

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1    Bref aperçu...	9
2    Panorama	9
3    Objectif	10
4    Plan de la thèse	13
4.1    Chapitre I : Stabilisation d'un interféromètre atomique contre les vibrations	13
4.2    Chapitre II : Développement d'un sismomètre interférentiel	13
4.3    Chapitre III : Théorie des pendules à lame élastique	13
4.4    Chapitre IV : Expériences avec un pendule à lame élastique	13
4.5    Chapitre V : Oscillateurs couplés amortis	13
4.6    Chapitre VI : La force de Stokes sur la sphère ou le cylindre en mouvement oscillant	14
4.7    Conclusion	14
<b>1    Stabilisation d'un interféromètre atomique</b>	<b>15</b>
1    Introduction	15
2    Sensibilité des interféromètres atomiques	16
2.1    Sensibilité inertielle	16
2.2    Effet des vibrations sur la visibilité des franges d'interférences	18
3    Principe des dispositifs de réduction des vibrations	20
3.1    Propriétés des pendules comme amortisseurs de vibrations	20
3.2    Comment abaisser passivement la fréquence de résonance ?	21
3.3    Comment abaisser activement la fréquence de résonance ?	23
4    Application à un interféromètre	24
4.1    Le pendule suspendu par 3 fils	24
4.2    Mise en équations	25
5    Défauts de symétrie	31
6    Première réalisation	31
6.1    Sismomètres	31
6.2    Simulations	33
<b>2    Développement d'un sismomètre interférentiel</b>	<b>39</b>
1    Introduction	39
2    Les sismomètres électroniques	39
2.1    Principe de fonctionnement	39
2.2    Performances de ces appareils	40
2.3    Mesure de déplacement du pendule	40

3	Notre premier développement . . . . .	40
4	Le sismomètre de l'équipe de Zumberge . . . . .	41
5	L'interféromètre de Michelson . . . . .	42
5.1	Sensibilité de mesure . . . . .	42
5.2	Limite fondamentale de la sensibilité de mesure . . . . .	42
5.3	Le problème de la dépendance de la sensibilité avec la phase . . . . .	43
6	Le sismomètre de l'équipe de Zumberge . . . . .	43
7	Notre montage . . . . .	45
8	Théorie de l'interféromètre . . . . .	47
8.1	L'interféromètre à coins de cube . . . . .	47
8.2	Les coins de cube . . . . .	48
8.3	La séparatrice utilisée dans le montage . . . . .	48
9	Propriétés de polarisation des lames séparatrices . . . . .	49
9.1	Le cas de la séparatrice sans perte . . . . .	49
9.2	Le cas d'une séparatrice avec pertes . . . . .	50
10	. . . . .	51
10.1	Principe du calcul . . . . .	51
11	Conclusion . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Théorie des pendules à lame élastique</b>	<b>57</b>
1	Introduction . . . . .	57
2	Reproduction de l'article “ A more accurate theory of a flexible-beam pendulum ” . . . . .	58
3	Erratum . . . . .	60
4	Croisement évité des fréquences des deux résonances . . . . .	60
5	Application aux horloges . . . . .	61
6	Le pendule inversé de Holweck-Lejay . . . . .	62
6.1	Mesures relatives de la gravité . . . . .	62
6.2	Le pendule inversé de Holweck-Lejay . . . . .	63
6.3	Calcul du pendule inversé de Holweck-Lejay . . . . .	64
7	Conclusion . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Expériences avec un pendule à lame élastique</b>	<b>71</b>
1	Introduction . . . . .	71
2	Notre article “ Damping mechanisms of a pendulum ” . . . . .	72
3	Amortissement par les courants de Foucault . . . . .	75
3.1	Expérience . . . . .	75
3.2	Modélisation . . . . .	75
4	Conclusion . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Oscillateurs harmoniques couplés</b>	<b>81</b>
1	Introduction . . . . .	81
2	Difficultés pour publier cet article . . . . .	82
3	Notre article “ Damping of coupled harmonic oscillators ” . . . . .	82
4	Amortissement différentiel des modes normaux . . . . .	85
5	Transition Wigner-Weisskopf/ Rabi . . . . .	85
5.1	Introduction . . . . .	85
5.2	Dynamique quantique d'un état discret couplé à un continuum . . . . .	86
5.3	Transition continue entre ces deux régimes . . . . .	87
6	Conclusion . . . . .	87

7	Appendice : des exemples de points exceptionnels . . . . .	87
7.1	Ondes de Voigt dans des cristaux biréfringents et absorbants . . . . .	88
7.2	Coalescence de résonances en physique des collisions . . . . .	88
7.3	Points exceptionnels en spectroscopie atomique . . . . .	88
7.4	Brisure de la symétrie $\mathcal{PT}$ en présence de potentiels complexes . . . . .	89
7.5	Chiralité d'un point exceptionnel . . . . .	89
7.6	Exploration du voisinage d'un point exceptionnel . . . . .	89
7.7	Utilisation d'un point exceptionnel pour développer des capteurs de haute sensibilité . . . . .	90
7.8	Un article pédagogique très récent . . . . .	90
<b>6</b>	<b>La force de Stokes</b>	<b>95</b>
1	Introduction : motivations de cette étude . . . . .	95
2	Rappels historiques . . . . .	97
3	Les équations hydrodynamiques de Navier-Stokes . . . . .	98
4	Introduction du nombre de Reynolds . . . . .	98
5	La profondeur de pénétration visqueuse $\delta$ . . . . .	99
6	Forces exercées par un fluide sur un objet . . . . .	100
7	L'article de Stokes de 1851 . . . . .	100
7.1	Résultat de Stokes pour la sphère . . . . .	100
7.2	Résultats de Stokes pour le cylindre en mouvement oscillant . . . . .	102
7.3	Cas du mouvement oscillant sinusoïdal de grande amplitude pour le cylindre	104
8	Considérations semi-empiriques sur les forces de friction . . . . .	105
8.1	Définition du coefficient de traînée . . . . .	105
8.2	Coefficient de traînée pour une sphère . . . . .	105
9	Force de traînée pour un cylindre . . . . .	106
9.1	Limite de validité du calcul de Stokes . . . . .	107
10	Amortissement d'un pendule par la friction de l'air . . . . .	108
11	Tests expérimentaux de la force de friction de Stokes . . . . .	110
11.1	L'article de Nelson et Olsson . . . . .	111
11.2	L'article de Gupta <i>et al.</i> . . . . .	111
11.3	Article de Kostov <i>et al.</i> . . . . .	112
11.4	L'article de Bolster <i>et al.</i> . . . . .	113
11.5	L'article de Stuart et Woodgate . . . . .	114
11.6	La thèse de Williams et l'article de Williams et Hussey . . . . .	115
11.7	L'article de Mohazzabi et Shankar . . . . .	116
11.8	Conclusion sur les tests des résultats de Stokes . . . . .	117
12	Notre expérience testant les résultats de Stokes . . . . .	117
12.1	But de l'expérience . . . . .	117
12.2	Le coefficient de qualité $Q$ . . . . .	118
12.3	Construction des pendules . . . . .	119
12.4	Détecteurs du mouvement : "shadow detector" . . . . .	121
12.5	Déroulement des expériences et signaux obtenus . . . . .	122
12.6	Résultats de nos expériences . . . . .	124
13	Conclusion . . . . .	133
14	Appendice A : la viscosité de l'air . . . . .	134
14.1	Mesure de la viscosité de l'air par Maxwell . . . . .	134
14.2	Mesures de précision de la viscosité de l'air sec . . . . .	134
14.3	Effet de l'humidité de l'air sur sa viscosité . . . . .	135

15	Appendice B :Calcul du Stokes pour le cylindre . . . . .	135
15.1	Les équations dynamiques . . . . .	136
15.2	La conservation de la masse : introduction de la fonction courant $\psi$ . . . . .	136
15.3	Elimination de la pression $p$ . . . . .	137
15.4	Relation entre $p$ et $\psi$ . . . . .	137
15.5	Passage en coordonnées polaires . . . . .	138
15.6	Conditions aux limites . . . . .	138
15.7	Dépendance angulaire de $\psi_1$ et $\psi_2$ . . . . .	139
15.8	Dépendances radiales de $F_1$ et $F_2$ . . . . .	139
15.9	Prise en compte des conditions aux limites . . . . .	139
16	Appendice C : Calcul de la force due à la viscosité . . . . .	140
17	Appendice D : Evaluation de l'effet anélastique . . . . .	142
<b>Conclusion</b>		<b>151</b>

# Introduction

## 1 Bref aperçu...

La nature de la lumière a de tout temps fait débat. Dès l'antiquité, les deux aspects, corpusculaire et ondulatoire, ont été avancés pour tenter de théoriser les phénomène lumineux. Mais c'est le XVII<sup>e</sup> qui a vu les affrontements les plus virulents. Alors que Robert Boyle et Robert Hooke observaient les premières figures d'interférences (1665), Isaac Newton présentait son télescope à la Royal Society (1672), puis y montrait la décomposition de la lumière par un prisme (1673). Il eut alors le tort de tenter d'expliquer ce phénomène par l'existence de corpuscules de lumière. Mandaté par la Royal Society pour évaluer ces travaux, Hooke, qui venait de publier un début de théorie sur la nature ondulatoire de la lumière, n'y trouva pas de preuve convaincante et la commission qu'il présidait rejeta les explications de Newton. Froissé, celui-ci écrivit alors son traité «Opticks» (1675) mais ne le publia que 29 ans plus tard, lorsque sa notoriété, acquise pour la théorie de la gravitation qui l'opposa encore une fois à Hooke, lui permit d'imposer ses vues. Les expériences d'Young (1801), de Fresnel (qui réalisa la première mesure interférométrique), de Foucault et Fizeau (montrant que la lumière allait moins vite dans l'eau que dans l'air) et la théorie de Maxwell ramenèrent au premier plan le modèle ondulatoire, alors qu'Einstein et Planck résolurent la catastrophe ultraviolette par un modèle corpusculaire. Louis de Broglie en 1927 poussa la logique jusqu'au bout et permit la description de la matière, jusque là constituée d'inamovibles corpuscules, par des ondes.

La conclusion (provisoire ?), aujourd'hui connue de tous les étudiants (au moins des sections scientifiques j'espère !), se trouve bien sûr dans ces mots : dualité onde-corpuscule. Il existe aujourd'hui des appareils qui paraîtraient certainement étranges à Hooke ou à Newton, où des ondes de matière sont diffractées par des réseaux de lumière et ces dispositifs ont été le point de départ de cette thèse.

## 2 Panorama

Il existe de nombreux systèmes interférentiels et je m'intéresserai ici à un dispositif à division de front d'onde de type Mach-Zehnder, mais les principes généraux restent applicables à d'autres types d'interféromètres. Le schéma de principe est donné sur la figure 1 pour un interféromètre optique : une lame semi réfléchissante sépare le faisceau incident en deux, des miroirs et une seconde lame semi réfléchissante permettent de recombiner les faisceaux et d'observer, sur chacune des deux sorties, des franges d'interférence. Les deux bras de l'interféromètre sont séparés, ce qui permet d'introduire une perturbation sur un seul des deux faisceaux. La mesure du déplacement des franges permet de mesurer la perturbation introduite sur la propagation du faisceau.

L'utilisation d'onde atomique en lieu et place de la lumière présente plusieurs avantages :  
— de travailler avec une gamme de longueur d'onde ajustable en changeant la vitesse des

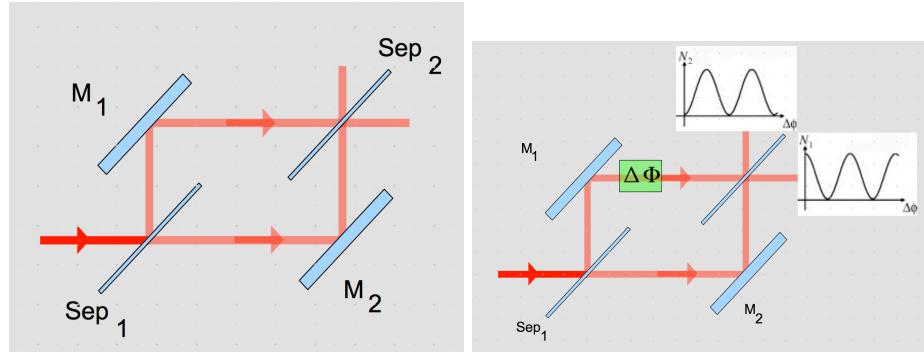


FIGURE 1 – Schéma d'un interféromètre de Mach-Zehnder et principe d'une mesure interférométrique : une perturbation sur un des bras introduit un déphasage supplémentaire  $\Delta\phi$  et se traduit par un déplacement des franges d'interférence.

atomes. A titre d'exemple, l'interféromètre de Toulouse travaillait avec des atomes de lithium dont la vitesse était de l'ordre de 1000 m/s et la longueur d'onde de de Broglie associée  $\lambda_{DB} = h/(mV) \approx 54pm$ .

- de tester les interactions des atomes avec des perturbations variées, interactions très différentes de celles de la lumière
- d'avoir un temps d'interaction entre atome et perturbation beaucoup plus grand et donc d'avoir une meilleure sensibilité. Ce temps plus long induit cependant une plus grande sensibilité aux effets inertiels.

Une difficulté dans cette réalisation est de disposer d'objets permettant de manipuler l'onde atomique de manière cohérente. Un des premiers interféromètres atomiques de type Mach-Zehnder, mis au point par l'équipe de D.Pritchard en 1988, utilisait la diffraction d'un jet de sodium par des réseaux. L'onde atomique rencontre successivement trois réseaux nanométriques et est diffractée à différents ordres (voir figure 2) et les faisceaux séparés sont recombinés par le dernier réseau.

Pour ce qui concerne l'interféromètre de Toulouse, l'onde atomique était un jet thermique de lithium et les éléments diffractants constitués d'ondes laser stationnaires quasi-résonantes avec la transition de résonance optique du lithium à la longueur d'onde de 671 nm. La diffraction se déroulait dans le régime de Bragg, ce qui permettait de n'obtenir qu'un seul ordre de diffraction et ainsi de garder un flux important. Le schéma de principe et un signal type sont donnés sur la figure 3.

Je tiens ici à faire remarquer l'illustration quasi-parfaite de cette dualité onde-corpuscule. En effet en comparant l'interféromètre de Toulouse et l'interféromètre optique de Mach-Zehnder, on ne peut qu'être frappé par leur complémentarité, puisque les éléments matériels de l'un correspondent aux éléments ondulatoires de l'autre, si tant est qu'il soit judicieux de faire encore la distinction.

### 3 Objectif

Les interféromètres atomiques permettent des mesures de grande précision et sont des instruments de prédilection pour tester et mettre à l'épreuve les principes fondamentaux de la physique, comme par exemple la neutralité des atomes.

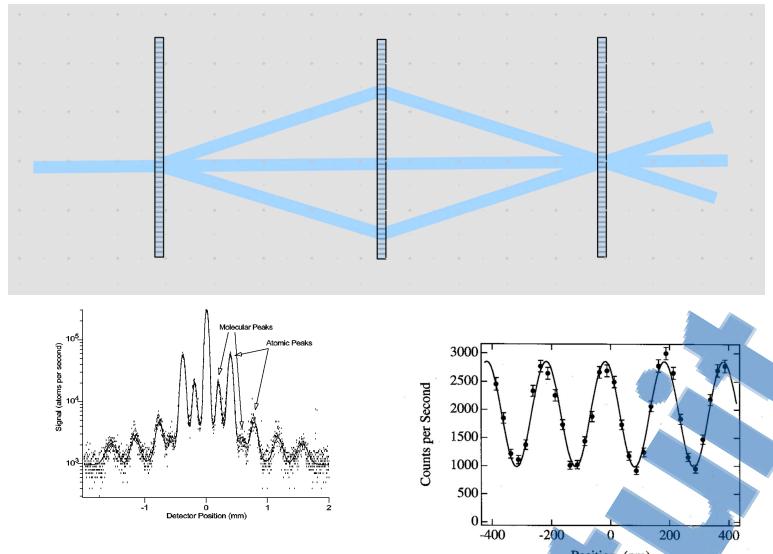


Figure 1-3: A typical diffraction pattern from a 100 nm grating.

FIG. 10. Interference pattern from 30 sec of data (1 sec per point). The contrast is 49% and the phase uncertainty is &lt;10 mrad.

**FIGURE 2 – Panneau supérieur :** Schéma de principe de l’interféromètre de Mach-Zehnder utilisé par Pritchard. L’onde atomique incidente de sodium est diffractée successivement par les réseaux et recombinée au niveau du dernier réseau. **Panneau inférieur :** La figure à gauche est le signal de diffraction du jet de sodium par un seul réseau. La figure à droite montre le signal d’interférences à la sortie du troisième réseau.

Ils ont aussi de ce fait une sensibilité très importante aux effets inertIELS et cela peut se traduire par un bruit de phase et un brouillage des signaux d’interférence. Ce phénomène aura d’autant plus d’importance que les atomes seront lents, puisque l’accumulation du bruit se fera pendant un temps plus long. Dans l’interféromètre de Toulouse, les ondes stationnaires laser sont définies par les positions des miroirs qui les créent. Les vibrations du sol déplacent légèrement les miroirs et déphasent les ondes stationnaires, ce qui réduit le contraste des franges d’interférences.

Le but premier de ce travail de thèse était de mettre au point un système d’atténuation des vibrations. Lorsque j’ai commencé, une grande partie du monde des physiciens cherchait à détecter les ondes gravitationnelles à travers des projets comme VIRGO (Italie) , LIGO (USA) ou TAMA (Japon) et leurs publications dans le domaine de la lutte contre le bruit sismique m’ont été précieuses. Plusieurs stratégies sont envisageables, nécessitant souvent des précautions particulières pour pallier les défauts de construction ou d’assemblage inévitables. La première mise en œuvre a été de suspendre le banc supportant les miroirs et de réaliser une atténuation passive. Comme je le montrerais dans le chapitre I, le pendule ainsi réalisé atténue de manière satisfaisante les vibrations dont les fréquences sont supérieures à sa fréquence propre, mais, bien entendu, il amplifie par résonance celles dont les fréquences sont voisines de sa fréquence propre et un asservissement est indispensable pour compenser le bruit amplifié. Il est alors nécessaire de disposer de sismomètres permettant de mesurer l’amplitude du mouvement du pendule et de la corriger en temps réel grâce à des actuateurs. Une première réalisation m’a permis de stabiliser deux mouvements horizontaux mais la nécessité de disposer de sismomètres beaucoup plus sensibles et pouvant fonctionner sous ultra-vide m’a amené à changer la structure des sismomètres et à étudier plus avant leur fabrication. J’ai finalement réalisé, en m’inspirant des

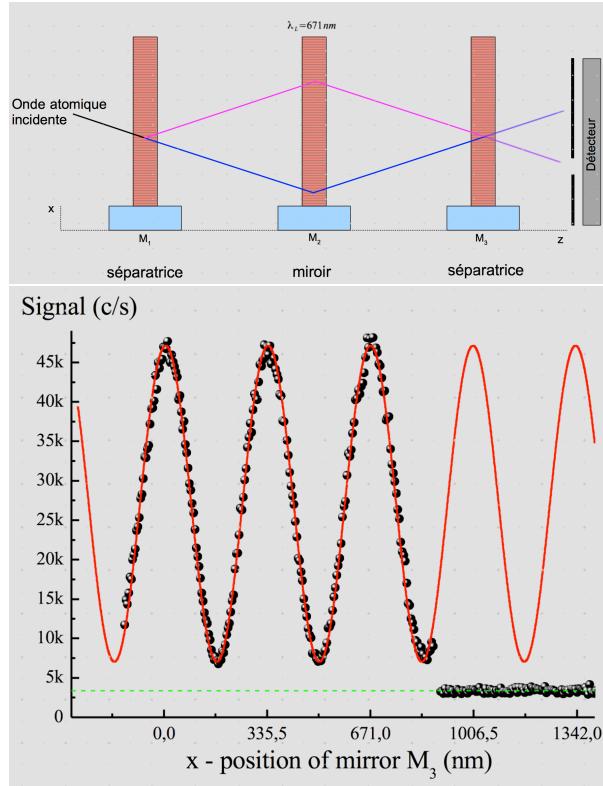


FIGURE 3 – **Panneau supérieur** : Schéma de l’interféromètre de Toulouse fonctionnant dans le régime de Bragg. La diffraction de l’onde atomique est assurée par des ondes laser stationnaires qui se comportent vis à vis des atomes comme des séparatrices (première et troisième onde laser) ou comme un miroir (onde laser centrale). **Panneau inférieur** : les franges d’interférence sont balayées en changeant la position du miroir  $M_3$ . Le temps de comptage est de 0.1s.

travaux de l’équipe de Zumberge, un capteur de position basé sur un interféromètre de Michelson à coins de cube qui permet d’obtenir une sensibilité de  $4 \times 10^{-13}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$  à 1 Hz. L’abandon du projet d’interféromètre à atomes de lithium ralenti au profit d’une fontaine atomique de rubidium a stoppé le développement en cours.

J’ai mis à profit cette étude des sismomètres pour compléter la théorie des pendules à lame élastique, largement utilisés dans ce type de capteurs, et montré l’existence de deux fréquences de résonance. Afin de tester cette prévision, j’ai construit un tel pendule et développé des capteurs de position et de vitesse très simples mais très sensibles.

Je me suis aussi intéressé aux différentes causes d’amortissement d’un pendule et deux effets m’ont conduit à réaliser des travaux supplémentaires :

- le couplage du pendule avec le bâti affecte son facteur de qualité. J’ai complété la théorie de deux oscillateurs couplés amortis et montré l’existence d’un point exceptionnel séparant deux régimes de fonctionnement très différents.
- les forces de frottements sur l’air dans le régime de Stokes sont souvent invoquées pour expliquer une force de frottement proportionnelle à la vitesse et donc une décroissance exponentielle de l’amplitude d’oscillation. Cependant, il m’est apparu que les expériences ef-

fectuées avec des pendules ne sont presque jamais faites avec un petit nombre de Reynolds, condition pourtant requise pour que la théorie de Stokes s'applique. J'ai donc construit deux séries de pendules, avec des sphères ou des cylindres de diamètres différents, afin de tester les résultats de Stokes datant de 1851.

## 4 Plan de la thèse

### 4.1 Chapitre I : Stabilisation d'un interféromètre atomique contre les vibrations

Dans ce chapitre, je montre la sensibilité des interféromètres atomiques, et en particulier de celui de Toulouse, aux bruits de phase ainsi que les principes généraux de réduction des vibrations. J'étudie les degrés de liberté d'un banc suspendu, premier étage passif d'atténuation des vibrations. Je décris la première réalisation de sismomètres et l'utilisation d'actuateurs m'ayant permis de réduire le bruit pour deux des six mouvements possibles. Je termine par des simulations permettant d'estimer le contraste des franges avec des atomes ralentis parce que, à ce moment là, le ralentissement des atomes de lithium était en cours de mise au point.

### 4.2 Chapitre II : Développement d'un sismomètre interférentiel

Je donne tout d'abord une vue d'ensemble des différentes technologies utilisées dans les sismomètres ainsi que leurs performances. Je décris aussi les essais que j'ai effectués pour la fabrication de sismomètres satisfaisant notre cahier des charges et les difficultés rencontrées puis de manière plus détaillée la structure et le fonctionnement, du point de vue théorique et pratique, du sismomètre que nous avons choisi et qui m'a permis d'obtenir des signaux déjà tout à fait exploitables. Je termine en indiquant les améliorations que j'envisageais d'y apporter.

### 4.3 Chapitre III : Théorie des pendules à lame élastique

Je reprends la théorie du pendule à lame élastique et montre l'existence de deux fréquences de résonance et j'analyse la dépendance de ces fréquences avec les paramètres du pendule. Les applications de ces pendules pour les horloges ainsi que pour le pendule de Holweck-Lejay terminent ce chapitre.

### 4.4 Chapitre IV : Expériences avec un pendule à lame élastique

Je présente les tests expérimentaux validant les calculs des fréquences de résonance présentés au chapitre précédent et j'analyse quantitativement les diverses causes de l'amortissement du pendule :

- amortissement sur l'air
- amortissement par couplage aux résonances du support
- amortissement anélastique : cet effet, expliqué par Zener en 1936, est universel et constitue la limite fondamentale du coefficient de qualité des pendules à lame élastique
- amortissement par courants de Foucault

### 4.5 Chapitre V : Oscillateurs couplés amortis

J'ai essayé de comprendre quantitativement l'amortissement par couplage aux résonances du support. Ceci m'a amené à développer une théorie plus complète de deux oscillateurs amor-

tis couplés et à montrer l'existence d'une transition entre de deux régimes de fonctionnement très différents passant par un point exceptionnel. Je fais enfin une analogie avec la mécanique quantique et je présente une revue rapide de domaines dans lesquels interviennent des points exceptionnels.

#### **4.6 Chapitre VI : La force de Stokes sur la sphère ou le cylindre en mouvement oscillant**

Je décris ici une série d'expériences menées sur des pendules formés de sphères et de cylindres de différents diamètres afin de réaliser un test précis des calculs de Stokes. En effet, la sensibilité des capteurs développés me permet de suivre des oscillations d'amplitude micrométrique et donc de travailler avec de faibles nombres de Reynolds. Si les résultats pour les sphères sont en excellent accord avec la prédiction théorique, ceux obtenus pour les cylindres présentent un écart systématique dont je n'ai pas pu identifier la cause. Cet écart est surprenant car l'amortissement mesuré est inférieur à celui prévu par la théorie.

#### **4.7 Conclusion**

Je présente une conclusion générale de la thèse et les perspectives ouvertes par mon travail.

# Chapitre 1

## Stabilisation d'un interféromètre atomique contre les vibrations

### 1 Introduction

La grande sensibilité des interféromètres atomiques aux rotations et aux accélérations provient de la dépendance de la phase  $\Phi$  des franges d'interférences atomiques avec la phase spatiale des ondes lumineuses servant à diffracter les atomes. Cette phase dépend de la position du ou des miroirs qui réfléchissent ces ondes laser. Dans le cas particulier de l'interféromètre de Mach-Zehnder de Toulouse, la diffraction des atomes de lithium utilise trois ondes stationnaires lasers et la phase spatiale de chacune de ces trois ondes stationnaires est fonction de la position du miroir qui la produit. Les atomes qui se propagent dans l'interféromètre échantillonnent chacune de ces trois phases à des instants différents, séparés par le temps de vol de l'atome entre deux ondes stationnaires consécutives, et ils sont donc sensibles aux mouvements des miroirs entre deux événements de diffraction.

Le temps de vol entre ondes stationnaires consécutives, qui était de l'ordre de 600 microsecondes dans l'interféromètre atomique de Toulouse qui a donné ses premiers signaux en 2001, devait être beaucoup plus long, par un facteur 10 à 20, dans un nouveau montage utilisant un jet ralenti et intensifié par forces radiatives (ce montage en projet quand j'ai commencé à travailler au laboratoire a été abandonné depuis). Comme je vais l'expliquer ci-dessous, le bruit de phase dû aux vibrations du montage croît très vite avec le temps de vol des atomes entre ondes stationnaires et, alors que le bruit de phase existant dans le montage initial réduisait faiblement la visibilité des franges d'interférences atomiques, le bruit attendu avec des atomes 10 fois plus lents aurait rendu sensiblement nulle la visibilité des ces franges. Une stabilisation des mouvements des trois miroirs était donc absolument nécessaire pour que le nouveau montage fournisse des signaux utilisables.

Dans une première partie (section 2.2) de ce chapitre, je vais expliquer la sensibilité de la phase des interféromètres atomiques de Mach-Zehnder aux vibrations et je l'illustrerai en particulier par les résultats obtenus avec l'interféromètre de Toulouse : cette section est très directement inspirée des articles [1, 2] de notre équipe publiés en 2006. La section 2.3 expliquera de manière assez générale le principe des dispositifs de réduction des vibrations. La section 2.4 décrira, dans l'approximation harmonique, les six oscillations propres d'une plate-forme suspendue par trois fils ou trois ressorts. La section 2.6 décrira un premier montage que j'ai construit et ses performances. Une conclusion brève terminera ce chapitre.

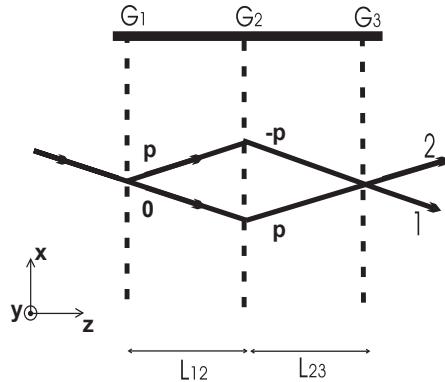


FIGURE 1.1 – Schéma d'un un interféromètre atomique de Mach-Zehnder utilisant la diffraction atomique par 3 réseaux,  $G_1$ ,  $G_2$  et  $G_3$  (l'onde stationnaire laser est un cas particulier de réseau de phase), dans le régime de Bragg. Le faisceau atomique collimaté est diffracté successivement par  $G_1$ ,  $G_2$  and  $G_3$  et les ordres de diffraction sont indiqués sur les différents chemins. Cet interféromètre produit deux faisceaux de sortie, notés 1 et 2, qui portent des signaux complémentaires quand les réseaux de diffraction n'induisent aucune perte. Les axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sont indiqués.

## 2 Sensibilité des interféromètres atomiques de Mach-Zehnder aux vibrations

### 2.1 Sensibilité inertielle

La très grande sensibilité des interféromètres atomiques aux effets inertiels a été remarquée depuis longtemps [3, 4]. Je vais considérer le particulier cas d'un interféromètre atomique de Mach-Zehnder utilisant trois processus de diffraction pour diviser, réfléchir et recombiner l'onde atomique, selon le schéma de la figure 1.1. Pour expliquer la sensibilité inertielle, je vais suivre la présentation de Schmiedmayer *et al.* [5].

Chaque faisceau atomique se propageant dans l'interféromètre est représenté par une onde plane. Cette description approximative est expliquée en détail dans un article de mon équipe [6, 7]. Pour une onde incidente  $\Psi(\mathbf{r}) = \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$ , le faisceau diffracté d'ordre  $p$  par le réseau  $G_j$  est décrit par l'onde

$$\Psi_p(\mathbf{r}) = \alpha_j(p) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + ip\mathbf{k}_{Gj} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)] \quad (1.1)$$

où  $\alpha_j(p)$  est l'amplitude de diffraction d'ordre  $p$ ,  $\mathbf{k}_{Gj}$  est le vecteur d'onde du réseau  $G_j$ , situé dans le plan du réseau, perpendiculaire à ses traits et de module  $k_G = 2\pi/a$ . La période  $a$ , la même pour les trois réseaux, est égale à  $a = \lambda_L/2$  dans le cas de la diffraction par une onde stationnaire laser de longueur d'onde  $\lambda_L$ . Cette équation est exacte pour la diffraction de Bragg et c'est une très bonne approximation si  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}_{Gj}$  sont presque perpendiculaires et si  $|\mathbf{k}_{Gj}| \ll |\mathbf{k}|$ , ce qui est très bien vérifié si les atomes ne sont pas très lents. Enfin,  $\mathbf{r}_j$  est la position d'un point de référence du réseau  $G_j$  et, dans le cas d'une onde stationnaire laser, ce point peut être choisi à la surface du miroir  $M_j$  formant l'onde stationnaire  $j$ .

La présence de  $\mathbf{r}_j$  dans l'équation (1.1) montre que la phase de l'onde diffractée dépend de la position du réseau dans son plan : cet effet explique la sensibilité inertielle des interféromètres atomiques. D'autre part, on remarque qu'un déplacement selon la direction  $\mathbf{k}_{Gj}$  d'une période

du réseau induit un déphasage égal à  $p$  fois  $2\pi$  du faisceau diffracté d'ordre  $p$  : c'est nécessaire car les deux situations avant et après ce déplacement sont identiques.

Les ondes qui sortent de l'interféromètre par le faisceau 1 sont  $\Psi_{1a}(\mathbf{r})$ , correspondant aux ordres de diffraction  $p$ ,  $-p$  et 0, et  $\Psi_{1b}$  correspondant aux ordres de diffraction 0,  $p$  et  $-p$ . L'interférence de ces deux ondes produit une intensité proportionnelle à

$$\begin{aligned} I_1 &= \int d^2\mathbf{r} |\Psi_{1a}(\mathbf{r}) + \Psi_{1b}(\mathbf{r})|^2 \\ &= \int d^2\mathbf{r} [A_{1a}^2 + A_{1b}^2 + 2A_{1a}A_{1b} \cos(\Delta\mathbf{k}_G \cdot \mathbf{r} + \Phi_d)] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Pour simplifier les expressions, j'ai supposé que les amplitudes  $A_{1a}$  et  $A_{1b}$  sont réelles. Le vecteur  $\Delta\mathbf{k}_G$  et la phase de diffraction  $\Phi_d$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{k}_G &= \mathbf{k}_{G1} + \mathbf{k}_{G3} - 2\mathbf{k}_{G2} \\ \Phi_d &= [2\mathbf{k}_{G2} \cdot \mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_{G1} \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_{G3} \cdot \mathbf{r}_3] \end{aligned} \quad (1.3)$$

Cette intensité doit être intégrée sur la surface du détecteur et il faut que la phase du terme d'interférence soit indépendante du point  $\mathbf{r}$  pour maximiser la visibilité des franges [6, 7]. Cette condition donne la condition d'alignement des vecteurs d'onde des trois réseaux

$$\mathbf{k}_{G1} - 2\mathbf{k}_{G2} + \mathbf{k}_{G3} = 0 \quad (1.4)$$

Je suppose cette condition réalisée et, pour simplifier, je suppose que les trois vecteurs  $\mathbf{k}_{Gj}$  sont exactement parallèles à l'axe  $\mathbf{x}$ . Dans ces conditions, la phase  $\Phi_d(p)$  dépend de l'ordre de diffraction  $p$  et elle est donnée par

$$\Phi_d(p) = pk_G [2x_2 - x_1 - x_3] \quad (1.5)$$

et le signal de l'interféromètre, qui est égal à l'intensité totale  $I_1$  du faisceau 1, est donné par

$$I_1 = I_m [1 + \mathcal{V}_{max} \cos(\Phi_{pert} + \Phi_d(p))] \quad (1.6)$$

$I_m$  est l'intensité moyenne ;  $\mathcal{V}_{max}$  est la visibilité des franges définie par  $\mathcal{V} = (I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min})$ . J'ai rajouté une phase  $\Phi_{pert}$  correspondant à une éventuelle perturbation de la propagation des ondes atomiques dans l'interféromètre. La visibilité  $\mathcal{V}$  des franges est égale à

$$\mathcal{V}_{max} = \frac{2A_{1a}A_{1b}}{A_{1a}^2 + A_{1b}^2} \quad (1.7)$$

On vérifie aisément [7] que  $\mathcal{V}_{max}$  est très proche de 1 même quand les intensités transmises par les deux bras sont notablement différentes.

Si les coordonnées  $x_j$  des trois réseaux  $G_j$  varient en fonction du temps, il faut modifier cette équation en considérant, pour chaque paquet d'onde atomique, la position  $x_j$  du réseau  $G_j$  à l'instant  $t_j$  où ce paquet d'onde passe à travers ce réseau. La phase  $\Phi_d$  est alors donnée par

$$\Phi_d(p) = pk_G [2x_2(t_2) - x_1(t_1) - x_3(t_3)] \quad (1.8)$$

En notant  $T = L/v$  le temps de vol de l'atome d'un réseau au suivant (le réglage optimum de l'interféromètre correspond à l'égalité des distances entre réseaux consécutifs,  $L_{12} = L_{23} = L$ ) et  $v$  est la vitesse du paquet d'onde considéré, alors,  $t_1 = t - T$  et  $t_3 = t + T$ , où j'ai remplacé  $t_2$  par  $t$ . Un développement de  $\Phi_d$  en puissances de  $T$  donne

$$\begin{aligned}
\Phi_d(p) &= \Phi_{bending} + \Phi_{Sagnac} + \Phi_{acc.} \\
\Phi_{bending} &= pk_G \delta(t) \text{ avec } \delta(t) = 2x_2(t) - x_1(t) - x_3(t) \\
\Phi_{Sagnac} &= pk_G (v_{3x}(t) - v_{1x}(t)) T \\
\Phi_{acc.} &= pk_G (a_{1x}(t) + a_{3x}(t)) T^2/2
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Dans ces équations,  $v_{jx}(t)$  et  $a_{jx}(t)$  sont respectivement la composante selon l'axe **x** de la vitesse et de l'accélération du réseau  $G_j$  par rapport à un référentiel Galiléen. Voici la signification des différents termes :

- le terme  $\Phi_{bending}$  est proportionnel à  $\delta(t) = 2x_2(t) - x_1(t) - x_3(t)$  qui est nul si les trois réseaux sont alignés. Dans l'interféromètre de Toulouse, ce terme était très stable car la structure qui porte les trois miroirs est très rigide, et dans ce cas, ce terme n'induit pas de bruit de phase mais seulement une lente dérive de la phase.
- le terme  $\Phi_{Sagnac}$  représente la sensibilité de la phase des interférences à la rotation de l'interféromètre par rapport à un référentiel Galiléen : pour le prouver, il suffit d'exprimer la différence de vitesse  $(v_{3x}(t) - v_{1x}(t)) T = 2\Omega_y L_{12}$ , où  $\Omega_y$  est la composante selon l'axe **y** de la vitesse angulaire de la structure qui porte les trois miroirs (on suppose  $\Omega_y$  constant durant la durée  $2T$  du passage des atomes dans l'interféromètre).
- le terme  $\Phi_{acc.}$  représente la sensibilité de la phase des interférences à l'accélération selon la direction **x** de l'interféromètre par rapport à un référentiel Galiléen (on suppose les accélérations  $a_{1x}(t)$  et  $a_{3x}(t)$  constantes durant la durée  $2T$  du passage des atomes dans l'interféromètre).

Il faut moyenner ces termes sur la distribution de vitesse atomique mais, si celle-ci est assez étroite, cette moyenne aura peu d'effets.

## 2.2 Effet des vibrations sur la visibilité des franges d'interférences

Le bruit environnemental est une source importante de diminution des performances d'un interféromètre. Un exemple typique est présenté sur la figure 1.2 et sa dépendance en fréquence peut être grossièrement modélisée par [8] :

$$y(f) = 10^{-7} \left( \frac{1\text{Hz}}{f} \right)^2 \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

A cause des vibrations, la phase  $\Phi_d$  est une phase fluctuante qui est distribuée autour d'une valeur moyenne à priori non nulle. Par exemple à cause de la rotation de la Terre, l'effet Sagnac induit une phase  $\Phi_{Sagnac}$  de l'ordre de 0.65 rad dans les conditions habituelles d'utilisation de l'interféromètre atomique de Toulouse [9]. Je note  $\phi_d(p)$  l'écart de  $\Phi_d(p)$  à sa valeur moyenne  $\Phi_{dm}(p)$ ,  $\phi_d(p) = \Phi_d(p) - \Phi_{dm}(p)$  et je suppose que la distribution de  $\phi_d(p)$  est gaussienne et d'écart-type  $\sigma = \sqrt{\langle \phi_d(p)^2 \rangle}$  :

$$P(\phi_d(p))d\phi_d(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{\phi_d(p)^2}{2\sigma^2} \right] d\phi_d(p) \tag{1.10}$$

Il faut alors moyenner l'équation (1.6) sur la distribution de phase et on obtient le signal :

$$\bar{I}_1 = I_{1mean} \left[ 1 + \mathcal{V}_{max} \exp \left( -\frac{\langle \phi_d(p)^2 \rangle}{2} \right) \cos(\Phi_{pert} + \Phi_{dm}(p)) \right] \tag{1.11}$$

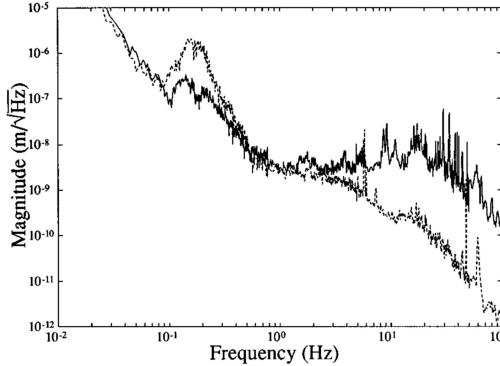


FIG. 1. Measured vertical amplitude spectral densities. The solid curve is laboratory No. B042 of JILA on the campus of the University of Colorado, Boulder. The dashed curve is Building 8 of NIST at Boulder. Building 8 is small, remote and separated from the main complex. In addition, all fans and machinery in Building 8 were turned off during the measurements. The spectrum below .1 Hz and above 30 Hz is limited by the seismometer's internal noise.

FIGURE 1.2 – Bruit ambiant typique dans deux environnements différents (issu de [19]).

Le bruit de phase a donc réduit la visibilité des franges qui devient

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{max} \exp \left( -\frac{\langle \phi_d(p)^2 \rangle}{2} \right) \quad (1.12)$$

Si on se reporte à l'équation (1.9), on remarque que la phase  $\Phi_d(p)$  est proportionnelle à l'ordre de diffraction  $p$  et  $\phi_d(p)$  l'est aussi donc,  $\langle \phi_d(p)^2 \rangle = p^2 \langle \phi_d(1)^2 \rangle$ . La visibilité est une fonction gaussienne de l'ordre de diffraction  $p$  :

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{max} \exp \left( -\frac{p^2 \langle \phi_d(1)^2 \rangle}{2} \right) \quad (1.13)$$

Cette équation a été testée par notre équipe [1, 2] sur les mesures de visibilité en fonction de l'ordre de diffraction effectuée par l'équipe de Siu Au Lee [6] et par notre équipe [7]. La figure 1.3 présente les visibilités mesurées en fonction de l'ordre  $p$  variant de 1 à 3 pour ces deux interféromètres.

Dans notre interféromètre, la réduction de visibilité est dominée par le terme Sagnac linéaire en  $T$ . Pour augmenter la sensibilité de notre interféromètre, il faut allonger  $T$  en utilisant des atomes lents mais, sans réduction des vibrations, la visibilité serait négligeable.

Nous avions donc entrepris de développer une plateforme anti-vibrations sous la forme d'un pendule à 3 fils de suspension  $F_i$  qui porterait les 3 miroirs  $M_i$  des ondes stationnaires lasers (voir figure ??). Si on se limite aux mouvements qui ne modifient pas longueurs des fils, un tel pendule a 3 modes propres d'oscillation, deux oscillations pendulaires en  $z$  et  $x$  et une oscillation de rotation autour de l'axe  $y$ . Nous avons enregistré le mouvement d'une des extrémités de ce pendule selon la direction  $x$ . La figure 1.10 montre la densité spectrale de bruit enregistrée, avec les résonances correspondant aux modes de rotation ( $\nu \approx 0.34$  Hz) et d'oscillation en  $x$  ( $\nu \approx 0.78$  Hz). Ces résonances avaient déjà un coefficient de qualité  $Q$  élevé,  $Q \approx 10^4$  avec le pendule sous air et beaucoup plus lorsque le pendule aurait été sous vide. Un asservissement était donc

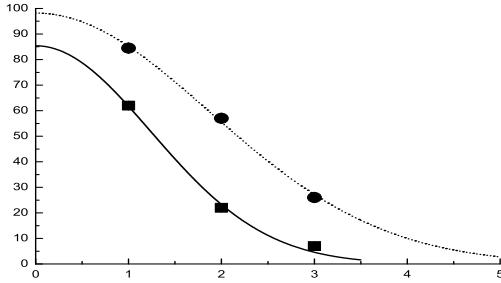


FIGURE 1.3 – Visibilité des franges d’interférences atomiques en fonction de l’ordre de diffraction  $p$ . Nos mesures (points ronds) sont ajustées par l’équation (1.13) avec  $\mathcal{V}_{max} = 98 \pm 1 \%$  and  $\langle \phi_d(1)^2 \rangle = 0.286 \pm 0.008$ . Les mesures de l’équipe de Siu Au Lee (points carrés) sont aussi ajustées par la même équation avec  $\mathcal{V}_{max} = 85 \pm 2 \%$  and  $\langle \Phi_1^2 \rangle = 0.650 \pm 0.074$ .

nécessaire et nous avions envisagé de le construire en nous inspirant des travaux des références [2].

### 3 Principe des dispositifs de réduction des vibrations

#### 3.1 Propriétés des pendules comme amortisseurs de vibrations

L’équation différentielle pour l’amplitude  $x$  d’un oscillateur libre s’écrit de manière générale :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.14)$$

où  $\omega_0$  est la pulsation propre de l’oscillateur. Les pertes d’énergie au cours du mouvement peuvent être modélisées par la présence d’un terme d’amortissement proportionnel à la dérivée première de la variable et il est habituel d’écrire

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.15)$$

ou, en introduisant le facteur de qualité  $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$ ,

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.16)$$

Lorsque le support de l’oscillateur est en mouvement par rapport au référentiel terrestre galiléen, et, en notant  $x_s$  l’amplitude de ce mouvement, l’équation précédente devient

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}(\dot{x} - \dot{x}_s) + \omega_0^2(x - x_s) = 0 \quad (1.17)$$

La transformée de Fourier nous donne la réponse harmonique de l’oscillateur et la fonction de transfert

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{X_s(\omega)} = \frac{\omega_0^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}} \quad (1.18)$$

FIGURE 1.4 – Module de la fonction de transfert tracé pour  $Q = 10$ .

L'étude de cette fonction permet de dégager 4 domaines représentés sur la figure 1.4 et jouant des rôles différents dans le cadre d'une isolation de l'oscillateur vis à vis des vibrations de son support :

— **le domaine I :**

$$|H(\omega)| \simeq 1$$

est une zone totalement inefficace. L'oscillateur accompagne le support dans son mouvement et, dans son référentiel propre, le pendule reste quasi immobile. En diminuant la pulsation propre de l'oscillateur, cette zone se réduit. On cherchera donc à utiliser des oscillateurs de longue période.

— **le domaine II**

$$|H(\omega)| > 1 \text{ avec un maximum tel que } |H(\omega_0)| = Q$$

correspond à une amplification du mouvement du support, c'est à dire exactement le contraire de l'effet recherché.

- **Le domaine III** est le plus efficace pour atténuer les vibrations. L'asymptote (tracée en pointillés) varie comme  $1/\omega^2$
- **le domaine IV** permet aussi une atténuation des vibrations. Son asymptote varie en  $1/Q\omega$ .

La limite entre les domaines III et IV se situe pour

$$\frac{\omega}{\omega_0} = Q \quad (1.19)$$

Le domaine III, plus efficace pour atténuer les vibrations, s'élargit lorsque le facteur de qualité  $Q$  augmente. Une bonne isolation vis à vis des vibrations du support sera donc réalisée en choisissant un oscillateur de pulsation propre  $\omega_0$  la plus petite possible et possédant un facteur de qualité  $Q$  suffisamment grand. Ainsi la plage utile sera maximale, au prix d'efforts conséquents nécessaires pour «tuer» l'amplification due à la résonance. Ceci est réalisé grâce à un asservissement dont la bande passante est typiquement de la même largeur que le domaine II.

### 3.2 Comment abaisser passivement la fréquence de résonance ?

Lorsqu'il s'agit d'obtenir une fréquence de résonance faible, typiquement de l'ordre de la centaine de mHz, les dimensions du pendule simple deviennent un problème majeur. En effet, un pendule de 1 m de longueur a une période propre voisine de 2 secondes donc une fréquence de 0.5 Hz. Pour atteindre des fréquences propres plus faibles, il faut augmenter sa longueur dans des proportions considérables, par exemple 25 m pour atteindre une fréquence de 0.1 Hz, ce qui n'est pas pratiquement réalisable. Il faut donc envisager d'autres solutions.

Un oscillateur se déplaçant autour d'une position d'équilibre peut être modélisé par une forme quadratique de son énergie potentielle. Diminuer sa pulsation propre revient à réduire la profondeur du puits de potentiel et à rendre les variations de son énergie potentielle autour de la position d'équilibre de plus en plus horizontales. Cela peut être réalisé par exemple dans un «folded pendulum» qui associe un pendule simple et un pendule inversé. Un tel pendule a été réalisé par l'équipe de Blair [17] et le schéma de cette réalisation est présenté sur les figures 1.5.

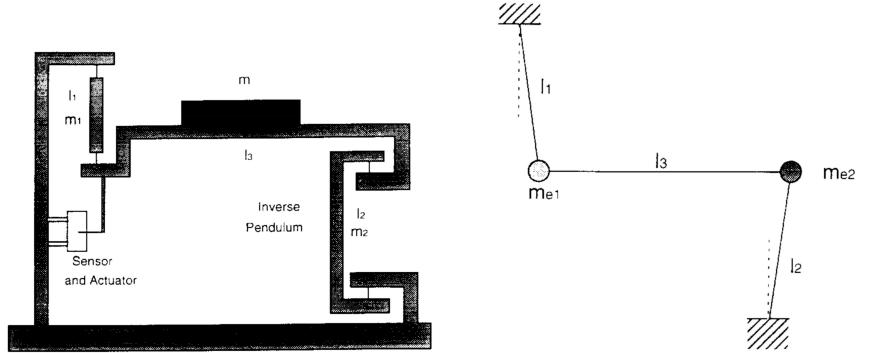
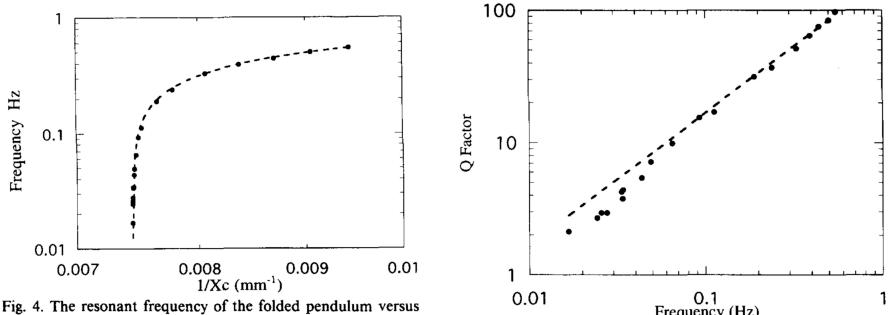


Fig. 1. Schematic diagram of the folded pendulum.

Fig. 2. Equivalent diagram of the folded pendulum.

FIGURE 1.5 – Schéma de principe du «folded pendulum» (issu de [17]).

Fig. 4. The resonant frequency of the folded pendulum versus mass centre  $x_c$ , where  $x_c$  is the distance between the arm of positive pendulum and the system centre of mass as described in the text.Fig. 5. The frequency dependence of the  $Q$ -factor for the folded pendulum.FIGURE 1.6 – Fréquence et facteur de qualité du «folded pendulum» de l'équipe de Blair [17]. La fréquence est mesurée en fonction de l'inverse de la position de la masse d'ajustement. Lorsque  $x > x_0$ , le pendule devient instable.

En ajustant la position de la masse  $m$  sur la plateforme horizontale, on modifie la proportion de la contribution positive (pendule simple) et de la contribution négative (pendule inversé) à l'énergie potentielle. Il est ainsi théoriquement possible d'obtenir une fréquence de résonance aussi petite que l'on veut comme le panneau gauche de la figure 1.6 issue aussi de leur article.

Cependant, au delà du réglage de la position de la masse qui permettrait d'obtenir une fréquence de résonance nulle, le système devient instable car le pendule simple ne permet plus de compenser l'effet du pendule inversé. Approcher ce réglage expose alors à une sensibilité accrue aux perturbations et aux défauts du système : tilt, dilatation thermique des différentes parties, etc. Il est alors nécessaire d'asservir le système pour le maintenir autour de sa position d'équilibre. Le second inconvénient, lié lui aussi à une limite fondamentale, tient au fait que le facteur de qualité diminue avec la fréquence de résonance (panneau de droite de la figure 1.6). En effet, l'énergie potentielle totale est composée de deux contributions gravitationnelles de signes opposés et d'une contribution élastique. La proportion de l'énergie potentielle élastique

à l'énergie totale augmente au fur et à mesure que les énergies potentielles gravitationnelles se compensent. Les effets anélastiques, développés dans notre article [18] et repris à la section 5.2, deviennent prépondérants.

Une autre possibilité pour abaisser la fréquence de résonance d'un oscillateur est de compenser l'énergie potentielle de pesanteur par une énergie potentielle élastique. C'est ce qui est mis en œuvre dans le pendule de Holweig-Lejay (voir section 4.6) ou dans les sismomètres, par exemple celui de l'équipe de Zumberge analysé dans la section 3.6. De tels systèmes sont aussi sujets à des instabilités, dues à la dépendance des propriétés élastiques des métaux avec la température et aussi, plus fondamentalement, au fait que l'énergie potentielle élastique est quadratique et ne peut compenser l'énergie potentielle gravitationnelle qu'au deuxième ordre : lorsque les termes d'ordre 2 s'annulent, demeurent les termes d'ordre supérieur de l'énergie potentielle de pesanteur et le système est alors non linéaire.

### 3.3 Comment abaisser activement la fréquence de résonance ?

L'abaissement passif de la fréquence de résonance d'un oscillateur mécanique est possible mais il semble de réalisation délicate. L'abaissement actif utilise des asservissements de la plateforme à stabiliser grâce à des actuateurs qui exercent des forces qui sont fonctions de signaux donnés par des sismomètres. J'ai étudié trois articles qui traitent de l'asservissement d'une plateforme pour des expériences de haute précision : il s'agit des travaux de Hensley *et al.* [21] dans l'équipe de Chu à Stanford pour la mesure de l'accélération de la pesanteur  $g$  par interférométrie atomique et de ceux de Newell *et al.* [19] et de Richman *et al.* [20], effectués à Boulder pour la détection d'ondes de gravitation.

On peut dès maintenant comparer la stratégie de Hensley [21] et celle de Newell *et al.* [19] et de Richman *et al.* [20] :

Pour construire un gravimètre utilisant l'interférométrie atomique, Hensley *et al.* [21] utilisent un sismomètre Guralp de très bonne qualité pour mesurer l'accélération verticale avec une sensibilité de l'ordre de  $10^{-9}g$  dans une certaine bande passante 0.1-10 Hz. Ils utilisent ce signal d'accélération pour asservir le mouvement vertical de la plateforme qui porte le miroir de son interféromètre atomique. L'avantage principal de cet arrangement est que le pendule du sismomètre est très bien construit et muni de tous les raffinements modernes. Nous voyons un inconvénient à ce choix : le pendule et son asservissement sont optimisés pour la mesure sismique, donc à basse fréquence, au dessous du Hertz et ce n'est pas le meilleur choix. En effet, cette gamme de fréquences, qui est fondamentale pour la sismologie, n'est pas celle pour laquelle il faut corriger en priorité les vibrations du montage d'interférométrie atomique.

On pourrait aussi craindre le fait que le montage comporte deux boucles d'asservissement imbriquées dont une, celle du sismomètre, utilise des paramètres qui sont mal connus. Gérer deux boucles imbriquées peut se révéler plus complexe que d'en gérer une seule mais cette réticence est peut-être non fondée car dans la bande de fréquences où l'asservissement du pendule du sismomètre est très efficace, le sismomètre se comporte comme un solide. En dehors de cette bande de fréquences, donc soit à très basse fréquence (au dessous de 0.1 Hz), soit à assez haute fréquence (au delà de 10 – 30 Hz), on ne craint pas de gros problèmes.

Un autre problème est que les sismomètres électroniques modernes ne sont pas compatibles avec le vide poussé.

Newell *et al.* [19] et de Richman *et al.* [20] utilisent des pendules construits très simplement, des masses au bout de ressorts hélicoïdaux. Une détection optique de leur mouvement, utilisant un émetteur LED, une lentille sphérique et un détecteur quatre-quadrants, permet de produire un signal mesurant le mouvement horizontal du pendule et une autre signal mesurant le mouvement vertical. Ces signaux sont utilisés pour asservir les mouvements de la plateforme. L'inconvénient

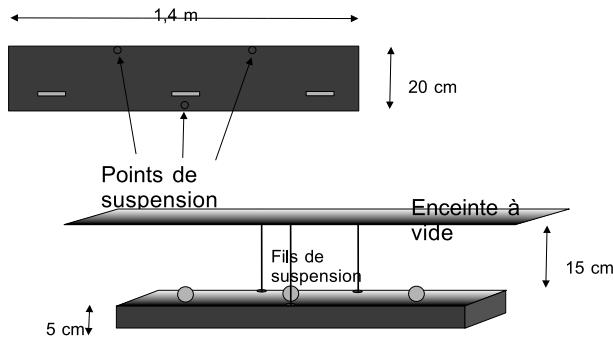


FIGURE 1.7 – Schéma du montage supportant les miroirs. Le choix inhabituel des axes avec  $x$  et  $z$  dans le plan horizontal est en accord avec les axes choisis pour décrire l'interféromètre atomique ; dans ces conditions, l'axe  $y$  est vertical, dirigé vers le haut pour que le trièdre soit direct.

de ces pendules très simples est l'existence de modes parasites correspondant à des rotations autour de l'axe vertical. Ces oscillations, qui sont faiblement détectées par le système de mesure, faussent le signal d'erreur de l'asservissement. L'avantage de cette construction est que la fréquence de résonance du pendule peut être choisie, dans certaines limites, par l'expérimentateur et qu'il n'y a qu'une seule boucle d'asservissement. En fait, comme il faut asservir les six degrés de liberté de la plateforme (trois translations et trois rotations) et que ces asservissements sont faiblement couplés, l'analyse de ce système complexe est facilitée par le fait que l'on a une description précise de tout ce qu'il contient.

Avant de décrire l'asservissement que nous construisions, nous allons décrire les sismomètres électroniques pour bien comprendre leur fonctionnement et ce qui en limite les performances.

## 4 Application à un interféromètre

### 4.1 Le pendule suspendu par 3 fils

Une géométrie de pendule «simple», même limitée dans ses adaptations, peut néanmoins être utilisée lorsque les contraintes concernant la fréquence propre du pendule ne sont pas rédhibitoires ou lorsque celle-ci peut être abaissée au moyen d'un asservissement. Pour le cas de notre interféromètre, la place disponible dans l'enceinte à vide permet d'utiliser des fils de 15 cm ce qui correspond à une fréquence propre de 1.3 Hz.

Nous avons choisi de suspendre le banc supportant les miroirs grâce à 3 fils, de même longueur et verticaux, assurant ainsi que le système est isostatique. Il reste alors 6 degrés de liberté pour le mouvement du banc : 3 correspondant à une translation et 3 à une rotation autour d'un des axes. Il est commode de distinguer ces mouvements en empruntant un vocabulaire marin et en les regroupant de manière légèrement différentes :

— les mouvements pour lesquels la longueur des fils reste constante

**l'embardée et le cavalement** sont les mouvements pendulaires classiques respectivement dans la direction  $Ox$  et  $Oz$

**le lacet** correspond à une rotation du banc autour de l'axe  $Oy$ , les fils restant constamment tendus.

— les mouvements nécessitant une élasticité des fils

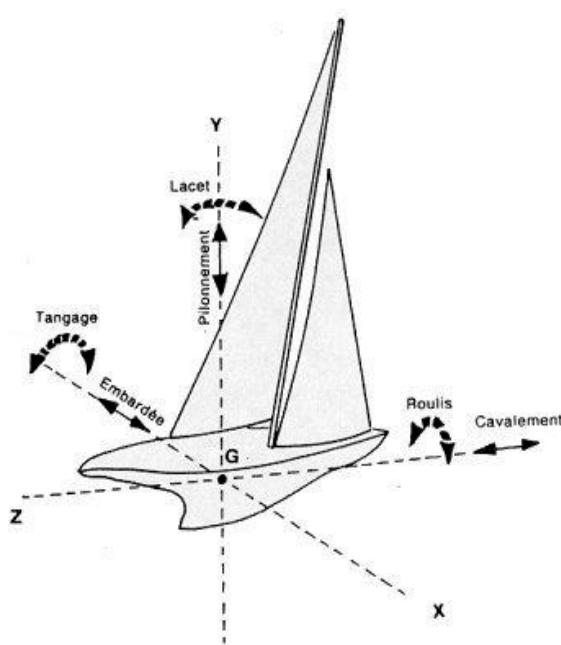


FIGURE 1.8 – Mouvements du banc.

le **pilonnement** obtenu lorsque l'allongement est le même pour les 3 fils. Le banc monte et descend, sa surface reste toujours horizontale.

le **tangage** : le fil isolé sur un bord garde la même longueur alors que les deux autres ont des allongements opposés.

le **roulis** : les deux fils du même côté ont des allongements identiques et opposés à celui du fil isolé.

Nous verrons par la suite que seuls l'embardée, le lacet et le roulis (que l'on appellera désormais mouvement pendulaire, de rotation et de roulis) nécessitent d'être compensés, ou tout au moins réduits, les trois autres mouvements n'ayant pas d'influence directe sur les ondes laser stationnaires créées par les miroirs.

## 4.2 Mise en équations

La mise en équation du pendule formé d'un solide indéformable de masse  $m$  soutenu par 3 fils  $F_i$  ( $i = 1, 3$ ) est un problème très complexe dans le cas général et je vais faire plusieurs hypothèses simplificatrices. Je note  $S_i$  désigne le point de fixation du fil  $i$  sur le support lié au laboratoire et  $B_i$  le point de fixation sur le banc. On peut penser utiliser les 9 coordonnées des 3 points  $B_i$  comme variables pour décrire le mouvement mais il faut alors écrire que les 3 distances  $B_i B_j$  avec  $i \neq j$  sont constantes et ces contraintes sont des fonctions non linéaires des coordonnées, ce qui semble difficile à traiter. Je traite ici un problème simplifié grâce aux hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : j'ai déjà dit que les fils sont supposés verticaux dans la position d'équilibre et qu'ils ont même longueur à l'équilibre notée  $L^{eq}$  ;

Hypothèse 2 : je n'étudie que les petits mouvements autour de l'équilibre dans l'approximation harmonique ;

Hypothèse 3 : je suppose que le centre de gravité  $G$  du banc est dans le plan défini par les 3 points  $B_i$  ;

Hypothèse 4 : je suppose que les trois points  $B_i$  forment un triangle isocèle avec  $\mathbf{GB}_1 = -d\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{GB}_2 = d\mathbf{x} - c\mathbf{z}$  et  $\mathbf{GB}_3 = d\mathbf{x} + c\mathbf{z}$ , comme représenté sur la figure XXX ;

Hypothèse 5 : je suppose que les axes propres du tenseur d'inertie du banc sont les 2 axes horizontaux  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z}$  et l'axe vertical  $\mathbf{y}$ .

### Conditions d'équilibre

J'appelle  $L_i^{eq}$  la longueur à l'équilibre du fil  $i$  et  $L_i^v$  sa longueur à vide c'est-à-dire sans tension. La force exercée par le fil  $i$  à l'équilibre est  $\mathbf{F}_i = k_i (L_i^{eq} - L_i^v) \mathbf{y}$  où  $k_i$  est la constante de raideur de ce fil. En notant  $g$  le module de l'accélération locale de la pesanteur, les conditions d'équilibre sont

$$\sum_i \mathbf{F}_i - mg\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (1.20)$$

$$\Gamma = \sum_i \mathbf{GB}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (1.21)$$

Comme les fils sont verticaux, la première équation donne une seule condition scalaire tandis que la deuxième équation donne deux équations correspondant à la nullité de  $\Gamma_x$  et de  $\Gamma_z$ .

$$k_1 (L_1^{eq} - L_1^v) + k_2 (L_2^{eq} - L_2^v) + k_3 (L_3^{eq} - L_3^v) = mg \quad (1.22)$$

$$\Gamma_x = c [k_2 (L_2^{eq} - L_2^v) - k_3 (L_3^{eq} - L_3^v)] = 0 \quad (1.23)$$

$$\Gamma_z = d [-k_1 (L_1^{eq} - L_1^v) + k_2 (L_2^{eq} - L_2^v) + k_3 (L_3^{eq} - L_3^v)] = 0 \quad (1.24)$$

On suppose que les trois allongements sont égaux à l'équilibre,  $(L_i^{eq} - L_i^v) = \delta^{eq}$ , et on a alors

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 + k_3) \delta^{eq} &= mg \\ k_2 = k_3 &= k \\ k_1 = k_2 + k_3 &= 2k \\ 4k\delta^{eq} &= mg \end{aligned} \quad (1.25)$$

Ces résultats fixent donc les valeurs des constantes de raideur des 3 fils  $F_i$  et de leur allongement à l'équilibre.

### Description des petits déplacements

Pour décrire les six mouvements représentés sur la figure 1.7, il faut six variables indépendantes, dont le choix est arbitraire mais néanmoins influencé par la description précédente. On suppose que le centre de gravité à l'équilibre  $G^{eq}$  est l'origine des axes  $Ox$  et  $Oz$  et  $\delta x_G$  et  $\delta z_G$  représentent les petits déplacements du centre de gravité du banc suivant les axes  $Ox$  et  $Oz$ . On note  $\theta$  le petit angle de rotation du banc autour de l'axe  $Oy$ . Ces trois variables décrivent le mouvement du banc quand il reste horizontal et elles rendent compte de l'embardée ( $\delta x_G$ ), du cavalement ( $\delta z_G$ ) et du lacet ( $\theta$ ).

Les trois autres variables choisies sont les allongements des fils  $\delta L_1$ ,  $\delta L_2$  et  $\delta L_3$  par rapport à leur longueur à l'équilibre  $L^{eq}$ . Je montrerais que les trois mouvements restants sont décrits par des combinaisons linéaires très simples de ces trois variables. J'utiliserais aussi des variables

auxiliaires, les angles de rotation  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  et  $\alpha_z$  autour des 3 axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  (évidemment,  $\alpha_y = \theta$ ) orientés dans le sens direct.

Pour obtenir les équations différentielles du mouvement, j'utilise les équations de Lagrange. Pour cela, il faut d'abord exprimer l'énergie potentielle et l'énergie cinétique en fonction de six coordonnées choisies et je me limiterai à l'approximation harmonique car le calcul général serait très compliqué. Pour cela, j'ai besoin d'exprimer les cotes  $y_i$  des trois points  $B_i$ , desquelles je déduirai la côte  $\delta y_G$  du centre de gravité. Le vecteur  $\mathbf{S}_i \mathbf{B}_i$  est donné par

$$\mathbf{S}_i \mathbf{B}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{B}_i^{eq} + \delta x_i \mathbf{x} + \delta y_i \mathbf{y} + \delta z_i \mathbf{z} \quad (1.26)$$

Par définition, la longueur de  $\mathbf{S}_i \mathbf{B}_i$  est  $L^{eq} + \delta L_i$  et  $\mathbf{S}_i \mathbf{B}_i^{eq} = -L^{eq} \mathbf{y}$ . J'écris que les deux membres de cette équation ont mêmes normes

$$(L^{eq} + \delta L_i)^2 = (-L^{eq} + \delta y_i)^2 + (\delta x_i)^2 + (\delta z_i)^2 \quad (1.27)$$

En écrivant cette équation, j'ai utilisé l'hypothèse que les angles de rotation  $\alpha_x$  et  $\alpha_z$  sont petits. Ceci me permet de négliger les termes d'ordre supérieurs dûs au fait que les axes ont tourné (par exemple,  $\delta x_i$  devrait être multiplié non par 1 mais par  $\cos \alpha_z$  et de même  $\delta z_i$  devrait être multiplié non par 1 mais par  $\cos \alpha_x$ ). Je néglige ces corrections qui d'ordres supérieurs. Je calcule  $(L^{eq} - \delta y_i)$  en négligeant encore des termes d'ordre supérieurs

$$\begin{aligned} L^{eq} - \delta y_i &= \sqrt{(L^{eq} + \delta L_i)^2 - [(\delta x_i)^2 + (\delta z_i)^2]} \\ &= (L^{eq} + \delta L_i) \sqrt{1 - \frac{(\delta x_i)^2 + (\delta z_i)^2}{(L^{eq} + \delta L_i)^2}} \\ &\approx (L^{eq} + \delta L_i) \left[ 1 - \frac{(\delta x_i)^2 + (\delta z_i)^2}{2(L^{eq} + \delta L_i)^2} \right] \\ &\approx L^{eq} + \delta L_i - \frac{(\delta x_i)^2 + (\delta z_i)^2}{2(L^{eq} + \delta L_i)} \\ &\approx L^{eq} + \delta L_i - \frac{(\delta x_i)^2 + (\delta z_i)^2}{2L^{eq}} \end{aligned} \quad (1.28)$$

D'où je tire  $\delta y_i$

$$\delta y_i \approx -\delta L_i + \frac{(\delta x_i)^2 + (\delta z_i)^2}{2L^{eq}} \quad (1.29)$$

Les déplacements  $\delta x_i$  et  $\delta z_i$  résultent des petits déplacements  $\delta x_G$  et  $\delta z_G$  du centre de gravité  $G$  et de la rotation du banc d'un angle  $\theta$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \delta z_i &= \delta z_G + GB_{iz} (\cos \theta - 1) - GB_{ix} \sin \theta \\ \delta x_i &= \delta x_G + GB_{iz} \sin \theta + GB_{ix} (\cos \theta - 1) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Au premier ordre en  $\theta$ ,  $\sin \theta \approx \theta$  et  $\cos \theta \approx 1$ . On en déduit les valeurs des 3  $\delta z_i$  et des 3  $\delta x_i$

$$\begin{aligned} \delta z_1 &= \delta z_G + d\theta \\ \delta x_1 &= \delta x_G \\ \delta z_2 &= \delta z_G - d\theta \\ \delta x_2 &= \delta x_G - c\theta \\ \delta z_3 &= \delta z_G - d\theta \\ \delta x_3 &= \delta x_G + c\theta \end{aligned} \quad (1.31)$$

et celles des 3  $\delta y_i$

$$\begin{aligned}\delta y_1 &= -\delta L_1 + \frac{(\delta x_G)^2 + (\delta z_G + d\theta)^2}{2L^{eq}} \\ \delta y_2 &= -\delta L_2 + \frac{(\delta x_G - c\theta)^2 + (\delta z_G - d\theta)^2}{2L^{eq}} \\ \delta y_3 &= -\delta L_3 + \frac{(\delta x_G + c\theta)^2 + (\delta z_G - d\theta)^2}{2L^{eq}}\end{aligned}\quad (1.32)$$

Après développement et simplification, on obtient la valeur de  $\delta y_G$

$$\begin{aligned}\delta y_G &= \frac{2\delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3}{4} \\ &= -\frac{2\delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3}{4} + \frac{(\delta x_G)^2 + (\delta z_G)^2}{2L^{eq}} + \frac{(c^2 + 2d^2)\theta^2}{4L^{eq}}\end{aligned}\quad (1.33)$$

### Calcul de l'énergie potentielle $V$

Cette énergie est donnée par

$$V = mg(\delta y_G - \delta^{eq}) + \frac{k}{2} \left[ 2(\delta L_1 + \delta^{eq})^2 + (\delta L_2 + \delta^{eq})^2 + (\delta L_3 + \delta^{eq})^2 \right] \quad (1.34)$$

Si on développe cette équation, on trouve

- des termes indépendants de  $\delta y_G$  ainsi que de  $\delta L_1$ ,  $\delta L_2$  et  $\delta L_3$ . On omettra ces termes qui n'ont pas d'effet dynamique ;
- un terme linéaire en  $(2\delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3)$ . Le coefficient de ce terme est  $[k\delta^{eq} - (mg/4)]$  qui est nul, d'après l'équation (1.25).

On peut donc réécrire l'énergie potentielle sous la forme

$$\begin{aligned}V &= mg \left[ \frac{(\delta x_G)^2 + (\delta z_G)^2}{2L^{eq}} + \frac{(c^2 + 2d^2)\theta^2}{4L^{eq}} \right] \\ &\quad + \frac{k}{2} \left[ 2(\delta L_1)^2 + (\delta L_2)^2 + (\delta L_3)^2 \right]\end{aligned}\quad (1.35)$$

Sur cette équation, il est évident que la position d'équilibre, correspondant à  $\theta = 0$  et à  $\delta x_G = \delta z_G = \delta L_1 = \delta L_2 = \delta L_3 = 0$ , est bien un minimum local de l'énergie potentielle et nous avons calculé les termes quadratiques de son développement en série de Taylor en les variables choisies. En appelant  $q_s$  les variables généralisées ( $q_s \in \mathbf{q}^T = [\theta, \delta x_G, \delta z_G, \delta L_1, \delta L_2, \delta L_3]$ ), l'énergie potentielle se met sous la forme

$$\begin{aligned}V(\mathbf{q}^T) &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^6 \sum_{r=1}^6 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_r} \right)_{q=0} q_s q_r + O(q^3) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^6 \sum_{r=1}^6 k_{sr} q_s q_r + O(q^3)\end{aligned}\quad (1.36)$$

En notant  $k_{sr} = k_{rs} = \partial^2 V / (\partial q_s \partial q_r)_{q=0}$  et en négligeant les termes d'ordre supérieur, on peut écrire  $V$  sous forme matricielle

$$V(\mathbf{q}^T) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (1.37)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur généralisée qui, dans le cas présent, est diagonale

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} (c^2 + 2d^2) \frac{mg}{2L^{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mg}{L^{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{L^{eq}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

On remarque que les coefficients  $k$  ou  $mg/L^{eq}$  ont la dimension d'une raideur sauf le coefficient  $K_{11}$  qui a une dimension différente à cause du choix d'un angle  $\theta$  comme variable et non pas d'une distance.

### Calcul de l'énergie cinétique $T$

Pour le calcul de l'énergie cinétique  $T$ , j'exprime les angles de rotation  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  et  $\alpha_z$  autour des différents axes en fonction des variables choisies. J'ai déjà noté que  $\alpha_y = \theta$ . Les deux autres angles sont reliés aux allongements des fils :

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \arcsin\left(\frac{\delta L_2 - \delta L_3}{2c}\right) \approx \frac{\delta L_2 - \delta L_3}{2c} \\ \alpha_z &= \arcsin\left(\frac{\delta L_2 + \delta L_3 - 2\delta L_1}{4d}\right) \approx \frac{\delta L_2 + \delta L_3 - 2\delta L_1}{4d} \end{aligned} \quad (1.39)$$

En notant  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_z$  les moments d'inertie du système par rapport aux axes  $O_x$ ,  $O_y$  et  $O_z$ , j'obtiens

$$T = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{d\delta x_G}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\delta y_G}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\delta z_G}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ I_x \left( \frac{d\alpha_x}{dt} \right)^2 + I_y \left( \frac{d\alpha_y}{dt} \right)^2 + I_z \left( \frac{d\alpha_z}{dt} \right)^2 \right] \quad (1.40)$$

Une linéarisation similaire à celle de l'énergie potentielle peut être réalisée ici, par rapport aux variables  $\dot{q}_s$  et on peut écrire

$$\begin{aligned} T(\dot{q}) &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^6 \sum_{r=1}^6 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_r} \right)_{\dot{q}=0} \dot{q}_s \dot{q}_r + O(\dot{q}^3) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^6 \sum_{r=1}^6 m_{sr} \dot{q}_s \dot{q}_r + O(\dot{q}^3) \end{aligned} \quad (1.41)$$

En notant  $m_{sr} = m_{rs} = \partial^2 T / (\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_r)_{\dot{q}=0}$  et en négligeant les termes d'ordres supérieurs, on peut écrire  $T$  sous forme matricielle

$$T(\mathbf{q}^T) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (1.42)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice d'inertie généralisée qui est donnée par

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} I_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & \frac{mc^2 + I_z}{4c^2} & \frac{mc^2 - I_z}{8c^2} & \frac{mc^2 - I_z}{8c^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{mc^2 - I_z}{8c^2} & \frac{mc^2 d^2 + 4I_x c^2 + I_z d^2}{16c^2 d^2} & \frac{mc^2 d^2 - 4I_x c^2 + I_z d^2}{16c^2 d^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{mc^2 - I_z}{8c^2} & \frac{mc^2 d^2 - 4I_x c^2 + I_z d^2}{16c^2 d^2} & \frac{mc^2 d^2 + 4I_x c^2 + I_z d^2}{16c^2 d^2} \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

### Les équations de Lagrange

La matrice d'inertie généralisée  $\mathbf{M}$  est diagonale par blocs et le bloc correspondant aux trois premières variables  $\theta$ ,  $x_G$  et  $z_G$  est lui-même diagonal. Comme la matrice de raideur généralisée  $\mathbf{K}$  est totalement diagonale, ces trois variables sont indépendantes et leurs mouvements découpés. Les trois autres variables,  $\delta L_1$ ,  $\delta L_2$ ,  $\delta L_3$  ont des mouvements couplés puisque la matrice d'inertie généralisée  $\mathbf{M}$  n'est pas diagonale dans cette base. Je vais montrer que les mouvements verticaux décrits au paragraphe précédent (tangage, roulis et pilonnemement) sont des mouvements découpés. Pour cela, établissons tout d'abord les six équations différentielles du mouvement en appliquant le théorème de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_s} = 0 \quad (1.44)$$

Dans ce calcul, les énergies potentielle et cinétique sont limitées à leurs termes d'ordre 2 et les équations différentielles obtenues sont alors

$$\begin{aligned} I_y \ddot{\theta} + m (c^2 + 2d^2) \frac{g}{2L^{eq}} \theta &= 0 \\ \ddot{\delta x}_G + \frac{g}{L^{eq}} \delta x_G &= 0 \\ \ddot{\delta z}_G + \frac{g}{L^{eq}} \delta z_G &= 0 \\ \frac{mc^2 + I_z}{4c^2} \delta \ddot{L}_1 + \frac{mc^2 - I_z}{8c^2} \delta \ddot{L}_2 + \frac{mc^2 - I_z}{8c^2} \delta \ddot{L}_3 + 2k \delta L_1 &= 0 \\ \frac{mc^2 - I_z}{8c^2} \delta \ddot{L}_1 + \frac{mc^2 d^2 + 4I_x c^2 + I_z d^2}{16c^2 d^2} \delta \ddot{L}_2 + \frac{mc^2 d^2 - 4I_x c^2 + I_z d^2}{16c^2 d^2} \delta \ddot{L}_3 + k \delta L_2 &= 0 \\ \frac{mc^2 - I_z}{8c^2} \delta \ddot{L}_1 + \frac{mc^2 d^2 - 4I_x c^2 + I_z d^2}{16c^2 d^2} \delta \ddot{L}_2 + \frac{mc^2 d^2 + 4I_x c^2 + I_z d^2}{16c^2 d^2} \delta \ddot{L}_3 + k \delta L_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

Lors du tangage, l'allongement du fil 1 est nul alors que les allongements des fils 2 et 3 sont opposés. Pour le pilonnemement, les allongements des trois fils sont identiques. Enfin, pour le roulis, les allongements des fils 2 et 3 sont identiques et opposés à celui du fil 1. J'appelle  $\delta L_T$ ,  $\delta L_R$  et  $\delta L_P$  les combinaisons suivantes des allongements des fils décrivant respectivement le tangage, le roulis et le pilonnemement

$$\begin{aligned} \delta L_T &= \frac{\delta L_2 - \delta L_3}{2} \\ \delta L_R &= \frac{-2\delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3}{4} \\ \delta L_P &= \frac{2\delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3}{4} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Ces combinaisons sont définies à un coefficient de proportionnalité arbitraire près et le choix ci-dessus mène à des expressions très simples de  $\delta L_1$ ,  $\delta L_2$  et  $\delta L_3$  en fonction de  $\delta L_T$ ,  $\delta L_R$  et  $\delta L_P$

$$\begin{aligned} \delta L_1 &= \delta L_P - \delta L_R \\ \delta L_2 &= \delta L_T + \delta L_R + \delta L_P \\ \delta L_3 &= -\delta L_T + \delta L_R + \delta L_P \end{aligned} \quad (1.47)$$

En utilisant  $\delta L_T$ ,  $\delta L_R$  et  $\delta L_P$ , les trois dernières équations de Lagrange deviennent alors

$$\begin{aligned}\delta \ddot{L}_P + \frac{4k}{m} \delta L_P &= 0 \\ \delta \ddot{L}_R + \frac{4kc^2}{I_z} \delta L_R &= 0 \\ \delta \ddot{L}_T + \frac{2kd^2}{I_x} \delta L_T &= 0\end{aligned}\tag{1.48}$$

Ce résultat montre que les trois mouvements verticaux de tangage, de roulis et de pilonnemment sont indépendants et ces équations permettent de calculer leurs fréquences de résonance.

## 5 Défauts de symétrie

Les défauts de symétrie peuvent considérablement compliquer l'asservissement. En effet, si par exemple les fils ne sont pas parfaitement verticaux, ou si les fils 2 et 3 ne sont pas placés symétriquement par rapport au centre de gravité, les mouvements propres seront différents, autrement dit, il va apparaître un couplage entre les mouvements décrits précédemment. Dans la mesure où il n'est pas prévu d'asservir les six degrés de liberté (voir section suivante), ce couplage peut se traduire in fine par une instabilité dans le contrôle puisque l'énergie fournie pour asservir un mouvement propre du pendule parfaitement symétrique peut être transférée à un autre et n'avoir pas d'effet immédiat et visible sur nos capteurs.

## 6 Première réalisation

### 6.1 Sismomètres

La phase de l'onde atomique diffractée dépend de la position du réseau formé par l'onde laser stationnaire qui est définie par la position de chaque miroir. Les mouvements de pilonnemment, de tangage et de cavalement se font dans un plan  $x = cte$  ne modifient pas cette phase. Il n'est donc à priori pas nécessaire de les contrôler.

Le mouvement de roulis n'aurait pas d'influence non plus si les centres des miroirs se situaient sur l'axe  $z$ . Un mouvement de rotation autour de  $Oz$  se traduira donc aussi par une variation de la position  $x$  des miroirs et donc un déplacement du réseau d'ondes stationnaires. J'ai néanmoins choisi d'ignorer ce mouvement dans un premier temps et de tester simplement le mouvement pendulaire (embardée) et de rotation (lacet).

J'ai construit deux sismomètres très simples, suivant le schéma de la figure 1.9. Une lentille suspendue par 2 fils forme l'image d'une fente-source au centre d'un détecteur 2 quadrants. Ainsi, à l'équilibre du pendule, les signaux sont égaux sur les deux sorties du détecteur. L'ensemble est posé à l'extrémité du banc. Lorsque le banc est soumis à des vibrations, la lentille oscille et l'image de la fente se déplace de sorte que la différence entre les signaux n'est plus nulle. Ces capteurs, de par leur dimension, et leur fréquence propre ne sont pas optimisés pour notre montage mais ils nous permettent néanmoins d'observer les résonances du banc (figure 1.10) et de prévoir un premier asservissement.

Dans notre géométrie, les fils de suspension ont une longueur  $h = 40$  cm et les distances séparant les fils sont respectivement  $c = 20$  cm et  $d = 10$  cm. Le banc supportant les miroirs est une barre de Dural de longueur 1.4 m et de largeur 0.2 m pour une masse d'environ 40 kg. Les capteurs sont posés symétriquement à chaque extrémité du banc et orientés de manière à mesurer le mouvement suivant  $Ox$  et donc être sensibles au mouvement pendulaire et au mouvement de

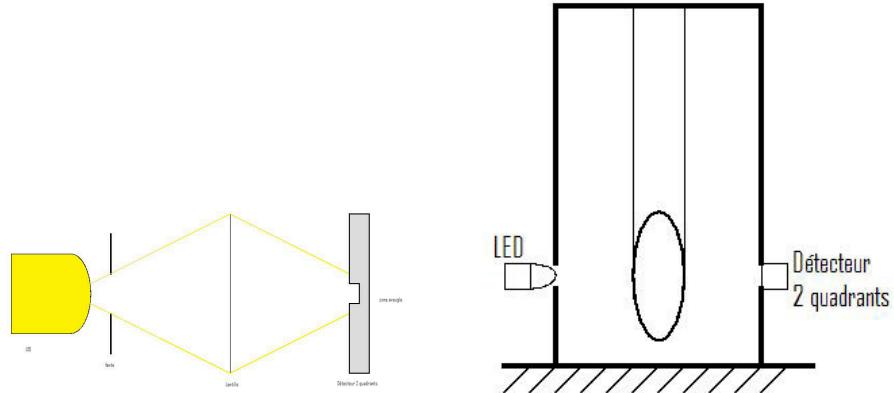


FIGURE 1.9 – Schéma des premiers sismomètres réalisés. La lentille, suspendue par deux fils, est une lentille boule afin de ne pas être sensible à un mouvement de rotation du pendule.

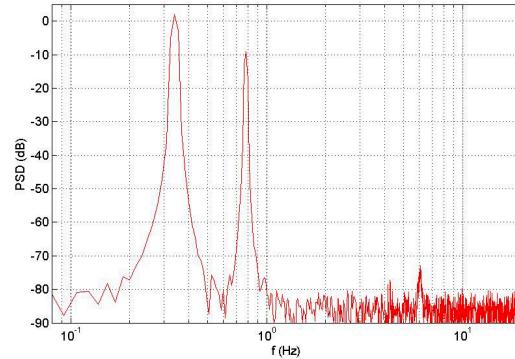


FIGURE 1.10 – Densité spectrale de puissance du signal d'un capteur. Les pics à 0.34 Hz et 0.78 Hz correspondent respectivement au mouvement de rotation et au mouvement pendulaire.

rotation. Les signaux donnés par les deux capteurs sont identiques pour un mouvement pendulaire et opposés pour un mouvement de rotation. Il est aisément de reconstruire chacun des mouvements à partir de la somme et de la différence des signaux. Les fréquences de résonance pour ces deux mouvements sont (figure 1.10)

$$f_{pend} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} = 0.79 \text{ Hz}$$

$$f_{rot} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{\frac{M(c^2 + 2d^2)}{2I_y}} = 0.34 \text{ Hz}$$

J'ai mesuré aussi le facteur de qualité de la résonance à 0.34 Hz, en regardant la décroissance de l'amplitude de ce seul mouvement de rotation et en ajustant sur une fonction exponentielle. Je trouve ainsi une valeur  $Q_{Rot} = 1.2 \times 10^4$ . Cette valeur, bien que déjà élevée, est bien loin de la valeur théoriquement accessible lorsque le pendule sera sous ultra-vide. En effet, le seul

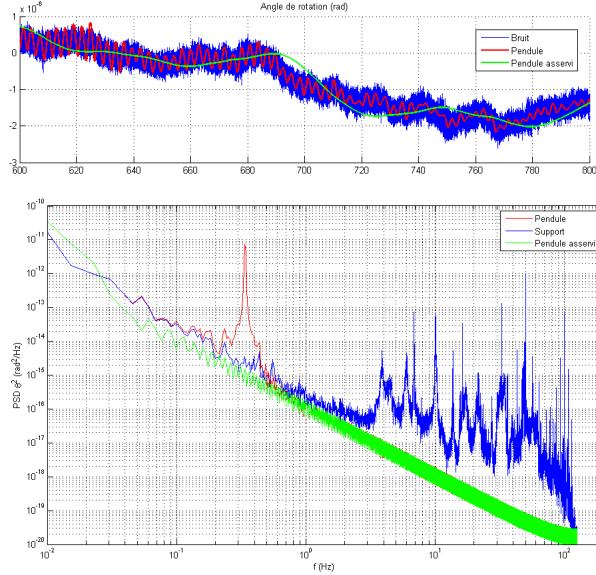


FIGURE 1.11 – Simulation de l’effet du filtrage et de l’asservissement. La courbe bleue représente la densité spectrale du bruit de rotation du support. Le filtrage passif (en rouge) élimine déjà bien les hautes fréquences mais amplifie aussi le bruit à sa fréquence de résonance (0.34 Hz). L’asservissement (courbe verte) permet d’éliminer cette amplification.

amortissement qui subsistera alors sera l’amortissement anélastique au niveau des fils qui peut être évalué par [70] :

$$Q_{pend} = \frac{2h}{n} \sqrt{\frac{Mg}{EI}} \frac{1}{\phi_w}$$

$$Q_{Rot} = \frac{2h}{n} \sqrt{\frac{Mg}{EI}} \frac{1}{\phi_w} \sqrt{\frac{M(c^2 + 2d^2)}{2I_y}}$$

où  $E$  est le module d’Young du métal dont sont faits les fils et  $I$ , le moment quadratique d’un fil. L’angle de perte  $\phi_w$  est de l’ordre de  $10^{-4}$  [70] pour l’acier des cordes à piano, le nombre  $n$  de fils est pour nous  $n = 3$  et leur diamètre de 0.3 mm ce qui donne  $Q_{Rot} \approx 10^7$ .

## 6.2 Simulations

Disposant de sismomètres commerciaux calibrés, j’ai pu mesurer le bruit de rotation au niveau de l’enceinte à vide et simuler l’effet du filtrage passif dû à la suspension du banc ainsi que celui d’un asservissement avec une force proportionnelle au signal de rotation (figure 1.11).

Le contraste des franges dépend du bruit de vibration mais aussi de la vitesse des atomes. Lorsque les miroirs se déplacent sous l’effet des vibrations, l’équation 1.8 s’écrit :

$$\Phi_d(t) = pk_G [2x_2(t) - x_1(t - T) - x_3(t + T)] \quad (1.49)$$

où  $T$  est le temps de vol des atomes d’une onde stationnaire à la suivante. Considérant un

mouvement de translation sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , i.e.  $x_2(t) = X_m \exp(i\omega t + \psi)$ , on a alors

$$\Phi_d(\omega) = pk_G X_m \exp(i\omega t + \psi) [2 - \exp(-i\omega T) - \exp(i\omega T)] \quad (1.50)$$

$$= 2pk_G (1 - \cos \omega T) X_m \exp(i\omega t + \psi) \quad (1.51)$$

et la variance

$$\langle \phi_d(\omega)^2 \rangle = 4p^2 k_G^2 (1 - \cos \omega T)^2 S_x(\omega)$$

où  $S_x(\omega)$  est la densité spectrale de puissance pour le mouvement de translation. Pour obtenir la variance totale de la phase, il faut sommer sur toutes les fréquences :

$$\langle \phi_d^2 \rangle = 4p^2 k_G^2 \int_0^\infty (1 - \cos \omega T)^2 S_x(\omega) d\omega$$

Pour le mouvement de rotation, nous pouvons écrire :

$$x_2(t) = 0$$

$$x_1(t) = L_{12} \sin(\theta(t - T)) \simeq L_{12} \theta(t - T) = L_{12} \Theta_m \exp(i\omega t + \psi) \exp(-i\omega T)$$

$$x_3(t) = -L_{12} \sin(\theta(t + T)) \simeq -L_{12} \theta(t + T) = -L_{12} \Theta_m \exp(i\omega t + \psi) \exp(i\omega T)$$

La phase est alors :

$$\Phi_d(\omega) = -pk_G \Theta_m \exp(i\omega t + \psi) [\exp(i\omega T) - \exp(-i\omega T)] \quad (1.52)$$

$$= -2pk_G (\sin \omega T) \Theta_m \exp(i\omega t + \psi) \quad (1.53)$$

La variance de la phase due au mouvement de rotation

$$\langle \phi_d^2 \rangle = 4p^2 k_G^2 \int_0^\infty (\sin \omega T)^2 S_\theta(\omega) d\omega$$

A partir de l'enregistrement du bruit de vibration dans la direction  $Ox$ , j'ai pu calculer la variation du contraste des franges pour différentes vitesses de atomes en fonction de l'ordre de diffraction. Le filtrage passif par le simple pendule permet déjà de conserver un bon contraste jusqu'à des vitesses de 100 m/s mais l'asservissement s'avère indispensable en deçà (figure 1.12).

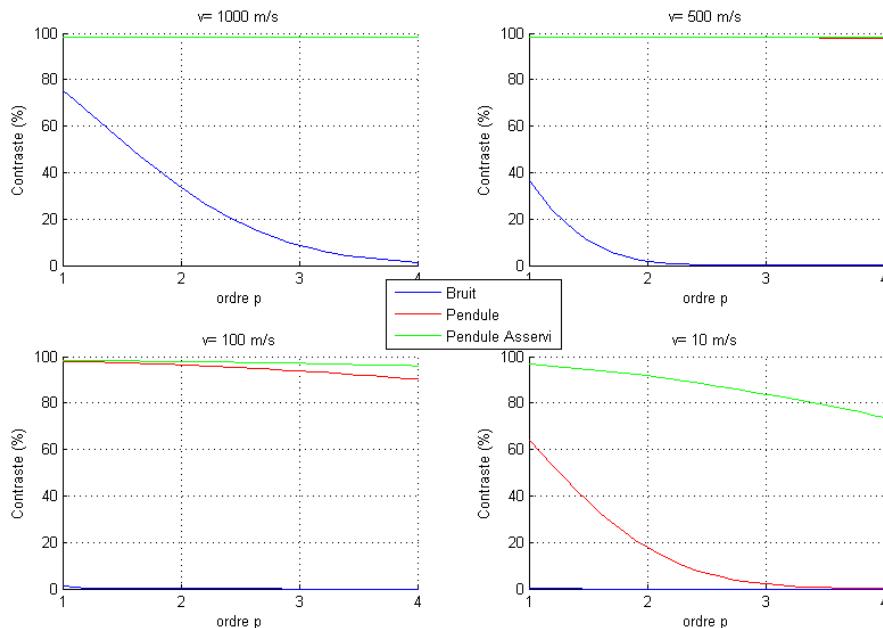


FIGURE 1.12 – Estimation du contraste des franges pour différentes vitesses des atomes. Le contraste calculé est pratiquement nul en l'absence d'asservissement dès que  $v \leq 100 \text{ m/s}$  et il est voisin de 100 % dans ce cas avec le pendule non asservi ou asservi. A  $v = 10 \text{ m/s}$ , le contraste est très différent suivant que le pendule est asservi ou non.



# Bibliographie

- [1] A. Miffre, M. Jacquay, M. Büchner, G. Trénec and J. Vigué, "Vibration induced phase noise in Mach-Zehnder atom interferometers ;", *Appl Phys. B-Lasers and Optics* **84**, 617-625 (2006).
- [2] M. Jacquay, A. Miffre, M. Büchner, G. Trénec and J. Vigué, " Phase noise due to vibrations in Mach-Zehnder atom interferometers," *Europhys. Lett.* **75**, 688-694 (2006).
- [3] J. Anandan, "Gravitational and rotational effects in quantum interference," *Phys. Rev. D* **15**, 1448 (1977)
- [4] J. F. Clauser, "Ultra-high sensitivity accelerometers and gyroscopes using neutral atom matter-wave interferometry," *Physica B* **151**, 262 (1988)
- [5] J. Schmiedmayer, M.S. Chapman, C.R. Ekstrom, T.D. Hammond, D.A. Kokorowski, A. Lenef, R.A. Rubinstein, E.T. Smith, and D.E. Pritchard, "Optics and interferometry with atoms and molecules," p. 1-83, in *Atom interferometry* edited by P.R. Berman (Academic Press 1997).
- [6] C. Champenois, M. Büchner and J. Vigué, "Fringe contrast in three grating Mach Zehnder atomic interferometer ;" *Eur. Phys. J. D* **5**, 363 (1999).
- [7] A. Miffre, M. Jacquay, M. Büchner, G. Trénec, and J. Vigué, "Lithium atom interferometer using laser diffraction : description and experiments," *Eur. Phys. J. D* **335**, 99–112 (2005).
- [8] Akito Araya, Keita Kawabe, Toshikazu Sato, Norikatsu Mio, and Kimio Tsubono, " Highly sensitive wideband seismometer using a laser interferometer," *Rev. Sci. Instrum.* **64**, 1337-1341 (1993).
- [9] M. Jacquay, A. Miffre, M. Büchner, G. Trénec, J. Vigué, and A. Cronin, " Dispersion compensation in atom interferometry by a Sagnac phase," *Phys. Rev. A* **78**, 013638 (2008).
- [10] D.M. Giltner, R. W. McGowan and Siu Au Lee, "Atom interferometer based on Bragg scattering from standing light waves," *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 2638 (1995).
- [11] D. M. Giltner, Ph. D. thesis, Colorado State University, Fort Collins (1996)
- [12] A. Miffre, R. Delhuille, B. Viaris de Lesegno, M. Büchner, C. Rizzo and J. Vigué, *Eur. J. Phys.* **23**, 623 (2002)
- [13] J. P. Toennies, private communication (2003)
- [14] R. Delhuille, A. Miffre, B. Viaris de Lesegno, M. Büchner, C. Rizzo, G. Trénec and J. Vigué, *Acta Physica Polonica* **33**, 2157 (2002)
- [15] L. Landau and E. Lifchitz, *Theory of elasticity*, Pergamon, New York (1986).
- [16] A. Miffre et al., "Vibration-induced phase noise in Mach-Zehnder atom interferometers," *Appl Phys. B* **84**, 617 (2006)
- [17] D.G.Blair et al,"Performance of an ultra low-frequency folded pendulum , " *Phys. Letters A*, **193**, 223 (1994)

- [18] G. Dolfo, D. Castex, and J. Vigué, "Damping mechanisms of a pendulum," *Eur. J. Phys.* **55**, 065004 (2016).
- [19] D. B. Newell et al., "An ultra-low-noise, low-frequency, six degrees of freedom active vibration isolator," *Rev. Sci. Instrum.* **68**, 3211 (1997) ;
- [20] S. J. Richman et al., "Multistage active vibration isolation system," *Rev. Sci. Instrum.* **69**, 2531 (1998) ;
- [21] J. M. Hensley et al., "Active low frequency vertical vibration isolation," *Rev. Sci. Instrum.* **70**, 2735 (1999)
- [22] G. Cagnoli, L. Gammaitoni, J. Kovalik, F. Marchesoni, and M. Punturo "Low-frequency internal friction in clamped-free thin wires," *Phys. Lett. A* **255**, 230—235 (1999).

# Chapitre 2

## Développement d'un sismomètre interférentiel

### 1 Introduction

J'ai décrit dans le chapitre précédent le principe de la stabilisation d'un interféromètre atomique contre les vibrations. Après une première réalisation utilisant des sismomètres de faible sensibilité et un pendule situé dans l'air, j'ai voulu développer un montage sous ultra-vide avec des sismomètres très sensibles. Ce sont ces développements qui sont décrits dans le présent chapitre. Après une revue rapide des sismomètres électroniques, je décris une première tentative utilisant une détection capacitive de la position. Devant les difficultés, j'ai assez rapidement abandonné cette voie pour développer un sismomètre utilisant un interféromètre optique donnant deux signaux en quadrature comme capteur de position. J'ai pu aller assez loin dans ce développement et obtenir de beaux signaux en quadrature pratiquement exacte sur un premier montage. J'ai construit un deuxième montage mieux isolé des perturbations ambiantes et, sur ce deuxième montage, j'ai entrepris d'améliorer la visibilité des interférences des deux signaux et d'égaliser leurs intensités mais je n'ai pas eu le temps de mener à son terme ce projet. En effet, l'optimisation simultanée des deux signaux et de leur quadrature est un problème complexe car il faut analyser les effets de polarisation de la lumière dans un interféromètre utilisant des rétroréflecteurs en coin de cube et, dans notre cas, une séparatrice avec pertes.

### 2 Les sismomètres électroniques

#### 2.1 Principe de fonctionnement

La plupart des sismomètres électroniques miniatures sont formés d'un pendule, d'une mesure de déplacement de ce pendule par rapport au laboratoire et d'un asservissement qui permet de maintenir le pendule fixe par rapport au laboratoire. En effet, comme on l'a vu au chapitre précédent, en l'absence d'asservissement, un pendule suit presque les mouvements du sol à basse fréquence,  $\omega \leq \omega_0$ , où  $\omega_0$  est sa fréquence de résonance, et il est pratiquement fixe à haute fréquence,  $\omega \gg \omega_0$ . L'asservissement exerce une force proportionnelle à un courant électrique et ce courant donne une mesure de l'accélération que subirait le pendule en l'absence d'asservissement. Il est aussi possible par intégration de donner un signal proportionnel à la vitesse ou à la position.

## 2.2 Performances de ces appareils

L'article de Wielandt et Steckheisen [1] datant de 1982 présente une revue rapide des sismomètres de longue période. Les efforts de l'époque portent sur la fabrication d'appareils miniatures, ayant une très bonne sensibilité à basse fréquence et aussi une grande dynamique. Une version améliorée de cet appareil est commercialisé par la compagnie suisse Streckheisen. Un autre appareil plus compact a été développé à la même époque par Usher [2, 3] et cet appareil est commercialisé par la compagnie Guralp. Un cours écrit par Wielandt [4] décrit en détail ce genre de sismomètres.

Un des buts principaux de ce genre de sismomètres est la détection d'événements sismiques lointains [1] qui induisent des déplacements du sol allant jusqu'à 0.25 mm, des vitesses jusqu'à 8 mm/s et des accélérations jusqu'à 2.5 mm/s<sup>2</sup> et la bande passante de ces appareils correspond à la gamme de fréquences entre  $10^{-4}$  et 1 Hz. Le bruit propre de l'appareil dû au mouvement Brownien du pendule doit être inférieur au bruit sismique en l'absence d'événements dont le niveau, dans un bon site, est donné par le "USGS Low-Noise Model" [5].

## 2.3 Mesure de déplacement du pendule

La mesure de déplacement utilisée dans ces appareils est basée sur les techniques suivantes :

- l'appareil Wielandt et Steckheisen [1] utilisait un LVDT, Linear Variable Differential Transformer, mais ce détecteur dont la sensibilité était limitée vers  $10^{-10}$  m pour une course de 0.5 mm a été rapidement abandonné au profit d'une détection capacitive plus sensible. Cependant, en 1994, Braccini *et al.* [6] ont construit un accéléromètre large bande utilisant un LVDT avec une sensibilité spectrale meilleure que  $10^{-12}$  m/ $\sqrt{\text{Hz}}$  entre 3 Hz et 100 Hz.
- la détection capacitive était déjà utilisée dans le sismomètre de Usher [2, 3] développé en 1977. Un article de revue de Jones et Richards [7] explique cette technique et ses limitations. Cet article évalue la limite de sensibilité au niveau de  $5 \times 10^{-12}$  m si la distance entre plaques du condensateur variable est de 0.5 mm et si la surface des plaques est de quelques centimètres carrés.
- la détection par interférométrie laser a été utilisée par Araya *et al.* [8] avec un bruit de mesure de  $2 \times 10^{-15}$  m/ $\sqrt{\text{Hz}}$  pour les fréquences supérieures à 2 kHz mais seulement  $3 \times 10^{-11}$  m/ $\sqrt{\text{Hz}}$  à 1Hz. Cette détection est décrite en détail plus loin.

On peut remarquer que l'appareil de Braccini *et al.* [6] et celui de Araya *et al.* [8] ont été développés pour des applications aux grands interféromètres optiques utilisés pour la détection d'ondes gravitationnelles : ceci explique l'intérêt pour les performances à des fréquences beaucoup plus élevées que la bande de fréquence habituelle en sismologie.

## 3 Notre premier développement

Pour asservir la plateforme portant les miroirs, il fallait des sismomètres performants dans une large bande de fréquence, entre une 0.1 et 100 Hz environ. Ces sismomètres devaient pouvoir fonctionner sous ultra-vide. Vis-à-vis de ces exigences, les appareils du commerce ont plusieurs défauts :

- vers les hautes fréquences, leur bande passante de mesure est limitée, avec une limite supérieure entre 1 et 10 Hz
- leur électronique est placée tout près de la capacité à mesurer ; cette électronique très performante ne peut pas être déplacée et elle n'est, à priori, pas compatible avec l'ultra-vide, à cause de problèmes de dégazage et aussi du problème thermique (l'évacuation de

la chaleur dégagée ne se passe pas du tout de la même manière sous un vide élevé qu'à la pression atmosphérique).

Nous avons donc décidé de construire nos sismomètres. L'analyse des performances des appareils cités ci-dessus nous amenés, J. Vigué et moi, à choisir la détection capacitive de déplacement. Un échange de mail avec Wielandt nous avait convaincus que la détection par LVDT était dépassée par la détection capacitive. La détection laser utilisée par Araya *et al.* [8] avait des performances assez faibles pour les basses fréquences jusque vers 10 Hz. Enfin, en 2010, nous avions trouvé une publication de Bertolini *et al.* [9] qui avait construit un sismomètre compact et compatible ultra-vide, utilisant la détection capacitive avec un niveau de bruit d'environ  $2 \times 10^{-12} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$  pour les fréquences supérieures à 0.4 Hz. Nous avons aussi utilisé un rapport internet de LIGO décrivant ce sismomètre ainsi que la thèse de Bertolini et nous avons échangé des mails avec lui. Malgré ces circonstances favorables, les essais pour copier son électronique n'ont pas été satisfaisants. Toujours en accord avec J. Vigué, j'ai abandonné cette voie quand j'ai trouvé deux articles de l'équipe de Zumberge [10, 11] décrivant un nouveau sismomètre laser.

## 4 Le sismomètre de l'équipe de Zumberge

Comme celui d'Araya *et al.* [8], ce sismomètre [10, 11] utilise un interféromètre de Michelson pour mesurer le déplacement du pendule mais les performances sont beaucoup plus élevées, avec une sensibilité allant de  $4 \times 10^{-11} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$  à 0.1 Hz à  $10^{-12} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$  à 1 Hz et la sensibilité s'améliore encore pour les fréquences plus élevées (figure 2.1).

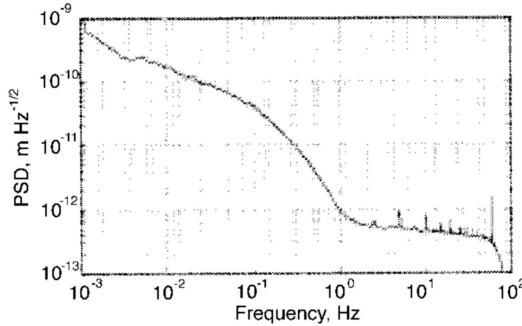


Fig. 4. Plot of the power spectral density of the displacement record from DSP processing for an equal-arm free-space Michelson interferometer illuminated with a 0.5-mW He-Ne laser. The corner cubes and beam splitter are attached to a small fixture held in a partial vacuum. For 7 h, data were sampled at 200 samples/s. To display this clearly, we smoothed the spectrum below 1 Hz into approximately 1/3 octave bands. Above 1 Hz we smoothed the spectrum with a fixed 0.75-Hz Gaussian window.

FIGURE 2.1 – Issue de [10] montrant les performances du sismomètre utilisé par Zumberge.

De plus, cet appareil n'utilise pas d'asservissement de la position du pendule et cette simplification est intéressante. En effet, elle évite d'avoir à gérer deux boucles d'asservissement imbriquées, une pour le sismomètre et une pour le pendule de l'interféromètre atomique. Enfin,

l'usage d'un interféromètre de Michelson correspond bien au savoir-faire de mon équipe et c'est une raison supplémentaire pour essayer de s'inspirer de ce montage pour notre expérience. Avant de décrire en détail cet appareil, je vais expliquer l'usage de l'interféromètre de Michelson comme mesure de déplacement.

## 5 L'interféromètre de Michelson comme mesure de déplacement

### 5.1 Sensibilité de mesure

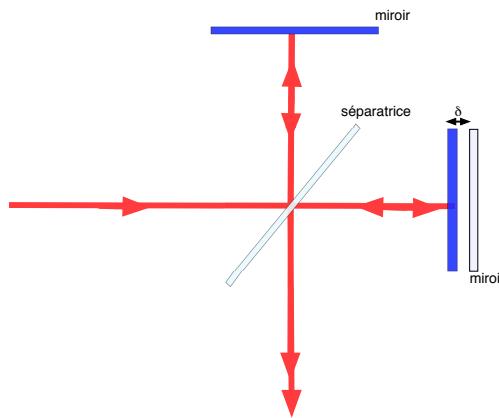


FIGURE 2.2 – Interféromètre de Michelson.

Un interféromètre de Michelson est un instrument de mesure très sensible du déplacement  $\delta$  d'un des miroirs mesuré par rapport à la position de différence de marche nulle (figure 2.2). Le signal de sortie de l'interféromètre  $\mathcal{I}$  est donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \mathcal{I}_0 [1 + \mathcal{V}_0 \cos \varphi] \\ \varphi &= 2k_L \delta\end{aligned}\quad (2.1)$$

Dans cette équation  $\mathcal{I}_0$  est l'intensité moyenne,  $\mathcal{V}_0$  est la visibilité qui vaut  $\mathcal{V}_0 = 1$  pour un appareil idéal et  $k_L$  est le vecteur d'onde du laser de longueur d'onde  $\lambda_L$ ,  $k_L = 2\pi/\lambda_L$ . La sensibilité de mesure est donnée par la dérivée  $d\mathcal{I}/d\delta$  :

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\delta} = -2k_L \mathcal{I}_0 \mathcal{V}_0 \sin(2k_L \delta) \quad (2.2)$$

Cette quantité est maximale ou minimale si  $2k_L \delta = \pm\pi/2$  [2 $\pi$ ] et elle s'annule si  $2k_L \delta = 0$  [ $\pi$ ]. On va supposer que l'on travaille à un point de sensibilité maximale pour lequel  $d\mathcal{I}/d\delta = 2k_L \mathcal{I}_0 \mathcal{V}_0$  et je suppose, pour simplifier, que  $\mathcal{V}_0 = 1$ .

### 5.2 Limite fondamentale de la sensibilité de mesure

Il faut estimer l'intensité  $\mathcal{I}_0$  du signal le bruit sur ce signal. L'équipe de Zumberge utilise un laser hélium-néon monofréquence (modèle Micro-g ML-1) de longueur d'onde  $\lambda_L = 633$  nm et

de puissance 0.5 mW. Avec cette puissance disponible, il est raisonnable de penser que  $I_0 \approx 0.1$  mW. A cette longueur d'onde, la sensibilité  $S$  de détection des photodiodes est voisine  $S = 0.4$  A/W et le signal correspondant à  $I_0$  est voisin de  $I_0S = 4 \times 10^{-5}$  A. La source ultime de bruit est le bruit du photocourant sur les photodiodes dont la valeur quadratique moyenne est donnée par

$$i_{shot} = \sqrt{2q_e S I_0 \Delta f} \quad (2.3)$$

où  $q_e$  est la charge de l'électron et  $\Delta f$  est la bande passante de mesure en Hz. La sensibilité ultime correspond à une variation de signal égale à  $i_{shot}$ . On trouve  $i_{shot} \approx 4 \times 10^{-12}$  A pour une bande passante  $\Delta f = 1$  Hz. On en déduit la sensibilité en phase  $\varphi_{min} \approx 10^{-7}$  rad/ $\sqrt{\text{Hz}}$  et la sensibilité de mesure en distance est  $\delta_{min} = \varphi_{min}/2k_L \approx 5 \times 10^{-15}$  m. Cette valeur est nettement inférieure à ce qui est mesuré par l'équipe de Zumberge probablement car d'autres sources de bruit sont plus importantes que le bruit de photocourant. De plus, il existe toujours un excès de bruit à basse fréquence, ce qui explique le bruit décroît quand la fréquence augmente.

### 5.3 Le problème de la dépendance de la sensibilité avec la phase

Diverses solutions peuvent être utilisées pour résoudre ce problème :

- on peut utiliser un asservissement pour garder la phase  $\varphi$  près d'un point de sensibilité maximale comme dans l'interféromètre d'Araya *et al.* [8] ;
- on peut, en modulant un des faisceaux qui interfèrent, construire un interféromètre homodyne ou hétérodyne. Cette technique a des performances très élevées mais elle est relativement complexe [17]. Les performances les plus élevées [12] sont obtenues avec une course très réduite par un effet de Fabry-Perot.
- on peut utiliser la polarisation de la lumière pour extraire d'un seul interféromètre deux signaux qui, dans le cas idéal, sont en quadrature, d'intensités et de visibilités comparables. Il est alors possible de maintenir une sensibilité en phase sensiblement constante et par conséquence une sensibilité en mesure de déplacement également constante. C'est la solution utilisée par l'équipe de Zumberge [10, 11]. Avant de décrire cet appareil en détail, je vais présenter deux exemples simples :
- en 1975, Juncar et Pinard [13] ont développé un interféromètre de Michelson donnant des signaux en quadrature : cet appareil (figure 2.3), qui servait à la mesure de la fréquence d'un laser accordable monofréquence, a été baptisé sigmamètre car l'inverse de la longueur d'onde qui est le nombre d'onde est traditionnellement noté  $\sigma$ . Dans leur discussion, il semble que le seul élément agissant sur la polarisation est le prisme à réflexion totale qui donne un déphasage  $\Psi = \pi/4$  par passage entre les deux polarisations. La séparatrice agit en général aussi sur la polarisation mais il existe des cas particuliers où cet effet n'est pas gênant (voir section 3.9).
- en 1978, Raine et Downs [14] ont développé des séparatrices spéciales pour produire des signaux interférométriques en quadrature de phase en sortie d'un interféromètre de Michelson.

## 6 Le sismomètre de l'équipe de Zumberge

Dans un premier article [10] écrit en 2004, cette équipe décrit comment enregistrer et analyser en temps réel des signaux à peu près en quadrature produits par un interféromètre de Michelson. La figure 2.4 montre l'interféromètre. La polarisation du faisceau laser entrant dans l'interféromètre est linéaire, réglable grâce à une lame demi-onde. Les miroirs sont remplacés par des

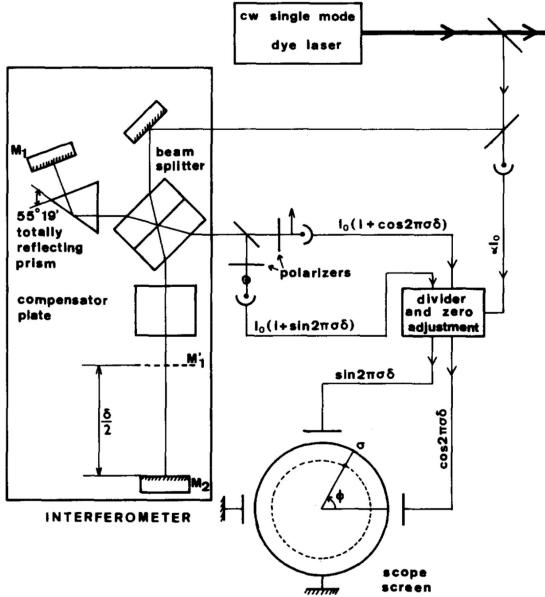


Fig. 1. Schematic diagram of the interferometer used in the sismometer. The polarization of the beam entering into the interferometer is at 45° of the prism axis and the two analyzers are respectively parallel and perpendicular to the prism axis.

FIGURE 2.3 – Interféromètre de Juncar et Pinard produisant des signaux en quadrature. La figure est issue de leur article [13].

rétroréflecteurs en coins de cube, ce qui est nécessaire pour le montage du sismomètre. En effet, il est difficile de construire le pendule du sismomètre de manière à ce que le déplacement du miroir soit suffisamment parallèle pour obtenir une bonne visibilité des franges d'interférence alors que, si les miroirs sont remplacés par des rétroréflecteurs en coins de cube, une petite rotation du coin de cube autour de son sommet a peu d'effets sur la visibilité des franges [18, 19]. Bien que les rétroréflecteurs en coin de cube et la séparatrice agissent sur la polarisation de la lumière (ces deux questions sont discutées dans la section suivante), le seul élément polarisant discuté dans les articles de l'équipe de Zumberge est une lame  $\lambda/8$ . Cette lame, qui donne un déphasage  $\Psi = \pi/4$ , est introduite sur un des bras et elle est traversée deux fois. Si elle est correctement orientée vis à vis de la polarisation incidente et si elle était le seul élément optique agissant sur la polarisation, elle permettrait d'obtenir directement deux signaux en quadrature, exactement comme dans le sismomètre de Juncar et Pinard.

Le premier article [10] décrit comment extraire en temps réel des paramètres de l'ellipse décrite par les deux signaux quand ils ne sont pas en quadrature exacte (cette extraction est nécessaire car les paramètres de l'ellipse dérivent lentement). Les signaux sont digitalisés avec une fréquence de 100 kHz, ce qui limite la vitesse du rétroréflecteur mobile à environ 15 mm/s : pour des vitesses plus élevées, la phase augmenterait de plus que  $\pi$  entre 2 mesures successives et il y aurait ambiguïté de phase.

Dans un deuxième article [11], écrit en collaboration avec Wielandt en 2010, cette équipe décrit le sismomètre construit avec les techniques développées dans l'article de 2004. La figure 2.5 montre le montage très compact réalisé. Le but principal de cet article est de démontrer que ce sismomètre a des performances comparables ou meilleures que celle des sismomètres utilisant un asservissement et en particulier le modèle STS1 de la compagnie Streckheisen. L'ensemble de ces deux articles a donné lieu à une publication de brevet [16].

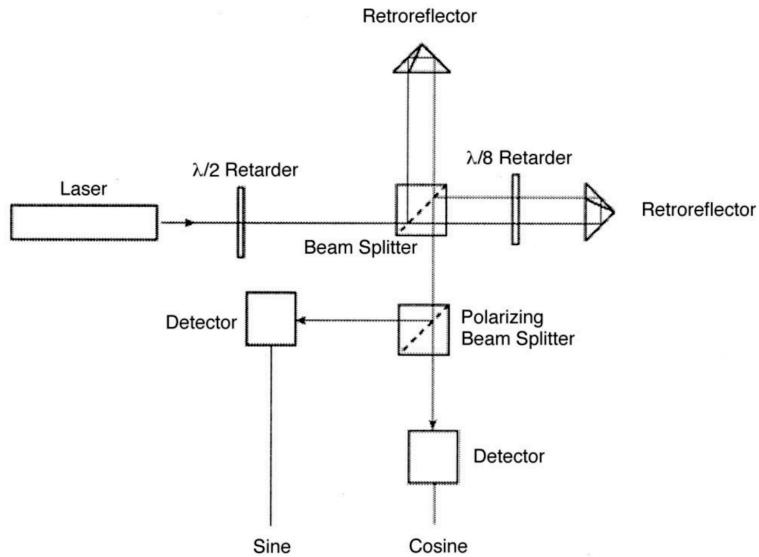


Fig. 1. Michelson interferometer in which one of the arms is lengthened by a quarter of a wavelength for one polarizations state. A polarizing beam splitter separates the two fringe signals yielding a quadrature output.

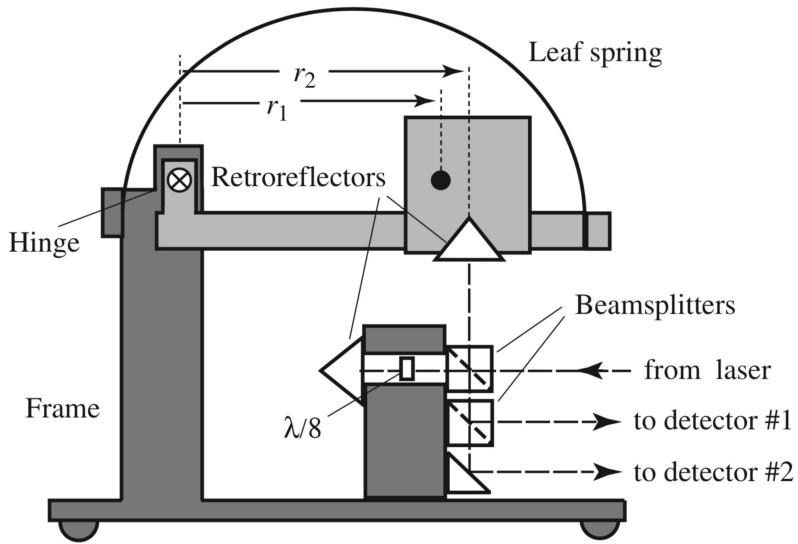
FIGURE 2.4 – Schéma de l'interféromètre de Zumberge La figure est issue de leur article [10].

Dans cet article [11], il est dit qu'un nouveau montage utilise des fibres optiques pour apporter la lumière laser et remporter la lumière des deux faisceaux transportant les signaux de sortie de l'interféromètre. J. Vigué a interrogé Zumberge qui a confirmé l'usage d'une fibre monomode conservant la polarisation pour apporter la lumière laser et de deux fibres multimodes pour extraire les faisceaux de sortie. Cet arrangement est très intéressant pour le fonctionnement sous ultra-vide car aucun composant électronique n'est alors placé sous vide.

La thèse de J.D. Otero [15], soutenue en 2009, décrit le montage en détail. Dans sa thèse, Otero ne discute pas de manière plus complète les effets de polarisation dans l'interféromètre de Michelson et il explique seulement que, après un premier alignement des faisceaux par un bon positionnement des rétroréflecteurs en coins de cube, il optimise les deux signaux par rotation de la polarisation d'entrée et de la lame  $\lambda/8$  : l'optimisation vise à produire deux signaux approximativement en quadrature, avec des intensités moyennes comparables et une visibilité de franges supérieure à 90 %.

## 7 Notre montage

Dans un premier montage représenté sur la figure (figure ??), j'ai copié l'interféromètre de l'équipe de Zumberge. J'ai introduit un miroir entre la séparatrice et un des deux coins de cube, ce qui permet de faire coincider facilement les deux faisceaux qui sont passés par les deux bras de l'interféromètre pour les faire interférer en sortie. J'ai aussi remplacé la lame  $\lambda/8$  traversée deux fois par une lame  $\lambda/4$  traversée une seule fois : la lame  $\lambda/8$  est un produit non-standard qui doit être fait sur commande et qui est donc coûteux.



**Figure 2.** STS1 leaf-spring seismometer with an optical system. Note that the geometry shown is not to scale, allowing inclusion of the optical components in the drawing.

FIGURE 2.5 – Schéma du sismomètre de l'équipe de Zumberge. La figure est issue de leur article [11].

Après une optimisation par essai et erreur, j'ai obtenu des signaux qui sont très bien en quadrature (figure 2.7). Ces signaux ne sont pas très satisfaisants du point de vue des intensités, dans un rapport voisin de 2, et du point de vue des visibilités, toutes deux voisines de 60 %. Sur la figure (figure ??), on voit que ce montage repose directement sur la table d'optique, sans aucune protection et les vibrations de la table balayent les franges en permanence. La figure 2.8 montre le spectre des déplacement ainsi enregistrés.

Ces premiers résultats encourageant ont permis à notre équipe de demander et d'obtenir un financement auprès du programme “Défi Instrumentation aux limites” du CNRS en 2013. J'ai alors reconstruit ce montage dans une boîte isolée des vibrations de la table par une chambre à air faiblement gonflée et j'ai réduit le bruit acoustique en tapissant l'intérieur de cette boîte d'une mousse chargée de plomb qui était disponible au laboratoire. La figure 2.8 montre le spectre des vibrations ainsi enregistré et on constate une très nette amélioration.

En prévision d'un montage de l'interféromètre sous ultra-vide, des essais de clivage et de polissage de fibres optiques monomodes conservant la polarisation et de fibres multimodes ont été effectués par des membres de l'équipe. Nous avions acheté le matériel de polissage et d'inspection vendu par Thorlabs et suivi le manuel de polissage disponible sur le site Thorlabs.

Les efforts pour optimiser simultanément la quadrature des deux signaux, leurs intensités et leurs visibilités sur ce nouveau montage se sont révélés vains. J'ai donc entrepris de comprendre du point de vue théorique cet interféromètre et en particulier les effets de polarisation.

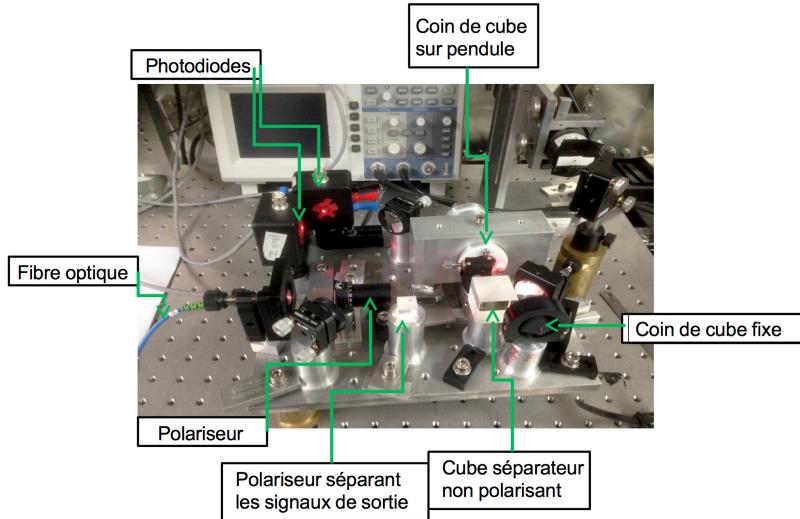


FIGURE 2.6 – L'interféromètre construit par nos soins, se basant sur celui de Zumberge (Photo Elodie Turatsinze).

## 8 Théorie de l'interféromètre

### 8.1 L'interféromètre à coins de cube

Les articles [18, 19] donnent toutes les informations nécessaires à l'alignement de ce type d'interféromètre. Le montage est décrit schématiquement sur la figure 2.9.

Les faisceaux réfléchis sont parallèles entre eux mais ils ne coïncident pas en général. Si on ne met pas de miroir  $M_3$  entre le NPBS et le coin de cube  $CC_A$ , le réglage consiste à ce que les décalages spatiaux des faisceaux soient symétriques pour les deux coins de cubes. Il faut donc déplacer le pôle  $P_A^{-1}$  du coin de cube  $CC_A$  de manière à ce que le symétrique  $P_B'$  de  $P_B$  par rapport à la séparatrice soit tel que le segment  $P_A P_B'$  soit parallèle au segment  $O_A P_A$  où  $O_A$  est le sommet du coin de cube  $CC_A$ . Le réglage est alors très simple : on déplace le coin de cube  $CC_B$  et quand les faisceaux de sortie commencent à coïncider, des franges d'interférences deviennent visibles sur un oscilloscope (ces franges défilent rapidement à cause des vibrations du montage). L'optimisation du signal se fait alors en cherchant à maximiser la visibilité des franges.

Dans un premier temps, j'avais remplacé le réglage en translation du coin de cube  $CC_A$  par le miroir  $M_3$ . En effet, lorsque les deux faisceaux émergents sont à peu près coïncidents, le réglage angulaire fin de ce miroir permet d'optimiser la coïncidence des faisceaux et la visibilité des franges. Cependant, ce miroir, fonctionnant à une incidence de  $45^\circ$ , a un gros effet sur la polarisation de la lumière réfléchie. Ce miroir a un coefficient de réflexion en intensité supérieur à 98 % pour les deux polarisations principales  $s$  et  $p$  mais il induit un déphasage important entre ces deux ondes.

1. Le pôle d'un coin de cube est la projection du sommet sur le plan d'entrée selon l'axe de symétrie d'ordre 3

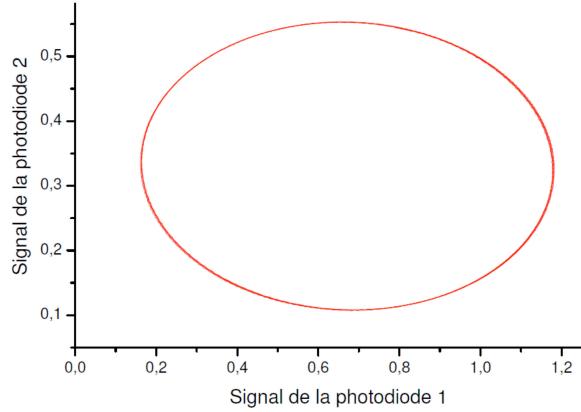


FIGURE 2.7 – Signaux en quadrature obtenus avec notre interféromètre.

## 8.2 Les coins de cube

J'ai effectué la plupart des expériences avec des coins de cube de diamètre 25.4 mm en verre N-BK7 avec un revêtement métallique en argent sur les trois faces et avec un traitement antireflets sur la face d'entrée. Ces coins de cube sont produits par Edmunds (référence 48-607). La tolérance angulaire spécifiée sur le parallélisme des faisceaux incident et réfléchi est de 3 secondes d'arc soit  $\approx 15$  microradians.

Les propriétés de polarisation des coins de cube ont été étudiées en détail par Peck [20] en 1962 : chaque réflexion se fait avec une angle d'incidence égal à  $\arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54.7^\circ$  sur une interface verre-métal et les plans d'incidence successifs sont tournés d'un angle  $\pm 60^\circ$ . Chaque réflexion est biréfringente et les rotations de plans d'incidence rajoutent à la complexité du problème. Avec l'aide d'une stagiaire d'IUT, Elodie Turatsinze et d'un stagiaire de BTS, Soufiyenne S. El Guerrabi, au printemps 2014, nous avons vérifié les calculs de cet article et nous avons fait des mesures de la polarisation de la lumière réfléchie par un coin de cube. En parallèle, nous avons trouvé d'autres articles traitant du même problème : je n'en citerai qu'un seul très complet, celui de Liu et Azzam [21]. Depuis 2014, j'ai repris la caractérisation des propriétés de polarisation de ces coins de cube mais ces résultats n'ont finalement pas été utilisés.

## 8.3 La séparatrice utilisée dans le montage

La séparatrice est un cube séparateur “Non Polarizing Beam Splitter” produit par Thorlabs (référence BS013). Un faisceau arrivant avec une incidence normale sur une de ses faces est séparé en deux faisceaux, un transmis et un réfléchi. Ce cube est non polarisant dans la mesure où son coefficient de réflexion (ou de transmission) est sensiblement le même pour les deux polarisations principales<sup>2</sup>  $s$  et  $p$  mais ces deux polarisations sont réfléchies (ou transmises) avec déphasage relatif non négligeable. J'expose la théorie des propriétés de polarisation de la séparatrice dans la section suivante.

2. La polarisation  $s$  est perpendiculaire au plan d'incidence et la polarisation  $p$  est contenue dans ce plan.

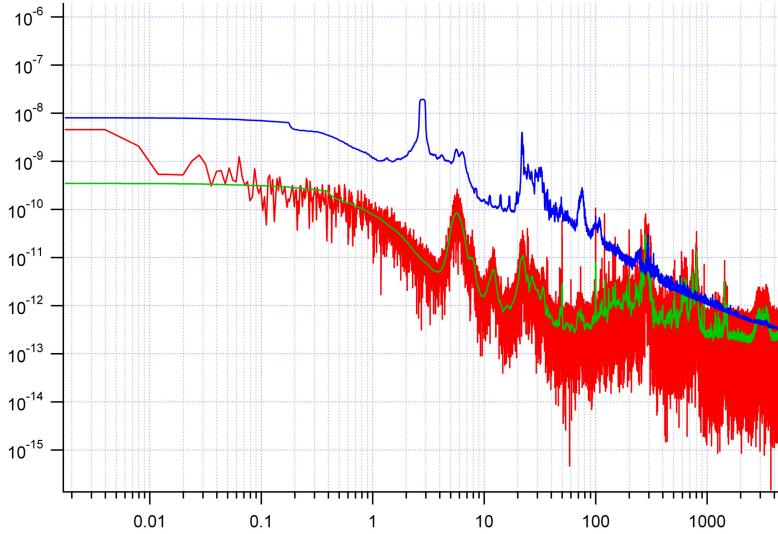


FIGURE 2.8 – Spectre des déplacements enregistrés. La courbe bleue représente le signal de sortie lorsque le coin de cube porté par le pendule est libre de bouger (on observe la résonance du pendule vers 3 Hz), le montage étant directement posé sur la table. La courbe rouge est obtenue avec le pendule bloqué et un montage isolé sommairement des vibrations. En vert, le signal précédent est lissé en effectuant une moyenne mobile, centrée sur chaque échantillon.

## 9 Propriétés de polarisation des lames séparatrices

### 9.1 Le cas de la séparatrice sans perte

Ce cas a été traité par Zeilinger [22] et la figure 2.10 introduit les notations de cet article. Les coefficients de réflexion  $r_{IJ}$  et de transmission  $t_{IJ}$  (où  $I$  et  $J$  sont choisis entre  $R$  pour right et  $L$  pour left) sont des nombres complexes définis par

$$\begin{aligned} u_{1L} &= r_{LL}u_{0L} + t_{LR}u_{0R} \\ u_{1R} &= t_{RL}u_{0L} + r_{RR}u_{0R} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le caractère unitaire de la matrice de réflexion-transmission permet de montrer que

$$\begin{aligned} r_{RR} &= r_{LL}^* \\ t_{RL} &= -t_{LR}^* \\ r_{RR}r_{LL} - t_{RL}t_{LR} &= 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Comme Zeilinger, je n'ai pas fait figurer l'indice  $s$  ou  $p$  indiquant la polarisation principale choisie. Ces quatre coefficients sont en général différents pour ces deux polarisations. Zeilinger introduit les déphasages  $\delta_R$  et  $\delta_L$  définis par  $\delta_R = \text{Arg}(t_{RL}/r_{RR})$  et  $\delta_L = \text{Arg}(t_{LR}/r_{LL})$ . Les relations ci-dessus montrent que

$$\delta_R + \delta_L = \pi \quad (2.6)$$

et ceci permet de montrer que pour les séparatrices symétriques

$$\delta_R = \delta_L = \pi/2 \quad (2.7)$$

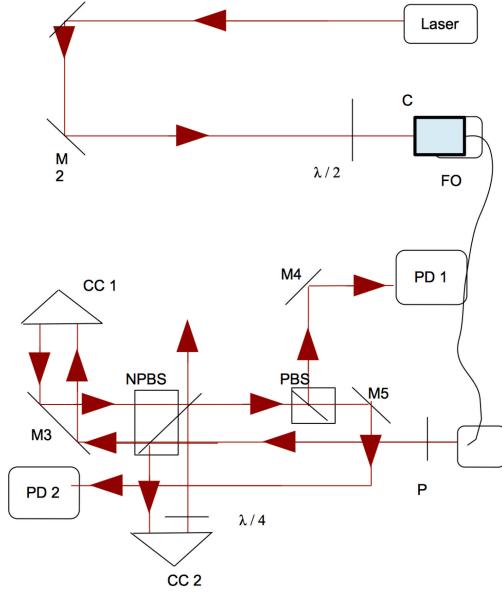


FIGURE 2.9 – Schéma de principe de notre interféromètre de Michelson à coins de cube.

Dans ce cas particulier, ces déphasages sont égaux pour les polarisations  $s$  et  $p$ .

Le calcul de Ou et Mandel [23] établit les mêmes résultats de manière plus intuitive en écrivant que dans un interféromètre de Michelson parfait, c'est à dire sans perte, l'énergie incidente est conservée. Smiles Mascarenhas [24] a fait remarquer que ces résultats sont des propriétés bien établies de la matrice  $S$  introduite dans la théorie des collisions.

Il existe beaucoup de publications traitant formellement des propriétés des séparatrices (par exemple [25]). Un article particulièrement intéressant [26] décrit les résultats d'une compétition de "coatings design" visant à produire une vraie séparatrice non-polarisante c'est à dire avec une égalité des coefficients de réflexion pour les polarisations  $s$  et  $p$ , en module et en phase. Malheureusement ces séparatrices non-polarisantes ne semblent pas être produites. Enfin, ces propriétés font partie du domaine de la réciprocité en optique qui est une question compliquée : un article de revue [27] traite cette question.

## 9.2 Le cas d'une séparatrice avec pertes

Nous avons caractérisé les performances du cube séparateur "Non Polarizing Beam Splitter" (Thorlabs référence BS013). Il est difficile de mesurer les déphasages  $\delta_R$  et  $\delta_L$  mais il est assez facile de mesurer l'ellipticité de la lumière transmise ou réfléchie ce qui donne accès à la différence des déphasages pour les polarisations  $s$  et  $p$  et j'ai trouvé que les relations établies pour une séparatrice sans pertes ne sont pas vérifiées.

J'ai mesuré les pertes de cette séparatrice : la somme des coefficients de réflexion et de transmission en intensité est voisine de 88 % pour la polarisation  $s$  et de 79 % pour les polarisations  $p$ . Les pertes semblent être légèrement différentes, de quelques % selon le sens de passage. Il est possible que ce soit dû à des mesures faites en des points légèrement différents de la séparatrice mais il est aussi possible que ce soit un effet réel car il suffit que la séparatrice ne soit pas

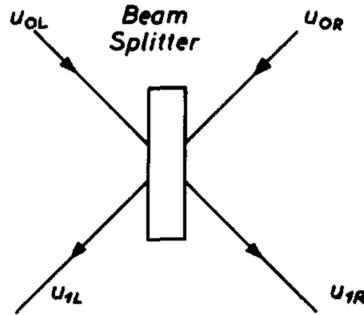


Fig. 1. Beam splitter with two incoming and two outgoing beams.

FIGURE 2.10 – Notations utilisées par Zeilinger (figure issue de [22]).

symétrique (voir [27] page 732).

Nous avons interrogé la firme Thorlabs sur la structure des couches réfléchissantes de notre séparatrice : la seule information qui nous a été donnée est qu'il y a une couche d'argent. J'ai alors généralisé le calcul de Ou et Mandel [23] en prenant en compte les pertes et j'ai trouvé que les relations de phase sont considérablement relaxées. Un article [28] calcule les coefficients de transmission et de réflexion en intensité et en phase, des séparatrices contenant une couche absorbante mais il se limite au cas de séparatrices symétriques.

## 10 Calcul d'un interféromètre donnant des signaux en quadrature

### 10.1 Principe du calcul

L'interféromètre est décrit par le schéma de la figure 2.9. Pour traiter le cas général, on peut choisir l'injection d'une polarisation elliptique quelconque et la détection selon deux polarisations elliptiques. Ceci peut se faire en mettant des lames quart d'onde correctement orientées après le polariseur d'entrée et avant le polariseur de détection. Le champ électrique incident  $\mathbf{E}_{in}$ , monochromatique et totalement polarisé linéairement, est décrit par un vecteur

$$\mathbf{E}_{in} = E_0 \begin{bmatrix} \cos \theta_{in} \\ \sin \theta_{in} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

J'utilise les matrices  $\mathbf{M}$  de Jones [29] pour décrire l'action de chaque élément optique que la propagation du faisceau et ce pour chacun des deux bras  $A$  et  $B$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \prod_{j=1,n} \mathbf{M}_{Ai} \\ \mathbf{M}_B &= \prod_{j=1,m} \mathbf{M}_{Bj} \end{aligned} \quad (2.9)$$

où les matrices  $\mathbf{M}_{Ai}$  et  $\mathbf{M}_{Bj}$  décrivent les divers composants optiques rencontrés dans l'ordre : ces matrices ne commutant pas, il faut bien sûr mettre à droite la matrice correspondant au

premier composant rencontré. Le champ sortant  $\mathbf{E}_{out}$  est donné par

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{out} &= \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B \\ \mathbf{E}_A &= \mathbf{M}_A \mathbf{E}_{inc} \\ \mathbf{E}_B &= \mathbf{M}_B \mathbf{E}_{inc}\end{aligned}\tag{2.10}$$

Ce champ est détecté selon deux polarisations orthogonales séparées par un cube polarisant défini par un angle  $\theta_{out}$ . Pour des raisons pratiques, les polariseurs d'entrée et de sortie peuvent avoir des directions de polarisation imposées par la construction mécanique mais l'usage d'une lame demi-onde après le polariseur d'entrée et juste avant le polariseur de sortie permet de respecter ces contraintes de construction.

Les composantes du champ de sortie dépendent des paramètres ajustables suivants :  $\theta_{in}$ ,  $\theta_{out}$  et les orientations dans leur plan des trois lames quart d'onde, celle d'entrée donnée par l'angle  $\varphi_{in}$  de son axe rapide avec l'axe horizontal  $\mathbf{x}$ , celle de sortie  $\varphi_{out}$  et celle qui est mise dans le bras  $A$ ,  $\varphi_A$ . J'ai envisagé de chercher systématiquement à optimiser par le calcul les signaux mais il y a deux difficultés qui m'ont arrêté :

- il faut d'abord mesurer les matrices de Jones décrivant tous les composants. J'ai fait ces mesures qui sont longues car, pour la séparatrice il y a 4 matrices, une de reflexion et une de transmission par sens de passage. Il faut ensuite les combiner sans faire d'erreur de géométrie. Il me semblerait plus efficace d'avoir une séparatrice vraiment non polarisante et sans perte [26] pour laquelle les résultats de Zeilinger [22] et de Ou et Mandel [23] sont exacts ;
- il faut décider quoi optimiser. Quand le bruit est Poissonien et que l'on se place à mi-frange, la plus petite phase détectable  $\varphi_{min}$  d'un signal interférométrique est donnée par

$$\varphi_{min} \propto \frac{1}{\mathcal{V}_0 \sqrt{\mathcal{I}_0}}\tag{2.11}$$

Bien que l'usage des signaux soit différent, on peut penser qu'il faut ici aussi maximiser le produit  $\mathcal{I}_0 \mathcal{V}_0^2$  pour les deux signaux extraits de l'interféromètre et il faut que les deux signaux soient en quadrature. Optimiser ces trois conditions à la fois nécessite de définir une fonction globale de coût et ce projet n'a pas été mené jusqu'au bout.

## 11 Conclusion

Le but initial de ce chapitre était le développement de sismomètres plus sensibles que ceux décrits dans le chapitre 2. J'ai fait plusieurs développements successifs :

- j'ai commencé par la construction d'un sismomètre utilisant la détection capacitive du mouvement d'un pendule mais l'absence de savoir-faire en ce domaine d'électronique analogique à bas niveau de bruit ne m'a pas permis d'arriver à des résultats intéressants ;
- j'ai construit ensuite un montage utilisant la détection par interférométrie optique, en suivant les techniques développées par l'équipe de Zumberge. Une première construction a donné des résultats encourageants présentés dans ce chapitre ;
- j'ai entrepris de les améliorer par une construction plus soignée et j'ai pu réduire fortement le bruit de vibration ou acoustique. J'ai tenté, comme l'équipe de Zumberge, une optimisation par essai et erreur des signaux en quadrature pour obtenir aussi une bonne intensité et une bonne visibilité pour les deux signaux.
- cette technique pas systématique a donné des résultats décevants. J'ai tenté de la résoudre systématiquement mais le problème est complexe : j'ai appris beaucoup de résultats sur

les propriétés de polarisation des coins de cube et des séparatrices, mais, faute de temps, je n'ai pas pu conclure.

En effet, un autre aspect important d'un sismomètre est le pendule. J'ai travaillé à la théorie des pendules à lame élastique : les résultats ainsi obtenus, puis leurs tests expérimentaux forment le reste de ma thèse. Ils sont décrits dans les chapitres 4 à 7.



# Bibliographie

- [1] E. Wielandt and G. Steckheisen, “The leaf-spring seismometer : design and performance,” Bull. Seism. Soc. Am. **72**, 2349-2367 (1982).
- [2] M.J. Usher, I.W. Bruckner, and R.F. Burch, “A miniature wideband horizontal component feedback seismometers,” J. Phys. E : Sci. Instrum. **10**, 1253-1260 (1977).
- [3] M.J. Usher, C. Guralp, and R.F. Burch, “The design of miniature wideband horizontal component feedback seismometer,” Geophys. J. R. Astr. Soc. **55**, 605-613 (1978).
- [4] <https://moodle2.units.it/.../Seismometry-Cours-WIELANDT.pdf>
- [5] <http://jclahr.com/science/psn/wielandt/node28.html>
- [6] S. Braccini *et al.*, Rev. Sci. Instrum. **66**, 2672-2676 (1995).
- [7] R.V. Jones and J.C.S. Richards, “The design and some applications of sensitive capacitance micrometers,” J. Phys. E : Sci. Instrum. **6**, 589-598 (1973).
- [8] Akito Araya, Keita Kawabe, Toshikazu Sato, Norikatsu Mio, and Kimio Tsubono, “ Highly sensitive wideband seismometer using a laser interferometer,” Rev. Sci. Instrum. **64**, 1337-1341 (1993).
- [9] A. Bertolini, R. DeSalvo, F. Fidecaro, and A. Takamori, IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing **44**, 273-276 (2006).
- [10] M.A. Zumberge, J. Berger, M.A. Dzieciuch, and R.L. Parker, “Resolving quadrature fringes in real time,” Appl. Opt. **43**, 771-755 (2004).
- [11] M.A. Zumberge, J. Berger, J. Otero, and E. Wielandt, “An optical seismometer without force feedback,” Bull. Seism. Soc. Am. **100**, 598-605 (2010).
- [12] C. Rembe, , L. Kadner, and M. Giesen, “Approaching attometer laser vibrometry,”, Rev. Sci. Instrum. **87**, 102503 (2016).
- [13] P. Juncar and J. Pinard, “A new method for frequency calibration and control of a laser”, Opt. Comm. **14**, 438-441 (1975).
- [14] K.W. Raine and M.J. Downs, “Beam-splitter coatings for producing phase quadrature interferometer outputs”, Opt. Acta **25**, 549-558 (1978).
- [15] José D. Otero, “Development and characterization of an observatory-class, broadband, non-feedback, leaf-spring interferometric seismometer,” PhD thesis, UC San Diego Electronic Theses and Dissertations (2009). Permalink : <http://escholarship.org/uc/item/5dj7n7q6>
- [16] Zumberge et al., “Optical seismometer,” US patent 2012/0247213 A1, Publication Date : Oct. 4, 2012.
- [17] Suat Topcua, Luc Chassagne, Yasser Alayli, and Patrick Juncar, “ Improving the accuracy of homodyne Michelson interferometers using polarisation state measurement techniques,” Opt. Comm. **247** 133-139 (2005).

- [18] E.R. Peck, "Theory of a corner-cube interferometer," *J. Opt. Soc. Am.* **38**, 1015-1024 (1948).
- [19] M.V.R.K. Murty, "Some more aspects of the Michelson interferometer with cube corners," *J. Opt. Soc. Am.* **50**, 7-10 (1960).
- [20] E.R. Peck, "Polarization properties of corner reflectors and cavities," *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 253-257 (1962).
- [21] Jian Liu and R. M. A. Azzam, "Polarization properties of corner-cube retroreflectors : theory and experiment," *Appl. Opt.* **36**, 1553-1559 (1997).
- [22] A. Zeilinger, " General properties of losses beam splitters in interferometry," *Am. J. Phys.* **49**, 882-883 (1981).
- [23] Z.Y. Ou and L. Mandel, "Derivation of reciprocity relations for a beam splitter from energy balance," *Am. J. Phys.* **57**, 66-67 (1989).
- [24] K. Smiles Mascarenhas, Comment on "Derivation of reciprocity relations for a beam splitter from energy balance," *Am. J. Phys.* **59**, 1150 (1991).
- [25] R.A. Campos, B.E.A. Saleh, and M.C. Teich, "Quantum-mechanical lossless beam splitter : SU(2) symmetry and photon statistics," *Phys. Rev. A* **40**, 1371-1384 (1989).
- [26] M. Tisch and K. Hendrix, "Optical interference coatings design contest 2007 : triple bandpass filter and nonpolarizing beam splitter," *Appl. Opt.* **47**, C55-C69 (2008).
- [27] R.J. Potton, " Reciprocity in optics," *Rep. Prog. Phys.* **67**, 717-754 (2004).
- [28] J.J. Monzon and L.L. Sanchez-Soto, " Characterization of symmetric absorbing 50-50 beam splitters," *Appl. Opt.* **35**, 106-112 (1996).
- [29] R. Clark Jones, " A New Calculus for the Treatment of Optical Systems I. Description and Discussion of the Calculus," *J. Opt. Soc. Am.* **31**, 488-493 (1941).

## Chapitre 3

# Théorie des pendules à lame élastique

### 1 Introduction

Le pendule utilisant une lame élastique pour sa suspension<sup>1</sup> est d'usage très commun pour les horloges traditionnelles à balancier. En effet, la lame élastique assure une excellente stabilité de la suspension du balancier à long terme. Cependant la période du pendule ainsi formé dépend de l'élasticité de la lame. Dans les horloges, cet effet est petit car les lames choisies sont souples et la période est très peu modifiée. On trouvera de nombreuses informations sur les horloges utilisant un pendule dans le livre de Matthys [1]. La solution qui fait reposer le pendule sur un couteau n'assure pas une stabilité comparable mais la période d'un pendule reposant sur un couteau ne dépend que de la géométrie du pendule et de l'accélération locale de la pesanteur  $g$  : cet arrangement a donc été utilisé pour la mesure de  $g$ . On trouvera l'historique de la mesure de  $g$  dans les références [2, 3].

Mon intérêt pour le rôle d'une lame élastique m'a amené à étudier dans un premier temps le pendule de Holweck-Lejay<sup>2</sup> : il s'agit d'un pendule inversé à lame élastique [5, 6], dans lequel une lame élastique fixée sur un support à son extrémité inférieure porte à son extrémité supérieure une masse dont le poids est presque équilibré par l'élasticité de la lame. La période de ce pendule, qui serait infinie si l'équilibre était exact, est longue, de l'ordre de 6 à 10 s, et une mesure d'une durée de 10 minutes permet une mesure relative de  $g$  avec une erreur relative voisine de  $10^{-6}$ . Cet appareil a donc servi pour la gravimétrie relative c'est à dire pour la mesure des variations de  $g$  en fonction du point à la surface de la Terre. Cette mesure s'est beaucoup développée dans les années 1930, pour la géodésie et aussi pour la prospection minière ou pétrolière. Le pendule de Holweck-Lejay a été rapidement dépassé par des appareils plus sensibles [7, 8]. Actuellement, un des appareils les plus répandus est le gravimètre relatif de Lacoste-Romberg [9, 10], qui atteint une sensibilité voisine de  $10^{-9}g$ .

Le montage du pendule de Holweck-Lejay m'intéressait car les sismomètres doivent avoir une longue période pour être très sensibles [11] et le pendule inversé à lame élastique est une solution mécaniquement très simple pour construire un pendule compact de longue période. N'ayant

1. La suspension est la pièce qui permet l'accrochage et l'articulation du balancier. D'après des informations trouvées sur le web, les premières suspensions étaient réalisées en boyaux ou en crin de cheval. On utilisa ensuite le fil de soie, avant d'adopter définitivement au cours du XIXe siècle les suspensions métalliques.

2. On trouvera une biographie de F. Holweck dans [4] : son nom est connu par le prix qui porte son nom mais sa biographie, très riche, ne l'est pas.

trouvé aucun article qui fasse la théorie complète du pendule à lame élastique, j'ai développé cette théorie d'abord dans le cas du pendule de Holweck-Lejay. Une recherche bibliographique a montré que ce pendule est peu connu en dehors de France et j'ai donc décidé d'écrire un article sur le calcul du pendule non inversé à lame élastique. Durant cette rédaction, j'ai trouvé que le calcul du pendule suspendu par une lame élastique a été publié en 1922 par Le Rolland [12]. Notre article “ A more accurate theory of a flexible-beam pendulum ” [13] traite des aspects très différents de ceux abordés dans cette publication et il insiste en particulier sur un point intéressant, qui est l'existence de deux résonances correspondant à des déformations différentes de la lame élastique.

Le plan de ce chapitre est le suivant : après la reproduction de notre article, je signale une erreur que j'ai trouvée dans une de ses équations (un erratum sera prochainement envoyé à la revue qui l'a publié). Je montre ensuite que les fréquences des deux résonances présentent un croisement évité quand on varie les paramètres du système. Je décris rapidement les performances des meilleures horloges utilisant une suspension à lame élastique. Je présente ensuite le pendule d'Holweck-Lejay et le calcul de ses fréquences de résonance. Une brève conclusion termine ce chapitre.

## 2 Reproduction de l'article “ A more accurate theory of a flexible-beam pendulum ”

# A more accurate theory of a flexible-beam pendulum

Gilles Dolfo<sup>a)</sup> and Jacques Vigué

*Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité-IRSAMC, Université de Toulouse-UPS and CNRS UMR 5589  
118, Route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France*

(Received 4 March 2013; accepted 15 January 2015)

A pendulum suspended by a flexible beam made of a thin metal strip is commonly used in clocks. However, the usual theory describing its motion is approximate and incomplete. We first recall that simple theory and we then present a more complete theory, which describes the shape of the flexible beam by elasticity theory. We find that the pendulum has two resonant frequencies, corresponding to different shapes of the flexible beam and different motions of the pendulum. The dynamical effects of the flexible beam are directly related to its dimensions and its Young's modulus. © 2015 American Association of Physics Teachers.

[<http://dx.doi.org/10.1119/1.4906791>]

## I. INTRODUCTION

Since the work of Galileo Galilei,<sup>1</sup> the pendulum has played an important role in physics.<sup>2,3</sup> There are many reasons for this importance: the pendulum is a quasi-harmonic oscillator; it is easy to build a pendulum with a large quality factor  $Q$  (i.e., with a very sharp resonance); and the theoretical analysis of pendulum motion can involve many degrees of refinement.<sup>4</sup> Hundreds of papers with the word “pendulum” in their titles have been published in journals devoted to the teaching of physics.

However, amongst this vast literature, we have not found a complete theory of the pendulum suspended by a flexible beam. In this paper, we therefore present a simplified theory of such a pendulum in Sec. II. Then, in Sec. III, we develop a more complete theory in which the shape of the flexible beam is described by elasticity theory. After our analysis was completed, we found that a similar study had been published by Le Rolland<sup>5</sup> in 1923. As access to this old paper is not easy, we have nevertheless decided to present this theory.

The interest in this type of pendulum is due to the fact that such a suspension is commonly used in pendulum clocks (see Fig. 1); the pendulum is made of a long rod with a heavy bob attached near its lower end. The flexible “beam” consists of a thin metal strip, which is clamped at both ends, the lower end in the top of the rod and the upper end in a stable frame. The flexible beam is called a “spring” by clock makers and we will use this term throughout this paper. It is usually difficult to see the spring of a clock because it is hidden by the mechanism, but the interested reader will find many images of clock suspension springs on the Web. The springs are made of an elastic metal like spring steel or Elinvar/NispanC, a metal with a Young's modulus almost independent of temperature.<sup>6</sup> For more details, we refer the reader to the book of Matthys.<sup>7</sup> In our calculations, we will assume that this spring can only flex and that it cannot stretch.

The theory described in Sec. III predicts two resonances, while the simplified theory predicts only one. There is a low-frequency resonance associated with the usual pendular motion and a high-frequency resonance with a rolling motion.

Finally, in Sec. IV, we compare the present results to related works by Hughes<sup>8</sup> and by Gleiser.<sup>9</sup> Hughes predicted (theoretically) and verified (experimentally) the double resonance characteristics for a pendulum made of a sphere

suspended by an infinitely soft string. He explained this result as a particular case of a double pendulum. Gleiser used a variational formalism to describe a pendulum with arbitrary elastic properties and mass distribution. His results differ from ours due to a failure in his variational calculation.

## II. SIMPLE THEORY OF A PENDULUM WITH A SPRING

Figure 1 shows a schematic drawing of the pendulum and defines our notation. The spring mass is usually considerably smaller than the pendulum mass so it is a good approximation to neglect the inertia of the spring. We will do so in all our calculations.

The pendulum oscillates in the  $xy$ -plane and its position is measured by the angle  $\theta$  between the vertical and the line

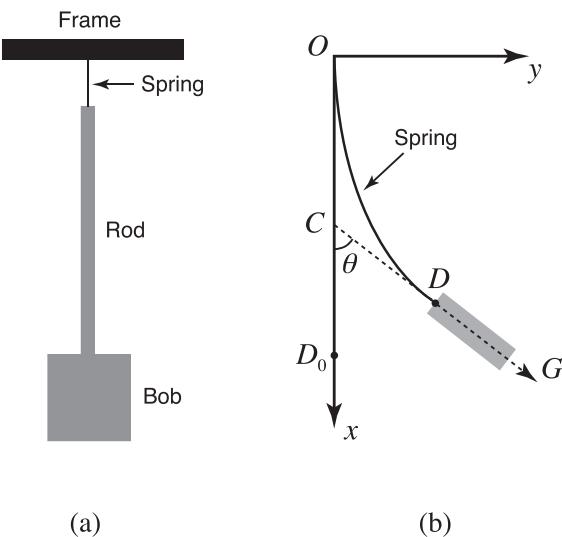


Fig. 1. (a) Schematic drawing of the pendulum with the spring clamped in the frame and at the top of the rod, which carries the pendulum bob. (b) Enlarged drawing of the spring oscillating in the  $xy$ -plane. The spring is clamped at  $O$  and at  $D$ , with  $D_0$  being the position of  $D$  when the pendulum is at equilibrium. In the case of small oscillations, the shape of the spring (the curve  $OD$ ) is assumed to be a part of a circle and  $C$  is at the midpoint of  $OD_0$ . The angle  $\theta$ , which is assumed to be small in our calculations, has been magnified for clarity. The center-of-mass of the pendulum body is at  $G$  (far from  $D$  on the scale of the diagram).

segment  $DG$ . If the spring length  $l$  is small enough, it is reasonable to assume that the spring radius of curvature  $R$  is uniform. Then curve  $OD$  is a circular arc and the angle  $\theta$  satisfies  $l = R\theta$ . The line  $DG$ , which is tangent to the circle at  $D$ , intersects the  $x$ -axis at  $C$ . Using elementary geometry, we find the coordinate  $x_C$  of  $C$ :

$$x_C = l \frac{1 - \cos \theta}{\theta \sin \theta} \approx \frac{l}{2} \left[ 1 + \frac{\theta^2}{12} \right]. \quad (1)$$

At first order in  $\theta$ , the point  $C$  is fixed at the midpoint of the spring when the spring is at equilibrium. For small oscillations, the pendulum motion is a rotation around point  $C$ . The elastic torque is equal to  $-K\theta$ , to first order in  $\theta$ , where  $K$  is the spring stiffness. The torque exerted by gravity is  $-Mg(h + l/2) \sin \theta \approx -Mg(h + l/2)\theta$ , where  $M$  is the pendulum mass,  $g$  is the local gravitational field strength, and  $h$  is the length of  $DG$ , so that  $CG = h + (l/2)$  (see Fig. 1). The equation of motion is

$$I_C \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx - \left[ Mg \left( h + \frac{l}{2} \right) + K \right] \theta, \quad (2)$$

where  $I_C$  is the pendulum moment of inertia calculated for rotation around point  $C$ . By Huygens's theorem (i.e., the parallel-axis theorem), we have  $I_C = M[(h + l/2)^2 + \rho^2]$ , where  $\rho$  is the gyration radius of the pendulum body. The motion is therefore harmonic with the angular frequency

$$\Omega = \sqrt{\frac{g(h + l/2) + K/M}{(h + l/2)^2 + \rho^2}}. \quad (3)$$

If the elastic torque is negligible with respect to the gravitational torque, i.e., if  $K/M \ll g(h + l/2)$ , then the angular frequency  $\Omega$  given by Eq. (3) is the usual formula for a gravity pendulum. When the elastic torque is not negligible,  $\Omega$  increases with the stiffness  $K$ .

However, this theory is not satisfactory for two reasons:

- the range of validity of the assumption describing the spring shape as a circular arc is unknown;
- the spring stiffness  $K$  has been introduced without any information on its value. In order to fully describe the pendulum, it is necessary to relate  $K$  to the spring dimensions and to the Young's modulus of its material.

### III. A MORE COMPLETE THEORY OF A PENDULUM WITH A SPRING

In elasticity theory, the spring is described as a flexible beam, with its shape given by the Euler-Bernoulli equation. The equation derived in many textbooks<sup>10</sup> uses an equilibrium theory, which neglects spring inertia. This approximation should be very good because the spring is considerably lighter than the pendulum; the theory's validity can be judged afterwards by verifying that the pendulum resonance frequencies are considerably smaller than those of the spring. The calculation of these resonance frequencies is similar to the calculation of those of piano strings (see, for instance, Ref. 11 and references therein). Throughout the present calculation, we will use a first-order approximation in the oscillation amplitude. Our calculation involves two steps:

- first, we calculate the shape of the spring, assuming that the force and the torque exerted by the pendulum on the spring are known;
- second, we use these results in the equations of motion of the pendulum and we obtain two coupled linear differential equations.

#### A. First step: Calculation of the spring shape via the Euler-Bernoulli equation

As shown in Fig. 2, the spring bends in the  $xy$ -plane. The Euler-Bernoulli equation relates the radius of curvature  $R$  of the spring at any point  $N$  to the  $z$ -component of the torque  $\tau_z(N)$  exerted on the spring at this point:

$$\tau_z(N) = \frac{\mu}{R}, \quad (4)$$

with

$$\mu \equiv EI_s. \quad (5)$$

Here  $E$  is the Young's modulus of the spring material and  $I_s$  is the second moment of the area of its cross section. When the spring is at its equilibrium position along the  $x$ -axis,  $I_s$  is given by  $I_s = \int \int y^2 dy dz$ , with the integration extending over the spring cross section centered at  $y = 0$ , the  $z$ -direction being perpendicular to the  $xy$ -plane. For a rectangular section of width  $c$  in the  $xy$ -plane and length  $d$  along  $z$ ,  $I_s = c^3 d/12$ . Only the  $z$ -component of the torque  $\tau_z(N)$  is nonzero, because of our assumption of motion in the  $xy$ -plane.

We can express the torque  $\tau_z(N)$  as a function of the force components  $X$  and  $Y$  and of the  $z$  component  $\tau_z(D)$  of the torque exerted by the pendulum on the spring at  $D$ :

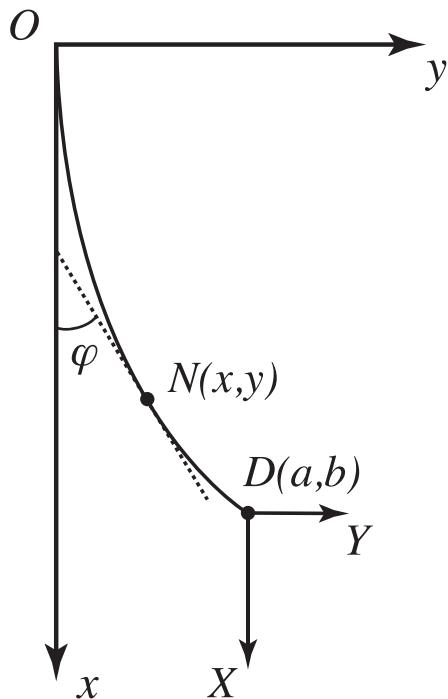


Fig. 2. Schematic of the spring that defines the notation used to analyze the spring shape. The point  $N$  (coordinates  $x, y$ ) lies on the spring and the tangent to the spring at  $N$  makes an angle  $\varphi$  with the  $x$ -axis. The spring is clamped in the pendulum rod at  $D$  (coordinates  $a, b$ ). The force exerted by the pendulum on the spring at  $D$  has components  $X$  and  $Y$ .

$$\tau_z(N) = (a - x)Y - (b - y)X + \tau_z(D), \quad (6)$$

where  $(a, b)$  and  $(x, y)$  are the coordinates of points  $D$  and  $N$ , respectively. The fact that the  $X$  and  $Y$  force components are independent of the location of point  $N$  along the spring is a consequence of our approximation of neglecting the spring inertia.

We are going to calculate the shape of the spring, described by the function  $y(x)$ . We introduce the arc length  $s$  of the curve  $ON$ , with  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , and the angle  $\varphi$  between the tangent to this curve at  $N$  and the  $x$ -axis, with  $dx/ds = \cos \varphi$  and  $dy/ds = \sin \varphi$ . With these definitions, the radius of curvature  $R$  is given by  $1/R = d\varphi/ds$ , and Eqs. (4) and (6) then give

$$\mu \frac{d\varphi}{ds} = (a - x)Y - (b - y)X + \tau_z(D). \quad (7)$$

We differentiate Eq. (7) with respect to  $s$  in order to obtain an equation involving only the function  $\varphi(s)$ :

$$\mu \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -Y \cos \varphi + X \sin \varphi. \quad (8)$$

This differential equation is difficult to solve, so we simplify it by expanding the right-hand side in powers of  $\varphi$ , retaining only the first-order terms, giving a good approximation for small oscillations:

$$\mu \frac{d^2\varphi}{ds^2} \approx -Y + X\varphi. \quad (9)$$

We will show below that  $X = Mg$  so that  $X$  is positive. In this case, the solutions of Eq. (9) involve hyperbolic functions:

$$\varphi(s) = \frac{Y}{X} + P \cosh(\kappa s) + Q \sinh(\kappa s), \quad (10)$$

where  $\kappa^2 \equiv X/\mu$ . Here,  $P$  and  $Q$  are integration constants, which must be deduced from the conditions at the two ends: at  $O$ , where  $s = 0$  and  $\varphi = 0$ , and at  $D$ , where  $s = l$  and  $\mu d\varphi/ds = \tau_z(D)$ . These initial conditions lead to

$$\begin{aligned} P &= -\frac{Y}{X}, \\ Q &= \frac{\tau_z(D)}{\mu \kappa \cosh \chi} + \frac{Y}{X} \tanh \chi, \end{aligned} \quad (11)$$

where  $\chi \equiv \kappa l$  is dimensionless.

Equation (10) gives the spring shape in an implicit form  $\varphi(s)$ . To get an explicit form, we must integrate the equations  $dx/ds = \cos \varphi$  and  $dy/ds = \sin \varphi$ . As in Eq. (9), we use a first-order expansion in  $\varphi$  to get  $dx \approx ds$  and  $dy \approx \varphi ds$ . As  $s = 0$  at  $O$  (where  $x = 0$ ), integration of the first expression gives  $x = s$ . Integration of the second expression then gives

$$y(s) = y(x) = \frac{1}{\kappa} [P(\kappa x - \sinh(\kappa x)) + Q(\cosh(\kappa x) - 1)], \quad (12)$$

where we have taken into account that  $y = 0$  when  $x = 0$ . The spring shape is a function of  $\chi = \kappa l$  and the ratio  $P/Q$ . If  $\chi \ll 1$  and if  $P/Q$  is not too large, a second-order expansion of Eq. (12) in powers of  $\kappa x$  is a good approximation and we find  $y \approx Q\kappa x^2/2$ , corresponding to a constant radius of

curvature. This is the case where the approximation used in Sec. II is valid. When  $\chi \gg 1$ , the shape is more complex and varies with the ratio  $P/Q$  (two examples of the calculated shape are shown in Sec. IV D).

A similar calculation of the spring shape has been performed by James<sup>12</sup> in order to evaluate the stress on the suspension spring and a corrected version of this calculation is reproduced in the book by Matthys.<sup>7</sup> This is a question of great practical interest for clock makers because too large a stress limits the lifetime of the spring.

To study the pendulum dynamics, we need the angle  $\theta = \varphi(l)$  and the coordinates  $a$  and  $b$  of point  $D$ . We express these three variables as functions of the force components  $X$  and  $Y$  and of the torque  $\tau_z(D)$ . We then substitute  $P$  and  $Q$  given by Eqs. (11) into Eqs. (10) and (12) to get

$$\begin{aligned} \theta &= A \frac{Y}{X} + B \frac{l\tau_z(D)}{\mu}, \\ a &= l, \\ b &= \frac{Y}{X} [1 - B] + A \frac{\tau_z(D)}{X}, \end{aligned} \quad (13)$$

where  $A \equiv 1 - (1/\cosh \chi)$  and  $B \equiv \tanh(\chi)/\chi$  are dimensionless quantities.

## B. Second step: Dynamics of the pendulum

Let  $x_G$  and  $y_G$  be the coordinates of the pendulum center-of-mass  $G$ . Newton's equations then give

$$M \frac{d^2x_G}{dt^2} = -X + Mg, \quad (14)$$

$$M \frac{d^2y_G}{dt^2} = -Y, \quad (15)$$

$$M \rho^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\tau_z(D) + h(Y \cos \theta - X \sin \theta). \quad (16)$$

Next we express  $x_G$  and  $y_G$  as functions of  $\theta$ ,  $a$ , and  $b$ :

$$\begin{aligned} x_G &= a + h \cos \theta \approx a + h, \\ y_G &= b + h \sin \theta \approx b + h\theta, \end{aligned} \quad (17)$$

where the approximate values retain only first-order terms in  $\theta$ . We then rewrite Eqs. (14)–(16) in terms of  $a$ ,  $b$ , and  $\theta$ . Because  $x_G$  is constant, Eq. (14) becomes simply  $X = Mg$ , and from this we deduce that

$$\kappa = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{EI_s}}. \quad (18)$$

We now have two equations relating the force component  $Y$  and the torque component  $\tau_z(D)$  to  $b$  and  $\theta$ , and two differential equations in  $b$  and  $\theta$ :

$$\begin{aligned} AY + B\kappa^2 l\tau_z(D) &= Mg\theta, \\ [1 - B]lY + A\tau_z(D) &= Mgb, \\ M \frac{d^2b}{dt^2} + Mh \frac{d^2\theta}{dt^2} + Y &= 0, \\ M(\rho^2 + h^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mh \left[ \frac{d^2b}{dt^2} + g\theta \right] + \tau_z(D) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

With the last two equations, we can express  $Y$  and  $\tau_z(D)$  as functions of  $d^2b/dt^2$ ,  $\theta$ , and  $d^2\theta/dt^2$ . We introduce these results in the first two equations to get two coupled linear differential equations:

$$\begin{aligned} \frac{d^2b}{dt^2} \left( A + B\chi^2 \frac{h}{l} \right) + \frac{d^2\theta}{dt^2} \left( Ah + B\chi^2 \frac{\rho^2 + h^2}{l} \right) \\ + \left( 1 + B\chi^2 \frac{h}{l} \right) g\theta = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2b}{dt^2} [(1-B)l + Ah] + \frac{d^2\theta}{dt^2} [(1-B)hl + A(\rho^2 + h^2)] \\ + g(b + Ah\theta) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

There are many equivalent techniques for solving these equations. We are looking for harmonic solutions with some angular frequency  $\Omega$ , so we note that  $b$  and  $\theta$  are both then proportional to  $\exp(i\Omega t)$  and we replace  $d^2/dt^2$  by  $-\Omega^2$ . The consistency of these two homogeneous equations then gives an equation for  $\Omega$ :

$$U \left( \frac{\Omega^2 l}{g} \right)^2 - V \left( \frac{\Omega^2 l}{g} \right) + W = 0, \quad (22)$$

where

$$\begin{aligned} U &\equiv \rho^2 \left[ 1 - \frac{2 \tanh(\chi/2)}{\chi} \right], \\ V &\equiv h^2 + hl + l^2 \left( \frac{1}{\chi \tanh \chi} - \frac{1}{\chi^2} \right) + \rho^2, \\ W &\equiv lh + \frac{l^2}{\chi \tanh \chi}. \end{aligned} \quad (23)$$

We use a dimensionless frequency  $\Omega^2 l/g$  so that the constants  $U$ ,  $V$ , and  $W$  have the same dimension. For each resonance, the associated eigenvector gives the relative amplitudes of  $b$  and  $\theta$ . We define a length  $\lambda \equiv b/\theta$  and we deduce  $\lambda$  from Eq. (20):

$$\lambda = \frac{(l + B\chi^2 h)g - [Ahl + B\chi^2(\rho^2 + h^2)]\Omega^2}{(Al + B\chi^2 h)\Omega^2}. \quad (24)$$

In all cases, the pendulum motion is a rotation around a point of the  $y$ -axis, and  $(l - \lambda)$  measures the distance of the rotation axis from the origin  $O$ .

#### IV. DISCUSSION OF THE RESULTS

We consider two limiting cases:  $\chi \lesssim 1$  and  $\chi \gg 1$ . We recall that the quantity  $\chi$  is dimensionless and given by  $\chi = kl$ , with  $\kappa = \sqrt{Mg/(EI_s)}$  (for a clock, a typical  $\chi$  value is  $\chi = 2.1$  and, in this case, the spring has only a small effect on the clock frequency). We illustrate our results by considering a typical clock pendulum with a pendulum length  $h \approx 1$  m, a radius of gyration  $\rho \approx 5$  cm, and a spring length  $l \approx 1$  cm, so that  $l \ll \rho \ll h$ , and we give approximate formulae valid in this case.

#### A. Approximate solutions of Eq. (22)

The roots of Eq. (22) are

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{g}{l} \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 4UW}}{2U}}. \quad (25)$$

These expressions are useful if one wants to calculate the values of  $\Omega$ , but the dependence of  $\Omega$  with the various parameters is not clear. When  $\rho$  is small,  $U$  is also small, and an expansion of the lowest root of Eq. (22) in powers of  $U$  is useful. We define  $\Omega_i$  as the order- $i$  approximation of the low-frequency root. Then

$$\begin{aligned} \Omega_0 &\approx \sqrt{\frac{g}{l} \frac{W}{V}}, \\ \Omega_1 &\approx \Omega_0 \left( 1 + \frac{UW}{2V^2} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

and the high-frequency root is approximately given by

$$\Omega' = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{V}{U}}. \quad (27)$$

#### B. The short-spring case: $\chi \lesssim 1$

For  $\chi \lesssim 1$ , we expand  $U$ ,  $V$ , and  $W$  in powers of  $\chi$ , which gives  $U \approx \rho^2 \chi^2 / 12$ ,  $V \approx h^2 + hl + \rho^2 + l^2/3$ , and  $W \approx lh + l^2/\chi^2$ . Then  $\Omega_0$  is approximately

$$\Omega_0 \approx \sqrt{\frac{g(h + l/\chi^2)}{h^2 + hl + \rho^2 + l^2/3}}, \quad (28)$$

and the first-order correction term  $UW/2V^2$  is very small for the typical clock pendulum values. Equation (28) is similar to the approximate result given by Eq. (3) with  $l^2/4$  replaced by  $l^2/3$ ; we have no explanation of this small difference but one must not forget that both results are approximate. We are now able to complete the approximate theory of Sec. II by expressing the spring stiffness as  $K = -\tau(D)/\theta$ . We use Eq. (13) and, because  $\chi \ll 1$ , we get  $A \approx 0$ ,  $B \approx 1$ . The spring stiffness is equal to

$$K \approx \frac{\mu}{l} = \frac{EI_s}{l}. \quad (29)$$

The high-frequency root  $\Omega'$  is given by

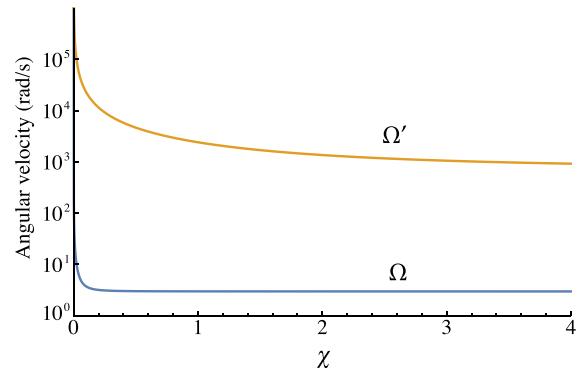


Fig. 3. The values of the low- and high-frequency roots  $\Omega$  and  $\Omega'$  of Eq. (22) are plotted as functions of  $\chi$  for a typical clock pendulum ( $h \approx 1$  m,  $\rho \approx 5$  cm, and  $l \approx 1$  cm). A typical  $\chi$  value for clocks is close to 2, for which  $\Omega$  is larger by only about 0.2% compared to if  $\chi$  were very large.

$$\Omega' \approx \sqrt{12 \frac{g}{l} \left( \frac{h^2 + \rho^2 + hl + l^2/3}{\rho^2 \chi^2} \right)}. \quad (30)$$

The ratio  $\Omega'/\Omega \approx \sqrt{12h^3/\chi^2\rho^2l}$  is usually very large; with the typical clock pendulum values,  $\Omega'/\Omega \approx 700/\chi$  (see Fig. 3).

### C. The long-spring case: $\chi \gg 1$

When  $\chi \gg 1$ , the functions  $\tanh(\chi/2)$  and  $\tanh(\chi)$  both tend to 1, and the expansions of  $U$ ,  $V$ , and  $W$  up to the first nonzero terms in  $1/\chi$  are given by  $U \approx \rho^2[1 - (2/\chi)]$ ,  $V \approx h^2 + hl + \rho^2 + l^2/\chi$ , and  $W \approx hl + l^2/\chi$ . With the typical  $h$ ,  $\rho$ , and  $l$  values of a clock pendulum, the spring  $\chi$  value has very small effects on  $U$ ,  $V$ , and  $W$  and on the angular frequencies of the two resonances. The low-frequency solution is

$$\Omega_0 \approx \sqrt{\frac{g(h + l/\chi)}{h^2 + hl + \rho^2 + l^2/\chi}}. \quad (31)$$

The first-order correction term is very small,  $UW/2V^2 \ll 1$ . The high-frequency root is

$$\Omega' \approx \sqrt{\frac{g}{l} \left[ \frac{h^2 + hl + \rho^2 + l^2/\chi}{\rho^2(1 - 2/\chi)} \right]} \approx \sqrt{\frac{gh^2}{l\rho^2}}. \quad (32)$$

The ratio  $\Omega'/\Omega \approx \sqrt{h^3/(\rho^2l)}$  is very large:  $\Omega'/\Omega \approx 200$  with the typical  $l$ ,  $h$ , and  $\rho$  values; the high-frequency oscillation is usually difficult to observe.

We note that it is possible to considerably reduce the  $\Omega'/\Omega$  ratio by a careful choice of the values of  $l$ ,  $h$ , and  $\rho$ . The  $\Omega'/\Omega$  ratio is lowest when the ratio  $4UW/V^2$  is maximum. Moreover, as we assume  $\chi \gg 1$ , we may neglect the  $\chi^{-1}$  terms and then  $4UW/V^2$  is a function solely of  $l$ ,  $h$ , and  $\rho$ . Rather than attempting a global optimization, we consider only the realistic case of a pendulum with a body made of a small-diameter bar of length  $2h$ . Then  $\rho^2 \approx h^2/3$ , and the maximum of  $4UW/V^2$ , obtained for  $l = 4h/3$ , is equal to  $4UW/V^2 = 1/4$ , which leads to a ratio  $\Omega'/\Omega \approx 3.7$ . With such a low value of this ratio, the high-frequency motion should be easy to observe. We have recently built such a pendulum and we have measured the frequencies of the two resonances as a function of the length  $l$ , with preliminary results in satisfactory agreement with the present theory.

### D. The spring shape

Equation (24) suggests that  $\lambda$  is positive for the low-frequency resonance and negative for the high-frequency resonance. We have numerically verified this property over a wide range of parameters. The spring shape for the two motions is shown for a particular case in Fig. 4.

### E. Comparison to previous results

We now discuss the papers of Hughes<sup>8</sup> and of Gleiser,<sup>9</sup> which are connected to our work.

Hughes<sup>8</sup> considered a pendulum made of a sphere suspended by an infinitely soft string. He found two resonances: one for the usual pendular motion and one for a rolling motion in which the sphere oscillates about an axis very near its center. For a soft string, the quantity  $\mu = EI_s$  goes to zero,

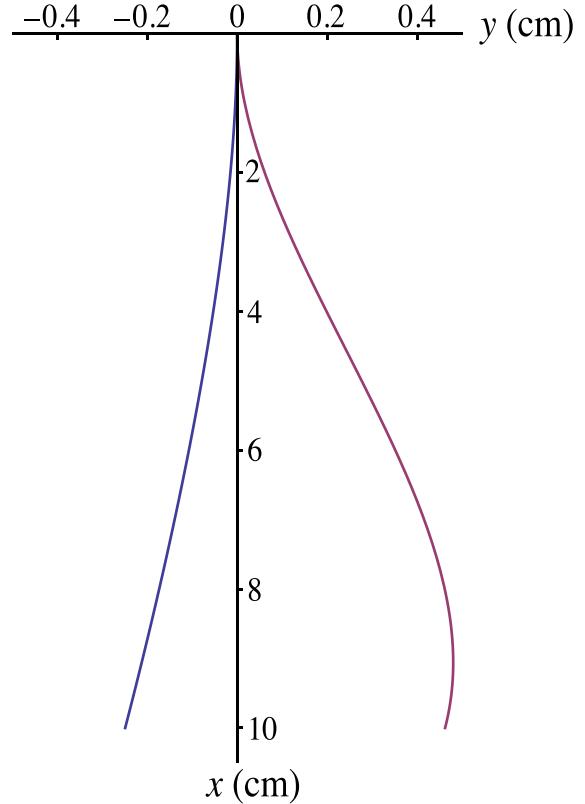


Fig. 4. Spring shape for the low-frequency resonance ( $\Omega = 60$  rad/s) on the left and the high-frequency resonance ( $\Omega' = 3800$  rad/s) on the right. The calculation is carried out using  $\chi = 2.1$ ,  $l = 10$  cm,  $h = 10$  cm, and  $\rho = 5$  cm.

so that  $\kappa = \sqrt{Mg/\mu}$  and  $\chi = \kappa l$  both tend toward infinity. We have verified that, in the limit  $\chi \rightarrow \infty$ , Eq. (22) is equivalent to Eq. (5) of Hughes.<sup>8</sup>

Gleiser<sup>9</sup> used a variational formalism to describe a pendulum with arbitrary elastic properties and mass distribution. He found that the value of the angular frequency is independent of the flexural rigidity at first order in this quantity, denoted as  $\kappa$  in his paper and equal to our  $\mu$ . This surprising result can be easily explained. When  $\mu$  tends to 0,  $\chi \rightarrow \infty$  and the coefficients  $U$ ,  $V$ , and  $W$  of Eq. (22) are of the form  $C + D\chi^{-1}$ , where  $C$  and  $D$  are constants. The low-frequency root  $\Omega$  has a similar form  $(C' + D'\chi^{-1})$  and, as  $\chi \propto 1/\sqrt{\mu}$ ,  $\Omega = C' + D''\sqrt{\mu}$ . This non-analytic behavior of  $\Omega$  as a function of  $\mu$  is sufficient to explain the failure of a simple variational calculation. We may even remark that the variational solution used by Gleiser to describe the shape of the spring is a straight line, from point  $O$  to point  $D$  in our notation. This form is correct if  $\mu = 0$ , but for any nonzero value of  $\mu$ , the real shape of the spring must be tangent to the vertical axis at  $O$ , a property not verified by his test solution.

We have calculated the shape of the spring for the pendular motion in the limit of a soft spring ( $\chi \gg 1$ ), and get

$$\varphi = \theta(1 - e^{-\kappa x}), \quad (33)$$

$$y(x) = \theta \left( x - \frac{1 - e^{-\kappa x}}{\kappa} \right). \quad (34)$$

Equation (33) shows that the angle  $\varphi$  between the tangent to the spring and the  $x$ -axis varies from 0 to its terminal value  $\theta$  over a distance comparable to  $\kappa^{-1}$ . This means that the

curvature of the spring is localized near the origin  $O$ , within a distance that goes to 0 as  $\sqrt{\mu}$ .

## V. CONCLUSION

In this paper, we have given a more complete treatment of a pendulum suspended by a spring. The spring shape is described by the Euler-Bernoulli equation, and our treatment is rigorous in the limit of small oscillations. Our calculation predicts two resonances, one corresponding to the pendular motion at low frequency and the other to a rolling motion at high frequency. This result can be understood as a particular case of a double pendulum, as already discussed by Hughes,<sup>8</sup> where the spring is replaced by an infinitely soft string.

We have considered mainly the case of a typical clock pendulum, where the suspension spring only slightly modifies the angular frequency of the low-frequency resonance associated to the usual pendular motion. The high-frequency resonance occurs in that case at a considerably larger frequency, so it is not easily observed. However, we have shown that with a careful choice of the pendulum dimensions, the ratio of these two frequencies can be considerably reduced, and we have verified experimentally that both frequencies can then be easily observed.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank CNRS INP, ANR (Grant Nos. ANR-05-BLAN-0094 and ANR-11-BS04-016-01 HIPATI), and Région Midi-Pyrénées for supporting our research. The

authors thank Matthias Büchner and Alexandre Gauguet for fruitful discussions and Mina Bionta for a careful reading of the manuscript.

<sup>a</sup>Electronic mail: gilles.dolfo@irsamc.ups-tlse.fr

<sup>1</sup>S. Drake, “Galileo’s physical measurements,” *Am. J. Phys.* **54**, 302–306 (1986).

<sup>2</sup>G. L. Baker and J. A. Blackburn, *The Pendulum: A Case Study in Physics* (Oxford U.P., New York, 2005).

<sup>3</sup>*The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspectives*, edited by M. R. Matthews, C. F. Gauld, and A. Stinner (Springer, Dordrecht, 2005).

<sup>4</sup>R. A. Nelson and M. G. Olsson, “The pendulum—Rich physics from a simple system,” *Am. J. Phys.* **54**, 112–121 (1986).

<sup>5</sup>P. Le Rolland, “Etude de l’oscillation du pendule par la méthode photographique (influence de la suspension),” *Ann. Phys. Paris* **17**, 165–381 (1922).

<sup>6</sup>W. G. Brombacher, “Temperature coefficient of the elastic moduli of spring materials used in instrument design,” *Rev. Sci. Instrum.* **4**, 688–692 (1933).

<sup>7</sup>R. J. Matthey, *Accurate Clock Pendulums* (Oxford U.P., New York, 2004).

<sup>8</sup>J. V. Hughes, “Possible motions of a sphere suspended on a string (The Simple Pendulum),” *Am. J. Phys.* **21**, 47–50 (1953).

<sup>9</sup>R. J. Gleiser, “Small amplitude oscillations of a quasi-ideal pendulum,” *Am. J. Phys.* **47**, 640–643 (1979).

<sup>10</sup>L. Landau and E. Lifschitz, *Theory of Elasticity*, 3rd ed. (Pergamon, New York, 1986).

<sup>11</sup>H. Fletcher, “Normal vibration frequencies of a stiff piano string,” *J. Acoust. Soc. Am.* **36**, 203–209 (1964).

<sup>12</sup>K. James, “The design of suspension springs for pendulum clocks,” *Timecraft-Clocks & Watches*, 9–11 (June 1983) and 14–15 (August 1983).

### 3 Erratum

J'ai trouvé une erreur de signe dans l'écriture de l'équation (12) de notre article "A more accurate theory of a flexible-beam pendulum". La forme correcte de cette équation est

$$y(s) = y(x) = \frac{1}{\kappa} [P(\sinh(\kappa x) - \kappa x) + Q(\cosh(\kappa x) - 1)] \quad (3.1)$$

Cette erreur ne change rien aux résultats numériques et aux courbes de cet article qui ont été calculées avec l'équation exacte. Un erratum sera prochainement envoyé à l'American Journal of Physics.

### 4 Croisement évité des fréquences des deux résonances

La présence de deux fréquences de résonance et la nature des mouvements associés est expliquée dans notre article. Ces deux fréquences sont très différentes pour les paramètres habituels des horloges. Cependant, il est facile de voir que si le point  $D$  d'accrochage de la lame élastique au corps du pendule se rapproche suffisamment du centre de gravité  $G$  du corps du pendule, la fréquence du mouvement de "rolling motion" décroît pour s'annuler quand la longueur  $DG$  s'annule (voir figure 1 de l'article). Il est donc possible de rendre la fréquence de "rolling motion" plus petite que la fréquence du mouvement pendulaire en réduisant suffisamment la longueur  $DG$ . J'ai exploré ce régime en faisant varier les paramètres du problème et la figure 3.1 ci dessous illustre la dépendance des deux fréquences de résonance du pendule en fonction du paramètre  $\chi$ . Les deux fréquences présentent un croisement évité : c'est une propriété bien connue des oscillateurs couplés et que l'on retrouve aussi dans les énergies des états discrets en mécanique quantique (voir le chapitre 6). L'aspect inhabituel du cas présent est qu'il n'est pas évident de définir le terme de couplage alors que dans le cas habituel des oscillateurs couplés, le couplage est dû, le plus souvent, à un terme d'énergie potentielle élastique.

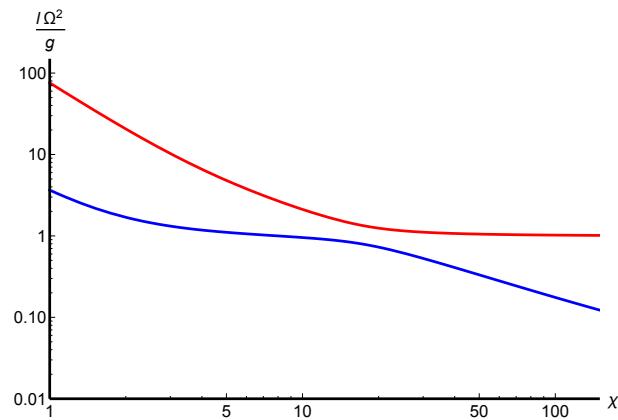


FIGURE 3.1 – Le tracé du carré des pulsations propres (en unité réduite) en fonction de  $\chi$  fait apparaître un croisement évité. Les paramètres, peu commodes à réaliser en pratique, sont ceux d'un pendule avec un fort rayon de gyration ( $\rho = 0.25l$ ) et un centre de gravité pratiquement confondu avec le point de jonction à la lamelle ( $h = 0.001l$ ).

## 5 Application aux horloges

Comme il a été dit dans l'introduction, les horloges à balancier utilisent une suspension par lame élastique. Les performances des meilleures horloges de ce type sont très élevées mais elles sont peu connues car ces horloges ont été développées à un moment où de nouvelles horloges beaucoup plus précises apparaissaient : oscillateurs à quartz vers 1930 et horloges atomiques vers 1960 [14]. Je citerai deux horloges à balancier particulièrement performantes :

- L'horloge de Shortt [1, 15] (figure 3.2) a été construite en 1921 et elle a servi dans les observatoires astronomiques. Elle comporte deux pendules dont l'un, construit en invar (matériau à très faible coefficient de dilatation) et placé dans un récipient étanche sous une pression réduite voisine de 25 millibars, est l'oscillateur qui régule l'horloge et l'autre est asservi en phase sur ce pendule. Le coefficient de qualité de cet oscillateur est voisin de  $1.1 \times 10^5$  alors qu'il n'est que de  $2.5 \times 10^4$  à la pression atmosphérique. L'usage d'un récipient étanche permet d'éliminer les variations de la fréquence du pendule dues aux variations de pression (voir le chapitre 6). Cette horloge avait une excellente stabilité relative de fréquence, meilleure que  $10^{-7}$ , soit quelques secondes par an.



FIGURE 3.2 – Horloge de Shortt exposée à l'observatoire de Greenwich (photo personnelle).

La figure 3 de notre article donne une évaluation de l'augmentation de fréquence de l'horloge de Shortt due à la lame élastique : cet effet est environ égal à 0.2 %. La lame élastique est faite en Elinvar dont le coefficient  $e$  de variation du module de Young [16] est de voisin de  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$  et une stabilité de température de l'ordre de 1 K est donc suffisante

pour assurer une stabilité relative de la fréquence meilleure que  $10^{-7}$ .

La limite essentielle de la stabilité à court terme de la fréquence d'un pendule est la dépendance de sa fréquence avec l'amplitude d'oscillation [17]. Pour un pendule de gravité, un calcul classique donne la période  $T(\theta)$  à l'ordre 2 en fonction de l'amplitude angulaire maximum  $\theta$

$$T(\theta) = T(0) \left( 1 + \frac{\theta^2}{16} \right) \quad (3.2)$$

Le calcul pour un pendule utilisant une suspension par lame élastique n'est pas fait mais, quand la lame est très souple (ce qui est le cas des horloges), cette équation devrait donner un bon ordre de grandeur de l'effet. Les amplitudes  $\theta$  utilisées étant de l'ordre de 20 mrad, il faut assurer une stabilité relative d'environ  $2 \times 10^{-3}$  de l'amplitude  $\theta$  pour atteindre une stabilité de fréquence meilleure que  $10^{-7}$ .

La comparaison de la fréquence de cette horloge avec celle d'un oscillateur à quartz [18] a permis de détecter les effets des marées terrestres qui induisent des oscillations de l'accélération locale de la pesanteur  $g$  d'une amplitude  $\Delta g/g \approx 10^{-7}$  et donc une variation relative de la période  $\Delta T/T \approx 5 \times 10^{-8}$  : cette détection illustre bien les excellentes performances de l'horloge de Shortt.

La limite essentielle de la stabilité de la fréquence d'un pendule à long terme est la stabilité de la longueur du pendule : d'après le livre de Matthys [1], l'invar a une stabilité de longueur de l'ordre de 1 ppm par an, ce qui signifie que le vieillissement du matériau induit une variation relative de période d'environ  $5 \times 10^{-7}$  par an.

- Dans les années 1960, Fedchenko and Fleer [19] ont étudié expérimentalement la période d'un pendule suspendu par une lame élastique en fonction de son amplitude angulaire  $\theta$ . Le résultat de cette étude est que cette dépendance est différente de celle donnée par l'équation (3.2) mais d'importance comparable. Ces auteurs ont développé une nouvelle suspension avec deux lames élastiques de longueurs différentes fixées à des hauteurs différentes sur le support et ils ont ainsi obtenu une période  $T$  pratiquement constante sur une large gamme d'amplitude. Ce système a servi à construire l'horloge AChF3 dont la précision relative [20] est voisine de  $2 - 3 \times 10^{-9}$ . Ces auteurs travaillaient en URSS et leurs publications succinctes ne donnent guère de détails sur l'horloge AChF3.

## 6 Le pendule inversé de Holweck-Lejay

### 6.1 Mesures relatives de la gravité

Les mesures relatives de la gravité [10] utilisent en général la compensation d'une fraction très importante de la gravité par des forces élastiques. L'intérêt pour ce type de mesures s'est développé rapidement autour de 1930, soit pour des applications de géophysique, soit pour des applications de prospection minière ou pétrolière. Le pendule de Holweck-Lejay, qui a atteint une sensibilité  $\delta g/g$  voisine de  $10^{-6}$ , a été rapidement dépassé par des appareils plus sensibles développés à cette époque [8, 7]. Le gravimètre relatif de Lacoste-Romberg [21, 2] atteint actuellement une sensibilité voisine de  $10^{-9}g \approx 10^{-8} \text{ m/s}^2$ . Une sensibilité bien meilleure,  $10^{-11} \text{ m/s}^2$ , est obtenue avec la sustentation magnétique utilisant des supraconducteurs [23] mais les gravimètres supraconducteurs ne sont pas transportables, ce qui en limite fortement l'utilisation.

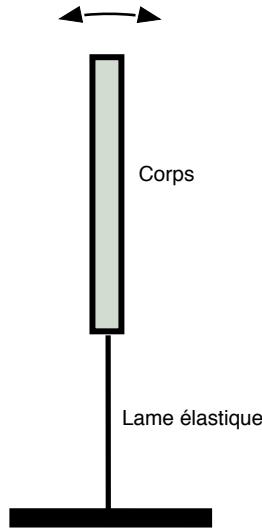


FIGURE 3.3 – Schéma de principe du pendule de Holweck-Lejay.

## 6.2 Le pendule inversé de Holweck-Lejay

Dans la plupart des gravimètres relatifs, la variation de  $g$  est détectée par une mesure statique de déflexion. Ce n'est pas le cas du gravimètre de Holweck-Lejay qui déduit la variation de  $g$  de la modification de la période d'oscillation du pendule inversé. La figure 3.3 expose le principe de ce pendule et la figure 3.4 extraite de l'article [6] en montre une vue. Dans cet article, Holweck et Lejay expliquent comment mesurer la sensibilité du pendule en le faisant osciller avec la masse au dessous du point de fixation (ce qui donne une période  $T'$ ) puis dans le sens inversé (ce qui donne une période  $T$ ). Le calcul de Holweck et Lejay est basé sur l'équation (2) de notre article, qui n'est qu'approximative.

$$\begin{aligned} T' &= 2\pi \sqrt{\frac{I}{K + mga}} \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{I}{K - mga}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

où on a noté  $a = h + (l/2)$  la distance du centre de gravité à l'axe de rotation. Si on combine ces deux résultats, on peut calculer la variation relative  $\delta g/g$  qui a produit une variation de  $\delta T$  de la période.

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{T} &= \frac{\delta g}{2g} \frac{mga}{K - mga} \\ \frac{\delta T}{T} &= \frac{\delta g}{2g} \frac{T^2 - T'^2}{2T'^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

On peut rendre la période  $T$  du pendule inversé beaucoup plus longue que la période  $T'$  en ajustant la position du centre de masse. Dans leur publication [6], Holweck and Lejay donnent des exemples de valeurs mesurées :  $T = 6.345$  s and  $T' = 0.339$  s pour un pendule particulier

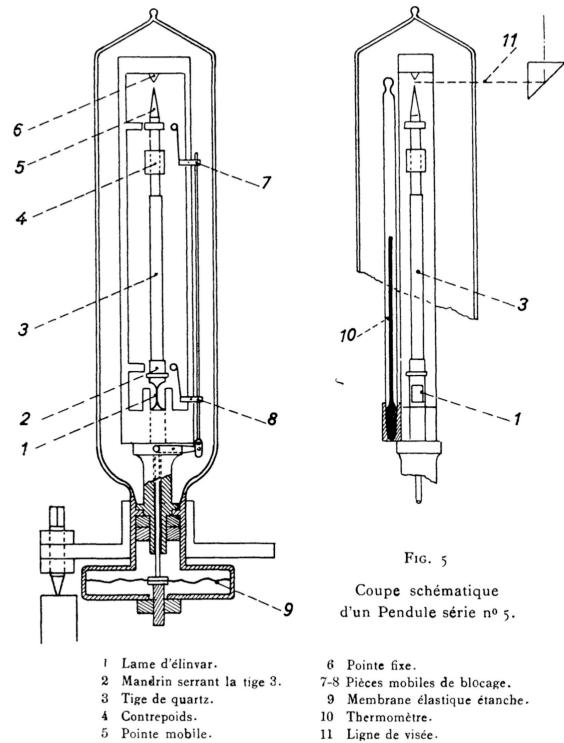


FIGURE 3.4 – Représentation du montage du pendule de Holweck-Lejay (figure 5 de l'article [6]).

à Paris. La sensibilité de ce pendule aux variations de  $g$  est  $\delta T/T = 87\delta g/g$  alors que celle du pendule ordinaire est  $\delta T/T = -0.5\delta g/g$ . Une sensibilité  $\delta g/g \approx 10^{-6}$  était donc obtenue par une mesure de la période avec une précision relative voisine de  $10^{-4}$ , soit la durée d'une centaine de périodes mesurée avec une incertitude de quelques  $10^{-2}$  s.

La limitation principale de ce gravimètre était due à la dépendance de la constante  $K$  de la lame élastique avec la température et aussi à la dépendance de la période du pendule avec l'amplitude. Le premier effet était réduit par l'utilisation d'une lame faite d'un alliage appelé Elinvar dont l'équivalent moderne est le NispanC : la variation relative de la période  $T$  était voisine de  $\approx -5 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

Le pendule de Holweck-Lejay demandait une construction très soignée et pratiquement seuls Holweck and Lejay l'ont utilisé. J'ai cependant trouvé une thèse sur ce pendule qui a été soutenue par A.I. Corpaciu en 1940 à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich [22].

### 6.3 Calcul du pendule inversé de Holweck-Lejay

Ce calcul a été fait avant celui qui est présenté dans notre article et il a une formulation sensiblement différente. La différence essentielle est que, alors que l'intégration de l'équation (9) de notre article utilise des fonctions sinus et cosinus hyperboliques, le changement de signe de la tension fait que l'intégration de l'équation analogue fait intervenir les fonctions sinus et cosinus ordinaires.

Au cours du mouvement du pendule, la lamelle est supposée à chaque instant à l'équilibre et

obéit à l'équation :

$$EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0$$

dont les solutions satisfaisant les conditions aux limites de l'encastrement ( $x(0) = 0$  et  $\frac{\partial x}{\partial z}|_0 = 0$ ) sont de la forme :

$$x(z) = \frac{6\beta \left( z - \frac{\sin(\kappa z)}{\kappa} \right)}{\kappa^2 L^2} - \frac{2\alpha(\cos(\kappa z) - 1)}{\kappa^2 L}$$

avec

$$\kappa^2 = \frac{T}{EI}$$

et

$$T \simeq M \cdot g$$

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , sans dimension, dépendant du temps.

Il est courant dans les ouvrages traitant de résistance des matériaux de trouver des solutions polynomiales de la forme

$$x(z) = \alpha \frac{z^2}{L} + \beta \frac{z^3}{L^2}$$

Ces solutions correspondent au développement limité de  $x(z)$  en  $\kappa = 0$  c'est à dire pour des système extrêmement rigides comme des poutres.

Dans le cas d'une lamelle, il nous faut bien entendu garder la solution exacte qui, appliquée à l'extrémité  $B$  donne :

$$x_B = \frac{6\beta(t) \left( L - \frac{\sin(\kappa L)}{\kappa} \right)}{\kappa^2 L^2} - \frac{2\alpha(t)(\cos(\kappa L) - 1)}{\kappa^2 L}$$

$$\theta_B = \frac{2\alpha(t) \sin(\kappa L)}{\kappa L} + \frac{6\beta(t)(1 - \cos(\kappa L))}{\kappa^2 L^2}$$

La force et le couple sont donnés par :

$$F_B = -EI \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \Big|_{z=L} = -EI \left( \frac{6\beta \cos(\kappa L)}{L^2} - \frac{2\kappa\alpha \sin(\kappa L)}{L} \right)$$

$$\Gamma_B = EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \Big|_{z=L} = EI \left( \frac{2\alpha \cos(\kappa L)}{L} + \frac{6\beta \sin(\kappa L)}{\kappa L^2} \right)$$

Les équations du mouvement du pendule s'écrivent :

$$I \ddot{\theta}_B = -\Gamma_B + F_B BG \quad (3.5)$$

$$M(\ddot{x}_B + BG\ddot{\theta}_B) = -F_B + T\theta_B \quad (3.6)$$

et donnent les équations différentielles en  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$

$$I \ddot{\theta}_B = \left( \frac{2\ddot{\alpha} \sin(\kappa L)}{\kappa L} + \frac{6\ddot{\beta}(1 - \cos(\kappa L))}{\kappa^2 L^2} \right) +$$

$$EIBG \left( \frac{6\beta \cos(\kappa L)}{L^2} - \frac{2\kappa\alpha \sin(\kappa L)}{L} \right) + EI \left( \frac{2\alpha \cos(\kappa L)}{L} + \frac{6\beta \sin(\kappa L)}{\kappa L^2} \right) = 0$$

$$M \left( BG \left( \frac{2\ddot{\alpha} \sin(\kappa L)}{\kappa L} + \frac{6\ddot{\beta}(1 - \cos(\kappa L))}{\kappa^2 L^2} \right) - \frac{2\ddot{\alpha}(\cos(\kappa L) - 1)}{\kappa^2 L} + \frac{6\ddot{\beta} \left( L - \frac{\sin(\kappa L)}{\kappa} \right)}{\kappa^2 L^2} \right) - EI \left( \frac{6\beta \cos(\kappa L)}{L^2} - \frac{2\kappa \alpha \sin(\kappa L)}{L} \right) - gM \left( \frac{2\alpha \sin(\kappa L)}{\kappa L} + \frac{6\beta(1 - \cos(\kappa L))}{\kappa^2 L^2} \right) = 0$$

Ces équations peuvent s'écrire sous forme matricielle

$$M \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} \frac{2Ip \sin(\kappa L)}{\kappa L} & \frac{6Ip}{\kappa^2 L^2} - \frac{6Ip \cos(\kappa L)}{\kappa^2 L^2} \\ -\frac{2 \cos(\kappa L)M}{\kappa^2 L} + \frac{2BG \sin(\kappa L)M}{\kappa L} + \frac{2M}{\kappa^2 L} & -\frac{6BG \cos(\kappa L)M}{\kappa^2 L^2} - \frac{6 \sin(\kappa L)M}{\kappa^3 L^2} + \frac{6M}{\kappa^2 L} + \frac{6BGM}{\kappa^2 L^2} \end{bmatrix}$$

et

$$K = \begin{bmatrix} \frac{2EI \cos(\kappa L)}{L} - \frac{2EIBG \kappa \sin(\kappa L)}{L} & \frac{6EIBG \cos(\kappa L)}{L^2} + \frac{6EI \sin(\kappa L)}{\kappa L^2} \\ 0 & -\frac{6gM}{\kappa^2 L^2} \end{bmatrix}$$

Les carrés des pulsations propres de  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  sont donnés par les valeurs propres de la matrice  $M^{-1} \cdot K$ . On obtient ici :

$$\omega_1^2 = \Omega^2 - \sqrt{\Omega^4 - \frac{EI\kappa^2 Mg(\kappa BG \sin \kappa L - \cos \kappa L)}{MI_p(2(\cos \kappa L - 1) + \kappa L \sin \kappa L)}} \quad (3.7)$$

$$\omega_2^2 = \Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 - \frac{EI\kappa^2 Mg(\kappa BG \sin \kappa L - \cos \kappa L)}{MI_p(2(\cos \kappa L - 1) + \kappa L \sin \kappa L)}} \quad (3.8)$$

avec

$$\Omega^2 = \frac{EI\kappa(M\kappa L \cos \kappa L - I_p \kappa^2 \sin \kappa L - M \sin \kappa L - BG(BG + L)\kappa^2 M \sin \kappa L)}{2MI_p(2(\cos \kappa L - 1) + \kappa L \sin \kappa L)} \quad (3.9)$$

La conséquence intéressante de ce calcul est que, lorsque le centre de gravité du pendule coïncide avec l'extrémité de la lamelle ( $BG = 0$ ), la pulsation propre la plus faible s'annule si  $\kappa L = \pi/2$  : cette annulation signifie que l'équilibre du pendule devient instable et cette instabilité de la lame élastique en compression s'appelle l'instabilité de flambage. La condition trouvée est bien la condition classique de flambage dans ce cas particulier (voir par exemple le problème 3 de la section 21 du livre de Landau et Lifchitz [24]).

## 7 Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai expliqué l'intérêt de comprendre le pendule suspendu ou supporté par une lame élastique. Le cas du pendule suspendu est celui des horloges traditionnelles à balancier

et, dans le cas des horloges astronomiques comme celle de Shortt, la stabilité de fréquence est très élevée. Le cas du pendule inversé supporté par une lame élastique est celui du pendule de Holweck-Lejay, qui a l'intérêt de donner une longue période dans un montage très simple et très compact.

J'ai fait la théorie de ces deux pendules et cette théorie prévoit deux fréquences de résonance correspondant à deux formes différentes de la lame élastique.

- l'article correspondant au cas du pendule suspendu a été publié : dans cet article j'ai exploré les dépendances des deux fréquences avec les paramètres du problème. En plus de ce qui a été publié, j'ai montré que les deux fréquences de résonance présentent un croisement évité et j'ai donné une explication physique de cet effet.
- le cas du pendule de Holweck-Lejay a été calculé mais j'ai moins exploré toutes les conséquences de ce calcul.

Le chapitre 5 de cette thèse décrira en particulier un test expérimental des fréquences du pendule suspendu par une lame élastique et ce test inclut aussi une mesure des fréquences de résonance de la lame élastique : ces fréquences doivent être très élevées devant les fréquences de résonance du pendule pour que la théorie quasi-statique de la lame élastique soit valable. Elles sont aussi calculées par la théorie des cordes des instruments de musique, du genre de la corde de piano dont la rigidité de flexion n'est pas négligeable.

# Bibliographie

- [1] R.J. Matthys, *Accurate Clock Pendulums*, Oxford University Press (Oxford 2004). Ce livre exprime souvent les idées personnelles de l'auteur, dont certaines sont très discutables. Par exemple, dans le chapitre 7 intitulé "Putting Q in perspective", l'auteur met en doute l'intérêt que le coefficient de qualité  $Q$  du pendule ait une valeur élevée.
- [2] I. Marson and J.E. Faller, "g - the acceleration of gravity : its measurement and its importance," *J. Phys. E : Sci. Instrum.* **19**, 22-31 (1986).
- [3] J.E. Faller, "The measurement of little g : a fertile ground for precision measurement science," *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* **110**, 559-581 (2005).
- [4] S. Rosenblum and S.E. Luria, "Obituary : Fernand Holweck," *Science, New Series*, **96**, 329-330 (1942).
- [5] F. Holweck et P. Lejay, *Comptes Rendus Acad. Sciences* **190**, 1387-1388 (1930).
- [6] F. Holweck et P. Lejay, "Mesures relatives de la gravité au moyen du pendule élastique inversé," *Journal des Observateurs* **17**, 109-136bis (1934).
- [7] J. McGarva Bruckshaw, "Gravimeters," *Proc. Phys. Soc.* **53**, 449-467 (1941).
- [8] C.A. Heiland, "Gravimeters : their relation to seismometers, astatization and calibration," *AIMME Tec. Pub* **1049**, 196-221 (1939).
- [9] See the website [www.microglacoste.com](http://www.microglacoste.com).
- [10] L. Timmen, Absolute and Relative Gravimetry, Chapter 1, in *Sciences of Geodesy - I Advances and Future Directions*, Xu, Guochang (Ed.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2010).
- [11] E. Wielandt and G. Streckeisen, "The leaf spring seismometer : design and performance," *Bull. Seism. Soc. Am.* **72**, 2349-2367 (1982).
- [12] P. Le Rolland, "Etude de l'oscillation du pendule par la méthode photographique (influence de la suspension)," *Ann. Phys. Paris* **9/17**, 165-381 (1922).
- [13] G. Dolfo and J. Vigué, "A more accurate theory of a flexible-beam pendulum," *Am. J. Phys.* **83**, 525-530 (2015).
- [14] W.M. Itano and N.F. Ramsey, "Accurate measurement of time," *Scientific American*, **1001**, 56-65 (1993).
- [15] Article "Shortt-Synchronome clock" in English Wikipedia.
- [16] W.G. Brombacher, "Temperature coefficient of the elastic moduli of spring materials used in instrument design," *Rev. Sci. Instrum.* **4**, 688-692 (1933).
- [17] A.L. Loomis, "The precise measurement of time," *Royal Astronomical Society Monthly Notice* **91**, 569-575 (1931).
- [18] E.W. Brown and D. Brouwer, "Analysis of records made on the Loomis chronograph by three Shortt clocks and a crystal oscillator," *Royal Astronomical Society Monthly Notice* **91**, 575-591 (1931).

- [19] F.M. Fedchenko and A.G. Fleer, " Spring suspension for a pendulum," Measurement Techniques **9**, 1012-1016 (1966).
- [20] P.N. Agaletskii, " Production of Soviet pendulum astronomical clocks," Measurement Techniques, **11**, 1001-1002 (1968).
- [21] L.J.B. LaCoste, " A simplification in the conditions for the zero-length-spring seismograph," Bull. Seism. Soc. Am. **25**, 176-179 (1935).
- [22] A.I. Corpaciu, Thèse Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich (1940), disponible sur le site <http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:21329/eth-21329-01.pdf>
- [23] J.M. Goodkind, "The superconducting gravimeter," Rev. Scient. Instr. **70**, 4131-4152 (1999).
- [24] L. Landau et E. Lifchitz, Théorie de l'élasticité, éditions MIR Moscou (1967) ou en anglais Theory of elasticity, Pergamon, New York (1986).

## Chapitre 4

# Expériences avec un pendule à lame élastique

### 1 Introduction

Le calcul du pendule à lame élastique décrit au chapitre précédent a prédit deux fréquences de résonance correspondant à des mouvements notamment différents : un mode pendulaire et un mode de rotation, dénommé “rolling mode” dans notre article “Damping mechanisms of a pendulum” [1]. Cette distinction des deux modes n'est bien sûr pas vraie dans la zone du croisement évité étudié dans la section 4.4 du chapitre précédent. Ce résultat m'a semblé mériter un test expérimental et D. Castex, un des mécaniciens du laboratoire, a construit un pendule avec une lame élastique de longueur réglable, ce qui permet de faire varier les fréquences de résonance.

Le but initial du test était de comparer les fréquences mesurées à celle prévues par la théorie. Comme il y avait deux fréquences à mesurer, dont l'une qui pouvait atteindre plusieurs dizaines de Hertz, une mesure électrique de la vitesse ou du déplacement était indispensable. J'ai construit un détecteur de vitesse par induction magnétique qui s'est révélé très sensible et qui m'a permis de mesurer ces deux fréquences avec une bonne précision.

La théorie développée au chapitre précédent fait l'approximation que la lame élastique est à chaque instant à l'équilibre. Cette approximation est bonne si les fréquences propres de la lame sont très supérieures à celle du pendule. Les mouvements de la lame étant mal détectés par le détecteur de vitesse à induction magnétique, j'ai construit un “shadow detector” qui s'est révélé encore plus sensible que le détecteur par induction mais dont la zone de linéarité est aussi beaucoup plus petite. J'ai pu mesurer ainsi les fréquences de la lame élastique et vérifier qu'elles sont beaucoup plus élevées que celle du pendule. J'ai pu aussi vérifier qu'elles sont très proches de la valeur théorique utilisant la théorie de la corde du piano : cette théorie, qui prend en compte la rigidité de la corde, est tout à fait classique [2, 3, 4, 5] et je ne l'ai pas reproduite dans la publication ni dans ce chapitre. Elle suppose que les deux bouts de la corde sont fixes et, bien que ce soit une approximation, cette théorie s'applique bien ici car le corps du pendule a une inertie très grande par rapport à celle de la lame élastique.

Dès que le pendule a été construit, j'ai été fasciné par le faible amortissement de ses deux modes d'oscillation. La forte sensibilité des détecteurs m'a permis de suivre la décroissance de l'amplitude sur une longue durée et d'en déduire des informations précises sur l'amortissement :

— j'ai d'abord mesuré l'effet des forces de frottement sur l'air. Du point de vue théorique,

je n'avais pas encore lu l'article de Stokes [6] et j'ignorais les résultats particuliers concernant le mouvement oscillant. Pour le cylindre qui représentait le corps du pendule, je m'appuyais sur l'article de Nelson et Olsson [14]. J'ai pu ainsi observer la transition entre une décroissance non-exponentielle de l'amplitude, due à une force de frottement quadratique en vitesse, et une décroissance exponentielle de l'amplitude quand la vitesse est suffisamment petite.

- la rapide variation de la fréquence du “rolling mode” m'a permis d'explorer l'amortissement en fonction de la fréquence de ce mode et cette mesure a mené à une surprise : le taux d'amortissement varie rapidement autour de certaines fréquences. Nous avons pu vérifier que ces fréquences étaient des fréquences de résonance du support. La théorie détaillée de l'amortissement d'oscillateurs harmoniques couplés est présentée dans le chapitre 6 de ma thèse. J'ai appliqué cette théorie à mes mesures qu'elle a pu très bien expliquer.
- le troisième effet d'amortissement qui est étudié dans notre article est l'effet anélastique, c'est à dire le fait que la force élastique n'est pas exactement en phase avec la déformation. Cet effet est celui qui limite le coefficient de qualité des pendules fonctionnant sous ultravide et servant à amortir les vibrations du sol pour les détecteurs d'ondes gravitationnelles VIRGO, LIGO, etc... Il y a donc des études très détaillées de cet effet[8], en particulier dans la silice qui a des performances exceptionnelles [9]. Cet effet, qui semble totalement ignoré de la littérature pédagogique, explique très bien nos mesures.
- puisque le pendule porte un aimant ayant un assez fort moment magnétique, j'ai fait une étude de l'amortissement de son oscillation par les courants de Foucault induits par le mouvement oscillant de l'aimant. J'avais inclus cette étude dans une première version de notre article [1] mais je l'ai supprimée dans la version soumise pour publication car l'article était très long. Je la reproduis ici après notre article. L'intérêt de cette mesure est que la géométrie est suffisamment simple pour permettre un calcul de l'effet d'amortissement, en bon accord avec les mesures.

## 2 Notre article “ Damping mechanisms of a pendulum”

# Damping mechanisms of a pendulum

Gilles Dolfo, Daniel Castex and Jacques Vigué

Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité-IRSAMC, Université de Toulouse-UPS and CNRS UMR 5589, 118, Route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex, France

E-mail: [jacques.vigue@irsamc.ups-tlse.fr](mailto:jacques.vigue@irsamc.ups-tlse.fr)

Received 20 July 2016

Accepted for publication 30 August 2016

Published 26 September 2016



CrossMark

## Abstract

In this paper, we study the damping mechanisms of a pendulum. The originality of our setup is the use of a metal strip suspension and the development of extremely sensitive electric measurements of the pendulum velocity and position. Their sensitivity is absolutely necessary for a reliable measurement of the pendulum damping time constant because this measurement is possible only for very low oscillation amplitudes, when air friction forces quadratic in velocity have a negligible contribution to the observed damping. We have thus carefully studied damping by air friction forces, which is the dominant mechanism for large values of the Reynolds number  $Re$  but which is negligible in the Stokes regime,  $Re \sim 1$ . In this last case, we have found that the dominant damping is due to internal friction in the metal strip, a universal effect called anelasticity, and, for certain frequencies, to resonant coupling to the support of the pendulum. All our measurements are well explained by theory. We believe this paper would be of interest to students in an undergraduate classical mechanics course.

Keywords: pendulum damping, anelastic effect, air friction forces, damping by resonant coupling

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

## 1. Introduction

In this paper, we study the damping mechanisms of a pendulum suspended by a metal strip. We have built electric measurements of the pendulum velocity and position, which are easy to make and very sensitive: the minimum detectable velocity is  $\sim 10^{-5} \text{ m s}^{-1} \text{ Hz}^{-1/2}$  and the minimum detectable displacement is  $\sim 2 \times 10^{-8} \text{ m} \text{ Hz}^{-1/2}$ . These very large sensitivities revealed absolutely necessary for a reliable measurement of the pendulum damping time constant because this measurement is possible only for very low oscillation amplitudes, so

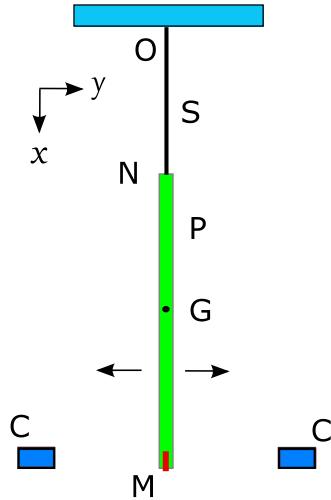
that the part quadratic in velocity of air friction forces is negligible: otherwise, the oscillation amplitude decreases in a non-exponential way and the apparent time constant is a function of the amplitude.

The interest of using a pendulum suspended by a metal strip is due to the possibility of studying damping as a function of frequency. This type of pendulum exhibits two main resonances corresponding to different shapes of the metal strip [1] and higher frequency resonances corresponding to vibrations of the metal strip itself. The frequency of these various resonances vary with the length of the metal strip, thus covering a wide frequency range, 0.8–400 Hz, in the present study.

Thanks to these original aspects of our setup, namely a wide frequency tunability of the pendulum resonances and the ability of measurements of the damping time constant at very low oscillation amplitudes, we have made a very detailed study of pendulum damping. Here are the main results.

- We first study air friction forces. We observe the transition from a regime where these forces are quadratic in velocity and the damping is non-exponential to a regime where the damping is exponential. We estimate the contribution of these forces to damping in the Stokes regime [2], when the forces are proportional to the velocity, and we find that these forces give a negligible contribution to the observed damping. We have recorded damping down to very small oscillation amplitudes, corresponding to a Reynolds number  $Re \approx 1$  while previous similar studies [3–7] have worked with considerably larger values of the Reynolds number, in the range from a few hundreds to a few thousands. The air viscosity, extracted from their data, ‘is around 40 times larger than the accepted value’ [7], an obvious proof that the Stokes regime has not been reached in these studies.
- The dominant damping effect is due to internal friction in the metal strip. This effect called anelasticity, which had been known for a very long time, was explained in 1937 by Zener [8, 9] as a thermoelastic effect. This effect is described by adding a small imaginary part to the stiffness  $k$  of a spring which becomes  $k[1 + i\phi(\omega)]$ , where  $\phi(\omega)$  is the phase shift between the force and the displacement [10]. Zener’s theory predicts the magnitude and frequency dependence of  $\phi(\omega)$  and our measurements are in good agreement with this theory. It appears that anelasticity is seldom, if ever, discussed in the tutorial literature while it is a very common effect. Moreover, it is worth noticing that anelastic effect is the source of thermal noise in mechanical suspensions [10] and recent studies were motivated by the need of optimising the suspension of the mirrors of the large optical interferometers used as gravitational wave detectors such as LIGO, VIRGO, etc.
- Finally, for certain frequencies, the damping rate increases abruptly and the plot of  $1/Q$ , where  $Q$  is the pendulum quality factor, presents a resonance well approximated by a Lorentz absorption curve. This effect occurs when the pendulum is in resonance with an oscillation frequency of the support. Even a very weak coupling is sufficient to produce this effect [11] and our observations are in good agreement with theory.

The present paper is organised as follows. Our experimental setup is described in part 2. Part 3 presents the results concerning the resonance frequencies; part 4 discusses some general ideas about damping. We present our results concerning damping by air friction forces in part 5, by coupling to the support in part 6 and by anelastic effect in part 7.



**Figure 1.** Schematic drawing of the pendulum: the metal strip  $S$  is clamped in  $O$  in a metal block fixed to an optical breadboard and in  $N$  at the top of the pendulum body  $P$  whose centre of gravity is noted  $G$ . The velocity sensor uses the magnet  $M$  and the two coils  $C$ .

## 2. Our experimental setup

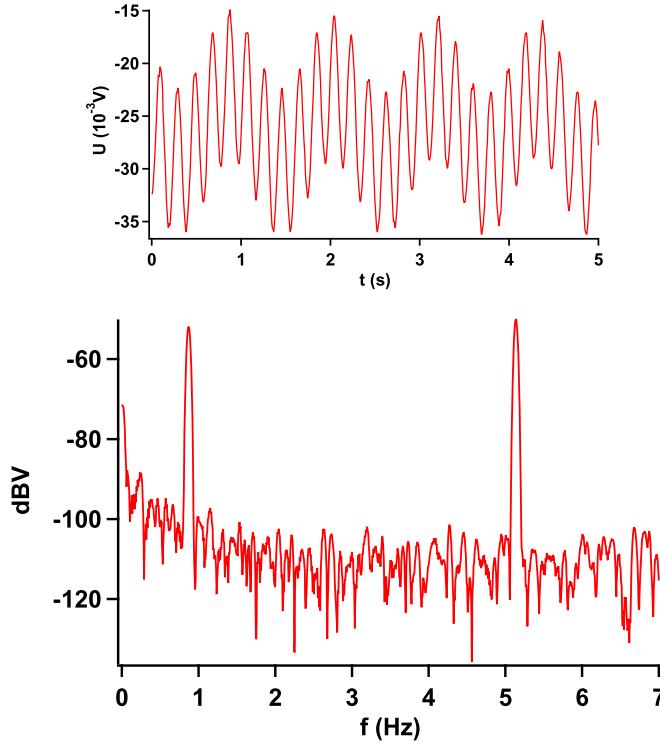
### 2.1. The pendulum

Figure 1 presents a schematic drawing of our pendulum made of an aluminium alloy bar (300 mm length;  $20 \times 20$  mm $^2$  square cross section) suspended by a metal strip (a 250 mm long ruler made of AISI 301 grade stainless steel; thickness  $c = 0.49 \pm 0.01$  mm and width  $d = 13.00 \pm 0.01$  mm). The ruler is clamped in  $N$  in the pendulum body and in  $O$  in a metal block fixed to an optical breadboard. The ruler can slide in  $O$  so that its free length  $l$  can be varied from  $\sim 40$  to  $\sim 240$  mm.

In order to compare our measurements with theory [1], we need the values of several parameters: the mass  $M = 0.350$  kg of the pendulum body; the distance  $NG = h = 156.8$  mm from the clamping point  $N$  to the body centre of mass  $G$  and the radius of gyration  $\rho = 87.1$  mm of the pendulum body ( $h$  and  $\rho$  have been calculated, using a drawing of the pendulum body and the measured masses of its parts); the mass per unit length of the metal strip  $\sigma = 51.6 \times 10^{-3}$  kg m $^{-1}$ . The elasticity parameter  $EI_s$  of the metal strip, where  $E$  the Young's modulus of the metal and  $I_s$  the second moment of the area of its cross section given by  $I_s = c^3 d/12$ , was measured: the strip being horizontal, the deflection  $\delta$ , induced by a test mass  $m_t$  put at a known distance  $l_t$  from the clamped end, is given by theory [12]  $\delta = m_t g l_t^3 / (3EI_s)$ . From a series of measurements of  $\delta$ , we get  $EI_s = (23.1 \pm 0.3) \times 10^{-3}$  N m $^2$ , while we calculate  $EI_s = 25.4 \times 10^{-3}$  N m $^2$ , using the metal strip dimensions and the Young's modulus of AISI 301 stainless steel [13],  $E = 2 \times 10^{11}$  N m $^{-2}$ .

### 2.2. The velocity sensor

This sensor is based on magnetic induction: the signal is the voltage induced in fixed coils by a magnet carried by the pendulum (see figure 1). The magnet is a ring-shaped NdFeB magnet



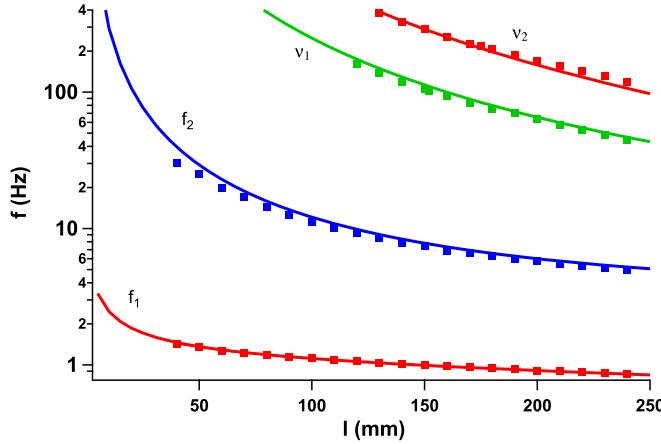
**Figure 2.** An example of the velocity sensor signal, filtered by a low-pass filter with a 5 Hz cutoff. Upper panel: a few second record showing the presence of two frequencies. Lower panel: Fourier transform of a 50 s long record exhibiting peaks at  $f_1 \approx 0.870$  Hz and  $f_2 \approx 5.137$  Hz (metal strip length  $l = 240$  mm). The oscillation amplitudes are  $\sim 10^{-4}$  m for the oscillation of frequency  $f_1$  and  $\sim 3 \times 10^{-5}$  m for the oscillation of frequency  $f_2$ .

(inner radius  $r_{mi} = 4$  mm, external radius  $r_{me} = 12.5$  mm, thickness  $w_m = 5$  mm), magnetised along its axis with a remanent field  $B_r = 1.32 \pm 0.03$  T (value given by the producer). Its magnetic moment is  $\mu = B_r V_M / \mu_0 \approx 2.3$  A m<sup>2</sup>, where  $V_M \approx 1.76$  cm<sup>3</sup> is the magnet volume. Measurements of the field indicate a 10% smaller value and we use  $\mu = 2.1$  A m<sup>2</sup>.

The coils play the role of an AC magnetometer [14]. We use the coils of low-power solenoid valves operating under 220 V: they have several thousands of turns, they are cheap and very convenient but, because they contain a ferromagnetic cylinder, they must not be placed close to the magnet. With two coils located symmetrically (see figure 1) and electrically connected in series, the signal is doubled and the first nonlinear terms are cancelled. The voltage  $V$  induced by the magnet moving with a velocity  $dy_M/dt$  is given by

$$V/(dy_M/dt) = \frac{3\mu_0\mu S_{\text{tot}}}{\pi y_C^4}, \quad (1)$$

where  $S_{\text{tot}}$  is the total area of one coil,  $y_C$  is the distance from coil centre to the pendulum equilibrium position. We have calculated the magnetic field at the coil centre as given by a point-like magnetic moment. With an homogeneous oscillating magnetic field, we have measured  $S_{\text{tot}} \approx 3.3 \pm 0.10$  m<sup>2</sup> and we calculate  $|V/(dy_M/dt)| \approx 8 \times 10^{-2}$  V s m<sup>-1</sup> for our usual  $y_C$ -value,  $y_C = \pm 100$  mm. A low-noise amplifier (gain = 100) raises the calculated



**Figure 3.** Plot of the resonance frequencies  $f_1$  and  $f_2$  of the pendulum and  $\nu_1$  and  $\nu_2$  of the metal strip as a function of the metal strip length  $l$ . The frequency scale is logarithmic, data points represented by squares and theoretical results by full curves. The mean relative difference between theory and experiment is  $-0.13\%$  for  $f_1$ ,  $-7.6\%$  for  $f_2$ ,  $-5.4\%$  for  $\nu_1$  and  $+4.8\%$  for  $\nu_2$ .

sensitivity to  $|V/(dy_M/dt)| \approx 8 \text{ V s m}^{-1}$ , close to its directly measured value  $|V/(dy_M/dt)| \approx 7 \text{ V s m}^{-1}$ . Figure 2 presents a recorded signal and its Fourier transform: from the noise level, the minimum detectable velocity is  $\sim 10^{-5} \text{ m s}^{-1} \text{ Hz}^{-1/2}$ .

### 2.3. The position sensor

This is a shadow sensor [15]: the 0.49 mm thick metal strip is near the centre of a  $\sim 3$  mm diameter beam of a 5 mW helium–neon laser, located  $\sim 2.5$  cm below point  $O$ . The intensity of the light transmitted on one side of the shadow is measured by a photodiode. The variations of the photodiode signal  $V$  are proportional to the displacement  $y_S$  of the metal strip. The sensitivity, which is a function of the laser beam power and diameter and of the photodiode sensitivity, is  $dV/dy_S \sim 1.5 \times 10^3 \text{ V m}^{-1}$ . The noise level, near  $-95$  dBV for a 1 s long record, corresponds to a minimum detectable displacement  $\sim 2 \times 10^{-8} \text{ m Hz}^{-1/2}$ . The linearity range of this sensor is a few % of the laser beam radius, i.e.  $|y_S| \lesssim 0.1$  mm. It is well adapted to the measurement of the metal strip vibrations.

## 3. The resonance frequencies of the pendulum and of the metal strip

Our pendulum has two modes of oscillation [1], a slow pendular motion (frequency  $f_1$ ) and a faster rolling motion (frequency  $f_2$ ), both frequencies varying with the length  $l$  of the metal strip. The metal strip itself has a series of vibration modes of frequencies  $\nu_k$  which are described by the theory of a stiff piano string clamped at both ends [16–19].

To measure the frequencies  $f_1$  and  $f_2$  and the associated damping time constants, we excite the pendulum vibrations by a gentle stroke on the pendulum body and we record the free decay with the velocity sensor. To prevent the perturbation of the pendulum by air flow, especially when studying the low-frequency motions at very small amplitudes, we use a cardboard box surrounding the pendulum: the distance from the pendulum to the walls and to the bottom of the box is larger than 100 mm in order to reduce the boundary effects on the air

motion. We measure the metal strip vibrations with the position sensor but a similar excitation is not well adapted for these vibrations. We use a resonant excitation of one mode by an oscillating magnetic field gradient applied on the pendulum magnet, with a 30 mm diameter flat coil (number of turns  $\approx 1300$ ), placed close to the magnet and powered by a sinusoidal voltage up to 10 V. We maximise the oscillation amplitude to make a first measurement of the resonance frequency of the chosen mode. Then, we switch off the excitation and we record the free decay which provides measurements of the frequency and of the damping time constant.

$f_1$ ,  $f_2$ ,  $\nu_1$  and  $\nu_2$  were measured as a function of the metal strip length  $l$ , with a  $10^{-3}$  relative uncertainty on the frequency and a  $\pm 0.5$  mm uncertainty on  $l$ . Figure 3 presents the measured and theoretical values of these frequencies: the overall agreement is good, especially because no parameter has been fitted. However, our calculation [1] of  $f_1$  and  $f_2$  is based on Euler–Bernoulli equation [12], which assumes equilibrium: this is a good approximation if the metal strip frequencies are very large with respect to the pendulum frequencies. When  $l$  decreases from 240 to 120 mm, the ratio  $\nu_1/f_1$  varies from 50 to 150 while  $\nu_1/f_2$  varies from 8 to 20. Euler–Bernoulli equation is a very good approximation for the calculation of  $f_1$  but less good for the calculation of  $f_2$ : this is supported by the results presented in figure 3.

#### 4. Some general ideas about damping

Several tutorial papers [3–7] have studied the damping mechanisms of pendulums.

##### 4.1. The quality factor of a pendulum

If we except the case of solid friction (discussed by Squire [6] but not in the present paper) and air friction forces when they are quadratic in velocity (discussed below), the amplitude decays exponentially. Then, if  $s(t)$  describes the pendulum motion ( $s(t)$  may be the position  $y$  or an angle  $\theta$  or their derivatives  $dy/dt$  or  $d\theta/dt$ ),  $s(t)$  is given by

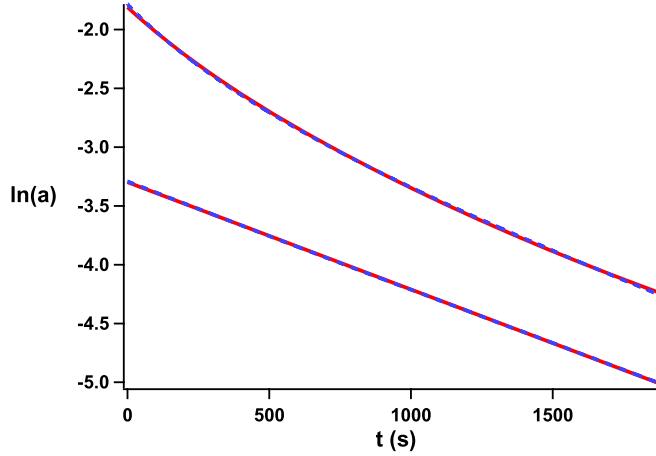
$$s(t) = a(t)\cos(\omega t), \text{ with } a(t) = a(0)\exp(-t/\tau), \quad (2)$$

where  $\omega$  is the resonance angular frequency and  $\tau$  is the decay time constant. The resonance quality factor is defined by  $Q \equiv \omega\tau/2$ . An equivalent definition is  $Q \equiv 2\pi E_{\text{tot}}/L$ , where  $E_{\text{tot}}$  is the total energy of the oscillator and  $L$  is the energy lost during one period. Crawford [4] noted that it is a good approximation to treat the damping term as a perturbation and to calculate the energy lost  $L$  as if  $a(t)$  was constant during one period: with this approximation, it is easy to calculate the effect of any friction force and, in particular, of air friction forces when they are quadratic in velocity. However, when the decay is not exponential, it is impossible to strictly define a quality factor.

The energy lost by the pendulum is due to air friction forces,  $L_{\text{frict.}}$ , to coupling to the pendulum support,  $L_{\text{coupling}}$  and to anelastic behaviour of the metal strip [8, 9],  $L_{\text{anelast.}}$ . These three contributions add their effect and  $1/Q$  is given by

$$\frac{1}{Q} = \frac{L_{\text{frict.}} + L_{\text{coupling}} + L_{\text{anelast.}}}{2\pi E_{\text{tot}}}. \quad (3)$$

It is useful to plot  $1/Q$  as a function of the frequency to separate these contributions.



**Figure 4.** Plot of  $\ln(a(t))$  as a function of  $t$ . Experiment a: lower curve; experiment b: upper curve with a +2 shift so that the curves do not cross. Measured data: dashed (blue) lines; best fit: full (red) lines (see text for details).

#### 4.2. Measurement of the damping time constant

The signal given by the velocity sensor or the position sensor is recorded by a data acquisition card connected to a computer. The Fourier transform of a sliding temporal window measures the corresponding amplitude  $a(t)$  as a function of time  $t$  and we verify that the curve  $\ln[a(t)]$  versus  $t$  is well linear. The fit of  $\ln[a(t)]$  by a linear function of  $t$  gives a more reliable value of the decay time constant  $\tau$  than the fit of  $a(t)$  by an exponential function of  $t$ , because the fit of  $\ln[a(t)]$  increases the weight of the end of the decay: an example of such a fit appears in figure 4. The statistical uncertainty on  $\tau$  is usually very small,  $\ll 1\%$ , but the dispersion of similar measurements, done after varying the metal strip length  $l$ , is a few %, probably because the clamping of the metal strip at point O is not fully reproducible.

The measurement of the damping time of the metal strip modes revealed difficult. The frequency of these modes is considerably higher than the one of the pendulum modes and the decay is exponential only for very small initial amplitudes. Moreover, the signal contains stray peaks at the harmonics of the mains and the decay is distorted if the resonance frequency is too close to one of these harmonics. Finally, several high frequency resonances of the support degrade the  $Q$ -factor of the pendulum. As a consequence, we have obtained only a few reliable measurements.

## 5. Losses due to air friction forces

We first study air friction forces in order to determine when the decay is exponential as all the following measurements must be done in this regime.

### 5.1. Some general properties

An object moving with a constant velocity  $\mathbf{v}$  in a fluid of density  $\rho$  feels a friction force given by

$$\mathbf{F} = -\frac{C_D}{2}\rho A |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \quad (4)$$

where  $C_D$  is the drag coefficient and  $A$  is the area of the object projection on a plane perpendicular to its velocity. The drag coefficient  $C_D$  is a function of the shape of the object and of the Reynolds number  $Re \equiv \rho |\mathbf{v}| D/\eta$ , where  $D$  is a characteristic transverse dimension of the object and  $\eta$  is the fluid viscosity. When  $1 \ll Re \lesssim 10^5$ , the drag coefficient  $C_D$  varies slowly with  $Re$  while  $C_D \propto 1/Re$  when  $Re \sim 1$ : this is the Stokes regime with the friction force proportional to the velocity. The simplest interpolating formula is

$$C_D(Re) \approx \frac{C_1}{Re} + C_2, \quad (5)$$

with  $C_1 \approx 24$ ,  $C_2 \approx 0.5$  for a sphere and  $C_1 \approx 10$ ,  $C_2 \approx 1.5$  for a long cylinder [5, 7, 21].

To apply these general results to our pendulum, one must assume that equation (4) is still valid with a time-dependent velocity and in a differential form for the length  $dx$  of the pendulum

$$d\mathbf{F}/dx = -C_D(x)\rho w(x)|\mathbf{v}(x, t)| \mathbf{v}(x, t)/2, \quad (6)$$

where the velocity  $v(x, t)$  and the width  $w(x)$  of the pendulum are used to calculate  $Re(x, t) = \rho v(x, t)w(x)/\eta$ . The drag on an object undergoing an oscillatory motion is not the same as for a steady motion [5, 6, 20] and the validity of equation (6) is questionable. The energy  $L_{\text{frict}}$  lost by air friction during one oscillation period  $T = 2\pi/\omega$  is the sum of two terms,  $L_{\text{frict},1}$  and  $L_{\text{frict},2}$ , corresponding to the two terms in equation (5):

$$\begin{aligned} L_{\text{frict},1} &= \int_0^T dt \int_0^{x_B} dx C_1(x) \eta v^2(x, t)/2, \\ L_{\text{frict},2} &= \int_0^T dt \int_0^{x_B} dx C_2(x) \rho w(x) |v(x, t)|^3/2. \end{aligned} \quad (7)$$

As  $v(x, t) = v_m(x) \cos(\omega t)$ , where  $|v_m(x)|$  is the maximum velocity at coordinate  $x$ , it is easy to calculate the integrals over time

$$L_{\text{frict},1} = \frac{\pi\eta}{2\omega} \int_0^{x_B} dx C_1(x) v_m^2(x), \quad (8)$$

$$L_{\text{frict},2} = \frac{4\rho}{3\omega} \int_0^{x_B} dx C_2(x) w(x) |v_m(x)|^3. \quad (9)$$

$L_{\text{frict},1}$  is proportional to the viscosity  $\eta$  but independent of the gas density  $\rho$  and of the pendulum width  $w(x)$ .  $L_{\text{frict},2}$  is proportional to the gas density  $\rho$  but independent of its viscosity  $\eta$ . In the general case, the two terms contribute to damping: if  $a$  is the oscillation amplitude,  $L_{\text{frict},1}$  and  $L_{\text{frict},2}$  are respectively proportional to  $a^2$  and  $a^3$  while the pendulum total energy  $E_{\text{tot}}$  is proportional to  $a^2$ . Energy balance gives

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a}{\tau} - ba^2, \quad (10)$$

where the term  $-a/\tau$  takes into account all the damping terms except the contribution of  $L_{\text{frict},2}$  given by  $-ba^2$ .  $\tau$  is obviously independent of the choice of the amplitude  $a$  but  $b$ , which is the coefficient of a nonlinear term, depends of this choice. The integration of this equation [5] gives

$$\frac{a(t)}{a(0)} = \frac{\exp(-t/\tau)}{1 + B(1 - \exp(-t/\tau))}, \quad (11)$$

with  $B = b\tau a(0)$ . The decay is exponential only if  $B \ll 1$ .

### 5.2. Application to our pendulum

For our pendulum in air at 22 °C ( $\rho_{\text{air}} \approx 1.2 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\eta \approx 1.85 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$ ), with  $D$  taken equal to the body width 20 mm, the Reynolds number is equal to  $Re \approx 1.3 \times 10^3 v$  with  $v$  in  $\text{m s}^{-1}$ . The Stokes regime,  $Re \sim 1$ , corresponds to  $v \sim 7 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$  and then  $L_{\text{frict.2}} \ll L_{\text{frict.1}}$ . To calculate  $(1/Q)_{\text{frict.}} = L_{\text{frict.1}}/(2\pi E_{\text{tot}})$ , we must evaluate the pendulum total energy  $E_{\text{tot}}$ , which is equal to its maximum kinetic energy

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int_0^{x_B} dx \frac{dm}{dx} v_m^2(x), \quad (12)$$

where  $dm/dx$  is the mass per unit length of the pendulum. In order to get an order of magnitude of  $L_{\text{frict.1}}$ , we assume that  $C_l(x)$  and  $dm/dx$  are constant we take them out the integrals in equations (9) and (12) which then are equal. We get

$$\left( \frac{1}{Q} \right)_{\text{frict.}} = \frac{\eta C_l}{2\omega (dm/dx)}. \quad (13)$$

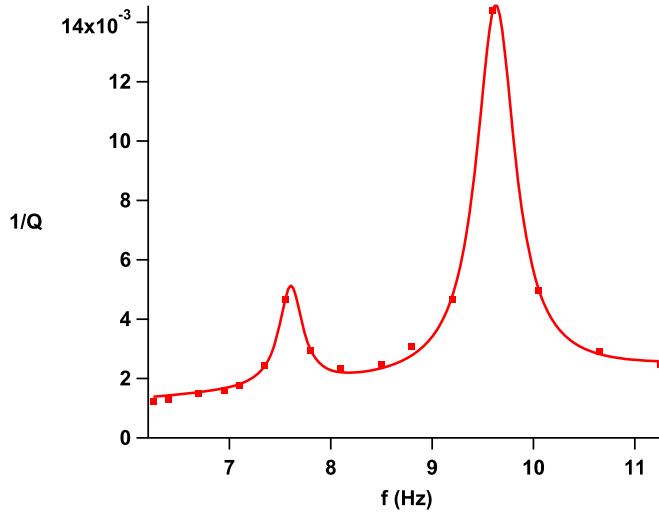
For the pendular mode, we use the long-cylinder value  $C_l \approx 10$  because this shape is reasonably close to the one of the pendulum body. The assumption of constant  $dm/dx$  is rather good because the integral is dominated by the pendulum body for which  $dm/dx \approx 1.08 \text{ kg m}^{-1}$ . For a mean value of the frequency  $\omega/(2\pi) \approx 0.9 \text{ Hz}$ , we get  $(1/Q)_{\text{frict.}} \approx 2 \times 10^{-5}$ . For the metal strip modes, we use the metal strip value for  $dm/dx = \sigma = 51.6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$ , the thin plate  $C_l$  value [22],  $C_l \approx 3.2$ , and a typical frequency value  $\omega/(2\pi) = 100 \text{ Hz}$ , we get  $(1/Q)_{\text{frict.}} \approx 10^{-6}$ . For the rolling mode,  $v_m(x)$  is maximum in the metal strip but is not negligible in the pendulum body: we use the average value,  $35 \text{ m kg}^{-1}$ , of the ratio  $C_l/(dm/dx)$  equal to  $60 \text{ m kg}^{-1}$  for the metal strip and to  $11 \text{ m kg}^{-1}$  for the pendulum body and we get an estimate  $(1/Q)_{\text{frict.}} \approx 6 \times 10^{-6}$  for  $\omega/(2\pi) \approx 10 \text{ Hz}$ . These three estimates are obviously rather rough but they are considerably smaller than the smallest measured value of  $1/Q \sim 3 \times 10^{-4}$  obtained with the pendular mode (see below) and it is clear that air friction forces in the Stokes regime give a very small contribution to  $1/Q$  for our pendulum.

Several papers [5–7] have studied pendulum damping by air friction forces and described the damping by equation (10). Kostov *et al* [7] note that, if the linear term was due solely to air friction forces, their measured value is explained by an air viscosity ‘which is around 40 times larger than the accepted value and this is also true of similar experiments’, quoting the paper of Squire [6] and the one of Nelson and Olson [5]. In these three experiments, during the observed decay, the Reynolds number decreases from a few thousands to a few hundreds and the Stokes regime has not been explored.

### 5.3. Experiments with our pendulum

Figure 4 presents the amplitude  $a(t)$  measured by the velocity sensor for two experiments corresponding to different initial oscillation amplitudes. These experiments use the pendular mode with  $l = 230 \text{ mm}$  and  $f_l = 0.864 \text{ Hz}$ , because these conditions give the largest  $Q$ -factor.

In experiment a, the initial angular amplitude is small,  $\theta_m(0) \approx 2.1 \times 10^{-3} \text{ rad}$ . During the decay, the maximum velocity at the bottom of the pendulum decreases from  $v_m \approx 5 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$  to  $\approx 0.8 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$  and  $Re$  from 6 to 1. The decay is very well fitted by a pure exponential, with a decay time constant  $\tau = 1096 \text{ s}$ , corresponding to a quality factor  $Q = 2975$ , the largest value observed with our pendulum.



**Figure 5.** Plot of  $1/Q$  of the rolling mode of the pendulum as a function of its frequency. The data points (red squares) are fitted by the full (red) curve given by equation (16) and the fitted parameters are given in table 1.

In experiment b, the initial angular amplitude is large,  $\theta_m(0) \approx 0.15$  rad. The maximum velocity at the bottom of the pendulum decreases from  $v_m \approx 0.33 \text{ m s}^{-1}$  to  $0.028 \text{ m s}^{-1}$  and  $Re$  decreases from 420 to 35. The coils were put at a larger distance  $y_C = \pm 300 \text{ mm}$ , in order to keep a good sensor linearity. The decay is clearly not exponential and it is very well fitted by equation (11). If  $\tau$  and  $B$  are free, we get  $B = 1.22$  and  $\tau = 969 \text{ s}$ : this last value differs from the value obtained in experiment a because  $\tau$  and  $B$  are strongly correlated. If we fix  $\tau$  at the value given by experiment a, we get  $B = 1.58$ .

The end of the decay in experiment b has the same slope than in experiment a: this proves that the transition to an exponential decay occurs for a velocity of the order of  $0.03 \text{ m s}^{-1}$ , substantially larger than predicted: this is not surprising because the decay is almost purely exponential when the nonlinear losses term  $L_{\text{frict},2}$  is negligible with respect to the sum of the linear losses and this sum is not dominated by  $L_{\text{frict},1}$ .

Using equations (9) and (12), it is possible to evaluate approximately  $B$ . We assume that  $C_2$  is independent of  $x$ , that the width  $w(x)$  is constant noted  $w$ . As we consider the pendular mode, we may replace [1] the exact function  $v_m(x)$  by the one corresponding to a rotation around a centre located at mid-length of the metal strip i.e.  $v_m(x) = \omega\theta_m[x - (l/2)]$  for  $x > l/2$  and  $v_m(x) = 0$  for  $0 < x < l/2$ , where  $\theta_m$  is the angular oscillation amplitude. We then get

$$L_{\text{frict},2} = \frac{1}{3}C_2\rho w\omega^2\theta_m^3(x_B - (l/2))^4. \quad (14)$$

The pendulum total energy  $E_{\text{tot}} = I\theta_m^2\omega^2/2$ , where  $I$  is the moment of inertia calculated for rotation centre at  $x = l/2$ . Then, if we use in equation (10) with  $a = \theta_m$ ,  $b$  is given by

$$b = \frac{C_2\rho w(x_B - (l/2))^4\omega}{6\pi I}. \quad (15)$$

With the long-cylinder value of  $C_2 = 1.5$ , we calculate  $B \approx 1.71$ : considering the approximations made and the uncertain value of the drag coefficient  $C_2$ , the agreement is reasonably good.

## 6. Losses due to coupling to the support

Figure 5 presents a plot of  $1/Q$  as a function of the frequency of the pendulum rolling mode. Two resonances appear, which are due to the coupling of the pendulum to resonances of its support.

### 6.1. Resonances of the support

The pendulum is fixed on an optical breadboard, of mass  $M_B \approx 350$  kg, supported by a steel frame. This system can be viewed as a double pendulum: pendulum 1 is an elastic one, made of the breadboard (the mass) and the steel frame (the spring) while pendulum 2 is the pendulum under study. We have measured the seismic noise on the breadboard with a geophone oriented to measure the vibrations in the horizontal direction parallel to the plane of oscillation of pendulum 2 and we have observed two peaks at two frequencies corresponding to the resonances observed on  $1/Q$ .

In the frequency range below  $\sim 15$  Hz, we may consider the breadboard as a solid and the steel frame as a set of springs. As a solid has 6 degrees of freedom (3 translations and 3 rotations), we expect 6 resonances, with mixed rotation-translation characters. Pendulum 2 is coupled only to the resonances which have a noticeable velocity component along its direction of oscillation.

### 6.2. Analysis of the resonances observed on $1/Q$

When two oscillators are coupled, the mixing effect is maximum at resonance i.e. when the oscillator frequencies are equal. Moreover, if the coupling is stronger than the damping (in a sense explained below), the two oscillators have the same damping time constant at resonance. As a consequence, the observation of resonances of  $1/Q$  versus frequency is not surprising.

However, for the present resonances, the coupling is weak with respect to the damping: in this case, it is not correct to treat the coupling first and in a second step the damping as a perturbation. The theory of this case is described elsewhere and we use the notations of this paper [11] to which we refer the reader. We add an index  $n = a, b$  to label the two resonances of the support with frequencies  $\omega_{1,n}$  and damping rates  $\gamma_{1,n} = \omega_{1,n}/Q_{1,n}$  in the absence of coupling.  $\kappa_n$  is the dimensionless coupling parameter for resonance  $n$ . The resonance frequency  $\omega_2$  of pendulum 2 is tuned by varying  $l$  and we note  $\gamma_{2,n}$  its damping rate in the absence of coupling when  $\omega_2 = \omega_{1,n}$  and  $Q_{2,n}$  the quality factor of the pendulum in the absence of coupling. The weak coupling case corresponds to  $\kappa_n < \kappa_{\text{cr},n}$  with the critical value of the coupling parameter defined by  $\kappa_{\text{cr},n} = |(1/Q_{1,n}) - (1/Q_{2,n})|/2$ .

The coupling between two oscillators induces resonant variations of the frequency and of the damping rate of both oscillators [11]. In the present analysis, we neglect the variations of the frequency and we fit the measured values of  $1/Q$  by the following equation

**Table 1.** Parameters extracted from the fit of equation (16) to the measured values  $1/Q(\omega_2)$ .

$n$	$A_n$	$\frac{\omega_{1,n}}{2\pi}$ Hz	$\frac{\gamma_{1,n} - \gamma_{2,n}}{2\pi}$ Hz
a	$(3.4 \pm 0.4) \times 10^{-3}$	$7.61 \pm 0.01$	$0.28 \pm 0.04$
b	$(12.6 \pm 0.2) \times 10^{-3}$	$9.63 \pm 0.01$	$0.43 \pm 0.02$

**Table 2.** For the two resonances observed on the  $1/Q$  plot of figure 5, we give the values of the parameters entering in equation (17).

Quantity	Resonance $n = a$	Resonance $n = b$
$Q_{1,n}$	26	21
$Q_{2,n}$	638	502
$Q_{\text{res},n}$	201	69
$\kappa_{\text{cr},n}$	$1.8 \times 10^{-2}$	$2.2 \times 10^{-2}$
$\kappa_n$	$1.1 \times 10^{-2}$	$2.0 \times 10^{-2}$

$$\frac{1}{Q(\omega_2)} = c\omega_2 + d + \sum_{n=a,b} \frac{A_n}{1 + \left[ \frac{2(\omega_{1,n} - \omega_2)}{\gamma_{1,n} - \gamma_{2,n}} \right]^2}. \quad (16)$$

The fitted function  $1/Q$  is represented in figure 5. The sloping background  $c\omega_2 + d$  represents the value of  $1/Q$  of pendulum 2 in the absence of coupling. A first fit has given a  $d$  value compatible with 0 and a second fit with  $d = 0$  has given  $c = (32.8 \pm 1.4) \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ . The other parameters are collected in table 1.

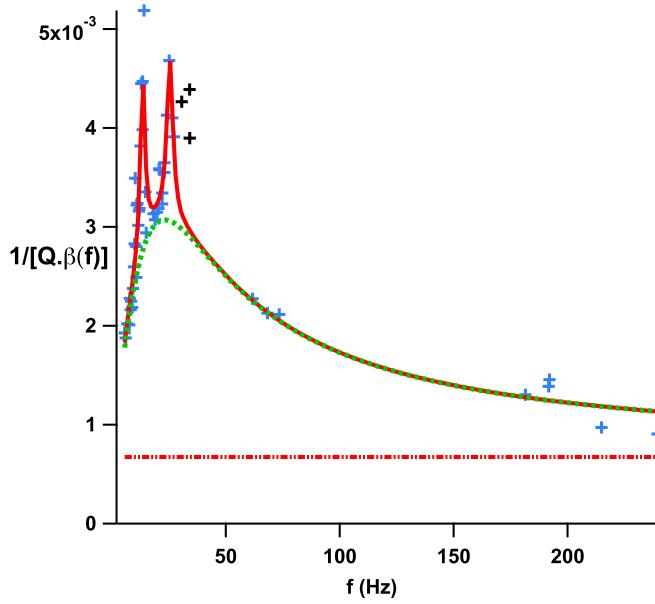
From these results, we deduce all the parameters describing the two resonances (see table 2). To evaluate the coupling coefficient  $\kappa_n$ , we use equation (17) which relates the resonance value  $Q_{\text{res},n} = Q(\omega_2 = \omega_{1,n})$  of the quality factor of pendulum 2 to the quality factors  $Q_{1,n}$  and  $Q_{2,n}$  in the absence of coupling

$$\frac{1}{Q_{\text{res},n}} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Q_{1,n}} + \frac{1}{Q_{2,n}} \right) \pm \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Q_{1,n}} - \frac{1}{Q_{2,n}} \right) \sqrt{1 - \frac{\kappa_n^2}{\kappa_{\text{cr},n}^2}}. \quad (17)$$

This equation is a good approximation if  $\kappa_n \ll \kappa_{\text{cr},n}$ .

For both resonances, we find  $1/Q_{\text{res},n} < [(1/Q_{1,n}) + (1/Q_{2,n})]/2$ , which is verified if the damping dominates the coupling. For resonance  $a$ ,  $\kappa_a/\kappa_{\text{cr},a} \approx 0.6$  and the use of equation (16) is reasonably good. For resonance  $b$ ,  $\kappa_b$  is too close to  $\kappa_{\text{cr},b}$  and equation (16) is not a good approximation but the small number of data points on this resonance precludes a better treatment. Obviously, our analysis of the  $1/Q$  resonances would have been greatly simplified if we had direct information on pendulum 1 and not only indirect information through measurements on pendulum 2.

The value of  $\kappa_a = 1.1 \times 10^{-2}$  deserves a comment: the coupling of a double pendulum being of inertial origin,  $\kappa$  is given by the square root of a mass ratio [11],  $\kappa = \sqrt{M/(M_B + M)} \approx 3 \times 10^{-2}$  in our setup. This value is larger than our measurement but our calculation assumes that the two pendulums oscillate along the same direction. If the oscillations of the two pendulums make an angle  $\theta$ , the theoretical value of  $\kappa$  must be



**Figure 6.** Plot of  $1/[Q\beta(f)]$  as a function of the frequency  $f = \omega/(2\pi)$ . The data points (blue crosses) have been fitted by equation (20) plus two Lorentz curves, one per resonance due to the coupling to the support (three data points represented by black crosses are due to a third resonance insufficiently described by three measurements and they have been discarded from the fit). The best fit is represented by the full (red) line while the dotted (green) curve represents the anelastic contribution and the horizontal dot-dashed (red) line the fitted value of  $\phi_0$ .

multiplied by  $\cos \theta$  and this effect explains why the observed value of  $\kappa_a$  is smaller than predicted.

## 7. Losses due to anelasticity

### 7.1. Introduction to anelasticity

The theory of anelasticity, i.e. of internal friction in solids, is due to Zener [8, 9] who explained this effect by a thermoelastic effect. When a solid bends at a frequency  $\omega$ , one face is compressed while the other face expands: these deformations induce local cooling and heating and heat diffusion induces an irreversible energy loss. The magnitude of this loss depends of the relative values of the heat diffusion-time and of the frequency  $\omega$  and this effect has a characteristic frequency dependence given by equation (18). This effect [10] is described by adding a small imaginary part to the stiffness  $k$  of a spring which becomes  $k[1 + i\phi(\omega)]$ , where  $\phi(\omega)$  is the phase shift between the force and the displacement ( $\phi(\omega)$  and  $\omega$  must have the same sign to describe an energy loss and we will assume that they are positive).  $\phi(\omega)$  is given by

$$\phi(\omega) = \Delta \frac{\omega/\omega_r}{1 + (\omega/\omega_r)^2}, \quad (18)$$

**Table 3.** Anelastic parameters of the metal strip. The theoretical values are calculated thanks to equations (19) with the parameters of AISI 301 stainless steel [13],  $E \approx 2 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ ,  $\alpha \approx 16 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ,  $C_v \approx 3.6 \times 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,  $\kappa_{\text{th}} \approx 14.9 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  and a temperature  $T = 295 \text{ K}$ .

Quantity	Fitted value	Theoretical value
$\omega_r/(2\pi) \text{ Hz}$	$23.2 \pm 1.9$	26
$\Delta$	$(4.8 \pm 0.6) \times 10^{-3}$	$4.2 \times 10^{-3}$

$$\text{with } \Delta = \frac{E\alpha^2 T}{C_v} \text{ and } \omega_r = \frac{\pi^2 \kappa_{\text{th}}}{C_v c^2}, \quad (19)$$

for a metal strip of thickness  $c$ . Here  $E$  is the Young's modulus,  $\alpha$  the thermal expansion coefficient,  $C_v$  the specific heat per unit volume,  $\kappa_{\text{th}}$  the thermal conductivity and  $T$  the temperature.

This theory has been tested for several materials by Cagnoli *et al* [23]. The measured variations of  $\phi(\omega)$  are well described by equation (18), provided that a frequency independent term noted  $\phi_0$  is added to equation (18) and we will do so.

### 7.2. Application to our pendulum

When the potential energy of an oscillator is purely elastic, the contribution of anelastic forces to  $1/Q$  is  $L_{\text{anelast.}}/(2\pi E_{\text{tot}}) = \phi_0 + \phi(\omega)$ . For our pendulum, the elastic energy is a fraction  $\beta(\omega)$  of the potential energy (the rest being due to gravity) and, as a consequence, the contribution of anelastic forces to  $1/Q$  is  $\beta(\omega)[\phi_0 + \phi(\omega)]$ . Figure 6 present a plot  $1/[Q\beta(\omega)]$  which measures the anelastic effect of the metal strip:

$$\frac{1}{Q\beta(\omega)} = \phi_0 + \Delta \frac{\omega/\omega_r}{1 + (\omega/\omega_r)^2}. \quad (20)$$

The  $Q$ -values presented in figure 6 were measured with the pendulum attached to a different breadboard and the resonances of  $1/Q$  due to the coupling to the support are not the same as in figure 5.

We have calculated  $\beta(\omega)$  thanks to [1] for the pendulum modes and we have used  $\beta(\omega) = 1$  for the vibrations of the metal strip. The values of  $1/[Q\beta(\omega)]$  are fitted, using equation (20) plus two Lorentz absorption curves to represent resonances of the support.  $\Delta$  and  $\omega_r$ , given by the fit, compare well with theoretical predictions (see table 3). There is no theoretical value for  $\phi_0$  but our fitted value,  $\phi_0 = (6.7 \pm 1.8) \times 10^{-4}$ , is in the range,  $(0.5 - 7) \times 10^{-4}$ , of the measurements of [23] for various metals and alloys.

## 8. Conclusion

We have built a pendulum suspended by a metal strip of variable length, a magnetic induction velocity sensor and a position shadow sensor. These very sensitive sensors have been used to measure the resonance frequencies and the damping time constant of four different vibration modes as a function of the metal strip length. The measured frequencies are in a good agreement with the theory of the pendulum vibration modes [1] and with the theory of stiff piano strings [16–19] for the metal strip modes.

We have also studied in detail three contributions to pendulum damping.

- Air friction forces are quadratic in the pendulum velocity  $v$  when  $v$  is large. We have observed the resultant non-exponential decay, in excellent agreement with theory. When the velocity is low enough to be in the Stokes regime, the decay is exponential but air friction forces give a negligible contribution to the observed damping.
- The coupling of the pendulum to resonances of the support induce resonant variations of  $1/Q$  where  $Q$  is the quality factor of a pendulum mode when the frequency of this mode is equal to the one of a resonance of the support. We have studied two such resonances and one of them is well described by the case where the damping dominates the coupling. The theory of this case is described in an other paper [11] which points out an interesting analogy between classical and quantum mechanics.
- When the pendulum frequency is not close to a resonance frequency of its support, the dominant source of damping of our pendulum is anelastic effect in the metal strip. The theory of this effect, due to Zener [8, 9], relates the magnitude and the frequency dependence of this effect to properties of the metal strip. Our measurements are well explained by this theory and the parameters describing the magnitude and the frequency dependence of this damping are also in good agreement with their theoretical values.

Although these last two effects are the dominant sources of damping in our experiment and probably in many similar experiments, they have not received much attention in the tutorial literature.

## Acknowledgments

We thank CNRS INP, ANR (ANR-11-BS04-016-01 HIPATI) and Région Midi-Pyrénées for supporting our research. We thank Matthias Büchner, Alexandre Gauguet, Laurent Polizzi, Julien Mauchain and Xavier Jacob for their help.

## References

- [1] Dolfo G and Vigué J 2015 A more accurate theory of a flexible-beam pendulum *Am. J. Phys.* **83** 525–30
- [2] Stokes G G 1851 On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums *Trans. Camb. Phil. Soc.* **9** 8–106
- [3] Miller B J 1974 More realistic treatment of the simple pendulum without difficult mathematics *Am. J. Phys.* **42** 298–303
- [4] Crawford F S 1975 Damping of a simple pendulum *Am. J. Phys.* **43** 276–7
- [5] Nelson R A and Olsson M G 1986 The pendulum—rich physics from a simple system *Am. J. Phys.* **54** 112–21
- [6] Squire P T 1986 Pendulum damping *Am. J. Phys.* **54** 984–91
- [7] Kostov Y, Morshed R, Höling B, Chen R and Siegel P B 2008 Period-speed analysis of a pendulum *Am. J. Phys.* **76** 956–62
- [8] Zener C 1937 Internal friction in solids: I. Theory of internal friction in reeds *Phys. Rev.* **52** 230–5
- [9] Zener C 1938 Internal friction in solids: II. General theory of thermoelastic internal friction *Phys. Rev.* **53** 90–9
- [10] Saulson P R 1990 Thermal noise in mechanical experiments *Phys. Rev. D* **42** 2437–45
- [11] Dolfo G and Vigué J 2016 Classical analogue of the continuous transition between the Weisskopf–Wigner exponential decay and the Rabi oscillation [arXiv:1606.06153](https://arxiv.org/abs/1606.06153)
- [12] Landau L and Lifschitz E 1986 *Theory of Elasticity* 3rd edn (New York: Pergamon)
- [13] British Stainless Steel Association website <http://bssa.org.uk/>

- [14] Tashiro K, Inoue S-I and Wakiwake H 2010 Sensitivity limits of a magnetometer with an air-core pickup coil *Sensors Transducers J.* **9** 171–81
- [15] Podlesak M and Lee A R 1986 A photovoltaic detector for string vibration measurement *J. Acoust. Soc. Am.* **79** 2092–3
- [16] Donkin W F 1884 *Acoustics* 2nd edn (Oxford: Clarendon) p 187
- [17] Rayleigh L 1894 *The Theory of Sound* vol 1 (London: MacMillan) pp 298–301
- [18] Morse P M 1948 *Vibration and Sound* (New York: McGraw-Hill)
- [19] Fletcher H 1964 Normal vibration frequencies of a stiff piano string *J. Acoust. Soc. Am.* **36** 203–9
- [20] Landau L and Lifschitz E 1987 *Fluid Mechanics* 2nd edn (Oxford: Butterworth-Heinemann)
- [21] Finn R K 1953 Determination of the drag on a cylinder at low Reynolds numbers *J. Appl. Phys.* **24** 771–3
- [22] Tomotika S and Aoi T 1953 The steady flow of a viscous fluid past an elliptic cylinder and a flat plate at small reynolds number *Q. J. Mech. Appl. Math.* **6** 290–312
- [23] Cagnoli G, Gammaconi L, Kovalik J, Marchesoni F and Punturo M 1999 Low-frequency internal friction in clamped-free thin wires *Phys. Lett. A* **255** 230–5

### 3 Amortissement par les courants de Foucault

#### 3.1 Expérience

De nombreuses expériences pédagogiques [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] utilisent l'amortissement d'un mouvement par les courants de Foucault et, si la géométrie est suffisamment simple, les mesures de cet amortissement sont comparées à leur valeur théorique. Nous avons effectué une expérience de ce type avec notre pendule en plaçant un anneau conducteur centré sur l'axe horizontal qui porte l'aimant et à une distance  $y_r$  de la position d'équilibre du pendule. Quand le pendule oscille, le champ magnétique créé par l'aimant que porte le pendule varie au niveau de cet anneau et des courants de Foucault sont induits. Selon la loi de Lenz, les courants induits vont freiner le mouvement du pendule. L'énergie perdue par effet Joule dans l'anneau est prélevée sur l'énergie du pendule et cette nouvelle source d'amortissement réduit le coefficient de qualité  $Q$  du pendule.

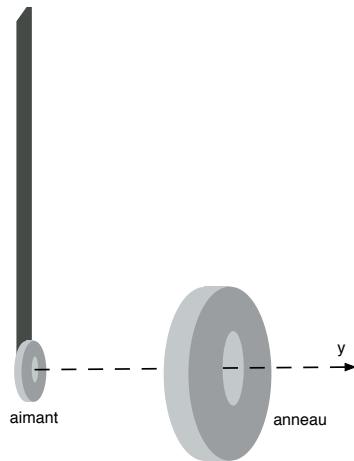


FIGURE 4.1 – Schéma de l'expérience pour l'amortissement par courants de Foucault. La distance  $y_r$  est celle séparant le plan central de l'aimant de la face avant de l'anneau.

#### 3.2 Modélisation

L'anneau conducteur est formé de Dural (alliage AU4G ou, en utilisant la notation actuelle, 2017A) et ses dimensions sont : rayon intérieur  $r_i = 12.7$  mm, rayon extérieur  $r_e = 22.7$  mm, épaisseur  $w = 10.0$  mm. Sa conductivité électrique est [19]  $\sigma_{el} = 1/(5.1 \times 10^{-8})$  S/m.

Nous avons utilisé le mode pendulaire avec un réglent de longueur  $l = 150 \pm 1$  mm, ce qui correspond à une fréquence  $f_1 = 1.00 \pm 0.02$  Hz, mesurée sur la FFT de l'oscilloscope. J'ai mesuré le coefficient de qualité  $Q$  du pendule en fonction de la distance  $y_r$  aimant-anneau et les valeurs mesurées de  $1/Q$  sont représentées sur la figure 4.2 : les pertes par courants de Foucault augmentent très rapidement quand  $y_r$  décroît.

Nous pouvons calculer la contribution des courants de Foucault à l'inverse de  $Q$

$$\left(\frac{1}{Q}\right)_{Foucault} = \frac{L_{Foucault}}{2\pi E_{tot}} \quad (4.1)$$

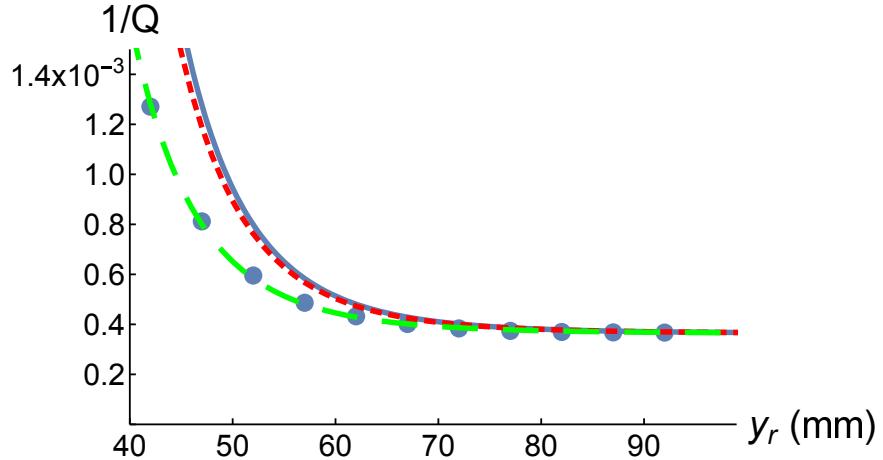


FIGURE 4.2 – Amortissement du pendule par les courants de Foucault dans l’anneau : l’inverse  $1/Q$  du coefficient de qualité  $Q$  est tracé en fonction de la distance  $y_r$  de l’anneau de Dural à la position d’équilibre du pendule. Les points sont les valeurs mesurées et les courbes représentent les résultats théoriques : la courbe en trait plein bleu traite le champ magnétique comme ayant dans tout l’anneau la valeur pour  $r = 0$ ; la courbe en tiretés courts rouges prend en compte la dépendance du champ avec la distance radiale  $r$  mais pas sa dépendance en  $y$ ; la courbe en tiretés longs verts prend en compte ces deux dépendances.

où  $E_{tot}$  est l’énergie totale du pendule et  $L_{Foucault}$  l’énergie perdue dissipée dans l’anneau par effet Joule durant une période  $T$ . La densité de puissance de l’effet Joule par unité de volume est donnée par  $dP/dV = \sigma_{el}\mathbf{E}^2$  où  $\mathbf{E}$  est le champ électrique produit par induction et  $\sigma_{el}$  la conductivité électrique du milieu. L’énergie dissipée  $L_{Foucault}$  durant une période du mouvement est donnée par l’intégration de  $dP/dV$  sur le volume de l’anneau et sur une période d’oscillation

$$L_{Foucault}(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} dt' \int_{anneau} \sigma_{el} \mathbf{E}^2(t') d^3V. \quad (4.2)$$

Grâce à la symétrie cylindrique du problème, qui est exacte quand le pendule est à sa position d’équilibre et qui reste une excellente approximation pour les très petites amplitudes d’oscillation, le champ électrique est tangentiel et constant sur tout cercle de rayon  $r$  centré sur l’axe commun à l’anneau et à l’aimant. Le module du champ électrique  $E_t(r, y)$  est donné par l’équation de Maxwell–Faraday où la variation du champ magnétique résulte du déplacement de l’aimant avec une vitesse  $dy_M/dt$ .

L’épaisseur de peau  $\delta$  dans le dural est beaucoup plus grande que l’épaisseur de dural : en effet,  $\delta = \sqrt{2/(\mu_0\sigma_{el}\omega)}$  qui vaut  $\delta = 0.113$  m à une fréquence  $\omega/(2\pi) = 1$  Hz. On peut donc considérer que le champ magnétique de l’aimant à l’intérieur du dural est pratiquement le même qu’en l’absence de l’anneau. On a donc

$$E_t(r, y) = -\frac{1}{2\pi r} \int_0^r 2\pi r_1 dr_1 \frac{\partial B_y(r_1, y)}{\partial y} \frac{dy_M}{dt} \quad (4.3)$$

$$\approx -\frac{r}{2} \frac{\partial B_y(0, y_r)}{\partial y} \frac{dy_M}{dt}. \quad (4.4)$$

Le résultat approximatif (4.4) est valable seulement si le rayon extérieur de l’anneau est pe-

tit devant la distance  $y_r$  et si l'épaisseur de l'anneau  $w$  est aussi petite devant  $y_r$ . Avec cette approximation, l'intégration sur le volume de l'anneau et sur une période d'oscillation est très simple :

$$L_{Foucault} = \frac{\pi}{16} \sigma_{el} w (r_e^4 - r_i^4) \left( \frac{\partial B_y(0, y_r)}{\partial y} \right)^2 (\omega y_M)_{max}^2 \quad (4.5)$$

Une approximation supplémentaire consiste à remplacer le champ de l'aimant par celui d'un dipôle ponctuel situé en son centre. Cette approximation n'est pas bonne pour les distances  $y_r \lesssim 50$  mm pour lesquelles on observe un effet notable. La figure 4.2 présente les résultats théoriques utilisant soit le calcul sans approximation du champ (voir ci-dessous) soit des approximations utilisées pour calculer l'intégrale de l'équation (4.2).

Pour calculer sans approximation la dérivée  $\partial B_y(r, y)/\partial y$  du champ magnétique créé par l'anneau aimanté, j'utilise le potentiel scalaire du champ magnétique qui est donné par les équations 8-10 and 8-11 du livre de Panofsky et Phillips [20]. L'aimantation  $\mathbf{M}$  est supposée uniforme, parallèle à l'axe  $y$  et dans ce cas, l'intégrale de volume figurant dans l'équation 8-11 est nulle. Le champ magnétique en un point  $P$  situé en dehors de l'aimant est donné par

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{M}(P') \cdot d\mathbf{S}(P) \frac{\mathbf{P}'\mathbf{P}}{P'P^3} \quad (4.6)$$

où le point  $P'$  balaie la surface de l'aimant et en pratique seulement les deux faces en  $y = \pm w_m/2$ . J'utilise des coordonnées cylindriques adaptées à la symétrie du problème autour de l'axe  $y$ , avec  $r$  et  $\theta$  dans un plan perpendiculaire à cet axe. En notant  $r'$ ,  $\theta'$  les coordonnées du point  $P'$  et  $r, \theta$  celles du point  $P$  (grâce à la symétrie, je peux prendre  $\theta = 0$ ) et j'obtiens pour  $B_y(r, y)$

$$B_y(r, y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=\pm 1} k M \int r' dr' d\theta' \frac{y - (kw_m/2)}{\left[ (y - \frac{kw_m}{2})^2 + (r - r' \cos \theta')^2 + r'^2 \sin^2 \theta' \right]^{3/2}} \quad (4.7)$$

Il n'existe pas d'expression analytique simple de ces intégrales et j'ai utilisé Mathematica [21] pour évaluer  $B_y(r, y)$ , sa dérivée  $\partial B_y(r, y)/\partial y$  et l'intégrale de l'équation (4.2).

## 4 Conclusion

Les expériences sur le pendule à lame élastique ont apporté de nombreux résultats très intéressants :

- les mesures de fréquence des deux mouvements du pendule sont en bon accord avec la théorie développée dans le précédent chapitre.
- les fréquences mesurées de vibration de la lame élastique sont grandes devant les fréquences du pendule, justifiant ainsi l'approximation d'équilibre pour décrire la lame élastique durant le mouvement du pendule, et ces fréquences sont bien décrites par les équations de la corde du piano.
- l'amortissement par friction sur l'air est bien décrit par une force quadratique en vitesse pour les vitesses élevées. Aux plus basses vitesses, l'amortissement devient exponentiel, ce qui est compatible avec une force linéaire en vitesse (régime de Stokes), mais l'accord sur la valeur de la force avec la théorie n'était pas bon. Il pouvait y avoir au moins deux raisons pour cela : d'une part la forme du pendule ne se prête pas à un calcul rigoureux et d'autre part il convenait de lieux prendre en compte les spécificités de la force de Stokes pour un mouvement oscillant [1]. Le chapitre 7 étudie cette question en détail avec des pendules dont la forme correspond aux calculs de Stokes.

- l'amortissement par couplage aux résonances du support a été observé de manière inattendue : cette observation a été rendue possible par la grande gamme de fréquence du “rolling mode”. Cette observation a motivé le travail théorique du chapitre 6 et j'ai pu ainsi expliquer de manière très satisfaisante les observations.
- l'amortissement par l'effet anélastique a été observé. Cet effet d'origine thermique a une signature en fréquence assez simple (une Lorentzienne de dispersion centrée à la fréquence nulle). Cet effet est très intéressant parce qu'il est très général et parce que les idées physiques qui l'expliquent sont simples. Notre pendule n'est pas le meilleur système pour l'étudier, en particulier à cause de l'amortissement par couplage aux résonances du support. Le montage de Cagnoli *et al.* [70] qui est simple, permet de mesurer cet effet sur des fils formés de matériaux variés.
- j'ai mesuré l'amortissement du pendule par courants de Foucault et la géométrie de symétrie cylindrique m'a permis de calculer l'amortissement, en très bon accord avec les mesures.

Quand j'ai commencé les mesures sur ce pendule à lame élastique, je ne pensais absolument pas que ce sujet se révèlerait aussi riche et qu'il formerait un très grosse partie de ma thèse. Cela est dû largement à l'usage de détecteurs très sensibles donnant un signal électrique proportionnel à la vitesse ou au déplacement du pendule. La plupart des articles récemment publiés sur le pendule utilisent aussi des détecteurs donnant un signal électrique et l'introduction de tels détecteurs permet de mesurer facilement des petits effets pratiquement inaccessibles autrement. Le chapitre 7 sur l'amortissement par les forces de Stokes illustrera cette évolution.

# Bibliographie

- [1] G. Dolfo, D. Castex, and J. Vigué, “Damping mechanisms of a pendulum,” *Eur. J. Phys.* **55**, 065004 (2016).
- [2] W.F. Donkin, *Acoustics*, Clarendon Press, Oxford, (1884), 2nd ed., p. 187.
- [3] Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, MacMillan and Co. Ltd., London (1894), Vol. 1, pp. 298-301.
- [4] P.M. Morse, *Vibration and Sound*, McGraw-Hill, New York (1948).
- [5] H. Fletcher, “Normal vibration frequencies of a stiff piano string,” *J. Acoust. Soc. Am.* **36**, 203–209 (1964).
- [6] G.G Stokes, “On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums,” *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol IX, part II, 8-106 (1851).
- [7] R. A. Nelson and M. G. Olsson, “The pendulum—Rich physics from a simple system,” *Am. J. Phys.* **54**, 112–121 (1986).
- [8] G. Cagnoli, L. Gammaitoni, J. Kovalik, F. Marchesoni, and M. Punturo “Low-frequency internal friction in clamped-free thin wires,” *Phys. Lett. A* **255**, 230—235 (1999).
- [9] A. Heptonstall *et al.*, “Enhanced characteristics of fused silica fibers using laser polishing,” *Class. Quantum Grav.* **31**, 105006 (2014).
- [10] M.A. Heald, “Magnetic braking : Improved theory,” *Am. J. Phys.* **56**, 521–522 (1988).
- [11] H.D. Wiederick, N. Gauthier, D.A. Campbell, and P. Rochan, “Magnetic braking : Simple theory and experiment,” *Am. J. Phys.* **55** 500—503 (1987).
- [12] C.S. MacLatchy, P. Backman, and L. Bogan, “A quantitative magnetic braking experiment,” *Am. J. Phys.* **61**, 1096–1101 (1993).
- [13] L.H. Caldwell, “Magnetic damping : Analysis of an eddy current brake using an airtrack,” *Am. J. Phys.* **64**, 917–923 (1996).
- [14] K.D. Hahn, E.M. Johnson, A. Brokken, and S. Baldwin , “Eddy current damping of a magnet moving through a pipe,” *Am. J. Phys.* **66**, 1066–1076 (1998).
- [15] M.I. Gonzalez, “Experiments with eddy currents : the eddy current brake,” *Eur. J. Phys.* **25**, 463–468 (2004).
- [16] M.H. Partori and E.J. Morris, “Electrodynamics of a magnet moving through a conducting pipe,” *Canadian Journal of Physics* **84**, 253—271 (2006).
- [17] Y. Levin, S.L. Da Silveira and F.B. Rizzato, “Electromagnetic braking : A simple quantitative mode,” *Am. J. Phys.* **74**, 815–817 (2006).
- [18] G. Ireson and J. Twidle, “Magnetic braking revisited : Activities for the undergraduate laborator,” *Eur. J. Phys.* **29**, 745—751 (2008).

- [19] Web site : [www.euralliage.com/2017A.htm#pro](http://www.euralliage.com/2017A.htm#pro)
- [20] W.K.H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, (Addison-Wesley, Reading, Mass. USA, 2nd ed. 1962)
- [21] Mathematica, Version 10.4, Wolfram Research, Inc., Champaign, IL (2016).

## Chapitre 5

# Oscillateurs harmoniques couplés

### 1 Introduction

L'étude de la dynamique d'oscillateurs harmoniques couplés est tout à fait classique mais la plupart des études sont faites sans tenir compte de l'amortissement. La présence d'amortissement a des conséquences très intéressantes car il apparaît alors deux régimes de fonctionnement en fonction de la force relative de l'amortissement et du couplage. Si le couplage domine l'amortissement en un sens qui sera explicité plus loin, il y a un échange d'énergie périodique entre les deux oscillateurs tandis que l'énergie totale décroît. Dans le cas contraire, le transfert d'énergie de l'oscillateur le moins amorti vers l'autre oscillateur se fait de manière irréversible. La transition entre les deux régimes se fait en passant par un point exceptionnel pour lequel un traitement particulier est nécessaire.

La nature de ce qu'est un point exceptionnel ne fait pas partie de l'enseignement élémentaire de la physique. Quand on considère une famille de matrices non hermitiennes dépendant d'un ou de plusieurs paramètres, il existe des points dans l'espace des paramètres pour lesquels la matrice n'est pas diagonalisable. En ces points, des valeurs propres sont dégénérées et l'espace propre associé ces valeurs propres dégénérées a une dimension strictement inférieure à la dégénérence : ces points sont des points exceptionnels [1]. On peut donc rencontrer des points exceptionnels dans tous les domaines de la physique régis par des équations différentielles linéaires, du moment que la matrice associée n'est pas hermitienne : c'est le cas, en particulier, dès que des phénomènes de dissipation de l'énergie sont pris en compte.

Ce travail théorique a été motivé par les résultats présentés dans la section 6 de notre article “Damping mechanisms of a pendulum” qui est reproduit dans le chapitre 5 : les résonances observées sur l'inverse du coefficient de qualité  $Q$  étaient difficiles à expliquer par un traitement perturbatif de l'amortissement dans un problème d'oscillateurs couplés. En effet, si on couple deux oscillateurs non amortis, on trouve que les modes normaux sont, dans le cas de la résonance, formés des combinaisons symétrique et antisymétrique des deux oscillateurs. Un traitement perturbatif des effets d'amortissement prédit alors le même amortissement pour les deux modes normaux : ce résultat est correct à la limite où le couplage est très largement dominant par rapport aux effets d'amortissement mais il est évidemment faux quand ce n'est pas le cas.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Après cette introduction, je présente les difficultés rencontrées pour publier l'article “Damping of coupled harmonic oscillators”, difficultés qui nous ont contraints à approfondir notre analyse et à modifier considérablement le contenu de notre article. Ces introductions faites, j'ai inséré cet article tel qu'il a été publié. Je complète l'article par une analyse de l'effet d'amortissement différentiel des modes normaux, un point à peine

discuté dans notre article. J'explique ensuite l'analogie entre le calcul d'oscillateurs couplés et amortis et la transition continue entre la décroissance de Wigner-Weisskopf et l'oscillation de Rabi en physique quantique. Une brève conclusion termine ce chapitre. Je présente en appendice une série d'exemples de points exceptionnels issus de domaines variés de la physique.

## 2 Difficultés pour publier cet article

Une première version de cet article a été soumise à l'American Journal of Physics en Juillet 2016. Les critiques des referees nous ont poussé à une révision très complète. L'article resoumis en Janvier 2017 a été rejeté, un des referees prétendant que notre article n'apportait rien de neuf par rapport à l'article de S.R.-K. Rodriguez, "Classical and quantum distinction between weak and strong coupling," [2]. Nous avons protesté puisque cet article prétendait, à tort, que le couplage fort des oscillateurs classiques correspondait à un couplage supérieur à la somme des taux de décroissance alors que ce couplage doit être seulement supérieur à la différence de ces taux. Malgré notre protestation argumentée, David Jackson, éditeur de l'American Journal of Physics, a pris la décision de rejeter notre article. Il s'appuyait sur l'avis "of a member of the AJP advisory board who is an experienced AJP reviewer and one who has expertise in this area of physics". Dans cet avis, le dernier paragraphe mérite d'être cité :

"My impression is that the discussion by Rodriguez seems a little more insightful in terms of the physical "meaning" and larger implications compared the present manuscript. Based on this last observation, I would lean toward not accepting the manuscript. It is too close to the EJP article (even though it has a slightly different bent and does not duplicate it), while also being somewhat inferior in its presentation value for a physics audience. I can see why this may be a tough/close decision, but at the end of the day I would favor rejection."

Notre lettre de protestation montrait très clairement l'erreur de S.R.-K. Rodriguez [2], ce qui n'a pas empêché le rejet de notre article. Une discussion fausse a donc semblé à ce membre du conseil éditorial "more insightful" que des résultats exacts : les "fake news" ne sont donc pas une exclusivité du monde politique !

Nous avons corrigé cet article et la version corrigée a été soumise à l'European Journal of Physics en Juillet 2017. Nous avions mis l'accent sur les points exceptionnels, ce qui nous a attiré des critiques d'un referee grand spécialiste de ce domaine. Nous avons donc dû encore modifier notre manuscrit pour répondre à ces critiques et l'article a été finalement accepté le 1/12/2017.

## 3 Notre article " Damping of coupled harmonic oscillators "

# Damping of coupled harmonic oscillators

Gilles Dolfo and Jacques Vigué 

Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité-IRSAMC Université de Toulouse-UPS and CNRS UMR 5589 118, Route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex, France

E-mail: [jacques.vigue@irsamc.ups-tlse.fr](mailto:jacques.vigue@irsamc.ups-tlse.fr)

Received 20 July 2017, revised 15 November 2017

Accepted for publication 1 December 2017

Published 15 February 2018



## Abstract

When two harmonic oscillators are coupled in the presence of damping, their dynamics exhibit two very different regimes depending on the relative magnitude of the coupling and damping terms. At resonance, when the coupling has its largest effect, if the coupling dominates the damping, there is a periodic exchange of energy between the two oscillators while, in the opposite case, the energy transfer from one oscillator to the other one is irreversible. We prove that the border between these two regimes goes through an exceptional point and we briefly explain what is an exceptional point. The present paper is written for undergraduate students, with some knowledge in classical mechanics, but it may also be of interest for graduate students.

**Keywords:** coupled oscillators, weak and strong coupling, exceptional point, critical damping

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

## 1. Introduction

The dynamics of two coupled harmonic oscillators is a very classic problem but most textbooks ignore the effect of damping. An exception is the book *Mechanical vibrations* by J P Den Hartog [1] who discusses the optimum damping of an oscillator by coupling it to another oscillator. This vibration damper, initially patented by Frahm [2] in 1911, has been improved many times, and a very spectacular application is the damping of the oscillations of high-rise buildings [3].

The presence of damping in a system of two coupled oscillators has some very interesting consequences: this problem has been studied by W D Heiss and co-workers [4, 5], who showed the existence of an exceptional point. Exceptional points are the subject of many research papers too numerous to be quoted here but, as an introduction to this domain, we have selected a few references [6–10] and we briefly describe the dynamics at an exceptional point, with the critical regime of a damped harmonic oscillator as an illustration [11]. This description has

been written for undergraduate students, who have some knowledge of matrix algebra. The rest of the paper, devoted to the coupled oscillator problem, aims at the same level, the numerous equations being derived step by step.

The goal of the present paper is to analyse the energy exchange between two coupled oscillators in the presence of damping. While the [4, 5] study the permanent regime under continuous excitation, we study the oscillation frequencies of the normal modes and their damping rates and we calculate the decay of the energy as a function of time. This system exhibits two different regimes depending if the coupling effect or the damping effect is dominant. In the strong coupling regime, at resonance (i.e. if the uncoupled oscillators have the same frequency), if only one oscillator is initially excited, the total energy is periodically exchanged between the two oscillators while it decreases because of damping. In the weak coupling regime, the energy transfer between the oscillators is irreversible.

The paper is organised as follows. A brief introduction to exceptional points is presented in section 2. Section 3 introduces the equations of two damped coupled oscillators, exhibits the exceptional points and analyzes the resonant frequencies on both sides of an exceptional point. Section 4 discusses the dynamics of the energy exchange between the two oscillators by analytic and numerical calculations, thus firmly establishing the location of the border between the weak and strong coupling regimes. Section 5 summarises the results of this study. An [appendix](#) presents some details of the calculations.

## 2. A brief introduction to exceptional points

The expression ‘exceptional point’ was introduced by Kato [12], while many other expressions such as ‘branch points, hidden crossings, double pole of the  $\mathbf{S}$  matrix’ have been used by physicists [9]. Exceptional points are a generic property of eigenvalue problems so that they are encountered in many fields of physics [7–10]. We give a brief introduction focused on the dynamics in the presence of an exceptional point.

### 2.1. Dynamics in the presence of an exceptional point

We consider a system of  $n$  linear first-order differential equations

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{V}, \quad (1)$$

where  $\mathbf{V}$  is a vector of dimension  $n$  and  $\mathbf{M}$  is a  $n \times n$  square matrix. Knowing the initial vector  $\mathbf{V}(0)$ , the vector  $\mathbf{V}(t)$  is given by

$$\mathbf{V}(t) = \exp[\mathbf{M}t]\mathbf{V}(0), \quad (2)$$

where the exponential of a matrix is given by the power series of the exponential function.

If the matrix  $\mathbf{M}$  can be diagonalized, its eigenvectors  $\mathbf{A}_k$  (associated eigenvalue  $\lambda_k$ ) form a basis set. The matrix  $\mathbf{P}$  formed of these column vectors is invertible and we can write  $\mathbf{M} = \mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$  where  $\Lambda$  is the diagonal matrix with the eigenvalues  $\lambda_k$  on its diagonal. Then  $\exp[\mathbf{M}t] = \mathbf{P}\exp[\Lambda t]\mathbf{P}^{-1}$ , from which we deduce  $\mathbf{V}(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \sum_{k=1,n} \alpha_k \mathbf{A}_k \exp(\lambda_k t), \\ \text{with } \alpha_k &= \sum_{l=1,n} [\mathbf{P}^{-1}]_{kl} \mathbf{V}_l(0). \end{aligned} \quad (3)$$

But, in some cases, the matrix  $\mathbf{M}$  cannot be diagonalized: this occurs if  $m > 1$  eigenvalues are equal and if the dimension of the associated eigenspace is smaller than  $m$  (for simplicity, we consider that this dimension is equal to 1). When this occurs, for instance when a parameter of the non-Hermitian matrix is varied, the coalescence of  $m$  eigenvalues and  $m$  eigenvectors is an exceptional point of order  $m$ . In this case, a special treatment is needed [13].

Let us consider an exceptional point with (at least) one degenerate eigenvalue  $\lambda_k$  with a degeneracy equal to  $m_k$ . In this case, an invertible matrix  $\mathbf{P}$  transforms the matrix  $\mathbf{M}$  in its Jordan normal form  $\mathbf{J}$  with  $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$ :  $\mathbf{J}$  is a block-diagonal matrix and the block  $\mathbf{J}_k$  corresponding to the eigenvalue  $\lambda_k$  is an upper triangular  $m_k \times m_k$  matrix which can be written<sup>1</sup>

$$\mathbf{J}_k = \lambda_k \mathbf{I}_{m_k} + \mathbf{N}, \quad (4)$$

where  $\mathbf{I}_{m_k}$  is the  $m_k \times m_k$  identity matrix and each non-zero off-diagonal entry of the matrix  $\mathbf{N}$  is equal to 1 and is located immediately above the main diagonal. The matrix  $\mathbf{N}$  is nilpotent, which means that its powers larger than  $(m_k - 1)$  are vanishing. As the matrices corresponding to the different Jordan blocks commute with each other, we consider only one Jordan block  $\mathbf{J}_k$ . The calculation of  $\exp[\mathbf{M}t] = \mathbf{P}\exp[\mathbf{J}_k t]\mathbf{P}^{-1}$  is easy because  $\mathbf{N}$  obviously commutes with  $\mathbf{I}_{m_k}$ :

$$\begin{aligned} \exp[\mathbf{J}_k t] &= \exp(\lambda_k t) \exp[\mathbf{N}t], \\ &= \exp(\lambda_k t) \left[ \sum_{m=0}^{m_k-1} \frac{\mathbf{N}^m t^m}{m!} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

from which we deduce the solution

$$\mathbf{V}(t) = \exp(\lambda_k t) \mathbf{P} \left[ \sum_{m=0}^{m_k-1} \frac{\mathbf{N}^m t^m}{m!} \right] \mathbf{P}^{-1} \mathbf{V}(0). \quad (6)$$

As the matrices  $\mathbf{P}$  and  $\mathbf{N}$  are independent of the time  $t$ , the solution is the product of a polynomial in  $t$  of degree  $(m_k - 1)$  by the exponential  $\exp(\lambda_k t)$ .

## 2.2. A well-known exceptional point: the critical damping of an harmonic oscillator

This problem is one of the simplest and oldest examples of exceptional point [11]. Newton's equation writes

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\gamma \frac{dx}{dt} - m\omega_0^2 x, \quad (7)$$

where  $x$  is the real coordinate,  $-m\gamma dx/dt$  is the friction force and  $-m\omega_0^2 x$  is the restoring force. Using complex notations  $\tilde{x}$ , with  $x = \text{Re}[\tilde{x}]$ , we search for a solution  $\tilde{x}(t) = a \exp(\lambda t)$ .  $\lambda$  verifies

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (8)$$

The roots  $\lambda_{\pm} = (-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2})/2$  are real if  $\gamma > 2\omega_0$ , complex if  $\gamma < 2\omega_0$  and equal if  $\gamma = 2\omega_0$ . If we except this last case, the solutions of equation (7) are given by

$$x(t) = \text{Re}[a_+ \exp(\lambda_+ t) + a_- \exp(\lambda_- t)]. \quad (9)$$

<sup>1</sup> We have used the articles 'Jordan normal form' and 'Square root of a matrix' on English Wikipedia.

The amplitudes  $a_{\pm}$  are deduced from the initial condition, the values of  $x$  and  $dx/dt$  at  $t = 0$ : this gives two real equations which are not sufficient to define the two complex amplitudes  $a_{\pm}$  i.e. four real quantities. However, the solution  $x(t)$  depends only on two combinations  $\text{Re}(a_+ + a_-)$  and  $\text{Im}(a_+ - a_-)$  which are defined by the initial condition. This point is rarely noticed as, usually, one writes directly the solution  $x(t)$  in real form.

In the critical damping case,  $\gamma = 2\omega_0$ , the roots  $\lambda_{\pm}$  are equal to  $-\gamma/2$  and equation (9) is not valid. If we try a solution  $x(t) = a(t)\exp(-\gamma t/2)$ , we get  $d^2a/dt^2 = 0$  from which we deduce  $x(t) = (a_0 + a_1 t)\exp(-\gamma t/2)$ ,  $a_0$  and  $a_1$  being deduced from the initial condition. This solution is of the type described by equation (6), corresponding to an exceptional point with two degenerate eigenvalues. To prove that this behaviour is well due to an exceptional point, we reformulate Newton's equation as a system of two first-order differential equations, following equation (1), with  $\mathbf{V}$  and  $\mathbf{M}$  given by

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} x \\ dx/dt \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{bmatrix}. \quad (10)$$

The eigenvalues of the matrix  $\mathbf{M}$  are the roots of the polynomial  $\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$  which is identical to equation (8): the critical damping regime, which corresponds to the degeneracy of the two eigenvalues of the matrix  $\mathbf{M}$ , is an exceptional point.

### 2.3. Other properties of exceptional points

An exceptional point corresponds to a given value of a parameter of the matrix  $\mathbf{M}$  and, when this parameter is varied in the neighbourhood of this exceptional point, the variations of the eigenstates and of the eigenvalues exhibit very interesting properties [14–18] and in particular the existence of a chiral behaviour. These fascinating results are out of the scope of this brief introduction. Some of these predictions have been recently tested with a system of coupled optomechanical oscillators [11, 19].

## 3. Two coupled harmonic oscillators

We consider the example of mechanical harmonic oscillators but the results can be applied to any type of harmonic oscillator.

### 3.1. Newton's equations of two coupled harmonic oscillators

We write Newton's equations for two coupled harmonic oscillators, for instance two pendulums coupled by a spring or a double pendulum or two masses coupled by springs together and to the lab frame. In all cases, we assume that the motion of each individual object is 1D and that it is harmonic. The harmonic approximation is good when the following conditions are fulfilled: for a pendulum, if its oscillation amplitude is small enough [20]; for an oscillator involving springs, if the spring deformations remain inside the limit of validity of Hooke's law [21] and if the spring masses are small enough so that one can describe the spring deformations in a quasi-static approximation [22] (this is equivalent to say that the velocity of the waves propagating on the spring is very large). If we note  $x_1$  and  $x_2$  the displacements from equilibrium, Newton's equations are

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k_1 x_1 - k_{12}(x_1 - x_2), \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_2 x_2 - k_{12}(x_2 - x_1), \end{aligned} \quad (11)$$

where the damping forces have been omitted. Rather than using friction forces proportional to the velocity, as in equation (7) or in the papers [4, 5], we use anelastic damping terms [23–25], i.e. a restoring force not in phase with the displacement. This choice simplifies the calculation (see equation (15)) and, in the limit of weak damping, the two types of damping terms are equivalent near resonance. Then, using complex notations, the restoring force is proportional to  $(1 + i\phi)\tilde{x}$ , where  $\phi$  is an odd function of the oscillation frequency  $\text{Re}(\omega)$ , with  $\phi$  and  $\text{Re}(\omega)$  being of the same sign in order to produce damping.

Then, noting  $\omega_n^2 + i\omega_n\gamma_n = (k_n(1 + i\phi_n) + k_{12}(1 + i\phi_{12}))/m_n$  for  $n = 1, 2$ ,  $\omega_{12}^2 = k_{12}/m_1$  and  $\omega_{21}^2 = k_{12}/m_2$  (the  $\omega$ 's are all chosen positive), we get

$$\frac{d^2\tilde{\mathbf{X}}}{dt^2} + \mathbf{M}\tilde{\mathbf{X}} = 0, \quad (12)$$

with

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 + i\omega_1\gamma_1 & -\omega_{12}^2(1 + i\phi_{12}) \\ -\omega_{21}^2(1 + i\phi_{12}) & \omega_2^2 + i\omega_2\gamma_2 \end{bmatrix} \text{ and } \tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

The matrix  $\mathbf{M}$  is non-Hermitian but we cannot directly apply the results of section 2 because equation (12) is a system of second-order differential equations and not of first order ones. We can transform equation (12) to a system of four first-order differential equations, following the procedure used to transform equation (7) in (10): this is very convenient for numerical calculations [4, 5] but we found it less convenient for an analytic study. We explain in the appendix how to transform equation (13) in a system of two first-order differential equations.

### 3.2. Frequencies of the normal modes of the coupled oscillators

**3.2.1. Calculation of the frequencies  $\omega_{\pm}$ .** If we search for a solution of the form  $\tilde{\mathbf{X}}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \exp(i\omega t)$ , the vector  $\tilde{\mathbf{A}}$  is solution to the homogeneous system of equations

$$(\mathbf{M} - \omega^2 \mathbf{I})\tilde{\mathbf{A}} = 0. \quad (14)$$

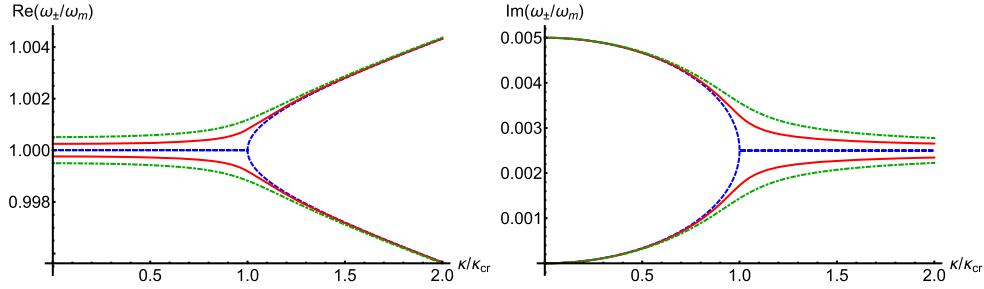
This system has a non-zero solution if its determinant  $\det(\mathbf{M} - \omega^2 \mathbf{I})$  vanishes i.e. if  $\omega^2$  satisfies

$$(\omega^2 - \omega_1^2 - i\omega_1\gamma_1)(\omega^2 - \omega_2^2 - i\omega_2\gamma_2) - \omega_{12}^2\omega_{21}^2(1 + i\phi_{12})^2 = 0. \quad (15)$$

Thanks to the use of anelastic damping terms, equation (15) is a biquadratic equation in  $\omega$  and not a general quartic equation. The roots of equation (15) are

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}^2 &= \frac{1}{2}[\omega_1^2 + \omega_2^2 + i(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2) \\ &\quad \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + i(\omega_1\gamma_1 - \omega_2\gamma_2))^2 + 4\omega_{12}^2\omega_{21}^2(1 + i\phi_{12})^2}]. \end{aligned} \quad (16)$$

Because of the biquadratic nature of equation (15), its roots given by equation (16) come in pairs with opposite values: as the two roots of a pair have opposite imaginary parts, one solution is stable (i.e. decreasing toward 0 when  $t$  tends toward infinity) while the other one is unstable (i.e. diverging when  $t$  tends toward infinity). The only exception is the case where all the roots are real and this is called marginal stability. This question has been thoroughly



**Figure 1.** Variations of the real and imaginary parts of  $\omega_{\pm}/\omega_m$ , where  $\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2$ , as a function of  $\kappa/\kappa_{\text{cr}}$  (we divide  $\omega_{\pm}$  by  $\omega_m$  and not by  $\omega_1$  in order to preserve the symmetry of the plots). The exceptional point at  $\kappa = \kappa_{\text{cr}}$  induces square-root singularities at resonance ( $\omega_2/\omega_1 = 1$  dashed blue curves) which are smoothed if  $\omega_2/\omega_1 \neq 1$ : full red curves for  $\omega_2/\omega_1 = 1.0005$  and dot-dashed green curves for  $\omega_2/\omega_1 = 1.001$  (it suffices to consider the case  $\omega_2 > \omega_1$ , because of the symmetry associated to the exchange of  $\omega_1$  and  $\omega_2$ ). The calculations are done with  $\gamma_1/\omega_1 = 0.01$ ,  $\gamma_2 = 0$ ,  $\kappa_{\text{cr}} = 5 \times 10^{-3}$ .

studied in the stability theory of circulatory systems in mechanics [26, 27]. However, as stated after equation (11), the anelastic forces describe damping only if  $\phi$  and  $\text{Re}(\omega)$  have the same sign. From now on, we consider only positive values of the oscillation frequency  $\text{Re}(\omega)$  and of the phases  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  and  $\phi_{12}$ : all the solutions are then stable.

We now choose  $\omega_1$  as the frequency unit and we define a dimensionless coupling term  $\kappa$  by

$$\kappa \equiv \frac{\omega_{12}\omega_{21}}{\omega_1^2}. \quad (17)$$

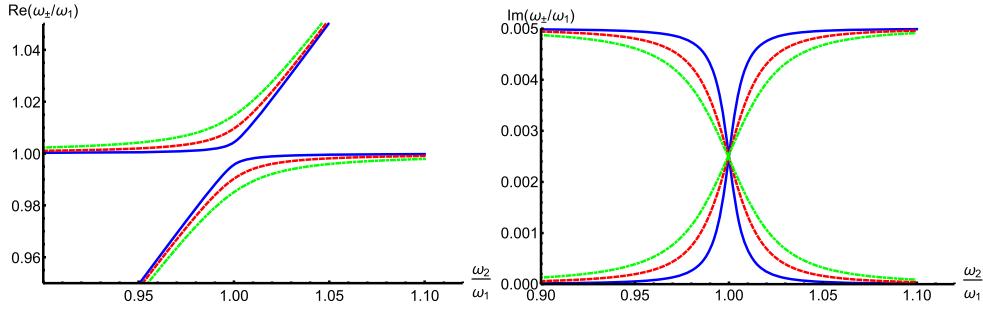
In the following discussion, we assume that  $\kappa$  is small,  $\kappa \ll 1$ , and that the damping phases  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  and  $\phi_{12}$  are also small,  $\phi_1 \ll 1$ ,  $\phi_2 \ll 1$  and  $\phi_{12} \ll 1$ : in this way the resonance of each oscillator is sharp and the coupling term has a noticeable effect only if the two oscillators are very near resonance,  $\omega_2 \approx \omega_1$ .

**3.2.2. The exceptional points.** At an exceptional point, the two roots  $\omega_{\pm}^2$  are equal and this occurs when the square root in equation (16) vanishes. As the real and imaginary parts must both vanish, we get two equations

$$\begin{aligned} \omega_2^2 - \omega_1^2 &= \mp 2\omega_{12}\omega_{21}\phi_{12} = \mp\omega_1^2\kappa\phi_{12} \\ \omega_2\gamma_2 - \omega_1\gamma_1 &= \pm 2\omega_{12}\omega_{21} = \pm\omega_1^2\kappa. \end{aligned} \quad (18)$$

With our assumptions on  $\kappa$  and on  $\phi_{12}$ , we find that, at an exceptional point,  $\omega_1$  and  $\omega_2$  are almost equal. From now on, we assume that  $\phi_{12} = 0$  because this choice simplifies the calculations and reduces the number of parameters involved in the problem. However, this choice forbids the analysis of the vibration damper in which the main damping term is in the coupling term [1] (this case has been studied by Gattulli *et al* [28]). With this assumption, the exceptional points occur exactly at resonance,  $\omega_2 = \omega_1$ , with  $\kappa = \kappa_{\text{cr}}$  defined by

$$\kappa_{\text{cr}} \equiv \frac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{2\omega_1}. \quad (19)$$



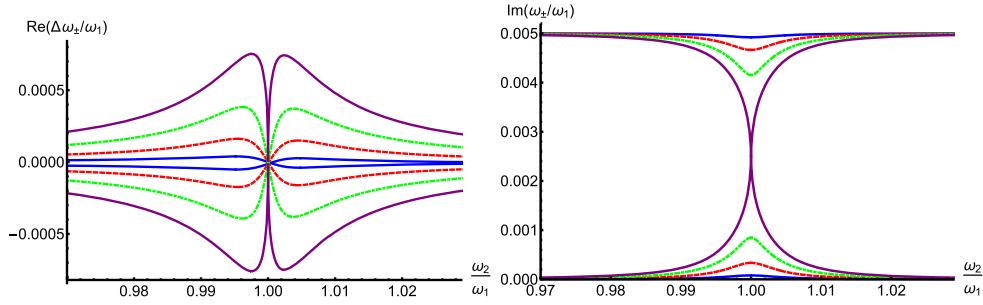
**Figure 2.** Variations of  $\omega_{\pm}$  when  $\kappa > \kappa_{\text{cr}}$ :  $\text{Re}(\omega_{\pm}/\omega_1)$  and  $\text{Im}(\omega_{\pm}/\gamma_1)$  are plotted as a function of the ratio  $\omega_2/\omega_1$  for different  $\kappa$ -values:  $\kappa/\kappa_{\text{cr}} = 2$  full (blue) curves,  $\kappa/\kappa_{\text{cr}} = 4$  dashed (red) curves and  $\kappa/\kappa_{\text{cr}} = 6$  dot-dashed (green) curves (calculations done with  $\gamma_1/\omega_1 = 0.01$ ,  $\gamma_2 = 0$  and  $\kappa_{\text{cr}} = 5 \times 10^{-3}$ ).

Figure 1 illustrates the singularities of the real and imaginary parts of  $\omega_{\pm}$  at the exceptional point and the way they are smoothed when  $\omega_1$  and  $\omega_2$  are slightly different. As these singularities are generic, similar curves can be found in [4, 9, 10]. As the behaviour of the system of two coupled harmonic oscillators is very different on both sides of the exceptional point, we discuss separately the variations of the frequencies  $\omega_{\pm}$  when  $\kappa > \kappa_{\text{cr}}$  or  $\kappa \leq \kappa_{\text{cr}}$ .

**3.2.3. The frequencies  $\omega_{\pm}$  of the normal modes when  $\kappa > \kappa_{\text{cr}}$ .** The real and imaginary parts of the roots  $\omega_{\pm}$  given by equation (16) are plotted as a function of the  $\omega_2/\omega_1$  ratio in figure 2 for different  $\kappa$  values: when this ratio varies, the real parts of  $\omega_{\pm}$  do not cross while the imaginary parts do cross. The behaviour of the real parts is an avoided crossing: if one follows a given normal mode while varying the  $\omega_2/\omega_1$  ratio across resonance, this normal mode continuously changes its character from describing one oscillator to the other one as shown by the variations of the real and imaginary parts of  $\omega_{\pm}$ . In quantum mechanics, the eigenvalues of Hermitian Hamiltonians usually present avoided crossings and the degeneracy of two eigenvalues, which is possible but rare, is known as a conical intersection or a diabolical point [29–31]. The difference between the degeneracy of eigenvalues at a diabolical point and at an exceptional point is discussed in [8, 32].

**3.2.4. The frequencies  $\omega_{\pm}$  of the normal modes when  $\kappa \leq \kappa_{\text{cr}}$ .** Figure 3 presents the variations of the real and imaginary parts of  $\omega_{\pm}$  as a function of the  $\omega_2/\omega_1$  ratio for different  $\kappa$  values. If we except the critical case  $\kappa = \kappa_{\text{cr}}$ , the real and imaginary parts of  $\omega_{\pm}$  exchange their roles with respect to the case  $\kappa > \kappa_{\text{cr}}$ : the real parts cross while the imaginary parts do not. Because of this behaviour, we have chosen to plot the frequency displacements  $\text{Re}(\Delta\omega_{+}) \equiv \text{Re}(\omega_{+} - \omega_1)$  and  $\text{Re}(\Delta\omega_{-}) \equiv \text{Re}(\omega_{-} - \omega_2)$  because these quantities tend toward 0 far from resonance.

If  $\kappa \ll \kappa_{\text{cr}}$ , we may expand the square root in equation (16) and, with some further simplifying approximations, we get



**Figure 3.** Variations of  $\omega_{\pm}$  when  $\kappa \leq \kappa_{\text{cr}}$ :  $\text{Re}(\Delta\omega_{\pm}/\omega_1)$  and  $\text{Im}(\omega_{\pm}/\omega_1)$  are plotted as a function of the ratio  $\omega_2/\omega_1$  for the following values of  $\kappa/\kappa_{\text{cr}}$ : 0.25 dashed (blue) curves, 0.50 dashed (red) curves, 0.75 dot-dashed (green) curves and 1.00 full (violet) curves (calculations done with  $\gamma_1/\omega_1 = 0.01$ ,  $\gamma_2/\omega_1 = 0$  and  $\kappa_{\text{cr}} = 5 \times 10^{-3}$ ). As  $\gamma_2 = 0$ , the damping of the normal mode of frequency  $\omega_-$  is solely due to the coupling. It is easy to associate the curves to  $\omega_{\pm}$  thanks to equations (20).

$$\begin{aligned} \omega_+ &\approx \omega_1 + i \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\kappa^2}{4} \times \frac{\omega_1^2}{\omega_1 - \omega_2 + i(\gamma_1 - \gamma_2)/2}, \\ \omega_- &\approx \omega_2 + i \frac{\gamma_2}{2} - \frac{\kappa^2}{4} \times \frac{\omega_1^2}{\omega_1 - \omega_2 + i(\gamma_1 - \gamma_2)/2}. \end{aligned} \quad (20)$$

The normal modes describe one oscillator with a small admixture of the other one,  $\omega_+$  (resp.  $\omega_-$ ) corresponding to oscillator 1 (resp. 2). The real and imaginary parts of  $\omega_{\pm}$  present resonant variations with Lorentzian lineshapes centred at resonance  $\omega_2 = \omega_1$ , a dispersion (absorption) lineshape for the real (imaginary) parts of  $\omega_{\pm}$ . The full width at half maximum of these resonant variations is the same, equal to  $|\gamma_1 - \gamma_2|$ . Some damping is transferred from the more damped oscillator to the less damped one, as shown by equations (20). Exactly at resonance, the damping rates  $\gamma_{\pm}$  of the normal modes deduced from equation (16) are given by

$$\gamma_{\pm} \equiv 2\text{Im}(\omega_{\pm}) \approx \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \pm \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{\kappa_{\text{cr}}^2}}. \quad (21)$$

If we assume that  $\gamma_2 = 0$ , the damping rate  $\gamma_-$  of the normal mode of frequency  $\omega_-$  is given by

$$\gamma_- \approx \frac{\kappa^2 \omega_1^2}{\gamma_1} = \frac{\omega_{12}^2 \omega_{21}^2}{\omega_1^2 \gamma_1}. \quad (22)$$

The damping rate  $\gamma_-$  decreases when the damping rate  $\gamma_1$  increases. This surprising result (more damping in the system decreases the damping of one normal mode!) can be easily explained: the coupling has less effect when the difference between the complex frequencies of the uncoupled oscillators increases and this difference is equal to  $i\gamma_1$ .

The resonant variations of the real parts of  $\omega_{\pm}$  are also very interesting. In particular, the frequency displacement  $\Delta\omega \equiv (\omega_+ - \omega_-)$  of the resonance of oscillator 2 is larger than its damping rate when  $|\omega_1 - \omega_2| > \gamma_1/2$ . As a consequence, this frequency displacement should be easily observed, in particular if the coupling can be switched on and off.

#### 4. The border between the weak and strong coupling regimes

As shown in figure 1, the variations of the real and imaginary parts of  $\omega_{\pm}$  present singularities at the exceptional point corresponding to  $\omega_2 = \omega_1$  and  $\kappa = \kappa_{cr}$ . We are going to prove that the border between the weak and strong coupling regimes goes through this point. As shown in figure 1, the singularities occurring at resonance are smoothed as soon as  $\omega_2$  differs slightly from  $\omega_1$  and the transition between these two regimes is smoothed. We limit our study to the resonance case where the transition is well defined.

##### 4.1. A rapid proof

The eigenvectors  $\tilde{\mathbf{A}}_{\pm}$  which describe the normal modes verify

$$\frac{\tilde{A}_{\pm,1}}{\tilde{A}_{\pm,2}} = \frac{\omega_{12}^2}{\omega_1^2 + i\omega_1\gamma_1 - \omega_{\pm}^2}. \quad (23)$$

If only one normal mode is excited, the amplitudes  $\tilde{\mathbf{X}}$  are proportional to  $\tilde{\mathbf{A}}_+$  (resp.  $\tilde{\mathbf{A}}_-$ ) and the oscillations occur with a single frequency  $\omega_+$  (resp.  $\omega_-$ ). In the general case, the two normal modes are excited and the motion of each oscillator involve the two frequencies  $\omega_{\pm}$ . The oscillation amplitudes of the two oscillators then exhibit beats at a frequency equal to  $\text{Re}(\omega_+ - \omega_-)/2$  (see equation (32) below) and these beats describe the transfer of energy from one oscillator to the other one. This frequency is equal to  $\omega_1\sqrt{\kappa^2 - \kappa_{cr}^2}$  if  $\kappa > \kappa_{cr}$  while, if  $\kappa < \kappa_{cr}$ , this frequency difference is negligibly small as deduced from equation (26) below. As a consequence, a reversible energy transfer between the two oscillators, which is the criterion of the strong coupling regime, corresponds to  $\kappa > \kappa_{cr} \equiv |\gamma_1 - \gamma_2|/(2\omega_1)$ : this condition is sensitive only to the difference of the damping rates  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  but not to their sum, a result contrary to the statement of Rodriguez [33] in the classical mechanics case. To go further, we present an analytic calculation of the dynamics of the system.

##### 4.2. Calculation of the normal modes at resonance

We simplify the calculations by assuming that  $m_1 = m_2$ , so that  $\omega_{12} = \omega_{21}$  and that  $\gamma_1 > \gamma_2$ , so that  $\kappa_{cr} = (\gamma_1 - \gamma_2)/(2\omega_1)$ . The matrix  $\mathbf{M}$  given by equation (13) is then equal to

$$\mathbf{M} = \omega_1^2 \left[ \left( 1 + i\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\omega_1} \right) \mathbf{I} + \mathbf{M}' \right] \text{ with } \mathbf{M}' = \begin{bmatrix} i\kappa_{cr} & -\kappa \\ -\kappa & -i\kappa_{cr} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

If  $\kappa \neq \kappa_{cr}$ , the matrix  $\mathbf{M}$  can be diagonalized and its eigenvectors  $\tilde{\mathbf{A}}_{\pm}$  are those of the matrix  $\mathbf{M}'$  because the first term of equation (24) is proportional to the identity matrix. The eigenvalues of the matrix  $\mathbf{M}$  are equal to

$$\omega_{\pm}^2 = \omega_1^2 \left( 1 + i\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\omega_1} \pm \sqrt{\kappa^2 - \kappa_{cr}^2} \right). \quad (25)$$

In the following calculations, we keep only the first-order terms in the three small quantities  $\gamma_1/\omega_1$ ,  $\gamma_2/\omega_1$  and  $\sqrt{\kappa^2 - \kappa_{cr}^2}$ . The main intermediate results are collected in table 1 where we find  $\text{Re}(\omega_+) = \text{Re}(\omega_-)$  when  $\kappa < \kappa_{cr}$ , and  $\text{Im}(\omega_+) = \text{Im}(\omega_-)$  when  $\kappa > \kappa_{cr}$  (this was also suggested by the plots of figure 1). These results do not remain true if the second-order terms are included and, when  $\kappa < \kappa_{cr}$ , we get

**Table 1.** Definition of the parameter  $\varphi$  and its range of values, approximate values of the frequencies  $\omega_{\pm}$ , of the normal mode component  $\tilde{A}_{\pm,2}$  assuming  $\tilde{A}_{\pm,1} = 1$  and of the amplitudes  $\alpha_{\pm}$  of the normal modes with the initial condition given in the text. For the amplitudes  $\alpha_{\pm}$ , we give only the zero-order term in the small quantities.

Quantity	Case $\kappa < \kappa_{\text{cr}}$	Case $\kappa > \kappa_{\text{cr}}$
Definition of $\varphi$	$\cosh \varphi \equiv \kappa_{\text{cr}}/\kappa$	$\sin \varphi \equiv \kappa_{\text{cr}}/\kappa$
Range of $\varphi$ values	$0 < \varphi$	$0 \leq \varphi < \pi/2$
$\text{Re}(\omega_{\pm})$	$\omega_1$	$\omega_1 \pm \frac{\omega_1 \sqrt{\kappa^2 - \kappa_{\text{cr}}^2}}{2}$
$\text{Im}(\omega_{\pm}) = \frac{\gamma_{\pm}}{2}$	$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4} \pm \frac{\omega_1 \sqrt{\kappa_{\text{cr}}^2 - \kappa^2}}{2}$	$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4}$
$\tilde{A}_{\pm,2}$	$i \exp(\mp i\varphi)$	$\mp \exp(\mp i\varphi)$
$\alpha_{\pm}$	$\pm \frac{v_2}{2\omega_1 \sinh \varphi}$	$\pm \frac{iv_2}{2\omega_1 \cos \varphi}$

$$\frac{\text{Re}(\omega_{\pm})}{\omega_1} = 1 + \frac{1}{8} \left[ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\omega_1} \pm \sqrt{\kappa_{\text{cr}}^2 - \kappa^2} \right]^2. \quad (26)$$

The beat frequency  $\text{Re}(\omega_+ - \omega_-)/2$  is considerably smaller than the damping rates which means that the energy is almost completely damped before being exchanged. In the same way, when  $\kappa > \kappa_{\text{cr}}$ , there is a second-order contribution to  $\text{Im}(\omega_{\pm})$  so that the two normal modes have slightly different damping rates.

#### 4.3. Calculation of the dynamics of the coupled oscillators

If  $\kappa \neq \kappa_{\text{cr}}$ , the vector  $\mathbf{X}(t)$  is given by

$$\mathbf{X}(t) = \text{Re}[\alpha_+ \mathbf{A}_+ \exp(i\omega_+ t) + \alpha_- \mathbf{A}_- \exp(i\omega_- t)]. \quad (27)$$

The complex amplitudes  $\alpha_{\pm}$  are deduced from the initial condition: at  $t = 0$ , oscillator 1 is at rest, with  $x_1 = 0$  and  $dx_1/dt = 0$ , and all the energy is in oscillator 2, with  $x_2 = 0$  and  $dx_2/dt = v_2$  (then there is no energy in the coupling term as  $(x_1 - x_2) = 0$ ). Using the results of table 1, we calculate the positions  $x_i(t)$  and the energies  $E_i(t)$  of the two oscillators

$$E_i(t) = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \omega_i^2 x_i^2 \right]. \quad (28)$$

The potential energy  $k_{12}^2 (x_1 - x_2)^2/2$  of the coupling term, which is small because  $\kappa \ll 1$  is neglected.

Case  $\kappa < \kappa_{\text{cr}}$

$x_1(t)$  and  $x_2(t)$  are given by

$$\begin{aligned} x_1(t) &\approx -\frac{v_2}{\omega_1 \sinh \varphi} \cos(\omega_1 t) \sinh \left( \frac{\sqrt{\kappa_{\text{cr}}^2 - \kappa^2}}{2} \omega_1 t \right) \exp \left( -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4} t \right), \\ x_2(t) &\approx \frac{v_2}{\omega_1 \sinh \varphi} \sin(\omega_1 t) \sinh \left( \frac{\sqrt{\kappa_{\text{cr}}^2 - \kappa^2}}{2} \omega_1 t + \varphi \right) \exp \left( -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4} t \right). \end{aligned} \quad (29)$$

These two terms exhibit a rapid oscillation at the frequency  $\omega_1$ , while their amplitudes decrease when the time increases, the exponential function decreasing more rapidly than the hyperbolic sine functions increase. There is no periodic exchange of the energy between the two oscillators. When we calculate the velocities  $dx_i/dt$ , we take only the derivative of the

rapidly oscillating terms and we get

$$\begin{aligned} E_1(t) &\approx \frac{E_2(0)}{\sinh^2 \varphi} \sinh^2 \left( \frac{\sqrt{\kappa_{\text{cr}}^2 - \kappa^2}}{2} \omega_1 t \right) \exp \left( -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} t \right), \\ E_2(t) &\approx \frac{E_2(0)}{\sinh^2 \varphi} \sinh^2 \left( \frac{\sqrt{\kappa_{\text{cr}}^2 - \kappa^2}}{2} \omega_1 t + \varphi \right) \exp \left( -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} t \right), \end{aligned} \quad (30)$$

where we have introduced the total energy at time  $t = 0$  equal to  $E_2(0) = mv_2^2/2$ .

Case  $\kappa > \kappa_{\text{cr}}$

$x_1(t)$  and  $x_2(t)$  are given by

$$\begin{aligned} x_1(t) &\approx -\frac{v_2}{\omega_1 \cos \varphi} \cos(\omega_1 t) \sin \left( \frac{\sqrt{\kappa^2 - \kappa_{\text{cr}}^2}}{2} \omega_1 t \right) \exp \left( -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4} t \right), \\ x_2(t) &\approx \frac{v_2}{\omega_1 \cos \varphi} \sin(\omega_1 t) \cos \left( \frac{\sqrt{\kappa^2 - \kappa_{\text{cr}}^2}}{2} \omega_1 t - \varphi \right) \exp \left( -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4} t \right). \end{aligned} \quad (31)$$

These two terms exhibit beats, with a rapid oscillation at the frequency  $\omega_1$  and a slow modulation of the amplitudes at the frequency  $\omega_1 \sqrt{\kappa^2 - \kappa_{\text{cr}}^2}/2$ . With the same approximation to calculate the velocities, the energies  $E_i(t)$  are given by

$$\begin{aligned} E_1(t) &\approx \frac{E_2(0)}{\cos^2 \varphi} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{\kappa^2 - \kappa_{\text{cr}}^2}}{2} \omega_1 t \right) \exp \left( -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} t \right), \\ E_2(t) &\approx \frac{E_2(0)}{\cos^2 \varphi} \cos^2 \left( \frac{\sqrt{\kappa^2 - \kappa_{\text{cr}}^2}}{2} \omega_1 t - \varphi \right) \exp \left( -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} t \right). \end{aligned} \quad (32)$$

These results deserve several comments.

- The energy oscillates back and forth between the two oscillators, the period  $T_{\text{exch}}$  of the energy oscillation being equal to

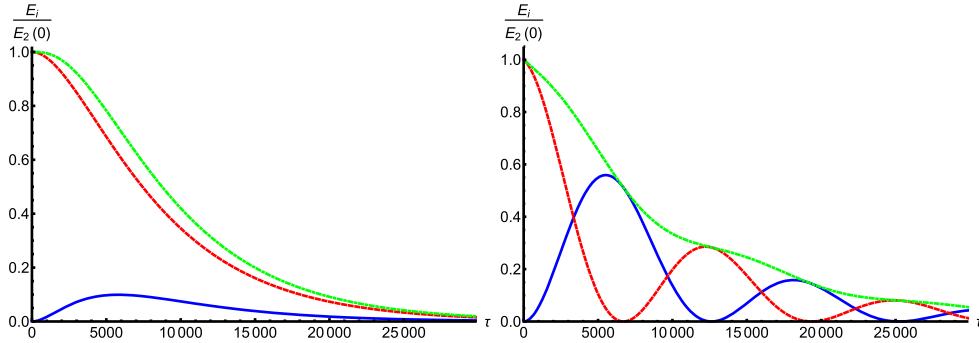
$$T_{\text{exch}} = \frac{2\pi}{\omega_1 \kappa \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\omega_1 \sqrt{\kappa^2 - \kappa_{\text{cr}}^2}}. \quad (33)$$

- If  $\kappa \gg \kappa_{\text{cr}}$ , the phase  $\varphi \rightarrow 0$  and the period  $T_{\text{exch}}$  of the energy oscillation is

$$T_{\text{exch}} \approx \frac{2\pi \omega_1}{\omega_{12}^2} = \frac{2\pi}{\omega_1 \kappa}, \quad (34)$$

which is the classical result in the absence of damping.

- When  $\kappa$  is not very large with respect to  $\kappa_{\text{cr}}$ , the phase  $\varphi$  is not negligible and the oscillation of the energy between the two oscillators still occurs but the period of this oscillation  $T_{\text{exch}}$  given by equation (33) tends toward infinity when  $\kappa \rightarrow \kappa_{\text{cr}}$ . Moreover, the energies are no more in phase opposition: the maximum of  $E_1(t)$  occurs with a phase shift equal to  $(\pi - 2\varphi)$  with respect to the maximum of  $E_2(t)$ . This decreasing phase



**Figure 4.** Plot of  $E_1(t)/E_2(0)$  (blue dashed line),  $E_2(t)/E_2(0)$  (red full line) and  $E_3(t)/E_2(0)$  (green full line) where  $E_3(t) = E_1(t) + E_2(t)$  as a function of  $\tau = \omega_1 t$ . Left panel: weak coupling case  $\kappa/\kappa_{\text{cr}} = 0.8$ , the energy of oscillator 2 decreases slowly by transfer to oscillator 1 which dissipates this energy ( $\gamma_1/\omega_1 = 0.01$ ,  $\gamma_2/\omega_1 = 0$  and  $\kappa_{\text{cr}} = 5 \times 10^{-3}$ ). Right panel: strong coupling case  $\kappa/\kappa_{\text{cr}} = 10$ , the energy oscillates between the two oscillators while it decreases because of the damping of oscillator 1 ( $\gamma_1/\omega_1 = 10^{-4}$ ,  $\gamma_2/\omega_1 = 0$ ,  $\kappa_{\text{cr}} = 5 \times 10^{-5}$  and  $\varphi = 0.1 \text{ rad}$ ). The phase shift between the two oscillations agrees with its calculated value ( $\pi - 2\varphi$ ).

delay is due to the fact that oscillator 1 does not store efficiently the energy received from oscillator 2, because of its larger decay rate.

- The reduction of the total energy  $E_3$  during one period of oscillation  $T_{\text{exch}}$  is equal

$$\frac{E_3(t + T_{\text{exch}})}{E_3(t)} = \exp\left[-\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} T_{\text{exch}}\right] = \exp\left[-\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\omega_1} \times \frac{\pi}{\kappa \cos \varphi}\right]. \quad (35)$$

As the exponent involves the ratio of two small quantities,  $(\gamma_1 + \gamma_2)/\omega_1$  and  $\kappa \cos \varphi/\pi$ , there is no general result. If we consider the particular case  $\gamma_2 = 0$ , we can simplify equation (35) and the reduction of the total energy during one period  $T_{\text{exch}}$  is given by  $E_3(t + T_{\text{exch}})/E_3(t) = \exp[-2\pi\kappa_{\text{cr}}/\sqrt{\kappa^2 - \kappa_{\text{cr}}^2}]$ : this reduction is extremely strong when  $\kappa$  approaches  $\kappa_{\text{cr}}$  (see figure 5).

Case  $\kappa = \kappa_{\text{cr}}$

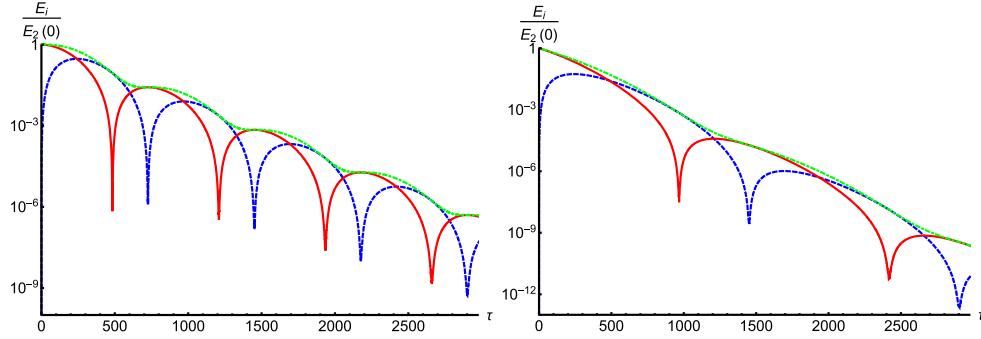
This is the exceptional point: the two roots  $\omega_{\pm}^2$  are equal to  $\omega_{\pm}^2 = \omega_1^2 \left(1 + i\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\omega_1}\right)$ . Using the results of section 2, the solution is of the form

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{C}(t) \exp(i\omega_{\pm} t), \quad (36)$$

where  $\mathbf{C}(t)$  is a polynomial of degree 1 in  $t$ ,  $\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 t$ . The initial condition, the values of the vectors  $\mathbf{X}$  and  $d\mathbf{X}/dt$  at  $t = 0$ , provides four real equations which are not sufficient to define the two complex vectors  $\mathbf{C}_0$  and  $\mathbf{C}_1$ , i.e. eight real quantities. This is at variance with the case of the critical damping of a single oscillator where the knowledge of the form of the solution is sufficient to write it explicitly, as discussed after equation (9). We explain in the appendix how to calculate this solution for any initial condition.

#### 4.4. Numerical simulation of the dynamics

Using the same initial condition as in our analytic study, we have plotted the calculated quantities  $E_1(t)/E_2(0)$ ,  $E_2(t)/E_2(0)$  and their sum  $E_3(t)/E_2(0)$  as a function of  $\tau = \omega_1 t$  in figure 4 for two values of the ratio  $\kappa/\kappa_{\text{cr}}$ , with, in both cases  $\gamma_2 = 0$ . If  $\kappa < \kappa_{\text{cr}}$ , the energy is



**Figure 5.** Plot of  $E_1(t)/E_2(0)$  (blue dashed line),  $E_2(t)/E_2(0)$  (red full line) and  $E_3(t)/E_2(0)$  (green full line) where  $E_3(t) = E_1(t) + E_2(t)$  as a function of  $\tau = \omega_1 t$  in the strong coupling regime  $\kappa/\kappa_{\text{cr}} = 2$  corresponding to  $\varphi = \pi/6$  rad. Left panel: calculation done with  $\gamma_1/\omega_1 = 0.01$ ,  $\gamma_2/\omega_1 = 0$  and  $\kappa_{\text{cr}} = 5 \times 10^{-3}$ . Right panel: calculation done with  $\gamma_1/\omega_1 = 0.01$ ,  $\gamma_2/\omega_1 = 5 \times 10^{-3}$  and  $\kappa_{\text{cr}} = 2.5 \times 10^{-3}$ . In both cases, the energy oscillates between the two oscillators while it decreases because of the damping terms: these two curves illustrate the fact that the strong coupling regime is sensitive to the ratio  $\kappa/\kappa_{\text{cr}}$  but not to the total damping rate.

transferred irreversibly from oscillator 2 to oscillator 1 which dissipates the energy. If  $\kappa > \kappa_{\text{cr}}$ , the energy goes back and forth between the two oscillators, while, because of damping, the total energy  $E_3(t)$  decreases on average like  $\exp[-(\gamma_1 + \gamma_2)t/2]$  with a modulation at the exchange frequency, the energy decay rate being maximum when all the energy is in oscillator 1.

We have also made two calculations with  $\kappa/\kappa_{\text{cr}} = 2$  in order to observe the peculiarities of the energy transfer when  $\kappa$  is not much larger than  $\kappa_{\text{cr}}$ . Figure 5 presents the variations of the same quantities as in figure 4 with a logarithmic scale in order to visualise the variations with a large dynamics. Moreover, we consider two cases, one with  $\gamma_2 = 0$  and one with  $\gamma_2 \neq 0$ . In both cases, the energy is exchanged between the two oscillators and the measured phase difference is in good agreement with the value  $(\pi - 2\varphi)$  predicted by equations (30) with  $\varphi = \arcsin(1/2) = \pi/6$ . As shown by figure 5, the minimums of  $E_1(t)/E_3(t)$  and  $E_2(t)/E_3(t)$  are very deep but, for very large  $t$ -values not shown in figure 5, they become less deep: the damping rates  $\gamma_{\pm}$  of the normal modes, which are equal at first order in the small quantities, are different if the second-order terms are taken into account,  $(\gamma_+ - \gamma_-) \approx (\gamma_1 + \gamma_2)\sqrt{\kappa^2 - \kappa_{\text{cr}}^2}$ . As a consequence, for very large  $t$ -values, the amplitudes of the two normal modes are no more balanced and the energy exchange ultimately stops when the amplitude of one mode is negligible with respect to the other one but this effect, not shown in figure 5, has little importance as it occurs when the remaining energy is an extremely small fraction of the initial energy.

We do not present the plot of the energies  $E_1(t)$  and  $E_2(t)$  in the critical case because the curves are similar to those presented in the left panel of figure 4 corresponding to  $\kappa/\kappa_{\text{cr}} = 0.8$ .

## 5. Concluding remarks

In this paper, we have studied the dynamics of two coupled harmonic oscillators in the presence of damping. As this system involves exceptional points, we have first given a brief

introduction to this question, with emphasis on the dynamics at the exceptional point and with the example of the critical damping of a single harmonic oscillator.

We have then studied a system of two coupled harmonic oscillators, with the damping effects due to anelastic effects (i.e. a restoring force not in phase with the displacement) and not a friction force proportional to the velocity. This choice simplifies the calculations and it has no other consequences near resonance, which is the only important case in the weak damping limit.

This system exhibits exceptional points, which occur exactly at resonance, if we neglect the damping associated to the coupling term, and when the dimensionless coupling parameter defined by  $\kappa \equiv \omega_{12}\omega_{21}/\omega_1^2$  has the critical value  $\kappa_{\text{cr}} \equiv |\gamma_1 - \gamma_2|/(2\omega_1)$ , where  $\gamma_i$  is the damping rate of the uncoupled oscillator  $i$ . All the following discussion assumes weak damping,  $\gamma_i \ll \omega_i$  and a weak coupling,  $\kappa \ll 1$ , because the resonance effects are more conspicuous in this case.

When  $\kappa > \kappa_{\text{cr}}$ , the coupling dominates the difference of damping rates and the frequencies of the normal modes are repelled by the coupling, thus exhibiting an avoided crossing very similar to the one classically observed in the absence of damping. Then, the damping rates of the normal modes are both equal to the average of the uncoupled oscillator damping rates. After the initial excitation of one oscillator, the energy is periodically exchanged between the two oscillators, while the total energy decreases because of damping. When  $\kappa \gg \kappa_{\text{cr}}$ , the exchange period is equal to  $T_{\text{exch}} \approx 2\pi/(\omega_1\kappa)$  but, when  $\kappa$  is only slightly larger than  $\kappa_{\text{cr}}$ , the energy still oscillates between the two oscillators with an exchange period  $T_{\text{exch}} = 2\pi/(\omega_1\sqrt{\kappa^2 - \kappa_{\text{cr}}^2})$  which tends toward infinity when  $\kappa \rightarrow \kappa_{\text{cr}}$ . Moreover, the energies of the two oscillators are no more in phase opposition: the phase shift between the energy oscillations is then given by  $(\pi - 2\varphi)$ , with the phase  $\varphi \equiv \arcsin(\kappa/\kappa_{\text{cr}})$  tending toward  $\pi/2$  when  $\kappa \rightarrow \kappa_{\text{cr}}$ . The fact that the exchange period  $T_{\text{exch}}$  tends toward infinity when  $\kappa$  tends toward  $\kappa_{\text{cr}}$  proves that the transition between the strong and weak coupling regimes is continuous: this behaviour may seem somewhat surprising as the frequencies  $\omega_{\pm}$  present square-root singularities at the exceptional point but the frequencies  $\omega_{\pm}$  are continuous functions of  $\kappa$  even at the exceptional point  $\kappa = \kappa_{\text{cr}}$ .

When  $\kappa = \kappa_{\text{cr}}$ , the solution has a different analytical form, characteristic of an exceptional point, and obviously reminiscent of the critical damping of a single oscillator.

When  $\kappa < \kappa_{\text{cr}}$ , the difference of damping rates dominates the coupling and there is no avoided crossing of the frequencies of the normal modes when the frequency of one oscillator is swept across resonance. The real and imaginary parts of the frequencies of the normal modes present resonant variations: if  $\kappa \ll \kappa_{\text{cr}}$  these variations have Lorentzian lineshapes, a dispersion lineshape for the real parts and an absorption lineshape for the imaginary parts. After the initial excitation of one oscillator, the coupling induces an irreversible energy transfer between the two oscillators.

## Acknowledgments

We thank P Labastie for his help and Th Lahaye, A Beswick and D Gu  ry-Odelin for their comments on the manuscript. Financial supports from CNRS INP, ANR (grant ANR-11-BS04-016-01 HIPATI) and Région Midi Pyrénées are gratefully acknowledged.

## Appendix. The exceptional point of two coupled harmonic oscillators

### A.1. Transformation of two second-order differential equations in two first-order differential equations

As equation (12) is a system of two second-order differential equations, we cannot apply the results of section 2 valid for first-order differential equations. Here, we transform this system in a system of two first-order differential equations, in the case of the exceptional point but the general case can be treated in a similar way. We start from

$$\frac{d^2\tilde{\mathbf{X}}}{dt^2} = -\mathbf{M}\tilde{\mathbf{X}}. \quad (37)$$

An invertible matrix  $\mathbf{P}$  transforms the matrix  $-\mathbf{M}$  in its Jordan normal form  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\omega_+^2 & 1 \\ 0 & -\omega_+^2 \end{bmatrix} = -\omega_+^2 \mathbf{I} + \mathbf{N} \text{ with } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

The vector  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{X}}$  verifies

$$\frac{d^2\mathbf{Y}}{dt^2} = \mathbf{J}\mathbf{Y}. \quad (39)$$

If  $\mathbf{S}$  is a square root (see footnote 1) of  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{S}^2 = \mathbf{J}$ , and if

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{S}\mathbf{Y}, \quad (40)$$

one verifies by derivation that the solutions of equation (40) are solutions of equation (39). The matrix  $\mathbf{J}$  has only two square roots given by the power expansion

$$\mathbf{S}_\pm = \pm\sqrt{-\omega_+^2}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2\omega_+^2}\mathbf{N}\right). \quad (41)$$

We must choose the square root  $\mathbf{S}_+$  which describes damping. Equation (6) can be applied to equation (40), thus proving that  $\mathbf{Y}$  is the product of a polynomial of degree 1 in  $t$  by  $\exp(i\omega_+t)$ . As discussed in section 2, this holds also  $\mathbf{X}(t)$ .

### A.2. The solution of the dynamics at the exceptional point

Equation (41) establishes the form of the solution but it is not a practical way of calculating this solution. We start from Newton's equation,

$$\frac{d^2\tilde{\mathbf{X}}}{dt^2} = -\mathbf{M}\tilde{\mathbf{X}}. \quad (42)$$

$\mathbf{M}$  is given by equation (24) with  $\kappa = \kappa_{\text{cr}}$  and

$$\omega_+^2 = \omega_-^2 = \omega_1^2\left(1 + i\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2\omega_1}\right). \quad (43)$$

We know that

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{C}(t)\exp(i\omega_+t), \quad (44)$$

where  $\mathbf{C}(t)$  is a polynomial of degree 1 in  $t$ . We calculate  $d^2\tilde{\mathbf{X}}/dt^2$  and, using equation (42), we get

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = -\frac{\omega_1^2 \kappa_{cr}}{2\omega_+} \mathbf{N} \mathbf{C} \text{ with } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}, \quad (45)$$

where the matrix  $\mathbf{N}$  is nilpotent. Using equations (2) and (6), we get

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= \left[ 1 - \frac{\omega_1^2 \kappa_{cr}}{2\omega_+} \mathbf{N} t \right] \mathbf{C}(0), \\ \tilde{\mathbf{X}}(t) &= \left[ 1 - \frac{\omega_1^2 \kappa_{cr}}{2\omega_+} \mathbf{N} t \right] \mathbf{C}(0) \exp(i\omega_+ t). \end{aligned} \quad (46)$$

To determine  $\mathbf{C}(0)$ , we identify the initial values of  $\mathbf{X}$  and  $d\mathbf{X}/dt$  with those deduced from this equation and we get a system of four real equations with four unknowns:

$$\mathbf{X}(t=0) = \text{Re}[\mathbf{C}(0)], \quad (47)$$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t=0) = \text{Re} \left[ \left( i\omega_+ - \frac{\omega_1^2 \kappa_{cr}}{2\omega_+} \mathbf{N} \right) \mathbf{C}(0) \right]. \quad (48)$$

Up to this point, we have not made any approximation but we now keep only the first-order terms in the three small quantities  $\gamma_1/\omega_1$ ,  $\gamma_2/\omega_1$  and  $\kappa_{cr}$ . Then,  $\omega_+ = \omega_- \approx \omega_1 + i(\gamma_1 + \gamma_2)/4$ . On the rhs of equation (48), the dominant term is  $i\omega_+ \mathbf{C}(0)$  while the second term is proportional to  $\kappa_{cr}$  and, in order to keep only first-order terms, we replace  $1/\omega_+$  by  $1/\omega_1$ . Noting  $C_j = C'_j + iC''_j$  the components of the vector  $\mathbf{C}(0)$ ,  $x_j$  the components of the vector  $\mathbf{X}(t=0)$  and  $v_j$  the components of the vector  $\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t=0)$ , we get

$$\begin{aligned} x_1 &\approx C'_1 \text{ and } x_2 \approx C'_2, \\ v_1 &\approx -\omega_1 \left[ C''_1 + \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4\omega_1} - \frac{\kappa_{cr}}{2} \right) C'_1 + \frac{\kappa_{cr}}{2} C''_2 \right], \\ v_2 &\approx -\omega_1 \left[ C''_2 + \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4\omega_1} + \frac{\kappa_{cr}}{2} \right) C'_2 + \frac{\kappa_{cr}}{2} C''_1 \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

With our choice of initial condition,  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $v_1 = 0$  and  $v_2 \neq 0$ , we get

$$C_1 \approx -i \frac{\kappa_{cr} v_2}{2\omega_1} \text{ and } C_2 \approx -i \frac{v_2}{\omega_1}. \quad (50)$$

We thus get

$$\begin{aligned} x_1(t) &\approx \frac{\kappa_{cr} v_2}{2\omega_1} [\sin(\omega_1 t) - \omega_1 t \cos(\omega_1 t)] \exp\left(-\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4} t\right), \\ x_2(t) &\approx \frac{v_2}{\omega_1} \left[ \left( 1 + \frac{\kappa_{cr}}{2} \omega_1 t \right) \sin(\omega_1 t) \right] \exp\left(-\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4} t\right). \end{aligned} \quad (51)$$

As in the critical damping regime of a single oscillator, the oscillation amplitudes involve terms linear in the time  $t$  and these terms are dominant for  $x_1(t)$  when  $\omega_1 t > 1$  and for  $x_2(t)$  when  $\kappa_{cr} \omega_1 t / 2 > 1$  for  $x_2(t)$ . In both cases, because of the exponential factor, the oscillation amplitudes decrease when  $t$  becomes large, and the maximum oscillation amplitude of  $x_1(t)$  is related to the initial amplitude of oscillator 2, equal to  $x_2(t = \pi/(2\omega_1)) \approx v_2/\omega_1$  by

$$\frac{\text{Max}(x_1(t))}{x_2(t = \pi/(2\omega_1))} \approx \frac{1}{e} \times \frac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (52)$$

If  $\gamma_2$  vanishes, the maximum amplitude of oscillator 1 is only  $e$ -times smaller than the initial amplitude of oscillator 2.

## ORCID iDs

Jacques Vigué  <https://orcid.org/0000-0001-5209-0210>

## References

- [1] Den Hartog J P 1956 *Mechanical Vibrations* 4th edn (New York: McGraw-Hill)
- [2] Frahm H 1911 Device for damping the vibrations of bodies *US Patent* 989,958
- [3] Bekdas G and Nigdeli S M 2011 Estimating optimum parameters of tuned mass dampers using harmony search *Eng. Struct.* **33** 2716–23
- [4] Heiss W D 2004 Exceptional points of non-Hermitian operators *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 2455–64
- [5] Stehmann T, Heiss W D and Scholtz F G 2004 Observation of exceptional points in electronic circuits *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 7813–9
- [6] Heiss W D 2000 Repulsion of resonance states and exceptional points *Phys. Rev. E* **61** 929–32
- [7] Heiss W D 2004 Exceptional points—their universal occurrence and their physical significance *Czech. J. Phys.* **54** 1091–9
- [8] Seyranian A P, Kirillov O N and Mailybaev A A 2005 Coupling of eigenvalues of complex matrices at diabolic and exceptional points *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 1723–40
- [9] Rotter I 2009 A non-Hermitian Hamiltonian and the physics of open quantum systems *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 153001
- [10] Heiss W D 2012 The physics of exceptional points *J. Phys. A: Math. Gen.* **45** 444016
- [11] Heiss W D 2016 Circling exceptional points *Nat. Phys.* **12** 823–4
- [12] Kato T 1966 *Perturbation Theory for Linear Operators* (New York: Springer)
- [13] Heiss W D 2001 Time behaviour near to spectral singularities *Eur. Phys. J. D* **60** 257–61
- [14] Heiss W D 1999 Phase of wave functions and level repulsion *Eur. Phys. J. D* **7** 1–4
- [15] Heiss W D 2001 The chirality of exceptional points *Eur. Phys. J. D* **17** 149–51
- [16] Heiss W D 2004 Time reversal and exceptional points *Eur. Phys. J. D* **29** 429–32
- [17] Heiss W D 2008 Chirality of wavefunctions for three coalescing levels *J. Phys. A: Math. Gen.* **41** 244010
- [18] Milburn T J *et al* 2015 General description of quasiadiabatic dynamical phenomena near exceptional points *Phys. Rev. A* **92** 052124
- [19] Xu H *et al* 2014 Topological energy transfer in an optomechanical system with exceptional points *Nature* **537** 80–3
- [20] Johannessen K 2011 An anharmonic solution to the equation of motion for the simple pendulum *Eur. J. Phys.* **32** 407–17
- [21] Champion R and Champion W L 2007 The extension and oscillation of a non-Hooke's law spring *Eur. J. Mech. A* **26** 286–97
- [22] Cushing J T 1984 The spring-mass revisited *Am. J. Phys.* **52** 925–33
- [23] Zener C 1937 Internal friction in solids: I. Theory of internal friction in reeds *Phys. Rev.* **52** 230–5
- [24] Zener C 1938 Internal friction in solids: II. General theory of thermoelastic internal friction *Phys. Rev.* **53** 90–9
- [25] Saulson P R 1990 Thermal noise in mechanical experiments *Phys. Rev. D* **42** 2437–45
- [26] Kliem W, Pommer C and Stoustrup J 1998 Stability of rotor systems: a complex modelling approach *Z. Angew. Math. Phys.* **49** 644–55
- [27] Kirillov O N 2013 *Nonconservative Stability Problems of Modern Physics* (Berlin, Boston: De Gruyter)
- [28] Gattulli V, Potenza F and Lepidi M 2013 Damping performance of two simple oscillators coupled by a visco-elastic connection *J. Sound Vib.* **332** 6934–48

- [29] Herzberg G and Longuet-Higgins H C 1963 Intersection of potential energy surfaces in polyatomic molecules *Discuss. Faraday Soc.* **35** 77–82
- [30] Landau L and Lifchitz E 1965 *Quantum Mechanics* (New York: Pergamon) paragraph 79
- [31] Berry M V and Wilkinson M 1984 Diabolical points in the spectra of triangles *Proc. R. Soc. A* **392** 15–43
- [32] Heiss W D 1990 Avoided level crossings and exceptional points *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** 1167–78
- [33] Rodriguez S R-K 2016 Classical and quantum distinction between weak and strong coupling *Eur. J. Phys.* **37** 025802

## 4 Amortissement différentiel des modes normaux

Dans notre article, la figure 5 montre les variations des énergies des deux oscillateurs en fonction du temps dans le cas  $\kappa/\kappa_{cr} = 2$ . Dans le commentaire de cette figure, nous avons remarqué que, les deux modes normaux n'ayant pas le même taux d'amortissement, l'échange d'énergie cesse quand l'amplitude d'un des modes est négligeable devant celle de l'autre mode. Cet effet n'est pas bien illustré dans notre article car nous n'avons pas voulu l'allonger en rajoutant un paragraphe.

Les battements observés sur l'énergie des deux oscillateurs peuvent s'interpréter comme des interférences constructives ou destructives entre les deux modes propres. Comme ces modes propres n'ont pas exactement le même amortissement (ils ne sont identiques qu'au premier ordre), les minima en énergie ne sont pas nuls. En poussant le développement de l'équation (25) de l'article à l'ordre 2, on obtient

$$Im(\omega \pm) = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4} \mp \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{8} \sqrt{\kappa^2 - \kappa_{cr}^2} = \frac{\gamma_m}{2} \mp \delta \quad (5.1)$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \\ \delta &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{8} \sqrt{\kappa^2 - \kappa_{cr}^2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

L'énergie totale d'un oscillateur est proportionnelle au carré de la somme (différence) des amplitudes des modes propres lorsque ces modes interfèrent de manière constructive (destructive).

$$E \propto [\exp[-(\frac{\gamma_m}{2} - \delta)t] \pm \exp[-(\frac{\gamma_m}{2} + \delta)t]]^2 \quad (5.3)$$

$$= \exp[-\gamma_m t] (\exp[\delta t] \pm \exp[-\delta t])^2 \quad (5.4)$$

Le rapport de l'énergie minimale d'un oscillateur à l'énergie maximale obéit alors à :

$$\frac{E_-}{E_+} = \tanh^2(\delta t) = \tanh^2 \left( \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{8} \sqrt{\kappa^2 - \kappa_{cr}^2} t \right) \quad (5.5)$$

Sur la figure 5.1, je compare cette équation analytique au calcul de l'énergie  $E_1(t)$  de l'oscillateur 1 normalisée par l'énergie totale  $(E_1(t) + E_2(t))$  : l'équation (5.5) explique très bien la croissance des minima de l'énergie de l'oscillateur 1 ainsi normalisée.

## 5 Transition continue entre la décroissance de Wigner-Weisskopf et l'oscillation de Rabi en mécanique quantique

### 5.1 Introduction

Les analogies entre mécanique classique et mécanique quantique sont en général très utiles et très intéressantes. Longtemps, ces analogies ont été faites en utilisant un phénomène bien connu de la mécanique classique pour expliquer un résultat de la mécanique quantique. Depuis quelques années, il y a un renouveau de l'intérêt pour des connections classique-quantique illustré par exemple par le livre de Dragoman and Dragoman [3] et divers auteurs ont décrit l'analogue classique de phénomènes décrits initialement en mécanique quantique.

Le système de deux oscillateurs harmoniques couplés a ainsi fourni des analogues classiques de divers effets quantiques :

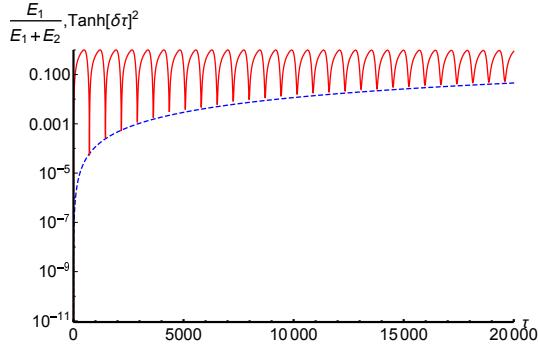


FIGURE 5.1 – Interférences entre les modes propres : en trait plein rouge, l'énergie  $E_1(t)$  de l'oscillateur 1 normalisée par l'énergie totale ( $E_1(t) + E_2(t)$ ) et, en trait tireté bleu, la courbe représentant l'équation (5.5) en fonction de  $\tau = \omega_1 t$ . Les minima de l'énergie  $E_1$  de l'oscillateur 1 normalisée par l'énergie totale sont très bien représentés par la courbe  $\tanh^2(\delta\tau)$  où  $\delta$  est défini par l'équation 5.2.

- la transparence électromagnétique induite [4] ;
- les résonances de Fano [5]
- la passage adiabatique rapide [6] ;
- les transitions adiabatique et diabatique [7],
- les équations de Bloch [8].

Les résultats établis ci-dessus fournissent un analogue classique du problème quantique d'un état discret couplé à un continuum.

## 5.2 Dynamique quantique d'un état discret couplé à un continuum

Ce problème est très important et deux cas limites de l'évolution dynamique de ce système sont bien connus. Ces cas limites dépendent des valeurs de l'élément de matrice de couplage  $V$  entre l'état discret et le continuum et de la largeur du continuum  $w_0$ .

- si  $V \ll w_0$ , l'état discret se vide dans le continuum et sa population  $P$  décroît exponentiellement : c'est le régime décrit par Weisskopf et Wigner [9, 10] en 1930.

$$P = \exp(-\Gamma t) \quad (5.6)$$

où le taux de décroissance  $\Gamma$  est donné par la règle d'or de Fermi

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |V|^2 \rho(E = E_d) \quad (5.7)$$

où  $\rho(E)$  est la densité d'état du continuum et  $E_d$  l'énergie de l'état discret. la densité d'état du continuum est inversement proportionnelle à  $1/w_0$ .

- si  $V \gg w_0$ , il est possible de négliger la largeur du continuum, au moins pour les temps courts tels que  $t \ll h/w_0$  qui est l'ordre de grandeur de la durée de vie d'un paquet d'ondes s'étendant sur tout le continuum. On peut alors traiter le continuum comme un état discret et on obtient alors une oscillation de Rabi [11]. A la limite d'une largeur nulle du continuum, la population de l'état discret est donnée par

$$P = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2 + \delta^2} \cos\left(\frac{\sqrt{\Omega_1^2 + \delta^2}}{2} t\right) \quad (5.8)$$

où  $\Omega_1 = V/\hbar$  et  $\delta$  l'écart à résonance, c'est-à-dire la différence d'énergie entre les deux états. Bien sûr, si la largeur  $w_0$  du continuum n'est pas strictement nulle, la population de l'état discret tend vers 0 aux temps longs,  $t \gg \hbar/w_0$ , quand toute la population du système a été transférée dans le continuum.

### 5.3 Transition continue entre ces deux régimes

Cette transition continue a été discutée en 1977 par C. Cohen-Tannoudji et P. Avan [12] et elle est décrite en détail dans le livre “Processus d’interaction entre photons et atomes” [13]. Cette description est trop longue pour être reproduite ici mais les résultats sont tout à fait analogues à ceux que nous trouvons pour deux oscillateurs couplés avec des amortissements différents.

- le cas  $w_0 \gg \Omega_1$  correspond au cas du couplage faible de deux oscillateurs et la dynamique est bien décrite par la décroissance exponentielle de la population de l'état discret de Weisskopf-Wigner. Le taux de décroissance de l'état discret est inversement proportionnel à la largeur  $w_0$  du continuum. Ce résultat est tout à fait similaire au résultat donné par l'équation (22) de notre article où le taux de décroissance  $\gamma_-$  du mode normal de fréquence  $\omega_-$  varie comme  $1/\gamma_1$ .
- le cas  $w_0 \ll \Omega_1$ , qui mène à l'oscillation de Rabi en mécanique quantique, est tout à fait similaire au couplage fort de deux oscillateurs, avec un échange d'énergie réversible entre les deux oscillateurs.

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai décrit de manière rigoureuse la dynamique classique de deux oscillateurs couplés en présence d'amortissement. Cette dynamique présente deux régimes très différents selon que le couplage domine la différence des amortissements ou que c'est le contraire :

- quand le couplage domine la différence des amortissements, l'énergie oscille entre les deux oscillateurs ;
- dans le cas opposé, le transfert d'énergie de l'oscillateur le moins amorti vers l'autre oscillateur se fait de manière irréversible.

La transition entre ces deux régimes se fait en passant par un point exceptionnel qui est à résonance. Ce problème est un excellent analogue classique de la transition continue entre la décroissance de Wigner-Weisskopf et l'oscillation de Rabi en mécanique quantique.

Comme souligné dans l'introduction, les points exceptionnels sont omniprésents dans la physique et il m'a semblé intéressant de l'illuster par des exemples variés, qui sont présenté dans un appendice.

## 7 Appendice : des exemples de points exceptionnels

Il est possible de rencontrer des points exceptionnels dans pratiquement tous les domaines de la physique. Bien que le terme “exceptional point” figure dans le livre de T. Kato “Perturbation Theory for Linear Operators” et publié en 1966, le concept ne figure pas dans l'enseignement usuel. Ceci fait que la nature générale de ce qu'est un point exceptionnel a été longtemps ignorée par la plupart de ceux qui en découvrent un dans le phénomène qu'ils étudient et cette découverte est alors source d'étonnement. Voici une liste d'exemples illustrant quelques domaines, avec dans chaque cas, une explication et quelques références : ces références ont été rencontrées par hasard et je n'ai pas la prétention de couvrir complètement chacun des domaines discutés ci-dessous ni de traiter tous les domaines illustrant les points exceptionnels.

## 7.1 Ondes de Voigt dans des cristaux biréfringents et absorbants

En 1902, Voigt [14] découvre par le calcul que, près d'un axe optique d'un cristal biréfringent et absorbant (un milieu pléochroïque), il existe deux directions pour lesquelles une seule polarisation peut se propager : la polarisation est circulaire droite pour une de ces directions et circulaire gauche pour l'autre. Je ne reproduis pas ici les calculs qui nécessiteraient d'introduire le calcul général de la biréfringence et je vais me limiter à donner un argument très simple.

Pour chaque direction de propagation, les deux polarisations qui se propagent sont états propres d'une matrice de dimension 2 et cette matrice, qui est hermitienne en l'absence d'absorption, cesse de l'être en présence d'absorption. Pour les axes optiques en l'absence d'absorption, la matrice est dégénérée (les deux indices sont égaux) et la levée de dégénérescence est petite quand on s'écarte d'un axe optique. D'autre part, l'absorption est en général très faible dans les milieux sensiblement transparents : en effet, la transmission en amplitude d'un objet d'épaisseur  $e$ , donnée par  $\exp(-2\pi n'' e/\lambda)$  où  $n''$  est la partie imaginaire de l'indice, ne doit pas être trop petite pour que le milieu soit transparent et, comme en général le rapport  $e/\lambda \gg 1$ , il faut que  $n'' \ll 1$ . En présence d'absorption, il existe près d'un axe optique deux directions pour laquelle la matrice non hermitienne décrivant la propagation n'est pas diagonalisable : chacun des deux directions correspond à un point exceptionnel de la matrice décrivant la propagation et une seule polarisation peut se propager. Ce résultat étonnant a mené Voigt [15] à conclure que l'autre polarisation serait totalement réfléchie, ce qui est faux.

Cette question a été étudiée en particulier par Pancharatnam [16, 17] qui corrige l'erreur de Voigt : il montre que, si on illumine le cristal avec la polarisation qui ne peut pas se propager, cette polarisation se transforme en celle qui peut se propager.

Ce travail de Pancharatnam a intéressé Berry [20] qui l'a découvert lors d'une visite en Inde en lisant les œuvres complètes de Pancharatnam [18]. Berry était tout particulièrement intéressé par un autre travail de Pancharatnam [19] publié en 1956. Dans ce travail, Pancharatnam avait décrit un précurseur de la phase que Berry a découverte en 1983-1984 [21, 22]. Depuis, Berry a publié un article très complet sur les singularités optiques dans les milieux biaxes [23].

## 7.2 Coalescence de résonances en physique des collisions

En 1994, Makhmetov et ses collaborateurs [24] ont calculé l'interaction des états de  $2^1S$  et  $2^1P$  de l'hélium devant une surface d'aluminium en fonction de la distance  $z$  du noyau d'hélium à la surface : la présence de la surface transforme ces états en résonances de durées de vie finies puisque l'électron atomique est couplé au continuum d'états électroniques dans le métal. Le Hamiltonien n'est donc plus Hermitique et un point exceptionnel a été détecté pour  $z = 6.5 a_0$ . Un modèle à deux niveaux avec des énergies imaginaires a permis de reproduire le comportement observé et de confirmer que c'est un point exceptionnel : cependant, cette expression ne figure pas dans cet article qui a été signalé à J. Vigué par un de ses auteurs, J.P. Gauyacq.

Un point exceptionnel a été observé dans un problème beaucoup plus simple par Vanroose [25] : il suffit de résoudre l'équation de Schrödinger et la matrice  $S$  avec un potentiel 1D  $V(x)$  bien choisi présentant deux familles d'états quasi-discrets correspondant à deux trous de potentiels couplés entre eux et au continuum de propagation libre. Un point exceptionnel est observé quand le couplage varie, ce qui est obtenu en modifiant la largeur de la barrière entre les trous.

## 7.3 Points exceptionnels en spectroscopie atomique

En 1995, Latinne et ses collaborateurs [26] ont étudié le système formé d'un état atomique discret couplé par un laser résonnant à un état auto-ionisant. En présence du couplage, les deux

états ont des quasi-énergies complexes et, pour certaines valeurs de l'intensité laser, c'est à dire du couplage, une dégénérescence des deux états est observée, correspondant à un point exceptionnel.

En 2007, Cartarius et ses collaborateurs [27] identifient des points exceptionnels dans le spectre de l'atome d'hydrogène en présence de champs électriques et magnétiques croisés :

En 2016, Am-Shallem et ses collaborateurs [28] proposent de détecter des points exceptionnels dans des systèmes quantiques ouverts (donc régis par des Hamiltoniens non-Hermitiques) et d'utiliser la mesure de ces points pour une mesure de précision des paramètres du système. Cette discussion est illustrée par les équations de Bloch de la résonance magnétique et l'existence de 3 points exceptionnels en fonction de deux paramètres : l'amplitude du champ oscillant et le désaccord par rapport à la résonance. Une autre illustration est donnée dans [29].

## 7.4 Brisure de la symétrie $\mathcal{PT}$ en présence de potentiels complexes

En 1998, Bender et Boettcher [30] ont fait remarquer que le spectre d'un Hamiltonien reste défini positif si le Hamiltonien est conservé par le produit  $\mathcal{PT}$  de ces deux opérations de symétrie : la parité  $\mathcal{P}$  et le renversement du temps  $\mathcal{T}$ , même si ce Hamiltonien n'est pas conservé par chacune de ces deux symétries séparément. Un article pédagogique des mêmes auteurs [31] discute cette question en détail.

En 2009, Guo et ses collaborateurs [32] appliquent ces idées dans le domaine de l'optique, ce qui est possible car l'équation de Schrödinger et l'équation d'onde électromagnétique se ressemblent. La géométrie considérée est un guide optique 1D, avec un indice de réfraction fonction de la coordonnée  $x$  ayant une partie réelle qui est paire en  $x$  et une partie imaginaire qui est impaire en  $x$  et qui décrit donc des gains ou des pertes suivant le signe de  $x$ . La symétrie  $\mathcal{PT}$  est brisée dans les solutions quand la partie imaginaire de l'indice dépasse un seuil : ce seuil est un point exceptionnel. En effet, la symétrie  $\mathcal{PT}$  est une condition nécessaire pour que le spectre soit réel mais ce n'est pas une condition suffisante.

## 7.5 Chiralité d'un point exceptionnel

En 2001, Heiss et Harney [36] expliquent en détail que l'état propre résultant de la coalescence de deux états propres au point exceptionnel est un état chiral. J'ai déjà cité un effet de ce type dans les ondes de Voigt et ce n'est donc pas étonnant. Cette chiralité a été observée dans le cas de cavités micro-ondes. Un premier article [37] a caractérisé la structure topologique d'un point exceptionnel dans une cavité micro-onde et un deuxième article [38] a démontré la nature chirale de ce point.

## 7.6 Exploration du voisinage d'un point exceptionnel

L'exploration de l'environ d'un point exceptionnel a été testée récemment en variant des paramètres du système. Cet environ est représenté par deux feuillets de Riemann connectés au point de branchement par une singularité en racine carrée, dans le cas d'un point où deux valeurs propres et deux vecteurs propres coalescent. Si on fait le tour d'un tel point exceptionnel de manière non-adiabatique, il peut se produire un saut d'un feillet à l'autre et l'état final dépend du sens de parcours mais pas de l'état initial [40, 39]. Ces prédictions théoriques ont été testées par Döppler et ses collaborateurs sur un système de deux guides d'onde couplés [41] et par Xu et ses collaborateurs sur deux modes de vibrations d'un système optomécanique [42].

## 7.7 Utilisation d'un point exceptionnel pour développer des capteurs de haute sensibilité

En 2014, Wiersig [43] a proposé d'augmenter la sensibilité de certains détecteurs en utilisant des points exceptionnels. Il s'agit de détecteurs utilisant une levée de dégénérescence de deux fréquences de résonance et cette technique est utilisée par exemple pour détecter une particule unique. Cette idée a été démontrée très récemment par deux groupes [44, 45] et ce travail a fait l'objet d'un article dans Physics Today [46]

## 7.8 Un article pédagogique très récent

L'European Journal of Physics a publié en mai 2018 un article de F.M. Fernandez [47] qui illustre la notion de point exceptionnel avec l'oscillateur harmonique amorti. Cet exemple est déjà donné dans notre article, qui est d'ailleurs cité par F.M. Fernandez qui l'a découvert au moment de la correction des épreuves.

# Bibliographie

- [1] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag New York, (1966).
- [2] S.R.-K. Rodriguez, “Classical and quantum distinction between weak and strong coupling,” *Eur. J. Phys.* **37**, 025802 (2016).
- [3] D. Dragoman and M. Dragoman, *Quantum-classical analogies*, Springer (2004).
- [4] C.L. Garrido Alzar, M.A.G. Martinez, and P. Nussenzveig, “ Classical analog of electromagnetically induced transparency,” *Am. J. Phys.* **70**, 37–41 (2002).
- [5] Y.S. Joe, A.M. Satanin, and C. S. Kim, “ Classical analogy of Fano resonances,” *Phys. Scr.* **74**, 259–266 (2006).
- [6] B.W. Shore, M.V. Gromovyy, L.P. Yatsenko, and V.I. Romanenko, “Simple mechanical analogs of rapid adiabatic passage in atomic physics,” *Am. J. Phys.* **77**, 1183–1194 (2009).
- [7] L. Novotny, “ Strong coupling, energy splitting, and level crossings : A classical perspective,” *Am. J. Phys.* **78**, 1199–1202 (2010).
- [8] M. Frimmer and L. Novotny, “The classical Bloch equations,” *Am. J. Phys.* **82**, 947–954 (2014).
- [9] V. Weisskopf and E. P. Wigner, “Berechnung der natürlichen linienbreite auf grund der diracschen lichttheorie,” *Z. Phys.* **63**, 54–73 (1930).
- [10] V. Weisskopf and E. P. Wigner, “Über die natürliche Linienbreite in der Strahlung des harmonischen Oszillators,” *Z. Phys.* **65**, 18–29 (1930).
- [11] I. I. Rabi, “Space quantization in a gyrating magnetic field,” *Phys. Rev.* **51**, 652–654 (1937).
- [12] C. Cohen-Tannoudji and P. Avan, “Discrete state coupled to a continuum. Continuous transition between the Wigner-Weisskopf exponential decay and the Rabi oscillation,” *Colloques Internationaux du CNRS* **273**, 94–106 (1977).
- [13] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Atom-photon interactions*, Wiley Science Paperback (1998), Complement CIII pp 239-255.
- [14] W. Voigt, “On the behaviour of pleochroitic crystals along directions in the neighbourhood of an optic axis,” *Phil. Mag.* **4**, 90–97 (1902).
- [15] W. Voigt, “Ein optischesparadoxon,” *Ann. Phys.* **27**, 1023–1024 (1908).
- [16] S. Pancharatnam, “The propagation of light in absorbing biaxial crystals : I. Theoretical,” *Proc. Ind. Acad. Sci. A* **42**, 86–109 (1955).
- [17] S. Pancharatnam, “The propagation of light in absorbing biaxial crystals : II. Experimental,” *Proc. Ind. Acad. Sci. A* **42**, 235–248 (1955).
- [18] S. Pancharatnam, *Collected Works of S Pancharatnam* Oxford University Press (London, 1975). Une revue de ce livre a été écrite par S. Zienau, *Phys. Bull.* **27**, 265 (1976).

- [19] S. Pancharatnam, Proc. Ind. Acad. Sci. A **44**, 247-262 (1956).
- [20] M.V. Berry, “Pancharatnam, virtuoso of the Poincaré sphere : an appreciation,” Curr. Sci. **67**, 220–223 (1994).
- [21] M.V. Berry, “Quantal phase factors accompanying adiabatic changes,” Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45-57 (1984)
- [22] M.V. Berry, “The adiabatic phase and Pancharatnam’s phase for polarized light,” J. Mod. Opt. **34**, 1401-1407 (1987)
- [23] M.V. Berry, “The optical singularities of bianisotropic crystals,” Proc. R. Soc. A **461**, 2071–2098 (2005).
- [24] G.E. Makhmetov, A.G. Borisov, D. Teillet-Billy and J.P. Gauyacq, “Interaction between overlapping quasi-stationary states : He( $2^1S$  and  $2^1P$ ) levels in front of an aluminium surface,” Europhys. Lett. **27**, 247–252 (1994).
- [25] W. Vanroose, “Double pole of the  $S$  matrix in a double-well potential,” Phys. Rev. A **64**, 062708 (2001).
- [26] O. Latinne *et al.*, “Laser-induced degeneracies involving autoionizing states in complex atoms,” Phys. Rev. Lett. **74**, 46–49 (1995).
- [27] H. Cartarius, J. Main, and G. Wünner, “Exceptional points in atomic spectra,” Phys. Rev. Lett. **99**, 173003 (2007).
- [28] M. Am-Shallem, R. Kosloff, and N. Moiseyuev, “Exceptional points for parameter estimation in open quantum systems : analysis of the Bloch equations,” New. J. Phys. **17**, 113036 (2015).
- [29] M. Am-Shallem, R. Kosloff, and N. Moiseyuev, “Parameter estimation in atomic spectroscopy using exceptional points,” Phys. Rev. A **93**, 032116 (2016).
- [30] C.M. Bender and S. Boettcher, “Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry,” Phys. Rev. Lett. **80**, 5243-5246 (1998).
- [31] C.M. Bender, D.C. Brody and H.F. Jones, “Must a Hamiltonian be Hermitian ?,” Am. J. Phys. **71**, 1095-1102 (2003).
- [32] A. Guo *et al.*, “Observation of  $\mathcal{PT}$ -symmetry breaking in complex optical potentials,” Phys. Rev. Lett. **103**, 093902 (2009).
- [33] M. Liertzer *et al.*, “Pump-induced exceptional points in lasers,” Phys. Rev. Lett. **108**, 173901 (2012).
- [34] B. Peng *et al.*, “Parity-time-symmetric whispering-gallery microcavities,” Nature Physics **10**, 394–398 (2014).
- [35] B. Peng *et al.*, “Loss-induced suppression and revival of lasing,” Science **346**, 328–332 (2014).
- [36] W.D. Heiss and H.L. Harney, “The chirality of exceptional points,” Eur. Phys. J. D **17**, 149–151 (2001).
- [37] C. Dembovski *et al.*, “Experimental observation of the topological structure of exceptional points,” Phys. Rev. Lett. **86**, 787–790 (2001).
- [38] C. Dembovski *et al.*, “Observation of a chiral state in a microwave cavity,” Phys. Rev. Lett. **90**, 034101 (2003).
- [39] D. Heiss, “Circling exceptional points,” Nature Physics **12**, 823–824 (2016).
- [40] T.J. Milburn *et al.*, “General description of quasiadiabatic dynamical phenomena near exceptional points,” Phys. Rev. A **92**, 052124 (2015).
- [41] J. Döppler *et al.*, “Dynamically encircling an exceptional point for asymmetric mode switching,” Nature **537**, 76–78 (2016).

- [42] H. Xu *et al.*, “Topological energy transfer in an optomechanical system with exceptional points,” *Nature* **537**, 80–83 (2014).
- [43] J. Wiersig, “Enhancing the sensitivity of frequency and energy splitting detection by using exceptional points : application to microcavity sensors for single- particle detection,” *Phys. Rev. Lett.* **112**, 203901 (2014).
- [44] H. Hodaie *et al.*, “Enhanced sensitivity at higher-order exceptional points,” *Nature* **548**, 187-191 (2017).
- [45] W. Chen *et al.*, “Exceptional points enhance sensing in an optical microcavity,” *Nature* **548**, 192-196 (2017).
- [46] J. Miller, “Exceptional points make for exceptional sensors,” *Physics Today* **70**, 23-26 (2017).
- [47] F.M. Fernandez, “Exceptional point in a simple textbook example,” *Eur. J. Phys.* **39**, 045005 (2018).



# Chapitre 6

## La force de Stokes sur la sphère ou le cylindre en mouvement oscillant

### 1 Introduction : motivations de cette étude

Dans la plupart des livres de mécanique, les équations d'un pendule simple ou d'un système masse-ressort sont écrites avec un terme d'amortissement proportionnel à la vitesse de la masse en mouvement. Ce terme d'amortissement est expliqué par les forces de friction sur l'air : ces forces sont effectivement proportionnelles à la vitesse, quand celle-ci est suffisamment petite, dans le régime de Stokes [1]. Ce régime correspond à de petites valeurs du nombre de Reynolds  $Re$  introduit par Reynolds [2] en 1883 : la validité du traitement de Stokes suppose que  $Re \ll 1$ , même si il semble généralement admis que ce traitement est encore une bonne approximation si  $Re \lesssim 1$ . Pour un objet macroscopique se déplaçant dans l'air dans les conditions ordinaires, ce régime correspond à de très faibles valeurs de la vitesse, de l'ordre du millimètre par seconde.

Les calculs de Stokes [1] publiés en 1851 traitent du mouvement d'une sphère ou d'un cylindre en mouvement de vitesse oscillante ou de vitesse constante dans un fluide visqueux. Ces calculs prédisent deux effets :

- un effet de masse ajoutée liée à l'entraînement du fluide. Cet effet qui apparaît pour le mouvement oscillant allonge la période d'un pendule. C'est la compréhension de cet effet observé expérimentalement, d'abord par Du Buat [3] en 1786 (mais ce travail est passé inaperçu) et par Bessel [4] en 1828, qui a motivé le travail de Stokes.
- une force de friction qui provoque l'amortissement des oscillations.

Les calculs de Stokes prédisent que l'allongement de la période dépend de la forme et des dimensions du pendule et ses résultats expliquent bien la plupart des mesures précises disponibles à cette époque. Les données quantitatives sur l'amortissement étaient beaucoup moins nombreuses et le test des résultats de ses calculs est très peu développé dans son article. Enfin, il semble que toutes les expériences disponibles à l'époque de Stokes correspondent à des nombres de Reynolds assez élevés.

L'observation du régime de Stokes avec des objets macroscopiques n'est théoriquement possible qu'avec de très faibles vitesses. Pour tester la théorie de Stokes, trois types d'expériences ont été utilisées : des cordes vibrantes, des pendules de torsion et des pendules oscillant dans le champ de gravité. Les pendules de torsion permettent des mouvements oscillants de très longue période ce qui est une condition favorable pour étudier des mouvements de très petite vitesse. La première expérience étudiant l'amortissement de pendules de torsion est due à Coulomb [5] en 1800, bien

avant toute théorie de ces effets, et l'étude la plus complète dont j'ai connaissance a été réalisée par Williams et Hussey [6, 7] en 1972. Je présente dans ce chapitre une revue succincte des différents tests que j'ai trouvés dans la littérature publiée.

Il m'a semblé intéressant de construire une expérience permettant d'observer effectivement le régime de Stokes avec des pendules oscillant dans le champ de gravité. En plus de l'intérêt de compléter le test des résultats de Stokes, il y a plusieurs autres raisons qui m'ont motivé pour faire cette expérience décrite dans ce chapitre :

- le point de départ de mon intérêt pour cette question est une publication de Kostov *et al.* [8] datant de 2008, dans l'American Journal of Physics. Dans ce travail expérimental, les auteurs expriment la force de friction sur l'air sur le pendule comme somme d'un terme linéaire en vitesse et d'un terme quadratique, le nombre de Reynolds étant compris entre 270 et 9700. Ils déduisent de la valeur mesurée du terme linéaire en vitesse une valeur de la viscosité de l'air  $\mu \approx 73 \times 10^{-5}$  Pa.s, " which is around 40 times larger than the accepted value for the viscosity of air ". J'ai été très étonné par un désaccord aussi important et j'ai analysé cet article en détail. Etant donné les très importantes valeurs du nombre de Reynolds, il ne faut pas espérer un accord parfait entre théorie et expérience. Cependant, j'ai pu expliquer l'essentiel du désaccord par deux erreurs : l'oubli des forces de friction sur les deux fils de suspension et l'oubli d'une très importante correction de la force de Stokes quand le mouvement est oscillant et non pas uniforme.
- les résultats de Stokes sont en fait largement ignorés, même si les livres d'hydrodynamique de Lamb [9], de Landau et Lifchitz [10] ou de Batchelor [11] donnent ces résultats sur la force exercée sur une sphère. Pour une sphère, la force est très différente pour un mouvement de vitesse constante et pour un mouvement oscillant : le résultat pour une sphère en mouvement à vitesse constante est très connu parce que la formule de Stokes est utilisée pour l'analyse de l'expérience de Millikan dans l'enseignement élémentaire mais le fait que la force soit très différente pour un mouvement oscillant est assez largement ignoré. Pour le cylindre, les équations de Stokes n'ont pas de solution lorsqu'il se déplace à vitesse constante (c'est le paradoxe de Stokes) et les résultats pour le cylindre en mouvement oscillant sont peu connus, probablement parce que Stokes a dû les exprimer sous la forme d'une série. En 1963, Stuart [12] a réexprimé ces résultats avec des fonctions de Bessel modifiées dont la définition est largement postérieure à l'article de Stokes (on trouve également cette nouvelle expression dans une publication de Segel [13] en 1960 mais Segel y explique que ce calcul est inspiré des travaux non publiés de Stuart). Ces résultats ne figurent pas dans les livres d'hydrodynamique cités plus haut. Seul Batchelor traite le problème de la sphère et du cylindre en mouvement oscillant de manière approximative et dans un cas particulier.
- enfin, les détecteurs de position ou de vitesse que j'ai construits ont une sensibilité suffisante pour mesurer l'amortissement de pendules macroscopiques par les forces de friction de l'air dans le régime de Stokes, avec  $Re \sim 1$ . Construire cette expérience de test ne demandait donc pas de grands développements expérimentaux, à part la construction de nouveaux pendules.

Le plan du chapitre est le suivant. Après des rappels historiques, j'introduis les équations de Navier-Stokes, le nombre de Reynolds et la profondeur de pénétration visqueuse. Je rappelle ensuite les résultats de Stokes pour une sphère ou un cylindre à faible vitesse constante ou oscillante, puis les résultats classiques donnant la force de viscosité pour la sphère ou le cylindre se déplaçant à vitesse constante pour une large gamme de nombre de Reynolds. Je décris l'amortissement du pendule par les forces de friction sur l'air puis je décris les tests publiés de la force de friction calculée par Stokes pour la sphère ou le cylindre en mouvement oscillant. Je présente ensuite l'expérience que j'ai construite pour tester les résultats de Stokes sur la sphère et le

cylindre en mesurant l'amortissement de pendules oscillant dans le champ de gravité et je décris les résultats obtenus et leur analyse. Après une brève conclusion, trois appendices complètent ce chapitre.

## 2 Rappels historiques

Avant 1800, pendant tout le XIXe siècle et même jusque vers 1930, le pendule oscillant dans le champ de gravité terrestre était à la base des instruments de précision pour la mesure du temps. La compréhension théorique des forces dues à l'air était donc une question fondamentale pour améliorer la précision de cette mesure.

Les forces de friction ont été étudiées par Coulomb [5] en 1800 : il dit tout d'abord que cette force est proportionnelle au carré de la vitesse relative du fluide par rapport à l'objet quand cette vitesse est grande et il va s'intéresser au cas où la vitesse est petite. Puis, il rappelle que Newton, Bernoulli et Gravesande ont représenté cette force comme la somme d'un terme constant et d'un terme proportionnel au carré de la vitesse. Enfin, il montre par l'expérience que la force peut être décrite par la somme d'un terme linéaire et d'un terme quadratique en vitesse. Les mesures ont été réalisées avec un pendule de torsion de longue période, ce qui permet d'observer des oscillations d'assez faibles vitesses, trop élevées cependant pour être dans le régime de Stokes  $Re \ll 1$ .

Comme rappelé dans l'introduction de ce chapitre, les forces dues au fluide dans lequel le pendule oscille ne se limitent pas à une force de friction. Il existe deux autres forces importantes :

- la force de poussée d'Archimède qui réduit le poids du pendule dans le rapport des masses volumiques du fluide et du matériau du pendule supposé massif et homogène ;
- une force d'inertie supplémentaire due à l'effet d'entraînement d'un certain volume  $V_f$  de fluide par le mouvement oscillant du pendule.

Chacune de ces deux forces contribue à augmenter la période du pendule. Si on considère un pendule formé d'une sphère pleine, de volume  $V_s$ , au bout d'un fil dont on négligera l'influence pour simplifier, et si on note  $\rho_s$  la masse volumique de la sphère et  $\rho_f$  celle du fluide dans lequel le pendule est plongé, la période  $T$  du pendule est modifiée par la présence du fluide

$$T = T_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{\rho_f V_f}{\rho_s V_s}}{1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}}} \approx T_0 \sqrt{1 + n \frac{\rho_f}{\rho_s}} \quad (6.1)$$

où  $T_0$  est la période en l'absence de fluide. Le numérateur de la fraction sous la racine carrée exprime la correction résultant de l'inertie supplémentaire due au fluide entraîné tandis que le dénominateur exprime la correction due à la poussée d'Archimède. Enfin, la forme approximative est valable si  $\rho_f \ll \rho_s$ . Le facteur  $n$  est la notation que Poisson et Stokes utilisent pour exprimer le facteur dont il faut modifier la correction due à la poussée d'Archimède pour tenir compte de l'effet global de l'air.

D'après l'article de Poisson [15] de 1832, la poussée d'Archimède a été prise en compte par Newton qui a vérifié expérimentalement la validité de la correction mais la précision insuffisante des mesures de l'époque n'avait pas permis de voir que la poussée d'Archimède ne suffisait pas à expliquer la totalité de l'effet. Le travail de Bessel [4] en 1828 a mis en évidence la force d'inertie supplémentaire. Poisson fait la théorie de cet effet en utilisant les équations de l'hydrodynamique des fluides parfaits et il trouve que la masse inertielle additionnelle pour une sphère est égale à la moitié de la masse du fluide déplacé c'est à dire  $V_f/V_s = 1/2$  ce qui mène à  $n = 1.5$ . Il compare alors son résultat à celui de Bessel  $n = 1.9459$  et à ceux de Sabine  $n = 1.655$ . Dans un addendum à son article publié à la suite de l'article principal, Poisson cite les travaux de Du

Buat [3] publiés en 1786 qui avait trouvé, 42 ans avant Bessel, l'effet d'inertie supplémentaire due au fluide entraîné. Le résultat de Poisson est assez proche des mesures de Du Buat  $n \approx 1.585$  pour des pendules oscillant dans l'eau et  $n \approx 1.560$  pour des pendules oscillant dans l'air.

Avant d'aller plus loin, je tiens à souligner le point suivant : l'effet d'entraînement d'une masse de fluide modifie la masse inerte du pendule sans en modifier la masse gravitationnelle puisque le fluide entraîné, qui est soutenu par la poussée d'Archimède, ne contribue pas au poids du pendule dans l'approximation où le fluide est incompressible. La poussée d'Archimède sur le corps du pendule réduit le poids et modifie donc la masse gravitationnelle apparente. Ceci pourrait être interprété comme une violation du principe d'équivalence qui dit que la masse inerte et la masse gravitationnelle sont égales car la présence d'un fluide réduit la masse gravitationnelle et augmente la masse inerte. Bien sûr, quand le fluide est l'air (ou l'eau), on sait que le pendule oscille dans un fluide et on s'attend à des effets non négligeables. Mais cette remarque suggère le principe général de violations possibles du principe d'équivalence : un exemple d'un tel fluide serait la matière noire !

Vers 1845, Stokes reprend l'étude des forces sur une sphère ou un cylindre en mouvement périodique ou de vitesse constante dans un fluide visqueux incompressible. En utilisant les équations de l'hydrodynamique des fluides visqueux, qui sont maintenant appelées équations de Navier-Stokes, il trouve que la masse inertielle additionnelle est plus grande que la moitié de la masse du fluide déplacé et que cette masse est fonction de la géométrie et de la dimension de l'objet. La synthèse de ce travail est publiée [1] par Stokes en 1851. Il compare ses résultats à diverses mesures (Du Buat, Bessel, Sabine, Baily) et la comparaison explique bien les valeurs expérimentales du coefficient  $n$  défini ci-dessus.

### 3 Les équations hydrodynamiques de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes, qui décrivent l'écoulement d'un fluide visqueux, sont données dans tous les livres d'hydrodynamique [9, 10, 11]. Le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  et le champ de pression  $p$  vérifient les équations aux dérivées partielles suivantes

$$\varrho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6.3)$$

où  $\varrho$  est la masse volumique du fluide supposé incompressible et  $\mu$  sa viscosité dynamique, selon la notation de Lamb ou de Batchelor (Landau et Lifchitz utilisent  $\eta$ ). On note  $\nu$  la viscosité cinématique définie par  $\nu \equiv \mu/\varrho$ . La première équation exprime le principe fondamental de la dynamique et elle est non-linéaire à cause du terme d'entraînement  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ . La nature non linéaire de ce terme est la cause de la complexité du problème. La deuxième équation exprime la conservation de la masse, dans le cas particulier d'un fluide incompressible. La condition aux limites pour un fluide visqueux en présence d'une surface solide est que la vitesse relative du fluide par rapport au solide est nulle en tout point de la surface. D'après le livre Laminar Boundary Layers [12] (voir p 121), ces équations ont été écrites en 1823 par Navier [16], en 1831 par Poisson [17], en 1843 par Saint-Venant [18] et en 1845 par Stokes [19].

### 4 Introduction du nombre de Reynolds

Le rapport du terme inertiel non-linéaire au terme de viscosité est donné par

$$\frac{\varrho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}{\mu \Delta \mathbf{v}} \sim \frac{\varrho V^2 / D}{\mu V / D^2} \sim \frac{\varrho V D}{\mu} \quad (6.4)$$

où  $V$  est une valeur caractéristique de la vitesse de l'écoulement et  $D$  est une dimension caractéristique de l'écoulement. Cette comparaison a mené Reynolds [2] en 1883 à introduire le nombre  $Re$  qui porte maintenant son nom

$$Re \equiv \frac{\rho V D}{\mu}. \quad (6.5)$$

Dans le cas d'une sphère ou d'un cylindre en mouvement dans un fluide initialement à l'arrêt,  $V$  est la vitesse relative de l'objet par rapport au fluide très loin de l'objet et  $D$  est en général choisi égal au diamètre de la sphère ou du cylindre. Quand le nombre de Reynolds est très petit,  $Re \ll 1$ , il est naturel de considérer que l'on peut oublier le terme inertiel non-linéaire  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  dans les équations de Navier-Stokes. En 1851, donc bien avant le travail de Reynolds, Stokes [1] avait fait cette approximation en négligeant le terme d'entraînement

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (6.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (6.7)$$

En vue des expériences que nous avons réalisées, il est intéressant d'évaluer le nombre de Reynolds pour une sphère ou un cylindre de diamètre  $D$  évoluant dans l'air dans les conditions ordinaires de température et de pression ( $\rho \approx 1.2 \text{ kg/m}^3$  et  $\mu \approx 1.86 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$ ). On voit que le nombre de Reynolds est égal à 1 si le produit vitesse  $\times$  diamètre  $VD$  est égal à  $VD \approx 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Si on prend l'exemple d'un diamètre  $D = 30 \text{ mm}$ , on trouve une vitesse  $V = 5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$  soit  $0.5 \text{ mm/s}$  : il faudra donc mesurer des mouvements de très faibles vitesses et donc de très faibles amplitudes pour un pendule.

## 5 La profondeur de pénétration visqueuse $\delta$

Une quantité très importante est la profondeur de pénétration visqueuse : c'est une longueur notée  $\delta$  par Batchelor et par Landau et Lifchitz. Pour l'introduire, on peut résoudre les équations de Navier-Stokes à une dimension dans le cas suivant : la surface solide d'un plan situé en  $x = 0$  oscille parallèlement à elle-même dans le fluide situé dans le demi-espace  $x > 0$ . La surface oscille selon la direction  $y$ , avec une vitesse  $v_y = v_0 \exp(i\omega t)$ . Alors,  $v_y$  est la seule composante non-nulle de la vitesse. Comme elle est seulement fonction de  $x$  et de  $t$ , le terme non-linéaire d'entraînement s'annule dans ce cas particulier. On doit alors résoudre l'équation

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}. \quad (6.8)$$

C'est une équation de diffusion dont la solution en notations complexes est donnée par

$$v_y = v_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right], \quad (6.9)$$

où la profondeur de pénétration visqueuse  $\delta$  est définie par

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\omega}} = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}. \quad (6.10)$$

Le fluide est ainsi entraîné par la surface et suit son mouvement avec un retard et ce déplacement est notable sur une distance de quelques  $\delta$ . Cette longueur  $\delta$  varie avec la pulsation  $\omega$ , avec  $\delta \propto 1/\sqrt{\omega}$ . Elle tend donc vers l'infini quand  $\omega \rightarrow 0$ . Un point très important est l'apparition

d'une nouvelle échelle de longueur donnée par  $\delta$  dans le cas d'un mouvement périodique. Enfin, pour un mouvement dans l'air dans les conditions ordinaires de température et de pression, l'ordre de grandeur de  $\delta$  est  $\delta \approx 2.2$  mm pour une fréquence égale à 1 Hz et donc une pulsation  $\omega = 2\pi$ .

## 6 Forces exercées par un fluide sur un objet

Quand un objet de masse  $m$  se déplace avec une vitesse  $v$  dans un fluide initialement à l'arrêt, il induit autour de lui des changements de la pression et de la vitesse du fluide. Ces modifications de pression et de vitesse provoquent l'apparition d'une contrainte  $\sigma_{jk}$  dans le fluide donnée par

$$\sigma_{jk} = -p\delta_{jk} + \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) \quad (6.11)$$

où les indices  $j$  et  $k$  varient de 1 à 3 pour les axes **x**, **y** et **z**. La force exercée par le fluide sur l'objet est donnée par  $\oint \sigma \cdot \mathbf{n} dS$  où  $dS$  est l'élément de surface de l'objet et **n** le vecteur unitaire normal entrant. L'équation du mouvement de l'objet dans le fluide sera donc

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \oint \sigma \cdot \mathbf{n} ds + mg \quad (6.12)$$

où **g** est l'accélération locale de la pesanteur. Il est classique de distinguer la force dynamique de friction **F** qui résulte du mouvement relatif de l'objet par rapport au fluide et la "force d'Archimède" statique qui résulte du gradient de la pression  $p$  du fluide quand l'objet et le fluide ne bougent pas. Alors,  $\nabla p = \varrho \mathbf{g}$  et la force d'Archimède est simplement égale à  $-\varrho V \mathbf{g}$ , où  $V$  est le volume de l'objet. L'équation du mouvement s'écrit alors

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - (m - \varrho V) \mathbf{g}. \quad (6.13)$$

L'expression analytique explicite de la force de friction **F** n'a pu être obtenue que pour des objets de forme simple et seulement dans le régime de Stokes.

## 7 L'article de Stokes de 1851

### 7.1 Résultat de Stokes pour la sphère

Le calcul de Stokes pour la sphère est assez long et relativement compliqué. On en trouve des versions simplifiées dans tous les livres d'hydrodynamique que nous avons consultés (Lamb, Landau et Lifchitz, Batchelor). Il est donc inutile de le refaire ici et je recopie seulement le résultat. Pour une sphère de rayon  $R$  en mouvement oscillant dont la position du centre est donnée par  $x = x_0 \cos(\omega t)$ , la force, qui est parallèle à cet axe, est donnée par

$$F_x = -\frac{2\pi}{3} \varrho R^3 \left( 1 + \frac{9\delta}{2R} \right) \frac{dv_x}{dt} - 6\pi \mu R \left( 1 + \frac{R}{\delta} \right) v_x \quad (6.14)$$

On trouve aussi cette équation sous la forme initiale de Stokes avec deux coefficients sans dimensions  $k$  et  $k'$

$$\begin{aligned} F_x &= -M' \left[ k \frac{d^2x}{dt^2} + k' \omega \frac{dx}{dt} \right] \\ k &= \left( \frac{1}{2} + \frac{9\delta}{4R} \right) \\ k' &= \frac{9\delta}{4R} \left( 1 + \frac{\delta}{R} \right) \end{aligned} \quad (6.15)$$

où  $M' = 4\pi\varrho R^3/3$  est la masse du fluide déplacé. Le terme proportionnel à l'accélération est le terme de masse ajoutée : on retrouve le résultat de Poisson, avec une masse ajoutée égale à la moitié de la masse déplacée, en faisant  $\mu = 0$  donc  $\delta = 0$ . Si  $\mu \neq 0$ , le résultat de Poisson doit être multiplié par le facteur  $[1 + (9\delta/(2R))]$  qui est toujours supérieur à 1. La masse ajoutée est donc toujours plus grande que la moitié de la masse du fluide déplacée et elle est notablement plus grande si le rayon de la sphère est petit ou comparable à  $\delta$ . Ce résultat explique que le facteur  $n$  de l'équation (6.1) diffère de la valeur 1.5 prévue par les calculs de Poisson et c'est le résultat recherché par Stokes pour expliquer les observations sur des pendules.

Le résultat donné par les équations (6.14) ou (6.15) suppose que le fluide s'étende jusqu'à l'infini. Si le fluide est contenu dans une sphère de rayon fini, il faut prendre la condition aux limites de vitesse nulle sur cette deuxième sphère, ce qui a été fait par Stokes. Je ne reproduis pas ce résultat ici mais l'effet est petit si la distance entre les deux sphères est grande devant la longueur de pénétration visqueuse  $\delta$  et si le rayon de la sphère extérieure est grand devant  $R$ . La présence d'une sphère extérieure sur laquelle la vitesse du fluide s'annule ne peut qu'augmenter les gradients de vitesse et donc les forces de viscosité par rapport au cas où le fluide s'étend jusqu'à l'infini.

Le terme proportionnel à la vitesse diffère de la formule classique  $\mathbf{F} = -6\pi\mu R\mathbf{v}$  : cette équation, qui n'est valable que pour une vitesse  $\mathbf{v}$  constante en module et en direction, se déduit de l'équation (6.14) en prenant la limite  $\omega \rightarrow 0$  donc  $\delta \rightarrow \infty$ . Cette formule est très connue à cause de l'expérience de Millikan. Pour un mouvement oscillant, ce résultat est corrigé par le facteur  $[1 + (R/\delta)]$  qui est très important quand  $R$  est grand devant  $\delta$ . Par exemple, pour un pendule oscillant dans l'air avec une fréquence de 1 Hz, on a vu que la longueur de pénétration visqueuse vaut  $\delta \approx 2.2$  mm et, pour un rayon  $R \approx 30$  mm, le facteur correctif vaut  $[1 + (R/\delta)] \approx 15$ . On peut s'étonner de l'ampleur de cette correction. L'équation (6.11) montre que la composante de viscosité de la force est proportionnelle au gradient de la vitesse du fluide à la surface de la sphère. Si la vitesse est constante,  $R$  est la seule longueur du problème et le champ de vitesse du fluide varie avec la distance  $r$  comme  $r/R$  à des puissances négatives inférieures ou égales à 3. Pour le mouvement oscillant, le champ de vitesse contient des termes variant comme  $\exp(-(1+i)r/\delta)$  et donc les dérivées spatiales de la vitesse sont beaucoup plus grandes si  $\delta \ll R$ . Dans ce cas, on remarque aussi que la partie de la force proportionnelle à la vitesse varie non plus comme le rayon  $R$  mais comme son carré  $R^2$ .

Enfin, on doit noter que ces résultats sont valables pour des oscillations d'amplitude petite devant le diamètre de la sphère mais éventuellement aussi devant la profondeur de pénétration visqueuse  $\delta$ . Cette question n'est pas discutée en détail dans les livres d'hydrodynamique [9, 11, 10]. Seul Batchelor indique que la force de friction sur un cylindre est bien donnée par la formule de Stokes si le déplacement est inférieur à 0.1 fois le rayon du cylindre ce qui est le cas pour la plupart de nos expériences. Cette question est discutée en détail dans le cas du cylindre par Berg *et al.* [23].

Le calcul de Stokes a été généralisé, par Boussinesq [20] en 1885 et par Basset [21] en 1888,

au cas d'un mouvement de vitesse  $v_x(t)$  variable mais de direction fixe parallèle à l'axe **x**. La force est alors donnée par

$$F_x = -6\pi\mu R v_x(t) - \frac{2\pi}{3} \varrho R^3 \frac{dv_x(t)}{dt} - 6\sqrt{\pi\varrho\mu} R^2 \int_{-\infty}^t \frac{dv_x(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (6.16)$$

L'intégrale dans le troisième terme est, à un facteur  $1/\Gamma(1/2)$  près, la dérivée d'ordre  $1/2$  de la vitesse. On trouvera la définition des dérivées fractionnaires par exemple dans l'article Analyse fractionnaire sur Wikipedia.

Enfin, Hussey et Vujacic [22] ont introduit une correction pour un mouvement oscillant harmonique amorti. Cette correction consiste à remplacer la pulsation  $\omega$  dans le calcul de la longueur de pénétration visqueuse  $\delta$  par une pulsation avec une petite partie imaginaire  $\omega(1+i\varepsilon)$ . Pour éviter la confusion de notation, j'ai remplacé par  $\varepsilon$  ce que ces auteurs ont noté  $\delta$  et qu'ils appellent, apparemment à tort, le décrément logarithmique : en effet  $\varepsilon = 1/(2Q)$  où  $Q$  est le coefficient de qualité de l'oscillateur alors que le décrément logarithmique  $D = \pi/Q = 2\pi\varepsilon$  (voir section 12). Ces auteurs calculent la correction sur  $k$  et  $k'$ , pour la sphère et pour le cylindre. Cette correction est linéaire en  $\varepsilon$  pour certains termes de  $k$  et  $k'$ . Il ne m'a pas semblé nécessaire de la prendre en compte pour nos expériences car le coefficient de qualité  $Q$  des pendules utilisés est grand et la correction est alors négligeable.

## 7.2 Résultats de Stokes pour le cylindre en mouvement oscillant

Le calcul de Stokes est reproduit dans un appendice de ce chapitre. On considère un cylindre infiniment long de rayon  $R$  dont l'axe est parallèle à l'axe **z** et il oscille avec la pulsation  $\omega$  selon une direction de translation choisie comme axe **x**, c'est à dire  $x = x_0 \cos(\omega t)$ . La force est parallèle à cet axe. Comme pour la sphère, la force par unité de longueur du cylindre  $dF_x/dl$  est la somme d'un terme proportionnel à l'accélération et d'un terme proportionnel à la vitesse

$$\frac{dF_x}{dl} = -\frac{dM'}{dl} \left[ k \frac{d^2x}{dt^2} + k' \omega \frac{dx}{dt} \right] \quad (6.17)$$

où  $dM'/dl = \varrho\pi R^2$  est la masse du fluide déplacé par unité de longueur du cylindre et les coefficients sans dimensions  $k$  et  $k'$  sont donnés par

$$\begin{aligned} k &= \operatorname{Re} \left[ 1 + \frac{4K_1(z)}{zK_0(z)} \right] \\ k' &= -\operatorname{Im} \left[ \frac{4K_1(z)}{zK_0(z)} \right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

où  $K_n(z)$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre  $n$  et  $z$  est donné par  $z = (1+i)R/\delta$ . Ce résultat a été établi par Stuart [12] en 1963 et il est cité par divers auteurs [6, 7, 22]. Berg *et al.* [23], qui utilisent ce résultat, notent

$$B_{cyl} \left( \frac{R}{\delta} \right) = - \left( k' + ik \right) = i \left[ 1 + \frac{4K_1(z)}{zK_0(z)} \right] \quad (6.19)$$

Il est intéressant de multiplier  $k$  et  $k'$  par le facteur  $(R/\delta)^2$  et d'écrire la force

$$\begin{aligned} \frac{dF_x}{dl} &= -\varrho\pi\delta^2 \left[ \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 k \frac{d^2x}{dt^2} + \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 k' \omega \frac{dx}{dt} \right] \\ &= -2\pi\mu \left[ \frac{1}{\omega} \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 k \frac{d^2x}{dt^2} + \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 k' \frac{dx}{dt} \right] \end{aligned} \quad (6.20)$$

La totalité de la dépendance en  $R$  se trouve alors contenue dans les termes  $R^2k/\delta^2$  et  $R^2k'/\delta^2$ . De plus, ces deux quantités varient assez lentement et elles tendent toutes deux vers 0 quand  $R/\delta \rightarrow 0$  alors que  $k$  et  $k'$  divergent à cette limite. Utilisant Mathématica pour calculer les fonctions de Bessel modifiées, on obtient les courbes de la figure 6.1.

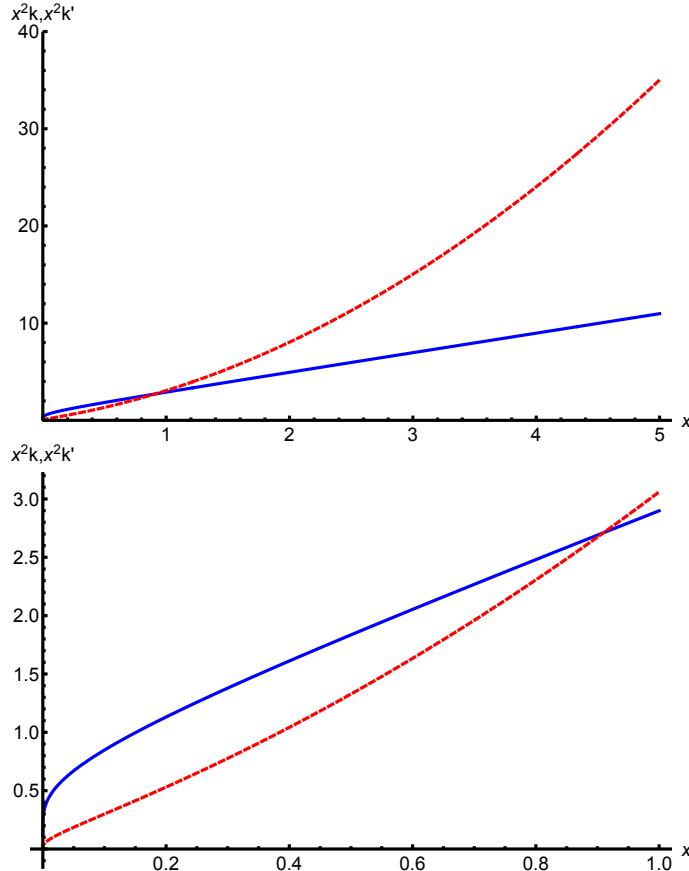


FIGURE 6.1 – Variation des quantités  $x^2k(x)$  (force non dissipative, en rouge) et  $x^2k'(x)$  (force dissipative, en bleu) en fonction de  $x = (R/\delta)$ . Panneau supérieur : variations pour  $0 < x < 5$  : dans ce cas, le terme dominant de  $x^2k$  est  $x^2$  alors que le terme dominant de  $x^2k'$  est  $2x$ . Panneau inférieur : variations pour  $0 < x < 1$ .

Les développements asymptotiques de  $k$  et  $k'$  ont été donnés par Stokes (ses équations 113 et 115) aussi bien pour  $R \ll \delta$  que  $R \gg \delta$ . Pour  $R \ll \delta$ , je ne donne que le terme dominant en  $1/\ln(R/\delta)$  (ce terme fournit une précision relative meilleure que 10 % tant que  $R/\delta < 0.1$ ) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 k &= \frac{\pi}{2 \left[\ln\left(\frac{R}{\delta}\right)\right]^2} \\ \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 k' &= -\frac{2}{\ln\left(\frac{R}{\delta}\right)} \end{aligned} \quad (6.21)$$

On remarque que ces deux quantités tendent très lentement vers 0 quand  $R/\delta \rightarrow 0$ . Pour  $R \gg \delta$ ,

Stokes donne de nombreux termes des formules asymptotiques mais je ne reproduis que les 3 termes dominants quand  $R/\delta \gg 1$

$$\left(\frac{R}{\delta}\right)^2 k = \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 + 2\frac{R}{\delta} + \frac{\delta}{8R} \quad (6.22)$$

$$\left(\frac{R}{\delta}\right)^2 k' = 2\frac{R}{\delta} + 1 - \frac{\delta}{8R} \quad (6.23)$$

On remarque donc que, si  $R \gg \delta$ , la force varie comme le carré du rayon  $R$  pour le terme de masse ajoutée donné par  $k$  et seulement comme le rayon pour le terme de friction. L'erreur relative de ces formules approchées est meilleure que 7 % pour  $k$  et que 1 % pour  $k'$  tant que  $R/\delta > 1$ .

Dans son livre (pages 356-357) [11], Batchelor calcule de manière perturbative la partie dissipative de la force exercée sur la sphère ou sur le cylindre c'est-à-dire le coefficient  $k'$ . Il évalue l'énergie dissipée dans la couche limite par les effets de viscosité sur une période d'oscillation avec le champ de vitesse calculé sans viscosité. Pour la sphère, son résultat est en accord avec le résultat de Stokes donné par l'équation (6.14) mais il manque le terme 1 dans la parenthèse  $[1 + (R/\delta)]$ . De même, pour le cylindre, son résultat est en accord avec celui de Stokes dans le cas  $R/\delta \gg 1$ , en se limitant au terme dominant  $2R/\delta$  de l'équation (6.23).

### 7.3 Cas du mouvement oscillant sinusoïdal de grande amplitude pour le cylindre

Divers auteurs [24, 25, 26, 27, 28] ont étudié expérimentalement ce problème qui a des applications pour les structures immergées dans la mer. En plus du nombre de Reynolds, ils introduisent des nombres supplémentaires sans dimension :

— le nombre de Keulegan-Carpenter

$$KC = \frac{v_m T}{D} \quad (6.24)$$

où  $D = 2R$  est le diamètre du cylindre,  $T$  est la période,  $T = 2\pi/\omega$ , et  $v_m$  la vitesse maximale,  $v_m = \omega x_0$ , donc  $KC = \pi x_0/R$ ;

— le nombre de Stokes

$$\beta = \frac{\rho D^2}{\mu T} \quad (6.25)$$

$\beta$  est relié au nombre de Reynolds  $Re$  et au nombre de Keulegan-Carpenter  $KC$  par  $\beta = Re/KC$ ;

— et un nombre de Reynolds modifié où  $\delta$  remplace le diamètre  $D$  du cylindre,

$$Re_\delta = \frac{\rho v_m \delta}{\mu}. \quad (6.26)$$

Ces travaux [25, 26, 27, 28] considèrent de petites valeurs nombre de Keulegan-Carpenter  $KC$ ,  $KC < 10$  et des grandes valeurs de  $Re$  de l'ordre de quelques  $10^2$ . La plupart des expériences avec des pendules utilisent des fils très fins par rapport à l'amplitude du mouvement donc  $KC \gg 1$ . La finesse du fil fait que le nombre de Reynolds pour le fil,  $Re_f$ , reste assez petit, rarement supérieur à 30. Les résultats des articles [25, 26, 27, 28] ne sont donc pas directement applicables aux expériences sur les pendules.

L'article de Tatsuno et Bearman [29] étudie de manière visuelle les écoulements autour d'un cylindre oscillant pour des petites valeurs des nombres de Keulegan-Carpenter et de Stokes : cet article ne donne pas de résultats sur les forces mais il décrit 8 régimes d'écoulement dans la zone  $1.6 < KC < 15$  et  $5 < Re < 160$ .

Enfin, Berg *et al.* [23] évaluent le facteur correctif  $C(x_0/\delta, R/\delta)$  par lequel il faut multiplier la force donnée par les équations (6.17, 6.18) quand  $x_0/\delta$  et  $R/\delta$  ne sont pas petits. Sans rentrer dans les détails, cet article montre que cette dépendance n'est pas trop rapide avec  $x_0/\delta$ .

## 8 Considérations semi-empiriques sur les forces de friction

### 8.1 Définition du coefficient de traînée

La force  $\mathbf{F}$  exercée par un fluide au repos, de masse volumique  $\varrho$ , sur un objet en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}$ , est classiquement donnée par

$$\mathbf{F} = -\frac{C_D(Re)}{2} \varrho A |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \quad (6.27)$$

Dans cette formule,  $C_D(Re)$  est le coefficient de traînée qui est une fonction de la forme de l'objet et du nombre de Reynolds  $Re$  ;  $A$  est l'aire de la projection de l'objet en mouvement sur un plan perpendiculaire à la vitesse  $\mathbf{v}$ . Cette équation n'est applicable que si la vitesse est constante en direction et en valeur et l'application de cette équation à un pendule est fréquente mais elle n'est pas justifiée. En effet, si la direction de la vitesse est sensiblement constante quand l'amplitude d'oscillation est faible, la valeur de la vitesse varie rapidement, passant de 0 à sa valeur maximale puis à 0 au cours de chaque demi-période.

Une formule d'interpolation couramment utilisée pour représenter approximativement le coefficient de traînée  $C_D(Re)$  est

$$C_D(Re) \approx \frac{C_1}{Re} + C_2. \quad (6.28)$$

Quand le premier terme est dominant, la force est proportionnelle à la vitesse : c'est le régime de Stokes. Quand le deuxième terme est dominant la force est proportionnelle au carré de la vitesse, ce qui est le régime usuel pour les grandes valeurs du nombres de Reynolds  $Re \gg 1$ . Je vais décrire les variations de  $C_D(Re)$  pour une sphère et pour un cylindre.

### 8.2 Coefficient de traînée pour une sphère

On peut réexprimer le résultat de Stokes  $\mathbf{F} = 6\pi\mu R\mathbf{v}$ , où  $R$  est le rayon de la sphère, avec le nombre de Reynolds défini par le diamètre  $D = 2R$  de la sphère. On obtient un coefficient de traînée  $C_D = 24/Re$  valable tant que le nombre de Reynolds est suffisamment petit. Pour  $Re \gtrsim 1$ , il faut utiliser des expériences ou des méthodes numériques pour décrire l'écoulement. Des calculs allant jusqu'à  $Re = 10^3$  ont permis d'identifier des transitions de l'écoulement [30]. Lors de la première transition, pour  $Re \approx 212$ , l'écoulement perd la symétrie axiale. Lors de la deuxième transition, pour  $Re \approx 285$ , il apparaît une émission périodique de tourbillons et la force oscille à la fréquence d'émission des tourbillons. Dans ce cas,  $C_D(Re)$  donne la moyenne temporelle de la force. Ces résultats sont confirmés par des expériences [31] qui mettent en évidence une transition de l'écoulement pour  $Re \approx 266$ .

Il existe de très nombreuses mesures du coefficient de traînée  $C_D(Re)$  de la sphère en fonction du nombre de Reynolds. Une compilation récente [32], qui couvre la gamme  $2 \times 10^{-3} < Re < 5 \times 10^5$ , confirme bien la dépendance  $C_D = 24/Re$  pour  $Re \lesssim 1$  et elle montre aussi que  $C_D(Re)$

est à peu près stable  $0.4 \lesssim C_D \lesssim 0.5$  pour  $10^3 < Re < 2 \times 10^5$ . L'équation (6.28) donne une interpolation avec  $C_1 \approx 24$  et  $C_2 \approx 0.5$  : cette interpolation est une bonne approximation si  $Re \ll 1$  et  $Re \gg 1$  mais elle est grossière dans la zone  $1 < Re < 10^3$  comme le prouve l'équation (6.31) ci-dessous. L'article [32] donne des formules d'interpolation beaucoup plus précises mais aussi plus compliquées.

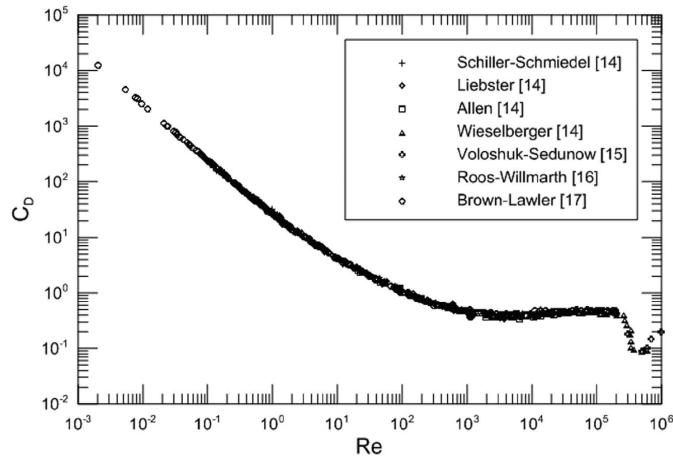


FIGURE 6.2 – Compilation des mesures du coefficient de traînée  $C_D$  de la sphère en fonction du nombre de Reynolds[32].

## 9 Force de traînée pour un cylindre

Dans son article de 1851, Stokes arrive à un paradoxe dans le cas d'une vitesse constante : il n'existe pas de solution vérifiant les conditions aux limites à l'infini et à la surface du cylindre. Ce paradoxe a été résolu grâce aux travaux de Oseen [33, 34] en 1910-1913. Oseen a montré qu'il n'est pas correct d'oublier complètement le terme d'entraînement  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  dans les équations de Navier-Stokes. En effet, ce terme est négligé parce que le nombre de Reynolds est petit, ce qui est vrai si la distance qui figure dans ce nombre est prise égale au rayon de l'objet qui perturbe l'écoulement mais ce n'est évidemment plus vrai si on considère l'écoulement à une grande distance de l'objet et que l'on utilise cette distance pour évaluer le nombre de Reynolds. Oseen a proposé une autre forme linéaire en vitesse de la première équation de Navier-Stokes. Si  $\mathbf{U}$  est la vitesse du fluide à l'infini de l'objet supposé fixe, Oseen écrit que la vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{v}'$  et il garde du terme d'entraînement la partie  $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{v}'$ . Il obtient ainsi des équations linéaires différentes

$$\begin{aligned} \varrho \left( \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{v}' \right) &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}' \\ \nabla \cdot \mathbf{v}' &= 0 \end{aligned} \tag{6.29}$$

En utilisant ces équations, Lamb [35, 9] a calculé le coefficient de traînée  $C_D$  du cylindre

$$\begin{aligned} C_D(Re) &= \frac{8\pi}{Re}\varepsilon \\ \text{avec } \varepsilon &= \frac{1}{\frac{1}{2} - \gamma + \ln(8/Re)} \end{aligned} \quad (6.30)$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler,  $\gamma \approx 0.5772$ . Divers articles [36, 37, 38] ont calculé des termes d'ordre supérieurs en  $\varepsilon$ . Le point important est que, puisque le logarithme de  $Re$  figure au dénominateur de  $\varepsilon$ , la force n'est pas proportionnelle à la vitesse. Un article récent de Khalili et Liu [39] explique que ce paradoxe a mené au développement d'une nouvelle branche des mathématiques appliquées «matched asymptotic expansions» et cet article analyse la convergence du calcul numérique du coefficient de traînée pour un cylindre aux très petites valeurs du nombre de Reynolds.

Pour  $Re \gtrsim 1$ , il faut utiliser des expériences ou des méthodes numériques pour décrire l'écoulement. Sur la gamme  $Re = 10 - 10^3$ , Henderson [40] identifie deux transitions de l'écoulement : à partir de  $Re = 46 \pm 1$ , des tourbillons sont émis périodiquement et la force oscille autour d'une valeur moyenne et à partir de  $Re = 188.5 \pm 1$ , les perturbations de l'écoulement deviennent tridimensionnelles. Le coefficient de traînée  $C_D(Re)$  qui donne la force moyenne est presque constant,  $1.3 \lesssim C_D \lesssim 1.5$  sur toute la gamme  $46 < Re < 10^3$ . Les mesures du coefficient de traînée  $C_D(Re)$  du cylindre sont également nombreuses [41, 42, 43] et, pour  $Re \lesssim 1$ , ces mesures sont en bon accord avec la formule de Lamb. La figure 6.3 montre les variations du coefficient de traînée pour le cylindre.

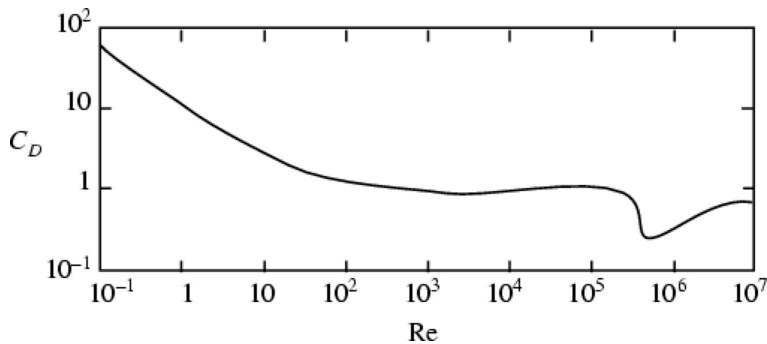


FIGURE 6.3 – Variations du coefficient de traînée  $C_D$  du cylindre en fonction du nombre de Reynolds  $Re$ . (source : <http://scienceworld.wolfram.com/physics/CylinderDrag.html>).

## 9.1 Limite de validité du calcul de Stokes

Un sous-produit très intéressant des calculs est la fonction courant  $\psi$ . Les figures 4.9.1 et 4.10.1 du livre de Batchelor montrent la fonction courant dans le cas de la sphère déduite du calcul de Stokes (cette fonction est évidemment indépendante du nombre de Reynolds) et celle déduite du calcul utilisant les équations d'Oseen [34, 44], calculée pour  $Re = 1$  : les différences entre ces deux fonctions courant sont vraiment très importantes.

Le calcul du coefficient de traînée de la sphère a été fait en utilisant les équations d'Oseen et la formule incluant le premier terme correctif [34, 44] est

$$C_D(Re) = \frac{24}{Re} \left( 1 + \frac{3Re}{8} \right) \quad (6.31)$$

On voit donc que la correction sur  $C_D(Re)$  n'est pas du tout négligeable pour  $Re \sim 1$  et la limite de validité du calcul de Stokes est donc bien  $Re \ll 1$ , comme attendu.

## 10 Amortissement d'un pendule par la friction de l'air

Miller [45] a montré qu'il est possible d'intégrer de manière analytique exacte le mouvement d'un oscillateur harmonique soumis à une force proportionnelle à  $v^2$  et, a priori, ce calcul peut s'étendre au cas où la force est la somme d'un terme en  $v$  et d'un terme en  $v^2$ . Cependant, même avec seulement un terme en  $v^2$ , le résultat de ce calcul n'est pas d'un emploi commode, d'une part parce qu'il utilise plusieurs changements de variables et, d'autre part, parce qu'il faut changer le signe du terme en  $v^2$  chaque fois que la vitesse change de signe (la force est en fait en  $|v|v$ ). Si l'amortissement est faible, ce qui est le cas intéressant du point de vue pratique, Crawford a montré [46] que c'est une excellente approximation de calculer l'énergie perdue  $L$  au cours d'une période par le travail des forces de friction en utilisant le mouvement non perturbé.

Dans tous les articles analysés ci-dessous sauf ceux utilisant des cylindres, les pendules utilisés sont formés d'une sphère de diamètre  $D$  suspendue par un fil fin [14, 49], par deux fils fins [8] ou par une tige rigide [51]. On notera  $l_f$  la longueur du ou des fils ou de la tige et  $l$  la distance du point d'accrochage du pendule au centre de la sphère de diamètre  $D$  (on a donc  $l = l_f + D/2$ ). Ces pendules oscillent dans l'air à la pression atmosphérique, sauf celui de la référence [49] qui oscille dans l'eau. Etant donné le diamètre de la sphère et la vitesse d'oscillation, le nombre de Reynolds pour la sphère est grand, approchant  $10^4$  dans certaines expériences. Comme l'ont montré Nelson et Olsson [14], il faut aussi tenir compte des forces de frottement sur le fil ou sur la tige.

Puisque le nombre de Reynolds est grand, la plupart des articles écrivent que les forces de friction sont la somme d'un terme linéaire en vitesse et d'un terme quadratique en vitesse, c'est-à-dire qu'ils utilisent les équations (6.27) et (6.28), bien qu'il ne soit pas rigoureux de le faire pour un mouvement oscillant. Je présente ce calcul ici pour pouvoir discuter les articles [8, 14, 51].

Je note  $F_s$  la force sur la sphère et  $dF_f(r)/dr$  la force par unité de longueur sur le fil

$$\begin{aligned} F_s &= -a_{1s}v_b(t) - a_{2s}|v_s(t)|v_s(t) \\ \frac{dF_f(r)}{dr} &= -a_{1f}v_f(r,t) - a_{2f}|v_f(r,t)|v_f(r,t) \end{aligned} \quad (6.32)$$

où  $v_s(t) = v_m(t) \cos(\omega t)$  est la vitesse du centre de la sphère. La vitesse  $v_f(r,t)$  est la vitesse du point  $r$  du fil à l'instant  $t$ , donnée par  $v_f(r,t) = v_s(t)r/l$  : en effet, le fil est rectiligne car il est souple et car la masse du fil est négligeable devant celle de la sphère. On calcule les énergies perdues  $L_b(t)$  et  $L_f(t)$  durant une période  $T = 2\pi/\omega$  du mouvement, centrée à l'instant  $t$ . Ces quantités sont égales au travail des forces de frottement sur la sphère et sur le fil au cours d'une période

$$\begin{aligned} L_s(t) &= \int_{t-T/2}^{t+T/2} dt' \left( a_{1b}v_s^2(t') + a_{2b}|v_s(t')|v_s^2(t') \right) \\ L_f(t) &= \int_{t-T/2}^{t+T/2} dt' \int_0^{l_f} dr \left( a_{1f}v_s^2(t') \left(\frac{r}{l}\right)^2 + a_{2f}|v_s(t')|v_s^2(t') \left(\frac{r}{l}\right)^3 \right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

En utilisant les résultats  $\int_{t-T/2}^{t+T/2} \cos^2(\omega t') dt' = T/2$  et  $\int_{t-T/2}^{t+T/2} |\cos(\omega t')|^3 dt' = 4T/(3\pi)$ , on

obtient la perte d'énergie  $L$  durant une période

$$\begin{aligned}
 L(t) &= L_s(t) + L_f(t) \\
 L_s(t) &= \left( \frac{a_{1s}v_m^2(t)}{2} + \frac{4a_{2s}v_m^3(t)}{3\pi} \right) T \\
 L_f(t) &= \left( \frac{a_{1f}v_m^2(t)}{2} \frac{l_f^3}{3l^2} + \frac{4a_{2f}v_m^3(t)}{3\pi} \frac{l_f^4}{4l^3} \right) T \\
 L(t) &= \left( \frac{a_1v_m^2(t)}{2} + \frac{4a_2v_m^3(t)}{3\pi} \right) T \\
 \text{avec } a_1 &= a_{1s} + a_{1f}l_f^3/(3l^2) \\
 \text{et } a_2 &= a_{2s} + a_{2f}l_f^4/(4l^3)
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

Le coefficient  $a_{1s} = 6\pi\mu R_s(1 + \frac{R_s}{\delta})$  (où  $R_s$  est le rayon de la sphère) est déduit de l'équation de Stokes (6.15). Le coefficient  $a_{1f}$  a été pris en compte seulement par Nelson et Olsson [14] qui l'ont déduit des équations (6.27) et (6.28) et donc du terme proportionnel à  $1/Re$  : dans ce calcul,  $a_{1f}$  est indépendant du rayon du fil  $R_f$  ce qui est surprenant et en désaccord avec les résultats de Stokes. Nous utiliserons  $a_{1f} = 2\pi\mu \frac{R_f^2}{\delta^2} k'$  déduit de l'équation (6.20) avec  $k'$  défini par l'équation 6.18. Dans le cas où la masse du fil est négligeable devant la masse  $M$  de la sphère supposée homogène et de petit rayon  $R_s \ll l$ , l'énergie totale du pendule est donnée par l'énergie cinétique maximale de la sphère

$$E_{tot}(t) = \frac{Mv_m^2(t)}{2}. \tag{6.35}$$

Dans le cas général, cette énergie s'écrit  $E_{tot} = I\dot{\theta}^2/2$ , en utilisant le moment d'inertie total du pendule  $I$  calculé par rapport au point d'accrochage et la vitesse angulaire maximale  $\dot{\theta}_m(t)$ . Comme  $\dot{\theta}(t) = v_m(t)/l$ , on peut mettre l'énergie sous la forme

$$E_{tot}(t) = \frac{Iv_m^2(t)}{2l^2} = \frac{M_{eff}v_m^2(t)}{2}, \tag{6.36}$$

ce qui définit une masse effective du pendule  $M_{eff} = I/l^2$ . La conservation de l'énergie sur une période s'écrit :

$$T \frac{dE_{tot}(t)}{dt} = TM_{eff}v_m(t) \frac{dv_m}{dt} = -L(t). \tag{6.37}$$

Après simplification, on obtient l'équation vérifiée par  $v_m(t)$

$$\frac{dv_m}{dt} = -\frac{v_m}{\tau} - \beta v_m^2, \tag{6.38}$$

$$\text{avec } 1/\tau = \frac{a_1}{2M_{eff}}, \tag{6.39}$$

$$\text{et } \beta = \frac{4a_2}{3\pi M_{eff}} \tag{6.40}$$

Cette équation s'intègre aisément

$$\frac{v_m(t)}{v_m(0)} = \frac{\exp(-t/\tau)}{1 + B(1 - \exp(-t/\tau))} \tag{6.41}$$

avec  $B = \beta\tau v_m(0)$ . La décroissance de l'amplitude du mouvement pour la position  $x_m(t)$  ou de son amplitude angulaire  $\theta_m(t)$  est bien sûr donnée par la même loi,  $x_m(t)/x_m(0) = \theta_m(t)/\theta_m(0) = v_m(t)/v_m(0)$ . La décroissance est exponentielle avec la constante de temps  $\tau$  si  $B \ll 1$  et, si  $B$  n'est pas négligeable, la décroissance est non-exponentielle aux temps courts, tant que  $\exp(-t/\tau)$  n'est pas négligeable devant 1. Les équations ci-dessus ont été écrites par Nelson et Olsson [14] : elles permettent de décrire la variation de l'amplitude ou de la vitesse sur toute la durée d'une expérience et elles relient aussi l'amortissement observé aux coefficients  $a_1$  et  $a_2$  de la sphère et du fil. Dans les articles dont je vais présenter une analyse détaillée, j'utiliserais pour le coefficient  $a_1$  de la sphère et du fil les expressions de Stokes pour le mouvement oscillant.

## 11 Tests expérimentaux de la force de friction de Stokes

J'ai collecté et analysé une série d'articles qui effectuent de tels tests sur une sphère ou sur un cylindre, parmi lesquels de nombreux articles publiés dans les revues "American Journal of Physics" et "European Journal of Physics", qui sont orientées vers la pédagogie. Beaucoup d'articles donnent des résultats qualitatifs et ne fournissent donc pas un test précis de la force de Stokes. Il y a aussi des articles anciens que j'ai trouvés parce qu'ils sont cités par des articles plus récents. La recherche bibliographique avant 1970 environ étant difficile, j'ai probablement omis des articles intéressants. Trois types de systèmes principaux sont utilisés pour tester le mouvement oscillant de sphères ou de cylindres :

- la vibration d'une corde de piano ou de violon, dans l'air ou dans un liquide [47, 48] ;
- des pendules oscillant dans le champ de gravité. Le pendule peut être formé seulement d'un cylindre [50] mais, le plus souvent, il est formé d'une sphère suspendue à un fil [14, 52, 53, 55, 54, 49, 56, 58], parfois à deux fils [8] ou à une tige [51] ;
- des pendules de torsion oscillant dans un liquide [5, 6, 7].

Chacun de ces trois types de systèmes permet de tester des domaines différents du rayon  $R$  et de la profondeur de pénétration visqueuse  $\delta$ . Voici ces valeurs typiques dans le cas d'une vibration dans l'air à pression et température ordinaires :

- les cordes vibrantes ne vibrent bien que si elles sont assez tendues et la fréquence typique d'une corde tendue est comprise entre 100 et 2000 Hz pour une corde à piano d'acier de longueur comprise entre 0.1 et 1 m. Pour ces fréquences et une vibration dans l'air, les valeurs de  $\delta$  couvrent la gamme 0.05 et 0.2 mm. Les diamètres des cordes utilisées dans les expériences [47, 48] varient entre 0.3 et 1 mm environ. Dans ce type d'expérience, le rapport  $(R/\delta)$  peut couvrir la gamme de 0.75 à 10 environ.
- les pendules oscillant dans le champ de gravité ont une fréquence qui croît de 0.3 à 1.6 Hz quand leur longueur décroît de 3 à 0.1 m. Les valeurs de  $\delta$  couvrent la gamme de 1.7 à 4 mm. Les rayons des sphères utilisées varient entre 10 et 250 mm et le rapport  $(R/\delta)$  peut couvrir la gamme de 2.5 à 150 environ tandis que, pour les cylindres, les rayons varient entre 0.3 et 25 mm et le rapport  $(R/\delta)$  peut couvrir la gamme de 0.1 à 15 environ.
- Les pendules de torsion utilisés dans les expériences [5, 6, 7] portent deux cylindres et les forces de friction sur les cylindres dominent les autres forces de friction si l'oscillation a lieu dans un liquide suffisamment visqueux. L'expérience de Williams [6, 7] a utilisé des cylindres de rayon compris entre 1.59 et 6.35 mm et les rapports  $R/\delta$  couvrent la gamme de 0.25 à 5.

Dans tous les cas, une difficulté expérimentale est de travailler avec des amplitudes d'oscillation  $x_0$  suffisamment petites :

- le nombre de Reynolds maximum devrait vérifier  $Re_{max} \ll 1$  pour que le calcul de Stokes soit valable. Cependant, il est déjà difficile de vérifier  $Re_{max} \lesssim 1$  et les expériences décrites

ci-dessous explorent souvent de grandes valeurs du nombre de Reynolds.

- on remarque que, la vitesse maximale étant égale à  $\omega x_0$ , le nombre de Reynolds maximum peut s'écrire  $Re_{max} = 4x_0R/\delta^2$ . Si l'expérience utilise des paramètres tels  $(R/\delta) \gg 1$ , il faut utiliser des amplitudes  $x_0$  vraiment très petites par rapport à  $\delta$  pour assurer  $Re_{max} \approx 1$ .
- le nombre de Keulegan-Carpenter  $KC = \pi x_0/R$  doit aussi être petit pour assurer la validité du calcul de Stokes. Cette condition est assez facile à remplir avec les différents pendules car, le rayon  $R$  est toujours supérieur à 1 mm et, le plus souvent, supérieur à 10 mm. Cette condition est plus difficile à satisfaire avec une corde tendue pour laquelle  $R \lesssim 0.5$  mm.

Je vais présenter ci-dessous l'analyse détaillée de quelques uns des articles cités ci-dessus. Je les ai choisis parce qu'ils présentent des tests intéressants de la force de friction de Stokes sur la sphère ou sur le cylindre. Je décris d'abord les expériences sur des sphères puis celles sur des cylindres et, dans ces deux catégories, les articles sont présentés par ordre chronologique.

### 11.1 L'article de Nelson et Olsson

Cet article [14] publié en 1985 décrit une expérience réalisée avec un pendule formé d'une sphère de rayon  $R_s = 30.5$  mm suspendue par un fil de longueur  $l_f = 2.93$  m et de rayon  $R_f = 0.16$  mm relié à un anneau pour former un pendule de longueur  $l = 3.00$  m. La période mesurée est  $T \approx 3.48$  s. Le but principal des auteurs est de déduire la valeur de l'accélération locale de la pesanteur à partir de la période du pendule mesurée aux petites amplitudes. Pour tester que le formalisme ci-dessus décrit bien l'amortissement, ils mesurent l'amplitude angulaire maximum en fonction du temps, entre une valeur initiale de  $17.5 \pm 0.3^\circ$  et une valeur finale  $0.6 \pm 0.3^\circ$  atteinte après 126 minutes.

La vitesse maximale vaut  $v_m \approx 1.66$  m/s au début de l'expérience et  $v_m \approx 0.057$  m/s à la fin, correspondant à un nombre de Reynolds variant de  $Re_s \approx 6360$  à 218 pour la sphère et de  $Re_f \approx 33$  et 1 pour le fil de suspension. Cet article donne, par erreur, des valeurs maximales très différentes,  $Re_{max} = 1100$  pour la sphère et  $Re_{max} = 6$  pour le fil. Ils déduisent de leurs mesures les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  de l'équation (6.34) ( $a_1$  est noté  $b$  et  $a_2$  est noté  $c$  dans cet article)

$$\begin{aligned} a_1 &= (4.27 \pm 0.19) \times 10^{-4} \text{ kg/s} \\ a_2 &= (1.18 \pm 0.01) \times 10^{-3} \text{ kg/m} \end{aligned} \quad (6.42)$$

tandis que leurs valeurs théoriques sont

$$\begin{aligned} a_1 &= (1.42) \times 10^{-4} \text{ kg/s} \\ a_2 &= (1.32) \times 10^{-3} \text{ kg/m} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Pour obtenir ces valeurs, ces auteurs utilisent pour la sphère  $a_{1s} = 6\pi\mu R_s(1 + C_H R_s/\delta)$  avec les notations de l'équation (6.14) en introduisant un facteur correctif semi-empirique  $C_H \approx 0.50$ . La contribution de la sphère à  $a_1$  est alors  $5 \times 10^{-5}$  kg/s. Si on élimine ce facteur correctif, elle devient égale à  $8.9 \times 10^{-5}$  kg/s. Pour le fil, ces auteurs n'utilisent pas les résultats de Stokes mais les équations (6.27) et (6.28) avec  $C_1 = 10$  et  $C_2 = 2$  et ils obtiennent ainsi une valeur théorique de la contribution du fil à  $a_1$  égale à  $0.93 \times 10^{-4}$  kg/s. Un calcul effectué avec la théorie de Stokes donne une valeur théorique de la contribution du fil à  $a_1$  égale à  $5 \times 10^{-5}$  kg/s.

### 11.2 L'article de Gupta *et al.*

En 1986, Gupta *et al.* [51] étudient l'amortissement par les forces de friction de l'air d'un pendule formé d'une grosse sphère au bout d'une tige. Le but est de tester la force de Stokes sur

une sphère en mouvement oscillant. De manière amusante, ils attribuent le résultat de Stokes à Landau et Lifchitz [10].

L'expérience est faite avec un pendule formé d'une tige de longueur  $l_t = 1.35$  m, de diamètre  $d_t = 15$  mm et de masse  $m_t = 0.510$  kg. Au bas de cette tige, un balle de plastique sphérique de rayon  $R_s = 224$  mm et de masse  $m_s = 0.290$  kg est fixée rigidement. Une sphère de rayon  $R_s = 165$  mm est utilisée pour une deuxième expérience. Le pendule est porté sur un support rigide par deux vis pointues. Le pendule est lancé avec une amplitude angulaire initiale égale à  $20^\circ$  et un dispositif utilisant une source lumineuse et un photodétecteur permet de mesurer la période du pendule ainsi que sa vitesse au moment où elle est maximum. De la vitesse, l'amplitude angulaire est déduite par la formule des petites oscillations et cette amplitude est tracée en fonction du nombre d'oscillations effectuées.

La décroissance de l'amplitude devient exponentielle quand l'amplitude angulaire d'oscillation est de l'ordre de  $1^\circ$  (voir les figures 2 et 3 de cet article). Les auteurs indiquent que la décroissance est exponentielle quand le nombre de Reynolds  $Re$  vérifie  $Re < 3000$  pour la sphère de rayon  $R = 224$  mm et  $Re < 2000$  pour la sphère de rayon  $R = 165$  mm. Il est assez surprenant que la décroissance soit exponentielle pour d'aussi grandes valeurs du nombre de Reynolds. On peut cependant remarquer que l'amplitude linéaire d'oscillation  $x_0$  vaut environ 25 mm quand l'amplitude angulaire d'oscillation est de l'ordre de  $1^\circ$  et le nombre de Keulegan-Carpenter  $KC = \pi x_0/R$  vaut  $KC \approx 0.35$  pour la sphère de rayon  $R = 224$  mm et  $KC \approx 0.48$  pour la sphère de rayon  $R = 165$  mm.

De ces décroissances exponentielles, l'article, utilisant la formule de Stokes pour un mouvement oscillant, extrait la viscosité de l'air  $\mu = 2.0 \times 10^{-5}$  Pa.s pour l'expérience avec la sphère de rayon  $R_s = 224$  mm et  $\mu = 1.7 \times 10^{-5}$  Pa.s pour l'expérience avec la sphère de rayon  $R_s = 165$  mm : ces deux valeurs diffèrent de  $\pm 8\%$  de la valeur précise de la viscosité de l'air.

L'article ne donne pas suffisamment d'information pour une analyse plus détaillée. Même si la période du pendule n'est pas donnée, sa géométrie permet d'estimer  $T = 2.3 \pm 0.1$  s donc  $\omega = 2.7 \pm 0.1$  s $^{-1}$ , d'où la longueur de pénétration visqueuse  $\delta = 3.25 \pm 0.06$  mm et  $(R_s/\delta) \approx 69$  pour  $R_s = 224$  mm et 51 pour la sphère de rayon  $R_s = 165$  mm, en accord avec l'article qui donne  $(R_s/\delta) \approx 65$  et  $\approx 50$  respectivement. J'ai pu vérifier que les frottements sur la tige contribuent peu à l'amortissement, environ 4 % de la contribution de la sphère de rayon 224 mm.

### 11.3 Article de Kostov *et al.*

L'article [8] paru en 2008 mesure la période en fonction de la vitesse maximale et vérifie l'anharmonicité du pendule. Le pendule a une longueur  $l = 1.281$  m et 2 fils de suspension légèrement inclinés. D'après la figure de cet article, on fera une assez petite erreur si on admet que les deux fils ont une longueur égale à celle du pendule. Les mesures de vitesse permettent de mesurer les valeurs des coefficients  $a_1$  et  $a_2$  (en utilisant nos notations) pour plusieurs sphères de rayon  $R_s$  compris entre 1.27 et 3.6 cm. Dans cet article, le coefficient  $a_1$  est interprété comme dû uniquement à la force de friction sur la sphère, ce qui donne une valeur de la viscosité de l'air égale à  $\mu \approx 73 \times 10^{-5}$  Pa.s, soit 40 fois la valeur réelle. En tenant compte des deux fils de suspension et du facteur correctif pour la sphère lié au mouvement oscillant, on prévoit que  $a_1$  est donné par

$$a_1 = 4\pi\mu \left( \frac{R_f}{\delta} \right)^2 k' \frac{l_f^3}{3l^2} + 6\pi\mu R_s \left( 1 + \frac{R_s}{\delta} \right) \quad (6.44)$$

où  $k'$  est calculé par l'équation de Stokes pour le cylindre. Le tableau donne pour chaque expérience le rayon  $R_s$  de la sphère, les nombres de Reynolds  $Re_{min}$  et  $Re_{max}$  calculés pour la sphère,

la valeur théorique  $a_{1th}$  et la valeur expérimentale  $a_{1exp}$  du paramètre  $a_1$ . La barre d'erreur sur les valeurs expérimentales, qui est inférieure ou égale à 1 %, a été omise.

$R_s$ cm	1.27	2.13	2.53	2.82	3.6
$Re_{min}$	270	580	990	1200	1100
$Re_{max}$	4000	7100	9200	9600	9700
$10^4 a_{1th}$ kg/s	1.2	1.5	1.7	1.9	2.4
$10^4 a_{1exp}$ kg/s	2.06	2.44	3.22	4.06	5.18
$(a_{exp}/a_{th})$	1.7	1.6	1.8	2.1	2.1

La contribution théorique des fils à  $a$  est constante et égale à  $0.99 \times 10^{-4}$  kg/s (l'article ne précisant pas le diamètre des fils, j'ai effectué le calcul pour un fil de rayon  $R_f = 1$  mm) et elle représente de 40 % à 80 % de la valeur théorique de  $a_{1th}$ . Nous pouvons conclure cette analyse de l'article de Kostov et al. par ces remarques

- l'oubli de la contribution des fils à ce paramètre et l'oubli du facteur correctif à la loi de Stokes pour un mouvement oscillant expliquent la très forte sous-estimation de  $a_1$  par les auteurs de cet article. La valeur expérimentale est encore environ 2 fois supérieure à la valeur théorique, probablement parce que les expériences sont faites avec de trop fortes valeurs des nombres de Reynolds et de Keulegan-Carpenter.
- la figure 4b de cet article essaye de vérifier que  $a$  est proportionnel au rayon  $R_s$  de la sphère et l'accord n'est pas bon. En effet, l'équation (6.44) montre que la contribution de la sphère au coefficient  $a$  est en fait une fonction sensiblement quadratique du rayon  $R_s$  car  $\delta$  est plus petit que  $R_s$ .

#### 11.4 L'article de Bolster *et al.*

En 2010, Bolster *et al.* [49] étudient l'oscillation d'un pendule dans le champ de gravité. Ce pendule est formé d'une sphère suspendue à un fil mince et elle oscille dans l'eau. Ils utilisent plusieurs sphères de rayon  $R_s$  compris entre 12.7 et 25.4 mm et deux longueurs de fil, 1.55 et 3.15 m, correspondant à une pulsation  $\omega = 2.25$  ou  $1.59$  s<sup>-1</sup> et des longueurs de pénétration visqueuse  $\delta = 0.94$  ou 1.13 mm respectivement : ils obtiennent ainsi une série de six expériences. L'amplitude d'oscillation est mesurée en fonction du temps et elle n'est pas représentée par l'équation (6.41) mais comme la somme de deux exponentielles, de constantes de temps assez différentes : le rapport mesuré de ces deux constantes de temps est compris entre 4.8 et 6.9. On peut remarquer que, si on développe l'équation (6.41) dans le cas  $B \ll 1$ , on obtient aussi deux termes exponentiels avec deux constantes de temps mais le rapport des constantes de temps est alors égal à 2.

Le but de l'expérience est de mesurer le coefficient de traînée  $C_D(Re)$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et d'expliquer le mécanisme détaillé qui fait croître  $C_D(Re)$  pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds. Les mesures s'étendent de  $Re \approx 400$  jusqu'à  $Re \approx 8000$ . Les mesures de  $C_D(Re)$  sont en bon accord avec la forme donnée par Stokes

$$C_D(Re) = \frac{C_1}{Re} \left( 1 + \frac{R}{\delta} \right) \quad (6.45)$$

tant que l'amplitude d'oscillation n'est pas trop grande. Ces auteurs comparent leurs mesures à celles faites par l'équipe de Schoepe avec une petite bille magnétique de rayon voisin de 100  $\mu\text{m}$  soutenue et oscillant grâce à des forces électriques et magnétiques dans l'hélium liquide pour des températures voisines de la transition superfluide. Les nombres de Reynolds explorés sont plus petits (20 à 1000 environ) mais les comportements sont très analogues.

Bolster *et al.* [49] déduisent une valeur critique  $Re_c$  du nombre de Reynolds  $Re$  et une valeur critique  $KC_c$  du nombre de Keulegan-Carpenter  $KC$ , au-delà desquelles une dissipation supplémentaire apparaît, résultant de l'émission d'un anneau de tourbillon :

- la valeur critique  $Re_c$  du nombre de Reynolds varie de 436 à 1040 suivant l'expérience, en croissant avec le rayon  $R_s$  de la sphère<sup>1</sup> et avec la valeur de la pulsation  $\omega$  ;
- la valeur critique  $KC_c$  du nombre de Keulegan-Carpenter est comprise entre 1.13 et 2.69 suivant l'expérience. Ces variations sont considérées comme peu significatives et l'article note que la dissipation excédentaire disparaît si  $KC \leq \pi/2$  correspondant avec nos notations à  $x_0/R \leq 1/2$ .

Cet article développe alors un modèle de l'émission de tourbillon par la sphère oscillante. Il prédit le rayon du tourbillon  $R_t$  donné par leur équation (13) : cette équation est inhomogène et elle devrait s'écrire  $R_t = \beta\sqrt{x_0\delta}$  où  $\beta$  est une constante sans dimension. Les mesures donnent  $\beta = 2.96 \pm 0.44$ . Cet article montre alors par un raisonnement dimensionnel que l'amplitude d'oscillation critique est égale  $x_{0c} = \gamma\delta$  et la valeur du paramètre sans dimension  $\gamma$  est tirée de l'expérience :  $\gamma \approx 8.29 \pm 1.93$  (voir l'équation 16 et la note 26 de cet article).

Ces résultats sont très intéressants car ils permettent de comprendre, au moins partiellement, que l'équation de Stokes donnant la force sur la sphère puisse s'appliquer jusqu'à des valeurs très importantes du nombre de Reynolds. En effet, on peut exprimer  $Re_c$  comme suit :

$$Re_c = \frac{2R_s\omega x_{0c}}{\nu} = \frac{4\gamma R_s}{\delta} \quad (6.46)$$

J'ai appliqué cette formule aux expériences de Gupta *et al.* [51] et elle prédit  $Re_c \approx 2200 \pm 500$  pour la sphère de rayon  $R_s = 224$  mm et  $Re_c \approx 1700 \pm 400$  pour la sphère de rayon  $R_s = 165$  mm, ce qui me semble en bon accord avec les mesures de cet article,  $Re_c \approx 3000$  et 2000 respectivement : en effet la détermination de  $Re_c$  est imprécise.

J'ai écrit que ces résultats expliquent seulement partiellement que la force de Stokes s'applique avec des valeurs aussi grandes du nombre de Reynolds : en effet, si l'émission d'un tourbillon est un phénomène irréversible qui augmente certainement la dissipation, il est étrange que le calcul de Stokes correspondant à  $Re \ll 1$  donne un résultat valable à  $Re \sim 10^3$ , pourvu qu'il n'y ait pas d'émission de tourbillon : en effet, la couche limite quand  $Re \sim 10^3$  est sûrement très distordue par rapport à celle qui existe quand  $Re \ll 1$ .

## 11.5 L'article de Stuart et Woodgate

En 1954, Stuart et Woodgate [50] mesurent l'amortissement d'un pendule formé d'un cylindre porté par une suspension élastique oscillant soit à l'air libre, soit dans un récipient étanche pour une série de trois pressions entre 500 et 2000 millibars environ (plus une mesure à 20 millibar pour l'extrapolation à pression nulle). La longueur du cylindre est égale à 4 pieds soit 1.22 m et son diamètre 2 pouces soit 50.8 mm et la fréquence d'oscillation est comprise entre 0.690 et 0.703 Hz, suivant les expériences.

L'amortissement du pendule est la somme d'un terme indépendant de la densité de l'air et d'un terme dû à la friction sur l'air. Le premier terme est très important, puisque pour l'expérience à la plus forte pression, il représente encore 61 % de l'amortissement total et il faut le soustraire de l'amortissement mesuré pour extraire la contribution de la force de friction due à la viscosité de l'air.

L'article analyse en détail seulement la mesure d'amortissement faite à l'air libre avec une pression  $p = 1026$  millibar pour laquelle il donne la valeur de  $R/\delta = 9.76$ . La valeur  $k' = 0.211$

1. J'utilise nos notations et pas celles de cet article qui note  $A$  l'amplitude d'oscillation que je note  $x_0$  et  $R$  le rayon du tourbillon que je note  $R_t$ .

dans ce cas est en bon accord avec la valeur théorique  $k' = 0.215$ , mais la dépendance en pression n'est pas en très bon accord avec la prédition théorique. Stuart et Woodgate attribuent ces désaccords à l'influence du récipient qui modifierait la valeur de  $k'$ . Cette explication n'est pas très convaincante car on s'attendrait à ce que  $k'$  soit augmenté quand  $\delta$  est grand donc à basse pression et peu affecté quand  $\delta$  est petit à pression plus élevée. Or c'est l'effet inverse qui est observé. On peut déduire des mesures de l'amortissement pour les trois autres pressions les valeurs de  $k'$  et celles de  $R/\delta$ . Ces valeurs sont données dans le tableau (première colonne mesure à l'air libre, trois autres colonnes mesures dans le récipient)

$p$ millibar	1026	496	1036	1988
$R/\delta$	9.76	6.79	9.80	13.58
$k'$	0.211	0.260	0.196	0.161
$(\frac{R}{\delta})^2 k'_{exp}$	20.1	12.0	18.8	29.7
$(\frac{R}{\delta})^2 k'_{th}$	20.5	14.6	20.6	28.2

La figure 6.4 compare les valeurs expérimentales et théoriques de  $(R/\delta)^2 k'$ . On constate un accord très satisfaisant théorie-expérience pour les deux points à la pression proche de 1000 millibar mais, si les quatre points expérimentaux s'alignent bien sur une droite, celle-ci n'a pas la bonne pente : l'ajustement par les moindres carrés donne  $(R/\delta)^2 k' = 2.60(R/\delta) - 5.85$  alors que la formule asymptotique de Stokes est  $(R/\delta)^2 k' = 2(R/\delta) + 1$ , limitée ici aux deux termes dominants, approximation excellente si  $(R/\delta) \gtrsim 1$ .

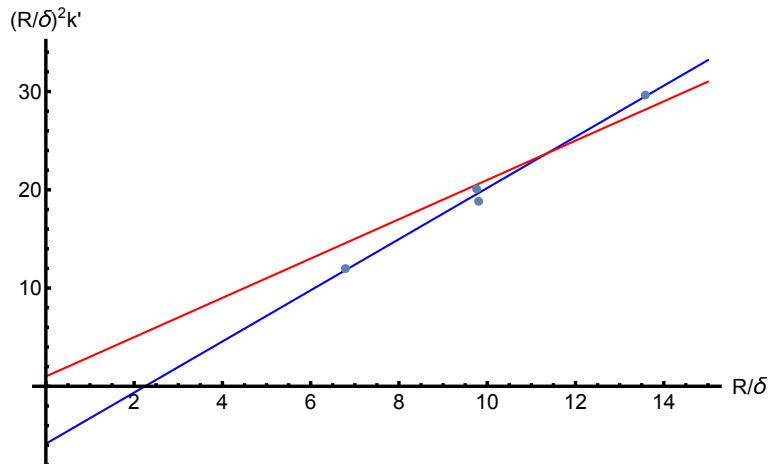


FIGURE 6.4 – Comparaison des résultats expérimentaux de Stuart (points bleus) aux valeurs théoriques (courbe en rouge) de la quantité  $(R/\delta)^2 k'$ . Les deux points centraux sont en bon accord avec la théorie mais l'ajustement de l'ensemble des mesures par les moindres carrés (courbe en bleu) ne correspond pas du tout à la formule asymptotique de Stokes.

## 11.6 La thèse de Williams et l'article de Williams et Hussey

En 1972, Williams et Hussey [6, 7] ont utilisé un pendule de torsion portant deux cylindres de même rayon. Ces rayons varient entre 1.59 et 6.35 mm et les cylindres plongent dans des liquides de viscosités variées,  $\nu$  variant entre  $10^{-6}$  et  $1.75 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Dans ces expériences,  $k$

et  $k'$  sont déduits de la mesure de la période et de l'amortissement. Les cylindres utilisés ont une longueur voisine de 100 mm et, pour éliminer l'effet de bout, les mesures sont faites en fonction de la hauteur immergée des cylindres. Sur la figure 6.5, j'ai présenté les résultats expérimentaux de Williams et Hussey en traçant pour la quantité  $(R/\delta)^2 k'$  les points expérimentaux de la thèse de Williams [7] et la courbe théorique de Stokes. J'ai choisi de montrer les données de la thèse [7] qui présente plus de mesures que l'article publié [6].

L'accord théorie-expérience est satisfaisant : pourtant la plupart des mesures utilisent une amplitude d'oscillation  $x_0$  comparable ou légèrement supérieure au rayon  $R$  du cylindre. De plus, le nombre de Reynolds maximum pour une expérience varie entre 0.27 et 89 : les petites valeurs de  $Re_{max}$ ,  $0.27 < Re_{max} < 3.7$  correspondent aux mesures avec  $(R/\delta) < 1$  tandis que, pour toutes les mesures avec  $1 < (R/\delta) < 5$  (à deux exceptions près), le nombre de Reynolds  $Re_{max}$  est compris entre  $\sim 10$  et 89.

Un point intéressant est que la thèse de Williams [7] présente une analyse détaillée des expériences antérieures.

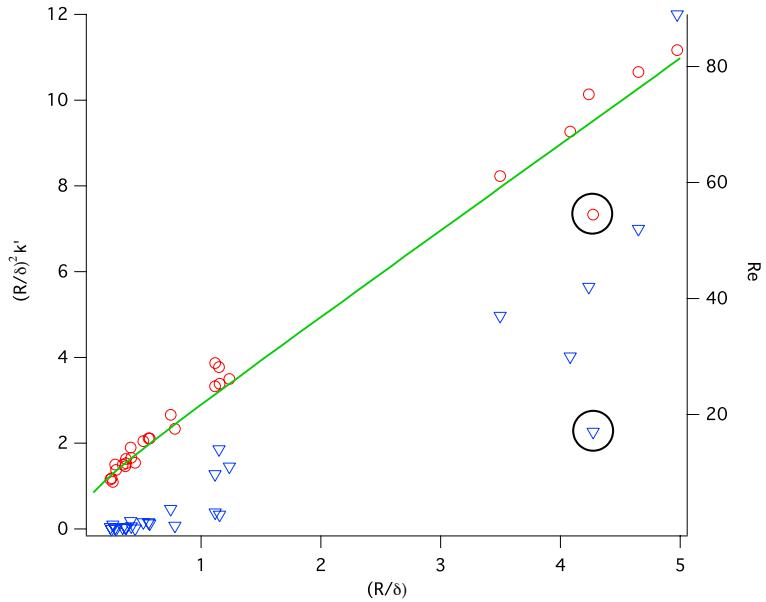


FIGURE 6.5 – Résultats expérimentaux issus de la thèse de Williams. Les triangles bleus représentent le nombre de Reynolds (échelle de droite). Les points de mesure (ronds rouges) s'accordent bien avec la loi de Stokes (en vert). Un ajustement linéaire de ces points donne  $(R/\delta)^2 k' = 0.91 + 2.00(R/\delta)$  ce qui correspond bien à la limite asymptotique de la formule de Stoke  $(R/\delta)^2 k' = 1 + 2.00(R/\delta)$ . On peut cependant remarquer que le seul point qui s'éloigne notablement de cette courbe (encerclé en noir) est celui qui, dans cette partie droite, a le plus petit nombre de Reynolds.

## 11.7 L'article de Mohazzabi et Shankar

En 2017, Mohazzabi et Shankar [58] ont étudié l'amortissement d'un pendule formé d'une sphère de rayon  $R_s = 25.45$  mm suspendue à un fil de 2.589 m de longueur. La période est égale à  $T = 3.27$  s et donc  $\omega = 1.92 \text{ s}^{-1}$ . La longueur de pénétration visqueuse  $\delta$  vaut donc  $\delta \approx 4 \text{ mm}$ .

Le rayon  $R_f$  du fil varie entre 0.125 mm et 0.359 mm et les mesures montrent une nette croissance de l'amortissement avec le rayon  $R_f$ . Cette expérience est intéressante mais ses résultats restent qualitatifs pour les raisons suivantes

- les courbes d'amplitude angulaire en fonction du temps tracées en échelle semilogarithmique montrent clairement des déviations par rapport à la linéarité. Ces déviations, qui sont bien visibles aux temps courts, correspondent à l'importance d'un terme quadratique en vitesse.
- le nombre de Reynolds maximum pour la sphère vaut  $Re = 1134$  et la force n'est donc pas linéaire en vitesse. L'amplitude initiale d'oscillation est égale à 30 cm et l'amplitude finale est 10 cm. La valeur finale du nombre de Reynolds est encore 380 et la valeur finale du nombre de Keulegan-Carpenter  $KC \approx 12.5$ . Les résultats de Stokes ne sont donc pas valables pas dans ces conditions.

## 11.8 Conclusion sur les tests des résultats de Stokes

De nombreuses expériences ont été réalisées et des tests assez convaincants ont été obtenus :

- Tests pour la sphère : l'article de Gupta *et al.* [51] a effectué des mesures d'amortissement en accord avec la formule de Stokes malgré des nombres de Reynolds de l'ordre de  $2 - 3 \times 10^3$ . L'article de Bolster *et al.* [49] obtient un accord similaire pour une large gamme de nombre de Reynolds et cet article démontre l'importance du nombre de Keulegan-Carpenter pour l'émission de tourbillons. Il propose une valeur critique  $KC \approx \pi/2$ .
- Tests pour le cylindre : l'article de Stuart et Woodgate [50] présente un test très satisfaisant pour les deux points à la pression atmosphérique mais les deux autres points ne sont pas en aussi bon accord avec la théorie. La thèse de Williams et l'article de Williams et Hussey [6, 7] a exploré une vaste gamme de valeur de  $(R/\delta)$  et l'accord-théorie expérience est très satisfaisant bien que, pour la majorité des points avec  $(R/\delta) > 1$ , le nombre de Reynolds soit grand.

Ces tests ne sont pas totalement satisfaisants parce que les conditions de validité du calcul de Stokes  $Re \lesssim 1$  et  $KC \lesssim 1$  ne sont en général pas satisfaites.

# 12 Notre expérience testant les résultats de Stokes

## 12.1 But de l'expérience

Comme je n'ai pas trouvé de test publié des résultats de Stokes, il m'a semblé intéressant de réaliser un tel test avec des pendules macroscopiques et de mesurer l'amortissement dû à l'air pour ces pendules dans une zone de nombre de Reynolds  $0.1 \lesssim Re \lesssim 10$ . Ce test va utiliser deux types de pendules :

- les premiers seront formés d'une sphère suspendue au bout d'un fil cylindrique de petit diamètre. Le but étant de tester la force de friction sur les sphères, je les ai choisies suffisamment grandes pour que la force de friction sur le fil ne soit pas trop importante par rapport à celle sur la sphère.
- les seconds seront formés d'un long cylindre suspendu à une lamelle très souple et assez courte.

Avant de décrire ces pendules, je vais justifier le choix des paramètres. On a vu dans que, pour un objet dans l'air à la température ordinaire, la valeur  $Re = 1$  est obtenue quand le produit vitesse  $\times$  diamètre vérifie  $VD = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  et donc  $v \sim 5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$  si  $D = 30 \text{ mm}$ . Il faut donc éviter les courants d'air qui perturberaient le mouvement du pendule et donc enclore le pendule dans une boîte. J'ai fait construire une boîte de dimensions intérieures  $250 \times 250 \text{ mm}^2$

avec une hauteur de 500 mm. Le pendule aura une longueur d'environ 400 mm et une fréquence d'oscillation  $\omega/(2\pi) = 0.8$  Hz. Pour cette fréquence d'oscillation, la longueur de pénétration visqueuse  $\delta$  vaut  $\delta = 2.5$  mm.

La taille de la boite limite la dimension des sphères : il est admis que si le diamètre de la sphère est inférieur à  $1/3$  de celui de la boite, la perturbation de l'écoulement n'est pas trop forte par rapport à l'espace libre infini (cette condition est probablement trop restrictive pour un mouvement oscillant puisque l'échelle de l'écoulement est principalement donnée par  $\delta$ ). J'ai utilisé des sphères dont le diamètre est compris entre 30 et 100 mm. Cette condition est bien vérifiée sauf pour la plus grosse sphère. Les rayons des sphères sont tous notablement plus grands que  $\delta$  et dans ce cas la force de friction sur la sphère doit être sensiblement une fonction quadratique du rayon  $R$ .

Les rayons  $R$  des cylindres utilisés varient entre 0.4 et 15 mm : la plus petite valeur vérifie donc  $R \approx \delta/5$  et la plus grande valeur de  $R$  est encore très petite devant les dimensions intérieures de la boite.

Dans nos expériences, l'amplitude d'oscillation  $x_0$  est de l'ordre de 0.5 mm, de sorte que pour les sphères  $x_0 \ll R$ . Pour les cylindres  $x_0/R$  est en général aussi  $\ll 1$  mais il atteint la valeur 1.25 pour le plus petit cylindre étudié. Le nombre de Reynolds initial est égal à  $0.35R$  où  $R$  est le rayon de la sphère ou du cylindre exprimé en mm. Pour les sphères, le nombre de Reynolds initial varie entre 5 et 18 tandis que, pour les cylindres, il s'étend entre 0.14 et 5. Le nombre de Reynolds final est environ 500 fois plus petit.

Quand j'ai commencé ces expériences, je n'espérais pas atteindre une précision de l'ordre de 1 % sur la mesure des temps de décroissance et je n'ai pas mesuré la pression atmosphérique et la température de l'air. Les variations de la pression, de l'ordre de  $\pm 1$  %, et de la température, de l'ordre de  $\pm 3$  K autour de 295 K, entraînent une variation de la longueur de pénétration visqueuse de l'ordre de 1 %. Aucune correction n'a été appliquée pour ces variations non contrôlées.

## 12.2 Le coefficient de qualité $Q$

La position  $x$  d'un oscillateur harmonique amorti est donnée par

$$\begin{aligned} x &= a(t) \cos(\omega t), \\ \text{avec } a(t) &= a(0) \exp(-t/\tau). \end{aligned} \quad (6.47)$$

où  $a(t)$  est l'amplitude du mouvement,  $\omega$  la pulsation de résonance,  $T = 2\pi/\omega$  la période et  $\tau$  la constante de temps de décroissance supposée exponentielle de l'amplitude. On peut aussi utiliser des notations complexes et écrire

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= a(0) \exp[i\omega(1+i\varepsilon)t], \\ \text{avec } \frac{1}{\tau} &= \omega\varepsilon. \end{aligned} \quad (6.48)$$

On caractérise l'oscillateur par son coefficient de qualité, donné par

$$Q \equiv \omega\tau/2 = 1/(2\varepsilon) \quad (6.49)$$

On utilise aussi le décrément logarithmique  $D \equiv \ln[a(t)/a(t+T)]$ . On vérifie que  $D \approx \pi/Q = 2\pi\varepsilon$ . J'utilisera le coefficient de qualité qui est aussi donné par

$$\frac{1}{Q} \approx \frac{\sum_i L_i}{2\pi E_{tot}} \quad (6.50)$$

où  $L_i$  est l'énergie dissipée par le processus  $i$  durant une période d'oscillation et  $E_{tot}$  est l'énergie totale moyenne durant cette période. Les processus qui peuvent contribuer à dissiper l'énergie sont les suivants :

- les forces de friction sur l'air
- l'effet anélastique dans la tige ou la lamelle de suspension
- les courants de Foucault, en particulier si le pendule porte un aimant

Tous ces effets vont être discutés lors de la description de l'expérience ou, pour les effets anélastiques, dans un appendice. Pour que la mesure soit un test efficace des calculs de Stokes, il faut que les pertes d'énergie dues aux forces de friction sur l'air dominent largement les autres termes. Les forces de frottement solide et la déformation du bâti portant le pendule pourraient aussi contribuer à l'amortissement du pendule mais ces effets nous semblent négligeables. Les forces de frottement solide donnent une décroissance linéaire et non exponentielle de l'amplitude ce qui n'a pas été vu. La déformation du bâti ne joue un rôle dissipatif que si la déformation n'est pas en phase avec la force et cet effet est certainement très petit à basse fréquence.

Le coefficient de qualité  $Q$  varie proportionnellement à la masse du pendule puisque l'énergie totale  $E_{tot}$  est proportionnelle à la masse. J'ai cherché à minimiser cette masse car plus  $Q$  est grand, plus la durée d'une expérience est grande. En effet, pour une bonne mesure de la constante  $\tau$  de temps de décroissance de l'amplitude, il faut enregistrer l'oscillation sur une durée de l'ordre de  $5\tau$ , ce qui permet de vérifier le caractère exponentiel de la décroissance. Nous verrons que, avec le choix de pendules légers,  $\tau$  varie entre 100 et 500 s suivant les pendules, correspondant à des durées de mesure allant jusqu'à 2500 s. Dans un premier temps, le lancement du pendule n'avait pas été automatisé et une durée aussi longue était une forte contrainte. Avec l'aide de S. Faure, il a été possible d'automatiser le lancement et de réaliser ainsi des séries de plusieurs dizaines de mesures, ce qui a amélioré la statistique sur les mesures de la constante de temps de décroissance  $\tau$ .

### 12.3 Construction des pendules

La boîte du pendule est solidement fixée sur une table optique massive en nid d'abeille d'acier. Cette table est simplement posée sur un bâti en acier, avec des tampons de caoutchouc interposés mais sans système d'amortissement dynamique de vibration.

Pour les pendules formés d'une sphère suspendue au bout d'un fil, j'ai utilisé des sphères en matière plastique transparentes formées à partir de 2 hémisphères qui se clipsent (ces sphères sont commercialisées par [www.ballkit.fr](http://www.ballkit.fr)). Ces sphères portent un œillet qui a été enlevé par meulage avec une petite meuleuse électrique Dremel, ce qui a laissé une petite zone de quelques centimètres carrés de surface un peu irrégulière. Les rayons des sphères sont 15, 25, 30, 40 et 50 mm. Ces sphères sont légères, avec des masses allant de 2.4 à 32.02 g suivant leur taille (voir tableau 6.1).

Le fil est de la corde à piano d'acier de diamètre 0.3 ou 0.5 mm. Comme le montre la figure 6.6, la corde à piano a été collée au bout supérieur dans un petit cylindre de laiton qui est bloqué dans le support du pendule et au bout inférieur dans une tige filetée en laiton de diamètre M3. Un trou de diamètre 3 mm a été percé au pôle d'une des deux hémisphères de plastique, ce qui permet de fixer l'hémisphère sur la tige filetée.

Une pièce en alliage d'aluminium portant un aimant cubique en NdFeB, située à l'intérieur de la sphère, est vissée sur la tige filetée, qui porte aussi 2 écrous à l'extérieur de la sphère, ce qui permet de bloquer l'hémisphère supérieure. L'aimant est un cube d'arête égale à 10 mm. Initialement, j'avais prévu d'utiliser des aimants d'arête égale à 10 mm pour les petites sphères et à 20 mm, pour les plus grosses sphères mais il est apparu que les gros aimants induisaient un amortissement par courants de Foucault et j'ai utilisé pour tous les pendules le montage avec un

aimant d'arête égale à 10 mm prévu pour la sphère de rayon 15 mm. L'aimant était prévu pour servir au détecteur de vitesse par induction, qui a été abandonné, et il n'a finalement servi que pour exciter la vibration du pendule par l'application d'un gradient de champ magnétique. Un des écrous, long de 8 mm, sert pour le "shadow detector".

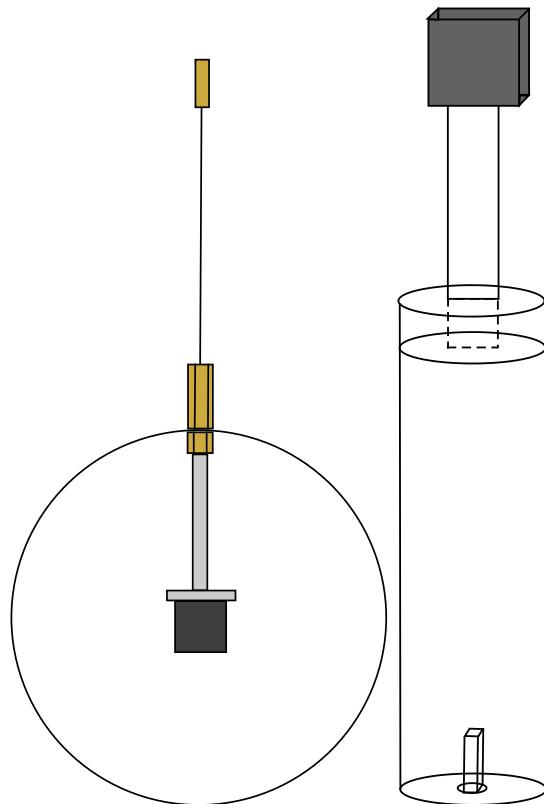


FIGURE 6.6 – Schémas des pendules réalisés avec des sphères et avec des cylindres. Pour les cylindres de plus petit diamètre, l'aimant est inséré dans un tube en aluminium enfiché à l'extrémité du cylindre ou simplement posé à l'extrémité pour les cylindres en acier, la force magnétique étant suffisante pour le maintenir en place.

D (mm)	30	50	60	80	100
m (g)	2.4	6.83	9.72	17.6	32.02

TABLE 6.1 – Paramètres des pendules sphère-fil.

Pour les pendules formés d'un cylindre suspendu par une lamelle, j'ai utilisé des cylindres de bois. En effet, on trouve des tiges cylindriques en bois de hêtre de rayons variés, entre 2 et 15 mm. J'ai comparé la masse linéique des cylindres pleins en bois de hêtre (masse volumique  $0.66 \text{ g/cm}^3$ ) à celle des tubes creux en alliage d'aluminium (masse volumique  $2.7 \text{ g/cm}^3$ ) dont l'épaisseur de paroi est 1 mm pour les diamètres inférieurs ou égaux à 12 mm et 2 mm au-delà. Les cylindres

Diamètre (mm)	30	25	20	14.1	11.8	10.1	9.1
Masse (g)	115.44	92.89	65.02	29.39	20.7	13.66	9.53
Longueur (mm)	342	340	328	340	329	327	340
Longueur lamelle (mm)	78	78	75	75	77	77	78
Largeur lamelle (mm)	10	10	10	10	10	10	10
Diamètre (mm)	6.1	3.9	3.1	2	1.2	0.8	
Masse (g)	5.53	2.74	1.36	0.728	2.56	1.15	
Longueur (mm)	340	341	327	330	358	351	
Longueur lamelle (mm)	77	77	73	80	80	85	
Largeur lamelle (mm)	10	10	3.25	2	3	3	

TABLE 6.2 – Paramètres des pendules cylindre-lamelle.

de hêtre ont une plus faible masse linéique jusqu’au rayon  $a = 15$  mm inclus. La lamelle est découpée dans une feuille de laiton d’épaisseur 0.09 mm et sa masse est faible, de l’ordre de 1 g. Sa largeur et sa longueur libre sont données dans les tableaux 12.3 . Le bout supérieur de la lamelle est collé sur une plaque d’alliage d’aluminium qui est bloquée dans le support du pendule. Le bout inférieur de la lamelle est collé dans un plan diamétral du cylindre. Enfin j’ai aussi utilisé la force exercée par un gradient de champ magnétique sur un aimant pour exciter l’oscillation de ces pendules : les aimants utilisés sont des barreaux de NdFeB de dimensions  $3 \times 2 \times 10$  mm<sup>3</sup>, aimantés selon la direction perpendiculaire à la face de  $3 \times 10$  mm<sup>2</sup>. Ces aimants étaient disponibles et ils ont été choisis pour leur petit volume  $V$  donc leur petit moment magnétique  $\mu = B_r V / \mu_0$  : la dissipation par courants de Foucault est en effet proportionnelle à  $\mu^2$  et elle est donc pour ces pendules cylindrique beaucoup plus petite que pour les pendules sphère-fil. Pour le “shadow detector”, j’utilise l’ombre du bord du cylindre.

## 12.4 DéTECTEURS DU MOUVEMENT : “shadow detector”

Le détecteur à induction ayant été abandonné pour les raisons détaillées ci-dessus (voir aussi la sous-section 7.12.5), j’ai utilisé un “shadow detector”. Le principe en est très simple mais il en existe plusieurs versions. Je n’ai pas trouvé d’article de revue sur ce détecteur et je cite ici un seul article de Stephens *et al.* [66] décrivant un appareil utilisant des LED comme source de lumière et des détecteurs à quadrants, avec une sensibilité de  $4 \times 10^{-10}$  m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ , limitée par le bruit de photon pour les fréquences supérieures à  $\sim 5$  Hz.

J’ai construit deux “shadow detectors”, selon le schéma de la figure 6.8. Le faisceau d’un laser helium-néon de puissance 5 mW est mis en forme par un petit télescope qui produit un faisceau quasi parallèle de rayon minimal (waist)  $w_0 \approx 3.5$  mm. Il traverse une lame séparatrice qui le sépare en deux faisceaux, un par détecteur. Le faisceau est partiellement intercepté par l’obstacle dont on veut mesurer le mouvement, l’optimum de la sensibilité consiste à ce que, l’obstacle étant à sa position d’équilibre, la puissance transmise soit la moitié de la puissance du faisceau comme indiqué sur les figures figure 6.7 et 6.9. Le faisceau transmis est alors envoyé par un miroir et focalisé par une lentille sur une photodiode avec un amplificateur câblé dans les ateliers du laboratoire. Une densité optique de transmission voisine de 30 % est interposée pour éviter la saturation.

Cette construction présente divers défauts : en particulier l’usage d’un laser cohérent produit des speckles qui induisent un bruit supplémentaire ; le détecteur n’est pas parfaitement isolé de la lumière de la pièce ; le bruit de la photodiode n’est pas limité par le bruit de photon du laser, etc. Malgré cela, la sensibilité mesurée est de l’ordre de 10<sup>3</sup> V/m et le bruit de mesure pour une

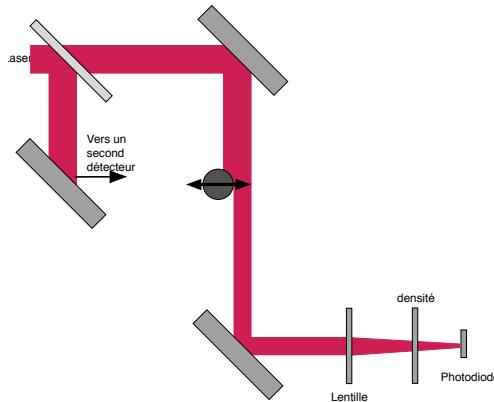


FIGURE 6.7 – Schémas de principe du “shadow detector”. Lors de son mouvement, le pendule intercepte plus ou moins le faisceau laser et l’intensité lumineuse arrivant sur la photodiode varie.

fréquence de 0.8 Hz est voisin de  $5 \times 10^{-5} \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}}$ , donc d’une sensibilité  $5 \times 10^{-8} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Cette performance modeste par rapport à celle obtenue par Stephens *et al.* [66] nous suffit car le bruit de vibration du laboratoire induit une oscillation résiduelle du pendule dont la valeur rms est de l’ordre de  $3 \times 10^{-7} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ .

## 12.5 Déroulement des expériences et signaux obtenus

Les expériences avec les pendules sphère-fil ont été faites dans un premier temps avec le détecteur de vitesse inductif décrit dans l’article [1] reproduit au chapitre précédent (section 5.2) : celui-ci n’était pas assez sensible si les bobines sont en dehors de la boîte et, si les bobines sont à l’intérieur de la boîte, le temps de décroissance  $\tau$  est réduit quand utilise un aimant d’arête 2 cm donc de volume  $8 \text{ cm}^3$ . L’oscillation de l’aimant induit des courants de Foucault dans un anneau conducteur situé à l’intérieur des bobines de détection. J’ai donc abandonné le détecteur par induction et j’ai utilisé le “shadow detector”. J’ai gardé l’aimant de volume  $1 \text{ cm}^3$  orienté avec son moment magnétique selon la direction choisie pour exciter l’oscillation et il sert à mettre le pendule en oscillation par un gradient de champ magnétique oscillant à la fréquence de résonance préalablement mesurée. J’utilise une bobine de diamètre moyen 33 mm, formée d’environ 1300 tours et située en dehors de la boîte à environ 15 cm du centre de l’aimant. Cette bobine excitée sous une tension de 2 Volts, donne une amplitude suffisante au pendule en un temps de l’ordre de 10 s.

Ces expériences avec les pendules sphère-fil ont montré un comportement inattendu mais tout à fait normal : en théorie, le pendule sphère-fil a deux modes exactement dégénérés, correspondant à des oscillations dans deux plans orthogonaux quelconques. En réalité des petits défauts non identifiés (par exemple une section légèrement elliptique du fil ou une déformation permanente du fil) font que ces deux modes ne sont pas exactement dégénérés. L’oscillation que nous produisons n’est donc pas en général un mode propre et on voit apparaître un transfert d’énergie entre l’oscillation excitée selon l’axe  $x$  et l’oscillation perpendiculaire selon l’axe  $y$ . Ce transfert est lent, avec une période de battement l’ordre de 800 s (sphère de 3 cm) : cette période est plus longue que la durée de décroissance  $\tau$  mais elle en perturbe la mesure. Pour résoudre cette difficulté, j’ai mesuré l’oscillation selon les directions perpendiculaires  $x$  et  $y$  avec deux “shadow detectors”. La figure 6.10 montre un exemple de signaux enregistrés par ces deux détecteurs. J’ai

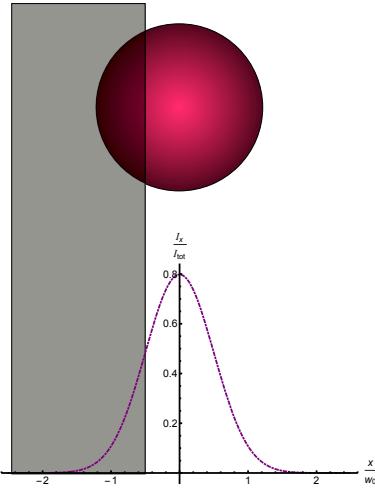


FIGURE 6.8 – Schémas de principe du “shadow detector”. Lors de son mouvement, le pendule intercepte plus ou moins le faisceau laser et l'intensité lumineuse arrivant sur la photodiode varie.

supposé que la levée de dégénérescence provient de l'énergie potentielle qui est alors donnée par

$$E_{pot} = \frac{1}{2} (k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2) \quad (6.51)$$

où  $x_1$  et  $x_2$  sont les axes propres de l'énergie potentielle. Comme la levée de dégénérescence est très petite avec  $|\omega_1 - \omega_2| = \varepsilon \omega_m$  (où  $\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ) avec  $\varepsilon \lesssim 10^{-3}$ , ceci signifie que  $|k_1 - k_2| = 2\varepsilon k_m$  (puisque  $\omega \propto \sqrt{k}$ ). L'erreur faite en remplaçant  $k_1$  et  $k_2$  par leur valeur moyenne  $k_m$  est négligeable et on peut donc calculer l'énergie potentielle par

$$E_{pot} = \frac{k_m}{2} (x_1^2 + x_2^2) = \frac{k_m}{2} (x^2 + y^2) \quad (6.52)$$

L'amplitude d'oscillation est donc donnée par  $a(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$  et c'est sur cette quantité que j'ai mesuré le temps de décroissance  $\tau$ . Pour pouvoir recomburer correctement les deux signaux, il est nécessaire d'étalonner les deux «shadow detectors». Pour cela, j'ai utilisé un couteau monté sur une translation pour intercepter une partie du faisceau laser. Un déplacement micrométrique du couteau m'a permis de calibrer les signaux mesurés par chaque capteur. Plutôt que d'utiliser les signaux bruts, j'ai utilisé un filtrage par transformée de Fourier glissante. Le signal est échantillonné à 40 Hz. Je calcule la FFT du signal sur une fenêtre de 2048 échantillons et relève la mesure de l'amplitude à la fréquence de résonance. Cette procédure est répétée en décalant la fenêtre d'un échantillon, et ce jusqu'à atteindre la fin de l'enregistrement. J'obtiens ainsi des courbes avec peu de bruit car ce traitement élimine tous les bruits qui ne sont pas de fréquence proche de la fréquence du pendule. Les figures 6.11 montre les signaux filtrés pour chacune des deux voies et la figure 6.12 le signal reconstruit. Pour extraire le temps de décroissance  $\tau$ , j'ai essayé un ajustement par l'équation 6.41 qui correspond au cas où la force de friction est la somme d'un terme linéaire et d'un terme quadratique en vitesse. Le paramètre  $B$  obtenu est très petit, éventuellement négatif ce qui n'a pas de sens physique. Un ajustement purement exponentiel est en général très satisfaisant. Cependant, j'ai préféré utiliser un ajustement par la fonction

$$s(t) = s_0 \exp(-t/\tau) + s_1 \quad (6.53)$$

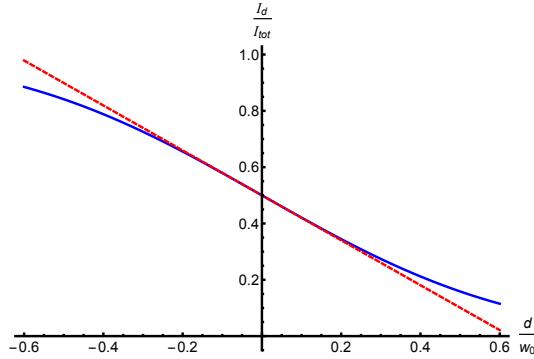


FIGURE 6.9 – Variations de l'intensité lumineuse arrivant sur la photodiode (en valeur relative) en fonction de la distance  $d$  entre le bord de l'obstacle et le centre du faisceau. Lorsque l'obstacle oscille de part et d'autre du centre du faisceau, la sensibilité est maximale et le détecteur pratiquement linéaire.

où  $s_1$  représente la valeur résiduelle de l'amplitude d'oscillation. En effet, à cause des vibrations sismiques ou provenant de l'activité de l'environnement, le module de l'amplitude d'oscillation filtrée ne tend pas vers 0 mais vers une valeur fluctuante typiquement de l'ordre de  $0.4 \mu\text{m}$ . Des enregistrements d'une durée de 2 h permettent d'observer les fluctuations de cette amplitude et de constater que la valeur est plus faible la nuit que le jour.

Pour ce qui concerne les expériences sur les cylindres, le pendule réalisé avec une lamelle présente aussi deux modes propres mais ils ne sont pas dégénérés : en plus de l'oscillation pendulaire, il existe aussi un mode de rotation, dont la théorie est présentée au chapitre III. Sa fréquence propre est beaucoup plus élevée ce qui fait qu'il n'est pas excité et, de plus, il s'amortit très rapidement si bien qu'il n'a aucune incidence sur les signaux obtenus (voir figure 6.14)

## 12.6 Résultats de nos expériences

### Pour les sphères

L'amortissement du pendule est dû aux frottements de l'air sur la sphère mais aussi sur le fil. Le temps de décroissance  $\tau$  mesuré par les ajustements des mesures sur l'équation 6.53 est relié au facteur de qualité du pendule par :

$$\frac{1}{Q} = \frac{2}{\omega\tau} = \frac{L_f + L_s}{2\pi E_{tot}} \quad (6.54)$$

L'énergie totale du pendule est égale, par exemple, à l'énergie cinétique maximale. Le mouvement d'oscillation de la sphère est composé d'une translation de son centre de masse, suivi d'une rotation autour de celui-ci. Dans le cas des petites oscillations, l'angle de rotation et le déplacement du centre de masse sont proportionnels et donc

$$E_{tot}(t) = \left( M_{tot} + \frac{I_{tot}}{L^2} \right) \frac{v_m(t)^2}{2}$$

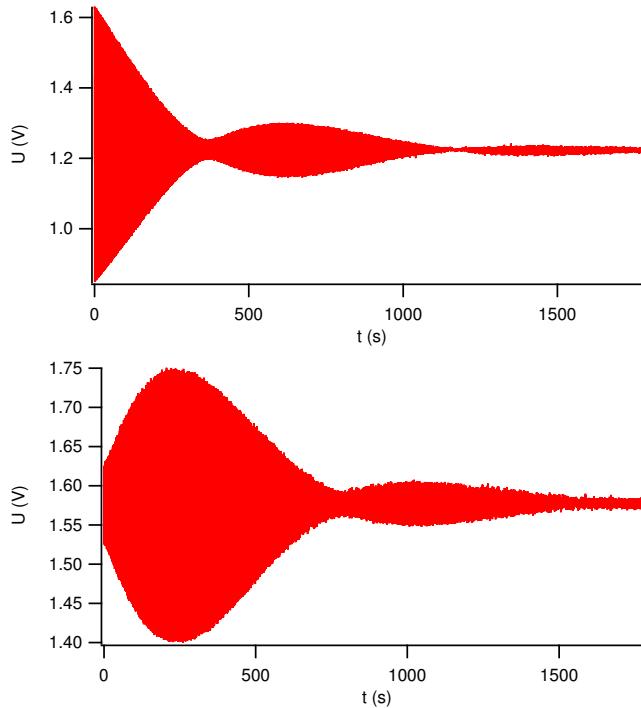


FIGURE 6.10 – Signaux obtenus sur les deux “shadow detectors”. Un seul mouvement est au départ excité. Il apparaît néanmoins des battements entre les deux oscillations perpendiculaires.

où  $M_{tot} = M_{sphere} + M_{aimant}$  et  $I_{tot} = I_{sphere} + I_{aimant}$ . Les pertes par frottements s’expriment grâce à l’équation 6.34 en ne gardant que le coefficient  $a_1$  ( $a_{1f}$  pour le fil et  $a_{1s}$  pour la sphère) :

$$L(t) = \left( \frac{a_1 v_m^2(t)}{2} \right) T$$

Après simplification, l’équation 6.54 nous donne donc

$$\frac{2}{\omega \tau} = \frac{(a_{1f} + a_{1s})T}{2\pi(M_{tot} + \frac{I_{tot}}{l^2})}$$

soit

$$a_{1s} = \frac{2(M_{tot} + \frac{I_{tot}}{l^2})}{\tau} - a_{1f}$$

Les résultats sont regroupés dans le tableau 6.3. La valeur théorique du coefficient  $a_{1f}$  varie un peu à cause des variations de  $\omega$  et donc de la profondeur de pénétration visqueuse  $\delta$  et est égal à  $0.13 \times 10^{-4}$  kg/s.

La figure 6.13 montre bien une évolution quadratique du coefficient  $a_{1s}$  comme donné par l’équation 6.14 sans le terme d’accélération

$$a_{1s} = 6\pi\mu R \left( 1 + \frac{R}{\delta} \right)$$

R (mm)	15	25	30	40	50
f (mHz)	835	812	803	780	760
$10^6 I_{tot} (kg.m^2)$	2.55	8.08	15.6	48.3	135.3
$\tau$ (s)	420.6	291.2	259	232	231
$10^4 a_1$ kg/s	0.44	0.94	1.29	2.13	3.44
$10^4 a_{1s}$ kg/s	$0.31 \pm 0.02$	$0.81 \pm 0.06$	$1.16 \pm 0.09$	$2.00 \pm 0.06$	$3.31 \pm 0.06$

TABLE 6.3 – Résultats des mesures pour les pendules fil-sphère.  $R$  est le rayon et  $f$  la fréquence mesurée. La profondeur de pénétration visqueuse  $\delta$  varie en diminuer quand la fréquence augmente et varie de  $\delta_{min} = 2.50$  mm à  $\delta_{max} = 2.58$  mm. Le moment d'inertie total est calculé par rapport au centre d'inertie du pendule, en négligeant la masse du fil ainsi que le cylindre support de l'aimant. Les barres d'erreurs proviennent des incertitudes statistiques sur la mesure de  $\tau$ .

L'ajustement par une fonction du second degré sans coefficient constant donne

$$a_{1s} = 9.18 \times 10^{-5} R + 0.128 R^2$$

Le modèle prévoit que le coefficient de  $R^2$  est égal à  $6\pi\mu/\delta = 0.137$  kg/Nm<sup>2</sup> (calculé en prenant la valeur moyenne de la profondeur de pénétration visqueuse  $\delta_m = 2.5$  mm). Les résultats expérimentaux donnent  $0.128 \pm 0.004$  kg/Nm<sup>2</sup>. La valeur prédictive du modèle est donc tout à fait acceptable. Le coefficient du terme en  $R$  n'a ici que peu de signification. En effet, il n'y a guère que le premier point de mesure pour lequel il joue un rôle et l'ajustement ne peut dans ces conditions être suffisamment précis.

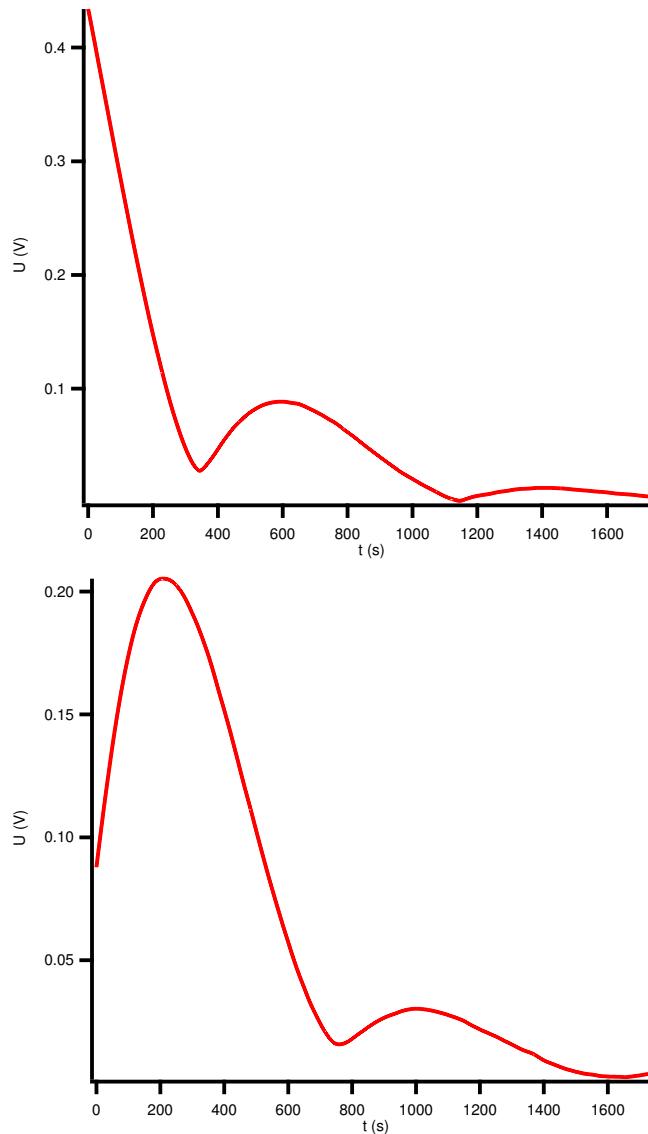


FIGURE 6.11 – Evolution des amplitudes des oscillations de la résonance sur les deux voies. Expérience réalisé avec une sphère de rayon  $R = 3$  cm.

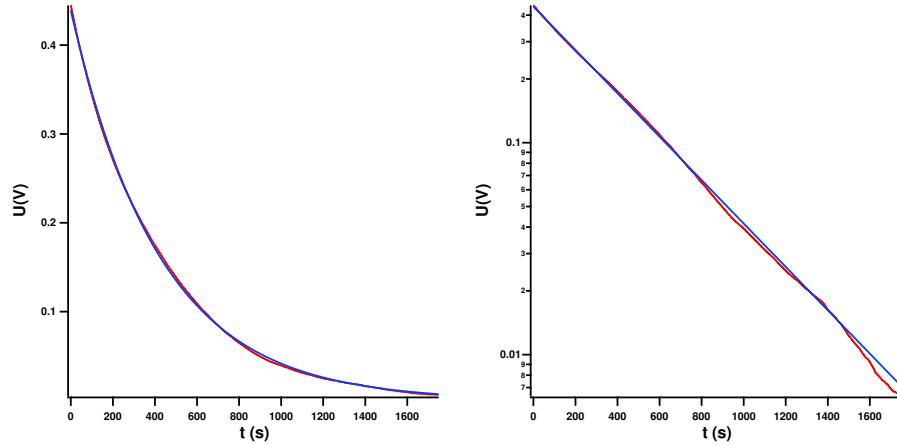


FIGURE 6.12 – Panneau de gauche : Evolution de l'amplitude totale d'oscillation obtenue apres recombinaison des signaux présentés sur la figure 6.11 des deux détecteurs suivant l'équation 6.52. La décroissance suit une loi exponentielle (en pointillés bleus). Panneau de droite : les mêmes signaux en coordonnées semi-logarithmiques montrent que nous mesurons la décroissance exponentielle sur une durée de l'ordre de  $5\tau$  et que les signaux sont perturbés par le bruit sismique du laboratoire lorsque l'amplitude devient faible.

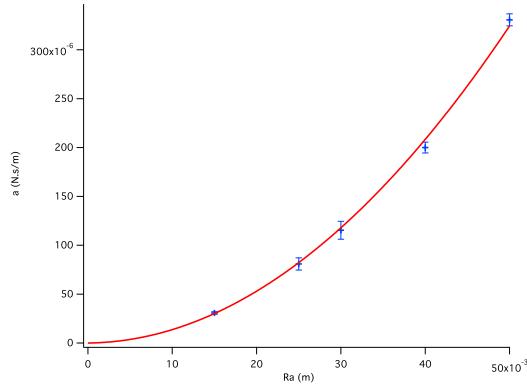


FIGURE 6.13 – Variations du coefficient  $a_{1s}$  en fonction du rayon de la sphère. Les points expérimentaux s'ajustent avec une loi en  $R^2$  comme le prévoit l'équation de Stokes.

### Pour les cylindres

Les cylindres sont suspendus par une lame élastique. Il existe deux modes d'oscillation comme je l'ai indiqué dans le chapitre 4, et seul le mode pendulaire est ici excité. Le mouvement du cylindre peut être décrit comme une rotation autour d'un point situé à une distance  $\lambda$  du haut du cylindre. La figure 6.15 reprend les notations,  $\lambda$  étant donné par l'équation 24 de l'article [13] reproduit au chapitre 4. Les caractéristiques du laiton employé pour les lamelles ne sont pas connues avec précision, en particulier le module d'Young. Les valeurs de  $\lambda$  sont donc calculées en utilisant dans l'équation donnant  $\lambda$  la valeur mesurée de la pulsation. Je calcule la position

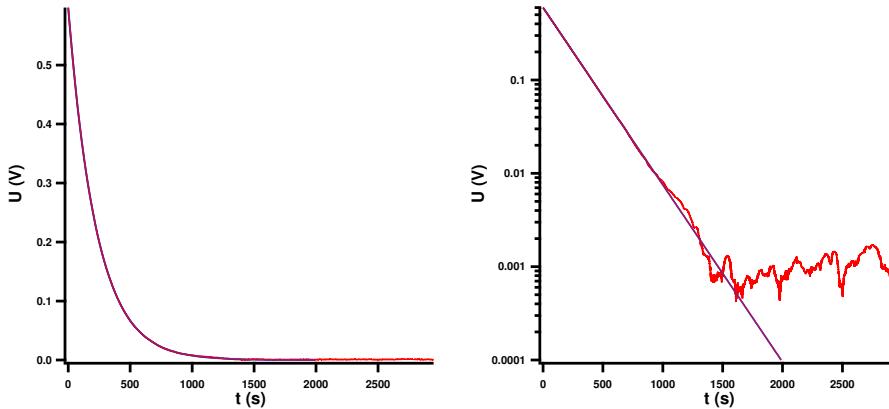


FIGURE 6.14 – Le signal mesuré avec le cylindre de diamètre 20 mm est ajusté par une exponentielle décroissante (en pointillés bleus). Sur la figure en échelle logarithmique, on voit que le bruit sismique du laboratoire domine au temps longs.

du centre de masse de l'ensemble en prenant en compte toutes les parties de chaque cylindre : le cylindre plein en bois, le trou percé pour contenir l'aimant et l'aimant pour les cylindres 1 à 8, la pièce en dural (cylindre de masse 0.26 g) servant à maintenir l'aimant pour les cylindres 9 à 11. De même, le moment d'inertie de chaque pièce, rapporté au centre de masse du système, prend en compte toutes les particularités de chacun des cylindres.

Le principe de calcul est le même qu'à la section 7.10. Il s'agit d'évaluer le travail des forces de frottements sur une période pour l'ensemble du cylindre. Suivant l'axe  $z'$  le cylindre s'étend de  $\lambda$  à  $\lambda + H$  et la vitesse d'un élément de longueur du cylindre s'exprime en fonction de la vitesse  $v_g(t) = v_{gm} \cos \omega t$  du centre de masse par

$$v_f(z', t) = \frac{\lambda + z'}{\lambda + h} v_g(t)$$

$$L_c(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} dt' \int_0^H dz' \left( a_{1c} v_f^2(t') \left( \frac{\lambda + z'}{\lambda + h} \right)^2 \right) \quad (6.55)$$

$$= a_{1c} \frac{(H+\lambda)^3 - \lambda^3}{3(h+\lambda)^2} v_{gm}^2 \frac{T}{2} \quad (6.56)$$

L'équation 6.54 appliquée au seul cylindre nous permet de déduire  $a_{1c}$  à partir des mesures des temps de décroissance.

$$a_{1c} \frac{(H + \lambda)^3 - \lambda^3}{3(h + \lambda)^2} = \frac{2(M_{tot} + \frac{I_{tot}}{L^2})}{\tau} \quad (6.57)$$

En toute rigueur, il faudrait tenir compte du terme de masse ajoutée correspondant à l'air entraîné. Cette masse, qui vaut  $H\pi R^2\rho k$ , ne représente jamais plus de 0.5 % de la masse du cylindre et je l'ai négligé dans le calcul de l'énergie cinétique.

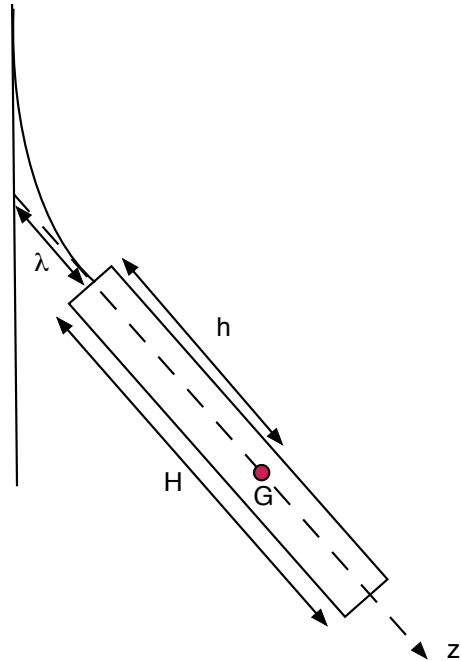


FIGURE 6.15 – Schéma et notations pour les expériences sur les cylindres.

Pour chaque mesure, après avoir suspendu le cylindre et réglé le “shadow detector” à sa meilleure sensibilité, j'observe à l'oscilloscope numérique les oscillations libres. La transformée de Fourier réalisée directement par l'appareil me permet d'avoir une bonne mesure de la fréquence de résonance. La carte d'acquisition est pilotée par un programme LabView qui génère une tension sinusoïdale à la fréquence de résonance et qui alimente après amplification une petite bobine placée à l'extérieur de la boîte, en regard de l'aimant. Le champ magnétique créé permet de mettre le cylindre en mouvement. Cette durée d'excitation est réglable, de l'ordre de  $0.2\tau$ , afin de ne pas avoir une amplitude d'oscillation trop importante. L'excitation étant stoppée, une acquisition à la fréquence de 40 Hz du signal du “shadow detector” est mise en route pour une durée réglable mais de l'ordre de  $10\tau$ . La procédure est automatisée et peut reprendre dès qu'un enregistrement est terminé. J'ai pu ainsi obtenir pour chaque cylindre entre 50 et 100 enregistrements, dont beaucoup ont eu lieu pendant la nuit dans un environnement particulièrement calme. Le signal, filtré en post-traitement par une transformée de Fourier glissante comme pour les sphères, permet de mesurer la décroissance exponentielle de l'oscillation et d'obtenir ainsi  $\tau$  avec une bonne précision statistique, le nombre de mesures étant considérable. Les résultats sont regroupés dans les tableaux 6.4

Je déduis de ces mesures le coefficient  $a_{1c}$  par l'équation 6.57. Les calculs de Stokes prédisent  $\frac{dF_x}{dl} = 2\pi\mu \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 k'v = a_{1c}v$  (équation 6.20).

Sur la figure 6.16 ont été reportés les valeurs de  $F_{exp} = a_{1c}/(2\pi\mu)$  déduites des expériences ainsi que  $F_{theo} = \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 k'$ . L'accord semble correct, en particulier concernant l'évolution qui suit

Numéro du cylindre	1	2	3	4	5	6	7
Diamètre (mm)	30	25	20	14.1	11.8	10.1	9.1
f (mHz)	926	933	961	932	946	952	936
$\delta$ (mm)	2.30	2.29	2.26	2.29	2.28	2.27	2.29
$R/\delta$ (mm)	6.52	5.45	4.43	3.07	2.59	2.22	1.77
$\lambda$ (mm)	62.9	60.1	52	61	60	57.7	58.2
$\tau$ (s)	474	444.3	420.5	231	194.5	173.8	143.4

Numéro du cylindre	8	9	10	11	12	13
Diamètre (mm)	6.1	3.9	3.1	2	1.2	0.8
f (mHz)	954	905	883	848	897	896
$\delta$ (mm)	2.27	2.33	2.36	2.40	2.33	2.34
$R/\delta$ (mm)	1.34	0.84	0.66	0.47	0.26	0.17
$\lambda$ (mm)	47.8	53.6	34.1	36.5	48.3	33.5
$\tau$ (s)	107.6	86.7	84.3	80.3	148.2	103

TABLE 6.4 – Résultats des mesures pour les cylindres. La longueur  $\lambda$  de chaque lamelle est calculée par l'équation 24 de l'article [13] reproduit au chapitre 4 dans laquelle la pulsation est celle déduite de la fréquence mesurée ci-dessus.

la bonne pente mais les valeurs mesurées sont systématiquement inférieures aux valeurs prévues et environ égales à 80 % de ce que l'on attendait (voir figure 6.17). Seuls deux points sont très en dessous de ces valeurs. Je n'ai pas trouvé d'explication satisfaisante à cela puisqu'il s'agit ici d'un amortissement moindre que celui prévu.

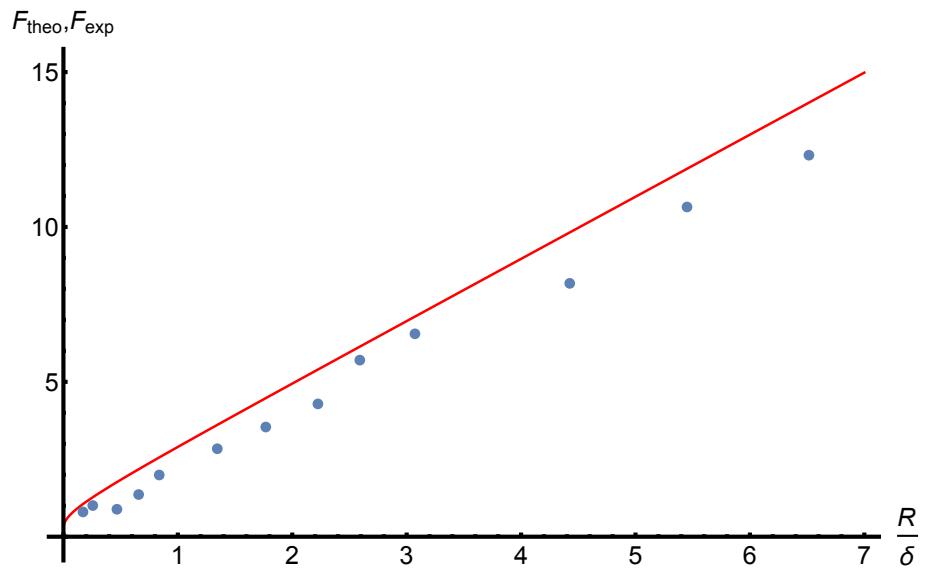


FIGURE 6.16 – Force (normalisée) appliquée sur le cylindre par unité de longueur et comparaison avec la courbe calculée avec la formule des équations 6.18 et 6.20 de Stokes.

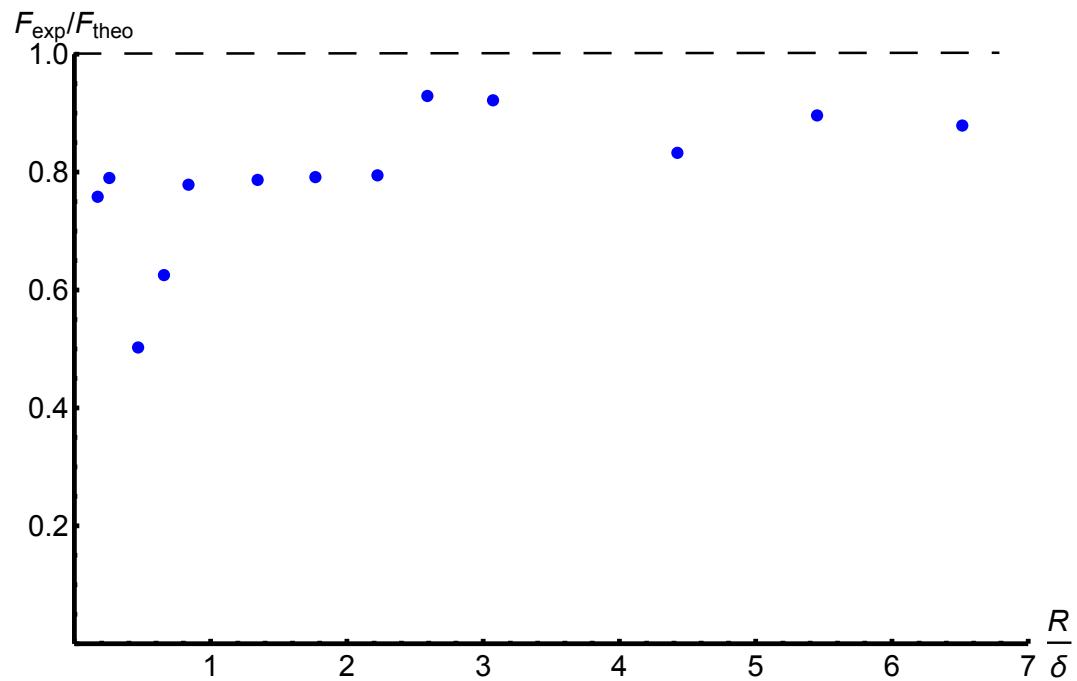


FIGURE 6.17 – Rapport entre la force mesurée et la force prévue par Stokes. Si ce n'est pour 2 points, les valeurs sont environ 80 % des valeurs attendues.

## 13 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude des forces de friction par un fluide visqueux sur une sphère ou un cylindre, en mouvement oscillant de basse vitesse dans le régime de Stokes c'est à dire pour des petites valeurs du nombre de Reynolds  $Re$ . J'ai tout d'abord présenté divers rappels :

- la situation historique au XIXème siècle au sujet des forces de viscosité, situation qui explique, en particulier, les motivations du calcul de Stokes publié en 1851 ;
- les résultats de Stokes, dans le cas de la sphère et du cylindre en mouvement oscillant. Dans le cas du cylindre, j'ai donné la forme moderne donnée par Stuart du résultat de Stokes utilisant des fonctions de Bessel modifiées. J'ai aussi introduit le nombre Keulegan-Carpenter qui permet de séparer les différents régimes de mouvements oscillants ;
- les résultats théoriques et expérimentaux concernant les forces de viscosité sur la sphère et le cylindre pour un mouvement de vitesse constante dans une large gamme de nombre de Reynolds ;
- le traitement habituel de l'amortissement de l'oscillation d'un pendule par les forces de viscosité

Une fois ces rappels effectués, j'ai discuté les tests expérimentaux de la force de friction de Stokes pour le mouvement oscillant. Ces expériences étudient l'amortissement de pendules formés d'une sphère ou d'un cylindre :

- dans le cas de la sphère, l'article de Gupta *et al.* [51] et celui de Bolster *et al.* [49] apportent des résultats très intéressants : la force de friction mesurée est très proche de la valeur calculée par Stokes, même pour des nombres de Reynolds très élevés,  $Re \approx 3000$ . De plus, l'article de Bolster *et al.* analyse les conditions d'apparition d'une dissipation supplémentaire par émission de tourbillons ;
- dans le cas du cylindre, le travail de Stuart et Woodgate apporte une très bonne vérification de la force de friction de Stokes à la pression atmosphérique mais la dépendance en pression de la force n'est pas en bon accord avec la prédiction théorique.

Pour compléter ces études, j'ai effectué des mesures de la force de friction de l'air sur des pendules portant une sphère ou un cylindre en cherchant à travailler avec des petites valeurs initiales du nombre de Reynolds,  $Re \lesssim 10$  et des valeurs finales  $Re \ll 1$ . Grâce à l'usage d'un "shadow detector", j'ai pu mesurer l'oscillation pour des amplitudes comprises entre  $500 \mu\text{m}$  et  $3 \mu\text{m}$ . La sensibilité du détecteur permettrait d'aller à de plus petites amplitudes mais le bruit sismique et environnemental maintient le pendule en mouvement avec des amplitudes de l'ordre de un micromètre. La décroissance de l'amplitude d'oscillation est bien exponentielle et les mesures de la constante de temps sont très précises, avec une incertitude statistique de l'ordre de 1 %. Cependant, la fixation du pendule sur son support peut induire un effet supplémentaire d'amortissement qui n'est pas parfaitement reproductible. J'ai déduit la force de friction de la mesure de la constante de temps d'amortissement et de l'évaluation de l'énergie cinétique du pendule.

Les résultats ainsi obtenus sont en très bon accord avec la théorie pour les pendules formés d'une sphère suspendue par un fil fin. Pour les pendules formés d'un cylindre, les mesures de la force sont en un assez bon accord général avec la formule de Stokes mais les valeurs de la force sont toujours inférieures à la valeur donnée par le calcul de Stokes et la différence voisine de 20 % pour la moitié des points de mesure atteint environ 40 % dans deux cas. Ce désaccord est tout à fait inattendu :

- du côté de la théorie, le calcul de Stokes ne comporte aucune approximation autre que de négliger le terme non-linéaire d'entraînement ;
- du point de vue expérimental, j'ai déduit la force de l'amortissement observé, sans essayer

appliquer aucune correction pour les autres effets dissipatifs. Un désaccord de signe opposé aurait été aisément à interpréter, précisément comme dû à des effets dissipatifs négligés.

En conclusion, les expériences décrites ici sont, à ma connaissance, un des premiers tests de la force de Stokes pour les mouvements oscillants effectués avec des nombres de Reynolds  $\ll 1$ .

## 14 Appendice A : la viscosité de l'air

Cet appendice rassemble des rappels historiques et quelques informations précises sur la viscosité de l'air sec et de l'air humide à la température ordinaire.

### 14.1 Mesure de la viscosité de l'air par Maxwell

En 1860, Maxwell [59] a publié une mesure de la viscosité de l'air sec en utilisant un pendule de torsion portant une série de disques qui oscillent entre des disques fixes et en mesurant l'amortissement des vibrations. Le résultat obtenu est

$$\mu = 2.00 \times 10^{-5} \text{ Pa.s} \quad (6.58)$$

pour une température de 18°C. Cette valeur est un peu trop grande, probablement à cause de défauts dans la description théorique de l'amortissement car les expériences sont très précises.

Maxwell mesure aussi le rapport des viscosités de l'hydrogène et du gaz carbonique à celle de l'air

$$\begin{aligned} \mu(\text{H}_2)/\mu(\text{air}) &= 0.5156 \\ \mu(\text{CO}_2)/\mu(\text{air}) &= 0.859 \end{aligned} \quad (6.59)$$

et il cite des expériences de Graham qui trouve pour ces mêmes rapports  $\mu(\text{H}_2)/\mu(\text{air}) = 0.4855$  et  $\mu(\text{CO}_2)/\mu(\text{air}) = 0.807$ . Il explique la différence par l'usage de gaz moins purs dans ses expériences que dans celles de Graham. Les valeurs actuelles de ces rapports sont  $\mu(\text{H}_2)/\mu(\text{air}) \approx 0.48$  et  $\mu(\text{CO}_2)/\mu(\text{air}) = 0.81$ .

### 14.2 Mesures de précision de la viscosité de l'air sec

L'expérience de Millikan qui mesure la charge élémentaire utilise la valeur de la viscosité de l'air. Il était donc très important de bien connaître la valeur cette viscosité. Millikan a de plus mis en évidence des corrections à la formule de Stokes quand le libre parcours moyen dans le gaz n'est pas très petit par rapport au diamètre de la gouttelette.

Vers 1930, la valeur de la charge de l'électron déduite de l'expérience de Millikan et la valeur déduite des mesures de rayons X ne sont pas en bon accord. Les rayons X permettent de mesurer la maille d'un cristal et d'en déduire le nombre d'Avogadro. Connaissant la charge du Faraday (la charge d'une mole d'électrons), on en déduit la charge de l'électron. Divers auteurs effectuent donc des mesures de précision de la viscosité de l'air sec pour tester la qualité de la valeur mesurée. Ces mesures utilisent un dispositif formé de deux cylindres coaxiaux et le principe de la mesure est, par exemple, de faire tourner le cylindre intérieur et de mesurer la rotation du cylindre extérieur qui forme un pendule de torsion. L'article de Bearden [60] datant de 1939 présente une comparaison de ces mesures ainsi qu'une nouvelle mesure.

La valeur recommandée alors est  $\mu = (1819.20 \pm 0.06) \times 10^{-8} \text{ Pa.s}$  à la température de 20.00°C. À basse densité, la théorie prévoit que la viscosité varie comme la racine carrée de la température absolue  $T$  et cette loi a été utilisée pour corriger des mesures effectuées à de températures très légèrement différentes de 20.00°C.

Un article de Kadoya *et al.* [61] en 1985 présente une revue critique des très nombreuses mesures de la viscosité de l'air sec en phase gazeuse dans de larges domaines de pression et de température. A la température  $T = 300$  K et à la pression  $10^5$  Pa, cet article recommande la valeur  $\mu = 1857 \times 10^{-8}$  Pa.s.

Actuellement, le logiciel utilisé au NIST (RefProp 9.0 version 2010) recommande les valeurs suivantes :

T ( °C)	$\mu(10^{-6}$ Pa.s)
0	17.218
18	18.108
19	18.157
20	18.205
21	18.254
22	18.303
23	18.351
24	18.400
25	18.448
26	18.496
27	18.544
28	18.593

Le logiciel base ses calculs sur [63] et la dépendance avec la température est  $(T/T_0)^n$  avec  $n = 0.7871$  (fig 6.18). La précision est estimée à environ 1%. Les mesures de Bearden et de Kadoya s'intègrent bien dans cette dépendance en température.

### 14.3 Effet de l'humidité de l'air sur sa viscosité

L'article [62] mesure cet effet. A la température de 25°C qui est la plus basse étudiée, la viscosité de l'air varie entre  $\mu = 1.8451 \times 10^{-5}$  Pa.s pour l'air sec à  $\mu = 1.8374 \times 10^{-5}$  Pa.s pour l'air humide contenant une fraction molaire d'eau égale à  $x_{H20} = 0.033$ , ce qui correspond à la saturation.

On en déduit que, pour les expériences effectuées autour de la température ordinaire, la correction de la viscosité liée à l'humidité de l'air ambiant est donc pratiquement négligeable pour des expériences n'atteignant pas une haute précision : en effet, la variation relative de la viscosité entre un air sec et un air saturé d'humidité n'est que de  $4 \times 10^{-3}$ . Ce ne serait plus vrai à plus haute température car la fraction molaire d'eau à saturation augmente très rapidement avec la température et la variation maximum de viscosité augmente aussi très rapidement.

## 15 Appendice B :Calcul du Stokes pour le cylindre

Ce calcul est tiré de celui de Stokes [1] et il en utilise l'essentiel des notations. Cependant, pour la fonction courant notée  $\chi$  par Stokes, j'utilise la notation maintenant classique  $\psi$  (voir les livres de H. Lamb [9] ou de G.K. Batchelor [11]) et j'ai aussi noté  $v_r$  et  $v_\theta$  les composantes radiale et tangentielle de la vitesse du fluide en coordonnées polaires notées  $R, \Theta$  par Stokes. J'utilise  $R$  pour le rayon du cylindre à la place de  $a$ . D'autres modifications seront citées quand la notation est introduite. Enfin, je donne le résultat sous une forme plus compacte que celle donnée par Stokes, en utilisant des fonctions de Bessel modifiées  $K_n(z)$  : d'après Watson [64], ces fonctions n'ont été définies que vers 1889 par Basset. Cette forme a été donnée par Stuart [12] en 1963.

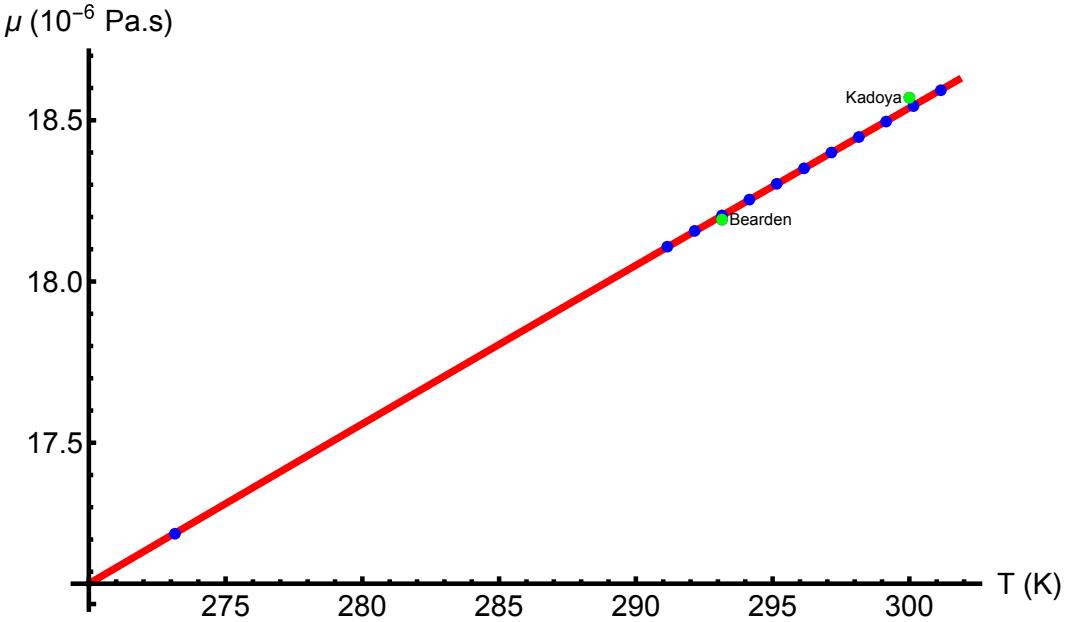


FIGURE 6.18 – Variations de la viscosité de l'air à la pression atmosphérique en fonction de la température. Cette dépendance est la forme  $\mu = \mu_0(T/T_0)^{0.7871}$ . Les points bleus représentent les valeurs données par le logiciel du NIST et communiquées aimablement par Robert Berg. La courbe rouge est l'ajustement par la fonction  $\mu = \mu_0(T/T_0)^{0.7871}$ . Les points verts correspondent à la mesure de Bearden et la valeur donnée par Kodaya

### 15.1 Les équations dynamiques

On considère un cylindre infiniment long de rayon  $R$  qui oscille selon une direction perpendiculaire à son axe pris comme axe **z**. On suppose que rien ne dépend de la coordonnée  $z$  qui est donc absente du calcul. On projette l'équation (6.2) sur les axes **x** et **y**

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \varrho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.60)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \varrho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (6.61)$$

où  $u$  et  $v$  sont les composantes de la vitesse selon les axes **x** et **y** au point de coordonnées  $x$ ,  $y$ .

### 15.2 La conservation de la masse : introduction de la fonction courant $\psi$

L'équation (6.3) qui écrit la conservation de la masse pour un fluide incompressible devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6.62)$$

On en déduit que  $d\psi$  défini par

$$d\psi = u dy - v dx \quad (6.63)$$

est une différentielle totale, puisque ses dérivées croisées  $\partial^2\psi/\partial x\partial y$  et  $\partial^2\psi/\partial y\partial x$  sont égales.  $\psi$  est la fonction courant (stream function en anglais) : le vecteur vitesse est partout tangent aux courbes définies par  $\psi = \text{constante}$  et on pourra remplacer  $u$  et  $v$  par les dérivées de  $\psi$  :

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (6.64)$$

### 15.3 Elimination de la pression $p$

Pour éliminer la pression  $p$ , il faut dériver d'abord l'équation (6.60) par rapport à  $y$  et l'équation (6.61) par rapport à  $x$  pour obtenir deux expressions de  $\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}$ . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\varrho}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y} \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2} - \frac{\varrho}{\mu} \frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x} \end{aligned} \quad (6.65)$$

on écrit l'égalité de ces deux expressions, ce qui élimine  $p$ . On remplace  $u$  et  $v$  par leurs expressions en fonction des dérivées de  $\psi$  et on introduit la viscosité dynamique  $\nu = \mu/\varrho$ .

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t\partial y^2} \\ &= - \left[ \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2\partial y^2} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (6.66)$$

soit encore

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - \frac{1}{\nu} \left[ \frac{\partial^3 \psi}{\partial t\partial x^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial t\partial y^2} \right] = 0 \quad (6.67)$$

ce qui se factorise

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \psi = 0 \quad (6.68)$$

Cette équation s'intègre sous la forme

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (6.69)$$

avec  $\psi_1$  et  $\psi_2$  solution des équations suivantes

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \psi_1 = 0 \quad (6.70)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi_2 = 0 \quad (6.71)$$

### 15.4 Relation entre $p$ et $\psi$

Il est possible d'exprimer la pression  $p$  en fonction de  $\psi$ . On repart des équations (6.60) et (6.61) :

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \\ &= \varrho\nu \left[ dx \frac{\partial}{\partial y} - dy \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi \end{aligned} \quad (6.72)$$

Cette équation se simplifie puisque la contribution du terme en  $\psi_2$  est nulle

$$dp = \varrho \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t \partial x} dy - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t \partial y} dx \right) \quad (6.73)$$

### 15.5 Passage en coordonnées polaires

Stokes introduit alors les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  pour remplacer  $x$  et  $y$  et les composantes radiale  $v_r$  et tangentielle  $v_\theta$  de la vitesse pour remplacer  $u$  et  $v$ .

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ u &= v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \\ v &= v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \end{aligned} \quad (6.74)$$

Il calcule alors  $d\psi = udy - vdx$  et, après simplification, il obtient

$$d\psi = v_r r d\theta - v_\theta dr \quad (6.75)$$

soit encore

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \quad (6.76)$$

Le Laplacien 2D en coordonnées polaire est bien connu

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (6.77)$$

Stokes obtient ainsi les équations vérifiées par  $\psi_1$  et  $\psi_2$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi_1 = 0 \quad (6.78)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi_2 = 0 \quad (6.79)$$

et l'équation donnant la pression

$$dp = \varrho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} r d\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} dr \right) \quad (6.80)$$

### 15.6 Conditions aux limites

Le cylindre oscille parallèlement à l'axe  $\mathbf{x}$ , avec une très faible amplitude  $x(t)$

$$x(t) = x_0 \exp(i\omega t) \quad (6.81)$$

On utilise des notations complexes et on suppose que  $x_0$  est très petit devant le rayon  $R$  du cylindre. A la surface du cylindre,  $v_r$  et  $v_\theta$  sont donc donnés par

$$\begin{aligned} v_r &= i\omega x_0 \cos \theta \exp(i\omega t) \\ v_\theta &= -i\omega x_0 \sin \theta \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (6.82)$$

Comme  $x_0 \ll R$ , on écrit la condition aux limites à la surface du cylindre supposée en  $r = R$ . Il faut aussi écrire que la vitesse s'annule à l'infini donc que  $v_r = 0$  et  $v_\theta = 0$  quand  $r \rightarrow \infty$ .

### 15.7 Dépendance angulaire de $\psi_1$ et $\psi_2$

L'équation (6.82) est en accord avec une dépendance angulaire de  $\psi_1$  et  $\psi_2$  en  $\sin \theta$ . Stokes écrit donc

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sin \theta \exp(i\omega t) F_1(r) \\ \psi_2 &= \sin \theta \exp(i\omega t) F_2(r)\end{aligned}\quad (6.83)$$

$F_1(r)$  et  $F_2(r)$  vérifient

$$\frac{d^2 F_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_1}{dr} - \frac{F_1}{r^2} = 0 \quad (6.84)$$

$$\frac{d^2 F_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_2}{dr} - \frac{F_2}{r^2} - \kappa^2 F_2 = 0 \quad (6.85)$$

où  $\kappa^2 = i\omega/\nu$  soit encore  $\kappa = (1+i)/\delta$  où  $\delta$  est la longueur de pénétration visqueuse. Stokes utilise  $m$  là où j'utilise  $\kappa$ , notation qui me semble plus naturelle car  $\kappa$  est une sorte de vecteur d'onde pour une équation de diffusion.

### 15.8 Dépendances radiales de $F_1$ et $F_2$

On cherche les solutions de l'équation (6.84) sous la forme  $r^n$  et on trouve immédiatement que  $n^2 = 1$  donc  $n = \pm 1$  et

$$F_1(r) = \frac{A}{r} + Br \quad (6.86)$$

L'équation (6.85) peut se mettre sous une forme maintenant classique en multipliant tous les termes par  $r^2$  et en introduisant  $z = \kappa r$

$$z^2 \frac{d^2 F_2}{dz^2} + z \frac{dF_2}{dz} - (z^2 + 1) F_2 = 0 \quad (6.87)$$

D'après le livre de Watson [64] (page 77 paragraphe 3.7), l'équation

$$z^2 \frac{d^2 F_2}{dz^2} + z \frac{dF_2}{dz} - (z^2 + \nu^2) F_2 = 0 \quad (6.88)$$

a pour solutions les fonctions de Bessel modifiées  $I_\nu(z)$  et  $K_\nu(z)$ . La solution cherchée est donc donnée par la somme pondérée de ces deux fonctions avec  $\nu = 1$

$$F_2(r) = CI_1(z) + DK_1(z) = CI_1(\kappa r) + DK_1(\kappa r) \quad (6.89)$$

Stokes a calculé toutes les propriétés nécessaires des solutions de l'équation différentielle donnant  $F_2$  sans utiliser les fonctions de Bessel modifiées qui n'ont été définies que bien plus tard.

### 15.9 Prise en compte des conditions aux limites

Les conditions aux limites en  $r = R$  donnent alors

$$F_1(R) + F_2(R) = i\omega x_0 R \quad (6.90)$$

$$F_1'(R) + F_2'(R) = i\omega x_0 \quad (6.91)$$

celles à  $r \rightarrow \infty$  donnent

$$F_1(r) + F_2(r) \rightarrow 0 \quad (6.92)$$

$$F'_1(r) + F'_2(r) \rightarrow 0 \quad (6.93)$$

Dans le livre de Watson (pages 202-203, paragraphe 7.23), la fonction  $I_1(z)$  ainsi que sa dérivée première divergent de manière exponentielle quand  $|z| \rightarrow \infty$  tandis que la fonction  $K_1(z)$  tend vers 0 quand  $|z| \rightarrow \infty$ . Les conditions aux limites à  $r$  tendant vers l'infini sont vérifiées si  $B = 0$  et  $C = 0$  (c'est évidemment suffisant mais c'est aussi nécessaire parce que les comportements différents de  $F_1(r)$  et  $F_2(r)$  font que la divergence de l'une de ces fonctions ne peut pas être compensée par celle de l'autre). On simplifie les équations (6.86) et 6.89).

$$\begin{aligned} F_1(r) &= \frac{A}{r} \\ F_2(r) &= DK_1(\kappa r) \end{aligned} \quad (6.94)$$

Les conditions aux limites en  $r = R$  donnent

$$\begin{aligned} \frac{A}{R} + DK_1(z) &= i\omega x_0 R \\ -\frac{A}{R} + DzK'_1(z) &= i\omega x_0 \end{aligned} \quad (6.95)$$

A partir de maintenant, on définit  $z \equiv \kappa R$ . La solution de ces équations est donc donnée par

$$\begin{aligned} A &= i\omega x_0 R^2 \left[ 1 - \frac{2K_1(z)}{K_1(z) + zK'_1(z)} \right] \\ D &= \frac{2i\omega x_0 R}{K_1(z) + zK'_1(z)} \end{aligned} \quad (6.96)$$

Ce résultat établit donc la valeur de la fonction courant  $\psi$  d'où nous pouvons déduire toutes les quantités utiles

$$\begin{aligned} \psi &= \sin \theta \exp(i\omega t) [F_1(r) + F_2(r)] \\ F_1(r) &= \left[ 1 - \frac{2K_1(z)}{K_1(z) + zK'_1(z)} \right] \frac{i\omega x_0 R^2}{r} \\ F_2(r) &= \frac{2i\omega x_0 R}{K_1(z) + zK'_1(z)} K_1(\kappa r) \end{aligned} \quad (6.97)$$

## 16 Appendice C : Calcul de la force due à la viscosité

Cette force est bien sûr selon l'axe  $\mathbf{x}$  et elle est proportionnelle à la longueur  $dl$  du cylindre. La force par unité de longueur  $d\mathcal{F}/dl$  est donnée par

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= dl \int \sigma \cdot \mathbf{n} R d\theta \\ \sigma_{jk} &= -p\delta_{jk} + \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (6.98)$$

Comme le vecteur normal entrant sur la surface du cylindre a une seule composante non nulle  $n_r = -1$ , il suffit de connaître  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{r\theta}$  pour calculer la seule composante non-nulle de la force

qui est selon l'axe **x**. Elle est donnée par

$$\frac{dF_x}{dl} = \oint (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) d\theta \quad (6.99)$$

Le passage aux coordonnées cylindriques du tenseur  $\sigma_{jk}$  est bien expliqué dans le chapitre III du livre Laminar Boundary Layers [65].  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{r\theta}$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + \mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\ &= \mu \left[ -\frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (6.100)$$

Pour calculer les dérivées partielles de  $v_r$  par rapport à  $r$  et  $\theta$  et celle de  $v_\theta$  par rapport à  $r$ , pour  $r = R$ , j'utilise l'équation (6.76) qui donne les expressions de  $v_r = \partial \psi / (r \partial \theta)$  et  $v_\theta = -\partial \psi / \partial r$  et ensuite l'équation (6.82) qui donne  $v_r$  et  $v_\theta$  pour  $r = R$ . Ainsi  $\partial v_r / \partial r$  est donné par

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_R &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} \right)_R - \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_R = 0 \end{aligned} \quad (6.101)$$

En effet,  $(\partial \psi / \partial r)_R = i\omega x_0 \sin \theta \exp(i\omega t)$  donc  $(\partial^2 \psi / \partial \theta \partial r)_R = i\omega x_0 \cos \theta \exp(i\omega t)$  tandis que  $(\partial \psi / \partial \theta)_R = i\omega x_0 R \cos \theta \exp(i\omega t)$ .  $v_\theta / r$  est donné par

$$\left( \frac{v_\theta}{r} \right)_R = -\frac{i\omega x_0}{R} \sin \theta \exp(i\omega t) \quad (6.102)$$

$\partial v_\theta / \partial r$  est donné par

$$\left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)_R = -\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)_R \quad (6.103)$$

Pour calculer  $\partial^2 \psi / \partial r^2$ , on utilise les équations vérifiées par  $\psi$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  et on obtient

$$-\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)_R = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_R + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right)_R - \frac{1}{\nu} \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right)_R \quad (6.104)$$

$$= -\frac{1}{\nu} \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right)_R \quad (6.105)$$

La somme des deux premiers termes du deuxième membre de l'équation (6.104) est nulle car  $(\partial \psi / \partial r)_R = i\omega x_0 \sin \theta \exp(i\omega t)$  et  $(\partial^2 \psi / \partial \theta^2)_R = -i\omega x_0 R \sin \theta \exp(i\omega t)$ .  $\partial v_r / (r \partial \theta)$  est donné par

$$\left( \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} \right)_R = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right)_R = -\frac{i\omega x_0}{R} \sin \theta \exp(i\omega t) = \left( \frac{v_\theta}{r} \right)_R \quad (6.106)$$

La composante *x* de la force par unité de longueur est donc donnée par

$$\frac{dF_x}{dl} = R \int_0^{2\pi} \left[ -p_R \cos \theta + \varrho \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right)_R \sin \theta \right] d\theta \quad (6.107)$$

Plutôt que de calculer la pression  $p_R$ , Stokes utilise une intégration par parties

$$\int_0^{2\pi} p_R \cos \theta d\theta = p_R \sin \theta|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{dp_R}{d\theta} \sin \theta d\theta \quad (6.108)$$

Le terme intégré est nul car  $\sin \theta$  est nul aux deux bornes.  $dp_R/d\theta$  est donné par l'équation (6.80)

$$\frac{dp_R}{d\theta} = \varrho R \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right)_R \quad (6.109)$$

On sort  $d/dt$  de l'intégrale et on obtient

$$\frac{dF_x}{dz} = \varrho R \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \left[ R \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right)_R + (\psi_2)_R \right] \sin \theta d\theta \quad (6.110)$$

On utilise les expressions de  $\partial \psi_1 / \partial r$  et  $\psi_2$  pour calculer cette intégrale :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right)_R &= -\frac{A}{R^2} \sin \theta \exp(i\omega t) \\ (\psi_2)_R &= DK_1(z) \sin \theta \end{aligned} \quad (6.111)$$

où  $A$  et  $D$  sont donnés par l'équation (6.96). L'intégrale sur  $\theta$  est simplement  $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$  et, tous calculs faits, on trouve le résultat de Stuart [12] (p 391)

$$\frac{dF_x}{dl} = -\varrho \pi R^2 \left[ 1 - \frac{4K_1(z)}{K_1(z) + zK'_1(z)} \right] i\omega x_0 \frac{d \exp(i\omega t)}{dt} \quad (6.112)$$

où, comme Stokes, on a introduit la masse de fluide déplacée par unité de longueur du cylindre que j'ai notée  $dM'/dl = \varrho \pi R^2$ . Comme Stokes, j'ai introduit la notation suivante

$$k - ik' = \left[ 1 - \frac{4K_1(z)}{K_1(z) + zK'_1(z)} \right] = \left[ 1 + \frac{4K_1(z)}{zK_0(z)} \right] \quad (6.113)$$

Le remplacement du dénominateur  $K_1(z) + zK'_1(z)$  par  $-zK_0(z)$  apparaît chez Hussey et Vujacic [22] : c'est une application de l'équation (3) du paragraphe 3.71 p 79 du livre de Watson [64].

Jusqu'ici, on a utilisé des notations complexes. Pour en déduire la force en fonction de la vitesse  $dx/dt$  et de l'accélération  $d^2x/dt^2$ , il faut prendre la partie réelle de  $dF_x/dl$ . On obtient le résultat de Stokes exprimé par Stuart avec les fonctions de Bessel modifiées

$$\frac{d\mathcal{F}}{dl} = \frac{dM'}{dl} \left[ k \frac{d^2x}{dt^2} + k' \omega \frac{dx}{dt} \right] \quad (6.114)$$

Comme pour la sphère, on trouve un terme de masse entraînée proportionnel à l'accélération et un terme de frottement proportionnel à la vitesse.

## 17 Appendice D : Evaluation de l'effet anélastique

Le fil ou la lamelle de suspension induit de la dissipation par les effets anélastiques [67, 68, 69, 70], c'est-à-dire que la force élastique due à la déformation du fil n'est pas en phase avec le déplacement. Cet effet limite le coefficient de qualité d'un pendule mais la limite est très

élevée quand la force de rappel d'origine gravitationnelle domine largement la force élastique. La contribution de l'effet anélastique à  $1/Q$  est donnée par [69]

$$\left(\frac{1}{Q}\right)_{anel.} = \frac{E_{elas}}{E_{grav} + E_{elas}} \phi(\omega) \quad (6.115)$$

$E_{grav}$  et  $E_{elas}$  sont les énergies potentielles d'origines gravitationnelle et élastique et  $\omega$  est la pulsation du pendule supposée positive. Alors la phase anélastique  $\phi(\omega)$  est positive et sa valeur donnée par Cagnoli *et al.* [70] est

$$\phi(\omega) = \phi_0 + \Delta \frac{\omega/\omega_r}{1 + (\omega/\omega_r)^2}, \quad (6.116)$$

$$(6.117)$$

où la phase  $\phi_0$  est introduite de manière phénoménologique et sa valeur est inférieure à  $2 \times 10^{-4}$  pour tous les métaux testés par Cagnoli *et al.* [70] à l'exception du titane pour lequel  $\phi_0 = (7.0 \pm 0.1) \times 10^{-4}$ .  $\Delta$  et  $\omega_r$  sont donnés par

$$\Delta = \frac{E\alpha^2 T}{C_v} \quad (6.118)$$

$$\omega_r = \pi^2 \frac{\kappa_{th}}{C_v c^2} \quad (6.119)$$

$$\text{ou } \omega_r = 2\pi \times 0.539 \frac{\kappa_{th}}{C_v a^2} \quad (6.120)$$

où  $E$  est le module d'Young du matériau,  $\alpha$  son coefficient de dilatation thermique,  $C_v$  sa chaleur spécifique par unité de volume,  $\kappa_{th}$  sa conductivité thermique and  $T$  la température. L'équation (6.119) s'applique à une lame rectangulaire d'épaisseur  $c$  dans la direction de flexion tandis que l'équation (6.120) s'applique à une tige de rayon  $a$ .

Pour les pendules formé d'une sphère suspendue par une corde à piano en acier de diamètre 0.5 mm donc  $a = 0.25$  mm, les valeurs des paramètres du matériau sont les suivants (ces valeurs sont les valeurs moyennes des paramètres pour les aciers à fort contenu de carbone qui sont tirées du site <http://www.matweb.com/>) : module d'Young  $E = 2.1 \times 10^{11}$  Pa, coefficient de dilatation thermique  $\alpha = 12.5 \times 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>, chaleur spécifique par unité de volume  $C_v = 3.56 \times 10^6$  J.m<sup>-3</sup>K<sup>-1</sup>, conductivité thermique  $\kappa_{th} = 46.9$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>. J'obtiens ainsi

$$\begin{aligned} \Delta &= 2.6 \times 10^{-3} \\ \omega_r/(2\pi) &= 113 \text{ Hz.} \end{aligned} \quad (6.121)$$

Je peux comparer ces résultats aux valeurs théoriques ou expérimentales de Cagnoli *et al.* [70] pour l'acier C85 qui est couramment utilisé pour les cordes à piano. Pour ce matériau, la valeur de  $\phi_0$  mesurée est  $\phi_0 = (1.9 \pm 0.1) \times 10^{-4}$ . En corrigeant  $\omega_r$  pour tenir compte des rayons  $a$  qui sont différents, j'obtiens

$$\begin{aligned} \Delta_{theo} &= 2.6 \times 10^{-3} \text{ et } \Delta_{exp} = (1.9 \pm 0.4) \times 10^{-3} \\ \omega_{r, theo}/(2\pi) &= 103 \text{ Hz et } \omega_{r, exp}/(2\pi) = (77 \pm 3) \text{ Hz.} \end{aligned} \quad (6.122)$$

Pour les fréquences du pendule  $\omega/(2\pi) \approx 0.8$  Hz, la phase  $\phi(\omega)$  est largement dominée par  $\phi_0$  et elle vaut donc environ  $\phi(\omega) \approx 2 \times 10^{-4}$ . Il reste à évaluer le facteur de dilution  $E_{elas}/(E_{grav} + E_{elas}) = k_{elas}/(k_{grav} + k_{elas})$  pour calculer la contribution anélastique à l'inverse du coefficient de qualité

$(1/Q)_{anel.}$ . Les raideurs  $k_{elas}$  et  $k_{grav}$  sont :

$$k_{elas} = \frac{\sqrt{mgEI}}{2l^2}$$

$$k_{grav} = m \frac{g}{l}$$

Les résultats sont présentés dans la table 6.5 et comparés à l'inverse du coefficient de qualité total calculé à partir des mesures de  $\tau$  (voir table 6.3) par la relation  $(1/Q)_{total} = 2/(\omega\tau)$

D (mm)	30	50	60	80	100
$k_{elas}$	0.0010	0.0017	0.0019	0.0024	0.0032
$k_{grav}$	0.057	0.162	0.230	0.417	0.759
facteur de dilution	0.017	0.010	0.0083	0.0059	0.0042
$(1/Q)_{anel.} \times 10^{-6}$	3.6	2.0	1.7	1.2	0.84
$(1/Q)_{total} \times 10^{-3}$	0.97	2.1	1.8	1.4	1.0
$(1/Q)_{anel.} / (1/Q)_{total}$	0.4%	0.1%	0.1%	0.1%	0.1%

TABLE 6.5 – Contribution de l'anélasticité au facteur de qualité des pendules sphère-fil.  $1/Q_{total}$  est la valeur expérimentale et  $1/Q_{anel}$  est évalué avec  $\phi_0 = 2 \times 10^{-4}$ .

On voit donc que  $(1/Q)_{anel.}$  ne représente qu'un faible pourcentage ( $< 4\%$ ) de l'amortissement total et il est ainsi justifié de le négliger dans l'exploitation des mesures pour ces pendules.

Pour les pendules formés d'un cylindre suspendu à une lamelle de laiton d'épaisseur  $c = 0.09$  mm, les valeurs des paramètres du matériau sont les suivantes (ces valeurs sont les valeurs moyennes des paramètres pour les laitons qui sont tirées du site <http://www.matweb.com/>) : module d'Young  $E = 1.06 \times 10^{11}$  Pa, coefficient de dilatation thermique  $\alpha = 20.1 \times 10^{-6}$  K $^{-1}$ , chaleur spécifique par unité de volume  $C_v = 3.23 \times 10^6$  J.m $^{-3}$ K $^{-1}$ , conductivité thermique  $\kappa_{th} = 124$  W.m $^{-1}$ .K $^{-1}$ . J'obtiens ainsi

$$\begin{aligned} \Delta &= 3.7 \times 10^{-3} \\ \omega_r/(2\pi) &= 7400 \text{ Hz.} \end{aligned} \tag{6.123}$$

Pour les fréquences du pendule  $\omega/(2\pi) \approx 0.9$  Hz, la contribution à  $\phi(\omega)$  du terme proportionnel à  $\Delta$  est totalement négligeable.  $\phi(\omega)$  est donc dominé par  $\phi_0$  qui est inconnu mais dont on peut penser qu'il vérifie  $\phi_0 < 2 \times 10^{-4}$  comme pour la plupart des métaux

Il reste à évaluer le facteur de dilution  $E_{elas}/(E_{grav} + E_{elas})$  pour estimer la contribution anélastique à l'inverse du coefficient de qualité  $(1/Q)_{anel.}$ . Les résultats sont présentés dans la table 17

On voit donc que  $(1/Q)_{anel.}$ , ne représente jamais plus de 1 % de  $(1/Q)_{total}$  ce qui justifie de le négliger.

Diamètre (mm)	30	25	20	14.1	11.8	10.1	9.1
$k_{elas}$	0.16	0.14	0.12	0.08	0.07	0.06	0.04
$k_{grav}$	6.6	5.3	3.9	1.7	1.2	0.8	0.5
facteur de dilution	0.023	0.026	0.03	0.04	0.05	0.07	0.07
$(1/Q)_{anel.} \times 10^{-5}$	0.4	0.5	0.6	0.9	1.1	1.3	1.5
$(1/Q)_{total} \times 10^{-3}$	0.72	0.77	0.79	1.48	1.73	1.92	2.37
$(1/Q)_{anel.} / (1/Q)_{total}$	0.6 %	0.7%	0.8%	0.6%	0.6%	0.7%	0.6%
Diamètre (mm)	6.1	3.9	3.1	2	1.2	0.8	
$k_{el}$	0.03	0.017	0.006	0.003	0.009	0.005	
$k_{grav}$	0.3	0.13	0.06	0.02	0.12	0.05	
facteur de dilution	0.09	0.11	0.09	0.08	0.07	0.09	
$(1/Q)_{anel.} \times 10^{-5}$	1.9	2.3	1.7	1.7	1.4	1.9	
$(1/Q)_{total} \times 10^{-3}$	3.11	4.05	4.28	4.67	2.39	2.47	
$(1/Q)_{anel.} / (1/Q)_{total}$	0.6%	0.6%	0.4%	0.4%	0.6%	0.8%	

TABLE 6.6 – Contribution de l'anélasticité au facteur de qualité des pendules cylindre-lamelle.  $1/Q_{total}$  est la valeur expérimentale et  $1/Q_{anel}$  est évalué avec  $\phi_0 = 2 \times 10^{-4}$ .



# Bibliographie

- [1] G.G Stokes, “On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums,” *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol IX, part II, 8-106 (1851).
- [2] O. Reynolds, “An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels”, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **174** 935–982 (1883).
- [3] M. Du Buat, “Principes d’Hydraulique,” (1786). Je n’ai pu trouver sur le web que le tome I de l’édition de 1816 et les travaux sur le pendule ne figurent pas dans ce tome.
- [4] F.W. Bessel, “Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels,” Berlin (1828).
- [5] C.A. Coulomb, “Expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très lents,” *Mémoires de l’Institut National des Sciences et des Arts* **3**, 246-305 (1800).
- [6] R.E. Williams and R.G. Hussey, “Oscillating cylinders and the Stokes’ paradox,” *Phys. Fluids* **15**, 2083-2088 (1972) and erratum **19**, 1652 (1976).
- [7] R.E. Williams, “Oscillating cylinders and the Stokes’ paradox,” Physics PhD, The Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College (1972). Disponible sur le web Louisiana State University [https://digitalcommons.lsu.edu/gradschool\\_dissertations/2319](https://digitalcommons.lsu.edu/gradschool_dissertations/2319)
- [8] Y. Kostov, R. Morshed, B. Höling, R. Chen and P.B. Siegel, “Period-speed analysis of a pendulum,” *Am. J. Phys.* **76**, 956–962 (2008).
- [9] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press (first edition 1932, reprinted in 1993).
- [10] L. Landau and E. Lifschitz, *Fluid mechanics*, (Pergamon, London, 1959) ou *Mécanique des fluides*, (Editions Mir, Moscou, 1971)
- [11] G.K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge university Press (first edition 1967, reprinted in 1994).
- [12] J.T. Stuart, Chap. VII, p 347-408, *Laminar Boundary Layers*, Edited by L. Rosenhead, Oxford University Press (1963).
- [13] L.A. Segel, “A uniformly-valid asymptotic expansion of the solution to an unsteady boundary-layer problem,” *Journal of Mathematics and Physics*, **39**, 189-197 (1960).
- [14] R. A. Nelson and M. G. Olsson, “The pendulum—Rich physics from a simple system,” *Am. J. Phys.* **54**, 112–121 (1986).
- [15] S.D. Poisson, “ Mémoire sur les mouvements simultanés d’un pendule et de l’air environnant,” *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences de l’Institut de France* **XI**, 521-581 (1832).
- [16] C.L.M.H. Navier, “Mémoire sur les lois des mouvements des fluides,” *Mém. Acad. R. Sci. Paris* **6**, 389-416 (1823)

- [17] S.D. Poisson, “ Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides,” *J. Ec. Poly.*, Paris **13**, 139-166 (1832).
- [18] B. Saint-Venant, “ Mémoire sur la dynamique des fluides,” *C. R. Acad. SCl. Paris* **17**, 1240-1242 (1843)
- [19] G.G. Stokes, “ Report to the british association on recent researches in hydrodynamics,” *Math. and Phys. Pap.* **1**, 182-187 (1846) Cambridge University Press.
- [20] J.V. Boussinesq, “Sur la résistance qu'oppose ...,” *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, **100**, 935–937 (1885).
- [21] A.B. Basset, *A Treatise on Hydrodynamics*, Deighton, Bell and Co. (Cambridge, 1888)
- [22] R.G. Hussey and P. Vujacic, “ Damping correction for oscillating cylinder and sphere, ” *Phys. Fluids* **10**, 96-97 (1967)
- [23] R.F. Berg, M.Yao, and C.H.Panzarella, “Hydrodynamic force on a cylinder oscillating at low frequency,” *NASA / CR 2007 - 215050*
- [24] G.H. Keulegan, L.H.Carpenter, “ Forces on Cylinders and Plates in an Oscillating Fluid,” *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **60**, 423–440 (1958).
- [25] T. Sarpkaya, “ Forces on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers,” *J. Fluid Mech.* **165**, 61–71 (1986).
- [26] T. Sarpkaya, “ Coherent structures in oscillatory boundary layers,” *J. Fluid Mech.* **253**, 105–140 (1993).
- [27] T. Sarpkaya, “ Experiments on the stability of sinusdoidal flow over a circular cylinder,” *J. Fluid Mech.* **457**, 157–180 (2002).
- [28] H. Dütsch, F. Durst, S. Becker, and H. Lienhart, “Low-Reynolds number flow around an oscillating circlar cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers,” *J. Fluid Mech.* **360**, 249–271 (1998).
- [29] M. Tatsuno and P.W. Bearman, “A visual study of the flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers and low Stokes numbers,” *J . Fluid Mech.* **211**, 157-182 (1990).
- [30] A.G. Tomboulides and S.A. Orszag, “ Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere,” *J. Fluid Mech.* **46**, 45–73 (2000).
- [31] K. Gumowski, J. Miedzik, S. Goujon-Durand, P. Jenffer, and J.E. Wesfreid, “Transition to a time-dependent state of fluid flow in nthe wake of a sphere,” *Phys. Rev. E* **77**, 055308R (2008).
- [32] Z. Duan, B. He, and Y. Duan, “Sphere drag and heat transfer,” *Sci. Rep.* **5**, 12304 (2015).
- [33] C.W. Oseen, “Über die Stokessche Formel und über die verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik,” *Ark. Mat. Astron. Fys.* **6**, 143–152 (1910).
- [34] C.W. Oseen, “ Über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel,” *Ark. Mat. Astron. Fys.* **9**, 1–15 (1913).
- [35] H. Lamb, “ On the uniform motion of a sphere through a viscous fluid,” *Phil. Mag.* **6**, 112–121 (1911).
- [36] S. Tomotika and T. Aoi, “The steady flow of viscous fluid past a sphere and circular cylinder at small reynolds numbers,” *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.* **3**, 140-161 (1950).
- [37] S. Tomotika and T. Aoi, “ The steady flow of a viscous fluid past an elliptic cylinder and a flat plate at small Reynolds number,” *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.* **6**, 290—212 (1953).

- [38] S. Kaplun, “ Low Reynolds Number Flow Past a Circular Cylinder,” *J. Math. Mech.* **6**, 595-XXX (1957).
- [39] A. Khalili and Bo Liu, “ Stokes’ paradox : creeping flow past a two-dimensional cylinder in an infinite domain,” *J. Fluid Mech.* **817**, 374–387 (2017)
- [40] R.D. Henderson, “ Details of the drag curve near the onset of vortex shedding,” *Phys. Fluids* **7**, 2102–2104 (1995).
- [41] R.K. Finn, “Determination of the drag on a cylinder at low Reynolds number,” *J. Appl. Phys.* **24**, 771-773 (1953).
- [42] D.J. Tritton, “ Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers,” *J. Fluid Mech.* **6**, 547–567 (1959).
- [43] B. Huner and R.G. Hussey, “ Cylinder drag at low Reynolds number,” *Phys. Fluids* **20**, 1211–1218 (1977).
- [44] I. Proudman and J.R.A. Pearson, *J. Fluid Mechanics* **2**,237-262 (1957).
- [45] B.J. Miller, “More realistic treatment of the simple pendulum without difficult mathematics,” *Am. J. Phys.* **42**, 298–303 (1974).
- [46] F.S. Crawford, “Damping of a simple pendulum,” *Am. J. Phys.* **43**, 276–277 (1975).
- [47] L.R. Laird, “On the period of a wire vibrating in a liquid,” *Phys. Rev Series I* **7**, 102-104 (1898).
- [48] H. Martin , “Über der tonhöhe und dampfung der schwingungen von saiten in verschiedene flüssigkeiten,”, *Ann. Phys. Leipzig* **4**, 627-657 (1925).
- [49] D. Bolster, R.E. Hershberger, and R.J. Donnelly, “Oscillating pendulum decay by emission of vortex rongs,”, *Prus. Rev. E* **81**, 046317 (2010).
- [50] J.T. Stuart and L. Woodgate, “Experimental determination of the aerodynamic damping on a vibrating circular cylinder,”, *Phil. Mag.* **46**, 40-46 (1955).
- [51] V.K. Gupta, Gauri Shanker, and N.K. Sharma, “Experiment on fluid drag and viscosity with an oscillating sphere,” *Am. J. Phys.* **54**, 619-622 (1986).
- [52] P.T. Squire, “ Pendulum damping,” *Am. J. Phys.* **54**, 984-991 (1986).
- [53] X.J. Wang, C. Schmitt, and M. Payne, “Oscillations with three damping effects,”, *Eur. J. Phys.* **23**, 155-164 (2002).
- [54] R.M. Digilov, M. Reiner, and Z. Weizman, “Damping in a variable mass on a spring pendulum,” *Am. J. Phys.* **73**, 901-905 (2005).
- [55] M.E. Bacon, and Do Dai Nguyen, “Real-world damping of a physical pendulum,”, *Eur. J. Phys.* **26**, 651-655 (2005).
- [56] C.E. Mungan and T.C. Lipscombe, “Oscillations of a quadratically damped pendulum,” *Eur. J. Phys.* **34**, 1243-1253 (2017).
- [57] G.D. Quiroga, and P.A. Ospina-Henao, “Dynamics of damped oscillations : physical pendulum,” *Eur. J. Phys.* **38**, 065005 (2017).
- [58] P. Mohazzabi and S.P. Shankar, “Damping of a simple pendulum due to drag on its string,” *J. Appl. Math. Phys.* **5**, 122-130 (2017).
- [59] J. Clerk Maxwell, “ On the viscosity or internal friction of air and other gases,” *Philos. Trans. Royal Soc. London* **156**, 249–268 (1866).
- [60] J.A. Bearden, “ A precision determination of the viscosity of air,” *Phys. Rev.* **56**, 1023–1040 (1939).

- [61] K. Kadoya, M. Matsunaga, and A. Nagashima, "Viscosity and thermal conductivity of dry air in the gaseous phase," *J. Phys. Chem. Ref. Data* **14**, 947–970 (1985).
- [62] J. Kestin and J.H. Whitelaw, "The viscosity of dry and humid air," *Int. J. Heat Mass Transfer.* **7**, 1245–1255 (1964).
- [63] E.W. Lemmon and R.T. Jacobsen, "Viscosity and thermal conductivity equations for nitrogen, oxygen, argon and air," *Int. J. Thermophysics*. **25**, 21–69 (2004).
- [64] G.N. Watson, *A Treatise On The Theory Of Bessel Functions*, Cambridge University Press 2nd edition (1966)
- [65] A MODIFIER "Unsteady Boundary Layers," Chapitre VII du livre "Laminar Boundary Layers," edited by L. Rosenhead, Oxford University Press (1963).
- [66] M. Stephens, P. Saulson, and J. Kovalik, "A double pendulum vibration isolation system for a laser interferometric gravitational wave antenna," *Rev. Scientif. Instrum.* **62**, 924 (1991).
- [67] C. Zener, "Internal friction in solids. I. Theory of internal friction in reeds," *Phys. Rev.* **52**, 230–235 (1937).
- [68] C. Zener, "Internal friction in solids. II. General theory of thermoelastic internal friction," *Phys. Rev.* **53**, 90–99 (1938).
- [69] P.R. Saulson, "Thermal noise in mechanical experiments," *Phys. Rev. D* **42**, 2437–2445 (1990).
- [70] G. Cagnoli, L. Gammaitoni, J. Kovalik, F. Marchesoni, and M. Punturo, "Low-frequency internal friction in clamped-free thin wires," *Phys. Lett. A* **255**, 230—235 (1999).

# Conclusion

Cette thèse a commencé en 2006 : j'ai effectué ce travail de recherche en étant professeur agrégé au lycée de Revel, sans aucune décharge de service. Cette circonstance explique la durée tout à fait inhabituelle de ma thèse. Cela a eu plusieurs conséquences. Tout d'abord, l'objectif initial s'est quelque peu éloigné au fil des évolutions normales liées à la vie d'un laboratoire. Cependant, les thèmes développés restent tout à fait applicables à de nouvelles expériences. Les premiers pas m'ont permis de définir une stratégie globale pour lutter contre le bruit de vibration dans les interféromètres atomiques et les premières construction de sismomètres simples, complétées par des simulations numériques, ont montré que le gain apporté par cette stratégie, en terme de contraste de franges d'interférences et donc de sensibilité de mesure, pouvait être très important. Les axes de recherche se sont alors orientés vers :

- la mise au point d'une isolation passive (pendule), la plus simple et la plus efficace possible
- le choix d'une technologie permettant de construire des sismomètres «sur mesure» : sensibles, compacts et compatibles avec l'ultra-vide.

Je me suis alors confronté aux différentes solutions envisageables et pu me rendre compte de certaines difficultés, parfois simplement d'ordre mécanique ou électronique. Le choix final s'est porté sur une sismomètre interférentiel qui ne nécessite pas d'asservissement interne en plus de l'asservissement prévu pour l'interféromètre atomique lui-même.

J'ai rapidement été convaincu de l'importance de connaître parfaitement le mouvement de la partie mobile du sismomètre et qui supporte le coin de cube. Après avoir complété la théorie existante, j'ai entrepris de confronter mes résultats à des mesures, grâce à un pendule à lame élastique construit à cet effet. Pour cela, j'ai développé deux capteurs, de position et de vitesse, très sensibles. J'ai tenu à avoir des résultats les plus complets possibles, concernant en particulier l'amortissement des oscillations de ce pendule car plusieurs observations m'ont interpellé :

- la présence de deux pics de résonance sur la valeur de  $1/Q$ , tout à fait explicables mais assez inattendus : il s'agit d'un couplage entre le pendule et les résonances de la table sur laquelle il était posé. Cela m'a amené à réaliser un apport théorique sur les oscillateurs couplés en présence d'amortissement, ce qui m'a permis de dégager deux régimes de fonctionnement séparés par un point exceptionnel.
- l'amortissement lié à l'air, dont la formulation assez classique et couramment reprise, ne semblait pas toujours parfaitement justifiée. J'ai donc entrepris de confronter la théorie de Stokes concernant le frottement visqueux à deux séries d'expériences en réutilisant le capteur de position développé précédemment. J'ai pu étudier ainsi l'amortissement d'un ensemble de pendules formés de sphères et de cylindres suspendus. Curieusement, ces expériences, assez simples, n'avaient à ma connaissance jamais été réalisées dans ces conditions. Les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants pour les sphères et ceux pour les cylindres sont assez cohérents mais mériteraient un approfondissement car ces mesures donnent une force de frottement inférieure à ce que prédit la théorie de Stokes.

Les apports théoriques sur le pendule à lame élastique permettront de choisir au mieux le

matériau et les dimensions de la lamelle qui servira à construire le pendule portant le coin de cube mobile, en fonction du cahier des charges des sismomètres, et d'obtenir ainsi un appareil performant. Il conviendra aussi de compléter cette étude par la compréhension fine des effets de polarisation à l'intérieur de l'interféromètre de Michelson et la mise au point d'un protocole systématique permettant une optimisation des signaux. Dans ces conditions, il est tout à fait envisageable d'espérer une sensibilité de l'ordre de  $10^{-13} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$  à une fréquence d'oscillation de 1 Hz. L'étape suivante, importante elle aussi, sera de rendre le montage le plus compact possible. En effet, s'il s'agit de mesurer, puis d'asservir, deux mouvements horizontaux (le mouvement pendulaire et le mouvement de rotation), deux sismomètres sont nécessaires. Leur encombrement doit donc être le plus réduit possible. Pour contrôler d'autres mouvements propres, il faut développer une autre structure de pendule, mais les principes généraux exposés ici restent bien sûr valables. Enfin, il reste la partie électronique de l'asservissement qui, même si elle a été fonctionnelle sur un premier développement, nécessite aussi une optimisation.

Un autre axe de développement, tout aussi important à mon sens, est l'approfondissement de l'étude de l'amortissement du mouvement oscillant du cylindre. Le calcul de Stokes ne fait aucune autre approximation que de négliger le terme d'entrainement lorsque  $Re \ll 1$  et il est donc très étonnant que ces mesures trouvent une force de frottement plus faible que celle calculée par Stokes. Il serait donc intéressant de refaire une série d'expériences avec un seul pendule formé d'un cylindre, en faisant varier la densité du gaz ce qui permet de faire varier la profondeur de pénétration visqueuse  $\delta$  comme cela a été fait par Stuart et Woodgate. Ainsi il serait possible de séparer l'effet des forces de friction sur l'air des autres causes d'amortissement dont l'importance semble fluctuer d'un pendule à l'autre.

Durant ma thèse, j'ai obtenu quelques résultats originaux sur le pendule et sur son amortissement : même si ces résultats sont d'une importance modeste, je suis le premier étonné d'avoir apporté des contributions nouvelles dans un domaine de recherche, le pendule, étudié par Galilée il y a environ 400 ans, et dans un autre domaine, les forces de friction sur un fluide visqueux, étudié par Stokes il y a 167 ans !

The main theme of my thesis is atomic interferometry and in particular the reduction of the phase noise induced by vibrations. Atomic interferometers are good devices to achieve accurate and fundamental measuring. The sensibility of these devices is related to the flying time of the atoms inside the apparatus. At Toulouse, our interferometer worked with atoms at thermal velocity and to increase the sensibility we wanted slower atoms. However, this will at the same time increase the effect of vibrations, which result in a larger phase noise and a jamming of the fringes. In order to reduce this effect, I've put the core of the interferometer on a 3 wires pendulum. A pendulum attenuates the vibrations of frequencies much higher than its resonant frequencies but amplifies those with frequencies close to its resonances.

To avoid this phenomenon, we have to enslave the pendulum on the signal given by seismometers. With a first realisation, I was able to stabilize 2 horizontal movements with 2 low sensibility seismometers. To increase the performances, I needed high sensibility seismometer and the possibility to operate under ultra vacuum. I've made a displacement sensor based on the Michelson interferometer with cube corners, following the works of Zumberge's team. By choosing cleverly the polarisation of the laser beam, we can detect 2 signals in quadrature and the sensibility achieved is better than  $4 \times 10^{-13} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$  at 1 Hz. The next step was to migrate this seismometer in ultra vacuum but the retirement of the interferometer using slow down lithium atoms at the benefit of an atomic fountain of rubidium stopped this project.

However, this work on the seismometer led me to think about elastic blade pendulums, widely used in such sensors. I've complete the theory, showing the presence of 2 resonance frequencies and, as a test, I've build a such pendulum, for which I've measured the characteristics with some position and velocity sensors I've developped for this purpose. I was able to measure precisely the damping of the oscillations of the pendulum and study more precisely the different origins of the damping. Two of them have given some additional work :

a)the coupling with the resonances of the frame which support the pendulum may have an effect on the quality factor of the pendulum. I've completed the theory about damped coupled oscillators and showed two operating modes, very different, and separated by an exceptional point.

b)air friction in the Stokes regime are often raised to explain a force proportional to the velocity. However the experiments done with pendulum are almost never done with a low Reynolds number. We've made such experiments with pendulums constituted with a sphere or a cylinder of various diameters and suspended by a thin wire or a lamella. This is a precise test for the calculations made by Stokes in 1851. The experimental results are in very good accordance for the pendulums with a sphere but the measurements with a cylinder show a force always smaller than the predictions.

Le thème central de la thèse est l'interférométrie atomique et la réduction du bruit de phase lié aux vibrations de l'environnement. Les interféromètres atomiques sont des instruments pouvant permettre des mesures fondamentales de grande précision et cette précision est fortement liée à la vitesse des atomes. L'interféromètre qui était utilisé à Toulouse travaillait alors avec des atomes de lithium aux énergies thermiques et le projet était de pouvoir utiliser des atomes fortement ralentis. Les vibrations du sol (bruit sismique) deviennent alors un inconvénient majeur et il est indispensable de s'en affranchir le plus possible.

La première partie du travail fut de prévoir une isolation vis à vis du bruit sismique. Un premier filtre est réalisé en plaçant l'ensemble de la manipulation sur un pendule suspendu par 3 fils. Celui ci atténue les vibrations de fréquence supérieure à sa fréquence propre mais amplifie celles de fréquences voisines de celle-ci. Il faut donc un pendule asservi et cela implique un sismomètre sensible pouvant fonctionner sous ultravide. Nous avons développé une stabilisation des mouvements horizontaux en nous appuyant tout d'abord sur des sismomètres simples mais peu sensibles, puis nous avons cherché à améliorer les performances en réalisant un capteur de déplacement basé sur un interféromètre de Michelson à coins de cube. Nous avons suivi en cela les travaux de l'équipe de M.Zumberge qui utilise une détection de deux signaux en quadrature ce qui permet une mesure de déplacement avec une sensibilité meilleure que  $4.10^{-13}$  m/ $\sqrt{\text{Hz}}$  à 1 Hz et entrepris d'adapter cette technologie à un fonctionnement sous ultravide. Mais les difficultés rencontrées et l'abandon de l'interféromètre tel qu'il était pour en développer un nouveau ne nous ont pas permis d'atteindre complètement notre but et de pouvoir tester le sismomètre in-situ.

Cependant, la mise au point et l'optimisation du sismomètre nous a amené à nous pencher sur la théorie des pendules à lame élastique, lesquels sont largement utilisés dans ce genre de capteurs. Il nous est apparu que cette théorie était très incomplète et nous avons entrepris une étude plus systématique de tels pendules ce qui a donné lieu à une publication et fait l'objet de la seconde partie de la thèse.

Un paramètre important d'un pendule est son amortissement et nous avons étudié et comparé d'un point de vue théorique et expérimental les différentes causes de celui ci.

Les expériences réalisées nous ont poussés à nous intéresser aux frottements sur l'air dans le régime de Stokes. Comme nous n'avons trouvé aucune publication concernant une expérience utilisant un pendule oscillant aux faibles nombres de Reynolds, nous avons décidé de réaliser de telles expériences sur des sphères et sur des cylindres de différents diamètres, ce qui conclut ce travail de thèse.