

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Mécanique de la nage . . . . .	2
1.2	Propulsion par plaque/profil battant . . . . .	7
1.2.1	Plaque/profil rigide . . . . .	7
1.2.2	Plaque/profil flexible . . . . .	10
1.3	Problématique générale . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Méthodes expérimentales</b>	<b>17</b>
2.1	Introduction . . . . .	17
2.2	Dispositif expérimental . . . . .	18
2.2.1	Montage mécanique . . . . .	18
2.2.2	Plaque flexible . . . . .	20
2.3	Moyens de diagnostic . . . . .	22
2.4	Conclusion . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Réponse expérimentale</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	29
3.2	Réponse de la plaque . . . . .	30
3.2.1	Propriétés des plaques et premier adimensionnement . . . . .	30
Rigidité en flexion $B$ . . . . .	30	
Fréquence propre des plaques $F_0$ . . . . .	32	
Taux d'amortissement $\tau^*$ . . . . .	33	
3.2.2	Influence des paramètres expérimentaux . . . . .	36
Effet de la rigidité en flexion $B$ . . . . .	38	
Effet du nombre de Reynolds $Re$ . . . . .	39	
Effet de l'amplitude de forçage $A_{LE}$ . . . . .	41	
3.2.3	Effet du confinement . . . . .	41
3.3	Lien entre forçage et propulsion . . . . .	44
3.3.1	Sillage induit . . . . .	44
Visualisation par colorant . . . . .	45	
Mesure de vitesses . . . . .	48	

3.3.2	Propulsion générée . . . . .	50
	Bilan de quantité de mouvement . . . . .	50
	Mesure directe . . . . .	51
3.4	Conclusion . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Modélisation d'une plaque flexible forcée</b>	<b>55</b>
4.1	Introduction . . . . .	55
4.2	Généralité sur les poutres . . . . .	56
4.3	Modèle analytique . . . . .	61
4.3.1	Mise en équation et adimensionnement . . . . .	62
4.3.2	Théorie des ailes flexibles instationnaires selon Wu (1961) [91]	65
4.3.3	Analyse modale . . . . .	67
4.3.4	Coefficients de dissipation . . . . .	70
	Coefficients de dissipation linéaire . . . . .	70
	Coefficient non linéaire de traînée fluide $c_D$ . . . . .	72
4.4	Résonance et phase . . . . .	74
4.5	Poussée . . . . .	77
4.6	Efficacité et Optimisation . . . . .	82
4.7	Confrontation du modèle . . . . .	86
4.8	Discussion . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>89</b>
5.1	Conclusion générale . . . . .	89
5.2	Perspectives . . . . .	91
<b>Annexes</b>		<b>101</b>
<b>Annexe A</b>	<b>Experimental study of the response of a flexible plate to a harmonic forcing in a flow</b>	<b>103</b>
<b>Annexe B</b>	<b>Vortex patterns generated by a heaving flexible plate</b>	<b>113</b>
<b>Annexe C</b>	<b>Thrust generation by a heaving flexible foil : Resonance, nonlinearities, and optimality</b>	<b>119</b>
<b>Liste des figures</b>		<b>140</b>
<b>Liste des tables</b>		<b>141</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire du chapitre

---

1.1	Mécanique de la nage . . . . .	2
1.2	Propulsion par plaque/profil battant . . . . .	7
1.2.1	Plaque/profil rigide . . . . .	7
1.2.2	Plaque/profil flexible . . . . .	10
1.3	Problématique générale . . . . .	15

---

La nage des animaux marins a suscité une curiosité croissante de la part des scientifiques depuis ces dernières décennies. Le premier intérêt est la compréhension biologique de la nage, mais également sa compréhension physique depuis peu appropriée par les hydrodynamiciens. Le second intérêt repose sur le premier et est motivé par la conception de robots aquatiques bio-inspirés. Ces véhicules sous-marins peuvent effectuer des petits travaux ou des explorations pour et à la place de l'Homme à des endroits difficilement accessibles ou dangereux.

Nous allons décrire les mécanismes associés à la nage des “grands” animaux marins. Pour le qualificatif de “grand”, nous entendons des animaux dont la locomotion est gouvernée par les effets inertiels induits par l’eau. Pour quantifier ce phénomène, nous utiliserons le nombre de Reynolds, qui mesure l’importance de l’inertie par rapport à la viscosité du fluide. Il est défini comme

$$Re = \frac{UL}{\nu_f^*}, \quad (1.1)$$

avec  $U$  la vitesse du nageur considéré,  $L$  sa longueur et  $\nu_f^*$  la viscosité cinématique du fluide environnant, *i.e.* de l’eau. Lorsque  $Re \gg 1$ , l’inertie domine tandis qu’à  $Re \ll 1$  les effets visqueux sont majoritaires et les mécanismes de nage sont différents [8, 10]. Une fois les modes de nage établis, nous placerons le contexte de l’étude à travers une étude bibliographique : d’abord sur les travaux fondateurs théoriques et expérimentaux portant sur des profils rigides battant qui miment la propulsion, puis sur des profils flexibles. Les lacunes des études jusqu’à présent

seront exposées afin de mieux cerner et définir la problématique de la recherche présentée.

## 1.1 Mécanique de la nage

Avec leurs 500 millions d'années d'évolution depuis les premiers poissons recensés, les animaux aquatiques ont développé des modes de locomotion aussi performants que variés. Et avec plus de 32 000 espèces de poissons et cétacés actuellement recensés [62], la diversité est de taille. Parmi les espèces considérées comme de "bons" nageurs, c'est-à-dire se déplaçant vite, on distingue deux grands modes de locomotion : la *nage ondulatoire*, où le nageur fait parcourir une onde de flexion le long de son corps, telle que l'*anguille*, et la *nage oscillatoire*, où le nageur met en mouvement de façon cyclique ses appendices ou une partie de son corps, comme

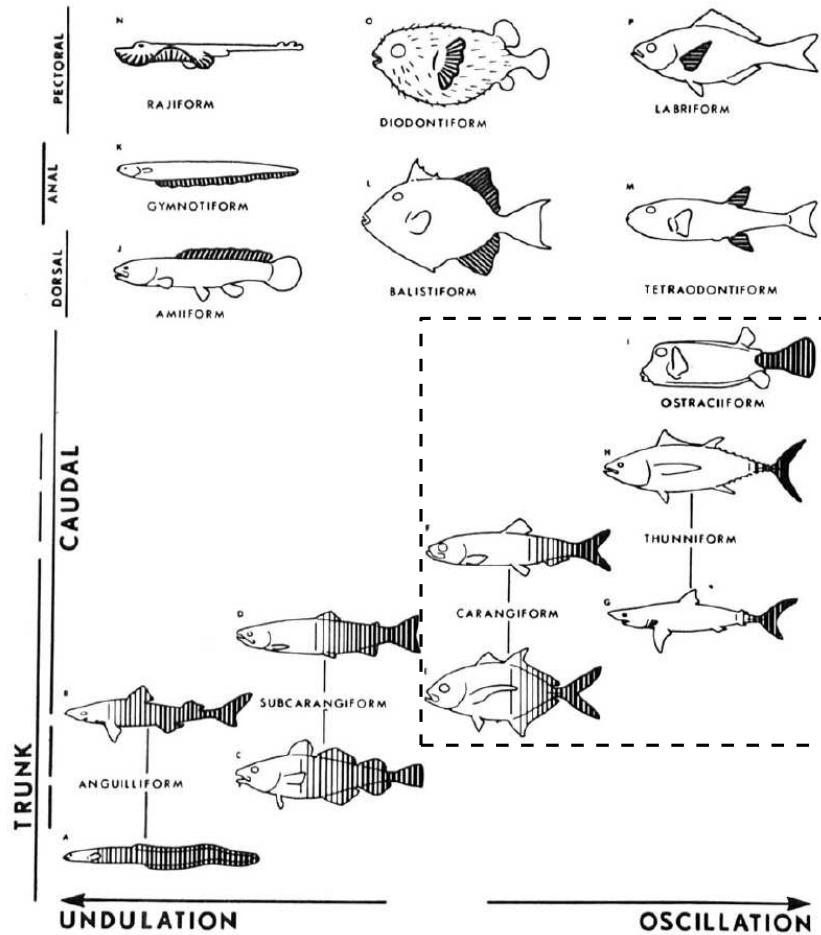


FIGURE 1.1 – Classification des formes de poissons en fonction de leur mode de nage.  
Extrait de Lindsey (1978) [52].

par exemple le saumon, le thon ou le dauphin (figure 1.1). La proportion du corps utilisée dans le déplacement dépend fortement de l'espèce considérée. Ainsi, il est difficile de généraliser les conclusions d'une étude sur une espèce à un groupe de la classification [86, 87]. La classification présentée sur la figure 1.1 [52] recense les modes de nage en fonction des moyens utilisés par le nageur pour se déplacer. Soit le déplacement est réalisé par les nageoires pectorales et pelviennes (par paires) et les nageoires dorsale et anale (médianes) appelé “median and paired fin” (MPF) ; soit par le corps et la nageoire caudale appelé “body and caudal fin” (BCF). Cette dernière technique atteint son paroxysme dans la forme *thunniforme* [7]. Les formes ostraciiforme et carangiforme donnent également de bonnes performances (encadré sur la figure 1.1). Au vu de la diversité des espèces marines, il est fort probable que le mode de nage dépend en grande partie de la forme, de la taille, de la flexibilité, de l'animal. L'étude qui suit se limitera aux “grands nageurs”, c'est-à-dire ceux dont les effets d'inertie dominent par rapport à la viscosité (quantifié par le nombre de Reynolds défini en (1.1)), typiquement  $Re > 10^5$ . Par exemple, un thon jaune de 53 cm de long a un nombre de Reynolds de  $6.1 \times 10^5$  et se déplace selon le mode de nage thunniforme. Eloy (2012) [20] liste différentes espèces marines avec leurs caractéristiques de nage ainsi que leurs nombre de Reynolds associé.

L'utilisation des appendices varie d'une espèce à une autre. Celle-ci dicte par ailleurs leur mode de locomotion, qui réside dans un compromis entre la polyvalence des nageoires et leurs spécialisations. Les nageoires dorsale et anale servent à la stabilité du nageur à l'arrêt, les nageoires pectorales et pelviennes assurent généralement sa manœuvrabilité tandis que la propulsion de l'animal s'effectue principalement grâce à la nageoire caudale (figure 1.2(a)). La forme des nageurs dépend fortement du mode de locomotion adopté [52]. Ainsi, les anguilles auront un corps allongé se déformant entièrement alors que le corps d'un saumon sera plus rigide : seule sa partie arrière se déformerà lors de la propulsion [32, 7]. Les animaux marins ayant une propulsion principalement générée par la nageoire caudale sont souvent de très bons nageurs (*e.g.* requins, thons, cétacés). Les deux principaux aspects de nageoires caudales trouvés chez les nageurs sont de type “heterocercal”, à la forme externe asymétrique avec le lobe dorsal plus large que le lobe ventral, et “homocercal”, à la forme externe quasi-symétrique avec le lobe dorsal et ventral de taille similaire (figure 1.2(b)). Le mouvement de la nageoire caudale est dû au mouvement latéral de la partie arrière du corps du nageur par la contraction musculaire le long de l'axe vertébré. L'amplitude de l'onde croît le long du corps pour devenir maximale à la caudale [4]. La contribution de cette nageoire dans la propulsion est difficile à quantifier et dépend de l'espèce considérée : l'estimation varie de 40 à 90% [4, 33]. Le mouvement de la nageoire elle-même est complexe. On pourrait penser que le mouvement se fait uniquement dans le plan médian, perpendiculaire au déplacement. Or, une déformation asymétrique selon l'axe dorso-ventral révèle

la cinématique tridimensionnelle de la nageoire [4, 45]. Cette déformation permet d'augmenter la surface de la nageoire lors du battement lorsque la quantité de fluide à déplacer dans le sillage est la plus forte, et ainsi vraisemblablement augmenter la vitesse de nage. Bainbridge (1963) [4] suggère que la contraction musculaire serait responsable de la déformation de la caudale, sans pour autant quantifier la partie passive de celle-ci. Outre la transmission de l'onde responsable du déplacement, la contraction musculaire peut également moduler la flexibilité longitudinale du corps en fonction du régime de nage et ainsi accorder la fréquence de nage avec la fréquence naturelle du corps [53]. Les études théoriques sur la dynamique des poutres montrent que la rigidité de la structure régit la fréquence de résonance du système [44, 84] (voir section 4.2). La forme même des nageurs prend en considération l'hydrodynamique. Le changement de section du corps du nageur au niveau de la base de la caudale assure le maintien des couches limites sur le corps, évitant ainsi une perte d'énergie dans le déplacement du nageur.

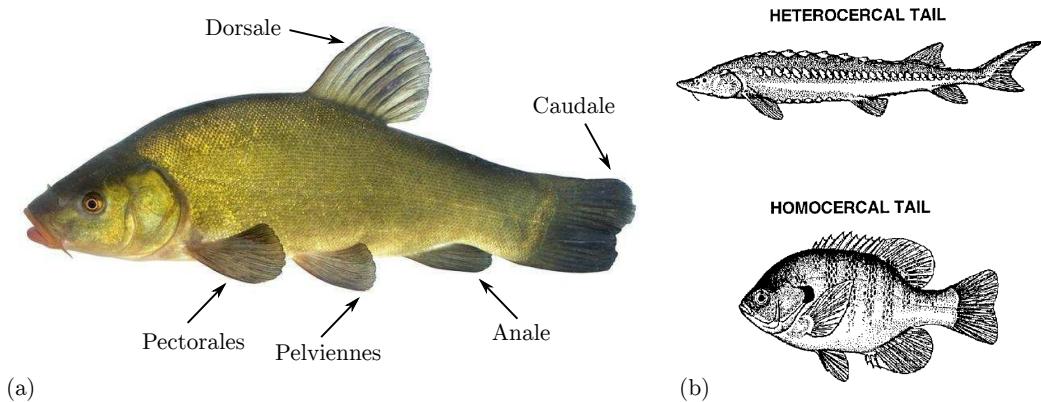


FIGURE 1.2 – (a) Identification des nageoires sur un poisson. Les nageoires pectorales et pelviennes se trouvent par paires de chaque côté de l'axe médian du poisson, tandis que les nageoires dorsale et anale se situent sur l'axe médian. (b) Types de nageoires caudales pour les poissons de type ostraciiforme d'après la classification de Agassiz (1803). Extrait de Lauder (2000) [45].

Une classification des modes de nage en fonction des interactions hydrodynamiques est proposée par Lighthill (1975) [51] et est illustrée sur la figure 1.3. À cette classification, sont associés les modèles hydrodynamiques qui mettent en avant la physique de la nage à différentes échelles. Dans le cas où les effets d'inertie dominent ( $Re \gg 1$ ), Lighthill (1960) et Wu (1961, 1971) [49, 48, 91] proposent des modèles hydrodynamiques. Lighthill suggère la théorie réactive qui se base sur le fait que le nageur communique de l'énergie au fluide, à travers la quantité de mouvement. La réaction du fluide à l'accélération génère les forces nécessaires au déplacement du nageur. L'approche de Lighthill, dite “théorie des corps élancés”,

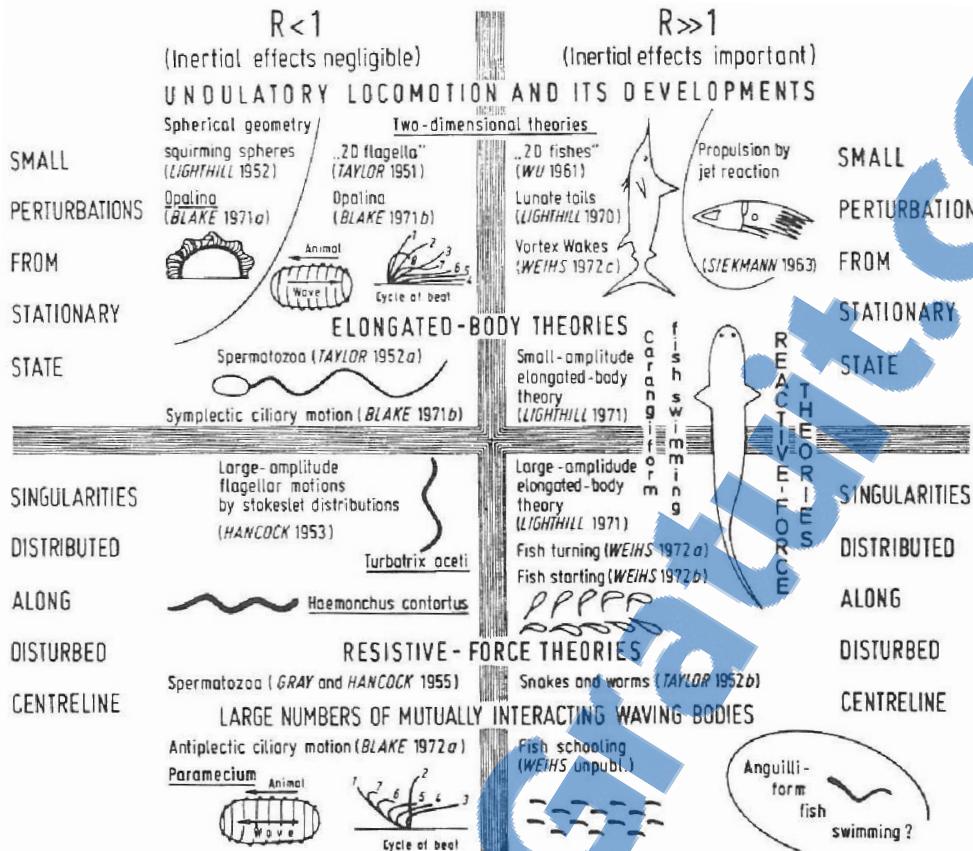


FIGURE 1.3 – Classification des modes de nage avec les modèles hydrodynamiques, correspondant selon Lighthill (1975) [51].

prédit que la force de poussée produite ne dépend que de la déflexion de l'extrémité arrière du nageur. En d'autres termes, les performances de nage sont uniquement dictées par la dynamique du bord de fuite de la nageoire caudale. Pour les plus petits nombres de Reynolds où la dominance des forces d'inertie est remplacée par celle des forces visqueuses, l'hydrodynamique de nage est dictée par la théorie résistive. Elle stipule que la propulsion du nageur se fait grâce à la résistance du fluide au mouvement. On peut imaginer que le nageur s'appuie sur le fluide pour avancer, à l'image du déplacement dans le granulaire, où cette théorie est employée [37].

La vitesse de nage dépend, comme nous venons de le voir, de paramètres multiples et de leurs interactions. Il est important d'établir leurs impacts sur le déplacement d'un nageur en vue de la conception de *véhicules sous-marins autonomes* (AUV, du nom anglais “Autonomous Unmanned Vehicle”). Parmi les paramètres en jeu, recensés par Blake (2004) [7] et références incluses, on peut citer la production de mucus sur la surface du nageur, le maintien des couches limites en régime laminaire, la forme du nageur ou encore la texture de la peau, etc. Ces paramètres

interviennent dans la réduction de la traînée subie par le nageur.

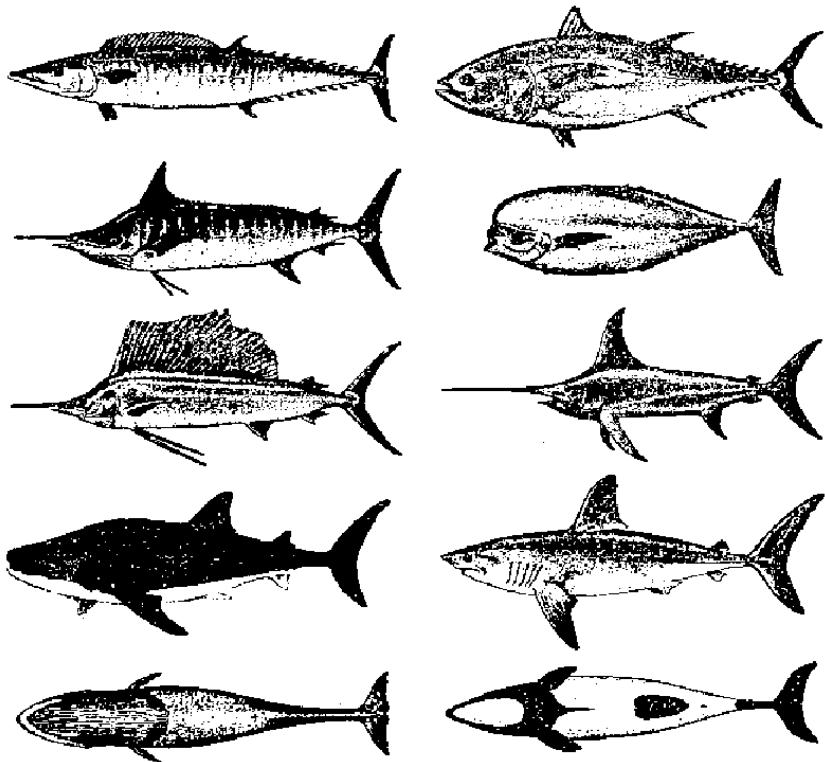


FIGURE 1.4 – Variétés de nageoires caudales en croissant chez les espèces de carangiforme. Extrait de Lighthill (1969) [50]. Parmi les espèces présentées, nous pouvons distinguer un barracuda, un thon, un poisson voilier, un requin ou encore une baleine.

À partir des observations des nageurs utilisant seulement la caudale dans la propulsion, on s'aperçoit qu'ils présentent en général les mêmes caractéristiques : leur corps est rigide durant le déplacement et seule la nageoire caudale se déplace de la ligne médiane. Le mouvement propulsif est ainsi situé à l'arrière du corps, la partie antérieure étant assimilée à une charge à déplacer. La nageoire caudale prend généralement la forme d'un croissant de lune très souvent symétrique (thons, cé-tacés, *etc.*). La figure 1.4 présente quelques exemples de nageurs considérés comme rapides, tels que les thons, les requins ou encore le poisson voilier, connu pour être l'animal le plus rapide dans l'eau. Ce sont des prédateurs de grande taille, pouvant atteindre plusieurs mètres de long, dont le mode de vie requiert rapidité et/ou endurance pour se nourrir. Toutefois, aussi rapides qu'ils soient, leur vitesse de nage est limitée par la cavitation engendrée autour de leur corps [39], alors que les nageurs plus petits sont limités en général par leur puissance musculaire.

De nombreuses revues rendent compte des différents modes de propulsion. Parmi les plus notables, nous pouvons citer les ouvrages de Videler (1993) [86]

et Vogel (1994) [87] qui expliquent de façon didactique la locomotion aquatique d'un point de vue biologique à toutes les échelles. Les ouvrages de référence de Lighthill (1975) [51], recueil de ses travaux sur la nage, et de Childress (1981) [10], exposé didactique des mécanismes de nage à toutes les échelles par une approche physicienne. Les articles de Lighthill (1969) [50], Sfakiotakis *et al.* (1999) [72], Triantafyllou *et al.* (2000) [82] et Lauder (2005) [46] exposent également les modes de propulsion aquatiques.

L'une des particularités de la nageoire caudale est sa *flexibilité* le long de sa corde, c'est-à-dire le long de l'axe médian [54]. Il a d'ailleurs souvent été avancé que cette flexibilité constituait un atout dans la propulsion [4, 41, 27, 35, 56]. Cependant, au même titre que les modes de nage, la rigidité des nageoires caudales varie significativement entre les espèces. Par exemple, les thons ont une caudale rigide [63, 7] comparée à celle d'un poisson rouge [4] ou à celle d'une truite [57]. Que la flexibilité des nageoires soit un avantage ou non lié à l'évolution des espèces reste encore à déterminer.

De cette première esquisse de la locomotion aquatique, il est déjà possible de voir qu'il n'est pas aisément de reproduire exactement la nage d'un animal en particulier. Il est plus facile de se concentrer sur les similitudes au sein d'un groupe de nageur particulier. En effet, chaque animal a évolué de façon à s'adapter au milieu aquatique et à un certain mode de vie. Le mode de nage adopté résulte donc des stratégies développées pour s'adapter et vivre en milieu aquatique [86, 87]. C'est dans cette optique que notre étude se place. Nous cherchons à comprendre l'avantage éventuel procuré par la flexibilité dans le déplacement d'un nageur. Nous ne ferons donc pas d'hypothèses sur la forme spécifique du nageur, seule une nageoire caudale symétrique sera considérée pour mettre en avant le rôle de la flexibilité.

## 1.2 Propulsion par plaque/profil battant

### 1.2.1 Plaque/profil rigide

Le mode de nage oscillatoire, avec la partie active pour la propulsion localisée à l'arrière du corps du nageur, a inspiré un grand nombre d'études notamment motivées par la conception de nouveaux systèmes de propulsion [79], alternative aux moyens actuels réalisés par hélices. Les applications d'ingénierie ont d'abord mené à des études sur des profils oscillants rigides [42, 80, 71]. Celles-ci considèrent généralement des profils de type NACA ou des plaques minces de type feuilles rigides forcées. Le forçage se fait par un mouvement harmonique en pilonnement (translation perpendiculaire à l'écoulement et au plan du profil), ou en tanguage (rotation autour d'un axe dans le plan du profil et perpendiculaire à l'écoulement), ou par une combinaison des ces deux mouvements (figure 1.5). La combinaison des mouvements est plus proche de la réalité, mais est également plus complexe à

étudier. Prenons l'exemple d'un nageur de type thunniforme se déplaçant en ligne droite à vitesse constante. Son mouvement est une combinaison d'une oscillation de battement de la nageoire caudale et d'une rotation de la base de la queue. La conjugaison de ces deux mouvements est supposée optimiser l'écoulement autour du corps du nageur. D'autres paramètres de textures de la peau, de formes, de rapports d'aspect, *etc.*, peuvent également participer à cette optimisation.

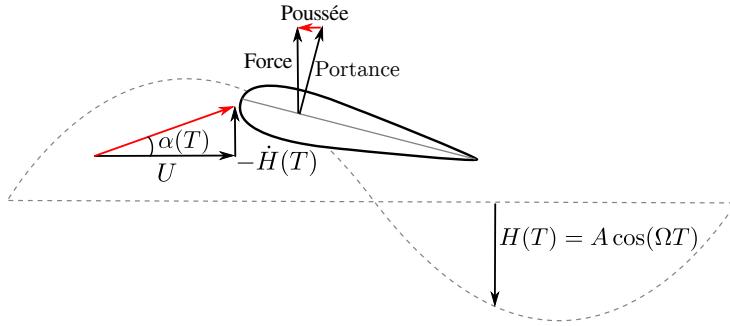


FIGURE 1.5 – Définition de l'angle d'attaque  $\alpha(T)$  d'un profil oscillant. Sous certaines conditions,  $\alpha(T)$  peut conduire à une force de poussée parallèle à l'écoulement imposé  $U$ . Adapté de Shyy *et al.* (2010) [74].

Lorsque le profil est placé dans un écoulement avec un mouvement oscillatoire harmonique quelconque, la vitesse que “voit” le profil est orientée par un angle  $\alpha(T)$  par rapport à la vitesse de l'écoulement  $U$  (figure 1.5). Cet angle, appelé angle d'attaque effectif, est fonction du temps et, dans le cas de pilonnement simple, s'exprime par

$$\alpha(T) = \tan^{-1} \left( \frac{-\dot{H}(T)}{U} \right), \quad (1.2)$$

où  $-\dot{H}$  désigne la vitesse du déplacement harmonique de type  $A \cos(\Omega T)$  au cours du temps. Dans la mesure où les lignes de courant doivent rester attachées au profil durant l'intégralité du mouvement pour éviter les baisses de performances,  $\alpha_{\max}$  ne doit pas excéder  $15^\circ$  environ [88]. Sous ces conditions, le profil subit une force verticale qui se décompose en une force de portance perpendiculaire au profil et une force de poussée parallèle à l'écoulement dans la direction du déplacement voulu. L'origine de la poussée induite par l'angle d'attaque provient des vortex au bord d'attaque [88]. Ce mécanisme est exploité en vol battu par les insectes [19].

En accord avec la théorie des ailes instationnaires (linéaire, bidimensionnelle et inviscide) [91, 48, 92], il a été montré expérimentalement que le mouvement combinant le pilonnement et le tanguage trouve son optimum lorsque le déphasage entre ces deux mouvements vaut  $90^\circ$  [3, 69].

L'étude du sillage induit par un profil en mouvement a été considérée. Des observations biologiques, il apparaît que le sillage derrière un poisson prend la

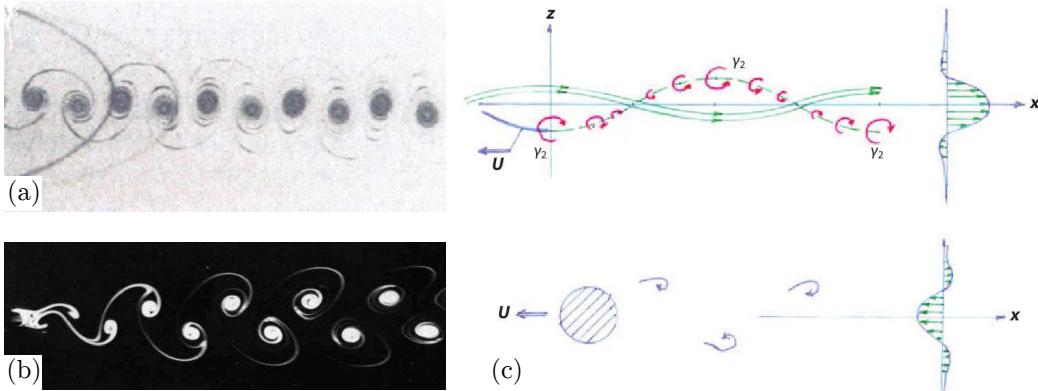


FIGURE 1.6 – Visualisation du sillage induit par (a) un profil oscillant et (b) un cylindre. (c) Leurs profils de vitesses moyennes respectifs indiquent un excédent de vitesse qui génère une force de poussée et un déficit de vitesse entraînant une traînée subie par le cylindre. Les illustrations sont respectivement tirées de (a) Koochesfahani (1989) [42], (b) Van Dyke (1982) [83] et (c) Wu (2011) [93].

forme d'une allée de Bénard-von Kármán inversée. Ce sillage est similaire à une allée simple de Bénard-von Kármán [34], résultat du sillage derrière un objet inerte, à la différence que le sens de rotation des vortex constituant l'allée est inversé. Prenons le cas d'un cylindre placé dans un écoulement : le profil moyen des vitesses pris à une certaine distance en aval de l'obstacle marque un déficit de vitesse (figure 1.6(b-c bas)). À l'inverse, dans certaines circonstances, le profil de vitesses moyennes derrière un objet oscillant trace un excédent de vitesse, aussi appelé jet (figure 1.6(a-c haut)). Les deux types de sillage présentés caractérisent deux régimes dans la locomotion : soit le profil qui subit une traînée est assimilé à un obstacle pour le fluide, soit le profil reflète une poussée. L'état de l'écoulement caractérise la façon dont l'objet se déplace. Les types de sillage sont ainsi classés en fonction du régime de nage, souvent relié au nombre de Strouhal [80, 81]. Celui-ci peut s'appréhender comme l'équilibre entre les forces de poussée imputées au mouvement et celle de traînée due à la résistance du fluide, pour une vitesse de nage donnée. Il se définit comme :

$$St = \frac{2FA}{U}, \quad (1.3)$$

avec  $F$  et  $A$  la fréquence et l'amplitude du mouvement ( $2A$  étant l'amplitude pic-à-pic), et  $U$  la vitesse moyenne de déplacement. Les premières études expérimentales tendent à montrer qu'un nombre de Strouhal compris entre 0.25 et 0.35, conduirait aux performances maximales du système [80, 3, 71, 9]. Cet intervalle étroit serait d'ailleurs confirmé par les observations biologiques et certains auteurs soutiennent qu'il correspond aux performances optimales [81, 76]. Toutefois, une gamme de Strouhal de 0.15 à 0.8, a récemment été obtenue par une méthode d'optimisation

[20] basée sur la théorie des corps élancés de Lighthill. Par ailleurs, les observations biologiques corroborent les prédictions théoriques. La question de l'intervalle du nombre de Strouhal est toujours d'actualité [15], même si cette étude a contribué à y répondre (voir la section 4.6).

Les études sur les sillages induits par le mouvement d'un profil ont permis une classification sur l'arrangement que prennent les vortex en fonction de l'activation. L'arrangement va de la simple allée inversée de Bénard-von Kármán, à des configurations plus complexes comme le lâché de deux paires de tourbillons contra-rotatifs par période appelé "2P". La figure 3.12(b) illustre les différentes compositions tourbillonnaires derrière un profil rigide [47]. La classification des sillages pour les profils actués provient de l'analogie faite avec ceux derrière un obstacle, comme un cylindre placé dans un écoulement [90]. L'arrangement tourbillonnaire est un bon indicateur du régime de propulsion [29]. Une cartographie des sillages induits en fonction des paramètres de forçage met, une fois encore, en avant un nombre de Strouhal optimal autour de 0.25 dans la production de poussée [3, 64]. Sur la figure 1.8(a), les sillages obtenus par un profil rigide de type NACA sont classés selon l'arrangement des vortex en plusieurs régions. Le mouvement imposé en tanguage est appliqué au centre du profil. La classification est faite en fonction de l'angle d'attaque  $\alpha$  au tanguage imposé et du nombre de Strouhal basé sur la fréquence du mouvement et sur la largeur du sillage. On note ainsi que dans la région C, le profil engendre un jet et que les paramètres du forçage correspondent à ceux précédemment cités, c'est-à-dire  $0.2 < St < 0.5$ . La région D correspond à une très forte production de poussée et l'arrangement des vortex change, il en résulte une déflexion du sillage induit, donc un changement dans la direction de locomotion.

Prenons le cas d'un profil rigide en mouvement combinatoire de pilonnement et tanguage dont le dispositif est illustré en figure 1.7(a). En traçant les iso-courbes de rendement dit de Froude  $\eta$  (défini au chapitre 3 par la relation 3.6) du dispositif en fonction des paramètres du mouvement, il est clair que les performances maximales correspondent à  $\alpha_{\max} \approx 15^\circ$  et  $St \approx 0.25$ , où  $\alpha_{\max}$  est l'angle d'attaque effectif maximal (figure 1.7(a)). Le rendement maximal obtenu est de l'ordre de 70% (figure 1.7(b)).

### 1.2.2 Plaque/profil flexible

Récemment, ces études sur les profils rigides oscillants de grand rapport d'aspect ont été étendues à des profils flexibles. La flexibilité est souvent avancée comme un avantage dans la locomotion, sous l'argument que les vertébrés aquatiques ont, dans la plupart des cas, des nageoires flexibles. Cependant, les mécanismes précis par lesquels la flexibilité est reliée à la production de poussée et aux performances de nage de façon générale, n'ont été abordés que très récemment.

Les premières simulations numériques de Katz et Weihs (1978) [41] ont montré

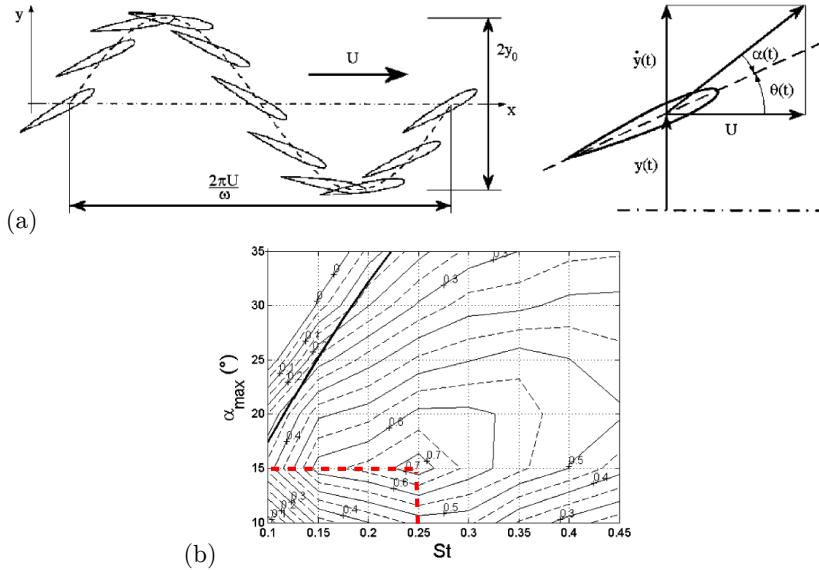


FIGURE 1.7 – (a) Exemple d'étude d'un profil rigide oscillant par un mouvement combinant pilonnement et tanguage. (b) Rendement en fonction de l'angle d'attaque effectif et du nombre de Strouhal. Les performances optimales sont atteintes pour  $\alpha \approx 15^\circ$  et  $St \approx 0.25$ . D'après Schouveiler *et al.* (2005) [71].

une amélioration de l'efficacité propulsive lorsqu'un profil flexible selon sa corde remplace un profil rigide. Dans ce cas, la flexibilité du profil engendre un couplage entre la structure et le fluide dans lequel elle évolue. Les fréquences structurelles propres du système sont alors dictées par la géométrie et le matériau du solide ainsi que par les effets de la masse ajoutée du fluide environnant, auxquelles il faut ajouter l'impact de la fréquence de forçage. Par la suite, les simulations numériques en deux dimensions de Alben (2008) [1] et de Michelin et Llewellyn Smith (2009) [59] ont révélé des pics dans l'amplitude de réponse d'une plaque flexible, lorsque les fréquences du mouvement et de la structure sont en résonance. Ils ont montré que l'efficacité est maximisée à ces pics de résonance. La figure 1.9(a) expose l'amplitude de réponse du bord de fuite en fonction de la flexibilité du profil. La configuration simulée est une plaque flexible d'épaisseur nulle et d'envergure infinie, animée par un mouvement harmonique de pilonnement imposé au bord d'attaque. Le phénomène de résonance, évoqué par les pics d'amplitude, est confirmé par les formes de la plaque prises aux deux premières résonances, en A et en C. Les formes correspondent à celles des deux premiers modes propres d'une poutre.

Le gain dans les performances propulsives à travers la flexibilité le long de la corde a été confirmé par les travaux expérimentaux de Prempraneeerach *et al.* (2003) [65] et Marais *et al.* (2012) [56] (tanguage) ou encore Heathcote et Gursul (2007) [35] (pilonnement). Le phénomène de résonance a été clairement identifié par ces expériences en laboratoire. Parmi les études qui ont considéré le lien de

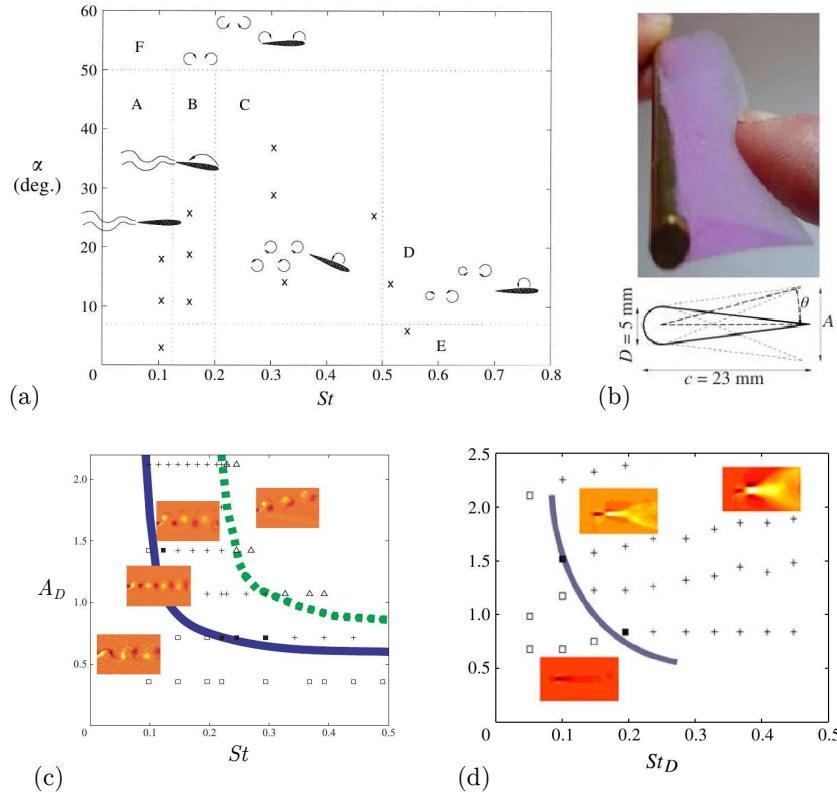


FIGURE 1.8 – Cartographie des sillages générés par deux profils forcés en rotation en fonction du nombre de Strouhal. (a) Le sillage du profil rigide est tracé pour différents angles de tanguage. (b) Le profil flexible utilisé pour les expériences dont l'amplitude de rotation varie [56] et (c-d) les cartographies du sillage généré par un profil forcé en tanguage (c) rigide et (d) flexible. La forme du profil rigide est identique à celui montré en (b). Les courbes et photographies sont respectivement extraites de (a) Anderson *et al.* (1998) [3], (b-d) Marais *et al.* (2012) [56] et (c) Godoy-Diana *et al.* (2009) [30]. Les figures (b) et (d) sont tirées du même article.

cette résonance avec la performance propulsive, nous pouvons citer Moored *et al.* (2012) [61] et Dewey *et al.* (2013) [15] pour une plaque flexible forcée en tanguage, Alben (2012) [2], Quinn *et al.* (2013) [67] et la présente étude pour un forçage en pilonnement, ainsi que Spagnolie *et al.* (2010) [75] pour un pilonnement actif et un tanguage passif. À notre connaissance, à l'exception des études biomimétiques [25], il n'existe aucune étude systématique d'un profil flexible forcé par un mouvement combinant pilonnement et tanguage. Dans les deux cas de mouvement, il a été montré qu'un phénomène de résonance apparaît : la poussée générée est maximale à la fréquence naturelle du système. En d'autres termes, lorsque le système {fluide + structure} est forcé à l'une de ses fréquences propres, la réponse en termes de déformations élastiques est maximisée, tout comme la production de poussée.

L'exploration du sillage généré par un profil flexible montre une évolution simi-

laire au profil rigide. À mesure que la fréquence d'activation augmente, donnant le nombre de Strouhal, le profil passe d'un sillage de traînée à celui d'un jet propulseur. Toutefois, il est nécessaire d'avoir une amplitude minimale pour que la transition se fasse. Cette transition traînée/poussée est marquée par une courbe dans l'espace des paramètres expérimentaux (courbe continue bleue sur la figure 1.8(c)). Passé cette frontière, le sillage est toujours propulsif mais l'arrangement des vortex peut conduire à une déflexion de l'allée de Bénard-von Kármán inversée déjà établie (courbe en pointillés verts) [30]. On remarque que le profil utilisé dans l'obtention de cette cartographie a un très grand rapport d'aspect et est peu flexible selon sa corde (figure 1.8(b)). On signalera que la déflexion du sillage ne doit pas être confondue avec la brisure de symétrie observée par Vandenberghe *et al.* (2004) [85]. Dans ce cas, il s'agit d'un profil symétrique activé en pilonnement qui spontanément démarre dans une direction ou dans l'autre.

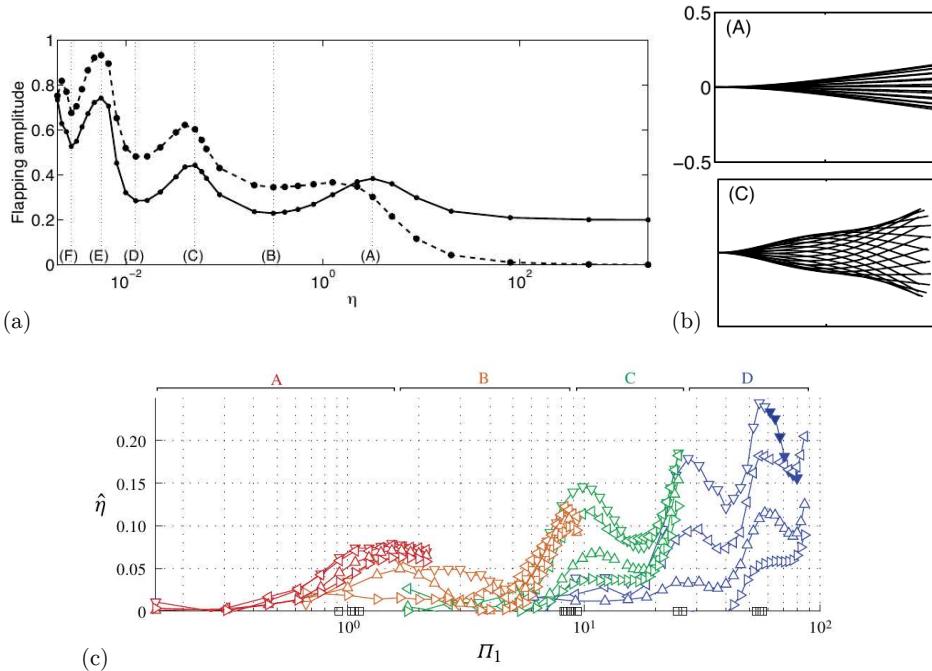


FIGURE 1.9 – Résultats de l'ajout de la flexibilité dans un profil. (a) L'étude numérique d'une plaque flexible animée en pilonnement suggère une résonance du système. (b) Cette observation est confirmée par l'enveloppe de la plaque au cours d'une oscillation. (c) Les résultats de l'efficacité en fonction de la flexibilité confirment l'avantage de la résonance du système. Les illustrations sont respectivement extraites de (a-b) Michelin et Llewellyn Smith (2009) [59] et (c) Quinn *et al.* (2013) [67].

Des simulations numériques de nageoires flexibles battantes ont également été réalisées, soit dans la limite de nombre de Reynolds infinis en utilisant des méthodes vortex [41, 59, 2], soit en utilisant des simulations numériques directes limitées à des nombres de Reynolds modérés [18, 40, 12, 38, 6]. Ces simulations montrent

généralement une relation entre la résonance du système {fluide + structure} et la poussée générée. Il y a donc un fort contraste entre les profils rigides et flexibles : dans le cas d'un profil rigide, la fréquence optimale est déterminée par la valeur spécifique du nombre de Strouhal [81, 76] ; alors que dans le cas flexible, c'est fixée par la (les) fréquence(s) propre(s) du système déformable. On peut noter que puisque le nombre de Strouhal varie linéairement avec l'amplitude de déformation alors que les fréquences naturelles sont presque constantes, ces deux fréquences peuvent être confondues en ajustant l'amplitude de battement [15]. Mais, pour estimer si cette amplitude particulière correspond à un optimum global, une étude systématique de l'effet de l'amplitude de forçage sur la génération de poussée doit être réalisée, étude qui a été rarement été menée. Parmi celles-ci, les simulations numériques de Hua *et al.* (2013) [38] montrent que l'efficacité d'une plaque flexible en pilonnement simple varie en fonction de l'amplitude du mouvement, et que les performances optimales sont atteintes pour une certaine flexibilité du profil.

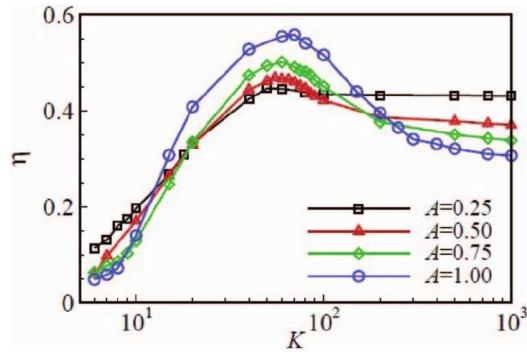


FIGURE 1.10 – Conséquence de la rigidité sur l'efficacité pour différentes amplitudes de battement [38]. Le mouvement imposé est du pilonnement seul sur une plaque flexible en deux dimensions. Figure tirée de Hua *et al.* (2013) [38].

Bien que la production de poussée par un profil flexible ait été considérée à plusieurs reprises comme nous venons de la voir, tant expérimentalement que numériquement, comparativement, il n'y a eu que peu d'études qui abordent ce problème analytiquement. Nous pouvons citer l'étude très récente de Moore (2014) [60], qui a étendu les travaux de Wu (1961, 1971) [91, 92] et Lighthill (1970) [48] sur l'optimisation d'un profil oscillant. Il a modélisé un profil rigide en deux dimensions dont le bord d'attaque est forcé par un mouvement de pilonnement et qui peut passivement tourner en tanguage. Eloy et Schouveiler (2011) [23] se sont également appuyés sur les idées de Wu et Lighthill pour modéliser la production de poussée par un profil flexible actif. Enfin, Alben *et al.* (2012) [2] ont utilisé un modèle linéaire harmonique en temps pour justifier la loi d'échelle observée dans leurs simulations numériques. Toutefois, ces études analytiques sont généralement linéaires et sont donc limitées à des mouvements de petites amplitudes.

Basés sur ces conclusions expérimentales, des robots ont été développés. Parmi eux, on prendra l'exemple de deux des premiers robots mimant la nage d'un thon, le Robotuna [5], ou encore la nage d'une anguille, Amphibot [11] (figure 1.11).

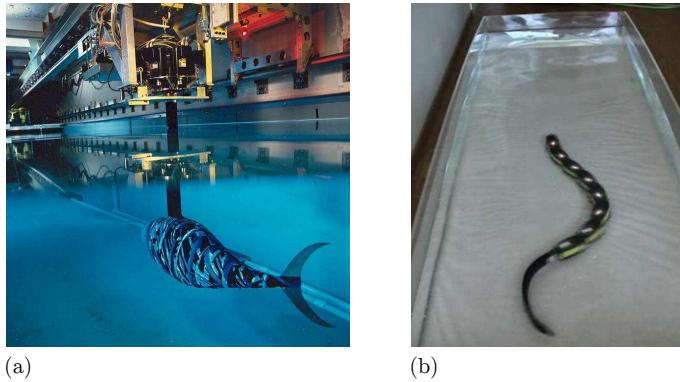


FIGURE 1.11 – Robots bio-inspirés : (a) le Robotuna inspiré de la nage d'un tanguage [5] et (b) l'Amphibot de celle d'une anguille [11].

Avant de clôturer cette introduction, nous noterons que les appendices des bons nageurs ont un rapport d'aspect plus ou moins constant. Surtout, la dynamique des nageoires est tridimensionnelle. Or cette troisième dimension n'a pour le moment été prise en compte par aucune approche, tant expérimentale que numérique ou analytique. Au vu des difficultés de simuler et modéliser les phénomènes bidimensionnels, nous pouvons concevoir que les deux dernières approches mettront quelque temps avant d'aborder le problème à trois dimensions. Néanmoins, les outils expérimentaux le permettent.

### 1.3 Problématique générale

Si de grandes avancées ont été menées sur la bio-locomotion, notamment aquatique, la question des grandes performances de ces animaux demeure. On peut alors se demander *en quoi le fait d'avoir une nageoire flexible aide à la propulsion ?* Les performances sont-elles influencées par les *propriétés intrinsèques de ces nageoires ?* Ou encore, existe-t-il un *mode de nage “préférentiel” en fonction de la nageoire ?* Enfin, Lighthill (1970) [48] avance que, pour un nageur élancé, seule la dynamique du bord de fuite de la nageoire impacte les performances de nage. En conséquence est-il possible de *prédir la dynamique*, donc les performances, d'un système propulsif ? Peut-on valider le modèle de Lighthill dans un contexte où l'hydrodynamique autour de la nageoire est décrite plus finement ?

Cette étude propose d'explorer l'effet de la flexibilité de la nageoire caudale chez les animaux marins, en dehors de toute considération d'espèce ou de forme de nageoire, par une approche combinant étude expérimentale et théorique. Ces

travaux se placent dans un contexte d'équipe sur la nage bio-inspirée bien défini. Expérimentalement, l'étude d'un profil rigide a été explorée par Schouveiler *et al.* (2005) [71], tandis que Eloy & Schouveiler (2011) [23] et Eloy (2012) [20] ont mené des études d'optimisation sur les performances de propulsion dans le cadre de la nage. Pour la modélisation théorique, le calcul de la pression autour d'une plaque flexible par analyse modale a été employé au sein de l'équipe par Eloy *et al.* (2007) et (2008) [24, 22].

Le manuscrit présente dans le chapitre 2 le dispositif expérimental ainsi que les outils de mesures utilisés au cours des expériences. Le système expérimental est détaillé dans son ensemble et l'objet de l'étude est décrit de façon précise. Les moyens de diagnostic sont également présentés dans ce chapitre.

Le chapitre 3 présente les expériences conduites pour répondre à la première problématique du sujet, à savoir le rôle de la flexibilité dans la propulsion. Dans un premier temps, la dynamique d'une plaque flexible forcée à une extrémité et immergée dans un écoulement est étudiée. Pour cela, les propriétés intrinsèques des plaques flexibles sont établies et leur réponse sous différentes conditions expérimentales est analysée. Dans un second temps, le lien entre la réponse de la plaque et la propulsion générée est abordée, à la fois qualitativement et quantitativement.

Dans le chapitre 4, nous développerons un modèle analytique inspiré par les résultats expérimentaux. Celui-ci s'appuie sur les travaux de Wu (1961) [91] : le fluide est considéré bidimensionnel, non visqueux et l'écoulement est potentiel. Les déformations de la plaque sont décrites par une décomposition modale traduisant la flexibilité des plaques. Le modèle est faiblement non linéaire avec une forme de traînée transverse induite par le forçage imposé en bord d'attaque. Les différents paramètres de l'équation gouvernant la réponse de la plaque sont explicités, la plupart des valeurs pouvant être déterminées indépendamment. Les prédictions de ce modèle sont ensuite confrontées aux résultats expérimentaux. L'accord entre les deux étant correct, l'étude est élargie à des systèmes robotiques par le biais d'une optimisation des paramètres de l'expérience.

Enfin, le chapitre 5 rassemble les conclusions formées dans cette étude, puis propose quelques pistes de réflexion sur l'étendue des résultats et leur portée.

## Chapitre 2

# Méthodes expérimentales

### Sommaire du chapitre

---

2.1	Introduction . . . . .	17
2.2	Dispositif expérimental . . . . .	18
2.2.1	Montage mécanique . . . . .	18
2.2.2	Plaque flexible . . . . .	20
2.3	Moyens de diagnostic . . . . .	22
2.4	Conclusion . . . . .	27

---

### 2.1 Introduction

Comme présenté dans l'introduction, la locomotion aquatique animale se fait principalement grâce à la transmission d'une onde le long du corps du nageur. Arrivée à la fin du corps, cette onde est amplifiée par la nageoire caudale qui génère de puissants vortex propulseurs. D'un point de vue biologique, la caudale des poissons est composée de nombreux muscles permettant un contrôle actif de sa déformation [27]. La longueur et la largeur des nageoires étant grandes devant leur épaisseur, les déformations se font majoritairement dans le plan. En revanche, des dimensions finies de la nageoire résultent un écoulement tridimensionnel.

C'est dans l'idée de reproduire un mouvement oscillatoire avec une réponse passive d'une plaque flexible que le montage expérimental utilisé a été créé. Un système était installé lors de mon arrivée, mais j'ai toutefois apporté de nombreuses modifications/compléments pour l'adapter aux besoins de cette étude. Chez les animaux marins, on observe que toutes les nageoires sont plus ou moins flexibles, dépendant de l'espèce observée et des "performances" de nage de l'animal. On en vient alors à se demander quel est le rôle de cette flexibilité dans la locomotion : existe t-il un lien entre le battement de la nageoire caudale (structure) et la vitesse de nage (réponse du fluide) ? La nageoire responsable de la propulsion et donc de la vitesse de nage est principalement la caudale, les autres nageoires pectorales, dorsales et

pelviennes servant à la stabilité et à la direction de déplacement du nageur. La caudale est animée d'un mouvement de battement pouvant être simplifié par un battement harmonique avec un angle d'attaque ajustable au cours du mouvement [4, 27]. Ce mouvement combinatoire étant complexe, on a préféré une oscillation harmonique simple imposée au bord d'attaque maintenu en position, c'est-à-dire non ajusté au cours du mouvement, bien que ce mouvement ne soit pas trouvé chez les animaux marins.

Dans un premier temps, le dispositif expérimental est présenté, puis, je détaillerai les moyens de diagnostic mis en œuvre pour étudier la réponse de la plaque et du fluide au forçage.

## 2.2 Dispositif expérimental

### 2.2.1 Montage mécanique

Notre expérience consiste en une plaque flexible immergée horizontalement dans un écoulement uniforme. La plaque est forcée par un mouvement oscillatoire de translation, transverse à l'écoulement, imposé au bord d'attaque par un actuateur linéaire (figure 2.1(a)). Sa direction au bord d'attaque est maintenue parallèle à l'écoulement incident  $U$ .

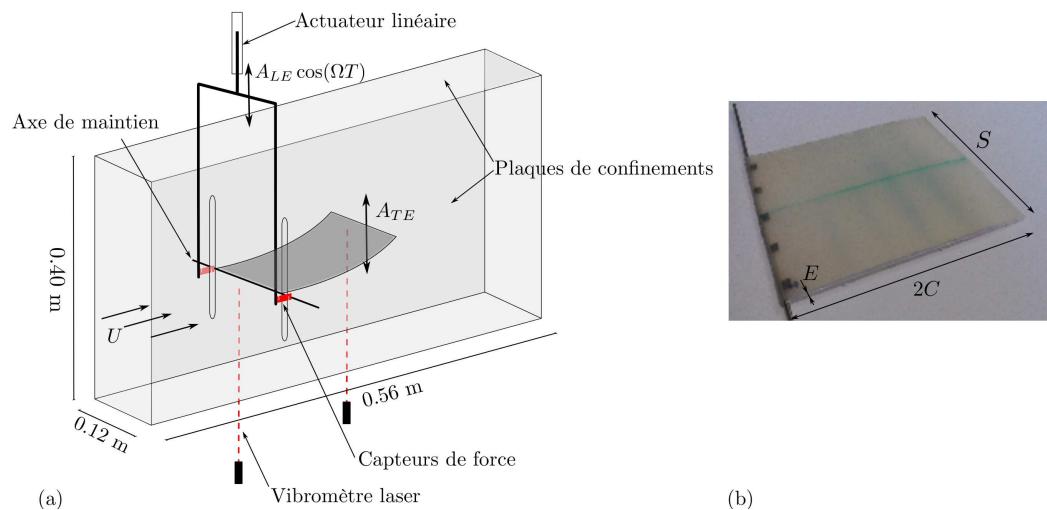


FIGURE 2.1 – (a) Schéma du dispositif expérimental et (b) dimensions des plaques flexibles.

L'écoulement uniforme de vitesse  $U$  est créé par un canal hydraulique à surface libre en circuit fermé dont la vitesse maximale atteint  $1 \text{ m.s}^{-1}$ . Cette vitesse est fixée en utilisant une relation d'étalonnage du canal hydraulique. Dans le cadre de cette étude, la vitesse d'écoulement est comprise entre  $0.05$  et  $0.1 \text{ m.s}^{-1}$ . Les dimensions

de la veine d'essai sont 0.38 m de large, 1.50 m de long et de 0.50 m de haut pour une profondeur d'eau à l'arrêt de 0.45 m baissant de 0.05 m pour les plus fortes vitesses d'écoulement. La plaque flexible est moulée sur un axe rigide attaché à un cadre en "U" inversé, la rotation de la plaque autour de cet axe est bloquée, de façon à ce que sa direction au bord d'attaque soit maintenue constante dans le repère du laboratoire et parallèle à l'écoulement  $U$  du canal (figure 2.1(a)). Le montage des plaques flexibles et leurs caractéristiques sont détaillés dans la section suivante (2.2.2). Le cadre en "U" est animé par un mouvement harmonique de translation verticale imposé par un actuateur linéaire. L'actuateur est contrôlé *via* une interface Labview qui permet de choisir le type de signal imposé tel qu'une sinusoïde, un carré ou un triangle. Dans cette étude, le mouvement du bord d'attaque retenu est sinusoïdal de la forme  $A_{LE} \cos(\Omega T)$  où  $\Omega = 2\pi F$  est la fréquence angulaire de forçage et  $A_{LE}$  son amplitude. La plaque profilée est confinée entre deux parois verticales séparées de la plaque flexible par moins d'un millimètre. Le rôle de ces parois est de minimiser l'écoulement autour des côtés de la plaque et, surtout d'isoler le système des perturbations extérieures notamment induites par le cadre en "U". Nous discuterons plus amplement de l'effet du confinement de la plaque par les parois dans la section 3.2.3. Une paroi horizontale est placée à la surface de la section d'essai du canal de façon à éliminer les effets de surface libre. Cette paroi ainsi que les verticales utilisées pour le confinement sont réalisées en Plexiglas transparent pour permettre l'observation de la plaque et de l'écoulement autour et en aval de celle-ci.

Paramètres	Symboles	Valeurs	Unités
Amplitude de forçage	$A_{LE}$	0.004, 0.010, 0.014	m
Fréquence de forçage	$\Omega$	2.51 – 37.70	rad.s <sup>-1</sup>
	$F$	0.2 – 6	Hz
Rigidité en flexion	$B$	0.018, 0.028, 0.053	Nm
Vitesse d'écoulement	$U$	$0, 5 \times 10^{-2}, 10 \times 10^{-2}$	m.s <sup>-1</sup>
Corde de la plaque	$2C$	0.12	m
Envergure de la plaque	$S$	0.12	m
Épaisseur de la plaque	$E$	0.004	m
Viscosité cinématique du fluide	$\nu_f^*$	$10^{-6}$	m.s <sup>-1</sup>
Masse volumique du fluide	$\rho_f^*$	$10^3$	kg.m <sup>-3</sup>
Masse volumique de la plaque	$\rho_p^*$	$1.2 \times 10^3$	kg.m <sup>-3</sup>
Masse surfacique de la plaque	$M$	4.8	kg.m <sup>-2</sup>

TABLE 2.1 – Grandeur caractéristiques dimensionnées de l'expérience.

Le montage permet de faire varier différents paramètres expérimentaux. Ainsi,

nous nous sommes intéressés aux effets de variation de la vitesse  $U$  de l'écoulement, de la rigidité en flexion  $B$  des plaques ainsi que de l'amplitude  $A_{LE}$  et de la fréquence de forçage  $\Omega$  imposées au bord d'attaque de la plaque. Enfin, quatre plaques de différentes flexibilités ont été testées, incluant une plaque rigide. La gamme de variations des paramètres est donnée dans le tableau 2.1. Les vitesses de l'écoulement ont été choisies afin que le nombre de Reynolds, défini comme  $Re = \frac{2UC}{\nu_f^*}$ , soit de l'ordre de grandeur de ceux trouvés dans le monde aquatique. Les vitesses d'écoulement 0 (fluide au repos), 0.05 et 0.1 m.s<sup>-1</sup> imposent donc respectivement un nombre de Reynolds égal à 0, 6000, 12000. Toujours dans l'objectif d'être au plus près des comportements naturels, les amplitudes de forçage ont été définies pour que le nombre de Strouhal  $St = \frac{2A_{LE}f}{U} \sim 0.2 - 0.4$ . Le nombre de Strouhal ainsi défini, quantifie la force instationnaire par rapport à la force d'inertie. En d'autres termes, il caractérise la vitesse de battement de la nageoire par rapport à la vitesse de l'écoulement. La fréquence d'activation a été variée de façon à avoir deux régimes dynamiques de réponse tout en prenant soin de ne pas détériorer la liaison de la plaque sur la tige, fragile de par sa conception.

Même si un dispositif expérimental était existant à mon arrivée, il ne permettait pas d'obtenir les mesures attendues. Des améliorations ont du être apportées notamment sur la transmission du mouvement imposé, tant sur la commande par le biais des cartes d'acquisitions pilotées par une interface Labview, que sur la transmission mécanique. Un bruit à haute fréquence persiste néanmoins lorsque l'actuateur linéaire fonctionne, ce qui bruite les mesures de force (voir section 2.3 pour plus de détails). La commande a été améliorée par l'ajout d'un condensateur entre la partie réseau commun et celle de la commande à faible puissance. Cette étape a été réalisée avec l'aide de M. Stéphane Martinez, technicien du laboratoire IUSTI. Il est intéressant de mentionner que l'expérience initiale a été développée pour transmettre une onde le long d'une plaque flexible. Cette onde étant générée par plusieurs actuateurs linéaires qui fonctionnaient en charge. Le bruit haute fréquence peut provenir du fonctionnement interne à l'actuateur, non conçu pour travailler non chargé.

Tous les signaux électriques sont imposés ou enregistrés *via* des cartes d'acquisition National Instrument. La première carte permet le contrôle et la commande de l'actuateur, la seconde est une carte 16 bits utilisée pour l'acquisition des signaux issus des capteurs de force.

### 2.2.2 Plaque flexible

La plaque flexible est un mélange de polysiloxane dont le ratio base/catalyseur dégage des rigidités en flexion différentes. Elle est moulée autour d'un axe rigide de diamètre 4 mm placé au bord d'attaque. Cet axe ayant été préalablement moleté et traité par un primaire pour améliorer l'adhérence de la matière. Le moletage

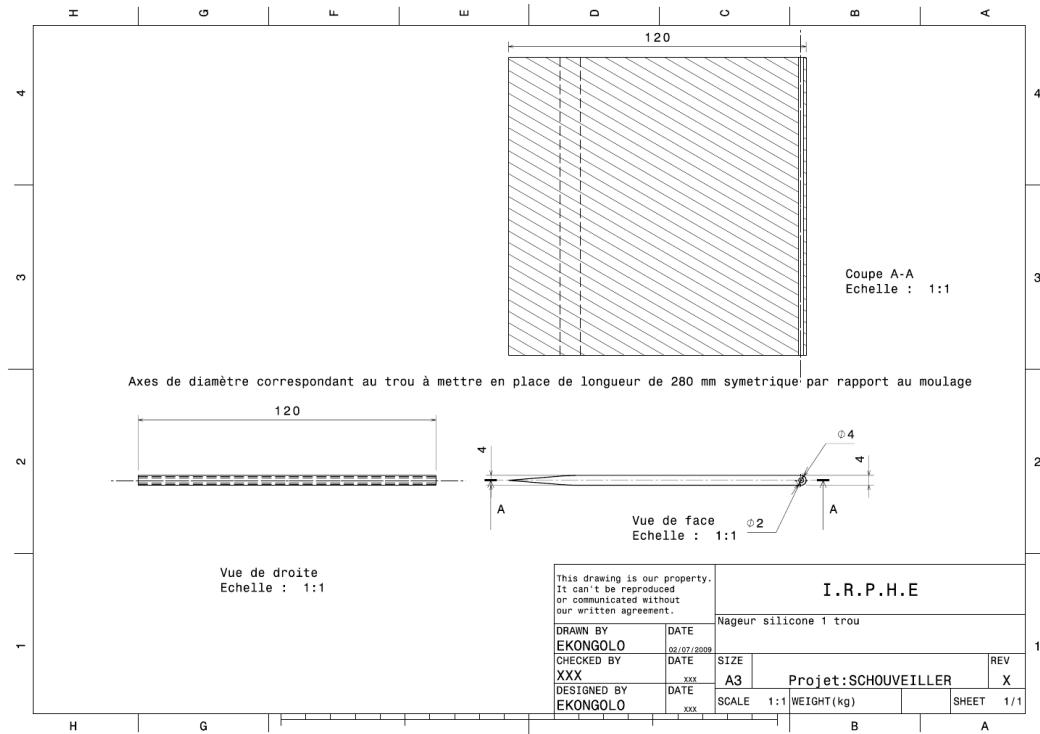


FIGURE 2.2 – Plan de construction de la plaque flexible.

prend la forme de petits taquets visible sur la figure 2.1(b) évitant ainsi la rotation de la plaque autour de l'axe pendant le mouvement. La plaque est arrondie au bord d'attaque où elle a la forme d'un demi-cylindre circulaire de diamètre 4 mm. Elle est affinée sur les deux derniers centimètres de sa corde jusqu'à avoir une épaisseur nulle au bord de fuite, assurant une forme hydrodynamique convenable (figure 2.2). Pour les trois flexibilités, la densité du matériau reste inchangée et est de l'ordre de 1.2. La plaque obtenue a une épaisseur  $E = 0.004$  m, une corde  $2C = 0.12$  m et une envergure  $S = 0.12$  m (tableau. 2.1) ce qui donne un rapport d'aspect  $AR = S/2C = 1$ . Toutefois, notons que la partie moletée de l'axe réduit la longueur flexible de la plaque. La corde effectivement flexible est de l'ordre de 0.115 m. Nous avons utilisé des plaques géométriquement identiques fabriqué par la Société STATIC Santé, spécialisée dans les moules pour le domaine médical. Trois flexibilités ont été choisies en plus d'un cas rigide :  $B = 0.018, 0.028, 0.053$  N.m et  $B \rightarrow \infty$ . Les rigidités en flexion sont exprimées par unité d'envergure, elles ont été estimées en mesurant la déflexion de la plaque sous son propre poids pour différentes longueurs de celle-ci (section 3.2.1).

## 2.3 Moyens de diagnostic

Afin de décrire la dynamique de la plaque ainsi que les conséquences de la déflexion sur le sillage, divers moyens de diagnostic ont été mis en œuvre.

**Visualisation par caméra digitale** La déformation de la plaque soumise au forçage externe est filmée à travers les parois transparentes du montage. Un caméscope grand public Sony Handycam HDR-SR11E placé sur le côté enregistre les déformations de la plaque. Le caméscope fonctionne à 25 images/sec mais un mode d'enregistrement rapide permet d'obtenir une fréquence d'acquisition de  $F_{acq} = 240$  Hz qui a été utilisée pour les fréquences de forçage les plus élevées. Les images acquises à partir du mode rapide sont entrelacées. En conséquence, les vidéos ont été désentrelacées, les rendant progressives et facilitant leur analyse. La pleine résolution du capteur CMOS est de  $1440 \times 1080$  pixels, ce qui est suffisant pour accéder à la forme de la plaque au cours des expériences.

Dans un premier temps, le suivi des extrema du déplacement de la plaque a été traité sur les vidéos par un algorithme de détection et de suivi en position développé sous le logiciel Matlab. Toutefois, l'analyse vidéo s'est avérée insuffisante pour détecter la réponse du bord de fuite. En effet, lorsque la fréquence  $F \gtrsim 3$  Hz, des déformations légères selon l'envergure émergent, faussant par l'occasion la traque de l'amplitude du bord de fuite. En conséquence, la réponse de la plaque caractérisée par l'amplitude de déplacement du bord de fuite est mesurée par les capteurs de déplacement. C'est à l'aide des vidéos, que le profil de déformation de la plaque au cours du forçage a été dressé.

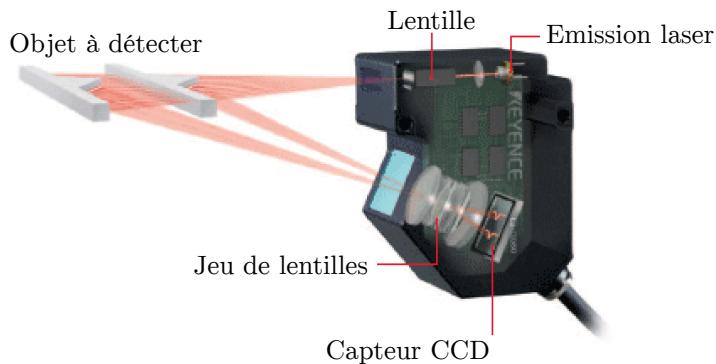


FIGURE 2.3 – Principe de fonctionnement du capteur de déplacement basé sur la triangulation optique.

**Capteur de déplacement** La dynamique du bord de fuite sous l'effet du forçage, de la rigidité et de la vitesse de l'écoulement, est mesurée par un vibromètre laser

Keyence de type LK série G-402. Ce vibromètre laser fonctionne sur le principe de triangulation optique. Lorsque le faisceau est retourné par un objet, il arrive sur une matrice optique, qui en fonction du/des pixel(s) illuminé(s), donne le déplacement de l'objet considéré (figure 2.3). La précision spatiale des mesures donnée par le constructeur est  $1 \mu\text{m}$ . Une interface utilisateur permet de définir la durée et la fréquence d'échantillonnage, ainsi que l'acquisition elle-même, avec la nature de la surface à suivre. Deux capteurs de ce type ont été utilisés pour mesurer simultanément l'amplitude de réponse du bord de fuite en fonction de celle imposée au bord d'attaque (figure 2.1(a)). Une attention particulière est accordée au positionnement de la tête laser du bord de fuite puisque l'amplitude varie, entraînant avec celle-ci l'angle réfléchi du signal laser. Ce phénomène engendre des décrochements fréquents lorsque l'amplitude et la pente de la plaque deviennent trop importantes. On notera toutefois que seul le déplacement pic-à-pic nous intéresse : en d'autres termes, seuls les points correspondant aux extrema de la plaque sont à retenir dans l'analyse de la dynamique. En effet, pour nos essais, une fréquence d'acquisition égale à 250 Hz (soit 4 ms de période) et un nombre de points variant de 12000 à 3000 lorsque la fréquence du forçage augmente, donnent une bonne résolution temporelle. Le nombre de points est fixé de manière à avoir au minimum une dizaine de périodes d'oscillation de la plaque.

**Visualisation par colorant** La visualisation par colorant est une méthode simple pour illustrer des phénomènes fluides. En injectant un traceur, on peut visualiser des effets du mouvement de la plaque sur le fluide. Le traceur utilisé est la fluorescéine, verte à la lumière du jour, elle devient fluorescente lorsqu'elle est excitée par des longueurs d'onde autour des ultraviolets. Un laser continu à Argon Ion de puissance maximale 8 W (Spectra Physics modèle Stabilite 2017) émet une longueur d'onde de 488 nm (couleur bleue). Le faisceau laser est étiré en nappe par le biais d'une lentille cylindrique, ce qui permet de visualiser un plan de l'écoulement, mis en évidence par la fluorescéine. Elle est soit injectée à travers un capillaire de façon à avoir un filet fluide à l'amont de la plaque, soit elle est directement appliquée sur la plaque. Une solution fortement concentrée en fluorescéine mélangée à un retardateur (Liquitex, gel medium) est appliquée sur la plaque à l'extérieur du canal. Une fois immergée dans la veine d'essai, on peut alors réaliser des visualisations sur des temps de l'ordre de deux minutes. Cette technique est préférée puisque les sources de la vorticité et du colorant sont confondues, permettant ainsi de suivre les vortex de leur formation dans les couches limites jusqu'à leur expulsion dans le sillage au bord de fuite. La diffusion du traceur est beaucoup plus faible que celle de la vorticité, puisque le nombre de Schmidt défini par  $Sc = \nu_c^*/D_c \gg 1$ , avec  $\nu_c^*$  et  $D_c$  respectivement la viscosité cinématique et la diffusion moléculaire du colorant [34]. Ce qui signifie que la fluorescéine continue d'exposer les motifs

créés par la vorticité bien après que celle-ci ait complètement diffusé. Il est toutefois important de noter que cette technique n'a été utilisée que de façon qualitative. Les visualisations sont réalisées grâce à un appareil photographique Nikon D200 en mode rafale à 4 images/sec. La mise au point est faite sur le premier vortex lâché dans le sillage par le bord de fuite. Les aberrations de l'objectif ne permettent pas d'avoir une image nette sur les bords. Cette remarque s'applique également aux images acquises par la méthode PIV. Le temps d'ouverture du capteur est déterminé de façon à avoir, à la fois une image nette des vortex, et à la fois assez de lumière pour visualiser ces vortex, puisque la puissance disponible du laser continu est limitée. Un objectif autofocus est un plus pour faire une première mise au point sur le phénomène, puis le mode manuel de mise au point permet de perfectionner la netteté sur le phénomène souhaité.

**Vélocimétrie par images de particules** La vélocimétrie par images de particules consiste à suivre des traceurs dans un écoulement. Puis, à partir de leurs déplacements et du temps entre chaque image, la cartographie des vitesses locales est déduite. L'ensemencement se fait par des particules sphériques (traceurs) de diamètres 30-100  $\mu\text{m}$  recouvertes d'argent réfléchissant la lumière (marque Optimage PIV Seeding Powder pour les particules de 30  $\mu\text{m}$ ). Le choix de la taille de particules est fonction du phénomène à capturer. Dans notre cas, des particules de 30 et de 100  $\mu\text{m}$  de diamètre ont été utilisées en fonction de l'ensemencement existant dans la veine d'essai. La taille des particules est suffisante pour illustrer les vortex dans le sillage. Il est toutefois déconseillé de mélanger des particules de tailles trop hétérogènes dans un écoulement. En effet, lors du réglage de la luminosité optimale des images ensemencées, les plus grosses particules auront tendance à réfléchir davantage la lumière que les petites particules, provoquant la saturation d'un ou plusieurs pixels sur le capteur de l'appareil photographique. On constate également que les grosses particules sédimentent rapidement, cela étant dû aux faibles vitesses d'écoulement considérées dans nos expériences. Un compromis s'impose donc dans le choix des particules à suivre. En effet, une fois incluses dans l'écoulement, elles sont éclairées par une nappe laser générée par deux lasers pulsés de type Nd :YAG (Yttrium Aluminium Garnet) dopés au Néodyme (Big Sky Laser de Quantel, 2  $\times$  174 mJ à 532 nm).

Deux images espacées dans le temps d'un  $\Delta T$  connu sont acquises par une caméra haute résolution. Une intercorrélation des deux images donne un champ de vitesse local. La figure 2.4(a) montre la densité de particules à avoir pour une résolution des champs de vitesse ainsi que le principe de l'intercorrélation entre deux images prises à un intervalle  $\Delta T$  petit devant le phénomène à analyser. Les traitements des images de particules se font grâce au logiciel DPIV-Soft développé au sein du laboratoire IRPHE [58]. Chaque image de particules est découpée en

petites boîtes. Une première intercorrélation est appliquée sur chaque boîte séparée temporellement par  $\Delta T$ . Puis une deuxième intercorrélation est appliquée sur les mêmes boîtes légèrement réorientées et déformées suivant les gradients des déplacements de la première intercorrélation. Les résultats ainsi obtenus sont nettement améliorés. La taille typique des boîtes lors des corrélations est  $32 \times 32$  pixels au premier tour et  $16 \times 16$  pixels au second tour. La résolution de la méthode est de  $1/2$  pixel [58]. Il est cependant nécessaire de déterminer avec précision le temps  $\Delta T$  entre chaque image pour ne pas perdre de particules entre deux images successives. Il en est de même pour la calibration spatiale afin d'avoir des champs de vitesse pouvant être analysés. L'ensemencement de l'écoulement doit être accompli avec soin, puisqu'il conditionne la taille des boîtes d'intercorrélation, donc de la précision de la vitesse mesurée. Typiquement, un bon ensemencement est de 5 à 20 particules dans chaque boîte. En-dessous de 4 particules, les intercorrélations deviennent difficiles à trouver et en-dessus de 30 particules, l'identification entre chaque image est floue. L'ensemencement de l'écoulement est donc une étape cruciale dans l'obtention de champs de vitesses de qualité. La taille du capteur de la caméra (modèle Redlake) est de  $4000 \times 2672$  pixels, soit une définition maximale de la caméra de 11 millions de pixels. La fréquence d'échantillonnage est de 10 Hz fixe. La nappe laser, dont l'épaisseur et la largeur sont définies au moyen d'un jeu de lentilles sphériques et cylindriques, est pulsée depuis le bas. La nappe, verticale et parallèle à l'écoulement, est placée au milieu de l'envergure de la plaque et est centrée sur le bord de fuite. L'alignement entre la nappe laser et le capteur de l'appareil photographique doit être ajusté avec attention pour conserver le maximum de particules entre deux images. Un exemple de sillage moyen généré par le mouvement de la plaque est présenté sur la figure 2.4(b). Le champ de vitesse moyennée dans le temps montre clairement un jet caractéristique d'un sillage propulsif.

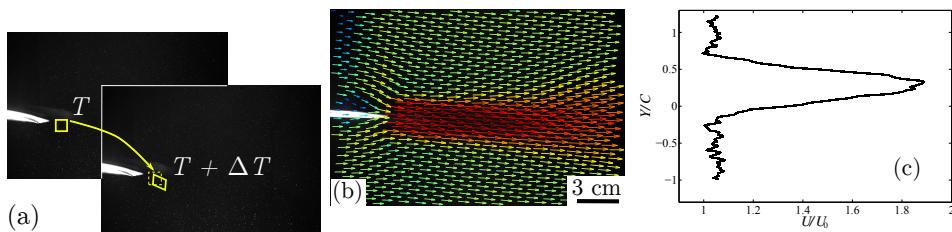


FIGURE 2.4 – (a) Principe des évaluations successives des boîtes pour les intercorrélations. (b) Exemple de champ de vitesse moyennée temporellement résultant pour la plaque flexible  $B = 0.018$  Nm dans un écoulement à  $Re = 6000$ . (c) Profil de vitesse moyenne associé pris à environ 10 cm à l'aval du bord de fuite. On identifie clairement le jet propulsif généré.

**Capteur de force** La force générée par l'oscillation de la plaque est mesurée par deux capteurs de force en “S” entièrement submersibles de marque Futek modèle LSB210 de capacité maximale 250 g. Les mesures sont faites par des jauge de contraintes. Lorsque l'actuateur linéaire fonctionne, les capteurs de force mesurent un signal très bruité. Pour réduire ces interférences, ils sont alimentés par une alimentation de laboratoire de 6 V et les connexions se font à travers un boîtier en aluminium assurant le blindage du câblage. Un étalonnage des capteurs sous une alimentation de 6 V confirme la linéarité en traction/compression des capteurs établis par le constructeur tout en donnant des courbes d'étalonnage de la force en fonction de la tension différentes. Les lois d'étalonnage sont  $F_{c1} = 0.95 \times \text{tension} + 5.32$  et  $F_{c2} = 1.05 \times \text{tension} + 5.83$  respectivement pour les capteurs 1 et 2 (figure 2.5(a)). Tandis que le constructeur fournit  $F_{c1} = F_{c2} = 0.26 \times \text{tension}$  sous une tension d'alimentation de 10 V (figure 2.5(b)). L'acquisition du signal temporel de la force se fait à travers une interface Labview développée au cours de la présente thèse. La volonté de mesurer la force générée par la plaque a conduit à modifier le montage de l'expérience. Les capteurs fonctionnant en traction/compression, sont montés dans le sens de l'écoulement, c'est-à-dire dans le sens de poussée ou traînée dans le sillage. Le montage se fait en port-à-faux entre le “U” inversé et l'axe moulé en bord d'attaque (figure 2.1). Des petites cales sont nécessaires pour maintenir l'ensemble {vis de raccord pour liaison du cadre en “U” inversé + capteur de force + vis de raccord pour axe moulé} par une liaison rigide.

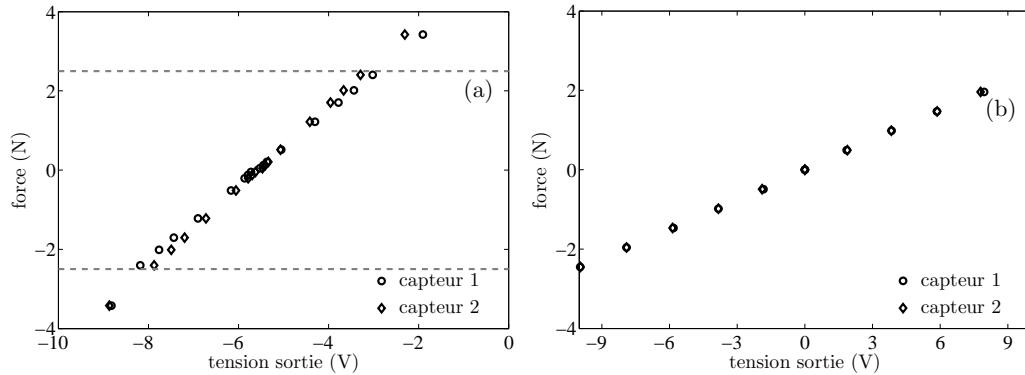


FIGURE 2.5 – Courbes d'étalonnage en traction compression des capteurs de force (a) obtenues expérimentalement et (b) issues des données constructeur.

Bien que ces capteurs soient faits pour une utilisation statique, le constructeur estime la réponse en fréquence à environ 500 Hz (information demandée par email), amplement suffisante pour les essais envisagés.

## 2.4 Conclusion

Même si un système expérimental était installé à mon arrivée, j'ai dû l'adapter pour répondre aux besoins de l'étude proposée dans le cadre de mon doctorat. J'ai également procédé à la mise en œuvre des différents moyens de diagnostic.

On retiendra donc que le système expérimental permet de caractériser la réponse de la plaque en fonction de ses paramètres de forçage (amplitude  $A_{LE}$  et fréquence  $F$ ), de sa rigidité  $B$  et de la vitesse de l'écoulement  $U$  imposée. La réponse de la structure ayant un fort impact sur le sillage, celui-ci est également examiné de même que sa rétroaction sur la structure. On s'intéressera dans un premier temps à la dynamique de la plaque grâce à l'étude de réponse en amplitude et en fréquence de plaques de différentes flexibilités. Une fois la dynamique de la structure connue, le sillage généré sera quantifié pour enfin connaître l'interaction fluide/structure à travers la poussée générée.



## Chapitre 3

# Réponse expérimentale d'une plaque flexible à un forçage harmonique

### Sommaire du chapitre

---

3.1	Introduction . . . . .	29
3.2	Réponse de la plaque . . . . .	30
3.2.1	Propriétés des plaques et premier adimensionnement . . . . .	30
3.2.2	Influence des paramètres expérimentaux . . . . .	36
3.2.3	Effet du confinement . . . . .	41
3.3	Lien entre forçage et propulsion . . . . .	44
3.3.1	Sillage induit . . . . .	44
3.3.2	Propulsion générée . . . . .	50
3.4	Conclusion . . . . .	53

---

### 3.1 Introduction

Le système expérimental permet d'étudier le forçage harmonique d'une plaque flexible soumise à un écoulement axial. La plaque, de par sa flexibilité et son montage, est semblable à une nageoire caudale dont le mouvement serait une oscillation simple. La plaque est maintenue parallèle à l'écoulement du canal au bord d'attaque alors que ses trois autres côtés sont libres. Nous rappelons que l'angle d'attaque n'est pas contrôlé et maintenu constant au cours du mouvement. Les paramètres de contrôle de l'expérience sont l'amplitude et la fréquence de forçage, la rigidité en flexion de la plaque ainsi que la vitesse de l'écoulement. Ce dernier paramètre a une double fonction dans l'expérience : il permet non seulement de faire varier les "conditions de nage" de la plaque mais advecte également les vortex générés par le

battement dans le sillage lointain afin d'éviter la recirculation au sein du confinement. La gamme de variation des paramètres expérimentaux est vaste, autorisant une grande combinaison de données. Toutefois, dans l'esprit d'approcher ce qui apparaît dans des phénomènes naturels, la gamme des paramètres est réduite (voir section 2.2).

Après avoir déterminé les caractéristiques de chaque plaque et fait apparaître les premiers nombres sans dimensions, nous nous efforcerons d'analyser l'effet des paramètres expérimentaux sur la réponse dynamique de la plaque flexible. Le confinement de l'expérience est abordé avant d'examiner les conséquences du forçage à travers le sillage et la propulsion générées.

## 3.2 Réponse de la plaque

Dans cette section, nous examinerons la dynamique d'une nageoire flexible. Pour cela, la réponse d'une plaque élastique immergée dans un écoulement uniforme et forcée par un mouvement harmonique de pilonnement à son bord d'attaque est analysée. Le fluide environnant le système est de l'eau. L'objectif est de quantifier l'influence des différents paramètres expérimentaux : l'amplitude et la fréquence de forçage, la vitesse d'écoulement incident et la rigidité en flexion de la plaque. Ce problème implique un couplage fluide-structure complexe puisque les contraintes liées à l'écoulement déforment la plaque, qui par son mouvement déforme le fluide en retour. Nous pensons que la complexité globale de ces interactions peut seulement être comprise grâce à une étude expérimentale puisqu'à ce jour les simulations numériques sont limitées à des nombres de Reynolds moyens, de l'ordre de 1000. Quant aux modèles analytiques développés, ils se situent dans la limite linéaire, c'est-à-dire dans l'hypothèse de petites déformations de la structure.

### 3.2.1 Propriétés des plaques et premier adimensionnement

Grâce au mélange de polysiloxane dont le ratio base/catalyseur varie, on obtient des rigidités en flexion différentes, dont les caractéristiques de flexibilité et de fréquence propre doivent être définies. Cependant, les dimensions des plaques demeurent les mêmes. Ces propriétés doivent être déterminées en amont des essais en résonance puisqu'elles sont intrinsèques aux plaques.

#### Rigidité en flexion $B$

Bien que la rigidité en flexion de chaque plaque soit donnée par la société STATICE Santé, mandatée pour la fabrication des plaques en polysiloxane, on s'est permis de faire une vérification simple de cette rigidité. La manipulation consiste à faire varier la longueur libre et à mesurer la déflection de la plaque qui en résulte

sous l'effet de la gravité. La rigidité en flexion  $B$  par unité d'envergure s'exprime par

$$B = E_{\text{Young}} I \quad (3.1)$$

$$= E_{\text{Young}} \frac{E^3}{12(1 - \nu_{\text{Poisson}}^2)} \quad (3.2)$$

avec  $E_{\text{Young}}$  et  $\nu_{\text{Poisson}}$  respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau. Le moment quadratique  $I$  est fonction de la géométrie seule de la plaque.

Les conditions aux limites du système sont de type encastré-libre lors des manipulations. On prendra soin de ne pas écraser la plaque lors de l'encastrement pour éviter un changement de section en bord d'attaque qui fausserait la rigidité résultante. Le principe fondamental de la dynamique appliquée au système donne  $\sum \mathcal{M}_{\text{flexion}} \vec{z}(x) = B \frac{d^2 D(x)}{dx^2}$  avec  $D(x)$  la déformée sur la fibre moyenne de la plaque appelée flèche. D'où, après application des conditions d'encastrement, définies comme  $\partial D(0)/\partial x = 0$  et  $D(0) = 0$  (voir section 4.2),

$$D(x = L) = \frac{MG}{8B} L^4, \quad (3.3)$$

avec  $M$  la masse surfacique de chaque plaque calculée à partir de la densité du matériau qui vaut 1.2, et  $G = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ , l'accélération de la pesanteur. La flèche est donc proportionnelle à la longueur libre de la plaque puissance quatre soumise à son poids (voir figure 3.1). De ces relations linéaires, on déduit le coefficient de proportionnalité puis la rigidité en flexion par unité d'envergure  $B$  pour chaque plaque :  $B = 0.018, 0.028, 0.053 \text{ N.m}$ . Par la suite, les rigidités de chaque plaque seront référencées comme  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$ .

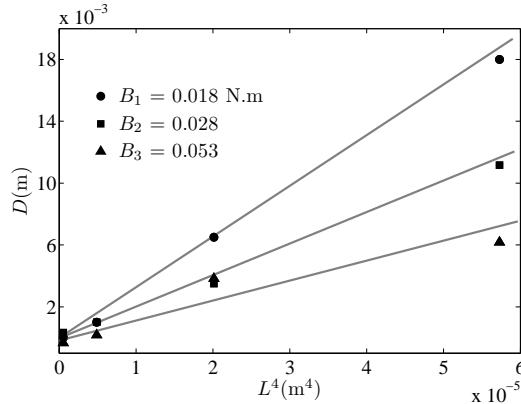


FIGURE 3.1 – Détermination expérimentale de la rigidité en flexion de chaque plaque : la déflection  $D$  en fonction de la longueur libre  $L^4$  de la plaque. Le coefficient directeur de la meilleure droite passant par les points expérimentaux  $D = f(L^4)$  donne directement  $B$ .

### Fréquence propre des plaques $F_0$

La fréquence propre des plaques est mesurée en considérant la réponse impulsuelle au bord de fuite. Les essais sont réalisés dans de l'eau au repos. La réponse enregistrée prend la forme d'oscillations amorties (figure 3.2(a)) dont la fréquence propre de chaque plaque est mesurée par transformation de Fourier du signal (figure 3.2(b)). De ce signal, on relève la fréquence naturelle la plus faible  $F_0$  de la plaque dans l'eau qui va servir de fréquence de référence pour l'adimensionnement de la fréquence d'activation pour la suite (section 3.2.2). Il est important de noter que c'est bien  $F_0$  qui tiendra de fréquence de référence dans notre étude et non le nombre de Strouhal (équation (1.3)), comme c'est le cas généralement dans la littérature. L'expérience est répétée neuf fois pour chaque rigidité, donnant la fréquence naturelle moyenne  $F_0 = 0.75 \pm 0.03, 0.99 \pm 0.02, 1.30 \pm 0.03$  Hz pour les rigidités respectives  $B = 0.018, 0.028, 0.053$  N.m. L'écart sur  $F_0$  est la déviation standard donnée par les expériences répétées. Dans la suite, on parlera en termes de fréquence angulaire notée  $\Omega_0 = 2\pi F_0$ . D'où la correspondance avec les fréquences  $F_0$ ,  $\Omega_0 = 4.71, 6.22, 8.17$  rad.s $^{-1}$  respectivement pour les rigidités  $B_1, B_2$  et  $B_3$ .

Comme attendu par l'analyse vibratoire d'une poutre encastrée-libre (voir section 4.2), le ratio des fréquences naturelles varie comme la racine carrée des rigidités avec une concordance de plus de 94 % :  $F_{0i} \sim \sqrt{B_i}$ , avec  $i$  la plaque considérée.

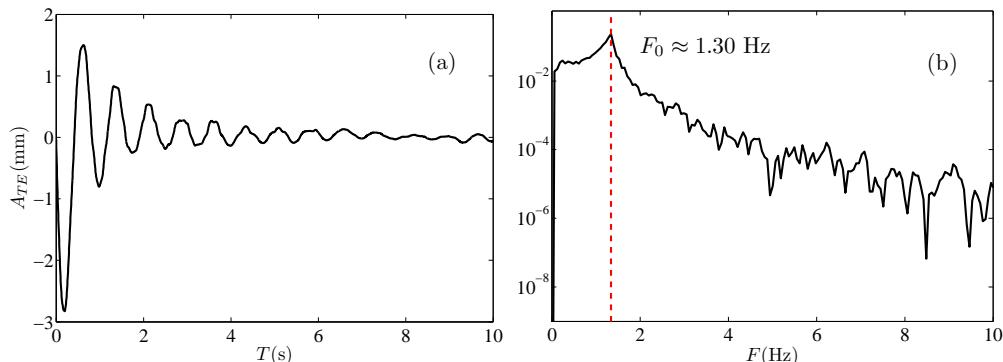


FIGURE 3.2 – Réponse impulsuelle d'une plaque flexible  $B = 0.053$  N.m. (a) Le signal amorti enregistré en bord de fuite et (b) la transformée de Fourier de ce signal donnent une fréquence propre du système de 1.30 Hz dans l'eau.

La fréquence naturelle dépendant du milieu dans lequel les plaques évoluent, les mêmes expériences dans l'air conduisent à  $\Omega_0 = 25.32, 30.72, 37.57$  rad.s $^{-1}$  respectivement pour les rigidités  $B_1, B_2$  et  $B_3$ . Dans le vide, ces premières fréquences naturelles se calculeraient comme  $(\frac{k_0}{C})^2 \sqrt{\frac{B}{\rho_p^* E}} = 14.95, 18.65, 25.66$  rad.s $^{-1}$  (équation (4.24)). L'écart avec les valeurs mesurées dans l'air s'explique par l'absence de termes dissipatifs, tant linéaires que non linéaires, dans le calcul. Ces termes d'amortissement seront discutés dans la partie 4.3. Les trois premières fréquences na-

turelles de vibration unidirectionnelles d'une plaque (donc équivalent à une poutre) encastrée-libre ont un nombre d'onde  $k_0 = 1.8751$ ,  $k_1 = 4.6941$  et  $k_2 = 7.8548$  et le ratio des fréquences correspondantes  $F_0$ ,  $F_1$  et  $F_2$  varie comme le carré des ratios des longueurs d'onde. Soit,  $F_1/F_0 = (k_1/k_0)^2 \approx 6.3$ ,  $F_2/F_0 = (k_2/k_0)^2 \approx 17.5$  et  $F_3/F_0 = (k_3/k_0)^2 \approx 34.4$  (voir section 4.2). Ce qui est bien au-delà de la gamme de fréquences explorée pour  $F_2/F_0$  et  $F_3/F_0$ .

### Taux d'amortissement $\tau^*$

Les signaux présentés dans le paragraphe précédent pour étudier la fréquence propre des plaques font apparaître un amortissement. Celui-ci est fonction du milieu dans lequel la déstabilisation impulsionale est réalisée. En effet, en comparant les signaux dans l'eau et dans l'air, les oscillations de réponse s'amortissent plus rapidement dans le premier cas que dans le second (figures 3.3(a) et 3.4(a)). Toutefois, la plaque ayant une épaisseur non nulle, la dissipation à l'intérieur même de la structure ne peut être négligée. Cette dissipation est fonction du matériau et de la géométrie de la plaque, toutes deux propriétés intrinsèques de celle-ci. De là, se dégagent deux principales sources d'amortissement. La première dépend du fluide environnant, qui se détermine par le taux d'amortissement d'une réponse impulsionale dans le fluide. En observant les signaux utilisés pour déterminer les fréquences propres d'une plaque en fonction du fluide environnant, il est clair que les temps caractéristiques d'amortissement de la plaque sont fonction du milieu d'évolution. La deuxième sources de dissipation dépend de la plaque évaluée, et relève de la géométrie et du matériau de celle-ci. On peut ainsi émettre l'hypothèse que la dissipation structurelle agira de la même façon quelque soit le milieu environnant.

Le signal d'amortissement suite à une réponse impulsionale de la plaque dans l'eau est présenté sur la figure 3.3(a). La déstabilisation de la plaque se fait uniquement en bord de fuite, le bord d'attaque étant fixe. Bien que le signal enregistré soit centré en zéro, l'amplitude de déplacement imposée modifie les conditions initiales de la plaque. En effet, le retour à l'équilibre admet deux régimes : l'amortissement total du système {fluide + plaque}, et une relaxation plus lente de la plaque, très certainement due au matériau et à l'amplitude de déstabilisation (encart de la figure 3.3(a)). Notons que ce comportement de relaxation est présent quelque soit le sens du déplacement initial. Il dépend donc des conditions expérimentales et on suppose qu'il n'affecte pas l'amortissement structurel du matériau s'il est corrigé. Dès lors, le signal doit être recentré en zéro. Pour cela, la moyenne du signal est retranchée au signal brut, puis de façon à compenser la dérive de la relaxation au temps long, une fonction linéaire est ajoutée au signal centré (figure 3.3(b)). À présent, l'amortissement du système dans l'eau  $\tau_w^*$  est simplement la pente du signal centré en zéro (encart figure 3.3). L'amplitude de déstabilisation a été variée et  $\tau_w^*$  est relevé lorsque les premières oscillations de retour à l'équilibre sont passées. Nous

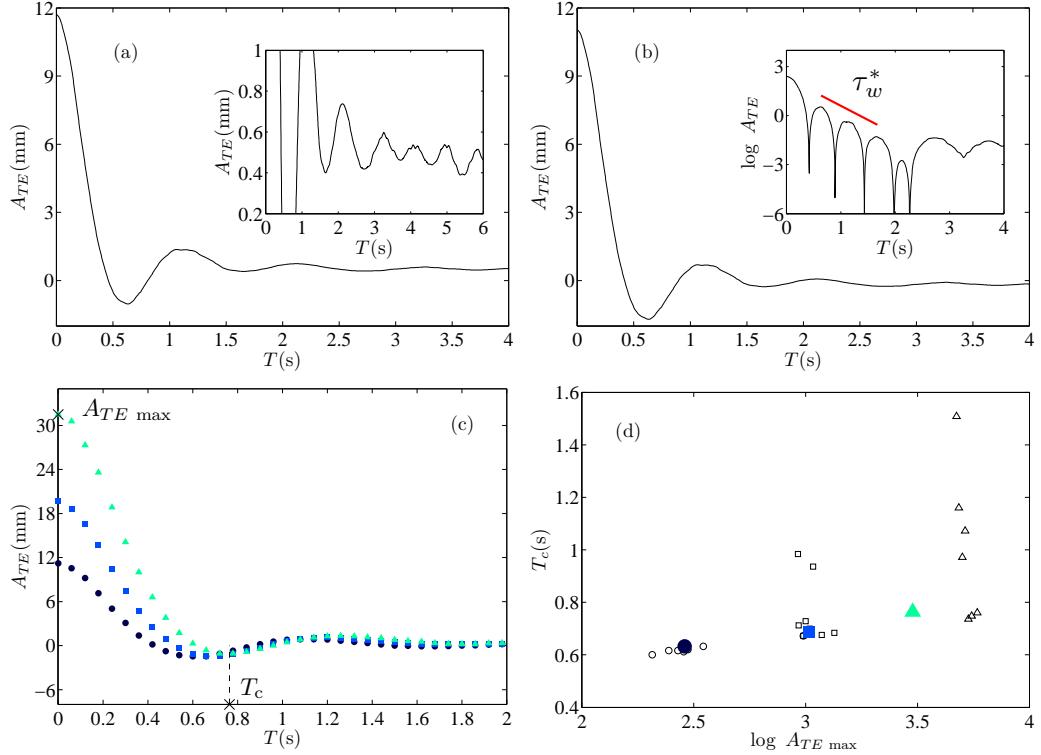


FIGURE 3.3 – Amortissement de la plaque dans l'eau. (a) Signal amorti observé après déstabilisation de la plaque dans l'eau. (encart) Le signal est fortement décentré à mesure que la plaque retrouve sa position d'équilibre. (b) Signal centré, (encart) la pente en échelle logarithmique conduit à l'amortissement de la plaque dans l'eau. (c) Oscillations amorties et (d) évolution du temps  $T_c$  auquel l'amplitude minimale est atteinte en fonction de l'amplitude de déstabilisation  $A_{TE}$  max.

trouvons donc  $\tau_w^* \approx 47.64 \pm 0.12 \text{ s}^{-1}$  pour les amplitudes testées pour la plaque  $B_1$  à  $Re = 12000$ . La figure 3.3(c) montre l'évolution surprenante des amortissements lorsque l'amplitude de déstabilisation est changée. Quelque soit l'amplitude initiale, l'amortissement semble constant : le temps auquel l'amplitude minimale est atteinte varie très légèrement (voir figure 3.3(d)). La manière dont évolue ce temps critique  $T_c$  en fonction de l'amplitude de départ apparaît comme un critère possible dans la détermination du coefficient de traînée transverse  $c_D$ , introduit dans la modélisation (voir chapitre 4). L'amortissement total du système peut se scinder en une dissipation visco-élastique due à la plaque et en une dissipation type fluide.

La même démarche expérimentale pour plusieurs longueurs libres de la plaque est suivie pour l'amortissement du système dans l'air  $\tau_a^*$  (figure 3.4(a et b)). Nous remarquons immédiatement que l'amortissement de l'air est beaucoup plus faible que l'eau, sans pour autant être négligeable, et ce malgré la forte contribution de la

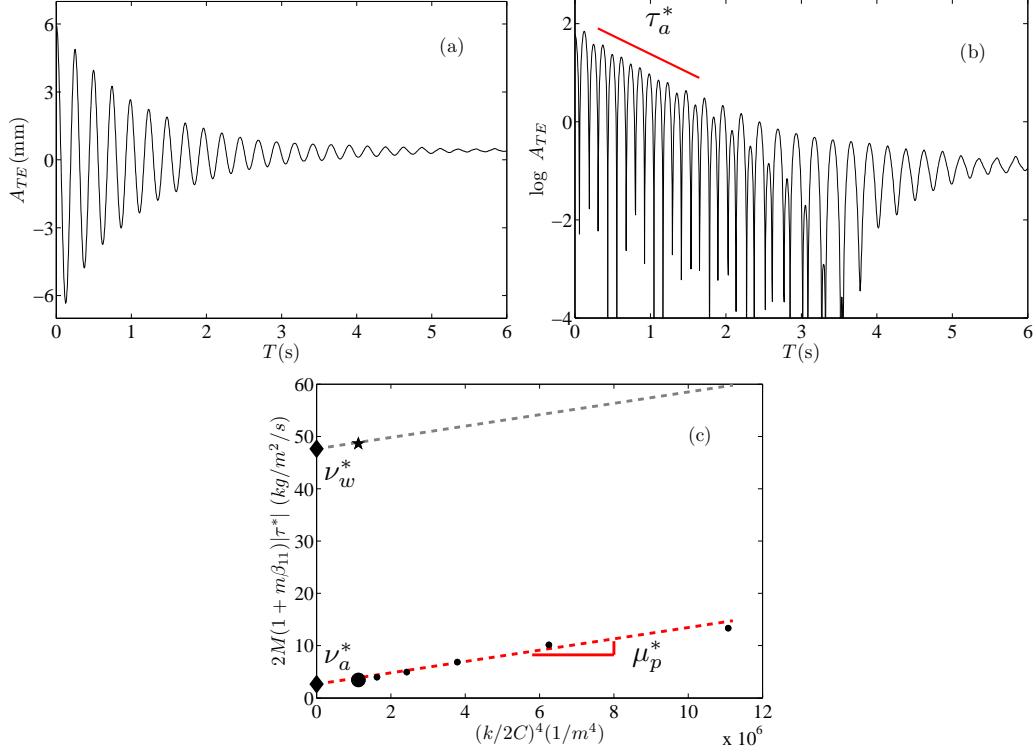


FIGURE 3.4 – Amortissement d’une plaque dans l’air. (a) Signal centré de l’oscillation amortie et (b) représentation logarithmique de ce signal. La pente permet de déterminer le coefficient d’amortissement dans l’air  $\tau_a^*$ . (c) Amortissement en fonction de la longueur libre de la plaque où la pente donne la contribution de la plaque.

structure dans la dissipation de l’énergie injectée lors de la déstabilisation. Comme la dissipation de la structure est fonction de sa géométrie, la longueur libre de la plaque est changée et le même protocole expérimental est conduit. L’amortissement du système est ainsi obtenu en fonction de la longueur libre de la plaque. L’amortissement total se décrit comme :

$$\tau_m^* = \nu_m^* + k_1^4 \mu_p^*, \quad (3.4)$$

où  $\tau_m^*$  représente l’amortissement total du système dans le milieu où évolue la plaque (eau ou air),  $\nu_m^*$  et  $\mu_p^*$  sont respectivement les amortissements dus au fluide environnant et structurel. La constante  $k_1$  correspond au nombre d’onde et vaut 1.8751 (voir la section 4.2). La structure dissipe le même taux d’énergie quelque soit le milieu environnant. L’expression (3.4) implique donc que la dissipation structurelle dépende linéairement de la longueur libre de la plaque, dont la pente donne directement l’amortissement au sein du solide  $\mu_p^*$ . Ainsi, en répétant les expériences de déstabilisation et en faisant varier la longueur libre de la plaque, la contribution de la structure  $\mu_p^*$  peut être isolée et estimée par la pente de la meilleure estima-

tion des données expérimentales (figure 3.4(c)). On trouve ainsi  $\mu_p^* = 2.32 \cdot 10^{-6}$  N.m.s. L'ordonnée à l'origine de la pente indique l'amortissement de l'air  $\nu_a^* = 2.63 \text{ kg.m}^{-2} \text{s}^{-1}$ . En d'autres termes, la contribution du fluide environnant dans la dissipation est déterminée quand la longueur de la plaque est nulle.

Comme la dissipation structurelle est connue, il est aisément d'isoler la contribution de la dissipation due au fluide dans l'amortissement global. Il est toutefois important de noter que les sources de dissipation présentées sont considérées comme étant constantes au cours du forçage.

L'allure des signaux amortis sur les figures 3.3(a-b) tendent à remettre en cause l'hypothèse de faible amortissement suggérée précédemment. En comparant le taux d'amortissement total de la plaque dans l'eau par rapport à la pulsation propre de celle-ci dans le même milieu, il apparaît que le taux d'amortissement est plus faible que la pulsation propre, c'est-à-dire  $\tau_w^*/(2M(1 + m\beta_{11})) \ll \Omega_0$ . Autrement dit, les signaux observés se placent bien dans un régime d'oscillations amorties.

### 3.2.2 Influence des paramètres expérimentaux

Après avoir déterminé les propriétés des plaques flexibles connues, nous allons considérer leur réponse lorsque le bord d'attaque est soumis à un forçage harmonique de la forme  $A_{LE} \cos(\Omega T)$ . La dynamique de cette réponse sera caractérisée en enregistrant les positions successives de la plaque, en considérant uniquement le déplacement en fonction du temps du bord de fuite. De plus, les déformations spatio-temporelles de la plaque sont filmées. Les paramètres du forçage sont l'amplitude et la fréquence imposées en bord d'attaque, respectivement  $A_{LE}$  et  $\Omega$ . On note que, quelque soit la configuration testée, nous observons d'une part que les déformations se font principalement selon la corde, et d'autre part que la réponse est à la fréquence de forçage. Le déplacement du bord de fuite peut s'exprimer comme  $A_{TE} \cos(\Omega T + \phi)$ , avec  $\phi$  le déphasage avec le mouvement imposé et  $A_{TE}$  l'amplitude de réponse au forçage au bord de fuite.

La réponse de la plaque est caractérisée par la mesure de l'évolution de l'amplitude relative  $A_{TE}/A_{LE}$  et de la phase  $\phi$  à mesure que la fréquence de forçage  $\Omega$  augmente. Cette réponse est illustrée en figure 3.5 pour le cas :  $A_{LE} = 0.004$  m et  $B = 0.018$  N.m dans l'eau au repos. Sur ce tracé, la fréquence  $\Omega$  est normalisée par la fréquence naturelle de la plaque  $\Omega_0$ .

Remarquablement, deux pics distincts se dégagent de la réponse en amplitude. Le premier pic est étroit et apparaît à la fréquence  $\Omega$  proche de  $\Omega_0$ , alors que l'amplitude au bord de fuite est 2.7 fois inférieure à celle imposée. Le second pic, à la fréquence  $\Omega/\Omega_0$  entre 6.0 et 6.5, est plus large et moins fort en amplitude que le premier pic,  $A_{TE}/A_{LE} \sim 2.2$ . D'après les remarques faites sur l'évolution des fréquences naturelles d'une poutre, on en conclut que les deux pics observés correspondent aux deux premières fréquences de résonance de la structure par

rapport au forçage imposé.

L'évolution du déphasage du bord de fuite par rapport au mouvement imposé en bord d'attaque est tracée en superposition sur la figure 3.5. La phase tend vers  $-\pi$  loin des pics de résonance, alors qu'elle s'approche de  $-\pi/2$  à la première résonance, comme attendu avec l'analyse d'un système amorti résonant tel que {masse + ressort + amortisseur}. À l'inverse, il n'est pas possible de distinguer une tendance claire pour  $\phi$  au second pic, où la phase varie continûment entre -3 et -5 rad.

Sur la figure 3.6, la déformation de la plaque aux deux pics de résonance est illustrée en superposant les vues de la déformation de la plaque selon sa corde sur une période d'excitation. On mentionne que les visualisations directes des déformations ne révèlent pas de déformations significatives sur la troisième direction, *i.e.* selon l'envergure; ainsi la réponse de la plaque au forçage est correctement représentée par le déplacement de la ligne moyenne. Il est toutefois signalé que lorsque la fréquence de forçage dépasse 3 Hz, de légères déformations selon l'envergure apparaissent. La caméra digitale qui enregistre le mouvement est placée sur le côté, perpendiculairement au milieu de la plaque. Le cadre inversé masque le bord d'attaque maintenu parallèle à l'écoulement incident. C'est pour cette raison que le bord d'attaque ne paraît pas constant dans la forme des modes sur la figure 3.6(a) et (b). On notera une asymétrie de l'enveloppe des modes due au matériau de la plaque, qui a une densité légèrement supérieure à celle de l'eau ( $\rho_p/\rho_f \approx 1.2$ ). Les figures 3.6(a) et (b) montrent les formes des deux modes dans le repère du laboratoire aux résonances, c'est-à-dire lorsque  $\Omega/\Omega_0 = 1$  et 6.3. Contrairement au premier mode, le second affiche un col proche du bord de fuite révélant des

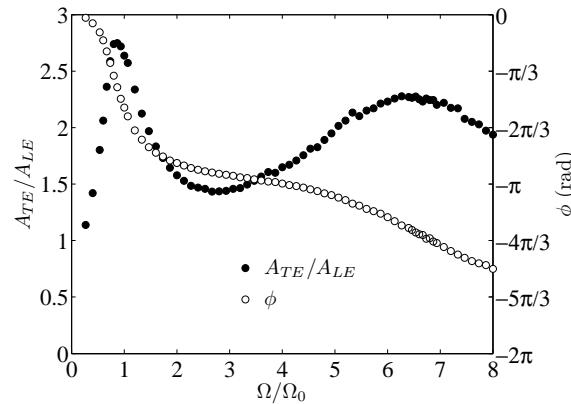


FIGURE 3.5 – Réponse typique d'une plaque flexible à un forçage. L'amplitude relative de réponse au bord de fuite par rapport à celle imposée au bord d'attaque  $A_{TE}/A_{LE}$  montre une résonance de la structure sous l'effet du forçage, phénomène confirmé par la phase  $\phi$  entre le bord d'attaque et le bord de fuite.

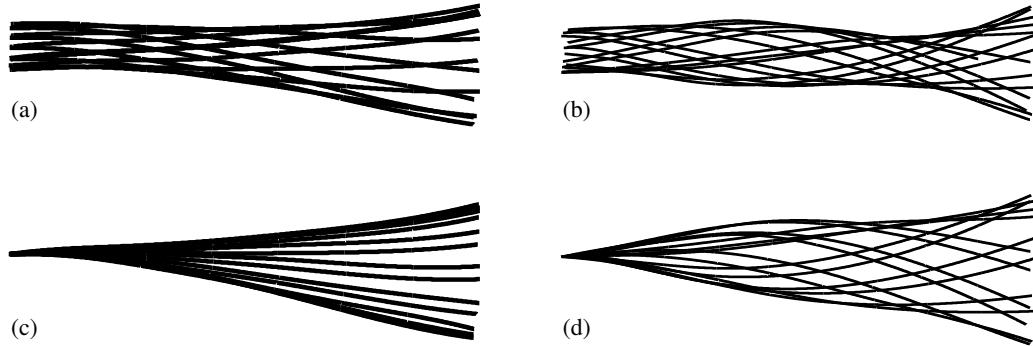


FIGURE 3.6 – Forme de la plaque aux pics de résonance : (a-c) dans le repère de la plaque et (b-d) dans le repère du laboratoire. Les deux formes confirment le premier et le deuxième mode de résonance de la plaque.

modes structuraux supérieurs impliqués dans la dynamique de la plaque à haute fréquence. Les mêmes modes sont présentés dans le repère lié à la plaque (figure 3.6(c) et (d)). Ces vues dégagent de grandes similarités avec les modes d'instabilité d'un drapeau encastré immergé dans un écoulement uniforme, étudiés entre autre par Eloy *et al.* (2008) [22] (voir revue de Shelley & Zhang (2011) [73] et références incluses). On notera tout de même que les modes présentés diffèrent des modes naturels de poutre dans le vide (voir section 4.2). En particulier, le second mode ne dessine pas un nœud franc mais seulement un pseudo-nœud, ou col, mettant en évidence la contribution des modes de structure supérieurs. Leurs fréquences correspondent au système {plaque + fluide} et non à la plaque seule, comme souligné par Michelin et Llewellyn Smith (2009) [59].

La réponse en fréquence des plaques flexibles est ainsi décrite pour un jeu de paramètres expérimentaux définis : une amplitude de forçage  $A_{LE}$ , un nombre de Reynolds  $Re$  et une rigidité en flexion  $B$ . Dans la suite de notre propos, nous allons examiner l'effet des autres paramètres sur la dynamique de la plaque, notamment sur la réponse au bord de fuite. Pour cela, le même protocole expérimental est mis en place :  $A_{LE}$ ,  $Re$  et  $B$  sont fixés et la réponse relative  $A_{TE}/A_{LE}$  est tracée en fonction de la fréquence imposée  $\Omega/\Omega_0$ .

### Effet de la rigidité en flexion $B$

Sur la figure 3.7(a), les courbes de réponse en fonction de la fréquence de forçage sont tracées pour les trois valeurs de rigidité de la plaque  $B$  testées. On observe que l'amplitude maximale n'est pas affectée par la variation de  $B$  et que les pics de résonance évoluent vers les hautes fréquences à mesure que la rigidité augmente. Or nous avons vu au 3.2.1 que les fréquences naturelles  $\Omega_0$  des plaques augmentent également avec leur rigidité, de sorte que les fréquences naturelles  $\Omega_0$  soient en

corrélation avec la rigidité. C'est pourquoi, lorsque les courbes de réponse sont tracées en fonction de la fréquence normalisée par la fréquence propre de chaque plaque  $\Omega/\Omega_0$ , les courbes se superposent en une seule courbe maîtresse (figure 3.7(b)).

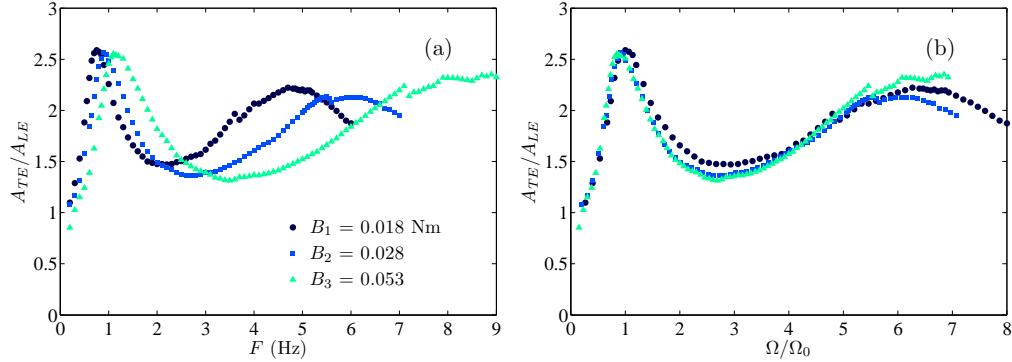


FIGURE 3.7 – Amplitude relative de réponse  $A_{TE}/A_{LE}$  sous effet de la rigidité de la plaque : (a) en fonction de la fréquence d'activation  $F$  et (b) en fonction de la fréquence normalisée par la fréquence naturelle des plaques  $\Omega/\Omega_0$ . Les conditions expérimentales sont  $A_{LE} = 0.004 \text{ m}$  et  $Re = 6000$ .

On note que les “décrochages” visibles sur les courbes de résonance sont dus à un ajustement des vibromètres lasers pendant les essais. En fonction de la déformation, le faisceau laser émis n'est pas toujours retourné si l'angle d'incidence avec l'objet est trop fort ou si l'objet se déforme trop et sort du champ de mesure de l'appareil. Néanmoins, c'est toujours la déformation maximale en bord de fuite qui est sélectionnée pour déterminer  $A_{TE}$ .

En résumé, dans la limite de cette étude, qui ne considère que la variation de rigidité en flexion des plaques d'un facteur 3, on ne peut pas dégager un effet significatif de ce paramètre tant que la fréquence de forçage est correctement normalisée par la fréquence naturelle de la plaque considérée  $\Omega_0$ .

### Effet du nombre de Reynolds $Re$

L'effet du nombre de Reynolds sur la réponse de la plaque est illustré en figure 3.8, représentant la réponse fréquentielle pour trois valeurs du nombre de Reynolds. Le nombre de Reynolds est défini par  $Re = 2UC/\nu_f^*$  et est varié expérimentalement en changeant la vitesse de l'écoulement  $U$  imposée en amont de l'installation. Il est important de noter que la vitesse maximale de l'installation du canal hydraulique, soit  $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$ , ne permet pas de développer l'instabilité du drapeau : la plaque au repos dans l'écoulement est parfaitement immobile pour toute vitesse imposée.

La première valeur du nombre de Reynolds considérée correspond à de l'eau au repos ( $Re = 0$ ) ; les deux autres,  $Re = 6000$  et  $Re = 12000$ , correspondent

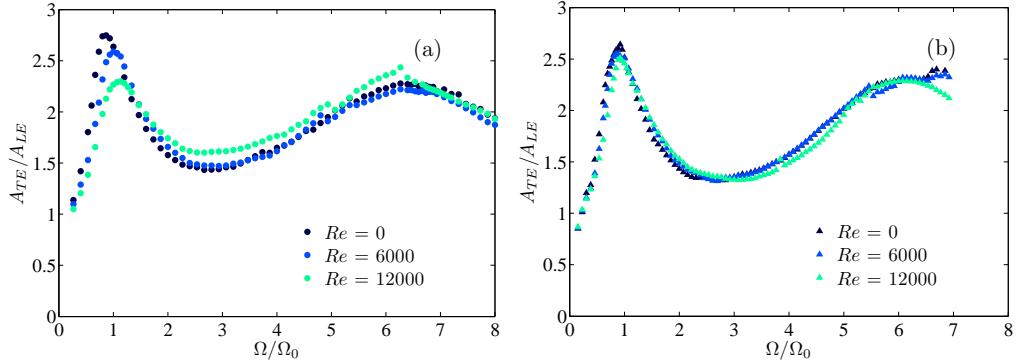


FIGURE 3.8 – Effet du nombre de Reynolds pour les plaques (a)  $B_1$  et (b)  $B_3$  pour une amplitude de forçage de 0.004 m.

respectivement à  $U = 0.05$  et  $0.1 \text{ m.s}^{-1}$ . À mesure que le nombre de Reynolds augmente, on observe à la fois une diminution des maxima d'amplitudes relatives et un décalage des pics de résonance vers de plus hautes fréquences pour le premier pic de résonance ( $\Omega/\Omega_0 = 1$ ). Ceci étant dû à la normalisation de la fréquence par la fréquence naturelle  $\Omega_0$  de chaque plaque dans le fluide au repos, alors que les modes propres de vibration sont modifiés par la présence de l'écoulement environnant [59]. Ces variations apparaissent néanmoins mineures lorsque  $Re$  varie. Ceci est dû aux grandes valeurs de la fréquence réduite  $\sigma = 2\pi FC/U = \Omega C/U$ , qui compare le temps caractéristique qu'une particule de fluide met pour parcourir la plaque selon sa demi-corde, à celui de la période de forçage. Pour des petites valeurs de  $\sigma$ , on s'attend à ce que le sillage devienne plus important et affecte significativement la fréquence de réponse. L'étude du comportement du premier pic de résonance en fonction de la rigidité nous renseigne sur l'effet de celle-ci lors de la réponse avec un écoulement. Négliger l'effet de l'écoulement incident lorsque la rigidité baisse serait ainsi une faible approximation (voir premier pic sur la figure 3.8(a)). Néanmoins, l'impact de la vitesse fluide imposée s'efface à mesure que la fréquence de forçage augmente. Dans l'approximation asymptotique de faible écoulement les variations de pression autour de la plaque varient comme la fréquence de battement au carré (voir la section 4.3). En revanche, lorsque  $U$  augmente, les variations de pression se couplent de façon non linéaire à la réponse de la plaque au forçage et au sillage induit. De sorte que des termes non linéaires complexes émergent dans la dynamique du système. Une possible explication du décalage en fréquence des premiers pics de résonance avec la vitesse de l'écoulement résulterait de ces termes additionnels qui jouent le rôle d'une raideur ajoutée due au fluide. Ainsi, la rigidité apparente de la plaque dans un écoulement non nul serait supérieure à celle réellement mesurée expérimentalement. Lorsque la rigidité testée augmente, l'écoulement n'affecte absolument plus la réponse, laissant suggérer une rigidité

critique à partir de laquelle l'écoulement peut interagir avec la réponse de la plaque pour de faibles fréquences de forçage (figure 3.8(b)).

### **Effet de l'amplitude de forçage $A_{LE}$**

La figure 3.9(a) illustre l'effet de l'amplitude de forçage sur la réponse de la plaque  $B_1$ , les mêmes conclusions sont obtenues avec les deux autres rigidités. Contrairement aux précédents paramètres testés, les variations de l'amplitude de forçage  $A_{LE}$  ont une forte incidence sur la réponse de la plaque. La réponse fréquentielle est tracée pour trois valeurs de  $A_{LE}$ . La réponse est montrée en amplitude relative afin d'accentuer l'effet de l'amplitude imposée. Une augmentation d'un facteur 3.5 de l'amplitude de forçage (de 0.004 à 0.014 m) conduit à une diminution de plus de 30% de l'amplitude relative de réponse, ainsi qu'à une légère diminution de la fréquence de résonance normalisée. Cet effet notable de l'amplitude de forçage est la signature d'effets non linéaires s'exerçant sur la dynamique du système. La figure 3.9(b) montre les amplitudes absolues de réponse de la plaque, dans laquelle la réponse ne varie pas linéairement avec l'amplitude imposée. L'évolution de la phase entre le mouvement imposé au bord d'attaque et la réponse du bord de fuite est illustrée sur la figure 3.9(c). À la première résonance, la phase est proche de  $-\pi/2$ , typique d'un système résonant ; à la deuxième elle varie continûment entre -3 et -5 rad. Le comportement de la phase vers les fortes fréquences illustre les non linéarités observées sur la figure 3.9(a), laissant suggérer une allure similaire pour la force générée (section 3.3).

Ces effets non linéaires proviennent probablement des grandes amplitudes de déformation subies par la plaque au cours du mouvement, introduisant en conséquence des termes non linéaires dans les équations dynamiques de la plaque et de l'écoulement à travers des termes géométriques et d'amortissements. Par exemple, la condition d'imperméabilité assurant le couplage des vitesses entre la plaque et le fluide,  $\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{paroi}}$ , doit être appliquée sur une interface mobile. Cela fait ainsi émerger des termes dépendants non linéairement de l'amplitude du mouvement. Ces termes correspondent à des non linéarités cubiques [21]. Une autre source possible de non linéarité réside dans la force de traînée exercée sur la plaque, normale à sa surface lors du mouvement harmonique, également appelée force résistive, correspondant à des termes non linéaires quadratiques cette fois-ci [68].

L'analyse théorique sera développée au chapitre 4.

#### **3.2.3 Effet du confinement**

Lors de la conception du banc expérimental, il nous est apparu nécessaire d'une part d'isoler la plaque flexible de toutes perturbations externes tel que le sillage des barres de transmission du mouvement ("U inversé"), et d'autre part de minimiser

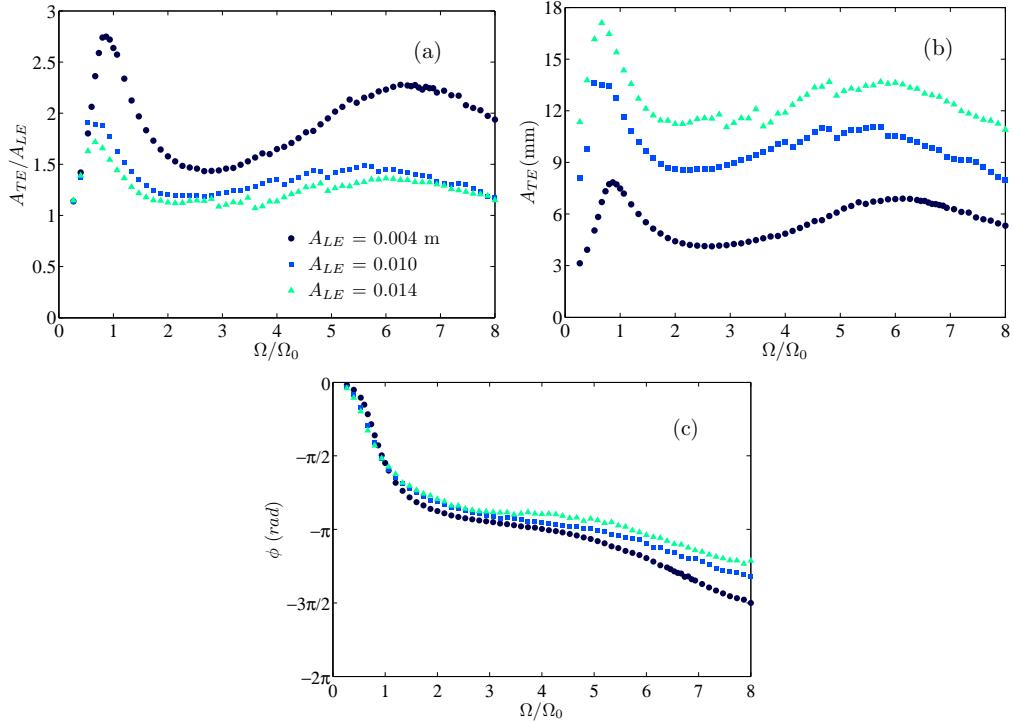


FIGURE 3.9 – Effet de l'amplitude de forçage pour la plaque *B1* dans le fluide au repos ( $Re = 0$ ). La réponse est tracée dans (a) le repère de la plaque et (b) dans le repère du laboratoire. Le parallèle avec la forme des modes peut-être fait avec la figure 3.6. (c) Évolution de la phase entre le bord d'attaque et le bord de fuite pour les amplitudes  $A_{LE} = 0.004, 0.010$  et  $0.014$  m.

l'écoulement induit sur les côtés de la plaque. Pour cela, des plaques de confinement en PVC transparent ont été ajoutées, avec un jeu fonctionnel millimétrique entre celles-ci et la plaque oscillante (voir chapitre 2). Il est important de mentionner que les parois de confinement n'ont pas pour but de rendre l'expérience bidimensionnelle. Pour que ce soit le cas, Doaré *et al.* (2011) [17] ont montré qu'il faudrait que les interstices entre les parois de confinement et la plaque flexible soient infiniment minces, de sorte que ces valeurs sont inatteignables expérimentalement. Il est intéressant de quantifier l'impact du confinement sur la dynamique de la plaque [16]. Au vu des observations à fortes fréquences, on suspecte de forts effets tridimensionnels qui pourraient fortement modifier la réponse.

Les courbes de réponse pour les trois amplitudes de forçage testées sont illustrées en figure 3.10(a), où la tendance non linéaire de l'amplitude est retrouvée. Lorsque ces courbes sont confrontées avec celles obtenues avec les plaques de confinement, la comparaison est plus directe (figure 3.10(b)). On prendra soin de noter que les configurations expérimentales des deux essais sont doublement différentes : le nombre de Reynolds pour les expériences avec le confinement est égal à 6000,

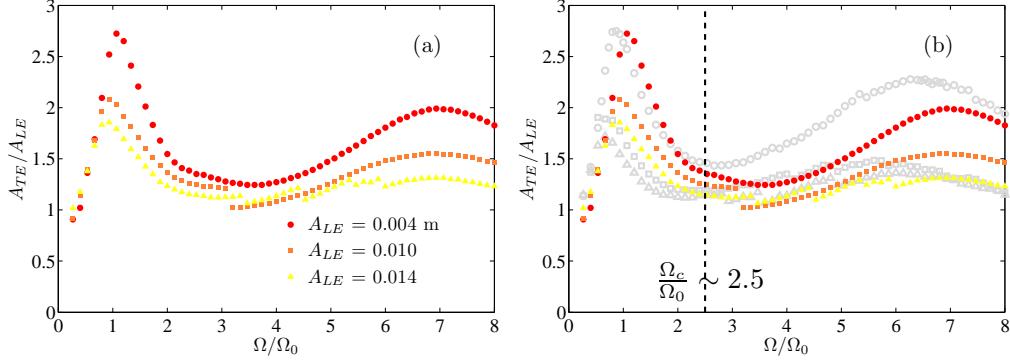


FIGURE 3.10 – (a) Effet des plaques de confinement sur les bords de la plaque et sur la réponse en amplitude ( $B_1$ ,  $Re = 6000$ ). (b) Les réponses sont comparées avec celles obtenues avec les plaques de confinement. On notera que la configuration expérimentale n'est pas la même, le nombre de Reynolds avec et sans le confinement diffère : fluide au repos et  $Re = 6000$  respectivement.

alors que, lorsque la plaque est libre, le fluide est au repos. Toutefois, à partir des conclusions exposées précédemment, ceci apparaît sans conséquences notables sur la dynamique du système. Deux observations s'imposent : (i) le premier pic de résonance ne semble que peu affecté par le changement de configuration expérimentale et les fréquences de résonance pour toutes les amplitudes sont certes plus fortes sans les plaques de confinement, mais elles suivent la même tendance qu'avec ces plaques. Les non linéarités sur l'amplitude sont néanmoins moins fortes, impliquant un coefficient non linéaire moins fort lui aussi. (ii) En revanche, la dynamique du système pour des fréquences  $\Omega/\Omega_0 > 2.5$  diffère significativement des résultats observés avec le confinement. Le deuxième pic de résonance est déplacé vers de plus hautes fréquences et la baisse des amplitudes de réponse corrobore l'observation de celle des non linéarités du premier pic. La limite  $\Omega/\Omega_0 > 2.5$  peut être éventuellement expliquée par l'émergence de structures tridimensionnelles contenues lors des essais confinés. Lorsque la fréquence d'activation augmente on voit, avec l'aide de colorant, que l'écoulement n'est plus bidimensionnel. Ces essais ont permis de faire apparaître une fréquence critique  $\Omega_c/\Omega_0 \sim 2.5$ , au-delà de laquelle il faudra faire attention à l'hypothèse (forte) que d'une part, la déformation de la plaque se produit dans le plan de l'écoulement et d'autre part, que les structures tourbillonnaires générées sont contenues dans le plan perpendiculaire aux déformations. Par ailleurs, les déformations transverses de la plaque à hautes fréquences sont visibles à l'œil nu (figure 3.11).

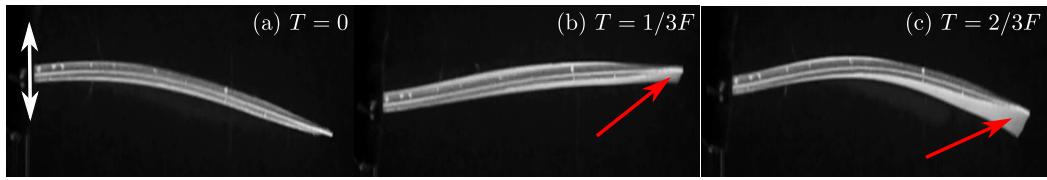


FIGURE 3.11 – Déformations tridimensionnelles à haute fréquence  $\Omega/\Omega_0 \sim 6.3$ . (a) La déformation de la plaque dans le plan (b-c) puis, les déformations transversales sont clairement visibles (flèches rouges) au cours du mouvement sur une période d'oscillation. L'activation est représentée par la flèche blanche (a) et l'écoulement se fait de gauche à droite. Les conditions expérimentales sont  $A_{LE} = 0.004$  m pour  $Re = 12000$ .

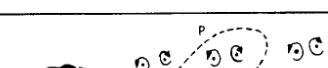
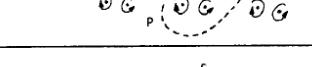
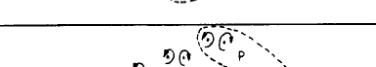
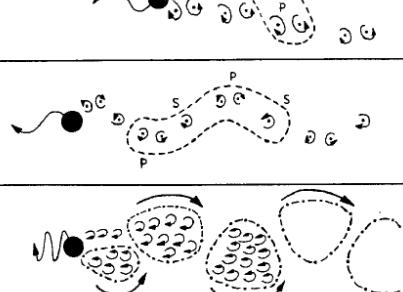
### 3.3 Lien entre forçage et propulsion

La dynamique de la plaque en fonction des paramètres de forçage étant caractérisée, nous nous intéressons au sillage généré par le mouvement de la plaque flexible puis nous ferons le lien entre la dynamique et l'écoulement résultant. L'étude porte notamment sur la poussée générée par le système oscillant, quantité phare dans le déplacement de celui-ci. D'abord, le sillage est analysé par une méthode de visualisation par colorant puis des mesures par PIV et directes donnent une dimension quantitative aux visualisations.

#### 3.3.1 Sillage induit

L'étude du sillage généré par un objet oscillant a commencé par le sillage derrière un cylindre avec l'observation d'allée de vortex contra-rotatifs, nommée allée de Bénard-von Kármán [90]. La communauté scientifique travaillant sur la locomotion bio-inspirée a cherché à imiter et comprendre la nage des animaux marins par une plaque généralement forcée par un mouvement sinusoïdal. La flexibilité de ces plaques est apparue avec des enjeux réalistes concernant la propulsion bio-inspirée [82]. La majorité des études menées, quelque soit leurs approches, s'est concentrée sur le sillage développé par le système en mouvement, sans nécessairement établir un lien entre la dynamique de la structure et le fluide environnant. Les visualisations par colorant permettent de mettre en évidence des phénomènes intéressants, tandis que la modélisation et la quantification du sillage par analyse PIV donnent une dimension quantitative aux visualisations, uniquement analysées de façon qualitatives. À mesure que les vortex sont advectés en aval de l'écoulement, ils créent une allée inversée de type Bénard-von Kármán, similaire au sillage observé derrière un objet, mais dont le sens de rotation des vortex est inversé. L'écoulement résultant de cette allée inversée est caractérisé par un profil de vitesses moyennes de type jet (figure 2.4(c)), typique d'un régime propulsif [29].

### Visualisation par colorant

2S	
2P	
P+S	
P	
2P*	
2P+2S	
C Coalescence	

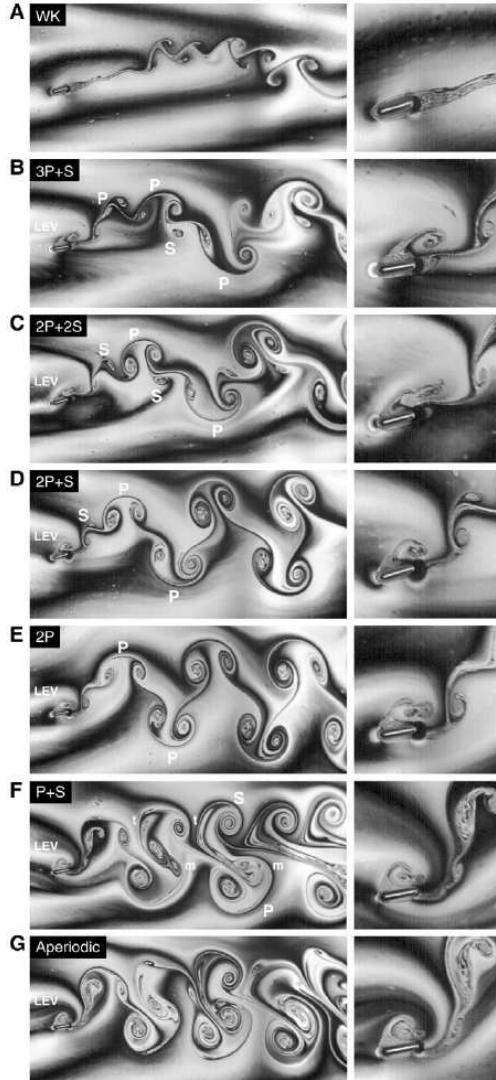


FIGURE 3.12 – (gauche) Classification des sillages derrière un cylindre, tiré de Williamson et Roshko (1988) [90]. “S” signifie un vortex isolé tandis que “P” correspond à une paire de vortex lâchée dans le sillage. (droite) Visualisations de correspondance derrière une plaque plane rigide oscillant dans un film de savon, tiré de Lentink *et al.* (2008) [47].

Considérons l’écoulement généré par la plaque flexible, dont on rappelle que le bord d’attaque, fixé en rotation, est animé d’un mouvement harmonique de pilonnement. Comme l’importance du nombre de Reynolds est mineur, un petit écoulement est imposé afin d’éviter les recirculations du fluide sur la plaque. Les visualisations des structures générées dans le sillage d’un modèle de nageur sont connues pour être un bon indicateur de la poussée produite [13]. À partir des



FIGURE 3.13 – Sillage généré par l'aileron rigide forcé avec une amplitude de 0.01 m à une fréquence de 0.7 Hz. L'écoulement incident est à  $Re = 6000$ . Le temps de pose long (8 ms) facilite la visualisation du positionnement des vortex, mettant en évidence le caractère d'un sillage de Bénard-von Kármán inversé, en mode “2S”.

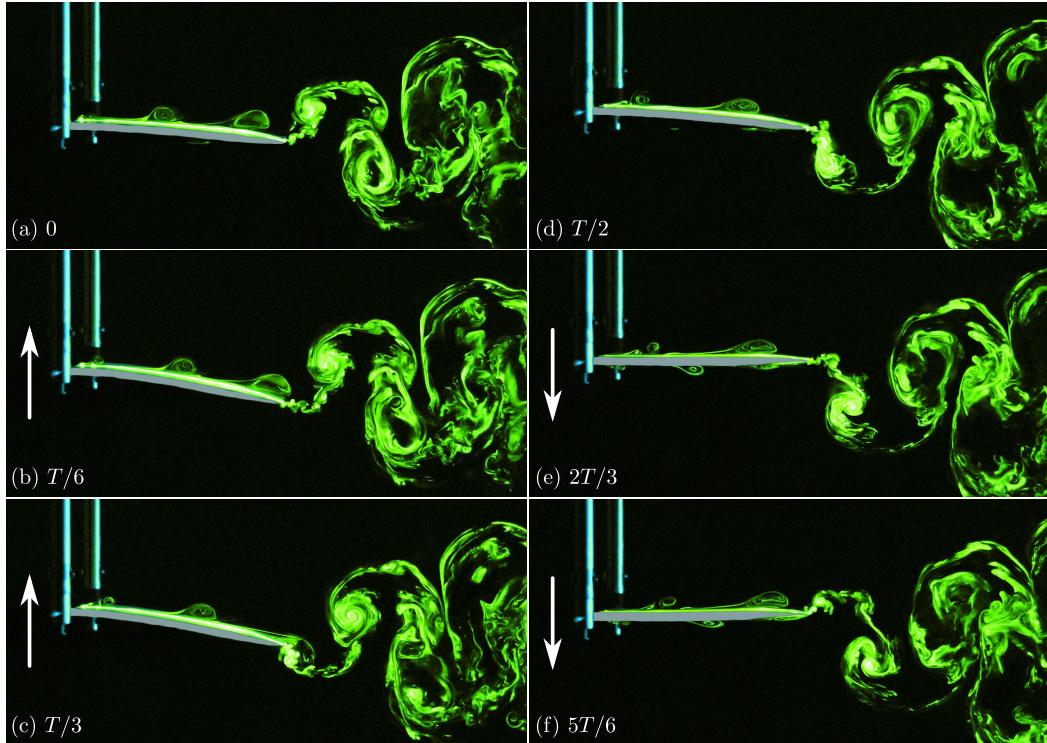


FIGURE 3.14 – Visualisation par colorant des vortex générés par une plaque flexible oscillante sur une période pour  $A_{LE} = 0.004$  m,  $F = 0.8$  Hz (période  $T = 1.25$  s),  $B = 0.018$  N.m et  $U = 0.05$  m.s $^{-1}$  (écoulement de gauche à droite). Le sens du mouvement de la plaque est indiqué par une flèche.

structures, il est possible de remonter au champ de pression induit par une étude

du sillage à l'aide de champs PIV, récemment développée par Dabiri *et al.* (2014) [14], non analysée ici.

L'évolution des vortex, en figure 3.14, correspond à un cas résonant  $\Omega/\Omega_0 = 1$ , soit lorsque l'amplitude de déflexion au bord de fuite est maximale. On observe dans ce cas particulier que des vortex se forment au bord d'attaque, sur le dessus de la plaque dans la partie descendante de l'oscillation (figure 3.14(a-c)). Un vortex symétrique se forme de même de l'autre côté de la plaque dans la partie ascendante du mouvement (figure 3.14(d-f)). Ces vortex sont dus à la séparation de l'écoulement au bord d'attaque. Cette séparation des lignes de courant survient à cause de la combinaison de l'écoulement incident et du mouvement de pilonnement engendrant un angle d'attaque non nul (voir figure 3.15). Dans certaines conditions, l'angle d'attaque provoque un décollement des lignes de courant en bord d'attaque du profil dont la composante horizontale de la force résultante est soit dans le sens de l'écoulement contribuant ainsi à la poussée, soit en sens inverse, accentuant la traînée subie par le profil. Pour les paramètres de la visualisation de la figure 3.14, l'angle d'attaque est égal à  $\arctan(\Omega A_{LE}/U) = 23^\circ$  (équation 1.2), bien au-delà de l'angle de décollement d'environ  $15^\circ$  donné dans la littérature pour des profils d'ailes de type NACA. Au-delà les lignes de courant ne sont plus attachées au profil, compromettant les performances du mécanisme, comme la portance d'une aile par exemple. Les vortex du bord d'attaque peuvent être suivis sur les séquences d'images par leur évolution le long de la corde, jusqu'à leur éjection en bord de fuite où de plus gros vortex sont générés pour la propulsion. À grande échelle, deux vortex propulsifs sont relâchés par période d'oscillation : le lâché tourbillonnaire dans le sens anti-horaire est observable sur la figure 3.14(a), tandis que celui dans le sens horaire est représenté en figure 3.14(d).

Le sillage observé au premier pic de résonance est de la forme Bénard-von Kármán inversée, selon le mode "2S" de la classification établie par Williamson et Roshko [90] (figure 3.12(a)). L'illustration expérimentale dans un film de savon [47] se trouve en figure 3.12(b). Le sillage derrière la plaque rigide est montré sur la figure 3.13. Le temps de pause long permet de visualiser une ébauche des lignes de courant où la localisation des vortex identifie clairement un mode "2S". La transition de la première à la deuxième résonance figure sur la photographie 3.16(a) : les vortex induits par le bord d'attaque sont très désordonnés autour de la plaque et, bien que le sillage résultant de l'oscillation soit propulseur, on présage que la vitesse du sillage sera moindre par rapport à la première résonance. Rappelons que le signal typique à la fréquence  $F = 2.1$  Hz donne une phase entre les bords d'attaque et de fuite proche de  $\pi$ . Les conditions "favorables" sont identiques lorsque la fréquence d'activation avoisine la première résonance et que l'amplitude d'oscillation augmente (photographie 3.16(b)).

Une étude complète des types de sillages observés derrière un aileron oscillant

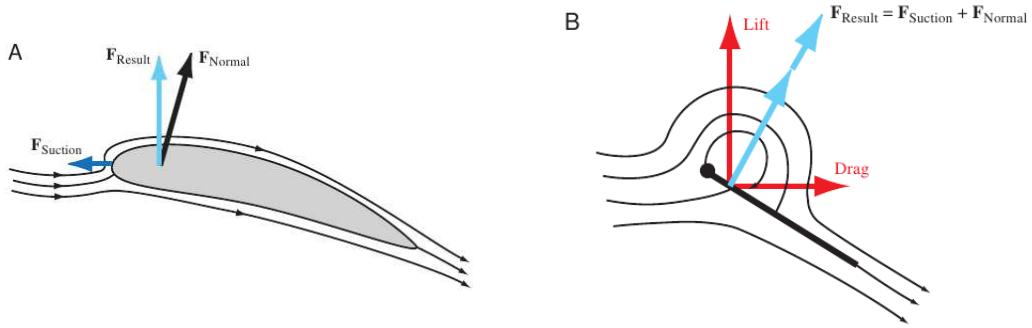


FIGURE 3.15 – Schéma explicatif du développement des vortex du bord d’attaque et leurs conséquences sur le déplacement de la plaque soumise à un écoulement incident, tiré de Sane (2003) [70]. (A) Écoulement autour d’un profil dont la résultante des forces conduit à une succion du bord d’attaque responsable d’une amélioration de la poussée. (B) Tandis que l’écoulement autour d’un profil mince à fort angle d’attaque favorise la traînée induite par le mouvement.

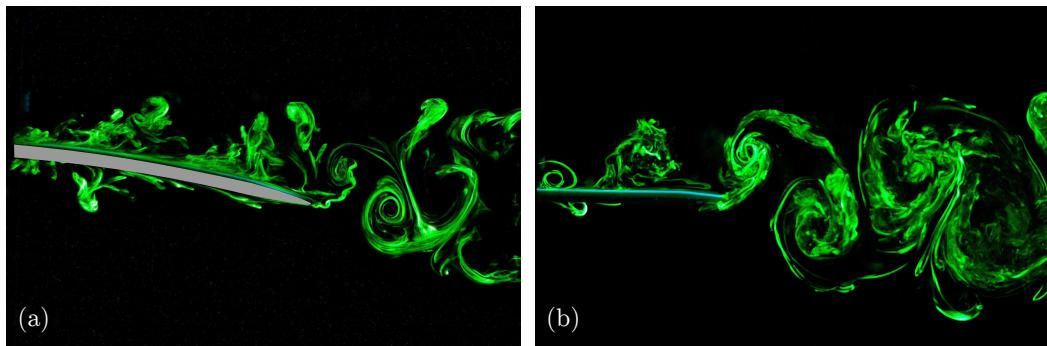


FIGURE 3.16 – Écoulement et sillage autour d’une plaque flexible ( $B_1$ ) lorsque l’amplitude et la fréquence de forçage valent (a)  $A_{LE} = 0.004$  m et  $F = 2.1$  Hz et (b)  $A_{LE} = 0.014$  m et  $F = F_0 = 0.75$  Hz. L’écoulement incident est à  $Re = 6000$ .

peut être trouvée, entre autres, dans la thèse de Marais (2010) [55].

### Mesure de vitesses

En complément des résultats qualitatifs déduits des visualisations présentées ci-dessus, des mesures par vélocimétrie par images de particules (PIV) du champ de vitesse dans le sillage de la plaque ont été réalisées. À partir de ces mesures, on en calcule la vorticité par moyenne de phase dans le sillage pour confirmer les visualisations de l’allée de Bénard-von Kármán inversée au premier pic de résonance (figure 3.17(a-c)). Des champs de vorticités, il est possible de remonter à la force générée : ceci sera développé à la section 3.3.2.

La figure 3.17(d) montre la vitesse moyenne temporelle relative à l’écoulement

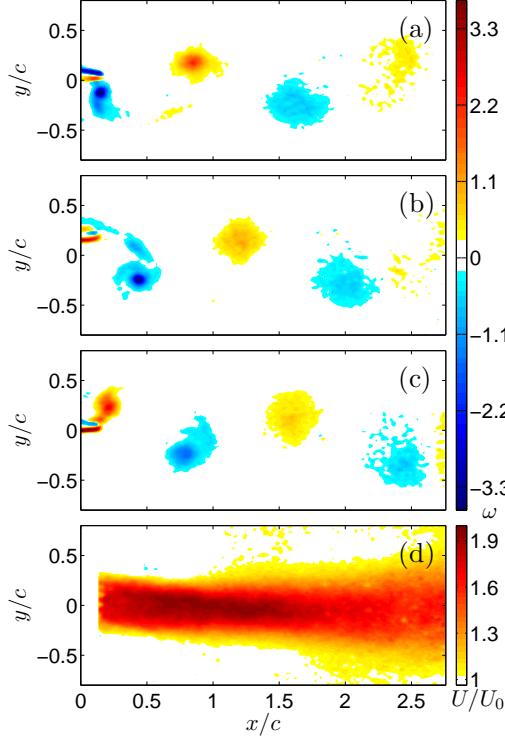


FIGURE 3.17 – Champ de vorticité expérimental créé par le battement de la plaque flexible pour différentes phases du battement de la plaque. Les déphasages sont (a)  $\pi/2$ , (b)  $\pi$  et (c)  $3\pi/2$ . Les conditions expérimentales sont  $Re = 6000$  pour la plaque  $B1$ , l'amplitude d'activation est de  $A_{LE} = 0.004$  m et la fréquence est proche de la résonance  $\Omega/\Omega_0 \sim 1$ . (d) Vitesse moyenne temporelle  $U$  générée par le mouvement de la plaque relative à l'écoulement imposé  $U_0$ .

imposé. La vitesse du jet produit par la plaque battante est approximativement deux fois supérieure à celle de la vitesse d'entrée, soulignant nettement le caractère propulsif de la plaque à la première fréquence de résonance du système. Le nombre de Reynolds n'ayant pas d'influence nette sur la réponse de la plaque, on s'est permis d'imposer un écoulement ( $Re = 6000$ ) lors de l'acquisition des champs PIV afin d'éviter les recirculations dues au battement et confinement. Le petit écoulement imposé est suffisant pour advecter les vortex en aval de la plaque.

L'évolution du profil des vitesses moyennes à plusieurs position dans le sillage est montrée sur la figure 3.18(a). Le profil à  $X/C = 1$  (courbe rouge) correspond au profil de vitesse pris immédiatement derrière le bord de fuite, d'où le déficit de vitesse observé. À mesure que la distance derrière la plaque augmente, la vitesse maximale atteinte augmente jusqu'à la distance  $X/C$  comprise entre 2 et 2.5, puis diminue. Cette tendance illustre bien les effets de pression et de diffusion en com-

pétition dans le sillage. Notons que les profils de vitesse  $U(Y)$  sont normalisés par la vitesse imposée  $U_0$ . L'imprécision des profils provient de l'approximation bidimensionnel de l'écoulement lorsque le bilan de quantité de mouvement est appliqué. La poussée produite par l'activation pour une sélection de fréquence de forçage en fonction de la distance derrière la plaque est illustrée en figure 3.18(b). L'évolution de la poussée suggère une distance optimale  $X_{opt}/C$  à laquelle le bilan de quantité de mouvement est fait (voir section 3.3.2).

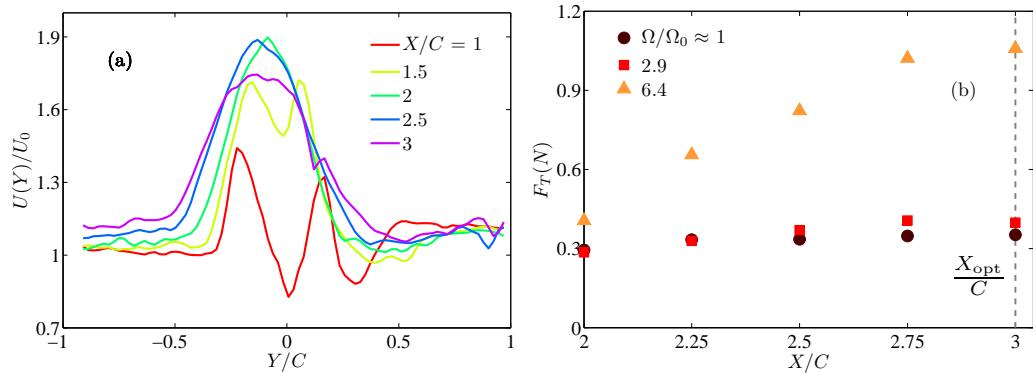


FIGURE 3.18 – (a) Profil des vitesses moyennes tracé à différentes distances derrière la plaque. (b) Poussée calculée grâce à l'équation 3.5 pour différentes fréquences de forçage en fonction de la position dans le sillage. Les conditions expérimentales sont identiques à celle de la figure 3.17.

### 3.3.2 Propulsion générée

Connaissant la dynamique de la plaque en fonction du forçage imposé, la question centrale demeure : comment la réponse du bord de fuite affecte la propulsion du système ? Et par extension, quels sont les impacts des non linéarités et leurs conséquences sur la nage ? À partir des champs de vitesse déterminés par la méthode PIV (voir section 2.3), il est possible de remonter à la force de traînée par un bilan de quantité de mouvement. Les résultats ainsi obtenus sont comparés avec des mesures directes de la force générée par le système oscillant.

#### Bilan de quantité de mouvement

Pour quantifier la poussée  $F_T$  générée par la vitesse du sillage visualisée en figure 3.17(d), un bilan de quantité de mouvement appliquée à une section du sillage est réalisé. Il se traduit par

$$F_T = \rho_f^* U_0 \int_{\mathcal{L}} (U_0 - U(Y)) dY, \quad (3.5)$$

où  $U(Y)$  correspond au profil de vitesse à la position  $X$  dans le sillage [43], et  $\mathcal{L}$  est la longueur selon la direction  $Y$  où  $U(Y)$  est défini. Cette relation est vérifiée pour n'importe quelle position  $X$ . Cependant, des travaux de Godoy-Diana *et al.* (2009) [30] sur la force générée par un aileron actué, il apparaît une distance optimale à laquelle le bilan de quantité de mouvement doit être réalisé. Cette distance apparaît comme un compromis sur les variations de pression à travers la plaque et les effets tridimensionnels du sillage se développant en aval. La distance minimise ainsi les effets de pression tout en supposant un sillage bidimensionnel. Dans notre cas  $X = X_{opt} \approx 3C$  (figure 3.18(b)). L'approximation de la poussée est calculée en quelques points notables de la courbe de réponse : aux deux fréquences de résonance et à une fréquence intermédiaire entre les pics (figure 3.19(a)). Cette méthode donne une force générée approximative du fait que l'écoulement généré est supposé être purement bidimensionnel, signifiant que les limites horizontales du volume de contrôle sont suffisamment éloignées, c'est-à-dire que l'écoulement est parallèle.

Nous reconnaîtrons ainsi la limite de cette technique pour déterminer la force de propulsion. En complément, nous avons donc réalisé des mesures directes de cette force à l'aide de capteurs de force montés en porte-à-faux sur le bord d'attaque. Ils enregistrent la force de traînée ou de poussée lors du battement de la plaque flexible (voir figure 2.1).

### Mesure directe

La poussée générée en fonction de la fréquence d'activation pour les trois amplitudes de forçage est présentée en figure 3.19 (courbes en nuance de bleu). On remarque immédiatement que, quelque soient l'amplitude ou la fréquence imposée, le sillage est toujours propulsif dès battement. En mettant en parallèle les courbes de réponse en amplitude (figure 3.9(a)), les différentes fréquences caractéristiques des courbes de réponse se distinguent. Aux deux pics de résonance, la force propulsive tend vers un maximum local, tandis qu'en dehors des résonances, la force manifeste un plateau. Ces résultats concordent avec les observations de Quinn *et al.* (2013) [67]. L'allure de l'évolution de la poussée en fonction de l'amplitude d'activation tend à suggérer une amplitude de forçage optimale à faible fréquence de forçage (fréquence proche de la première résonance) (figure 3.19(b), carré bleu moyen) lorsque la rigidité en flexion  $B$  est fixée et que l'amplitude imposée  $A_{LE}$  varie. Toutefois, cette amplitude n'a été observée qu'avec les mesures directes à petites fréquences de forçage. On note que le deuxième mode de résonance est également un mode de propulsion.

Deux méthodes de mesures ont été mises en œuvre pour estimer la force créée par la plaque battante. La première remarque non intuitive est que, quelques soient les paramètres d'activation testés, la force générée est toujours positive dès que la plaque oscille : la plaque se trouve dans un régime propulsif (figure 3.19). La méth-

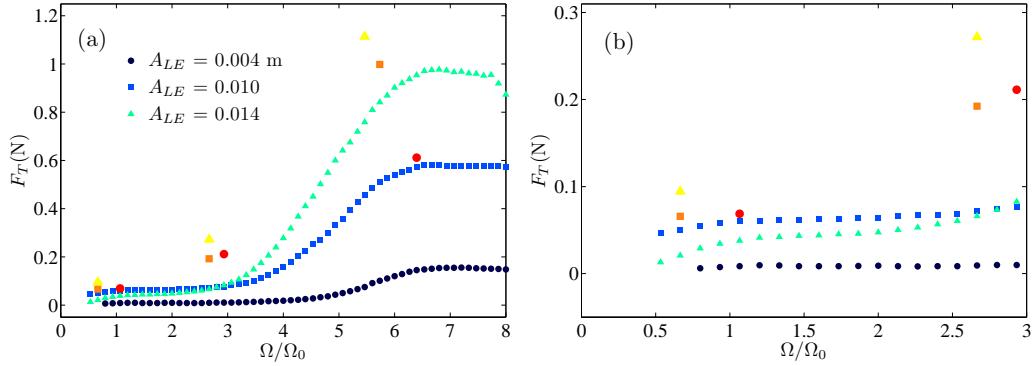


FIGURE 3.19 – (a) Poussée totale générée  $F_T$  par la plaque flexible en fonction de la fréquence d'activation  $\Omega/\Omega_0$ . (b) Zoom sur les faibles fréquences de forçage où une amplitude optimale semble mise en avant. Les symboles rond, carré et triangle représentent respectivement les amplitudes de forçage  $A_{LE} = 0.004, 0.01$  et  $0.014\text{ m}$ . La plaque  $B1$  est testée dans le fluide à  $Re = 6000$ . Pour les mêmes amplitudes, le bilan de quantité de mouvement est tracé en nuance de rouge tandis que les mesures directes le sont en nuance de bleu.

ode par bilan de quantité de mouvement tend à surestimer la force, ce qui s'explique par les approximations de la méthode. En effet, l'écoulement est supposé bidimensionnel et la vitesse entrante de l'écoulement est sous-estimée car le système étudié est bloqué par les parois de confinement. Toutefois, l'évolution des mesures diffère d'une méthode à l'autre, notamment lorsque la plaque transite d'un mode à l'autre autour de  $F \sim 3\text{ Hz}$ . Ceci peut s'interpréter par l'émergence des déformations transverses de la plaque impliquant un écoulement de moins en moins plan. En se concentrant sur le premier pic (figure 3.19(b)), la poussée de l'amplitude intermédiaire (carré) semble dominer les autres, renforçant l'idée d'une amplitude optimale pour des paramètres  $\Omega, B, U$  donnés.

Une première conclusion serait d'avancer que pour aller plus vite, il suffirait que l'amplitude de battement soit importante et que la fréquence de battement soit proche de la résonance, préférentiellement à des fréquences élevées. En considérant les travaux de Lighthill (1970) [48], qui estime que la performance de nage est seulement due à la déformation de l'extrémité arrière de l'animal, il n'est pas surprenant de constater que plus l'amplitude de réponse est grande, plus la propulsion générée est forte. Toutefois, quel serait le coût d'un tel forçage ? N'y aurait-il pas une amplitude optimale, maximale ou minimale à générer pour avoir la propulsion maximale ?

Pour éclaircir le coût de nage de notre système, il aurait été pertinent de calculer l'efficacité de “nage” de notre système. Toutefois, notre dispositif expérimental ne permet pas d'avoir une mesure de la puissance électrique consommée par le système.

Par ailleurs, la vitesse incidente n'influence pas la dynamique de la plaque et se trouve nulle dans certaines configurations. L'efficacité de Froude, définie par la relation (3.6) souvent employée dans la littérature, ne peut s'appliquer directement dans le cas traité ici.

$$\eta_F = \frac{F_T U}{P}, \quad (3.6)$$

avec  $F_T$  la poussée moyenne temporelle,  $U$  la vitesse imposée et  $P$  la puissance requise pour conserver le mouvement.

### 3.4 Conclusion

Il est important de mentionner que ces conclusions s'adressent seulement pour la gamme de paramètres explorés. Il serait peu prudent de faire une généralité de ces résultats sans prendre soin de vérifier leur validité dans le cas d'une configuration expérimentale différente.

En résumé, des expériences ont été menées sur la réponse d'une plaque flexible dans un écoulement uniforme, lorsque le bord d'attaque est animé d'un mouvement harmonique en pilonnement. Cette étude se concentre en particulier sur l'influence des différents paramètres expérimentaux impactant la dynamique de la plaque.

Comme observé dans les études précédentes, les courbes de réponse, représentant l'amplitude relative de réponse en fonction de la fréquence de forçage, font apparaître des pics de résonance pour les modes naturels de la plaque considérée dans un écoulement. La vitesse d'écoulement, ainsi que la rigidité en flexion de la plaque, ont un impact mineur sur les courbes de réponse tant que la fréquence de forçage est correctement normalisée par la fréquence naturelle de chaque plaque. En revanche, l'amplitude de forçage affecte fortement la réponse de la plaque, attestant l'importance des effets non linéaires dans le système {plaque + fluide}.

La présente expérience, menée avec une géométrie idéalisée, permet l'investigation des phénomènes physiques de génération de la poussée par un système à plaque/nageoire flexible battante ; et a ainsi contribué au développement d'un système propulsif aquatique bio-inspiré. Il est connu, depuis les travaux fondateurs de Lighthill (1960) [49] que la poussée est proportionnelle au carré de la déflexion du bord de fuite dans la limite linéaire, c'est-à-dire de petites amplitudes. Cette étude montre que l'amplitude peut-être maximisée lorsque la fréquence de forçage approche la fréquence propre des modes naturels du système. Néanmoins, les effets non linéaires de l'amplitude de forçage affectent probablement la loi d'échelle de Lighthill sur la production de poussée pour de grandes amplitudes de déformation. En conséquence, il existe probablement une amplitude optimale qui maximise l'efficacité de la poussée générée par le battement de la plaque flexible et, par analogie, de la nageoire selon la configuration imposée.

Par ailleurs, les conclusions expérimentales démontrent la nécessité d'inclure les non linéarités dans la modélisation pour capturer au mieux les interactions fluide-structure d'une plaque battante flexible immergée dans un écoulement uniforme. Le chapitre 4 présente le modèle développé correspondant.

Le forçage appliqué en bord d'attaque de la plaque implique une réponse passive du bord de fuite. Cette réponse résonante est une fonction des mécanismes de forçage. Nous venons de voir que, malgré la première intuition que la flexibilité d'une plaque puisse jouer un rôle important, celle-ci n'a pas d'effet majeur sur la dynamique de la plaque à condition qu'elle soit correctement normalisée. Cet adimensionnement prend la forme de la fréquence propre de chaque plaque, caractéristique exclusive de la structure (matériau, géométrie, ...). Le nombre de Reynolds, par le biais de la vitesse de l'écoulement, n'a pas d'impact net sur la dynamique. Ceci n'est pas très surprenant étant donné les vitesses imposées et l'épaisseur de la plaque. En revanche, le paramètre clé de cette étude réside dans l'amplitude du bord d'attaque : étonnamment, des effets non linéaires surviennent et affectent significativement la dynamique de celle-ci.

Les visualisations par colorant montrent un sillage de type allée inversée de Bénard-von Kármán, synonyme de propulsion du système. Les mesures de poussée par le biais de deux méthodes de mesure, par bilan de quantité de mouvement et par capteurs de force, ont révélé le caractère propulsif du système, et ce quelque soit la fréquence de forçage. Les différences entre ces deux méthodes peuvent sans doute s'expliquer par l'hypothèse d'écoulement bidimensionnel faite lors du bilan de quantité de mouvement, ce-dernier permettant toutefois d'obtenir l'évolution de la poussée. Les signaux des capteurs de force étant extrêmement bruités, un filtre passe-bande permet de sélectionner la bande de fréquence dans laquelle le phénomène est susceptible de se produire. Le filtrage est réalisé en post-traitement grâce à une routine Matlab. Malgré les post-traitements, il n'a pas été possible de dégager une force à très faible fréquence d'activation  $\Omega/\Omega_0 \leq 0.7$ . C'est pourquoi ces points ne sont pas toujours présentés sur la figure 3.19(a). Autour de la première résonance, il semblerait qu'une amplitude optimale se manifeste, sans toutefois persister à plus forte fréquence. Ce point sera discuté lors de la présentation du modèle (chapitre 4).

Ces travaux ont fait l'objet de deux articles inclus en annexes A et B, dont la première partie du chapitre en est une traduction.

## Chapitre 4

# Modélisation d'une plaque flexible forcée

### Sommaire du chapitre

---

4.1	Introduction . . . . .	55
4.2	Généralité sur les poutres . . . . .	56
4.3	Modèle analytique . . . . .	61
4.3.1	Mise en équation et adimensionnement . . . . .	62
4.3.2	Théorie des ailes flexibles instationnaires selon Wu (1961) [91] . . . . .	65
4.3.3	Analyse modale . . . . .	67
4.3.4	Coefficients de dissipation . . . . .	70
4.4	Résonance et phase . . . . .	74
4.5	Poussée . . . . .	77
4.6	Efficacité et Optimisation . . . . .	82
4.7	Confrontation du modèle . . . . .	86
4.8	Discussion . . . . .	87

---

### 4.1 Introduction

Dans la gamme des paramètres étudiés, les résultats expérimentaux (chapitre 3) mettent en évidence la dynamique de la plaque flexible immergée dans un écoulement uniforme et forcée par une oscillation harmonique à son bord d'attaque. Ce comportement est majoritairement gouverné par l'amplitude de forçage imposée, avec pour conséquence, une réponse non linéaire. Cela est probablement dû aux déformations importantes subies par la plaque même pour des amplitudes de forçage modérées. Ce problème est une interaction entre la structure et le fluide environnant. Nous avons montré que la flexibilité du profil n'intervient pas, à condition que la fréquence de forçage soit normalisée par la fréquence propre de la structure. Dans la gamme étudiée, l'effet de l'écoulement est mineur et disparaît lorsque la

rigidité augmente. Le sillage généré prend la forme d'une allée inversée de Bénard-von Kármán, dont le caractère propulsif, quelque soit le forçage, est mesuré par des capteurs de force. La poussée ainsi générée se révèle en corrélation avec la résonance observée sur l'amplitude de réponse. Grâce à ces conclusions, la modélisation du mécanisme de déformation doit pouvoir traduire les résonances ainsi que les non linéarités sous un faible écoulement.

Bien que ces mécanismes de génération de la poussée à partir d'une structure flexible aient été étudiés à de nombreuses reprises, tant expérimentalement que numériquement, peu d'études analytiques ont été conduites sur le problème flexible. À partir des travaux de Wu (1961, 1971) [91, 92] et de Lighthill (1960) [49], Moore (2014) [60] a travaillé sur l'optimisation de profil oscillant. Il a modélisé un profil bidimensionnel rigide dont le bord d'attaque est forcé en pilonnement. Les idées de modélisations de Wu et Lighthill sur la génération de poussée par un profil flexible sont reprises dans la plupart des modèles analytiques que l'on peut trouver dans la littérature [23, 2, 24, 67, 60]. Par exemple, Alben *et al.* (2012) [2] ont développé un modèle linéaire harmonique en temps pour comprendre la loi d'échelle observée dans leurs simulations numériques, tandis que Dewey *et al.* (2013) [15] décrivent par une loi d'échelle leurs résultats expérimentaux. Toutefois, ces études analytiques restent dans le domaine linéaire, limitant en conséquence l'amplitude de déformation de la structure.

À notre connaissance, aucun modèle prenant en compte les déformations élastiques d'un profil n'a été développé, bien que cette approche soit cruciale dans la compréhension totale des phénomènes physiques en jeu dans la propulsion bio-inspirée.

L'objectif de ce chapitre est de présenter le modèle non linéaire développé à la suite des observations expérimentales. Tout d'abord, les mécanismes régissant les modes propres de vibrations d'une poutre dans le vide seront rappelés. Puis, le modèle sera présenté avec ses hypothèses, les paramètres d'adimensionnement et les étapes de résolution. Ensuite, les explications sur les valeurs de certains paramètres seront avancées. Par la suite, le modèle sera étendu à une étude similaire à celle entreprise, étudiée par Quinn *et al.* (2013) [67]. Finalement, ces résultats seront discutés dans le contexte biologique de la nage et de la robotique bio-inspirée.

## 4.2 Généralité sur les poutres

La théorie présentée dans cette section a largement été établie et exposée dans la littérature, notamment par Timoshenko & Goodier (1951) [78], Graff (1975) [31] ou encore Landau & Lifshitz (1986) [44]. Nous exposerons les hypothèses générales conduisant à l'équation régissant les vibrations d'une poutre dans le vide, mais nous détaillerons seulement la résolution d'une poutre encastrée-libre, avec les conditions

aux limites correspondantes.

Il est important de signaler que toutes les quantités introduites dans cette section sont dimensionnées, indépendamment de la façon dont elles sont notées.

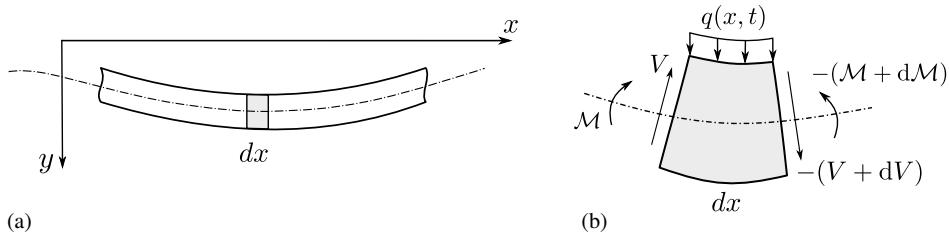


FIGURE 4.1 – (a) Schéma d'une poutre en flexion et (b) zoom sur une petite section de la poutre considérée avec les quantités en jeu. Schéma reproduit de Graff (1975) [31].

Une poutre désigne un objet dont deux de ses dimensions sont négligeables devant la troisième. Dans le cas présent, l'épaisseur et la largeur sont petites devant la longueur. Considérons une poutre de longueur  $L$  et de section rectangulaire de surface  $\mathcal{A} = SE$  avec  $S$  et  $E$  la largeur et l'épaisseur, telles que  $S, E \ll L$ , et un petit élément de sa section, respectivement montrés sur les figures 4.1(a) et (b). Cette poutre est animée d'un mouvement transverse selon la direction  $x$ . Chaque élément exerce sur l'élément situé à sa droite un moment de flexion  $\mathcal{M}$  et à une force de cisaillement  $V$ . La valeur de ces efforts dépend de la section de poutre considérée selon la direction  $x$ . Le changement de forme de la poutre est provoqué par un chargement uniforme  $q(x, t)$ . On se place dans le cadre de la théorie d'Euler-Bernoulli linéarisée, qui suppose que toutes sections planes et perpendiculaires à la ligne neutre de la poutre (ligne discontinue sur la figure 4.1) le restent durant la flexion, négligeant ainsi le cisaillement provoqué. Ceci implique que les efforts varient linéairement dans la direction  $y$ , selon l'épaisseur, de  $+E/2$  à  $-E/2$ . Il est aisément de concevoir que le matériau d'une poutre en flexion est soumis, d'un côté à un étirement et de l'autre à une compression. Les efforts diminuent à mesure que l'on s'approche de la ligne neutre, *i.e.* le relâchement des contraintes se fait à de la ligne neutre. La déformation, de type flexion pure, est contenue dans le seul plan  $(x, y)$ , c'est-à-dire que la poutre supportera seulement des déformations longitudinales, extensions ou compressions de ses fibres. L'hypothèse des petits déplacements se traduit par les magnitudes de déplacement très faibles devant la longueur de la poutre. Du tenseur des contraintes et des conditions aux limites d'une poutre fixée à une extrémité, on note que les sections restent planes mais "tournent" d'un petit angle par rapport à la position initiale de la structure. La section est alors changée mais demeure parallèle. L'angle de rotation de la section est donné par la déformation selon  $y$ , et doit rester faible par rapport à la position d'équilibre statique de la poutre pour rester dans l'hypothèse de validité d'Euler-

Bernoulli linéarisée.

La relation entre le moment de flexion et la courbure est donnée par la relation constitutive hookéenne de matériau. Dans l'hypothèse linéaire, elle s'exprime

$$\mathcal{M} = -E_{\text{Young}} I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

avec  $\mathcal{M}$  le moment de flexion,  $\partial^2 y / \partial x^2$  la courbure à l'ordre dominant et  $y$  la distance de la surface de la ligne neutre. Les propriétés de la poutre sont le module d'Young,  $E_{\text{Young}}$ , et le moment quadratique ou moment d'inertie de flexion,  $I$ , dépendant de la géométrie de celle-ci. Dans le cas d'une poutre  $I = S E^3 / 12$ . L'équation (4.1) suppose que les déformations de la poutre sont faibles. On note la quantité  $B = E_{\text{Young}} I$ , qui représente la rigidité en flexion de la poutre. La courbure de la poutre sous le chargement  $q(x,t)$  indique la déflection de celle-ci. En conséquence, on pose

$$D(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (4.2)$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la poutre conduit à l'équation suivante selon  $y$

$$-V + \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) + q dx = \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (4.3)$$

$$\text{soit} \quad \frac{\partial V}{\partial x} + q = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (4.4)$$

avec  $\rho$  la masse volumique de la poutre.

Le bilan des moments sur le petit élément de la poutre conduit à l'équation des moments  $V = \partial \mathcal{M} / \partial x$ . Dans le cas où les effets d'inertie de rotation et ceux liés au chargement  $q(x,t)$  sont négligés. En remplaçant cette équation des moments dans la relation (4.4), on obtient

$$\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x^2} + q = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (4.5)$$

Ce qui donne en substituant l'équation (4.1) dans (4.5)

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = q. \quad (4.6)$$

Cette relation gouverne le mouvement transverse d'une poutre soumise à un chargement uniforme  $q(x,t)$ . En cas d'absence de chargement, et sous hypothèse de matériau homogène et de section constante, la rigidité en flexion  $B$  est constante. Ainsi, la relation (4.6) se réduit à

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left( \frac{B}{\rho A} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (4.7)$$

En posant  $\xi^2 = B/\rho A$ , on obtient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \xi^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (4.8)$$

Ce qui correspond à l'équation du mouvement transverse d'une poutre dans le vide. On rappelle que cette relation est valable dans l'approximation des petits déplacements des deux facettes de la section élémentaire, pour un matériau homogène dont les sections restent symétriques par rapport à la fibre neutre. En dehors de ces considérations, l'expression approchée de la courbure (4.1) devra être reconsiderée. L'hypothèse d'Euler-Bernoulli sur les sections est valide dans le cas de la flexion pure seulement. Dans un cas plus général, une torsion peut apparaître.

La résolution de l'équation aux dérivées partielles du mouvement d'une poutre dépend des conditions aux limites imposées à celle-ci. Considérons le cas d'une poutre encastrée en  $x = 0$  et laissée libre en  $x = L$ . En considérant une solution sous forme de variables séparées pour déterminer la fréquence naturelle et les modes normaux de la poutre,

$$y(x,t) = H(x) \exp(i\Omega t), \quad (4.9)$$

et en posant  $k^4 = \Omega^2 \rho A / B$ , l'équation différentielle du mouvement (4.8) devient

$$k^4 H(x) + \frac{d^4 H(x)}{dx^4} = 0. \quad (4.10)$$

La forme générale de la solution de cette équation s'exprime par

$$H(x) = \zeta_1 \sin kx + \zeta_2 \cos kx + \zeta_3 \sinh kx + \zeta_4 \cosh kx, \quad k = \left( \Omega^2 \frac{\rho A}{B} \right)^{1/4}. \quad (4.11)$$

Les conditions aux limites de type "encastrée-libre" s'expriment par

$$H(0) = 0, \quad (\text{pas de déplacement}) \quad (4.12)$$

$$\frac{dH(0)}{dx} = 0, \quad (\text{pas de rotation}) \quad (4.13)$$

$$\frac{d^2 H(x=L)}{dx^2} = 0, \quad (\text{pas de moment de flexion}) \quad (4.14)$$

$$\frac{d^3 H(x=L)}{dx^3} = 0, \quad (\text{pas d'effort tranchant}). \quad (4.15)$$

Elles traduisent l'enca斯特rement en  $x = 0$  par un blocage en translation et en rotation autour de  $x$  et le bord libre en  $x = L$  par la charge et la contrainte nulles. L'équation (4.10) couplée aux conditions aux limites, donne le système linéaire suivant.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin k_i L & -\cos k_i L & \sinh k_i L & \cosh k_i L \\ -\cos k_i L & \sin k_i L & \cosh k_i L & \sinh k_i L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.16)$$

Les solutions du système n'existent que lorsque son discriminant est nul. La résolution du système (4.16) donne les valeurs des constantes  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$  et  $\zeta_4$  suivantes :

$$\zeta_1 = \zeta_3 \quad (4.17)$$

$$\zeta_2 = \frac{\cos k_i L + \cosh k_i L}{\sin k_i L - \sinh k_i L} \quad (4.18)$$

$$= - \frac{\sin k_i L + \sinh k_i L}{\cos k_i L + \cosh k_i L} \quad (4.19)$$

$$\zeta_4 = - \zeta_2. \quad (4.20)$$

On pose  $\zeta_1$  une constante multiplicative arbitraire d'amplitude. L'équation sur  $k_i$  s'obtient en annulant le déterminant et donne après simplification

$$1 + \cos k_i L \cosh k_i L = 0. \quad (4.21)$$

Notons que cette équation possède une infinité de solutions. La résolution numérique donne les trois premières racines comme

$$k_1 L \approx 1.875 \quad k_2 L \approx 4.694 \quad k_3 L \approx 7.855. \quad (4.22)$$

Ainsi, l'expression du déplacement transverse de la poutre, en fonction du mode considéré, s'écrit comme

$$H_i(x) = \zeta \left( \sin k_i x - \sinh k_i x + \frac{\cos k_i L + \cosh k_i L}{\sin k_i L - \sinh k_i L} (\cos k_i x - \cosh k_i x) \right), \quad (4.23)$$

avec  $\zeta = \zeta_1$ , une constante d'amplitude arbitraire. Et la pulsation propre de vibration d'une poutre encastrée-libre s'exprime par

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{(k_i L)^4 B}{\rho A L^4}} = \sqrt{\frac{k_i^4 B}{\rho A}}. \quad (4.24)$$

L'indice  $i$  représente le mode de vibration de la poutre considérée.

Remarquons, d'après l'équation (4.24), que le rapport des pulsations d'un mode à l'autre n'est pas entier. Le rapport de la pulsation  $\Omega_i$  et de la première pulsation propre du système appelée pulsation fondamentale  $\Omega_1$ , vaut

$$\frac{\Omega_i^2}{\Omega_1^2} = 1, 6.270, 17.528, \quad (4.25)$$

avec  $i = 1, 2, 3$ , indiquant les trois premiers modes de vibrations d'une poutre encastrée-libre.

Les modes obtenus par l'équation (4.10) sont tracés sur la figure 4.2. Remarquons que plus la fréquence de vibration augmente, plus le nombre de noeuds de vibration augmente sur la longueur de la poutre. Le nombre de noeud présent est égal à l'ordre ( $i - 1$ ) du mode considéré, soit le mode  $i$  admettra ( $i - 1$ ) noeuds.

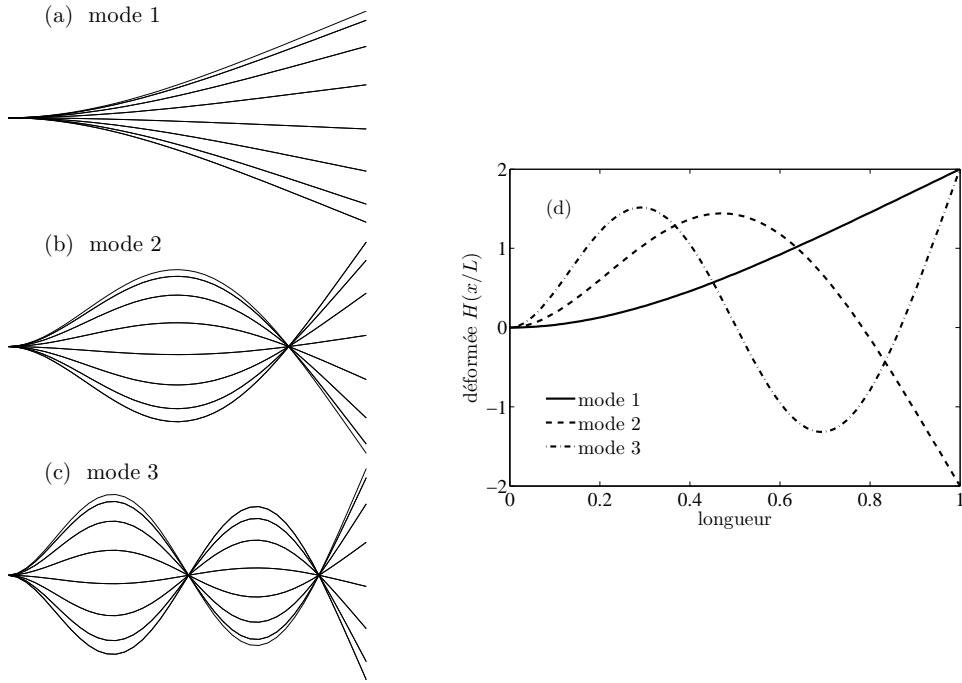


FIGURE 4.2 – Trois premiers modes de vibrations d'une poutre dans le vide d'après l'équation (4.23). (a-b-c) Formes des modes de vibrations d'une la poutre encastrée-libre, (d) d'après leur déformée.

Physiquement, ceci correspond au nombre de fois où la poutre coupe l'axe formé par la ligne neutre lorsque la poutre est à la position d'équilibre. C'est-à-dire pour une représentation (déformée-position le long de la poutre) l'axe des abscisses. Les enveloppes des trois premiers modes d'une poutre encastrée-libre sont tracées sur la figure 4.2.

### 4.3 Modèle analytique

Étant donné la complexité des phénomènes physiques en jeu dans les expériences menées (interaction fluide-structure flexible, détachement de vorticité, dynamique du sillage, effets tridimensionnels, *etc.*), il est nécessaire de simplifier le problème pour avoir une modélisation résolvable analytiquement. Les hypothèses simplificatrices se basent sur les conclusions des expériences menées (chapitre 3). En effet, on a vu que la vitesse de l'écoulement n'affectait que peu la dynamique de la plaque élastique. De même, la rigidité de la plaque ne jouait pas un rôle prépondérant dans la déformation, sous la condition que la fréquence d'activation soit normalisée par la fréquence naturelle de la plaque considérée. En d'autres termes, une forte

rigidité en flexion des plaques n'a pour effet que de diminuer le nombre de pics de résonance dans une gamme de fréquences données.

En conséquence, il semble raisonnable de considérer le problème comme bidimensionnel pour l'écoulement et unidirectionnel pour la structure. En effet, de la plaque ( $S, 2C \gg E$ ), on ne s'intéresse qu'aux déformations dans la direction de l'écoulement. Celle-ci est donc approximée par une poutre d'épaisseur nulle. Le fluide est pris comme non visqueux, de telle sorte que la théorie potentielles pourra s'appliquer, avec l'hypothèse supplémentaire d'un faible écoulement  $u \ll 1$ . L'élasticité de la plaque apparaîtra à travers la fréquence de forçage normalisée par la fréquence naturelle d'une poutre élastique dans le vide. L'interaction fluide-structure est établie par le biais d'une traînée fluide engendrée par le mouvement transverse de la plaque [36] et un terme de pression s'exerçant sur la plaque [91].

#### 4.3.1 Mise en équation et adimensionnement

D'après les hypothèses énoncées précédemment, nous souhaitons modéliser une plaque flexible d'envergure infinie, d'épaisseur nulle et de longueur adimensionnée 2 (définie entre -1 et 1) selon la direction  $x$ , immergée dans un écoulement uniforme  $u$  selon la direction  $x$  (figure 4.3).

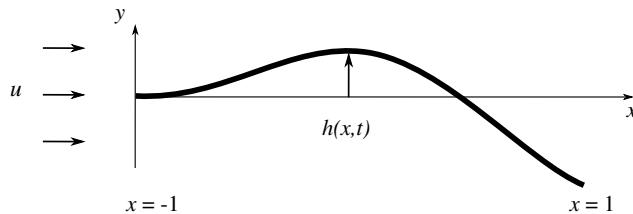


FIGURE 4.3 – Schéma du modèle développé.

Les conditions aux limites du système sont les suivantes : au bord d'attaque, la plaque est encastrée et forcée par un mouvement harmonique de pilonnement, tandis que le reste de la structure répond passivement avec une déflection  $h(x,t)$ . Aussi, la plaque est libre au bord de fuite. La déflection de la plaque est supposée suivre l'équation linéarisée d'Euler-Bernoulli qui sous la forme dimensionnée s'exprime par :

$$M\partial_T^2 H + B\partial_X^4 H + \nu^*\partial_T H + \mu^*\partial_T\partial_X^4 H + \frac{1}{2}\rho_f^* c_D |\partial_T H| \partial_T H + P = 0. \quad (4.26)$$

Le terme  $c_D$  représente le coefficient de traînée (voir la section 4.3.4) dans le terme non linéaire résistif induit par le mouvement transverse (selon la direction  $y$ ) de la plaque lors de l'oscillation.

On note que les quantités dimensionnées sont notées en majuscules ou avec un astérisque (pour les lettres grecques), tandis que les minuscules représentent les

mêmes quantités adimensionnées.

L'équation (4.26) est adimensionnée en utilisant  $C$  (la demi-corde),  $C^2\sqrt{M/B}$  et  $\rho_f^*B/MC^2$  comme échelles caractéristiques de longueur, de temps et de pression, avec  $B$ , la rigidité en flexion de la plaque,  $M$  sa masse surfacique et  $\rho_f^*$  la densité du fluide, ici de l'eau. L'adimensionnement de la pression découle de sa définition  $P \sim \rho_f^*U^2$ . On obtient donc les grandeurs sans dimension du problème :

$$x = \frac{X}{C}, \quad y = \frac{Y}{C}, \quad a_{LE} = \frac{A_{LE}}{C}, \quad t = \frac{T}{C^2\sqrt{\frac{B}{M}}}, \quad p = \frac{PMC^2}{\rho_f^*B}. \quad (4.27)$$

Par conséquence, la formulation des grandeurs adimensionnées du problème devient :

$$\omega = \Omega C^2 \sqrt{\frac{M}{B}}, \quad f_T = \frac{F_T}{\rho_f^* C^3 \Omega^2}, \quad \nu = \frac{\nu^* C^2}{\sqrt{MB}}, \quad (4.28)$$

$$\mu = \frac{\mu^*}{C^2 \sqrt{MB}}, \quad m = \frac{\rho_f^* C}{M}, \quad u = UC \sqrt{\frac{M}{B}}, \quad (4.29)$$

avec  $\omega$  la fréquence de forçage,  $f_T$  la poussée produite, et les coefficients de dissipation linéaire du système  $\mu$  et  $\nu$  correspondent respectivement à un amortissement visco-élastique interne et un amortissement dû au fluide environnant. Le rapport de masse  $m$  traduit la résistance que la plaque rencontre lorsqu'elle est accélérée à travers le fluide environnant. La fréquence adimensionnée  $\omega$  correspond au ratio de la fréquence de forçage à une fréquence élastique typique du système (voir section 4.2). Dans ce problème se dégage un autre rapport de fréquences caractéristiques, la fréquence réduite  $\sigma = \Omega C/U = \omega/u$ . Elle représente le rapport de la fréquence de forçage à la "fréquence du fluide", calculé comme l'inverse du temps mis par une particule fluide pour parcourir la demi-corde à la vitesse  $U$ . Dans le cas présent, on considère que  $\sigma$  est asymptotiquement grand, c'est-à-dire que  $\omega \gg u$ , conformément à la gamme de variation des paramètres du tableau 2.1. Par exemple, la vitesse  $U = 0.05 \text{ m.s}^{-1}$  et la pulsation  $\Omega = 4.71 \text{ rad.s}^{-1}$  correspondent respectivement à  $u = 0.049$  et  $\omega = 0.28$ . En d'autres termes, la vitesse de l'écoulement est négligeable, ce qui est confirmé par les expériences de réponses fréquentielles pour différentes vitesses d'écoulement.

De cet adimensionnement découle l'équation gouvernant la dynamique de la plaque qui s'exprime comme

$$\partial_t^2 h + \partial_x^4 h + \nu \partial_t h + \mu \partial_t \partial_x^4 h + \frac{1}{2} c_D m |\partial_t h| \partial_t h + mp = 0. \quad (4.30)$$

Les deux premiers termes sont l'équation d'une poutre élastique dans le vide avec la compétition entre les forces d'inertie et de rappel élastique. Les troisième et quatrième termes décrivent l'amortissement linéaire du système à travers, respectivement, un amortissement linéaire dû au fluide  $\nu$  et à la dissipation interne

visco-élastique de type Kelvin-Voigt  $\mu$ . Le cinquième terme est l'amortissement non linéaire dû au fluide, exprimé comme une traînée transverse à la plaque. Le dernier terme provient de la différence de pression des deux côtés de la plaque. Les conditions aux limites du système s'expriment de la façon suivante

$$h(-1,t) = a_{LE} \cos(\omega t), \quad (\text{activation}) \quad (4.31)$$

$$\partial_x h(-1,t) = 0, \quad (\text{pas de rotation}) \quad (4.32)$$

$$\partial_x^2 h(1,t) = 0, \quad (\text{pas de moment}) \quad (4.33)$$

$$\partial_x^3 h(-1,t) = 0 \quad (\text{pas d'effort tranchant}). \quad (4.34)$$

Les coefficients d'amortissement  $\nu$  et  $\mu$  de l'équation du mouvement (4.30), sont déterminés expérimentalement de façon indépendante d'après une réponse impulsionale de la plaque dans un fluide au repos (voir section 4.3.4). La valeur de la masse ajoutée  $m$  est grande dans le cas présent ( $m = 12.5$ ) puisque l'épaisseur de la plaque est petite devant la corde et le matériau à une densité sensiblement similaire à l'eau.

Dans l'hypothèse des petites déformations, traduite par  $h \ll 1$  et  $\partial_x h \ll 1$ , le saut de pression  $p$  à travers la plaque peut être calculé en utilisant la théorie des ailes instationnaires. Cette étape est basée sur les travaux de Wu (1961, 1971) [91, 92], dans le cas simplifié des grandes fréquences réduites  $\sigma$  (voir section 4.3.2).

Dans ce contexte, l'écoulement est supposé potentiel, à l'exception d'une fine couche dans le sillage ( $x > 1$ ) en  $y = 0$  qui contient de la vorticité. Ceci est dû au détachements tourbillonnaires au bord de fuite et à la condition de Kutta, qui assure la continuité des pressions. Toutefois, une singularité de pression existe à l'extrémité amont du profil à cause de l'angle d'attaque différent de zéro. Elle est responsable de ce que l'on appelle "force de succion au bord d'attaque", traduction de l'anglais "leading edge suction". Autrement dit, à mesure que l'angle d'attaque de la plaque avec l'écoulement augmente, les lignes de courant incidentes se séparent, créant ainsi un vortex de bord d'attaque ("leading edge vortex", LEV, en anglais). Dans ces conditions, la force de portance peut être amplifiée dans la limite, bien sûr, où cet angle reste faible. Dans le cas contraire, le détachement de ce vortex entraînerait une forte baisse des performances de portance et de poussée du profil [88]. Dans un cas favorable, la force résultante est parallèle au déplacement : la force de succion s'ajoute alors à la poussée générée par le battement. La plupart des animaux aériens en vol battu utilisent des vortex de bord d'attaque en contrôlant l'angle d'attaque de leurs appendices, atteignant ainsi des performances de vol étonnantes [87, 19, 74].

### 4.3.2 Théorie des ailes flexibles instationnaires selon Wu (1961) [91]

Le propos de cette partie est de détailler la résolution du terme de pression dans l'équation (4.30). La théorie des ailes instationnaires a initialement été introduite par Theodorsen (1935) [77], puis appliquée à une géométrie quelconque par Wu (1961) [91], c'est cette version que nous utiliserons ici. Dans le cas général, elle s'applique à un objet bidimensionnel déformable, de forme arbitraire et animé d'un mouvement de petite amplitude dans un écoulement uniforme et un fluide supposé parfait.

Nous nous placerons dans le cas d'un profil de plaque d'envergure infinie et d'épaisseur nulle animé d'un mouvement d'oscillation harmonique. Le profil est placé dans un écoulement uniforme  $u$ , stationnaire, uniforme et non visqueux (figure 4.4). Autour de la plaque, il résulte un écoulement  $\mathbf{q}$  tel que  $\mathbf{q} = (U + u, v)$  qui satisfait l'équation de continuité, à savoir  $\operatorname{div} \mathbf{q} = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$ . Les perturbations sont supposées faibles face à l'écoulement incident, soit  $u, v \ll U$ . La vorticité générée dans les couches limites est contenue dans une bande étroite de fluide autour de  $y$ . Cette hypothèse est confirmée expérimentalement par la visualisation présentée sur la figure 3.13.

La plaque est animée d'un mouvement supposé connu selon la direction  $y$  qui est noté  $h(x,t)$  pour  $-1 < x < 1$  (schéma 4.3). Les déformations de la plaque seront supposées faibles devant la longueur totale de la plaque, c'est-à-dire que l'amplitude maximale,  $h_{\max}$ , et la variation de l'amplitude de l'onde parcourant la plaque,  $\partial h / \partial x$ , sont petites devant l'unité.

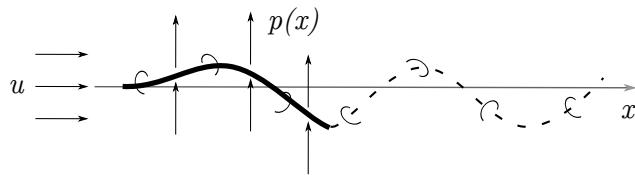


FIGURE 4.4 – Schématisation de l'écoulement autour d'une plaque d'envergure infinie et d'épaisseur nulle dans un écoulement uniforme  $u$ . Schéma associé à la résolution de la pression par la méthode introduite par Wu (1961) [91].

L'écoulement considéré est décrit par l'équation d'Euler linéarisée pour un fluide idéal (non visqueux)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{q} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \phi, \quad (4.35)$$

avec  $\rho$ , la masse volumique du fluide et  $\phi$  le potentiel d'accélération de Prandtl exprimé par

$$\phi(x,y,t) = \frac{p_\infty - p}{\rho}. \quad (4.36)$$

En prenant la divergence de l'équation d'Euler ( $\text{div}[\text{Eq.(4.35)}]$ ) et l'équation de continuité ( $\text{div } \mathbf{q} = 0$ ), on obtient que le potentiel d'accélération  $\phi$  doit satisfaire

$$\Delta\phi = 0. \quad (4.37)$$

Le potentiel  $\phi$  est donc une fonction harmonique de  $(x,y)$  à tout instant  $t$  et admet donc un conjugué  $\psi(x,y,t)$  d'après les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (4.38)$$

En l'absence de viscosité, l'écoulement sera toujours irrotationnel, c'est-à-dire que  $\text{rot } \mathbf{q} = 0$ . En écoulement instationnaire, la nappe de vorticité est contenue proche du solide et n'affecte pas la dynamique de l'écoulement. Les perturbations de vitesse dues à la viscosité du fluide n'ont pas le temps de diffuser pendant le temps de passage du fluide. En effet, la diffusion de vorticité est contenue dans les couches limites du solide et varie comme  $\sqrt{\nu T}$  [34]. À distance de la paroi, l'écoulement n'interagit donc pas avec la vorticité. En revanche, le sillage est composé de vortex lâchés par le bord de fuite de l'objet oscillant.

En notation complexe, l'accélération potentielle prend la forme

$$f(x,t) = \phi(x,y,t) + i\psi(x,y,t). \quad (4.39)$$

La vitesse dans le plan complexe s'exprime alors comme

$$w(z,t) = u(x,y,t) - iv(x,y,t). \quad (4.40)$$

En utilisant ces deux relations et (4.35), l'accélération potentielle devient

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (4.41)$$

La vitesse de l'écoulement est donnée par intégration de  $f$  connue, avec pour condition aux limites que la vitesse s'annule à l'infini et que les vitesses normales relatives à la paroi soient nulles (condition d'imperméabilité).

La pression est continue en tout point de l'écoulement, sillage inclus, sauf à travers la plaque. Cependant la vitesse peut admettre des discontinuités, notamment dans les nappes de vorticité au bord de fuite, ainsi que des singularités. C'est en cela que réside l'élément fort de la méthode présentée. Cela implique que le potentiel  $\phi$  est une fonction linéaire et continue puisque le potentiel d'accélération  $\phi$  dépend linéairement de la pression (équation (4.36)). En conséquence, la fonction  $f(z,t)$  est une fonction régulière de  $z$  dans tout l'espace à tout instant  $t$ . Pour éviter toute divergence de la vitesse due à la singularité du profil en bord de fuite, la continuité des vitesses est assurée par la condition de Kutta [88].

Plaçons nous dans le cas où le profil flexible infiniment mince est animé d'un mouvement harmonique exprimé par

$$h(x,t) = h_d(x) \exp(i\omega t), \quad |x| < 1, \quad (4.42)$$

avec  $\omega$  la pulsation et  $h_d(x)$  une fonction continue arbitraire décrivant le déplacement de la plaque.

Puisque nous avons pu remarquer une réponse modale de la plaque expérimentalement, le mouvement global de la plaque est décomposé sous forme de modes propres  $h_i$  d'une poutre flexible dans le vide, plus un mode rigide  $h_{LE}(x)$  traduisant le forçage. Chaque mode  $h_i(x)$  est projeté sur les fonctions de Chebychev du premier ordre avec

$$\xi_{ij} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h_i(\cos \theta) \cos(j-1)\theta d\theta, \quad x = \cos \theta. \quad (4.43)$$

Dans la limite de grandes fréquences réduites  $\sigma \gg 1$ , donc de faible vitesse d'écoulement incident  $U \ll \Omega L$ , la fonction de Theodorsen définie par

$$C_{\text{Th}}(\sigma) = \frac{K_1(i\sigma)}{K_0(i\sigma) + K_1(i\sigma)}, \quad (4.44)$$

vaut  $1/2$ , avec  $K_0$  et  $K_1$  les fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce et  $i$  le nombre imaginaire. Le problème potentiel étant linéaire, à chaque mode propre  $h_i(x)$  de poutre correspond une pression  $p_i(x)$ . La pression correspondante est alors donnée par

$$p_i(\cos \theta) = -\omega^2 \sum_{q=1}^Q \frac{\xi_{i(q+2)} - \xi_{iq}}{q} \sin q\theta. \quad (4.45)$$

Lors du calcul, nous prenons  $Q = 10$  pour la décomposition de Chebychev. La pression totale à travers la poutre s'exprime par

$$p(x) = -\omega^2 \left( a_{LE} p_{LE}(x) + \sum_{i=1}^N a_i p_i(x) \right), \quad (4.46)$$

avec

$$p_{LE} = -2\sqrt{1-x^2}, \quad (4.47)$$

la pression associée au déplacement d'une poutre rigide traduisant le battement imposé. Seuls les termes en  $\omega^2$  restent après avoir fait l'hypothèse de grandes fréquences réduites  $\sigma$ .

### 4.3.3 Analyse modale

Pour résoudre l'équation du mouvement (4.30), la déflection totale de la plaque forcée est approximée par la décomposition utilisant les modes propres de vibration d'une poutre dans le vide. Le forçage serait l'équivalent d'une poutre infiniment rigide, d'amplitude  $a_{LE}$ , et la flexibilité de la plaque serait transcrit par la somme

de modes propres d'une poutre dans le vide  $h_i$ , d'amplitude complexe  $a_i$ , en fonction de la fréquence de battement imposée. D'où :

$$h(x,t) = \left( a_{LE} + \sum_{i=1}^N a_i h_i(x) \right) e^{i\omega t}, \quad (4.48)$$

où nous avons négligé les termes harmoniques d'ordre supérieurs en temps. Les expressions des modes propres  $h_i(x)$  sont données dans la section 4.2. Les expériences allant jusqu'à la deuxième résonance, nous prenons  $N = 3$ , ce qui est suffisant pour représenter fidèlement la déflexion de la poutre autour des deux résonances. L'amplitude de déflexion prend alors la forme suivante :

$$h(x,t) = \Re[(a_{LE} + a_1 h_1(x) + a_2 h_2(x) + a_3 h_3(x))] e^{i\omega t}, \quad (4.49)$$

où  $\Re[\cdot]$  représente la partie réelle. Les modes propres  $h_i(x)$  ont la propriété d'être une base orthonormée pour la déflexion de la poutre quand le produit scalaire suivant est utilisé :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx. \quad (4.50)$$

En effet,

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 h_i(x)h_j(x)dx = \delta_{ij}. \quad (4.51)$$

Lorsque la déflexion de la poutre dans (4.30) est remplacée par la décomposition modale en (4.49) et en formant le produit scalaire avec les trois modes propres  $h_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), nous obtenons les équations non linéaires couplées avec trois amplitudes inconnues  $a_i$  en fonction du forçage  $(\omega, a_{LE})$ . Le système à résoudre prend la forme

$$\begin{aligned} & (i\omega\nu - \omega^2)(\alpha_i a_{LE} + a_i) + (1 + i\omega\mu)k_i^4 a_i \\ & + i\omega^2 c_D m \frac{2}{3\pi} \int_{-1}^1 h_i \left| a_{LE} + \sum_{j=1}^N a_j h_j(x) \right| \left( a_{LE} + \sum_{j=1}^N a_j h_j(x) \right) dx \\ & - \omega^2 m \left( \beta_{i0} a_{LE} + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} a_j \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.52)$$

pour  $1 \leq i \leq N$ . Les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_{ij}$  sont précisés dans le tableau 4.1.

coefficient	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$k_i$	0.938	2.347	3.927
$\alpha_i$	0.783	0.434	0.254
$\beta_{i0}$	1.188	1.015	0.288
$\beta_{i1}$	1.131	0.591	-0.014
$\beta_{i2}$	0.591	1.004	0.251
$\beta_{i3}$	-0.014	0.251	0.556

TABLE 4.1 – Valeurs des coefficients  $k_i$ ,  $\alpha_i$  et  $\beta_{ij}$  de l'équation (4.30) pour les trois premiers modes de résonance d'une poutre dans le vide.

Les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_{ij}$  sont donnés par

$$\alpha_i = 1/2 \int_{-1}^1 h_i(x) dx, \quad (4.53)$$

$$\beta_{0i} = 1/2 \int_{-1}^1 h_i(x) p_0(x) dx, \quad (4.54)$$

$$\beta_{1i} = 1/2 \int_{-1}^1 h_i(x) p_1(x) dx, \quad (4.55)$$

$$\beta_{2i} = 1/2 \int_{-1}^1 h_i(x) p_2(x) dx, \quad (4.56)$$

$$\beta_{3i} = 1/2 \int_{-1}^1 h_i(x) p_3(x) dx, \quad (4.57)$$

$i = 1, 2$  ou  $3$  en fonction du mode évalué, et  $p_i(x)$  est le terme de pression associée à la déflection  $h_i(x)$  donné par (4.45). Ces termes de pression sont calculés suivant la méthode introduite par Wu (1961) [91], expliquée à la section 4.2. De façon générale, les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_{ij}$  sont donnés par :

$$\alpha_i = 1/2 \int_{-1}^1 h_i(x) dx = \langle h_i, 1 \rangle \quad (4.58)$$

$$\beta_{ij} = 1/2 \int_{-1}^1 h_j(x) p_i(x) dx = \langle h_j, p_i \rangle \quad (4.59)$$

La constitution du système (4.52) est identique à celle de l'équation (4.30). Le premier terme regroupe l'amortissement linéaire externe et l'inertie de la poutre, le second l'élasticité et la visco-élasticité, le troisième est le terme non linéaire d'amortissement et le dernier correspond aux forces de pression. Dans la limite de grande fréquence réduite  $\sigma$ , le dernier terme est proportionnel à  $\omega^2$ . En conséquence, il joue le rôle d'une masse ajoutée. À partir du système, on remarque que les différents modes propres sont seulement couplés à travers les termes de pression et d'amortissement non linéaires. L'équation (4.52) représente un modèle faiblement

non linéaire développé à l'ordre  $O(a_{LE}^2)$ . Pour développer un modèle analytique à l'ordre  $O(a_{LE}^3)$ , les non linéarités géométriques doivent être incluses dans l'équation du mouvement, créant ainsi un système beaucoup plus complexe [21].

La résolution du système (4.52) se fait numériquement pour différentes valeurs de l'amplitude de forçage  $a_{LE}$  et de la fréquence  $\omega$  dans la gamme de celles considérées dans les expériences. La solution donne les amplitudes complexes  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  de chaque mode, en fonction des paramètres imposés  $(a_{LE}, \omega)$ . En particulier, la solution donne l'amplitude de réponse  $a_{TE}$  et la phase  $\phi$  entre le forçage du bord d'attaque et la réponse du bord de fuite exprimée par :

$$h(1,t) = \left( a_{LE} + \sum_{i=1}^N a_i h_i(1) \right) e^{i\omega t} = a_{TE} e^{i\omega t + \phi}. \quad (4.60)$$

La figure 4.11 propose le tracé d'un exemple de contribution des amplitudes de chaque mode dans l'amplitude totale de réponse.

#### 4.3.4 Coefficients de dissipation

##### Coefficients de dissipation linéaire

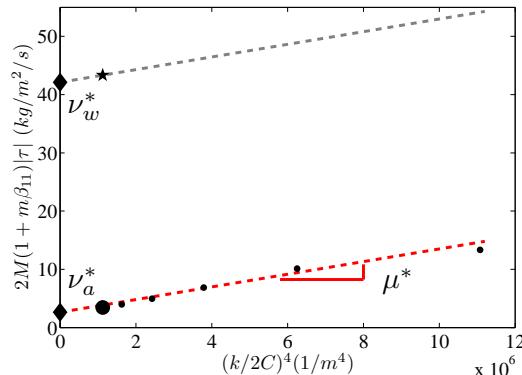


FIGURE 4.5 – Évolution de l'amortissement d'une plaque dans l'air en fonction de la longueur libre de la plaque.

Les essais de réponse impulsionnelle dans l'eau et dans l'air révèlent l'importance de l'amortissement dans le système. Si l'amplitude initiale de déflexion est petite, les deux termes linéaires de dissipation considérés sont le coefficient d'amortissement fluide  $\nu$  et le coefficient d'amortissement visco-élastique interne de type Kelvin-Voigt  $\mu$  en adimensionné. Ces coefficients sont reliés aux amortissements dimensionnés mesurés expérimentalement par

$$\nu = \frac{\nu^* C^2}{\sqrt{MB}}, \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\mu^*}{C^2 \sqrt{MB}}, \quad (4.61)$$

où  $\nu^*$  et  $\mu^*$  sont les coefficients dimensionnés déduits des essais expérimentaux (voir section 3.2.1).

Durant le test de réponse impulsionale (*e.g.* figure 3.2), nous supposons que seul le premier mode propre de la poutre est sollicité. La déflection de la plaque s'exprime alors par

$$h(x,t) = \frac{1}{2}a_{TE}(t)h_1(x), \quad (4.62)$$

où la variation temporelle de l'amplitude est une oscillation amortie de la forme

$$a_{TE}(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-\tau t}. \quad (4.63)$$

Les formes de la fréquence  $\omega_0$  et du taux d'amortissement  $\tau$  sont déterminées d'après l'équation linéarisée d'Euler-Bernoulli (4.30), dans laquelle les termes d'amortissement non linéaires sont négligés. Dans la limite des petits déplacements, on trouve :

$$\omega_0 \approx \frac{k_1^2}{\sqrt{1+m\beta_{11}}}, \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\nu + \mu k_1^2}{2(1+m\beta_{11})}. \quad (4.64)$$

L'amortissement total de la plaque dans un fluide s'exprime comme :

$$2M(1+m\beta_{11})\tau^* = \nu^* + \left(\frac{k_1}{C}\right)^4 \mu^* \quad (4.65)$$

Sur la figure 4.5,  $2M(1+m\beta_{11})\tau^*$  est tracé en fonction de  $(k_1/2C)^4$  pour différents essais de réponse impulsionale effectués dans l'air et dans l'eau. Dans l'air, différentes longueurs de la demi-corde ont été effectuées, tandis que, dans l'eau, une seule longueur de demi-corde a été testée. Dans l'eau, le retour à l'équilibre de la plaque déstabilisée s'effectue très rapidement. Le relevé de l'amortissement pour la corde entière laissée libre nécessite un post-traitement délicat (se reporter aux explications de la section 3.2.1). La fréquence augmentant avec le raccourcissement de la longueur libre de la plaque, le phénomène sera d'autant plus complexe à déterminer lorsque la longueur est courte. À cela s'ajoute le changement de section non négligeable puisque la plaque est profilée en bord de fuite. À l'aide des données dans l'air et en appliquant la relation (4.65), on estime le coefficient d'amortissement visco-élastique  $\mu^* = 1.02 \times 10^{-6}$  N.m.s. Les données dans l'eau permettent d'estimer le coefficient d'amortissement linéaire du fluide à  $\nu^* = 47.64 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ . Ainsi, en appliquant la normalisation (4.61), on obtient pour des essais conduits dans l'eau, avec la demi-corde égale à 0.06 m :

$$\nu = 0.583 \quad \text{et} \quad \mu = 9.64 \times 10^{-4}. \quad (4.66)$$

Il est à noter que la dissipation linéaire fluide varie et prend pour valeur moyenne  $\nu = 0.474$ , c'est cette valeur qui a été implantée dans le modèle.

La figure 4.6 montre l'effet des coefficients de dissipation linéaire sur la réponse de la plaque ainsi que la conséquence sur la prédiction de la poussée générée. La ligne en pointillées correspond à la réponse lorsque  $\mu$  et  $\nu$  prennent les valeurs déterminées expérimentalement. Les valeurs simulées sont exagérées de façon à

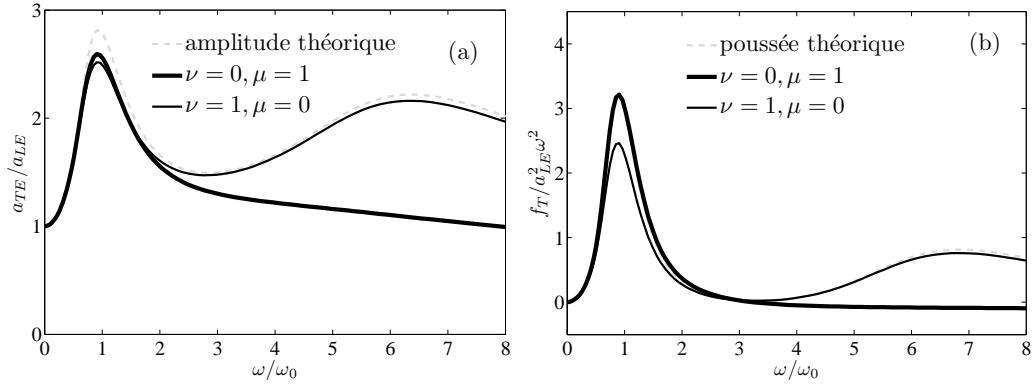


FIGURE 4.6 – Effets des coefficients linéaires sur la réponse (a) en amplitude et (b) en poussée. Les coefficients  $\nu$  et  $\mu$  sont fixés successivement à 0 ou 1. Pour l'amplitude et la poussée théorique, les coefficients prennent les valeurs données en (4.66).

mettre en évidence l'effet de chaque coefficient sur la réponse : l'amortissement visco-élastique  $\mu$  intervient principalement sur la largeur du premier pic tandis que l'amortissement fluide  $\nu$  agit sur la hauteur du deuxième pic.

### Coefficient non linéaire de traînée fluide $c_D$

En plus de l'amortissement fluide linéaire, la résistance au mouvement transverse de la plaque, principalement provoquée par le forçage, est exprimée à travers une force non linéaire de traînée, avec un coefficient de traînée de forme  $c_D$  (modèle non visqueux). D'après la littérature [36], la valeur classique pour une plaque plane perpendiculaire à l'écoulement est  $c_D \approx 2$  pour la gamme de nombres de Reynolds testée. Dans la littérature, la valeur du coefficient de traînée est déterminée de façon empirique d'après des essais expérimentaux ou des simulations numériques en milieu infini. Dans notre configuration expérimentale, la plaque est confinée par des parois verticales, qui peuvent influer sur la valeur de  $c_D$ . De plus, les effets non linéaires d'ordre  $O(a_{LE}^3)$ , négligés dans notre analyse, sont susceptibles d'être inclus dans un coefficient de traînée "effectif". Il prendrait ainsi en compte les simplifications faites dans le modèle. Aussi, il reste à estimer la valeur de  $c_D$  dans notre expérience.

De façon analogue à la détermination des coefficients linéaires, une réponse impulsionnelle est réalisée dans l'eau. Cette fois-ci, différentes amplitudes de déstabilisation sont testées avec de grandes valeurs pour détecter les effets non linéaires. En injectant un seul mode propre dans la déflection totale de la plaque ((4.62) dans (4.30)) et en formant le produit scalaire avec la déformée  $h_1(x)$ , on aboutit à l'équation non linéaire aux dérivées partielles pour  $a_{LE}(t)$  suivante :

$$(1+m\beta_{11})\partial_t^2 a_{TE} + (\nu+k_1^4\mu)\partial_t a_{TE} + k_1^4 a_{TE} + \frac{1}{4}mc_D \langle h_1, h_1^2 \rangle |\partial_t a_{TE}| \partial_t a_{TE} = 0. \quad (4.67)$$

Celle-ci mime les oscillations temporelles amorties d'une plaque flexible dans l'eau au repos en fonction de l'amplitude de déstabilisation. Les coefficients  $\nu$  et  $\mu$  sont fixés aux valeurs déterminées précédemment (expression (4.66)) : seul  $c_D$  reste le paramètre à déterminer pour obtenir la solution  $a_{TE}(t)$ .

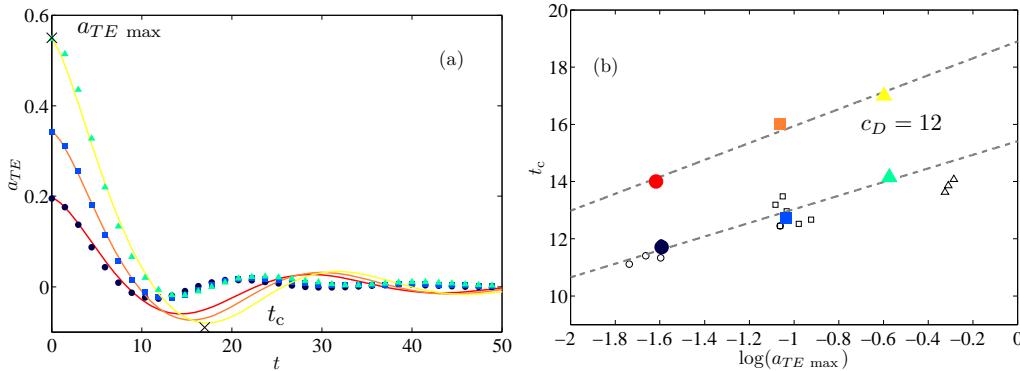


FIGURE 4.7 – (a) Réponse impulsionnelle en fonction de l'amplitude de déstabilisation. Les courbes de prédiction des oscillations donnent directement la valeur du coefficient non linéaire de traînée fluide  $c_D$ . Les expériences et les prédictions sont respectivement montrées par des symboles et les courbes. (b) La valeur de  $c_D$  est ajustée pour que les temps critiques expérimentaux et des prédictions évoluent selon la même pente. Les résultats expérimentaux sont en dégradé de bleu et les prédictions sont en dégradé de rouge.

Sur la figure 4.7(a) sont tracées les oscillations amorties, données par la relation (4.67) pour  $c_D = 12$ . Ces réponses sont mises en regard avec les signaux expérimentaux pour trois amplitudes initiales de déstabilisation  $a_{LE}$ . Alors que les oscillations amorties ne sont pas correctement résolues, il semblerait que l'évolution des temps auxquels l'amplitude minimale est atteinte soit la même dans les deux cas. En d'autres termes, les pentes données par les temps dits critiques de la prédiction seraient dictées par le coefficient  $c_D$  : plus la valeur de  $c_D$  augmente, plus les effets non linéaires sont importants. De même, cela entraîne un raidissement de la pente des temps auxquels survient l'amplitude minimale,  $t_c = f(\log a_{max})$  sur la figure 4.7(b) (voir également la partie 3.2.1). La pente des temps expérimentaux et théoriques est respectivement égale à 2.38 et 2.96. Bien que la valeur de  $c_D$  soit remarquablement grande par rapport à la valeur de 2 généralement trouvée dans la littérature pour une plaque rigide, elle correspond à celle qui fournit les meilleurs résultats pour la réponse fréquentielle dans l'eau, notamment pour les réponses en fréquence et en poussée générée (voir section suivante). Cette valeur ajustée prend en considération les autres non linéarités du système non modélisées (fluide, plaque, inertie, etc.).

Étonnamment, quelque soit l'amplitude de déstabilisation, l'amortissement du système semble équivalent, renforçant l'importance des effets non linéaires dans notre système.

## 4.4 Résonance et phase

Nous allons maintenant examiner la réponse en fréquence du système théorique et la comparer avec celle obtenue expérimentalement. En grandeurs sans dimensions, cela consiste à mesurer l'amplitude relative du bord de fuite  $a_{TE}/a_{LE}$  et la phase  $\phi$ , lorsque la fréquence normalisée  $\omega/\omega_0$  varie. On rappelle que  $\omega_0$  est la fréquence naturelle du système {plaque + fluide}. Elle est déterminée expérimentalement par une réponse impulsionale (se reporter à la section 3.2.1) et donnée théoriquement par le modèle comme :

$$\omega_0 = \frac{k_1^2}{\sqrt{1+m\beta_{11}}} \approx 0.221. \quad (4.68)$$

Elle résulte de l'équation adimensionnée (4.30) lorsque seul le premier mode propre  $a_1$  est considéré ( $a_{LE} = a_2 = a_3 = 0$ ) et que les termes d'amortissement sont négligés. Autrement dit,  $\omega_0$  résulte de

$$\partial_y^2 h + \partial_x^4 h + mp = 0, \quad (4.69)$$

$$\text{soit} \quad -\omega^2 a_1 + k_1^4 a_1 - \omega^2 m \beta_{11} a_1 = 0, \quad (4.70)$$

avec  $h = h_1(x)e^{i\omega t}$ . Physiquement, à chaque plaque de rigidité  $B_n$  correspond la fréquence angulaire  $\omega_{0n} = 0.276, 0.364, 0.477$  pour  $n = 1, 2, 3$  fonction de la plaque considérée ( $\omega_{0n} = 2\pi F_{0n} C^2 \sqrt{M/B}$ ). Au vu de la gamme de paramètres explorée, le système est étudié dans la limite de grande valeur des masses ajoutées et des grandes fréquences réduites ( $m \gg 1$  et  $\sigma \gg 1$ ). Dans cette limite, nous avons vu au chapitre 3 que la réponse fréquentielle dépend principalement de l'amplitude de forçage  $a_{LE}$  imposée en bord d'attaque.

La figure 4.8(a) montre la réponse fréquentielle pour trois amplitudes de forçage  $a_{LE} = 0.07, 0.17$  et  $0.24$ . À l'image des résultats expérimentaux (symboles), les prédictions théoriques (lignes continues) présentent deux pics de résonance dans la gamme de fréquences étudiée. Il est intéressant de noter qu'il n'y a aucun paramètre d'ajustement : tous proviennent d'essais expérimentaux et la valeur de  $c_D$  est tenue constante pour toutes les configurations simulées. Les réponses prédictes sont très satisfaisantes, en particulier le premier pic de résonance autour de  $\omega/\omega_0 = 1$ , correctement prédit par le modèle, tant en fréquence qu'en amplitude. On observe que la différence d'amplitude relative  $a_{TE}/a_{LE}$  est la signature des effets non linéaires. Elle est transcrise par le terme d'amortissement fluide non linéaire dans la description du mouvement. Un modèle linéaire donnerait la même réponse relative quelque soit l'amplitude de forçage. La figure 4.9 illustre le comportement qu'aurait la plaque si son mouvement était décrit par ce modèle linéaire (ligne discontinue) : ni l'amplitude, ni la fréquence ne sont captées et la dépendance en amplitude est perdue par rapport au modèle non linéaire (ligne continue). Concernant le deuxième pic de résonance, l'accord entre les expériences et les prédictions est moins bon

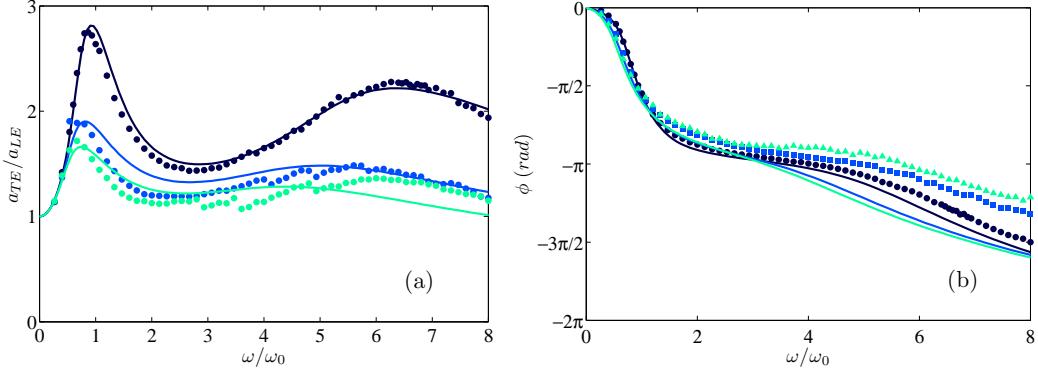


FIGURE 4.8 – Effet de l'amplitude de forçage sur la réponse passive de la plaque au bord de fuite. (a) Les courbes de réponse relative en amplitude  $a_{TE}/a_{LE}$  et (b) le déphasage correspondant entre le bord d'attaque et le bord de fuite  $\phi$  en fonction de la fréquence d'activation normalisée  $\omega/\omega_0$ . Les résultats sont obtenus sous les mêmes configurations (expérimentalement et théoriquement) : plaque de rigidité  $B = 0.018$  Nm placée dans un fluide au repos. Les symboles et les lignes continues représentent respectivement les résultats expérimentaux et les prédictions pour une amplitude de forçage  $a_{LE} = 0.07, 0.17$  et  $0.24$ .

et la différence s'accentue quand l'amplitude de forçage augmente, *i.e.*  $a_{LE} = 0.24$ . Lorsque l'amplitude augmente, la réponse en  $x = 1$  (c'est-à-dire au bord de fuite), ainsi que la phase, tendent à être sous-estimées par les prédictions. Cela est certainement créé par les effets non linéaires d'ordre supérieur  $O(a_{LE}^3)$  non pris en compte dans notre modèle. Cette différence aura des conséquences dans les prédictions de poussée au voisinage de la seconde résonance (voir partie 4.5).

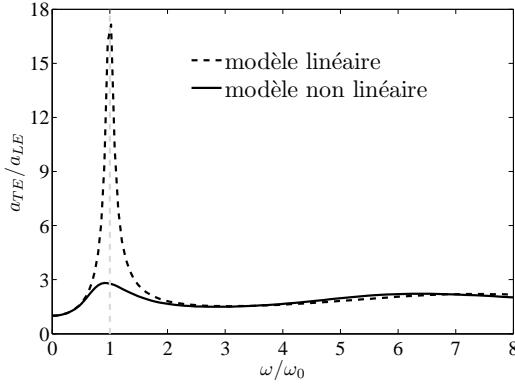


FIGURE 4.9 – Réponse linéaire (traits discontinus) et non linéaire (ligne continue) du bord de fuite de la plaque, d'après l'équation (4.30).

Afin de compléter la comparaison des résultats, l'enveloppe du mode de déflection aux deux pics de résonance est présentée sur la figure 4.10. De façon identique, on retrouve les limites de la prédiction de l'amplitude relative dans l'enveloppe

des modes, qui étaie le caractère résonant du système. On rappelle que la légère asymétrie haut/bas des modes expérimentaux est due à la densité des plaques, légèrement supérieure à celle de l'eau. L'enveloppe du premier mode sur la figure 4.10(a-b) est bien reproduite par le modèle : elle correspond à la superposition d'un mode rigide, mimant le forçage, et de la contribution du premier mode propre d'une poutre. Pour le second mode de résonance, la correspondance est acceptable, bien que des différences apparaissent (c-d) : dans la forme expérimentale, un pseudo ventre est observé à 1/3 de la plaque et un noeud peu marqué est visible au 2/3 de celle-ci. La première observation n'est pas retrouvée dans la forme théorique, tandis que la seconde est plus marquée.

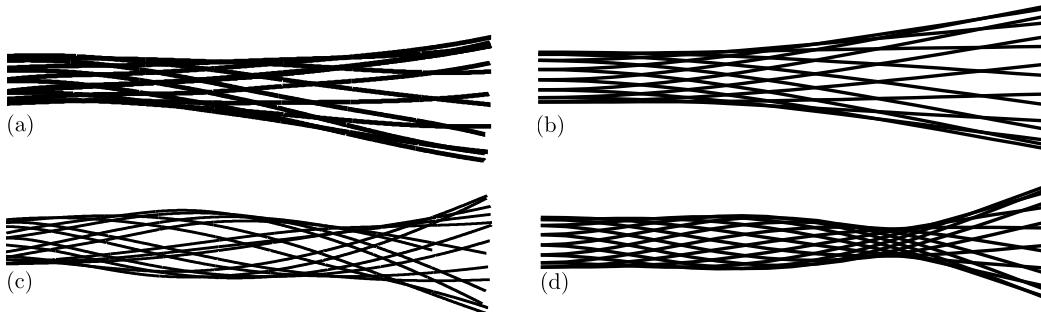


FIGURE 4.10 – Comparaison entre les formes de déformation de la plaque expérimentales (a, c) et théoriques (b, d) sur une période d'oscillation. (a-b) Le premier mode de résonance apparaît à  $\omega/\omega_0 \approx 0.9$  et (c) le second mode survient expérimentalement à  $\omega/\omega_0 \approx 6.4$  (d) alors qu'il apparaît théoriquement à  $\omega/\omega_0 \approx 5.8$ . Les formes des modes sont visualisées pour les pics de résonance de la courbe bleu marine et les symboles ronds pleins de la figure 4.8.

On peut déjà sentir que l'estimation de l'amplitude et de la phase demeureront extrêmement robustes pour une gamme de fréquence autour de la première résonance du système {plaque + fluide} sous forçage. Au-delà, les prédictions fournissent une bonne estimation du comportement du système. On peut tout de même se questionner sur la pertinence du développement d'un modèle incluant deux ou plusieurs résonances alors que les observations biologiques semblent indiquer qu'au maximum seule une longueur d'onde et demie est générée sur la totalité de la longueur des nageurs. L'estimation de l'efficacité des nageurs biologiques est difficile à mesurer. Il est toutefois légitime de penser que si, en des millions d'années d'évolution, le deuxième mode n'a pas été activé, cela est probablement dû à son coût et/ou à son inefficacité.

La contribution de chaque mode propre est présentée en figure 4.11. On remarque qu'à la première résonance, le premier mode domine. À la deuxième résonance, le premier mode est toujours présent avec une amplitude similaire au deuxième mode. Si on se concentre sur le troisième mode, on s'aperçoit que, finalement, sa

contribution est très faible et qu'en conséquence le modèle ne pourrait comporter que deux modes propres dans sa décomposition (4.49) pour décrire en bonne approximation la réponse. Ce qui justifie *a posteriori* d'avoir limité le développement en série de la déflection à  $N = 3$  dans l'expression (4.49). L'augmentation de la complexité du calcul lorsque les modes supérieurs sont pris en compte ne semble pas nécessaire alors que la contribution de ces modes est négligeable.

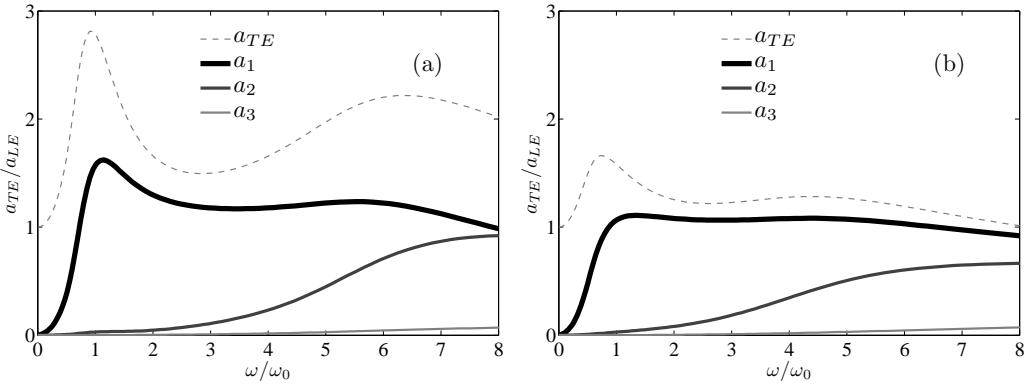


FIGURE 4.11 – Contribution des amplitudes des modes propres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  dans l'amplitude totale de réponse  $a_{TE}$  pour (a)  $a_{LE} = 0.07$  et (b)  $a_{LE} = 0.24$ .

Après avoir pris connaissance de la dynamique de la plaque sous un forçage harmonique, la question centrale demeure néanmoins : comment les non linéarités dues à l'amplitude de forçage affectent-elles les performances du nageur ?

## 4.5 Poussée

Les visualisations, confirmées par les mesures du champ de vitesse par moyenne de phase, ont mis en évidence des vortex contra-rotatifs dans le sillage généré par la plaque oscillante, signe d'une allée inversée de Bénard-von Kármán. Cette dernière génère un excédent de vitesse dans le profil moyen des vitesses selon la direction de l'écoulement, et ainsi marque une force de poussée positive sur l'objet oscillant (figure 4.3 et section 3.3). Dès lors, le calcul de la force propulsive générée par le battement de la plaque flexible devient intéressant pour confronter les résultats expérimentaux aux prédictions.

Pour calculer la poussée produite par une plaque en oscillation forcée à partir du modèle faiblement non linéaire, nous devons considérer les éléments de l'équation du mouvement et quantifier leur contribution dans la poussée totale. Ainsi, il est possible de distinguer trois contributions. Tout d'abord la succion au bord d'attaque  $f_S$ , puis les forces potentielles de pression  $f_P$  qui s'exercent le long du profil et projetées selon la direction de déplacement virtuel  $x$  [92], et enfin les forces résistives  $f_R$ , opposées aux forces non linéaires d'amortissement externes [51]. En

pratique, la succion au bord d'attaque correspond à des grandes valeurs de pressions négatives, proches du bord d'attaque, qui provoquent un décollement des lignes de courant. Il est souvent visible par un vortex attaché en  $x = -1$  (voir figures 3.15 et 3.14), également appelé vortex du bord d'attaque. Le décollement affecte fortement l'écoulement et la poussée [88, 89]. Notons que les forces sont exprimées par unité d'envergure, c'est-à-dire en [ $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ].

L'expression de la poussée totale peut alors s'écrire comme la somme des contributions, soit :

$$f_T = f_P + f_S + f_R. \quad (4.71)$$

Ces contributions s'expriment comme :

$$f_P = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Re(p \overline{\partial_x h}) dx, \quad (4.72)$$

$$f_S = \frac{\pi}{16} a_{LE}^2 \omega^2 |\gamma_0 - \gamma_1|^2, \quad (4.73)$$

$$f_R = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Re \left[ \left( \frac{\nu}{m} \partial_t h + \frac{4}{3\pi} c_D |\partial_t h| \partial_t h \right) \overline{\partial_x h} \right] dx, \quad (4.74)$$

où  $\Re$  représente la partie réelle,  $(\cdot)$  le complexe conjugué et  $\gamma_i = \gamma_{iLE} a_{LE} + \sum_j \gamma_{ij} a_j$  pour  $i = 0$  ou  $1$  et  $j = LE, 1, 2$  ou  $3$  (tableau 4.2).

	$\gamma_{iLE}$	$\gamma_{i1}$	$\gamma_{i2}$	$\gamma_{i3}$
$i = 0$	2	1.673	0.0866	0.836
$i = 1$	0	1.040	-0.846	0.107

TABLE 4.2 – Valeurs des coefficients  $\gamma_{ij}$  dans l'équation (4.73) utilisées pour calculer la force de succion au bord d'attaque.

Le détail des calculs est donné dans les références [91, 92, 23]. On peut voir que, lorsque les termes non linéaires sont négligés, la poussée est quadratique en amplitude, comme attendu. Elle est également proportionnelle au carré de la fréquence de forçage. Autrement noté,  $f_T \propto a_{LE}^2 \omega^2$ . Il est donc attendu que la poussée dimensionnée varie comme  $F_T = O(\rho_f U_{LE}^2 C)$ , où  $U_{LE} = \Omega A_{LE}$  est la vitesse typique du bord d'attaque.

Sur la figure 4.12, la poussée  $f_T$ , calculée avec la méthode présentée, est comparée avec celle mesurée expérimentalement. Il est possible de distinguer deux configurations : (a) la première étant le calcul de la poussée sans la contribution du vortex du bord d'attaque ; et (b) la seconde étant calculée avec cette contribution. De ces courbes, nous distinguons deux régimes en fonction de l'amplitude imposée, donc du décollement des lignes de courant. Comme attendu, sans le terme de succion au bord d'attaque, la poussée est nulle lorsque la plaque est immobile. Cela se conçoit aisément puisque, malgré le profilage de la plaque, celle-ci devrait plutôt

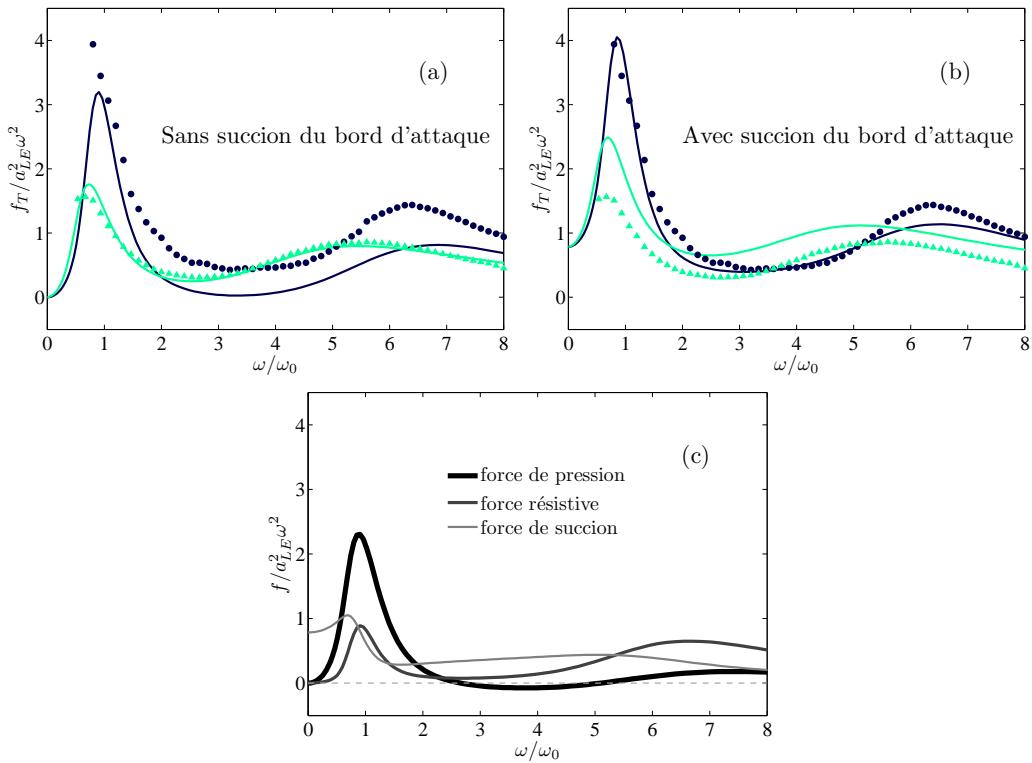


FIGURE 4.12 – Influence de la succion du bord d'attaque (LES) sur la poussée générée théoriquement : (a) sans LES et (b) avec LES. Les symboles représentent les points expérimentaux de la poussée générée par une activation  $a_{LE}$  de 0.07 (points) et 0.24 (triangles). (c) Contribution des forces de pression, résistives et de succion au bord d'attaque dans la poussée totale pour  $a_{LE} = 0.07$ .

subir une traînée. En revanche, lorsque la succion est ajoutée, la poussée pour la grande amplitude ( $a_{LE} = 0.24$ ) est surestimée tandis que celle pour la plus petite amplitude ( $a_{LE} = 0.07$ ) est correctement prédite. On note que lorsque la plaque est immobile, le modèle prédit une poussée normalisée par  $a_{LE}^2 \omega^2$  positive. Ceci peut sembler aller à contre sens de l'intuition physique mais la poussée  $f_T$  (ou  $F_T$ ) est bien nulle. Dans les deux cas, la fréquence aux maxima de poussée coïncide avec les résonances en amplitudes et l'ordre de grandeur est correctement obtenu. La figure 4.12(c) affiche la contribution des éléments de poussée : la force de succion est bien responsable de la poussée lorsque  $\omega \rightarrow 0$ . À la première résonance, la poussée est générée par les forces de pression ainsi que par les forces résistives. Au contraire, à mesure que la fréquence augmente, les forces de pression diminuent jusqu'à devenir négatives dans l'intervalle  $3 \leq \omega/\omega_0 \leq 4$ . Cette observation correspond au cas le plus défavorable dans la production de poussée de par l'amplitude de réponse et la phase proche de  $\pi$ . Au deuxième pic de résonance de la poussée, la poussée est majoritairement induite par les forces résistives, les forces de pression, positives, étant faibles. Compte tenu du possible décollement pour des angles d'attaque impor-

tants, la succion au bord d'attaque est négligée par la suite. Ce choix se justifie par les visualisations au colorant réalisées à la section 3.3.1 montrant un décollement. Afin de s'affranchir de ces décollements, responsables de baisse de performance, il faudrait que l'angle d'attaque soit limité à de petites valeurs ( $\leq 15^\circ$ ). Cela est envisageable grâce à un ajustement en fonction du régime d'activation, de manière active ou passive, pour rester dans le domaine de petites déformations angulaires.

Dans l'hypothèse d'une succion négligée (figure 4.12(a)), autour de la première résonance et pour de faibles amplitudes de forçage,  $f_P$  domine. Cependant, pour d'autres cas (pour de grandes amplitudes de forçage ou lorsque  $\omega/\omega_0 > 1$ ), les forces résistives sont du même ordre de grandeur. Dans l'intervalle  $2.7 \leq \omega/\omega_0 \leq 5.1$ ,  $f_P$  peut même devenir négative et le caractère propulsif de la poussée provient uniquement des forces résistives et/ou de succion (dans le cas où  $f_S \neq 0$ ). La tendance non linéaire se retrouve bien dans ces deux contributions. Cela n'a rien d'étonnant puisque, par définition, leur valeur dépend de l'amplitude de déflexion à l'extrémité de la plaque. Néanmoins, leurs maxima ne surviennent pas aux mêmes fréquences : la poussée générée par le mouvement est presque 2.3 fois plus importante que celle générée par la succion du bord d'attaque dans le voisinage de la première résonance ( $\omega/\omega_0 = 0.9$ ). En contrepartie, à plus haute fréquence et en dehors des résonances, le mouvement ne génère plus de poussée mais une traînée paliée par la force de succion, produisant au final un bilan toujours positif pour la poussée totale.

Les poussées totales moyennes calculées sans la succion au bord d'attaque, et mesurées expérimentalement, par mesures directes et par bilan de quantité de mouvement pour les trois amplitudes de forçage testées sont présentées sur la figure 4.13. La poussée moyenne générée est globalement bien prédite. En particulier les non linéarités expliquant la différence entre les poussées aux différentes amplitudes sont bien reproduites autour du premier pic  $\omega/\omega_0 \approx 1$ . La poussée calculée à partir du bilan de quantité de mouvement (dégradé de rouge), exprimée en grandeurs adimensionnées par  $f_T = u \int_{-\infty}^{\infty} (u - u_{\infty}(x_{opt}, y)) dy$  et reliée à la force dimensionnée par unité d'envergure par  $F_T = \rho_f^* B f_T / MC$ , est tracée en comparaison avec les mesures directes par les capteurs de forces moyennées temporellement (dégradé de bleu). Ces mesures sont en adéquation pour les faibles amplitudes et fréquences. Cependant, la poussée calculée par les données PIV tend à être surestimée lorsque  $\omega/\omega_0 \approx 3$  et sous-estimée lorsque  $\omega/\omega_0 \geq 3$ . Ces calculs sont probablement faussés par les effets tridimensionnels du fluide. La surestimation de la poussée réelle pour  $\omega/\omega_0 > 2$  peut s'expliquer par les approximations de la méthode de bilan de quantité de mouvement, qui implique notamment un écoulement purement bidimensionnel.

Ces résultats expérimentaux par mesures directes confirment les travaux numériques de Michelin *et al.* (2009) [59] : les maxima en poussée se présentent aux mêmes fréquences que les résonances en amplitude. Effectivement, les maxima de

poussée se produisent à  $\omega/\omega_0 = 0.9$  et  $6.3$  pour l'amplitude imposée  $a_{LE} = 0.07$  (courbe en bleu foncé sur la figure 4.13) et à  $\omega/\omega_0 = 0.7$  et  $4.4$  pour l'amplitude imposée  $a_{LE} = 0.24$  (courbe en vert). Ceci souligne un lien extrêmement fort entre les maxima d'amplitude et ceux en poussée, liés théoriquement par leurs définitions. Cependant, l'évolution de la poussée pour l'amplitude intermédiaire est surprenante et suggère une amplitude optimale de battement pour obtenir une poussée maximale, dans la limite de la première résonance. En effet, l'évolution de l'amplitude relative est correcte mais la poussée résultante évolue comme si le système approchait d'un maximum de poussée pour la configuration expérimentale testée  $\{B, Re\}$ . Cependant la dépendance avec l'amplitude serait alors perdue. Le modèle, qui prédit correctement l'évolution de la poussée générée par les amplitudes extrêmes testées, ne met pas en avant un tel comportement de l'amplitude intermédiaire. Celui-ci mérite d'être approfondi expérimentalement pour déterminer s'il n'est pas dû à un artéfact de manipulation.

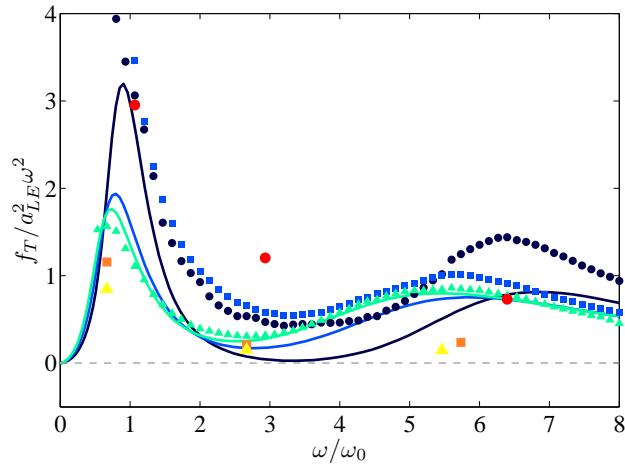


FIGURE 4.13 – Poussée totale générée par la plaque oscillante en fonction de l'amplitude de battement. Les lignes continues représentent l'estimation de la poussée et les symboles la poussée totale mesurée par les deux techniques expérimentales : à partir des champs PIV (dégradé de rouge) et de la mesure directe par capteur de force (dégradé de bleu). Le dégradé de bleu représente respectivement, du plus foncé au plus clair, les amplitudes de forçage  $a_{LE} = 0.07, 0.17$  et  $0.24$  pour une rigidité de flexion  $B_1$  dans l'eau sans écoulement.

Une explication pour les différences entre l'expérience à petite amplitude et sa prédiction, peut être fournie par le fait que le terme non linéaire n'est possiblement pas adapté à ce problème. Un second phénomène explicatif pourrait être le coefficient de traînée transverse, tenu constant au cours de la résolution du système couplé (équation (4.52)) à mesure que la fréquence augmente. Donc à mesure que les effets tridimensionnels s'installent expérimentalement. L'hypothèse de la forme du coefficient de traînée constant réside sur la proportionnalité entre la force resistive et le carré de la vitesse, ce qui peut s'avérer une hypothèse forte. Le développe-

ment faiblement non linéaire, pour avoir une modélisation aussi simple que possible, néglige les termes cubiques impliqués. Il est alors envisageable d'imaginer un rôle beaucoup plus important que celui présupposé.

## 4.6 Efficacité et Optimisation

La poussée générée ayant été quantifiée, il est intéressant de faire de même pour les performances du système *via* l'efficacité. Par souci de simplicité, nous allons émettre des hypothèses supplémentaires. La dynamique de la plaque sera décrite par le premier mode propre de résonance, lui-même proche de la première résonance ( $N = 1$ ), puisque sa déformée est très bien représentée par ce seul mode (voir figure 4.11). Les termes de dissipation linéaires sont négligés ( $\nu = \mu = 0$ ) (voir figures 4.6). Nous allons toutefois lever l'hypothèse d'une fréquence réduite asymptotiquement grande. Le calcul de l'efficacité sera par conséquent valable pour toute valeur de  $\sigma$ . Sous ces conditions, l'équation (4.52) décrivant la dynamique de la plaque devient :

$$k_1^4 a + mu^2 c_{DALE} \frac{2}{3\pi} \int_{-1}^1 h_1 |ik(1 + ah_1) + a\partial_x h_1| (ik(1 + ah_1) + a\partial_x h_1) dx - mu^2 (b_0(k) + b_1(k)a) = 0, \quad (4.75)$$

avec

$$a = a_1/a_{LE}, \quad (4.76)$$

$$b_0(\sigma) \approx 1.188\sigma^2 - 0.995i\sigma C_{TH}(\sigma), \quad (4.77)$$

$$b_1(\sigma) \approx 1.131\sigma^2 - 2.216i\sigma - 0.261 - (1.247 + 1.350i\sigma) C_{TH}(\sigma). \quad (4.78)$$

La fonction de Théodorsen  $C_{TH}$  [77] est donnée par (4.44). Dans l'équation (4.75), on reconnaît les termes élastiques, d'amortissement non linéaire et le saut de pression introduit dans l'équation du mouvement global de la plaque (équation 4.30). Les premiers termes dans les équations (4.77) et (4.78) correspondent aux coefficients  $\beta_{10}$  et  $\beta_{11}$  de l'équation (4.52). Leurs valeurs sont données dans la table 4.1. Les autres termes émergent de l'extension de la théorie pour des fréquences réduites  $\sigma$  modérées.

La puissance moyenne nécessaire pour forcer la plaque s'exprime par  $\varpi = \varpi_P + \varpi_R$  et provient des termes de pression et de réaction de la plaque, tels que :

$$\varpi_P = \frac{1}{2\omega} \int_{-1}^1 \Re(p \overline{\partial_t h}) dx, \quad (4.79)$$

$$\varpi_R = \frac{1}{2\omega} \int_{-1}^1 \frac{4}{3\pi} c_D \Re \left[ |\partial_t h + u\partial_x h| (\partial_t h + u\partial_x h) \overline{\partial_t h} \right] dx. \quad (4.80)$$

La puissance adimensionnée  $\varpi$  est reliée à la puissance moyenne dimensionnée par  $\mathcal{P} = \rho_f^* B \Omega \varpi / M$  (en  $\text{W.m}^{-1}$ ) qui mesure la puissance moyenne par unité d'envergure. De la puissance  $\varpi$  et de la poussée  $f_T$ , nous définissons une efficacité dite de Froude définie comme :

$$\eta = \frac{F_T U}{\mathcal{P}} = \frac{f_T}{\sigma \varpi}. \quad (4.81)$$

Étant donné que notre système expérimental ne nous permet pas de mesurer l'énergie fournie et que les prédictions du modèle s'accordent avec les résultats expérimentaux, l'efficacité de Froude du système flexible se calcule théoriquement par la relation (4.81). Celle-ci est vérifiée pour toutes les fréquences réduites  $\sigma$ , donc pour toutes les vitesses  $u$ . Dans la partie suivante où le modèle est comparé aux données de Quinn *et al.*, (2013) [67], l'efficacité calculée sera confrontée aux résultats expérimentaux. L'utilisation de l'efficacité de Froude pour mesurer les performances du système a été critiquée [5], car elle ne permettrait pas une comparaison équitable des différents systèmes de propulsion.

Dans la plupart des études de la littérature, la configuration d'activation et le système propulsif sont fixés, puis les performances en sont déduites. Dans le cas présent, nous proposons une approche légèrement différente : il s'agit d'une approche d'optimisation en fixant la poussée souhaitée. Dans ce cas, l'efficacité de Froude est pertinente. Considérons que l'on souhaite trouver un système propulsif optimal pour un véhicule donné, se déplaçant à une vitesse elle aussi donnée. En unités dimensionnées, nous allons considérer une vitesse  $U$ , une densité de fluide  $\rho_f^*$ , un profil de type plaque de densité surfacique  $M$  et de demi-corde  $C$ , se déplaçant avec une force de poussée souhaitée  $F_T$ . D'un autre côté, la rigidité en flexion de la plaque  $B$  et les paramètres d'oscillation  $\Omega$  et  $A_{LE}$  sont déterminés de façon à minimiser la puissance requise  $\mathcal{P}$  pour animer le système.

À partir des cinq valeurs de variables fixées  $(U, \rho_f^*, M, C, F_T)$  qui s'expriment avec trois unités indépendantes (longueur, temps et masse), deux nombres sans dimension peuvent être établis : le rapport de masse (ou masse ajoutée)  $m$  et le nombre de Lighthill  $Li$  définis par :

$$m = \frac{\rho_f^* C}{M}, \quad (4.82)$$

$$Li = \frac{F_T}{\rho_f^* U^2 C} = \frac{f_T}{u^2}. \quad (4.83)$$

Nous supposons que  $m$  est asymptotiquement grand, signifiant que l'épaisseur de la plaque est très faible devant sa longueur. Ceci justifie *a posteriori* de négliger les amortissements inertIELS et linéaires dans l'équation (4.75). Le nombre de Lighthill peut être vu comme le rapport de la poussée désirée, ou de la traînée à surpasser, et de la poussée "atteignable"  $\rho_f^* U^2 C$  (par unité d'envergure). Les trois paramètres à optimiser,  $B$ ,  $\Omega$  et  $A_{LE}$ , correspondent aux unités adimensionnées de la rigidité

$b$ , de la fréquence réduite  $\sigma$  et de l'amplitude de forçage  $a_{LE}$  telles que :

$$b = \frac{B}{\rho_f^* U^2 C^3} = \frac{1}{m u^2}, \quad (4.84)$$

$$\sigma = \frac{\Omega C}{U}, \quad (4.85)$$

$$a_{LE} = \frac{A_{LE}}{C}. \quad (4.86)$$

Dans (4.75),  $u$  apparaît toujours sous la forme  $m u^2$ , d'où l'utilisation du paramètre  $b$  plutôt que  $u$  précédemment défini.

Le problème d'optimisation sous contrainte que l'on souhaite résoudre consiste à trouver le maximum d'efficacité  $\eta$ , tel que  $f_T = Li u^2$  et  $(b, \sigma, a_{LE}) \in \mathbb{R}^{+3}$ . Pour résoudre ce problème d'optimisation, nous fixons dans un premier temps la valeur de  $Li$  et supposons une valeur arbitraire initiale pour la rigidité  $b$ . Dans un second temps, sont calculées, pour toutes les valeurs de la fréquence réduite  $\sigma$ , l'amplitude  $a_{LE}$  nécessaire à la génération de poussée  $f_T = Li u^2$ . Pour une certaine valeur de  $\sigma$ , l'efficacité atteint une valeur maximale  $\eta_{\max}(Li, b)$ . Le processus est alors réitéré pour différentes valeurs de la rigidité  $b$  et le maximum de  $\eta$  est défini (voir la figure 4.14(a)). Ce maximum correspond à la valeur optimale de l'efficacité  $\eta^{\text{optim}}$  pour le triplet  $(b^{\text{optim}}, k^{\text{optim}}, a_{LE}^{\text{optim}})$ . La figure 4.14(b) montre l'évolution de ces paramètres lorsque le nombre de Lighthill évolue entre  $0.03 \leq Li \leq 1$ .

Pour des petites valeurs de  $Li$  ( $Li \leq 0.02$ ), l'optimum est atteint dans la limite où la rigidité devient nulle. Dans ce cas, le mouvement optimum correspond à une amplitude de forçage  $a_{LE}$  infinie, mais à une vitesse au bord d'attaque  $\sigma a_{LE}$  finie. Ceci illustre les limites de la théorie présentée. Pour de grandes amplitudes de forçage, l'approche faiblement non linéaire n'est plus valide et, de toute façon, les résultats du calcul d'optimisation sont sensibles à la façon dont la succion et la séparation de l'écoulement au bord d'attaque sont modélisées (voir équation (4.71)).

Néanmoins, pour des valeurs modérées du nombre de Lighthill, il existe un optimum dans l'espace des paramètres (figure 4.14). Ce mouvement optimum correspond toujours à la résonance d'une plaque en battement : pour  $0.03 \leq Li \leq 1$ , la pulsation optimale est toujours dans le petit intervalle  $1.03 \leq \omega/\omega_0 \leq 1.07$ , correspondant à la résonance du premier mode propre du système. Cependant, l'amplitude de forçage optimale n'équivaut pas à une valeur quasi constante du nombre de Strouhal, contrairement à ce qui a récemment été suggéré par Dewey *et al.*, (2013) [15]. Dans l'intervalle où le mouvement optimal existe ( $0.03 \leq Li \leq 1$ ), le nombre de Strouhal du battement optimal se comporte comme  $St^{\text{optim}} \approx 0.5Li^{0.5}$ , variant en conséquence entre 0.08 et 0.5 dans l'intervalle considéré. Ici, le nombre de Strouhal est construit de manière classique [81] avec l'amplitude de déflexion

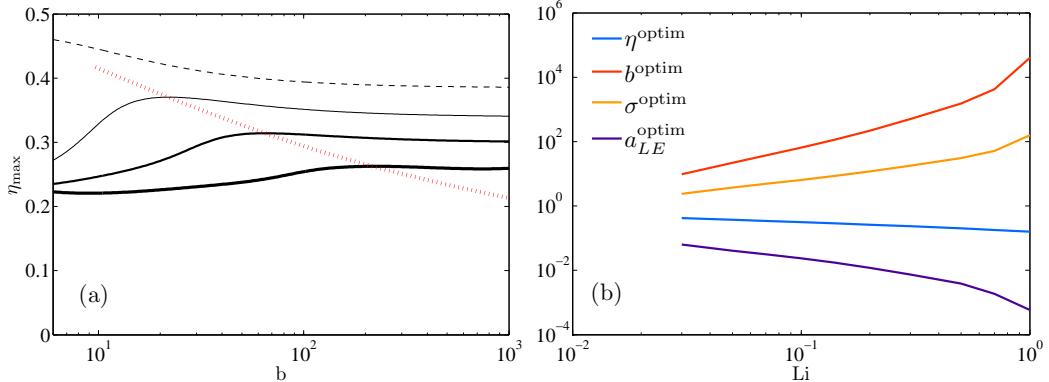


FIGURE 4.14 – Optimisation d'un mouvement d'une plaque flexible. (a) Efficacité maximale  $\eta_{\max}$  en fonction de la rigidité du profil  $b$  pour quatre valeurs de  $Li$  : 0.02 (tirets), 0.05 (ligne fine), 0.1 (ligne médium) et 0.2 (ligne épaisse). La ligne en pointillés montre les points des valeurs optimales de  $\eta_{\max}$  pour  $Li \geq 0.03$ . (b) Les valeurs optimales de l'efficacité  $\eta^{\text{optim}}$  en fonction de  $Li$  avec les valeurs optimales correspondantes à la rigidité, la fréquence réduite, et l'amplitude de forçage ( $b^{\text{optim}}$ ,  $\sigma^{\text{optim}}$ ,  $a_{LE}^{\text{optim}}$ ).

au bord de fuite comme :

$$St = \frac{\Omega A_{TE}}{\pi U} = \frac{\sigma a_{TE}}{\pi}. \quad (4.87)$$

Ceci peut être confronté aux lois d'échelles trouvées dans la limite des corps élancés. Il a été trouvé que le nombre de Strouhal n'était pas constant lors du déplacement optimal :  $St^{\text{optim}} \approx 0.75 Li^{0.33}$  [21]. On note que la définition du nombre de Lighthill utilisée diffère légèrement de celle introduite par l'équation (4.83) puisque le problème dans la limite des corps élancés était tridimensionnel.

Pour avoir une estimation du nombre de Lighthill pour un poisson ou un véhicule sous-marin bio-inspiré, nous supposons que la corde et l'envergure du système de propulsion sont de même taille. Le nageur dans son entier a alors un rapport d'aspect de 1/5 environ, en supposant que  $C = 0.1L$  avec  $L$  la longueur du nageur. Étant donné que la majorité de la traînée est due à la traînée de peau, la poussée nécessaire pour contre-balancer cette traînée (par unité d'envergure) est approximativement  $F_T \approx \frac{1}{2}\rho_f^* U Re^{-1/2} L^2 / C$ , lorsque les couches limites sont laminaires, et avec un nombre de Reynolds basé sur la longueur du corps  $Re = UL/\nu$ . Le nombre de Lighthill résultant s'exprime alors comme  $Li = F_T / (\rho_f^* U^2 C) \approx 50 Re^{-1/2}$ . Il correspond à  $St^{\text{optim}} \approx 3.5 Re^{-1/4}$ , ce qui est approximativement la loi d'échelle trouvée dans les récentes compilations de données biologiques [21, 28] pour des couches limites laminaires, c'est-à-dire quand  $Re \lesssim 10^5$ . Remarquons que le nombre de Strouhal n'est pas nécessairement un paramètre pertinent dans l'optimisation, puisqu'il résulte de l'équilibre des forces de poussée et de traînée pour une vitesse de nage donnée.

## 4.7 Comparaison avec les données de la littérature

Pour valider la modélisation développée, nous avons confronté des prédictions du modèle théorique avec les expériences faites au sein du groupe de A. Smits [67] (Princeton University). Leur expérience est proche de la nôtre, avec un profil de type plaque mince flexible rectangulaire activée en pilonnement, avec l'amplitude d'oscillation tenue constante. Les paramètres à implanter dans le modèle sont la masse volumique de la plaque  $\rho_p^*$  en acier égale à  $7800 \text{ kg.m}^{-3}$ , la rigidité en flexion (par unité d'envergure)  $B = 2.130 \text{ N.m}$  du profil, dont l'épaisseur est de  $0.66 \text{ mm}$  et la demi-corde  $C = 0.0975 \text{ m}$ . Le profil est immergé dans un écoulement de vitesse  $0.11 \text{ m.s}^{-1}$  et soumis à un forçage harmonique d'amplitude  $A_{LE} = 0.01 \text{ m}$ . La fréquence propre de la plaque est déterminée par la relation (4.68) et vaut  $F_0 = 2.08 \text{ Hz}$ .

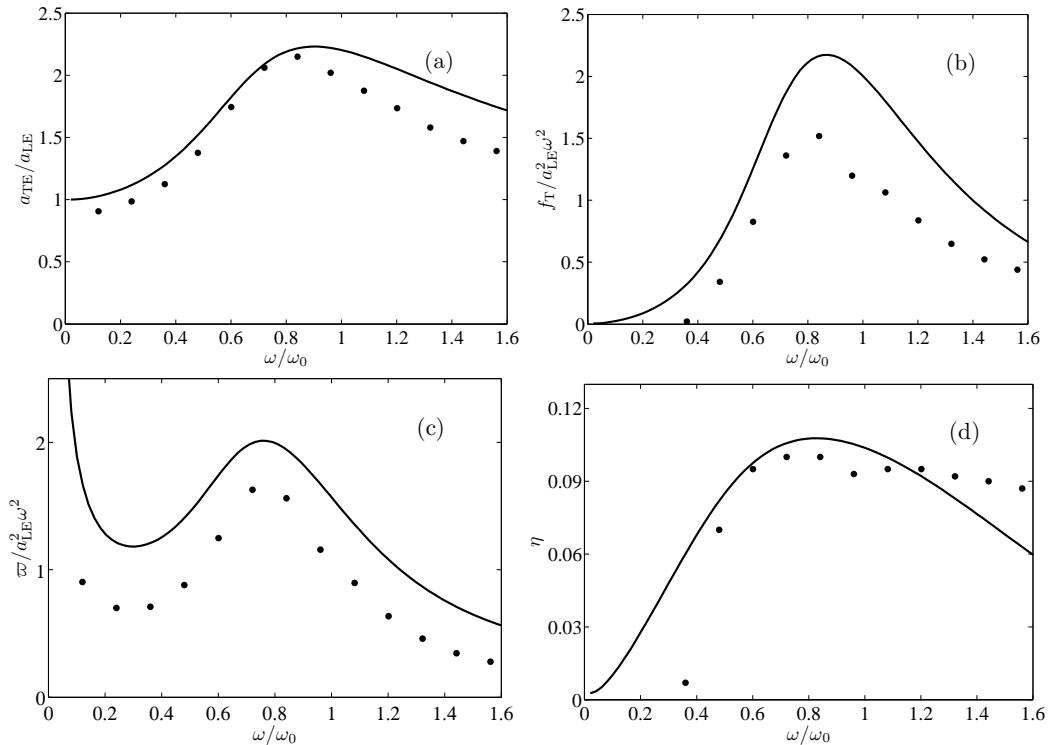


FIGURE 4.15 – Comparaison des données obtenues expérimentalement par Quinn *et al.*, (2013) [67] avec les prédictions du modèle développé : (a) l'amplitude de réponse, (b) la poussée générée, (c) la puissance nécessaire au système et (d) l'efficacité de Froude pour  $a_{LE} = 0.103$ ,  $u = 0.016$  et  $b = 190.2$  (rigidité par unité d'envergure).

La valeur de la dissipation non linéaire, estimée à  $c_D = 12$  dans notre cas, est conservée pour décrire le mouvement du système de Quinn *et al.* (2013) tandis que les coefficients de dissipation linéaire (fluide et visco-élastique) sont négligés. La dynamique de la plaque est décrite par le premier mode propre d'une poutre

dans le vide. Nous obtenons alors les courbes d'évolution sur la figure 4.15 : (a) de l'amplitude de réponse, (b) de la poussée générée par le battement, (c) de la puissance moyenne nécessaire et (d) de l'efficacité de Froude. De façon similaire à nos résultats, ces évolutions sont tracées en fonction de la fréquence de forçage, quand l'amplitude d'oscillation et la vitesse d'écoulement sont fixées. Ces essais de réponse fréquentielle du système montrent des maxima localisés, avec un premier pic à la fréquence  $\omega/\omega_0 \approx 0.8$ . L'amplitude de forçage dimensionnée imposée est équivalente à l'amplitude intermédiaire de notre cas. Le modèle prédit correctement l'évolution tant en magnitude qu'en fréquence des quantités mesurées, avec néanmoins une sur-estimation de la poussée et de la puissance. Ceci est certainement dû au fait que les amortissements linéaires ont été négligés, puisque les données expérimentales manquent.

## 4.8 Discussion

À partir des observations expérimentales du chapitre 3, nous avons développé un modèle bidimensionnel inviscide faiblement non linéaire. Dans ce modèle, les non linéarités émergent d'une force de traînée transverse. Elles sont dues au mouvement de la plaque et agissent comme un amortissement quadratique. Les termes non linéaires cubiques ont été négligés par souci de simplification du modèle. La magnitude de cette traînée, ajustée à travers le coefficient de traînée  $c_D$ , est le seul paramètre libre dans notre modèle et a été réglé plus ou moins arbitrairement pour coïncider avec les réponses fréquentielles menées pour différentes amplitudes. Une fois ce paramètre fixé, il garde cette valeur pour toutes les configurations simulées. L'accord entre les observations expérimentales et les prédictions du modèle est alors excellent pour les deux premières résonances, et ce, quelque soit l'amplitude de battement testée (petite ou grande).

À partir du modèle, la poussée moyenne générée par le battement de la plaque flexible est calculée. En complément, la puissance moyenne nécessaire à l'activation du système est également évaluée. L'accord est excellent entre les données expérimentales et les prédictions du modèle, et ce malgré les approximations entreprises, tant pour nos données expérimentales que pour celles de Quinn *et al.* (2013) [67] dont le dispositif expérimental est proche de celui que nous avons utilisé. Connaissant la poussée et la puissance nécessaire, l'efficacité de Froude du système peut être déterminée. Cette partie a seulement été comparée avec les données de Quinn *et al.*, (2013) puisque notre système n'autorise pas la mesure de puissance. Nous avons vu que par sa définition, l'efficacité de Froude est un choix naturel pour réaliser le problème d'optimisation suivant : pour une certaine poussée produite et une certaine vitesse de nage, quelle serait la meilleure conception pour un système de propulsion flexible ? En d'autres termes, quel serait le meilleur choix

pour la rigidité, l'amplitude de forçage et la fréquence de forçage pour que la puissance nécessaire au système soit minimale ? Dans ce contexte, nous avons résolu ce problème d'optimisation et avons montré que le mouvement optimal correspond toujours à la résonance du système {plaque + fluide}. Cependant, contrairement à ce qui a récemment été proposé [15], l'optimum global n'est pas atteint pour un nombre de Strouhal constant.

Le modèle présenté admet par ailleurs des limites qui doivent être prise en considération dans la construction d'un éventuel système de propulsion bio-inspirée optimal. Premièrement, les non linéarités devraient être prises en compte plus rigoureusement, à travers des simulations numériques par exemple. Ensuite, l'hypothèse de bidimensionalité devrait être levée pour des systèmes dont le rapport d'aspect est modéré, tels ceux trouvés chez les animaux marins. Finalement, lorsque la force de poussée est relativement grande, c'est-à-dire lorsque le nombre Lighthill est grand, la cinématique du système de propulsion ne peut plus être complètement dissociée du corps nécessaire au maintien de la partie active à la propulsion. La flexibilité de la plaque produit un couple qui induit une rotation autour du corps qui doit être prise en compte. Une possibilité serait de réaliser une optimisation expérimentale pour trouver la meilleure conception [66]. Cependant, si cette étude est menée, il faudra accorder une attention particulière aux objectifs de l'optimisation et aux contraintes de construction. Par ailleurs, nous soutenons que l'efficacité de Froude n'a de sens que dans la comparaison de systèmes propulsifs développant la même force et se déplaçant à la même vitesse.

Ces travaux ont fait l'objet d'un article inclus en annexe C, dont le présent chapitre est largement inspiré.

# Chapitre 5

## Conclusions et perspectives

### Sommaire du chapitre

---

5.1 Conclusion générale . . . . .	89
5.2 Perspectives . . . . .	91

---

### 5.1 Conclusion générale

La littérature a abondamment traité de la question de la nage, que ce soit à partir d'expériences en laboratoire ou de simulations numériques. Toutefois, l'aspect analytique de la dynamique d'une structure flexible n'a été que peu abordé et constitue, dans ce champ d'étude, une lacune que le présent travail a modestement contribué à combler. En effet, les études systématiques sur le rôle de la flexibilité, de l'amplitude et de la fréquence d'activation dans la propulsion manquaient. Et de ce fait, l'impact des paramètres expérimentaux sur la réponse d'une structure flexible forcée, et donc sur la propulsion générée, n'était pas clairement compris. C'est dans ce contexte que cette étude a été conduite.

Le système expérimental proposé permet de caractériser la réponse passive d'une plaque flexible en fonction des paramètres de forçage imposés à une de ses extrémités. Le forçage a été imposé au bord d'attaque pendant que la dynamique du bord de fuite de la plaque est mesurée. Le mouvement imposé prend la forme d'une oscillation harmonique en pilonnement. Les paramètres expérimentaux contrôlés sont l'amplitude et la fréquence d'activation, la flexibilité de la structure et la vitesse de l'écoulement uniforme dans lequel est immergée la plaque. Le système présente un fort couplage entre la structure et le fluide environnant. Le rôle de la flexibilité dans la propulsion a été étudié en deux temps : le premier consiste à déterminer l'influence de tous les paramètres expérimentaux sur la dynamique de la plaque, le second à établir la relation entre cette dynamique et la propulsion générée, à travers l'étude des efforts produits par le système battant.

Les courbes de réponse de l'amplitude relative de la réponse de la plaque en fonction de la fréquence d'activation montrent une résonance du système {plaque + fluide}. L'étude systématique des paramètres expérimentaux révèle que seule l'amplitude de forçage amène un changement significatif de la réponse. Des non linéarités sont donc présentes : plus l'amplitude de forçage est élevée, plus l'amplitude *relative* de la réponse est faible. Dans la gamme étudiée, la vitesse de l'écoulement a un impact mineur sur la réponse et la flexibilité de la structure intervient seulement au travers les fréquences de résonance, puisque cette propriété intrinsèque affecte la fréquence naturelle de la structure. En d'autres termes, la résonance implique que l'amplitude de réponse est maximale lorsque la fréquence imposée est égale aux fréquences propres du système {plaque + fluide}.

L'interaction fluide-structure flexible a été mise en avant par l'étude de la propulsion générée. Les visualisations par colorant mettent en évidence un sillage propulsif sous la forme d'une allée inversée de Bénard-von Kármán. Les mesures quantitatives par bilan de quantité de mouvement (extraite de champs PIV) et par mesures directes (capteurs de forces) témoignent du caractère propulsif du système, dès lors que l'amplitude d'activation est suffisante. Lorsque la première résonance est passée, la différence des résultats des deux méthodes souligne la limite de l'hypothèse bidimensionnelle de l'écoulement.

Ces observations expérimentales ont inspiré un modèle analytique faiblement non linéaire. Celui-ci est bidimensionnel et l'écoulement est considéré comme non visqueux et potentiel. La théorie aérodynamique de Theodorsen traitant des ailes instationnaires s'applique pour donner les forces de pression en action. Les non linéarités s'expriment à travers un coefficient de traînée transverse qui est traité comme un paramètre ajustable. Le modèle inclut également deux termes de dissipation linéaire : le premier correspond à l'amortissement dû au fluide environnant, le second traduit la dissipation visco-élastique interne à chaque plaque. Les valeurs des deux coefficients d'amortissement associés sont mesurées indépendamment par des expériences de réponse impulsionale. La déflection de la plaque est prise sous la forme d'une décomposition en mode propre d'une poutre dans le vide, en plus d'un mouvement rigide pour reproduire le forçage.

Les prédictions de l'amplitude relative en fonction de la fréquence sont en excellent accord avec les résultats expérimentaux, tant en amplitude qu'en fréquence. La poussée totale calculée est décomposée comme la poussée due au saut de pression à travers la plaque et celle provoquée par la réaction du fluide au mouvement. Cette décomposition est basée sur les travaux de Wu et Lighthill qui ont introduit les premiers modèles hydrodynamiques de la nage [91, 49]. L'accord entre les prédictions et les mesures est très satisfaisant, notamment pour la plus grande amplitude testée. La différence en magnitude pour la plus petite amplitude a été discutée et imputée à la force de succion au bord d'attaque négligée dans cette

modélisation. Le modèle a également été comparé à une étude expérimentale de Quinn *et al.* (2013) [67]. La puissance requise pour activer le mouvement avec la poussée générée permet d'exprimer l'efficacité de Froude du système. Malgré les simplifications faites sur les amortissements linéaires fixés à zéro, les prédictions sont très correctes. L'étude d'optimisation des paramètres de flexibilité, d'amplitude et de fréquence de forçage, a été menée. L'idée est de fixer la vitesse de nage et la poussée souhaitées et d'optimiser la flexibilité, l'amplitude et la fréquence de forçage pour atteindre cette vitesse avec cette poussée. La conclusion principale de calcul de l'optimisation est que le mouvement optimal correspond toujours à une résonance du système.

## 5.2 Perspectives

Si cette étude a confirmé l'idée qu'un système flexible exploite la résonance pour améliorer la propulsion, elle ouvre d'autres portes, notamment en rapport avec le thème du bio-mimétisme. En effet, dans la perspective de construire des robots aquatiques bio-inspirés, les quantités constituant le système forment un système couplé dont chacune des quantités doit être optimisée pour constituer un ensemble hautement performant. Toutefois, cette performance ne peut être atteinte que lorsque les spécifications du futur robot sont précisément établies, une approche différente doit alors être adoptée.

La question de l'optimisation est toujours en suspens et doit impérativement être considérée si nous souhaitons non seulement développer la construction de robots aquatiques, mais également comprendre pleinement la locomotion des animaux marins. C'est encore dans cette dimension que l'étude du système complet, comprenant le corps (rigide) et le système de propulsion (flexible ?), devrait être conduite. Dans un premier temps, par des essais expérimentaux en laboratoire afin d'aborder les conséquences du changement de système, puis dans un second temps, par des simulations numériques, qui permettront une analyse systématique de l'espace des paramètres pour parvenir à un système optimal. Les dimensions finies du système doivent être prises en considération lors des études expérimentales puisque les effets tridimensionnels ne sont pas négligeables à hautes fréquences d'activation. Le problème devient alors très complexe, puisqu'il fait intervenir à la fois l'optimisation de la forme du "nageur" déformable et le couplage fluide-structure flexible sous différentes conditions (vitesse d'écoulement, rigidité adaptée, *etc.*).

Cette étude ne s'est ni intéressée à l'influence du rapport d'aspect, ni à la forme du système de propulsion. Bien que des études aient été conduites dans ce sens [26], la forme optimale reste à déterminer.

Le modèle présenté admet cependant des limites qui doivent être prise en considération dans la construction d'un éventuel système de propulsion bio-inspirée

optimal. Premièrement, les non linéarités devraient être prises en compte plus rigoureusement, à travers des simulations numériques par exemple. Ensuite, l'hypothèse de bidimensionalité devrait être levée pour des systèmes dont le rapport d'aspect est modéré, tels ceux trouvés chez les animaux marins. Finalement, lorsque la force de poussée est relativement grande, c'est-à-dire lorsque le nombre Lighthill est grand, la cinématique du système de propulsion ne peut plus être complètement dissociée du corps nécessaire au maintien de la partie active à la propulsion. La flexibilité de la plaque produit un couple qui induit une rotation autour du corps qui doit être prise en compte. Une possibilité serait de réaliser une optimisation expérimentale pour trouver la meilleure conception [66]. Cependant, si cette étude est menée, il faudra accorder une attention particulière aux objectifs de l'optimisation et aux contraintes de construction.

# Bibliographie

- [1] S. Alben. Optimal flexibility of a flapping appendage in an inviscid fluid. *J. Fluid Mech.*, 614 :355–380, 2008. 11
- [2] S. Alben. Dynamics of freely swimming flexible foils. *Phys. Fluids*, 24 :051901, 2012. 12, 13, 14, 56
- [3] J.M. Anderson, K. Streitlien, D.S. Barrett, and M.S. Triantafyllou. Oscillating foils of high propulsive efficiency. *J. Fluid Mech.*, 360 :41–72, 1998. 8, 9, 10, 12
- [4] R. Bainbridge. Caudal fin and body movement in the propulsion of some fish. *J. Exp. Biol.*, 40 :23–56, 1963. 3, 4, 7, 18
- [5] D.S. Barrett, M.S. Triantafyllou, D.K.P. Yue, M.A. Grosenbaugh, and M.J. Wolfgang. Drag reduction in fish-like locomotion. *J. Fluid Mech.*, 392 :183–212, 1999. 15, 83
- [6] M. Bergmann, A. Iollo, and R. Mittal. Effect of caudal fin flexibility on the propulsive efficiency of a fish-like swimmer. *Bioinspir. Biomim.*, page 046001, 2014. 13
- [7] R.W. Blake. Fish functional design and swimming performance. *J. Fish Biol.*, 65 :1193–1222, 2004. 3, 5, 7
- [8] C. Brennen and H. Winet. Fluid mechanics of propulsion by cilia and flagella. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 9 :339–398, 1977. 1
- [9] J.H.J. Buchholz and A.J. Smits. The wake structure and thrust performance of a rigid low-aspect-ratio pitching panel. *J. Fluid Mech.*, 603 :331–365, 2008. 9
- [10] S. Childress. Mechanics of swimming and flying. Cambridge University Press, 1981. 1, 7

- [11] A. Crespi and A.J. Ijspeert. Amphibot iii : An amphibious snake robot that crawls and swims using a central pattern generator. *Proceeding of the 9<sup>th</sup> international conference on climbing and walking robots (CLAWAR 2006)*, 11 :19–27, 2006. 15
- [12] P.J.S.A. Ferreira da Sousa and J.J. Allen. Thrust efficiency of harmonically oscillating flexible flat plates. *J. Fluid Mech.*, 674 :43–66, 2011. 13
- [13] J.O. Dabiri. On the estimation of swimming and flying forces from wake measurements. *J. Exp. Biol.*, 208 :3519–3532, 2005. 45
- [14] J.O. Dabiri, S. Bose, B.J. Gemmell, S.P. Colin, and J.H. Costello. An algorithm to estimate unsteady and quasi-steady pressure fields from velocity field measurements. *J. Exp. Biol.*, 217 :331–336, 2014. 47
- [15] P.A. Dewey, B.M. Boschitsch, K.W. Moore, H.A. Stone, and A.J. Smits. Scaling laws for the thrust production of flexible pitching panels. *J. Fluid Mech.*, 732 :29–46, 10 2013. 10, 12, 14, 56, 84, 88
- [16] O. Doaré, D. Mano, and J.C.B. Ludena. Effect of spanwise confinement on flag flutter : Experimental measurements. 23 :111704, 2011. 42
- [17] O. Doaré, M. Sauzade, and C. Eloy. Flutter of an elastic plate in a channel flow : Confinement and finite-size effects. *J. Fluids Struc.*, 27 :76–88, 2011. 42
- [18] J.D. Eldredge, J. Toomey, and A. Medina. On the role of chord-wise flexibility in flapping wing with hovering kinematics. *J. Fluid Mech.*, 659 :94–115, 2010. 13
- [19] C.P. Ellington, C. Berg, A.P. Willmott, and A.L.R. Thomas. Leading-edge vortices in insect flight. *Nature*, 384 :626–630, 1996. 8, 64
- [20] C. Eloy. Optimal strouhal number for swimming animals. *J. Fluids Struc.*, 30 :205–218, 2012. 3, 10, 16
- [21] C. Eloy, N. Kofman, and L. Schouveiler. The origin of hysteresis in the flag instability. *J. Fluid Mech.*, 691 :583–593, 2012. 41, 70, 85
- [22] C. Eloy, R. Lagrange, C. Souilliez, and L. Schouveiler. Aeroelastic instability of cantilevered flexible plates in uniform flow. *J. Fluid Mech.*, 611 :97–106, 9 2008. 16, 38
- [23] C. Eloy and L. Schouveiler. Optimization of two-dimensional undulatory swimming at high Reynolds number. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 46 :568–576, 2011. 14, 16, 56, 78

- [24] C. Eloy, C. Souillez, and L. Schouveiler. Flutter of a rectangular plate. *J. Fluids Struc.*, 23 :904–919, 2007. 16, 56
- [25] C.J. Esposito, J.L. Tangorra, B.E. Flammang, and G.V. Lauder. A robotic fish caudal fin : effects of stiffness and motor program on locomotor performance. *J. Exp. Biol.*, 215 :56–67, 2012. 12
- [26] K.L. Feilich and G.V. Lauder. Passive mechanical models of fish caudal fins : effects of shape and stiffness on self-propulsion. *Bioinspir. Biomim.*, 10 :036002, 2015. 91
- [27] F.E. Fish and G.V. Lauder. Passive and active flow control by swimming fishes and mammals. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 38 :194–224, 2006. 7, 17, 18
- [28] M. Gazzola, M. Argentina, and L. Mahadevan. Scaling macroscopic aquatic locomotion. *Nature Physics*, 10, 9 2014. 85
- [29] R. Godoy-Diana, J.L. Aider, and J.E. Wesfreid. Transition in the wake of a flapping foil. *Phys. Rev. E*, 77 :016308, 2008. 10, 44
- [30] R. Godoy-Diana, C. Marais, J.L. Aider, and J.E. Wesfreid. A model for the symmetry breaking of the reverse Bénard–von Kármán vortex street produced by a flapping foil. *J. Fluid Mech.*, 622 :23–32, 2009. 12, 13, 51
- [31] K.F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover Books on Engineering Series. Dover Publications, 1975. 56, 57
- [32] J. Gray. Studies in animal locomotion - i. the movement of fish with special reference to the eel. *J. Exp. Biol.*, 10 :88–104, 1933 a. 3
- [33] J. Gray. Studies in animal locomotion - iii. the propulsive mechanism of the whiting (*Gadus merlangus*). *J. Exp. Biol.*, 10 :391–400, 1933 a. 3
- [34] E. Guyon, J.P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. Savoirs actuels. EDP Sciences, 2001. 9, 23, 66
- [35] S. Heathcote and I. Gursul. Flexible flapping airfoil propulsion at low Reynolds number. *AIAA Journal*, 45(5) :1066–1079, 2007. 7, 11
- [36] S.F. Hoerner. *Fluid-dynamic drag : practical information on aerodynamic drag and hydrodynamic resistance*. Hoerner Fluid Dynamics, 1965. 62, 72
- [37] A.E. Hosoi and D.I. Goldman. Beneath our feet : strategies for locomotion in granular media. 47 :431–453, 2015. 5
- [38] R. Hua, L. Zhu, and X. Lu. Locomotion of a flapping flexible plate. *Phys. Fluids*, 25 :121901, 2013. 13, 14

- [39] G Iosilevskii and D. Weihs. Speed limits on swimming of fishes and cetaceans. *Interface*, 5 :329–338, 2008. 6
- [40] C.-K. Kang, H. Aono, C.E.C Cesnik, and W. Shyy. Effect of flexibility on the aerodynamic performance of flapping wings. *J. Fluid Mech.*, 689 :32–74, 2011. 13
- [41] J. Katz and D. Weihs. Hydrodynamic propulsion by large amplitude oscillation of an airfoil with chordwise flexibility. *J. Fluid Mech.*, 88 :485–497, 1978. 7, 10, 13
- [42] M.M. Koochesfahani. Vortical patterns in the wake of an oscillating airfoil. *AIAA Journal*, 27 :1200–1205, 1989. 7, 9
- [43] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Course of theoretical physics. Pergamon Press, 1987. 51
- [44] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, A.M. Kosevich, and L.P. Pitaevskii. *Theory of Elasticity*. 4, 56
- [45] G.V. Lauder. Function of the caudal fin during locomotion in fishes : kinematics, flow visualization, and evolutionary patterns. *Amer. Zool.*, 40 :101–122, 2000. 4
- [46] G.V. Lauder and E.D. Tytell. Hydrodynamics of undulatory propulsion. *Fish Physiol.*, 23 :425–468, 2005. 7
- [47] D. Lentink, F.T. Muijres, F.J. Donker-Duyvis, and J.L. van Leeuwen. Vortex-wake interactions of a flapping foil that models animal swimming and flight. *J. Exp. Biol.*, 211 :269–273, 2008. 10, 45, 47
- [48] M.J. Lighthill. Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency. *J. Fluid Mech.*, 44 :265–301, 1960. 4, 8, 14, 15, 52
- [49] M.J. Lighthill. Note on the swimming of slender fish. *J. Fluid Mech.*, 9 :305–317, 1960. 4, 53, 56, 90
- [50] M.J. Lighthill. Hydromechanics of aquatic animal propulsion. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1 :413–446, 1969. 6, 7
- [51] M.J. Lighthill. Mathematical biofluidynamics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1975. 4, 5, 7, 77
- [52] C.C. Lindsey. *Form, function, and locomotory habits in fish*, volume 7 of *Fish Physiology*. Elsevier Science, 1979. 2, 3

- [53] J.H. Long and K.S. Nipper. The importance of body stiffness in undulatory propulsion. *Amer. Zool.*, 36 :678–694, 1996. 4
- [54] K.N. Lucas, N. Johnson, W.T. Beaulieu, E. Cathcart, G. Tirrell, S.P. Colin, B.J. Gemmell, J.O. Dabiri, and J.O. Costello. Bending rules for animal propulsion. *Nat. Commun.*, 5 :3293, 2014. 7
- [55] C. Marais. *Dynamique tourbillonnaire dans le sillage d'un aileron oscillant*. Thèse, Université Paris-Diderot - Paris VII, 2010. 48
- [56] C. Marais, B. Thiria, J.E. Wesfreid, and R. Godoy-Diana. Stabilizing effect of flexibility in the wake of a flapping foil. *J. Fluid Mech.*, 710 :659–669, 2012. 7, 11, 12
- [57] C.W. McCutchen. The trout caudal tail fin : a self-cambering hydrofoil. *J. Biomech.*, 3 :271–281, 1970. 7
- [58] P. Meunier and T. Leweke. Analysis and treatment of errors due to high velocity gradients in particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, 35(5) :408–421, 2003. 24, 25
- [59] S. Michelin and S.G. Llewellyn Smith. Resonance and propulsion performance of a heaving wing. *Phys. Fluids*, 21 :071902, 2009. 11, 13, 38, 40, 80
- [60] M.N.J. Moore. Analytical results on the role of flexibility in flapping propulsion. *J. Fluid Mech.*, 757 :599–612, 10 2014. 14, 56
- [61] K.W. Moore, P.A. Dewey, A.J. Smits, and H. Haj-Hariri. Hydrodynamic wake resonance as an underlying principle of efficient unsteady propulsion. *J. Fluid Mech.*, 707 :329–348, 2012. 12
- [62] J.S. Nelson. *Fishes of the World*. Wiley, 2006. 2
- [63] J.R. Nursall. The caudal fin as a hydrofoil. *Evolution*, 12 :116–120, 1958. 7
- [64] K. Ohmi, M. Coutanceau, O. Daube, and T. Phuoc Loc. Further experiments on vortex formation around an oscillating and translating airfoil at large incidences. *J. Fluid Mech.*, 225 :607–630, 1991. 10
- [65] P. Prempraneerach, F. S. Hover, and M. S. Triantafyllou. The effect of chordwise flexibility on the thrust and efficiency of a flapping foil. In Proc. 13<sup>th</sup> Int. Symp. on Unmanned Untethered Submersible Technology, 2003. 11
- [66] D. B. Quinn, G. V. Lauder, and A. J. Smits. Maximizing the efficiency of a flexible propulsor using experimental optimization. *J. Fluid Mech.*, 767 :430–448, 3 2015. 88, 92

- [67] D.B. Quinn, G.V. Lauder, and A.J. Smits. Scaling the propulsive performance of heaving flexible panels. *J. Fluid Mech.*, 738 :250–267, 2013. 12, 13, 51, 56, 83, 86, 87, 91, 140
- [68] S. Ramananarivo, R. Godoy-Diana, and B. Thiria. Rather than resonance, flapping wing flyers may play on aerodynamics to improve performance. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 108 :5964–5969, 2011. 41
- [69] D.A. Read, F.S. Hover, and M.S. Triantafyllou. Forces on oscillating foils for propulsion and maneuvering. *J. Fluids Struc.*, 17 :163–183, 2002. 8
- [70] S.P. Sane. The aerodynamics of insect flight. *J. Exp. Biol.*, 206 :4191–4208, 2003. 48
- [71] L. Schouveiler, F.S. Hover, and M.S. Triantafyllou. Performance of flapping foil propulsion. *J. Fluids Struc.*, 20 :949–959, 2005. 7, 9, 11, 16
- [72] M. Sfakiotakis, D. M. Lane, and J. B. C. Davies. Review of fish swimming modes for aquatic locomotion. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 24(2) :237–252, 1999. 7
- [73] M.J. Shelley and J. Zhang. Flapping and bending bodies interacting with fluid flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 43(1) :449–465, 2011. 38
- [74] W. Shyy, H. Aono, S.K. Chimakurthi, P. Trizila, C.-K. Kang, C.E.S. Cesnik, and H. Liu. Recent progress in flapping wing aerodynamics and aeroelasticity. *Progress in Aerospace Sciences*, 46 :284–327, 2010. 8, 64
- [75] S.E.. Spagnolie, L. Moret, M.J. Shelley, and J. Zhang. Surprising behaviors in flapping locomotion with passive pitching. 22(4) :-, 2010. 12
- [76] G.K. Taylor, R.L. Nudds, and A.L.R. Thomas. Flying and swimming animals cruise at a strouhal number tuned for high power efficiency. *Nature*. 9, 14
- [77] T. Theodorsen. *General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter*. National Advisory Committee for Aeronautics : Report. National Advisory Committee for Aeronautics, 1935. 65, 82
- [78] S. Timoshenko and J.N. Goodier. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company, 1951. 56
- [79] M.S. Triantafyllou and G.S. Triantafyllou. An efficient swimming machine. *Sci. Am.*, 272 :64–71, 1995. 7
- [80] M.S. Triantafyllou, G.S. Triantafyllou, and G.S. Gopalkrishnan. Wake mechanics for thrust generation in oscillating foils. *Phys. Fluids A*, 3 :2835–2837, 1991. 7, 9

- [81] M.S. Triantafyllou, G.S. Triantafyllou, and M.S. Grosenbaugh. Optimal thrust development in oscillating foils with application to fish propulsion. *J. Fluids Struc.*, 7 :205–224, 1993. 9, 14, 84
- [82] M.S. Triantafyllou, G.S. Triantafyllou, and D.K.P. Yue. Hydrodynamics of fishlike swimming. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 32 :33–53, 2000. 7, 44
- [83] M. Van Dyke. *An album of fluid motion*. An Album of Fluid Motion. Parabolic Press, 1982. 9
- [84] C.A. Van Eysden and J.E. Sader. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope : arbitrary mode order. *J. Appl. Phys.*, 101 :044908, 2007. 4
- [85] N. Vandenberghe, J. Zhang, and S. Childress. Symmetry breaking leads to forward flapping flight. *J. Fluid Mech.*, 506 :147–155, 2004. 13
- [86] J.J. Videler. *Fish Swimming*. Chapman & Hall fish and fisheries series. Springer, 1993. 3, 6, 7
- [87] S. Vogel. *Life in Moving Fluids : The Physical Biology of Flow*. Princeton paperbacks. Princeton University Press, 1994. 3, 7, 64
- [88] T. Von Kármán and J.M. Burgers. *Aerodynamic Theory : General aerodynamic theory : Perfect fluids*. Number v. 2. J. Springer, 1935. 8, 64, 66, 78
- [89] C. Wang and J. D. Eldredge. Low-order phenomenological modeling of leading-edge vortex formation. *Theor. Comp. Fluid Dyn.*, 27 :577–598, 2013. 78
- [90] C.H.K. Williamson and A. Roshko. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder. *J. Fluids Struc.*, 2 :355–381, 1988. 10, 44, 45, 47
- [91] T.Y. Wu. Swimming of a waving plate. *J. Fluid Mech.*, 10 :321–344, 1961. iv, 4, 8, 14, 16, 55, 56, 62, 64, 65, 69, 78, 90, 140
- [92] T.Y. Wu. Hydrodynamics of swimming propulsion. part 2. Some optimum shape problems. *J. Fluid Mech.*, 46 :521–544, 1971. 8, 14, 56, 64, 77, 78
- [93] T.Y. Wu. Fish swimming and bird/insect flight. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 43 :25–58, 2011. 9



## **Annexes**



## **Annexe A**

# **Experimental study of the response of a flexible plate to a harmonic forcing in a flow**

F. Paraz, C. Eloy et L. Schouveiler, “Experimental study of the response of a flexible plate to a harmonic forcing in a flow”, Comptes Rendus Mécanique, **342**, 532-538 (2014).





## Experimental study of the response of a flexible plate to a harmonic forcing in a flow



*Étude expérimentale de la réponse d'une plaque flexible à un forçage harmonique dans un écoulement*

Florine Paraz, Christophe Eloy, Lionel Schouveiler \*

Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE UMR 7342, 13384 Marseille cedex 13, France

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 14 April 2014

Accepted 10 June 2014

Available online 16 July 2014

#### Keywords:

Fluid-structure interaction  
Flexible plate  
Harmonic forcing  
Resonance  
Non-linearity  
Propulsion

#### Mots-clés :

Interaction fluide-structure  
Plaque flexible  
Forçage harmonique  
Résonance  
Non-linéarité  
Propulsion

### ABSTRACT

Most aquatic animals propel themselves by flapping flexible appendages. To gain insight into the effect of flexibility on the swimming performance, we have studied experimentally an idealized system. It consists of a flexible plate whose leading edge is forced into a harmonic heave motion, and which is immersed in a uniform flow. As the forcing frequency is gradually increased, resonance peaks are evidenced on the plate's response. In addition to the forcing frequency, the Reynolds number, the plate rigidity and the forcing amplitude have also been varied. In the range of parameters studied, the main effect on the resonance is due to the forcing amplitude, which reveals that non-linearities are essential in this problem.

© 2014 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

### RÉSUMÉ

La plupart des animaux aquatiques se propulsent grâce au battement d'appendices flexibles. Afin d'avoir une meilleure compréhension de l'effet de la flexibilité sur la performance de la nage, nous avons étudié expérimentalement un système idéalisé. Il consiste en une plaque flexible, immergée dans un écoulement uniforme, dont le bord d'attaque est forcé en un mouvement harmonique transverse à l'écoulement. En augmentant graduellement la fréquence de forçage, des pics de résonance ont été mis en évidence. Outre la fréquence de forçage, on a également fait varier le nombre de Reynolds, la rigidité de la plaque et l'amplitude du forçage. Dans le domaine de paramètres étudié, le principal effet sur la résonance est dû à l'amplitude du forçage, ce qui révèle que les non-linéarités sont essentielles dans ce problème.

© 2014 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [florine.paraz@irphe.univ-mrs.fr](mailto:florine.paraz@irphe.univ-mrs.fr) (F. Paraz), [christophe.elyo@irphe.univ-mrs.fr](mailto:christophe.elyo@irphe.univ-mrs.fr) (C. Eloy), [\(L. Schouveiler\).](mailto:lionel.schouveiler@irphe.univ-mrs.fr)

## 1. Introduction

Animal swimming has attracted a lot of attention from hydrodynamicists in the last decades. This interest was partly motivated by the design of bioinspired aquatic propulsion devices. Numerous reviews can be found on the different aquatic propulsion modes, such as the monographs of Lighthill [1] and Childress [2] or the articles of Lighthill [3], Sfakiotakis et al. [4] and Triantafyllou et al. [5]. Propulsion using flapping appendages is common for large aquatic animals and, in particular, most of the fast swimmers such as sharks, tuna and dolphins flap their caudal fins to propel themselves. An observation of these appendages shows that they are generally flexible along the chord. It has often been argued (e.g. [6] and [7]), that this flexibility enhances the swimming performance. However, the origin of this performance enhancement has proved elusive so far.

Inspired by this caudal-fin swimming mode, different studies have been carried out to quantify the propulsion efficiency of a flapping foil. Propulsion by rigid foils has been first studied theoretically by Lighthill [8] and Wu [9]. It has also been the object of experiments by Triantafyllou et al. [10], Anderson et al. [11], Schouwiler et al. [12], and Buchholz and Smits [13], among others. These experimental studies have all reported that propulsion performance is maximized for a flapping frequency  $f$  corresponding to a Strouhal number  $St \approx 0.3$ , where  $St = 2f A_{TE}/U$ , with  $A_{TE}$  the amplitude of the trailing edge motion and  $U$  the swimming speed. The same value of  $St \approx 0.3$  can be observed in nature for swimmers with moderate aspect ratios (cetaceans, sharks, salmon, trouts and scombrids) as seen in the data recently compiled in [14].

The numerical simulations of Katz and Weihs [15] have shown that, using a flapping foil flexible along its chord rather than a rigid one, yields an increase of the propulsive efficiency. In this case, because of the foil flexibility, its natural structural frequencies are introduced in the system, in addition to the flapping frequency. These structural frequencies depend not only on the geometry and the material of the foil but also on the surrounding flow because of added-mass effects. Two-dimensional numerical simulations of Alben [16] and Michelin and Llewellyn Smith [17] have later revealed peaks in the amplitude of the plate response, when the flapping and structural frequencies are resonant. They showed that efficiency can be maximized at these resonance peaks.

Gain in propulsive performance through the chordwise flexibility has been confirmed by the experimental works of Prempraneerach et al. [18], Heathcote and Gursul [19], or Marais et al. [20]. Moreover, Dewey et al. [21] for a pitching flexible plate, Alben et al. [22] and Quinn et al. [23] for a heaving flexible plate have clearly evidenced the phenomenon of resonance experimentally, as the forcing frequency is varied, and considered its link with propulsive performance, but none of these studies has considered the effect of changing the forcing amplitude.

In this study, to have a better understanding of the dynamics of a flexible fin, we have examined the response of an elastic plate immersed in a uniform flow and forced into a harmonic heave motion at its leading edge. The objective has been to quantify the influence of the different experimental parameters: the amplitude and frequency of forcing, the flow velocity, and the plate bending rigidity. This problem involves complex fluid-structure interactions since the flow load deforms the plate, whose motion in turn affects the flow. We believe that the full complexity of these interactions can only be addressed with experimental studies because, at the present time, accurate numerical simulations are limited to moderate Reynolds numbers and theoretical models usually assume linear problems, i.e. small-amplitude propulsion.

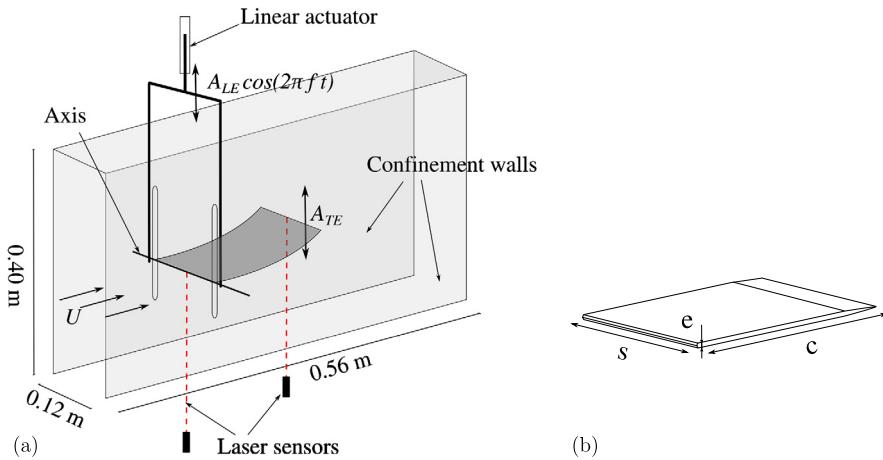
This paper is organized as follows: first the experimental set-up and methods are presented. Then the response of flexible plates to harmonic heave forcing is analyzed and effects of the different experimental parameters are discussed. Finally, some conclusions are drawn and discussed in the context of swimming.

## 2. Experimental set-up

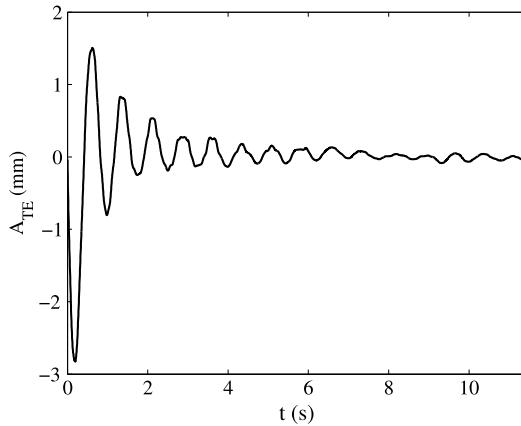
Experiments have been conducted with the set-up schematically illustrated in Fig. 1(a). It consists of a horizontal flexible plate molded out of polysiloxane with a rounded leading edge and a tapered trailing edge (Fig. 1(b)). The plates used have a thickness  $e = 0.004$  m, span  $s = 0.12$  m, and chord  $c = 0.12$  m, giving an aspect ratio  $s/c = 1$ . During molding, a rigid axis is inserted inside the plate at the leading edge; this axis has some roughness to prevent the rotation of the plate around it. This set-up reduces the flexible length of the chord to about 0.115 m. The plate is then immersed in a uniform flow, of velocity  $U$ , of a free surface water channel. The test section is 0.38 m wide, with a depth of water at rest of 0.45 m.

As shown in Fig. 1(a), the axis is attached to an inverted U-frame such that the plate, at the leading edge, is maintained parallel to channel flow. This inverted U-frame is set into vertical motion by a computer-controlled linear actuator, which allows to impose an arbitrary heave motion to the leading edge. In the present experiments, the leading edge has been forced into a harmonic heave motion:  $A_{LE} \cos(2\pi ft)$ . The plate is confined between two vertical walls separated from the plate by less than 1 mm. The role of these confinement walls is, first, to minimize the flow around the side edges of the plate and, second, the inverted U-frame being outside of these walls, to avoid the perturbations from the wake of the frame. In addition, free surface effects have been prevented by a rigid horizontal wall placed above the experiment. Channel and confinement walls have been made of transparent material to facilitate visualizations.

To investigate the response of the plate when forced into heave motion, visualizations have been carried out through the side wall of the water channel and recorded with a video camera. The successive shapes and positions of the plate centerline have then been extracted by image analysis of the recordings. A quantitative characterization of the plate response is achieved by measuring the simultaneous displacements of the leading and trailing edges as a function of time by means of two high-accuracy laser sensors (Fig. 1(a)).



**Fig. 1.** Sketch of the experimental set-up (a) and of the flexible plate (b).



**Fig. 2.** Response of a plate to an impulse perturbation. The deflection of the trailing edge is plotted as function of time for the plate of bending rigidity  $B = 0.053$  N m in water at rest.

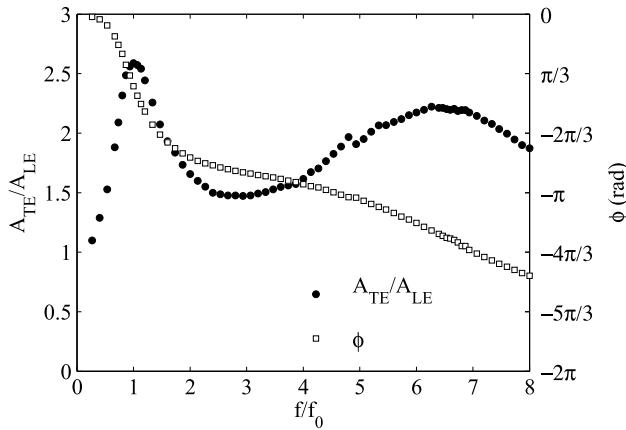
In the present study, the variations of four experimental parameters have been considered. First, the frequency  $f$  and amplitude  $A_{LE}$  of the forcing have been varied in the ranges  $f = 0.2\text{--}8$  Hz and  $A_{LE} = 0.004\text{--}0.014$  m. Then, the flow velocity has been increased up to  $U = 0.1$  m s $^{-1}$ . This velocity is expressed in dimensionless form using the Reynolds number based on the chord:  $Re = Uc/\nu$ , where  $\nu$  is the kinematic viscosity of water. Finally, three plate rigidities have been tested using different materials:  $B = 0.018, 0.028, 0.053$  N m. For these three plates, the density relative to the water is about 1.2.

A typical experiment consists, for a plate of given bending rigidity, in fixing the Reynolds number  $Re$  and the forcing amplitude  $A_{LE}$  and in recording the plate response as the forcing frequency  $f$  is gradually varied. Experiments have been repeated changing  $A_{LE}$ ,  $Re$ , and using plates of different bending rigidity.

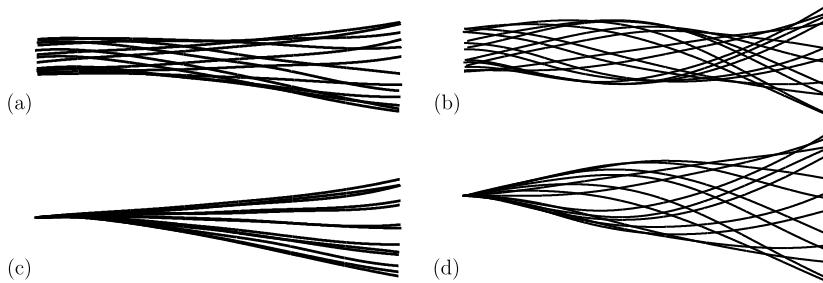
### 3. Results

Prior to the experiments with forcing, we have considered the response of the plate to an impulse perturbation of its trailing edge, in water at rest. The damped response to such a perturbation is shown in Fig. 2 for the plate of bending rigidity  $B = 0.053$  N m. From this signal, we deduce the lowest natural frequency  $f_0$  of the plate in water that will serve as a reference frequency in the following. For the three plates tested in the present study, we find the natural frequencies  $f_0 = 0.75, 0.99, 1.30$  Hz for bending rigidities  $B = 0.018, 0.028, 0.053$  N m, respectively. Note that the ratios of these frequencies scale like the square root of the bending rigidity ratios (as expected from the vibration analysis of a cantilever beam) with an agreement better than 6%.

The response of the flexible plates to the harmonic forcing,  $A_{LE} \cos(2\pi f t)$ , imposed at their leading edge is then considered. We first note that for all the cases tested the plate deforms mainly along the chord and its displacement is harmonic with the same frequency as the forcing. The displacement of the trailing edge can thus be expressed as  $A_{TE} \cos(2\pi f t + \phi)$  where  $\phi$  is the phase relative to the leading edge displacement.



**Fig. 3.** Response of the plate to a harmonic heave forcing. The relative amplitude of the trailing edge displacement,  $A_{TE}/A_{LE}$ , and the corresponding phase shift  $\phi$  are plotted as a function of the normalized forcing frequency  $f/f_0$ , for  $A_{LE} = 0.004$  m,  $Re = 6000$  and  $B = 0.018$  N.m.



**Fig. 4.** Mode shapes, at the first  $f/f_0 = 1$  (a), (c), and second resonance peak,  $f/f_0 = 6.3$  (b), (d). These deformations are shown in the laboratory frame (a), (b) and in the frame attached to the leading edge (c), (d),  $A_{LE} = 0.004$  m,  $Re = 6000$  (flow from left to right) and  $B = 0.018$  N.m.

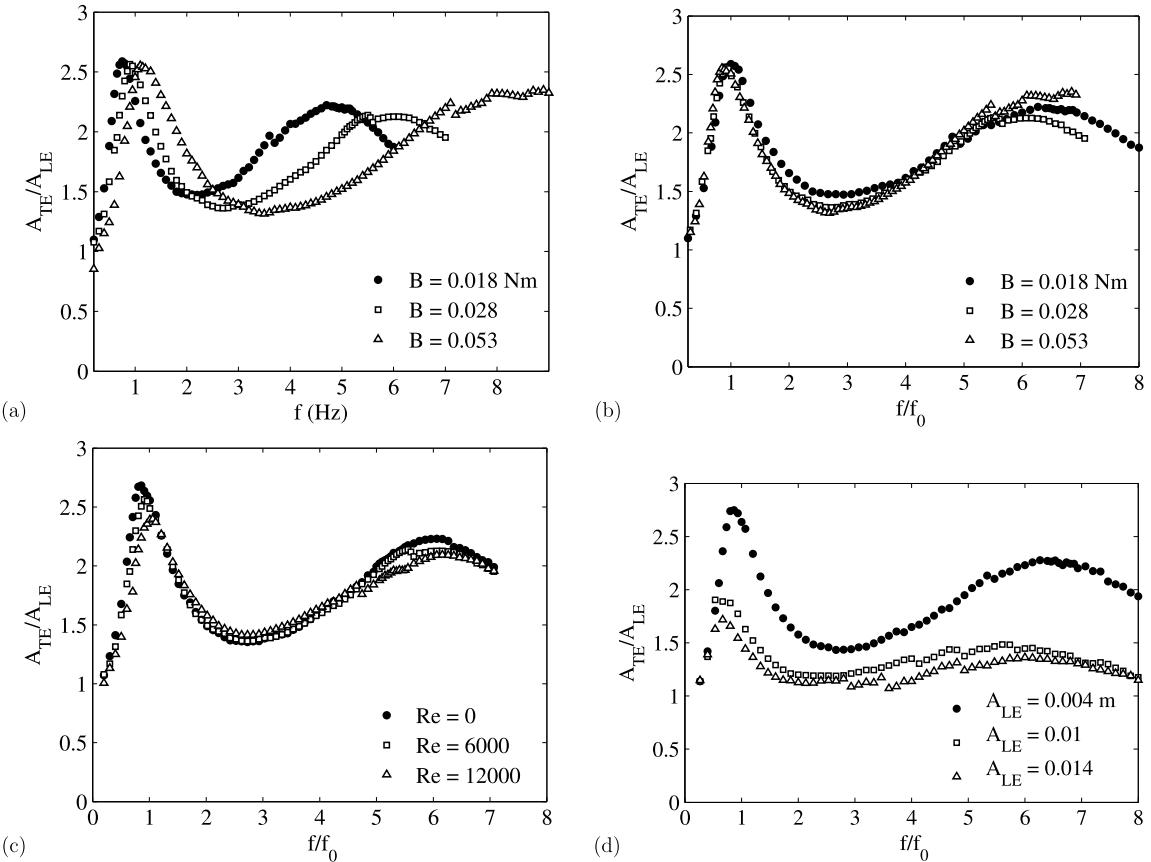
The plate response is characterized by measuring the evolution of the relative amplitude  $A_{TE}/A_{LE}$  and the phase  $\phi$  as the forcing frequency  $f$  is varied. This response is illustrated in Fig. 3 for a representative case:  $A_{LE} = 0.004$  m,  $Re = 6000$  and  $B = 0.018$  N.m. In this plot,  $f$  is made dimensionless using the natural frequency  $f_0$  of the plate.

Remarkably, the amplitude curve exhibits two distinct peaks. The first peak is sharp and occurs at a frequency  $f$  close to the natural frequency  $f_0$ , with a maximum of the trailing edge amplitude more than 2.5 times the forcing amplitude. The second peak, at a frequency  $f/f_0$  between 6.0 and 6.5, is flatter and lower in amplitude. It is recalled that the three first natural vibration modes of a clamped plate have dimensionless wavenumbers  $k_0c = 1.875$ ,  $k_1c = 4.694$ , and  $k_2c = 7.855$  and that the ratios of the corresponding natural frequencies  $f_0$ ,  $f_1$  and  $f_2$  scale like the square of wavenumber ratios. It results that  $f_1/f_0 = (k_1/k_0)^2 \approx 6.3$ . We can thus conclude that the two peaks observed at  $f \approx f_0$  and  $f_1$  in Fig. 3 correspond to resonances of the forcing with the first two natural structural modes. According to this analysis the third resonance peak would be expected at a frequency  $f \approx f_2$  with  $f_2/f_0 = (k_2/k_0)^2 \approx 17.6$ , which is outside of the frequency range explored in the present experiments.

The evolution of the trailing edge phase  $\phi$  relative to the imposed leading edge motion is also shown in Fig. 3. The phase appears to be close to  $-\pi$  far from the two resonance peaks and approaches  $-\pi/2$  at the first peak which is what is expected from a simple damped oscillator model. In contrast, it is not possible to distinguish a clear trend for  $\phi$  at the second peak, where it continuously varies between  $-3$  and  $-5$ .

In Fig. 4, the deformation of the plate at the two resonant peaks is illustrated by plotting superimposed views of the plate centerline during one forcing cycle. It should be noted that direct visualizations of the plate do not reveal significative deformations along the span, such that the plate deflection is well represented by the centerline displacement. It can also be remarked that a weak up-and-down asymmetry in the mode shape is apparent, which is due to the plate material being slightly denser than water.

Figs. 4(a) and (b) show the mode shapes at the two resonance peaks  $f/f_0 = 1$  and 6.3, respectively, in the laboratory frame. Contrary to the first mode, the second mode exhibits a neck close to its trailing edge showing that higher structural modes are involved at high frequencies. The same modes are represented in the frame attached to the plate leading edge in Figs. 4(c) and (d). These views reveal their close similarities with the flutter instability modes of a clamped plate immersed in a uniform flow investigated by Eloy et al. [24], among others. Note that these deformations are different from the natural modes of a flexible beam in vacuum. In particular, the second mode (Fig. 4(d)) does not exhibit a node but only a pseudo-node or neck, revealing once again that the structural modes and their corresponding frequencies correspond to



**Fig. 5.** Effects of the experimental parameters on the frequency response. Response curves as a function of the forcing frequency  $f$  (a) and of the normalized frequency  $f/f_0$  (b) for  $A_{LE} = 0.004$  m,  $Re = 6000$  and three values of the bending rigidity  $B$ . Frequency response for  $A_{LE} = 0.004$  m,  $B = 0.028$  Nm and three values of the Reynolds number  $Re$  (c) and for  $Re = 6000$ ,  $B = 0.018$  Nm and three values of the forcing amplitude  $A_{LE}$  (d).

the system plate + surrounding fluid and not the plate alone, as emphasized by Michelin and Llewellyn Smith [17] in their numerical study.

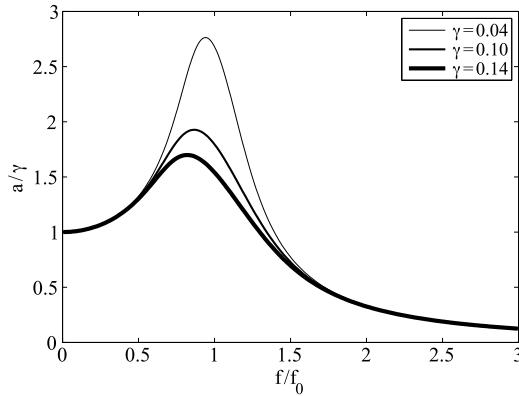
So far, we have described the frequency response of a flexible plate for fixed values of the forcing amplitude  $A_{LE}$ , the Reynolds number  $Re$ , and the bending rigidity  $B$ . We will examine now how variations of these parameters affect the frequency response. To do so, the same protocol is used:  $A_{LE}$ ,  $Re$  and  $B$  are fixed and the relative response  $A_{TE}/A_{LE}$  is plotted as function of the normalized frequency  $f/f_0$  (Fig. 5).

### 3.1. Effect of the plate rigidity

In Fig. 5(a), the response curves are plotted as a function of the dimensional forcing frequency  $f$  for three values of the plate rigidity  $B$ . We note that the amplitude maxima are not affected by changing  $B$  and that the resonance peaks move toward higher frequency as  $B$  is increased. However, the natural frequencies  $f_0$  increasing with the plate rigidity, when the response curves are plotted using the dimensionless frequency  $f/f_0$ , they all collapse on a single curve as seen in Fig. 5(b). In conclusion, in the limit of the present study, which considers plates with bending rigidities varying by a factor 3, we could not detect any significant effect of the plate rigidity, as long as the frequency is properly normalized with the natural frequency  $f_0$ .

### 3.2. Effect of the Reynolds number

The effect of the Reynolds number  $Re = Uc/\nu$  on the plate response is illustrated in Fig. 5(c) representing the frequency response for three values of  $Re$ . The first value is  $Re = 0$  corresponding to water at rest, the two others are 6000 and 12,000, corresponding to  $U = 0.05$  and  $0.1 \text{ m s}^{-1}$ , respectively. We observe both a decrease of the amplitude maxima and a shift of the resonance peaks toward higher frequencies, as  $Re$  is increased. This latter observation is due to the normalization performed using the natural frequency  $f_0$  of the plate in water at rest while the natural vibration modes are modified by a surrounding flow as noted in [17]. However, these variations in the plate response as  $Re$  is changed appear only minor. This is likely due to the large values of the reduced frequency  $f_r = \pi f c/U$ , which measures the ratio between the typical time



**Fig. 6.** Response curves obtained with Eq. (3) for different values of the forcing  $\gamma$ . The following parameters have been used:  $f_0 = 1/2\pi$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\nu = 3$ , and  $\gamma = 0.04$ , 0.1, or 0.14.

taken by a fluid particle to travel along the chord to the forcing period. For smaller values of  $f_r$ , one would expect the wake to become more important and to affect the frequency response more significantly.

### 3.3. Effect of the forcing amplitude

Contrary to the other parameters tested, variations of the forcing amplitude  $A_{LE}$  have a strong influence on the plate response. This influence is shown in Fig. 5(d), where the frequency response is plotted for three values of  $A_{LE}$ . An increase of the forcing amplitude by a factor of 3.5 (from 0.004 to 0.014 m) leads to a decrease of the relative response amplitude of the trailing edge by more than 30% and a slight decrease of the normalized frequency at the resonance peaks. This important effect of the forcing amplitude is a signature of non-linear effects.

These non-linearities likely originate from the large-amplitude plate deformations, which introduce non-linear terms in both the plate and flow dynamical equations, through geometrical and damping terms. For instance, the impermeability condition, which ensures the coupling between the plate and the fluid, has to be applied on a displaced interface, yielding terms that depend non-linearly on the motion amplitude. These terms correspond to cubic non-linearities [25]. Another source of non-linearity is the drag force exerted on the plate normally to its surface as it moves, also called the resistive force, which corresponds to quadratic non-linearities [26].

Calling  $x$  the amplitude of the first bending mode of the plate, we expect a weakly non-linear dynamical equation of the form

$$\ddot{x} + (2\pi f_0)^2 x + \mu \dot{x} + \nu |\dot{x}| \dot{x} + \delta x^3 = \gamma \cos(2\pi ft) \quad (1)$$

where the first two terms describe the bending mode of the plate as a harmonic oscillator (with eigenfrequency  $f_0$ ), the third term is related to the internal damping of the plate ( $\mu > 0$ ), the fourth term is the quadratic non-linearity due to the drag normal to the plate ( $\nu > 0$ ), and the fifth term gathers all the cubic non-linearities originating from the fluid-structure interaction, the plate dynamics, and the fluid load (in reality there should also be terms of the form  $x^2 \dot{x}$  and  $\dot{x}x^2$ ). The right-hand side corresponds to the forcing due to the heaving motion, where  $\gamma > 0$  without loss of generality. This equation is the classic Duffing oscillator with an additional quadratic term,  $\nu |\dot{x}| \dot{x}$ . It is beyond the scope of the present paper to calculate the coefficients  $\mu$ ,  $\nu$ , and  $\delta$  appearing in this equation, however, it can be formally solved by assuming

$$x(t) = a \cos(2\pi ft + \phi) + \text{h.o.t.} \quad (2)$$

where h.o.t. stands for “higher-order terms” and refers here to higher harmonics that can be neglected near resonance. Neglecting also the cubic non-linearities for simplicity, the dynamical equation (1) can be projected onto the main harmonics to give an implicit equation for the amplitude  $a$  of the bending mode oscillations:

$$(2\pi)^4 (f_0^2 - f^2)^2 a^2 + (2\pi)^2 \left( \mu f + \frac{16}{3} \nu f^2 a \right)^2 a^2 = \gamma^2 \quad (3)$$

Solving this implicit equation shows, in particular, that at the resonance (i.e.  $f = f_0$ ), the relative amplitude  $a/\gamma$  is a monotonic decreasing function of  $\gamma$ . This is conform to the experimental observations, where the relative amplitude  $A_{TE}/A_{LE}$  is also a decreasing function of the forcing amplitude  $A_{LE}$ . In Fig. 6, the relative amplitudes  $a/\gamma$  obtained with Eq. (3) for different values of the forcing parameter  $\gamma$  are plotted as a function of the normalized forcing frequency  $f/f_0$ . It shows a good qualitative agreement with the experimental measurements reported in Fig. 5(d) near the first resonance. In particular, the value of the relative response at its maximum (around  $f \approx f_0$ ) is decreasing when the forcing amplitude is increased. The shift of the response peak towards lower frequencies for large forcing amplitude is also reproduced. However, the

second peak observed in Fig. 5(d) around  $f/f_0 \approx 6$  is not reproduced in the model (Fig. 6) since it only accounts for a single natural mode of vibration whereas the flexible plate has an infinite number of structural modes.

The experimental results presented in Fig. 5(d) and the above discussion on the Duffing equation show that an accurate description of the plate response at resonance must include non-linear effects. It is important to stress that these non-linear effects are relevant even if the relative amplitude of the deformation,  $A_{TE}/c$ , and the angle between the plate and the flow direction are both relatively small. Yet, these effects are usually neglected in the literature, probably because until now, to our knowledge, there has not been any systematic measurements of the response of a flexible plate when the forcing amplitude is varied (see, e.g., [21–23]).

#### 4. Conclusion

In summary, experiments have been conducted to investigate the response of a flexible plate in a uniform flow, when its leading edge is forced into a harmonic heave motion. This study focused in particular on the influence of the different experimental parameters on the characteristics of the frequency response.

As observed in previous studies, the response curves, representing the relative response amplitude with respect to the forcing frequency, exhibit peaks of resonance for the natural modes of the plate in the fluid flow. The flow velocity and the plate bending rigidity have only minor effects on the response curves as long as the forcing frequency is properly normalized with the natural mode frequency. In contrast, the forcing amplitude strongly affects the plate response indicating the importance of non-linearities in this system.

The present experiments performed with an idealized geometry can help to gain insight into the physical mechanisms of thrust production by flapping flexible appendages. It is known from the seminal work of Lighthill [27] that the thrust scales as the square of the trailing edge deflection amplitude in the linear limit. This study shows that this amplitude can be maximized when the flapping frequency is close to the frequency of one of the natural modes. However, the non-linear effects probably affect Lighthill's scaling of thrust production for large amplitude, and there is likely an optimal amplitude at which propulsion efficiency is maximized. Moreover, the present experimental results show that if one wants to model the fluid-structure interactions of a flapping flexible plate in a uniform flow plate, non-linear effects have to be taken into account. Such a model is currently being developed and will be subject of a forthcoming work.

#### References

- [1] M.J. Lighthill, Mathematical Biofluidynamics, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1975.
- [2] S. Childress, Mechanics of Swimming and Flying, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1981.
- [3] M.J. Lighthill, Hydromechanics of aquatic animal propulsion, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1 (1969) 413–446.
- [4] M. Sfakiotakis, D.M. Lane, J.B.C. Davies, Review of fish swimming modes for aquatic locomotion, *IEEE J. Ocean. Eng.* 24 (2) (1999) 237–252.
- [5] M.S. Triantafyllou, G.S. Triantafyllou, D.K.P. Yue, Hydrodynamics of fishlike swimming, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 32 (2000) 33–53.
- [6] R. Bainbridge, Caudal fin and body movement in the propulsion of some fish, *J. Exp. Biol.* 40 (1963) 23–56.
- [7] F.E. Fish, G.V. Lauder, Passive and active flow control by swimming fishes and mammals, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 38 (2006) 194–224.
- [8] M.J. Lighthill, Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency, *J. Fluid Mech.* 44 (1970) 265–301.
- [9] T.Y. Wu, Hydromechanics of swimming propulsion, *J. Fluid Mech.* 46 (1971) 337–355.
- [10] M.S. Triantafyllou, G.S. Triantafyllou, R. Gopalkrishnan, Wake mechanics of thrust generation in oscillating foils, *Phys. Fluids A* 3 (12) (1991) 2835–2837.
- [11] J.M. Anderson, K. Streitlien, D.S. Barret, M.S. Triantafyllou, Oscillating foils of high propulsive efficiency, *J. Fluid Mech.* 360 (1998) 41–72.
- [12] L. Schouveiler, F.S. Hover, M.S. Triantafyllou, Performance of flapping foil propulsion, *J. Fluid Struct.* 20 (2005) 949–959.
- [13] J.H.J. Buchholz, A.J. Smits, The wake structure and thrust performance of a rigid low-aspect-ratio pitching panel, *J. Fluid Mech.* 603 (2008) 331–365.
- [14] C. Eloy, Optimal Strouhal number for swimming animals, *J. Fluid Struct.* 30 (2012) 205–218.
- [15] J. Katz, D. Weihs, Hydrodynamics propulsion by large amplitude oscillation of an airfoil with chordwise flexibility, *J. Fluid Mech.* 88 (3) (1978) 485–497.
- [16] S. Alben, Optimal flexibility of a flapping appendage in an inviscid fluid, *J. Fluid Mech.* 614 (2008) 355–380.
- [17] S. Michelin, S.G. Llewellyn Smith, Resonance and propulsion performance of a heaving wing, *Phys. Fluids* 21 (7) (2009) 071902.
- [18] P. Prempreeerach, F.S. Hover, M.S. Triantafyllou, The effect of chordwise flexibility on the thrust and efficiency of a flapping foil, in: Proc. 13th Int. Symp. on Unmanned Untethered Submersible Technology, 2003.
- [19] S. Heathcote, I. Gursul, Flexible flapping airfoil propulsion at low Reynolds number, *AIAA J.* 45 (5) (2007) 1066–1079.
- [20] C. Marais, B. Thiria, J.E. Wesfreid, R. Godoy-Diana, Stabilizing effect of flexibility in the wake of a flapping foil, *J. Fluid Mech.* 710 (2012) 659–669.
- [21] P.A. Dewey, B.M. Boschitsch, K.W. Moore, H.A. Stone, A.J. Smits, Scaling laws for the thrust production of flexible pitching panels, *J. Fluid Mech.* 732 (2013) 29–46.
- [22] S. Alben, C. Witt, T.V. Baker, E. Anderson, G.V. Lauder, Dynamics of freely swimming flexible foils, *Phys. Fluids* 24 (2012) 051901.
- [23] D.B. Quinn, G.V. Lauder, A.J. Smits, Scaling the propulsive performance of heaving flexible panels, *J. Fluid Mech.* 738 (2013) 250–267.
- [24] C. Eloy, R. Lagrange, C. Souilliez, L. Schouveiler, Aeroelastic instability of cantilevered flexible plates in uniform flow, *J. Fluid Mech.* 611 (2008) 97–106.
- [25] C. Eloy, N. Kofman, L. Schouveiler, The origin of hysteresis in the flag instability, *J. Fluid Mech.* 691 (2012) 583–593.
- [26] S. Ramananarivo, R. Godoy-Diana, B. Thiria, Rather than resonance, flapping wing flyers may play on aerodynamics to improve performance, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 108 (2011) 5964–5969.
- [27] M.J. Lighthill, Note on the swimming of slender fish, *J. Fluid Mech.* 9 (1960) 305–317.



## **Annexe B**

### **Vortex patterns generated by a heaving flexible plate**

F. Paraz, C. Eloy et L. Schouveiler, “Vortex patterns generated by a heaving flexible plate”, Journal of Visualization, **17**, 295-297 (2014).



F. Paraz · C. Eloy · L. Schouveiler

## Vortex patterns generated by a heaving flexible plate

Received: 21 May 2014 / Revised: 17 June 2014 / Accepted: 21 June 2014  
© The Visualization Society of Japan 2014

**Keywords** Flexible plate · Flapping plate · Vortical structures · Thrust

### 1 Introduction

Flapping fins are commonly used by swimming animals to produce locomotive forces. These fins have inspired a vast amount of studies, motivated, for a large part, by the design of novel propulsion devices. These studies have generally considered a foil or a plate harmonically actuated in heave motion (translation), in pitch motion (rotation), or in a combination of both motions. Interestingly, the propulsive performances have been shown to increase when a flexible plate, rather than a rigid one, is used. The thrust produced by flapping fins is an increasing function of the amplitude of the trailing edge deflection (Lighthill 1960). To assess the propulsive performances of such systems, the knowledge of the deformation kinematics is thus of primary importance.

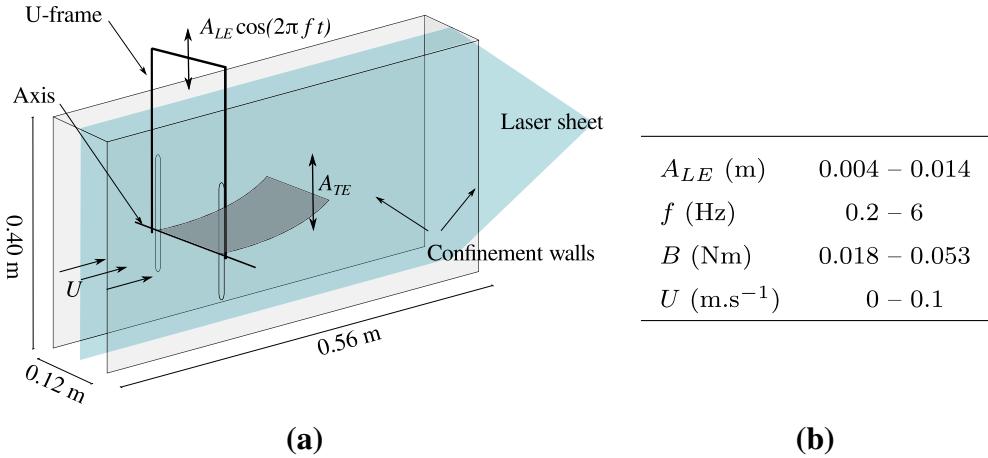
In the present work, we consider the flow generated by a flexible plate whose leading edge is forced into harmonic heave motion. It follows a previous study in which we have investigated the plate response to this forcing (Paraz et al. 2014). In particular, we have evidenced that the deflection amplitude of the trailing edge was maximal when the forcing frequency was resonant with a structural eigenfrequency of the flexible plate. We now turn to the visualization of the vortical structures generated in the wake of this model swimmer, as it is known to be a good indicator of the thrust produced (Dabiri 2005).

### 2 Experimental setup

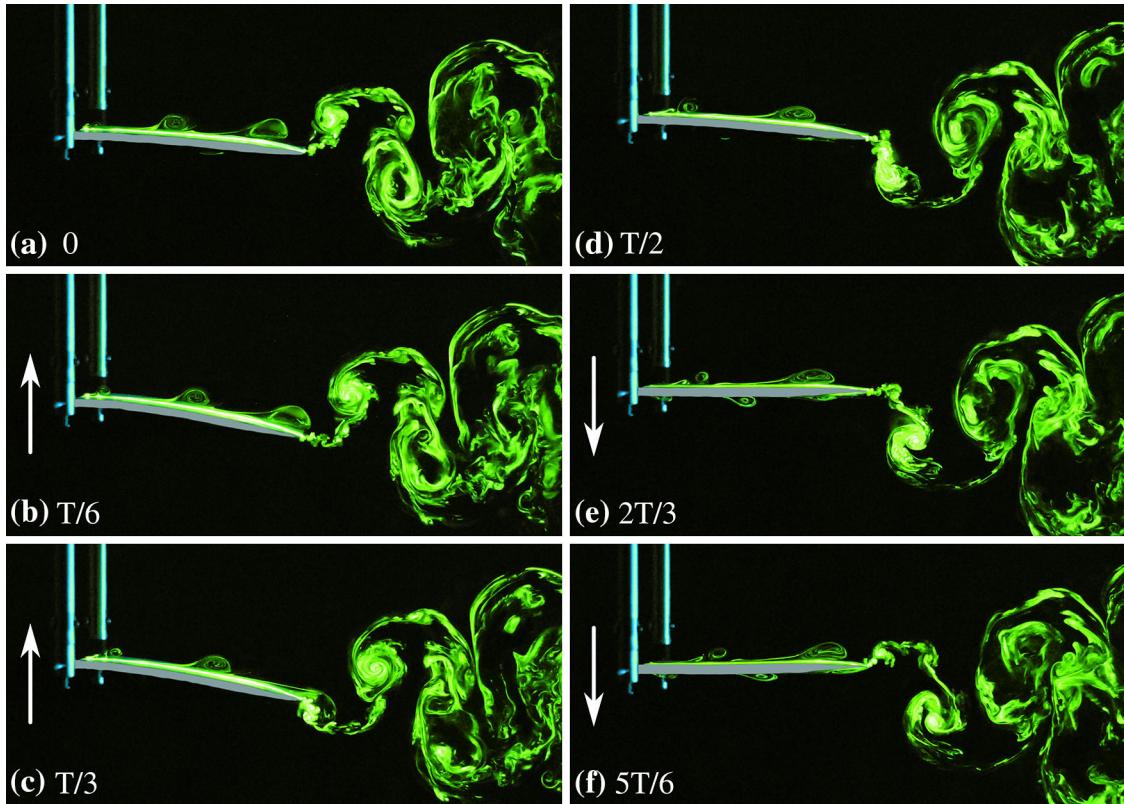
The experimental setup, shown in Fig. 1a, consists of a horizontal flexible plate, of bending rigidity  $B$ , immersed in a uniform horizontal flow of velocity  $U$  generated by free-surface water channel. The plate is of thickness  $e = 0.004$  m, span  $s = 0.12$  m, and chord  $c = 0.12$  m. It is molded out of polysiloxane with a tapered trailing edge and with a rigid axis inserted at the rounded leading edge. This rigid axis is attached to a U-frame that can be actuated with a linear motor into harmonic motion such that the leading elevation is imposed:  $A\dot{E}\cos(2\pi ft)$ . The flow around the plate is confined between two vertical parallel walls to avoid the perturbations due to the U-frame.

---

F. Paraz (✉) · C. Eloy · L. Schouveiler  
Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE UMR 7342, 13384 Marseille, France  
E-mail: florine.paraz@irphe.univ-mrs.fr



**Fig. 1** **a** Sketch of the experimental setup and **b** ranges of the experimental parameters explored



**Fig. 2** Dye visualizations of the vortices generated by the heaving flexible plate over one period for  $A_{LE} = 0.004$  m,  $f = 0.8$  Hz (period  $T = 1.25$  s),  $B = 0.018$  Nm and  $U = 0.05 \text{ ms}^{-1}$  (flow from left to right). The motion of the plate leading edge is indicated by an arrow

The explored ranges of the experimental parameters  $A_{LE}$ ,  $f$ ,  $B$  and  $U$  are given in Fig. 1b. To visualize the vortical structures generated by the plate motion, the plate is coated with a solution of fluorescent dye prior to immersion. The patterns created by the dye entrained in the flow are illuminated at mid-span with a vertical sheet of light generated with an argon ion laser. Images are captured, through the transparent channel sidewall, with a camera aligned perpendicular to the light sheet.

### 3 Results and perspectives

In Fig. 2, the evolution of the vortex patterns in the wake of the heaving flexible plate is visualized with dye over one period. The experimental parameters are  $ALE = 0.004$  m,  $f = 0.8$  Hz and  $U = 0.05$  m s $^{-1}$ , corresponding to a resonant case (i.e. a maximum of the trailing edge deflection amplitude).

In Fig. 2, it can be observed that a vortex forms at the leading edge on the upper side during the plate downstroke (Fig. 2a–c) and a second one on the lower side during the upstroke (Fig. 2d–f). These vortices are likely due to a flow separation at the leading edge. This separation occurs because the combination of the incoming flow and of the heave motion results in a non-zero effective angle of attack at the leading edge. For the parameters used here, this angle is  $\arctan(2\pi f ALE/U) = 23^\circ$ . The leading edge vortices can be followed on the image sequence as they travel along the plate chord up to the trailing edge where additional vortices are generated. Both vortices combine into large-scale vortices shed twice per cycle: the shedding of a counterclockwise vortex is seen in Fig. 2a and of a clockwise one in Fig. 2d. As they are advected downstream, they form a reverse Bénard–von Kármán vortex street, similar to the wakes observed behind bluff bodies, but with reversed sense of rotation of the vortices. This reverse Bénard–von Kármán wake corresponds to a jet-like average velocity profile and is thus associated with thrust production. We are currently trying to measure this thrust directly to confirm quantitatively the present results of a qualitative nature.

**Acknowledgments** We warmly thank Thomas Leweke for his help with the visualizations.

### References

- Dabiri JO (2005) On the estimation of swimming and flying forces from wake measurements. *J. Exp. Biol.* 208:3519–3532  
Lighthill MJ (1960) Note on the swimming of slender fish. *J. Fluid Mech* 9:305–317  
Paraz F, Eloy C, Schouveiler L (2014) Experimental study of the response of a flexible plate to a harmonic forcing in a flow.  
C. R. Mécanique (in press)



## **Annexe C**

# **Thrust generation by a heaving flexible foil : Resonance, nonlinearities, and optimality**

F. Paraz, L. Schouveiler et C. Eloy, “Thrust generation by a heaving flexible foil : Resonance, nonlinearities, and optimality”, soumis, 2015.



# Thrust generation by a heaving flexible foil: Resonance, nonlinearities, and optimality

Florine Paraz,<sup>1</sup> Lionel Schouveiler,<sup>1</sup> and Christophe Eloy<sup>1, a)</sup>

Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE UMR 7342,  
13013 Marseille, France

(Dated: 17 May 2015)

Flexibility of marine animal fins has been thought to enhance swimming performance. However, despite numerous experimental and numerical studies on flapping flexible foils, there is still no clear understanding of the effect of flexibility and flapping amplitude on thrust generation and swimming efficiency. Here, to address this question, we combine experiments on a model system and a weakly nonlinear analysis. Experiments consist in immersing a flexible rectangular plate in a uniform flow and forcing this plate into a heaving motion at its leading edge. A complementary theoretical model is developed assuming a two-dimensional inviscid problem. In this model, nonlinear effects are taken into account by considering a transverse resistive drag. Under these hypotheses, a modal decomposition of the system motion allows us to predict the plate response amplitude and the generated thrust, as a function of the forcing amplitude and frequency. We show that this model can correctly predict the experimental data on plate kinematic response and thrust generation, as well as other data found in the literature. We also discuss the question of efficiency in the context of bio-inspired propulsion. Using the proposed model, we show that the optimal propeller for a given thrust and a given swimming speed is achieved when the actuating frequency is tuned to a resonance of the system, and when the optimal forcing amplitude scales as the square root of the required thrust.

## I. INTRODUCTION

Aquatic vertebrates can either use their caudal fin or their median and paired fins for propulsion<sup>1</sup>. Generally, these appendages are flexible<sup>2–4</sup>, and it has often been argued that flexibility enhances swimming efficiency<sup>5–7</sup>. Yet, the rigidity of caudal fins can vary substantially between species: tuna have relatively rigid caudal fins<sup>1,8</sup> compared to goldfish<sup>2</sup> or trouts<sup>9</sup>. In our opinion, it has not yet been determined whether fin flexibility is an evolutionary advantage or not.

Swimming kinematics has been first explored through experimental observations of live fish<sup>10–12</sup>. These experiments have revealed that most fish and cetacean species use a particular mode of locomotion, called undulatory swimming, which consists in bending the backbone to generate a propagative wave from head to tail. Some species like sharks and tuna use an extreme form of undulatory swimming, a thunniform mode<sup>13,14</sup>, where significative values of the curvature are located in the caudal peduncle region only. For these animals, the anterior part of the body is almost rigid and can be considered as a cargo, while the posterior flexible part (made of the caudal peduncle and caudal fin) can be considered as a propeller. Such systems have obvious engineering applications to the design of novel bio-inspired propellers<sup>15</sup> and led to specific studies on oscillating *rigid* foils<sup>16–18</sup>. In agreement with a two-dimensional, linear, and inviscid theory on oscillating wings<sup>19–21</sup>, it has been found experimentally that a combination of heave and pitch with

---

<sup>a)</sup>christophe.elyo@irphe.univ-mrs.fr

a phase difference of  $90^\circ$  corresponds to an optimum for propulsion<sup>22,23</sup>. For these two-dimensional rigid foils, it was also found experimentally<sup>18</sup> that the optimal frequency corresponds to a Strouhal number  $St \approx 0.3$  ( $St = fA/U$ , with  $f$  the oscillating frequency,  $A$  the peak-to-peak amplitude of the trailing edge motion, and  $U$  the swimming velocity). Similar Strouhal numbers being observed on many aquatic species, some authors claimed that it corresponds to a performance optimum<sup>17,24</sup>, but this question is still debated today<sup>25</sup>.

Recently, these studies on oscillating rigid foils of large aspect ratio have been extended to *flexible* foils. Experiments on such flexible foils have been performed with pitching motions<sup>26,27</sup> or heaving motions<sup>6,7,28–31</sup> (to our knowledge, apart from studies on robotic fish<sup>32</sup>, there is no systematic study of a flexible foil actuated with a combination of pitch and heave). In both cases, it was shown that a resonance phenomenon occurs: thrust generation is maximal at the natural frequencies of the system. In other words, when the system fluid+structure is forced at one of its eigenfrequencies, the response in terms of elastic deformation is maximized, and thrust generation and performance have also been reported to be maximized.

Numerical simulations of a flapping flexible appendage have been conducted, either in the limit of infinite Reynolds number using vortex methods<sup>5,29,33</sup>, or at small to moderate Reynolds numbers using direct numerical simulations<sup>34–38</sup>. Similarly to experiments, these simulations generally showed a connection between the resonance of the fluid+structure system and the generated thrust. There is thus a strong contrast between rigid and flexible foils: in the rigid case, optimal frequency is determined by a specific value of the Strouhal number<sup>17,24</sup>; in the flexible case, optimal frequency is a natural frequency of the deformable system. Interestingly, since the Strouhal number varies linearly with amplitude while natural frequencies are almost independent on amplitude, these two frequencies can be matched by adjusting the flapping amplitude<sup>26</sup>. But, to assess if this particular amplitude corresponds to an overall optimum, one has to systematically study the effect of the forcing amplitude on thrust production, a study that has rarely been performed<sup>31</sup>.

Although thrust production by a flexible foil has been studied many times both experimentally and numerically, there have been comparatively few attempts to address this problem analytically. Among these attempts, Moore<sup>39</sup> recently extended the works of Wu<sup>19,21</sup> and Lighthill<sup>20</sup> on the optimization of oscillating foils. He modeled a two-dimensional rigid foil whose leading edge is forced into a heaving motion and which can passively pitch. Some of us also used Wu's and Lighthill's ideas to model the thrust produced by an active flexible foil<sup>40</sup>, and Alben *et al.*<sup>29</sup> used a linear time-harmonic model to rationalize the power-law scalings observed in their numerical simulations. However, these analytical studies are mainly linear and are thus limited to motions of small amplitude. One objective of the present study is to extend these modeling approaches to take into account nonlinearities.

The organization of the paper is as follows. Section II introduces the experimental set-up, and Sec. III describes the weakly nonlinear model. Then, the results obtained with both approaches are presented and compared, in Sec. IV, through the kinematic response of the system, the wake, the production of thrust, and the efficiency of the propulsion system. Finally, these results are discussed in the context of biological and bio-inspired swimming in Sec. V.

## II. EXPERIMENTAL METHODS

The experimental set-up consists of a flexible foil with a rounded leading edge and a tapered trailing edge. This foil (hereinafter called foil or plate indifferently) of bending rigidity  $B$  is immersed in a uniform flow of speed  $U$  (Fig. 1). It is made of polysiloxane and has an aspect ratio  $S/C \approx 2$ , where  $S = 12\text{ cm}$  and  $C = 6\text{ cm}$  are its span and

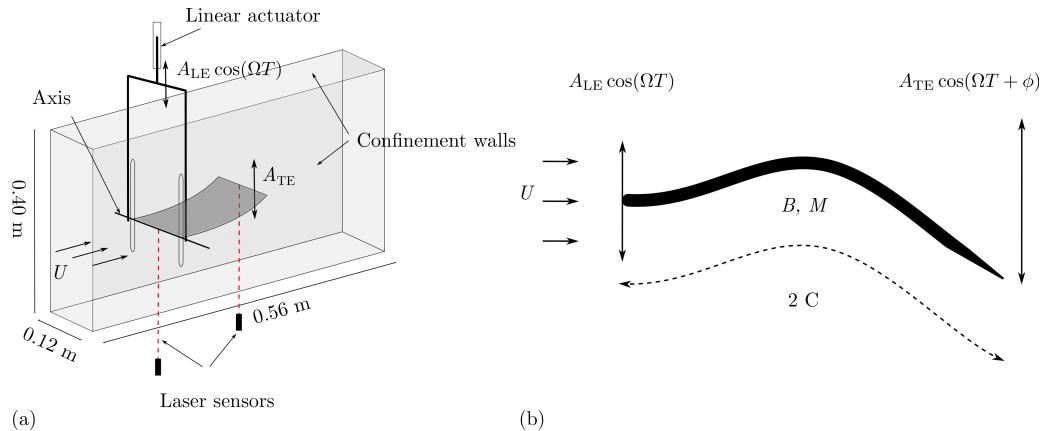


FIG. 1. (a) Experimental set-up and (b) two-dimensional modeling.

TABLE I. Characteristic parameters of the experiment.

	Symbols	Values	Units
Forcing amplitude	$A_{LE}$	0.004 – 0.014	m
Forcing frequency	$\Omega$	2.51 – 37.70	$\text{rad s}^{-1}$
Bending rigidity	$B$	0.018 – 0.053	Nm
Fluid speed	$U$	0 – 10.10 $^{-2}$	$\text{m s}^{-1}$
Foil half-chord	$C$	0.06	m
Foil span	$S$	0.12	m
Foil surface density	$M$	4.8	$\text{kg m}^{-2}$
Fluid density	$\rho$	$10^3$	$\text{kg m}^{-3}$

half-chord. Flapping is achieved by heaving harmonically the foil leading edge through an inverted U-frame, with a heave amplitude  $a_{LE}$  and angular frequency  $\Omega$ .

The foil is isolated from the guiding rods and the free surface by two vertical and one horizontal transparent confinement walls. The foil is clamped into the actuated rod to ensure that its leading edge always remains parallel to the incoming flow. The foil density being approximately 20% heavier than water, its deformation can be slightly asymmetric in some experimental cases.

The plate deflection at the leading and trailing edges is measured with two laser sensors Keyence G-402, while its full deformation is recorded by a video camera through a side wall. The thrust is measured with two load cells Futek LSB210 assembled parallel to the flow at the leading edge. In addition, a particule image velocimetry (PIV) system is used to measure the wake beyond the trailing edge. The PIV acquisition system is composed of two pulsed YAG lasers and a high precision camera (1336×2000 pixels). PIV velocity fields are computed using the software DPIVSoft<sup>41</sup>.

In this experimental set-up, four parameters can be varied: the bending rigidity  $B$ , the flow speed  $U$ , the forcing angular frequency  $\Omega$ , and the forcing amplitude  $A_{LE}$ . Table I specifies the range of these parameters. To vary the bending rigidity, we use three foils made of different polysiloxane formulae, whose rigidity is measured from deflection under gravity. Their first natural frequency  $\Omega_0$  is determined from an impulse response test in water (Fig. 2). As expected, we find that the natural frequency of the system foil+fluid scales as the square root of the bending rigidity:  $\Omega_0 = 4.71, 6.22, 8.17 \text{ rad.s}^{-1}$  for  $B = 0.018, 0.028, 0.053 \text{ Nm}$  (per unit span) respectively.

As it can be seen in Fig. 2, impulse response tests in water yield strongly damped oscillations. This damping can be decomposed into three components: internal viscoelastic

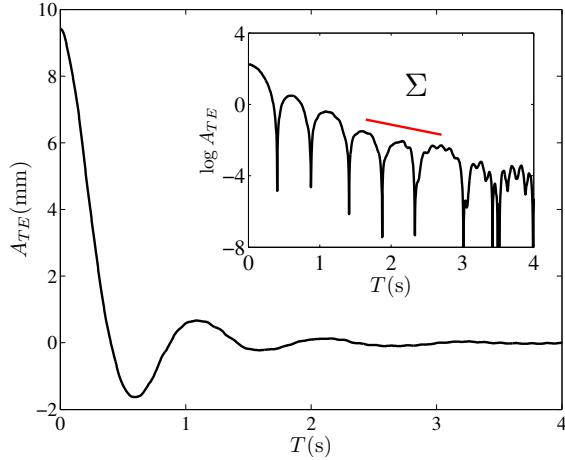


FIG. 2. The impulse response of the most flexible foil in water. A fast Fourier transform of the signal gives the natural frequency  $\Omega_0$  and (*inset*) the slope of the signal in semilog-scale gives the damping coefficient  $\Sigma$ .

damping, linear fluid damping, and nonlinear fluid damping. From these impulse response tests, together with additional tests performed in air, these sources of damping can be quantified and included in a model (Appendix B).

A typical experiment consists in a frequency response test: for a plate of given bending rigidity, the flow speed  $U$  and forcing amplitude  $A_{LE}$  are fixed, and the plate response is recorded as the forcing frequency  $\Omega$  is gradually varied. Experiments are then repeated for different amplitudes  $A_{LE}$ , different flow speeds  $U$ , and using plates of different bending rigidity  $B$  to assess the effect of these control parameters<sup>31</sup>.

### III. ANALYTICAL MODEL

#### A. Governing equation

The system is made dimensionless by using  $C$ ,  $C^2\sqrt{M/B}$  and  $\rho B/MC^2$  as characteristic length, time and pressure respectively, with  $C$  the plate half-chord,  $B$  its bending rigidity,  $M$  its mass per unit area, and  $\rho$  the fluid density (Table I). Using lowercase letters to denote dimensionless variables, the system we want to model can be represented as a flexible foil of infinite span, zero thickness, half-chord unity, immersed in a uniform flow along the  $x$ -axis of speed  $u = UC\sqrt{M/B}$  (Fig. 3).

At the leading edge ( $x = -1$ ), the foil is clamped and forced into a harmonic heave motion,  $a_{LE} \cos(\omega t)$ , while the rest of the foil responds elastically with a deflection  $h(x, t)$ . The dimensionless frequency,  $\omega = \Omega C^2 \sqrt{M/B}$ , corresponds to the ratio of the forcing frequency to a typical elastic frequency. In this problem, another dimensionless frequency can be built, the reduced frequency  $k = \Omega C/U = \omega/u$ , which is the ratio between the forcing frequency and a “fluid” frequency calculated as the inverse of the time taken by fluid particles to travel one half-chord at speed  $U$ . In this section, we will assume that  $k$  is asymptotically large (i.e.  $\omega \gg u$ ), in conformity with the range of parameters explored in the present experiments (Table I).

We assume that the plate deflection follows a linearized Euler–Bernoulli beam equation

$$\partial_t^2 h + \partial_x^4 h + \nu \partial_t h + \mu \partial_t \partial_x^4 h + \frac{1}{2} c_D m |\partial_t h| \partial_t h + mp = 0, \quad (1)$$

complemented with clamped-free boundary conditions:  $h(-1, t) = a_{LE} \cos(\omega t)$  and

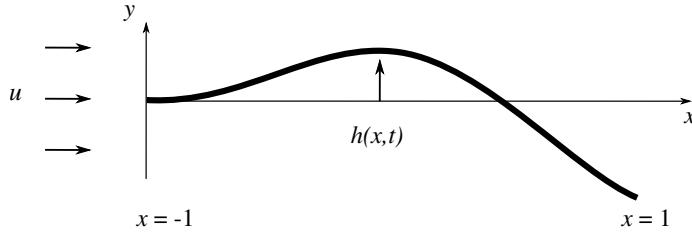


FIG. 3. Sketch of the problem.

$\partial_x h(-1, t) = \partial_x^2 h(1, t) = \partial_x^3 h(1, t) = 0$ . In the equation of motion (1), the first two terms represent the equation of an elastic beam in vacuum (inertia and elastic restoring force respectively), the next two terms represent the linear damping in the system (linear fluid damping and internal viscoelastic damping, see Appendix B), the fifth term describes the nonlinear fluid damping (which takes the form of a transverse drag force with drag coefficient  $c_D$ ), and the last term corresponds to the pressure forces on the plate with  $p$  the pressure jump across the beam.

In the above equation of motion, the damping coefficients  $\nu$  and  $\mu$ , are determined independently from linear impulse response tests (Appendix B). The ratio  $m = \rho C/M$  is large in the present case because the plate thickness is small compared to its chord and the material has a density close to water.

Assuming that the deflection is small (i.e.  $h \ll 1$  and  $\partial_x h \ll 1$ ), the pressure jump across the foil  $p$  can be calculated using unsteady airfoil theory. This calculation is based on the work of Wu<sup>19,21</sup> with the simplifying assumption that the reduced frequency  $k = \omega/u$  is asymptotically large (Appendix A).

Within this framework, the flow is assumed to be potential except in a thin wake located at  $y = 0$  for  $x > 1$ . This wake is due to vortex shedding at the trailing edge and ensures the continuity of pressure through a Kutta condition<sup>42</sup>. However, an inverse square root pressure singularity remains at the leading edge due to a non zero angle of attack. This singularity smooths out if the finite thickness of the foil is accounted for, but causes leading edge suction, a force along the  $x$ -direction that participates in the thrust produced. As we shall see below, this force, also called suction force, is of crucial importance.

## B. Modal analysis

To solve equation of motion (1), the deflection is decomposed as

$$h(x, t) = \left( a_{\text{LE}} + \sum_{i=1}^N a_i h_i(x) \right) e^{i\omega t}, \quad (2)$$

where we have neglected higher time harmonics. It represents a combination of the imposed displacement of amplitude  $a_{\text{LE}}$ , and  $N$  eigenmodes  $h_i(x)$  of a beam in vacuum of complex amplitudes  $a_i$  (cf. Appendix A). In practice, we will use  $N = 3$ , which is enough to represent the foil deflection around the first two resonances. The eigenmodes  $h_i(x)$  have the property of being an orthonormal basis of the clamped-free deflections when the following scalar product is used

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx. \quad (3)$$

Inserting the decomposition (2) into (1) and forming the scalar product with the  $N$  eigenmodes  $h_i(x)$  yields  $N$  nonlinearly coupled equations for the  $N$  unknown amplitudes

TABLE II. Values of the coefficients  $\kappa_i$ ,  $\alpha_i$  and  $\beta_{ij}$  of Eq. (4) for the first three beam eigenmodes.

	i=1	i=2	i=3
$\kappa_i$	0.938	2.347	3.927
$\alpha_i$	0.783	0.434	0.254
$\beta_{i0}$	1.188	1.015	0.288
$\beta_{i1}$	1.131	0.591	-0.014
$\beta_{i2}$	0.591	1.004	0.251
$\beta_{i3}$	-0.014	0.251	0.556

$a_i$  of the form

$$(i\omega\nu - \omega^2)(\alpha_i a_{LE} + a_i) + (1 + i\omega\mu)\kappa_i^4 a_i \\ + i\omega^2 c_D m \frac{2}{3\pi} \int_{-1}^1 h_i \left| a_{LE} + \sum_{j=1}^N a_j h_j(x) \right| \left( a_{LE} + \sum_{j=1}^N a_j h_j(x) \right) dx \\ - \omega^2 m \left( \beta_{i0} a_{LE} + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} a_j \right) = 0, \quad (4)$$

for  $1 \leq i \leq N$ . The coefficients  $\alpha_i$  and  $\beta_{ij}$ , whose expressions are given in Appendix A, are universal and have been calculated (Table II). In the system (4), we recognize the same terms as in Eq. (1): the first term gathers linear fluid damping and inertia, the second term gathers elasticity and viscoelasticity, the third term is the nonlinear damping, and the last term is due to the pressure forces. In the limit of large reduced frequency,  $\omega \gg u$ , this last term is proportional to  $\omega^2$  and therefore plays the role of an added mass. As it can be seen in (4), the different eigenmodes are only coupled through the pressure term and through the nonlinear damping term. Equation (4) represents a weakly nonlinear model, correct up to the order  $O(a_{LE}^2)$ . To develop an analytical model correct up to the order  $O(a_{LE}^3)$ , geometrical nonlinearities would have to be taken into account, making the problem far more complex<sup>43</sup>.

The system (4) for  $1 \leq i \leq N$  can be solved numerically for any values of the forcing amplitude  $a_{LE}$  and forcing frequency  $\omega$ . Its solution gives the complex amplitudes  $a_i$  as a function of the parameters  $a_{LE}$  and  $\omega$  (e.g., Fig. 6). In particular it gives the amplitude  $a_{TE}$  and phase  $\phi$  of the trailing edge oscillation relative to the leading edge forcing

$$h(1, t) = \left( a_{LE} + \sum_{i=1}^N a_i h_i(1) \right) e^{i\omega t} = a_{TE} e^{i(\omega t + \phi)}. \quad (5)$$

## IV. RESULTS

### A. Resonance

We now examine the frequency response of the system, both experimentally and theoretically. In dimensionless units, it consists in measuring the relative amplitude of the trailing edge displacement  $a_{TE}/a_{LE}$  and its phase  $\phi$ , when the normalized forcing frequency  $\omega/\omega_0$  is varied. Here  $\omega_0$  is the first natural frequency of the foil+fluid system. It is determined through impulse responses tests in the experiments (Sec. II) and given by  $\omega_0 = \kappa_1^2/\sqrt{1 + m\beta_{11}} \approx 0.22$  for the model [this formula results from taking  $a_{LE} = a_2 = a_3 = 0$  in Eq. (4) and neglecting nonlinear terms]. Given the range of control parameters (Table I), the system is investigated in the limit of large added mass and

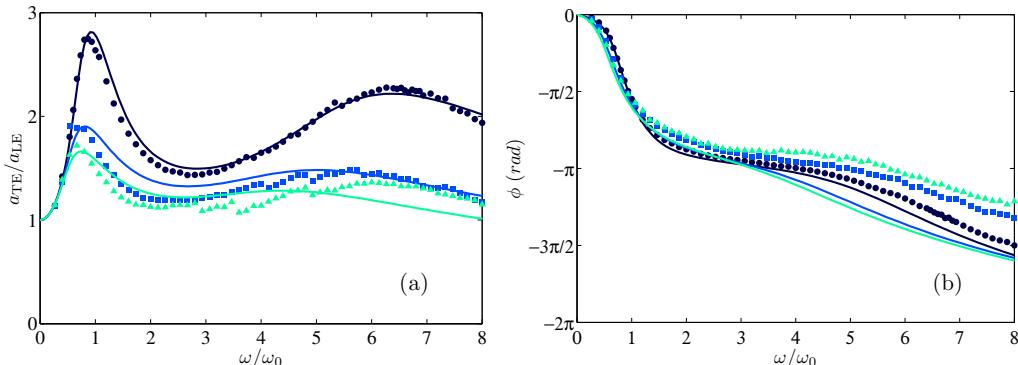


FIG. 4. Response of the trailing edge as a function of the forcing frequency  $\omega/\omega_0$ : (a) relative amplitude  $a_{TE}/a_{LE}$ , (b) corresponding phase shift  $\phi$ . Plate bending rigidity is  $B = 0.018$  Nm and flow speed is zero. Symbols represent the experimental results while solid lines represent theoretical predictions for  $c_D = 12$ . Dark blue, medium blue, and light green correspond to the forcing amplitudes:  $a_{LE} = 0.07, 0.17$ , and  $0.24$  respectively.

large reduced frequency ( $m \gg 1$  and  $k \gg 1$ ). In this limit, we have shown in a previous paper<sup>31</sup> that the frequency response depends mainly on the forcing amplitude imposed at the leading edge  $a_{LE}$ . In other words, the fluid speed and the plate bending rigidity have little influence on the response as long as deflection amplitudes and frequencies are made dimensionless properly.

Figure 4 shows three frequency responses for three different forcing amplitudes. Both experiments (symbols) and theoretical predictions (solid lines) exhibit two resonant peaks in the range of frequencies explored (Fig. 4a). Here, the only fitting parameter is the drag coefficient  $c_D$ , which is chosen such that the amplitude of the first peak is well predicted for the intermediate forcing amplitude. In Fig. 4, experiments and theory exhibit a good agreement. In particular, the first resonant peak around  $\omega/\omega_0 = 1$  is well predicted by the model, both in terms of peak frequency and amplitude. It should be noted that the differences in relative amplitude  $a_{TE}/a_{LE}$  are a signature of nonlinear effects, which are modeled by a nonlinear fluid damping in the present study. A linear model would give the same relative response for any forcing amplitude.

For the second resonant peak in Fig. 4a, the agreement between experiments and theory is good, except for the largest forcing  $a_{LE} = 0.24$ . However, phase differences tend to be underestimated (Fig. 4b), probably because nonlinear effects of order  $O(a_{LE}^3)$  and higher have been neglected in the analysis.

To go further in the comparison between experiments and theory, we now examine the plate deflection at the two resonances (Fig. 5). The enveloppe of the first resonant mode (Fig. 5a,b) is well captured by the model. It actually corresponds to a superposition of a rigid oscillation and a contribution of the first beam eigenmode (Fig. 6). For the second resonant mode, agreement is correct, but some differences can be observed (Fig. 5c,d): in the experiments, there is a bulge at about  $1/3$  of the plate chord that is not visible in the model, and the neck at about  $2/3$  is less marked than in the prediction.

The kinematic response of the foil under an external forcing has now been characterized, but a central question remains: how do the nonlinear forces affect thrust production?

## B. Wake

If the flapping flexible foil generates a thrust, one expects a reverse Bénard-von Kármán vortex street in its wake<sup>44</sup>; well-known to be a characteristic of a propulsive regime<sup>45</sup>.

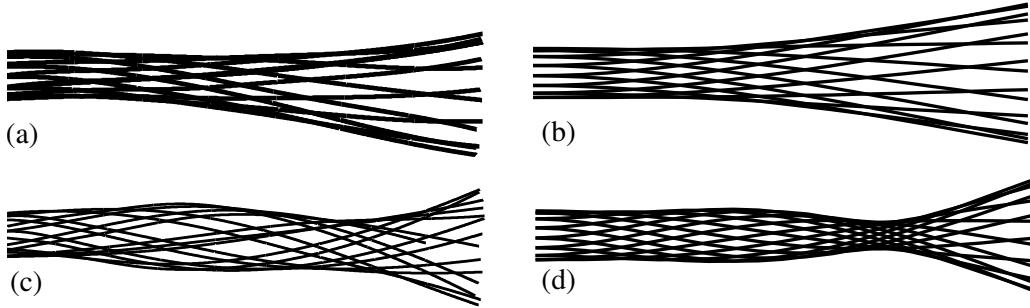


FIG. 5. Comparison between the experimental (a, c) and theoretical (b, d) deflection envelopes. These images show superimposed images of the foil over one heaving period. Deformation at the first resonance for  $\omega/\omega_0 = 0.9$  (a,b) and the second resonance, which appears experimentally at  $\omega/\omega_0 = 6.4$  (c) and theoretically at  $\omega/\omega_0 = 5.8$  (d). These responses correspond to the dark blue data in Fig. 4, for  $a_{LE} = 0.07$ . Note that the asymmetry of the experimental deflections is due to the foil density that is 20% heavier than water. Note also that the first 4% of the plate near the leading edge are hidden by the U-frame and thus not shown here (a,c).

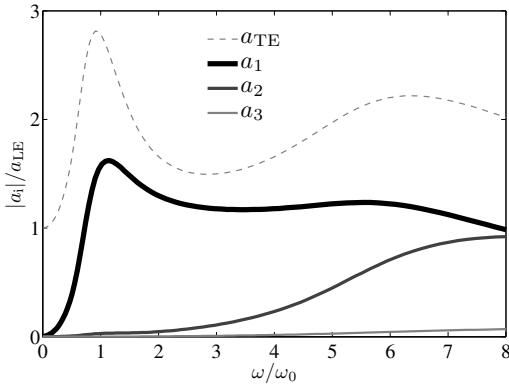


FIG. 6. Contribution of the amplitude  $a_1$ ,  $a_2$  and  $a_3$  in the total amplitude  $a_{TE}$  for  $a_{LE} = 0.07$ .

Figure 7 shows phase-averaged PIV vorticity fields when the frequency is tuned to the first resonance. These fields confirm that a reverse Bénard-von Kármán vortex street is indeed present.

To quantify the thrust production from PIV velocity fields, one can plot the time-average of the  $x$ -component of the flow velocity  $u_x$  (Fig. 7). It shows that, on average, a jet is produced behind the heaving foil, with a maximum speed of about twice the imposed flow in this particular example. From a momentum balance argument, it can be shown<sup>46</sup> that the thrust is given by

$$f_T = u \int_{-\infty}^{\infty} (u - u_x(x_{\text{optim.}}, y)) dy. \quad (6)$$

This dimensionless thrust is related to the dimensioned thrust force per unit span by  $F_T = \rho B f_T / MC$ . A priori, this momentum balance could be applied at any distance  $x$  from the trailing edge, but in practice an optimal distance  $x_{\text{optim.}}$  should be chosen, which results from a compromise between a distance large enough so the pressure variations across the wake are weak, and small enough so the three-dimensional effects have not established yet<sup>45</sup>. In our case, it has been found that  $x_{\text{optim.}} = 3$  is appropriate. However, this method is only a raw approximation of the generated thrust, as three-dimensional

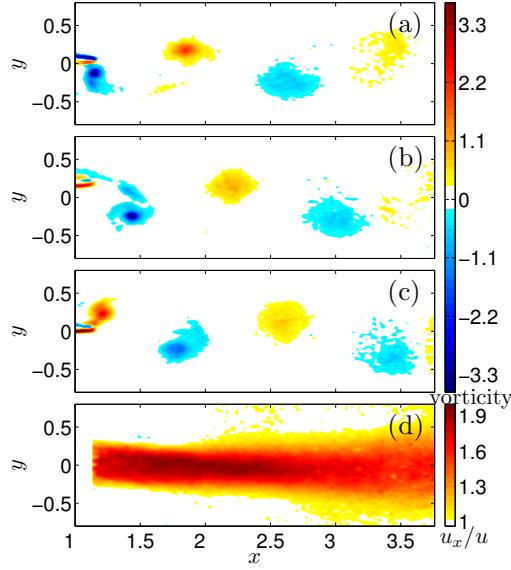


FIG. 7. Phase-averaged vorticity field in the wake of the heaving flexible foil for  $\omega t = \pi/2$  (a)  $\pi$  (b), and  $3\pi/2$  (c). Flow speed is  $u = 0.049$  and plate bending rigidity  $B = 0.018$  Nm. The foil is forced at amplitude  $a_{LE} = 0.07$  and frequency  $\omega = \omega_0$ . (d) Time-averaged  $x$ -component of the flow velocity  $u_x$  relative to the imposed flow speed  $u$ .

and confinement effects are important in the set-up used here.

### C. Thrust

To calculate the thrust produced by the heaving foil from the weakly nonlinear model, we have to consider three contributions: the leading-edge suction,  $f_S$ , the potential pressure forces acting along the plate and projected onto the  $x$ -direction yielding a force per unit span  $f_P$ <sup>21</sup>, and the resistive forces  $f_R$ , which are due to the nonlinear damping forces on the foil.

Leading-edge suction corresponds to large negative values of the pressure near the leading edge and can yield a stall vortex or a leading-edge vortex<sup>47,48</sup>, whose shedding can strongly affect the flow. In practice, when the angle of attack (i.e. the angle between the relative flow velocity and the plate) is too large, the suction force evaluated using linear theory cannot be achieved<sup>18</sup>. To take this effect into account, we will assume that the suction force decreases as a function of the maximum angle of attack at the leading edge.

The expression of the total thrust can be written  $f_T = f_P + f_S + f_R$ , with

$$f_P = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Re(p \bar{\partial}_x h) dx, \quad (7)$$

$$f_S = g_S(k a_{LE}) \frac{\pi}{16} a_{LE}^2 \omega^2 |\gamma_0 - \gamma_1|^2, \quad (8)$$

$$f_R = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Re \left[ \left( \frac{\nu}{m} \partial_t h + \frac{4}{3\pi} c_D |\partial_t h| \partial_t h \right) \bar{\partial}_x h \right] dx, \quad (9)$$

where  $\Re$  stands for the real part, the overbar for the complex conjugate, and  $\gamma_i = \gamma_{iLE} a_{LE} + \sum_j \gamma_{ij} a_j$  with  $i = 0$  or  $1$  (Table III). The function  $g_S(x) = (1 - \tanh(15x - 3))/2$ ,

TABLE III. Values of the coefficients  $\gamma_{ij}$  of Eq. (8) used to calculate the suction force at the leading edge.

	$\gamma_{iLE}$	$\gamma_{i1}$	$\gamma_{i2}$	$\gamma_{i3}$
$i = 0$	2	1.673	0.0866	0.836
$i = 1$	0	1.040	-0.846	0.107

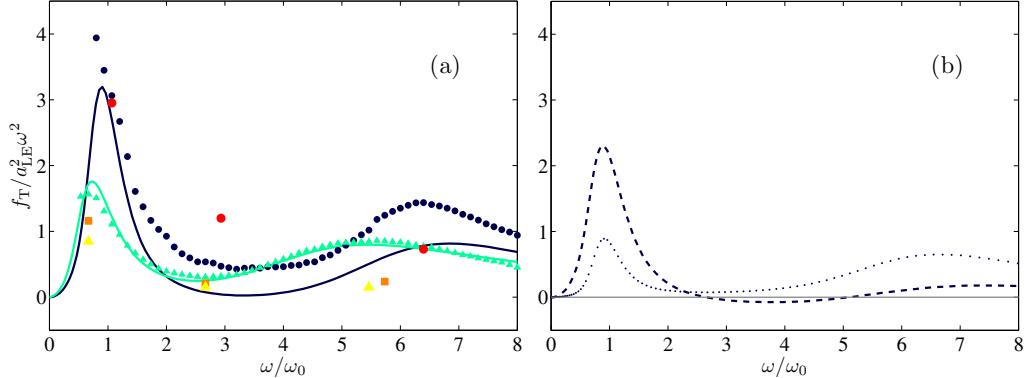


FIG. 8. (a) Comparison of the thrust calculated in the model (lines) and experimental measurements (symbols). Dark blue (circles) and light green (triangles) correspond respectively to the forcing amplitude  $a_{LE} = 0.07$  and  $0.24$ , with the plate rigidity  $B = 0.018$  Nm placed in water at rest. Close-by symbols are obtained with load cells, while red and yellow symbols are obtained from PIV and the momentum balance in Eq. (6) for  $u = 0.049$  (b) Different contributions of the total thrust: reactive forces (dashed line) and resistive forces (dotted line).

which varies between 1 and 0 with a cutoff distance at  $x = 0.2$ , crudely models the decrease of leading edge suction due to separation when the angle of attack [whose maximal value is  $\arctan(ka_{LE})$ ] is too large. Note that, in the present experiments,  $k$  being very large or even infinite (when  $u = 0$ ), the leading edge suction is assumed to be zero. For more details on these calculations, see Appendix A and Refs. 19, 21, and 40. It can be seen that, when nonlinear terms are neglected, the thrust is quadratic in amplitude, as expected. It is also proportional to the square of the forcing frequency. It is thus expected that the dimensionless thrust will scale as  $f_T = O(a_{LE}^2\omega^2)$ , which corresponds to a dimensioned thrust scaling as  $F_T = O(\rho U_{LE}^2 C)$ , where  $U_{LE} = \Omega A_{LE}$  is the typical velocity of the leading edge.

In Fig. 8a, the total thrust  $f_T$  calculated with this method is compared to experimental measurements. Despite some differences for the smallest forcing amplitude which are likely due to the hypothesis of zero leading edge suction, the average thrust generated is well predicted. In particular, the nonlinearities, which explain the differences between the two sets of data of different forcing amplitudes, are well reproduced around  $\omega/\omega_0 = 1$ . In Fig. 8a, the thrust measured from the momentum balance equation (6) is shown together with the average thrust recorded by the load cells. These measurements are consistent for low frequencies ( $\omega/\omega_0 \approx 1$ ), however thrust calculated from PIV data is only a raw approximation for  $\omega/\omega_0 > 2$ . This is likely due to the three-dimensionality of the flow.

These experimental results confirm the work of Michelin *et al.*<sup>33</sup>: resonances in thrust appears at the same frequencies as resonances in amplitude. Indeed, the maximum of thrust,  $f_T/(a_{LE}^2\omega^2)$ , occurs at  $\omega/\omega_0 = 0.9$  for the forcing amplitude  $a_{LE} = 0.07$  (dark blue in Fig. 8a) and  $\omega/\omega_0 = 0.7$  for the forcing amplitude  $a_{LE} = 0.24$  (light green in Fig. 8a).

As mentioned above Eq. (7), if leading edge suction  $f_S$  is neglected, the total thrust

can be split up into two contributions: resistive forces  $f_R$  and reactive forces  $f_P$  (Fig. 8b). Around the first resonance and for small forcing amplitude,  $f_P$  dominates (it is 2.3 times larger than  $f_R$  at  $\omega/\omega_0 = 0.9$ ). But in all other cases (large forcing amplitude or  $\omega/\omega_0 > 1$ ), the resistive contribution is of same order, if not larger than  $f_P$ . In the interval  $2.7 \leq \omega/\omega_0 \leq 5.1$ ,  $f_P$  can even be negative; in this interval, the total thrust is positive only thanks to resistive forces.

#### D. Efficiency

Let us now address the question of efficiency of thrust generation. For simplicity, we will make additional assumptions in this section: the foil will be considered near its first resonance (such that its deformation can be represented by the first beam eigenmode only), and linear damping terms will be neglected. However, we will lift the hypothesis of small reduced frequency  $k$ . With these assumptions Eq. (4) becomes

$$\kappa_1^4 a + mu^2 c_D a_{\text{LE}} \frac{2}{3\pi} \int_{-1}^1 h_1 |ik(1+ah_1) + a\partial_x h_1| (ik(1+ah_1) + a\partial_x h_1) dx - mu^2 (b_0(k) + b_1(k)a) = 0, \quad (10)$$

with  $a = a_1/a_{\text{LE}}$ ,  $h(x, t) = a_{\text{LE}}(1+ah_1(x))e^{i\omega t}$ , and

$$b_0(k) \approx 1.188k^2 - 0.995ikC_{\text{Th}}(k), \quad (11)$$

$$b_1(k) \approx 1.131k^2 - 2.216ik - 0.261 - (1.247 + 1.350ik)C_{\text{Th}}(k), \quad (12)$$

where  $C_{\text{Th}}(k)$  is the Theodorsen function<sup>49</sup>

$$C_{\text{Th}}(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}, \quad (13)$$

with  $H_n^{(2)}$  the Hankel function of the second kind. In Eq. (10), we recognize the elastic, nonlinear damping, and pressure terms respectively. In Eqs. (11–12), the first terms corresponds to  $\beta_{10}$  and  $\beta_{11}$  in Eq. (4), as given in Table II, and the other terms arise because we are no longer in the limit of asymptotically large  $k$ .

The average power needed to actuate the foil can be split into a reactive and a resistive components:  $\varpi = \varpi_P + \varpi_R$ , with

$$\varpi_P = \frac{1}{2\omega} \int_{-1}^1 \Re(p \overline{\partial_t h}) dx, \quad (14)$$

$$\varpi_R = \frac{1}{2\omega} \int_{-1}^1 \frac{4}{3\pi} c_D \Re [|\partial_t h + u\partial_x h| (\partial_t h + u\partial_x h) \overline{\partial_t h}] dx. \quad (15)$$

The dimensionless power  $\varpi$  is related to the dimensioned average power per unit span through the relation  $\mathcal{P} = \rho B \Omega \varpi / M$  (in  $\text{W m}^{-1}$ ). From the power  $\varpi$  and the thrust  $f_T$ , the Froude efficiency  $\eta$  can be defined

$$\eta = \frac{F_T U}{\mathcal{P}} = \frac{f_T}{k\varpi}. \quad (16)$$

Because our set-up does not allow us to measure the energy given to the system, we are going to use the experimental data of Quinn *et al.*<sup>30</sup> to assess the validity of these theoretical predictions on power cost and efficiency. Their set-up is very similar to the one used here, but the linear damping of their plates was not quantified and will be neglected

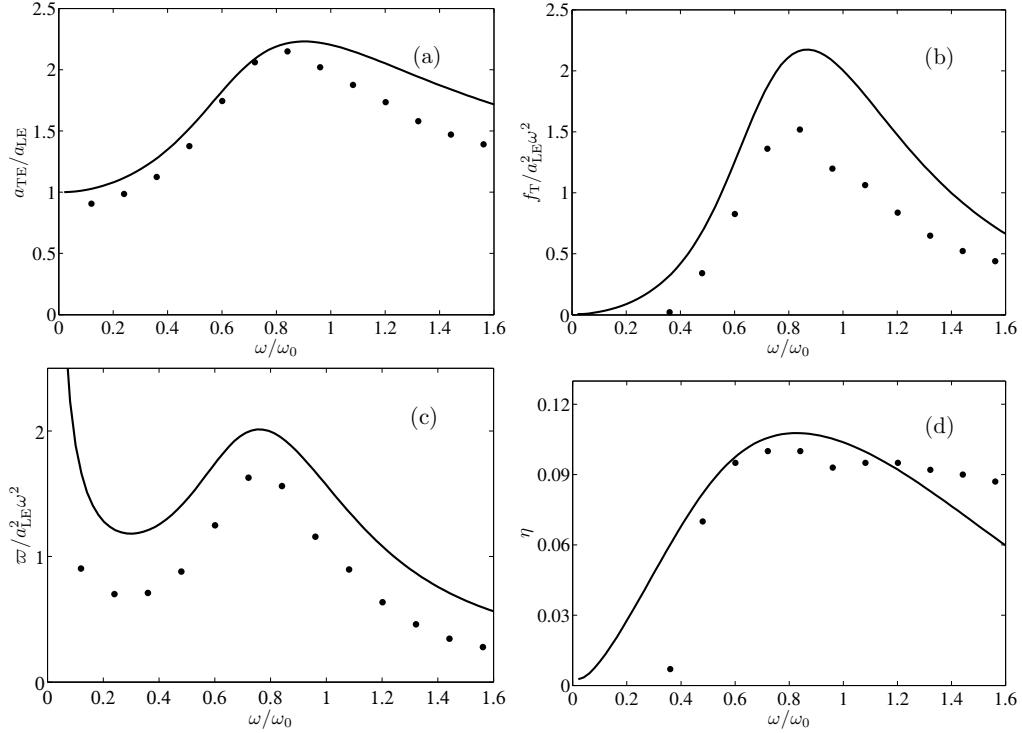


FIG. 9. Experimental data from Quinn *et al.*<sup>30</sup> compared to the presented model: (a) amplitude response; (b) thrust generated; (c) power cost; and (d) Froude efficiency for  $a_{LE} \approx 0.1$  and  $u = 0.016$ .

here. We will also assume that the drag coefficient is the same as in the present study:  $c_D = 12$ . Figure 9 shows how the trailing edge deflection amplitude, the thrust produced, the average power needed, and the Froude efficiency vary as a function of the forcing frequency when the forcing amplitude and flow velocity are fixed (frequency response test). Similarly to the results of the present study, these plots exhibit a maximum around the resonance  $\omega \approx \omega_0$ . Although there is no fitting parameters, all quantities are well predicted by the model, except the thrust and power that are slightly over-predicted. This may be because linear damping terms have been neglected.

Using Froude efficiency to measure the performance of thrust generation has been criticized by some authors (e.g., Ref. 50). These critics point out that Froude efficiency does not allow to compare fairly different propulsion systems. Here, we propose a different approach: we will formulate and solve an optimisation problem with the constraint of constant thrust. Within this framework, the Froude efficiency  $\eta$  is a natural measure of optimality (although arguably, other choices would be equivalent).

Let us assume we want to design an optimal propeller for a given vessel at a given travelling speed. In dimensioned units, we thus consider that the speed  $U$ , the fluid density  $\rho$ , the foil surface density  $M$ , the foil half-chord  $C$ , and the desired average thrust  $F_T$  are known. On the other hand, the foil bending rigidity  $B$ , actuating frequency  $\Omega$  and amplitude  $A_{LE}$  have to be chosen such that the average power needed  $\mathcal{P}$  is minimal.

The five given variables can be expressed with three independent units, such that two dimensionless numbers can be built: the mass ratio,  $m = \rho C/M$ , and the Lighthill number<sup>25</sup>,  $Li = F_T/(\rho U^2 C) = f_T/u^2$ . We will assume that  $m$  is asymptotically large, which justifies a posteriori to neglect inertial and linear damping terms in (10). The Lighthill number can be seen as the ratio between the desirable thrust, or the drag

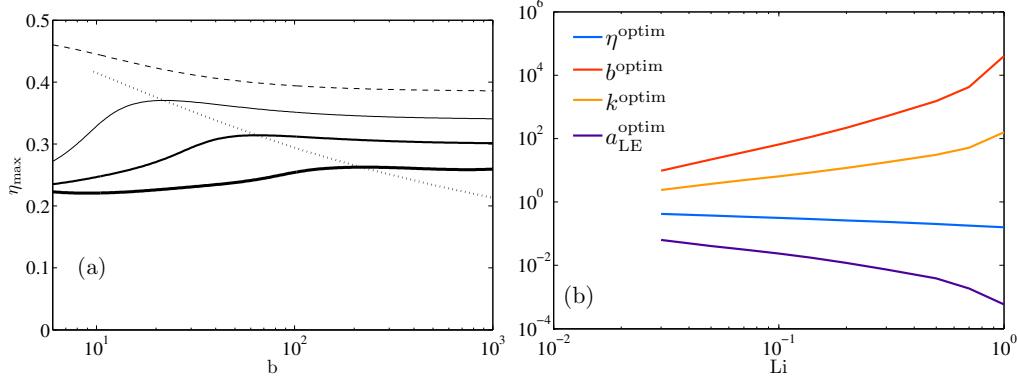


FIG. 10. Optimal heaving of a flexible plate: (a)  $\eta_{\max}$  as a function of the rigidity  $b$  for four values of  $Li$ : 0.02 (dashed line), 0.05 (thin line), 0.1 (medium), 0.2 (thick). The dotted line shows the loci of the optimal values  $\eta^{\text{optim}}$  for  $Li \geq 0.03$  (b) Optimal value of the efficiency as a function of  $Li$ . Are also shown (b) the corresponding values of the rigidity, reduced frequency, and forcing amplitude: ( $b^{\text{optim}}$ ,  $k^{\text{optim}}$ ,  $a_{\text{LE}}^{\text{optim}}$ ).

that needs to be balanced, and a typical achievable thrust (per unit span):  $\rho U^2 C$ . The three design parameters  $B$ ,  $\Omega$ , and  $A_{\text{LE}}$  correspond in dimensionless units to rigidity  $b = B/(\rho U^2 C^3) = 1/(mu^2)$ , reduced frequency  $k = \Omega C/U$ , and forcing amplitude  $a_{\text{LE}} = A_{\text{LE}}/C$  respectively. Note that, in Eq. (10),  $u$  always appears as  $mu^2$ , which is the reason why  $b$  is used as a parameter instead of  $u$ .

The constrained optimisation problem we want to solve consists in finding

$$\max \eta \quad \text{such that} \quad \begin{cases} f_T = Li u^2, \\ (b, k, a_{\text{LE}}) \in \mathbb{R}^{+3}. \end{cases} \quad (17)$$

To perform this optimisation, we first fix the value of  $Li$  and assume a certain value for  $b$ . Then, for each value of the reduced frequency  $k$ , we calculate the amplitude  $a_{\text{LE}}$  needed to generate a thrust  $f_T = Li u^2$ , and the corresponding efficiency  $\eta$ . For a certain frequency  $k$ , the efficiency reaches a maximum value  $\eta_{\max}(Li, b)$ . We then repeat this operation for different values of the rigidity  $b$  and identify the maximum of  $\eta_{\max}$  (Fig. 10a). This maximum actually corresponds to the optimal value  $\eta^{\text{optim}}$  associated to a triplet  $(b^{\text{optim}}, k^{\text{optim}}, a_{\text{LE}}^{\text{optim}})$ . Figure 10b shows how the value of these parameters vary as a function of the Lighthill number in the range  $0.03 \leq Li \leq 1$ .

For smaller Lighthill numbers ( $Li \leq 0.02$ ), the optimum is reached in the limit of vanishing rigidity  $b$ . In that case, the optimum motion corresponds to an infinite forcing amplitude  $a_{\text{LE}}$ , but finite leading edge speed  $ka_{\text{LE}}$ . This shows the limits of the present approach. For large forcing amplitude, the weakly nonlinear approximation is not valid and, in any case, the results of the present optimization calculation are quite sensitive to the way the leading edge suction and separation are modeled [cf. Eq. (8)].

Nevertheless, Figure 10 shows that, for moderate values of the Lighthill number, an optimal spot exists in the parameter space. This optimal motion always corresponds to a resonance of the flapping plate: for  $0.03 \leq Li \leq 1$ , the frequency is always in the narrow range  $1.03 \leq \omega/\omega_0 \leq 1.07$  corresponding to the resonance of the first eigenmode. However, the optimal flapping amplitude does not correspond to a quasi constant Strouhal number, contrarily to what has been recently suggested<sup>26</sup>. In the range where an optimal motion exists ( $0.03 \leq Li \leq 1$ ), the Strouhal number of the optimal flapping behaves as  $St^{\text{optim}} \approx 0.5 Li^{0.5}$ , thus varying between 0.08 and 0.5 in the interval considered. Here the Strouhal number is constructed with the amplitude of the trailing edge deflection:  $St = \Omega A_{\text{TE}}/(\pi U) = ka_{\text{TE}}/\pi$ . This can be compared to the scaling found in the limit of

elongated bodies<sup>25</sup>, where it was also found that Strouhal number is not constant for the optimal motion:  $\text{St}^{\text{optim}} \approx 0.75 \text{Li}^{0.33}$  (note that the definition of the Lighthill number was slightly different in this paper because the problem considered was three-dimensional).

To get an estimate of the Lighthill number for a fish, or a bio-inspired swimming vessel, we can assume that the propeller chord  $2C$  and span  $S$  are equal and that the aspect ratio of the whole swimmer is  $1/5$ :  $C = 0.1L$ , where  $L$  is the total swimmer's length. If most of the drag is due to skin friction, the thrust needed to balance this drag (per unit span) is approximately  $F_T \approx \frac{1}{2}\rho U^2 \text{Re}^{-1/2} L^2 / C$  when the boundary layers are laminar, with the Reynolds number based on the length,  $\text{Re} = UL/\nu$ . The resulting Lighthill number is thus  $\text{Li} = F_T / (\rho U^2 C) \approx 50 \text{Re}^{-1/2}$ . This Lighthill number corresponds to  $\text{St}^{\text{optim}} \approx 3.5 \text{Re}^{-1/4}$ , which is roughly the scaling found in a recent compilations of biological data<sup>51</sup> for laminar boundary layers, i.e.  $\text{Re} \lesssim 10^5$ . Note however that the Strouhal number may not be a good measure of optimality, as it can simply be seen as the result from a balance of thrust and drag for a specific swimming speed.

## V. DISCUSSION

In summary, we have studied the kinematic and dynamic response of a flexible foil actuated in heave at its leading edge. This experimental investigation has revealed that the deflection amplitude reaches a maximum when the system foil+fluid is resonant. It was also found that the forcing amplitude is an important parameter to predict the response, or, in other words, that nonlinearities are crucial even for relatively small deflections. Based on this observation, a weakly nonlinear, two-dimensional, and inviscid model has been developed. In this model, nonlinearities arise from a transverse drag force, which acts as a quadratic damping (nonlinear cubic terms being neglected). The magnitude of this drag, which is varied through a drag coefficient, is a free parameter of the model that is adjusted to fit the frequency responses tests performed at different forcing amplitudes. Once this adjusting parameter is set, agreement between experimental observations and model predictions is good for the first two resonances, at all amplitudes tested.

With the same model, the average thrust generated by the foil and the average power spent for actuation can also be calculated. There is a good agreement between the predictions of these quantities and the data of the present study, as well as the data of Quinn *et al.*<sup>30</sup> who used a similar set-up. From the power and thrust, a Froude efficiency can be defined. We have shown that this definition of efficiency is a natural choice to solve the following optimization problem: given a certain thrust to be produced and a given swimming velocity, what is the best design choice for the flexible propeller, i.e. the choice of rigidity, forcing amplitude, and forcing frequency that minimize the power needed? Within the framework of the proposed model, we have solved this optimization problem and have shown that optimal motions always correspond to resonances of the foil+fluid system. However, contrarily to recent findings<sup>26</sup>, the overall optimum is not achieved for a quasi constant Strouhal number.

The proposed model has some drawbacks however that should be addressed in the future if one wants to really design an optimal bio-inspired propeller. First, nonlinearities should be taken into account more rigorously, maybe through numerical simulations. Then, the two-dimensional hypothesis should be lifted to account for moderate aspect ratios such as those encountered in nature. Finally, when the thrust force is relatively large (i.e. for large Lightill numbers), the propeller kinematics cannot be fully dissociated from the bluff body that needs to be propelled. The flexible foil produced recoil torques on the body that induce a pitch rotation that needs to be taken into account. One possible avenue would be to use experimental optimization to find the best design choice<sup>52</sup>. However, one has to be careful in defining the objective function and the constraints. We showed here that Froude efficiency can be meaningful when comparing propeller generating the *same*

thrust force for the *same* swimming velocity.

## ACKNOWLEDGMENTS

We warmly thank D. Quinn and A. Smits (Princeton University) for sending us their experimental data.

## Appendix A: Amplitude equations

The modes  $h_i(x)$  are found by calculating the eigenmodes of the linearized Euler–Bernoulli beam equation in vacuum, with clamped-free boundary conditions. They are given by<sup>53</sup>

$$h_i(x) = \cosh \kappa_i(x+1) + \cos \kappa_i(x+1) + \zeta_i(\sinh \kappa_i(x+1) - \sin \kappa_i(x+1)), \quad (\text{A1})$$

with

$$\zeta_i = \frac{\sin(2\kappa_i) - \sinh(2\kappa_i)}{\cos(2\kappa_i) + \cosh(2\kappa_i)}, \quad (\text{A2})$$

where the wavenumbers  $\kappa_i$  are given in Table II for the first three eigenmodes.

To calculate the pressure jump across the foil, we will use a method first derived by Wu<sup>19</sup>. The only difference is that we will make the additional simplifying assumption that the reduced frequency is asymptotically large, i.e.  $k \gg 1$ . Since the potential problem is linear, to each beam eigenmode  $h_i(x)$  corresponds a pressure jump  $p_i(x)$ .

Each mode  $h_i(x)$  is decomposed onto the Chebyshev functions of the first kind

$$\xi_{ij} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h_i(\cos \theta) \cos(j-1)\theta \, d\theta \quad (x = \cos \theta). \quad (\text{A3})$$

The corresponding pressure jump is then given by

$$p_i(\cos \theta) = \sum_{q=1}^Q \frac{\xi_{i(q+2)} - \xi_{iq}}{q} \sin q\theta, \quad (\text{A4})$$

where, in practice, we use  $Q = 10$ . The total pressure jump is then simply

$$p(x) = -\omega^2 \left( a_{\text{LE}} p_{\text{LE}}(x) + \sum_{i=1}^N a_i p_i(x) \right), \quad (\text{A5})$$

where  $p_{\text{LE}}$  is the pressure associated to the heave of a rigid foil

$$p_{\text{LE}}(x) = -2\sqrt{1-x^2}. \quad (\text{A6})$$

The amplitude equations are obtained by first inserting the decomposition (2) into (1), and then by taking the scalar product [defined by (3)] with the  $N$  eigenmodes  $h_i(x)$ . This yields Eq. (4) where the coefficients  $\alpha_i$  and  $\beta_{ij}$  are given by

$$\alpha_i = \langle h_i, 1 \rangle, \quad (\text{A7})$$

$$\beta_{i0} = \langle h_i, p_{\text{LE}} \rangle, \quad (\text{A8})$$

$$\beta_{ij} = \langle h_i, p_j \rangle, \quad (\text{A9})$$

for  $i$  and  $j$  between 1 and  $N$ .

## Appendix B: Damping model

Impulse response tests in water and air have revealed the importance of damping in the system. If the initial deflection amplitude is small, two linear damping terms can be considered: linear fluid damping of coefficient  $\nu$  and internal Kelvin–Voigt viscoelastic damping<sup>54</sup> of coefficient  $\mu$  (in dimensionless units).

During impulse response tests, we can assume that only the first eigenmode is present. The deflection of the plate is thus of the form

$$h(x, t) = \frac{1}{2}a_{\text{TE}}(t)h_1(x), \quad (\text{B1})$$

where the time-varying amplitude is a damped oscillation of the form

$$a_{\text{TE}}(t) = e^{i\omega_0 t}e^{-\sigma t}. \quad (\text{B2})$$

The form of  $\omega_0$  and  $\sigma$  is found by using the linearized Euler–Bernoulli equation (1) and neglecting the nonlinear damping term. In the limit of small damping, it is found that

$$\omega_0 \approx \frac{\kappa_1^2}{\sqrt{1 + m\beta_{11}}}, \quad \text{and } \sigma = -\frac{\nu + \mu\kappa_1^4}{2(1 + m\beta_{11})}. \quad (\text{B3})$$

From an experimental point of view, the natural frequency of the system,  $\Omega_0 = (\omega_0/C^2)\sqrt{B/M}$ , is measured by performing a Fourier transform of the damped oscillating signal. The damping coefficient  $\Sigma = (\sigma/C^2)\sqrt{B/M}$  is measured by plotting in log-linear plot the amplitude of the trailing edge deflection as a function of time (inset of Fig. 2). In dimensional units, the damping coefficient  $\Sigma$  is related to the coefficient  $\nu^*$  and  $\mu^*$  through

$$2(1 + m\beta_{11})\Sigma = -\frac{1}{M} \left( \nu^* + \frac{\kappa_1^4}{C^4}\mu^* \right) \quad (\text{B4})$$

where  $\nu^*$  and  $\mu^*$  are the dimensional equivalents of  $\nu$  and  $\mu$  given by

$$\nu = \frac{\nu^* C^2}{\sqrt{MB}}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{C^2 \sqrt{MB}} \quad (\text{B5})$$

In Figure 11,  $2M(1 + m\beta_{11})|\Sigma|$  is plotted as a function of  $\kappa_1^4/C^4$  for different impulse response tests performed in water (for a single value of  $C$ ) and air (for different half-chords  $C$ ). From the data in air and using the relation (B4), the viscoelastic coefficient  $\mu^*$  can be measured:  $\mu^* = 1.02 \times 10^{-6}$  N m s. From the data in water, the linear fluid damping coefficient can be measured:  $\nu^* = 47.64$  kg m<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>. Using the dimensionless forms of these coefficient with Eqs. (B5), it is found that  $\nu = 0.583$  and  $\mu = 9.64 \times 10^{-4}$  for experiments conducted in water with  $C = 0.06$  m. Note that the linear fluid dissipation varies, the mean value is taken into the model is  $\nu = 0.474$ .

In addition to the linear fluid damping, the resistance to the transverse motion of the plate is expressed through a nonlinear drag force, with a drag coefficient  $c_D$ . From the literature<sup>55,56</sup>, a classic value for a flat plate perpendicular to the flow is around 2 in the range of the Reynolds number tested. In the present case however, the plate is confined between walls, a configuration that probably affects the value of  $c_D$ . Moreover, nonlinear effects of order  $O(a_{\text{LE}}^3)$  have been neglected in the analysis, but can be taken into account approximatively by including them in an “effective” drag coefficient. The value  $c_D = 12$  seems to fully capture the frequency response tests performed (cf. Fig. 4). This unusually large value indicates that additional nonlinear effects should probably be taken into account in the model, in particular for the largest forcing amplitudes.

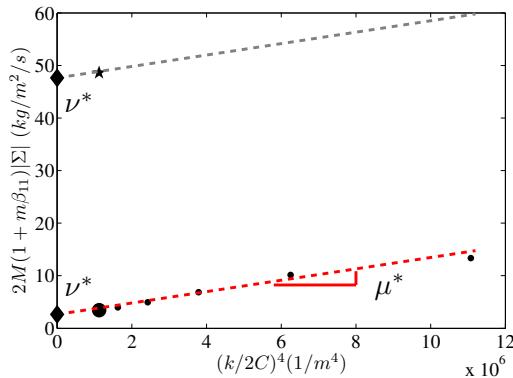


FIG. 11. Damping coefficients of a plate in the air as a function of  $(\kappa_1/C)^2$ . Circles are the experimental data and the slope of the main fit leads to  $\mu^*$ . Red star represents the damping in water at the corresponding length.

- <sup>1</sup>R. W. Blake, “Fish functional design and swimming performance,” *J. Fish Biol.* **65**, 1193–1222 (2004), ISSN 1095-8649.
- <sup>2</sup>R. Bainbridge, “Caudal fin and body movement in the propulsion of some fish,” *J. Exp. Biol.* **40**, 23–56 (1963).
- <sup>3</sup>F. E. Fish and G. V. Lauder, “Passive and active flow control by swimming fishes and mammals,” *Ann. Rev. Fluid Mech.* **38**, 194–224 (2006).
- <sup>4</sup>K. N. Lucas, N. Johnson, W. T. Beaulieu, E. Cathcart, G. Tirrell, S. P. Colin, B. J. Gemmell, J. O. Dabiri, and J. H. Costello, “Bending rules for animal propulsion,” *Nat. Commun.* **5**, 3293 (2014).
- <sup>5</sup>J. Katz and D. Weihs, “Hydrodynamic propulsion by large amplitude oscillation of an airfoil with chordwise flexibility,” *J. Fluid Mech.* **88**, 485–497 (1978).
- <sup>6</sup>S. Heathcote and I. Gursul, “Flexible flapping airfoil propulsion at low reynolds number,” *AIAA J.* **45**(5), 1066–1079 (2007).
- <sup>7</sup>C. Marais, B. Thiria, J. E. Wesfreid, and R. Godoy-Diana, “Stabilizing effect of flexibility in the wake of a flapping foil,” *J. Fluid Mech.* **710**, 659 (2012).
- <sup>8</sup>J. R. Nursall, “The caudal fin as a hydrofoil,” *Evolution* **12**, 116–120 (1958).
- <sup>9</sup>C. W. McCutchen, “The trout tail fin: a self-cambering hydrofoil,” *J. Biomech.* **3**, 271–281 (1970).
- <sup>10</sup>J. Gray, “Studies in animal locomotion. I. The movement of fish with special reference to the eel,” *J. Exp. Biol.* **10**, 88–104 (1933).
- <sup>11</sup>J. Gray, “Studies in animal locomotion: VI. The propulsive powers of the dolphin,” *J. Exp. Biol.* **13**, 192–199 (1936).
- <sup>12</sup>R. Bainbridge, “The speed of swimming of fish as related to size and to frequency and amplitude of the tail beat,” *J. Exp. Biol.* **35**, 109–133 (1958).
- <sup>13</sup>C. C. Lindsey, “Form, function and locomotory habits in fish,” in *Fish Physiology VII*, edited by W. S. Hoar and D. J. Randall (Academic Press, 1978) pp. 1–100.
- <sup>14</sup>G. V. Lauder and E. D. Tytell, “Hydrodynamics of undulatory propulsion,” *Fish Physiol.* **23**, 425–468 (2005).
- <sup>15</sup>M. S. Triantafyllou and G. S. Triantafyllou, “An efficient swimming machine,” *Sci. Am.* **272**, 64–71 (1995).
- <sup>16</sup>M. Koochesfahani, “Vortical patterns in the wake of an oscillating airfoil,” *AIAA J.* **27**, 1200–1205 (1989).
- <sup>17</sup>G. S. Triantafyllou, M. S. Triantafyllou, and M. A. Grosenbaugh, “Optimal thrust development in oscillating foils with application to fish propulsion,” *J. Fluids Struct.* **7**, 205–224 (1993).
- <sup>18</sup>L. Schouveiler, F. S. Hover, and M. S. Triantafyllou, “Performance of flapping foil propulsion,” *J. Fluids Struc.* **20**, 949–959 (2005).
- <sup>19</sup>T. Y.-T. Wu, “Swimming of a waving plate,” *J. Fluid Mech.* **10**, 321–344 (1961).
- <sup>20</sup>M. J. Lighthill, “Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency,” *J. Fluid Mech.* **44**, 265–301 (1960).
- <sup>21</sup>T. Y.-T. Wu, “Hydrodynamics of swimming propulsion. part 2. some optimum shape problems,” *J. Fluid Mech.* **46**, 521–544 (1971).
- <sup>22</sup>J. M. Anderson, K. Streitlien, D. S. Barrett, and M. S. Triantafyllou, “Oscillating foils of high propulsive efficiency,” *J. Fluid Mech.* **360**, 41–72 (4 1998).
- <sup>23</sup>D. A. Read, F. S. Hover, and M. S. Triantafyllou, “Forces on oscillating foils for propulsion and maneuvering,” *J. Fluids Struc.* **17**, 163–183 (2003).

- <sup>24</sup>G. K. Taylor, R. L. Nudds, and A. L. R. Thomas, "Flying and swimming animals cruise at a Strouhal number tuned for high power efficiency," *Flying and swimming animals cruise at a Strouhal number tuned for high power efficiency*, Nature **425**, 707–711 (2003).
- <sup>25</sup>C. Eloy, "Optimal Strouhal number for swimming animals," J. Fluids Struct. **30**, 205–218 (2012).
- <sup>26</sup>P. A. Dewey, B. M. Boschitsch, K. W. Moore, H. A. Stone, and A. J. Smits, "Scaling laws for the thrust production of flexible pitching panels," J. Fluid Mech. **732**, 29–46 (10 2013).
- <sup>27</sup>K. W. Moore, P. A. Dewey, A. J. Smits, and H. Haj-Hariri, "Hydrodynamic wake resonance as an underlying principle of efficient unsteady propulsion," J. Fluid Mech. **708**, 329–348 (10 2012).
- <sup>28</sup>S. E. Spagnolie, L. Moret, M. J. Shelley, and J. Zhang, "Surprising behaviors in flapping locomotion with passive pitching," Phys. Fluids **22**, 041903 (2010).
- <sup>29</sup>S. Alben, S. Witt, T. V. Baker, S. Anderson, and G. V. Lauder, "Dynamics of freely swimming flexible foils," Phys. Fluids **24**, 051901 (2012).
- <sup>30</sup>D. B. Quinn, G. V. Lauder, and A. J. Smits, "Scaling the propulsive performance of heaving flexible panels," J. Fluid Mech. **738**, 250–267 (2014).
- <sup>31</sup>F. Paraz, C. Eloy, and L. Schouveiler, "Experimental study of the response of a flexible plate to a harmonic forcing in a flow," C.R. Mécanique **342**, 532–538 (2014).
- <sup>32</sup>C. J. Esposito, J. L. Tangorra, B. E. Flammang, and G. V. Lauder, "A robotic fish caudal fin: effects of stiffness and motor program on locomotor performance," J. Exp. Biol. **215**, 56–67 (2012).
- <sup>33</sup>S. Michelin and S. G. Llewellyn Smith, "Resonance and propulsion performance of a heaving wing," Phys. Fluids **21**(7), 071902 (2009).
- <sup>34</sup>J. D. Eldredge, J. Toomey, and A. Medina, "On the roles of chord-wise flexibility in a flapping wing with hovering kinematics," J. Fluid Mech. **659**, 94–115 (2010).
- <sup>35</sup>C.-K. Kang, H. Aono, C.E.C Cesnik, and W. Shyy, "Effect of flexibility on the aerodynamic performance of flapping wings," J. Fluid Mech. **689**, 32–74 (2011).
- <sup>36</sup>P. J. S. A. Ferreira de Sousa and J. J. Allen, "Thrust efficiency of harmonically oscillating flexible flat plates," J. Fluid Mech. **674**, 43–66 (2011).
- <sup>37</sup>R.-N. Hua, L. Zhu, and X.-Y. Lu, "Locomotion of a flapping flexible plate," Phys. Fluids **25**, 121901 (2013).
- <sup>38</sup>M. Bergmann, A. Iollo, and R. Mittal, "Effect of caudal fin flexibility on the propulsive efficiency of a fish-like swimmer," Bioinspir. Biomim. **9**, 046001 (2014).
- <sup>39</sup>M. N. J. Moore, "Analytical results on the role of flexibility in flapping propulsion," J. Fluid Mech. **757**, 599–612 (2014).
- <sup>40</sup>C. Eloy and L. Schouveiler, "Optimisation of two-dimensional undulatory swimming at high Reynolds number," Int. J. Nonlinear Mech. **46**, 568–576 (2011).
- <sup>41</sup>P. Meunier and T. Leweke, "Analysis and treatment of errors due to high velocity gradients in particle image velocimetry," Exp. Fluids **35**, 408–421 (2003), ISSN 0723-4864.
- <sup>42</sup>D. G. Crighton, "The Kutta condition in unsteady flow," Ann. Rev. Fluid Mech. **17**, 411–445 (1985).
- <sup>43</sup>C. Eloy, N. Kofman, and L. Schouveiler, "The origin of hysteresis in the flag instability," J. Fluid Mech. **691**, 583–593 (2012).
- <sup>44</sup>F. Paraz, C. Eloy, and L. Schouveiler, "Vortex patterns generated by a heaving flexible plate," J. Vis. **17**, 295–297 (2014).
- <sup>45</sup>R. Godoy-Diana, J.L. Aider, and J.E. Wesfreid, "Transition in the wake of a flapping foil," Phys. Rev. E **77**, 016308 (2008).
- <sup>46</sup>G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics* (Cambridge University Press, 1967).
- <sup>47</sup>T. Von Kármán and J.M. Burgers, *General aerodynamic theory - Perfect fluids*, v. 2 (J. Springer, 1935).
- <sup>48</sup>C. Wang and J. D. Eldredge, "Low-order phenomenological modeling of leading-edge vortex formation," Theor. Comp. Fluid Dyn. **27**, 577–598 (2013).
- <sup>49</sup>T. Theodorsen, "General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter," Tech. Rep. TR-496 (NACA, 1935).
- <sup>50</sup>D. S. Barrett, M. S. Triantafyllou, D. K. P. Yue, M. A. Grosenbaugh, and M. J. Wolfgang, "Drag reduction in fish-like locomotion," J. Fluid Mech. **392**, 183–212 (1999).
- <sup>51</sup>M. Gazzola, M. Argentina, and L. Mahadevan, "Scaling macroscopic aquatic locomotion," Nature Physics, 758–761(2014).
- <sup>52</sup>D. B. Quinn, G. V. Lauder, and A. J. Smits, "Maximizing the efficiency of a flexible propulsor using experimental optimization," J. Fluid Mech. **767**, 430–448 (2015).
- <sup>53</sup>L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Theory of elasticity* (Pergamon Press, New York, 1986).
- <sup>54</sup>M. P. Paidoussis, "Fluid-structure interactions - slender structures and axial flow," (Elsevier Academic Press, 2004).
- <sup>55</sup>S. F. Hoerner, *Fluid-dynamic drag: practical information on aerodynamic drag and hydrodynamic resistance* (Hoerner Fluid Dynamics, 1965).
- <sup>56</sup>P. Buchak, C. Eloy, and P. M. Reis, "The clapping book: Wind-driven oscillations in a stack of elastic sheets," Phys. Rev. Lett. **105**, 194301 (2010).

# Table des figures

1.1	Classification des poissons, extrait de Lindsey (1978) . . . . .	2
1.2	Identification des nageoires sur un poisson . . . . .	4
1.3	Classification des modes de nage avec les modèles hydrodynamiques correspondant, selon Lighthill (1975) . . . . .	5
1.4	Variétés de nageoires caudales en forme de croissant de lune chez les espèces de type carangiforme, extrait de Lighthill (1969) . . . . .	6
1.5	Définition de l'angle d'attaque et répercussion sur la poussée . . . . .	8
1.6	Sillages induits par deux objet . . . . .	9
1.7	Exemple d'étude sur un profil rigide en mouvement combiné de pi-lonnement et tanguage . . . . .	11
1.8	Cartographie des sillages générés par des profils oscillants rigide et flexible . . . . .	12
1.9	Dynamique et performances de profils flexibles . . . . .	13
1.10	Conséquence de la rigidité sur l'efficacité pour différentes amplitudes de battement . . . . .	14
1.11	Exemples de robots bio-inspirés . . . . .	15
2.1	Schéma du dispositif expérimental . . . . .	18
2.2	Plan de la plaque flexible expérimentale . . . . .	21
2.3	Principe de fonctionnement du capteur de déplacement . . . . .	22
2.4	Description méthode PIV . . . . .	25
2.5	Courbes d'étalonnage des capteurs de force . . . . .	26
3.1	Détermination de la rigidité en flexion $B$ . . . . .	31
3.2	Réponse impulsionale d'une plaque flexible . . . . .	32
3.3	Coefficients d'amortissement linéaires d'une plaque dans l'eau . . . . .	34
3.4	Amortissement d'une plaque dans l'air . . . . .	35
3.5	Réponse typique d'une plaque flexible à un forçage . . . . .	37
3.6	Formes expérimentales des modes de résonance . . . . .	38
3.7	Effet de la rigidité sur la réponse de la plaque . . . . .	39
3.8	Effet du nombre de Reynolds sur la réponse de la plaque . . . . .	40

3.9	Effet de l'amplitude de forçage sur la réponse de la plaque . . . . .	42
3.10	Effet du confinement sur la réponse de la plaque . . . . .	43
3.11	Déformations tridimensionnelles à hautes fréquences . . . . .	44
3.12	Classification des sillages derrière un objet . . . . .	45
3.13	Sillage généré par un aileron rigide . . . . .	46
3.14	Visualisations expérimentales par colorant des vortex générés par la plaque flexible . . . . .	46
3.15	Schéma explicatif du développement des vortex au bord d'attaque .	48
3.16	Écoulement et sillage d'une plaque flexible . . . . .	48
3.17	Vorticités et vitesses moyennes . . . . .	49
3.18	Profil des vitesses moyennes et coefficient de traînée en fonction de la position dans le sillage . . . . .	50
3.19	Poussée expérimentale générée par la plaque flexible . . . . .	52
4.1	Schématisation d'une poutre . . . . .	57
4.2	Modes propres de vibrations d'une poutre dans le vide . . . . .	61
4.3	Schéma pour la modélisation analytique de l'expérience . . . . .	62
4.4	Schéma de la pression autour de la plaque par la méthode de Wu (1961) [91] . . . . .	65
4.5	Coefficients linéaires d'amortissement en fonction de la longueur libre de la plaque dans l'air . . . . .	70
4.6	Effet des coefficients linéaires de dissipation sur la réponse . . . . .	72
4.7	Coefficient non linéaire de traînée fluide . . . . .	73
4.8	Comparaison des courbes de réponse en amplitude et phase . . . . .	75
4.9	Comparaison des modèles linéaire et non linéaire . . . . .	75
4.10	Comparaison de la forme des modes aux résonances . . . . .	76
4.11	Contribution des amplitudes des modes propres dans la réponse de la plaque . . . . .	77
4.12	Contribution des forces de poussée dans la poussée totale générée par la plaque oscillante . . . . .	79
4.13	Courbes de poussée obtenues par les mesures expérimentales et par les prédictions . . . . .	81
4.14	Optimisation des paramètres de nage . . . . .	85
4.15	Application du modèle aux données expérimentales de Quinn <i>et al.</i> (2013) [67] . . . . .	86

# Liste des tableaux

2.1	Grandeur caractéristiques dimensionnées de l'expérience . . . . .	19
4.1	Valeurs de coefficients théoriques $k_i$ , $\alpha_i$ et $\beta_{ij}$ pour les trois premiers modes de résonance d'une poutre dans le vide . . . . .	69
4.2	Valeurs des coefficients théoriques $\gamma_i$ dans le calcul de la poussée . .	78









## Oscillation d'une plaque flexible dans un écoulement

**Résumé** La physique de nage d'une nageoire caudale flexible est étudiée expérimentalement grâce à une plaque flexible immergée dans un écoulement uniforme. Le bord d'attaque est forcé par un mouvement harmonique, tandis que le bord de fuite répond passivement au forçage. Une résonance en amplitude dans la réponse est mise en évidence et révèle une forte interaction entre les fréquences naturelles de la plaque et celles du forçage. Les résultats expérimentaux suggèrent un rôle non trivial de l'amplitude de forçage, qui souligne le rôle des non linéarités dans ce problème. Pour avoir une meilleure compréhension de l'origine de ces non linéarités, un modèle analytique faiblement non linéaire a été développé. Nous supposons une plaque d'épaisseur nulle immergée dans un écoulement potentiel, sujette à une force de traînée résistive. La déflexion de la plaque a ensuite été décomposée en un mode rigide, mimant le forçage en pilonnement et en modes propres de flexion d'une poutre dans le vide. Les prédictions de la réponse en amplitude et en fréquence du système forcé sont alors calculées. Les fréquences de résonances, ainsi que l'enveloppe de la déflexion, sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Les performances du système, mesurées à travers la poussée générée, est également correctement prédite par la modélisation. L'accord entre les expériences et le modèle est étendu à une étude trouvée de la littérature. Une optimisation analytique a été conduite et étendue à l'application de la bio-robotique.

**Mots-clés :** flexibilité, résonance, propulsion, nage, interaction fluide-structure

## Oscillation of a flexible plate in a flow

**Abstract** The physics of the swimming with a flexible caudal fin is studied experimentally by the means of an elastic plate immersed in a uniform water flow. The leading edge of the plate is forced into a harmonic motion, while its trailing edge responds passively to this actuation. A resonance response in amplitude is demonstrated, revealing a strong interaction between the natural frequencies of the plate and the forcing frequencies. Experimental results suggest a non-trivial role of the forcing amplitude, emphasizing the role of non linearities in this problem. To gain better insight into the origin of these non linearities, a weakly non linear model is developed. We model a quasi two-dimensional plate of zero thickness immersed in a potential flow and subject to a resistive drag-like force. The plate deflection is then decomposed into a forcing heaving mode and natural flexural modes. Predictions of the response in amplitude and frequency to a heave forcing system are then calculated. The frequencies of the resonances, as well as the shapes of the deflection, match the experimental results. The performance of the system measured through the generated thrust, is well predicted by the modelling. The experimental and modelling results presented here show (very) good agreement with the literature. Finally, an analytical optimization is undertaken and potential applications to bio-robotic are suggested.

**Keywords:** flexibility, resonance, propulsion, swimming, interaction fluid-structure