung Hsia, and Thomas J. Tucker, *Preperiodic points for families of polynomials*, Algebra Number Theory **7** (2013), no. 3, 701–732. MR 3095224

[Hin11] Marc Hindry, *Arithmetics*, Universitext, Springer, London, 2011, Translated from the 2008 French original. MR 2816902

[HJM15] Spencer Hamblen, Rafe Jones, and Kalyani Madhu, *The density of primes in orbits of* $z^d + c$, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 7, 1924–1958. MR 3335237

[Hug21a] Valentin Huguin, *Quadratic rational maps with integer multipliers*, Prépublication, https ://arxiv.org/abs/2107.07262, 2021.

[Hug21b] ———, *Simultaneously preperiodic integers for quadratic polynomials*, New York J. Math. **27** (2021), 363–378. MR 4226150

[Hug21c] ———, *Unicritical polynomial maps with rational multipliers*, Conform. Geom. Dyn. **25** (2021), 79–87. MR 4280290

[Lan83] Serge Lang, *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983. MR 715605

[Lan02] ———, *Algebra*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002. MR 1878556

[LMF] The LMFDB Collaboration, *The L-functions and Modular Forms Database, Elliptic curve with LMFDB label 108.a1*, https ://www.lmfdb.org/EllipticCurve/Q/108/a/1.

[Mal85] M.-P. Malliavin, *Algèbre commutative*, Collection Maîtrise de Mathématiques Pures. [Collection of Pure Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1985, Applications en géométrie et théorie des nombres. [Applications in geometry and number theory], With an introduction by J. Dieudonné. MR 790684

[McM87] Curt McMullen, *Families of rational maps and iterative root-finding algorithms*, Ann. of Math. (2) **125** (1987), no. 3, 467–493. MR 890160

[Mil93] John Milnor, *Geometry and dynamics of quadratic rational maps*, Experiment. Math. **2** (1993), no. 1, 37–83, With an appendix by the author and Lei Tan. MR 1246482

[Mil00] ———, *Periodic orbits, externals rays and the Mandelbrot set : an expository account*, no. 261, 2000, Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995), pp. xiii, 277–333. MR 1755445

[Mil06] ———, *On Lattès maps*, Dynamics on the Riemann sphere, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 9–43. MR 2348953

[Mil14] ———, *Arithmetic of unicritical polynomial maps*, Frontiers in complex dynamics, Princeton Math. Ser., vol. 51, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2014, pp. 15–24. MR 3289903

[Mor92] Patrick Morton, *Arithmetic properties of periodic points of quadratic maps*, Acta Arith. **62** (1992), no. 4, 343–372. MR 1199627

[Mor96] ———, *On certain algebraic curves related to polynomial maps*, Compositio Math. **103** (1996), no. 3, 319–350. MR 1414593

[Mor98] ———, *Arithmetic properties of periodic points of quadratic maps. II*, Acta Arith. **87** (1998), no. 2, 89–102. MR 1665198

[MP94] Patrick Morton and Pratiksha Patel, *The Galois theory of periodic points of polynomial maps*, Proc. London Math. Soc. (3) **68** (1994), no. 2, 225–263. MR 1253503

[MS94] Patrick Morton and Joseph H. Silverman, *Rational periodic points of rational functions*, Internat. Math. Res. Notices (1994), no. 2, 97–110. MR 1264933

[MS95] ———, *Periodic points, multiplicities, and dynamical units*, J. Reine Angew. Math. **461** (1995), 81–122. MR 1324210

[MV95] Patrick Morton and Franco Vivaldi, *Bifurcations and discriminants for polynomial maps*, Nonlinearity **8** (1995), no. 4, 571–584. MR 1342504

[Nor50] D. G. Northcott, *Periodic points on an algebraic variety*, Ann. of Math. (2) **51** (1950), 167–177. MR 34607

[Sch17] Dierk Schleicher, *Internal addresses of the Mandelbrot set and Galois groups of polynomials*, Arnold Math. J. **3** (2017), no. 1, 1–35. MR 3646529

[Sil98] Joseph H. Silverman, *The space of rational maps on* $\boldsymbol{P}^1$, Duke Math. J. **94** (1998), no. 1, 41–77. MR 1635900

[Sil07] ———, *The arithmetic of dynamical systems*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 241, Springer, New York, 2007. MR 2316407

[vdW70] B. L. van der Waerden, *Algebra. Vol 1*, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1970, Translated by Fred Blum and John R. Schulenberger. MR 0263582

[VH92] Franco Vivaldi and Spyros Hatjispyros, *Galois theory of periodic orbits of rational maps*, Nonlinearity **5** (1992), no. 4, 961–978. MR 1174226