

Table des matières

Remerciements	i
Table des figures	5
Liste des tableaux	7
Introduction	9
1 Instabilités des écoulements cisailés ; Cadre de l'étude	11
1.1 Instabilités absolue et convective, modes globaux	11
1.1.1 Première approche	11
1.1.2 Approche temporelle ou spatiale	12
1.1.3 Définitions, valeurs remarquables	13
1.1.4 Critère de Briggs	13
1.1.5 Critère de transition	13
1.1.6 Modes globaux	13
1.2 Stabilité des écoulements parallèles en densité uniforme	14
1.2.1 Théorie linéaire non visqueuse	14
1.2.2 Théorie linéaire visqueuse	16
1.3 Stabilité des écoulements parallèles à densité variable	16
1.3.1 Équation de Rayleigh généralisée	17
1.3.2 Cas limite : discontinuité de vitesse et de densité	18
1.3.3 Étude de la stabilité du jet à densité variable	19
a) Analyse linéaire	20
b) Études expérimentales	20
2 Construction du modèle de simulation numérique	23
2.1 Étude bibliographique	23
2.1.1 Les caractéristiques des écoulements simulés	23
a) Couche de mélange	24
b) Couche limite turbulente	24
c) Écoulement de jet	25
2.1.2 Méthodes de discrétisation	26

	a)	Choix du maillage	26
	b)	Discrétisation temporelle	26
	c)	Discrétisation spatiale	27
2.1.3		Conditions aux limites	28
	a)	Les conditions usuelles	28
	b)	Les conditions particulières	29
2.2		Formulation générale	29
2.2.1		Hypothèses de travail	29
2.2.2		Les équations continues	30
2.2.3		Adimensionnement	30
2.3		Méthodes numériques	31
2.3.1		Domaine de calcul	31
2.3.2		Schéma temporel	31
2.3.3		Dérivation spatiale	32
2.3.4		Méthode de projection : les équations numériques	33
2.3.5		Équation de pression	34
	a)	Principe	34
	b)	Méthode de relaxation de Gauss-Seidel	37
	c)	Mise en œuvre pratique	37
2.3.6		Filtrages	38
	a)	Filtrage spatial	38
	b)	Filtrage non linéaire	40
2.4		Les conditions aux limites	41
2.4.1		Condition d'entrée (Γ_e)	41
2.4.2		Condition de sortie (Γ_s)	42
2.4.3		Conditions latérales (Γ_ℓ)	42
2.4.4		Correction de flux	43
2.4.5		Conditions aux limites pour la densité	43
2.5		Les schémas et conditions aux limites « écartés »	43
2.5.1		Schémas temporels	44
2.5.2		Conditions aux limites	44
	a)	Condition de sortie (Γ_s)	44
	b)	Condition latérale (Γ_ℓ)	44
2.6		Bilan : algorithme de résolution et organisation informatique	45
2.6.1		Algorithme de résolution	45
2.6.2		Organisation informatique	46

3	Étude linéaire et validation du code	49
3.1	Théorie linéaire du jet	49
3.1.1	Cadre de l'étude : problème de Rayleigh	49
3.1.2	Méthode de résolution	51
3.1.3	Résultats	52
3.2	Validation du code	56
3.2.1	Premiers éléments de validation	56
3.2.2	L'approximation linéaire	59
a)	Méthode	59
b)	Analyse de Fourier	60
c)	Taux de croissance temporel linéaire	61
4	Résultats obtenus par le code numérique	65
4.1	Influence du rapport de densité s sur la dynamique non linéaire	65
4.1.1	Le problème	65
4.1.2	Le jet Bickley	66
4.1.3	Le jet presque <i>top-hat</i>	68
4.1.4	Hypothèse pour expliquer le comportement « anormal » du jet $n = 4$ pour les grands s	71
4.1.5	Proposition de « scénario »	79
4.2	Association de vortex : <i>pairing</i>	79
4.2.1	Mécanisme	81
4.2.2	Observation	81
4.2.3	Influences sur le <i>pairing</i>	82
4.3	Influence de certains paramètres, certaines grandeurs	82
4.3.1	Influence du nombre de Reynolds	82
a)	Cas du jet Bickley ($n = 1$)	84
b)	Cas du jet presque <i>top-hat</i> ($n = 4$)	84
4.3.2	Couplage densité-pression : terme barocline	85
5	Étude expérimentale	89
5.1	Dispositif et techniques expérimentales	89
5.1.1	La soufflerie utilisée	89
5.1.2	Mécanisme de déplacement des « sondes »	91
5.1.3	Mesures VLD	91
5.1.4	Mesures par fil chaud	91
5.1.5	Mesures de densité	93
5.1.6	Observations avec une caméra rapide	94
5.2	Résultats expérimentaux	94
5.2.1	Intensité de turbulence	94

5.2.2	Épaisseur de quantité de mouvement θ	95
5.2.3	Profils de vitesse	96
5.2.4	Profils de densité	96
5.2.5	Jets d'air et d'hélium	98
5.2.6	Mode global du jet d'hélium	98
5.2.7	Appariement de vortex	100
5.3	Retour sur la simulation numérique	103
Conclusions et Perspectives		105
A Article soumis au <i>Journal of Fluid Mechanics</i>		107
B Opérateur linéaire de la méthode multigrille		147

Table des figures

1.1	Couche de mélange avec discontinuité tangentielle de vitesse et de densité . . .	18
2.1	Géométrie du domaine de calcul	31
2.2	Vue locale du maillage des points	32
2.3	Principe d'un V-cycle	36
2.4	Écarts entre la dérivation exacte et numérique pour un mode de Fourier . . .	39
2.5	Fonction de transfert du filtre compact	40
2.6	Dérive de la densité en l'absence de contrôle	41
2.7	Exemple de « mauvaise » condition latérale	45
3.1	Exemples de profils pour $s = 1/7$	50
3.2	Relations de dispersion ($n = 1$, $s = 1$, diagonalisation et tir corrigé)	53
3.3	Maximum du taux de croissance de l'instabilité (cadre spatial)	53
3.4	Relation de dispersion spatiale du mode sinueux ($n = 1$)	54
3.5	Relation de dispersion spatiale du mode variqueux ($n = 1$)	54
3.6	Relation de dispersion spatiale du mode sinueux ($n = 4$)	55
3.7	Relation de dispersion spatiale du mode variqueux ($n = 4$)	55
3.8	Champ de vorticité après une initialisation sur le bord	57
3.9	Vitesse sur l'axe ($s = 1$, $N = 257$, 4 000 pas)	57
3.10	Profils laminaires de vitesse	58
3.11	Vitesse longitudinale lorsque l'instabilité sinueuse croît	58
3.12	Vorticité initiale des perturbations utilisées	60
3.13	Fonction de Green de la vorticité dans l'approximation linéaire	60
3.14	Taux de croissance temporel ω_i	62
3.15	Zoom au voisinage des maxima des taux de croissance temporels	62
3.16	Effet de la résolution sur la précision du calcul	63
4.1	Vorticité <i>avant</i> la transition convective/absolue pour un profil ($n = 1$) . . .	67
4.2	Mode global amorti pour le jet $n = 1$	68
4.3	Vorticité <i>après</i> la transition convective/absolue pour un profil ($n = 1$) . . .	69
4.4	Mode global absolu ($n = 1$; $s = 0,13$)	70
4.5	Mode global amorti ($n = 4$; $s = 1,2$)	72

4.6	Mode global amorti ($n = 4$; $s = 0,9$)	73
4.7	Mode global amorti ($n = 4$; $s = 0,75$)	74
4.8	Mode global absolu ($n = 4$; $s = 0,7$)	75
4.9	Mode global absolu ($n = 4$; $s = 0,5$)	76
4.10	Deux points selles pour le mode variqueux ($n = +\infty$)	80
4.11	$\omega = f(s)$ pour le jet presque <i>top-hat</i>	81
4.12	Appariement de tourbillons ($n = 4$; $s = 0,8$)	83
4.13	Profils de u et ρ pour $n = 4$ et $Re = 200$	85
4.14	Valeurs extrêmes des termes baroclines	86
4.15	Localisation des effets baroclines	86
4.16	Localisation du terme $\Delta p/\rho$	87
5.1	Système de vannes, buse et soufflerie	90
5.2	Schéma de principe de la sonde de densité	94
5.3	Intensité de turbulence proche de la buse	95
5.4	Épaisseur de quantité de mouvement θ en fonction de Re (mesures au fil chaud)	96
5.5	Profils de vitesse bruts (air et hélium, mesures au fil chaud)	97
5.6	Profil de vitesse « universel » (mesures au fil chaud)	97
5.7	Profils de densité mesurés pour un jet d'hélium pour lequel $s = 0,14$ en sortie de buse ($x = 0$) et à $x = 9$ mm = $1,13 D$. On constate que le profil de densité n'évolue quasiment pas entre la sortie de buse et le premier diamètre : il reste essentiellement carré ou <i>top-hat</i>	98
5.8	Vues du jet d'air à différentes vitesses	99
5.9	Vues du jet d'hélium à différentes vitesses	100
5.10	Vitesse axiale à différentes stations et spectre associé (hélium)	101
5.11	Dépendance de f en fonction de Re	102
5.12	Dépendance analytique du St en fonction de Re	102
5.13	Appariement dans le jet d'hélium	103

Liste des tableaux

2.1	Temps de calcul	47
3.1	Résumé des prédictions linéaires	56
4.1	Principaux résultats non linéaires pour les modes sinueux et variqueux.	77
5.1	Constantes physiques pour l'air et l'hélium	92
5.2	Fréquences des modes globaux mesurées dans le jet d'hélium.	100

Introduction

La mécanique des fluides est une science complexe et riche qui repose sur les équations bien connues de Navier-Stokes. Malgré leur apparente simplicité, elles cachent, dans le terme non linéaire d'advection, des abîmes de complexité qui tourmentent encore le monde de la recherche aujourd'hui, plus d'un siècle après qu'elles ont été établies. Que de variété entre un filet d'eau qui coule au robinet, le sillage d'un navire sur la mer, les volutes d'une cigarette qui se consume, l'échappement des gaz d'un moteur, etc.

Afin de faciliter les études fondamentales, les écoulements sont usuellement classés en catégories « type » : les écoulements de jets et de sillages, les couches de mélange ou les couches limites par exemple. Les écoulements de jets qui font l'objet de la présente étude revêtent une grande importance dans l'industrie dans laquelle on en trouve de nombreux : dans les réacteurs chimiques, pour les moteurs à réaction, etc. Une bonne compréhension du phénomène du mélange reste par exemple un des nombreux problèmes cruciaux posés par les jets qui reste relativement ouvert à ce jour. Les applications dans le domaine de l'aérospatiale et de la combustion sont légion. L'écoulement de jet est également très étudié pour la compréhension de la transition entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent. L'étude de la stabilité d'un écoulement laminaire, c'est-à-dire des instabilités qui peuvent s'y développer constitue une étape centrale dans ce mécanisme.

L'étude des instabilités des écoulements est très ancienne. Dès la deuxième moitié du XIX^e siècle, Helmholtz (1868), Kelvin (1871), puis Rayleigh (1880) et Reynolds (1883) s'intéressent aux écoulements dans les conduites en général et aux instabilités qui peuvent s'y développer en particulier. Les équations générales qui en résultent sont l'équation de Rayleigh dans le cas d'un fluide parfait et l'équation d'Orr-Sommerfeld (1908) pour un fluide newtonien dont on ne néglige pas la viscosité. Il n'existe pas, dans le cas général, de solution analytique pour ces équations.

Même dans la catégorie de l'écoulement de jet, il n'y a pas unicité du prototype à étudier : le jet « rond » qui s'appuie sur une buse circulaire présente des conditions de symétrie qui en font un objet d'étude différent du jet « rectangulaire ». Ces deux jets sont tridimensionnels. Les jets bidimensionnels correspondants sont le jet axisymétrique et le jet plan. De manière évidente, les jets bidimensionnels sont des objets d'étude plus simples ; ils ne sont la plupart du temps que des étapes pour mieux comprendre certains phénomènes qui régissent les écoulements de jet tridimensionnels. Ces derniers sont en effet plus compliqués et nécessitent, dans le cadre de simulations numériques une puissance de calcul bien supérieure.

Pour notre travail, nous avons choisi de nous intéresser de manière centrale à l'influence de la masse volumique sur les instabilités. Sans considérer un écoulement compressible puisque les vitesses mises en jeu restent dans notre configuration très faibles par rapport à la célérité du son dans le milieu considéré, nous nous intéressons à un jet composé d'un gaz plus léger que l'air. L'une des caractéristiques les plus remarquables

lorsque l'on baisse la densité du jet par rapport au milieu ambiant est l'apparition d'oscillations auto-entretenues qui caractérise un mode absolument instable du jet. De telles oscillations caractérisées par un spectre de raies, par opposition au spectre large bande qui peut être observé dans le cas à densité constante, ont été mises en évidence expérimentalement par Sreenivasan *et al.* (1989), Monkewitz *et al.* (1990) et Kyle & Sreenivasan (1993). Pour étudier plus particulièrement ce phénomène, nous avons développé un code numérique complet qui simule directement les équations de Navier-Stokes incompressibles non linéaires en prenant en compte la variation de masse volumique. L'informatique est en effet un outil incontournable pour améliorer les connaissances dans le domaine des instabilités : l'explosion des capacités des ordinateurs permet d'envisager des simulations de plus en plus « gourmandes » en ressources avec du matériel standard. Nous avons développé une méthode multigrille spécifiquement pour tenir compte des variations de masse volumique dans l'équation de pression. À notre connaissance, c'est la première simulation numérique directe d'un jet à l'aide des équations de Navier-Stokes planes, incompressibles et à densité variable et qui étudie principalement les modes principaux du jet plan. La seule simulation qui s'y apparente dans une certaine limite (Chapin *et al.* (1996)) utilise les équations d'Euler compressibles avec un terme non physique d'hyperviscosité.

Du point de vue du temps consacré à chaque partie de ce travail, la mise au point du code numérique est, sans conteste, la plus longue. Construire, tester chaque routine puis les assembler pour obtenir un code qui fonctionne représente en effet une tâche dont on imagine difficilement l'ampleur avant d'y être confronté.

Nous avons également tenu à développer une approche expérimentale dans le cadre de ce travail. Les travaux mélangeant un aspect numérique et un aspect expérimental nous semblent en effet profitable pour mieux connaître les limitations et les difficultés de chaque domaine ainsi que pour améliorer la communication entre ces branches tout à fait complémentaires de la recherche mais qui, le plus souvent, évoluent dans des sphères différentes et ont du mal à parler le même langage. Nous consacrons donc un chapitre de ce manuscrit aux problèmes expérimentaux. Nous n'avons pas pu, faute de temps, nous y consacrer autant que nous aurions pu le souhaiter.

Ce manuscrit s'organise autour de cinq chapitres. Dans le premier chapitre, on présente le cadre général des instabilités des écoulements de jet et les concepts utiles pour le reste de l'étude. On y expose aussi les principaux résultats établis. Dans le deuxième chapitre, on construit, pas à pas, le modèle de simulation numérique que nous avons mis en œuvre. Après un rapide survol des méthodes utilisées dans la littérature, on détaille chaque point des méthodes numériques retenues. Dans le troisième chapitre, on développe une théorie linéaire complète intégrant la variation sur une large gamme du rapport de densité caractérisant la variation de masse volumique. Cette théorie linéaire nous permet, dans la seconde partie de ce chapitre, de procéder à la validation du code numérique. Dans le dernier chapitre consacré à l'aspect numérique de ce travail, on présente les principaux résultats établis. Le dernier chapitre est consacré à l'aspect expérimental développé dans le cadre de cette thèse. La configuration de la soufflerie utilisée et les différentes méthodes de mesure mises en œuvre ainsi que les premiers résultats sont exposés.

Le code source du programme écrit en **Fortran 95** ainsi que des routines **Matlab** ayant servi à l'exploitation des résultats fait partie intégrante de ce travail. Néanmoins, pour des raisons pratiques, il n'est pas inclus dans ce manuscrit. Il peut être obtenu sur simple demande par courriel à Stephane@Ravier.org.

Chapitre 1

Instabilités des écoulements cisailés ; Cadre de l'étude

L'objet de notre étude est un jet plan. Cet écoulement peut être vu comme deux couches de mélange adjacentes. Dans ce sens, l'étude des instabilités qui peuvent se développer dans un couche de mélange ou un écoulement de conduite est intéressante. Si les connaissances semblent solidement établies pour le cas à densité uniforme, nous verrons que les développements pour la densité variable sont nettement plus récents et font encore l'objet d'étude : c'est dans ce cadre que se situe ce travail.

1.1 Instabilités absolue et convective, modes globaux

Avant d'étudier les principaux résultats sur les instabilités des écoulements cisailés libres, il convient de clarifier les notions, qui vont être très utilisées dans ce travail, telles que celles d'instabilité convective, absolue, de mode global amorti ou auto-entretenu.

1.1.1 Première approche

Les premiers travaux sur la notion d'instabilité absolue et convective sont de Twiss (1951) et de Landau & Lifshitz (1959). On montre dans ces études qu'une perturbation peut évoluer de deux manières différentes dans un milieu instable :

- La perturbation peut croître et se propager en aval de l'écoulement de telle sorte qu'en tout point de l'espace, la perturbation finit toujours par s'atténuer : c'est le cas d'une **instabilité convective**.
- la perturbation peut croître et contaminer tout l'écoulement : c'est le cas d'une **instabilité absolue**.

En régime **linéaire**, pour déterminer la nature de l'instabilité, il suffit de déterminer la fonction de Green ou réponse impulsionnelle (en temps et en espace) $G(\mathbf{r}, t)$ des équations linéarisées qui caractérise l'écoulement dans le milieu considéré (Delbende & Chomaz (1998)). Pour simplifier l'exposé, on considère un milieu unidimensionnel infini selon x . La transformée de Fourier-Laplace de cette fonction de Green se met sous la forme :

$$G(k, \omega; \alpha) = \frac{1}{D(k, \omega; \alpha)} \quad (1.2)$$

Dans cette relation, k représente le nombre d'onde, ω la pulsation ou fréquence angulaire et α désigne de façon très générale, tous les autres paramètres qui contrôlent l'écoulement

(rapport de densité s , nombre de Reynolds Re , épaisseur de quantité de mouvement θ , etc.). Le nombre d'onde k et la pulsation ω sont complexes *a priori*. Il est clair que les singularités de l'équation (1.2) $\omega(k; \alpha)$ et $k(\omega; \alpha)$ qui sont solutions de $D(k, \omega; \alpha) = 0$ jouent un rôle important dans l'expression de $G(x, t; \alpha)$. On les appelle des **relations de dispersion**.

Les pôles (k_0, ω_0) d'ordre 2 en k (c'est-à-dire les racines doubles de D) définis par :

$$D(k_0, \omega_0; \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial k}(k_0, \omega_0; \alpha) = 0$$

sont très importants lorsqu'ils correspondent à la jonction (on parle alors de *pinching*) de deux branches solutions (Monkewitz & Sohn (1988)), $k_\ell(\omega; \alpha)$ et $k_u(\omega; \alpha)$ qui ont leur origine respective dans le demi-plan complexe inférieur et supérieur. En effet, Bers (1983) montre alors que le comportement asymptotique aux temps longs de la fonction de Green est dominé par l'intégrale autour de la singularité *pinch-point* $\omega_0(\alpha)$ qui a la partie imaginaire la plus grande. Cette intégration conduit à :

$$\forall x \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t; \alpha) \sim \frac{\exp(i(k_0(\alpha)x - \omega_0(\alpha)t))}{t^{1/2}}$$

ce qui représente un mode unique de Fourier de fréquence bien définie. On constate alors que la nature de l'instabilité (convective ou absolue) est déterminée par le signe de la partie imaginaire de ω_0 : si $\text{Im}(\omega_0) > 0$, le mode k_0 est absolument instable. Remarquons également que le développement de Taylor de D centré autour de (k_0, ω_0) le long d'une courbe de singularité donne

$$a(\omega - \omega_0) + b(k - k_0)^2 + O((\omega - \omega_0)^2, (k - k_0)^3) = 0, \quad (a, b) \in \mathbb{C}^2$$

ce qui montre que la vitesse de groupe $v_g(k_0)$ du paquet d'onde centré en k_0 définie par

$$v_g(k_0) = \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0)$$

est nulle.

1.1.2 Approche temporelle ou spatiale

Dans le cas général, on cherche à déterminer ω et k , tous les deux complexes *a priori* qui sont solution de

$$D(\mathbf{k}, \omega; \alpha) = 0 \tag{1.4}$$

Cette approche est très compliquée et on se limite le plus souvent à deux cas particuliers très importants :

l'approche temporelle : Dans ce cas, on se donne k réel et on détermine ω complexe.

Le caractère stable ou instable de l'écoulement est alors déterminé par le signe de la partie imaginaire de ω (si $\omega_i > 0$, l'écoulement est instable).

l'approche spatiale : Dans ce cas, on se donne ω réel et on détermine k complexe. Là encore, c'est le signe de la partie imaginaire de k qui détermine si l'écoulement est stable (si $k_i > 0$, l'écoulement est stable).

Dans la suite de cette partie, nous suivons principalement les notations des articles de Huerre & Monkewitz (1985, 1990).

1.1.3 Définitions, valeurs remarquables

Pour classer les écoulements selon leur stabilité et le caractère convectif ou absolu de leurs instabilités, nous définissons plusieurs valeurs particulières pour la pulsation ω et le nombre d'onde k . On note par des indices r et i les parties réelle et imaginaire respectivement.

Si on se place dans une approche **temporelle**, il existe, dans les cas usuels, pour l'équation (1.4) une unique valeur de k , k_{\max} , qui réalise le maximum du taux de croissance $\omega_i(k)$. On note alors $(\omega_i)_{\max} = \omega_i(k_{\max})$. Avec cette définition, on a un premier critère de classement des écoulements : si $(\omega_i)_{\max} > 0$, l'écoulement est instable tandis que si $(\omega_i)_{\max} < 0$, l'écoulement est linéairement stable.

Dans une approche **spatiale**, le nombre d'onde k_0 correspondant au mode dont la vitesse de groupe est nulle joue un rôle particulier. On note $\omega_{0,r} = \omega_r(k_0)$ la fréquence absolue et $\omega_{0,i} = \omega_i(k_0)$ le **taux de croissance absolu**. Le nombre complexe ω_0 correspond à une branche algébrique de $k(\omega)$ dans le plan complexe ω ; k_0 est un **point selle** de $\omega(k)$.

Le taux de croissance remarquable $\omega_{0,i}$ ne doit pas être confondu avec $(\omega_i)_{\max}$. En effet, $(\omega_i)_{\max}$ caractérise l'évolution du pic du paquet d'onde dans le temps alors que $\omega_{0,i}$ caractérise l'évolution aux grands temps ($t \rightarrow +\infty$) du mode spécial k_0 observé à une place fixe. En outre, puisque $(\omega_i)_{\max}$ représente un maximum sur k , on a :

$$(\omega_i)_{\max} \geq \omega_{0,i}$$

1.1.4 Critère de Briggs

Le critère de Briggs permet de classer les écoulements selon la valeur de ω_0 . Si ω_0 est dans le demi-plan complexe supérieur ($\omega_{0,i} > 0$), l'écoulement est **absolument instable**. Sinon, si $(\omega_i)_{\max} > 0$, l'écoulement est **convectivement instable**.

1.1.5 Critère de transition

Les deux branches spatiales, solutions de (1.4), peuvent se « rencontrer » dans le plan complexe ω provoquant un *pinching*. Lorsque cela se produit, le point de contact correspond au mode k_0 : c'est ainsi que l'on peut détecter la transition entre une instabilité convective et absolue lorsque le *pinching* se produit sur l'axe $\omega_i = 0$. La **valeur critique** α_{ca} telle que $\text{Im}(\omega_0(\alpha_{ca})) = 0$ est alors la **signature de la transition convective/absolue**.

Dans les notions abordées jusqu'à maintenant, la variation de l'écoulement moyen selon la direction x n'a jamais été prise en compte. En fait, tout ce qui précède s'applique pour une étude **locale** c'est-à-dire pour un domaine limité centré autour d'un point. Lorsque l'on s'intéresse à l'écoulement dans son ensemble, un autre type de modes peut apparaître.

1.1.6 Modes globaux

Les modes globaux sont étudiés de manière asymptotique pour des variations très faibles du profil de vitesse de base. Pour caractériser cette évolution spatiale du profil, on définit une échelle L telle que

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dx} \ll 1$$

où θ représente l'épaisseur de quantité de mouvement ou de vortacité.

Si λ désigne la longueur d'onde des modes étudiés, on utilise une nouvelle échelle spatiale X définie par :

$$X = \frac{\lambda}{L} x$$

Les mêmes grandeurs que celles déterminées précédemment peuvent être définies localement sans difficulté.

Si, dans l'écoulement, il existe une zone de valeurs de X où $(\omega_{0,i})_{\max}(X) > 0$ alors l'écoulement est **absolument instable** et des oscillations auto-entretenues peuvent apparaître tandis que s'il existe une zone telle que $\{(\omega_i)_{\max}(X) > 0; (\omega_{0,i})_{\max}(X) < 0\}$, l'écoulement est **convectivement instable**. Des oscillations auto-entretenues dans tout l'écoulement sont la signature d'un **mode global**.

Notons qu'il existe un cas « limite » : dans le cas où $\{(\omega_i)_{\max}(X) > 0$ et $(\omega_{0,i})_{\max}(X)\}$ est négatif mais proche de zéro. Dans ce cas, on peut qualifier l'écoulement de *presque absolument instable*. Dans ce cas, des modes faiblement atténués peuvent exister. C'est particulièrement vrai au voisinage des transitions convective/absolue.

1.2 Stabilité des écoulements parallèles en densité uniforme

Dans le domaine de la densité constante, les connaissances sont relativement bien établies. On résume ici les principaux résultats que l'on peut trouver notamment dans les ouvrages de Landau & Lifshitz (1959) ou de Drazin & Reid (1982). On s'intéresse ici aux écoulements strictement parallèles à deux dimensions c'est-à-dire que le profil de vitesse \mathbf{U}_0 ne dépend que de la coordonnée transverse y et pas de x (direction de l'écoulement) :

$$\mathbf{U}_0 = U_0(y) \mathbf{e}_x$$

1.2.1 Théorie linéaire non visqueuse

La théorie de stabilité non visqueuse des écoulements parallèles repose particulièrement sur les travaux de Rayleigh et Reynolds. On part des équations de Navier-Stokes et de la condition d'incompressibilité écrites dans un système de coordonnées adimensionnées :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Pour mener une étude de stabilité, on linéarise ces équations autour de l'écoulement moyen¹ (\mathbf{U}_0, P_0) en notant avec un tilde les perturbations (que l'on suppose toutes d'ordre 1). En outre, on note $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ les composantes de la perturbation de vitesse $\tilde{\mathbf{u}}$ et on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{v} \frac{dU_0}{dy} \mathbf{e}_x = -\nabla \tilde{p} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0$$

La résolution de ce problème aux valeurs initiales² n'est pas aisée. Cependant, dans de nombreux cas pratiques, on peut se restreindre à une étude en terme de modes normaux, c'est-à-dire pour lesquels toutes les composantes $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p})$ de la perturbation sont de la forme $e^{i(kx - \omega t)}$. Avant d'obtenir l'équation fondamentale de cette étude linéaire, on peut montrer (Drazin & Reid (1982), § 21) le théorème de Squire pour les écoulements non visqueux qui permet de se restreindre à une étude bidimensionnelle.

¹Dans l'écoulement parallèle de base, on a $P_0 = C^{\text{te}}$ car le profil de vitesse est porté par \mathbf{e}_x mais ne dépend que de la variable spatiale y .

²*initial value problem.*

Théorème de Squire : Pour chaque perturbation tridimensionnelle, il existe un mode bidimensionnel qui est plus instable.

Notons que le théorème de Squire repose sur l'hypothèse de l'**absence de tout forçage extérieur** qui induirait l'existence d'une direction privilégiée dans l'espace. On peut alors réécrire le problème en terme de fonction courant ϕ :

$$\tilde{u} = \frac{d\phi}{dy} \quad \text{et} \quad \tilde{v} = -i k \phi$$

On obtient alors finalement l'**équation de Rayleigh** :

$$(U - c) \left(\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2 \phi \right) - \frac{d^2U}{dy^2} \phi = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{\omega}{k} \quad (1.5)$$

où c représente la vitesse de phase. Avec des conditions aux limites appropriées, cette équation forme l'équation fondamentale d'un problème aux valeurs propres qui permet d'étudier la stabilité linéaire des écoulements parallèles non visqueux. Cette équation est **linéaire**. Ainsi, une fois donné un profil de vitesse $U(y)$ de parité définie, il est clair que l'on peut chercher la solution ϕ avec une parité fixée *a priori*. Ainsi, on peut trouver une solution où ϕ est paire et une autre, nécessairement indépendante³, impaire. Comme l'équation de Rayleigh est d'ordre 2, on a donc toutes les solutions. Ainsi, il existe deux familles de solutions :

- le mode **sinueux** : p et u sont antisymétriques et v et ϕ sont symétriques par rapport à y ;
- le mode **variqueux** : p et u sont symétriques et v et ϕ sont antisymétriques par rapport à y .

On peut maintenant citer le théorème de Rayleigh.

Théorème de Rayleigh (1880) : La présence d'un point d'inflexion dans le profil parallèle $U_0(y)$ est une *condition nécessaire* pour que l'écoulement soit instable.

Il est important de souligner que ce critère de stabilité n'est absolument pas suffisant : il existe des profils qui présentent un point d'inflexion et qui sont pourtant stables vis-à-vis des perturbations infinitésimales. Bien après Rayleigh, Fjørtoft a établi un autre critère :

Théorème de Fjørtoft (1950) : Une *condition nécessaire* pour que l'écoulement soit instable est que, quelque part dans l'écoulement, on ait

$$\frac{dU_0}{dy} (U_0 - U_0(y_i)) < 0$$

où y_i représente l'ordonnée du point d'inflexion.

Ce critère est plus restrictif que le théorème de Rayleigh mais il ne constitue toujours pas une condition suffisante. Le contre-exemple proposé par Tollmien en 1935 ($U_0 = \sin y$) vaut aussi bien pour le théorème de Rayleigh que pour celui de Fjørtoft.

³Puisque l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont orthogonaux, une fonction paire et une autre impaire sont bien linéairement indépendantes.

1.2.2 Théorie linéaire visqueuse

La prise en compte de la viscosité modifie un certain nombre de résultats. Reynolds lui-même a formulé deux hypothèses concernant la viscosité et la stabilité des écoulements parallèles :

Première hypothèse de Reynolds : Le fluide non visqueux peut être instable et le fluide visqueux stable. L'effet de la viscosité est alors purement stabilisant.

Seconde hypothèse de Reynolds : Le fluide non visqueux peut être stable et le fluide visqueux instable. La viscosité serait alors la cause de l'instabilité.

Reynolds se refusait à écarter la seconde hypothèse même s'il n'est pas parvenu à établir un mécanisme qui la sous-tendrait. Après Reynolds, la théorie visqueuse ne s'est pas développée aussi rapidement que son homologue non visqueuse. Il faut attendre les travaux de Orr (1907) et Sommerfeld (1908).

Une différence essentielle avec le cas non visqueux, c'est qu'une fonction quelconque $U_0(y) \mathbf{e}_x$ ne peut plus être une solution stationnaire des équations de Navier-Stokes. En effet, si l'on suppose que l'écoulement moyen est toujours strictement parallèle, on a la relation

$$\frac{d^2 U_0}{dy^2} = \text{Re} \frac{dP_0}{dx}$$

ce qui impose de se limiter à des variations linéaires selon la direction longitudinale x pour la pression et ce qui limite la forme de U_0 à un polynôme d'ordre 2 au maximum en y . Les deux cas particuliers correspondants sont les écoulements de Couette plan (U_0 linéaire en y et P_0 constant) et de Poiseuille plan (U_0 quadratique en y et P_0 linéaire en x). Dans la suite de ce paragraphe, on va pourtant travailler avec $U_0(y)$ comme si c'était une fonction quelconque de la variable y . En effet, il existe une grande classe de profils, très répandus (jet, couche limite, couche de mélange, etc.), qui sont **les écoulements quasi-parallèles** c'est-à-dire que l'on suppose

$$V_0 \ll U_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U_0}{\partial x} \ll 1$$

Modulo cette hypothèse et en suivant la même démarche que pour la théorie non visqueuse, c'est-à-dire une analyse en modes normaux, on établit plusieurs résultats :

- Le **théorème de Squire** est applicable également en présence de vorticité.
- L'équation d'Orr-Sommerfeld :

$$(U - c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \phi - \frac{d^2 U_0}{dy^2} \phi = \frac{1}{ik\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 \phi \quad (1.6)$$

Cette équation est très proche de l'équation de Rayleigh (1.5) puisque seul le membre de droite est diff  rent. Cela n'a rien d'étonnant puisque la prise en compte de la viscosité introduit un terme linéaire dans l'équation du mouvement. Pour les écoulements quasi-parallèles, l'effet de la viscosité est purement dissipatif (Drazin & Reid (1982)).

1.3 Stabilité des écoulements parallèles à densité variable

Les travaux concernant la stabilité des écoulements parallèles à densité variable sont beaucoup plus récents et il n'existe pas à notre connaissance d'étude qui traite extensivement l'influence du rapport de densité. Dans les études existantes, ce rapport varie

dans des gammes assez modérées, notamment dans le cadre de l'approximation Boussinesq pour les écoulements chauffés. En outre, on se restreint, pour l'étude linéaire, au cas non-visqueux. On suppose que la viscosité n'a, comme pour le cas à densité uniforme, qu'un effet dissipatif. En outre, on se limite à l'étude des écoulements parallèles⁴.

1.3.1 Équation de Rayleigh généralisée

Puisque la densité n'est plus une constante, on doit maintenant considérer deux fonctions de profil : un profil pour la vitesse et un pour la densité. On a alors deux fonctions qui dépendent de la variable transverse y :

$$\mathbf{U}_0 = U_0(y) \mathbf{e}_x \quad \text{et} \quad \rho_0 = \rho_0(y)$$

On se propose d'établir l'équation générale analogue à l'équation de Rayleigh en suivant bien évidemment une méthode analogue à celle qui conduit à (1.5). On décompose tous les champs en la somme de la solution stationnaire plus la perturbation :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = U_0(y) + \tilde{u}(x, y, t) \\ v(x, y, t) = 0 + \tilde{v}(x, y, t) \\ p(x, y, t) = P_0 + \tilde{p}(x, y, t) \\ \rho(x, y, t) = \rho_0(y) + \tilde{\rho}(x, y, t) \end{cases}$$

Dans la suite, on omet le tilde pour désigner les termes perturbatifs. Les équations de Navier-Stokes linéarisées en ne conservant que les termes d'ordre 1 s'écrivent alors

$$\begin{cases} \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u}{\partial x} + v U_0' \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Le symbole prime désigne la dérivation usuelle des fonctions à une variable réelle. Dans l'approximation linéaire, l'équation d'évolution de la masse volumique est une simple équation d'advection découplée des équations de Navier-Stokes que nous omettons donc d'écrire dans la suite du raisonnement. Pour ces dernières, seul le profil stationnaire ρ_0 intervient. On cherche alors une solution sous forme d'un mode normal $f(y) e^{i(kx - \omega t)}$. On introduit également la fonction courant $\phi(y)$ de telle sorte que l'on a

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi' \\ -ik\phi \\ \tilde{p}(y) \end{bmatrix} e^{i(kx - \omega t)}$$

En reportant ces expressions dans le système (1.7) et en simplifiant le terme oscillant et le facteur ik dans la première équation⁵, on obtient

⁴ou quasi-parallèles si l'on tenait compte de la viscosité.

⁵L'écriture en terme de fonction courant permet de vérifier automatiquement la relation d'incompressibilité.

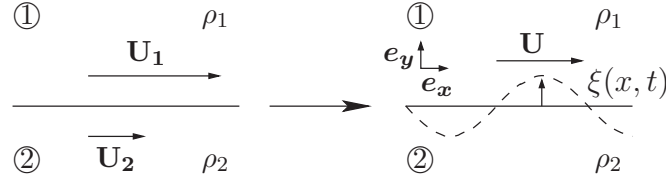


FIG. 1.1: Configuration de la couche de mélange pour le calcul de la relation de dispersion dans le cas d'une discontinuité tangentielle de vitesse et de densité. Le cas général est présenté à gauche. Par un changement de référentiel adéquat, on se ramène à la configuration présentée à droite. On introduit également la notation ξ pour désigner le déplacement de l'interface.

$$\begin{cases} \rho_0 ((U_0 - c) \phi + U_0 \phi') = -p \\ \rho_0 (k^2 (U_0 - c) \phi) = -p' \end{cases}$$

Il reste à éliminer la pression p entre ces deux équations ce qui conduit à

$$\boxed{\phi'' - k^2 \phi + \frac{\rho'_0}{\rho_0} \phi' - \frac{1}{U_0 - c} \left(U_0'' + \frac{\rho'_0}{\rho_0} U_0' \right) \phi = 0} \quad (1.9)$$

Pour faciliter la comparaison avec l'équation de Rayleigh (1.5), on peut réécrire cette relation sous la forme :

$$(U - c) \left(\frac{d^2 \phi}{dy^2} - k^2 \phi \right) - \frac{d^2 U_0}{dy^2} \phi = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy} \left(\frac{dU_0}{dy} \phi - (U_0 - c) \frac{d\phi}{dy} \right)$$

Deux termes supplémentaires qui dépendent tous les deux du gradient de densité interviennent. Pour étudier la stabilité de tels écoulements, il faut déterminer la relation de dispersion $F(\omega, k) = 0$. L'étude analytique ne peut pas être conduite mais diverses approches numériques sont possibles et font l'objet du chapitre 3. Notons que pour une étude numérique, on préfère à cette équation, l'expression en terme de pression plutôt qu'en terme de fonction courant. En effet, l'équation (3.4), page 51 ne fait pas intervenir de dérivée seconde mais deux dérivations simples.

1.3.2 Cas limite : discontinuité de vitesse et de densité

Landau & Lifshitz (1959) traitent le cas particulier d'une couche de mélange bidimensionnelle d'épaisseur nulle pour laquelle on a une discontinuité de vitesse et de densité à la traversée de l'interface. La configuration expérimentale est représentée sur la figure 1.1.

La position du point de l'interface (supposée en $y = 0$ à $t = 0$) est repérée par $\xi(x, t)$. On étudie la stabilité de petites perturbations (notées avec un tilde) que l'on choisit sinusoïdales. Soit $\tilde{\mathbf{u}}_1$ la perturbation du champ de vitesse dans le milieu ①. On a :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\rho_1} \nabla \tilde{p}_1 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1 = 0$$

En prenant la divergence de la première équation, on vérifie que \tilde{p}_1 vérifie l'équation de Laplace. Comme on suppose que \tilde{p}_1 est de la forme $f(y) e^{i(kx - \omega t)}$, on a alors nécessairement (non divergence)

$$f(y) \propto e^{-ky}$$

d'où

$$\tilde{p}_1 \propto e^{-ky} e^{i(kx - \omega t)}$$

De l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon \mathbf{e}_y , on déduit

$$\tilde{v}_1 = \frac{k \tilde{p}_1}{i \rho_1 (k U - \omega)}$$

Par ailleurs, compte tenu du fait qu'en l'absence de perturbation le champ de vitesse est porté par \mathbf{e}_x , on a la relation

$$\tilde{v}_1 = \frac{d\xi}{dt}$$

soit
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \tilde{v}_1 - U \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

d'où
$$\tilde{v}_1 = i \xi (k U - \omega)$$

En rassemblant ces résultats, il vient

$$\tilde{p}_1 = -\xi \frac{\rho_1 (k U - \omega)^2}{k}$$

On détermine \tilde{p}_2 en changeant y en $-y$ et en posant $U = 0$ et il vient

$$\tilde{p}_2 = \xi \frac{\rho_2 \omega^2}{k}$$

À l'interface, on a $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$ ce qui permet de déduire la relation de dispersion

$$\boxed{\omega = k U \frac{\rho_1 \pm i \sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}}$$

Du point de vue de l'analyse non-visqueuse, un tel **écoulement** est donc **toujours instable** : en effet, pour toute valeur de k , il existe une valeur de ω de partie imaginaire ω_i positive ; cela peut être expliqué par le fait que dans ce problème, aucune échelle de longueur ne peut jouer le rôle de « coupure » puisque l'épaisseur de la couche de mélange est nulle. Notons également que la vitesse de phase est donnée par la moyenne des vitesses de chaque domaine pondérée par la masse volumique.

Ce résultat est intéressant dans le sens où c'est un des seuls cas où l'on peut conduire le calcul de manière analytique jusqu'à obtenir la relation de dispersion sous forme explicite. En outre, en couplant deux couches de mélange de ce type, on obtient un jet dont le profil de base est carré ou *top-hat*. Après calcul, on montre alors que la relation de dispersion est définie de manière implicite et s'écrit (Yu & Monkewitz (1990)) :

$$A \left(\frac{2 - c}{c} \right)^2 = - \frac{e^k + s e^{-k}}{e^k - s e^{-k}}$$

où A est un coefficient qui vaut ± 1 et s est le rapport de densité.

1.3.3 Étude de la stabilité du jet à densité variable

Nous menons dans le chapitre 3 une étude linéaire complète des écoulements de jet plan à densité variable. Dans cette partie, on donne les principaux résultats connus sur le jet à densité variable. Nous nous appuyons principalement sur des travaux expérimentaux (Raynal *et al.* (1996); Yu & Monkewitz (1993)) et théoriques (Yu & Monkewitz (1990), Pier & Huerre (2001)).

a) Analyse linéaire

Yu & Monkewitz (1990) étudient la stabilité linéaire d'une famille de jets et de sillages à écoulement moyen parallèle à densité variable définis dans un système adimensionné par

$$\begin{cases} U(y) = 1 - \Lambda + 2\Lambda F(y) \\ \rho(y) = 1 + \left(\frac{1}{s} - 1\right) F(y) \end{cases} \quad \text{avec} \quad F(y) = \frac{1}{1 + \operatorname{sh}^{2n}(y \operatorname{Argsh}(1))} \quad (1.11)$$

s est le rapport de densité et il est défini comme le rapport de la densité en $y = 0$ sur la densité « à l'infini », le paramètre Λ est constant (rapport de vitesse) et dépend de l'écoulement étudié :

$$\Lambda = \frac{U(y=0) - U(y=\infty)}{U(y=0) + U(y=\infty)}$$

Pour un jet, Λ est positif⁶ tandis que pour un sillage, ce paramètre est négatif. Avec un tel profil, l'épaisseur de vorticité est définie par

$$\theta_\omega \simeq \frac{\sqrt{2}}{n \operatorname{Argsh}(1)}$$

Si les variations en aval de l'écoulement parallèle sont faibles à l'échelle des instabilités, alors la croissance linéaire d'un mode global est possible si et seulement s'il existe une zone d'instabilité absolue dans l'écoulement. Aucune instabilité absolue ne peut exister pour $|\Lambda| \leq 0,69$: ainsi, en ajoutant un co-courant, il est possible d'empêcher toute instabilité absolue (Huerre & Monkewitz (1990)). Pour un jet 2D plan sans co-courant ($\Lambda = 1$), les deux modes sinueux et variqueux ont un comportement diff rent quand le rapport de densité varie. Avec un profil de la famille (1.11) et $n = 5$, Yu et Monkewitz établissent un rapport de densité critique s_{ca} de 0,95 pour le mode variqueux. Dans la gamme étudiée, le mode sinueux ne présente aucune transition convective/absolue. En prenant en compte la viscosité avec un nombre de Reynolds de 1000, ce rapport critique diminue de 3% seulement à 0,92.

La dynamique du jet, pour des rapports de densité $s < s_{ca}$ est censée être dictée par la transition : on observe des oscillations auto-entretenues qui marquent une instabilité absolue de fréquence, la fréquence de la transition obtenue par l'analyse linéaire. C'est le **critère de stabilité marginale absolue de Dee & Langer (1983)**.

b)  tudes expérimentales

La méthode retenue dans l'étude expérimentale correspondante (Yu & Monkewitz (1993)) pour faire varier la densité est le chauffage. Ainsi, les profils de vitesse et de densité ont bien la même forme analytique. Dans l'étude expérimentale de Raynal *et al.* (1996) en revanche, la densité varie par mélange d'hélium et d'air. Les profils peuvent donc avoir une forme différente ce qui complique l'étude *a priori* . En contrepartie de cette difficulté, on peut faire varier s sur une bien plus grande plage de valeurs : en chauffant jusqu'à 130 C, s diminue jusqu'à 0,73 tandis qu'en mélangeant de l'air et de l'hélium, on passe de 1 (air pur)   0,14 (hélium pur).

Yu & Monkewitz (1993) obtiennent des profils expérimentaux qui peuvent être modélisés par $n = 5$ dans la famille de profils (1.11), c'est-à-dire des profils qui sont assez

⁶En l'absence de co-courant, on a $\Lambda = 1$ pour un jet.

proches d'une fonction carrée. Ensuite, le rapport de densité est baissé jusqu'à obtenir un changement de comportement du jet. En effet, pour s inférieur à une valeur critique s_c , le jet se comporte comme un oscillateur auto-entretenu caractérisé par un spectre piqué. Le rapport de densité critique s_c est évalué à 0,9. Cette valeur est à rapprocher du rapport de densité critique s_{ca} qui traduit la transition entre une instabilité convective et une instabilité absolue s_{ca} et qui est déterminé par la théorie linéaire (le rapport de densité critique s_{ca} est défini par $\text{Im}(\omega_0(s_{ca})) = 0$ conformément à la définition donnée au §1.1.5). Pour les rapports de densité inférieurs, la dynamique du jet est alors dominée par le mode variqueux et l'association de deux vortex ou *pairing* s'observe de plus en plus près de la buse. Dans tous les cas où ce mécanisme d'appariement est observé, il a lieu dans une zone où l'écoulement est réellement plan : c'est donc un phénomène purement bidimensionnel. En outre, le critère de stabilité marginale absolue permet bien de prédire la dynamique de l'écoulement après la transition.

En revanche, dans l'étude de Raynal *et al.* (1996), ce même rapport de densité s_c de transition pour le comportement du jet, est mesuré à 0,7 alors que les profils sont « proches » puisque les auteurs utilisent les mêmes formules analytiques (1.11) avec un paramètre $n = 3$. Les auteurs avancent plusieurs hypothèses pour expliquer l'écart entre ces deux mesures par des formes différentes de profils expérimentaux de densité et de vitesse dans les deux études. Ils s'intéressent notamment au cas où le profil de densité est plus large que le profil de vitesse. Cette hypothèse, étayée par des simulations numériques, permet en effet de rendre compte d'une réduction sensible de la zone d'écoulement absolument instable. L'hypothèse n'a pas pu être vérifiée expérimentalement car cela nécessiterait des mesures dans tout l'écoulement de u et de ρ . Or les mesures étaient réalisées à partir d'un seul fil chaud ce qui ne permet pas de séparer les informations de vitesse et de densité.

Ainsi l'influence exacte du rapport de densité n'est pas encore totalement comprise, de nombreuses questions restent en suspens. Le scénario prédit par le critère de Dee & Langer (1983) est-il valable universellement pour les jets plan ? Quelle influence pour la forme du profil ? Quel rapport de densité critique pour la transition convective/absolue du mode convectif ? Le présent travail vise à apporter des éléments de réponse à ces interrogations sur le jet 2D plan à densité variable grâce à des simulations numériques directes (DNS). Nous proposons une étude linéaire complète (chapitre 3) puis une étude non-linéaire (chapitre 4) à partir du modèle DNS présenté dans le chapitre 2.

Chapitre 2

Construction du modèle de simulation numérique

Dans ce chapitre, on commence par faire une étude bibliographique préliminaire puis on présente, pas à pas, toutes les hypothèses et méthodes retenues pour bâtir le code numérique. Dans un premier temps, on donne la formulation générale du problème. On présente ensuite en détail les différentes discrétisations et techniques utilisées pour résoudre les équations ; on s'intéresse particulièrement aux conditions aux limites. Enfin, on revient sur les nombreuses pistes infructueuses ou trop peu performantes que nous avons testées dans cette phase de mise au point.

2.1 Étude bibliographique préliminaire

Avant de chercher à développer notre propre code DNS, nous nous sommes faits une idée des techniques utilisées dans ce domaine dans la littérature. Notre objectif était de préparer un code assez robuste, facilement adaptable et qui fonctionne ; l'optimisation n'était pas notre souci principal. Nous nous sommes donc inspirés des techniques numériques mises en œuvre dans les articles. Nous nous sommes plus concentrés sur les DNS qui utilisent une approche spatiale, plus à même de reproduire les conditions expérimentales. En outre, en raison des progrès des capacités informatiques, ces dernières se sont généralisées depuis la fin des années 90. Cependant, les approches temporelles Spalart (1988); Caulfield & Peltier (2000) sont toujours utilisées et n'ont pas été ignorées par nos recherches.

Les articles traitant de DNS dans un jet ne sont pas très nombreux. La littérature est plus abondante sur d'autres écoulements type tels les couches de mélange ou les couches limites (voir par exemple Caulfield & Peltier (2000); Spalart (1988); Moin & Mahesh (1998)). Certaines caractéristiques peuvent être adaptées d'un type d'écoulement à l'autre (méthode de discrétisation temporelle par exemple) tandis que d'autres sont spécifiques (traitement des conditions aux limites).

L'objectif de cette étude n'est pas de faire une revue exhaustive des articles qui traitent de simulation numérique. Ces derniers sont en effet bien trop nombreux. Nous présentons ici les articles qui nous ont guidés dans la construction du modèle DNS.

2.1.1 Les caractéristiques des écoulements simulés

Les articles peuvent se ranger en deux grandes classes :

- ceux qui considèrent la masse volumique constante dans l'écoulement (Boersma *et al.* (1998); Bhaganagar *et al.* (2000); Wilson & Demuren (1997));
- ceux qui considèrent que l'écoulement est compressible (Freund (1999); Joslin (1997); Stanley *et al.* (2002)).

Bizarrement, nous n'avons en effet pu trouver qu'un unique article Caulfield & Peltier (2000) qui étudie le cas « intermédiaire » au niveau de sa complexité, c'est-à-dire le cas où l'on considère l'écoulement comme incompressible mais où l'on prend en compte les variations de la masse volumique; dans cet article, l'approche utilisée est temporelle.

Dans les descriptions qui vont suivre, on utilise, pour décrire le domaine d'étude, la convention suivante : $A \times B \times C$ où A représente la dimension dans la direction de l'écoulement¹, B la dimension dans la direction de développement du jet² et C dans la 3^e direction pour les simulations tridimensionnelles. La même notation est utilisée pour le maillage. Bien entendu, dans le cas des longueurs, ces valeurs sont adimensionnées par l'échelle de longueur adéquate (diamètre de la buse dans le cas d'un jet rond par exemple).

a) Couche de mélange

Caulfield & Peltier (2000) utilisent une approche temporelle pour traiter la couche de mélange. L'écoulement est supposé incompressible à densité variable dans l'approximation Boussinesq. Même si la couche de mélange n'est pas notre configuration de travail, il est utile de s'arrêter sur cette étude. En effet, c'est la seule référence à notre connaissance qui s'intéresse à une étude incompressible mais à densité variable dans l'approximation Boussinesq. Il s'agit d'une DNS temporelle où le schéma fait appel à des différences finies centrées d'ordre 2. Le domaine étudié représente $14,7 \times 10$ où l'unité de longueur représente la demi-épaisseur de la couche de mélange initiale (profil en tangente hyperbolique). La longueur du domaine a été choisie afin de contenir exactement un mode; ce mode étant le plus instable donné par la théorie linéaire. Ainsi tout phénomène d'appariement des vortex (*pairing*) entre les tourbillons de Kelvin-Helmholtz est exclu *a priori* : l'objectif de l'étude est le mélange. Le nombre de Reynolds s'élève à 750.

b) Couche limite turbulente

C'est l'écoulement typique le plus étudié en DNS. Les publications concernant la couche limite sont très nombreuses (Spalart (1988); Joslin (1997); Bhaganagar *et al.* (2000) par exemple).

Spalart (1988) utilise une approche temporelle avec des conditions périodiques pour étudier une couche limite turbulente à densité constante. L'étude est conduite pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Les méthodes employées sont cependant trop spécifiques à la configuration particulière de l'écoulement pour pouvoir être utilisées.

Joslin (1997) étudie les équations 3D instationnaires et compressibles de Navier-Stokes pour une couche limite en suivant une ligne d'attache (cas d'un jet qui percute une plaque par exemple). C'est une étude de type perturbatif où la partie simulée se superpose à un écoulement moyen. Le nombre de Reynolds des écoulements étudiés se situe entre 500 et 700. Ici aussi, le domaine est supposé périodique et l'approche est temporelle.

On soulignera l'approche choisie dans Bhaganagar *et al.* (2000) : plutôt que de résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles, les auteurs s'intéressent à une équation aux

¹streamwise direction.

²spanwise ou cross-stream direction.

dérivées partielles d'ordre 4 (l'équation de la vorticité). La difficulté qui surgit est évidemment de déterminer les 4 conditions aux limites correspondantes. L'étude est conduite pour un Reynolds de 650 et l'approche est spatiale.

c)   coulement de jet

jet à densité constante incompressible Il existe de nombreuses études numériques sur le jet à densité constante. Nous en citons quelques-unes qui nous ont permis d'alimenter notre réflexion en vue de construire notre modèle. Danaila *et al.* (1997) présentent une étude DNS 3D d'un jet rond à faible nombre de Reynolds ($Re \leq 500$). L'étude porte principalement sur les instabilités variqueuses (caractérisées par un mode axisymétrique) et sinueuses (mode hélicoïdal) qui peuvent se développer ainsi que leurs interactions. Les équations de Navier-Stokes sont r  solv  es par une méthode de pas de temps fractionnaire. Une approche temporelle a été retenue (ce qui implique une périodicité spatiale de l'écoulement) pour deux raisons principales : réduire le domaine de la simulation pour suivre une instabilité et s'affranchir partiellement des problèmes posés par les conditions aux limites. La simulation utilise un code commercial **Nekton** qui repose sur une approche spectrale. Le maillage n'est pas uniforme : il est raffiné au voisinage de la buse. Les profils d'entrée utilisés sont en tangente hyperbolique.

Martin & Meiburg (1991) présentent une simulation numérique directe non visqueuse pour un jet rond soumis à des perturbations axisymétriques et azimuthale. L'étude est temporelle et tridimensionnelle et utilise la théorie des filaments de vortex non visqueux. Cette étude montre l'apparition et l'évolution d'anneaux de vorticité ainsi que leur déstabilisation.

Abid & Brachet (1993) présentent une simulation directe des équations de Navier-Stokes c'est-à-dire que la viscosité est bien prise en compte. L'étude porte sur les filaments de vorticité qui apparaissent et sont éjectés par le jet. Un scalaire passif est également simulé (c'est-à-dire une variable supplémentaire qui joue le rôle de traceur pour marquer l'écoulement mais sans modifier le champ de vitesse). L'approche est temporelle. Le profil de base est également en tangente hyperbolique. Le nombre de Reynolds est de 200 et la simulation se fait sur un domaine $64 \times 160 \times 160$. La résolution est effectuée par une méthode pseudo-spectrale. L'écoulement est périodique dans la direction axiale et est développé en fonctions trigonométriques (sinus ou cosinus) latéralement. Une telle méthode ne permet pas de décrire l'évasement du jet mais rend compte des principales caractéristiques de la dynamique des vortex. Des perturbations, choisies parmi les modes les plus instables linéairement, sont ajoutées initialement pour accélérer le développement des instabilités.

Brancher *et al.* (1994)   tudient par une approche temporelle et pseudo-spectrale un jet rond à densité constante afin d'étudier l'influence des instabilités secondaires du jet sur la formation de jets latéraux. Les simulations se font sur un domaine 64^3 .

Boersma *et al.* (1998)   tudient l'influence des conditions d'entrée sur les lois de similitude. Ils se placent à un nombre de Reynolds difficile à évaluer (l'article parle de 300 et de 2400) et utilisent un maillage de $450 \times 80 \times 64$ (2,3 millions de points) non uniforme : les points du maillage sont plus resserrés    proximité de la buse. La zone étudiée couvre environ 45 diamètres de buse dans la direction de l'écoulement. Ils utilisent un système de coordonnées sphériques. La direction orthoradiale étant périodique, elle est traitée par une méthode de Fourier. Les termes spatiaux sont exprimés en volumes finis d'ordre 2 et la discrétisation temporelle est assurée par une méthode d'Adams-Bashforth d'ordre 2. Un pas de temps est estimé à 5 s CPU sur un Cray 90. Dans cet article, les auteurs établissent que les lois de similitude, en aval de la buse dans la zone pleinement développée,

ne sont pas indépendantes des conditions d'entrée ; cette différence peut, en plus des incertitudes expérimentales, expliquer en partie la dispersion des résultats expérimentaux. En outre, le choix des bonnes échelles pour adimensionner les grandeurs reste essentiel.

jet compressible Freund (1999) étudie un jet avec les équations de Navier-Stokes compressibles. Le maillage utilisé est de $640 \times 250 \times 160$ (25 millions de points). La zone étudiée, immédiatement à la sortie de la buse, représente 15×10 diamètres de buse. Le nombre de Reynolds de l'étude n'est pas précisé. Le schéma numérique fait appel à des différences compactes d'ordre 6 et à la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Stanley *et al.* (2002) étudient un jet initialement plan en écoulement faiblement compressible au voisinage de la buse de sortie. La simulation est tridimensionnelle.

2.1.2 Méthodes de discrétisation

a) Choix du maillage

Il faut faire un nécessaire compromis entre la résolution souhaitée et les capacités de stockage et de calcul dont on dispose. Il y a plusieurs critères principaux pour choisir le maillage :

- uniforme ou non : un maillage uniforme est très simple à mettre en place mais il « coûte » cher en capacité de stockage. Dans le cas d'un maillage non uniforme, on peut aussi utiliser un raffinement adaptatif (Almgren *et al.* (1998) par exemple) ;
- décalé ou non : un maillage décalé pour le calcul de la pression (et de la masse volumique quand la densité n'est pas constante) permet d'assurer une plus grande stabilité.

b) Discrétisation temporelle

On peut classer les méthodes de résolution temporelle en deux grandes familles :

les méthodes explicites : Dans une méthode explicite, pour calculer une grandeur à l'instant $n+1$, on a uniquement besoin des valeurs des grandeurs à l'instant antérieur, n . Ces méthodes sont en général « faciles » à mettre en œuvre et ont des besoins minimes en terme de capacité de stockage mais doivent vérifier des contraintes dites CFL³ qui imposent un pas de temps Δt maximum.

les méthodes implicites : Dans une méthode implicite en revanche, il n'est pas possible d'exprimer la valeur d'une grandeur à l'instant $n+1$ en fonction des seules valeurs antérieures. Pour déterminer cette valeur, il faut résoudre une équation implicite ce qui revient en pratique à inverser un système linéaire, dans le cas où l'équation à résoudre est linéaire bien évidemment⁴. Les méthodes implicites apportent un gain en terme de stabilité⁵ mais « coûtent cher » en capacité de stockage et en temps de calcul comparées aux méthodes explicites.

³ « Courant Friedrich Levy ».

⁴En pratique, les méthodes implicites sont souvent limitées à des équations linéaires.

⁵Il n'y a pas de contrainte de type CFL par exemple à respecter ce qui d'ailleurs, ne signifie pas que le pas de temps peut être choisi arbitrairement grand (Choi & Moin (1994) pour voir l'effet du choix du pas de temps pour une méthode implicite).

Cossu & Loiseleux (1998) étudient, à partir de l'équation de Ginzburg-Landau réelle et linéaire, l'apparition d'une fausse transition convective/absolue à partir de schémas d'ordre faible (Euler explicite, Euler implicite ou de Crank-Nicholson). Le comportement pour les schémas d'Euler implicite ou de Crank-Nicholson sont corrects pourvu que l'on choisisse des pas de temps et des pas spatiaux suffisamment petits. Les problèmes peuvent apparaître avec le schéma d'Euler explicite ce qui n'est guère étonnant puisque le diagramme de stabilité correspondant n'englobe aucune partie de l'axe imaginaire pur. Notons cependant qu'il est quasiment impossible d'extrapoler ces résultats pour une simulation plus complète.

Les méthodes de Runge-Kutta explicites d'ordre 3 (Joslin (1997); Wilson & Demuren (1997)) ou 4 (Freund (1999); Bhaganagar *et al.* (2000); Stanley *et al.* (2002)) sont le plus souvent retenues. En effet, elles offrent beaucoup d'avantages (stabilité, précision) et sont relativement économes en ressources puisqu'il existe des algorithmes à faible coût de stockage⁶ (Spiteri & Ruuth (2001)). Cependant on trouve aussi d'autres méthodes. Citons par exemple la méthode saute-mouton⁷ utilisée dans Caulfield & Peltier (2000); on trouve également la méthode d'Adams-Bashforth d'ordre 2 (Abid & Brachet (1993); Boersma *et al.* (1998)).

Certains auteurs (Abid & Brachet (1993); Joslin (1997); Bhaganagar *et al.* (2000); Stanley *et al.* (2002)) ont, dans un souci d'optimisation de leur code, utilisé des méthodes mixtes : des méthodes explicites d'ordre élevé pour le terme non linéaire et des méthodes implicites d'ordre faible (Crank-Nicholson ou Euler d'ordre 1 par exemple) pour le terme diffusif. En général, les approches pseudo-spectrales utilisent de telles méthodes mixtes. En effet, l'utilisation de techniques implicites permet de gagner en stabilité mais se révèle inadaptée pour calculer le terme non linéaire⁸ pour lequel une technique explicite est préférable.

c) Discrétisation spatiale

Les méthodes utilisées pour la discrétisation spatiale sont plus variées. La grille de discrétisation est le plus souvent à pas constant mais ce n'est pas systématique (Stanley *et al.* (2002)).

Les différences finies sont parfois utilisées, seules ou combinées avec d'autres méthodes. Caulfield & Peltier (2000) utilisent des différences finies centrées d'ordre 2 pour toutes leurs équations tandis que Joslin (1997) utilise des différences finies centrées d'ordre 4 pour l'équation de Poisson de la pression uniquement.

La méthode qui semble la plus usitée est celle des différences compactes. Lele (1992) a montré que les différences compactes permettaient de mieux résoudre les modes harmoniques de petites longueurs d'onde ce qui a valu à cette méthode le nom de méthode quasi-spectrale⁹. L'ordre choisi est en général assez élevé : 4 (Wilson & Demuren (1997); Bhaganagar *et al.* (2000); Stanley *et al.* (2002)) ou 6 (Freund (1999); Joslin (1997)).

⁶ *low-storage*.

⁷ *leapfrog*.

⁸ Dans l'espace spectral, le terme non linéaire est une convolution.

⁹ On qualifie de quasi-spectrale (*spectral-like method*) une méthode qui n'est pas fondamentalement spectrale (construite à partir de différences finies par exemple) mais qui présente des similitudes de comportement (notamment en terme de convergence) avec les méthodes spectrales. Les différences compactes sont une adaptation quasi-spectrale des différences finies. Le terme, quoi que proche, ne doit pas être confondu avec pseudo-spectral qui qualifie au contraire des méthodes essentiellement spectrales mais qui, pour traiter les termes non linéaires, repassent dans l'espace physique pour avoir à traiter un simple produit plutôt qu'une convolution dans l'espace spectral.

On peut rencontrer d'autres méthodes comme les volumes finis (Boersma *et al.* (1998)). Lorsqu'une dimension est périodique, c'est évidemment une analyse en mode de Fourier qui est retenue (Freund (1999); Bhaganagar *et al.* (2000)). Dans certaines configurations, on trouve également des méthodes spectrales dans certaines directions de l'espace (Joslin (1997)).

2.1.3 Conditions aux limites

a) Les conditions usuelles

Le choix des conditions aux limites est toujours un problème épineux lorsque l'on réalise des simulations numériques. De ce choix dépend la fiabilité des résultats. Dans l'article de revue de Sani & Gresho (1994) consacré à ce problème, il est notamment rappelé qu'il n'existe pas de *vraies* conditions aux limites, particulièrement en sortie : ces conditions, imposées par la résolution mathématique d'équations aux dérivées partielles (EDP) sur un domaine borné sont la plupart du temps non physiques. En outre, des conditions aux limites mal choisies peuvent également rendre instable un schéma numérique (Foreman (1986)).

Lorsque l'on décide de simuler un écoulement ouvert, on doit limiter le domaine de simulation. Cela signifie qu'il faut trouver des hypothèses mathématiques réalistes pour « faire croire » au code que l'écoulement traverse ces limites (Jr. (1993)). Il y a plusieurs voies pour parvenir à cet objectif : les conditions non réfléchissantes (Givoli (1991); Jin & Braza (1993)) et les conditions absorbantes (Blaschak & Kriegsmann (1988)). Ces dernières sont plus adaptées pour des problèmes ondulatoires car elles absorbent spécifiquement certaines longueurs d'onde ; nous ne nous y sommes pas intéressés. Les conditions de sortie utilisées fréquemment peuvent être classées en familles :

- Les conditions de type Dirichlet¹⁰ donnent en général de piètres résultats car elles induisent souvent des oscillations destructrices dans le domaine de calcul, notamment pour des simulations à haut nombre de Reynolds. Ponctuellement et pour des simulations à nombre de Reynolds faible ou modéré, elles peuvent cependant donner des résultats corrects.
- Les conditions type Neumann¹¹ sont très utilisées car elles donnent de bons résultats et sont faciles à mettre en œuvre.
- Les conditions du type advection s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

avec V , fonction choisie par l'utilisateur : en général la vitesse moyenne de l'écoulement à travers la paroi est un bon candidat (c'est le cas dans Boersma *et al.* (1998) par exemple).

- Les conditions du type

$$\beta \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial n} - P = 0$$

avec $\beta = 1$ ou $\beta = 2$ (voir Christer & Johansson (1993) par exemple) sont aussi bien posées, mais sont rarement utilisées, car elles n'apportent souvent que peu d'avantages par rapport à des conditions de type Neumann.

La seule règle qui s'impose, c'est qu'il n'existe pas de conditions « universelles » : **le choix de conditions aux limites relève forcément d'un compromis adapté à la**

¹⁰Valeur imposée sur la frontière.

¹¹Dérivée normale des composantes de la vitesse nulle.

situation. Même si tous les auteurs précisent bien que c’est un passage délicat, peu sont ceux, pourtant, qui explicitent complètement les conditions retenues réellement : seule la démarche globale est donnée. Dans Boersma *et al.* (1998), le jet étudié est libre, c’est-à-dire qu’aucune paroi ne vient en limiter l’extension spatiale. Les conditions aux limites retenues sont :

- pas de frottement¹² à la surface latérale du jet : condition de Gresho (1991) ;
- sortie convective à l’extrémité du domaine d’étude.

b) Les conditions particulières

Dans certains cas (Joslin (1997); Slinn & Riley (1998); Bhaganagar *et al.* (2000); Stanley *et al.* (2002)), des conditions très particulières d’atténuation¹³ sont utilisées. Le principe est de réserver une partie du domaine de calcul dans lequel le code numérique « tue » tout signal. Les fonctions retenues pour exécuter cette tâche sont de natures variées mais ce sont toujours des filtres d’ordre assez élevé. Avec de telles conditions, la zone efficace de simulation est fortement réduite car l’application de ces conditions d’atténuation impose l’utilisation d’une zone tampon dans laquelle les valeurs calculées sont non physiques.

Cette méthode apparaît assez peu physique. En outre, il n’y a pas d’étude précise qui indique l’influence que peuvent avoir de telles conditions sur le reste de l’écoulement ou qui s’intéresse à la taille qu’il faut réellement donner à la zone tampon : le caractère non linéaire de l’écoulement impose sans doute des conditions de rétroaction sur l’ensemble du jet. Cette objection est d’ailleurs valable pour toute condition aux limites dans une certaine mesure.

2.2 Formulation générale

Cette courte partie a pour but de présenter le formalisme dans lequel nous nous sommes placés. Outre une présentation des équations à résoudre, l’objectif est aussi de fixer les notations.

2.2.1 Hypothèses de travail

Nous étudions un jet plan à **densité variable** dont l’écoulement est **incompressible**. Expérimentalement, on peut obtenir une grande variation de masse volumique en mélangeant par exemple de l’air ($M = 28,8 \text{ g.mol}^{-1}$) et de l’hélium ($M = 4 \text{ g.mol}^{-1}$). L’hypothèse d’incompressibilité est très bien vérifiée si les vitesses mises en jeu sont faibles devant la célérité du son or, expérimentalement, nous ne dépassons jamais 20 m.s^{-1} . On néglige en outre :

- la gravité et la poussée d’Archimède (nombre de Froude infini) ;
- les effets thermiques ;
- tout phénomène de tension de surface ;
- tout phénomène de diffusion de matière (nombre de Schmidt infini).

Le choix de travailler avec un nombre de Schmidt infini s’appuie sur le fait que l’on utilise la théorie linéaire non visqueuse (qui ne considère pas de diffusion de masse) pour valider les résultats fournis par le code. C’est un choix sur lequel il est tout à fait possible

¹² *traction-free*.

¹³ *dumping function* aussi appelée fonction éponge (*sponge function*).

de revenir afin d'étudier l'influence de nombre de Schmidt pour une analyse plus fine du mélange par exemple (ce qui n'est pas l'objet de ce travail).

Les tables de valeurs montrent que pour l'air et l'hélium, les deux gaz qui sont utilisés dans notre étude expérimentale, la viscosité dynamique μ est à peu près la même¹⁴. Nous avons donc fait l'hypothèse d'une viscosité dynamique constante. La viscosité cinématique ν est donc supposée variable et nous conservons l'écriture μ/ρ dans les équations. On note x la direction de l'écoulement, y la dimension transversale et $\mathbf{v} = (u, v)$ la vitesse.

2.2.2 Les équations continues

Avec ces hypothèses, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

2.2.3 Adimensionnement

On se donne :

- une échelle de longueur \bar{L} ;
- une échelle de vitesse \bar{U} ;
- une échelle de masse volumique $\bar{\rho}$.

Par ailleurs, on introduit un nombre de Reynolds, Re , basé sur ces échelles et la viscosité dynamique, μ , du problème :

$$Re = \frac{\bar{\rho} \bar{U} \bar{L}}{\mu} \quad (2.2)$$

À partir de ces échelles, on peut adimensionner toutes les grandeurs. Par exemple, on peut définir un temps adimensionné $t^* = \bar{U} t / \bar{L}$ ou une pression adimensionnée $p^* = p / \bar{\rho} \bar{U}^2$. Les équations de Navier-Stokes (2.1) se réécrivent alors, en conservant la même notation pour les grandeurs qui sont maintenant adimensionnées :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{Re} \frac{1}{\rho} \Delta \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Dans toute la suite, l'échelle de masse volumique $\bar{\rho}$ est celle de l'air ρ_{air} ; celle de longueur \bar{L} est la demi-largeur à mi-hauteur du profil d'entrée. Contrairement aux études expérimentales, il n'y a pas réellement de buse dans une simulation numérique : il est donc impossible d'utiliser cette dimension comme échelle de longueur. Notons alors que le nombre

¹⁴ $\mu_{\text{He}} = 1,85.10^3 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ et $\mu_{\text{air}} = 1,94.10^3 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

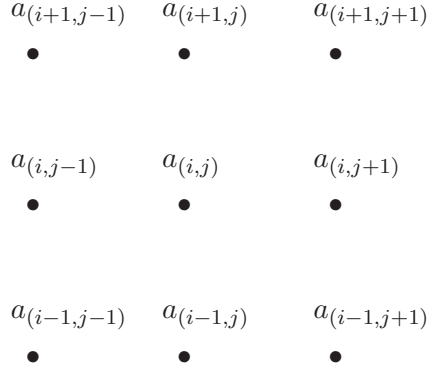


FIG. 2.2: Vue locale du maillage des points.

$$\frac{\partial a}{\partial t} = f(a, x, y, t)$$

on doit évaluer successivement

$$\begin{cases} d_1 = \Delta t f(a^n, x, y, t) \\ d_2 = \Delta t f(a^n + d_1/3, x, y, t) \\ d_3 = \Delta t f(a^n + 2d_1/3, x, y, t) \end{cases}$$

pour avoir finalement
$$a^{n+1} = a^n + \frac{1}{4}(d_1 + 3d_3)$$

Un tel schéma est très stable et consomme peu de ressources. Le pas de temps Δt est donné par une condition de type CFL :

$$\Delta t = \beta \frac{\min(h_x, h_y)}{\max(u(t=0))} \quad (2.5)$$

où β est un coefficient de sécurité que nous choisissons strictement inférieur à 1 pour des raisons de stabilité. Dans la pratique, on a le plus souvent pris $\beta = 0,5$ et parfois $\beta = 0,95$.

2.3.3 Dérivation spatiale

Nous avons choisi un schéma à **différences finies centrées** du second ordre pour la discrétisation des opérateurs de dérivation spatiale. Nous avons choisi ce schéma pour sa très grande simplicité. En outre, un tel choix simplifie la mise en place de la méthode multigrille (*cf* §2.3.5). Nous n'avons pas cherché un schéma d'ordre plus élevé car la complexité¹⁶ augmente bien plus vite que les éventuels bénéfices de tels schémas.

Pour présenter les différents opérateurs de dérivation, nous utilisons des notations largement inspirées de celles que l'on trouve dans les ouvrages Abramowitz & Stegun (1970) ou Pozrikidis (1998) et illustrées sur la figure 2.2. Le point où l'on évalue l'opérateur est pris pour centre d'un repère local et les coordonnées des points sont en fait des entiers indexés entre parenthèses. Pour un point de l'intérieur du domaine, nous avons donc simplement

¹⁶Ce n'est pas tant l'implémentation pratique qui pose problème que les conditions aux limites (non physiques) supplémentaires qu'il faut déterminer.

- pour les dérivées premières :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{(i,j)} = \frac{1}{2h_x} (a_{(i+1,j)} - a_{(i-1,j)}) \\ \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{(i,j)} = \frac{1}{2h_y} (a_{(i,j+1)} - a_{(i,j-1)}) \end{cases} \quad (2.6)$$

- pour les dérivées secondes :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right|_{(i,j)} = \frac{1}{h_x^2} (a_{(i+1,j)} - 2a_{(i,j)} + a_{(i-1,j)}) \\ \left. \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \right|_{(i,j)} = \frac{1}{h_y^2} (a_{(i,j+1)} - 2a_{(i,j)} + a_{(i,j-1)}) \end{cases} \quad (2.7)$$

Nous avons été particulièrement attentifs aux formules à utiliser pour les points de la frontière¹⁷. Ces dernières ne sont évidemment pas centrées mais elles sont cependant bien d'ordre 2. C'est important puisque c'est toujours l'ordre le plus bas qui est l'ordre global du schéma. Pour ces points, nous avons donc, pour la dimension longitudinale¹⁸

- pour les dérivées premières :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{(1,j)} = \frac{1}{2h_x} (-3a_{(1,j)} + 4a_{(2,j)} - a_{(3,j)}) \\ \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{(N,j)} = \frac{1}{2h_x} (3a_{(N,j)} - 4a_{(N-1,j)} + a_{(N-2,j)}) \end{cases} \quad (2.8)$$

- pour les dérivées secondes :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right|_{(1,j)} = \frac{1}{h_x^2} (2a_{(1,j)} - 5a_{(2,j)} + 4a_{(3,j)} - a_{(4,j)}) \\ \left. \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right|_{(N,j)} = \frac{1}{h_x^2} (2a_{(N,j)} - 5a_{(N-1,j)} + 4a_{(N-2,j)} - a_{(N-3,j)}) \end{cases} \quad (2.9)$$

2.3.4 Méthode de projection : les équations numériques

Dans ce paragraphe, on établit, à partir des équations continues (2.3) et des opérateurs discrets que l'on vient de présenter, les équations que nous avons réellement implémentées dans le code. Afin de simplifier l'exposé de la méthode de projection, on suppose que le schéma temporel est un simple schéma Euler explicite bien que nous ayons opté pour une méthode de type Runge-Kutta et nous ne détaillons pas les opérateurs de dérivations spatiales (nous utilisons leur écriture continue).

On résout les équations (2.3) en suivant une méthode classique de projection (Bell *et al.* (1989); Bell & Marcus (1992); Boersma *et al.* (1998); Almgren *et al.* (2000); Brown *et al.* (2001)) dite *time splitting*. Le principe de la méthode est d'introduire un champ de vitesse auxiliaire que l'on note avec une étoile en exposant, \mathbf{v}^\star , en avançant l'équation de la quantité de mouvement avec le schéma temporel choisi, c'est-à-dire que l'on a

¹⁷Vigilance d'autant plus accrue que les références sur ce point peuvent être plus ou moins grossièrement fausses! (cf Pozrikidis (1998) par exemple)

¹⁸Les formules pour la direction transversale sont naturellement bâties sur le même modèle.

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{v}^\star - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = -(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n + \frac{1}{\rho^n} \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}^n \\ \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^\star}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n} \nabla p^n \end{cases}$$

Puisque l'on n'a rien fait pour, il est peu probable que ce champ intermédiaire soit à divergence nulle. Pour assurer cette condition, on établit alors une autre équation à partir de l'équation de quantité de mouvement en en prenant la divergence (et en utilisant $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$) ; on obtient

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^n} \nabla p^n \right) = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^\star \quad (2.10)$$

Notons que dans le cas où l'écoulement est à densité constante, cette équation n'est autre qu'une équation de Poisson. En revanche, l'opérateur dont on prend la divergence ne se résume pas à un simple gradient dans le cas où la densité varie : cette équation n'est donc **pas une équation de Poisson dans le cas général**. Dans ce cas en effet, l'opérateur spatial n'est pas le laplacien isotrope mais un opérateur fortement anisotrope qui couple pression et densité.

C'est pour résoudre cette équation que l'on fait appel à une méthode multigrille qui est détaillée dans le paragraphe suivant. Quand cette équation est résolue (on a déterminé p), il ne reste plus qu'à corriger le champ de vitesse intermédiaire \mathbf{v}^\star grâce à la pression pour obtenir le champ de vitesse, incompressible, à l'instant $n + 1$:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^\star - \frac{1}{\rho^n} \nabla p \Delta t \quad (2.11)$$

Remarquons enfin que **le problème pour la densité est découplé** du reste : calculer ρ^{n+1} se fait simplement par intégration temporelle de la 3^e équation du système (2.3) en connaissant les grandeurs à l'instant antérieur n .

On peut maintenant résumer l'ensemble des équations du problème par le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^\star - u^n}{\Delta t} = - \left(u^n \frac{\partial}{\partial x} + v^n \frac{\partial}{\partial y} \right) u^n + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\rho^n} \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right) \\ \frac{v^\star - v^n}{\Delta t} = - \left(u^n \frac{\partial}{\partial x} + v^n \frac{\partial}{\partial y} \right) v^n + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\rho^n} \left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \right) \\ \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^n} \begin{bmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \begin{bmatrix} u^\star \\ v^\star \end{bmatrix} \\ u^{n+1} = u^\star - \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial p}{\partial x} \Delta t \quad \text{et} \quad v^{n+1} = v^\star - \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial p}{\partial y} \Delta t \\ \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \left(u^n \frac{\partial}{\partial x} + v^n \frac{\partial}{\partial y} \right) \rho^n = 0 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

2.3.5 Cas de l'équation de pression : méthode multigrille

a) Principe

L'équation (2.10), spécifique pour la pression, nécessite un traitement particulier. On adjoint à cette équation des conditions aux limites qui s'écrivent de façon générale $B(p) = 0$

sur $\partial\Omega$ où B est un opérateur. Le problème à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{v}^*}{\Delta t} \right) & \text{sur } \Omega \\ B(p) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.14)$$

Dans le processus de calcul d'un pas de temps, cette étape est la plus gourmande en temps de calcul : le choix d'une méthode efficace de résolution de cette équation elliptique s'avère essentiel. C'est pourquoi notre choix s'est porté vers une méthode multigrille. Les méthodes multigrille ont en effet une complexité de l'ordre de $N^2 \log N$ pour une discrétisation sur N^2 points ce qui correspond à la complexité d'un algorithme de FFT par exemple. Derrière le vocable de « méthode multigrille » se cache en fait une famille de variantes, car aucune méthode ne peut résoudre efficacement l'ensemble des problèmes elliptiques (*Numerical Recipes* Press (1992)). Nous avons dérivé notre méthode en nous inspirant de celle développée par Briggs & Henson (1987).

Les opérateurs de dérivation spatiale sont les mêmes que pour l'équation de la quantité de mouvement. On note G^h la grille et h le pas. Dans le cas de la grille la plus fine (celle où l'on cherche v), on a $h_y = h$ et $h_x = r h$. Utiliser le rapport d'aspect revient à reporter l'anisotropie géométrique du maillage dans l'équation et cela permet de traiter de façon totalement symétrique les deux directions spatiales dans la résolution de ce problème. On désigne par δ^h l'opérateur de dérivation décrit § 2.3.3. Avec ces définitions, l'opérateur gradient est alors représenté par $\nabla^h = (\delta^h/r, \delta^h)$.

L'équation (2.10) discrétisée peut alors s'écrire comme un système linéaire de la forme

$$A^h p^h = f^h \quad (2.15)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} A^h = \nabla^h \cdot \left(\frac{1}{\rho^h} \nabla^h \right) \\ f^h = \nabla^h \cdot \left(\frac{\mathbf{v}^{*h}}{\Delta t} \right) \end{cases} \quad \text{sur } G^h \quad \text{et} \quad \begin{cases} A^h = B^h \\ f^h = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial G^h \quad (2.17)$$

L'opérateur A est assez complexe. Le détail de son expression est donné en annexe B.

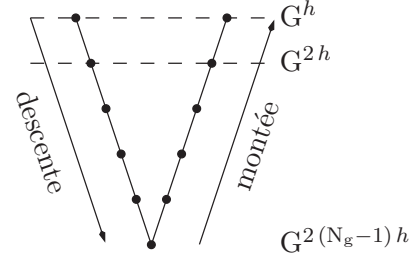
Si on note v^h l'approximation de la solution exacte sur la grille G^h de l'équation (2.15), r_m^h le résidu et e^h l'erreur, ces grandeurs satisfont les relations :

$$\begin{cases} r_m^h = f^h - A^h v^h \\ A^h e^h = A^h (p^h - v^h) = r_m^h \end{cases}$$

Le nombre de points N est de la forme $2^{N_g} + 1$ où N_g est le nombre de grilles utilisées. La méthode multigrille s'appuie sur les propriétés lissantes¹⁹ des schémas de relaxation sur des grilles de plus en plus grossières $G^{2h}, G^{4h}, G^{8h} \dots G^{(N_g-1)2h}$ pour obtenir une évaluation précise de l'erreur e lors de la phase initiale de « descente ». Le schéma de relaxation que nous avons utilisé est un schéma de Gauss-Seidel que nous présentons rapidement dans le paragraphe suivant. La grille la plus grossière a seulement 3 points de base : il est alors trivial de déterminer la solution $v^{(N_g-1)2h}$. Lors de la phase de « montée », il suffit alors de corriger la valeur obtenue en utilisant l'erreur déterminée dans la phase

¹⁹ *smoothing*.

FIG. 2.3: Illustration schématique des étapes composant un V-cycle de la méthode multigrille : on calcule l'erreur e lors de la descente et on corrige la valeur v lors de la montée.



initiale. On parle de V-cycle car, pour chaque étape, on va de la grille la plus fine à la plus grossière puis on remonte jusqu'à la grille la plus fine. Il existe des variantes qui font des étapes intermédiaires, on parle alors de W-cycle. Les étapes d'un V-cycle sont représentées schématiquement sur la figure 2.3.

Afin de passer d'un raffinement de grille au suivant, on a besoin de deux opérateurs : un opérateur de restriction I_h^{2h} (phase descendante) et un opérateur de prolongation I_{2h}^h (phase montante). Ces opérateurs²⁰ sont donnés par :

$$I_h^{2h} = \begin{bmatrix} 1/16 & 1/8 & 1/16 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/16 & 1/8 & 1/16 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad I_{2h}^h = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Rappelons comment interpréter ces matrices :

opérateur de restriction I_h^{2h} : chaque coefficient est la fraction de la valeur du point voisin qui est prise en compte pour déterminer la valeur du point central dans la grille plus grossière (schématiquement, on peut considérer qu'après action de cet opérateur, il ne reste que le point central et que pour calculer sa valeur, on ajoute $1/4$ de la valeur du point qui était présent à la même place dans la grille plus fine, $1/8$ de la valeur de chacun des 4 voisins directs et $1/16$ de la valeur de chacun des voisins « en coin ») ;

opérateur de prolongation I_{2h}^h : chaque coefficient est la fraction de la valeur du point central (le « seul qui existe » avant application de l'opérateur) qui est donnée au point où se trouve le coefficient.

On peut alors schématiser le principe de la méthode avec la procédure récursive (représentée par V^h) suivante :

$$V^h(v^h, f^h) \left| \begin{array}{l} 1. \text{ Relaxer } \alpha_1(h) \text{ fois l'équation } A^h v^h = f^h. \\ 2. \text{ Si } G^h \text{ est la grille la plus grossière} \\ \quad \text{alors relaxer } \alpha_2 \text{ fois la relation } A^h v^h = f^h \\ \quad \text{sinon } f^{2h} \leftarrow I_h^{2h}(f^h - A^h v^h) \\ \quad \quad v^{2h} \leftarrow 0 \\ \quad \quad v^{2h} \leftarrow V^{2h}(v^{2h}, f^{2h}) \\ \quad \quad \text{Corriger } v^h \leftarrow v^h + I_{2h}^h v^{2h} \\ \quad \quad \text{Relaxer } \alpha_1(h) \text{ fois la relation } A^h v^h = f^h \end{array} \right.$$

²⁰Ils ont été choisis car ils vérifient la condition de Galerkin (Numerical Recipes Press (1992), Briggs & Henson (1987)).

b) Méthode de relaxation de Gauss-Seidel

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont souvent classées mathématiquement en trois catégories : les équations hyperboliques (exemple typique : équation d'onde à une dimension), parabolique (équation de la diffusion à une dimension) et elliptique (équation de Poisson). D'un point de vue numérique en revanche, la distinction est différente. En effet, les équations hyperboliques et paraboliques servent de base à des problèmes aux valeurs initiales²¹ (on dispose de la solution à un instant et on cherche à prédire son évolution dans le temps) alors que les équations elliptiques sont des problèmes aux valeurs limites²² c'est-à-dire que l'on connaît la solution sur les bords du domaine de calcul et il s'agit de déterminer la solution dans tout l'espace. L'équation qui nous intéresse est elliptique (elle est proche d'une équation de Poisson) et on peut la représenter formellement par

$$\mathcal{L} \cdot u = b$$

où \mathcal{L} représente l'opérateur différentiel, u l'inconnue et b le membre de droite ainsi que les conditions aux limites. Le principe du schéma de relaxation de Gauss-Seidel est de réécrire le problème comme un problème diffusif :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} \cdot u - b$$

Une solution initiale quelconque tend asymptotiquement²³ vers la solution recherchée du problème quand t tend vers $+\infty$. Illustrons le principe sur une équation simple à une dimension. Soit le problème à résoudre sur $[0; 1]$:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f \quad \text{avec} \quad u(0) = u(1) = 0$$

L'opérateur de dérivation spatiale est discrétisé en suivant les formules des différences finies (équations (2.7) et (2.8)). On introduit alors un temps virtuel de telle sorte que l'on calcule

$$u_j^* = \frac{1}{2} \left(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - (\Delta x)^2 f_j \right)$$

Pour un schéma classique de Gauss-Seidel, on a simplement $u_j^{n+1} = u_j^n$ mais on utilise aussi fréquemment des schémas dits de surrelaxation pour lesquels $u_j^{n+1} = \omega u_j^* + (1 - \omega) u_j^n$ avec ω choisi le plus souvent de manière empirique²⁴. Nous avons testé, pour la méthode multigrille, un schéma classique et avec surrelaxation et nous avons finalement conservé le schéma classique c'est-à-dire $\omega = 1$.

c) Mise en œuvre pratique

Nous avons choisi d'appliquer plusieurs V-cycles jusqu'à obtenir un résidu r_m suffisamment faible. Nous avons déterminé que 6 V-cycles permettaient d'avoir une précision satisfaisante sans grever le temps de calcul : avec 6 V-cycles, la norme du résidu sur G est réduite d'un facteur supérieur à 1 000 quand $N = 129$ et $\alpha_1(h) = \text{int}(80 h^{0,6} + 2)$, $r = 2$ et $\alpha_2 = 100$. L'utilisation de plus de 6 V-cycles allonge le temps de calcul sans apporter de gain appréciable en terme de réduction du résidu. En partant d'un champ de vitesse initial

²¹initial value problem.

²²boundary value problem.

²³car \mathcal{L} est défini négatif.

²⁴Une formule souvent utilisée pour ω est $\omega = \frac{2}{1 + \pi/J} \simeq 1 - \frac{2\pi}{J}$ où J est la taille du problème.

à divergence nulle ou faible (de l'ordre de 10^{-3}), on obtient donc un résidu de l'ordre de 10^{-6} au plus.

La formule $\alpha_1(h) = \text{int}(80h^{0.6} + 2)$ qui permet d'optimiser le nombre de relaxations à effectuer en fonction de h a été déterminée empiriquement : pour un temps de calcul donné, elle permet d'obtenir un résidu deux fois plus faible que si on utilisait $\alpha_1 = 7$.

Pour les conditions aux limites de ce problème (l'opérateur B), nous avons testé des conditions de Dirichlet (B est l'opérateur identité) et des conditions de Neumann (B = $\partial/\partial n$ avec n , la normale locale à $\partial\Omega$). Les conditions de Dirichlet empêchent le fluide de sortir du domaine de calcul, nous les avons donc écartées et nous avons retenu des conditions de Neumann. Cependant, il faut être conscient que, dans ce cas, le problème est mal posé²⁵. Dans le cadre de notre étude, seul le *gradient* de la pression nous intéresse donc on peut tout à fait retenir des conditions de Neumann.

Des oscillations à hauts nombres d'onde (courtes longueurs d'onde), dues à l'utilisation de différences finies sur une grille non décalée²⁶, peuvent apparaître. Pour les éliminer, nous avons mis en place un filtre compact dont les effets sont limités aux grands nombres d'onde k .

2.3.6 Filtrages

Lors de la discrétisation, on introduit des « parasites » dans les grandeurs évaluées. Il convient de filtrer au maximum ces effets indésirables et prévisibles sans pour autant modifier substantiellement les grandeurs réellement simulées. Nous avons mis en place deux filtres distincts :

- un filtre spatial qui coupe les composantes de courtes longueurs d'onde (grands nombres d'onde k) ;
- un filtre non linéaire qui empêche la dérive de la densité hors de l'intervalle de valeurs physiquement acceptables.

a) Filtrage spatial

Pour un maillage unidimensionnel de pas h , la longueur d'onde minimale qui peut être résolue est $2h$ ce qui correspond à un nombre d'onde maximal de $k_{\max} = \pi/h$. Les oscillations de plus grand nombre d'onde qui apparaissent sont donc nécessairement fausses et repliées. Il convient de les éliminer au moyen d'un filtre approprié.

On peut justifier le filtrage spatial dans une DNS utilisant des différences finies en regardant les erreurs de troncature dans l'espace de Fourier entre l'opérateur de dérivation et son approximation par les différences finies. Pour cela, considérons que h représente l'unité de longueur et appliquons ces deux opérateurs à un mode de Fourier pur $\exp(ikx)$. La dérivée exacte est $ik \exp(ikx)$ tandis qu'avec l'opérateur discret, on obtient

$$\frac{\exp(ik(x+1)) - \exp(ik(x-1))}{2} = i \sin k \exp(ikx)$$

ce qui correspond à un nombre d'onde « modifié » (Lele (1992)) :

$$\omega_1(k) = \sin k, \quad k \in [0; \pi]$$

²⁵S'il existe une solution alors il en existe une infinité puisqu'on peut ajouter toute constante à la fonction solution déterminée.

²⁶*non staggered grid.*

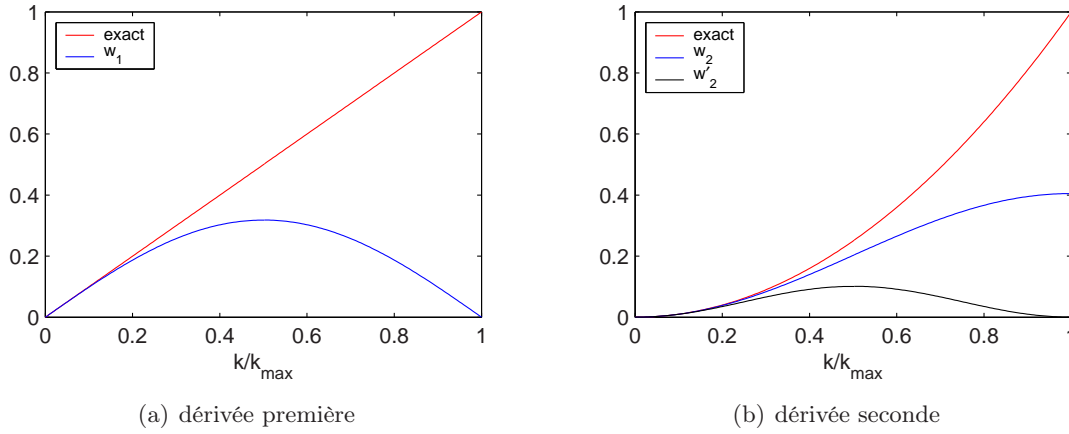


FIG. 2.4: Écart entre la dérivation exacte et numérique pour un mode de Fourier. Sur le graphe (b), on représente trois grandeurs : la dérivée seconde exacte, discrète et une double application de la dérivée première.

En suivant la même démarche, on aboutit à

$$\omega_2(k) = 2(1 - \cos k)$$

pour la dérivée seconde tandis qu'en appliquant deux fois la formule de la dérivée première, on aboutit à

$$\omega'_2(k) = \frac{1 - \cos(2k)}{2}$$

Ces résultats sont représentés graphiquement sur la figure 2.4. Analysant cette figure, il est alors évident qu'il faut raffiner le maillage pour améliorer la résolution de ces nombres d'onde ($k_{\max} h = \pi = C^{\text{te}}$). De plus, il est clair que les nombres d'onde $k \geq k_{\max}/2$ sont de toute façon mal résolus : ces nombres d'onde peuvent être supprimés *a priori* en utilisant un filtre qui limite ses effets dans cette gamme. De plus ce filtre peut éliminer le mode k_{\max} qui correspond à une solution pathologique de l'équation (2.14). Les filtres compacts sont particulièrement adaptés pour cette tâche.

Notons f_j la valeur de la fonction f au nœud $x_j = (j-1)h$, $1 \leq j \leq N$ et \tilde{f}_j la valeur filtrée. On utilise un filtre compact du 4^e ordre (Lele (1992); Slinn & Riley (1998)) dont l'équation peut être formulée comme suit :

$$\alpha_1 \tilde{f}_{j-1} + \tilde{f}_j + \alpha_1 \tilde{f}_{j+1} = a_1 f_j + \frac{b_1}{2}(f_{j+1} + f_{j-1}) + \frac{c_1}{2}(f_{j+2} + f_{j-2})$$

Soit une solution en modes de Fourier²⁷ définie par

$$\begin{cases} f_j = \hat{f}_j \exp(ikj) \\ \tilde{f}_j = \hat{\tilde{f}}_j \exp(ikj) \end{cases} \quad \text{avec} \quad k \in [0; \pi]$$

La fonction de transfert $T(k)$ définie par $\hat{\tilde{f}}_j = T(k) \hat{f}_j$ s'écrit :

$$T(k) = \frac{a_1 + b_1 \cos(k) + c_1 \cos(2k)}{1 + 2\alpha_1 \cos(k)}$$

²⁷ h est toujours l'unité de longueur.

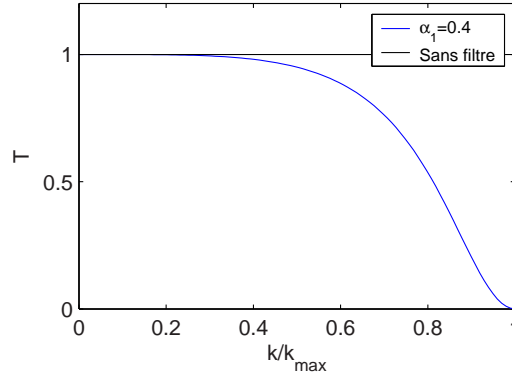


FIG. 2.5: Courbe représentative de la fonction de transfert du filtre compact appliqué à la pression ($\alpha_1 = 0,4$). L'essentiel de son action est bien limitée aux nombres d'onde tels que $k/k_{\max} \geq 1/2$.

Une famille de filtres compacts du 4^e ordre peut être générée en utilisant les conditions

$$T(\pi) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dT}{dk}(\pi) = 0$$

On calcule alors des relations nécessaires entre les coefficients :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{8}(5 + 6\alpha_1) \\ b_1 = \frac{1}{2}(1 + 2\alpha_1) \\ c_1 = -\frac{1}{8}(1 - 2\alpha_1) \end{cases}$$

Nous avons choisi $\alpha_1 = 0,4$ ce qui correspond à une fonction de transfert dont la courbe représentative est donnée sur la figure 2.5

Ce filtre est appliqué tel quel pour les points de l'intérieur du domaine. Pour les points frontière, nous utilisons les formules explicites (du 4^e ordre également) suivantes qui éliminent le nombre d'onde π :

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = \frac{15}{16}f_1 + \frac{1}{16}(4f_2 - 6f_3 + 4f_4 - f_5) \\ \tilde{f}_2 = \frac{3}{4}f_2 + \frac{1}{16}(f_1 + 6f_3 - 4f_4 + f_5) \end{cases}$$

Tout ce qui précède a été exposé à *une dimension*. Nous avons donc appliqué deux fois ce filtre compact, orthogonalement sur le domaine Ω . Pour contrôler l'effet de ce filtre, nous calculons systématiquement l'« énergie » relative des modes filtrés et nous nous assurons qu'elle est inférieure à 10^{-6} par rapport à celle de la fonction initiale. Par ailleurs, comme les mêmes modes non physiques peuvent s'introduire dans les autres grandeurs simulées (composantes de vitesse, densité), nous leur appliquons également ce filtre.

b) Filtrage non linéaire

Un fait physique indiscutable, c'est qu'en tout point de l'écoulement, la densité ρ doit toujours être comprise dans l'intervalle $[s; 1]$. Si l'on ne prend aucune précaution particulière, on constate cependant une dérive de la densité assez rapide (environ après seulement

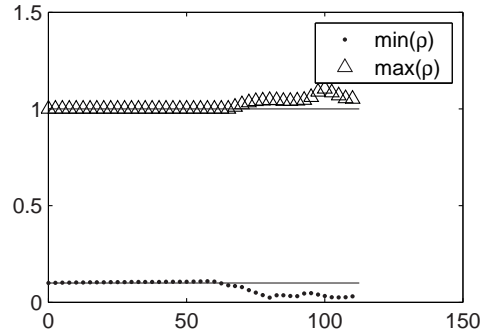


FIG. 2.6: En l'absence de toute condition imposée sur l'intervalle dans lequel ρ peut varier, on constate une dérive significative par rapport aux limites des valeurs physiques admissibles $[s; 1]$ qui sont matérialisées en trait continu dès 1000 pas de temps environ. Dans le cas présenté sur cette figure (1800 pas de temps), on a $n = 1$, $N = 129$, $s = 0, 1$.

1000 pas de temps) comme le montre la figure 2.6. Ce défaut, dû à la discrétisation, aux erreurs d'arrondis et à la dissipation numérique notamment, doit être corrigé car il entraîne la divergence du code après moins de 2000 pas de temps. Pour cela, nous avons appliqué un filtre non linéaire très simple. Après chaque pas de temps, on recherche dans l'écoulement l'ensemble des points où la densité calculée est en dehors de l'intervalle $[s; 1]$ et, pour ces points, on applique la valeur limite la plus proche. Ce genre de modifications d'apparence « brutale » est rendu possible par le fait qu'entre deux pas de temps successifs, c'est-à-dire entre deux applications du filtre, la dérive de densité, si elle a lieu, reste très modérée²⁸.

2.4 Les conditions aux limites

Dans la mise au point d'un code numérique, le choix des conditions aux limites est incontestablement le point qui pose le plus de problème et demande de nombreux essais avant de trouver une combinaison qui fonctionne. Malgré d'importants travaux sur ce point (Gresho (1991); Sani & Gresho (1994); Koh (2000)), il n'existe pas de méthode sûre pour trouver de bonnes conditions aux limites. L'empirisme reste sans doute la meilleure tactique. Certaines méthodes, pourtant mathématiquement très discutables, fournissent de bons résultats tandis que les conditions travaillées mathématiquement pour éviter que le problème ne devienne mal posé ne fonctionnent pas toujours aussi bien qu'espéré.

Dans le souci d'assurer une bonne lisibilité aux conditions effectivement retenues dans le code, nous avons déplacé les essais infructueux et les discussions afférentes dans la partie suivante. Dans cette partie, on ne trouve donc que « ce qui marche ».

2.4.1 Condition d'entrée (Γ_e)

Pour cette condition, il n'y a pas de problème majeur : on impose simplement le profil de vitesse et de densité c'est-à-dire

²⁸Cette hypothèse n'est vérifiée que si le code fonctionne « normalement ». Il est clair qu'en cas de divergence quelque part dans le domaine, cette modification ne permet en aucun cas d'empêcher l'« explosion » du calcul.

$$\begin{cases} u(0, y, t) = F(y) \\ \rho(0, y, t) = 1 + (s - 1)F(y) \end{cases} \quad \text{avec} \quad F(y) = \frac{1}{1 + \operatorname{sh}^{2n} y} \quad (2.18)$$

C'est la seule condition qui est relativement proche d'une condition physique. Les autres conditions que nous allons présenter dans les paragraphes tentent de mimer la réalité, mais, comme les conditions idéales²⁹ n'existent pas, il faut souvent faire des compromis. On a pris le parti de choisir les solutions les moins artificielles possibles³⁰, choisissant plutôt la simplicité lorsque des solutions alternatives se présentaient. Malgré cela, beaucoup d'hypothèses ou de contraintes supplémentaires sont imposées à l'écoulement par ces conditions.

2.4.2 Condition de sortie (Γ_s)

En plus d'éviter les rebonds, la condition de sortie doit aussi permettre l'évacuation « naturelle » du jet. Après plusieurs essais infructueux (*cf* §a) page 44), nous avons opté pour des conditions de Neumann :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(L_x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(L_x, y, t) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

2.4.3 Conditions latérales (Γ_ℓ)

Pour les bords latéraux de la boîte de calcul, il faut, autant que possible :

- être perméable puisque l'écoulement simulé est supposé libre ;
- éviter d'avoir une « aspiration » du jet ;
- éviter les « rebonds » non physiques.

Les conditions usuelles (conditions de Dirichlet et de Neumann) ne donnaient pas de résultat dans notre configuration³¹. Nous avons donc panaché des conditions de Dirichlet (pour la vitesse normale v) et de Neumann (pour la vitesse tangentielle u). Ainsi, pour les bords latéraux, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 0, t) = 0 \\ v(x, y = 0, t) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y = L_y, t) = 0 \\ v(x, y = L_y, t) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Il faut cependant être bien conscient que cette condition est loin d'être parfaite. En effet, si, pour une raison ou pour une autre, le jet se rapproche trop de ces bords, il y a une possibilité de rebond du jet. En revanche, les effets de cette condition ne sont pas sensibles sur le calcul si le jet ne s'approche pas trop³².

²⁹Cela reviendrait en particulier à n'imposer que des conditions « à l'infini » ce qui n'est pas accessible en DNS à moins de réaliser un *mapping* qui pose des problèmes spécifiques.

³⁰C'est pourquoi nous n'avons pas utilisé de fonction d'atténuation (*cf* §?? page ??).

³¹Le calcul « explosait » ou alors nous obtenions des situations aberrantes.

³²Les niveaux détectables de vorticité ne doivent pas être à moins d'une unité de longueur des bords. En effet, la projection sur l'espace des vitesses à divergence nulle est réalisée à l'*intérieur* du domaine de

2.4.4 Correction de flux

Le problème elliptique pour la pression avec une condition aux limites de Neumann présenté à l'équation (2.14) impose une condition supplémentaire. En effet, intégrons cette équation sur le domaine de calcul en utilisant le théorème d'Ostrogradski :

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \mathbf{n} \, d\ell = -\frac{1}{\Delta t} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} \, d\ell$$

Avec la condition de Neumann, le gradient normal de pression est nul donc le membre de gauche de la précédente relation est nul également. Il s'ensuit donc que l'on doit avoir nullité du membre de droite. Cela se traduit par la nullité du flux total du champ de vitesse entrant dans le domaine de calcul. Or, jusqu'à présent, nous n'avons rien imposé en ce sens. Nous allons donc introduire, artificiellement, une fonction de répartition et nous allons corriger la vitesse de sortie pour imposer cette condition supplémentaire. Pour cela, on définit une fonction

$$G(\alpha_i) = \frac{\exp(-(\alpha_i/D)^2)}{\sum_{m=0}^{N-1} \exp(-(\alpha_m/D)^2)} \quad \text{avec} \quad \alpha_i = y_i - \frac{L_y}{2} \quad (2.21)$$

avec D le *diamètre* de cette fonction gaussienne et $y_i = (i-1)h_y$ pour tout entier i entre 1 et N . On incrémente alors la vitesse $u^*(L_x, y, t)$:

$$u^*(L_x, y_i, t) \longleftarrow u^*(L_x, y_i, t) + \sum_{m=0}^{N-1} (u^*(0, y_m, t) - u^*(L_x, y_m, t)) G(\alpha_i) \quad (2.22)$$

Il faut bien avoir conscience que cette correction est faible quand le régime est établi (le jet traverse le domaine de calcul), car la somme de vitesse sur Γ_e est sensiblement égale à la somme sur Γ_s . Néanmoins, cette correction reste nécessaire³³.

2.4.5 Conditions aux limites pour la densité

Pour la densité comme pour toute autre grandeur, il faut bien évidemment appliquer des conditions aux limites. Nous avons cependant constaté que les choix étaient moins « critiques » que pour la vitesse. Nous avons donc retenu des solutions « simples » :

- une condition de Dirichlet sur le bord d'entrée Γ_e ;
- des conditions de Neumann sur les autres bords (Γ_ℓ et Γ_s).

2.5 Les schémas et conditions aux limites « écartés » ...

Dans cette partie, on donne quelques précisions sur les schémas ou conditions aux limites que nous avons testés mais pas retenus.

calcul seulement.

³³Le code diverge si cette condition est absente.

2.5.1 Schémas temporels

Nous avons testé un schéma d'Euler implicite d'ordre 1. Il donnait de bons résultats (stabilité, précision) mais était, comme tout schéma implicite, gourmand en temps de calcul. Nous lui avons donc préféré un schéma explicite. Dans les schémas explicites, nous avons aussi testé des schémas dits « à faible coût de stockage » comme on peut en trouver dans Spiteri & Ruuth (2001). Mais comme nos coûts de stockage n'étaient pas si importants et que nous avions de sérieuses raisons de douter de la validité des coefficients d'ajustement proposés, nous n'avons pas poussé très loin les investigations.

2.5.2 Conditions aux limites

C'est incontestablement dans ce domaine qu'il y a eu énormément de « déchets » avant que l'on ne trouve une combinaison satisfaisante.

a) Condition de sortie (Γ_s)

Trouver une bonne condition qui évacue le fluide, en particulier les structures tourbillonnaires n'a pas été aisé. La condition de cisaillement libre

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

induit des réflexions non physiques et augmente la divergence du champ de vitesse dans le domaine ce qui conduit à l'« explosion » de la simulation.

Les conditions de type advection forcée (Danaila (1997)), c'est-à-dire du type :

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \alpha \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha = \begin{cases} u(L_x, y, t) & \text{si } u(L_x, y, t) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.23)$$

n'ont pas non plus donné de bons résultats. En effet, après un faible nombre de pas de calcul, on constate une « explosion » de la divergence sans raison apparente sauf que cela se produit lorsque la vitesse devient négative quelque part à la frontière, lors de la traversée d'un vortex par exemple.

Notons que la condition d'advection sous sa forme plus générale (Boersma *et al.* (1998)) c'est-à-dire avec α la vitesse moyenne de sortie ne fonctionne pas non plus, car elle induit un élargissement artificiel et important du jet outre qu'elle n'empêche pas non plus la divergence du code.

b) Condition latérale (Γ_ℓ)

Pour cette condition, il faut impérativement empêcher les rebonds et limiter au maximum l'effet « paroi ». Une condition de Dirichlet sur la vitesse (composantes normale et tangentielle) a rapidement été écartée car elle donnait lieu à des rebonds importants.

Puisque la condition de Neumann donne de bons résultats pour la condition sur Γ_s , on serait tenté d'utiliser aussi cette condition pour les bords Γ_ℓ (Koh (2000)). Malheureusement cela ne fonctionne pas du tout comme on peut le voir sur la figure 2.7. On peut proposer une explication « avec les mains » pour essayer de comprendre pourquoi le jet tourne aussi brusquement. Initialement, le jet progresse normalement dans la boîte. Mais une fois qu'il est arrivé environ au quart, il bifurque vers un bord latéral. La condition de

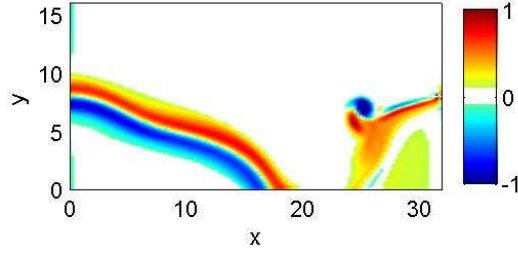


FIG. 2.7: Lorsque la condition latérale (sur Γ_ℓ) est de type Neumann, le jet est « attiré » sur les bords.

Neumann assure, on l'a vu, une aspiration suffisante pour faire sortir le jet par le bord de sortie Γ_s . Il n'y a donc aucune raison pour que cette même condition ne produise pas le même effet sur les parois latérales. Au quart de la boîte, les parois latérales Γ_ℓ sont plus proches que le bord de sortie Γ_s : le jet « choisit » la sortie la « moins coûteuse », donc Γ_ℓ . Cette hypothèse est confirmée par l'utilisation d'une boîte telle que $L_y > L_x$: on n'observe alors pas de déviation anormale du jet. Cependant, prendre une telle boîte revient en pratique (à L_x fixé) à diminuer considérablement la résolution des couches de vorticité du jet dans la direction transversale ce que nous ne souhaitons pas. La solution que nous avons retenue (Dirichlet pour la vitesse normale) permet de s'affranchir de cette aspiration.

2.6 Bilan : algorithme de résolution et organisation informatique

2.6.1 Algorithme de résolution

On rassemble dans cette partie ce qui a été discuté dans ce chapitre pour établir un schéma synthétique de l'ensemble des procédures et méthodes mises en œuvre dans le code. Pour cela, on détaille le calcul effectif complet d'un pas de temps. Partons donc d'une situation connue à l'instant n (c'est-à-dire que l'on connaît (u^n, v^n, p^n, ρ^n)).

1. Calcul de $\mathbf{v}^* = (u^*, v^*)$ par RK3 (§ 2.3.2).
2. Applications des conditions aux limites sur $\partial\Omega$ (§ 2.4.1, § 2.4.2 et § 2.4.3).
3. Correction du flux de u^* (§ 2.4.4).
4. Application du filtre compact sur la vitesse \mathbf{v}^* (§ 2.3.6).
5. Calcul de la pression p^n par la méthode de projection (§ 2.3.5).
6. Application du filtre compact sur p^n (§ 2.3.6).
7. Correction de \mathbf{v}^* pour obtenir \mathbf{v}^{n+1} (équation (2.11)).
8. Calcul de ρ^{n+1} par RK3 (§ 2.3.2).
9. Conditions aux limites pour la densité ρ^{n+1} (§ 2.4.5).
10. Application du filtre compact et du filtre non linéaire sur ρ^{n+1} (§ 2.3.6).

2.6.2 Organisation informatique

Pour mettre en place cet algorithme, nous n'avons pas repris de code pré-existant mais avons tout construit. Nous avons choisi le langage **Fortran 95**, notamment pour ses qualités de calcul vectoriel ce qui permet d'éviter de nombreuses boucles pour un problème comme le nôtre. Notre projet aurait tout à fait pu être implémenté sous **Matlab** ce qui aurait permis de bénéficier directement des fonctions graphiques avancées pour présenter les résultats dans un programme intégré. Malheureusement, l'efficacité du langage interprété de **Matlab** aurait lourdement grevé le temps de calcul. Nous avons donc opté pour une solution mixte :

- **Fortran 95**, langage de haut niveau compilé pour la résolution numérique du problème et l'enregistrement des résultats ;
- **Matlab** pour le traitement graphique des résultats et des analyses *a posteriori* . En effet, ces analyses sont en général bien plus légères en temps de calcul : l'ergonomie (vitesse de développement) et la convivialité de **Matlab** sont alors bien supérieures à celles de **Fortran 95**.

Chaque simulation produit, outre une sortie écran avec les résultats de quelques tests, de nombreux fichiers :

des fichiers « image » intermédiaires : Selon une périodicité définie, on enregistre les champs de certaines grandeurs choisies dans un fichier indexé par le pas de temps. Ces fichiers sont utilisés par la suite pour des traitements graphiques par exemple. Si le fichier image contient au moins (u, v, p, ρ) , il est possible de s'en servir pour relancer une simulation à partir de ce nouvel état initial. Il est bien sûr impossible d'enregistrer tous les pas de temps car la quantité d'informations à écrire deviendrait alors impossible à gérer. Il faut savoir qu'un fichier qui contient 5 champs $(u, v, p, \rho, \nabla \wedge \mathbf{v})$, par exemple, pèse déjà près d'1 Mo dans la résolution $N = 129$ et évidemment 4 fois plus en $N = 257$ et 16 fois plus en $N = 513$.

des fichiers de logs : Les résultats de divers tests et d'autres informations d'exécution sont écrits dans des fichiers de contrôle.

des fichiers de « sonde » : S'il est irréaliste d'enregistrer, ne serait-ce qu'un champ, à tous les pas de temps, il est en revanche très facile d'enregistrer la valeur en un point d'une ou plusieurs grandeurs. On peut obtenir ainsi la sortie d'une ou plusieurs sondes ponctuelles placées dans l'écoulement.

divers fichiers utiles : En plus de ces informations, plusieurs fichiers supplémentaires ont été créés dans le but de faciliter le post-traitement avec **Matlab**. Par exemple, la valeur du pas de temps Δt et même la séquence des valeurs du temps.

Ainsi, en moyenne, chaque simulation produit environ 100 à 200 fichiers. Comme on réalise de nombreuses simulations en modifiant certains paramètres, il est impératif d'organiser ces fichiers méthodiquement. Nous avons choisi d'utiliser un répertoire par gamme de paramètres. Ainsi, une simulation pour laquelle $(n = 1, N = 257, s = 0, 7)$ est placée dans le répertoire `N1\256\rd0.7\`. Cette organisation systématique permet de retrouver facilement une simulation spécifique et d'automatiser le traitement depuis **Matlab**. En outre, un niveau d'arborescence supplémentaire a été ajouté avec la date du lancement de la simulation.

Les carences du langage **Fortran 95** pour l'interface homme-machine ont été contournées. Des fonctions générales qui permettent d'écrire ou lire un fichier image très simplement ont été écrites. Le réglage des paramètres du code (tels la résolution, la valeur de

Résolution N	Temps CPU (un pas de temps)
129	0,172 s
257	1,16 s
513	12,3 s

TAB. 2.1: Temps de calcul moyen d'un pas de temps selon la résolution. Ces calculs de test ont été réalisés pour un rapport de densité $s = 0,6$ et un profil $n = 4$ sur une machine équipée d'un processeur Intel Pentium IV cadencé à 2,4 GHz.

n pour déterminer le profil, la périodicité des images à enregistrer, le nombre de pas de temps à calculer, etc.) passe par un fichier texte qui est lu au démarrage du calcul.

Nous avons pu utiliser diverses machines pour faire les calculs : soit une machine de bureau (bi-processeur Pentium IV à 1,5 GHz) soit d'autres machines qui font partie du parc informatique partagé du laboratoire (mono ou bi-processeurs à base de Pentium IV à 2,4 ou 2,8 GHz) qu'il est possible d'utiliser à distance.

Chaque simulation prend quelques dizaines de minutes en 129 points, quelques heures en 257 points et quelques jours en 513 points (*cf* tableau 2.1). Afin de bénéficier des périodes d'inactivité (nuits et week-end notamment), nous avons mis en place des traitements par lots. Pour ce genre de tâches, orientées système, le **Fortran 95** est très mal adapté. Nous avons alors utilisé les possibilités des fichiers *batch* : certes les possibilités sont très sommaires, mais elles suffisent à nos besoins. Ainsi, c'est le programme **bat** qui se charge de créer l'arborescence pour une simulation, de générer automatiquement le fichier de paramètres et de démarrer la simulation.

Lors du développement, un soin tout particulier a été apporté à l'organisation du code. En effet, il s'agissait aussi de construire un outil qui pourrait être réutilisé par d'autres personnes. Les commentaires sont donc assez abondants et les capacités modulaires offertes par le **Fortran 95** ont été mises à profit. Le code ainsi produit est très souple et facilement adaptable pour des besoins spécifiques.

Chapitre 3

Étude linéaire et validation du code

Avant d'aborder les résultats obtenus avec notre code DNS, il convient de valider les procédures mises en œuvre. Pour cela, nous avons mené, par d'autres moyens, une étude linéaire du jet bidimensionnel. Nous présentons les résultats obtenus par cette étude. Ensuite, nous utilisons, entre autres, cette théorie pour contrôler la validité du code.

3.1 Théorie linéaire du jet

Plusieurs travaux portent sur le jet plan en théorie linéaire (Yu & Monkewitz (1990) pour l'aspect théorique et Yu & Monkewitz (1993); Raynal *et al.* (1996) pour deux mises en œuvre expérimentales par exemple). Cependant l'étude systématique que nous proposons ici, notamment en ce qui concerne les plages de densité étudiées, n'a pas été publiée à notre connaissance. Nous utilisons des méthodes de diagonalisation et de *shooting*, adaptées à partir du travail réalisé sur la couche de mélange lors de mon DEA¹.

3.1.1 Cadre de l'étude : problème de Rayleigh

On se place dans un référentiel fixe que l'on dote d'un repère (O, \hat{x}, \hat{y}) . On étudie la stabilité d'un **écoulement parallèle moyen** $(\mathbf{U}_0(y), P_0(y), \rho_0(y))$. Un tel écoulement est solution stationnaire des équations d'Euler. Cette hypothèse d'écoulement parallèle confère à cette étude un caractère **local**. On peut choisir une fonction quelconque de la variable y pour profil de vitesse. Nous avons opté pour une famille de fonctions à un paramètre n :

$$F(y) = \frac{1}{1 + \text{sh}^{2n} y} \quad (3.1)$$

de telle sorte que

$$\begin{cases} \mathbf{U}_0(y) = F(y) \hat{y} \\ \rho_0(y) = 1 + (s - 1) F(y) \\ P_0(y) = P_0 = C^{\text{te}} \end{cases} \quad (3.3)$$

où s est le rapport de densité qui vaut simplement

$$s = \frac{\rho_0(0)}{\rho_0(\infty)} = \rho_0(0)$$

¹Rapport de DEA (2001), *Étude numérique du terme barocline d'une couche de mélange bidimensionnelle*, Université Aix-Marseille II.

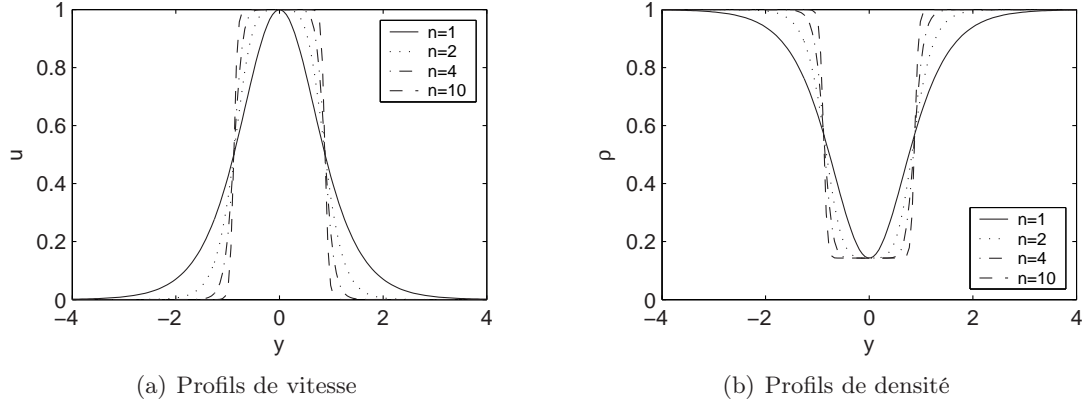


FIG. 3.1: Profils de vitesse et de densité pour différentes valeurs de n et pour $s = 1/7$: $n = 1$ en trait plein, $n = 2$ en pointillés, $n = 4$ en tirets et $n = 10$ en traits mixtes. Pour améliorer la lisibilité du graphique, seul un intervalle limité à $[-4; 4]$ est représenté.

Cette famille est celle utilisée dans la condition d'entrée du calcul non linéaire (cf §2.4.1, page 41). Un tel écoulement de base fait partie d'une famille de profils à densité variable à deux paramètres (s, n) dont quelques exemples sont représentés sur la figure 3.1. Le cas limite $n \rightarrow +\infty$ correspond quant à lui au profil carré ou *top-hat*. Cette même famille de profils a été utilisée sous une forme légèrement différente par Yu & Monkewitz (1990). Nous avons principalement travaillé avec deux valeurs de n :

- $n = 1$: correspond au jet Bickley (profil en sech^2) ;
- $n = 4$: correspond à un profil presque carré que nous appelons presque *top-hat*.

Le paramètre n permet de contrôler l'épaisseur de la couche de cisaillement du jet qui est donnée

- pour l'épaisseur de quantité de mouvement $\theta(n)$ par

$$\theta(n) = \int_0^{+\infty} U_0(y) (1 - U_0(y)) dy \simeq \frac{0,33}{n}$$

- pour l'épaisseur de vortacité $\theta_\omega(n)$ par

$$\theta_\omega(n) = \frac{U_0(0) - U_0(\infty)}{\max\left(\frac{dU_0}{dy}\right)} \simeq \frac{1,33}{n}$$

Cette famille est solution de l'équation d'Euler incompressible :

$$\frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial t} + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla) \mathbf{U}_0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P_0 = 0$$

Nous ne tenons pas compte de la viscosité dans cette étude, car nous recherchons le taux de croissance or on sait que celle-ci a uniquement un effet d'atténuation sur le taux de croissance linéaire (Drazin & Reid (1982)).

On superpose une perturbation (\mathbf{v}, p, ρ) à l'écoulement moyen et on procède, par une démarche en tout point analogue à celle présentée au paragraphe 1.3.1, page 17 pour obtenir une équation de Rayleigh généralisée exprimée en terme de pression. On obtient alors (Raynal *et al.* (1996)) :

$$p'' - \left(\frac{\rho'_0}{\rho_0} + 2 \frac{U'_0}{U_0 - c} \right) p' - k^2 p = 0 \quad \text{où} \quad c = \frac{\omega}{k} \quad (3.4)$$

$$\text{avec les conditions aux limites} \quad p(\pm\infty) = 0 \quad (3.6)$$

Ce problème admet comme solutions deux fonctions propres indépendantes :

- le mode **sinueux** : p et u sont antisymétriques et v est symétrique par rapport à y ;
- le mode **variqueux** : p et u sont symétriques et v est antisymétrique par rapport à y .

3.1.2 Méthode de résolution

Le problème posé par les équations (3.4) et (3.6) ne peut être résolu analytiquement que pour le cas limite du profil *top-hat* où $n = +\infty$. Dans ce cas, on montre (Yu & Monkewitz (1990)) que, lorsque le rapport de densité s décroît :

- le mode variqueux devient absolument instable pour s_{ca} de 0,79 ;
- le mode sinueux devient absolument instable pour $s_{ca} = 0,29$.

Pour des valeurs finies de n , il faut recourir à une résolution numérique. Pour ce faire, on commence par transformer l'équation du second ordre en un système de deux équations du premier ordre. Pour cela, on pose classiquement

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 = p \\ X_2 = \frac{dp}{dy} \end{bmatrix}$$

et on obtient

$$\frac{d\mathbf{X}}{dy} = \begin{bmatrix} X_2 \\ \left(\frac{2U'_0}{U_0 - c} + \frac{\rho'_0}{\rho_0} \right) X_2 + k^2 X_1 \end{bmatrix}$$

La symétrie de ce problème aux valeurs initiales² dépend des conditions aux limites :

- $p(0) = 0, p'(0) = 1, p(y \rightarrow \infty) \sim \exp(-ky), p'(y \rightarrow \infty) \sim -k \exp(-ky)$ correspond au mode sinueux ;
- $p(0) = 1, p'(0) = 0, p(y \rightarrow \infty) \sim \exp(-ky), p'(y \rightarrow \infty) \sim -k \exp(-ky)$ correspond au mode variqueux.

On résout ce problème en utilisant une méthode de tir corrigé³ pour la valeur complexe de la célérité des ondes $c = c_r + i c_i$. La méthode du tir corrigé est une méthode précise et efficace mais elle est *locale* dans le plan complexe c . Il faut donc disposer d'une valeur de départ⁴.

Pour obtenir cette valeur, on utilise une méthode globale basée sur la diagonalisation d'opérateurs matriciels (Weideman & Reddy (2000)). Dans le cadre d'une étude temporelle ($k \in \mathbb{R}$ donné, $\omega \in \mathbb{C}$ inconnu), en utilisant une méthode pseudo-spectrale de Chebyshev⁵, on transforme (3.4) en un problème généralisé aux valeurs propres :

²initial value problem.

³shooting method.

⁴initial guess.

⁵spectral collocation method.

$$A p = c B p \quad (3.7)$$

$$A = U_0 D^{(2)} - \left[2 U'_0 + \left(\frac{\rho'_0}{\rho_0} U_0 \right) \right] D^{(1)} - k^2 U_0 D^{(0)} \quad (3.8)$$

$$B = D^{(2)} - \frac{\rho'_0}{\rho_0} D^{(1)} - k^2 D^{(0)} \quad (3.9)$$

où $D^{(2)}$, $D^{(1)}$ et $D^{(0)}$ sont les opérateurs de dérivation spatiale d'ordre 2, 1 et 0 (identité) : ce sont des opérateurs matriciels qui tiennent compte :

- du *mapping* qu'il faut prendre en compte puisque les polynômes de Chebyshev sont définis sur $[-1; 1]$;
- des conditions aux limites données par (3.6).

Dans le cadre d'une étude spatiale, il faut cependant procéder autrement, car k apparaît de manière non linéaire dans (3.4). On réécrit alors les équations linéarisées d'Euler :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -D^{(1)} & 0 \\ 0 & i \frac{\omega}{U_0} D^{(0)} & -\frac{1}{\rho_0 U_0} D^{(1)} \\ i \omega \rho_0 D^{(0)} & \rho_0 (U_0 D^{(1)} - U'_0 D^{(0)}) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres recherchées sont alors celles de l'opérateur matriciel du membre de droite.

Le grand nombre de valeurs propres retournées constitue la principale difficulté des méthodes globales de diagonalisation : si M désigne le nombre de polynômes utilisés, on obtient en effet M valeurs propres dans le cas temporel et $3M$ dans le cas spatial. Les fonctions propres pathologiques sont caractérisées par un grand nombre d'oscillations. Nous éliminons donc automatiquement les fonctions qui présentent plus de 4 maxima sur $[-1; 1]$. Les fonctions propres qui restent sont nos candidates pour appliquer la méthode du tir corrigé.

3.1.3 Résultats

Pour valider ces méthodes, on a recalculé le cas à densité constante pour le jet Bickley ($n = 1, s = 1$). Les résultats, présentés sur la figure 3.2, sont en accord avec ceux publiés dans Mattingly & Criminale Jr. (1971); Drazin & Reid (1982). On constate également que ces deux méthodes donnent en fait des résultats très proches. Dans le cas à densité constante présenté ici, le mode sinueux est bien plus instable que le mode variqueux puisqu'il y a quasiment un rapport de 1 à 4 entre les maxima respectifs de ces deux modes, que ce soit dans le cadre temporel ou spatial. Ainsi, l'étude linéaire prévoit-elle une évolution dominée par le mode sinueux pour le jet Bickley. Il n'en est pas de même lorsque l'on fait décroître s . En effet, lorsque le rapport de densité diminue, le mode variqueux devient progressivement de plus en plus instable. Le taux de croissance du mode variqueux peut atteindre la même valeur voire dépasser celle du mode sinueux comme on peut le constater sur les figures 3.3 à 3.7. Cela suggère que, **en fonction des valeurs de s et n , on peut avoir coexistence des deux modes.**

Les relations de dispersions spatiales montrent également que le mode variqueux présente une transition convective/absolue pour $s \in [0, 1; 1]$ et $n \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$. Deux branches

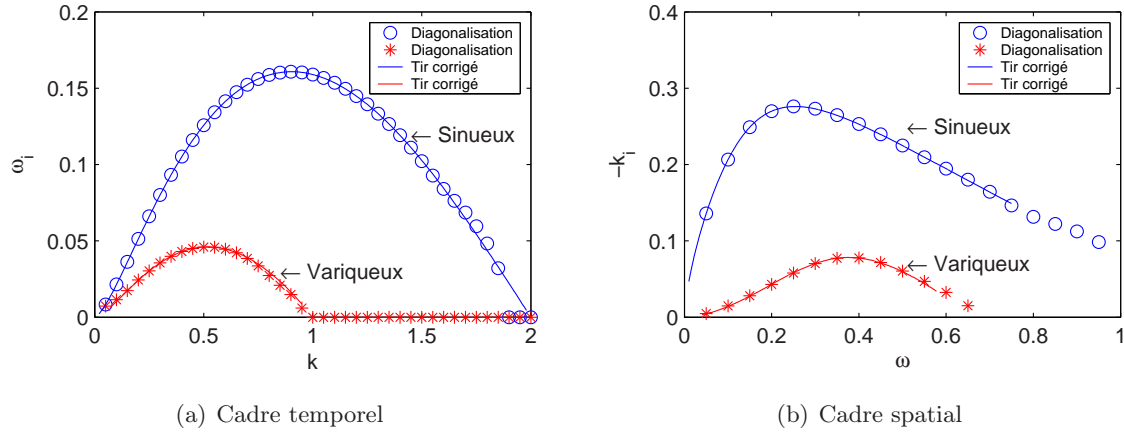


FIG. 3.2: Relations de dispersion obtenues dans le cas ($n = 1, s = 1$) par les méthodes de diagonalisation et de tir corrigé. Ces deux méthodes présentent un très bon accord.

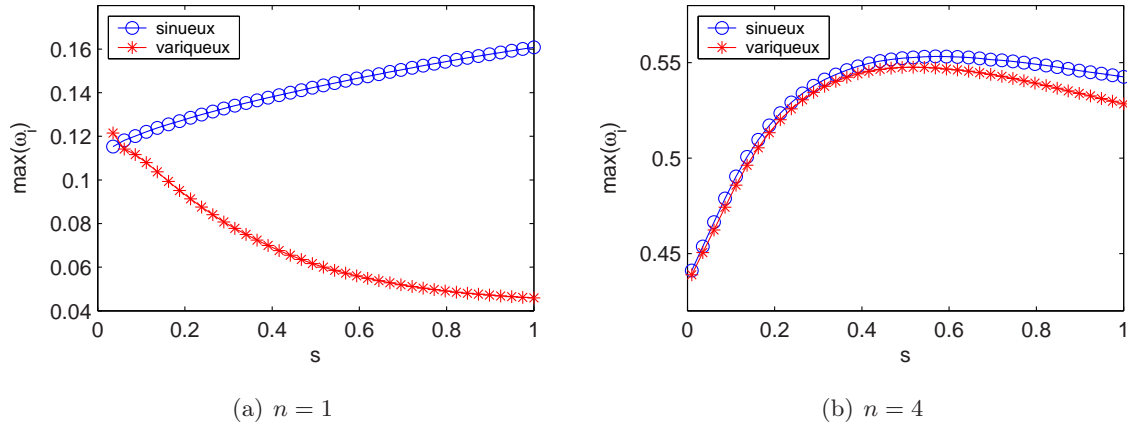


FIG. 3.3: Valeur du maximum du taux de croissance de l'instabilité temporelle $(\omega_i)_{\max}$ en fonction de s . On remarque que, lorsque s décroît, le mode variqueux devient aussi important que le mode sinueux, particulièrement dans le cas proche du profil top-hat ($n = 4$).

spatiales se rejoignent⁶ (Huerre & Monkewitz (1985)) pour $0,14 \leq s_{ca} < 0,15$ pour $n = 1$ (figure 3.5) et pour $0,93 \leq s_{ca} < 0,94$ pour $n = 4$ (figure 3.7). On remarque également que le taux de croissance maximum du mode variqueux est supérieur à celui du mode sinueux pour des rapports de densité proches de la transition.

Cette étude linéaire montre que le mode variqueux présente une transition convective/absolue dans la gamme de rapports de densité et de valeurs du paramètre n choisis. On constate également que, au voisinage de la transition, le mode variqueux est plus instable que le mode sinueux. Une question surgit alors : est-ce que c'est la transition convective/absolue qui gouverne la dynamique du jet en imposant sa fréquence à l'évolution non-linéaire du jet ou est-ce que c'est la fréquence du mode dont la croissance est maximale qui est importante ? C'est une des questions à laquelle nous tenterons d'apporter des éléments de réponses dans le chapitre consacré aux résultats (chapitre 4 page 65).

⁶ spatial branches "pinches".

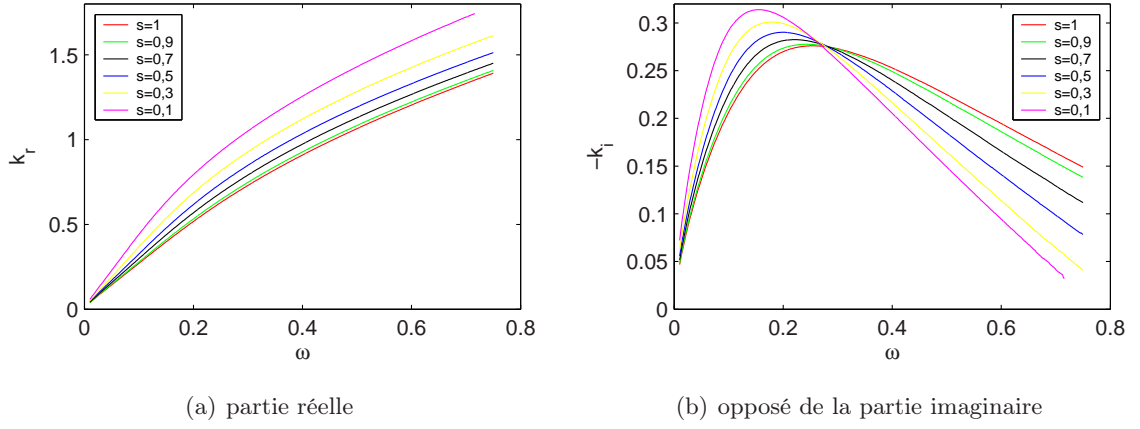


FIG. 3.4: Relation de dispersion spatiale du mode sinueux pour le jet Bickley et $s \in [0,1;1]$. On note une faible dépendance du maximum du taux de croissance par rapport à s et l'absence de toute transition convective/absolue pour cet intervalle de valeurs de s .

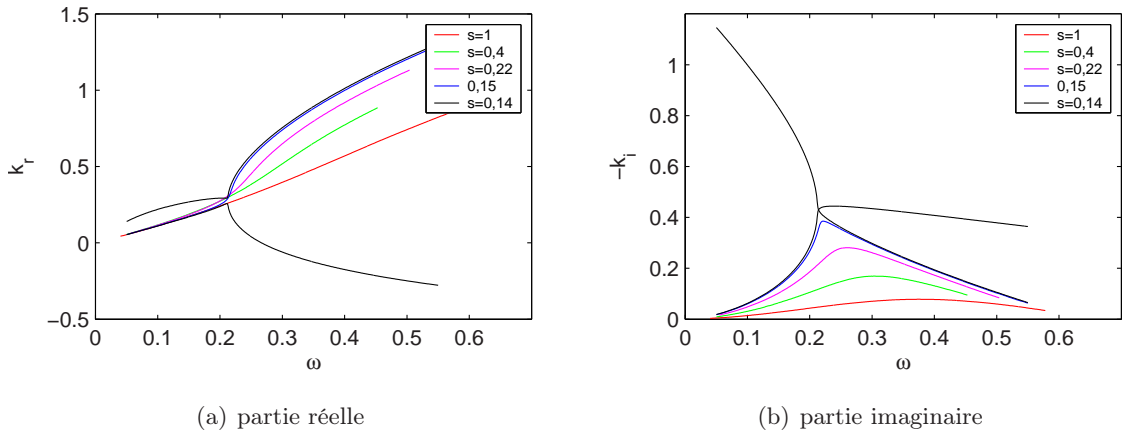


FIG. 3.5: Relation de dispersion spatiale du mode variqueux pour le jet Bickley et $s \in [0,14;1]$. On note la forte dépendance du maximum du taux de croissance par rapport à s et la transition convective/absolue qui a lieu pour $0,14 \leq s_{ca} < 0,15$.

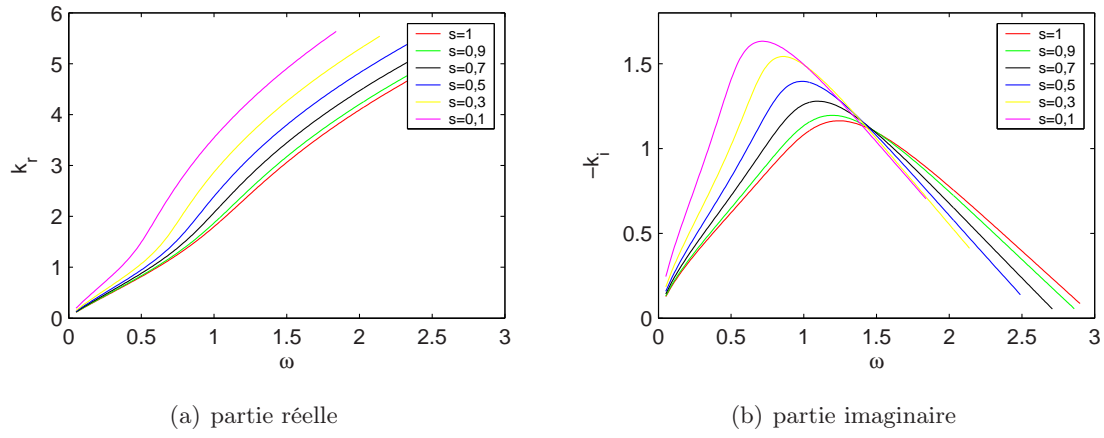


FIG. 3.6: Relation de dispersion spatiale du mode sinueux pour le jet presque top-hat pour $s \in [0,1;1]$. On note l'absence de toute transition convective/absolue pour ces valeurs de s .

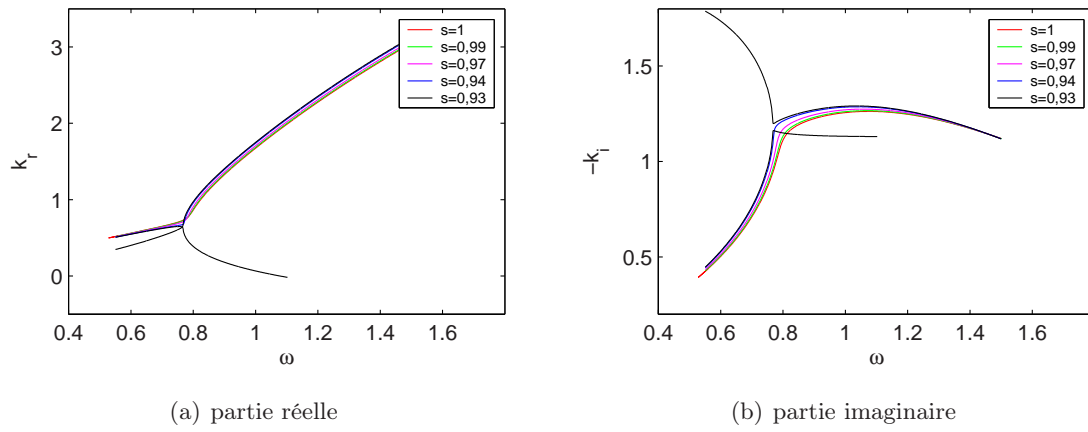


FIG. 3.7: Relation de dispersion spatiale du mode variqueux pour le jet presque top-hat pour $s \in [0,93;1]$. On note une transition convective/absolue qui se produit pour $0,93 \leq s_{ca} < 0,94$.

n	Mode	s_{ca}	$\omega_{0,r}(k_0; s_{ca})$	$\omega_{0,r}(\max(-k_i); s_{ca})$	Re
1	Sinueux	—	—	—	∞
1	Variqueux	0,145	0,21	0,21	∞
4	Sinueux	—	—	—	∞
4	Variqueux	0,935	0,77	1,07	∞

TAB. 3.1: Résumé des prédictions linéaires concernant les modes variueux et sinueux et la présence éventuelle d'une transition convective/absolue.

Les principaux résultats de la théorie linéaire sont résumés dans le tableau 3.1.

3.2 Validation du code

Le code numérique présenté dans le chapitre 2 doit être validé, notamment en ce qui concerne la partie qui traite de la densité variable avant que l'on puisse s'intéresser à ses résultats. Pour cela, nous avons développé une approximation linéaire de ce code que nous présentons ici extensivement après quelques vérifications élémentaires.

3.2.1 Premiers éléments de validation

Pour définir les profils, on utilise la même famille de fonctions que pour la théorie linéaire définie par les équations (3.1) et (3.3) que l'on rappelle ici pour plus de clarté :

$$F(y) = \frac{1}{1 + \operatorname{sh}^{2n} y} \quad (3.10)$$

$$\text{de telle sorte que} \quad \begin{cases} \mathbf{U}_0(y) = F(y) \hat{y} \\ \rho_0(y) = 1 + (s - 1) F(y) \\ P_0(y) = P_0 = C^{\text{te}} \end{cases} \quad (3.12)$$

Nous avons utilisé deux situations différentes pour initialiser nos simulations :

par le bord : Dans ce cas, le point de départ des simulations est très simple :

$$\begin{cases} u(x > 0, y, 0) = 0 & \text{et} & u(0, y, 0) = U_0(y) \\ v(x, y, 0) = 0 \\ \rho(x > 0, y, 0) = \rho_{\text{air}} & \text{et} & \rho(0, y, 0) = \rho_0(y) \end{cases}$$

par un écoulement parallèle : Là, on initialise la simulation avec un écoulement parallèle :

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = U_0(y) & \forall x \in [0; L_x] \\ v(x, y, 0) = 0 \\ \rho(x, y, 0) = \rho_0(y) & \forall x \in [0; L_x] \end{cases}$$

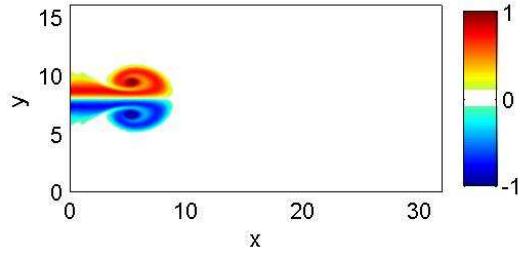


FIG. 3.8: Vorticité après 600 pas de temps dans le cas d'une initialisation par le bord ($s = 1$, $N = 257$).

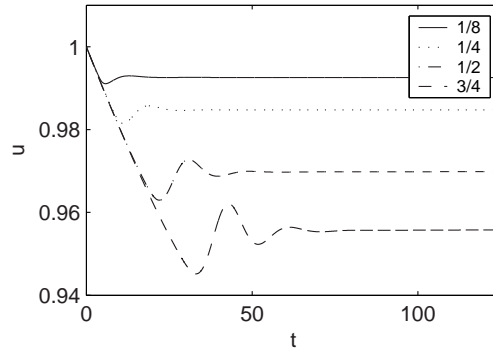


FIG. 3.9: Vitesse sur l'axe pendant les premiers pas de temps après une initialisation par un écoulement parallèle ($s = 1$, $N = 257$, 4000 pas de temps représentés).

Ce qu'il faut souligner ici, c'est que, contrairement aux travaux présentés dans Delbende *et al.* (1998) et Pier & Huerre (2001) sur les ondes, **le profil de base est libre d'évoluer** à l'intérieur de Ω : il n'est pas fixé.

Dans le cas d'une initialisation par le bord, le jet progresse dans le domaine de calcul pendant les premiers pas de calcul. On peut observer les tourbillons caractéristiques de Kelvin-Helmholtz (figure 3.8).

Dans le cas d'une initialisation par un écoulement parallèle, les premiers pas de temps permettent de régulariser l'écoulement afin d'en faire une solution de l'équation de Navier-Stokes. En effet, en raison des effets visqueux, un écoulement strictement parallèle n'est pas solution du problème. Après moins de 1000 pas de temps (avec la résolution $N = 129$), la solution laminaire est établie comme on peut le voir sur la figure 3.9. Quand cette solution est établie, on peut déterminer le profil exact du champ de vitesse (figure 3.10). On constate que cette solution laminaire est quasi-parallèle : on note une légère décroissance axiale de la vitesse longitudinale et une faible vitesse transversale.

Une fois que le régime établi est atteint, les erreurs numériques, notamment de truncature fournissent un « bruit » suffisant pour exciter le jet. Ainsi, après quelques milliers de pas de calcul, on voit apparaître des oscillations croissantes au sein de l'écoulement. On a représenté sur la figure 3.11 la vitesse longitudinale en fonction du temps : on mesure une fréquence $\omega/(2\pi) = 0,35/(2\pi)$ ce qui correspond à la fréquence du mode sinueux le plus instable (voir l'étude linéaire dans la partie précédente). L'étude de la croissance de ces oscillations est l'objet de la suite de ce chapitre.

Ces premiers tests permettent de donner une validation « visuelle » et globale de ce que

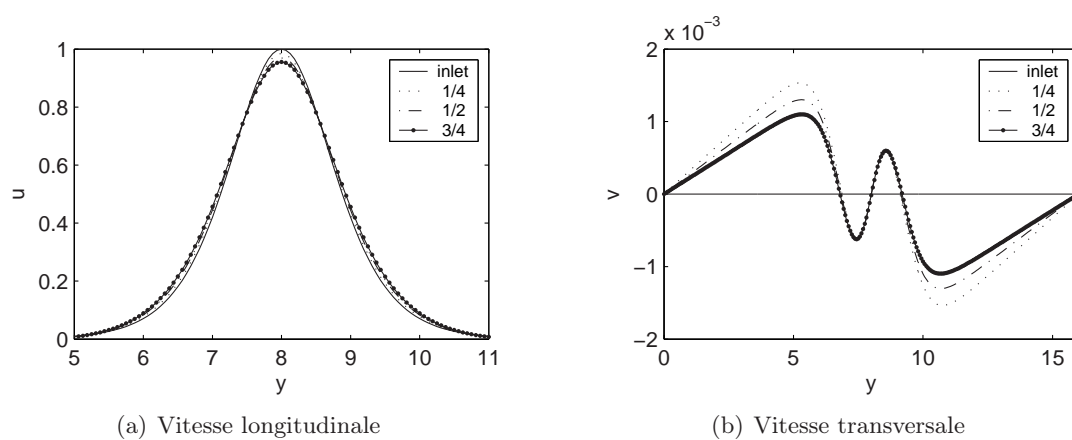


FIG. 3.10: Profils de vitesse longitudinale et transversale lorsque la solution laminaire est établie ($s = 1$, $N = 257$).

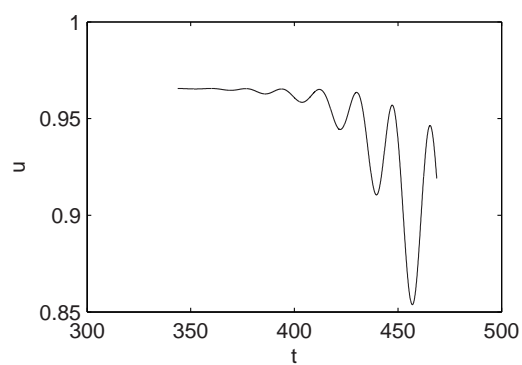


FIG. 3.11: Vitesse longitudinale relevée au milieu du domaine de calcul sur l'axe (2000 pas de temps représentés, $s = 1$, $N = 129$). On note la croissance de l'instabilité. Aucune saturation n'apparaît avant que le jet « tape » les bords du domaine de calcul.

calcule le code DNS. Néanmoins, même si c'est encourageant, c'est insuffisant pour affirmer que le code calcule correctement. Pour assurer ce point, nous allons étudier la croissance linéaire des instabilités sinueuse et variqueuse.

3.2.2 L'approximation linéaire

a) Méthode

Afin de vérifier l'ensemble des procédures numériques, nous avons calculé la réponse linéaire impulsionnelle du système (2.13) sur le domaine Ω . L'objectif est de retrouver les relations de dispersion que nous avons obtenues par les méthodes de diagonalisation et de tir corrigé. Pour ce faire, on linéarise ce système au voisinage de l'écoulement parallèle à densité variable $(\mathbf{U}_0, P_0, \rho_0)$. Cet écoulement de base n'est solution des équations de Navier-Stokes que pour un nombre de Reynolds infini. La viscosité n'ayant qu'un rôle d'atténuation, nous allons supposer que l'erreur que l'on commet en considérant que cet écoulement parallèle est solution reste faible comme on l'a vu au paragraphe précédent.

On note $U_0 + u$, v , $\rho_0 + \rho$ la vitesse longitudinale, transversale et la densité respectivement. En ne conservant que l'ordre dominant en (u, v, ρ) , il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -U_0 \frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n \frac{dU_0}{dy} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} - \frac{\rho^n}{\rho_0} \frac{d^2 U_0}{dy^2} \right) \\ \frac{v^* - v^n}{\Delta t} = -U_0 \frac{\partial v^n}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \right) \\ \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \begin{bmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} \\ u^{n+1} = u^* - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \Delta t \quad \text{et} \quad v^{n+1} = v^* - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \Delta t \\ \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \left(u^n \frac{\partial}{\partial x} + v^n \frac{\partial}{\partial y} \right) \rho_0 + U_0 \frac{\partial \rho^n}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

La perturbation initiale est composée de pics gaussiens (Delbende (1998)) très localisés. Ces fonctions permettent d'avoir une bonne approximation d'un « δ de Dirac » tout en restant des fonctions infiniment dérivables. Pour déterminer la relation de dispersion de chacun des deux modes sinueux et variqueux, il faut effectuer des simulations avec des perturbations initiales qui présentent les mêmes propriétés de symétrie que le mode à exciter. Pour obtenir le mode sinueux, nous centrons un unique pic gaussien en $(x_1 = L_x/10, y_1 = L_y/2)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, 0) = -\varepsilon \frac{y - y_1}{a} e^{-((x-x_1)/a)^2} e^{-((y-y_1)/a)^2} \\ v(x, y, 0) = \varepsilon \frac{x - x_1}{a} e^{-((x-x_1)/a)^2} e^{-((y-y_1)/a)^2} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

où a est l'échelle de longueur de la perturbation ($a = 0,5$), et ε est l'amplitude de la perturbation ($\varepsilon = 0,1$). Quant au cas du mode variqueux, on utilise deux pics placés symétriquement par rapport à l'axe $y = L_y/2$, à la même abscisse x_1 :

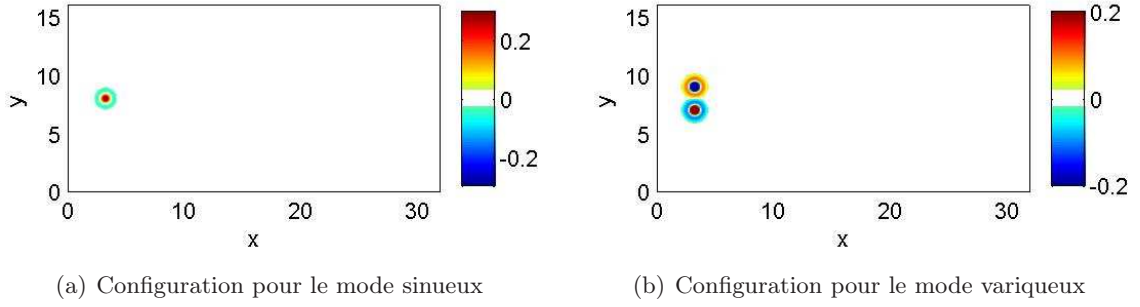


FIG. 3.12: Vorticité des perturbations initiales utilisées dans les deux cas étudiés.

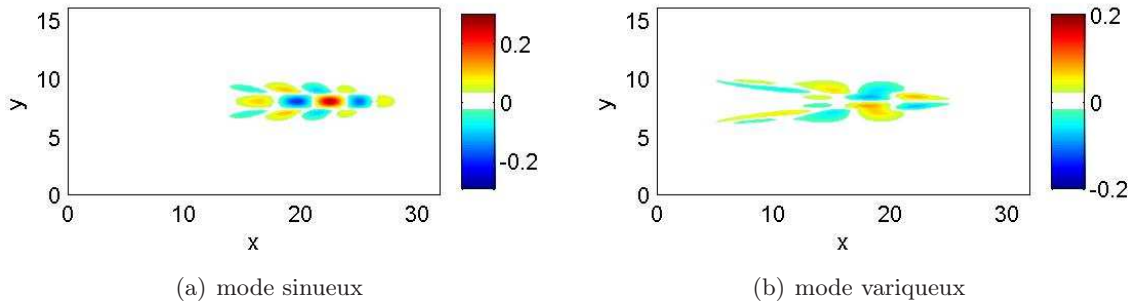


FIG. 3.13: Fonction de Green de la vorticité pour chacun des deux cas. Ces vues sont prises au même instant (après 800 pas de temps) dans le cas à densité constante ($s = 1$).

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \varepsilon \left(\frac{y - y_2}{a} e^{-((y - y_2)/a)^2} - \frac{y - y_3}{a} e^{-((y - y_3)/a)^2} \right) e^{-((x - x_1)/a)^2} \\ v(x, y, 0) = \varepsilon \frac{x - x_1}{a} \left(e^{-((y - y_2)/a)^2} - e^{-((y - y_3)/a)^2} \right) e^{-((x - x_1)/a)^2} \end{cases} \quad (3.16)$$

y_2 et y_3 sont placés symétriquement par rapport à l'axe, au voisinage du point d'inflexion du profil de vitesse pour un maximum de réceptivité. La divergence du champ de vitesse de ces perturbations (représentées sur la figure 3.12) est nulle par construction.

Pour chaque rapport de densité étudié, on calcule l'évolution de la perturbation (l'écoulement de base parallèle reste inchangé) pendant une durée qui est suffisamment longue pour obtenir le taux de croissance linéaire mais suffisamment courte pour éviter toute influence non linéaire, notamment de la part des conditions aux limites. Après ces simulations, on procède à une analyse de Fourier qui est présentée dans le paragraphe suivant pour obtenir les taux de croissance.

b) Analyse de Fourier

Nous utilisons ici une méthode inspirée de celle décrite dans Delbende *et al.* (1998) pour analyser les résultats fournis par les simulations numériques présentées précédemment. Les runs effectués font 500 pas de temps avec $N = 129$. Avec une telle durée, la perturbation initiale est convectée par l'écoulement moyen à travers le domaine en évitant de s'approcher à moins de $1/10^e$ de la sortie ce qui limite l'influence de cette condition aux limites.

L'analyse qui suit porte sur 50 prises instantanées (une tous les 10 pas de temps). Pour les résolutions supérieures ($N = 257$ ou $N = 513$), l'analyse porte également sur 50 vues mais cette fois-ci le nombre de pas de temps calculés est de 1 000 ($N = 257$) ou 2 000 ($N = 513$). Comme le pas de temps est divisé par 2 quand la résolution est multipliée par 2, toutes les simulations ont donc bien sur la même durée. L'évolution étant linéaire, on peut étudier *a priori* n'importe quelle composante. Nous avons choisi de travailler avec la vorticité.

Sur chacun des 50 enregistrements, on calcule une transformée de Fourier rapide (FFT) dans la direction longitudinale x :

$$a_k(y, t) = \sum_x A(x, y, t) \exp(-i k x 2\pi/L_x)$$

où A représente la vorticité. Pour une croissance linéaire locale, nous avons vérifié que le scénario était auto-similaire dans la direction transversale y . Nous avons donc procédé à une moyenne spatiale sur chaque $a_k(y, t)$:

$$\tilde{a}_k(t) = \frac{1}{N} \sum_y |a_k(y, t)|^2$$

D'après l'analyse linéaire, les coefficients $\tilde{a}_k(t)$ doivent être de la forme :

$$\tilde{a}_k(t) = a_0 \exp(\sigma(k) t)$$

Il reste maintenant à évaluer le taux de croissance temporel. Nous avons pour cela choisi deux instants différents t_1 et t_2 ($t_2 > t_1$) et calculé une dérivée logarithmique

$$\sigma(k) = \frac{d \ln \tilde{a}_k}{dt} \simeq \frac{\ln(\tilde{a}_k(t_2)) - \ln(\tilde{a}_k(t_1))}{t_2 - t_1}$$

Nous avons choisi de travailler pour cette étape de validation dans le cadre temporel : la simulation est bien spatiale mais c'est le taux de croissance temporel que l'on obtient par une telle analyse. En effet, obtenir le taux de croissance spatial est plus compliqué car il faut travailler sur des fronts $x/t = C^{te}$.

c) Taux de croissance temporel linéaire

On fait varier s dans l'intervalle $[0,1; 1]$. On a en effet montré dans l'étude linéaire que la transition convective/absolue se produit pour des rapports de densité dans cet intervalle. Dans l'étude non linéaire qui sera conduite dans le chapitre 4, on se place également principalement dans cet intervalle. Les taux de croissance des deux modes sont présentés sur la figure 3.14.

Pour le mode sinueux, le maximum de chaque relation de dispersion est peu affecté par le rapport de densité : les variations de $\sigma_{\max} = \max_k(\sigma(k)) = \sigma(k_{\max})$ sont de l'ordre de 30% tandis que le rapport de densité est divisé par 10.

Pour le mode variqueux, on remarque que le nombre d'onde maximal k_{\max} est peu sensible au rapport de densité alors que le taux de croissance correspondant augmente fortement lorsque s diminue. L'évolution de ce mode en fonction du rapport de densité est bien différente : pour le mode sinueux, le taux de croissance maximum diminue en effet avec s . Comme on peut le voir sur la figure 3.15, le mode sinueux n'est le plus instable que pour $s > 0,2$ tandis que les deux modes ont un taux de croissance linéaire très proche pour s de l'ordre de 0,1. Ainsi on peut s'attendre à voir croître les deux modes pour les faibles rapports de densité.

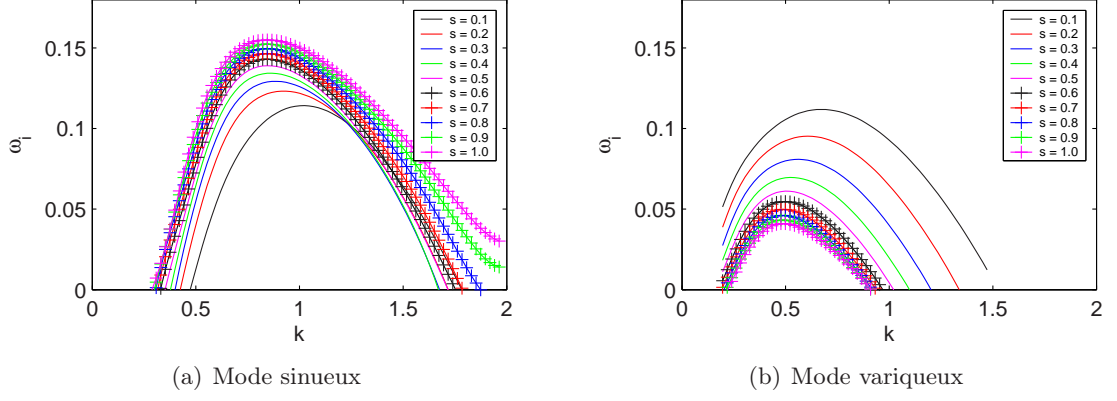


FIG. 3.14: Taux de croissance temporel ω_i des modes sinueux et variqueux obtenus par le code DNS dans l'approximation linéaire pour différentes valeurs de s (cas $n = 1$).

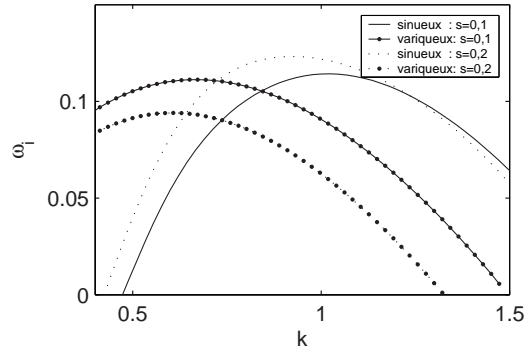


FIG. 3.15: Comparaison des maxima des taux de croissance temporels ω_i pour les modes sinueux et variqueux pour $s = 0,1$ et $s = 0,2$ (cas $n = 1$).

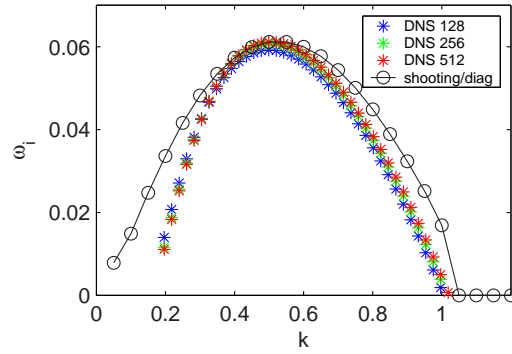


FIG. 3.16: Comparaison de la relation de dispersion du mode variqueux ($s = 0,5$) obtenue par DNS, pour différentes résolutions, avec la théorie linéaire (cas $n = 1$).

Lorsque l'on compare avec les résultats obtenus par la méthode semi-analytique (figure 3.16) on constate que l'accord est bon. Logiquement, lorsque la résolution augmente, l'accord est meilleur. Notons que la DNS résout correctement le maximum de la relation de dispersion, même pour les basses résolutions : la différence est en effet de moins de 3% avec une résolution de 129 points et est négligeable en 513 points. Cependant, il est normal que l'accord ne puisse être parfait pour l'intégralité de la relation de dispersion. D'abord, il faut souligner que les hypothèses sont légèrement différentes dans les deux cas :

- Pour la théorie linéaire, le calcul est réalisé sur un domaine infini avec une limite parfaitement nulle pour le mode calculé tandis que pour la DNS, le domaine est limité. Cette différence explique que les petits nombres d'onde (grandes longueurs d'ondes) sont mal résolus en DNS.
- La viscosité atténue principalement les grands nombres d'onde (courtes longueurs d'onde).

Cette étude linéaire, conjuguée avec les autres tests que nous avons menés, confirme que le code DNS calcule « correctement ». On a également vu que les basses résolutions ($N = 129$) permettent, pour un coût de calcul très faible, d'obtenir de bons résultats. La résolution intermédiaire ($N = 257$) permet d'affiner sensiblement la qualité des résultats tandis que la résolution la plus élevée avec laquelle nous avons travaillé ($N = 513$), est réservée à des vérifications pointues car le temps de calcul est bien plus important (environ 200 fois plus long pour $N = 513$ que pour $N = 129$ pour une même durée simulée).

Chapitre 4

Résultats obtenus par le code numérique

Dans ce chapitre, on présente les principaux résultats obtenus en exploitant le code numérique présenté et validé dans les chapitres précédents. Soulignons que c'est bien la simulation complète des équations de Navier-Stokes non linéaires qui est réalisée : le profil moyen est ici entièrement libre d'évoluer contrairement à d'autres études comme Pier & Huerre (2001) où le profil est imposé et seule la perturbation est simulée.

Afin de mieux comprendre la dynamique qui gouverne l'évolution d'un jet à densité variable, nous avons procédé à une étude systématique de l'influence du rapport de densité sur un écoulement de jet qui s'appuie principalement sur deux profils de la famille présentée dans le système d'équations (3.3). D'après le critère de stabilité marginale absolue de Dee & Langer (1983), on s'attend à ce que la dynamique du jet pour les rapports de densité inférieurs à s_{ca} soit dictée par le mode absolu et que la fréquence soit celle de la transition. Ce scénario a été annoncé par des études expérimentales (notamment Yu & Monkewitz (1993) pour le jet plan). Cependant aucune conclusion formelle n'a encore réellement pu être tirée. Un de nos objectifs est donc d'éclairer ce point. Dans la suite de ce chapitre, on s'intéresse à certains points spécifiques comme l'appariement des vortex co-rotatifs, le nombre de Reynolds et les effets baroclines.

4.1 Influence du rapport de densité s sur la dynamique non linéaire

4.1.1 Le problème

Selon la valeur du rapport de densité, on peut observer, numériquement et expérimentalement, des comportements dynamiques très distincts. Pour les grandes valeurs de s , c'est principalement le mode sinueux qui est observé. Ceci s'explique bien par le fait que, selon la théorie linéaire, c'est ce mode qui est le plus instable. Pour les faibles valeurs en revanche, c'est surtout le mode variqueux qui est observé. Selon Yu & Monkewitz (1993), la différence de comportement se produit pour des s inférieurs à une valeur critique s_{ca} qui caractérise la transition convective/absolue du mode variqueux. Dans les gammes de valeurs de s étudiées, le mode sinueux ne présente en effet pas de transition convective/absolue. Cependant, pour des rapports de densité voisins de s_{ca} , le taux de croissance spatial linéaire du mode variqueux est déjà du même ordre voire supérieur à celui du mode sinueux et ce, *avant* la transition. En outre, la valeur critique s_{ca} avancée dans Yu & Monkewitz

(1990) suite à une étude linéaire d'instabilité pour des profils *top-hat* et presque *top-hat* est contestée par le travail expérimental de Raynal *et al.* (1996).

4.1.2 Le jet Bickley

Pour cette configuration, le rapport de densité critique s_{ca} est de l'ordre de 0,14. Avant la transition, pour $s > s_{ca}$, le mode sinueux est le mode prédominant et il croît conformément aux prédictions linéaires (figure 4.1). Aucune saturation ou effet non linéaire n'est remarquable avant que le jet ne finisse par toucher les bords du domaine de calcul, rendant la suite de la simulation impossible.

Lorsque l'on diminue progressivement s , le mode sinueux perd de son intensité, permettant ainsi des simulations beaucoup plus longues sans que le jet touche les limites du domaine de calcul. Le mode variqueux n'est cependant pas visible sur les cartes de vorticité. Ceci est, une fois encore, bien cohérent avec les prédictions de la théorie linéaire qui prévoit une diminution progressive de l'écart qui existe entre le taux de croissance de chacun de ces modes quand s diminue.

Au voisinage de la transition ($s \leq 0,2$), le jet a un comportement qui se rapproche de plus en plus de celui d'un oscillateur. La perturbation initiale, qui provient du fait que l'écoulement de départ est une solution des équations d'Euler, mais pas des équations de Navier-Stokes, produit en effet de plus en plus d'oscillations transitoires par rapport à la situation décrite sur la figure 3.9, page 57. La fréquence est la même dans tout l'écoulement : on a alors un **mode global**. Néanmoins, ce sont toujours des oscillations transitoires qui finissent par s'atténuer tant que la transition ne s'est pas produite : le mode global est **amorti**. Pour $s = 0,2$, la pulsation unique qui régit l'évolution du jet est de $\omega = 0,22$, ce qui, là encore, recoupe parfaitement les prédictions de la théorie linéaire pour ce rapport de densité (figure 3.5, page 54) ; les oscillations sur la partie « gauche » s'annulent beaucoup plus vite que celles sur la partie « droite » comme le montre la figure 4.2. En pratique, la moitié droite du jet montre des oscillations qui se maintiennent assez longtemps. On a un comportement qui est proche de celui d'un oscillateur auto-entretenu. En effet, à partir d'une perturbation faible qui excite *a priori* plusieurs fréquences, la réponse observée est constituée d'une fréquence unique. Par ailleurs, cette fréquence est très proche de celle de la transition prédite par la théorie linéaire (tableau 3.1, page 56) qui prévoit une pulsation $\omega(s_{ca}) = 0,21$.

Après la transition ($s \leq s_{ca} = 0,145$), la dynamique est totalement différente ; elle est gouvernée par le mode variqueux (figure 4.3). La perturbation initiale excite plusieurs modes mais le jet « répond » avec une seule fréquence et les oscillations sont auto-entret  nues. Les termes non linéaires compensent alors les termes de croissance linéaires pour parvenir à un équilibre. Sur la figure 4.4, on présente le signal temporel de la vitesse longitudinale sur l'axe à plusieurs stations de l'écoulement ainsi que la transformée de Fourier de ce même signal en regard pour un rapport de densité $s = 0,13$. La pulsation mesurée est de $\omega = 0,20$ ce qui correspond bien à la fréquence de la transition prédite par la théorie linéaire ($\omega_{ca}^{lin} = 0,21$, cf tableau 3.1, page 56). On peut noter que l'amplitude des oscillations n'est pas tout à fait constante : elle diminue très légèrement jusqu'à $t \simeq 600$ puis augmente légèrement. **Le mode est bien global et non amorti** : la simulation peut continuer comme cela longtemps (résultat non présenté) traduisant une certaine stabilité de cet oscillateur.

Ainsi le scénario selon lequel la transition convective/absolue dicte sa fréquence pour les rapports de densité inférieurs à la valeur critique semble validé dans ce cas : le rapport de densité s_{ca} dans la simulation non linéaire a bien la même valeur que celui prédit par

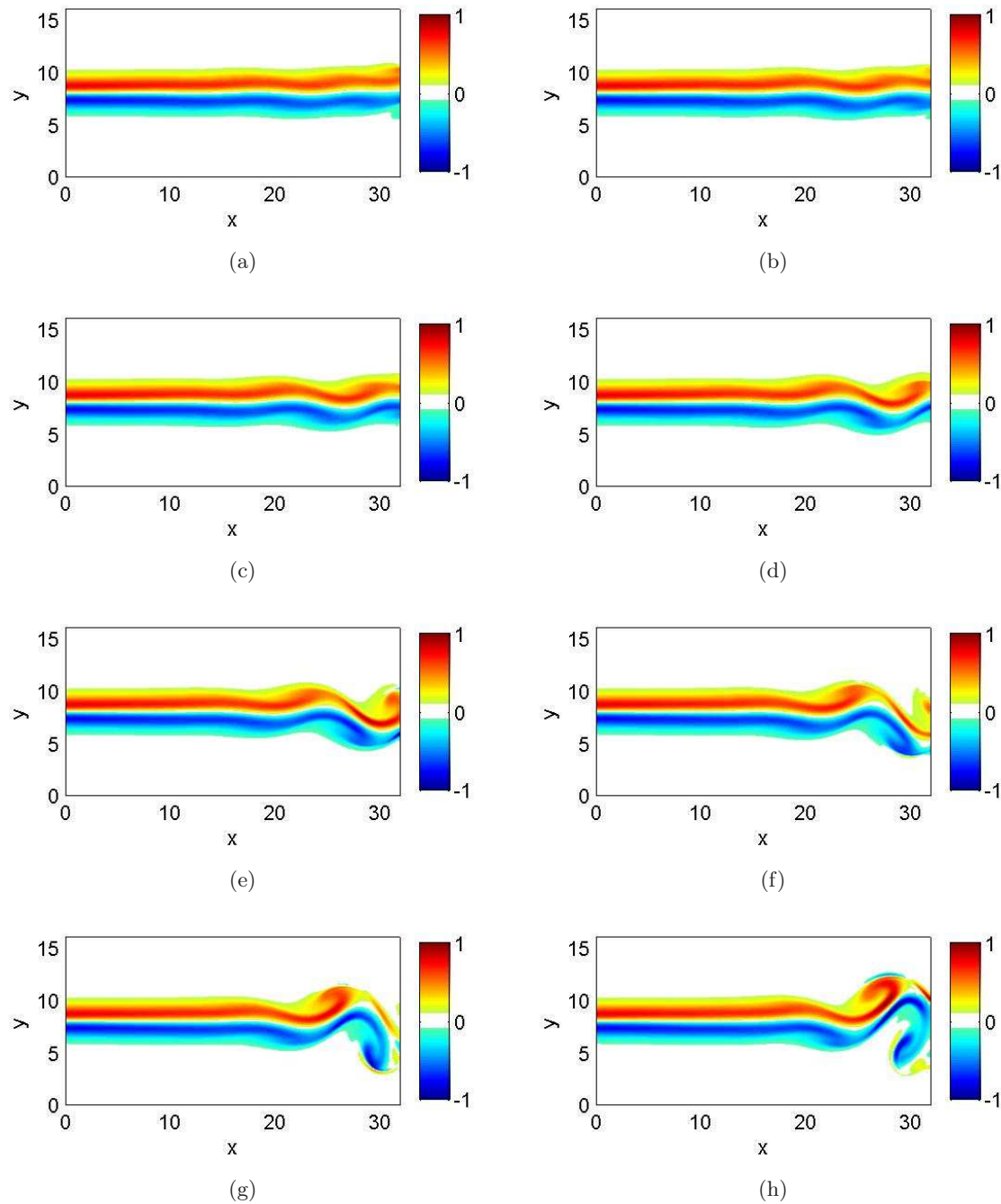


FIG. 4.1: Champ de vorticité avant la transition convective/absolue pour un profil initial Bickley ($n = 1$; $s = 0,3$; $N = 256$). Séquence de vues instantanées séparées par 200 pas de temps.

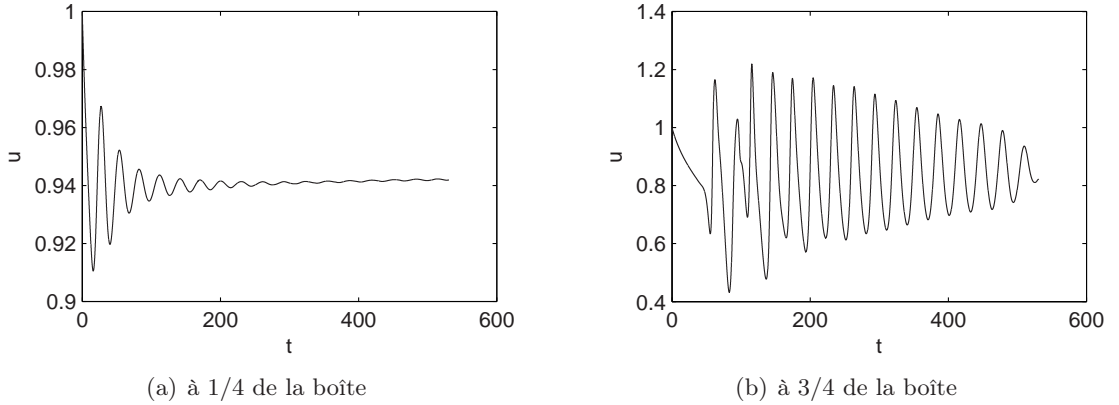


FIG. 4.2: Vitesse longitudinale mesurée sur l'axe sur la gauche et la droite du domaine de calcul pour un profil initial Bickley ($n = 1$; $s = 0,2$; $N = 257$). Dans cette configuration, la fréquence est la même pour l'ensemble du jet ($\omega = 0,22$) : on a donc un mode global amorti.

l'analyse linéaire : $s_{ca} = 0,14$. En outre, la fréquence pour $s = 0,1$ (rapport environ 30% inférieur au rapport critique) est $\omega = 0,21$ ce qui est bien identique à la fréquence de la transition telle qu'elle est prédite par la théorie linéaire (voir tableau 4.1). Cependant, le cas $n = 1$ ne permet pas, avec le code dans son état actuel, de tirer des conclusions nettes. En effet, en raison de l'importance des battements du jet engendrés par le mode sinueux, il est impossible d'avoir des simulations sur de longues durées pour des rapports de densité élevés. En outre, on se heurte à un autre problème, numérique celui-là, lorsque l'on veut diminuer le rapport de densité en dessous de 0,1. En effet, pour $s < 0,08$, le code diverge vraisemblablement à cause d'une trop grande raideur de profil. Pour aller plus loin dans cette direction, il faudrait sans doute augmenter la résolution. Un autre problème pour conclure quant à l'importance de la transition pour dicter la dynamique pour les rapports $s \leq s_{ca}$, tient au fait que la transition du mode variqueux se fait par le maximum du taux de croissance linéaire. On ne peut donc pas être totalement sûr que seule la transition gouverne l'évolution du jet pour les rapports de densité $s \leq s_{ca}$: le mode global observé pourrait, par exemple, être une résonance entre le mode le plus amplifié et les conditions aux limites non périodiques que nous avons utilisées. Pour préciser donc tous ces points, nous nous intéressons aux résultats pour $n = 4$.

4.1.3 Le jet presque *top-hat*

Ce profil est intéressant car la transition et le maximum du taux de croissance linéaire sont bien séparés en fréquence comme on peut le constater sur la figure 3.7, page 55 : le maximum du taux de croissance a une pulsation de l'ordre de $\omega = 1,2$ tandis que la transition se produit à $\omega = 0,77$. En outre, ce profil est très réaliste car de nombreux profils expérimentaux sont proches de ce type de profil (presque carré). Comme il est plus raide, il est impératif de faire des simulations avec $N = 257$ au minimum : la résolution $N = 129$ est trop imprécise pour fournir des résultats acceptables. En effet, pour $N = 129$, il y a moins de 3 points dans la couche de vorticité. Avec 257 points, la résolution est de 5 points dans la couche de vorticité ce qui est peu mais nous avons confirmé les résultats à mieux que 5% près en prenant $N = 513$ (voir tableau 4.1).

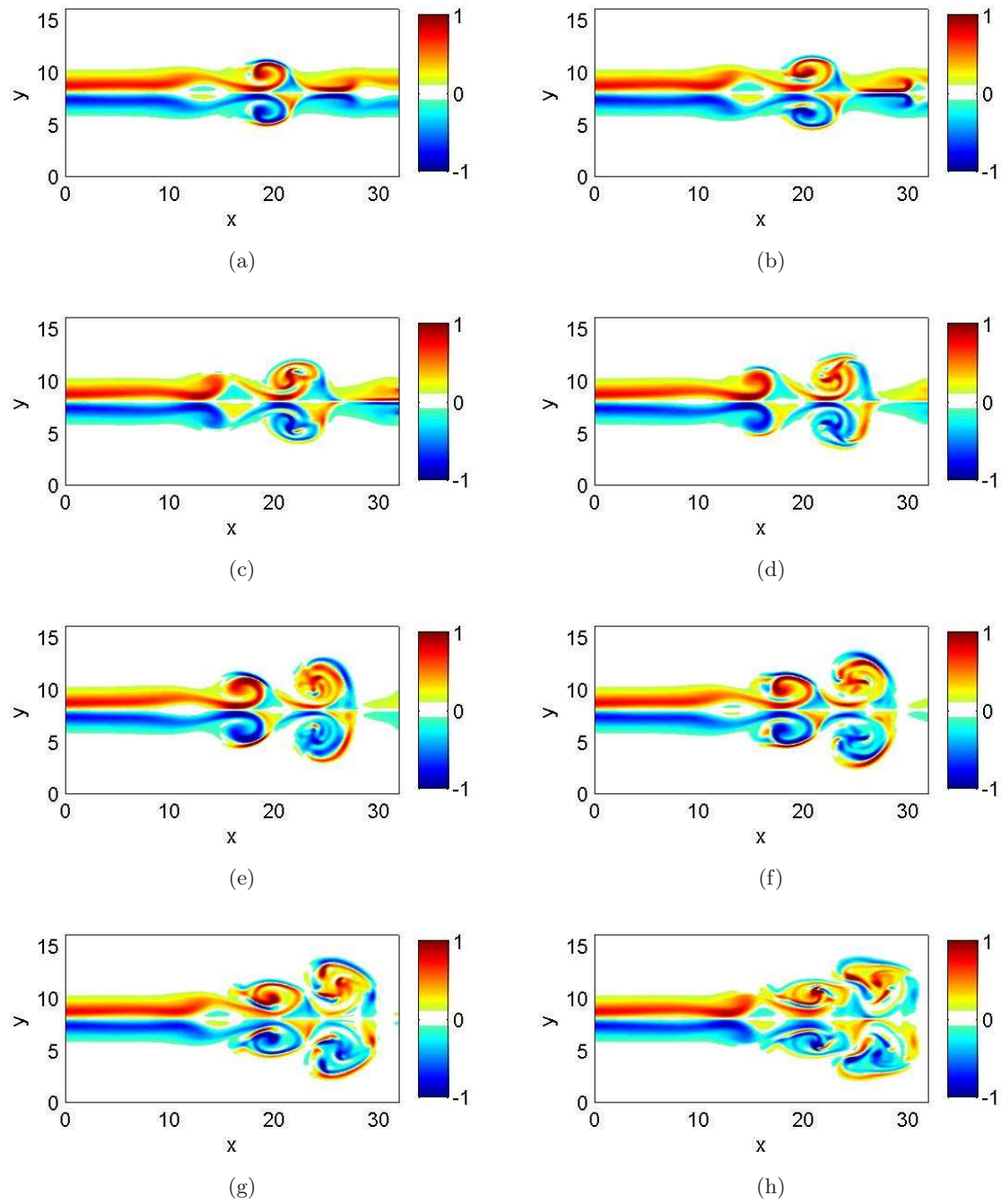


FIG. 4.3: Champ de vorticité après la transition convective/absolue pour un profil initial Bickley ($s = 0,1$; $N = 257$). Séquence de vues instantanées séparées par 200 pas de temps.

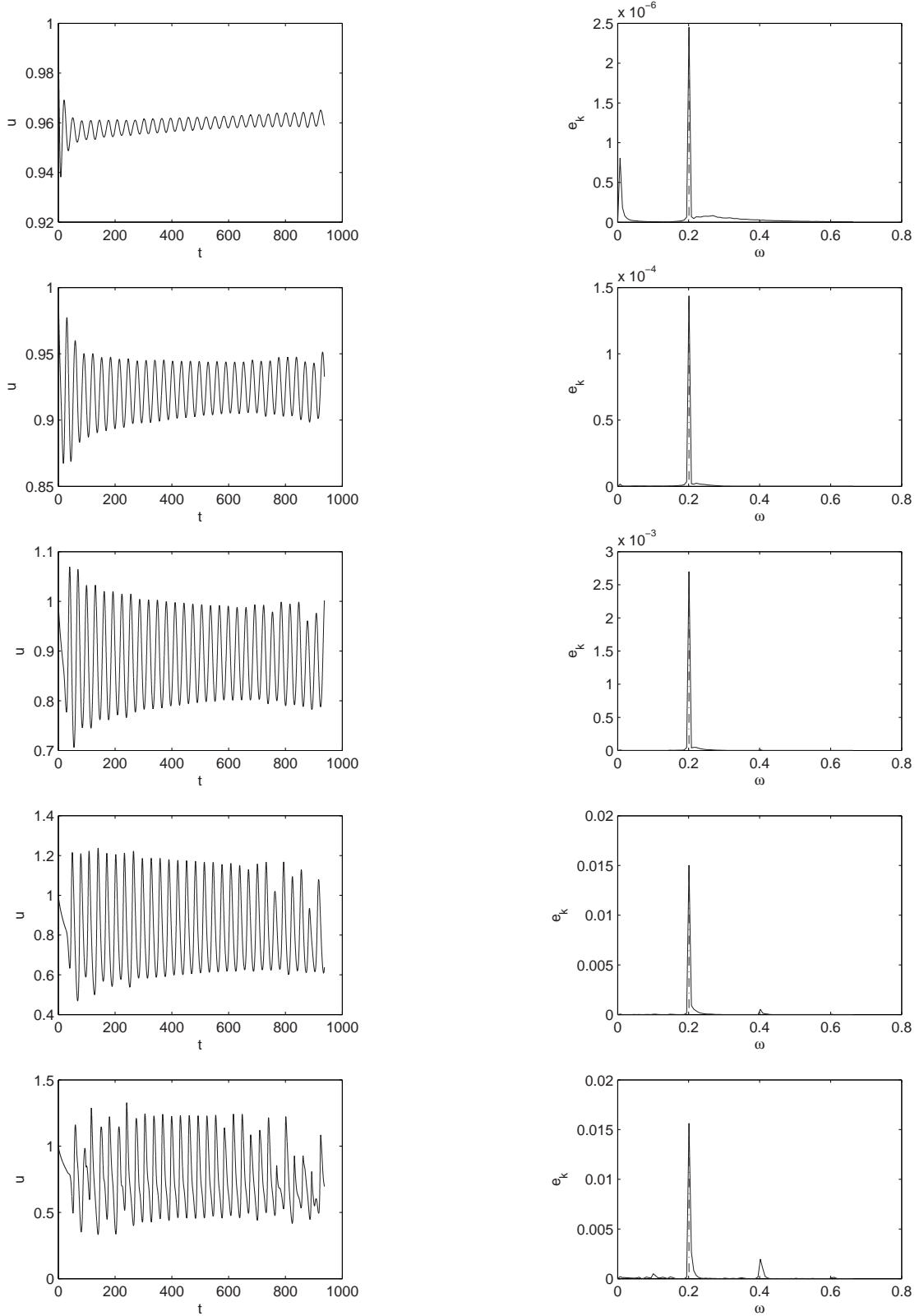


FIG. 4.4: Mode global absolu ou auto-entretenu. De haut en bas, à gauche la composante de vitesse $u(t)$, à droite le spectre de Fourier $u(\omega)$ associé aux stations $1/8$, $1/4$, $3/8$, $1/2$ et $5/8$ du domaine de calcul pour un profil initial de type Bickley ($n = 1$; $s = 0,13$; $N = 257$; 30 000 pas de temps pris en compte). On a bien le comportement d'un oscillateur auto-entretenu à la pulsation $\omega = 0,20$.

De manière assez surprenante, on n'observe pas le mode sinueux mais un **mode variqueux global atténué** pour des rapports de densité supérieurs à 1 (figure 4.5) alors que le rapport critique de transition convective/absolue prédit par la théorie linéaire est de seulement $s_{ca}^{lin} \simeq 0,93$. Dans le cas $s = 1$, on mesure une pulsation de 0,75 ce qui est très proche de la pulsation du mode spatial variqueux situé au *pinching* qui indique la stabilité marginale ($\omega_{pinching} = 0,77$). En outre, la fréquence globale qui apparaît est différente de celle du maximum du taux de croissance comme on pourrait s'y attendre pour de tels s . On peut exclure un effet de résonance dû à la longueur du domaine de calcul (Buell & Huerre (1988)) puisque la pulsation mesurée est très différente de la pulsation de résonance qui serait donnée ici par $\pi U_0/L_x \simeq 0,1$.

Pour le jet $n = 4$, il ne semble donc pas y avoir, au moins pour la gamme de rapports de densité étudiés ($s \in [0,1; 1,2]$), de zone où le mode linéairement le plus instable (le mode sinueux) domine réellement la dynamique de l'écoulement non linéaire. Il faut cependant noter que l'écart, en terme de taux de croissance linéaire entre les maximums du mode variqueux et du mode sinueux est suffisamment faible pour qu'il ne soit pas possible d'exclure, à partir de la seule théorie linéaire, la coexistence des deux modes dans l'écoulement.

En se plaçant en dessous ($0,75 \leq s \leq 0,9$) du rapport de densité critique prévu par la théorie linéaire, on n'observe **aucun mode absolu** : les oscillations observées sont toujours atténuées. Même si l'atténuation des oscillations est de plus en plus faible, on n'est pas dans la configuration d'un oscillateur non linéaire auto-entretenu mais toujours dans la configuration d'un **mode global atténué** qui traduit que le jet est **presque absolument instable** (voir les figures 4.6 et 4.7).

En revanche, pour $s \leq 0,7$, on a bien un mode global absolu, c'est-à-dire un oscillateur auto-entretenu (figures 4.8 et 4.9). La pulsation pour $s = 0,7$ de ce jet auto-entretenu est $\omega(s = 0,7) = 0,67$ et, pour $s = 0,5$, elle est de $\omega(s = 0,5) = 0,64$. On note donc une autre différence majeure avec la prédiction de la théorie linéaire : **la fréquence du mode global n'est pas celle déterminée par le critère de stabilité marginale** ($\omega = 0,77$). L'ensemble des résultats non linéaire obtenu est présenté dans le tableau 4.1.

4.1.4 Hypothèse pour expliquer le comportement « anormal » du jet $n = 4$ pour les grands s

On a vu précédemment que, même loin au-dessus de la transition, le jet $n = 4$ a tendance à manifester un comportement de mode global amorti, c'est-à-dire que le mode transitoire qui résulte de la perturbation initiale peut être observé sur une longue durée. Ceci traduit le fait que le jet est presque absolument instable alors que l'on n'observe pas du tout le même comportement dans le cas $n = 1$ pour lequel le mode transitoire est faiblement excité et très rapidement atténué.

Une explication possible pour ce comportement inattendu peut venir d'une analyse de la relation de dispersion analytique pour un profil réellement *top-hat* ($n = \infty$). Cette relation s'écrit, pour le mode variqueux (Huerre & Monkewitz (1990); Yu & Monkewitz (1993)) :

$$s \left(\frac{2 - \omega/k}{\omega/k} \right)^2 = - \frac{e^k - e^{-k}}{e^k + e^{-k}} = - \text{th } k$$

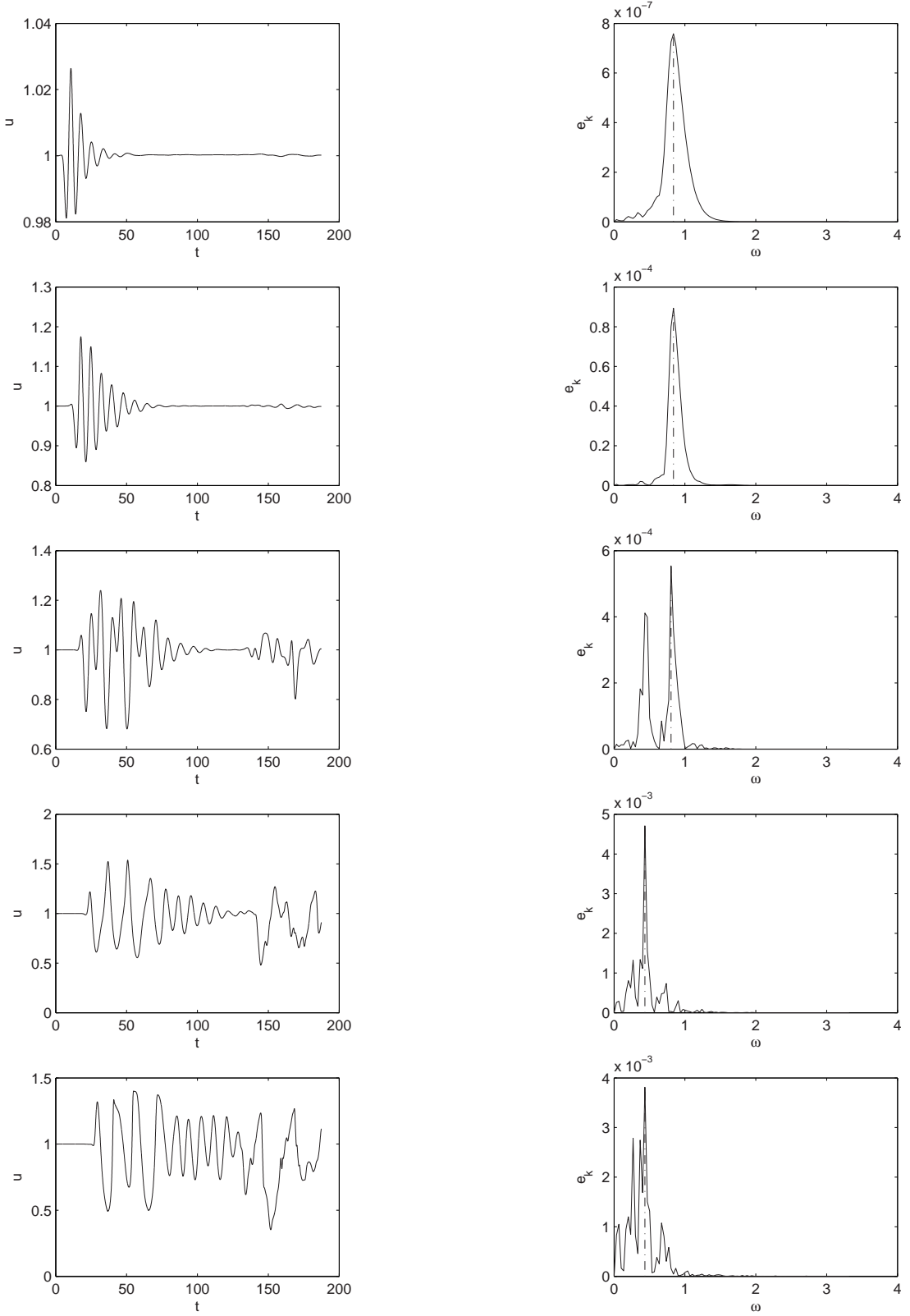


FIG. 4.5: Mode global amorti. De haut en bas, à gauche la composante de vitesse $u(t)$, à droite le spectre de Fourier $u(\omega)$ associé aux stations $1/8$, $1/4$, $3/8$, $1/2$ et $5/8$ du domaine de calcul pour un profil initial presque top-hat ($n = 4$; $s = 1,2$; $N = 257$; 6000 pas de temps pris en compte). La pulsation globale du jet est $\omega = 0,84$; on note la présence de pairing en aval (présence de la sous-harmonique $\omega = 0,43$).

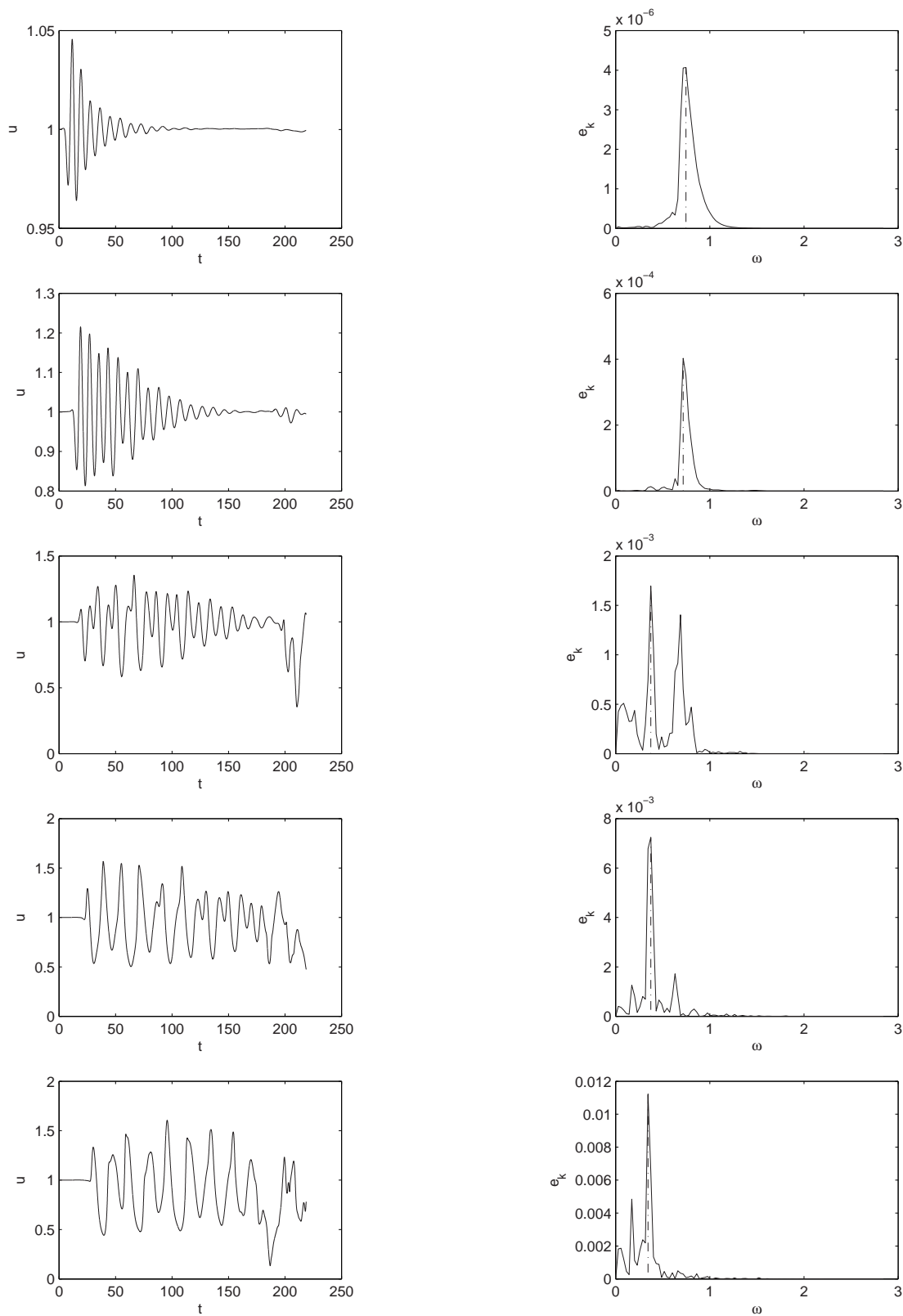


FIG. 4.6: Mode global amorti. De haut en bas, à gauche la composante de vitesse $u(t)$, à droite le spectre de Fourier $u(\omega)$ associé aux stations 1/8, 1/4, 3/8, 1/2 et 5/8 du domaine de calcul pour un profil initial presque top-hat ($n = 4$; $s = 0,9$; $N = 257$; 7000 pas de temps pris en compte). La pulsation globale du jet est $\omega = 0,75$; on note la présence de pairing en aval (présence de la sous-harmonique $\omega = 0,38$). On remarque que l'on n'a pas un mode global auto-entretenu.

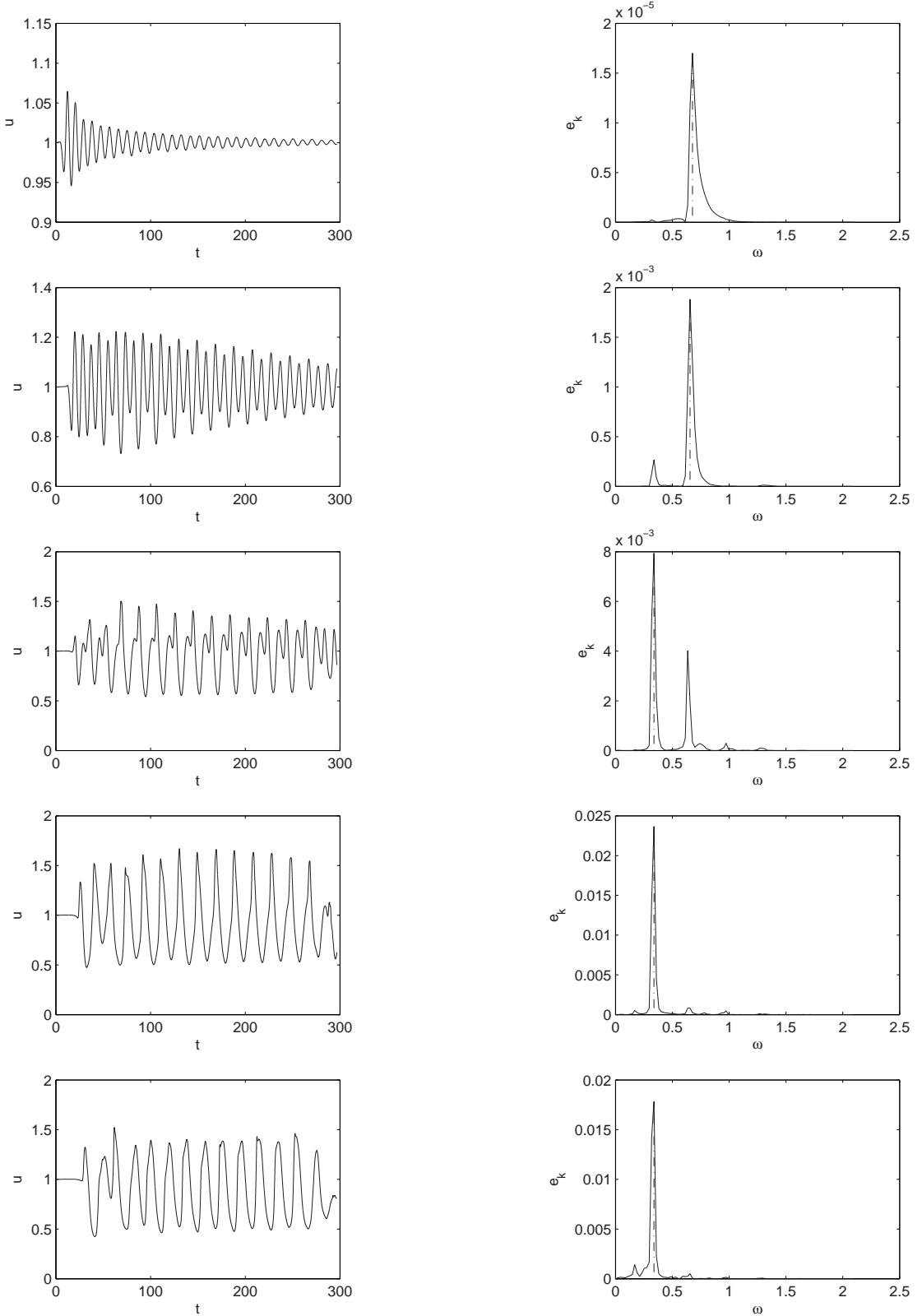


FIG. 4.7: Mode global amorti. De haut en bas, à gauche la composante de vitesse $u(t)$, à droite le spectre de Fourier $u(\omega)$ associé aux stations $1/8$, $1/4$, $3/8$, $1/2$ et $5/8$ du domaine de calcul pour un profil initial presque top-hat ($n = 4$; $s = 0,75$; $N = 257$; 9 500 pas de temps pris en compte). La pulsation globale du jet est $\omega = 0,67$; on note la présence de pairing en aval (présence de la sous-harmonique $\omega = 0,34$).

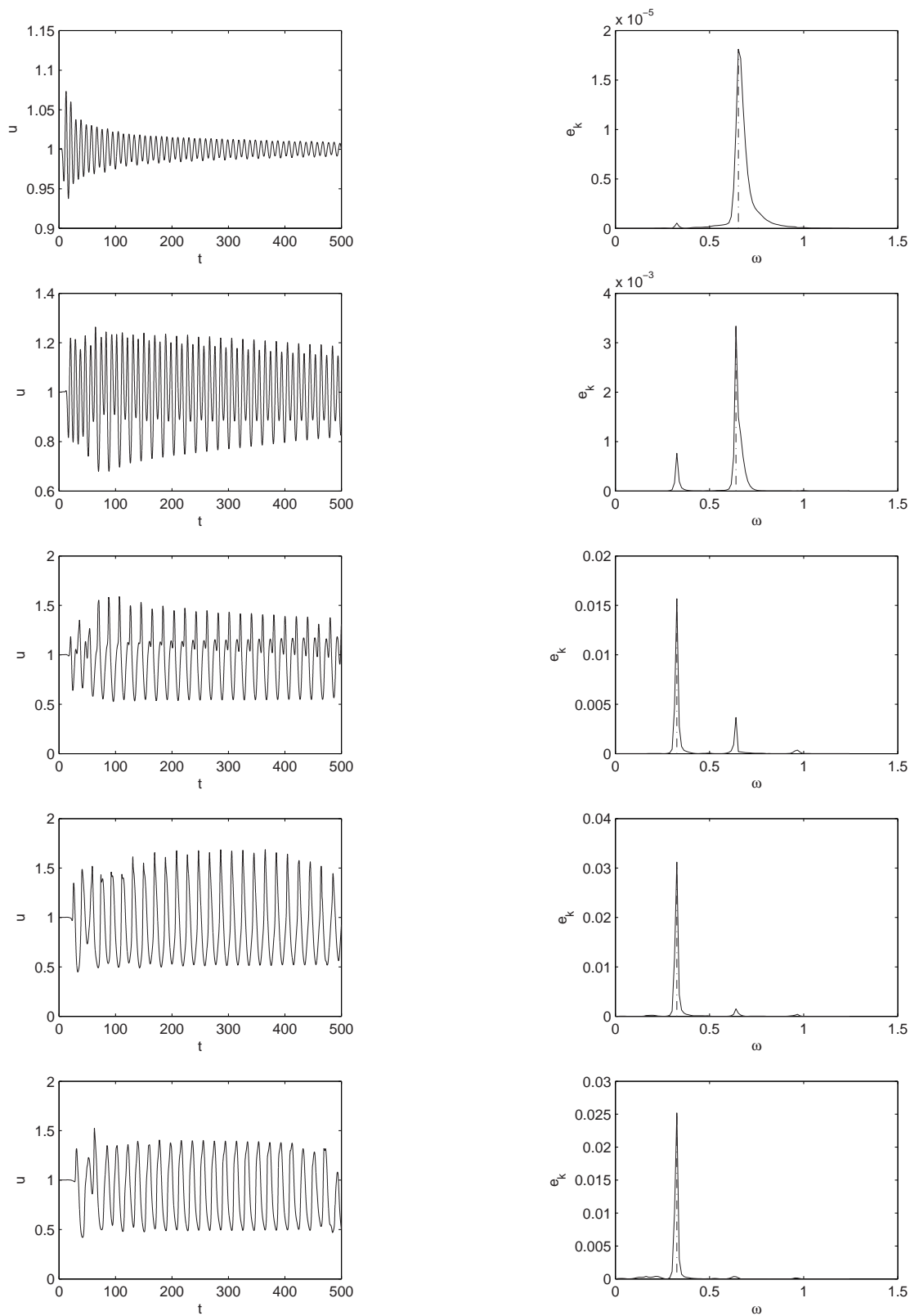


FIG. 4.8: Mode global absolu. De haut en bas, à gauche la composante de vitesse $u(t)$, à droite le spectre de Fourier $u(\omega)$ associé aux stations $1/8$, $1/4$, $3/8$, $1/2$ et $5/8$ du domaine de calcul pour un profil initial presque top-hat ($n = 4$; $s = 0,7$; $N = 257$; 16 000 pas de temps pris en compte). On a bien le comportement d'un oscillateur à la pulsation $\omega = 0,67$ et du pairing identifiable par la présence d'une sous-harmonique sur la deuxième partie du jet ($\omega = 0,34$).

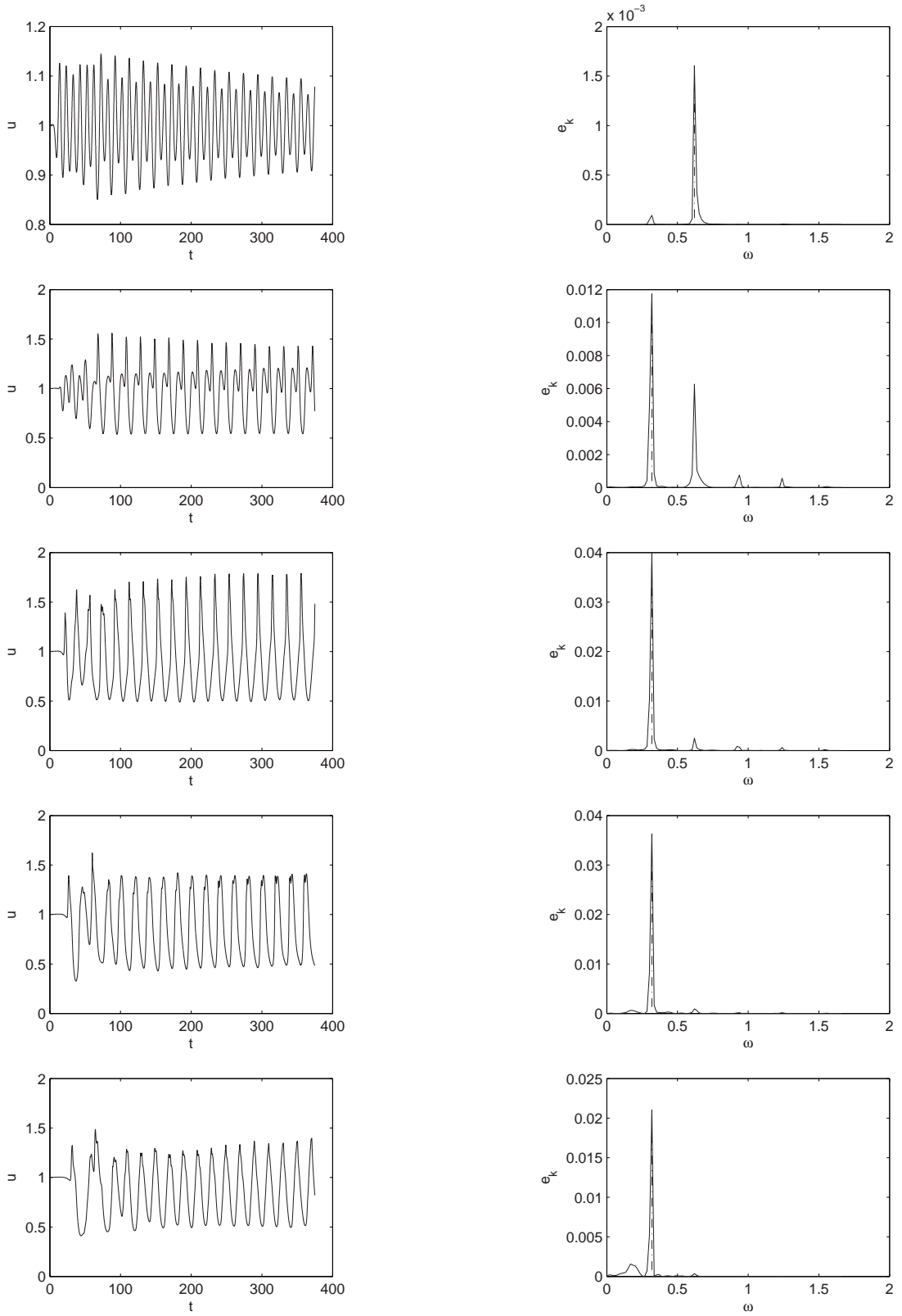


FIG. 4.9: Mode global absolu. De haut en bas, à gauche la composante de vitesse $u(t)$, à droite le spectre de Fourier $u(\omega)$ associé aux stations $1/8$, $1/4$, $3/8$, $1/2$ et $5/8$ du domaine de calcul pour un profil initial presque top-hat ($n = 4$; $s = 0,5$; $N = 257$; 12 000 pas de temps pris en compte). On a bien le comportement d'un oscillateur à la pulsation $\omega = 0,64$ et du pairing identifiable par la présence d'une sous-harmonique sur la deuxième partie du jet ($\omega = 0,34$).

n	s	Mode observé	$\frac{s - s_{ca}}{s_{ca}}$	ω	$\frac{\omega - \omega_{0,r}(k_0; s_{ca})}{\omega_{0,r}(k_0; s_{ca})}$	L_x	N	$\frac{\theta_\omega}{L_y} N$	T
1	1	sinueux	—	0,35	—	32; 64	129; 257; 513	10; 20; 40	480
1	0,3	sinueux	—	0,25	—	32; 64	129; 257; 513	10; 20; 40	480
1	0,2	variqueux	0,38	0,2	-0,05	32; 64	129; 257	10; 20	650
1	0,13	variqueux	-0,1	0,2	-0,05	32; 64	129; 257	10; 20	650
1	0,1	variqueux	-0,31	0,21	0	32; 64	129; 257	10; 20	650
4	1,5	variqueux	0,6	0,9	0,17	32	257; 513	5; 10	200
4	1,2	variqueux	0,27	0,85	0,10	32	257; 513	5; 10	200
4	1	variqueux	0,07	0,77	0	32	257; 513	5; 10	200
4	0,8	variqueux	-0,14	0,70	-0,09	32	257; 513	5; 10	300
4	0,7	variqueux	-0,25	0,65	-0,16	32	257; 513	5; 10	500
4	0,6	variqueux	-0,36	0,64	-0,17	32	257; 513	5; 10	500
4	0,5	variqueux	-0,47	0,63	-0,18	32	257; 513	5; 10	500
4	0,3	variqueux	-0,68	0,60	-0,22	32	257; 513	5; 10	500

TAB. 4.1: Résumé des principaux résultats non linéaires pour les modes sinueux et variqueux obtenus pour $Re = 1\,000$ et un rapport d'aspect $r = L_x/L_y$ de 2. Notons que le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement vaut 300 dans le cas du jet Bickley et 80 dans le cas du jet presque top-hat.

Pour alléger les notations, on pose $a(k) = -\text{th}(k)$. On peut alors extraire ω de la relation précédente :

$$\omega = \frac{2k}{1 + \left(\frac{a}{s}\right)^{1/2}}$$

Comme ce sont les points selles de cette relation de dispersion qui nous intéressent principalement, on évalue la dérivée première de ω :

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{2 \left(1 + \left(\frac{a(k)}{s}\right)^{1/2}\right)^2 - \frac{k a'(k)}{(s a(k))^{1/2}}}{\left(1 + \left(\frac{a(k)}{s}\right)^{1/2}\right)^2}, \quad (4.1)$$

et on cherche les racines de cette dérivée. Si $1 + \left(\frac{a}{s}\right)^{1/2} \neq 0$, les racines de (4.1) sont solutions de

$$2 \left(1 + \left(\frac{a(k)}{s}\right)^{1/2}\right)^2 - \frac{k a'(k)}{(s a(k))^{1/2}} = 0$$

On peut alors réécrire cette équation sous la forme :

$$2 (s a(k))^{1/2} + 2 a(k) - k a'(k) = 0$$

ou, si l'on remplace $a(k)$ par son expression :

$$2 (s \text{th } k)^{1/2} + 2 \text{th } k - k(\text{th}^2 k - 1) = 0. \quad (4.2)$$

On résout alors (4.2) numériquement pour n'importe quelle valeur du rapport de densité s . Cette équation présente la symétrie d'un problème de Rayleigh : les solutions sont donc complexes conjuguées. Dans le cas de la densité uniforme, $s = 1$, on trouve deux points selles qui correspondent à $(k_r \simeq 0,4; k_i \simeq 1,2)$ et son complexe conjugué.

Ledizès *et al.* (1995) ont montré que les solutions du problème de Rayleigh sont la limite asymptotique des solutions d'un problème d'Orr-Sommerfeld sous certaines conditions. Ici, les conditions sont remplies puisque la vitesse de phase donnée par $v_\phi = \text{Re}(\omega_0)/\text{Re}(k_0)$ n'est pas dans la gamme des valeurs¹ du profil U_0 c'est-à-dire $v_\phi > \max_y(U_0(y))$ comme on peut le voir sur la figure 4.10. Les deux points selles sont donc à retenir et ainsi le jet *top-hat* est toujours absolument instable.

Ainsi, pour le jet *top-hat* et, par extension, pour le jet presque *top-hat*, ce ne serait pas la transition convective/absolue qui imposerait sa dynamique mais une sélection non linéaire de fréquence. Cela pourrait expliquer que le cas presque *top-hat* présente des modes globaux pour tous les rapports de densité étudiés. Le fait que l'exposant n soit fini (mais suffisamment grand pour avoir un profil proche de la fonction carrée) peut expliquer que, pour les rapports s les plus élevés, on a des modes amortis.

On peut également se demander ce que donne cette analyse dans le cas du jet Bickley. Dans ce cas, les résultats sont différents. En effet, $\text{Re}(\omega_0)/\text{Re}(k_0)$ est alors dans la gamme

¹La vitesse de phase déterminée à partir des points selles ainsi déterminés vaut approximativement 2 contre un maximum pour le profil de vitesse de 1.

de valeur du profil U_0 . L'extrapolation qui permet d'affirmer dans le cas précédent que la solution du problème de Rayleigh est la limite asymptotique du problème d'Orr-Sommerfeld ne s'applique pas ici.

4.1.5 Proposition de « scénario »

Comme on l'a vu dans le cas du jet presque *top-hat*, le scénario de Dee & Langer (1983) pour traduire l'influence du rapport de densité critique s_{ca}^{lin} n'est pas applicable dans tous les cas *tel quel*. Nous proposons une synthèse de ce qui pourrait être un scénario plus général.

Pour les rapports de densité « élevés », la dynamique du jet non linéaire est dictée par une sélection de mode linéaire c'est-à-dire que le mode le plus instable linéairement, le mode sinueux, se développe et impose sa fréquence et son taux de croissance. Progressivement, le mode variqueux est de plus en plus instable tandis que le mode sinueux est de moins en moins instable : l'écart des deux taux d'instabilité se réduit. Quand les deux modes ont des taux de croissance proches, il peut y avoir mélange de modes dans le jet. Pour les rapports de densité plus faibles, on observe une zone de valeurs de s pour laquelle le jet présente un mode global amorti de fréquence déterminée. Enfin, il existe un rapport de densité critique s_{ca}^{NL} , non linéaire et différent *a priori* de s_{ca}^{lin} en dessous duquel le jet devient absolument instable. Le mode variqueux régit alors la dynamique du jet et la fréquence observée est déterminée par un mécanisme de sélection de fréquence non linéaire qui dépend alors de s : elle n'est donc pas toujours imposée par la fréquence de la transition convective/absolue.

Sur la figure 4.11 sont rassemblés les résultats pour le cas $n = 4$: on note que, dans ce cas, la fréquence de transition semble évoluer par paliers successifs. La transition linéaire convective/absolue est repérée par un losange et est située dans la zone où le jet présente un mode global amorti (convectif). La transition qui semble pertinente dans cette étude non linéaire, c'est une transition du mode variqueux lorsque ce dernier passe d'un état global convectif (donc amorti) à un état global absolu. Pour le cas $n = 4$, on évalue le rapport de densité critique s_{ca}^{NL} correspondant entre 0,70 et 0,75. Remarquons que cette valeur correspond bien à la valeur annoncée par Raynal *et al.* (1996).

Il est important de souligner que les caractéristiques du scénario présenté ici dépendent fortement du profil considéré. En effet, dans le cas du jet Bickley ($n = 1$), on a le même « déroulement » mais la transition non linéaire se produit pour un rapport de densité s_{ca}^{NL} sinon identique, du moins très proche de la valeur déterminée par la théorie linéaire s_{ca}^{lin} .

4.2 Association de vortex : *pairing*

Les termes non linéaires peuvent entraîner des couplages entre les vortex puisque la taille du domaine de calcul n'a pas été choisie pour limiter ces effets de couplage. Ainsi on peut avoir un mécanisme d'appariement de vortex, appelé *pairing* en anglais.

Ce phénomène est bien connu expérimentalement et il a été observé par exemple par Bernal (1988); Yu & Monkewitz (1993). Nous présentons ici les résultats obtenus numériquement sur ce point et dans le paragraphe 5.2.7, page 100, une mise en évidence expérimentale dans l'air.

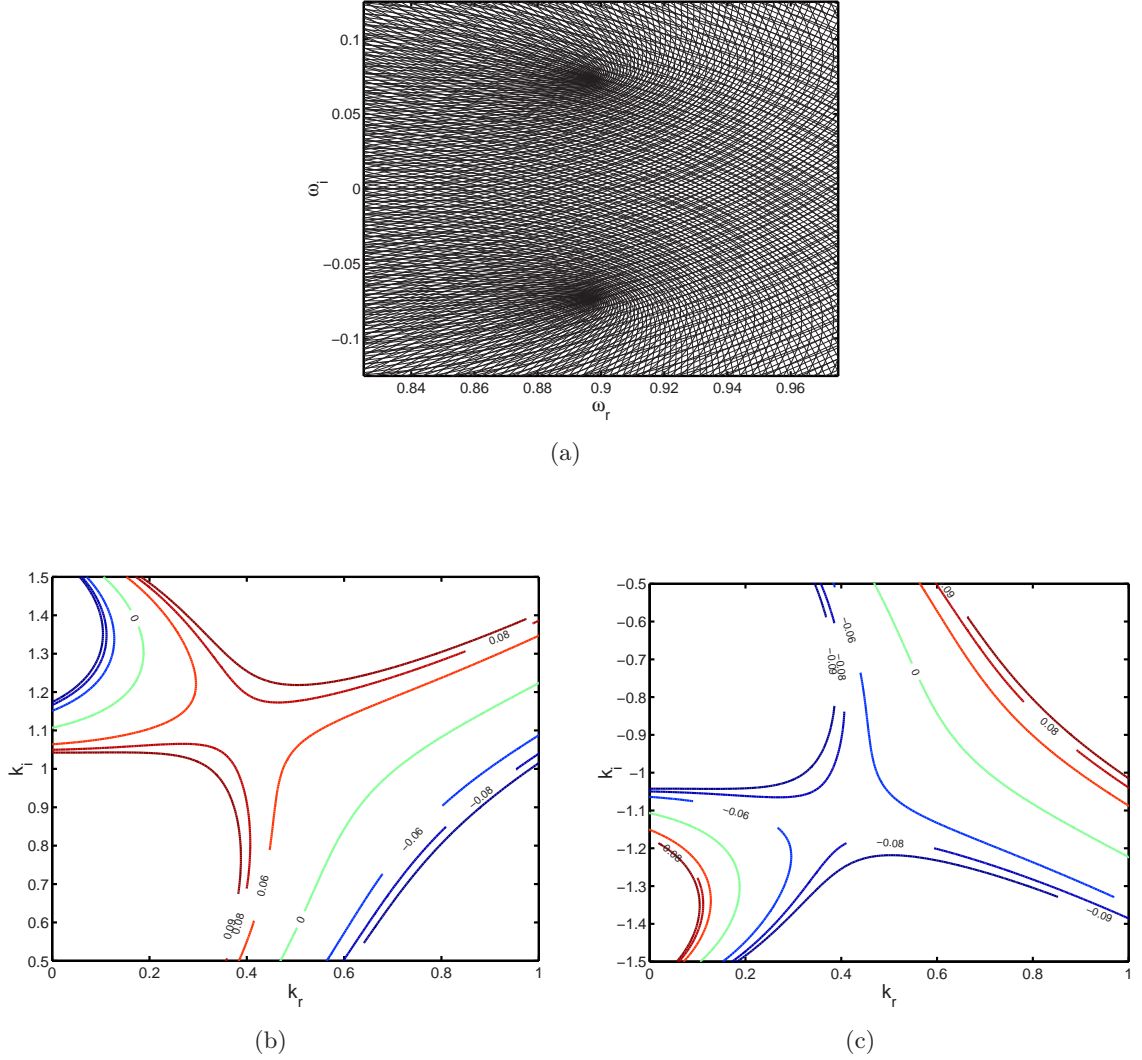


FIG. 4.10: Deux points selles pour le mode variqueux dans le cas du jet top-hat ($n = \infty$). (a) Lorsque l'on trace la relation de dispersion du mode variqueux, on voit apparaître deux points de « convergence » des lignes de niveaux. En (b) et (c), on présente un zoom sur ces deux points selles. L'existence de ces deux points selles pourrait expliquer le fait que la transition convective/absolue du mode variqueux, prédite par la théorie linéaire, n'a pas d'influence dans l'étude non linéaire et le fait que, même pour des rapports de densité grands par rapports à s_{ca}^{lin} , on a un mode global.

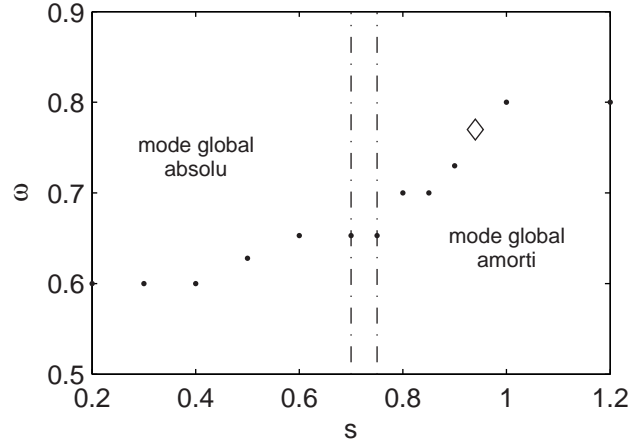


FIG. 4.11: Variation de la fréquence angulaire observée ω observée pour le mode variqueux dans le cas d'un jet presque top-hat ($n = 4$). Les différentes zones où l'on observe un mode global absolu ou convectif (mode global amorti) sont matérialisées. La transition linéaire convective absolue repérée par le rapport de densité critique s_{ca}^{lin} est représentée par un losange. On ne remarque aucun changement dans la dynamique du jet pour ce rapport de densité. Le rapport de densité critique non linéaire qui traduit une transition mode global convectif/mode global absolu est de $s_{ca}^{NL} \simeq 0,75$.

4.2.1 Mécanisme

L'appariement est un mécanisme non linéaire qui traduit la fusion de deux cœurs de tourbillons. Le mécanisme communément admis (Chassaing (2000) pour expliquer le phénomène repose sur les vitesses induites des tourbillons. En effet, chaque vortex induit un champ de vitesse dans son voisinage. Le champ de vitesse correspondant est donné par le théorème de Biot et Savart (Batchelor (1967); Saffman (1992)).

Théorème de Biot et Savart : Toute répartition de vortacité dans l'espace induit, en tout point de l'écoulement, une vitesse dont l'expression est donnée par :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|^3} d\tau$$

Pour deux tourbillons tournant dans le même sens, cette vitesse induite de l'un sur l'autre entraîne un rapprochement des cœurs et finalement une fusion pour former un nouveau vortex unique qui tourne dans le même sens. On parle alors d'appariement ou d'amalgamation ou encore de coalescence des tourbillons. Notons que ce mécanisme est essentiellement bidimensionnel ce qui explique qu'il puisse être mis en évidence dans nos simulations.

4.2.2 Observation

L'étude de spectre de fréquence permet de mettre en évidence l'appariement de tourbillons caractérisés par la même fréquence f_0 . En effet, en l'absence d'appariement, le spectre présente un pic centré sur f_0 tandis que s'il y a appariement, c'est la fréquence $f_0/2$ qui caractérise le spectre. Dans nos simulations, l'appariement a été observé pour quasiment tous les rapports de densité dans le cas du jet presque *top-hat* ($n = 4$); en revanche, il n'a pas pu être mis en évidence dans le domaine de calcul pour le jet Bickley ($n = 1$), même pour des rapports de densité inférieurs au rapport critique s_{ca} .

On illustre cette mise en évidence en montrant sur la figure 4.12 des vues instantanées du champ de vorticité de l'écoulement et les spectres correspondants à des signaux temporels de vitesse longitudinale recueillis   différents points de l'axe ; pour cette simulation, le rapport de densité vaut $s = 0,8$. Cela permet en outre de localiser l'endroit de l'écoulement où le *pairing* est effectif.

Sur le spectre pris à $3/8$ du domaine de calcul, on note en effet que la première sous-harmonique du mode principal est beaucoup plus importante que le mode principal lui-même. En revanche, pour la sonde placée avant (  $1/4$ du domaine), le mode fondamental $\omega = 0,64$ est le mode dominant. Ainsi, pour cet écoulement, l'appariement a lieu entre $1/4$ et $3/8$ de la boîte de calcul.

4.2.3 Influences sur le *pairing*

Nous avons étudié l'influence de quelques paramètres sur le phénomène d'appariement. Pour un profil presque *top-hat* ($n = 4$), on constate que le phénomène d'appariement se produit de plus en plus près de la buse lorsque le rapport de densité s diminue. Ainsi, pour $s = 0,75$ (figure 4.7), le phénomène se produit entre $1/4$ et $3/8$ du domaine de calcul tandis que pour $s = 0,5$ (figure 4.9), il a lieu entre $1/8$ et $1/4$.

Dans le cas où le nombre de Reynolds diminue (cf  4.3.1), on constate un « recul » voire une disparition du domaine de calcul du phénomène d'appariement. Les effets visqueux sont en effet de plus en plus importants et ces derniers, en « lissant » les gradients, diminuent l'importance relative des phénomènes purement non linéaires comme le *pairing*.

Toute l'étude conduite dans cette approche numérique des instabilités d'un jet plan a été réalisée en utilisant une forme identique (présence ou absence d'un « plateau ») pour le profil de vitesse et de densité. Or, expérimentalement, ces profils peuvent être différents comme nous le verrons dans le chapitre suivant. En effet, à la limite de sortie de la buse, le profil de densité est simplement une fonction carrée (ou « vrai » *top-hat*) tandis que la forme exacte du profil de vitesse est déterminée par la taille des couches limites qui se forment. On peut ainsi tout à fait avoir un profil de vitesse peu raide et qui ne présente pas de « plateau » et un profil de densité très raide au contraire. Nous avons voulu tester si, dans une configuration initiale où la vitesse est déterminée par un profil de type Bickley et la densité par un profil de type presque *top-hat*, le *pairing* pouvait être observé. Nous avons donc réalisé quelques simulations en utilisant $n = 1$ pour le profil de vitesse et $n_\rho = 4$ pour le profil de densité. On constate alors que les résultats établis au paragraphe 4.1.2 s'appliquent (c'est-à-dire que c'est le profil de vitesse qui impose le rapport de densité critique s_{ca}^{NL} et la fréquence observée quand le mode est absolu) et qu'aucun appariement ne peut être observé dans le domaine de calcul.

4.3 Influence de certains paramètres, certaines grandeurs

Dans cette partie, on présente quelques résultats qui permettent d'éclairer l'influence de certains paramètres comme le nombre de Reynolds et l'importance relative des effets baroclines.

4.3.1 Influence du nombre de Reynolds

Toutes les simulations ont été réalisées avec un nombre de Reynolds fixé arbitrairement à 1 000. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'influence de ce paramètre. En baissant le

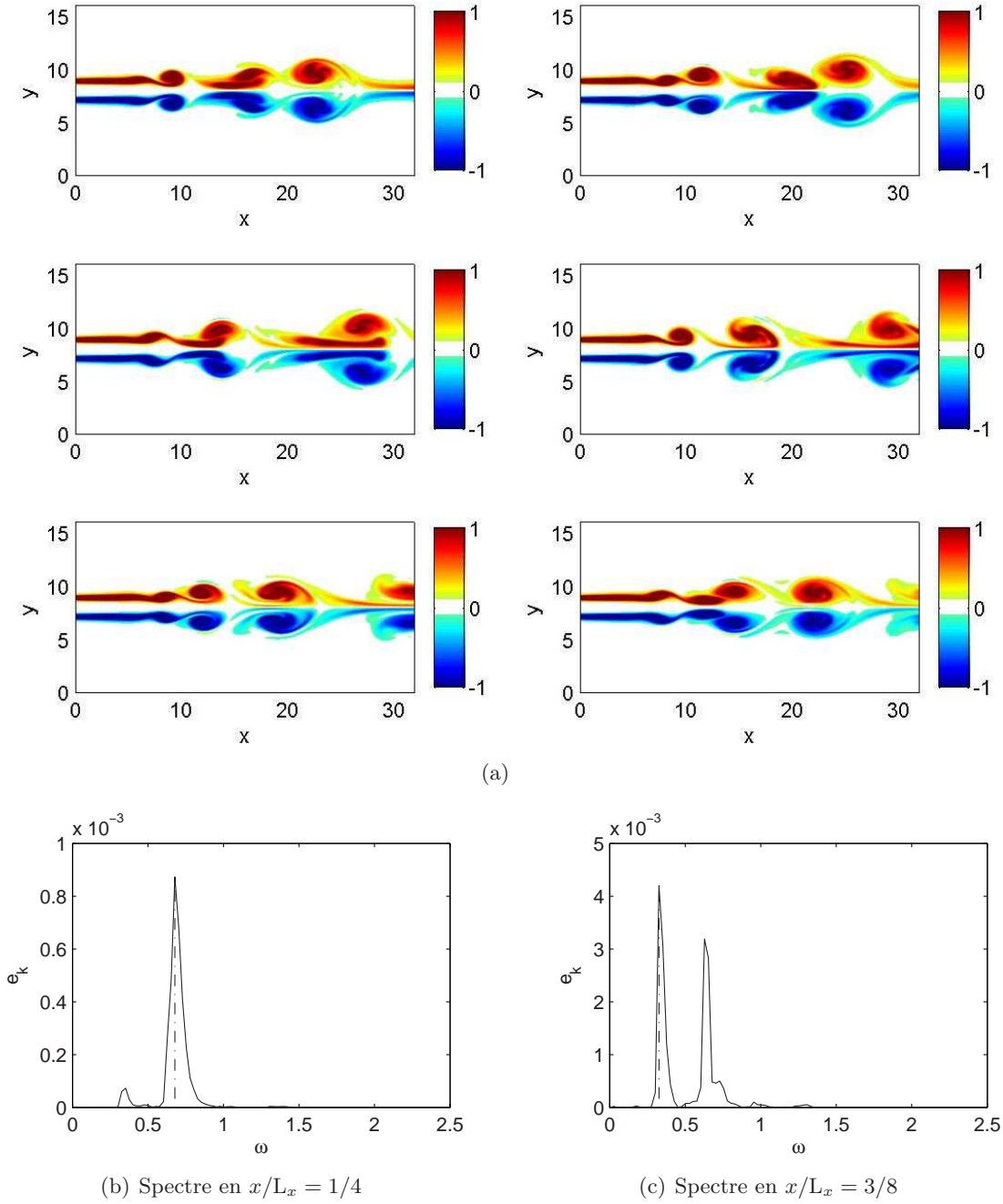


FIG. 4.12: Appariement de tourbillons ($n = 4$; $s = 0,8$; $N = 257$). (a) Vues successives (200 pas de temps entre deux vues); (b-c) FFT du signal temporel de la vitesse longitudinale sur l'axe. La première sub-harmonique ($\omega = 0,32$) du mode principal ($\omega = 0,64$) domine le spectre en $x/L_x = 3/8$ ce qui caractérise le pairing mais pas en $x/L_x = 1/4$ où le mode fondamental est prépondérant. Notons (spectre non montré) que sur le dernier quart du domaine de calcul, on a un nouveau phénomène de pairing qui se traduit sur le spectre par l'émergence de la fréquence égale au quart de la fréquence du mode fondamental.

nombre de Reynolds, on augmente l'importance des effets dissipatifs. L'influence du nombre de Reynolds dépend du paramètre n . On rappelle que l'on n'entretient pas les perturbations puisque les instabilités se déclenchent uniquement à partir de l'écart initial qui existe entre le profil imposé et une solution laminaire stationnaire des équations de Navier-Stokes et à partir des erreurs numériques.

a) Cas du jet Bickley ($n = 1$)

Pour le profil $n = 1$, l'influence du nombre de Reynolds n'est pas essentielle. Pour $Re > 400$, les différences observables par rapport au cas $Re = 1\,000$ restent marginales même si l'on sent progressivement les effets visqueux devenir plus importants : l'apparition du mode sinueux est retardée dans le temps mais il n'y a pas de modification dans les prévisions ou dans le mode dominant observé. En particulier :

- Pour $s > 0,3$, on n'a pas de mode global. Seul le mode sinueux se développe et il est convectif.
- Pour $s = 0,2$, on a un mode global amorti.
- Pour $s = 0,1$, on a un mode global absolu dont la fréquence n'évolue quasiment pas. Sa fréquence angulaire ω diminue en effet de 10% environ de $\omega(Re = 1\,000) = 0,20$ à $\omega(Re = 400) = 0,18$.

Pour $Re = 200$, le mode global observé pour $s = 0,1$ n'est plus absolu : il est amorti. Ainsi, pour de tels effets dissipatifs, le rapport de densité critique s_{ca}^{NL} est sensiblement affecté puisque, s'il existe encore, il est inférieur à 0,1. En effet, n'ayant pas effectué de simulation en dessous de $s = 0,1$, nous n'avons pas pu le mettre en évidence. Quand le nombre de Reynolds devient inférieur à 150, le jet est quasiment stable : pour les durées simulées (20 000 pas de temps pour $N = 257$), aucune instabilité ne se développe avant le pas 16 000 (soit entre 4 et 10 fois plus tard que pour $Re = 1\,000$) et ce développement est également très lent comparé à ce qu'il est pour des valeurs plus élevées du nombre de Reynolds.

b) Cas du jet presque *top-hat* ($n = 4$)

Pour le profil $n = 4$, la situation est différente. En effet, dans le jet Bickley, la diffusion a peu d'effet sur le profil puisqu'il présente des gradients faibles. En revanche, dans le cas $n = 4$, on constate que les principaux effets de la diffusion visqueuse sont de lisser les gradients de vitesse et, dans une moindre mesure, les gradients de densité. Pour $Re = 800$, il n'y a quasiment aucune différence avec $Re = 1\,000$. Pour $Re = 600$, le mode global pour $s = 0,7$ n'est plus auto-entretenu mais amorti. La valeur critique du rapport de densité est alors estimée à $s_{ca}^{NL}(Re = 600) = 0,5$. La fréquence angulaire du mode global auto-entretenu $s = 0,3$ passe de $\omega(Re = 1\,000) = 0,60$ à $\omega(Re = 600) = 0,51$.

Pour les valeurs du nombre de Reynolds inférieures à 400, le profil est suffisamment affecté pour qu'il ne soit plus possible de réellement parler de profil $n = 4$. En effet, on présente sur la figure 4.13 les profils de vitesse et de densité tels qu'ils sont en $x/L_x = 1/4$ après advection de la perturbation initiale (pendant le temps où le jet est laminaire avant que l'instabilité sinueuse ne se développe). On constate que le profil de vitesse est alors très proche du jet Bickley. Il n'est alors pas étonnant de trouver le mode sinueux, même pour des rapports de densité $s = 0,5$. Le profil de densité est modifié également mais dans une moindre mesure : il conserve un « plateau » en son centre que ne présente pas le profil de vitesse et les différences avec un profil moyen que l'on peut obtenir pour $Re = 1\,000$ ne sont pas significatives.

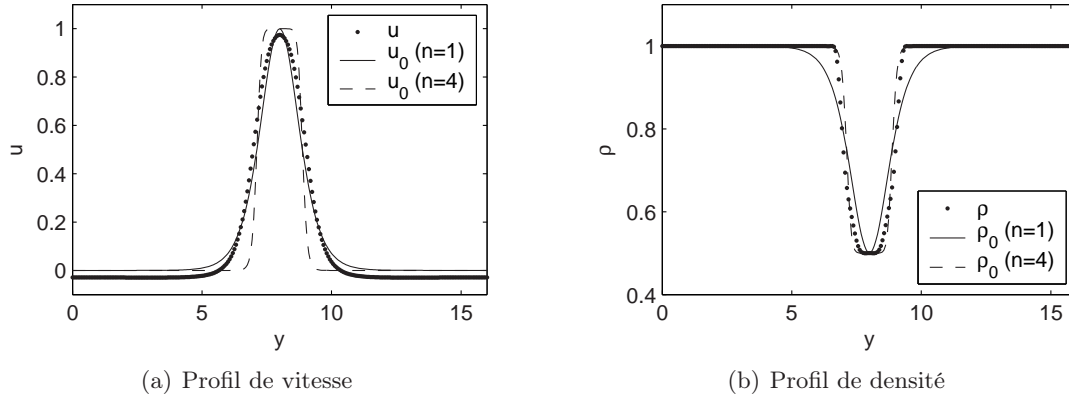


FIG. 4.13: Profils de vitesse longitudinale et de densité en $x = L_x/4$ pour un nombre de Reynolds $Re = 200$. Pour comparaison, on fait figurer les profils théoriques correspondant à des valeurs $n = 1$ et $n = 4$. On constate que le profil de vitesse est très proche d'un jet théorique $n = 1$ à nombre de Reynolds³ 1 000.

Dans le cas $n = 4$, lorsque l'on diminue le nombre de Reynolds, on observe donc progressivement la modification de l'écoulement de base pour s'approcher du cas $n = 1$ sans toutefois jamais l'atteindre puisque l'on impose toujours $n = 4$ strictement sur le bord d'entrée.

4.3.2 Couplage densité-pression : terme barocline

Les effets de couplage entre la densité et la pression sont la principale différence entre le cas à densité uniforme et le cas à densité variable. Ces effets de couplage peuvent se manifester de différentes façons. Dans une formulation en terme de vorticité, il y a en effet un terme

$$\nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p \quad (4.3)$$

appelé terme **barocline**. Dans notre formulation, la forme « naturelle » de ce couplage est le terme :

$$\nabla \frac{1}{\rho} \cdot \nabla p \quad (4.4)$$

Nous l'appelons **effet de couplage scalaire** pour bien souligner la différence avec le terme barocline usuel qui est, mathématiquement, un produit vectoriel tandis que ce terme est un produit scalaire qui apparaît dans le membre de gauche de l'équation de la pression (2.14) :

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \nabla \frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \frac{1}{\rho} \Delta p$$

³En toute rigueur, le profil en $x = L_x/4$ pour $Re = 1\,000$ est légèrement diff rent du profil théorique puisque la diffusion a une influence. Mais comme on l'a vu sur la figure 3.10, page 58, cette atténuation est modérée et ne change pas la forme du profil. La comparaison est donc en fait effectuée avec le profil laminaire pour une étude non visqueuse (nombre de Reynolds infini).

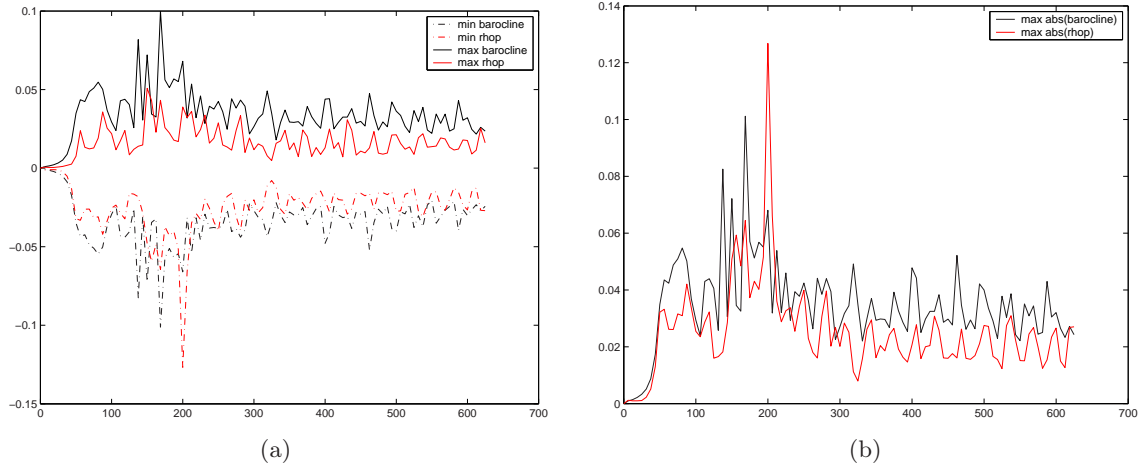


FIG. 4.14: (a) Valeurs maximales et minimales des termes baroclines « classique » (4.3) et scalaire (4.4) en fonction du temps; (b) Valeurs maximales absolues de ces termes en fonction du temps.

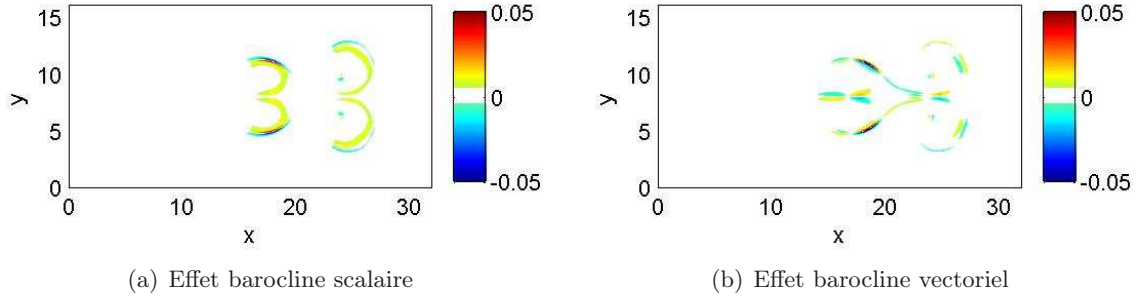


FIG. 4.15: Localisation des effets baroclines. On note que les termes baroclines sont très localisés autour des vortex, lieux de production de vorticité, particulièrement là où la courbure est maximale ($N = 257$; $s = 0,1$).

Les deux termes définis par (4.3) et (4.4) ont sensiblement la même valeur moyenne et les mêmes valeurs maximale et minimale (figure 4.14). Leur localisation dans l'espace est proche mais cependant légèrement différente : le terme barocline vectoriel « usuel » est plus concentré sur des parties spécifiques des vortex (figure 4.15 b) tandis que le terme scalaire est plus diffus autour des vortex (figure 4.15 a).

Cette concentration du terme barocline autour des centres de production de vorticité que sont les vortex est en accord avec les conclusions de Staquet (1995) et Reinaud *et al.* (2000) dans leurs études respectives d'une couche de mélange. Les effets baroclines, bien que modérés en valeur absolue, seraient alors, par leur localisation, les déclencheurs d'instabilités secondaires. Cependant, nous ne pouvons être certain ici de la réelle importance de ces effets (que ce soit dans la forme scalaire ou vectorielle) pour expliquer d'éventuelles instabilités secondaires. En effet, si on compare ces termes avec $\Delta p/\rho$, qui couple également les effets de pression et de densité dans l'équation de projection, on constate (figure 4.16) que ce dernier a une localisation presque identique aux précédentes. Son amplitude est également du même ordre de grandeur. Il ne semble donc pas y avoir de raisons de privilégier une quelconque de ces trois formes qui couplent densité et pression.

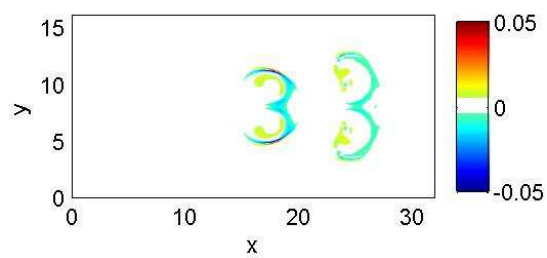


FIG. 4.16: Localisation du terme $\Delta p/\rho$. Ce terme qui couple également les effets de pression et de densité est également localisé, quoi que de façon plus diffuse, autour des vortex, dans les mêmes zones que les termes baroclines ($N = 257; s = 0,1$).

Chapitre 5

Étude expérimentale

Nous avons tenu à aborder, dans ce travail de thèse, un aspect expérimental. On présente cet aspect dans ce chapitre. Dans une première partie, on présente le dispositif expérimental et les techniques de mesure utilisées. On s'intéresse ensuite aux résultats fournis par cette étude conduite pour un jet d'air et pour un jet d'hélium dans l'air. Enfin, dans une troisième partie, on s'intéresse à la confrontation des résultats obtenus numériquement avec les résultats expérimentaux.

5.1 Dispositif et techniques expérimentales

5.1.1 La soufflerie utilisée

Nous avons travaillé avec une soufflerie verticale dont le schéma général est donné sur la figure 5.1. L'alimentation en gaz se fait via un système de vannes électromécaniques qui permet d'alimenter le dispositif avec de l'air, de l'hélium ou tout mélange défini de ces deux gaz. Pour chaque gaz source (air ou hélium), plusieurs vannes parallèles permettent d'ajuster le débit (Lucas (1998)). Après les vannes et la traversée des ensemenceurs, le gaz arrive sur un nid d'abeille de 20 mm de haut puis dans une chambre de tranquillisation de section 140 mm × 140 mm ; il pénètre ensuite dans un convergent qui débouche sur la buse rectangulaire dont les dimensions sont 8 mm × 80 mm (Truffaut (1998)). Le rapport d'aspect est donc de 10. La buse se trouve au centre d'une plaque qui couvre toute la section de la veine ce qui permet d'avoir des conditions aux limites bien déterminées sur la section d'entrée de l'écoulement.

La veine était initialement composée de parois rigides de verre (Boujemaa *et al.* (2002)). Nous avons remplacé deux de ces parois étanches par de la mousse poreuse afin d'avoir une configuration proche d'un écoulement libre tout en évitant d'être trop sensible aux perturbations extérieures. Une plaque en mousse, percée au centre, est placée à environ 1 m de la buse (environ 120 diamètres). En outre, à la sortie de la veine (à plus de 1,50 m, soit plus de 180 diamètres), on place une légère aspiration. L'extraction utilisée est suffisamment faible pour ne pas perturber le jet.

En se plaçant au milieu de la buse, à 40 mm du bord, on a alors une bonne approximation pour un jet plan. Contrairement à Raynal *et al.* (1996), nous n'avons pas placé de « rails » pour accroître la bidimensionnalité du jet en sortie. L'échelle de longueur caractéristique pour l'expérience est donnée par la largeur de la buse soit $D = 8$ mm.

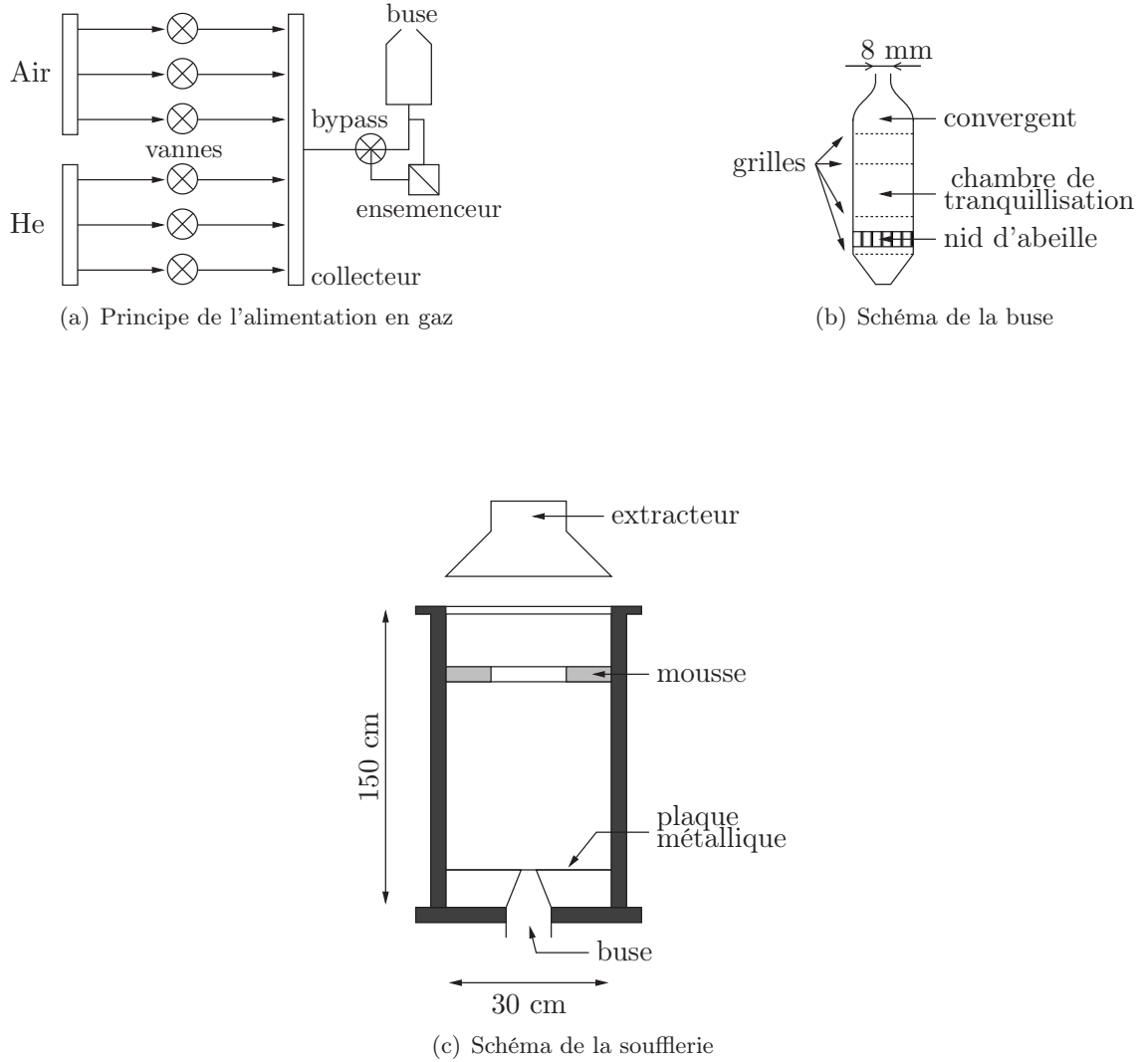


FIG. 5.1: Présentation schématique de l'installation expérimentale. En (a), le dispositif d'alimentation en gaz qui comporte 12 vannes de débits différents pour chaque gaz (air ou hélium ou un mélange de ces deux gaz). Le gaz est ensuite rassemblé dans le collecteur avant d'arriver sur un dispositif bypass qui permet éventuellement de prélever une partie du gaz pour lui faire traverser l'ensemenceur avant d'arriver dans la buse (Truffaut (1998)) présentée en (b). Le nid d'abeille a une hauteur de 20 mm et la chambre de tranquillisation une section de 140 mm × 140 mm. Après le convergent, la buse a une section de 8 mm × 80 mm. En (c), schéma de la structure de la soufflerie proprement dite.

5.1.2 Mécanisme de déplacement des « sondes »

Pour l'ensemble des mesures ou observations expérimentales que nous avons menées, nous avons utilisé un système de déplacement millimétrique¹ piloté par logiciel. Les différentes sondes, intrusives (sonde de densité, fil chaud) ou non (volume de mesure en anémométrie Laser-Doppler, champ de la caméra) sont donc fixées sur ce dispositif. Pour chaque cas, le « centrage » est effectué par des mesures de test.

5.1.3 Mesures par Vélocimétrie Laser-Doppler (VLD)

Nous avons utilisé un dispositif intégré de marque Dantec de mesure VLD qui utilise un BSA² et le logiciel **BSA Flow**. Le laser est un laser argon continu de 4 W. La longueur d'onde utilisée est du **vert** (514,5 nm).

Les faisceaux lasers ont un diamètre de 1,35 mm et sont espacés de 38 mm. La lentille convergente utilisée dans la tête VLD a une focale de $f' = 400$ mm. Le volume de mesure a pour dimensions $0,194 \times 0,194 \times 4,09$ mm³ ce qui correspond à 35 franges. La composante longitudinale de vitesse est mesurée par **rétro-diffusion**. Le volume de mesure est orienté de telle sorte que sa grande dimension soit orientée dans la direction d'homogénéité de l'écoulement afin d'éviter un effet d'intégration préjudiciable à la précision des mesures.

L'ensemencement se fait avec des gouttes d'**huile d'olive**. Pour ensemencher l'écoulement, une partie de l'alimentation en gaz de la soufflerie passe à travers des diffuseurs de parfum qui contiennent l'huile. Les particules ainsi formées ont une taille moyenne de l'ordre du micromètre.

Nous avons effectué des mesures de vitesse longitudinale à différentes stations de l'écoulement :

$x(\text{mm})$	9	16	40	80	96
x/D	1,13	2	5	10	12

Il s'est cependant révélé impossible de s'approcher plus près de la buse en raison de l'inclinaison des faisceaux laser. C'est pourquoi nous avons également utilisé des mesures au fil chaud complémentaires qui ne souffrent pas de cette limitation.

5.1.4 Mesures par fil chaud

Nous avons utilisé le fil chaud principalement pour déterminer les profils de vitesse à la sortie immédiate de la buse, là où la VLD ne pouvait pas être mise en œuvre. En effet, en raison du caractère intrusif de la sonde fil chaud, les visualisations simultanées sont impossibles.

Nous travaillons avec un système Dantec piloté par ordinateur grâce à une carte d'acquisition³ et au logiciel **Streamware**. La sonde⁴ est un fil de tungstène de 1 mm de long et 5 μm de diamètre ce qui lui confère un rapport d'aspect idéal de 200.

Nous travaillons à température constante⁵. Le coefficient de surchauffe retenu est $a_w = 0,8$ ce qui correspond à une température de fonctionnement de $T_w \simeq 250^\circ\text{C}$.

¹Le dispositif Dantec **Lightweight** utilisé a une précision de déplacement de 6,25 μm .

²*Burst Spectral Analyser*. Modèle 57N10.

³Carte National Instruments NI PCIM1016E1. Cette carte 12 bits et 16 voies peut atteindre des fréquences d'acquisition de 200 kHz.

⁴Sonde Dantec 55P15.

⁵On parle dans ce cas de CTA (*Constant Temperature Anemometer*).

Caractéristique	Symbole et unité	Air	Hélium
Masse molaire	M (g.mol ⁻¹)	29,0	4,00
Masse volumique	ρ (kg.m ⁻³)	1,21	0,167
Viscosité cinématique	ν (m ² .s ⁻¹)	$1,51.10^{-5}$	$1,20.10^{-4}$
Capacité thermique massique à pression constante	c_p (J.K ⁻¹ .kg ⁻¹)	$1,00.10^3$	$5,19.10^3$
Rapport des capacités thermiques à pression et volume constants	γ	1,40	1,67
Constante massique du gaz parfait	$R' = \frac{R}{M}$ (J.K ⁻¹ .kg ⁻¹)	$2,87.10^2$	$2,08.10^3$

TAB. 5.1: Principales caractéristiques physiques et thermodynamiques de l'air et de l'hélium.

Si R_0 désigne la résistance du fil à la température de référence T_0 (en l'absence de tout écoulement) alors la résistance du fil R_w à la température T_w est donnée par :

$$R_w = (1 + a_w) R_0$$

En fonctionnement à température constante (donc à résistance R_w constante), on mesure la tension aux bornes de la sonde, E . Cette tension dépend de la composante de vitesse orthogonale à la grande dimension de la sonde puisque la présence d'un écoulement impose d'augmenter le courant à travers la sonde pour maintenir la température à sa valeur de fonctionnement.

Pour étalonner la sonde, nous avons utilisé une petite soufflerie autonome qui fonctionne en régime « débit bloqué » à partir d'air comprimé. La loi analytique que nous avons retenue après cet étalonnage était une loi polynômiale d'ordre 4, la loi de King donnant un plus grand écart-type avec les résultats de l'étalonnage :

$$u = C_0 + C_1 E + C_2 E^2 + C_3 E^3 + C_4 E^4$$

Comme les propriétés thermodynamiques de l'air et de l'hélium sont différentes (voir le tableau 5.1), il faut étalonner la sonde pour chaque gaz étudié. Pour étalonner le fil chaud en écoulement d'hélium, nous avons utilisé la même soufflerie d'étalonnage quoi que celle-ci soit prévue pour fonctionner avec de l'air puis nous avons corrigé les valeurs mesurées. En effet, en fonctionnement à « débit bloqué » c'est-à-dire tel que la pression amont P est importante ($P = 7$ bars) et débouche sur un col sonique, l'écoulement est supposé isentropique et le débit est donné par la relation

$$Q_m = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} A_c P \sqrt{\frac{\gamma}{R'T}}$$

où A_c est un paramètre géométrique qui caractérise le col sonique utilisé. On introduit alors un coefficient β défini par

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \sqrt{\frac{\gamma}{R'}}$$

Ce coefficient ne dépend que du gaz et de ses propriétés. Si S désigne la section en sortie de buse, la vitesse est définie par

$$U = \frac{\beta}{S} \frac{A_c P}{\sqrt{T}}$$

En mesurant la vitesse de l'écoulement d'air, puis d'hélium, avec les mêmes caractéristiques de température et de pression, il vient :

$$U_{\text{He}} = \frac{\beta_{\text{He}}}{\beta_{\text{air}}} U_{\text{air}}$$

Ainsi, en utilisant le même dispositif pour l'air et l'hélium, il suffit de corriger les valeurs indiquées par l'étalonnage pour l'hélium d'un facteur

$$\frac{\beta_{\text{He}}}{\beta_{\text{air}}} = 2,82$$

Les coefficients résultant de ces étalonnages (E est exprimé en V et u en m.s^{-1}) sont donnés par :

gaz	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
Air	-48,3	111	-89,4	26,2	-1,11
Hélium	$4,30.10^3$	$-6,09.10^3$	$3,24.10^3$	$-7,68.10^2$	$6,87.10^1$

5.1.5 Mesures de densité

La mesure de densité est en général assez délicate. En régime variable, si on veut obtenir l'évolution temporelle de la densité, on est souvent amené à combiner plusieurs méthodes pour déterminer *a posteriori* la densité moyenne et les fluctuations. Nous cherchions à obtenir le profil moyen de densité en sortie de buse et plus en aval dans l'écoulement dans le cas d'un jet d'hélium.

Pour obtenir ces profils, nous avons utilisé une sonde qui permet de mesurer la concentration en dioxygène⁶. Le principe de fonctionnement de cette sonde repose sur le potentiel électrochimique d'oxydo-réduction du couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$. Pour une demi-pile basée sur ce couple, le potentiel de Nernst s'écrit en effet

$$E = E_0(T) + \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln\left(\frac{P_{\text{O}_2}}{P_0}\right) \quad (5.2)$$

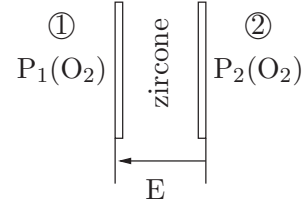
E_0 est le potentiel standard du couple ($E_0(20^\circ\text{C}) = 1,23$ V) et P_0 est la pression de référence pour les activités ($P_0 = 1$ bar). La sonde est constituée par un cœur de zircone (figure 5.2) placé dans un four qui maintient une température de 700°C . À haute température, la zircone est en effet conductrice d'ions oxygène. Lorsque les deux faces métallisées d'une paroi de zircone sont en contact avec deux atmosphères gazeuses à des teneurs en oxygène différentes, une tension électrochimique est développée entre ces deux faces. Cette tension est donnée par la loi de Nernst appliquée pour les deux « demi-piles » ainsi constituées et on a :

$$E = \frac{RT}{4\mathcal{F}} \ln\left(\frac{P_1(\text{O}_2)}{P_2(\text{O}_2)}\right) \quad (5.4)$$

La pression partielle dans le milieu 2 $P_2(\text{O}_2)$ est une pression de référence connue et un échantillon du gaz à analyser est placé dans le milieu 1 : en mesurant E et T , on détermine alors la pression partielle de dioxygène inconnue $P_1(\text{O}_2)$. Une fois connue la teneur en dioxygène, on remonte facilement à la concentration en hélium dans l'échantillon.

⁶Sonde Setnag ATK 10.

FIG. 5.2: Schéma de principe de la sonde de densité. En pratique, sur la sonde utilisée, la référence est interne et métallique : il n'y a pas à utiliser de milieu 2 à teneur en oxygène connue.



5.1.6 Observations avec une caméra rapide

Conjointement avec l'étude par VLD, nous avons réalisé des observations expérimentales à hautes fréquences en utilisant une caméra CCD rapide (modèle Kodak HS4540) qui permet notamment des acquisitions de 1 125, 2 250 ou 4 500 images par secondes. Le capteur a une résolution de 256×256 pixels² et permet la numérisation sur 256 niveaux de gris. Le champ observé mesure environ 20 D.

5.2 Résultats expérimentaux

Dans cette section, on utilise les nombres de Reynolds et Strouhal qui sont définis par

$$\text{Re} = \frac{U_j D}{\nu} \quad \text{et} \quad \text{St} = \frac{f D}{U_j} \quad (5.6)$$

où U_j est la vitesse du jet, mesurée sur l'axe en sortie de buse, $D = 8$ mm le diamètre de la buse et ν la viscosité cinématique du gaz considéré. Adopter ces définitions permet de se situer facilement par rapport à d'autres travaux expérimentaux. Nous reviendrons sur la façon dont on peut relier le travail numérique des chapitres précédents et ce travail expérimental dans la partie suivante de ce chapitre.

Par ailleurs, dans cette étude, on néglige les effets de la pesanteur. Le nombre de Froude défini par :

$$\text{Fr} = \frac{\rho_{\text{He}} U_j^2}{\Delta \rho g D} = \frac{s U_j^2}{(1-s) g D} \quad (5.8)$$

vaut entre 10 et 100 dans la gamme de vitesse étudiée. Il est probable que des effets de flottabilité perturbent les études aux plus basses vitesses.

5.2.1 Intensité de turbulence

Dans le souci d'avoir des conditions expérimentales proches des conditions de la simulation numérique, nous devons nous assurer que l'écoulement était laminaire. Pour cela, nous avons mesuré l'intensité de turbulence en sortie de buse. Cette grandeur u'/U_j est définie par la valeur moyenne de l'écart quadratique moyen de vitesse ramenée à la vitesse du jet U_j :

$$\frac{u'}{U_j} = \frac{\sqrt{\langle U - \langle U \rangle \rangle^2}}{U_j} \quad (5.10)$$

où $\langle x \rangle$ désigne la moyenne temporelle du signal $x(t)$. Un exemple de cette mesure est représenté sur la figure 5.3. On constate que cette intensité est faible et reste toujours inférieure à 0,7% dans la zone centrale de l'écoulement pour un jet d'air à $U_j \simeq 5 \text{ m.s}^{-1}$.

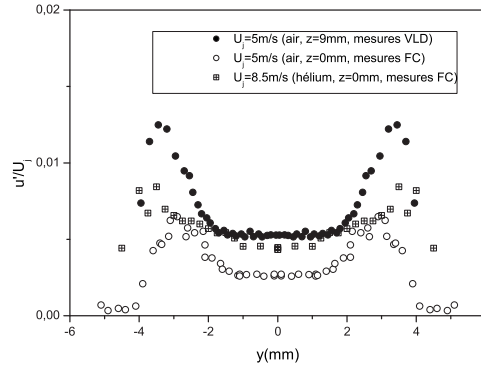


FIG. 5.3: Intensité de turbulence mesurée au fil chaud et par VLD au voisinage de la sortie de la buse pour un jet d'air à la vitesse $U_j \simeq 5 \text{ m.s}^{-1}$ (en sortie de buse et à $1,13D$) et d'hélium à la vitesse $U_j \simeq 8,5 \text{ m.s}^{-1}$ (en sortie de buse). Noter que cette intensité de turbulence évolue peu sur le premier diamètre de l'écoulement.

Sur les frontières du jet, en revanche, cette intensité est plus importante ce qui s'explique par le passage des structures tourbillonnaires. Ce résultat est dans la même gamme que l'étude expérimentale conduite par Raynal *et al.* (1996) qui présente un taux de turbulence moyen de 0,5% environ au centre et jusqu'à 1,5% pour les gammes de nombres de Reynolds comparables. Avec une telle intensité de turbulence, on n'a pas eu à spécifiquement étudier la structure de la buse pour réduire encore ce taux. Cela reste cependant à faire si l'on veut réduire cette turbulence en deça de ce niveau comme c'est le cas dans les études de Yu & Monkewitz (1993) par exemple où l'intensité de turbulence est inférieure à 0,06%.

5.2.2 Épaisseur de quantité de mouvement θ

Pour calculer l'épaisseur de quantité de mouvement θ , on calcule, sur un demi-profil,

$$\theta = \int_0^{+\infty} \frac{U(y)}{U_j} \left(1 - \frac{U(y)}{U_j}\right) dy$$

À partir des mesures effectuées au fil chaud à la sortie de la buse, nous avons déterminé les différentes valeurs de θ pour les cas étudiés :

gaz	$U_j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	Re	$\theta \text{ (mm)}$
air	0,92	490	0,53
air	4,89	2610	0,35
air	9,34	4980	0,26
hélium	8,56	570	0,53

Une constatation simple s'impose : l'épaisseur θ dépend de la vitesse ce qui implique que l'on ne peut pas contrôler expérimentalement ce paramètre à la différence de ce que l'on effectue dans les simulations numériques où l'influence de chaque paramètre peut être étudiée séparément.

Nous avons cherché à modéliser la loi de variation de θ en fonction du nombre de Reynolds. Suivant Yu & Monkewitz (1993); Raynal *et al.* (1996), nous avons représenté θ/D en fonction de l'inverse de la racine carrée du nombre de Reynolds. Nous avons ainsi déterminé une loi expérimentale (figure 5.4) de la forme

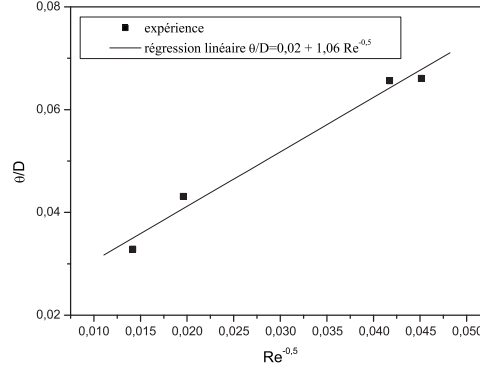


FIG. 5.4: Loi expérimentale de variation de l'épaisseur de quantité de mouvement θ en fonction de l'inverse de la racine carrée du nombre de Reynolds Re obtenue à partir de mesures au fil chaud. La loi trouvée montre que θ n'est pas directement proportionnel à $Re^{-1/2}$ comme dans d'autres études expérimentales (voir Raynal et al. (1996) par exemple).

$$\frac{\theta}{D} = 0,021 + \frac{1,0}{\sqrt{Re}} \quad (5.12)$$

Ainsi l'épaisseur de quantité de mouvement ne semble pas être directement proportionnelle à $Re^{-1/2}$: il existe un décalage que nous n'avons pas réussi à expliquer.

5.2.3 Profils de vitesse

Grâce aux mesures réalisées au fil chaud, nous avons pu obtenir les profils de vitesse en sortie de buse (figure 5.5). À partir de l'ensemble de ces profils obtenus pour les jets d'air et d'hélium, nous avons pu vérifier une loi « universelle » qui donne le profil de vitesse dans notre configuration. Si l'on normalise la vitesse par la vitesse « au centre » U_j et qu'on la trace en fonction de la variable adimensionnée $\frac{D/2 - y}{\theta}$, on obtient la courbe représentée sur la figure 5.6. On vérifie bien que l'on a établi une loi qui vaut pour toutes les configurations expérimentales que l'on peut choisir (air ou hélium à différentes vitesses). À partir de ce résultat, on dispose d'un profil très général pour représenter la vitesse longitudinale en sortie de buse ce qui se révèle utile pour initialiser la simulation numérique avec des profils moins théoriques que ceux étudiés jusqu'alors.

5.2.4 Profils de densité

À partir de la sonde décrite au paragraphe 5.1.5, on réalise des mesures de concentration en dioxygène de l'échantillon. On peut ainsi calculer la concentration en air ou en hélium et donc remonter à la densité locale. On présente quelques profils transverses obtenus ainsi sur la figure 5.7. À la sortie même de la buse, ce profil est effectivement de type *top-hat* ; on note ainsi que le profil de densité évolue peu sur le premier diamètre.

Signalons un point important qui limite la précision de ces mesures : la taille de la sonde. En effet, l'aspiration de l'échantillon se fait en continu à travers une sonde qui a un diamètre de l'ordre du demi millimètre ce qui engendre un effet d'intégration spatiale non négligeable sur un profil qui s'étend sur 8 mm.

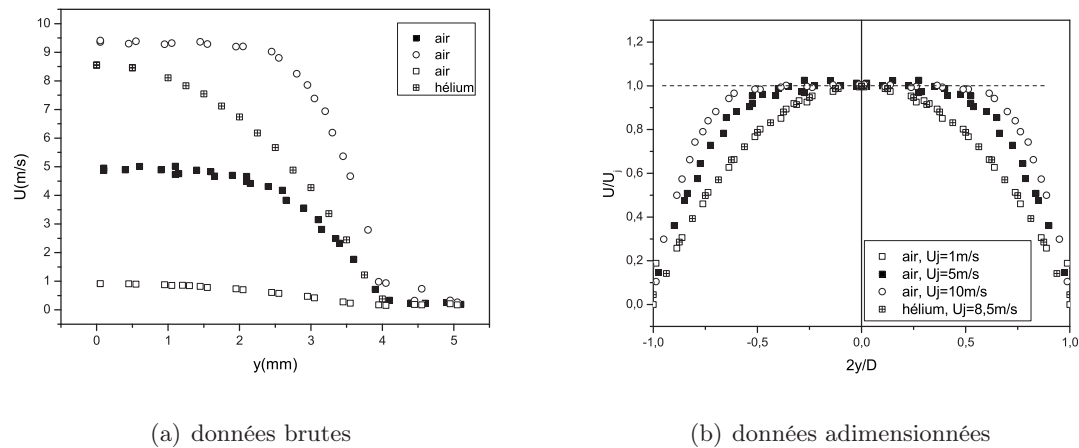


FIG. 5.5: Résultats bruts des profils de vitesse pour différentes vitesses pour des jets d'air et d'hélium en sortie de buse (mesures au fil chaud).

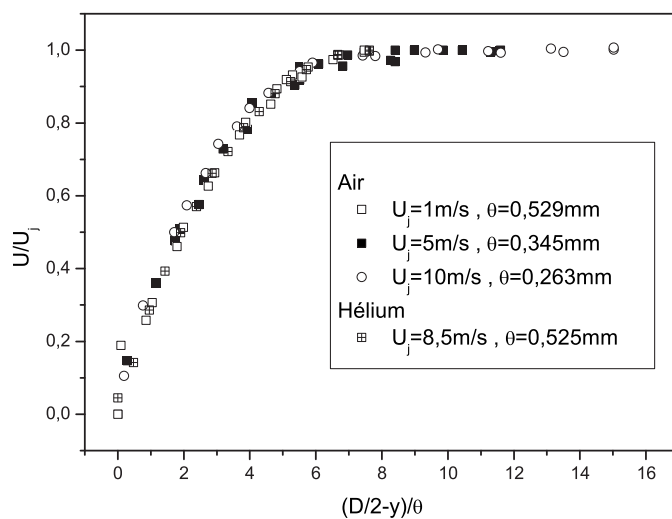


FIG. 5.6: Profil de vitesse normalisé en fonction de $\frac{D/2 - y}{\theta}$ à partir de mesures au fil chaud. Quelle que soit la configuration expérimentale choisie (air ou hélium à différentes vitesses), cette courbe est similaire.

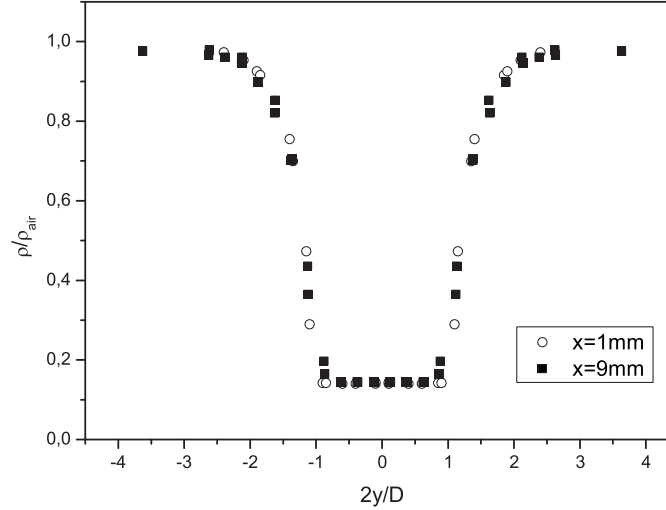


FIG. 5.7: Profils de densité mesurés pour un jet d'hélium pour lequel $s = 0,14$ en sortie de buse ($x = 0$) et à $x = 9 \text{ mm} = 1,13D$. On constate que le profil de densité n'évolue quasiment pas entre la sortie de buse et le premier diamètre : il reste essentiellement carré ou top-hat.

5.2.5 Jets d'air et d'hélium

Nous avons réalisé plusieurs expériences avec des jets d'air ou d'hélium purs à différentes vitesses. On se limite cependant à des vitesses telles que les instabilités sont facilement observables, c'est-à-dire que l'on ne s'intéresse pas aux cas turbulents.

Les scénarios que l'on peut observer sont très différents en fonction de la vitesse. Des photos caractéristiques de chaque cas étudié sont présentées sur la figure 5.8 pour l'air et la figure 5.9 pour l'hélium.

Dans les deux cas, les basses vitesses favorisent l'apparition du mode sinueux et les hautes vitesses le mode variqueux. Les situations sont assez bien « tranchées » c'est-à-dire que l'on observe rarement des situations où les deux modes sont mêlés sans possibilité de les distinguer nettement. Cela suggère que les taux de croissance de ces deux modes sont nettement différents.

5.2.6 Mode global du jet d'hélium

Dans le cas du jet d'hélium, on a un comportement global du jet. Pour le mettre en évidence, on procède à une analyse de Fourier du signal temporel mesuré par VLD. Comme l'acquisition de points de mesure ne se fait pas à intervalles de temps réguliers, il convient de procéder au préalable à un rééchantillonnage des données afin de pouvoir utiliser un algorithme FFT. Pour ce faire, on choisit une « fréquence d'acquisition » égale à deux fois la fréquence moyenne d'acquisition⁷ par VLD. L'étude de $u(x, t)$, vitesse longitudinale sur l'axe à différentes stations en aval de la buse montre un spectre de raies qui, en présence d'un mode global, présentent une fréquence commune quel que soit le point de l'axe où l'on réalise la mesure. On montre un exemple d'une telle étude sur la figure 5.10. Ce comportement a été observé pour des vitesses de jet supérieures à 2 m.s^{-1} . Les fréquences et les nombre de Strouhal correspondants sont réunis sur la figure 5.2. Ce comportement

⁷Mean data rate.

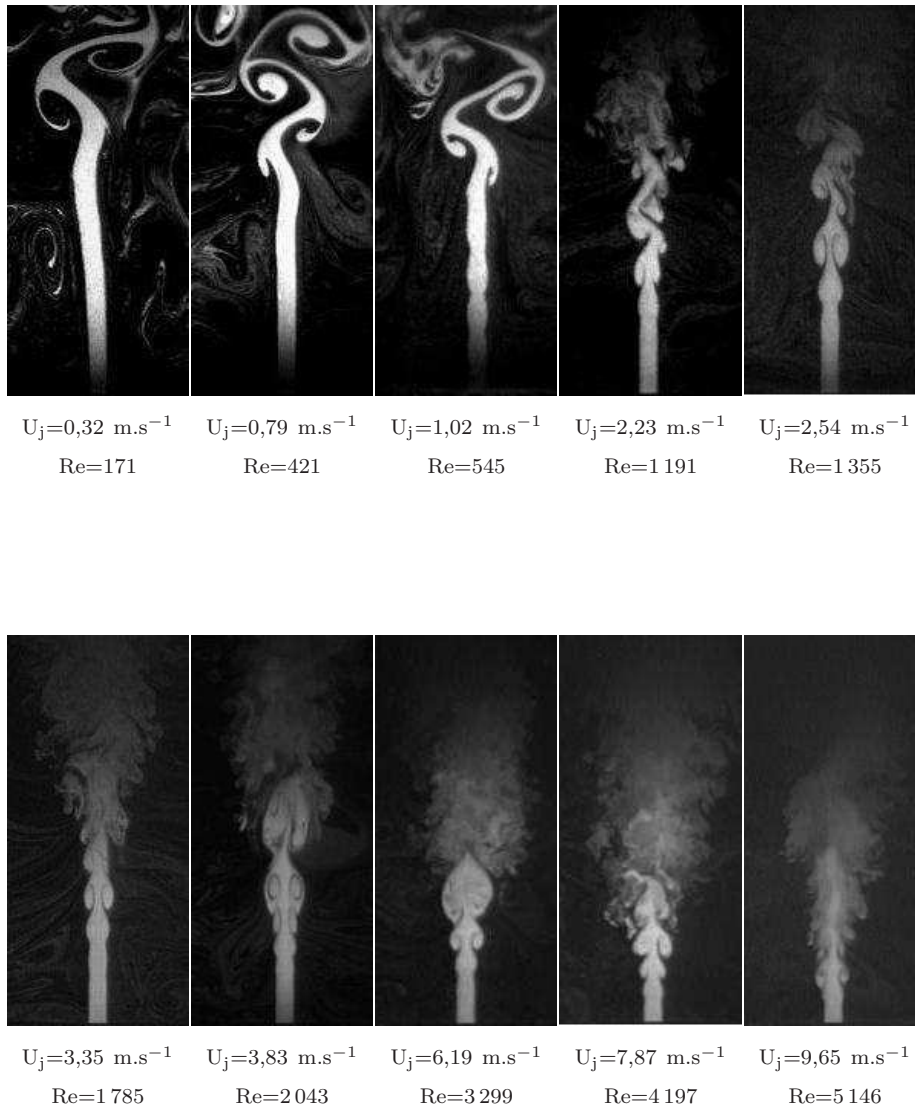


FIG. 5.8: Prises de vue du jet d'air à différentes vitesses d'écoulement. En fonction de la vitesse du jet, on observe des scénarios très différents. On observe un écoulement laminaire perturbé principalement par le mode sinueux pour les faibles vitesses. Quand la vitesse augmente, le mode variqueux devient prédominant et la transition vers la turbulence se fait près de la buse.

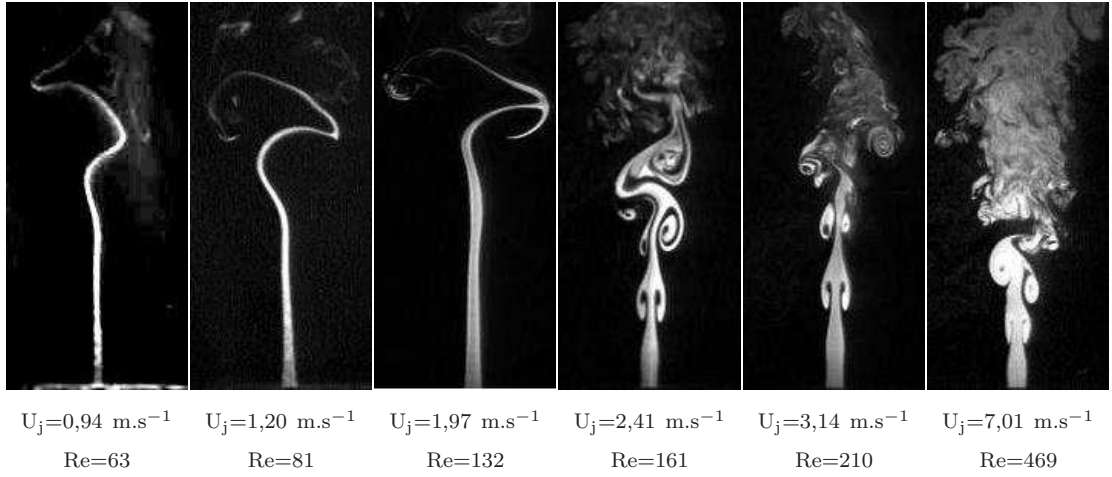


FIG. 5.9: Prises de vue du jet d'hélium à différentes vitesses d'écoulement. Pour les très faibles Re , on observe essentiellement le mode sinueux tandis qu'au-delà de $Re \simeq 150$, c'est le mode variqueux qui domine la dynamique de l'écoulement ; plus le Re augmente et plus la transition vers la turbulence se fait de plus en plus près de la buse.

$U_j \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	Re	$f \text{ (Hz)}$	St
1,97	132	24	0,098
2,34	157	28	0,096
2,41	161	29	0,096
3,14	210	35	0,089
4,87	326	57	0,094
7,01	469	81	0,092
11,7	783	170	0,12

TAB. 5.2: Fréquences mesurées dans le jet d'hélium des modes globaux observés. Ce tableau présente la vitesse sur l'axe (mesurée par VLD à $x = 9 \text{ mm}$) et le nombre de Reynolds correspondant ainsi que fréquence et Strouhal mesurés des modes globaux.

global du jet n'a en revanche pas été observé pour le jet homogène d'air étudié, quelque soit la vitesse du jet.

On note une très bonne corrélation entre la fréquence du mode global et la puissance $3/2$ du nombre de Reynolds comme en témoigne la figure 5.11 :

$$f = 14 + 7,1 \cdot 10^{-3} Re^{3/2}$$

On en déduit (figure 5.12) alors une dépendance analytique du nombre de Strouhal comme la combinaison de deux termes : un terme en \sqrt{Re} et un terme en Re^{-1} .

Pour les grands nombres de Reynolds, on retrouve le résultat « classique » connu pour les jets ronds selon lequel le Strouhal varie comme la racine carrée du Reynolds (voir Becker & Massaro (1968) par exemple)

5.2.7 Appariement de vortex

Pour le mode variqueux et des vitesses suffisantes dans l'air, en utilisant des cadences d'acquisition suffisantes, on observe le phénomène d'appariement des tourbillons comme

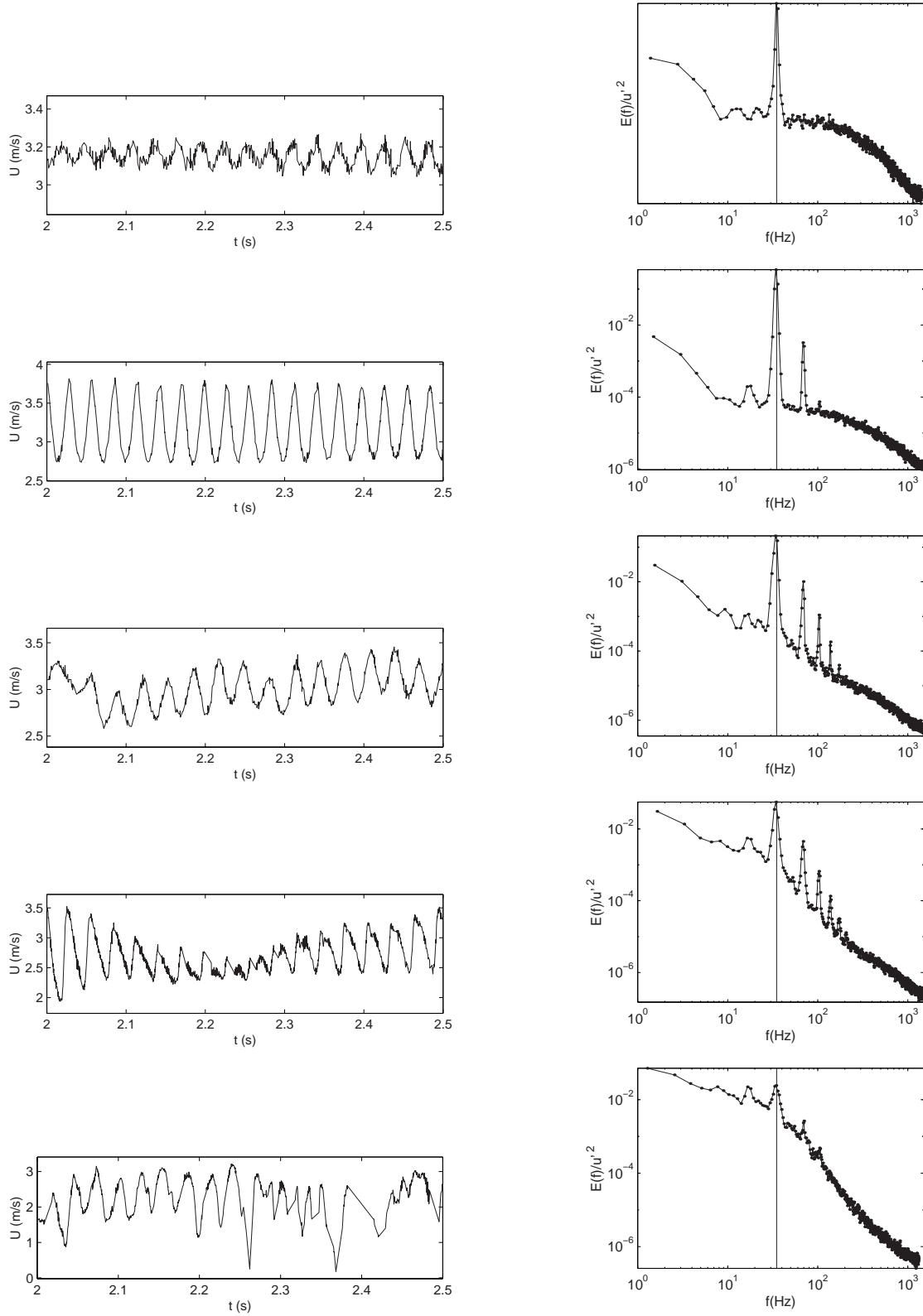


FIG. 5.10: Dans la colonne de gauche, on présente le signal de vitesse temporel mesuré par VLD et à droite le spectre correspondant. Il s'agit d'un jet d'hélium avec $U_j = 3,14 \text{ m.s}^{-1}$ ($\text{Re} = 210$). De haut en bas, on présente les résultats obtenus à $x/D = 1, 3, 5, 7$ et 10 . Le pic de fréquence 35 Hz se retrouve à toutes les positions : on a un mode global. L'amplitude constante des oscillations en $x/D = 1, 3$ ou 5 laisse penser que ce mode pourrait être un oscillateur auto-entretenu (mode absolu).

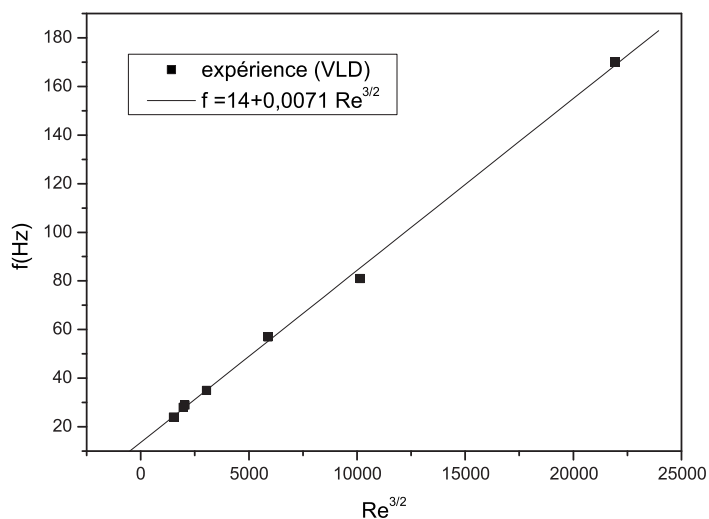


FIG. 5.11: Dépendance de la fréquence du mode global du jet d'hélium en fonction du nombre de Reynolds Re .

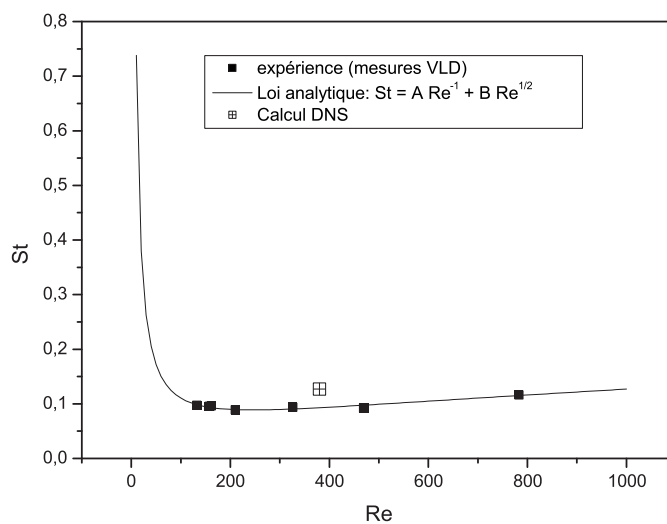


FIG. 5.12: Dépendance du nombre de Strouhal St calculé à partir de la fréquence du mode global du jet d'hélium en fonction du nombre de Reynolds Re . Le point marqué d'une croix matérialise le résultat d'une simulation numérique réalisée à partir d'un profil VLD (cf §5.3).

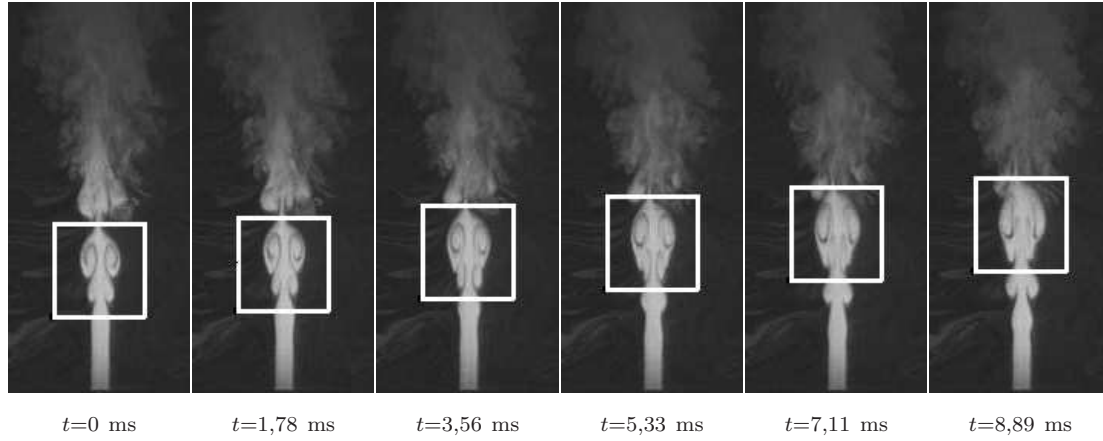


FIG. 5.13: Prises de vue du jet d'air pour une vitesse d'écoulement de $U_j = 3,83 \text{ m.s}^{-1}$ à différents instants. Sous chaque photo, on indique le temps correspondant à la prise de la photo en prenant la première image pour origine. On observe le phénomène d'appariement de deux vortex. Pour cela, un cadre de dimension fixée marque cette fusion. La fréquence mesurée dans cette partie de l'écoulement est de $f = 74 \text{ Hz}$ ce qui correspond à un nombre de Strouhal de $St = 0,15$.

on peut le voir sur la figure 5.13. Cette observation est confirmée par l'étude du spectre du champ de vitesse longitudinale qui présente un pic nettement marqué à une fréquence moitié par rapport au mode fondamental d'émission des tourbillons variqueux.

5.3 Retour sur la simulation numérique

Faire le lien entre une étude numérique et une étude expérimentale n'est pas chose aisée : outre les conditions différentes, les définitions retenues pour les nombres de Re et de Strouhal St sont différentes. En effet, numériquement, la « buse » n'existe pas à proprement parler. L'échelle de longueur naturelle est donc différente en simulation numérique (demi-largeur ou largeur à mi-hauteur du profil de vitesse en entrée) et expérimentalement où le diamètre de la buse s'impose tout naturellement. Numériquement, on peut contrôler chaque paramètre comme on le souhaite. Par exemple, l'épaisseur de quantité de mouvement θ et le nombre de Reynolds Re sont indépendants ce qui n'est pas le cas expérimentalement. Enfin, malgré le soin que l'on peut apporter à l'étude expérimentale, il est impossible de contrôler strictement chaque condition aux limites. Néanmoins, nous avons tenu à relier les deux parties de ce travail de thèse : nourrir chaque partie des enseignements que l'on tire de l'autre afin d'améliorer la compréhension des phénomènes. Nous avons bien conscience que ce qui est présenté ici est une simple ébauche de ce que l'on peut faire en approfondissant les parallèles entre ces deux mondes qui s'ignorent trop souvent.

À partir des résultats expérimentaux précédents, on dispose de profils pour faire tourner le code DNS. Pour le profil de vitesse, nous avons utilisé le profil mesuré à $x = 9 \text{ mm}$ par VLD. Pour la masse volumique en revanche, nous avons pris un profil analytique presque *top-hat* ($n_\rho = 4$) puisque le profil expérimental est très proche d'un profil carré. Pour une simulation à un nombre de Reynolds de calcul de 1 000 (qui correspond à un nombre de Reynolds expérimental de 380), nous avons obtenu un nombre de Strouhal de 0,13. Ce point numérique figure sur la figure 5.12. On constate que l'accord est correct mais pas excellent. L'amélioration de ce résultat demanderait de travailler plus finement à partir d'un profil obtenu en sortie de buse car à cet endroit, la plaque garantit expérimentalement des conditions aux limites proches de celles utilisées dans le code numérique.

Nous avons alors essayé d'utiliser le profil de vitesse « universel » que nous avons établi expérimentalement à partir de mesures au fil chaud. Malheureusement les données se sont révélées trop bruitées pour être pleinement exploitables.

Conclusions et Perspectives

Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes intéressés aux instabilités primaires, les modes sinueux et variqueux, qui peuvent se développer dans les jets plans à masse volumique variable en insistant sur l'influence du rapport de densité, s , sur le développement et la nature de ces instabilités. Nous ne nous sommes pas placés dans le cadre d'une approximation du type Boussinesq qui limiterait les variations de masse volumique.

Pour cela, nous avons développé un code de simulation numérique directe. Nous avons accordé un soin tout particulier à l'organisation du code pour en faciliter la reprise ultérieure par d'autres doctorants ou chercheurs. Nous avons ensuite résolu de façon numérique l'étude de stabilité non visqueuse à partir de l'équation de Rayleigh. Lors de cette approche, nous avons établi les relations de dispersion des principaux modes instables pour une large gamme de valeurs du rapport de densité s . Outre son aspect intéressant en soi, cette approche linéaire nous a principalement servi pour valider le fonctionnement du programme de simulation numérique directe.

Nous disposons ainsi d'un code de simulation directe des équations de Navier-Stokes incompressibles à masse volumique variable pour un jet plan dont on connaît les profils en entrée de vitesse et de densité. Ce code nous a permis d'obtenir des premiers résultats, concernant l'influence de la variation du rapport de densité. En particulier, nous avons établi que le scénario classique de stabilité marginale de Dee & Langer (1983) ne s'applique pas dans toutes les configurations. Ce critère prévoit un changement de comportement du jet selon que s est supérieur ou inférieur à une valeur critique s_{ca} . Cette valeur critique est déterminée par la seule théorie linéaire et correspond à un *pinching* de deux branches de la relation de dispersion du mode variqueux ce qui traduit une transition convective/absolue du même mode. Pour $s > s_{ca}$, la dynamique du jet est dictée par le mode le plus instable linéairement tandis que pour $s < s_{ca}$, le jet se comporte comme un oscillateur auto-entretenu et sa fréquence est déterminée par la fréquence du mode qui subit la transition linéaire. Aux vues des résultats que nous avons obtenus, ce scénario doit être amendé sur plusieurs points. Il existe bien une valeur critique du rapport de densité qui traduit le passage d'un jet convectivement instable à un jet absolument instable qui se comporte comme un oscillateur auto-entretenu mais ce rapport critique est, en général, imposé de façon non linéaire. La fréquence d'oscillation du jet pour les rapports de densité inférieurs à s_{ca}^{NL} n'est en outre pas déterminée par cette valeur critique ; elle dépend de s pour les profils carrés. Le mécanisme exact qui permet d'expliquer le changement de comportement du jet n'est pas connu.

Dans le cas d'un profil presque *top-hat*, on trouve une valeur s_{ca}^{NL} comprise entre 0,7 et 0,75 ce qui correspond aux résultats expérimentaux établis par Raynal *et al.* (1996). Pour ce même profil initial, nous avons constaté la présence de modes globaux faiblement amortis pour des rapports de densité très élevés (1 ou même 1,2) et nous avons proposé une hypothèse pour expliquer ce comportement à partir de la relation de dispersion du

mode variqueux en écoulement non visqueux. Il apparaît en effet que le mode variqueux qui se développe sur un profil *top-hat* semble être absolument instable dans toutes les configurations.

L'influence du nombre de Reynolds qui traduit l'importance des phénomènes dissipatifs a été étudiée. On a ainsi montré, lorsque l'on diminue le nombre de Reynolds, que l'on ne peut pas dissocier un écoulement moyen qui serait parallèle et sur lequel on étudierait le développement de perturbations. Les phénomènes diffusifs affectent en effet tout autant les perturbations que les gradients moyens du profil de l'écoulement de base.

Les perspectives pour la prolongation de ce travail sont nombreuses. D'un point de vue technique, il faudrait procéder à une amélioration significative de la résolution du code afin de pouvoir augmenter la taille du domaine de calcul, particulièrement dans la direction transverse afin de pouvoir simuler sur des durées plus longues les écoulements qui font apparaître principalement le mode sinueux. Ceci peut se faire en particulier par la parallélisation du code. Tout est également prêt dans le code pour que l'on puisse s'intéresser à d'autres grandeurs. Les fonctionnalités du code peuvent être étendues assez facilement grâce à sa structure modulaire. On peut par exemple, s'intéresser ainsi au mélange qui est un phénomène fondamental pour les applications industrielles. Des modifications de nature géométrique peuvent être faites pour passer du jet plan au jet axisymétrique. Le passage en trois dimensions afin d'étudier les instabilités secondaires qui mettent en jeu des mécanismes tridimensionnels nécessiterait quant à lui un important surcroît de puissance et de capacités de stockage. Cela reste cependant tout à fait envisageable en quittant l'« informatique de bureau » pour mobiliser des calculateurs.

Lors de ce travail nous avons également eu une approche expérimentale dans laquelle nous avons mis en œuvre plusieurs techniques expérimentales bien connues (fil chaud, VLD) ou moins répandues (mesure de densité). Le temps ayant manqué, cette partie n'est pas aussi développée qu'on aurait pu l'espérer. Prometteuse, elle pourra servir de point de départ pour des études ultérieures plus approfondies. Nous nous sommes ici principalement intéressés à l'obtention de profils de vitesse et de densité afin de fournir des données au code numérique pour entamer un processus complexe où simulations numériques et expérimentations se complètent et s'auto-alimentent. Cette petite étude prouve cependant, s'il en est encore besoin, que les contraintes expérimentales et les contraintes numériques, si elles sont toujours fortes, n'en sont pas pour autant de natures radicalement différentes. L'utilisation de nombreuses définitions pour des grandeurs analogues et de multiples échelles adimensionnées ne facilite pas non plus le dialogue entre ces deux domaines pourtant complémentaires de la recherche.

Annexe A

Article soumis au *Journal of Fluid Mechanics*

Dans cette annexe, on présente une copie de l'article soumis au mois d'avril 2004 au *Journal of Fluid Mechanics*.

Direct numerical simulations of variable density plane jets

By STÉPHANE RAVIER,
MALEK ABID, MURIEL AMIELH
AND FABIEN ANSELMET

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors-Équilibre, CNRS-UMR 6594,
49 rue Frédéric Joliot-Curie, BP 146, F-13384 Marseille Cedex 13, France

(Received ?? and in revised form ??)

Two-dimensional incompressible and heterogeneous free jets are studied numerically. They are characterized by two linearly unstable modes: the sinuous mode and the varicose mode. When the density is constant, the sinuous mode dominates, in a sense that it has a maximum growth rate nearly three times greater than that of the varicose mode, both in the temporal and spatial stability frameworks. This suggests that jet evolution at the linear and nonlinear regimes, at least at early stage, would be sinuous with the frequency and wavenumber of the most unstable mode. This fact is confirmed in the present work. When the jet density is decreased it is found that the varicose mode growth rate is enhanced and its maximum value can exceed that of the sinuous mode. Furthermore, in the spatial case only the varicose mode is subject to a convective/absolute instability transition. It is shown, however, that the maximum varicose growth rate exceeds that of the sinuous mode *before* the transition occurs. Therefore, a natural question is: does the convective/absolute transition dictate its frequency to the non-linear evolution of the jet, leading to a global oscillating varicose mode as suggested by the experimental work of Yu and Monkewitz but contested by the work of Raynal *et al.* concerning the critical density ratio, or is it, simply, the frequency of the maximum varicose growth rate that does? The main part of this paper is devoted to answer this question by direct numerical simulation for a wide range jet-exit to ambient of density ratio.

1. Introduction

Jet flows, and more precisely their near field large scale structures, are widely studied in the literature either from numerical or experimental point of view. They are of great interest as prototypes of laminar/turbulent transition particularly in aerospace and combustion applications aimed at enhancing mixing. Evidently, two-dimensional jets are a first step towards the understanding of the more realistic, but complex, three-dimensional ones and surprisingly, to the best knowledge of the authors, no one has ever published results on direct numerical simulation of incompressible variable density two-dimensional jets. Those facts motivated the choice of the dimensionality of the problem in the present study.

The most attractive phenomenon observed in jet flows is that lowering the jet density, relative to the ambient, leads to self-excited oscillations or global instability of the jet. Such oscillations, characterized by line-dominated power spectra as opposed to the broadband ones in the constant density case, were discovered experimentally by Sreenivasan

et al. (1989) and Kyle & Sreenivasan (1993), in a round helium-air jet, and by Monkewitz *et al.* (1990) in a heated air jet. Later Yu & Monkewitz (1993) showed the same behavior for the low-density two dimensional hot jets. The intrinsic character of these low density jet oscillations and its insensibility to small perturbations was also revealed.

For the two-dimensional hot jet, Yu and Monkewitz found a critical jet to ambient density ratio, s_{ca} , approximately equal to 0.9 below which the jet is self-excited. They tried to link it to the threshold of convective/absolute transition obtained in their previous work on linear stability of jets and wakes (Yu & Monkewitz (1990)).

The concept of convective and absolute instability goes back to the works of Twiss (Twiss (1951)), Landau and Lifshitz (Landau & Lifshitz (1959)) who first pointed out that a pulsed disturbance in an unstable medium can evolve in two distinctly physical ways:

- the pulse can grow and *propagate* away from its origin so that at a fixed point in space the disturbance eventually decays with time: this is *convective instability*.
- the pulse can contaminate more and more of the space leading to a disturbance growth with time at eventually every point in space: this is a nonconvective, also called *absolute instability*.

In the *linear* regime, it is sufficient to determine the Green function (space-time impulse response), $G(\mathbf{r}, t)$, of the linearized equations describing a particular medium to get insight on instability that grows from small amplitude disturbances. For a one dimensional infinitely extended medium, say along x , the Fourier-Laplace transform of the Green function is given by :

$$G(k, \omega; s) = \frac{1}{D(k, \omega; s)}, \quad (1.1)$$

where k stands for a complex wavenumber, $\omega/(2\pi)$ a complex frequency, s a control parameter (the jet-exit to ambient density ratio in the present work) and $D(k, \omega; s)$ for the Fourier-Laplace transform of the linear operator. It is clear from equation (1.1) that the singularities (also called dispersion relations) $\omega = \omega(k; s)$ or $k = k(\omega; s)$, solutions of $D(k, \omega; s) = 0$, play an important role in the expression of $G(x, t; s)$. Particularly, poles of order 2 in k , (also double roots in k of D) solutions of

$$D(k_0, \omega_0; s) = 0, \quad \frac{\partial D(k_0, \omega_0; s)}{\partial k} = 0, \quad (1.2)$$

when they correspond to the merging, or the “pinching”, of two roots: $k_\ell(\omega; s)$ and $k_u(\omega; s)$, originating from the lower and upper half complex k plane respectively (and only in that case), are of great importance. Indeed it is shown, elegantly, in Bers (1983) that the time-asymptotic Green function is dominated by the integration around the pinch-point singularity $\omega_0(s)$ that has the maximum imaginary part. This integration leads to:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t; s) \sim \exp(ik_0(s)x) \frac{\exp(-i\omega_0(s)t)}{t^{1/2}} \quad \text{for all } x, \quad (1.3)$$

which is a single (global) Fourier mode tuned at a well defined frequency. Note that Taylor expansion of D centered at (ω_0, k_0) along one singularity curve gives

$$a(\omega - \omega_0) + b(k - k_0)^2 + O((\omega - \omega_0)^2, (k - k_0)^3) = 0, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

showing that $v_g(k_0) = \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0) = 0$ where $v_g(k_0)$ is the group velocity[†] of the wave packet centered at k_0 .

[†] No perturbations of zero group velocity, in a fixed laboratory reference frame, have ever been observed experimentally for open shear flows however (Villermaux (2003)).

The critical value s_{ca} of s for which $\text{Im}(\omega_0(s_{ca})) = 0$ is the signature of convective/absolute transition according to the previously given definitions. Yu and Monkewitz, in their above mentioned linear study, computed a density ratio $s_{ca} = 0.95$ below which two dimensional variable density jets become absolutely unstable. It is in a good agreement with $s_{ca} = 0.9$ obtained experimentally. Every thing looked fine until the work of Raynal *et al.* (1996). They found $s_{ca} = 0.7$ for a helium-air jet, which disagrees with linear theory and experiments of Yu and Monkewitz. They considered differences in shape and relative positions of the density and velocity profiles to explain the discrepancy. But as density profiles are not easily accessible experimentally their arguments remain hypothetical ones.

The pertinence of convective/absolute concepts to the *nonlinear* evolution, especially for media governed by the full incompressible Navier-Stokes equations, has been addressed by Delbende & Chomaz (1998) at first. They considered the fully nonlinear impulse response by direct numerical simulations. They showed, for a family of plane wake profiles at low Reynolds numbers, that nonlinear terms limit the amplitude to a saturation level within the linear response wave packet leaving the trailing and leading edges unaffected. They concluded that the velocities of the fronts are thus selected according to the linear Dee and Langer “marginal stability” conjecture (Dee & Langer (1983)) although the front solutions are fully nonlinear. Note that Delbende and Chomaz used a fixed homogeneous parallel basic flow overall their simulations. Therefore, the retroaction of the growing perturbation on the basic profile is not considered and this is a kind of forcing. Later, Pier & Huerre (2001) considered a “synthetic” family of weakly spatially developing, constant density, wakes with no recirculating flow region. They showed, numerically, that these profiles sustain a synchronized finite-amplitude vortex street tuned at a well defined frequency. Although the vortex street is fully nonlinear, its frequency is dictated by a purely linear *marginal* absolute instability criterion from the local linear dispersion relation. Note that the basic flows used by Pier and Huerre are also fixed overall their simulations.

In the present work, the constraints fixed in the works of Delbende, Chomaz, Pier and Huerre are relaxed: **free** spatially evolving **variable density** jets are numerically considered.

The paper is organized as follows: general formulation is presented in §2. The linear instability analysis together with convective/absolute transition, for a wide range of density ratio and different velocity profiles, are addressed in §3. The nonlinear study follows in section §4 where the numerical method is presented with a particular attention devoted to the boundary conditions and to the validation of the method. In the same section, main results on the relevance of the linear determined critical density ratios and the corresponding frequencies are also presented. Finally, §5 is concerned with conclusions.

2. General formulation

This study deals with a plane variable-density jet. This kind of jet can be achieved by pushing helium, with some experimental facility, into the ambient air for example. The flow is supposed to be incompressible. In addition buoyancy, gravity, thermal and surface tension effects are neglected. Following experimental results for gaseous fluids, the dynamic viscosity μ is constant. If \mathbf{v} represents the velocity field, p the pressure and ρ the density, the governing equations are

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Let \bar{L} , \bar{U} , $\bar{\rho}$ and $\bar{\mu}$ be length, velocity, density and viscosity scales respectively. With these scales, one can define dimensionless quantities such as $t^* = \bar{U}t/\bar{L}$ and a specific Reynolds number $Re = \bar{\rho}\bar{U}\bar{L}/\bar{\mu}$ which is called “calculus” Reynolds number. If the scales are precisely defined, one can compare this number with a flow Reynolds number in experiments. For this work, \bar{L} is the jet half velocity generalized radius, \bar{U} is the maximum jet velocity and $\bar{\rho}$ is the ambient density. The Reynolds number based on the ambient air dynamic viscosity is then exactly that used by Yu & Monkewitz (1990, 1993) but is different from the definition used by Raynal *et al.* (1996).

From now on, all the quantities are dimensionless but the same notations as for the dimensional ones are used (the stars are omitted). So, (2.1) becomes

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho Re} \Delta \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Unless otherwise mentioned, $Re = 1000$ is used.

3. Linear analysis

In this section the work done by Yu & Monkewitz (1990) on linear instability of variable density, parallel, plane jets is completed. Temporal dispersion relations that will be used to test the nonlinear study are given. Spatial dispersion relations for a wider range of density ratios than that in their work are also given. Furthermore, The spatial dispersion relations of the Bickley jet, which requires a moderate resolution in the nonlinear study compared to the top-hat one, are also calculated.

3.1. Outline of the method

In a fixed reference frame, (O, \hat{x}, \hat{y}) , the linear stability of a parallel mean flow $(\mathbf{U}_0, P_0, \rho_0)$ where:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0(y) &= U_0(y)\hat{x}, & U_0(y) &= \frac{1}{1 + \sinh(y)^{2n}}, \\ \rho_0(y) &= 1 + (s - 1)U_0(y), & s &= \frac{\rho_0(0)}{\rho_0(\infty)} = \rho_0(0), \\ P_0(y) &= P_0 = \text{Cte}, \end{aligned}$$

is studied. This basic flow is a two parameter, (s, n) , family of variable density, incompressible plane jets (see figure 1). This family is a solution of the stationary, incompressible and inviscid Euler equation[†]. In these formulas, s is the density ratio of the jet to

[†] it is well known that viscosity has only a dumping effect with regard to linear growth rates in the present case (Drazin & Reid (1982)).

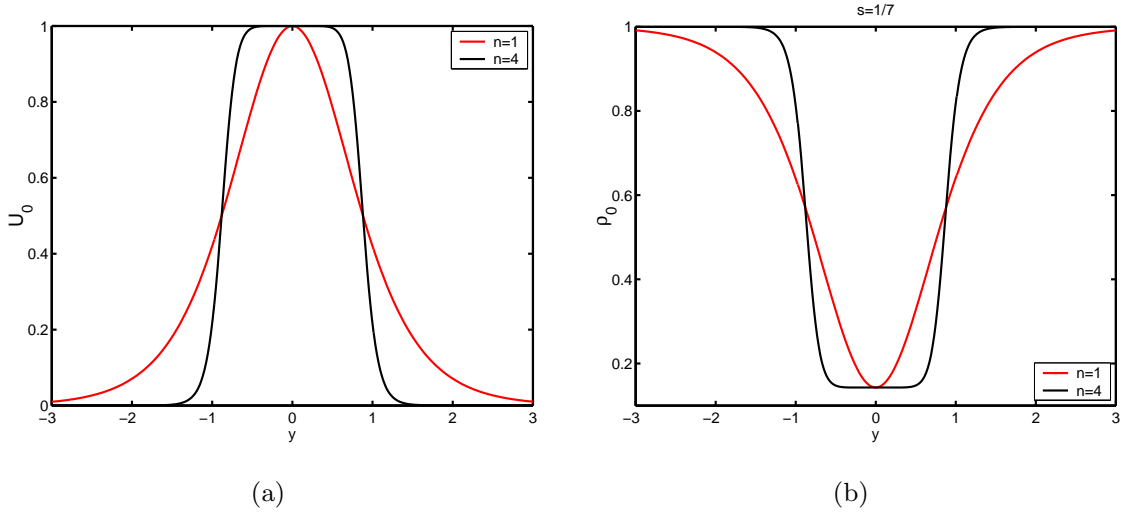


FIGURE 1. Velocity (a) and density (b) profiles of the basic flow for different values of n and for $s = 1/7$.

ambient fluid and n is used to control smoothly the thickness of the jet shear layer[‡]. For $n = 1$, one recovers the Bickley jet (the $\text{sech}^2(y)$ velocity profile) and for $n = \infty$ the top-hat profile. These profiles were introduced, in a slightly different form, and studied by Yu & Monkewitz (1990).

Superposing a perturbation flow (u, v, p, ρ) to the mean one, the linear Euler equations around the basic flow read:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u}{\partial x} + v U_0' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.3)$$

where the prime denotes y derivative and where the equation for ρ is dropped because it is only an advection by (u, v) .

Looking for normal mode solutions:

$$\Phi(x, y, t) \mapsto \Phi(y) \exp(i(kx - \omega t)),$$

with Φ any component of the perturbation flow, the equations for the perturbations become:

$$-i\omega u + U_0 iku + v U_0' = -\frac{1}{\rho_0} ikp, \quad (3.4)$$

$$-i\omega v + U_0 ikv = -\frac{1}{\rho_0} p', \quad (3.5)$$

$$iku + v' = 0. \quad (3.6)$$

Eliminating u and v from these equations and using the fact that perturbations vanish

[‡] Indeed, the momentum thickness of the velocity profile is $\theta(n) = \int_0^\infty U_0(1 - U_0) dy \simeq 0.33/n$ and the vorticity thickness is $\delta_\omega(n) = (U_0(0) - U_0(\infty)) \max(1/(dU_0/dy)) \simeq 1.3/n$.

6

S. Ravier, M. Abid, M. Amielh, F. Anselmet

at infinity lead to a differential eigenvalue problem for the pressure:

$$p'' - \left(\frac{\rho'_0}{\rho_0} + 2 \frac{U'_0}{U_0 - c} \right) p' - k^2 p = 0, \quad (3.7)$$

$$c = \omega/k, \quad (3.8)$$

$$p(\pm\infty) = 0. \quad (3.9)$$

It is well known that this problem admits two independent eigenfunction solutions: the varicose mode (p symmetric[†], u symmetric and v antisymmetric) and the sinuous mode (p antisymmetric, u antisymmetric and v symmetric).

The above pressure eigenvalue problem can be analytically solved only when $n = \infty$ (top-hat profiles). In this case, it is found that the varicose mode first becomes absolutely unstable at $s = s_{ca} = 0.79$ and that the sinuous mode transits at $s = s_{ca} = 0.29$ (Yu & Monkewitz (1990)). For finite values of n , the problem must be numerically treated however. To do so, the second order differential equation is transformed to a set of two first order ones. The symmetry of this initial value problem depends on boundary conditions and it is solved by the shooting method for the complex eigenvalues $c = c_r + ic_i$. The boundary conditions are:

- $p(0) = 1$, $p'(0) = 0$, $p(y \rightarrow \infty) \sim \exp(-ky)$, $p'(y \rightarrow \infty) \sim -k \exp(-ky)$ for the varicose mode.

- $p(0) = 0$, $p'(0) = 1$, $p(y \rightarrow \infty) \sim \exp(-ky)$, $p'(y \rightarrow \infty) \sim -k \exp(-ky)$ for the sinuous mode.

The shooting method is precise but local in nature in the c plane. So, one must have a good initial guess for the method to converge. To overcome this difficulty, a global method based on matrix diagonalisation is also used. In the temporal stability case ($k \in \mathbb{R}$ given, $\omega \in \mathbb{C}$ unknown) using Chebyshev spectral collocation method with the mapping:

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2}\xi\right), \quad \xi \in [-1, 1],$$

equation (3.7) is transformed to a generalized eigenvalue problem:

$$Ap = cBp \quad (3.10)$$

$$A = U_0 D^{(2)} - (2U'_0 + (\rho'_0/\rho_0)U_0)D^{(1)} - k^2 U_0 D^{(0)} \quad (3.11)$$

$$B = D^{(2)} - (\rho'_0/\rho_0)D^{(1)} - k^2 D^{(0)} \quad (3.12)$$

where $D^{(2)}$, $D^{(1)}$ and $D^{(0)}$ are the order two, one and zero (the identity matrix) spectral differentiation matrices, respectively, compatible with the boundary conditions (3.9).

In the spatial stability case ($k \in \mathbb{C}$ unknown, $\omega \in \mathbb{R}$ given), however, k appears nonlinearly in equation (3.7) and it is better to proceed otherwise. The linearised Euler equations are written in the following way:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -D^{(1)} & 0 \\ 0 & (i\omega/U_0)D^{(0)} & -1/(\rho_0 U_0)D^{(1)} \\ (\rho_0 i\omega)D^{(0)} & \rho_0(U_0 D^{(1)} - U'_0 D^{(0)}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix}$$

and the spatial eigenvalues are those of the matrix appearing in the right hand side.

The difficulty with the global diagonalisation method is the number of eigenvalues returned: if M is the number of Chebychev polynomials used, M eigenvalues are obtained in the temporal case and $3M$ in the spatial case. The spurious ones are characterized by a high number of oscillations of the corresponding eigenfunctions. So, to select the good candidates as initial guess for the shooting method the number of maxima of each

[†] with respect to y

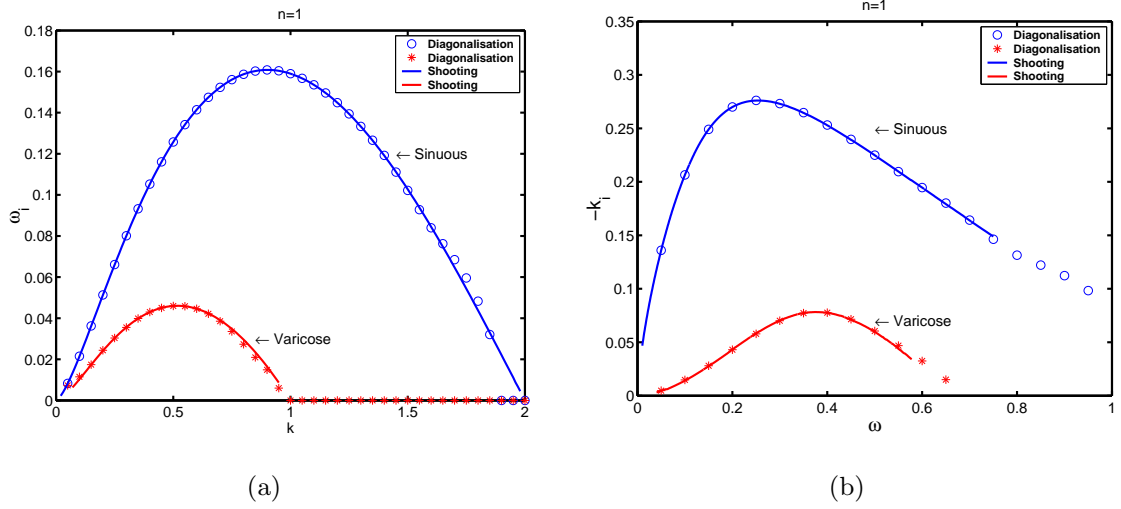


FIGURE 2. Temporal (a) and spatial (b) dispersion relations obtained from the shooting and diagonalisation methods. Note the good agreement of the two methods and that the sinuous mode is more unstable than the varicose one for $n = 1$ and $s = 1$.

eigenfunction are automatically counted and only those with less than four maxima in $[-1, 1]$ are retained.

3.2. Results

A check of the above described procedures is reported in figure 2. For $n = 1$ and $s = 1$, the same temporal and spatial growth rates, for the varicose and the sinuous modes, as those published in Mattingly & Criminale Jr. (1971); Drazin & Reid (1982) are retrieved. Note also the good agreement of the shooting and diagonalisation methods. Furthermore, this figure clearly shows that the sinuous mode dominates the varicose one in a linear evolution in the case of the uniform density Bickley jet since it has a higher maximum growth rate. This feature does not remain the same when the density ratio decreases or n increases: the maximum growth rate of the varicose mode can have the same or a higher magnitude than that of the sinuous one (see figures 3 to 7). This suggests, depending on the values of the parameters s and n , that the varicose and sinuous modes can coexist and that the varicose mode can dominate in a linear evolution.

Spatial dispersion relations also show that only the varicose mode is subject to a convective-absolute transition for $s \in [0.1, 1]$ and $n \in \{1, 4\}$. Two spatial branches “pinch” (Huerre & Monkewitz (1985)) at $0.14 \leq s_{ca} < 0.15$ for $n = 1$ (figure 5) and at $0.93 \leq s_{ca} < 0.94$ for $n = 4$ (figure 7). Note that just before the transition, for $n = 1$, the maximum spatial growth rate is 0.38 at $s = 0.15$ for the varicose mode which is greater than 0.28 the corresponding maximum spatial growth rate of the sinuous mode at the same s . The same thing occurs for $n = 4$ with a maximum spatial growth rate of 1.29 at $s = 0.94$ for the varicose mode and 1.18 for the sinuous mode at the same value of s . Therefore, a natural question is: does the convective/absolute transition dictate its frequency to the non-linear evolution of the jet, leading to a global oscillating varicose mode, or is it, simply, the frequency of the maximum varicose growth rate that does? This question is addressed in the following section.

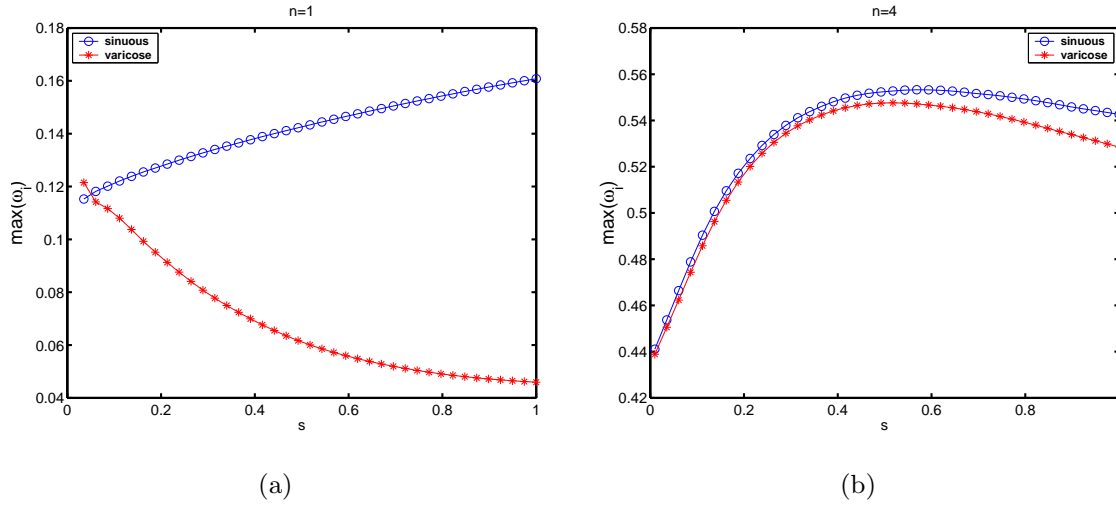


FIGURE 3. Maximum temporal growth rate $(\omega_i)_{\max}$ as a function of the density ratio s for $n = 1$ (a) and $n = 4$ (b). Note that as s decreases the varicose mode becomes as important as the sinuous one especially for the top-hat like profile ($n = 4$).

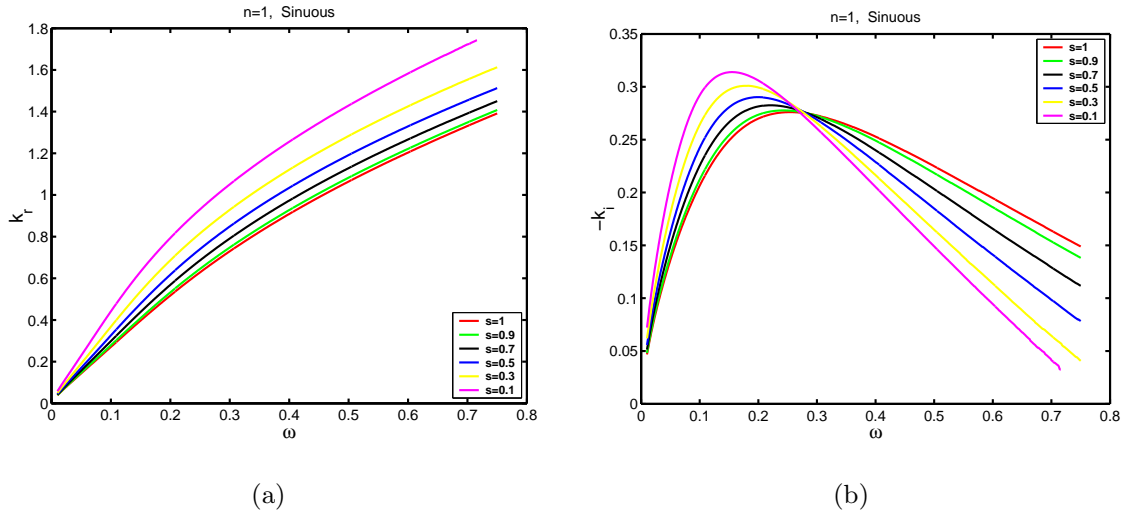


FIGURE 4. Spatial dispersion relations of the sinuous mode of the Bickley jet for $s \in [0.1, 1]$. Note the weak dependency of the maximum growth rate on s and the absence of convective absolute transition for those values of s .

4. Nonlinear study

4.1. Calculation domain

Equations 2.2 are solved numerically in a rectangular domain $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ with boundary $\partial\Omega = \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}} \cup \Gamma_{\text{bottom}} \cup \Gamma_{\text{top}}$. The geometry of the problem is presented on figure 8. The meshgrid is uniform in x and y directions and the steps are noted h_x and h_y respectively. For convenience considerations, see § 4.5, the same odd number, N , of mesh points is used in both directions. The runs are performed on a conventional PC with $N = 129, 257$ or 513 .

DNS of variable density plane jets

9

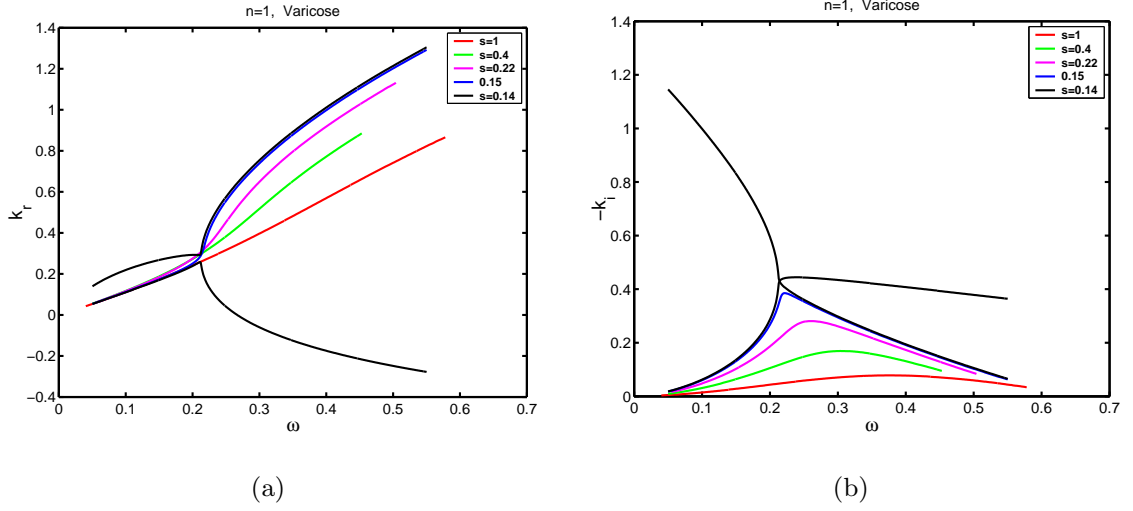


FIGURE 5. Spatial dispersion relations of the varicose mode of the Bickley jet for $s \in [0.14, 1]$. Note the strong dependency of the maximum growth rate on s and the convective/absolute transition that occurs at $0.14 \leq s_{ca} < 0.15$.

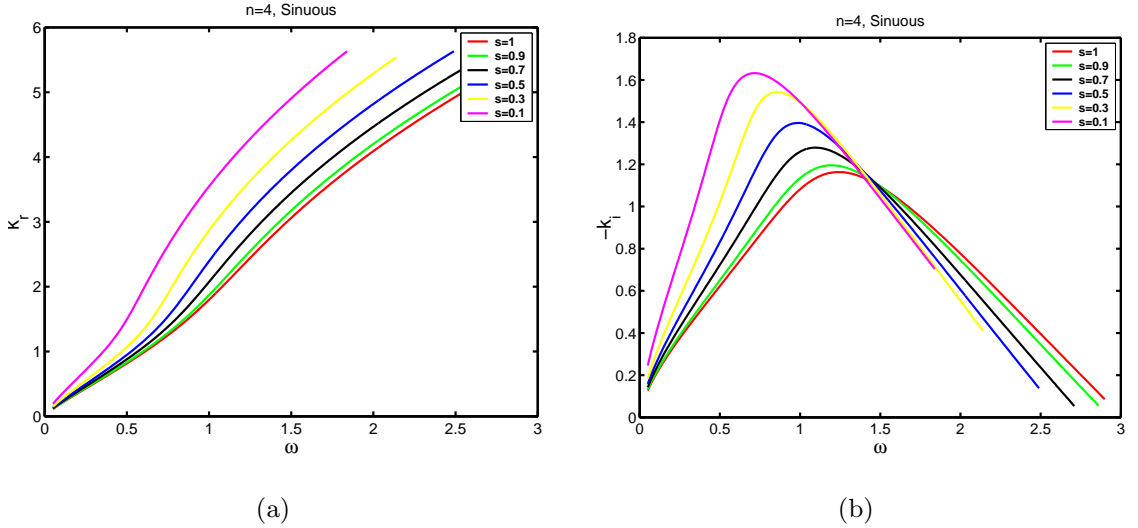


FIGURE 6. Spatial dispersion relations of the sinuous mode of the top-hat like jet for $s \in [0.1, 1]$. Note the absence of convective/absolute transition for those values of s .

4.2. Numerical Equations

Let n on superscript denote the time step at which a variable is calculated and Δt the timestep. A standard time splitting projection method in two steps (see for example Boersma *et al.* (1998)) is used to solve (2.2). To simply outline this way to proceed, the simple Euler temporal scheme is used even if another temporal discretisation method (see below) is actually used. One first evaluates, from the actual velocity \mathbf{v}^n and density ρ^n , an intermediate velocity field \mathbf{v}^* solution of:

$$\frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = -(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n + \frac{1}{\rho^n} \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}^n,$$

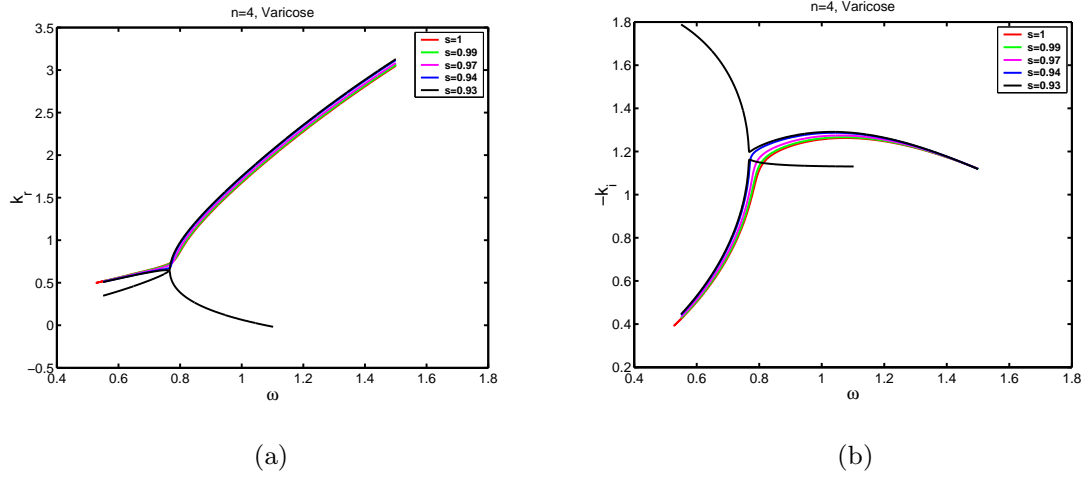


FIGURE 7. Spatial dispersion relations of the varicose mode of the top-hat like jet for $s \in [0.93, 1]$. Note the convective/absolute transition that occurs at $0.93 \leq s_{ca} < 0.94$.

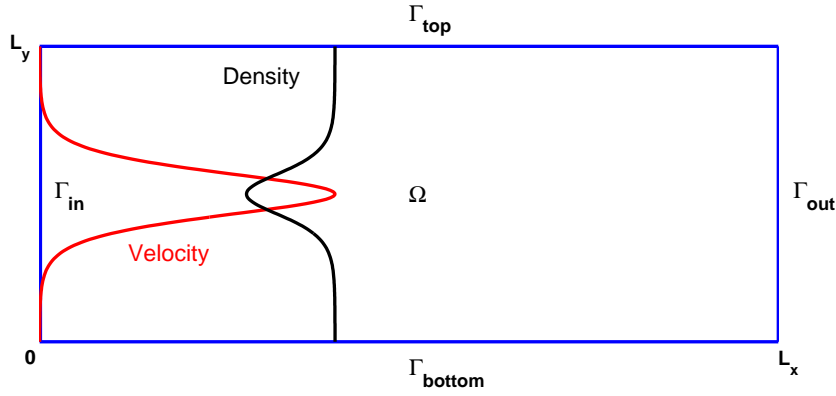


FIGURE 8. Geometry of the computational domain. Note that for artistic considerations the real scale is not respected in this figure, specially the vertical one.

Obviously, \mathbf{v}^* is not a divergence free field. Then, a Poisson-like equation is used to enforce the incompressibility in the numerical simulation. This equation can easily be obtained through the divergence operator applied to the momentum equation:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^n} \nabla p \right) = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^*. \quad (4.1)$$

Note the main difference between (4.1) and a Poisson equation ($\Delta \varphi = f$): the operator is *not* the isotropic Laplacian but an anisotropic operator which mixes pressure and density. Finally, the new velocity \mathbf{v}^{n+1} is calculated with:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \frac{1}{\rho^n} \nabla p \Delta t. \quad (4.2)$$

If $\mathbf{v} = (u, v)$, all the procedure and previous equations can be summed up as follows:

$$\begin{cases}
\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = - \left(u^n \frac{\partial}{\partial x} + v^n \frac{\partial}{\partial y} \right) u^n + \frac{1}{Re} \frac{1}{\rho^n} \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right), \\
\frac{v^* - v^n}{\Delta t} = - \left(u^n \frac{\partial}{\partial x} + v^n \frac{\partial}{\partial y} \right) v^n + \frac{1}{Re} \frac{1}{\rho^n} \left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \right), \\
\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^n} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \left(\frac{u^*}{v^*} \right), \\
u^{n+1} = u^* - \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial p}{\partial x} \Delta t \quad \text{and} \quad v^{n+1} = v^* - \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial p}{\partial y} \Delta t, \\
\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \left(u^n \frac{\partial}{\partial x} + v^n \frac{\partial}{\partial y} \right) \rho^n = 0.
\end{cases} \quad (4.3)$$

4.3. Temporal discretisation

A third order Runge-Kutta discretisation scheme to perform the temporal discretisation is chosen. It is an explicit scheme. Thus, to integrate $\partial a / \partial t = f(a, x, y, t)$, the following quantities are successively evaluated: $d_1 = \Delta t f(a^n, x, y, t)$, then $d_2 = \Delta t f(a^n + d_1/3, x, y, t)$ and finally $d_3 = \Delta t f(a^n + 2d_2/3, x, y, t)$. And one has:

$$a^{n+1} = a^n + \frac{1}{4}(d_1 + 3d_3).$$

Such a scheme provides good stability and is not too expensive in calculating time. The timestep is given by a CFL condition:

$$\Delta t = \beta \frac{\min(h_x, h_y)}{\max(u(t=0))},$$

where β is a security coefficient that is less than 1 for stability reasons. For the runs shown here, $\beta = 0.5$.

4.4. Spatial discretisation

For the spatial discretisation, finite difference schemes are used:

- centered in the inner of the computation domain,
- not centered but second order accurate on the borders.

Special attention is paid to border formulas since the lowest order in the domain limits the global order for all the simulation. Since computation time and complexity (boundary conditions especially) increase faster than benefits, no high order methods are used. With such a discretisation scheme, the multigrid method to solve (4.1) is more straightforward. For an inner meshgrid point:

$$\begin{cases}
\left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{(i,j)} = \frac{1}{2h_x} (a_{(i+1,j)} - a_{(i-1,j)}) , \\
\left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{(i,j)} = \frac{1}{2h_y} (a_{(i,j+1)} - a_{(i,j-1)}) ,
\end{cases}$$

and for the second order derivatives,

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right|_{(i,j)} = \frac{1}{h_x^2} (a_{(i+1,j)} - 2a_{(i,j)} + a_{(i-1,j)}) , \\ \left. \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \right|_{(i,j)} = \frac{1}{h_y^2} (a_{(i,j+1)} - 2a_{(i,j)} + a_{(i,j-1)}) . \end{cases}$$

For the points on the border of the grid, the formulas are

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{(1,j)} = \frac{1}{2h_x} (-3a_{(1,j)} + 4a_{(2,j)} - a_{(3,j)}) , \\ \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{(N,j)} = \frac{1}{2h_x} (3a_{(N,j)} - 4a_{(N-1,j)} + a_{(N-2,j)}) , \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right|_{(1,j)} = \frac{1}{h_x^2} (2a_{(1,j)} - 5a_{(2,j)} + 4a_{(3,j)} - a_{(4,j)}) , \\ \left. \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right|_{(N,j)} = \frac{1}{h_x^2} (2a_{(N,j)} - 5a_{(N-1,j)} + 4a_{(N-2,j)} - a_{(N-3,j)}) \end{cases}$$

which are second order accurate. The similar formulas for y derivatives are straightforward.

4.5. Solution of the pressure equation

To solve the linear elliptic equation of the pressure with appropriate boundary conditions:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{v}^*}{\Delta t} \right) \quad \text{in } \Omega , \quad (4.4)$$

$$B(p) = 0 \quad \text{in } \partial\Omega , \quad (4.5)$$

which is more complicated than the Poisson equation, that would be obtained for a homogeneous fluid, a multigrid method is used. This method presents the advantage of solving the equations (4.4) and (4.5), discretised on N^2 two dimensional grid points, in $O(N^2 \log(N))$ operations which is comparable to FFT based methods. As “Unfortunately there is not a single multigrid algorithm that solves all elliptic problems. Rather there is a multigrid technique that provides the framework of solving these problems” (*Numerical Recipes* Press (1992)), this section is devoted to a description of the method inspired from Briggs & Henson (1987) and used in the present study.

For its ease of implementation central finite difference technique is used to discretize equations (4.4) and (4.5) on a uniform grid G^h of mesh size h . Let $\nabla^h = (\delta^h/r, \delta^h)$ denote the approximate gradient on G^h , δ^h the finite difference approximation of spatial partial first derivative given in paragraph 4.4 and r the aspect ratio of the rectangular computational domain†. Then, the approximate pressure equation, on G^h , can be written as a system of linear equations:

$$A^h p^h = f^h , \quad (4.6)$$

† The use of the aspect ratio transfers the geometrical anisotropy of the grid to the pressure equation and offers the comfort of using a square mesh and thus treats x and y directions in the same way.

Where:

$$A^h = \nabla^h \cdot \left(\frac{1}{\rho^h} \nabla^h \right) \quad \text{on } G^h \quad \text{and} \quad A^h = B^h \quad \text{on } \partial G^h,$$

$$f^h = \nabla^h \cdot \left(\frac{\mathbf{v}^{*h}}{\Delta t} \right) \quad \text{on } G^h \quad \text{and} \quad f^h = 0 \quad \text{on } \partial G^h.$$

The detailed expression of the linear operator A^h is very lengthy and complicated and then not given in the present paper.

Let v^h denote an approximation to the exact solution of the difference equation (4.6). Then the residue, r^h , and the error (the correction), e^h , satisfy the following equations:

$$r^h = f^h - A^h v^h \quad \text{and} \quad A^h e^h = A^h (p^h - v^h) = r^h.$$

The multigrid technique uses the smoothing property of some relaxation schemes, such as the Gauss-Seidel one used in the present calculations, successively on coarser and coarser grids $G^{2h}, G^{4h}, G^{8h} \dots G^{(N_g-1)2h}$ (the descending phase) to get a good approximation of the error (the correction) on successively finer and finer grids $\dots G^{8h}, G^{4h}, G^{2h}, G^h$ (the ascending phase). In these notations N_g is the grid number and it is related to the grid resolution N by $N = 2^{N_g} + 1$. The travel between the different grids is assumed by the restriction operator I_h^{2h} in the descending phase and by the prolongation operator I_{2h}^h in the ascending phase. A pair of descending-ascending phases is called a V-cycle. A V-cycle can be treated with a recursive procedure:

$$v^h \leftarrow V^h(v^h, f^h)$$

1) Relax $\alpha_1(h)$ times on $A^h v^h = f^h$

2) If G^h is the coarsest grid relax α_2 times on $A^h v^h = f^h$

Else: $f^{2h} \leftarrow I_h^{2h}(f^h - A^h v^h)$

$$v^{2h} \leftarrow 0$$

$$v^{2h} \leftarrow V^{2h}(v^{2h}, f^{2h})$$

$$\text{Correct } v^h \leftarrow v^h + I_{2h}^h v^{2h}$$

Relax $\alpha_1(h)$ times on $A^h v^h = f^h$.

In the present calculations the following restriction and prolongation operators are used:

$$I_h^{2h} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}, \quad I_{2h}^h = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

where the coefficients must be interpreted as the fractions of the neighboring values the central point receives, in the restriction case, and the fractions of its own value the central point gives

to its neighbors in the prolongation case. These operators verify the Galerkin condition (*Numerical Recipes* Press (1992), Briggs & Henson (1987)).

Many fashions of combining V-cycles lead to different multigrid methods. The simplest one that consists in applying successively many V-cycles is used. In practice it is found, for example, that only five V-cycles are sufficient to reduce the residue norm, inside G , by a factor of 10^3 with $N = 129$, $\alpha_1(h) = \text{int}(80 h^{0.6} + 2)^\dagger$, $r = 2$ and $\alpha_2 = 100$. As the temporal simulations will be started with a quasi incompressible velocity field giving initial residue norm $O(10^{-3})$, this residue will be $O(10^{-6})$ after five or six V-

[†] Note that for a same time of calculation, the variable number of relaxation sweeps $\alpha_1(h) = \text{int}(80 h^{0.6} + 2)$ is twice more efficient than $\alpha_1 = 7 = \text{constant}$ in reducing the residue by the same factor.

cycles. Then, the choice of small Δt will maintain the residue norm to that value with approximately the same number of V-cycles overall the simulation.

Finally, Dirichlet ($B = \text{Identity}$) and Neumann ($B = \partial/\partial n$, n is the normal direction to $\partial\Omega$) boundary conditions are used. It is found that Neumann boundary condition is more appropriate for the jet flow[†]. However, with Neumann boundary condition the problem is ill posed in the sense that the pressure is determined up to an undetermined constant. This does not matter since only the gradient of the pressure is used in the momentum equations. Furthermore, to eliminate the high wavenumber oscillations of the pressure solution, due to the use of central finite differences on non staggered grid, a compact spatial filter, that confines its effect to high wavenumbers, is used as explained in the next section.

4.6. Spatial filtering

In a one dimensional grid of mesh size h the minimum wavelength is $2h$ corresponding to a maximum wavenumber $k_{max} = 2\pi/(2h) = \pi/h$. The spatial filtering in a direct numerical simulation with central finite differences can be justified by looking at the truncation errors of the differences in the wavenumber space (Fourier space). Using h as a length scale, the exact first derivative of a Fourier mode, $\exp(ikx)$, is $ik \exp(ikx)$ while using the first derivative central difference formula one obtains:

$$\frac{\exp(ik(x+1)) - \exp(ik(x-1))}{2} = i \sin(k) \exp(ikx)$$

leading to a modified wavenumber (Lele (1992)) $w_1(k) = \sin(k)$, $k \in [0, \pi]$. In the same way, the second derivative central difference formula gives $w_2(k) = 2(1 - \cos(k))$ and applying successively two times the first derivative formula gives $w_2(k) = (1 - \cos(2k))/2$. These modified wavenumbers are plotted on figure 9. It is evident from these figures that to get better resolved wavenumbers the grid must be refined ($k_{max}h = \pi = \text{constant}$). Furthermore, for wavenumbers $k \geq k_{max}/2$ a poor approximation to the derivatives is obtained independantly from the resolution. Thus, this range of wavenumbers can be treated by a filter that confines its effects in that range. In addition, the filter can be designed to exactly eliminate the highest wavenumber k_{max} which is a pathological solution of the discretised pressure equation (4.4). Compact filters can do this work very well. Let f_j denote a function value at nodes $x_j = h(j-1)$, $1 \leq j \leq N$ and \check{f}_j the filtered values. A fourth order compact filter (Lele (1992); Slinn & Riley (1998)) that requires solution of a tridiagonal matrix is used. It can be formulated in the following way:

$$\alpha_1 \check{f}_{j-1} + \check{f}_j + \alpha_1 \check{f}_{j+1} = a_1 f_j + \frac{b_1}{2} (f_{j+1} + f_{j-1}) + \frac{c_1}{2} (f_{j+2} + f_{j-2}).$$

Using h as a length scale, the corresponding transfer function, $T(k)$, defined by $\widehat{\check{f}}_j = T(k) \widehat{f}_j$, with Fourier mode solutions:

$$f_j = \widehat{f}_j \exp(ikj), \quad \check{f}_j = \widehat{\check{f}}_j \exp(ikj), \quad k \in [0, \pi],$$

reads:

$$T(k) = \frac{a_1 + b_1 \cos(k) + c_1 \cos(2k)}{1 + 2\alpha_1 \cos(k)}.$$

A family of fourth-order compact filters can be generated when the constraints

$$T(\pi) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{dT}{dk}(\pi) = 0.$$

[†] Dirichlet boundary condition prevents the jet from leaving Ω .

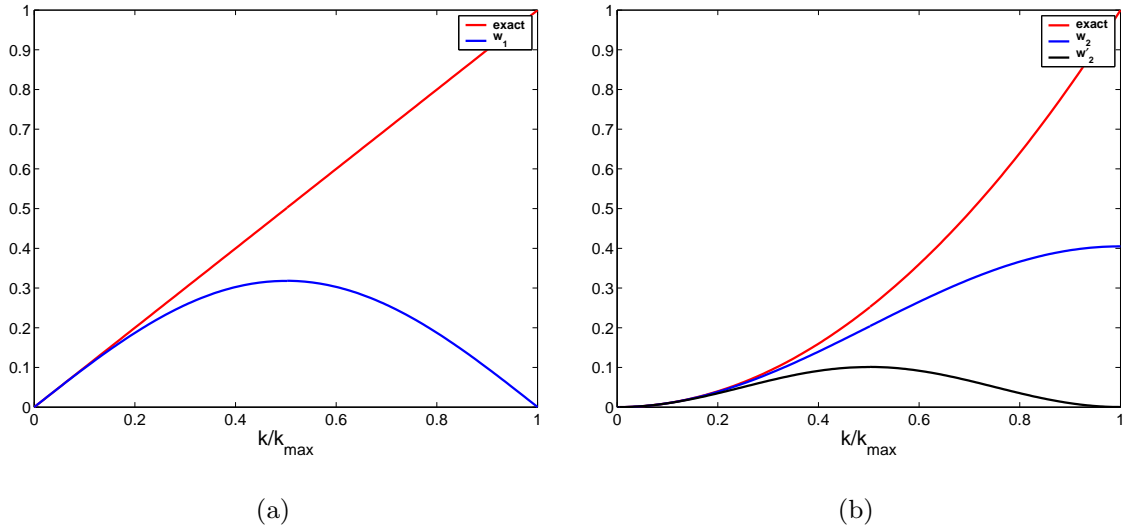


FIGURE 9. Plot of modified wavenumbers versus normalized wavenumbers for the first derivative approximation (a) and for the second derivative approximation (b).

are added[‡]. The coefficients of the filter are then:

$$a_1 = \frac{1}{8}(5 + 6\alpha_1), \quad b_1 = \frac{1}{2}(1 + 2\alpha_1), \quad c_1 = \frac{-1}{8}(1 - 2\alpha_1).$$

A filter with $\alpha_1 = 0.4$ is used and the corresponding transfer function is plotted on figure 10. For the boundary nodes explicit fourth order formulation that exactly filter $k = \pi$ wave is used:

$$\begin{aligned} \check{f}_1 &= \frac{15}{16}f_1 + \frac{1}{16}(4f_2 - 6f_3 + 4f_4 - f_5), \\ \check{f}_2 &= \frac{3}{4}f_2 + \frac{1}{16}(f_1 + 6f_3 - 4f_4 + f_5). \end{aligned}$$

Finally, to obtain a two dimensional filter two sweeps of the one dimensional filter are orthogonally applied and a check that the relative energy of the filtered function is diminished by less than 10^{-6} , compared to that of the initial function, is done.

4.7. Boundary conditions

The fact that this part requires fine tuning to get accurate results in a direct simulation is underlined. Several methods are tried and most of them did not work in the present study.

4.7.1. Inflow

At the inlet Γ_{in} , the entrance velocity and density profiles are simply enforced using the basic profiles presented in the linear study:

$$u(0, y, t) = U_0(y), \quad U_0(y) = \frac{1}{1 + \sinh(y)^{2n}}$$

[‡] Note that the first constraint is exactly what is needed to eliminate the highest wavenumber pathological solution of the pressure equation if the filter is applied to the pressure.

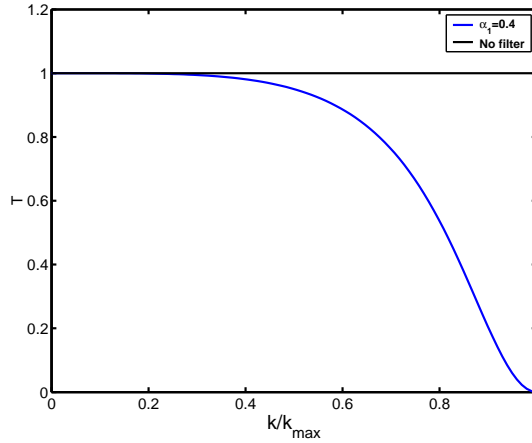


FIGURE 10. Plot of the transfer function of the fourth order compact filter with $\alpha_1 = 0.4$. Note that most of its effects are confined to $k/k_{max} \geq 0.5$

and

$$\rho(0, y, t) = \rho_0(y) = 1 + (s - 1)U_0(y), \quad s = \frac{\rho_0(0)}{\rho_0(\infty)} = \rho_0(0),$$

whereas the transverse velocity $v(0, y, t)$ is set to zero.

In these simulations, two profiles are mainly used (Fig. 1):

- $n = 1$: this is the sech^2 profile also called Bickley jet. The velocity gradients are moderate and this profile allows low resolution runs ($N \geq 129$);
- $n = 4$: this is what is called, herein, a “top-hat like” profile since it has a nearly zero gradient part in the center whereas the lateral gradients are large but finite. The stiffness is anyhow larger than in the Bickley jet. To get accurate results, higher resolution ($N \geq 257$) is required.

Apart from this boundary condition, the other ones (outflow and lateral conditions) are not physical: they are required because of the finite size of the simulation domain. Ideal boundary conditions do not exist: whatever you do, you get perturbations on your result inside the domain. Good boundary conditions are compromises between what you want (let the fluid out) and corollary effects you do not want (perturbations inside the calculation domain).

4.7.2. Outflow

The main difficulty of the outflow condition is that it should let the fluid leave the calculation domain without any rebound effect (see Givoli (1991); Gresho (1991) for a review). Several outlet boundary conditions on Γ_{out} were tried. The free shear stress one, $\partial u / \partial y + \partial v / \partial x = 0$, induces spurious reflection and increases the divergence of the velocity field inside the domain. Free advection condition:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \alpha \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad \text{with} \quad \alpha = \begin{cases} u(L_x, y, t) & \text{if } u(L_x, y, t) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where a represents any base quantity, is unable to maintain the velocity divergence at low values inside the domain: the divergence increases until calculation explodes. The main problem of this boundary condition is that if $u < 0$ somewhere on the border the excess of a accumulates and is not advected downstream. In the usual convection condition, used

DNS of variable density plane jets

17

for example by Boersma *et al.* (1998), α is the mean velocity over the outflow boundary; this condition does not provide good results since it artificially increases the jet width.

Finally, a null normal velocity derivative is imposed: this is the best compromise of all other methods used before.

4.7.3. Lateral conditions

On lateral limits $\Gamma_{\text{bottom}} \cup \Gamma_{\text{top}}$, boundary conditions should not suck up the fluid. Practically, the normal derivatives of the longitudinal velocity and the value of the normal velocity are set to zero. As a consequence, such boundary conditions reduce the deviation possibility for the jet: it gives priority to the downstream direction.

Nevertheless, this is not a perfect solution since, if the jet spreads enough to get close to these limits, rebound effect can occur. Another solution is to use a lateral damping function. This is easy to implement and is widely used in direct numerical simulation (see for example Slinn & Riley 1998; Stanley, Sarkar & Mellado 2002; Bhaganagar, Rempfer & Lumley 2000) but it reduces the physical calculation domain and it is not used in the present work.

4.8. Flux correction

The projection (4.1) associated with Neumann boundary condition requires another condition, with those mentioned before, to be compatible with divergence-free condition. Let us integrate (4.1) over the calculation domain and use Ostrogradski's theorem:

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \mathbf{n} \, d\ell = -\frac{1}{\Delta t} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} \, d\ell.$$

Since the normal derivative of the pressure is supposed to be zero, the right handside of this equation must be zero as well. This means that the sum of the normal velocity on the limit of the domain must vanish. Up to now, no such condition is enforced to the velocity field. For this purpose, a repartition function G is defined:

$$G(\alpha_i) = \frac{\exp(-(\alpha_i/D)^2)}{\sum_{m=0}^{N-1} \exp(-(\alpha_m/D)^2)} \quad \text{with} \quad \alpha_i = y_i - \frac{L_y}{2}, \quad (4.7)$$

where D is the diameter of this gaussian function and $y_i = ih_y$ for some integer i between 0 and $N-1$. Then $u^*(L_x, y_i)$ (longitudinal velocity at the outflow boundary) is incremented with a small velocity component:

$$u^*(L_x, y_i) \longleftarrow u^*(L_x, y_i) + \sum_{m=0}^{N-1} (u^*(0, y_m) - u^*(L_x, y_m)) G(\alpha_i). \quad (4.8)$$

This ensures that the total velocity flux is null. This correction is small when the jet goes through the calculation domain because the sum of the outflow speed is approximately equal to the sum of the inflow velocity.

4.9. Tests and code validation

4.9.1. The linear approximation

To test the numerical computations of the procedure described in the previous sections, § 4.1 to 4.8, the linear impulse response of equations (4.3) on Ω is calculated and it is tried to recover the dispersion relations obtained by diagonalisation and shooting methods in section 3. Thus, equation (4.3) is linearised around the mean parallel variable density

flow $(\mathbf{U}_0, P_0, \rho_0)$, given in section 3, which is supposed to be a steady solution of the Navier-Stokes equations[†]. The velocity in the downstream direction is noted $U_0 + u$, in the spread direction v and the density is $\rho_0 + \rho$. Equations (4.3) can then be rewritten at leading order in (u, v, ρ) :

$$\begin{cases} \frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -U_0 \frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n \frac{dU_0}{dy} + \frac{1}{Re} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} - \frac{\rho^n}{\rho_0} \frac{d^2 U_0}{dy^2} \right), \\ \frac{v^* - v^n}{\Delta t} = -U_0 \frac{\partial v^n}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \right), \\ \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right) = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}, \\ u^{n+1} = u^* - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \Delta t \quad \text{and} \quad v^{n+1} = v^* - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \Delta t, \\ \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \left(u^n \frac{\partial}{\partial x} + v^n \frac{\partial}{\partial y} \right) \rho_0 + U_0 \frac{\partial \rho^n}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Since there are mainly two instability modes:

- the sinuous mode with y antisymmetric longitudinal velocity,
- and the varicose mode with y symmetric longitudinal velocity,

different gaussian perturbations, that mimic the Dirac δ function, are used as initial conditions to excite each mode (see figure 11). To get the sinuous mode, the gaussian perturbation is centered on $(x_1, y_1 = L_y/2)$ where x_1 is near the entrance. The following expressions are retained at $t = 0$ (see for example Delbende *et al.* (1998)):

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = -\epsilon \frac{y - y_1}{a} e^{-((x-x_1)/a)^2} e^{-((y-y_1)/a)^2}, \\ v(x, y, 0) = \epsilon \frac{x - x_1}{a} e^{-((x-x_1)/a)^2} e^{-((y-y_1)/a)^2}, \end{cases} \quad (4.10)$$

where a is the length scale of the perturbation, such that the δ function is recovered in the limit $a \rightarrow 0$, and ϵ is the small amplitude of the perturbation. For the varicose mode two identical gaussian perturbations which are symmetrically arranged and superposed at the same x_1 position are used:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \epsilon \left(\frac{y - y_2}{a} e^{-((y-y_2)/a)^2} - \frac{y - y_3}{a} e^{-((y-y_3)/a)^2} \right) e^{-((x-x_1)/a)^2}, \\ v(x, y, 0) = \epsilon \frac{x - x_1}{a} \left(e^{-((y-y_2)/a)^2} - e^{-((y-y_3)/a)^2} \right) e^{-((x-x_1)/a)^2}, \end{cases} \quad (4.11)$$

where y_2 and y_3 are taken near the inflection points of the basic velocity profile.

These perturbations are divergence-free: this is important to avoid a spurious velocity field which could enter the calculation domain to compensate non vanishing velocity divergence.

For each density ratio, the perturbation flow (only the perturbation is evaluated since the parallel flow remains undisturbed) is computed on a time duration which is long enough to get the linear growth rate but short enough to avoid nonlinear effects from the boundaries. An example of the Green functions obtained is reported in figure 12. After

[†] Of course this is true for $Re = \infty$.

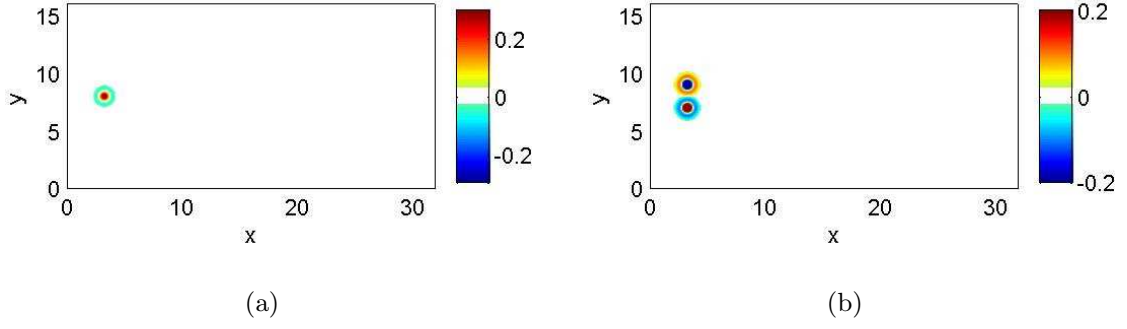


FIGURE 11. Initial vorticity condition used to get the impulse response of the sinuous (a) and the varicose mode (b).

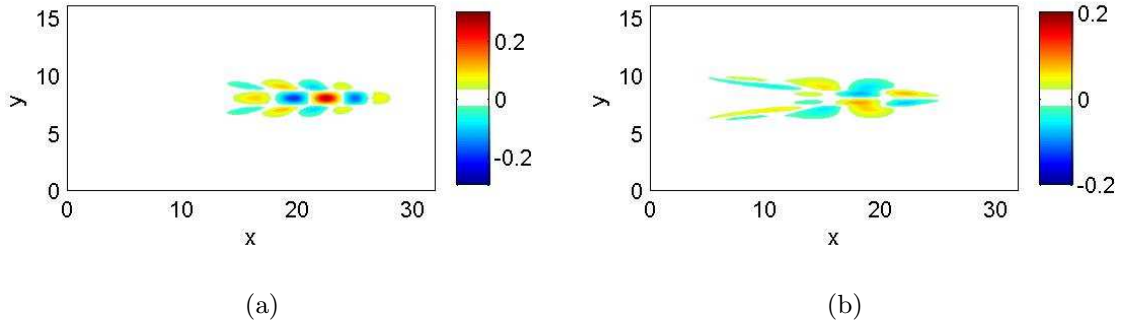


FIGURE 12. Green function of the vorticity of the sinuous (a) and the varicose mode (b). These views are at the same time for $s = 1$.

this, the linear temporal growth rate is calculated through a simplified Fourier analysis which leads to the results presented in the next paragraph.

4.9.2. Linear analysis by direct numerical simulations

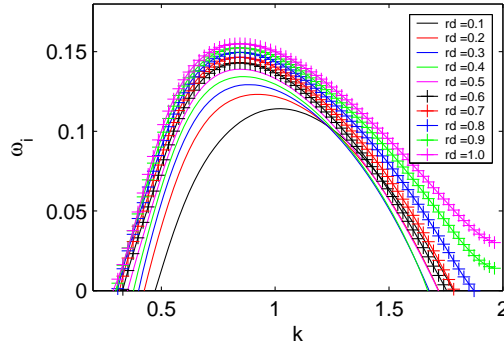
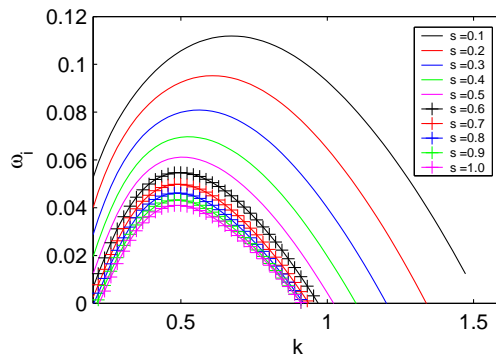
Following Delbende *et al.* (1998), Fourier method is used to analyze the results provided by direct numerical simulations in the linear approximation. The runs are 500 timesteps long when $N = 129$ (with this duration, the initial perturbation is convected through the domain but the nonlinear influence of the borders remains small). Analyses are performed on 50 of these 500 views of the flow (one each 10 timesteps). For greater resolution, 50 views are analyzed as well but the set is 1000 timestep long ($N = 257$) or 2000 ($N = 513$). Since the timestep is divided by 2 when the resolution is increased by 2, all the analyzed sequences have the same duration.

On each of the 50 records, a discrete Fourier transform in x direction is evaluated:

$$a_k(y, t) = \sum_x A(x, y, t) \exp(-i k x 2\pi / L_x),$$

where A is any physical base quantity[†]. For a local linear growth, it is found that the scenario of the spatial expansion is self-similar in y direction so it is possible to use the

[†] the vorticity is used.

FIGURE 13. Temporal growth rate ω_i of the sinuous mode for various density ratios s .FIGURE 14. Temporal growth rate ω_i of the varicose mode for various density ratios s .

mean value of each $a_k(y, t)$ in y direction:

$$\tilde{a}_k(t) = \frac{1}{N} \sum_y |a_k(y, t)|^2.$$

Following the linear analysis, the $\tilde{a}_k(t)$ should be given by:

$$\tilde{a}_k(t) = a_0 \exp(\sigma(k) t).$$

To evaluate the exponential growth rate, two different times t_1 and t_2 ($t_2 > t_1$) are chosen and a logarithmic derivative to get the temporal dispersion relation is calculated:

$$\sigma(k) = \frac{d \ln \tilde{a}_k}{dt} \simeq \frac{\ln(\tilde{a}_k(t_2)) - \ln(\tilde{a}_k(t_1))}{t_2 - t_1}.$$

4.9.3. Linear temporal growth rate

The density ratio, s , is varied between 0.1 and 1. The growth rates of the sinuous mode are presented on figure 13. The maximum of each curve is not strongly affected by the density ratio (variations of $\sigma_{\max} = \max_k(\sigma(k)) = \sigma(k_{\max})$ and k_{\max} are about 30% while density ratio is divided by 10).

For the varicose mode growth rates are shown on figure 14. Note that k_{\max} is just slightly affected by the density ratio whereas the corresponding growth rate increases when the density ratio decreases.

This evolution is different from the sinuous one since in that case, the growth rate decreases with the density ratio. As a consequence, the most unstable mode is the sinuous one for density ratio above 0.2 but both modes are practically of the same importance

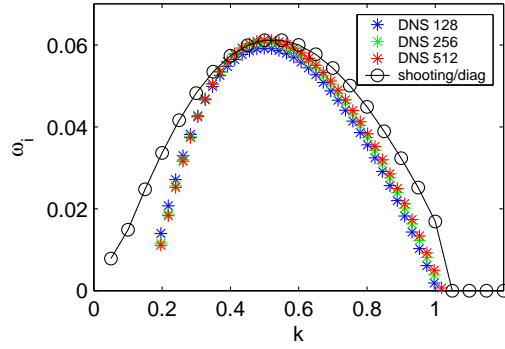


FIGURE 15. Comparison of temporal growth rate of the varicose mode, calculated with the linear analysis, and that obtained by direct simulation of the linearized Navier-Stokes equations for $s = 0.5$.

if s is close to 0.1. Thus, both modes should grow for low density ratio. Compared with the linear analysis of section 3, the results of the present calculations are good and the agreement is better, as it should be, if the resolution is increased as shown on figure 15 (varicose mode). Note that the direct numerical calculations capture the maximum of the dispersion relation quite well at a low resolution: the difference with the “semi-analytical” calculations performed in section 3 is less than 3% with 129 points and neglectful with 513 points.

Nevertheless, a “perfect” agreement for the entire dispersion relation can not be reached since hypotheses are different in both cases. Indeed, in the linear analysis performed in section 3 the calculation is over an infinite domain with a perfect zero-limit for the calculated eigen modes whereas in the linear impulse response, obtained by direct simulation, the calculation domain is bounded. As a consequence, the results for small k (large wavelength) cannot be satisfactorily resolved. Furthermore, the study of section 3 is inviscid whereas the direct simulation is performed with large but finite Reynolds number ($Re = 1000$ in the present computations). This point may explain the discrepancy for large k values for which the viscosity is active.

4.10. First glance at a full nonlinear simulation

The nonlinear equations (4.3) are now simulated using two kinds of initial conditions:

- Either a zero initial velocity and a uniform density on the calculation domain:

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0 \quad \text{and} \quad \rho(x, y, 0) = 1 \quad \text{in } \Omega;$$

- Or the longitudinal velocity is initiated with the basic profile of section 3, for all x , and the transverse velocity, v , with zero. This leads to an initial parallel flow in the calculation domain:

$$u(x, y, 0) = U_0(y), \quad v(x, y, 0) = 0, \quad \rho(x, y, 0) = \rho_0(y) \quad \text{in } \Omega.$$

Note that for both cases the basic profile is not fixed overall the simulation and the jet is *free* to evolve in the computational domain contrarily to the works of Delbende *et al.* (1998) and Pier & Huerre (2001) on wakes.

In the first case, the first steps of calculation are reserved to let the fluid go through the domain. In doing so, the two characteristic Kelvin-Helmholtz starting vortices are observed (see figure 16).

Similarly, in the second case, since the parallel flow is not an exact solution of the Navier-Stokes equations, the first time steps are reserved to adjust this flow to a solution

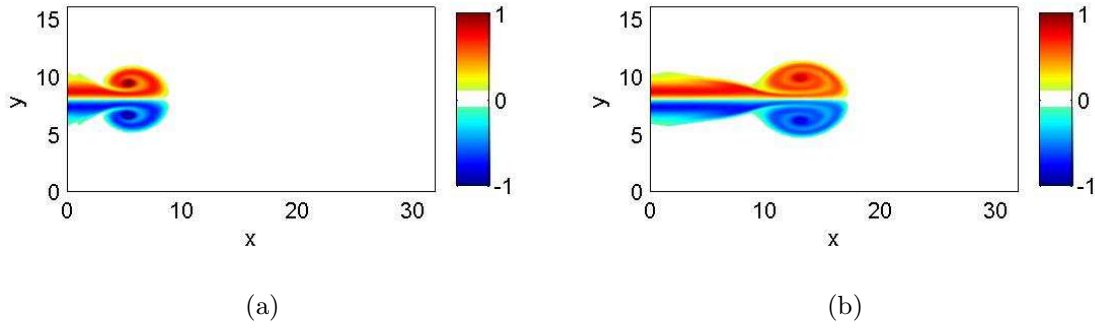


FIGURE 16. Vorticity in the calculation domain after (a) 600 and (b) 1200 timesteps in the case of an initialization on the entrance border ($s = 1$, $N = 257$).

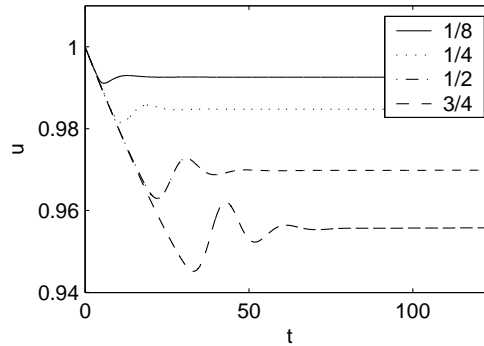


FIGURE 17. Axial velocity during first steps when initializing with a parallel flow ($s = 1$, $N = 257$, the first 4000 timesteps are shown).

(see figure 17). This case requires less time steps than the previous one. For this reason, it is mainly used to initiate the calculations. For example, after about 1000 timesteps when $N = 129$, the calculated flow is a laminar solution of the Navier-Stokes equation. It can be seen on figure 18 that in such a case, the longitudinal velocity profiles are almost uniform on the calculation domain and the transverse ones are relatively small in amplitude.

Nevertheless, the first method is interesting: it is a good test to check the validity of boundary conditions. Since there is no gravity, and so no privileged direction, the jet could, at least cost, turn to leave the calculation domain from the sides $\Gamma_{\text{bottom}} \cup \Gamma_{\text{top}}$ rather than going through the domain and leave from Γ_{out} . Such a “bad” behavior is obtained when boundary conditions used at the outlet are not enough permeable.

After the laminar solution of the Navier-Stokes equation has been reached, truncation errors, although double precision floating point is used, are sufficient to start an instability. The streamwise velocity is plotted, in the middle of the computational domain, against time on figure 19 and a frequency is measured: $\omega/(2\pi) = 0.35/(2\pi)$. It corresponds to the frequency of the most unstable sinuous mode (see 3.2) in the spatial calculations[†]. Note that for the sinuous mode no saturation state is found in spite of the fully nonlinear evolution. The amplitude of the oscillations increases until the jet touches the lateral sides for all L_y used.

[†] This is also a validation of the numerical computations in the nonlinear regime.

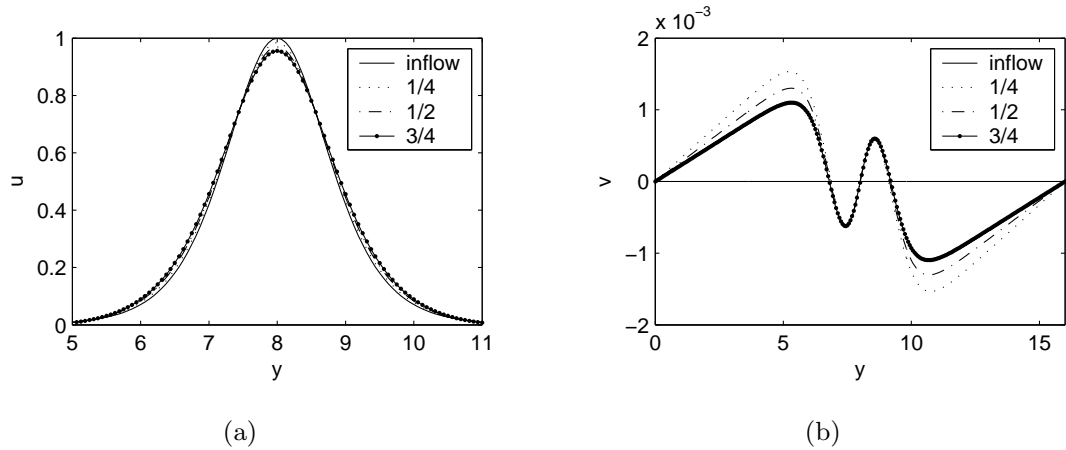


FIGURE 18. Velocity profiles at various positions after the initial disturbance has been convected out of the calculation domain: Longitudinal (a) and spanwise (b) velocities ($s = 1$, $N = 257$, after 4000 timesteps).

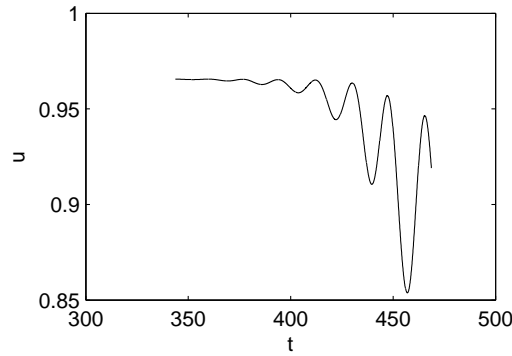


FIGURE 19. Axial velocity in the middle of the calculation domain after the establishment of the exact laminar solution of the Navier-Stokes equations (2000 timesteps are shown, $s = 1$, $N = 129$).

4.11. Nonlinear Results

A set of simulations for various density ratios and inflow profiles is performed. Let us study what occurs for the jet when the calculations are started with a parallel flow.

4.11.1. The Bickley jet

As stated in the introduction, experimental observations show that the dynamics of plane jets change when density ratio decreases. For high values of s the sinuous mode is mainly observed whereas for low s , one observes the varicose mode. According to Yu & Monkewitz (1993), this behavior occurs for a lower density ratio, s , than a critical one, s_{ca} , and is governed by the convective/absolute transition of the varicose mode (the sinuous mode does not show a transition).

Nevertheless, since the spatial linear growth rate of the varicose mode (see §3.2) becomes greater than the sinuous one for lower s , *before* the transition occurs, this assumption should be made clearer especially that the critical value, s_{ca} , found by Yu and Monkewitz, in their experimental work and linear instability analysis for an unbounded domain, is contested by the experimental work of Raynal *et al.* (1996). This is the main goal of the present section.

Before the convective/absolute transition ($s > s_{ca} \simeq 0.145$), the sinuous mode is the main mode and it is growing as it can be seen on figure 20. Lowering s , the jet ceases to touch lateral boundaries and becomes varicose consistently with the linear study. Around the transition, the behavior of the jet is closer and closer to an oscillator. The initial perturbation, coming from the fact that initial conditions are exact solutions of Euler equations but not Navier-Stokes ones, produces more remanant oscillations than those in figure 17 but which also relax. The whole jet does not oscillate in a self sustained manner for $s = 0.2$: closer to the inlet of the jet oscillations vanish more quickly than those closer to the outlet (figure 21). Thus, this mode is global but not self sustained. The angular frequency is $\omega \simeq 0.2$ at 3/4 of the calculation domain (right view on figure 21). It is in good agreement with the angular frequency of the spatial varicose mode having the maximum growth rate predicted by the linear theory (figure 5). But this is the angular frequency of the transition as well.

After the linear predicted transition, the evolution is governed by the varicose mode. The initial perturbation excites several modes but the Bickley jet responds with a single frequency. Nonlinear terms balance the linear growth rate. The main difference with a simulation close to the transition is that now a global mode is well installed: the same pure frequency can be observed at various stations in the flow (figure 22). This frequency is also observed far below the transition in agreement with Dee and Langer local marginal absolute instability criterion although the dynamics is fully nonlinear. A sequence of the varicose mode evolution in this case is given in figure 23. The main results of these computations are summed up in table 2.

Is this behavior due to the convective/absolute transition as supposed by Yu & Monke-witz (1993)? The global oscillations observed are important to affirm that the transition is the key point to explain the change in the flow evolution. But, since for the Bickley jet the double root in k of the dispersion relation (the “pinching”), signalling the transition, occurs at the maximum of the linear growth rate curve, one is still not totally sure: the global mode observed could be the resonance of the most amplified mode with the non periodic boundary conditions used for example.

4.11.2. *the top-hat like jet ($n = 4$)*

To definitely show that the convective/absolute transition explains the evolution of the flow for $s < s_{ca}$, simulations with a top-hat like profile ($n = 4$ in the expression of U_0) are performed. This profile is interesting because the locations of the double root in k and of the maximum of the growth rate curve are well separated as shown on figure 7: the maximum of the growth rate for $s \simeq s_{ca}$ is at an angular frequency about $\omega = 1.2$ whereas the location of the double root in k is at $\omega = 0.77$. This difference is large enough to get a clear answer to the question. However, as mentioned in §4.7.1, such a profile is more difficult to simulate since it is stiffer. For this reason, all the runs are mainly done with $N = 513$. Surprisingly, for $s = 1$, before the linear predicted transition which occurs at $s_{ca} = 0.935$, the jet behaves like an oscillator with the angular frequency of the transition and not in a convective fashion with the angular frequency of the maximum growth rate as one can expect! Different values of s , far from the transition, are then tried. It is found that the jet behaves as an oscillator for all the density ratios. For $s \geq 0.75$ (a nonlinear computed value) the oscillations are dumped and ω depends on s . However, the oscillations are self sustained for $s < 0.75$ with a well defined angular frequency $\omega \simeq 0.66$ which is not the value predicted by linear instability theory. The main results of these computations are summed up in table 2 and on figures 24 to 28.

A plausible explanation of the behaviour of the top-hat like jet as an oscillator for all the values of s used may be obtained by looking at the analytic dispersion relation of a

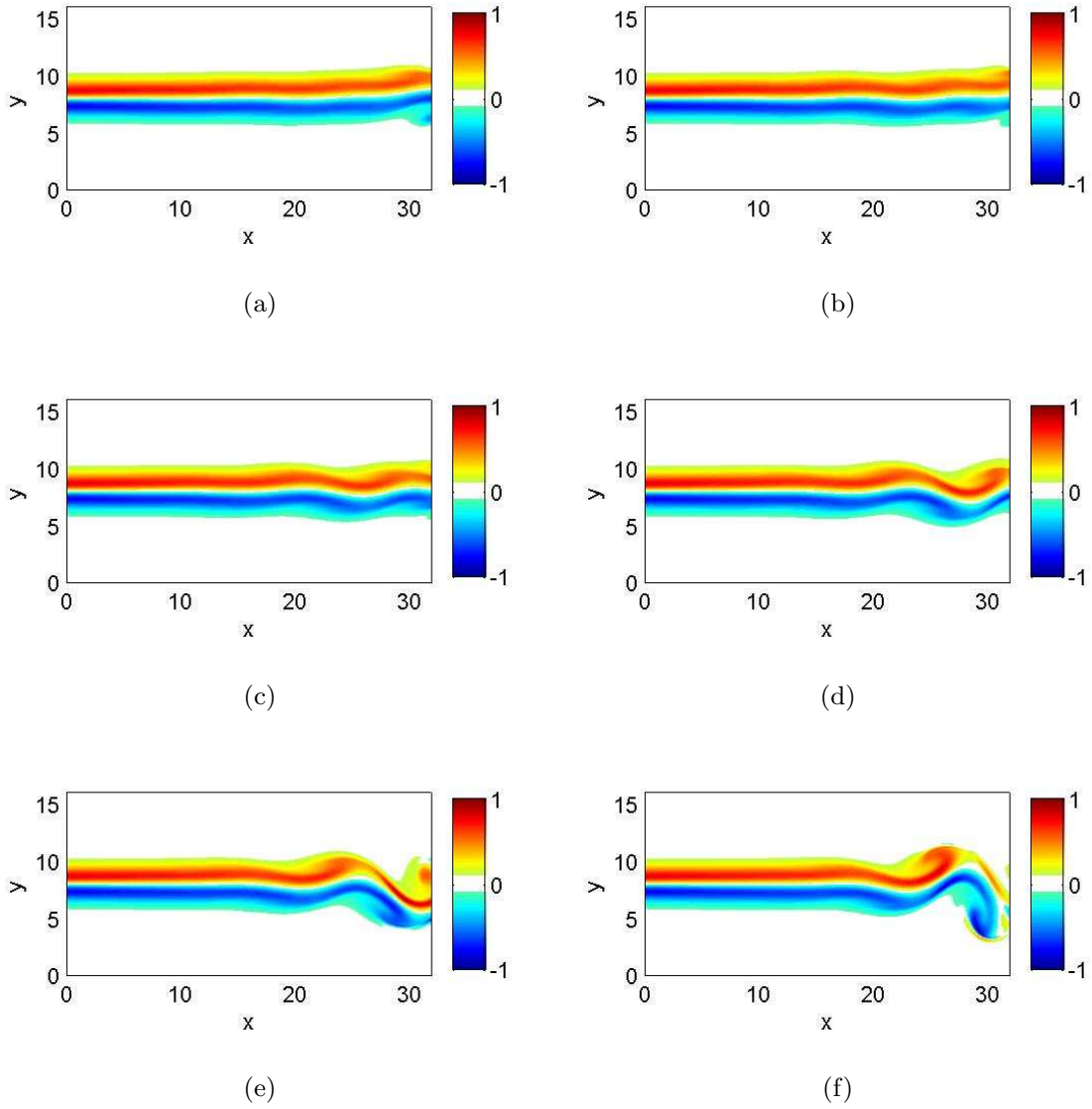


FIGURE 20. Sequence of a simulation before the convective/absolute transition (vorticity, $s = 0.3$, $N = 257$ and $n = 1$. Each view is separated by 300 timesteps).

top-hat jet ($n = \infty$). This relation reads (Huerre & Monkewitz (1990); Yu & Monkewitz (1993)):

$$s(2 - \frac{2\omega}{k})^2 = (\frac{2\omega}{k})^2 a(k),$$

where $a(k) = -\tanh(k)$ for the varicose mode and $a(k) = -1/\tanh(k)$ for the sinuous one. It presents the symmetry of a general Rayleigh equation: the solutions are complex conjugate. Furthermore it admits, for all s , two complex conjugate saddle points with $\text{Re}(\omega_0)/\text{Re}(k_0)$ not in the range of U_0 , i.e. $\text{Re}(\omega_0)/\text{Re}(k_0) > \max_y(U_0(y))$, as shown in figure 29 when $s = 1$ for example. Therefore, the corresponding inviscid eigenfunctions are the asymptotic limit of the Orr Sommerfeld ones as $Re \rightarrow \infty$ (Ledizès *et al.* (1995)). Consequently, the top-hat and, eventually, top-hat like jets are absolutely unstable for all density ratios. So, the selected frequency is due to a nonlinear mechanism.

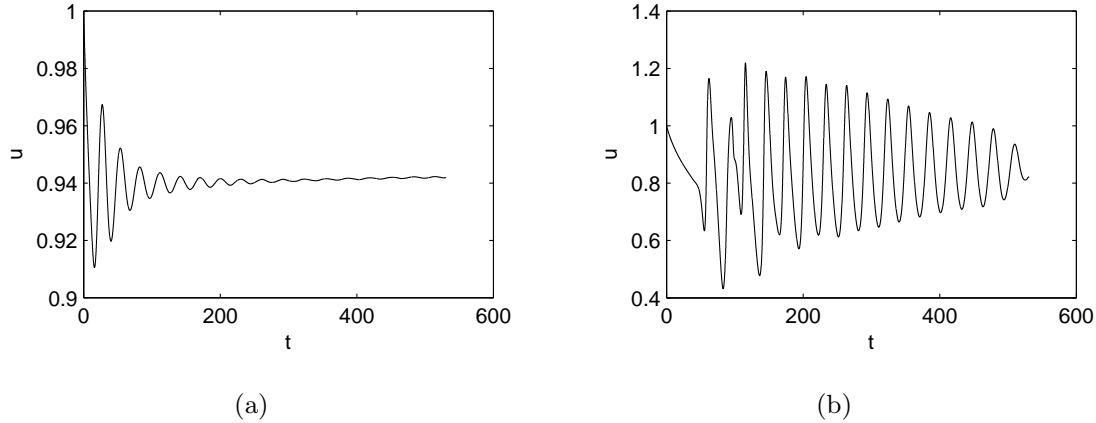


FIGURE 21. Downstream velocity at 1/4 of the calculation domain (a) and at 3/4 (b) ($s = 0.2$, $N = 257$, $n = 1$).

One may ask if the same arguments could be extrapolated to the Bickley jet? However, in this case $\text{Re}(\omega_0)/\text{Re}(k_0)$ is in the range of U_0 and the extrapolation could be done only if there are no large viscous intervals, on the y axis, where the Orr-Sommerfeld eigenfunction does not reduce to a solution of the Rayleigh equation when $Re \rightarrow \infty$ (Ledizès *et al.* (1995)). But if this is the case, s_{ca} should be understood as a convective/absolute transition from an always convectively unstable sinuous mode, for which no saddle point is found, to an always absolutely unstable varicose mode when lowering the density ratio. Indeed, according to the linear theory, when s decreases the maximum growth rate of the varicose mode increases and overshoots the sinuous one. In fact, these extrapolations are wrong since the varicose initial perturbation, coming from initial conditions which are not exact solutions of the Navier Stokes equations, are convected outside the domain. When lowering s , the varicose mode becomes marginal absolute and the nonlinear calculations show that the Bickley jet behaves as an oscillator, at the corresponding marginal angular frequency, for values of s far below s_{ca} according to Dee and Langer's selection criterion. Thus, the transition observed in the Bickley jet is really a convective/absolute one of the varicose mode alone.

4.11.3. Associations of vortices: pairing

Nonlinear terms may lead to coupling between vortices. Pairing may then be observed on temporal views or on the power spectrum of a temporal velocity signal (figure 30). On the power spectrum, it is found that the first subharmonic of the main frequency (the fundamental) is much more important than the main mode. This result was already established, experimentally, by Yu & Monkewitz (1993). It is also found, only for a varicose global mode with $n = 4$, that the fundamental is typically observed in the first quarter of the computational domain whereas the first subharmonic is observed in the remaining part as shown in figures 24 to 28.

4.12. Influence of the Reynolds number

All the previous simulations are mainly done with a "calculus" Reynolds number equal to 1000. In this paragraph, the influence of this parameter is investigated.

As expected, when Re decreases, the viscosity has a damping effect on the instabilities. For $Re > 500$, the difference with the case $Re = 1000$ is small even if the diffusive effect is progressively noticed. For $200 < Re < 500$, the initial perturbation which leads

DNS of variable density plane jets

27

n	Mode	s_{ca}	$\omega_r^0(k_0; s_{ca})$	$\omega_r(\max(-k_i); s_{ca})$	Re
1	Sinuous	-	-	-	∞
1	Varicose	0.145	0.21	0.21	∞
4	Sinuous	-	-	-	∞
4	Varicose	0.935	0.77	1.07	∞

TABLE 1. Summary of linear predictions

n	s	Observed mode	$\frac{s-s_{ca}}{s_{ca}}$	ω	$\frac{\omega-\omega_r^0(k_0; s_{ca})}{\omega_r^0(k_0; s_{ca})}$	L_x	$\frac{L_x}{L_y}$	N	$\frac{\delta\omega}{L_y} N$	T	Re
1	1	Sinuous	-	0.35	-	32;64	2	129;257	10;20	480	700;1000
1	0.3	Sinuous	-	0.25	-	32;64	2	129;257	10;20	650	700;1000
1	0.2	Varicose	0.38	0.2	-0.05	32;64	2	129;257	10;20	650	700;1000
1	0.13	Varicose	-0.1	0.2	-0.05	32;64	2	129;257	10;20	650	700;1000
1	0.1	Varicose	-0.31	0.21	0	32;64	2	129;257	10;20	650	700;1000
4	1.5	Varicose	0.6	0.9	.17	32;64	2	257;513	5;10	250	700;1000
4	1.2	Varicose	0.27	0.85	0.10	32;64	2	257	5	250	700;1000
4	1	Varicose	0.07	0.77	0	32;64	2	257;513	5;10	250	700;1000
4	0.8	Varicose	-0.14	0.68	-0.12	32;64	2	257;513	5;10	250	700;1000
4	0.7	Varicose	-0.25	0.67	-0.13	32;64	2	257;513	5;10	250	700;1000
4	0.6	Varicose	-0.36	0.64	-0.17	32;64	2	257;513	5;10	250	700;1000

TABLE 2. Summary of nonlinear results

to counter-rotating vortices is damped rather quickly and there is a well defined time separation between this initial perturbation and the development of the sinuous mode.

5. Conclusion

Free evolving, variable density and incompressible plane jets have been studied in the linear and nonlinear regimes. The linear study was performed using diagonalisation and shooting, two complementary methods, to solve the variable density Rayleigh equation both in temporal and spatial stability frameworks. It is found that the jet is subject to varicose (asymmetrical deformation) and sinuous (symmetrical deformation) unstable modes. When the density is constant, the sinuous mode dominates. Lowering the density enhances the varicose mode which becomes dominant before undergoing a convective/absolute transition. Only the varicose mode is found to present such a transition. The main results of the linear study are summarized in table 1. The pertinence of these linear results to a more realistic nonlinear evolution was then tackled by direct numerical simulation of the incompressible variable density Navier-Stokes equations. A computational procedure has been developed based on a multigrid method to solve the pressure equation which is more complicated than the classical Laplace equation one obtains in the constant density case. Many boundary conditions are tested and the best ones are reported. The procedure developed has been checked by reproducing the linear results, obtained in the first part of the study, when the nonlinear terms of the Navier-Stokes equations are linearised about a main profile. Once the procedure is tested, nonlinear computations are conducted and the main results are summarized in table 2. The nonlinear study has shown that for the Bickley jet, $n = 1$, the nonlinear evolution is well predicted by a local linear marginal absolute instability criterion: the jet undergoes self sustained oscillations (global mode) at a well defined frequency with a corresponding Strouhal number $S_t \simeq 0.06$, based on the jet diameter, for a density ratio $s < s_{ca} = 0.145$. These values coincide with those computed linearly by a local convective/absolute transition. Contrarily, for the top-hat like jet, $n = 4$, the linear study fails: it predicts global behavior for $s < s_{ca} = 0.935$ and a corresponding Strouhal number $S_t \simeq 0.25$. However, global modes are nonlinearly observed for all the values of s used. For $s \geq 0.75$ (a nonlinear computed value) the oscillations are damped and S_t depends on s . The oscillations are self sustained for $s < 0.75$ with a well defined $S_t \simeq 0.21$. This may explain the discrepancy between the experimental studies of Yu and Monkewitz and those of Raynal *et al.*: for a top-hat (or a top-hat like) jet global behavior is possible for all the values of s but self sustained oscillations are favored for $s < 0.75$ and therefore are much likely to occur in that range in agreement with the $s < 0.7$ found in the experimental work of Raynal *et al.*. A tentative explanation of the global behavior observed in the top-hat like jet for all values of s is also given. It is based on solutions of Squire equation that are also solutions of the Rayleigh equation, in the limit $R_e \rightarrow \infty$, when the phase velocity is greater than one.

Fruitful discussions with S. Ledizès, P. A. Monkewitz and E. Villiermaux are acknowledged.

DNS of variable density plane jets

29

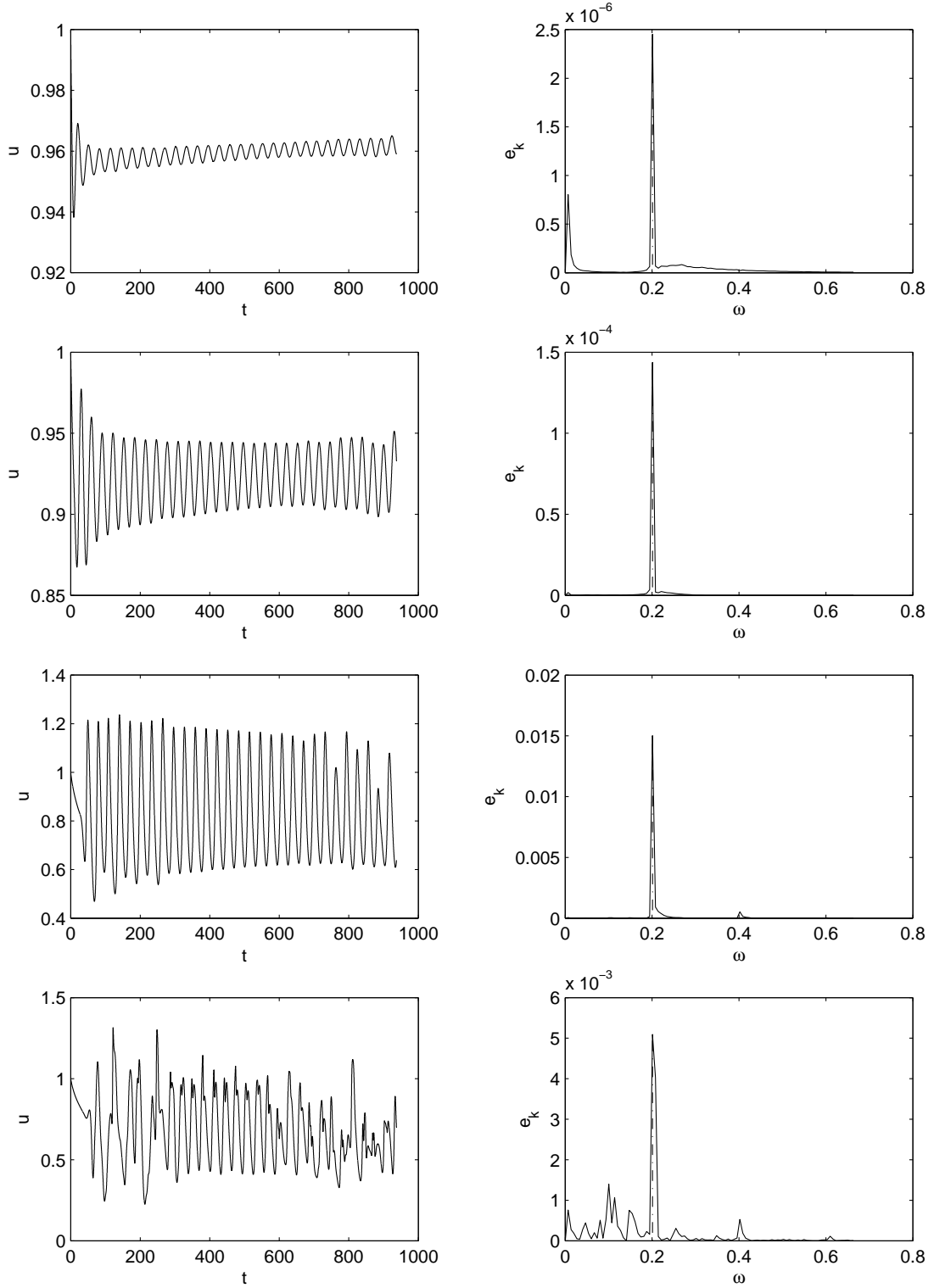


FIGURE 22. Global mode. From top to bottom, velocity u at $1/8$, $1/4$, $1/2$, $3/4$ of the computational domain for the Bickley jet. On the left, $u(t)$; on the right, the associated power spectrum $e_k(\omega)$ ($s = 0.13$, $n = 1$, $N = 257$, 30000 timesteps are shown). This is clearly a self sustained oscillator behavior at an angular frequency $\omega = 0.20$. The corresponding Strouhal number, defined by $S_t = 2fL/U$ is $S_t = 0.06$.

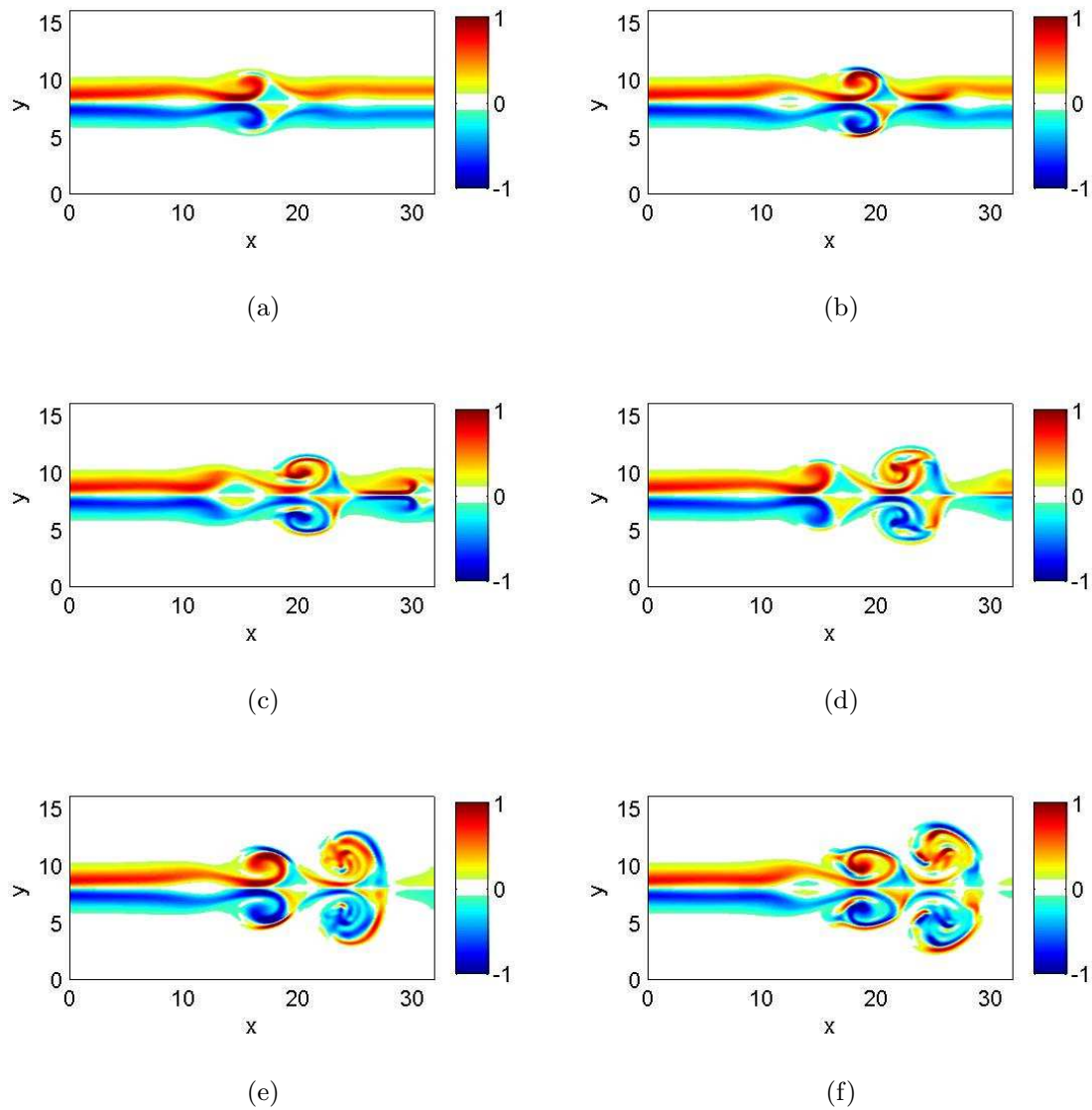


FIGURE 23. Sequence of a simulation after the convective/absolute transition (vorticity, $s = 0.1$, $N = 257$ and $n = 1$. Each view is separated by 300 timesteps).

DNS of variable density plane jets

31

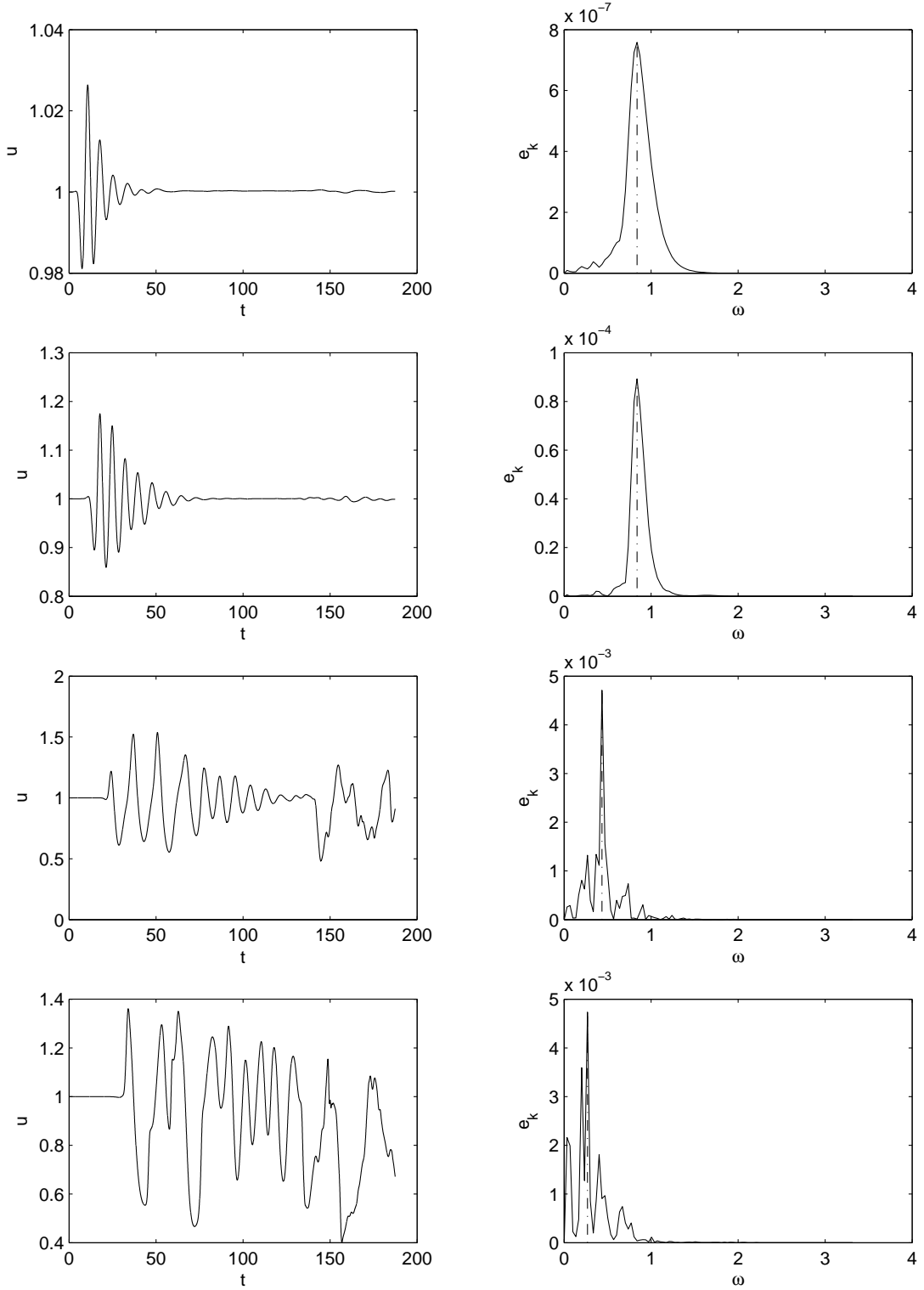


FIGURE 24. Global mode. From top to bottom, velocity u at $1/8$, $1/4$, $1/2$, $3/4$ of the computational domain for the top-hat like jet. On the left, $u(t)$; on the right, the associated power spectrum $e_k(\omega)$ ($s = 1.2$, $n = 4$, $N = 257$, 6000 timesteps are shown). This is a dumped global behavior at an angular frequency $\omega = 0.84$ with pairing in the second half part of the computational domain ($\omega = 0.44$ and $x > L_x/2$).

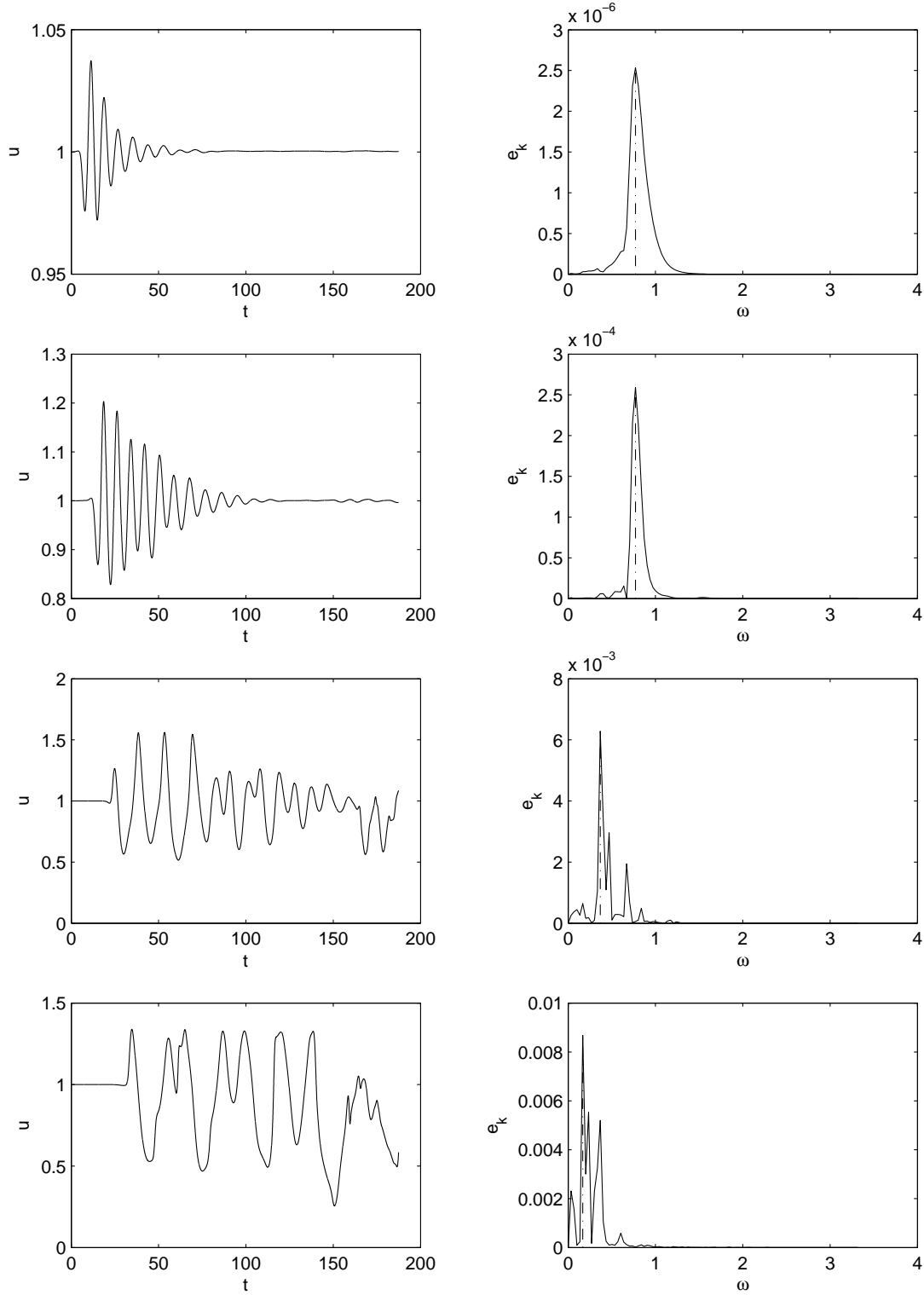


FIGURE 25. Global mode. From top to bottom, velocity u at $1/8$, $1/4$, $1/2$, $3/4$ of the computational domain for the top-hat like jet. On the left, $u(t)$; on the right, the associated power spectrum $e_k(\omega)$ ($s = 1$, $n = 4$, $N = 257$, 6000 timesteps are shown). This is a damped global behavior at an angular frequency $\omega = 0.77$ with pairing in the second half part of the computational domain ($\omega = 0.38$ and $x > L_x/2$).

DNS of variable density plane jets

33

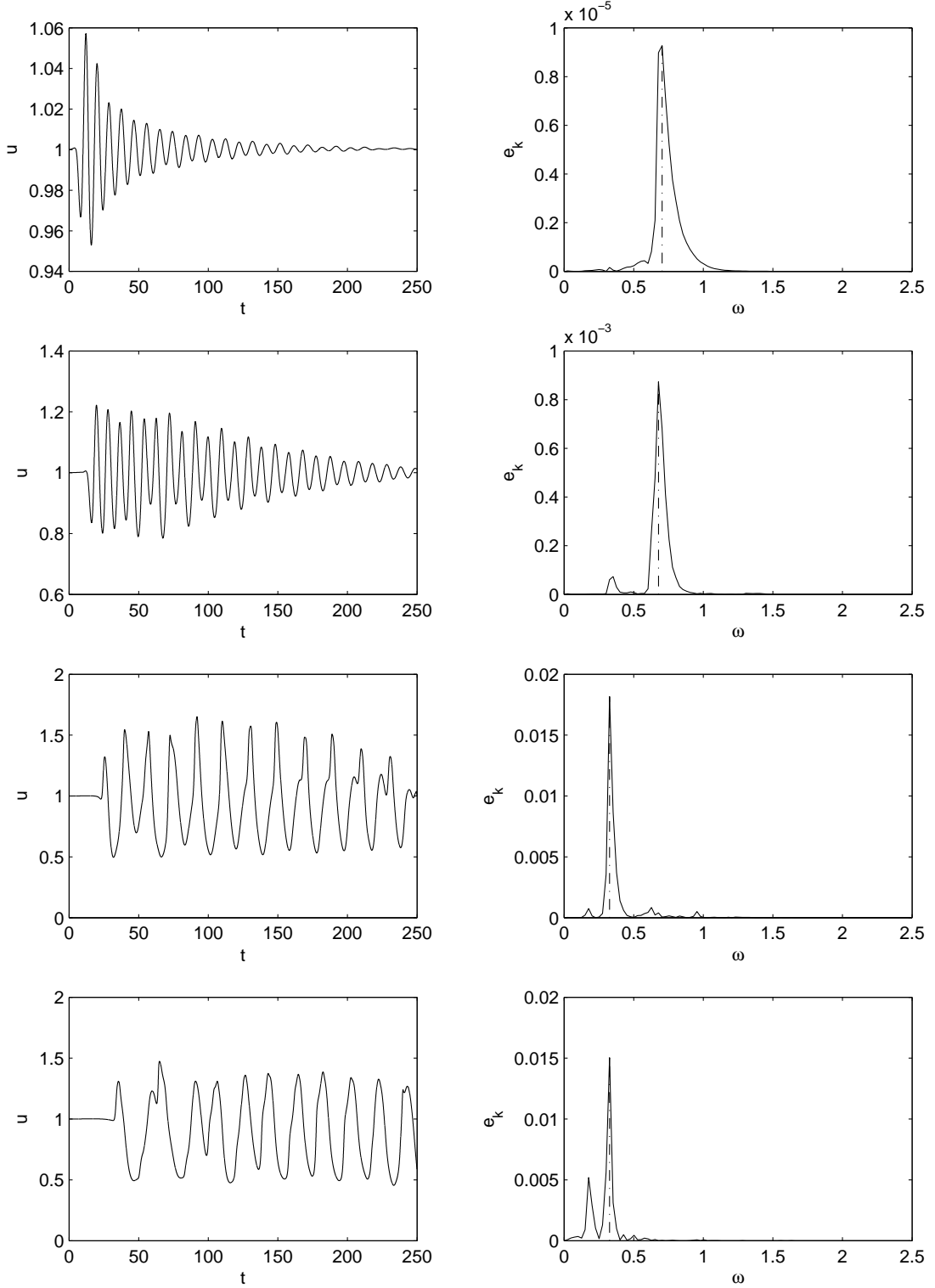


FIGURE 26. Global mode. From top to bottom, velocity u at $1/8$, $1/4$, $1/2$, $3/4$ of the computational domain for the top-hat like jet. On the left, $u(t)$; on the right, the associated power spectrum $e_k(\omega)$ ($s = 0.8$, $n = 4$, $N = 257$, 8000 timesteps are shown). This is a dumped global behavior at an angular frequency $\omega = 0.68$ with pairing in the second half part of the computational domain ($\omega = 0.33$ and $x > L_x/2$).

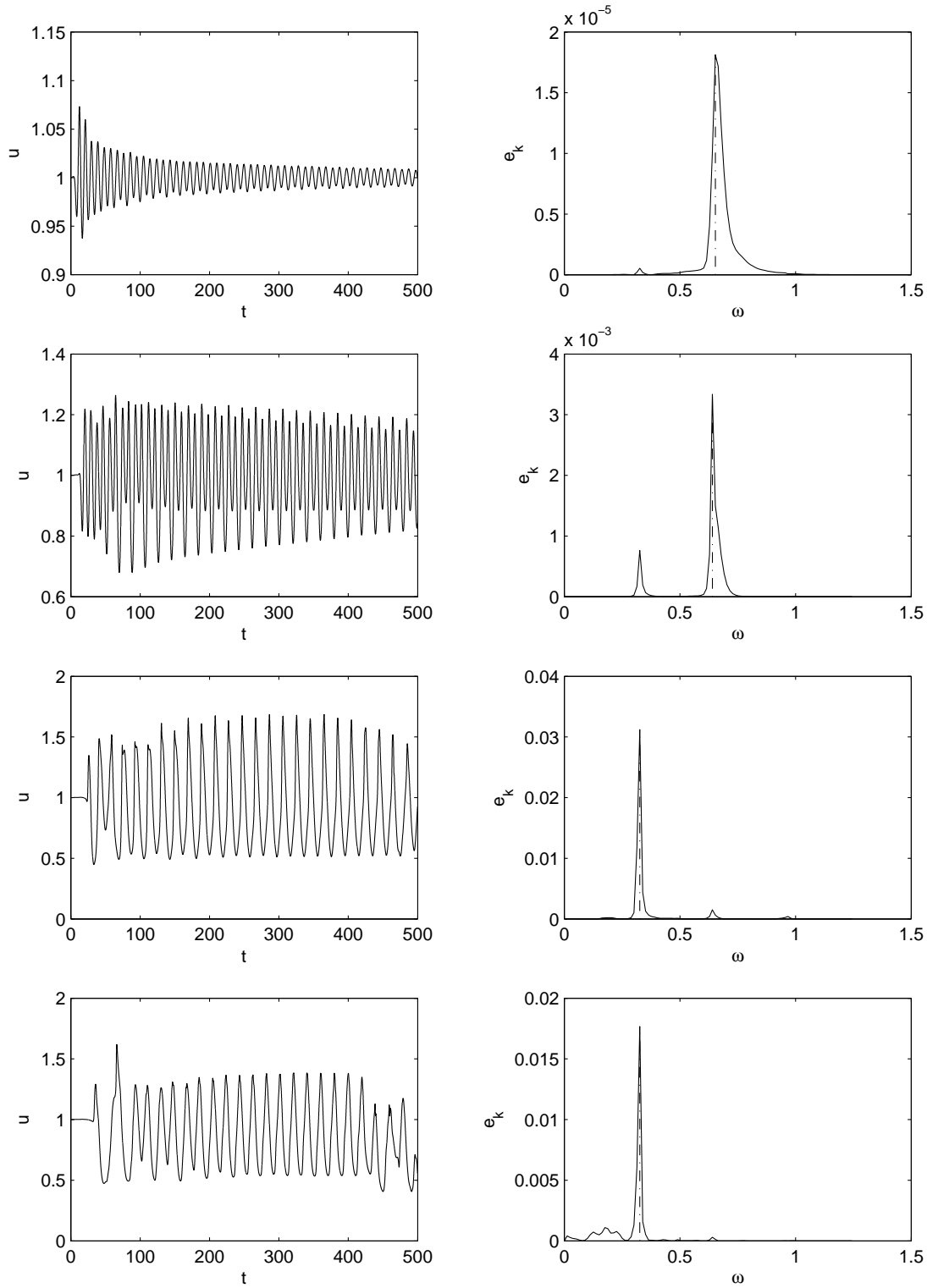


FIGURE 27. Global mode. From top to bottom, velocity u at $1/8$, $1/4$, $1/2$, $3/4$ of the computational domain for the top-hat like jet. On the left, $u(t)$; on the right, the associated power spectrum $e_k(\omega)$ ($s = 0.7$, $n = 4$, $N = 257$, 16000 timesteps are shown). This is a self sustained oscillator behavior at an angular frequency $\omega = 0.67$ with pairing in the second half part of the computational domain ($\omega = 0.34$ and $x > L_x/2$).

DNS of variable density plane jets

35

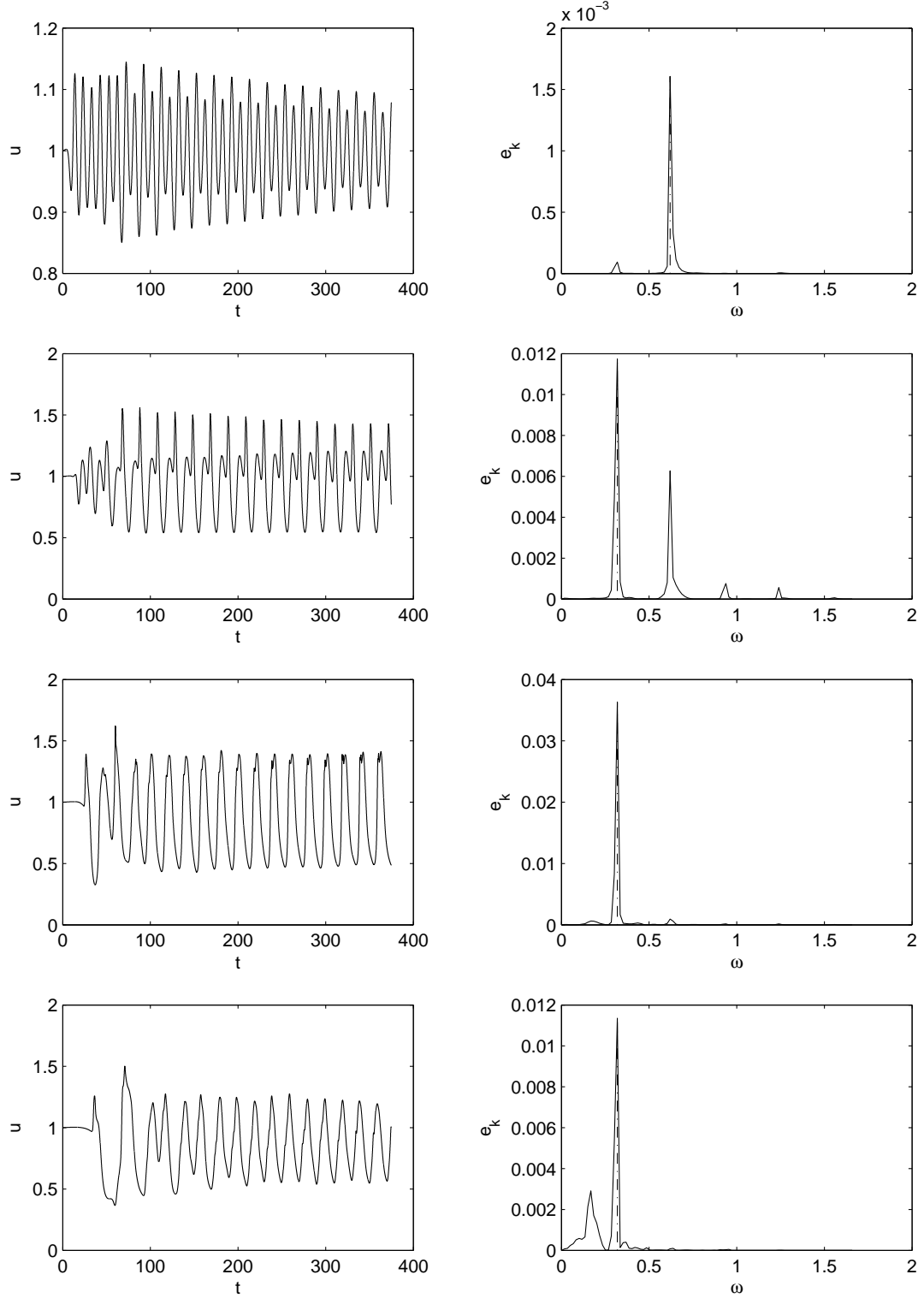
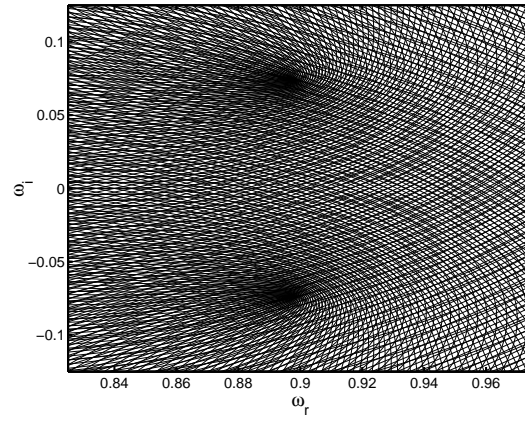
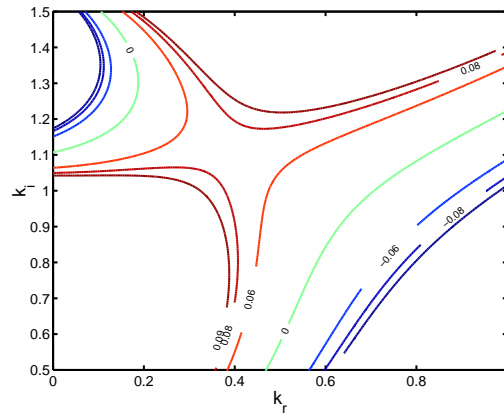


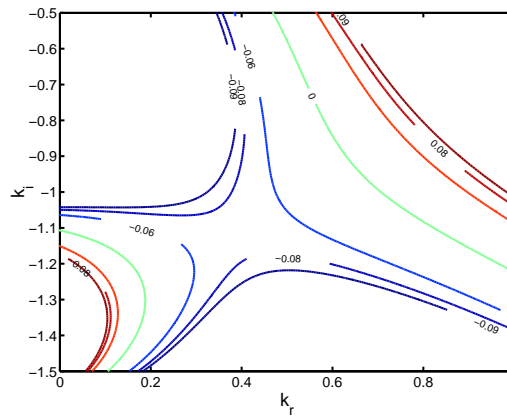
FIGURE 28. Global mode. From top to bottom, velocity u at $1/8$, $1/4$, $1/2$, $3/4$ of the computational domain for the top-hat like jet. On the left, $u(t)$; on the right, the associated power spectrum $e_k(\omega)$ ($s = 0.5$, $n = 4$, $N = 257$, 12000 timesteps are shown). This is a self sustained oscillator behavior at an angular frequency $\omega = 0.64$ with pairing in the second half part of the computational domain ($\omega = 0.34$ and $x > L_x/2$).



(a)



(b)



(c)

FIGURE 29. Complex conjugate saddle points of the Rayleigh equation when $n = \infty$ (top-hat profile) and $s = 1$: a) in the complex ω plane, b) in the complex k plane. Note that $\text{Re}(\omega_0)/\text{Re}(k_0)$ is greater than 1 and thus it is not in the range of U_0 .

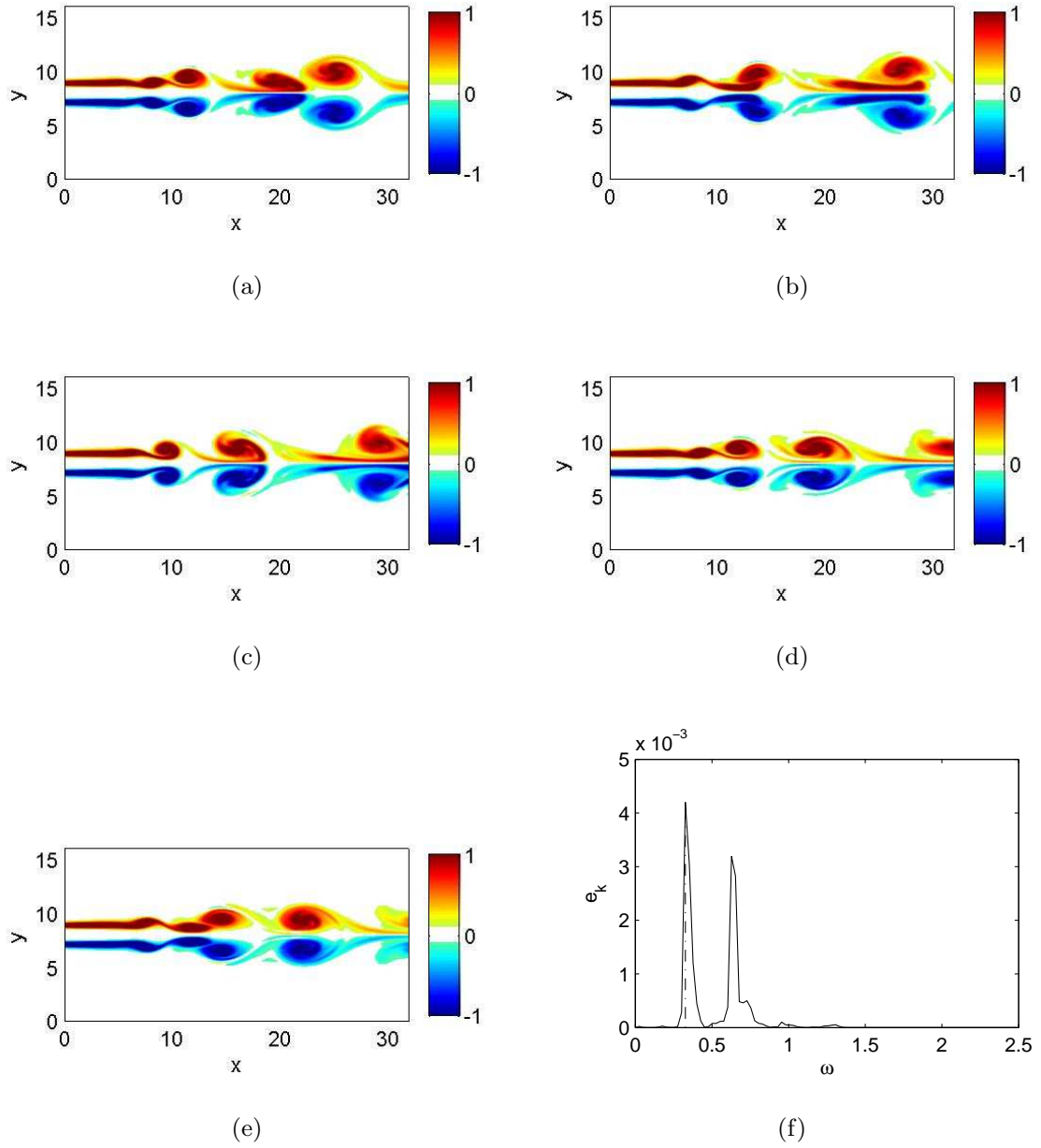


FIGURE 30. Pairing of vortices. (a-e) Successive views ($s = 0.8$, $N = 257$, each view is separated by 200 timesteps) and (f) power spectrum of the temporal signal of the axial velocity. The first subharmonic ($\omega = 0.32$) of the main mode ($\omega = 0.64$) dominates the spectrum: this is an evidence of pairing.

REFERENCES

- BERS, A. 1983 *Space-Time Evolution of Plasma Instabilities - Absolute and Convective*, handbook of plasma physics edn., A. A. Galeev and R. N. Sudan, vol. 1: Basic Plasma Physics I, chap. 3.2, pp. 451–517. North - Holland Publishing Company.
- BHAGANAGAR, K., REMPFER, D. & LUMLEY, J. 2000 3-D simulation of transition to turbulence in a flat-plate boundary layer. In *8th Annual Conference of the CFD Society of Canada*.
- BOERSMA, B. J., BRETHOUWER, G. & NIEUWSTADT, F. T. 1998 A numerical investigation on the effect of the inflow conditions on the self-similar region of a round jet. *Physics of Fluids* **10** (4), 899–909.
- BRIGGS, W. L. & HENSON, V. E. 1987 A multigrid tutorial. In *Third Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*.
- DEE, G. & LANGER, J. S. 1983 Propagating pattern selection. *Phys. Rev. Lett* **50**, 383.
- DELBENDE, I. & CHOMAZ, J.-M. 1998 Nonlinear convective/absolute instabilities in parallel two-dimensional wakes. *Physics of Fluids* **10** (11), 2724–2736.
- DELBENDE, I., CHOMAZ, J.-M. & HUERRE, P. 1998 Absolute/convective instabilities in the batchelor vortex: a numerical study of the linear impulse response. *Journal of Fluid Mechanics* **355**, 229–254.
- DRAZIN, P. & REID, W. 1982 *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- GIVOLI, D. 1991 Non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics* **94**, 1–29.
- GRESHO, P. M. 1991 Incompressible fluid dynamics: Some fundamental formulations issues. *Annual Review of Fluid Mechanics* **23**, 413–453.
- HUERRE, P. & MONKEWITZ, P. A. 1985 Absolute and convective instabilities in free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics* **159**, 151–168.
- HUERRE, P. & MONKEWITZ, P. A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* **22**, 473–537.
- KYLE, D. & SREENIVASAN, K. R. 1993 The instability and breakdown of a round variable-density jet. *Journal of Fluid Mechanics* **249**, 619–664.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, I. M. 1959 *Fluid Mechanics*. London: Pergamon Press.
- LEDIZÈS, S., MONKEWITZ, P. A. & HUERRE, P. 1995 Viscous structure of plane waves in spatially developing shear flows. *Physics of Fluids* **6**, 1337–1347.
- LELE, S. K. 1992 Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics* **103**, 16–42.
- MATTINGLY, G. E. & CRIMINALE JR., W. 1971 Disturbance characteristics in a plane jet. *Physics of Fluids* **14** (11), 2258–2264.
- MONKEWITZ, P. A., BECHERT, D. W., BARSIKOW, B. & LEHMANN, B. 1990 Self-excited oscillations and mixing in a heated round jet. *Journal of Fluid Mechanics* **213**, 611–639.
- PIER, B. & HUERRE, P. 2001 Nonlinear self-sustained structures and fronts in spatially developing wake flows. *Journal of Fluid Mechanics* **435**, 145–174.
- PRESS, W. H., ed. 1992 *Numerical Recipes*. Cambridge University Press.
- RAYNAL, L., HARION, J.-L., FAVRE-MARINET, M. & BINDER, G. 1996 The oscillatory instability of plane variable-density jets. *Physics of Fluids* **8** (4), 993–1006.
- SLINN, D. N. & RILEY, J. 1998 A model for the simulation of turbulent boundary layers in an incompressible stratified flow. *Journal of Computational Physics* **144**, 550–602.
- SREENIVASAN, K. R., RAGHU, S. & KYLE, D. 1989 Absolute instability in variable density round jets. *Experiments in Fluids* **7**, 309–317.
- STANLEY, S. A., SARKAR, S. & MELLADO, J. 2002 A study of the flow-field evolution and mixing in a planar turbulent jet using direct numerical simulation. *Journal of Fluid Mechanics* **450**, 377–407.
- TWISS, R. Q. 1951 On oscillations in electron streams. *Proceedings of the Physical Society B* **B64**, 654.
- VILLERMAUX, E. 2003 Private communication.
- YU, M.-H. & MONKEWITZ, P. A. 1990 The effect of nonuniform density on the absolute instability of two-dimensional inertial jets and wakes. *Physics of Fluids A* **2** (7), 1175–1181.
- YU, M.-H. & MONKEWITZ, P. A. 1993 Oscillations in the near field of a heated two-dimensional jet. *Journal of Fluid Mechanics* **255**, 323–347.

Annexe B

Opérateur linéaire de la méthode multigrille

Dans cette annexe, on présente l'opérateur linéaire A qui apparaît dans la méthode de résolution multigrille de l'équation de la pression (*cf* §2.3.5, équation (2.15), page 35). Pour résoudre $Ap = f$, on détaille le système linéaire p_{ij} pour toutes les valeurs possibles de i et j comprises entre 2 et $N - 1$. Les valeurs extrêmes 1 et N sont imposées quant à elles par les conditions aux limites. On donne le point « général » $p_{i,j}$, et les cas pour traiter le cas $i = 2$ et $j = 2$. Les cas pour obtenir $i = N - 1$ et $j = N - 1$ sont analogues et peuvent être obtenus par permutation.

$$p_{i,j} = \frac{-\rho_{i,j+1} \rho_{i,j-1} p_{i+2,j} \rho_{i-1,j} - \rho_{i,j+1} \rho_{i,j-1} p_{i-2,j} \rho_{i+1,j} - r^2 (\rho_{i+1,j} \rho_{i-1,j} p_{i,j+2} \rho_{i,j-1} - \rho_{i+1,j} \rho_{i-1,j} p_{i,j-2} \rho_{i,j+1} + 4 f_{i,j} h^2 \rho_{i+1,j} \rho_{i-1,j} \rho_{i,j+1} \rho_{i,j-1})}{\rho_{i,j+1} \rho_{i,j-1} \rho_{i-1,j} + \rho_{i,j+1} \rho_{i,j-1} \rho_{i+1,j} + r^2 (\rho_{i+1,j} \rho_{i-1,j} \rho_{i,j-1} + \rho_{i+1,j} \rho_{i-1,j} \rho_{i,j+1})}$$

$$p_{2,2} = \frac{\rho_{2,3} \rho_{2,1} p_{4,2} \rho_{1,2} + \rho_{2,3} \rho_{2,1} \rho_{3,2} p_{3,2} + 3 \rho_{2,3} \rho_{2,1} \rho_{3,2} p_{1,2} + r^2 (\rho_{3,2} \rho_{1,2} p_{2,4} \rho_{2,1} + \rho_{3,2} \rho_{1,2} \rho_{2,3} p_{2,3} + 3 \rho_{3,2} \rho_{1,2} \rho_{2,3} p_{2,1} - 4 f_{2,2} h^2 \rho_{3,2} \rho_{1,2} \rho_{2,3} \rho_{2,1})}{\rho_{2,3} \rho_{2,1} \rho_{1,2} + 4 \rho_{2,3} \rho_{2,1} \rho_{3,2} + r^2 (\rho_{3,2} \rho_{1,2} \rho_{2,1} + 4 \rho_{3,2} \rho_{1,2} \rho_{2,3})}$$

$$p_{2,j} = \frac{\rho_{2,j+1} \rho_{2,j-1} p_{4,j} \rho_{1,j} + \rho_{2,j+1} \rho_{2,j-1} \rho_{3,j} p_{3,j} + 3 \rho_{2,j+1} \rho_{2,j-1} \rho_{3,j} p_{1,j} + r^2 (\rho_{3,j} \rho_{1,j} p_{2,j+2} \rho_{2,j-1} + \rho_{3,j} \rho_{1,j} p_{2,j-2} \rho_{2,j+1} - 4 f_{2,j} h^2 \rho_{3,j} \rho_{1,j} \rho_{2,j+1} \rho_{2,j-1})}{\rho_{2,j+1} \rho_{2,j-1} \rho_{1,j} + 4 \rho_{2,j+1} \rho_{2,j-1} \rho_{3,j} + r^2 (\rho_{3,j} \rho_{1,j} \rho_{2,j-1} + \rho_{3,j} \rho_{1,j} \rho_{2,j+1})}$$

$$p_{i,2} = \frac{\rho_{i,3} \rho_{i,1} p_{i+2,2} \rho_{i-1,2} + \rho_{i,3} \rho_{i,1} p_{i-2,2} \rho_{i+1,2} + r^2 (\rho_{i+1,2} \rho_{i-1,2} p_{i,4} \rho_{i,1} + \rho_{i+1,2} \rho_{i-1,2} \rho_{i,3} p_{i,3} + 3 \rho_{i+1,2} \rho_{i-1,2} \rho_{i,3} p_{i,1} - 4 f_{i,2} h^2 \rho_{i+1,2} \rho_{i-1,2} \rho_{i,3} \rho_{i,1})}{\rho_{i,3} \rho_{i,1} \rho_{i-1,2} + \rho_{i,3} \rho_{i,1} \rho_{i+1,2} + r^2 (\rho_{i+1,2} \rho_{i-1,2} \rho_{i,1} + 4 \rho_{i+1,2} \rho_{i-1,2} \rho_{i,3})}$$

Bibliographie

- ABID M. & BRACHET M.E. (1993) Numerical characterization of the dynamics of vortex filaments in round jets. *Physics of Fluids* **5**(11), p. 2582–2584.
- ABRAMOWITZ M. & STEGUN I.A. (1970) *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications.
- ALMGREN A.S., BELL J.B., COLELLA P., HOWELL L.H. & WELCOME M.L. (1998) A conservative adaptative projection method for the variable density incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics* **142**, p. 1–46.
- ALMGREN A.S., BELL J.B. & CRUTCHFIELD W.Y. (2000) Approximate projection methods : Part I. inviscid analysis. *SIAM : Journal of Scientific Computing* **22**(4), p. 1139–1159.
- BATCHELOR G. (1967) *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- BECKER H. & MASSARO T. (1968) Vortex evolution in a round jet. *Journal of Fluid Mechanics* **31**(3), p. 435–448.
- BELL J.B., COLELLA P. & GLAZ H.M. (1989) A second order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics* **85**, p. 257–283.
- BELL J.B. & MARCUS D.L. (1992) A second-order projection method for variable-density flows. *Journal of Computational Physics* **101**, p. 334–348.
- BERNAL L.P. (1988) The statistics of the organized vertical structure in turbulent mixing layers. *Physics of Fluids* **31**(9), p. 2533–2543.
- BERS A. (1983) *Space-Time Evolution of Plasma Instabilities - Absolute and Convective*, t. 1 : Basic Plasma Physics I de A. A. Galeev and R. N. Sudan, chap. 3.2, p. 451–517. North - Holland Publishing Company, handbook of plasma physics éd.
- BHAGANAGAR K., REMPFER D. & LUMLEY J. (2000) 3-D simulation of transition to turbulence in a flat-plate boundary layer. Dans *8th Annual Conference of the CFD Society of Canada*.
- BLASCHAK J.G. & KRIEGSMANN G.A. (1988) A comparative study of absorbing boundary conditions. *Journal of Computational Physics* **77**, p. 109–139.
- BOERSMA B.J., BRETHOUWER G. & NIEUWSTADT F.T. (1998) A numerical investigation on the effect of the inflow conditions on the self-similar region of a round jet. *Physics of Fluids* **10**(4), p. 899–909.

- BOUJEMAA S., AMIELH M. & CHAUVE M.P. (2002) Effet de la variation de la masse volumique sur les instabilités de jets à faibles nombres de Reynolds. Dans *4^e journées tunisiennes sur les écoulements et les transferts*.
- BRANCHER P., CHOMAZ J.M. & HUERRE P. (1994) Direct numerical simulations of round jets : Vortex induction and side jets. *Physics of Fluids* **6**(5), p. 1768–1774.
- BRIGGS W.L. & HENSON V.E. (1987) A multigrid tutorial. Dans *Third Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*.
- BROWN D.L., CORTEZ R. & MINION M.L. (2001) Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics* **168**, p. 464–499.
- BUELL J. & HUERRE P. (1988) Inflow/outflow boundary conditions and global dynamics of spatial mixing layers. Dans *Center for turbulence research - Summer 1988*.
- CAULFIELD C.P. & PELTIER W.R. (2000) The anatomy of the mixing transition in homogeneous and stratified free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics* **413**, p. 1–47.
- CHAPIN V., SERS F. & CHASSAING P. (1996) Global self-excited oscillations in a two-dimensional heated jet : a numerical simulation. Dans *IUTAM Symposium on variable density low speed turbulent flows*.
- CHASSAING P. (2000) *Turbulence en mécanique des fluides (analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur)*. CEPADUES-Éditions.
- CHOI H. & MOIN P. (1994) Effects of the computational time step on numerical simulations of turbulent flow. *Journal of Computational Physics* **113**, p. 1–4.
- CHRISTER B. & JOHANSSON V. (1993) Boundary condition for open boundaries for the incompressible Navier-Stokes equation. *Journal of Computational Physics* **105**, p. 233–251.
- COSSU C. & LOISELEUX T. (1998) On the convective and absolute nature of instabilities in finite difference numerical simulations of open flows. *Journal of Computational Physics* **144**, p. 98–108.
- DANAILA I. (1997) *Étude des instabilités et des structures cohérentes dans la zone de proche sortie d'un jet axisymétrique*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II.
- DANAILA I., DUSEK J. & ANSELMET F. (1997) Coherent structures in a round, spatially evolving, unforced, homogeneous jet at low Reynolds numbers. *Physics of Fluids* **9**(11), p. 3323–3342.
- DEE G. & LANGER J.S. (1983) Propagating pattern selection. *Physical Review Letters* **50**, p. 383–386.
- DELBENDE I. (1998) *Réponse impulsionnelle dans les jets tournants et les sillages plans : analyse spatio-temporelle par simulation numérique directe*. Thèse de doctorat, École polytechnique.
- DELBENDE I. & CHOMAZ J.M. (1998) Nonlinear convective/absolute instabilities in parallel two-dimensional wakes. *Physics of Fluids* **10**(11), p. 2724–2736.

- DELBENDE I., CHOMAZ J.M. & HUERRE P. (1998) Absolute/convective instabilities in the Batchelor vortex : a numerical study of the linear impulse response. *Journal of Fluid Mechanics* **355**, p. 229–254.
- DRAZIN P. & REID W. (1982) *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- FOREMAN M.G. (1986) An accuracy analysis of boundary conditions for the forced shallow water equations. *Journal of Computational Physics* **64**, p. 334–367.
- FREUND J.B. (1999) Direct numerical simulation of the noise from a Mach 0.9 jet. Dans *Proceedings of the 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference*.
- GIVOLI D. (1991) Non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics* **94**, p. 1–29.
- GRESHO P.M. (1991) Incompressible fluid dynamics : Some fundamental formulations issues. *Annual Review of Fluid Mechanics* **23**, p. 413–453.
- HUERRE P. & MONKEWITZ P.A. (1985) Absolute and convective instabilities in free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics* **159**, p. 151–168.
- HUERRE P. & MONKEWITZ P.A. (1990) Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* **22**, p. 473–537.
- JIN G. & BRAZA M. (1993) A non reflecting outlet boundary condition for incompressible unsteady Navier-Stokes calculations. *Journal of Computational Physics* **107**, p. 239–253.
- JOSLIN R.D. (1997) Direct numerical simulation of evolution and control of linear and nonlinear disturbances in three-dimensional attachment-line boundary layers. Rap. tech., NASA.
- JR. J.M.L. (1993) Open boundary condition symposium benchmark solution : stratified flow over a backward-facing step. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **11**, p. 969–984.
- KOH Y.M. (2000) On boundary conditions and numerical methods for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations. *Computers and Fluids* **29**, p. 791–812.
- KYLE D. & SREENIVASAN K.R. (1993) The instability and breakdown of a round variable-density jet. *Journal of Fluid Mechanics* **249**, p. 619–664.
- LANDAU L.D. & LIFSHITZ I.M. (1959) *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, London.
- LEDIZÈS S., MONKEWITZ P.A. & HUERRE P. (1995) Viscous structure of plane waves in spatially developing shear flows. *Physics of Fluids* **6**, p. 1337–1347.
- LELE S.K. (1992) Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics* **103**, p. 16–42.
- LUCAS J.F. (1998) *Analyse du champ scalaire au sein d'un jet turbulent axisymétrique à densité variable*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II.
- MARTIN J. & MEIBURG E. (1991) Numerical investigation of three-dimensionally evolving jets subject to axisymmetric and azimuthal perturbations. *Journal of Fluid Mechanics* **230**, p. 271–318.

- MATTINGLY G.E. & CRIMINALE JR. W. (1971) Disturbance characteristics in a plane jet. *Physics of Fluids* **14**(11), p. 2258–2264.
- MOIN P. & MAHESH K. (1998) Direct numerical simulation : a tool in turbulence research. *Annual Review of Fluid Mechanics* **30**, p. 539–578.
- MONKEWITZ P.A., BECHERT D.W., BARSIKOW B. & LEHMANN B. (1990) Self-excited oscillations and mixing in a heated round jet. *Journal of Fluid Mechanics* **213**, p. 611–639.
- MONKEWITZ P.A. & SOHN K.D. (1988) Absolute Instability in Hot Jets. *American Institute of Aeronautics and Astronautics* **26**(8), p. 911–916.
- PIER B. & HUERRE P. (2001) Nonlinear self-sustained structures and fronts in spatially developing wake flows. *Journal of Fluid Mechanics* **435**(7), p. 145–174.
- POZRIKIDIS C. (1998) *Numerical computation in science and engineering*. Oxford University Press.
- PRESS W.H. (Réd.) (1992) *Numerical Recipes*. Cambridge University Press.
- RAYNAL L., HARION J.L., FAVRE-MARINET M. & BINDER G. (1996) The oscillatory instability of plane variable-density jets. *Physics of Fluids* **8**(4), p. 993–1006.
- REINAUD J., JOLY L. & CHASSAING P. (2000) The baroclinic secondary instability of the two-dimensional shear layer. *Physics of Fluids* **12**(10), p. 2489–2505.
- SAFFMAN P. (1992) *Vortex dynamics*. Cambridge University Press.
- SANI R.L. & GRESHO P.M. (1994) Résumé and remarks on the open boundary condition minisymposium. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **18**, p. 983–1008.
- SLINN D.N. & RILEY J. (1998) A model for the simulation of turbulent boundary layers in an incompressible stratified flow. *Journal of Computational Physics* **144**, p. 550–602.
- SPALART P.R. (1988) Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 1410$. *Journal of Fluid Mechanics* **187**, p. 61–98.
- SPITERI R.J. & RUUTH S.R. (2001) A new class of optimal high-order strong-stability-preserving time discretization methods. Rap. tech., Faculty of Computer Science, Halifax, Canada.
- SREENIVASAN K.R., RAGHU S. & KYLE D. (1989) Absolute instability in variable density round jets. *Experiments in Fluids* **7**, p. 309–317.
- STANLEY S.A., SARKAR S. & MELLADO J. (2002) A study of the flow-field evolution and mixing in a planar turbulent jet using direct numerical simulation. *Journal of Fluid Mechanics* **450**, p. 377–407.
- STAQUET C. (1995) Two-dimensional secondary instabilities in a strongly stratified shear layer. *Journal of Fluid Mechanics* **296**, p. 73–126.
- TRUFFAUT J. (1998) *Étude expérimentale de l'origine du bruit émis par les flammes de chalumeaux*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille I.
- TWISS R.Q. (1951) On oscillations in electron streams. *Proceedings of the Physical Society B* **64**, p. 654–665.

- WEIDEMAN J. & REDDY S. (2000) A `Matlab` Differentiation Matrix Suite. Rap. tech., University of Stellenbosch, <http://ucs.orst.edu/~weidemaj/differ.html>.
- WILSON R.V. & DEMUREN A.O. (1997) Numerical simulation of turbulent jets with rectangular cross-section. Rap. tech., ICASE.
- YU M.H. & MONKEWITZ P.A. (1990) The effect of nonuniform density on the absolute instability of two-dimensional inertial jets and wakes. *Physics of Fluids A* **2**(7), p. 1175–1181.
- YU M.H. & MONKEWITZ P.A. (1993) Oscillations in the near field of a heated two-dimensional jet. *Journal of Fluid Mechanics* **255**, p. 323–347.

