

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1	3
Le contexte	3
1.1 Erosion, transport, sédimentation.....	3
1.1.1 Généralités	3
1.1.2 Erosion des sols par l'eau : principes de base.....	4
1.2 Modélisation de l'érosion et du transport.....	6
1.2.1 Seuil de contrainte critique	6
1.2.2 Quantification des quantités érodées	8
1.2.3 Comportement, rhéologie.....	11
1.2.3.1 Ecoulements à faible concentration en sédiments	11
1.2.3.2 Ecoulements à forte concentration en sédiments	12
1.3 Modélisation de la rupture progressive d'une digue par surverse	14
1.3.1 Erosion des ouvrages en terre	14
1.3.2 Etat de l'art.....	17
1.3.2.1 Modèle 1 : Brèche considérée comme un seuil avec une loi donnée d'élargissement.....	17
1.3.2.2 Modèle 2 : Brèche considérée comme un seuil avec élargissement modélisé de la brèche.....	18
1.3.2.3 Modèle 3 : Brèche considérée comme un seuil avec chenal érodable à l'aval	19
1.3.2.4 Modèle 4 : Brèche entière considérée comme un chenal érodable	20
1.3.2.5 Modèle 5 : Ouverture d'une brèche dans un barrage en remblai, considérée comme un processus par étapes : érosion, rupture et transport des matériaux du barrage. Ouverture de brèche suivant deux phases : 1.Brèche initiale 2.Erosion latérale	21
1.3.3 Discussion et propositions	22
Chapitre 2	25
Représentation thermodynamique d'un milieu à deux phases en mouvement	25
2.1 Equations de bilans instantanées d'un milieu continu par morceaux	26
2.1.1 Equations instantanées de chaque phase.....	27
2.1.2 Equations instantanées du mélange.....	28
2.2 Equations de bilan moyennées du fluide à deux phases.....	29
2.2.1 Equations moyennées de chaque phase.....	29
2.2.1.1 Définitions des valeurs moyennes	29
2.2.1.2 Equations moyennées de chaque phase	31
2.2.2 Equations moyennées du mélange.....	32
2.3 Choix de la modélisation du milieu diphasique	34
2.3.1 Choix des équations	34
2.3.2 Choix des lois pour les flux	36
2.3.2.1 La viscosité effective	36
2.3.2.2 Le coefficient de diffusion effectif	37
2.3.3 Conclusion.....	40

TABLE DES MATIERES

Chapitre 3	43
Conditions à l'interface liquide / solide, et modèle d'érosion	43
3.1 Principe	44
3.2 Conditions à l'interface	44
3.3 Loi d'érosion	47
3.3.1 Loi linéaire	47
3.3.2 Loi implicite	48
3.3.3 Loi d'érosion « chimique »	48
Chapitre 4	51
Cas particulier : Ecoulement permanent, bidimensionnel, parabolique	51
4.1 Les équations parabolisées de Navier-Stokes	53
4.1.1 Le système d'équations	53
4.1.2 Ecoulement bidimensionnel parabolique	54
4.2 Conditions aux limites	55
4.2.1 Conditions communes aux deux types d'écoulement considérés	55
4.2.1.1 A l'entrée	55
4.2.1.2 A l'interface	55
4.2.2 Ecoulement à hauteur d'eau infinie	57
4.2.3 Ecoulement à surface libre	59
4.3 Lois de comportement	60
4.3.1 Coefficient de viscosité	60
4.3.1.1 Viscosité constante	60
4.3.1.2 Longueur de mélange de Prandtl	60
4.3.2 Coefficient de diffusion	62
4.3.2.1 Diffusion constante	62
4.3.2.2 Loi différentielle de diffusion	63
Chapitre 5	67
Résolution numérique	67
5.1 Choix du système de coordonnées	67
5.2 Résolution du système d'équation	70
5.2.1 Schéma numérique	70
5.2.2 Résolution	71
5.3 Modifications importantes apportées au code de calcul	72
5.3.1 Profils d'entrée	72
5.3.2 Calcul du débit érodé	72
5.3.2.1 K fini	73
5.3.2.2 K infini	74
5.3.3 Calcul du gradient de pression et du terme source	76
5.3.3.1 Hauteur infinie	76
5.3.3.2 Surface libre	78
5.3.3.3 Contribution de la turbulence au gradient de pression	79
Chapitre 6	81
Résultats à hauteur d'eau infinie dans un écoulement à vitesse constante	81
6.1 Résultats à viscosité effective constante	81
6.1.1 Sans érosion	81
6.1.2 Erosion de sédiments de même masse volumique que l'eau sur un sol horizontal	84
6.1.3 Erosion avec sédiments plus lourds que l'eau sur sol horizontal	90
6.1.4 Erosion avec sédiments plus lourds que l'eau sur sol incliné	93

TABLE DES MATIERES

6.1.4.1 Etude des phénomènes	93
6.1.4.2 Etude de l'angle critique.....	98
6.2 Résultats du modèle à longueur de mélange	100
6.2.1 Sans érosion.....	100
6.2.2 Erosion de sédiments de même masse volumique que l'eau sur un sol horizontal	102
6.2.3 Erosion avec sédiments plus lourds que l'eau sur sol horizontal.....	104
6.2.4 Erosion de sédiments plus lourds que l'eau sur sol incliné	107
6.2.5 Influence de la rugosité du sol.....	110
6.2.6 Etude du modèle turbulent à diffusion différentielle	113
6.2.6.1 Variation du diamètre des sédiments.....	113
6.2.6.2 Variation de la constante A'	117
6.3 Conclusion.....	118
 Chapitre 7	121
Résultats à surface libre	121
7.1 Résultats à viscosité effective constante	122
7.1.1 Calcul sans érosion.....	122
7.1.2 Erosion de sédiments de même densité que l'eau	125
7.1.3 Erosion de sédiments plus lourds que l'eau	130
7.1.4 Influence des paramètres	133
7.2 Résultats du modèle à longueur de mélange	136
7.2.1 Calcul sans érosion.....	136
7.2.2 Erosion de sédiments de même masse volumique que l'eau	139
7.2.3 Erosion de sédiments plus lourds que l'eau	142
7.2.4 Influence des paramètres	144
7.2.5 Etude du modèle turbulent à diffusion différentielle	146
7.2.5.1 Variation du diamètre des sédiments.....	147
7.2.5.2 Variation de la constante A'	151
7.3 Application à un cas plus réel : calcul approximé d'un écoulement au dessus d'une digue.....	153
7.3.1 Calcul sans érosion.....	153
7.3.2 Calcul avec érosion.....	158
7.4 Conclusion.....	160
 Chapitre 8.....	163
Conclusions et perspectives	163
8.1 Travail accompli. Améliorations.....	163
8.1.1 Travail accompli	163
8.1.2 Améliorations et réflexions.....	166
8.2 Validations expérimentales	168
 Conclusion	171
Table des références :.....	173
 Annexe I : Equations parabolisées de Navier-Stokes	187
Equations générales diphasiques	187
Ecoulement à hauteur d'eau infinie sur plaque plane	188
Equations de type Couche Limite.....	188
Détermination du gradient longitudinal de pression	192
Ecoulement à surface libre	193

TABLE DES MATIERES

Equations de couche	193
Détermination du gradient longitudinal de pression	196
Annexe II : Loi différentielle de diffusion.	197
Annexe III : Ecoulement à surface libre.....	205
Annexe IV : Approximations.....	211
Approximation de la valeur initiale du débit local érodé du modèle <i>K infini</i>	211
Calcul du débit au dessus d'une digue	212
Annexe V : Principe d'obtention des équations de saut à l'interface	217

Introduction

Les ouvrages hydrauliques en terre, tels que les digues ou les barrages, sont assujettis à l'érosion (qualifiée de progressive), pouvant provoquer leur rupture complète. Suivant le phénomène responsable de l'initiation de l'érosion, qui va créer une brèche se développant dans le corps de l'ouvrage, on distingue une érosion externe et une interne à l'ouvrage. Nous nous focaliserons sur le premier type d'érosion (érosion externe), apparaissant principalement lors de surverses, c'est-à-dire quand la hauteur d'eau dépasse la crête de l'ouvrage, provoquant ainsi un écoulement sur le parement aval, qui va initier l'érosion.

Les phénomènes impliqués dans une surverse sont complexes, variés, et instationnaires. On peut en effet distinguer, principalement, une érosion due à l'écoulement d'eau lui-même, qui va détacher des particules du sol, une érosion due à des glissements de pente devenues instables, et les effets des infiltrations d'eau dans le corps de l'ouvrage.

Les modèles actuels de simulation numérique de l'érosion progressive des ouvrages en terre, des plus simples aux plus sophistiqués, sont basés sur le couplage d'un modèle hydraulique et d'un modèle de transport solide issu de l'hydraulique fluviale. Ces modèles n'ont aucun caractère prédictif. Des erreurs de l'ordre de 50% sur les débits déversés à l'aval sont couramment rencontrées. La cinétique de rupture ne peut pas être appréhendée par ces modèles. Leur faiblesse tient d'une part aux modèles hydrauliques, beaucoup trop simples, ainsi qu'à l'utilisation, des formules de transport solide, hors de leur cadre d'application.

Dans ce travail, la description est limitée à l'écoulement. Ni les glissements de pente, ni l'infiltration ne sont pris en compte. L'écoulement est décrit par les équations de bilan de masse et les équations du mouvement. Les aspects turbulent et diphasique sont considérés. Les lois de comportement de volume (viscosité, diffusion) sont complétées par la loi d'érosion locale reliant le débit local érodé à la contrainte de cisaillement. Les conditions de saut à l'interface solide/fluide donnent la cinétique d'érosion.

Le premier chapitre est celui du contexte général dans lequel s'inscrit ce travail. Les principes de base de l'érosion hydraulique sont rappelés, ainsi que les principales formules d'érosion ou de transport existantes, et l'influence d'une

INTRODUCTION

concentration de sédiments sur l'écoulement. Les phénomènes rencontrés lors d'une surverse, puis les principales modélisations existantes, sont décrits.

Les chapitres 2 et 3 présentent, respectivement, le modèle de description de l'écoulement fluide diphasique turbulent, et les conditions particulières à l'interface eau/sol, ainsi que les lois d'érosion.

Le chapitre 4 est consacré à la simplification des modèles présentés dans le cas d'un écoulement stationnaire parabolique.

Le chapitre 5 est relatif à la résolution numérique.

Les chapitres 6 et 7 présentent les résultats obtenus pour un écoulement de couche limite, et un écoulement à surface libre.

Le chapitre 8 résume le travail accompli, propose quelques améliorations, et expérimentations possibles.

Chapitre 1

Le contexte

1.1 Erosion, transport, sédimentation

1.1.1 Généralités

L'érosion en milieu naturel est représentée par l'évolution du relief. Les actions exercées par les écoulements d'eau gravitaires, les glaciers, les différents agents atmosphériques, ont façonnées sur des temps géologiques très longs la croûte terrestre telle que nous la connaissons aujourd'hui.

On parle aussi souvent d'érosion et de sédimentation comme l'ensemble des processus d'érosion, de transport, et de dépôts de particules solides.

Les phénomènes naturels impliquant ces actions complémentaires sont très nombreux. Les particules solides peuvent aussi bien être des grains de sables, transportés par le vent (déplacement de dunes), ou par l'eau (dunes sur les plages, dunes sous-marines, lit d'une rivière, d'un fleuve), que des flocons de neige (formation de congères), des aérosols, des particules de polluant, voir de gouttelettes d'eau arrachées aux vagues par le vent.

Remarquons que pour les exemples cités précédemment les phénomènes d'érosion prennent place sur des temps courts, comparés aux temps géologiques.

Outre cet aspect de modelage du relief, aujourd'hui, les phénomènes d'érosion, de transport, et de dépôt de matières solides peuvent être à l'origine de désordres technologiques ou environnementaux.

L'activité humaine a en effet fortement modifiée son milieu naturel (déforestation, contrôle des cours d'eau, terrassement, routes, ponts, tunnels), et sous certaines circonstances, la plupart du temps liées à un excédent d'eau (crues), des taux d'érosion cent fois supérieurs aux taux normaux (ou géologiques) peuvent apparaître et causer d'importants dégâts.

C'est ce qui peut arriver, dans le cas qui nous intéresse, pendant une rupture progressive de barrage ou de digue, lors d'une surverse (quand la hauteur d'eau dépasse la crête de l'ouvrage et s'écoule sur son parement aval).

Nous nous limiterons ici à l'étude de l'érosion hydraulique des sols. Le paragraphe suivant présente les principes de base, issus de l'hydraulique fluviale.

1.1.2 Erosion des sols par l'eau : principes de base

La plupart des modèles de description et de quantification de l'érosion des sols par l'eau sont issus de l'hydraulique fluviale. Dans ces conditions de faibles pentes et de faibles vitesses du fluide, plusieurs modes de transport solide sont différenciés.

Notion de transport solide en hydraulique fluviale : charriage et suspension

Dans tous les cours d'eau à fond naturel, sauf en cas de fond rocheux, les sédiments constitutifs du lit sont susceptibles d'être mis en mouvement sous l'action des forces hydrodynamiques exercées par l'écoulement d'eau. Dans les cours d'eau fluviaux, à faible pente, deux modes de transport de sédiments sont rencontrés, suivant la taille des particules : le charriage et la suspension.

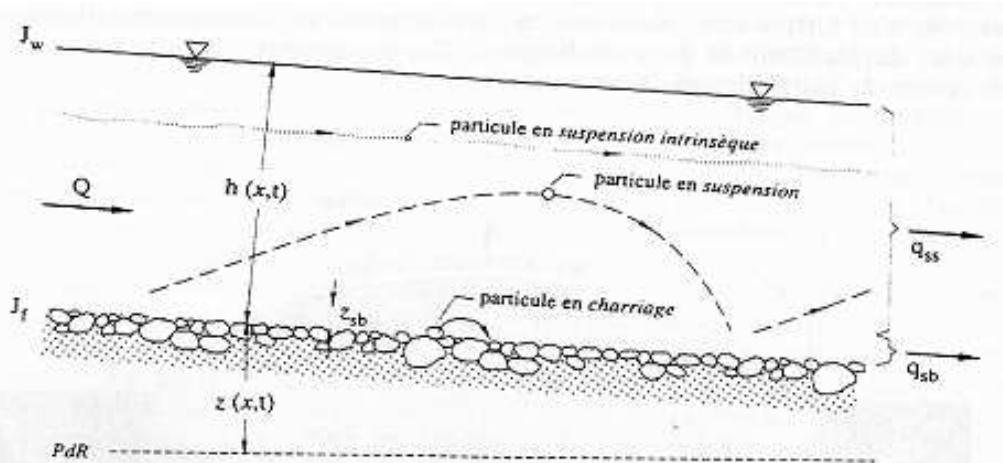


Figure 1.1 : Schéma des modes de transport, d'après Graf et Altinakar (dans Ildefonse et al. (1997)).

Dans un transport par *charriage*, l'effet des forces hydrodynamiques exercées par l'écoulement d'eau se traduit sur les particules sédimentaires par un mouvement de roulement, ou de glissement sur le fond du cours d'eau, ou encore de saltation,

c'est à dire de succession de petits sauts au cours desquels les particules se séparent du lit durant de très courtes périodes. Dans un transport par *suspension*, les particules fines peuvent être maintenues dans le corps de l'écoulement sur de longues distances, sans reprendre contact avec le lit, notamment sous l'effet des fluctuations verticales de la vitesse. La séparation entre charriage et suspension dépend donc de la taille des particules, et de l'écoulement : une particule charriée dans un écoulement peut être en suspension dans un autre.

Les modes de transport solide présentés ci-dessus ont été observés dans des conditions d'hydraulique fluviale. Dans le cas qui nous intéresse, d'un écoulement au dessus d'une digue, caractérisé par des pentes et des vitesses fortes, nous ne savons pas si il est significatif de différencier ces différents modes de transport (charriage, saltation, reptation...). Il existe en effet relativement peu d'informations sur ces types d'écoulements dans la littérature. La seule chose que l'on puisse dire, quant à ces écoulements à fortes pentes, comparés à des écoulements fluviaux, est relative aux valeurs maximales de concentrations en sédiments qui peuvent être atteintes. Ainsi, pour fixer les idées, alors qu'à 1% de pente les concentrations solides maximales possibles sont de l'ordre de 0.1%, à 10% de pente, ces concentrations peuvent atteindre des valeurs de l'ordre de 10% (Ildefonse et al. (1997)).

Effets du transport solide

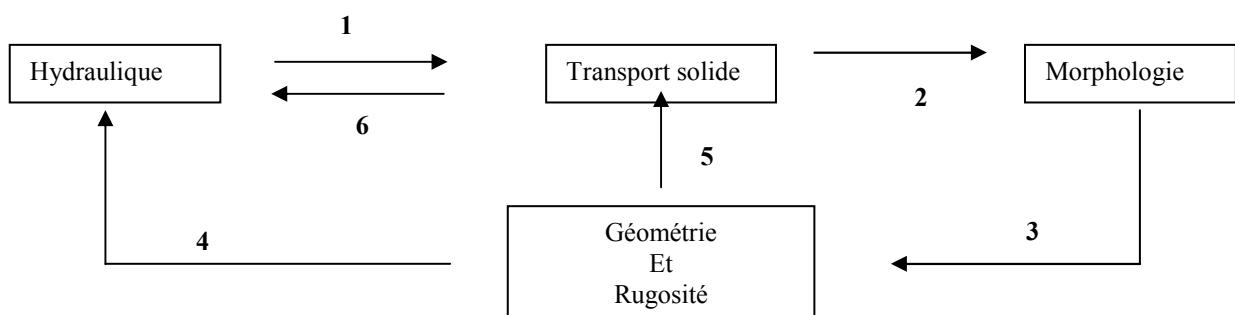


Figure 1.2 : Interactions entre phase liquide et phase solide, d'après Ildefonse et al. (1997).

Dès lors qu'il y a transport de sédiments, il existe des interactions entre la phase liquide et la phase solide. Ces interactions sont décrites par la figure précédente (Figure 1.2) : (1) Action de l'eau sur le matériau, provoquant un transport de sédiments. (2) Effet du transport de sédiments sur la morphologie par dépôt ou érosion, entraînant enfoncement, élargissement ou rétrécissement, voire changement radical du lit d'écoulement. (3) Ces modifications morphologiques s'accompagnent de modifications de la rugosité, de la pente, de la géométrie de la section en travers, lesquelles entraînent une modification du régime d'écoulement (4), et une modification de la quantité de matériaux transportés (5).

(6) Perturbation plus ou moins forte de l'écoulement liquide par la présence de la phase solide en transport.

Si les phénomènes liés au transport solide (érosion, dépôt, glissement...) sont suffisamment faibles, les variations de la morphologie ou leur influence sur l'hydraulique seront elles-mêmes suffisamment faibles pour que l'on puisse négliger le transport solide dans les calculs hydrauliques, et ainsi assimiler l'écoulement à un écoulement sur fond fixe, à l'échelle de la crue. En revanche, plus le transport solide est intense, ou plus la concentration solide est importante, moins il est admissible de négliger la phase solide, ou même de traiter phase liquide et phase solide de façon indépendante. Smart et Jaeggi, (dans Ildefonse et al. (1997)) ont mis en évidence qu'à partir d'une pente de 7 %, la hauteur d'écoulement, pour un débit liquide donné s'écoulant sur un lit affouillable, devient significativement supérieure à ce qu'elle devrait être si de l'eau seule s'écoulait. Le supplément de hauteur est à attribuer à la présence de sédiment dans l'eau, qui ne peut donc plus être négligée dans le calcul de la hauteur d'écoulement. Pour leur part, Graf et Altinakar (Ildefonse et al. (1997)) considèrent que si pour des concentrations volumiques très inférieures à 1 %, un écoulement gravitaire eau-sédiment constitue un mélange newtonien, en revanche cela n'est plus le cas pour des concentrations volumiques supérieures à 8 %.

1.2 Modélisation de l'érosion et du transport

1.2.1 Seuil de contrainte critique

Shields fut le premier à décrire le seuil de contrainte de cisaillement, à partir duquel des particules individuelles (non cohésives), posées sur un lit sédimentaire composé de particules sphériques et de même taille, se mettent en mouvement sous un écoulement d'eau unidirectionnel (Brunone (1997)). Pour cela, il considéra la particule soumise à deux forces : la force d'entraînement due à l'écoulement, proportionnelle à sa section, et son poids déjaugé. Il en déduisit expérimentalement la valeur du seuil de contrainte en fonction du nombre de Reynolds de la particule. La contrainte critique de Shields est :

$$\tau_c = 0.05(\rho_s - \rho_e)gd \quad (1.1)$$

où ρ_s et ρ_e sont respectivement la masse volumique de la particule et de l'eau, g la gravité, et d le diamètre de la particule.

Ainsi, pour une particule de sable ($\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$), de diamètre $d = 0.001 \text{ m}$, la contrainte tangentielle à appliquer sur la particule pour la mettre en mouvement est de l'ordre du Pascal ($\tau_c \approx 0.81 \text{ Pa}$).

Le seuil de contrainte défini par Shields correspond en fait à l'initiation de l'érosion. Mais d'autres concepts de seuil de contrainte critique existent (Dey

(1999)) : l'USWES propose un seuil de contrainte pour lequel une mise en mouvement général des particules du lit est observée ; pour des sédiments de petites tailles, le concept de mouvement général fut remplacé par une valeur minimum du flux érodé.

Un autre type de concept est basé sur le mouvement des particules du lit. Kramer (dans Dey (1999)) définit ainsi quatre configurations différentes de contraintes agissant sur le lit de sédiments : (1) aucune particule ne bouge, pas de transport ; (2) quelques unes des plus petites particules sont en mouvement dans des zones isolées, transport faible ; (3) quelques particules de tailles moyennes sont en mouvement, transport moyen ; (4) des particules de toutes tailles sont en mouvement, transport général. Kramer souligne la difficulté de délimiter clairement ces différents régimes, mais définit le seuil de contrainte comme la contrainte qui initie le transport général.

MacEwan et Heald (2001) préconise plutôt la représentation du seuil de contrainte par une distribution de valeurs et non une valeur unique (qui n'existe pas en tant que seuil distinct pour l'initiation de l'érosion). Ils soulignent aussi l'importance de l'arrangement des grains de sédiments dans le lit. Un grain protégé par d'autres nécessitera une contrainte de mise en mouvement supérieure.

De nombreuses études numériques et expérimentales existent quand à la force nécessaire pour initier le mouvement d'une particule sous un écoulement permanent uniforme unidirectionnel. Selon les auteurs, les forces prises en compte sont :

- la force de traînée (dans le sens de l'écoulement), le poids déjaugé (orienté suivant la verticale descendante), la force de portance (due aux effets de cisaillement de l'écoulement, et à la rotation de la particule (effet Magnus)) pour Dey (1999) ;
- la force de portance et le poids déjaugé pour MacEwan et Heald (2001). Ils négligent les forces de portance car elles sont, pour les tailles de particules qu'ils considèrent du second ordre, comparées aux forces de traînée.

Les valeurs obtenues l'ont été dans des configurations particulières (taille de grains uniforme, arrangement spécial des grains), qui sont souvent très éloignées des conditions réels du milieu naturel. Pour tous les travaux présentés ici (numériques ou expérimentaux), le sol n'est pratiquement pas incliné. Les effets de la pente ne sont pas pris en compte.

La valeur de la contrainte critique de Shields correspond à la contrainte nécessaire à la mise en mouvement d'une particule sphérique, ayant un certain diamètre, posée sur des particules identiques disposées horizontalement.

Dans les situations naturelles les conditions sont beaucoup plus complexes. Les digues sont constituées de matériaux empruntés dans les environs de l'ouvrage. Une digue est donc généralement composée de matériaux très différents aussi bien en taille, en masse volumique qu'en structure (cohésifs ou non). Il apparaît donc difficile d'utiliser la valeur seuil de contrainte d'une taille de particule pour un tel matériau. De plus lors de la construction d'une digue, le sol est compacté, donc les

différents grains de sédiments constituant le sol ont subi de nombreux réarrangements.

On peut trouver dans la littérature quelques exemples d'études de situations plus complexes ou plus réalistes. L'augmentation de l'inclinaison du sol semble diminuer la contrainte de cisaillement critique nécessaire au décollement d'une particule (Meunier (1991)). A l'inverse Mitchener et Torfs (1996) ont montré que l'ajout de matériaux cohésifs à du sable augmente la résistance du sol à l'érosion et réduit les quantités érodées. Les réarrangements entre grains de différentes tailles ont tendance à augmenter la résistance du sol à l'érosion, MacEwan et Heald (2001).

On peut donc déjà s'interroger à ce niveau sur la pertinence de la valeur de la contrainte critique de Shields, donnée en (1.1), quant à son utilisation pour des matériaux réels, tels que ceux rencontrés dans une digue ou un barrage en terre.

Par analogie avec les matériaux non cohésifs, on définit pour un matériau cohésif une contrainte critique τ_c à partir de laquelle l'érosion se produit (Partheniades (1965)). Celle-ci n'est pas reliée de manière simple aux caractéristiques géomécaniques du sol (angle de frottement interne, cohésion), voir par exemple El Ganaoui (2002).

1.2.2 Quantification des quantités érodées

Il existe de nombreuses formules pour évaluer la quantité de sédiments transportée, Chanson (1999), Ildefonse et al. (1997). En fait, les approches semblent différentes suivant le matériau (cohésif ou non cohésif), et cette différence relève plus de l'histoire que d'un raisonnement scientifique.

Pour les matériaux non cohésifs, l'approche est globale. La quantité maximum de sédiments transportée est reliée à la différence entre la contrainte de cisaillement de l'écoulement et la contrainte critique. Les expressions sont le plus souvent du type :

$$Q_s = \lambda \left(\frac{\tau_b}{\tau_c} - 1 \right)^n \quad \text{si } \tau_b > \tau_c \quad (1.2)$$

où Q_s est le débit solide unitaire par unité de largeur du lit (m^2/s), τ_b est la contrainte de cisaillement de l'écoulement, τ_c est la contrainte critique, et λ et n sont deux paramètres. La loi de Du Boys (1879) est la plus ancienne ($n=1$, λ et τ_c sont deux paramètres).

La loi de Meyer-Peter-Müller (1948) est l'une des plus utilisées :

$$n = \frac{3}{2}$$

$$\lambda = 8\sqrt{(s-1)gd_s^3}(\tau_c^*)^{3/2}$$

$$\tau_c = \rho_e(s-1)gd_s^3\tau_c^*$$

où τ_c^* est la contrainte adimensionnée de Shields. Ce paramètre a été évalué à $\tau_c^* = 0.047$. Cette formule a été établie pour des pentes faibles (inférieures à 2%), dans des conditions particulières d'écoulement et de granulométrie.

De nombreux auteurs ont proposé des formules de transport par charriage sur des pentes plus importantes. Les expressions proposées font alors explicitement intervenir l'angle de la pente. Ainsi, la contrainte critique de la formule de Smart et Jaeggi (1983) est :

$$\tau_c^* = 0.05 \cos \alpha \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \varphi} \right)$$

où φ est l'angle de frottement interne du sol non cohésif, et α la pente.

La contrainte critique τ_c^* n'est plus une constante matérielle dans ce type d'approche. Ceci n'est pas surprenant, car on ne s'est pas intéressé aux quantités localement érodée ou déposée.

Toutes ces formules de transport sont essentiellement empiriques. Leur domaine de validité est donc, au sens strict, limité aux conditions expérimentales ayant permis de les établir. Ces conditions expérimentales sont généralement les suivantes :

- essais à la capacité maximale de transport : l'alimentation solide amont de ces essais était réglée au maximum de ce que pouvait évacuer vers l'aval le bief modélisé, compte tenu de sa pente et du débit liquide qui le traversait.
- essais réalisés en régime permanent : l'apport solide amont de ces essais était généralement ajusté de façon que la pente du canal modèle ne varie pas pendant l'expérimentation, réalisée à un débit liquide donné et stabilisé.
- essais réalisés en canal uniforme.
- essais réalisés en canal constraint latéralement : tous ces essais ont été réalisés dans des canaux suffisamment étroits pour que l'écoulement soit constraint latéralement et occupe donc toute la largeur du canal.

Ainsi, ces formules n'ont aucune approche locale des phénomènes. Elles donnent un résultat global (débit unitaire par unité de largeur) pour une configuration d'écoulement donnée.

Le débit global transporté intervient alors dans l'équation de conservation de masse solide, intégrée sur la dimension transversale, et permet de calculer la position du fond $z(t)$:

$$\frac{\partial Q_s}{\partial x} + (1-p) \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

où p est la porosité du matériel formant le sol.

Pour les sols cohésifs, l'approche semble un peu différente. Le taux d'érosion par unité de surface de sol E est relié à la différence $\tau_b - \tau_c$ par des expressions qui sont le plus souvent de la forme :

$$E = M \left(\frac{\tau_b}{\tau_c} - 1 \right)^n \quad \text{si } \tau_b > \tau_c \quad (1.4)$$

où M et n sont deux paramètres. La contrainte critique du sol τ_c est une constante matérielle, susceptible de dépendre de la profondeur (du fait de la consolidation des sédiments). La loi de Partheniades ($n=1$) est la plus utilisée.

Le taux d'érosion intervient dans l'équation de conservation de masse solide intégrée sur la dimension transversale :

$$\frac{\partial (ch)}{\partial t} + \frac{\partial (chu)}{\partial x} = E \quad (1.5)$$

où c est la concentration de sédiments fins en suspension, h l'épaisseur moyenne de l'écoulement, et u la vitesse moyenne.

Toutes les formules présentées ici (matériaux cohésifs et non cohésifs) sont donc des lois empiriques de débit érodé par unité de surface (ou de largeur du lit) en fonction des valeurs moyennes de vitesse et de hauteur de l'écoulement. Elles sont ainsi souvent utilisées avec des modèles hydrauliques de type St-Venant, pour lesquels le frottement de l'eau sur le sol est donné par des lois empiriques (formule de Manning, CIGB (1998)).

Certains auteurs ont essayé de quantifier l'érosion grâce à des modèles à deux couches superposées, l'une fortement chargée près du sol, et l'autre beaucoup moins (Singh et Prasad (1982)). Il est nécessaire alors de prescrire de façon empirique l'échange de masse entre ces deux couches. Il apparaît donc que dans ce cadre classique d'écoulement quasi 1D, l'essentiel du phénomène étudié n'est pas un résultat du calcul, mais plutôt une donnée.

1.2.3 Comportement, rhéologie

A partir d'une concentration volumique en sédiments supérieure à 8%, un mélange eau-sédiment n'est plus newtonien ; il faut alors tenir compte de la présence des sédiments dans l'écoulement.

Suivant la quantité de matière solide transportée dans l'écoulement, les approches choisies pour la modélisation sont différentes. Alors que pour de faibles concentrations en sédiments, on considère l'écoulement biphasique (car la vitesse de l'eau et des sédiments peut être très différente), pour des écoulements hyperconcentrés (concentrations comprises entre 1 et 30%) on considère plutôt le mélange, d'un point de vue comportemental, comme monophasique. Tout se passe comme si l'on avait affaire à un seul fluide (très) visqueux.

Nous présentons ces différentes approches dans ce qui suit.

1.2.3.1 Ecoulements à faible concentration en sédiments

On écrit souvent la viscosité d'un tel mélange sous la forme :

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad (1.6)$$

où μ est la viscosité dynamique du mélange, μ_0 la viscosité dynamique du fluide porteur, et μ_r la viscosité relative, qui tient compte des sédiments.

Plusieurs approches différentes ont conduit à des expressions du type (Tableau 1-1) :

$$\mu_r = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{-q} \quad (1.7)$$

où ϕ_m représente la fraction volumique maximum, et q un paramètre positif. Cette expression rend compte de l'augmentation de viscosité avec la concentration.

	ϕ_m	q
Théorie des Milieux Effectifs	0.40	1
Extension de la Théorie d'Einstein	0.60	1.5
Théorie de Mooney, équation de Krieger	ϕ_m	$2.5 \phi_m$
Principe de Minimum d'énergie dissipée par viscosité	ϕ_m	2

Tableau 1-1 : Paramètres de l'équation (1.7), d'après Ildefonse et al. (1997).

Notons que pour des sphères monodispersées, l'empilement maximum correspond à l'arrangement cubique faces centrées, $\phi_{FCC} = 0.74$. Mais l'expérience donne plutôt des valeurs proches de l'arrangement dense aléatoire (random close packing), $\phi_{RCP} = 0.637$.

Une formule relativement semblable est proposée par Leighton et Acrivos (1986) :

$$\mu_r = \left(1 + \frac{1.5\phi}{1 - \phi/\phi_m} \right)^2 \quad (1.8)$$

où $\phi_m = 0.58$.

Ainsi, la viscosité dépendant localement de la quantité de sédiments qui s'y trouve, il apparaît primordial de s'intéresser aux phénomènes de diffusion par dispersion des sédiments au sein du fluide.

De tels écoulements présentent souvent une répartition particulière des sédiments au sein de l'écoulement ; variable suivant l'intensité de l'écoulement, suivant la taille et la densité des particules...

Les phénomènes responsables de la migration des particules dans le fluide peuvent alors être :

- la diffusion turbulente, due à la turbulence régnant dans l'écoulement, qui a plutôt tendance à distribuer les sédiments dans l'épaisseur de l'écoulement ;
- la gravité, si les sédiments sont plus lourds que le fluide ; ils auront alors tendance à rester près de la paroi, et à moins diffuser dans l'épaisseur de l'écoulement ;
- les gradients de vitesse. Leighton et Acrivos (1986) et (1987) ont en effet montré l'existence de tels flux (dans les deux directions perpendiculaires à l'écoulement), dans des écoulements non turbulents.

Nous reviendrons sur la diffusion des particules dans les chapitres suivants.

Dans le cas particulier, d'un écoulement bidimensionnel permanent à l'équilibre, il est possible de calculer analytiquement la répartition des sédiments dans l'écoulement. On considère pour cela que le flux ascendant des particules, dû à la turbulence, compense exactement le flux descendant dû à la gravité (exprimé grâce à une vitesse de chute semblable à la vitesse de Stokes). On obtient alors la formule de Rouse (voir par exemple, Graf et Cellino (2002)).

1.2.3.2 Ecoulements à forte concentration en sédiments

Pour ces écoulements, deux types de modèles distincts existent : des modèles viscoplastiques pour les matériaux plutôt cohésifs, et des modèles granulaires pour les matériaux plutôt non cohésifs, (Ildefonse et al. (1997)).

Modèle viscoplastique :

Cette première approche consiste à considérer les écoulements hyperconcentrés comme des fluides à seuil, dont la loi de comportement est du type :

$$\begin{cases} \gamma = 0, \text{ quand } \tau < \tau_c \\ \tau = \tau_c + f(\gamma), \text{ quand } \gamma > 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

où γ est le gradient de vitesse, τ la contrainte tangentielle et τ_c le seuil de contrainte. f est une fonction croissante de γ qui s'annule en 0.

Le plus simple de ces modèles est le modèle de Bingham, où f est une fonction linéaire de γ dans laquelle le coefficient de proportionnalité est la viscosité plastique. On peut aussi citer le modèle de Herschel-Bulkley, de la forme :

$$\tau = \tau_c + K\gamma^n \quad (1.10)$$

où K et n sont deux paramètres (pour des suspensions le paramètre n est en général inférieur à 0.5).

Dans la même catégorie, on peut citer le modèle quadratique de O'Brien et Julien (Julien et Lan (1991)), plus sophistiqué afin de décrire une plus large gamme de comportements possibles. En effet ce modèle prend en compte la cohésion entre les particules, les interactions visqueuses entre les particules et le fluide porteur, les impacts des particules et la turbulence.

Modèle granulaire :

A partir de mesures expérimentales, effectuées au rhéomètre concentrique cylindrique, Bagnold (Hunt et al. (2002)) a étudié, pour une large gamme de concentrations solides, de viscosités du fluide et de taux de cisaillement, les propriétés rhéologiques de suspensions liquide/solide.

Il a ainsi mis en évidence l'existence de plusieurs régimes d'écoulement, en fonction d'un paramètre N , nommé nombre de Bagnold. Ce paramètre est défini comme :

$$N = \frac{\rho d^2 \lambda^{1/2} \gamma}{\mu}$$

avec μ viscosité dynamique du fluide, γ le taux de cisaillement, ρ la densité du mélange liquide/solide (le solide et le liquide ont ici la même densité) et λ la concentration linéaire, définie comme le rapport entre le diamètre du grain et la distance de séparation moyenne entre grain.

$$\lambda = 1/\left[(\phi_m/\phi)^{1/3} - 1 \right]$$

où ϕ_m est la concentration volumique maximum possible.

Ainsi, pour des valeurs de $N < 40$, Bagnold définit un régime « macro visqueux », ou frictionnel, pour lequel les contraintes tangentielles (et normales) varient comme :

$$\tau = \mu \gamma \lambda^{3/2} \quad (1.11)$$

Alors que pour $N > 450$, le régime est dit inertiel, ou collisionnel, et les contraintes tangentielles (et normales) varient alors comme :

$$\tau = \rho d^2 \lambda^2 \gamma^2 \quad (1.12)$$

Les contraintes sont donc indépendantes de la viscosité du fluide mais dépendent du carré du taux de cisaillement et du carré de λ (cela est comme un écoulement turbulent où l'échelle de turbulence est liée à la taille des grains).

Un régime transitoire existe entre ces deux valeurs limites de N , il est appelé régime lubrifié.

Les résultats de Bagnold furent obtenus avec des particules solides de même densité que le fluide, ces résultats ont, par la suite, été étendus aux écoulements de particules denses en utilisant la masse volumique des sédiments à la place de la masse volumique solide/fluide.

1.3 Modélisation de la rupture progressive d'une digue par surverse

Nous nous intéressons ici à une situation particulière d'érosion, qui survient lors de crues, sur des ouvrages en terre tels que des barrages ou digues. Il est important de préciser que l'on ne s'intéresse qu'à des ouvrages en terre, dont la rupture éventuelle est qualifiée de progressive, à opposer aux ouvrages en béton dont la rupture est instantanée, CIGB (1998).

Après une première partie consacrée aux phénomènes physiques impliqués dans cette situation, nous donnerons les différentes modélisations existantes quant à leur description, et leurs résultats. Cela nous amènera naturellement à nous poser quelques questions sur la pertinence de ces approches, et à proposer un autre type d'approche.

1.3.1 Erosion des ouvrages en terre

La surverse d'une digue ou d'un barrage en terre se produit lors d'une crue, lorsque la hauteur d'eau en amont de l'ouvrage devient supérieure à la hauteur de crête. La lame d'eau excédentaire s'écoule alors sur le parement aval de l'ouvrage provoquant l'érosion de celui-ci. Si les conditions hydrauliques le permettent, il se forme une brèche qui peut amener à la rupture complète de la retenue.

De façon idéalisée, on distingue, suivant la nature, cohésive ou non cohésive, du matériau composant l'ouvrage, deux types de phénomènes d'érosion amenant à la formation d'une brèche.

Matériaux non cohésifs

Visser (1994) dans Yoro (1999) décrit les phases de développement d'une brèche dans une digue de sable soumise à une surverse. Il distingue 5 phases, Figure 1.3. Le développement de la brèche allant de la crête de la digue au bas de la pente aval:

- a) l'érosion est verticale et se limite à la pente aval. L'angle β de la pente de la brèche varie de β_0 à β_c (angle critique) ;
- b) la brèche progresse vers l'amont en conservant un angle de pente β_c . L'érosion gagne la crête de la digue avec une largeur de brèche qui diminue d'aval en amont. La pente latérale de la brèche prend une valeur ϕ ;
- c) la largeur de crête augmente par affaissement du sommet de la digue dans la brèche et elle devient constante sur toute la largeur de crête. La pente latérale de la brèche reste égale à ϕ sur tout le long de la brèche ;
- d) après le creusement de la digue dans toute sa largeur, l'érosion se poursuit verticalement et horizontalement, la brèche s'élargit ;
- e) la brèche continue à se développer jusqu'à ce que l'écoulement devienne trop faible.

L'angle β_0 est défini comme l'inclinaison de la pente aval par rapport à l'horizontale. L'angle β_c est l'angle maximum que peut atteindre la pente tout en restant stable sous l'écoulement. L'inclinaison des pentes latérales de la brèche est appelée ϕ .

A la suite de ses expériences, Visser associe aux variations de l'angle β une érosion de type transport sédimentaire, et à l'angle ϕ une érosion due à des glissements de pente.

Il apparaît que le développement d'une brèche dans un ouvrage homogène non cohésif est lié à deux types d'érosion. Dans un premier temps, il se produit une érosion verticale, « assimilable » à du transport sédimentaire. Cette érosion se poursuit jusqu'au substratum. Ensuite, l'érosion verticale est suivie ou accompagnée d'une érosion latérale, conduite par des glissements de pente, provenant de l'instabilité des bords de la brèche.

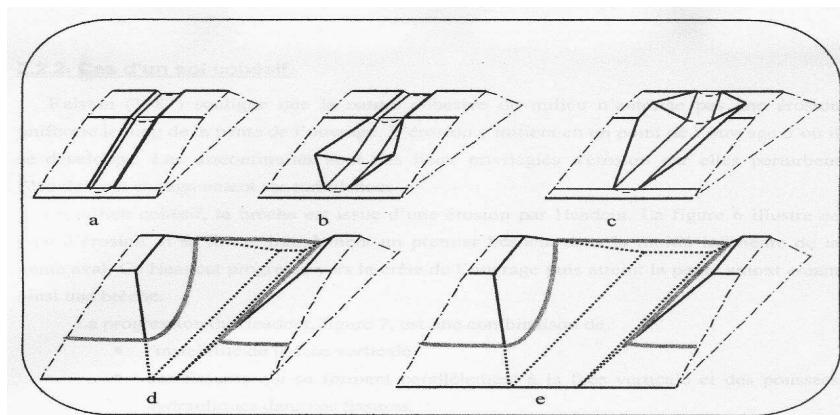


Figure 1.3 : Cinématique de développement d'une brèche dans un ouvrage en matériaux non cohésifs, d'après Visser (1995).

Matériaux cohésifs

Ralston (dans Wahl (1998)) souligne que la nature cohésive du milieu n'autorise pas une érosion uniforme le long de la pente de l'ouvrage. L'érosion s'initie en un

point de l'ouvrage, puis se développe à partir de celui-ci. Les discontinuités sont des lieux privilégiés d'érosion car elles perturbent l'écoulement et le rendent turbulent. En milieu cohésif, la brèche est issue d'une érosion par Headcut (érosion de blocs). La Figure 1.4 illustre ce type d'érosion. Il se forme initialement un premier headcut dans la moitié inférieure de la pente aval. Ce headcut progresse alors vers la crête de l'ouvrage. D'après Stein et Julien (1993) (dans Wahl (1998)), cette progression peut se faire suivant deux modes différents :

- la partie amont de l'headcut subit un glissement (headcut) rotationnel, qui va tendre à aplatiser l'ouvrage pendant que ses matériaux sont emmenés par l'eau ;
- l'érosion remonte jusqu'à la crête par palier. Cette érosion en marche d'escalier est due à la construction par couches compactées successives du barrage ou de la digue.

Ainsi, la progression de l'headcut, Figure 1.4, est une combinaison de :

- l'instabilité de la face verticale, sous l'action combinée de l'écoulement, et des forces de pesanteur ;
- des fissures qui se forment parallèlement à la face verticale et des poussées hydrauliques dans ces fissures ;
- de l'érosion du pied de la face verticale.

Ralston explique l'érosion en pied du headcut par l'impact du jet provoqué par le décollement de la lame d'eau. Cet impact crée d'une part des turbulences dans l'eau et induit d'autre part des contraintes dans la partie horizontale du sol. La combinaison de ces effets augmente l'érosion au pied. Comme la hauteur de chute de la lame d'eau grandit avec l'érosion, les effets du jet s'accentuent.

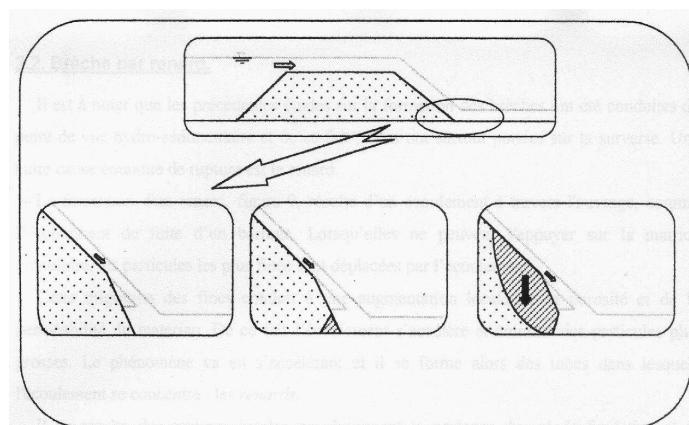


Figure 1.4 : Progression d'un Headcut.

Bien que ces deux descriptions soient des schématisations simplifiées de la réalité, elles permettent de comprendre les aspects fondamentaux du problème.

Ainsi la rupture progressive d'un ouvrage en terre est la conséquence de trois phénomènes principaux :

- le premier est l'érosion locale provoquée par l'écoulement d'eau, qui exerce un frottement sur le sol, et qui se charge progressivement de particules solides ;

- le second est le glissement de massifs de sol devenus instables (glissement de pente), lorsque l'érosion a conduit à des pentes trop importantes ;

- le troisième est l'infiltration d'eau dans le corps de l'ouvrage, qui diminue la résistance de celui-ci, et le fragilise.

Ces différents phénomènes rendent l'évolution tridimensionnelle et fortement instationnaire.

1.3.2 Etat de l'art

Le but des modèles numériques est l'évaluation des risques, pour les personnes comme pour les biens, en cas de rupture d'un ouvrage. Il s'agit donc de déterminer en fonction du temps la forme de la brèche, pour un hydrogramme de crue donné, qui permet alors l'évaluation des débits déversés vers l'aval.

Il existe cinq types de modèles de modélisation de la formation d'une brèche lors d'une surverse, répertoriés d'après CIGB (1998).

1.3.2.1 Modèle 1 : Brèche considérée comme un seuil avec une loi donnée d'élargissement

C'est l'approche la plus simple, elle fut suggérée en premier par Fread et Harbaugh (1973). La forme de la brèche est donnée a priori : triangulaire ou trapézoïdale. La largeur finale de la brèche, son temps d'évolution et le débit dans la brèche sont déterminés par des formules empiriques fonctions des caractéristiques de l'ouvrage et des conditions hydrauliques. Ces modèles sont calés sur des cas réels issus de bases de données.

Voyons par exemple les formules proposées par Froehlich (1987) :

$$\begin{aligned} B &= 9.5k_0 (VH)^{0.25} \\ T &= 0.59V^{0.47}H^{-0.9} \end{aligned} \quad (1.13)$$

avec :

B largeur finale de la brèche (en pieds),

T durée de rupture (en heures),

$k_0 = 1$ pour une surverse,

V est le volume d'eau (en acre-feet) au dessus du fond de la brèche,

H est la hauteur d'eau (en pieds) au dessus du fond de la brèche.

Remarque : la largeur de la brèche est généralement égale à environ la hauteur du barrage. L'erreur moyenne d'estimation est de 54 % pour B et de 70 % pour T .

1.3.2.2 Modèle 2 : Brèche considérée comme un seuil avec élargissement modélisé de la brèche

Ce modèle diffère du précédent en ce sens qu'il ne nécessite pas une loi, fixée à l'avance, d'élargissement de la brèche. A la place, on suppose que le degré d'érosion est proportionnel à la contrainte moyenne de cisaillement sur la surface de la brèche.

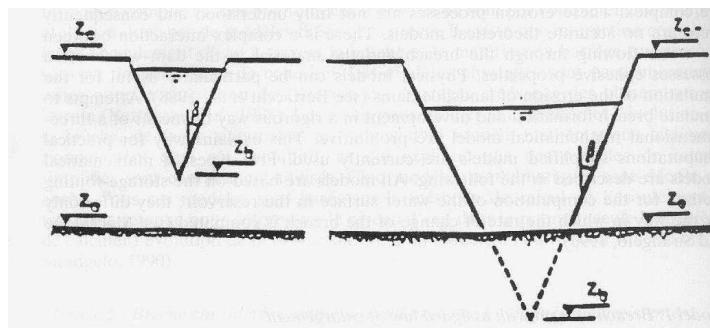


Figure 1.5 : Géométrie de la brèche dans les modèles 1 et 2, d'après CIGB (1998).

Christophano (1965) (dans Wall (1998)) fut probablement le premier à développer ce type de modèle : il relie la force d'entraînement de l'écoulement à travers la brèche à la force de cisaillement sur les particules de terre de la base de la brèche. Il obtient ainsi le taux d'érosion du lit de la brèche en fonction du débit d'eau traversant la brèche. Il suppose la brèche de largeur de base constante avec le temps et toujours de forme trapézoïdale. L'inclinaison des pentes de brèche est supposée égale à l'angle du sol au repos, et l'inclinaison du fond de la brèche égale à l'angle de frottement interne du sol considéré. Mais la présence d'un coefficient arbitraire dans ce modèle, sans aucune réalité physique, rendit critiquable ses prédictions.

Harris et Wagner (1967) (dans CIGB (1998) et Fread (1991)) ont traité ce problème en supposant la brèche sujette à l'érosion, parabolique. Le débit à travers la brèche est approximé grâce à une formule de déversoir, et le transport sédimentaire calculé par l'équation de Schoklitsch. Le modèle requiert en plus de la taille des grains de sédiments, les caractéristiques géométriques de la brèche et une valeur seuil de débit pour initier l'érosion.

Le modèle BRDAM, du Bureau of Reclamation, présenté par Brown et Rogers (1977, 1981) est basé sur le travail de Harris et Wagner, il est capable de simuler l'érosion due à la surverse comme à un renard.

Le modèle du National Weather Service, DAMBRK, développé par Fread (1977) est un modèle paramétrique qui peut manier des formes de brèches rectangulaires, triangulaires ou trapézoïdales. La brèche est supposée s'agrandir verticalement à un taux prédéterminé pendant que l'épuisement de l'eau du réservoir est décrite par une simple équation de continuité. Pour être utilisé, le modèle nécessite la définition de la géométrie finale de la brèche, ainsi que la durée du temps de

rupture. Ces exigences réduisent le modèle à un moyen d'identifier les différents événements possibles et non le plus probable.

Le modèle BREACH est une amélioration de DAMBRK. Il fut présenté par Fread en 1984 (Fread (1991)) et contribua à améliorer les techniques de simulation de rupture des barrages (digues) en terre. Ce modèle est itératif, basé sur un écoulement uniforme et quasi-stationnaire sur un déversoir à large seuil. Le transport sédimentaire est estimé par la formule de Meyer-Peter-Müller modifiée par Smart. Outre les effets de l'érosion, ce modèle prend en compte les évolutions de la brèche qui résultent de l'instabilité des pentes de la brèche, des glissements et du cisaillement possibles dans le haut de la pente. Il permet aussi d'attribuer des matériaux différents au noyau du barrage, en surface du barrage et sur la pente aval. La base de la brèche est supposée être toujours parallèle à la face aval du barrage. La limite principale du modèle vient de la difficulté à estimer les valeurs de la contrainte de cisaillement critique pour l'érosion et la largeur finale de la brèche, qui sont deux données nécessaires.

Le modèle de Singh et Scarlatos (1988), BEED est très semblable à ceux précédemment cités. La vidange du réservoir est décrite par une simple équation de conservation de la masse de l'eau, l'écoulement est considéré quasi-stationnaire sur la face aval du barrage et le débit à travers la brèche est calculé comme celui d'un déversoir à large seuil. Le modèle est capable de simuler des ruptures progressives d'un barrage homogène en terre avec des formes de brèches rectangulaires, triangulaires ou trapézoïdales. La taille et la forme de la brèche initiale doivent être fournies comme conditions initiales. La formule de transport sédimentaire d'Einstein-Brown estime le processus d'érosion pendant que la méthode des « contours » (Chugaev, 1964) est appliquée à la stabilité des pentes sous l'action des forces de percolation. L'érosion latérale de la brèche est supposée se produire de telle façon que le rapport de la hauteur sur la largeur à la base de la brèche reste constant. De plus, la largeur de brèche sur la face aval est toujours prise égale à la largeur de la brèche à la crête.

1.3.2.3 Modèle 3 : Brèche considérée comme un seuil avec chenal érodable à l'aval

Cette approche, proposée par Giuseppetti et Molinaro (1989), considère la brèche comme un chenal de pente uniforme et de section régulière (triangulaire avant que la brèche atteigne la fondation du barrage, puis trapézoïdale). La brèche adoptée est schématisée sur la Figure 1.6. Le débit sur la brèche est calculé, en imposant la condition critique au seuil de la brèche, au moyen des formules d'évacuateur de crue, la profondeur et la vitesse de l'écoulement au pied du barrage au moyen de l'équation de Bernoulli. Dans ce modèle, on suppose que le courant d'eau atteint sa capacité maximale de transport de sédiments au pied du barrage. Dans ces conditions, le débit du volume solide peut être calculé, via quelques approximations, en utilisant la formule connue du transport sédimentaire en rivière (formule d'Einstein-Brown). Ensuite, l'évolution des dimensions de la brèche est déterminée au moyen d'une équation de conservation des matériaux du barrage.

On suppose que le temps d'évolution de la brèche est suffisamment long, pour considérer l'écoulement le long de la brèche comme quasi-stationnaire.

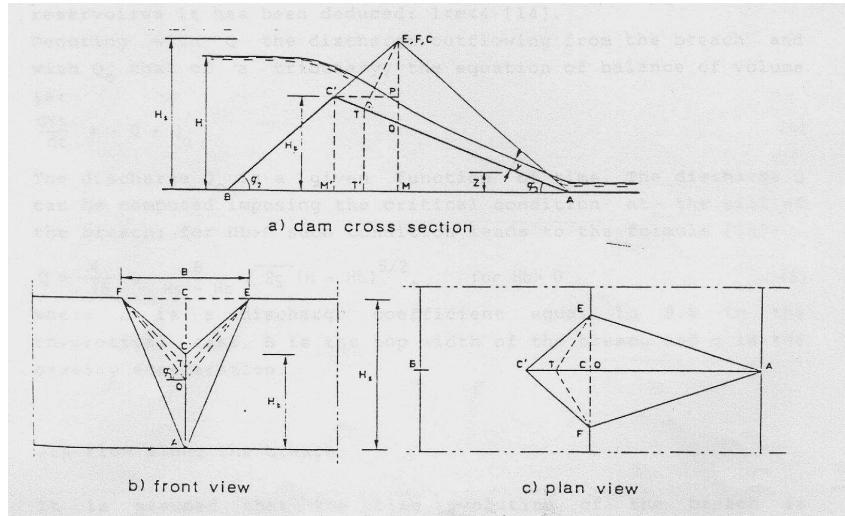


Figure 1.6 : Géométrie de la brèche dans le modèle 3, d'après CIGB (1998).

1.3.2.4 Modèle 4 : Brèche entière considérée comme un chenal érodable

Ce modèle est le plus avancé parmi ceux proposés et appliqués. L'écoulement le long du chenal de la brèche est calculé à partir des équations de Saint-Venant, tandis que l'évolution de la brèche est modélisée suivant une équation de continuité des sédiments, appelée également équation d'Exner.

L'équation d'Exner est la suivante :

$$\frac{\partial Q_s'}{\partial x} + (1-p) \rho_s B \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (1.14)$$

avec Q_s' , le taux de transport sédimentaire (kg/s), p la porosité du matériel formant le lit, B la largeur moyenne du chenal, ρ_s la masse volumique du matériau solide et z l'élévation du lit.

Cette équation permet le calcul de la variation d'élévation du lit en fonction du taux de transport des sédiments et des propriétés du matériau du lit.

Dans le modèle de Lou (dans Reiter et al. (1998) et Wahl (1998)), le domaine hydrodynamique est simulé par les équations de Saint-Venant (instationnaires) dont le terme d'inertie a été négligé. Le mécanisme du transport des sédiments est approché par une relation simplifiée, mais la présence d'un coefficient empirique réduit le domaine d'application de ce modèle.

Ponce et Tsivoglou (1981) ont développé le travail de Lou. Considérant les conditions critiques de l'écoulement à la brèche, le débit sortant est calculé grâce aux équations complètes de l'hydrodynamique. Le transport des sédiments est

estimé par la formule de Meyer-Peter-Müller. Pour la morphologie de la brèche, le modèle inclut une composante qui relie la géométrie de la section transversale de la brèche au débit passant par le barrage. Cette relation, entre la largeur au sommet et la vitesse de l'écoulement, ajoute un degré de liberté pour représenter de façon plus réaliste le développement vertical et latéral de la brèche. Cette relation est appliquée de l'initiation de l'érosion jusqu'à l'apparition du pic de décharge, après quoi la brèche reste constante. De plus, un petit écoulement, limité, doit être défini comme condition initiale, sur la face aval du barrage (au départ, le débit sortant sera fonction de la taille du petit ruisseau défini précédemment). Mais le point faible de ce modèle reste la détermination du taux de croissance de la largeur du sommet de la brèche.

1.3.2.5 Modèle 5 : Ouverture d'une brèche dans un barrage en remblai, considérée comme un processus par étapes : érosion, rupture et transport des matériaux du barrage. Ouverture de brèche suivant deux phases : 1.Brèche initiale 2.Erosion latérale

Les essais sur modèles physiques et les observations au cours de ruptures de barrages en terre montrent que le processus d'ouverture de la brèche est fortement influencé par l'hétérogénéité du remblai (noyau étanche). Pour les barrages créant des retenues de grande capacité, la rupture initiale est une brèche en forme de V ; la seconde phase de rupture est constituée par une érosion latérale.

Les paramètres influençant la vitesse d'érosion sont :

- la protection existant sur le talus aval du barrage ;
- le type et les dimensions du noyau étanche du barrage ;
- les matériaux constituant le remblai et les filtres.

Après le début de rupture par submersion et érosion de surface, le processus d'érosion est une combinaison d'érosion locale du corps du barrage au contact avec le courant d'eau et de rupture des parois latérales de la brèche. En général, le noyau d'étanchéité résiste mieux à l'érosion que les autres matériaux du barrage. Le noyau ou des parties de celui-ci se rompent après que les matériaux support ont été emportés par érosion. Le processus par étapes, érosion – glissement – rupture – transport, continue, jusqu'à ce que les facteurs suivant de limitation interviennent :

- la fondation ou les appuis présentant une résistance à l'érosion limitent la poursuite de celle-ci ;
- le plan d'eau dans le réservoir a baissé jusqu'au niveau limite de stockage ;
- la capacité d'écoulement dans la vallée à l'aval du barrage devient un facteur de limitation et les conditions de remous influencent l'écoulement à travers la brèche et le processus d'érosion.

Un modèle de ce type (Embankment Dam BREACH : EDBREACH) a été développé dans le cadre d'un projet de coopération Sino-Finlandais (Reiter et al., 1993). Ainsi dans EDBREACH, tous les paramètres et facteurs cités précédemment sont pris en considération. La hauteur et la vitesse de l'écoulement au pied du barrage sont calculées au moyen de l'équation de Bernoulli, le transport sédimentaire au moyen de la formule de Meyer-Peter-Müller, et l'angle d'inclinaison des pentes de la

brèche dépend de l'angle de frottement interne du matériau suivant une formule simple. Par contre, ce modèle est le seul à considérer l'écoulement sur le barrage divisé en trois régimes d'écoulement : un écoulement subcritique de l'amont à la crête du barrage, supercritique sur la face aval du barrage et finalement subcritique du pied du barrage à l'aval, là où les effets des remous se font sentir.

Ainsi, tous ces modèles de simulation numérique de l'érosion hydraulique, des plus simples aux plus sophistiqués, sont basés sur le couplage d'un modèle hydraulique et d'un modèle de transport solide.

Le modèle hydraulique est, suivant la finesse de la modélisation, le modèle de Bernoulli avec quelques hypothèses hydrauliques, le modèle de Saint Venant unidimensionnel ou bidimensionnel ou de Navier Stockes. Cependant les équations de Navier-Stokes avec turbulence, utilisées pour l'étude des rivières ne semblent pas encore avoir été utilisées pour la rupture progressive des barrages en remblai. Le modèle de transport solide va, suivant la finesse de la modélisation, d'un simple modèle de charriage des particules solides suivant une évolution de la géométrie de l'ouvrage fixée (et en général éloignée de la réalité), à un modèle de charriage et de suspension intégré à une équation de conservation du débit solide. Les seuls modèles de transport solide disponibles sont des modèles empiriques. En particulier, tous les modèles de transport solide par charriage sont issus d'expérimentations dans le cadre de l'hydraulique fluviale (par exemple : les formules de Meyer-Peter-Müller, d'Einstein, de Schoklitsch...).

Outre ce couplage d'un modèle hydraulique et de transport solide, certaines modélisations, toutes ne le font pas, tiennent aussi compte de l'érosion par instabilité des pentes. On a vu précédemment que ce phénomène pouvait jouer un rôle important, pour l'érosion latérale sur sols non cohésifs, et pour l'érosion par blocs sur sols cohésifs. Il apparaît donc primordial de ne pas négliger ce phénomène.

1.3.3 Discussion et propositions

Il est internationalement reconnu (Morris et Hassan (2002), Morris (1998)) qu'aucun des modèles présentés précédemment n'est capable de prédire précisément, et correctement la cinétique de développement de la brèche dans le corps de l'ouvrage. L'erreur relative des résultats, donnés par ces modèles, est en effet de l'ordre de plus ou moins 50%, pour l'estimation des débits liquides déversés vers l'aval, et reste très supérieure pour l'estimation des temps de rupture.

Les raisons de cette incapacité à décrire correctement le développement d'une brèche dans les ouvrages hydrauliques sont multiples :

- le manque de données existantes, de terrain comme de laboratoire ;
- le manque de compréhension des nombreux phénomènes impliqués, et de leurs interactions ;

- la trop grande simplicité des modèles hydrauliques utilisés, et l'utilisation, hors de leur cadre d'application, des formules de transport solide, issues de l'hydraulique fluviale.

Dans ces conditions, vu l'état actuel des connaissances, il apparaît nécessaire de revenir à un niveau d'étude beaucoup plus fondamental, plus local des différents phénomènes impliqués, et de leurs interactions. On peut en effet penser que le caractère diphasique et turbulent de l'écoulement, totalement négligé dans les modèles présentés, jouent un rôle sur l'érosion. De plus, les phénomènes d'érosion, considérés dans ces modèles de façon globale pour l'ouvrage, mériteraient une description plus locale ; il n'est en effet pas idiot de penser que l'érosion ne se fait pas uniformément sur tout l'ouvrage. De même, les interactions entre l'écoulement et le sol, complètement négligées dans ces approches, mériteraient une description plus fine et détaillée.

Aussi, nous proposons ici une étude locale des phénomènes de l'érosion hydraulique des sols. Pour cela, nous supposons que l'érosion, en tant que phénomène local, est seulement due aux contraintes mécaniques exercées localement par l'écoulement du fluide sur le solide. Pour une configuration d'écoulement relativement simple, nous considérons un écoulement bidimensionnel, stationnaire dans des axes liés à la paroi (l'instationnarité des phénomènes rendrait la résolution trop compliquée), diphasique, turbulent avec le point de vue de type couche limite. Les équations dynamiques et les équations de la masse (deux phases avec diffusion de l'une par rapport à l'autre) sont résolues simultanément. Une condition à l'interface eau-sol est déduite des équations de Navier-Stokes simplifiées, et d'une condition d'érosion si la contrainte pariétale dépasse un certain seuil critique. Nous proposons ici de généraliser cette notion de seuil de contrainte critique à un matériau et non plus à une particule. En effet si l'on considère le matériau relativement homogène à une échelle mésoscopique, on peut d'une façon globale définir une contrainte critique caractéristique du matériau, qui peut tenir compte de sa cohésion, être fonction de sa teneur en eau, et de la contrainte normale exercée par le fluide sur le sol. Dans ce cas, la donnée de cette fonction est une sorte de limite de « plasticité généralisée » du matériau ou solide qu'est le sol.

Remarque : Nous négligerons dans notre modélisation les phénomènes de dépôt des sédiments. En effet dans la configuration d'écoulement qui nous intéresse, écoulement à forte pente sur une digue, ces phénomènes sont très peu présents, toute la matière arrachée par l'écoulement est emmenée par l'écoulement. Ainsi, si dépôt il y a, il se produira à l'aval de l'ouvrage, cela ne nous concerne donc pas ici.

Chapitre 2

Représentation thermodynamique d'un milieu à deux phases en mouvement

On considère un milieu diphasique constitué d'une phase liquide et d'une phase solide dispersée. Des exemples de tels milieux sont les écoulements de liquides avec des bulles ou des particules solides, des écoulements de suspensions dans un gaz, des écoulements de grains de solides, des milieux poreux traversés par une phase liquide, etc. ...

Ce milieu, si la concentration en particules solides n'est pas trop importante, aura un comportement assimilable à celui d'un fluide. On pourra donc écrire pour ce milieu des équations bilans semblables à celles d'un fluide, ou même à un mélange de fluides (voir par exemple Kataoka (1986), Nigmatulin (1990)).

Par contre, ce milieu possédant de nombreuses discontinuités (en nombre fini), dues au moins au saut de masse volumique (éventuellement de température et d'énergie interne massique) lorsqu'on passe d'une phase à l'autre, il faudra prendre certaines précautions pour écrire les équations de bilans.

Une autre caractéristique de ces milieux est leur caractère intrinsèquement aléatoire : les tailles, les formes des grains, leurs vitesses et leurs positions, ne pourront pas être considérées comme parfaitement connues. Ceci vient du fait que

les conditions initiales des évolutions, et les conditions aux limites ne peuvent pas être contrôlées parfaitement, c'est-à-dire à l'échelle de l'inclusion ou du grain. Il est probable que les perturbations des conditions aux limites et initiales entraînent des perturbations encore plus importantes dans l'écoulement. On peut dire alors que ce sont des écoulements « turbulents », mais ici cette turbulence ne nécessite pas forcément une vitesse d'écoulement grande (associée à un nombre de Reynolds critique).

Le fait que ce caractère aléatoire existe, et ne peut être évité par des précautions expérimentales classiques, incite à bâtir une représentation utilisant la statistique : on sera intéressé par les évolutions de certaines « grandeurs moyennes », puis des variances des fluctuations autour de ces moyennes, puis de corrélations entre les fluctuations de plusieurs grandeurs, et finalement par la connaissance des densités de probabilité multidimensionnelles des fluctuations de ces grandeurs. On cherchera donc à avoir des représentations théoriques de ces quantités, et des équations qu'elles doivent satisfaire. Ces grandeurs statistiques perdent par définition le caractère aléatoire des grandeurs réelles, et donc leur comportement instable, et par suite leurs difficultés à être calculées.

Bien sur, elles constituent une connaissance un peu dégradée des phénomènes.

2.1 Equations de bilans instantanées d'un milieu continu par morceaux

On considère l'espace rempli d'un milieu « continu par morceaux », c'est-à-dire que chaque phase est continue, mais il y a des discontinuités lorsqu'on passe d'une phase à l'autre.

Localement, dans l'une ou l'autre des phases continues, les équations d'état sont toujours celles que l'on connaît, comme si la phase était seule. Mais en ce qui concerne les équations de bilan, la présence de discontinuités possibles demande un réexamen.

Afin d'établir des équations de bilan valables localement dans ce milieu discontinu, on définit une fonction indicatrice de chaque phase i , ϕ_i . ϕ_i sera égale à 1 si on est dans l'espace occupé par la phase i , zéro ailleurs. Cette fonction est donc discontinue, et toutes les équations que l'on va écrire devront donc être prise au sens des distributions.

Dans chaque phase i , on note ρ_i la masse volumique, u_α^i la vitesse instantanée de composante α , $\sigma_{\alpha\beta}^i$ le tenseur des contraintes de Cauchy. Ces grandeurs sont définies en tout point de la phase i mais pas ailleurs. En les multipliant par ϕ_i , on obtient des grandeurs définies dans tout l'espace, et égales aux grandeurs correspondantes dans la phase en question.

Pour chacune des deux phases (milieu continu simple), la connaissance des variables extensives ρ_i , u_α^i et e^i (énergie interne massique), sera suffisante à leur description, étant donné que la pression, le tenseur des contraintes, et la température pourront être définis à partir de ces grandeurs extensives (voir Nigmatulin (1990)).

2.1.1 Equations instantanées de chaque phase

Nous pouvons donc écrire l'équation locale de conservation de la masse de la phase i , sans changement d'état entre phase, comme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \phi_i) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho_i \phi_i u_\alpha^i) = 0 \quad (2.1)$$

L'équation locale de conservation de la quantité de mouvement pour la phase i s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \phi_i u_\beta^i) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho_i \phi_i u_\alpha^i u_\beta^i) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi_i \sigma_{\alpha\beta}^i) + \rho_i \phi_i g_\beta + \sigma_{\alpha\beta}^i n_\beta^i \delta_s^i \quad (2.2)$$

où le dernier terme représente le terme de force de contact à l'interface entre la phase i et le reste, et le terme g_β la composante β de la gravité.

Dans le dernier terme de (2.2), δ_s^i est une fonction de type Dirac qui est la surface de contact entre la phase i et le reste (j), par unité de volume. n_β^i est la normale extérieure à la surface de la phase i , elle est supposée être définie partout sur cette surface. Au sens des distributions on a :

$$n_\beta^i \delta_s^i = -\frac{\partial \phi_i}{\partial x_\beta} \quad (2.3)$$

En premier lieu, le terme des forces de contact devrait être écrit $-\sigma_{\alpha\beta}^j n_\beta^j \delta_s^i$, c'est-à-dire la force exercée par la phase j , par l'intermédiaire de l'interface sur la phase i (nous négligeons les tensions de surface). Mais comme cette force est égale à $\sigma_{\alpha\beta}^i n_\beta^i \delta_s^i$, la force exercée par la phase i sur l'interface, on peut décrire les forces de contact avec $\sigma_{\alpha\beta}^i$ lui-même.

En effet :

$$\sigma_{\alpha\beta}^j n_\beta^j = -\sigma_{\alpha\beta}^i n_\beta^i \quad (2.4)$$

avec $n_\beta^j = -n_\beta^i$.

On définit l'énergie totale massique comme la somme de l'énergie interne massique et de l'énergie cinétique massique :

$$e_t^i = e^i + \frac{1}{2} u_\alpha^i u_\alpha^i \quad (2.5)$$

Nous n'en aurons pas besoin dans notre modélisation, mais cela permet de compléter l'exposé.

On peut alors écrire le bilan locale de conservation de l'énergie totale massique comme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \phi_i e_t^i) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho_i \phi_i u_\alpha^i e_t^i) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(-\phi_i j_\alpha^Q + \phi_i \sigma_{\alpha\beta}^i u_\beta^i) + \rho_i \phi_i g_\beta u_\beta^i + q_s^i \delta_s^i + \sigma_{\alpha\beta}^i n_\beta^i u_\alpha^i \delta_s^i \quad (2.6)$$

où j_α^Q représente le flux de chaleur dans la phase i . Le terme $q_s^i \delta_s^i$ est le flux de chaleur (normal à l'interface) par unité de surface, qui entre dans la phase i et qui provient de la phase j face à i au point considéré. Ce flux est exactement opposé à celui qui sort de la phase i au point de l'interface considéré. Ainsi :

$$q_s^i = -j_\alpha^Q n_\alpha^i \quad (2.7)$$

Si on se donne des lois pour la partie réversible des $\sigma_{\alpha\beta}^i$, et la partie irréversible de j_α^Q et $\sigma_{\alpha\beta}^i$, compte tenu de la nature interne de chaque phase, ce système d'équations est fermé. On peut alors tout calculer à partir des conditions aux limites et initiales (et en particulier suivre les évolutions des ϕ_i). Cependant la présence de discontinuités et de la fonction de Dirac δ_s^i rend ce calcul plutôt délicat.

2.1.2 Equations instantanées du mélange

On peut tirer des équations précédentes les bilans pour le mélange, le milieu constitué des deux phases. Ainsi, on définit :

$$\rho = \sum_{i=1}^2 \rho_i \phi_i \quad (2.8)$$

ici ρ est encore une fonction discontinue, égale à l'un des ρ_i suivant la phase considérée.

De même, on définit :

$$\rho u_\alpha = \sum_{i=1}^2 \rho_i \phi_i u_\alpha^i \quad (2.9)$$

et

$$\rho e_t = \sum_{i=1}^2 \rho_i \phi_i e_t^i \quad (2.10)$$

On obtient alors en sommant les équations bilan de la première partie : le bilan local de la conservation de la masse du mélange :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha) = 0 \quad (2.11)$$

le bilan local de la conservation de quantité de mouvement du mélange :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha u_\beta) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sum_{i=1}^2 \phi_i \sigma_{\alpha\beta}^i \right) + \rho g_\beta \quad (2.12)$$

On peut remarquer que dans cette dernière équation la somme des forces de contact a disparu ; elles sont en effet égales et opposées en chaque point de contact sur l'interface (car nous avons négligé les tensions de surface).

Le bilan local de la conservation de l'énergie totale du mélange :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha e_t) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(-\sum_{i=1}^2 \phi_i j_\alpha^Q + \sum_{i=1}^2 \phi_i \sigma_{\alpha\beta}^i u_\beta^i \right) + \rho g_\beta u_\beta \quad (2.13)$$

Là encore, les termes d'échanges d'énergie entre phases disparaissent, car égaux et opposés.

Ces équations bilan présentent comme précédemment des discontinuités qui les rendent délicates à résoudre ; elles font par contre disparaître toutes les interactions entre phases, ce qui simplifie les équations.

2.2 Equations de bilan moyennées du fluide à deux phases

Pour éviter la difficulté de se trouver devant des variables qui peuvent avoir des comportements discontinus ou en pic de Dirac, et pour lisser les perturbations aléatoires dues à notre mauvaise connaissance des conditions aux limites ou initiales, nous allons, comme en turbulence, définir un milieu moyen qui fera disparaître ces comportements singuliers.

Nous allons tout d'abord, comme dans la partie précédente, écrire les équations de bilan moyennées pour chacune des phases, puis pour le mélange.

2.2.1 Equations moyennées de chaque phase

2.2.1.1 Définitions des valeurs moyennes

Plusieurs types de moyenne existent pour faire disparaître les discontinuités du milieu. On peut, soit définir une moyenne statistique, en un point, réalisée sur N expériences où le même écoulement à deux phases se produit avec des petites différences sur la position initiale des deux phases, soit faire une moyenne sur un petit volume autour d'un point. C'est cette deuxième approche que nous allons présenter.

Soit V un volume, assez petit par rapport à l'échelle du milieu mais grand par rapport à l'échelle des particules impliquées. On définit alors la masse volumique moyenne de phase i dans le volume V :

$$\overline{\rho_i} = \overline{\rho_i \phi_i} = \frac{1}{V} \iiint_V \rho_i \phi_i dV \quad (2.14)$$

Avec cette définition, on voit que $\overline{\rho_i}$ peut prendre de façon continue toutes les valeurs comprises entre 0 et $\rho_{i\max}$. La masse volumique ainsi définie n'étant pas constante, il est préférable pour les autres variables extensives de définir une moyenne pondérée par la masse volumique moyenne. Ainsi, on définit la vitesse moyenne de la phase i dans V comme :

$$\widetilde{u_\beta^i} = \overline{\frac{\rho_i \phi_i u_\beta^i}{\rho_i}} = \frac{\iiint_V \rho_i \phi_i u_\beta^i dv}{\iiint_V \rho_i \phi_i dv} \quad (2.15)$$

De même pour l'énergie interne :

$$\widetilde{e^i} = \overline{\frac{\rho_i \phi_i e^i}{\rho_i}} = \frac{\iiint_V \rho_i \phi_i e^i dv}{\iiint_V \rho_i \phi_i dv} \quad (2.16)$$

On définit encore la fraction volumique occupée par la phase i :

$$\overline{\phi_i} = \frac{1}{V} \iiint_V \phi_i dv \quad (2.17)$$

et la fraction massique de la phase i , dans le mélange contenu dans V :

$$\widetilde{\phi_i} = \frac{\iiint_V \rho_i \phi_i dv}{\iiint_V \sum_{i=1}^2 \rho_i \phi_i dv} = \frac{\overline{\rho_i}}{\overline{\rho_1 + \rho_2}} = \frac{\overline{\rho_i}}{\overline{\rho}} \quad (2.18)$$

On peut aussi définir :

$$\overline{\rho_i^*} = \frac{\iiint_V \rho_i \phi_i dv}{\iiint_V \phi_i dv} = \frac{\overline{\rho_i}}{\overline{\phi_i}} = \frac{\overline{\rho} \widetilde{\phi_i}}{\overline{\phi_i}} \quad (2.19)$$

qui représente la masse de la phase i dans le volume occupé par i . Ainsi, si la phase i est à masse volumique constante on aura simplement $\overline{\rho_i^*} = \rho_i$.

On définit $u_\alpha^{i'}$, écart entre la vitesse instantanée de la phase i et sa moyenne, ou fluctuation :

$$u_\alpha^{i'} = u_\alpha^i - \widetilde{u_\alpha^i} \quad (2.20)$$

On peut de même, écrire l'énergie massique instantanée comme la somme d'une valeur moyenne et d'une valeur fluctuante.

Nous allons maintenant moyenner les équations de bilan de chacune des phases, pour obtenir des équations de bilan sur les variables moyennées définies précédemment.

2.2.1.2 Equations moyennées de chaque phase

L'équation locale de conservation de la masse de la phase i , ($i=1, 2$) est :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{\phi}_i) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\rho}\bar{\phi}_i\bar{u}_\alpha^i) = 0 \quad (2.21)$$

Grâce aux définitions précédentes, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \overline{\rho_i\phi_i u_\alpha^i u_\beta^i} &= \overline{\rho_i\phi_i(u_\alpha^{i'} + \bar{u}_\alpha^i)(u_\beta^{i'} + \bar{u}_\beta^i)} \\ &= \overline{\rho_i\phi_i u_\alpha^i \bar{u}_\beta^i} + \overline{\rho_i\phi_i u_\alpha^{i'} \bar{u}_\beta^i} + \overline{\rho_i\phi_i \bar{u}_\beta^i u_\alpha^{i'}} + \overline{\rho_i\phi_i \bar{u}_\alpha^i u_\beta^{i'}} \\ &= \overline{\rho_i\phi_i \bar{u}_\alpha^i \bar{u}_\beta^i} + \overline{\rho_i\phi_i u_\alpha^{i'} \bar{u}_\beta^i} + \overline{\rho_i\phi_i \bar{u}_\beta^i \bar{u}_\alpha^{i'}} + \overline{\rho_i\phi_i \bar{u}_\alpha^i u_\beta^{i'}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Or

$$\overline{\rho_i\phi_i u_\alpha^{i'}} = \overline{\rho_i\phi_i u_\alpha^i} - \overline{\rho_i\phi_i \bar{u}_\alpha^i} = 0 \quad (2.23)$$

donc

$$\begin{aligned} \overline{\rho_i\phi_i u_\alpha^i u_\beta^i} &= \overline{\rho_i\phi_i \bar{u}_\alpha^i \bar{u}_\beta^i} + \overline{\rho_i\phi_i u_\alpha^{i'} u_\beta^{i'}} \\ &= \overline{\rho_i\phi_i \bar{u}_\alpha^i \bar{u}_\beta^i} + \overline{\rho_i\phi_i \bar{u}_\alpha^{i'} \bar{u}_\beta^{i'}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

En utilisant le résultat précédent, on obtient pour l'équation locale de conservation de quantité de mouvement de la phase i :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{\phi}_i\bar{u}_\beta^i) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\rho}\bar{\phi}_i\bar{u}_\alpha^i\bar{u}_\beta^i) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\overline{\phi_i \sigma_{\alpha\beta}^i} - \overline{\rho\phi_i u_\alpha^{i'} u_\beta^{i'}}\right) + \bar{\rho}\bar{\phi}_i g_\beta + \overline{\sigma_{\alpha\beta}^i n_\beta^i \delta_s^i} \quad (2.25)$$

On voit apparaître dans cette dernière équation un terme de contraintes additionnelles, il est dû au fait que dans la phase i il existe des fluctuations de vitesse qui sont corrélées.

Avec la même démarche, on peut moyenner l'équation (2.6) de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\rho} \bar{\phi}_i \bar{e}_t^i \right) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\bar{\rho} \bar{\phi}_i \bar{u}_\alpha^i \bar{e}_t^i \right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(-\bar{\phi}_i \bar{j}_\alpha^{Q_i} + \bar{\phi}_i \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i \bar{u}_\beta^i - \bar{\rho}_i \bar{\phi}_i \bar{u}_\alpha^{i'} \bar{e}_t^{i'} \right) + \bar{\rho} \bar{\phi}_i \bar{g}_\beta \bar{u}_\beta^i + \left(-\bar{j}_\alpha^{Q_i} + \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i \bar{u}_\alpha^i \right) \bar{n}_\beta^i \bar{\delta}_s^i \quad (2.26)$$

Si l'on fait ce même calcul, en décomposant l'énergie totale en énergie interne et énergie cinétique, on obtient pour le terme supplémentaire de flux d'énergie de l'équation (2.26) :

$$\overline{\rho_i \phi_i u_\alpha^{i'} e_t^{i'}} = \overline{\rho_i \phi_i u_\alpha^{i'} e^{i'}} + \frac{\overline{\rho_i \phi_i u_\beta^{i'} u_\beta^{i'} u_\alpha^{i'}}}{2} + \overline{\rho_i \phi_i u_\beta^{i'} u_\alpha^{i'} \bar{u}_\beta^i} \quad (2.27)$$

Là encore ce terme additionnel est dû aux corrélations des fluctuations de vitesse et d'énergie.

Il suffit alors de trouver des lois pour les moyennes des flux (irréversibles), et pour les termes supplémentaires dûs aux fluctuations, en plus des équations d'état, en fonction des variables extensives moyennes, pour fermer le système d'équations.

2.2.2 Equations moyennées du mélange

On cherche maintenant à écrire les équations de bilan moyennées pour le milieu complet, constitué des deux phases. Deux méthodes sont possibles pour cela, on peut soit moyenner les équations de bilan instantanées du mélange, soit sommer les équations de bilan moyennées de chacune des phases. Les résultats seront équivalents mais utiliseront des notations différentes.

A partir des équations (2.11), (2.12) et (2.13) et en écrivant :

$$u_\alpha'' = u_\alpha - \bar{u}_\alpha \quad (2.28)$$

$$e_t'' = e_t - \bar{e}_t \quad (2.29)$$

on obtient, l'équation locale de conservation de la masse du mélange :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\bar{\rho} \bar{u}_\alpha \right) = 0 \quad (2.30)$$

L'équation locale de conservation de quantité de mouvement du mélange est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\rho} \bar{u}_\beta \right) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\bar{\rho} \bar{u}_\alpha \bar{u}_\beta \right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sum_{i=1}^2 \bar{\phi}_i \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i - \bar{\rho} \bar{u}_\alpha'' \bar{u}_\beta'' \right) + \bar{\rho} \bar{g}_\beta \quad (2.31)$$

L'équation locale de la conservation de l'énergie totale moyenne est :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{e}_t) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\rho}\tilde{u}_\alpha\tilde{e}_t) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(-\sum_{i=1}^2\bar{\phi}_i\bar{J}_\alpha^{Q_i} + \sum_{i=1}^2\bar{\phi}_i\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i\bar{u}_\beta^i - \bar{\rho}\bar{u}_\alpha''\bar{e}_t''\right) + \bar{\rho}g_\beta\tilde{u}_\beta \quad (2.32)$$

On peut aussi sommer les équations moyennées de chaque phase, pour cela on définit :

- la masse volumique du mélange

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2 \quad (2.33)$$

- la vitesse moyenne du mélange

$$\bar{\rho}\tilde{u}_\alpha = \bar{\rho}_1\tilde{u}_\alpha^1 + \bar{\rho}_2\tilde{u}_\alpha^2 \quad (2.34)$$

- l'énergie totale moyenne du mélange:

$$\bar{\rho}\tilde{e}_t = \bar{\rho}_1\tilde{e}_t^1 + \bar{\rho}_2\tilde{e}_t^2 \quad (2.35)$$

Si l'on définit Δu_α^i la différence de vitesse moyenne entre la phase i et le milieu complet :

$$\Delta u_\alpha^i = \tilde{u}_\alpha^i - \tilde{u}_\alpha \quad (2.36)$$

On obtient pour l'équation locale de conservation de quantité de mouvement du mélange :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{u}_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\rho}\tilde{u}_\alpha\tilde{u}_\beta) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sum_{i=1}^2\bar{\phi}_i\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i - \sum_{i=1}^2\bar{\rho}_i\bar{\phi}_i\tilde{u}_\alpha^i\tilde{u}_\beta^i - \sum_{i=1}^2\bar{\rho}_i\bar{\phi}_i\Delta u_\alpha^i\Delta u_\beta^i\right) + \bar{\rho}g_\beta \quad (2.37)$$

C'est la même équation que (2.31), mais avec des définitions un peu différentes.

On pourrait faire de même pour l'énergie, et on obtiendrait un terme de flux de diffusion de l'énergie un peu différent.

Pour pouvoir utiliser le système d'équations (2.21), (2.30), (2.31) (ou (2.37)) et (2.32), il faut avoir des relations qui « modélisent » $\sum_{i=1}^2\bar{\phi}_i\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i$ et $\bar{\rho}\bar{u}_\alpha''\bar{u}_\beta''$, c'est-à-dire en donnent une expression en fonction des variables déjà existantes dans les équations. De même pour \tilde{u}_α^i de (2.21), pour $\bar{\phi}_i\bar{J}_\alpha^{Q_i}$ et les termes analogues de l'équation d'énergie.

C'est très compliqué dans le cas général. Pour notre cas particulier, cela est présenté dans le paragraphe suivant.

2.3 Choix de la modélisation du milieu diphasique

Nous considérons un écoulement d'eau chargé en particules solides dispersées ; les variables relatives à l'eau et aux sédiments seront indiquées respectivement e et s (au lieu de 1 et 2 dans les équations précédentes).

Comme nous l'avons vu dans les parties précédentes, plusieurs niveaux de modélisation sont possibles pour décrire un tel milieu diphasique.

Il est possible d'écrire les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie pour chacune des phases (avec des termes pour traduire les interactions entre phases). Le nombre d'inconnues peut alors être important, et les termes d'interaction entre phase ne sont pas forcément connus. Il est en fait plus simple, et suffisant pour la plupart des systèmes « pas trop compliqués », de s'intéresser aux équations de bilan du mélange (comme s'il s'agissait d'un fluide simple, formé de différents constituants) et de l'équation de conservation de l'une des phases. Le nombre d'inconnues est ainsi réduit pour la vitesse (on ne considère qu'une vitesse, celle du mélange), mais il est nécessaire d'avoir des modèles pour la diffusion, d'une espèce par rapport à l'autre, et pour le tenseur des contraintes, qui devra tenir compte de ces différences de composition dans le mélange.

Nous ne nous intéressons pas à la température du milieu, ainsi l'équation d'énergie ne sera pas utilisée dans notre modélisation.

2.3.1 Choix des équations

Les masses volumiques de l'eau et du sable, ρ_e et ρ_s , sont constantes.

On définit la fraction massique de sédiments dans le mélange Y :

$$Y = \tilde{\phi}_s \quad (2.38)$$

et la fraction volumique de sédiments dans le mélange c

$$c = \overline{\phi}_s \quad (2.39)$$

tel que

$$\rho_s c = \bar{\rho} Y \quad (2.40)$$

Il s'ensuit que :

$$\bar{\rho} = \rho_s c + \rho_e (1 - c) = \frac{1}{\frac{1}{\rho_s} Y + \frac{1}{\rho_e} (1 - Y)} \quad (2.41)$$

L'expression de la vitesse moyenne du mélange (2.34) est :

$$\bar{\rho}\bar{u}_\alpha = \rho_s c \bar{u}_\alpha^s + \rho_e (1-c) \bar{u}_\alpha^e \quad (2.42)$$

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour le mélange sont :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\rho}\bar{u}_\alpha) = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{u}_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\rho}\bar{u}_\alpha \bar{u}_\beta) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\sigma'_{\alpha\beta}) + \bar{\rho}g_\beta \quad (2.44)$$

où

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \overline{\phi_e \sigma_{\alpha\beta}^e} + \overline{\phi_s \sigma_{\alpha\beta}^s} - \overline{\rho u_\alpha'' u_\beta''} \quad (2.45)$$

La décomposition du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma'_{\alpha\beta}$ en parties sphérique et déviatorique s'écrit :

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \tau'_{\alpha\beta} - p\delta_{\alpha\beta} \quad , \quad p = \frac{1}{3}\sigma'_{\alpha\alpha} \quad (2.46)$$

Les équations précédentes nous permettent de décrire le mouvement moyen du mélange, mais ne nous apprennent rien sur sa composition moyenne. L'équation de conservation de la masse des sédiments s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}Y) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\rho}Y\bar{u}_\alpha^s) = 0 \quad (2.47)$$

Elle fait apparaître la vitesse moyenne des sédiments, que l'on ne connaît pas, puisque l'on a fait le choix de ne pas écrire l'équation de quantité de mouvement pour cette phase. On écrit alors cette dernière équation, avec la vitesse moyenne du mélange, comme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}Y) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{\rho}Y\bar{u}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(-J_\alpha^{Dt,s}) \quad (2.48)$$

où $J_\alpha^{Dt,s} = \bar{\rho}Y\Delta u_\alpha^s$ est un flux de diffusion à modéliser, et où Δu_α^s est donnée par (2.36).

Si l'on se donne des lois pour les flux de diffusion, de masse et de quantité de mouvement, la résolution des équations (2.43), (2.44) et (2.48) nous donnera donc accès à la vitesse moyenne locale du mélange et à sa composition moyenne locale.

2.3.2 Choix des lois pour les flux

Ces écoulements diphasiques ont un caractère turbulent, dû aux fluctuations de vitesse, de densité, et de l'imparfaite connaissance des conditions initiales et des conditions aux limites... Il nous est donc apparu logique d'utiliser des descriptions et des lois semblables à celles utilisées en turbulence. Différents niveaux de modélisation, plus ou moins complexes, existent.

La modélisation la plus simple consiste à écrire le tenseur des contraintes visqueuses et le flux de diffusion grâce aux lois de Newton et de Fick (obtenues grâce à la thermodynamique des processus irréversibles), à partir des variables moyennes, mais avec des coefficients de viscosité et de diffusion effectifs. Ce concept de viscosité effective pour décrire des écoulements turbulents fut introduit en 1877 par Boussinesq. Les flux ont la même forme que pour des écoulements de fluides simples en laminaire, et c'est seulement le coefficient effectif qui rend compte de l'aspect turbulent des phénomènes.

Il existe plusieurs façons de modéliser ces coefficients effectifs.

La loi de Fick (pour le flux de diffusion), et la loi de Newton (pour les contraintes visqueuses) sont :

$$J_{\alpha}^{Dt,s} = -\bar{\rho}D_{eff} \frac{\partial Y}{\partial x_{\alpha}} \quad (2.49)$$

$$\tau'_{\alpha\beta} = \mu_{eff} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial \widetilde{u}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) - \frac{2}{3} \mu_{eff} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}} \right) \quad (2.50)$$

Une autre approche, plus complexe, consiste à écrire les équations vérifiées par ces flux à partir des équations instantanées de chaque phase. Mais ces équations font apparaître de nouveaux termes de corrélations, entre les fluctuations des différentes variables, qu'il faudra modéliser. Comme on le voit quelque soit le degré de complexité de la modélisation de ces flux, il faudra toujours trouver des lois de fermeture (i.e de comportement), nécessaires à la résolution des équations.

On peut trouver une description complète des différents modèles de fermeture en turbulence monophasique dans Chassaing (2000).

2.3.2.1 La viscosité effective

Les modèles les plus simples sont les modèles algébriques du premier ordre. Ils consistent en fait à relier les corrélations doubles (de vitesses fluctuantes) ou plus généralement les flux turbulents aux inconnues principales que sont les grandeurs moyennes. On limite ainsi le champ des grandeurs inconnues principales aux seules valeurs moyennes des fonctions de l'écoulement.

La viscosité effective constante est le modèle le plus simple. Avec une loi de type longueur de mélange (Prandtl), la viscosité effective est fonction du taux de déformation :

$$\mu_{\text{eff}} = \bar{\rho}l^2 \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}} \quad (2.51)$$

où l est une longueur caractéristique, et $\underline{\underline{d}}$ est :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \widetilde{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial \widetilde{u}_\gamma}{\partial x_\gamma}$$

2.3.2.2 Le coefficient de diffusion effectif

Le plus simple consiste à le calculer par l'intermédiaire de la viscosité effective, et d'un nombre sans dimension, le nombre de Schmidt :

$$Sc_{\text{eff}} = \frac{\mu_{\text{eff}}}{\rho D_{\text{eff}}} \quad (2.52)$$

Le nombre de Schmidt représente le rapport des temps caractéristiques de la diffusion de la masse et de la diffusion de la quantité de mouvement. Il existe peu d'informations dans la littérature sur les valeurs du nombre de Schmidt dans de tels écoulements. Mais si l'on admet que la diffusion est faite par les mêmes « tourbillons » que ceux qui produisent le frottement turbulent, cela correspond à $Sc_{\text{eff}} = 1$.

Cette approche, qui consiste à relier le flux de diffusion au gradient de concentration moyenne, est la plus simple. Mais elle ne tient pas compte de la sédimentation, ou de l'effet de la gravité sur les particules plus lourdes que l'eau, des chocs entre particules, des gradients de vitesse.

Une solution très couramment utilisée pour tenir compte de la sédimentation des particules (Graf et Celino (2001), Kowacs (1998)), consiste à introduire la vitesse de chute d'une particule dans l'équation de conservation de masse des sédiments. Ainsi, en bidimensionnel, si l'axe x est horizontal dans le sens de l'écoulement, perpendiculaire à l'axe y , on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}Y) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho}Y\tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}Y(\tilde{v} - v_s)) = \frac{\partial}{\partial x} (-J_x^{Dt,s}) + \frac{\partial}{\partial y} (-J_y^{Dt,s}) \quad (2.53)$$

où v_s est la vitesse de Stokes, c'est-à-dire la vitesse de chute d'une particule isolée, sous son propre poids, dans un liquide visqueux au repos.

Nous n'utiliserons pas cette approche. On peut en effet penser que cette vitesse n'a plus vraiment de sens dans un écoulement turbulent. Elle reflète l'égalité de la

force de traînée agissant sur la particule, avec son poids déjaugé dans la direction opposée. Or une particule en suspension dans un écoulement peut être soumise à de nombreuses forces. Suivant les conditions d'écoulements, et les caractéristiques des particules, toutes ne sont pas présentes en même temps et avec le même ordre de grandeur : le poids déjaugé, vertical descendant, la force de traînée, dans le sens de l'écoulement, la force de portance, ascendante, due aux gradients de vitesses dans l'écoulement, et aux effets de rotation de la particule (effet Magnus) (voir Dey 1999), et éventuellement des forces additives dues aux chocs entre particules. Dans certains cas particuliers, ces forces se compensent, et la particule peut alors acquérir une position d'équilibre à l'intérieur de l'écoulement : effet Segré-Silberberg (Joseph et Ocando (2002)).

Aussi, des modélisations plus complexes sont possibles, permettant au flux de diffusion de dépendre de nombreuses quantités et non plus seulement du gradient de fraction massique moyenne.

Les études récentes sur les écoulements turbulents (Février et Simonin (1998), Greimann et Holly (2001)) permettent d'obtenir une équation pour Δu_α^s , l'écart entre la vitesse moyenne des sédiments et la vitesse moyenne du mélange, à partir des équations de chaque phase. On peut alors résoudre cette équation, ou la simplifier, pour obtenir une loi différentielle, donc non locale, pour cette vitesse et donc pour le flux de diffusion.

Les équations de chaque phase :

Pour l'eau, la conservation de la masse et de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t}((1-c)\rho_e) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}((1-c)\rho_e \tilde{u}_\alpha^e) = 0 \quad (2.54)$$

$$(1-c)\rho_e \frac{\partial \tilde{u}_\alpha^e}{\partial t} + (1-c)\rho_e \tilde{u}_\beta^e \frac{\partial \tilde{u}_\alpha^e}{\partial x_\beta} = -(1-c) \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + (1-c)\rho_e g_\alpha + I_\alpha^e - \frac{\partial}{\partial x_\beta}((1-c)\rho_e R_{\alpha\beta}^e) \quad (2.55)$$

Pour les sédiments, la conservation de la masse et de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial c\rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(c\rho_s \tilde{u}_\alpha^s) = 0 \quad (2.56)$$

$$c\rho_s \frac{\partial \tilde{u}_\alpha^s}{\partial t} + c\rho_s \tilde{u}_\beta^s \frac{\partial \tilde{u}_\alpha^s}{\partial x_\beta} = -c \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + c\rho_s g_\alpha + I_\alpha^s - \frac{\partial}{\partial x_\beta}(c\rho_s R_{\alpha\beta}^s) \quad (2.57)$$

Dans ces équations

$$R_{\alpha\beta}^e = \overline{u_{\alpha}^{e'} u_{\beta}^{e'}} \quad (2.58)$$

représente les corrélations de vitesses du fluide, les tensions de Reynolds;

$$R_{\alpha\beta}^s = \overline{u_{\alpha}^{s'} u_{\beta}^{s'}} \quad (2.59)$$

représente les corrélations de vitesses des particules; et

$$I_{\alpha}^s = -I_{\alpha}^e \quad (2.60)$$

est la part du taux de transfert de quantité de mouvement aux interfaces, qui reste après la soustraction de la contribution de la pression moyenne.

A partir de ces équations on peut écrire une équation pour la vitesse de diffusion des sédiments (voir Annexe II) :

$$\begin{aligned} c\rho_s \frac{\partial_{\Delta}u_{\alpha}^s}{\partial t} + c\rho_s \tilde{u_{\beta}} \frac{\partial_{\Delta}u_{\alpha}^s}{\partial x_j} &= -c\rho_s \Delta u_{\beta}^s \frac{\partial \tilde{u_{\alpha}}}{\partial x_{\beta}} + \left(\frac{c\rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial x_{\alpha}} + I_{\alpha}^s \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(c\rho_s (R_{\alpha\beta}^s + \Delta u_{\alpha}^s \Delta u_{\beta}^s) - \frac{c\rho_s}{\rho} R_{\alpha\beta}^T \right) - R_{\alpha\beta}^T \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(\frac{c\rho_s}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

où $R_{\alpha\beta}^T = (1 - c) \rho_e (R_{\alpha\beta}^e + \Delta u_{\alpha}^e \Delta u_{\beta}^e) + c \rho_s (R_{\alpha\beta}^s + \Delta u_{\alpha}^s \Delta u_{\beta}^s)$

On peut résoudre cette équation telle quelle, ce qui nécessite des calculs numériques compliqués. Par contre si l'on suppose que les termes de production et de dissipation sont prédominants devant tous les autres, cela la simplifie fortement.

Dans tous les cas, il faudra connaître $R_{\alpha\beta}^T$ (et $R_{\alpha\beta}^s$); que l'on peut soit modéliser, soit calculer à partir d'une équation à ajouter. On pourrait aussi écrire l'équation pour $R_{\alpha\beta}^T$, n'en garder que les termes de production et de dissipation, et en obtenir ainsi, après quelques simplifications, une relation algébrique.

Ainsi, on va supposer que dans l'équation (2.61) les termes de production et de dissipation sont prédominants. Cette hypothèse signifie en fait que les effets locaux l'emportent sur les effets non locaux (en d'autres termes l'écoulement n'a pas de mémoire).

L'équation simplifiée est alors :

$$-c\rho_s \Delta u_\beta^s \frac{\partial \widetilde{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \left(\frac{c\rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + I_\alpha^s - R_{\alpha\beta}^T \frac{\partial Y}{\partial x_\beta} = 0 \quad (2.62)$$

Le terme I_α^s représente en fait les forces de traînée induite par l'eau sur les sédiments. Son expression (Février et Simonin (2000)) est :

$$I_\alpha^s = -c\rho_s \frac{1}{\tau_{12}^F} \langle v_{r,i} \rangle_2 = -c\rho_s \frac{1}{\tau_{12}^F} \left(\widetilde{u}_\alpha^s - \widetilde{u}_\alpha^e - v_{d,\alpha} \right) \quad (2.63)$$

C'est une expression linéaire, proportionnelle à la différence entre la vitesse moyenne des sédiments, et la vitesse moyenne de l'eau, telle qu'elle est vue par les sédiments, ce qui inclut $v_{d,\alpha}$ (Février et Simonin (2000)).

Comme on le voit, cette équation introduit des temps caractéristiques.

Ici, τ_{12}^F est le temps caractéristique à l'échelle du grain de sédiment (semblable au temps de Stokes), il dépend de sa taille si chaque grain est indépendant des autres dans son mouvement. Si il y a beaucoup de grains, et s'ils peuvent se déplacer par groupes, il faut définir une nouvelle taille du groupe, ce qui donne un autre τ_{12}^F .

Par ailleurs, $v_{d,\alpha}$ qui est liée à la dispersion turbulente du solide dans l'eau lorsqu'il est réparti de façon non homogène, nécessite un autre temps caractéristique à l'échelle de la turbulence.

L'équation (2.62) nous permet finalement d'obtenir une formule algébrique pour la vitesse de diffusion du sable.

2.3.3 Conclusion

Nous rappelons ici le système d'équations à résoudre, mais par raison de lisibilité, les opérateurs de moyenne ne sont, et ne seront plus, représentés dans les équations. Il ne faut pourtant pas oublier que toutes les grandeurs calculées sont des grandeurs moyennes !

Les équations qui nous intéressent sont alors :

- la conservation de la masse du mélange

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha) = 0 \quad (2.64)$$

- la conservation de la masse des sédiments

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho Y u_\alpha) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(-J_\alpha^{Dt,s}) \quad (2.65)$$

- la conservation de la quantité de mouvement du mélange

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha u_\beta) = -\frac{\partial p}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\tau'_{\alpha\beta}) + \rho g_\beta \quad (2.66)$$

- les lois de comportements pour les flux

$$J_\alpha^{Dt,s} = -\rho D_{eff} \frac{\partial Y}{\partial x_\alpha} \quad (2.67)$$

$$\tau'_{\alpha\beta} = \mu_{eff} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{2}{3} \mu_{eff} \left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) \quad (2.68)$$

Avec les équations (2.64) (2.65) et (2.66), et les modélisations (2.67) et (2.68), on peut calculer un écoulement à deux phases sur le sol (d'une forme donnée) à partir de conditions aux limites et initiales données. Pour pouvoir le faire, il faut préciser ces conditions, et en particulier, pour un problème d'érosion la condition à la limite au sol qui concerne l'érosion, c'est ce que nous allons voir dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Conditions à l'interface liquide / solide, et modèle d'érosion

Un modèle d'érosion peut être défini comme une relation explicitant les échanges de matière entre un milieu solide et un milieu fluide à leur interface.

De tels systèmes physiques, constitués de deux (ou plus) corps de constitutions différentes, sont courant dans la nature. Dans de tels cas, deux phases (ou plus) sont présentes dans le système, et sont séparées l'une de l'autre par une région très fine, l'interface. L'interface constitue donc, au plus faible ordre d'approximation, un emplacement de discontinuités possibles de masse volumique, de porosité, de contraintes, ou de vitesse...

Ainsi si l'on veut décrire le sol érodable et le fluide de façon continue et couplée, il est nécessaire de considérer l'interface sédiment/eau comme une frontière interne au système, à travers laquelle le transport de particules est non seulement possible, mais est une part fondamentale du modèle.

Il s'agira donc de considérer l'interface comme une frontière interne au système et d'y exprimer les conditions de flux et de concentration (Boudreau (1997)).

3.1 Principe

Nous considérons un écoulement d'eau sur un sol érodable. Ainsi de la matière solide peut être arrachée au sol et entraînée par la suite par l'écoulement d'eau. Nous devons donc séparer ces deux domaines dont la nature et le comportement seront différents, l'un solide érodable, l'autre liquide qui recevra le débit érodé du sol, par une interface poreuse que nous appellerons Γ .

A travers cette interface nous considérons que la matière érodée subit une transition discontinue d'état, le débit érodé passe d'un état solide juste sous l'interface à un état fluide juste au dessus (Zhang et Campbell (1992), Capart (2000)). Au dessus de l'interface, le mélange eau/particules est considéré comme un fluide alors qu'il est considéré comme un solide juste au dessous, par définition.

3.2 Conditions à l'interface

Nous présentons Figure 3.1 le schéma de l'interface entre le milieu solide et le milieu fluide.

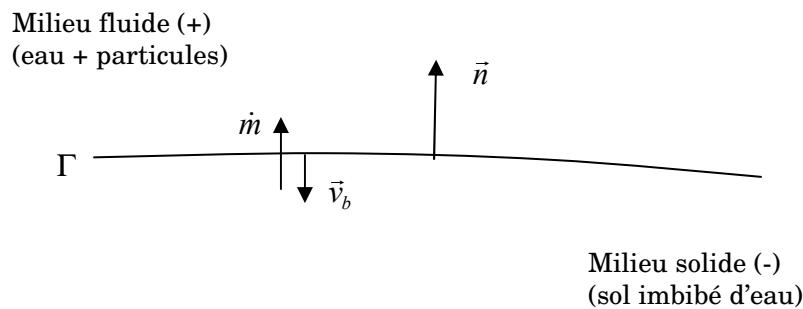


Figure 3.1 : Schéma de l'interface entre les deux milieux.

Le vecteur \vec{n} est un vecteur unitaire perpendiculaire à Γ orienté du solide vers le fluide, voir Figure 3.1.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- l'interface Γ est d'épaisseur nulle, c'est seulement une surface de séparation entre les deux milieux solide et liquide ;
- s'il y a érosion le débit érodé \vec{m} qui traverse l'interface est perpendiculaire à celle-ci ;
- l'érosion provoque un déplacement (une régression) de l'interface dans la direction opposée à \vec{n} ; si \vec{v}_b est la vitesse de déplacement de l'interface, on a :

$$\vec{v}_b = -v_b \vec{n} \quad (3.1)$$

- si il y a dépôt de sédiments sur l'interface, celle-ci se déplace alors suivant \vec{n} .

Nous définissons les quantités générales suivantes, où \vec{x} est la position d'un point appartenant à l'interface :

$$a^+(\vec{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(\vec{x} + |\varepsilon| \vec{n}) \quad (3.2)$$

$$a^-(\vec{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(\vec{x} - |\varepsilon| \vec{n}) \quad (3.3)$$

Ainsi, $a^+(\vec{x})$ représente la quantité a au point \vec{x} dans le fluide (juste au dessus de l'interface), alors que $a^-(\vec{x})$ est son équivalent dans le solide (juste au dessous de l'interface).

Définir de telles quantités va nous permettre d'écrire les lois de bilans de part et d'autre de l'interface lorsqu'il y a érosion ou dépôt de sédiments. Pour cela nous allons utiliser les équations de Rankine-Hugoniot ou d'Hadamard, exprimant les lois de conservations locales à travers l'interface.

Relations de Rankine-Hugoniot

La démarche suivie pour obtenir ces équations de saut est présentée en Annexe V, nous l'appliquons ici à nos équations de bilan.

Ainsi, la première de ces lois exprime la conservation de la masse totale à travers l'interface :

$$[\![\rho(\vec{u} - \vec{v}_b) \cdot \vec{n}]\!] = 0 \quad (3.4)$$

La suivante exprime la conservation de la masse des sédiments à travers l'interface :

$$[\![(\rho Y(\vec{u} - \vec{v}_b) + \vec{J}) \cdot \vec{n}]\!] = 0 \quad (3.5)$$

\vec{J} représente ici le flux de diffusion.

Et finalement la conservation de quantité de mouvement à travers l'interface est :

$$[\![(\underline{\sigma} - \rho \vec{u} \otimes (\vec{u} - \vec{v}_b)) \cdot \vec{n}]\!] = 0 \quad (3.6)$$

Si l'on appelle \dot{m} le débit érodé qui traverse l'interface, on peut écrire d'après (3.4) que :

$$\dot{m} = \rho^- (\vec{u}^- - \vec{v}_b) \cdot \vec{n} \quad (3.7)$$

$$\dot{m} = \rho^+ (\vec{u}^+ - \vec{v}_b) \cdot \vec{n} \quad (3.8)$$

Cela signifie que le débit érodé qui vient du milieu solide est égal à celui qui rentre dans le milieu fluide. Il existera alors un saut de vitesse à l'interface du matériau la traversant, seulement si il existe un saut de masse volumique du matériau à l'interface.

Cette définition de \dot{m} permet de réécrire (3.5) comme :

$$(\vec{J}^+ - \vec{J}^-) \cdot \vec{n} = \dot{m} (Y^- - Y^+) \quad (3.9)$$

où \vec{J}^+ et \vec{J}^- sont respectivement les flux de diffusion juste au dessus et en dessous de l'interface.

Nous allons maintenant projeter l'équation (3.6) dans les directions normale et tangente à Γ . On définit \vec{t} le vecteur tangent à Γ ; $\vec{t} \cdot \vec{n} = 0$.

$$[\vec{n} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} - \rho \vec{u} \otimes (\vec{u} - \vec{v}_b)) \cdot \vec{n}] = 0 \quad (3.10)$$

$$[\vec{t} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} - \rho \vec{u} \otimes (\vec{u} - \vec{v}_b)) \cdot \vec{n}] = 0 \quad (3.11)$$

On décompose $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}$ en une partie normale et tangentielle :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} \quad (3.12)$$

avec par définition :

$$\begin{aligned} \sigma &= \vec{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} \\ \tau &= \vec{t} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (3.13)$$

On obtient alors une relation entre les contraintes normales et tangentielles de part et d'autre de l'interface :

$$\sigma^+ - \sigma^- = \dot{m} (\vec{u}^+ - \vec{u}^-) \cdot \vec{n} \quad (3.14)$$

$$\tau^+ - \tau^- = \dot{m} (\vec{u}^+ - \vec{u}^-) \cdot \vec{t} \quad (3.15)$$

Ces équations permettent de relier les valeurs des variables de part et d'autre de l'interface, mais une quantité importante reste encore inconnue : il s'agit du débit érodé \dot{m} . La partie qui suit va nous permettre de déterminer cette quantité à partir des conditions hydrauliques régnant dans l'écoulement fluide au dessus de l'interface.

Comme le montrent ces équations, il existe à l'interface de nombreuses discontinuités, de contraintes, de concentration, de masse volumique et de vitesse. En fait certaines discontinuités, comme celle de la vitesse, peuvent être supprimées, en modélisant d'une façon particulière le milieu solide. En effet, si l'on considère le sol complètement immobile, ou comme un milieu poreux suivant la loi de Darcy, il y aura des discontinuités de vitesse à l'interface. Par contre si l'on utilise la correction de Brinkman dans le milieu poreux (Ochoa-Tapia et Whitaker (1995) ; Kuznetsov (1997)), le saut de vitesse disparaît.

3.3 Loi d'érosion

Une loi d'érosion doit relier la quantité de matière arrachée au sol, le débit érodé, aux efforts hydrauliques exercés par l'écoulement.

Ces lois sont généralement des lois de seuil, la contrainte tangentielle exercée par le fluide doit en effet être supérieure ou égale à la résistance critique du sol pour que l'érosion se produise.

Nous proposons d'utiliser deux lois d'érosion :

- une première, explicite et très simple, relie de façon linéaire le débit érodé à la différence des contraintes de résistance critique et subie par le sol ;
- une deuxième, implicite, suppose que le sol ne peut supporter une contrainte tangentielle supérieure à sa résistance propre. Le débit érodé sera alors calculé de façon à vérifier ce critère.

3.3.1 Loi linéaire

Nous appelons τ_c la contrainte tangentielle critique caractéristique du sol ; et τ_b la contrainte tangentielle exercée par le fluide sur la paroi (l'interface) ($\tau_b = \tau^+$), dont la valeur absolue peut s'écrire :

$$|\tau_b| = \sqrt{\|\underline{\underline{\tau_b}} \cdot \vec{n}\|^2 - (\vec{n} \cdot \underline{\underline{\tau_b}} \cdot \vec{n})^2} \quad (3.16)$$

La loi d'érosion linéaire s'écrit :

$$\dot{m} = \begin{cases} 0 & \text{si } |\tau_b| < \tau_c \\ K(|\tau_b| - \tau_c) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.17)$$

où K , en s/m , est un paramètre. Il représente la façon dont réagit le sol aux sollicitations du fluide, plus K est grand et plus le sol « répond vite » à ces sollicitations. Ce paramètre introduit implicitement un temps caractéristique.

Cette loi d'érosion est très semblable à celles de Parthéniades (1965) et Ariathurai (1986).

Une amélioration possible de cette loi pourrait tenir compte des contraintes normales (pression et fluctuations de vitesse) exercées par le fluide sur l'interface. Soit σ ces contraintes normales, on peut alors remplacer la contrainte critique par :

$$\tau_c' = \tau_c + \sigma \tan \phi_s \quad (3.18)$$

où ϕ_s est un angle caractéristique du matériau.

3.3.2 Loi implicite

Dans cette approche, nous supposons que le sol ne peut supporter une contrainte tangentielle supérieure à sa contrainte critique. Ainsi si l'érosion se produit, la contrainte exercée par le fluide sera obligatoirement égale à la valeur critique de résistance du sol.

Cette loi ne peut s'écrire de façon explicite, mais on peut l'exprimer comme :

$$\begin{aligned} \dot{m} &\geq 0, \quad (|\tau_b| - \tau_c) \leq 0 \\ \dot{m}(|\tau_b| - \tau_c) &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Il s'agit d'une loi d'érosion de type limite de plasticité.

Cette loi implicite est en fait le cas limite de la loi linéaire présentée précédemment avec un coefficient K infini. Ainsi \dot{m} ayant une valeur finie et K étant infini entraîne que la différence des contraintes tende vers 0.

Les lois d'érosion présentées ci-dessus sont purement mécaniques (action de la contrainte au sol). De plus, nous considérons que la valeur de la contrainte critique du sol est une constante. Ces modèles sont donc très simples, il ne représente qu'une tentative de description du phénomène d'érosion.

De nombreuses améliorations sont possibles.

On peut en effet penser que la résistance du sol à l'érosion dépende aussi de son degré d'imbibition en eau. Un sol sec s'érodera moins facilement qu'un sol saturé (suivant le type de matériau, mais cela est vrai dans le cas de matériau comme l'argile). On pourrait alors calculer le taux d'infiltration d'eau dans le sol (écoulement dans un milieu poreux, loi de Darcy), et faire dépendre la contrainte critique de la quantité d'eau présente dans le sol.

3.3.3 Loi d'érosion « chimique »

Avec ce même raisonnement, on pourrait imaginer des lois d'érosion « chimique », pour lesquelles l'érosion se produit, non pas en fonction de la contrainte exercée au sol, mais en fonction d'un degré d'imbibition critique du sol. Ainsi, pour des valeurs inférieures à une fraction massique critique d'eau dans le sol, il n'y a pas érosion,

alors que pour des valeurs (supérieures ou) égales les particules de sol se détachent de celui-ci.

Avec ce dernier type de modèle, la condition à la limite sur l'interface de la fraction massique est connue, c'est justement la valeur de la fraction massique critique. On peut alors en déduire une formule explicite pour le débit érodé à partir des équations de saut à l'interface précédemment présentées.

Si l'on appelle Y_c la fraction massique critique d'eau dans le sol, pour laquelle les particules se détachent, on peut écrire d'après (3.9) :

$$\dot{m} = \frac{(\vec{J}^+ - \vec{J}^-) \cdot \vec{n}}{(Y^- - Y^+)} \quad (3.20)$$

or Y^- est alors égal à Y_c , \vec{J}^- est le flux d'infiltration d'eau dans le sol (que l'on doit connaître).

De nombreuses améliorations sont donc possibles, notamment en couplant ces deux types de modèles, l'un mécanique, l'autre plus chimique.

La loi de dépôt n'a pas été introduite. Elle ne sera pas considérée. Pourtant dans certaines circonstances le dépôt peut être important. Des lois de dépôt de type seuil existent. On peut citer par exemple la Loi de Krone (dans Tester et al. (2001)) :

$$D = \left(1 - \frac{\tau_b}{\tau_{cd}}\right) v_s c \quad , \quad \tau_b < \tau_{cd} \quad (3.21)$$

où D est le flux de dépôt, v_s la vitesse de chute d'une particule, c la fraction volumique en sédiment et τ_{cd} la contrainte critique de dépôt. Mais ce type de loi est plutôt valable pour des écoulements peu turbulents : dans des estuaires, des lacs, etc.

Chapitre 4

Cas particulier : Ecoulement permanent, bidimensionnel, parabolique

Les équations et les modèles d'érosion présentés dans les deux chapitres précédents sont d'ordre général et peuvent donc être utilisés comme tels. Mais la résolution complète des équations de Navier-Stokes étant relativement compliquée, nous nous sommes limités à l'étude de cas beaucoup plus simples.

Le problème que nous avons à traiter ici concerne l'érosion des digues par surverse. Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 1, les phénomènes liés à une surverse sont plutôt tridimensionnels et instationnaires, et la résolution de ces problèmes n'est pas chose aisée.

Une fois que le niveau de l'eau a atteint la hauteur de crête et que l'eau s'écoule sur le parement aval, trois phénomènes principaux vont jouer sur l'éventuelle destruction de la digue :

- l'érosion du sol par l'eau, qui arrache des petits grains à la surface ;
- l'infiltration de l'eau dans le sol des deux cotés de la digue, qui va modifier la composition et la résistance du sol ;

- le glissement des pentes sous leur propre poids, indépendamment ou non des efforts que l'écoulement d'eau leur fait subir. Ce phénomène peut être fonction de la teneur en eau du sol ; donc à relier aux infiltrations dans le sol.

Les deux derniers phénomènes sont instationnaires, par essence, dans tous leurs aspects. Le premier est aussi instationnaire, mais si l'on se place dans des axes liés au sol, on peut penser que l'écoulement qui est au dessus se comporte en régime quasi-stationnaire, c'est-à-dire qu'il y a en permanence, et de façon régulière, érosion et transport de sédiments. A vrai dire, ceci est une supposition ; on peut aussi imaginer que l'écoulement reste instationnaire, avec des oscillations par rapport à la surface.

Nous allons donc limiter notre étude à la représentation théorique du premier phénomène d'érosion précédemment cité, l'arrachage de sédiments à la surface par l'écoulement d'eau, en cherchant seulement des régimes stationnaires par rapport à la surface du sol. Cette modélisation sera réalisée en écoulement bidimensionnel, et nous nous limiterons aux cas où l'écoulement n'a pas de recirculation, qui seraient dues à des courbures importantes de la surface en cours d'érosion.

Deux types d'écoulements seront considérés, dans la même configuration, (Figure 4.1) :

- écoulement à hauteur d'eau infinie (écoulement de type couche limite sur fond plan) ;
- écoulement à surface libre.

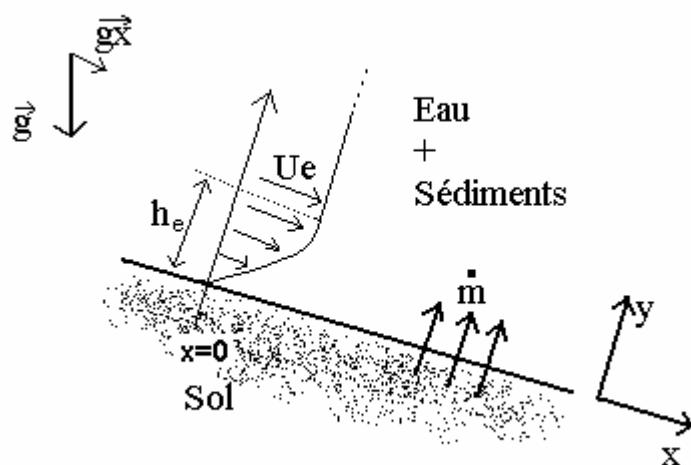


Figure 4.1 : Représentation de l'écoulement considéré (hauteur d'eau infinie).

Ainsi dans ces configurations d'écoulement bidimensionnel permanent sur un sol plat (c'est-à-dire peu courbé mais pas forcément horizontal), il apparaît approprié d'utiliser les équations dites « de couche ».

Cette partie va simplifier les équations générales dans le cas particulier d'un écoulement permanent bidimensionnel parabolique.

Rappelons ici que la paroi solide s'érodant, on ne peut considérer l'écoulement comme permanent que si l'on se place dans des axes liés à la surface (qui régresse). C'est ce que nous allons faire, en supposant que les termes d'inertie dûs à la vitesse de régression du sol sont négligeables.

Nous allons tout d'abord présenter les équations parabolisées de Navier-Stokes. Leur obtention rigoureuse à partir des équations complètes est donnée en Annexe I. Ces équations seront par la suite utilisées dans le cas d'un écoulement turbulent (Schlichting (1978), Chassaing (2000)).

Nous présentons ensuite les différentes conditions aux limites, en commençant tout d'abord, par les conditions communes aux deux types d'écoulements considérés (hauteur infinie et surface libre), à l'entrée et à l'interface sol/fluide. Puis, nous donnons, pour chaque type d'écoulement, les conditions particulières à la limite supérieure, et le gradient de pression longitudinal qui en découle.

Nous donnons, finalement, les différentes lois de comportement utilisées dans notre étude. Il s'agira de présenter différents modèles pour les coefficients de viscosité effective et de diffusion effective.

4.1 Les équations parabolisées de Navier-Stokes

4.1.1 Le système d'équations

La démarche suivie pour obtenir ces équations diphasiques, pour un écoulement à hauteur d'eau infini, et un écoulement à surface libre, est présentée en Annexe I. Ces équations sont :

Conservation de la masse totale :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (4.1)$$

Conservation de la quantité de mouvement sur x :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \quad (4.2)$$

Conservation de la quantité de mouvement sur y :

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \cos \alpha = 0 \quad (4.3)$$

Conservation de la masse des particules :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho Y u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Y v) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (4.4)$$

Remarques :

Ces équations, « classiques » en écoulement de couche limite monophasique, sont souvent écrites sans les termes de gravité.

Un terme supplémentaire dû aux tensions de Reynolds est à ajouter à l'équation (4.3) dans le cas d'un écoulement turbulent. Ceci sera présenté dans le Chapitre 5 en 5.3.3.3.

4.1.2 Ecoulement bidimensionnel parabolique

Dans la configuration qui nous intéresse ici, d'écoulement dit de « couche », l'ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement dans la direction x est beaucoup plus important que celui dans la direction y , perpendiculaire à l'écoulement. Les variations principales dans l'écoulement se propagent de l'aval vers l'amont : les propriétés physiques de l'écoulement en un point donné ne dépendent que des conditions amont à ce point, et non des conditions aval. Cela n'est vrai que si la convection prédomine sur la diffusion, mais si le débit de l'écoulement est assez important cela sera toujours vérifié. Evidemment les phénomènes de recirculation seront impossibles.

L'influence de la pression dans les équations est habituellement elliptique ; mais l'équation (4.3) permet de calculer $p(x, y) = \rho g \cos \alpha (y - y_e) + p_e$, où p_e est la pression en un point y_e à l'extérieur de la couche de fluide, qui doit être donnée car elle n'est pas une caractéristique interne. Donc si l'on connaît p_e , le gradient de pression suivant x est connu, et le système résultant est parabolique.

Typiquement, les écoulements de type couche limite plans ou axisymétriques le long d'une paroi, les écoulements en conduite, les jets ou les couches de mélanges, les écoulements à surface libre (sous certaines restrictions) sont tous des écoulements bidimensionnels paraboliques.

La solution pour des problèmes de ce type est obtenue en se donnant les valeurs initiales (amont) des variables (vitesse, fractions massiques des éventuelles espèces considérées, masse volumique...) et en avançant pas à pas dans la direction aval. Pour chaque pas en avant, la distribution des variables dans la direction perpendiculaire à l'écoulement est calculée en un point donné dans la direction de l'écoulement. Ainsi on est amené à résoudre un problème unidimensionnel à chaque pas.

La résolution des équations de quantité de mouvement et de continuité ne présente aucun problème particulier. Le gradient de pression suivant x doit être connu. Grâce à ce gradient de pression, l'équation de quantité de mouvement suivant x est résolue afin d'obtenir la vitesse suivant x . La vitesse sur y peut ensuite être calculée grâce à l'équation de continuité. Les équations de conservation de la masse

des différentes espèces chimiques éventuellement présentes servent finalement à calculer les fractions massiques de celles-ci.

Remarque importante :

Ces équations parabolisées peuvent donc être utilisées pour un écoulement à surface libre si les hypothèses précédemment citées restent valables. C'est-à-dire que l'écoulement est à grand nombre de Reynolds ; les vitesses longitudinales sont très supérieures aux vitesses orthogonales ; les variations dans le sens de l'écoulement (suivant x) de pente, de hauteur de la surface libre et de vitesses sont lentes (les gradients suivant y sont très supérieurs aux gradients suivant x), et l'écoulement n'a pas de recirculation.

Nous choisirons donc à surface libre des configurations d'écoulement où ses hypothèses sont vérifiées.

La partie qui suit présente les différentes conditions aux limites nécessaires à la résolution de ces équations, notamment le calcul du gradient de pression suivant x .

4.2 Conditions aux limites

Nous rappelons ici toutes les conditions aux limites, communes et particulières à chaque type d'écoulement, certaines ont aussi été présentées en Annexe I.

4.2.1 Conditions communes aux deux types d'écoulement considérés

4.2.1.1 A l'entrée

Comme nous l'avons dit précédemment, il est nécessaire de donner les valeurs initiales des variables en $x = 0$.

Nous donnons donc en entrée un profil initial de vitesse :

$$u(0, y) = u_0(y) \quad (4.5)$$

ce profil pouvant être linéaire, parabolique...

Ainsi que la valeur initiale de la fraction massique de sédiments dans l'écoulement :

$$Y(0, y) = 0 \quad (4.6)$$

Elle est prise nulle, l'écoulement est constitué d'eau pure (mais pourrait ne pas l'être).

4.2.1.2 A l'interface

On réécrit en bidimensionnel les équations obtenues dans le Chapitre 3.

Comme d'habitude en mécanique des fluides, on écrit la condition de non glissement de la vitesse longitudinale :

$$u(x, 0) = 0 \quad (4.7)$$

Les conditions qui vont suivre sont reprises de la première partie du Chapitre 3. Il existe par contre une différence notable entre ces équations générales, et celles que nous avons choisies de résoudre. En effet dans le Chapitre 3, l'interface avait une vitesse de déplacement propre nommée \vec{v}_b . Cette vitesse de déplacement peut être interprétée comme une vitesse de régression de l'interface si elle s'érode, ou comme une vitesse de progression si les particules érodées sédimentent ; cette vitesse étant exprimée dans des axes fixes.

Or dans notre modèle, les axes sont liés à l'interface. C'est-à-dire qu'en cas de régression de l'interface, ou paroi, due à l'érosion, l'axe des abscisses suivra l'interface dans sa régression ; l'axe des x restant « collé » à la paroi. Ainsi, \vec{v}_b sera cette fois prise égale à zéro dans les relations de Rankine-Hugoniot. Mais nous pourrons toujours avoir accès à cette vitesse ainsi qu'à la vitesse débitante dans l'écoulement par l'intermédiaire du débit érodé qui traverse l'interface \dot{m} .

On peut en effet écrire grâce à la relation de Rankine-Hugoniot (3.4) :

- que la vitesse de déplacement de l'interface est :

$$v_b = -\frac{\dot{m}}{\rho^-} \quad (4.8)$$

- que la vitesse du fluide sortant de l'interface est :

$$v(x, 0) = \frac{\dot{m}}{\rho^+} \quad (4.9)$$

(On voit que si l'érosion est nulle, la paroi ne se déplace pas et aucun débit ne sort du sol.)

Dans le sol, la partie inférieure à l'interface, nous négligeons les phénomènes de diffusion $\vec{J}^- = 0$; le sol est considéré comme saturé en eau. L'équation (3.9) devient alors :

$$\vec{J}^+ \cdot \vec{n} = \dot{m}(Y^- - Y^+) \quad (4.10)$$

Que l'on peut réécrire, si l'on modélise les processus de diffusion par la loi de Fick, comme :

$$-\rho D_{eff} \left. \frac{\partial Y}{\partial y} \right|_0 (x, 0) = \dot{m}(Y_g - Y(x, 0)) \quad (4.11)$$

où Y_g est la fraction massique de sédiment dans le sol ($Y_g = Y^-$).

Nous rappelons dans notre cas particulier la loi d'érosion linéaire :

$$\dot{m} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 < \tau_c \\ K \left(\mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 - \tau_c \right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.12)$$

Pour le deuxième modèle d'érosion, on a :

$$\begin{aligned} \dot{m} &\geq 0, \quad \left(\mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 - \tau_c \right) \leq 0 \\ \dot{m} \left(\mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0 - \tau_c \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Remarques :

- On peut se poser la question de la validité des équations de couche limite lors des phénomènes d'érosion, la paroi va en effet se déformer et ne plus rester plane. Mais en fait ces équations restent valables si le sol n'est pas trop courbé (faible variation de la courbure avec x), ce que nous considérons.
- Dans notre modèle, on ne calcule pas les caractéristiques du sol. On les suppose connues et constantes, et on considère en particulier le sol immobile.

4.2.2 Ecoulement à hauteur d'eau infinie

Les limites supérieures de la vitesse et de la fraction massique de sédiments sont données par les valeurs de celles-ci dans l'écoulement externe à la couche limite. On a donc :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = u_e(x) \quad (4.14)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} Y(x, y) = 0 \quad (4.15)$$

Après quelques calculs, à partir de l'équation (4.3) et des caractéristiques de l'écoulement externe, présentés en 1.2.2 de l'Annexe I, on exprime le gradient de pression longitudinal de l'équation de quantité de mouvement comme :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_e u_{\text{ex}} \frac{\partial u_{\text{ex}}}{\partial x} + \rho_e g \left[\sin \alpha + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} \right] \quad (4.16)$$

Finalement, l'équation du mouvement en x (4.2) s'écrit, après élimination du gradient de pression dans le cas d'une hauteur d'écoulement infinie :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho_e u_{ex} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} \Big|_{y \rightarrow \infty} + (\rho - \rho_e) g \sin \alpha + \hat{\rho} g \cos \alpha \quad (4.17)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= -\rho_e \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} \\ &= - \int_y^{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial x} dy \\ &= -(\rho_s - \rho_e) \int_y^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_e \rho_s} \right)^2 \frac{\partial Y}{\partial x} dy \end{aligned} \quad (4.18)$$

On constate trois origines du terme source :

- l'action du gradient de vitesse extérieure ;
- l'action directe des forces de gravité longitudinale due au supplément de poids propre lorsque l'écoulement est chargé en particules ; cette action est nulle sur fond plat ($\alpha = 0$), ou lorsque la concentration est nulle ($Y = 0$), ou lorsque les particules ont même masse volumique que le fluide ($\rho_s = \rho_e$) ;
- l'action indirecte, à travers la pression, des forces de gravité transversales à l'écoulement, dues au gradient longitudinal de masse volumique de l'écoulement situé au dessus; ce gradient longitudinal de masse volumique reflète le gradient longitudinal de concentration solide; cette action est nulle lorsque la concentration est nulle ($Y = 0$) ou lorsque les particules ont même masse volumique que le fluide ($\rho_s = \rho_e$).

Nous discuterons de l'influence de ces termes dans les chapitres consacrés aux résultats numériques.

Remarque :

Pour obtenir l'expression en gradient de concentration, on a utilisé le résultat

$$\frac{d\rho}{dY} = \frac{d}{dY} \left(\rho^2 \frac{1}{\rho} \right) = \rho^2 \frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\rho} \right) + 2 \frac{d\rho}{dY} \quad (4.19)$$

et

$$\frac{d}{dY} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{\rho_e} \quad (4.20)$$

qui permet d'écrire que :

$$\frac{d\rho}{dY} = (\rho_s - \rho_e) \left(\frac{\rho}{\rho_e \rho_s} \right)^2 \quad (4.21)$$

4.2.3 Ecoulement à surface libre

Dans ce cas, on ne peut pas donner la valeur des variables à la surface (conditions aux limites de type Dirichlet), où $y = h$, mais simplement donner la valeur de leur gradient suivant la direction perpendiculaire à l'écoulement (conditions de Neumann). Ces conditions sont :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, h) = 0 \quad (4.22)$$

qui traduit le fait que l'on néglige les frottements exercés par l'air sur la surface de l'écoulement, et :

$$\frac{\partial Y}{\partial y}(x, h) = 0 \quad (4.23)$$

qui traduit le fait qu'il n'y a pas d'échange de matière solide au niveau de la surface.

Le gradient longitudinal de pression est dans ce cas (calculs en 1.3.2 de l'Annexe I), en supposant la pression à la surface constante (égale à la pression atmosphérique) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= g \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{h(x)} \rho d\tilde{y} \\ &= g \cos \alpha \left[\int_y^{h(x)} \frac{\partial \rho}{\partial x} d\tilde{y} + \rho_h \frac{\partial h}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Finalement, l'équation du mouvement en x (4.2) s'écrit, après élimination du gradient de pression dans le cas d'un écoulement à surface libre :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g \sin \alpha - g \rho_h \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} + \hat{\rho} g \cos \alpha \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= - \int_y^{h(x)} \frac{\partial \rho}{\partial x} dy \\ &= -(\rho_s - \rho_e) \int_y^{h(x)} \left(\frac{\rho}{\rho_e \rho_s} \right)^2 \frac{\partial Y}{\partial x} dy \end{aligned} \quad (4.26)$$

où l'on a noté $\rho_h(x) = \rho(x, h(x))$.

On constate trois origines du terme source :

- l'action du gradient d'épaisseur d'écoulement $\partial h / \partial x$;

- l'action directe des forces de gravité longitudinale due au poids propre du mélange; cette action est nulle sur fond plat ($\alpha = 0$);
- l'action indirecte, à travers la pression, des forces de gravité transversales à l'écoulement, dues au gradient longitudinal de masse volumique de l'écoulement situé au dessus; ce gradient longitudinal de masse volumique reflète le gradient longitudinal de concentration solide; cette action est nulle lorsque la concentration est nulle ($Y = 0$) ou lorsque les particules ont même masse volumique que le fluide ($\rho_s = \rho_e$).

4.3 Lois de comportement

Nous allons reprendre les lois définies dans le Chapitre 2, dans le cas particulier de notre écoulement de « couche ».

4.3.1 Coefficient de viscosité

4.3.1.1 Viscosité constante

Afin de bien comprendre les phénomènes mis en jeu par notre modèle, et dans le but de simplifier la modélisation, nous avons choisi un coefficient de viscosité effective constant. Mais pour « tenir compte du caractère turbulent » de cet écoulement (les écoulements naturels considérés étant plutôt turbulents), nous avons choisie une valeur de viscosité très supérieure à sa valeur en écoulement laminaire. On pourrait parler d'écoulement pseudo-turbulent. Ainsi, nous prenons :

$$\mu_{\text{eff}} = a \rho_e U_e h_e \quad (4.27)$$

où a est une constante numérique inférieure à l'unité, h_e et U_e respectivement la hauteur, et la vitesse d'entrée de l'écoulement.

4.3.1.2 Longueur de mélange de Prandtl

Ecoulement de type couche limite

Dans le modèle de longueur de mélange de Prandtl, la viscosité effective est définie comme :

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_{\text{lam}} + \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (4.28)$$

où l_m est la longueur locale de mélange, définie à partir de la distance à la paroi :

$$l_m = \begin{cases} \kappa y & \text{si } \kappa y < \lambda \delta_{0.99} \\ \lambda \delta_{0.99} & \text{si } \kappa y > \lambda \delta_{0.99} \end{cases} \quad (4.29)$$

ou $\kappa = 0,435$ est la constante de Von Karman et $\lambda = 0,09$ et $\delta_{0,99}$ l'épaisseur de la couche limite, définie comme $u(\delta_{0,99}) = 0,99u_{ex}$.

Cette expression de la longueur de mélange n'est valable que dans le cas d'un écoulement à hauteur d'eau infinie, où l'on peut définir $\delta_{0,99}$.

Ecoulement à surface libre

Dans le cas d'un écoulement à surface libre la définition de la longueur de mélange sera quelque peu différente (d'après Kovacs (1998)) :

Pour un écoulement à surface libre d'eau pure :

$$l_m = \kappa y \left(1 - \frac{y}{h} \right)^{1/2} \quad (4.30)$$

où h est l'ordonnée de la surface libre.

Cette formulation de la longueur de mélange ne tient pas compte de la présence des sédiments, Kovacs (1998) propose une amélioration de la longueur de mélange en tenant compte.

Rugosité de paroi

La viscosité définie comme précédemment n'est valable que dans la zone externe de la couche (voir une partie de la zone tampon). Car très près de la paroi, dans la sous-couche visqueuse, la diffusion turbulente est négligeable et tout le transfert diffusif se fait par l'intermédiaire de la viscosité moléculaire ν_{lam} .

Ainsi dans la couche logarithmique (zone pour laquelle la contrainte est constante et due seulement à la diffusion turbulente), on écrit la vitesse de l'écoulement comme :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+ E) = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} u^+ &= \frac{u}{u_*} \\ y^+ &= \frac{yu_*}{\nu_{lam}} \\ u_* &= \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Pour l'instant rien n'a été dit quant à l'état de surface de la paroi. On considère maintenant un fond rugueux composé de rugosités de taille caractéristique h_s . Dans le cas où la paroi est constituée de particules de solide, h_s sera pris égale au diamètre des particules, si les particules sont mono-disperses, ou proportionnel au diamètre moyen si elles sont poly-disperses.

Plusieurs types d'écoulement sont possibles suivant la valeur de h_s . Pour les définir, on introduit le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement du fond :

$$R_* = \frac{u_* h_s}{\nu_{lam}} \quad (4.33)$$

Pour $R_* < 5$, on parle de régime hydrodynamiquement lisse. Les rugosités du fond sont entièrement plongées dans la sous-couche visqueuse, et l'écoulement n'en ressent aucun effet.

Pour $5 < R_* < 70$, le régime est dit transitoire.

Pour $R_* > 70$, le régime est rugueux. Les rugosités du fond dépassent de la sous-couche visqueuse, et influencent alors l'écoulement.

Suivant les régimes, la valeur de la constante C de (4.31) prend les différentes valeurs (Schlichting (1978), Cousteix (1989)) :

Pour le régime hydrauliquement lisse, on a :

$$C = 5,5 + \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{h_s u_*}{\nu_{lam}} \right) \quad (4.34)$$

Pour le régime rugueux, on a :

$$C = 8,5 - \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{h_s u_*}{\nu_{lam}} \right) \quad (4.35)$$

On peut alors en déduire la valeur de E , dans (4.31), en fonction de C suivant le régime considéré.

Nous reparlerons des rugosités de paroi dans les chapitres dédiés aux résultats.

Remarque : Dans le modèle à longueur de mélange, la contrainte tangentielle est reliée au carré du taux de cisaillement. Une formule du même genre fut proposée par Bagnold (Hunt et al. (2002)), pour une suspension liquide/particules cisaillée dans le régime collisionnel. Mais chez Bagnold, la longueur de mélange n'est pas donnée par l'écoulement mais simplement par le diamètre du grain.

4.3.2 Coefficient de diffusion

4.3.2.1 Diffusion constante

Là encore, dans le but de simplifier le problème à étudier, et n'ayant que peu de données expérimentales sur sa valeur, nous avons choisi :

$$Sc = \frac{\rho D_{eff}}{\mu_{eff}} = 1 \quad (4.36)$$

4.3.2.2 Loi différentielle de diffusion

Nous avons vu au deuxième chapitre comment trouver une loi différentielle de diffusion à partir des équations de chaque phase.

Nous présentons ici seulement le résultat final donnant l'expression du flux de diffusion, tous les calculs sont présentés dans la deuxième partie de l'Annexe II Loi Différentielle de Diffusion.

Son expression est :

$$J_y^{Dt} = -\frac{\tau_{12}^F(1-c)\rho_e}{\rho} \left[-\left(\frac{c\rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial y} + R_{yy}^T \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\tau_{12}^t}{\tau_{12}^F(1-c)} R_{12,yy} \frac{\partial c}{\partial y} \right] \quad (4.37)$$

Qui devient, en approximant $R_{12,ij}$ et R_{yy}^T (voir Annexe II) :

$$J_y^{Dt} = -\frac{\tau_{12}^F(1-c)\rho_e}{\rho} \left[-\left(\frac{c\rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial y} + 1.7 \rho l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\tau_{12}^t}{\tau_{12}^F(1-c)} A l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial c}{\partial y} \right] \quad (4.38)$$

Comme on le voit, cette approche est beaucoup plus riche physiquement que le modèle où le nombre de Schmidt est pris égal à l'unité. Le flux de diffusion est ainsi lié non seulement au gradient de concentration, mais aussi au gradient de pression orthogonal, par l'intermédiaire de deux temps caractéristiques. Ici, τ_{12}^F est le temps caractéristique à l'échelle du grain de sédiment (semblable au temps de Stokes), il dépend de sa taille si chaque grain est indépendant des autres dans son mouvement. Mais si il y a beaucoup de grains, et s'ils peuvent se déplacer par groupes, il faut définir une nouvelle taille du groupe, ce qui donne un autre τ_{12}^F ... τ_{12}^t est un temps caractéristique à l'échelle de la turbulence.

Il est possible à partir de l'expression (4.38) de donner l'influence des différents termes du membre de droite sur la diffusion. En effet, le flux de diffusion total est ici positif (les sédiments proviennent de la paroi, leur gradient de concentration en y est donc négatif). Or si l'on regarde les signes des trois termes constituants le flux de diffusion total, on voit que le premier terme, lié au gradient de pression orthogonal, est négatif ; alors que les deux autres, liés au gradient de concentration en sédiments, sont positifs. Ainsi, les deux derniers termes du membre de droite du flux de diffusion (lié chacun à un des deux temps caractéristiques), auront plutôt tendance à favoriser la diffusion des sédiments dans l'écoulement (vers les y positif), alors que le premier terme, lié à la gravité, aura l'effet inverse.

Choix des temps caractéristiques :

Pour τ_{12}^F , temps caractéristique de l'inertie de la particule, nous prendrons le temps de Stokes proposé par Kaftori et al. (dans Mazumder (2000)) :

$$\tau_{12}^F = \frac{\rho_s d_s^2}{18 \rho_e \nu_{lam}} \quad (4.39)$$

Griemann et Holly (2001) proposent un temps caractéristique semblable fonction de la fraction volumique en sédiments, pour des milieux concentrés.

Pour le temps caractéristique à l'échelle de la turbulence τ_{12}^t , on peut le définir à partir de la viscosité turbulente, Février et Simonin (2000) :

$$\nu_{eff} = Bk\tau_{12}^t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (4.40)$$

où B est une constante numérique à fixer. Ainsi, dans notre cas particulier d'écoulement, τ_{12}^t s'écrit :

$$\tau_{12}^t = \frac{1}{B \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} \quad (4.41)$$

Prise en compte du nouveau flux de diffusion :

Nous allons en fait déduire un nombre de Schmidt de l'équation (4.38), et c'est par l'intermédiaire de ce nombre de Schmidt que le nouveau flux de diffusion sera calculé.

Pour cela, on va écrire le flux de diffusion sous la forme :

$$J_y^{Dt} = -\rho D_{eff} \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (4.42)$$

Ainsi, à partir de (4.38) et de (4.42), on peut exprimer l'inverse du nombre de Schmidt comme :

$$\frac{1}{Sc_{eff}} = \frac{\rho D_{eff}}{\mu_{eff}} = \frac{\tau_{12}^F (1-c) \rho_e}{\rho \frac{\partial Y}{\partial y} \mu_{eff}} \left[-\left(\frac{c \rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial y} + 1.7 \rho l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\tau_{12}^t}{\tau_{12}^F (1-c)} A l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial c}{\partial y} \right] \quad (4.43)$$

Vu la valeur de la viscosité effective, et en développant les termes, on obtient :

$$\frac{1}{Sc_{eff}} = -c \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) \frac{\tau_{12}^F (1-c) \rho_e}{\rho \frac{\partial Y}{\partial y} \mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial y} + 1.7 \frac{\tau_{12}^F (1-c) \rho_e}{\rho} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| + A \tau_{12}^t \frac{\rho_s \rho_e}{\rho^2} \frac{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|}{\frac{\partial Y}{\partial y}} \frac{\partial c}{\partial y} \quad (4.44)$$

A partir des définitions des temps caractéristiques présentés en (4.40) et (4.41), on en déduit :

$$\frac{1}{Sc_{eff}} = -c \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) \frac{\tau_{12}^F (1-c) \rho_e}{\rho \frac{\partial Y}{\partial y} \mu_{eff}} \frac{\partial p}{\partial y} + 1.7 \frac{\tau_{12}^F (1-c) \rho_e}{\rho} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| + A' \frac{\rho_s \rho_e}{\rho^2} \frac{\partial c}{\partial y} \quad (4.45)$$

Nous avons, pour cette dernière formulation, simplement remplacé τ'_{12} par sa valeur, et introduit la valeur de la constante B dans la constante A que nous nommerons désormais A' . Cela permet de faire disparaître le gradient de vitesse du dernier terme de droite.

Nous devons à ce niveau préciser les conditions nécessaires à l'utilisation de la formule (4.45). En effet, le nombre de Schmidt (ou le coefficient de diffusion) se doit d'être positif ! Les gradients de fraction volumique, ou massique, étant négatifs (la quantité de sédiments est plus importante près de la paroi), ainsi que le gradient de pression (pris ici égal à $-\rho g \cos \alpha$), on s'aperçoit alors que dans (4.45), le premier terme du membre de droite est toujours négatif, et les deux autres sont toujours positifs (remarquons que le dernier terme de droite à une valeur très proche de l'unité).

Ainsi, le premier terme, lié au gradient de pression orthogonale, négatif, a tendance à diminuer la diffusion alors que les deux autres termes à l'augmenter.

Nous verrons dans les chapitres consacrés aux résultats, que cette restriction, quant au signe positif du nombre de Schmidt, limite la gamme des paramètres utilisables, notamment au niveau du diamètre des grains.

Même si pour nos calculs, nous nous sommes limités à des valeurs des paramètres donnant globalement un nombre de Schmidt positif dans tout l'écoulement, il se peut que localement, sur un ou deux points du maillage, un nombre de Schmidt négatif apparaisse. Cela arrive, pratiquement toujours, au sommet de la couche, où les gradients de vitesse sont plus faibles (donc la viscosité effective) ; entraînant ainsi une prédominance du terme lié au gradient de pression, sur les deux autres. Une valeur négative du nombre de Schmidt n'étant pas acceptable, nous devons dans ce cas faire un choix.

Aussi, quand un nombre de Schmidt négatif apparaît sur un point du maillage, nous calculons le flux de diffusion correspondant en ce point ; si ce flux est inférieur à 1% du flux maximum dans la couche (à l'abscisse considérée), nous fixons en ce point le nombre de Schmidt égal à un (nous faisons ainsi au maximum, une erreur inférieure à 1% sur le calcul du flux de diffusion). Si le flux de diffusion locale est supérieur à 1% du flux maximum, le calcul est arrêté et nous ne présentons pas de résultat dans ce cas.

Cette approximation peut paraître un peu grossière, mais comme nous l'avons dit, dans les calculs que nous présenterons, le seul point où ce problème se posera sera le dernier point au sommet de la couche. Mais comme les fractions massiques en sédiments au sommet de la couche seront toujours beaucoup plus faibles que les autres, et que ce qui se passe en ce point n'a aucune influence sur la région proche de la paroi, l'approximation faite n'aura en fait aucune influence sur les résultats.

Nous en reparlerons dans les chapitres dédiés aux résultats.

Remarque :

Comme nous l'avons dit, nous prenons ici le gradient de pression orthogonal égal à $-\rho g \cos \alpha$. En toute rigueur, ce gradient est :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha - \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \bar{v}^2 \right) \quad (4.46)$$

Nous avons en fait préféré négliger ce deuxième terme, car il présentait des variations en y (dues à des problèmes de discréétisation), qui rendait la formule du nombre de Schmidt différentielle beaucoup plus délicate à utiliser. De plus, ce deuxième terme est d'habitude très inférieur au terme dû à la gravité.

Nous reviendrons sur ce flux de diffusion dans les chapitres suivants.

Chapitre 5

Résolution numérique

5.1 Choix du système de coordonnées

On rappelle la définition de la fonction de courant:

$$\begin{cases} \rho u r^\delta = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \rho v r^\delta = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (5.1)$$

Dans ces équations (5.1), et dans les trois suivantes, l'exposant δ est nul si l'écoulement est plan bidimensionnel, et égal à 1 si l'écoulement est axisymétrique. Dans le cas qui nous intéresse δ est nul.

Notre problème comporte 3 équations aux dérivées partielles à résoudre. Or il est bien connu, voir par exemple Patankar et Spalding (1970), que l'on peut s'affranchir de l'équation de continuité, en choisissant le système de coordonnées (x, ψ) à la place de (x, y) .

En effet :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) &= 0 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Dans le système de coordonnées (x, ψ) l'équation de continuité est ainsi automatiquement satisfaite.

Le système de coordonnées a une importance particulière dans une procédure de volume fini, où l'on ne s'intéresse aux valeurs des variables dépendantes que sur un nombre de points finis, arrangés en maillage dans le système de coordonnées choisies. Le plus simple serait d'utiliser un maillage rectangulaire dans les coordonnées (x, y) , ou même mieux (x, ψ) qui supprime une équation à résoudre. Il est facile de voir que ce choix est désavantageux pour l'étude des problèmes de couche limite, dont l'épaisseur d'habitude croît dans la direction aval et où le débit augmente en fonction de x . Ainsi si l'espace entre les mailles est tel qu'un nombre relativement important de points est dans l'épaisseur de la couche limite à l'entrée amont, alors cette distribution des points sera excessivement fine et inutile à la sortie aval. De même un maillage destiné à la sortie aval de l'écoulement sera beaucoup trop grossier pour la région amont et entraînera une perte de précision. La solution idéale serait d'avoir un maillage qui s'adapte à la région de couche limite. Cela peut se faire en utilisant ω comme variable transverse. Ce choix combine les avantages de l'utilisation des coordonnées de fonction de courant avec ceux de restreindre la couche limite à un intervalle fini de valeurs de ω . On définit ω comme :

$$\omega = (\psi - \psi_I) / (\psi_E - \psi_I) \quad (5.2)$$

où ψ_I et ψ_E sont les valeurs de la fonction de courant aux frontières I et E , ainsi ω vaut zéro à la frontière I et un à E . On peut prendre ψ_I et ψ_E , comme fonctions de x , afin, outre d'assurer l'efficacité de la résolution numérique, de ramener toutes les importantes variations des variables dépendantes dans une gamme de ω comprise entre zéro et un.

A partir de ces définitions, on peut exprimer y en fonction de ω , comme :

$$y(\omega) = (\psi_E - \psi_I) \int_0^\omega \frac{d\omega}{\rho(\omega)u(\omega)} \quad (5.3)$$

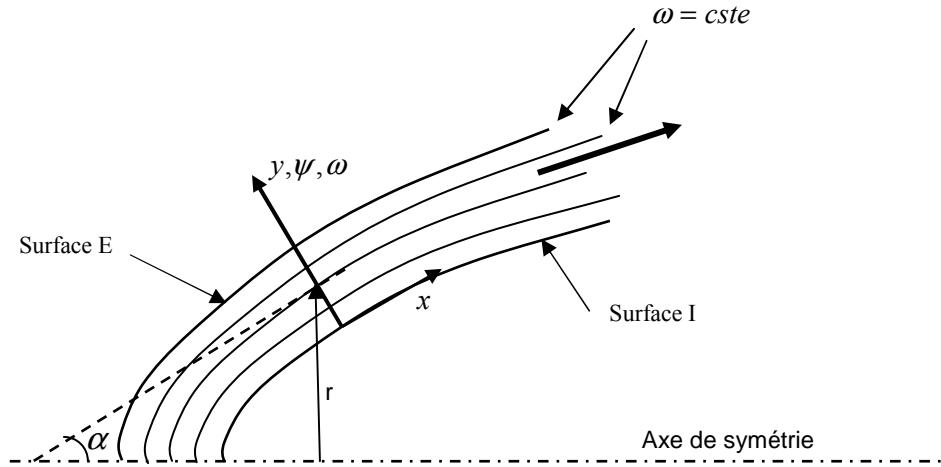


Figure 5.1 : Le système de coordonnées.

A partir de la définition de ψ , on a :

$$\frac{d\psi_I}{dx} = -r_I^\delta \dot{m}_I \quad (5.4)$$

$$\frac{d\psi_E}{dx} = -r_E^\delta \dot{m}_E \quad (5.5)$$

où \dot{m}_I et \dot{m}_E sont les taux de transfert de masse à travers les surfaces I et E . \dot{m}_E est le débit surfacique que la couche limite acquiert de la part de l'écoulement extérieur, et \dot{m}_I celui qui arrive dû à l'érosion.

On va tout d'abord écrire les équations dans le système de coordonnées (x, ψ) :
Conservation de la masse des sédiments :

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \frac{r^{2\delta} \rho u \mu_{eff}}{\sigma_{s,eff}} \frac{\partial Y}{\partial \psi} \right\} \quad (5.6)$$

Conservation de la quantité de mouvement du mélange :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ r^{2\delta} \rho u \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right\} - \frac{1}{\rho u} \frac{dP}{dx} \quad (5.7)$$

Puis, dans le système de coordonnées (x, ω) :

Conservation de la masse des sédiments :

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\{ r_I^\delta \dot{m}_I + \omega (r_E^\delta \dot{m}_E - r_I^\delta \dot{m}_I) \}}{(\psi_E - \psi_I)} \frac{\partial Y}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{r^{2\delta} \rho u \mu_{eff}}{(\psi_E - \psi_I)^2 \sigma_{s,eff}} \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right\} \quad (5.8)$$

(On peut écrire la même équation pour la conservation de la masse d'eau en remplaçant Y par $(1-Y)$)

Conservation de la quantité de mouvement du mélange :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\{ r_I^\delta \dot{m}_I + \omega (r_E^\delta \dot{m}_E - r_I^\delta \dot{m}_I) \}}{(\psi_E - \psi_I)} \frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{r^{2\delta} \rho u \mu_{eff}}{(\psi_E - \psi_I)^2} \frac{\partial u}{\partial \omega} \right\} - \frac{1}{\rho u} \frac{dP}{dx} \quad (5.9)$$

Ces équations s'écrivent en fait sous la même forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + (a + b\omega) \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ c \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right\} + d \quad (5.10)$$

où :

$$a = r_I^\delta \dot{m}_I / (\psi_E - \psi_I) \quad (5.11)$$

$$b = (r_E^\delta \dot{m}_E - r_I^\delta \dot{m}_I) / (\psi_E - \psi_I) \quad (5.12)$$

$$c = r^{2\delta} \rho u \mu_{eff} / (\psi_E - \psi_I)^2 \sigma_{eff} \quad (5.13)$$

Ici ϕ représente les variables dépendantes et d est nul, excepté pour l'équation de quantité de mouvement où :

$$d = -\frac{1}{\rho u} \frac{dP}{dx} \quad (5.14)$$

La définition exacte de P , dans cette dernière équation, sera donnée dans la dernière partie.

Remarque : l'équation de l'enthalpie, voir de k l'énergie cinétique de turbulence et de ε la dissipation turbulente, peuvent aussi s'écrire sous la même forme (les termes sources différant, suivant la variable considérée).

5.2 Résolution du système d'équation

5.2.1 Schéma numérique

La méthode de discréétisation des équations à proprement dite ne sera pas présentée ici, on peut la trouver dans Patankar et Spalding (1970) (voir aussi

Patankar 1980). Nous présentons par contre, un peu plus loin, les modifications principales apportées au programme original « Genmix », issu de Patankar et Spalding (1970).

5.2.2 Résolution

Dans notre problème parabolique, les valeurs des variables à une abscisse donnée ne dépendent que des conditions amont. On peut en effet montrer que pour un nombre de Peclet assez élevé (> 10) (le nombre de Peclet est le rapport entre le temps de diffusion de la masse et le temps de convection de la masse), c'est-à-dire lorsque la convection est prédominante sur la diffusion, les conditions aval n'ont aucune influence sur l'amont.

On peut donc avancer pas à pas en résolvant pour chaque x , les valeurs des différentes variables sur ω . La discréétisation des équations par la méthode des volumes finis nous donne des équations algébriques, reliant seulement 3 inconnues, de la forme :

$$\phi_i = A_i \phi_{i+1} + B_i \phi_{i-1} + C_i \quad (5.15)$$

ou $\phi_i = \phi(\omega(i))$ et $i = 2, \dots, N-1$.

On peut transformer cette dernière équation sous la forme :

$$\phi_i = A'_i \phi_{i+1} + B'_i \quad (5.16)$$

avec :

$$\left. \begin{array}{l} A'_i = \frac{A_i}{1 - B_i A'_{i-1}} \\ B'_i = \frac{B_i B'_{i-1} + C_i}{1 - B_i A'_{i-1}} \\ A'_2 = A_2 \\ B'_2 = B_2 \phi_1 + C_2 \end{array} \right\} \quad (5.17)$$

Une fois écrit sous cette forme, la résolution est très simple. Il suffit de calculer les coefficients A'_i et B'_i pour $i = 2, \dots, N-1$; ensuite on calcule les valeurs de ϕ à partir de l'équation (5.16) par des substitutions successives en commençant par ϕ_N .

5.3 Modifications importantes apportées au code de calcul

5.3.1 Profils d'entrée

Dans la version original du code de calcul que nous utilisons, les profils initiaux de vitesse, de concentration, etc., étaient données en data, constants par blocs suivant les valeurs de ω . Les profils initiaux étaient donc tous constants par morceaux (3 au maximum) sur l'intervalle $[0,1]$ décrit par ω . Ensuite pour la résolution numérique, les équations sont intégrées sur des petits volumes (méthode des volumes finis) suivant ω . La correspondance entre y et ω n'étant calculée qu'en fin de boucle, à chaque pas en abscisses.

Or il était beaucoup plus pratique et plus réaliste de rentrer des profils, notamment de vitesse, ayant des formes plus « continues » (cela permet aussi de faciliter l'établissement numérique des profils, et d'éviter des profils trop irréalistes).

Nous avons donc rajouté au début du code, quelques lignes permettant de définir les profils de vitesse, concentration,..., en fonction de la variable y . On calcule ensuite les ω correspondants, grâce aux variables précédemment initialisées. La procédure de calcul se poursuit ensuite normalement.

5.3.2 Calcul du débit érodé

Avant de dire comment nous calculons le débit érodé, il est préférable de décrire un peu la procédure itérative du calcul, présentée sur la Figure 5.2.

Cette figure, très simplifiée, montre dans quel ordre et où sont calculées les différentes variables.

La lettre I représente la numérotation des points du maillage en ordonnées ; ainsi $u(I) = u(\omega(I))$. On a alors noté $u(I)$ la vitesse, $\mu_{\text{eff}}(I)$ la viscosité effective, $si(I)$ le terme source pour la vitesse, $Sc_{\text{eff}}(I)$ le nombre de Schmidt effectif, $Y(I)$ la fraction massique de sédiments, $y(I)$ l'ordonnée correspondante à $\omega(I)$, $\rho(I)$ la masse volumique du mélange, en I .

DP représente le gradient de pression suivant x , TI et TIF sont des coefficients permettant d'ajuster les valeurs de la contrainte et de la fraction massique de sédiments près de la paroi. dx est le pas d'avancement en x , numéroté par $istep$.

On peut aussi remarquer que les débits surfaciques en E et I sont calculés en début de boucle.

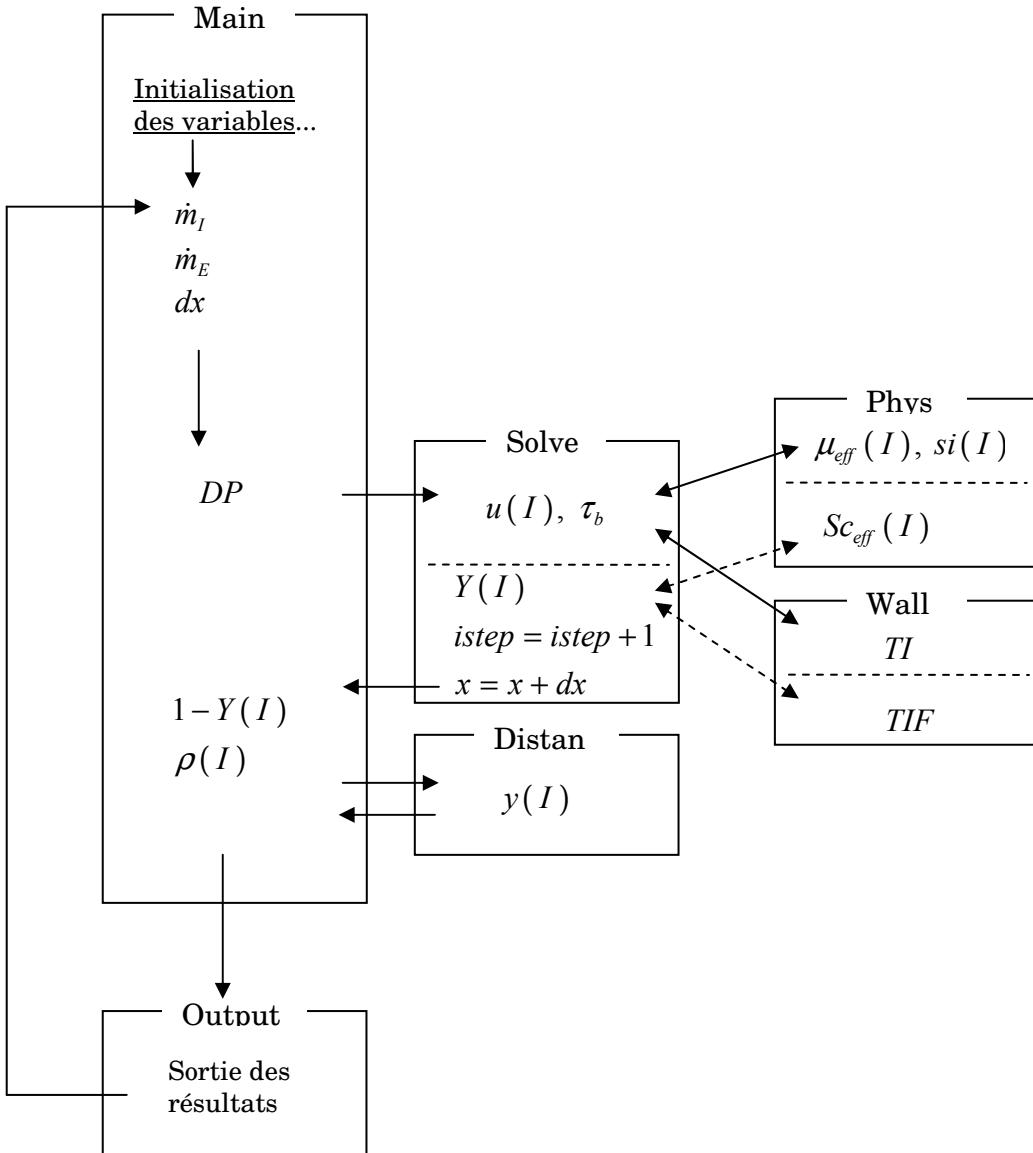


Figure 5.2 : Principe itératif de la résolution.

5.3.2.1 K fini

On note dorénavant \dot{m} le débit surfacique \dot{m}_I .

Dans ce cas, le calcul de \dot{m} est très simple.

Comme nous le verrons plus tard, nous laissons le profil de vitesse s'établir sur une certaine distance, $dstart$, avant de commencer l'érosion.

Soit x_i l'indice de la première abscisse supérieure ou égale à $dstart$. On notera avec ce même indice l'ensemble des valeurs des variables dépendantes calculées au point x_i ($u_i, Y_i, y_i \dots$). On a alors le débit érodé à l'abscisse x_i , $\dot{m}_i = 0$; il a en effet été calculé en $x = x_{i-1} < dstart$.

Par contre à la boucle suivante :

Si $\tau_b) \geq \tau_c$ on aura $\dot{m}_{i+1} = f(\tau_b) \geq 0$. Les variables calculées en x_{i+1} , vitesse, fraction massique, seront alors fonction de ce débit érodé \dot{m}_{i+1} . On aura donc en sortie, le calcul du débit érodé et de ses conséquences sur l'écoulement.

On réitère ensuite cette opération au pas suivant...

Remarque : Il peut arriver, lors du calcul, que le débit érodé \dot{m} oscille d'une valeur positive à une valeur nulle lors de l'avancement pas à pas. On peut éviter cela en diminuant le pas d'avancement suivant x , mais il est vrai que pour des fortes valeurs de K (qui dépendent des paramètres du calcul) ces oscillations perdurent et peuvent amener le calcul à de faux résultats.

5.3.2.2 K infini

Dans ce cas il est nécessaire de faire des itérations sur le débit érodé, Figure 5.3, afin de trouver celui qui donnera en sortie de boucle une contrainte au sol (exercée par l'écoulement) égale à la contrainte critique du matériau le constituant. On cherche donc \dot{m} tel que $(\tau_b - \tau_c) = 0$.

Ainsi, si k est l'indice d'itération sur la valeur du débit érodé, on cherche :

$$\dot{m}_k / (\tau_b(\dot{m}_k) - \tau_c) = f(\dot{m}_k) = 0 \quad (5.18)$$

Afin d'initialiser le processus itératif, il est nécessaire de se donner une valeur initiale du débit érodé.

Valeur initiale de \dot{m} :

Approximation de la valeur initiale présentée en Annexe IV :

$$\dot{m}_1 = \frac{2\mu_{eff}}{y_P} \left(\frac{\mu_{eff} u_P}{y_P \tau_c} - 1 \right) \quad (5.19)$$

où l'indice P dénote un point très près de la paroi dans le fluide.

Cette première valeur de \dot{m} va avoir des conséquences sur l'écoulement, notamment sur la contrainte pariétale $\tau_b(\dot{m}_1)$.

Une fois que $\tau_b(\dot{m}_1)$ est connu, on en déduit une valeur pour \dot{m}_2 :

$$\begin{cases} \text{si } \tau_b(\dot{m}_1) > \tau_c, \text{ alors } \dot{m}_2 = \dot{m}_1 + r\dot{m}_1 & r > 0 \\ \text{si } \tau_b(\dot{m}_1) < \tau_c, \text{ alors } \dot{m}_2 = \dot{m}_1 - r'\dot{m}_1 & r' > 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

On refait donc une boucle avec \dot{m}_2 choisi en (5.20), on obtient alors $\tau_b(\dot{m}_2)$. Une fois ces quatre premières valeurs obtenues on peut converger vers la solution en calculant le \dot{m}_{k+1} suivant avec la formule de Newton Raphston :

$$\dot{m}_{k+1} = \dot{m}_k - \frac{f(\dot{m}_k)}{f'(\dot{m}_k)} \quad (5.21)$$

On arrêtera alors le processus itératif sur \dot{m}_k lorsque :

$$\frac{|\tau_b(\dot{m}_k) - \tau_c|}{\tau_c} < \varepsilon \quad (5.22)$$

avec $\varepsilon \ll 1$.

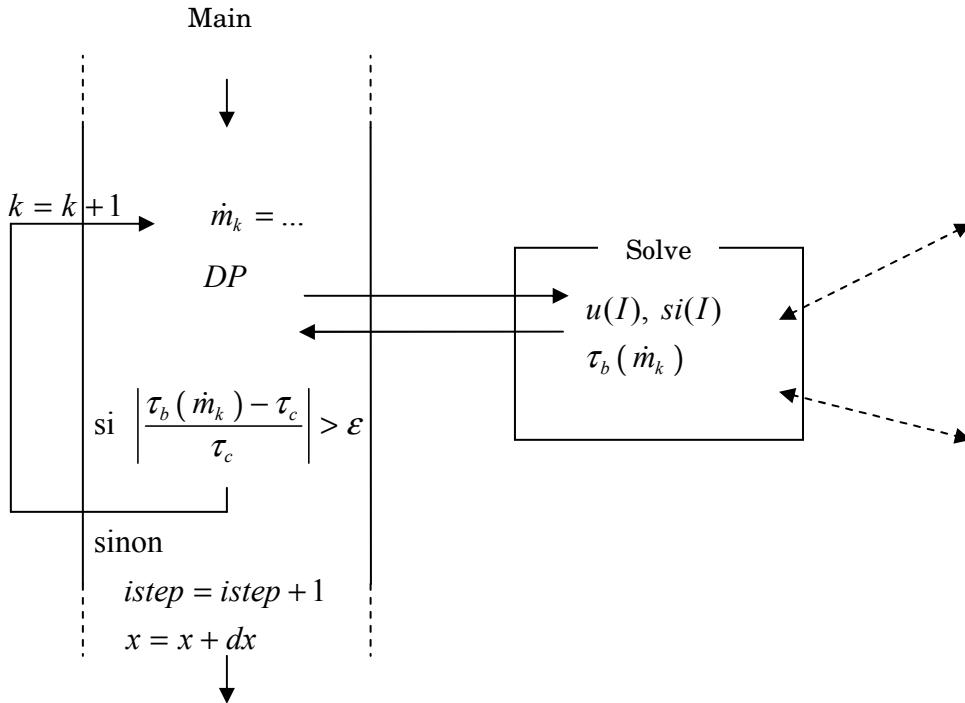


Figure 5.3 : Modifications apportées au code pour le calcul du modèle d'érosion K_{infini} .

L'équation (5.21) exprimée avec la Méthode de la sécante devient :

$$\dot{m}_{k+1} = \dot{m}_k - \frac{(\tau_b(\dot{m}_k) - \tau_c)}{\left(\frac{\tau_b(\dot{m}_k) - \tau_b(\dot{m}_{k-1})}{\dot{m}_k - \dot{m}_{k-1}} \right)} \quad (5.23)$$

Cette méthode converge très vite, il faut moins d'une dizaine de boucles itératives à chaque pas pour trouver la bonne valeur du débit érodé.

5.3.3 Calcul du gradient de pression et du terme source

Comme nous l'avons vu dans la première partie de ce chapitre, les équations peuvent toutes s'écrire sous la même forme (5.10), au terme source près ; ce qui permet de résoudre toutes les équations avec le même schéma. Aussi dans l'équation de quantité de mouvement (5.9), nous avons écrit les termes sources sous la forme :

$$d = -\frac{1}{\rho u} \frac{dP}{dx} \quad (5.24)$$

Nous allons maintenant exprimer la valeur de d suivant les conditions d'écoulement.

Pour des raisons de lisibilité, les variables écrites précédemment sous la forme $X(I) = X(\omega(I))$ seront dorénavant notées X_I . Ces deux notations sont équivalentes.

5.3.3.1 Hauteur infinie

D'origine, le terme source d était défini comme :

$$d = -\frac{1}{\rho u} \frac{dP}{dx} = \frac{1}{\rho u} \left\{ \rho_e u_{ex} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + (\rho - \rho_e) g \sin \alpha \right\} \quad (5.25)$$

De plus le terme DP introduit dans la Figure 5.2 est :

$$DP = -\rho_e u_e \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} dx \quad (5.26)$$

Ainsi, le terme source, *si*, correspondant à (5.25), discrétisé et intégré sur le volume de contrôle s'écrit :

$$si_I = \frac{1}{2} (\omega_{I+1} - \omega_{I-1}) \left[g \sin \alpha (\rho_I - \rho_e) dx - DP \right] \quad (5.27)$$

Or nous avons vu, qu'en toute rigueur, le terme source doit s'écrire (Chapitre 4) :

$$d = -\frac{1}{\rho u} \frac{dP}{dx} = \frac{1}{\rho u} \left\{ \rho_e u_{ex} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + (\rho - \rho_e) g \sin \alpha - \rho_e g \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_y^\infty \left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} \right\} \quad (5.28)$$

Il nous faut donc ajouter la contribution du terme en $\cos \alpha$ au terme source.

Il y a dans ce dernier terme, en $\cos \alpha$, de l'équation (5.28) une dérivée par rapport à x d'une fonction dépendant de y . Cette dérivée partielle par rapport à x doit donc

être calculée à y constant. Or dans notre programme, le système de coordonnées est (x, ω) , ainsi à I donné $\omega(I)$ est constant tout au long du calcul mais pas $y(I)$. La dérivée partielle en x (à y constant) d'une fonction f en y dans des axes (x, ω) , est alors :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right)_y = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right)_\omega - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right)_\omega \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \quad (5.29)$$

On tient ainsi compte de la variation en x de y .

On discrétise et calcule ce terme comme :

$$\int_y^\infty \left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} \equiv \int_{y_I}^{y_N} \left(\frac{\rho(x, \tilde{y})}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} \quad (5.30)$$

Remarquons que l'on peut remplacer la borne supérieure de l'intégrale de gauche ∞ , par $y(N)$ la limite supérieure de la couche limite, car au dessus de $y(N)$ on se situe dans l'écoulement potentiel constitué d'eau pure. Ainsi au dessus de $y(N)$ l'intégrale définie en (5.30) est nulle.

D'après la formule des trapèzes :

$$\int_{y_I}^{y_N} \left(\frac{\rho(x, \tilde{y})}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} = \sum_{j=I}^{N-1} (y_{j+1} - y_j) \left(\frac{\rho_{j+1} + \rho_j - 2\rho_e}{2\rho_e} \right) \quad (5.31)$$

D'où l'expression complète de la dérivée suivant x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_I}^{y_N} \left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} &= \left(\frac{y_I)_x - y_I)_{x-dx}}{dx} \right) \left(\frac{\rho_I}{\rho_e} - 1 \right) + \\ &\quad \underbrace{\sum_{j=I}^{N-1} (y_{j+1} - y_j) \left(\frac{\rho_{j+1} + \rho_j - 2\rho_e}{2\rho_e} \right)}_{dx} - \underbrace{\sum_{j=I}^{N-1} (y_{j+1} - y_j) \left(\frac{\rho_{j+1} + \rho_j - 2\rho_e}{2\rho_e} \right)}_{x-dx} \end{aligned} \quad (5.32)$$

On va appeler $droy(I)$ l'intégrale calculée en (5.31), et $DY1(I)$ le terme dû aux variations de y en fonction de x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_I}^{y_N} \left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} = \frac{droy_I)_x - droy_I)_{x-dx}}{dx} + \frac{DY1_I}{dx} \quad (5.33)$$

L'expression complète du terme source devient alors :

$$si_I = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{I+1} - \omega_{I-1}}{\rho_I u_I} \right) \left[g \sin \alpha (\rho_I - \rho_e) dx - DP - \rho_e g (\cos \alpha) DY1_I \right] - \rho_e g (\cos \alpha) (droy_I)_x - droy_I)_{x-dx} \quad (5.34)$$

5.3.3.2 Surface libre

On a vu que l'on pouvait écrire :

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_y^{h(x)} \rho(x, y') g_y dy' \right) \quad (5.35)$$

On doit discréteriser cette équation :

$$\int_y^{h(x)} \rho(x, y') dy' \equiv \int_{y_I}^{y_N} \rho(x, y'(I)) dy' \quad (5.36)$$

Si l'on utilise la formule des trapèzes, on en déduit :

$$\int_{y_I}^{y_N} \rho(x, y') dy' = \sum_{j=I}^{N-1} (y_{j+1} - y_j) \left(\frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2} \right) \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{y_I}^{y_N} \rho(x, y') dy' \right) &= \left(\frac{(y_I)_x - y_I}_{dx} \right) \rho_I + \\ &\underbrace{\sum_{j=I}^{N-1} (y_{j+1} - y_j) \left(\frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2} \right)}_{dx} \Big|_x - \underbrace{\sum_{j=I}^{N-1} (y_{j+1} - y_J) \left(\frac{\rho_{j+1} + \rho_j}{2} \right)}_{dx} \Big|_{x-dx} \end{aligned} \quad (5.38)$$

On appelle $dro(I)$ l'intégrale calculée en (5.37) et $DY2(I)$ l'autre terme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{y_I}^{y_N} \rho(x, y') dy' \right) = \frac{dro_I)_x - dro_I)_{x-dx}}{dx} + \frac{DY2_I}{dx} \quad (5.39)$$

Si l'on réécrit l'expression de d dans ce cas :

$$d = -\frac{1}{\rho u} \left\{ \rho g \sin \alpha - g \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{\infty} \rho d\tilde{y} \right\} \quad (5.40)$$

Donc, l'expression du terme source est :

$$sI_I = \frac{1}{\rho_I u_I} \left[\begin{aligned} &\frac{1}{2} (\omega_{I+1} - \omega_{I-1}) \left[g \sin \alpha (\rho_I - \rho_e) dx - DP - \rho g (\cos \alpha) DY2_I \right] \\ &- g (\cos \alpha) (dro_I)_x - dro_I)_{x-dx} \end{aligned} \right] \quad (5.41)$$

Avec DP :

$$DP = -\rho_e g \sin \alpha dx \quad (5.42)$$

5.3.3.3 Contribution de la turbulence au gradient de pression

En toute rigueur, les équations de couche limite que nous avons présentées sont incomplètes dans le cas d'une couche limite turbulente. Un terme dû aux fluctuations de vitesse doit en effet être ajouté au gradient de pression orthogonal :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha - \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \bar{v'^2} \right) \quad (5.43)$$

On réitère les calculs effectués dans le Chapitre 4 du gradient de pression longitudinal.

$$p(x, y) - p_0(x) = -g \cos \alpha \int_0^y \rho d\tilde{y} - \left[\rho \bar{v'^2} \right]_0^y \quad (5.44)$$

On dérive cette équation par rapport à x , on fait ensuite tendre y vers l'infini pour en déduire la valeur de $p_0(x)$, et l'on trouve :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_e u_{ex} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \rho_e g \sin \alpha + g \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_y^\infty \rho d\tilde{y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \bar{v'^2} \right)_y \quad (5.45)$$

On rappelle que les tensions de Reynolds sont nulles à la paroi (dans la sous couche visqueuse) et à l'infini (dans l'écoulement extérieure (fluide parfait)).

En première approximation, et avec les variables utilisées dans notre problème, on peut exprimer le terme des $-\rho \bar{v'^2}$ comme proportionnel à l'énergie cinétique turbulente :

En effet dans une couche limite sur plaque plane lisse, on a les relations suivantes (Chassaing, 2000) :

$$\nu_{eff} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = -\bar{u'v'} \approx 0.3k \quad (5.46)$$

avec k l'énergie cinétique turbulente définie comme :

$$k = \frac{\bar{u'^2} + \bar{v'^2} + \bar{w'^2}}{2} \quad (5.47)$$

On a aussi en première approximation :

$$k \approx \bar{u'^2} \approx 2\bar{v'^2} \quad (5.48)$$

D'où on peut exprimer en première approximation :

$$\rho \bar{v'^2} \approx \frac{1}{0.6} \mu_{eff} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \simeq 1.7 \rho l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (5.49)$$

Le terme source à ajouter à l'équation de quantité de mouvement est donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \bar{v^2} \right)_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(1.7 \rho l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right)_y \quad (5.50)$$

Ce terme n'était pas pris en compte dans la version originel du code de calcul, ses effets étant la plupart du temps relativement peu importants (si le profil de vitesse évolue lentement suivant x). Mais dans le cas d'un écoulement avec érosion, on peut supposer qu'il peut apparaître de fortes variations en x , notamment de masse volumique.

On appelle :

$$1.7 \rho l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \Big|_{y_I} = pturb_I \quad (5.51)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \bar{v^2} \right)_y &= \frac{pturb_I|_x - pturb_I|_{x-dx}}{dx} \\ &\quad - \left(\frac{y_I|_x - y_I|_{x-dx}}{dx} \right) \left(\frac{pturb_{I+1}|_x - pturb_{I-1}|_x}{y_{I+1} - y_{I-1}} \right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ces termes sont calculés dans Phys, après la viscosité $\mu(I)$ et bien sur avant le terme source $si(I)$, voir Figure 5.3. Nous initialisons cette nouvelle variable lors de la première boucle, son effet n'est donc pris en compte qu'à partir du deuxième pas du calcul.

Chapitre 6

Résultats à hauteur d'eau infinie dans un écoulement à vitesse constante

Avant de s'intéresser à un écoulement au dessus d'une digue, nous allons tout d'abord étudier les propriétés de la modélisation que nous avons proposée dans une situation plus académique : il s'agit d'un écoulement de type couche limite sur une paroi sous une très grande hauteur d'eau. La vitesse de l'écoulement au dessus de la couche limite (U_e) sera prise constante, quelle que soit l'inclinaison de la paroi. Dans la première partie, nous allons étudier la modélisation à viscosité effective constante, et dans la seconde partie, celle du type longueur de mélange.

6.1 Résultats à viscosité effective constante

6.1.1 Sans érosion

Comme nous l'avons dit précédemment il est nécessaire de donner un profil initial de vitesse à l'entrée du domaine de calcul. Il est possible de donner différents types de profils : parabolique, linéaire ou logarithmique, par exemple... On sait

cependant, qu'une couche limite sans érosion montre après une certaine distance un profil caractéristique (auto-similaire), qui ne dépend que de la vitesse extérieure et d'une épaisseur caractéristique. C'est ce profil que nous allons considérer comme profil initial pour notre cas avec érosion. Pour l'obtenir directement dans nos calculs, nous allons laisser une certaine distance d'établissement sans érosion, pour activer ensuite le modèle d'érosion. Même si sur les courbes on a l'impression que très rapidement l'écoulement atteint le profil d'équilibre auto-similaire, la comparaison des profils de contraintes au sein de l'écoulement nous a décidé à choisir une distance d'établissement de l'écoulement égale à quinze fois la hauteur d'entrée (voir (6.3))

Figure 6.1, avec profil initial parabolique, Figure 6.2 et Figure 6.3).

On définit :

$$x^* = \frac{x}{h_e} \quad (6.1)$$

$$y^* = \frac{y}{\delta_{0,99}} \quad (6.2)$$

ou $\delta_{0,99}$ est l'épaisseur classique de la couche limite ;

$$U^* = \frac{u}{U_e} \quad (6.3)$$

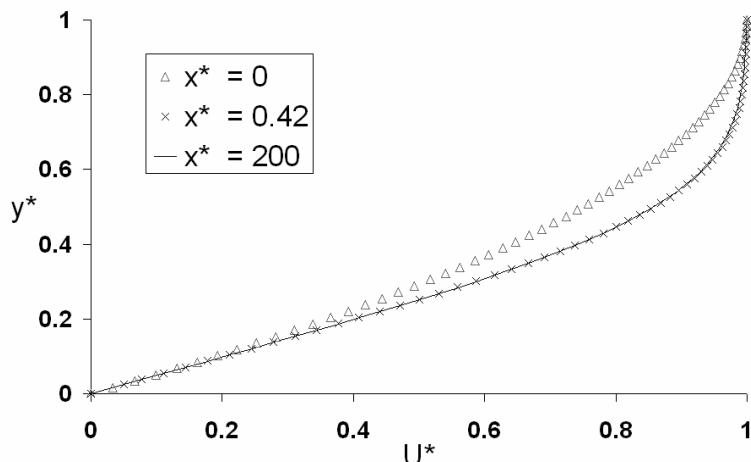


Figure 6.1 : Evolution du profil de vitesse avec un profil initial parabolique.

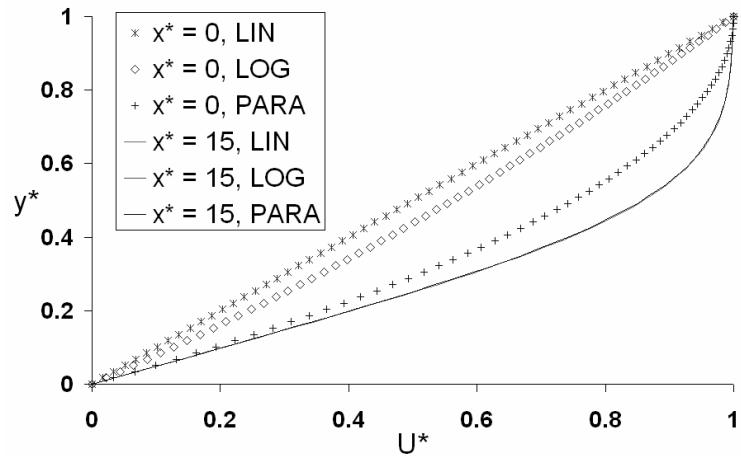


Figure 6.2 : Comparaison des profils de vitesse initiaux et à $x^* = x/h_e = 15$.

On définit aussi:

$$\tau^* = \frac{\tau}{\rho U_e^2} \quad (6.4)$$

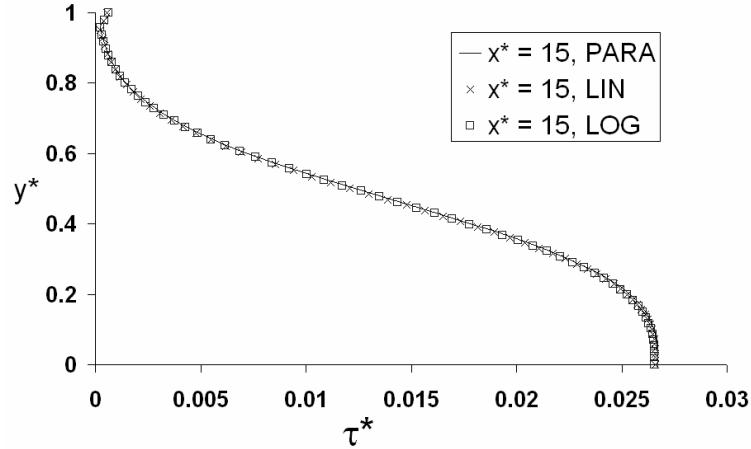


Figure 6.3 : Comparaison des profils de contraintes à $x^* = 15$.

Une fois le profil établi on retrouve bien les résultats classiques de couche limite laminaire : l'épaisseur de la couche limite augmente proportionnellement à la racine carré de x , et le frottement pariétal décroît comme l'inverse de cette même racine, Figure 6.4.

$$\delta_{0,99} = 5 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_e}} \quad (6.5)$$

$$\tau_p \approx \frac{1}{3} \rho U_e^2 \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_e x}} \quad (6.6)$$

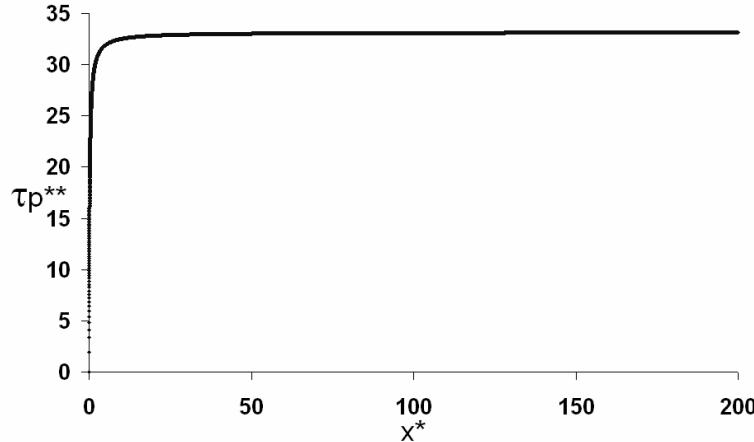


Figure 6.4 : Variation de la contrainte au sol multipliée par racine de x ($\tau_p \sqrt{x}$), fonction de x^* .

Avec nos valeurs des paramètres, voir Tableau 6-1, on retrouve bien l'approximation (6.6), sur la Figure 6.4.

6.1.2 Erosion de sédiments de même masse volumique que l'eau sur un sol horizontal

Nous allons maintenant étudier le phénomène d'érosion sur un sol horizontal, dans le cas particulier où les sédiments ont même masse volumique que l'eau. Cela permet de s'affranchir de tous les termes sources de l'équation de quantité de mouvement, liés au gradient de pression.

Pour les valeurs des paramètres retenus issues de la littérature (voir Tableau 6-1), la valeur de K notamment (de l'ordre de $10e-5$ à $10e-3$, Ariathurai et Arulanandan (1986)), les résultats obtenus sont très peu différents du cas sans érosion (en ce qui concerne la contrainte au sol, et les profils de vitesse). Par contre si l'on augmente notablement K , ou si l'on utilise le modèle d'érosion « limite plastique » (correspondant au cas limite K infini), le débit érodé augmentant, les effets sur l'écoulement sont plus visibles.

Pour un sol composé de sédiments non cohésifs, la contrainte critique τ_c peut être identifiée avec la valeur du paramètre de Shields $\tau_c = 0.05(\rho_s - \rho_e)gd$, où d est le diamètre moyen des particules. Pour les matériaux cohésifs τ_c se réfère à une contrainte critique d'érosion, par analogie avec les sédiments non cohésifs (Partheniades 1965).

Nous avons choisi par la suite une contrainte critique $\tau_c = 10$ Pa.

$$U_e = 1 \text{ m/s} , h_e = 0.1 \text{ m}$$

$$\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3 , \rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = \mu^* \rho_e u_e h_e , \mu^* = a = 0.1$$

$$\rho D = Sc \mu , Sc = 1$$

$$\tau_c = 10 \text{ Pa}$$

Tableau 6-1 : Valeurs des paramètres pour l'application numérique.

Nous présentons les résultats obtenus avec 3 valeurs de K : $K=0.1$, $K=1.0$ et K infini (modèle plastique). Les autres valeurs des paramètres sont celles du Tableau 6-1. Ce choix de valeurs numériques n'a pas d'importance sur les discussions. Lorsque nous présentons les résultats sous forme adimensionnée, les courbes sont tout à fait générales et n'en dépendent plus.

La Figure 6.5 présente la vitesse de régression du sol en fonction de x^* , pour les différents K .

On rappelle la définition de V_s , la vitesse de régression du sol :

$$V_s = \frac{\tilde{m}}{\rho_g} \quad (6.7)$$

que nous avons adimensionnée comme :

$$V_s^* = V_s \sqrt{\rho_e / \tau_c} \quad (6.8)$$

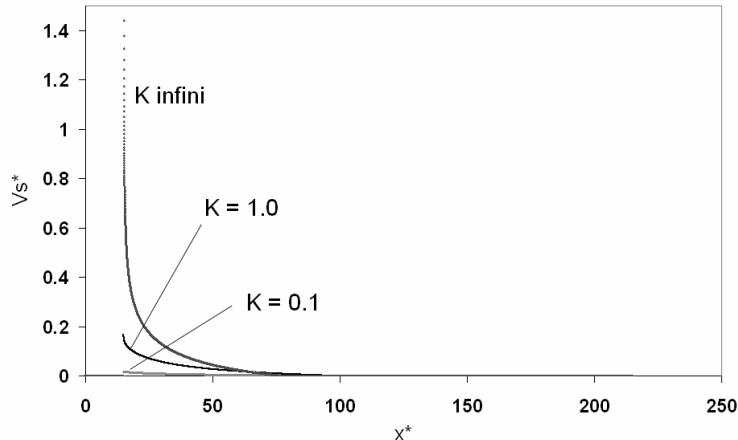


Figure 6.5 : Comparaison pour 3 cas ($K=0.1$, $K=1.0$, K infini) de la vitesse de régression du sol en fonction de x^* .

Comme on le voit l'érosion forte au début (suivant la valeur de K) diminue progressivement avec x^* pour s'annuler à une certaine distance $dstop$ mesurée à partir du début de l'érosion. Ce premier résultat est très important, cela signifie que dans cette configuration les débits érodés sont finis, l'érosion se produit sur une distance limitée que l'on peut calculer.

Les vitesses de régression présentées ici sont adimensionnées, avec les valeurs du Tableau 6-1, on a $Vs = 0.1 Vs^*$ en m/s . Ainsi, on voit que les maxima des vitesses de régression du sol, sont de l'ordre de $0.1 m/s$ pour le modèle limite $K infini$, de $0.015 m/s$ pour $K = 1.0 s/m$ et de $0.0015 m/s$ pour $K = 0.1 s/m$.

Si l'on s'intéresse à la contrainte au sol dans ces différents cas, on a :

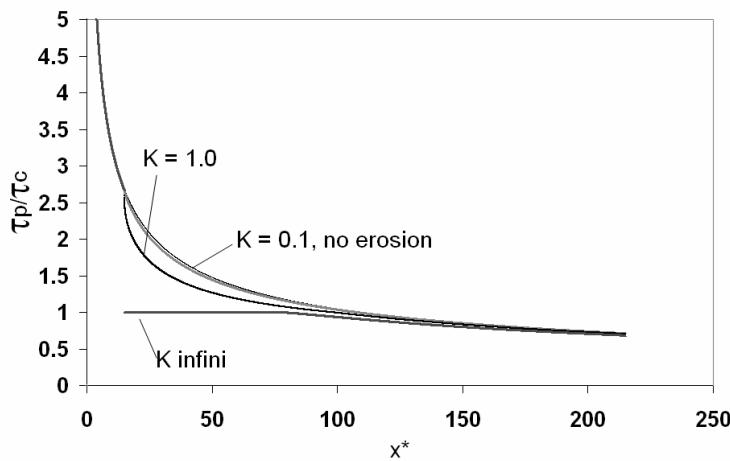


Figure 6.6 : Comparaison de la contrainte au sol, pour 3 K et sans érosion.

Sur cette Figure 6.6, on voit que les courbes de contrainte au sol sans érosion et avec érosion pour $K=0.1 s/m$ sont pratiquement confondues. En fait pour ces faibles valeurs de K le débit érodé est tellement faible qu'il n'influence que très peu l'écoulement. Par contre pour $K=1.0 s/m$ on voit que l'érosion provoque une diminution de la contrainte au sol ; de même pour le cas limite $K infini$ où la contrainte prend la valeur critique de résistance du sol (fixée à $\tau_c = 10 Pa$). La distance $dstop$ est alors atteinte lorsque τ_p devient inférieur à τ_c .

Le fait que le débit local érodé \dot{m} diminue jusqu'à s'annuler, lorsque x^* augmente, s'explique par la diminution normale de la contrainte au sol : dans le cas sans érosion, cette diminution est due à l'épaisseur de la couche limite, mais il y a en plus une diminution de la contrainte due à l'érosion elle-même. Cette diminution de la contrainte à la paroi due à une injection de matière à travers celle-ci est bien connue. On peut par exemple citer les études théoriques de Schlichting (1960), Akçay et Yükselen (1999), ou les études expérimentales de Cheng et Chiew (1998).

Nous allons maintenant regarder les profils de fraction massique de sédiments au sein de l'écoulement pour $K=0.1$ et $K infini$. Les abscisses données pour les profils (x^{**}) sont mesurées à partir du début de l'érosion (une fois que le profil de vitesse est complètement établi), $x^{**} = x^* - 15$.

On voit bien que les fractions massiques de la Figure 6.8 sont beaucoup plus importantes que celles de la Figure 6.7. A $x^{**}=0$, l'érosion vient juste de commencer et les sédiments n'ont pas encore pu diffuser dans l'écoulement, leur fraction massique est donc assez importante près du sol et presque nulle ailleurs.

Ensuite l'érosion décroît doucement et les particules diffusent dans la couche, les profils sont donc plus étalés. Puis l'érosion s'arrêtant à peu près vers $x^*=100$, la valeur maximum de la fraction massique va avoir tendance à diminuer, dû à la diffusion des sédiments dans la couche et à l'apport d'eau pure au sommet de la couche.

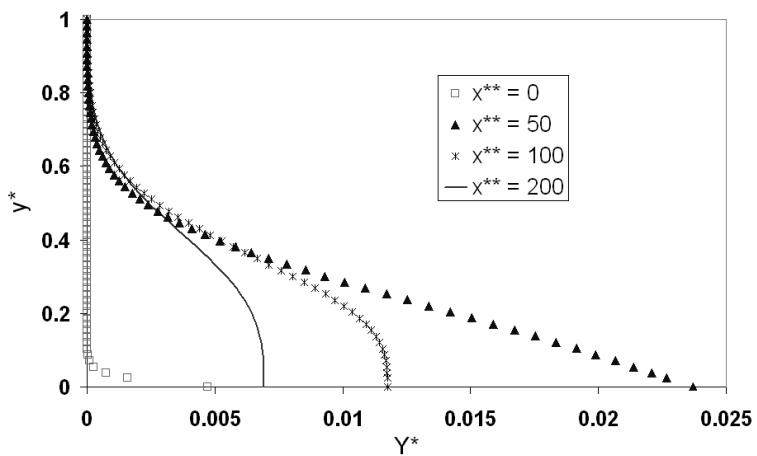


Figure 6.7 : Evolution du profil de fraction massique de sédiment, $K=0.1$ s/m.

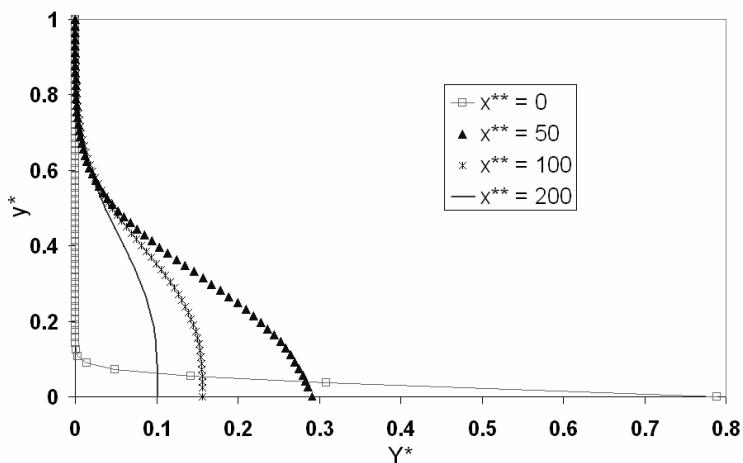


Figure 6.8 : Evolution du profil de fraction massique de sédiments, modèle d'érosion plastique (K infini).

Comme nous l'avons vu, l'érosion pour des K assez importants provoque une chute de la contrainte au sol. Ce phénomène est difficilement visible sur les profils de vitesse des calculs précédents, on peut tout de même l'accentuer en diminuant la

contrainte critique du sol. Nous présentons sur la Figure 6.9 l'évolution des profils de vitesse avec la loi d'érosion plastique et $\tau_c = 5 \text{ Pa}$.

Dans cette figure, l'abscisse $x^{**} = 0$ -*eps* correspond à l'abscisse située juste avant que l'érosion ne commence. On voit bien alors comment lorsqu'elle débute, l'érosion déforme le profil de vitesse : le frottement au sol est proportionnel à $\partial u / \partial y$, et l'on voit bien cette pente diminuer lorsque x^{**} augmente, particulièrement au début de l'érosion.

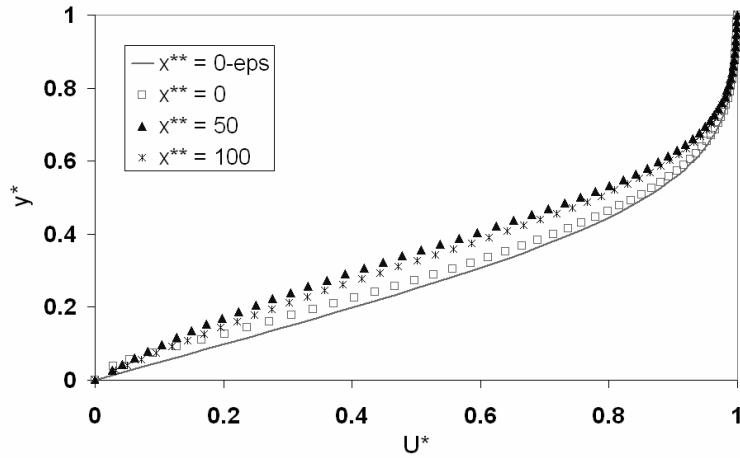


Figure 6.9 : Evolution du profil de vitesse, K infini, $\tau_c = 5 \text{ Pa}$.

Les paramètres qui jouent dans ce cas, où le fluide et le solide ont même masse volumique, sont, outre le profil d'entrée qui déterminera la valeur de la contrainte à la paroi, la valeur de la constante de la loi d'érosion K , la valeur de la contrainte critique du sol, et la valeur de la viscosité.

Pour comprendre globalement l'influence de ces paramètres nous nous sommes intéressés au débit total érodé, depuis $x^{**}=0$ jusqu'à $dstop$, adimensionné par un débit de référence.

On définit le débit total érodé comme :

$$Q_e = \int_0^{dstop} \dot{m} dx, \text{ et } Q_e^* = \frac{Q_e}{\rho_e U_e h_e} \quad (6.9)$$

et

$$\tau_c^* = \frac{\tau_c}{\rho_e u_e^2} \quad (6.10)$$

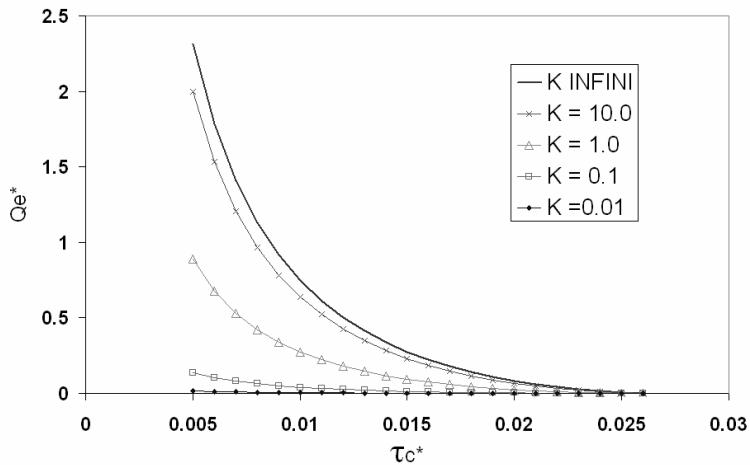


Figure 6.10 : Comparaison du débit total érodé, pour plusieurs K , en fonction de τ_c .

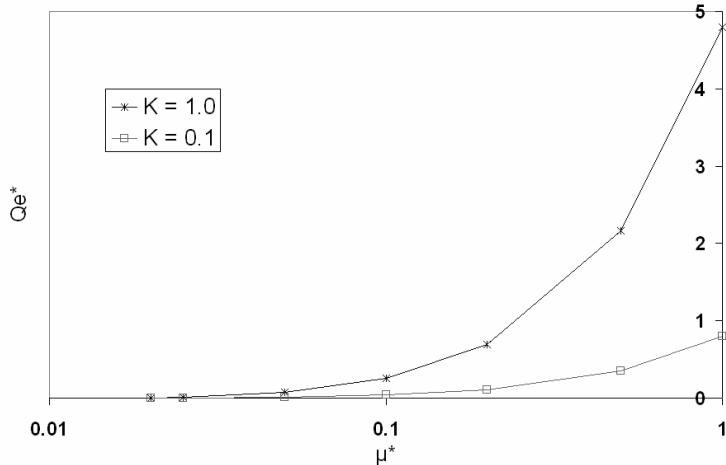


Figure 6.11 : Variation du débit total, fonction de μ^* pour deux K , $\tau_c = 10 Pa$.

Nous présentons sur la Figure 6.10, l'évolution du débit total érodé en fonction de la valeur de la contrainte critique du sol, et sur la Figure 6.11 l'évolution de ce même débit en fonction de la viscosité effective.

Il est évident, Figure 6.10, que le débit érodé sera d'autant plus important que la contrainte critique sera faible. On peut noter, que cette augmentation n'est pas linéaire en fonction de τ_c et est d'autant plus importante que la valeur de K est élevée, et que numériquement une valeur de K égale à 10 s/m, donne des résultats très proches de ceux du modèle K infini.

De même, Figure 6.11, le débit érodé augmente avec la valeur de la viscosité effective et la valeur de K . On comprend alors la limite de notre approche consistant à se fixer la valeur de la viscosité effective, les résultats sont en effet très dépendants de cette valeur !

6.1.3 Erosion avec sédiments plus lourds que l'eau sur sol horizontal

Dans le paragraphe précédent, les masses volumiques des deux phases étant égales, les termes sources de l'équation de quantité de mouvement étaient nuls. Ainsi, la répartition spatiale des sédiments dans l'écoulement n'avait aucune influence sur celui-ci (traceurs). Nous allons maintenant étudier l'influence du gradient de pression longitudinal (incluant tous les termes sources), dû à la différence des masses volumiques des deux phases, à la gravité, et de la répartition des sédiments dans la couche fluide.

Comme nous l'avons vu, le gradient de pression suivant x est le terme source de l'équation de quantité de mouvement. Il est nécessaire de connaître sa valeur pour que le problème soit parabolique, et que l'on puisse résoudre les équations en avançant par itérations dans la direction x . Nous avons vu que son expression, exprimée grâce aux conditions extérieures à la couche, était :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_e u_{ex} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} - \rho_e g \sin \alpha - \rho_e g \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} \quad (6.11)$$

Le terme source de l'équation de quantité de mouvement peut alors s'écrire :

$$source = \rho_e u_{ex} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + (\rho - \rho_e) g \sin \alpha - \rho_e g \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} \quad (6.12)$$

Par choix, nous avons pris la vitesse extérieure constante en x . Dans ce cas, en observant les termes composant le terme source, on peut prédire différentes évolutions de l'écoulement. Pour un écoulement sur sol horizontal, le seul terme pouvant être non nul est le dernier, si $\rho \neq \rho_e$ bien sur. Ainsi, quand l'érosion débute, on suppose que la masse volumique des sédiments $\rho_s > \rho_e$, un gradient de masse volumique suivant x va apparaître. Dans ce cas là, le terme source sera négatif, ralentissant l'écoulement, voire même provoquant un décollement de couche limite (ce qui arrêtera la résolution numérique d'ailleurs).

Sur un sol incliné par contre, à ce terme s'ajoutera le deuxième terme qui lui sera positif. Il existera ainsi une compétition entre ces deux termes, qui suivant les conditions ralentiront ou accéléreront l'écoulement.

Regardons tout d'abord l'effet de la masse volumique des sédiments, pour une érosion sur sol horizontal.

Nous présentons respectivement Figure 6.12 et Figure 6.13 les variations des vitesses de régression du sol, et des contraintes à la paroi en fonction de x^* , pour deux valeurs de la masse volumique des sédiments (ρ_s * est le rapport de la masse volumique des sédiments sur celui de l'eau).

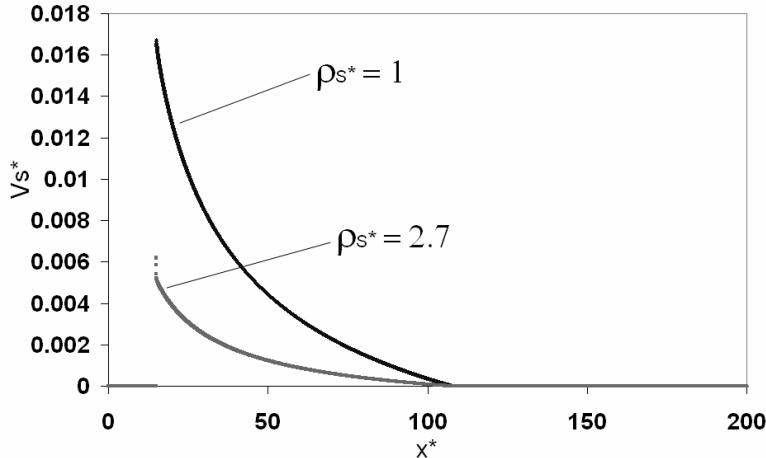


Figure 6.12 : Comparaison de la vitesse de régression du sol, fonction de x^* pour deux ρ_s^* , $K = 0.1$ s/m.

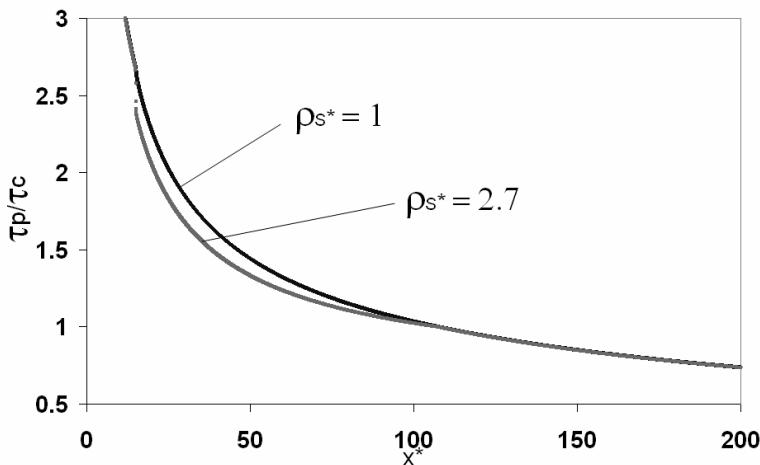


Figure 6.13 : Comparaison de la contrainte au sol, fonction de x^* pour deux ρ_s^* , $K = 0.1$ s/m.

Avant que l'érosion ne commence la contrainte à la paroi est évidemment la même quelque soit la masse volumique des sédiments ; de ce fait, la première valeur du débit local érodé \dot{m} sera elle aussi semblable pour les deux valeurs de ρ_s^* . Par contre la vitesse de régression du sol, définie en (6.7) dépend de la masse volumique du sol, prise ici égale à la masse volumique des sédiments considérés. Ainsi, la toute première valeur de V_s^* pour $\rho_s^* = 1$ sera égale à 2.7 fois celle de $\rho_s^* = 2.7$ (voir Figure 6.12). Théoriquement, si la contrainte à la paroi décroissait de la même façon avec x^* , quelque soit ρ_s^* , le rapport initial entre les vitesses de régression de $\rho_s^* = 1$ et $\rho_s^* = 2.7$ resterait constant et égal à 2.7 jusqu'à $dstop$, et les débits totaux érodés seraient les mêmes.

Or on voit clairement sur la Figure 6.13 que la courbe $\rho_s^* = 2.7$, comparée à la courbe $\rho_s^* = 1$, présente une diminution notable de la contrainte à la paroi, dès le début de l'érosion (puis les deux courbes convergent vers $x^* = 100$). Cette diminution

brusque de la contrainte, est due à une diminution de la vitesse, sous l'effet du terme source (6.12), négatif. En effet, l'apparition des premiers sédiments érodés dans le fluide provoque de forts gradients positifs suivant x de la masse volumique du mélange. Ces gradients de masse volumique (et donc de concentration en sédiments), importants au début de l'érosion, auront ensuite des effets négligeables (sous l'action de la diffusion et de la diminution du débit local érodé).

Il apparaît donc, à travers cet exemple, que l'augmentation de la masse volumique des sédiments diminue la vitesse de régression du sol et le débit total érodé.

Nous présentons Figure 6.14 l'évolution du débit total érodé en fonction de la masse volumique des sédiments, pour deux valeurs de K .

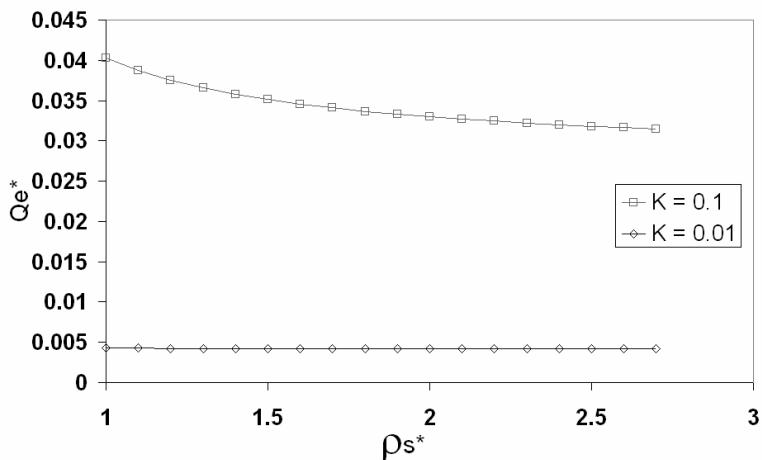


Figure 6.14 : Débit total érodé, fonction de ρ_s^* pour deux valeurs de K .

On voit bien, pour $K=0.1$ s/m, la diminution de Qe^* avec ρ_s^* (le débit érodé diminue de 20% entre $\rho_s^*=1$ et $\rho_s^*=2.7$), expliquée par les deux figures précédentes. Par contre pour $K=0.01$ s/m (donc aussi tous les K inférieurs), la variation de la masse volumique des sédiments n'a pratiquement pas d'influence sur le débit total ; la quantité de matière érodée est trop faible pour modifier l'écoulement.

Nous n'avons pu, sur cette dernière figure présenter des résultats pour des K supérieurs à 0.1 s/m. En effet pour des valeurs de $K > 0.1$ s/m, et de $\rho_s > \rho_e$, l'érosion provoque de très forts gradients de concentrations, qui par l'intermédiaire du terme source, provoquent un décollement de la couche limite ; la résolution numérique s'arrête alors. Pour illustrer cela, nous présentons, Figure 6.15, le profil de vitesse juste avant le décollement pour $K = 1.0$ s/m et $\rho_s = 1100$ kg/m³. On voit d'ailleurs que le décollement se produit à une distance très proche du début de l'érosion ($dstart=(x^{**}=15)$).

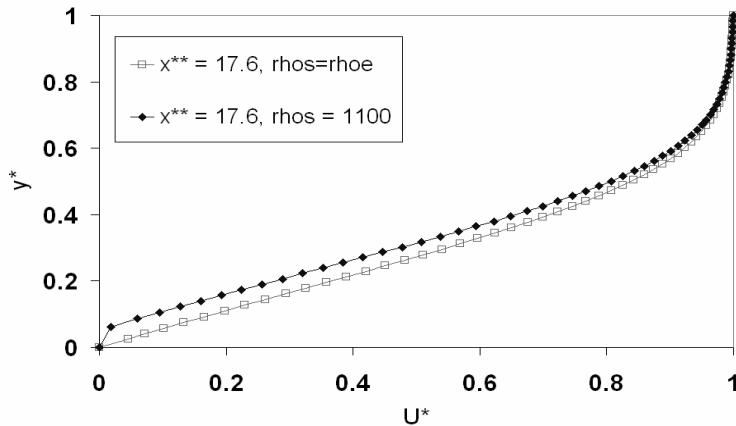


Figure 6.15 : Comparaison de deux profils de vitesse, sans et juste avant le décollement de la couche limite.

Ce phénomène de décollement nous empêche de conserver comme valable les hypothèses de Couche Limite, et ne nous permet pas de tester les valeurs de K supérieures ou égales à l'unité, pour notre choix de ρ_s^* et de sol horizontal.

Cette forte sensibilité de l'écoulement au décollement est en fait liée au choix que nous avons fait quant à la vitesse extérieure de l'écoulement, supposée constante. Une augmentation de cette vitesse avec x permettrait en effet de contre balancer cet effet de décollement. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

6.1.4 Erosion avec sédiments plus lourds que l'eau sur sol incliné

Nous allons maintenant étudier, l'influence de la pente du sol sur l'érosion et l'écoulement. Comme nous l'avons dit dans la partie précédente, l'inclinaison du sol, qui est exprimée dans l'équation de quantité de mouvement par le terme en $\sin \alpha$, est un terme source toujours positif.

6.1.4.1 Etude des phénomènes

Nous prenons les valeurs des paramètres présentées au Tableau 6-2 et nous réalisons des calculs successifs en augmentant progressivement l'angle d'inclinaison du sol.

$$u_e = 1 \text{ m/s} , h_e = 0.1 \text{ m} , Y_g = 0.6$$

$$\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3 , \rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = \mu^* \rho_e u_e h_e , \mu^* = a = 0.1$$

$$\rho D = Sc \mu , Sc = 1$$

$$\tau_c = 10 \text{ Pa} , K = 0.1 \text{ s/m}$$

Tableau 6-2 : Paramètres de référence.

Nous présentons sur la Figure 6.16 l'évolution du débit érodé total et de la distance d'érosion, tous deux adimensionnés par leur valeur respective sur sol horizontal, en fonction de l'angle de la pente.

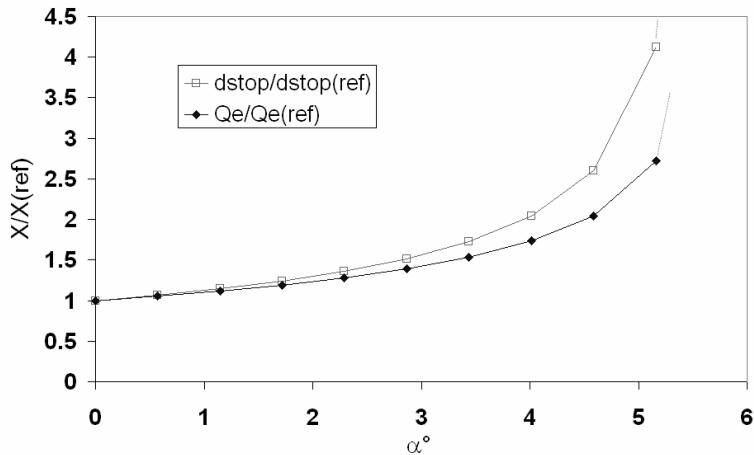


Figure 6.16 : Evolution du débit total érodé et de la distance d'érosion en fonction de l'angle de la pente.

Le fait d'accroître très légèrement l'inclinaison du sol provoque au début une faible augmentation des débits et distances d'érosion, puis à partir d'un angle, que nous appellerons angle critique, les débits et distances deviennent infinis (l'érosion ne s'arrête plus mais s'accélère !). Cet angle critique délimite donc deux régimes différents d'érosion, l'un où l'érosion est finie, en quantité et en longueur, l'autre où l'érosion est « infinie ».

On présente sur la figure suivante l'évolution de la vitesse de régression du sol en fonction de x , pour deux angles, inférieur et supérieur, à l'angle critique.

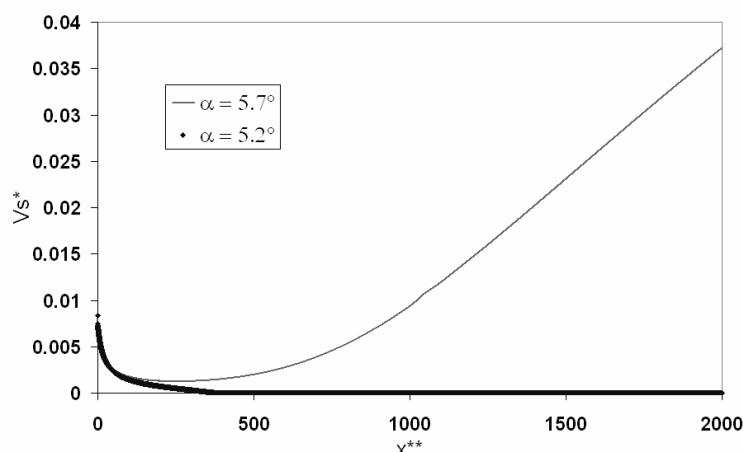


Figure 6.17 : Comparaison de la vitesse de régression du sol en fonction de x^{**} , pour deux valeurs d'angle encadrant l'angle limite.

Sur la figure ci-dessus (Figure 6.17), l'évolution de la vitesse de régression du sol pour $\alpha = 5.2^\circ$ est du même type que celle présentée précédemment sans inclinaison du sol, elle est décroissante avec x (même si elle est légèrement supérieure et se produit sur une distance plus importante que pour un sol horizontal, voir Figure 6.16). Par contre, pour un angle très faiblement supérieur, la vitesse de régression du sol diminue normalement, puis vers $x^* = 100$, elle augmente faiblement puis très fortement (l'érosion s'amplifie).

Nous présentons, Figure 6.18, les courbes de contraintes au sol correspondantes. De la même façon que sur la figure précédente, (la vitesse de régression du sol variant linéairement avec la contrainte), la contrainte au sol pour $\alpha = 5.2^\circ$ décroît et devient inférieure à τ_c vers $x^* = 400$, alors qu'elle décroît jusqu'à $\tau_p = 1.25 \tau_c$ vers $x^* = 300$, pour fortement augmenter ensuite, pour $\alpha = 5.7^\circ$.

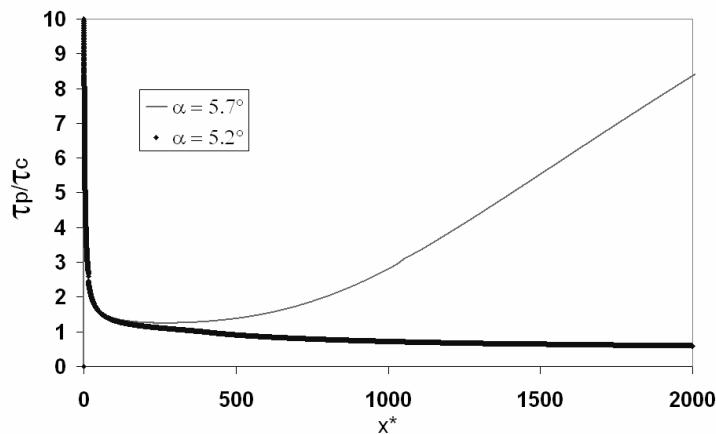


Figure 6.18 : Evolution de la contrainte au sol en fonction de x^* , pour deux angles de pente et d'autre du seuil.

Pour mieux comprendre les phénomènes mis en jeu, nous allons présenter les profils de vitesse pour ces deux angles de pente.

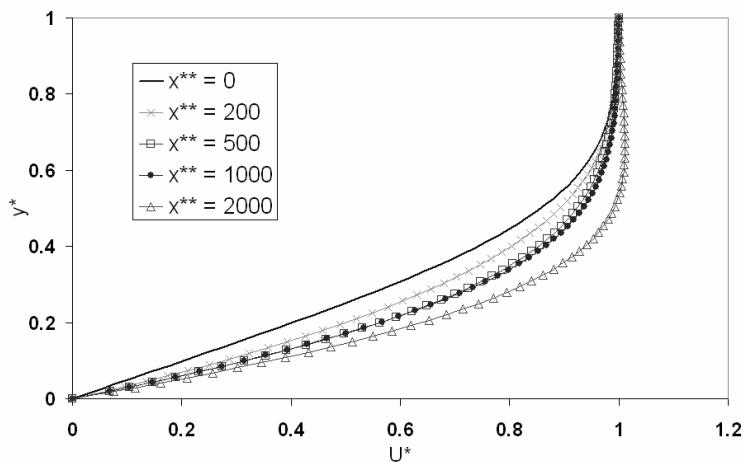


Figure 6.19 : Evolution des profils de vitesse, $\alpha = 5.2^\circ$.

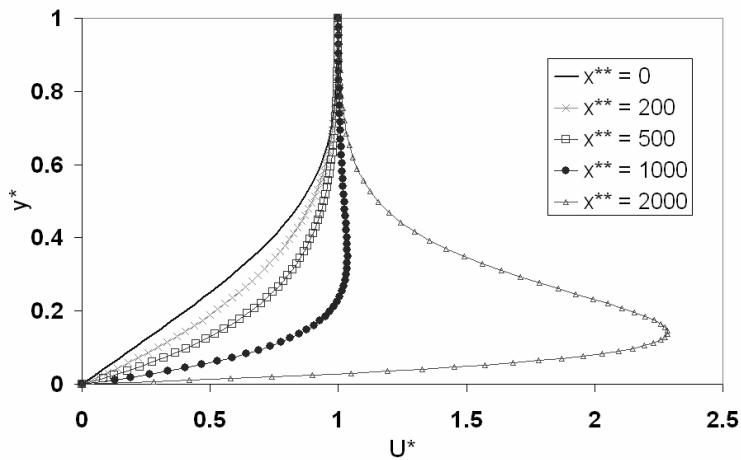


Figure 6.20 : Evolution des profils de vitesse, $\alpha = 5.7^\circ$.

Sur ces deux figures (Figure 6.19 et Figure 6.20), on comprend très facilement le rôle du terme lié à l'inclinaison du sol, il accélère l'écoulement. L'accélération reste faible pour les angles inférieurs à l'angle critique, et ne permet pas une reprise de l'érosion (une augmentation suffisante de la contrainte au sol). Pour des angles supérieurs à l'angle critique, par contre, l'accélération de l'écoulement est beaucoup plus importante provoquant une augmentation de la contrainte et donc une amplification de l'érosion (qui accroît l'accélération de l'écoulement...). Dans ce deuxième cas, le débit érodé local, comme l'accélération de l'écoulement, n'auront de cesse d'augmenter avec x .

Les profils de fraction massique de sédiments dans ces deux cas seront bien évidemment très différents. Avant l'angle critique, l'évolution des profils sera très semblable à celle présentée Figure 6.7 (avec des valeurs légèrement supérieures) voir Figure 6.21 ; après l'angle critique l'apport de sédiments par le sol ne cessant d'augmenter les profils auront des fractions massiques beaucoup plus importantes, augmentant avec x , concentrées près du sol, Figure 6.22.

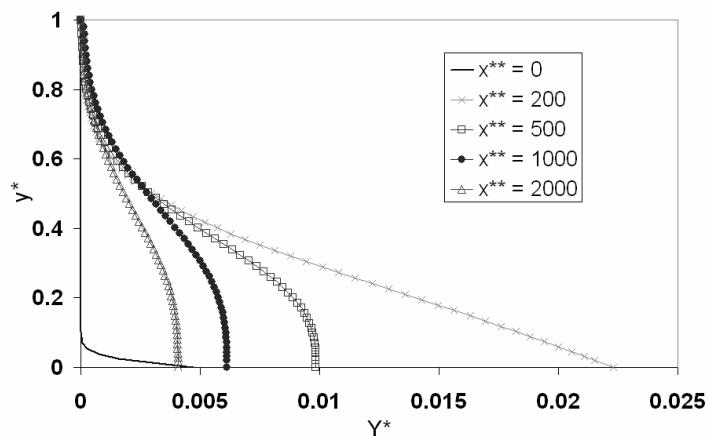


Figure 6.21 : Evolution des profils de fraction massique de sédiments, $\alpha = 5.2^\circ$.

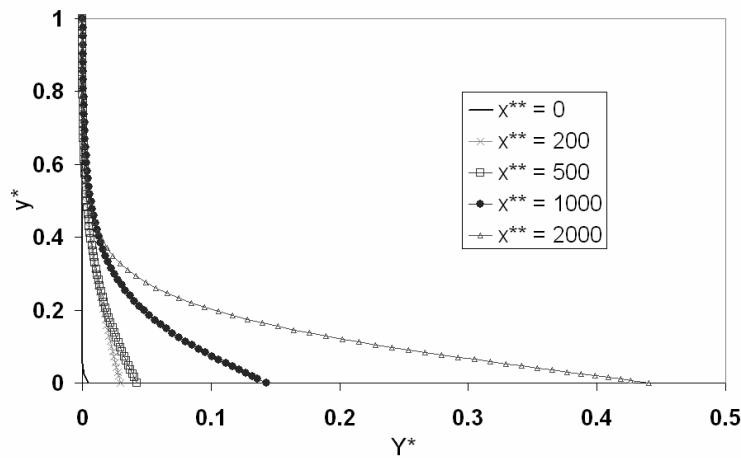


Figure 6.22 : Evolution des profils de fraction massique de sédiments, $\alpha = 5.7^\circ$.

Avant le seuil, comme dans le cas horizontal, les profils de fraction massique commencent par croître ; puis une fois l'érosion finie, l'apport de fluide pur de la couche externe les fait progressivement diminuer. Par contre, après le seuil, l'érosion ne cesse d'augmenter avec x , la fraction massique de sédiments augmente donc elle aussi. On remarque aussi, sur la Figure 6.22, à la forme des profils, que les sédiments sont très peu diffusés dans l'écoulement ; on a donc une couche très chargée en sédiments près du sol, et une couche beaucoup moins chargée au dessus. Si l'on regarde maintenant les courbes de l'évolution des profils de vitesse à la lumière des profils de fraction massique, on s'aperçoit que l'accélération des profils de vitesse est à relier directement à la présence des sédiments. Ainsi avant le seuil, les sédiments étant à peu près uniformément diffusés dans plus de la moitié de la couche, le maximum du profil de vitesse apparaît au milieu de l'écoulement. Par contre, après le seuil, les sédiments étant concentrés près de la paroi, le maximum de vitesse (et donc l'accélération maximum) se retrouve lui aussi près de la paroi.

Il apparaît tentant d'appeler ces écoulements, des écoulements gravitaires (car accélérés par la gravité).

Sur la Figure 6.22, à partir de $x^*=2000$, on a des fractions massiques en sédiments très importantes. Mais si l'on traçait ces profils pour des x^* beaucoup plus grands, on verrait la fraction massique de sédiments $Y^*=Y/Y_g$ augmenter jusqu'à l'unité, tout d'abord près du sol, puis sur une épaisseur de plus en plus importante. Il est clair que notre modèle à viscosité constante cesse d'être valide si les concentrations en sédiments sont importantes. Nous ne pouvons en effet correctement modéliser un écoulement de « boue », avec une viscosité constante.

En effet nous savons, par l'expérience, qu'à partir d'une fraction volumique de sédiments égale à 8%, la présence des sédiments joue sur le comportement du fluide et doit être prise en compte.

6.1.4.2 Etude de l'angle critique

La valeur de l'angle critique (Figure 6.16), à partir duquel l'érosion devient illimitée à l'aval, dépend évidemment des conditions hydrauliques choisies, mais aussi de la contrainte critique du sol, du K considéré, de la masse volumique des sédiments (de tous les paramètres en fait).

Nous présentons sur la figure suivante, une approximation de l'angle critique suivant K , les autres paramètres étant fixés aux valeurs du Tableau 6-2.

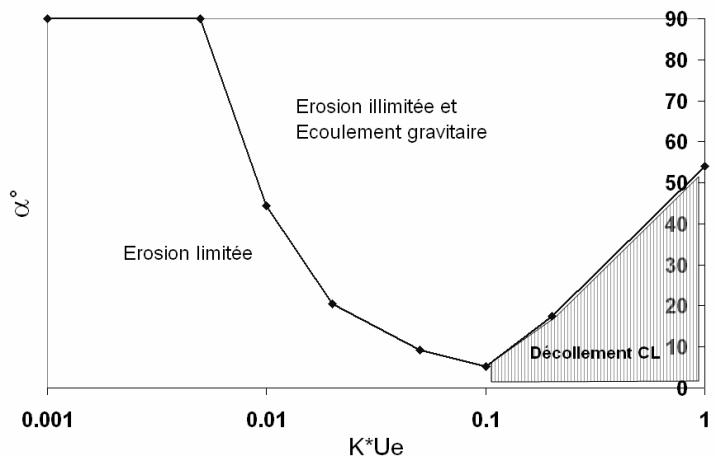


Figure 6.23 : Angle critique en fonction de K^*U_e .

On voit sur cette figure l'influence très importante de K sur l'angle critique. Pour des faibles K , $K \leq 0.005$ s/m, il n'existe pas d'angle critique, le débit érodé est trop faible pour accélérer suffisamment l'écoulement (quelque soit la pente). De cette valeur de K à 0.1 s/m, l'angle critique diminue fortement. Plus le débit local érodé est important et plus la pente nécessaire à l'accélération de l'écoulement est faible. Pour les valeurs de K supérieures à 0.1 s/m, nous avons vu qu'il risquait d'y avoir décollement de la couche limite, c'est la zone hachurée de la Figure 6.23. Dans ce cas il est nécessaire d'avoir une pente forte pour éviter le décollement ; ce qui nous situe directement dans le régime d'érosion s'amplifiant. Nous n'avons donc pas accès, avec les paramètres choisis, au régime d'érosion finie, pour des K supérieurs à 0.1 s/m.

On peut bien sûr jouer sur les paramètres pour éviter le décollement de la couche limite :

- prendre une contrainte critique τ_c supérieure, qui diminuera le débit érodé local (et global) ;
- prendre un coefficient de diffusion plus grand (un nombre de Schmidt plus petit), qui en répartissant de façon plus homogène les sédiments dans la couche, aura tendance à diminuer les gradients de masse volumique suivant x près de la paroi. Mais cela reste très anecdotique, car pour des K supérieurs à l'unité, le décollement reste inévitable.

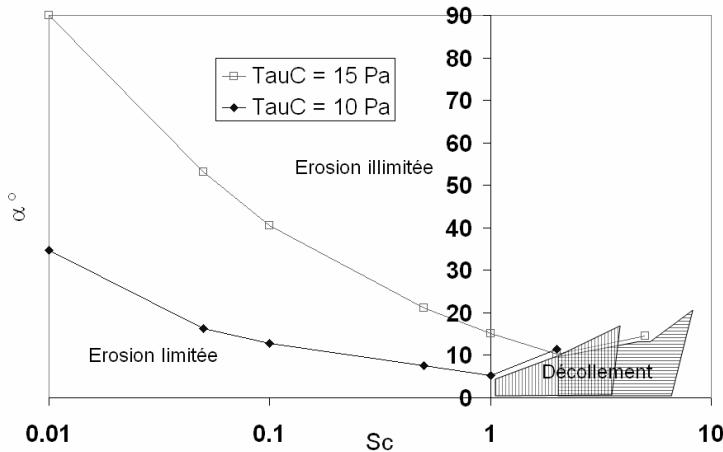


Figure 6.24 : Angle critique en fonction du nombre de Schmidt, pour deux valeurs de τ_c .

La Figure 6.24 représente l'influence du nombre de Schmidt sur l'angle critique séparant les deux régimes d'érosion, pour deux contraintes critiques du sol.

Comme on le voit plus le nombre de Schmidt est faible (plus la diffusion est importante), plus l'angle critique est important. Cela peut être dit différemment : pour un angle de pente donné (non nul), plus le nombre de Schmidt est petit, plus le débit érodé le sera aussi. En fait les sédiments étant diffusés de façon plus uniforme dans la couche, l'accélération se fera elle aussi sur toute l'épaisseur de la couche (et ne sera pas localisée près du sol), le profil sera donc moins accéléré localement, et le frottement au sol sera moins fort.

L'influence de la contrainte critique, à conditions hydrauliques semblables, sur l'angle critique est évidente. Plus la contrainte critique sera faible, plus le débit érodé sera important, et plus l'angle nécessaire à accélérer l'écoulement sera petit.

Remarque :

Dans notre modélisation, nous avons choisi de nous donner le gradient de pression suivant x en fonction des conditions hydrauliques extérieures à la couche limite. Notre paramètre de contrôle est alors la vitesse extérieure, que nous avons choisie comme constante en fonction de x . Nous venons de voir que ce choix pouvait poser des problèmes de décollement de la couche limite, notamment pour des valeurs de K supérieures à 0.1 s/m.

Nous aurions pu, pour éviter cela, prendre directement le gradient de pression suivant x comme paramètre de calcul, sans se préoccuper de la valeur suivant x de la vitesse extérieure correspondante. (De plus, on peut penser qu'expérimentalement il est plus simple de mesurer une différence de pression, que l'évolution d'une vitesse).

Dans ce cas, l'équation de quantité de mouvement sera simplement :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g \sin \alpha \quad (6.13)$$

où l'on se donnera une valeur pour le gradient de pression. On voit alors que les phénomènes précédents, d'accélération ou de décollement, se produiront de la même façon, mais dépendront de la valeur choisie de ce gradient de pression, comparée à $\rho g \sin \alpha$ qui est un terme source toujours positif.

6.2 Résultats du modèle à longueur de mélange

Nous allons dans cette partie, où la viscosité effective est calculée par le modèle à longueur de mélange, suivre la même démarche que la partie précédente. Les phénomènes impliqués (qualitativement) restant les mêmes, la présentation des résultats sera moins étouffée que précédemment.

Quant à la comparaison quantitative des deux modèles sur les débits érodés, viscosité constante et modèle à longueur de mélange, elle reste difficile. En effet, les deux modèles ont des lois de comportement différentes. Ainsi, et même sans érosion, ils ne donneront pas les mêmes profils de vitesse, ni les mêmes contraintes, pour une même vitesse extérieure et le même profil initial. De plus les évolutions d'épaisseur de la couche limite, de contraintes suivant les abscisses sont différentes. Il apparaît dans ces conditions assez difficiles de comparer des débits érodés puisqu'on « ne contrôle pas vraiment » le débit du fluide érodant le sol.

6.2.1 Sans érosion

La viscosité effective calculée à partir de la longueur de mélange ($l = \min(\kappa y, 0.1\delta)$), avec les constantes numériques choisies, est, au début, très inférieure à la valeur constante choisie pour les calculs précédents ; pour les mêmes paramètres hydrauliques, la contrainte au sol (et dans l'écoulement) sera donc très inférieure au cas viscosité effective constante. Elle va augmenter plus loin, mais globalement l'effet est moins fort. Pour retrouver une situation semblable, deux possibilités s'offraient donc à nous, soit garder les mêmes paramètres hydrauliques, et donc diminuer notablement la contrainte critique du sol ; soit choisir les paramètres hydrauliques afin de pouvoir utiliser les mêmes valeurs de contraintes critiques que précédemment. Nous avons choisi la deuxième approche.

Ainsi, nous avons dû notamment augmenter la vitesse extérieure, à 3.5 m/s (les autres paramètres restant inchangés), afin d'atteindre des valeurs de contraintes au sol de l'ordre de 10 Pa.

Nous présentons, sur la figure suivante, la contrainte à la paroi en fonction de x^* .

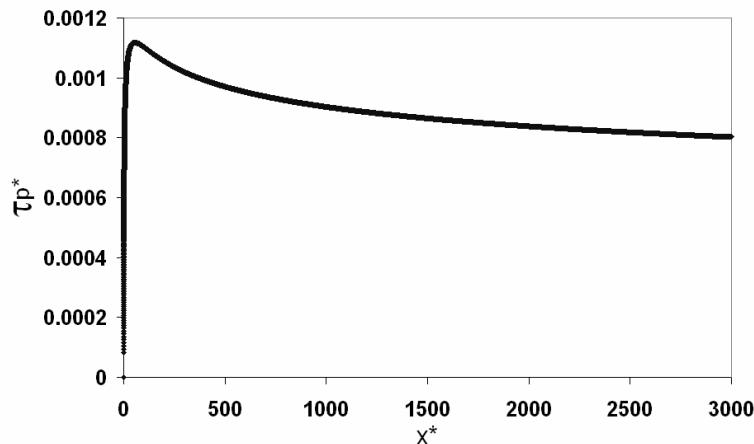


Figure 6.25 : Evolution de la contrainte pariétale avec x^* .

Elle croît fortement sur une distance à peu près égale à $100*he$, puis une fois le profil établi elle décroît très lentement, comparée au cas quasi-laminaire. La distance d'établissement du profil de vitesse est prise ici égale à $300*he$.

Nous présentons sur la Figure 6.26, deux exemples de profils de vitesse après établissement. Leur variation est très faible suivant x , mais réelle : l'autosimilarité est plus longue à obtenir.

On définit à partir de la distance d'établissement du profil :

$$x^{**} = x^* - 300 = \frac{(x - 300h_e)}{h_e} \quad (6.14)$$

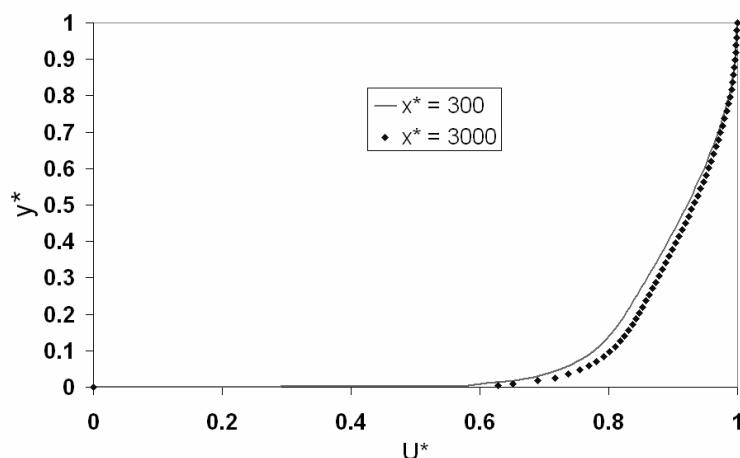


Figure 6.26 : Evolution des profils de vitesse après établissement.

6.2.2 Erosion de sédiments de même masse volumique que l'eau sur un sol horizontal

Nous donnons dans le Tableau 6-3 les valeurs choisies des paramètres.

$$U_e = 3.5 \text{ m/s} , h_e = 0.1 \text{ m}$$

$$\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3 , \rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho D = Sc\mu , Sc = 1$$

$$\tau_c = 10 \text{ Pa}$$

Tableau 6-3 : Valeurs des paramètres pour l'application numérique.

Nous présentons ici l'évolution de la vitesse de régression du sol en fonction de x pour plusieurs valeurs de K , Figure 6.27.

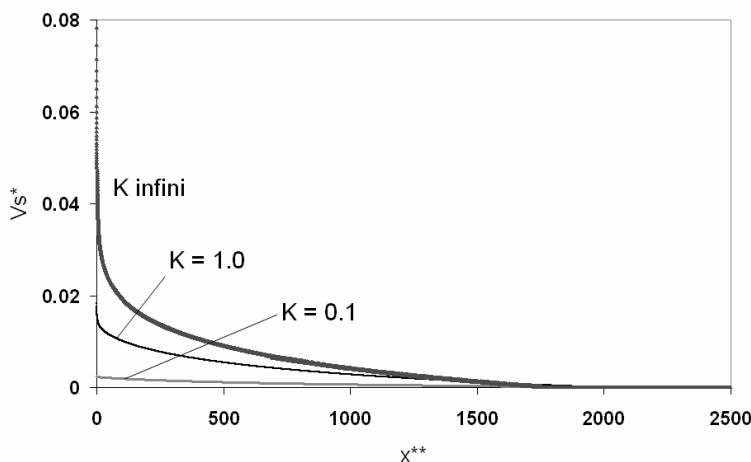


Figure 6.27 : Comparaison pour 3 cas ($K=0.1$, $K=1.0$, K infini) de la vitesse de régression du sol en fonction de x^{**} .

Nous le voyons sur cette figure, comme précédemment, l'érosion forte au début (suivant les valeurs de K) diminue progressivement avec x^{**} , pour s'annuler à une certaine distance. L'érosion est, ici encore, finie.

On peut directement comparer cette figure à la Figure 6.5, du cas à viscosité effective constante. On s'aperçoit alors que les vitesses de régression du sol obtenues avec le modèle à longueur de mélange sont 10 fois inférieures à celles obtenues avec une viscosité effective constante. Mais cette comparaison n'a pas trop de sens, en effet nous avons vu, dans la première partie, que les quantités érodées dépendaient énormément de la valeur de la viscosité effective choisie. De plus la contrainte à la paroi juste avant l'érosion n'a pas la même valeur dans les

deux modèles : en effet, $\tau_p/\tau_c \approx 2.7$ sur la Figure 6.6, alors que $\tau_p/\tau_c \approx 1.25$ sur la Figure 6.28 (sur cette figure nous avons choisi de présenter la valeur de la contrainte à la paroi avant le début de l'érosion, d'où les x^{**} négatifs).

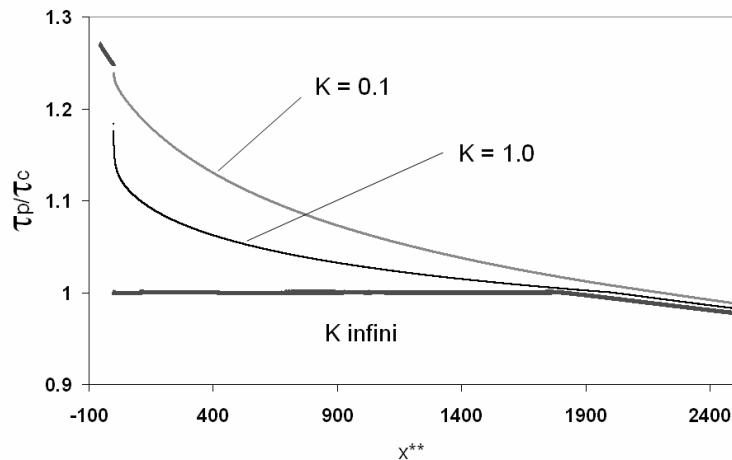


Figure 6.28 : Comparaison pour 3 cas ($K=0.1$, $K=1.0$, $K \text{ infini}$) de la contrainte au sol en fonction de x^{**} .

Sur la figure ci-dessus, la courbe $K=0.1$ s/m présente un saut de contrainte au début de l'érosion, alors qu'elle n'en présentait pas sur la Figure 6.6.

Le choix que nous avons fait, d'adimensionner les abscisses par la hauteur d'entrée h_e , permet de facilement calculer les valeurs non-adimensionnées, mais ne tient pas compte de l'épaississement de la couche limite pendant l'établissement du profil de vitesse. Pour être plus rigoureux, il faudrait comparer $dstop$ non pas à h_e , mais à la hauteur de la couche limite au début de l'érosion (à $x = dstart$) ; de même le débit total érodé. C'est ce que nous faisons dans le tableau suivant.

		$h(dstart)$	$\frac{dstop}{h(dstart)}$	$\frac{Q_e}{\rho_e U_e h(dstart)}$
$\mu_{eff} = cste$	$K = 0.1$	0.7629 m	12.16	$5.28 \cdot 10^{-3}$
$\mu_{eff} = cste$	$K = 1.0$	0.7629 m	10.8	$3.58 \cdot 10^{-2}$
$\mu_{eff} = cste$	$K \text{ infini}$	0.7629 m	8.14	$8.1 \cdot 10^{-2}$
LdM	$K = 0.1$	0.5642 m	390.07	$8.06 \cdot 10^{-3}$
LdM	$K = 1.0$	0.5642 m	355.16	$3.73 \cdot 10^{-2}$
LdM	$K \text{ infini}$	0.5642 m	320.79	$6.3 \cdot 10^{-2}$

Tableau 6-4 : Comparaison des distances et débits totaux érodés des deux modèles de viscosité présentés (LdM : Longueur de Mélange).

La décroissance de la contrainte à la paroi d'un écoulement turbulent de couche limite est plus lente qu'en écoulement laminaire (de même que l'épaisseur de la couche limite), aussi il est normal d'avoir des distances d'érosion beaucoup plus longues dans le deuxième cas. Etonnamment, les débits érodés sont très proches, alors que les contraintes au sol, notamment au début n'ont pas la même valeur. Les distances d'érosion évoluent aussi de la même façon, elles diminuent avec K .

Nous ne présentons pas dans cette partie d'autres résultats, ils seraient en effet qualitativement semblables à la première partie de ce chapitre (nous parlerons de l'influence de la contrainte critique lorsque nous introduiront la rugosité du sol). Des profils de vitesse et de concentration seront aussi présentés par la suite.

6.2.3 Erosion avec sédiments plus lourds que l'eau sur sol horizontal

Il est bien connu que les couches limites turbulentes résistent bien mieux aux gradients de pression négatifs que les couches limites laminaires : en effet, le transport de quantité de mouvement par convection est bien plus efficace que par diffusion. L'apport de quantité de mouvement vers les zones de faible vitesse près de la paroi est ainsi plus important et retarde (voir empêche) l'inversion du sens de l'écoulement.

C'est bien ce que nous observons : il ne se produit en effet plus de décollement de la couche limite, sauf bien sûr si l'écart entre la contrainte critique et la contrainte au sol est très importante pour un K grand (> 10 s/m).

Comme précédemment nous allons étudier l'influence de la masse volumique des sédiments, sur l'érosion et donc l'écoulement, au travers des différents termes de l'équation de quantité de mouvement, sur un sol horizontal.

Nous rappelons l'expression de l'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \quad (6.15)$$

avec :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_e u_{ex} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \rho_e g \sin \alpha + \rho_e g \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \bar{v^2} \right)_y \quad (6.16)$$

Les valeurs des paramètres sont celles du Tableau 6-3, exceptée la masse volumique des sédiments dont la valeur, $\rho_s^* = 1$ et $\rho_s^* = 2.7$, sera précisée sur les figures.

Nous présentons Figure 6.29 les vitesses de régression du sol correspondantes. Comme sur la Figure 6.12, pour les mêmes raisons, la vitesse de régression du sol diminue avec ρ_s^* .

Nous présentons Figure 6.30 les contraintes pariétales en fonction de x^{**} correspondantes. Contrairement à la Figure 6.13, on voit qu'augmenter la masse volumique des sédiments augmente la contrainte pariétale, aussi le débit érodé local, \dot{m} , est donc lui aussi augmenté (mais la vitesse de régression du sol, étant divisée par la valeur de la masse volumique dans le sol, reste inférieure).

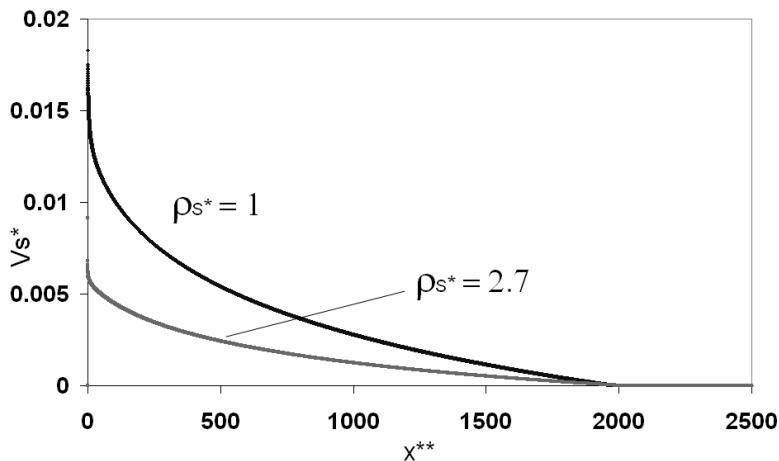


Figure 6.29 : Comparaison de la vitesse de régression du sol pour deux valeurs de ρ_s^* , $K = 1.0 \text{ s/m}$.

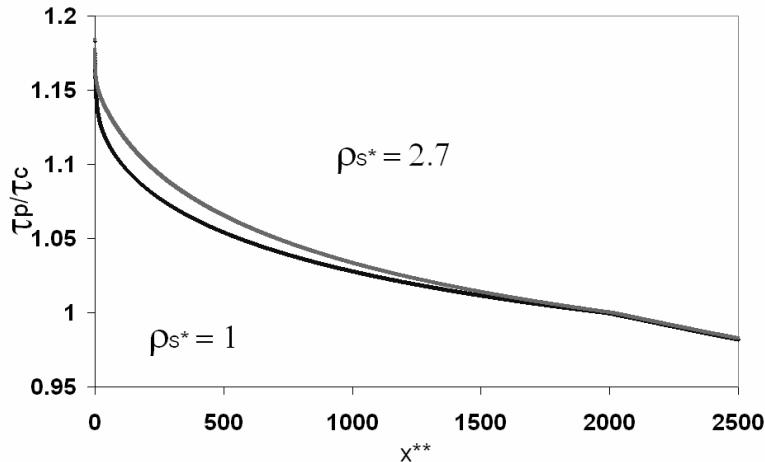


Figure 6.30 : Comparaison de la contrainte au sol pour deux valeurs de ρ_s^* , $K = 1.0 \text{ s/m}$.

Dans cette configuration, le modèle de longueur de mélange donne donc des résultats opposés au premier modèle présenté. Pratiquement du début de l'érosion jusqu'à $dstop$, la contrainte pariétale de $\rho_s^* = 2.7$ est supérieure à celle de $\rho_s^* = 1$.

Dans cette situation d'écoulement horizontal, le terme source est obligatoirement négatif (ou nul si $\rho_s^* = 1$), on s'attend donc à une diminution de la contrainte au sol. Or nous observons le phénomène opposé. D'après l'équation (6.15), cette augmentation de la contrainte, due à la présence de sédiments lourds, ne peut

s'expliquer que par une augmentation de la viscosité effective, ou par une augmentation des termes d'advection (de la quantité de mouvement).

Nous étudions maintenant le débit total érodé en fonction de ρ_s^* pour différents K , Figure 6.31. Le cas « K infini, bis » présenté sur cette figure correspond au même calcul que « K infini » mais la viscosité est calculée à partir de la masse volumique de l'eau et non à partir de la masse volumique locale du mélange (la viscosité ne tient pas compte de la présence des sédiments dans le fluide) ; $\mu_{eff} = \rho_e l_m^2 |\partial u / \partial y|$.

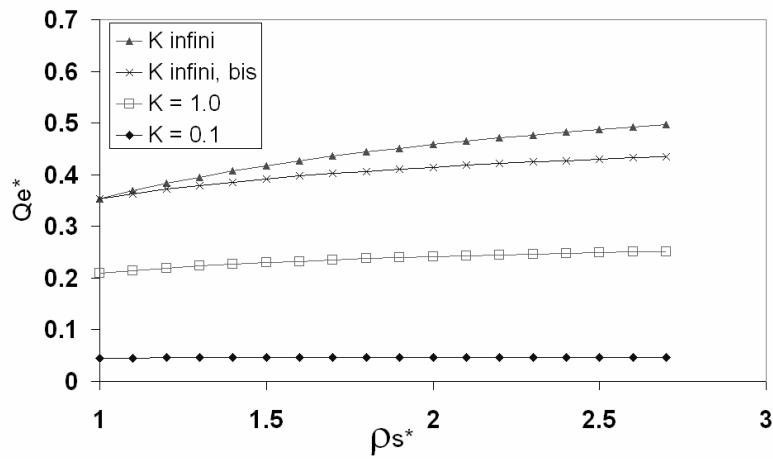


Figure 6.31 : Débit érodé total en fonction de ρ_s^* pour 4 cas.

Figure 6.31, contrairement à la Figure 6.14, le débit total érodé augmente avec la masse volumique des sédiments (cette augmentation reste faible pour $K \leq 0.1 \text{ s/m}$). On peut se rendre compte que cette augmentation est due pour partie au fait que $\bar{\rho}$ joue dans la formule de longueur de mélange, mais ce n'est pas la seule raison. L'autre raison est donc l'augmentation de l'advection (de la quantité de mouvement) due à la présence des sédiments.

Remarque : le dernier terme de droite, dû aux fluctuations des vitesses, de l'équation (6.16) est négligeable, il diminue de moins d'1 % le débit total érodé.

6.2.4 Erosion de sédiments plus lourds que l'eau sur sol incliné

$$u_e = 3.5 \text{ m/s} , h_e = 0.1 \text{ m} , Y_g = 0.6$$

$$\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3 , \rho_p = 2650 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho D = Sc\mu , Sc = 1$$

$$\tau_c = 10 \text{ Pa}$$

Tableau 6-5 : Valeurs des paramètres des applications numériques.

Comme dans la première partie, il existe, pour un jeu de paramètres donné, un angle de pente critique séparant deux régimes d'érosion distincts. Avec les valeurs de paramètres du Tableau 6-5, en faisant varier la valeur de K , on trace la figure suivante :

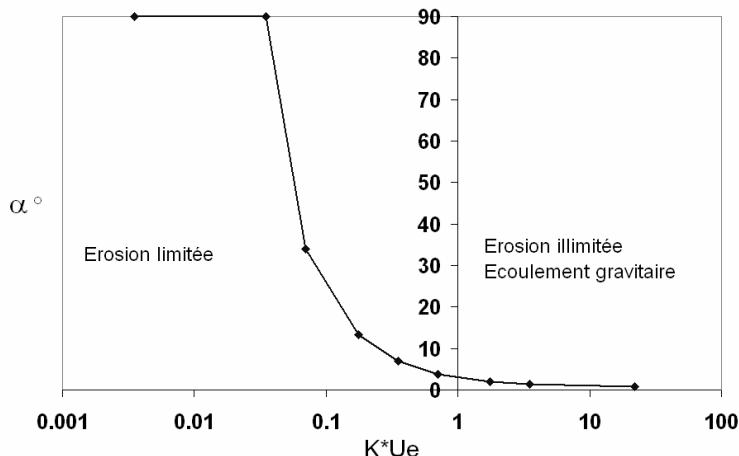


Figure 6.32 : Angle critique de pente en fonction de K^*U_e .

Cette figure, Figure 6.32, est très semblable à la Figure 6.23. Remarquons que, comme dit précédemment, il n'y a plus de décollement de l'écoulement et l'on peut réaliser des calculs avec des valeurs de K plus élevées.(Attention ! Le dernier point de la Figure 6.32, d'abscisse $K^*U_e = 20$, correspond à K infini, il n'est donc pas exact).

Remarques :

- lorsqu'on calcule le débit érodé avec des K supérieurs à 1 s/m, cela provoque des oscillations du débit érodé, qu'on ne peut supprimer même avec un pas très faible.

Ces problèmes n'arrivent pas à K_{infini} , car le processus de calcul du débit érodé est différent.

- dans le régime d'érosion illimitée, le débit local augmentant fortement avec x , les décollements de la couche limite sont fréquents.

On retrouve les mêmes phénomènes d'accélération du profil de vitesse que précédemment ; par contre les courbes sont un peu différentes avec cette viscosité.

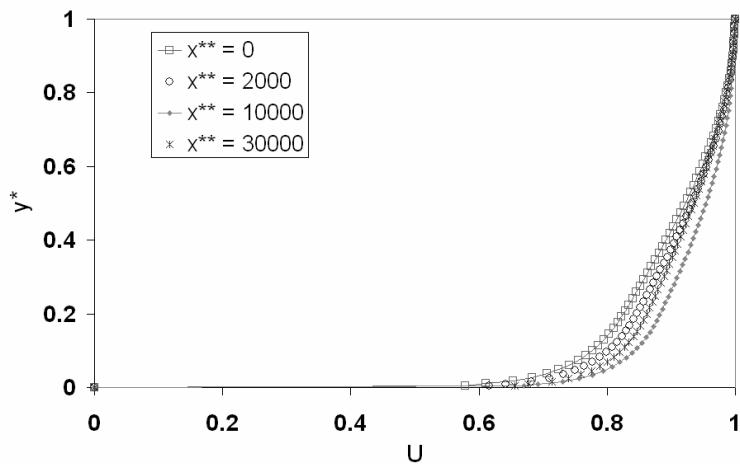


Figure 6.33 : Profils de vitesse, K_{infini} , avant le seuil.

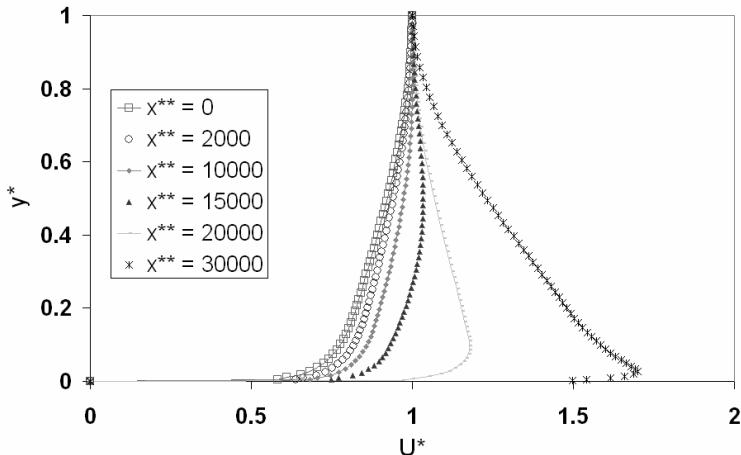


Figure 6.34 : Profils de vitesse, $K = 0.1$ s/m, après le seuil.

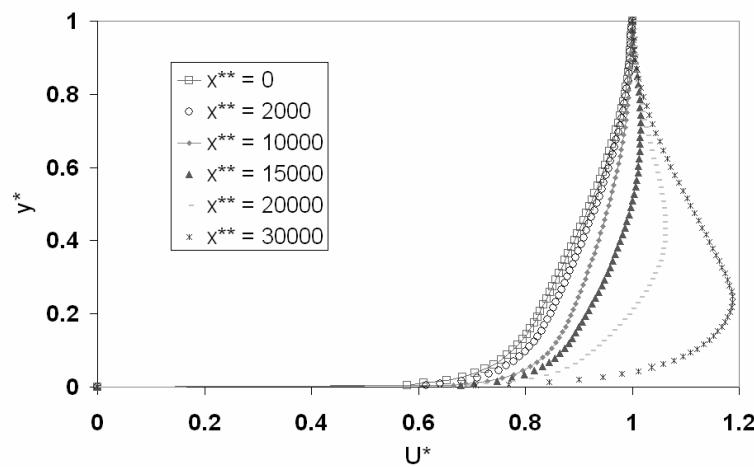


Figure 6.35 : Profils de vitesse, K_{infini} , après seuil.

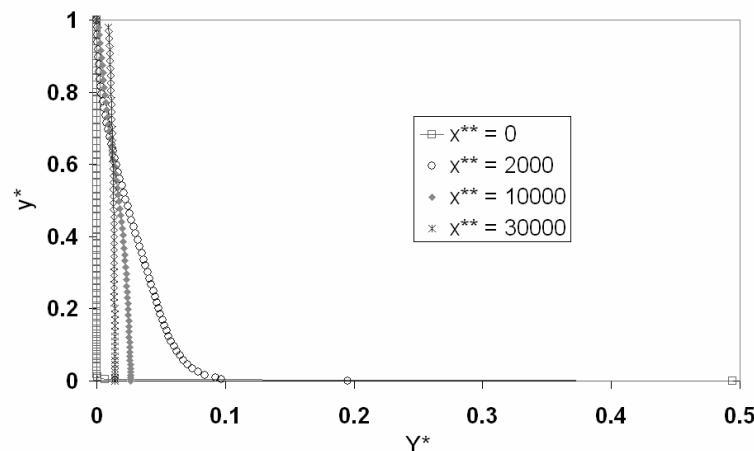


Figure 6.36 : Profils de fraction massique de sédiments, K_{infini} , avant seuil.

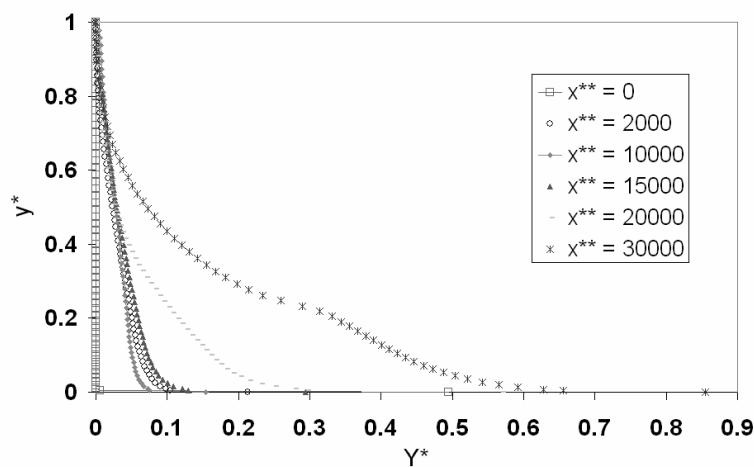


Figure 6.37 : Profils de fraction massique de sédiments, K_{infini} , après seuil.

Ainsi, pour les profils de vitesse, Figure 6.34 et Figure 6.35, pour de faibles K , le profil est accéléré près du sol, car la concentration en sédiments y est maximum ; par contre pour K infini, on impose la contrainte au sol, le profil n'est donc pas libre de se déformer près du sol, ainsi l'accélération a lieu plus haut dans la couche (où la concentration en sédiments reste tout de même importante).

Les profils de fraction massique de sédiments, Figure 6.36 et Figure 6.37, sont quelques peu différents de ceux présentés avec le modèle à viscosité effective constante. Dans la première partie, le nombre de Schmidt étant constant, lui aussi, la valeur du coefficient de diffusion était la même dans toute l'épaisseur de la couche. Ici, le nombre de Schmidt est toujours constant, pris égal à un, mais la valeur de la viscosité effective ne l'est plus. Près de la paroi, dans la couche logarithmique, la viscosité est relativement faible et croissante avec y . Ainsi, le coefficient de diffusion sera, lui aussi, relativement faible près de la paroi, ce qui aura pour effet d'y maintenir une concentration en sédiments élevée.

C'est bien ce que nous observons sur les deux premiers profils de la Figure 6.36, (à $x^{**}=0$ et $x^{**}=2000$), et sur la Figure 6.37. La fraction massique de sédiments, très faible au sommet de la couche, augmente progressivement lorsqu'on se rapproche du sol, puis très fortement lorsqu'on atteint la paroi.

6.2.5 Influence de la rugosité du sol

Tous les calculs présentés dans cette partie ont été réalisés dans les conditions du régime hydrauliquement lisse (voir Chapitre 4). La valeur de la constante E choisie ($E = 9$) correspond en effet, vu les conditions hydrauliques que nous nous sommes imposées, à une hauteur de rugosité comprise entre $10e-6$ et $10e-5$ mètres. Nous nous proposons maintenant de faire varier la taille des rugosités de la paroi (c'est-à-dire le diamètre des grains constituant le sol).

Nous n'allons pas, ici, refaire tous les calculs précédents ; mais simplement présenter pour un jeu de paramètres les effets de la taille des rugosités sur l'érosion.

Pour cela, nous reprenons les valeurs des paramètres du Tableau 6-5, sur un sol horizontal, et nous comparons, sans et avec érosion, deux longueurs de rugosités, avec celle utilisée précédemment dans les calculs (ces deux longueurs de rugosité sont choisies assez élevées afin de se situer dans le régime hydrauliquement rugueux).

Nous présentons, Figure 6.38, l'évolution de la contrainte à la paroi en fonction de x^* pour trois longueurs de rugosité, et Figure 6.39 les profils de vitesse adimensionnés correspondants, à $x^*=3000$.

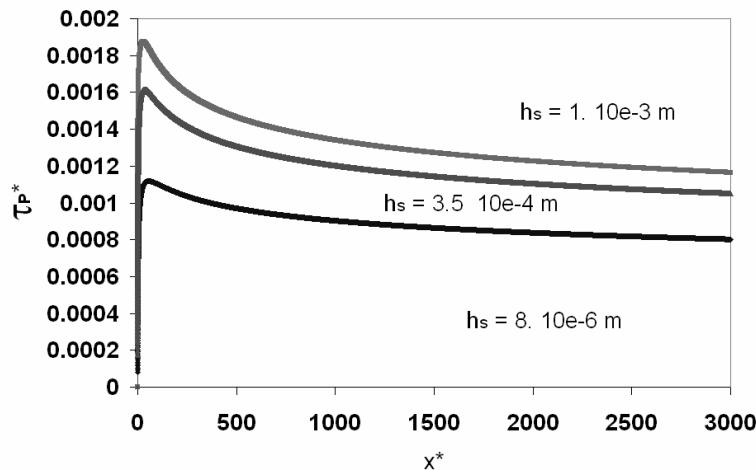


Figure 6.38 : Evolution de la contrainte au sol en fonction de x^* , pour trois hauteurs de rugosité.

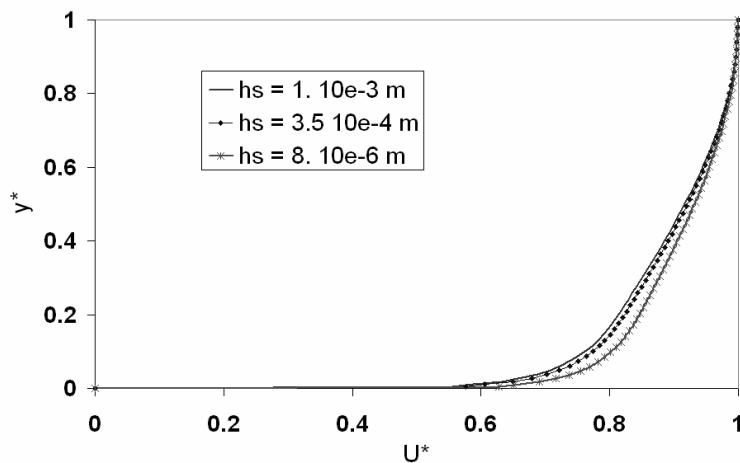


Figure 6.39 : Comparaison des profils de vitesse à $x^* = 3000$, pour trois hauteurs de rugosité.

Le fait d'augmenter la rugosité de la paroi a donc deux effets, visibles sur les deux figures précédentes.

Tout d'abord l'effet pratique des rugosités de surface est d'augmenter la contrainte pariétale ; l'évolution avec x reste la même, mais comparées au cas hydrauliquement lisse ($h_s=8. 10e-6 \text{ m}$), la contrainte pariétale est globalement multipliée par 1.3 pour $h_s=3.5. 10e-4 \text{ m}$, et par 1.45 pour $h_s=1.0. 10e-3 \text{ m}$.

Ensuite, les vitesses dans la région externe de la couche limite diminuent.

Ainsi, augmenter la taille des rugosités de paroi, en gardant la contrainte critique constante, revient numériquement, à mêmes rugosités de paroi, à diminuer la contrainte critique du sol.

Nous présentons, pour ces trois longueurs de rugosité de paroi, les vitesses de régression du sol en fonction de x^{**} ; pour ce calcul, $K = 0.1$ s/m et $\tau_c = 10$ Pa .

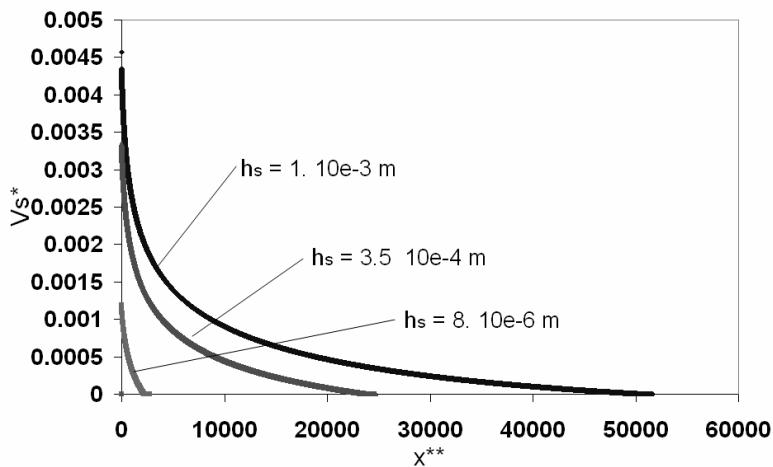


Figure 6.40 : Vitesse de régression du sol pour trois rugosités différentes.

A partir de ce calcul, on compare, comme dans le Tableau 6-1, les distances et débits d'érosion, adimensionnés non pas par la hauteur d'entrée de l'écoulement, mais par la hauteur de la couche au début de l'érosion ($h(dstart)$), dans le Tableau 6-6, ci-dessous.

	$h(dstart)$	$\frac{dstop}{h(dstart)}$	$\frac{Q_e}{\rho_e U_e h(dstart)}$
$hs = 8. 10^{-6} m$	0.565 m	390.9	$8.29 10^{-3}$
$hs = 3.5 10^{-4} m$	0.642 m	3738.8	$1.17 10^{-1}$
$hs = 1. 10^{-3} m$	0.679 m	7478.1	$2.38 10^{-1}$

Tableau 6-6 : Comparaison des distances et débits d'érosion pour trois longueurs de rugosité.

Nous avons vu qu'augmenter la rugosité augmente la contrainte à la paroi, ainsi, à contrainte critique fixée, cela va accroître le débit local érodé ; et la diminution naturelle de la contrainte pariétale d'une couche limite turbulente étant lente, cela va très fortement accroître la distance d'érosion, Figure 6.40.

Nous ne présenterons pas, ici, d'autres résultats numériques. Les phénomènes sont exactement les mêmes que ceux présentés précédemment. La rugosité augmentant simplement la contrainte pariétale, les débits érodés seront donc plus importants

ainsi que la distance d'érosion. On peut donc évaluer l'effet des rugosités en reprenant les calculs précédents avec une contrainte critique plus faible.

6.2.6 Etude du modèle turbulent à diffusion différentielle

Dans cette partie, nous calculons localement la valeur du nombre de Schmidt par la formule présentée à la fin du chapitre précédent.

Il existe deux paramètres dans cette formule du flux de diffusion, le diamètre des particules, relatif au temps de Stokes, et la constante A' , relative au temps caractéristique de la turbulence.

6.2.6.1 Variation du diamètre des sédiments

Nous reprenons ici les paramètres numériques du Tableau 6-5, sur un sol horizontal, avec $A'=1$ et $K=0.1$ s/m.

Nous avons alors testé la formule de diffusion différentielle, pour plusieurs tailles de particules. Mais, nous en avons brièvement parlé dans le chapitre précédent, sous certaines conditions, le nombre de Schmidt (le coefficient de diffusion) peut devenir négatif et entraîner des résultats erronés. Il s'avère en fait, qu'avec les valeurs choisies des paramètres, seuls des diamètres de particules de l'ordre de $10e-4$ m donnent des résultats satisfaisants. Pour des valeurs supérieures, le coefficient de diffusion devient négatif pour de très nombreux points du maillage, ne nous permettant pas de considérer les résultats obtenus comme corrects.

Dans ces conditions, cela signifie donc que l'hypothèse « production = dissipation » n'est pas vérifiée pour des diamètres de particules supérieurs à $4.0 \cdot 10e-4$ m, mais qu'il faut alors considérer les effets non locaux.

Nous présentons sur les trois figures suivantes, les résultats avec érosion pour trois diamètres différents de grains, et pour un nombre de Schmidt constant, égal à un. La taille des rugosités de paroi est prise égale à $3.5 \cdot 10e-4$ m ; elle ne sera pas modifiée, comme le diamètre des particules érodées, afin de permettre une comparaison plus facile de l'effet du diamètre des sédiments sur l'érosion (en effet modifier la rugosité de la paroi, même faiblement, aurait modifié la contrainte pariétale et donc les débits érodés).

Les annotations sur les courbes sont les mêmes de la Figure 6.41 à la Figure 6.45 ; elles sont définies comme :

- (1) nombre de Schmidt constant égal à un ;
- (2) nombre de Schmidt différentiel, $d_s = 2.0 \cdot 10e-4$ m ;
- (3) nombre de Schmidt différentiel, $d_s = 3.0 \cdot 10e-4$ m ;
- (4) nombre de Schmidt différentiel, $d_s = 3.5 \cdot 10e-4$ m .

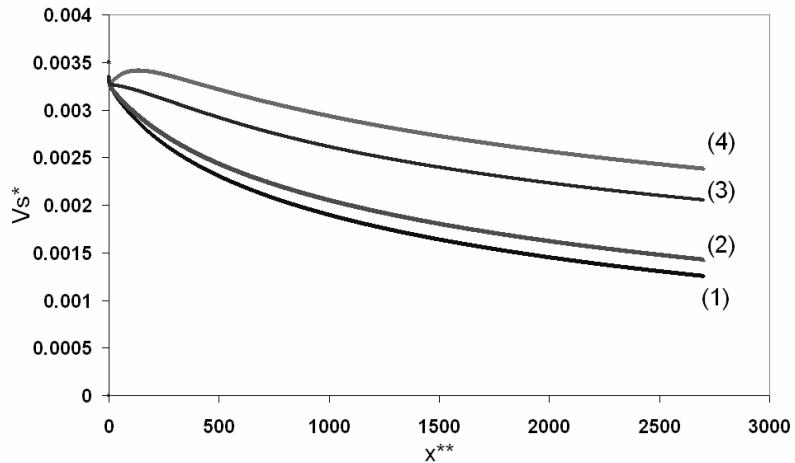


Figure 6.41 : Evolution de la vitesse de régression du sol.

Comme nous l'avons dit précédemment, la gamme des diamètres utilisables avec cette approche est fortement réduite. On voit en effet que pour des diamètres de grains inférieurs à $2.0 \cdot 10^{-4}$ m les écarts avec le Schmidt constant sont très faibles, et pour des diamètres supérieurs à $4.0 \cdot 10^{-4}$ m le calcul du coefficient de diffusion « diverge ».

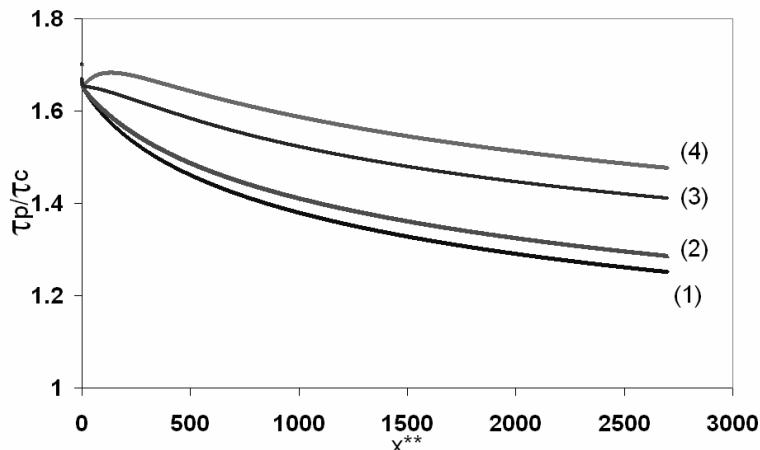


Figure 6.42 : Evolution de la contrainte à la paroi avec x^{**} .

Ainsi, sur ces deux figures, on voit clairement qu'augmenter le diamètre des particules érodées augmente le débit érodé et la distance d'érosion. Pour le plus faible diamètre, $2.0 \cdot 10^{-4}$ m, courbe (2), l'évolution de la vitesse de régression du sol (donc de la contrainte) est très semblable, même si elle est légèrement supérieure, à la courbe (1). Par contre, pour la courbe (4), après une décroissance habituelle de la vitesse de régression du sol (et de la contrainte pariétale) jusqu'à $x^{**}=10$, on voit une réaugmentation de cette vitesse jusqu'à $x^{**}=150$. Après cette abscisse, on retrouve une décroissance normale avec x^{**} .

Pour expliquer ces différents comportements, nous présentons Figure 6.43 l'évolution avec x^{**} de la fraction massique des sédiments à la paroi, pour ces quatre cas.

Comme nous l'avons déjà dit, ce nouveau coefficient de diffusion différentiel (calculé localement) tient compte du gradient de pression perpendiculaire à l'écoulement, lié à la gravité. Ainsi, plus les grains de sédiments seront gros, plus ils seront lourds (à même densité), ils auront donc tendance à moins diffuser dans la couche, et à rester près de la paroi. C'est bien ce que nous observons, dès le début de l'érosion, les fractions massiques de sédiments augmentent d'autant plus que le diamètre des particules considérées est important. Cette diffusion préférentielle des grains, vers la paroi, continue d'ailleurs tout au long de l'écoulement.

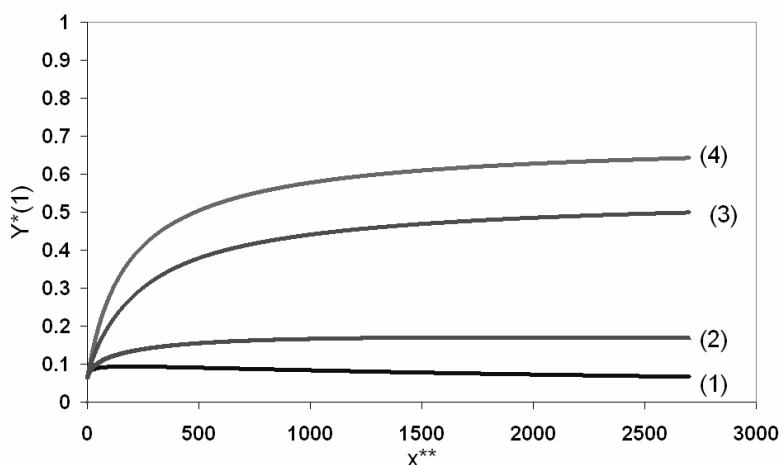


Figure 6.43 : Evolution de la fraction massique de sédiments à la paroi.

Ainsi, comme dans la partie 6.2.3, l'augmentation des débits érodés s'explique par une augmentation locale, près de la paroi, de la fraction massique en sédiments, qui accroît la quantité de mouvement (l'advection), et dans une moindre mesure la viscosité effective, provoquant une augmentation de la contrainte pariétale.

On peut vérifier cela, sur la Figure 6.44. Alors que pour un nombre de Schmidt égal à l'unité, et $K=0.1$ s/m, les quantités érodées sont trop faibles pour réagir notablement à la variation de la densité des sédiments, dès que l'on concentre localement près de la paroi les sédiments érodés (en augmentant leur diamètre), on agit fortement sur le débit (local et total) érodé.

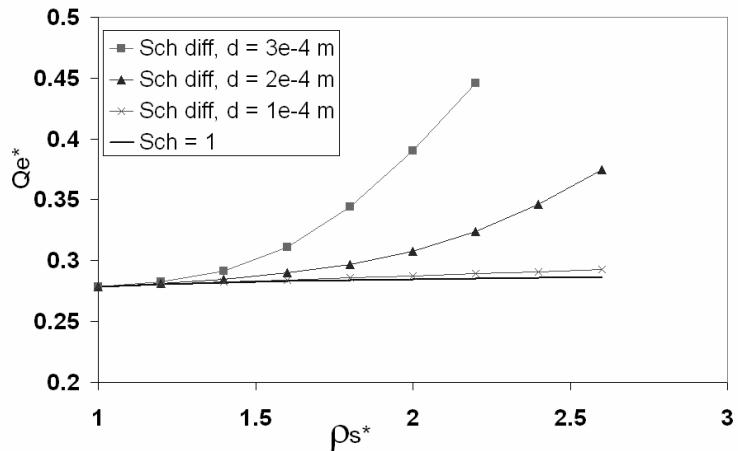


Figure 6.44 : Variation du débit total érodé jusqu'à $x^{**}=2700$, en fonction de la masse volumique des sédiments.

Nous présentons figure suivante trois profils de fraction massique de sédiments pour $x^{**}=2700$, correspondant aux Figure 6.41 à Figure 6.43.

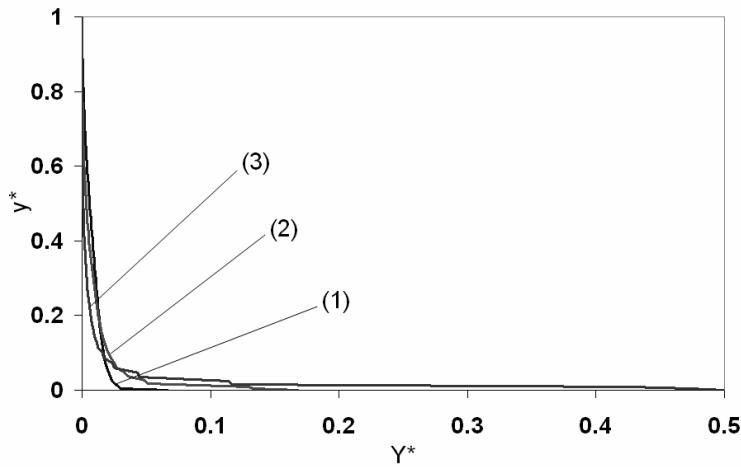


Figure 6.45 : Comparaison des profils de fraction massique en sédiments, à $x^{**}=2700$.

Ainsi, plus les particules sont grosses et lourdes, moins elles diffusent, et restent donc près de la paroi. On remarque d'ailleurs que pour $y^* < 0.1$, la diffusion différentielle augmente la concentration en sédiments, alors que pour $y^* > 0.1$, elle la diminue (même si les débits érodés sont plus importants) ; on peut alors parler d'une concentration préférentielle des sédiments près du sol.

Remarques importantes :

- les calculs présentés précédemment ont été réalisés sur des distances, relativement, réduites. Nous n'avons en effet jamais représenté d_{stop} sur ces figures. Il s'avère en fait que pour des x^{**} supérieurs, l'épaississement de la couche limite, et la diminution de l'érosion, diminuent les gradients de vitesse, et de fraction massique, provoquant la « divergence » de notre calcul du nombre de Schmidt.

- de même, pour des raisons semblables, l'influence de la pente n'a pu être testée. En effet l'accélération des profils de vitesse à l'intérieur de la couche, provoque localement une diminution des gradients de vitesse (au niveau du maximum) qui met en défaut notre formule de coefficient de diffusion. On comprend tout de même que la diffusion préférentielle des sédiments près de la paroi, en augmentant le débit érodé, va diminuer, pour un jeu donné de paramètres, l'angle critique de pente nécessaire à l'amplification de l'érosion.

6.2.6.2 Variation de la constante A'

Comme nous l'avons dit la constante A' est relative au temps caractéristique de la turbulence, elle est liée dans la formule du nombre de Schmidt à un terme toujours positif. Ainsi augmenter A' , augmentera la valeur du nombre de Schmidt, donc la diffusion dans la couche (et vice versa).

Nous prenons les valeurs des paramètres du Tableau 6-5, pour un sol horizontal (avec la même rugosité de paroi que précédemment) avec $d_s = 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, et faisons varier A' .

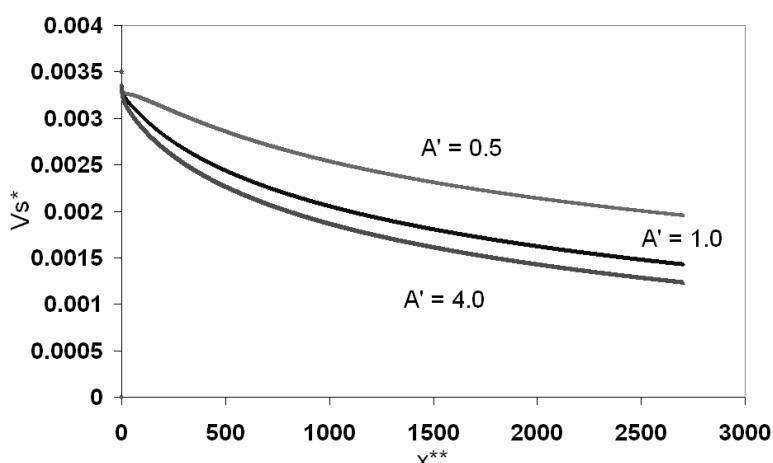


Figure 6.46 : Vitesse de régression du sol en fonction de x^{**} , pour plusieurs valeurs de A' , $d_s = 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

On retrouve alors les mêmes effets, pour les mêmes raisons, lorsqu'on diminue A' , que lorsqu'on augmente le diamètre des particules érodées.

Cela se comprend bien sur la Figure 6.47. Plus A' est faible et plus la fraction massique de sédiments est importante près du sol, pour $y^* < 0.1$; cette tendance s'inversant dans la partie supérieure de la couche.

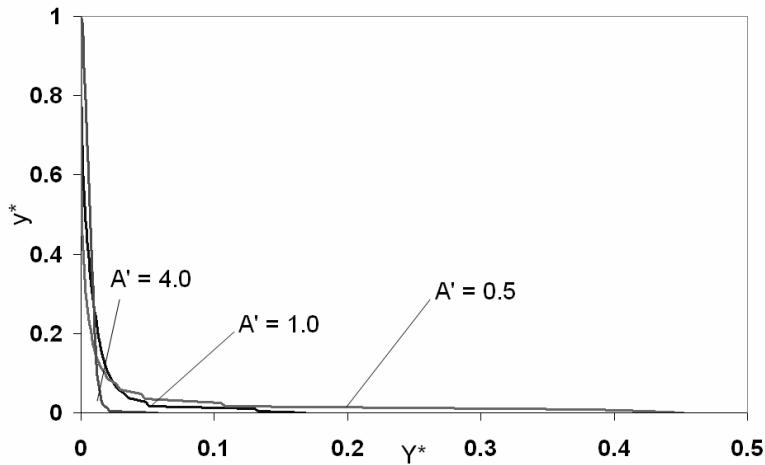


Figure 6.47 : Comparaison des profils de fraction massique à $x^{**}=2700$.

6.3 Conclusion

Comparaisons générales des résultats :

Dans ce chapitre, nous avons donc présenté les résultats de notre modélisation du phénomène d'érosion, dans le cas d'un écoulement de type couche limite à vitesse extérieure constante, pour deux modèles de viscosité effective.

Nous avons ainsi pu mettre en évidence un ensemble de phénomènes, qualitativement semblables pour les deux modèles de viscosité effective.

En effet :

- l'érosion (l'injection de matière à travers l'interface solide/fluide) provoque une diminution de la contrainte à la paroi exercée par le fluide. (A cette diminution due à l'érosion elle même, s'ajoute la diminution naturelle due à l'épaississement de la couche limite) ;
- un débit local érodé trop important peut, par l'action des forces de gravité perpendiculaires à l'écoulement, provoquer un décollement de la couche limite (cela fut surtout observé pour les écoulements à viscosité effective constante) ;
- sur sol horizontal, l'érosion est finie, c'est-à-dire qu'elle s'effectue sur une distance limitée (le débit total érodé résultant l'est donc aussi) ;
- l'inclinaison du sol (dans le sens de l'écoulement), pour des sédiments plus lourds que l'eau, augmente les distances d'érosion et les débits érodés ;
- pour un jeu de paramètres donnés, et des sédiments plus lourds que l'eau, il existe un angle d'inclinaison du sol (appelé ici angle critique) qui délimite deux régimes d'érosion très distincts. Pour des valeurs de pente inférieures à cet angle, comme

pour un sol horizontal, l'érosion est finie, en quantité et en longueur ; alors que pour des angles supérieurs, après une décroissance normale, l'érosion s'amplifie pour ne jamais s'arrêter. Rappelons ici, que ces phénomènes s'expliquent par l'accélération des profils de vitesse à l'intérieur de la couche, due à la gravité ;

- la concentration préférentielle des sédiments (de densité supérieure à l'eau) près de la paroi accroît les distances et débits érodés, cet effet étant plus marqué pour des pentes du sol non nulles. Cela augmente en effet, localement près de la paroi, la quantité de mouvement, et l'accélération de l'écoulement si le sol est incliné.

Quelques différences existent tout de même quant aux résultats obtenus par ces deux modèles de viscosité, mais elles sont principalement attribuables au comportement propre de ces modèles. Ainsi :

- les profils de vitesse (accélérés ou non), les profils de concentrations ont des formes très différentes ;
- les distances d'érosion sont beaucoup plus longues pour le modèle à longueur de mélange (voir Tableau 6-4), la décroissance de la contrainte pariétale d'un écoulement turbulent étant beaucoup plus lente qu'un écoulement « pseudo-turbulent » (ou laminaire) ;
- les profils de vitesse du modèle à longueur de mélange sont beaucoup moins sensibles aux phénomènes de décollement ;
- sur sol horizontal, augmenter la densité des sédiments érodés augmente les débits érodés pour le modèle à longueur de mélange, alors que cela les diminue pour une viscosité constante. Cela est certainement à relier à la forme des profils de vitesse, la quantité de mouvement est en effet, relativement, beaucoup plus importante près de la paroi dans le cas des profils turbulents (Longueur de mélange).

Une comparaison vraiment quantitative des résultats des deux modèles n'est ni vraiment nécessaire, ni vraiment possible (nous en avons déjà parlé).

Particularités du modèle à longueur de mélange :

Viscosité effective :

Dans ce modèle, la viscosité effective locale est calculée à partir de la masse volumique locale du mélange. Aussi, nous avons vu que pour des débits érodés relativement importants, de sédiments plus lourds que l'eau, l'augmentation de la viscosité, due à la présence des sédiments, augmente de façon non négligeable la contrainte à la paroi, et donc l'érosion.

Rugosités de paroi :

Cela est bien connu (Schlichting 1960, Cousteix 1989), pour un même écoulement, plus un sol est rugueux (plus la taille des particules le constituant est importante), plus la contrainte pariétale exercée par le fluide sur celui-ci est importante.

Ainsi, dans le cas particulier où la contrainte critique du sol est gardée constante (ainsi que les autres paramètres), augmenter la rugosité du sol augmente

fortement les débits érodés et distances d'érosion, Tableau 6-6. Cet effet est surtout marqué lorsqu'on passe d'un régime hydrauliquement lisse à un régime hydrauliquement rugueux. Ce résultat n'a pas vraiment de sens physique, en effet pour un matériau donné (de densité supérieure à l'eau), il est clair que plus les sédiments seront gros, plus la contrainte critique nécessaire à leur mise en mouvement sera grande (voir Chapitre 1, contrainte critique de Shields).

Diffusion différentielle (sédiments plus lourds que l'eau) :

Nous avons présenté ici un modèle pour le flux de diffusion des sédiments, lié non seulement au gradient de concentration, mais aussi au gradient de pression orthogonal, par l'intermédiaire de deux temps caractéristiques. Cette approche est beaucoup plus physique que celle consistant à ajouter, à l'équation de conservation de la masse des sédiments, la vitesse de chute d'une particule isolée (voir équation (2.54)).

L'utilisation de ce modèle reste tout de même relativement délicate. Nous avons en effet vu que seuls des diamètres de l'ordre de 10e-4 m permettaient d'obtenir des résultats satisfaisants ; de plus pour des distances d'érosion assez longues, ou lorsque le profil de vitesse est localement accéléré dans la couche, la diminution, globale ou locale, des gradients de vitesse entraîne la divergence de nos calculs. Il apparaît donc que l'hypothèse utilisée ici, « production égale dissipation », n'est vérifiée que dans certaines configurations, pour une gamme très réduite des valeurs des paramètres. Aussi, il serait nécessaire de développer un modèle de diffusion non local, pour étudier des configurations plus générales.

Cette approche nous a tout de même permis de montrer que la concentration préférentielle des sédiments près de la paroi (attention il ne s'agit pas de dépôt), avait une influence très importante sur l'érosion. En effet, l'augmentation de la viscosité, et de la quantité de mouvement localement près de la paroi, augmente de façon non négligeable les débits et distances d'érosion. Cet effet s'accentuera d'avantage si l'inclinaison du sol est non nulle.

Ainsi, grâce aux résultats de notre modélisation de l'érosion, dans cette configuration d'écoulement de type couche limite, nous avons pu mettre en évidence qu'il existait de forts couplages entre les phénomènes. Pour résumer cela, nous pouvons dire que :

L'écoulement, lorsqu'il érode un sol, modifie celui-ci, mais est aussi modifié par le flux local de matière érodé. Les sédiments, une fois érodés, sont transportés par le fluide, et, cette présence agit sur l'écoulement ; qui va à son tour agir sur les phénomènes d'érosion. Il existe donc un fort couplage entre l'écoulement, l'érosion (en tant que phénomène local) et le transport des sédiments par l'écoulement ; la pente du sol (en tant que terme source positif de l'équation de quantité de mouvement) jouant alors un rôle très important (moteur) dans ces interactions.

Chapitre 7

Résultats à surface libre

Nous présentons dans ce chapitre les résultats d'écoulements à surface libre, dans une configuration très simple. Nous nous donnons en effet un profil initial d'entrée, pour une hauteur donnée, et nous laissons ce profil s'écouler sur un sol d'inclinaison constante avec les abscisses. Comme dans le chapitre précédent, nous commencerons par le modèle à viscosité effective constante, puis à longueur de mélange.

Dans une situation d'écoulement permanent, pour une pente donnée, et sans érosion, il existe, à débit fixé, un profil de vitesse d'équilibre indépendant de la coordonnée longitudinale. Nous utiliserons ce profil comme profil initial de notre calcul avec érosion. Dans ces conditions nous verrons que pour des valeurs « raisonnables » des paramètres, les contraintes à la paroi obtenues sont de l'ordre de la centaine de Pascals ! Prendre alors une contrainte critique du sol de l'ordre de celle de Shields aurait provoqué une érosion énorme. Aussi, on fera varier cette contrainte critique comme n'importe quel autre paramètre ; on a vu dans le premier chapitre que la valeur de Shields, correspondant au décollement d'une particule sphérique posée sur des particules semblables, était sûrement très sous-estimée pour un sol réel, compacté, composé de différents matériaux de différentes tailles.

7.1 Résultats à viscosité effective constante

7.1.1 Calcul sans érosion

Dans le cas particulier où la viscosité est constante (écoulement pseudo-turbulent) et si l'inclinaison du sol est non nulle, il existe un profil d'équilibre que l'on peut calculer analytiquement.

Ce profil d'équilibre est atteint lorsque les forces de gravité compensent exactement le terme dû aux contraintes visqueuses ; c'est-à-dire lorsque les termes d'advection et de gradient de pression sont nuls (les variations suivant x et y sont nulles).

Dans cette situation d'équilibre, l'équation de quantité de mouvement sur x se réduit donc à :

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho_e g \sin \alpha \quad (7.1)$$

La viscosité étant constante, on peut intégrer cette équation et l'on obtient :

$$u(y) = -\frac{\rho_e g \sin \alpha}{2\mu_{\text{eff}}} y^2 + \frac{\rho_e g h_e \sin \alpha}{\mu_{\text{eff}}} y \quad (7.2)$$

On a utilisé le fait que le gradient de vitesse est nul à la surface, en $y = h_e$, h_e étant l'épaisseur de l'écoulement à l'équilibre (car on néglige le frottement avec l'air).

On obtient alors un profil d'équilibre parabolique, ce type d'écoulement étant dénommé « écoulement rampant ».

Pour un écoulement à surface libre le débit de l'écoulement est constant de l'amont vers l'aval, s'il n'y a pas érosion. Ainsi, lorsqu'on se donne un débit d'entrée, pour une pente non nulle, et une viscosité donnée, on détermine complètement le profil de vitesse d'équilibre et la valeur de la contrainte au sol correspondante.

On peut dès lors, partir d'un profil de vitesse quelconque et le laisser atteindre l'équilibre avant de déclencher l'érosion, le nombre de paramètres indépendants à choisir est alors de 4 ($U_e, h_e, \sin \alpha, a$). Nous avons alors testé la convergence d'un profil quelconque vers le profil d'équilibre. Ces résultats, comparés à ceux obtenus en résolvant les équations de Navier-Stokes complètes, sont présentés en Annexe IV : Surface libre.

On peut aussi, ce qui paraît plus logique, partir directement du profil d'équilibre à l'entrée ; puisqu'on en connaît la solution analytique. Dans ce cas, le nombre de paramètres à choisir de façon indépendante n'est plus de 4, comme ci-dessus ($U_e, h_e, \sin \alpha, a$), mais de 3, car U_e , qui est la vitesse à la surface, est complètement définie à partir des 3 autres par (7.2).

En effet :

$$U_e = u(y = h_e) = \frac{\rho_e g \sin \alpha h_e^2}{2\mu_{eff}} \quad (7.3)$$

$$\mu_{eff} = a \rho_e U_e h_e \quad (7.4)$$

Donc, si l'on se donne un angle de pente, une hauteur d'écoulement, et la valeur de la constante a de la viscosité, la vitesse à la surface est :

$$U_e = \sqrt{\frac{g \sin \alpha h_e}{2a}} \quad (7.5)$$

La contrainte d'équilibre au sol est :

$$\tau_{p.eq} = \rho_e g \sin \alpha h_e \quad (7.6)$$

C'est cette deuxième approche que nous avons choisie. N'ayant de toute façon aucune information sur le réalisme de tel ou tel profil initial, cette approche nous permet de réduire un peu le nombre de paramètres (ce n'est pas important), et facilite énormément la convergence des profils, ce qui nous arrange pour débuter l'érosion.

Ainsi, en fixant la pente, la hauteur de l'écoulement et la constante de viscosité, on détermine le profil d'équilibre par (7.2), que l'on peut utiliser comme profil initial. C'est ce que nous allons faire, par contre nous l'avons vu en Annexe IV, la valeur précédente $a = 0.1$ est beaucoup trop élevée, nous prendrons dorénavant $a = 0.005$, qui semble « plus réaliste ».

Les paramètres sont, Tableau 7-1 :

$$h_e = 0.1 \text{ m}, \alpha = 10^\circ$$

$$\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = \mu^* \rho_e u_e h_e, \mu^* = a = 0.005$$

$$\Rightarrow U_e \approx 4.126 \text{ m/s}, \tau_{p.eq} \approx 170.34 \text{ Pa}$$

Tableau 7-1 : Valeurs des paramètres de l'écoulement.

En partant de ce profil, le calcul par équations de couche donne très peu de variations en x , mais un peu cependant ; ceci est dû à la discrétisation spatiale qui introduit de petites erreurs dans le profil d'équilibre initial.

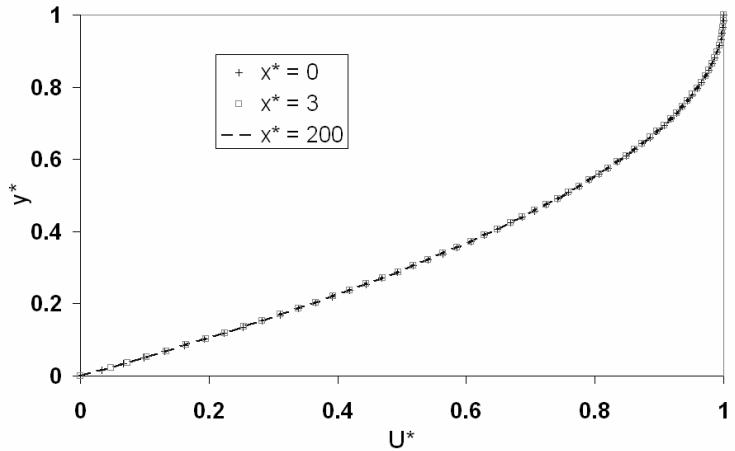


Figure 7.1 : Profil de vitesse à $x^* = x / he = 0, 3, 200$.

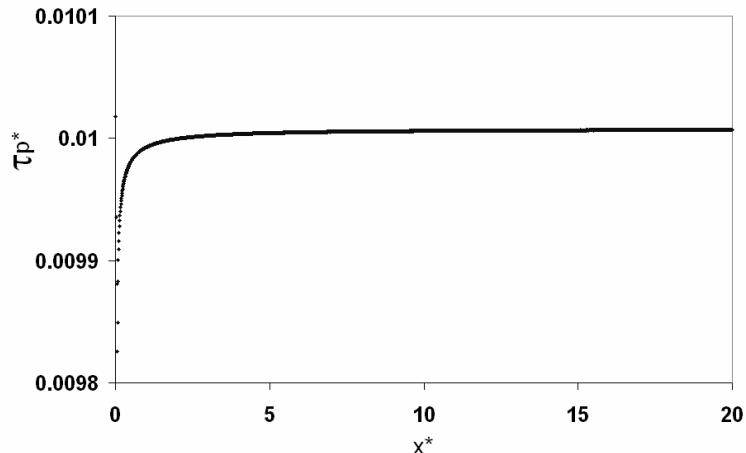


Figure 7.2 : Contrainte au sol en fonction de $x^* = x / he$.

τ_p^* varie en fait très peu de $x=0$ à l'infini, mais pour les calculs avec érosion nous laisserons cependant une distance d'établissement du profil égale à $10*he$, afin d'effacer les petites erreurs numériques des données.

Remarque :

Pour des pentes très faibles ($\alpha < 10^\circ$), des décollements peuvent aussi apparaître.

7.1.2 Erosion de sédiments de même densité que l'eau

Rappelons l'équation de quantité de mouvement complète pour ce type d'écoulement :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \rho g \sin \alpha - g \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{h(x)} \rho d\tilde{y} \quad (7.7)$$

Cette équation possède deux termes sources, $\rho g \sin \alpha$ qui sera toujours positif (pente non nulle), l'autre terme source étant négatif quand la masse volumique du mélange, et ou l'épaisseur de l'écoulement, augmentent. Nous avons vu, Chapitre 4, que ce dernier terme source pouvait être décomposé en la somme de deux termes. Un moyen de connaître l'effet de chaque terme est alors d'effectuer des calculs d'érosion de sédiments de même masse volumique que l'eau, nous verrons ainsi l'effet seul de l'augmentation de l'épaisseur de l'écoulement dû à l'apport du débit érodé (le terme $\rho g \sin \alpha$ restant constant pour tout x). Des sédiments érodés plus lourds que l'eau permettront alors de voir l'effet de l'augmentation de la masse volumique locale du mélange.

Nous reprenons les valeurs des paramètres présentés Tableau 7-1, avec trois valeurs de K : $K = 0.1 \text{ s/m}$, $K = 1.0 \text{ s/m}$ et K infini. Nous prendrons une valeur de la contrainte critique du sol τ_c égale à trois quarts de la contrainte d'équilibre sans érosion $\tau_c = 3/4 \tau_{p.eq}$; il est clair que si $\tau_c > \tau_{p.eq}$, il n'y a jamais érosion.

On définit :

$$V_S^{**} = \frac{V_S}{u_{eq}^*} = V_S \sqrt{\frac{\rho_e}{\tau_{p.eq}}} \quad (7.8)$$

qui est la vitesse de régression du sol adimensionnée par la vitesse de frottement d'équilibre au sol u_{eq}^* . Avec les valeurs des paramètres choisis, on a $u_{eq}^* = 0.413 \text{ m/s}$.

Nous présentons Figure 7.3, cette vitesse de régression du sol en fonction de x^* , pour trois valeurs de K .

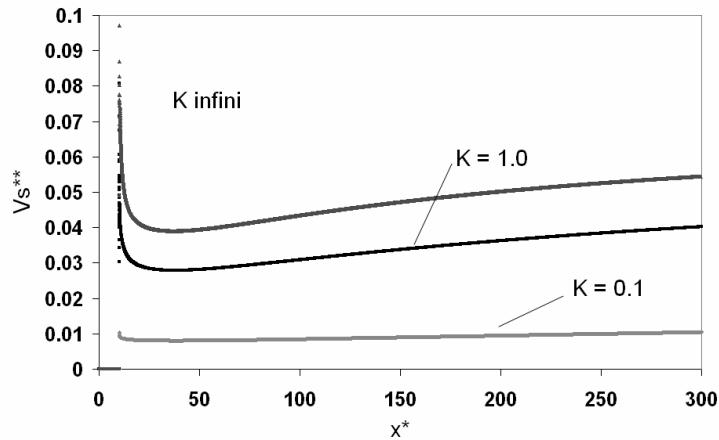


Figure 7.3 : Vitesse de régression du sol fonction x^* pour 3 cas ($K = 0.1$, $K=1.0$, K infini).

Comme on le voit sur les courbes ci-dessus, le débit local érodé (ou la vitesse de régression du sol) décroît assez fortement au début de l'érosion (suivant les valeurs de K) jusqu'à $x^*=30$, puis après avoir atteint un minimum, ré augmente à partir de $x^*=50$.

Nous présentons Figure 7.4 l'évolution des contraintes au sol correspondantes à la figure précédente.

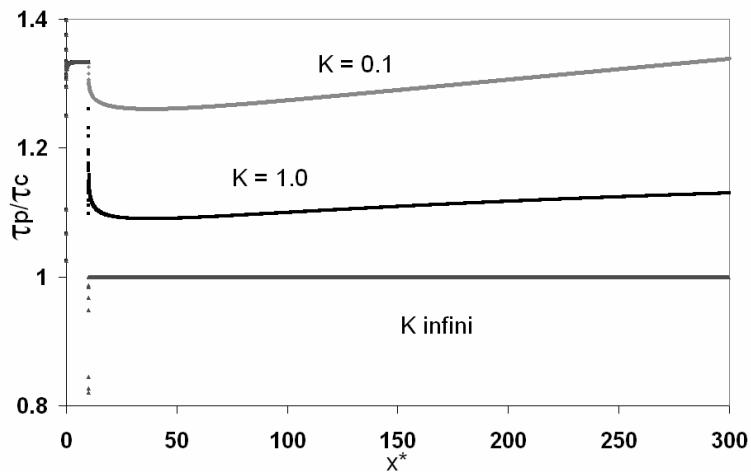


Figure 7.4 : Evolution de la contrainte au sol en fonction de x^* , pour 3 cas ($K = 0.1$, $K=1.0$, K infini).

On voit Figure 7.4, comme précédemment, que le début de l'érosion provoque une chute de la contrainte au sol. Puis après avoir atteint une valeur minimum (pour les cas où K n'est pas infini), la contrainte augmente ensuite avec x^* (la contrainte au sol restant constante, égale à la valeur critique pour K infini).

Le résultat important, et la principale différence avec le cas où la hauteur d'eau est infinie, est que dans cette configuration l'érosion ne se produit pas sur une distance finie, mais sur toute la longueur de l'écoulement considérée. En effet comme nous l'avons vu sur les deux figures précédentes, après une diminution au début l'érosion va constamment augmenter avec x ; on se situe en fait tout de suite dans le régime d'érosion illimitée.

Les calculs présentés précédemment ont été refaits en supprimant le terme en $\cos \alpha$ de quantité de mouvement (le terme le plus à droite de (7.7)). Ces résultats sont alors très peu différents de ceux présentés ; on remarque cependant une augmentation, tant locale que globale, du débit érodé, mais elle reste inférieure à 4%. Les effets de ce terme, dus ici seulement à l'augmentation de l'épaisseur de l'écoulement sont donc relativement faibles pour les valeurs des paramètres choisis. Par contre si les débits érodés localement sont très importants (la contrainte critique est faible par rapport à la contrainte au sol d'équilibre, ou K est grand) le terme en $\cos \alpha$ deviendra lui aussi important (surtout au tout début de l'érosion) et provoquera soit des oscillations de la contrainte au sol (compétition entre le terme source positif et ce terme), soit carrément un décollement de l'écoulement (voir Figure 7.9).

Après la diminution de la contrainte au sol due à l'érosion, on a vu que celle-ci augmentait (ou du moins la vitesse de régression du sol pour K infini). Cette augmentation s'explique par l'augmentation du débit de l'écoulement dû à l'apport de matière érodée. Nous présentons Figure 7.5 l'évolution de l'épaisseur de l'écoulement en fonction de x^* , et des profils de vitesse Figure 7.6.

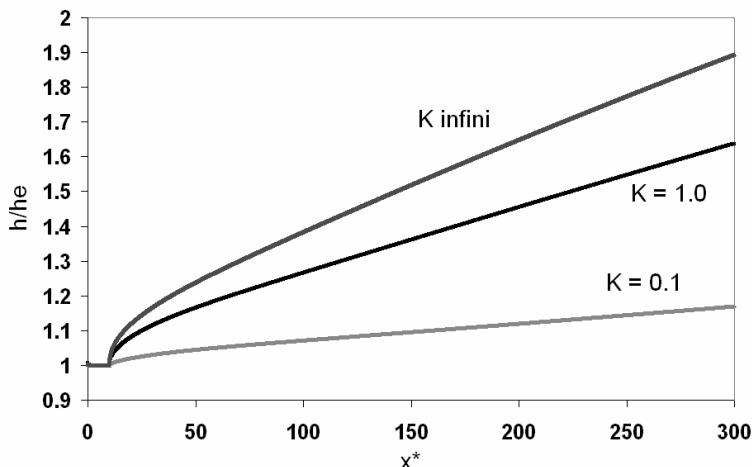


Figure 7.5 : Evolution de l'épaisseur de l'écoulement avec x^* .

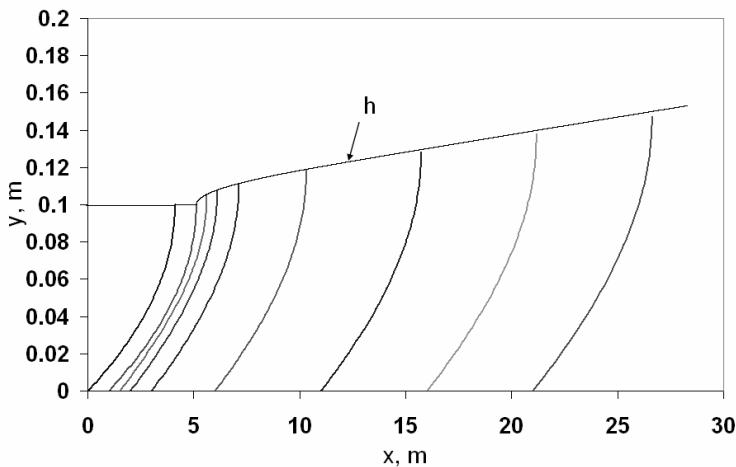


Figure 7.6 : Evolutions des profils de vitesse, non adimensionné, $K = 1.0 \text{ s/m}$.

On définit :

$$U^* = u/h(x) ; y^* = y/h(x) \quad (7.9)$$

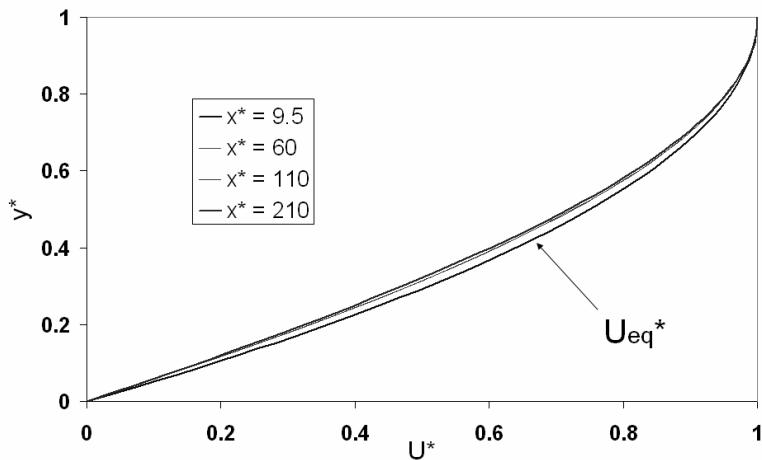


Figure 7.7 : Profils de vitesse adimensionnés, K infini.

Sur la figure ci-dessus, les vitesses et les ordonnées sont adimensionnées comme en (7.9), pour le calcul d'érosion avec K infini. Ainsi, au bout d'une certaine distance, qui se situe dans la zone où la contrainte pariétale augmente, les profils de vitesse avec érosion atteignent un nouveau profil d'équilibre différent de celui sans érosion. Ces résultats ont été obtenus avec K infini, aussi, il est évident que pour des K inférieurs, ces deux profils d'équilibre sont beaucoup moins différenciés.

Ainsi, l'épaisseur, et le débit de l'écoulement augmentent avec x^* , Figure 7.5 ; or l'écoulement conserve pratiquement son profil d'équilibre (ou du moins un profil

d'équilibre) alors qu'il érode ; la contrainte au sol augmente donc elle aussi (en relation avec l'épaisseur).

Nous présentons Figure 7.8 l'évolution des profils de fraction massique de sédiments ; nous avons gardé les mêmes valeurs des paramètres que précédemment et $K = 1.0 \text{ s/m}$.

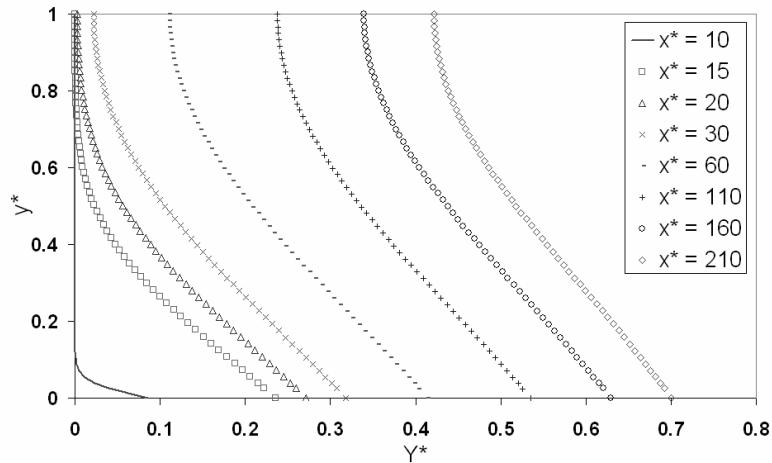


Figure 7.8 : Profils de fraction massique de sédiments, $K = 1.0 \text{ s/m}$.

Les profils de fraction massique à surface libre sont bien sur très différents de ceux à hauteur d'eau infini. Tout d'abord les sédiments diffusent dans toute l'épaisseur de l'écoulement, jusqu'à la surface. Ensuite la quantité d'eau pure dans l'écoulement étant limitée au débit d'entrée, l'érosion va très rapidement amener les fractions massiques à des valeurs très importantes. Les fractions massiques de sédiments restent plus importantes au niveau de la paroi, car l'érosion en amène constamment et la diffusion n'est pas immédiate.

Afin d'avoir un ordre d'idée de l'importance des débits érodés, nous définissons le débit total érodé sur la distance $200h_e$, adimensionné par le débit d'entrée de fluide :

$$Q_e^* = \frac{Q_e}{Q_{\text{entrée}}} = \frac{\int_0^{200h_e} \dot{m} dx}{\rho_e u_e h_e} \quad (7.10)$$

La Figure 7.9 représente le débit érodé total défini en (7.10) en fonction du rapport entre la contrainte critique et la contrainte au sol d'équilibre. Un résultat à remarquer est la variation linéaire du débit total érodé en fonction de la valeur de la contrainte critique. Par contre, comme dit précédemment, pour des K importants ou des contraintes critiques faibles, il peut y avoir décollement de l'écoulement ; les points fléchés avec l'inscription « décollement » sont les derniers points accessibles

aux calculs, le décollement se produisant pour une contrainte critique légèrement plus faible.

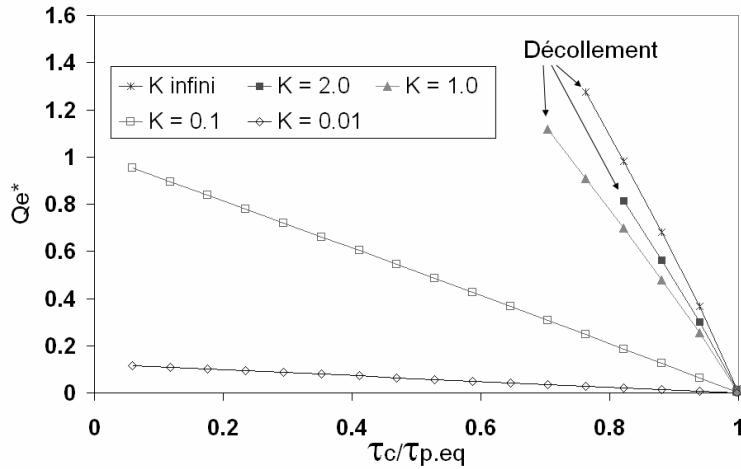


Figure 7.9 : Débit total érodé en fonction de τ_c pour plusieurs K .

7.1.3 Erosion de sédiments plus lourds que l'eau

Nous allons maintenant étudier l'influence de la masse volumique des sédiments. Nous présentons sur les trois figures suivantes, respectivement, les vitesses de régression du sol, les contraintes à la paroi et les variations de l'épaisseur de l'écoulement en fonction de x^* pour deux valeurs de ρ_s^* .

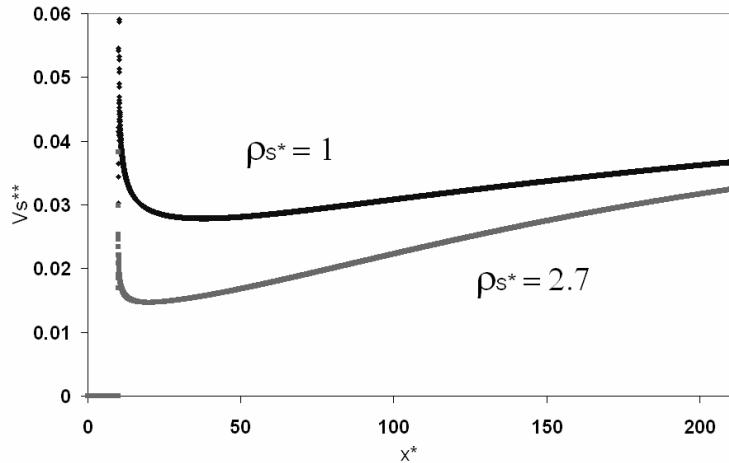


Figure 7.10 : Comparaison de la vitesse de régression du sol, pour deux valeurs de ρ_s^* , avec $K= 1.0 \text{ s/m}$.

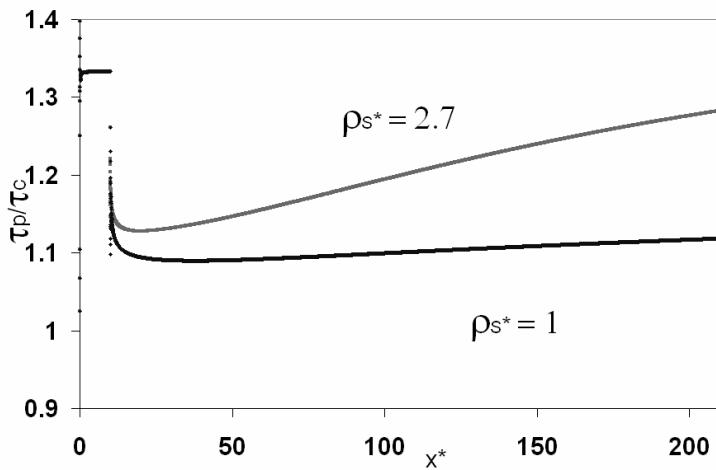


Figure 7.11 : Comparaison de la contrainte au sol, pour deux valeurs de ρ_s^* , avec $K= 1.0$ s/m.

Il est normal, nous en avons déjà parlé dans le chapitre précédent, que la vitesse de régression du sol, pour $\rho_s^* = 2.7$ soit inférieure à celle où $\rho_s^* = 1$, au début de l'érosion (si le débit érodé était constant dans les deux cas, on aurait un rapport constant, égal à 2.7 entre les deux vitesses de régression). Par contre on voit que l'écart entre les deux courbes diminue avec x^* , et pour une distance suffisamment grande, on verrait la courbe $\rho_s^* = 2.7$ atteindre des valeurs supérieures à la courbe $\rho_s^* = 1$. On remarque de plus que la courbe $\rho_s^* = 2.7$ atteint sa valeur minimum, avant augmentation, à une distance plus faible que $\rho_s^* = 1$. Il est donc clair dans ce cas que le débit érodé augmente avec la masse volumique des sédiments ; cela est d'ailleurs confirmé par la Figure 7.11 (la contrainte à la paroi pour $\rho_s^* = 2.7$ devient très rapidement supérieure à celle de $\rho_s^* = 1$).

Ce résultat était prévisible, car plus la densité de l'écoulement est importante, plus l'écoulement sera accéléré, par l'intermédiaire du terme source positif en $\rho g \sin \alpha$.

On retrouve cela sur la Figure 7.12, malgré un débit érodé plus important, l'écoulement s'épaissit moins pour $\rho_s^* = 2.7$ que pour $\rho_s^* = 1$, car dans le premier cas l'écoulement a subi une accélération plus forte.

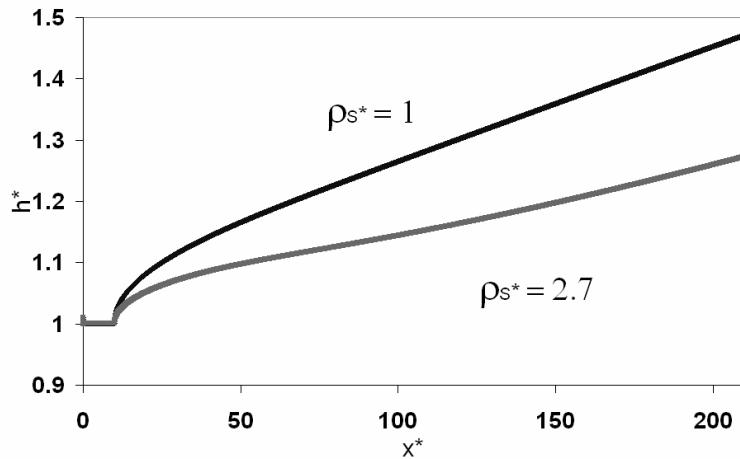


Figure 7.12 : Comparaison de l'épaisseur de l'écoulement, pour deux ρ_s^* , avec $K=1.0 \text{ s/m}$.

On présente Figure 7.13 les modifications sur le profil de vitesse dues à ρ_s^* par rapport au profil d'équilibre. Elles restent faibles, mais l'augmentation de ρ_s^* accroît légèrement la déformation du profil de vitesse. Remarquons que la contrainte critique a été abaissée afin de rendre ces effets plus visibles.

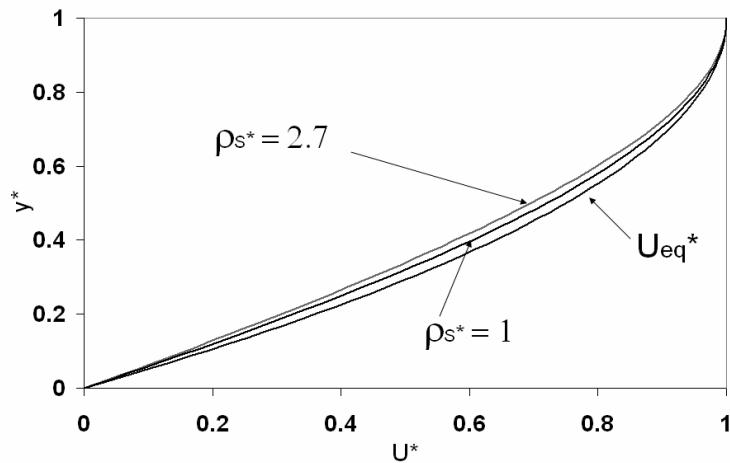
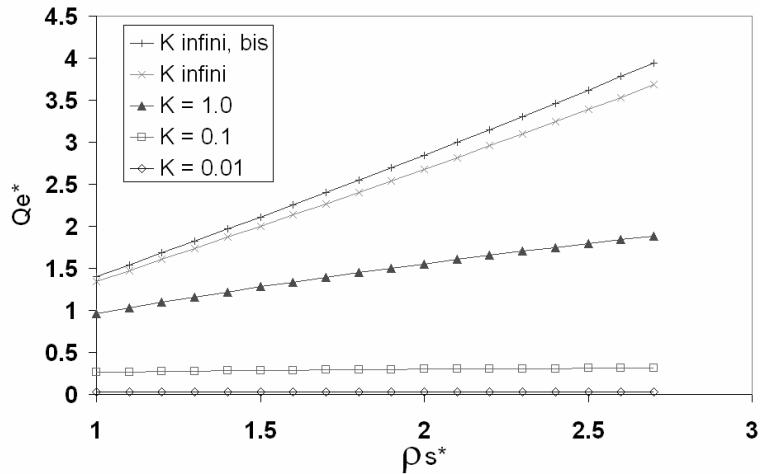


Figure 7.13 : Comparaison des profils de vitesse à $x^*=210$, K infini, $\tau_c = 100 \text{ Pa}$, pour deux valeurs de ρ_s^* .

Nous étudions maintenant l'effet de la masse volumique des sédiments sur le débit total érodé (sur une distance de $200*he$), pour différentes valeurs de K . Sur la Figure 7.14, le cas K infini bis correspond à un calcul effectué sans le terme source en cosinus de l'équation de quantité de mouvement.

Figure 7.14 : Evolution du débit total érodé, en fonction de ρ_s^* .

On voit clairement sur cette courbe que plus la masse volumique des sédiments est élevée plus le débit érodé sera important (mais pas forcément la vitesse de régression du sol). Cela s'explique bien sur par la présence du terme source $\rho g \sin \alpha$ qui va augmenter au fur et à mesure que l'érosion se produit.

On remarque aussi que le terme en cosinus diminue, au maximum, le débit total érodé d'à peu près 7%.

7.1.4 Influence des paramètres

$$\alpha = 10^\circ, h_e = 0.1 \text{ m}, Y_g = 0.6$$

$$\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3, \rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = \mu^* \rho_e u_e h_e, \mu^* = 0.005$$

$$\rho D = Sc \mu, Sc = 1$$

$$\tau_c / \tau_{p.eq} = 3/4, K = 0.1 \text{ s/m}$$

Tableau 7-2 : Paramètres de référence pour les applications numériques.

Variation de la hauteur d'entrée et de la pente.

Nous étudions tout d'abord les effets de la variation de la hauteur d'entrée, en gardant la même contrainte d'équilibre ; si on multiplie la hauteur d'entrée par 2, on divisera le sinus de l'angle de pente par 2 afin de garder la même valeur de la contrainte au sol d'équilibre, et de τ_c . Pour ces calculs le rapport de la distance d'érosion sur la hauteur d'entrée est gardé constant et égal à 200.

Nous présentons ces résultats sur la Figure 7.15, les débits totaux érodés ont été divisés une première fois par le débit d'entrée de l'écoulement, puis par leurs valeurs obtenues avec les paramètres de références (c'est-à-dire en fait la valeur du débit total érodé, dépendant de la valeur de K , où $h = 0.1 = he(ref)$). Les valeurs correspondantes de $Qe^*(ref(K))$, donc pour $he=0.1$, se voient sur la Figure 7.14.

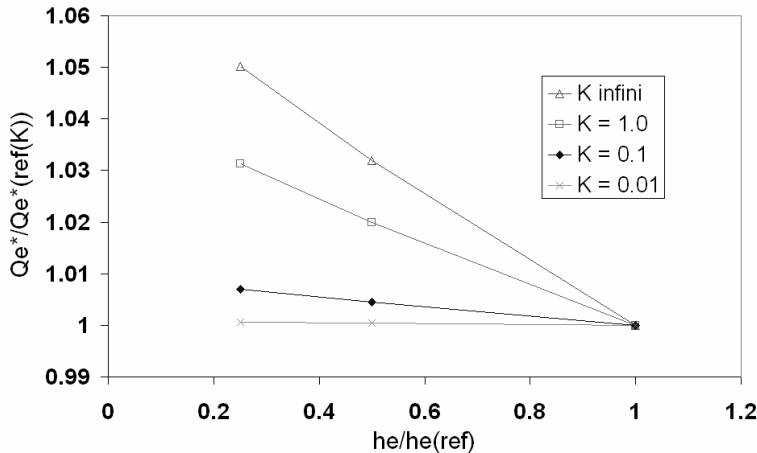


Figure 7.15 : Variation du débit total érodé en fonction de la hauteur d'entrée.

Nous n'avons pu faire de calcul avec une valeur de $he/he(ref)$ supérieure à l'unité, il aurait en effet fallu diminuer l'angle de pente du même rapport. Or il s'avère que pour des angles inférieurs à 10° , le profil ne s'établit pas (le calcul diverge). Sur cette figure les écarts sont très faibles ; ainsi à $h_e \sin \alpha = cste$, les débits érodés restent globalement constants, même si l'augmentation de la pente (donc la diminution de la hauteur d'entrée) a tendance à légèrement les augmenter.

Nous étudions maintenant l'influence de l'inclinaison du sol, en gardant la valeur de référence pour la hauteur d'entrée et une valeur constante pour la contrainte critique du sol, $\tau_c = 150$ Pa .

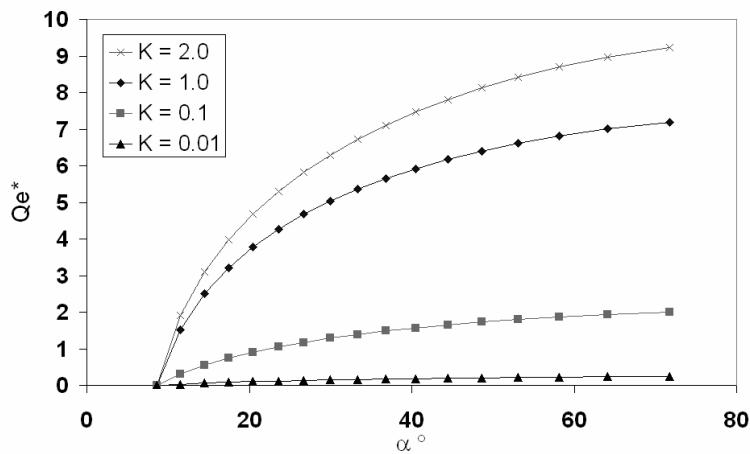


Figure 7.16 : Variation du débit totale érodé en fonction de la pente pour 4 valeurs de K , $\tau_c = 150$ Pa .

(Avec la valeur de la contrainte critique choisie $\tau_c = 150$ Pa, il n'y a pas érosion pour des angles de pente inférieurs à 10° , la contrainte pariétale d'équilibre obtenue étant inférieure à 150 Pa.)

Les débits érodés augmentent bien sur avec l'inclinaison du sol ; le terme source lié à la gravité augmentant d'autant l'accélération de l'écoulement.

Nous n'avons pu pour cette figure présenter des calculs avec des valeurs de K supérieurs à 2 s/m, des décollements de l'écoulement se produisant.

Nous présentons Figure 7.17 l'évolution du débit total érodé en fonction du rapport $\tau_c/\tau_{p.eq}$. Ces calculs ont été réalisés à pente et profil initial de vitesse fixés, en faisant varier la valeur de la contrainte critique du sol. Ces résultats sont semblables à la Figure 7.9, (même s'il existe une légère augmentation de l'érosion due à la masse volumique des sédiments, plus importante ici). Là encore, l'écoulement est très sensible aux phénomènes de décollement, lorsque l'érosion augmente.

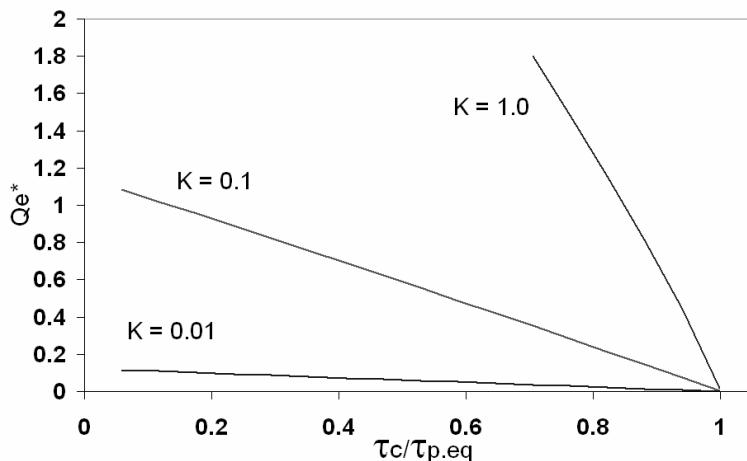


Figure 7.17 : Débit total érodé fonction de τ_c , pour plusieurs valeurs de K .

Remarque à propos des Figure 7.9 et Figure 7.17 :

Ces deux figures représentent l'évolution du débit total érodé en fonction du rapport $\tau_c/\tau_{p.eq}$. Pour obtenir ces courbes, nous avons, à conditions hydrauliques fixées, fait varier la valeur de la contrainte critique. Nous aurions pu procéder différemment : fixer la contrainte critique du sol et faire varier le débit d'entrée de l'écoulement (par l'intermédiaire de he). Ainsi, pour chaque débit d'entrée, ou hauteur d'entrée, nous aurions obtenu une contrainte au sol d'équilibre (qui augmente avec le débit d'entrée) différente, qui nous aurait permis de tracer des courbes équivalentes à celles présentées.

Mais puisque le débit total érodé est adimensionné par la hauteur d'entrée he , et que cette hauteur intervient aussi dans la valeur de $\tau_{p.eq}$, les résultats sont alors

indépendants de he . Ainsi, les deux approches de calcul précédentes sont équivalentes ; on obtiendrait exactement les mêmes courbes.

Ces deux figures peuvent donc être interprétées de deux façons : elles représentent, soit l'évolution de l'érosion à conditions hydrauliques fixées pour différents matériaux (contraintes critiques), soit l'évolution de l'érosion pour un matériau sous différentes conditions hydrauliques.

Nous ne présentons pas l'influence de la distance d'érosion et de la viscosité, mais il est clair que l'érosion augmente avec ces paramètres.

7.2 Résultats du modèle à longueur de mélange

7.2.1 Calcul sans érosion

Nous rappelons pour cette partie, l'expression de l'équation de quantité de mouvement, et la définition de la longueur de mélange :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{h(x)} \rho d\tilde{y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \bar{v^2} \right)_y \quad (7.12)$$

$$l_m = \kappa y \left(1 - \frac{y}{h} \right)^{1/2} \quad (7.13)$$

Rappel : $\kappa = 0.435$

Afin de permettre une comparaison plus aisée entre les modèles de longueur de mélange et à viscosité constante, nous prendrons ici les mêmes conditions hydrauliques que précédemment : même débit d'entrée, et même inclinaison du sol. Pour prendre le même débit d'entrée le plus simple est de prendre le même profil (d'équilibre) d'entrée que pour le cas à viscosité constante, c'est ce que nous pensions faire. Malheureusement, si l'on prend ce profil parabolique en entrée, ce n'est pas le profil d'équilibre dans ce cas, et l'écoulement décolle très rapidement lors de l'établissement du profil. Ce phénomène est dû à l'action du dernier terme de l'équation (7.12). En effet sans ce terme l'écoulement converge parfaitement vers son profil d'équilibre. Afin d'éviter ces problèmes, nous mettons comme profil initial un profil logarithmique de même débit d'entrée que le profil d'équilibre précédent. Avec un tel profil, les résultats sont exactement les mêmes avec ou sans le dernier terme de (7.12). On peut donc penser que le terme $\partial(\rho \bar{v^2})_y / \partial x$ n'a aucune

influence sur l'établissement de l'écoulement, sauf si le profil d'entrée est parabolique, car dans ce cas ce terme empêche la convergence du profil vers son équilibre (la convergence du profil vers l'équilibre dépend donc du choix du profil initial).

Il existe à ce niveau un paramètre supplémentaire à choisir, la longueur caractéristique des rugosités de la paroi (la viscosité étant calculée grâce au modèle à longueur de mélange, il n'est plus nécessaire de fixer sa valeur par la constante a). Nous présentons sur la Figure 7.18 l'évolution de la contrainte à la paroi pour trois longueurs de rugosité. Nous prenons comme profil d'entrée un profil logarithmique de même débit et la même inclinaison du sol que les valeurs définies au Tableau 7-1.

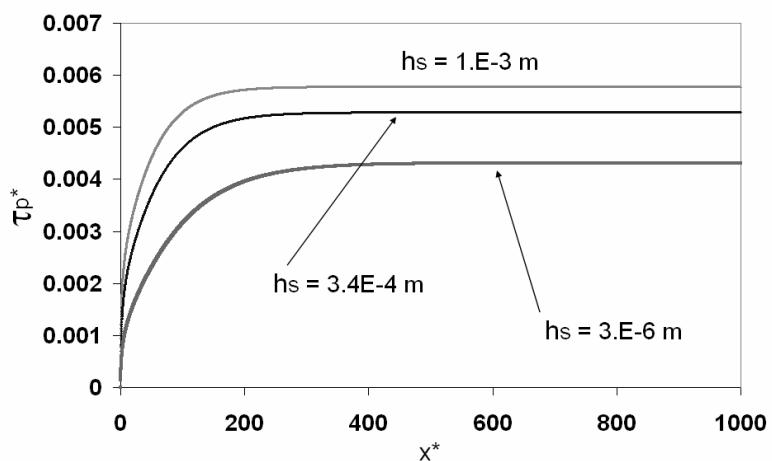


Figure 7.18 : Comparaison de la contrainte pariétale en fonction de $x^* = x / 0.1$, pour trois longueurs de rugosité.

Sur cette figure, la contrainte est adimensionnée grâce à la vitesse d'entrée à la surface définie au Tableau 7-1, cela permet une comparaison directe avec la Figure 7.2.

Contrairement à la Figure 7.2, on est loin de l'équilibre au départ, ainsi, la contrainte au sol croît plus longtemps pour atteindre une valeur d'équilibre à une distance, qui diminue avec l'augmentation des rugosités, à peu près égale à 400 fois la hauteur d'entrée. Plus la longueur des rugosités est importante et plus la contrainte pariétale l'est aussi.

Nous présentons sur la figure suivante les profils de vitesse d'équilibre, respectivement à viscosité constante et à longueur de mélange pour trois longueurs de rugosité, pour le même débit d'entrée.

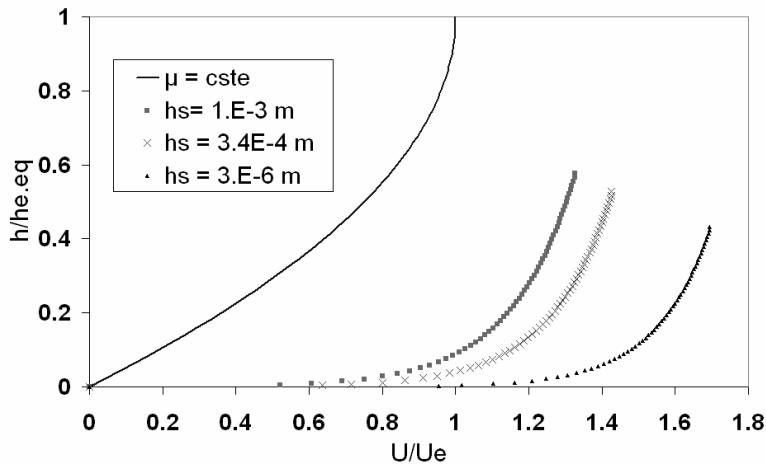


Figure 7.19 : Comparaison des profils d'équilibre, viscosité constante et longueur de mélange avec trois longueurs de rugosité.

Sur la Figure 7.19, les vitesses et ordonnées ont été adimensionnées par la vitesse et la hauteur d'équilibre du profil parabolique. On voit clairement que la hauteur d'équilibre des profils avec la longueur de mélange est beaucoup plus faible qu'avec la viscosité constante, à débit donné. On remarque aussi l'importance des effets de la rugosité ; plus les tailles de rugosité sont importantes plus la vitesse diminue et plus l'épaisseur de l'écoulement augmente. Cela se comprend bien, plus le sol est rugueux et plus l'écoulement est freiné.

Nous présentons ces mêmes profils de vitesse adimensionnés, comme défini en (7.9), Figure 7.20.

Nous prendrons dorénavant une longueur caractéristique de rugosité égale à 0.001 mètre, qui représente à peu près le diamètre moyen des grains érodés.

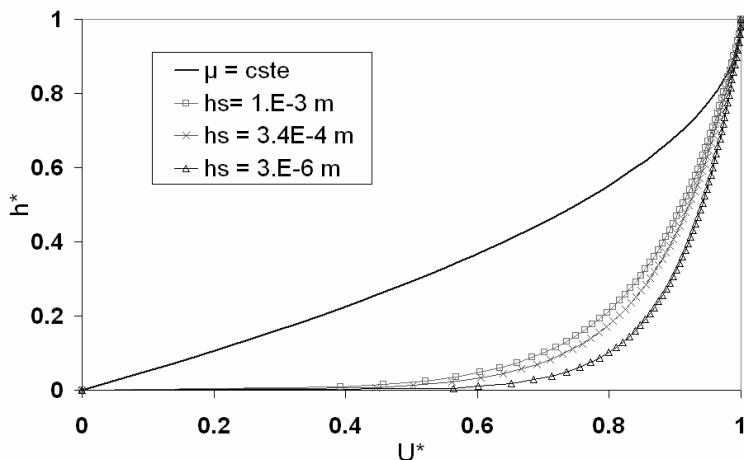


Figure 7.20 : Profils de vitesse d'équilibre adimensionnés.

7.2.2 Erosion de sédiments de même masse volumique que l'eau

Comme pour le cas à viscosité constante, nous attendons pour étudier l'érosion que le profil s'établisse (jusqu'à $x = dstart$), puis nous érodons sur une distance égale à 200 fois la hauteur d'équilibre. Aussi, il est préférable de présenter les résultats en fonction de x^{**} .

$$x^{**} = \frac{x - dstart}{h_{e,eq}} \quad (7.14)$$

La valeur de τ_c sera prise comme précédemment égale à $\tau_c = 3/4 \tau_{p,eq} = 3/4 * 98.4 \text{ Pa}$, ce qui correspond ici à $\tau_c = 73.8 \text{ Pa}$. Ainsi, $u_{eq}^* = 0.314 \text{ m/s}$.

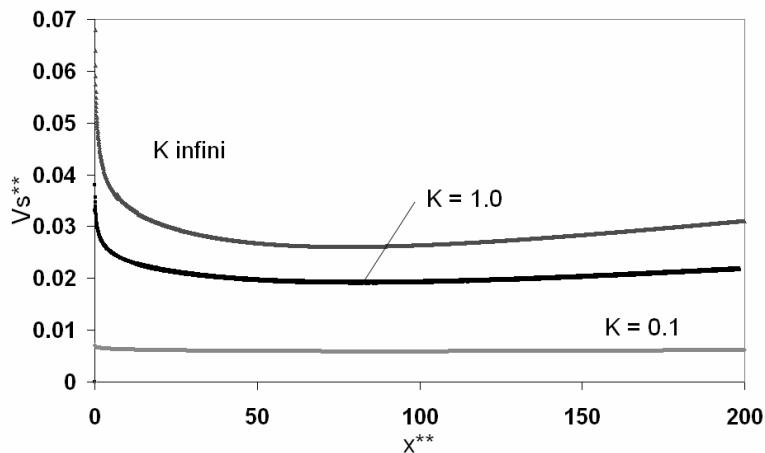


Figure 7.21 : Vitesse de régression du sol fonction de x^{**} pour 3 cas ($K = 0.1, = 1.0 \text{ s/m}$, $K \text{ infini}$).

Nous présentons Figure 7.22 et Figure 7.23, les contraintes à la paroi, et les variations de l'épaisseur de l'écoulement en fonction de x^{**} , correspondantes à la figure ci-dessus.

Il n'est pas nécessaire ici de commenter les résultats ; on retrouve en effet exactement les mêmes phénomènes (évolutions) que dans la partie précédente, à viscosité constante (Figure 7.3, Figure 7.4, Figure 7.5). Remarquons simplement, que les vitesses de régression du sol, sont ici un peu plus faibles (le débit érodé et la variation de l'épaisseur le sont donc aussi), et que la contrainte à la paroi varie plus lentement que précédemment.

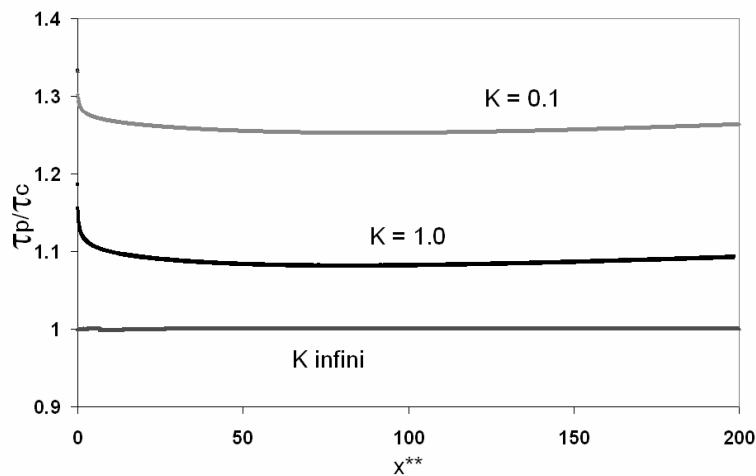


Figure 7.22 : Evolution de la contrainte au sol en fonction de x^{**} , pour 3 cas ($K = 0.1, = 1.0 \text{ s/m}$, $K \text{ infini}$).

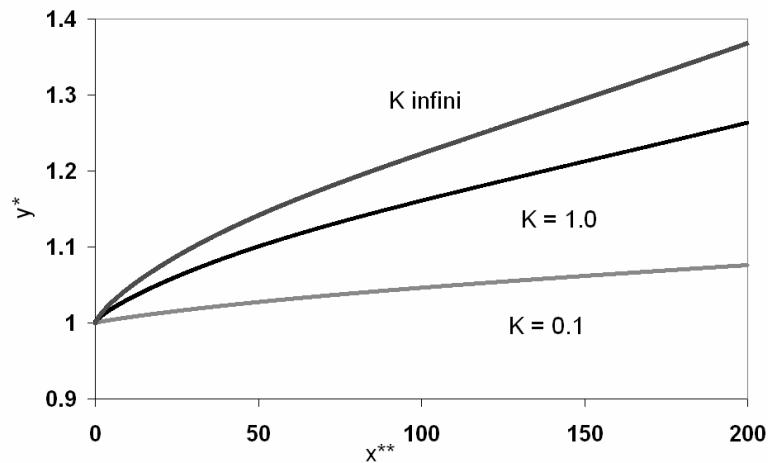


Figure 7.23 : Evolution de l'épaisseur de l'écoulement avec x^{**} .

Nous présentons sur la Figure 7.24 l'évolution des profils de vitesse adimensionnés. Comme on peut le voir l'érosion déforme légèrement le profil d'équilibre (comme sur la Figure 7.7).

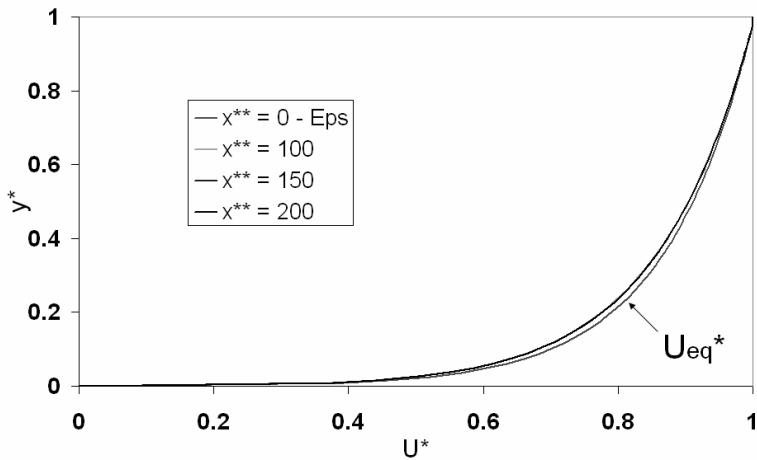


Figure 7.24 : Comparaison des profils de vitesse adimensionnés, K infini.

Si l'on s'intéresse aux profils de fraction massique de sédiments, on a pour $K = 1.0$ s/m, la Figure 7.25. Comparée avec la Figure 7.8, on remarque que comme dans le chapitre 6, les concentrations en sédiments sont plus importantes au sol (cela est dû au coefficient de diffusion, qui comme la viscosité, est plus faible près de la paroi). Dans ce dernier cas, les fractions massiques sont moins importantes qu'à viscosité constante, mais cela est à mettre en relation avec la quantité érodé, qui est moins importante ici.

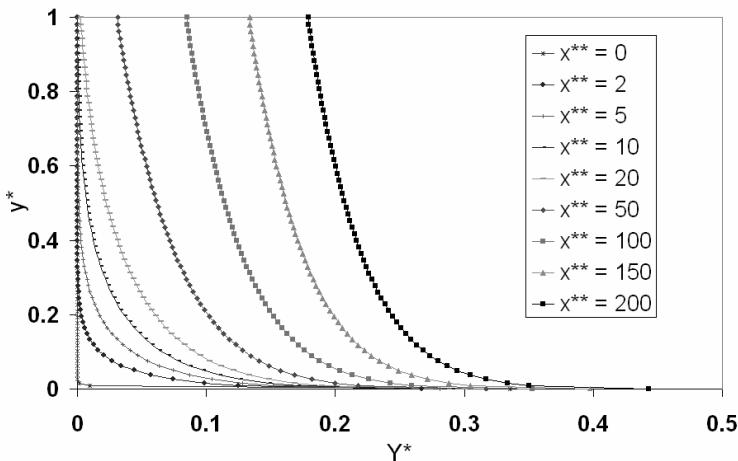


Figure 7.25 : Profils de fraction massique de sédiments, $K = 1.0$ s/m.

Ces écoulements turbulents étant moins sensibles aux phénomènes de décollement, on peut tracer la Figure 7.26, en faisant varier τ_c à débit d'entrée constant.

Comme dans la première partie de ce chapitre (Figure 7.9), le débit varie linéairement avec la contrainte critique, sauf pour K infini qui présente une très forte augmentation du débit érodé pour des petites valeurs de τ_c . Mais vu

l'importance des débits érodés dans cette zone, les fractions massiques de sédiments seront très importantes au sein de l'écoulement ; on peut alors, encore, se poser la question de la validité de notre modélisation dans ce cas là.

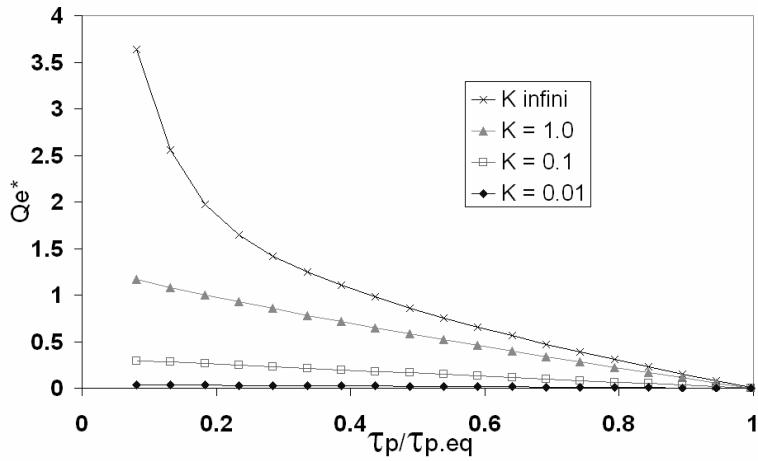


Figure 7.26 : Débit total érodé en fonction de τ_c , à débit constant.

Remarque : nous avons vu ici, que l'érosion provoque, après une certaine distance, une augmentation de la contrainte et donc des vitesses d'écoulements. Dans cette situation le terme $\partial(\rho v^2)/\partial x$ devient positif, il a donc tendance à accélérer l'écoulement (et l'érosion). Sa contribution sur le débit érodé reste faible, $\leq 1\%$.

7.2.3 Erosion de sédiments plus lourds que l'eau

Nous étudions maintenant l'influence de la masse volumique des sédiments sur l'érosion.

La démarche suivie est la même que d'habitude, nous présentons les évolutions, en fonction de x^{**} , des vitesses de régression du sol, Figure 7.27, des contraintes à la paroi, Figure 7.28, et des épaisseurs de l'écoulement, Figure 7.29, pour deux valeurs de ρ_s^* .

Là encore, les résultats sont les mêmes qu'à viscosité effective constante, voir pour cela Figure 7.10, Figure 7.11 et Figure 7.12. Nous ne nous attarderons donc pas à commenter ces courbes.

Remarquons simplement que les écarts relatifs entre les courbes de densité de sédiments sont plus faibles ici, que dans la première partie du chapitre.

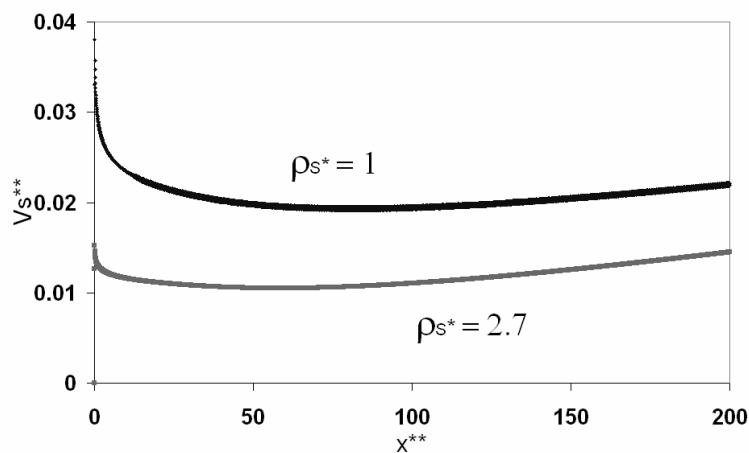


Figure 7.27 : Comparaison de la vitesse de régression du sol, pour deux valeurs de ρ_s^* , $K = 1.0 \text{ s/m}$.

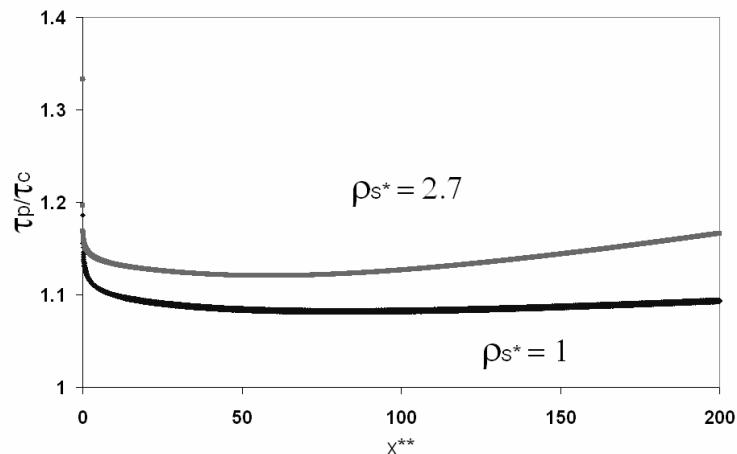


Figure 7.28 : Comparaison de la contrainte au sol, pour deux valeurs de ρ_s^* , $K = 1.0 \text{ s/m}$.

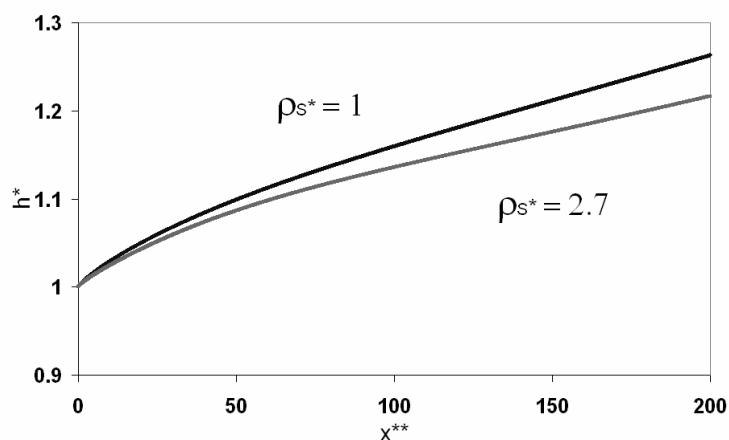


Figure 7.29 : Comparaison de l'épaisseur de l'écoulement pour deux ρ_s^* .

Nous ne présentons pas de profil de vitesse dans ce cas, on obtiendrait des courbes très semblables à la Figure 7.24. Les modifications du profil de vitesse dues à l'augmentation de la masse volumique des sédiments sont en effet faibles.

Nous traçons finalement, en fonction de ρ_s^* , le débit total érodé adimensionné, pour différentes valeurs de K , Figure 7.30. Sur cette figure le cas $K \text{ infini bis}$ correspond au cas $K \text{ infini}$, mais la viscosité est calculée à partir de la masse volumique de l'eau et non du mélange $\mu_{\text{eff}} = \rho_e l_m^2 (\partial u / \partial y)$.

On voit alors qu'une partie non négligeable de l'augmentation du débit érodé avec ρ_s^* , provient de l'augmentation de la viscosité due à la présence des sédiments.

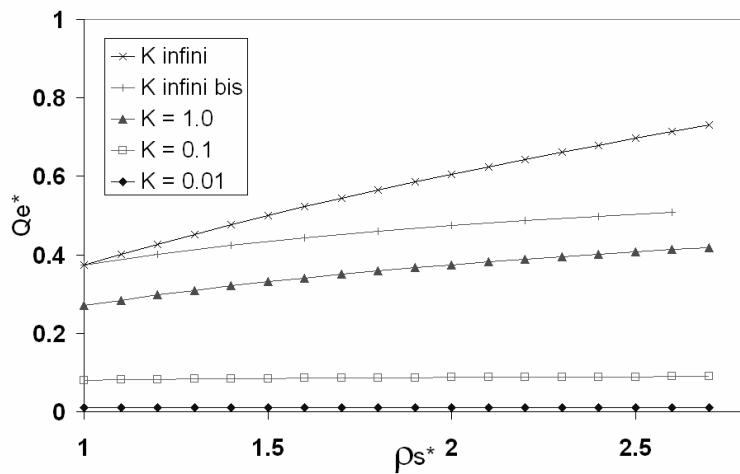


Figure 7.30 : Débit total érodé en fonction de ρ_s^* .

En comparant cette figure à la Figure 7.14, on retrouve bien les mêmes évolutions, et comme nous l'avons déjà dit les débits érodés sont ici plus faibles, ainsi que leurs variations, avec la densité des sédiments.

7.2.4 Influence des paramètres

Nous reprenons ici les valeurs des densités (fluide, sédiments, et sol) définies dans le Tableau 7.2. Le débit d'entrée, constant, est le même que précédemment ; et la contrainte critique du sol est prise égale à 73.8 Pa (comme dans 7.2.2).

Nous étudions alors l'influence de la pente du sol sur le débit total érodé, Figure 7.31, pour plusieurs valeurs de K . (Nous attendons bien sur pour chaque valeur de pente, l'établissement du profil de vitesse, et érodons sur une distance égale à 200 fois la hauteur de ce profil d'équilibre).

Remarquons que nous n'avons pas pu obtenir de résultat numérique pour des pentes inférieures à 10° , car le calcul s'arrête très tôt, lors de l'établissement du profil, dû à un décollement.

Cette figure est très semblable à la Figure 7.16, les débits érodés avec le modèle à longueur de mélange étant plus faibles.

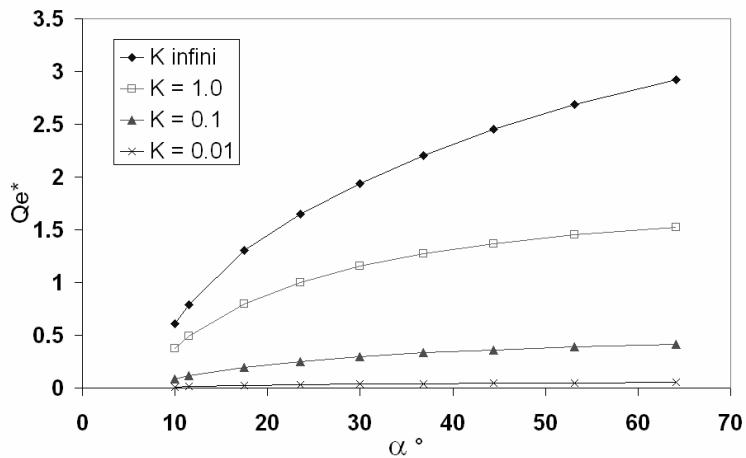


Figure 7.31 : Débit total érodé en fonction de l'angle d'inclinaison du sol.

Nous ne représentons pas ici le débit érodé en fonction du rapport $\tau_c/\tau_{p,eq}$. On obtiendrait en effet les mêmes résultats que sur la Figure 7.26, avec des débits légèrement plus importants (dû à une densité de sédiments plus forte) suivant les valeurs de K (voir pour cela la Figure 7.30).

Nous présentons finalement une comparaison des deux modèles de viscosité, Figure 7.32.

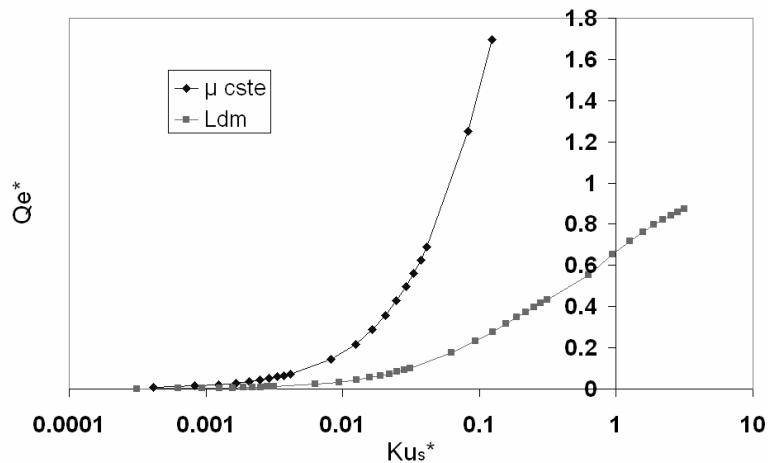


Figure 7.32 : Comparaison des débits totaux érodés, en fonction de K pour les deux modèles de viscosité.

Sur cette figure, les débits érodés ont été mesurés sur une distance égale à 200 fois la hauteur d'équilibre (qui dépend du modèle de viscosité), pour un même débit d'entrée, une même contrainte critique ($\tau_c = 70$ Pa), et une même pente, $\alpha = 10^\circ$.

En abscisse K a été adimensionné par la vitesse de frottement à la paroi du profil d'équilibre (qui dépend du modèle de viscosité) :

$$Ku_s^* = K \sqrt{\frac{\tau_{p,eq}}{\rho_e}} \quad (7.15)$$

Le modèle à viscosité constante est plus sensible au décollement, aussi nous n'avons pas pu obtenir de résultats numériques pour $Ku_s^* > 0.1$. Le modèle à longueur de mélange permet, quant à lui, d'accéder à des valeurs plus importantes de Ku_s^* , mais la compétition entre les termes sources positif et négatif (de l'équation de quantité de mouvement) produit des oscillations du débit local érodé pour $Ku_s^* \geq 1.0$.

Nous retrouvons bien sur cette figure ce que nous avions dit précédemment : à même conditions hydrauliques, et même matériau érodable (même contrainte critique), les débits érodés sont beaucoup plus importants avec le modèle à viscosité effective constante.

Ce résultat est bien sur très dépendant de la valeur de la constante a , choisie pour calculer cette viscosité effective. Aussi, on peut penser que la valeur que nous avons choisie ici, $a=0.005$, est surestimée.

7.2.5 Etude du modèle turbulent à diffusion différentielle

Nous avons mis en évidence, à la fin du chapitre précédent, partie 6.2.6, les effets sur l'érosion de la concentration préférentielle des sédiments près de la paroi, dûs aux effets de gravité. Nous allons, en suivant la même démarche, réitérer cette étude pour des écoulements à surface libre.

Pour des raisons déjà explicitées, notamment la nécessité pour le nombre de Schmidt d'être positif, nous avons vu que cette approche ne donnait des résultats acceptables que pour une certaine gamme de diamètres de sédiments. Après différents tests, il s'avère que la gamme des diamètres utilisables ici, est, comme dans le chapitre précédent, de l'ordre de $10e-4$ m.

Nous reprenons le même débit d'entrée que précédemment, la même pente (10°), une taille caractéristique de rugosité égale à $3.4 \cdot 10e-4$ m (Figure 7.18), $u_{eq}^* = 0.3$ m/s, les densités définies dans le Tableau 7-2, une contrainte critique $\tau_c = 60$ Pa et $K=0.1$ s/m ($A'=1$ pour l'instant).

En toute rigueur, nous devrions faire varier la taille des rugosités de paroi comme le diamètre des grains, défini dans le temps caractéristique de Stokes. Nous ne le ferons pas, afin de faciliter la comparaison des différents résultats obtenus (en effet modifier la rugosité modifie la contrainte à la paroi, donc les débits érodés...).

7.2.5.1 Variation du diamètre des sédiments

Nous présentons ici des résultats de calculs avec érosion, pour les valeurs des paramètres données ci-dessus. La signification des numéros annotant les courbes est :

- (1) nombre de Schmidt constant égal à un ;
- (2) nombre de Schmidt différentiel, $d_s = 1.0 \cdot 10^{-4}$ m ;
- (3) nombre de Schmidt différentiel, $d_s = 3.0 \cdot 10^{-4}$ m ;
- (4) nombre de Schmidt différentiel, $d_s = 4.0 \cdot 10^{-4}$ m .

Nous présentons, comme d'habitude, l'évolution des vitesses de régression du sol Figure 7.33, et les contraintes pariétales correspondantes Figure 7.34.

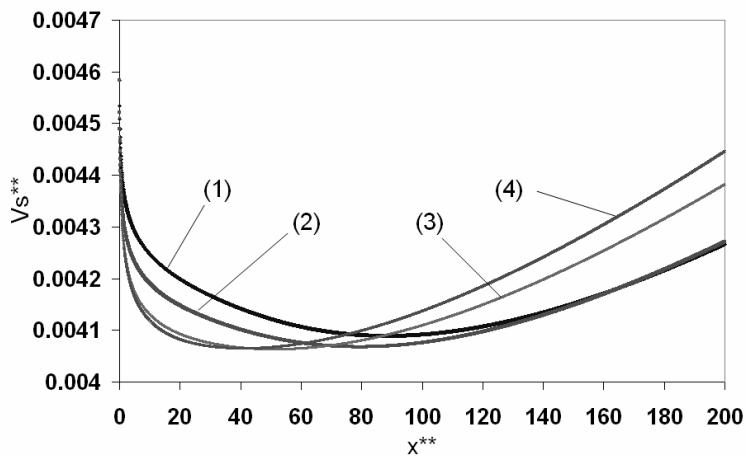


Figure 7.33 : Evolution de la vitesse de régression du sol avec x^{**} , pour quatre cas.

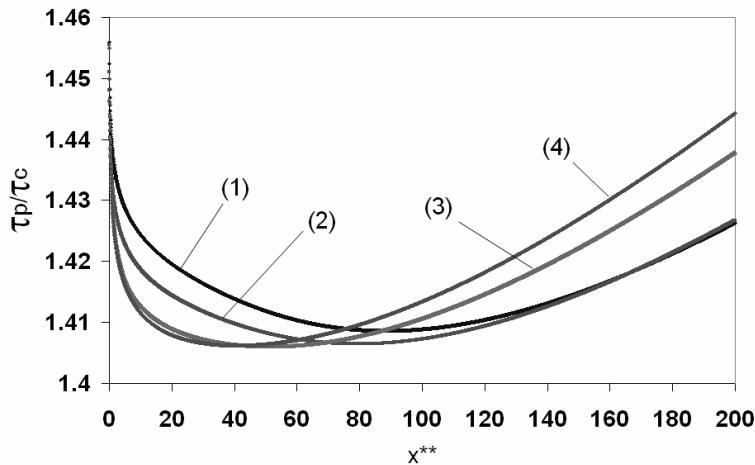


Figure 7.34 : Evolution des contraintes à la paroi avec x^{**} , pour quatre cas.

En comparant ces résultats à ceux obtenus dans le chapitre précédent, on voit apparaître deux différences importantes. Tout d'abord les écarts entre les différentes courbes sont ici moindres (attention à l'échelle !), ce qui signifie que les

effets de concentrations préférentielles jouent moins, dans un écoulement à surface libre ; ensuite, alors que précédemment les débits érodés augmentaient avec la taille des particules (par rapport à la courbe Schmidt = 1), on voit apparaître ici deux zones, une première où les débits érodés sont d'autant plus faibles que la taille de la particule est grande (par rapport à la courbe Schmidt = 1), puis une seconde où cet effet s'inverse. Ainsi, la taille des sédiments accentue, au début de l'érosion, la diminution de la contrainte (et du débit érodé), puis accentue ensuite, son amplification.

Pour expliquer ces différences avec le chapitre 6, nous présentons Figure 7.35 la fraction massique de sédiment à la paroi pour ces différents cas, et Figure 7.36 les mêmes courbes, avec $K=1.0$ s/m.

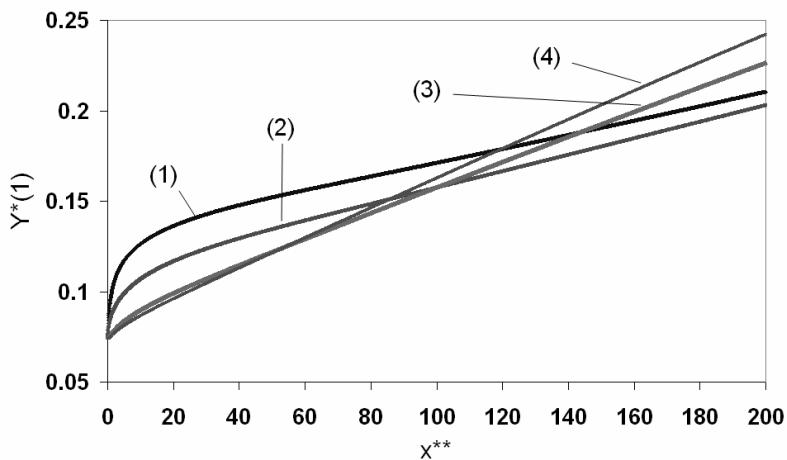


Figure 7.35 : Evolution de la fraction massique de sédiments au sol avec x^{**} .

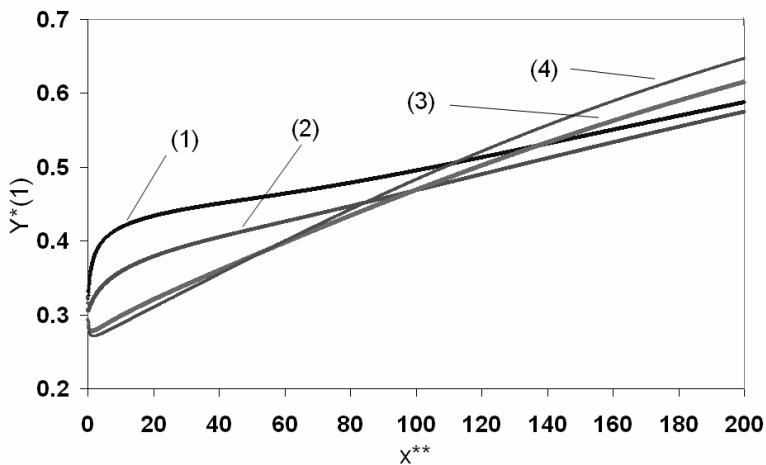


Figure 7.36 : Figure 7.35 avec $K=1.0$ s/m.

Nous avons fait le choix dans cette partie de fixer la valeur de K à 0.1 s/m. Cette valeur permet en effet d'observer les phénomènes, mais ne produit pas une érosion

trop importante (les fractions massiques restent à des valeurs acceptables quant à l'utilisation de notre modèle de viscosité). Il s'avère que pour les phénomènes observés ici, les résultats du calcul avec $K=1.0$ s/m (Figure 7.36) sont, et ce seulement pour la fraction massique à la paroi, beaucoup plus explicites (les autres résultats étant semblables).

En effet, tous les calculs présentés jusqu'ici ont montré, juste après le début de l'érosion, une augmentation de la fraction massique à la paroi avec x (cela a été observé sur les profils de concentrations pour les écoulements à surface libre et, au début de l'érosion dans le cas à hauteur d'eau infinie).

Or on observe une décroissance très nette de la fraction massique à la paroi, au tout début de l'érosion pour les courbes (3) et (4) de la Figure 7.36.

L'explication de ce comportement particulier est très simple. Pour les écoulements à surface libre que nous étudions, nous avons vu que la contrainte à la paroi était très importante (de l'ordre de la centaine de Pascals), le gradient de vitesse à la paroi l'est donc lui aussi. Or ce gradient apparaît dans notre formule différentielle du nombre de Schmidt (fin du chapitre 5), dans un des deux termes positifs. Ainsi son action (par l'intermédiaire de ce terme positif) aura tendance à accroître la diffusion des particules de sédiments dans l'écoulement.

C'est bien ce que nous observons au début de l'érosion, le fort gradient de vitesse régnant à la paroi entraîne une très forte diffusion des sédiments dans la couche (loin de la paroi). Ainsi, localement près de la paroi, la fraction massique de sédiments diminuant, de même que la densité moyenne du mélange, le terme source positif $\rho g \sin \alpha$, de l'équation de quantité de mouvement, diminue légèrement, provoquant une chute de contrainte plus importante (que si les sédiments étaient restés près de la paroi).

Ce que nous venons de dire est très bien illustré par la figure suivante, Figure 7.37 ; nous y présentons les profils de fraction massique à $x^{**}=20$, c'est-à-dire dans la zone où l'érosion est atténuée avec le diamètre croissant des sédiments.

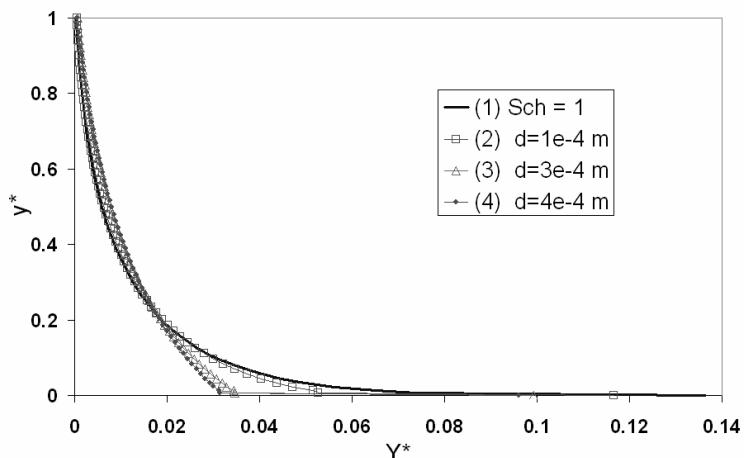


Figure 7.37 : Profils de fraction massique de sédiment, à $x^{**}=20$.

On voit bien ici, ce que nous venons d'expliquer ; les profils de fraction massique calculés avec notre modèle turbulent de diffusion différentielle (courbes (2), (3) et (4)) présentent près de la paroi, une valeur plus faible (comparée à la courbe (1)), alors qu'au dessus (pour $y^* \geq 0.2$) cet effet s'inverse. Cela est d'autant plus visible que la taille des particules est grande.

Nous nous intéressons maintenant à ces mêmes profils à $x^{**}=200$, Figure 7.38, dans la zone où l'érosion augmente avec la taille des particules.

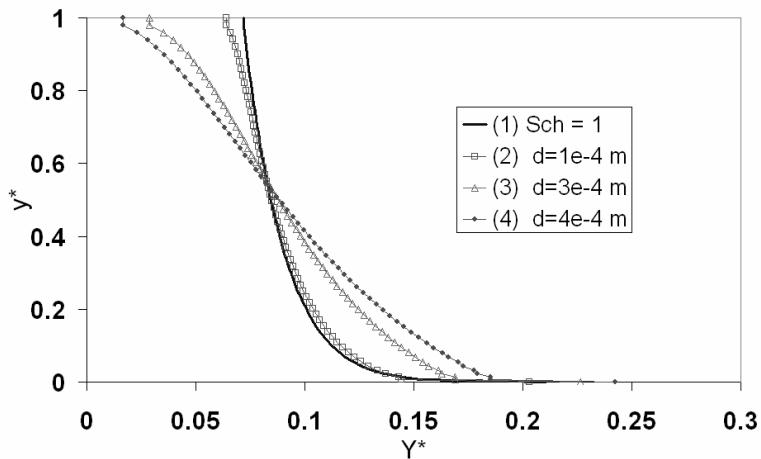


Figure 7.38 : Profils de fraction massique de sédiment, à $x^{**}=200$.

On retrouve ici des résultats semblables à ceux du chapitre 6 (et opposés à ceux présentés Figure 7.37). C'est-à-dire que plus les particules sont grosses (et donc lourdes) plus elles restent près de la paroi. Leur concentration préférentielle près de la paroi augmente la masse volumique du mélange, et accentue donc les effets du terme source lié à la gravité.

Reprendons ces explications à l'aide de la formule complète du flux de diffusion :

$$J_y^{Dt} = -\frac{\tau_{12}^F(1-c)\rho_e}{\rho} \left[-\left(\frac{c\rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial y} + 1.7 \rho l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\tau_{12}^t}{\tau_{12}^F(1-c)} A l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial c}{\partial y} \right] \quad (7.16)$$

Nous l'avons déjà dit, ce flux se décompose en trois contributions ; la première liée au gradient de pression orthogonale a tendance à diminuer ce flux (car de signe opposé), les deux autres, l'une liée au temps de Stokes, l'autre au temps caractéristique de la turbulence, ont tendance à accroître ce flux (dans la direction opposée à la gravité).

Dans cette situation d'écoulement à surface libre, les gradients de vitesse sont très forts près de la paroi, entraînant la prépondérance du deuxième terme du membre de droite de (7.16), sur les deux autres dans cette zone. Ainsi, au début de l'érosion,

la diffusion des sédiments n'est pratiquement due qu'à ce terme ; les autres étant négligeables de par les faibles valeurs de concentration en sédiments.

La prépondérance de ce terme reste vérifiée (les gradients de vitesse restant importants), tout au long de l'écoulement, dans une épaisseur allant du sol à, à peu près, $y^*=0.1$. Par contre, après une certaine distance d'érosion, les quantités de sédiments au sein de l'écoulement, notamment pour $y^*>0.1$, deviennent plus importantes, permettant ainsi au terme lié au gradient de pression de contre balancer les deux autres. Ainsi, même si le flux de diffusion ascendant des sédiments est très important près de la paroi, il est rapidement atténué, lorsqu'on s'élève dans la couche, par le terme lié à la gravité (d'après les figures présentées précédemment, il est certainement nécessaire d'avoir une fraction massique en sédiments minimum, pour que cet effet se fasse sentir).

Ainsi, les phénomènes, observés précédemment en début érosion, de dispersion des sédiments « loin de la paroi », sont exclusivement dûs aux forts gradients de vitesse régnant près de cette paroi. C'est ce qui explique que ces phénomènes n'ont pas été observés dans la configuration d'écoulement à hauteur d'eau infinie, les gradients de vitesse y sont en effet beaucoup plus faibles. La contribution du terme lié au gradient de pression peut donc jouer un rôle plus important, dans toute la couche et dès le début de l'érosion.

Nous avons ici étudié l'influence de la taille des particules, nous allons maintenant, comme dans le chapitre précédent, étudier l'influence de la constante A' relative au temps caractéristique de la turbulence.

7.2.5.2 Variation de la constante A'

Il est bien sur évident, à la vue de (7.16), que plus A' (noté A dans cette équation, voir Annexe II) sera grand et plus les sédiments diffuseront dans la couche, inversement plus A' sera petit et plus les sédiments resteront près de la paroi (comme dans le chapitre précédent).

Nous présentons Figure 7.39 les vitesses de régression du sol pour cinq valeurs de A' , la valeur du diamètre est gardée constante, égale à $d_s = 3.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. Les profils de fraction massique correspondants, à $x^{**}=200$, sont représentés Figure 7.40.

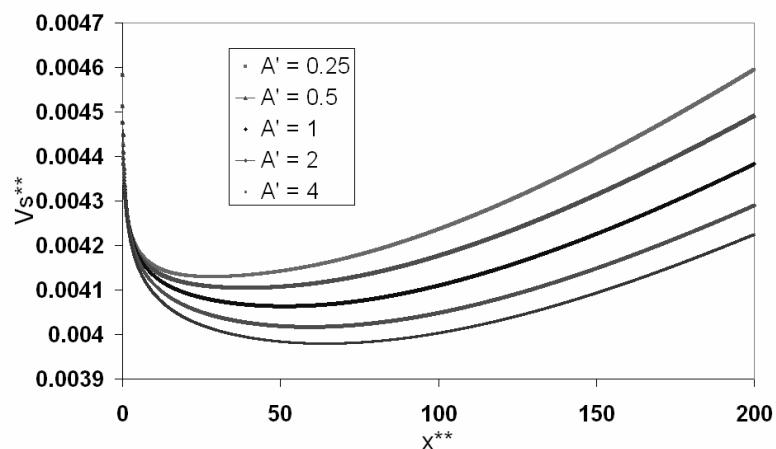


Figure 7.39 : Evolution de la vitesse de régression du sol avec x^{**} , pour cinq valeurs de A' .

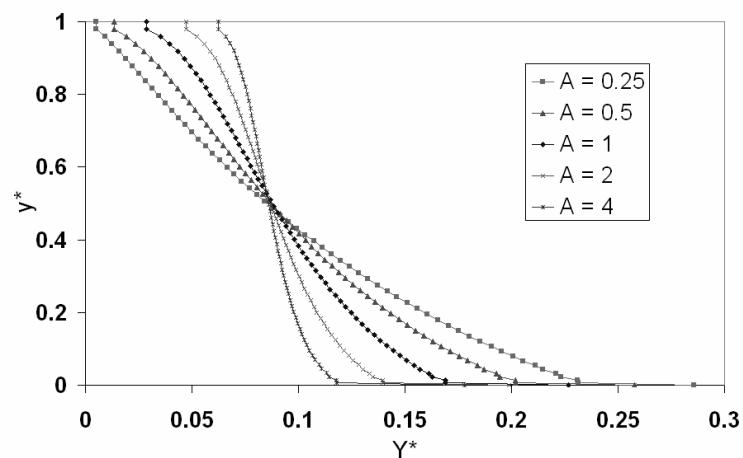


Figure 7.40 : Profils de fraction massique de sédiments, à $x^{**}=200$, pour cinq valeurs de A' .

7.3 Application à un cas plus réel : calcul approximé d'un écoulement au dessus d'une digue.

7.3.1 Calcul sans érosion

Dans ce chapitre, comme dans le chapitre précédent, nous avons attendu l'établissement des profils de vitesse avant de débuter l'érosion. Nous avons alors vu que pour des valeurs de pente et de hauteur d'entrée « raisonnables », nous obtenions des valeurs de contraintes à la paroi très importantes (de l'ordre de la centaine de Pascals). Or, il n'est pas du tout certain, dans la situation réelle d'une surverse de digue, que les profils de vitesse aient pu atteindre l'équilibre (notamment sur la pente aval). Le seul moyen de déterminer la forme exacte des profils de vitesse sur la crête et sur la pente aval de l'ouvrage consiste alors à réaliser le calcul complet de l'écoulement au dessus de la digue (de l'amont vers l'aval), Figure 7.41.

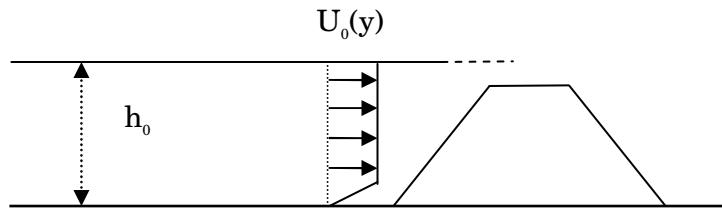


Figure 7.41 : Schéma de l'écoulement au dessus d'une digue.

Nous avons alors essayé, pour plusieurs hauteurs d'entrée, plusieurs profils de vitesse initiaux et plusieurs formes de digues, d'obtenir le champ de vitesse de l'écoulement, à partir de nos équations parabolisées de Navier-Stokes, à surface libre. Il s'est avéré qu'à partir de ces équations il était impossible de décrire un tel écoulement ; en effet lors de la montée de la pente amont de la digue, toutes les configurations étudiées présentent un décollement de l'écoulement, qui stoppe alors la résolution numérique.

On peut expliquer ces phénomènes de décollement à partir de l'équation de quantité de mouvement du fluide (sans érosion). Dans ce cas cette équation est :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_e u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_e u v) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_e g \sin \alpha \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_e g \cos \alpha \frac{dh}{dx} \quad (7.18)$$

Sur la pente amont de la digue, dans des axes liés à la digue, le dernier terme de (7.17), lié à la gravité, est négatif, il a donc tendance à ralentir l'écoulement (et peut provoquer un décollement). Ainsi, pour que l'écoulement « passe » au dessus de la digue, il faut que la diminution de la hauteur de la surface avec x (avant dernier terme de (7.17)) soit suffisamment importante pour contrer les effets de la gravité. La divergence systématique de nos calculs montre que le calcul est instable à partir de nos équations, ce qui nous a empêché de décrire correctement l'évolution de la surface libre.

Une approche différente est alors possible ; elle consiste à se donner la variation de la surface libre en fonction de x , calculée par un autre modèle approché. C'est ce que nous proposons de faire, en utilisant pour cela, le modèle de Bernoulli, avec quelques hypothèses simplificatrices. Nous ne présenterons ici que les résultats des calculs, l'approche théorique étant expliquée en Annexe IV-2.

Nous avons alors choisi une digue, de deux mètres de haut avec des pentes amont et aval de 20° , et une hauteur d'entrée de l'écoulement de 2.2 m.

Avec ces valeurs, on trouve, d'après l'Annexe IV-2, que la vitesse d'entrée (supposée constante sur l'épaisseur), pour obtenir un régime supercritique dans la pente, est $U_o=6.93 \cdot 10^{-2}$ m/s, et l'épaisseur de l'écoulement au sommet de la digue $h=0.133$ m. La même hauteur obtenue par le calcul numérique est $h=0.139$ m. Par contre la formule numérique présentée en fin de l'Annexe IV-2 qui sert à calculer l'évolution de la hauteur, est très sensible aux conditions initiales. Aussi la valeur théorique de la vitesse d'entrée ne permettait pas d'obtenir un régime supercritique à l'aval, nous avons donc pris une vitesse légèrement supérieure : $U_o=7.66 \cdot 10^{-2}$ m/s (qui donne les résultats escomptés).

La variation de la surface libre, calculée par le modèle de Bernoulli est présentée Figure 7.42.

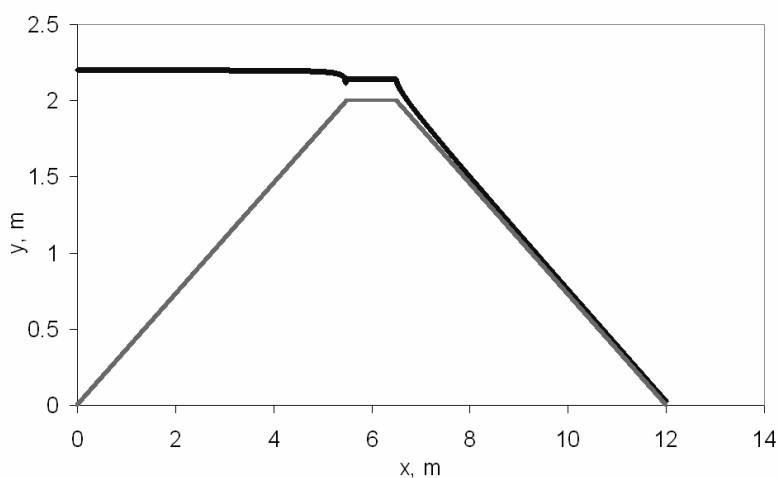


Figure 7.42 : Evolution de la surface libre au dessus de la digue, calculée par le modèle de Bernoulli.

Nous pensions alors utiliser directement la variation de l'épaisseur de l'écoulement en x , (dh/dx), donnée par Bernoulli, dans notre équation de quantité de mouvement (7.17). Malheureusement, cette approche a divergé, l'écoulement subissant tout de même un décollement.

Nous avons alors cherché le profil $\partial p/\partial x$ à imposer à nos équations parabolisées pour obtenir un profil de hauteur d'eau semblable à celui de la Figure 7.42, et non pas exactement identique. Comme le modèle de Bernoulli est approché et comporte des erreurs (en particulier dues à l'hypothèse du profil de vitesse plat), il est inutile de chercher à le reproduire précisément, il suffit de s'en approcher pour être réaliste.

Afin d'utiliser les résultats du modèle de Bernoulli, nous prenons un profil de vitesse d'entrée de même hauteur et débit que le profil constant défini précédemment. Ce profil est défini comme :

- linéaire de $y=0$ à $y=0.2$ m, avec $u(0)=0$ et $u(0.2)=8.02 \text{ m/s}$
- constant de $y=0.2$ à $y=2.2$ m, avec $u(y)=8.02 \text{ m/s}$.

Nous l'avons vu, le système de coordonnées que nous utilisons est lié à la paroi. Ainsi, dans des axes liés à la surface du fond de l'écoulement, la digue précédemment définie et montrée Figure 7.42 devient :

- une paroi d'inclinaison de -20° de $x=0$ à $x=5.85$ m ;
- une paroi horizontale de $x=5.85$ à $x=6.85$ m ;
- une paroi d'inclinaison de 20° de $x=6.85$ à $x=13$ m.

Sur les figures suivantes, l'abscisse x représentera alors la distance parcourue en suivant la surface de la digue, à partir de son pied amont.

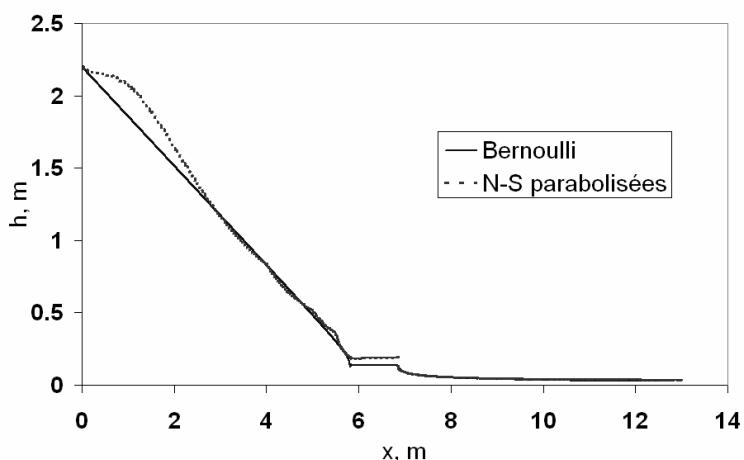


Figure 7.43 : Comparaison de la variation de la surface libre pour les deux modèles.

Nous présentons sur la Figure 7.43 la variation de la hauteur de la surface libre en fonction de la distance curviligne à la digue, calculée avec le modèle de Bernoulli et avec nos équations de couche à surface libre, et viscosité effective calculée avec le

modèle de longueur de mélange. Pour ces calculs, nous avons utilisés, de $x=0$ à $x=5.85$ m, un gradient de pression défini comme :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(1 + \frac{x^2}{(coef)} \right) \rho_e g \cos \alpha$$

avec $(coef)$ un coefficient numérique supérieur à 100, dont la valeur varie par morceaux suivant x . Puis le gradient de pression est pris nul sur la crête. Et, dans la pente, on utilise (7.17) et (7.18) pour le calculer.

Comme nous l'avons dit, cette approche n'est pas très rigoureuse ; elle nous fournit cependant un ordre de grandeur des vitesses et hauteurs rencontrées dans un écoulement au dessus d'une digue.

Nous avons comparé sur la figure suivante, les vitesses moyennes (intégrées sur l'épaisseur) des deux modèles utilisés ; leurs évolutions sont relativement semblables. La vitesse moyenne de (N-S parabolisées) est plus faible que (Bernoulli) et décroissante, sur la crête de la digue. Cela peut s'expliquer par la prise en compte, dans le premier modèle, des contraintes visqueuses (qui sur sol horizontal, vont ralentir l'écoulement). (N-S parabolisées) présente ensuite un saut de vitesse assez important, qui s'explique par le brusque changement de pente du sol. Sur la pente aval de la digue, les deux modèles donnent les mêmes valeurs sur une distance d'environ 1 mètre, puis les deux courbes se séparent, les contraintes visqueuses limitant l'accélération des vitesses.

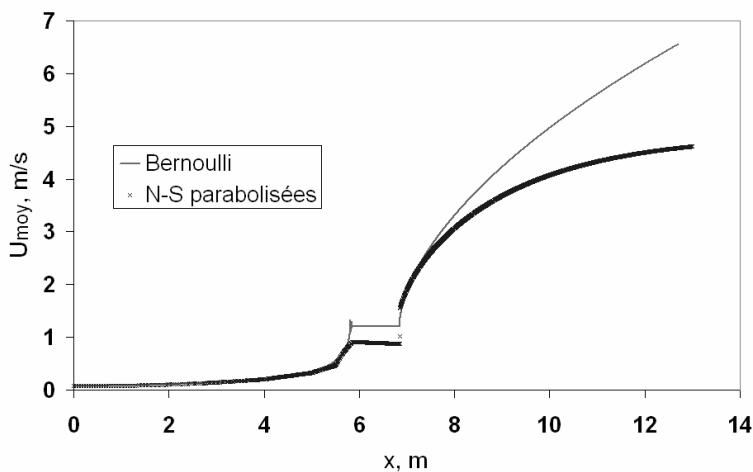


Figure 7.44 : Comparaison de la vitesse moyenne pour les deux modèles.

Le résultat le plus intéressant de ce calcul est bien sur l'évolution de la contrainte à la paroi, Figure 7.45 (nous rappelons que ces calculs ont été réalisés avec le modèle de viscosité à longueur de mélange).

La contrainte à la paroi reste faible, inférieure à 1 Pascal, sur les cinq premiers mètres ; elle atteint ensuite environ 7 Pascals en début de crête, pour décroître

jusqu'à 5 Pascals en fin de crête. Le brusque changement de la pente du sol à $x=6.85$ m provoque d'importants changements sur les profils de vitesse (ils s'effondrent), Figure 7.46, qui se répercutent sur la contrainte à la paroi. La contrainte ne cesse d'augmenter ensuite avec x , prouvant ainsi que les profils de vitesse n'ont pas encore atteint l'équilibre ; elle passe en effet de 30 Pascals en début de pente pour atteindre 100 Pascals en pied de digue. On comprend bien alors, que suivant la valeur de la contrainte critique du sol (si cette valeur est comprise entre 30 et 100 Pascals), l'érosion débutera soit directement en crête de digue, soit plus loin sur la pente, soit carrément en pied de digue, ce qui pourrait ensuite entraîner des glissements de pente (érosion par headcut).

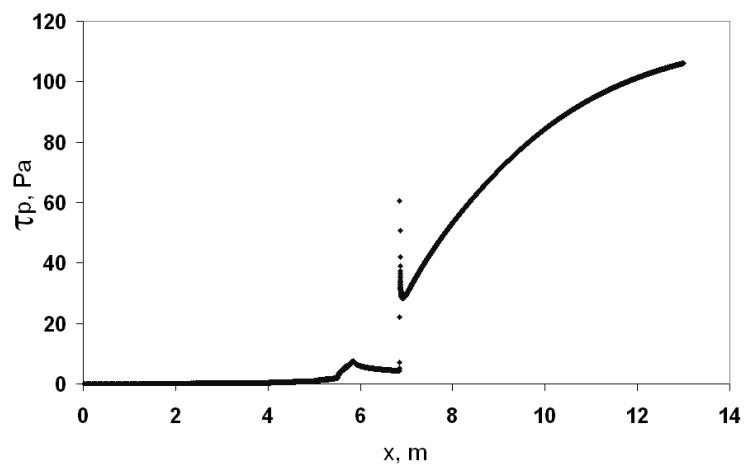


Figure 7.45 : Contraintes à la paroi, calculée par N-S parabolisées.

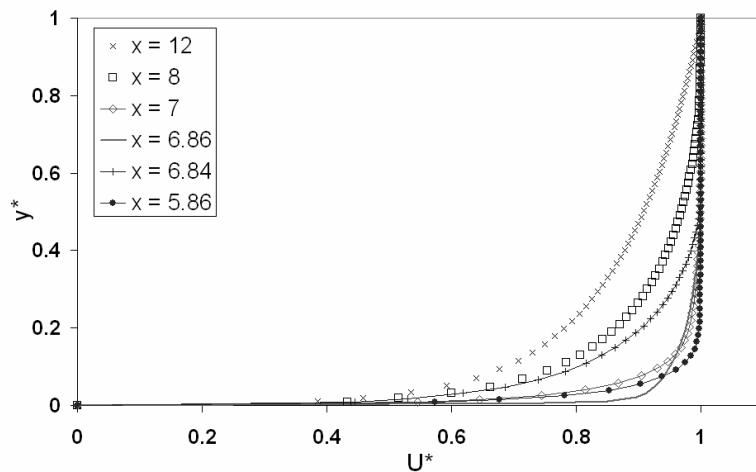


Figure 7.46 : Evolution des profils de vitesse adimensionnés.

7.3.2 Calcul avec érosion

D'après le calcul précédent, il apparaît très probable, que lors d'une surverse de digue, les profils de vitesse n'aient pas la distance suffisante pour atteindre leur équilibre. Dans cette situation particulière, si la contrainte pariétale (exercée par l'écoulement) dépasse la valeur de résistance critique du sol lors de l'accélération des vitesses, sur la pente aval, les évolutions du débit local érodé seront différentes de celles présentées précédemment.

En effet, précédemment nous avons observé, en déclenchant l'érosion sur des profils à l'équilibre, une décroissance de la contrainte pariétale, au tout début de l'érosion. Ce phénomène s'explique par l'importance du débit local érodé, eut égard à l'écart relatif de la contrainte pariétale par rapport à la contrainte critique. Or, si l'écoulement atteint la valeur de contrainte critique pendant son accélération, les premiers débits localement érodés seront très faibles, puisque l'écart entre la contrainte pariétale et la contrainte critique le sera. Cette faible érosion n'aura donc que peu d'influence sur l'écoulement qui continuera à accélérer, provoquant une augmentation de l'érosion.

Ainsi, la vitesse de régression du sol ne présentera plus, comme précédemment, une diminution en début d'érosion, mais au contraire, une amplification avec x .

Nous présentons pour illustrer cela, un calcul avec érosion, sur la digue définie ci-dessus. Nos paramètres de calculs sont : la contrainte critique égale à $\tau_c = 80 \text{ Pa}$, le modèle d'érosion $K \text{ infini}$ (afin d'avoir des débits érodés maxima), le nombre de Schmidt égal à 1, le sol et les sédiments sont semblables au Tableau 7-2.

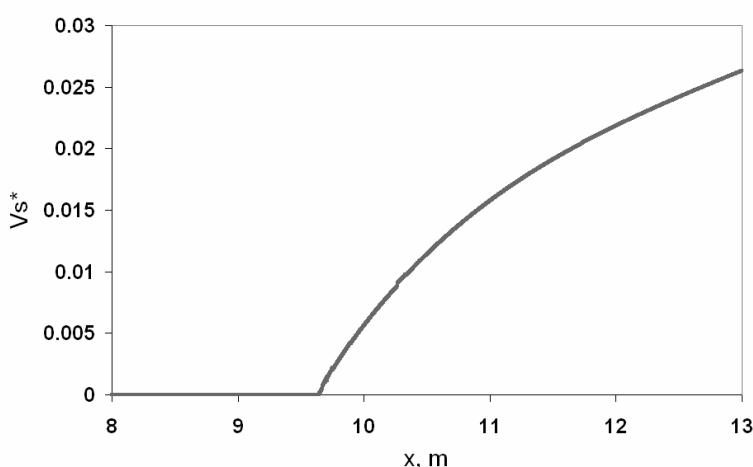


Figure 7.47 : Evolution de la vitesse de régression du sol V_s^* (définie en (6.8)) avec x .

Le débit local érodé augmente donc constamment avec x ; avec les paramètres choisis, on a $V_s = 0.08 \times V_s^*$ en m/s.

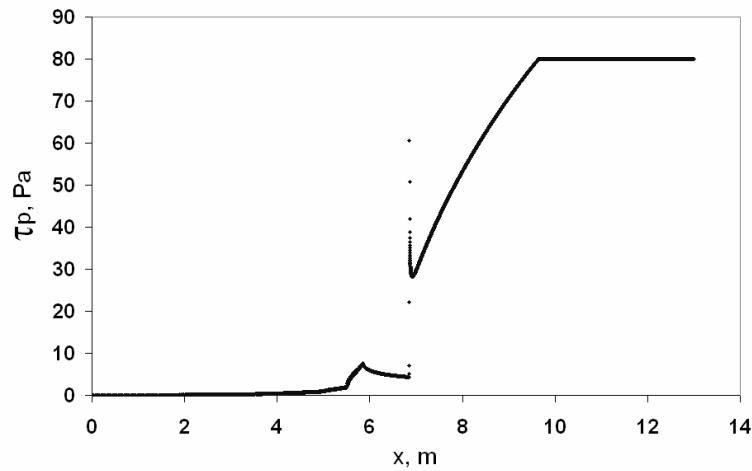


Figure 7.48 : Evolution de la contrainte, en Pascal, avec x .

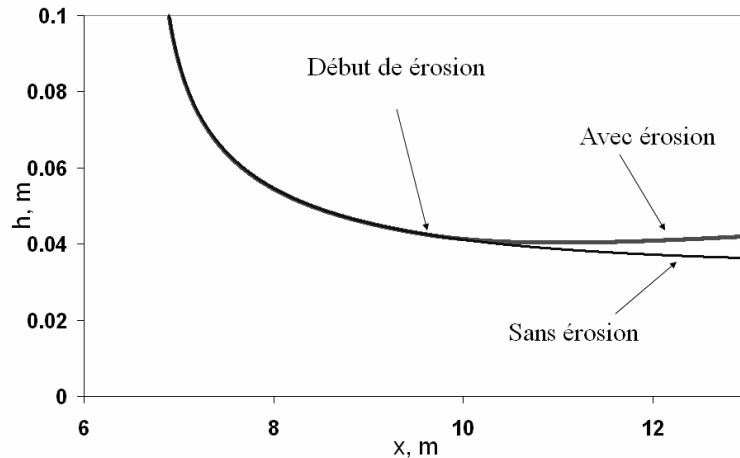


Figure 7.49 : Comparaison, avec et sans érosion, de l'épaisseur de l'écoulement dans la pente aval de la digue.

On voit clairement sur la Figure 7.49, que l'écoulement, avec érosion, continue à accélérer normalement au début de l'érosion, (les débits érodés étant trop faibles pour agir sur l'écoulement) ; ensuite les débits érodés augmentant, l'épaisseur de l'écoulement augmente elle aussi (mais l'écoulement continue d'accélérer, dû à la pente !).

Ces phénomènes restent bien sur semblables quelque soit la valeur de K .

7.4 Conclusion

Comparaisons générales des résultats :

Dans ce chapitre, nous avons donc présenté les résultats de notre modélisation du phénomène d'érosion, dans le cas d'un écoulement à surface libre, sur pente constante (et non nulle), pour deux modèles de viscosité effective.

Sur de nombreux points, les phénomènes observés dans la configuration de surface libre sont semblables à ceux du chapitre précédent ; à ceci près qu'ici, un seul régime d'érosion existe : le régime d'érosion illimité (à l'aval).

Le responsable en est bien sur la gravité (dans le sens de longitudinal), l'inclinaison du sol. En effet, dès que l'érosion s'initie quelque part, elle accroît le débit total de l'écoulement, qui va alors être accéléré davantage (cela même si les sédiments ont même masse volumique que le fluide).

Remarquons que cette accélération des vitesses n'est pas toujours visible dès le début de l'érosion. En effet si l'on attend l'établissement du profil de vitesse avant d'éroder, il faudra une certaine distance, à l'écoulement pour atteindre un nouveau profil d'équilibre (légèrement différent de celui sans érosion), qui sera alors effectivement accéléré (sans se déformer).

Les phénomènes obtenus ici, sont donc beaucoup moins riches physiquement, que dans le chapitre précédent : l'érosion une fois initiée, augmente (après une distance d'adaptation des profils de vitesse, si le profil initial est à l'équilibre) avec la distance parcourue vers l'aval.

Il est ainsi évident que plus la densité des sédiments, l'inclinaison du sol, le débit d'entrée de l'écoulement, seront importants et plus l'érosion sera importante et amplifiée.

Cette amplification de l'érosion peut d'ailleurs provoquer, comme dans le chapitre 6 et pour les mêmes raisons, des décollements de l'écoulement (les profils de vitesse à longueur de mélange y restent moins sensibles).

Nous ne revenons pas ici sur les différences des profils de vitesse et de fraction massique, relatives aux modèles de viscosité, ni sur la comparaison des débits érodés, déjà discutés avec la Figure 7.32.

Particularités du modèle à longueur de mélange :

Viscosité effective et rugosités de paroi :

Les phénomènes observés, relatifs à la viscosité et aux rugosités de paroi, sont de même nature que dans le chapitre 6, et ne nécessitent donc pas de commentaires supplémentaires.

Diffusion différentielle (sédiments plus lourds que l'eau) :

Comme dans le chapitre précédent, l'utilisation de ce modèle reste limitée à des diamètres de sédiments de l'ordre de 10e-4 m. Par contre les profils de vitesse se

déformant très peu, tout en étant accélérés, nous n'avons pas eu les problèmes précédents liés à la diminution locale des gradients de vitesse.

Cette approche nous a permis ici de mettre à jour un phénomène qui ne nous était pas apparu pour des écoulements de couche limite. Nous avons en effet remarqué que les forts gradients de vitesse régnant près de la paroi avaient tendance à diffuser très fortement les sédiments dans la couche fluide au tout début de l'érosion (cet effet étant limité ensuite par le gradient de pression orthogonal).

Aussi, dans cette situation d'écoulement à surface libre, la concentration préférentielle des sédiments dans la couche fluide a moins d'influence sur les débits érodés qu'en situation de couche limite (mais en a tout de même). Le terme source, lié à la gravité longitudinal, exprimé ici à partir de la masse volumique du mélange ρ (et non à partir de $(\rho - \rho_e)$ dans le cas d'une couche limite) a donc des valeurs beaucoup plus homogènes (plus proches) dans toute l'épaisseur de l'écoulement. La concentration préférentielle des sédiments dans l'écoulement joue donc moins sur le terme source, donc sur l'écoulement et sur l'érosion.

On retrouve tout de même que la présence accrue des sédiments près de la paroi augmente les débits érodés (et vice versa).

On comprend bien alors dans cette situation d'écoulement l'importance du rôle clef joué par la pente, notamment par le couplage qu'elle permet entre l'écoulement, l'érosion local et le transport des matières érodées.

Réflexion sur les résultats obtenus :

Ces résultats amènent tout naturellement à se poser un certain nombre de questions ; sur lesquelles nous reviendrons dans le dernier chapitre.

Nous avons en effet vu, en partant des profils d'équilibre de vitesse que les contraintes pariétales exercées par le fluide étaient très élevées (typiquement de l'ordre de 100 Pascals). Nous ne sommes évidemment pas certain que, dans la situation d'un écoulement à surface libre au dessus d'une digue, les profils de vitesse aient la distance nécessaire pour atteindre leur équilibre. Le calcul approximatif, de la partie 7.3, tendrait d'ailleurs à confirmer cela ; et, même si les profils continuent à accélérer sur la pente aval de la digue, nous avons vu que les contraintes appliquées au sol par l'écoulement restaient très élevées (sur la pente amont de la digue l'écoulement est accéléré, et les vitesses obtenues en crête d'ouvrage sont déjà relativement importante : à peu près 1 m/s, pour le calcul présenté en 7.3).

Dans ces conditions d'écoulement, la valeur de la contrainte critique définie par Shields (voir chapitre 1) paraît excessivement faible ; avec les contraintes que nous obtenons par nos calculs, la digue va être littéralement balayée dès le début de la surverse. Une telle cinétique de rupture (extrêmement rapide) n'est généralement pas observée dans la réalité, typiquement les temps nécessaires à la rupture

complète d'un ouvrage sont de l'ordre de quelques heures au minimum (CIGB (1998)).

Aussi, on peut légitimement penser que la contrainte définie par Shields n'est pas utilisable pour décrire les matériaux constituant une digue (ou un barrage). Il est en effet très probable que les différents arrangements entre grains, de différentes tailles, et de différents matériaux, la compaction subie lors de la construction de l'ouvrage, l'éventuelle cohésion, ..., augmentent notablement la valeur de la contrainte critique d'initiation de l'érosion du matériau de la digue.

La connaissance de la valeur de la contrainte critique du sol est bien sur un aspect fondamental de la modélisation de l'érosion d'une digue. Mais il apparaît aussi clairement, qu'il est nécessaire de connaître l'évolution des profils de vitesse et des contraintes sur toute la longueur de la digue. On peut ainsi en déduire l'emplacement exact de l'initiation de l'érosion sur la digue (en crête, sur la pente aval ou en pied) qui influencera énormément, en début d'érosion, la cinétique de développement de la brèche. Malheureusement de tels calculs, d'écoulement au dessus d'une digue, sont difficilement réalisables avec nos équations parabolisées, il serait donc nécessaire d'utiliser les équations complètes de Navier-Stokes avec deux phases (air et eau)...

Chapitre 8

Conclusions et perspectives

8.1 Travail accompli. Améliorations

8.1.1 Travail accompli

Représentation théorique générale

L'érosion d'un sol par un écoulement fluide est un phénomène complexe. En effet le fluide agit sur le sol, qui en s'érodant va apporter une quantité plus ou moins importante de sédiments à l'écoulement ; ces sédiments pouvant à leur tour agir sur le fluide,...

La plupart des modèles dédiés à la description de ce type d'érosion en ont une approche globale, et particulière à l'hydraulique fluviale. Ainsi, les quantités érodées sont évaluées à partir des caractéristiques moyennes de l'écoulement, et l'on néglige les effets dûs à l'apport de sédiments sur le fluide. Sous certaines conditions d'écoulement, notamment à fortes pentes, ces modèles de transport apparaissent totalement incapables d'évaluer correctement les quantités érodées ; cela peut s'expliquer par la simplicité des modélisations effectuées, qui négligent de nombreux phénomènes, et l'approche descriptive trop global, qui traduit en fait notre manque de compréhension des phénomènes.

L'objectif de cette recherche a été d'améliorer la compréhension des phénomènes liés à l'érosion hydraulique des sols de fortes pentes, et des éventuelles interactions existantes entre ces phénomènes.

Pour ce faire, il nous est apparu important de développer une approche théorique d'ordre général, permettant une description locale, de l'érosion et de l'écoulement fluide (éventuellement du sol), et tenant compte de la présence des sédiments dans ce même fluide.

Pour décrire ainsi, localement et rigoureusement, les phénomènes liés à l'érosion hydraulique, il est nécessaire :

- d'utiliser un modèle fluide diphasique et turbulent, donnant accès aux vitesses et densités moyennes locales (Equations de Navier-Stokes diphasiques) ;
- d'exprimer les conditions à l'interface solide/fluide, traduisant les échanges de matières (et de quantité de mouvement) entre les deux phases dûs à l'érosion (Relation de Rankine Hugoniot) ;
- de posséder une loi d'érosion (locale), qui permette, à partir des caractéristiques locales du fluide, d'en déduire un débit érodé local ;
- (- dans l'absolu il serait aussi nécessaire de décrire ce qu'il se passe dans le sol ; cela ne sera pas développé ici).

Ces différents aspects furent présentés dans un cas général dans les chapitres 2 et 3.

Remarque :

- Dans de tels problèmes où deux (ou plus) phases coexistent et échangent de la matière à travers une interface commune, il apparaît absolument nécessaire de considérer cette interface comme une frontière interne au système, et d'y exprimer les conditions de flux et de concentrations. Ce n'est en effet que par ces conditions que l'on pourra décrire de façon couplée le sol et le fluide, et en déduire la cinétique de l'interface.

Loi d'érosion

Nous avons ici proposé deux lois d'érosion. Ce sont des lois de seuil, basées sur le principe que la contrainte tangentielle exercée par le fluide doit être supérieure ou égale à la résistance critique du sol pour que l'érosion se produise.

Ces lois sont bien sur très simples, et des améliorations restent à faire (chapitre 3).

Remarquons cependant que notre loi d'érosion « *K infini* », parait être une approche relativement unique, d'après la littérature, pour décrire des phénomènes d'érosion.

Modèle turbulent de diffusion différentielle

Nous avons à partir des équations de Navier-Stokes moyennées de chacune des phases, solide et fluide, issues de Février et Simonin (2000), déduit l'équation vérifiée par la différence des vitesses moyennes entre la phase solide et le mélange (vitesse de diffusion des sédiments dans l'eau). A partir de cette équation, nous

avons supposé que les termes de production et de dissipation étaient supérieurs à tous les autres. Nous en avons alors déduit une formule algébrique différentielle du flux de diffusion. Cette expression fait intervenir deux temps caractéristiques (à l'échelle du ou des grains, et à l'échelle de la turbulence), et permet surtout de tenir compte du gradient de pression orthogonal à l'écoulement, lié à la gravité. Cette approche est donc très riche, et beaucoup plus rigoureuse que celle consistant à ajouter la vitesse de chute d'une particule à l'équation de quantité de mouvement des sédiments. Malheureusement, cette formule apparaît très délicate à utiliser, et n'est valable pour une gamme très réduite des valeurs des paramètres (le diamètre des sédiments). Ce résultat tendrait à signifier que l'hypothèse « production = dissipation » est un peu forte, et qu'il est alors nécessaire d'avoir des modèles non locaux, qui utilisent l'équation différentielle complète.

Résultats numériques de la modélisation

La résolution des équations de Navier-Stokes complètes instationnaires étant relativement difficile et nécessitant de gros moyens de calculs, nous avons étudié deux configurations d'écoulement relativement simples, nous permettant de notablement simplifier les équations. Avec ces équations dites de « couche », nous avons supposé, dans des axes liés au sol, le régime d'écoulement permanent.

Nous avons alors, pour chacune des configurations d'écoulement, et pour deux modèles de viscosité effective, étudié l'influence de chacun des paramètres sur l'érosion. Le résultat le plus important est sans doute la mise en évidence du rôle clef joué par la gravité par l'intermédiaire de la pente du sol. On peut ainsi dire que la pente permet un fort couplage entre l'érosion, l'écoulement, et le transport des sédiments érodés. On a d'ailleurs vu que la diffusion préférentielle des sédiments dans l'écoulement provoquait des effets sur l'érosion, visibles localement et globalement (cela s'est d'avantage vérifié dans la situation d'écoulement de couche limite). Ce résultat était en fait prévisible puisque la gravité est un terme source positif de l'équation de quantité de mouvement.

A surface libre, nous avons vu que, typiquement, l'écoulement exerçait une contrainte sur le sol de l'ordre de la centaine de Pascals. Aussi, il est légitime de se poser la question de la validité de la contrainte critique définie par Shields pour les matériaux composant une digue ou un barrage. On comprend bien qu'avec une telle valeur de contrainte critique, l'ouvrage va disparaître dès le début de l'érosion. Il est en fait très probable que la contrainte critique de tels matériaux soit beaucoup plus importante que celle de Shields ; de multiples raisons expliqueraient cela : forte polydispersion, formes irrégulières des grains, nature différente des matériaux, réarrangements, compactage, cohésion...

Critique du travail accompli

La principale critique que l'on puisse faire au sujet de ce travail est le manque de comparaisons des résultats numériques obtenus avec des résultats expérimentaux, voire numériques. La raison en est simple, nous n'avons pas trouvé dans la littérature d'expériences permettant de comparaisons directes avec notre modélisation. En effet la plupart des travaux expérimentaux s'intéressent plutôt au transport des sédiments qu'à leur érosion. De plus les expériences étudiant l'érosion donnent plutôt des résultats globaux des débits érodés.

Ainsi, il apparaît difficile à l'heure actuelle de valider nos résultats par des expériences déjà réalisées. On peut par contre, proposer quelques expérimentations possibles, que l'on pourrait reproduire avec notre modèle ; cela est présenté un peu plus loin.

Conclusion

La méthode numérique utilisée pour résoudre nos équations, développée par Patankar et Spaldings (1970), est très rapide et robuste. Le système de coordonnées utilisé permet de suivre parfaitement les évolutions d'épaisseur de l'écoulement (dans des configurations relativement simples). Les routines en Fortran 77, sont relativement simples et accessibles. Aussi, le code que nous avons développé peut s'avérer être un outils très pratique pour développer de nouvelles approches théoriques (flux de diffusion, lois de comportement, lois d'érosion, temps caractéristiques...), ou évaluer l'importance d'un terme par rapport à un autre.

8.1.2 Améliorations et réflexions

Viscosité effective : Modèle à longueur de mélange

La formule de longueur de mélange que nous avons utilisée en écoulement à surface libre, d'après Kovacs 1998, correspond en fait à celle d'un écoulement d'eau pure. Nous n'avons donc pas vraiment tenu compte de l'influence des sédiments sur celle-ci. Ce même auteur propose, dans le même article, une amélioration de cette formule à l'aide d'une fonction d'atténuation qui tend à diminuer la longueur de mélange avec la concentration croissante des sédiments. Cette vision des phénomènes ne semble pas universellement partagée.

Un autre moyen de prendre en compte l'effet les sédiments sur la viscosité existe ; il s'agit d'utiliser un modèle de fermeture à une équation.

Viscosité effective : Modèle à une équation, le schéma de Prandtl-Kolmogorov

Nous avons vu dans le chapitre 5, que toutes les équations des différentes variables s'écrivaient sous la même forme, seul le terme source variant suivant la variable considérée. Ainsi, il est relativement aisé d'un point de vue numérique d'ajouter une équation à résoudre. Il est ainsi possible d'ajouter l'équation de l'énergie cinétique de turbulence du mélange, k , que l'on peut obtenir à partir des travaux de

Février et Simonin (2000), et d'en déduire par le schéma de Prandtl-Kolmogorov la viscosité effective comme (Chassaing (2000)) :

$$\mu_{\text{eff}} = \rho C_\mu l \sqrt{k}$$

où C_μ est une constante pure, et l une échelle de longueur qui reste donnée algébriquement.

Quelques approximations seront sans doute nécessaires, pour l'utilisation de cette équation, mais cela permettra une description plus riche et plus complète des phénomènes.

De même, l'utilisation de modèles de fermeture à deux équations est aussi envisageable.

Temps et longueurs caractéristiques

Comme nous l'avons vu, la description des interactions entre fluide et sédiments fait intervenir des temps caractéristiques et la « longueur de mélange » est une longueur caractéristique des phénomènes. Or il est très probable, suivant l'intensité de la turbulence, suivant la concentration, la taille et la densité des particules, que la présence des sédiments agissent sur la turbulence (et vice versa) modifiant les temps et longueurs caractéristiques relatifs aux différents phénomènes.

Ces temps et longueurs caractéristiques ont donc un rôle très important pour modéliser la complexité des phénomènes impliqués entre les phases. Des études fondamentales, sur des situations simples, sont encore nécessaires pour préciser ce qui contrôle ces temps et longueurs...

Dépôt, érosion

Nous n'avons pas, dans notre modélisation, considéré les phénomènes de dépôt des particules sur la paroi. Nous avons en effet supposé, vu les pentes et les vitesses considérées, que les sédiments étaient totalement entraînés par l'écoulement.

La modélisation que nous avons développée permettrait toute fois de le considérer, à condition bien sûr d'en connaître la loi et la valeur de la contrainte critique de dépôt.

Des modifications au modèle d'érosion seraient sans doute souhaitables, vu sa simplicité actuelle. On peut tout de même penser que, si la contrainte tangentielle exercée par le fluide est la seule responsable (la plus importante) des phénomènes d'érosion, la formule que nous utilisons, reliant linéairement le débit local érodé à la différence des contraintes (pariétale et critique), n'est pas une trop mauvaise approximation pour une érosion locale faible (on reste en effet près de l'équilibre).

Mais, il est possible, nous en avons déjà parlé, d'introduire dans le modèle l'effet de la contrainte normale et aussi celui de la teneur en eau du sol.

Questions ouvertes

L'influence des fluctuations turbulentes de vitesse et de contraintes à la paroi sur l'érosion :

déjà, faire intervenir la contrainte normale dans le modèle d'érosion revient à faire intervenir les fluctuations de vitesse, car cette contrainte normale comprend $\widetilde{v^2}$. On peut se demander aussi s'il ne faudrait pas faire intervenir, en plus de la contrainte tangentielle moyenne, les fluctuations de celle-ci. Ceci pourrait être relié aux phénomènes physiques connus de « burst », « sweep » à la paroi d'une couche limite turbulente.

Le problème de la rugosité de la paroi doit être travaillé plus lui aussi, et on peut même se demander si un couplage plus intime avec le sol compact, par une couche poreuse qui se déforme, ne serait pas nécessaire.

Projection dans le futur...

L'évolution logique (et futuriste ?) de ce travail consisterait à effectuer un calcul d'écoulement instationnaire tridimensionnel au dessus d'une digue, avec prise en compte de l'érosion locale qui provoquera une régression locale de l'interface sol-eau. Pour vraiment modéliser la rupture d'une digue, on pourrait alors coupler le déplacement de l'interface avec un calcul de stabilité des pentes. On serait ainsi capable de décrire en fonction du temps la cinétique de rupture de l'ouvrage.

Une telle approche sera numériquement difficile à mettre en place, il faut en effet considérer trois phases, l'air, l'eau et le sol, avec déplacement de l'interface entre chacune d'elle. Vu les problèmes rencontrés, dans des situations d'écoulements diphasiques relativement simples, avec de gros logiciel de calculs tels Fluent ou Aquilon ; de l'eau va encore couler sur les digues avant que l'on puisse utiliser une approche aussi complète.

8.2 Validations expérimentales

Nous avons considéré pour nos applications numériques deux configurations distinctes d'écoulement : écoulement de couche limite et écoulement à surface libre. Il est clair que la première configuration est difficile à reproduire expérimentalement, à cause de l'épaississement de la couche limite avec la distance. La configuration à surface libre paraît plus facilement reproductible, mais nous avons vu qu'une pente d'eau moins 10° était nécessaire à la convergence des profils de vitesse, aussi une telle inclinaison n'est pas accessible à tous les canaux expérimentaux.

Une dernière configuration possible, non considérée ici, est un écoulement de poiseuille entre deux parois, la paroi inférieure étant érodable sur une distance finie. Cette configuration paraît la plus pratique et simple à utiliser, tant numériquement, qu'expérimentalement ; on a en effet la totale maîtrise du débit d'entrée et les profils d'équilibre sont connus analytiquement. Ce type d'écoulement

peut alors être réalisé horizontalement, comme incliné, permettant ainsi d'étudier l'influence de la gravité. Cela est représenté schématiquement Figure 8.1.

Une telle expérience pourrait permettre d'étudier la variation du débit local érodé avec la distance, on pourrait aussi envisager la mesure des débits globaux érodés. Cela permettrait de pouvoir calibrer notre modèle d'érosion. Des mesures de profils de vitesse et surtout de concentration pourraient nous permettre, à partir des résultats numériques obtenus dans la même configuration, d'évaluer quels termes sont prédominants dans la diffusion des sédiments.

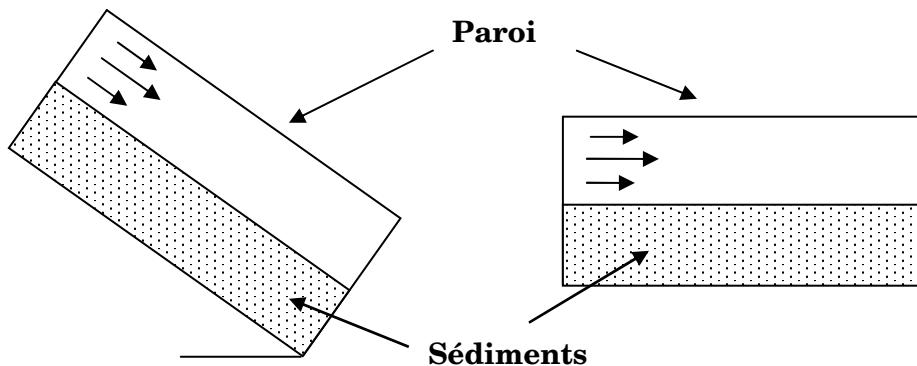


Figure 8.1 : Schéma de 2 configurations expérimentales possibles.

Un autre phénomène d'érosion (interne cette fois-ci, à comparer à l'érosion externe due à la surverse) touchant les ouvrages hydrauliques peut être décrit par notre modèle. Il s'agit du phénomène de renard : dans un écoulement en milieu perméable (dans le corps de certains ouvrages), l'eau peut atteindre localement des vitesses élevées susceptibles d'entraîner les particules fines du sol. De ce fait, le sol étant rendu localement plus perméable, la vitesse de décharge augmente et le phénomène s'amplifie. Des éléments plus gros vont être entraînés tandis que l'érosion progressera de manière régressive le long d'une ligne de courant. Un conduit se forme par où l'eau s'engouffre et désorganise complètement le sol. C'est le phénomène de renard.

Ainsi, on peut représenter un renard comme un écoulement de poiseuille axisymétrique, dans une conduite érodable (le système de coordonnées que nous utilisons permet d'étudier de tels écoulements). Expérimentalement, on peut reproduire ce phénomène en creusant un puit dans un matériau cohésif, et en y injectant un certain débit fluide.

Cette approche semble possible, par contre la visualisation des phénomènes semble plus difficile, de par l'aspect interne de cette érosion.

Conclusion

L'érosion hydraulique des sols sur fortes pentes implique des phénomènes complexes et variés, qui restent encore difficiles à appréhender par la modélisation. Il apparaît d'ailleurs clairement que les modèles de transport issus de l'hydraulique fluviale sont à proscrire pour décrire de telles situations (vis-à-vis du modèle hydraulique, beaucoup trop simple ; et de la valeur de contrainte critique de Shields, qui paraît, pour les matériaux constituant la digue, très sous-estimée). Nous avons dans ce travail proposé un modèle de description de l'érosion, constitué d'un modèle d'écoulement turbulent diphasique, d'une loi d'érosion locale, et de conditions aux limites à l'interface eau/sol. La particularité de ce modèle tient dans la description locale de l'érosion.

Ce modèle est relativement simple, et de nombreuses améliorations restent encore à faire. Les résultats obtenus, numériques, montrent l'importance du couplage entre l'érosion, le fluide, et la quantité de matériaux érodés transportés. La gravité, dans le sens de l'écoulement, apparaît comme un terme moteur de ces couplages.

Les résultats numériques obtenus n'ont pu être comparés avec aucune expérience existante, nous en proposons cependant qui permettraient de le faire.

La méthode numérique développée ici, à partir des travaux de Patankhar et Spalding (1970), très rapide et robuste pour des situations d'écoulement relativement simples, apparaît être un outil très utile pour tester différentes approches théoriques nouvelles.

Il apparaît clairement que des modélisations complètes du phénomène de surverse, instationnaires et tridimensionnelles avec déplacement de l'interface eau/sol, ne sont pas encore à l'ordre du jour. Aussi il est nécessaire de réfléchir à de nouveaux types de modèles, dont la complexité sera limitée, utilisables par l'ingénieur.

Table des références :

- [1] Aguirre-Pe J., Olivero M. O., Moncada A. T., Particle Densimetric Froude Number for Estimating Sediment Transport, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 129, No. 6, pp. 428-437, 2003.
- [2] Akçay M., Yükselen M. A., Drag reduction of a nonnewtonian fluid by fluid injection on a moving wall, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 69, pp. 215-225, 1999.
- [3] Alexander J., Mulder T., Experimental quasi-steady density currents, *Marine Geology*, No. 186, pp. 195-210, 2002.
- [4] Andrews D. P., Coleman S. E., Webby M. G., Melville B. W., Noncohesive embankment failure due to overtopping flow, Proc., 28 th Congress of the Int. Association for Hydraulic Research, Graz, Austria, 1999.
- [5] Annandale G. W., Erodibility, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, No. 4, pp. 471-494, 1995.
- [6] Aradian A., Raphaël E., de Gennes P-G., Surface flows of granular materials: A short introduction to some recent models, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 2, Série IV, pp. 1-10, 2001.
- [7] Ariathurai, Arulanandan, Erosion rates of cohesive soils, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE* 104(2), pp. 279-293, 1986.
- [8] Baird D. C., Nemeth M. S., Slaugh D. A., Turbulent Velocity Profiles in a Highly Mobile Sand Bed Channel, Conf. Proc., *Hydraulic Measurements and Experimental Methods*, 2002.
- [9] Bellette J., Bataille F., Lallemand A., A new approach for the study of turbulent boundary layers with blowing, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, No. 42, pp. 2905-2920, 1999.
- [10] Berlamont J. E., Trouw K., Luyckx G., Shear Stress Distribution in Partially Filled Pipes, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 129, No. 9, pp. 697-705, 2003.
- [11] Bocchiola D., Catalano F., Menduni G., Passoni G., An analytical-numerical approach to the hydraulics of floating debris in river channels, *Journal of Hydrology*, No. 269, pp. 65-78, 2002.
- [12] Boudreau B. P., A one-dimensional model for bed-boundary layer particle exchange, *Journal of Marine Systems*, No. 11, pp. 279-303, 1997.

TABLE DES REFERENCES

- [13] Breedveld V., Van Den Ende D., Tripathi A., Acrivos A., The measurement of the shear-induced particle and fluid tracer diffusivities in concentrated suspensions by a novel method, *J. Fluid Mech.*, Vol. 375, 1998.
- [14] Briaud J. L., Ting F. C. K., Chen H. C., Cao Y., Han S. W., Kwak K. W., Erosion Function Apparatus for Scour Rate Predictions, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 127, No. 2, 2001.
- [15] Brufau P., Garcia-Navarro P., Ghilardi P., Natale L., Savi F., 1D Mathematical modelling of debris flow, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 38, No. 6, pp. 435-446, 2000.
- [16] Brunone B., The Albert Shields Story, *J. of Hydraulic Engineering*, pp. 663-666, July 1997.
- [17] Cadiergue S., Michaux-Leblond N., Bélorgey M., Vitesse de chute d'une particule lourde isolée dans un écoulement turbulent, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, Série II b, p. 1379-1384, 1999.
- [18] Cao Z., Wei L., Xie J., Sediment-Laden Flow in Open Channels from Two-Phase Flow Viewpoint, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 121, No. 10, pp. 725-735, 1995.
- [19] Capart H., Dam-break induced geomorphic flows and the transition from solid- to fluid-like behaviour across evolving interfaces, *PhD Thesis*, Univ. Catholique de Louvain, Belgium, 2000.
- [20] Carollo F. G., Ferro V., Termini D., Flow Velocity Measurements in Vegetated Channels, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 128, No. 7, pp. 664-673, July 2002.
- [22] Carpen I. C., Brady J. F., Gravitational instability in suspension flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 472, pp. 201-210, 2002.
- [23] Chamkha A. J., Particulate Viscous Effects on the Compressible Boundary-Layer Two-phase Flow over a Flat Plate, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 25, No. 2, pp. 279-288, 1998.
- [24] Chanson H., *Sediment transport mechanisms 1. Bed-load transport, The Hydraulics of Open Channel Flow*, Published in 1999 by Arnold, 338 Euston Road, London NW1 3BH, UK.
- [25] Charru F., Mouilleron-Arnould H., Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 452, pp. 303-323, 2002.
- [26] Chassaing, P., *Turbulence en mécanique des fluides, Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur*, Coll. Polytech, Editon CEPADUES, 2000.
- [27] Chen H., Lee C. F., Numerical simulation of debris flows, *Can. Geotech. J.*, Vol. 37, pp. 146-160, 2000.
- [28] Chen X., Chiew Y-M., Velocity Distribution of Turbulent Open-Channel Flow with Bed Suction, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 130, No. 2, pp. 140-148, 2004.

TABLE DES REFERENCES

- [29] Cheng N. S., Effect of Concentration on Settling Velocity of Sediment Particles, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 123, No. 8, pp. 728-317, August 1997.
- [30] Cheng N-S., A diffusive model for evaluating thickness of bedload layer, *Advances in Water Resources*, No. 26, pp. 875-882, 2003.
- [31] Cheng N-S., Chiew Y-M., Turbulent open-channel flow with upward seepage, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 36, No. 3, pp. 415-431, 1998.
- [32] Chopard B., Masselot A., Dupuis A., A lattice gas model for erosion and particles transport in a fluid, Proc., *LGA'99 Conf.*, Tokyo, 1999.
- [33] CIGB, Etude d'onde de rupture de barrage, Synthèse et recommandation, Bulletin no. 111, 301 p., 1998.
- [34] Cotton M. A., Ismael J. O., A strain parameter turbulence model and its application to homogeneous and thin shear flows, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, No. 19, pp. 326-337, 1998.
- [35] Coussot P., Meunier M., Recognition, classification and mechanical description of debris flows, *Earth-Science Reviews*, No. 40, pp. 209-227, 1996.
- [36] Coussot P., Piau J.-M., The effects of an addition of force-free particles on the rheological properties of fine suspensions, *Can. Geotech. J.*, No. 32, pp. 263-270, 1995.
- [37] Cousteix J., *Turbulence et couche limite*, Editions Cepaduès, Toulouse, 694 pp., 1989.
- [38] Czernuszenko W., Rylov A., A Turbulence Model For Flows In Two-Stage-Channels, Proc., *5th International Conference on Hydro-Science and Engineering*, Warsaw, 2002.
- [39] Damgaard J. S., Whitehouse R. J. S., Soulsby R. L., Bed-Load Sediment Transport on Steep Longitudinal Slopes, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 123, No. 12, pp. 1130-1138, 1997.
- [40] Damgaard J., Soulsby R., Peet A., Wright S., Sand Transport on Steeply Sloping Plane and Rippled Beds, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 129, No. 9, pp. 706-719, 2003.
- [41] Davies A. G., Villaret C., Prediction of sand transport rates by waves and currents in the coastal zone, *Continental Shelf Research*, No. 22, pp. 2725-2737, 2002.
- [42] De Langre E., Analyse dimensionnelle en interaction fluide-structure, *La Houille Blanche*, No. 3/4, 2000.
- [43] De Sutter R., Huygens M., Verhoeven R., Bed Shear Stress Governing Erosion on Cohesive Mixtures, Proc., *28 th Congress of the Int. Association for Hydraulic Research*, Graz, Austria, 1999.
- [44] Dey S., Sediment threshold, *Appl. Math. Modelling*, Vol. 23 (1999) 399-417.

TABLE DES REFERENCES

- [45] Di Federico V., Guadagnini A., Propagation of a plane non-newtonian gravity current, Proc., *28 th Congress of the Int. Association for Hydraulic Research*, Graz, Austria, 1999.
- [46] Dohmen-Janssen C., Kroekenstoe D. F., Hassan W. N., Ribberink J. S., Phase lags in oscillatory sheet flow: experiments and bed load modelling, *Coastal Engineering*, Vol. 46, pp. 61-87, 2002.
- [47] Egashira S., Honda N., Itoh T., Experimental Study on the Entrainment of Bed Material into Debris Flow, *Phys. Chem. Earth*, Vol. 26, No. 9, pp. 645-650, 2001.
- [48] El Ganaoui O., *Contribution à la modélisation de l'influence de la dynamique sédimentaire sur les transferts des effluents liquides radioactifs dans les cours d'eau*, Thèse de Doctorat, Aix-Marseille II, 2002.
- [49] Feng Z.-G., Michaelides E., Fluid-Particles interactions and Resuspension in Simple Shear Flow, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 129, No. 12, pp. 985-994, 2003.
- [50] Ferziger J. H., Simulation of Environmental Flows: Similarities and Differences from Technological Flows, *Computers and Mathematics with Applications*, No. 46, pp. 591-602, 2003.
- [51] Fevrier, P., Simonin, O., Constitutive Relations for Fluid-Particle Velocity Correlations in Gas-Solid Turbulent Flows, *Third International Conference on Multiphase Flows, ICMF'98*, Lyon, France, June 8-12, 1998.
- [52] Fevrier, P., Simonin, O., 2000 Statistical and continuum modelling of turbulent reactive particulate flows. Part II : Application of a two-phase second moment transport model for prediction of turbulent gas-particle flows. *VKI for Fluid Dynamics, Lecture Series 2000-06*.
- [53] Fouli H., Morin V. M., Zhu D. Z., Interfacial instabilities in two-layer exchange flow over smooth topography, Conf. Proc., *Hydraulic Measurements and Experimental Methods*, 2002.
- [54] Fraccarollo L., Capart H., Riemann wave description of erosional dam-break flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 461, pp. 183-228, 2002.
- [55] Fraccarollo L., Capart H., Zech Y., A Godunov method for the computation of erosional shallow water transients, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 41, pp. 951-976, 2003.
- [56] Fread, D., *BREACH: An Erosion Model for Earthen Dam Failures*, National Weather Service, National Oceanic and Atmospheric Administration, Silver Spring, Maryland, 1988 (revised 1991).
- [57] Frenette, R., Zimmermann T., Eyheramendy D., Unified Modeling of Fluid or Granular Flows on Dam-Break Case, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 128, No. 3, pp. 299-305, 2002.
- [58] Ghilardi P., Natale L., Savi F., Modeling Debris Flow Propagation and Deposition, *Phys. Chem. Earth*, Vol. 26, No. 9, pp. 651-656, 2001.

TABLE DES REFERENCES

- [59] Ghilardi P., Savi F., Brufau M. P., Garcia-Navarro P., Mathematical modelling of debris flows with a finite volume scheme, Proc., 28 th Congress of the Int. Association for Hydraulic Research, Graz, Austria, 1999.
- [60] Giuseppetti, G., Molinaro, P., A Mathematical Model of the Erosion of an Embankment Dam by Overtopping, *International Symposium on Analytical Evaluation of Dam related Safety Problems*, Copenhagen, p. 46, 1989.
- [61] Gladstone C., Phillips J. C., Sparks R. S. J., Experiments on bidisperse, constant-volume gravity currents: propagation and sediment deposition, *Sedimentology*, No. 45, pp.833-843, 1998.
- [62] Graziano L., Marasco A., Balance laws for continua with an interface deduced from multiphase continuous models with a transition layer, *Int. J. Eng. Sci.* 39 (2001) 873-896.
- [63] Greimann B. P., Holly Jr. F. M., Two-Phase Flow Analysis of Concentration Profiles, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 127, No. 9, pp. 753-761, 2001.
- [64] Guo J., Hunter House and Shields diagram, Proceedings of the 13th IAHR-APD Congress, Singapore, 6-8 Aug. 2002.
- [65] Guyon, E., Hulin, J. P., Petit L., *Hydrodynamique physique*, InterEditions/Editions du CNRS, 1991.
- [66] Hogg A. J., Pritchard D., The effects of hydraulic resistance on dam-break and other shallow inertial flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 501, pp. 179-212, 2004.
- [67] Hunt M. L., Zenit R., Campbell C. S., Brennen C. E., Revisiting the 1954 suspension experiments of R. A. Bagnold, *J. Fluid Mech.*, Vol. 452, pp. 1-24, 2002.
- [68] Ichiki K., Prosperetti A., Closure Relations of Non-Uniform Suspensions, *5th International Conference on Multiphase Flow, ICMF'04*, Yokohama, Japan, May 30-June 4, 2004, Paper No. 259.
- [69] Ildefonse, B., Allain, C., Coussot, P., *Des grands écoulements naturels à la dynamique du tas de sable*, 254 p., Cemagref éditions, 1997.
- [70] Ivanova L. A., Nadyozhina E. D., Wind flow deformation inside the wind farm, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 74-76, pp. 389-397, 1998.
- [71] Izumi N., Parker G., Inception of channelization and drainage basin formation : upstream-driven theory, *J. Fluid Mech.*, Vol. 283, pp. 341-363, 1995.
- [72] Jia Y., Kitamura T., Wang S. S. Y., Numerical Experiment on Head-Cut of Two-Layered Channel Bed, Proc., 5th International Conference on Hydro-Science and Engineering, Warsaw, 2002.
- [73] Jiménez-Hornero F. J., Giraldez J. V., Laguna A., Estimation of the role of obstacles in the downslope soil flow with a simple erosion model: the

TABLE DES REFERENCES

- analytical solution and its approximation with the lattice Boltzmann model, *Catena*, 2004 (sous presse).
- [74] Jiongxin X., Erosion caused by hyperconcentrated flow on the Loess Plateau of China, *Catena*, Vol. 36, pp. 1-19, 1999.
- [75] Joseph D. D., Ocando D., Slip velocity and lift, *J. Fluid Mech.*, Vol. 454, pp. 263-286, 2002.
- [76] Julien P. Y., *Erosion and Sedimentation*, Cambridge University Press, 1998.
- [77] Julien, P. Y., Lan, Y., Rheology of Hyperconcentration, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 117, No. 3, pp. 346-353, 1991.
- [78] Kadota A., Kurihara T., Suzuki K., Mean Flow and Sediment Transport on Sediment Layer in a Horizontal Pipe, Proc., 28 th Congress of the Int. Association for Hydraulic Research, Graz, Austria, 1999.
- [79] Kagan B. A., Schrimpf W., Eifler W., Universal Structure of the Sediment-Stratified Bottom Logarithmic Layer, *Phys. Chem. Earth*, Vol. 20, No. 2, pp. 141-148, 1995.
- [80] Kataoka I., Local Instant Formulation of Two-Phase Flow, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 12, No. 5, pp. 745-758, 1986.
- [81] Kovacs A. E., Prandtl's Mixing Length Concept Modified for Equilibrium Sediment-Laden Flows, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 124, No. 8, pp. 803-812, 1998.
- [82] Kranenbourg C., Winterwerp J. C., Erosion of Fluid Mud Layers. I: Entrainment Model, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 123, No. 6, pp. 504-519, 1997.
- [83] Krishnan G. P., Leighton JR., Dynamic viscous resuspension of bidisperse suspensions. I. Effective Diffusivity, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 21, No. 5, pp. 721-732, 1995.
- [84] Krone R. B., Effects of Bed Structure on Erosion of Cohesive Sediments, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 125, No. 12, pp. 1297-1301, 1999.
- [85] Kuznetsov A. V., Influence of the stress jump condition at the porous-medium/clear fluid interface on a flow at a porous wall, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 24, No. 3, pp. 401-410, 1997.
- [86] Kuznetsov M. S., Gendugov V. M., Khalilov M. S., Ivanuta A. A., An equation of soil detachment by flow, *Soil land Tillage Research* 46, pp. 97-102, 1998.
- [87] Lagrée P Y., Kouakou K. K. J., Danho E., Exner's law dispersive effects leading to Benjamin-Ono equation: waves over an erodible bed, *C. R. Mecanique*, Vol. 331, pp. 231-235, 2003.
- [88] Lagrée P-Y., A Triple Deck model of ripple formulation and evolution, *Physics of Fluids*, 2003.

- [89] Lagrée P-Y., Disparition de la singularité de convection thermique mixte sur une plaque horizontale refroidie, *Congrès Français de Thermique, SFT 2001*, Nantes.
- [90] Lagrée P-Y., Erosion and sedimentation of a bump in fluvial flow, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, t. 328, Serie Iib, pp. 869-874, 2000.
- [91] Laigle D., Coussot P., Numerical Modeling of Mudflows, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 123, No. 7, pp. 617-623, 1997.
- [92] Landau, L., Lifchitz, E., Mécanique des fluides, *Physique théorique, Tome IV*, Editions Mir, Moscou, 1971.
- [93] Laplace P., Arquis E., Boundary layer over a slotted plate, *Eur. J. Mech. - B/Fluids*, Vol. 17, No. 3, pp. 331-355, 1998.
- [94] Le Normant C., Three-dimensional modelling of cohesive sediment transport in the Loire estuary, *Hydrological Processes*, Vol. 14, pp. 2231-2243, 2000.
- [95] Leighton D., Acrivos A., The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions, *J. Fluid Mech.*, Vol. 181, pp. 415-439, 1987.
- [96] Leighton D., Acrivos A., Viscous Resuspension, *Chemical Engineering Science*, Vol. 41, No. 6, pp. 1377-1384, 1986.
- [97] Lemmin U., Rolland T., Acoustic Velocity Profiler for Laboratory and Field Studies, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 123, No. 12, pp. 1089-1098, 1997.
- [98] Liu X., Dong Z., Experimental investigation of the concentration profile of a blowing sand cloud, *Geomorphology*, Vol. 60, pp. 371-381, 2004.
- [99] Longo S., Lamberti A., Granular System Rheology and Mechanics: Modeling, Proc., *28 th Congress of the Int. Association for Hydraulic Research*, Graz, Austria, 1999.
- [100] Lorthois S., Lagrée P-Y., Cassot F., Marc-Vergnes J-P., Contrainte de Cisaillement Pariétale Maximale dans une Sténose Artificielle, *14éme Congrès Français de Mécanique*, Toulouse 1999.
- [101] Louge M. Y., Model for dense granular flows down bumpy inclines, *Physical Review E* 67, 061303, 2003.
- [102] Mangeney, A., Heinrich, P., Roche, R., Analytical Solution for Testing Debris Avalanche Numerical Models, *Pure and Applied Geophysics*, Vol. 157, pp. 1081-1096, 2000.
- [103] Marigo J. J., Lois de bilan en thermomécanique des milieux continus, *E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C Mathématiques, Informatique* No. 2, pp. 5-46, 1985.
- [104] Mazumder R., Turbulence-particle interactions and their implications for sediment transport and bedform mechanics under unidirectional current: some recent developments, *Earth-Science Review*, Vol. 50, pp. 113-124, 2000.

TABLE DES REFERENCES

- [105] McEwan I., Heald J., Discrete Particle Modeling of Entrainment from Flat Uniformly Sized Sediment Beds, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 127, No. 7, pp. 588-597, 2001.
- [106] McKenna Neuman C., Maljaars M., Wind Tunnel Measurement of Boundary-Layer Response to Sediment Transport, *Boundary-Layer Meteorology*, Vol. 84, pp. 67-83, 1997.
- [107] Mehta A. J., Hayter E. J., Parker W. R., Krone R. B., Teeter A. M., Cohesive Sediment Transport. I: Process Description, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 115, No. 8, pp. 1076-1093, August 1989.
- [108] Mehta A. J., McAnally W. H., Hayter E. J., Teeter A. M., Schoellhammer D., Heltzel S. B., Carey W. P., Cohesive Sediment Transport. II: Application, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 115, No. 8, pp. 1094-1112, August 1989.
- [109] Merritt W. S., Letcher R. A., Jakeman A. J., A review of erosion and sediment transport models, *Environmental Modelling and Software*, Vol. 18, pp. 761-799, 2003.
- [110] Mitchener H., Torfs H., Erosion of mud/sand mixture, *Coastal Engineering* 29 (1996), pp. 1-25.
- [111] Momber A. W., Wear of rocks by water flow, *Int. J. of Mining, Metallurgy and Earth Sciences*, Vol. 41, pp. 51-68, 2004.
- [112] Moodie T. B., Gravity Currents, *Journal of Computational Applied Mathematics*, No. 144, pp. 49-83, 2002.
- [113] Moodie T. B., Pascal J. P., Swaters G. E., Sediment Transport and Deposition from a Two-Layer Fluid Model of Gravity Currents on Sloping Bottoms, *Studies in Applied Mathematics*, Vol. 100, pp. 215-244, 1998.
- [114] Morris M. W., *Concerted Action on Dambreak Modeling Final Report – CADAM*, 2000,
<http://blakes.hrwallingford.co.uk/projects/CADAM/CADAM/index.html>
- [115] Morris M. W., Hassan M., Breach Formation through Embankment Dams and Flood Defence Embankments: A State of the Art Review, *Workshop: Stability and Breaching of Rockfill Dams*, Trondheim, Norway, 18-19 april 2002.
- [116] Morvan H., Pender G., Wright N. G., Ervine D. A., Three-Dimensional Hydrodynamics of Meandering Compound Channels, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 128, No. 7, pp. 674-682, 2002.
- [117] Mulder T., Alexander J., Abrupt change in slope causes variation in the deposit thickness of concentrated particle-driven density currents, *Marine Geology*, No. 175, pp. 221-235, 2001.
- [118] Naaim M., Vial S., Couture R., Modèle Type Saint-Venant pour les Avalanches Rocheuses, *Saint Venant Symposium*, Paris, 1997.

TABLE DES REFERENCES

- [119] Nakayama A., Yokojima S., Modeling free-surface fluctuation effects for turbulent open-channel flows, Proc., *28 th Congress of the Int. Association for Hydraulic Research*, Graz, Austria, 1999.
- [120] Nguyen D. K., Guillou S., Barbry N., Phan N. V., Modeling of sediment transport and turbidity maximum in estuaries: Difficulties and probable solutions, Proc., *5th International Conference on Hydro-Science and Engineering*, Warsaw, 2002.
- [121] Nigmatulin, R. I., *Dynamics of multiphase media*, Book News, Inc. Portland, 1990.
- [122] Nsom B., Debiante K., Piau J-M., Bed slope effect on the dam break problem, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 38, No. 6, pp. 459-464, 2000.
- [123] Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S., Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-I. Theoretical development, *In. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 38, No. 14, pp. 2635-2646, 1995.
- [124] Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S., Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-II. Comparison with experiment, *In. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 38, No. 14, pp. 2647-2655, 1995.
- [125] Panda T. C., Mishra S. K., Panda K. Ch., Laminar diffusion of suspended particulate matter using a two phase flow model, *Int. J. Meth. Fluids*, No. 40, pp. 841-853, 2002.
- [126] Paphitis D., Sediment movement under unidirectional flows: an assessment of empirical threshold curves, *Coastal Engineering* 43, pp. 227-245, 2001.
- [127] Partheniades E., Erosion and deposition of cohesive soils, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE* 91, pp. 105-139, 1965.
- [128] Pascal J. P., A model for two-layer moderate Reynolds number flow down an incline, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, No. 36, pp. 977-985, 2001.
- [129] Pascal J. P., The Spread of a Non-Newtonian Power Law Fluid under a Shallow Ambient Layer, *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol. 80, No 6, pp. 399-409, 2000.
- [130] Patankar, S. V., *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere Publishing Corporation, Taylor and Francis, New York, USA, 1980.
- [131] Patankar S. V., Spalding D. B., *Heat and Mass Transfer in Boundary Layers, A general calculation procedure*, Intertext Books, London, 1970.
- [132] Patankar N. A., Singh P., Joseph D. D., Glowinski R., Pan T-W., A new formulation of the distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows, submitted to the *Int. J. Multiphase Flow*, April 1999.
- [133] Ponce V. M., Tsivoglou A. J., Modeling Gradual Dam Breaches, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 107, No. HY7, pp. 829-838, 1981.

TABLE DES REFERENCES

- [134] Prasad S. N., Singh V. P., A hydrodynamic model of sediment transport in rill flows, *Recent Developments in the Explanation and Prediction of Erosion and Sediment Yield*, Proceedings of the Exeter Symposium, IAHS Publ., No. 137, pp. 293-301, July 1982.
- [135] Pritchard D., Hogg A. J., On sediment transport under dam-break flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 473, pp. 265-274, 2002.
- [136] Pugh F. J., Wilson K. C., Role of the interface in stratified slurry flow, *Powder Technology*, No. 104, pp. 221-226, 1999.
- [137] Rani S. L., Winkler C. M., Vanka S. P., Numerical simulations of turbulence modulation by dense particles in a fully developed pipe flow, *Powder Technology*, Vol. 141, pp. 80-99, 2004.
- [138] Roberts J., Jepsen R., Gotthard D., Lick W., Effects of Particles Size and Bulk Density on Erosion of Quartz Particles, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 124, No. 12, pp. 1261-1267, December 1998.
- [139] Roberts W., Le Hir P., Whitehouse R. J. S., Investigation using simple mathematical models of the effect of tidal currents and waves on the profile shape of intertidal mudflats, *Continental Shelf Research*, Vol. 20, pp. 1079-1097, 2000.
- [140] Roco M. C., Multiphase flow: summary paper, *Powder Technology*, Vol. 88, pp. 275-284, 1996.
- [141] Rooseboom A., Mülke F. J., Erosion inItiation, *Recent Developments in the Explanation and Prediction of Erosion and Sediment Yield*, Proceedings of the Exeter Symposium, IAHS Publ., No. 137, July 1982.
- [142] Sampl P., Zwinger T., A Simulation Model for Dry Snow Avalanches, Proc., *28 th Congress of the Int. Association for Hydraulic Research*, Graz, Austria, 1999.
- [143] Sanford L., Maa J. P.-Y., A unified formulation for fine sediments, *Marine Geology*, Vol. 179, pp. 9-23, 2001.
- [144] Sauermann G., Kroy K., Herrmann H. J., A Continuum Saltation Model for Sand Dunes, *Phys. Rev. E* 64, 31305, 2001.
- [145] Savioli J. C., Turbulence and Sediment Transport, A *Numerical Investigation*, Ph.D. Thesis, September 2000.
- [146] Schlichting H., *Boudary-Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 1960.
- [147] Scholle M., Aksel N., An exact solution of visco-capillary flow in an inclined channel, *Z. angew. Math. Phys.*, Vol. 52, pp. 749-769, 2001.
- [148] Sechet P., Le Guennec B., The role of near wall turbulent structures on sediment transport, *Water Research*, Vol. 33, No. 17, pp. 3646-3656, 1999.
- [149] Shrestha P. L., Aggregation of cohesive sediments induced by internal shear rates with application to sedimentation, *Environment International*, Vol. 22, No.6, pp. 717-727, 1996.

- [150] Simon A., Collison A. J. C., Pore-water pressure effects on the detachment of cohesive streambeds: seepage forces and matric suction, *Earth Surf. Process. Landforms* 26, 1421-1442 (2001).
- [151] Simon A., Langendoen E. J., Thomas R., Incorporating Bank-Toe Erosion by Hydraulic Shear into a Bank-Stability Model: Missouri River, Eastern Montana. Proceedings, Ewri-ASCE, *World Water and Environmental Resources Congress*, 2003, 11 p., Cd-Rom.
- [152] Singh V. P., *Dam Breach Modeling Technology*, Kluwer Academic Publisher, Netherlands, 1996.
- [153] Singh V. P., Scarlatos P. D., Analysis of Gradual Earth-Dam Failure, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 114, No. 1, pp. 21-42, 1988.
- [154] Smart G. M., Turbulent Velocity Profiles and Boundary Shear in Gravel Bed Rivers, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 125, No. 2, February, 1999.
- [155] Stavropoulou M., Papanastasiou P., Vardoulakis I., Coupled Wellbore Erosion and Stability Analysis, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 22, pp. 749-769, 1998.
- [156] Subia S. R., Ingber M. S., Mondy L. A., Altobelli S. A., Graham A. L., Modelling of concentrated suspensions using a continuum constitutive equation, *J. Fluid Mech.*, Vol. 373, pp. 193-219, 1998.
- [157] Sumer B. M., Kozakiewicz A., Fredsoe J., Deigaard R., Velocity and Concentration Profiles in Sheet-Flow Layer of Movable Bed, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 122, No. 10, pp. 549-558, 1996.
- [158] Takahashi T., Satofuka Y., Unified Dynamics of the Inertial Debris Flows, Proc., 28 th Congress of the Int. Association for Hydraulic Research, Graz, Austria, 1999.
- [159] Taki K., Masuyama H., Rheological Characteristics on Cohesive Mud in Sediment Transport, 3rd International Conference on Hydro-Science and Engineering, Cottbus, Berlin, 1998.
- [160] Tallarico A., Dragoni M., Viscous Newtonian laminar flow in a rectangular channel: application to Etna lava flows, *Bull Volcano*, Vol. 61, pp. 40-47, 1999.
- [161] Tarasevich V. V., The Unsteady Nonequilibrium Two-Phase Flows in Pipeline Systems, Proc., 28 th Congress of the Int. Association for Hydraulic Research, Graz, Austria, 1999.
- [162] Teeter A. M., Johnson B. H., Berger C., Stelling G., Scheffner N. W., Garcia M. H., Parchure T. M., Hydrodynamic and sediment transport modelling with emphasis on shallow-water, vegetated areas (lakes, reservoirs, estuaries and lagoons), *Hydrobiologia* 444, pp. 1-23, 2001.
- [163] Temam R., Wang X., Remarks on the Prandtl Equation for a Permeable Wall, *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol. 80, No. 11-12, pp. 835-843, 2000.

- [164] Thomsen L., Gust G., Sediment erosion thresholds and characteristics of resuspended aggregates on the western European continental margin, *Deep-Sea Research*, Part I, Vol. 47, pp. 1881-1897, 2000.
- [165] Tingsanchali T., Chinnarasri C., Numerical modelling of dam failure due to flow overtopping, *Hydrological Sciences Journal*, Vol. 46, No. 1, pp.113-130, 2001.
- [166] Tran-Cong S., Michaelides E. E., Feng Z-G., A Fully-Coupled Sediment Transport Model Based on the Concept of Mixing-Length Theory, Proc., *5th International Conference on Hydro-Science and Engineering*, Warsaw, 2002.
- [167] Tsanis I. K., Simulation of Wind-Induced Water Currents, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 115, pp. 1113-1134, 1989.
- [168] Tsujimoto T., Mechanics of aeolian saltation and velocity profile of wind with equilibrium blown sand, Proc., *28 th Congress of the Int. Association for Hydraulic Research*, Graz, Austria, 1999.
- [169] Vardoulakis I., Papanastasiou P., Stavropoulou M., Sand Erosion in Axial Flow Conditions, *Transport in Porous Media*, Vol. 45, pp. 267-281, 2001.
- [170] Venkataraman P., Rama Mohan Rao P., Darcian, Transitional, and Turbulent Flow through Porous Media, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 124, No. 8, pp. 840-846, 1998.
- [171] Wahl, T., *Prediction of Embankment Dam Breach Parameters, A Literature Review and Needs Assessment*, Water Ressources Research Laboratory, 1998.
- [172] Walder J. S., O'Connor J. E., Costa J. E., A physically-based method for predicting peak discharge of floods caused by failure of natural and constructed earthen dams, *Destructive Water: Water-Caused Natural Disasters, their Abatement and Control*, Proceedings of the Conference held at Anaheim, California, June 1996, IAHS Publ. No. 239, pp. 217-224, 1997.
- [173] Walder J. S., O'Connor J. E., Methods for predicting peak discharge of floods caused by failure of natural and constructed earthen dams, *Water Resources Research*, Vol. 33, No. 10, pp. 2337-2348, 1997.
- [174] Wan C. F., Fell R., Laboratory Tests on the Rate of Piping Erosion of Soils in Embankment Dams, *Geotechnical Testing Journal*, Vol. 27, No. 3, pp. 1-9, 2004.
- [175] Wang Y., Mauri R., Acrivos A., Transverse shear-induced gradient diffusion in a dilute suspension of spheres, *J. Fluid Mech.*, Vol. 357, pp. 279-287, 1998.
- [176] Wang Z-T., Zheng X-J., Theoretical prediction of creep flux in aeolian sand transport, *Powder Technology*, No. 139, pp. 123-128, 2004.
- [177] Weber D., Rickenmann D., Physical modelling of debris flow surges and related erosion processes, Proc., *28 th Congress of the Int. Association for Hydraulic Research*, Graz, Austria, 1999.

TABLE DES REFERENCES

- [178] Whiting P. J., Dietrich W. E., Boundary Shear Stress and Roughness over Mobile Alluvial Beds, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 116, No. 12, pp. 1495-1511, 1990.
- [179] Wilson H. J., Davis R. H., The viscosity of a dilute suspension of rough spheres, *J. Fluid Mech.*, Vol. 421, pp. 339-367, 2000.
- [180] Wu W., Wang S. S. Y., Movable Bed Roughness in Alluvial Rivers, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 125, No. 12, 1999.
- [181] Wylie J. J., Koch D. L., Ladd A. J. C., Rheology of suspensions with high particle inertia and moderate fluid inertia, *J. Fluid Mech.*, Vol. 480, pp. 95-118, 2003.
- [182] YanG S.-Q., Lim S.-Y., Total Load Transport Formula for Flow in Alluvial Channels, *J. of Hydraulic Engineering*, Vol. 129, No. 1, pp. 68-72, 2003.
- [183] Yoon J. Y., Patel V. C., Numerical Model of Turbulent Flow over Sand Dune, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 122, No. 1, pp. 10-18, 1996.
- [184] Yoro, J. B., *Formation de brèche dans les ouvrages en terre*, Mémoire de DEA, Laboratoire de génie civil de Nantes-Saint-Nazaire, 1999.
- [185] Young J., Leeming A., A theory of particle deposition in turbulent pipe flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 340, pp. 129-159, 1997.
- [186] Zhang Y., Campbell C., The interface between fluid-like and solid-like behaviour in two dimensional granular flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 237, pp. 541-568, 1992.
- [187] Ziskind G., Fichman M., Gutfinger C., Adhesion moment model for estimating particle detachment from a surface, *J. Aerosol Sci.*, Vol. 28, No 4, pp. 623-634, 1997.
- [188] Ziskind G., Fichman M., Gutfinger C., Resuspension of particulates from surfaces to turbulent flows – Review and analysis, *J. Aerosol Sci.*, Vol. 26, No 4, pp. 613-644, 1995.

Annexe I : Equations parabolisées de Navier-Stokes

Equations générales diphasiques

Les équations de champs sont :

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (Y \rho \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} - \vec{\nabla} p + \rho \vec{g} \quad (3)$$

On se place en écoulement bidimensionnel.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho Yu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Yv) + \frac{\partial}{\partial x}J_x + \frac{\partial}{\partial y}J_y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) = \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yy} - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \alpha \quad (7)$$

avec

$$\tau_{xx} = 2\mu \left(\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = 2\mu \left(\frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$J_x = - \left(\rho D \frac{\partial Y}{\partial x} \right), \quad J_y = - \left(\rho D \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (9)$$

Ecoulement à hauteur d'eau infinie sur plaque plane

Equations de type Couche Limite

Equations générales adimensionnelles

Analysons l'écoulement bidimensionnel stationnaire dans le plan (xOy) près d'une plaque plane $y=0$, pour un écoulement extérieur potentiel u_e qu'on supposera parallèle à la paroi, u_e pouvant être une fonction de x . Les résultats que nous allons obtenir resteront valables pour des parois courbes dont le rayon de courbure est très supérieur à l'épaisseur δ de la couche limite.

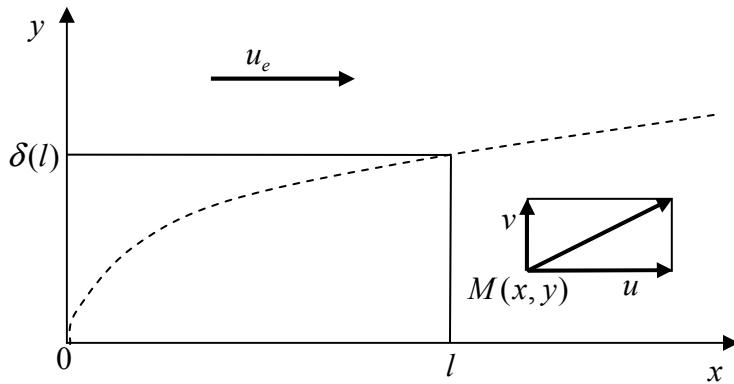


Figure 1 :Schéma de l'écoulement.

Nous allons maintenant adimensionner les équations précédentes, pour cela nous avons besoin de longueurs caractéristiques dans chacune des directions x et y .

La dimension caractéristique dans la direction parallèle à l'écoulement est localement, en un point M donné, de l'ordre de sa distance l à l'arête. La dimension caractéristique, perpendiculairement à l'écoulement, est l'épaisseur locale de la couche limite $\delta(l)$ qui est très inférieure à l .

On peut montrer que l'on a la relation :

$$\delta(l) \approx \sqrt{\frac{\mu_f l}{\rho_f u_e}} \quad (10)$$

$$\frac{\delta(l)}{l} \approx \sqrt{\frac{\mu_f}{\rho_f l u_e}} \approx \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (11)$$

où Re est le nombre de Reynolds local obtenu en prenant la distance l à l'arête comme échelle de longueur et μ_f une viscosité de référence.

Nous définissons alors les variables adimensionnées suivantes :

$$\begin{aligned}
 x^* &= \frac{x}{l} \\
 y^* &= \frac{y}{\delta(l)} = Re^{\frac{1}{2}} \frac{y}{l} \\
 u^* &= \frac{u}{u_e} \\
 v^* &= \frac{l}{\delta(l)} \frac{v}{u_e} = Re^{\frac{1}{2}} \frac{v}{u_e} \\
 p^* &= \frac{p}{\rho_f u_e^2} \\
 Re &= \frac{\rho_f u_e l}{\mu_f}
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_f} \\
 \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_f} \\
 Sc &= \frac{\mu}{\rho D} \\
 \tau_{ij}^* &= \frac{\tau_{ij}}{\rho_f u_e^2} \\
 J_i^* &= \frac{J_i}{\rho_f u_e}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Pour les gradients, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\sqrt{Re}}{l} \frac{\partial}{\partial y^*} \tag{14}$$

Pour les termes du gradient de vitesse, il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{Re} \frac{u_e}{l} \frac{\partial u^*}{\partial y^*}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{u_e}{l} \frac{\partial v^*}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u_e}{l} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \tag{15}$$

Le tenseur des contraintes devient :

$$\tau_{xx}^* = \frac{2\mu^*}{\text{Re}} \left(\frac{2}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{1}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \quad (16)$$

$$\tau_{xy}^* = \frac{\mu^*}{\sqrt{\text{Re}}} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right), \quad (17)$$

$$\tau_{yy}^* = \frac{2\mu^*}{\text{Re}} \left(\frac{2}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{1}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) \quad (18)$$

Le vecteur flux de diffusion devient :

$$J_x^* = - \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu^*}{Sc} \frac{\partial Y}{\partial x^*} \right) \quad (19)$$

$$J_y^* = - \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\mu^*}{Sc} \frac{\partial Y}{\partial y^*} \right) \quad (20)$$

Il vient donc :

$$\frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* v^*) = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* Y u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* Y v^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} J_x^* + \sqrt{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y^*} J_y^* = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* u^* v^*) = \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x^*} + \sqrt{\text{Re}} \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y^*} - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\rho^* g l \sin \alpha}{u_e^2} \quad (23)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^* v^*) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* v^* v^*) = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial y^*} - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} - \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\rho^* g l \cos \alpha}{u_e^2} \quad (24)$$

Equations de couche limite

Maintenant, on suppose que l'écoulement est à grand nombre de Reynolds. Ceci élimine d'emblée les écoulements hyperconcentrés (c'est à dire à forte concentration) pour lesquels la viscosité tend vers l'infini pour une concentration de blocage (modèles de type Krieger). On néglige les termes en $1/\text{Re}$ (mais pas ceux

en $1/\sqrt{\text{Re}}$). L'équation de conservation de masse totale n'est pas modifiée. L'équation de conservation de masse des particules qui est :

$$\frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* Y u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* Y v^*) = \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\mu^*}{Sc} \frac{\partial Y}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\mu^*}{Sc} \frac{\partial Y}{\partial y^*} \right) \quad (25)$$

perd un terme et devient :

$$\frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* Y u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* Y v^*) = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\mu^*}{Sc} \frac{\partial Y}{\partial y^*} \right) \quad (26)$$

L'équation du mouvement en x qui est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* u^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* u^* v^*) &= \frac{2\mu^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{2}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{1}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) + \\ &\quad \mu^* \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\rho^* g l \sin \alpha}{u_e^2} \end{aligned} \quad (27)$$

perd plusieurs termes et devient :

$$\frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* u^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* u^* v^*) = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\rho^* g l \sin \alpha}{u_e^2} \quad (28)$$

Enfin, l'équation du mouvement en y qui est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x^*}(\rho^* u^* v^*) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho^* v^* v^*) &= \frac{\mu^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) + \\ &\quad \frac{2\mu^*}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{2}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{1}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} - \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\rho^* g l \cos \alpha}{u_e^2} \end{aligned} \quad (29)$$

perd de nombreux termes et devient :

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\rho^* g l \cos \alpha}{u_e^2} = 0 \quad (30)$$

On note que le seul terme en $1/\sqrt{\text{Re}}$ n'a pas été négligé.

Les équations dimensionnelles sont finalement :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho Y u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Y v) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \quad (33)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \cos \alpha = 0 \quad (34)$$

Détermination du gradient longitudinal de pression

L'équation du mouvement sur y (34) peut également s'écrire :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho_e g \cos \alpha - \rho_e \left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1 \right) g \cos \alpha \quad (35)$$

On l'intègre en y , ce qui donne :

$$p(x, y) = p_0(x) - y \rho_e g \cos \alpha - \rho_e g \cos \alpha \int_0^y \left(\frac{\rho(x, \tilde{y})}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} \quad (36)$$

où $p_0(x)$ est la pression en $y = 0$, sur l'interface. On dérive en x :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x}(x) - \rho_e g \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \left(\frac{\rho(x, \tilde{y})}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} \quad (37)$$

et on fait tendre y vers l'infini :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x}(x) - \rho_e g \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \left(\frac{\rho(x, \tilde{y})}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} \quad (38)$$

D'autre part, l'équation du mouvement (33) s'écrit, en faisant tendre y vers l'infini

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial p}{\partial x} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left[-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \rho g \sin \alpha \right] \\ &= -\lim_{y \rightarrow \infty} \left[\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) + g \sin \alpha \lim_{y \rightarrow \infty} \rho \\ &= -\lim_{y \rightarrow \infty} (\rho u) \frac{\partial}{\partial x} \lim_{y \rightarrow \infty} (u) - \lim_{y \rightarrow \infty} (\rho v) \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial y} + \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) + g \sin \alpha \lim_{y \rightarrow \infty} \rho \\ &= -\rho_f u_{ex} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \rho_f g \sin \alpha \end{aligned} \quad (39)$$

Les conditions aux limites étant :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \rho = \rho_e, \lim_{y \rightarrow \infty} u = u_{ex}, \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (40)$$

Il est en outre nécessaire de supposer une régularité suffisante pour permute dérivation et passage à la limite. On suppose également que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (41)$$

et que $\lim_{y \rightarrow \infty} (\rho v)$ tend vers zéro à l'infini :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (\rho v) = 0 \quad (42)$$

On obtient alors un résultat bien connu :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_e u_{ex} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} \Bigg|_{y \rightarrow \infty} + \rho_e g \sin \alpha \quad (43)$$

Ceci nous donne le gradient de pression sur l'interface $\partial p_0 / \partial x$:

$$\frac{\partial p_0}{\partial x}(x) = -\rho_e u_{ex} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \rho_e g \left[\sin \alpha + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \left(\frac{\rho(x, \tilde{y})}{\rho_f} - 1 \right) d\tilde{y} \right] \quad (44)$$

On injecte ce résultat dans l'équation (38), ce qui conduit à :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_e u_{ex} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \rho_e g \left[\sin \alpha + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1 \right) d\tilde{y} \right] \quad (45)$$

Ecoulement à surface libre

Equations de couche

On note μ_f la viscosité dynamique du fluide porteur et ρ_f sa masse volumique. On suppose que la masse volumique du mélange ρ , la viscosité du mélange μ sont fonction de la fraction massique Y :

$$\rho = \rho_f \rho^*(Y), \mu = \mu_f \mu^*(Y) \quad (46)$$

Il n'est pas nécessaire de faire les hypothèses de Boussinesq (on néglige les variations de $\rho(Y)$ dans les équations). On se donne une échelle de longueur longitudinale l (une jauge de la longueur d'onde longitudinale) et transversale h

(une jauge de l'épaisseur de l'écoulement), et une vitesse de référence u_e . Les grandeurs adimensionnelles sont les suivantes

$$x = lx^*, \quad y = hy^* \quad (47)$$

$$u(x, y) = u_e u^*(x^*, y^*), \quad v(x, y) = v_e v^*(x^*, y^*), \quad p(x, y) = \rho_f u_e^2 p^*(x^*, y^*) \quad (48)$$

où la vitesse transversale de référence est choisie comme étant

$$v_e = \frac{h}{l} u_e \quad (49)$$

Le système adimensionné en (x^*, y^*) devient

$$\frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} \rho^* v^* = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* Y u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* Y v^*) = \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\text{Re}^{-1} \frac{\mu^*}{Sc} \frac{\partial Y}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left((\text{Re} \varepsilon^2)^{-1} \frac{\mu^*}{Sc} \frac{\partial Y}{\partial y^*} \right) \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^* u^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* u^* v^*) &= \text{Re}^{-1} \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\mu^* \left(\frac{2}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{1}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \right] + \\ &(\text{Re} \varepsilon^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right] - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\rho^* g l \sin \alpha}{u_e^2} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^* v^*) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* v^* v^*) &= \text{Re}^{-1} \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right] + \\ &\text{Re}^{-1} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\mu^* \left(\frac{2}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{1}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) \right] - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} - \frac{\rho^* g h \cos \alpha}{u_e^2} \end{aligned} \quad (53)$$

où le nombre de Reynolds et un paramètre caractéristique de l'écoulement sont

$$\text{Re} = \frac{\rho_f u_e l}{\mu_f}, \quad \varepsilon = \frac{h}{l} \quad (54)$$

On suppose :

- que le nombre de Reynolds est "suffisamment grand" (pour définir un petit paramètre);
- que la longueur d'onde l de l'écoulement est "suffisamment grande" par rapport à son épaisseur h (pour définir un petit paramètre) ;

- que $\varepsilon = O(Re^{-1/2})$.

On cherche une solution à l'aide du développement asymptotique suivant

$$u^*(x^*, y^*) = u_1^*(x^*, y^*) + \varepsilon u_2^*(x^*, y^*) + O(\varepsilon)^2 \quad (55)$$

$$v^*(x^*, y^*) = v_1^*(x^*, y^*) + \varepsilon v_2^*(x^*, y^*) + O(\varepsilon)^2 \quad (56)$$

$$p^*(x^*, y^*) = p_1^*(x^*, y^*) + \varepsilon p_2^*(x^*, y^*) + O(\varepsilon)^2 \quad (57)$$

$$Y(x^*, y^*) = Y_1^*(x^*, y^*) + \varepsilon Y_2^*(x^*, y^*) + O(\varepsilon)^2 \quad (58)$$

Il vient alors à l'ordre zéro en ε

$$\frac{\partial}{\partial x^*}(\rho_1^* u_1^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho_1^* v_1^*) = 0 \quad (59)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*}(\rho_1^* Y_1 u_1^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho_1^* Y_1 v_1^*) = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\mu_1^*}{Sc} \frac{\partial Y_1}{\partial y^*} \right) \quad (60)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*}(\rho_1^* u_1^{*2}) + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho_1^* u_1^* v_1^*) = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial y^*} \right) - \frac{\partial p_1^*}{\partial x^*} + \frac{\rho_1^* g l \sin \alpha}{u_e^2} \quad (61)$$

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial y^*} = \frac{\rho^* g h \cos \alpha}{u_e^2} \quad (62)$$

où l'on a noté pour simplifier $\rho_1^* = \rho^*(Y_1)$, $\mu_1^* = \mu^*(Y_1)$. Les équations dimensionnelles pour (u, v, p, Y) en (x, y) sont alors :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (63)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho Y u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Y v) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (64)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \quad (65)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \cos \alpha \quad (66)$$

où l'on a tenu compte du fait que :

$$\frac{\rho_f l u_e}{\mu_f} \left(\frac{h}{l} \right)^2 = O(1) \quad (67)$$

Détermination du gradient longitudinal de pression

On considère un écoulement à surface libre d'épaisseur $h(x)$. On intègre (66) en y , ce qui donne :

$$p(x, y) = p_0(x) - g \cos \alpha \int_0^y \rho(x, \tilde{y}) d\tilde{y} \quad (68)$$

La pression est constante à la surface $y = h(x)$ ($p(x, h(x)) = p_s$), ce qui nous donne $p_0(x)$:

$$p_0(x) = g \cos \alpha \int_0^{h(x)} \rho(x, \tilde{y}) d\tilde{y} + p_s \quad (69)$$

En injectant ce résultat dans (68), il vient :

$$p(x, y) = g \cos \alpha \int_y^{h(x)} \rho(x, \tilde{y}) d\tilde{y} + p_s \quad (70)$$

On obtient finalement en dérivant en x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= g \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{h(x)} \rho d\tilde{y} \\ &= g \cos \alpha \left[\int_y^{h(x)} \frac{\partial \rho}{\partial x} d\tilde{y} + \rho_h \frac{\partial h}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (71)$$

Annexe II : Loi différentielle de diffusion.

Les équations de bases utilisées ici sont issues de Février et Simonin, VKI, Lecture Series 2000-06.

On appelle :

c la fraction volumique de sédiments,

ρ_s et ρ_e la masse volumique respectivement des sédiments et de l'eau,

u_i^s la vitesse moyenne des sédiments dans la direction i ,

u_i^e la vitesse moyenne de l'eau dans la direction i ,

p la pression moyenne du mélange,

I_i^s forces de traînée induite par l'eau sur les sédiments dans la direction i ,

I_i^e forces de traînée induite par les sédiments sur le fluide dans la direction i ,

R_{ij}^s les corrélations de vitesses du fluide, les tensions de Reynolds,

R_{ij}^e les corrélations de vitesses des particules.

Première partie : Cas général.

On écrit pour chaque phase l'équation de conservation de la masse et de quantité de mouvement.

Pour les sédiments :

$$\frac{\partial c \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (c \rho_s u_i^s) = 0 \quad (72)$$

$$c \rho_s \frac{\partial u_i^s}{\partial t} + c \rho_s u_j^s \frac{\partial u_i^s}{\partial x_j} = -c \frac{\partial p}{\partial x_i} + c \rho_s g_i + I_i^s - \frac{\partial}{\partial x_j} (c \rho_s R_{ij}^s) \quad (73)$$

Pour l'eau :

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1-c) \rho_e) + \frac{\partial}{\partial x_i} ((1-c) \rho_e u_i^e) = 0 \quad (74)$$

$$(1-c) \rho_e \frac{\partial u_i^e}{\partial t} + (1-c) \rho_e u_j^e \frac{\partial u_i^e}{\partial x_j} = -(1-c) \frac{\partial p}{\partial x_i} + (1-c) \rho_e g_i + I_i^e - \frac{\partial}{\partial x_j} ((1-c) \rho_e R_{ij}^e) \quad (75)$$

On définit la masse volumique moyenne du mélange comme :

$$\rho = c\rho_s + (1-c)\rho_e \quad (76)$$

On définit aussi la vitesse moyenne dans la direction i du mélange :

$$\rho u_i = c\rho_s u_i^s + (1-c)\rho_e u_i^e \quad (77)$$

On somme les équations de quantité de mouvement de chaque phase.(73)+(75) devient :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + (1-c)\rho_e u_j^e \frac{\partial u_i^e}{\partial x_j} + c\rho_s u_j^s \frac{\partial u_i^s}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i - \frac{\partial}{\partial x_j}((1-c)\rho_e R_{ij}^e + c\rho_s R_{ij}^s) \quad (78)$$

avec par définition :

$$I_i^e = -I_i^s \quad (79)$$

On définit alors la vitesse de diffusion des sédiments, comme l'écart entre la vitesse moyenne des sédiments et la vitesse moyenne du mélange :

$$\Delta u_i^s = u_i^s - u_i \quad (80)$$

On fait de même pour le fluide :

$$\Delta u_i^e = u_i^e - u_i \quad (81)$$

Grâce à ces définitions on peut écrire :

$$(1-c)\rho_e u_j^e \frac{\partial u_i^e}{\partial x_j} + c\rho_s u_j^s \frac{\partial u_i^s}{\partial x_j} = \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(c\rho_s u_j^s \Delta u_i^s + (1-c)\rho_e u_j^e \Delta u_i^e) \quad (82)$$

ou encore :

$$(1-c)\rho_e u_j^e \frac{\partial u_i^e}{\partial x_j} + c\rho_s u_j^s \frac{\partial u_i^s}{\partial x_j} = \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(c\rho_s \Delta u_j^s \Delta u_i^s + (1-c)\rho_e \Delta u_j^e \Delta u_i^e) \quad (83)$$

On a utilisé le fait que par définition on a :

$$c\rho_s \Delta u_i^s + (1-c)\rho_e \Delta u_i^e = 0 \quad (84)$$

L'équation (78) devient alors :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i - \frac{\partial}{\partial x_j}((1-c)\rho_e (R_{ij}^e + \Delta u_i^e \Delta u_j^e) + c\rho_s (R_{ij}^s + \Delta u_i^s \Delta u_j^s)) \quad (85)$$

Que l'on peut réécrire comme :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (R_{ij}^T) \quad (86)$$

$$\text{avec } R_{ij}^T = (1 - c) \rho_e (R_{ij}^e + \Delta u_i^e \Delta u_j^e) + c \rho_s (R_{ij}^s + \Delta u_i^s \Delta u_j^s)$$

On réécrit (73) avec $u_i^s = u_i + \Delta u_i^s$:

$$c \rho_s \frac{\partial \Delta u_i^s}{\partial t} + c \rho_s u_j^s \frac{\partial \Delta u_i^s}{\partial x_j} = -c \rho_s \frac{\partial u_i}{\partial t} - c \rho_s u_j^s \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - c \frac{\partial p}{\partial x_i} + c \rho_s g_i + I_i^s - \frac{\partial}{\partial x_j} (c \rho_s R_{ij}^s) \quad (87)$$

On injecte (86) dans (87) grâce à la dérivée temporelle de la vitesse moyenne :

$$c \rho_s \frac{\partial \Delta u_i^s}{\partial t} + c \rho_s u_j^s \frac{\partial \Delta u_i^s}{\partial x_j} = -c \rho_s \Delta u_j^s \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left(\frac{c \rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial x_i} + I_i^s + \frac{c \rho_s}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (R_{ij}^T) - \frac{\partial}{\partial x_j} (c \rho_s R_{ij}^s) \quad (88)$$

On peut alors écrire (88) comme :

$$c \rho_s \frac{\partial \Delta u_i^s}{\partial t} + c \rho_s u_j \frac{\partial \Delta u_i^s}{\partial x_j} = -c \rho_s \Delta u_j^s \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left(\frac{c \rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial x_i} + I_i^s - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c \rho_s (R_{ij}^s + \Delta u_i^s \Delta u_j^s) - \frac{c \rho_s}{\rho} R_{ij}^T \right) - R_{ij}^T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{c \rho_s}{\rho} \right) \quad (89)$$

Dans cette équation on va écrire que les termes de production sont égaux aux termes de dissipation :

$$-c \rho_s \Delta u_j^s \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left(\frac{c \rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial x_i} + I_i^s - R_{ij}^T \frac{\partial Y}{\partial x_j} = 0 \quad (90)$$

Deuxième partie : Ecoulement de couche.

En exprimant cette dernière équation dans la direction y , et dans un écoulement où les gradients suivant y sont prédominants, on peut écrire (90) comme :

$$-c\rho_s \Delta v^s \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{c\rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial y} + I_y^s - R_{yy}^T \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \quad (91)$$

On ne garde que les termes les plus importants :

$$\left(\frac{c\rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial y} + I_y^s - R_{yy}^T \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \quad (92)$$

Nous allons utiliser cette dernière équation pour exprimer une formule différentielle du flux de diffusion.

I_y^s est défini comme :

$$I_y^s = -c\rho_s \frac{1}{\tau_{12}^F} \langle v_{r,y} \rangle_2 = -c\rho_s \frac{1}{\tau_{12}^F} (v^s - v^e - v_{d,y}) \quad (93)$$

Dans cette équation $v_{d,y}$ s'exprime comme :

$$v_{d,y} = -D_{12,yy}^t \left(\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x_j} - \frac{1}{(1-c)} \frac{\partial(1-c)}{\partial x_j} \right) \quad (94)$$

Comme les gradients suivant y sont prédominants, on obtient :

$$v_{d,y} = -D_{12,yy}^t \left(\frac{1}{c(1-c)} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (95)$$

Avec :

$$D_{12,yy}^t = G_{12,ym}^{-1} R_{12,my} \quad (96)$$

Dans cette dernière équation $(G_{12})^{-1}$ est un tenseur d'échelles de temps caractéristique du fluide turbulent, et $R_{12,ij}$ représente les corrélations des vitesses du fluide et des sédiments.

Si l'on néglige l'anisotropie induite par les effets de croisement de trajectoire, on a :

$$G_{12,ij} = \frac{1}{\tau_{12}^t} \delta_{ij} \quad (97)$$

Ainsi, on peut finalement écrire :

$$v_{d,y} = -\frac{\tau_{12}^t}{c(1-c)} R_{12,yy} \frac{\partial c}{\partial y} \quad (98)$$

En remarquant que :

$$v_s - v_e = \Delta v^s + v - \Delta v^e - v = \Delta v^s - \Delta v^e = \frac{\rho}{(1-c)\rho_e} \Delta v^s \quad (99)$$

On peut finalement exprimer I_y^s comme :

$$I_y^s = -c\rho_s \frac{1}{\tau_{12}^F} \left(\frac{\rho}{(1-c)\rho_e} \Delta v^s + \frac{\tau_{12}^t}{c(1-c)} R_{12,yy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (100)$$

$$I_y^s = -\frac{c\rho_s \rho}{(1-c)\rho_e} \frac{1}{\tau_{12}^F} \Delta v^s - \frac{\tau_{12}^t}{\tau_{12}^F (1-c)} \frac{\rho_s}{(1-c)} R_{12,yy} \frac{\partial c}{\partial y} \quad (101)$$

Ainsi (92) peut être écrite comme :

$$-\frac{c\rho_s \rho}{(1-c)\rho_e} \frac{1}{\tau_{12}^F} \Delta v^s = -\left(\frac{c\rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial y} + R_{yy}^T \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\tau_{12}^t}{\tau_{12}^F (1-c)} \frac{\rho_s}{(1-c)} R_{12,yy} \frac{\partial c}{\partial y} \quad (102)$$

Par définition, on a :

$$c\rho_s \Delta v^s = J_y^{Dt} \quad (103)$$

D'où :

$$-\frac{\rho}{(1-c)\rho_e} \frac{1}{\tau_{12}^F} J_y^{Dt} = -\left(\frac{c\rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial y} + R_{yy}^T \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\tau_{12}^t}{\tau_{12}^F (1-c)} \frac{\rho_s}{(1-c)} R_{12,yy} \frac{\partial c}{\partial y} \quad (104)$$

Il faut à ce niveau exprimer les termes $R_{12,yy}$ et R_{yy}^T . On pourrait écrire les équations que vérifient ces quantités, et essayer de les simplifier (en ne gardant que les termes de production et de dissipation)... Mais il est beaucoup plus simple de les approximer comme proportionnels à l'énergie cinétique turbulente de l'écoulement.

Nous avons brièvement vu en 5.3.3.3 les estimations des valeurs des tensions de Reynolds en couche limite sur plaque plane lisse (voir par exemple Chassaing, 2000). Avec une démarche similaire, nous exprimerons $R_{12,ij}$ et R_{yy}^T en fonction des variables de notre problème.

Par définition, on a :

$$R_{yy}^T = \rho \overline{v'^2} \quad (105)$$

Ainsi, comme en 5.3.3.3, on peut écrire :

$$R_{yy}^T \simeq 1.7 \rho l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (106)$$

De la même façon, on peut écrire que :

$$R_{12,yy} \simeq A l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (107)$$

où A est un coefficient de proportionnalité, inférieur à 1.7. En effet les corrélations de vitesse entre le solide et le liquide sont inférieures aux corrélations de vitesse du mélange.

Ainsi, on peut écrire (104), en première approximation, comme :

$$J_y^{Dt} = -\frac{\tau_{12}^F (1-c) \rho_e}{\rho} \left[-\left(\frac{c \rho_s}{\rho} - c \right) \frac{\partial p}{\partial y} + 1.7 \rho l_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\tau_{12}^t}{\tau_{12}^F (1-c)} \frac{\rho_s}{A l_m^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial c}{\partial y} \right] \quad (108)$$

Nous présenterons le calcul numérique de ce terme dans le Chapitre 4.

Il y a maintenant deux temps caractéristiques différents τ_{12}^F et τ_{12}^t .

On peut définir le temps caractéristique à l'échelle de la turbulence grâce à la viscosité effective :

$$\nu_{eff} = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = B' k \tau_{12}^t \quad (109)$$

$$\tau_{12}^t = \frac{A'}{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} \quad (110)$$

où A' est un coefficient.

Pour l'autre temps caractéristique τ_{12}^F , temps de Stokes, plusieurs choix sont possibles. On peut le définir à l'échelle du grain, à l'échelle de groupe de grains ... : - à l'échelle de la particule :

$$\tau_{12}^F \propto \frac{d_s^2}{\nu} \quad (111)$$

- à l'échelle de groupe de particules :

$$\tau_{12}^F \propto \frac{d_s^2}{V} f(c) \quad (112)$$

ou $f(c)$ est une fonction dépendant de la fraction volumique de solide.

Annexe III : Ecoulement à surface libre

Les premiers essais de calcul à surface libre que nous avons effectués, nous amenèrent à nous poser des questions quant à la validité de nos équations pour décrire de tels écoulements. Pour les valeurs des paramètres choisies initialement, les calculs divergeaient souvent (décollements), et quand il y avait convergence vers le profil d'équilibre, l'évolution de la surface libre présentait parfois des comportements peu « réalistes ». Aussi, il nous est apparu important de comparer nos résultats, obtenus avec les équations de Navier-Stokes parabolisées, en régime permanent, à ceux des équations de Navier-Stokes complètes, instationnaires. On pourra ainsi, si ces derniers calculs convergent vers un régime permanent, juger de l'exactitude de nos résultats.

Pour résoudre ces équations, il est nécessaire de définir un domaine de calcul, fixe, et de le « mailler », c'est-à-dire fixer les coordonnées des points où seront calculer les équations discrétisées. Nous cherchons ici à décrire en fonction du temps l'évolution de l'épaisseur d'un écoulement à surface libre ; or le domaine de calcul est fixe, il est donc nécessaire de décrire les deux fluides, l'air et l'eau, séparés par une interface dont la position variera avec le temps.

Une méthode possible, pour décrire de tels écoulements diphasiques, consiste à introduire une fonction indicatrice de phase $F(x,t)$ (où x est un point du domaine, et t le temps), définie comme :

$$F(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est dans l'air} \\ 0 & \text{si } x \text{ est dans l'eau} \end{cases} \quad (113)$$

Grâce à cette fonction, on peut définir pour tout point du domaine de calcul, la masse volumique, la vitesse, la viscosité... comme :

$$\rho(x,t) = \rho_{air}F(x,t) + \rho_{eau}[1 - F(x,t)] \quad (114)$$

$$\vec{u}(x,t) = \vec{u}_{air}F(x,t) + \vec{u}_{eau}[1 - F(x,t)] \quad (115)$$

$$\mu(x,t) = \mu_{air}F(x,t) + \mu_{eau}[1 - F(x,t)] \quad (116)$$

Ainsi, si l'on connaît l'évolution de F , en temps et en espace, donnée par l'équation :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla F = 0 \quad (117)$$

on peut résoudre dans tout le domaine de calcul les équations de Navier-Stokes aussi bien dans l'air que l'eau.

Nous présentons sur la figure suivante un schéma de la configuration initiale (à $t=0$) de l'écoulement considéré ; le domaine est divisé en deux parties égales d'air et d'eau.

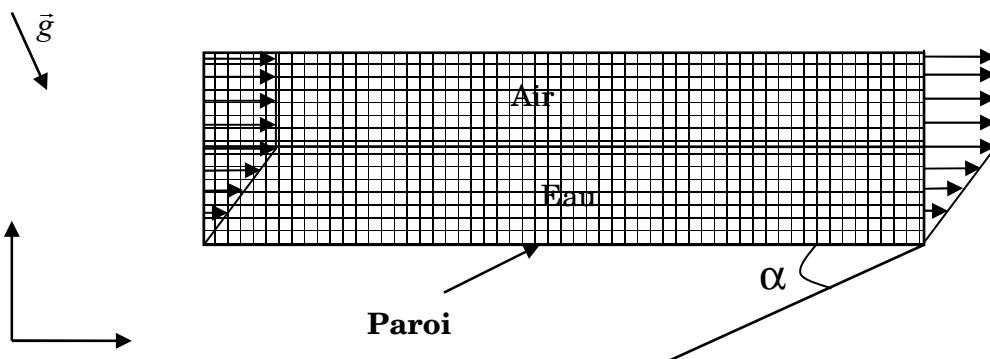


Figure 2 : Schéma de la configuration initiale dans le domaine de calcul.

Pour un tel calcul, instationnaire, il est nécessaire de se donner les conditions initiales (de vitesse, et de fonction indicatrice) dans tout le domaine, ainsi que toutes les conditions aux limites (vitesses fixées à l'entrée, vitesses nulles à la paroi, et conditions de Newman, aux limites supérieure et droite du domaine)

Nous n'entrerons pas d'avantage dans les détails, cela n'est pas notre propos ici.

Principe des calculs effectués avec Aquilon :

La démarche suivie pour étudier la convergence de différents profils de vitesse dans le temps fut la suivante :

A $t=0$, on fixe à l'entrée, et dans tout le domaine de calcul, le profil de vitesse à étudier (le profil de vitesse de l'air est choisi constant, de même valeur que celle, initiale, du fluide à la surface). En gardant constant ce profil d'entrée, on calcule les variations temporelles et spatiales de l'écoulement dans le domaine, grâce aux équations de N-S. Entre chaque pas de temps, les variations des variables locales sont évaluées, quand ces variations deviennent inférieures à un critère d'arrêt, la convergence numérique des profils est obtenue, et l'on arrête le calcul (la valeur du critère d'arrêt est bien sur importante quant à la précision désirée).

Résultats des calculs à viscosité constante :

La première série de calculs effectuée avec Aquilon, fut faite avec notre modèle à viscosité effective constante, avec $a=0.1$ ($\mu_{eff} = 0.1\rho_e U_e h_e$) (la viscosité de l'air fut prise à sa valeur laminaire). La pente reste la même pour tous les calculs : $\alpha = 20^\circ$. Trois types de profils de vitesse furent testés, parabolique (d'équilibre), linéaire et constant. Dans tous les cas, la convergence vers le profil d'équilibre fut observée.

Les résultats des calculs avec profil initial d'équilibre ne seront pas présentés ; le profil initialement à l'équilibre le reste.

Nous avons ensuite pris un profil de vitesse initial linéaire, de hauteur d'entrée $h_e=0.1$ m, et de vitesse à la surface $U_e=0.64$ m/s. Nous présentons Figure 3 la comparaison de la variation de la hauteur de la surface libre entre Aquilon et notre code de calcul (Série 2). Nous présentons ces mêmes résultats pour un profil initial constant avec $h_e=0.1$ m et $U_e=0.5$ m/s Figure 4.

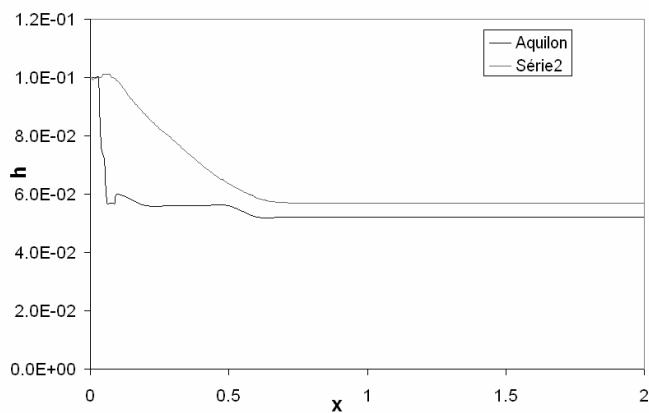


Figure 3 : Evolution de la surface libre, profil initial linéaire.

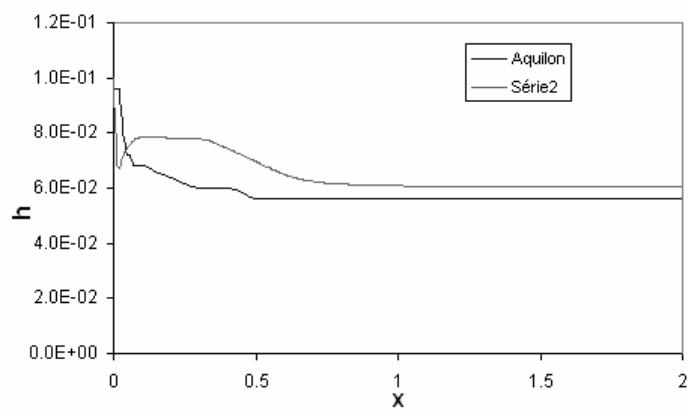


Figure 4 : Evolution de la surface libre, profil initial constant.

Ces deux figures sont plutôt rassurantes quant à nos résultats, même si il apparaît clairement que les deux calculs ne convergent pas vers la même valeur d'équilibre (nous en parlerons dans le paragraphe suivant). Pour le profil initial linéaire, notre calcul converge plus lentement qu'Aquilon, mais les deux courbes atteignent leur valeur d'équilibre à des abscisses très proches. Pour le profil constant, alors que les résultats d'Aquilon restent très semblables, notre calcul présente au début un comportement quelque peu singulier, pour finalement converger vers $x=1$ m.

Pour un écoulement à surface libre, nous avons vu dans le chapitre 7, qu'à débit donné (la viscosité et la pente étant fixées et connues), il correspondait un profil d'équilibre unique calculable analytiquement. Ainsi, si Q_e est le débit d'entrée, on a les relations suivantes, pour les valeurs d'équilibre :

$$h_{eq} = \left(\frac{3\mu_{eff}Q_e}{\rho_e g \sin \alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (118)$$

$$U_{eq} = u(y = h_e) = \frac{\rho_e g \sin \alpha h_{eq}^2}{2\mu_{eff}} \quad (119)$$

Si l'on calcule ces hauteurs d'équilibre pour les deux écoulements cités précédemment, on trouve $h_{eq}=5.67 \cdot 10^{-2}$ m pour le profil initial linéaire, et $h_{eq}=6.07 \cdot 10^{-2}$ m pour le profil initial constant. Ce sont en fait exactement les valeurs que nous obtenons avec notre modèle (!?). Par contre, la différence affichée par Aquilon est exactement la même pour les deux figures, elle est en effet de $0.47 \cdot 10^{-2}$ m. Plusieurs raisons peuvent expliquer ce phénomène. Il est en fait relativement difficile de déterminer exactement la position de la surface libre, d'après les résultats d'Aquilon. La fonction indicatrice subit en effet, au cours du calcul, une diffusion numérique, qui « étale » l'interface ; il existe alors entre l'air et l'eau des valeurs de F comprise entre 0 et 1 (de plus les points du maillage étant fixes et en nombres limités, la hauteur théorique se trouve peut être entre deux mailles).

Après avoir comparé avec succès nos résultats à modèle de viscosité effective constante, nous avons voulu tester les mêmes types de calculs en utilisant cette fois les modèles de turbulence proposés dans Aquilon.

Résultats des calculs avec modèles de turbulence :

Trois modèles de turbulence furent utilisés : le modèle de Smagorinsky, le modèle d'échelles mixtes et le modèle $K - \varepsilon$, avec un profil initial linéaire, et un constant définis respectivement par $h_e=0.05$ m, $U_e=0.916$ m/s et par $h_e=0.15$ m, $U_e=0.5$ m/s. Nous présentons les résultats de l'évolution de la surface libre du profil linéaire, après convergence, pour deux modèles de turbulence, Figure 5.

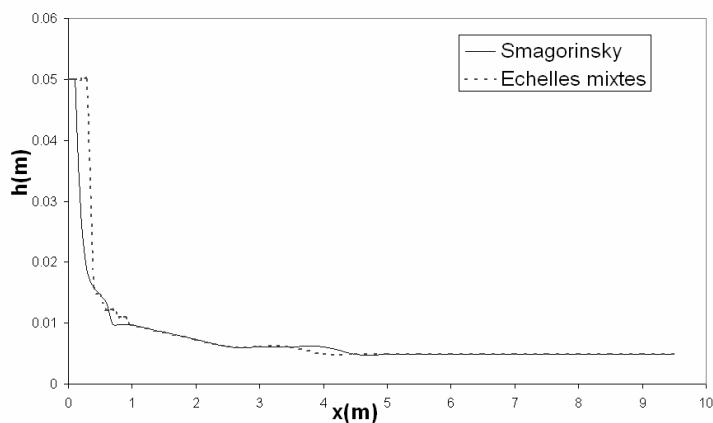


Figure 5 : Evolution de la surface libre, profil initial linéaire.

On voit très clairement d'après les résultats des modèles turbulents que, la viscosité étant globalement très inférieure à celle de la première partie, l'écoulement s'accélère très fortement et « s'étale » sur le sol. La hauteur d'équilibre obtenue sur la Figure 5 est en effet inférieure au dixième de la hauteur d'entrée.

Comme nous l'avons présenté Figure 2, le maillage du domaine de calcul est fixe, et limité en nombre de mailles (40 à 50 dans la hauteur). Ainsi, lorsque l'épaisseur de l'écoulement diminue fortement, le nombre de mailles dédiées à l'écoulement d'eau s'en trouve fortement réduit. Dans les calculs effectués ici, une fois l'équilibre atteint, seulement 5 à 6 mailles se trouvaient dans l'épaisseur de l'écoulement d'eau ! La précision des résultats s'en trouve donc limitée (nous ne présenterons donc pas de profils de vitesse)

A partir des profils d'entrée précédemment définis, on peut comparer les hauteurs d'équilibre théoriques qu'on obtiendrait avec notre modèle de viscosité constante avec les résultats numériques des modèles de turbulence.

h_{eq} , en mètre	Modèles de turbulence	$\mu_{eff} = 0.1 \rho_e U_e h_e$	$\mu_{eff} = 0.005 \rho_e U_e h_e$
Profil linéaire $h_e=0.05, U_e=0.916$	4.88 10-3 7.32 10-3 ($K - \varepsilon$)	4.54 10-2	1.81 10-2
Profil constant $h_e=0.15, U_e=0.5$	1.1 10-2	7.95 10-2	2.93 10-2

Tableau 1 : Comparaison des hauteurs d'équilibre théoriques à viscosité constante, et numériques pour les modèles de turbulence.

Pour le profil initial constant, les trois modèles de turbulence convergent vers la même valeur d'équilibre, par contre pour le profil linéaire, le modèle $K - \varepsilon$ a du mal à converger, et son résultat diffère des deux autres modèles.

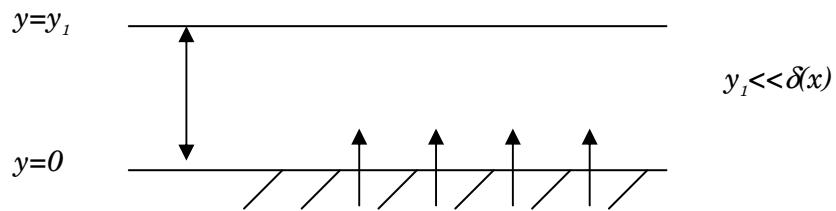
Ce tableau met en tout cas en évidence que notre valeur de viscosité $\mu_{\text{eff}} = 0.1\rho_e U_e h_e$, est une très mauvaise approximation. Cette valeur est en effet beaucoup trop forte, elle freine beaucoup trop l'écoulement. Et, même si les valeurs obtenues avec $\mu_{\text{eff}} = 0.005\rho_e U_e h_e$, sont encore très éloignées de la réalité, elles en donnent cependant une « meilleure » approximation.

Il est de toute façon impossible d'obtenir les mêmes profils de vitesse d'équilibre avec un modèle à viscosité effective constante, et avec un modèle de turbulence. Nous pourrions bien sur prendre une valeur de a encore plus faible, mais cela augmenterait le nombre de Reynolds de notre écoulement ($R_e = \rho_e U_e h_e / \mu_{\text{eff}}$), égal à 200 si $a=0.005$, et notre hypothèse de viscosité effective constante deviendrait encore plus éloignée de la réalité. Aussi, nous prenons dorénavant, pour les calculs d'écoulements à surface libre et viscosité effective constante, $a=0.005$.

Annexe IV : Approximations

Approximation de la valeur initiale du débit local érodé du modèle *K infini*

On se place dans une zone très proche de la paroi, entre $y=0$ et $y=y_r$.



On écrit alors l'équation de conservation de la masse totale, et de quantité de mouvement, en négligeant dans celles-ci les dérivées par rapport à x , et la gravité. On considère ici que dans une zone très proche de la paroi, on peut négliger les effets transverses, et que toutes les variations importantes se font suivant la direction y . On obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (120)$$

En intégrant une fois ces équations entre y (quelconque, mais $y < y_1$) et la paroi, on obtient :

$$\begin{cases} \rho v = \rho_b v_b = \dot{m} \\ \rho vu = \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y} - \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_b \end{cases} \quad (121)$$

Grâce à ces deux équations, et en remplaçant la contrainte à la paroi par sa valeur seuil (avec le modèle plastique $\dot{m} \neq 0 \Leftrightarrow \tau_b = \tau_c$), on obtient :

$$\rho_b v_b u = \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y} - \tau_c \quad (122)$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\frac{\rho_b v_b}{\mu_{eff}} \left(u + \frac{\tau_c}{\rho_b v_b} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (123)$$

que l'on intègre entre y_1 , où la vitesse suivant x est u_1 , et la paroi :

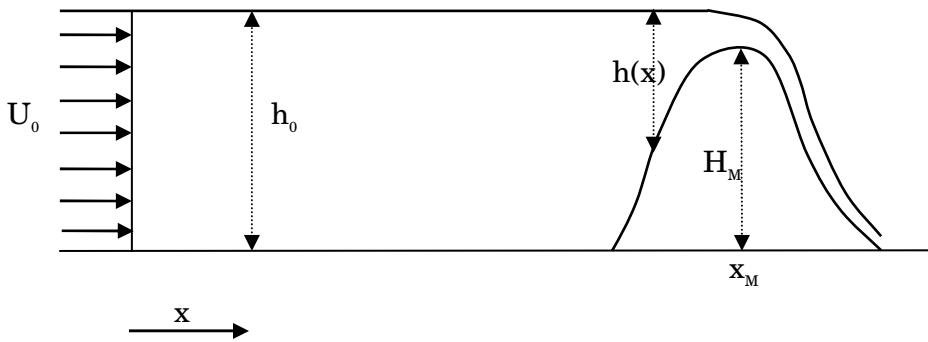
$$\frac{\rho_b v_b}{\mu_{eff}} y_1 = \ln \left(\frac{u_1 + \tau_c / \rho_b v_b}{\tau_c / \rho_b v_b} \right) \quad (124).$$

Finalement, un développement limité du logarithme nous donne une approximation du débit érodé, pour le modèle d'érosion *K infini* :

$$\rho_b v_b = \dot{m} = \frac{2\mu_{eff}}{y_1} \left(\frac{\mu_{eff} u_1}{y_1 \tau_c} - 1 \right) \quad (125)$$

Calcul du débit au dessus d'une digue

On considère l'écoulement au dessus d'une digue, représenté schématiquement par la figure suivante.



Nous appelons h_0 le niveau initial du fluide, $h(x)$ la variation avec la distance de l'épaisseur de la couche fluide, et $H(x)$ la hauteur de fond ; la pression à la surface est égale à la pression atmosphérique p_{atm} . On suppose que la vitesse de l'écoulement $u(x)$ est uniforme dans toutes les sections verticales de l'écoulement (on néglige les frottements visqueux).

On obtient les deux équations suivantes en écrivant la conservation du débit, et en appliquant l'équation de Bernoulli le long d'une ligne de courant passant près de la surface :

$$h_0 U_0 = h(x) u(x) = cste = Q \quad (126)$$

$$p_{atm} + \frac{1}{2} \rho U_0^2 + \rho g h_0 = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho u(x)^2 + \rho g (h(x) + H(x)) \quad (127)$$

A partir de (127), on déduit :

$$\frac{u(x)^2}{2} - \frac{U_0^2}{2} = -g(h(x) + H(x)) + gh_0 \quad (128)$$

Le débit étant constant, et $h(x)$ diminuant lors de la montée de la digue (la vitesse s'accélère), on a $u(x)^2 \gg U_0^2$ (la vitesse initial est très faible). Ainsi, on réécrit (128) comme :

$$\frac{u(x)^2}{2} = g(h_0 - H(x)) - gh(x) \quad (129)$$

On dérive alors les équations (126) et (127) par rapport à x , et on les somme :

$$\frac{1}{u(x)} \frac{du(x)}{dx} (-gh(x) + u(x)^2) + g \frac{dH(x)}{dx} = 0 \quad (130)$$

Supposons l'écoulement initialement assez lent et d'épaisseur assez grande pour que l'on ait :

$$U_0^2 - gh_0 < 0 \quad (131)$$

(ce qui correspond à un nombre de Froude inférieur à l'unité à l'entrée de l'écoulement ($Fr < 1$)).

On voit apparaître deux comportements possibles au moment où l'écoulement passe au-dessus du point x_M de hauteur de fond maximum H_M telle que $dH/dx = 0$. L'équation (130) peut en effet être vérifiée de deux manières :

(i) Soit :

$$\frac{du(x)}{dx} = 0$$

et dans ce cas, on a aussi par l'équation (126) :

$$\frac{dh(x)}{dx} = 0$$

Ainsi, après passage par le point de hauteur de fond maximum, l'épaisseur de la couche fluide augmente à nouveau et la vitesse rejoint sa valeur initiale U_0 .

(ii) Soit :

$$u(x)^2 = gh(x)$$

Dans ce cas $du(x)/dx$ ne change plus de signe, et la vitesse continue d'augmenter (et l'épaisseur de fluide de diminuer) après passage par le point x_M . L'équation (130) peut donc continuer d'être vérifiée car $u(x)^2 - gh(x)$ devient positif et $dH(x)/dx$ change également de signe en passant par le point $x = x_M$.

On voit donc le rôle clé joué par le nombre de Froude dans ces phénomènes. Dans le cas (i), le nombre de Froude reste toujours inférieur à l'unité ; dans le cas (ii), il augmente et passe par la valeur 1 exactement au point x_M , puis devient supérieur à 1 (écoulement supercritique).

L'écoulement qui nous intéresse, lors d'une surverse, correspond au cas (ii), où le nombre de Froude est égal à l'unité au sommet de la digue. Cette condition impose alors, si h_0 et $H(x)$ sont connus, une certaine valeur pour la vitesse d'entrée U_0 et pour la hauteur de l'écoulement en x_M , $h(x_M) = h_M$.

Ainsi le débit étant constant $Q = h_0 U_0 = h(x)u(x)$, on peut écrire (129) comme :

$$h(x)^3 - h(x)^2 (h_0 - H(x)) + \frac{h_0^2 U_0^2}{2g} = 0 \quad (132)$$

où si l'on écrit cette équation en x_M :

$$h_M^3 - h_M^2 (h_0 - H_M) + \frac{h_0^2 U_0^2}{2g} = 0 \quad (133)$$

Cette dernière équation possède différentes solutions suivant les valeurs de h_0 et U_0 . Ainsi :

$$\text{si } \frac{h_0^2 U_0^2}{2g} > \frac{4}{27} (h_0 - H_M)^3 \quad \text{il n'existe pas de solution} \quad (134)$$

$$\text{si } \frac{h_0^2 U_0^2}{2g} = \frac{4}{27} (h_0 - H_M)^3 \quad , 1 \text{ solution } h_M = \frac{2}{3} (h_0 - H_M) \quad (135)$$

$$\text{si } \frac{h_0^2 U_0^2}{2g} < \frac{4}{27} (h_0 - H_M)^3 \quad , \text{ il existe 2 solutions} \quad (136)$$

Ainsi, si l'on se donne h_0 et $H(x)$; et que l'on considère les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} u(x_M)^2 = h_M g \\ h_0 U_0 = h(x)u(x) \\ \frac{u(x)^2}{2} = -gh(x) + g(h_0 - H(x)) \end{cases} \quad (137)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} h_M = \frac{2}{3}(h_0 - H_M) \\ U_0 = \sqrt{\frac{8}{27}g \frac{(h_0 - H_M)^3}{h_0^2}} \end{cases} \quad (138)$$

qui nous fournit la vitesse d'entrée de l'écoulement, et la hauteur de l'écoulement en x_M , vérifiant $u(x_M)^2 = h_M g$.

On peut alors calculer $h(x)$ par l'équation (130) réécrite comme :

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{h(x)g}{u(x)} \frac{dH(x)}{dx} \left/ \left(u(x) - \frac{h(x)g}{u(x)} \right) \right. \quad (139)$$

qui devient une fois discrétisée en x :

$$\frac{h(x_{i+1}) - h(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{h(x_i)g}{u(x_i)} \frac{dH}{dx} \Big|_{x_i} \left/ \left(u(x_i) - \frac{h(x_i)g}{u(x_i)} \right) \right. \quad (140)$$

Annexe V : Principe d'obtention des équations de saut à l'interface

Les calculs que nous présentons ici sont issus de Marigo (1985), on peut aussi trouver une démarche semblable dans Graziano et Marasco (2001).

Rappel :

Soit une équation de bilan :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_t} \rho G dx = \iint_{\partial V_t} J[n] da + \iiint_{V_t} \rho H dx \quad (141)$$

ou G est une variable extensive quelconque, J le flux de diffusion de la quantité G , et H son taux de production volumique .

Grâce à différents théorèmes, on peut écrire ce bilan localement comme :

$$(\rho G)' + \operatorname{div}(\rho G \otimes u) - \operatorname{div} J - \rho H = 0 \quad (142)$$

On considère à un instant t un volume matériel V_t de frontière ∂V_t séparé en deux ouverts disjoints V_t^+ et V_t^- par une surface occupant dans l'espace la position S_t d'équation $f(y, t) = 0$.

La normale unitaire \vec{n} à S_t en un point y est :

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}} f}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} f\|}$$

et la célérité normale de déplacement v_b en ce point est :

$$v_b = -\frac{f'}{\|\overrightarrow{\operatorname{grad}} f\|}$$

La discontinuité de la fonction G en un point y de S_t sera notée :

$$[G](y, t) = G(y^+, t) - G(y^-, t), \text{ avec } f(y, t) = 0$$

Avant d'obtenir les relations eulériennes de Rankine-Hugoniot sur S_t , nous allons au préalable traiter l'équation de conservation de la masse, qui dérivée par rapport au temps devient :

$$0 = \frac{d}{dt} \iiint_{V_t} \rho dx$$

$$0 = \frac{d}{dt} \iiint_{V_t^+} \rho dx + \frac{d}{dt} \iiint_{V_t^-} \rho dx$$

Que l'on peut écrire grâce au théorème de transport :

$$0 = \iiint_{V_t^+ \cup V_t^-} \rho' dx - \iint_{S_t} [\![\rho]\!] v_b da + \iint_{\partial V_t} \rho u \cdot \tilde{n} da$$

Que l'on peut écrire grâce à la loi locale de conservation de la masse, valable sur V_t^+ et V_t^- :

$$0 = \iiint_{V_t^+ \cup V_t^-} \operatorname{div}(\rho u) dx - \iint_{S_t} [\![\rho]\!] v_b da + \iint_{\partial V_t} \rho u \cdot \tilde{n} da$$

Que l'on peut écrire grâce à la formule de Green :

$$0 = \iint_{S_t} [\![\rho u \cdot n]\!] da - \iint_{S_t} [\![\rho]\!] v_b da$$

qui devient :

$$0 = - \iint_{S_t} [\![\rho U]\!] da$$

avec $U = -u \cdot n + v_b$ la célérité locale.

Le théorème de localisation fournit alors la loi locale :

Conservation de la masse sur une surface de discontinuité :

$$[\![\rho U]\!] = 0, \quad U = v_b - u \cdot n$$

Remarque : si la vitesse u est discontinue, la célérité locale U l'est également. Par conséquent la masse volumique ρ sera également discontinue de façon à satisfaire :

$$\rho^+ U^+ = \rho^- U^- = \overline{\rho U}$$

où la barre représente la moyenne.

Revenons maintenant à la loi de bilan (141).

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_t} \rho G dx = \frac{d}{dt} \iiint_{V_t^+} \rho G dx + \frac{d}{dt} \iiint_{V_t^-} \rho G dx \quad (143)$$

Que l'on peut écrire grâce au théorème de transport :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_t} \rho G dx = \iiint_{V_t^+ \cup V_t^-} (\rho G)' dx + \iint_{\partial V_t} \rho G u \cdot \tilde{n} da - \iint_{S_t} [\rho G] v_b da \quad (144)$$

En utilisant la formule de Green, l'équation précédente devient :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_t} \rho G dx = \iiint_{V_t^+ \cup V_t^-} \{(\rho G)' + \operatorname{div}(\rho G \otimes u)\} dx - \iint_{S_t} [\rho U G] da \quad (145)$$

On procède de la même façon pour le terme de flux, en utilisant la formule de Green :

$$\iint_{\partial V_t} J[\tilde{n}] da = \iiint_{V_t^+ \cup V_t^-} \operatorname{div}(J) dx + \iint_{S_t} [J][n] da \quad (146)$$

Pour le terme source, on a :

$$\iiint_{V_t} \rho H dx = \iiint_{V_t^+ \cup V_t^-} \rho H dx \quad (147)$$

D'après (141), on peut donc écrire :

$$\iiint_{V_t^+ \cup V_t^-} \{(\rho G)' + \operatorname{div}(\rho G \otimes u) - \operatorname{div}(J) - \rho H\} dx - \iint_{S_t} \{[\rho U G] + [J][n]\} da = 0 \quad (148)$$

En utilisant la loi locale (142) applicable sur V_t^+ et V_t^- , et le théorème de localisation, on obtient l'équation de bilan de Rankine-Hugoniot :

$$[\rho U G] + [J][n] = 0 \quad (149)$$

Que l'on peut aussi écrire d'après ce qui précède :

$$\overline{\rho U} [G] + [J][n] = 0 \quad (150)$$

Contribution à la modélisation de l'érosion de fortes pentes par un écoulement turbulent diphasique :

Dans le but de mieux comprendre les phénomènes fondamentaux de l'érosion hydraulique des sols, nous étudions la relation entre la quantité locale de matière érodée et la contrainte locale exercée par l'eau sur le sol. La situation considérée est celle d'un écoulement bidimensionnel stationnaire, diphasique, turbulent, sur un sol immobile. Les équations dynamiques et les équations de conservation de la masse sont résolues simultanément. Les équations de Rankine-Hugoniot sont utilisées pour décrire les conditions de saut aux limites à l'interface eau-sol, et une loi d'érosion est fixée pour quantifier la quantité de matériaux érodés. Nous considérons ici deux types de lois d'érosion, l'une de type limite de plasticité, et l'autre proportionnelle à la différence entre la contrainte pariétale exercée par l'écoulement et la contrainte critique caractéristique du sol.

Ce travail nous a permis d'étudier l'influence des différents paramètres mis en jeu, en particulier l'inclinaison du sol pour deux configurations différentes (écoulement de type couche limite et à surface libre), et l'introduction d'une loi différentielle de diffusion turbulente, tenant compte entre autre, du gradient de pression vertical au sein de l'écoulement et de la taille des sédiments.

Les résultats obtenus montrent l'existence d'un fort couplage entre l'écoulement, l'érosion et les sédiments érodés en suspension, et notamment, pour des écoulements de type couche limite, la mise en évidence d'une pente critique du sol, à partir de laquelle l'érosion est amplifiée par la présence des sédiments déjà érodés.

Cette modélisation, qui a l'originalité de proposer une description locale du phénomène d'érosion, se veut être un outil pratique et simple qu'il faudra chercher à confronter à des résultats expérimentaux, pour valider les lois théoriques utilisées dans la modélisation.

Mots clefs : modélisation de l'érosion, écoulement turbulent diphasique, couche limite, surface libre.

Contribution to strong slope erosion by a two-phase turbulent flow:

To better understand the basic phenomena involved in hydraulic erosion, the influence of the eroded mass flow rate on the velocity field of the water flow is investigated by an original theoretical model. Here we simply consider the situation of a turbulent two-phase flow over a non-deformable solid medium with both turbulent stresses and turbulent particles diffusion in the flow. In the reference frame linked to the ground surface, the flow can be considered as a quasi-steady state and modelled by the well known boundary layer equations.

The dynamic equations and the mass conservation equations are solved simultaneously. The Rankine-Hugoniot equations are used to describe the boundary jump conditions at the interface between the fluid and the ground, and a law of erosion is fixed to evaluate the local mass flow of eroded materials. As we consider here a purely mechanical erosion process, we can reasonably postulate a threshold law: the eroded mass flow rate is simply proportional to the difference between the tangential stress induced by the flow and a critical value characteristic of the soil.

In this theoretical frame, we can study the influence of several parameters, as the sediments density or the ground slope, for two different configurations, namely a boundary layer and a free surface flow. A differential law of turbulent diffusion is also proposed taking into account the vertical pressure gradient within the flow.

A strong coupling between the fluid flow, the erosion process and the eroded suspended matter is clearly underlined. In particular, for a boundary layer flow, the existence of a critical ground slope is found, above which the presence of the already eroded sediments amplifies the erosion that becomes unlimited downstream.

This modelling proposes an original description of the phenomenon of local erosion. To become a practical and simple tool, it should be confronted with experimental results and validated.

Key words: erosion modelling, two-phase turbulent flow, boundary layer, free surface.