

Table des matières

Introduction	1
I Avant-propos	3
1 Contexte scientifique et industriel	5
1.1 Le cadre industriel	5
1.1.1 Présentation de la société Axess Europe	6
1.1.2 Un projet de R&D précurseur : FAST	6
1.2 Cahier des charges à respecter	7
1.2.1 Besoins utilisateur	8
1.2.2 Contraintes liées au canal	8
1.3 Orientations de la thèse	10
2 Algèbre et télécommunications : rappels théoriques	13
2.1 Modulations linéaires	13
2.1.1 Notions élémentaires	13
2.1.2 L'espace signal	16
2.1.3 PSK, MOS, OFDM, trois modulations linéaires	18
2.2 Le problème du PAPR	24
2.2.1 Description du phénomène	24
2.2.2 Résultats importants sur le PAPR	27
II Des formes d'ondes sur mesure pour communiquer : TDCS	31
3 Présentation du système TDCS	33
3.1 État de l'art	33
3.1.1 D'une curiosité théorique à un problème d'actualité	33
3.1.2 TDCS, encore <i>terra incognita</i>	35
3.2 Modèle du système	36
3.2.1 Émetteur TDCS	36
3.2.2 Récepteur TDCS	41
3.2.3 Mise en perspective du système TDCS	44

4	Études des performances de TDCS	47
4.1	TDCS à travers le prisme des modulations linéaires	48
4.1.1	Les effets de la dimensionnalité sur l'efficacité spectrale	48
4.1.2	Représentation de la modulation CSK	48
4.1.3	De la nécessité d'utiliser toutes les dimensions possibles	49
4.2	Performances de TDCS en simulation	49
4.2.1	Paramètres de simulation	49
4.2.2	Modulation PSK	49
4.2.3	Modulation CSK	50
4.3	Améliorer l'efficacité spectrale des systèmes TDCS	52
4.3.1	Modulation bi-orthogonale	52
4.3.2	Utilisation combinée de PSK et CSK	53
4.3.3	Modulation multidimensionnelle à haute densité	55
4.3.4	Génération de symboles purement orthogonaux	64
4.4	Conclusions et perspectives	68
III	Accroître l'efficacité en puissance en réduisant le PAPR	69
5	La théorie ensembliste	71
5.1	Notions et principes de la théorie ensembliste	71
5.1.1	L'espace solution	72
5.1.2	Les ensembles-contrainte	73
5.1.3	Opérateurs ensemblistes	73
5.2	Algorithmes fondamentaux	74
5.2.1	Notions de convergence	75
5.2.2	Algorithmes séries	75
5.2.3	Algorithmes parallèles	77
5.2.4	Algorithme de Douglas-Rachford	77
5.2.5	Algorithme « Reflection Onto Convex Sets »	78
5.3	Quand un formalisme en cache un autre	79
6	STE au service de la réduction du PAPR	81
6.1	Application du formalisme ensembliste	81
6.1.1	Espace considéré	82
6.1.2	Ensembles-contrainte	82
6.1.3	Opérations ensemblistes	83
6.1.4	Existence de solutions	84
6.1.5	Choix de l'algorithme	85
6.1.6	Conséquences de l'absence de convexité	85
6.1.7	Mise en œuvre d'un algorithme STE de réduction du PAPR	86
6.2	Résultats de simulation	87
6.2.1	Paramètres de simulation	87
6.2.2	Performances des algorithmes avec un spectre contigu	87
6.2.3	Performances des algorithmes avec un spectre non contigu	92
6.3	Conclusions et perspectives	94

TABLE DES MATIÈRES

Conclusions et perspectives	97
Bibliographie	111
Publications	113
Glossaire	115
Notations	117
Annexes	119

Introduction

En l'espace de quelques années, les systèmes de télécommunication sans fils sont devenues omniprésents et ont bouleversé notre vie quotidienne. En sus des téléphones portables qui équipent plus de 85 % de la population française [CRÉD 10], nous nous entourons d'une pléthore de systèmes communicants, tels les points d'accès Wifi, les systèmes d'alarmes sans fils, les imprimantes bluetooth, les réseaux de capteurs, les navigateurs GPS, *et caetera*. Cette explosion des services sans fils provoque des interférences croissantes affectant la qualité des transmissions. Ainsi, malgré l'ouverture de nouvelles bandes de fréquences – le dividende numérique –, la question de l'accès concurrent au médium est plus que jamais d'actualité.

De nombreuses techniques d'accès multiple ont été élaborées ces dernières décennies pour mieux partager l'accès au médium de communication. Ont succédé aux méthodes de multiplexage en temps, et en fréquence (avec des bandes de garde), les techniques d'accès multiple par code CDMA et d'accès multiple en fréquences orthogonales OFDMA. Ces dernières constituent aujourd'hui les pierres angulaires des dernières générations de téléphonie mobile 3G et 4G. Toutefois, même ces techniques suivent des schémas d'allocation cycliques, sinon fixes durant la transmission, et n'empêchent pas la survenue d'interférences – notamment au cours de la phase d'établissement de la connexion. De plus, une grande majorité du spectre est scindée en des sous-bandes allouées à des opérateurs uniques. Ainsi, certaines bandes sont inaccessibles, bien que libres, alors que d'autres sont ouvertes, mais surchargées. En un mot, le spectre est sous-utilisé [FCC 02, Stap 04].

Pour contrer ce phénomène, deux nouveaux paradigmes ont émergé durant cette dernière décennie : la radio à *bande ultra large* (ou, *Ultra Wide Band*, UWB), et la *radio cognitive*. Le principe de l'UWB repose sur la coexistence de tous les utilisateurs à travers des communications à très basse densité de puissance sur de très larges bandes. Le concept, simple, n'a pas encore été largement adopté à cause de la portée limitée des transmissions. La radio cognitive, elle, se base sur la connaissance de l'environnement du système communicant. Des techniques d'estimation du spectre et de coopération avec les systèmes voisins ont ainsi été mises au point dans le but d'éviter toute sous-utilisation du spectre [Cabr 06]. Il s'agit de concevoir des formes d'ondes *sur mesure*, de telle sorte que le système soit capable de s'adapter au spectre environnant ; cela constitue la problématique de cette thèse.

Pour générer des formes d'ondes *ad hoc* aptes à communiquer, le système de transmission choisi est *Transform Domain Communication System* (TDCS) ; ce dernier est issu du monde de la radio cognitive et a été étudié pendant de nombreuses années par l'Air Force

Institute of Technology (AFIT). Leurs recherches ont contribué à la promotion du système TDCS et ont entrouvert des perspectives intéressantes que nous avons décidé d'explorer. Nos travaux se sont structurés autour de deux axes principaux : l'étude et l'amélioration de l'efficacité spectrale, d'une part, et de l'efficacité énergétique du système, d'autre part.

Ce manuscrit comporte trois parties principales. La première partie présente d'abord le contexte scientifique et industriel de la thèse qui a abouti au choix de la problématique et du système d'étude TDCS. Dans un second temps, des notions importantes en télécommunication sont rappelées, tel le problème du *Peak-to-Average Power Ratio* (PAPR). S'appuyant sur des concepts algébriques, ce second chapitre introduit aussi le formalisme des modulations linéaires. Une notion y est notamment réactualisée : celle de la dimensionnalité. C'est cette approche algébrique qui a permis de mettre en lumière de nouveaux résultats tout au long de cette thèse.

Avec le chapitre 3, la deuxième partie entre dans les détails techniques du système TDCS. Ses fondements et principales modulations sont décrits, ainsi que les divergences et points communs existants avec d'autres systèmes plus répandus. Ce chapitre met aussi en exergue les interrogations subsistantes quant aux performances que le système peut atteindre. À travers l'étude de l'efficacité spectrale du système, le chapitre 4 répond pour la première fois à ces interrogations à l'aide du formalisme des modulations linéaires ; la notion de dimensionnalité y prend alors toute son importance et permet la proposition de règles de conception améliorant conjointement l'efficacité spectrale et le taux d'erreur binaire du système.

Dans ce même chapitre, de nouvelles modulations sont proposées pour accroître davantage l'efficacité spectrale des systèmes TDCS classiques. L'éventail de solutions proposées va du simple emploi des antipodes des modulations classiques à des techniques plus complexes, telles que la modulation multidimensionnelle à haute densité. L'expression analytique du taux d'erreur binaire de cette modulation y est développée, et validée dans un second temps par de nombreuses simulations.

La dernière partie de ce manuscrit, elle, est dédiée à l'amélioration de l'efficacité énergétique du système. Les signaux TDCS étant faits de plusieurs composantes sinusoïdales, le système doit prévoir des marges de transmission importantes afin de ne pas saturer les amplificateurs des circuits émetteur. Ainsi, dans le but d'améliorer l'efficacité énergétique du système, l'approche choisie se concentre sur la réduction du rapport puissance crête sur puissance moyenne (PAPR). Pour ce faire, le chapitre 5 présente un autre formalisme algébrique : celui de l'estimation ensembliste. Ce formalisme fixe un cadre de travail pour les problèmes dits *de faisabilité*, et offre un large panel d'algorithmes pour la résolution de ces problèmes. Déjà utilisé dans de nombreux domaines, ce formalisme n'a été que peu appliqué au problème de réduction du PAPR dans TDCS.

Le sixième et dernier chapitre propose par conséquent une application rigoureuse de l'estimation ensembliste à ce problème : y sont soulignées les conditions d'existence de solutions, de même que les caractéristiques de convergence du problème ; et les algorithmes *de Douglas-Rachford* et *Reflection Onto Convex Sets*, tous deux issus du formalisme ensembliste, sont appliqués. De nombreuses simulations sont menées et mettent en relief le gain significatif que ces algorithmes peuvent apporter, tant en termes de rapidité de convergence qu'en termes d'importance de la réduction.

Première partie

Avant-propos

Contexte scientifique et industriel

Sommaire

1.1	Le cadre industriel	5
1.1.1	Présentation de la société Axess Europe	6
1.1.2	Un projet de R&D précurseur : FAST	6
1.2	Cahier des charges à respecter	7
1.2.1	Besoins utilisateur	8
1.2.2	Contraintes liées au canal	8
1.3	Orientations de la thèse	10

1.1 Le cadre industriel

Initiée en décembre 2008, cette thèse CIFRE a bénéficié du soutien de la société Axess Europe S.A.S sur un plan tant financier que technique, avec notamment l’encadrement du docteur Ahmed Zoubir.

Sur un plan académique, c’est d’abord le LATTIS (Laboratoire Toulousain de Technologie et d’Ingénierie des Systèmes), puis le LAAS en janvier 2011 (Laboratoire d’Analyse et d’Architecture des Systèmes), qui a hébergé cette thèse, avec l’encadrement constant des professeurs Danièle Fournier-Prunaret (INSA Toulouse) et Pascal Chargé (INSA Toulouse, puis Polytech Nantes).

Cet encadrement bicéphale a permis d’aborder des pistes de recherche très théoriques, tout en gardant une perspective applicative forte, ce qui a rendu possible la résolution de problèmes techniques précis à l’aide de notions et d’algorithmes issus de l’algèbre linéaire.

Avant d’entrer dans les détails scientifiques de ces travaux, la section suivante présentera la société ainsi que son principal projet de recherche et développement (R&D), composantes intégrantes du contexte scientifique de cette thèse.

1.1.1 Présentation de la société Axess Europe



Créée en 1999, Axess Europe S.A. est une entreprise spécialisée dans les infrastructures techniques pour les applications (*Application Service Provider*) du secteur financier.

Experte dans les marchés de niche, l'entreprise a décidé de tirer parti du savoir-faire acquis dans son métier de base pour développer un service d'accès IP haut débit à faible coût pour l'aviation de ligne et d'affaires. Une filiale toulousaine a ainsi été fondée pour mener les activités de recherche et développement du groupe : Axess Europe S.A.S, qui finance cette thèse CIFRE.

L'entreprise emploie actuellement, à temps plein, dix-huit personnes dont le domaine de compétences s'étend de la conception et la caractérisation d'un élément rayonnant, à la conception et à l'implémentation de codes correcteurs d'erreurs. Le bureau d'étude bénéficie aussi d'une expertise forte dans la conception de circuits intégrés radio-fréquence (RF) et dans les algorithmes de formation de voies, indispensables à leur contrôle.

Possédant une connaissance complète de tous les domaines-clefs d'un système de télécommunication, Axess Europe est à même de développer un produit de pointe, et dresse ainsi des barrières technologiques fortes pour restreindre l'accès au marché à tout concurrent potentiel. Le premier équipement de télécommunication conçu par la société s'élabore à travers un projet collaboratif, FAST, que nous introduisons ci-après.

1.1.2 Un projet de R&D précurseur : FAST

Présentation du projet. Le projet d'antenne aéroportée FAST (Fiber-like Aircraft SaTellite communications) a pour but de fournir à l'aviation de ligne et d'affaires un accès haut-débit à faible coût. Ce projet est mené par un consortium composé de partenaires académiques et industriels de haut rang, tels qu'Astrium, le LAAS, ou encore Télécom Bretagne. À la direction de ce projet, Axess Europe catalyse le savoir-faire et l'expertise de chacun pour établir un écosystème complet.

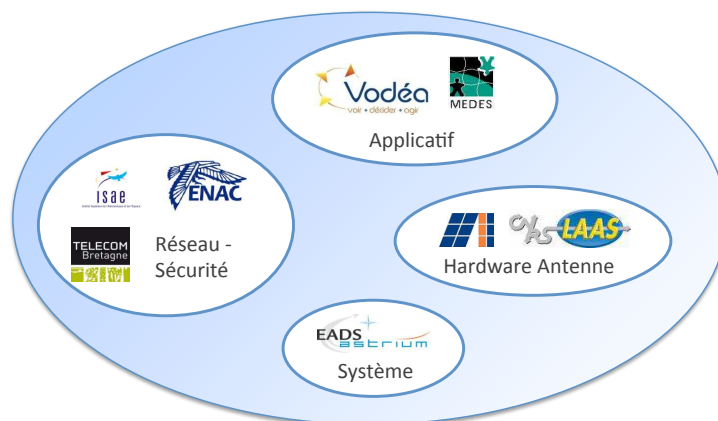


FIGURE 1.1 L'écosystème du projet FAST

L'innovation du projet FAST porte principalement sur l'antenne assurant la liaison satellite aéronautique. Composée de plusieurs centaines d'éléments rayonnants formant

1.2 Cahier des charges à respecter

un réseau d'antennes, celle-ci bénéficie d'une hauteur extrêmement faible (fig. 1.2), ce qui présente plusieurs avantages : d'une part, la traînée aéronautique est réduite – limitant ainsi la surconsommation en kérosène –, d'autre part, elle est capable de diriger un faisceau extrêmement concentré en direction du satellite utile, et de le suivre quelle que soit la position et l'orientation de l'avion. De plus, grâce à son fort gain, une transmission haut-débit est désormais accessible. Enfin, dépourvue de tout élément mobile, cette antenne à pointage électronique s'avère particulièrement robuste, critère essentiel dans l'environnement exigeant qu'est le milieu aéronautique.

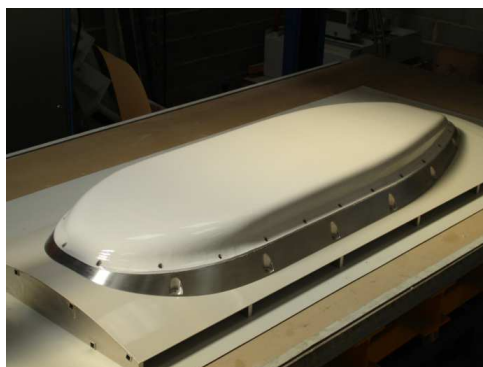


FIGURE 1.2 Un premier prototype d'antenne sous radôme

Un projet, plusieurs applications. Une solution de communication aéroportée par satellite ouvre nécessairement la porte à une grande variété d'applications, telles que :

- un accès internet haut-débit pour les passagers ;
- une connexion servant de support à des plateformes médicales aéroportées ;
- un accès fiable et sécurisé pour des communications militaires et gouvernementales.

Parmi ces trois types d'applications, les deux dernières imposent une communication particulièrement robuste aux imperfections du canal et suggèrent aussi un impératif de discrétion. C'est sur ces aspects-là que la société Axess Europe a voulu orienter mon travail de thèse.

Ainsi, sans avoir l'ambition de réaliser un système de communication complet, l'objectif de la thèse était de proposer des choix de modulation et de forme d'onde à même de satisfaire aux exigences requises, détaillées dans le cahier des charges ci-après.

1.2 Cahier des charges à respecter

Les spécifications qu'un système de communication doit assurer sont essentiellement dictées par deux contraintes fortes : les desiderata de l'utilisateur et le canal de transmission. Dans cette section, nous proposons d'introduire ces contraintes et les critères de conception qu'ils impliquent sur le choix de la forme d'onde et de la modulation.

1.2.1 Besoins utilisateur

Adaptation aux interférences. Que ce soit pour des systèmes commerciaux subissant la concurrence spectrale d'autres utilisateurs, ou pour des communications militaires cibles de brouilleurs, nombreuses sont les situations où l'évitement dynamique d'interférences est intéressant.

Le paradigme de la *radio cognitive* [Mito 00], basé sur la conscience de l'environnement de l'émetteur et capable d'adapter en permanence les paramètres de la transmission, correspond tout à fait à ce besoin. C'est un élément important qui a fortement influencé l'orientation de ces travaux de thèse, avec notamment l'étude du système de communication *Transform Domain Communication System* (TDCS).

Discrétion. Pour des raisons à la fois commerciales et techniques, les transmissions par satellite sont émises sur de larges étendues ; elles sont dites *broadcast*. Ainsi, quiconque doté d'un équipement commercial supportant les normes DVB-S ou DVB-S2 peut détecter et intercepter une grande variété de signaux.

Il en résulte une contrainte forte pour le système de transmission à concevoir : celui-ci doit éviter les modulations mono et multiporteuses standard pour s'assurer une certaine discrétion.

Un débit binaire variable. Pour les applications détaillées dans la section précédente, le débit utile que doit supporter le système de communication peut aller de quelques kilo-octets à plusieurs méga-octets par seconde.

Le système de communication considéré doit ainsi proposer une forme de *modulation adaptative* pour proposer une efficacité spectrale variable selon la qualité du canal, le débit nécessaire, et la robustesse de la transmission souhaitée.

1.2.2 Contraintes liées au canal

Par *canal de transmission*, nous entendons ici l'ensemble de la chaîne de transmission, comprenant :

- les circuits électroniques émetteur ;
- le canal de propagation sol-satellite ;
- le transpondeur satellite servant de relai ;
- le canal de propagation satellite-avion ;
- l'électronique embarquée dans l'aéronef pour la réception.

Chacun de ces éléments introduit des distorsions sur le signal qu'il est indispensable de prendre en compte au cours de la conception du système. Le schéma 1.3 présente le lien considéré et les différentes sources de distorsions et d'atténuations. Nous les introduisons ci-après, et renvoyons pour leur étude approfondie à l'ouvrage *Satellite Communications Systems* de G. Maral [Mara 09].

1.2 Cahier des charges à respecter

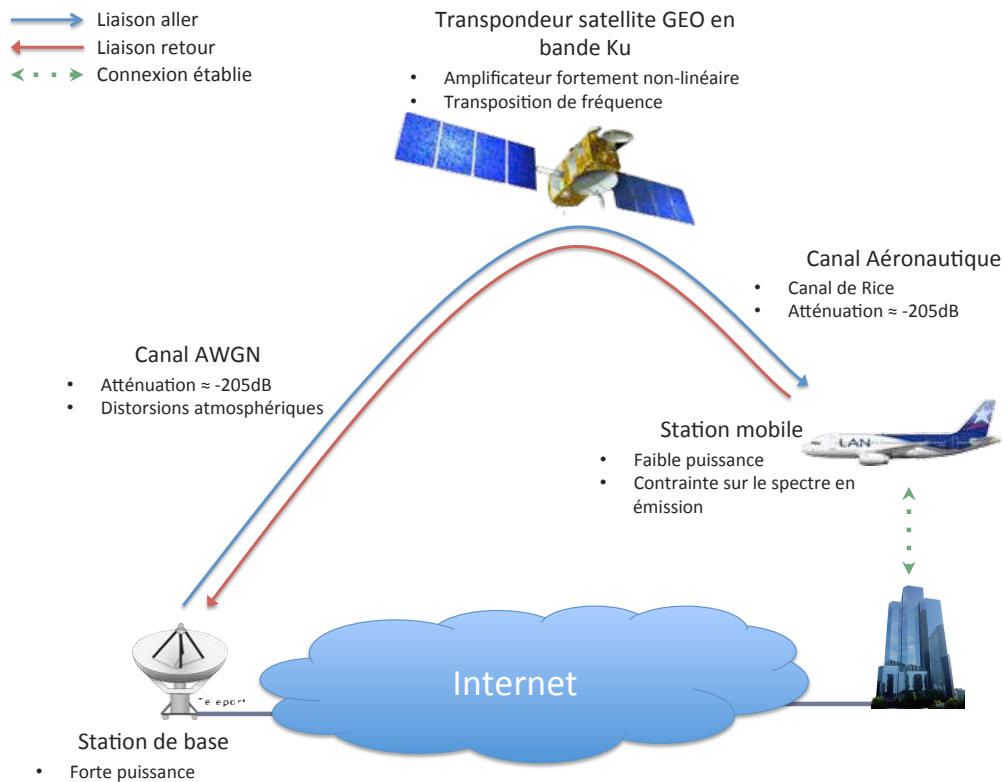


FIGURE 1.3 Le lien satellite et les sources d'altération de son signal

Lien sol-satellite. Ce canal est modélisé par un canal à bruit blanc additif Gaussien (ou *Additive White Gaussian Noise*, AWGN). Le rapport signal-bruit (ou *Signal-to-Noise Ratio*, SNR) du lien dépend alors notamment des pertes dans l'espace libre, et de la luminosité terrestre et céleste, liées à la fréquence de la transmission. D'autres facteurs peuvent affecter la qualité du signal et aussi provoquer des atténuations éphémères, des pertes de polarisation, ou des retards de phase. La pluie, la neige, la scintillation, ou d'importants événements ionosphériques sont alors en cause.

Parmi ces facteurs, il en est deux qu'il faut prioritairement prendre en compte : les fortes pertes dans le vide (de l'ordre de -205 dB en bande Ku pour un satellite géostationnaire), et les rapides distorsions additionnelles dues à l'environnement. Ces deux facteurs nécessitent donc la considération de modulations dites *efficaces en puissance* (ou *à bonne efficacité énergétique*), aptes à transmettre à des rapports signal-bruit très faibles, mais aussi à la prise en compte de modulations adaptatives, ajustant le débit selon les conditions du canal.

Lien avion-satellite. Dans la plus grande majorité des vols, les avions naviguent au dessus des nuages, évitant ainsi une grande partie des perturbations atmosphériques. Toutefois, la taille réduite de l'antenne aéroportée implique nécessairement des lobes secondaires plus importants que ceux de la station de base. De plus, du fait de la vitesse de l'avion, le spectre est altéré par l'effet Doppler, consistant à la fois en un décalage et un étalement spectral (respectivement *doppler shift* et *doppler spread*).

La présence de lobes secondaires significatifs rend l'antenne sensible à un phénomène de multitrajet léger, causé notamment par les réflexions dans les couches atmosphériques ou par des éléments de l'avion (ailes, empennages). Cela se traduit par une modélisation du lien satellite-avion par le modèle de Rice à fort coefficient K , comme l'indiquent les études [Holz 98, Haas 02] menées par l'institut aéronautique et spatial allemand DLR (*Deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt*).

Comme cela été montré dans [Holz 98] et approfondi au cours d'études préliminaires [Fuma 09b], le fort coefficient de Rice implique un canal fortement similaire au canal AWGN. De plus le décalage spectral est facilement compensable à l'émission ou à la réception, tandis que l'étalement spectral est lui très limité dans le cas d'une antenne fortement directionnelle (selon des études menées au début de cette thèse [Fuma 09a]). C'est pourquoi, le canal de transmission sera aussi considéré AWGN sur cette portion de liaison, et aucune disposition supplémentaire n'est à envisager.

Les circuits électroniques. Un élément majeur des communications spatiales réside dans l'électronique du transpondeur satellite : ceux-ci sont fréquemment équipés de puissants amplificateurs tels que les tubes à ondes progressives (ou *Traveling-Wave-Tube Amplifier*, TWTA). Or, passé un certain seuil, ceux-ci suivent un comportement fortement non linéaire. Pour éviter les dégradations que ces circuits pourraient induire sur le signal, il est indispensable de réduire la puissance du signal à l'émission pour que le seuil ne soit jamais dépassé. Ces marges de transmission, appelées *Input Back-Off* (IBO), réduisent la puissance moyenne de la transmission et affectent sérieusement le rapport signal-bruit final. On parle alors d'*Output Back-Off* (OBO).

Ces nécessaires marges de puissance nuisent alors fortement à l'*efficacité énergétique* du système. Il est ainsi indispensable de produire des signaux dont la dynamique en amplitude soit restreinte. Ce phénomène est abordé plus en détails dans la section 2.2 ; c'est le problème du *Peak to Average Power Ratio*, du nom d'une métrique qui le quantifie.

1.3 Orientations de la thèse

Suite à l'étude du canal de propagation aéronautique, dont les résultats ont fait l'objet d'un rapport interne [Fuma 09a], et dans le but de répondre au cahier des charges défini dans la section précédente, ce travail de thèse a suivi les orientations suivantes :

Étude du système TDCS. Précédemment évoqué, ce système est peu connu, et a nécessité un travail de bibliographie important. Comme cela sera expliqué dans le chapitre 3, nos efforts se sont alors portés sur l'étude de l'efficacité spectrale atteignable, dont l'étude se trouve dans les sections 4.1 et 4.2.

Amélioration de l'efficacité spectrale. Suite aux conclusions des études précédentes, des améliorations portant sur l'efficacité spectrale ont été proposées. Celles-ci sont présentées dans la section 4.3.

1.3 Orientations de la thèse

Amélioration de l'efficacité énergétique. Comme la section 1.2 l'a mentionné, il est nécessaire de s'assurer que le signal modulé ait une dynamique en amplitude la plus faible possible. Des algorithmes ont été ainsi étudiés dans le chapitre 5, puis employés dans ce but dans le dernier chapitre.

Avant d'entrer dans le détail de chacune de ces études, nous consacrerons le chapitre suivant au rappel de notions et résultats importants en algèbre linéaire et en télécommunication.

Algèbre et télécommunications : rappels théoriques

Ce chapitre a pour objet la définition de notions importantes en télécommunication et en algèbre linéaire. Celles-ci seront utilisées tout au long de ce manuscrit, et le lecteur est invité à s'y référer s'il en ressent le besoin. Trois ouvrages ont principalement été utilisés dans la rédaction de cette partie : *Digital Communications* de J. G. Proakis [Proa 07], *Digital Communications : a discrete-time approach* de M. Rice [Rice 08], et *Peak power control in multicarrier communications* de S. Litsyn [Lits 07].

Sommaire

2.1	Modulations linéaires	13
2.1.1	Notions élémentaires	13
2.1.2	L'espace signal	16
2.1.3	PSK, MOS, OFDM, trois modulations linéaires	18
2.2	Le problème du PAPR	24
2.2.1	Description du phénomène	24
2.2.2	Résultats importants sur le PAPR	27

2.1 Modulations linéaires

2.1.1 Notions élémentaires

De part les nombreuses passerelles entre le monde des télécommunications et celui de l'algèbre linéaire, plusieurs des notions qui vont être introduites ont deux définitions, souvent semblables. Dans ce qui suit,

- considérons l'espace vectoriel $\Xi_c = \mathcal{L}^2([0, T])$ dans lesquels les signaux continus à valeur réelle et de support $0 \leq t \leq T$ seront représentés ;
- soit $\Omega \subset \Xi_c$ avec $\Omega = \{\omega_0(t), \omega_1(t), \dots, \omega_{N-1}(t)\}$, un ensemble de N signaux à valeurs réelles ;

- posons de plus $S = \{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m, \dots, \mathbf{s}_{M-1}\}$, un ensemble de M vecteurs dans \mathbb{R}^N , avec $\mathbf{s}_m = (\alpha_{m,n})$, où $m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$ et $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, intervalles d'entiers ;
- nous appelleront « forme d'onde » tout signal modulé.

• **Famille libre.** La famille Ω est dite *libre* si pour tout $b_n \in \mathbb{R}$ l'équation (2.1) est satisfaite. Dans le cas contraire, la famille est dite *liée*.

$$\sum_{n=0}^{N-1} b_n \omega_n(t) = 0 \Leftrightarrow b_n = 0, \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \quad (2.1)$$

• **Famille génératrice.** Soit l'ensemble $\text{Vect}(\Omega)$ contenant l'ensemble des combinaisons linéaires des signaux de Ω , on dit alors que Ω est une *famille génératrice* du sous-espace vectoriel engendré $\text{Vect}(\Omega)$. Pour tout signal $s_m(t) \in \text{Vect}(\Omega)$, il existe alors des coefficients $\alpha_{m,n} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$s_m(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{m,n} \omega_n(t) \quad (2.2)$$

• **Base.** Une famille libre et génératrice est appelée *base*.

• **Produit scalaire.** Ξ_c et \mathbb{R}^N étant des espaces hilbertiens, il est possible de définir le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour tout $\omega_i(t), \omega_j(t) \in \Omega$ par l'équation (2.3) :

$$\langle \omega_i(t), \omega_j(t) \rangle = \int_0^T \omega_i(t) \omega_j(t) dt . \quad (2.3)$$

De même, il est possible de définir un produit scalaire pour tout vecteur $\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_p \in S$:

$$\langle \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_p \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{k,i} \alpha_{p,i} . \quad (2.4)$$

• **Norme euclidienne, énergie.** On définit la *norme euclidienne* $\| \cdot \|$ d'un vecteur $\mathbf{s}_m \in S$:

$$\|\mathbf{s}_m\|^2 = \langle \mathbf{s}_m, \mathbf{s}_m \rangle . \quad (2.5)$$

Dans le cas d'un signal $\omega_n(t) \in \Omega$, on parle d'*énergie* ε_n :

$$\varepsilon_n = \langle \omega_n(t), \omega_n(t) \rangle . \quad (2.6)$$

• **Convexité.** Soit E , un ensemble inclus dans un espace-vectoriel tel que Ξ_c ou \mathbb{R}^N . E est dit convexe, si pour tout x et pour tout y dans E , et pour $\beta \in [0,1]$, on a :

$$\beta x + (1 - \beta)y \in E . \quad (2.7)$$

Voici deux propriétés et définitions importantes relatives à la notion de convexité :

2.1 Modulations linéaires

- l'intersection de plusieurs ensembles convexes est convexe ;
- pour tout ensemble non convexe F_u , il est possible de construire *l'enveloppe convexe* : le plus petit ensemble convexe contenant F_u .

- **Orthogonalité.** Les signaux $\omega_i(t)$ et $\omega_j(t) \in \Omega$ sont dits *orthogonaux* lorsque :

$$\langle \omega_i(t), \omega_j(t) \rangle = 0 . \quad (2.8)$$

De même, les vecteurs \mathbf{s}_k et $\mathbf{s}_p \in S$, sont orthogonaux si :

$$\langle \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_p \rangle = 0 . \quad (2.9)$$

- **Famille orthonormée.** Soit δ , le symbole de Kronecker, défini par l'équation (2.10) :

$$\delta(i - j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} . \quad (2.10)$$

La famille Ω est dite *orthonormée*, si elle est orthogonale, et si l'énergie de chaque signal est unitaire. C'est-à-dire si pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket^2$, on a :

$$\langle \omega_i(t), \omega_j(t) \rangle = \delta(i - j) . \quad (2.11)$$

De même, la famille S est orthonormée si elle est orthogonale, et si la norme de chaque vecteur est unitaire.

- **Base canonique.** Pour tout espace à N dimensions, tel que \mathbb{R}^N , il existe une *base canonique* qui est constituée des vecteurs \mathbf{e}_n dont seule la n -ième composante est égale à 1, les autres étant nulles. La base est orthonormée, et tout vecteur $\mathbf{s}_m \in S$ peut ainsi s'exprimer comme une combinaison linéaire des \mathbf{e}_n .

- **Distance euclidienne, distance intersymboles, distance de Hamming.**

- Dans le cas de vecteurs, on appelle *distance euclidienne*, la norme de la différence de deux vecteurs :

$$d_{\mathbf{s}_p, \mathbf{s}_k} = \|\mathbf{s}_p - \mathbf{s}_k\| . \quad (2.12)$$

Lorsque l'on considère la distance entre un ensemble X de vecteurs et un vecteur \mathbf{s} , celle-ci se définit par l'équation suivante :

$$d_{\mathbf{s}, X} = \inf_{\mathbf{x} \in X} \{\|\mathbf{s} - \mathbf{x}\|\} . \quad (2.13)$$

- Dans le cas de deux signaux, on parle de *distance intersymboles*. C'est une métrique importante en traitement du signal puisqu'elle influence directement le taux d'erreur binaire (ou *Bit Error Rate*, BER) de la modulation considérée : plus la distance intersymboles moyenne d'une modulation est grande, plus rares seront les erreurs de démodulation.
- Une autre métrique affecte le taux d'erreur binaire d'une modulation : la *distance de Hamming*. C'est le nombre de bits différents entre deux mots binaires. Pour minimiser le BER, il est alors nécessaire de choisir un codage dont les symboles proches sont associés à des mots binaires dont la distance de Hamming est faible.

2.1.2 L'espace signal

2.1.2.1 Représentation d'un signal

De la même manière qu'un espace vectoriel contient un ensemble de vecteurs, définissons l'espace signal, lequel contient un ensemble de signaux, chacun pouvant s'exprimer comme étant une combinaison linéaire des signaux constituant la base de l'espace. On suppose ainsi que l'espace signal est un sous-espace de Ξ_c de dimension finie.

Représentation vectorielle. Supposons un système de communication qui puisse envoyer M signaux $s_m(t)$, chacune représentant un mot binaire de longueur $k = \log_2 M$ bits, $m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$. Considérant un espace signal $\Lambda = \text{Vect}(\Omega)$, doté de la base Ω définie dans la section précédente, chaque signal $s_m(t) \in \Lambda$ peut ainsi s'écrire comme la somme pondérée de signaux appartenant à Ω . Il existe alors un ensemble de scalaires $(\alpha_{m,n})$, $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ tels que :

$$s_m(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{m,n} \omega_n(t) \quad (2.14)$$

Considérant \mathbf{s}_m , le vecteur contenant chaque scalaire $\alpha_{m,n}$, il est alors possible de le considérer comme une *représentation de $s_m(t)$ dans l'espace signal*. De même, chaque signal $\omega_n(t)$ composant la base Ω peut être représenté par un vecteur \mathbf{e}_n de la base canonique.

Diagramme de constellation. La représentation vectorielle précédente peut être associée à une représentation géométrique : le *diagramme de constellation*. Cette représentation conserve l'orthogonalité géométrique pour des symboles en 2 ou 3 dimensions. Un exemple est donné dans la figure 2.1 avec la modulation antipodale, dont la taille de la constellation est $M = 2$.

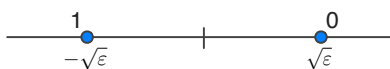


FIGURE 2.1 Diagramme de constellation d'une modulation antipodale

La modulation antipodale est donc composée de deux signaux $s_0(t) = \sqrt{\epsilon} \omega_0(t)$ et $s_1(t) = -\sqrt{\epsilon} \omega_0(t)$, représentés par deux vecteurs unidimensionnels : $\mathbf{s}_0 = \sqrt{\epsilon} \mathbf{e}_0$ et $\mathbf{s}_1 = -\sqrt{\epsilon} \mathbf{e}_0$. La distance intersymboles est alors de $2\sqrt{\epsilon}$, tandis que la distance de Hamming est égale à 1.

Supposons désormais un signal $f_u(t) \in \Lambda'$, espace signal inclu dans Ξ_c , dont on ne connaît pas la famille génératrice, avec $\Lambda' \cap \Lambda = \emptyset$. Quelle serait alors la dimension nécessaire de la base afin de représenter avec exactitude le signal $f_u(t)$? C'est l'objet de la section suivante.

2.1 Modulations linéaires

2.1.2.2 Réactualisation d'une notion : la dimensionnalité

Avec l'essor et le quasi-monopole des modulations PSK, la notion de dimensionnalité [Proa 07] n'est pas systématiquement considérée par les ingénieurs en télécommunications. Aussi connue sous le nom de « produit temps - bande passante », la dimensionnalité N d'un signal $s(t)$ est un nombre sans dimension qui se calcule selon l'équation (2.15) :

$$N = \lfloor 2W_u T + 1 \rfloor \approx 2W_u T, \quad (2.15)$$

avec W_u la bande passante effective (en Hertz) du signal $s(t)$, et T sa durée (en seconde).

N correspond au nombre de signaux orthogonaux qu'il est possible de générer avec un support de durée T et une bande passante W_u . En d'autres termes, c'est la taille d'une base orthonormée générant l'espace signal dont les éléments sont décrits sur un support $[0, T]$ et une bande passante W_u ; c'est le cas notamment de $\omega_n(t)$ et de $s_m(t)$. De plus, le signal $f_u(t)$ précédemment mentionné peut être représenté par un vecteur de taille $N' = \lfloor 2W'_u T' + 1 \rfloor$, avec W'_u et T' , respectivement la bande passante et la durée du signal $f_u(t)$.

Si l'équation (2.15) est d'apparence triviale, elle n'en a pas moins des conséquences sur l'efficacité spectrale d'un système de communication, comme nous allons le voir dans la section suivante.

2.1.2.3 Relation entre dimensionnalité et efficacité spectrale

Supposons qu'un système de communication opère dans l'espace signal Λ de dimension N . Il est alors aisé de montrer [Proa 07] que l'efficacité spectrale η_{eff} peut s'écrire selon l'équation (2.16) :

$$\begin{aligned} \eta_{\text{eff}} &= \frac{R_{\text{bit}}}{W_u} \approx \frac{\log_2 M R_{\text{symb}}}{\frac{N}{2T}} \\ &\approx \frac{2 \log_2 M}{N}; \end{aligned} \quad (2.16)$$

où M est la taille de la constellation, R_{bit} le débit binaire, et $R_{\text{symb}} = \frac{R_{\text{bit}}}{\log_2 M} = \frac{1}{T}$ le débit de symboles.

En conséquence, plus la dimensionnalité est importante, plus l'efficacité spectrale est basse. Pour compenser ce phénomène et augmenter l'efficacité spectrale des systèmes multidimensionnels, il est donc nécessaire d'accroître la taille M de la constellation.

Dans la section suivante, nous présentons la façon dont trois modulations classiques s'inscrivent dans le formalisme des modulations linéaires, et montrons l'impact de la dimensionnalité N sur leur efficacité spectrale η_{eff} .

2.1.3 PSK, MOS, OFDM, trois modulations linéaires

2.1.3.1 Modulation PSK

Présentation de la modulation. La modulation par saut de phase, ou *M-ary Phase Shift Keying* (PSK), est couramment utilisée dans les communications spatiales car chaque symbole de la modulation possède la même énergie ε . Elle consiste à moduler la phase d'une porteuse afin de transmettre l'information, selon l'équation (2.17) :

$$s_m(t) = g(t) \cos [2\pi f_c t + \theta_m] ; \quad (2.17)$$

où $g(t)$ est la fonction de mise en forme du signal, f_c la fréquence porteuse, et $\theta_m = \frac{2\pi m}{M}$, $m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$ sont les M phases possibles de la porteuse pour porter l'information. Une possible implémentation de l'équation (2.17) consiste à moduler en amplitude des signaux en quadrature. Celle-ci est donnée dans la figure 2.2.

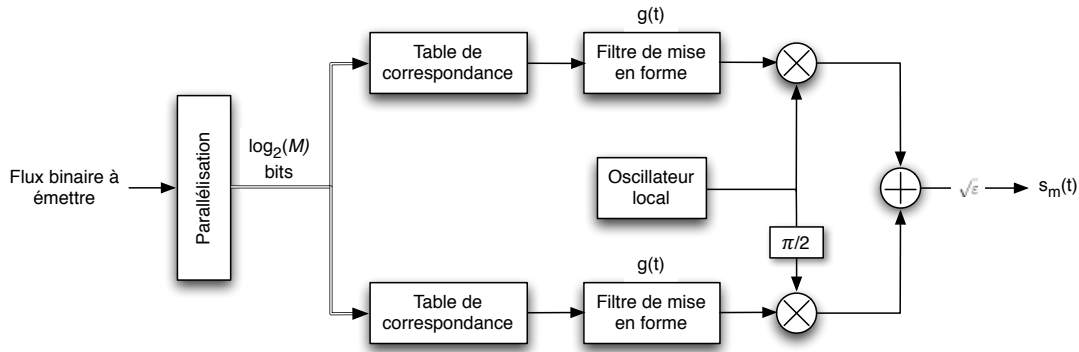


FIGURE 2.2 Implémentation possible de la modulation PSK

Nous remarquons que pour chaque mot binaire de longueur $k = \log_2 M$ bits, un pulse est généré sur deux voies distinctes, et l'amplitude de ce pulse est choisie selon une table de correspondance. Après mise en forme, chaque voie est modulée par une porteuse, dont l'une est en quadrature de phase par rapport à l'autre. La somme des deux voies aboutit, après multiplication par $\sqrt{\varepsilon}$, à un signal modulé en phase $s_m(t)$ d'énergie ε (2.17).

Représentation dans l'espace signal. L'implémentation précédente met en évidence le fait que le signal PSK est constitué de deux signaux orthogonaux : un sinus et un cosinus. Ceux-ci forment la base de l'espace signal dans lequel se situent les signaux PSK.

Supposons que la réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme soit le signal créneau (comme c'est le cas pour un filtre en cosinus surélevé avec un roll-off nul). Une base orthonormée $\Omega = (\omega_{\text{PSK1}}(t), \omega_{\text{PSK2}}(t))$ de cet espace signal est donnée par l'équation (2.18) :

$$\begin{aligned} \omega_{\text{PSK1}}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t) \\ \omega_{\text{PSK2}}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t) , \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.1 Modulations linéaires

chacun des signaux $\omega_{\text{PSK1}}(t)$ et $\omega_{\text{PSK2}}(t)$ est défini sur le support $[0, T]$. Prenons désormais $M = 4$. On parle de modulation par saut de phase à 4 états – ou *Quaternary-PSK* (QPSK) – dont les quatre symboles peuvent être donnés par l'équation (2.19) et visualisés sur le diagramme de constellation de la figure 2.3.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_0 &= \left(\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2}, \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2} \right) \\ \mathbf{s}_1 &= \left(-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2}, \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2} \right) \\ \mathbf{s}_2 &= \left(-\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2}, -\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2} \right) \\ \mathbf{s}_3 &= \left(\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2}, -\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2} \right) \end{aligned} \tag{2.19}$$

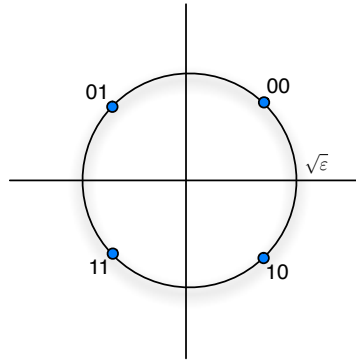


FIGURE 2.3 Constellation QPSK avec codage de Gray

Efficacité spectrale. Dans le cas d'une modulation PSK monoporteuse, l'efficacité spectrale est $\eta_{\text{eff}} \approx \log_2 M$; l'approximation dépendant ici du filtre de mise en forme choisi pour la modulation. Dans la suite de ce manuscrit, nous supposons $\eta_{\text{eff}} = \log_2 M$, soit 2 dans le cas de la modulation QPSK précédemment évoquée. Puisque l'efficacité spectrale augmente avec la taille de la constellation, tout en occupant une seule porteuse, cette modulation est dite *efficace spectralement*.

Performances en taux d'erreur binaire. Avant d'aborder les performances de la modulation orthogonale, il est intéressant de faire un bref rappel sur les courbes d'erreur binaire des modulations PSK où l'augmentation de l'efficacité spectrale à rapport signal-bruit constant a pour effet d'augmenter le taux d'erreur binaire. Ce sont les courbes de BER en cascade (aussi appelées *waterfall curves*) tracées dans la figure 2.4.

2.1.3.2 Modulation orthogonale

Présentation de la modulation. Détaillée dans [Proa 07], la modulation orthogonale de taille $M = N$, ou *M-ary Orthogonal Signaling* (MOS), est une modulation où N

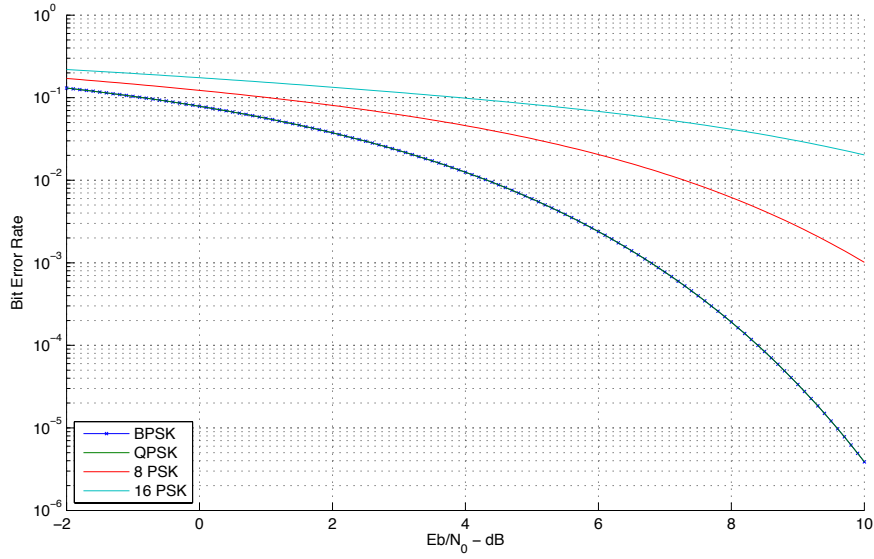


FIGURE 2.4 Courbes d'erreur binaire de plusieurs modulations PSK

mots binaires de $\log_2 N$ bits sont représentés par N signaux orthogonaux. Cela confère à la modulation MOS des propriétés fortement distinctes de la modulation PSK, tant en termes de représentation, d'efficacité spectrale, ou de taux d'erreur binaire.

Représentation dans l'espace signal. Puisque la modulation comporte N signaux orthogonaux entre eux dans un espace signal de dimension N , ceux-ci forment une base de l'espace signal considéré. De plus, en normalisant leur énergie à un, chaque symbole $\mathbf{s}_n, n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, peut être représenté à l'aide d'un vecteur de la base canonique :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_0 &= (\overbrace{\sqrt{\varepsilon}, 0, 0 \dots, 0}^N) \\
 \mathbf{s}_1 &= (0, \sqrt{\varepsilon}, 0 \dots, 0) \\
 &\dots \\
 \mathbf{s}_n &= \sqrt{\varepsilon} \mathbf{e}_n \\
 &\dots \\
 \mathbf{s}_{N-1} &= (0, \dots, 0, 0, \sqrt{\varepsilon}) .
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

L'équation (2.20) est une représentation qui conserve l'orthogonalité entre chaque symbole. Mais s'il était possible de représenter la modulation QPSK dans le plan euclidien ; occupant N dimensions orthogonales, la représentation géométrique de la modulation orthogonale est, elle, rendue inaccessible¹.

Efficacité spectrale. Selon l'équation (2.16), l'efficacité spectrale d'une modulation MOS avec $M = N$ est de $\eta_{\text{eff}} \approx \frac{\log_2 N}{N}$. Il est alors important de noter que l'augmentation

1. Tout du moins dans le cas de la géométrie euclidienne.

2.1 Modulations linéaires

de la taille de la constellation entraîne *de facto* une baisse de l'efficacité spectrale. Ce désavantage est toutefois compensé par les performances en taux d'erreur binaire, comme le montre le prochain paragraphe.

Performances en taux d'erreur binaire. Dans le cas de modulations orthogonales dont chaque symbole est orthogonal à tous les autres, l'allure des courbes de BER est à l'opposé du comportement des courbes PSK données dans la figure 2.4. En effet, si des courbes en cascade restent visibles, l'ordre des modulations est inversé : plus la taille de la constellation augmente, plus le taux d'erreur binaire s'améliore, suivant la tendance de la figure 2.5. Cette allure correspond à l'expression du BER donnée dans [Proa 07], et rappelée par l'équation (2.21).

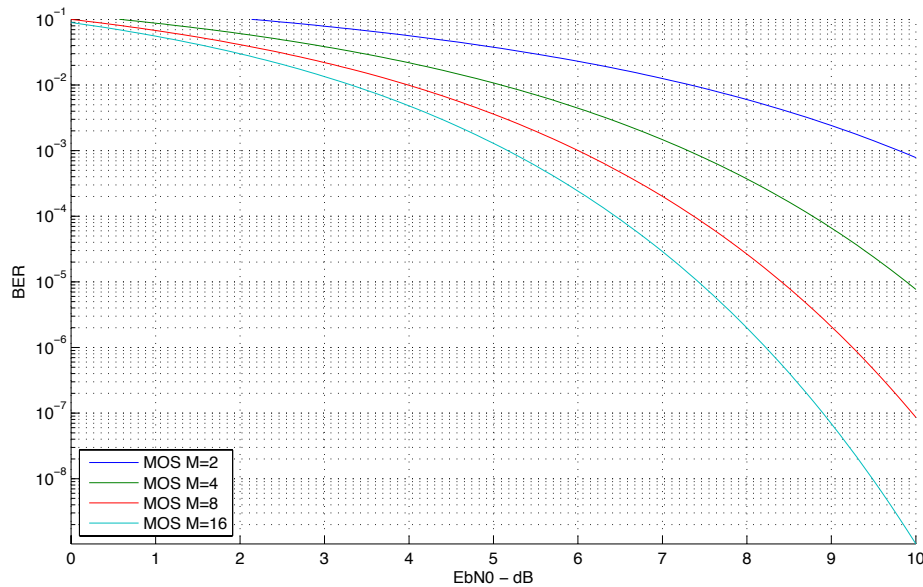


FIGURE 2.5 Courbes d'erreur binaire de plusieurs modulations orthogonales MOS

$$BER_{\text{MOS}} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} SER_{\text{MOS}} \quad (2.21)$$

avec SER_{MOS} , taux d'erreur symbole :

$$SER_{\text{MOS}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - (1 - Q(x))^{M-1}] e^{-\frac{(x - \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}})^2}{2}} dx, \quad (2.22)$$

où Q est une fonction liée à la fonction d'erreur :

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, x \geq 0 \\ Q(x) &= \sqrt{2} \text{erfc}(\sqrt{2}x). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Cette inversion de tendance vient du fait qu'en modulation orthogonale, augmenter la taille de la constellation n'a aucun effet sur la distance intersymboles puisque la dimensionnalité N augmente avec M . De même que l'énergie envoyée par symbole, la probabilité d'erreur reste inchangée, tandis que le nombre de bits envoyés augmente. Le rapport $\frac{E_b}{N_0}$ diminue en conséquence à BER constant.

C'est une propriété intéressante des systèmes multidimensionnels : ils sont *efficaces en puissance* car l'augmentation de la taille de constellation permet de transmettre à plus basse qualité du canal à BER constant. Ainsi ce type de modulation est-il adapté aux transmissions sur des canaux à très bas SNR, tel l'espace lointain (*deep space*) [Mass 92, Mara 09], et répond au cahier des charges défini dans le chapitre 1.

Dans la sous-section suivante, nous portons notre attention sur le cas de la modulation multiporteuse *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* (OFDM), système multidimensionnel aujourd'hui largement répandu, et ressemblant de surcroît à notre système d'étude.

2.1.3.3 Modulations multiporteuses, l'exemple d'OFDM

Présentation de la modulation. La modulation OFDM est omniprésente dans les communications numériques modernes : sa robustesse au multitrajet et sa grande efficacité spectrale en ont fait un acteur majeur dans les standards ADSL, Wifi, WiMax, LTE, TNT.

Les différents blocs d'une modulation OFDM standard sont représentés dans la figure 2.6 pour un *mapping* de taille M_{s-p} et un nombre de porteuse égale à $\frac{N}{2}$. Nous les détaillons ci-après, mais plus d'informations sur la modulation OFDM peuvent être trouvées dans plusieurs ouvrages : [Proa 07, Rice 08].

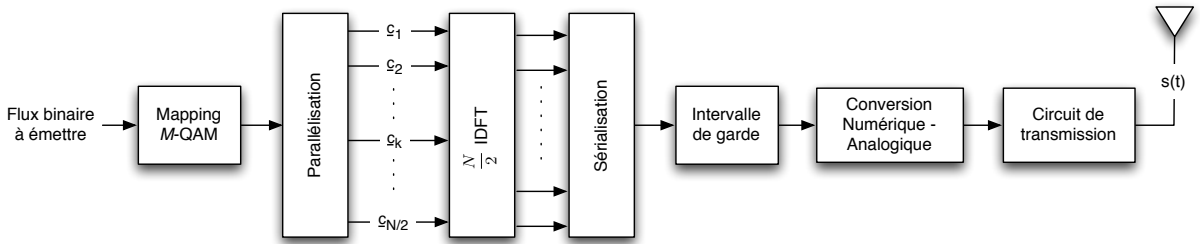


FIGURE 2.6 Émetteur OFDM classique

- *Mapping* Il s'agit d'une transcription d'un flux binaire en un flux de symboles : à chaque mot binaire de taille $\log_2 M_{s-p}$ est associé un nombre complexe $c_k = \frac{b_k}{\sqrt{T}} e^{j\theta_k}$, dépendant du mapping choisi (PSK ou *Quadrature Amplitude Modulation*, QAM). Par exemple, pour la modulation 8-PSK, nous avons $b_k = 1, \forall k \in \llbracket 1, \frac{N}{2} \rrbracket$, et θ_k peut prendre huit valeurs uniformément réparties entre 0 et 2π .
- *Parallélisation* Le flux de symboles complexes est ensuite parallélisé en $\frac{N}{2}$ flux pour être envoyé vers la transformée de Fourier inverse.
- *IDFT* Une transformée de Fourier inverse discrète permet de générer un signal numérique à $\frac{N}{2}$ porteuses. Les porteuses ont la particularité d'être orthogonales entre

2.1 Modulations linéaires

elles et chacune porte une information différente.

- *Sérialisation* Les symboles OFDM ainsi générés sont ensuite sérialisés.
- *Ajout d'un intervalle de garde* Son rôle est de lutter contre les effets du multitraitement. Celui-ci peut alors prendre la forme d'un préfixe cyclique : le début du symbole OFDM est recopié à la fin de celui-ci.
- *Conversion et transmission* Une fois le signal discret généré, celui-ci est converti en un signal analogique et les opérations nécessaires à sa transmission sur le canal sont effectuées.

Un symbole OFDM d'indice m dépourvu de préfixe cyclique peut s'écrire en bande de base sous la forme (2.24), et être modulé par une porteuse de fréquence f_c donnée par l'équation (2.25).

$$\underline{s}_{\text{BB},m}(t) = \sum_{k=1}^{N/2} \frac{b_k}{\sqrt{T}} e^{j[2\pi(k-1)\Delta_f t + \theta_k]} \quad (2.24)$$

$$s_{\text{RF},m}(t) = \text{Re}(\underline{s}_{\text{BB},m}(t) e^{j2\pi f_c t}) \quad (2.25)$$

Nous avons alors l'énergie ε_{RF} du signal $s_{\text{RF},m}(t)$:

$$\varepsilon_{\text{RF}} = \frac{\sum_{k=1}^{N/2} |b_k|^2}{2} , \quad (2.26)$$

et l'énergie ε_{BB} du signal $\underline{s}_{\text{BB},m}(t)$:

$$\varepsilon_{\text{BB}} = \sum_{k=1}^{N/2} |b_k|^2 . \quad (2.27)$$

Cette écriture dans le domaine temporel a aussi un équivalent algébrique.

Représentation d'un symbole OFDM. Chaque sous-porteuse étant modulée en PSK ou QAM par une information donnée, il est courant de représenter l'information transmise par un vecteur $\underline{\mathbf{c}}_m$ possédant $\frac{N}{2}$ scalaires c_k à valeur dans \mathbb{C} , comme l'indique l'équation (2.28) :

$$\underline{\mathbf{c}}_m = \left(\frac{b_1}{\sqrt{T}} e^{j\theta_1}, \frac{b_2}{\sqrt{T}} e^{j\theta_2}, \dots, \frac{b_{N/2}}{\sqrt{T}} e^{j\theta_{N/2}} \right) . \quad (2.28)$$

Le vecteur $\underline{\mathbf{c}}_m$ ne correspond ainsi pas à la représentation dans l'espace signal de taille N , mais a l'avantage d'être plus proche de l'implémentation. Une représentation \mathbf{s}_m d'un symbole OFDM dans l'espace signal est possible en distinguant les porteuses en phase et en quadrature. Cela aboutit à l'équation (2.29) :

$$\mathbf{s}_m = (\alpha_{m,1}, \alpha_{m,2}, \dots, \alpha_{m,N}) , \quad (2.29)$$

avec $\alpha_{m,n} = \text{Re}\{\underline{\mathbf{c}}_m[n]\}$ pour $n \in \llbracket 1, \frac{N}{2} \rrbracket$ et $\alpha_{m,n} = \text{Im}\{\underline{\mathbf{c}}_m[n - \frac{N}{2}]\}$ pour $n \in \llbracket \frac{N}{2} + 1, N \rrbracket$.

Efficacité spectrale. Afin d'établir l'efficacité spectrale de la modulation OFDM selon l'équation (2.16), il est nécessaire de calculer le nombre de symboles \mathbf{s}_m distincts possibles.

Considérons un système où chaque sous-porteuse utilise une modulation PSK ou QAM dont la taille de constellation est $M_{\text{s-p}}$. Puisqu'il y a $\frac{N}{2}$ porteuses transmettant simultanément une information, il y a $M_{\text{OFDM}} = (M_{\text{s-p}})^{N/2}$ symboles différents possibles. De plus, les porteuses étant orthogonales entre elles, aucune bande de garde n'est nécessaire entre porteuse. Il est ainsi possible de déduire l'efficacité spectrale de la modulation OFDM à l'aide de l'équation 2.16, pour donner l'équation (2.30) :

$$\begin{aligned}\eta_{\text{eff}} &= \frac{2 \log_2 ((M_{\text{s-p}})^{N/2})}{N} \\ &= \frac{2 \frac{N}{2} \log_2 M_{\text{s-p}}}{N} \\ &= \log_2 M_{\text{s-p}} .\end{aligned}\tag{2.30}$$

Ainsi, bien qu'OFDM soit un système multidimensionnel, il hérite directement des caractéristiques du mapping qu'il utilise, c'est pourquoi cette technique peut aussi être considérée comme *efficace spectralement*.

Performances en taux d'erreur binaire. Jouissant de la même efficacité spectrale qu'un système QAM ou PSK monoporteuse standard, les performances en taux d'erreur binaire de la modulation OFDM dans un canal AWGN classique sont identiques. Pour observer l'avantage qu'OFDM tire de son préfixe cyclique, il est nécessaire de considérer un canal multitrajet, ce qui ne sera pas réalisé dans ce manuscrit.

La partie suivante de ce chapitre s'intéresse au problème mis en lumière dans la section 1.2 : un signal fait de plusieurs composantes sinusoïdales est sujet à une forte dynamique en amplitude.

2.2 Le problème du PAPR

Le but de cette section n'est pas de fournir une analyse fine et exhaustive du problème du *Peak-to-Average Power Ratio* (PAPR). De nombreux auteurs l'ont en effet déjà réalisé, tels que Litsyn et Tao [Jian 08b, Lits 07]. L'objectif de cette section est seulement d'introduire le phénomène, puis de présenter les métriques le quantifiant. Des résultats importants seront donnés avec, entre autres, les bornes basses de ces métriques.

2.2.1 Description du phénomène

2.2.1.1 D'un point de vue physique

Une des altérations du signal évoquée dans la section 1.2.2 concernait les amplificateurs de puissance TWT, et imposait une marge opérationnelle importante. Cette marge est d'autant plus importante que le rapport puissance crête sur puissance moyenne est élevé. Le schéma 2.7 présente une courbe caractéristique d'un amplificateur de puissance et illustre le problème lié au PAPR.

2.2 Le problème du PAPR

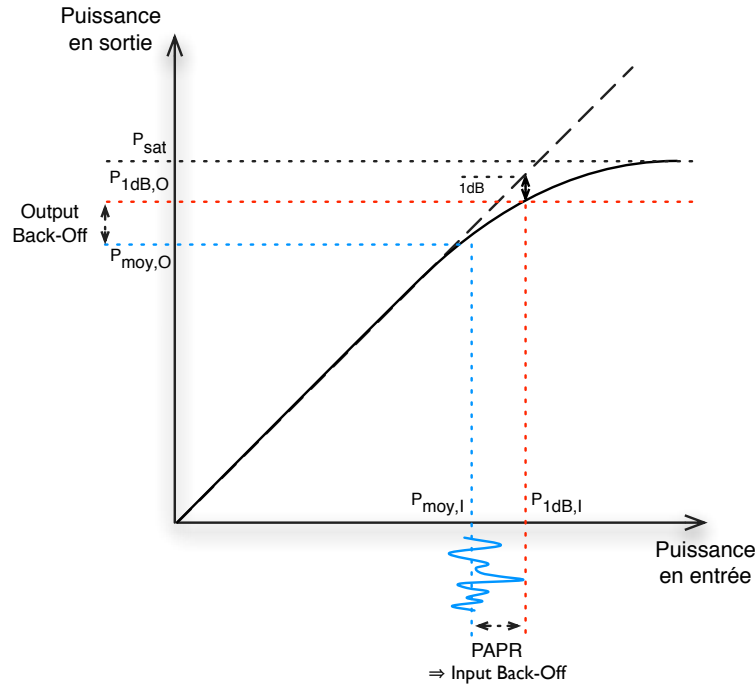


FIGURE 2.7 Marge opérationnelle d'un amplificateur en cas de PAPR

La caractéristique montre tout d'abord un indicateur de performance de l'amplificateur, P_{1dB} , point à partir duquel le signal subit une distorsion supérieure à 1 dB par rapport à un amplificateur linéaire. Plus ce point est haut, meilleur est l'amplificateur. Ce point est appelé *point de compression* ; il est généralement admis que les altérations que subit le signal en opérant à cette puissance d'entrée sont négligeables, ou peuvent être facilement compensées.

Cette limite de non linéarité est un seuil que la crête du signal d'entrée ne doit pas dépasser. On parle alors d'*input back-off*, la marge opérationnelle en entrée qui est égale au PAPR, et d'*output back-off*, la marge en sortie, puisque la puissance moyenne de sortie est plus faible que $P_{1dB,O}$. Cette marge d'opération dépend donc du PAPR en entrée, et réduit *de facto* le bilan de liaison et ainsi le rapport signal-bruit disponible.

Dans la littérature récente, il est beaucoup question du problème du PAPR dans un contexte multiporteuse, tel qu'OFDM mentionné précédemment. En effet, la somme exprimée dans l'équation (2.24) peut se traduire par un signal avec plusieurs pics lorsque les sous-porteuses se somment de manière constructive. Toutefois, il est nécessaire de garder en tête que ce problème affecte aussi les signaux monoporteuses, mais la cause en est alors le filtre de mise en forme [Pali 05].

2.2.1.2 Définition mathématique du phénomène

Il existe de nombreuses métriques pour quantifier le problème lié à la dynamique du signal. Le PAPR est actuellement la plus connue, mais il existe aussi le facteur de crête (ou *crest factor*), ou encore le rapport puissance crête sur puissance moyenne de l'enveloppe (ou *Peak-to-Mean Envelope Power Ratio*, PMEPR). Cette variété d'indicateurs mène à une grande confusion lorsqu'arrive le besoin de comparer les performances des différents

algorithmes de réduction du PAPR, par exemple entre les références suivantes : [Mart 09, Frie 97, Giml 93].

Pour éviter toute confusion, seules les définitions données par J. Palicot dans [Pali 05] seront utilisées dans cette thèse.

Peak-to-Average Power Ratio. Le PAPR est sans nul doute le terme le plus répandu dans la littérature actuelle ; sa diffusion a suivi l'essor de la modulation OFDM. Sa définition est donnée dans l'équation (2.31) :

$$\text{PAPR}\{s_{\text{RF}}(t)\} = \frac{\max\{|s_{\text{RF}}(t)|^2\}}{\text{E}\{|s_{\text{RF}}(t)|^2\}} ; \quad (2.31)$$

où $s_{\text{RF}}(t)$ est un signal en bande RF, et E représente l'espérance mathématique.

Le plus mauvais PAPR survient lorsque toutes les sous-porteuses se somment de manière constructive, par exemple en $t = 0$ lorsque toutes les sous-porteuses ont une phase nulle. Lorsque la phase de chaque sous-porteuse est choisie aléatoirement, il est possible de tracer la distribution du PAPR, comme cela a été fait dans [Jian 08a], et rappelé en section 2.2.2.

Peak-to-Mean Envelope Power Ratio. Le PMEPR est un terme plus rarement utilisé que le PAPR. Il est cependant son alter-ego en bande de base :

$$\text{PMEPR}\{\underline{s}_{\text{BB}}(t)\} = \frac{\max\{|\underline{s}_{\text{BB}}(t)|^2\}}{\text{E}\{|\underline{s}_{\text{BB}}(t)|^2\}} ; \quad (2.32)$$

avec $\underline{s}_{\text{BB}}(t)$ un signal en bande de base.

Le PMEPR est naturellement fortement lié au PAPR. En effet, puisque la puissance moyenne vaut $P_{\text{mean}}[s_{\text{RF}}(t)] = \frac{1}{2}P_{\text{mean}}[\underline{s}_{\text{BB}}(t)]$, il est aisé d'établir la relation (2.33) lorsque la fréquence centrale f_c du signal RF est bien plus importante que la bande passante du signal ($f_c \gg \frac{1}{T}$, où T représente la durée du symbole). On a alors :

$$\text{PAPR}_{\text{dB}} \approx \text{PMEPR}_{\text{dB}} + 3 \text{ dB} . \quad (2.33)$$

Le facteur de crête. Aussi appelé *crest factor*, ce terme, antérieur au terme « PAPR », est maintenant très peu usité. Il en existe d'ailleurs deux définitions, selon le modèle du signal suivi, toutes deux données dans l'équation (2.34) :

$$\begin{aligned} \text{CF}_{\text{PMEPR}}\{\underline{s}_{\text{BB}}(t)\} &= \sqrt{\text{PMEPR}\{\underline{s}_{\text{BB}}(t)\}}, \text{ ou} \\ \text{CF}_{\text{PAPR}}\{s_{\text{RF}}(t)\} &= \sqrt{\text{PAPR}\{s_{\text{RF}}(t)\}} . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Puisque la majorité des résultats théoriques est obtenue pour des signaux en bande de base, la section suivante fera un usage appuyé du PMEPR. Toutefois, puisque la forte dynamique en amplitude d'un signal constitue véritablement un problème technique en bande intermédiaire et en bande RF, les simulations seront effectuées pour des signaux réels, et les études utiliseront alors la métrique du PAPR. Les résultats théoriques du PMEPR seront convertis dans l'échelle du PAPR suivant les relations précédentes.

2.2 Le problème du PAPR

2.2.2 Résultats importants sur le PAPR

Vouloir éviter la génération de signaux à fort PAPR est un objectif louable, mais est-il vraiment nécessaire de mettre en œuvre des techniques complexes de réduction, ou d'introduire une marge de puissance opérationnelle ? Et si oui, quel est le PAPR minimum possible ? Autant de questions qui ont été traitées dans la littérature et qu'il est nécessaire d'aborder avant de proposer d'éventuels algorithmes de réduction.

2.2.2.1 Distribution du PAPR

Fonction de répartition. Dans le cas des signaux OFDM, le signal modulé $s(t)$ varie continuellement selon le flux binaire entrant. Ainsi, pour mesurer la sévérité du PAPR sur le signal, une métrique entre régulièrement en jeu : la fonction de répartition complémentaire du PAPR (ou *Complementary Cumulative Density Function*, CCDF). C'est la probabilité que le PAPR du signal $s(t)$ soit supérieur à une certaine valeur x :

$$\text{Prob}\{\text{PAPR}[s(t)] > x\} . \quad (2.35)$$

De nombreuses études ont été menées afin de déterminer analytiquement la distribution de la probabilité (2.35). Une synthèse de celles-ci est notamment effectuée dans les références [Jian 08b] et [Lits 07], et nous proposons ici de présenter une expression analytique classique.

Expression analytique. En supposant un nombre de sous-porteuses suffisamment élevé, il est possible de considérer les sommes des sous-porteuses en phase et en quadrature comme étant chacune un processus gaussien stationnaire à bande limitée. La somme de ces deux processus, l'un réel, et l'autre imaginaire, aboutit alors à un processus de Rayleigh en bande limitée. Après plusieurs hypothèses supplémentaires (notamment sur l'espacement entre les pics, voir [Ochi 01]), il est possible d'aboutir à l'expression de la fonction de répartition (2.36), avec $\frac{N}{2}$ le nombre de porteuses. La distribution est tracée dans la figure 2.8 pour le PMEPR d'un système à 64 sous-porteuses.

$$\begin{aligned} \text{CCDF}_{\text{PMEPR}[s(t)]}(x) &\approx 1 - \exp \left\{ -\frac{N}{2} e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{3} \log \frac{N}{2}} \right\} \\ \text{CCDF}_{\text{PAPR}[s(t)]}(x) &\approx 2 \text{CCDF}_{\text{PMEPR}[s(t)]}(x) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Nous pouvons observer que la probabilité d'avoir un PMEPR de 5 dB, ou un PAPR de 8 dB, est très proche de 1 pour un système OFDM à 64 sous-porteuses. Ainsi, pour un système radio-fréquence, il serait nécessaire de générer un signal dont la puissance est 8 dB sous le seuil de linéarité de l'amplificateur en puissance pour éviter toute altération du signal. Au vu de ces résultats, le PAPR est de toute évidence un phénomène à prendre sérieusement en considération.

Si les courbes de la figure 2.8 permettent de constater la répartition des valeurs que le PMEPR peut avoir, il est cependant difficile de déterminer les bornes supérieures et inférieures que peut véritablement prendre le signal.

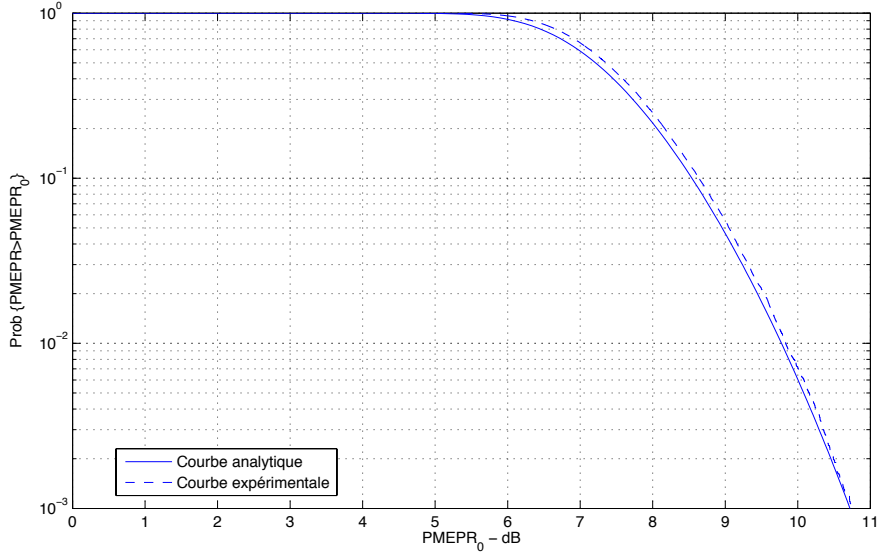


FIGURE 2.8 Fonction de répartition du PMEPR pour $\frac{N}{2} = 64$ sous-porteuses

2.2.2.2 Valeurs limites du PAPR

Borne supérieure. La valeur maximale du PAPR est atteinte lorsque toutes les composantes du signal se somment de manière constructive. Considérant un système OFDM à $\frac{N}{2}$ porteuses modulées en PSK avec la normalisation considérée dans l'équation (2.26), la borne supérieure est donc donnée par l'équation (2.37) :

$$\text{PAPR}_{\text{dB}}\{s_{\text{RF}}(t)\} \leq 10 \log N . \quad (2.37)$$

Cela constitue toutefois un événement extrêmement rare. Dans le cas d'un système OFDM, celui-ci survient avec une probabilité de $P_{\text{PAPR}_{\text{max}}} = \frac{M_{\text{s-p}}}{M_{\text{OFDM}}}$, avec M_{OFDM} et $M_{\text{s-p}}$ définis dans la section 2.1.3.3.

Borne inférieure. Si nous avons vu qu'il est nécessaire d'atténuer la valeur du PAPR, une question demeure : jusqu'à quel point est-il possible de diminuer celle-ci ?

Un des premiers résultats enseigné aux étudiants de traitement du signal répond à cette question : l'égalité de Parseval. Cette dernière stipule que l'énergie totale d'un signal ne dépend pas du domaine considéré. Considérons le spectre discret $\underline{c} = (c_1, \dots, c_k, \dots, c_{N/2})$, nous avons alors (2.38) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{BB}} &= \sum_{k=1}^{N/2} |b_k|^2 = T \sum_{k=1}^{N/2} |c_k|^2 \\ \varepsilon_{\text{BB}} &= \int_0^T |\underline{s}_{\text{BB}}(t)|^2 dt \leq T \max\{|\underline{s}_{\text{BB}}(t)|\}^2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

$\varepsilon_{\text{BB}}/T = \sum_{k=1}^{N/2} |c_k|^2$ étant l'expression de la puissance moyenne du symbole en bande de base, nous avons alors :

$$1 \leq \text{PMEPR}\{\underline{s}_{\text{BB}}(t)\} . \quad (2.39)$$

2.2 Le problème du PAPR

Ainsi, 0 dB est la borne inférieure du PMEPR, ce qui correspond à un PAPR de 3 dB en bande RF. La question est donc maintenant de déterminer s'il est possible de générer un signal dont le PAPR soit aussi bas que cette valeur.

Valeur minimale. Cette valeur minimale dépend intrinsèquement du spectre du signal. Il est ainsi difficile, sinon impossible, de déterminer analytiquement cette valeur selon les porteuses actives. Toutefois, une étude mathématique ancienne menée par Kahane [Kaha 80] sur des polynômes unimodulaires permet d'apporter des éléments de réponse. En effet, il y est démontré qu'il existe une séquence polynomiale $P_{\frac{N}{2}}(z)$ telle que :

$$P_{\frac{N}{2}}(z) = \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} z^k a_{k, \frac{N}{2}} \text{ avec } |a_{k, \frac{N}{2}}| = 1, \forall \frac{N}{2} \in \mathbb{N}, \quad (2.40)$$

et une séquence de scalaires $\delta_{\frac{N}{2}}$ positifs qui tend vers zéro, de manière à avoir $\forall z, |z| = 1$:

$$(1 - \delta_{\frac{N}{2}}) \sqrt{\frac{N}{2}} \leq |P_{\frac{N}{2}}(z)| \leq (1 + \delta_{\frac{N}{2}}) \sqrt{\frac{N}{2}}. \quad (2.41)$$

En posant $z = e^{2j\pi\Delta_f t}$ et $a_{k, \frac{N}{2}} = \underline{c}_k$, nous avons alors $P_N(z) = \underline{s}_{\text{BB}}(t)$. En considérant un mapping PSK ($|\underline{c}_k| = 1, \forall k$) et en mettant l'équation (2.41) au carré tout en divisant les membres de l'inégalité par ε , on en déduit :

$$(1 - \delta_{\frac{N}{2}})^2 \frac{1}{\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k^2} \leq \frac{|P_{\frac{N}{2}}(z)|^2}{\varepsilon} \leq (1 + \delta_{\frac{N}{2}})^2 \frac{1}{\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k^2}. \quad (2.42)$$

En faisant croître $\frac{N}{2}$, $\delta_{\frac{N}{2}}$ tend vers 0. L'équation (2.42) indique alors qu'il existe au moins un signal à $\frac{N}{2} \gg 1$ porteuses dont le spectre est d'amplitude constante unitaire, et tel que le PMEPR soit égal à 0 dB en bande de base, ou tel que le PAPR soit de 3 dB en bande RF.

2.2.2.3 De l'importance du sur-échantillonnage.

PMEPR d'un signal discret sans sur-échantillonnage. Sans sur-échantillonnage, la transformée de Fourier rapide inverse discrète génère un signal qui a autant d'échantillons spectraux que temporels. Toutefois, il a été montré dans [Lits 07] que le calcul du PAPR d'un signal échantillonné au taux de Nyquist peut aboutir à une estimation erronée car des pics du signal échantillonné pourraient être sous-évalués. Considérant un signal à $\frac{N}{2}$ porteuses, le PMEPR résultant d'un échantillonnage au taux de Nyquist peut ainsi être encadré selon l'inégalité (2.43) d'après [Lits 07] :

$$\frac{2}{\pi} \ln \frac{N}{2} + 0,603 - \frac{1}{3N} < \frac{\text{PMEPR}_c}{\text{PMEPR}_{d, \frac{N}{2}}} < \frac{2}{\pi} \ln \frac{N}{2} + 1,132 - \frac{8}{N} \quad (2.43)$$

Ici, PMEPR_c et $\text{PMEPR}_{d, \frac{N}{2}}$ représentent respectivement le PMEPR de la signal continue (calculé avec exactitude), et le PMEPR du signal discret doté de $\frac{N}{2}$ échantillons.

Nous pouvons constater que plus le nombre de porteuses est grand, plus le PMEPR_d , estimé à partir du signal discret, peut être éloigné de la véritable valeur PMEPR_c .

PMEPR d'un signal discret sur-échantillonné. Pour éviter cet écart, il est alors nécessaire de considérer un facteur de sur-échantillonnage $r = \frac{2N_{\text{ech}}}{N} > 2$, $r \in \mathbb{N}$, N_{ech} étant le nombre d'échantillons du signal après sur-échantillonnage. Lorsque N est pair, d'après [Lits 07], nous avons alors la relation (2.44) entre le PMEPR estimé et réel.

$$\text{PMEPR}_{d,N_{\text{ech}}} = \text{PMEPR}_c \cos\left(\frac{\pi}{2r}\right) \quad (2.44)$$

Cette équation confirme ainsi que l'augmentation du facteur r entraîne une meilleure approximation du PMEPR. La figure 2.9 illustre parfaitement ce phénomène ; c'est, de ce fait, un résultat important à prendre en considération pour les paramètres des simulations effectuées dans la suite de ce manuscrit.

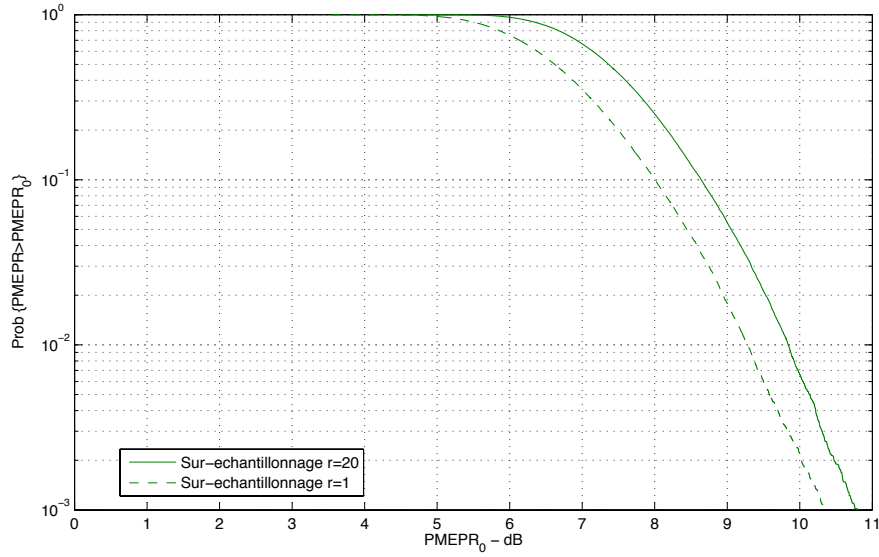


FIGURE 2.9 Fonction de répartition du PMEPR pour $N = 64$ sous-porteuses avec deux facteurs de suréchantillonnage

Dans le chapitre qui suit, le système de communication TDCS sera présenté. C'est ce système qui a été l'objet des recherches menées tout au long de la thèse pour en améliorer l'efficacité, d'abord spectrale, puis énergétique.

Deuxième partie

Des formes d'ondes sur mesure pour
communiquer : TDCS

CHAPITRE 3

Présentation du système TDCS

Sommaire

3.1	État de l’art	33
3.1.1	D’une curiosité théorique à un problème d’actualité	33
3.1.2	TDCS, encore <i>terra incognita</i>	35
3.2	Modèle du système	36
3.2.1	Émetteur TDCS	36
3.2.2	Récepteur TDCS	41
3.2.3	Mise en perspective du système TDCS	44

3.1 État de l’art

3.1.1 D’une curiosité théorique à un problème d’actualité

L’idée de transmettre une information en évitant les interférences n’est pas nouvelle. Elle existait au moins depuis les années 80, puisqu’à cette époque-là, Milstein [Mils 80, Mils 83] avait proposé des solutions pour ne pas transmettre d’énergie sur les bandes de fréquences utilisées par d’autres systèmes. On parla alors de signaux générés dans le domaine de transformation (*Transform Domain*), tel que le domaine spectral. Toutefois, le passage de cette idée à sa réalisation était rendu difficile en raison des limitations technologiques d’alors. Ce fut avec l’essor des processeurs de traitements du signal (*Digital Signal Processors*, DSP), que la notion de radio logicielle (*Software Defined Radio*) fit l’actualité, avec notamment l’idée de générer numériquement des signaux sur mesure pour transmettre l’information. Endsley proposa alors [Ends 94] un tel système opérant dans le domaine de transformation. Sa technique permettait de conserver un spectre en amplitude donné, tout en évitant des interférences ; le signal était alors modulé par un décalage cyclique : c’était la modulation *Cyclic Shift Keying* (CSK), présentée dans la suite de ce chapitre.

Cet article constitua le point de départ de nombreuses recherches menées par l’Air Force Institute of Technology (AFIT) américain, qui formalisa dans [Radc 96, Swac 99], le système de communication dans le domaine de transformation, ou *Transform Domain Communication System* (TDCS). Les systèmes TDCS qui y étaient présentés contenaient

déjà les principales briques de base, à savoir : un bloc d'estimation du spectre pour situer les bandes de fréquences corrompues, la génération par une transformée de Fourier inverse d'un signal dépourvu d'interférences, et la modulation de celui-ci par la technique CSK. Il y était même fait mention d'une méthode d'accès multiple en assignant un jeu de phases spécifique à chaque nouvel utilisateur.

Les recherches traitant de TDCS visèrent alors à répondre à des questions tant théoriques que pratiques ; ce fut le cas des travaux de Roberts [Robe 00], qui proposa une technique d'acquisition et de synchronisation d'un signal TDCS, et de Klein, qui suggéra l'emploi de la transformée en ondelettes afin de détecter et contrecarrer au mieux les interférences non stationnaires [Klei 01b, Klei 01a].

Le siècle changeait, et la problématique aussi. Avec le développement des nouvelles technologies, le spectre disponible devenait de plus en plus rare, sur un plan légal en tout cas. Cette raréfaction réglementaire est parfaitement représentée sur le diagramme de répartition du spectre aux États-Unis [FCC 03], mais la réalité était tout autre. De nombreuses mesures *in situ* montrèrent que, malgré l'allocation complète du spectre, celui-ci était fortement sous-exploité [Stap 04, FCC 02]. Pour répondre à cette problématique, le concept de radio cognitive fut alors popularisé [Mito 00, Cabr 06] : l'avenir de la radio passerait par la connaissance du spectre environnant et par l'utilisation flexible et adaptative des ressources disponibles sans nuire aux communications des utilisateurs licenciés.

Par essence, TDCS répondait à cette problématique, et gagna logiquement en popularité : les articles traitant de TDCS se multiplièrent. Du côté de l'AFIT, Nunez proposa une adaptation à encodage spectral de la populaire modulation PSK [Nune 05], tandis que Chakravarthy réintroduisit la technologie et démontra sa robustesse face à des interférences mouvantes [Chak 05b]. Critique pour le bon fonctionnement du système, la question d'une bonne estimation du spectre fut alors traitée dans [Cabr 04, Liu 07, Lee 02], avec notamment l'étude de l'effet Doppler sur la communication et du cas où le récepteur et l'émetteur ne partagent pas le même spectre disponible.

Popularisée, la recherche autour de TDCS foisonnait, et de nombreuses pistes d'étude étaient ouvertes pour améliorer les performances du système. Une implémentation efficace de la démodulation CSK [Dill 03] ainsi que l'utilisation de blocs OFDM standard furent mises en œuvre par Han et Budiarjo [Budi 08b, Han 06], tandis qu'un scénario d'application concret était détaillé dans [Han 08]. Des initiatives furent alors prises pour augmenter l'efficacité spectrale et énergétique du système, plus précisément avec les travaux de Han [Han 07], qui proposa une démodulation douce (*soft*) dans le cas d'un canal multitrajet, et ceux de Budiarjo [Budi 08c], qui combina les modulations CSK et PSK pour améliorer le débit utile du système. Enfin, la question de l'efficacité énergétique fut posée par Martin, dans [Mart 09], pour réduire le PAPR des signaux TDCS.

Si l'abondance des publications atteste de la vitalité d'un domaine de recherche, elle nuit cependant à sa clarté : la multiplication des variantes de TDCS ont rendu floues les différences technologiques avec d'autres systèmes, notamment OFDM (comme nous le verrons dans la section 3.2.3). C'est pour cela qu'un travail de synthèse, de pédagogie et de formalisation a été mené par plusieurs auteurs précédemment cités, notamment par l'AFIT, avec la proposition du formalisme « encodage et modulation spectraux », ou *Spectrally Modulated, Spectrally Encoded framework*, SMSE [Robe 07, Chak 08, Chak 09, Chak 10].

3.1 État de l'art

Toutes ces études ont conduit à de premières implémentations matérielles du système de communication, avec tout d'abord une plateforme audio [Hake 07b, Hake 07a], puis la mise en œuvre d'une plateforme *GNU Radio* opérant dans la bande 400-500MHz [Zhou 10].

Ainsi, en l'espace de trente ans, TDCS est passé du statut de curiosité théorique à celui de technologie applicable pour répondre au problème aigu de la raréfaction spectrale. Toutefois, malgré la diversité des études traitant du système, plusieurs caractéristiques demeuraient inconnues. Celles-ci sont présentées dans la section suivante.

3.1.2 TDCS, encore *terra incognita*

Lorsque ce travail de thèse a débuté en décembre 2008, plusieurs pistes de recherche restaient inexplorées. En effet, une majorité des recherches précédemment évoquées portait une attention particulière, sinon exclusive, à la mesure de la capacité intrinsèque des systèmes à éviter les interférences. Toutefois, aussi surprenant que cela puisse paraître, la question essentielle des performances du système en termes d'efficacité spectrale ou de débit restait floue.

Ainsi, si un lien avait déjà été établi entre la modulation CSK et la modulation orthogonale [Ends 94, Dill 03] et avait permis d'établir les performances théoriques en taux d'erreur binaire des modulations 2-CSK et M-PSK [Swac 99, Nune 05, Chak 05b], la question de la taille maximale de la constellation CSK était passée sous silence. Le problème n'a été soulevé que lorsque Han a affirmé que TDCS était intrinsèquement un système de transmission bas-débit, et a émis l'idée, ainsi que Budiarjo, que la taille de constellation CSK optimale était égale à la taille de la transformée de Fourier discrète [Han 08, Budi 08a], sans apporter d'explication formelle. C'est ce qui a conduit Budiarjo à proposer une modulation combinant CSK et PSK pour améliorer l'efficacité spectrale de TDCS [Budi 08c], article innovant, mais dont toutes les conclusions n'ont pu être tirées, comme nous le verrons par la suite.

Cette quête de compréhension a été le fil rouge de la première partie de cette thèse. Par l'approche nouvelle de TDCS sous l'angle des modulations linéaires et de la dimensionnalité, les recherches ont abouti sur trois publications, dans lesquelles les questions et incertitudes évoquées dans le paragraphe précédent ont été résolues, et des améliorations présentées. Ces publications sont disponibles dans les archives du journal *IET Communications* [Fuma 11e], et dans les actes de conférences de *AICT 2011* [Fuma 11d], et *CROWNCOM 2011* [Fuma 11b].

Une fois la question de l'efficacité spectrale résolue, celle de l'efficacité énergétique du système a été posée. Car, comme pour les systèmes multiporteuses, le problème du fort PAPR du système TDCS était souvent évoqué [Chak 05a, Han 07, Hake 07a, Han 08] mais il a fallu attendre l'article de Martin [Mart 09] en septembre 2009 pour voir une première ébauche de solution. Élégant, l'algorithme de Martin souffrait néanmoins d'une convergence lente. Cet article a été l'élément fondateur de nos recherches qui ont abouti à plusieurs nouveaux algorithmes, présentés aux conférences *SPAWC 2011* [Fuma 11c], *CMSP 2011* [Fuma 11a], et détaillés dans un article soumis au journal *IEEE Transactions on Wireless Communications* [Fuma 11f].

Toutefois, avant de présenter le fruit de nos recherches sur ces points spécifiques, il est nécessaire de présenter le système de communication TDCS autour duquel nos études se sont articulées.

3.2 Modèle du système

3.2.1 Émetteur TDCS

Comme cela a été signalé dans l'historique de TDCS, plusieurs variantes de modèles existent [Swac 99, Nune 05, Han 08, Budi 08c] ; celles-ci diffèrent notamment selon la modulation choisie. Nous décidons d'adopter ici le modèle de la figure 4.6 qui a l'avantage de couvrir les deux modulations principalement utilisées.

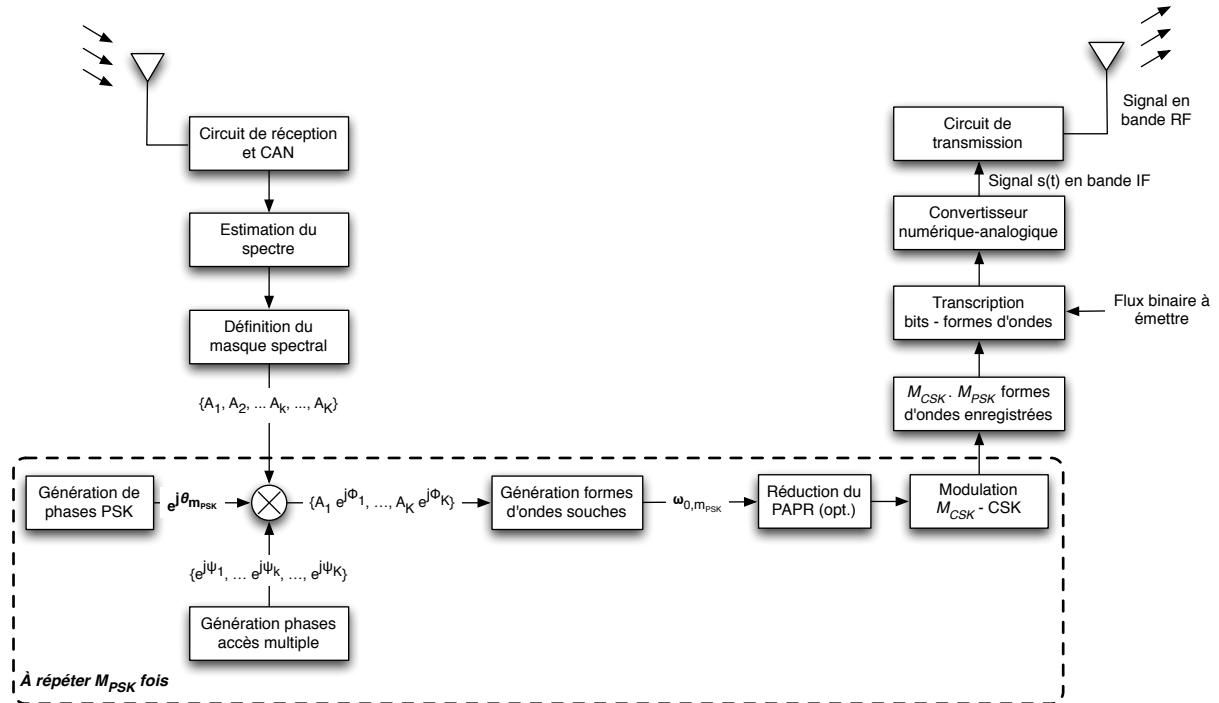


FIGURE 3.1 Modèle d'émetteur TDCS à modulation CSK et PSK

À première vue, cet émetteur peut intriguer puisqu'il possède une antenne réceptrice en plus de son antenne émettrice. Cette antenne lui est nécessaire afin d'assurer ses fonctions de radio cognitive, comme cela est détaillé dans le paragraphe 3.2.1.1.

3.2.1.1 Présentation générale du système

Estimation du spectre Suivant l'étape de descente en fréquence du circuit de réception puis l'étape de conversion analogique vers numérique (CAN), ce bloc permet à l'émetteur d'avoir connaissance de son environnement : elle consiste à détecter quels sont les autres utilisateurs présents sur le canal, et quelles bandes sont occupées par des brouilleurs. Avec l'avènement de la radio cognitive, de nombreuses études ont été menées pour estimer au mieux le spectre disponible. Nous pouvons notamment citer les techniques

3.2 Modèle du système

suivantes : périodogramme, décomposition en ondelettes [Klei 01b], transformée de Fourier fractionnée [Wang 06], *et caetera*. Par ailleurs, l'impact d'une mauvaise estimation a été abordé dans [Liu 07] et [Lee 02]. Une présentation générale de la problématique pouvant être trouvée dans [Cabr 04], cette thèse n'abordera pas la question de l'estimation du spectre, et prend pour hypothèse la disposition immédiate d'un masque spectral à respecter.

Définition du masque (ou « gabarit ») spectral Une fois le spectre environnant estimé, il est nécessaire de définir les portions de spectre qui seront utilisées lors de la transmission. Cette étape dépend non seulement des fréquences disponibles et de la puissance de l'émetteur (lié à l'amplitude A_k de chaque composante sinusoïdale), mais aussi de la politique d'accès multiple pour partager le médium, ainsi que d'éventuels compromis de co-existence avec les bandes occupées [Chak 08, Chak 09, Chak 10].

Il est important de noter que le gabarit obtenu est discret, et contient K sous-porteuses, ou plus précisément « composantes sinusoïdales », puisqu'elles ne « portent » pas individuellement l'information, dont K_u sont actives (non nulles).

Vecteur de phases Chaque composante sinusoïdale du spectre se voit assigner une phase $\phi_k^{(v)}$, propre au v -ième utilisateur. Les composantes du vecteur de phases Φ du spectre comprennent deux phases : $\phi_k^{(v)} = \theta_{m_{\text{PSK}}}^{(v)} + \psi_k^{(v)}$, $\psi_k^{(v)}$ étant une phase aléatoire qui permet un accès partagé au médium [Swac 99], mais aussi l'obtention d'un signal quelconque (propriété appelée *noise-like* dans la littérature). De plus, selon la modulation choisie, Φ comprend aussi une phase $\theta_{m_{\text{PSK}}}^{(v)}$ portant une information (avec $m_{\text{PSK}} \in \llbracket 1, M_{\text{PSK}} \rrbracket$).

Génération du signal souche Cette étape est souvent une transformée de Fourier inverse, ce que nous considérons tout au long du manuscrit. Toutefois, il existe des recherches ayant porté sur l'utilisation d'autres types de transformée, telle que la transformée en ondelettes [Klei 01a, Klei 01b, Lee 02]. Il est bon de noter que cette étape ne doit être réitérée qu'en cas de nouveau masque spectral ou de nouveau vecteur de phases.

Le signal souche ainsi généré constitue la base de la transmission : c'est celui-ci qui sera modulé. Ainsi, l'émetteur doit transmettre les informations génératrices (gabarit spectral \mathbf{A} , vecteur de phases Ψ) à chacun des récepteurs, afin que ceux-ci puissent correctement démoduler le signal TDCS entrant.

Réduction du PAPR C'est la première fois que ce bloc est ajouté dans un schéma de système TDCS¹. L'algorithme présent dans ce bloc doit conserver le spectre initial tout en réduisant la dynamique en amplitude du signal, selon la nécessité mentionnée par la section 2.2.

En d'autres termes, cet algorithme agit sur le vecteur de phases Φ . Agissant sur les phases, ce dernier est donc incompatible avec la modulation PSK, et rend inutile tout effort antérieur porté sur la génération du vecteur de phases Ψ .

1. Comme précédemment évoqué, la réduction du PAPR appliquée à TDCS a été premièrement étudiée dans [Mart 09]. Ce bloc n'y était cependant pas explicitement schématisé.

Transcription bits-signal Le flux de données à transmettre est une séquence de mots binaire. Aussi appelé *mapping*, ce bloc se charge d'associer chaque mot binaire à un signal ; il s'agit d'une transcription du flux binaire en un signal en bande intermédiaire, ou *bande IF*.

Circuit d'émission Ce bloc contient toutes les opérations nécessaires à l'émission RF, notamment un décalage en fréquence afin d'envoyer le signal dans la bande considérée. Cette étape, qui relève d'avantage du domaine de l'électronique que de celui du traitement du signal, ne sera pas détaillée dans cette thèse.

Maintenant que l'émetteur TDCS est présenté dans sa globalité, détaillons les deux principales modulations utilisées dans TDCS.

3.2.1.2 Modulations pour TDCS

À la différence des systèmes de communication multiporteuses classiques où chaque sinus est modulé par un flux binaire, dans un système TDCS, la même information est portée simultanément par l'ensemble des composantes sinusoïdales. Nous nous intéressons ici aux deux modulations principalement utilisées dans TDCS : la modulation par décalage cyclique (*Cyclic Shift Keying*, CSK) [Swac 99, Ends 94], et la modulation par saut de phase à encodage spectral (*Spectrally Encoded Phase Shift Keying*, PSK) [Nune 05]. Ces deux modulations peuvent être utilisées simultanément [Budi 08c] et permettent l'obtention d'une constellation de $M = M_{\text{PSK}} \cdot M_{\text{CSK}}$ signaux, M_{PSK} et M_{CSK} étant le nombre de sauts de phase ou de décalages temporels possible dans chacune des modulations.

3.2.1.2.a Expression du signal souche

Nous supposons ici que l'estimation du spectre disponible a abouti à un gabarit composé de K composantes sinusoïdales. Ce gabarit est défini par l'équation (3.1) :

$$S_{m_{\text{PSK}}}^{(v)}(f) = \sum_{k=1}^K A_k^{(v)} \delta(f - k\Delta_f) e^{+j\Phi_k^{(v)}} + A_k^{(v)} \delta(f + k\Delta_f) e^{-j\Phi_k^{(v)}} , \quad (3.1)$$

avec l'index symbole $m_{\text{PSK}} \in \llbracket 0, M_{\text{PSK}} - 1 \rrbracket$, $A_k \in \{0,1\}$ l'amplitude de la composante sinusoïdale, K le nombre de composantes sinusoïdales, Δ_f l'espacement de l'échantillonnage spectral. $\Phi^{(v)}$ est le vecteur de phases pour l'ensemble des sinus correspondant à l'utilisateur v , et δ est le symbole de Kronecker. De plus, nous prenons une durée symbole égale à $T = \frac{1}{\Delta_f}$ et supposons que parmi les composantes sinusoïdales, K_u ont une amplitude $A_k = 1$, les autres amplitudes étant fixées à zéro. Ainsi, la bande passante effective qu'occupe ce spectre est de $W_u = K_u \Delta_f$.

À partir de ce gabarit, un signal souche $\omega_{0,m_{\text{PSK}}}(t)$ est généré (3.2) pour chaque symbole en effectuant une transformée de Fourier inverse discrète (IDFT) de l'équation (3.1).

3.2 Modèle du système

$$\begin{aligned}\omega_{0,m_{\text{PSK}}}^{(v)}(t) &= \mathcal{F}^{-1} \{ S_{m_{\text{PSK}}}^{(v)}(f) \} \\ &= 2 \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi k \Delta_f t + \psi_k^{(v)} + \theta_{m_{\text{PSK}}}^{(v)})\end{aligned}\quad (3.2)$$

Afin d'alléger la notation, l'exposant (v) sera omis dans la suite de ce document, puisque seul le cas mono-utilisateur est étudié. De plus, lorsque seule la modulation CSK sera considérée, l'indice m_{PSK} sera omis. De même, lorsque seule la modulation PSK sera considérée, l'indice $_0$ spécifiant le signal souche sera abandonné, ainsi que le suffixe de l'indice m_{PSK} . Ces deux modulations sont détaillées dans les paragraphes suivants.

3.2.1.2.b Spectrally Encoded Phase Shift Keying

Même si PSK n'est pas la modulation historiquement utilisée dans TDCS, nous décidons de la présenter la première dans un souci de clarté. Introduite en 2005 par Nunez [Nune 05], la modulation PSK, telle qu'utilisée dans TDCS, diffère sensiblement de ce qui est fait dans les systèmes mono- et multiporteuses traditionnels. En effet, si l'information est aussi portée par la phase (traditionnellement $\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{M_{\text{PSK}}}$), dans TDCS cette dernière est appliquée à chaque composante sinusoïdale, en plus de la phase aléatoire ψ_k mentionnée dans la section 3.2.1.1. Nunez parle ainsi de modulation à *encodage spectral*. Dans la suite de ce manuscrit, nous omettrons cet attribut.

Le principe de la modulation PSK à encodage spectral est illustré par la figure 3.2. Pour chaque valeur de θ_m , un signal doit alors être généré, formant un ensemble de M_{PSK} signaux.

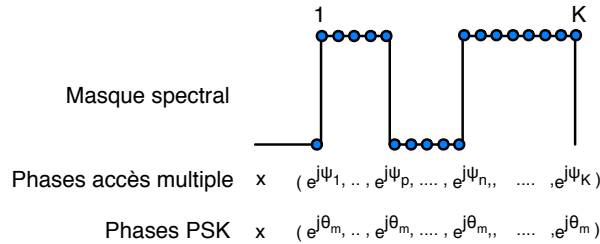


FIGURE 3.2 Principe de la modulation PSK pour un système TDCS

Tout comme dans le cas de la modulation PSK monoporteuse, les M_{PSK} signaux d'énergie ε peuvent être représentés par le diagramme de constellation classique (par exemple, celui de la figure 2.3). Toutefois, si la base de l'espace signal est formée par un cosinus et un sinus dans le cas monoporteuse, ici, la base orthonormée considérée est constituée de deux signaux à support $[0, T]$: $\Omega = (\omega_0(t), \omega_1(t))$, explicités dans les équations (3.3) et (3.4) :

$$\omega_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T \sum_{k=1}^K A_k^2}} \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi k \Delta_f t + \psi_k), \quad (3.3)$$

$$\omega_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T \sum_{k=1}^K A_k^2}} \sum_{k=1}^K A_k \sin(2\pi k \Delta_f t + \psi_k) . \quad (3.4)$$

Le facteur présent devant chaque somme est un facteur d'échelle nécessaire pour s'assurer que la base est orthonormée. La multiplication par $\sqrt{\varepsilon}$ est ensuite nécessaire pour s'assurer que la même énergie ε est émise à chaque transmission. L'ensemble de ces coefficients est appelé *scale factor* dans la littérature.

Puisque cette modulation PSK appliquée à TDCS diffère de celle que l'on peut trouver dans un système monoporteuse, il est intéressant de vérifier que l'intercorrélation de deux symboles TDCS-QPSK est nulle. Cela est réalisé dans l'annexe A.

Présentons à présent la modulation CSK, prédominante dans TDCS.

3.2.1.2.c Cyclic Shift Keying

La plus fréquemment citée dans la littérature, la modulation CSK consiste à décaler de manière cyclique le signal souche $\omega_0(t)$, choisi selon l'équation 3.2 avec $\theta_{m_{\text{PSK}}} = 0$, pour obtenir M_{CSK} signaux différents. Le principe est illustré dans la figure 3.3 pour une constellation de $M_{\text{CSK}} = 4$ symboles, et les signaux résultants peuvent s'écrire selon l'équation :

$$\omega_{m_{\text{CSK}}}(t) = \omega_0 \left(t - \frac{m_{\text{CSK}} T}{M_{\text{CSK}}} \right)_T , \quad (3.5)$$

avec $m_{\text{CSK}} \in \llbracket 1, M_{\text{CSK}} \rrbracket$, M_{CSK} l'ordre de la modulation et T la durée du signal. $s(t - x)_T$ est une notation introduite dans [Swac 99] pour indiquer un décalage cyclique de durée x du signal s . Par la suite, lorsque seule la modulation CSK sera considérée, le suffixe de l'indice m_{CSK} sera omis.

La modulation CSK possède plusieurs caractéristiques intéressantes :

- elle est simple à mettre en œuvre : une simple rotation dans le domaine temporel ne requiert aucun traitement lourd, facilitant ainsi son implémentation matérielle ;
- elle n'altère pas le signal et n'a aucun impact ni sur son PAPR puisque l'allure du signal est inchangée après modulation, ni sur son spectre puisque seule une phase linéaire est ajoutée sur chacune des composantes sinusoïdales² ;
- selon [Dill 03], la modulation CSK génère des symboles pseudo-orthogonaux entre eux, notamment pour un nombre élevé de composantes sinusoïdales. Les lobes secondaires de la fonction d'autocorrélation ont donc un impact important sur les performances de la modulation, ainsi que nous le verrons dans la section 4.3.3.2.

Ce dernier point est important : la modulation CSK s'apparente par conséquent à la modulation orthogonale MOS, et peut par conséquent utiliser sa représentation dans l'espace signal, donnée par l'équation (3.6) :

2. Nous supposons que la durée du symbole est suffisamment longue pour que l'effet d'une possible discontinuité soit restreint.

3.2 Modèle du système

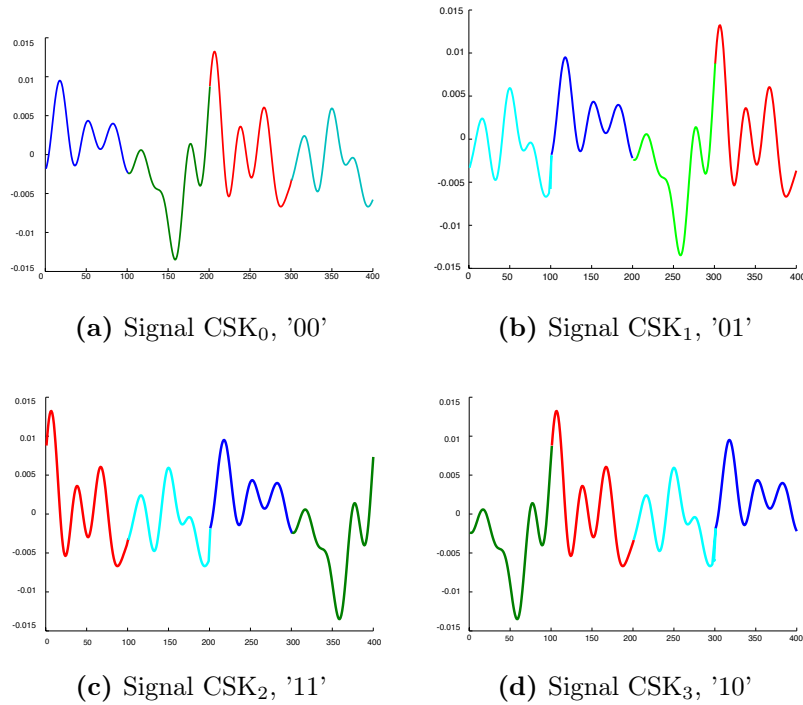


FIGURE 3.3 Exemple de signaux générés par la modulation CSK

$$\begin{aligned}
 s_0 &= (\overbrace{\sqrt{\varepsilon}, 0, 0 \dots, 0}^{M_{\text{CSK}}}) \\
 s_1 &= (0, \sqrt{\varepsilon}, 0 \dots, 0) \\
 &\dots \\
 s_{M_{\text{CSK}}-1} &= (0, \dots, 0, 0, \sqrt{\varepsilon}) .
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

avec le signal $s_i(t) = \omega_i(t)$.

Enfin, il existe une modulation combinant CSK et PSK introduite par [Budi 08c] qui consiste à opérer un décalage cyclique sur chaque signal souche généré par la modulation PSK. Les performances de cette variante seront étudiées au cours de la section 4.3.2.

3.2.2 Récepteur TDCS

Comme cela a été précisé dans la section 1.2.2, le canal considéré est AWGN, et nous supposons la synchronisation parfaite. Il convient donc de choisir un récepteur optimum pour ce type de canal, tel que le récepteur basé sur le maximum de vraisemblance (*maximum-likelihood receiver*). [Rice 08] propose une approche dans l'espace signal de ce récepteur, tandis qu'il est démontré dans [Proa 07] qu'une implémentation possible de ce récepteur est de calculer la corrélation du symbole bruité entrant avec tous les symboles possibles (c'est-à-dire tous les signaux possibles). Le schéma de ce récepteur est donné dans la figure 3.4.

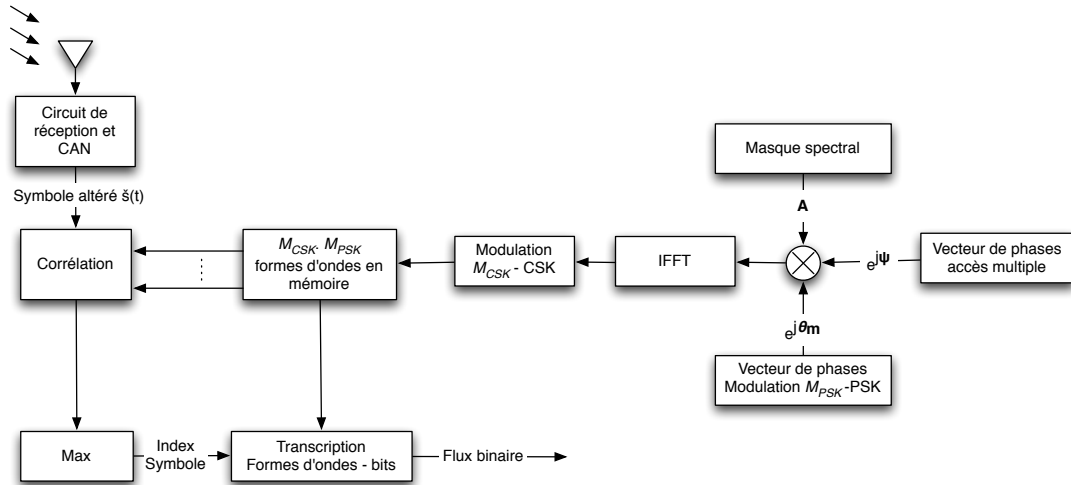


FIGURE 3.4 Récepteur TDCS par corrélateur

Bien entendu, cette corrélation symbole par symbole est extrêmement consommatrice de ressource, et ne peut être implémentée telle quelle sur une carte FPGA ou DSP si les constellations sont de grande taille. C'est pourquoi une implémentation optimale, faisant appel à un nombre réduit d'opérations, est présentée dans la section suivante pour la modulation PSK.

3.2.2.1 Récepteur CSK

Le principe de ce récepteur a été introduit dans [Dill 03], avant sa mise en œuvre dans un système TDCS [Han 08]. Celui-ci est illustré dans le schéma 3.5.

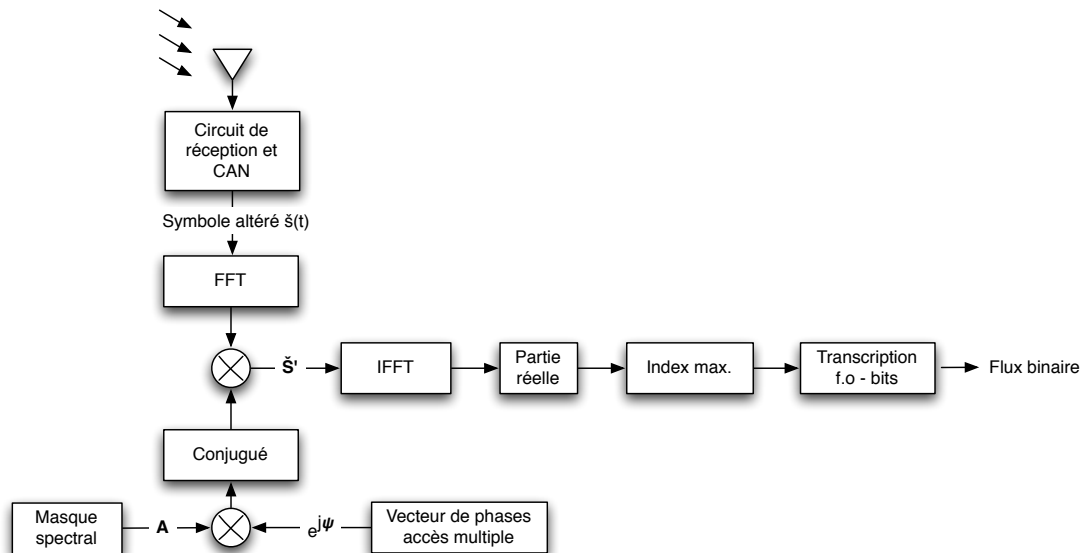


FIGURE 3.5 Récepteur TDCS-CSK implémenté à l'aide d'une transformée de Fourier

Au lieu d'effectuer un calcul gourmand de corrélations dans le domaine temporel, celui-ci est entrepris par une simple transformée de Fourier et une multiplication dans le

3.2 Modèle du système

domaine spectral.

Déroulement de la démodulation Le symbole bruité entrant passe au travers d'une FFT et les phases ψ_k propres à l'utilisateur émetteur sont soustraites du spectre après une première multiplication avec le gabarit spectral conjugué. Ainsi, le spectre résultant \tilde{S}' ne possède plus que les phases linéaires dues au décalage cyclique et un bruit de phase résiduel.

Associée à la multiplication précédente, la transformée de Fourier inverse génère l'autocorrélation du symbole, et l'étude du maximum de la partie réelle du vecteur sortant permet d'estimer le décalage du symbole émis.

Les M corrélations initialement nécessaires à la démodulation d'un symbole ont ainsi été remplacées par deux transformées de Fourier et une multiplication.

3.2.2.2 Récepteur PSK

Dans le cas de la modulation PSK sur système TDCS, il n'est pas possible d'utiliser la méthode classique de sous-échantillonnage utilisée dans le cas d'un signal monoporteuse. [Budi 08c] propose une démodulation peu gourmande en ressource, et montre qu'expérimentalement celle-ci correspond aux performances de la modulation PSK classique, sous-entendant qu'elle est optimale. Le schéma correspondant est donné par la figure 3.6.

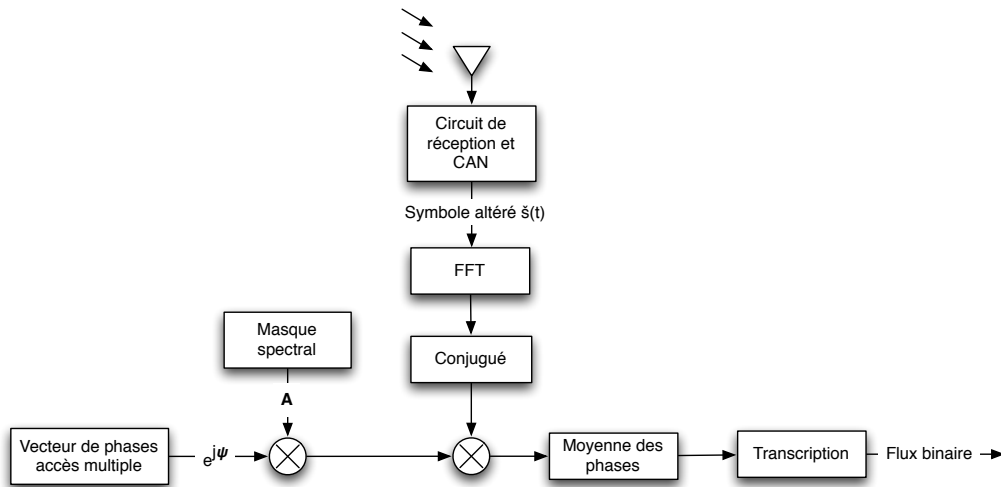


FIGURE 3.6 Récepteur TDCS-PSK implémenté par simple moyenne

Dans le récepteur proposé, une première multiplication est aussi nécessaire à la suppression des phases « accès multiple » ψ_k , tandis qu'une moyenne des phases sur toutes les composantes sinusoïdales est calculée afin de déterminer θ_m .

Ainsi, alors que la complexité du schéma 3.4 augmentait avec le nombre de points dans la constellation, les deux précédentes implémentations ont l'avantage de requérir un nombre limité d'opérations indépendamment de la taille de la constellation.

3.2.3 Mise en perspective du système TDCS

Tout comme le système OFDM (voir 2.1.3.3), le transmetteur TDCS est basé sur l'utilisation d'une transformée de Fourier discrète inverse. Cette similitude peut porter à confusion, d'autant que de nombreuses variantes d'OFDM sont très ressemblantes à TDCS. Ainsi présentons-nous dans cette section les similarités et les différences entre ces techniques.

3.2.3.1 Comparaison avec OFDM

Similarités entre OFDM et TDCS :

- Une transformée de Fourier (inverse) est la pierre angulaire des émetteurs et récepteurs des deux systèmes.
- Les deux systèmes étant composés de plusieurs composantes sinusoïdales, les deux sont sujets au problème d'un PAPR fort si aucune contre-mesure n'est prise.
- Certaines composantes peuvent être désactivées dans les deux systèmes.
- Un intervalle de garde est présent dans OFDM et peut être ajouté au système TDCS, comme cela a été proposé dans [Budi 08c, Han 06, Han 08].

Différences entre OFDM et TDCS :

- *Leur philosophie* OFDM a été initialement conçu pour remplacer efficacement les systèmes de multiplexage en fréquences (*Frequency Division Multiplexing*, FDM) en évitant une bande de garde puisque la transformée de Fourier inverse génère des composantes sinusoïdales orthogonales entre elles.

Dans TDCS, cette transformée joue son rôle originel : générer un signal temporel à partir d'un spectre donné, qui occupe les bandes libres et évite les interférences.

- *Unicité du signal souche* Tandis qu'un émetteur OFDM utilise la transformée de Fourier inverse pour chaque transmission, TDCS effectue l'opération uniquement en cas de changement de gabarit spectral, ou d'une nouvelle définition du vecteur de phases.

Ainsi, si les interférences environnant le système changent une fois par heure, le signal souche a besoin d'être généré une fois par heure.

- *La contrainte d'orthogonalité* Dans OFDM, l'orthogonalité entre chaque sous-porteuse est primordiale, et des techniques complexes pour compenser l'effet du canal de transmission doivent être mises en œuvre. Portant l'information sur l'ensemble des composantes sinusoïdales, TDCS est robuste à la perte d'orthogonalité entre quelques celles-ci puisque la même information est portée par toutes.
- *La modulation CSK* Celle-ci n'affecte pas le signal, ni le spectre de transmission. Ainsi, TDCS peut jouer sur les phases du signal souche pour obtenir des propriétés spécifiques : un faible PAPR, une faible intercorrélacion avec d'autres utilisateurs ou une bonne fonction d'autocorrélacion. Cela constitue un degré de liberté propre au système, puisque les phases du système OFDM sont, elles, dictées par le flux binaire entrant qui varie en permanence.

3.2 Modèle du système

Il existe ainsi un nombre important de différences entre ces deux systèmes, malgré leur structure relativement similaire. Toutefois, de nombreuses variantes d'OFDM ont pu se développer et tendent à ressembler à TDCS.

3.2.3.2 Comparaisons avec des variantes d'OFDM

De nombreuses déclinaisons d'OFDM ont été étudiées dans la littérature. Il est impossible de toutes les passer en revue dans cette section, tant leur nombre est important, et leurs acronymes inextricables. Nous avons toutefois décidé d'en présenter certaines, en soulignant leurs similitudes avec TDCS.

- NC-OFDM *Non Contiguous OFDM* ou encore *Discontiguous OFDM* est la variante radio cognitive d'OFDM afin de pouvoir activer et désactiver les porteuses selon le spectre environnant. [Weis 04, Post 05] en dresse le concept et les enjeux.
- MC-CDMA *Multi-Carrier CDMA* propose l'emploi des codes utilisés dans CDMA (tels que Gold, Chu, Golay, Walsh) directement sur le spectre. Il n'est alors plus question d'étalement spectral comme c'est le cas dans CDMA. Si, à l'instar de TDCS, chaque porteuse contient la même information, la philosophie de MC-CDMA est différente et tend à chercher une meilleure orthogonalité entre les utilisateurs plutôt qu'à éviter des interférences. Dans sa mise en œuvre, MC-CDMA est très ressemblant à TDCS, la modulation CSK en moins. [Hara 97] en donne une introduction, tandis qu'une présentation et un état de l'art plus complet est donné dans [Faze 08].
- MCSOK MC-CDMA *Multiplexed Cyclic Shift Orthogonal Keying MC-CDMA* est une variante de MC-CDMA qui, basée sur les codes de Chu décalés cycliquement avant la transformée de Fourier, aboutit sur un signal à très faible PAPR dont l'efficacité spectrale est augmentée par rapport à MC-CDMA. Une des dernières améliorations a été apportée dans [Deng 10].
- PO-CI/OFDM *Pseudo-Orthogonal Carrier Interferometry/OFDM* se rapproche fortement des systèmes MC-CDMA et porte une attention particulière à la réduction du PAPR [Wieg 03].

Afin de synthétiser toutes ces pistes de recherches différentes, le formalisme SMSE (*Spectrally Encoded Spectrally Modulated*) a été proposé dans [Robe 07, Chak 08, Chak 09, Chak 10].

3.2.3.3 Les spécificités de TDCS et leurs conséquences

En quelques mots, TDCS se démarque de toutes les autres technologies sur trois points précédemment décrits : la philosophie, l'unicité du signal souche et la modulation CSK. Ces particularités ont des conséquences sur l'efficacité spectrale et énergétique de TDCS.

En effet, il semblerait que l'efficacité spectrale de TDCS soit plus basse que celle d'OFDM et ne puisse se déterminer de la même manière que pour cette dernière. De plus, pour gagner en efficacité énergétique, les techniques de réduction de PAPR appliquées aux systèmes OFDM semblent inadaptées à TDCS. Effectivement, dans le cas de la modulation OFDM, ces techniques doivent dynamiquement altérer certaines composantes du spectre en phase et en amplitude ou ajouter une couche de codage sur le flux binaire entrant

pour contrecarrer la dynamique en amplitude du signal. Dans le cas de TDCS, grâce à l'unicité du signal souche, il est possible d'agir *a priori* sur les phases du spectre tout en conservant son amplitude inchangée. Cette opération améliore l'efficacité énergétique, sans altérer le taux d'erreur binaire de la transmission. Ainsi les techniques de réduction de PAPR pour TDCS ne pourront-elles s'appuyer sur la littérature pourtant abondante au sujet d'OFDM.

Si la troisième partie traitera des algorithmes de réduction du PAPR spécifiques à TDCS, le chapitre suivant aborde l'étude de l'efficacité spectrale du système en s'appuyant sur des notions d'algèbre linéaire, avec un intérêt plus particulier porté à la dimensionnalité du système.

Études des performances de TDCS

Ainsi que nous l'avons vu dans le chapitre 3, la littérature autour de TDCS ne couvrait pas l'efficacité spectrale du système TDCS. Ce chapitre se consacre à l'étude de celle-ci ainsi que des taux d'erreur binaire atteignables. Pour ce faire, une approche nouvelle a été employée : utiliser le formalisme des modulations linéaires présenté dans la section 2.1, avec une attention particulière sur la notion de dimensionnalité. Dans un second temps, ce chapitre proposera de nouvelles modulations à même d'accroître l'efficacité spectrale du système, tout en minimisant la complexité ajoutée.

Sommaire

4.1	TDCS à travers le prisme des modulations linéaires	48
4.1.1	Les effets de la dimensionnalité sur l'efficacité spectrale	48
4.1.2	Représentation de la modulation CSK	48
4.1.3	De la nécessité d'utiliser toutes les dimensions possibles	49
4.2	Performances de TDCS en simulation	49
4.2.1	Paramètres de simulation	49
4.2.2	Modulation PSK	49
4.2.3	Modulation CSK	50
4.3	Améliorer l'efficacité spectrale des systèmes TDCS	52
4.3.1	Modulation bi-orthogonale	52
4.3.2	Utilisation combinée de PSK et CSK	53
4.3.3	Modulation multidimensionnelle à haute densité	55
4.3.4	Génération de symboles purement orthogonaux	64
4.4	Conclusions et perspectives	68

4.1 TDCS à travers le prisme des modulations linéaires

4.1.1 Les effets de la dimensionnalité sur l'efficacité spectrale

Dans le cas de TDCS, le masque spectral est choisi par l'utilisateur en fonction des interférences existantes. La bande passante W_u est alors imposée. De plus, en décidant des interférences à éviter, le pas d'échantillonnage spectral Δ_f est lui aussi fixé, déterminant ainsi la durée symbole $T = \frac{1}{\Delta_f}$. De ce fait, TDCS est un système multidimensionnel dont la dimensionnalité est donnée par la formule (4.1) :

$$\begin{aligned} N &\approx 2W_u \cdot T \approx 2K_u \Delta_f \cdot \frac{1}{\Delta_f} \\ &\approx 2K_u, \end{aligned} \quad (4.1)$$

avec K_u le nombre de composantes sinusoïdales utilisées.

Dans le cadre de TDCS, la dimensionnalité est donc déterminée par le nombre de composantes sinusoïdales décrivant le spectre. Il en va de même pour l'efficacité spectrale :

$$\eta_{\text{eff}} \approx \frac{\log_2 M}{K_u} \quad (4.2)$$

Aussi anodine que cette équation puisse sembler, elle n'avait jamais été établie dans le contexte de TDCS. Elle permet de prendre conscience d'un risque dans le choix de la granularité du gabarit : si le pas d'échantillonnage spectral est choisi petit pour décrire finement le spectre, le nombre important de composantes sinusoïdales K_u implique alors la diminution de l'efficacité spectrale atteignable.

4.1.2 Représentation de la modulation CSK

Nous avons vu dans le paragraphe 3.2.1.2.c que la modulation CSK peut utiliser une représentation dans l'espace signal similaire à la modulation orthogonale. Toutefois, alors que la taille de la constellation d'une modulation MOS coïncidait avec la dimensionnalité $N = M$, l'équation (4.1) permet de préciser la taille N de l'espace dans l'écriture des symboles CSK. Ainsi l'équation (3.6) devient (4.3).

$$\begin{aligned} s_0 &= (\overbrace{\sqrt{\varepsilon}, 0, 0 \dots}^N, 0) \\ s_1 &= (0, \sqrt{\varepsilon}, 0 \dots, 0) \\ s_2 &= (0, 0, \sqrt{\varepsilon}, 0, \dots, 0) \\ &\dots \\ s_{M_{\text{CSK}}-1} &= (\overbrace{0, \dots, 0, \sqrt{\varepsilon}}^{M_{\text{CSK}}}, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

La représentation (4.3), montre que la taille de la constellation d'une modulation CSK est potentiellement différente de la dimensionnalité : il serait alors possible de générer de nouveaux signaux orthogonaux.

4.2 Performances de TDCS en simulation

En somme, il peut exister une marge de progression. Celle-ci a pu être négligée par le passé, avec par exemple les systèmes dans [Han 06, Han 08, Nune 05, Swac 99, Lee 02, Budi 08c], où le nombre de symboles CSK était choisi empiriquement : soit M_{CSK} très faible, soit $M_{\text{CSK}} = \frac{N}{2}$. Étudions désormais l'impact de cette inadéquation.

4.1.3 De la nécessité d'utiliser toutes les dimensions possibles

Comme la section 4.1.1 l'a précisé, dans le cas d'un système TDCS, la dimensionnalité N est imposée. Ainsi, bien qu'elle ait des conséquences sur l'efficacité spectrale, il n'est pas question de l'augmenter ou de la diminuer puisque cette valeur est contrainte par les interférences environnantes et le choix de la granularité du masque spectral.

Néanmoins, si N est fixé par le système, M est lui choisi par le concepteur. Or, dans un système où $M_{\text{CSK}} < N$, la distance intersymboles minimale est $d_{\min}^{(M_{\text{CSK}})} = \sqrt{2\varepsilon}$. Maintenant, supposons que l'on transmette $M_{\text{CSK}} = N$ symboles orthogonaux. La distance minimale $d_{\min}^{(M_{\text{CSK}})}$ demeure inchangée tandis que plus de bits sont envoyés avec la même quantité d'énergie. En conséquence, le BER diminuerait aussi à $\frac{E_b}{N_0}$ fixé, tout en augmentant l'efficacité spectrale puisque la taille de la constellation aurait augmenté. Par conséquent, les systèmes de la littérature précédemment cités possèdent une marge de progression à la fois pour le BER et l'efficacité spectrale.

Cette analyse, bien que rapide, permet de rappeler que dans tout système multidimensionnel, il est de première importance de choisir une modulation qui utilise toutes les dimensions offertes par le système. Cela permet, fait inhabituel, de diminuer le taux d'erreur tout en améliorant l'efficacité spectrale. La section qui suit est dédiée à l'étude quantitative du phénomène.

4.2 Performances de TDCS en simulation

4.2.1 Paramètres de simulation

Dans le système TDCS considéré ci-après, on choisit les schémas blocs de la figure 3.4 et 4.6 et l'on utilise le masque spectral s'étalant de 1kHz à 7MHz et évitant des interférences situées entre 2 et 3 MHz. La bande passante efficace du système est alors $W_u = 5,999$ MHz sur une bande totale de $W = 6,999$ MHz. Par ailleurs, $K_u = 256$ composantes sinusoïdales décrivent la bande passante efficace, fixant ainsi la dimensionnalité du système à $N = 512$. Ces données sont illustrées par le gabarit 4.1. Enfin, le canal de transmission est AWGN.

4.2.2 Modulation PSK

Décrite dans le paragraphe 3.2.1.2.b, cette modulation occupe seulement deux dimensions, tout comme pour les systèmes PSK monoporteuses. Dès lors, malgré un principe de fonctionnement sensiblement différent, la distance intersymboles est identique et les courbes en cascade habituelles de systèmes PSK collent parfaitement aux courbes de BER du système TDCS-PSK, ainsi qu'il est originellement décrit dans [Nune 05], et montré en

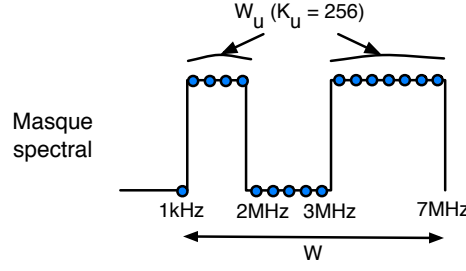


FIGURE 4.1 Gabarit spectral utilisé dans les simulations

figure 4.2. Comme dans toute la suite de ce document, $\frac{E_b}{N_0}$ correspond au rapport de l'énergie binaire $E_b = \frac{\varepsilon}{\log_2 M}$ sur la densité spectrale de bruit N_0 .

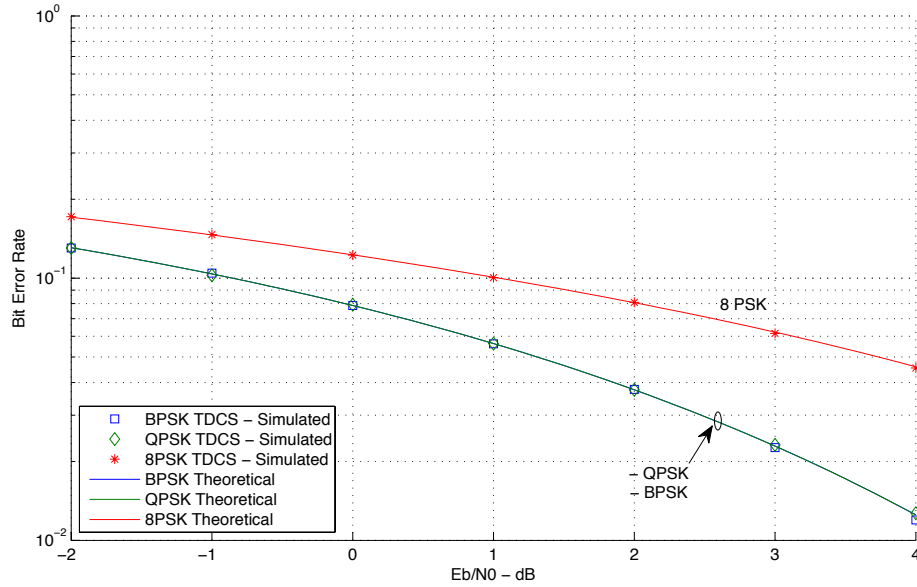


FIGURE 4.2 Taux d'erreur binaire d'un système TDCS - PSK

L'efficacité spectrale est, quant à elle, donnée par la formule (4.4).

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{\log_2 M_{\text{PSK}}}{K_u} \quad (4.4)$$

Dans le cas d'une modulation TDCS-QPSK, celle-ci vaut $\eta_{\text{eff}} \approx 7,8 \cdot 10^{-3} \text{bit/s/Hz}$. Toutefois, comme cela a été souligné, seulement 2 dimensions sont utilisées sur les $N = 512$ disponibles. Selon le raisonnement suivi dans la section 4.1.3, le système est évidemment sous-optimal en termes d'efficacité spectrale et de BER, ce qui sera vérifié par la suite.

4.2.3 Modulation CSK

Présentée dans le paragraphe 3.2.1.2.c comme équivalente à la modulation orthogonale d'ordre M_{CSK} (MOS), l'expérience rejoint la théorie selon la figure 4.3 : les performances

4.2 Performances de TDCS en simulation

théoriques d'un système MOS correspondent aux performances de notre système TDCS utilisant la modulation CSK.

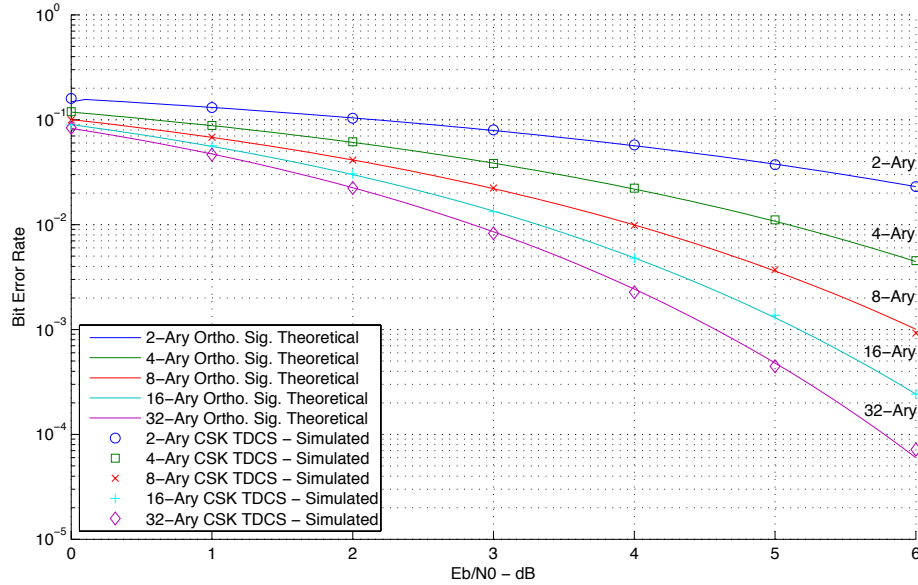


FIGURE 4.3 Taux d'erreur binaire d'un système TDCS - CSK

Bien entendu, puisque les versions temporellement décalées du signal sont intrinsèquement corrélées entre elles, les performances de TDCS-CSK sont en théorie inférieures à celles des systèmes MOS. Toutefois, ce phénomène n'est pas détectable lorsque la dimensionnalité est importante avec $M_{\text{CSK}} < K_u$, et à un rapport signal bruit suffisamment peu élevé.

Quant à son efficacité spectrale, donnée dans l'équation (4.5) pour une taille de constellation $M_{\text{CSK}} = N$, elle est bien meilleure que TDCS-PSK tout en améliorant significativement le taux d'erreur binaire.

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{\log_2 M_{\text{CSK}}}{K_u} \quad (4.5)$$

Nous avons évoqué dans la section 4.1.3 le cas de nombreuses publications dont le système TDCS utilisait arbitrairement une taille de constellation CSK très inférieure à la dimensionnalité du système. Observons donc dans la figure 4.4 les gains que l'on peut obtenir en adaptant la taille de la constellation à la dimensionnalité.

Les résultats sont bien conformes l'analyse détaillée dans la section 4.1.3 : en utilisant la modulation CSK avec $M_{\text{CSK}} = N = 512$, les performances sont améliorées de 0,3 dB par rapport à la modulation CSK avec $M_{\text{CSK}} = N = 256$ pour obtenir un même BER de $3 \cdot 10^{-4}$, et l'efficacité spectrale a progressé en conséquence pour atteindre $\eta_{\text{eff}} \approx 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ bit/s/Hz}$. En outre, on remarque que les performances de cette modulation sont bien meilleures que celle de QPSK, tant au regard de l'efficacité spectrale que du BER tracé dans la figure 4.4.

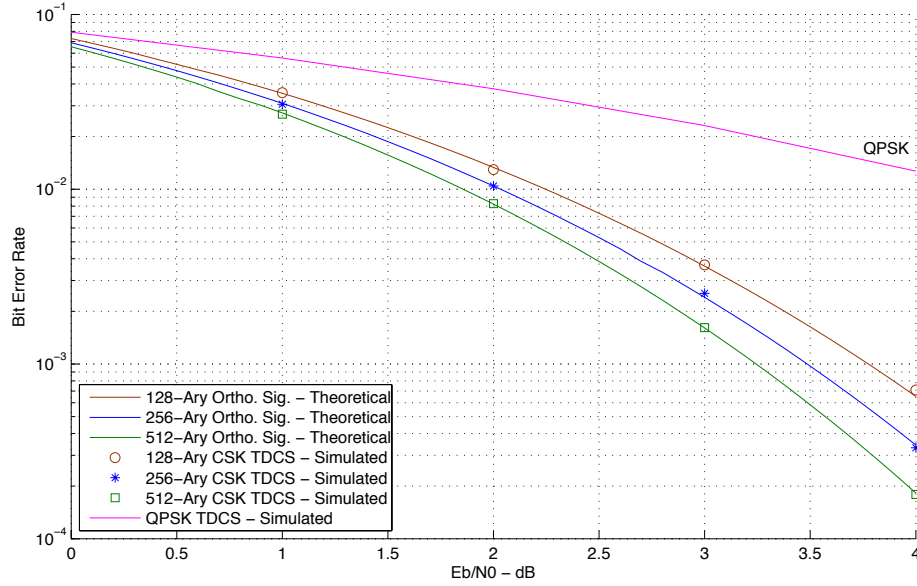


FIGURE 4.4 Taux d'erreur binaire d'un système TDCS - CSK dense

En utilisant une taille de constellation CSK égale à la dimensionnalité, nous avons ainsi la certitude d'améliorer à la fois l'efficacité spectrale et le taux d'erreur binaire de la transmission. Toutefois, il est des applications où cette efficacité spectrale, même améliorée, reste insuffisante. C'est sur ce point que nos recherches se sont ensuite focalisées : améliorer l'efficacité spectrale de TDCS en minimisant la complexité ajoutée.

4.3 Améliorer l'efficacité spectrale des systèmes TDCS

4.3.1 Modulation bi-orthogonale

Une première idée pour améliorer l'efficacité spectrale est d'utiliser les antipodes des symboles CSK. Ceci équivaut à ce que l'on appelle la modulation bi-orthogonale (*Bi-Orthogonal Signaling*, Bi-MOS, ou encore CSK-BPSK). Pour une même taille de constellation, les modulations orthogonales et bi-orthogonales présentent des performances en BER similaires [Proa 07], mais la modulation bi-orthogonale occupe deux fois moins de dimensions. Dans la perspective d'augmenter l'efficacité spectrale à BER constant, cette modulation est ainsi une option tout à fait intéressante.

C'est ce que nous avons simulé dans les conditions décrites dans la section 4.2.1. Les taux d'erreur binaire peuvent alors être atteints à un rapport $\frac{E_b}{N_0}$ inférieur lorsque les antipodes sont mis à profit. Les résultats de la simulation sont présentés en figure 4.5. L'efficacité spectrale qui en découle est de $\eta_{\text{eff}} \approx 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ bit/s/Hz}$, certes très inférieure à ce qu'il est possible d'obtenir avec un signal QPSK monoporteuse, mais près de 10 fois supérieure à un système TDCS utilisant uniquement la modulation QPSK.

4.3 Améliorer l'efficacité spectrale des systèmes TDCS

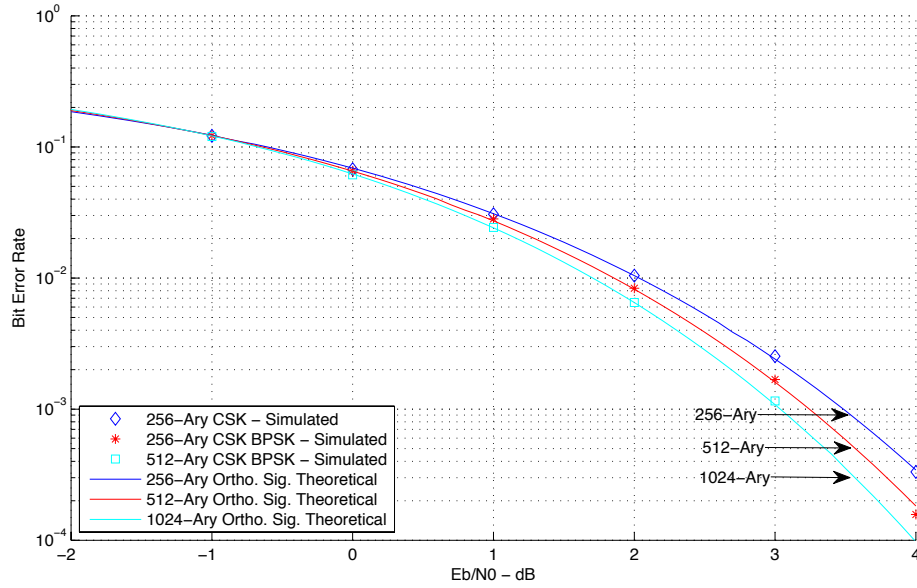


FIGURE 4.5 Taux d'erreur binaire d'un système TDCS - CSK-BPSK

Bien que la taille de la constellation soit effectivement doublée à dimensionnalité constante, l'efficacité spectrale n'augmente que peu du fait de la fonction logarithme qui intervient dans l'équation (2.16). Il est donc nécessaire d'augmenter plus fortement M , c'est pourquoi nous allons étudier l'emploi simultané des modulations CSK et PSK dans la section suivante.

4.3.2 Utilisation combinée de PSK et CSK

L'idée de combiner les deux modulations, tel que cela est fait en figure 4.6, n'est pas à porter à notre crédit. En effet, Budiarto a présenté dans [Budi 08c] un système TDCS où les modulations CSK et PSK sont aussi utilisées conjointement : un premier flux binaire est modulé en PSK, tandis qu'un second flux binaire est modulé en CSK. Le schéma du transmetteur présenté dans [Budi 08c] est rappelé ci-après :

Cette différenciation a abouti à une étude distincte des taux d'erreur binaire des deux flux. Nous nous proposons d'étudier ici le taux d'erreur binaire global du système. Cette approche différente nous permet de parvenir à de nouvelles conclusions en considérant cette fois-ci le rôle de la dimensionnalité du système.

Commençons par établir l'équation (4.6) définissant l'efficacité spectrale que peut fournir un tel système.

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{\log_2(M_{\text{PSK}}M_{\text{CSK}})}{K_u} \quad (4.6)$$

Il est évident que l'efficacité spectrale est améliorée en utilisant un tel système. Par ailleurs, tout comme pour les modulations précédentes, un gain en termes de taux d'erreur binaire est aussi visible dans la figure 4.7. Ce gain n'avait jusqu'à présent pas été remarqué

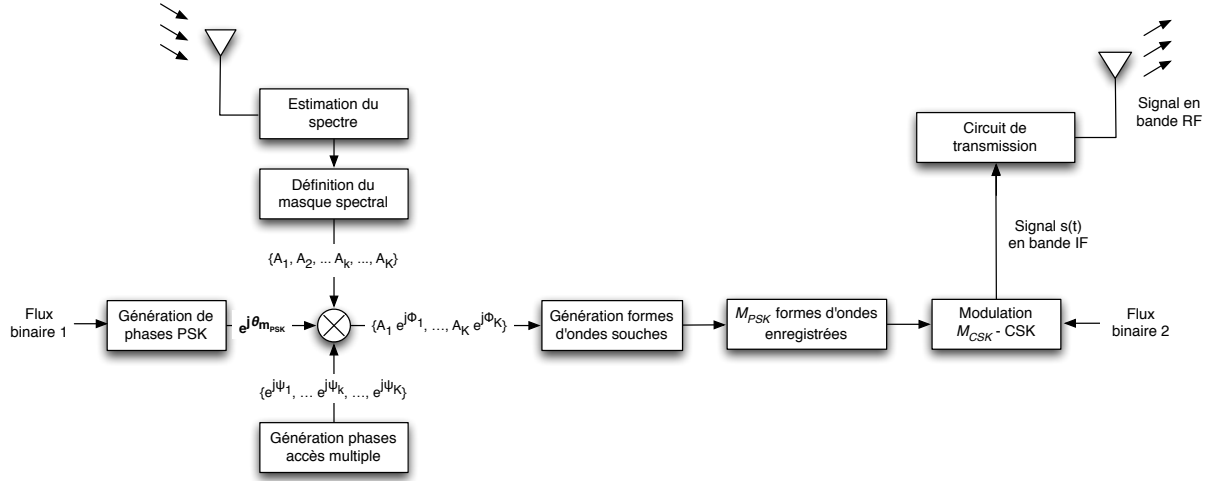


FIGURE 4.6 Modèle d'émetteur TDCS à modulation à flux CSK et PSK disjoints [Budi 08c]

dans la littérature car celui-ci n'est observable que lorsque le BER du flux binaire total est considéré, ce qui n'était pas le cas dans [Budi 08c]. Il est bon de noter que le rapport $\frac{E_b}{N_0}$ est calculé avec $E_b = \frac{\varepsilon}{\log_2 M}$, $M = M_{\text{PSK}} M_{\text{CSK}}$ étant la taille totale de la constellation.

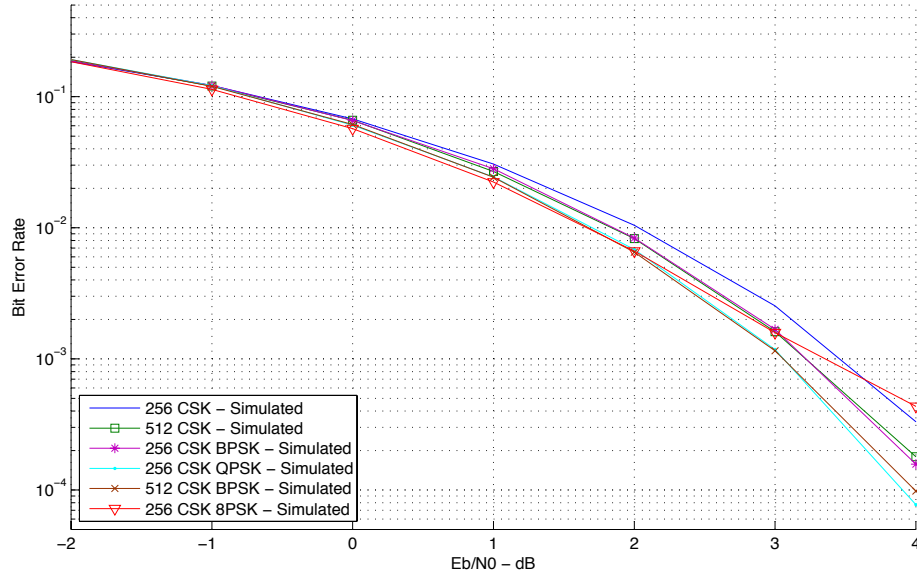


FIGURE 4.7 Taux d'erreur binaire d'un système TDCS - PSK-CSK

Comme l'indique la figure 4.7, les modulations 512-CSK et 256 CSK-BPSK (équivalente à CSK avec l'utilisation des antipodes) présentent des performances identiques. De plus, il est intéressant d'observer que la modulation 256-CSK-QPSK a des performances similaires à 512 CSK-BPSK. Comme l'ont montré les sections précédentes, cela provient du fait que, dans ces deux modulations, toutes les $2K_u$ dimensions sont occupées.

Un autre résultat important est que la modulation 256-CSK-8PSK présente des performances en berne. Cela confirme la pertinence de l'étude de TDCS à travers sa nature

4.3 Améliorer l'efficacité spectrale des systèmes TDCS

multidimensionnelle : lorsque 8PSK est utilisé, le nombre de symboles augmente tandis que le nombre de dimensions utilisé reste inchangé. En conséquence, la distance intersymboles diminue et le BER se détériore.

Lorsque deux modulations présentent la même efficacité spectrale, il faut donc privilégier celle qui occupe le plus de dimensions et qui maximise la distance intersymboles.

Les solutions présentées jusqu'à présent ont l'avantage d'augmenter l'efficacité spectrale du système tout en conservant, voire en diminuant, le taux d'erreur binaire. Toutefois, l'efficacité spectrale atteinte reste toujours bien en deçà des modulations usuelles, telle QPSK. Pour rendre compétitive ces modulations *efficaces en puissance*, il est alors nécessaire de continuer l'effort d'augmentation de la taille de la constellation, au prix de concessions sur le taux d'erreur binaire. C'est ainsi que nous sommes venus à définir une modulation multidimensionnelle à haute densité, présentée ci-après.

4.3.3 Modulation multidimensionnelle à haute densité

Dans l'éternelle quête d'augmentation de la constellation d'un système TDCS, l'idée retenue a été d'utiliser plusieurs dimensions simultanément. En effet, avec la modulation CSK, seule une dimension sur les N disponibles est utilisée pour générer un symbole (c.f. paragraphe 3.2.1.2.c). Ainsi, si la modulation est bel et bien multidimensionnelle, chaque symbole est, lui, monodimensionnel.

Nous avons donc proposé des modifications dans l'architecture de l'émetteur et du récepteur pour avoir des symboles multidimensionnels utilisant k parmi N dimensions, ou « modulation $\binom{N}{k}$ ». Nous supposons par la suite que la modulation CSK permet d'obtenir un ensemble de signaux purement orthogonaux entre eux, ainsi, que chaque signal décalé occupe une seule dimension (dans les faits, pour une modulation CSK avec 32 symboles et 32 composantes sinusoïdales actives, le facteur d'intercorrélation moyen est de 0,0156). Une modulation k parmi N correspondrait alors à sommer k signaux décalés sur les N disponibles, selon l'équation (4.7), pour obtenir un ensemble de symboles, tels que ceux présentés dans l'équation (4.8).

$$s_i(t) = \sum_{m=1}^N [\mathbf{s}_i]_m s_{\text{CSK}_0} \left(t - \frac{mT}{N} \right)_T, \quad (4.7)$$

avec $[\mathbf{s}_i]_m$ la m -ième composante du symbole \mathbf{s}_i (4.8) envoyé.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= (\overbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}, \dots, \sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}}^k, 0 \dots, 0) \\ &\dots \\ \mathbf{s}_i &= (0, \overbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}, \dots, \sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}}^{k-1}, 0, \dots, \sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}, 0 \dots, 0), \end{aligned} \quad (4.8)$$

avec l'index de symbole $i \in I = \llbracket 1, \binom{N}{k} \rrbracket$, et ε l'énergie du symbole.

Les deux sections suivantes vont porter sur la détermination analytique des performances de cette modulation, l'étude du gain en efficacité spectrale d'une part, et pour la suite, les progrès en matière de taux d'erreur binaire.

4.3.3.1 Efficacité spectrale de la modulation $\binom{N}{k}$

Il est immédiat de constater que la taille de la constellation $\binom{N}{k}$ atteint un maximum pour $k = \frac{N}{2}$. Ainsi, si l'on se réfère à l'équation (2.16), l'efficacité spectrale maximale atteignable avec notre modulation peut s'écrire selon l'équation (4.9) :

$$\eta_{\text{eff}_{\max}} = \frac{2 \log_2 \left(\binom{N}{\frac{N}{2}} \right)}{N} . \quad (4.9)$$

Grâce à l'approximation de Stirling rappelée dans l'équation (4.10), il est possible de calculer l'efficacité spectrale limite atteignable en utilisant un grand nombre de dimensions ; celle-ci est alors donnée par l'équation (4.11).

$$\log_2 N! \approx N \left(\log_2 N - \frac{1}{\ln 2} \right) + \frac{1}{2} \log_2 N + \frac{1}{2} \log_2 2\pi \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \eta_{\text{eff}_{\max}} &= \frac{2 \log_2 \left(\binom{N}{\frac{N}{2}} \right)}{N} = 2 \left[\frac{\log_2 N!}{N} - \frac{\log_2 \left(\frac{N}{2}! \right)}{\frac{N}{2}} \right] \\ &\approx 2 \left[1 + \frac{2 - \log_2 2\pi - \log_2 N}{2N} \right] \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \eta_{\text{eff}_{\max}} &= 2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ainsi, $\eta_{\text{eff}_{\max}}$ converge vers 2. Par exemple, un système dont la dimensionnalité est $N = 32$ pourrait atteindre une efficacité spectrale de 1,82bits/s/Hz, proche de celle d'une modulation QPSK. Notons alors que l'utilisation d'un nombre de dimensions encore plus important apporterait une plus grande complexité au regard d'un gain relativement faible en efficacité spectrale.

De 10 à 100 fois plus élevée que pour une modulation CSK, cette efficacité spectrale implique nécessairement une dégradation notable de performances en taux d'erreur binaire. C'est cette métrique que nous étudions dans la section suivante.

4.3.3.2 Performances en BER de la modulation $\binom{N}{k}$

Notre approche est similaire à celle utilisée dans [Proa 07] pour le calcul des performances théoriques de la modulation orthogonale. Nous développons ici les résultats

4.3 Améliorer l'efficacité spectrale des systèmes TDCS

théoriques pour une modulation $\binom{N}{2}$. Toutefois, la même approche est possible pour toute valeur de k . Ainsi le développement pour la modulation $\binom{N}{3}$ est-il donné dans l'annexe B.

Sans nuire à la généralité, supposons que le symbole \mathbf{s}_1 indiqué dans l'équation (4.8), soit envoyé dans un canal AWGN, et que le bruit \mathbf{n} affecte le symbole \mathbf{s}_1 :

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N) , \quad (4.12)$$

avec $n_i, i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, variable aléatoire gaussienne, indépendante, centrée et de variance $\frac{N_0}{2}$. Le symbole reçu peut alors être décrit par l'équation (4.13) :

$$\mathbf{r}_1 = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + n_1, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + n_2, n_3, \dots, n_N \right) . \quad (4.13)$$

Comme nous l'avons vu plus haut, la démodulation optimale dans un canal AWGN est accomplie en corrélant le symbole \mathbf{r}_1 avec les $\binom{N}{2}$ symboles possibles de la constellation. Ces corrélations peuvent être classées selon quatre différentes catégories, définies dans les équations (4.14).

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1 \rangle &= \varepsilon + n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + n_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \\ \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_a \rangle &= \frac{\varepsilon}{2} + n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + n_i \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \\ \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_b \rangle &= \frac{\varepsilon}{2} + n_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + n_j \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \\ \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_c \rangle &= n_{k_1} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + n_{k_2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

avec a, b, c des index de symboles différents appartenant respectivement aux ensembles disjoints A, B, C formant une partition de I , précédemment utilisé par l'équation (4.8). Les ensembles A et B possèdent $N - 2$ index, et C est de taille $\binom{N-2}{2}$. $i, j \in \llbracket 3, N \rrbracket$, $(k_1, k_2) \in \llbracket 3, N \rrbracket^2$ avec $k_1 \neq k_2$.

La probabilité d'une démodulation correcte du symbole \mathbf{s}_1 est donnée par la probabilité donnée par l'équation (4.15).

$$\begin{aligned} P_c &= P \left[\bigcap_{a \in A} (\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1 \rangle > \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_a \rangle), \bigcap_{b \in B} (\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1 \rangle > \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_b \rangle), \right. \\ &\quad \left. \bigcap_{c \in C} (\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1 \rangle > \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{s}_c \rangle) \right] \\ P_c &= P \left[\bigcap_{i=3}^N \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + n_1 > n_i \right), \bigcap_{j=3}^N \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + n_2 > n_j \right), \right. \\ &\quad \left. \bigcap_{\substack{k_1=3 \dots N \\ k_2=3 \dots N \\ k_1 \neq k_2}} \left(\sqrt{2\varepsilon} + n_2 + n_1 > n_{k_1} + n_{k_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

On peut noter que les événements ne sont pas indépendants. Il est alors nécessaire, pour simplifier l'équation précédente, de paramétrer la probabilité donnée par l'équation (4.15) et de parcourir toutes les valeurs possibles de n_1 et n_2 pour aboutir à l'équation (4.16) :

$$P_c = \iint_{\mathbb{R}^2} P \left[\bigcap_{i=3}^N \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + n > n_i \right), \bigcap_{j=3}^N \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + n' > n_j \right), \right. \\ \left. \bigcap_{\substack{k_1=3 \dots N \\ k_2=3 \dots N \\ k_1 \neq k_2}} \left(\sqrt{2\varepsilon} + n + n' > n_{k_1} + n_{k_2} \right) \right] e^{-\frac{n^2}{N_0}} e^{-\frac{n'^2}{N_0}} \\ \frac{1}{\pi N_0} dn dn' \quad (4.16)$$

On constate qu'il existe toujours une relation de dépendance entre les deux intersections d'événements. Toutefois, puisqu'un événement $\{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} + n > n_i\}$ est couplé à seulement 3 autres événements, tandis qu'il est indépendant avec $\binom{N}{2} - 4$ autres événements, nous adoptons l'hypothèse d'indépendance entre tous les événements de l'équation (4.17). Nous verrons dans la section 4.3.3.5 que cette hypothèse se justifiera *a posteriori*.

$$P_c \approx \iint_{\mathbb{R}^2} \left(1 - Q \left(\frac{n + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}{\sqrt{N_0/2}} \right) \right)^{N-2} \left(1 - Q \left(\frac{n' + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}{\sqrt{N_0/2}} \right) \right)^{N-2} \\ \left(1 - Q \left(\frac{n + n' + \sqrt{2\varepsilon}}{\sqrt{N_0}} \right) \right)^{\binom{N-2}{2}} e^{-\frac{n^2}{N_0}} e^{-\frac{n'^2}{N_0}} \frac{1}{\pi N_0} dn dn' \quad (4.17)$$

En posant $u = \frac{n + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}{\sqrt{N_0/2}}$, et $v = \frac{n' + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}{\sqrt{N_0/2}}$, la probabilité d'erreur symbole peut alors s'exprimer par l'équation (4.18) :

$$P_e = 1 - \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} (1 - Q(u))^{N-2} (1 - Q(v))^{N-2} \\ \left(1 - Q \left(\frac{u + v}{\sqrt{2}} \right) \right)^{\binom{N-2}{2}} e^{-\frac{(u - \sqrt{\frac{\varepsilon}{N_0}})^2}{2}} e^{-\frac{(v - \sqrt{\frac{\varepsilon}{N_0}})^2}{2}} dudv \quad (4.18)$$

Le taux d'erreur symbole énoncé dans l'équation (4.18) peut être exprimé numériquement. Le taux d'erreur binaire associé est cependant difficile à établir, tant il est dépendant de la transcription (ou *mapping*) entre les mots binaires et les symboles.

En première approximation, en considérant N suffisamment important, nous avons $\binom{N-2}{2} \gg 2(N-2)$: la distance intersymboles $d = 2\sqrt{\varepsilon}$ est donc prépondérante. Il est alors raisonnable de faire l'approximation suivante : tous les symboles sont considérés comme équidistants, ce qui est aussi le cas pour la modulation orthogonale [Proa 07]. De

4.3 Améliorer l'efficacité spectrale des systèmes TDCS

la même manière que pour la modulation MOS, il est alors possible d'utiliser la relation suivante entre le taux d'erreur binaire et le taux d'erreur symbole :

$$P_b = \frac{2^{p-1}}{2^p - 1} P_e , \quad (4.19)$$

avec $p = \log_2 \binom{N}{k}$

Dans les deux sections suivantes, une implémentation du récepteur et de l'émetteur TDCS à modulation k parmi N est proposée. Nous nous intéresserons ensuite aux performances expérimentales du système. Les expressions précédemment établies seront alors soumises à l'épreuve des simulations.

4.3.3.3 Émetteur TDCS à modulation $\binom{N}{k}$

Dans le cas de la modulation $\binom{N}{k}$, seul le bloc « transcription bits - signal » du système de transmission 4.6 est modifié. Alors que sa tâche était de sélectionner un signal en mémoire pour chaque mot binaire entrant, ce bloc doit désormais faire la somme pondérée (selon l'équation (4.7)) de plusieurs signaux selon un algorithme de transcription partagé avec le récepteur.

La question du mapping n'est pas triviale, et pourrait faire l'objet d'un chapitre de thèse entier. En effet, avec un nombre de composantes sinusoïdales allant de 32 à 512 dans les systèmes courants, même la plus faible valeur de k induit un nombre extrêmement important de symboles et d'associations différentes. Et de la même manière que le code de Gray permettait à QPSK de diminuer le BER, il est vraisemblable qu'il existe un mapping optimal pour cette modulation.

Dans nos travaux, nous n'avons pas cherché à produire un mapping optimal, mais un mapping peu gourmand en calcul, afin que la modulation $\binom{N}{k}$ puisse être aisément implémentée. Ce dernier est illustré dans le tableau 4.1 pour 3 dimensions, où d_i représente l'index de la i -ème dimension occupée par le symbole, et l'index-mot est celui du mot binaire à émettre. L'implémentation de cette transcription est donnée dans l'annexe C.

Index-mot	d_1	d_2	d_3
1	1	2	3
2	1	2	4
3	1	2	5
4	1	3	4
5	1	3	5
6	1	4	5
7	2	3	4
8	2	3	5
9	2	4	5
10	3	4	5

TABLE 4.1 Mapping 3 parmi 5

4.3.3.4 Récepteur TDCS à modulation $\binom{N}{k}$

Pour le récepteur, deux modifications ont été nécessaires. Tout d'abord, sur le schéma récepteur 3.5, le bloc chargé de donner l'index du symbole CSK entrant a été modifié afin de détecter les k valeurs maximales et de déterminer leurs index respectifs. Le récepteur résultant est donné dans la figure 4.8.

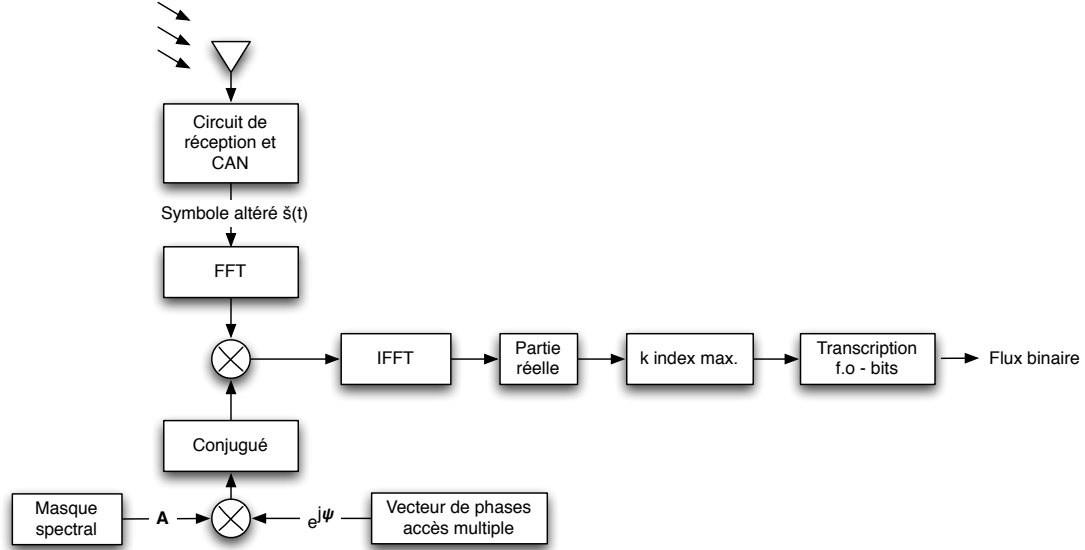


FIGURE 4.8 Récepteur TDCS à modulation k parmi N

Par ailleurs, tout comme pour l'émetteur, il a été nécessaire d'implémenter l'algorithme de transcription signal - bits, lequel est détaillé en annexe D.

4.3.3.5 Performances expérimentales

Afin de valider les résultats théoriques développés dans la section précédente pour $k \in \{2,3\}$, nous avons utilisé l'émetteur et le récepteur précédemment introduits. Dans un premier temps, l'étude du taux d'erreur binaire est menée dans le cas où l'hypothèse d'orthogonalité parfaite est posée, avant d'étudier le cas où cette orthogonalité est dégradée. Enfin, une étude comparative de l'efficacité spectrale de chaque système de communication est ensuite présentée.

Étude du BER – Orthogonalité idéale. Pour obtenir en simulation l'hypothèse de l'orthogonalité idéale entre symboles CSK, un artefact de simulation a été choisi : la taille de constellation CSK est prise très petite ($M_{\text{CSK}} = 32$) par rapport à la dimensionnalité du système ($N=256$). La figure 4.9 montre qu'en dépit des hypothèses simplificatrices prises dans le développement mathématique de la section 4.3.3.2, les résultats théoriques en taux d'erreur symbole correspondent parfaitement à la simulation. En toute logique, nous observons que le BER de la modulation $\binom{32}{3}$ a des résultats dégradés par rapport à ceux de la modulation $\binom{32}{2}$, qui eux-mêmes sont plus élevés que dans le cas de la modulation CSK standard.

4.3 Améliorer l'efficacité spectrale des systèmes TDCS

Ce résultat est sans surprise puisque chaque augmentation de la taille de la constellation s'accompagne d'une baisse de la distance intersymboles (ce qui n'était pas le cas pour les systèmes étudiés dans les sections 4.2.3 et 4.3.2).

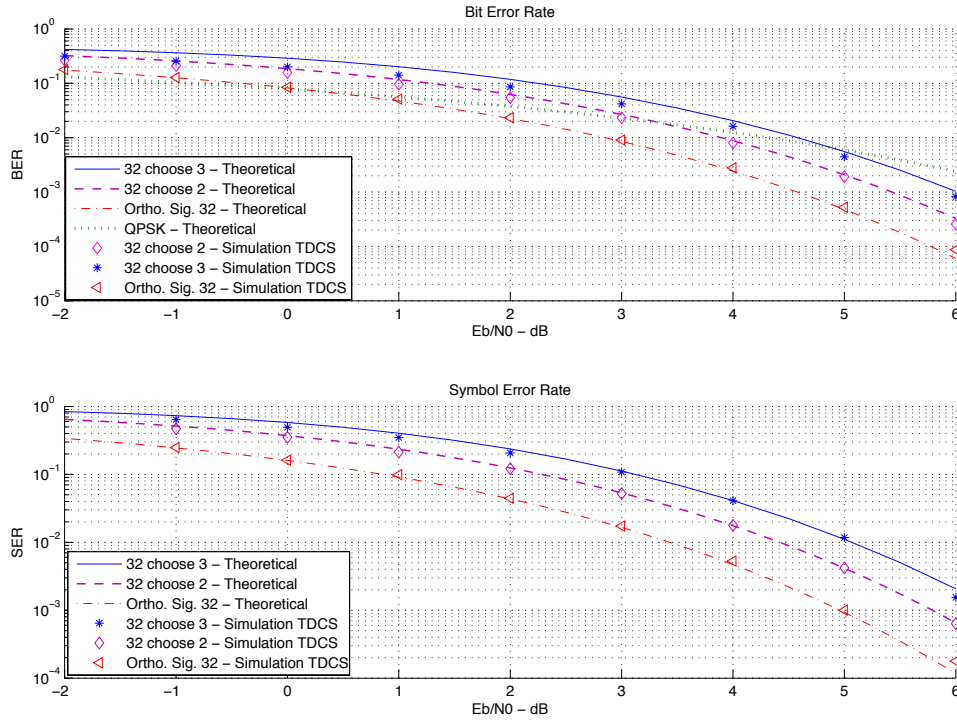


FIGURE 4.9 Taux d'erreur binaire et symboles des modulations $\binom{32}{2}$ et $\binom{32}{3}$

Cependant, nous pouvons constater que les performances en simulation du BER sont meilleures que celles prévues par la théorie, en particulier pour les faibles valeurs de $\frac{E_b}{N_0}$. Cela s'explique par notre hypothèse (4.19), qui, pour des grandes valeurs de p , suppose qu'un bit sur deux est faux. Or, dans notre cas, comme tous les symboles ne sont pas équidistants, il existe des mappings pour lesquels la distance de hamming entre chaque mot binaire est grande pour des distances intersymboles importantes. Nous pouvons ainsi supposer que notre mapping, sans prétention d'optimalité, a des performances correctes tout en assurant une facilité d'implémentation, comme en témoigne le pseudo-code donné dans les annexes C et D.

Étude du BER – Orthogonalité dégradée. Considérons désormais un système où l'orthogonalité entre les différents symboles n'est pas suffisante, avec par exemple 32 symboles pseudo-orthogonaux générés par la modulation CSK sur un espace de dimension 64. Les statistiques d'orthogonalité entre ces 32 symboles sont données dans le tableau 4.2 pour le cas d'un espace de dimension 64 et 512.

Cette orthogonalité dégradée a des conséquences importantes sur les performances de la modulation $\binom{N}{k}$ proposée, ainsi que nous pouvons le constater sur la figure 4.10.

Statistiques	N=64	N=512
Valeur moyenne	0,001	-0,004
Minimum	-0,21	-0,029
Maximum	0,32	0,0048
Variance	0,01	$7,42 \cdot 10^{-5}$

TABLE 4.2 Statistiques sur le produit scalaire entre les signaux 32-CSK pour différentes tailles d'espace

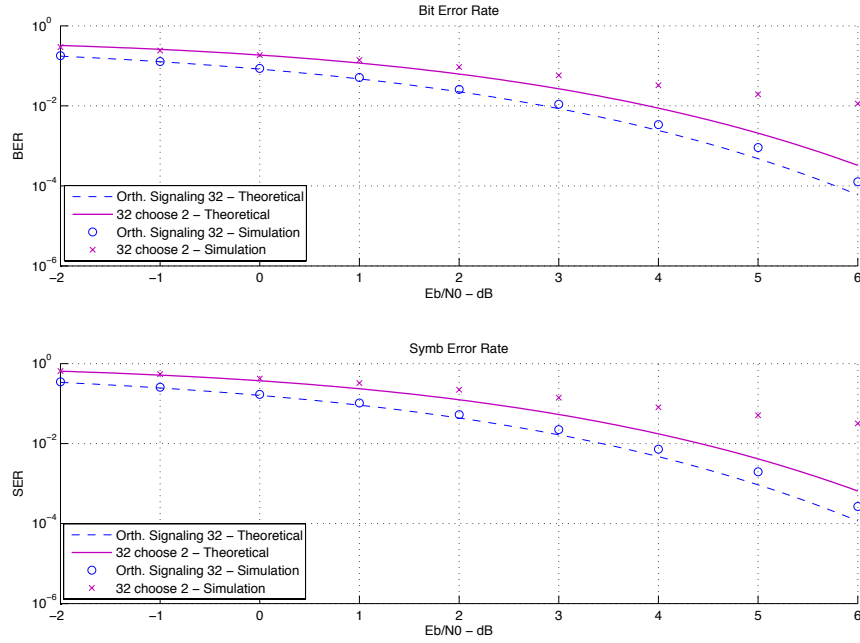


FIGURE 4.10 Modulation $\binom{32}{2}$ basée sur des signaux à orthogonalité insuffisante

Si la modulation orthogonale standard résiste plutôt bien à cette orthogonalité dégradée, la modulation $\binom{32}{2}$ souffre, elle, largement de ces conditions. Dans ce qui suit, nous supposons cependant que le problème d'orthogonalité est résolu afin de comparer les performances théoriques de notre modulation avec les modulations PSK classiques.

Bien que présentant des performances BER inférieures à celle de la modulation orthogonale MOS, la modulation $\binom{N}{k}$ affiche, en figure 4.9, une supériorité face à QPSK (en vert sur la figure) à partir d'un certain seuil $\frac{E_b}{N_0}$. Cependant, cela est réalisé avec une efficacité spectrale inférieure. Ainsi, dans le paragraphe suivant, nous nous proposons d'étudier l'efficacité spectrale de différents systèmes TDCS pour un taux d'erreur binaire fixé.

Étude de l'efficacité spectrale. Pour comparer les modulations PSK aux modulations $\binom{N}{k}$, fixons un taux d'erreur binaire cible et comparons l'efficacité spectrale attei-

4.3 Améliorer l'efficacité spectrale des systèmes TDCS

gnable en fonction de la qualité du canal $\frac{E_b}{N_0}$. Nous avons vu au cours de la section 4.3.3.2 que les performances théoriques en BER d'une modulation $\binom{N}{k}$ impliquent le calcul de k intégrales à bornes infinies. Ainsi, la comparaison proposée dans la figure 4.11 a été calculée à l'aide de simulations Monte-Carlo pour la modulation $\binom{N}{k}$, tandis que les valeurs théoriques de PSK ont été considérées. Deux taux d'erreur binaire cibles ont été pris en compte : $1 \cdot 10^{-3}$ et $1 \cdot 10^{-5}$. Chaque point de la figure représente une modulation, variant de BPSK à 16-PSK, et de $k = 1$ à $k = 16$ respectivement pour les modulations PSK et $\binom{32}{k}$.

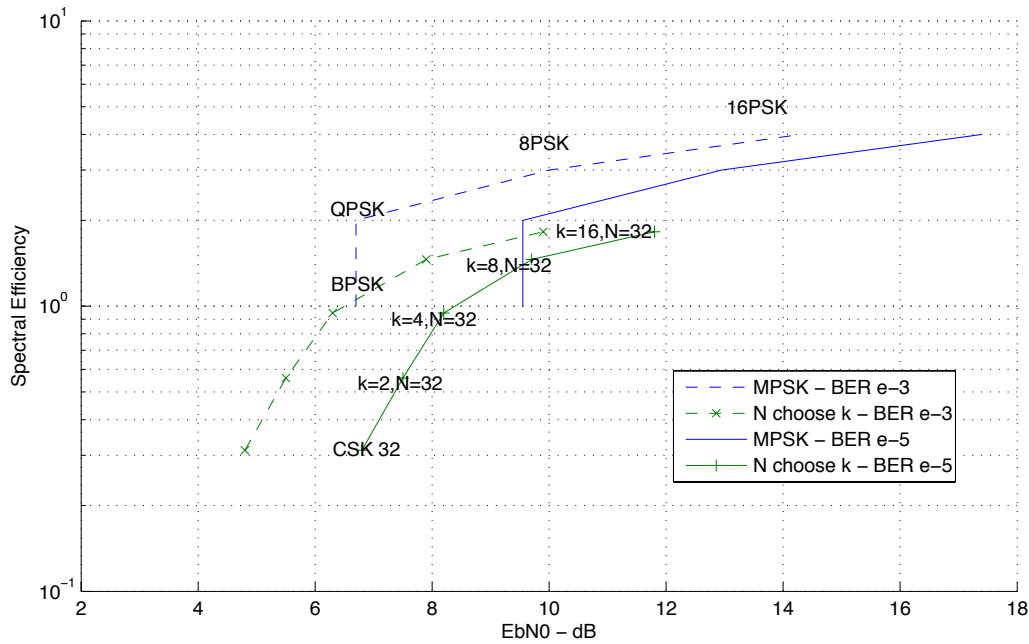


FIGURE 4.11 Comparaison de l'efficacité spectrale pour deux BER cibles

Tout d'abord, on remarque que pour les faibles valeurs de k , les modulations multidimensionnelles permettent d'assurer, à bas SNR, des transmissions au taux d'erreur binaire demandé alors que les modulations PSK non codées échouent.

Des liaisons ont été dessinées entre chaque modulation. Si elles ne correspondent à aucune modulation en pratique, elles aident à l'observation d'une tendance lorsque le taux d'erreur binaire varie. En effet, lorsque nous avons diminué le taux d'erreur binaire cible de 10^{-3} à 10^{-5} , la courbe bleue – correspondant à la modulation PSK – a subi un décalage latéral croissant plus élevé que celui des modulations orthogonales. Ainsi, lorsque le BER cible est de 10^{-3} , une efficacité spectrale de 1,6 bits/sec/Hz est obtenue pour $k = 8$ à un $\frac{E_b}{N_0}$ bien supérieur à celui de la modulation PSK, mais à la même valeur $\frac{E_b}{N_0}$ lorsque le BER cible diminue à 10^{-5} .

Cette tendance de rapprochement des performances à mesure que le taux d'erreur binaire diminue est due à la pente des courbes BER des modulations $\binom{N}{k}$: plus forte que pour celles des modulations PSK.

Ainsi, la modulation $\binom{N}{k}$ proposée a un champ d'action large, allant des transmissions très bas débit à une efficacité spectrale proche de celle de QPSK pour des BER cibles

très faibles. Cette versatilité peut donc être considérée comme étant un nouveau degré de modulation adaptative.

Cependant, un compromis est à trouver entre complexité et orthogonalité. En effet, CSK propose uniquement des signaux *pseudo*-orthogonaux au prix d'une faible complexité, tandis que la génération de signaux purement orthogonaux permettrait d'améliorer significativement les performances.

Cette dernière piste a notamment été explorée au cours d'une courte étude proposant l'application des séquences de Walsh-Hadamard à la génération de symboles TDCS orthogonaux. Cette étude est présentée dans la section suivante.

4.3.4 Génération de symboles purement orthogonaux

4.3.4.1 Condition d'orthogonalité

Comme nous l'avons déjà évoqué, les signaux générés avec la modulation CSK aboutissent uniquement à une pseudo-orthogonalité entre eux-ci. Nous cherchons donc à former une base orthonormée dont les signaux générateurs seraient purement orthogonaux entre eux. Pour obtenir une orthogonalité parfaite entre deux symboles s_{m_1} et s_{m_2} , il suffit satisfaire l'équation (4.20) :

$$\begin{aligned} s_{m_1}(t) &= 2 \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi k \Delta_f t + \psi_k^{m_1}) \\ s_{m_2}(t) &= 2 \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi k \Delta_f t + \psi_k^{m_2}) \\ \int_0^T s_{m_1}(t) s_{m_2}(t) dt &= 2T \sum_{k=1}^K A_k^2 \cos(\psi_k^{m_2} - \psi_k^{m_1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Cette condition est notamment satisfaite si $\forall k, A_k = 1$:

- $\psi_k^{m_2} - \psi_k^{m_1} = \frac{\pi}{2}$;
- ou si il existe $\frac{K}{4}$ valeurs de k pour lesquelles $\psi_k^{m_2} - \psi_k^{m_1} = \psi_0$, $\frac{K}{4}$ autres valeurs de k pour lesquelles $\psi_k^{m_2} - \psi_k^{m_1} = \psi_0 + \frac{\pi}{2}$, $\frac{K}{4}$ autres valeurs de k pour lesquelles $\psi_k^{m_2} - \psi_k^{m_1} = \psi_0 + \pi$, et enfin $\frac{K}{4}$ autres valeurs de k pour lesquelles $\psi_k^{m_2} - \psi_k^{m_1} = \psi_0 + \frac{3\pi}{2}$;
- ou si il existe $\frac{K}{2}$ valeurs de k pour lesquelles $\psi_k^{m_2} - \psi_k^{m_1} = \psi_0 + \pi$ et $\frac{K}{2}$ autres valeurs pour lesquelles $\psi_k^{m_2} - \psi_k^{m_1} = \psi_0$, avec $A_k \in \{1, 0\}$.

Si satisfaire la première condition s'avère trivial et correspond à la méthode de génération de symbole QPSK à encodage spectral, il est possible de satisfaire la dernière condition en utilisant les séquences de Walsh.

4.3.4.2 Séquences de Walsh-Hadamard

Les séquences de Walsh-Hadamard \mathbf{w}_i (avec $i = 2p$, $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$) ont été largement utilisées dans les méthodes d'accès multiple CDMA (utilisées notamment dans les réseaux

4.3 Améliorer l'efficacité spectrale des systèmes TDCS

cellulaires américains et asiatiques). Ces séquences étant parfaitement orthogonales entre elles, les signaux résultants de la multiplication d'un signal avec un code de Walsh \mathbf{w}_i sont tout autant orthogonaux lorsque ceux-ci sont synchrones. La méthode de construction de ces séquences est détaillée par l'équation suivante.

$$\begin{aligned} H_0 &= (1) \\ H_p &= \begin{pmatrix} H_{p-1} & H_{p-1} \\ H_{p-1} & -H_{p-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Une séquence de Walsh-Hadamard \mathbf{w}_i correspond alors à prendre la i -ième ligne de la matrice H_p . Toutefois, une utilisation de ces séquences de manière analogue à celle mise en œuvre dans CDMA aurait pour conséquence d'étaler le spectre, ce qui serait inapproprié pour TDCS.

Ainsi, une approche différente a été choisie : celle d'utiliser ces séquences directement dans les vecteurs de phase $\boldsymbol{\psi}^{m_1}$ et $\boldsymbol{\psi}^{m_2}$.

4.3.4.3 Séquences de Walsh-Hadamard dans TDCS

Une séquence de Walsh-Hadamard a la propriété suivante : chaque séquence diffère d'une autre sur la moitié de ces éléments. Ainsi, choisir une séquence de Walsh-Hadamard construite avec les éléments 0 et π en tant que vecteur de phases $\boldsymbol{\psi}$, permettrait de vérifier la condition (4.20). Cependant, utiliser une séquence $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{w}_i$ a pour conséquence d'imposer un décalage différent sur chaque sinus composant le signal, ce qui a une conséquence directe sur les propriétés intrinsèques du signal souche telles que l'autocorrélation et le PAPR, mais tout en assurant une intercorrélation nulle avec les autres symboles.

La figure 4.12 présente un signal et sa fonction d'autocorrélation générées à partir d'un spectre comportant 256 composantes sinusoïdales d'amplitude constante et avec un vecteur de phases suivant une séquence de Walsh-Hadamard. Nous pouvons constater que le signal peut présenter plusieurs pics d'autocorrélation secondaires.

De plus, on remarque que le signal est fortement structuré et présente d'importants pics, laissant redouter un fort PAPR. L'utilisation d'un signal dont les phases suivent une séquence de Walsh nuit donc à la fois à la discrétion et à l'efficacité en puissance de la transmission. Ces résultats contrastent avec les signaux basés sur des vecteurs de phases aléatoires, qui présentent une intercorrélation non nulle, mais ne sont pas structurés et possèdent un PAPR plus faible.

L'idée est ainsi venue de tirer le meilleur de ces deux techniques afin d'obtenir des signaux ayant des caractéristiques satisfaisantes, tant en termes d'orthogonalité qu'en termes de fonction d'autocorrélation.

4.3.4.4 Phase Mix'n Walsh

Pour bénéficier des avantages des phases aléatoires et des phases de Walsh-Hadamard, nous avons proposé une méthode schématisée dans la figure 4.13. Les composantes sinusoï-

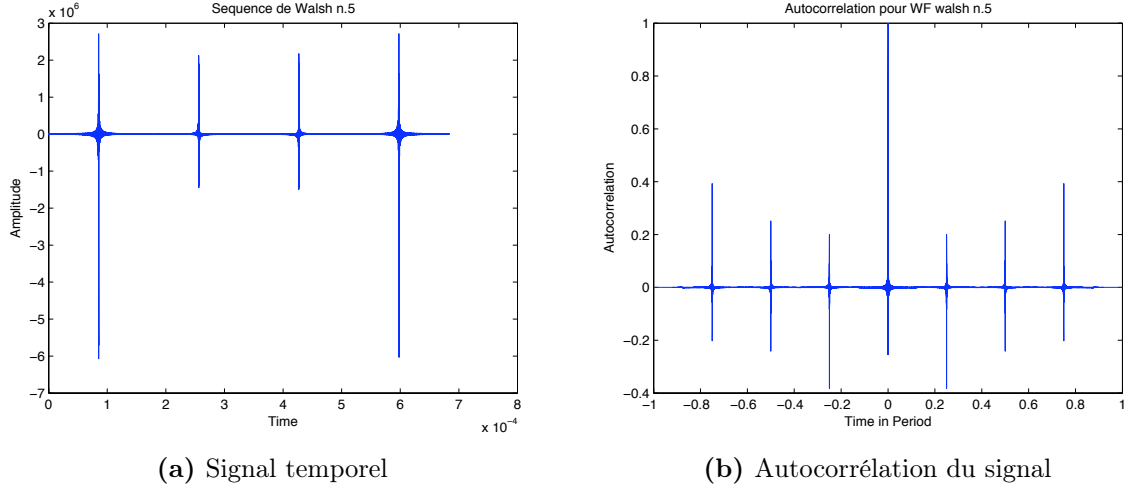


FIGURE 4.12 Un signal généré avec une séquence de Walsh et sa fonction d'autocorrélation

dales actives sont divisées en $2P$ lots, $2P$ étant la taille de la séquence de Walsh-Hadamard choisie.

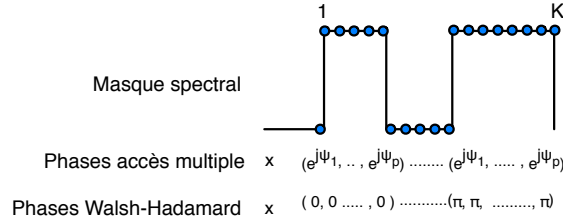


FIGURE 4.13 Principe des phases Mix'n Walsh

Dans le cas où il y a autant de groupes que de composantes sinusoïdales, le scénario est alors similaire au cas présenté dans la sous-section précédente, avec pour seule différence une phase non nulle appliquée à toutes les composantes sinusoïdales.

Pour mesurer les caractéristiques des signaux obtenus avec les différents générateurs de phase, trois métriques ont été utilisées : le coefficient d'intercorrélation C_c entre les signaux synchronisés, la hauteur du pic secondaire d'autocorrélation le plus important A_c , et le PAPR. Les coefficients C_c et A_c sont définis dans l'équation (4.23) et (4.22), et les résultats des calculs statistiques sont fournis dans le tableau 4.3.

$$C_c\{s_{m_1}(t), s_{m_2}(t)\} = \frac{\langle s_{m_1}(t), s_{m_2}(t) \rangle}{\varepsilon_{s_{m_1}} \varepsilon_{s_{m_2}}}, \quad (4.22)$$

$$A_c\{s_{m_1}(t)\} = \frac{\max(A_{c,s_{m_1}}(\tau \notin I_\tau))}{A_{c,s_{m_1}}(\tau = 0)}, \quad (4.23)$$

avec $A_{c,s_{m_1}}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation du signal $s_{m_1}(t)$ pour un décalage τ donné, et I_τ , l'intervalle de décalages τ comprenant le lobe principal de $A_{c,s_{m_1}}$. Le gabarit spectral considéré est doté de 48 composantes sinusoïdales, dont 32 sont utilisées et les 7 pre-

4.3 Améliorer l'efficacité spectrale des systèmes TDCS

mières sont inactives, ainsi que les composantes sinusoïdales d'index 15 à 23. Pour chaque méthode de génération, 1000 jeux de signaux ont été créés.

	Intercorrélation C_c	2 nd pic d'autocorrélation A_c	PAPR
Phases aléatoires	0,0156	0,16	9,65 dB
Mix'n Walsh 4 groupes	$9,4 \cdot 10^{-35}$	0,17	11,45 dB
" " 8 groupes	$9,2 \cdot 10^{-35}$	0,20	12,48 dB
" " 16 groupes	$1,17 \cdot 10^{-34}$	0,22	13,25 dB
Phases de Walsh	$1,17 \cdot 10^{-34}$	0,28	12,9 dB

TABLE 4.3 Caractéristiques moyennes des signaux selon la technique de génération choisie

De ce tableau, nous pouvons observer que le principe de génération de signaux orthogonaux en utilisant les séquences de Walsh est validé. De plus, nous remarquons que l'ajout de phases aléatoires dans le processus permet de réduire en moyenne la hauteur maximale des pics d'autocorrélation secondaires, permettant à terme de réduire le taux d'erreur binaire de la modulation. De plus, nous pouvons constater que la valeur du PAPR diminue à mesure que la séquence de phases aléatoires est plus longue. Selon les conditions du canal de transmission, un compromis est donc à trouver entre un PAPR plus élevé ou des pics secondaires d'autocorrélation plus importants.

Toutefois, par manque de temps, cette méthode de génération de signaux orthogonaux n'a pu être utilisée, ni pour remplacer la modulation CSK, ni pour implémenter la modulation $\binom{N}{k}$ précédemment introduite. Les modifications nécessaires dans le modèle récepteur et émetteur du système étaient trop importantes. Cependant, cette méthode de génération de signaux peut être directement utilisée dans un système TDCS-PSK multi-utilisateur classique afin d'améliorer l'orthogonalité entre transmissions.

4.4 Conclusions et perspectives

L'objet du chapitre 4 était notamment de répondre à certaines interrogations soulevées par la section 3.1.2, à savoir la détermination de l'efficacité spectrale d'un système TDCS, et l'amélioration de celle-ci le cas échéant. Pour ce faire, l'approche choisie s'est distinguée de celle classiquement suivie dans la littérature avec l'application du formalisme algébrique des modulations linéaires.

À l'aide de la notion de la dimensionnalité, nous avons pu démontrer que le système de communication TDCS associé à CSK était intrinsèquement efficace en puissance, induisant *de facto* une faible efficacité spectrale. Si la faible efficacité spectrale de TDCS avait été suggérée dans quelques références (c.f. [Han 08, Budi 08a]), elle n'avait jamais été formellement démontrée. De plus, de nouvelles règles de conception ont été introduites et assurent l'obtention d'une efficacité spectrale maximale tout en minimisant le taux d'erreur binaire. C'est donc un pas important dans la compréhension du système TDCS. Une poursuite de travaux est envisagée, avec notamment l'étude approfondie des performances en efficacité spectrale pour des valeurs de BER cibles encore plus faibles, et de les comparer aux performances de QPSK.

Pour accroître l'efficacité spectrale du système, des améliorations ont été proposées, allant du simple ajout des antipodes dans la modulation CSK à la présentation d'une modulation multidimensionnelle à haute densité. Les performances théoriques de cette dernière ont été développées dans cette thèse, et s'avèrent intéressantes car permettant de couvrir une vaste plage de débit. Toutefois, si les performances théoriques ont pu être vérifiées en simulation, cela n'a pu se faire qu'avec l'appui d'un artefact pour simuler une orthogonalité parfaite entre les symboles CSK. Ainsi, une technique de génération de symboles purement orthogonaux a été proposée, se rapprochant de ce qui est fait dans la modulation MC-CDMA.

Cependant, si cette technique de génération de symboles orthogonaux s'est avérée performante, il a manqué le développement d'un modèle efficace de récepteur et d'émetteur basés sur ces symboles et capables de supporter la modulation multidimensionnelle $\binom{N}{k}$. C'est une piste de recherche vierge qu'il reste à aborder. Par ailleurs, d'autres schémas de modulations multidimensionnelles pourraient être approfondis, en s'intéressant de surcroît à la conception d'un algorithme optimal de transcription bits-symboles.

Au sujet de la modulation CSK seule, d'autres pistes dignes d'intérêt sont à considérer ; citons notamment l'ajout d'un codage qui éviterait que deux symboles successivement émis soient des symboles à décalage temporel consécutif, ou l'emploi de codes de Gold qui possèdent de bonnes propriétés d'autocorrélation.

Troisième partie

Accroître l'efficacité en puissance en réduisant le PAPR

La théorie ensembliste

Sommaire

5.1	Notions et principes de la théorie ensembliste	71
5.1.1	L'espace solution	72
5.1.2	Les ensembles-contrainte	73
5.1.3	Opérateurs ensemblistes	73
5.2	Algorithmes fondamentaux	74
5.2.1	Notions de convergence	75
5.2.2	Algorithmes séries	75
5.2.3	Algorithmes parallèles	77
5.2.4	Algorithme de Douglas-Rachford	77
5.2.5	Algorithme « Reflection Onto Convex Sets »	78
5.3	Quand un formalisme en cache un autre	79

5.1 Notions et principes de la théorie ensembliste

Dans de nombreux problèmes d'optimisation, il est courant de voir des techniques qui se veulent optimales selon un critère ; les algorithmes présentés s'enorgueillissent alors de pouvoir déterminer *la solution*. Or, du fait de certaines hypothèses simplificatrices et de la possible incertitude sur des spécifications du problème, il serait plus conséquent – sinon réaliste – d'envisager un ensemble de solutions acceptables.

C'est ce que propose notamment la théorie ensembliste (*Set Theoretic Estimation*, STE), dont le formalisme a été établi par Combettes dans [Comb 93]. Toutes les connaissances *a priori* du système, ou, de la solution recherchée, sont modélisées sous forme d'ensembles : les *ensembles-contrainte*, appartenant à *l'espace solution*. L'intersection de tous ces ensembles constitue *l'ensemble solution*, ou *l'ensemble de faisabilité*, qui contient toutes les solutions acceptables.

$$S = \bigcap_{i \in I} S_i, \quad (5.1)$$

avec $I = \llbracket 1, k \rrbracket$, et k le nombre de contraintes modélisées.

Trouver une solution appartenant à cette intersection constitue un *problème de faisabilité*. Celui-ci est soluble si $S \neq \emptyset$ (figure 5.1a), et de nombreux algorithmes ont été conçus pour trouver une solution $s \in S$, ou une solution minimisant la distance entre tous les S_i dans le cas où le système ne présenterait pas de solutions admissibles ($S = \emptyset$, figure 5.1b).

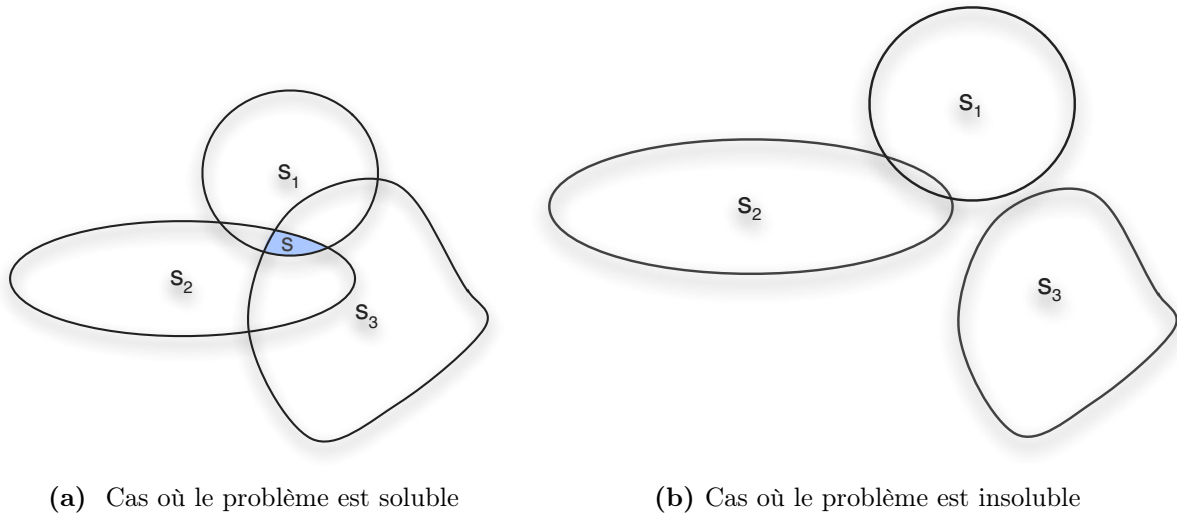


FIGURE 5.1 Existence de solutions pour la résolution problème de faisabilité

La théorie ensembliste a d'ores et déjà été employée avec succès dans la résolution de problèmes dans des domaines aussi nombreux que variés ; citons notamment l'astronomie, la cristallographie, la détermination de protéines, la suppression aveugle d'interférences ou encore la reconstruction de signaux bruités [Levi 84, Sams 04, Abra 96, Trus 84, Park 97]. C'est seulement récemment qu'elle a été appliquée à la résolution du problème du PAPR [Mart 09].

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter les notions et principes importants de la théorie ensembliste, avant d'introduire les algorithmes permettant de trouver une solution dans l'ensemble de faisabilité. Un soin particulier sera notamment apporté à la définition des bornes de convergence de chaque algorithme. Ce cadre de travail permettra l'introduction de nouveaux algorithmes de réduction du PAPR dans le chapitre 6.

5.1.1 L'espace solution

Il existe souvent plusieurs choix d'espace solution Ξ pour représenter les contraintes d'un problème. Par exemple, en traitement du signal, il est possible de choisir le domaine des signaux à support temporel fini, à support temporel infini, le domaine spectral, ou encore le domaine des ondelettes. Les contraintes du problème doivent alors être exprimées dans ce domaine. Le choix de Ξ dépend principalement des deux points suivants :

- la possibilité d'exprimer facilement les contraintes dans cet espace ;
- le panel d'algorithmes disponibles.

5.1 Notions et principes de la théorie ensembliste

Pour ce dernier point, il est très utile de considérer un espace Ξ hilbertien qui permette une modélisation de chaque contrainte par un ensemble convexe. En effet, dans de nombreux cas, certains ensembles peuvent être non convexes dans un espace solution, mais convexes dans d'autres [cCet 88]. Il est ainsi délicat de choisir un espace dans lequel toutes les contraintes peuvent être modélisées par un ensemble convexe, et où les opérations ensemblistes définies ci-après sont simples de réalisation.

Tout au long de ce chapitre, nous considérons un espace hilbertien Ξ , doté de la norme $\|\cdot\|$.

5.1.2 Les ensembles-contrainte

Ainsi que le signalent les paragraphes précédents, chaque contrainte connue du système ou de la solution recherchée est modélisée par un ensemble. De surcroît, il est nécessaire de considérer des ensembles convexes afin de pouvoir profiter d'une grande panoplie d'algorithmes, dont plusieurs sont présentés dans la section 5.2. Dans le cas où un ensemble-contrainte ne serait pas convexe, il est possible de relâcher la contrainte (et, par conséquent, d'élargir l'ensemble) afin d'utiliser *l'enveloppe convexe* de l'ensemble-contrainte initial. Toutefois, cette solution peut se révéler être trop complexe, notamment lorsqu'il s'agit de définir l'enveloppe convexe d'un ensemble à N dimensions. Ainsi, une solution peut être d'ignorer le problème¹ car, lorsque l'absence de convexité est limitée, celle-ci engendre peu d'aléas sur les algorithmes de faisabilité.

Afin de concrétiser ces notions, présentons quelques contraintes engendrant des ensembles dans \mathbb{R}^N parfois convexes, parfois non :

- l'ensemble *convexe* des signaux discrets à N échantillons à valeurs réelles positives ;
- l'ensemble X *non convexe* des signaux sinusoïdaux à une fréquence f_0 (en effet, $\frac{A}{2} \cos(2\pi f_0 t) + \frac{-A}{2} \cos(2\pi f_0 t) = 0 \notin X$) ;
- l'ensemble *convexe* des signaux dont la moyenne ou la variance du bruit résiduel est bornée. Cet ensemble est utilisé par exemple dans [Trus 84] pour la reconstruction des signaux qui subissent un filtrage linéaire invariant bruité ;
- l'ensemble *non convexe* des signaux dont l'énergie est strictement supérieure à 0 ;
- l'ensemble *convexe* des signaux dont l'amplitude de la transformée de Fourier est majorée.

5.1.3 Opérateurs ensemblistes

Dans les algorithmes qui vont suivre, un opérateur est omniprésent : l'opérateur *projection* P sur un ensemble X . Considérant un ensemble X et un point u quelconque de l'espace Ξ , $P_X(u)$ est le point le plus proche de u appartenant à X : $\|u - P_X(u)\| = d_{u,X}$. De plus, pour tout X convexe, l'opérateur P_X est contractant, c'est-à-dire que $\forall x, \forall y \in \Xi$, $\|P_X(x) - P_X(y)\| \leq \|x - y\|$, P_X ne dilate pas les distances.

1. Suivant ainsi une devise Shadok : « S'il n'y a pas de solution, c'est qu'il n'y a pas de problème. »

En ajoutant un coefficient de relaxation $\lambda \in]0,2]$, il est possible de définir l'opérateur de projection pondérée T :

$$T_X = I + \lambda_X(P_X - I) . \quad (5.2)$$

Lorsque $0 < \lambda < 1$, l'opérateur est alors une « sous-projection », et une « sur-projection » lorsque $1 < \lambda < 2$, et l'on retrouve la projection classique lorsque $\lambda = 1$.

En prenant le cas particulier $\lambda = 2$, on définit alors l'opérateur réflexion R_X :

$$R_X = 2P_X - I . \quad (5.3)$$

Ainsi $R_X(u)$ représente-t-il la réflexion de u par rapport à X . Ces différentes configurations sont illustrées ci-après.

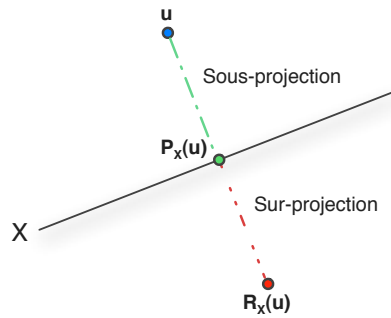


FIGURE 5.2 Une projection pondérée sur un sous-espace vectoriel

Une propriété importante de l'opérateur projection P_X est l'unicité du projeté lorsque l'ensemble cible X est convexe. Cependant, cette propriété n'est plus valide dès lors qu'une portion de l'ensemble est non convexe, ainsi qu'illustré dans la figure 5.3.

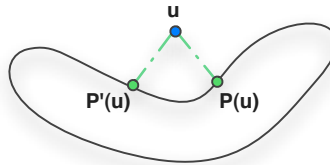


FIGURE 5.3 Perte de la propriété d'unicité de la projection lorsque l'ensemble n'est pas convexe

Dans la section suivante, des algorithmes utilisant ces opérations ensemblistes vont être présentés. Nous allons ainsi voir comment celles-ci peuvent concourir à la résolution du problème de faisabilité.

5.2 Algorithmes fondamentaux

Les algorithmes discutés dans cette section visent à trouver une solution à un problème comportant deux contraintes. Cela équivaut donc à chercher un point appartenant à l'intersection S de deux ensembles-contrainte convexes : $S = A \cap B \neq \emptyset$. Il est cependant

5.2 Algorithmes fondamentaux

possible de généraliser l'application de ces algorithmes à N ensembles convexes. Toutefois, avant de les introduire, nous rappelons quelques propriétés de convergence afin de pouvoir qualifier les qualités de chaque algorithme.

5.2.1 Notions de convergence

Convergence faible. Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de l'espace de Hilbert Ξ . On dit que $\{x_n\}$ converge faiblement vers un point $x \in \Xi$ si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle, \forall y \in \Xi . \quad (5.4)$$

Lorsque l'espace Ξ est de dimension finie, la convergence forte est aussi assurée.

Convergence forte. Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de l'espace de Hilbert Ξ . On dit que $\{x_n\}$ converge (fortement) vers un point $x \in \Xi$ si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0 . \quad (5.5)$$

Lorsque cette définition est satisfaite, la convergence faible vers x est aussi assurée.

Fejér-monotonie. Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de l'espace de Hilbert Ξ , et $S \in \Xi_c$. On dit que $\{x_n\}$ est Fejér-monotone par rapport à S si pour tout $s \in S$, et à chaque itération n , on a :

$$\|x_{n+1} - s\| \leq \|x_n - s\| . \quad (5.6)$$

Lorsque cette définition est satisfaite, l'algorithme produit des itérations qui se rapprochent de l'ensemble S , ou du moins, ne s'en éloignent pas.

5.2.2 Algorithmes séries

Nous reprenons ici l'opérateur de projection pondéré introduit par l'équation (5.2), mais avec un coefficient de relaxation $\lambda_{X,n} \in]0,2[$, spécifique à l'ensemble X au cours de l'itération $n \in \mathbb{N}$. L'équation (5.7) est une forme généralisée de l'algorithme STE le plus répandu et le plus utilisé dans la littérature :

$$s_{n+1} = T_A \circ T_B(s_n) , \quad (5.7)$$

où \circ est l'opérateur de composition d'opérateurs.

Cet algorithme a été introduit pour la première fois par Von Neumann [Neum 50] dans le cas particulier de $\lambda_{A,n} = \lambda_{B,n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, et pour des sous-espaces vectoriels. Il a ensuite été généralisé sous la forme (5.7) pour des ensembles convexes de l'espace euclidien dans [Erem 65] et la convergence forte est démontrée. Le cas d'ensembles convexes dans un espace de Hilbert quelconque est ensuite abordé par Brègman dans [Breg 67], dans lequel il démontre la convergence faible de l'algorithme (5.7). Enfin, Gubin démontre dans [Gubi 67] la convergence forte de l'algorithme série pour plusieurs conditions, notamment lorsque l'espace Ξ est de dimension finie.

Dans la littérature, on trouve l'équation (5.7) le plus souvent sous sa forme non pondérée : $\lambda_{A,n} = \lambda_{B,n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. L'algorithme est alors connu sous plusieurs dénominations : *algorithme de Von Neumann*, *algorithme de Brègman*, *error-reduction algorithm*, *steepest-descent algorithm* ou encore *Projection Onto Convex Sets* (POCS). C'est cette dernière appellation qui sera utilisée dans la suite de ce manuscrit, tandis que nous parlerons de « POCS pondéré » ou de « POCS relaxé » pour sa forme la plus générale (5.7).

La popularité de POCS s'est construite grâce à l'interprétation aisée des projections algébriques non pondérées, à la fois géométriquement, mais aussi dans le domaine d'application. Cependant, ce choix s'est fait au détriment de la rapidité de convergence, comme le soulignent les comparaisons menées dans [Fien 82, Marc 04, Levi 84]. Pour garder la facilité d'interprétation de POCS tout en gagnant en célérité, des méthodes de prédiction ont alors été présentées [Croc 04, Fan 95, Crom 06].

La figure 5.4 présente quelques itérations de l'algorithme dans le plan euclidien. Deux configurations sont considérées : l'algorithme POCS standard, et une autre version utilisant $\lambda_{A,n} = 2, \lambda_{B,n} = 1, \forall n$, c'est-à-dire une combinaison d'une réflexion et d'une projection. Il est toutefois important de souligner que le cas $\lambda_n = 2$ n'appartient pas à l'intervalle assurant la convergence de l'algorithme.

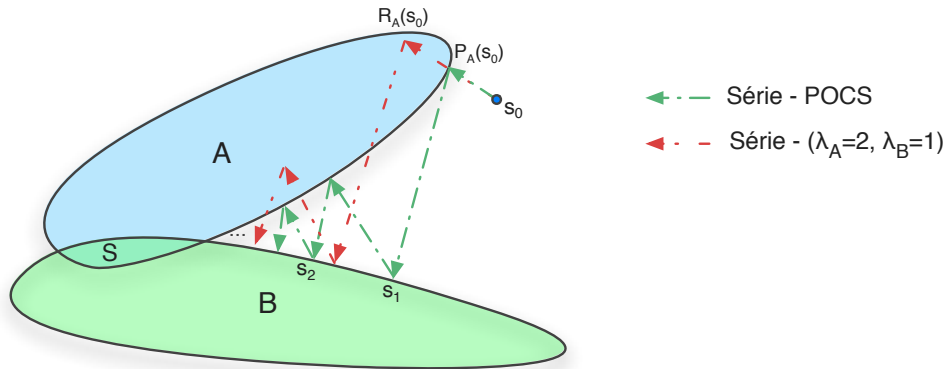


FIGURE 5.4 Algorithmes séries : POCS ($\lambda_A = \lambda_B = 1$) et ($\lambda_A = 2, \lambda_B = 1$)

De cette simple représentation géométrique, on peut observer que le paramètre $\lambda_{X,n}$ joue potentiellement un rôle dans le taux de convergence de l'algorithme. Cela est confirmé par les études menées dans [Seza 82, Levi 84] qui montrent que la version classique POCS converge bien plus lentement que lorsque les coefficients λ sont différents de 1 (parfois choisi dynamiquement). Nous remarquons aussi que la géométrie de la configuration est déterminante : plus l'angle entre les deux ensembles est grand, plus la convergence est rapide. Inversement, plus l'angle est petit, plus la convergence est lente ; ce phénomène est appelé *effet tunnel* dans la littérature. Par ailleurs, nous remarquons qu'à mesure que l'itéré se rapproche de l'intersection, les progrès sont faibles.

5.2 Algorithmes fondamentaux

Bien que les algorithmes de l'estimation ensembliste aient été étudiés depuis des décennies, il est nécessaire de souligner qu'il n'y a aucun résultat théorique aidant à choisir le $\lambda_{X,n}$ optimal, notamment puisque celui-ci dépend à la fois de la forme de l'ensemble X et de la géométrie de la configuration.

5.2.3 Algorithmes parallèles

Une autre combinaison possible de projections est donnée dans l'équation (5.8). Ces algorithmes sont considérés comme *parallèles* puisque les projections sur chaque ensemble peuvent être calculées en parallèle par des processeurs différents. Il possède les mêmes propriétés de convergence que les algorithmes séries, mis à part pour les valeurs de λ_n pour lesquelles la convergence est assurée : les bornes 0 et 2 sont désormais incluses [Comb 93, Comb 01c].

$$s_{n+1} = s_n + \lambda_n(\omega_A P_A(s_n) + \omega_B P_B(s_n) - s_n), \quad (5.8)$$

avec $\lambda_n \in [0,2]$, et $\omega_A, \omega_B > 0$, tels que $\omega_A + \omega_B = 1$.

Chaque résultat d'itération s_n ne satisfait pas entièrement une contrainte, mais un compromis des deux grâce aux pondérations ω_A et ω_B , comme cela est représentée par la figure 5.5 dans le plan euclidien. Une variante appelée *EMOSP* qui permet l'utilisation de coefficients de relaxation supérieures à 2 est proposée dans [Comb 97].

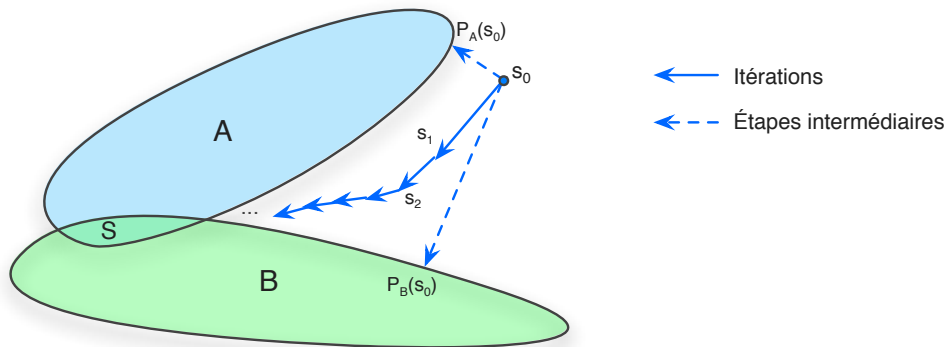


FIGURE 5.5 Algorithmes parallèles avec $\omega_A=\omega_B=0,5$, $\lambda_n = 1, \forall n$

5.2.4 Algorithme de Douglas-Rachford

Cet algorithme a originellement été conçu pour résoudre des équations aux dérivées partielles [Doug 56]. Exprimé d'abord dans le formalisme de méthodes par éclatement

(*splitting methods*) [Ecks 92, Lion 79], il n'a été transcrit dans le formalisme de l'estimation ensembliste que longtemps après [Baus 02] :

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}(R_A \circ R_B + I) \\ s_{n+1} &= F(s_n) \end{aligned} \quad (5.9)$$

avec R_X , l'opérateur réflexion sur l'ensemble $X = \{A, B\}$.

Aussi appelé algorithme de réflexions alternées pondérées (*Averaged Alternating Reflection*, AAR) [Baus 04a], l'algorithme présente des taux de convergence plus courts que POCS et possède les atouts suivants :

- il converge fortement si Ξ est de dimension finie (faiblement sinon) vers un point $s \in \text{Fix}(F)$, et $P_B(s) \in A \cap B$, avec $\text{Fix}(F)$ l'ensemble des points fixes de F ;
- $P_B(s_n)$ est une séquence bornée, et $P_B(s_n) \rightarrow P_B(s) \in A \cap B$ si Ξ est de dimension finie (faiblement sinon).

Ainsi, nous remarquons tout d'abord qu'il est nécessaire de contrôler le projeté de chaque itération afin de vérifier si une solution appartenant à l'intersection a été trouvée. De plus, il existe une ressemblance certaine avec l'algorithme série (5.7) en prenant $\lambda_{A,n} = \lambda_{B,n} = 2 \forall n$. Seule une légère différence réside dans l'atténuation des réflexions par une moyenne avec l'opérateur identité. Cela nous a amené à définir une version pondérée de l'algorithme de Douglas-Rachford (D-R) : l'algorithme *Weighted Douglas-Rachford* (WDR), décrit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} F &= \alpha R_A \circ R_B + (1 - \alpha)I \\ s_{n+1} &= F(s_n) \end{aligned} \quad (5.10)$$

avec $\alpha \in]0,1[$, paramètre de relaxation caractérisant l'atténuation des itérations.

L'équation (5.10) est très similaire à celle présentée récemment dans [Baus 11a], mais présente plus clairement le lien existant avec l'algorithme série. En effet, quand $\alpha = 1$, l'algorithme est équivalent à l'équation (5.7) pour les valeurs $\lambda_{A,n} = \lambda_{B,n} = 2$, et quand $\alpha = 0,5$, l'équation représente l'algorithme de Douglas-Rachford originel. Cependant, quelle que soit la valeur de α , cet algorithme possède les mêmes propriétés de convergence que l'algorithme de Douglas-Rachford.

Dans la section suivante, nous nous intéressons au cas particulier de l'équation (5.10), avec $\alpha = 1$.

5.2.5 Algorithme « Reflection Onto Convex Sets »

L'algorithme *Reflection Onto Convex Sets* (ROCS) correspond à l'équation (5.7, avec $\lambda_{A,n} = \lambda_{B,n} = 2$), mais aussi à un cas particulier de l'algorithme de Douglas-Rachford, présenté précédemment. L'algorithme a été introduit sous le nom de *Peaceman-Rachford* par Lions dans [Lion 79], et étudié plus en détails par Eckstein dans [Ecks 89]. Dans le contexte du formalisme STE, nous préférons l'utilisation du terme « ROCS » dans le reste de ce manuscrit afin de garder à l'esprit l'utilisation de l'opérateur réflexion.

ROCS est ainsi défini par l'équation (5.11) :

$$\begin{aligned} F &= R_A \circ R_B \\ s_{n+1} &= F(s_n) \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.3 Quand un formalisme en cache un autre

De la même manière que pour l'algorithme de Douglas-Rachford, il est nécessaire de contrôler la projection sur chacun des ensembles afin de voir si l'algorithme a abouti sur une solution appartenant à l'intersection. Au contraire de l'algorithme D-R, toutefois, des preuves de convergence sont très délicates à établir et dépendent du problème étudié [Comb 04, Comb 09, Lion 79]. Cependant, au cours de l'étude de l'algorithme série, Gubin a démontré dans [Gubi 67] que la suite d'itérations issue de ROCS était une suite Fèjèr-monotone. Par ailleurs, il est intéressant de noter que, selon Bauschke [Baus 02], qu'un autre algorithme, celui de Boyle-Dykstra dont la convergence est forte, est un cas particulier de ROCS.

Toutefois, cet algorithme a déjà montré des performances supérieures aux algorithmes classiques dans [Lion 79] ; c'est également le cas dans l'exemple de la figure 5.6. C'est ce faisceau d'indices qui a motivé son utilisation au cours de l'étude portant sur l'application des algorithmes STE à la résolution du problème du PAPR.

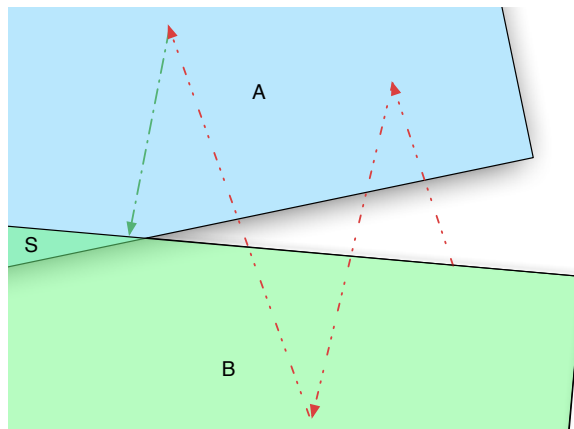


FIGURE 5.6 Quelques itérations de ROCS dans le plan euclidien

D'autres algorithmes basés sur la réflexion, et non pondérés par l'opérateur identité, ont déjà été utilisés dans la littérature. Citons notamment [Baus 04b] qui démontre la convergence d'un algorithme combinant réflexions et projections sur un cône convexe obtus, mais aussi [Oszl 04] et [Abra 96], dans lesquels l'opérateur $F = R_A \circ P_B$ est utilisé pour déterminer la structure de cristaux et de protéines. L'utilisation de la réflexion y améliore grandement la rapidité de convergence, malgré l'absence de preuves théoriques fortes.

5.3 Quand un formalisme en cache un autre

Grâce à ses interprétations graphiques intuitives, le formalisme de l'estimation ensembliste a permis l'application de nombreux algorithmes algébriques à des problèmes d'optimisation de tous horizons.

Toutefois, au fur et à mesure des travaux sur ces algorithmes, de nouveaux formalismes ont été établis, fortifiant par là même leurs fondements mathématiques tout en répondant à de nouvelles catégories de problèmes. Voici un rapide état des lieux en la matière, afin de fournir des références au lecteur désireux d'aller plus loin.

Formalisme de Fienup. Précurseur, Fienup a proposé dans de nombreuses publications des algorithmes appliqués à la reconstruction d'image avec une perspective applicative directe en astronomie. Certains sont présentés dans [Fien 82], tandis que les liens avec la théorie ensembliste sont établis plus tard par Combettes et Bauschke [Baus 02, Baus 03].

Formalisme *Difference Map*. Elser a introduit en 2003 [Else 03b, Else 03c, Else 03a] un schéma d'algorithmes englobant les algorithmes de Fienup, Combettes et Bauschke. Basé sur la différence entre deux projections pondérées, il permet notamment de détecter les phénomènes de stagnation survenant sur des problèmes de faisabilité utilisant des ensembles non convexes.

Formalisme du point fixe. Avec l'appui de la théorie sur les opérateurs contractant et les suites de Féjèr [Comb 04, Comb 01c, Comb 01b], les algorithmes par décomposition (*splitting algorithms*) étudiés notamment dans [Lion 79, Ecks 92, Ecks 89] ont été récemment réintroduits, et, grâce aux opérateurs proximaux, permettent l'expression de tous les algorithmes STE dans un formalisme unifié et la résolution de problèmes nouveaux comme l'estimation parcimonieuse [Baus 11a, Baus 11b, Comb 01a].

STE au service de la réduction du PAPR

Sommaire

6.1	Application du formalisme ensembliste	81
6.1.1	Espace considéré	82
6.1.2	Ensembles-contrainte	82
6.1.3	Opérations ensemblistes	83
6.1.4	Existence de solutions	84
6.1.5	Choix de l'algorithme	85
6.1.6	Conséquences de l'absence de convexité	85
6.1.7	Mise en œuvre d'un algorithme STE de réduction du PAPR	86
6.2	Résultats de simulation	87
6.2.1	Paramètres de simulation	87
6.2.2	Performances des algorithmes avec un spectre contigu	87
6.2.3	Performances des algorithmes avec un spectre non contigu	92
6.3	Conclusions et perspectives	94

6.1 Application du formalisme ensembliste

Dans cette section, des parallèles sont établis entre les notions algébriques, et les notions de traitement du signal, afin d'appliquer *in fine* le formalisme STE au problème de réduction du PAPR dans le cadre d'un système de communication TDCS. L'apport du formalisme ensembliste au problème de réduction du PAPR a notamment abouti aux applications nouvelles des algorithmes POCS pondéré, Douglas-Rachford et ROCS. Tous trois ont apporté des résultats remarquables en termes de temps de convergence et de fiabilité, progrès significatifs reconnus dans les conférences *CMSP 2011* [Fuma 11a] et *SPAWC 2011* [Fuma 11c] et soumis au journal IEEE Transactions on Wireless Communications [Fuma 11f].

6.1.1 Espace considéré

Puisque l'algorithme de réduction du PAPR est effectué sur un ordinateur avec des signaux discrétisés à valeur réelle positive, l'espace hilbertien considéré est l'espace euclidien dont la dimension est déterminée par le nombre d'échantillons N_{ech} . L'espace $\Xi = \mathbb{R}^{N_{\text{ech}}}$ est donc de dimension finie. Cette définition de l'espace Ξ permet à plusieurs des algorithmes présentés dans le chapitre 5 d'avoir des propriétés de convergences fortes. Ainsi, dans la suite de ce chapitre, les ensembles et opérateurs vont être considérés dans le domaine discret. La norme $\|\cdot\|$ considérée ci-après est la norme euclidienne.

6.1.2 Ensembles-contrainte

Première contrainte. Pour le premier ensemble A , nous considérons l'ensemble des signaux \mathbf{s} à N_{ech} échantillons \mathbf{s}_i réels et positifs, dont l'amplitude est comprise entre C et $-C$, $\forall i \in \llbracket 1, N_{\text{ech}} \rrbracket$, ainsi qu'il est défini dans l'équation suivante.

$$A = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{N_{\text{ech}}}; |\mathbf{s}_i| < C, \forall i \in \llbracket 1, N_{\text{ech}} \rrbracket\} \quad (6.1)$$

Il est facilement démontrable que cet ensemble est convexe. Nous pouvons même en détailler sa géométrie : A est un hypercube d'arêtes de longueur $2C$. Des détails sur le choix de C seront donnés dans la suite de cette section lorsque le problème de l'existence de solutions sera abordé.

Seconde contrainte. Le second ensemble, B , est composé des signaux discrets à valeur réelle \mathbf{s} dont la transformée de Fourier suit un gabarit spectral donné, \mathbf{m} , avec P composantes sinusoïdales \mathbf{m}_p ($p \in \llbracket 1, P \rrbracket$). Dans le reste de ce chapitre, nous adoptons la notation suivante : $\hat{\mathbf{s}}$ représente la transformée de Fourier discrète à P échantillons de \mathbf{s} . B est ainsi défini par :

$$B = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{N_{\text{ech}}} ; |\hat{\mathbf{s}}| = \mathbf{m}\} \quad (6.2)$$

L'ensemble des signaux respectant cette contrainte spectrale est fermé, mais non convexe ; reprenons l'exemple de Bauschke [Baus 02] pour démontrer facilement l'absence de convexité : soit $\mathbf{x} \in B$. Alors $-\mathbf{x} \in B$, mais $\mathbf{p} = \frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}(-\mathbf{x}) = 0 \notin B$. Les conséquences de l'absence de convexité seront abordées par la section 6.1.6.

Notons par ailleurs le fait que la géométrie de cet ensemble est fortement dépendante du gabarit spectral considéré, cela aura des conséquences importantes sur les performances des algorithmes, ainsi que nous le verrons dans les sections suivantes.

Il faut enfin souligner que la contrainte B est très souvent employée en reconstruction d'image. C'est la problématique de la récupération de phases, ou *phase retrieval problem* [Marc 07b, Marc 04, Fien 82, Marc 07a, Baus 02, Baus 03, Else 03b, Else 03c].

6.1 Application du formalisme ensembliste

6.1.3 Opérations ensemblistes

Opérations sur l'ensemble A . Puisque l'ensemble A est convexe, il est possible de définir la projection unique P_A :

$$P_A\{\mathbf{s}\} = \begin{cases} C \cdot \text{sign}[\mathbf{s}_i] & \forall i \in \llbracket 1, N_{\text{ech}} \rrbracket; |\mathbf{s}_i| \geq C \\ \mathbf{s}_i & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.3)$$

Du point de vue du traitement du signal, appliquer P_A sur \mathbf{s} est équivalent à écrêter le signal pour tous les points au dessus de C , et au dessous de $-C$. En effet, soustraire $\text{sign}\{\mathbf{s}_i\}(|\mathbf{s}_i| - C)$ ($\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ avec $|\mathbf{s}_i| > C$) est le plus petit changement à appliquer au signal \mathbf{s} pour respecter la contrainte.

De plus, l'opérateur réflexion a lui aussi une signification dans le monde du traitement du signal : R_A fait opérer une symétrie du signal autour des seuils C et $-C$. Un exemple de signal projeté et réfléchi est donné par la figure suivante.

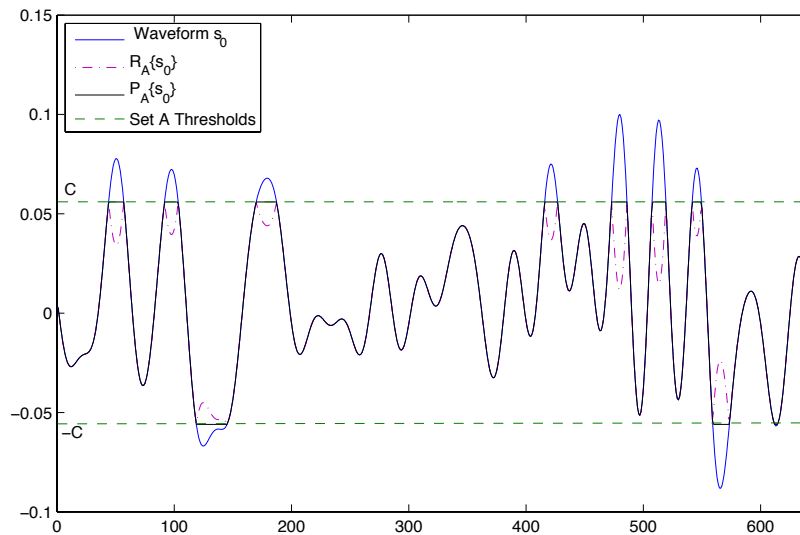


FIGURE 6.1 Exemple d'une projection et d'une réflexion sur l'ensemble A

Opérations sur l'ensemble B . Puisque l'ensemble B n'est pas convexe, plusieurs projections peuvent être définies pour un signal. Dans le reste de ce chapitre, nous considérons l'opérateur projection suivant :

$$P_B\{\mathbf{s}\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{u}\} \text{ avec } \mathbf{u}_p = \begin{cases} \mathbf{m}_p \frac{\hat{\mathbf{s}}_p}{|\hat{\mathbf{s}}_p|} & \text{si } \hat{\mathbf{s}}_p \neq 0, \\ \mathbf{m}_p & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.4)$$

avec \mathbf{u}_p , $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$, la p -ième composante sinusoïdale du spectre du signal projeté $P_B\{\mathbf{s}\}$.

Dans le domaine du traitement du signal, la projection P_B correspond à la génération d'un signal, dont le spectre en phase est inchangé, tandis que le spectre en amplitude respecte le gabarit spectral définissant l'ensemble B . La construction de ce spectre \mathbf{u} est illustrée par la figure 6.2.

En ce qui concerne l'opérateur réflexion R_B sur l'ensemble B , il n'a pas d'explication intuitive selon la perspective traitement du signal. Il est alors nécessaire d'utiliser la définition algébrique donnée en équation 5.3 pour utiliser les algorithmes ROCS et Douglas-Rachford présentés en section 5.2.5 et 5.2.4. Cela a sans doute joué un rôle dans le fait que ces algorithmes étaient négligés jusqu'à maintenant. C'est donc la première fois que ces algorithmes sont appliqués au problème de la réduction du PAPR.

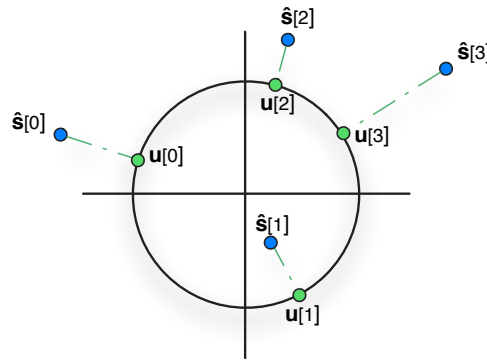


FIGURE 6.2 Construction du spectre \mathbf{u} du projeté $P_B(\mathbf{s})$

6.1.4 Existence de solutions

Considérant les ensembles précédemment définis, l'existence de solutions admissibles au problème dépend de la géométrie des deux ensembles ; c'est-à-dire, dans notre cas, du seuil d'écrêtement C pour l'ensemble A et du gabarit spectral de l'ensemble B . Par exemple, plus C est faible, plus l'ensemble A est restreint, entraînant potentiellement une intersection vide des deux ensembles. Ainsi, le choix du gabarit spectral et du seuil C sont tous deux cruciaux. Mais si le choix du gabarit spectral dépend de l'environnement du système de communication TDCS, le seuil C reste, lui, une variable d'ajustement pour s'assurer que l'algorithme aboutisse à une solution.

En effet, fixer le gabarit spectral d'un signal impose par la même occasion son énergie ε et sa puissance moyenne. De plus, définir la valeur crête C détermine la puissance pic maximale du signal. Choisir $C = \sqrt{2\varepsilon}$ assure que les signaux respectant les deux contraintes (c'est-à-dire les signaux appartenant à $S = A \cap B$) aient un PAPR de 3 dB, valeur minimale que peut prendre le PAPR d'un signal en bande RF (c.f. section 2.2.2). Cependant, comme cela a été montré, cette valeur n'est atteignable que pour les spectres dont l'amplitude est constante.

Or, dans un système TDCS classique, il est fréquent que certaines bandes de fréquences soient inutilisées par le système à cause d'interférences environnantes. Le gabarit spectral diffère alors de celui défini par la section 2.2.2, et la valeur minimale que peut prendre le PAPR est inconnue : le problème peut devenir insoluble pour un seuil d'écrêtement $C = \sqrt{2\varepsilon}$.

6.1 Application du formalisme ensembliste

Fort heureusement, les algorithmes STE réussissent souvent à approcher cette borne inférieure, comme nous le verrons au cours de la section 6.2.

6.1.5 Choix de l'algorithme

Parmi les algorithmes présentés au cours du chapitre précédent, seul l'algorithme POCS a déjà été utilisé dans le contexte de la réduction du PAPR [Frie 97, Mart 09, Gath 97]. Or, comme cela a été précédemment évoqué, POCS souffre d'une convergence lente. Nous avons donc décidé de porter notre attention sur les autres algorithmes, à l'exception de l'algorithme parallèle, qui affichait des performances similaires à POCS dans nos études préliminaires.

6.1.6 Conséquences de l'absence de convexité

Nous supposons ici $A \cap B \neq \emptyset$. Nous avons vu précédemment que l'ensemble B est non convexe. Il n'y a alors aucune preuve mathématique de la possible convergence des algorithmes décrits dans le chapitre précédent ; en effet, ceux-ci peuvent tomber dans un phénomène de boucle infinie, illustré ci-dessous.

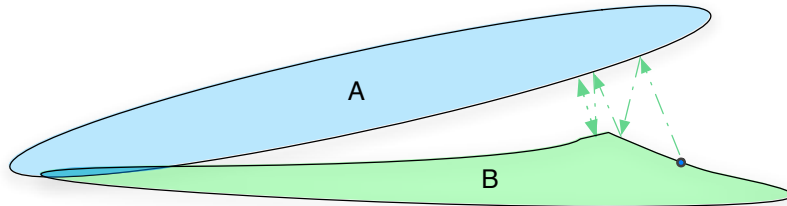


FIGURE 6.3 Illustration du phénomène de boucle infinie

Cependant, cela n'a pas empêché de précédents chercheurs d'utiliser, avec succès, les algorithmes STE dans des conditions où un ensemble est non convexe, tel le problème de récupération de phases précédemment évoqué. Par ailleurs, il existe des résultats théoriques au sujet de la convergence de certains des algorithmes lorsque la convexité n'est pas assurée. Voici quelques résultats intéressants :

- [Levi 84] montre que pour deux ensembles quelconques, la somme des distances avec chaque ensemble ne croît pas à chaque itération de l'algorithme série pour une certaine plage variable de λ_X (incluant POCS) : $J(x_{n+1}) \leq J(x_n)$ avec $J(x_n) = \|P_A(x_n) - x_n\| + \|P_B(x_n) - x_n\|$;
- dans \mathbb{R}^N , puisque les ensembles A et B sont fermés [Baus 02], et parce que A est borné, alors $A \cap B$ est borné. Selon [Comb 93], POCS converge alors localement. Il est intéressant de noter que ce fait a aussi été démontré en suivant une approche traitement du signal par Frieese [Frie 97] qui précise que l'énergie du signal écrêté diminue à chaque itération. L'approche ensembliste a cependant permis la généralisation de ce résultat pour un intervalle de valeurs de λ .

- Les algorithmes parallèles ont aussi des preuves de convergence locale en cas d’absence de convexité (c.f. [Comb 93]). Par ailleurs, dans le cas d’un problème insoluble dans \mathbb{R}^N , les itérations convergent vers un point qui minimise localement la distance pondérée entre chaque ensemble.
- L’algorithme de Douglas-Rachford a souvent été employé avec succès dans certaines conditions non convexes. Une preuve de convergence forte a cependant été apportée uniquement dans le cas de l’intersection d’une droite avec une sphère euclidienne [Borw 11].

6.1.7 Mise en œuvre d’un algorithme STE de réduction du PAPR

Le pseudo-code suivant permet d’illustrer comment un algorithme STE peut être appliqué à la réduction du PAPR d’un signal $\omega_0(t)$. En d’autres termes, c’est ce pseudo-code qui est implémenté dans le bloc de réduction du PAPR présent dans le modèle du transmetteur TDCS de la figure 3.2.1. Nous prenons ci-dessous l’exemple de l’algorithme ROCS.

Pseudo-code 1 Algorithme ROCS

- 1: Calcul du PAPR du signal souche $\omega_0(t)$.
 - 2: $\omega_0^k(t) \leftarrow \omega_0(t)$.
 - 3: **while** $\text{PAPR} \geq \text{PAPR}_{\text{cible}}$ **do**
 - 4: Calcul réflexion $\mathbf{s}_{\text{tmp}} \leftarrow R_A(\omega_0^k(t))$ (i.e. soustraire le double des valeurs supérieures à C , et inférieures à $-C$)
 - 5: Calcul réflexion $\omega_0^{k+1}(t) \leftarrow R_B(\mathbf{s}_{\text{tmp}})$ (voir section 6.1.3)
 - 6: Calcul du PAPR de $\omega_0^{\text{proj}}(t) \leftarrow P_B(\omega_0^{k+1}(t))$ (i.e. utiliser les phases de $\omega_0^{k+1}(t)$ sur le gabarit spectral)
 - 7: $\omega_0^k(t) \leftarrow \omega_0^{k+1}(t)$
 - 8: **end while**
 - 9: Modulation de $\omega_0^{\text{fin}}(t) \leftarrow \omega_0^{\text{proj}}(t)$
-

La première étape avant de lancer un algorithme STE est, bien entendu, de vérifier si le PAPR du signal est approprié ou non. Si celui-ci est supérieur à un PAPR cible, le processus récursif est alors mis en œuvre : des opérations de projections ou de réflexions sont alors calculées sur chacun des ensembles selon l’algorithme STE choisi (5.7), (5.8), (5.10), ou (5.11). Il est utile de noter que l’opérateur de projection inclus dans l’étape 6 est optionnel si l’étape 5 consiste en une projection sur l’ensemble B , comme pour l’algorithme POCS, où $\omega_0^{\text{proj}}(t) = \omega_0^{k+1}(t)$. De plus, l’étape 6 n’ajoute pas de complexité à l’algorithme ROCS car la réflexion est basée sur une projection déjà calculée à l’étape 5.

Maintenant que chaque algorithme STE est présenté dans le cadre du problème de la réduction du PAPR, nous allons déterminer lequel d’entre eux compose le mieux avec les particularités du problème de réduction du PAPR, à savoir l’absence de convexité, la géométrie variable du gabarit spectral et le choix du seuil d’écèlement.

6.2 Résultats de simulation

6.2.1 Paramètres de simulation

Dans la section précédente, l'accent a été porté sur le fait que les algorithmes STE dépendent fortement de la géométrie de chaque ensemble. Cela se traduit par des performances en termes de vitesse et de fiabilité qui varient fortement selon le signal initial, le PAPR cible et le gabarit spectral.

Dans les simulations qui ont été menées, le PAPR cible a été fixé à 3 dB, la borne inférieure définie dans la section 2.2.2. Deux gabarits spectraux différents présentant la même dimensionnalité ont fait l'objet de simulations : un spectre contigu, et un spectre dont certaines fréquences intermédiaires sont inactives. Cependant, tous deux ont 32 composantes sinusoïdales, et 70% d'entre elles sont actives, avec une amplitude fixée à 1. Le facteur de sur-échantillonnage choisi est de 20. Ces deux spectres sont schématisés ci-après.

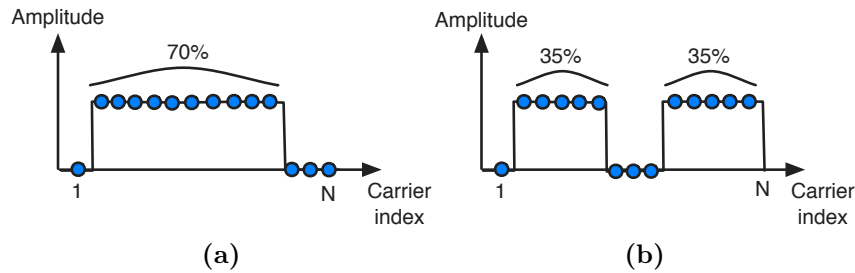


FIGURE 6.4 Gabarits spectraux étudiés

Dans cette partie, nous comparons l'algorithme POCS, déjà étudié dans [Frie 97, Mart 09, Gath 97] dans le contexte de réduction du PAPR, avec les algorithmes suivants : une version relaxée de POCS dont les paramètres sont égaux à 1,9 ($\lambda_A = \lambda_B = 1,9$), l'algorithme de Douglas-Rachford standard, et ROCS. Penchons-nous tout d'abord sur l'étude du cas d'un spectre contigu.

6.2.2 Performances des algorithmes avec un spectre contigu

Afin de comparer les algorithmes proposés, nous avons décidé de choisir des métriques venant à la fois du monde du traitement du signal et de la théorie ensembliste. La première métrique est largement répandue dans la littérature traitant du PAPR, c'est la fonction de répartition complémentaire (*Complementary Cumulative Density Function*, CCDF), déjà utilisée dans la section 2.2.2. La seconde métrique est la distance interensembles qui permet de profiter d'une interprétation graphique de la théorie ensembliste, tandis que la troisième consiste en de simples statistiques grâce auxquelles il est possible d'apprécier rapidement les performances des algorithmes.

6.2.2.1 Fonctions de répartition selon le nombre d'itérations

Pour juger du comportement des algorithmes, nous décidons d'étudier les courbes CCDF à différentes étapes du déroulement de ceux-ci : successivement après 10, 500, et

5000 itérations de chacun. Les résultats sont affichés dans les figures 6.5, 6.6 et 6.7, avec comme étalon, la courbe CCDF d'un signal multiporteuse dont les phases sont aléatoires et uniformément distribuées.

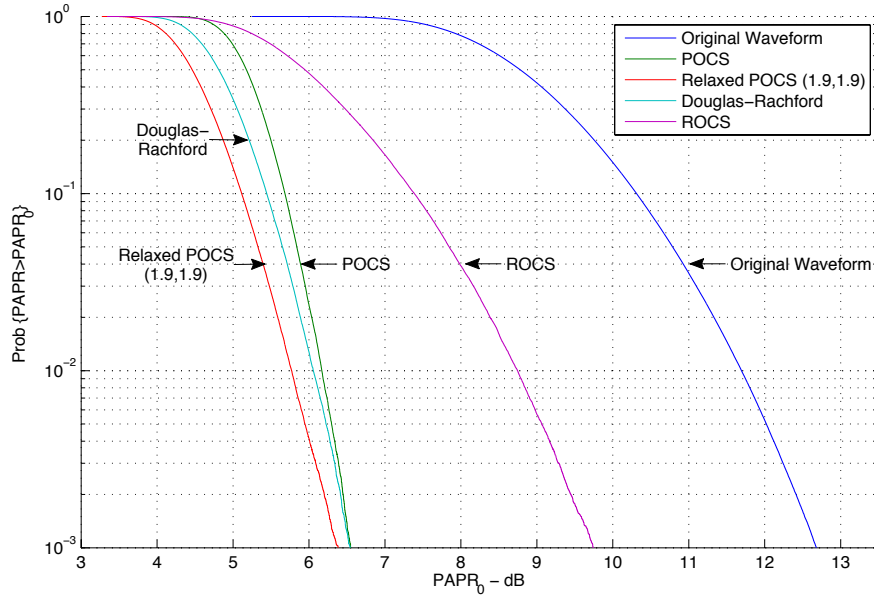


FIGURE 6.5 Fonctions de répartition après 10 itérations pour un PAPR cible de 3 dB

Supériorité initiale de POCS pondéré. La première chose à remarquer sur la figure 6.5, c'est que POCS a d'ores et déjà réduit le PAPR de 5,5 dB par rapport à sa valeur initiale pour une probabilité de 10^{-2} . De plus, l'augmentation des paramètres λ_A et λ_B de l'algorithme série a permis une réduction plus importante du PAPR. Les coefficients de relaxation ont donc amélioré le taux de convergence de l'algorithme POCS, comme cela a déjà été suggéré dans d'autres applications [Seza 82, Levi 84].

Toutefois, il est important de noter que, malgré les similarités entre les équations définissant chaque algorithme (5.7), (5.10) et (5.11), ROCS et Douglas-Rachford restent en retrait par rapport à la version pondérée de POCS. Ce fait suggère que POCS choisit la direction de descente la plus forte, ce qui explique son nom alternatif de *steepest-descent algorithm* dans le cas des algorithmes de récupération de phases [Marc 07b].

Rien ne sert de courir ; il faut partir à point. ¹ Cependant, les choses évoluent à partir d'un nombre plus élevé d'itérations : après 500 itérations, les algorithmes Douglas-Rachford et ROCS affichent des performances bien meilleures à celles de POCS et de POCS pondéré. De plus, la figure 6.6 montre deux comportements notables pour une fonction de répartition de PAPR. Primo, un palier est présent pour un PAPR de 3 dB. Secundo, les courbes se croisent.

1. Voir [Font 68], reprenant les travaux d'Ésope.

6.2 Résultats de simulation

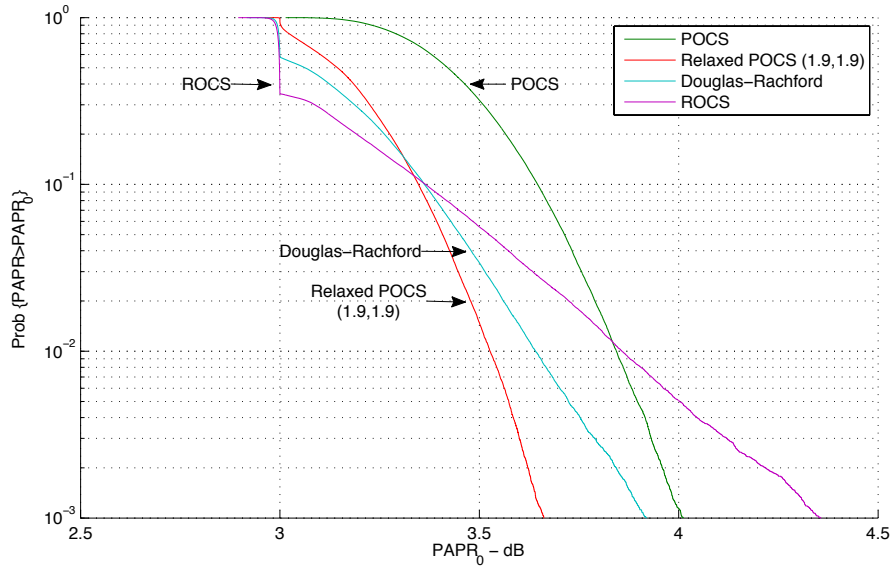


FIGURE 6.6 Fonctions de répartition après 500 itérations pour un PAPR cible de 3 dB

L'effet de palier s'explique aisément : certains algorithmes ont déjà convergé vers le PAPR cible. Par exemple, il y a une probabilité de seulement 35 % pour que les signaux générés par ROCS affichent un PAPR supérieur à 3 dB après 500 itérations. Cette probabilité augmente aux alentours de 50 % pour l'algorithme de Douglas-Rachford, tandis que la probabilité que POCS ait réussi sa convergence vers 3 dB après 500 itérations est quasi-nulle.

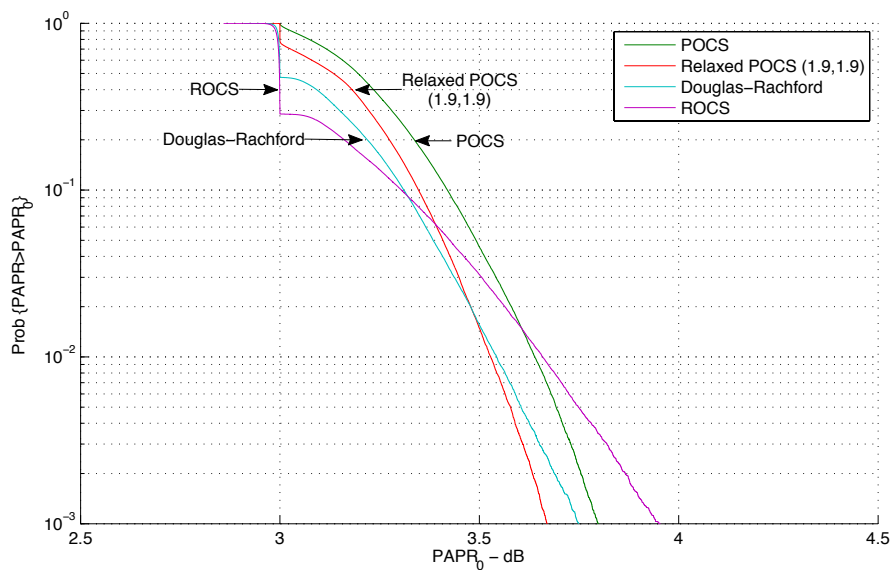


FIGURE 6.7 Fonctions de répartition après 5000 itérations pour un PAPR cible de 3 dB

Une hiérarchie inchangée sur le long terme. En laissant les algorithmes opérer 5000 itérations, le classement des algorithmes ne change pas, comme on peut le constater dans la figure 6.7. Cependant, alors que les performances de POCS ont été améliorées, celles de ROCS et de Douglas-Rachford ne présentent pas de progrès significatifs.

A partir de ces trois courbes, il est possible de conclure que POCS pondéré converge plus rapidement dans les premières itérations, mais ROCS et Douglas-Rachford arrivent rapidement à le dépasser, et à atteindre la borne inférieure du PAPR, tandis que toutes les versions de POCS majorent cet objectif.

Cependant, un phénomène reste inexpliqué : l'intersection des courbes constatée dans les figures 6.6 et 6.7. Cela signifie que l'algorithme POCS bénéficie d'une probabilité plus faible d'aboutir à de très forts PAPR. Afin d'expliquer ce phénomène paradoxal, il est nécessaire de tirer profit de notre approche algébrique, en considérant une autre métrique : la distance interensembles.

6.2.2.2 Distance interensembles

Présentée par Fienup dans [Fien 82] et reprise par Bauschke dans [Baus 03], la distance interensembles est définie par l'équation (6.5), et représentée ci-dessous.

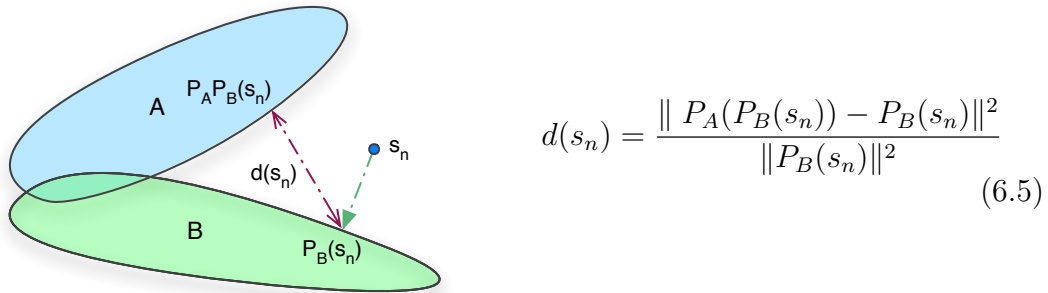


FIGURE 6.8 Distance interensembles

D'un point de vue de traitement du signal, plus la distance est petite, plus le PAPR du signal est proche de l'objectif donné. Cette métrique a été calculée à chaque itérations à plusieurs reprises pour tous les algorithmes. La courbe moyenne de chaque méthode de réduction est représentée dans la figure 6.9 en adoptant une échelle logarithmique sur chacun des deux axes. La courbe de distance interensembles ainsi obtenue peut être interprétée comme étant un profil de convergence type, et aide à l'appréciation du taux de convergence de chaque algorithme.

Nous pouvons clairement constater que le comportement de POCS est plus doux, mais aussi beaucoup plus lent que la plupart des algorithmes, et atteint une distance interensembles finale bien plus grande que tous les autres algorithmes ; nous retrouvons ainsi les résultats observés précédemment. De plus, nous observons que la version pondérée de POCS avec $\lambda_A = \lambda_B = 1,9$ conserve la convergence douce de POCS, mais gagne significativement en célérité et dépasse ROCS et Douglas-Rachford dans un premier temps.

6.2 Résultats de simulation

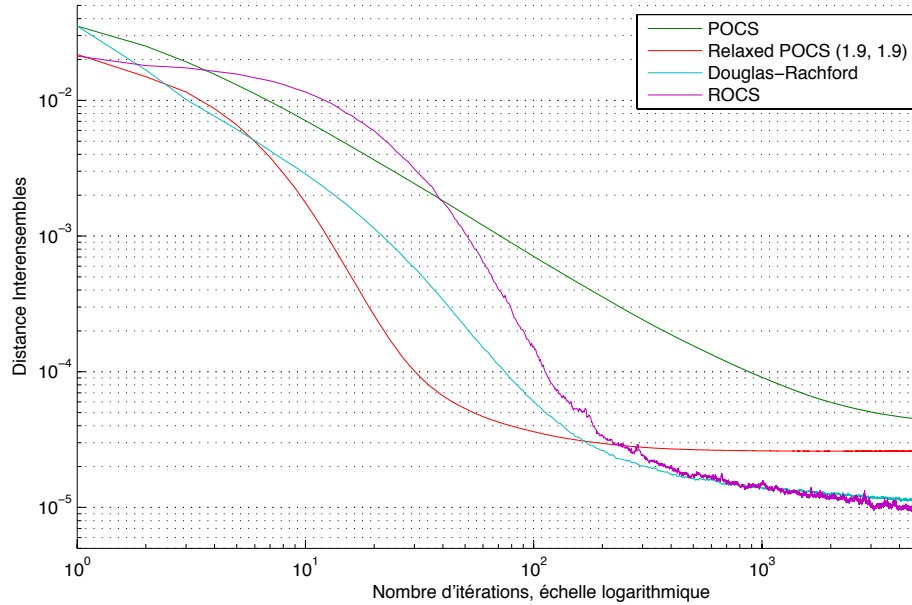


FIGURE 6.9 Distance interensembles moyenne pour un spectre contigu et un PAPR cible de 3 dB

Dans un second temps, ces deux derniers atteignent une distance interensembles plus basse que n'importe quel autre algorithme, comme le suggéraient les résultats obtenus dans la section 6.2.2.1.

Cependant, il est important de noter la décroissance irrégulière de l'algorithme ROCS (et de Douglas-Rachford dans une moindre mesure), et ce, malgré le fait que chaque profil de convergence résulte de la moyenne d'un nombre élevé de simulations. Cette décroissance non monotone laisse supposer que la moyenne des courbes cache des valeurs finales de PAPR supérieures à celles de POCS, et pourrait expliquer pourquoi les courbes CCDF des figures 6.6 et 6.7 finissent par se croiser.

6.2.2.3 Statistiques

Afin d'évaluer le taux de convergence de chaque algorithme, nous considérons désormais le nombre moyen d'itérations nécessaires à l'obtention du PAPR cible. Les résultats sont donnés dans le tableau 6.1.

	POCS	Rel. POCS (1,9,1,9)	D-R	ROCS
Nombre d'itérations	2909	555	384	222

TABLE 6.1 Nombre moyen d'itérations pour atteindre un PAPR de 3 dB, si celui-ci est atteint

À cause de la dépendance au point initial, nous avons effectué 5000 simulations, cha-

cune tournant jusqu'à convergence, ou, le cas échéant, jusqu'à 5000 itérations. Il est important de noter que le nombre d'itérations est ici bien supérieur à ceux obtenus dans [Mart 09]. Plusieurs explications à cela : tout d'abord, aucun sur-échantillonnage n'était considéré, ce qui a pu mener à des estimations du PAPR erronées (ainsi que le précise la section 2.2.2). Par ailleurs, malgré la dénomination « PAPR », les auteurs considéraient en fait le PMEPR, et ne cherchaient pas à atteindre la borne inférieure.

Enfin, il existe un écart de performance significatif entre ROCS et les algorithmes séries, et ce, bien que leurs paramètres λ_A et λ_B soient très proches. Tandis que la version pondérée de l'algorithme POCS n'apporte qu'un gain léger en rapidité de convergence, ROCS affiche un comportement tout à fait différent. Cela corrobore le fait que, théoriquement, λ_X ne peut prendre la valeur 2 dans l'algorithme série.

Cette différence de comportement est particulièrement remarquable dans le cas où un spectre non contigu est considéré, comme on le verra dans la section suivante.

6.2.3 Performances des algorithmes avec un spectre non contigu

6.2.3.1 De l'intérêt du cas non contigu

Dans les simulations qui suivent, le gabarit spectral de la figure 6.4b est choisi. En télécommunication, cela correspond à une transmission d'information en évitant des interférences selon le paradigme de TDCS. D'un point de vue algébrique, l'ensemble B devient intuitivement moins convexe que lorsque le spectre est contigu. Cette notion de convexité moindre est cependant difficile à démontrer puisqu'elle impliquerait le calcul et la comparaison d'enveloppes convexes à N dimensions.

Par ailleurs, il est bon de noter que le spectre est ici bien différent de celui qui permet le PAPR minimum (voir le résultat de Kahane cité dans la section 2.2.2). Ainsi, les risques que le problème de faisabilité ne soit plus soluble est bien plus élevé que pour les simulations précédentes – d'où l'intérêt d'étudier le comportement de chaque algorithme face à l'absence de convexité et de solutions admissibles.

6.2.3.2 Résultats de simulations

PAPR cible de 3 dB. Tout d'abord, chaque algorithme a été lancé avec un PAPR cible de 3 dB. Aucun d'entre eux n'a réussi à atteindre cet objectif à quelque moment que ce soit. De plus, l'algorithme ROCS affichait une oscillation forte, tandis que les algorithmes séries et de Douglas-Rachford convergeaient vers une valeur de PAPR supérieure à 3 dB.

Les fonctions de répartition correspondantes sont tracées dans la figure 6.10 après 5000 itérations de chaque algorithme.

ROCS échoue clairement à atteindre une distribution du PAPR correcte : il génère uniquement des signaux à fort PAPR. L'algorithme de Douglas-Rachford affiche, lui, des performances bien plus acceptables, bien que la version relaxée de l'algorithme série n'ait qu'une avance légère.

Ainsi, ROCS affiche un comportement totalement différent des autres algorithmes ; cela confirme le fait que ROCS appartienne à une autre classe d'algorithme.

6.2 Résultats de simulation

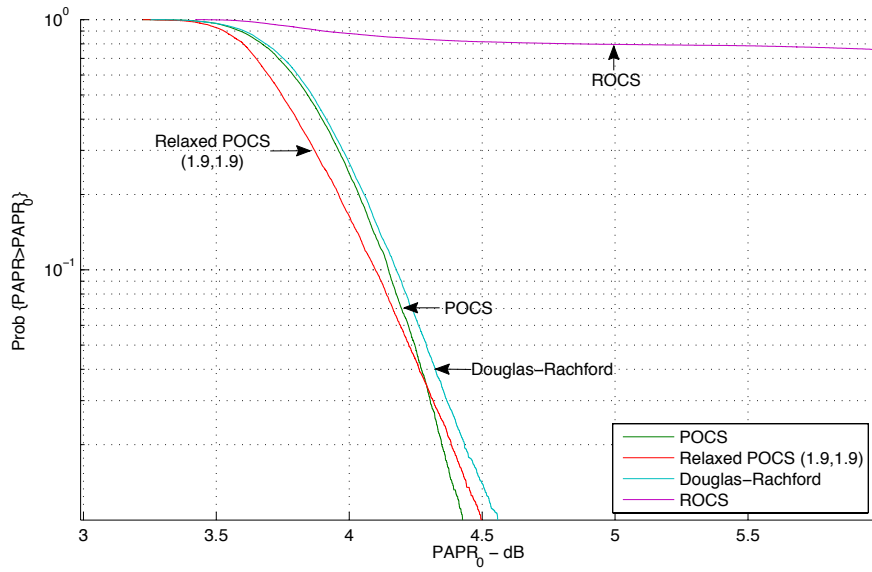


FIGURE 6.10 Fonctions de répartition pour un spectre non contigu et un PAPR cible de 3 dB

PAPR cible de 3,3 dB. Puisqu'aucun algorithme ne converge vers la borne inférieure, il apparaît évident que le problème est mal conditionné à cause du gabarit spectral. Puisque celui-ci est fixé par le spectre environnant, il est alors nécessaire de le laisser inchangé et d'alléger la contrainte sur l'ensemble A . Le PAPR cible est alors augmenté de 3 dB à 3,3 dB afin d'augmenter la taille de l'ensemble A et provoquer ainsi une intersection non vide des deux ensembles-contrainte.

Les fonctions de répartition sont données en figure 6.11. Nous pouvons voir que les algorithmes ROCS et de Douglas-Rachford réussissent finalement à surpasser les performances de POCS. La hiérarchie est alors identique à celle observée dans le cas d'un spectre contigu.

PAPR cible de 3,8 dB. Relâcher la contrainte du PAPR jusqu'à 3,8 dB permet de faire converger la plupart des algorithmes rapidement et pratiquement à chaque simulation. Seul POCS souffre encore de stagnation, comme on peut le constater dans les statistiques données dans le tableau 6.2 qui indiquent le taux de convergence manquée pour un PAPR cible de 3,8 dB.

	POCS	Rel. POCS (1,9,1,9)	D-R	ROCS
Convergence manquée	28%	4,5%	0%	0%

TABLE 6.2 Taux de convergence manquée pour atteindre un PAPR cible de 3,8 dB

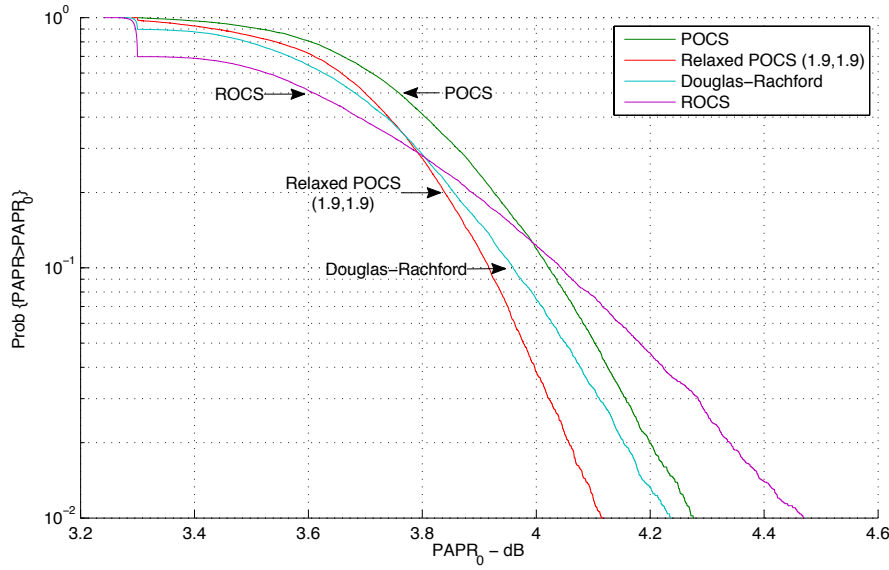


FIGURE 6.11 Fonctions de répartition pour un spectre non contigu et un PAPR cible de 3,3 dB

6.3 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons appliqué le formalisme STE au problème de la réduction du PAPR pour des systèmes TDCS. Grâce à la propriété des symboles TDCS de respecter un gabarit spectral précis, il a été possible de générer des signaux dont le PAPR est le minimum absolu.

Seul l'algorithme POCS avait déjà été appliqué dans ce contexte [Frie 97, Mart 09], car seuls les opérateurs de projection simple permettent une interprétation intuitive dans le domaine du traitement du signal. Les simulations que nous avons menées ont souligné la sensibilité de l'algorithme à l'effet tunnel et au problème de stagnation résultant de l'utilisation d'ensembles non convexes. Nous avons appliqué pour la première fois la version pondérée de POCS au problème de réduction du PAPR, et ce simple changement a permis d'accélérer significativement le taux de convergence de l'algorithme.

Mais nous ne nous sommes pas arrêtés à la simple pondération de l'opérateur projection. Nous avons aussi appliqué les algorithmes ROCS et de Douglas-Rachford, bien moins connus, mais beaucoup plus efficaces. À l'aide de l'observation de métriques classiques, mais aussi de métriques ensemblistes, telles que la distance interensembles, il est ressorti de nos simulations que ROCS possède deux avantages majeurs : sa vitesse de convergence et son taux de succès à l'atteinte du PAPR cible. Toutefois, la stabilité de l'algorithme a été mise en défaut lorsque le problème n'était plus soluble, tandis que l'algorithme de Douglas-Rachford, lui, ne divergeait pas. Ainsi, dans les cas où la borne inférieure d'un gabarit spectral est inconnue, et lorsque le système ne peut se permettre d'essayer chaque algorithme, l'algorithme de Douglas-Rachford paraît être un excellent compromis entre performances de convergence et stabilité.

L'approche ensembliste appliqué au problème de réduction du PAPR a permis l'ap-

6.3 Conclusions et perspectives

plication d'algorithmes performants, jusqu'ici ignorés. Sur ce point, il serait intéressant d'étudier les performances de l'algorithme de Boyle-Dykstra, qui converge vers la solution le plus proche du signal initial [Baus 02]. Mais le recours à de nouveaux algorithmes ne constitue pas le seul intérêt de ce formalisme. Il est désormais possible de s'intéresser aux problèmes de convergences stagnantes sous un angle algébrique intuitif. Citons notamment les travaux de Elser [Else 03b] pour détecter ces stagnations, ceux de Levi [Levi 84] qui, pour en sortir, suggèrent l'ajout d'une itération orthogonale à la direction de descente, et les études d'accélération de POCS à l'aide de prédictions, ou d'ajustements dynamiques des paramètres λ , ω , ou α [Croc 04, Fan 95, Crom 06, Levi 84].

Ce sont autant de pistes qui méritent d'être approfondies pour trouver des solutions spécifiques au problème de réduction du PAPR.

Conclusions et perspectives

Face à un nombre croissant de systèmes communicants, le paradigme de la radio cognitive constitue une piste de recherche sérieuse pour résoudre les problèmes d'accès au médium et de sous-utilisation spectrale. Une technique relevant de ce paradigme, *Transform Domain Communication System*, a constitué l'objet de cette thèse.

Présentée en détails dans le chapitre 3 de ce manuscrit, TDCS semble offrir l'adaptabilité au canal et au spectre, nécessaire aux moyens de télécommunication de demain. TDCS présente plusieurs points communs avec des systèmes plus connus tels qu'OFDM. Toutefois, comme cela été précédemment souligné, TDCS se distingue par le respect d'un gabarit spectral fixe grâce à l'emploi d'un signal souche pour la transmission d'information. Ce sont ces caractéristiques intrinsèques au système qui ont fait que, malgré la littérature abondante traitant de TDCS, la question des performances en termes d'efficacité spectrale et énergétique du système restait floue. Quel débit pouvait être transmis, quelles marges de transmission devaient être prises en considération ? Autant de questions auxquelles les deuxième et troisième parties de ce manuscrit ont tenté de répondre.

C'est à l'aide du formalisme des modulations linéaires que la question de l'efficacité spectrale a trouvé réponse au chapitre 4. Des règles de conception ont notamment été introduites afin de pouvoir améliorer conjointement l'efficacité spectrale et le taux d'erreur binaire d'un système TDCS. Cet apport est d'autant plus utile qu'il était jusqu'alors fréquent de trouver, dans la littérature, des systèmes TDCS dont l'efficacité spectrale et le taux d'erreur binaires étaient sous-optimaux.

De plus, muni de la modulation CSK, TDCS se rapproche des modulations orthogonales, efficaces en puissance, décrites dans le second chapitre. Cette caractéristique cantonnait jusqu'à présent le système à la transmission de flux bas-débits. Dans le but de pouvoir couvrir une plus large plage de débits, une modulation multidimensionnelle haute-densité fut proposée et ses performances analytiques en taux d'erreur binaire y ont alors été développées. Une implémentation basée sur des signaux CSK a été proposée et a permis de confirmer les résultats théoriques à l'aide de nombreuses simulations. N'ajoutant que très peu de complexité, cette implémentation souffre toutefois du défaut d'orthogonalité entre les différents symboles CSK.

Si le système TDCS-CSK s'est révélé être intrinsèquement à faible efficacité spectrale, celui-ci présente un avantage non négligeable pour l'amélioration de son efficacité énergétique. En effet, tandis que les signaux OFDM varient continuellement au fil du flux binaire à transmettre, TDCS permet de résoudre le problème d'un fort PAPR si l'on choisit *a priori* une technique adéquate de génération de signal. C'est à l'aide de la définition du formalisme de l'estimation ensembliste donnée dans le chapitre 5 que l'utilisation nouvelle

des algorithmes de Douglas-Rachford et Reflection Onto Convex Sets a pu être proposée au chapitre 6. Ceux-ci se sont révélés être beaucoup plus performants que l'algorithme POCS utilisé jusqu'à présent ; en effet, le nombre d'itérations nécessaires pour converger vers un signal à faible PAPR a pu être diminué d'un facteur dix. Par ailleurs, les algorithmes proposés ont permis d'atteindre la borne minimale du PAPR, à savoir 3 dB, tandis que POCS majorait cette limite.

En trois années de thèse, il est rare qu'une problématique puisse être entièrement couverte. Nos travaux ne dérogent pas à la règle, et de nombreuses pistes de recherche restent à explorer. Commençons par en citer quelques-unes au sujet de l'efficacité spectrale de TDCS :

- Si, sur un plan théorique, la modulation multidimensionnelle à haute densité est prometteuse, son implémentation basée sur CSK est compromise. En effet, CSK génère des signaux dont l'orthogonalité n'est pas parfaite, et cela affecte en conséquence les performances en taux d'erreur binaire. Ainsi, des modèles d'émetteur et de récepteur basés sur les signaux purement orthogonaux décrits dans la section 4.3.4, restent à développer.
- La modulation multidimensionnelle a été proposée. C'est une option de constellation parmi de nombreuses autres. En effet, en se référant aux nombreuses publications traitant du sujet, avec par exemple [Forn 89], de nouveaux schémas de constellation TDCS pourraient être étudiés, notamment le cas des modulations avec effet mémoire [Proa 07], ou les constellations dites *hypercube*.
- De plus, toutes les simulations présentées dans ce manuscrit ont été effectuées dans un canal AWGN. Or, en considérant des canaux de transmission non linéaires, il serait avantageux de tirer profit de la structure particulière de la modulation CSK en implémentant une version différentielle, ou non cohérente. Ainsi, en supposant que deux symboles consécutifs subissent les mêmes altérations du canal, il serait possible de rendre la transmission robuste aux imperfections du canal puisque les symboles successifs sont identiques, à un décalage temporel près.

Au sujet de la réduction du PAPR pour TDCS, si l'approche ensembliste s'est révélée prometteuse, celle-ci est tout aussi riche en pistes de recherche. En effet, outre celles évoquées dans la section 6.3, ajoutons les pistes suivantes :

- Les techniques de génération de signaux à faible PAPR que nous avons proposées sont uniquement valables pour l'usage de la modulation CSK avec TDCS. Un nouveau formalisme, ou de nouveaux ensembles-contrainte seraient à considérer afin de permettre l'application de ces techniques à des modulations multidimensionnelles, telles que celle proposée dans la section 4.3.3.
- La question de la connaissance *a priori* de l'existence de solutions au problème de faisabilité est déterminante pour la convergence des algorithmes ensemblistes (notamment ROCS). Ainsi, une étude approfondie de la géométrie de la configuration permettrait un choix optimal d'algorithme. Cette étude pourrait, par exemple, traiter des points suivants : la valeur minimale que peut prendre le PAPR pour un gabarit

spectral donné, la notion de convexité partielle d'un ensemble, ou encore celle de « l'angle » entre deux ensembles.

- Comme la section 5.3 l'a souligné, le formalisme de l'estimation ensembliste n'est qu'un formalisme parmi plusieurs autres. Il serait ainsi intéressant d'appliquer un des formalismes mentionnés, car chacun possède des caractéristiques propres ; certains proposent des approches permettant de mieux détecter les phénomènes de stagnation, tandis que d'autres offrent un éventail d'algorithmes plus important : citons notamment la théorie autour des opérateurs proximaux qui généralisent le principe de l'opérateur projection.

Si cette thèse a permis de proposer des résultats rendant TDCS un peu moins *terra incognita*, de nouvelles recherches restent à entreprendre afin de confirmer la capacité de ce dernier à couvrir une large plage de débit tout en gardant un PAPR réduit.

Bibliographie

- [Abra 96] J. P. ABRAHAMSON ET A. G. W. LESLIE. **Methods used in the structure determination of bovine mitochondrial F_1 ATPase.** *Acta Crystallographica Section D*, vol. 52, no. 1, pp. 30–42. Janvier 1996.
- [Baus 02] H. H. BAUSCHKE, P. L. COMBETTES, ET D. R. LUKE. **Phase retrieval, error reduction algorithm, and Fienup variants : a view from convex optimization.** *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 19, no. 7, pp. 1334–1345. Juillet 2002.
- [Baus 03] H. H. BAUSCHKE, P. L. COMBETTES, ET D. R. LUKE. **Hybrid projection–reflection method for phase retrieval.** *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 20, no. 6, pp. 1025–1034. Juin 2003.
- [Baus 04a] H. H. BAUSCHKE, P. L. COMBETTES, ET D. R. LUKE. **Finding best approximation pairs relative to two closed convex sets in Hilbert spaces.** *Journal of Approximation Theory*, vol. 127, no. 2, pp. 178–192. Avril 2004.
- [Baus 04b] H. BAUSCHKE ET S. KRUK. **Reflection-Projection Method for Convex Feasibility Problems with an Obtuse Cone.** *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 120, no. 3, pp. 503–531. Mars 2004.
- [Baus 11a] H. BAUSCHKE, R. BURACHIK, P. COMBETTES, V. ELSER, D. LUKE, ET H. WOLKOWICZ. *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering.* Springer-Verlag, 2011.
- [Baus 11b] H. BAUSCHKE ET P. COMBETTES. *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces.* Springer-Verlag, 2011.
- [Borw 11] J. M. BORWEIN ET B. SIMS. **The Douglas-Rachford Algorithm in the Absence of Convexity.** Tiré de : *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*, pp. 93–109, Springer-Verlag, 2011.
- [Breg 67] L. M. BREGMAN. **The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems**

- in convex programming.** *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 7, no. 3, pp. 200–217. Mai 1967.
- [Budi 08a] I. BUDIARJO, H. NIKOOKAR, ET L. LIGTHART. **Cognitive radio modulation techniques.** *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 6, pp. 24–34. Novembre 2008.
- [Budi 08b] I. BUDIARJO, H. NIKOOKAR, ET L. LIGTHART. **Cognitive Radio with Single Carrier TDCS and Multicarrier OFDM Approach with V-BLAST Receiver in Rayleigh Fading Channel.** *Mobile Networks and Applications*, vol. 13, pp. 416–423. Octobre 2008.
- [Budi 08c] I. BUDIARJO, H. NIKOOKAR, ET L. LIGTHART. **On the utilization of embedded symbol for CCSK BER improvement in TDCS dynamic spectrum access.** Présenté à : *Eleventh European Conference on Wireless Technology*, pp. 123–126. Octobre 2008.
- [Cabr 04] D. CABRIC, S. MISHRA, ET R. BRODERSEN. **Implementation issues in spectrum sensing for cognitive radios.** Présenté à : *Thirty-Eighth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, vol. 1, pp. 772–776. Novembre 2004.
- [Cabr 06] D. CABRIC, I. O'DONNELL, M.-W. CHEN, ET R. BRODERSEN. **Spectrum sharing radios.** *IEEE Magazine on Circuits and Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 30–45. Juin 2006.
- [cCet 88] A. E. ÇETIN ET R. ANSARI. **Convolution-based framework for signal recovery and applications.** *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 5, no. 8, pp. 1193–1200. Août 1988.
- [Chak 05a] V. D. CHAKRAVARTHY, A. NUNEZ, J. STEPHENS, A. SHAW, ET M. TEMPLE. **TDCS, OFDM, and MC-CDMA : a brief tutorial.** *IEEE Communications Magazine*, vol. 43, no. 9, pp. S11–S16. Septembre 2005.
- [Chak 05b] V. D. CHAKRAVARTHY, A. SHAW, M. TEMPLE, ET J. STEPHENS. **Cognitive radio - an adaptive waveform with spectral sharing capability.** Présenté à : *IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, vol. 2, pp. 724–729. Mars 2005.
- [Chak 08] V. D. CHAKRAVARTHY. *Evaluation of overlay/underlay waveform via sd-smse framework for enhancing spectrum efficiency.* Mémoire de thèse, no. AAI3375479, Air Force Institute of Technology, Dayton, OH, USA. Juillet 2008.
- [Chak 09] V. D. CHAKRAVARTHY, X. LI, Z. WU, M. TEMPLE, F. GARBER, R. KANNAN, ET A. VASILAKOS. **Novel overlay/underlay cognitive radio waveforms using SD-SMSE framework to enhance spectrum efficiency**

- **Part I : theoretical framework and analysis in AWGN channel.** *IEEE Transactions on Communications*, vol. 57, no. 12, pp. 3794–3804. Décembre 2009.
- [Chak 10] V. D. CHAKRAVARTHY, X. LI, R. ZHOU, Z. WU, ET M. TEMPLE. **Novel overlay/underlay cognitive radio waveforms using SD-SMSE framework to enhance spectrum efficiency – Part II : analysis in fading channels.** *IEEE Transactions on Communications*, vol. 58, no. 6, pp. 1868–1876. Juin 2010.
- [Char 10] P. CHARGÉ, G. FUMAT, ET P. ACCO. **Multiple-antenna Transmitted-Reference communication systems performance in presence of narrowband interference.** Présenté à : *Eleventh IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, pp. 1–5. Juin 2010.
- [Comb 01a] P. L. COMBETTES. **Convexité et signal.** Présenté à : *SMAI Congrès National de Mathématiques Appliquées et Industrielles*, pp. 6–16. Mai 2001.
- [Comb 01b] P. L. COMBETTES. **Fejér Monotonicity in Convex Optimization.** Tiré de : C. A. Floudas et P. M. Pardalos, *Encyclopedia of Optimization*, pp. 106–114, Springer-Verlag, 2001.
- [Comb 01c] P. L. COMBETTES. **Quasi-Fejérian analysis of some optimization algorithms.** Tiré de : D. Butnariu, Y. Censor, et S. Reich, *Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and their Applications*, pp. 115–152, Elsevier, 2001.
- [Comb 04] P. L. COMBETTES. **Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators.** *Optimization*, vol. 53, pp. 475–504. 2004.
- [Comb 09] P. L. COMBETTES. **Iterative construction of the resolvent of a sum of maximal monotone operators.** *Journal of Convex Analysis*, vol. 16, no. 4, pp. 727–748. Décembre 2009.
- [Comb 93] P. L. COMBETTES. **The foundations of set theoretic estimation.** *Proceedings of the IEEE*, vol. 81, no. 2, pp. 182–208. Février 1993.
- [Comb 97] P. L. COMBETTES. **Convex set theoretic image recovery by extrapolated iterations of parallel subgradient projections.** *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 6, no. 4, pp. 493–506. Avril 1997.
- [Croc 04] J. CROCKETT, T. MOON, ET J. GUNTHER. **Accelerating the convergence of POCS algorithms by exponential prediction.** Présenté à : *IEEE Digital Signal Processing Workshop*, pp. 173–177. Août 2004.

-
- [Crom 06] G. CROMBEZ. **A sequential iteration algorithm with non-monotoneous behaviour in the method of projections onto convex sets.** *Czechoslovak Mathematical Journal*, vol. 56, pp. 491–506. 2006.
- [CRÉD 10] CRÉDOC. **La diffusion des technologies de l’information et de la communication dans la société française.** Rapport interne, Centre de Recherche pour l’Étude et l’Observations des Conditions de vie, Décembre 2010.
- [Deng 10] J.-H. DENG ET S.-M. LIAO. **A Low-PAPR Multiplexed MC-CDMA System with Enhanced Data Rate over Multipath Channels.** Présenté à : *IEEE Vehicular Technology Conference*, pp. 1–5. Mai 2010.
- [Dill 03] G. M. DILLARD, M. REUTER, J. ZEIDLER, ET B. ZEIDLER. **Cyclic code shift keying : a low probability of intercept communication technique.** *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems*, vol. 39, pp. 786–798. Juillet 2003.
- [Doug 56] J. DOUGLAS ET H. H. RACHFORD. **On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space Variables.** *Transactions of American Society*, no. 82, pp. 421–439. Juillet 1956.
- [Ecks 89] J. ECKSTEIN. *Splitting methods for monotone operators with applications to parallel optimization.* Mémoire de thèse, no. LIDS-TH-1877, Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Civil Engineering., Dayton, OH, USA. 1989.
- [Ecks 92] J. ECKSTEIN ET D. P. BERTSEKAS. **On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators.** *Mathematical Programming*, vol. 55, pp. 293–318. Avril 1992.
- [Else 03a] V. ELSER. **The Mermin Fixed Point.** *Foundations of Physics*, vol. 33, pp. 1691–1698. Novembre 2003.
- [Else 03b] V. ELSER. **Phase retrieval by iterated projections.** *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 20, no. 1, pp. 40–55. Janvier 2003.
- [Else 03c] V. ELSER. **Random projections and the optimization of an algorithm for phase retrieval.** *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 36, no. 12, pp. 2995–3007. Mars 2003.
- [Ends 94] J. ENDSLEY ET R. DEAN. **Multi-access properties of transform domain spread spectrum systems.** Présenté à : *Tactical Communications Conference*, pp. 505–505. Mai 1994.
- [Erem 65] I. EREMIN. **Generalization of the relaxation method of Motzkin and Agmon.** *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 20, no. 2, pp. 183–187. Mars 1965.

BIBLIOGRAPHIE

- [Fan 95] Z. FAN. **Acceleration of projections onto convex sets.** Présenté à : *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers Conference*, vol. 2421, pp. 123–129. Mars 1995.
- [Faze 08] K. FAZEL ET S. KAISER. *Multi-carrier and spread spectrum systems : from OFDM and MC-CDMA to LTE and WiMAX.* Wiley, 2008.
- [FCC 02] FCC. **Spectrum Policy Task Force.** Rapport interne, FCC, Novembre 2002.
- [FCC 03] FCC. **Chart of Frequency Allocations in the United States of America.** <http://www.ntia.doc.gov/osmhome/allochrt.PDF>, Octobre 2003.
- [Fien 82] J. R. FIENUP. **Phase retrieval algorithms : a comparison.** *Applied Optics*, vol. 21, no. 15, pp. 2758–2769. Août 1982.
- [Font 68] J. DE LA FONTAINE. **Le lièvre et la tortue.** Tiré de : *Fables choisies, mises en vers*, Livre VI, Fable 10, Éd. Denis Thierry – Paris, 1668.
- [Forn 89] J. FORNEY, G.D. ET L.-F. WEI. **Multidimensional constellations. – Part I : Introduction, figures of merit, and generalized cross constellations.** *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, vol. 7, no. 6, pp. 877–892. Août 1989.
- [Frie 97] M. FRIESE. **Multitone signals with low crest factor.** *IEEE Transactions on Communications*, vol. 45, no. 10, pp. 1338–1344. Octobre 1997.
- [Fuma 09a] G. FUMAT. **Effet Doppler en aéronautique.** Rapport interne, Axess Europe S.A.S., Avril 2009.
- [Fuma 09b] G. FUMAT. **Estimation du SNR.** Rapport interne, Axess Europe S.A.S., Février 2009.
- [Fuma 11a] G. FUMAT, P. CHARGE, A. ZOUBIR, ET D. FOURNIER-PRUNARET. **Using the Douglas-Rachford Algorithm to Optimally Reduce the PAPR.** Présenté à : *International Conference on Multimedia and Signal Processing*, vol. 1, pp. 29–33. Mai 2011.
- [Fuma 11b] G. FUMAT, P. CHARGÉ, A. ZOUBIR, ET D. FOURNIER-PRUNARET. **Enhancing Spectral Efficiency of Transform Domain Communication Systems by using a Multidimensional Modulation.** Présenté à : *Cognitive Radio Oriented Wireless Networks and Communications*. Juin 2011.
- [Fuma 11c] G. FUMAT, P. CHARGÉ, A. ZOUBIR, ET D. FOURNIER-PRUNARET. **Reflection Onto Convex Sets Algorithm to Address the PAPR Problem.** Présenté à : *Twelfth IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, pp. 281–285. Juin 2011.

-
- [Fuma 11d] G. FUMAT, P. CHARGÉ, A. ZOUBIR, D. FOURNIER-PRUNARET, ET I. MAHAFENO. **Theoretical Performance of Transform Domain Communication Systems**. Présenté à : *IARIA, Seventh Advanced International Conference on Telecommunications*, pp. 48–53. Mars 2011.
 - [Fuma 11e] G. FUMAT, P. CHARGÉ AND, A. ZOUBIR, ET D. FOURNIER-PRUNARET. **Transform domain communication systems from a multidimensional perspective, impacts on bit error rate and spectrum efficiency**. *Communications, IET*, vol. 5, no. 4, pp. 476–483. Mars 2011.
 - [Fuma 11f] G. FUMAT, P. CHARGÉ AND, A. ZOUBIR, ET D. FOURNIER-PRUNARET. **Using Set Theoretic Estimation to Address the PAPR Problem of Spectrum-Constrained Signals**. *IEEE Transactions on Wireless Communications*. en cours de seconde révision, 2011.
 - [Gath 97] A. GATHERER ET M. POLLEY. **Controlling clipping probability in DMT transmission**. Présenté à : *Thirty-First Asilomar Conference on Signals, Systems Computers*, vol. 1, pp. 578–584. Novembre 1997.
 - [Giml 93] D. GIMLIN ET C. PATISAUL. **On minimizing the peak-to-average power ratio for the sum of N sinusoids**. *IEEE Transactions on Communications*, vol. 41, no. 4, pp. 631–635. Avril 1993.
 - [Gubi 67] L. G. GUBIN, B. T. POLYAK, ET E. V. RAIK. **The method of projections for finding the common point of convex sets**. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 7, no. 6, pp. 1–24. Novembre 1967.
 - [Haas 02] E. HAAS. **Aeronautical channel modeling**. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 51, no. 2, pp. 254–264. Mars 2002.
 - [Hake 07a] M. A. HAKER. *Hardware Realization of a Transform Domain Communication System*. Mémoire de mastère, no. AFIT/GE/ENG/07-10, Air Force Institute of Technology, Dayton, OH, USA. Mars 2007.
 - [Hake 07b] M. E. HAKER, R. K. MARTIN, ET V. D. CHAKRAVARTHY. **Comparison of Hardware Implementation of Transform Domain Communications to Theoretical Results**. Présenté à : *IEEE Military Communications Conference*, pp. 1–7. Octobre 2007.
 - [Han 06] C. HAN, J. WANG, S. GONG, ET S. LI. **Detection and Performance of the OFDM-Based Transform Domain Communication System**. Présenté à : *International Conference on Communications, Circuits and Systems Proceedings*, vol. 2, pp. 1332–1336. Juin 2006.

- [Han 07] C. HAN, J. WANG, N. LIU, S. GONG, ET S. LI. **Soft-demodulation of Transform Domain Communication System Signals**. Présenté à : *Cognitive Radio Oriented Wireless Networks and Communications*, pp. 384–388. Août 2007.
- [Han 08] C. HAN, J. WANG, Y. YANG, ET S. LI. **Addressing the control channel design problem : OFDM-based transform domain communication system in cognitive radio**. *IET Computer Network*, vol. 52, pp. 795–815. Mars 2008.
- [Hara 97] S. HARA ET R. PRASAD. **Overview of multicarrier CDMA**. *IEEE Communications Magazine*, vol. 35, no. 12, pp. 126–133. Décembre 1997.
- [Holz 98] M. HOLZBOCK, A. JAHN, O. GREMILLET, ET E. LUTZ. **Aeronautical Channel Characterisation Measurements at K Band**. Présenté à : *4th Ka-Band Utilization Conference*. Novembre 1998.
- [Jian 08a] T. JIANG, M. GUIZANI, H.-H. CHEN, W. XIANG, ET Y. WU. **Derivation of PAPR Distribution for OFDM Wireless Systems Based on Extreme Value Theory**. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 7, no. 4, pp. 1298–1305. Avril 2008.
- [Jian 08b] T. JIANG ET Y. WU. **An Overview : Peak-to-Average Power Ratio Reduction Techniques for OFDM Signals**. *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 54, no. 2, pp. 257–268. Juin 2008.
- [Kaha 80] J.-P. KAHANE. **Sur Les Polynomes a Coefficients Unimodulaires**. *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 12, no. 5, pp. 321–342. Septembre 1980.
- [Klei 01a] R. KLEIN, M. TEMPLE, J. CLAYPOOLE, R.L., R. RAINES, ET J. STEPHENS. **Wavelet domain communication system (WDCS) interference avoidance capability : analytic, modeling and simulation results**. Présenté à : *IEEE Military Communications Conference*, vol. 2, pp. 1034–1038. Octobre 2001.
- [Klei 01b] R. KLEIN, M. TEMPLE, R. RAINES, ET J. CLAYPOOLE, R.L. **Interference avoidance communications using wavelet domain transformation techniques**. *Electronics Letters*, vol. 37, no. 15, pp. 987–989. Juillet 2001.
- [Lee 02] M. LEE, M. TEMPLE, J. CLAYPOOLE, R.L., R. RAINES, ET J. STEPHENS. **Wavelet domain communication system : bit error sensitivity characterization for geographically separated transceivers (U)**. Présenté à : *IEEE Military Communications Conference*, vol. 2, pp. 1378–1382. Octobre 2002.

-
- [Levi 84] A. LEVI ET H. STARK. **Image restoration by the method of generalized projections with application to restoration from magnitude.** *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 1, no. 9, pp. 932–943. Septembre 1984.
 - [Lion 79] P. L. LIONS ET B. MERCIER. **Splitting Algorithms for the Sum of Two Nonlinear Operators.** *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 16, no. 6, pp. 964–979. Décembre 1979.
 - [Lits 07] S. LITSYN. *Peak power control in multicarrier communications. Peak-power Control in Multicarrier Communications*, Cambridge University Press, 2007.
 - [Liu 07] J.-Y. LIU ET Y. T. SU. **Performance Analysis of Transform Domain Communication Systems in the Presence of Spectral Mismatches.** Présenté à : *IEEE Military Communications Conference*, pp. 1–5. Octobre 2007.
 - [Mara 09] G. MARAL, M. BOUSQUET, ET Z. SUN. *Satellite Communications Systems : Systems, Techniques and Technology*. Wiley, 2009.
 - [Marc 04] S. MARCHESINI. **Benchmarking Iterative Projection Algorithms for Phase Retrieval.** *ArXiv Physics e-prints*, arXiv :physics/0404091. Avril 2004.
 - [Marc 07a] S. MARCHESINI. **Invited Article : A unified evaluation of iterative projection algorithms for phase retrieval.** *Review of Scientific Instruments*, vol. 78, no. 1, pp. 1–10. Janvier 2007.
 - [Marc 07b] S. MARCHESINI. **Phase retrieval and saddle-point optimization.** *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 24, no. 10, pp. 3289–3296. Octobre 2007.
 - [Mart 09] R. K. MARTIN ET M. HAKER. **Reduction of peak-to-average power ratio in transform domain communication systems.** *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 8, pp. 4400–4405. Septembre 2009.
 - [Mass 92] J. MASSEY. **Deep-space communications and coding : A marriage made in heaven.** Tiré de : J. Hagenauer, *Advanced Methods for Satellite and Deep Space Communications*, pp. 1–17, Springer Berlin, 1992.
 - [Mils 80] L. MILSTEIN ET P. DAS. **An Analysis of a Real-Time Transform Domain Filtering Digital Communication System – Part I : Narrow-Band Interference Rejection.** *IEEE Transactions on Communications*, vol. 28, no. 6, pp. 816–824. Juin 1980.
 - [Mils 83] L. MILSTEIN ET P. DAS. **An Analysis of a Real-Time Transform Domain Filtering Digital Communication System – Part II : Wide-**

- Band Interference Rejection.** *IEEE Transactions on Communications*, vol. 31, no. 1, pp. 21–27. Janvier 1983.
- [Mito 00] J. MITOLA. *Cognitive Radio An Integrated Agent Architecture for Software Defined Radio*. Mémoire de thèse, no. TRITA-IT AVH 00 :01, KTH, Stockholm. Mai 2000.
- [Neum 50] J. NEUMANN. *Functional Operators : The Geometry of Orthogonal Spaces*. *Functional Operators*, Princeton University Press, 1950.
- [Nune 05] A. NUNEZ, M. TEMPLE, R. MILLS, ET R. RAINES. **Interference avoidance in spectrally encoded multiple access communications using MPSK modulation.** Présenté à : *Wireless Communications and Networking Conference*, vol. 2, pp. 730–734. Mars 2005.
- [Ochi 01] H. OCHIAI ET H. IMAI. **On the distribution of the peak-to-average power ratio in OFDM signals.** *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 2, pp. 282–289. Février 2001.
- [Oszl 04] G. OSZLÁNYI ET A. SÜTO. **Ab initio structure solution by charge flipping.** *Acta Crystallographica Section A*, vol. 60, no. 2, pp. 134–141. Mars 2004.
- [Pali 05] J. PALICOT ET Y. LOUËT. **Power Ratio definitions and analysis in single carrier modulation.** Présenté à : *EUSIPCO 05*, pp. 263–269. Septembre 2005.
- [Park 97] O. PARK ET J. DOHERTY. **Generalized projection algorithm for blind interference suppression in DS/CDMA communications.** *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing*, vol. 44, no. 6, pp. 453–460. Juin 1997.
- [Post 05] J. POSTON ET W. HORNE. **Discontiguous OFDM considerations for dynamic spectrum access in idle TV channels.** Présenté à : *First IEEE International Symposium on New Frontiers in Dynamic Spectrum Access Networks*, pp. 607–610. Novembre 2005.
- [Proa 07] J. PROAKIS ET M. SALEHI. *Digital communications, 5th Edition*. McGraw-Hill, 2007.
- [Radc 96] R. A. RADCLIFFE. *Design and Simulation of a Transform Domain Communication System*. Mémoire de mastère, no. AFIT/GE/ENG/96D-16, Air Force Institute of Technology, Dayton, OH, USA. 1996.
- [Rice 08] M. RICE. *Digital Communications : A Discrete-Time Approach*. Pearson Prentice Hall, 2008.

- [Robe 00] M. ROBERTS, M. TEMPLE, R. RAINES, ET E. MAGEE. **Initial acquisition performance of a transform domain communication system : modeling and simulation results.** Présenté à : *IEEE Military Communications Conference*, vol. 2, pp. 1119–1123. Octobre 2000.
- [Robe 07] M. ROBERTS, M. TEMPLE, R. RAINES, R. MILLS, ET M. OXLEY. **Communication Waveform Design Using an Adaptive Spectrally Modulated, Spectrally Encoded (SMSE) Framework.** *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 1, no. 1, pp. 203–213. Juin 2007.
- [Sams 04] A. A. SAMSONOV, E. G. KHOLMOVSKI, D. L. PARKER, ET C. R. JOHNSON. **POCSENSE : POCS-based reconstruction for sensitivity encoded magnetic resonance imaging.** *Magnetic Resonance in Medicine*, vol. 52, no. 6, pp. 1397–1406. Décembre 2004.
- [Seza 82] M. I. SEZAN ET H. STARK. **Image Restoration by the Method of Convex Projections : Part 2-Applications and Numerical Results.** *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 1, no. 2, pp. 95–101. Octobre 1982.
- [Stap 04] G. STAPLE ET K. WERBACH. **The end of spectrum scarcity [spectrum allocation and utilization].** *IEEE Spectrum*, vol. 41, no. 3, pp. 48–52. Mars 2004.
- [Swac 99] P. SWACKHAMMER, M. TEMPLE, ET R. RAINES. **Performance simulation of a transform domain communication system for multiple access applications.** Présenté à : *IEEE Military Communications Conference*, vol. 2, pp. 1055–1059. Novembre 1999.
- [Trus 84] H. TRUSSELL ET M. CIVANLAR. **The feasible solution in signal restoration.** *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 32, no. 2, pp. 201–212. Avril 1984.
- [Wang 06] C. WANG, Z. ZHANG, S. LI, ET Q. FU. **Transform Domain Communication System Based on Random-Ambiguity and Fractional Fourier Transform.** Présenté à : *Sixth International Conference on ITS Telecommunications*, pp. 194–197. Juin 2006.
- [Weis 04] T. WEISS ET F. JONDRAL. **Spectrum pooling : an innovative strategy for the enhancement of spectrum efficiency.** *IEEE Communications Magazine*, vol. 42, no. 3, pp. S8–S14. Mars 2004.
- [Wieg 03] D. WIEGANDT, Z. WU, ET C. NASSAR. **High-throughput, high-performance OFDM via pseudo-orthogonal carrier interferometry spreading codes.** *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 7, pp. 1123–1134. Juillet 2003.

- [Zhou 10] R. ZHOU, Q. HAN, R. COOPER, V. D. CHAKRAVARTHY, ET Z. WU. **A Software Defined Radio Based Adaptive Interference Avoidance TDCS Cognitive Radio**. Présenté à : *IEEE International Conference on Communications*, pp. 1–5. Mai 2010.

Publications

- Revues internationales -

- [Fuma 11e] . G. FUMAT, P. CHARGÉ, A. ZOUBIR, D. FOURNIER-PRUNARET, **Transform domain communication systems from a multidimensional perspective, impacts on bit error rate and spectrum efficiency**, *IET Communications*, Vol. 5, Issue 4, pp. 476–483, 2011
- [Fuma 11f] . G. FUMAT, P. CHARGÉ, A. ZOUBIR, D. FOURNIER-PRUNARET, **Using Set Theoretic Estimation to Address the PAPR Problem of Spectrum-Constrained Signals**, *IEEE Transactions on Wireless Communications*, en cours de seconde révision, 2011

- Actes de conférences -

- [Char 10] ... P. CHARGÉ, G. FUMAT, P. ACCO, **Multiple-antenna Transmitted-Reference communication systems performance in presence of narrowband interference**, *Eleventh IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, pp. 1–5. Juin 2010
- [Fuma 11d] . G. FUMAT, P. CHARGÉ, A. ZOUBIR, D. FOURNIER-PRUNARET, I. MAHAFENO, **Theoretical Performance of Transform Domain Communication Systems**, *IARIA, Seventh Advanced International Conference on Telecommunications*, pp. 48–53. Mars 2011
- [Fuma 11a] . G. FUMAT, P. CHARGÉ, A. ZOUBIR, D. FOURNIER-PRUNARET, **Using the Douglas-Rachford Algorithm to Optimally Reduce the PAPR**, *International Conference on Multimedia and Signal Processing*, vol. 1, pp. 29–33. Mai 2011
- [Fuma 11b] . G. FUMAT, P. CHARGÉ, A. ZOUBIR, D. FOURNIER-PRUNARET, **Enhancing Spectral Efficiency of Transform Domain Communication Systems by using a Multidimensional Modulation**, *Cognitive Radio Oriented Wireless Networks and Communications*. Juin 2011

- [Fuma 11c] . G. FUMAT, P. CHARGÉ, A. ZOUBIR, D. FOURNIER-PRUNARET, **Reflection Onto Convex Sets Algorithm to Address the PAPR Problem**, *Twelfth IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, pp. 281–285. Juin 2011

Glossaire

AWGN	Additive white gaussian noise – <i>Bruit blanc additif gaussien, caractéristique du canal spatial.</i>
BER	Bit error rate – <i>Taux d'erreur binaire.</i>
CCDF	Complementary cumulative density function – <i>Fonction de répartition complémentaire.</i>
CDMA	Code division multiple-access.
CIFRE	Conventions industrielles de formation par la recherche.
DLR	Deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt – <i>Institut de recherche aéronautique et spatial allemand.</i>
DSP	Digital signal processor.
DVB-S	Digital video broadcast via satellite.
E_b/N_0	Rapport de l'énergie binaire sur la densité spectrale de bruit. Le SNR dépend de ce rapport.
FAST	Fiber-like aircraft satellite communications – <i>Projet structurant de l'entreprise Aress Europe.</i>
FPGA	Field-programmable gate array.
GEO	Geostationary Orbit – <i>Orbite géostationnaire.</i>
GPS	Global Positioning System
IBO	Input back-off – <i>Marge de puissance en entrée.</i>
IDFT	Inverse discrete Fourier transform – <i>Transformée de Fourier inverse discrète.</i>
INSA	Institut national des sciences appliquées – <i>L'école d'ingénieurs où a été préparé cette thèse.</i>
IP	Internet protocol.
LAAS	Laboratoire d'analyse et d'architecture systèmes – <i>Le laboratoire d'adoption de cette thèse.</i>

LATTIS	Laboratoire toulousain de technologie et d'ingénierie des systèmes – <i>Le laboratoire d'accueil de cette thèse.</i>
MC	Multicarrier.
MOS	M-ary orthogonal signaling – <i>Modulation orthogonale.</i>
OBO	Output back-off – <i>Marge de puissance en sortie.</i>
OFDM	Orthogonal frequency division multiplexing.
OFDMA	Orthogonal frequency division multiple-access.
PAPR	Peak-to-average power ratio – <i>Rapport puissance crête sur puissance moyenne.</i>
PMEPR	Peak-to-mean envelope power ratio, représente le PAPR pour une onde en bande de base.
POCS	Projection onto convex sets – <i>L'algorithme STE le plus répandu.</i>
PSK	Phase shift keying – <i>Modulation à saut de phase.</i>
QAM	Quadrature amplitude modulation.
QPSK	Quaternary (ou Quadrature) PSK.
R&D	Recherche et développement.
RF	radio-fréquence.
ROCS	Reflection onto convex sets – <i>L'algorithme STE que nous proposons.</i>
SER	Symbol error rate – <i>Taux d'erreur symbole.</i>
SMSE	Spectrally modulated - spectrally encoded – <i>Formalisme proposé par l'Air Force Institute of Technology.</i>
SNR	Signal to noise ratio – <i>Rapport signal-bruit, paramètre important de tout canal de propagation.</i>
STE	Set theoretic estimation – <i>Estimation ensembliste.</i>
TDCS	Transform-domain communications system – <i>Le système de communication objet de toutes les attentions dans cette thèse.</i>
TWTA	Traveling-wave-tube amplifier – <i>Classe d'amplificateur embarqué dans les satellites.</i>

Notations

M	la taille de constellation de la modulation considérée (PSK ou CSK)
N	la dimensionnalité du système
K_u	le nombre de composantes sinusoïdales utilisées
W_u	la bande passante utilisée
A	l'ensemble des signaux dont l'amplitude est contrainte
B	l'ensemble des signaux dont le spectre est contraint
$]a, b[$	l'ensemble des réels compris entre a et $b \in \mathbb{R}$ exclus
$\llbracket a, b \rrbracket$	l'ensemble des entiers compris entre a et $b \in \mathbb{N}$
\underline{c}	\underline{c} est à valeur complexe
$\bar{\underline{c}}$	représente le conjugué de \underline{c}
\mathbf{c}	représente le vecteur composé des éléments \mathbf{c}_i
$\mathcal{Q}(x)$	la fonction erreur, définie par l'équation (2.23)
$\mathcal{F}\{\}$ et $\mathcal{F}^{-1}\{\}$.	les opérations de transformée de Fourier directe et inverse
$\hat{\mathbf{c}}$	représente la transformée de Fourier discrète du vecteur \mathbf{c}
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$	représente le produit scalaire des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} .

Annexes

Tables des annexes

A	Inter-corrélation de deux symboles TDCS-PSK	I
B	Taux d'erreur binaire de la modulation $\binom{N}{3}$	II
C	Transcription mot binaire vers une forme d'onde pour la modulation $\binom{N}{k}$	IV
D	Transcription forme d'onde vers un mot binaire pour la modulation $\binom{N}{k}$	V

A Inter-corrélation de deux symboles TDCS-PSK

Afin de vérifier qu'à la réception, la décision du symbole se fait sans ambiguïté, calculons la corrélation de deux symboles ayant même phase aléatoire $\psi_k = \psi'_k$, même spectre $A_k = A'_k$, mais des phases d'information différentes $\theta_m \neq \theta_n$

$$\begin{aligned}
 s_m(t) &= 2 \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi k \Delta_f t + \theta_m + \psi_k) \\
 s_n(t) &= 2 \sum_{k'=1}^K A_{k'} \cos(2\pi k' \Delta_f t + \theta_n + \psi_{k'}) \\
 \int_0^T s_m(t) s_n(t) dt &= 4 \int_0^T \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K A_k A_{k'} \cos(2\pi k \Delta_f t + \theta_m + \psi_k) \cos(2\pi k' \Delta_f t + \theta_n + \psi_{k'}) dt \\
 &= 2 \int_0^T \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K A_k A_{k'} \cos(2\pi(k+k')\Delta_f t + \theta_m + \theta_n + 2\psi_k) \\
 &\quad + \cos(2\pi(k-k')\Delta_f t + \theta_m - \theta_n) dt \\
 &= 2 \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{k'=1 \\ k \neq k'}}^K A_k A_{k'} \int_0^T \cos(2\pi(k+k')\Delta_f t + \theta_m + \theta_n + 2\psi_k) dt \\
 &\quad + A_k A_{k'} \int_0^T \cos(2\pi(k-k')\Delta_f t + \theta_m - \theta_n) dt \\
 &\quad + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k=k'}}^K \int_0^T A_k^2 \cos(4\pi k \Delta_f t + \theta_m + \theta_n + 2\psi_k) dt + \int_0^T A_k^2 \cos(\theta_m - \theta_n) dt \\
 &= 2T \cos(\theta_m - \theta_n) \sum_{k=1}^K A_k^2
 \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque les deux symboles ont deux phases espacées de $\frac{\pi}{2}$, les deux symboles sont orthogonaux, comme dans le cas de la modulation PSK monoporteuse.

B Taux d'erreur binaire de la modulation $\binom{N}{3}$

Dans le cas de la modulation $\binom{N}{3}$, supposons le symbole \mathbf{s}_1 émis et que l'on reçoive le symbole $\mathbf{r}_1 = (\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + n_1, \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + n_2, \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + n_3, n_4, n_5, \dots, n_N)$. On désire effectuer la corrélation de \mathbf{r}_1 avec tous les autres symboles possibles \mathbf{s}_i . 4 cas sont alors à distinguer :

- Il s'agit de la corrélation avec \mathbf{s}_i : $R_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}(n_1 + n_2 + n_3) + \varepsilon$.
- Il s'agit de la corrélation avec un symbole dont deux composantes sont communes, par exemple $R_a = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}(n_1 + n_2 + n_4) + 2\frac{\varepsilon}{3}$. C'est le cas pour $3\binom{N-3}{1}$ symboles.
- Il s'agit de la corrélation avec un symbole dont une composante est commune, par exemple $R_b = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_b = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}(n_1 + n_4 + n_5) + \frac{\varepsilon}{3}$. C'est le cas pour $3\binom{N-3}{2}$ symboles.
- Il s'agit de la corrélation avec un symbole qui ne partage aucune composante, par exemple $R_c = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}(n_4 + n_5 + n_6)$. C'est le cas pour $\binom{N-3}{3}$ symboles.

On cherche alors à calculer la probabilité :

$$P_c = P \left[\bigcap_{a \in A} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_1 > \mathbf{r}_a \cdot \mathbf{s}_a), \bigcap_{b \in B} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_1 > \mathbf{r}_b \cdot \mathbf{s}_b), \bigcap_{c \in C} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}_1 > \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{s}_c) \right] \quad (6)$$

avec les ensembles A, B et C , les ensembles d'indexes de symboles couvrant les cas énumérés ci-dessus. Nous obtenons alors :

$$P_c = P \left[\overbrace{n_3 \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{3} > n_4 \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, n_2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{3} > n_4 \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, n_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{3} > n_4 \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}}^{(N-3)\text{cas}}, \overbrace{2\frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}(n_2 + n_3) > \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}(n_4 + n_5), 2\frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}(n_1 + n_2) > \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}(n_4 + n_5)}^{(N-3)\text{cas}}, \overbrace{2\frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}(n_1 + n_3) > \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}(n_4 + n_5), \varepsilon + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}(n_1 + n_2 + n_3) > \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}(n_4 + n_5 + n_6)}^{(N-3)\text{cas}} \right] \quad (7)$$

En couvrant toutes les valeurs possibles de chacune des variables aléatoires et en supposant les événements indépendant de la même manière que ce fut le cas de la modulation $\binom{N}{2}$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 P_c \approx & \int \int \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \mathcal{Q} \left(\frac{n''' + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}}{\sqrt{N_0/2}} \right) \right)^{N-3} \left(1 - \mathcal{Q} \left(\frac{n'' + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}}{\sqrt{N_0/2}} \right) \right)^{N-3} \left(1 - \mathcal{Q} \left(\frac{n + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}}{\sqrt{N_0/2}} \right) \right)^{N-3} \\
 & \left(1 - \mathcal{Q} \left(\frac{n'' + n''' + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}}{\sqrt{N_0}} \right) \right)^{\binom{N-3}{2}} \left(1 - \mathcal{Q} \left(\frac{n'' + n + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}}{\sqrt{N_0}} \right) \right)^{\binom{N-3}{2}} \\
 & \left(1 - \mathcal{Q} \left(\frac{n + n''' + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}}{\sqrt{N_0}} \right) \right)^{\binom{N-3}{2}} \left(1 - \mathcal{Q} \left(\frac{n + n'' + n''' + 3\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}}{3\sqrt{\frac{N_0}{2}}} \right) \right)^{\binom{N-3}{3}} \\
 & \frac{1}{\pi N_0 \sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{n^2}{N_0}} e^{-\frac{n''^2}{N_0}} e^{-\frac{n'''^2}{N_0}} dn dn' dn'''
 \end{aligned} \tag{8}$$

En posant $u = \frac{n + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}$, $v = \frac{n'' + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}$ et $w = \frac{n''' + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}$, on obtient alors la probabilité d'erreur P_e :

$$\begin{aligned}
 P_e = & 1 - \int \int \int_{\mathbb{R}^3} (1 - Q(u))^{N-3} (1 - Q(v))^{N-3} (1 - Q(w))^{N-3} \\
 & \left(1 - Q \left(\frac{u + v}{\sqrt{2}} \right) \right)^{\binom{N-3}{2}} \left(1 - Q \left(\frac{u + w}{\sqrt{2}} \right) \right)^{\binom{N-3}{2}} \left(1 - Q \left(\frac{w + v}{\sqrt{2}} \right) \right)^{\binom{N-3}{2}} \\
 & \left(1 - Q \left(\frac{u + v + w}{\sqrt{3}} \right) \right)^{\binom{N-3}{3}} \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u - \sqrt{\frac{2\varepsilon}{3N_0}})^2}{2}} e^{-\frac{(v - \sqrt{\frac{2\varepsilon}{3N_0}})^2}{2}} e^{-\frac{(w - \sqrt{\frac{2\varepsilon}{3N_0}})^2}{2}} du dv dw
 \end{aligned} \tag{9}$$

Ce sont ces équations-là qui ont notamment été utilisées dans les figures 4.9 et 4.10.

C Transcription mot binaire vers une forme d'onde pour la modulation $\binom{N}{k}$

Cette transcription est calquée sur l'exemple du tableau 4.1.

Pour implémenter cette transcription, l'algorithme suivant a été utilisé pour une modulation $\binom{N}{k}$, avec le mot binaire entrant « mot » doté de l'index « IndexInput », et le vecteur \mathbf{d} de taille k indiquant les k index de la dimension utilisée.

Pseudo-code 2 Algorithme de transcription mot binaire - forme d'onde pour la modulation $\binom{N}{k}$

```

1: rest=IndexInput
2: lastIdx=0;
3: for  $q = 1 : k - 1$  do
4:   tmp = rest
5:   tmpIdx=0
6:   keepLoop= true
7:   while tmp>0 AND keepLoop do
8:     tmpIdx=tmpIdx+1
9:     rest=tmp
10:    if  $N - \text{lastIdx} - \text{tmpIdx} > k - q$  then
11:      temp=temp -  $\binom{N - \text{lastIdx} - \text{tmpIdx}}{k - q}$ 
12:    else
13:      keepLoop = false
14:    end if
15:  end while
16:   $\mathbf{d}_q = \text{lastIdx} + \text{rest}$ 
17:  lastIdx= $\mathbf{d}_q$ 
18: end for
19:  $\mathbf{d}_k = \text{lastIdx} + \text{rest}$ 

```

L'annexe suivante présente l'implémentation de la transcription côté récepteur.

D Transcription forme d'onde vers un mot binaire pour la modulation $\binom{N}{k}$

D Transcription forme d'onde vers un mot binaire pour la modulation $\binom{N}{k}$

Pour implémenter cette transcription, l'algorithme suivant a été utilisé pour une modulation $\binom{N}{k}$, avec le vecteur **usedDim** de taille k indiquant les dimensions utilisées (détectées par le bloc « k max. index »), et output l'index du mot binaire entrant.

Pseudo-code 3 Algorithme de transcription forme d'onde - mot binaire pour la modulation $\binom{N}{k}$

```
1: dimCroissante=sort(usedDim, ordre ascendant);
2: tmp=0;
3: for  $q = 1 : k - 1$  do
4:   for  $u = 1 + \text{dimCroissante}_q : \text{dimCroissante}_{q+1} - 1$  do
5:     tmp=tmp+ $\binom{N-u}{k-q}$ ;
6:   end for
7: end for
8: output=tmp+dimCroissante $_k$  - dimCroissante $_{k-1}$ ;
```

Etude et génération de formes d'ondes *ad hoc* pour les communications

Une approche algébrique pour l'étude de l'efficacité spectrale et la réduction du PAPR dans TDCS

RÉSUMÉ :

Avec le besoin croissant en bande-passante, les technologies dites de radio-cognitive sont de plus en plus étudiées par la communauté scientifique. L'enjeu est d'utiliser au mieux le spectre disponible. L'une de ces technologies, *Transform Domain Communication System* (TDCS), dont les performances en termes d'efficacité énergétique et spectrale étaient jusqu'à présent méconnues, constitue le sujet d'étude de cette thèse.

Après une présentation du contexte scientifique et industriel de la thèse, le système TDCS est introduit, ainsi que ses similarités et différences avec OFDM et MC-CDMA. Le système est ensuite décrit sous le formalisme algébrique des modulations linéaires. Cela a permis d'établir une expression de l'efficacité spectrale du système. Plusieurs techniques sont alors proposées pour améliorer celle-ci tout en améliorant, dans certains cas, le taux d'erreur binaire.

Étant composé d'un de plusieurs composantes sinusoïdales, le signal TDCS souffre d'un fort *Peak-to-Average Power Ratio* (PAPR). La théorie ensembliste est alors présentée puis mise à profit en troisième partie de cette thèse pour proposer les algorithmes *Douglas-Rachford* et *ROCS* de réduction du PAPR des signaux TDCS. Ces algorithmes convergent plus rapidement et vers des valeurs plus basses que l'algorithme *POCS* précédemment utilisé dans la littérature.

MOTS-CLEFS : TDCS, PAPR, efficacité spectrale, théorie ensembliste, POCS, ensembles convexes, Douglas-Rachford, ROCS.

Waveform design for communications

An algebraic approach to study TDCS' spectral efficiency and address the PAPR problem

ABSTRACT:

For about ten years, spectrum scarcity and the growing need of bandwidth have pushed the studies on *cognitive-radio* technologies to counter this waste. Among them: the *Transform Domain Communication System* (TDCS), on which this thesis focuses.

Until now, TDCS' performance in terms of spectral and power efficiency was largely unknown. After introducing the thesis' industrial and scientific context, the TDCS is introduced and compared with popular technologies such as OFDM and MC-CDMA. The system is then studied by means of the linear modulations' algebraic framework. This has led to the TDCS' spectral efficiency determination and to new design rules to jointly achieve a better spectral efficiency and a lower BER. Several methods are then proposed to further increase the spectral efficiency by means of a dense multidimensional modulation.

Since a TDCS signal is made of several sines, it suffers from a strong *Peak-to-Average Power Ratio* (PAPR). Set theoretic estimation is then introduced in a third part and new PAPR-reduction algorithms such as Douglas-Rachford and Reflection Onto Convex Sets are brought to light and achieve better performance than the usual POCS algorithm regarding to the convergence rate, as well as the achieved PAPR.

KEYWORDS: TDCS, PAPR, POCS, Set Theoretic Estimation, spectrum efficiency, convex sets, Douglas-Rachford, ROCS.