

Table des matières

1	Introduction	3
2	Modélisation magnétohydrodynamique d'un plasma magnétisé	7
2.1	Description fluide du plasma	7
2.1.1	Magnétohydrodynamique à deux fluides	7
2.1.2	Magnétohydrodynamique à un fluide	8
2.1.3	Coefficients de transport	8
2.1.4	Flux de chaleur diamagnétiques	10
2.2	Confinement magnétique	11
2.2.1	Principe d'un <i>tokamak</i>	11
2.2.2	Géométrie torique	12
2.2.3	Effets déconfinants	14
2.3	Approximation de dérive	14
2.3.1	Approximation adiabatique et séparation d'échelles	14
2.3.2	Ecoulements de dérive	15
2.4	Modèle électrostatique de la turbulence de ballonnement résistif	17
2.4.1	Dynamique parallèle et loi d'Ohm	17
2.4.2	Equation de vorticité	17
2.4.3	Equation de pression	18
2.4.4	Potentiel électrostatique	19
2.4.5	Modèle du ballonnement résistif électrostatique	19
2.4.6	Dynamique de l'écoulement moyen associé	20
2.4.7	Effets de perturbations magnétiques résonnantes	20
2.4.8	Normalisations et approximation "slab"	21
3	Instabilité de ballonnement résistif	23
3.1	Instabilité d'interchange et instabilité de Rayleigh-Taylor	23
3.1.1	Instabilité de Rayleigh-Taylor	23
3.1.2	Instabilité d'interchange	25
3.2	Champ magnétique cisaillé et diffusion inhomogène	30
3.2.1	Effet de stabilisation et de localisation des fluctuations	30
3.2.2	Prise en compte des termes dissipatifs et diffusion parallèle inhomogène	33

4 Propriétés et dynamique d'une barrière de transport	37
4.1 Génération d'une barrière de transport	37
4.1.1 Modèle 3D de ballonnement résistif avec écoulement forcé	38
4.1.2 Description du code RBM3D et paramètres des simulations	39
4.1.3 Formation et dynamique d'une barrière de transport	39
4.1.4 Modèle de gradient critique	41
4.1.5 Modèle 1D de transvection-diffusion d'un scalaire passif	44
4.2 Effet stabilisant d'un écoulement cisaillé avec profil linéaire sur la turbulence	56
4.3 Effet de l'épaisseur d de la couche cisaillée sur les fluctuations	64
4.3.1 Ecoulement avec profil non-linéaire	64
4.3.2 Ecoulement avec profil quadratique	64
5 Contrôle des relaxations d'une barrière par des perturbations magnétiques résonnantes (RMPs)	69
5.1 Perturbations magnétiques résonnantes (RMPs)	70
5.1.1 Structure des perturbations résonnantes du champ du vide	70
5.1.2 Structure des perturbations résonnantes en présence du plasma .	70
5.2 Modélisation numérique des perturbations résonnantes	71
5.3 Effet des perturbations résonnantes sur les lignes de champ : Cartes de Poincaré du champ du vide	71
5.3.1 Topologie du champ magnétique d'équilibre	71
5.3.2 Perturbations de la topologie magnétique d'équilibre	73
5.4 Effets des perturbations résonnantes sur la dynamique du plasma, sans barrière de transport	75
5.4.1 Perturbation du profil de pression en absence de turbulence	76
5.4.2 Perturbation des profils de pression et de potentiel dans un écoulement turbulent	80
5.4.3 Effets des perturbations résonnantes sur l'écoulement complet . .	86
5.5 Effets des perturbations résonnantes sur la dynamique d'une barrière de transport	87
5.6 Effets des perturbations résonnantes sur la géométrie d'une barrière de transport	89
5.6.1 Géométrie de la barrière sans perturbations résonnantes	89
5.6.2 Effets de perturbations résonnantes sur la géométrie de la barrière	91
5.6.3 Rôle joué par les composantes du flux convectif d'équilibre dans la modification de celui-ci.	94
5.7 Analyse du mécanisme de stabilisation des oscillations de relaxation . . .	95
6 Conclusion	103

Chapitre 1

Introduction

Le contrôle de l'énergie de fusion thermonucléaire est un des objectifs scientifiques majeurs de ce début de siècle. Le jeu en vaut la chandelle car une réaction de fusion thermonucléaire a une capacité énergétique telle qu'un seul gramme de combustible serait capable de fournir en électricité une ville de la taille de New-York durant 24h. L'aventure commence dans les années 1960 lorsque la communauté scientifique réalise qu'il est théoriquement possible de contrôler la réaction de fusion thermonucléaire, jusque là obtenue de manière incontrollée dans l'explosion de la bombe H (succédant à la bombe atomique). La réaction de fusion thermonucléaire est obtenue en faisant fusionner des noyaux d'éléments légers (les isotopes D et T de l'Hydrogène, d'où le nom "bombe H") pour former des noyaux d'éléments plus lourds (de l'Hélium He). L'isotope D de l'Hydrogène se nomme Deutérium et l'isotope T se nomme Tritium.

Contrairement aux réactions qui fournissent l'énergie dans les centrales nucléaires, la réaction de fusion n'est pas spontanée, mais nécessite un apport d'énergie initial pour avoir lieu (comme l'énergie apportée par une allumette pour allumer la flamme d'une bougie). Cette énergie initiale est nécessaire pour maintenir les noyaux D^+ et T^+ (qui ont tous deux une charge électrique positive et qui donc se repoussent mutuellement) suffisamment proches (c'est-à-dire à très haute température), pendant suffisamment longtemps (c'est-à-dire pour un temps de confinement suffisamment long) pour que la réaction ait lieu. Cela nécessite de chauffer les réactifs à des températures telles que dans ces conditions, la matière n'est plus sous la forme de molécules, mais sous une forme fortement ionisée, c'est-à-dire composée d'ions et d'électrons. Ce quatrième état de la matière, en comparaison avec les états solide, liquide et gazeux, est appelé *plasma*. Le critère de Lawson [27], formulé par John D. Lawson en 1957, donne une estimation de la densité d'énergie qu'il faut fournir pour démarrer la réaction de fusion thermonucléaire (c'est-à-dire atteindre l'étape d'"ignition") en termes du produit de la densité, de la température et du temps de confinement : $n \times k_B T \times \tau_E > 5 \times 10^5 \text{ Js/m}^3$, où n désigne la densité totale du plasma, T désigne la température totale du plasma, $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ et τ_E représente le temps de confinement de l'énergie, c'est-à-dire le temps caractéristique de décroissance de l'énergie quand on coupe le chauffage. L'une des voies possibles pour atteindre cet objectif consiste à utiliser des champs magnétiques intenses pour confiner le plasma (qui se comporte comme un conducteur d'électricité) : c'est la *fusion par confinement magnétique*.



FIG. 1.1 – Future machine de fusion ITER : "International Thermonuclear Experimental Reactor" (image publiée avec la permission d'ITER).

tique. Le plasma est alors confiné dans une enceinte en forme de tore (cylindre refermé sur lui-même). Dans cette configuration, lorsque la puissance de chauffage est inférieure à un seuil critique $P < P_c$, le plasma est dans un régime turbulent caractérisé par un fort transport convectif de chaleur, ce qui fait que le confinement est faible (régime L , pour "Low confinement"). Il y a une vingtaine d'années, un régime de confinement amélioré appelé régime H , pour "High confinement," a été découvert dans la machine de fusion ASDEX [14]. Depuis, la plupart des machines récentes ont obtenu ce régime amélioré qui apparaît lorsque la puissance de chauffage atteint une valeur critique P_c . Ce régime amélioré est lié à la formation d'une barrière de transport dans la région de bord du plasma. Une telle barrière est caractérisée par un fort gradient de pression.

Le régime H est prometteur pour la prochaine génération de machines de fusion comme ITER (machine internationale planifiée pour avoir un rendement positif $Q = 10$, prévue pour fonctionner en 2016, voir Figure 1.1). Toutefois, une instabilité appelée ELM, pour "Edge Localized Mode" ("instabilité de la région de bord"), se développe aussitôt que le seuil P_c est atteint. Les ELMs sont caractérisés par des éjections violentes quasi-périodiques de chaleur et de matière, causant ainsi des relaxations quasi-périodiques de la barrière de transport.

Ces éjections constituent un réel problème pour les futures expériences de fusion magnétique. Par exemple, dans ITER, la puissance déposée par un seul de ces ELMs est estimée à 10 MégaWatts par mètre carré. On comprend bien que ces ELMs représentent un danger pour les parois de la machine qui résistent mal à de tels flux d'énergie. Cependant, les ELMs ont également un rôle bénéfique qui est d'extraire les impuretés du coeur de la machine. Sans cette extraction, le plasma s'éteint de lui-même, à la manière d'un feu recouvert de cendres froides.

Récemment, des oscillations quasi-périodiques d'une barrière de transport, qui ont des caractéristiques communes avec les ELMs, ont été observées dans des simulations numériques en trois dimensions utilisant un écoulement moyen cisailé forcé [7]. Ces oscillations, caractéristiques des systèmes non-linéaires, sont appelées Oscillations de Relaxation.

Dans le Chapitre 2, nous effectuons la dérivation du modèle de ballonnement résistif, décrivant la turbulence dans la région de bord d'une machine de fusion, à partir d'un modèle MHD à deux fluides et nous donnons une description de ce modèle, implémenté dans le code RBM3D [7] utilisé dans nos simulations 3D. Dans le Chapitre 3, nous explicitons le mécanisme à l'origine de la turbulence de ballonnement résistif, en donnant une description analytique de l'instabilité d'interchange (ballonnement résistif en géométrie cylindrique) et nous montrons que cette instabilité est analogue à l'instabilité de Rayleigh-Taylor pour les fluides non-chargés en calculant analytiquement le taux de croissance de ces deux instabilités. Nous présentons également dans ce chapitre l'effet d'un champ magnétique cisaillé sur l'instabilité d'interchange. Dans le Chapitre 4, nous présentons la dynamique d'une barrière de transport obtenue à l'aide d'un écoulement moyen cisaillé forcé ajouté au modèle 3D de ballonnement résistif. Nous tentons d'analyser la dynamique des Oscillations de Relaxation observées dans le modèle 3D en utilisant des simulations numériques et des études analytiques 1D dérivées de ce modèle 3D, et particulièrement un modèle 1D de scalaire passif (considère ici les fluctuations de pression \tilde{p}), connu sous le nom de modèle de Dupree, qui permet d'expliquer l'effet de décorrélation non-linéaire, engendré par un écoulement cisaillé, sur la turbulence. Nous utilisons ce modèle pour étudier la dépendance de l'amplitude de la turbulence $\sqrt{\langle \tilde{p}^2 \rangle}$ et du déphasage entre \tilde{p} et la vitesse radiale de l'écoulement turbulent en fonction du taux de cisaillement Ω . Nous étudions, dans le Chapitre 5 un moyen de contrôle de ces Oscillations de Relaxation au moyen de perturbations magnétiques statiques, inspiré d'expériences récentes sur les machines de fusion DIII-D, JET et TEXTOR [15, 29, 19]. Une conclusion générale est donnée dans le Chapitre 6.

Chapitre 2

Modélisation magnétohydrodynamique d'un plasma magnétisé

2.1 Description fluide du plasma

2.1.1 Magnétohydrodynamique à deux fluides

Un plasma magnétisé peut-être décrit par les équations de la MagnétoHydroDynamique (MHD), c'est-à-dire une combinaison des équations de la mécanique des fluides et des équations de l'électromagnétisme (équations de Maxwell).

Toutefois, contrairement à un fluide neutre, un plasma est composé de plusieurs espèces : les ions chargés positivement, et les électrons chargés négativement. Dans la suite, nous nous intéresseront au cas d'un plasma de deutérium, isotope lourd de l'hydrogène, utilisé dans les expériences de fusion par confinement magnétique. Un tel plasma est composé d'ions Deuterium D^+ (indice i) de charge électrique $+e$ et d'électrons (indice e) de charge électrique $-e$.

La description d'un tel plasma nécessite donc un ensemble d'équations pour les ions D^+ et un autre pour les électrons. On parle alors de MHD à deux fluides. Ces équations sont les équations de continuité (2.1) qui représentent la conservation de la matière, les équations de Navier-Stokes (2.2) qui représentent la conservation de la quantité de mouvement, et les équations de la chaleur (2.3) qui représentent la conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}n_e + \operatorname{div}(n_e \mathbf{v}_e) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}n_i + \operatorname{div}(n_i \mathbf{v}_i) &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

où n_e, n_i sont les densités électronique et ionique, respectivement et les vecteurs $\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_i$ désignent les champs de vitesse électronique et ionique, respectivement ;

$$m_e n_e \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_e + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right] = -\mathbf{grad} p_e - \operatorname{div}(\Pi_e) - e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{R}_e$$

$$m_i n_i \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_i + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right] = -\mathbf{grad} p_i - \operatorname{div}(\Pi_i) + e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{R}_i \quad (2.2)$$

où p_e, p_i désignent les pressions électronique et ionique, respectivement, et les tenseurs Π_e, Π_i sont les tenseurs des contraintes (tangentielle) électronique et ionique, respectivement ;

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} p_e + \mathbf{v}_e \cdot \nabla p_e \right) + \frac{5}{2} p_e \operatorname{div}(\mathbf{v}_e) &= -\operatorname{div}(\mathbf{q}_e) - \Pi_e : \nabla \mathbf{v}_e + Q_e \\ \frac{3}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} p_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla p_i \right) + \frac{5}{2} p_i \operatorname{div}(\mathbf{v}_i) &= -\operatorname{div}(\mathbf{q}_i) - \Pi_i : \nabla \mathbf{v}_i + Q_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

Les champs électrique et magnétique sont notés \mathbf{E} et \mathbf{B} , respectivement. Les vecteurs $\mathbf{R}_e, \mathbf{R}_i$ et les quantités Q_e, Q_i caractérisent respectivement la quantité de mouvement et l'énergie transférées entre électrons et ions, et les vecteurs $\mathbf{q}_e, \mathbf{q}_i$ désignent les flux de chaleurs électronique et ionique, respectivement.

2.1.2 Magnétohydrodynamique à un fluide

Au lieu d'étudier les densités n_e, n_i et les vitesses $\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_i$ des électrons et des ions, on peut passer à une description équivalente à un seul fluide. On parle alors de MHD à un fluide, et on définit la masse volumique et la charge volumique du fluide, respectivement

$$\rho = m_i n_i + m_e n_e, \quad \sigma = e n_i - e n_e, \quad (2.4)$$

ainsi que la vitesse du fluide et la densité volumique de courant, respectivement

$$\mathbf{v} = \frac{m_i \mathbf{v}_i + m_e \mathbf{v}_e}{m_i + m_e} \quad \text{et} \quad \mathbf{j} = e n_i \mathbf{v}_i - e n_e \mathbf{v}_e. \quad (2.5)$$

Le plasma étant quasi-neutre sur des échelles spatiales plus grandes que la longueur de Debye ($\lambda_D \sim 0.01mm$ pour un plasma de bord de tokamak), la densité de charge est négligeable ($\sigma = e(n_i - n_e) \sim 0$ c'est-à-dire $n_e \approx n_i = n$). La densité volumique de courant \mathbf{j} apparaît dans les équations de Maxwell qui complètent naturellement le système d'équations (2.1)–(2.3).

2.1.3 Coefficients de transport

Pour fermer le système (2.1)–(2.3), les quantités $\Pi_e, \Pi_i, \mathbf{q}_e, \mathbf{q}_i, \mathbf{R}_e, \mathbf{R}_i, Q_e$ et Q_i sont exprimées en fonction des moments fluides $n, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_i$ (respectivement \mathbf{v}, \mathbf{j}), $T_e = p_e/(n_e k_B)$, $T_i = p_i/(n_i k_B)$ et de leur gradients. Pour cela, il existe plusieurs méthodes systématiques [12, 10, 3]. Un résultat standard est donné par [10] :

$$\begin{aligned}
\Pi_e &= -\mathbf{T}_{\mu_e} \cdot \nabla \mathbf{U}_e, & \Pi_i &= -\mathbf{T}_{\mu_i} \cdot \nabla \mathbf{U}_i \\
\mathbf{q}_e &= -\mathbf{T}_{\kappa_e} \cdot \nabla (k_B T_e) - \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{j}, & \mathbf{q}_i &= -\mathbf{T}_{\kappa_i} \cdot \nabla (k_B T_i) \\
\mathbf{R}_e &= en \left(\mathbf{T}_\eta \cdot \mathbf{j} - \mathbf{T}_\alpha \cdot \frac{\nabla T_e}{T_e} \right), & \mathbf{R}_i &= -\mathbf{R}_e \\
Q_e &= \frac{3m_e}{m_i} \frac{nk_B}{\tau_e} (T_i - T_e) + \frac{1}{en} \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{j}, & Q_i &= \frac{3m_e}{m_i} \frac{nk_B}{\tau_e} (T_e - T_i)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

où les composantes des tenseurs $\nabla \mathbf{U}_e$ et $\nabla \mathbf{U}_i$ s'écrivent, respectivement :

$$\begin{aligned}
(\nabla \mathbf{U}_e)_{jk} &= \frac{\partial(v_e)_j}{\partial x_k} + \frac{\partial(v_e)_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \operatorname{div}(\mathbf{v}_e) \delta_{jk} \\
(\nabla \mathbf{U}_i)_{jk} &= \frac{\partial(v_i)_j}{\partial x_k} + \frac{\partial(v_i)_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \operatorname{div}(\mathbf{v}_i) \delta_{jk}
\end{aligned}$$

Les composantes des tenseurs \mathbf{T}_{μ_e} , \mathbf{T}_{μ_i} , \mathbf{T}_{κ_e} , \mathbf{T}_{κ_i} , \mathbf{T}_α et \mathbf{T}_η sont respectivement les coefficients de la viscosité, de la conductivité thermique, de la thermoélectricité et de la résistivité. Pour un plasma de bord de tokamak l'effet thermoélectrique, c'est-à-dire la conversion d'énergie électrique en énergie thermique ou vice-versa, est négligeable devant les autres effets (viscosité et résistivité). De ce fait nous ne considérerons pas cet effet dans la suite du mémoire.

En présence d'un champ magnétique \mathbf{B} , les tenseurs \mathbf{T}_{μ_e} , \mathbf{T}_{μ_i} , \mathbf{T}_{κ_e} , \mathbf{T}_{κ_i} et \mathbf{T}_η sont anisotropes. Les composantes parallèles aux lignes de champ magnétique sont identiques aux coefficients d'un plasma non-magnétisé, mais les conductivités thermiques et les viscosités perpendiculaires au champ magnétique sont modifiées, ce qui modifie le transfert de chaleur et le transport de matière dans la direction perpendiculaire à \mathbf{B} . Les tenseurs de conductivité thermique \mathbf{T}_{κ_e} et \mathbf{T}_{κ_i} sont caractérisés chacun par trois composantes,

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{\kappa_e} \cdot \nabla T_e &= \kappa_{e\parallel} \nabla_{\parallel} T_e + \kappa_{e\perp} \nabla_{\perp} T_e + \kappa_{e\wedge} \frac{\mathbf{B}}{B} \wedge \nabla T_e \\
\mathbf{T}_{\kappa_i} \cdot \nabla T_i &= \kappa_{i\parallel} \nabla_{\parallel} T_i + \kappa_{i\perp} \nabla_{\perp} T_i + \kappa_{i\wedge} \frac{\mathbf{B}}{B} \wedge \nabla T_i
\end{aligned} \tag{2.7}$$

où ∇_{\parallel} et ∇_{\perp} désignent respectivement les gradients parallèle et perpendiculaire aux lignes de champ magnétique, et la troisième composante s'appelle composante diamagnétique et est analogue aux courants diamagnétiques (voir 2.1.4). Dans un champ magnétique intense ($\Omega_e \tau_e$, $\Omega_i \tau_i \gg 1$) ; où τ_e , respectivement τ_i désigne les temps de collision électron-electron et ion-ion, respectivement ; les composantes $\kappa_{e\perp}, \kappa_{i\perp}$ et $\kappa_{e\wedge}, \kappa_{i\wedge}$ sont données par [10] :

$$\begin{aligned}
\kappa_{e\perp} &= 4.7 \frac{nm_e k_B T_e}{e^2 B^2 \tau_e} \sim \frac{\kappa_{e\parallel}(\tau_e)}{\Omega_e^2 \tau_e^2}, & \kappa_{i\perp} &= 2.0 \frac{nm_i k_B T_i}{e^2 B^2 \tau_i} \sim \frac{\kappa_{i\parallel}(\tau_i)}{\Omega_i^2 \tau_i^2} \\
\kappa_{e\wedge} &= \frac{5}{2} \cdot \frac{nk_B T_e}{eB} \sim \frac{\kappa_{e\parallel}(\tau_e)}{\Omega_e \tau_e}, & \kappa_{i\wedge} &= -\frac{5}{2} \cdot \frac{nk_B T_i}{eB} \sim \frac{\kappa_{i\parallel}(\tau_i)}{\Omega_i \tau_i}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

où $\Omega_e = \frac{eB}{m_e}$ et $\Omega_i = \frac{eB}{m_i}$ sont les fréquences de giration des électrons et des ions, respectivement. Les conductivités thermiques dans la direction du champ magnétique dépendent essentiellement des temps de collision τ_e et τ_i selon [10] :

$$\kappa_{e\parallel}(\tau_e) \sim \frac{nk_B T_e}{m_e} \tau_e \quad (2.9)$$

$$\kappa_{i\parallel}(\tau_i) \sim \frac{nk_B T_i}{m_i} \tau_i \quad (2.10)$$

Les tenseurs T_{μ_e} et T_{μ_i} sont caractérisés chacun par cinq composantes dont une correspondant à la direction parallèle aux lignes de champ magnétique ($\mu_{e\parallel}$, $\mu_{i\parallel}$).

Les viscosités perpendiculaires sont décrites par quatre coefficients pour chaque tenseur : $\mu_{e\perp}^1$, $\mu_{e\perp}^2$, $\mu_{e\wedge}^1$, $\mu_{e\wedge}^2$. Dans un champ magnétique intense, il se comportent comme :

$$\mu_{e\perp}^1 \sim \mu_{e\perp}^2 \sim \frac{\mu_{e\parallel}}{\Omega_e^2 \tau_e^2}, \quad \mu_{e\wedge}^1 \sim \mu_{e\wedge}^2 \sim \frac{\mu_{e\parallel}}{\Omega_e \tau_e}. \quad (2.11)$$

2.1.4 Flux de chaleur diamagnétiques

Les collisions ne sont pas à l'origine du dernier terme dans l'expression pour le flux de chaleur (2.7). Cela se traduit par le fait que les coefficients $\kappa_{e\wedge}$ et $\kappa_{i\wedge}$ ne dépendent pas des temps de collision. Ces composantes des flux de chaleur sont dues aux effets de rayons de Larmor fini en présence d'inhomogénéités de densité, de vitesses et de températures. On les appelle composantes *diamagnétiques*, désignées par \mathbf{q}_e^* et \mathbf{q}_i^* . Il existe aussi des vitesses diamagnétiques, \mathbf{v}_e^* et \mathbf{v}_i^* , qui vont être déduites dans la partie 2.3. La désignation *diamagnétique* vient du fait que le courant associé à ces vitesses diminue le champ magnétique effectif de confinement. Une propriété importante des composantes diamagnétiques est le fait que leurs contributions dans les équations fluides (2.1-2.3) se réduisent à des divergences. Avec les vitesses diamagnétiques calculées dans la partie 2.3 (expression 2.32), on trouve par exemple pour l'équation de la chaleur (2.3),

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \mathbf{v}_e^* \cdot \nabla p_e + \frac{5}{2} p_e \operatorname{div}(\mathbf{v}_e^*) + \operatorname{div}(\mathbf{q}_e^*) &= - \frac{5}{2} \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{B}}{eB^2} \wedge \nabla p_e \right] \\ \frac{3}{2} \mathbf{v}_i^* \cdot \nabla p_i + \frac{5}{2} p_i \operatorname{div}(\mathbf{v}_i^*) + \operatorname{div}(\mathbf{q}_i^*) &= \frac{5}{2} \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{B}}{eB^2} \wedge \nabla p_i \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ces divergences sont nulles pour un champ magnétique homogène. Cela signifie que les composantes diamagnétiques ne contribuent au transport que par les inhomogénéités du champ magnétique. Il existe également des composantes diamagnétiques Π_e^* et Π_i^* des tenseurs des contraintes qui sont importantes pour la compensation des termes diamagnétiques dans les équations de Navier-Stokes (voir partie 2.3).

2.2 Confinement magnétique

2.2.1 Principe d'un *tokamak*

La trajectoires d'une particule chargée (ion ou électron) dans un champ magnétique \mathbf{B} est une hélice dont le pas ne dépend que de la composante de la vitesse parallèle aux lignes de champ magnétique v_{\parallel} et dont le rayon ρ , appelé rayon de giration ou encore *rayon de Larmor*, est proportionnel à la vitesse d'agitation thermique v_{th} et inversement proportionnel à l'intensité du champ magnétique :

$$\begin{aligned}\rho_e &= \frac{m_e}{e} \cdot \frac{v_{th_e}}{B} \\ \rho_i &= \frac{m_i}{e} \cdot \frac{v_{th_i}}{B}\end{aligned}\quad (2.13)$$

Le but d'une machine de fusion étant de confiner les particules et l'énergie, il est naturel d'utiliser cette propriété du champ magnétique pour confiner les particules chargées du plasma. On obtient alors une configuration cylindrique caractérisée par un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_z . Toutefois, le confinement est faible dans la direction du champ magnétique (aux extrémités du cylindre), d'où l'idée de fermer ces extrémités à l'aide de miroirs magnétiques qui, contrairement aux miroirs standard, réfléchissent les particules chargées, et non la lumière. De nombreux dispositifs ont été fabriqués sur ce principe (notamment les machines dites "Ying-Yang" en raison de leur ressemblance avec le symbole bouddhiste). Cependant, malgré les miroirs de confinement, les pertes sont très importantes aux extrémités du cylindre. Un chercheur russe nommé *Lev Artsimovich* eu l'idée de refermer le cylindre sur lui-même, améliorant ainsi grandement le confinement. Toutefois, un dernier effort restait à faire, car, en fermant les lignes de champ sur elles-mêmes, on obtient un champ magnétique circulaire \mathbf{B}_{φ} , et cette circularité induit une courbure des lignes de champ magnétique qui se traduit par une force centrifuge d'intensité $F_g \sim m_i c_s^2 / R$ agissant sur le plasma, où $c_s = \sqrt{k_B T_e / m_i}$ désigne la vitesse du son dans le plasma. L'effet de la courbure des lignes de champ sur le plasma peut être vue comme une gravité effective définie par :

$$\mathbf{g} = c_s^2 \left(\frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{B} \quad (2.14)$$

Il s'ensuit une lente dérive verticale des particules chargées, les électrons dans un sens et les ions dans l'autre, et cette dérive crée un courant qui, associé au champ magnétique de confinement, crée finalement une dérive radiale vers l'extérieur du tore ce qui détruit le confinement. La solution trouvée par *Artsimovich* donna naissance en 1950 au *tokamak* (du russe "toroidal'naya kamera s magnitnymi katushkami" : chambre magnétique toroïdale à bobines magnétiques). Cela consiste à créer un second champ magnétique \mathbf{B}_{θ} selon le petit cercle du tore (direction poloïdale) en faisant circuler un courant le long du grand cercle du tore. Les lignes de champ magnétiques deviennent alors des hélices, et les particules chargées suivent ces hélices, restant ainsi confinées dans la chambre.

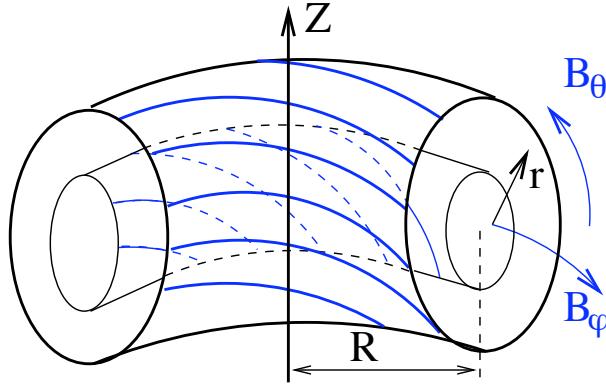


FIG. 2.1 – Géométrie torique d'une machine tokamak.

2.2.2 Géométrie torique

Afin de simplifier les calculs, on exploite les symétries du tokamak (tore), en introduisant un système de coordonnées toriques (r, θ, ϕ) , où r désigne la direction radiale du tore, θ désigne l'angle poloïdal et φ désigne l'angle toroïdal.

$$X = R \sin \varphi, \quad Y = R \cos \varphi, \quad Z = r \sin \theta \quad \text{avec} \quad R = R_0 + r \cos \theta, \quad (2.15)$$

où (X, Y, Z) sont les coordonnées cartésiennes de l'espace et R_0 est le grand rayon du tore (voir Figure 2.1).

Avec les vecteurs unitaires

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_X + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_Y + \sin \theta \mathbf{e}_Z \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_X - \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_Y + \cos \theta \mathbf{e}_Z, \\ \mathbf{e}_\varphi &= \cos \varphi \mathbf{e}_X - \sin \varphi \mathbf{e}_Y \end{aligned}$$

et le gradient

$$\mathbf{grad} = \nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R(\theta, \varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

le champ magnétique de confinement s'écrit sous la forme

$$\mathbf{B} = B_\varphi \mathbf{e}_\varphi + B_\theta \mathbf{e}_\theta = B_\varphi \left(\mathbf{e}_\varphi + \frac{r}{R(r, \theta)q(r, \theta)} \mathbf{e}_\theta \right) = B_0 \frac{R_0}{R(r, \theta)} \left(\mathbf{e}_\varphi + \frac{r}{R(r, \theta)q(r, \theta)} \mathbf{e}_\theta \right), \quad (2.16)$$

où B_0 désigne sa valeur sur l'axe magnétique $R(r, \theta) = R_0$ et le facteur $q(r, \theta) \sim q(r)$ (la dépendance en θ est négligeable pour les tokamaks à grand rapport d'aspect $R_0/a \gg 1$) est défini par

$$q(r) = \frac{\mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r}}{\mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}} = \frac{r B_\varphi}{R B_\theta}. \quad (2.17)$$

Le paramètre $q(r)$ représente le taux d'enroulement des lignes de champ magnétique (nombre de tours parcouru par une ligne de champ selon le grand cercle, de rayon R ,

du tore lorsqu'elle fait un tour selon le petit cercle, de rayon r , du tore). Il est coutume d'appeler ce paramètre *facteur de sécurité*, car certaines instabilités macroscopiques détruisant le confinement (qui ne sont pas le sujet de cette thèse) apparaissent si ce facteur ne vérifie pas $q > 1$.

La variation du facteur de sécurité dans la direction radiale implique que le champ magnétique de confinement est cisailé. On définit la longueur de cisaillement magnétique L_s , qui traduit la variation radiale du champ magnétique poloïdal $\mathbf{B}_\theta(r)$. Cette longueur tend vers l'infini pour \mathbf{B}_θ uniforme.

$$L_s = \frac{q_0^2 R_0}{r_0} \left(\left| \frac{dq}{dr} \right|_{r=r_0} \right)^{-1}. \quad (2.18)$$

où r_0 désigne un rayon de référence, et q_0 est la valeur du facteur de sécurité en $r = r_0$.

Pour terminer ce paragraphe sur la géométrie, on donne l'expression dans les variables (r, θ, φ) de quelques opérateurs qui vont être utilisés dans la suite. Le gradient parallèle au champ magnétique d'équilibre s'écrit :

$$\nabla_{\parallel 0} = \frac{1}{FR} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (2.19)$$

où l'indice "0" indique que les directions sont définies par rapport au *champ magnétique d'équilibre* (voir section 5.1).

En revanche, le gradient perpendiculaire ne nécessite que des corrections négligeables en présence de fluctuations magnétiques :

$$\nabla_\perp = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{Fr} \left(\mathbf{e}_\theta - \frac{r}{Rq} \mathbf{e}_\varphi \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{r^2}{R^2 q} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (2.20)$$

Le facteur torique F est défini par :

$$\begin{aligned} F &= \frac{B}{B_\varphi} = \frac{BR}{B_0 R_0} = \sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2 q^2}} \\ &\sim 1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Finalement, la gravité effective \mathbf{g} (2.14) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{g}}{c_s^2} &= \frac{1}{F^2} \left[\left(1 - \frac{r^4}{F^2 R^4 q^4} \right) \frac{\sin \theta}{R} \mathbf{e}_\theta - \left(\cos \theta + \frac{r}{R q^2} \right) \frac{1}{R} \mathbf{e}_r - \left(1 + \frac{r^2}{F^2 R^2 q^2} \right) \frac{r \sin \theta}{R^2 q} \mathbf{e}_\phi \right] \\ &\sim -\frac{\cos \theta}{R_0} \mathbf{e}_r + \frac{\sin \theta}{R_0} \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (2.22)$$

Elle intervient dans des divergences du type :

$$\text{div} \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \wedge \nabla f \right) = -\frac{\mathbf{g}}{c_s^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \wedge \nabla f \right) = -\left(\frac{\mathbf{g}}{c_s^2} \wedge \frac{\mathbf{B}}{B^2} \right) \cdot \nabla f \sim -\frac{1}{B_0 R_0} \hat{G} f, \quad (2.23)$$

où l'opérateur de courbure \hat{G} est défini par :

$$\hat{G} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (2.24)$$

2.2.3 Effets déconfinants

En présence de collisions, les particules peuvent quitter les surfaces magnétiques. Il en résulte un transport collisionnel des particules à travers les lignes de champ magnétique, qui peut être estimé par un processus de marche au hasard avec un pas et un temps caractéristique donnés respectivement par le rayon de Larmor ρ_e, ρ_i et le temps de collision τ_e, τ_i . On trouve ainsi un coefficient de diffusion perpendiculaire aux lignes de champ D_{\perp}^{cl} appelé coefficient de diffusion *classique*. Une estimation similaire peut être faite pour les diffusivités thermiques $\chi_e = (2/3)\kappa_e/n$ et $\chi_i = (2/3)\kappa_i/n$,

$$\begin{aligned}\chi_{e\perp}^{cl} &\sim D_{\perp}^{cl} \sim \frac{\rho_e^2}{\tau_e} \\ \chi_{i\perp}^{cl} &\sim \frac{\rho_i^2}{\tau_i}\end{aligned}\quad (2.25)$$

Ces expressions sont identiques à celles données dans (2.8). En tenant compte de la géométrie toroïdale, un facteur supplémentaire doit être inclus ce qui donne les coefficients de diffusion et les diffusivités thermiques dits *néoclassiques* [36],

$$\begin{aligned}\chi_{e\perp}^{neo} &\sim D_{\perp}^{neo} \sim (1 + q^2) \frac{\rho_e^2}{\tau_e} \\ \chi_{i\perp}^{neo} &\sim (1 + q^2) \frac{\rho_i^2}{\tau_i}\end{aligned}\quad (2.26)$$

Les valeurs des diffusivités mesurées expérimentalement sont, de plusieurs ordres de grandeur, supérieures aux prédictions théoriques, ce qui implique l'inaptitude de la théorie néoclassique à expliquer les phénomènes de transport de particules et de transfert de chaleur. Il faut donc faire appel à d'autres théories pour expliquer cette inadéquation, et les expérimentateurs parlent alors de transport "anormal". Il faut noter que les théories susceptibles de décrire un tel transport sont des théories tentant de décrire la turbulence plasma, et il convient alors mieux de parler de *transport turbulent*. Les relations entre les valeurs expérimentales et celles données par la théorie néoclassique sont de l'ordre :

$$\chi_{i\perp}^{exp} \sim 10 \chi_{i\perp}^{neo}, \quad \chi_{e\perp}^{exp} \sim 100 \chi_{e\perp}^{neo}.$$

2.3 Approximation de dérive

2.3.1 Approximation adiabatique et séparation d'échelles

Comme dans la plupart des théories physiques, on peut simplifier le traitement des équations en faisant une séparation d'échelles, c'est le principe de l'*approximation adiabatique*. Ainsi, dans un plasma magnétisé, il existe deux échelles spatio-temporelles distinctes : l'échelle correspondant au mouvement de rotation rapide des particules chargées autour des lignes de champ magnétique (gyration de Larmor), et le mouvement plus lent (dérive) du centre de gyration des particules à travers les lignes de champ magnétique.

Pour le mouvement de gyration rapide, la fréquence caractéristique est la fréquence cyclotronique électronique, respectivement ionique Ω_e , Ω_i et l'échelle spatiale caractéristique est le rayon de Larmor électronique, respectivement ionique ρ_e , ρ_i donnés par :

$$\begin{aligned}\Omega_e &= \frac{eB}{m_e} \quad , \quad \rho_e = \frac{v_{th_e}}{\Omega_e} \\ \Omega_i &= \frac{eB}{m_i} \quad , \quad \rho_i = \frac{v_{th_i}}{\Omega_i}\end{aligned}\quad (2.27)$$

Pour le mouvement de dérive lente, la fréquence caractéristique ω dépend de la vitesse du son dans le plasma et l'échelle spatiale caractéristique est le rayon de Larmor hybride noté ρ_S :

$$\omega \sim \frac{c_S}{L_\perp}, \quad \rho_S = \frac{c_S}{\Omega_i} \quad (2.28)$$

où $c_S = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}}$ désigne la vitesse du son dans le plasma, et L_\perp représente une longueur caractéristique des fluctuations perpendiculaires aux lignes de champ magnétique. En résumé, le mouvement de dérive est caractérisé par le domaine de validité suivant :

$$\omega \ll \Omega_i, \quad \rho_S \ll L_\perp \quad (2.29)$$

L'approximation de dérive, décrite ci-dessus, représente une technique efficace pour séparer les mouvements rapides des mouvements lents dans les équations pour la MHD à 2 fluides, aussi bien que pour celle à 1 fluide. Dans le second cas, la théorie qui en résulte porte le nom de *MHD réduite*.

2.3.2 Ecoulements de dérive

Pour obtenir les vitesses de dérive, correspondant au mouvement de dérive décrit ci-dessus, on écrit les équations de Navier-Stokes (2.2) sous la forme :

$$\begin{aligned}m_e n_e \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_e + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right] + \operatorname{div}(\Pi_e) - \mathbf{R}_e &= -\mathbf{grad} p_e - e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}) \\ m_i n_i \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_i + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right] + \operatorname{div}(\Pi_i) - \mathbf{R}_i &= -\mathbf{grad} p_i + e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B})\end{aligned}\quad (2.30)$$

En appliquant l'approximation de dérive, le terme d'inertie (terme de gauche) et les termes de viscosité et de friction sont négligeables devant la force de Laplace, car $(m_i n_i \omega)/(e n_i B) = \omega/\Omega_i \ll 1$, et de même pour les électrons.

En première approximation (ordre 0 en ω/Ω_i) , l'équation (2.30) devient donc :

$$\begin{aligned}e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e^{(0)} \wedge \mathbf{B}) &= -\mathbf{grad} p_e \\ e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i^{(0)} \wedge \mathbf{B}) &= \mathbf{grad} p_i\end{aligned}\quad (2.31)$$

En faisant le produit vectoriel de (2.31) avec \mathbf{B} , en utilisant la formule du double produit vectoriel $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$ et en notant $\mathbf{v}_{\parallel} = \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} \right) \frac{\mathbf{B}}{B}$, $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{e\perp}^{(0)} &= \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2} - \frac{1}{en_e} \frac{\mathbf{B} \wedge \mathbf{grad} p_e}{B^2} \\ \mathbf{v}_{i\perp}^{(0)} &= \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2} + \frac{1}{en_i} \frac{\mathbf{B} \wedge \mathbf{grad} p_i}{B^2}\end{aligned}\quad (2.32)$$

Le premier terme de chaque équation, identique pour les électrons et les ions (mouvement d'ensemble du plasma), ne donne naissance à aucun courant et correspond à un écoulement $\mathbf{v}_{E \times B} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}/B^2$ lié à la dérive électrique (produit par le couplage entre le champ électrique du plasma et le champ magnétique de confinement), appelé généralement *écoulement E × B*. Le second terme, différent pour les électrons et les ions, correspond à un écoulement électronique diamagnétique $v_e^* = -(\mathbf{B} \wedge \mathbf{grad} p_e)/(en_e B^2)$ respectivement ionique diamagnétique $v_i^* = (\mathbf{B} \wedge \mathbf{grad} p_i)/(en_i B^2)$ (produits par le couplage entre le champ de pression électronique, respectivement ionique et le champ magnétique de confinement). Le courant diamagnétique $\mathbf{j}^* = en_i \mathbf{v}_i^* - en_e \mathbf{v}_e^*$ (appelé ainsi car il diminue l'intensité du champ magnétique de confinement), a pour expression :

$$\mathbf{j}^* = \frac{\mathbf{B}}{B^2} \wedge \mathbf{grad} p \quad (2.33)$$

où $p = p_e + p_i$ désigne la pression totale du plasma.

A cause de la faible masse des électrons comparé aux ions ($\frac{m_e}{m_i} \sim 10^{-4} \ll 1$ pour un plasma de Deuterium), la correction liée au terme d'inertie des électrons (premier terme de l'équation (2.30)) est négligeable devant les autres termes.

A l'ordre 1 en ω/Ω_i , on obtient pour l'écoulement perpendiculaire des ions :

$$\mathbf{v}_{i\perp}^{(1)} = \frac{m_i}{eB^2} \frac{d\mathbf{E}_{\perp}}{dt} - \frac{\mu_{i\perp}}{en_i} \mathbf{grad} \Omega = \mathbf{v}_i^{pol} + \mathbf{v}_i^{visc} \quad (2.34)$$

où $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_{E \times B} + \mathbf{v}_i^*) \cdot \mathbf{grad}$ désigne la dérivée convective

et $\Omega = (\mathbf{rot} \mathbf{v}_{E \times B}) \cdot \frac{\mathbf{B}}{B}$ est appelé vorticité potentielle, ou simplement *vorticité*.

Le premier terme dans (2.34) correspond à un *écoulement de polarisation* qui est lié à la dépendance temporelle du champ électrique du plasma, alors que le second terme est un *terme de dissipation* ($\mu_{i\perp}$ désignant la viscosité de l'écoulement perpendiculaire au champ magnétique). Le courant associé s'écrit :

$$\mathbf{j}_{\perp}^{(1)} = \frac{n_i m_i}{B^2} \left[\frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{E \times B} + \mathbf{v}_i^*) \cdot \mathbf{grad} \mathbf{E}_{\perp} \right] - \frac{\mu_{i\perp}}{B^2} \mathbf{grad} \Omega \quad (2.35)$$

En résumé, les écoulements correspondant à l'approximation de dérive s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\text{électrons : } \mathbf{v}_e &= \mathbf{v}_{e\parallel} + \mathbf{v}_{E \times B} + \mathbf{v}_e^* \\ \text{ions : } \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_{i\parallel} + \mathbf{v}_{E \times B} + \mathbf{v}_i^* + \mathbf{v}_i^{pol} + \mathbf{v}_i^{visc}\end{aligned}\quad (2.36)$$

L'écoulement (2.34) donne naissance à un *courant ionique de polarisation* \mathbf{j}_i^{pol} et un courant ionique lié à la dissipation \mathbf{j}_i^{visq} , qui associés au courant diamagnétique donne le courant total $\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j}^* + \mathbf{j}_i^{pol} + \mathbf{j}_i^{visq}$ dans la direction perpendiculaire au champ magnétique :

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{\mathbf{B}}{B^2} \wedge \mathbf{grad} p + \frac{n_i m_i}{B^2} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t} + (\mathbf{v}_{E \times B} + \mathbf{v}_i^*) \cdot \mathbf{grad} \mathbf{E}_\perp \right) - \frac{\mu_{i\perp}}{B^2} \mathbf{grad} \Omega \quad (2.37)$$

2.4 Modèle électrostatique de la turbulence de ballonnement résistif

Dans un plasma de bord de tokamak, le champ magnétique auto-généré par le plasma est négligeable devant le champ magnétique de confinement $B^{auto} \ll B$. Pour cette raison, le champ électrique auto-généré par le plasma peut-être considéré comme statique et la turbulence prenant naissance dans ces conditions est alors qualifiée de *turbulence électrostatique*.

2.4.1 Dynamique parallèle et loi d'Ohm

En projetant l'équation de Navier-Stokes (2.30) pour les électrons dans la direction parallèle au champ magnétique, on obtient une expression dénommée *Loi d'Ohm généralisée* pour la composante parallèle du champ électrique :

$$E_\parallel = \eta j_\parallel - \frac{1}{en_e} \nabla_\parallel p_e \quad (2.38)$$

où η , désignant la résistivité électrique du plasma, est un paramètre fondamental propre aux instabilités résistives. De plus, dans le modèle étudié ici, le gradient de pression électronique est négligeable devant la force volumique électrique : $\nabla_\parallel p_e \ll en_e E_\parallel$. Ainsi, la Loi d'Ohm électrostatique se réduit à :

$$j_\parallel = \frac{1}{\eta} E_\parallel \quad (2.39)$$

2.4.2 Équation de vorticité

Les équations de continuité (2.1) s'écrivent dans l'approximation de dérive :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_e + \operatorname{div}(n_e \mathbf{v}_{e\parallel} + n_e \mathbf{v}_{E \times B} + n_e \mathbf{v}_e^*) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} n_i + \operatorname{div}(n_i \mathbf{v}_{i\parallel} + n_i \mathbf{v}_{E \times B} + n_i \mathbf{v}_i^* + \mathbf{v}_i^{pol} + \mathbf{v}_i^{visq}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Afin d'obtenir un modèle simplifié, on passe à une description MHD à un fluide. En faisant la différence (à un facteur e près) de ces deux équations et en utilisant la définition de la densité de charge volumique σ du plasma (2.4), on obtient :

$$\frac{1}{e} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \operatorname{div} \left[j_\parallel \frac{\mathbf{B}}{B} + \mathbf{j}_\perp \right] \quad (2.41)$$

De plus, à cause de la quasi-neutralité du plasma, la densité de charge est quasi-nulle, $\sigma = e(n_i - n_e) \sim 0$, ce qui implique que la divergence du courant total du plasma est nulle : $\operatorname{div} \left[j_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \mathbf{j}_{\perp} \right] = 0$. En utilisant cette relation et en remplaçant les courants de dérive par leur expression, on obtient l'équation suivante (on note $\nabla = \mathbf{grad}$ le gradient et $\nabla_{\parallel} = [\mathbf{B}/B] \cdot \mathbf{grad}$ la composante scalaire du gradient qui est parallèle au champ magnétique) :

$$\nabla_{\parallel} j_{\parallel} - \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{B}}{B^2} \wedge \nabla p \right] + \operatorname{div} \left[\frac{n_i m_i}{B^2} \frac{d\mathbf{E}_{\perp}}{dt} \right] - \operatorname{div} \left[\frac{\mu_{i\perp}}{B^2} \nabla \Omega \right] = 0 \quad (2.42)$$

Le second terme de cette équation peut être exprimé en fonction de la courbure \mathbf{g} du champ magnétique (2.24) :

$$\operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{B}}{B^2} \wedge \nabla p \right] \simeq -\mathbf{g} \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \wedge \nabla p \right) \quad (2.43)$$

On utilise des valeurs de référence pour les expressions comme :

$$\operatorname{div}(n_i \mathbf{E}_{\perp}) = n_i \operatorname{div} \mathbf{E}_{\perp} + \nabla_{\perp} n_i \cdot \mathbf{E}_{\perp} \simeq n_0 \operatorname{div} \mathbf{E}_{\perp} \quad (2.44)$$

De plus, la non-linéarité provenant de l'advection du champ électrique par l'écoulement $E \times B$ fait apparaître la vorticité Ω (composante parallèle au champ magnétique du vecteur tourbillon $\boldsymbol{\Omega}$), lorsque l'on néglige les corrections venant des variations spatiales du champ magnétique de confinement :

$$\operatorname{div} \left[\frac{n_i m_i}{B^2} \frac{d\mathbf{E}_{\perp}}{dt} \right] \simeq -\frac{n_0 m_i}{B_0^2} \frac{d\Omega}{dt}, \quad (2.45)$$

$$\Omega = -\frac{1}{B} (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp}) \quad (2.46)$$

Dans l'expression de Ω , nous avons utilisé le fait que

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{rot} \left[\frac{\mathbf{E}_{\perp} \wedge \mathbf{B}}{B^2} \right] = -\frac{1}{B} (\nabla \cdot \mathbf{E}_{\perp}) \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{1}{B} \nabla_{\parallel} \mathbf{E}_{\perp} = -(\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp}) \frac{\mathbf{B}}{B^2}$$

En utilisant la loi d'Ohm (2.39), on obtient *l'équation de vorticité* :

$$\frac{n_0 m_i}{B_0^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \mathbf{v}_{E \times B} \cdot \nabla \Omega \right) = -\mathbf{g} \cdot \left[\frac{\mathbf{B}}{B^2} \wedge \nabla p \right] + \frac{1}{\eta} \nabla_{\parallel} E_{\parallel} + \frac{\mu_{i\perp 0}}{B_0^2} \nabla_{\perp}^2 \Omega \quad (2.47)$$

2.4.3 Equation de pression

Dans les équations de la chaleur (2.3), on néglige le couplage à la dynamique parallèle. Après compensation des vitesses diamagnétiques par les composantes diamagnétiques des tenseurs de contraintes, la somme des deux équations donne, pour la pression globale du plasma $p = p_e + p_i$, *l'équation de pression* :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}_{E \times B} \cdot \nabla p \right) = -\frac{5}{3} p_0 \mathbf{g} \cdot \left[\frac{\mathbf{B}}{B^2} \wedge \mathbf{E}_{\perp} \right] + \chi_{\perp 0} \nabla_{\perp}^2 p + \chi_{\parallel 0} \nabla_{\parallel}^2 p \quad (2.48)$$

où des valeurs de référence des diffusivités thermiques globales $\chi_{\parallel 0}$ et $\chi_{\perp 0}$ sont introduites :

$$\begin{aligned}\chi_{\parallel 0} \nabla_{\parallel} p &\sim \kappa_e \nabla_{\parallel}(k_B T_e) + \kappa_i \nabla_{\parallel}(k_B T_i) \\ \chi_{\perp 0} \nabla_{\perp} p &\sim \kappa_e \nabla_{\perp}(k_B T_e) + \kappa_i \nabla_{\perp}(k_B T_i)\end{aligned}\quad (2.49)$$

2.4.4 Potentiel électrostatique

La turbulence étudiée ici étant électrostatique, c'est-à-dire que le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire, il est logique d'introduire le potentiel électrostatique (champ scalaire), noté ϕ , pour décrire le champ électrique $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_{\perp}, E_{\parallel})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\perp} &= -\nabla_{\perp} \phi \\ E_{\parallel} &= -\nabla_{\parallel} \phi\end{aligned}\quad (2.50)$$

Ceci donne pour l'expression de la vorticité :

$$\Omega = -\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} = \nabla_{\perp}^2 \phi \quad (2.51)$$

On note alors la similitude entre les expressions de l'écoulement $E \times B$ et du courant diamagnétique : ce sont des champs purement rotationnels. En effet, ces deux vecteurs correspondent tous deux au rotationnel d'un champ dont la composante selon \mathbf{B} est respectivement le potentiel électrostatique et la pression :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{E \times B} &= \frac{1}{B} \operatorname{rot} \left(\phi \frac{\mathbf{B}}{B} \right) \\ \mathbf{j}^* &= \frac{1}{B} \operatorname{rot} \left(p \frac{\mathbf{B}}{B} \right)\end{aligned}\quad (2.52)$$

L'expression des termes de courbure des équations de vorticité et de pression se simplifie en introduisant l'opérateur de courbure \hat{G} (2.24).

2.4.5 Modèle du ballonnement résistif électrostatique

En résumé, le modèle pour la *turbulence de ballonnement résistif* ("Resistive Ballooning Mode") consiste en un ensemble de deux équations couplées reliant la pression totale du plasma p au champ électrostatique auto-généré $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_{\perp}, E_{\parallel})$:

$$\begin{aligned}\frac{n_0 m_i}{B_0^2} \left[\frac{\partial(\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp})}{\partial t} + \mathbf{v}_{E \times B} \cdot \nabla_{\perp}(\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp}) \right] &= -\frac{\mathbf{B}_0}{B_0 R_0} \cdot (\mathbf{g} \wedge \nabla_{\perp} p) + \frac{1}{\eta} \nabla_{\parallel} E_{\parallel} + \frac{\mu_{i \perp 0}}{B_0^2} \nabla_{\perp}^2 (\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp}) \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}_{E \times B} \cdot \nabla_{\perp} p &= \frac{5}{3} \frac{p_0 \mathbf{B}_0}{B_0 R_0} \cdot (\mathbf{g} \wedge \mathbf{E}_{\perp}) + \chi_{\perp 0} \nabla_{\perp}^2 p + \chi_{\parallel 0} \nabla_{\parallel}^2 p\end{aligned}$$

$$\text{où } \mathbf{v}_{E \times B}(\mathbf{E}_{\perp}) = -\frac{\mathbf{B}_0}{B_0^2} \wedge \mathbf{E}_{\perp}$$

Soit, en utilisant l'opérateur de courbure \hat{G} (2.24) et la relation $\mathbf{E} = (-\nabla_{\perp}\phi, -\nabla_{\parallel}\phi)$:

$$\frac{\partial \nabla_{\perp}^2 \phi}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \wedge \nabla_{\perp} \phi \right) \cdot \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp}^2 \phi) = -\frac{B_0}{n_0 m_i R_0} \hat{G} p - \frac{B_0^2}{\eta n_0 m_i} \nabla_{\parallel}^2 \phi + \nu \nabla_{\perp}^4 \phi \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{B}_0}{B_0} \wedge \nabla_{\perp} \phi \right) \cdot \nabla_{\perp} p = \frac{5}{3} \frac{p_0}{B_0 R_0} \hat{G} \phi + \chi_{\perp 0} \nabla_{\perp}^2 p + \chi_{\parallel 0} \nabla_{\parallel}^2 p \quad (2.54)$$

2.4.6 Dynamique de l'écoulement moyen associé

En moyennant l'équation (2.53) sur les surfaces magnétiques ($\langle \dots \rangle$ = moyenne sur les angles θ et φ), on obtient l'équation gouvernant la dynamique de l'écoulement moyen $\mathbf{V}(r, t) = \bar{v}_{\theta} \mathbf{e}_{\theta} = \frac{1}{B_0} \langle \frac{\partial \phi}{\partial r} \rangle \mathbf{e}_{\theta}$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \langle \tilde{v}_r \tilde{v}_{\theta} \rangle \quad (2.55)$$

Il s'agit d'une équation de diffusion avec une viscosité $\nu = \frac{\mu_{i \perp 0}}{n_0 m_i}$ et un terme de droite représentant une force volumique qui dérive de la contrainte tangentielle $\tau_R(r, t) = \langle \tilde{v}_r \tilde{v}_{\theta} \rangle$ du fluide (plasma) connue sous le nom de *contrainte de Reynolds*. Ce terme représente une source d'énergie pour l'écoulement moyen, et il est donc à l'origine de la génération spontanée d'un écoulement poloïdal. L'équation (2.55) est couplée via la contrainte de Reynolds aux équations pour les composantes fluctuantes \tilde{v}_r et \tilde{v}_{θ} de l'écoulement.

2.4.7 Effets de perturbations magnétiques résonnantes

En présence de perturbations magnétiques, le champ magnétique s'écrit :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{eq} + \tilde{\mathbf{B}} \quad (2.56)$$

Expérimentalement, les perturbations résonnantes sont créées par des bobines magnétiques situées à l'extérieur du plasma dans lequel on fait circuler un courant perturbatif.

Dans le modèle de ballonnement résistif, l'effet des perturbations résonnantes se traduit par une modification du gradient parallèle :

$$\nabla_{\parallel} = \nabla_{\parallel 0} + \tilde{\nabla}_{\parallel} \quad (2.57)$$

où $\nabla_{\parallel 0} = \frac{\mathbf{B}_{eq}}{B} \cdot \nabla$ désigne le gradient parallèle d'équilibre.

Le terme $\tilde{\nabla}_{\parallel} = \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{B} \cdot \nabla$ donne lieu à un phénomène de *transport stochastique* appelé *flottement magnétique* ("magnetic flutter"). En effet, la perturbation magnétique $\tilde{B} \sim I_D$, où I_D désigne l'intensité du courant dans les bobines, crée une stochastisation des lignes de champ magnétique (elles deviennent chaotiques et emplissent alors un maximum d'espace) ce qui permet aux particules du plasma d'être transportées plus efficacement, un peu à la manière de perles se déplaçant sur un collier emmelé.

2.4.8 Normalisations et approximation "slab"

On utilise l'approximation "slab" en définissant des coordonnées locales (x, y, z) au voisinage d'une position de référence $R = R_0 + r_0$:

$$x = r - r_0 \quad (2.58)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \simeq \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.59)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \simeq \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.60)$$

où $r_0 \sim a$ désigne un rayon de référence proche du bord du plasma.

Afin de faciliter l'implémentation numérique des équations (2.53) et (2.54), il est utile d'introduire les normalisations suivantes :

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow \hat{t} = \frac{t}{\tau_{inter}} \\ x &\longrightarrow \hat{x} = \frac{x}{\xi_{bal}} \\ y &\longrightarrow \hat{y} = \frac{y}{\xi_{bal}} \\ z &\longrightarrow \hat{z} = \frac{z}{L_s} \end{aligned} \quad (2.61)$$

où $\tau_{inter} \sim 10^{-6}s$, appelé *temps d'interchange* (voir chapitre 3), est le temps caractéristique des modes de ballonnement, $\xi_{bal} \sim 1mm$ est la largeur caractéristique associée définie par :

$$\tau_{inter} = \sqrt{\frac{R_0 L_p}{c_{s0}}}, \quad \xi_{bal} = \sqrt{\frac{n_0 m_i \eta_{||0}}{\tau_{inter} B_0^2}} L_s \quad (2.62)$$

et L_s est la longueur de cisaillement du champ magnétique de confinement (2.18).

En utilisant ces normalisations et la notation en crochets de Poisson :

$\mathbf{v}_{E \times B} \cdot \nabla f = \{\phi, f\} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$ pour toute fonction f , on obtient le *modèle normalisé de ballonnement résistif* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla_{\perp}^2 \phi}{\partial t} + \{\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi\} &= -\hat{G}p - \nabla_{||0}^2 \phi + \nu \nabla_{\perp}^4 \phi \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \{\phi, p\} &= \delta_c \hat{G} \phi + \chi_{\perp} \nabla_{\perp}^2 p + \chi_{||} \nabla_{||0}^2 p + S(x) \end{aligned} \quad (2.63)$$

où l'on a rajouté une source de chaleur stationnaire, localisée côté coeur, modélisant un flux de chaleur constant $Q_{tot} = \int_0^{+\infty} S(x) dx$.

et pour le *modèle normalisé de ballonnement résistif avec perturbations magnétiques résonantes (RMPs)* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla_{\perp}^2 \phi}{\partial t} + \{\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi\} &= -\hat{G}p - \nabla_{\parallel}^2 \phi + \nu \nabla_{\perp}^4 \phi \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \{\phi, p\} &= \delta_c \hat{G}\phi + \chi_{\perp} \nabla_{\perp}^2 p + \chi_{\parallel} \nabla_{\parallel}^2 p + S \\ \nabla_{\parallel} &= \nabla_{\parallel 0} + \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{B_0} \cdot \nabla \end{aligned} \quad (2.64)$$

Les coefficients sont donnés par :

$$\delta_c = \frac{5}{3} \frac{L_p}{R_0}, \quad \nu = \frac{\tau_{inter}}{\xi_{bal}^2} \frac{\mu_{i\perp 0}}{n_0 m_i}, \quad \chi_{\perp} = \frac{\tau_{inter}}{\xi_{bal}^2} \chi_{\perp 0}, \quad \chi_{\parallel} = \frac{\tau_{inter}}{L_s^2} \chi_{\parallel 0} \quad (2.65)$$

et la source a été normalisée selon $S = \frac{\tau_{inter} L_p}{\xi_{bal} p_0} S_0$.

Chapitre 3

Instabilité de ballonnement résistif

Dans un plasma de tokamak, il existe différentes zones avec des valeurs différentes de la pression et densité. Il existe, dans un tokamak, un très fort gradient de pression, entre la zone dite "de coeur" caractérisée par une très haute pression et la zone dite "de bord" caractérisée par une basse pression. Puisque l'on peut négliger, en première approximation, l'interaction entre les particules du plasma, on peut considérer le plasma comme un gaz parfait pour lequel l'équation d'état reliant pression p , la densité n et la température T s'écrit : $p = nk_B T$, où k_B désigne la constante de Boltzmann. Il existe également dans un tokamak une forte courbure des lignes de champ dans la direction toroïdale, représentée par une gravité effective \mathbf{g} . L'instabilité de ballonnement résistif, pour laquelle la courbure toroïdale joue un rôle crucial, met en jeu la courbure magnétique et le gradient de pression radial.

3.1 Instabilité d'interchange et instabilité de Rayleigh-Taylor

Il existe une analogie entre

- l'*instabilité de ballonnement résistif* en magnétohydrodynamique.
- l'*instabilité de Rayleigh-Taylor* en hydrodynamique.

3.1.1 Instabilité de Rayleigh-Taylor

En hydrodynamique, l'instabilité de Rayleigh-Taylor [32] se développe lorsqu'un fluide dense est superposé à un fluide moins dense, par exemple, de l'eau sur de l'huile, ou bien qu'il existe un gradient de densité dans un fluide unique [voir Figure 3.1].

Pour un écoulement 2D incompressible et inhomogène, l'instabilité de Rayleigh-Taylor est modélisée par l'équation de continuité (3.1), les équations de Navier-Stokes (3.2, 3.3) et l'équation d'advection-diffusion (3.4), linéarisées autour de l'équilibre $\bar{n}(x) = [1 - (d\bar{n}/dx)x]\bar{n}_0$, $\bar{\mathbf{v}}(x) = 0$, $\bar{p}(x) = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{v}_x + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{v}_y = 0 \quad (3.1)$$

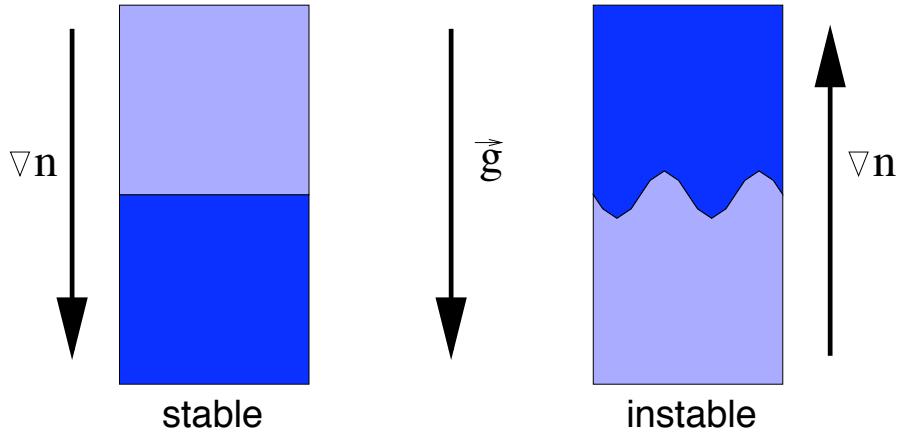


FIG. 3.1 – Un ensemble de deux fluides non-chargés superposés soumis à la gravité \mathbf{g} est instable si le fluide du dessus est plus dense que celui du dessous (instabilité de Rayleigh-Taylor).

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{v}_x - \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{v}_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{v}_x \right) = -\frac{1}{m_0 \bar{n}} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{p} - \frac{g_0}{\bar{n}} \tilde{n} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{v}_y - \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{v}_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{v}_y \right) = -\frac{1}{m_0 \bar{n}} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{p} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n} + \tilde{v}_x \frac{d\bar{n}}{dx} - D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{n} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{n} \right) = 0 \quad (3.4)$$

où x désigne la direction de l'inhomogénéité (direction verticale), et y désigne la direction transverse associée (direction horizontale), \tilde{v}_x, \tilde{v}_y désignent les fluctuations de vitesse, \tilde{n}, \tilde{p} sont les fluctuations de densité et de pression, respectivement, $\mathbf{g}_0 = -g_0 \mathbf{e}_x$ avec $g_0 > 0$ désigne le vecteur gravité (pesanteur), $d\bar{n}/dx = Cte$ est la composante verticale du gradient de densité moyen, ν est la viscosité et D représente un coefficient de diffusion.

En supposant que toutes les quantités fluctuantes ont une dépendance harmonique $\sim e^{i(k_x x + k_y y)} e^{(\gamma - i\omega)t}$ et après un peu de calcul, le système (3.1-3.4) se réduit à deux équations :

$$\left(1 + \frac{k_x^2}{k_y^2} \right) [\gamma - i\omega + \nu(k_x^2 + k_y^2)] \tilde{v}_x + \frac{g_0}{\bar{n}} \tilde{n} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{d\bar{n}}{dx} \tilde{v}_x + [\gamma - i\omega + D(k_x^2 + k_y^2)] \tilde{n} = 0 \quad (3.6)$$

Le système (3.5,3.6) n'a de solutions que si son déterminant est nul. De plus, en supposant, pour simplifier, que $\nu = D$ et en remarquant que $\mathbf{g}_0 \cdot \nabla \bar{n} = -g_0(d\bar{n}/dx)$, on obtient pour la relation de dispersion de l'instabilité de Rayleigh-Taylor :

$$(\gamma - i\omega + D(k_x^2 + k_y^2))^2 + \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} \left(\frac{1}{\bar{n}} \mathbf{g}_0 \cdot \nabla \bar{n} \right) = 0 \quad (3.7)$$

où k_x, k_y sont les vecteurs d'onde vertical et horizontal respectivement, et $\nabla \bar{n}$ désigne le vecteur gradient de densité moyen.

Si l'on suppose que le gradient de densité est parallèle au vecteur gravité, on distingue deux cas limites [voir Figure 3.1] :

1. cas stable $\mathbf{g}_0 \cdot \nabla \bar{n} > 0$:

$$\gamma = -D(k_x^2 + k_y^2) \quad (3.8)$$

$$\omega = \omega_{RT} \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad (3.9)$$

où $\omega_{RT} = g_0 |\nabla \bar{n}| / \bar{n}$ est une fréquence caractéristique.

Ce cas correspond à des oscillations amorties, à la fréquence ω_{RT} .

2. cas instable $\mathbf{g}_0 \cdot \nabla \bar{n} < 0$:

$$\gamma = \frac{1}{\tau_{RT}} \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} - D(k_x^2 + k_y^2) \quad (3.10)$$

$$\omega = 0 \quad (3.11)$$

où $\tau_{RT} = \frac{\bar{n}}{g_0 |\nabla \bar{n}|}$ est un temps caractéristique de croissance de l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

Ce cas correspond à une croissance des fluctuations pour $k_x^2 + k_y^2 < (k_y/D\tau_{RT})^{2/3}$ [voir Figure 3.2].

3.1.2 Instabilité d'interchange

En magnétohydrodynamique, l'instabilité de ballonnement résistif se développe lorsque le vecteur gravité effective \mathbf{g} dû à la courbure magnétique et le vecteur gradient de pression moyen $\nabla \bar{p}$ sont en sens opposés : $\mathbf{g} \cdot \nabla \bar{p} < 0 \longrightarrow$ instabilité [voir Figure 3.3].

Il s'avère (cela sera montré dans la suite) que l'on peut faire une analogie entre *l'instabilité d'interchange* (modèle simplifié du ballonnement résistif) et l'instabilité de Rayleigh-Taylor valable pour les fluides non-chargés, si l'on remplace le gradient de densité moyen $\nabla \bar{n}$ du fluide non-chargé par le gradient de pression moyen $\nabla \bar{p}$ du plasma [voir Tableau 3.1].

Afin de mettre en évidence cette analogie, considérons un modèle simplifié décrivant l'instabilité d'interchange valide au voisinage d'une position de référence $r = r_0$, soit dans la zone stable $\theta \simeq \pi$, soit dans la zone instable $\theta \simeq 0$ du tokamak. La gravité effective est alors approximativement dirigée dans la direction radiale locale que l'on note x :

$$\mathbf{g} \simeq \frac{c_s^2}{R_0} \mathbf{e}_x \quad (3.12)$$

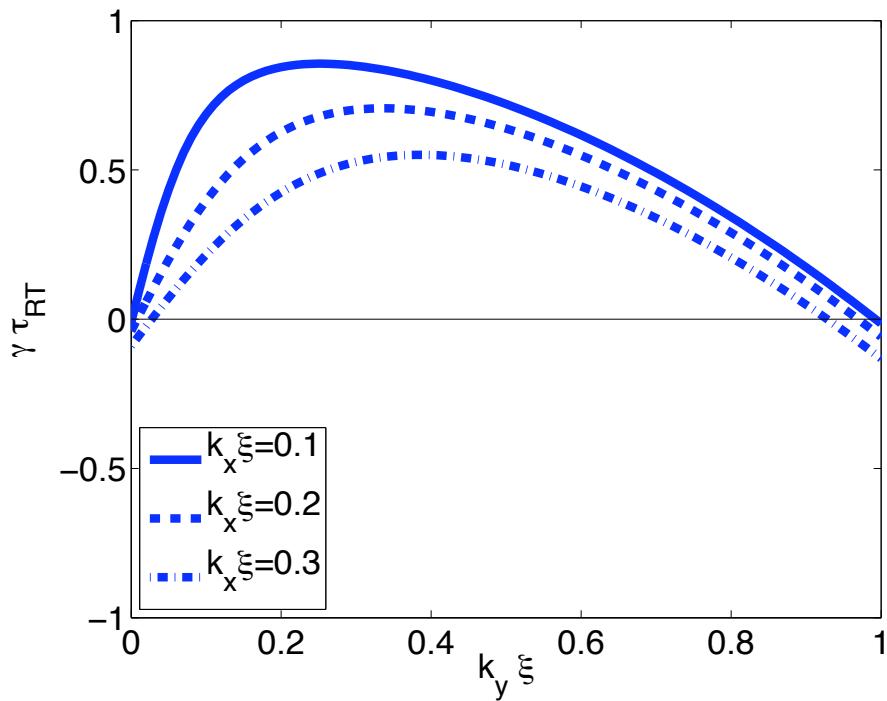


FIG. 3.2 – Taux de croissance (3.10) de l’instabilité de Rayleigh-Taylor en fonction du nombre d’onde vertical, pour différentes valeurs du nombre d’onde horizontal et $\frac{\tau_{RT}}{\xi^2} D = 1$.

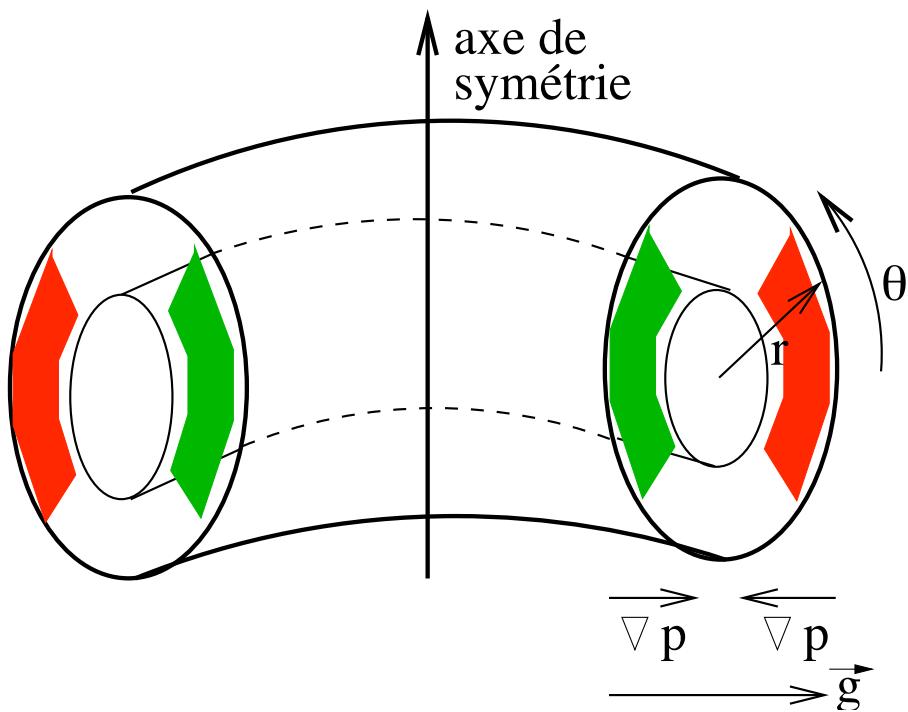


FIG. 3.3 – Zone stable (en vert) et zone instable (en rouge) du tokamak, vis-à-vis de l’instabilité de ballonnement résistif.

Ceci se traduit par une simplification de l'opérateur de courbure (2.24) :

$$\hat{G} \simeq \frac{\pm 1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \simeq \pm \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.13)$$

où le signe (-) correspond au cas stable ($\theta \sim \pi$) et le signe (+) correspond au cas instable ($\theta \sim 0$). Dans la suite, les corrections d'ordre $(a/R_0)^2$ sont négligées.

En supposant, dans un premier temps, un facteur de sécurité constant $q = q_0 = Cte$, on peut définir une coordonnée locale $z = R_0(\varphi + \frac{r_0^2}{q_0 R_0^2} \theta)$ telle que le champ magnétique d'équilibre s'écrit :

$$\mathbf{B}_{eq}(r, \theta) = \left(1 - \frac{r \cos \theta}{R_0}\right) B_0 \mathbf{e}_z \quad (3.14)$$

où la direction poloïdale locale $y = r_0(\theta - \varphi/q_0)$ est tel que les vecteurs unitaires \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z forment un trièdre direct.

Le gradient parallèle d'équilibre se simplifie alors comme :

$$\nabla_{\parallel 0} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.15)$$

L'équilibre thermodynamique du plasma confiné est approximé par un gradient de pression constant $\kappa = \left| \frac{d\bar{p}}{dx} \right| > 0$ et l'absence d'écoulement moyen ($V = 0$), ce qui se traduit par :

$$\bar{p}(x) = -\kappa[x - a], \quad \bar{\phi}(x) = 0 \quad (3.16)$$

et on considère des variations harmoniques de faible amplitude (fluctuations) autour de l'équilibre (3.16) :

$$\phi(x, y, z, t) = \bar{\phi}(x) + \phi_{MN} \exp(i(k_x x + \frac{M}{r_0} y - \frac{N}{R_0} z)) \exp((\gamma - i\omega)t) + c.c \quad (3.17)$$

$$p(x, y, z, t) = \bar{p}(x) + p_{MN} \exp(i(k_x x + \frac{M}{r_0} y - \frac{N}{R_0} z)) \exp((\gamma - i\omega)t) + c.c \quad (3.18)$$

avec

$$M = m, \quad N = n - \frac{m}{q_0} \quad (3.19)$$

La linéarisation des équations (2.53) et (2.54) autour de l'équilibre (3.16) mène à :

$$[(\hat{\gamma} + \nu_{i\perp 0}(k_x^2 + k_y^2)) (k_x^2 + k_y^2) + \frac{B_0^2}{\eta_{\parallel 0} n_0 m_i} k_z^2] \phi_{MN} \pm i \frac{|g| B_0}{n_0 m_i c_s^2} k_y p_{MN} = 0 \quad (3.20)$$

$$i \frac{\kappa}{B_0} k_y \phi_{MN} + [\gamma + \chi_{\perp 0}(k_x^2 + k_y^2) + \chi_{\parallel 0} k_z^2] p_{MN} = 0 \quad (3.21)$$

	Rayleigh-Taylor	Interchange
gradient responsable	$ \nabla \bar{n} $	$\kappa = \nabla \bar{p} $
gravité effective	pesanteur $ g_0 $	courbure magnétique $ g = c_s^2/R_0$

TAB. 3.1 – Analogie entre l’instabilité de Rayleigh-Taylor (en hydrodynamique) et l’instabilité d’interchange (en magnétohydrodynamique)

avec $\hat{\gamma} = \gamma - i\omega$, $k_y = M/r_0$, $k_z = N/R_0$, $|g| = c_s^2/R_0$.

L’équation (3.21) montre que, durant la phase de croissance linéaire de l’instabilité, il existe une relation linéaire entre ϕ_{MN} et p_{MN} :

$$\frac{k_y \phi_{MN}}{B_0} = i \frac{\gamma_0 p_{MN}}{\kappa} \quad (3.22)$$

où $\gamma_0 = \gamma + \chi_{\perp 0}(k_x^2 + k_y^2) + \chi_{\parallel 0}k_z^2$.

De plus, le système d’équations (3.20, 3.21) n’a de solutions que si son déterminant est nul, ce qui donne la relation de dispersion $\hat{\gamma} = f(k_x, k_y, k_z)$ suivante :

$$[(\hat{\gamma} + \nu_{i\perp 0}(k_x^2 + k_y^2))(k_x^2 + k_y^2) + \frac{B_0^2}{\eta_{\parallel 0} n_0 m_i} k_z^2][\hat{\gamma} + \chi_{\perp 0}(k_x^2 + k_y^2) + \chi_{\parallel 0} k_z^2] \pm \frac{\kappa}{\tau_{inter}^2} k_y^2 = 0 \quad (3.23)$$

où l’on a introduit le temps caractéristique d’interchange :

$$\tau_{inter} = \sqrt{\frac{n_0 m_i c_s^2}{|g| \kappa}} \quad (3.24)$$

Analysons, à présent, chacun des termes de l’expression de (3.24) : le terme κ représente l’effet du gradient de pression, $n_0 m_i$ est la masse volumique du plasma (considéré comme un fluide) et la gravité effective $|g| = c_s^2/R_0$ représente l’effet de la courbure magnétique.

En divisant l’équation (3.23) par $k_x^2 + k_y^2$, on obtient :

$$\left[\hat{\gamma} + \nu_{i\perp 0}(k_x^2 + k_y^2) + \frac{B_0^2}{\eta_{\parallel 0} n_0 m_i} \frac{k_z^2}{k_x^2 + k_y^2} \right] [\hat{\gamma} + \chi_{\perp 0}(k_x^2 + k_y^2) + \chi_{\parallel 0} k_z^2] \pm \frac{\kappa}{\tau_{inter}^2} \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} = 0 \quad (3.25)$$

Fluctuations résonnantes

Considérons, dans un premier temps, des *fluctuations résonnantes*, c’est-à-dire celles qui sont invariantes dans la direction du champ magnétique, i.e. $k_z = 0$. En utilisant la relation linéaire (3.22) entre ϕ_{MN} et p_{MN} , les harmoniques s’écrivent alors :

$$\delta\phi(x, y, t) = i \frac{B_0 \gamma_0}{\kappa k_y} p_{MN} \exp(i(k_x x + \frac{M}{r_0} y)) \exp((\gamma - i\omega)t) + c.c \quad (3.26)$$

$$\delta p(x, y, t) = p_{MN} \exp(i(k_x x + \frac{M}{r_0} y)) \exp((\gamma - i\omega)t) + c.c \quad (3.27)$$

Supposons $\nu_{i\perp 0} = \chi_{\perp 0} = D_{\perp}$ pour simplifier. En revenant aux variables originales (γ, ω) , l'équation (3.25) devient :

$$[\gamma - i\omega + D_{\perp}(k_x^2 + k_y^2)]^2 = \pm \frac{\kappa}{\tau_{inter}^2} \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.28)$$

Comme pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor (expression 3.7), il existe une solution stable (correspondant au signe $-$), ainsi qu'une solution instable (correspondant au signe $+$). La solution instable a une fréquence nulle $\omega = 0$ et un taux de croissance γ donné par :

$$\gamma = \gamma_0 - D_{\perp}(k_x^2 + k_y^2) \quad (3.29)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\tau_{inter}} \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \quad (3.30)$$

Le taux de croissance (3.29) augmente avec le nombre d'onde poloïdal, présente un maximum, puis diminue avec le nombre d'onde poloïdal grâce à la stabilisation due à la dissipation [voir Figure 3.4].

En comparant le taux de croissance (3.29) avec le taux de croissance (3.10), on voit que, pour $k_z = 0$, il existe bien une analogie entre l'instabilité d'interchange et l'instabilité de Rayleigh-Taylor. En effet, ces deux instabilités ont un taux de croissance de la même forme. Cependant, dans notre analyse, nous avons supposé que dans les deux cas, le fluide était périodique dans les deux directions x et y . La périodicité en x n'est jamais satisfaite, car le fluide, qu'il s'agisse d'un fluide non-chargé ou un plasma, est toujours confiné (verticalement pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor et radialement pour l'instabilité d'interchange), de plus nous verrons dans la section suivante qu'un champ magnétique cisaillé entraîne une localisation radiale de l'instabilité d'interchange. L'hypothèse de périodicité en y est valide uniquement dans le cas d'une géométrie cylindrique (r, θ, z) , où y représente l'angle θ . La périodicité en y fait apparaître un seuil Dk_y^2 au dessus duquel l'instabilité se développe. En effet, les instabilités de Rayleigh-Taylor et d'interchange en géométrie cylindrique se déclenchent uniquement lorsque le gradient de densité, respectivement, gradient de pression devient supérieur à un seuil appelé *gradient critique* qui varie comme $\frac{D_{\perp} k_y^2}{\gamma_0}$ dans le cas de l'instabilité d'interchange. L'instabilité de Rayleigh-Taylor en géométrie cylindrique et l'instabilité d'interchange sont donc des *instabilités à seuil*. Nous verrons dans le chapitre 4, que cette propriété de l'instabilité de ballonnement résistif joue un rôle fondamental pour la dynamique des barrières de transport.

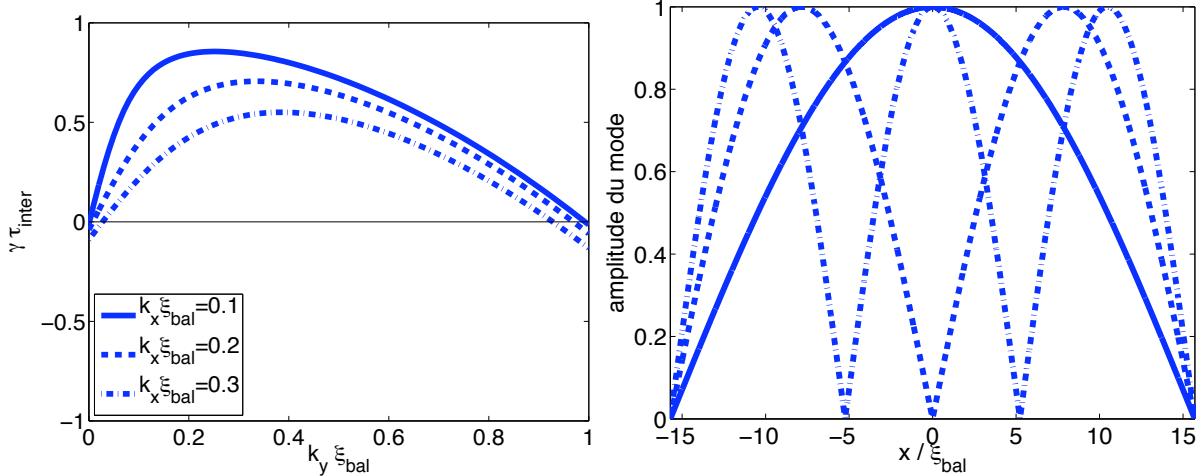


FIG. 3.4 – Taux de croissance (3.29) en fonction du nombre d'onde poloïdal et profil radiaux des modes, pour différentes valeurs du nombre d'onde radial pour $\frac{\tau_{\text{inter}}}{\xi^2} D_\perp = 1$.

Fluctuations variant dans la direction parallèle

Considérons maintenant les fluctuations qui varient le long des lignes de champ magnétique ($k_z \neq 0$). En introduisant les longueurs caractéristiques ξ_{bal} (définie au chapitre 2 expression 2.62) dans la direction perpendiculaire et $L_\parallel = L_s$ dans la direction parallèle et en définissant les diffusivités adimensionnées $\chi_\perp = \frac{\tau_{\text{inter}}}{\xi_{\text{bal}}^2} \chi_{\perp 0}$ et $\chi_\parallel = \frac{\tau_{\text{inter}}}{L_\parallel^2} \chi_{\parallel 0}$, l'équation (3.25) donne le taux de croissance des modes avec $k_z \neq 0$:

$$\gamma = \pm \sqrt{\gamma_0^2 + \frac{1}{\tau_{\text{inter}}^2} \left(\chi_\parallel - \frac{1}{(k_x^2 + k_y^2)\xi_{\text{bal}}^2} \right)^2 \frac{(k_z L_\parallel)^4}{4} - \frac{1}{\tau_{\text{inter}}} \left(\chi_\parallel + \frac{1}{(k_x^2 + k_y^2)\xi_{\text{bal}}^2} \right) \frac{(k_z L_\parallel)^2}{2} - \frac{1}{\tau_{\text{inter}}} \chi_\perp (k_x^2 + k_y^2) \xi_{\text{bal}}^2} \quad (3.31)$$

Le taux de croissance γ vérifie alors :

$$|\gamma| \leq \gamma_0 - \chi_{\perp 0} (k_x^2 + k_y^2) - \frac{1}{\tau_{\text{inter}}} \min \left[\frac{1}{\chi_{\parallel 0} (k_x^2 + k_y^2)}, \tau_{\text{inter}} \right] \cdot (k_z L_\parallel)^2 \quad (3.32)$$

Le troisième terme, côté droit de l'équation a tendance à compenser le premier [6]. Ceci implique que les fluctuations non-résonnantes sont plus stables que les fluctuations résonnantes. Ces dernières jouent donc un rôle primordial dans l'instabilité d'interchange.

3.2 Champ magnétique cisaillé et diffusion inhomogène

3.2.1 Effet de stabilisation et de localisation des fluctuations

En réalité, le champ magnétique n'est orienté selon \mathbf{e}_z qu'à la surface de résonnance de référence r_0 caractérisée par $q(r_0) = m/n$. De manière générale, l'orientation du champ

magnétique dépend de la position, on dit que le champ magnétique est cisailé :

$$\mathbf{B}_{eq}(r) = B_z(r) \mathbf{e}_z + B_\theta(r - r_0) \mathbf{e}_\theta \quad (3.33)$$

Au voisinage de la surface résonnante de référence r_0 , on définit les coordonnées locales radiale et poloïdale $x = (r - r_0)$ et $y = r_0\theta$, respectivement. Autour de la position $r = r_0$ (c'est-à-dire $x = 0$), on peut alors approximer $B_z(r)$ par une constante B_0 et on peut faire une approximation linéaire pour $B_y(x)$:

$$\mathbf{B}_{eq}(x) = B_0 \mathbf{e}_z - \frac{B_0 R_0}{r_0} \frac{x}{L_s} \mathbf{e}_y \quad (3.34)$$

Le gradient parallèle se simplifie alors comme :

$$\nabla_{\parallel 0} = \frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{x}{L_s} \right) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.35)$$

où la longueur caractéristique L_s , appelée *longueur de cisaillement magnétique* est définie au chapitre 2, expression (2.18).

Du fait de la dépendance explicite en x du gradient parallèle, les fluctuations ne peuvent pas être décomposées en harmoniques dans la direction radiale x . Au contraire, grâce au champ magnétique cisailé, les fluctuations sont maintenant localisées radialement, comme cela va être montré dans la suite. On parle de *modes localisés*. On est alors amenés à étudier, autour de l'équilibre (3.16), des fluctuations de la forme suivante :

$$\phi(x, y, z, t) = \bar{\phi}(x) + \phi_{MN}(x) \exp(i(\frac{M}{r_0}y - \frac{N}{R_0}z)) \exp((\gamma - i\omega)t) \quad (3.36)$$

$$p(x, y, z, t) = \bar{p}(x) + p_{MN}(x) \exp(i(\frac{M}{r_0}y - \frac{N}{R_0}z)) \exp((\gamma - i\omega)t) \quad (3.37)$$

En utilisant l'expression (3.35) pour le gradient parallèle la linéarisation des équations (2.53) et (2.54) autour de l'équilibre (3.16) donne :

$$(\gamma - i\omega) \left(\frac{d^2 \phi_{MN}}{dx^2} - k_y^2 \phi_{MN} \right) - \frac{B_0^2 k_y^2}{\eta n_0 m_i L_s^2} x^2 \phi_{MN} \pm i \frac{B_0}{n_0 m_i R_0} k_y p_{MN} = 0 \quad (3.38)$$

$$i \frac{\kappa}{B_0} k_y \phi_{MN} + \left((\gamma - i\omega) + \frac{\chi_{\parallel 0} k_y^2}{L_s^2} x^2 \right) p_{MN} = 0 \quad (3.39)$$

où les termes dissipatifs perpendiculaires $\mu_{i\perp 0}$ et $\chi_{\perp 0}$ sont négligés pour simplifier. Leur effet est le même que dans le cas sans cisaillement magnétique, c'est-à-dire une stabilisation des modes pour les grandes valeurs du nombre d'onde poloïdal. On suppose, et cela va se vérifier *a posteriori*, que la largeur radiale σ des modes est négligeable devant la longueur d'onde poloïdale $\frac{1}{k_y}$. On simplifie alors :

$$k_y^2 \phi_{MN} \ll \left| \frac{\partial^2 \phi_{MN}}{\partial x^2} \right|, \quad \frac{\chi_{\parallel 0} k_y^2}{L_s^2} x^2 \ll \gamma \quad (3.40)$$

L'équation (3.39) donne alors une relation linéaire entre les fluctuations de potentiel $\tilde{\phi}$ et de pression \tilde{p} : ces deux champs oscillent en quadrature de phase (déphasage de $\frac{\pi}{2}$) :

$$-\frac{ik_y}{B_0}\phi_{MN}(x) = \frac{\gamma - i\omega}{\kappa} p_{MN}(x) \quad (3.41)$$

On obtient alors une seule équation pour la pression :

$$(\gamma - i\omega)^2 \frac{B_0}{k_y \kappa} \frac{d^2 p_{MN}}{dx^2} + \left(\pm \frac{B_0 k_y}{n_0 m_i R_0} - (\gamma - i\omega) \frac{B_0^3 k_y}{\eta n_0 m_i L_s^2 \kappa} x^2 \right) p_{MN} = 0 \quad (3.42)$$

Et après simplifications, on obtient finalement :

$$\frac{d^2 p_{MN}}{dx^2} + \left(\pm \frac{\kappa k_y^2}{(\gamma - i\omega)^2 n_0 m_i R_0} - \frac{B_0^2 k_y^2}{(\gamma - i\omega) \eta n_0 m_i L_s^2} x^2 \right) p_{MN} = 0 \quad (3.43)$$

Cette équation différentielle n'admet de solution que pour le signe (+), c'est-à-dire dans la région instable $\theta \sim 0$ et pour une fréquence nulle $\omega = 0$. Dans ce cas, en définissant la largeur des modes $\sigma_\gamma = \left[\gamma \frac{\eta n_0 m_i L_s^2}{B_0^2 k_y^2} \right]^{1/4}$ (qui dépend donc du taux de croissance), et en posant $X = \frac{x}{\sigma_\gamma}$, l'équation (3.43) prend la forme d'une équation d'Hermite :

$$\frac{d^2 p_{MN}}{dX^2} + \left(\frac{\kappa k_y L_s}{\gamma^{3/2} B_0 R_0} \sqrt{\frac{\eta}{n_0 m_i}} - X^2 \right) p_{MN} = 0 \quad (3.44)$$

Les solutions de cette équation sont les polynômes d'Hermite multipliés par une gaussienne. Le mode le plus instable ($\gamma_\sigma = \gamma_{max}$), et dont la largeur est maximale car $\sigma_\gamma \sim \gamma^{1/4}$ est :

$$p_{MN}(x) \sim \exp \left(-\frac{x^2}{2\sigma_{max}^2} \right) \quad (3.45)$$

avec

$$\gamma_{max} = \left(\frac{\eta \kappa^2 L_s^2 k_y^2}{n_0 m_i R_0^2 B_0^2} \right)^{1/3} \quad (3.46)$$

$$\sigma_{max} = \left(\frac{\kappa n_0 m_i \eta^2}{R_0 B_0^4} \right)^{1/6} \left(\frac{L_s^2}{k_y} \right)^{1/3} \quad (3.47)$$

On voit donc que la longueur de cisaillement magnétique L_s influe sur le taux de croissance γ_{max} ainsi que sur la largeur σ_{max} du mode le plus instable. Un champ magnétique fortement cisaillé (L_s faible) engendre donc un double effet de *stabilisation* (faible γ_{max}) et de *localisation* (faible σ_{max}) des fluctuations.

3.2.2 Prise en compte des termes dissipatifs et diffusion parallèle inhomogène

Modèle de diffusion d'un scalaire passif

Il est possible de faire apparaître l'effet d'un champ magnétique cisaillé tout en conservant les termes dissipatifs en regardant uniquement l'équation des fluctuations de pression (3.39) et en tenant compte du terme dissipatif $\chi_{\perp 0}$ qui a été négligé dans (3.39). Une méthode consiste à découpler les équations pour les amplitudes p_{MN} et ϕ_{MN} des modes. On retient uniquement l'équation pour les fluctuations de pression, qui a une expression plus simple que celle pour le potentiel électrique. Le modèle ainsi obtenu, appelé *diffusion d'un scalaire passif*, car on ne considère que l'effet de l'écoulement sur le champ (scalaire) qui diffuse, en négligeant l'effet du champ qui diffuse sur l'écoulement, est un paradigme en hydrodynamique. Il existe deux versions de ce modèle.

Modélisation de l'instabilité par une croissance exponentielle

La première version consiste à modéliser le couplage au champ de potentiel ϕ_{MN} (couplage responsable de l'instabilité) dans l'équation (3.39) par un terme de croissance $\gamma_0 p_{MN}$ qui génère une croissance exponentielle du mode. Ce terme est choisi tel que, pour un champ magnétique non-cisaillé, le taux de croissance γ du mode le plus instable corresponde à γ_0 , donné par l'expression (3.30). On obtient alors l'équation suivante :

$$(\gamma - i\omega)p_{MN} = \gamma_0 p_{MN} + D_{\perp} \left(\frac{\partial^2 p_{MN}}{\partial x^2} - k_y^2 p_{MN} \right) - k_y^2 D''_{\parallel} x^2 p_{MN} = 0 \quad (3.48)$$

où, afin de bien souligner qu'une approximation a été faite pour découpler les deux équations (3.38, 3.39), on note D_{\perp} et $D''_{\parallel}(x) = D''_{\parallel} x^2$ les diffusivités perpendiculaire et parallèle, le paramètre D''_{\parallel} étant défini par :

$$D''_{\parallel} = \frac{\chi_{\parallel 0}}{L_s^2} \quad (3.49)$$

En divisant les deux membres de l'équation (3.48) par $\sqrt{k_y^2 D''_{\parallel} D_{\perp}}$, on met en évidence une largeur radiale caractéristique :

$$\sigma = \left(\frac{D_{\perp}}{k_y^2 D''_{\parallel}} \right)^{1/4} \quad (3.50)$$

On remarque que cette largeur varie comme la racine carrée de la longueur de cisaillement :

$$\sigma = \left(\frac{\chi_{\perp 0}}{\chi_{\parallel 0}} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{L_s}{k_y}} \quad (3.51)$$

En posant $X = \frac{x}{\sigma}$, l'équation (3.48) s'écrit sous forme d'une équation d'Hermite :

$$\frac{d^2 p_{MN}}{dX^2} + \left(\frac{\gamma_0 - D_\perp k_y^2 - \gamma + i\omega}{\sqrt{k_y^2 D''_\parallel D_\perp}} - X^2 \right) p_{MN} = 0 \quad (3.52)$$

Le mode le plus instable a pour expression $p_{MN}(x) \sim \exp(-x^2/(2\sigma^2))$, sa fréquence est nulle $\omega = 0$, ce qui donne pour l'expression des harmoniques de pression [voir Figure 3.5] :

$$\delta p(x, y, t) \sim e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos(k_y y) e^{\gamma t} \quad (3.53)$$

où le taux de croissance γ est donné par :

$$\gamma = \gamma_0 - D_\perp k_y^2 - k_y \sqrt{D''_\parallel D_\perp} \quad (3.54)$$

Ce taux de croissance est réduit par rapport au taux de croissance (3.29) en absence de diffusion parallèle. Pour une valeur de D''_\parallel telle que $D''_\parallel > (\gamma_0 - D_\perp k_y^2)^2 / D_\perp k_y^2$ le mode devient linéairement stable.

Modélisation de l'instabilité par un terme source

La seconde version consiste à modéliser le couplage au champ de potentiel $\tilde{\phi}(x, t) = \phi_{MN}(x) \exp(ik_y y + k_z z) \exp((\gamma - i\omega)t)$ dans l'équation originale par un terme source $\tilde{S}(x, t) = -ik_y \frac{\kappa}{B_0} \tilde{\phi}(x, t)$. On obtient alors l'équation suivante :

$$(\gamma - i\omega)p_{MN} = D_\perp \left(\frac{d^2 p_{MN}}{dx^2} - k_y^2 p_{MN} \right) - k_y^2 D''_\parallel x^2 p_{MN} + \tilde{S}(x) \quad (3.55)$$

L'équation (3.55) peut alors s'interpréter comme un équation de diffusion inhomogène dans le plan poloïdal local $z = 0$, pour les harmoniques de pression (qui varient en temps) $\delta p(x, y, t) = p_{MN}(x) e^{ik_y y + (\gamma - i\omega)t}$ avec un terme source $\tilde{S}(x, t)$ variant aussi en temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta p = D_\perp \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta p + D_\perp \left(1 + \frac{D''_\parallel}{D_\perp} x^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta p + \tilde{S}(x, t) \quad (3.56)$$

où " D_\perp " représente la diffusivité (homogène) dans la direction radiale x et " $D_\perp \left(1 + \frac{D''_\parallel}{D_\perp} x^2 \right)$ " représente la diffusivité (inhomogène) dans la direction poloïdale y . On voit donc qu'un champ magnétique cisaillé engendre une diffusion parallèle inhomogène. Pour un champ magnétique non-cisaillé, $L_s \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire $D''_\parallel \rightarrow 0$, l'équation (3.56) devient une équation de diffusion classique (avec terme source) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta p = D_\perp \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta p + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta p \right) + \tilde{S}(x, t) \quad (3.57)$$

On remarque alors que l'effet d'un champ magnétique cisaillé peut s'interpréter comme une augmentation effective de la diffusivité dans la direction poloïdale :

$$D_{\text{pol}} = D_\perp \left(1 + \frac{D''_\parallel}{D_\perp} x^2 + \dots \right) \quad (3.58)$$

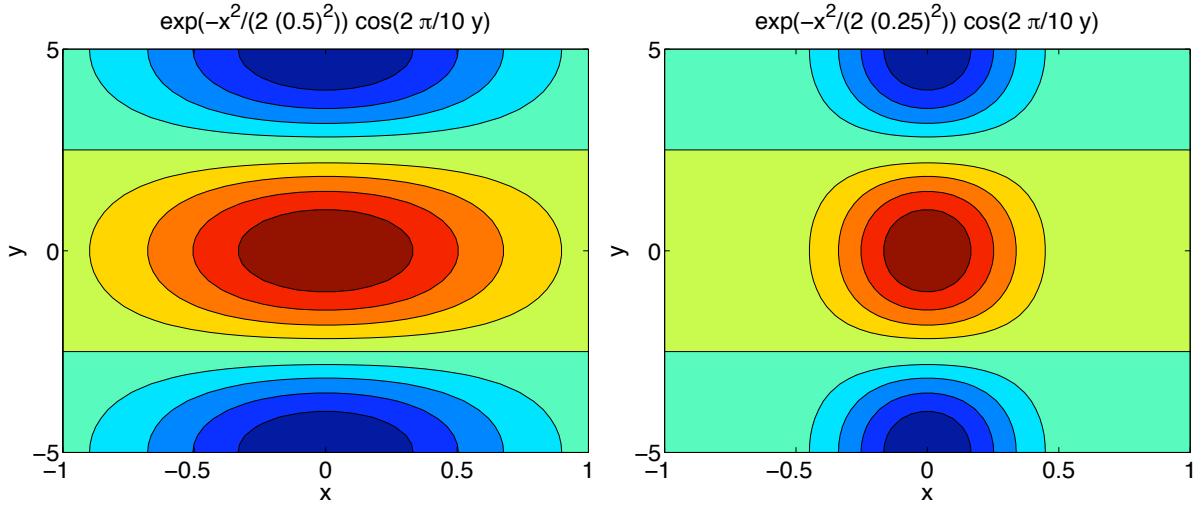


FIG. 3.5 – Effets d'un champ magnétique cisaillé sur les harmoniques de pression $\delta p(x, y, t)$: mode propre $\delta p(x, y, 0)$ (expression 3.53) pour $\sigma = 0.5$ (à gauche) et $\sigma = 0.25$ (à droite).

L'augmentation de la diffusivité étant non-nulle sauf à la surface de résonance $x = 0$, cela donne une autre explication du double effet stabilisant et localisant d'un champ magnétique cisaillé étudié au paragraphe précédent.

Dans la suite de ce mémoire, lorsque l'on se référera à l'effet d'un champ magnétique cisaillé, nous utiliserons le terme de *diffusion parallèle*, ceci afin d'éviter toute confusion avec les écoulements cisaillés.

Chapitre 4

Propriétés et dynamique d'une barrière de transport

4.1 Génération d'une barrière de transport

La formation de barrières de transport dans les plasmas de fusion par confinement magnétique est fortement liée à une réduction du transport turbulent par des écoulements $E \times B$ cisailés axisymétriques et stationnaires ainsi que par des écoulements $E \times B$ zonaux (axisymétriques et oscillant au cours du temps). Citons, par exemple, la transition d'un régime à faible confinement vers un régime à fort confinement (transition L-H) pour laquelle une barrière de transport apparaît dans la zone de bord du plasma, ou encore la formation d'une barrière de transport interne dans la zone de cœur du plasma [11, 9, 37]. Ses deux phénomènes jouent un rôle crucial pour les régimes d'opération des futures réacteurs à fusion. L'effet de la stabilisation par un écoulement cisaillé a été étudié, à la fois, analytiquement [35, 34, 25, 26] et numériquement [16, 13].

L'interprétation physique de l'effet d'un écoulement cisaillé sur la turbulence, donnant lieu à la formation de barrières de transport est la suivante : Un écoulement cisaillé déforme les tourbillons (ou vortex) de la turbulence, créant ainsi une cascade d'énergie de l'échelle macroscopique vers l'échelle microscopique jusqu'à atteindre l'*échelle de Kolmogorov* où la dissipation d'énergie est maximale. Nous étudions tout d'abord la formation et la dynamique des barrières de transport dans le modèle 3D. Ensuite, nous présentons un modèle 1D qui montre l'interaction entre les fluctuations de pression \tilde{p} et le profil de pression \bar{p} , puis à l'aide de ce modèle 1D tenant compte d'un écoulement $E \times B$ stationnaire, nous étudions les mécanismes à la base des relaxations d'une barrière de transport. Un écoulement moyen cisaillé peut réduire considérablement le flux de chaleur radial (transport de chaleur dans la direction radiale) $Q_{turb} = \sqrt{\langle \tilde{p}^2 \rangle} \sqrt{\langle \tilde{v}_x^2 \rangle} \cos \delta$ d'un champ scalaire (on considère ici le champ de pression p) via une réduction de l'amplitude de la turbulence $\sqrt{\langle \tilde{p}^2 \rangle \langle \tilde{v}_x^2 \rangle}$, où v_x désigne la vitesse radiale, et/ou via la réduction du terme de phase $\cos \delta$, où δ désigne le déphasage entre les fluctuations de pression et les fluctuations de vitesse radiale. Plusieurs études ont porté sur la détermination de la dépendance des quantités Q_{turb} , $\langle p^2 \rangle$ et $\cos \delta$ en fonction du taux de cisaillement (la vitesse radiale \tilde{v}_x

étant donnée et jouant le rôle d'une source de turbulence) dans le cas d'un écoulement moyen cisailé [34, 25] ainsi que pour des écoulements zonaux aléatoires et des écoulements zonaux oscillants [26, 24].

En particulier, il existe un débat actuel concernant l'importance relative de la suppression de l'amplitude ou du terme de phase dans la réduction du transport turbulent. Terry *et al.* soutiennent que le terme de phase est plus fortement réduit que l'amplitude de la turbulence [34] alors que Kim et Diamond soutiennent que ce n'est pas toujours le cas [25].

Dans la dernière partie, nous présentons les résultats du calcul numérique de la diffusion d'un scalaire passif dans un écoulement cisailé où la turbulence est représentée par une source aléatoire possédant un spectre donné, indépendant de l'écoulement cisailé. Cela vise à clarifier le rôle que joue la réduction de l'amplitude de la turbulence et du terme de phase dans la régulation du transport radial. Les résultats de ces simulations sont comparés aux résultats analytiques disponibles dans la littérature [34, 25]. Nous présentons également une seconde approche analytique.

Nous nous concentrerons sur les effets d'un écoulement moyen cisailé stationnaire (temps de corrélation τ_c infini).

4.1.1 Modèle 3D de ballonnement résistif avec écoulement forcé

En ajoutant un terme de forçage $-\mu[V - V_F]$ à l'équation (2.55) présentée au chapitre 2, gouvernant la dynamique de l'écoulement moyen sur les surfaces magnétiques, un écoulement rotationnel poloïdal cisailé est généré, ce qui permet la formation d'une *barrière de transport*, c'est-à-dire une zone du plasma où le transport convectif turbulent est très faible.

Dans ce chapitre, nous utiliserons les coordonnées locales radiale, poloïdale et toroïdale données, respectivement par (voir Chapitre 2, expressions 2.58-2.60) :

$$x = r - r_0 \quad (4.1)$$

$$y = r_0\theta \quad (4.2)$$

$$z = R_0\varphi \quad (4.3)$$

En coordonnées locales x, y, z , l'écoulement rotationnel cisailé $\mathbf{V} = \bar{v}_y \mathbf{e}_y$ généré par le forçage est alors donné par l'équation suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\mu(V - V_F(x)) - \frac{\partial}{\partial x}\langle \tilde{v}_x \tilde{v}_y \rangle + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

$$\text{où } V = \bar{v}_y = \frac{1}{B_0} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}.$$

Le paramètre μ représente un coefficient de friction donné par la théorie néoclassique [33] :

Grand rayon du plasma	$R_0 = 1.75 \text{ m}$
Petit rayon du plasma	$a = 0.46 \text{ m}$
Position radiale de référence	$r_0 = r_{q=3} = 0.45 \text{ m}$

TAB. 4.1 – Dimensions du plasma.

$$\mu = \frac{q_0 c_s}{R_0} \cdot \frac{\nu_*}{1 + \nu_*} \quad (4.5)$$

où $\nu_* = (q_0 R_0)/(c_s(a/R_0)^{3/2}) \cdot \nu_{ii}$, ν_{ii} désignant la fréquence de collision ion-ion.

L'écoulement forcé V_F utilisé dans le code est inspiré des profils expérimentaux, et modélisé par une fonction tangente hyperbolique. Il est donné par :

$$V_F(x) = \Omega \cdot d \cdot \tanh\left(\frac{x}{d}\right) \quad (4.6)$$

où Ω désigne le taux de cisaillement et d désigne la largeur de la couche cisaillée.

Pour de grandes valeurs du paramètre μ comparé à ν/d^2 , l'écoulement est quasi-stationnaire et on a $V(x, t) \simeq V_F(x)$. Lorsque le paramètre μ devient de l'ordre de ν/d^2 , les autres termes de l'équation et plus particulièrement l'accélération poloïdale liée à la *contrainte de Reynolds* $\langle \tilde{v}_x \tilde{v}_y \rangle$ modifient l'écoulement et l'écoulement auto-généré de l'équation (2.55) s'ajoute alors à l'écoulement forcé quasi-stationnaire.

4.1.2 Description du code RBM3D et paramètres des simulations

Nous avons réalisé des simulations numériques en utilisant le modèle normalisé (2.64). incluant les perturbations résonnantes implémenté dans le code 3D global semi-spectral RBM3D [7]. Dans nos simulations numériques, le nombre de points dans la direction radiale est $N_x = 104$ et le pas dans la direction radiale est $\Delta x = 1$ et on simule tous les modes résonnantes jusqu'à $n_{max} = 48$ avec un pas $\Delta n = 4$ ce qui donne un nombre total de modes égal à :

$$N_{modes} = \left(\frac{n_{max}}{\Delta n} + 1\right)\left(\frac{n_{max}}{2} + 1\right) = 325. \quad (4.7)$$

Le domaine radial de simulation, centré en $q = 3$, est compris entre $q = 2.5$ et $q = 3.5$.

Les Tableaux 4.1 et 4.2 donnent respectivement les dimensions du plasma simulé et les paramètres physiques normalisés utilisés dans nos simulations.

4.1.3 Formation et dynamique d'une barrière de transport

Le modèle avec forçage reproduit la formation [voir Figure 4.2] ainsi que la dynamique d'une barrière de transport [7]. En présence d'un écoulement cisaillé forcé, le contenu énergétique du plasma est multiplié par deux [voir Figure 4.3], ce qui modélise bien les deux régimes L de faible confinement ("Low confinement") et H de confinement élevé [voir Figure 4.1] observés expérimentalement [14].

Viscosité perpendiculaire	$\nu = 0.93$
Diffusivité perpendiculaire	$\chi_{\perp} = 0.93$
Diffusivité parallèle	$\chi_{\parallel} = 1$
Coefficient de friction	$\mu = 20$
Paramètre δ_c	$\delta_c = 4 \times 10^{-2}$
Nombre d'onde poloïdal minimal	$k_y^{min} = \xi_{bal}/r_0 = 2 \times 10^{-3}$
Nombre d'onde toroïdal minimal	$k_z^{min} = L_s/R_0 = 1$

TAB. 4.2 – Paramètres normalisés des simulations.

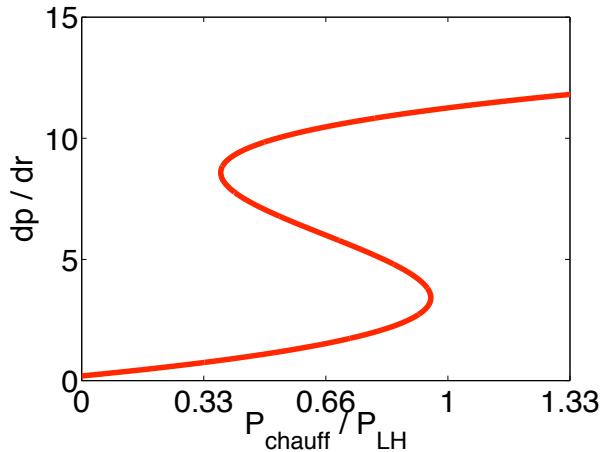


FIG. 4.1 – Schéma qualitatif de la transition $L \longrightarrow H$, d'après la théorie de K. Itoh et S. Itoh [23] : Pour de faibles valeurs de la puissance de chauffage P_{chauff} , le plasma est dans un régime L correspondant à un faible gradient de pression (branche inférieure). Pour une valeur critique P_{LH} , le système passe dans un régime H correspondant à un fort gradient de pression (branche supérieure).

Cependant, le régime H est intrinsèquement instable et il bifurque, pour une certaine valeur critique P_{LH} de la puissance injectée dans le système, vers un régime métastable appelé *elmy H-mode* en anglais, caractérisé par des éjections intermittentes de chaleur et de matière. Dans nos simulations 3D, cela apparaît sous forme d'oscillations quasi-périodiques de la barrière de transport appelées oscillations de relaxations. Ces oscillations de relaxation correspondent également à des pertes intermittentes de puissance [voir Figure 4.4] qui engendrent des pics de flux de chaleur [voir Figure 4.5].

Cependant, le trop grand nombre de degrés de liberté (3 coordonnées x, y, z) associé au caractère fortement non-linéaire des interactions mises en jeu fait que ce modèle n'est pas adéquat pour une étude analytique.

4.1.4 Modèle de gradient critique

Considérons l'équation linéarisée modélisant l'advection du champ de pression $\bar{p}(x, t) + \delta p(x, y, z, t)$ par l'écoulement $E \times B$ turbulent $\delta v = \frac{1}{B_0}(-\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y}, \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x})$ (sans écoulement moyen $V = \frac{1}{B_0} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} = 0$) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta p + \mathbf{V} \cdot \nabla \delta p + \delta \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{p} = D_{\perp} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta p \quad (4.8)$$

En supposant une dépendance harmonique pour la pression et la vitesse : $\delta p = \tilde{p}(x, t)e^{ik_y y + ik_z z} + c.c.$, et $\delta \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}(x, t)e^{ik_y y + ik_z z} + c.c.$, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + i \frac{k_y}{B_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \tilde{\phi} = D_{\perp} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \tilde{p} \quad (4.9)$$

En utilisant une relation entre \tilde{p} et $\tilde{\phi}$ inspirée de la phase linéaire obtenue au Chapitre 3 (expression 3.41), on obtient en exprimant $\tilde{\phi}$ en fonction de \tilde{p} :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = \frac{\gamma_0}{\kappa_{\text{ref}}} \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \kappa_c \right) \tilde{p} + D_{\perp} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} \quad (4.10)$$

où γ_0 désigne le taux de croissance en absence de diffusion parallèle, κ_{ref} est une valeur de référence du gradient de pression et $\kappa_c = (D_{\perp} k_y^2 / \gamma_0) \kappa_{\text{ref}}$ représente un *gradient de pression critique* (seuil de déclenchement de l'instabilité) au dessus duquel le mode le plus instable (mode de plus faible longueur d'onde radiale) croît. De plus, si l'on ajoute l'équation d'évolution (avec source de chaleur $S(x)$) pour le profil de pression \bar{p} , on obtient le *modèle 1D de gradient critique* :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = \frac{\gamma_0}{\kappa_{\text{ref}}} \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \kappa_c \right) \tilde{p} + D_{\perp} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = D_{\perp} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + S(x) - \frac{\gamma_0}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x} |\tilde{p}|^2 \quad (4.12)$$

Ce modèle permet de comprendre l'effet de l'instabilité d'interchange sur la relaxation du profil de pression. En effet, en partant d'un état avec un gradient de pression inférieur

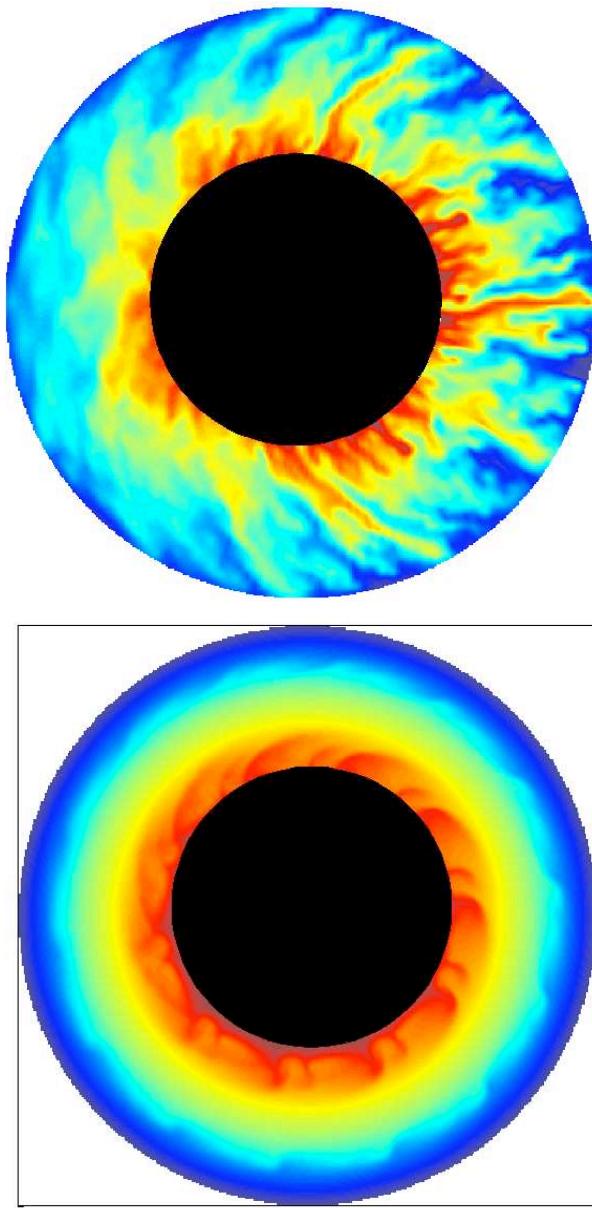


FIG. 4.2 – Cartes de pression (rouge=haute pression, bleu=basse pression) dans le plan poloïdal (r, θ) dans le cas sans écoulement forcé (figure du haut) et avec un écoulement forcé (figure du bas). Dans le cas avec écoulement cisaillé, les "bouffées" de chaleur sont supprimées, ce qui correspond à la présence d'une barrière de transport.

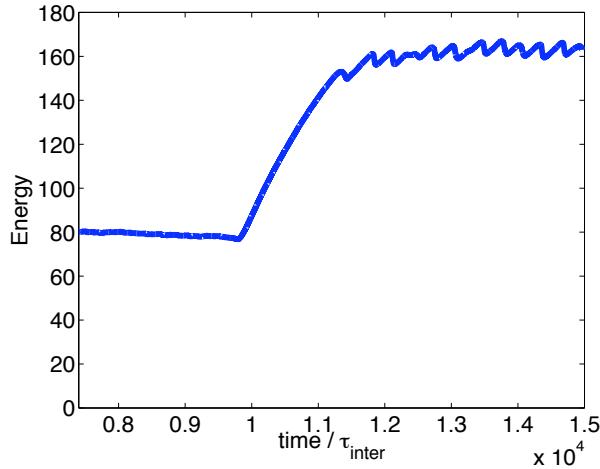


FIG. 4.3 – Résultat d'une simulation 3D montrant la transition forcée d'un régime L vers un régime H : doublement du contenu énergétique du plasma, en un laps de temps de $\sim 2 \times 10^3$ de l'ordre de la milliseconde, lié à l'écoulement poloïdal forcé (4.6) avec un taux de cisaillement $\Omega = 4$. Le forçage est activé à $t \sim 1 \times 10^4$.

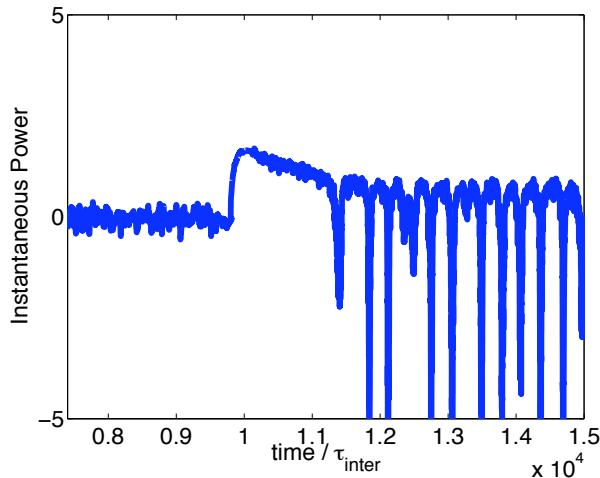


FIG. 4.4 – Puissance instantanée $\frac{d}{dt}\langle p \rangle_{x,y,z}$: On observe une augmentation liée à un écoulement poloïdal forcé (taux de cisaillement $\Omega = 4$), puis des pertes intermittentes de puissance.

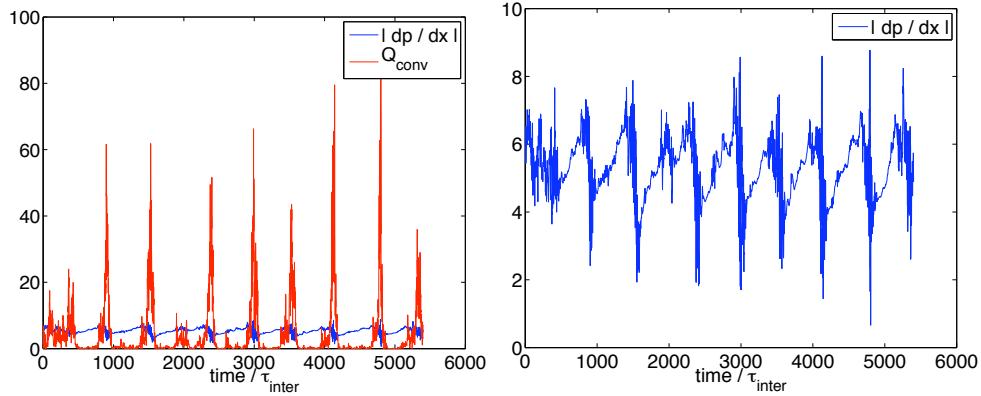


FIG. 4.5 – Oscillations de relaxations du gradient de pression et pics de flux de chaleur radial associés, au centre de la barrière, pour un taux de cisaillement $\Omega = 4$ (gauche), et agrandissement des oscillations du gradient de pression (droite).

au seuil $|\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}| < \kappa_c$, la source de chaleur $S(x)$ a pour effet de raidir le profil de pression au cours du temps, jusqu'à ce que le gradient critique κ_c soit atteint $|\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}| = \kappa_c$, ce qui déclenche l'instabilité d'interchange, instabilité qui a pour effet de maintenir le gradient de pression à une valeur telle que $|\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}| \simeq \kappa_c$. Cependant, le système décrit par ce modèle d'instabilité à seuil ne présente pas d'oscillations de relaxations mais converge vers un état stationnaire pour lequel la somme du flux convectif Q_{conv} et du flux diffusif $-D_\perp \frac{d\bar{p}}{dx}$ est constante et égale au flux total $Q_{tot} = \int S(x)dx$. Comme nous le verrons dans la suite, l'apparition d'oscillations de relaxations peut s'expliquer par les effets d'un écoulement moyen cisaiillé sur cette instabilité à seuil et sur la turbulence en général.

4.1.5 Modèle 1D de transvection-diffusion d'un scalaire passif

Nous allons décrire, dans cette partie, un modèle utilisé pour comprendre l'effet d'un écoulement rotationnel cisaiillé sur la turbulence dans un plasma : le modèle de transvection-diffusion d'un scalaire passif ou *modèle du scalaire passif* ("passive scalar model"). Il s'agit d'un modèle typiquement étudié en hydrodynamique. Considérons la diffusion du champ de pression p (scalaire passif), en présence d'un écoulement cisaiillé \mathbf{u} (purement rotationnel). L'équation de ce modèle s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = \chi_{\parallel 0} \nabla_{\parallel 0}^2 p \quad (4.13)$$

où l'on a rajouté l'effet de la diffusion parallèle (terme de droite), définie au Chapitre 2.

On décompose l'écoulement en un écoulement moyen et un écoulement turbulent :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{V}(x, t) + \tilde{\mathbf{v}}(x, y, z, t) \quad (4.14)$$

L'écoulement \mathbf{V} est un écoulement $E \times B$ moyen cisaiillé avec profil linéaire (au voisinage de $x = 0$) généré par le champ électrique moyen du plasma, et l'écoulement $\tilde{\mathbf{v}}$ est

un écoulement $E \times B$ turbulent, généré par le champ électrique fluctuant du plasma :

$$\mathbf{V}(x, t) = \frac{1}{B^2} \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} = \Omega(t)x \mathbf{e}_y \quad (4.15)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(x, y, z, t) = \frac{1}{B^2} \tilde{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} \quad (4.16)$$

Le caractère linéaire du profil de l'écoulement moyen \mathbf{V} résulte d'une approximation linéaire au voisinage de $x = 0$.

On décompose le champ de pression en une pression moyenne et une somme d'harmoniques et on ne considère que la première harmonique (k_y, k_z) :

$$p(x, y, t) = \bar{p}(x, t) + \tilde{p} e^{ik_y y + ik_z z} \quad (4.17)$$

Bien que, pour simplifier les calculs, on considère une harmonique de la forme $\tilde{p} e^{ik_y y + ik_z z}$ à valeurs complexes, il faut noter que l'harmonique réelle s'écrit :

$$\delta p(x, y, z, t) = \text{Re}\{\tilde{p}(x, t)\} \cos(k_y y + k_z z) + \text{Im}\{\tilde{p}(x, t)\} \sin(k_y y + k_z z) \quad (4.18)$$

Le terme d'advection de l'harmonique de pression par l'écoulement complet s'écrit alors $\mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{p} = \mathbf{V} \cdot \nabla \tilde{p} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{p}$ et on utilise l'approximation liée à la fermeture fluide EDQNM [8] : $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{p} \simeq D_{\perp} \nabla_{\perp}^2 \tilde{p}$, où D_{\perp} représente une diffusivité turbulente dans la direction perpendiculaire au champ magnétique.

On suppose que l'harmonique est résonnante à la position $x = 0$, c'est-à-dire : $\nabla_{\parallel 0}(\delta p)|_{x=0} = 0$. Une approximation linéaire de $B_y(x)$ au voisinage de $x = 0$, explicitée au Chapitre 3, expression (3.35) donne :

$$\chi_{\parallel 0} \nabla_{\parallel 0}^2 (\delta p) \sim \chi_{\parallel 0} \frac{x^2}{L_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \sim -\chi_{\parallel 0} k_y^2 \frac{x^2}{L_s^2} \tilde{p}$$

où L_s désigne la longueur de cisaillement du champ magnétique définie au Chapitre 2, expression (2.18).

L'équation du modèle simplifié que nous étudions est donc :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + i k_y \Omega(t) x \tilde{p} = D_{\perp} \left(\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} - k_y^2 \tilde{p} \right) - k_y^2 D''_{\parallel} x^2 \tilde{p} + \tilde{S}(x, t) \quad (4.19)$$

où $D_{\parallel}(x) = D''_{\parallel} x^2$ est la diffusivité parallèle au champ magnétique. Les paramètres D_{\perp} et $D''_{\parallel} = \chi_{\parallel 0}/L_s^2$ sont supposés indépendants de l'écoulement dans ce modèle. Le terme $\tilde{S}(x, t)$ désigne un terme source défini par :

$$\tilde{S} = -\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{p} = \kappa \tilde{v}_x, \quad \tilde{v}_x = -i \frac{k_y}{B_0} \tilde{\phi} \quad (4.20)$$

où $\tilde{\phi} = \phi(x, t)$ désigne la partie harmonique du potentiel électrique, et $\kappa = -d\bar{p}/dx > 0$ désigne le gradient de pression moyen supposé constant.

Diffusion de Dupree

Afin de mieux comprendre ce modèle, supposons un taux de cisaillement constant $\Omega = Cte$, et considérons la *limite de fort cisaillement* $\tau_D \ll 1/(D'' k_y^2 \sigma^2)$ ('strong shear limit'), où $\tau_D = \frac{1}{\sqrt[3]{D_\perp k_y^2 \Omega^2}}$ est un temps caractéristique appelé *temps de Dupree*, dont la signification physique sera donnée dans la suite de ce sous-chapitre (relation 4.37) et σ est la largeur caractéristique d'un mode (Chapitre 3, expression 3.50). Dans cette limite, le terme $k_y^2 D'' x^2 \tilde{p}$ de l'équation (4.19) est négligeable devant le terme $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p}$ pour $t < \tau_D$. Remplaçons le terme de source \tilde{S} par un taux linéaire de croissance modélisant l'instabilité (croissance exponentielle) $\tilde{S} \rightarrow \gamma_0 \tilde{p}$. On obtient le *modèle de Dupree* :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + ik_y \Omega x \tilde{p} = \gamma_0 \tilde{p} + D_\perp \left(\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} - k_y^2 \tilde{p} \right) \quad (4.21)$$

Si, dans un premier temps, on néglige les termes de diffusion ($D_\perp \rightarrow 0$), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + ik_y \Omega x \tilde{p} = \gamma_0 \tilde{p} \quad (4.22)$$

L'équation (4.22) modélise l'advection de \tilde{p} dans la direction transverse (selon y) à la direction de l'inhomogénéité (x) d'un écoulement cisaillé $V(x) = \Omega x$. Ce phénomène est appelé "*transvection*" [1]. Lorsque la quantité \tilde{p} , en plus d'être transvectée, subit également un processus de diffusion ($D_\perp \neq 0$), on parle d'un phénomène de *transvection-diffusion* ou *diffusion de Dupree*. Pour une perturbation initiale $\delta p \sim \delta(x) \cdot \delta(y)$ infiniment localisée en ($x = 0, y = 0$), la transvection-diffusion a pour solution : [Voir figure 4.6] :

$$D(x, y, t) = \frac{e^{\gamma_0 t}}{\sqrt{D_\perp t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2D_\perp t}\right) \exp\left(-\frac{(y - \Omega t x)^2}{2D_\perp}\right) \quad (4.23)$$

Nous allons montrer dans la suite de ce chapitre que le phénomène de transvection-diffusion a un effet stabilisant sur les fluctuations de pression d'une instabilité ayant pour taux de croissance $\gamma_0 > 0$, si les modes associés à l'instabilité sont périodiques dans au moins une direction (ici, la direction poloïdale y).

L'équation (4.21) peut être résolue analytiquement par la méthode de la transformation de Fourier-Laplace (qui permet d'obtenir une solution quelque soit le profil initial de la perturbation). Dans une première étape, en notant $p_k(t)$ la transformée de Fourier de $\tilde{p}(x, t)$ et en remarquant que $TF\{ix\tilde{p}\} = \frac{\partial p_k}{\partial k}$, la transformation de Fourier de l'équation (4.21) s'écrit :

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} + k_y \Omega \frac{\partial p_k}{\partial k} + D_\perp k^2 p_k - (\gamma_0 - D_\perp k_y^2) p_k = 0 \quad (4.24)$$

En divisant les deux membres de cette équation par le taux de cisaillement Ω , l'équation (4.24) s'écrit :

$$\frac{1}{\Omega} \frac{\partial p_k}{\partial t} + k_y \frac{\partial p_k}{\partial k} + \frac{D_\perp}{\Omega} k^2 p_k - \frac{\gamma_0 - D_\perp k_y^2}{\Omega} p_k = 0 \quad (4.25)$$

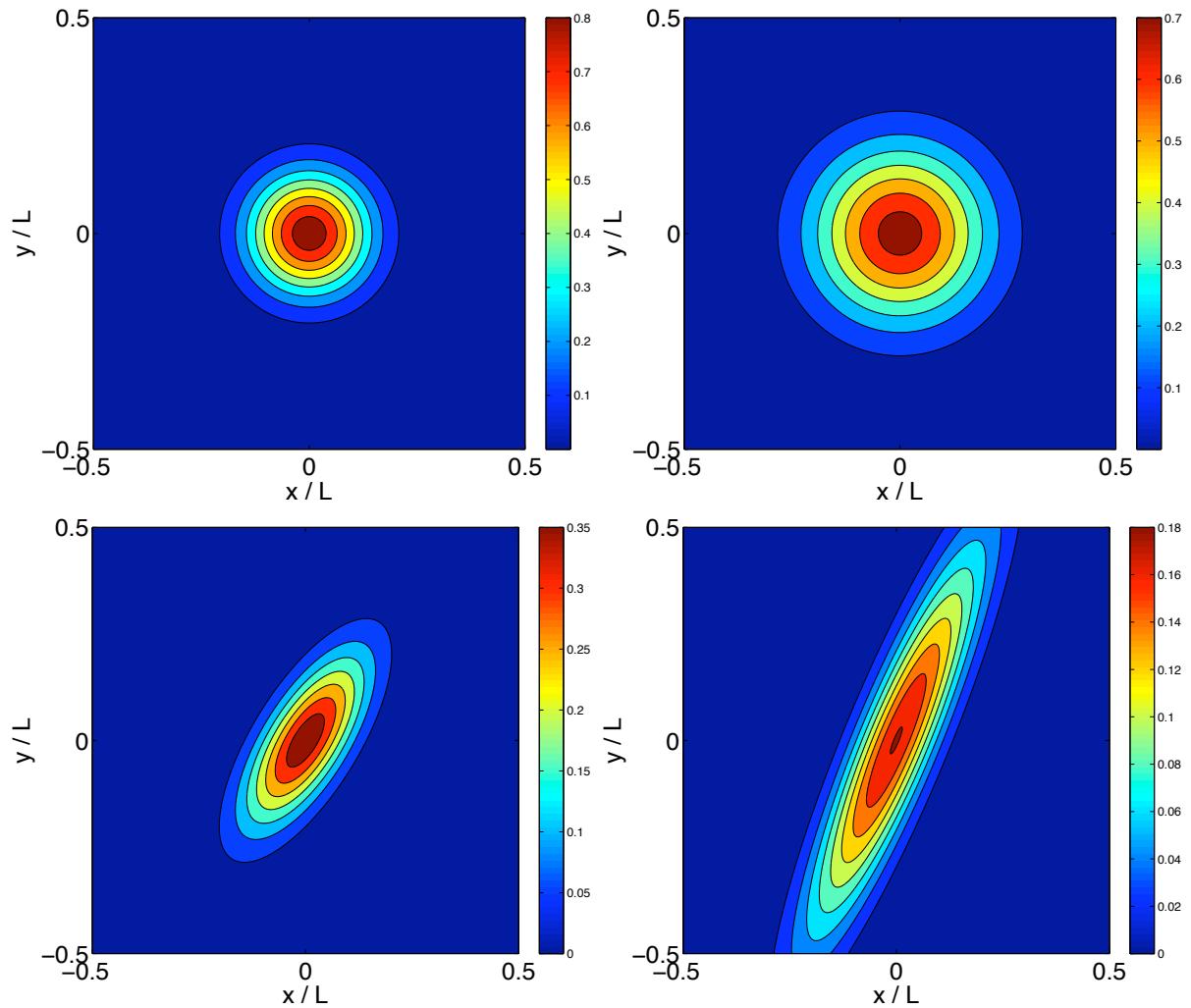


FIG. 4.6 – Comparaison entre diffusion de Gauss (classique) et diffusion de Dupree : solution de l'équation de diffusion classique (en haut) et solution $D(x, y, t)$ de l'équation de transvection-diffusion (en bas) à deux instants différents. Dans les deux cas, la perturbation initiale est infiniment localisée en ($x = 0, y = 0$)

On met ainsi en évidence l'échelle spatiale caractéristique λ_{pol} et le temps caractéristique τ_Ω du modèle :

$$\lambda_{pol} = \frac{1}{k_y} \quad (4.26)$$

$$\tau_\Omega = \frac{1}{\Omega} \quad (4.27)$$

Dans une seconde étape, en notant $P = p_{k\omega}$ la transformée de Laplace de $p_k(t)$ où la fréquence notée $\omega = \omega_r + i\gamma$ possède une partie réelle ω_r et une partie imaginaire γ qui représente le taux de croissance de l'instabilité, la transformation de Laplace de l'équation (4.24) s'écrit :

$$-i\omega P + k_y \Omega \frac{\partial P}{\partial k} + D_\perp k^2 P - (\gamma_0 - D_\perp k_y^2) P = f_k \quad (4.28)$$

où $f_k = p_k(t = 0)$ est la transformée de Fourier du profil initial des fluctuations $\tilde{f}(x) = \tilde{p}(x, t = 0)$.

En utilisant les variables adimensionnées $k_* = \frac{k}{k_y}$ et $\omega_* = \frac{\omega}{\Omega}$ associées aux grandeurs caractéristiques (4.26) et (4.27), l'équation (4.28) s'écrit plus simplement :

$$-i\omega_* P + \frac{\partial P}{\partial k_*} + \frac{D_\perp k_y^2}{\Omega} k_*^2 P - \frac{\gamma_0 - D_\perp k_y^2}{\Omega} P = \frac{f_k}{\Omega} \quad (4.29)$$

La solution de l'équation (4.29) s'écrit :

$$P = A(k_*, \omega_*) e^{\frac{\gamma_0 - D_\perp k_y^2}{\Omega} k_* - \frac{D_\perp k_y^2}{3\Omega} k_*^3} e^{i\omega_* k_*} \quad (4.30)$$

où l'amplitude complexe $A(k, s)$, fonction du nombre d'onde radial k et de la fréquence ω est définie par la primitive :

$$A(k_*, \omega_*) = \frac{1}{\Omega} \int f_{k'_*} e^{-\frac{\gamma_0 - D_\perp k_y^2}{\Omega} k'_* + \frac{D k_y^2}{3\Omega} k'^3} e^{i\omega_* k'_*} dk'_* \quad (4.31)$$

En remplaçant $A(k, \omega)$ par son expression (4.31) et en effectuant la transformée de Laplace inverse de l'expression (4.30), on obtient :

$$p_{k_*}(t_*) = \frac{1}{\Omega} \int f_{k'_*} e^{\frac{\gamma_0 - D_\perp k_y^2}{\Omega} (k_* - k'_*)} e^{-\frac{D k_y^2}{3\Omega} (k_*^3 - k'^3)} \delta(t_* - (k_* - k'_*)) dk'_* \quad (4.32)$$

La fonction $R(k_*, k'_*, t_*) = \delta(t_* - (k_* - k'_*))$ induit un temps de retard $k_* - k'_*$ avant stabilisation qui représente le temps nécessaire pour que la stabilisation des fluctuations par la rotation cisaiillée devienne active [voir Figure 4.7]. Lorsque le taux de cisaillement Ω diminue, le temps de retard avant stabilisation augmente car $R(k, k', t) = \delta(t - \frac{1}{\Omega} \frac{k-k'}{k_y})$, autrement dit l'instabilité possède une phase de croissance plus longue.

Soit :

$$p_{k_*}(t_*) = \frac{1}{\Omega} \int f_{k'_*} e^{\frac{\gamma_0 - D_\perp k_y^2}{\Omega} (k_* - k'_*)} e^{-\frac{D k_y^2}{3\Omega} (k_*^3 - k'^3)} \delta[k'_* - (k_* - t_*)] dk'_* \quad (4.33)$$

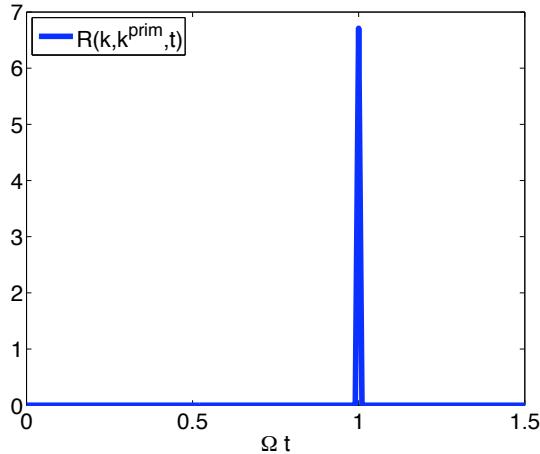


FIG. 4.7 – Evolution temporelle de la fonction de résonnance $R(k_*, k'_*, t_*)$ du modèle de Dupree, pour $k_* - k'_* = 1$. On voit apparaître un temps de retard avant stabilisation proportionnel à $k_* - k'_*$ (correspondant à la position du pic de résonnance).

En effectuant l'intégration, on obtient donc :

$$p_{k_*}(t_*) = f_{k_* - t_*} e^{\frac{\gamma_0 - D_\perp k_y^2}{\Omega} t_*} e^{-\frac{D k_y^2}{3\Omega} (k_*^3 - (k_* - t_*)^3)} \quad (4.34)$$

Ceci donne pour l'expression de la transformée de Fourier de \tilde{p} :

$$p_k(t) = e^{(\gamma_0 - D_\perp k_y^2)t - \frac{1}{12} \frac{t^3}{\tau_D^3}} \cdot f_{k - 2k_R(t)} e^{-D_\perp t[k - k_R(t)]^2} \quad (4.35)$$

où $k_R(t) = \frac{1}{2}k_y\Omega t$ est le nombre d'onde de résonnance.

Dans l'espace réel, cet effet de résonnance entraîne une oscillation de longueur d'onde $2\lambda_R(t)$, où $\lambda_R(t)$ est donnée par :

$$\lambda_R(t) = \frac{\lambda_{pol}}{\Omega t} \quad (4.36)$$

On remarque que la longueur d'onde $\lambda_R(t)$ caractéristique du phénomène de résonnance, décroît au cours du temps alors que la largeur $\sigma(t) = \sqrt{D_\perp t}$, caractéristique du processus de diffusion (largeur de l'enveloppe gaussienne), croît au cours du temps.

Le *temps de Dupree* τ_D [voir Figure 4.8] correspond précisément au temps pour lequel la longueur d'onde $\lambda_R(t) = \lambda_{pol}/(\Omega t)$ des oscillations de résonnance devient égale à la largeur de diffusion $\sigma(t) = \sqrt{D_\perp t}$:

$$\lambda_R(t) = \sigma(t) \quad \longrightarrow \quad t = \tau_D = \frac{1}{\sqrt[3]{D_\perp k_y^2 \Omega^2}} \quad (4.37)$$

On remarque que, pour $t \gg \tau_D$, la longueur d'onde $\lambda_R(t)$ de cette oscillation est petite devant la largeur $\sigma(t) = \sqrt{D_\perp t}$ de l'enveloppe gaussienne $TF^{-1}\{\exp(-D_\perp t k^2)\} =$

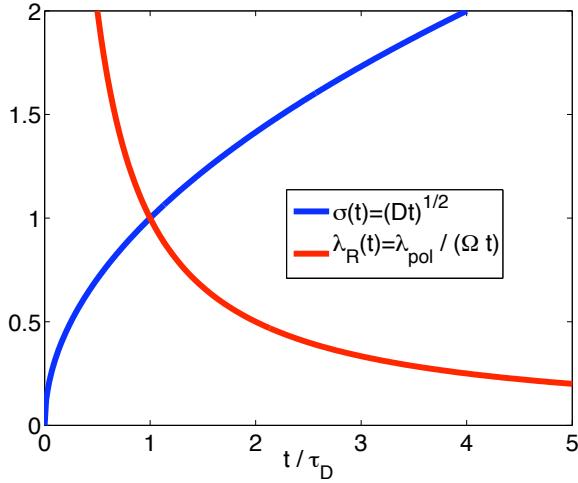


FIG. 4.8 – Représentation graphique du temps de Dupree : le temps de Dupree $\tau_D = (D_\perp k_y^2 \Omega^2)^{-1/3}$ correspond graphiquement au point d'intersection des deux courbes $\sigma(t)$ et $\lambda_R(t)$, représentant respectivement l'évolution de la largeur de diffusion et l'évolution de la longueur d'onde des oscillations de résonnance.

$$\frac{1}{\sqrt{D_\perp t}} \exp\left(-\frac{x^2}{D_\perp t}\right).$$

Dans l'espace des nombres d'ondes radiaux k , l'expression (4.35) correspond à la TF $p_k(t=0)$ du profil initial, décalée de deux fois le nombre d'onde de résonnance $k_R(t)$, multipliée par le "noyau diffusif" $e^{-D_\perp t(k-k_R(t))^2}$ (gaussienne décalée de $k_R(t)$) dont l'amplitude varie au cours du temps.

On en déduit l'expression de $\tilde{p}(x, t)$ en effectuant la transformée de Fourier inverse.

La solution physique δp associée à l'équation (4.21) dans la limite de fort cisaillement ('strong shear limit') $D_{||} \rightarrow 0$ dans le plan poloïdal $z = 0$ est donnée par :

$$\delta p(x, y, t) = (Re \tilde{p}(x, t)) \cos(k_y y) + (Im \tilde{p}(x, t)) \sin(k_y y) \quad (4.38)$$

$$\tilde{p}(x, t) = \text{TF}^{-1}[p_k(t)] \quad (4.39)$$

Perturbation initiale localisée

Dans le cas d'une perturbation initiale de la forme $\tilde{p}(x, t=0) = \delta(x)$ infiniment localisée en $x = 0$ (c'est-à-dire $f_{k+k_R(t)} = 1$), on obtient la solution suivante :

$$\delta p(x, y, t) = a(t) e^{-\frac{x^2}{2D_\perp t}} [\cos(k_y \Omega t x) \cos(k_y y) + \sin(k_y \Omega t x) \sin(k_y y)] \quad (4.40)$$

avec pour amplitude :

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{D_{\perp}t}} e^{(\gamma_0 - D_{\perp}k_y^2)t - \frac{1}{12}\frac{t^3}{\tau_D^3}} \quad (4.41)$$

L'évolution de l'amplitude du mode au cours du temps (expression 4.41) modélise un pic de perturbation \tilde{p} , et avec $Q_{conv} \sim |\tilde{p}|^2$, cela représente un *pic de flux*, c'est-à-dire croissance exponentielle ($\sim e^{(\gamma_0 - D_{\perp}k_y^2)t}$) de l'instabilité pour $\gamma_0 > D_{\perp}k_y^2$, puis amortissement non-linéaire ($\sim e^{-t^3/(12\tau_D^3)}$) lié à l'écoulement rotationnel cisailé, après un temps $\sqrt{4(\gamma_0 - D_{\perp}k_y^2)\tau_D^3} \sim \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{\gamma_0}{D_{\perp}k_y^2} - 1}$ [voir Figure 4.9].

En utilisant la formule trigonométrique $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$, l'expression (4.40) se simplifie, ce qui permet de mettre en évidence la structure spatiale de la perturbation :

$$\delta p(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{D_{\perp}t}} e^{(\gamma_0 - D_{\perp}k_y^2)t - \frac{1}{12}\frac{t^3}{\tau_D^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{2D_{\perp}t}\right) \cos(k_y y - k_y \Omega t x) \quad (4.42)$$

Il est intéressant de comparer cette expression avec la solution (4.23) où la perturbation initiale est de la forme $\delta p(x, y, t = 0) = \delta(x)\delta(y)$:

$$D(x, y, t) = \frac{e^{\gamma_0 t}}{\sqrt{D_{\perp}t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2D_{\perp}t}\right) \exp\left(-\frac{(y - \Omega t x)^2}{2D_{\perp}}\right) \quad (4.43)$$

On remarque que l'effet stabilisant d'un écoulement cisailé n'est effectif que dans le cas où le profil initial des fluctuations est périodique, c'est-à-dire lorsque la géométrie de l'écoulement est périodique dans une ou plusieurs directions. Autrement dit, l'effet stabilisant d'un écoulement cisailé n'est effectif que dans le cas d'une *rotation cisailée* du fluide (ou plasma).

La Figure 4.10 montre, à deux instants différents $t = 0.01$ et $t = 0.2$, la carte de pression $\delta p(x, y, t)$ associée à la solution $\tilde{p}(x, t)$ de l'équation (4.21), obtenue numériquement. Initialement, il n'y a qu'une seule structure périodique composée d'un ensemble de cellules convectives. On observe que l'écoulement cisailé déforme (et étire) les cellules convectives, et que le nombre de structures périodiques présentes dans le domaine de simulation augmente au cours du temps.

La Figure 4.11 montre l'évolution temporelle de l'amplitude de cette solution numérique. On y discerne nettement le "pic de flux", qui modélise le caractère intermittent de la turbulence [voir Figure 4.5] obtenue avec le modèle 3D à deux champs (Eq. 2.63). En effet, la série de pics que l'on voit sur la courbe du flux $Q_{conv} \propto \sqrt{\langle \tilde{p}^2 \rangle}$ en fonction du temps peut être modélisée par plusieurs pics de flux identiques à celui de la figure 4.9, séparés en temps de façon quasi-périodique. Afin de montrer l'adéquation du modèle 1D, on fait une comparaison numérique-analytique. Pour cela, on compare l'évolution temporelle du logarithme de $|\tilde{p}|$ calculé numériquement, à l'évolution temporelle du logarithme de la solution analytique [voir Figure 4.12] et on observe que les deux courbes sont quasiment superposées, ce qui montre un bon accord.

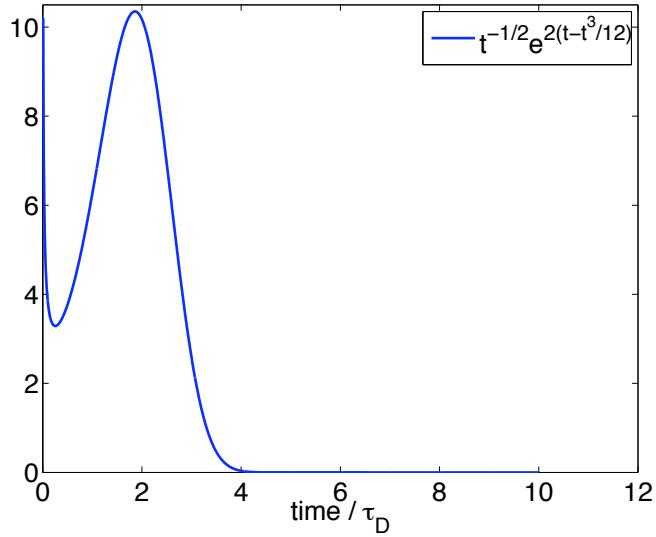


FIG. 4.9 – Tracé de l'amplitude $a(t)$ du mode (expression 4.41) pour le modèle de Dupree avec $\tilde{f}(x) = \delta(x)$.

Perturbation initiale non-localisée

Dans le cas d'une perturbation initiale $\tilde{f}(x) = A_0 \cos(k_0 x)$ (c'est-à-dire $f_{k+2k_R(t)} = \frac{1}{2}A_0[\delta(k - k_0 + k_R(t)) + \delta(k + k_0 + k_R(t))]$), on obtient une autre solution [voir Figure 4.14] :

$$\delta p(x, y, t) = \cos(k_0 x) [a_1(t) \cos(k_y \Omega t x) \cos(k_y y) + a_2(t) \sin(k_y \Omega t x) \sin(k_y y)] \quad (4.44)$$

avec :

$$a_1(t) = \frac{A_0}{2} \exp \left[(\gamma_0 - D_\perp k_y^2 - D_\perp k_0^2)t + D_\perp k_0 k_y \Omega t^2 - \frac{t^3}{3\tau_D^3} \right] \quad (4.45)$$

$$a_2(t) = \frac{A_0}{2} \exp \left[(\gamma_0 - D_\perp k_y^2 - D_\perp k_0^2)t - D_\perp k_0 k_y \Omega t^2 - \frac{t^3}{3\tau_D^3} \right] \quad (4.46)$$

La Figure 4.13 montre, à deux instants différents $t = 0.001$ et $t = 1$, les cartes de pression $\delta p(x, y, t)$ associées aux solutions du modèle de Dupree (4.21) pour deux profils initiaux différents. La colonne de gauche correspond à la solution (4.40) et la colonne de droite correspond à la solution (4.44).

En étudiant l'évolution temporelle des amplitudes $a_1(t)$ et $a_2(t)$ [voir Figure 4.14], on voit que le mode 2 est rapidement amorti, alors que le mode 1 croît pendant une certaine durée (qui dépend de τ_D , γ_0 , D_\perp et k_0), puis est finalement stabilisé par l'écoulement cisaillé.

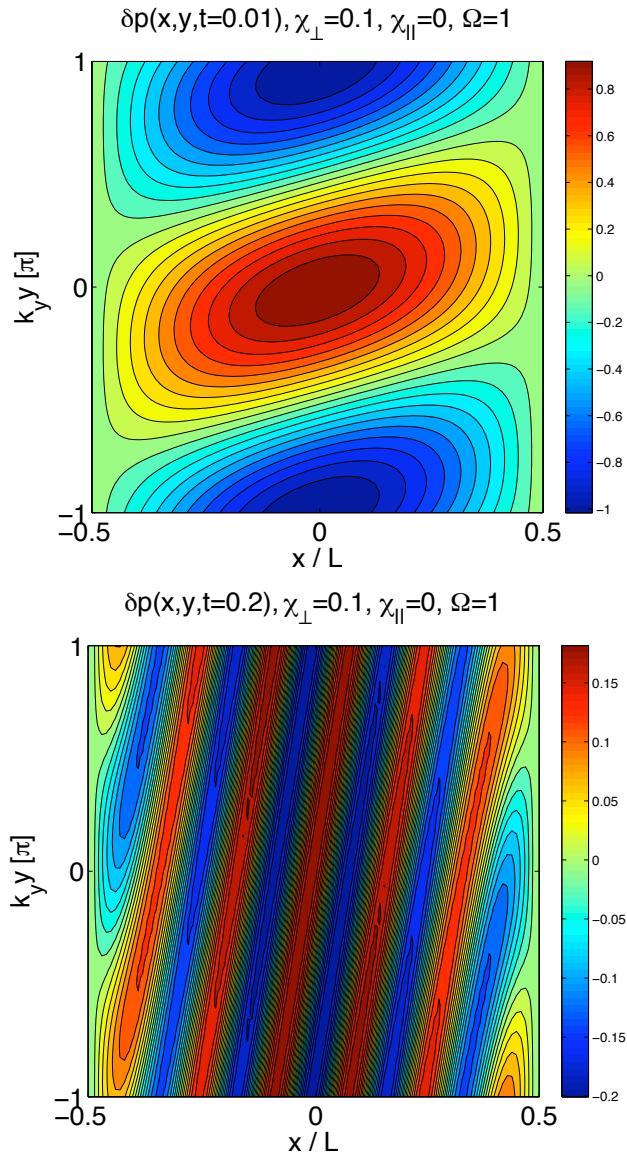


FIG. 4.10 – Déformation de cellules convectives par un écoulement cisaillé : cartes de pression, obtenues numériquement avec le modèle de Dupree, à deux instants différents $t = 0.01$ (en haut) et $t = 0.2$ (en bas).

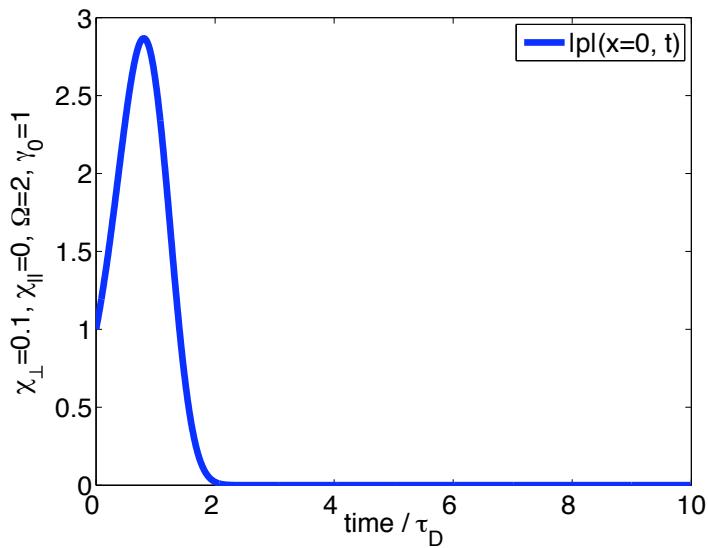


FIG. 4.11 – "Pic de flux" obtenu numériquement avec le modèle de Dupree.

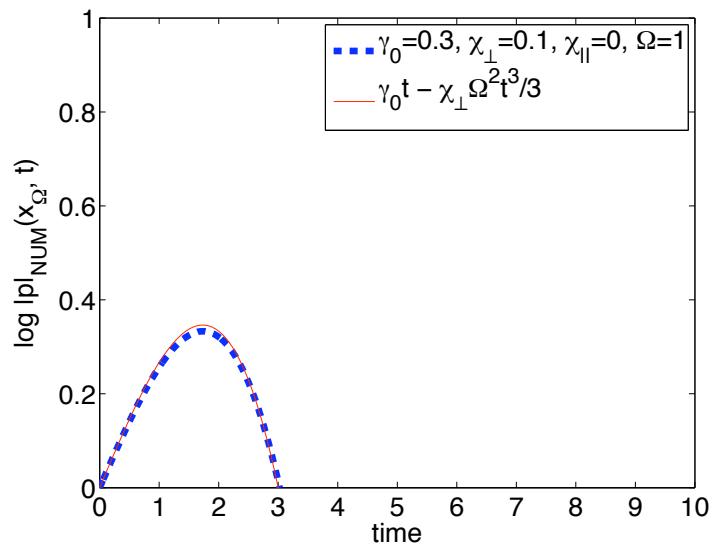


FIG. 4.12 – Comparaison numérique-analytique du modèle de Dupree.

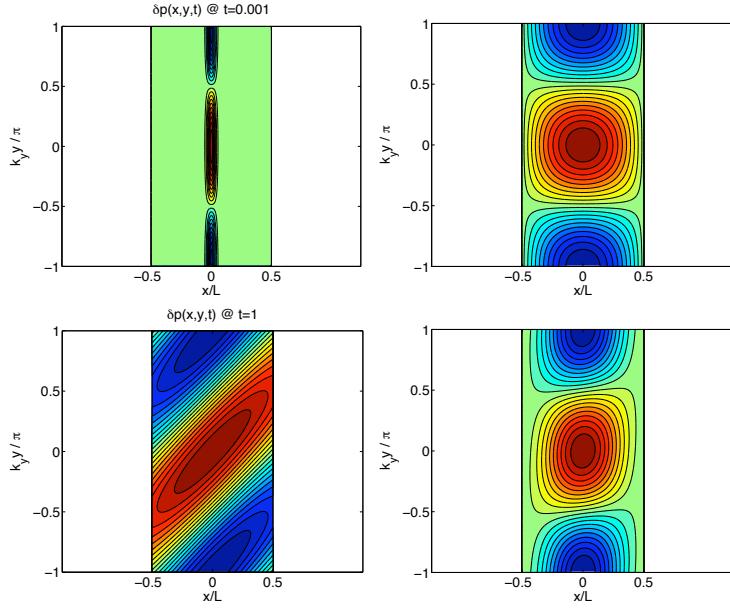


FIG. 4.13 – Influence des conditions initiales sur la solution analytique : cartes de pression correspondant aux solutions (4.40) [figure de gauche] et (4.44) [figure de droite] de l'équation de Dupree, à deux instants différents $t = 0.001$ (en haut) et $t = 1$ (en bas).

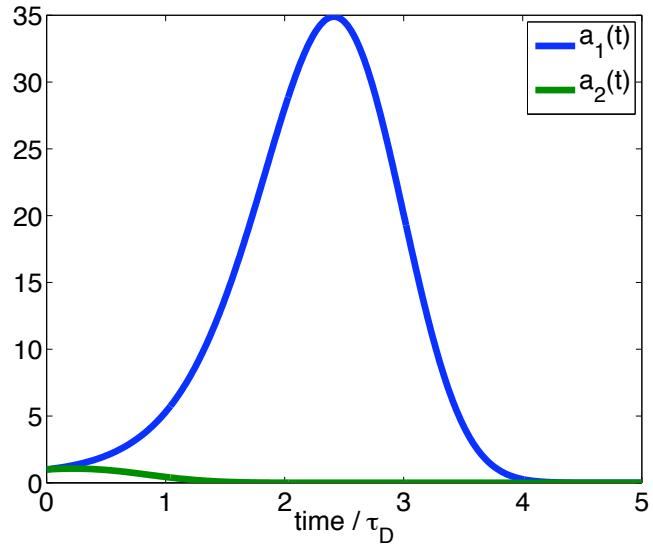


FIG. 4.14 – Evolution temporelle de l'amplitude $a_1(t)$ et $a_2(t)$ de chaque mode pour le modèle de Dupree avec $\tilde{f}(x) = A_0 \cos(k_0 x)$ (expressions 4.45 et 4.46).

4.2 Effet stabilisant d'un écoulement cisaillé avec profil linéaire sur la turbulence

Considérons maintenant le modèle décrit par l'équation complète (4.19) :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + ik_y\Omega(t)x\tilde{p} = D_{\perp} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} - D_{\perp} \left(1 + \frac{D''_{\parallel}}{D_{\perp}}x^2\right) k_y^2 \tilde{p} + \tilde{S}(x, t)$$

Ce modèle unidimensionnel permet le calcul du transport convectif radial (flux turbulent) $Q_{conv} \sim \sqrt{\langle \tilde{p}^2 \rangle} \cos \delta$ en fonction du taux de cisaillement $\Omega = Cte$, dans le cas d'un écoulement moyen cisaillé stationnaire ("stationnary Mean Shear Flow"), ou bien en fonction de l'écart quadratique moyen $\Omega_{rms} = \sqrt{\langle \Omega^2 \rangle_t}$ du taux de cisaillement pour des écoulements zonaux ("Zonal Flows"). Nous mettons en évidence que, dans ce modèle, l'intensité de la turbulence $\langle \tilde{p}^2 \rangle$ est plus fortement réduite par l'écoulement cisaillé que ne l'est le terme de phase $\cos \delta$, et que les propriétés statistiques de la turbulence ont une influence majeure sur la dépendance des ces paramètres en fonction du taux de cisaillement. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication [28].

Nous avons résolu l'équation (4.19) numériquement en considérant une source de turbulence ayant un spectre $S_{k\omega} = |S_{k\omega}|e^{i\varphi_{k\omega}}$, où $\varphi_{k\omega}$ représente une phase aléatoire. Le spectre en puissance $|S_k|^2$ est supposé localisé en nombre d'onde radial k , avec une longueur de corrélation l_c . Dans les simulations, nous avons choisi une courbe lorentzienne :

$$|S_{k\omega}|^2 = \frac{2/l_c}{1/l_c^2 + k^2} \cdot |S_{\omega}|^2 \quad (4.47)$$

Nous avons utilisé deux différents types de sources (voir Figure 4.15) :

- une source avec un spectre localisé en fréquence : $|S_{\omega}|^2 = \frac{2/\tau_C}{1/\tau_C^2 + \omega^2}$
- une source correspondant à un bruit blanc : $|S_{\omega}|^2 = Cte$

Nous avons également utilisé une courbe lorentzienne pour le spectre en fréquence $|\Omega_{\omega}|^2$ des écoulements zonaux, avec temps de corrélation τ_{ZF} :

$$|\Omega_{\omega}|^2 = \frac{2/\tau_{ZF}}{1/\tau_{ZF}^2 + \omega^2} \quad (4.48)$$

Dans la suite, nous résolvons analytiquement l'équation (4.19), dans le cas d'un écoulement moyen avec taux de cisaillement constant ($\Omega = Cte$), et sans diffusion parallèle ($D''_{\parallel} = 0$) :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + ik_y\Omega x\tilde{p} = D_{\perp} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} + \tilde{S}(x, t) \quad (4.49)$$

Dans ce cas, en faisant la transformation de Fourier en espace et en temps de l'équation (4.49), on obtient pour le spectre des fluctuations :

$$p_{k\omega} = \frac{1}{k_y \Omega} g_{k\omega} e^{-\frac{1}{3} k^3 l_D^3} e^{i\omega \frac{k}{k_y \Omega}} \quad (4.50)$$

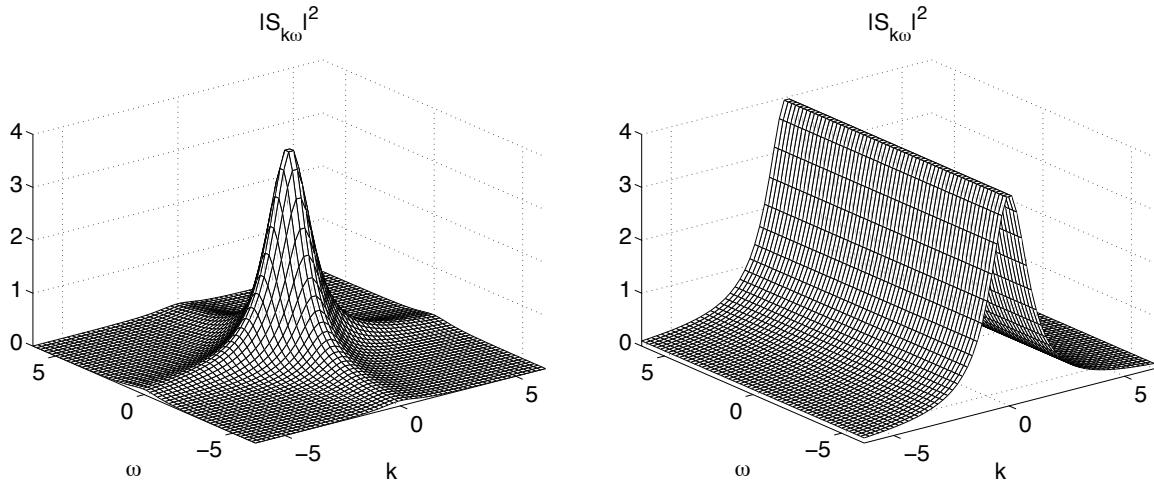


FIG. 4.15 – Allure des spectres $|S_{k\omega}|^2 = \frac{2/l_c}{1/l_c^2+k^2} \cdot |S_\omega|^2$ en nombre d'onde radial k et en fréquence ω pour les deux types de source de turbulence. A gauche, $|S_\omega|^2 = \frac{2/\tau_C}{1/\tau_C^2+\omega^2}$, et à droite, $|S_\omega|^2 = Cte$.

où $S_{k\omega}$ désigne la transformée de Fourier de la source de turbulence $\tilde{S}(x, t)$ et où, contrairement au modèle de Dupree, la fonction $g_{k\omega}$ dépend des propriétés de la turbulence : $g_{k\omega} = \int S_{u\omega} e^{-\frac{1}{3}u^3 l_D^3} e^{i\omega \frac{u}{k_y \Omega}} du$. Il faut noter que, dans ce cas, on ne tient pas compte de l'influence des conditions initiales, puisque l'on regarde la réponse du système (fluctuations de pression \tilde{p}) à une perturbation extérieure (la turbulence \tilde{S}).

D'après le théorème de Parseval, les expressions pour le flux convectif et l'intensité de la turbulence peuvent s'écrire :

$$Q_{conv} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle p_{k\omega} S_{k\omega}^* \rangle dk d\omega \quad (4.51)$$

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle p_{k\omega} p_{k\omega}^* \rangle dk d\omega \quad (4.52)$$

où le symbole * désigne le complexe conjugué.

Dans le cas général d'un spectre localisé en nombre d'onde et en fréquence, on considère le spectre suivant :

$$\langle S_{k\omega}^* S_{k'\omega} \rangle = \langle S_k^* S_{k'} \rangle \frac{2/\tau_C}{1/\tau_C^2 + \omega^2} \quad (4.53)$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente une moyenne d'ensemble sur les phases aléatoires.

Ce spectre peut aussi s'exprimer sous la forme :

$$\langle S_{k\omega}^* S_{k'\omega} \rangle = \langle S_k^* S_{k'} \rangle \left[\frac{1}{1/\tau_C + i\omega} + c.c. \right] \quad (4.54)$$

où *c.c.* désigne le complexe conjugué.

Afin d'évaluer les expressions 4.51 et 4.52, on réalise d'abord l'intégration en fréquence, pour la partie de $p_{k\omega}$ qui a une dépendance fréquentielle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(k-k')/(k_y\Omega)}}{1/\tau_C + i\omega} d\omega = \int_0^{+\infty} \delta\left(t - \frac{k-k'}{k_y\Omega}\right) e^{-t/\tau_C} dt \quad (4.55)$$

$$= H\left(t - \frac{k-k'}{k_y\Omega}\right) e^{-(k-k')/(k_y\Omega\tau_C)} \quad (4.56)$$

où H désigne la fonction de Heavyside.

En tenant compte du complexe conjugué, cela donne l'expression suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle S_{k\omega}^* S_{k'\omega} \rangle e^{i\omega(k-k')/(k_y\Omega)} d\omega = \langle S_k^* S_{k'} \rangle e^{-|k-k'|/(k_y\Omega\tau_C)} \quad (4.57)$$

En utilisant maintenant les définitions (4.51) et (4.52) pour le flux radial turbulent et l'intensité de la turbulence, on obtient :

$$\begin{aligned} Q_{conv} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^k \langle S_k^* S_{k'} \rangle \exp\left[-\frac{D_\perp}{3k_y\Omega}(k^3 - k'^3) - \frac{|k - k'|}{k_y\Omega\tau_C}\right] dk' dk \\ \langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{k'} \langle S_{k''}^* S_{k'} \rangle \exp\left[-\frac{D_\perp}{3k_y\Omega}(2k^3 - k'^3 - k''^3) - \frac{|k'' - k'|}{k_y\Omega\tau_C}\right] dk'' dk' dk \end{aligned}$$

Notons que $|k - k'| = k - k'$ et $|k'' - k'| = k' - k''$, car les nombres d'onde k, k', k'' vérifient toujours $k'' \leq k' \leq k$.

Ecrivons maintenant ces expressions en utilisant la longueur de Dupree $l_D = (\frac{D_\perp}{k_y\Omega})^{1/3}$, le temps de Dupree $\tau_D = \frac{1}{k_y\Omega l_D} = (\frac{1}{D_\perp k_y^2 \Omega^2})^{1/3}$ et le temps de corrélation de la turbulence τ_C :

$$\begin{aligned} Q_{conv} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^k \langle S_k^* S_{k'} \rangle \exp\left[-\frac{(k^3 - k'^3)l_D^3}{3} - \frac{\tau_D}{\tau_C}(k - k')l_D\right] dk' dk \\ \langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^k \int_{-\infty}^{k'} \langle S_{k''}^* S_{k'} \rangle \exp\left[-\frac{(2k^3 - k'^3 - k''^3)l_D^3}{3} - \frac{\tau_D}{\tau_C}(k' - k'')l_D\right] dk'' dk' dk \end{aligned}$$

On suppose que la source est caractérisée par une *longueur d'inhomogénéité* L , telle que :

$$\begin{aligned} \langle S_k^* S_{k'} \rangle &= C(k - k') |S_k|^2 \\ \text{TF}^{-1}\{C(k)\} &\sim e^{-|x|/L} \end{aligned} \quad (4.58)$$

où TF^{-1} désigne la transformée de Fourier inverse.

Le spectre $|S_k|^2$ est un spectre localisé en nombre d'onde, avec longueur de corrélation $l_c = \frac{1}{k_c}$.

On utilise, par la suite les variables adimensionnées suivantes :

$$u = (k - k')l_D \quad (4.59)$$

$$v = (k' - k'')l_D \quad (4.60)$$

L'expression (4.51) pour le flux turbulent donne alors :

$$Q_{conv} = \tau_D \int_{-\infty}^{+\infty} A_k |S_k|^2 dk \quad (4.61)$$

$$A_k = - \int_0^{+\infty} C(u) f(k, u) e^{-(\tau_D/\tau_C)u} du \quad (4.62)$$

où la fonction f est définie par :

$$f(k, u) = \exp \left[-u^3/3 + kl_D u^2 - k^2 l_D^2 u \right] \quad (4.63)$$

L'expression (4.52) pour l'intensité de la turbulence devient :

$$\langle p^2 \rangle = \tau_D^2 \int_{-\infty}^{+\infty} B_k |S_k|^2 dk \quad (4.64)$$

$$B_k = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} C(v) f(k, u+v) e^{-(\tau_D/\tau_C)v} dv du \quad (4.65)$$

Cas de faible cisaillement

Dans la limite de faible cisaillement $k_c l_D \gg 1$, on a $f(k, u) \sim e^{-k^2 l_D^2 u}$ et de même $f(k, u+v) \sim e^{-k^2 l_D^2 (u+v)}$, ce qui donne :

$$Q_{conv} = -\tau_D \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S_k|^2}{\tau_D/\tau_C + k^2 l_D^2} dk$$

$$\langle p^2 \rangle = \tau_D^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S_k|^2}{k^2 l_D^2 (\tau_D/\tau_C + k^2 l_D^2)} dk$$

Nous trouvons des expressions analytiques indépendantes du taux de cisaillement Ω identiques à celles calculées dans le cas sans cisaillement $\Omega = 0$:

$$Q_{conv} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S_k|^2}{1/\tau_C + D_\perp k^2} dk \quad (4.66)$$

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S_k|^2}{D_\perp k^2 (1/\tau_C + D_\perp k^2)} dk \quad (4.67)$$

	Analytique	Numérique
Q_{conv}	Ω^{-1}	Ω^{-1}
$\langle p^2 \rangle$	$\Omega^{-5/3}$	$\Omega^{-1.6}$
$\cos \delta$	$\Omega^{-1/6}$	$\Omega^{-0.7}$

TAB. 4.3 – Comparaison numérique-analytique des lois d'échelles du flux de chaleur radial et de ces composantes, en fonction du taux de cisaillement Ω , pour un spectre localisé en fréquence.

Cas de fort cisaillement

Dans la limite de fort cisaillement $k_c l_D \ll 1$ et $k_c l_D \ll \tau_D/\tau_C$, les expressions (4.62) et (4.65) deviennent :

$$A_k = - \int_0^{+\infty} C(u) e^{-u^3/3} e^{-(\tau_D/\tau_C)u} du \quad (4.68)$$

$$B_k = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} C(v) e^{-(u+v)^3/3} e^{-(\tau_D/\tau_C)v} dv du \quad (4.69)$$

1. Dans la limite $l_D/L \ll 1$ et $l_D/L \ll \tau_D/\tau_C$, la fonction $C(k)$ peut être approximée par une fonction de Dirac : $C(k) \sim l_D \delta(k)$, ce qui donne :

$$Q_{conv} = -\tau_D l_D \int_{-\infty}^{+\infty} |S_k|^2 \int_0^{+\infty} e^{-u^3/3 - \frac{\tau_D}{\tau_C} u} du dk$$

$$Q_{conv} \sim \Omega^{-1} \quad (4.70)$$

$$\langle p^2 \rangle = \tau_D^2 l_D \int_{-\infty}^{+\infty} |S_k|^2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(u+v)^3/3} e^{-\frac{\tau_D}{\tau_C} v} dv du dk$$

$$\langle p^2 \rangle \sim \Omega^{-5/3} \quad (4.71)$$

Pour calculer le terme de phase, on utilise la relation $Q_{conv} = \sqrt{\langle p^2 \rangle} \sqrt{\langle v_x^2 \rangle} \cos \delta$, et comme on a supposé que l'écoulement turbulent $v_x = \tilde{S}$ de turbulence est indépendant de l'écoulement moyen, donc indépendant du taux de cisaillement Ω , on a $Q_{conv} \sim \sqrt{\langle p^2 \rangle} \cos \delta$, donc on en déduit le terme de phase :

$$\cos \delta \sim \Omega^{-1/6} \quad (4.72)$$

Ces résultats sont regroupés dans le tableau 4.3.

Dans nos simulations numériques 1D, Nous retrouvons, pour de grandes valeurs du taux de cisaillement Ω , des lois d'échelle similaires [voir Figures 4.16 et 4.17].

2. Par contre, dans la limite $l_D/L \gg 1$ et $l_D/L \gg \tau_D/\tau_C$, on trouve deux ensembles de lois d'échelles différents, selon la valeur du rapport τ_D/τ_C .

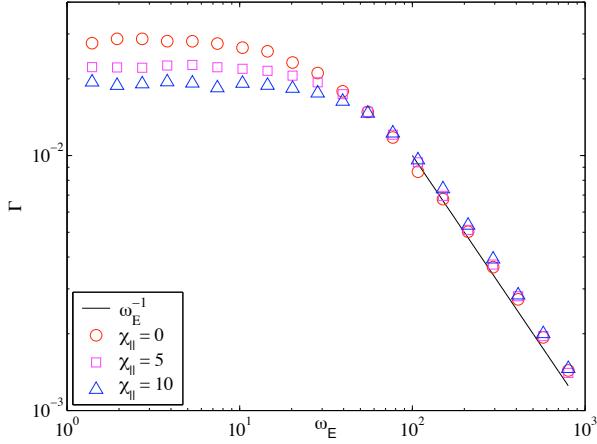


FIG. 4.16 – Flux convectif radial Q_{conv} en fonction du taux de cisaillement Ω , pour un écoulement cisaillé $V = \Omega x$, dans le cas où le spectre $|S_{k\omega}|^2$ de l'écoulement turbulent est localisé en fréquence (nous avons choisi un spectre lorentzien).

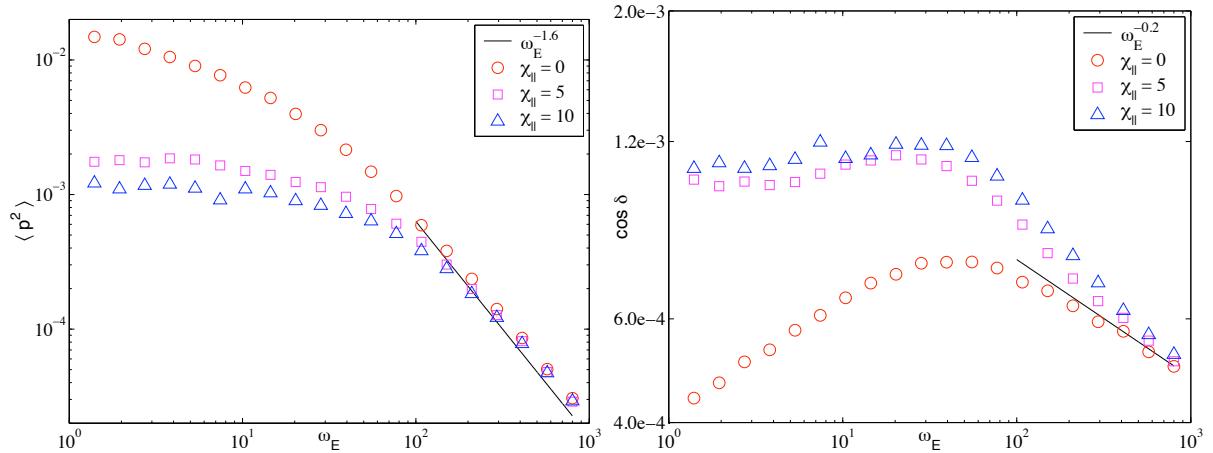


FIG. 4.17 – Intensité de la turbulence $\langle p^2 \rangle$ et terme de phase $\cos \delta$ en fonction du taux de cisaillement Ω , pour un spectre $|S_{k\omega}|^2$ localisé en fréquence.

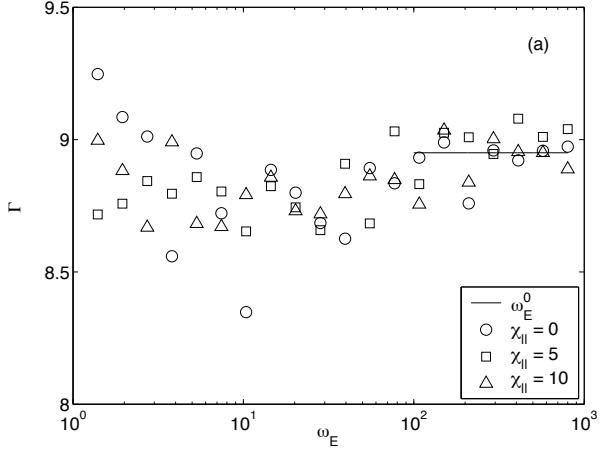


FIG. 4.18 – Flux convectif radial Q_{conv} en fonction du taux de cisaillement Ω , pour un écoulement cisaillé $V = \Omega x$, dans le cas où le spectre $|S_{k\omega}|^2$ de l'écoulement turbulent est large en fréquence (bruit blanc).

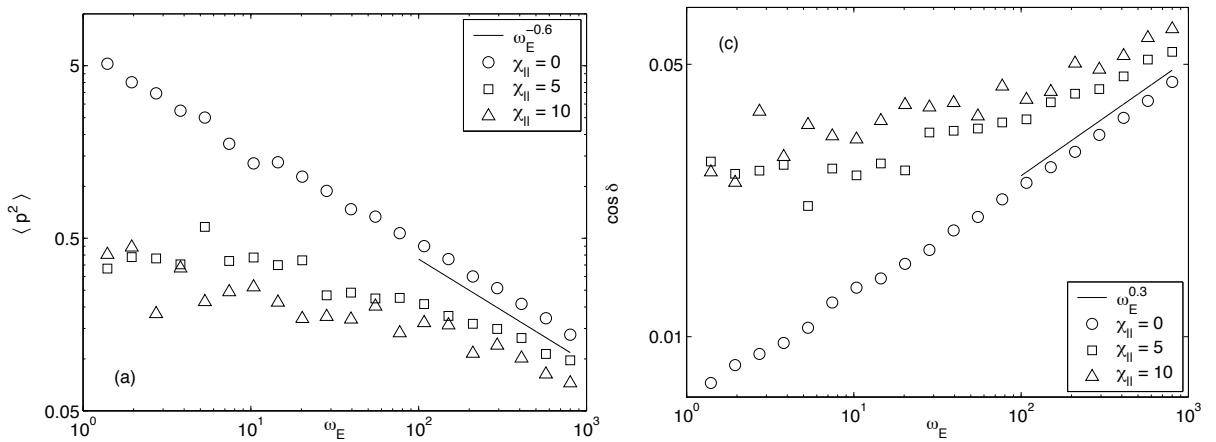


FIG. 4.19 – Intensité de la turbulence $\langle p^2 \rangle$ et terme de phase $\cos \delta$ en fonction du taux de cisaillement Ω , pour un spectre $|S_{k\omega}|^2$ large en fréquence.

	Analytique	Numérique
Q_{conv}	Ω^0	Ω^0
$\langle p^2 \rangle$	$\Omega^{-2/3}$	$\Omega^{-0.6}$
$\cos \delta$	$\Omega^{1/3}$	$\Omega^{0.3}$

TAB. 4.4 – Comparaison numérique-analytique des lois d'échelles du flux de chaleur radial et de ces composantes, en fonction du taux de cisaillement Ω , pour un spectre large en fréquence (bruit blanc).

- Pour un écoulement turbulent caractérisé par un bruit blanc ($\tau_C \ll \tau_D$), nous obtenons :

$$\begin{aligned} Q_{conv} &= -\tau_D \int_{-\infty}^{+\infty} |S_k|^2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\tau_D}{\tau_C} u} du dk \\ Q_{conv} &\sim \Omega^0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \tau_D^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |S_k|^2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\tau_D}{\tau_C} v} dv du dk \\ \langle p^2 \rangle &\sim \Omega^{-2/3} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Le terme de phase varie alors comme :

$$\cos \delta \sim \Omega^{1/3} \quad (4.75)$$

Ces résultats sont regroupés dans le tableau 4.4.

- En revanche, pour $\tau_C \gg \tau_D$, on obtient :

$$\begin{aligned} Q_{conv} &= -\tau_D \int_{-\infty}^{+\infty} |S_k|^2 \int_0^{+\infty} e^{-u^3/3} du dk \\ Q_{conv} &\sim \Omega^{-2/3} \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \tau_D^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |S_k|^2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(u+v)^3/3} dv du dk \\ \langle p^2 \rangle &\sim \Omega^{-4/3} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Le terme de phase variant alors comme :

$$\cos \delta \sim \Omega^0 \quad (4.78)$$

Nos simulations numériques 1D fournissent, pour de grandes valeurs du taux de cisaillement Ω , des résultats qui confirment ces lois d'échelle, dans le cas où l'écoulement turbulent est caractérisé par un bruit blanc [voir Figures 4.18 et 4.19].

4.3 Effet de l'épaisseur d de la couche cisaillée sur les fluctuations

4.3.1 Ecoulement avec profil non-linéaire

Jusqu'à présent, nous avons considéré un écoulement avec profil linéaire, alors que dans nos simulations 3D (et dans les plasmas de tokamak), l'écoulement possède un profil non-linéaire. Pour un profil quelconque $V(x)$ de l'écoulement, l'équation de transvection-diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + ik_y V(x) \tilde{p} = \gamma_0 \tilde{p} + D_{\perp} \left(\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} - k_y^2 \tilde{p} \right) \quad (4.79)$$

Dans le cas général où $V(x)$ ne varie pas linéairement avec x , cette équation n'a pas de solution analytique. Nous avons donc résolu l'équation de Dupree avec profil non-linéaire numériquement, en choisissant un profil en tangente hyperbolique [voir Figure 4.20] qui est le même que celui utilisé pour générer la barrière de transport dans nos simulations 3D.

Considérons l'équation de transvection-diffusion avec rotation cisaillée, en prenant en compte l'effet de la diffusion parallèle ($D''_{\parallel} \neq 0$). La longueur caractéristique σ du modèle dans la direction radiale x (correspondant à la largeur du mode le plus instable) est alors donnée au Chap. 3 par l'expression (3.50) :

$$\sigma = \left[\frac{D_{\perp}}{k_y^2 D''_{\parallel}} \right]^{1/4} \quad (4.80)$$

Afin d'étudier l'effet de la largeur de la couche cisaillée ("shear-layer width"), considérons un profil de vitesse adimensionné U développé en série de Taylor :

$$U(X) \sim X + \epsilon X^2 + \epsilon^2 X^3 - \dots$$

où X est une variable sans dimension.

4.3.2 Ecoulement avec profil quadratique

Pour simplifier, on ne s'intéresse qu'à l'ordre 1 en ϵ . On peut alors écrire le profil de vitesse V (qui lui a une dimension) sous la forme :

$$V(x) = \Omega \left[x - \frac{x^2}{d} \right] \quad (4.81)$$

où l'épaisseur d de la couche cisaillée est donnée par :

$$d = \frac{2\Omega}{|V''|} \gg \sigma \quad (4.82)$$

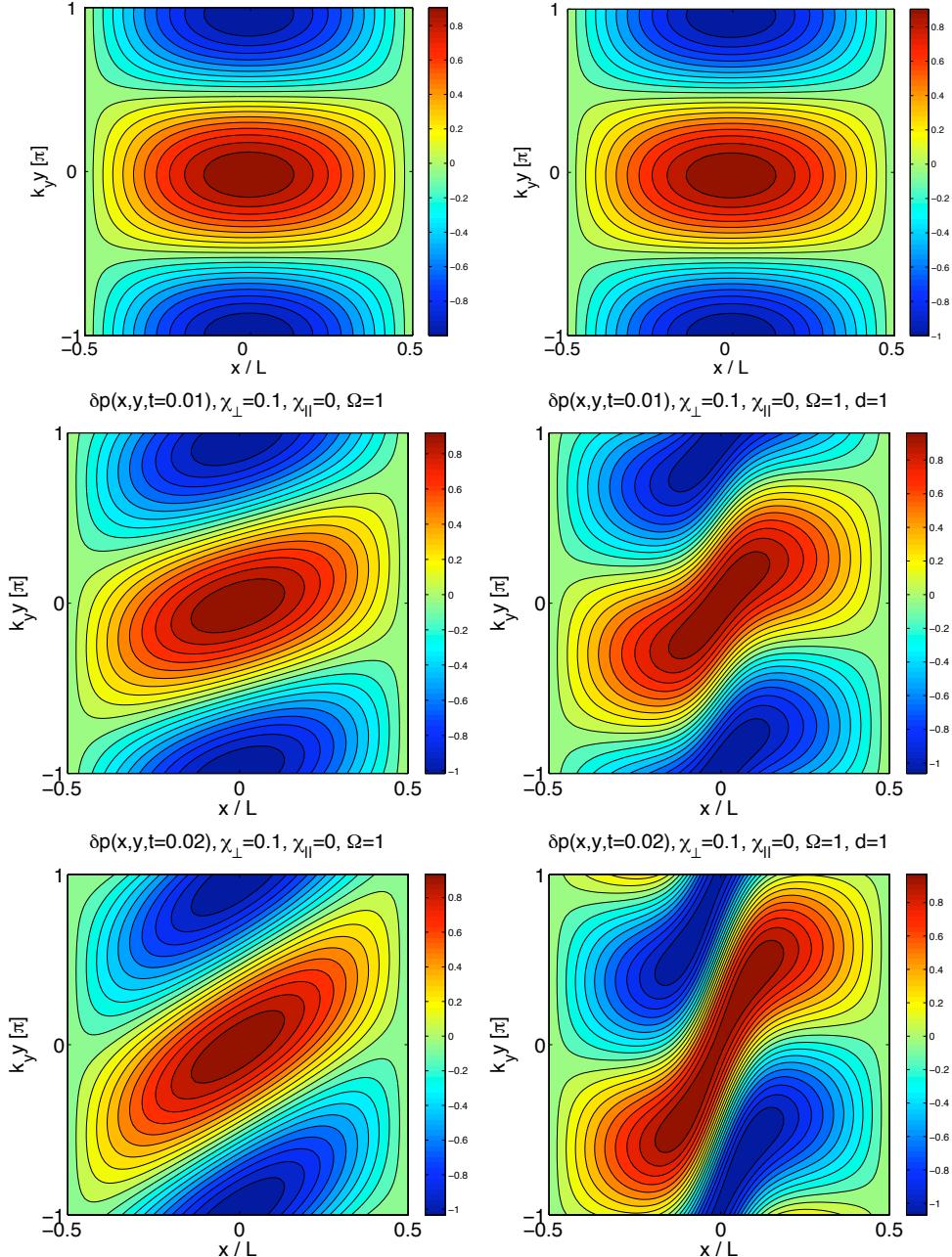


FIG. 4.20 – Effet de la largeur de la couche cisaillée sur les tourbillons : cartes de pression pour un écoulement cisaillé avec profil linéaire $V(x) = \Omega x$ (à gauche) et avec profil non-linéaire $V(x) = \Omega d \tanh(x/d)$ (à droite), où le paramètre d désigne la largeur de la couche cisaillée, à trois instants différents (de haut en bas) $t = 0.001$, $t = 0.01$ et $t = 0.02$.

En définissant un paramètre $\epsilon = \frac{\sigma}{d} \ll 1$, le profil de vitesse s'écrit :

$$V(x) = \Omega\sigma \left[\frac{x}{\sigma} + \epsilon \frac{x^2}{\sigma^2} \right] \quad (4.83)$$

On introduit les variables adimensionnées suivantes :

$$x_* = \frac{x}{\sigma}, \quad t_* = \frac{D_\perp}{\sigma^2}t$$

Le modèle s'écrit alors :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t_*} + i \frac{k_y \Omega \sigma^3}{D_\perp} [x_* + \epsilon x_*^2] \tilde{p} = \frac{\gamma_0 \sigma^2}{D_\perp} \tilde{p} - k_y^2 \sigma^2 \tilde{p} - x_*^2 \tilde{p} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x_*^2} \quad (4.84)$$

En écrivant $\tilde{p}(x_*, t_*) \sim e^{-i \frac{\sigma^2}{D_\perp} \omega t_*}$, où ω est la fréquence complexe, on obtient :

$$\frac{\sigma^2}{D_\perp} (-i\omega - \gamma_0) \tilde{p} + i \frac{k_y \Omega \sigma^3}{D_\perp} [x_* + \epsilon x_*^2] \tilde{p} = -k_y^2 \sigma^2 \tilde{p} - x_*^2 \tilde{p} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x_*^2} \quad (4.85)$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x_*^2} + \left[\frac{\sigma^2}{D_\perp} (i\omega + \gamma_0) - k_y^2 \sigma^2 - \left(1 + i\epsilon \frac{k_y \Omega \sigma^3}{D_\perp} \right) \left(x_*^2 + i \frac{k_y \Omega \sigma^3 / D_\perp}{1 + i\epsilon k_y \Omega \sigma^3 / D_\perp} x_* \right) \right] \tilde{p} = 0 \quad (4.86)$$

or

$$x_*^2 + i \frac{k_y \Omega \sigma^3 / D_\perp}{1 + i\epsilon k_y \Omega \sigma^3 / D_\perp} x_* = \left(x_* + \frac{1}{2} i \frac{k_y \Omega \sigma^3 / D_\perp}{1 + i\epsilon k_y \Omega \sigma^3 / D_\perp} \right)^2 + \frac{k_y^2 \Omega^2 \sigma^6 / (4D_\perp^2)}{[1 + i\epsilon k_y \Omega \sigma^3 / D_\perp]^2}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x_*^2} &+ \left[\frac{\sigma^2}{D_\perp} (i\omega + \gamma_0) - k_y^2 \sigma^2 - \frac{k_y^2 \Omega^2 \sigma^6 / (4D_\perp^2)}{1 + i\epsilon k_y \Omega \sigma^3 / D_\perp} \right] \tilde{p} \\ &- \left[\left(1 + i\epsilon \frac{k_y \Omega \sigma^3}{D_\perp} \right) \left(x_* + \frac{1}{2} i \frac{k_y \Omega \sigma^3 / D_\perp}{1 + i\epsilon k_y \Omega \sigma^3 / D_\perp} \right)^2 \right] \tilde{p} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un équation d'Hermite, qui a pour solution les polynômes d'Hermite multipliés par une gaussienne.

La solution la plus instable s'écrit :

$$\tilde{p}(x_*, t_*) = \exp \left(-\frac{x_*^2}{2} \right) \exp \left[i \left(\frac{k_y \Omega \sigma^3}{D_\perp} x_* + \epsilon \frac{k_y \Omega \sigma^3}{D_\perp} x_*^2 \right) \right] \exp \left(-i \frac{\sigma^2 \omega}{D_\perp} t_* \right) \quad (4.87)$$

et la fréquence complexe associée est donnée par :

$$\omega = i\gamma_0 - iD_{\perp}k_y^2 - i\frac{k_y^2\Omega^2\sigma^4/(4D_{\perp})}{1 + i\epsilon k_y\Omega\sigma^3/D_{\perp}} \quad (4.88)$$

Soit à l'ordre un en ϵ :

$$\omega \simeq i \left(\gamma_0 - D_{\perp}k_y^2 - \frac{k_y^2\Omega^2\sigma^4}{4D_{\perp}} \right) - \epsilon \frac{k_y^3\Omega^3\sigma^7}{4D_{\perp}^2} \quad (4.89)$$

En introduisant le nombre d'onde de Dupree $k_D = \left[\frac{k_y\Omega}{D_{\perp}} \right]^{1/3}$, la fréquence complexe s'écrit :

$$\omega \simeq i\gamma_0 - iD_{\perp}k_y^2 - i\frac{k_y^2\Omega^2\sigma^4}{4D_{\perp}} \left(1 - i \epsilon k_D^3 \sigma^3 \right) \quad (4.90)$$

La prise en compte de l'épaisseur d de la couche cisaillée dans le modèle de Dupree a donc pour effet de faire osciller le mode à une fréquence ω_d qui vaut à l'ordre 1 en ϵ :

$$\omega_d^{(1)} \simeq \epsilon \frac{\Omega^3}{(D_{\perp}k_y^2)^{1/4} D_{\parallel}^{7/4}} \quad (4.91)$$

Dans les simulations numériques 1D avec profil non-linéaire (voir Figure 4.20, à droite), nous n'observons pas ces oscillations du mode. Il faut cependant noter que dans le modèle (4.84) le profil de l'écoulement ne possède aucune symétrie, alors que dans les simulations numériques 1D nous utilisons le même profil d'écoulement (qui est lui anti-symétrique) que celui des simulations 3D. Cette différence peut expliquer le fait que l'on n'observe pas l'oscillation à la fréquence ω_d dans nos simulations numériques 1D.

Chapitre 5

Contrôle des relaxations d'une barrière par des perturbations magnétiques résonnantes (RMPs)

Au cours de la dernière décennie, la possibilité de contrôler les ELMs est devenue envisageable, suite à une série de résultats expérimentaux, sur le tokamak DIII-D [15, 5] en utilisant des bobines dédiées appelées 'I-coils', sur le tokamak TEXTOR [19] en utilisant un divertor ergodique, ainsi que sur le tokamak JET [29] en utilisant les bobines de correction du champ d'erreur. L'interaction entre la turbulence et un divertor ergodique a été étudiée en premier sur le tokamak français Tore-Supra [21, 31]. Les études expérimentales sur DIII-D, TEXTOR et JET ont obtenu un contrôle qualitatif sur les ELMs en imposant des perturbations magnétiques résonnantes dans la région de bord du plasma. Néanmoins, pour obtenir des résultats quantitatifs, il reste beaucoup de travail à faire dans la compréhension des mécanismes physiques à l'origine de la dynamique complexe des ELMs. Des études numériques de l'interaction de perturbations résonnantes avec une barrière de transport ont été effectuées avec le code 2D de transport TELM [4], et avec le code 3D de MHD réduite JOREK en géométrie toroïdale avec point X (géométrie similaire à celle d'ITER) [30]. Dans les simulations avec le code JOREK, des perturbations périodiques stationnaires de pression et de potentiel générées par les perturbations résonnantes sont observées, donnant naissance à un flux de chaleur et de particules. Nous retrouvons ce phénomène dans nos simulations, et nous donnons une description analytique de ce phénomène.

Dans cette section, nous nous proposons d'étudier l'influence de perturbations magnétiques résonnantes (RMPs) sur la turbulence de ballonnement résistif, en présence d'une barrière de transport. Il s'agit d'un modèle simplifié pour étudier l'effet des RMPs sur les ELMs.

5.1 Perturbations magnétiques résonnantes (RMPs)

5.1.1 Structure des perturbations résonnantes du champ du vide

Les perturbations magnétiques externes sont créées par un ensemble de bobines situées proches du bord du plasma (sur la paroi intérieure de l'enceinte dans TEXTOR). Dans la limite des grands rapports d'aspects ($R_0/a \gg 1$), la perturbation magnétique radiale \tilde{B}_r générée par les bobines s'écrit, en absence de plasma (champ du vide) [2, 17, 18] :

$$\tilde{B}_r(r, \theta, \varphi) = \frac{B_c}{\sqrt{1 + (r/R_0) \cos \theta}} \times \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_c}\right)^m g_m \quad (5.1)$$

où B_c est défini par la loi d'Ampère $B_c r_c \Delta\theta_c = \mu_0 N I_D$, N désignant le nombre de bobines perturbatives et I_D désignant le *courant perturbatif* (courant circulant dans les bobines perturbatives). Le paramètre r_c désigne la position radiale du système de bobines.

Le spectre poloïdal des perturbations résonnantes, lié à l'extension poloïdale $\Delta\theta_c$ finie du système de bobines, est donné par :

$$g_m = (-1)^{m+m_{coils}} \times \frac{\sin[(m - m_{coils})\Delta\theta_c/2]}{\pi m(m - m_{coils})} \quad (5.2)$$

L'harmonique principale des bobines ("coils" en anglais) m_{coils} est déterminée par $\Delta\theta_c$ et par l'harmonique toroïdale n_0 :

$$m_{coils} = \frac{2\pi n_0}{\Delta\theta_c} \quad (5.3)$$

5.1.2 Structure des perturbations résonnantes en présence du plasma

Le comportement des lignes de champ est principalement déterminé par le spectre des perturbations magnétiques résonnantes, $h_{mn}(\psi)$. En général, ce spectre dépend des perturbations magnétiques du champ du vide (5.1) et de l'équilibre du plasma (configuration du plasma à l'équilibre). La perturbation radiale s'écrit [17] :

$$\tilde{B}_r^{plasma}(\psi, \vartheta, \varphi) = \sum_m B_m(\psi) \cos(m\vartheta + n_0\varphi) \quad (5.4)$$

Où l'amplitude de chaque harmonique (m, n_0) est donnée par :

$$B_m(\psi) = \text{Re} \frac{1 + \frac{r(\psi, \vartheta)}{R_0} \cos \theta(\psi, \vartheta)}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{B}_r(r(\psi, \vartheta), \theta(\psi, \vartheta), \varphi) e^{-i(m\vartheta - n_0\varphi)} d\vartheta d\varphi \quad (5.5)$$

où $\vartheta = \vartheta(\theta, \psi)$, appelé *angle poloïdal intrinsèque*, dépend à la fois de l'angle poloïdal θ et des paramètres du plasma (représentés par le flux magnétique poloïdal ψ).

5.2 Modélisation numérique des perturbations résonnantes

Afin de modéliser les perturbations résonnantes, on définit le flux magnétique à travers la relation $\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times (\psi_D \mathbf{e}_\varphi)$, où $\tilde{\mathbf{B}}$ est donné en géométrie toroïdale par une expression similaire à (5.1). L'harmonique principale des bobines m_{coils} est choisie de telle sorte que le groupe d'harmoniques du champ du vide localisé autour de m_{coils} produise une forte contribution au mode m_0 résonnant à la surface $q = m_0/n_0$, c'est-à-dire là où l'on souhaite que l'effet des perturbations résonnantes soit le plus important. Dans TEXTOR, $\Delta\theta_c = 2\pi/5$ et $m_{coils} = 20$ pour le mode de base $m_0 : n_0 = 12 : 4$. Ainsi, en géométrie "slab", la perturbation ψ_{RMP} créée par le divertor ergodique (ou les bobines perturbatives) peut s'écrire sous la forme normalisée :

$$\psi_{RMP}(x, y, z) = \frac{I_D}{I_D^{\text{ref}}} \sum_m \psi_m(x) \exp\left(i\frac{m}{r_0}y - i\frac{n_0}{R_0}z\right) + c.c \quad (5.6)$$

$$\psi_m(x) = \Psi g_m \exp\left(\frac{m_{coils}}{\lambda}x\right) \quad (5.7)$$

où I_D^{ref} désigne un courant de référence, $\frac{\lambda}{m_{coils}}$ désigne la *longueur de pénétration* des perturbations résonnantes dans le plasma et le mode de base est $m_0 : n_0 = 12 : 4$. Les détails sur la modélisation de cette perturbation dans la simulation de turbulence sont donnés dans [22].

5.3 Effet des perturbations résonnantes sur les lignes de champ : Cartes de Poincaré du champ du vide

5.3.1 Topologie du champ magnétique d'équilibre

La théorie MHD montre que la topologie du champ magnétique est telle que les lignes de champ magnétique évoluent sur des surfaces d'isoflux magnétique appelées *surfaces magnétiques*, c'est-à-dire les surfaces où le flux magnétique poloïdal (flux du champ magnétique à travers une section poloïdale) $F(r, \theta)$ est constant.

En l'absence de perturbations magnétiques résonnantes (indice 0), et en faisant l'approximation des grands rapport d'aspect $R_0/a \gg 1$ (valide pour la plupart des machines de fusion), le flux magnétique dépend uniquement de la coordonnée radiale : $F_0(r, \theta) = F_0(r)$. En effet, considérons une section poloïdale en forme de disque de rayon r . Le flux du champ magnétique d'équilibre $F_0 = \int \int \mathbf{B}^{eq} \cdot d\mathbf{S}$ à travers cette surface s'écrit :

$$F_0(r) = \int_{r'=0}^r \int_{\theta=0}^{2\pi} B_\varphi^{eq} r' dr' d\theta \quad (5.8)$$

Dans l'approximation des grands rapports d'aspect, la composante toroïdale du champ magnétique d'équilibre s'écrit :

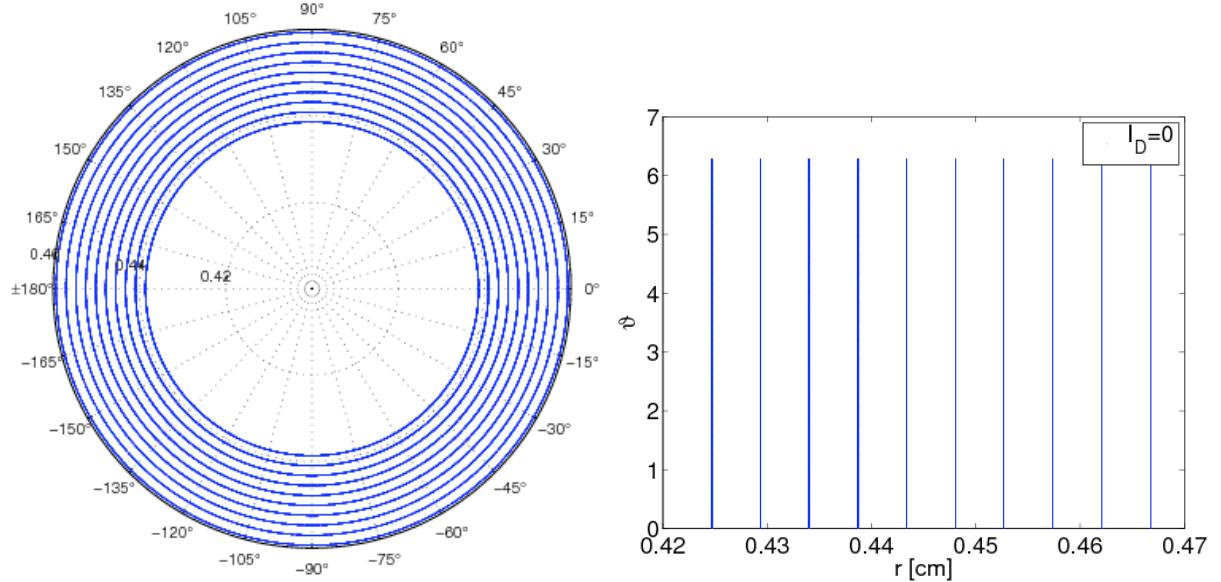


FIG. 5.1 – Section de Poincaré dans le plan (r, θ) et carte de Poincaré associée, en l'absence de perturbations magnétiques résonnantes.

$$B_\varphi^{eq}(r, \theta) = \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta\right) B_0 \quad (5.9)$$

ce qui donne pour le flux poloïdal :

$$F_0(r) = 2\pi B_0 \frac{r^2}{2} - \frac{2\pi B_0}{2R_0} \frac{r^3}{3} [\sin \theta]_{\theta=0}^{2\pi} \quad (5.10)$$

Le second terme de l'expression est égal à zéro, donc le flux poloïdal s'écrit :

$$F_0(r) = B_0 \pi r^2 \quad (5.11)$$

Dans le plan poloïdal, les lignes de champ magnétique décrivent donc des cercles concentriques. Dans la géométrie 3D, chaque cercle représente, en fait, la section d'un tore centré sur l'axe magnétique $r = 0$. Une section de Poincaré [voir Figure 5.1] montre une projection des lignes de champ magnétique dans le plan poloïdal. Sur la même figure, à droite, la carte de Poincaré (r, θ) associée est représentée. La carte (r, θ) représente une coupe poloïdale du tokamak "dépliée" dans la direction poloïdale. Dans ce plan, les lignes de champ non-perturbées sont alors caractérisées par une série de droites parallèles. La surface de résonnance principale ($m = 12$, $n_0 = 4$) caractérisée par le facteur de sécurité $q_0 = \frac{12}{4} = 3$ correspond à la position radiale $r = r_0$ ($r_0 = 0.45$ mètres dans le tokamak TEXTOR).

5.3.2 Perturbations de la topologie magnétique d'équilibre

L'application de perturbations magnétiques résonnantes au bord du plasma a pour conséquence de modifier la topologie des lignes de champ magnétique. Sur une carte de Poincaré, cela correspond à une déformation des droites parallèles. Cette déformation est maximale proche du bord, car l'amplitude des perturbations $\sim \exp(-m_{coils}x/\lambda)$ décroît exponentiellement du bord vers le centre du plasma.

Cas d'une seule surface de résonnance

Pour comprendre l'effet des perturbations résonnantes, on considère une seule surface de résonnance $r = r_j$, où j est un indice de numérotation des surfaces de résonnance. On utilise une variable radiale locale x et la variable poloïdale associée, définies par :

$$x = r - r_0 \quad (5.12)$$

$$y = r_0 \theta \quad (5.13)$$

où r_0 désigne une surface de résonnance de référence.

Au voisinage d'une surface de résonnance $r = r_j$, le flux magnétique poloïdal (5.6) induit par les perturbations résonnantes possède une faible variation radiale, donc on a :

$$I_D \psi_m(x) \sim I_D \Psi \exp\left(\frac{m_{coils}}{\lambda}(r_j - r_0)\right) = Cte \quad (5.14)$$

où $\Psi \exp\left(\frac{m_{coils}}{\lambda}(r_j - r_0)\right)$ est appelé *flux reconnecté*.

Un résultat standard de la théorie MHD donne pour le flux poloïdal normalisé au voisinage de la surface de résonnance $r = r_j$, dans le cas d'un champ magnétique cisailé, la forme hamiltonienne [20] :

$$F(x, y) = \frac{x^2}{w^2} + \cos(k_{yy}y) \quad (5.15)$$

où $k_{yy} = m_j/r_0$ désigne le nombre d'onde poloïdal de l'harmonique des perturbations qui est résonnante en $r = r_j$. Dans cette expression, l'échelle caractéristique w , appelée *largeur d'ilot* est donnée par :

$$w = w_j = 2 \sqrt{\frac{I_D}{I_D^{\text{ref}}} \frac{L_s \Psi}{B_0} \exp\left(\frac{m_{coils}}{\lambda}(r_j - r_0)\right)} \quad (5.16)$$

où L_s désigne une longueur de cisaillement magnétique de référence, définie au Chapitre 2, par l'expression (2.18).

La dénomination "largeur d'ilot" provient du fait que les surfaces d'isoflux magnétiques dessinent dans le plan poloïdal (r, θ) une chaîne d'îlots (dans un plasma, on l'appelle *chaîne d'îlots magnétiques*) similaire à la chaîne d'îlots que dessine la trajectoire d'un oscillateur non-linéaire dans l'espace des phases (voir Figure 5.2). On définit alors deux ensembles de points particuliers de cette chaîne d'îlots : les *points O* de coordonnées

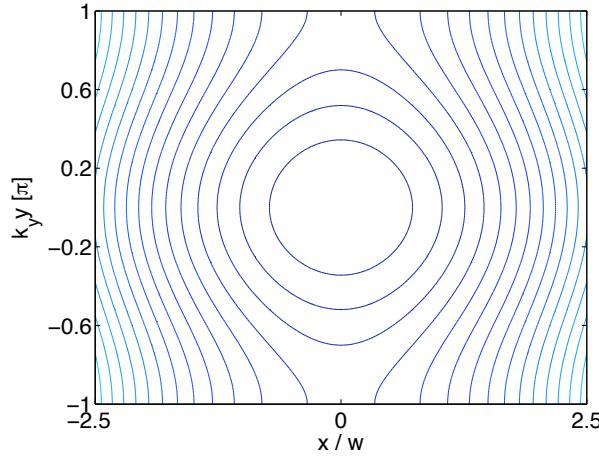


FIG. 5.2 – Contours du flux poloïdal $F(x, y) = (x/w)^2 + \cos(k_{y0}y)$. Le motif (îlot) est périodique dans la direction y ce qui forme une chaîne d’îlots.

$x = 0, y = 0 \bmod 2\pi$ et les *points X* de coordonnées $x = 0, y = \pi \bmod 2\pi$

On distingue deux régions du plasma :

- Loin de la surface de résonnance ($|x| \gg \frac{w}{2}$), les lignes de champ se déforment tout en gardant leur topologie d’équilibre, c’est-à-dire que les surfaces magnétiques ne sont pas détruites.
- Proche de la surface de résonnance ($|x| \leq \frac{w}{2}$), la topologie d’équilibre des lignes de champ magnétique est détruite et la surface résonnante, présente à l’équilibre, est remplacée par une chaîne d’îlots magnétiques. Cette destruction provient d’un phénomène appelé *reconnection magnétique* lié à la résistivité du plasma.

On remarque que, au voisinage de la surface de référence $r_j = r_0$, l’expression (5.16) se simplifie en :

$$w_0 = 2 \sqrt{\frac{I_D}{I_D^{\text{ref}}} \frac{L_s \Psi}{B_0}} \quad (5.17)$$

Cas de plusieurs surfaces de résonnance

En réalité, le plasma possède plusieurs surfaces de résonnances r_j .

Considérons le cas de trois surfaces de résonnances r_{-1}, r_0, r_1 , où r_0 est une surface de référence. Les perturbations résonnantes produisent, par le mécanisme précisé ci-dessus, trois chaines d’îlots magnétiques. Pour une valeur critique du courant de perturbation I_D , ces chaines d’îlots se superposent : on dit qu’il y a *recouvrement*. Ce recouvrement crée une zone stochastique (chaotique), où les lignes de champs emplissent un maximum d’espace. Le paramètre de *Chirikov* permet d’estimer le seuil d’apparition du chaos à l’interface entre deux chaines d’îlots. Pour trois chaines d’îlots, on définit ainsi deux paramètres de Chirikov σ_- et σ_+ :

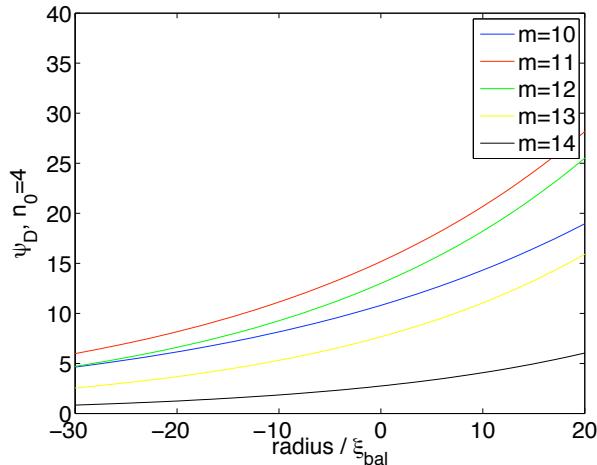


FIG. 5.3 – Profil radial des perturbations résonnantes au voisinage de la surface de résonnance $x_{q=3} = 0$, avec les paramètres du tokamak TEXTOR ($m_0 = 12$, $n_0 = 4$).

$$\sigma_- = \frac{\frac{w_{-1}}{2} + \frac{w_0}{2}}{|r_{-1} - r_0|} \quad (5.18)$$

$$\sigma_+ = \frac{\frac{w_0}{2} + \frac{w_1}{2}}{|r_1 - r_0|} \quad (5.19)$$

où les largeurs d'îlot w_{-1} , w_0 , w_1 sont définies par (5.16). Le seuil d'apparition du chaos correspond à un paramètre de Chirikov $\sigma \geq \sigma_c \simeq 1$.

Topologie des chaines d'îlots magnétiques dans le tokamak TEXTOR

Nous avons effectué des simulations numériques 3D avec les paramètres du tokamak TEXTOR. Le profil radial des perturbations résonnantes est donné sur la Figure 5.3, ainsi que la topologie magnétique qui en résulte, pour une valeur $I_D = 0.3 kA$ du courant perturbatif [voir Figure 5.4].

5.4 Effets des perturbations résonnantes sur la dynamique du plasma, sans barrière de transport

Dans le paragraphe précédent, nous avons exposé les effets des perturbations résonnantes sur la topologie magnétique (champ du vide avec effet d'écrantage effectif du plasma), sans considérer la dynamique du plasma. Intéressons nous maintenant à la dynamique du plasma en présence d'une barrière de transport. L'effet des perturbations résonnantes sur la turbulence (nous considérons ici la turbulence de ballonnement résistif décrite au Chapitre 2 par le système d'équations 2.53, 2.54) provient d'une modification du gradient parallèle :

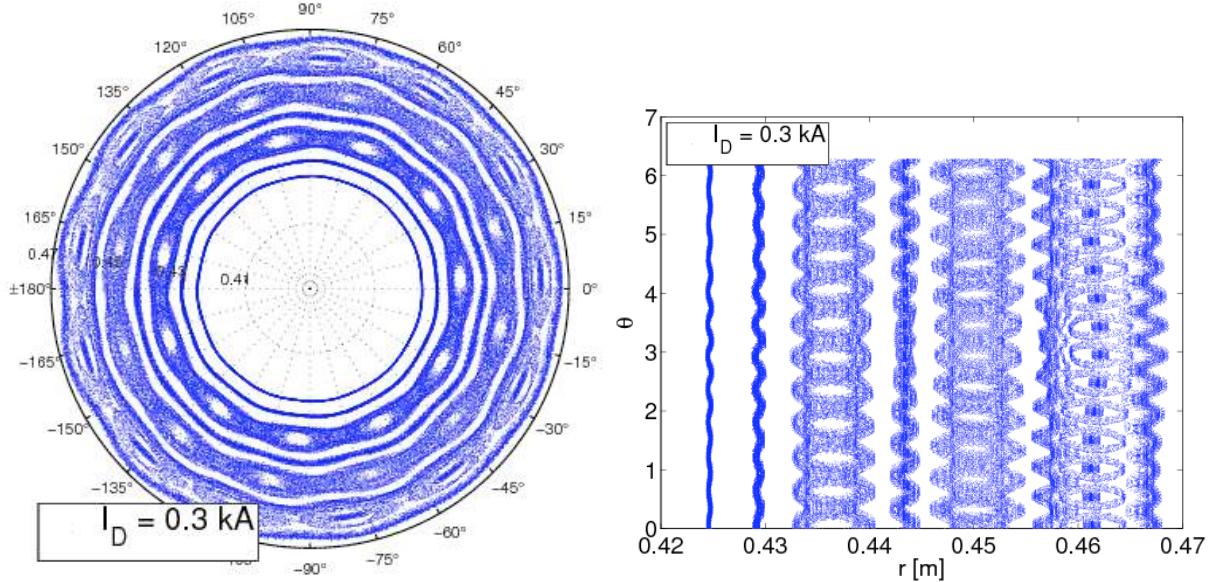


FIG. 5.4 – Section de Poincaré dans le plan (r, θ) et carte de Poincaré associée, avec perturbations magnétiques résonnantes (courant perturbatif de $I_D = 0.3 \text{ kA}$). On distingue les 3 chaînes d'îlots correspondant aux trois harmoniques primaires $m = m_0 - 1, m_0, m_0 + 1$.

$$\nabla_{\parallel} = \nabla_{\parallel 0} + \frac{1}{B} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \nabla \quad (5.20)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times (\psi_{RMP} \mathbf{e}_z) \quad (5.21)$$

5.4.1 Perturbation du profil de pression en absence de turbulence

Ilots magnétiques résiduels et structures de pression stationnaires

Considérons uniquement l'harmonique poloïdale principale (m_0) des perturbations résonnantes dans l'expression du flux poloïdal :

$$\psi_{RMP}(x, y, z) \simeq \frac{I_D}{I_D^{\text{ref}}} \psi_{m_0}(x) \exp(ik_{y0}y + ik_{z0}z) + c.c. \quad (5.22)$$

où $k_{y0} = m_0/r_0$ et $k_{z0} = n_0/R_0$ désignent les nombres d'onde de l'harmonique principale des perturbations résonnantes .

Dans la région de bord du plasma, c'est-à-dire loin du coeur du plasma ou de la couche limite ("Scrape Off Layer") du plasma, il n'y a aucune source de chaleur.

Le bilan d'énergie s'écrit pour le plasma de bord, en absence de turbulence :

$$\nabla \cdot \left(\chi_{\parallel 0} \langle \nabla_{\parallel} p \rangle \frac{\mathbf{B}}{B} + \chi_{\perp 0} \langle \nabla_{\perp} p \rangle \right) = 0 \quad (5.23)$$

soit :

$$\chi_{\parallel 0} \langle \nabla_{\parallel}^2 p \rangle + \chi_{\perp 0} \langle \nabla_{\perp}^2 p \rangle = 0 \quad (5.24)$$

avec :

$$\nabla_{\parallel} = -\frac{x}{L_s} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{B} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \nabla \quad (5.25)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \simeq \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (5.26)$$

où la variation poloïdale est négligée devant la variation radiale $\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}$, dû à l'effet de localisation radiale des modes en présence d'une diffusion parallèle inhomogène (voir Chapitre 3).

Dans le plan poloïdal $z = 0$, on note \bar{p} le profil de pression sans perturbations résonnantes et $\delta p^{eq}(x, y) = Re \tilde{p}^{eq}(x) e^{ik_y y}$ l'harmonique d'équilibre créée par les perturbations résonnantes. Dans le plan poloïdal, le profil de pression perturbé s'écrit donc :

$$p(x, y, t) = \bar{p}(x, t) + \delta p_{out}^{eq}(x, y), \quad \text{pour } |x| \gg w/2 \quad (5.27)$$

$$p(x, y, t) = \bar{p}(0, t) + \delta p_{in}^{eq}(x, y), \quad \text{pour } |x| \ll w/2 \quad (5.28)$$

où l'on décompose δp^{eq} en δp_{in}^{eq} et δp_{out}^{eq} , car le profil de pression $\bar{p}(x, t)$ est constant à l'intérieur ("in" en anglais) de la chaîne d'îlots magnétiques, et est égal à sa valeur sans perturbations à l'extérieur ("out" en anglais) de la chaîne d'îlots parce que le comportement est différent à l'intérieur et à l'extérieur, ce qui sera vu à posteriori.

En considérant un état stationnaire, on a donc :

$$\langle p \rangle(x, y) = \langle \bar{p} \rangle(x) + \delta p_{out}^{eq}(x, y), \quad \text{pour } |x| \gg w/2 \quad (5.29)$$

$$\langle p \rangle(x, y) = \bar{p}_0 + \delta p_{in}^{eq}(x, y), \quad \text{pour } |x| \ll w/2 \quad (5.30)$$

où $\langle \dots \rangle$ représente une moyenne en temps et \bar{p}_0 désigne la valeur du profil de pression non-perturbé en $x = 0$.

Fitzpatrick [20] montre que, après linéarisation, l'équation de diffusion de la chaleur (5.24) peut s'écrire en fonction du flux magnétique normalisé $F(x, y)$ (expression 5.15) :

$$\frac{1}{4k_{y0}^2} \left(\frac{w}{\sigma_0} \right)^4 \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{F - \cos(k_{y0} y)} \frac{\partial \delta p^{eq}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial F} \sqrt{F - \cos(k_{y0} y)} \frac{\partial \delta p^{eq}}{\partial F} = 0 \quad (5.31)$$

où $\delta p^{eq} = \delta p_{in}^{eq}$ ou δp_{out}^{eq} selon la région considérée et σ_0 désigne une *largeur d'îlot critique* qui correspond précisément à la largeur σ_0 (Chapitre 2, expression 3.51 avec $k_y = k_{y0}$) du mode de pression localisé en $q_0 = \frac{m_0}{n_0}$:

$$\sigma_0 = \left(\frac{\chi_{\perp 0}}{\chi_{\parallel 0}} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{L_s}{k_{y0}}} \quad (5.32)$$

Limite des grands îlots

Pour $w \gg \sigma_0$, la perturbation de pression est une fonction du flux poloïdal normalisé (5.15) [20] :

$$\delta p^{eq} = \delta p^{eq}(F(x, y)) \quad (5.33)$$

L'équation (5.31) peut être moyennée selon la direction poloïdale y et on obtient :

$$\frac{d}{dF} \left(\oint \sqrt{F - \cos(k_{y0}y)} dy \frac{d\delta p^{eq}}{dF} \right) = 0 \quad (5.34)$$

où on a utilisé le fait que δp^{eq} est périodique dans la direction poloïdale y .

Définissons les variables adimensionnées suivantes :

$$X = \frac{x}{w} \quad (5.35)$$

$$Y = k_{y0} y \quad (5.36)$$

Proche de la chaîne d'îlots, la perturbation de pression peut être décomposée en harmoniques dans la direction poloïdale :

$$\delta p^{eq}(X, Y) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} p_\nu(X) \cdot \cos(\nu Y) \quad (5.37)$$

où, pour des raisons de symétrie, on considère uniquement les harmoniques paires (c'est-à-dire en cosinus) dans la direction poloïdale.

L'expression exacte pour $p_\nu(X)$ est donnée par [20] :

$$p_\nu(X) = \pm \frac{\kappa}{16\nu} \int_0^{Y_c} \frac{\cos(\nu - 1)Y - \cos(\nu + 1)Y}{E(1/k^2) \cdot k} dY \quad (5.38)$$

où $\kappa = \frac{1}{w} \frac{d\langle \bar{p} \rangle^0}{dX}|_{X=0}$ est la valeur du gradient de pression non-perturbé (indice 0), à la surface de résonnance $X = 0$, les signes \pm désignent $X \geq 0$, $X \leq 0$ respectivement. La fonction $E(l) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - l^2 \sin^2(\alpha)} d\alpha$ est une intégrale elliptique et les quantités Y_c et k sont définies par :

$$Y_c = \arccos(1 - 8X^2), \quad \text{pour } |X| < 1/2 \quad (5.39)$$

$$Y_c = \pi, \quad \text{pour } |X| \geq 1/2 \quad (5.40)$$

$$k = \sqrt{4X^2 + \cos^2(Y/2)} \quad (5.41)$$

Pour simplifier, on suppose un profil de pression non-perturbé de la forme :

$$\langle \bar{p} \rangle = \bar{p}_0 - \kappa x \quad (5.42)$$

On a donc : $\frac{1}{w} \left| \frac{d\langle \bar{p} \rangle^0}{dX} \right| = \kappa = Cte$, pour tout X .

A l'intérieur de la chaîne d'îlots $|X| \ll \frac{1}{2}$, $p_\nu(X)$ a alors pour expression :

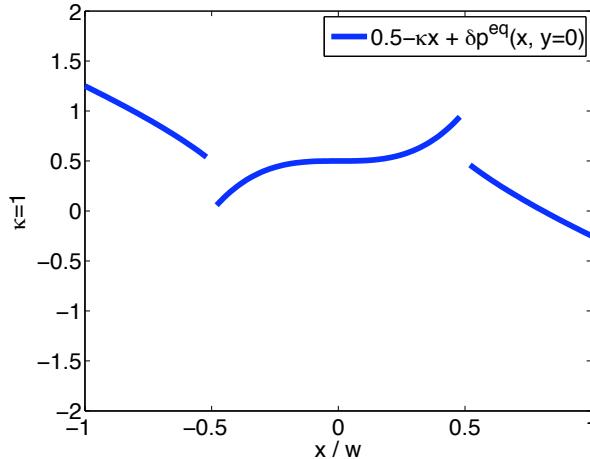


FIG. 5.5 – Allure du profil de pression, en présence de perturbations résonnantes , dans la limite des grands îlots $w \gg \sigma_0$, c'est-à-dire quand le terme de diffusion perpendiculaire est négligeable devant le terme de diffusion parallèle dans (2.53,2.54).

$$p_\nu^{in}(X) \sim \frac{8}{3} \kappa w \cdot X^3, \quad \text{pour tout } \nu \quad (5.43)$$

A l'extérieur de la chaîne d'îlots, $|X| \gg \frac{1}{2}$, $p_\nu(X)$ a pour expression :

$$p_1^{out}(X) \sim \frac{\kappa w}{16} \cdot \frac{1}{X} \quad (5.44)$$

$$p_\nu^{out}(X) \sim 0, \quad \text{pour } \nu \geq 2 \quad (5.45)$$

L'allure du profil de pression perturbé $\bar{p}_0 - \kappa x + \delta p_{out}^{eq}(x, y = 0)$ pour $|x| \gg 1/2$ et $\bar{p}_0 + p_{in}^{eq}(x, y = 0)$ pour $|x| \ll 1/2$ (expressions 5.43-5.45) est montrée sur la Figure 5.5.

Le gradient de pression, à l'intérieur de la chaîne d'îlots, varie alors comme :

$$\left| \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} \right| \sim \frac{8}{w^2} x^2 |\cos(k_{y0} y)| \kappa, \quad \text{pour } |x| \ll \frac{w}{2} \quad (5.46)$$

On voit donc que, à l'intérieur de la chaîne d'îlots, le profil de pression perturbé est aplani en $y = 0$ [2π] (points O de la chaîne d'îlots magnétiques résiduels) comparé au profil de pression non-perturbé. Cet aplatissement est lié au fait que la chaîne d'îlots résiduels centrée en $x = 0$ crée des *structures de pression stationnaires* ayant la même périodicité spatiale que la chaîne d'îlots, et qui ont pour effet d'aplatisser le profil de pression à l'intérieur de la séparatrice de la chaîne d'îlots, c'est-à-dire pour $|x| < w/2$, [voir Figure 5.5].

En présence d'un écoulement turbulent, nous verrons, dans la suite, que les perturbations résonnantes produisent également un aplatissement du profil de pression qui a cependant une origine différente.

Grand rayon du plasma	$R_0 = 1.75 \text{ m}$
Petit rayon du plasma	$a = 0.46 \text{ m}$
surface résonnante de référence	$q_0 = 3$
Longueur de cisaillement	$L_s = R_0$

TAB. 5.1 – Paramètres du tokamak TEXTOR.

Cas général

Pour $w \sim \sigma_0$ ou $w \ll \sigma_0$, le second terme dans l'équation (5.31) est du même ordre de grandeur ou supérieur au premier terme. Il en résulte que dans le cas général, la pression δp^{eq} n'est pas nécessairement une fonction du flux poloïdal normalisé $F(x, y)$.

Estimation de la largeur d'îlot critique

Pour notre étude, nous avons utilisé les paramètres du Tokamak TEXTOR [voir Tab. 5.1], et on obtient pour la largeur d'îlot critique avec ces paramètres :

$$\sigma_0 = \sqrt{L_s \frac{r_0}{m_0}} \left[\frac{\chi_{\perp 0}}{\chi_{\parallel 0}} \right]^{1/4} \quad (5.47)$$

$$\sim 0.3 \left[\frac{\chi_{\perp 0}}{\chi_{\parallel 0}} \right]^{1/4} \ll 1, \quad \text{car} \quad \chi_{\perp 0} \ll \chi_{\parallel 0} \quad (5.48)$$

Dans nos simulations 3D, on est donc toujours dans la limite des grands îlots, et cela signifie que la perturbation de pression d'équilibre $\delta p^{eq}(x, y)$ peut être considérée comme une fonction du flux poloïdal normalisé $F(x, y)$.

5.4.2 Perturbation des profils de pression et de potentiel dans un écoulement turbulent

Ilots magnétiques résiduels et cellules de convection stationnaires

Dans nos simulations numériques 3D, nous avons étudié les effets de perturbations résonnantes sur un écoulement turbulent, en présence d'une barrière de transport. Nous étudierons, dans un premier temps, l'effet des perturbations résonnantes sur la turbulence en absence d'écoulement moyen (donc sans barrière de transport). Nous verrons, dans la suite de cette partie, que les perturbations résonnantes créent alors, non-seulement des structures stationnaires de pression δp^{eq} (comme dans le cas non-turbulent), mais ces perturbations créent également un écoulement stationnaire $\delta \mathbf{v}^{eq}$ (cellules de convection stationnaires), et la combinaison de ces deux structures engendre un transport de chaleur (et de matière).

En absence d'écoulement moyen ($\bar{v} = 0$), considérons des profils de pression et de potentiel de la forme :

$$\bar{p} = \bar{p}_0 - \kappa x, \quad \bar{\phi} = 0 \quad (5.49)$$

et considérons les harmoniques d'équilibre :

$$\delta p^{eq} = \tilde{p}^{eq}(x) e^{i(k_{y0}y + k_{z0}z)} + c.c \quad (5.50)$$

$$\delta \phi^{eq} = \tilde{\phi}^{eq}(x) e^{i(k_{y0}y + k_{z0}z)} + c.c \quad (5.51)$$

où les nombres d'onde k_{y0} et k_{z0} sont définis dans la partie précédente (expression 5.22).

La présence de ces harmoniques d'équilibre, indirectement liées aux perturbations résonnantes engendre un flux de chaleur radial d'équilibre $Q_{conv}^{eq} = \langle \delta p^{eq} \delta \mathbf{v}^{eq} \rangle_{y,z}$ [voir Figures 5.8 et 5.9]. Le flux convectif d'équilibre Q_{conv}^{eq} peut être estimé en considérant le système d'équations (2.53, 2.54) pour les harmoniques de pression (5.50) et de potentiel (5.51), linéarisé autour de l'équilibre (5.49) dans un état stationnaire, en négligeant les termes dissipatifs ($\nu \rightarrow 0$, $\chi_{\perp 0} \rightarrow 0$) :

$$0 = -\frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial y} \delta p^{eq} - \frac{1}{\eta_0} \nabla_{\parallel 0}^2 \delta \phi^{eq} \quad (5.52)$$

$$\left\{ \frac{1}{B_0} \delta \phi^{eq}, \bar{p} \right\} = \chi_{\parallel 0} \left(\nabla_{\parallel 0}^2 \delta p^{eq} + \nabla_{\parallel 0} \left\{ \frac{1}{B_0} \psi_{RMP}^0, \bar{p} \right\} \right) \quad (5.53)$$

avec $\psi_{RMP}^0 = \Psi \exp(i k_{y0} y + i k_{z0} z)$ et où l'on a utilisé l'approximation de fort ballonnancement $\hat{G} \simeq \frac{\partial}{\partial y}$ et l'approximation de psi uniforme ("constant psi approximation") $I_D \psi_{m_0}(x) \simeq \Psi = Cte$ valable au voisinage de la surface de résonnance $x = 0$.

Soit, avec $\nabla_{\parallel 0} \delta p^{eq} = -i \frac{k_{y0}}{L_s} x \tilde{p}^{eq}$, $\nabla_{\parallel 0} \delta \phi^{eq} = -i \frac{k_{y0}}{L_s} x \tilde{\phi}^{eq}$ et $\nabla_{\parallel 0} \{ \psi_{RMP}^0, \bar{p} \} = \kappa k_{y0} \Psi \frac{k_{y0}}{L_s} x$:

$$0 = -i \frac{k_{y0}}{R_0} \tilde{p}^{eq} + \frac{1}{\eta_0} \frac{k_{y0}^2}{L_s^2} x^2 \tilde{\phi}^{eq} \quad (5.54)$$

$$i \frac{k_{y0} \kappa}{B_0} \tilde{\phi}^{eq} = -\chi_{\parallel 0} \frac{k_{y0}^2}{L_s^2} (x^2 \tilde{p}^{eq} - w^2 \kappa x) \quad (5.55)$$

où $w = \sqrt{L_s \Psi / B_0}$ représente la largeur de la chaîne d'îlots magnétiques, centrée en $x = 0$, créée par la perturbation ψ_{RMP}^0 .

En identifiant la largeur d'îlot w comme échelle caractéristique, le système (5.54, 5.55) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\tilde{\phi}^{eq} - i \eta_0 \frac{L_s^2}{k_{y0} R_0 w^2} \frac{1}{X^2} \tilde{p}^{eq} = 0 \quad (5.56)$$

$$i \frac{k_{y0} \kappa}{B_0} \tilde{\phi}^{eq} + \frac{\chi_{\parallel 0} k_{y0}^2 w^2}{L_s^2} X^2 \tilde{p}^{eq} = \frac{\chi_{\parallel 0} k_{y0}^2 w^2}{L_s^2} \kappa w X \quad (5.57)$$

où $X = \frac{x}{w}$.

Dans la limite où, dans l'équation (5.54), on néglige la courbure des lignes de champ (limite $1/R_0 \rightarrow 0$), le potentiel $\tilde{\phi}^{eq}$ tend vers 0, c'est-à-dire que le plasma est caractérisé par une absence d'écoulement stationnaire car $\delta\mathbf{v}^{eq} = \nabla \times (\delta\phi^{eq} \mathbf{e}_z)$. Cette limite correspond également à la *limite de faible turbulence*. L'équation (5.57) donne alors :

$$\delta p^{eq} = \frac{\kappa w^2}{x} \cos(k_{y0}y + k_{z0}z), \quad \text{pour } \frac{1}{R_0} \rightarrow 0 \quad (5.58)$$

Cela correspond, à un coefficient près, à l'expression (5.45) obtenue par Fitzpatrick [20] en absence de turbulence, à l'extérieur de la chaîne d'îlots. L'interprétation de ce résultat est la suivante : Dans la limite $1/R_0 \rightarrow 0$, le profil de pression perturbé est résonnant (dans son sens original, c'est-à-dire dont l'amplitude tend vers l'infini en absence de dissipation) à la surface de résonance $x = 0$.

Dans le cas général, c'est-à-dire en tenant compte de la courbure magnétique $\frac{1}{R_0}$, il existe deux *limites des grands îlots*. En effet, en tenant compte de la diffusion perpendiculaire dans (5.57) le système (5.56,5.57) s'écrit :

$$\tilde{\phi}^{eq} = i \frac{\eta_0 L_s^2}{k_{y0} R_0 w^2} \frac{1}{X^2} \tilde{p}^{eq} \quad (5.59)$$

$$\frac{\chi_{\perp 0}}{w^2} \frac{d^2 \tilde{p}^{eq}}{dX^2} - \frac{\eta_0 \kappa L_s^2}{R_0 B_0 w^2 X^2} \tilde{p}^{eq} + \frac{\chi_{\parallel 0} k_{y0}^2 w^2}{L_s^2} X^2 \tilde{p}^{eq} = \frac{\chi_{\parallel 0} k_{y0}^2 w^2}{L_s^2} \kappa w X \quad (5.60)$$

Première limite des grands îlots

La *première limite des grands îlots* correspond au cas où les termes de diffusion perpendiculaire et d'advection stationnaire sont tous deux négligeables devant le terme de diffusion induit par les perturbations résonnantes, c'est-à-dire :

$$\left| \frac{\chi_{\parallel 0} k_{y0}^2 w^2}{L_s^2} X \cdot \kappa w \right| \gg \left| \frac{\chi_{\perp 0}}{w^2} \frac{d^2 \tilde{p}^{eq}}{dX^2} \tilde{p}^{eq} \right|, \left| \frac{\eta_0 \kappa L_s^2}{R_0 B_0 w^2 X^2} \tilde{p}^{eq} \right| \quad (5.61)$$

et cette approximation est valide si les deux conditions

$$w \gg \sigma_0 \quad \text{et} \quad w \gg \left(\frac{\eta_0 \kappa L_s^4}{\chi_{\parallel 0} k_{y0}^2 R_0 B_0} \right)^{1/4} \quad (5.62)$$

sont vérifiées. Il s'agit de la limite des grands îlots obtenue par Fitzpatrick (5.32).

Seconde limite des grands îlots

La *seconde limite des grands îlots* correspond au cas où le terme d'advection stationnaire est négligeable devant le terme de diffusion induit par les perturbations résonnantes mais que le terme de diffusion perpendiculaire est du même ordre de grandeur ou plus grand que le terme de diffusion induit par les perturbations résonnantes, c'est-à-dire :

$$\left| \frac{\eta_0 \kappa L_s^2}{R_0 B_0 w^2 X^2} \tilde{p}^{eq} \right| \ll \left| \frac{\chi_{\parallel 0} k_{y0}^2 w^2}{L_s^2} X \cdot \kappa w \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\chi_{\perp 0}}{w^2} \frac{d^2 \tilde{p}^{eq}}{dX^2} \tilde{p}^{eq} \right| \sim \left| \frac{\chi_{\parallel 0} k_{y0}^2 w^2}{L_s^2} X \right| \quad (5.63)$$

et ceci est vérifié pour

$$w \sim \sigma_0 \gg \left(\frac{\eta_0 \kappa L_s^4}{\chi_{\parallel 0} k_{y0}^2 R_0 B_0} \right)^{1/4} \quad (5.64)$$

En utilisant la largeur caractéristique ξ_{bal} et le temps caractéristique τ_{inter} de la turbulence de ballonnement résistif, on voit que la seconde limite des grands îlots peut s'écrire :

$$w \gg \left(\frac{\xi_{bal}^2 L_s^2}{\chi_{\parallel 0} k_{y0}^2 \tau_{inter}} \right)^{1/4} \quad (5.65)$$

On met ainsi en évidence une nouvelle longueur caractéristique σ_c :

$$\sigma_c = \frac{\sqrt{\xi_{bal} L_s}}{(\chi_{\parallel 0} k_{y0}^2 \tau_{inter})^{1/4}} \quad (5.66)$$

De plus, dans le cas turbulent $k_{y0}/R_0 \neq 0$, l'harmonique d'équilibre $\tilde{\phi}^{eq}$ du potentiel électrique est non-nulle (expression 5.59). La chaîne d'îlots magnétiques stationnaires centrée en $x = 0$ crée donc un *écoulement stationnaire* :

$$\delta \mathbf{v}^{eq} = \frac{k_{y0}}{B_0} \cdot \text{Im}(\tilde{\phi}_{eq}) \sin(Y + Z) \mathbf{e}_X \quad (5.67)$$

$$+ \frac{1}{w B_0} \text{Im}\left(\frac{d\tilde{\phi}_{eq}}{dX}\right) \cos(Y + Z) \mathbf{e}_Y \quad (5.68)$$

où $Y = k_{y0}y$, $Z = k_{z0}z$ sont des variables normalisées.

Dans la première limite des grands îlots, c'est-à-dire $w \gg \sigma_0, \sigma_\eta$, on a [voir Figure 5.6] :

$$\delta p^{eq} \sim \frac{\kappa w}{X} \cdot \cos(Y + Z) \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}^{eq} &\sim \frac{\xi_{bal}^2}{\tau_{inter} w X^3} \sin(Y + Z) \mathbf{e}_X \\ &+ -\frac{\xi_{bal}^2}{\tau_{inter} k_{y0} w^2 X^4} \cos(Y + Z) \mathbf{e}_Y \end{aligned} \quad (5.70)$$

On retrouve à un coefficient près, pour la perturbation de pression δp^{eq} (5.69) calculée en $Y = 0$, $Z = 0$, l'expression calculée sans turbulence (5.45) à l'extérieur de la chaîne d'îlots.

Dans la seconde limite des grands îlots, c'est-à-dire pour $w \sim \sigma_0 \gg \sigma_\eta$, il faut tenir compte du terme de diffusion perpendiculaire dans (5.60), et il n'existe alors pas de solution analytique au système (5.59, 5.60).

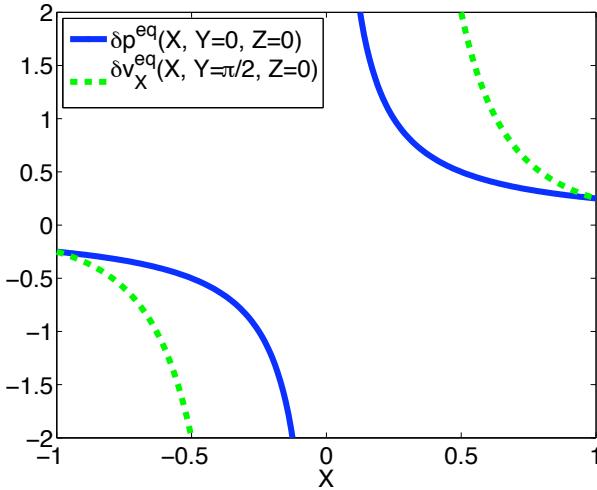


FIG. 5.6 – Allure de l'amplitude des harmoniques d'équilibre de la pression $\delta p^{eq}(X, Y = 0, Z = 0)$ (traits pleins) et de la vitesse radiale $v_X^{eq}(X, Y = \frac{\pi}{2}, Z = 0)$ (traits pointillés), dans la limite $w \gg \sigma_0, \sigma_c$.

Ilots magnétiques stationnaires et flux convectif d'équilibre

En présence d'un écoulement turbulent, le bilan d'énergie du plasma diffère de l'équation (5.23). Si on s'intéresse uniquement au transport radial, qui a un effet déconfinant, on obtient le *bilan d'énergie radial* :

$$\langle Q_{conv} \rangle + \chi_{\perp} \left| \frac{d\langle \bar{p} \rangle}{dx} \right| + \langle Q_{RMP} \rangle = Q_{tot} \quad (5.71)$$

où $Q_{RMP} = \chi_{\parallel} \langle \frac{\partial \psi_{RMP}}{\partial y} \nabla_{\parallel} p \rangle_{y,z}$ représente le flux de chaleur directement induit par les perturbations résonnantes, et $Q_{conv} = \langle \delta p \delta v_x \rangle_{y,z}$ est le flux convectif, où δv_x désigne la partie harmonique de la vitesse radiale. La notation $\langle \dots \rangle$ désigne une moyenne temporelle.

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la chaîne d'îlots magnétiques stationnaires induit par les perturbations résonnantes et centrée en $x = 0$ crée deux types de structures stationnaires : des structures de pression stationnaires \tilde{p}^{eq} ainsi qu'un écoulement stationnaire $\delta \mathbf{v}^{eq}$. L'écoulement stationnaire $\delta \mathbf{v}^{eq}$ possèdant une composante radiale, la combinaison de ces deux types de structure va engendrer un flux convectif d'équilibre. On voit donc que l'on peut décomposer le flux convectif radial Q_{conv} en une partie turbulente et une partie d'équilibre indirectement induite par les perturbations résonnantes :

$$Q_{conv} = Q_{conv}^{turb}(x, t) + Q_{conv}^{eq}(x) \quad (5.72)$$

où $Q_{conv}^{turb}(x, t) = \langle \delta p^{turb} \delta v_x^{turb} \rangle_{y,z}$ est le flux convectif turbulent et $Q_{conv}^{eq}(x) = \langle \delta p^{eq} \delta v_x^{eq} \rangle_{y,z}$ désigne le flux convectif d'équilibre.

Dans la première limite des grands îlots, les expressions (5.69, 5.70) donnent pour le flux convectif d'équilibre :

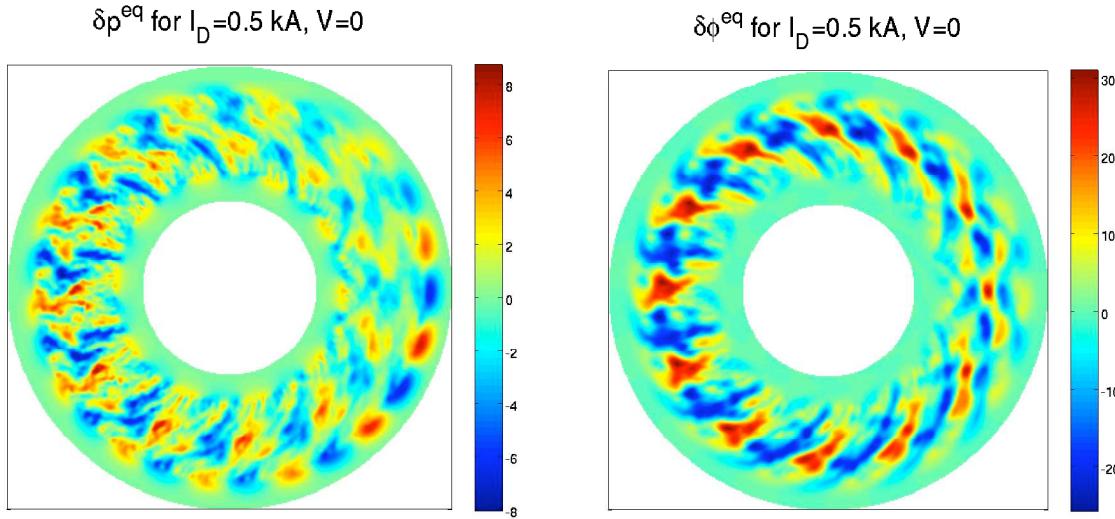


FIG. 5.7 – Structures périodiques stationnaires engendrées par les perturbations résonnantes : Coupe poloïdale montrant les harmoniques stationnaires de pression δp^{eq} (gauche) et de potentiel électrique $\delta\phi^{eq}$ (droite) générées par les perturbations résonnantes pour un courant perturbatif $I_D = 0.5 \text{ kA}$, en absence d'écoulement moyen ($V = 0$). Le flux de chaleur total est $Q_{tot} = 10$.

$$Q_{conv}^{eq}(X) \sim \frac{\kappa \xi_{bal}^2}{\tau_{inter}} \cdot \frac{1}{X^4}, \quad \text{pour } w \gg \sigma_0, \sigma_c \quad (5.73)$$

Résultats des simulations 3D sans écoulement moyen

Nous avons effectué des simulations numériques sans écoulement moyen (donc sans barrière de transport), c'est-à-dire pour $V = 0$. On observe, dans la couche stochastique, une réduction du flux convectif par les perturbations résonnantes [voir Figure 5.8]. On remarque que les perturbations résonnantes génèrent indirectement un flux convectif d'équilibre [voir Figure 5.9]. Il existe trois contributions au flux convectif d'équilibre Q_{conv}^{eq} . En effet, on a :

$$Q_{conv}^{eq} = \sqrt{\sum |\tilde{p}^{eq}|^2 \cdot \sum |\tilde{v}_x^{eq}|^2} \cdot \cos \delta^{eq} \quad (5.74)$$

La Figure 5.7 montre une coupe poloïdale issue d'une simulation 3D, montrant les structures périodiques stationnaires de pression δp^{eq} engendrées par les perturbations résonnantes . On remarque que ces structures sont détruites côté faible champ, alors qu'elles sont quasiment axisymétriques côté fort champ. Des structures similaires de potentiel sont également présentes.

La Figure 5.10 montre l'effet des perturbations résonnantes sur les trois contributions au flux de chaleur d'équilibre (5.74). On observe qu'une augmentation du courant perturbatif I_D entraîne une augmentation de l'amplitude des harmoniques stationnaires de

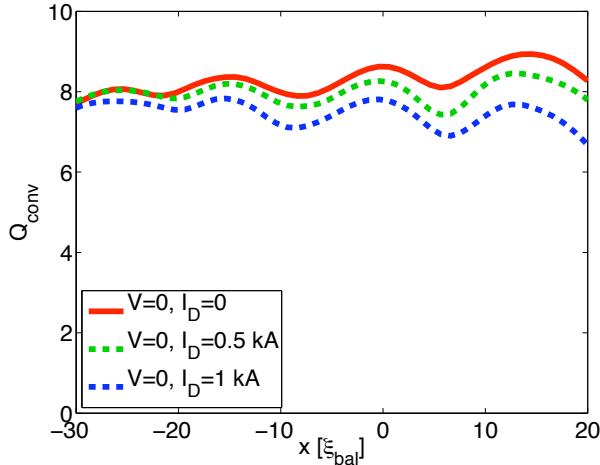


FIG. 5.8 – Réduction du flux convectif Q_{conv} par les perturbations résonnantes , en absence d’écoulement moyen ($V = 0$) pour un flux total $Q_{tot} = 10$.

pression $|\tilde{p}^{eq}|$ et de vitesse radiale $|\tilde{v}_x^{eq}|$, et une réduction du terme de phase $\cos \delta^{eq}$ (donc une augmentation du déphasage δ^{eq}) entre $|\tilde{p}^{eq}|$ et $|\tilde{v}_x^{eq}|$.

5.4.3 Effets des perturbations résonnantes sur l’écoulement complet

En réalité, même en absence d’écoulement cisallé forcé ($V_F = 0$), il faut considérer l’effet des perturbations résonnantes sur l’écoulement moyen $V(x, t)$ auto-généré par la turbulence. En effet, en présence de perturbations résonnantes , l’équation d’évolution (2.55) de l’écoulement moyen V possède un terme supplémentaire lié aux perturbations résonnantes [7] :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \langle \delta v_x \delta v_y \rangle_{y,z} + A_{RMP} \quad (5.75)$$

où $A_{RMP} = -\langle \frac{\partial \psi_{RMP}}{\partial y} \nabla_{||} \phi \rangle_{y,z}$ est un terme génératriceur d’écoulement (ou une friction) lié aux perturbations résonnantes . L’écoulement moyen généré par les perturbations résonnantes s’oppose à l’écoulement moyen auto-généré par la turbulence, et il en résulte que le flux convectif n’est que faiblement modifié dans la couche stochastique [voir Figure 5.11], comparé au cas sans écoulement moyen [Figure 5.8].

On remarque que l’on peut aussi évaluer la contrainte de Reynolds d’équilibre définie par $\tau_{Reyn}^{eq}(x) = \langle \delta v_x^{eq} \delta v_y^{eq} \rangle_{y,z}$, et l’on constate qu’elle est nulle $\tau_{Reyn}^{eq} = 0$ dans le modèle simplifié sans écoulement ($V = 0$) où l’on ne considère que l’harmonique principale des perturbations résonnantes (5.50,5.51), quel que soit la région considérée, car les harmoniques d’équilibre (m_0 , n_0) des vitesses radiale δv_x^{eq} et poloïdale δv_y^{eq} sont en quadrature de phase, c’est-à-dire qu’elles sont déphasées de $\pi/2$.

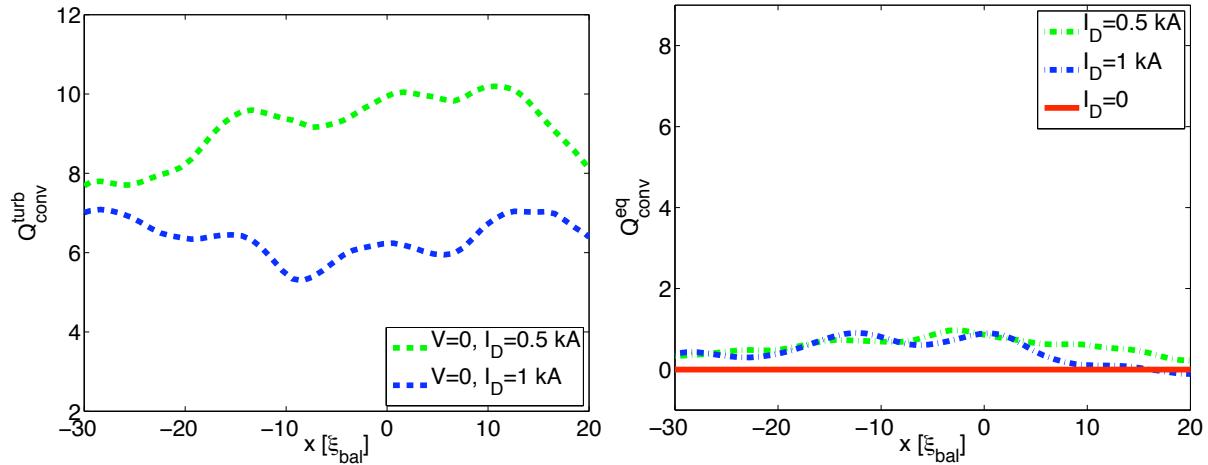


FIG. 5.9 – Composante turbulente et composante d'équilibre du flux convectif, en absence d'écoulement moyen ($V = 0$). Le flux de chaleur total est $Q_{\text{tot}} = 10$

5.5 Effets des perturbations résonnantes sur la dynamique d'une barrière de transport

Nous avons effectué des simulations 3D avec, à la fois, un écoulement cisaillé forcé et des perturbations résonnantes . Pour cela, on ajoute au système (2.53,2.54), un écoulement poloïdal cisaillé forcé $\mathbf{V}_F = V_F(x) \mathbf{e}_y$, en forçant la composante moyenne du potentiel électrique. L'écoulement forcé a le profil de tangente hyperbolique suivant [7] :

$$V_F(x) = \Omega \cdot d \cdot \tanh\left(\frac{x}{d}\right) \quad (5.76)$$

où Ω et d désignent, respectivement, le taux de cisaillement et l'épaisseur de la couche cisaillée.

En absence, de perturbations résonnantes , l'écoulement cisaillé forcé \mathbf{V}_F crée une barrière de transport qui n'est pas stationnaire mais qui relaxe quasi-périodiquement, donnant lieu à des oscillations de relaxation (voir Chapitre 4).

On observe que lors de l'application des perturbations résonnantes , le plasma bifurque vers un nouveau régime sans oscillations de relaxations de la barrière de transport [voir Figure 5.12]. Malheureusement, cette perte des relaxations s'accompagne d'une réduction du contenu énergétique du plasma ou *perte de confinement*. Cependant, pour un courant inférieur ou égal à 1 kA dans les bobines perturbatives, la perte de confinement reste faible. Pour des courants perturbatifs supérieurs à 1 kA, la perte de confinement devient importante. Par exemple, pour un courant perturbatif de 1.5 kA, le contenu énergétique du plasma est réduit de $\simeq 20\%$ par rapport au cas sans perturbations [voir Figure 5.13].

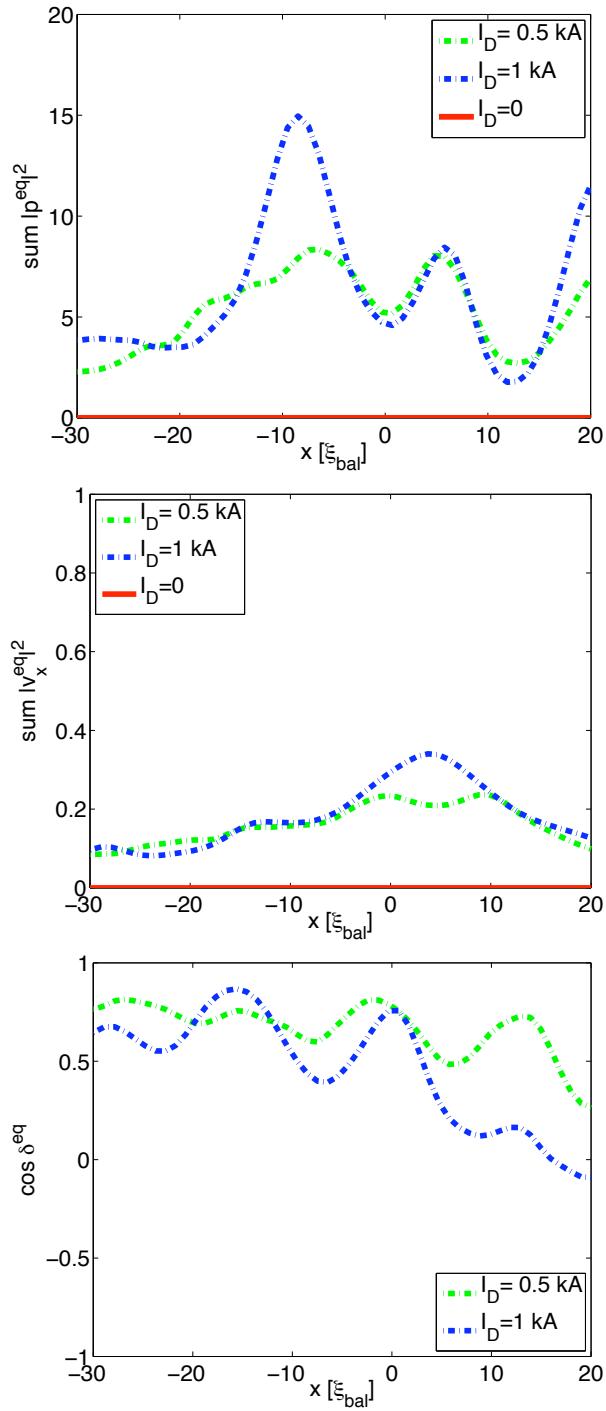


FIG. 5.10 – Contributions au flux convectif d'équilibre : effets des perturbations résonnantes sur les harmoniques de pression $\sum |\tilde{p}^{eq}|^2$, de vitesse radiale $\sum |\tilde{v}_x^{eq}|^2$ et sur le terme de phase $\cos \delta^{eq}$, en absence d'écoulement moyen ($V = 0$).

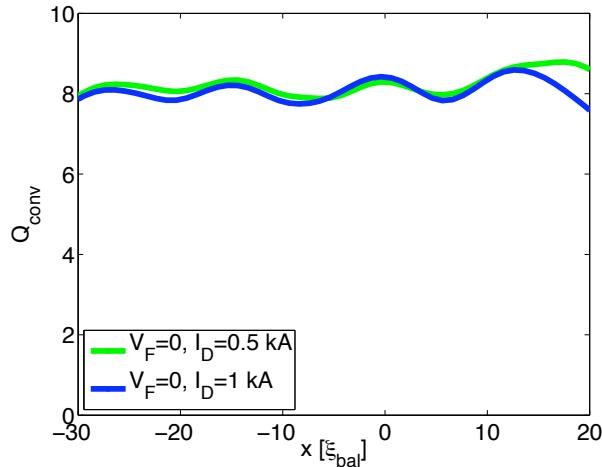


FIG. 5.11 – Modification du flux convectif Q_{conv} par les perturbations résonnantes , en absence d'écoulement cisaillé forcé ($V_F = 0$) mais avec écoulement moyen auto-généré. Le flux de chaleur total est $Q_{tot} = 10$.

5.6 Effets des perturbations résonnantes sur la géométrie d'une barrière de transport

Comme il a été montré au chapitre 4, une barrière de transport réduit le flux de chaleur convectif dans la direction radiale. Une fraction du flux convectif de chaleur (et de particules) est absorbée par la barrière de transport. Par analogie avec l'optique physique, on peut alors définir un *coefficient de transmission local* $\alpha(x)$ au voisinage de la surface de résonnance $x = 0$:

$$0 \leq \alpha(x) = \frac{\langle Q_{conv} \rangle}{\langle Q_{conv}^{\text{ref}} \rangle} \leq 1 \quad (5.77)$$

où $\langle Q_{conv} \rangle(x)$ désigne le flux de chaleur en présence de la barrière de transport, $\langle Q_{conv}^{\text{ref}} \rangle(x)$ le flux de chaleur sans barrière et $\langle \dots \rangle$ est la moyenne en temps. Un coefficient de transmission égal à 1 à la position x correspond à l'absence de barrière de transport en x et un coefficient de transmission nul à la position x correspondrait au cas d'une barrière idéale en ce point. En l'absence de perturbations résonnantes , du fait de la conservation du flux de chaleur total, une barrière de transport correspond à une région du plasma où le gradient de pression radial est localement augmenté.

5.6.1 Géométrie de la barrière sans perturbations résonnantes

En absence de perturbations résonnantes , les seuls flux présents sont le flux convectif Q_{conv} et le flux collisionnel (dû aux collisions entre particules) $\chi_{\perp 0} |\frac{d\langle \bar{p} \rangle}{dx}|$. Le flux convectif radial peut alors être exprimé directement en fonction du gradient de pression : $\langle Q_{conv} \rangle(x) = Q_{tot} - \chi_{\perp 0} |\frac{d\langle \bar{p} \rangle}{dx}|$, et le gradient de pression sans barrière est faible com-

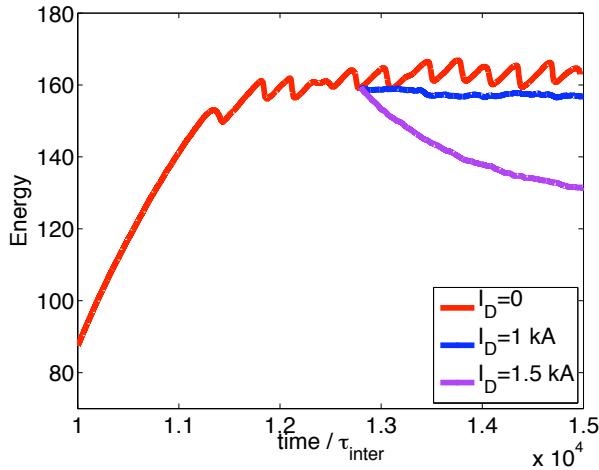


FIG. 5.13 – Dégradation du confinement pour de fortes valeurs du courant perturbatif I_D .

paré au flux total ce qui donne $\langle Q_{conv}^{\text{ref}} \rangle(x) = (1 - \epsilon)Q_{tot}$, avec $\epsilon = \frac{\chi_{\perp 0}}{Q_{tot}} \left| \frac{d\langle \bar{p}^{\text{ref}} \rangle}{dx} \right| \ll 1$. Le coefficient de transmission local a alors pour expression :

$$\alpha_0(x) = (1 + \epsilon) \left(1 - \frac{\chi_{\perp 0}}{Q_{tot}} \left| \frac{d\langle \bar{p} \rangle^0}{dx} \right| \right) \quad (5.78)$$

$$\sim 1 - \frac{\chi_{\perp 0}}{Q_{tot}} \left| \frac{d\langle \bar{p} \rangle^0}{dx} \right| \quad (5.79)$$

où l'indice 0 désigne le cas sans perturbations résonnantes .

Il est donc naturel d'assimiler la barrière de transport directement au profil radial du gradient de pression [voir Figure 5.14, cas $I_D = 0$]. Les deux paramètres caractéristique de la barrière de transport sont alors :

- sa "hauteur" $\kappa_{max} = \left| \frac{d\langle \bar{p} \rangle^0}{dx} \right|_{max}$, correspondant au gradient de pression maximal.
- son épaisseur $e = L_p$, correspondant à la *longueur de gradient* du gradient de pression.

On a alors l'image simple suivante : Plus la barrière sera haute et épaisse, plus elle sera efficace. Nous verrons dans la suite que cette interprétation n'est plus justifiée en présence de perturbations résonnantes .

5.6.2 Effets de perturbations résonnantes sur la géométrie de la barrière

En présence de perturbations résonnantes , la barrière de transport subit une "érosion" au voisinage de la surface de résonnance [voir Figure 5.14]. Dû aux perturbations

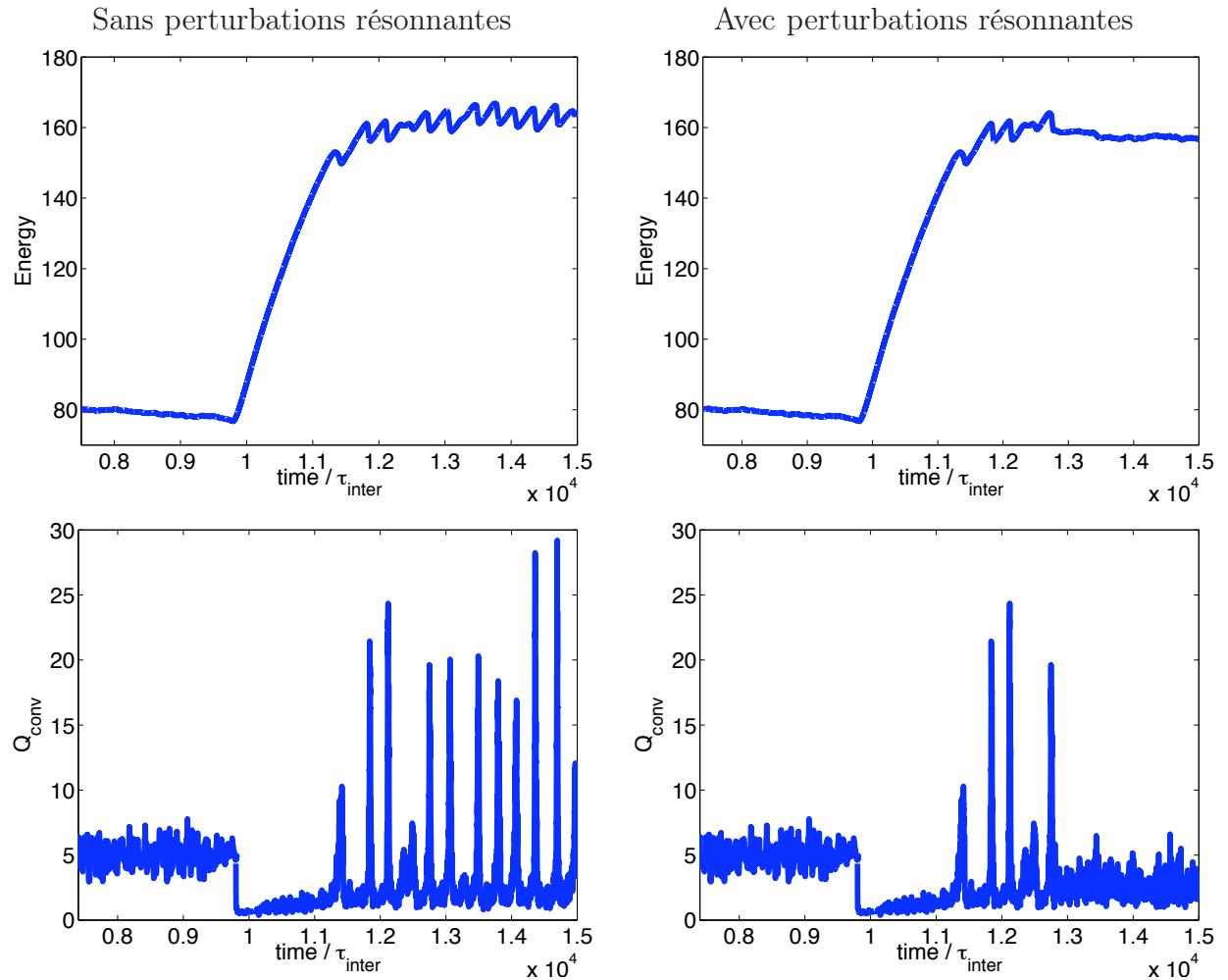


FIG. 5.12 – Effet stabilisant des perturbations résonnantes pour un courant perturbatif $I_D = 1 \text{ kA}$. Le courant perturbatif est appliqué à une date $t \simeq 1.3 \times 10^4 \tau_{\text{inter}}$ de la simulation 3D. On voit une stabilisation des oscillations de relaxation par rapport au cas de référence sans perturbations résonnantes ($I_D = 0$).

résonnantes, un nouveau flux collisionnel doit être pris en compte dans le bilan d'énergie : le flux Q_{RMP} qui provient d'un transport stochastique lié aux perturbations résonnantes. De plus, en présence de perturbations résonnantes, il y a apparition d'une composante d'équilibre (stationnaire) des harmoniques de pression \tilde{p} et de potentiel électrique $\tilde{\phi}$. Il convient alors d'écrire les champs p et ϕ sous la forme :

$$p = \bar{p}(x, t) + \tilde{p}^{eq}(x)e^{i(k_y y + k_z z)} + \tilde{p}^{turb}(x, t)e^{i(k_y y + k_z z)} + c.c \quad (5.80)$$

$$\phi = \bar{\phi}(x, t) + \tilde{\phi}^{eq}(x)e^{i(k_y y + k_z z)} + \tilde{\phi}^{turb}(x, t)e^{i(k_y y + k_z z)} + c.c \quad (5.81)$$

où les nombres d'onde k_{y0} et k_{z0} sont définis par (5.22), \tilde{p}^{eq} , $\tilde{\phi}^{eq}$ désignent les composantes harmoniques d'équilibre et \tilde{p}^{turb} , $\tilde{\phi}^{turb}$ désignent les composantes harmoniques turbulentes.

Le bilan d'énergie (5.71) s'écrit alors sous la forme :

$$Q_{conv}^{eq} + \langle Q_{conv}^{turb} \rangle + \chi_{\perp 0} \left| \frac{d\langle \tilde{p} \rangle}{dx} \right| + \langle Q_{RMP} \rangle = Q_{tot} \quad (5.82)$$

où $Q_{conv}^{eq}(x) = \langle \tilde{p}^{eq} \delta \mathbf{v}^{eq} \rangle_{y,z}$ est le flux convectif d'équilibre et $Q_{conv}^{turb}(x, t) = \langle \tilde{p}^{turb} \tilde{v}_x^{turb} \rangle_{y,z}$ est le flux convectif turbulent.

Dans le cas général $\langle Q_{RMP} \rangle \neq 0$, $Q_{conv}^{eq} \neq 0$, l'influence des perturbations résonnantes fait que le coefficient de transmission de la barrière n'a plus une dépendance linéaire en fonction du gradient de pression radial. Le coefficient de transmission local n'est donc plus une bonne analogie pour la barrière de transport.

Du fait de la présence de chaines d'îlots résiduels [voir Figure 5.4], selon la région considérée, on distingue trois comportements limites.

Région de la chaîne d'îlots

Dans la région de la chaîne d'îlots $|x| \ll d, w/2$, où d désigne l'épaisseur de la couche cisaillée de l'écoulement moyen (que l'on suppose centré en $x = 0$), le flux convectif turbulent est réduit par l'écoulement cisaillé et réduit additionnellement par les perturbations résonnantes [voir Figure 5.8] donc on a $\langle Q_{conv}^{turb} \rangle / Q_{tot} \ll 1$ [Fig 5.15a]. De plus, un flux convectif d'équilibre $\langle Q_{conv}^{eq} \rangle$ indirectement lié aux perturbations résonnantes apparaît [Fig. 5.15b]. Ce flux convectif d'équilibre est une conséquence de la présence d'une chaîne d'îlots magnétiques résiduels à la position $r = r_0$ ($r_0 = 0.45$ mètres dans TEXTOR) correspondant à la position $x = 0$ [voir Figure 5.4]. De plus, le flux de chaleur induit par les perturbations résonnantes est faible au voisinage de $x = 0$: $\langle Q_{RMP} \rangle / Q_{tot} \ll 1$ [voir Figure 5.14c]. Pour cela, le bilan d'énergie (5.82) se simplifie en :

$$Q_{conv}^{eq} + \chi_{\perp 0} \left| \frac{d\langle \tilde{p} \rangle}{dx} \right| \sim Q_{tot} \quad (5.83)$$

Dans la région $x \sim 0$, l'apparition du flux convectif d'équilibre Q_{conv}^{eq} est donc compensée par une réduction du gradient de pression, observée sur la Figure 5.14a, similaire à l'aplatissement du profil de pression dans le cas sans turbulence (voir section 4.4.1)

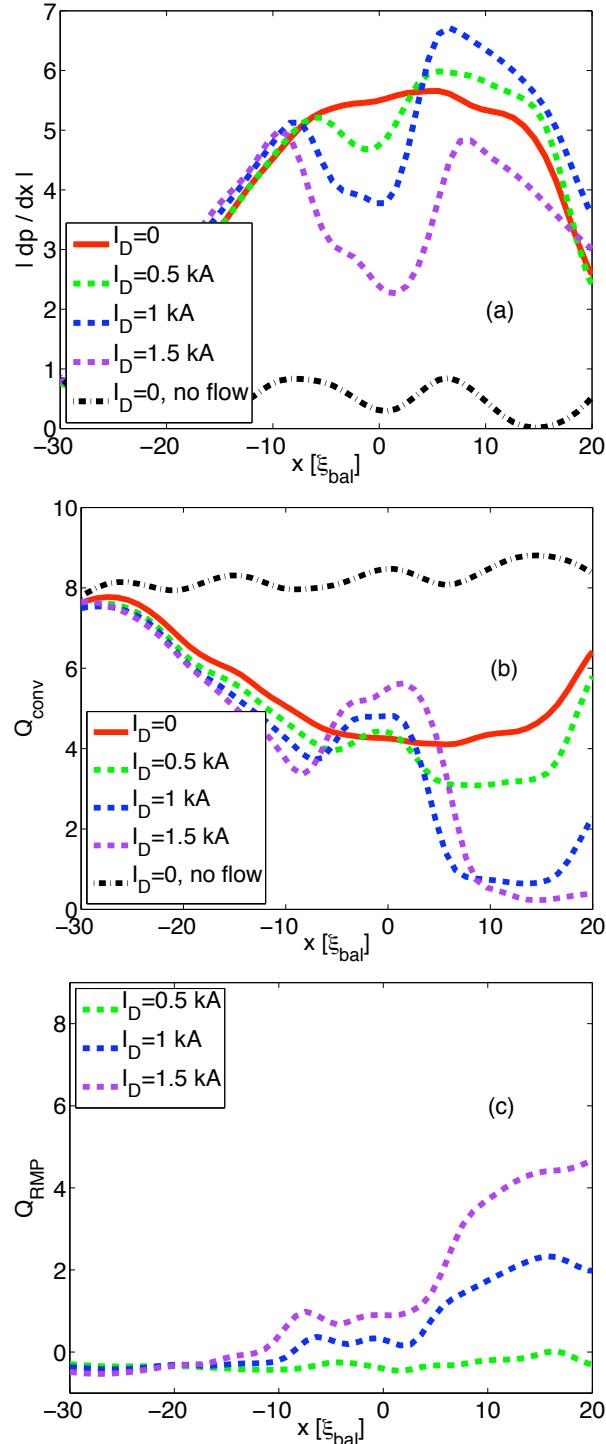


FIG. 5.14 – Profils radiaux : (a) gradient de pression $| \frac{d\langle \bar{p} \rangle}{dx} |$, (b) flux de chaleur convectif $\langle Q_{conv} \rangle$ et (c) flux de chaleur induit par les perturbations résonnantes $\langle Q_{RMP} \rangle$, pour différentes valeurs du courant perturbatif I_D , en présence de perturbations résonnantes et de l'écoulement cisaiillé forcé $V_F(x)$ avec taux de cisaillement $\Omega = 4$ [τ_{inter}^{-1}] et une épaisseur de la couche cisaiillée de $d = 20\%$ [L_x].

qui apparait dans l'étude de certaines macro-instabilités du plasma comme les modes de déchirement ("tearing modes" en anglais) [20].

Région non-stochastique externe

Pour $r < r_0$, loin de la surface de résonance mais dans la couche cisaillée, c'est-à-dire $-d \ll x \ll -\frac{w}{2}$, le flux convectif d'équilibre est faible $Q_{conv}^{eq}/Q_{tot} \ll 1$, puisque qu'il n'y a pas de chaîne d'îlots résiduels dans cette région, donc le flux Q_{conv}^{eq} ne joue aucun rôle. Le flux convectif turbulent $\langle Q_{conv}^{turb} \rangle$ est, quant à lui, réduit par l'écoulement moyen cisaillé. De plus, le flux induit par les perturbations résonnantes $\langle Q_{RMP} \rangle$ est faible dans cette région $\langle Q_{RMP} \rangle/Q_{tot} \ll 1$. Il en résulte que le bilan d'énergie (5.82) se réduit à :

$$\langle Q_{conv}^{turb} \rangle + \chi_{\perp 0} \left| \frac{d\langle \bar{p} \rangle}{dx} \right| \sim Q_{tot} \quad (5.84)$$

De plus, dans cette région, le flux convectif turbulent dépend faiblement du courant perturbatif I_D [voir Figure 5.15a] car l'amplitude du profil radial $\psi_m(x)$ des perturbations résonnantes est faible dans cette région [voir Figure 5.3], donc le profil de pression n'est que faiblement modifié.

Région stochastique externe

Pour $r > r_0$, loin de la surface de résonance mais dans la couche cisaillée, c'est-à-dire $\frac{w}{2} \ll x \ll d$, le flux convectif d'équilibre est faible $Q_{conv}^{eq}/Q_{tot} \ll 1$ car il n'y a pas de chaîne d'îlots résiduels. Le bilan d'énergie (5.82) se réduit donc à :

$$\langle Q_{conv}^{turb} \rangle + \chi_{\perp 0} \left| \frac{d\langle \bar{p} \rangle}{dx} \right| + \langle Q_{RMP} \rangle \sim Q_{tot} \quad (5.85)$$

Une augmentation du courant perturbatif I_D crée une augmentation du flux induit par les perturbations résonnantes $\langle Q_{RMP} \rangle$, mais cela induit également une diminution du flux convectif turbulent $\langle Q_{conv}^{turb} \rangle$, liée au transport stochastique [voir Figure 5.15a]. Il existe donc une compétition entre le flux $\langle Q_{RMP} \rangle$ et le flux $\langle Q_{conv}^{turb} \rangle$, ce qui peut expliquer le fait que, dans la région $\frac{w}{2} \ll x \ll d$, le gradient de pression augmente pour de faibles courants perturbatifs et diminue pour des courants plus intenses [voir Figure 5.14].

5.6.3 Rôle joué par les composantes du flux convectif d'équilibre dans la modification de celui-ci.

Le flux convectif d'équilibre généré par la chaîne d'îlots résiduels semble jouer un rôle majeur dans la stabilisation des oscillations de relaxation. Il existe trois contributions au flux convectif d'équilibre Q_{conv}^{eq} (voir expression 5.74).

La figure 5.16 montre l'influence de l'amplitude I_D des perturbations résonnantes sur ces contributions.

Comme dans le cas sans écoulement ($V = 0$) [voir Figure 5.10], lorsque l'on augmente

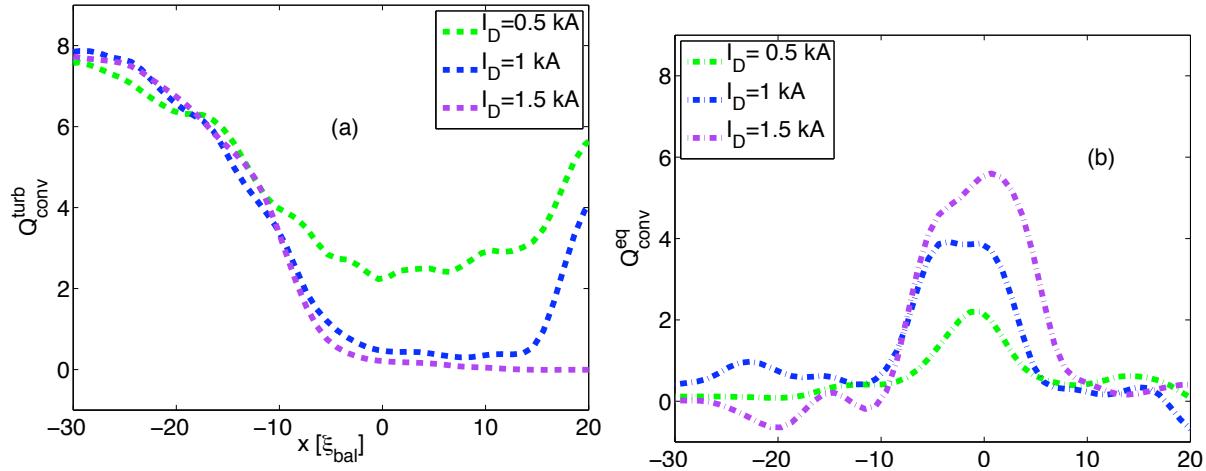


FIG. 5.15 – Composante turbulente Q_{conv}^{turb} et composante d'équilibre Q_{conv}^{eq} du flux convectif. Le flux de chaleur total est $Q_{tot} = 10$

l'amplitude I_D des perturbations résonnantes , on observe une augmentation de l'amplitude des harmoniques de pression et de vitesse radiale, ainsi qu'une diminution du déphasage entre les deux (diminution du terme de phase). Toutefois, la diminution du déphasage ne suffit pas à compenser l'augmentation des harmoniques de pression et de vitesse radiale. D'après ces résultats, on en conclut que c'est la somme des contributions des harmoniques de pression stationnaires et de l'écoulement radial stationnaire qui engendrent le flux convectif d'équilibre et que l'on ne peut pas négliger l'effet de l'une de ces composantes devant l'autre.

La Figure (5.17) montre deux coupes poloïdales issues des simulations 3D montrant les structures périodiques stationnaires de pression δp^{eq} pour deux valeurs différentes du courant perturbatif $I_D = 0.2 \text{ kA}$ et $I_D = 0.5 \text{ kA}$. En absence d'écoulement cisaillé ($V = 0$), on observe que ces structures ont une grande extension radiale (voir Figure 5.7 de la section 5.4.2), alors qu'en présence de la barrière, les structures sont fortement cisaillées, réduisant leur extension radiale. On note cependant que dans le cas avec barrière et perturbations résonnantes, ces structures ont une amplitude plus importante que sans barrière, et leur amplitude augmente lorsque le courant perturbatif I_D augmente.

5.7 Analyse du mécanisme de stabilisation des oscillations de relaxation

En analysant le profil du gradient de pression [Figure 5.14a] en présence de perturbations résonnantes ($I_D \neq 0$), on observe une réduction du gradient de pression au centre de la barrière, comparé au cas non-perturbé ($I_D = 0$), comme présenté dans le paragraphe précédent. Il semble donc exister une relation entre cette diminution locale du gradient de pression au voisinage de la surface résonnante principale $q_0 = m_0/n_0$ (ici, $q_0 = 3$) et la stabilisation des oscillations de relaxation [voir Figure 5.13].

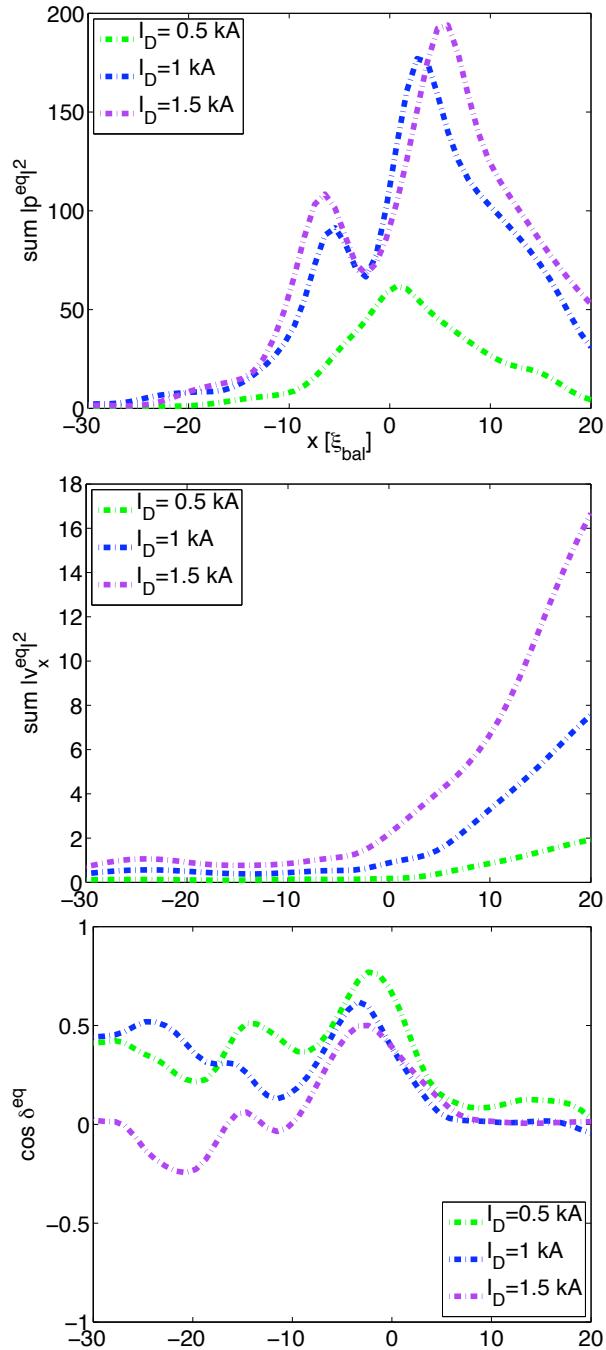


FIG. 5.16 – Contributions au flux convectif d'équilibre : effets des perturbations résonnantes sur les harmoniques de pression $\sum |\tilde{p}^{eq}|^2$, de vitesse radiale $\sum |\tilde{v}_x^{eq}|^2$ et sur le terme de phase $\cos \delta^{eq}$.

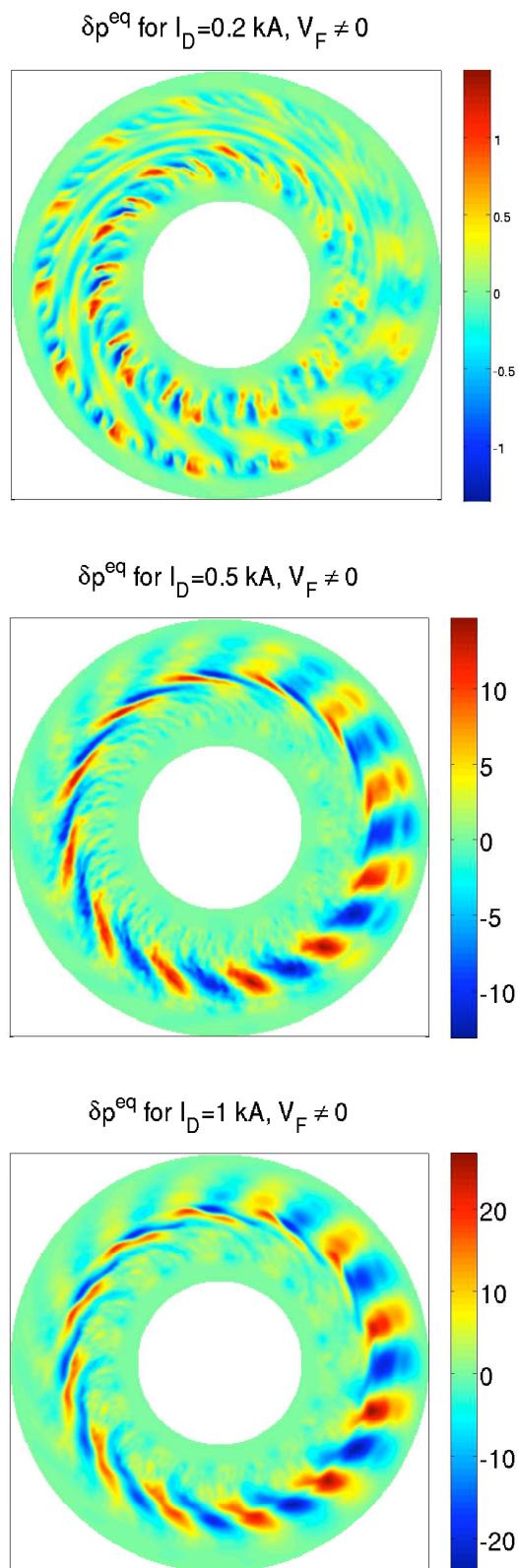


FIG. 5.17 – Effets des perturbations résonnantes en présence d'une barrière de transport : Coupe poloïdale montrant les harmoniques stationnaires de pression δp^{eq} générées par les perturbations résonnantes pour un courant perturbatif $I_D = 0.2 \text{ kA}$ (haut), pour $I_D = 0.5 \text{ kA}$ (milieu) et pour $I_D = 1 \text{ kA}$ (bas). Le flux de chaleur total est $Q_{\text{tot}} = 10$.

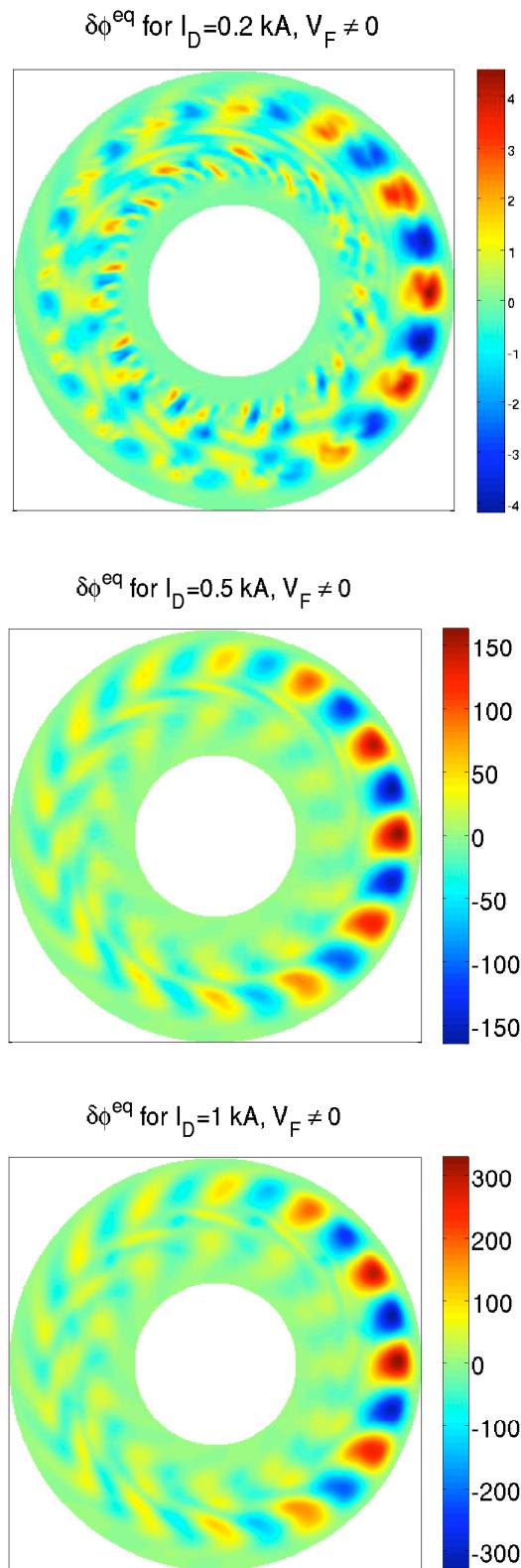


FIG. 5.18 – Effets des perturbations résonnantes en présence d'une barrière de transport : Coupe poloïdale montrant les harmoniques stationnaires de potentiel électrique $\delta\phi^{eq}$ générées par les perturbations résonnantes pour un courant perturbatif $I_D = 0.2 \text{ kA}$ (haut), pour $I_D = 0.5 \text{ kA}$ (milieu) et pour $I_D = 1 \text{ kA}$ (bas). Le flux de chaleur total est $Q_{tot} = 10$.

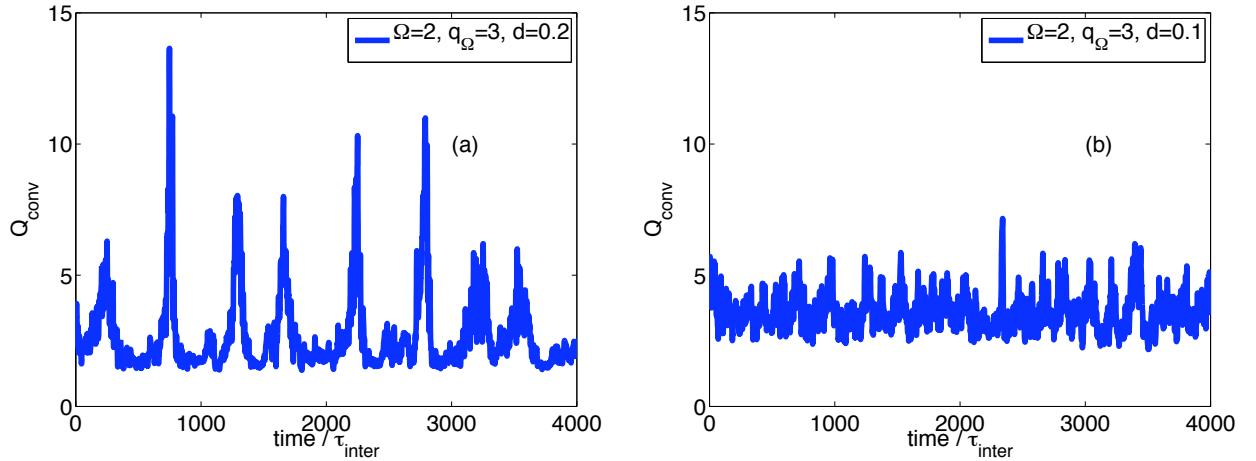


FIG. 5.19 – Effets de la largeur d de la couche cisaillée sur la dynamique des relaxations d'une barrière de transport : évolution temporelle du flux convectif radial, en présence d'un écoulement moyen cisaillé forcé avec taux de cisaillement $\Omega = 2$, pour a) $d = 20\%$ and b) $d = 10\%$.

Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons effectué des simulations sans perturbations résonnantes ($I_D = 0$) avec l'écoulement cisaillé forcé $V_F(x)$ (5.76) pour différentes valeurs de la largeur d de la couche cisaillée. La Figure 5.19, montre l'évolution temporelle du flux convectif Q_{conv} , dans un cas sans perturbations résonnantes , pour deux valeurs de $d = 20\%$ et $d = 10\%$, pour un taux de cisaillement $\Omega = 2$. En comparant la Figure 5.12 à la Figure 5.19, on remarque une ressemblance frappante entre les effets d'une diminution de la largeur de la couche cisaillée d et les effets des perturbations résonnantes sur la dynamique des relaxations d'une barrière de transport. Nos simulations suggèrent donc que l'effet principal des perturbations résonnantes en présence d'une barrière de transport est de modifier les propriétés géométriques de la barrière, créant ainsi une réduction de l'amplitude et une augmentation de la fréquence de ces oscillations de relaxation.

Nous avons également effectué des simulations *sans* perturbations résonnantes ($I_D = 0$), avec un profil d'écoulement forcé $V_F^{\text{mod}}(x)$ qui permet de créer une réduction locale du gradient de pression [voir Figure 5.20] similaire à celle générée par les perturbations résonnantes .

Nous avons choisi un profil d'écoulement forcé de la forme [voir Figures 5.21] :

$$V_F^{\text{mod}}(x) = \Omega^{\text{mod}} \cdot d_\pm \cdot \left(\tanh\left(\frac{x - x_\Omega}{d_\pm}\right) + \tanh\left(\frac{x + x_\Omega}{d_\pm}\right) \right) \quad (5.86)$$

L'écoulement associé à ce profil est la somme de deux écoulements cisaillés centrés en $x = \pm x_\Omega$ (ce qui correspond aux positions $q = 3 \pm 0.2$) et ayant chacun un taux de cisaillement Ω et une largeur de la couche cisaillée d_\pm .

On observe alors une modification des oscillations de relaxation [voir Figure 5.22] qui rappelle celle produite par les perturbations résonnantes .

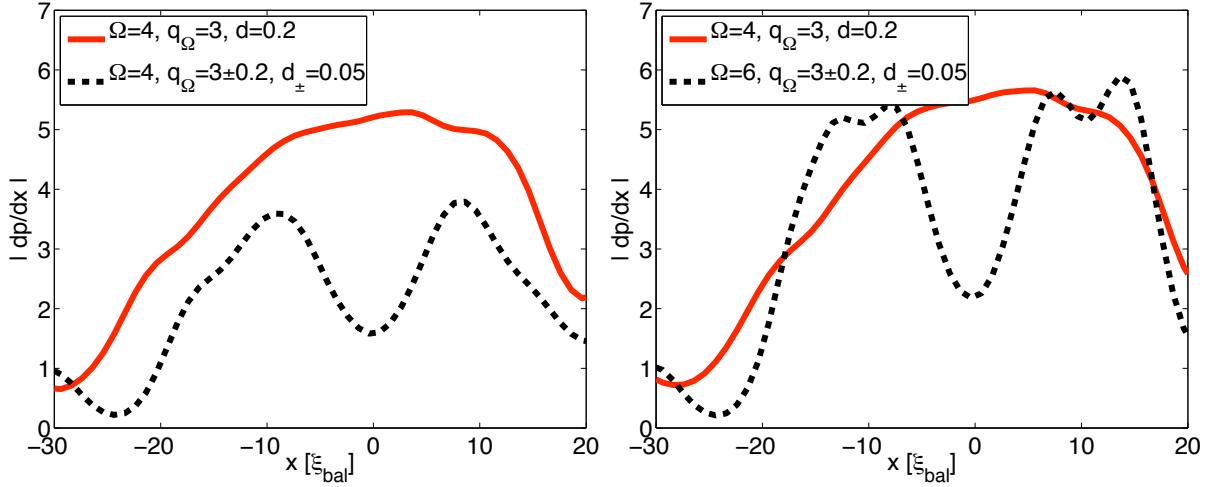


FIG. 5.20 – Effets d'un profil d'écoulement forcé modifié $V_F^{\text{mod}}(x)$ sur le gradient de pression non-perturbé ($I_D = 0$) : profil radial du gradient de pression $\left| \frac{d\langle \bar{p} \rangle}{dx} \right|$ pour deux profils d'écoulement forcé $V_F^{\text{mod}}(x)$ avec taux de cisaillement $\Omega^{\text{mod}} = 4$ (gauche) et $\Omega^{\text{mod}} = 6$ (droite).

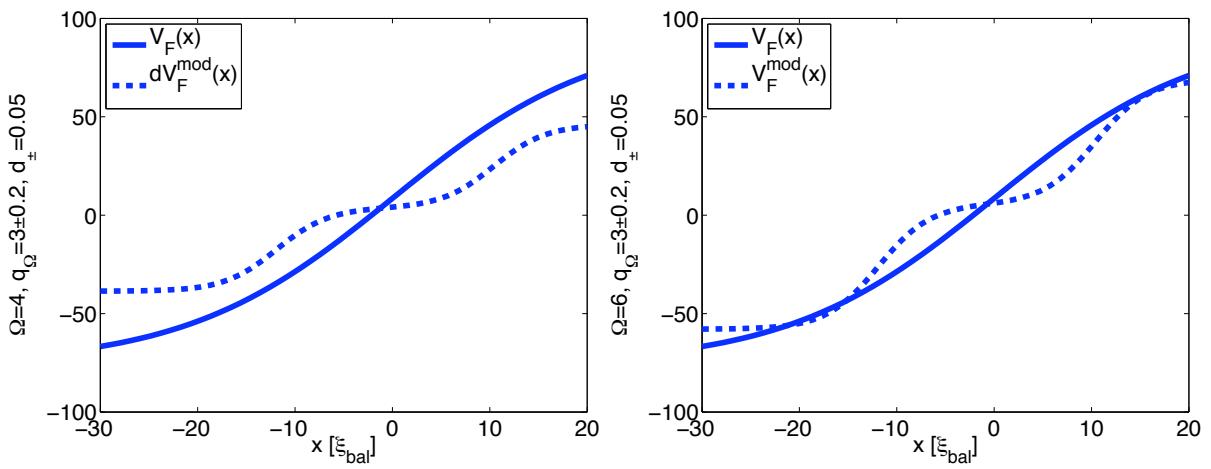


FIG. 5.21 – Comparaison des profils de l'écoulement forcé $V_F(x)$ (taux de cisaillement $\Omega = 4$, largeur $d = 20\%$) et de l'écoulement forcé modifié $V_F^{\text{mod}}(x)$ pour une valeur du taux de cisaillement de $\Omega^{\text{mod}} = 4$ (gauche) et $\Omega^{\text{mod}} = 6$ (droite) et $d \pm = 5\%$.

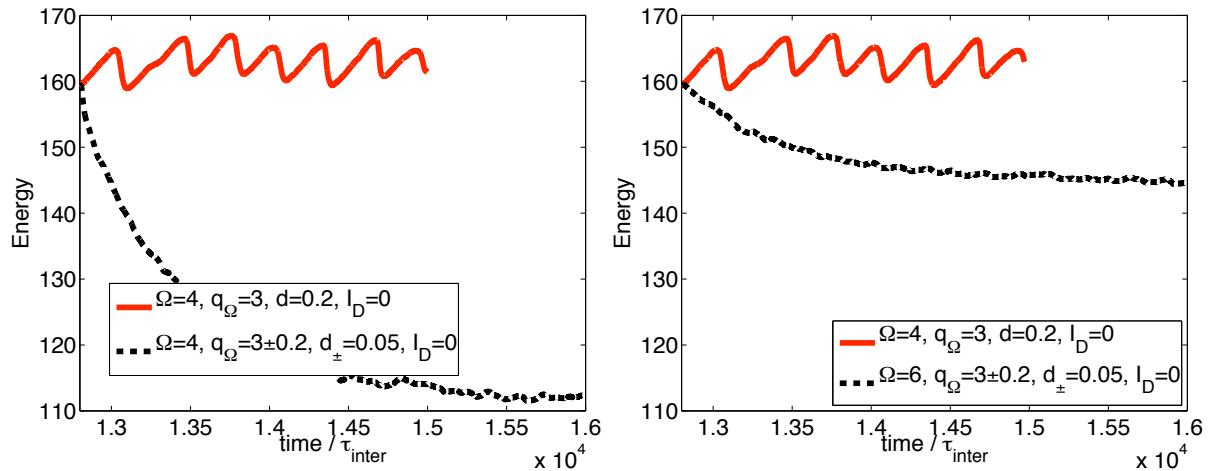


FIG. 5.22 – Effets d'un profil d'écoulement forcé modifié $V_F^{\text{mod}}(x)$ sur les oscillations de relaxation pour $I_D = 0$: contenu énergétique du plasma pour deux profils d'écoulement forcé $V_F^{\text{mod}}(x)$ l'un avec taux de cisaillement $\Omega^{\text{mod}} = 4$ (gauche), l'autre avec $\Omega^{\text{mod}} = 6$ (droite), comparé au cas avec profil d'écoulement $V_F(x)$.

Chapitre 6

Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'interaction entre des écoulements cisaillés et la turbulence dans les plasmas chauds magnétisés. On s'est particulièrement focalisé sur l'étude de la dynamique complexe d'une barrière de transport et sur un moyen de contrôler ces oscillations de relaxations. Après avoir détaillé un modèle 3D auto-consistant décrivant la turbulence dans la région de bord d'une machine de fusion magnétique, nous avons dégagé au moyen de modèles 1D et 3D les principaux mécanismes à l'origine de la réduction du transport turbulent dans la région appelée barrière de transport. Nous avons, en particulier, étudié la décorrélation de la turbulence par un écoulement moyen cisaillé avec profil linéaire, et nous avons dérivé, en faisant une étude analytique et numérique utilisant un modèle 1D de scalaire passif, la dépendance du flux de chaleur radial $Q_{conv} \sim \sqrt{\langle \tilde{p}^2 \rangle} \sqrt{\langle \tilde{v}_r^2 \rangle} \cos \delta$ en fonction du taux de cisaillement Ω . Nous obtenons des résultats qui confirment que l'amplitude de la turbulence $\sqrt{\langle \tilde{p}^2 \rangle}$ peut être plus fortement supprimée par l'écoulement cisaillé que le terme de phase $\cos \delta$ entre les fluctuations de pression \tilde{p} et de vitesse radiale \tilde{v}_r , et que la dépendance du flux de chaleur radial Q_{conv} et de ces composantes $\sqrt{\langle \tilde{p}^2 \rangle}$ et $\cos \delta$ n'est pas universelle mais dépend du modèle utilisé ainsi que de la statistique de la source de turbulence (c'est-à-dire de \tilde{v}_r). Ces résultats ont fait l'objet d'une publication [28].

Enfin, nous avons étudié un moyen de contrôle des oscillations de relaxation d'une barrière de transport par des perturbations résonnantes, cette étude étant motivée par de récentes expériences de stabilisation des ELMs [15, 5, 29, 19] au moyen de perturbations résonnantes créées par un courant continu dans des bobines perturbatives externes. Nous avons reproduit dans des simulations 3D en utilisant les paramètres de la machine TEXTOR avec, à la fois, des perturbations résonnantes et une barrière de transport, un effet stabilisant des perturbations résonnantes sur les oscillations de relaxations de la barrière, sans perte de confinement majeure pour de faibles valeurs du courant perturbatif I_D ($I_D < 1.5 \text{ kA}$ avec les paramètres de TEXTOR). Nous avons analysé cet effet et montré qu'il est lié à une modification du gradient de pression due essentiellement à la modification de la topologie magnétique, en particulier la formation de chaînes d'îlots résiduels et du transport induit par la stochasticité. On observe une érosion du gradient de pression (donc de la barrière de transport), au voisinage de la surface de résonnance prin-

cipale $q = m_0/n_0$, où m_0 , n_0 désignent respectivement l'harmonique poloïdale principale et l'harmonique toroïdale des perturbations résonnantes . L'érosion de la barrière est liée à un flux de chaleur d'équilibre créé par la présence d'une chaîne de cellules de convection stationnaires, centrée sur la surface $q = m_0/n_0$, associée à une chaîne d'îlots centrée sur cette même surface. Loin de la surface de résonnance principale mais à l'intérieur de la couche cisailée, les modifications du gradient de pression sont liées à la présence (ou non) d'une couche stochastique créée par un recouvrement des chaînes d'îlots.

Bibliographie

- [1] <http://fr.wikipedia.org/wiki/Transvection>, source : A. Bigard, *Géométrie, Cours et exercices corrigés pour le Capes et l'agrégation*. Masson, 1998.
- [2] S.S. Abdullaev, K.H. Finken, and M.W. Jakubowski. *Nucl. Fusion*, 43 :299, 2003.
- [3] R. Balescu. *Transport Processes in Plasmas*. North Holland, Amsterdam, 1988.
- [4] M. Bécoulet, G. Huysmans, and P. Thomas. *Nucl. Fusion*, 45 :1284, 2005.
- [5] M. Bécoulet, Eric Nardon, and G. Huysmans. *Nucl. Fusion*, 48 :024003, 2008.
- [6] P. Beyer. *Habilitation à Diriger des Recherches*. Université de Provence, 2004.
- [7] P. Beyer, X. Garbet, and S. Benkadda. *Plasma Phys. Controlled Fusion*, 44 :2167, 2002.
- [8] H. Biglari, P.H. Diamond, and P.W. Terry. *Phys. Fluids B*, 2 :1, 1990.
- [9] J. Boedo, D.S. Gray, and P.W. Terry. *Nucl. Fusion*, 42 :117, 2002.
- [10] S.I. Braginskii. *Reviews of Plasma Physics*, 1 :205, 1965.
- [11] K.H. Burrell. *Phys. Plasmas*, 4 :1499, 1997.
- [12] S. Chapman and T.G. Cowling. *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. Cambridge, 1952.
- [13] D. del Castillo-Negrete and B.A. Carreras. *Phys. Plasmas*, 9 :118, 2002.
- [14] F. Wagner et al. *Proceedings of the Thirteenth Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Vienna)*, vol. I, pp. 277-90., 1982.
- [15] T.E. Evans, R.A. Moyer, and P.R. Thomas. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :235003, 2004.
- [16] C.F. Figarella, S. Benkadda, and P. Beyer. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :015002, 2003.
- [17] K.H. Finken, S.S. Abdullaev, and M. Jakubowski. The structure of the magnetic field in the textor-ded. page 28, 2005. The structure of the magnetic field in the TEXTOR-DED, Forschungszentrum Julich.
- [18] K.H. Finken, S.S. Abdullaev, and A. Kaleck. *Nucl. Fusion*, 39 :637, 1999.
- [19] K.H. Finken, B. Unterberg, and Y. Xu. *Nucl. Fusion*, 47 :522–534, 2007.
- [20] R. Fitzpatrick. *Phys. Plasmas*, 2 :825–838, 1995.
- [21] Ph. Ghendrih, A. Grosman, and H. Capes. *Plasma Phys. Controlled Fusion*, 38 :1653, 1996.
- [22] T. Haberscheidt. PhD thesis, Univ. of Bochum, 2006.

- [23] K. Itoh and S-I. Itoh. *Plasma Phys. Controlled Fusion*, 38 :1–49, 1996.
- [24] E.J. Kim. *Phys. Plasmas*, 13 :022308, 2006.
- [25] E.J. Kim and P.H. Diamond. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :075001, 2003.
- [26] E.J. Kim and P.H. Diamond. *Phys. Plasmas*, 11 :L77, 2004.
- [27] J.D. Lawson. *Proceedings of the Physical Society*, B70 :6–10, 1957.
- [28] M. Leconte, P. Beyer, and X. Garbet. *Phys. Plasmas*, 13 :112301, 2006.
- [29] Y. Liang, H.R. Koslowski, and P.R. Thomas. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :265004, 1990.
- [30] Eric Nardon, M. Bécoulet, and G. Huysmans. *Phys. Plasmas*, 14 :092501, 2007.
- [31] J. Payan. *Nucl. Fusion*, 35 :1357, 1995.
- [32] Lord Rayleigh. *Proceedings of the London mathematical society*, vol. 14, pp. 170-177, 1883.
- [33] H. Sugama and W. Horton. *Phys. Plasmas*, 1 :1070, 1994.
- [34] P.W. Terry, D.E. Newman, and A.S. Ware. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :185001, 2001.
- [35] A.S. Ware, P.W. Terry, and P.H. Diamond. *Plasma Phys. Controlled Fusion*, 38 :1343, 1996.
- [36] J. Wesson. *Tokamaks*. North Holland, Amsterdam, second edition, 1988.
- [37] R.C. Wolf, J. Hobirk, and G.D. Conway. *Nuclear Fusion*, 41 :1259, 2001.