

## TABLE DES MATIERES

<b>FISAORANA .....</b>	<b>i</b>
<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>iii</b>
<b>TABLE DES MATIERES .....</b>	<b>v</b>
<b>NOTATIONS .....</b>	<b>x</b>
<b>LISTES DES TABLEAUX ET DES FIGURES.....</b>	<b>xvi</b>
<b>INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLEME .....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1.....</b>	<b>4</b>
<b>CONVERSION D'ENERGIE VIBRATOIRE EN ENERGIE ELECTRIQUE.....</b>	<b>4</b>
<b>1.1 Introduction.....</b>	<b>4</b>
<b>1.2 Définitions .....</b>	<b>5</b>
<i>1.2.1 Energie.....</i>	<i>5</i>
<i>1.2.2 Vibration mécanique.....</i>	<i>5</i>
<i>1.2.3 Energie électrique .....</i>	<i>8</i>
<b>1.3 Sources des vibrations mécaniques .....</b>	<b>9</b>
<i>1.3.1 Vibration routière .....</i>	<i>9</i>
<i>1.3.2 Vibration ferroviaire .....</i>	<i>10</i>
<i>1.3.3 Vibration «humaine» .....</i>	<i>10</i>
<i>1.3.4 Vibration des structures civiles.....</i>	<i>11</i>
<b>1.4 Principe de base de la conversion d'énergie vibratoire .....</b>	<b>12</b>
<i>1.4.1 Structure élémentaire d'un système inertiel résonant .....</i>	<i>12</i>
<i>1.4.2 Puissance générée par le système inertiel résonant .....</i>	<i>15</i>
<b>1.5 Types de conversion d'énergie vibratoire en électricité.....</b>	<b>18</b>
<i>1.5.1 Conversion électromagnétique .....</i>	<i>18</i>
<i>1.5.2 Conversion électrostatique .....</i>	<i>23</i>
<i>1.5.3 Conversion piézoélectrique .....</i>	<i>27</i>
<b>1.6 Comparaison des 3 méthodes de conversion.....</b>	<b>33</b>
<i>1.6.1 Comparaison par densité d'énergie récupérable.....</i>	<i>33</i>
<i>1.6.2 Comparaison des revues par figure des mérites .....</i>	<i>35</i>
<i>1.6.3 Conclusion sur les méthodes de conversion .....</i>	<i>37</i>

1.7 Extraction d'énergie électrique .....	38
1.7.1 Introduction .....	38
1.7.2 Technique standard.....	39
1.7.3 Technique SSHI.....	41
1.8 Système de stockage d'énergie .....	42
1.9 Conclusion et axe de la recherche .....	42
CHAPITRE 2.....	44
PHENOMENE ET CARACTERISTIQUE DE LA PIEZOELECTRICITE .....	44
2.1 Introduction .....	44
2.2 Historique et découverte de la piézoélectricité.....	44
2.3 Phénomènes physiques de la piézoélectricité .....	46
2.3.1 Effet piézoélectrique direct.....	46
2.3.2 Effet piézoélectrique inverse .....	46
2.4 Piézoélectricité au niveau atomique .....	47
2.4.1 Polarité moléculaire.....	48
2.4.2 Phénomène piézoélectrique.....	49
2.5 Symétrie et piézoélectricité .....	54
2.5.1 Piézoélectricité .....	57
2.5.2 Pyroélectricité .....	57
2.5.3 Ferroélectricité.....	58
2.6 Propriétés piézoélectriques et mécaniques d'un matériau piézoélectrique .....	62
2.6.1 Conversion électromécanique .....	62
2.6.2 Equations fondamentales de la piézoélectricité.....	63
2.6.3 Les constantes piézoélectriques .....	65
2.7 Mode de déformation des matériaux piézoélectriques.....	69
2.7.1 Mode longitudinale (mode $d_{33}$ ).....	70
2.7.2 Mode transversale (mode $d_{31}$ ou mode $d_{32}$ ).....	70
2.7.3 Mode de cisaillement (mode $d_{15}$ ) .....	71
2.7.4 Autres mode de déformation .....	71
2.8 Coefficient de couplage selon la déformation.....	72
2.9 Les matériaux piézoélectriques .....	73
2.9.1 Les cristaux piézoélectriques.....	73

2.9.2 Les céramiques piézoélectriques.....	73
2.9.3 Les polymères piézoélectriques.....	76
2.9.4 Choix du matériau piézoélectrique.....	77
2.10 Limites sur les matériaux piézoélectriques .....	78
2.10.1 Champ électrique .....	78
2.10.2 Température.....	78
2.10.3 Contrainte mécanique .....	78
2.10.4 Limites de puissance .....	79
2.11 Stabilités .....	79
2.12 Conclusion.....	80
CHAPITRE 3.....	81
MODELE ET ETUDE ANALYTIQUE D'UN CONVERTISSEUR D'ENERGIE VIBRATOIRE EN ENERGIE ELECTRIQUE PAR L'INTERMEDIAIRE D'UN MATERIAU PIEZOELECTRIQUE	81
3.1 Introduction.....	81
3.2 Rappel sur la conversion en poutre encastré unimorph et bimorph .....	81
3.3 Choix du modèle .....	82
3.4 Conception et dimensionnement d'un récupérateur piézoélectrique 1-D .....	83
3.4.1 Conception et choix des matériaux.....	83
3.4.2 Dimensionnement .....	83
3.5 Modélisation analytique d'un récupérateur piézoélectrique 1-D .....	85
3.6 Optimisation de la puissance .....	93
3.7 Résultats du modèle à un degré de liberté .....	95
3.7.1 Présentation graphique et interprétation de la puissance.....	96
3.7.2 Présentation et interprétation du déplacement .....	98
3.7.3 Présentation et interprétation de la tension.....	100
3.7.4 Conclusion .....	101
3.8 Extraction d'énergie continue en modèle 1-D .....	102
3.8.1 Rappel du composant électronique utilisé dans l'extraction.....	102
3.8.2 Récupération d'énergie continue avec un circuit standard .....	106
3.8.3 Récupération d'énergie non linéaire SSHI .....	112
3.8.4 Comparaison de la puissance obtenu par les diverses techniques développées.....	124
3.9 Conclusion.....	125

<b>CHAPITRE 4.....</b>	<b>127</b>
<b>MODELISATION D'UN RECUPERATEUR D'ENERGIE PAR UN MATERIAU PIEZOELECTRIQUE ISSUE DE LA VIBRATION D'UN PONT .....</b>	<b>127</b>
<b>4.1 Introduction .....</b>	<b>127</b>
<b>4.2 Réponse d'un pont sous une charge roulante avec un déplacement constant .....</b>	<b>128</b>
<i>4.2.1 Etat de l'art sur l'étude d'un pont sous charge roulante.....</i>	<i>128</i>
<i>4.2.2 Formulation du problème .....</i>	<i>129</i>
<i>4.2.3 Hypothèses .....</i>	<i>130</i>
<i>4.2.4 Solution du problème .....</i>	<i>131</i>
<i>4.2.5 Solution dans le domaine fréquentiel.....</i>	<i>135</i>
<i>4.2.6 Solution dans le domaine temporel .....</i>	<i>137</i>
<b>4.3 Module piézoélectrique.....</b>	<b>141</b>
<b>4.4 Modélisation mathématique de l'ensemble: matériaux piézoélectrique montés sous le pont ..</b>	<b>143</b>
<b>4.5 Exemple des données théorique.....</b>	<b>145</b>
<b>4.6 Résultat du test théorique.....</b>	<b>146</b>
<i>4.6.1 Résultat pour le récupérateur AC.....</i>	<i>146</i>
<i>4.6.2 Résultat pour le récupérateur continu standard.....</i>	<i>148</i>
<i>4.6.3 Résultat pour le récupérateur SSHI-Parallèle.....</i>	<i>150</i>
<i>4.6.4 Résultat pour le récupérateur SSHI-Série.....</i>	<i>152</i>
<i>4.6.5 Résumé des résultats .....</i>	<i>154</i>
<b>4.7 Stockage de l'énergie récupérée .....</b>	<b>155</b>
<i>4.7.1 Conversion DC/DC .....</i>	<i>156</i>
<i>4.7.2 Moyen de stockage de l'énergie électrique .....</i>	<i>160</i>
<i>4.7.3 Choix de moyen de stockage et calcul estimatif.....</i>	<i>162</i>
<b>4.8 Conclusion.....</b>	<b>164</b>
<b>CHAPITRE 5.....</b>	<b>166</b>
<b>SIMULATION NUMERIQUE DE LA CONVERSION DE LA VIBRATION D'UN PONT EN ENERGIE ELECTRIQUE PAR L'INTERMEDIAIRE D'UN MATERIAU PIEZOELECTRIQUE .....</b>	<b>166</b>
<b>5.1 Introduction .....</b>	<b>166</b>
<b>5.2 Simulation de la vibration d'un pont sous une charge mobile .....</b>	<b>166</b>
<i>5.2.1 Définition du système.....</i>	<i>167</i>

5.2.2 Rappel sur les hypothèses posées .....	167
5.2.3 Résolution de l'équation différentielle du pont par <i>SIMULINK</i> .....	168
5.2.4 Résultat pour la longueur $l=50m$ .....	172
5.2.5 Résultat pour la longueur $l=35m$ .....	173
5.2.6 Résultat pour la longueur $l=25 m$ .....	175
5.2.7 Résumé des résultats pour les différents tests.....	176
<b>5.3 Simulation du modèle piézoélectrique.....</b>	<b>177</b>
5.3.1 Présentation du module piézoélectrique .....	177
5.3.2 Formulation de l'équation électromécanique du module piézoélectrique .....	178
5.3.3 Simulation de l'équation électromécanique par <i>Simulink</i> .....	179
5.3.4 Résultats de la simulation .....	181
5.3.5 Interprétation du résultat.....	184
<b>5.4 Simulation de la conversion de la vibration d'un pont en énergie électrique .....</b>	<b>184</b>
5.4.1 Résultats de la simulation et interprétation .....	186
5.4.2 Présentation graphique des résultats.....	187
<b>5.5 Simulation du modèle pont piézoélectrique par « Symbolic Math ToolBox» .....</b>	<b>189</b>
5.5.1 Résolution du modèle pont par <i>Symbolic Math</i> .....	189
5.5.2 Résolution du modèle piézoélectrique par <i>Symbolic Math</i> .....	190
5.5.3 Résolution du système pont-piézoélectrique par <i>Symbolic Math</i> .....	193
<b>5.6 Comparaison des résultats et discussion .....</b>	<b>194</b>
<b>5.7 Conclusion.....</b>	<b>196</b>
<b>CONCLUSION ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>198</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>201</b>
<b>REFERENCES .....</b>	<b>219</b>
<b>FICHE DE RENSEIGNEMENTS.....</b>	<b>232</b>
<b>RESUME ET MOTS CLES .....</b>	<b>233</b>

## NOTATIONS

### 1. Minuscules latines

$c_d$	Amortissement visqueux
$c_e$	Amortissement électrique
$c_{ij}$	Compliance élastique
$c_m$	Amortissement mécanique
$c_T$	Amortissement total
$c_V$	Résistance visqueuse de la vitesse verticale du système pont
$d_{ij}$	Constante piézoélectrique : proportionnalité entre la charge et la contrainte à champ nul ou constant
$d_M$	Déterminant de la matrice M
$e_{ij}$	Constante piézoélectrique : proportionnalité entre la charge et la déformation à champ nul ou constant
$f$	Fréquence
$f_c$	Fréquence centrale du matériau piézoélectrique
$f_1$	Fréquences à -3dB en dessous de $f_c$
$f_2$	Fréquences à -3dB en dessus de $f_c$
$g_{ij}$	Constante piézoélectrique : proportionnalité entre la contrainte et le champ à induction nulle ou constante
$h_e$	Epaisseur de l'électrode
$h_{ij}$	Constante piézoélectrique : proportionnalité entre la déformation et le champ à induction nulle ou constante
$h_p$	Epaisseur du matériau piézoélectrique
$k_e^2$	Paramètre adimensionnel du couple électromécanique
$k_{ij}$	Coefficient de couple électromécanique

$m$	Masse du ressort
$+q$	Charge électrique positive
$-q$	Charge électrique négative
$s_{ij}$	Raideur élastique
$s_{ij}^E$	Compliance à champ électrique constant
$s_{ij}^D$	Compliance à déplacement électrique constant
$\tan \delta$	Pertes diélectriques
$y_0$	Etirement initial d'un ressort
$y_b$	Déplacement harmonique de base

## 2. Majuscules latines

$A$	Amplitude d'une accélération
$A$	Surface d'un élément
$C$	Condensateur
$C_{\max}$	Valeur maximale du $C_v$
$C_{\min}$	Valeur minimale du $C_v$
$C_p$	Capacité piézoélectrique
$C_{\text{par}}$	Condensateur parasite
$C_{\text{stor}}$	Condensateur de stockage
$C_v$	Condensateur variable
$D$	Induction électrique

$E$	Champ électrique
$E_C$	Champ coercitif
$E_Y$	Module d'Young du système pont
$F$	Force de rappel du ressort
$F_{ext}$	Force extérieure
$F_{em}$	Force électromotrice
$F_p$	Force appliqué à l'élément piézoélectrique
$I_L$	Courant de l'inductance
$J$	Moment d'inertie du système pont
$K$	Raideur d'un système
$L$	Condensateur
$M$	Poids de la masse sismique
$M_e$	Masse de l'électrode
$M_{el}$	Masse du matériau de protection en silicium
$M_p$	Poids du matériau piézoélectrique
$M_T$	Masse total
$N$	Nombres des spires d'une bobine
$P$	Force appliqué sur le système pont
$P_e$	Puissance électrique
$P_{emax}$	Puissance électrique maximale
$P_{max}$	Puissance maximale



$P_{out}$	Puissance de sortie
$P_r$	Polarisation rémanente
$P_s$	Polarisation de saturation
$Q$	Facteur de qualité
$Q_m$	Facteur de qualité mécanique
$Q_e$	Facteur de qualité électrique
$Q_L$	Facteur de qualité d'inversion d'une bobine
$Re$	Partie réelle d'une notation complexe
$R_{opt}$	Résistance optimale
$R_r$	Résistance à la résonnance
$R_{ar}$	Résistance à l'anti résonnance
$S$	Déformation relative
$T$	Contrainte mécanique
$V$	Tension électrique
$V_{IN}$	Tension de l'entrée d'un circuit
$V_{OUT}$	Tension de sortie d'un circuit
$V_{DC}$	Tension en mode continu ou tension redressé
$V_{AC}$	Tension en mode alternatif
$V_d$	Tension aux bornes d'une diode
$V_p$	Tension piézoélectrique

### 3. Minuscules grecques

$\alpha$	Rapport cyclique
$\alpha_{W\&Y}$	Facteur de mérite

$\beta$	Paramètre adimensionnel de la résistance ou résistance réduite
$\varepsilon$	Permittivité électrique
$\varepsilon_{ij}^T$	Permittivité à force constante caractérisant un échantillon libre
$\varepsilon_{ij}^S$	Permittivité à déformation constante caractérisant un échantillon encastré
$\varepsilon_r$	Permittivité diélectrique relative
$\xi_e$	Amortissement électrique réduite
$\zeta_h$	Amortissement mécanique du système pont
$\zeta_n$	Amortissement mécanique du système piézoélectrique
$\xi_T$	Amortissement total réduit
$\theta$	Constante de couplage électromécanique
$\mu$	Masse par unité de longueur
$\nu$	Coefficient de poisson
$\rho$	Densité
$\rho$	Constante d'impérmeabilité diélectrique
$\sigma$	Entropie
$\tau$	Temps à l'état haut dans une période
$\phi$	Fréquence d'excitation
$\chi_s$	Figure de mérite par rapport à la surface
$\chi_v$	Figure de mérite par rapport au volume
$\omega_h$	Fréquence propre du système piézoélectrique
$\omega_n$	Fréquence propre du système pont
$\varphi$	Déphase

#### 4. Majuscules grecques

$\theta$	Température
$\theta_0$	Température de Curie Weiss
$\Phi$	Champ magnétique
$\Phi_h$	Paramètre adimensionnel de la fréquence ou fréquence réduite

#### 5. Notations spéciales

$\frac{\partial u}{\partial x}$	Dérivé partielle de $u$ par rapport à la variable $x$
$\frac{\Delta l}{l}$	Variation relative de $l$
${}^t com M$	Transposé de la comatrice de $M$

#### 6. Abréviations

AC	Alternating Current
AMF	Alliage à Mémoire de Forme
DC	Direct Current
FEM	Force Electromotrice
MATLAB	MATrix LABoratory
MEMS	Microelectromechanical Systems
MIT	Massachusetts Institute of Technology
PVDF	PolyVinylidene Fluoride
PZT	Titano-Zirconate de Plomb
SMES	Superconductor Magnétic Energy Storage
SSHI	Synchronized Switch Harvesting on Inductor

## LISTES DES TABLEAUX ET DES FIGURES

### 1. Listes des tableaux

<b>Tableau 1.01 :</b> <i>Coefficients de quelques matériaux piézoélectriques</i> .....	34
<b>Tableau 1.02 :</b> <i>Valeurs des densités d'énergie récupérable pour les 3 méthodes</i> .....	35
<b>Tableau 1.03 :</b> <i>Valeurs des densités d'énergie récupérable pour les trois méthodes</i> .....	35
<b>Tableau 1.04 :</b> <i>Figure de mérite des revues sur les trois types de conversion.</i> .....	36
<b>Tableau 1.05 :</b> <i>Comparaison des trois types de conversion.</i> .....	37
<b>Tableau 2.01 :</b> <i>Equation d'état piézoélectrique</i> .....	63
<b>Tableau 2.02 :</b> <i>Glossaire des symboles dans la piézoélectricité</i> .....	64
<b>Tableau 2.03 :</b> <i>Couplage électromécanique suivant le mode de déformation et la polarisation P.</i> .....	72
<b>Tableau 2.04 :</b> <i>Propriétés des différents matériaux piézoélectriques.</i> .....	77
<b>Tableau 3.01 :</b> <i>Propriétés et mesures des matériaux</i> .....	84
<b>Tableau 3.02 :</b> <i>Valeurs numériques des paramètres</i> .....	95
<b>Tableau 4.01 :</b> <i>Paramètres du modèle piézoélectrique</i> .....	145
<b>Tableau 4.02 :</b> <i>Paramètres de pont</i> .....	146
<b>Tableau 4.03 :</b> <i>Tableau de la puissance obtenue en mode AC.</i> .....	147
<b>Tableau 4.04 :</b> <i>Tableau de la puissance récupéré en mode DC standard</i> .....	149
<b>Tableau 4.05 :</b> <i>Tableau de la puissance obtenue en mode SSHI-Parallèle</i> .....	151
<b>Tableau 4.06 :</b> <i>Tableau de la puissance obtenue en mode SSHI- Série.</i> .....	153
<b>Tableau 4.07 :</b> <i>Comparaison des caractéristiques entre la batterie et le supercondensateur</i> .....	162
<b>Tableau 4.08 :</b> <i>Caractéristique de la batterie panasonic 3 V</i> .....	163
<b>Tableau 5.01 :</b> <i>Paramètres de pont</i> .....	169
<b>Tableau 5.02 :</b> <i>Paramètres de simulation de la déflexion d'un pont.</i> .....	171
<b>Tableau 5.03 :</b> <i>Résultats de test sur un pont de 50m</i> .....	172
<b>Tableau 5.04 :</b> <i>Résultats de test sur un pont de 35m</i> .....	175
<b>Tableau 5.05 :</b> <i>Résultats de test sur un pont de 25 m</i> .....	175
<b>Tableau 5.06 :</b> <i>Résultat de la simulation sous Simulink</i> .....	186

<b>Tableau 5.07 :</b> <i>Résultat de déflexion d'un pont de 35 m par Symbolic Math</i> .....	190
<b>Tableau 5.08 :</b> <i>Résultat de la simulation par Symbolic Math</i> .....	193
<b>Tableau 5.09 :</b> <i>Récapitulation des résultats obtenus au milieu d'un pont pour la théorie et la simulation.</i> .....	195

## 2. Listes des figures

<b>Figure 1.01 :</b> <i>Schéma bloc d'un récupérateur d'énergie vibratoire.</i> .....	4
<b>Figure 1.02 :</b> <i>Système « masse – ressort ».</i> .....	7
<b>Figure 1.03 :</b> <i>Réponse de la position <math>y(t)</math>.</i> .....	8
<b>Figure 1.04 :</b> <i>Méthode d'isolation de vibrations routières.</i> .....	10
<b>Figure 1.05 :</b> <i>Valeurs de puissance produite par le corps humain.</i> .....	11
<b>Figure 1.06 :</b> <i>Modèle linéaire d'un système vibrant développé par William et Yates</i> .....	12
<b>Figure 1.07 :</b> <i>Bilan des forces qui s'exercent sur la masse <math>m</math>.</i> .....	13
<b>Figure 1.08 :</b> <i>Structure d'un transducteur électromagnétique sur une poutre encastree.</i> .....	19
<b>Figure 1.09 :</b> <i>Structure d'un transducteur électromagnétique avec un ressort.</i> .....	19
<b>Figure 1.10 :</b> <i>Générateur électromagnétique : (a) Prototype A, (b) Prototype B.</i> .....	20
<b>Figure 1.11 :</b> <i>Macrogénérateur électromagnétique.</i> .....	20
<b>Figure 1.12 :</b> <i>Récupération d'énergie électromagnétique : (a) Prototype de taille D9L12, (b) Prototype de taille D7L12.</i> .....	21
<b>Figure 1.13 :</b> <i>(a) Générateur électromagnétique placé dans un sac au dos, (b) Générateur placé sur la cheville, poche et poignet, (c) Récupérateur d'énergie par respiration.</i> .....	22
<b>Figure 1.14 :</b> <i>(a) Fabrication de BEH Prototype I, (b) Fabrication de BEH Prototype II</i> .....	23
<b>Figure 1.15 :</b> <i>Circuit d'un convertisseur électrostatique.</i> .....	23
<b>Figure 1.16 :</b> <i>Trois types de générateur électrostatique (a) Plan à chevauchement variable (b) Plan à entrefer variable (c) Normal au plan à entrefer variable.</i> .....	24
<b>Figure 1.17 :</b> <i>Type de générateur électrostatique .</i> .....	25
<b>Figure 1.18 :</b> <i>Schéma en 3 dimensions de la structure proposé par Basset.</i> .....	26
<b>Figure 1.19 :</b> <i>Générateur électrostatique de structure poutre encastree libre avec électret.</i> .....	26
<b>Figure 1.20 :</b> <i>Générateurs piézoélectriques : (a) conversion par l'intermédiaire d'un oscillateur mécanique, (b) conversion directe.</i> .....	27

<b>Figure 1.21 :</b> <i>Récupérateur piézoélectrique (a) exploitant la compression sous le talon et la flexion de la pointe du pied (b) permettant d'augmenter la contrainte dans un PVDF multicouche.</i>	29
<b>Figure 1.22 :</b> <i>Récupérateur piézoélectrique avec un mécanisme d'amplification.</i>	29
<b>Figure 1.23 :</b> <i>Récupérateur d'énergie à piézoélectrique intégré.</i>	30
<b>Figure 1.24 :</b> <i>Exemple d'installation par Pavegen à Londres.</i>	31
<b>Figure 1.25 :</b> <i>Portillons d'accès au métro à Tokyo avec affichage électronique.</i>	32
<b>Figure 1.26 :</b> <i>(a) Exemple de route piézoélectrique (b) Déformation d'une dalle piézoélectrique sous l'action d'une véhicule (c) Dalles piézoélectrique pour le types de circulations.</i>	32
<b>Figure 1.27 :</b> <i>Schéma bloc d'extraction d'énergie électrique.</i>	39
<b>Figure 1.28 :</b> <i>Circuit d'extraction d'énergie électrique.</i>	39
<b>Figure 1.29 :</b> <i>Convertisseur DC/DC (a) : Buck (b) : Boost (c) : Buck-Boost</i>	40
<b>Figure 1.30 :</b> <i>Technique SSHI en parallèle.</i>	42
<b>Figure 2.01 :</b> <i>Schématisation de l'effet piézoélectrique (a) effet direct (b) effet inverse.</i>	47
<b>Figure 2.02 :</b> <i>Structure moléculaire de SiO<sub>2</sub>.</i>	48
<b>Figure 2.03 :</b> <i>Structure moléculaire de H<sub>2</sub>O.</i>	49
<b>Figure 2.04 :</b> <i>(a) Molécule à l'état naturelle, (b) Molécule sous contrainte, apparition de charges opposées sur les deux côtés de la plaque.</i>	49
<b>Figure 2.05 :</b> <i>(a) Molécule avec polarisation intrinsèque à l'état naturelle, (b) Molécule avec polarisation intrinsèque sous contrainte, apparition de charges opposées sur les deux côtés de la plaque.</i>	50
<b>Figure 2.06 :</b> <i>Présentation d'un dipôle distant de a.</i>	51
<b>Figure 2.07 :</b> <i>Déformation d'une maille cristalline d'un matériau piézoélectrique.</i>	52
<b>Figure 2.08 :</b> <i>Cristal possédant un centre de symétrie.</i>	54
<b>Figure 2.09 :</b> <i>Cristal ne possédant pas de centre de symétrie.</i>	55
<b>Figure 2.10 :</b> <i>Organisation des différentes classes cristallines.</i>	56
<b>Figure 2.11 :</b> <i>Hiérarchie des matériaux cristallins ayant des propriétés piézoélectriques.</i>	57
<b>Figure 2.12 :</b> <i>Représentation en 2D du processus de polarisation dans une céramique (a) matériau vierge (b) matériau polarisé.</i>	59
<b>Figure 2.13 :</b> <i>Cycle d'hystérésis d'un matériau ferroélectrique avec <math>E_C</math>, champ coercitif, <math>P_R</math>, polarisation rémanent, <math>P_S</math>, polarisation de saturation.</i>	60
<b>Figure 2.14 :</b> <i>Relations entre les propriétés thermiques, électriques et mécaniques d'un cristal.</i>	62

<b>Figure 2.15 :</b> Définition des directions dans un milieu piézoélectrique. ....	65
<b>Figure 2.16 :</b> Mode longitudinale. ....	70
<b>Figure 2.17 :</b> Mode transversale. ....	70
<b>Figure 2.18 :</b> Mode de cisaillement. ....	71
<b>Figure 2.19 :</b> Déformation parasite par conservation du volume. Pour une déformation longitudinale, la conservation du volume introduit un mode transversal mécanique. ....	72
<b>Figure 2.20 :</b> Microstructure typique d'une surface céramique polie qui illustre les grains monocristallins, les joints de grains et les pores. ....	74
<b>Figure 3.01 :</b> Structure bimorphe, (a) : couche piézoélectrique séparé par un axe neutre (b) : couche piézoélectrique séparé par un matériau en silicium. ....	82
<b>Figure 3.02 :</b> Structure unimorphe. ....	82
<b>Figure 3.03 :</b> Modèle à un degré de liberté (1-D) d'un récupérateur piézoélectrique. ....	83
<b>Figure 3.04 :</b> Dimensionnement d'un modèle à un degré de liberté (1-D). ....	84
<b>Figure 3.05 :</b> Modèle à un degré de liberté (1-D) (voir texte pour les variables). ....	85
<b>Figure 3.06 :</b> Puissance récupérée en fonction de la fréquence réduite avec une résistance de charge variable pour le modèle à 1-D. $R_r$ et $R_{ar}$ sont respectivement la résistance de charge optimisée en puissance à la fréquence de résonance et antirésonance. $R_{opt}$ est la résistance de charge optimisée en puissance pour toutes les fréquences. ....	97
<b>Figure 3.07 :</b> Puissance récupérée en fonction de la fréquence réduite $\Phi h$ avec quatre valeurs différentes du taux d'amortissement $\zeta h$ ....	98
<b>Figure 3.08 :</b> Déplacement en fonction de la fréquence réduite avec une résistance de charge variable pour le modèle à 1-D. $R_r$ et $R_{ar}$ sont respectivement la résistance de charge optimisée en puissance à la fréquence de résonance et antirésonance. $R_{opt}$ est la résistance de charge optimisée en puissance pour toutes les fréquences. ....	99
<b>Figure 3.09 :</b> Déplacement en fonction de la fréquence réduite avec quatre valeurs de taux d'amortissement différent. ....	100
<b>Figure 3.10 :</b> Tension en fonction de la fréquence réduite avec une résistance de charge variable pour le modèle à 1-D. $R_r$ et $R_{ar}$ sont respectivement la résistance de charge optimisée en puissance à la fréquence de résonance et antirésonance. $R_{opt}$ est la résistance de charge optimisée en puissance pour toutes les fréquences. ....	101
<b>Figure 3.11 :</b> Symbole d'une diode. ....	104
<b>Figure 3.12 :</b> Pont redresseur pour convertir AC/DC. ....	105

<b>Figure 3.13 :</b> Allures du signal d'entrée ( $V_{ac}$ ), du signal de sortie ( $V_{dc}$ ) et du courant $I$ qui traverse le circuit. ....	105
<b>Figure 3.14 :</b> Circuit standard d'un récupérateur d'énergie.....	107
<b>Figure 3.15 :</b> Courbes représentant : (a) : la tension d'entrée sinusoïdale $V_P$ , (b) : le courant $I$ qui traverse le circuit, (c) : la tension redressée $V_{dc}$ . ....	108
<b>Figure 3.16 :</b> Variation de la puissance en fonction de la résistance réduite $\beta$ pour la technique standard. ....	112
<b>Figure 3.17 :</b> Circuit électrique d'un récupérateur d'énergie piézoélectrique avec une technique SSHI parallèle. ....	114
<b>Figure 3.18 :</b> Forme du déplacement et de la tension piézoélectrique par la technique SSHI parallèle. ....	114
<b>Figure 3.19 :</b> Variation de la puissance en fonction de la résistance réduite $\beta$ pour le technique SSHI parallèle ( $QL = 3.5$ ).....	118
<b>Figure 3.20 :</b> Circuit électrique d'un récupérateur d'énergie piézoélectrique avec une technique SSHI série.....	119
<b>Figure 3.21 :</b> Forme du déplacement et de la tension piézoélectrique par la technique SSHI série. ....	119
<b>Figure 3.22 :</b> Variation de la puissance en fonction de la résistance réduite $\beta$ pour le technique SSHI série ( $QL = 3.5$ ).....	124
<b>Figure 3.23 :</b> Variation de la puissance en fonction de la résistance réduite $\beta$ pour différent technique. ....	125
<b>Figure 4.01 :</b> Modèle d'un pont sous une force constante $P$ .....	130
<b>Figure 4.02 :</b> Module d'un récupérateur piézoélectrique à 1D. ....	142
<b>Figure 4.03 :</b> Module « pont-piézoélectrique ». ....	143
<b>Figure 4.04 :</b> Résultats obtenus au milieu d'un pont de 35m, (a) : courbe de la déflexion du pont, (b) : tension récupéré en mode alternatif. ....	148
<b>Figure 4.05 :</b> Résultats obtenus au milieu d'un pont de 35m, (a) : courbe de la déflexion du pont, (b) : tension récupéré en mode DC standard.....	150
<b>Figure 4.06 :</b> Résultats obtenus au milieu d'un pont de 35m, (a) : courbe de la déflexion du pont, (b) : tension récupéré en mode SSHI-parallèle.....	152
<b>Figure 4.07 :</b> Résultats obtenus au milieu d'un pont de 35m, (a) : courbe de la déflexion du pont, (b) : tension récupéré en mode SSHI-série.....	154



<b>Figure 4.08 :</b> <i>Structure d'un stockage d'énergie</i> .....	156
<b>Figure 4.09 :</b> <i>Structure du convertisseur « Boost »</i> .....	157
<b>Figure 4.10 :</b> <i>Signale rectangulaire de période T</i> .....	157
<b>Figure 4.11 :</b> <i>Circuit équivalent d'un convertisseur « Boost » à l'état passant</i> .....	158
<b>Figure 4.12 :</b> <i>Circuit équivalent d'un convertisseur « Boost » à l'état OFF</i> .....	159
<b>Figure 4.13 :</b> <i>Batterie panasonic « Pile button »</i> .....	163
<b>Figure 4.14 :</b> <i>Circuit de charge de la batterie</i> .....	163
<b>Figure 5.01 :</b> <i>Modèle d'un pont sous une force constante P</i> .....	167
<b>Figure 5.02 :</b> <i>Réalisation Simulink du modèle mathématique d'un pont sous une force constante P</i> .....	170
<b>Figure 5.03 :</b> <i>Module mathématique d'un pont groupé en sous-système sous Simulink</i> .....	172
<b>Figure 5.04 :</b> <i>Courbes de déflexion au point <math>x = 50</math> m pour un pont de 50m : (a) vitesse = 36 km/h, (b) vitesse = 54 km/h, (c) vitesse = 72 km/h, (d) vitesse = 90 km/h</i> .....	173
<b>Figure 5.05 :</b> <i>Courbes de déflexion située à 1/2 de la longueur du pont de 35 m, (a) vitesse = 36 km/h, (b) vitesse = 54 km/h, (c) vitesse = 72 km/h, (d) vitesse = 90 km/h</i> .....	174
<b>Figure 5.06 :</b> <i>Courbes de déflexion située à 1/2 de la longueur du pont de 25 m, (a) vitesse = 36 km/h, (b) vitesse = 54 km/h, (c) vitesse = 72 km/h, (d) vitesse = 90 km/h</i> .....	176
<b>Figure 5.07 :</b> <i>Module d'un récupérateur piézoélectrique à 1D</i> .....	177
<b>Figure 5.08 :</b> <i>Modèle mathématique du système piézoélectrique sous Simulink</i> .....	180
<b>Figure 5.09 :</b> <i>Modèle mathématique du système piézoélectrique groupé en sous-système Simulink</i> .....	181
<b>Figure 5.10 :</b> <i>Courbe du déplacement relatif de l'élément piézoélectrique sous une excitation vibratoire avec Simulink</i> .....	182
<b>Figure 5.11 :</b> <i>Valeurs caractéristiques du déplacement relatif de l'élément piézoélectrique avec Simulink</i> .....	182
<b>Figure 5.12 :</b> <i>Courbe de la tension extraite aux bornes de l'élément piézoélectrique avec Simulink</i> .....	183
<b>Figure 5.13 :</b> <i>Valeurs caractéristiques de la tension extraite aux bornes de l'élément piézoélectrique</i> .....	183
<b>Figure 5.14 :</b> <i>Module pont - piézoélectrique groupé en sous-système sous Simulink</i> .....	184
<b>Figure 5.15 :</b> <i>Schéma bloc d'un système piézoélectrique excité par la vibration d'un pont sous Simulink</i> .....	185

<b>Figure 5.16 :</b> <i>Vibration en un point x au milieu d'un pont de longueur 35 m sous une charge mobile avec une vitesse 90 km/h traité par Simulink.</i> .....	187
<b>Figure 5.17 :</b> <i>Accélération en un point x au milieu d'un pont de longueur 35 m sous une charge mobile avec une vitesse 90 km/h traité par Simulink.</i> .....	188
<b>Figure 5.18 :</b> <i>Courbe de la tension extraite au milieu d'un pont de longueur 35 m sous une charge mobile avec une vitesse 90 km/h traité par Simulink.</i> .....	188
<b>Figure 5.19 :</b> <i>Courbe de la déflexion maximale au milieu d'un pont de 35 m avec une vitesse de 90 km/h par Symbolic Math.</i> .....	190
<b>Figure 5.20 :</b> <i>Courbe de déplacement relatif de l'élément piézoélectrique sous une excitation sinusoïdale traité par Symbolic Math</i> .....	192
<b>Figure 5.21 :</b> <i>Courbe de la tension extraite de l'élément piézoélectrique par Symbolic Math</i> ....	192
<b>Figure 5.22 :</b> <i>Courbe de la tension extraite sur le module piézoélectrique traité par Symbolic Math</i> .....	194

## INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLEME

Les besoins en énergie de la société moderne n'ont pas cessé de s'accroître. Mais entre autres, la crainte de l'épuisement des sources d'énergie fossile, la crainte des dangers que peuvent créer les sources d'énergie nucléaire auxquels le monde est exposé, l'augmentation du prix de l'énergie pour les utilisateurs, et surtout la pollution, ont poussé les chercheurs à s'orienter vers les sources d'énergie efficaces, non polluantes, et renouvelables.

De l'autre côté, il y a les énergies dites *ambiantes* qui sont abondantes et omniprésentes dans la nature. Energies qui sont en général perdues car elles sont non exploitées.

Des recherches ont donc été entamées pour « récolter » des sources d'énergie électrique à partir de ces sources d'énergie de l'environnement : thermique, solaire, et mécanique en particulier. Les technologies ont d'abord été développées pour montrer qu'il est possible d'obtenir des systèmes autonomes énergétiquement. Les efforts se sont concentrés sur les systèmes portables.

Il a été prouvé que :

- (i) l'énergie mécanique est la plus accessible par rapport aux autres [1.01], [1.02], [1.03] ;
- (ii) l'énergie vibratoire possède une densité d'énergie supérieure à celle des autres sources d'énergie ambiante [1.04], [1.05], [1.06].

Des générateurs d'électricité à partir des vibrations ont été alors réalisés par les méthodes électrostatique, magnétique et piézoélectrique. Le travail qui est présenté dans cette thèse est axé sur la méthode piézoélectrique.

### ***Problématique :***

- Pourquoi le matériau piézoélectrique crée de l'activité sous une perturbation extérieure ?
- La vibration d'un pont sous une charge mobile est une des énergies ambiantes perdue sans exploitée. L'utilisation d'un module piézoélectrique peut-il aider pour récupérer ces énergies perdues ?

### ***L'objectif de la recherche dans cette thèse est:***

- D'étudier et créer un modèle pour la création d'électricité dans un matériau piézoélectrique sous contrainte.
- De faire une étude analytique et créer un modèle mathématique pour un générateur piézoélectrique et la vibration du pont routier.

- Etudier le meilleur endroit pour récupérer un maximum d'énergie sur un pont.

Cette thèse intitulée « *Etude analytique et simulation de la conversion de l'énergie vibratoire en énergie électrique avec un matériau piézoélectrique : application sur la vibration d'un pont* » est organisée comme suit.

Le premier chapitre développe le principe de base de la conversion d'énergie vibratoire en énergie électrique. Une revue sur le contexte de récupération d'énergie et les différentes méthodes de conversion utilisées sont ensuite énumérés. La comparaison de ces différentes méthodes permet de choisir le type de conversion étudié dans cette thèse. L'extraction et le stockage d'énergie récupérée sont aussi expliqués dans ce chapitre.

Le deuxième chapitre décrit le phénomène et les caractéristiques de la piézoélectricité. Une explication au niveau physique et atomique d'un matériau piézoélectrique est effectuée. Un modèle à un degré de liberté est ensuite développé pour expliquer la création d'électricité dans un matériau piézoélectrique. Des détails sur la propriété piézoélectrique et mécanique d'un matériau piézoélectrique avec leur mode de déformation sont aussi donnés dans ce chapitre. La connaissance de toutes ces propriétés permet de choisir le type et le mode de déformation d'un élément piézoélectrique à étudier dans cette thèse.

Le troisième chapitre présente l'étude analytique et le modèle mathématique d'un convertisseur d'énergie vibratoire en énergie électrique par l'intermédiaire d'un matériau piézoélectrique. Un modèle à un degré de liberté sera conçu avec un élément piézoélectrique de type PVDF (PolyVinylidene Fluoride) fonctionnant en mode longitudinal ou mode 33. L'étude analytique de ce modèle conduit à une équation électromécanique du système. La résolution de cette équation par la transformée de Laplace donne le modèle mathématique du déplacement relatif de l'élément piézoélectrique, la tension extraite et la puissance récoltée. L'analyse graphique de ces trois grandeurs permettra de décrire l'énergie électrique obtenue par le modèle considéré. L'énergie électrique récoltée est ensuite transformée en tension continu pour pouvoir les utiliser. Trois techniques sont utilisés : une conversion AC/DC avec un circuit standard, une conversion SSHI (Synchronized Switch Harvesting on Inductor) parallèle et SSHI série.

Le quatrième chapitre traite la conversion de la vibration d'un pont routier en énergie électrique par l'intermédiaire du modèle piézoélectrique développé dans le chapitre 3. Un modèle entre le pont et le véhicule qui le traverse est conçu dans ce chapitre. L'équation mathématique de ce modèle est résolue par la méthode de superposition modale. Le modèle mathématique de l'ensemble, piézoélectrique monté sous le pont, donne une valeur estimative de l'énergie récoltée à partir de la vibration d'un pont. Une série de tests théorique avec interprétation sera effectué.

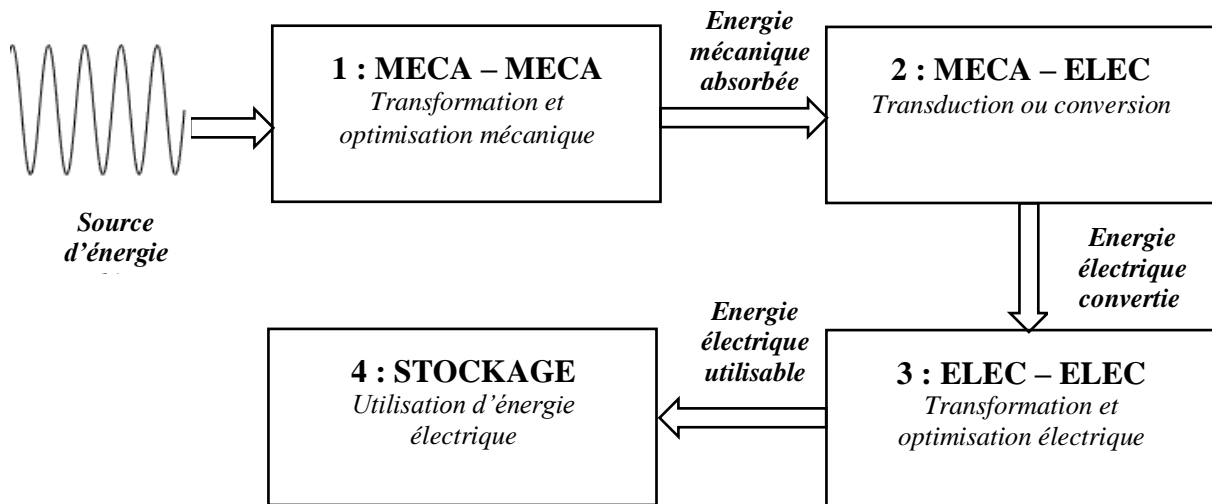
Le dernier chapitre traitera la simulation des modèles. La simulation du modèle pont sera traitée en premier suivie du modèle piézoélectrique. Ensuite, les deux modèles seront simulés ensemble. Les paramètres utilisés dans la simulation son ce qui sont utilisés pendant le test théorique. La simulation sera traitée avec le logiciel MATLAB avec l'utilisation des deux ToolBox Simulink et Symbolic Math.

## CHAPITRE 1

### CONVERSION D'ENERGIE VIBRATOIRE EN ENERGIE ELECTRIQUE

#### 1.1 Introduction

Des sources d'énergies ambiantes sont omniprésentes dans notre environnement tel que l'énergie mécanique produit par de vibrations, l'énergie thermique obtenu par la chaleur et l'énergie solaire photovoltaïques émis par le soleil ou les lumières artificielles. Ce sont des ressources inépuisables par rapport aux énergies fossiles comme le charbon, le pétrole et le gaz naturel. La conversion de ces énergies inépuisables dites aussi énergies primaires en énergies électriques est particulièrement étudiée de nos jours pour accroître l'autonomie des systèmes placés dans des milieux hostiles. Ce chapitre donne le principe de base de la conversion de ces énergies ambiantes en énergie électrique. Le cas de la transformation d'énergie vibratoire en électricité est considéré. Ce récupérateur d'énergie vibratoire est composé en général de quatre unités présenté à la Fig. 1.01 [1.07], [1.08], [1.09].



**Figure 1.01 :** Schéma bloc d'un récupérateur d'énergie vibratoire.

En premier, il y a le dispositif mécanique qui récupère, transforme et optimise l'énergie ambiante. C'est-à-dire que l'énergie mécanique ambiante sera quantifiée pour avoir une amplitude maximale. Ensuite, il y a le dispositif électromécanique qui absorbe l'énergie mécanique transformée puis la convertit en énergie électrique. On l'appelle aussi transduction. Cette unité est caractérisée par le type de générateur, son fonctionnement et les propriétés de matériau utilisé. L'énergie électrique obtenue est traitée dans une unité de transformation et optimisation électrique. Cette unité fait la conversion de l'énergie électrique récupérée en énergie utilisable.

C'est-à-dire que l'énergie électrique présentée par une tension sinusoïdale est transformée en tension continue. Puis, la tension obtenue est quantifiée par un circuit électrique. En fin, il y a l'unité de stockage de l'énergie. Elle va stocker l'énergie électrique dans un élément de type pile ou batterie. Des définitions généralisées de l'énergie et de la vibration vont être présentées en premier lieu dans ce chapitre. Puis, quelque source possible de vibration mécanique est citée. Le principe général de transformation d'une vibration en électricité est ensuite montré en utilisant un système inertiel résonant. En général, il y a trois types de conversion ou récupération d'énergie vibratoire en énergie électrique. Ce sont le récupérateur piézoélectrique, le récupérateur électromagnétique et le récupérateur électrostatique. L'explication de ces trois transformations est faite ainsi qu'une comparaison selon leurs efficacité de convertir une énergie basée sur les données recueillies pendant la littérature.

## **1.2 Définitions**

### ***1.2.1 Energie***

Dans le domaine de la science, l'énergie est la capacité d'un système à produire du travail mécanique, à générer du courant électrique, à transmettre des informations ou encore agir en d'autre mode. On peut dire donc que la quantité d'énergie que possède un système représente la quantité de travail qu'il peut réaliser. Selon le dictionnaire Larousse, l'énergie est une grandeur physique, gardant la même valeur au cours de toutes les transformations internes du système (loi de conservation d'énergie) et exprimant sa capacité à modifier l'état d'autres systèmes avec lesquelles il entre en interaction. En respectant la loi de conservation, l'énergie correspond bien à la maxime « *Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme* » attribué à Antoine de Lavoisier. C'est-à-dire que, l'énergie ne se perd, ne se crée mais se transforme. Ainsi, l'énergie vibratoire pourra par exemple se transformer en énergie électrique et la transformation inverse est également possible. Dans le système international, l'unité de mesure de l'énergie est le joule (J) venant du nom du physicien James Prescott Joule. Dans le cadre de l'utilisation plus courante, l'unité de l'énergie utilisée est en général le kilowattheure (KWh).

Selon la définition de l'énergie, l'énergie vibratoire peut se définir comme la capacité d'un système à produire un mouvement vibratoire.

### ***1.2.2 Vibration mécanique***

La vibration est un phénomène physique oscillatoire d'un corps en mouvement autour de sa position d'équilibre. Les termes utilisés pour décrire le mouvement de l'objet sont la fréquence, l'amplitude, l'accélération et son degré de liberté [1.10].

#### 1.2.2.1 Fréquence

Un corps vibrant effectue un va-et-vient de part et d'autre de sa position d'équilibre. Un cycle complet de vibration est produit lorsque l'objet se déplace d'une position extrême à l'autre position extrême, puis revient au point de départ. Le nombre de cycles effectués par un objet vibrant pendant une seconde est appelé sa fréquence. L'unité de fréquence est l'hertz (Hz). Un hertz correspond à un cycle par seconde. Le mouvement est dit mouvement périodique si le mouvement se répète avec un cycle identique. La durée d'un cycle est appelée période. Ce type de mouvement se nomme oscillation ou mouvement oscillatoire.

#### 1.2.2.2 Amplitude

Un corps vibrant se déplace sur une distance maximale de part et d'autre de sa position d'équilibre. L'amplitude est la distance comprise entre la position d'équilibre et la position extrême, d'un côté ou de l'autre, et elle est mesurée en mètres (m). L'intensité de la vibration dépend de l'amplitude.

#### 1.2.2.3 Accélération (mesure d'intensité de vibration)

La vitesse d'un corps vibrant passe de zéro à une valeur maximale pendant chaque cycle de vibration. Elle est maximale lorsque l'objet passe par la position fixe naturelle qu'il occuperait en l'absence de vibration, en déplacement vers une position extrême. L'objet vibrant ralentit à mesure qu'il s'approche de sa position extrême, où il s'arrête, pour repartir ensuite dans le sens contraire vers la position fixe et l'autre position extrême. La vitesse de la vibration s'exprime en mètres par seconde (m/s).

L'accélération est une grandeur qui indique dans quelle mesure la vitesse varie en fonction du temps. La mesure s'exprime en unités de vitesse (mètres par seconde) par seconde ou en mètres par seconde carrée ( $\text{m/s}^2$ ). L'accélération passe de zéro à une valeur maximale pendant chaque cycle de vibration. Elle augmente à mesure que l'objet s'approche de la position fixe qu'il occuperait en l'absence de vibration.

#### 1.2.2.4 Notion de la résonance

Chaque corps tend à vibrer à une fréquence particulière appelée fréquence de vibration naturelle ou fréquence propre. La mesure de la fréquence de vibration naturelle varie en fonction de la composition de l'objet, de sa taille, de sa structure, de son poids et de sa forme. Si une force vibratoire est appliquée à un objet à une fréquence égale à sa fréquence propre, on obtient un état

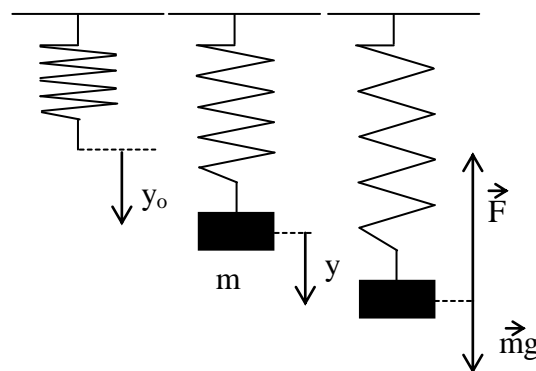


de résonance. Une machine vibrante transmet la quantité maximale d'énergie à un objet lorsqu'elle vibre à la fréquence de résonance de l'objet.

#### 1.2.2.5 Degrés de liberté

La modélisation mathématique d'un système physique nécessite l'utilisation d'un ensemble de variables qui décrit le comportement du système. Le nombre minimum des variables indépendantes requises pour déterminer complètement les positions de toutes les parties d'un système à chaque instant est le degré de liberté du système. Une seule particule libre se déplace dans l'espace à trois degrés de liberté, et un choix bien approprié de coordonnées généralisées sont les coordonnées cartésiennes ( $x, y, z$ ) de la particule par rapport à un repère fixe. Comme la particule se déplace dans l'espace, sa position est fonction du temps.

Tous les systèmes physiques peuvent être associés à un système « masse – ressort » représenté à la **Fig. 1.02**. Ceci constitue un excellent modèle représentatif pour étudier les mouvements oscillatoires.



**Figure 1.02 :** *Système « masse – ressort ».*

La **figure 1.01** montre trois états du système : ressort à vide, état d'équilibre et état en mouvement.

- $k$  : représente la constante de raideur du ressort
- $F$  : indique la force de rappel qui est proportionnelle à l'allongement  $y$
- $mg$  : représente la force de traction

A l'état d'équilibre, la masse  $m$  exerce une force de traction sur le ressort qui se traduit par un étirement initial  $y_0$ . Ceci signifie qu'au repos :  $m * g = k * y_0$

A l'état d'oscillation, la relation fondamentale de la dynamique est utilisée pour la mise en équation du système « masse – ressort ». Le système est représenté par l'équation différentielle du deuxième ordre suivant :

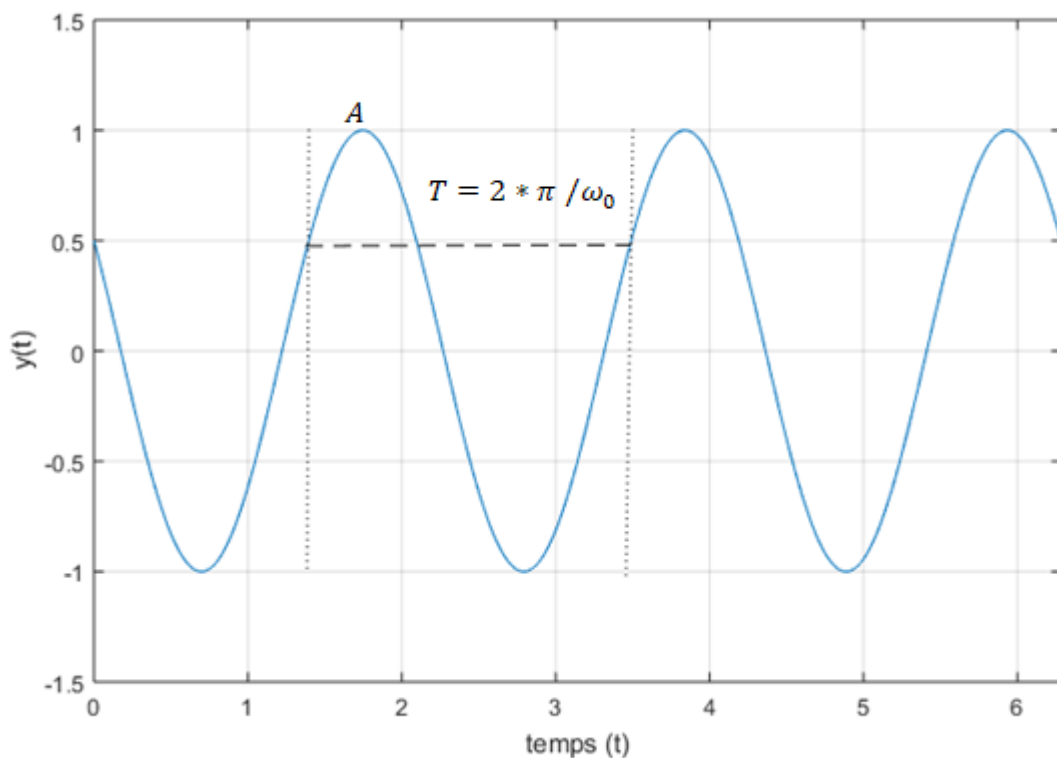
$$\ddot{y} + \frac{K}{m} y = 0 \quad (1.01)$$

Avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$  est la fréquence propre du système.

La solution de cette équation différentielle du second ordre est de la forme sinusoïdale suivant :

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Où  $A$  l'amplitude de l'oscillation,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$  est la pulsation propre ou naturelle du système,  $\varphi$  est le déphase. La **figure 1.03** montre la courbe représentative de la position  $y(t)$  avec  $A = 1$ ,  $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$  et  $\varphi = \pi/3$ .



**Figure 1.03 :** Réponse de la position  $y(t)$ .

La courbe montre que le corps en vibration fait un mouvement répétitif de période  $T$  et oscille sur un point d'équilibre.

### 1.2.3 Énergie électrique

L'énergie électrique désigne une énergie disponible sous forme de courant d'électrons ou d'électricité. Un courant électrique est obtenu lorsqu'on a un déplacement continu d'électrons dans un milieu. Cette énergie est utilisée directement pour produire de la lumière ou de la chaleur. L'énergie électrique n'est pas une énergie primaire comme les énergies fossiles et les énergies renouvelables. Elle dépend de ces énergies primaires pour la produire. Elle est donc le résultat

d'une conversion énergétique qui est dans le cas de cette thèse obtenue par les vibrations mécaniques.

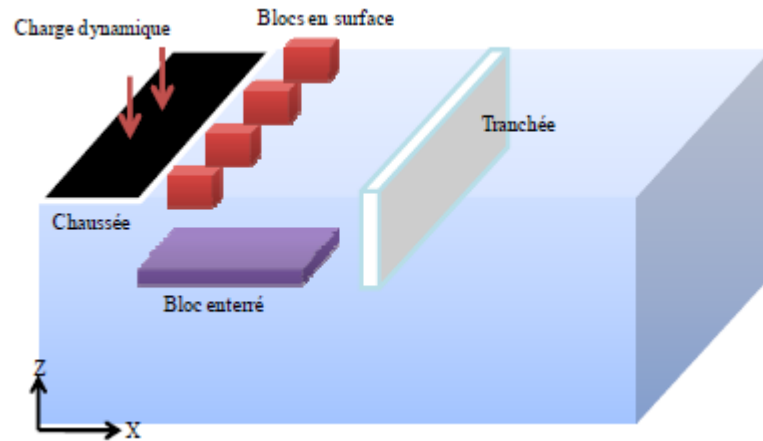
### **1.3 Sources des vibrations mécaniques**

Plusieurs sources d'énergie vibratoire mécanique sont possibles, comme l'énergie mécanique provoquée par les diverses machines industrielles, les automobiles et les trains. Il y a aussi celles qui sont provoquées par des grandes infrastructures civiles telles que les ponts et les buildings. Les mouvements humains comme le mouvement des pieds et les articulations peuvent aussi être source de vibrations.

#### ***1.3.1 Vibration routière***

Le passage d'un véhicule sur la chaussée exerce une contrainte au sol du à son poids. Le champ de contrainte va ensuite créer des vibrations. Les facteurs de création de la vibration routière peuvent être multiples. Il y a le type et le poids du véhicule, la vitesse du véhicule, les caractéristiques de la chaussée et la nature du sol. L'étude de la vibration induite sur les chaussées peut être utilisée dans plusieurs axes. Z. Ye, Y. Lu et L. Wang ont présenté une modèle numérique pour l'analyse des vibrations de la chaussée dues à la charge dynamique créée par un véhicule qui passe [1.11]. Un modèle de quart de véhicule a été utilisé pour déterminer la charge mobile du véhicule. Le résultat est utilisé pour transmettre une information sur l'état de service de la chaussée et aide à la prévision des dégâts. Les vibrations induites par la circulation routière peuvent impacter aussi les environnements au voisinage de la chaussée. Elles peuvent créer des effets néfastes comme les dégâts superficiels ou structurels aux structures avoisinantes, déstabilisations des sols lâches et dysfonctionnements des appareils sensibles. M. Mhanna a fait l'analyse des vibrations induites par le trafic routier et étudie l'efficacité de système de réduction de ces vibrations [1.12]. Autre que la réduction habituelle de la vibration induite routière (entretien périodique de la chaussée, limitation du poids et la vitesse des véhicules), Mhanna a proposé dans sa thèse une méthode d'isolation de vibration, présentée à la **Fig.1.04**.

Contrairement aux effets néfastes, les vibrations routières peuvent être récupérables en les convertissant en énergie électrique. A.T. Papagiannakisa a modélisé numériquement la répartition des contraintes dans un scénario de trafic routier donné et analysé la valeur de l'énergie électrique produite [1.13]. Les résultats obtenus montrent qu'on peut alimenter les feux de signalisation à LED et les capteurs sans fils intégré dans les structures de chaussées.



**Figure 1.04 : Méthode d'isolation de vibrations routières [1.12].**

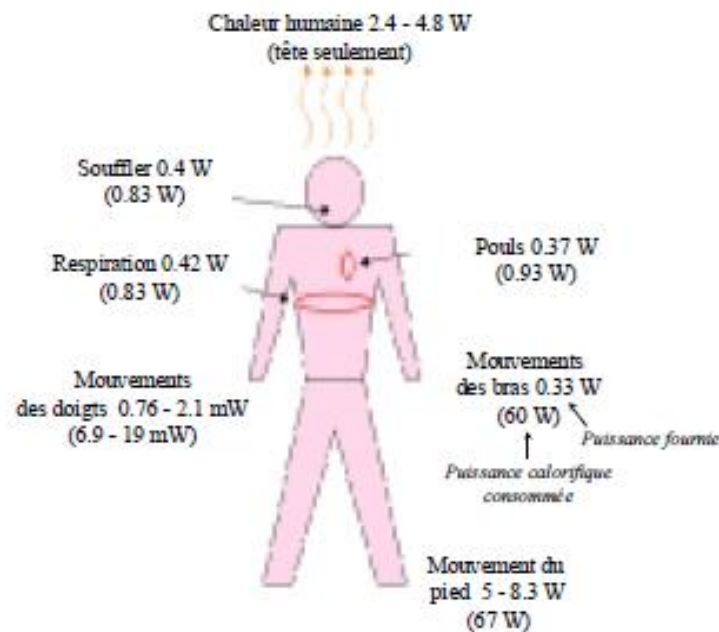
### **1.3.2 Vibration ferroviaire**

Le train est un moyen de transport sûr et qui est encore utilisé actuellement, au tant dans le transport des marchandises que dans le transport des voyageurs. La vibration produite par le transport ferroviaire peut induire de problèmes environnementaux mais peut être aussi exploitée pour produire de l'électricité. M. Y. Gao a étudié la possibilité de récupérer une énergie à partir de la vibration des rails [1.14]. Il a utilisé un film PZT piézoélectrique fixé à l'extrémité du rail et une masse sismique montée à l'autre extrémité. Ce récupérateur est capable de collecter une énergie à basse fréquence (5 Hz à 7 Hz) et de faible vibration ferroviaire (déplacement du rail de 0,2 mm à 0,4 mm). Une puissance de sortie de 4,9 mW avec une impédance de charge de 100 k $\Omega$  est obtenue. V. G. Cleante a étudié la quantité d'énergie mécanique potentiellement récupérable à partir de la vibration provoquée par le passage d'un train à différentes vitesses [1.15]. Pour un train qui circule avec une vitesse de 190 km/h à 200 km/h, une énergie totale exploitable de 1,1 Jkg<sup>-1</sup> est obtenue.

### **1.3.3 Vibration «humaine»**

Le corps humain stocke, dissipe et peut produire une énergie considérable par rapport à la consommation de la plupart des appareils électroniques portables habituels. Il convertit de l'énergie constamment à partir des mouvements, de la respiration et de la chaleur. Ces énergies peuvent être considérées comme énergie renouvelable, non polluante et de durée de vie élevée. Même si une faible part de cette énergie est exploitable, il semble que l'énergie associée aux mouvements du corps humain peut permettre d'approvisionner bon nombre d'applications. L'idée d'utiliser l'énergie mécanique de l'homme pour alimenter les systèmes électriques portables a eu

le jour à la fin des années 1990. En 1996, une étude menée par T. Starner au MIT (Massachusetts Institute of Technology) Media Lab propose un premier calcul d'ordres de grandeur de la puissance mécanique développée par la personne lors de différents mouvements [1.04]. Il a conclu que les mouvements des membres inférieurs, marcher et courir développent plus de puissance par rapport aux autres mouvements. La puissance développée par le corps humain, présentée sur la **Fig. 1.05**, est de l'ordre de 1 à 10 W.



**Figure 1.05 :** Valeurs de puissance produite par le corps humain [1.10].

### 1.3.4 Vibration des structures civiles

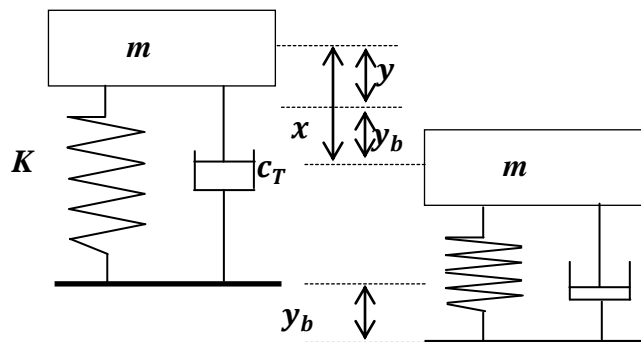
Le pont est un exemple d'infrastructure civile qui est utilisé pour franchir un obstacle ou un espace vide (un cours d'eau, vallées ou une voie routière). Dans le cas d'un pont routier, le passage d'un véhicule va créer une déformation ou vibration sur la structure. Cette vibration induite peut être utilisée pour l'entretien du pont via sa conversion en énergie électrique. L'électricité obtenue est très utile pour alimenter des appareils électroniques utilisés dans la surveillance de la santé structurelle. M. Peigney et D. Siegert ont étudié un récupérateur piézoélectrique à partir des vibrations induites créé par un trafic sur le pont. Ils ont parti d'une mesure expérimentale pour construire leur récupérateur [1.16]. Ils ont montré que même si les vibrations du pont sont à faible amplitude et à basse fréquence (inférieur à 15 Hz), une puissance moyenne de l'ordre de 0,03 mW peut être produite avec une tension contrôlée comprise entre 1,8 V et 3,6 V.

## 1.4 Principe de base de la conversion d'énergie vibratoire

Les sources d'énergie vibratoire ambiante sont des sources à faible amplitude et à basse fréquence. Cette fréquence est comprise entre 1 Hz à 1 kHz. Par exemple, le mouvement humain est associé généralement à une faible fréquence environ 2,5 Hz [1.17], la fréquence de vibration d'un immeuble est entre 0,1 Hz et 10 Hz sous l'effet des vibrations induites [1.18], la fréquence de vibration d'un pont est entre 1 Hz à 50 Hz après le passage d'un véhicule [1.19] [1.20]. La plupart des structures vibrantes sont à basse fréquence avec une amplitude d'ordre de  $\mu m$ . Une autre structure mécanique résonante est alors inventée pour amplifier la source d'énergie primaire dans le domaine de conversion d'énergie vibratoire.

### 1.4.1 Structure élémentaire d'un système inertiel résonant

Les systèmes inertiels ou systèmes indirectes sont formés d'un corps de générateur et d'une masse en déplacement libre sous l'effet d'une quelconque accélération. En d'autre terme, c'est une structure basée sur un système de « masse – ressort – amortissement ». Cette structure est présentée à la **Fig. 1.04** qui est un modèle linéaire développé par Williams et Yates [1.21]. Plusieurs chercheurs ont basés sur cette modèle pour faire des recherches dans le domaine de récupération d'énergie [1.22], [1.23], [1.24]. C'est un système composé d'une masse inertielle  $m$ , reliée à un boîtier constitué d'un ressort de raideur  $k$  et un amortissement  $c_T$ . L'amortissement total  $c_T$  est l'association de l'amortissement mécanique  $c_m$  et l'amortissement électrique  $c_e$  qui représente le mécanisme de transduction. Sous une excitation externe sinusoïdale  $y_b(t) = Y_b \sin(\omega t)$ , le système entier va vibrer. Le système se déplace avec un déplacement de base  $y_b$  et la masse inertielle  $m$  se déplace avec un déplacement relatif  $y(t) = x(t) - y_b(t)$ .



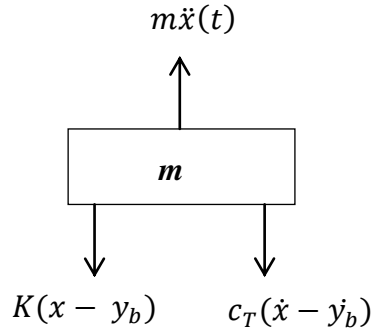
**Figure 1.06 :** *Modèle linéaire d'un système vibrant développé par William et Yates [1.21].*

L'équation de mouvement de la masse  $m$  est donnée par :

$$m\ddot{y}(t) + c_T\dot{y}(t) + K y(t) = -m \ddot{y}_b(t) \quad (1.02)$$

*Démonstration :*

♣



**Figure 1.07 :** Bilan des forces qui s'exercent sur la masse  $m$ .

En faisant le bilan des forces qui s'exercent sur la masse  $m$  présenté à la **Fig. 1.07** on aura l'équation suivante :

$$m\ddot{x}(t) + K(x - y_b) + c_T(\dot{x} - \dot{y}_b) = 0$$

Avec l'équation de déplacement relatif de la masse  $m$  :  $y(t) = x(t) - y_b(t)$ , l'équation devient

$$m(\ddot{y}(t) + \ddot{y}_b(t) + Ky(t) + c_T\dot{y}(t) = 0$$

Ce qui donne l'équation de mouvement de la masse  $m$  :

$$m\ddot{y}(t) + c_T\dot{y}(t) + Ky(t) = -m \ddot{y}_b(t)$$

♦

La résolution de cette équation différentielle du second ordre avec deuxième membre donne le déplacement relatif de la masse  $m$ . Cette solution s'écrit alors par :

$$y(t) = \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{K}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c_T\omega}{m}\right)^2}} Y_b \sin(\omega t - \varphi) \quad (1.03)$$

Avec  $\varphi_i$  est l'angle de déphasage donnée par la formule

$$\varphi = \arctan\left(\frac{c_T\omega}{(K - \omega^2 m)}\right)$$

*Démonstration :*

♣

La base est supposée avoir un déplacement harmonique

$$y_b(t) = Y_b \sin(\omega t) = \text{Re}\{-j Y_b e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{B e^{j\omega t}\}$$

Avec  $B = -jY_b$

$Re\{-j Y_b e^{-j\omega t}\}$  veut dire partie réelle de la notation complexe  $\{-j Y_b e^{j\omega t}\}$

Un nombre complexe écrit sous sa forme polaire a pour expression :

$$Y_b(\cos \omega t + j \sin \omega t) = Y_b e^{j\omega t}$$

En multipliant les deux membres par  $-j$

$$Y_b \sin \omega t - j Y_b \cos \omega t = -j Y_b e^{j\omega t}$$

On peut dire donc que  $y_b(t) = Y_b \sin(\omega t)$  est égale à la partie réelle de l'expression complexe  $-j Y_b e^{-j\omega t}$ .

La solution de l'Eq. 1.02 est de la forme :

$$y(t) = Y_R \sin(\omega t - \varphi) = Re\{-j Y_R e^{j(\omega t - \varphi)}\} = Re\{Y e^{j\omega t}\}$$

Avec  $Y = -j Y_R e^{-j\varphi}$

En introduisant cette solution dans l'équation (1.02) avec

$$\frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega e^{j\omega t}$$

$$\frac{d^2(e^{j\omega t})}{dt^2} = j j \omega^2 e^{j\omega t} = -\omega^2 e^{j\omega t}$$

L'équation (1.02) devient alors :

$$-\omega^2 Y e^{j\omega t} + \frac{c_T}{m} j \omega Y e^{j\omega t} + \frac{K}{m} Y e^{j\omega t} = \omega^2 B e^{j\omega t}$$

$$\left(-\omega^2 + j\omega \frac{c_T}{m} + \frac{K}{m}\right) Y = \omega^2 B$$

$$Y = \frac{\omega^2}{\left(-\omega^2 + j\omega \frac{c_T}{m} + \frac{K}{m}\right)} B$$

$Y_R$  est donnée par le module de  $Y$  qui est la valeur maximale du signal sinusoïdale et le déphasage  $\varphi$  est donné par l'argument de  $Y$ .

$$Y_R = |Y| = \left| \frac{\omega^2}{\left(-\omega^2 + j\omega \frac{c_T}{m} + \frac{K}{m}\right)} B \right|$$

D'après la propriété des opérations entre les nombres complexes, on a :

$$Y_R = |Y| = \frac{|\omega^2| |B|}{\left| \left(-\omega^2 + j\omega \frac{c_T}{m} + \frac{K}{m}\right) \right|}$$

$$Y_R = \frac{\omega^2 Y_b}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c_T}{m} \omega\right)^2}} \quad (1.04)$$



Ce qui donne l'équation (1.03)

$$y(t) = \frac{\omega^2}{\sqrt{(K - \omega^2)^2 + \left(\frac{c_T \omega}{m}\right)^2}} Y_b \sin(\omega t - \varphi)$$

Avec  $\varphi = \text{Arg}(Y)$  telque :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\left(\frac{c_T \omega}{m}\right)}{\left(\frac{K}{m} - \omega^2\right)}\right) = \arctan\left(\frac{c_T \omega}{K - \omega^2 m}\right)$$

♦

#### 1.4.2 Puissance générée par le système inertiel résonant

La puissance instantanée générée par l'amortisseur du système est obtenu par le produit du carrée de la vitesse de déplacement  $\dot{y}(t)$  de la masse  $m$  par rapport au boîtier et la force de l'amortissement visqueux  $c_T$ . Cette puissance est exprimée par :

$$p(t) = c_T \dot{y}(t) \dot{y}(t)$$

Avec  $\dot{y}(t)$  est la dérivé du déplacement  $y(t) = Y_R \sin(\omega t - \varphi)$ .

$$\dot{y}(t) = Y_R \omega \cos(\omega t - \varphi)$$

La puissance moyenne dissipée par l'amortisseur mécanique et électrique  $c_T$  est donnée par :

$$P_T = \frac{m \xi_T Y_b^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 \omega^3}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2 \xi_T \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right)^2} \quad (1.05)$$

- $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$  est la fréquence propre ou fréquence naturelle du système.
- $\xi_T = \frac{c_T}{2m\omega_n}$  est l'amortissement total réduit du système.

*Démonstration :*

♣

Etant en régime sinusoïdale, la puissance moyenne dissipée par l'amortisseur visqueux  $c_T$  peut être obtenue par la considération de la valeur efficace. Cette valeur efficace est donnée par la valeur de crête (valeur maximale) divisée par la racine de deux.

Comme  $p(t) = c_T \dot{y}(t) \dot{y}(t)$  et  $\dot{y}(t) = Y_R \omega \cos(\omega t - \varphi)$ .

La valeur efficace est alors donnée par :

$$P_T = c_T \frac{Y_R \omega}{\sqrt{2}} \frac{Y_R \omega}{\sqrt{2}} = c_T \frac{(Y_R \omega)^2}{2}$$

$Y_R$  est donné par l'équation 1.04, ce qui donne

$$P_T = c_T \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{\omega^2 Y_b}{\sqrt{\left(\frac{K}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{c_T}{m} \omega\right)^2}} \right)^2$$

Avec  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ,

$$P_T = c_T \frac{\omega^2}{2} \frac{\omega^4 Y_b^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{c_T}{m} \omega\right)^2}$$

En divisant par  $\omega_n^4$  et multipliant par  $m$  le numérateur et le dénominateur

$$P_T = \frac{m}{m} \frac{c_T}{2} \frac{\frac{\omega^3}{\omega_n^4} \omega^3}{\frac{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{c_T}{m} \omega\right)^2}{\omega_n^4}} Y_b^2 = \frac{m \frac{c_T}{2m\omega_n} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 \omega^3}{\left(\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2c_T}{2m\omega_n} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} Y_b^2$$

En introduisant ensuite la notion de l'amortissement réduit  $\xi_T = \frac{c_T}{2m\omega_n}$ , on aura l'équation 1.05

$$P_T = \frac{m \xi_T \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 \omega^3 Y_b^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2 \xi_T \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

♦

La puissance obtenue est maximale quand le système est en résonance. C'est-à-dire que la fréquence d'excitation (fréquence d'entrée) coïncide avec la fréquence propre (fréquence naturelle). Cette puissance maximale est exprimée par :

$$P_{max} = \frac{mA^2}{4\omega_n \xi_T} \quad (1.06)$$

Avec  $A$  est l'amplitude de l'accélération de base.

*Démonstration :*

♣

La puissance est présentée par l'équation 1.05

$$P_T = \frac{m \xi_T \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 \omega^3 Y_b^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2 \xi_T \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

En introduisant la résonance  $\omega = \omega_n$  dans cette équation, on aura la puissance maximale

$$P_{max} = \frac{m \xi_T \omega^3 Y_b^2}{(2 \xi_T)^2}$$

L'amplitude de déplacement  $Y_b$  peut être exprimée par l'amplitude de l'accélération notée  $A$ .  
L'accélération est obtenue par le dérivé second du déplacement.

$$\ddot{y}_b(t) = \frac{d^2 y_b}{dt^2} = \frac{d^2 Y_b \sin(\omega t)}{dt^2} = -Y_b \omega^2 \sin(\omega t)$$

Ce qui implique que  $A = Y_b \omega^2$  et  $Y_b = A/\omega^2$ .  $P_{max}$  devient alors :

$$P_{max} = \frac{m \xi_T \omega^3 (A/\omega^2)^2}{(2 \xi_T)^2} = \frac{m A^2}{4 \xi_T \omega}$$

Avec  $\omega = \omega_n$ , on a l'expression 1.06

$$P_{max} = \frac{m A^2}{4 \omega_n \xi_T}$$

◆

La puissance électrique maximale est obtenue en séparant l'amortissement réduit total  $\xi_T$  en leurs termes d'amortissement mécanique réduite  $\xi_m$  et l'amortissement électrique réduite  $\xi_e$ . Cette puissance électrique maximale est exprimée par :

$$P_{emax} = \frac{m \xi_e A^2}{4 \omega_n (\xi_m + \xi_e)^2} \quad (1.07)$$

*Démonstration :*

♣

La puissance générée par l'amortisseur électrique est donnée par :

$$p_e(t) = c_e \dot{y}(t) \dot{y}(t)$$

Comme la puissance moyenne dissipée par l'amortissement est obtenue à partir de la valeur efficace. On aura donc la même expression que la puissance totale :

$$P_e = c_e \frac{(Y_R \omega)^2}{2} = c_e \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{\omega^2 Y_b}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{c_T}{m} \omega\right)^2}} \right)^2$$

En introduisant l'amortissement réduit  $\xi_e$ ,  $\xi_m$ ,  $\xi_T$  avec  $\xi_T = \xi_m + \xi_T$

$$P_e = \frac{m \xi_e \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 \omega^3 Y_b^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2 \xi_T \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{m \xi_e \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^3 \omega^3 Y_b^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2(\xi_m + \xi_T) \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

En introduisant la résonance  $\omega = \omega_n$  pour avoir la puissance maximale et l'utilisation de l'amplitude d'accélération  $A = Y_b \omega^2$ .

$$P_{emax} = \frac{m \xi_e \omega^3 Y_b^2}{(2 \xi_T)^2} = \frac{m \xi_e A^2}{4 \omega_n (\xi_m + \xi_e)^2}$$

◆

D'après l'expression de la puissance électrique maximale, on peut dire que :

- La puissance électrique récupérée dépend directement de la masse  $m$  en déplacement. La maximisation de la masse en respectant les contraintes et la déformation maximale est donc plus prometteuse en termes de récupération d'énergie.
- La puissance récupérée est proportionnelle au carrée de l'amplitude de l'excitation  $A$  et inversement proportionnelle à la fréquence de résonance  $\omega_n$  qui est égale à la fréquence d'excitation  $\omega$ . Ce qui veut dire qu'une excitation vibratoire ayant une forte amplitude et une basse fréquence donne une meilleure énergie.
- Si l'amortissement mécanique est égale à l'amortissement électrique ( $\xi_m = \xi_e$ ), la puissance est inversement proportionnelle à l'amortissement mécanique. Un amortissement mécanique plus faible donne donc une meilleure énergie.

### 1.5 Types de conversion d'énergie vibratoire en électricité

La conversion d'énergie vibratoire en électricité est effectuée par un transducteur électromécanique basé sur des systèmes résonants. Il existe trois principaux types de conversion fréquemment utilisés dans un transducteur électromécanique. Il y a la conversion électromagnétique qui se base sur l'effet d'induction magnétique, la conversion électrostatique qui utilise la variation des charges sur les armatures d'un condensateur et la conversion piézoélectrique qui utilise les propriétés d'un matériau piézoélectrique pour convertir directement une contrainte en électricité.

#### 1.5.1 Conversion électromagnétique

La conversion électromagnétique utilise la loi de Faraday. Cette loi dit que la force électromotrice induite dans un bobinage fermé placé dans un champ magnétique est proportionnelle à la variation au cours du temps du flux du champ magnétique qui entre dans le circuit. Le  $f_{em}$  induite est donnée par la dérivée négative par rapport au temps du flux magnétique à travers les circuits.

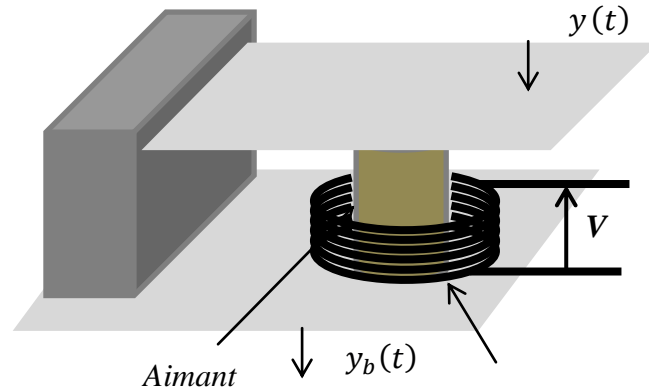
$$F_{em} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$F_{em}$  : force électromotrice,  $\Phi$  : champ magnétique,  $t$  : temps

Le signe négatif indique le sens de courant induit dans le circuit. Il est décrit par la loi de Lenz qui dit que le courant induit s'oppose par ses effets à la cause qui lui donne naissance.

Le transducteur électromagnétique est donc composé d'un aimant qui crée un champ magnétique constant et une bobine qui se situe dans ce champ. Un système mécanique résonant comme une

poutre encastré (présenté à la **Fig. 1.08**) ou un ressort (présenté à la **Fig. 1.09**) crée un déplacement relatif  $y(t)$  entre l'aimant et la bobine lorsque le système est excité par une vibration de base  $y_b(t)$ .

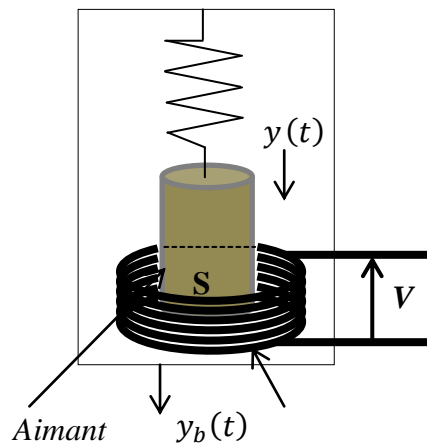


**Figure 1.08 :** Structure d'un transducteur électromagnétique sur une poutre encastrée.

Le mouvement de l'aimant va entraîner une variation des flux magnétiques dans la bobine, et qui va ensuite créer une tension  $V$  aux bornes de la bobine. La tension créée est proportionnelle à la vitesse de l'aimant, à la variation du flux magnétique créée par l'aimant dans la bobine au cours du temps et au nombre des spires  $N$  de la bobine. Cette tension est exprimée par :

$$V = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

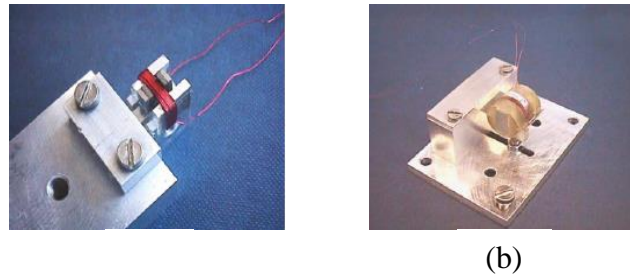
$V$  : Tension,  $N$  : Nombres des spires de la bobine,  $\Phi$  : champ magnétique,  $t$  : temps



**Figure 1.09 :** Structure d'un transducteur électromagnétique avec un ressort.

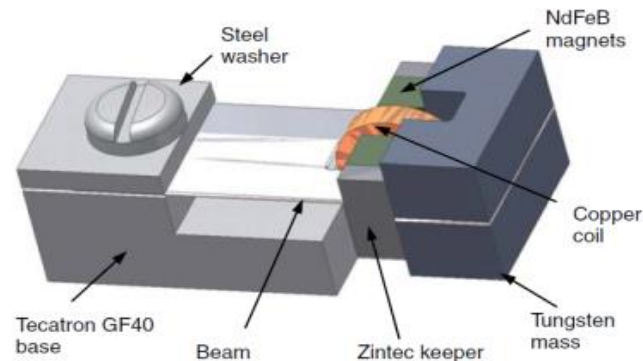
Plusieurs systèmes de conversion d'énergie vibratoire dans des diverses applications ont été basés sur la conversion électromagnétique et des recherches continuent encore. Des exemples des récupérateurs d'énergie électromagnétique vont être cités pour la suite.

Glynne-Jones et Tudor ont créé deux prototypes de générateur électromagnétique A et B (**Fig. 1.10**) qui ont respectivement un volume de  $0,84 \text{ cm}^3$  et  $3,15 \text{ cm}^3$  [1.25]. Le prototype A produit une puissance de  $37 \text{ }\mu\text{W}$  et  $180 \text{ }\mu\text{W}$  pour une amplitude de  $0,36 \text{ mm}$  et  $0,85 \text{ mm}$  avec une charge optimal de  $0,6 \text{ }\Omega$ . Le prototype B est monté dans un moteur d'une voiture. Une puissance moyenne de  $157 \text{ }\mu\text{W}$  est produite après l'expérience.



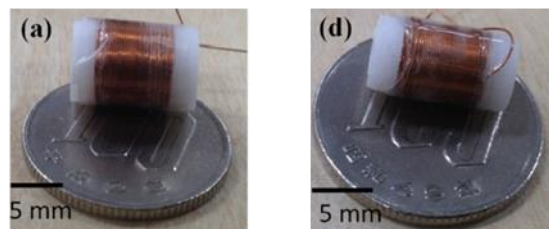
**Figure 1.10 :** Générateur électromagnétique :(a) Prototype A, (b) Prototype B [1.25].

Un exemple de structure macroscopique millimétrique est celle d'un générateur électromagnétique développé dans l'université de Southampton par S P Beeby et R N Torah en 2014 (**Fig. 1.11**). Cette structure est basée sur une poutre encastrée libre agissant comme ressort [1.26]. Elle comporte une bobine en cuivre, des aimants NdFeB et une masse sismique. Le volume des composants du générateur utilisé pendant la pratique est de  $0,15 \text{ cm}^3$ . Après optimisation, une puissance de  $46 \text{ }\mu\text{W}$  a été mesurée à une fréquence de  $52 \text{ Hz}$  pour une accélération de  $0.59 \text{ m s}^{-2}$ . Ce générateur est remarquable, car il récupère l'énergie dans un spectre et une gamme d'accélération réalistes, pour de petites dimensions.



**Figure 1.11 :** Macrogénérateur électromagnétique [1.26].

Un autre exemple de structure millimétrique d'un récupérateur d'énergie électromagnétique basé sur le mouvement libre a été conçu par A. Harouna et I. Yamadac en 2015 [1.27]. Ils ont procédé à deux expériences sur deux prototypes différents. Un récupérateur cylindrique de dimension totale D9 x L12 mm qui génère une puissance efficace de 71,8  $\mu\text{W}$  avec une fréquence de 2,5 Hz et une accélération de 5,2  $\text{ms}^{-2}$ . Avec la même dimension, une puissance efficace de 113,3  $\mu\text{W}$  est obtenue pour une fréquence de 3,33 Hz avec une accélération de 12,38  $\text{ms}^{-2}$ . Une autre dimension D7 x L12 mm peut donner une puissance efficace de 28,4  $\mu\text{W}$  avec une fréquence de 2,5 Hz et une accélération de 5,2  $\text{ms}^{-2}$ , et, 82,9  $\mu\text{W}$  est obtenue pour 3,33 Hz et 12,38  $\text{ms}^{-2}$ . La taille plus petite qu'a ce récupérateur est une de ses avantages ainsi que l'augmentation significative de la puissance avec l'amplitude de l'entrée.

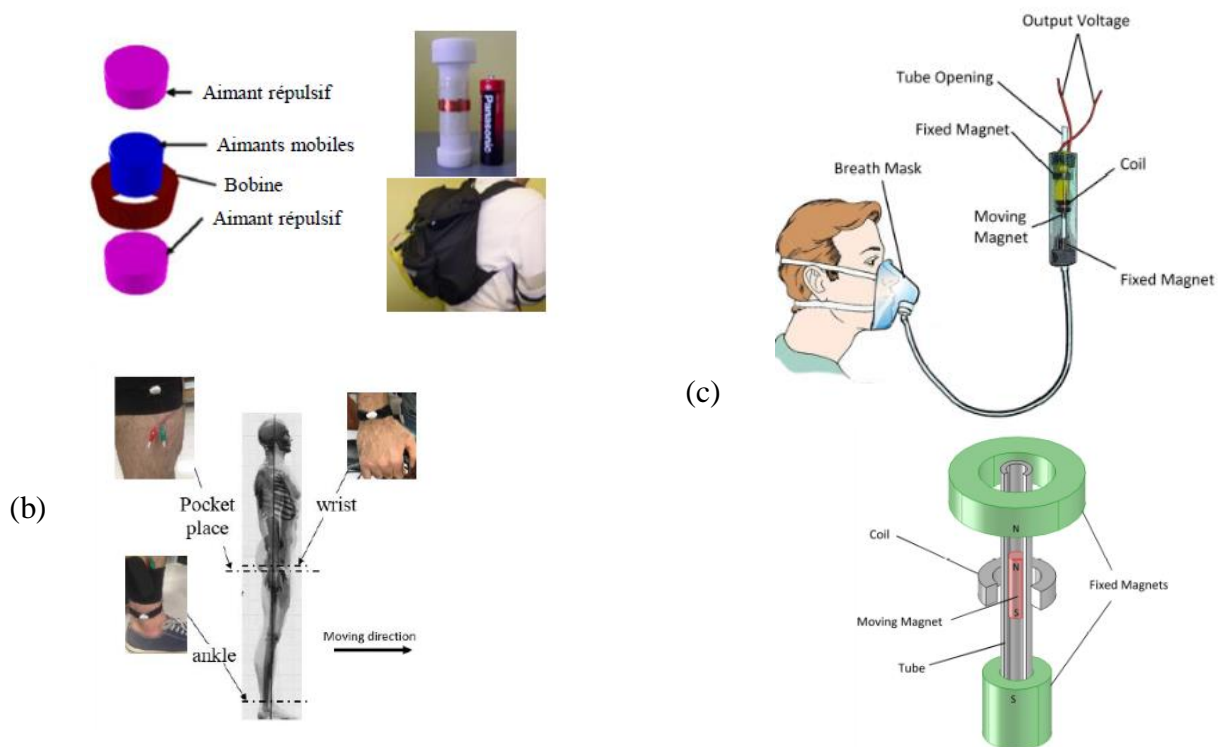


**Figure 1.12 :** Récupération d'énergie électromagnétique : (a) Prototype de taille D9L12, (b) Prototype de taille D7L12 [1.27].

L'application d'un récupérateur électromagnétique sur le corps humain est aussi multiple et variée. Un premier exemple est le générateur développé par C.R. Saha en 2008 [1.28]. La taille du générateur est observée à partir de la **Fig. 1.13a**, c'est plus légèrement plus gros d'une pile AA. Le schéma de principe est aussi présenté dans la figure. Le prototype pourrait générer une puissance de 0,3 mW à 1,86 mW placé dans un sac au dos d'une personne en marchant ou en courant lentement.

Un autre prototype cylindrique avec une dimension totale D9 x L12 mm a été mise en place par A. Harouna et I. Yamadac en 2016 pour récupérer une énergie à partir de mouvement du corps humain [1.29]. Le récupérateur est placé à trois endroits du corps humain pendant le teste, la cheville, la poche et le poignet (**Fig. 1.13b**). Le prototype au niveau de la cheville génère une puissance efficace de 186,7  $\mu\text{W}$  lors de la marche rapide, tandis qu'il génère 174,6  $\mu\text{W}$  lors du jogging. Cette différence est due à la force d'impact plus élevée exercée sur la cheville lors du jogging. Une idée innovante de convertir la pression respiratoire en tension électrique a été proposée par A. Delnavaz et Jérémie [1.30]. Le prototype est représenté à la **Fig. 1.13c**. Les

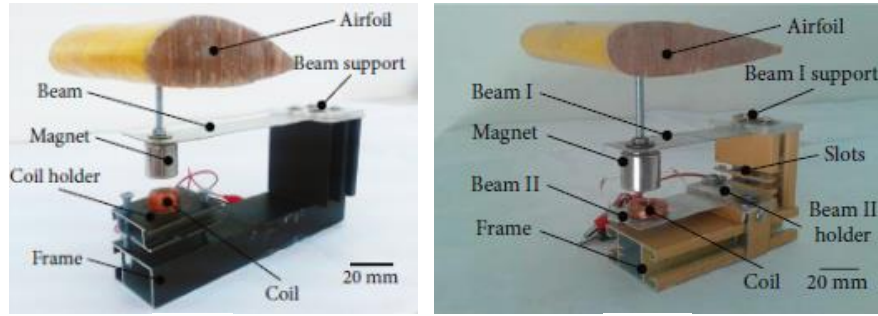
résultats expérimentaux montreront que plus de que 3  $\mu\text{W}$  peut être récoltée en utilisant ce générateur.



**Figure 1.13 :** (a) Générateur électromagnétique placé dans un sac au dos, (b) Générateur placé sur la cheville, poche et poignet, (c) Récupérateur d'énergie par respiration [1.28] [1.29] [1.30].

Le récupérateur électromagnétique est déjà appliqué aussi dans les grosses infrastructures telles que le pont. Khan et Muhammad ont présenté un nouveau récupérateur électromagnétique à partir de la vibration d'un pont et les ondes de vent [1.31]. Ils ont développé deux prototypes au sein d'un laboratoire présentés à la **Fig. 1.14**. Sous une teste de vibration, le prototype I génère une tension maximale de 200 mV et une puissance maximale de 354,41  $\mu\text{W}$  avec une fréquence de 3,6 Hz et une accélération de 0,4 g. Cependant, à une fréquence de 0,7 Hz et une accélération de 0,6 g, le prototype II peut produire une tension maximale de 430 mV et une puissance optimale de 2214,32  $\mu\text{W}$ .

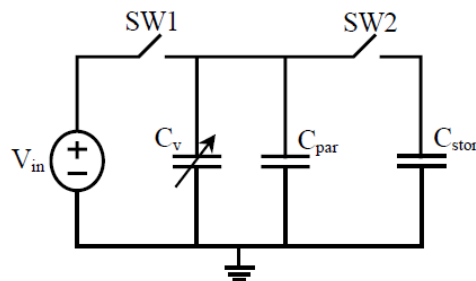




**Figure 1.14 :** (a) *Fabrication de BEH Prototype I*, (b) *Fabrication de BEH Prototype II* [1.31].

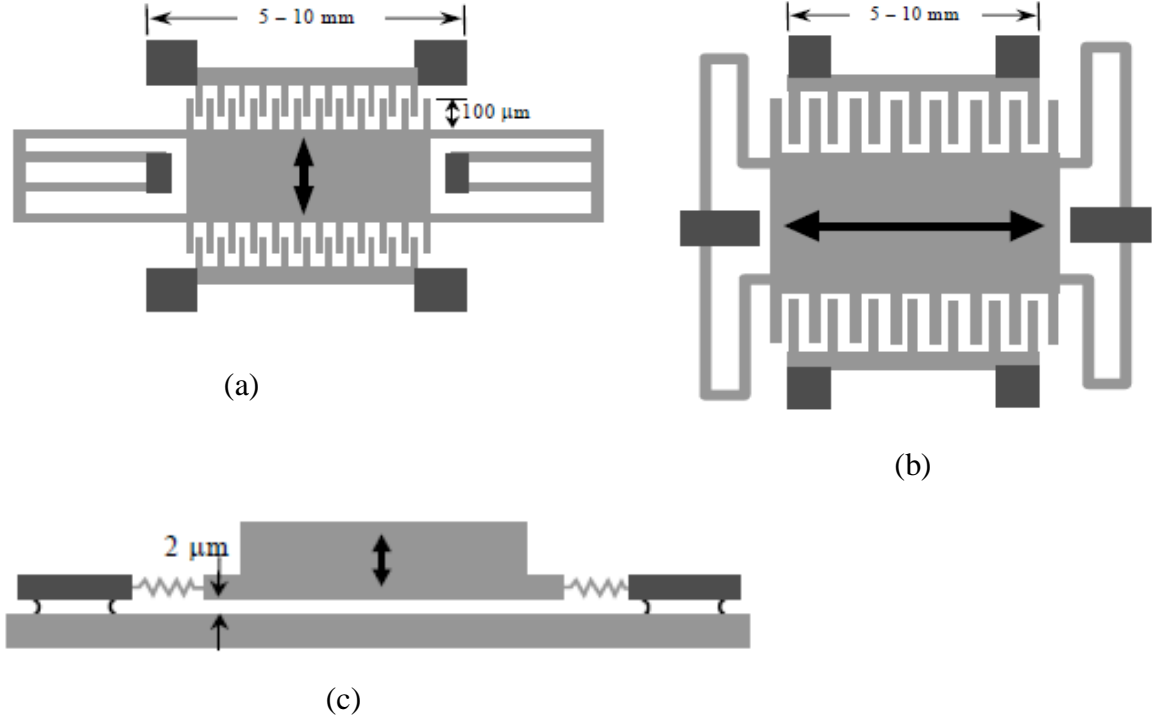
### 1.5.2 Conversion électrostatique

Les microgénérateurs électrostatiques sont composés des deux plaques électriques parallèles qui forment un système de condensateur. Le déplacement d'une des deux plaques entraîne la variation d'une capacité et qui va produire de l'énergie électrique. C'est pour ça que l'on appelle aussi microgénérateurs capacitifs. Le générateur électrostatique doit être pré-chargé pour pouvoir produire de l'électricité. Ce qui le différencie avec les autres transducteurs tels que l'électromagnétique et la piézoélectrique. Meninger et al, Boisseau et Despesse ont rappelé le fonctionnement général d'un microgénérateur électrostatique [1.32] [1.33]. Le principe est de charger initialement le condensateur du microgénérateur, puis déplacer l'une des deux plaques du condensateur à l'aide d'une énergie vibratoire ambiante. Deux cas sont possibles, si la diminution de la capacité du générateur, induite par la variation des distances entre les deux plaques, est à charge constante, la tension dans le générateur ainsi que l'énergie potentielle stockée dans le condensateur augmentent. Dans le cas d'une tension constante, le mouvement des plaques crée un courant du au mouvement des charges.



**Figure 1.15 :** *Circuit d'un convertisseur électrostatique* [1.34].

Dans les deux cas, le travail mécanique traduit par une vibration, qui est utilisé pour écarter les deux plaques, est converti en énergie électrique. Un circuit simple d'un récupérateur électrostatique qui utilise la conversion à charge constante est présenté à la **Fig. 1.15** [1.34].



**Figure 1.16 :** Trois types de générateur électrostatique (a) Plan à chevauchement variable (b) Plan à entrefer variable (c) Normal au plan à entrefer variable.

$V_{in}$  est la tension d'alimentation ou tension d'entrée.  $C_v$  représente le condensateur variable de la structure et  $C_{par}$  présente un condensateur parasite.  $C_{max}$  et  $C_{min}$  sont respectivement la valeur maximale et minimale du  $C_v$ . L'énergie stockée dans le condensateur de stockage  $C_{stor}$  est donnée par les deux équations suivantes [1.33]:

$$E_{stor} = \frac{1}{2} V_{in}^2 (C_{max} - C_{min}) \left( \frac{C_{max} + C_{par}}{C_{min} + C_{par}} \right)$$

$$E_{stor} = \frac{1}{2} V_{max} V_{in} (C_{max} - C_{min})$$

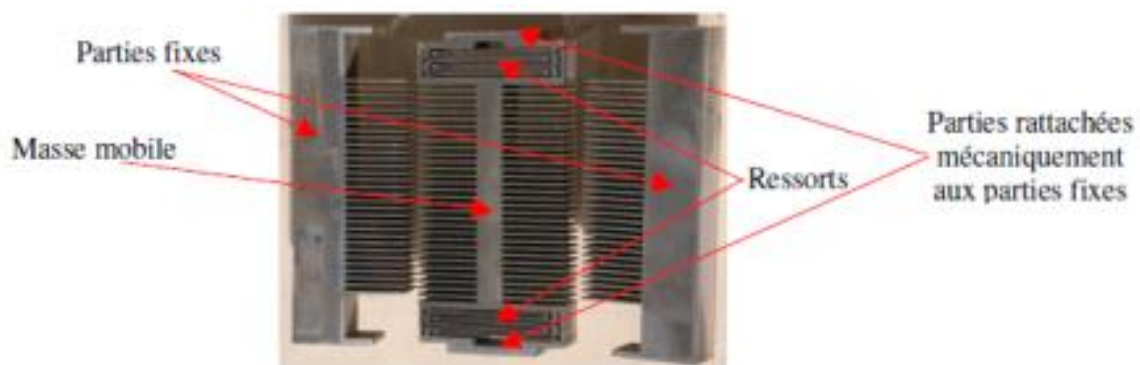
Plusieurs types de structure électrostatique peuvent exister du moment qu'un mouvement mécanique crée une variation de capacité. Cependant, ils peuvent être regroupés dans trois types de base. Une structure à peignes interdigités avec chevauchement variable des doigts et mouvement dans le plan (In-plane gap overlay), une structure à peignes interdigités à entrefer variable entre doigts et mouvement dans le plan (In-plane gap closing) et une structure plane à entrefer variable

par mouvement relatif normal au plan (Out-of-plane gap closing). Ils sont représentés respectivement par les **Fig. 1.16 a, b et c**.

En 2002, Roundy et al de l'Université de Californie comparent ces trois structures classiques de générateurs électrostatiques [1.34]. Ils ont montré que la structure de type plan à chevauchement variable « in plane gap closing » permet d'obtenir une plus forte densité de puissance. Une puissance de sortie de  $116 \mu\text{W}/\text{cm}^3$  est théoriquement réalisable pour une accélération de vibration de  $2,25 \text{ ms}^{-2}$  à 120 Hz.

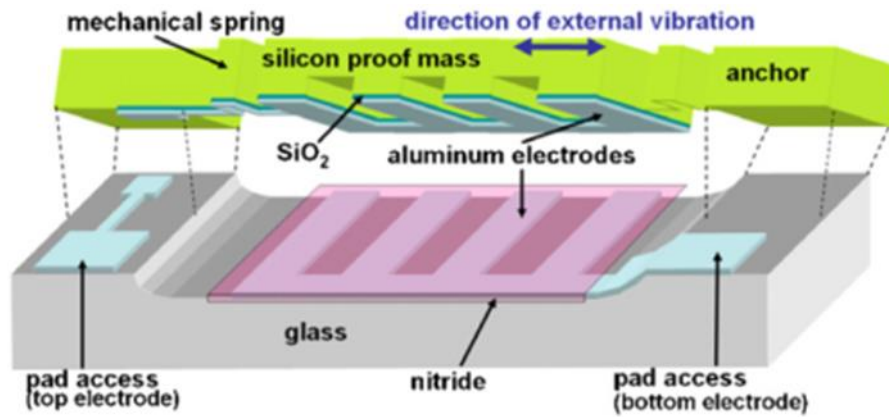
Meninger et al sont parmi les premiers à proposer un récupérateur d'énergie électrostatique [1.32]. Ils ont construit une structure qui est capable de générer une puissance utilisable de  $8,6 \mu\text{W}$ . Sterken et al ont étudié plusieurs structures de microgénérateurs électrostatiques et abouti à des densités de puissance de l'ordre de  $100 \mu\text{W}/\text{cm}^3$  [1.35].

En 2005, G. Despesse a proposé dans sa thèse une structure électrostatique en tungstène présentée à la **Fig. 1.17**. C'est un générateur de type plan à entrefer variable [1.36]. Une teste en pratique sur le moteur d'une voiture a permet de récupérer une puissance de  $232 \mu\text{W}$  à 30 Hz.



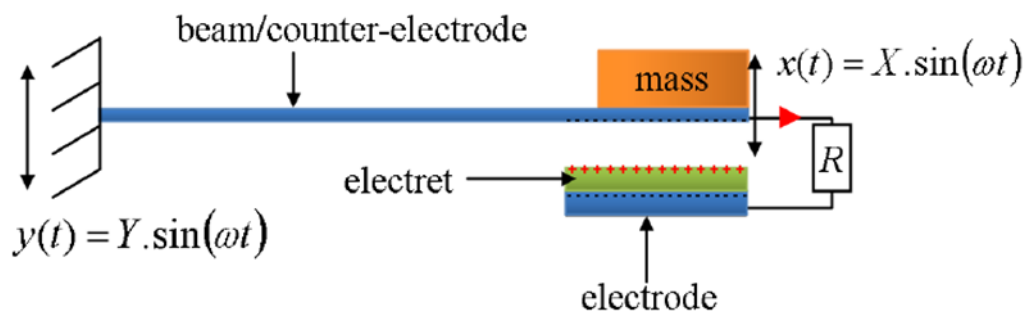
**Figure 1.17 :** Type de générateur électrostatique [1.36].

Une structure fabriquée avec des méthodes de fabrication issues de la microélectronique a été proposée par Basset [1.37]. Cette structure est composée d'une partie mobile en silicium, et d'une électrode inférieure déposée sur un substrat de verre. Il s'agit d'une structure de type plan à entrefer variable présenté à la **Fig. 1.18**. Une puissance  $61 \text{ nW}$  a été récupérée pour une accélération de  $0,25 \text{ g}$  à 250 Hz avec une densité de  $66 \text{ mm}^2$ .



**Figure 1.18 :** Schéma en 3 dimensions de la structure proposé par Basset [1.37].

Boisseau et Despesse ont utilisé une structure électrostatique avec électret comme récupérateur d'énergie (**Fig. 1.19**) [1.38]. L'utilisation des électrets, qui sont des matériaux diélectriques présentant un état de polarisation quasi permanent, est avantageuse puisqu'ils ne perdent leur polarisation que pour des températures élevées ou des champs électriques forts. Ils peuvent être l'équivalent d'un aimant permanent en électrostatique. Son utilisation une meilleur solution pour remplacer la source d'énergie primaire dans le générateur électrostatique. Une méthode de design et d'optimisation de cette structure est proposée avec une géométrie de type poutre encastré libre. Il a été montré en théorie et en simulation qu'un prototype de 3,2 cm<sup>2</sup> peut générer une puissance de 17 μW avec une vibration de 0,2 g sous une charge de 210 Ω.



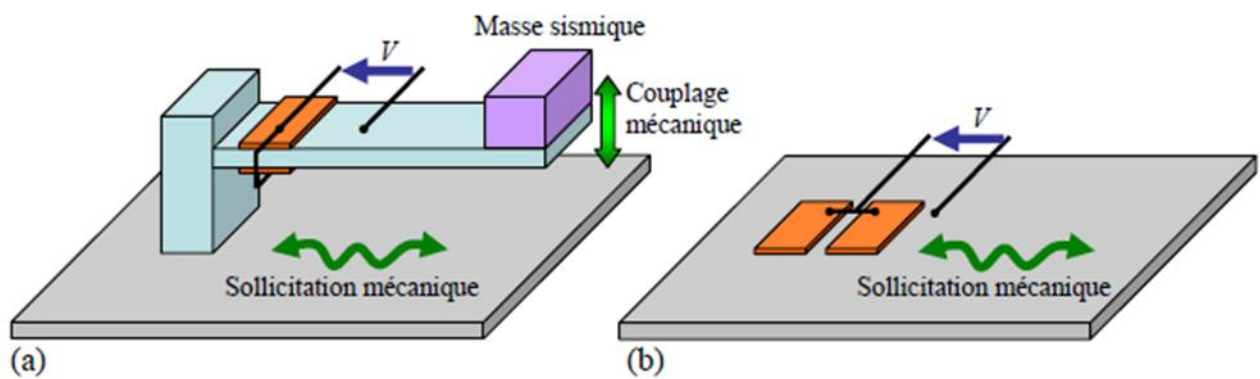
**Figure 1.19 :** Générateur électrostatique de structure poutre encastrée libre avec électret [1.38].

En 2012, R. Guillemet a fait l'étude et la réalisation, par un procédé de fabrication collective, un transducteur électrostatique sans électret en technologie MEMS (Microelectromechanical Systems) silicium [1.39]. Avec une dimension totale de 100 mm<sup>3</sup>, une puissance de 23 μW est obtenue à 260 Hz, pour une accélération de 1 g et une pression de 0,5 Torr.

### 1.5.3 Conversion piézoélectrique

Le matériau piézoélectrique présente une interaction entre le domaine mécanique et le domaine électrique. Ce phénomène est rappelé par plusieurs chercheurs dans leurs thèses [1.40], [1.41], [1.42], [1.43]. C'est une caractéristique dont disposent certains matériaux qui ont la possibilité de se polariser électriquement sous l'effet d'une contrainte mécanique, c'est l'effet direct. La réciproque ou effet inverse existe et se définit comme la possibilité de se déformer mécaniquement sous l'action d'un champ électrique.

Les transducteurs ou générateurs piézoélectriques sont basées sur l'effet direct de la piézoélectricité. Ils peuvent être constitués d'un système mécanique présentant une fréquence de résonance qui couple le générateur piézoélectrique aux vibrations ambiantes ou bien les éléments piézoélectriques peuvent être directement sollicités. La **figure 1.20** illustre ces deux types de générateurs.



**Figure 1.20 :** Générateurs piézoélectriques : (a) conversion par l'intermédiaire d'un oscillateur mécanique, (b) conversion directe.

Il s'agit dans les deux cas de convertir l'énergie vibratoire de la structure vibrante représentée en gris. Dans le premier cas (a) l'énergie de la structure est transmise au système oscillant constitué par une poutre sur laquelle sont collés des éléments piézoélectriques assurant la conversion mécanique électrique et éventuellement une masse sismique permettant d'ajuster la fréquence de résonance. Dans le deuxième cas (b), les éléments piézoélectriques sont directement collés sur la structure.

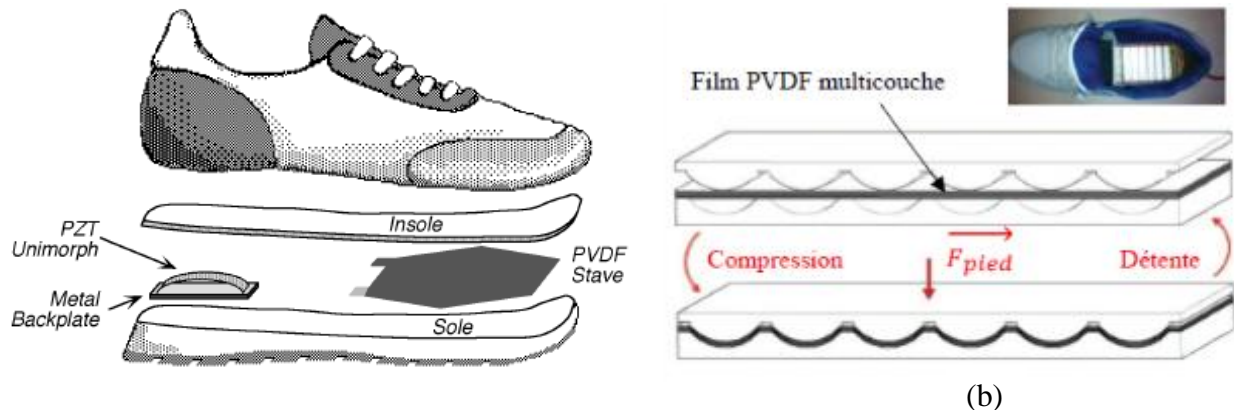
Plusieurs conversions d'énergie à base piézoélectrique ont été proposées par des chercheurs depuis sa découverte. La conversion directe correspond aux dispositifs de récupération d'énergie de type

briquet ou allume-gaz, où on applique directement ou via un mécanisme de levier une contrainte sur un matériau piézoélectrique, qui est illustrée à la **Fig. 1.20b**. Dans cette approche, le cas d'une conversion mécano-électrique directe est considéré, c'est-à-dire sans stockage intermédiaire d'énergie sous forme mécanique (absence de la conversion mécanique – mécanique qui pourrait être une masse en mouvement ou une structure vibrante). Le taux de conversion électromécanique est défini directement comme le rapport de l'énergie électrique récupérée sur l'énergie mécanique fournie. Une des recherches effectuées par Keawboonclay et Angel étudie cette conversion directe [1.44]. Ils ont étudié deux cas de figures qui reposent sur une contrainte quasi-statique et une contrainte dynamique. La tension générée sur l'élément piézoélectrique est bidirectionnelle pour une contrainte quasi-statique et unidirectionnelle pour une contrainte dynamique (choc). Ils ont conclu après l'expérimentation que la conversion électromécanique sous la sollicitation dynamique est meilleure que la sollicitation quasi-statique. Pour un film de PZT 5A, une puissance maximale de  $13,55 \text{ mW/cm}^3$  et  $33,8 \text{ } \mu\text{W/cm}^3$  sont obtenues respectivement pour une contrainte quasi-statique et une contrainte dynamique.

Kim et Priya ont utilisé des dispositifs de disques piézoélectriques précontraints mécaniquement et ont abouti à générer une puissance de 52 mW à une fréquence de 100 Hz et pour des volumes total de  $0.66 \text{ cm}^3$  [1.45].

L'énergie du corps humain est aussi une cible pour le développement de structures piézoélectriques. Les chaussures qui sont soumises à des compressions et des déformations lors de la marche sont des endroits particulièrement adaptés à cette structure. Les chercheurs du MIT (Media Lab) ont été les premiers à développer une chaussure récupérant de l'énergie à la fin des années 1990 [1.46], [1.47], [1.49]. Ils ont utilisé deux éléments piézoélectriques différents et qui sont montés sur deux endroits différents dans la semelle d'une chaussure (**Fig. 1.21a**). La première exploite la contrainte sous le talon, par le moyen d'une structure dimorphe formée de deux transducteurs en PZT (Titano-Zirconate de Plomb) et qui génère une puissance maximale de 80 mW. La seconde est constituée d'un PVDF (PolyVinylidene Fluoride) laminé placé sous l'avant du pied, et qui produit une puissance maximale de 20 mW. Les puissances sont obtenues à une fréquence de marche de 1 Hz et à une résistance de charge de 250 k $\Omega$ .

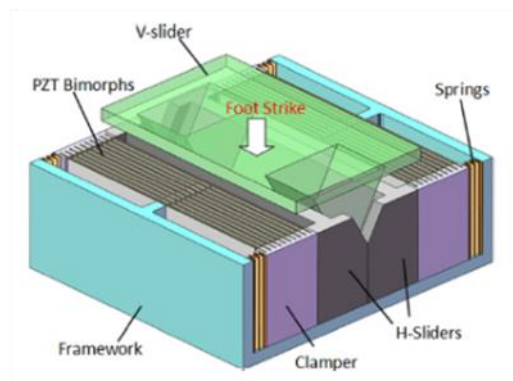
Les deux types d'élément piézoélectrique, PZT et PVDF, sont étudiés alternativement dans des travaux plus récents. Pour exploiter seulement du PVDF, moins coûteux et plus robuste, il est suggéré dans de convertir la pression en vertical en flexion multiple du matériau piézoélectrique, et ainsi de concentrer la contrainte [1.48].



**Figure 1.21 :** *Récupérateur piézoélectrique (a) exploitant la compression sous le talon et la flexion de la pointe du pied [1.46] (b) permettant d'augmenter la contrainte dans un PVDF multicouche [1.49].*

Cela est réalisé par le moyen de deux substrats en plastique rigide, qui compriment entre elles un PVDF laminé ( $8 \mu\text{m} \times 3 \mu\text{m}$ ) et le déforment grâce à une géométrie de surface ondulée (**Fig. 1.21b**). Placé sous le talon, ce récupérateur génère 1 mW en moyenne durant la marche. Cette structure a l'avantage de bien répartir la contrainte sous le pied et d'être assez mince (5 mm), ce qui est appréciable pour le confort de l'utilisateur, mais aboutit à une densité de puissance assez faible, environ  $40 \mu\text{W}/\text{cm}^3$ .

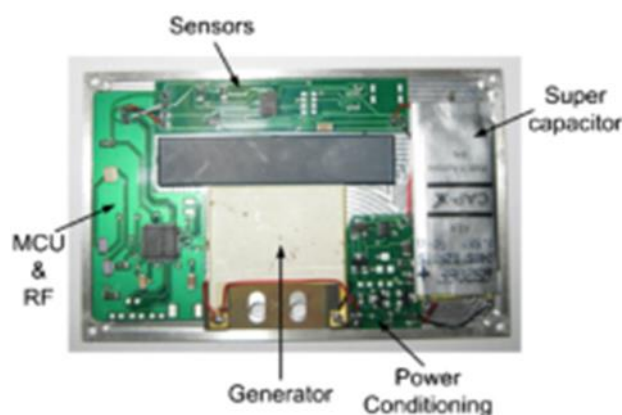
En 2014, Xie et al proposent un dispositif composé d'un mécanisme d'amplification et d'un bimorphe PZT présenté à la **Fig. 1.22** [1.50]. La force verticale sous le talon d'un homme en marchant va être amplifiée et déforme l'élément piézoélectrique en mode 31. Le récupérateur proposé produit une puissance de sortie maximale de 27,5 mW à une fréquence d'entrée de 1,5 Hz (représentant une marche rapide), tandis que 18,6 mW étaient générés à 1,0 Hz (représentant une marche lente).



**Figure 1.22 :** *Récupérateur piézoélectrique avec un mécanisme d'amplification [1.50].*



La plupart des récupérateurs piézoélectriques se base sur l'utilisation d'une poutre encastrée à une extrémité sur laquelle sont fixés une ou plusieurs éléments piézoélectriques. L'utilisation d'une poutre permet l'amélioration du couplage mécanique de la structure, entraînant une contrainte élevée sur le matériau piézoélectrique. Plusieurs modèles ont été développées pour montrer le design et la fabrication des générateurs piézoélectriques [1.51] [1.52] [1.53] [1.54]. Les puissances obtenues sont capables d'alimenter de nœud de capteur sans fils. Certaines ont fait une étude sur l'optimisation de la puissance de sortie en minimisant la taille de la structure [1.55], [1.56]. En 2003, Roundy et al ont créé un générateur qui génère 375  $\mu\text{W}$  pour une vibration d'accélération de  $2,5 \text{ ms}^{-2}$  à 120 Hz [1.57]. La structure a un volume de  $1 \text{ cm}^3$ . Ils ont montré que ce générateur permet d'alimenter un radio transmetteur de 1,5 GHz. Un autre exemple proposé à l'Université de Southampton montre un nœud de réseau de capteur alimenté par un générateur piézoélectrique intégré [1.58].



**Figure 1.23 :** *Récupérateur d'énergie à piézoélectrique intégré [1.58].*

L'ensemble a la taille d'une carte de crédit de surface  $552,1 \text{ mm}^3$  présenté à la **Fig. 1.23**. La structure a été conçue pour fonctionner sous une vibration de  $3,9 \text{ ms}^2$  à 67 Hz et génère une puissance maximale de  $240 \mu\text{W}$ .

La miniaturisation d'un générateur piézoélectrique est l'une des optiques des chercheurs en conservant un maximum d'énergie récupérée. En 2014, une structure d'un volume de  $51,4 \text{ mm}^3$  a été développée par Yu et Zhu [1.59]. Ce microgénérateur produit une puissance maximale de  $66,75 \mu\text{W}$  à une fréquence de résonance de 234,5 Hz sous une accélération de  $5 \text{ ms}^2$ . Hasan et Bilsay ont conçu un microgénérateur qui a une surface de  $39 \text{ mm}^2$  avec une épaisseur de  $28 \mu\text{m}$  [1.60]. Une puissance de  $58,4 \mu\text{W}$  est obtenue à la sortie pour une accélération de 3 g à 62 Hz avec une condition de résistance de charge optimisée.

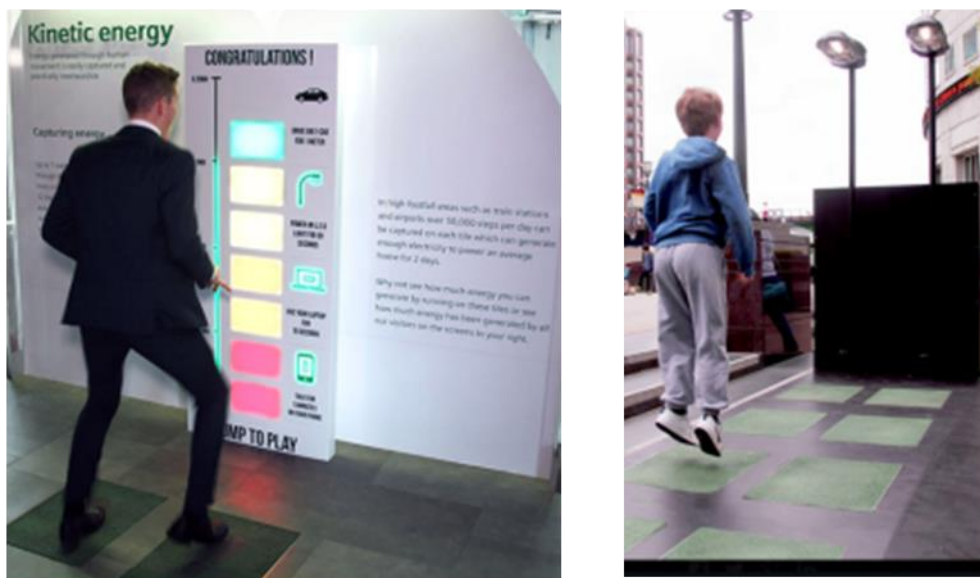
On a vu jusqu'ici que la conversion piézoélectrique est utilisée en générale dans le domaine de microsystème électromécanique ou MEMS. Ceci englobe tous les microsystèmes comprenant un



ou plusieurs éléments mécaniques, utilisant l'électricité comme source d'énergie, en vue de réaliser une fonction de capteur ou d'actionneur.

Par ailleurs, une utilisation à grande échelle est envisageable et qui commence à apparaître dans le monde de recherche. La force de pesanteur, présente dans tous les objets qui nous entoure pourrait être récupérée au moyen de grandes dalles de matériaux piézoélectrique. Ce système permettrait de produire de l'énergie électrique au passage de personne ou de véhicule sans pour autant créer de contrainte au passage car il suffira d'appliquer un poids sur ces dalles pour que les cristaux piézoélectriques se déforment et produisent ainsi de l'énergie. Des entreprises ont commencé à fabriquer des dalles piézoélectrique avec des diverses applications.

La société Pavegen fondée en 2009 est un leader mondial en matière de récupération d'énergie dans des endroits les plus fréquentés. Une tuile Pavegen devrait générer environ une puissance de 4 W à chaque contrainte selon le poids. Environ 12 dalles Pavegen installées à l'entrée de la station West Ham ont généré suffisamment d'énergie le jour pour alimenter l'éclairage de la station la nuit. Pavegen a réalisé plus de 150 projets dans le monde entier, dans divers secteurs, notamment les gares, les centres commerciaux, les aéroports et les espaces publics [1.61]. La **figure 1.24** montre quelques exemples d'installations.



**Figure 1.24 :** Exemple d'installation par Pavegen à Londres [1.61].

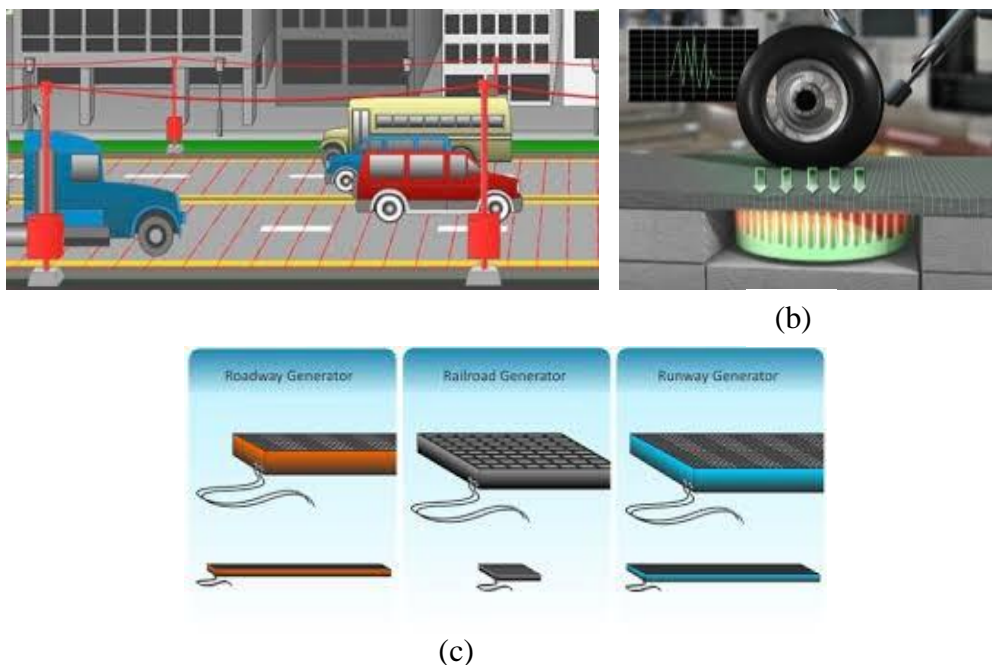
De même, dans le métro de Tokyo, au Japon, la compagnie JR EAST (East Japan Railway Company) a équipé le sol des stations de plaque piézoélectriques qui produisent de l'énergie à partir des centaines de passagers descendant des wagons. Cet installation, nommé Walkability,

permet de produire 10 W par seconde par usagé et l'entreprise s'attend à une production journalière de 1400 kW par seconde. L'énergie obtenue pouvant être utilisée pour faire marcher les bornes automatiques de billets et les panneaux d'affichages électronique des gares (**Fig. 1.25**) [1.62].



**Figure 1.25 :** *Portillons d'accès au métro à Tokyo avec affichage électronique [1.62].*

En fin la route piézoélectrique, nommée aussi route parfaite venait de changer le goudron traditionnel par des dalles piézoélectriques. Ainsi, la société israélienne Innowattech a décidé de récupérer l'énergie produite par le passage des voitures (**Fig. 1.26**).



**Figure 1.26 :** (a) *Exemple de route piézoélectrique* (b) *Déformation d'une dalle piézoélectrique sous l'action d'une véhicule* (c) *Dalles piézoélectrique pour le types de circulations.*

Une prototype de route a été créé et testée en 2009 à Haïfa en Israël, sur la voie menant au campus de Technion. Le principe de ce type de route consiste à incorporer sous la couche de roulement de la chaussée des capteurs piézoélectriques. Le but est de transformer l'énergie mécanique développée par le trafic routier pour produire un courant électrique. Cette électricité ainsi produite peut être adaptée au réseau pour être redirigée vers les quartiers d'une ville ou encore pour alimenter les équipements routiers comme les panneaux d'affichage et les radars. Selon la société Innowattech, un tronçon d'un kilomètre de route équipé de capteurs piézoélectriques produirait jusqu'à 500 kWh, soit l'équivalent de la consommation de 600 à 800 maisons. Cependant, pour que ce dispositif soit rentable, il nécessite un trafic minimum de 600 véhicules par heure. Cette société estime que sa technologie pourrait produire jusqu'à 250 KWh rien qu'en Israël et pourrait même être utilisée sur les voies ferrées et les trottoirs pour les piétons.

Dans différents pays, plusieurs sociétés et instituts développent actuellement cette technologie prometteuse. En Californie, aux Etats-Unis, un prototype semblable à celui de la société Innowattech a également été testé et fournirait une puissance de 44 MW par an pour un tronçon d'un kilomètre. Ces capteurs devraient prochainement être testés en Angleterre et en Irlande afin de produire cette énergie dite « verte ».

## **1.6 Comparaison des 3 méthodes de conversion**

La puissance électrique obtenue issue des récupérateurs d'énergie piézoélectrique, électromagnétique et électrostatique dépend des caractéristiques d'excitation, à savoir l'accélération et la fréquence, et le volume de la structure. Dans les revues, l'avantage et l'inconvénient de chacun des trois conversions sont donnés sans comparer la puissance de sortie. Or c'est à la valeur de la puissance que tout le monde s'intéresse quand on parle d'un récupérateur d'énergie. La comparaison s'avère difficile car cette puissance est caractérisée par plusieurs paramètres pendant la récupération. Pour arriver à un terme de comparaison, la considération des densités d'énergies récupérables et des figures de mérite est nécessaire.

### ***1.6.1 Comparaison par densité d'énergie récupérable***

La comparaison des trois types de transducteurs à partir de la densité d'énergie maximale récupérable a été faite par Roundy en 2003 [1.63].

La densité d'énergie maximale d'une transduction électromagnétique est de  $\frac{1}{2\mu} \Phi^2$ , ou  $\Phi$  est le champ magnétique et  $\mu$  est la perméabilité magnétique. La perméabilité magnétique minimum est la perméabilité de l'espace libre qui vaut  $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$  H/m. Si une valeur extrêmement élevée de 1 Tesla est utilisée comme champ magnétique maximal, la densité d'énergie résultante serait de

400 mJ/cm<sup>3</sup>. Or c'est difficile d'avoir une valeur maximale de 1 Tesla, une valeur de 0,1 Tesla est alors prise comme valeur maximale pour le champ magnétique, ce qui semble tout à fait raisonnable. La densité d'énergie résultante est de 4 mJ/cm<sup>3</sup>.

Pour une transduction électrostatique, la densité d'énergie emmagasinée dans une capacité est  $\frac{1}{2}\epsilon E^2$ , avec  $\epsilon$  la permittivité diélectrique et  $E$  le champ électrique. Dans le cas d'un générateur électrostatique, le diélectrique est généralement de l'air. Le constant diélectrique du vide  $\epsilon_0$  est alors utilisé. Le champ électrique admissible sans claquage par un gaz est donné par la loi de Paschen. Pour l'air à pression atmosphérique, ce maximum vaut 100 MV/m. Si cette valeur est utilisée, la densité d'énergie théorique maximale est de 44 mJ/cm<sup>3</sup>. Si un champ électrique plus utilisable en pratique comme 30 MV/m est utilisé, la densité d'énergie obtenue est de 4 mJ/cm<sup>3</sup>.

Dans le cas d'une transduction piézoélectrique, une des lois de comportement de la piézoélectricité est utilisée. Soit  $D = dT + \epsilon E$ , avec  $D$  le déplacement électrique,  $d$  la constante piézoélectrique,  $T$  la contrainte mécanique,  $\epsilon$  la permittivité diélectrique et  $E$  le champ électrique.

Dans le cas d'un circuit ouvert, l'équation précédente se réduit à  $dT = -\epsilon E$ . La densité d'énergie d'un diélectrique est  $\frac{1}{2}\epsilon E^2$ , ce qui donne une densité d'énergie pour un matériau piézoélectrique de  $T^2 \frac{d^2}{2\epsilon}$ . A partir des coefficients des différents matériaux (**tableau 1.01**), une contrainte de rupture pour le meilleur des matériaux le PZN-PT est choisie. Ce qui donne une densité d'énergie de 335 mJ/cm<sup>3</sup>. Cependant le PZN-PT est un matériau cher et difficile à utiliser, il s'agit donc d'une densité d'énergie maximale théorique. Le choix d'un matériau plus commun comme le PZT est plus logique. Une moitié de la contrainte de rupture est considérée et une densité d'énergie de 17,7 mJ/cm<sup>3</sup> est obtenue.

Les différents résultats trouvés pour les trois types de transduction sont résumés dans le **tableau 1.02**. Les résultants montrent que les méthodes de conversion électromagnétique et piézoélectrique donnent les meilleurs résultats théoriques.

**Tableau 1.01 : Coefficients de quelques matériaux piézoélectriques [1.63]**

Coefficient	Unité	PZT	PZN-PT
$d_{31}$	10 <sup>-12</sup> m/V	320	950
$d_{33}$	10 <sup>-12</sup> m/V	650	2000
Permittivité diélectrique relative		3800	4500
Contrainte de rupture	107 N/m <sup>2</sup>	2	8,3

**Tableau 1.02 : Valeurs des densités d'énergie récupérable pour les 3 méthodes [1.63]**

Type de transduction	Densité d'énergie	Maximum en pratique	Maximum en théorie
Electrostatique	$u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$	4 mJ/cm <sup>3</sup>	44 mJ/cm <sup>3</sup>
Electromagnétique	$u = \frac{B^2}{2\mu_0}$	4 mJ/cm <sup>3</sup>	400 mJ/cm <sup>3</sup>
Piézoélectrique	$u = T^2 \frac{d^2}{2\varepsilon}$	17,7 mJ/cm <sup>3</sup>	335 mJ/cm <sup>3</sup>

### 1.6.2 Comparaison des revues par figure des mérites

Les paramètres d'une conversion d'énergie vibratoire en énergie électrique sont multiples. Il y a en premier lieu la puissance électrique obtenue  $P$ . Concernant la source vibratoire ambiante, il y a l'amplitude  $Y$  et la fréquence angulaire  $\omega$  avec  $\omega = 2\pi f$  où  $f$  est la fréquence. Pour la structure du récupérateur d'énergie, il y a le volume  $V$ , la surface  $A$  et la masse  $m$ . Le facteur de qualité  $Q$  qui est le taux d'amortissement du système. Trois facteurs de mérite peuvent être définis pour ces divers paramètres et ils sont représentés dans le **tableau 1.03** [1.64].

**Tableau 1.03 : Valeurs des densités d'énergie récupérable pour les trois méthodes [1.64]**

Figure de mérite	Equation	Unité
$\alpha_{W\&Y}$	$\alpha_{W\&Y} = \frac{P}{\left(\frac{mY^2\omega^3Q}{8}\right)}$	%
$\chi_s$	$\chi_s = \frac{P}{AY^2\omega^3}$	$\frac{\mu W}{mm^2} / \frac{(ms^{-2})^2}{Hz}$
$\chi_v$	$\chi_v = \frac{P}{VY^2\omega^3}$	$\frac{\mu W}{mm^3} / \frac{(ms^{-2})^2}{Hz}$

Le facteur de mérite  $\alpha_{W\&Y}$  est le plus adapté lorsque tous les paramètres de la structure sont connus, et notamment  $m$  et  $Q$ . En effet,  $\alpha_{W\&Y}$  compare la puissance de sortie du système à la puissance théoriquement récupérable par un système masse-ressort-amortissement. Cependant, dans de nombreuses publications  $m$  et  $Q$  ne sont pas donnés. Les deux autres figures de mérite  $\chi_s$  et  $\chi_v$  sont alors développées. La première donne le rapport entre la puissance de sortie et la surface de la structure et l'autre donne le rapport de la puissance de sortie par le volume. Le produit  $Y^2\omega^3$  qui apparait dans le rapport sur chacune des deux figures de mérite est en fait le produit de l'accélération et de la vitesse des vibrations ambiantes.

$$Y^2 \omega^3 = \overbrace{(Y\omega)}^{\text{vitesse}} \underbrace{(Y\omega^2)}_{\text{accélération}}$$

*Démonstration :*

♣

Soit  $y(t) = Y \sin(\omega t)$  est le déplacement de la vibration ambiante avec  $Y$  est l'amplitude et  $\omega$  la pulsation.

On sait que la vitesse est la dérivé du déplacement, ce qui donne :

$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = Y\omega \cos(\omega t)$ , ce qui implique que  $Y\omega$  est la valeur efficace ou amplitude de la vitesse.

De même, l'accélération est la dérivé de la vitesse exprimé par :

$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -Y\omega\omega \sin(\omega t)$ , ce qui implique que  $Y\omega^2$  est la valeur efficace ou amplitude de l'accélération.

♦

**Tableau 1.04 :** *Figure de mérite des revues sur les trois types de conversion.*

Réf	Puissance (μW)	Volume (mm <sup>3</sup> )	Fréquence (Hz)	Y (mm)	Accélération (ms <sup>-2</sup> )	$\chi_v$
<b>Conversion électromagnétique</b>						
[1.24]	180	840	322	0,85	3475	<b>~0</b>
[1.25]	46	150	52		0,59	<b>287,83</b>
[1.26]	113,3	763,2	33,33		12,38	<b>0,202</b>
[1.26]	82,9	461,6	33,33		12,38	<b>0,245</b>
[1.27]	1860	12484	2,75		9,81	<b>0.0268</b>
<b>Conversion électrostatique</b>						
[1.33]	116	1000	120		2,25	<b>17,27</b>
[1.34]	100	1000	1200	0,02	1135	<b>~0</b>
[1.36]	0,061	61,5	250		2,45	<b>0,26</b>
[1.37]	17	86,4	45	0.046	19,62	<b>0,144</b>
[1.38]	23	100	260		9 ,81	<b>3 ,90</b>
<b>Conversion piézoélectrique</b>						
[1.50]	0,038	2	204		5	<b>0,98</b>
[1.55]	282	81,83	50		4,5	<b>53,46</b>

[1.56]	375	1000	120		2,5	<b>45,24</b>
[1.57]	240	552,1	67		3,9	<b>12,03</b>
[1.58]	66,75	51,4	234,5		5	<b>76,53</b>
[1.59]	58,4	1.1	62		29,5	<b>23,76</b>

Le **tableau 1.04** montre les valeurs des différents paramètres avec les puissances de sorties pour les trois méthodes de conversion. Le facteur de mérite utilisé est ce de normalisé avec le volume. Le récapitulatif dans le tableau montre que les facteurs de mérite pour la conversion électrostatique sont plus faibles par rapport à la conversion électromécanique et piézoélectrique. L'avantage de la conversion piézoélectrique, selon la revue, est que son figure de mérite est plus ou moins constant quel que soit la variation du volume dans la structure de récupération.

### **1.6.3 Conclusion sur les méthodes de conversion**

La comparaison de trois types de conversion est présentée dans le **tableau 1.05**.

**Tableau 1.05 : Comparaison des trois types de conversion.**

<b>Critères</b>	<b>Piézoélectrique</b>	<b>Electromagnétique</b>	<b>Electrostatique</b>
Densité d'énergie	Elevée à l'échelle macroscopique et diminue avec l'échelle microscopique	Elevée à l'échelle macroscopique et diminue avec le volume	Faible à l'échelle macroscopique et augmente avec le volume
Figure de mérite	Reste constante avec la variation de volume	Augmente avec l'augmentation de volume	Diminue avec l'augmentation de volume
Miniaturisation	Faible performance avec des matériaux déposés en couche mince	Mise en place des matériaux difficile (aimant, bobine)	Problème au niveau de réalisation de la structure mais mise en place des matériaux assez facile
Autres problèmes	Fragilité des matériaux piézoélectrique, polarisation, haute impédance	Tension de sortie très faible, intégration difficile	Source de tension ou charge externe requise



Le transducteur électromagnétique est en général facile à mettre en place en utilisant des éléments technologiquement bien connus, tel que l'aimant et la bobine. Il peut produire des énergies à grandes échelles et peut être adapté à une vibration à forte amplitude. Néanmoins, la miniaturisation d'une structure électromagnétique est encore un défi majeur pour les chercheurs. La miniaturisation d'une bobine peut engendrer une faible performance et qui va impacter l'énergie générée. Il en est de même pour la réduction de la taille de la bobine qui diminue le nombre de spires et provoque une diminution de la tension générée.

Les générateurs électrostatiques sont en général de très faibles puissances qui passent d'une dizaine à quelques centaines de micro watts. Cependant, la puissance obtenue est suffisante pour alimenter des dispositifs dans le domaine de microsysteme. Un avantage de ce type de générateur est sa taille microscopique qui peut faire l'objet de nombreuses réalisations avec des techniques de fabrication MEMS. Malgré ces avantages, l'utilisation d'un générateur n'est pas très populaire par rapport à d'autre récupérateur d'énergie du à sa faible puissance. De plus, la nécessité d'utiliser une source d'alimentation externe dans la structure électrostatique n'est pas compatible à des nœuds des capteurs sans fils autonomes. D'autre part, les récupérateurs d'énergie électrostatique à base d'électret ne retiennent les charges que pendant une période limitée.

La piézoélectricité donne une meilleure densité d'énergie récupérable et une figure de mérite plus ou moins constante quel que soit la variation du volume de structure. De plus, la tension générée par l'élément piézoélectrique est généralement plus élevée. Ce qui ne pose pas de problème pendant l'extraction de l'énergie récupérée avec l'utilisation de ponts des diodes. Un autre avantage de la conversion piézoélectrique est sa compatibilité à différente échelle et qui attire plusieurs entreprises de nos jours. Toutes fois, il est à signaler que la performance des matériaux en couche mince est moins importante par rapport à des matériaux massifs. Cependant, c'est le principe le plus utilisé et plus facile à mettre en œuvre du à sa structure plus simple et à des types de matériaux disponibles.

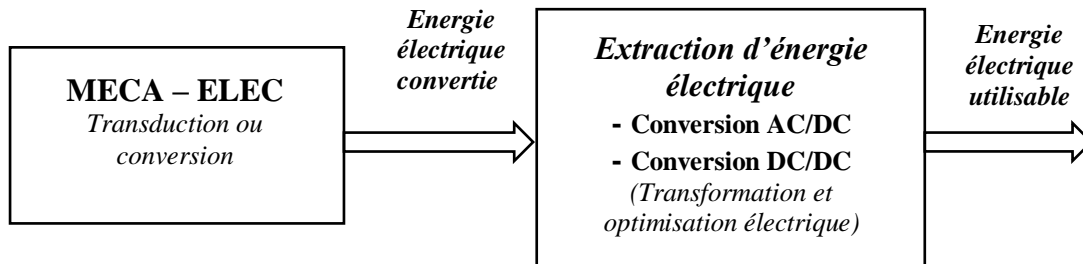
## **1.7 Extraction d'énergie électrique**

### ***1.7.1 Introduction***

L'énergie électrique convertie à partir d'un transducteur électromécanique n'est pas encore exploitable pour alimenter un circuit de stockage. L'utilisation d'un circuit d'extraction d'énergie électrique présenté à la **Fig. 1.26** est alors nécessaire. Ce circuit électronique modifie la grandeur électrique (tension ou courant) sortant du transducteur électromécanique. Son rôle principal est de convertir les tensions alternatives générées en tensions continues, d'adapter leurs niveaux à ceux attendus par le système de stockage utilisé, et de les réguler de manière à générer des tensions



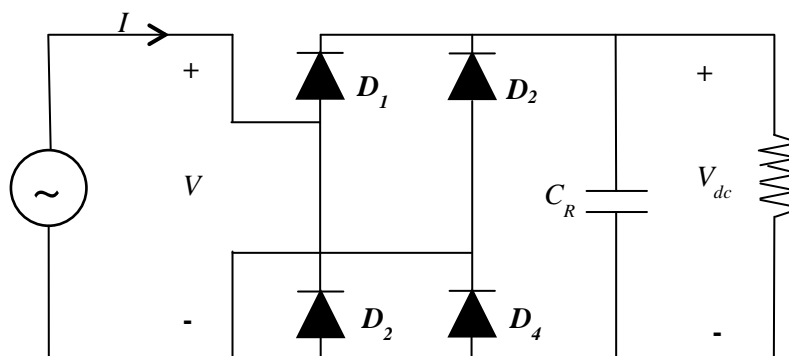
indépendantes de la source ou des variations de charge. Enfin, les pertes engendrées doivent être minimisées et cette conversion doit être effectuée de manière autonome, c'est à dire sans nécessiter de source de puissance extérieure. La structure du circuit doit également tenir compte des caractéristiques électriques du générateur, par exemple de son impédance ou des tensions générées.



**Figure 1.27 :** Schéma bloc d'extraction d'énergie électrique.

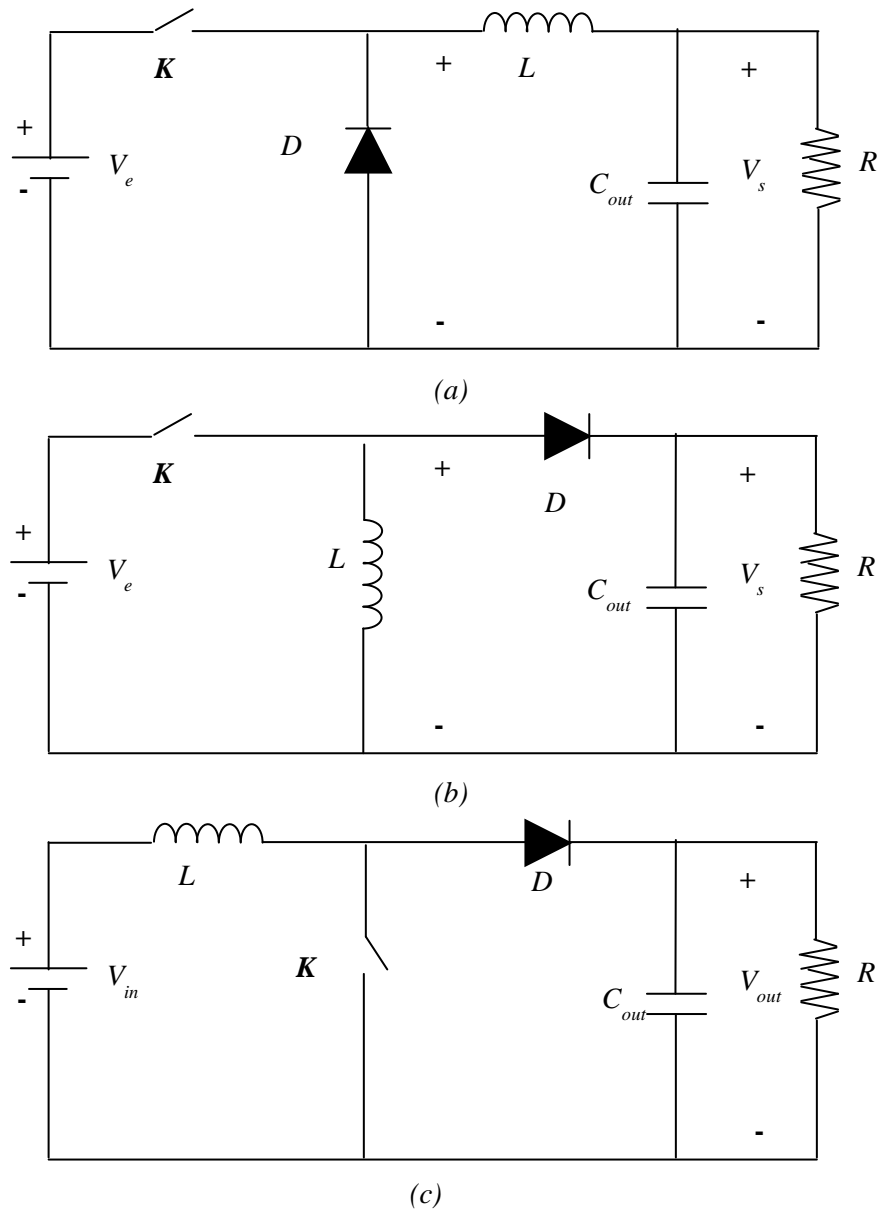
### 1.7.2 Technique standard

Dans la technique standard, l'étage de conversion AC/DC est constitué d'un pont redresseur permettant de convertir les tensions alternatives générées aux bornes d'un matériau piézoélectrique ou dans la bobine d'un générateur électromagnétique en tensions continues. L'étage est complété par un condensateur de filtrage  $C_R$  présenté à la **Fig. 1.28**. Dans ce cas, la tension appliquée sur la charge  $R$  est continue. Lorsque la tension  $V$  est inférieure en valeur absolue à la tension redressée  $V_{dc}$ , le pont redresseur est bloqué. Le courant  $I$  sortant du transducteur électromécanique est donc nul. Quand la valeur absolue de la tension  $V$  atteint  $V_{dc}$ , le pont redresseur devient passant, ce qui stoppe l'évolution de  $V$ . Le pont redresseur cesse d'être passant lorsque la valeur absolue du déplacement d'excitation  $y$  diminue.



**Figure 1.28 :** Circuit d'extraction d'énergie électrique.

Un étage de conversion DC/DC va être ensuite mis en série avec la structure AC/DC (**Fig. 1.28**). Les tensions générées par un transducteur et redressées par le convertisseur AC/DC sont en général régulées par l'intermédiaire d'un convertisseur DC/DC. Ce convertisseur est une classe d'alimentation électrique qui convertit une source de courant continu d'un niveau de tension en une autre. Il permet d'ajuster les tensions générées au niveau de la charge, ou bien de maximiser la puissance transférée de la source à la charge en adaptant l'impédance du circuit à celle du transducteur.

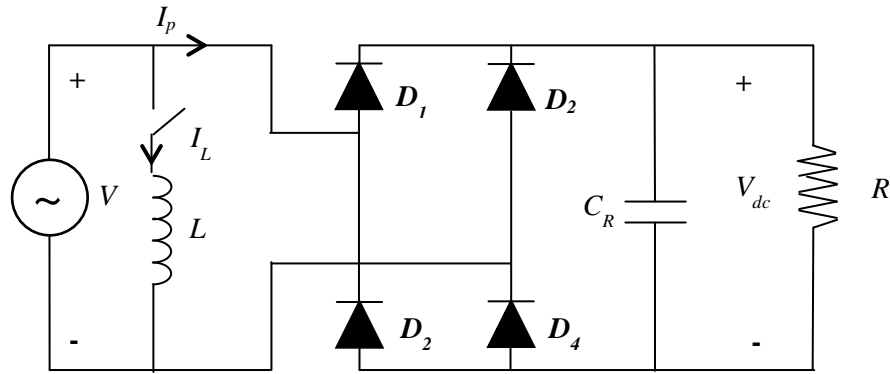


**Figure 1.29 :** *Convertisseur DC/DC (a) : Buck (b) : Boost (c) : Buck-Boost*

Les convertisseurs DC/DC ou un régulateur de commutation est un circuit qui utilise un interrupteur d'alimentation, un inducteur, une diode et un condensateur pour transférer l'énergie de l'entrée vers la sortie. Il existe trois types de convertisseur ou hacheur : Buck, Boost et Buck-Boost. Un convertisseur Buck ou abaisseur de tension est un convertisseur de puissance DC/DC qui abaisse la valeur de la tension de l'entrée  $V_{IN}$  (source) vers la sortie  $V_{OUT}$  (charge). En mode de conduction continue, c'est-à-dire que le courant dans l'inducteur ne tombe jamais à zéro, la fonction de transfert théorique du convertisseur abaisseur est  $V_{OUT} = V_{IN} * \alpha$  (**Figure 1.29a**).  $\alpha$  indique le rapport cyclique dans une période. Le convertisseur Boost ou élévateur utilise le même nombre de composants passifs, mais agencés pour élever la tension d'entrée de telle façon que la sortie soit plus élevée que l'entrée (**Figure 1.29b**). Sa fonction de transfert théorique est  $V_{OUT} = V_{IN} / (1 - \alpha)$ . Le circuit Buck-Boost ou inverseur permet d'élever ou d'abaisser la tension d'entrée en fonction du cycle de service  $\alpha$  (**Figure 1.29c**). La tension de sortie est exprimée par  $V_{OUT} = - V_{IN} * \alpha / (1 - \alpha)$ . Comme le montre l'équation, la polarité de la tension de sortie est toujours inversée par rapport à celle de la tension d'entrée. C'est pourquoi un convertisseur Buck-Boost est également appelé un inverseur de tension.

### 1.7.3 Technique SSHI

Les technique SSHI (Synchronized Switch Harvesting on Inductor) consistent à commuter le transducteur sur une inductance en synchronisation avec les maximums de vibration. Il existe deux types, le SSHI en parallèle et en série. Dans le cas d'un SSHI en parallèle, on ajoute simplement le dispositif de commutation (inductance) en parallèle avec le transducteur. Ce dispositif est représenté sur la **Fig. 1.30**. Tant que tension  $V$  est inférieure en valeur absolue à la tension redressée  $V_{dc}$ , le courant  $I_p$  traversant le pont redresseur est nul, et la tension varie proportionnellement au déplacement de la vibration. Lorsque la valeur absolue de  $V$  atteint  $V_{dc}$ , le pont redresseur est passant, et l'évolution de  $V$  est stoppée. Le pont redresseur cesse d'être passant lorsque le déplacement de la vibration  $y$  diminue en valeur absolue, c'est-à-dire lorsqu'on atteint un extremum de déplacement, ce qui coïncide avec le début d'une phase d'inversion de la tension à travers  $L$ . L'annulation du courant  $I_p$  absorbé par le pont redresseur correspond ainsi au départ du courant  $I_L$  dans l'inductance d'inversion.



**Figure 1.30 :** *Technique SSHI en parallèle.*

### 1.8 Système de stockage d'énergie

L'énergie obtenue par les différents récupérateurs n'est pas suffisante pour pouvoir alimenter directement la plupart des systèmes électroniques ou des installations électrique. Il est donc nécessaire de stocker l'énergie et de l'accumuler jusqu'à ce qu'elle atteigne un niveau suffisant. La solution la plus directe est de charger un condensateur fournissant la puissance durant de courtes périodes.

### 1.9 Conclusion et axe de la recherche

On a vu dans ce chapitre que les petites vibrations sont omniprésentes dans notre vie quotidienne. Ils constituent de ce qu'on appelle énergie mécanique vibratoire. Plusieurs sources ont été citées tel que la vibration routières, ferroviaires, les vibrations humaines et les vibrations des infrastructures civiles. Ce sont juste des énergies gaspillées mais qui peuvent être récupérées par diverse types de conversion. En général, ce sont des vibrations à faible amplitude et de basse fréquence (1Hz – 20 kHz). Une autre structure mécanique résonante est alors inventée pour amplifier la source d'énergie vibrante dans le domaine de conversion d'énergie vibratoire. C'est une structure basée sur un système masse, ressort et amortissement. Presque tous les types de récupérateur d'énergie vibratoire en énergie électrique sont basés sur ce système. Ce système est appelé système inertiel. Il y a un autre système appelé système direct. Dans ce cas, le récupérateur est collé directement sur la structure vibrante sans passer par une amplification mécanique. Le système direct est peu utilisé et c'est dans la récupération d'énergie à partir des mouvements humains qu'il est plus utilisé. La littérature a montré qu'il y a trois types de conversion d'énergie électromécanique: la conversion électromagnétique, électrostatique et piézoélectrique. Ils ont

chacun leur avantages et leur inconvénients sur la quantité d'énergie récupérée, sur les conditions d'utilisations et surtout dans la mise en place. Une puissance d'ordre d'une centaine de microwatts jusqu'à un milliwatts (1 mW) a été observée pendant les revues pour les trois conversions. C'est déjà suffisant pour alimenter des microsystemes autonomes sans fils. Dans ce travail, le choix a été orienté sur la conversion d'énergie mécanique vibratoire en énergie électrique par des matériaux piézoélectriques. Le matériau piézoélectrique est un matériau « intelligent » qui crée de l'électricité. Il est intéressant de savoir la raison de création d'électricité dans ce matériau ainsi que ces diverses caractéristiques. Le chapitre 2 qui suit va expliquer le phénomène qui existe dans ce matériau.

## CHAPITRE 2

### PHENOMENE ET CARACTERISTIQUE DE LA PIEZOELECTRICITE

#### 2.1 Introduction

L'utilisation des matériaux « intelligents » est très répandue dans plusieurs secteurs. Ce terme « matériau intelligents » englobe en général les matériaux qui ont capable de changer spontanément un ou plusieurs de ses propriétés physiques, comme sa forme, sa connectivité, sa viscoélasticité ou sa couleur en réponse des excitations naturelles ou provoquées venant de l'extérieur ou de l'intérieur du matériau. Ils sont particulièrement utilisés dans le domaine de l'information et de la communication, l'automatisation industrielle, la technologie médicale et dans l'industrie de défense. Les facteurs d'excitation peuvent être des variations de température, contraintes mécaniques, champs électriques ou magnétiques. Le matériau va donc réagir et va donner sa réponse suite à ces excitations. Un matériau intelligent est sensible, adaptatif et évolutif. Il possède des fonctions qui lui permettent de se comporter comme un capteur (détecter des signaux), un actionneur (effectuer une action sur son environnement) ou parfois comme un processeur (traiter, comparer, stocker des informations). Les matériaux les plus populaires sont : les alliages à mémoire de forme (AMF), les matériaux piézoélectriques, électrostrictifs et magnétostrictifs. Ce chapitre se focalise sur les matériaux piézoélectriques. Les principales caractéristiques de ces matériaux piézoélectriques sous une excitation externe vont être étudiées. Un bref historique avec définition de ce phénomène va être exposé. Puis, il y aura la présentation de son aspect physique et chimique. Ensuite, les équations fondamentales qui régissent l'effet piézoélectrique ainsi que ses caractéristiques électrique et mécanique sont citées. Et en fin, la limite et la stabilité des matériaux piézoélectriques vont être définies.

Une modélisation microscopique de la création d'électricité dans un matériau piézoélectrique est publiée dans le Journal Scientifique de notoriété internationale IJSRET :

- « Model for the Creation of Electricity within a Piezoelectric Material under Strain », ISSN (Online): 2395-566X, Volume 4, Issue 6, Nov-Dec-2018, Pages: 1189- 1193, [www.ijsret.com](http://www.ijsret.com) (Annexe A1.2).

#### 2.2 Historique et découverte de la piézoélectricité

C'est au milieu du XVIIIe siècle, vers 1750, que C. V. Linné et F. Aepinus avaient étudié l'effet « pyroélectrique ». Ils ont découvert que le changement de température entraîne une variation de polarisation électrique d'un cristal. L'observation qualitative et quantitative du phénomène piézoélectrique a été faite en 1817 par un minéralogiste français l'abbé R. J. Haüy. Il a observé

qu'en comprimant un cristal entre les doigts, il est possible de faire apparaître de l'électricité sur les faces du cristal. Ce qu'il a appelé « l'électricité de pression ». A. Becquerel a poursuivi l'étude et il a pu identifier plusieurs autres minéraux présentant cette propriété.

La première démonstration expérimentale de l'existence d'un lien entre les phénomènes piézoélectriques macroscopiques et la structure cristallographique a été publiée en 1880 par Pierre et Jacques Curie [2.01], [2.02]. Ils ont montré que les cristaux de quartz, topaze, tourmaline, niobate de lithium et sel de Rochelle génèrent une polarisation électrique sous contraintes mécaniques, c'est à dire la production d'une charge électrique sous contraintes mécaniques. Ces résultats furent un crédit à l'imagination des frères Curie et à leur persévérance en considérant les moyens rudimentaires avec lesquels ils étaient obligés de travailler. Dans les milieux scientifiques de l'époque, cet effet fut considéré presque comme une "découverte", et rapidement nommé « piézoélectricité », afin de le distinguer d'autres phénomènes tels que « l'électricité de contact » (électricité statique due au frottement) et la « piroélectricité » (électricité générée par les cristaux, due à leur échauffement). Toutefois, les frères Curie n'ont pas prédit que les cristaux qui exhibaient l'effet piézoélectrique direct (électricité en réponse à l'application d'un effort mécanique) auraient aussi exhibé l'effet piézoélectrique inverse (déformation en réponse à l'application d'un champ électrique).

G. Lippmann, Prix Nobel de physique en 1908 et inventeur de la photographie couleur, démontra de son côté l'année suivante que le phénomène était réversible [2.03]. Ce phénomène déduira mathématiquement du principe fondamental de la thermodynamique. Ainsi si des signaux électriques sont appliqués sur le cristal, celui-ci se dilate et se comprime dans une certaine direction, sa résonance mécanique favorisant les vibrations à une fréquence donnée. C'est grâce à cette dernière propriété que le quartz a atteint une telle notoriété. Immédiatement avant la fin des années 1881, les frères Curies confirmèrent l'existence de l'effet piézoélectrique inverse. Ils apportèrent une preuve quantitative de la réversibilité complète de la déformation électro-élasto-mécanique dans les cristaux piézoélectriques.

Un travail interactif au sein de la communauté scientifique européenne a été faite pendant deux ans. La science des applications piézoélectriques a été établie l'identification de cristaux piézoélectriques sur la base de structure cristalline asymétrique, l'échange réversible d'énergie électrique et mécanique et l'utilité de thermodynamique pour quantifier les relations complexes entre variables mécaniques, thermiques et électriques. La piézoélectricité n'était qu'une curiosité de laboratoire mais la première guerre mondiale (1914-1918) la fit entrer dans la voie des applications pratiques. En 1917, P. Langevin eut l'idée d'exciter des lames de quartz par un signal électrique alternatif pour créer des ultrasons. Ceux-ci, réfléchis sur la coque des sous-marins

ennemis, retournent vers d'autres cristaux piézoélectriques et y font naître des tensions électriques alternatives aisées à détecter. Ce générateur d'ondes ultrasonores « Sonar » est la première utilisation conjuguée des effets piézoélectriques direct et inverse. Le succès de l'invention de Langevin a ouvert de nouvelles perspectives pour les matériaux piézoélectriques dans des applications sous-marines ainsi que dans de nombreuses autres applications telles que les transducteurs à ultrasons, microphones, et accéléromètres.

La seconde génération de l'application piézoélectrique est arrivée dans la période de 1965 à 1980 [2.04]. Aux États-Unis, au Japon et en Union soviétique, au cours de la Seconde Guerre mondiale, des groupes de chercheur isolés travaillant sur des matériaux de condensateurs améliorés ont découvert que certains matériaux céramiques (préparés par frittage des poudres d'oxydes métalliques) présentaient des constantes diélectriques jusqu'à 100 fois supérieures aux cristaux taillés courants. De plus, la même classe de matériaux (appelés ferroélectriques) a été conçue pour présenter des améliorations similaires des propriétés piézoélectriques. La découverte de céramiques piézoélectriques faciles à fabriquer, dotées de caractéristiques de performances étonnantes a naturellement provoqué un regain intense de recherche et de développement dans le domaine des dispositifs piézoélectriques.

## **2.3 Phénomènes physiques de la piézoélectricité**

La piézoélectricité dont le préfixe « piézo » vient du verbe grec qui signifie « presser » ou « serrer » peut être définie comme étant la propriété d'un certains matériaux (cristaux, céramiques, polymères ou composites) qui peut se changer d'état sous l'influence des actions externes. On distingue deux types d'effet piézoélectrique, l'effet direct et l'effet inverse.

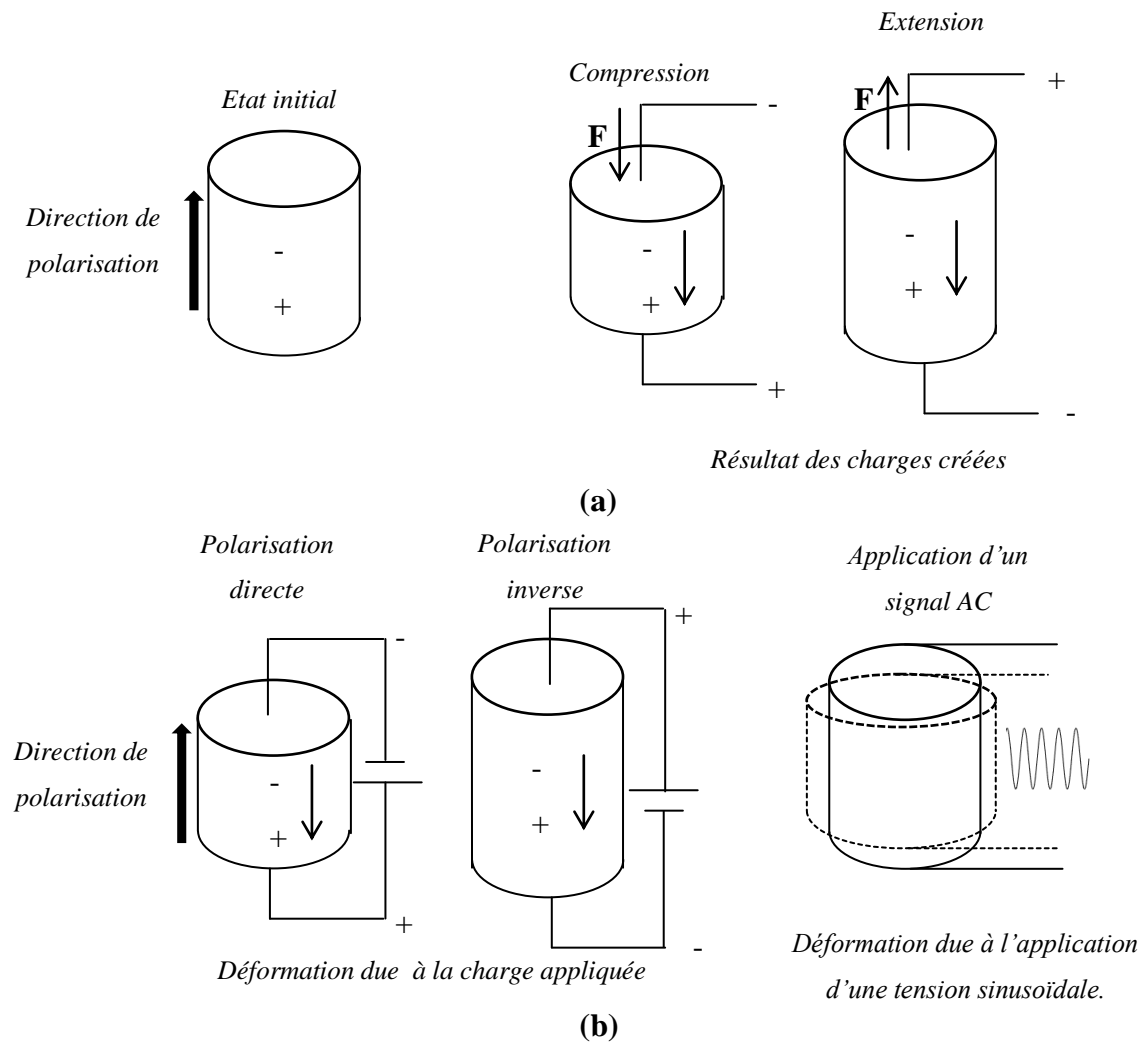
### ***2.3.1 Effet piézoélectrique direct***

Si on applique un effort, les contraintes mécaniques qui apparaissent dans le matériau provoquent des déformations de sa structure physique. Cette déformation va provoquer une création des charges électriques sur certaines faces opposées du matériau piézoélectrique. Ce phénomène est présenté à la **Fig. 2.01a**.

### ***2.3.2 Effet piézoélectrique inverse***

Inversement, l'application d'un champ électrique (différence de potentiel) sur certaines faces opposées du matériau piézoélectrique provoque la déformation du matériau. La **figure 2.01b** illustre ce phénomène.





**Figure 2.01 :** Schématisation de l'effet piézoélectrique (a) effet direct (b) effet inverse.

A titre d'exemple et pour illustrer les ordres de grandeur associés, un disque piézoélectrique d'un millimètre d'épaisseur, d'un centimètre carré de surface et soumis à une force de 1 newton, voit apparaître à ses bornes une tension de l'ordre de 0,1 volt (la valeur dépend des caractéristiques piézoélectriques du matériau) et se déforme approximativement de 0,5  $\mu\text{m}$  sous 1000 volts [2.05]. Le phénomène physique présente l'aspect visuel de l'élément piézoélectrique. Pour mieux comprendre la raison d'une déformation ou création d'électricité sur le matériau piézoélectrique, une étude au niveau atomique du cristal est nécessaire.

## 2.4 Piézoélectricité au niveau atomique

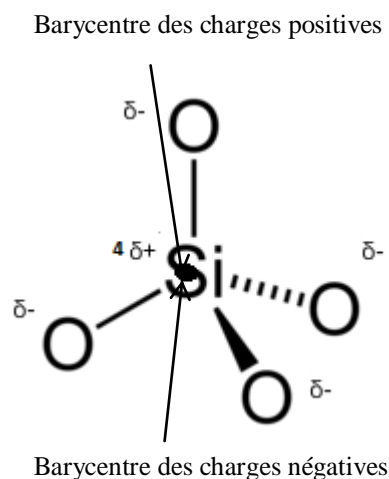
L'effet piézoélectrique se forme dans des cristaux sans centre de symétrie. Pour expliquer cela, on doit regarder les molécules individuelles qui composent le cristal.

### 2.4.1 Polarité moléculaire

Les molécules sont constituées d'atomes comprenant des électrons chargés négativement et des noyaux chargés positivement. La répartition de ces charges, positives et négatives dans un dipôle, représente la polarité d'une molécule. Ce dernier est dû à la différence d'électronégativité entre les éléments chimiques qui la composent, des différences de charge qu'elle induit, et à leur répartition dans l'espace.

L'électronégativité d'un atome est un nombre mesurant le pouvoir d'attraction de l'atome vis-à-vis de ses électrons engagés dans une liaison covalente simple [2.06]. Sa valeur est donnée par le tableau périodique des éléments [2.07]. La différence d'électronégativité entre deux atomes détermine la liaison covalente : liaison polaire ou liaison apolaire.

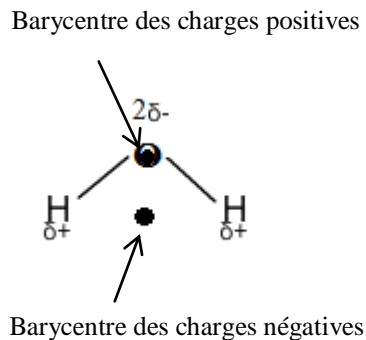
Une molécule est dite apolaire si la différence d'électronégativité entre les atomes est très faible. On a donc une répartition uniforme des électrons. Ils ont un barycentre confondu, c'est-à-dire que les centres d'électronégatifs des charges positives et négatives se coïncident. La silice  $\text{SiO}_2$  est un exemple d'une molécule apolaire. Elle est formée de motifs tétraédriques  $\text{SiO}_4$  liés entre eux par les atomes d'oxygène de façon régulière, comme dans le quartz. La **figure 2.02** montre que le barycentre de la molécule est confondu avec le milieu de l'atome de silicium.



**Figure 2.02 :** Structure moléculaire de  $\text{SiO}_2$ .

La molécule est polaire si la différence d'électronégativité entre les atomes est supérieure à 0,4 [2.08]. Plus cette différence est importante entre deux atomes, plus les électrons vont être délocalisés vers l'atome le plus électronégatif et donc plus la liaison va être polarisée. Il y a même une apparition d'une charge partielle positive et d'une charge partielle négative qui forme un dipôle instantané ou polarisation intrinsèque. L'eau qui est présentée par la formule  $\text{H}_2\text{O}$  est une molécule polaire. Le barycentre des charges partielles négatives ne coïncide pas avec celui de la

charge partielle positive, ceci est montré à la **Fig. 2.03**. Le centre négatif se situe dans l'atome d'oxygène et le centre positif est au milieu des deux atomes d'hydrogène.

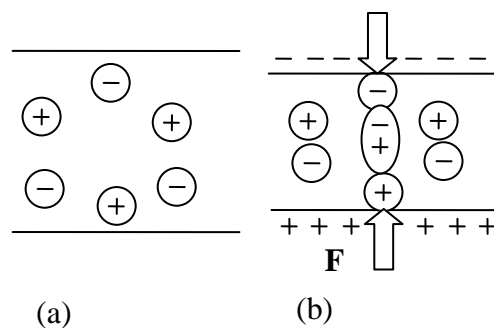


**Figure 2.03 :** *Structure moléculaire de  $H_2O$ .*

#### 2.4.2 Phénomène piézoélectrique

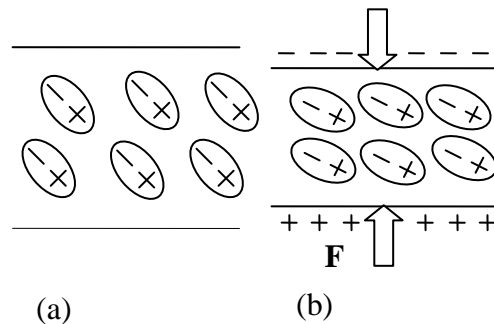
Une explication moléculaire peut être donnée concernant l'effet piézoélectrique. Ce phénomène est dû principalement à la polarisation spontanée des atomes dans une molécule ou dans un cristal. Les deux types de molécule, polaire et apolaire peuvent être piézoélectriques.

Si un cristal ne présente pas de polarisation intrinsèque, il est apolaire, mais que la maille du réseau est telle que les ions positifs et/ou négatifs sont plus abondants d'un côté que de l'autre, alors une compression peut décaler les centres de gravité des charges positives et négatives. Les nuages électroniques des atomes se déplacent donc par rapport à leur position naturelle. Comme il s'agit d'un déplacement par rapport à la situation électriquement neutre, il apparaît des « mini-dipôle ». L'ensemble de ces dipôles va créer des charges de même signe d'un côté et des charges opposées de l'autre côté du cristal [2.09]. D'où la création d'une différence de potentiel globale au sein du cristal. La **figure 2.04** suivante montre ce phénomène.



**Figure 2.04 :** (a) *Molécule à l'état naturelle, (b) Molécule sous contrainte, apparition de charges opposées sur les deux côtés de la plaque.*

Les cristaux dont la maille présente de polarisation intrinsèque ou polaire bénéficient aussi le phénomène de piézoélectricité. Le mécanisme est analogue à ceux des cristaux qui n'a pas de polarisation intrinsèque. Une compression ou une dilatation mécanique modifie l'équilibre des charges, ce qui fait apparaître sur les faces concernées une différence de potentiel. La **figure 2.05** représente ce cas.



**Figure 2.05 :** (a) Molécule avec polarisation intrinsèque à l'état naturelle, (b) Molécule avec polarisation intrinsèque sous contrainte, apparition de charges opposées sur les deux côtés de la plaque.

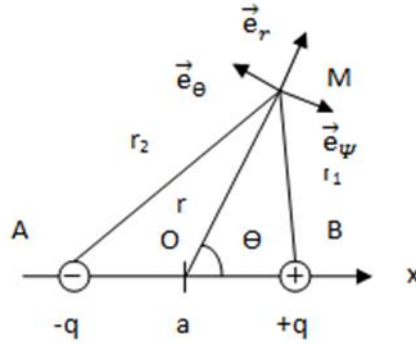
En résumé, le phénomène de piézoélectricité est obtenu par la création ou la variation d'un dipôle électrostatique dans la structure moléculaire d'un cristal. La quantité de charge obtenue doit être donc égale à la somme des potentiels créés par chaque dipôle électrostatique dans le cristal.

Un dipôle électrostatique est défini par un ensemble de charges distinctes disposées de telle sorte que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec le barycentre des charges négatives. Un dipôle le plus simple consiste à un ensemble de deux charges électriques ponctuelles opposées  $+q$  et  $-q$ , séparé par une distance  $a$  très petit par rapport à la distance  $r$  au point **M** où l'on observe leurs effets [2.10].

La **figure 2.06** est considérée pour calculer le potentiel créé par un dipôle. Le dipôle est constitué de deux charge opposés,  $-q$  et  $+q$ , situé respectivement en un point **A** et **B** distants de  $a$ .

Notation :

- **O** est un point situé au milieu de **AB**
- $r$  est la distance entre **O** et **M**
- $r_2$  est la distance entre **A** et **M**
- $r_1$  est la distance entre **B** et **M**
- $\theta$  est l'angle entre  $O_x$  et **OM**
- $r \gg a$



**Figure 2.06 :** Présentation d'un dipôle distant de a.

Le potentiel  $V$  crée en un point M par le dipôle est :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{AM} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+q}{BM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right)$$

Or selon Pythagore

$$\begin{aligned} BM^2 &= (BO + OM)^2 = (OM - OB)^2 = OM^2 + OB^2 - 2OBOM\cos\Theta \\ &= r^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot r \cdot \cos\Theta \end{aligned}$$

$$\text{Soit } BM = r \cdot \sqrt{1 - \frac{a}{r} \cos\Theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$

En changeant  $\Theta$  en  $\pi - \Theta$ , on a

$$AM = r \cdot \sqrt{1 + \frac{a}{r} \cos\Theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$

D'où

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \left( 1 - \frac{a}{r} \cos\Theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left( 1 + \frac{a}{r} \cos\Theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (2.01)$$

Comme  $r \gg a$  d'où  $a/r \ll 1$

On peut utiliser le développement limité au 1<sup>er</sup> ordre pour de la forme  $(1+x)^n$  ou  $(1-x)^n$

On obtient alors

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \left( 1 + \frac{a}{2r} \cos\Theta \right) - \left( 1 - \frac{a}{2r} \cos\Theta \right) \right]$$

Notons par  $\vec{p} = q \cdot \overrightarrow{AB}$  le moment dipolaire dirigé de  $-q$  vers  $+q$  et  $\vec{e}_r$  le vecteur unitaire du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

On a alors :

$$V = \frac{q \cdot a \cdot \cos\Theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Le champ polaire se calcule à partir du potentiel. On utilise la relation champ-potentiel :

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = - \overrightarrow{\text{grad}} V(\mathbf{M})$$

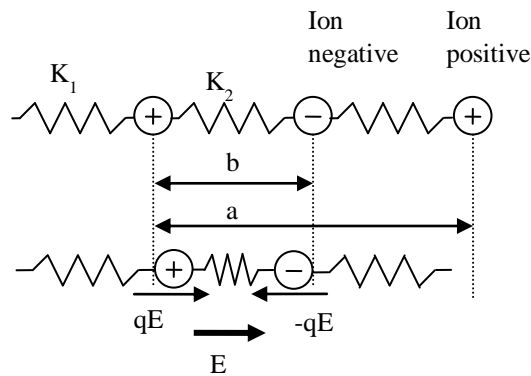
Comme  $V$  ne dépend pas que de  $\Theta$  et  $r$ , seul les composant  $E_\Theta$  et  $E_r$  de  $\vec{E}$  seront non nulles. On a donc :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cdot \cos \Theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\Theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \Theta} = \frac{p \cdot \sin \Theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2.02)$$

Le champ créé par un dipôle est donc proportionnel  $\frac{1}{r^3}$  et le potentiel à  $\frac{1}{r^2}$ , alors que pour un charge ponctuel,  $\vec{E}$  créé est proportionnel à  $\frac{1}{r^2}$  et  $V$  à  $\frac{1}{r}$ .

Pour un point  $M$  éloigné,  $\vec{E}$  et  $V$  créés par un dipôle seront négligeable par rapport à  $\vec{E}$  et  $V$  créés par un dipôle à proximité.

Pour expliquer l'origine de l'équation de base de la piézoélectricité, une représentation unidimensionnelle simple est utilisée. La **figure 2.07** présente cette structure qui est une structure ionique entre deux atomes.



**Figure 2.07 :** Déformation d'une maille cristalline d'un matériau piézoélectrique.

En présence d'un champ électrique  $\vec{E}$ , les ions chargés négativement et les ions chargés positivement se rapprochent deux à deux. Ce mouvement déplace les barycentres électriques initialement confondus (lorsque  $E = 0$ ) et forme des dipôles électriques qui s'opposent naturellement au champ perturbateur extérieur. Ce mouvement ionique sur l'ensemble du solide soumis au champ produit une déformation macroscopique. Ce phénomène est réversible puisque une contraction mécanique provoque un déplacement similaire des ions et la création de dipôles (à

travers les raideurs  $K_1$  et  $K_2$  différentes). L'apparition d'un champ électrique se produit et s'oppose alors au mouvement par forces électrostatiques sur les dipôles électriques formés.

Les charges  $-q$  et  $+q$  sont reliées par des ressorts qui symbolisent les liaisons ioniques. La différence entre  $K_1$  et  $K_2$  introduit la dissymétrie de la maille cristalline. Une maille élémentaire de longueur  $a$  comporte deux dipôles électriques de moments  $\frac{q}{2(a-b)}$  et  $\frac{-q}{2*b}$ . D'où un moment dipolaire  $P_o$  avec  $P_o = \frac{q}{2} (a - 2b)$ .

La chaîne possède alors les propriétés suivantes :

- La polarisation volumique est non nulle si  $b$  est différent de  $a/2$ .
- Sous l'effet d'une contrainte, la chaîne se déforme, la variation des distances  $a$  et  $b$  provoque une variation de la polarisation (effet direct).
- Les ions positifs et négatifs se déplaçant en sens opposés sous l'action d'un champ électrique et les liaisons ioniques n'ayant pas les mêmes raideurs, il en résulte une déformation (effet inverse).

Les grandeurs mécaniques  $T$  (contrainte) et  $S$  (déformation) sont liées aux grandeurs électriques  $E$  (champ) et  $P$  (polarisation induite ou induction  $D = \epsilon_0 + P$ ).

L'équilibre statique de chaque ion donne :

$$-qE + K_1 (\Delta(a) - \Delta(b)) - K_2 \Delta(b) = 0 \quad (2.03)$$

La force exercée par la partie droite de la chaîne sur la partie gauche est selon que l'on se place sur le ressort de raideur  $K_1$  ou  $K_2$ :

$$F_1 = K_1 (\Delta(a) - \Delta(b))$$

$$F_2 = K_2 \Delta(b)$$

Une section du matériau comporte un grand nombre de chaînes  $N$  par unités de surfaces. La tension mécanique  $T$  vaut donc :

$$T = \frac{N}{2} K_1 (\Delta(a) - \Delta(b)) + \frac{N}{2} K_2 \Delta(b) \quad (2.04)$$

La polarisation induite  $P$  est la variation de polarisation  $P_o$  avec  $n$  densité volumique de molécule  $N = n.a$  :

$$P = \Delta P_o = \frac{nq}{2} (\Delta(a) - 2\Delta(b)) = \frac{Nq}{2a} (\Delta(a) - 2\Delta(b))$$

En introduisant la relation d'équilibre, on obtient (2.03):

$$P = \Delta P_o = \frac{qN}{2a} \left( \frac{2qE}{K_1 + K_2} + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \Delta(a) \right)$$

$P$  est la somme de deux termes, le premier proportionnel au champ électrique  $E$  (effet diélectrique) et le second proportionnel à la déformation  $S = \frac{\Delta(a)}{a}$  (effet piézoélectrique). En reportant

l'expression de la polarisation  $P$  en fonction du déplacement électrique  $D$ , nous retrouvons une équation typique de la piézoélectricité :

$$D = \epsilon E + eS$$

De l'équation (2.04), nous déduisons la deuxième équation fondamentale de la piézoélectricité :

$$T = \epsilon E - cS$$

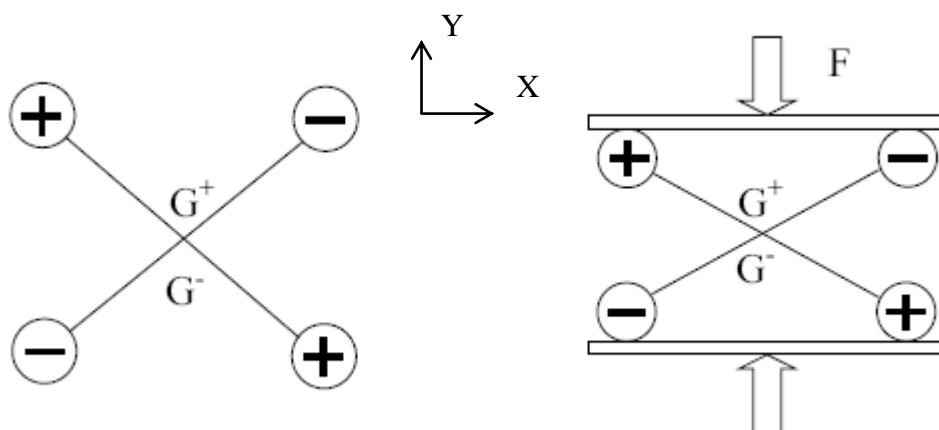
La piézoélectricité est généralement retranscrite sous la forme de ces deux équations mais sous une approche tensorielle du couplage entre les systèmes électriques et mécaniques. Elle fait intervenir les vecteurs déplacements électriques  $D$  et le champ électrique  $E$  et les tenseurs de déformation  $S$  et de contrainte  $T$  :

$$\begin{cases} S = s^E T + d^t E \\ D = \epsilon^T E + d T \end{cases} \quad (2.05)$$

Concrètement, ces équations traduisent l'effet direct de la piézoélectricité, soit la polarisation électrique d'une céramique soumise à une contrainte mécanique ou l'effet inverse par la déformation d'une céramique soumise à un champ électrique. Ces équations traduisent bien le caractère linéaire de l'effet piézoélectrique et sa dépendance au signe du champ et à son amplitude. Le choix de paramètres d'entrée différents permet de définir d'autres équations caractéristiques [2.11].

## 2.5 Symétrie et piézoélectricité

Les propriétés de symétrie des cristaux déterminent aussi le caractère piézoélectrique ou non d'un matériau. Tout corps présentant un centre de symétrie ne peut pas être piézoélectrique alors que les cristaux ne possédant pas de centre de symétrie peuvent l'être.

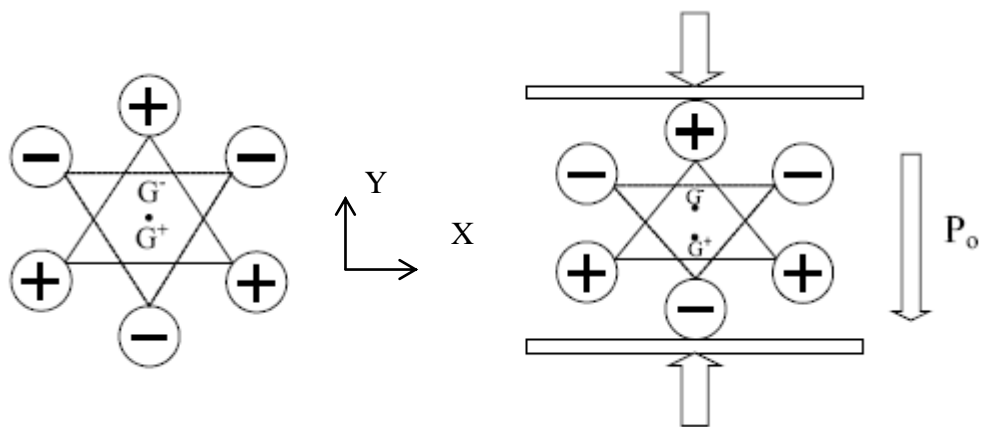


**Figure 2.08 :** *Cristal possédant un centre de symétrie.*



Un cristal possédant un centre de symétrie ne peut pas être déséquilibré électriquement et par conséquent il ne peut pas avoir de propriété piézoélectrique (**Fig. 2.08**). En effet, lorsqu'il est soumis à une contrainte mécanique, le déplacement des charges positives et négatives est identique dans toutes les directions et par conséquent la structure reste équilibrée. On observe toujours le même centre de symétrie [2.12] [2.13].

Par contre, la **Fig. 2.09** montre les phénomènes d'un cristal qui ne possède pas de centre de symétrie. Notons que cette structure de cristal est formée par deux triangles équilatéraux dont les sommets disposent de charges positives pour l'un et négatives pour l'autre. Tant que le cristal n'est soumis à aucune contrainte, les deux centres des triangles équilatéraux sont identiques et on ne dispose d'aucun effet piézoélectrique. Dès lors qu'une contrainte est appliquée, soit suivant X, soit suivant Y, les centres des deux triangles équilatéraux se déplacent en sens inverse et déséquilibrent la structure du cristal. L'effet piézoélectrique est lié à cette possibilité de déséquilibrer la structure et par conséquent, seuls les cristaux dont la structure ne possède pas de centre de symétrie sont piézoélectriques. De plus, comme on peut le constater les deux centres se déplacent suivant l'axe des X quel que soit la contrainte appliquée (suivant Y ou suivant X). Par conséquent l'axe des X est appelé *axe électrique* et l'axe des Y est appelé *axe mécanique*. Perpendiculairement à ces deux axes se trouve l'axe des Z qui lui sera appelé l'*axe optique* car des techniques optiques sont utilisées pour le localiser. De plus il n'y a aucun effet piézoélectrique qui soit associé à l'axe optique [2.12], [2.13].



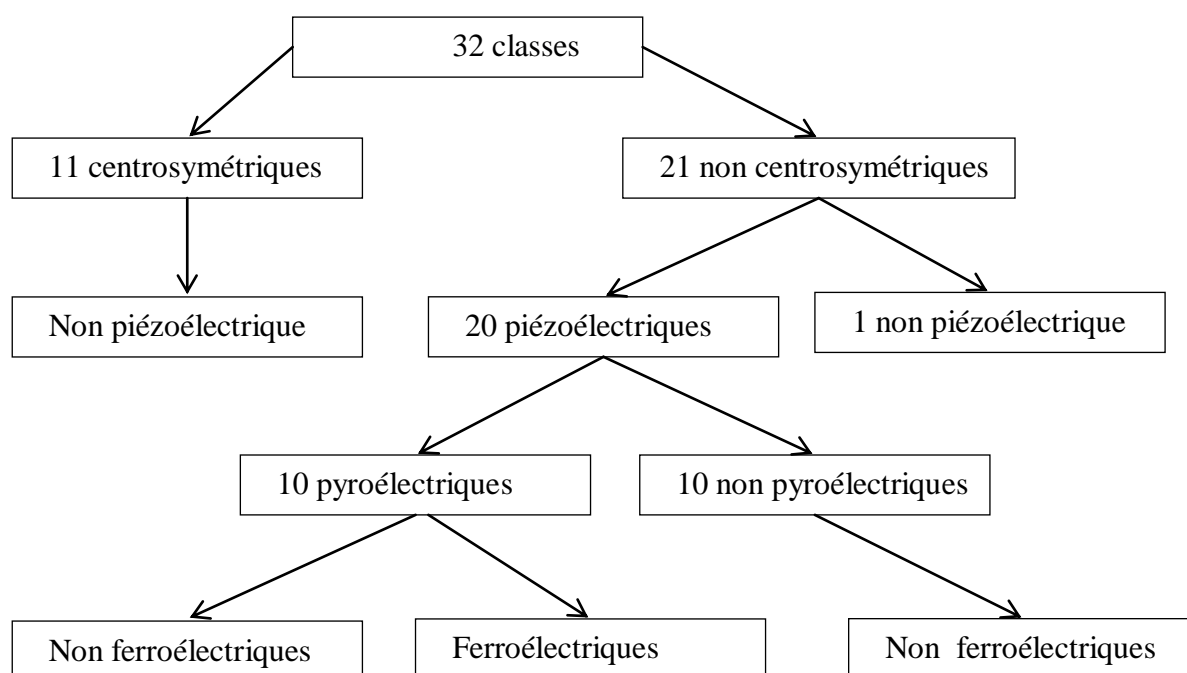
**Figure 2.09 :** *Cristal ne possédant pas de centre de symétrie.*

L'effet piézoélectrique a été découvert et mis en évidence principalement dans les solides cristallins anisotropes (absence de centre de symétrie dans la maille cristalline). En cristallographie, on classe toutes les structures répertoriées selon 32 classes de symétrie définies

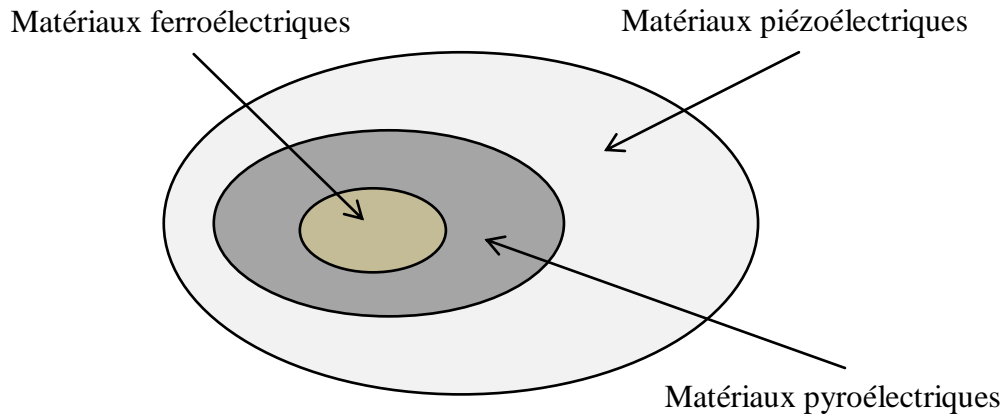
comme étant toutes les combinaisons distinctes possibles entre les éléments de symétrie que sont les plans, les axes et les centres de symétrie. Onze de ces classes sont dites centrosymétriques et ne peuvent donc pas présenter des propriétés polaires ou aucune polarisation spontanée. L'une des 21 autres classes (la classe cubique) possèdent des éléments de symétrie lui interdisant de présenter des caractéristiques polaires. Les 20 classes restantes possèdent au moins un axe polaire et les matériaux qu'elles caractérisent peuvent donc posséder des caractéristiques polaires telles la piézoélectricité, la pyroélectricité et la ferroélectricité (**Fig. 2.10**) [2.12] [2.13].

La **figure 2.11** résume la hiérarchie des matériaux cristallins ayant des propriétés piézoélectriques. Parmi ces matériaux on trouve une sous-classe formée par les matériaux pyroélectriques qui, à la différence des précédents, possèdent une polarisation naturelle selon au moins une direction, appelée aussi polarisation spontanée. L'importance de cette polarisation dépend fortement de la température, d'où leur dénomination. Les matériaux ferroélectriques forment un sous-groupe des matériaux pyroélectriques et ont la particularité de pouvoir se polariser selon deux axes ou plus, chaque direction étant équiprobable. Par application d'un champ électrique, on peut faire basculer la polarisation d'un axe à un autre.

C'est en fait ce phénomène qui est grande partie responsable de leurs propriétés piézoélectriques : le basculement modifie localement la structure cristalline, et rend l'effet beaucoup plus important que chez les autres matériaux. Ceci explique que seuls les ferroélectriques soient utilisés comme actionneurs [2.12], [2.13], [2.14].



**Figure 2.10 :** Organisation des différentes classes cristallines [2.14].



**Figure 2.11 :** *Hiérarchie des matériaux cristallins ayant des propriétés piézoélectriques [2.14].*

### 2.5.1 Piézoélectricité

Pour un matériau, la piézoélectricité est la manifestation d'un couplage électromécanique avec l'apparition de charges électriques ou plus précisément d'une polarisation électrique sous l'influence d'une contrainte. Cette polarisation est proportionnelle aux contraintes subies par le matériau et elle s'inverse lorsque la déformation s'inverse [2.15]:

$$D = dT$$

Avec  $D$  (C/m<sup>2</sup>) est appelé induction électrique. Cette grandeur, exprimant le nombre de charges créées sur les faces du matériau par unité de surface, est fonction de la contrainte  $T$  (N/m<sup>2</sup>). Le coefficient de proportionnalité  $d$  est appelé constante piézoélectrique ou encore coefficient piézoélectrique de charge.

Le phénomène se décline aussi par la génération d'une déformation  $S$  en fonction du champ électrique  $E$ . Il s'agit de l'effet inverse par opposition avec l'effet direct.

$$S = d^t E$$

### 2.5.2 Pyroélectricité

Parmi les 20 classes de symétrie piézoélectrique, 10 possèdent en plus la caractéristique d'être pyroélectriques. Comme son nom l'indique, « **pyro** » provient du Grec et signifie feu. Il s'agit d'un phénomène couplant des effets thermique et électrique. En fait, il s'agit de l'apparition de charges libres symbolisées par  $C_L$  lorsque la température  $\Theta$  varie [2.15].

$$C_L = p\Delta\Theta$$

Le signe de l'induction électrique dépend du signe de  $\Delta\theta$ , et  $p$  est le coefficient pyroélectrique exprimé en  $C/m^2K$ .

On trouve ce type de matériau dans des dispositifs de détection où la pyroélectricité est utilisée comme capteur passif de rayonnements dans l'infrarouge.

### **2.5.3 Ferroélectricité**

#### **2.5.3.1 Définition**

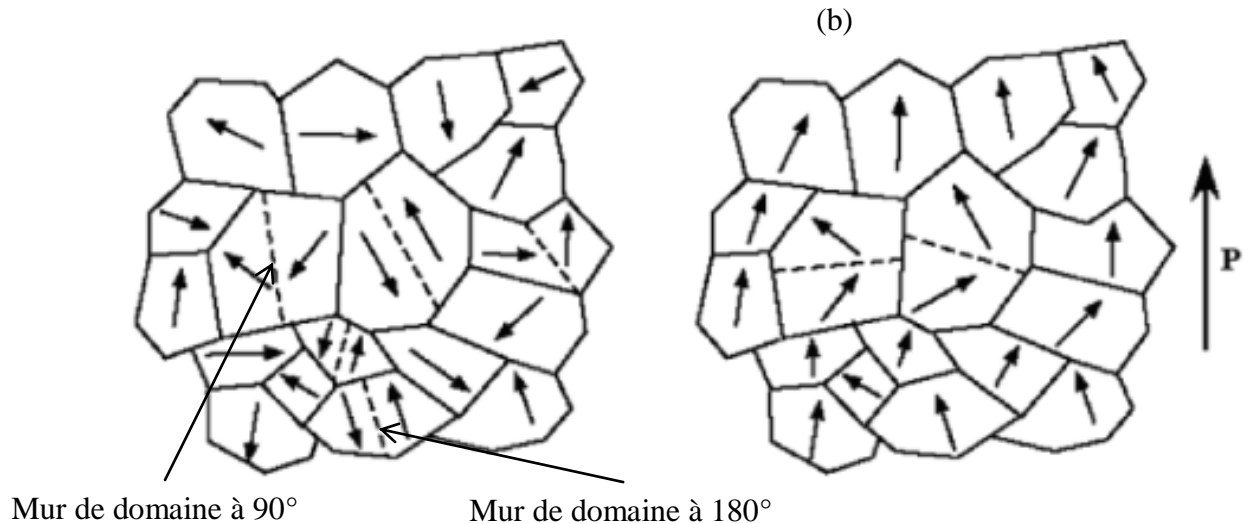
La Ferroélectricité forme une sous-famille des matériaux pyroélectriques qui ont la propriété particulière d'avoir une polarisation modifiable dans certaines conditions et sous un champ électrique excitateur (**Fig. 2.10**). Elle peut être simplement réorientée voire même s'inverser si le champ est suffisamment intense [2.14]. Un matériau ferroélectrique ne présente pas de propriété macroscopique piézoélectrique avant polarisation. Une fois polarisé, il devient alors piézoélectrique.

Le terme ferroélectrique a été utilisé pour la première fois en 1935, par Muller pour rappeler le comportement hystérétique de la polarisation électrique macroscopique en fonction du champ électrique appliqué.

Le premier matériau ferroélectrique découvert est le sel de Rochelle, c'est le tartrate de sodium et de potassium hydraté. Ensuite, on peut citer des céramiques comme le titanate de baryum, précurseur des céramiques actuelles, les titanates de plomb utilisés dans l'imagerie haute résolution. Un peu plus tard sont découvertes les céramiques de PZT (plomb, zirconate et titanate) et ses nombreux dérivés. Parmi eux, il y a le PMN-PT qui possède le plus grand coefficient piézoélectrique connu mais qui a l'inconvénient d'être sous forme monocristalline. Il existe aussi des matériaux tels que  $LiNbO_3$  et  $LiTaO_3$  permettant de réaliser des structures exploitant la propagation d'onde de surface. Pour être complet, des polymères ou copolymères partiellement cristallisés de type PVDF permettent d'élargir le domaine d'application grâce à des structures plus souples.

#### **2.5.3.2 Polarisation des matériaux ferroélectriques**

Un matériau ferroélectrique est divisé en plusieurs domaines dans lesquels les dipôles sont orientés de façon unidirectionnelle (**Fig. 2.12a**).



**Figure 2.12 :** Représentation en 2D du processus de polarisation dans une céramique (a) matériau vierge (b) matériau polarisé.

Cette organisation permet de minimiser l'énergie interne du matériau. Deux domaines adjacents sont séparés par une frontière appelée « mur de domaine ». Cette zone de transition ne détruit pas la cohérence du réseau cristallin [2.16], mais permet de relâcher les contraintes par une déformation locale de la maille. La direction de polarisation adaptée par l'ensemble des dipôles d'un domaine est déterminée par la symétrie cristalline. Cette symétrie dépend de la température, de la contrainte et du champ électrique.

Sous sollicitation électrique ou mécanique, les murs de domaines se déplacent et leur mouvement est responsable de certaines pertes dans le matériau et donc du comportement hystérétique du matériau [2.16]. Avant l'application d'un champ extérieur, la direction de polarisation de chaque domaine est orientée au hasard, ce qui rend le matériau globalement non polaire. Sous l'application d'un champ électrique, les dipôles de chaque domaine vont se réorienter plus ou moins facilement selon leur angle initial, à savoir que le retournement des domaines à  $180^\circ$  se fait sans déformer la maille tandis que les autres domaines ( $71^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $109^\circ$ ) vont induire une forte déformation pendant leur alignement [2.16].

Les murs de domaine sont repérés grâce à l'angle que forment les directions de polarisation spontanée des domaines qu'il sépare :

- Quadratique :  $90^\circ$  et  $180^\circ$
- Orthorhombique :  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  et  $180^\circ$
- Rhomboédrique :  $71^\circ$ ,  $109^\circ$  et  $180^\circ$

La **figure 2.12** donne une description qualitative du processus de réorientation des domaines lors de la polarisation d'une céramique piézoélectrique.

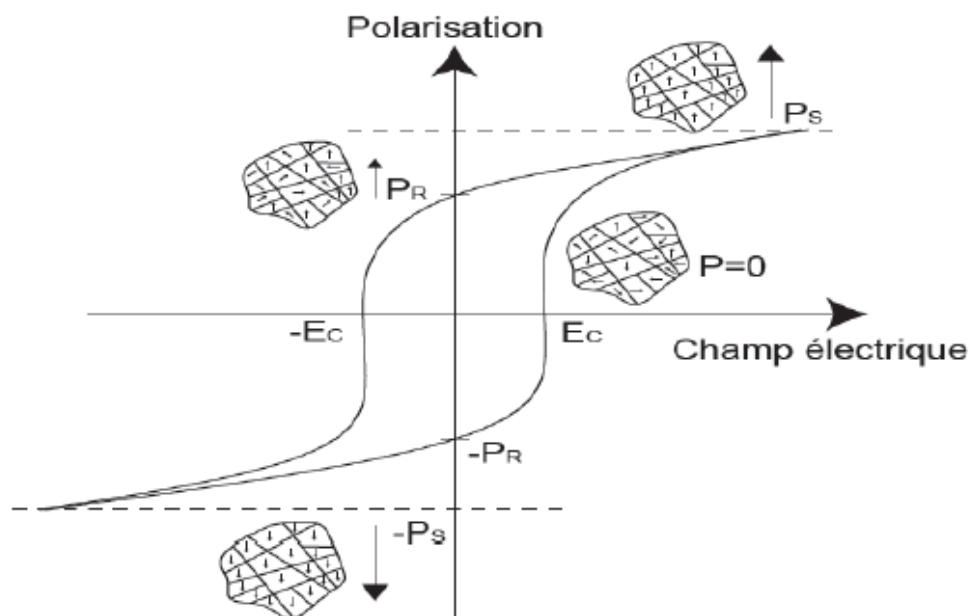
Dans la littérature la polarisation à saturation est parfois appelée polarisation spontanée. Cette confusion est explicable si on considère le cas d'un monocristal monodomaine pour lequel la polarisation de saturation correspond bien à la somme de toutes les polarisations spontanées. Ceci devient faux dans le cas des céramiques pour lesquelles l'orientation aléatoire des cristallites rend impossible l'obtention de la polarisation maximale, car dans le cas général, ces derniers sont polarisés en dehors de leur direction de polarisation spontanée.

### 2.5.3.3 Cycle d'hystérésis

Le matériau ferroélectrique polarisé possède une polarisation rémanente à champ nul.

A la différence des piézoélectriques « naturels » comme le quartz, ces diélectriques possèdent des permittivités électriques élevées et une signature électrique particulière : l'évolution de la polarisation en fonction du champ apparaît sous la forme d'un cycle d'hystérésis  $P = f(E)$  (**Fig. 2.13**). D'où le nom de ferroélectrique par analogie au ferromagnétisme. Le champ coercitif noté  $E_C$  est le champ électrique nécessaire pour réorienter les dipôles du matériau ferroélectrique. La polarisation électrique peut changer de sens lorsque le champ électrique appliqué devient supérieur au champ coercitif  $E_C$ .

La polarisation rémanente  $P_R$  correspond à la valeur de la polarisation à champ nul. Sous des valeurs élevées de champ, la polarisation sature à  $\pm P_S$ .



**Figure 2.13 :** Cycle d'hystérésis d'un matériau ferroélectrique avec  $E_C$ , champ coercitif,  $P_R$ , polarisation rémanent,  $P_S$ , polarisation de saturation [2.16].

#### 2.5.3.4 Vieillissement

Les propriétés des matériaux ferroélectriques soumis à des sollicitations mécaniques, électriques ou thermiques répétées peuvent être modifiées et décroître sensiblement avec le temps. Ce phénomène appelé vieillissement est relié à la variation progressive de la configuration des murs de domaines avec le temps. Ces derniers se réarrangent dans une configuration plus stable qui minimise l'énergie de la céramique piézoélectrique. Dans certains matériaux cela fait apparaître un champ interne  $E_i$  de direction opposée à l'axe de polarisation qui diminue sensiblement la polarisation rémanente.

On exprime généralement la variation des propriétés piézoélectriques au cours du temps de la manière suivante [2.17]:

$$X(t) = X(t_0)V_v \log(t/t_0)$$

Où  $t_0$  est le point de départ de la mesure,  $V_v$  correspond à la vitesse de vieillissement et  $X$  représente la grandeur piézoélectrique considérée.

#### 2.5.3.5 Température de Curie et transition de phase

La transition de phase d'un matériau ferroélectrique correspond à un changement dans la structure cristalline, qui se produit généralement à une température bien définie et qui s'accompagne d'une modification de l'orientation et/ou de l'amplitude de la polarisation électrique. Le matériau passe de l'état ferroélectrique à l'état para-électrique [2.17].

Le point de Curie  $T_c$  est la température au-delà de laquelle un matériau ferroélectrique subit une transition de phase structurale vers un état où la polarisation spontanée de la maille disparaît. Au-delà de cette température, le matériau ferroélectrique se retrouve dans un état paraélectrique non polaire. Le passage polaire - non polaire correspond à une transition de phase [2.17].

La symétrie cristalline de la phase non polaire est toujours plus élevée que celle de la phase polaire. Au point de Curie, la permittivité diélectrique La permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r$  ( $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ ) atteint une valeur maximale à la température de Curie. Au-dessus de cette température, la permittivité relative  $\epsilon_r$ , mesurée sous champ faible le long de l'axe de polarisation, suit une loi de Curie-Weiss:

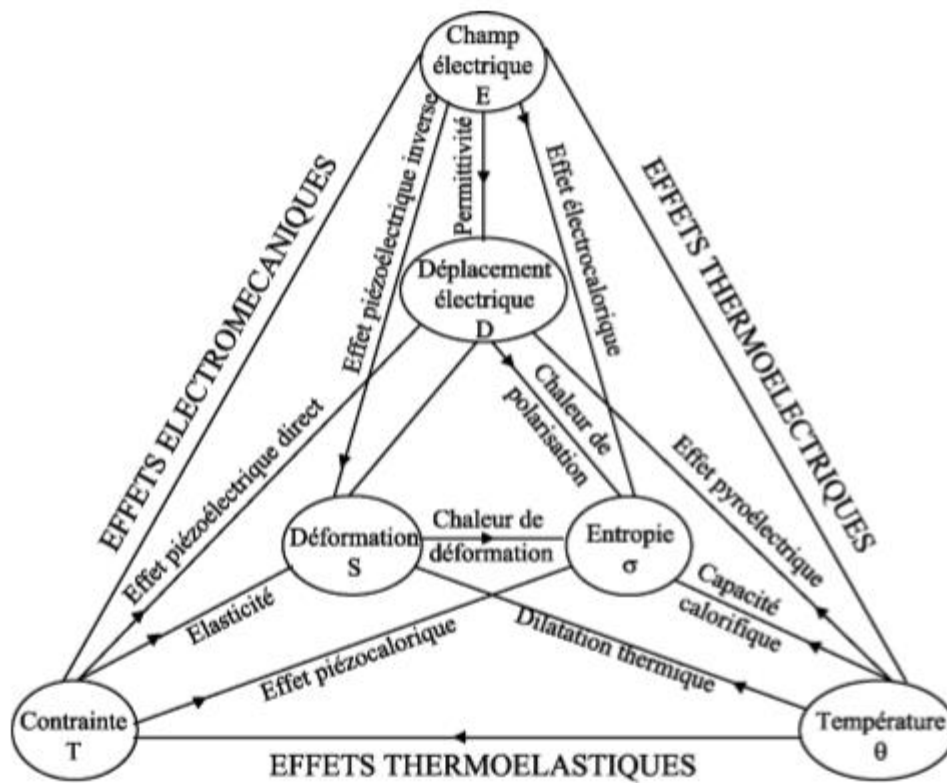
$$\epsilon = \frac{C}{\Theta - \Theta_0}$$

Où  $\Theta_0$  est la température de Curie Weiss qui traduit les interactions entre moments dipolaires dans le matériau,  $\Theta$  la température absolue et  $C$  la constante de Curie.

## 2.6 Propriétés piézoélectriques et mécaniques d'un matériau piézoélectrique

### 2.6.1 Conversion électromécanique

Les propriétés thermiques, électriques et mécaniques des cristaux et autres céramiques piézoélectriques sont régies par un ensemble de grandeurs physiques telles que la température  $\theta$ , l'entropie  $\sigma$ , le tenseur des contraintes  $T$ , le tenseur des déformations  $S$ , le champ électrique  $E$  et l'induction électrique  $D$ . Les principales relations existant entre ces différentes quantités permettent de mettre en exergue trois types de phénomène physique : la piézoélectricité, la pyroélectricité et la thermoélasticité. La **figure 2.15** résume les interactions entre les grandeurs physiques. Les sommets du triangle intérieur symbolisent les variables extensives et ceux du triangle extérieur représentent les variables intensives. Cependant, en pratique, les couplages thermomécaniques et thermoélectriques sont faibles dans les matériaux communément employés.



**Figure 2.14 :** Relations entre les propriétés thermiques, électriques et mécaniques d'un cristal

[2.17]



## 2.6.2 Equations fondamentales de la piézoélectricité

### 2.6.2.1 Equation d'état

La piézoélectricité est le résultat d'un couplage entre l'énergie électrique et l'énergie mécanique d'un matériau en négligeant l'énergie thermique, lorsque l'effet pyroélectrique est négligeable. Les grandeurs fondamentales de la piézoélectricité sont pour la partie électrique le champ  $E$  et l'induction  $D$ , et pour la partie mécanique la déformation  $S$  et la contrainte  $T$ .

Un système linéaire de 8 équations tensorielles [2.17], présenté au **tableau 2.01**, est obtenu à partir de ces 4 grandeurs.

- $X^t$  est la transposé de la matrice  $X$ .
- $X^E$  indique que la grandeur  $X$  est considérée à champ électrique constant.
- $X^D$  indique que la grandeur  $X$  est considérée à induction électrique constante.
- $X^T$  indique que la grandeur  $X$  est considérée à contrainte constante.
- $X^S$  indique que la grandeur  $X$  est considérée à Déformation constante.

**Tableau 2.01 : Equation d'état piézoélectrique.**

Grandeurs électrique	Grandeurs mécaniques	Variables indépendantes	Type	Forme
$D = \varepsilon^T E + d^t T$	$S = s^E T + d^t E$	T, E	extensive	d
$E = v^S D - h^S S$	$T = C^D S - h^t D$	S, D	intensive	h
$E = \rho^T D - g^T T$	$S = s^D T + g^t D$	T, D	mixte	g
$D = \varepsilon^S E + e^S S$	$T = c^E S - e^t E$	S, E	mixte	e

Les paramètres des équations constitutives de la piézoélectricité doivent être représentés par des tenseurs dus à l'anisotropie des matériaux piézoélectriques. C'est-à-dire qu'ils ont une propriété qui varie selon la direction de la déformation. On distingue ainsi trois types de tenseurs : élastique ( $c_{ij}$  ou  $s_{ij}$ ), électrique ( $\varepsilon_i$  ou  $v_{ij}$ ) et piézoélectrique ( $d_{ij}$ ,  $e_{ij}$ ,  $g_{ij}$  ou  $h_{ij}$ ) avec l'indice  $i$  désignant la direction de polarisation et l'indice  $j$  la direction de déformation.

Puisque les quatre couples d'équations d'états représenté au **tableau 2.01** sont équivalents, il est possible d'écrire des relations matricielles entre les différentes constantes piézoélectriques [2.17].

$$\begin{cases} d_{mi} = \varepsilon_{mn}^T \cdot g_{ni} = e_{mj} \cdot s_{ji}^E \\ e_{mi} = \varepsilon_{mn}^S \cdot h_{ni} = d_{mj} \cdot c_{ji}^E \\ g_{mi} = v_{mn}^T \cdot d_{ni} = h_{mj} \cdot s_{ji}^D \\ h_{mi} = v_{mn}^S \cdot e_{ni} = g_{mj} \cdot c_{ji}^D \end{cases} \quad (2.06)$$

Avec m, n = 1 à 3 et i, j = 1 à 6

**Tableau 2.02 : Glossaire des symboles dans la piézoélectricité.**

Grandeur	Termes	Appellation	Matrice
ELECTRIQUE	D	Induction électrique C/m2	(3,1)
	E	Champ électrique en V/m	(3,1)
	$\varepsilon$	Permittivité électrique en F/m	(3,3)
	$\nu$	Constante d'imperméabilité diélectrique en m/F	(3, 3)
MECANIQUE	S	Déformation relative	(6,1)
	T	Contrainte en N/m2	(6,1)
	s	Compliance m2/N	(6,6)
	c	Raideur élastique N/ m2	(6,6)
PIEZOELECTRIQUE	d	Constante piézoélectrique : proportionnalité entre la charge et la contrainte à champ nul ou constant en C/N ou m/V	(3,6)
	e	Constante piézoélectrique : proportionnalité entre la charge et la déformation à champ nul ou constant en C/m2	(3,6)
	g	Constante piézoélectrique : proportionnalité entre la contrainte et le champ à induction nulle ou constante en m2/C	(3,6)
	h	Constante piézoélectrique : proportionnalité entre la déformation et le champ à induction nulle ou constante en V/m	(3,6)

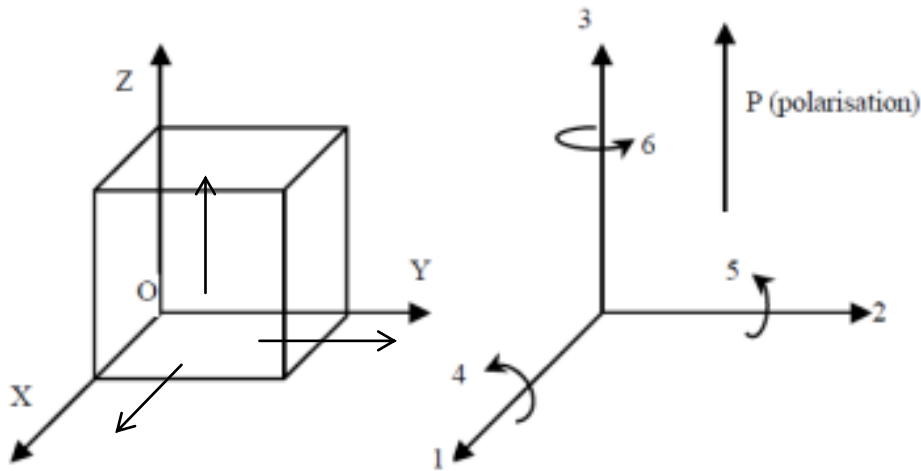
Le **tableau 2.02** représente les tenseurs et les gradeurs utilisés dans le domaine de piézoélectricité.

### 2.6.3 Les constantes piézoélectriques

Les notations tensorielles sont représentées à la **Fig. 2.07**.

Chaque constante comporte généralement deux indices indiquant les directions de la contrainte (force exercée sur l'élément en céramique / surface de l'élément) et la déformation (variation de la longueur de l'élément / longueur initiale de l'élément) pour l'élasticité.

En règle générale, on fait coïncider la direction de la polarisation positive avec l'axe Z d'un système rectangulaire d'axes X, Y et Z (**Fig. 2.07**). La direction X, Y ou Z est représentée par l'indice 1, 2 ou 3, respectivement, et le cisaillement autour de l'un de ces axes est représenté par l'indice 4, 5 ou 6, respectivement. Quelques constantes les plus fréquemment utilisées vont être définies pour la suite.



**Figure 2.15 :** Définition des directions dans un milieu piézoélectrique [2.17].

#### 2.6.3.1 La compliance élastique « $s_{ij}$ »

La compliance élastique «  $s_{ij}$  » est définie comme le rapport de la déformation relative sur la contrainte mécanique appliquée [2.14] [2.18]. Elle est suivie de deux indices. Le premier indice désigne la direction de la déformation relative, le second celui de la contrainte mécanique. Elle est donnée par la formule:

$$s_{ij} = \frac{\text{déformation dans la direction } i}{\text{contrainte dans la direction } j} = \frac{S_i}{T_j}$$

- $s_{ij}^E$  est la compliance à champ électrique constant.
- $s_{ij}^D$  est la compliance à déplacement électrique constant

Par exemple,  $s_{13}^E$  est la compliance à champ électrique constant pour une contrainte dans la direction l'axe 3, avec une composante de déformation dans la direction de l'axe 1.

#### 2.6.3.2 La permittivité électrique « $\epsilon_{ij}$ »

La permittivité «  $\epsilon_{ij}$  » d'un matériau piézoélectrique détermine la charge par unité de surface due au champ électrique appliqué [2.19]. Elle est suivie de deux indices. Le premier indice désigne la direction du déplacement électrique ; le second celui du champ électrique.

- $\epsilon_{ij}^T$  est la permittivité à force constante caractérisant un échantillon libre.
- $\epsilon_{ij}^S$  est la permittivité à déformation constante caractérisant un échantillon encastré.

Le champ et le déplacement électrique sont définis uniquement dans les trois directions principales (pas de rotations). De plus, il n'y a pas d'interaction entre différents axes. A titre d'exemple,  $\epsilon_{33}^T$  est la permittivité à contrainte constante pour un déplacement et un champ dans la direction de polarisation.

#### 2.6.3.3 La permittivité électrique « $d_{ij}$ »

Le coefficient de charge piézoélectrique «  $d_{ij}$  » est la constante de proportionnalité entre le déplacement électrique (polarisation) et la contrainte mécanique appliquée à un matériau piézoélectrique. Il peut désigner aussi la proportionnalité entre la déformation relative subie par un matériau piézoélectrique et le champ électrique appliqué. Il est suivi de deux indices. Le premier indice désigne la direction du déplacement électrique (ou du champ électrique) et le second celui de la contrainte mécanique (ou déformation relative). Puisque la contrainte induite dans un matériau piézoélectrique par application d'un champ électrique est le produit de la valeur du champ électrique et de la valeur du coefficient de charge, les matériaux piézoélectriques caractérisés par des coefficients de charges élevés sont plus souvent utilisés comme actionneurs que comme capteurs [2.18] [2.19].

Par exemple,  $d_{31}$  est le rapport entre la déformation dans la direction 1 et le champ électrique dans la direction 3 ou encore le rapport entre le déplacement diélectrique dans la direction 1 et la contrainte dans la direction 3. On peut écrire :

$$d_{31} = \frac{S_1}{E_3} \Big|_T = \frac{D_1}{T_3} \Big|_E$$

#### 2.6.3.4 La constante de tension piézoélectrique « $g_{ij}$ »

Le coefficient de tension «  $g_{ij}$  » est la constante de proportionnalité entre le champ électrique et la contrainte mécanique (ou la déformation relative et le déplacement électrique). Il est suivi de deux

indices. Le premier indice désigne la direction du champ électrique (ou du déplacement électrique) ; le second celui de la contrainte mécanique (ou déformation relative). Puisque le champ électrique induit dans un matériau piézoélectrique par application d'une contrainte mécanique est le produit de la valeur de la contrainte mécanique et de la valeur du coefficient de tension, les matériaux piézoélectriques qui se caractérisent par des coefficients de tension élevés sont plus souvent utilisés comme capteurs que comme actionneurs [2.18] [2.19].

Par exemple,  $g_{31}$  est le rapport entre la déformation dans la direction  $I$  et le déplacement électrique dans la direction  $3$  ou encore le rapport entre le champ électrique dans la direction  $I$  et la contrainte dans la direction  $3$ . On peut écrire :

$$g_{31} = \frac{S_1}{D_3} \Big|_T = \frac{E_1}{T_3} \Big|_E$$

#### 2.6.3.5 Module d'Young

Le module d'Young notée  $Y$  est un indicateur de la rigidité (ou élasticité) d'un matériau céramique.  $Y$  est déterminé à partir de la valeur de la contrainte appliquée au matériau divisée par la valeur de la déformation résultante dans la même direction.

#### 2.6.3.6 Coefficient de couplage électromécanique « $k_{ij}$ »

Le facteur de couplage électromécanique  $k_{ij}$  est un indicateur de l'efficacité avec laquelle un matériau piézoélectrique convertit l'énergie électrique en énergie mécanique ou convertit l'énergie mécanique en énergie électrique. Le premier indice  $i$  indique la direction dans laquelle les électrodes sont appliquées et le second  $j$  indique la direction dans laquelle l'énergie mécanique est appliquée ou développée. Les valeurs  $k$  indiquées dans les spécifications des fournisseurs de céramique sont généralement des valeurs maximales théoriques. Aux basses fréquences d'entrée, une céramique piézoélectrique typique peut convertir de 30% ( $k=0,3$ ) à 75% ( $k=0,75$ ) de l'énergie fournie sous une forme à une autre, en fonction de la formulation de la céramique et des directions des efforts impliqués. Une valeur de  $k$  élevée est généralement souhaitable pour une conversion d'énergie efficace. Le couplage électromécanique  $k$  tient compte à la fois des propriétés élastiques, diélectriques et piézoélectriques du matériau mais ne tient pas compte des pertes diélectriques ni des pertes mécaniques, ni de la récupération d'énergie non convertie [2.19].

La mesure précise de l'efficacité est le rapport entre l'énergie utilisable convertie fournie par l'élément piézoélectrique et l'énergie totale absorbée par l'élément. Il est défini comme suit [2.18] :

$$k_{ij}^2 = \frac{\text{Energie transformée}}{\text{Energie appliquée}}$$

Grâce à cette mesure, les éléments céramiques piézoélectriques dans des systèmes bien conçus peuvent afficher des rendements supérieurs à 90%.

Les dimensions d'un élément en céramique peuvent dicter des expressions uniques de  $k$ . Pour un disque mince en céramique piézoélectrique, le facteur de couplage plan  $k_p$  exprime le couplage radial, c'est-à-dire le couplage entre un champ électrique parallèle à la direction dans l'élément en céramique est polarisé (direction 3) et des effets mécaniques produisant des vibrations radiales, par rapport à la direction de polarisation (direction 1 et direction 2).

Pour un disque ou une plaque de matériau dont les dimensions de surface sont grandes par rapport à son épaisseur, le facteur de couplage en épaisseur  $k_t$ , expression unique de  $k_{33}$ , exprime le couplage entre un champ électrique dans la direction 3 et des vibrations mécaniques dans la même direction.

La fréquence de résonance pour la dimension d'épaisseur d'un élément de cette forme est beaucoup plus élevée que la fréquence de résonance pour les dimensions transversales. Dans le même temps, des vibrations transversales fortement atténuées à cette fréquence de résonance supérieure rendent  $k_t$  inférieur à  $k_{33}$ , le facteur correspondant des vibrations longitudinales d'une tige mince du même matériau, pour lequel une fréquence de résonance longitudinale beaucoup plus basse correspond mieux à la fréquence de résonance transversale. Ceci est le résultat de la contraction (dilatation) transversale qui accompagne la dilatation (contraction) en épaisseur.

#### 2.6.3.7 Facteur de qualité « Q »

Pour les matériaux piézoélectriques, deux facteurs de qualité sont définis pour permettre la mesurer de l'influence des pertes diélectriques et mécaniques. Le facteur de qualité mécanique  $Q_m$  est relié à la résistance  $R_m$ , la capacité  $C_m$ , l'inductance  $L_m$  et la fréquence angulaire  $\omega$  tel que :

$$Q_m = \frac{1}{R_m C_m \omega} = \frac{L_m \omega}{R_m}$$

Ce paramètre est égal aussi au rapport de la fréquence centrale sur la largeur de bande :

$$Q_m = \frac{f_c}{f_2 - f_1}$$

- $f_c$  est la fréquence centrale du matériau piézoélectrique.
- $f_2$  et  $f_1$  sont les fréquences à -3dB en dessous et au-dessus de  $f_c$ .

Le facteur de qualité électrique  $Q_e$  qui correspond au rapport entre la capacité  $C_0$  du matériau piézoélectrique et la résistance  $R_0$  symbolisant les pertes diélectriques tel que :

$$Q_e = \frac{1}{R_0 C_0 \omega}$$

Ces facteurs aussi appelés facteurs de surtension donnent le taux d'amplification de la structure à la résonance mécanique ou électrique. En effet, les matériaux piézoélectriques peuvent résonner électriquement ou mécaniquement. Ces fréquences de résonance ne sont pas forcément confondues. Un facteur de qualité élevé traduit un amortissement de la structure faible et donc une minimisation des pertes.

#### 2.6.3.8 Pertes diélectriques « $\tan \delta$ »

Lors de leur fonctionnement, les céramiques piézoélectriques dissipent une puissance non négligeable, correspondant aux pertes d'origine diélectrique. Ces pertes se traduisent sous forme de chaleur, ce qui, à terme, provoque la perte des propriétés piézoélectriques [2.21].

Elles sont souvent représentées au travers de la tangente de l'angle de pertes diélectriques  $\tan \delta$ . Dans ce cas, on définit une permittivité complexe, dont la partie imaginaire est fonction de  $\tan \delta$  [2.22] :

$$\varepsilon_{33}' = \varepsilon_{33}^S (1 - j \tan \delta)$$

Avec  $\varepsilon_{33}'$  et  $\varepsilon_{33}^S$  sont respectivement les permittivités des céramiques avec et sans pertes.

### 2.7 Mode de déformation des matériaux piézoélectriques

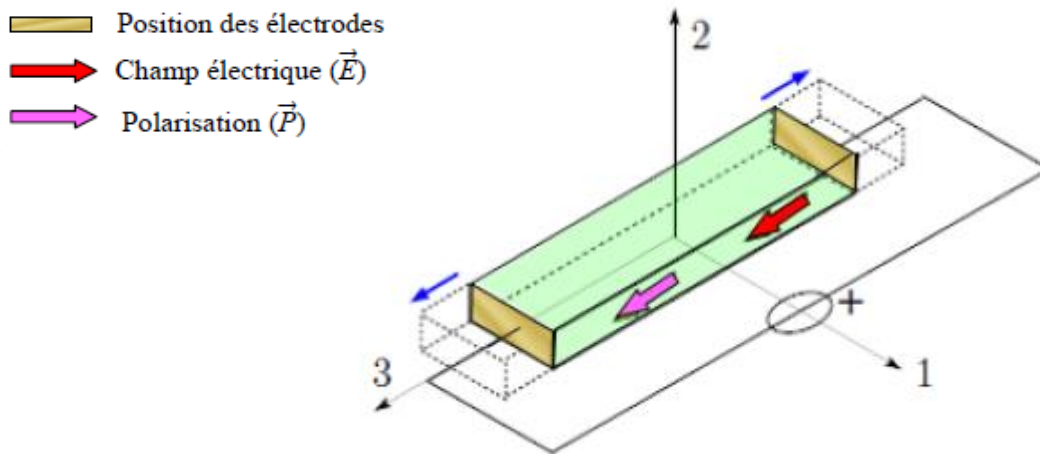
Chaque céramique piézoélectrique possède une fréquence élastique de vibration spécifique, en fonction du matériau et de sa forme. Lorsqu'une tension alternative est appliquée à une céramique piézoélectrique avec une fréquence égale à sa propre fréquence de vibration élastique, la céramique résonne.

Ce phénomène est exploité dans plusieurs dispositifs piézoélectriques, car à la résonance le coefficient de couplage électromécanique  $k_{ij}$  est maximum. Les céramiques piézoélectriques peuvent exhiber plusieurs modes de vibrations (modes résonants), qui dépendent de leur forme, de la direction de polarisation et de la direction du champ électrique.

D'une manière générale, une céramique piézoélectrique est référencée par un trièdre (O, X, Y, Z). Par convention, la direction et le sens de la polarisation sont confondus avec l'axe 3 ou (OZ). La déformation souhaitée est obtenue en appliquant une différence de potentiel sur les faces perpendiculaires à l'axe 3. Par l'application d'un champ électrique E suivant l'axe OZ. Trois modes de déformation fondamentaux distincts sont obtenus avec des autres modes de déformation [2.20] [2.23].

### 2.7.1 Mode longitudinale (mode $d_{33}$ )

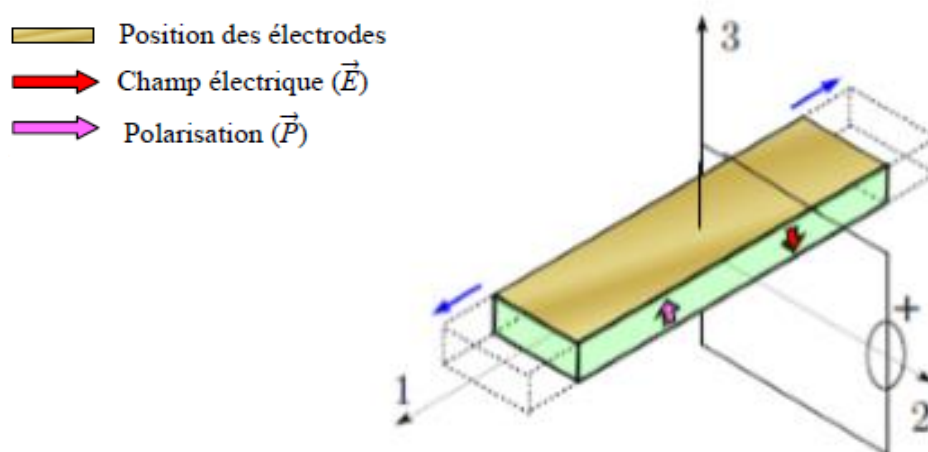
Le mode longitudinale traduisant des déformations dans la même direction que l'axe du champ électrique possède un bon coefficient de couplage, cependant le placement des électrodes sur les surfaces vibrantes le fragilise. Cette mode est illustrée à la **Fig. 2.08** suivante.



**Figure 2.16 :** Mode longitudinale [2.18].

### 2.7.2 Mode transversale (mode $d_{31}$ ou mode $d_{32}$ )

Le mode transversale traduisant des déformations perpendiculaires à l'axe du champ électrique. Dans ce mode, les électrodes ne sont pas placées sur les surfaces subissant les déformations, donc offrant l'avantage de ne pas soumettre les électrodes à la contrainte. En revanche, il possède un coefficient de couplage moindre que le mode longitudinal. Ceci est présenté à la **Fig. 2.09**.

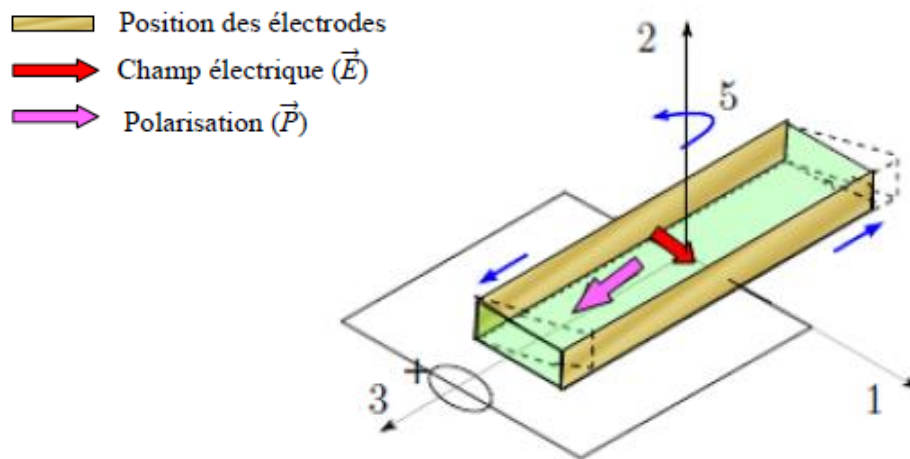


**Figure 2.17 :** Mode transversale [2.18].



### 2.7.3 Mode de cisaillement (mode $d_{15}$ )

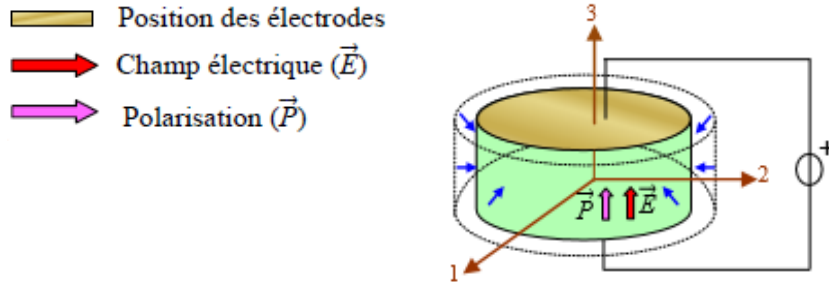
Le mode de cisaillement traduisant des déformations perpendiculaires à la direction de polarisation ou autour d'un axe. La céramique subit alors un phénomène de torsion autour de l'axe choisi. Elle est obtenue lorsque le champ appliqué est perpendiculaire à la polarisation du matériau. Par exemple, si le champ est appliqué sur l'axe 1, la déformation se fera autour de l'axe 2 (rotation associée à l'indice 5). La **figure 2.10** représente cette mode de déformation.



**Figure 2.18 :** Mode de cisaillement [2.18].

### 2.7.4 Autres mode de déformation

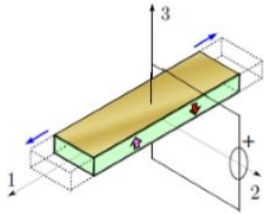
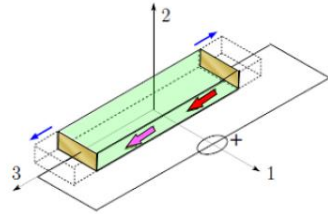
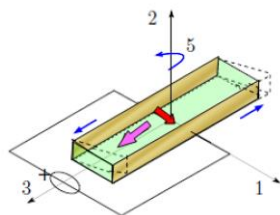
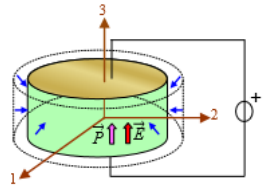
D'autres modes de déformation « parasites » résultant de la forme particulière de l'échantillon peuvent apparaître [2.21]. Ils sont d'origine mécanique par exemple, des déformations perpendiculaires à l'épaisseur (mode radial traduit par le coefficient de Poisson comme présenté à la **Fig. 2.11** ou d'origine électrique par déplacement dipolaire (modification des parois de blocs). En jouant sur la forme de l'échantillon (plaque, tube, ...) et sur sa polarisation (uniforme, radiale,...), une grande variété de déformations peuvent être exploitées. Il est à noter que lors de l'utilisation d'une céramique piézoélectrique, plusieurs modes interagissent simultanément. Ces modes parasites sont souvent négligés : les dimensions des structures sont choisies pour que ces hypothèses soient vérifiées. Par exemple, il est préférable de privilégier une longueur nettement supérieure à l'épaisseur pour utiliser le mode 33.



**Figure 2.19 :** Déformation parasite par conservation du volume. Pour une déformation longitudinale, la conservation du volume introduit un mode transversal mécanique [2.18].

## 2.8 Coefficient de couplage selon la déformation

**Tableau 2.03 :** Couplage électromécanique suivant le mode de déformation et la polarisation  $P$ .

Mode de déformation	Coefficient de couplage k
 <p>Mode transversal</p>	$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T s_{11}^E}$
 <p>Mode longitudinale</p>	$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{\epsilon_{33}^T s_{33}^E}$
 <p>Mode cisaillement</p>	$k_{15}^2 = \frac{d_{15}^2}{\epsilon_{11}^T s_{44}^E}$
 <p>Mode radial</p>	$k_p^2 = \frac{2 d_{31}^2}{1 + \frac{s_{12}}{s_{11}}}$

Le **tableau 2.03** montre les valeurs de couplage électromécanique selon le mode de déformation. Le coefficient de couplage peut s'exprimer en fonction des paramètres électromécaniques du matériau et selon le mode de déformation considéré. Sa valeur est donnée par la formule :

$$k_{ij}^2 = \frac{d_{ij}^2}{\epsilon_{ij}^T S_{ij}^E}$$

## **2.9 Les matériaux piézoélectriques**

La piézo-électricité ne se manifeste que pour certaines classes de géométrie cristalline. Parmi ces matériaux piézoélectriques, on peut les regrouper en trois classes principales : les cristaux, les céramiques et les polymères [2.13] [2.18] [2.21].

### **2.9.1 Les cristaux piézoélectriques**

Le quartz et la tourmaline sont sans doute les cristaux naturels les mieux connus découverts respectivement par Matthias et par Aurivillius en 1949. Ils ont des caractéristiques stables dans le temps, mais ils présentent des impédances acoustiques relativement élevées et des coefficients de couplage très faibles. Ainsi qu'il faut couper les cristaux le long de certaines directions cristallographiques, ce qui limite le nombre possible de figures géométriques.

Il existe d'autres monocristaux synthétisés en laboratoire comme le niobate de lithium ( $\text{LiNbO}_3$ ) ou le tantalate de lithium ( $\text{LiTaO}_3$ ) qui affichent des valeurs de coefficient plus élevées. Le coût élevé et la fragilité de ces cristaux expliquent qu'on ne les retrouve que très peu dans les produits.

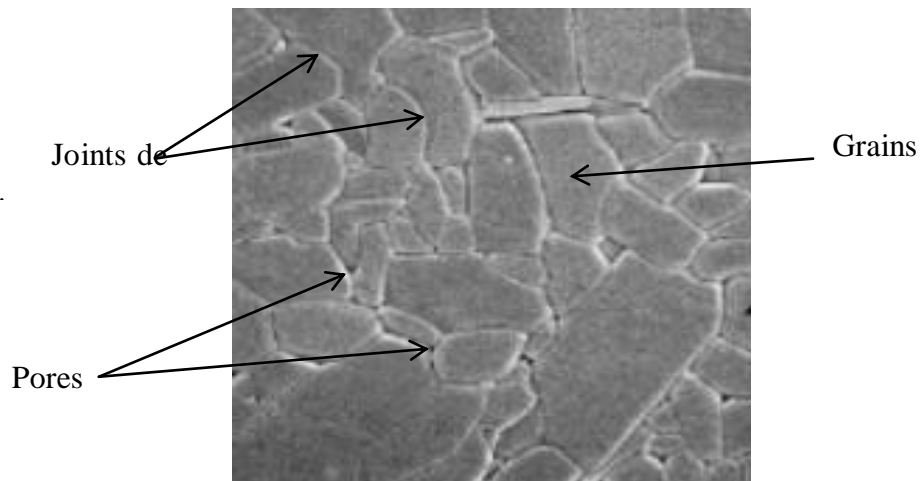
Il est actuellement possible de fabriquer de nombreux monocristaux de même composition que les céramiques, mais les techniques mises en jeu sont délicates et coûteuses. Il s'agit de cristaux « nouveaux » de type (1-x)PMN-xPT et (1-x)PZN-xPT. Ces derniers présentent des propriétés extraordinaires par rapport aux céramiques piézoélectriques ou cristaux naturels. À présent, ces matériaux bénéficient d'importants efforts de recherche dans leurs procédés d'élaborations et de caractérisations, car ils pourraient remplacer dans des applications d'actionneurs et de capteurs, les céramiques PZT [2.14], [2.16], [2.24].

### **2.9.2 Les céramiques piézoélectriques**

#### **2.9.2.1 Définition**

Le terme céramique évoque souvent des objets des œuvres d'arts comme des poteries, des briques et des tuiles. Mais le terme de céramique signifie plus généralement un solide qui n'est ni un métal ni un polymère. Une céramique est un matériau solide de synthèse qui nécessite souvent des traitements thermiques pour son élaboration. La plupart des céramiques modernes sont préparées à

partir de poudres consolidées (mise en forme) et sont densifiées par un traitement thermique (frittage). Les procédés de fabrication des céramiques sont ajustables afin de pouvoir adapter leurs propriétés diélectriques, mécaniques et piézoélectriques à la demande. La plupart des céramiques sont des matériaux polycristallins, c'est à dire comportant un grand nombre de microcristaux bien ordonnés (grains) reliés par des zones moins ordonnées (joints de grains) comme illustré à la **Fig. 2.12** [2.18].



**Figure 2.20 :** *Microstructure typique d'une surface céramique polie qui illustre les grains monocristallins, les joints de grains et les pores [2.18].*

Les céramiques piézoélectriques sont apparues dans les années quarante. Par leurs coefficients piézoélectriques bien supérieurs à ceux des cristaux, elles ont permis un élargissement des applications du phénomène de piézoélectricité. La famille des céramiques piézoélectriques comporte de nombreux éléments, citons entre autres, les titanates de baryum ( $\text{BaTiO}_3$ ) qui sont les ancêtres des céramiques actuelles, les Zircono Titanates de Plomb, d'où leur appellation abrégée PZT.

On distingue ainsi deux familles de céramique : les céramiques dites douces et celles dites dures, selon la propension que présente le matériau à se dépolariser. Le choix du type de céramique s'effectue en fonction de l'application visée [2.21]:

- Les matériaux doux sont généralement utilisés dans les applications à bas niveau d'excitation, notamment détecteurs (hydrophones, sondes échographiques...). Ils présentent en effet des couplages électromécaniques et des permittivités élevées et offrent une large bande de réponse en fréquence. Cependant elles ont tendance à se dépolariser facilement à cause de leurs pertes importantes.

- Les applications de puissance (piézomoteurs, transducteurs pour nettoyage par ultrasons...) nécessitent l'utilisation de céramiques dures pour leurs faibles pertes mécaniques et diélectriques.

### 2.9.2.2 Polarisation des céramiques

La plupart des céramiques sont des matériaux polycristallins ferroélectriques. Ils sont formés par des grains et des joints de grain. Sa polarisation a été détaillée dans la section 2.5.3 page 60.

### 2.9.2.3 Matrice elasto-piézo-diélectrique des céramiques

La matrice élasto-piézo-diélectrique décrit le comportement électromécanique global d'une céramique piézoélectrique. Pour les PZT qui sont assimilables aux cristaux de la classe de symétrie 6 mm du système hexagonal, cette matrice s'écrit [2.25]:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^E & S_{12}^E & S_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{13} \\ S_{12}^E & S_{11}^E & S_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{13} \\ S_{13}^E & S_{13}^E & S_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & S_{55}^E & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 \\ d_{13} & d_{13} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2.07)$$

### 2.9.2.4 Caractéristiques des céramiques piézoélectriques PZT

Quelques avantages de la céramique piézoélectrique PZT peuvent être cités [2.26]:

- Possibilité d'une grande variété de forme et de taille selon l'usinage ou moulage.
- Coût abordable.
- Coefficient de couplage électromécanique très élevé par rapport à d'autres matériaux piézoélectriques. Cela nécessite une application d'une énergie électrique moyenne pour obtenir une énergie mécanique.
- Pertes électriques faibles, ce qui signifie qu'elles ne s'échauffent presque pas.
- Puissance mécanique, elles peuvent supporter des déformations beaucoup plus grandes que la plupart des autres céramiques. Une même puissance peut être obtenue avec un cristal de plus faible volume.
- Constantes de charges piézoélectriques élevées.

Leurs principaux inconvénients sont :

- Impédances acoustiques très élevées par rapport à d'autres matériaux piézoélectriques. Elles sont donc plus difficiles à coupler aux autres matériaux.

- Variation thermique des constantes piézoélectriques et des permittivités diélectriques.

### **2.9.3 Les polymères piézoélectriques**

#### **2.9.3.1 Généralité**

Le terme « polymère » signifie littéralement « plusieurs parties ». Les polymères solides peuvent être divisés en deux catégories : amorphes et semi-cristallines. La phase amorphe est constituée de chaînes moléculaires désordonnées, qui représentent environ la moitié du volume du matériau et déterminent l'essentiel de ses propriétés mécaniques. La phase cristalline peut présenter quatre structures distinctes dont trois polaires ( $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ) et une non polaire  $\alpha$ .

Le polymère piézoélectrique le plus connu et le plus utilisé est le Polyfluorure de vinylidène (PVDF) dans sa phase beta [2.28]. Une forte présence de piézoélectricité dans ce matériaux a été découvert par H. Kawai en 1969 et c'est au début de l'année quatre-vingt qu'il a été apparu au marché. Le PVDF est un polymère semi-cristallin ayant un degré de cristallinité approximatif de 50 à 60%. Comme les autres polymères semi-cristallins, le PVDF est constitué d'une structure lamellaire mélangé avec des régions amorphes. La structure chimique de celui-ci contient une répétition d'unité d'un double fluorure d'éthène  $\text{CF}_2\text{--CH}_2$  [2.25] [2.26].

#### **2.9.3.2 Caractéristiques des polymères piézoélectriques PVDF**

Les films piézoélectriques PVDF présentent plusieurs avantages [2.26] [2.27] :

- Bonne flexibilité : possibilité d'adaptation à des surfaces non planes et possibilité de fabrications dans une variété de formes.

- Légèreté et coût abordable.
- Épaisseurs possibles de quelques micromètres à une centaine de micromètres.
- Possibilité d'utilisation dans une large gamme de fréquence s'étendant de 0,001 Hz à  $10^9$  Hz.

- Coefficient de tension piézoélectrique élevé.
- Haute stabilité : il présente une très faible absorption d'humidité (inférieur à 0.02%) ainsi qu'une très bonne résistance aux agressions extérieures (agents chimiques, oxydants, rayons ultraviolets et radiations nucléaires).

Leurs principaux inconvénients sont :

- Coefficients de couplage plus faible que celle des céramiques piézoélectriques.

- Coefficients de charges piézoélectriques plus faibles que celle des céramiques piézoélectriques.

- Constantes diélectriques plus faibles que celle des céramiques piézoélectriques.

- Coefficients de pertes diélectriques plus élevés que celle des céramiques piézoélectriques.

#### 2.9.4 Choix du matériau piézoélectrique

La comparaison des valeurs caractéristiques des matériaux piézoélectriques permet de choisir le matériau le plus adapté à l'application qui sera utilisé. En générale, le choix du matériau se base sur les paramètres suivants :

- Le couplage électromécanique  $k$ .

- La raideur des matériaux piézoélectriques ou le module d'Young. Un matériau piézoélectrique à faible raideur aide à obtenir de basses fréquences de résonances.

- Le facteur de qualité  $Q$ . Il est important de choisir le matériau avec le meilleur facteur de qualité pour minimiser les pertes mécaniques dans la structure.

- Les pertes diélectriques ( $\tan \delta$ ). Ces pertes doivent bien entendu être minimisées.

- La plage de variation de température ( $-20^\circ < T < 80^\circ$ ) limitée par la température de Curie.

Un exemple de ces propriétés peut être trouvé au **tableau 2.04** pour certains matériaux piézoélectriques [2.21], [2.26], [2.29].

**Tableau 2.04 : Propriétés des différents matériaux piézoélectriques.**

Propriétés	Unités	Quartz SiO <sub>2</sub>	PZT douce	PZT dure	PVDF
Densité	103 kg/m <sup>3</sup>	2,65	7,7	7,65	1,78
d <sub>33</sub>	10-12 C/N	2	425	240	-33
d <sub>31</sub>	10-12 C/N	-	-274	-171	23
g <sub>33</sub>	10-3 Vm/N	50	26	23,4	-330
g <sub>31</sub>	10-3 Vm/N	-	-9,1	-11,4	216
Coefficient couplage k <sub>33</sub>	-	0,1	0,74	0,75	0,15
Coefficient couplage k <sub>31</sub>	-	-	0,39	0,31	0,12
Pertes diélectriques $\tan \delta$	-	0,0003	0,04	0,02	0,25
Facteur de qualité « Q »	-	50000	80	>1000	400
Température de Curie T <sub>c</sub>	°C	573	340	320	180
Permittivité relative $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$	-	4,5	1850	1150	12

## **2.10 Limites sur les matériaux piézoélectriques**

Les limites de la céramique piézoélectrique sont difficiles à définir en raison des diversités des besoins sur l'application et sur l'environnement d'installation. La céramique piézoélectrique peut être endommagée par des températures ou des contraintes mécaniques ou des champs électriques excessifs. Ce qui veut dire que la détérioration du matériau piézoélectrique ne dépend pas seulement de la contrainte mécanique mais peut être aussi provoquée par la combinaison de la température, des contraintes mécaniques et du champ électrique. Ces facteurs d'endommagement peuvent également affecter les taux de vieillissement de la céramique [2.30], [2.31].

### ***2.10.1 Champ électrique***

Des champs électriques très élevés (200 à 500 V/mm) peuvent briser les dipôles et qui va dépolariser un matériau piézoélectrique. Le niveau de dépolarisation dépend de la qualité du matériau, du temps d'exposition et de la température.

Le courant alternatif peut entraîner aussi un effet de dépolarisation lorsque la polarité du courant sera opposée au champ de polarisation du matériau piézoélectrique [2.31].

### ***2.10.2 Température***

Les limites sur la température sont :

- La température de fonctionnement des céramiques ferroélectriques est limitée par leur température de transition ferroélectrique à non ferroélectrique qui est la température de Curie. Quand la température est supérieure à la température de Curie du matériau piézoélectrique, l'alignement des dipôles sera perturbé et le matériau se dépolarise. La température maximale de fonctionnement est d'environ 50 à 60% de la température de Curie.
- Des variations soudaines de la température peuvent générer des tensions élevées susceptibles de dépolariser un matériau piézoélectrique.
- Les hautes fréquences peuvent générer des contraintes thermiques élevées pouvant entraîner une dépolarisation du matériau piézoélectrique si la chaleur n'est pas dissipée correctement.

### ***2.10.3 Contrainte mécanique***

Une contrainte mécanique élevée ou excessive peut détruire l'alignement des dipôles conduisant à la dépolarisation du matériau bien avant que la limite de résistance mécanique en compression soit atteinte. Le niveau de dépolarisation dépendra du processus de fabrication et de la composition du matériau utilisé. Les matériaux piézoélectriques peuvent résister à des pressions allant jusqu'à 250 MPa avant de se briser mécaniquement. Pour les applications pratiques, cette valeur ne doit pas



être approchée car la dépolarisation se produit à des pressions de l'ordre de 20 à 30% de la limite mécanique [2.30].

Comme toutes les céramiques, les céramiques piézoélectriques sont fragiles. Une mauvaise manipulation ou une mauvaise utilisation dans une application peut conduire à une rupture. Les forces de cisaillement doivent être aussi évitées [2.30].

#### **2.10.4 Limites de puissance**

La capacité d'un convertisseur à répondre aux exigences de puissance de sortie peut être limitée par la force dynamique, l'échauffement ou le rendement. La résistance dynamique ne constitue généralement une limitation que lorsque le convertisseur présente un facteur de qualité  $Q$  élevé et que le matériau n'est pas soumis à un biais de compression mécanique.

Les pertes diélectriques, mécaniques et piézoélectriques dans le matériau contribuent à la hausse de température et à l'inefficacité. Les transducteurs piézoélectriques ont tendance à avoir une efficacité limitée lorsqu'ils sont utilisés à un cycle de travail faible et à des températures limitées en fonctionnement continu.

Pour les transducteurs à température limitée, l'évacuation de la chaleur est aussi importante que la minimisation de la production de chaleur, car les pertes diélectriques augmentent avec la température [2.30].

### **2.11 Stabilités**

Pour le vieillissement du matériau piézoélectrique, on peut dire que :

- Les propriétés décroissent avec le temps après la polarisation de manière logarithmique.
- Le taux de vieillissement dépend de la composition du matériau et du processus de fabrication utilisé.
- Le vieillissement est accéléré par le dépassement des limites physiques du matériau piézoélectrique.

Pour l'entretien, on peut dire que les matériaux piézoélectriques ne nécessitent aucun entretien. Il n'y a pas des pièces mobiles utilisées. Le mouvement est basé sur l'orientation du cristal.

Les matériaux piézo-électriques agissent comme des condensateurs et nécessitent donc très peu d'énergie. Ils sont capables de supporter des charges élevées et fonctionnent à des fréquences élevées.

## 2.12 Conclusion

L'origine du phénomène piézoélectrique ainsi que ces propriétés électriques et mécanique sont expliqués dans ce chapitre. Le phénomène de la piézoélectricité est basé en général sur la structure moléculaire d'un cristal. Quel que soit le type des molécules, polaire dont le barycentre des charges partielles négatives et celui des charges partielles positives ne coïncident pas et a un dipôle instantané, ou apolaire avec un barycentre confondu et n'a pas de polarisation intrinsèque, ils peuvent être tous les deux piézoélectriques. Une pression soumise à un cristal piézoélectrique entraîne une dissociation du barycentre des charges positive et négative dans le cas des molécules apolaires, des mini dipôles vont être créés et qui vont entraîner une différence de potentiel aux bornes du cristal (qui donne l'électricité). Dans le cas de la molécule polaire, la pression va réorienter les dipôles intrinsèques dans le sens contraire. Ce qui va donner la différence de potentiel aux bornes. Une modélisation unidimensionnelle a été faite pour expliquer les propriétés des matériaux piézoélectriques. La liaison ionique entre ion positif et négatif est remplacée par un ressort de raideur  $K$ . L'étude nous a mené que la polarisation  $P$  qui est en fonction du déplacement électrique  $D$  peut être représentée par la somme de deux termes  $E$  (effet diélectrique) et  $S$  (déformation).

La propriété de symétrie des cristaux joue aussi un rôle principal dans la détermination de leur caractère piézoélectrique. Tout corps présentant un centre de symétrie ne peut pas être piézoélectrique alors que les cristaux ne possédant pas de centre de symétrie peuvent l'être. Parmi les 32 classes cristallines, 20 classes présentent un caractère piézoélectrique.

Il existe trois types des matériaux piézoélectriques : les cristaux, les céramiques et les polymères. Chacun de ces matériaux dispose des caractéristiques différentes qui conditionnent leur utilisation. Le choix de matériau piézoélectrique utilisé dépend donc de l'application visée.

Dans cette thèse, l'application visée est la conversion d'énergie vibratoire en énergie électrique en utilisant un de ces matériaux piézoélectrique. Le chapitre suivant va décrire une modèle de base cette conversion en faisant une étude analytique du système.

# CHAPITRE 3

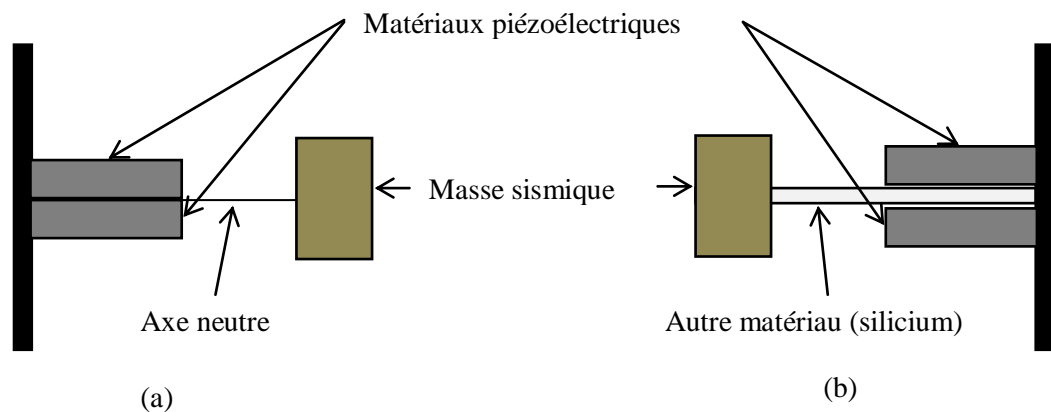
## MODELE ET ETUDE ANALYTIQUE D'UN CONVERTISSEUR D'ENERGIE VIBRATOIRE EN ENERGIE ELECTRIQUE PAR L'INTERMEDIAIRE D'UN MATERIAU PIEZOELECTRIQUE

### 3.1 Introduction

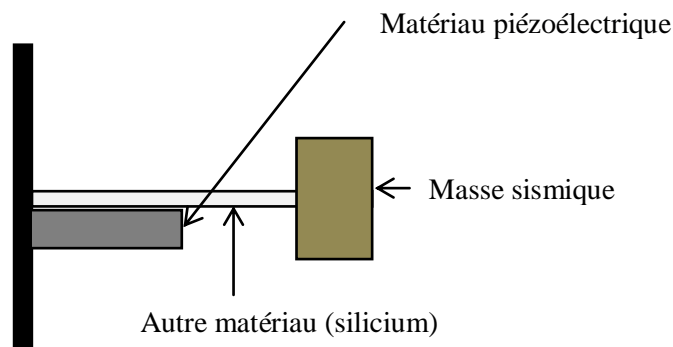
La conversion de l'énergie vibratoire en énergie électrique par l'intermédiaire d'un matériau piézoélectrique ou récupérateur repose sur l'effet direct de ce matériau. Deux familles de conversion peuvent être identifiées : couplage direct et couplage indirect [3.01] [3.02]. Dans le premier cas, l'élément piézoélectrique est directement collé sur la structure hôte qui crée une vibration ambiante. Le deuxième cas nécessite une structure secondaire avant de le relier sur la structure hôte. Cette structure est basée en général sur une simple poutre encastrée libre. Le choix et la conception d'un modèle de conversion d'énergie piézoélectrique dépendent de l'application visée. Dans le cas de cette thèse, l'application visée est la récupération d'énergie électrique à partir de la vibration d'un pont routier. Une conversion à couplage indirecte est alors choisie. Ce qui nous amène à concevoir, modéliser et analyser un modèle à un degré de liberté dans ce chapitre. Ce modèle peut être couplé avec des structures hôtes vibrantes pour la suite.

### 3.2 Rappel sur la conversion en poutre encastré unimorph et bimorph

La plupart des couplages indirectes sont constituées d'une structure secondaire. Ils sont basés généralement sur une simple poutre encastrée libre. Concernant la couche piézoélectrique, on distingue deux types : bimorph et unimorph. Plusieurs recherches sur la conversion d'énergie ont déjà utilisé la structure bimorphe [3.03], [3.04], [3.05], [3.06], [3.07]. Comme son nom l'indique, le bimorph est constitué des deux couches de matériau piézoélectrique de part et d'autre d'un axe neutre comme à la **Fig.3.01a**, ou de part et d'autre d'un autre matériau comme le silicium (**Fig. 3.01b**). Cette structure correspond à un montage en série. C'est-à-dire que les deux couches de matériaux piézoélectriques sont polarisées de façon opposées, de manière à ce que les tensions des deux couches piézoélectriques s'additionnent. La structure unimorphe de son côté n'est pas délaissée par des chercheurs. Plusieurs études ont été déjà faites aussi concernant cette structure [3.08], [3.09], [3.10], [3.11], [3.12]. Elle est composée d'une seule couche de matériau piézoélectrique déposé sur un autre matériau (**Fig. 3.02**). Les deux structures contiennent une masse sismique qui a pour rôle d'ajuster la fréquence de résonance.



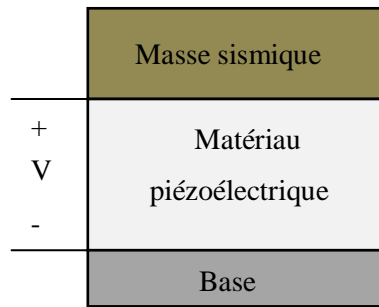
**Figure 3.01 :** *Structure bimorphe, (a) : couche piézoélectrique séparé par un axe neutre (b) : couche piézoélectrique séparé par un matériau en silicium.*



**Figure 3.02 :** *Structure unimorphe.*

### 3.3 Choix du modèle

Comme précisé à l'introduction, le choix du modèle à concevoir dépend de l'application visée. Cette application consiste à récupérer une énergie électrique à partir de la vibration induite dans les ponts routiers. A partir de ce système, le type de conversion qu'on doit utiliser est un type de conversion à couplage directe. C'est-à-dire que le matériau piézoélectrique va être collé directement sur le pont qui est l'élément vibrant. Mais comme les matériaux piézoélectriques sont fragiles, il est nécessaire d'utiliser un autre matériau pour les protéger. Le modèle est alors composé d'un élément piézoélectrique et d'autre matériau. Le but est de construire un système simple, portable et facile à mettre en place sur la structure hôte. On a choisi de concevoir un modèle à un degré de liberté dont la forme est représentée à la **Fig. 3.03**. Le système est composé par divers matériaux qui vont être détaillés dans la section qui suit.



**Figure 3.03 :** *Modèle à un degré de liberté (1-D) d'un récupérateur piézoélectrique.*

### 3.4 Conception et dimensionnement d'un récupérateur piézoélectrique 1-D

#### 3.4.1 Conception et choix des matériaux

Le modèle à 1-D est composé par les éléments suivants :

- un matériau piézoélectrique qui constitue l'élément principal du modèle. Parmi les types des éléments piézoélectriques, on a choisi d'utiliser le type polyfluorure de vinylidène ou PVDF. Le PVDF présente plusieurs avantages cités dans le chapitre 2, section 2.9.3, page 78. Ce qui nous intéresse le plus c'est sa bonne flexibilité qui rend plus facile son installation. De plus il présente une bonne résistance à l'humidité grâce à son impédance acoustique proche à celle de l'eau et de la glace. Les propriétés du PVDF utilisées sont ceux de la piézoélectrique créée par la société « Airmar PiezoFlex » (Annexe 2).
- deux électrodes posées sur les deux faces du PVDF. Les électrodes sont reliées à un module de récupérateur d'énergie pour l'extraction de l'énergie électrique obtenue.
- une masse sismique mise en place au-dessus de l'électrode sur la face supérieure de l'élément piézoélectrique. Elle est collée sur l'électrode par l'intermédiaire d'une colle époxy isolant très fine.

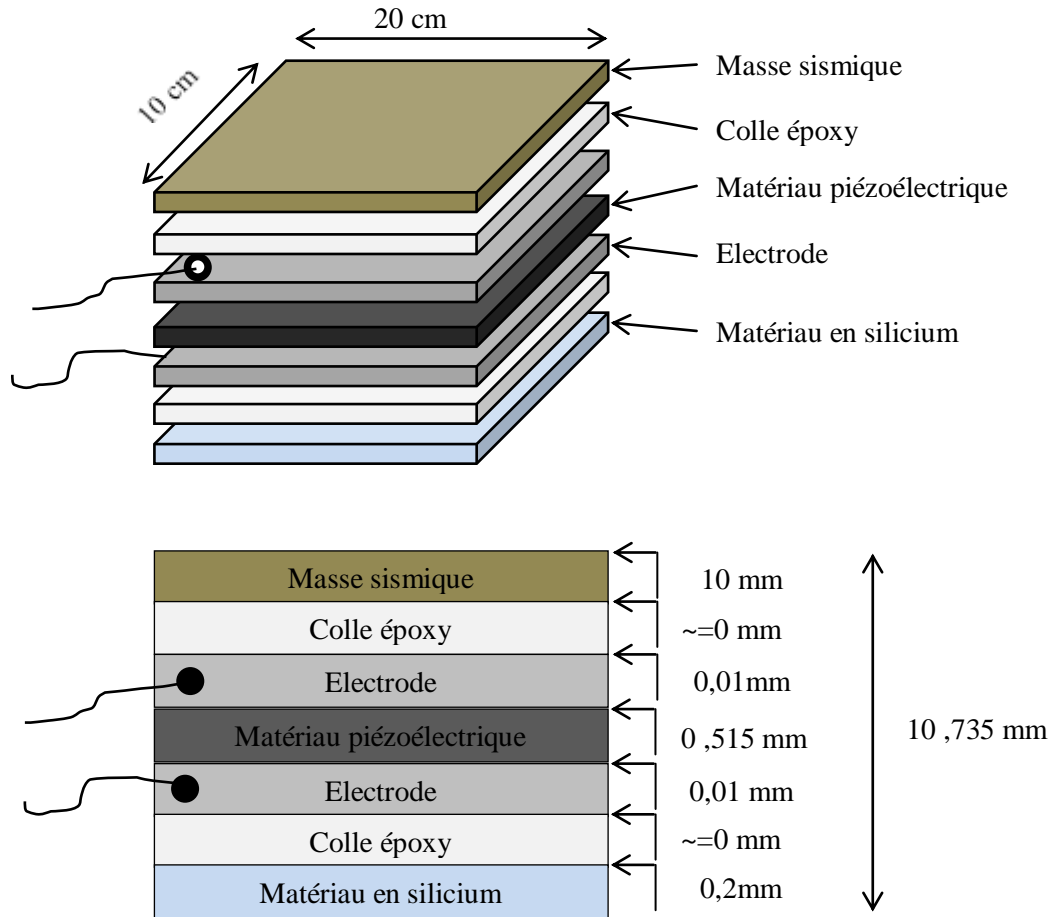
En fin, un matériau en un silicium ajouté en dessous de l'électrode dans la face inférieure de l'élément piézoélectrique. Le but est de protéger la couche piézoélectrique en conservant un poids minimum pour le modèle.

L'ensemble de tous ces matériaux est montré à la **Fig. 3.04** qui détaille le dimensionnement du modèle considéré.

#### 3.4.2 Dimensionnement

Le dimensionnement effectué n'a pas des conditions particulières. On a choisi juste un dimensionnement par rapport au système hôte visé. La plupart des modèles vus sur la littérature

sont des modèles macroscopiques. Dans ce travail, un modèle avec une surface de 10 cm x 20 cm a été choisi. Le choix est dû à la structure hôte qui est très large. La **figure 3.04** montre ces dimensionnements.



**Figure 3.04 :** *Dimensionnement d'un modèle à un degré de liberté (1-D).*

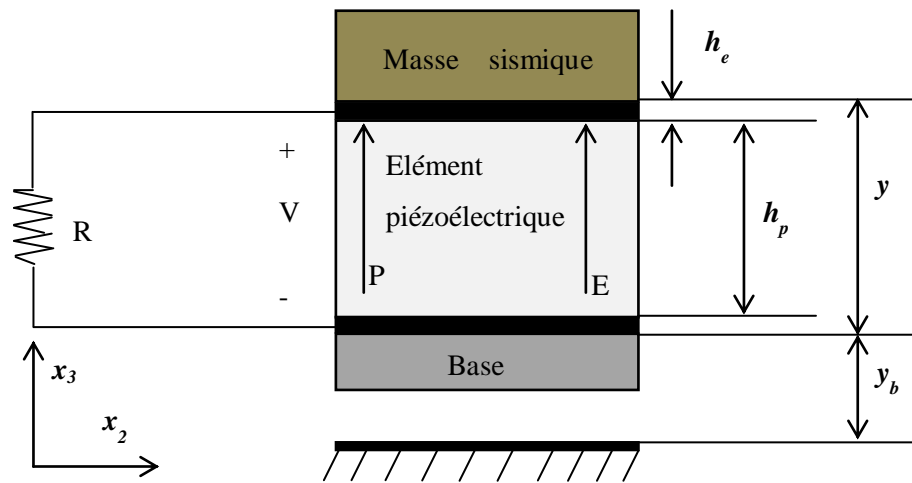
Les propriétés et les mesures des matériaux utilisés sont listés dans le **tableau 3.01**.

**Tableau 3.01 :** *Propriétés et mesures des matériaux*

Matériau (10 cm x 20 cm)	Type de matériau	Masse volumique (103 kg/m-3)	Epaisseur (mm)	Poids (kg)
Masse sismique	Silicium (Si)	2,33	10	0,932
Electrode	Cuivre	8,9	0,01	3,56x10-3
Piézoélectrique	PVDF	1,47	0,515	30,28x10-3
Matériau élastique	Silicium (Si)	2,33	0,2	18,64x10-3

### 3.5 Modélisation analytique d'un récupérateur piézoélectrique 1-D

Le modèle à un degré de liberté est représenté à la **Fig. 3.05** avec les variables nécessaires à la modélisation analytique. Le système est excité par un déplacement d'entrée de base  $y_b$ . L'élément piézoélectrique est relié à un circuit de récupération, et il est comprimé totalement par une masse sismique au-dessus de lui. La structure entière est couplée de manière électromécanique dans ce modèle qui est différente par rapport à la structure unimorphe ou bimorphe vue plus loin. Dans le cas de ces deux structures, une partie de la structure est inactive.



**Figure 3.05 :** *Modèle à un degré de liberté (1-D) (voir texte pour les variables).*

Les significations des variables de la **Fig. 3.05** sont :

- $h_e$  : épaisseur de l'électrode
- $h_p$  : épaisseur de l'élément piézoélectrique
- $y$  : déplacement relatif de l'élément piézoélectrique
- $y_b$  : déplacement de base du système
- $V$  : tension de sortie brute aux bornes de l'élément piézoélectrique
- $R$  : résistance de charge
- $P$  : polarisation du matériau piézoélectrique
- $E$  : champ électrique

Selon la **Fig.3.05**, la déformation de l'élément piézoélectrique est dans la direction de l'axe  $x_3$  qui a la même direction que l'axe du champ électrique et la polarisation. Ce qui signifie que le modèle fonctionne en mode longitudinale ou en mode 33. La meilleure méthode pour modéliser cette structure par une approche analytique est l'utilisation des équations linéaires de la piézoélectricité. Ces équations sont obtenues par l'effet direct et l'effet inverse de la piézoélectricité.

Effet direct :  $D = e.S + \varepsilon^S.E$

Effet inverse :  $T = C^E.S - e^T.E$

La représentation matricielle est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} D \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon^S \\ C^E & -e^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S \\ E \end{Bmatrix} \quad (3.01)$$

Comme la structure fonctionne en mode 33, on peut dire que  $T_1 = T_2 = 0$ . Le champ électrique est appliqué dans la direction 3, ce qui veut dire que  $E_1 = E_2 = 0$ . De même, l'induction électrique est nulle dans la direction 3 ( $D_1 = D_2 = 0$ ). L'équation 3.01 peut alors être décrite par :

$$\begin{cases} T_3 = C_{33}^E.S_3 - e_{33}^t.E_3 \\ D_3 = e_{33}.S_3 + \varepsilon_{33}^S.E_3 \end{cases} \quad (3.02)$$

Le principe fondamental de la dynamique peut être appliqué à la masse sismique comme celui développé pour le modèle de Williams et Yates dans le chapitre 1, section 1.4, page 13. On considère une force visqueuse de constante  $c_d$  qui représente les pertes par frottements. Après l'analyse des forces, on a l'**Eq. 3.03** :

$$M_T \ddot{y}(t) + c_d \dot{y}(t) + F_p(t) = -M_T \ddot{y}_b(t) \quad (3.03)$$

où  $M_T$  est la masse totale du système donnée par :

$$M_T = M + M_p + 2M_e + M_{el}$$

avec  $M$  = poids de la masse sismique ;  $M_p$  = poids du matériau piézoélectrique ;  $M_e$  = poids de l'électrode ;  $M_{el}$  = poids du matériau de protection en silicium.

En introduisant les grandeurs macroscopiques et l'**Eq.3.03** dans l'**Eq.3.02**, ce dernier aura la forme :

$$\begin{cases} F_p(t) = ky(t) - \theta v(t) \\ \frac{1}{R} v(t) = -\theta \dot{y}(t) - C_p \dot{v}(t) \end{cases}$$

*Démonstration :*

♣

Les grandeurs macroscopiques du modèle sont exprimées par les équations qui décrivent que :

- La force appliquée par l'élément piézoélectrique est proportionnelle à la contrainte  $T_3$  avec

A l'aire de l'élément piézoélectrique :

$$F_p(t) = T_3 A$$



- La tension sur les électrodes de l'élément piézoélectrique peut être reliée au champ électrique  $E_3$  :

$$v(t) = -E_3(t) h_p$$

- La tension sur les électrodes peut aussi être reliée au déplacement électrique  $D_3$  via la charge résistive appliquée  $R$  à l'aide du théorème de Gauss et de la loi d'Ohm :

$$Q(t) = \int D_3(t) dA = D_3(t) A$$

Et

$$\dot{Q}(t) = I(t) = \frac{v(t)}{R}$$

D'où

$$v(t) = R A D_3(t)$$

- La capacité piézoélectrique est exprimée par l'équation :

$$C_p = \frac{\varepsilon_{33}^S A}{h_p}$$

- Le déplacement de la masse sismique est exprimé à partir de la déformation de l'élément piézoélectrique :

$$y(t) = h_p S_3(t)$$

- La rigidité est exprimée

$$k = \frac{c_{33}^E A}{h_p}$$

- Enfin, une constante de couplage électromécanique peut être introduite :

$$\theta = \frac{e_{33} A}{h_p}$$

Le système d'équations piézoélectriques 3.02 à une dimension peut donc être remplacé par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{F_p(t)}{A} = C_{33}^E \cdot \frac{y(t)}{h_p} + e_{33}^t \cdot \frac{v(t)}{h_p} \\ \frac{Q(t)}{A} = e_{33} \cdot \frac{y(t)}{h_p} - \varepsilon_{33}^S \cdot \frac{v(t)}{h_p} \end{cases}$$

En multipliant par  $A$  les deux membres de chaque équation et faisant une identification des termes, on arrive au système d'équations :

$$\begin{cases} F_p(t) = C_{33}^E \cdot \frac{Ay(t)}{h_p} + e_{33}^t \cdot \frac{Av(t)}{h_p} \\ Q(t) = e_{33} \cdot \frac{Ay(t)}{h_p} - \varepsilon_{33}^S \cdot \frac{Av(t)}{h_p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_p(t) = k y(t) + \theta v(t) \\ Q(t) = \theta y(t) - C_p v(t) \end{cases}$$

Dérivant la deuxième équation par rapport à  $t$

$$\begin{cases} F_p(t) = k y(t) + \theta v(t) \\ \frac{v(t)}{R} = \theta \dot{y}(t) - C_p \dot{v}(t) \end{cases} \quad (3.04)$$

♦

L'expression de  $F_p(t)$  peut alors être remplacée par son expression dans l'équation du principe fondamental de la dynamique (**Eq. 3.03**). Le système d'équations décrivant le comportement de la structure devient :

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 2\zeta_h \omega_h \dot{y}(t) + \omega_h^2 y(t) + \frac{\theta}{M_T} v(t) = -\ddot{y}_b(t) \\ \frac{v(t)}{R} = \theta \dot{y}(t) - C_p \dot{v}(t) \end{cases}$$

*Démonstration :*

♣

En remplaçant  $F_p(t)$  par son expression, on a :

$$\begin{cases} -M_T \ddot{y}_b(t) - M_T \ddot{y}(t) - c_d \dot{y}(t) = k y(t) + \theta v(t) \\ \frac{v(t)}{R} = \theta \dot{y}(t) - C_p \dot{v}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + \frac{1}{M_T} c_d \dot{y}(t) + \frac{k}{M_T} y(t) + \frac{\theta}{M_T} v(t) = -\ddot{y}_b(t) \\ \frac{v(t)}{R} = \theta \dot{y}(t) - C_p \dot{v}(t) \end{cases}$$

Le système d'équations peut être normalisé avec les grandeurs suivantes :

- la fréquence de résonance ou fréquence naturelle du système:

$$\omega_h = \sqrt{\frac{k}{M_T}} = \sqrt{\frac{C_{33}^E A}{M_T h_p}}$$

- le coefficient d'amortissement mécanique du système :

$$\zeta_h = \frac{c_d}{2M_T\omega_h}$$

- le coefficient piézoélectrique :

$$d_{33} = \frac{e_{33}}{c_{33}^E}$$

Le système d'équation obtenu est alors donné par:

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 2\zeta_h\omega_h\dot{y}(t) + \omega_h^2 y(t) + \frac{\theta}{M_T}v(t) = -\ddot{y}_b(t) \\ \frac{v(t)}{R} = \theta \dot{y}(t) - C_p\dot{v}(t) \end{cases} \quad (3.05)$$

◆

En utilisant les transformées de Laplace, le système d'équations 3.05 peut être évalué et les grandeurs du déplacement relatif, de la tension et de la puissance électrique extraite peuvent être déterminées. Les grandeurs sont normalisées à partir de la force d'entrée  $M_T \ddot{Y}_b$ .

Les paramètres suivants sont définis pour normaliser l'expression :

- le paramètre adimensionnel pour la fréquence appelé fréquence réduite :

$$\Phi_h = \frac{\omega}{\omega_h}$$

- le paramètre adimensionnel pour le coefficient de couple électromécanique :

$$k_e^2 = \frac{\theta^2}{kC_p}$$

- le paramètre adimensionnel pour la résistance réduite :

$$\beta = \omega_h C_p R$$

où  $C_p R$  est la constante de temps du circuit électrique, tandis que  $\frac{1}{\omega_h}$  est liée à la période du système mécanique.

A partir de ces paramètres, l'expression des trois grandeurs peut être écrite comme suit :

$$\left| \frac{Y}{M_T \ddot{Y}_b} \right| = \frac{1}{k} \frac{\sqrt{1 + (\beta \Phi_h)^2}}{\sqrt{[1 - (1 + 2\zeta_h \beta) \Phi_h^2]^2 + [(2\zeta_h + (1 + k_e^2) \beta) \Phi_h - \beta \Phi_h^3]^2}}$$

$$\left| \frac{V}{M_T \ddot{Y}_b} \right| = \frac{1}{|\theta|} \frac{\beta k_e^2 \Phi_h}{\sqrt{[1 - (1 + 2\zeta_h \beta) \Phi_h^2]^2 + [(2\zeta_h + (1 + k_e^2) \beta) \Phi_h - \beta \Phi_h^3]^2}}$$

$$\left| \frac{P_{out}}{(M_T \ddot{Y}_b)^2} \right| = \frac{\omega_h}{k} \frac{\beta k_e^2 \Phi_h^2}{[1 - (1 + 2\zeta_h \beta) \Phi_h^2]^2 + [(2\zeta_h + (1 + k_e^2) \beta) \Phi_h - \beta \Phi_h^3]^2}$$

*Démonstration :*

♣

En prenant la transformation de Laplace de la première équation dans le système d'**Eq. 3.05**, avec la notation  $p=j*\omega$ , on obtient:

$$[p^2 Y(p) - pY(0) - \dot{Y}(0)] + 2\zeta_h \omega_h [pY(p) - Y(0)] + \omega_h^2 Y(p) + \frac{\theta}{M_T} V(p) = -\ddot{Y}_b$$

$$[p^2 + 2\zeta_h \omega_h p + \omega_h^2] Y(p) - pY(0) - \dot{Y}(0) + 2\zeta_h \omega_h Y(0) + \frac{\theta}{M_T} V(p) = -\ddot{Y}_b$$

En considérant les conditions initiales :

$$\dot{Y}(0) = Y(0) = 0$$

L'équation devient :

$$[p^2 + 2\zeta_h \omega_h p + \omega_h^2] Y(p) + \frac{\theta}{M_T} V(p) = -\ddot{Y}_b$$

Et pour la deuxième équation dans le système d'**Eq. 3.05** :

$$\frac{1}{R} V(p) - \theta [pY(p) - Y(0)] + C_p [pV(p) - V(0)] = 0$$

Avec les conditions initiales :

$$\dot{V}(0) = V(0) = 0$$

on obtient

$$-\theta p Y(p) + \left( C_p p + \frac{1}{R} \right) V(p) = 0$$

Le système d'équations 3.05 devient alors

$$\begin{cases} [p^2 + 2\zeta_h \omega_h p + \omega_h^2] Y(p) + \frac{\theta}{M_T} V(p) = -\ddot{Y}_b \\ -\theta p Y(p) + \left( C_p p + \frac{1}{R} \right) V(p) = 0 \end{cases}$$

La présentation matricielle suivante de l'**Eq.3.06** est obtenue

$$\begin{bmatrix} p^2 + 2\zeta_h \omega_h p + \omega_h^2 & \frac{\theta}{M_T} \\ -\theta p & \left( C_p p + \frac{1}{R} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(p) \\ V(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{Y}_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.06)$$

Si on désigne par  $M$  la matrice :

$$\begin{bmatrix} p^2 + 2\zeta_h \omega_h p + \omega_h^2 & \frac{\theta}{M_T} \\ -\theta p & \left(C_p p + \frac{1}{R}\right) \end{bmatrix} = M$$

$$\det(M) = d_M = (p^2 + 2\zeta_h \omega_h p + \omega_h^2) \left(C_p p + \frac{1}{R}\right) - \theta p \left(-\frac{\theta}{M_T}\right)$$

$$d_M = \frac{M_T(p^2 + 2\zeta_h \omega_h p + \omega_h^2)(RC_p p + 1) + pR\theta^2}{RM_T}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t \text{com } M$$

Avec  ${}^t \text{com } M$  est le transposé du comatrice de  $M$ .

Comme  $\det(M) = d_M \neq 0$ , l'Eq. 3.06 peut s'écrire :

$$MM^{-1} \begin{bmatrix} Y(p) \\ V(p) \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} -\ddot{Y}_b \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{d_M} \begin{bmatrix} \left(C_p p + \frac{1}{R}\right) & -\frac{\theta}{M_T} \\ \theta p & p^2 + 2\zeta_h \omega_h p + \omega_h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\ddot{Y}_b \\ 0 \end{bmatrix}$$

le système d'équation suivante est obtenu après multiplication des 2 matrices

$$\begin{cases} Y(p) = -\left(C_p p + \frac{1}{R}\right) \ddot{Y}_b / d_M \\ V(p) = -\theta p \ddot{Y}_b / d_M \end{cases}$$

En introduisant la valeur du déterminant,  $d_M$

$$\begin{cases} \frac{Y(p)}{\ddot{Y}_b} = \frac{-RM_T \left(C_p p + \frac{1}{R}\right)}{M_T(p^2 + 2\zeta_h \omega_h p + \omega_h^2)(RC_p p + 1) + pR\theta^2} \\ \frac{V(p)}{\ddot{Y}_b} = \frac{-RM_T p \theta}{M_T(p^2 + 2\zeta_h \omega_h p + \omega_h^2)(RC_p p + 1) + pR\theta^2} \end{cases} \quad (3.07)$$

Pour une excitation de base sinusoïdale à une fréquence  $\omega$ ,  $p$  peut être remplacé par  $j\omega$ . D'où l'expression de la première équation dans le système d'Eq. 3.07

$$\begin{aligned} \frac{Y(\omega)}{M_T \ddot{Y}_b} &= \frac{-R \left(C_p j\omega + \frac{1}{R}\right)}{M_T((j\omega)^2 + 2\zeta_h \omega_h j\omega + \omega_h^2)(RC_p j\omega + 1) + j\omega R\theta^2} \\ &= \frac{-(RC_p j\omega + 1)}{\frac{k}{\omega_h^2}(-\omega^2 RC_p j\omega - 2\zeta_h \omega_h RC_p \omega^2 + RC_p j\omega \omega_h^2 - \omega^2 + 2\zeta_h \omega_h j\omega + \omega_h^2) + j\omega R\theta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k} \frac{-(RC_p j\omega + 1)}{\left( \frac{-\omega^2 RC_p j\omega}{\omega_h^2} - \frac{2\zeta_h \omega_h RC_p \omega^2}{\omega_h^2} + \frac{RC_p j\omega \omega_h^2}{\omega_h^2} - \frac{\omega^2}{\omega_h^2} + \frac{2\zeta_h \omega_h j\omega}{\omega_h^2} + \frac{\omega_h^2}{\omega_h^2} \right) + j \frac{\omega RC_p \omega_h \theta^2}{k C_p \omega_h}} \\
&= \frac{1}{k} \frac{-(j\beta \Phi_h + 1)}{j(-\beta \Phi_h^3 + \beta \Phi_h + 2\zeta_h \Phi_h + \Phi_h \beta k_e^2) + (-2\zeta_h \beta \Phi_h^2 - \Phi_h^2 + 1)} \\
&= \frac{1}{k} \frac{-(j\beta \Phi_h + 1)}{j((2\zeta_h + (1 + k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta \Phi_h^3) + (1 - (1 + 2\zeta_h \beta)\Phi_h^2)}
\end{aligned}$$

le module de cette expression est :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{Y(\omega)}{M_T \ddot{Y}_b} \right| &= \left| \frac{1}{k} \right| \frac{|-(j\beta \Phi_h + 1)|}{\left| j((2\zeta_h + (1 + k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta \Phi_h^3) + (1 - (1 + 2\zeta_h \beta)\Phi_h^2) \right|} \\
\left| \frac{Y}{M_T \ddot{Y}_b} \right| &= \frac{1}{k} \frac{\sqrt{1 + (\beta \Phi_h)^2}}{\sqrt{[1 - (1 + 2\zeta_h \beta)\Phi_h^2]^2 + [(2\zeta_h + (1 + k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta \Phi_h^3]^2}} \quad (3.08)
\end{aligned}$$

L'équation 3.08 donne le déplacement relatif de l'élément piézoélectrique normalisé à partir de la force d'entrée  $M_T \ddot{Y}_b$ .

La tension électrique produite est obtenue à partir de la deuxième équation du système d'Eq. 3.07

$$\frac{V(p)}{\ddot{Y}_b} = \frac{-RM_T p \theta}{M_T(p^2 + 2\zeta_h \omega_h p + \omega_h^2)(RC_p p + 1) + pR\theta^2}$$

Le calcul du dénominateur se ressemble à ce qu'on a vu pour le déplacement relatif et en manipulant le numérateur, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{V(\omega)}{M_T \ddot{Y}_b} &= \frac{-j\omega R \theta \frac{1}{k} \frac{\theta}{\theta} \frac{C_p}{C_p} \frac{\omega_h}{\omega_h}}{j((2\zeta_h + (1 + k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta \Phi_h^3) + (1 - (1 + 2\zeta_h \beta)\Phi_h^2)} \\
\frac{V(\omega)}{M_T \ddot{Y}_b} &= \frac{1}{\theta} \frac{-j\beta k_e^2 \Phi_h}{j((2\zeta_h + (1 + k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta \Phi_h^3) + (1 - (1 + 2\zeta_h \beta)\Phi_h^2)}
\end{aligned}$$

En calculant le module :

$$\left| \frac{V}{M_T \ddot{Y}_b} \right| = \frac{1}{|\theta|} \frac{\beta k_e^2 \Phi_h}{\sqrt{[1 - (1 + 2\zeta_h \beta)\Phi_h^2]^2 + [(2\zeta_h + (1 + k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta \Phi_h^3]^2}} \quad (3.09)$$

L'équation 3.09 donne la grandeur de la tension extraite du système.

La puissance est donnée par la formule :

$$P = \frac{V^2}{R}$$

$$V^2(\omega) = \left( \frac{-j\omega R \theta \frac{1}{k} \ddot{M}_T Y_b}{j \left( (2\zeta_h + (1 + k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta\Phi_h^3 \right) + (1 - (1 + 2\zeta_h\beta)\Phi_h^2)} \right)^2$$

$$\frac{V^2(\omega)}{(M_T \ddot{Y}_b)^2} = \frac{\omega R \theta \frac{1}{k} \omega R \theta \frac{1}{k}}{\left( j \left( (2\zeta_h + (1 + k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta\Phi_h^3 \right) + (1 - (1 + 2\zeta_h\beta)\Phi_h^2) \right)^2}$$

Qui donne que

$$\frac{P(\omega)}{(M_T \ddot{Y}_b)^2} = \frac{\omega R \theta \frac{1}{k} \omega R \theta \frac{1}{k} \frac{1}{R} \frac{\omega_h^2}{\omega_h^2}}{\left( j \left( (2\zeta_h + (1 + k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta\Phi_h^3 \right) + (1 - (1 + 2\zeta_h\beta)\Phi_h^2) \right)^2}$$

$$\frac{P(\omega)}{(M_T \ddot{Y}_b)^2} = \frac{\omega_h}{k} \frac{\beta k_e^2 \Phi_h^2}{\left( j \left( (2\zeta_h + (1 + k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta\Phi_h^3 \right) + (1 - (1 + 2\zeta_h\beta)\Phi_h^2) \right)^2}$$

Avec le module

$$\left| \frac{P_{out}}{(M_T \ddot{Y}_b)^2} \right| = \frac{\omega_h}{k} \frac{\beta k_e^2 \Phi_h^2}{[1 - (1 + 2\zeta_h\beta)\Phi_h^2]^2 + [(2\zeta_h + (1 + k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta\Phi_h^3]^2} \quad (3.10)$$

L'équation 3.10 donne la puissance électrique extraite du modèle.

◆

### 3.6 Optimisation de la puissance

La plupart d'optimisation de la puissance sont basées sur le réglage de la fréquence pour avoir le phénomène de résonance. Ce qui veut dire que la fréquence  $\omega$  est égale à fréquence propre du système  $\omega_h$  ( $\Phi_h = \frac{\omega}{\omega_h} = 1$ ). Il y a aussi d'autre façon d'étudier l'optimisation de la puissance à partir de la résistance de charge  $R$ . La considération de la résistance réduite  $\beta = \omega_h C_p R$  conduit d'une manière équivalente à faire l'étude par rapport à ce paramètre.

En annulant la dérivée de la puissance par rapport à la résistance réduite, on peut déduire la résistance réduite optimale et la puissance maximale correspondante. Il est possible de trouver une valeur maximale de  $\beta$  pour maximiser la puissance. Elle est donnée par l'équation suivante :

$$\beta_{opt}^2 = \frac{\Phi_h^4 + (4\zeta_h^2 - 2)\Phi_h^2 + 1}{(\Phi_h^6 + (4\zeta_h^2 - 2(1 + k_e^2))\Phi_h^4 + (1 + k_e^2)^2\Phi_h^2)}$$

*Démonstration :*

♣

La puissance maximale est trouvée en annulant la dérivée de cette fonction par rapport à  $\beta$  :

$$\left( \left| \frac{P_{out}}{(M_T \dot{Y}_b)^2} \right| \right)' = \left( \frac{\omega_h}{k} \frac{\beta k_e^2 \Phi_h^2}{[1 - (1 + 2\zeta_h \beta) \Phi_h^2]^2 + [(2\zeta_h + (1 + k_e^2) \beta) \Phi_h - \beta \Phi_h^3]^2} \right)' = 0$$

le dénominateur  $D$  de l'**Eq. 3.10**. qui exprime la puissance est :

$$D = [1 - (1 + 2\zeta_h \beta) \Phi_h^2]^2 + [(2\zeta_h + (1 + k_e^2) \beta) \Phi_h - \beta \Phi_h^3]^2$$

Avec  $\frac{\omega_h}{k}$  constante par rapport  $\beta$  et en remplaçant  $D$  dans l'équation, la condition devient :

$$\left( \frac{\beta k_e^2 \Phi_h^2}{D} \right)' = 0$$

$$\left( \frac{\beta k_e^2 \Phi_h^2}{D} \right)' = \frac{(\beta k_e^2 \Phi_h^2)' D - D' (\beta k_e^2 \Phi_h^2)}{D^2} = 0$$

$$\left( \frac{\beta k_e^2 \Phi_h^2}{D} \right)' = \frac{k_e^2 \Phi_h^2 (D - \beta D')}{D^2} = 0$$

Ce qui donne en fin,

$$D - \beta D' = 0 \quad (3.11)$$

$$D = 1 - 2(1 + 2\zeta_h \beta) \Phi_h^2 + (1 + 4\zeta_h \beta + 4\zeta_h^2 \beta^2) \Phi_h^4 + (2\zeta_h + (1 + k_e^2) \beta)^2 \Phi_h^2 - 2(2\zeta_h + (1 + k_e^2) \beta) \Phi_h \beta \Phi_h^3 + \beta^2 \Phi_h^6$$

$$D = \beta^2 (\Phi_h^6 + (4\zeta_h^2 - 2(1 + k_e^2)) \Phi_h^4 + (1 + k_e^2)^2 \Phi_h^2) + \beta 4 \zeta_h k_e^2 \Phi_h^2 + \Phi_h^4 + (4\zeta_h^2 - 2) \Phi_h^2 + 1$$

Et la dérivée de  $D$  est :

$$D' = 2\beta (\Phi_h^6 + (4\zeta_h^2 - 2(1 + k_e^2)) \Phi_h^4 + (1 + k_e^2)^2 \Phi_h^2) + 4 \zeta_h k_e^2 \Phi_h^2$$

En remplaçant  $D$  et  $D'$  dans l'**Eq.3.11**, on a :

$$\begin{aligned} & \beta^2 (\Phi_h^6 + (4\zeta_h^2 - 2(1 + k_e^2)) \Phi_h^4 + (1 + k_e^2)^2 \Phi_h^2) + \beta 4 \zeta_h k_e^2 \Phi_h^2 + \Phi_h^4 + (4\zeta_h^2 - 2) \Phi_h^2 + \\ & 1 - 2\beta^2 (\Phi_h^6 + (4\zeta_h^2 - 2(1 + k_e^2)) \Phi_h^4 + (1 + k_e^2)^2 \Phi_h^2) - \beta 4 \zeta_h k_e^2 \Phi_h^2 = 0 \\ & - \beta^2 (\Phi_h^6 + (4\zeta_h^2 - 2(1 + k_e^2)) \Phi_h^4 + (1 + k_e^2)^2 \Phi_h^2) + \Phi_h^4 + (4\zeta_h^2 - 2) \Phi_h^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

D'où, on a la résistance réduite  $\beta^2$  pour maximiser la puissance adimensionnelle :

$$\beta_{opt}^2 = \frac{\Phi_h^4 + (4\zeta_h^2 - 2) \Phi_h^2 + 1}{\Phi_h^6 + (4\zeta_h^2 - 2(1 + k_e^2)) \Phi_h^4 + (1 + k_e^2)^2 \Phi_h^2} \quad (3.12)$$

♦



Cette valeur de  $\beta_{opt}^2$  donne la résistance de charge  $R$  pour extraire la puissance maximale à n'importe quel rapport de fréquence qui est la fréquence adimensionnelle notée par  $\Phi_h = \frac{\omega}{\omega_h}$ .

La puissance générée correspondante est obtenue en substituant l'expression  $\beta_{opt}$  dans l'expression de la puissance dans l'Eq. 3.10.

### 3.7 Résultats du modèle à un degré de liberté

Le modèle développé dans ce chapitre est un modèle linéaire qui suit la loi de comportement linéaire de la piézoélectricité dans la bande de fréquence. Les solutions proposées sont faites pour avoir la notion de la puissance extraite ainsi que son optimisation sur la structure avec un élément piézoélectrique.

Le résultat des trois grandeurs (puissance, tension et déplacement) va être présenté et interprété graphiquement. Elles sont représentées en fonction de la fréquence réduite  $\Phi_h$  avec les différentes résistances de charge  $R$ .

Les valeurs numériques des paramètres utilisés sont listées dans le **tableau 3.02** qui suit.

**Tableau 3.02 : Valeurs numériques des paramètres**

Descriptions	Symbole	Valeurs
Masse totale du modèle	$M_T$	0,950 kg
Surface totale du modèle	$A_p$	0,04 m <sup>2</sup>
Epaisseur du matériau piézoélectrique	$h_p$	515x10 <sup>-6</sup> m
Epaisseur de l'électrode	$h_e$	0
Module d'Young	$Y_{33}$	0,9x10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup>
Raideur élastique	$c_{33}$	1,05x10 <sup>9</sup> N/ m <sup>2</sup>
Constantes piézoélectriques	$d_{33}$	-34x10 <sup>-12</sup> C/N
Constante de contrainte piézoélectrique	$e_{33} = d_{33} * c_{33}$	0,0357 C/ m <sup>2</sup>
Capacité piézoélectrique	$c_p$	130x10 <sup>-12</sup> F
Permittivité électrique	$\epsilon_{33} = \frac{c_p h_p}{A}$	1,673x10 <sup>-12</sup> F/m
coefficient d'amortissement mécanique	$\zeta_h$	0,05
Densité	$\rho$	1470 Kg/m <sup>3</sup>

Rigidité effective	$k = \frac{c_{33} A}{h_p}$	$81,55 \times 10^9 \text{ N/m}$
coefficient de couplage électromécanique	$\theta = \frac{e_{33} A}{h_p}$	$2,77 \text{ C/m}$
paramètre adimensionnel pour le coefficient de couple électromécanique	$k_e^2 = \frac{\theta^2}{k C_p}$	$0,725 \text{ C}^2/\text{FNm}$

On va choisir 3 types de résistance de charge dans la représentation graphique :

- La résistance de charge en court-circuit:

$$\beta_{opt,sc}^2 = \frac{4\zeta_h^2}{4\zeta_h^2 + k_e^4}$$

Qui donne la valeur de  $R = 4923 \Omega$

- La résistance de charge en circuit ouvert

$$\beta_{opt,oc}^2 = \frac{(1 + k_e^2)^2 - 2(1 + k_e^2) + 1 + 4\zeta_h^2(1 + k_e^2)}{4\zeta_h^2(1 + k_e^2)^2}$$

Qui donne la valeur de  $R = 93234 \Omega$

- La résistance optimale :

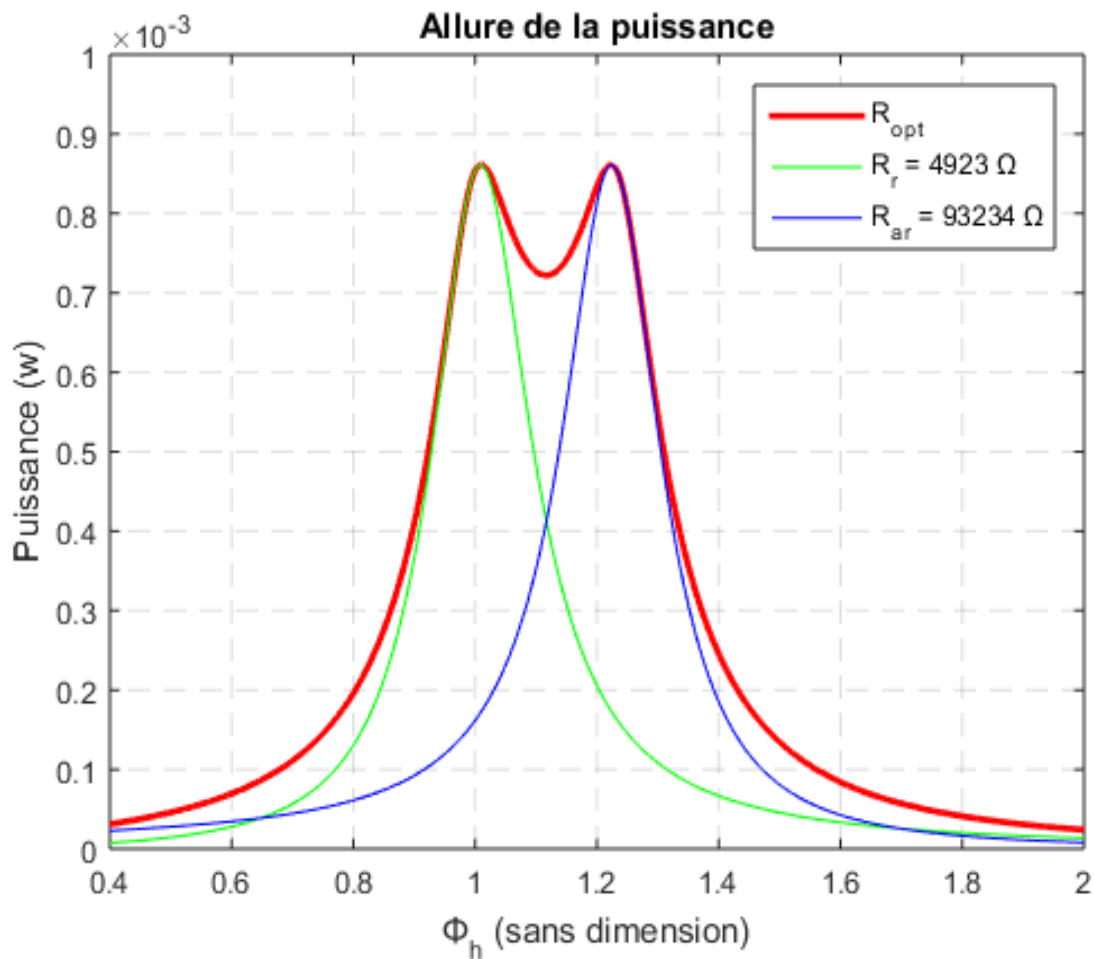
$$\beta_{opt}^2 = \frac{\Phi_h^4 + (4\zeta_h^2 - 2)\Phi_h^2 + 1}{(\Phi_h^6 + (4\zeta_h^2 - 2(1 + k_e^2))\Phi_h^4 + (1 + k_e^2)^2\Phi_h^2)}$$

Pour obtenir la puissance maximale, on utilise cette valeur dans l'expression de puissance.

### 3.7.1 Présentation graphique et interprétation de la puissance

La puissance est représentée par rapport à la fréquence réduite  $\Phi_h$  avec les différentes résistances de charge  $R$  dans la **Fig. 3.06**. C'est la valeur adimensionnel qu'on a présenté ici qui est  $\left| \frac{P_{out}}{(M_T \ddot{Y}_b)^2} \right|$ . La courbe en rouge forme l'enveloppe de puissance maximale possible si la résistance électrique  $R$  est optimisée à chaque rapport de fréquence  $\Phi_h$ . On remarque deux pics sur la courbe, ce sont les valeurs de la puissance correspondant aux fréquences de résonance et d'antirésonance. La commutation entre les deux pics est obtenue en variant la charge électrique  $R$ . La puissance augmente quand on approche de la fréquence de résonance et atteint un maximum à la résonance ( $\Phi_h \cong 1$ ). Puis, sa valeur diminue jusqu'au minimum correspond au rapport de fréquence  $\Phi_h \cong 1,11$ . Ce point minimum correspond au déplacement minimum de la masse sismique. Après ce minimum, la puissance augmente jusqu'à un second maximum qui correspond à la fréquence d'antirésonance.

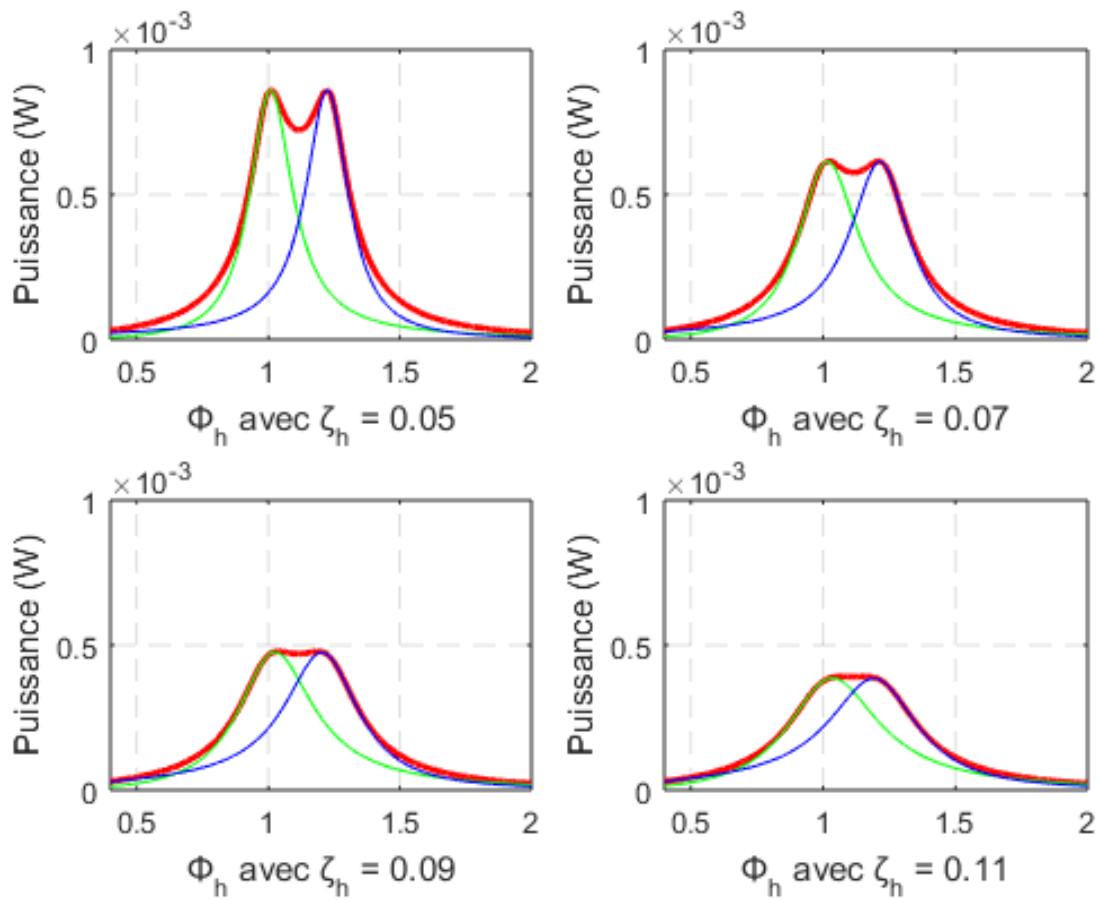
La courbe en vert et bleu présentent respectivement l'allure de la puissance pour une résistance de charge optimisée à la résonance et l'antirésonance.



**Figure 3.06 :** Puissance récupérée en fonction de la fréquence réduite avec une résistance de charge variable pour le modèle à 1-D.  $R_r$  et  $R_{ar}$  sont respectivement la résistance de charge optimisée en puissance à la fréquence de résonance et antirésonance.  $R_{opt}$  est la résistance de charge optimisée en puissance pour toutes les fréquences.

Le taux d'amortissement mécanique joue un rôle important sur les deux pics. La variation de ce taux d'amortissement entraîne une variation de la valeur de la puissance ainsi que la valeur du minimum entre les deux pics. Un taux d'amortissement mécanique plus élevé diminue la distance entre les deux pics et augmente la valeur du minimum. La **figure 3.07** montre les quatre exemples de taux d'amortissement. On constate que pour une valeur de  $\zeta_h = 0,11$ , la distance entre les deux se rétrécit et le minimum n'existe plus. On constate de même que les valeurs de la puissance extraite sur les deux pics soient toujours égales quelques soient les valeurs du taux

d'amortissement. Par contre, la tension et le courant sont différents de manière significative selon la valeur de la charge.



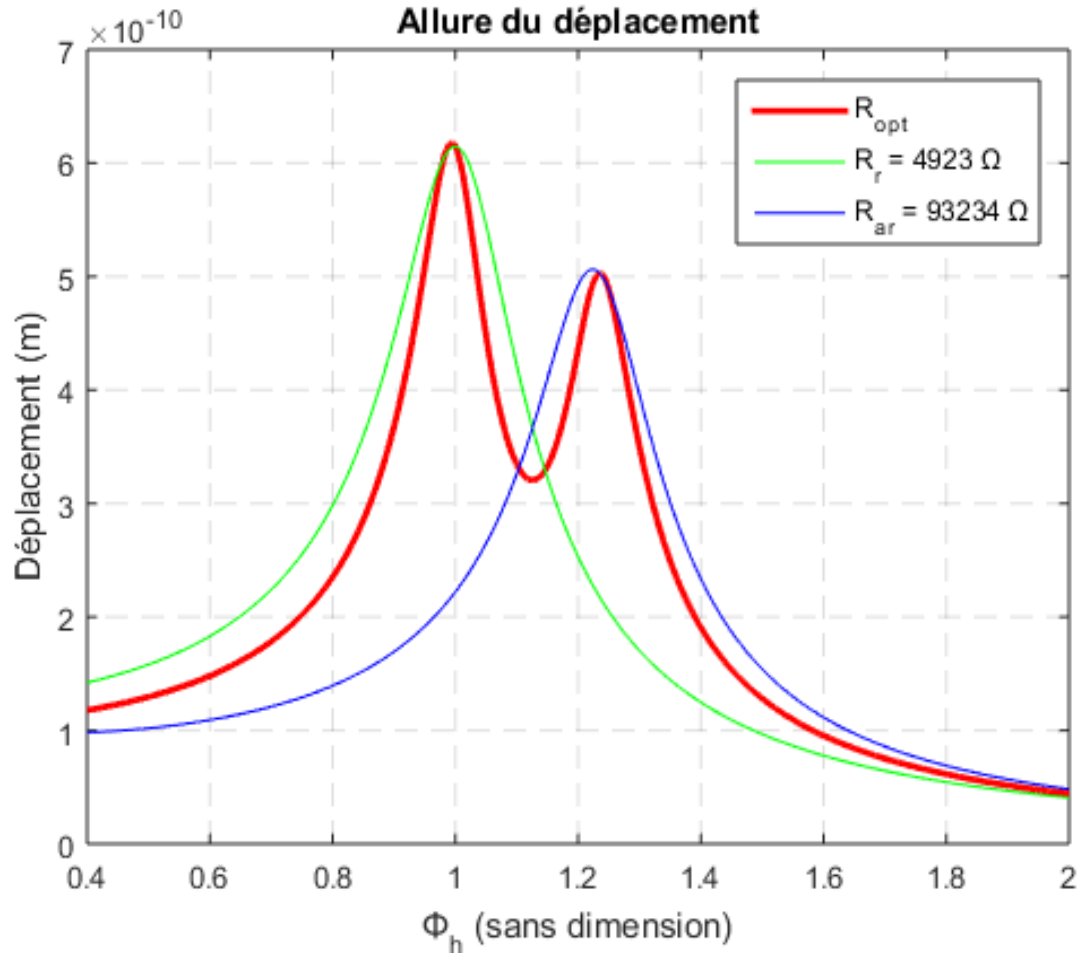
**Figure 3.07 :** *Puissance récupérée en fonction de la fréquence réduite  $\Phi_h$  avec quatre valeurs différentes du taux d'amortissement  $\zeta_h$ .*

### 3.7.2 Présentation et interprétation du déplacement

Les déplacements relatifs de la masse sismique sont illustrés sur la **Fig. 3.08**. De même que la puissance, le déplacement est présenté par rapport à la fréquence réduite  $\Phi_h$  avec les trois résistances  $R_r$ ,  $R_{ar}$ , et  $R_{opt}$ . Elles sont respectivement la résistance à la résonance, la résistance à l'antirésonance et la résistance optimale pour une puissance optimisée.

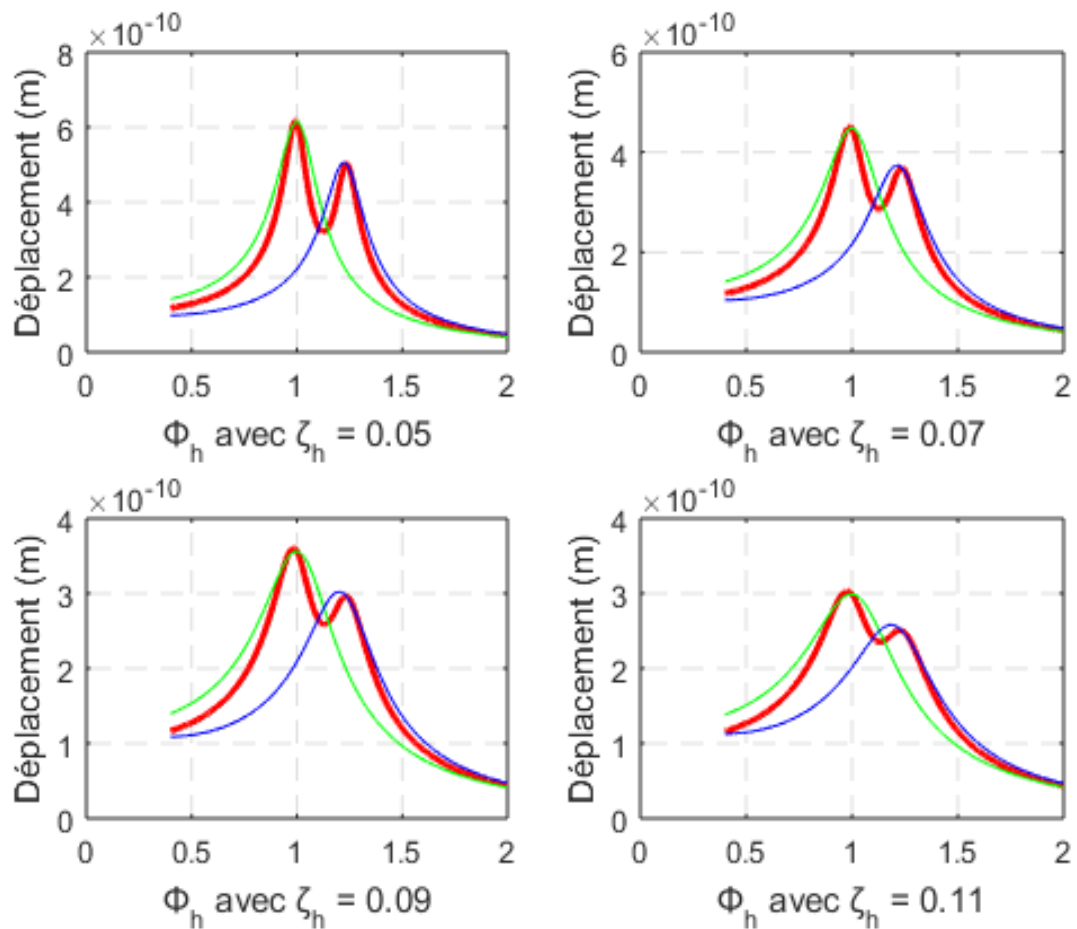
Contrairement à l'allure de la puissance, l'allure du déplacement est plus élevée à la résonance qu'à l'antirésonance. Le déplacement relatif de la masse sismique n'est pas minimisé ou maximisé aux deux pics de résonance ou antirésonance (où la puissance extraite est maximisée), mais en position intermédiaire.

Le fonctionnement au deuxième pic est considéré le plus avantageux car le déplacement de la masse totale sera moins important. Il permettra de réduire le volume de fonctionnement du dispositif.



**Figure 3.08 :** Déplacement en fonction de la fréquence réduite avec une résistance de charge variable pour le modèle à 1-D.  $R_r$  et  $R_{ar}$  sont respectivement la résistance de charge optimisée en puissance à la fréquence de résonance et antirésonance.  $R_{opt}$  est la résistance de charge optimisée en puissance pour toutes les fréquences.

Comme dans la puissance, le taux d'amortissement mécanique joue un rôle important sur l'allure du déplacement. D'après la **Fig. 3.09**, la valeur du déplacement est inversement proportionnelle au taux d'amortissement. C'est-à-dire que, sa valeur diminue quand l'amortissement augmente. On constate aussi que le minimum entre les deux pics de résonance et antirésonance disparaît à une valeur élevée du taux d'amortissement.



**Figure 3.09 :** *Déplacement en fonction de la fréquence réduite avec quatre valeurs de taux d'amortissement différent.*

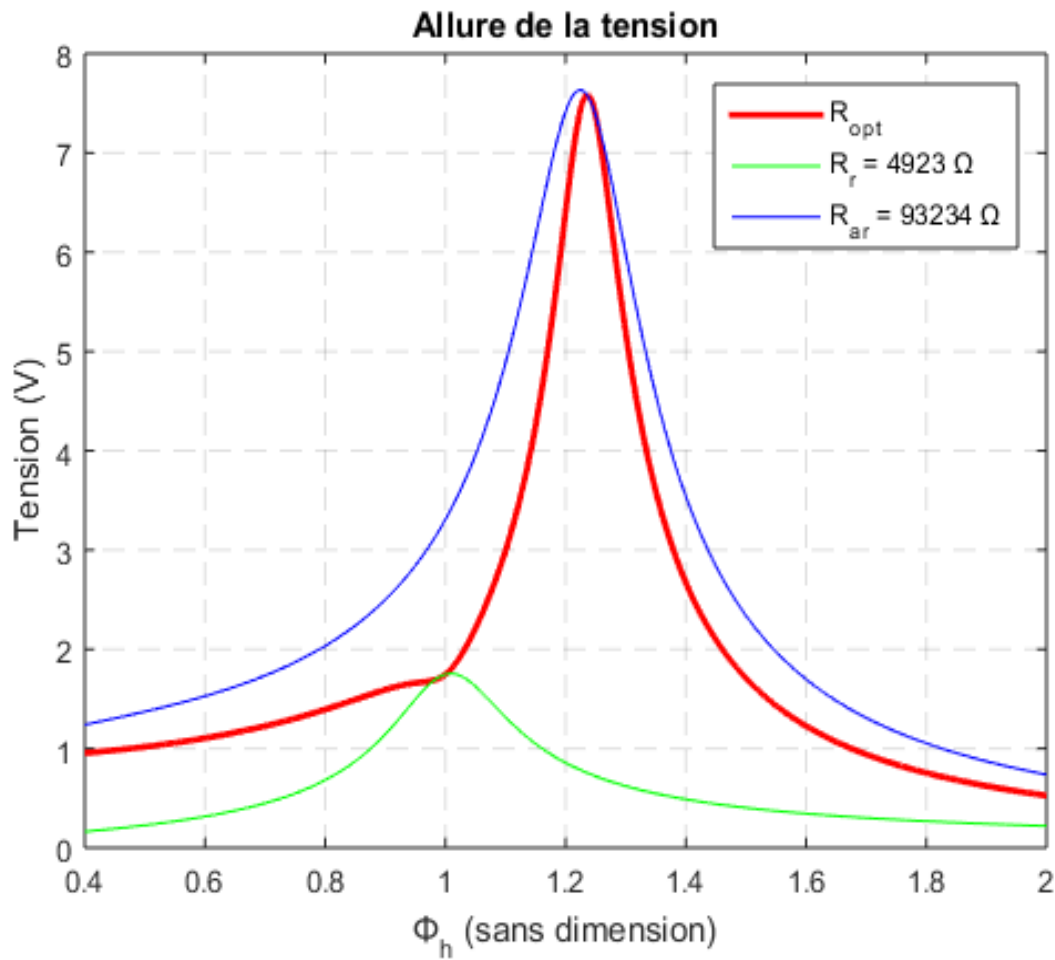
### 3.7.3 Présentation et interprétation de la tension

La tension est représentée par rapport à la fréquence réduite  $\Phi_h$  à la **Fig. 3.10**. Comme le déplacement, la tension générée au niveau des deux résonances est différente. Par contre, dans le cas de la tension, la différence sur l'ordre de grandeur est très remarquable. Comme on a vu, les puissances extraites pour les deux pics sont identiques. Or, la puissance est liée à la tension et au courant pour une charge purement résistive. La formule est donnée par :

$$P = V * I$$

Avec  $I$  indique le courant et  $V$  indique la tension générée.

D'après la **Fig. 3.10**, la tension à la résonance est plus petite que la tension à l'antirésonance. Ce qui veut dire que, le courant au premier pic est supérieur à celui du deuxième pic (inverse de la tension) pour que les puissances soient identiques.



**Figure 3.10 :** Tension en fonction de la fréquence réduite avec une résistance de charge variable pour le modèle à 1-D.  $R_r$  et  $R_{ar}$  sont respectivement la résistance de charge optimisée en puissance à la fréquence de résonance et antirésonance.  $R_{opt}$  est la résistance de charge optimisée en puissance pour toutes les fréquences.

### 3.7.4 Conclusion

Pour résumé, lorsque la charge électrique augmente, les conditions de fonctionnement de l'élément piézoélectrique passent d'un court-circuit (résonance) à un circuit ouvert (antirésonance). Étant donné que l'élément piézoélectrique constitue l'ensemble de la structure, il se produit un décalage important de la fréquence de résonance. La résonance et l'antirésonance sont très importantes à l'échelle microscopique. La puissance générée dans les conditions de court-circuit et de circuit ouvert est égale pour une amplitude d'accélération et un amortissement mécanique constant. Par contre la tension et le courant développés aux différents points de fonctionnement sont différents. Le déplacement de la masse sismique de la structure est également différent à ces points de

fonctionnement, car le système aura plus d'amortissement à la condition de circuit ouvert dû à un amortissement électrique plus élevé.

### **3.8 Extraction d'énergie continue en modèle 1-D**

Le domaine de l'électronique ne peut pas être ignoré dans la conversion de l'énergie vibratoire en énergie électrique. Dans les sections précédentes, on a utilisé une résistance reliée aux bornes de l'élément piézoélectrique pour étudier le déplacement, la tension et surtout la puissance récupérée par le module. Les résultats obtenus ne sont pas encore utilisables ou adaptés à des circuits électroniques qui requièrent généralement une tension d'alimentation continue. Les tensions « récoltées » sont en général variables d'une tension sinusoïdale. Il est alors nécessaire de convertir la tension sinusoïdale délivrée par l'élément piézoélectrique en tension continue par l'intermédiaire d'un redressement et d'un filtrage. Dans cette section, deux types de circuit électronique vont être étudiés pour extraire l'énergie transformée par l'élément piézoélectrique. Un circuit standard qui redresse uniquement la tension venant de l'élément piézoélectrique et un circuit avec une technique non linéaire appelé SSHI (Synchronised Switch Harvesting on Inductor).

#### ***3.8.1 Rappel du composant électronique utilisé dans l'extraction***

Les composants électroniques fondamentaux utilisés dans l'extraction d'énergie sont : la résistance, l'inductance, la capacité et la diode.

##### **3.8.1.1 Résistance**

Une résistance est un matériau conducteur qui s'oppose au passage du courant électrique. Plus la valeur de la résistance dans un circuit électronique est grande plus l'électricité a du mal à passer. Cela provoque une différence de tension entre les deux bornes du composant, mais cette différence de tension augmente non seulement quand la résistance est plus forte, mais aussi proportionnellement à l'intensité qui traverse le composant. Cette phénomène suit la loi d'Ohm [3.13] qui lie l'intensité du courant électrique traversant un dipôle électrique à la tension entre ses bornes et permet de déterminer la valeur d'une résistance. La valeur de la tension est donnée par la formule :  $V = R * I$ . Avec  $V$ ,  $R$  et  $I$  sont respectivement la tension, la résistance et le courant. L'unité de la résistance est alors en V/A (Volts/Ampère) ou en  $\Omega$  (Ohm).

##### **3.8.1.2 Condensateur**

Un condensateur est un composant électronique ou électrique élémentaire, constitué de deux armatures conductrices (appelées «électrodes») en influence totale et scindées par un isolant



polarisable (ou «diélectrique»). Sa propriété principale est de pouvoir stocker des charges électriques opposées sur ses armatures. La valeur absolue de ces charges est proportionnelle à la valeur absolue de la tension qui lui est appliquée. Le condensateur est caractérisé par le coefficient de proportionnalité entre charge et tension nommé capacité électrique  $C$  et exprimé en Farads (F). La relation caractéristique d'un condensateur parfait est :

$$V = \int \frac{I}{C} dt$$

Avec  $V$ ,  $I$ , et  $C$  sont respectivement la tension aux bornes du condensateur, le courant qui traverse le condensateur et la capacité électrique du condensateur.

Le condensateur est utilisé essentiellement pour :

- stabiliser une alimentation électrique (il se décharge lors des chutes de tension et se charge lors des augmentations de tension) ;
- traiter des signaux périodiques comme le filtrage;
- stocker de l'énergie, auquel cas on parle de supercondensateur.

### 3.8.1.3 Bobine ou Inductance

Une bobine est un composant électronique constituée d'un bobinage ou enroulement d'un fil conducteur autour d'un noyau en matériau ferromagnétique. Les physiciens français l'appellent fréquemment «*bobine d'inductance*» ou, plus fréquemment et abusivement, «*inductance*». Cependant, le terme inductance  $L$  sert à désigner normalement la valeur en Henry (H) de l'impédance de la bobine. Le terme de bobine peut aussi désigner un système conçu pour produire des tensions élevées.

Une bobine peut être employée pour :

- Assurer l'antiparasitage d'une alimentation électrique ou d'un signal analogique, elle joue alors le rôle d'impédance.
- Lisser les courants continus ou contrôler la croissance des courants dans les systèmes électroniques.

Une inductance linéaire est régie par l'équation suivante [3.14] :

$$V = L * \frac{dI}{dt}$$

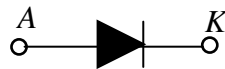
Avec  $V$ ,  $L$  et  $\frac{dI}{dt}$  sont respectivement la tension aux bornes de l'inductance, impédance de l'inductance et la dérivée de la courant par rapport au temps.

#### 3.8.1.4 Diode et redresseur

Une diode est un composant électronique non linéaire et polarisé qui ne laisse passer le courant électrique que dans un sens. Si la polarisation de la tension appliquée coïncide avec la direction «*passante*» de la diode, elle permet un passage de courant presque sans obstacle, à l'exception d'une faible chute de la tension  $V_\gamma$  qu'on appelle tension de seuil. Cela signifie que la diode ne conduira que lorsque la tension dépasse  $V_\gamma$ .

La chute de tension varie en fonction du type et du matériau des diodes. Cette tension de seuil est en moyenne de 0,6 V pour les diodes de type silicium. Pour les diodes en germanium, elle est de 0,2 V à 0,3 V. La tension de seuil d'une diode est l'exact équivalent du potentiel de jonction d'une jonction PN.

Lorsqu'elle est polarisée dans le sens inverse, la diode bloquera tout le courant et se comportera comme une résistance infiniment grande. En dessous d'une certaine tension négative, une diode normale échouera. La **figure 3.11** représente le symbole d'une diode qui est un dipôle constitué d'une anode et d'une cathode.



**Figure 3.11 :** Symbole d'une diode.

Le courant  $I$  qui traverse la diode s'obtient par l'équation de Shockley [3.15] :

$$I = I_0 \left( e^{\frac{V_d}{nV_T}} - 1 \right)$$

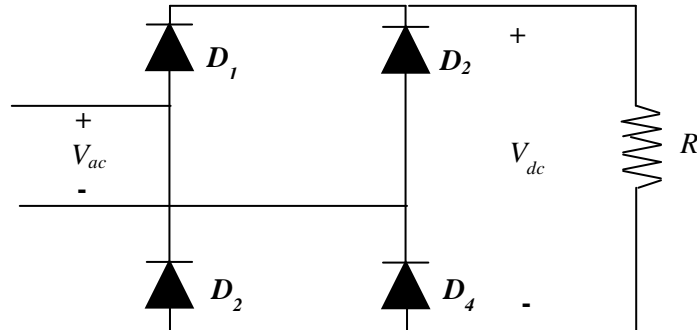
Avec,

- $V_d$  est la tension aux bornes de la diode.
- $V_T$  appelé tension thermique, sa valeur est égal à 26 mV à  $T = 20^\circ\text{C}$ .
- $n$  est le facteur de qualité de la diode, généralement compris entre 1 et 2.
- $I_0$  est la constante spécifique au type de diode considéré ( $I_0$  a la dimension d'un courant).

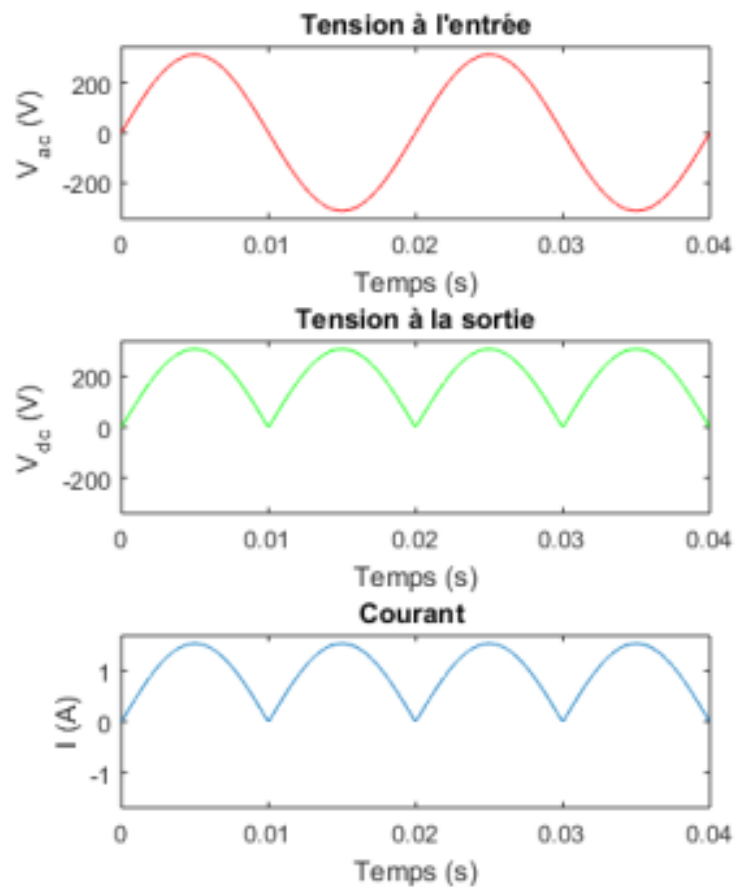
Cette constante est aussi appelée « courant de saturation » de la diode.

Une combinaison de diodes permet de transformer le courant alternatif en courant continu. On nomme pont redresseur cette disposition qui est l'assemblage de quatre diodes.

En réalité le pont de diode est un redresseur de courant. Le courant de sortie est toujours la valeur absolue du courant d'entrée. Par contre la forme de la tension de sortie dépend à la fois de la forme de la tension d'entrée et de la nature de la charge.



**Figure 3.12 :** Pont redresseur pour convertir AC/DC.



**Figure 3.13 :** Allures du signal d'entrée ( $V_{ac}$ ), du signal de sortie ( $V_{dc}$ ) et du courant  $I$  qui traverse le circuit.

Lors de l'alternance positive de la tension d'entrée  $V_{ac}$ , seules les deux diodes ayant une tension d'anode supérieure à la tension de cathode conduiront. Les deux autres diodes ne remplissant pas ces conditions sont bloquées et par conséquent ne laissent pas passer de courant. Pour l'alternance négative, ce sont les deux autres diodes qui amènent.

Il y a donc deux pertes de diodes entre les signaux alternatifs (AC) et continu (DC). La tension continue ou tension redressée est alors:

$$V_{dc} = |V_{ac}| - 2V_d$$

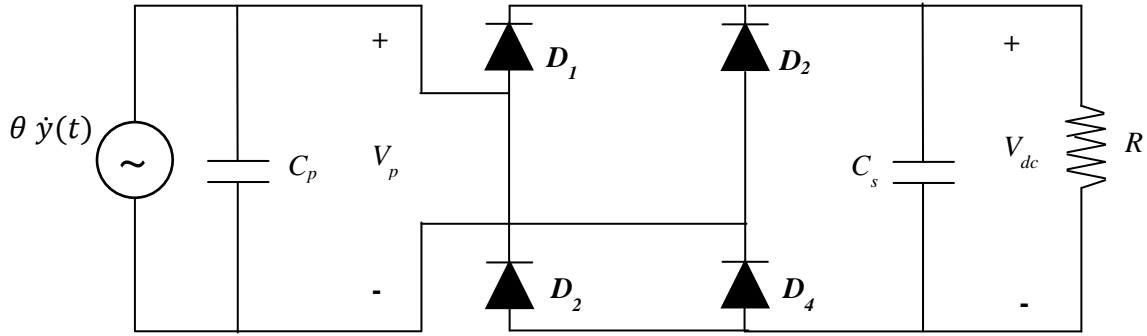
Les **figures 3.12** et **3.13** représentent respectivement le circuit d'un pont redresseur et l'allure des tensions d'entrée et de sortie.

### ***3.8.2 Récupération d'énergie continue avec un circuit standard***

La puissance mise en jeu dans la récupération d'énergie piézoélectrique est faible et qui nécessite une mise en œuvre d'un montage délicat. Le circuit standard est souvent le circuit plus utilisé et qui satisfait cette demande. Trois points principaux sont abordés dans cette section, à savoir le fonctionnement du circuit, les équations principales et les performances générales.

#### **3.8.2.1 Conception et fonctionnement du circuit**

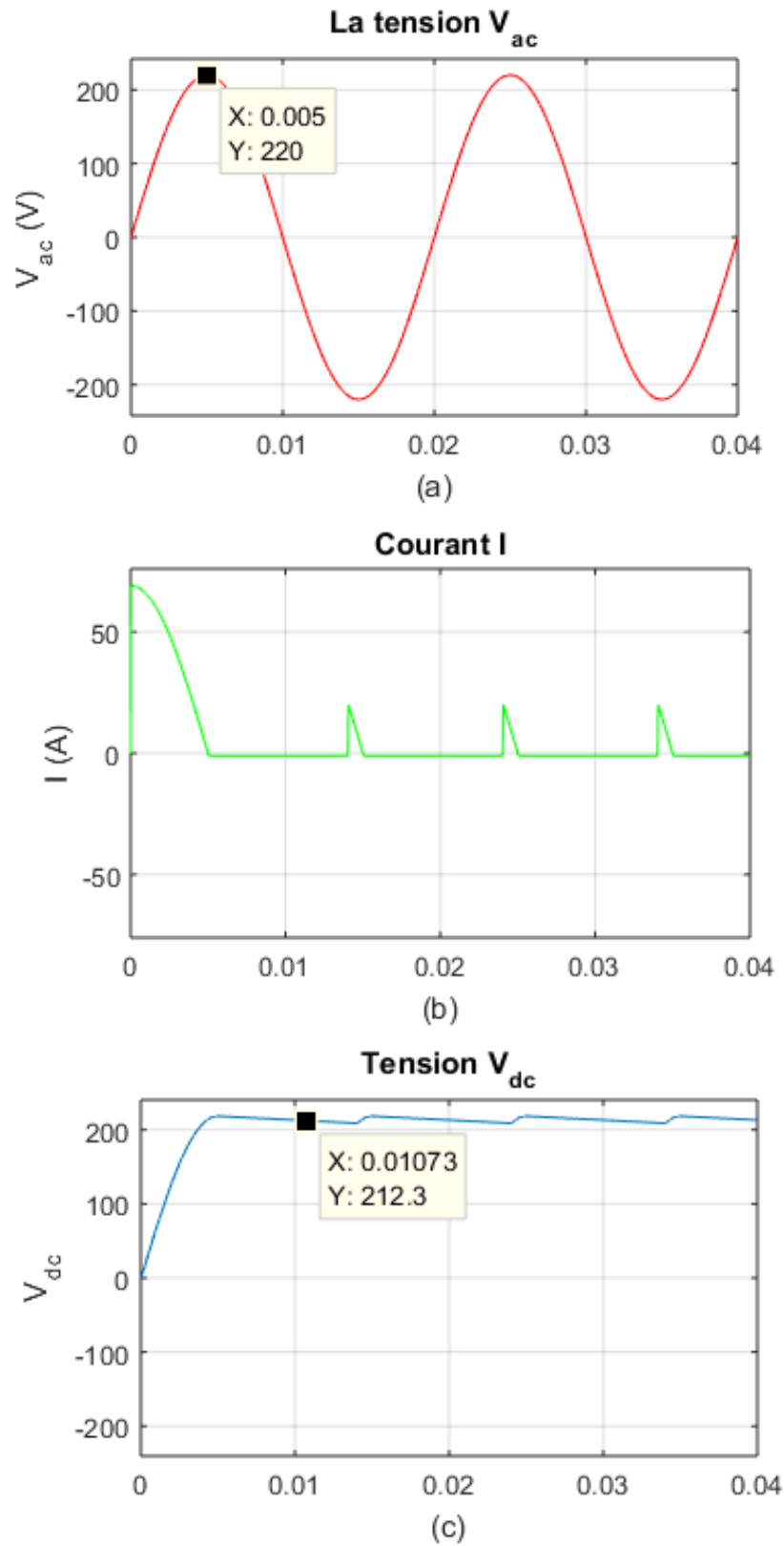
Le circuit est constitué d'un pont redresseur, un condensateur de stockage  $C_s$  et une résistance de charge  $R$ . Le montage est indiqué à la **Fig. 3.14**. Le signal alternatif de l'élément piézoélectrique est redressé par le pont redresseur et l'énergie est stockée dans le condensateur  $C_s$ . Typiquement, ce condensateur joue le rôle d'un filtrage. Il est choisi suffisamment grand pour que la tension redressée  $V_{dc}$  soit essentiellement constante pour avoir une tension de sortie continue stable [3.16]. En d'autres termes, le circuit de stockage a une constante de temps  $RC$  très élevé par rapport au temps de cycle de l'élément piézoélectrique. Ceci est différent de ce qui est vu à la **Fig. 3.13** qui montre la tension redressée suivant la tension alternative. Dans le cas présent, le condensateur  $C_s$  joue aussi le rôle d'un tampon qui fait le lissage de l'ondulation de la tension après le redressement.



**Figure 3.14 :** *Circuit standard d'un récupérateur d'énergie.*

Le pont redresseur utilisé ici est supposé parfait, de sorte qu'il est mis en circuit ouvert si la valeur absolue de la tension piézoélectrique est inférieure à la tension redressée ( $|V_p| < V_{dc}$ ). Par conséquent, le courant qui entre dans le circuit disparaît. Dans ce cas les grandeurs mécanique et électrique du matériau piézoélectrique évoluent sinusoïdalement. Par contre, quand la tension de l'élément piézoélectrique atteint la tension redressée, le pont conduit et la tension piézoélectrique est maintenue égale à la tension redressée, c'est-à-dire  $|V_p| = V_{dc}$ . Seules les grandeurs mécaniques restent sinusoïdales dans ce cas. Enfin, la conduction dans les diodes de redressement est à nouveau bloquée lorsque  $|V_p|$  commence à diminuer.

La **figure 3.15** donne un exemple des formes d'onde de tension et de courant du circuit standard avec une charge  $R$  et une capacité de filtrage  $C_s$ . La tension d'entrée  $V_p$  est présentée sur la première courbe (**Fig. 3.15a**). C'est une tension sinusoïdale qui oscille entre le maximum et le minimum. Cette tension est appliquée au circuit et donne un courant sinusoïdal mais avec une différence de phase de 90 degrés. On voit dans **Fig. 3.15b** que le courant est nul au moment où la diode est bloquée et dans le cas contraire il a une valeur. La dernière **Fig. 3.15c** montre l'allure de la tension récupérée qui est une tension continue ( $V_{dc}$ ). Elle est presque constante en raison de la valeur du condensateur plus grande. La tension  $V_{dc}$  prend une valeur autour de la valeur absolu des maximum de  $V_p$  du à la chute de tension dans les diodes.



**Figure 3.15 :** Courbes représentant : (a) : la tension d'entrée sinusoïdale  $V_p$  , (b) : le courant  $I$  qui traverse le circuit, (c) : la tension redressée  $V_{dc}$ .

### 3.8.2.2 Equation analytique du récupérateur

En raison de la discontinuité de la conduction du pont redresseur, une solution analytique exacte est impossible. Une solution analytique approximative peut être trouvée en considérant un demi-cycle ou demi-période. La conservation du courant dans l'**Eq. 3.05** peut être utilisée. L'équation est de la forme :

$$I(t) = \frac{v(t)}{R} = \theta \dot{y}(t) - C_p \dot{v}(t)$$

L'intégration membre à membre de cette équation dans la demi-période, c'est à dire entre le temps  $t_1 = 0$  et  $t_3 = \frac{T}{2}$ , permet d'obtenir la tension continue aux bornes de la charge  $R$ . A noter que le déplacement relatif du système est une forme sinusoïdale avec une période  $T = 2\pi/\omega$ .

$$\int_{t_1}^{t_3} I(t)dt = \int_{t_1}^{t_3} \theta \dot{y}(t)dt - \int_{t_1}^{t_3} C_p \dot{v}(t)dt \quad (3.13)$$

La tension continue  $V_{dc}$  peut être alors obtenue et qui est exprimée en fonction de l'amplitude  $Y$  du déplacement de la masse sismique du modèle.

$$V_{dc} = \frac{\theta \omega R}{C_p \omega R + \frac{\pi}{2}} Y$$

*Démonstration :*

♣

$$\int_{t_1}^{t_3} I(t)dt = \int_0^{T/2} I(t)dt = \frac{V_{dc} T}{R 2}$$

Avec la période  $T = 2\pi$ , on a :

$$\int_{t_1}^{t_3} I(t)dt = \frac{V_{dc} 2\pi/\omega}{R 2} = \frac{\pi}{R\omega} V_{dc}$$

Pour le déplacement  $y(t)$ , l'intégration se fait entre l'amplitude maximum et minimum :

$$\int_{t_1}^{t_3} \theta \dot{y}(t)dt = \theta \int_{-Y}^Y y(t)dt = \theta(Y - (-Y)) = \theta 2Y$$

Et pour la tension aux bornes du matériau piézoélectrique, le bornes d'intégration est entre  $-V_{dc}$  et  $V_{dc}$ .

$$\int_{t_1}^{t_3} C_p \dot{v}(t)dt = C_p \int_{-V_{dc}}^{V_{dc}} v(t)dt = C_p (V_{dc} - (-V_{dc})) = 2 C_p V_{dc}$$

D'où, l'équation 3.13 devient :

$$\frac{\pi}{R\omega} V_{dc} = \theta 2Y - 2 C_p V_{dc}$$

$$V_{dc} \left( \frac{\pi}{R\omega} + 2C_p \right) = \theta 2Y$$

Ce qui donne l'expression de la tension  $V_{dc}$  :

$$V_{dc} = \frac{\theta \omega R}{C_p \omega R + \frac{\pi}{2}} Y \quad (3.14)$$

♦

En introduisant l'**Eq. 3.14** dans l'équation mécanique (**Eq. 3.05**), on aura l'expression normalisée du déplacement :

$$\left| \frac{y}{M_T \ddot{Y}_b} \right| = \frac{1}{k} \frac{\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\left[ 2\zeta_h \Phi_h \left( \Phi_h \beta + \frac{\pi}{2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{\pi}{2} + \Phi_h \beta (1 + k_e^2) - \Phi_h^2 \left( \beta \Phi_h + \frac{\pi}{2} \right) \right]^2}}$$

*Démonstration :*

♣

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta_h \omega_h \dot{y}(t) + \omega_h^2 y(t) + \frac{\theta}{M_T} v(t) = -\ddot{y}_b(t)$$

$$[-\omega^2 + j2\zeta_h \omega_h \omega + \omega_h^2] + \frac{\theta}{M_T} \frac{\theta R \omega}{\left( \frac{\pi}{2} + C_p R \omega \right)} = -\frac{\ddot{Y}_b}{Y}$$

$$\frac{M_T [-\omega^2 + j2\zeta_h \omega_h \omega + \omega_h^2] \left( \frac{\pi}{2} + C_p R \omega \right) + \theta^2 R \omega}{M_T \left( \frac{\pi}{2} + C_p R \omega \right)} = -\frac{\ddot{Y}_b}{Y}$$

$$\frac{\left( \frac{\pi}{2} + C_p R \omega \right)}{M_T [-\omega^2 + j2\zeta_h \omega_h \omega + \omega_h^2] \left( \frac{\pi}{2} + C_p R \omega \right) + \theta^2 R \omega} = \frac{Y}{-M_T \ddot{Y}_b}$$

$$\frac{Y}{-M_T \ddot{Y}_b} = \frac{\left( \frac{\pi}{2} + C_p R \omega \right)}{\frac{K}{\omega_h^2} [-\omega^2 + j2\zeta_h \omega_h \omega + \omega_h^2] \left( \frac{\pi}{2} + C_p R \omega \right) + \theta^2 R \omega}$$

$$\frac{Y}{-M_T \ddot{Y}_b} = \frac{1}{K} \frac{\left( \frac{\pi}{2} + C_p R \omega \frac{\omega_h^2}{\omega_h^2} \right)}{\left[ -\frac{\omega^2}{\omega_h^2} + \frac{j2\zeta_h \omega_h \omega}{\omega_h^2} + \frac{\omega_h^2}{\omega_h^2} \right] \left( \frac{\pi}{2} + C_p R \omega \frac{\omega_h^2}{\omega_h^2} \right) + \frac{\theta^2}{K} R \omega \frac{\omega_h C_p}{\omega_h C_p}}$$

$$\frac{Y}{-M_T \ddot{Y}_b} = \frac{1}{K} \frac{\left( \beta \Phi_h + \frac{\pi}{2} \right)}{[-\Phi_h^2 + j2\zeta_h \Phi_h + 1] \left( \beta \Phi_h + \frac{\pi}{2} \right) + k_e^2 \Phi_h \beta}$$

$$\frac{Y}{-M_T \ddot{Y}_b} = \frac{1}{K} \frac{\left( \beta \Phi_h + \frac{\pi}{2} \right)}{j2\zeta_h \Phi_h \left( \beta \Phi_h + \frac{\pi}{2} \right) + [-\Phi_h^2 + 1] \left( \beta \Phi_h + \frac{\pi}{2} \right) + k_e^2 \Phi_h \beta}$$



$$\frac{Y}{-M_T \ddot{Y}_b} = \frac{1}{K} \frac{\left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right)}{j2\zeta_h \Phi_h \left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\Phi_h^3 \beta + \beta \Phi_h - \frac{\pi}{2} \Phi_h^2 + \frac{\pi}{2} + k_e^2 \Phi_h \beta\right)}$$

$$\frac{Y}{-M_T \ddot{Y}_b} = \frac{1}{K} \frac{\left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right)}{j2\zeta_h \Phi_h \left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\Phi_h^2 \left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right) + \beta \Phi_h (1 + k_e^2) + \frac{\pi}{2}\right)}$$

D'où :

$$\left| \frac{y}{M_T \ddot{Y}_b} \right| = \frac{1}{k} \frac{\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\left[2\zeta_h \Phi_h \left(\Phi_h \beta + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{\pi}{2} + \Phi_h \beta (1 + k_e^2) - \Phi_h^2 \left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2}} \quad (3.15)$$

◆

L'expression normalisée de la tension peut être ensuite déduite à partir des **Eqs. 3.14 et 3.15**. En utilisant les paramètres normalisés  $\beta = \omega_h C_p R$  et  $\Phi_h = \frac{\omega}{\omega_h}$ , l'**Eq. 3.14** peut être exprimée par :

$$V_{dc} = V = \frac{\theta}{C_p} \frac{\beta \Phi_h}{\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}} Y$$

$$\frac{V}{-M_T \ddot{Y}_b} = \frac{\theta}{\theta K} \frac{\theta}{C_p} \frac{\beta \Phi_h}{\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right)}{j2\zeta_h \Phi_h \left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\Phi_h^2 \left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right) + \beta \Phi_h (1 + k_e^2) + \frac{\pi}{2}\right)}$$

D'où :

$$\left| \frac{V}{M_T \ddot{Y}_b} \right| = \frac{1}{|\theta|} \frac{k_e^2 \beta \Phi_h}{\sqrt{\left[2\zeta_h \Phi_h \left(\Phi_h \beta + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{\pi}{2} + \Phi_h \beta (1 + k_e^2) - \Phi_h^2 \left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2}} \quad (3.16)$$

La puissance récupérée est donnée par :

$$P = \frac{V_{dc}^2}{R}$$

$$\frac{V^2}{R} = \frac{1}{R} \frac{\theta \omega R \theta \omega R}{\left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right)^2} \left( \frac{1}{K} \frac{(-M_T \ddot{Y}_b) \left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right)}{j2\zeta_h \Phi_h \left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\Phi_h^2 \left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right) + \beta \Phi_h (1 + k_e^2) + \frac{\pi}{2}\right)} \right)^2$$

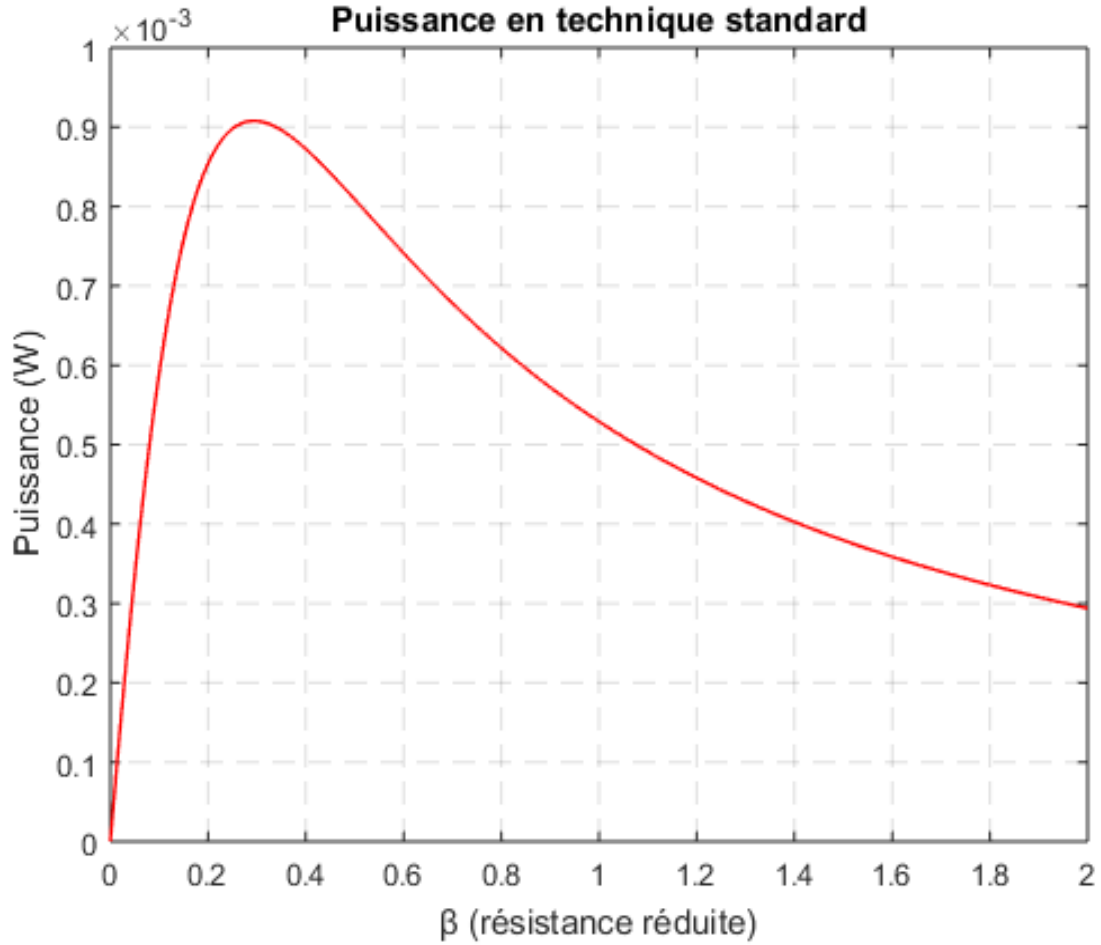
$$\frac{V^2}{(-M_T \ddot{Y}_b)^2 R}$$

$$= \frac{1}{K} \frac{\frac{C_p \omega_h^2}{C_p \omega_h^2 K} \theta^2 \omega^2 R}{\left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right)^2} \frac{\left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(j2\zeta_h \Phi_h \left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\Phi_h^2 \left(\beta \Phi_h + \frac{\pi}{2}\right) + \beta \Phi_h (1 + k_e^2) + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2}$$

D'où l'expression de la puissance normalisée :

$$\left| \frac{P}{(M_T \ddot{Y}_b)^2} \right| = \frac{\omega_h}{k} \frac{\beta k_e^2 \Phi_h^2}{\left[ 2\zeta_h \Phi_h \left( \Phi_h \beta + \frac{\pi}{2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{\pi}{2} + \Phi_h \beta (1 + k_e^2) - \Phi_h^2 \left( \beta \Phi_h + \frac{\pi}{2} \right) \right]^2} \quad (3.17)$$

La variation de la puissance normalisée par rapport à la résistance réduite en mode résonance est montrée à la **Fig. 3.16**. Un maximum a été remarqué pour une certaine valeur de la résistance réduite.



**Figure 3.16 :** Variation de la puissance en fonction de la résistance réduite  $\beta$  pour la technique standard.

### 3.8.3 Récupération d'énergie non linéaire SSHI

On a vu que les éléments piézoélectriques peuvent convertir l'énergie vibratoire d'une structure hôte en énergie électrique. La quantité d'énergie récupérée dépend du couplage électromécanique, plus sa valeur se rapproche de 1, plus la conversion d'énergie vibratoire en énergie électrique est importante et inversement. La plupart des éléments piézoélectriques sont de faible couplage électromécanique due à la valeur de la capacitance très petite. Une technique de maximisation autre que le circuit standard a été alors introduite et couramment utilisée aujourd'hui [3.17]. Ce

sont des circuits de type commutation dont les commutateurs sont actionnés de manière synchrone avec la vibration de la structure hôte afin d'optimiser la puissance. Il y a plusieurs topologies de circuits de commutation synchronisées. La technique SSHI (Synchronized Switch Harvesting on Inductor) est une de ces topologie. Dans cette technique, le circuit de commutation est placé entre l'élément piézoélectrique et le redresseur. La technique parallèle-SSHI et la technique série-SSHI vont être détaillées dans cette section.

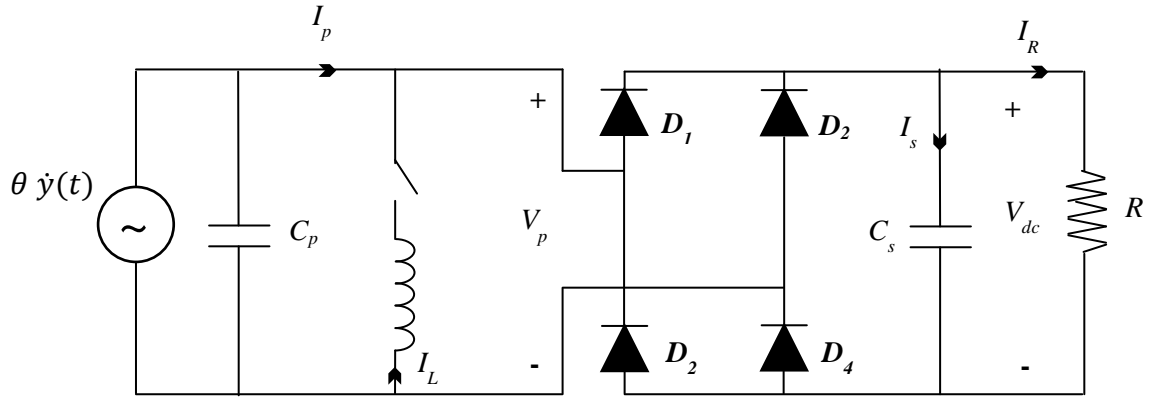
### 3.8.3.1 Technique non linéaire SSHI en parallèle

Le circuit électrique d'un dispositif de récupération d'énergie piézoélectrique non linéaire en parallèle ou SSHI parallèle est présenté à la **Fig. 3.19**. Le circuit est composé d'un circuit équivalent du modèle piézoélectrique, un interrupteur, une inductance, un pont de diode et une résistance de charge avec une capacité de filtrage. La structure est supposée être excitée par un signal à la fréquence de résonance. Dans la technique parallèle l'interrupteur et l'inductance sont ajoutés en parallèle avec le circuit équivalent du piézoélectrique. L'interrupteur électronique est déclenché en fonction du maximum et du minimum du déplacement de la structure ou au passage à zéro de la vitesse de vibration. En conséquence, cela donne une inversion de la tension piézoélectrique  $V_P$  à chaque extrémité,

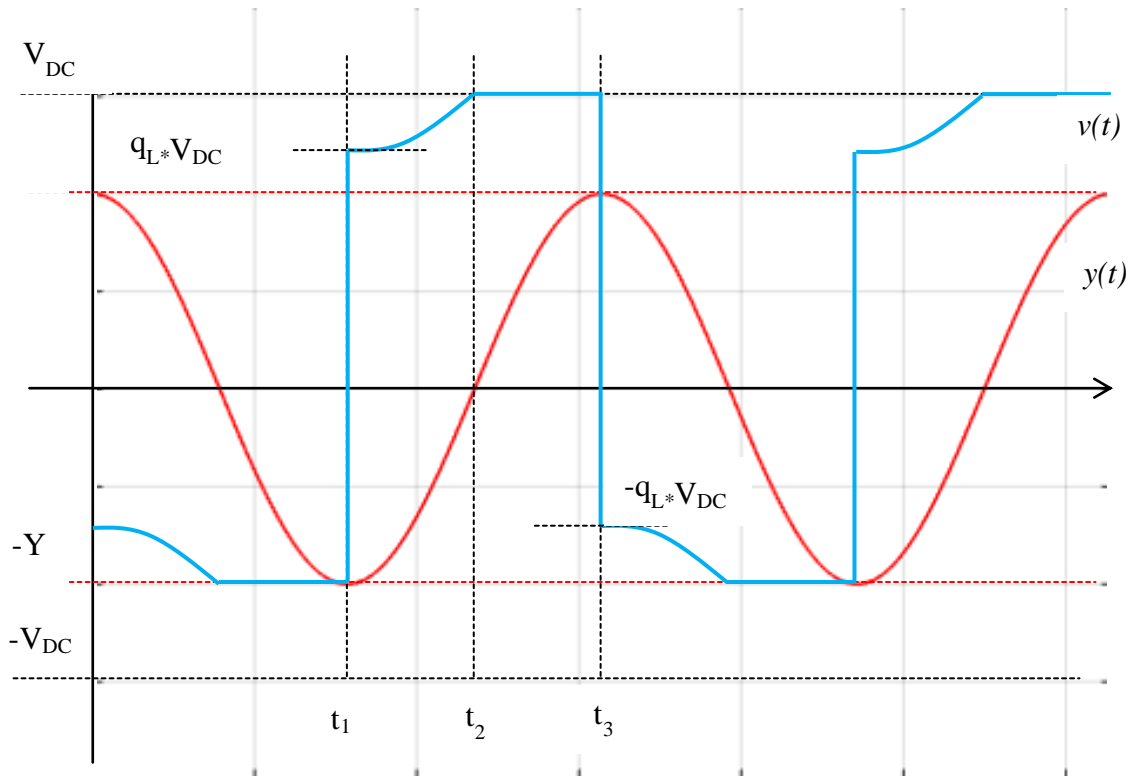
c'est-à-dire que  $V_P$  change soit de  $-V_{dc}$  en  $q_L V_{dc}$ , soit de  $V_{dc}$  en  $-q_L V_{dc}$ .

la quantité  $q_L$  est exprimée par  $q_L = e^{-\frac{\pi}{2Q_L}}$  où  $Q_L$  est le facteur de qualité d'inversion dû à la perte d'énergie au sein de l'inductance en série avec l'interrupteur.

Au moment de la fermeture de l'interrupteur, le circuit LC forme un circuit résonnant. C'est-à-dire que l'énergie électrique dans le condensateur va renforcer le champ magnétique dans l'inductance. Cette dernière induit un courant électrique dans les enroulements pour charger le condensateur. Le processus se répète continuellement et qui permet d'augmenter la tension piézoélectrique [3.18]. L'énergie extraite est ainsi augmentée. L'énergie récupérée par le technique SSHI est similaire à celle récupérée en utilisant l'interface standard dans la condition fortement couplée [3.19]. L'allure du déplacement et la tension piézoélectrique sont présentées à la **Fig. 3.17**.



**Figure 3.17 :** Circuit électrique d'un récupérateur d'énergie piézoélectrique avec une technique SSHI parallèle.



**Figure 3.18 :** Forme du déplacement et de la tension piézoélectrique par la technique SSHI parallèle.

Après une étude sur l'intervalle de temps, la tension continue  $V_{dc}$  aux bornes de la charge R peut être exprimée par :

$$V_{dc} = \frac{2\theta\omega R}{(\pi + (1 - q_L)C_p\omega R)} Y$$

Avec  $q_L = e^{-\frac{\pi}{2Q_L}}$  où  $Q_L$  est le facteur de qualité de l'inductance.

*Démonstration :*

♣

La conservation du courant dans l'**Eq. 3.05** peut être toujours utilisée en considérant que la tension continue  $V_{dc}$  est constante du à une valeur élevée du condensateur  $C_s$ . L'équation est de la forme :

$$I(t) = \frac{v(t)}{R} = \theta \dot{y}(t) - C_p \dot{v}(t)$$

L'intégration membre à membre de cette équation dans la demi-période, c'est à dire entre le temps  $t_1 = 0$  et  $t_3 = \frac{T}{2}$ , permet d'obtenir la tension continue aux bornes de la charge  $R$ . A noter que le déplacement relatif du système est une forme sinusoïdale avec une période  $T = 2\pi/\omega$ .

L'intégration membre à membre de l'équation de conservation du courant donne :

$$\int_{t_1}^{t_3} I(t)dt = \int_{t_1}^{t_3} \theta \dot{y}(t)dt - \int_{t_1}^{t_3} C_p \dot{v}(t)dt \quad (3.18)$$

Dans l'équation 3.18, l'expression du courant et du déplacement est la même que l'expression du circuit standard. Seule la valeur moyenne de la tension piézoélectrique qui change. Ce qui veut dire que :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_3} I(t)dt &= \int_0^{T/2} I(t)dt = \frac{V_{dc} T}{R} \frac{1}{2} = \frac{V_{dc} 2\pi/\omega}{R2} = \frac{\pi}{R\omega} V_{dc} \\ \int_{t_1}^{t_3} \theta \dot{y}(t)dt &= \theta \int_{-Y}^Y y(t)dt = \theta(Y - (-Y)) = \theta 2Y \end{aligned}$$

Pour la tension aux bornes du matériau piézoélectrique, on sait que la tension  $v(t)$  prend la valeur  $q_L V_{dc}$  à l'instant  $t_1$  et atteint la valeur  $V_{dc}$  à l'instant  $t_2$  jusqu'à  $t_3$ . Ce qui change la borne d'intégration de la tension en  $q_L V_{dc}$  et  $V_{dc}$  pour calculer la valeur moyenne.

$$\int_{t_1}^{t_3} C_p \dot{v}(t)dt = C_p \int_{q_L V_{dc}}^{V_{dc}} v(t)dv = C_p (V_{dc} - (-q_L V_{dc})) = C_p (1 - q_L) V_{dc}$$

L'équation 3.18 devient :

$$\frac{\pi}{R\omega} V_{dc} = \theta 2Y - C_p (1 - q_L) V_{dc}$$

D'où, on a l'expression de la tension aux bornes de la charge  $R$  :

$$V_{dc} = \frac{2\theta\omega R}{(\pi + (1 - q_L)C_p\omega R)} Y \quad (3.19)$$

♦

On peut utiliser l'Eq. 3.19 dans l'équation mécanique du modèle pour obtenir l'expression du déplacement. Le cas considéré est ce ou la tension piézoélectrique est maintenue à la valeur de la tension redressée.

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta_h\omega_h\dot{y}(t) + \omega_h^2 y(t) + \frac{\theta}{M_T}v(t) = -\ddot{y}_b(t)$$

$$[-\omega^2 + j2\zeta_h\omega_h\omega + \omega_h^2] + \frac{\theta}{M_T} \frac{2\theta\omega R}{(\pi + (1 - q_L)C_p\omega R)} = -\frac{\ddot{Y}_b}{Y}$$

$$\frac{M_T[-\omega^2 + j2\zeta_h\omega_h\omega + \omega_h^2](\pi + (1 - q_L)C_p\omega R) + 2\theta^2 R\omega}{M_T(\pi + (1 - q_L)C_p\omega R)} = -\frac{\ddot{Y}_b}{Y}$$

$$\frac{Y}{-M_T\ddot{Y}_b} = \frac{1}{K} \frac{\left(\pi + (1 - q_L)C_p\omega R \frac{\omega_h^2}{\omega^2}\right)}{\left[-\frac{\omega^2}{\omega_h^2} + \frac{j2\zeta_h\omega_h\omega}{\omega_h^2} + \frac{\omega_h^2}{\omega^2}\right]\left(\pi + (1 - q_L)C_p\omega R \frac{\omega_h^2}{\omega^2}\right) + \frac{2\theta^2}{K} R\omega \frac{\omega_h C_p}{\omega_h C_p}}$$

Après la normalisation, on aura l'expression du déplacement normalisée par rapport à la force d'entrée  $M_T\ddot{Y}_b$  :

$$\left| \frac{y}{M_T\ddot{Y}_b} \right| = \frac{1}{k} * \frac{(\pi + (1 - q_L)\beta\Phi_h)}{\sqrt{A + B}} \quad (3.20)$$

Avec

$$\mathbf{A} = [2\zeta_h\Phi_h(\pi + (1 - q_L)\beta\Phi_h)]^2$$

$$\mathbf{B} = [\pi + (1 - q_L + 2k_e^2)\beta\Phi_h - \Phi_h^2\pi - (1 - q_L)\beta\Phi_h^3]^2$$

L'expression normalisée de la tension peut être ensuite déduite à partir des Eqs. 3.19 et 3.20. En utilisant les paramètres normalisés  $\beta = \omega_h C_p R$  et  $\Phi_h = \frac{\omega}{\omega_h}$ , l'équation 3.19 peut être exprimée par :

$$V_{dc} = \frac{2\theta\beta\Phi_h}{C_p(\pi + (1 - q_L)\beta\Phi_h)} Y$$

$$\frac{V}{-M_T\ddot{Y}_b} = \frac{\theta}{\theta K} \frac{\theta}{C_p} \frac{2\beta\Phi_h}{(\pi + (1 - q_L)\beta\Phi_h)} *$$

$$\frac{(\pi + (1 - q_L)\beta\Phi_h)}{j2\zeta_h\Phi_h(\pi + (1 - q_L)\beta\Phi_h) + \pi + (1 - q_L + 2k_e^2)\beta\Phi_h - \Phi_h^2\pi - (1 - q_L)\beta\Phi_h^3}$$

D'où :

$$\left| \frac{V}{M_T\ddot{Y}_b} \right| = \frac{1}{|\theta|} * \frac{2k_e^2\beta\Phi_h}{\sqrt{A + B}} \quad (3.21)$$

Avec

$$\mathbf{A} = [2\zeta_h \Phi_h (\pi + (1 - q_L) \beta \Phi_h)]^2$$

$$\mathbf{B} = [\pi + (1 - q_L + 2k_e^2) \beta \Phi_h - \Phi_h^2 \pi - (1 - q_L) \beta \Phi_h^3]^2$$

La puissance récupérée est donnée par :

$$P = \frac{V_{dc}^2}{R}$$

$$\frac{V^2}{R} = \frac{4}{R} \frac{\theta \omega R \theta \omega R}{(\pi + (1 - q_L) \beta \Phi_h)^2} *$$

$$\left( \frac{1}{K} \frac{(-M_T \ddot{Y}_b)(\pi + (1 - q_L) \beta \Phi_h)}{j 2 \zeta_h \Phi_h (\pi + (1 - q_L) \beta \Phi_h) + \pi + (1 - q_L + 2k_e^2) \beta \Phi_h - \Phi_h^2 \pi - (1 - q_L) \beta \Phi_h^3} \right)^2$$

D'où l'expression de la puissance normalisée :

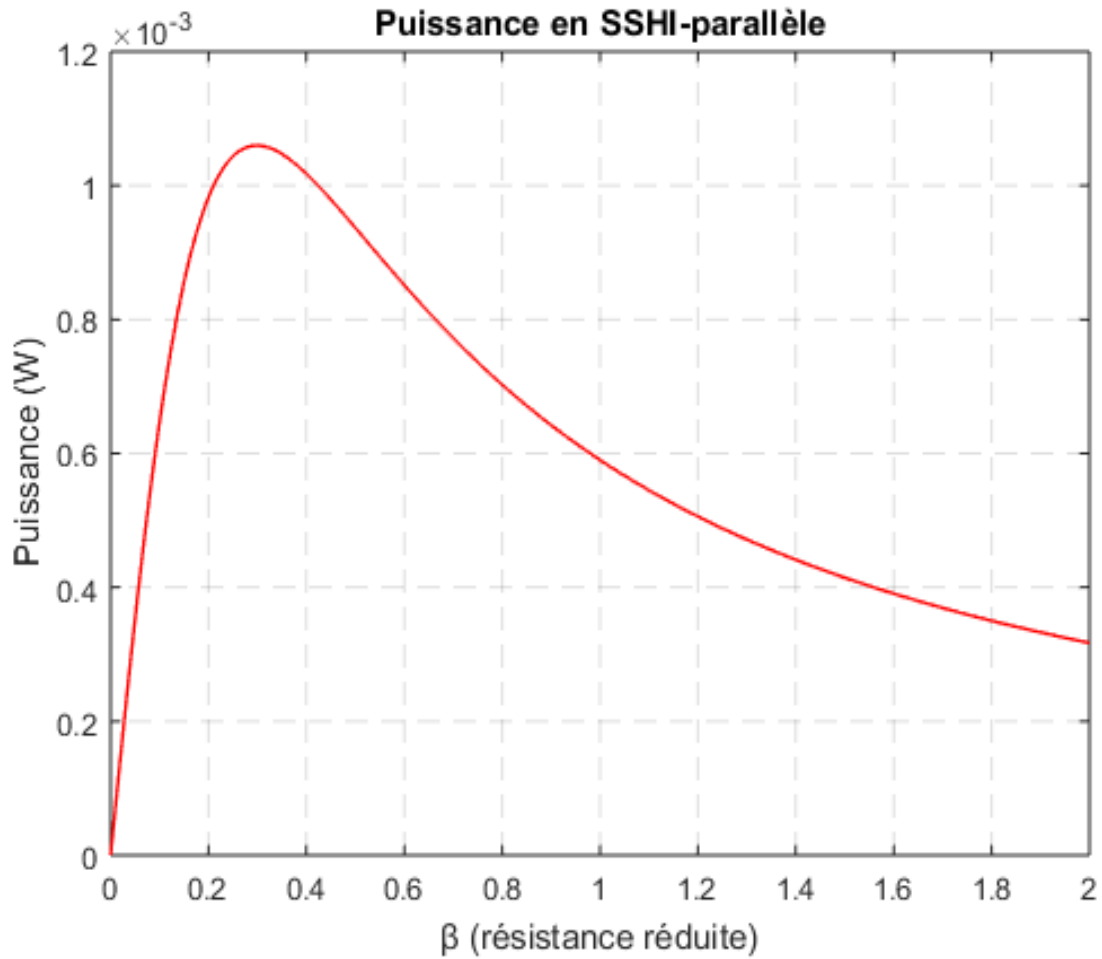
$$\left| \frac{P}{(M_T \ddot{Y}_b)^2} \right| = \frac{\omega_h}{k} * \frac{4\beta k_e^2 \Phi_h^2}{A + B} \quad (3.22)$$

Avec

$$\mathbf{A} = [2\zeta_h \Phi_h (\pi + (1 - q_L) \beta \Phi_h)]^2$$

$$\mathbf{B} = [\pi + (1 - q_L + 2k_e^2) \beta \Phi_h - \Phi_h^2 \pi - (1 - q_L) \beta \Phi_h^3]^2$$

La structure est supposée exciter par une fréquence de résonnance. La variation de la puissance en fonction de la résistance réduite  $\beta$  est présentée sur la **Fig. 3.21**. On remarque que la puissance admet un maximum à une certaine valeur de la résistance réduite.

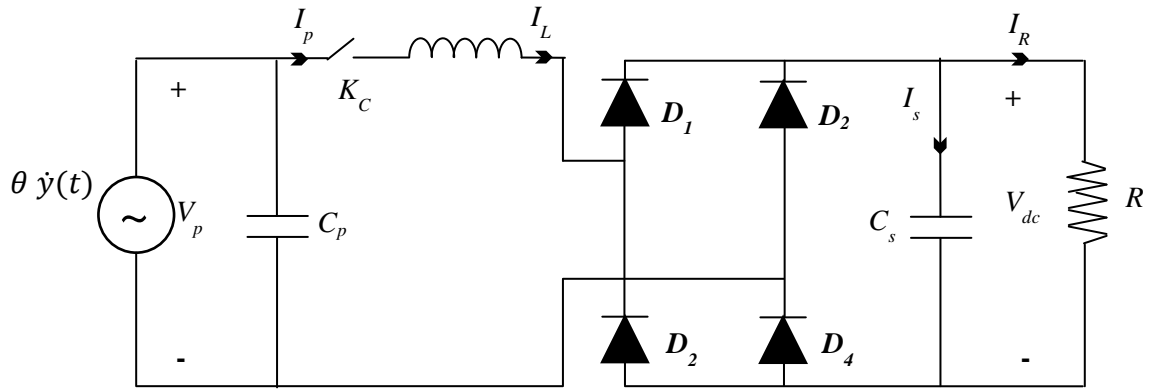


**Figure 3.19 :** Variation de la puissance en fonction de la résistance réduite  $\beta$  pour le technique SSHI parallèle ( $Q_L = 3.5$ ).

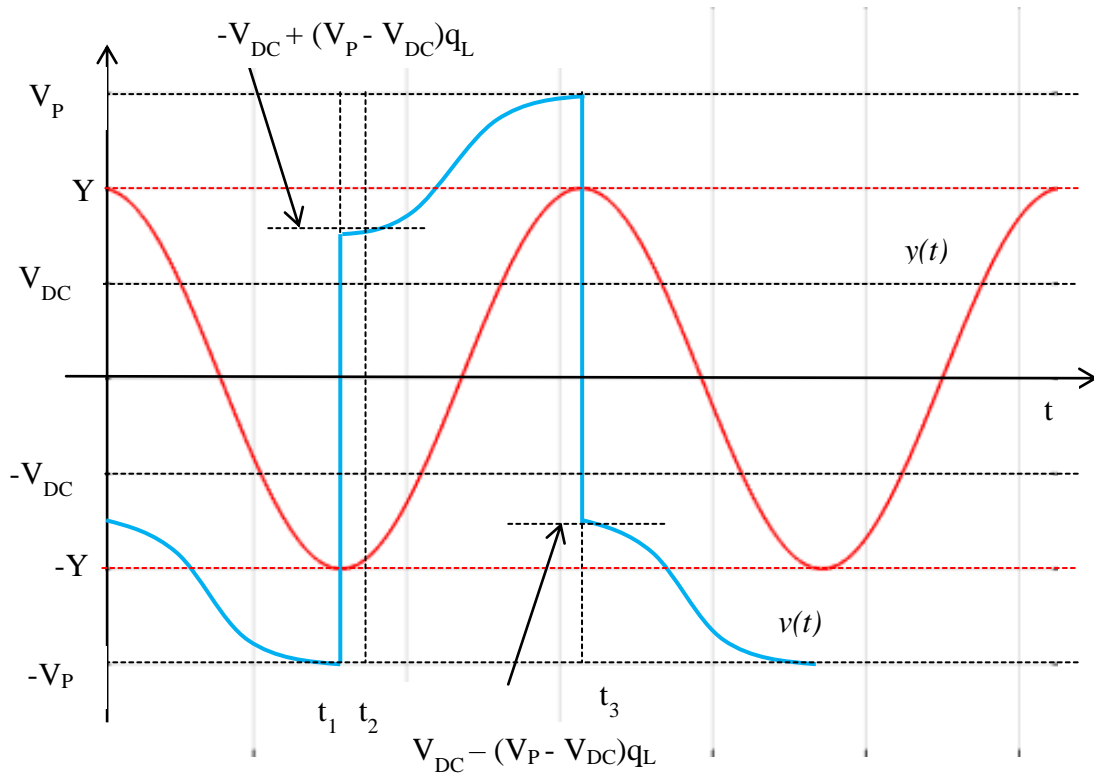
### 3.8.3.2 Technique non linéaire SSHI en série

Le circuit électrique d'un récupérateur d'énergie piézoélectrique avec la technique SSHI en série est présenté sur la **Fig. 3.20**. Il est constitué d'un pont redresseur, d'une résistance de charge et d'un condensateur de filtrage comme celui de la technique en parallèle. La différence est l'emplacement de l'interrupteur de commutation et de l'inductance. On le met en série avec la structure piézoélectrique. L'interrupteur  $K_c$  se déclenche aux extremums du déplacement de la masse. Contrairement à la technique parallèle, l'élément piézoélectrique est en circuit ouvert la plupart des temps du à l'inversion rapide de la tension piézoélectrique commandé par l'interrupteur. Par conséquent, le courant piézoélectrique est aussi nul pendant ce temps. Les formes du déplacement et de la tension piézoélectrique sont données à la **Fig. 3.21**.





**Figure 3.20 :** Circuit électrique d'un récupérateur d'énergie piézoélectrique avec une technique SSHI série.



**Figure 3.21 :** Forme du déplacement et de la tension piézoélectrique par la technique SSHI série.

Après une étude sur l'intervalle de temps, la tension continue  $V_{dc}$  aux bornes de la charge  $R$  peut être exprimée par :

$$V_{dc} = \frac{2\theta\omega R(1 + q_L)}{\pi(1 - q_L) + (1 + q_L)2C_p\omega R} Y$$

*Démonstration :*

♣

L'étude est comprise entre l'intervalle de temps  $[t_1, t_3]$  montré sur la Fig. 3.23 pour déterminer la tension  $V_{dc}$  aux bornes de la résistance  $R$ . A l'instant  $t_1$ , la tension piézoélectrique  $v(t)$  correspond à son extremum  $-V_p$ , le déplacement  $y(t)$  est égale à  $-Y$  et le courant équivalent du circuit est égale à zéro. C'est le temps où la capacité  $C_p$  et l'inductance  $L$  entre en résonance. A l'instant  $t_2$ , la tension piézoélectrique  $v(t)$  atteint la valeur  $-V_{dc} + (V_p - V_{dc})q_L$ . La valeur du déplacement  $y(t)$  est sensiblement égale à  $-Y$  à l'instant  $t_1$  et  $t_2$ . L'expression  $q_L = e^{-\frac{\pi}{2Q_L}}$  est le facteur de qualité inversant de la résonance LC. La tension piézoélectrique  $v(t)$  atteint ensuite la valeur  $V_p$  à l'instant  $t_3$ .

(i)  $t \in [t_1, t_2]$

Dans cet intervalle, l'interrupteur  $K_c$  est fermé et le circuit LC composé de  $C_p$  et  $L$  est en résonance. Ce temps de résonance est très court. Le courant  $I_L$  qui traverse l'inductance peut être exprimé par l'Eq. 3.23 Suivante :

$$I_L = C_p \frac{dv(t)}{dt} \quad (3.23)$$

En intégrant l'Eq. 3.23 dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$  on aura :

$$\int_{t_1}^{t_2} I_L dt = \int_{t_1}^{t_2} C_p \frac{dv(t)}{dt}$$

On connaît que pendant cet intervalle, la tension piézoélectrique  $v(t)$  passe de  $-V_p$  à  $-V_{dc} + (V_p - V_{dc})q_L$ . L'intégration de la tension  $v(t)$  peut alors effectuer entre ces deux valeurs.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} I_L dt &= \int_{-V_p}^{-V_{dc} + (V_p - V_{dc})q_L} C_p \frac{dv(t)}{dt} = C_p [-V_{dc} + (V_p - V_{dc})q_L - (-V_p)] \\ \int_{t_1}^{t_2} I_L dt &= C_p (V_p - V_{dc})(1 + q_L) \end{aligned} \quad (3.24)$$

(ii)  $t \in [t_2, t_3]$

Pendant cette période, l'interrupteur  $K_c$  est ouvert et le circuit résonnant n'est plus. Le pont de diode est aussi « OFF ». Le courant dans l'inductance  $I_L$  et le courant piézoélectrique  $I_p$  sont égales et qui sont égales à zéros ( $I_L = I_p = 0$ ).

La conservation du courant dans l'Eq. 3.05 peut être toujours utilisée pour déterminer la relation entre  $V_p$  et  $V_{dc}$ .

$$I_p(t) = \theta \dot{y}(t) - C_p \dot{v}(t)$$

En intégrant cette expression dans l'intervalle  $[t_2, t_3]$  on aura :

$$\int_{t_2}^{t_3} I_L(t) dt = \int_{t_2}^{t_3} I_p(t) dt = 0$$

$$\int_{t_2}^{t_3} (\theta \dot{y}(t) - C_p \dot{v}(t)) dt = \int_{t_2}^{t_3} \theta \dot{y}(t) dt - \int_{t_2}^{t_3} C_p \dot{v}(t) dt = 0$$

Or,

Le déplacement  $y(t)$  varie entre l'extremum dans cet intervalle, ça permet de changer les bornes d'intégration de  $y(t)$  à  $[-Y, Y]$ .

$$\int_{t_2}^{t_3} \theta \dot{y}(t) dt = \theta \int_{-Y}^Y y(t) dt = \theta(Y - (-Y)) = 2\theta Y$$

De même pour la tension piézoélectrique  $v(t)$ , sa valeur passe de  $-V_{dc} + (V_P - V_{dc})q_L$  à  $V_P$  dans cet intervalle. L'intégration de la tension  $v(t)$  peut alors effectuer entre ces deux valeurs.

$$\int_{t_2}^{t_3} C_p \dot{v}(t) dt = \int_{t_2}^{t_3} C_p \dot{v}(t) dt = C_p \int_{-V_{dc} + (V_P - V_{dc})q_L}^{V_P} \dot{v}(t) dt$$

$$\int_{t_2}^{t_3} C_p \dot{v}(t) dt = C_p (V_P - (-V_{dc} + (V_P - V_{dc})q_L)) = C_p ((1 - q_L)V_P + (1 + q_L)V_{dc})$$

D'où

$$2\theta Y = C_p ((1 - q_L)V_P + (1 + q_L)V_{dc})$$

$$V_P = \frac{2\theta Y}{C_p(1 - q_L)} - \frac{(1 + q_L)V_{dc}}{(1 - q_L)} \quad (3.25)$$

(iii) Pour la demi-période, c'est-à-dire  $t \in [t_1, t_3]$

Dans cet intervalle, le courant  $I_R$  qui circule dans la résistance  $R$  est égal au courant  $I_L$  qui circule dans l'inductance pendant la résonance.

$$\int_{t_1}^{t_3} I_R = \int_{t_1}^{t_2} I_R + \int_{t_2}^{t_3} I_R = \int_{t_1}^{t_2} (I_L - I_s) + \int_{t_2}^{t_3} I_s$$

$$\int_{t_1}^{t_3} I_R = \int_{t_1}^{t_2} I_L$$

Or  $I_R = \frac{V_{dc}}{R}$  et l'intervalle  $[t_1, t_3]$  est égale à un demi période. Ce qui donne :

$$\int_{t_1}^{t_3} I_R = \int_0^{T/2} I_R dt = \frac{V_{dc}}{R} \frac{T}{2} = \frac{V_{dc} 2\pi/\omega}{R2} = \frac{\pi}{R\omega} V_{dc}$$

Et d'après l'Eq. 3.24 et l'Eq. 3.24, on peut avoir l'expression de  $V_{dc}$ :

$$\frac{\pi}{R\omega} V_{dc} = C_p(V_P - V_{dc})(1 + q_L)$$

$$\frac{\pi}{R\omega} V_{dc} = C_p \left( \frac{2\theta Y}{C_p(1 - q_L)} - \frac{(1 + q_L)V_{dc}}{(1 - q_L)} - V_{dc} \right) (1 + q_L)$$

D'où

$$V_{dc} = \frac{2\theta\omega R(1 + q_L)}{\pi(1 - q_L) + (1 + q_L)2C_p\omega R} Y \quad (3.25)$$

◆

De la même méthode que celle utilisée pour la technique parallèle, on peut utiliser l'Eq. 3.23 dans l'équation mécanique de la structure pour obtenir l'expression du déplacement normalisée. Ce qui donne :

$$[-\omega^2 + j2\zeta_h\omega_h\omega + \omega_h^2] + \frac{\theta}{M_T} \frac{2\theta\omega R(1 + q_L)}{(\pi(1 - q_L) + (1 + q_L)2C_p\omega R)} = -\frac{\ddot{Y}_b}{Y}$$

$$\frac{Y}{-M_T\ddot{Y}_b} = \frac{(\pi(1 - q_L) + (1 + q_L)2C_p\omega R)}{\frac{K}{\omega_h^2} [-\omega^2 + j2\zeta_h\omega_h\omega + \omega_h^2] (\pi(1 - q_L) + (1 + q_L)2C_p\omega R) + 2\theta^2 R\omega(1 + q_L)}$$

Avec la même méthode que pour la normalisation dans la technique en parallèle, on aura l'expression du déplacement normalisée par rapport à la force d'entrée  $M_T\ddot{Y}_b$  :

$$\left| \frac{y}{M_T\ddot{Y}_b} \right| = \frac{1}{k} * \frac{(\pi(1 - q_L) + (1 + q_L)2\beta\Phi_h)}{\sqrt{A + b}} \quad (3.26)$$

Avec

$$\mathbf{A} = [2\zeta_h\Phi_h(\pi(1 - q_L) + (1 + q_L)2\beta\Phi_h)]^2$$

$$\mathbf{B} = [\pi(1 - q_L) + 2\Phi_h\beta(1 + q_L)(1 + k_e^2) - \pi(1 - q_L)\Phi_h^2 - (1 + q_L)2\beta\Phi_h^3]^2$$

L'expression normalisée de la tension peut être ensuite déduite à partir des Eqs. 3.24 et 3.26. En utilisant les paramètres normalisés  $\beta = \omega_h C_p R$  et  $\Phi_h = \frac{\omega}{\omega_h}$ , l'équation 3.23 peut être exprimée par :

$$V_{dc} = \frac{2\theta\omega R(1 + q_L)}{\pi(1 - q_L) + (1 + q_L)2C_p\omega R} Y$$

$$\frac{V}{-M_T \ddot{Y}_b} = \frac{\theta}{\theta K} \frac{\theta}{C_p} \frac{2(1+q_L)\beta\Phi_h}{(\pi(1-q_L) + (1+q_L)2\beta\Phi_h)^*} \frac{(\pi(1-q_L) + (1+q_L)2\beta\Phi_h)}{j2\zeta_h\Phi_h(\pi(1-q_L) + (1+q_L)2\beta\Phi_h)}$$

$$-\pi(1-q_L)\Phi_h^2 - (1+q_L)2\beta\Phi_h^3 + \pi(1-q_L) + 2\Phi_h\beta(1+q_L)(1+k_e^2)$$

D'où :

$$\left| \frac{V}{M_T \ddot{Y}_b} \right| = \frac{1}{|\theta|} * \frac{2(1+q_L)k_e^2\beta\Phi_h}{\sqrt{A+B}} \quad (3.27)$$

Avec

$$\mathbf{A} = [2\zeta_h\Phi_h(\pi(1-q_L) + (1+q_L)2\beta\Phi_h)]^2$$

$$\mathbf{B} = [\pi(1-q_L) + 2\Phi_h\beta(1+q_L)(1+k_e^2) - \pi(1-q_L)\Phi_h^2 - (1+q_L)2\beta\Phi_h^3]^2$$

La puissance récupérée est donnée par la formule:

$$P = \frac{V_{ac}^2}{R}$$

$$\frac{V^2}{R} = \frac{4}{R} \frac{(1+q_L)^2\theta\omega R\theta\omega R}{(\pi(1-q_L) + (1+q_L)2C_p\omega R)^2} *$$

$$\left( \frac{1}{K} \frac{(-M_T \ddot{Y}_b)(\pi(1-q_L) + (1+q_L)2C_p\omega R)}{j2\zeta_h\Phi_h(\pi + (1-q_L)\beta\Phi_h) + \pi + (1-q_L + 2k_e^2)\beta\Phi_h - \Phi_h^2\pi - (1-q_L)\beta\Phi_h^3} \right)^2$$

D'où l'expression de la puissance normalisée :

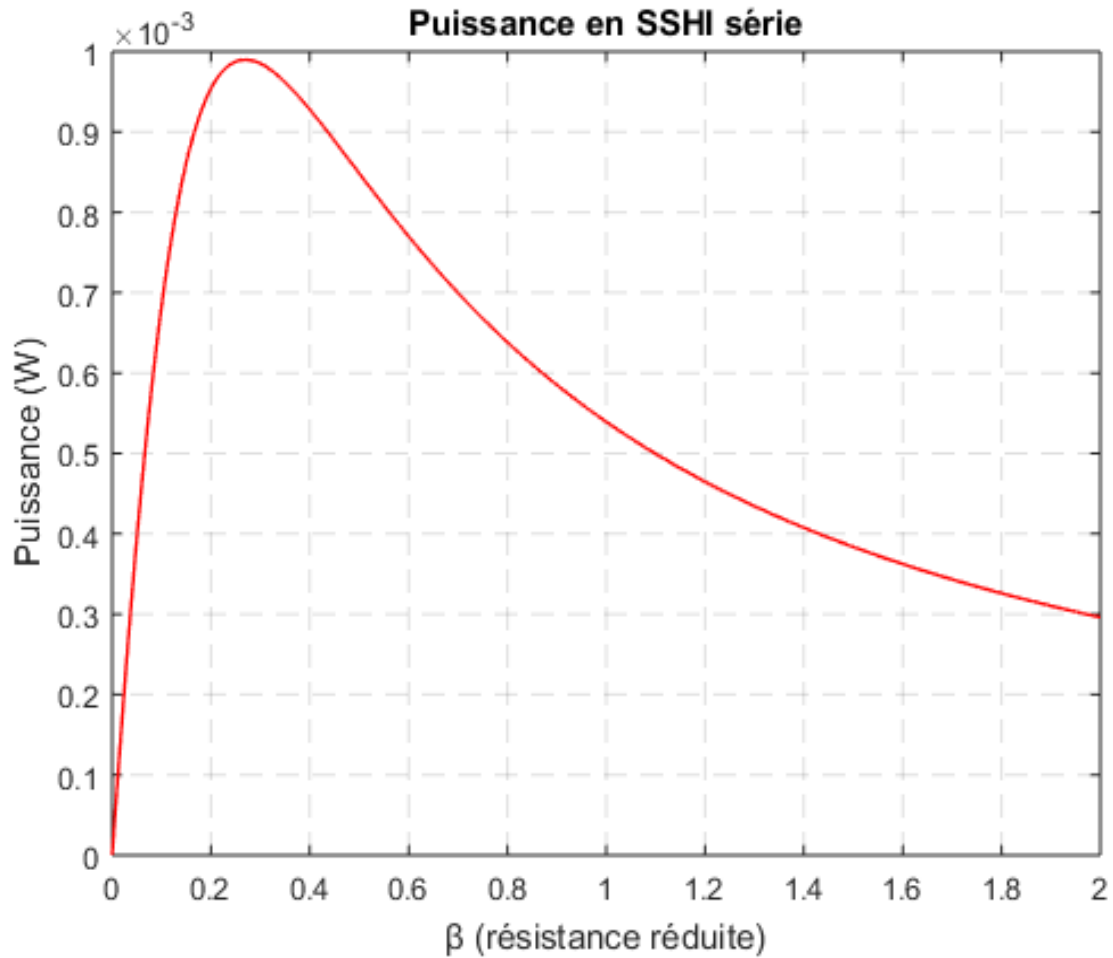
$$\left| \frac{P}{(M_T \ddot{Y}_b)^2} \right| = \frac{\omega_h}{k} * \frac{4(1+q_L)^2\beta k_e^2\Phi_h^2}{A+B} \quad (3.28)$$

Avec

$$\mathbf{A} = [2\zeta_h\Phi_h(\pi(1-q_L) + (1+q_L)2\beta\Phi_h)]^2$$

$$\mathbf{B} = [\pi(1-q_L) + 2\Phi_h\beta(1+q_L)(1+k_e^2) - \pi(1-q_L)\Phi_h^2 - (1+q_L)2\beta\Phi_h^3]^2$$

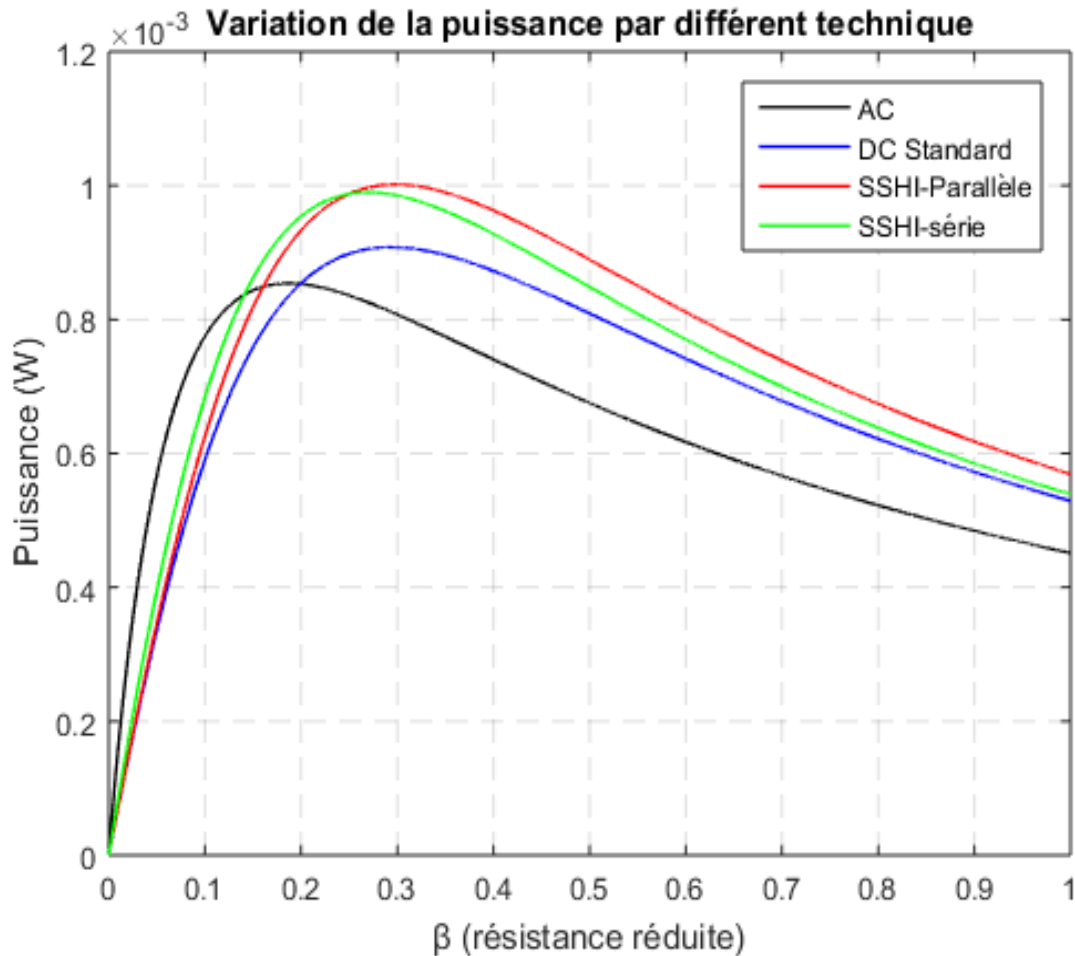
La variation de la puissance en fonction de la résistance réduite  $\beta$  est présentée sur la **Fig. 3.22**. La structure est supposée exciter en une fréquence de résonance. On remarque que la puissance admet un maximum pour une certaine valeur de la résistance.



**Figure 3.22 :** Variation de la puissance en fonction de la résistance réduite  $\beta$  pour le technique SSHI série ( $Q_L = 3.5$ ).

#### 3.8.4 Comparaison de la puissance obtenu par les diverses techniques développées

La **figure 3.23** illustre la variation de la puissance selon la technique utilisée en mode résonance. Il y a la récupération en mode alternative et les trois méthodes de récupération en régime statique (technique standard, SSHI parallèle et SSHI continue).



**Figure 3.23 :** Variation de la puissance en fonction de la résistance réduite  $\beta$  pour différent technique.

La **figure 3.23** montre les différents optimums de chaque technique d'extraction. On constate que c'est le technique SSHI parallèle qui donne le meilleur résultat suivi de la technique SSHI série. Puis il y a la technique standard et l'extraction sinusoïdale. Concernant la résistance de charge, on constate que ça passe dans le sens inverse. C'est-à-dire que la résistance optimale pour maximiser la puissance est plus faible dans le cas d'une extraction alternative. Elle est un peu élevée pour la technique SSHI parallèle.

### 3.9 Conclusion

Dans ce chapitre un modèle de conversion d'énergie mécanique en énergie électrique a été développé. Le module piézoélectrique choisi a une surface de 10 cm x 20 cm et composé d'une masse sismique et d'autre matériau qui protège l'élément piézoélectrique. Le PVDF est choisi pour construire le module avec un matériau en silicium. Il y a un faible couplage électromécanique par rapport à des matériaux piézoélectriques mais on l'a choisi à cause de sa bonne flexibilité et

surtout à sa haute stabilité. Il présente une très faible absorption d'humidité (inférieur à 0.02%) ainsi qu'une très bonne résistance aux agressions extérieures. Il correspond mieux au système hôte visé qui est le pont. Une étude analytique de la conversion d'énergie vibratoire en énergie électrique par l'intermédiaire du modèle est aussi faite dans ce chapitre. L'étude est faite à partir de l'équation linéaire de la piézoélectricité et qui conduit à l'équation du couple électromécanique de la structure. La transformée de Laplace est utilisée pour résoudre l'équation du couple électromécanique. Des expressions normalisées du déplacement relatif du système, la tension générée aux bornes de l'élément piézoélectrique et la puissance extraite sont obtenues dans le mode alternatif. L'optimisation de la puissance extraite permet d'afficher deux extremums dans sa valeur. C'est la résonnance et l'antirésonance qui correspondent respectivement à un court-circuit et un circuit ouvert. Comme les énergies obtenues dans le domaine alternatif ne sont pas utilisables directement dans le domaine de l'électronique, des autres méthodes d'extraction en continue sont proposées. Il s'agit de la méthode d'extraction en circuit standard et la méthode de circuit non linéaire SSHI (synchronized switch harvesting on inductor) parallèle et série. L'étude à la résonnance a montré que chaque méthode a son propre résultat. Après la comparaison, on remarque que c'est le technique SSHI parallèle qui donne le meilleur résultat suivi de SSHI en série. On en déduit donc que c'est le circuit non linéaire qui est meilleur par rapport au circuit standard dans le domaine d'extraction d'énergie continue.

Le modèle développé peut être utilisé dans une structure vibrante quelconque. Un exemple d'application de ce modèle va être traité dans le chapitre suivant.



## **CHAPITRE 4**

# **MODELISATION D'UN RECUPERATEUR D'ENERGIE PAR UN MATERIAU PIEZOELECTRIQUE ISSUE DE LA VIBRATION D'UN PONT**

### **4.1 Introduction**

Le pont est une infrastructure utilisée pour franchir un obstacle entre deux points. Il existe plusieurs types de pont : pont en bois, en acier ou en béton. Dans ce travail, on s'intéresse aux ponts en béton armé car c'est ce qu'on trouve, en majorité, les routes nationales. On va consacrer le travail aux vibrations ambiantes de ces ponts dues au passage d'une charge mobile. Les trafics tels que les transports des voyageurs, des marchandises, des matériaux et des carburants sur ces routes sont très épais, surtout la nuit. La plupart de ces véhicules ont une préférence pour les voyages de nuit à cause de plusieurs raisons comme diminution de l'entretien pneumatique pendant le voyage de nuit par rapport au voyage du jour. Compte tenu de ces nombreux trafics pendant la nuit, on pense à convertir la vibration d'un pont en électricité pour éclairer les ponts et afficher des alertes aux chauffeurs. Cette investigation peut aider à réduire les risques d'accident pendant le trafic de nuit. La conversion d'énergie vibratoire en énergie électrique avec un matériau piézoélectrique est une des meilleures solutions pour arriver à cette fin. Le chapitre précédent a montré qu'à l'aide d'une structure vibrante, on peut récupérer de l'énergie électrique à partir d'un module piézoélectrique. On va considérer la vibration du pont comme une source d'énergie vibratoire qui va être transformée en énergie électrique. L'énergie transformée peut être récupérée, traitée et stockée par un circuit électrique. Différents modules de base de récupération d'énergie ont été cités dans le chapitre précédent et un modèle a été développé. Dans ce chapitre, on va utiliser un module piézoélectrique à l'échelle réelle. C'est-à-dire qu'on va coller le module à une structure vibrante qui est le pont en béton armé. L'étude du comportement du pont sous une charge roulante à vitesse constante sera effectuée en premier lieu. Ceci va permettre de caractériser la vibration induite du pont ou plus précisément la déflexion du pont. En deuxième lieu, le module d'un récupérateur d'énergie vibratoire par un matériau piézoélectrique est rappelé. Les deux approches sont ensuite combinées et étudiées mathématiquement. Des dimensionnements et des calculs sont effectués pour avoir une idée sur la quantité d'énergie récupérable.

## **4.2 Réponse d'un pont sous une charge roulante avec un déplacement constant**

L'étude de la réponse des tabliers des ponts sous charge roulante a fait l'objet de plusieurs études et recherches autant théoriques qu'expérimentales.

### ***4.2.1 Etat de l'art sur l'étude d'un pont sous charge roulante***

Chatterjee et Surana ont déjà commencé à étudier le comportement dynamique des ponts continus à plusieurs travées sous une charge de véhicule en mouvement en 1994 [4.01]. Ils ont obtenu la réponse du pont dans le domaine temporel en utilisant une procédure itérative avec la prise en compte de la non-linéarité de la force interactive pont-véhicule. Ils ont fait une teste numérique sur un tablier à trois travées dont la longueur de la travée au milieu est égale à 50 m et les deux autres à 30 m. Une maximum de déflexion d'ordre de 4 mm est observée au milieu de chaque travée pour une véhicule en mouvement avec une vitesse de 54 km/h.

En 2008, T. C. Chen a fait l'estimation de la force mobile qui passe au-dessus d'un pont à l'aide de la méthode d'estimation adaptative des entrées [4.02]. C'est ce qu'on appelle méthode inverse. Les forces mobiles agissant sur le pont peuvent être estimées à partir des réponses dynamiques mesurées. Il a utilisé le filtre de Kalman et l'algorithme des moindres carrées récursifs.

Deux méthodes pour déterminer la déflexion d'un tablier de pont dalle sous charge roulante ont été proposées par B. Bilal et B. Mahmoud en 2011 [4.03]. La première méthode se base sur une approche simplifiée en utilisant l'équation dynamique d'une plaque mince sous un chargement mobile modélisé par une masse et un ressort. La deuxième méthode est celle des éléments finis utilisant l'analyse temporelle (pas à pas) par intégration directe pour la résolution de l'équation dynamique obtenue. Les résultats obtenus par les deux méthodes sont comparés. Ils ont constaté que la déflexion maximale du tablier est au milieu et la valeur maximale entre les deux méthodes est donnée par la méthode des éléments finis.

Une analyse aléatoire de la vibration d'un pont sur l'interaction dynamique de pont véhicule due aux inégalités de la route a été faite par G. Lombaert et P. C. Joël en 2013. Ils ont utilisé la transformée de Fourier pour faire une étude dans le domaine fréquentiel. Pour les calculs, le pont est simplement considéré comme la poutre d'Euler-Bernoulli [4.04]. La procédure de résolution des caractéristiques statistiques de second ordre de la réponse du pont est validée au moyen de simulations de Monte Carlo. Dans cette même année, H. Ouyang a présenté une étude bibliographique des études de réponse dynamique de plusieurs types de ponts sous différentes charges roulantes. La majorité de ces méthodes et expérimentations donnent essentiellement la charge à partir de la réponse c'est ce qui est communément appelé problème inverse [4.05].

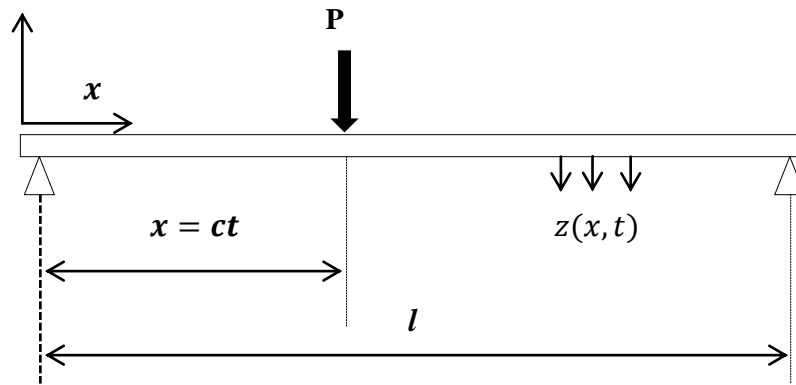
En 2016, T. Rahman et M. Ahmed ont fait l'analyse d'impact dynamique sur l'interaction d'un système pont véhicule [4.06]. Ils ont considéré un pont à une travée dans leurs études. Un module à deux dimensions a été développé pour étudier l'influence de la portée du pont sur l'interaction pont véhicule à l'aide de la méthode de superposition de modale. La théorie poutre d'Euler-Bernoulli a été adoptée pour développer le modèle cinétique du sous-système du pont et le module de véhicule à deux essieux. Deux valeurs de longueur du pont ont été choisies pour l'analyse, à savoir 60 m et 80 m. Les effets d'interaction ont été étudiés pour quatre vitesses de véhicule différentes, à savoir 50 km/h, 70 km/h, 100 km/h et 120 km/h. Le résultat de la simulation montre que la déflexion du pont est maximale quand le véhicule se situe avant ou après le milieu de la travée. En cette même année, T. Vaidya et A. Chatterjee ont fait l'étude de la vibration du pont routier sous un véhicule en mouvement [4.07]. Une étude comparative entre un point de contact unique et deux modules de point de contact est effectuée. La réponse de la déflexion à mi- portée est calculée par l'intégration numérique des équations de mouvement et est caractérisée pour différentes distances entre les roues à différentes vitesses du véhicule. Il montre que, pour la même masse et la même vitesse du véhicule, l'augmentation de la distance entre les deux roues réduit les maximums de déflexion.

Dans le cas de ce travail, on s'intéresse au problème direct à savoir la détermination de la déformation d'un tablier de pont en béton armé soumis à une charge roulante. Le problème est d'abord formulé avec les hypothèses nécessaires, puis résolu selon deux perspectives: (i) Domaine temporel et (ii) Domaine fréquentiel.

#### **4.2.2 Formulation du problème**

D'une part, un véhicule est considéré comme une charge mobile qui parcourt un pont de gauche vers la droite avec une vitesse constante  $c$ . Un seul point de contact est considéré pour le système pont-véhicule. Ce qui veut dire qu'à chaque point  $x$  et à un instant  $t$ , la charge mobile va exercer une force constante  $P$  sur le pont.

D'autre part, le pont est considéré comme une plaque mince de longueur  $l$ . Ce qui est illustré par la **Fig. 4.01**. De même, à tout instant  $t$ , en tout point  $x$ , la mesure de la déflexion du pont à partir du coin gauche du pont est notée par  $z(x, t)$ . La mesure est faite à partir de la position d'équilibre avec le poids propre du système. Le pont est caractérisé par les propriétés suivantes: module d'Young du tablier  $E_Y$ , moment d'inertie constant de la surface du tablier  $J$ , masse par unité de longueur de la surface du tablier  $\mu$ , fréquence propre du tablier pour le mode  $n$   $\omega_n$ , le coefficient d'amortissement du tablier  $\zeta_n$  et  $c_V$  est la résistance visqueuse de la vitesse verticale.



**Figure 4.01 :** *Modèle d'un pont sous une force constante  $P$ .*

### 4.2.3 Hypothèses

Les hypothèses suivantes sont adoptées pour le modèle considéré [4.08] [4.09].

- (i) Le comportement de la plaque décrit par l'équation différentielle de Bernoulli-Euler déduite de l'hypothèse que la théorie des petites déformations, la loi de Hooke, l'hypothèse de Navier et le principe de Saint-Venant peuvent être appliquées. La plaque a une section constante et une masse constante par unité de longueur.
- (ii) Un seul véhicule en mouvement à la fois est autorisé à traverser le pont.
- (iii) La masse de la charge mobile est plus petite par rapport à la masse de la poutre. Cela signifie que seul l'effet gravitationnel de la charge est considéré tandis que l'effet d'inertie est négligé.
- (iv) La charge se déplace à vitesse constante, de la gauche vers la droite.
- (v) L'amortissement de la plaque est proportionnel à la vitesse de vibration qui est du type Rayleigh.
- (vi) Le calcul est effectué pour une simple plaque, c'est-à-dire une plaque avec une déflexion nulle et un moment de flexion nul aux deux extrémités. En outre, au moment de l'arrivée de la charge mobile, la plaque est au repos.

A partir de ces hypothèses, le déplacement ou déflexion, noté  $z(x, t)$  à tout instant  $t$ , en tout point  $x$  du pont est donné par l'équation [4.04] :

$$E_Y J \frac{\partial^4 z(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + c_v \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} = p(x, t) \quad (4.01)$$

Dans le cas d'une charge « ponctuelle » mobile d'une durée donnée, qui roule avec une vitesse constante  $c$ , la deuxième partie de l'**Eq.(4.01)** peut s'écrire :

$$p(x, t) = \begin{cases} \delta(x - ct)P, & 0 \leq t \leq t_d \\ 0, & t_d > 0 \end{cases}$$

où,  $t_d = l/c$  est le temps nécessaire à la charge pour traverser le pont de longueur  $l$ .

Les conditions aux limites sont :

$$z(0, t) = 0;$$

$$z(l, t) = 0;$$

$$\text{A l'instant } t \text{ et à une position } x = 0, \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = 0;$$

$$\text{A l'instant } t \text{ et à une position } x = l, \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = 0;$$

Les conditions initiales sont :

$$z(x, 0) = 0;$$

$$\text{A l'instant } t \text{ et à une position } x = 0, \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} = 0;$$

$$\text{A l'instant } t \text{ et à une position } x = l, \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} = 0;$$

#### **4.2.4 Solution du problème**

Pour un système oscillatoire à plusieurs degrés de liberté, un mode normal ou mode propre d'oscillation est une forme spatiale selon laquelle un système peut osciller après avoir été perturbé au voisinage de son état d'équilibre stable. Une fréquence naturelle de vibration est alors associée à cette forme. Tout objet physique, comme le pont et les bâtiments possède un certain nombre, parfois infini, de modes normaux de vibration qui dépendent de sa structure et des conditions aux limites qui lui sont imposées. Le nombre de modes normaux est égal à celui des degrés de liberté du système. Le mouvement le plus général d'un système est une superposition de modes normaux. Le terme « normal » indique que chacun de ces modes peut vibrer indépendamment des autres, c'est-à-dire que l'excitation du système dans un mode donné ne provoquera pas l'excitation des autres modes. En d'autres termes, la décomposition en modes normaux de vibration permet de considérer le système comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants dans l'étude de son mouvement au voisinage de sa position d'équilibre stable. L'**équation 4.01** qui est

l'équation gouvernante de la vibration libre d'un tablier peut être résolue à partir de la superposition de modes normaux. La solution peut être représentée par la forme de série suivante [4.09] [4.10] [4.11].

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (4.02)$$

Où  $n$  est le nombre de mode normaux

$\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$  est la forme de  $n$ ème mode de vibration du tablier qui satisfait les conditions aux limites.

$Z_n(t)$  est la  $n$ ème amplitude modale.

L'intégration de la solution (4.02) dans l'Eq. (4.01) donne l'équation suivante :

$$\begin{aligned} E_Y J \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{Z}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + c_V \sum_{n=1}^{\infty} \dot{Z}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ = \delta(x - ct)P \end{aligned}$$

*Démonstration :*

♣

$$\begin{aligned} E_Y J \frac{\partial^4 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\}}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\}}{\partial t^2} \\ + c_V \frac{\partial \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\}}{\partial t} = \delta(x - ct)P \end{aligned}$$

On sait que :  $\frac{d}{dx} \sin(\lambda x) = \lambda \cos(\lambda x)$  et  $\frac{d}{dx} \cos(\lambda x) = -\lambda \sin(\lambda x)$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\}}{\partial x^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) * \left(\frac{n\pi}{l}\right) \left(\frac{n\pi}{l}\right) \left(\frac{n\pi}{l}\right) \left(\frac{n\pi}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ \frac{\partial^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\}}{\partial t^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \frac{\partial^2 \{Z_n(t)\}}{\partial t^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \ddot{Z}_n(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\}}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \frac{\partial \{Z_n(t)\}}{\partial t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \dot{Z}_n(t)\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}E_Y J \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{Z}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ + c_V \sum_{n=1}^{\infty} \dot{Z}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \delta(x - ct)P\end{aligned}\quad (4.03)$$

♦

En multipliant par  $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$  l'équation (4.03) et en intégrant sur un intervalle de 0 à  $l$ , on obtient l'équation suivante [4.12] :

$$E_Y J Z_m(t) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} + \mu \ddot{Z}_m(t) \frac{l}{2} + c_V \dot{Z}_m(t) \frac{l}{2} = P \sin\left(\frac{m\pi ct}{l}\right)$$

*Démonstration :*

♣

En multipliant par  $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$  l'équation (4.03) et en intégrant sur un intervalle de 0 à  $l$ , on a :

$$\begin{aligned}\int_0^l \left( E_Y J \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{Z}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right. \\ \left. + c_V \sum_{n=1}^{\infty} \dot{Z}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \int_0^l \delta(x - ct) P \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx\end{aligned}$$

D'après la propriété de distribution de l'intégrale par rapport à l'addition, on a :

$$\begin{aligned}E_Y J \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \\ + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{Z}_n(t) \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \\ + c_p \sum_{n=1}^{\infty} \dot{Z}_n(t) \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \\ = \int_0^l \delta(x - ct) P \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx\end{aligned}\quad (4.04)$$

En utilisant le résultat suivant [4.12] qui dit que :

$$\int_{-l}^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = 2 \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq n \\ l & \text{pour } m = n \end{cases}$$

Qui donne:

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq n \\ \frac{l}{2} & \text{pour } m = n \end{cases}$$

En introduisant le résultat dans l'**Eq. 4.04**, on aura :

$$E_Y J Z_m(t) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} + \mu \ddot{Z}_m(t) \frac{l}{2} + c_V \dot{Z}_m(t) \frac{l}{2} = \int_0^l \delta(x - ct) P \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx$$

Pour le deuxième membre, on sait que  $x = ct$ , ce qui donne :

$$\int_0^l \delta(x - ct) P \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \int_0^l \delta(0) P \sin\left(\frac{m\pi ct}{l}\right) dx = P \sin\left(\frac{m\pi ct}{l}\right)$$

D'où l'équation :

$$E_Y J Z_m(t) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} + \mu \ddot{Z}_m(t) \frac{l}{2} + c_V \dot{Z}_m(t) \frac{l}{2} = P \sin\left(\frac{m\pi ct}{l}\right) \quad (4.04)$$

♦

L'équation 4.04 peut être encore écrite par :

$$\ddot{Z}_m(t) + 2\zeta_m \omega_m \dot{Z}_m(t) + \omega_m^2 Z_m(t) = f_m(t)$$

*Démonstration :*

♣

En divisant par  $\mu$  les deux termes de l'équation 4.05, on a:

$$\frac{E_Y J}{\mu} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} Z_m(t) + \frac{\mu}{\mu} \frac{l}{2} \ddot{Z}_m(t) + \frac{1}{\mu} \frac{2\omega_m}{2\omega_m} c_V \frac{l}{2} \dot{Z}_m(t) = \frac{P}{\mu} \sin\left(\frac{m\pi ct}{l}\right)$$

si  $\phi$  est la fréquence d'excitation donnée par :

$$\phi = \frac{\pi c}{l}$$

et  $\omega_m^2$  la fréquence naturelle donnée par

$$\omega_m^2 = \frac{E_Y J}{\mu} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4$$

Et le coefficient d'amortissement est :

$$\zeta_m = \frac{c_V}{2\mu\omega_m}$$

L'équation devient :



$$\omega_m^2 \frac{l}{2} Z_m(t) + \frac{l}{2} \ddot{Z}_m(t) + 2\zeta_m \omega_m \frac{l}{2} \dot{Z}_m(t) = \frac{P}{\mu} \sin(m\phi t)$$

En réarrangeant l'équation et en remplaçant  $m$  par  $n$ , on aura l'équation finale :

$$\ddot{Z}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{Z}_n(t) + \omega_n^2 Z_n(t) = \frac{2P}{\mu l} \sin(n\phi t) = f_n(t) \quad (4.06)$$

◆

L'équation 4.06 est valable pour la période de temps prise par la force pour se déplacer d'une extrémité à l'autre, c'est-à-dire  $0 < t < T$ . Pour  $t=T$ , c'est-à-dire lorsque la force quitte le pont, il n'y a pas de fonction de « fore » agissant sur le pont. Ensuite l'Eq. (4.06) devient :

$$\ddot{Z}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{Z}_n(t) + \omega_n^2 Z_n(t) = 0 \quad (4.07)$$

Il est nécessaire ensuite de résoudre cette équation différentielle découplées en  $Z_n(t)$  où apparaît au second membre l'effort imposé projeté dans la base modale.

#### 4.2.5 Solution dans le domaine fréquentiel

La solution de l'Eq. 4.06 dans le domaine fréquentiel est exprimée par :

$$Z(\omega) = \frac{1}{(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} \left( \frac{e^{j(n\phi - \omega)T}}{j(n\phi - \omega)} + \frac{e^{j(n\phi + \omega)T}}{j(n\phi + \omega)} - \frac{1}{j(n\phi - \omega)} + \frac{1}{j(n\phi + \omega)} \right)$$

*Démonstration :*

♣

La transformée de Laplace de l'Eq. 4.06 donne [4.12]:

$$(p^2 Z_n(p) - p Z_n(0) - \dot{Z}_n(0)) + 2\zeta_n \omega_n (p Z_n(p) - Z_n(0)) + \omega_n^2 Z_n(p) = F_n(p)$$

La prise en considération des conditions aux limites:

$$Z_n(0) = \dot{Z}_n(0) = 0$$

On obtient :

$$(p^2 + 2\zeta_n \omega_n p + \omega_n^2) Z_n(p) = F_n(p)$$

$$Z_n(p) = \frac{1}{(p^2 + 2\zeta_n \omega_n p + \omega_n^2)} * F_n(p)$$

Avec  $p = j\omega$ , on aura la forme de Fourier

$$Z(\omega) = \frac{1}{(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)} * F_n(\omega)$$

La transformée de Fourier  $F_n(\omega)$  du deuxième membre de l'équation 4.06 est :

$$\begin{aligned}
F_n(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f_n(t) e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T \frac{2P}{l\mu} \sin(n\phi t) e^{-j\omega t} dt
\end{aligned}$$

La fonction sinus s'exprime à l'aide de l'exponentielle complexe par les formules d'Euler.

$$\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

$F_n(\omega)$  devient :

$$\begin{aligned}
F_n(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \int_0^T \frac{1}{2j} (e^{jn\phi t} - e^{-jn\phi t}) e^{-j\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} \int_0^T (e^{j(n\phi - \omega)t} - e^{-j(n\phi + \omega)t}) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} \left( \frac{e^{j(n\phi - \omega)T}}{j(n\phi - \omega)} - \frac{1}{j(n\phi - \omega)} + \frac{e^{-j(n\phi + \omega)T}}{j(n\phi + \omega)} - \frac{1}{j(n\phi + \omega)} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} \left( \frac{e^{j(n\phi - \omega)T}}{j(n\phi - \omega)} + \frac{e^{-j(n\phi + \omega)T}}{j(n\phi + \omega)} - \frac{1}{j(n\phi - \omega)} - \frac{1}{j(n\phi + \omega)} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, la transformée de Fourier de l'équation (4.06) donne,

$$\begin{aligned}
Z(\omega) &= \frac{1}{(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)} \\
&\quad * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} \left( \frac{e^{j(n\phi - \omega)T}}{j(n\phi - \omega)} + \frac{e^{-j(n\phi + \omega)T}}{j(n\phi + \omega)} - \frac{1}{j(n\phi - \omega)} - \frac{1}{j(n\phi + \omega)} \right)
\end{aligned} \tag{4.08}$$

◆

Rappelons que la solution de l'équation de déflexion du pont est donnée par l'**Eq. 4.02**. Sa transformée de Fourier est donnée par :

$$z(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

En introduisant l'**Eq. 4.08** dans cette dernière équation, on aura la solution de déplacement du pont dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned}
z(x, \omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} \\
&\quad * \left( \frac{e^{j(n\phi - \omega)T}}{j(n\phi - \omega)} + \frac{e^{-j(n\phi + \omega)T}}{j(n\phi + \omega)} - \frac{1}{j(n\phi - \omega)} - \frac{1}{j(n\phi + \omega)} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)
\end{aligned} \tag{4.09}$$

#### 4.2.6 Solution dans le domaine temporel

L'équation 4.06 est une équation différentielle du second ordre avec second membre. Elle est exprimée par :

$$\ddot{Z}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n \dot{Z}_n(t) + \omega_n^2 Z_n(t) = \frac{2P}{\mu l} \sin(n\phi t)$$

Pour résoudre cette équation différentielle, il faut:

- Résoudre l'équation sans second membre appelée équation homogène
- Déterminer la solution particulière de l'équation avec second membre
- Déterminer la solution générale qui est la somme de ces deux solutions (solution homogène + solution particulière)
- En dernier lieu, afin de résoudre complètement l'équation différentielle, il convient d'utiliser les conditions initiales pour déterminer les constantes issues de la résolution de l'équation sans second membre.

##### 4.2.6.1 Solution complémentaire homogène

La solution complémentaire (transitoire / homogène) de l'Eq. 4.06 est dérivée de l'expression,

$$\ddot{Z}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n \dot{Z}_n(t) + \omega_n^2 Z_n(t) = 0 \quad (4.10)$$

Soit,  $Z_n(t) = ae^{\lambda t}$  la solution de l'Eq 4.10. En substituant cette solution dans l'Eq. 4.10, on a:

$$(\lambda^2 ae^{\lambda t} + 2\zeta_n\omega_n \lambda ae^{\lambda t} + \omega_n^2 ae^{\lambda t}) = 0$$

$$(\lambda^2 + 2\zeta_n\omega_n \lambda + \omega_n^2) ae^{\lambda t} = 0$$

Comme la fonction exponentielle n'est jamais nulle, pour avoir une solution il faut donc que :

$$\lambda^2 + 2\zeta_n\omega_n \lambda + \omega_n^2 = 0$$

Cette équation est l'équation caractéristique (ou auxiliaire) associée à l'équation homogène. La solution peut être :

$$\lambda = -\zeta_n\omega_n \pm \sqrt{(\zeta_n\omega_n)^2 - \omega_n^2}$$

En remplaçant  $\zeta_n\omega_n = \omega_b$ , la solution devient :

$$\lambda = -\omega_b \pm \sqrt{(\omega_b)^2 - \omega_n^2}$$

Le système peut avoir trois types :

- Sur amorti,  $\omega_b > \omega_n$
- Amortissement critique,  $\omega_b = \omega_n$
- Sous amorti,  $\omega_b < \omega_n$

En Considérant la condition sous amortie, on a :

$$\lambda = -\omega_b \pm j\sqrt{\omega_n^2 - \omega_b^2}$$

La solution complémentaire est :

$$Z_n^c(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$Z_n^c(t) = a_1 e^{(-\omega_b + j\sqrt{\omega_n^2 - \omega_b^2})t} + a_2 e^{(-\omega_b - j\sqrt{\omega_n^2 - \omega_b^2})t}$$

$$Z_n^c(t) = e^{-\omega_b t} \left[ (a_1 + a_2) \cos\left(\sqrt{\omega_n^2 - \omega_b^2} t\right) + (a_1 - a_2) \sin\left(\sqrt{\omega_n^2 - \omega_b^2} t\right) \right]$$

$$Z_n^c(t) = e^{-\omega_b t} \left[ A_1 \cos\left(\sqrt{\omega_n^2 - \omega_b^2} t\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\omega_n^2 - \omega_b^2} t\right) \right]$$

Avec  $\omega_{dn} = \sqrt{\omega_n^2 - \omega_b^2} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}$  est la fréquence naturelle amortie du nième mode.

On aura la solution :

$$Z_n^c(t) = e^{-\omega_b t} [A_1 \cos \omega_{dn} t + A_2 \sin \omega_{dn} t] \quad (4.11)$$

#### 4.2.6.2 Solution particulière

Pour résoudre l'équation complète, il faut trouver une solution particulière que l'on ajoutera à la solution de l'équation homogène. Pour trouver la solution particulière, on a choisi de deviner la structure grâce à la forme du second membre. Soit  $Z_n^p(t)$  la solution, elle est définie par :

$$Z_n^p(t) = Z \sin(n\phi t - \theta)$$

$$Z_n^p(t) = Z(\sin n\phi t \cos \theta - \cos n\phi t \sin \theta)$$

Et posant,

$$Z \cos(\theta) = Z_1$$

$$Z \sin(\theta) = Z_2$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{Z_2}{Z_1}$$

On peut écrire alors :

$$Z_n^p(t) = Z_1 \sin n\phi t - Z_2 \cos n\phi t$$

$$\dot{Z}_n^p(t) = n\Omega(Z_1 \cos n\phi t + Z_2 \sin n\phi t)$$

$$\ddot{Z}_n^p(t) = (n\Omega)^2 [-Z_1 \sin n\phi t + Z_2 \cos n\phi t]$$

Cette solution particulière devrait vérifier l'Eq. 4.06. Ce qui va donner :

$$\begin{aligned} (n\Omega)^2 [-Z_1 \sin n\phi t + Z_2 \cos n\phi t] + 2\omega_b [n\Omega(Z_1 \cos n\phi t + Z_2 \sin n\phi t)] \\ + \omega_m^2 [Z_1 \sin n\phi t - Z_2 \cos n\phi t] = \frac{2P}{l\mu} \sin(n\Omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ -Z_1(n\phi)^2 + 2\omega_b n\phi Z_2 + \omega_n^2 Z_1 - \frac{2P}{l\mu} \right] \sin n\phi t \\ & + [(n\phi)^2 Z_2 + 2\omega_b n\phi Z_1 - \omega_n^2 Z_2] \cos n\phi t = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Puisque l'Eq. 4.12 est vraie pour tout t, l'équivalence des termes sinus et cosinus des deux côtés donne :

$$[\omega_n^2 - (n\phi)^2] Z_1 + 2\omega_b n\phi Z_2 = \frac{2P}{l\mu}$$

$$2\omega_b n\phi Z_1 + [(n\phi)^2 - \omega_n^2] Z_2 = 0$$

Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{bmatrix} \omega_n^2 - (n\phi)^2 & 2\omega_b n\phi \\ 2\omega_b n\phi & (n\phi)^2 - \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2P}{l\mu} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Avec,

$$M = \begin{bmatrix} \omega_n^2 - (n\phi)^2 & 2\omega_b n\phi \\ 2\omega_b n\phi & (n\phi)^2 - \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

L'équation 4.13 devient,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} &= M^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{2P}{l\mu} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{-[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 - (2\omega_b n\phi)^2} \begin{Bmatrix} \frac{2P}{l\mu} [(n\phi)^2 - \omega_n^2] \\ \frac{2P}{l\mu} [-2\omega_b n\phi] \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ainsi, la solution particulière est :

$$Z_n^p(t) = Z_1 \sin n\phi t - Z_2 \cos n\phi t$$

$$\begin{aligned} Z_n^p(t) &= \frac{1}{-[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 - (2\omega_b n\phi)^2} \frac{2P}{l\mu} [(n\phi)^2 - \omega_n^2] \sin n\phi t \\ &\quad - \frac{1}{-[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 - (2\omega_b n\phi)^2} \frac{2P}{l\mu} [-2\omega_b n\phi] \cos n\phi t \end{aligned}$$

$$Z_n^p(t) = \frac{1}{-[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 - (2\omega_b n\phi)^2} \frac{2P}{l\mu} [(n\phi)^2 - \omega_n^2] \sin n\phi t + 2\omega_b n\phi \cos n\phi t \quad (4.15)$$

#### 4.2.6.3 Solution totale

La solution totale est l'association de la solution homogène et la solution particulière. Elle est donc donnée par la formule :

$$Z_n(t) = Z_n^c(t) + Z_n^p(t)$$

D'après les **Eq. 4.11** et **Eq. 4.15**, on a :

$$Z_n(t) = e^{-\omega_b t} [A_1 \cos \omega_{dn} t + A_2 \sin \omega_{dn} t] + \frac{1}{-[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 - (2\omega_b n\phi)^2} \frac{2P}{l\mu} [(n\phi)^2 - \omega_n^2] \sin n\phi t + 2\omega_b n\phi \cos n\phi t \quad (4.16)$$

#### 4.2.6.4 Utilisation des conditions initiales

Pour  $t=0$ ,  $Z_n(0) = 0$

Ce qui donne :

$$A_1 = \frac{2P}{l\mu} \frac{2\omega_b n\phi}{[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 + (2\omega_b n\phi)^2}$$

*Démonstration :*

♣

$$e^0 [A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0] + \frac{1}{-[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 - (2\omega_b n\phi)^2} \frac{2P}{l\mu} [(n\phi)^2 - \omega_n^2] \sin 0 + 2\omega_b n\phi \cos 0 = 0$$

Comme  $e^0 = 1$ ,  $\sin 0 = 0$  et  $\cos 0 = 1$ , on a :

$$A_1 + \frac{1}{-[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 - (2\omega_b n\phi)^2} \frac{2P}{l\mu} [2\omega_b n\phi] = 0$$

D'où

$$A_1 = \frac{2P}{l\mu} \frac{2\omega_b n\phi}{[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 + (2\omega_b n\phi)^2}$$

♦

Pour  $t=0$ ,  $\dot{Z}_n(0) = 0$

$$A_2 = \frac{2P}{l\mu} \frac{n\phi}{\omega_{dn}} \frac{2\omega_b^2 + (n\phi)^2 - \omega_n^2}{[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 + (2\omega_b n\phi)^2}$$

*Démonstration :*

♣

D'après la propriété des dérivées, on a :

$$\dot{Z}_n(t) = -\omega_b e^{-\omega_b t} [A_1 \cos \omega_{dn} t + A_2 \sin \omega_{dn} t] + \omega_{dn} e^{-\omega_b t} [-A_1 \sin \omega_{dn} t + A_2 \cos \omega_{dn} t] + \frac{n\phi}{-[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 - (2\omega_b n\phi)^2} \frac{2P}{l\mu} [(n\phi)^2 - \omega_n^2] \cos n\phi t - 2\omega_b n\phi \sin n\phi t$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}_n(t) = 0 = & -\omega_b e^0 [A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0] + \omega_{dn} e^0 [-A_1 \sin 0 + A_2 \cos 0] \\ & + \frac{n\phi}{-[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 - (2\omega_b n\phi)^2} \frac{2P}{l\mu} [(n\phi)^2 - \omega_n^2] \cos 0 - 2\omega_b n\phi \sin 0\end{aligned}$$

$$\dot{Z}_n(t) = 0 = -\omega_b [A_1] + \omega_{dn} [A_2] + \frac{n\phi}{-[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 - (2\omega_b n\phi)^2} \frac{2P}{l\mu} [[\omega_n^2 - (n\phi)^2]]$$

$$\begin{aligned}A_2 = & \frac{1}{\omega_{dn}} \frac{n\phi}{[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 + (2\omega_b n\phi)^2} \frac{2P}{l\mu} [[(n\phi)^2 - \omega_n^2]] \\ & + \frac{2P}{l\mu} \frac{2\omega_b \omega_b n\phi}{[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 + (2\omega_b n\phi)^2}\end{aligned}$$

D'où

$$A_2 = \frac{2P}{l\mu} \frac{n\phi}{\omega_{dn}} \frac{2\omega_b^2 + (n\phi)^2 - \omega_n^2}{[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 + (2\omega_b n\phi)^2}$$

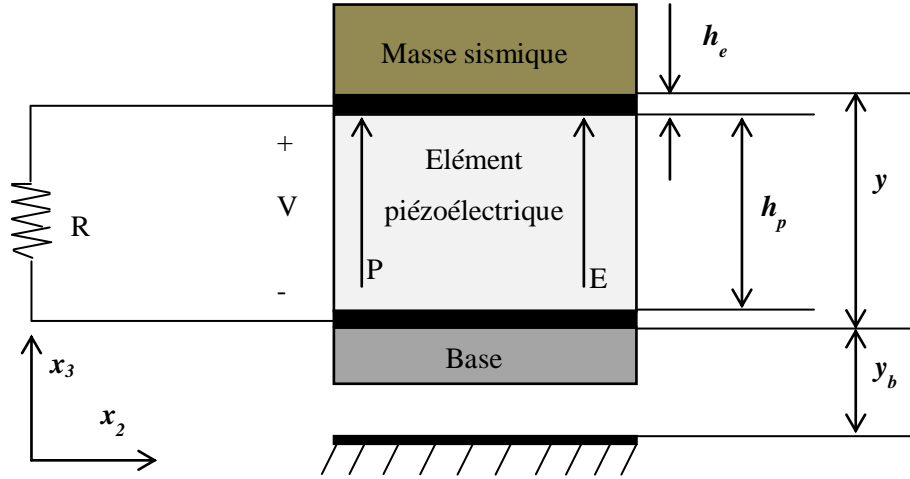
◆

Rappelons que la solution de l'équation de déflexion du pont est donnée par l'**Eq. 4.02**. Ce qui donne la solution suivante dans le domaine temporel :

$$\begin{aligned}z(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ z(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_b t} \left[ \frac{2P}{l\mu} \frac{2\omega_b n\phi}{[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 + (2\omega_b n\phi)^2} \cos \omega_{dn} t \right. \\ &\quad \left. + \frac{2P}{l\mu} \frac{n\phi}{\omega_{dn}} \frac{2\omega_b^2 + (n\phi)^2 - \omega_n^2}{[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 + (2\omega_b n\phi)^2} \sin \omega_{dn} t \right] \\ &\quad + \frac{1}{-[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 - (2\omega_b n\phi)^2} \frac{2P}{l\mu} [(n\phi)^2 - \omega_n^2] \sin n\phi t \\ &\quad + 2\omega_b n\phi \cos n\phi t \Big] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ z(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{[\omega_n^2 - (n\phi)^2]^2 + (2\omega_b n\phi)^2} \left[ e^{-\omega_b t} (2\omega_b n\phi \cos \omega_{dn} t \right. \\ &\quad \left. + \frac{n\phi}{\omega_{dn}} (2\omega_b^2 + (n\phi)^2 - \omega_n^2) \sin \omega_{dn} t) - [(n\phi)^2 - \omega_n^2] \sin n\phi t \right. \\ &\quad \left. - 2\omega_b n\phi \cos n\phi t \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (4.17)\end{aligned}$$

### 4.3 Module piézoélectrique

Le module piézoélectrique utilisé est le module développé dans le chapitre 3. C'est un module à un degré de liberté présenté à la **Fig.4.02**.



**Figure 4.02 :** Module d'un récupérateur piézoélectrique à 1D.

L'étude de ce module à un 1D dans le domaine fréquentiel a donné les grandeurs normalisées du déplacement relatif, de la tension et de la puissance ont été obtenues. Elles sont normalisées par rapport à la force excitatrice  $M_T \ddot{Y}_b$ . Les expressions sont données respectivement par les **Eqs. 4.18, 4.19** et **4.20**.

$$\frac{Y(\omega)}{M_T \ddot{Y}_b} = \frac{1}{k} \frac{-(j\beta \Phi_h + 1)}{j \left( (2\zeta_h + (1 - k_e^2)\beta) \Phi_h - \beta \Phi_h^3 \right) + (1 - (1 + 2\zeta_h \beta) \Phi_h^2)} \quad (4.18)$$

$$\frac{V(\omega)}{M_T \ddot{Y}_b} = \frac{1}{\theta} \frac{-j\beta k_e^2 \Phi_h}{j \left( (2\zeta_h + (1 - k_e^2)\beta) \Phi_h - \beta \Phi_h^3 \right) + (1 - (1 + 2\zeta_h \beta) \Phi_h^2)} \quad (4.19)$$

$$\frac{P(\omega)}{(M_T \ddot{Y}_b)^2} = \frac{\omega_h}{k} \frac{\beta k_e^2 \Phi_h^2}{\left( j \left( (2\zeta_h + (1 - k_e^2)\beta) \Phi_h - \beta \Phi_h^3 \right) + (1 - (1 + 2\zeta_h \beta) \Phi_h^2) \right)^2} \quad (4.20)$$

où  $M_T$ ,  $\ddot{Y}_b$ ,  $\omega_h$ ,  $\Phi_h$ ,  $\zeta_h$ ,  $k$ ,  $\theta$ ,  $k_e^2$  et  $\beta$  sont respectivement la masse totale du module, l'accélération de base, la fréquence de résonance ou fréquence naturelle du module, un paramètre adimensionnel pour la fréquence ou fréquence réduite, le coefficient d'amortissement mécanique du module, la rigidité du module, la constante de couplage électromécanique, la constante de couplage électromécanique normalisée, et la résistance réduite ou normalisée.



#### 4.4 Modélisation mathématique de l'ensemble: matériaux piézoélectrique montés sous le pont

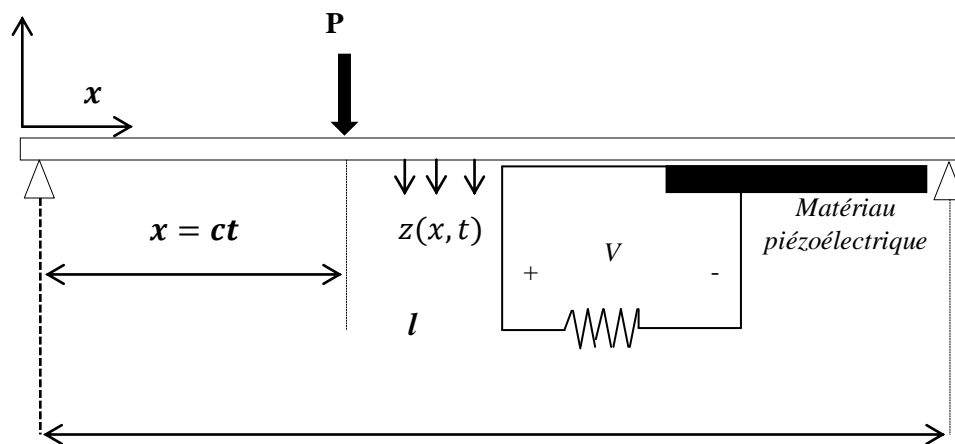
D'une part, la théorie de la dynamique du pont sous une charge mobile est développée dans la section 4.2 de ce chapitre, page 130. La vibration du pont sous une charge mobile constante a été analysée. La solution dans le domaine fréquentiel de la déflexion du pont est donnée par l'**Eq. (4.21)**, tel que :

$$z(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} * \left( \frac{e^{j(n\phi - \omega)T}}{j(n\phi - \omega)} + \frac{e^{-j(n\phi + \omega)T}}{j(n\phi + \omega)} - \frac{1}{j(n\phi - \omega)} - \frac{1}{j(n\phi + \omega)} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (4.21)$$

Les différents symboles sont la même que ceux décrit dans la section 4.2.

D'autre part, la modélisation à une degré de liberté d'un récupérateur d'énergie piézoélectrique est étudiée entièrement dans le chapitre 3 et le résultat est rappelé brièvement dans la section 4.3, page 144. Les expressions normalisées du déplacement relatif, de la tension et de la puissance sont rappelées respectivement par les **Eqs. 4.18, 4.19 et 4.20**.

Une nouvelle idée est présentée dans cette section en combinant les deux approches. Le pont va jouer le rôle d'une force excitatrice avec la vibration qu'il va avoir sous la charge roulante au-dessus de lui. Le module piézoélectrique est collé directement en dessous du pont. La vibration du pont est considérée comme une contrainte appliquée sur le module piézoélectrique. L'ensemble des deux modules est représenté à la **Fig. 4.03**.



**Figure 4.03 :** Module « pont-piézoélectrique ».

Selon ce concept, la déflexion du pont  $z(x, \omega)$  présentée dans l'**Eq. 4.21** n'est rien d'autre que le mouvement de base du module piézoélectrique  $Y_b(\omega)$  présenté dans les **Eqs. 4.18, 4.19, 4.20**. Ce qui signifie que :

$$z(x, \omega) \cong Y_b(\omega) \quad (4.22)$$

Le déplacement de base  $Y_b(\omega)$  peut être obtenu à partir de l'**Eq. 4.19** en fonction de la tension  $V(\omega)$ .

$$\frac{V(\omega)}{M_T \dot{Y}_b} = \frac{1}{\theta} \frac{-j\beta k_e^2 \Phi_h}{j \left( (2\zeta_h + (1 - k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta\Phi_h^3 \right) + (1 - (1 + 2\zeta_h\beta)\Phi_h^2)}$$

$$V(\omega) = \frac{1}{\theta} \frac{-j\beta k_e^2 \Phi_h (j\omega)^2 Y_b(\omega) M_T}{j \left( (2\zeta_h + (1 - k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta\Phi_h^3 \right) + (1 - (1 + 2\zeta_h\beta)\Phi_h^2)}$$

D'où :

$$Y_b(\omega) = \frac{\theta}{M_T} \frac{j \left( (2\zeta_h + (1 - k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta\Phi_h^3 \right) + (1 - (1 + 2\zeta_h\beta)\Phi_h^2)}{\beta k_e^2 \Phi_h \omega^2} V(\omega) \quad (4.23)$$

Selon les **Eqs. 4.21, 4.22** et **4.23**, on peut avoir l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} \\ * \left( \frac{e^{j(n\phi - \omega)T}}{j(n\phi - \omega)} + \frac{e^{-j(n\phi + \omega)T}}{j(n\phi + \omega)} - \frac{1}{j(n\phi - \omega)} - \frac{1}{j(n\phi + \omega)} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ = \frac{\theta}{M_T} \frac{j \left( (2\zeta_h + (1 - k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta\Phi_h^3 \right) + (1 - (1 + 2\zeta_h\beta)\Phi_h^2)}{\beta k_e^2 \Phi_h \omega^2} V(\omega) \end{aligned}$$

D'où l'expression de la tension aux bornes du module piézoélectrique.

$$\begin{aligned} V(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} \\ * \left( \frac{e^{j(n\phi - \omega)T}}{j(n\phi - \omega)} + \frac{e^{-j(n\phi + \omega)T}}{j(n\phi + \omega)} - \frac{1}{j(n\phi - \omega)} - \frac{1}{j(n\phi + \omega)} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ * \frac{M_T}{\theta} \frac{\beta k_e^2 \Phi_h \omega^2}{j \left( (2\zeta_h + (1 - k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta\Phi_h^3 \right) + (1 - (1 + 2\zeta_h\beta)\Phi_h^2)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

L'énergie récupérée ici c'est la puissance de sortie donnée par la formule suivante :

$$|P| = \frac{|V|^2}{R}$$

- $V$  est la tension aux bornes du module piézoélectrique obtenue à partir de l'**Eq. (4.24)**.
- $R$  est la résistance de charge réglée sur le circuit de récupération.

L'expression de la puissance est alors donnée par l'équation suivante :

$$P = \frac{1}{R} * \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} \right)^2 * \left( \left( \frac{e^{j(n\phi - \omega)T}}{j(n\phi - \omega)} + \frac{e^{-j(n\phi + \omega)T}}{j(n\phi + \omega)} - \frac{1}{j(n\phi - \omega)} - \frac{1}{j(n\phi + \omega)} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right. \\ \left. * \frac{M_T}{\theta} \frac{\beta k_e^2 \Phi_h \omega^2}{j((2\zeta_h + (1 - k_e^2)\beta)\Phi_h - \beta\Phi_h^3) + (1 - (1 + 2\zeta_h\beta)\Phi_h^2)} \right)^2 \quad (4.25)$$

#### 4.5 Exemple des données théorique

La meilleure façon de comprendre le système physique développé est d'attribuer des valeurs numériques aux constantes, puis de modifier les paramètres pour identifier leurs interactions relatives. Due à l'inopportunité de faire des vérifications en pratique, des données sur le pont et le récupérateur sont adaptées pour faire des tests. À cette fin, pour le module de pont, les données présentées dans le **tableau 4.01** sont adoptées [4.13]. Le pont est considéré comme étant sous une charge mobile de 30 kN. De même pour le module piézoélectrique, les caractéristiques d'un PVDF indiquées dans l'Annexe 2 sont prises pour le calcul théorique. Le **tableau 4.02** résume les données utilisées. La résistance de charge utilisée dans le circuit d'extraction d'énergie est fixée à 5 kΩ.

**Tableau 4.01 : Paramètres du modèle piézoélectrique (Annexe 2).**

Descriptions	Symbole	Valeurs
Epaisseur du matériau piézoélectrique	$h_p$	$515 \times 10^{-6} \text{ m}$
Densité	$\rho$	$1470 \text{ kg/m}^3$
Masse totale du modèle	$M_T = M_M + A_p * \mu / S_p$	44 kg
Raideur élastique	$c_{33}$	$1,05 \times 10^9 \text{ N/ m}^2$

Constantes piézoélectriques	$d_{33}$	$-34 \times 10^{-12} \text{ C/N}$
Constante de contrainte piézoélectrique	$e_{33} = d_{33} * c_{33}$	$0,0357 \text{ C/ m}^2$
Capacité piézoélectrique	$c_p$	$130 \times 10^{-9} \text{ F}$
Permittivité électrique	$\epsilon_{33} = \frac{c_p h_p}{A}$	$1,673 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
coefficient d'amortissement mécanique	$\zeta_h$	0,05
Rigidité effective	$k = \frac{c_{33} A}{h_p}$	$81,55 \times 10^9 \text{ N/m}$
coefficient de couplage électromécanique	$\theta = \frac{e_{33} A}{h_p}$	$2,77 \text{ C/m}$
paramètre adimensionnel pour le coefficient de couple électromécanique	$k_e^2 = \frac{\theta^2}{k C_p}$	$0,725 \text{ C}^2/\text{FNm}$

**Tableau 4.02 : Paramètres de pont [4.13].**

Paramètre de pont	valeur
Masse par unité de longueur, $\mu$	$4406.78 \text{ kg/m}$
Rigidité à la flexion, $E_y J$	$106 \text{ GN/ m}^2$
Section transversale, $S_p$	$4 \text{ m}^2$
Amortissement du pont $\zeta$	0.02

## 4.6 Résultat du test théorique

Baser sur ce modèle numérique, la puissance de sortie est examinée en changeant la position du récupérateur piézoélectrique, la vitesse du véhicule, la longueur du pont et l'amortissement du pont correspondant. Des résultats pour le récupérateur AC, récupérateur DC standard et récupérateur SSHI (parallèle et série) sont présentés. Quatre types du pont sont considérés avec une longueur variée entre 25m à 50m. Ensuite, quatre valeurs de vitesse du véhicule sont aussi prises : 36 km/h, 54 km/h, 72 km/h et 90 km/h. Le récupérateur est placé sur quatre endroits pendant le test.

### 4.6.1 Résultat pour le récupérateur AC

Le **tableau 4.03** donne le résultat de l'énergie récupérée dans le cas d'un récupérateur alternatif.

**Tableau 4.03 : Tableau de la puissance obtenue en mode AC.**

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 25 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	<b>9.9356</b>	<b>19.87</b>	<b>14.918</b>	<b>9.9356</b>
54	<b>4.4409</b>	<b>8.8818</b>	<b>6.6678</b>	<b>4.4409</b>
72	<b>11.659</b>	<b>23.317</b>	<b>17.505</b>	<b>11.659</b>
9	<b>43.028</b>	<b>86.055</b>	<b>64.604</b>	<b>43.028</b>

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 30 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	<b>9.0046</b>	<b>18.009</b>	<b>13.507</b>	<b>9.0046</b>
54	<b>27.044</b>	<b>54.088</b>	<b>40.566</b>	<b>27.044</b>
72	<b>49.889</b>	<b>99.778</b>	<b>74.833</b>	<b>49.889</b>
90	<b>49.320</b>	<b>98.639</b>	<b>73.979</b>	<b>9.320</b>

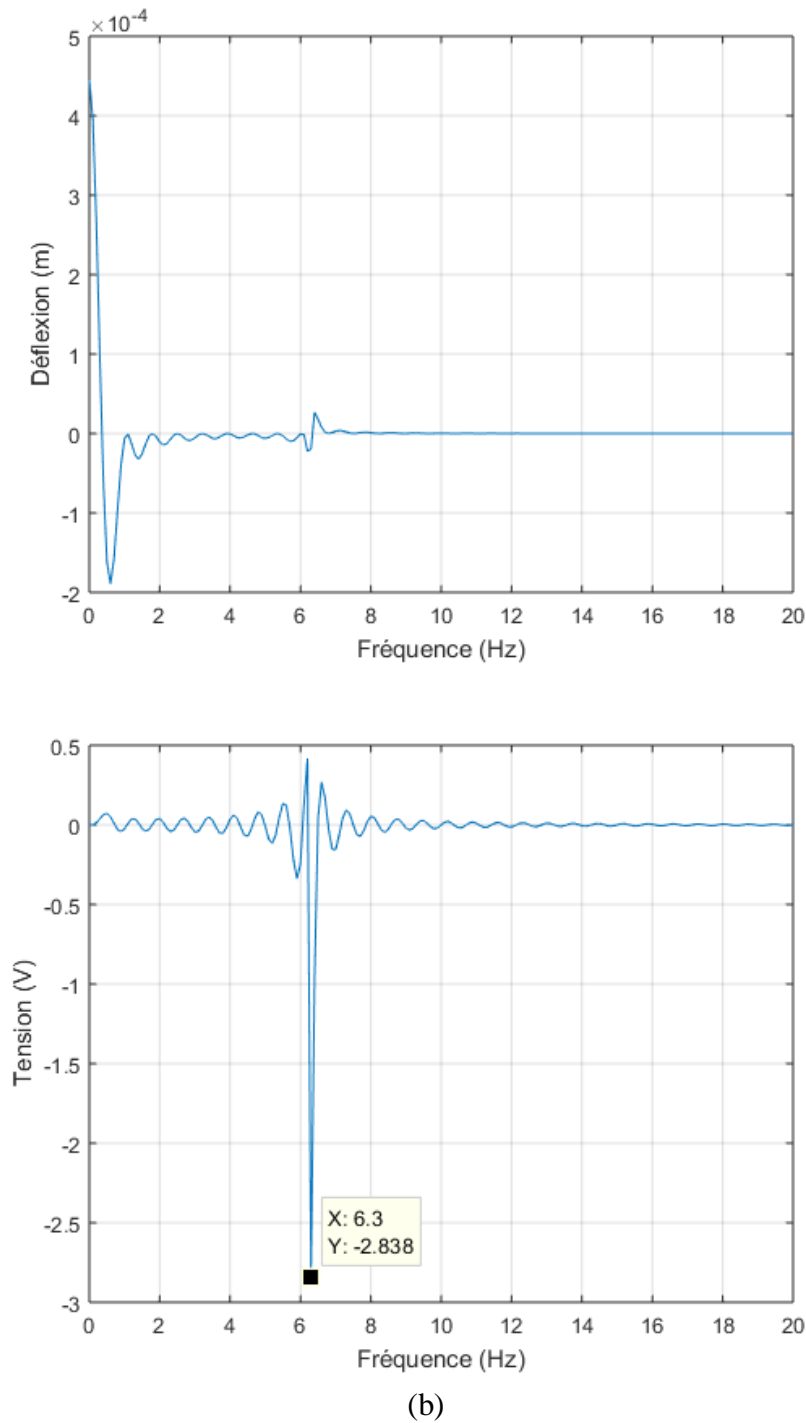
Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 35 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	<b>19.429</b>	<b>38.858</b>	<b>29.153</b>	<b>19.429</b>
54	<b>15.502</b>	<b>31.004</b>	<b>23.261</b>	<b>15.502</b>
72	<b>79.420</b>	<b>158.84</b>	<b>119.17</b>	<b>79.420</b>
90	<b>89.220</b>	<b>178.44</b>	<b>133.88</b>	<b>89.220</b>

Vitesse (km/ )	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 50 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	<b>8.1500</b>	<b>16.300</b>	<b>12.228</b>	<b>8.1500</b>
54	<b>18.389</b>	<b>36.777</b>	<b>27.590</b>	<b>18.389</b>
72	<b>37.907</b>	<b>75.464</b>	<b>56.612</b>	<b>37.907</b>
90	<b>77.539</b>	<b>155.08</b>	<b>116.34</b>	<b>77.539</b>

Les résultats montrent que :

- Pour un pont de longueur 25 m, une puissance maximale 86,055  $\mu W$  est obtenue. Le récupérateur est placé au milieu du pont et la vitesse du véhicule est 90 km/h.
- Pour un pont de longueur 30 m, un récupérateur placé au milieu donne une puissance maximale de 99,778  $\mu W$  avec une vitesse du véhicule à 72 km/h.
- Pour un pont de longueur 35 m, un véhicule roule à 90 km/h donne une puissance optimale de 178.44  $\mu W$  pour un récupérateur placé au milieu.
- Pour un pont de longueur 50 m, une puissance maximale 155,08  $\mu W$  est obtenue. Le récupérateur est placé au milieu du pont et la vitesse du véhicule est 90 km/h.

Parmi les différents cas considérés, une puissance maximale de 178,44  $\mu W$  est récupérée pour la récupération d'énergie alternative. Cette puissance est obtenue pour un récupérateur placé au milieu d'un pont de 35 m avec une charge mobile à vitesse constante de 90 km/h. L'allure de la déflexion du pont à cette position et la tension aux bornes des électrodes sont représentées à la **Fig. 4.04**.



**Figure 4.04 :** Résultats obtenus au milieu d'un pont de 35m, (a) : courbe de la déflexion du pont, (b) : tension récupéré en mode alternatif.

#### 4.6.2 Résultat pour le récupérateur continu standard

Le **tableau 4.04** donne le résultat de l'énergie récupérée dans le cas d'un récupérateur continue standard.

**Tableau 4.04 : Tableau de la puissance récupéré en mode DC standard.**

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 25 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	<b>11.067</b>	<b>22.133</b>	<b>16.616</b>	<b>11.067</b>
54	<b>4.9519</b>	<b>9.9038</b>	<b>7.4350</b>	<b>4.9519</b>
72	<b>12.98</b>	<b>25.972</b>	<b>19.498</b>	<b>12.986</b>
90	<b>47.926</b>	<b>95.851</b>	<b>71.958</b>	<b>47.926</b>

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 30m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	<b>9.6281</b>	<b>19.256</b>	<b>14.442</b>	<b>9.6281</b>
54	<b>28.884</b>	<b>57.768</b>	<b>43.326</b>	<b>28.884</b>
72	<b>53.343</b>	<b>106.69</b>	<b>80.015</b>	<b>53.343</b>
90	<b>52.675</b>	<b>105.35</b>	<b>79.013</b>	<b>52.675</b>

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 35 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	<b>20.226</b>	<b>40.451</b>	<b>30.349</b>	<b>20.226</b>
54	<b>16.138</b>	<b>32.275</b>	<b>24.215</b>	<b>16.138</b>
72	<b>82.676</b>	<b>165.35</b>	<b>124.06</b>	<b>82.676</b>
90	<b>92.878</b>	<b>185.76</b>	<b>139.3</b>	<b>92.878</b>

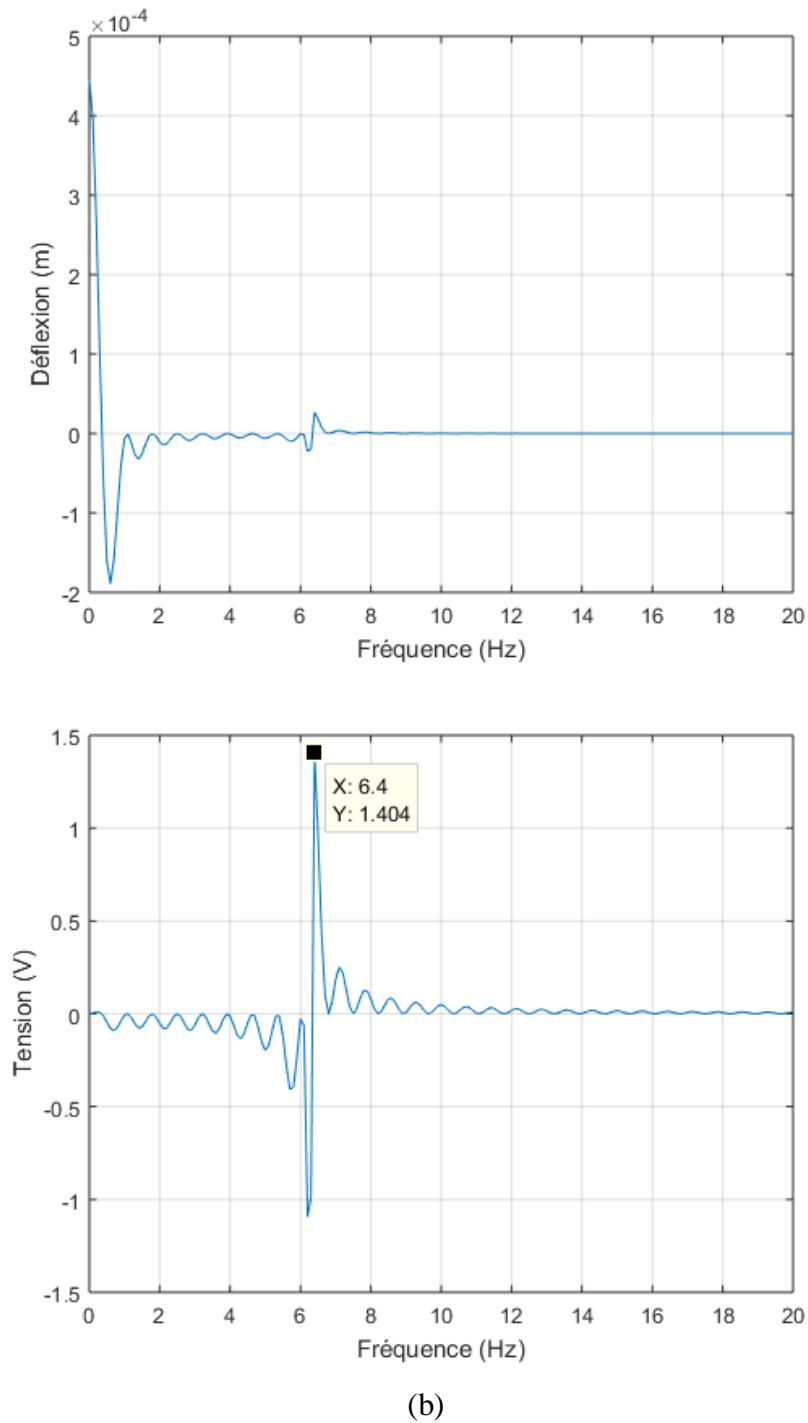
  

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 50 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	<b>8.0733</b>	<b>16.147</b>	<b>12.113</b>	<b>8.0733</b>
54	<b>18.215</b>	<b>36.431</b>	<b>27.330</b>	<b>18.215</b>
72	<b>37.507</b>	<b>74.909</b>	<b>56.195</b>	<b>37.507</b>
90	<b>76.968</b>	<b>153.94</b>	<b>115.48</b>	<b>76.968</b>

Les résultats du récupérateur continu standard montrent que :

- Pour un pont de longueur 25 m, une puissance maximale 95,851  $\mu W$  est obtenue. Le récupérateur est placé à moitié du pont et la vitesse du véhicule est 90 km/h.
- Pour un pont de longueur 30 m, un récupérateur placé au milieu donne une puissance maximale de 106,69  $\mu W$  avec une vitesse du véhicule à 72 km/h.
- Pour un pont de longueur 35 m, un véhicule roule à 90 km/h donne une puissance optimale de 185,76  $\mu W$  pour un récupérateur placé au milieu.
- Pour un pont de longueur 50 m, une puissance maximale 153,94  $\mu W$  est obtenue. Le récupérateur est placé à moitié du pont et la vitesse du véhicule est 90 km/h.

Parmi les différents cas considérés, une puissance maximale de 185,76  $\mu W$  est récupérée pour la technique continue standard. Cette puissance est obtenue pour un récupérateur placé au milieu d'un pont de 35m avec une charge mobile à vitesse constante de 90 km/h. L'allure de la déflexion du pont à cette position et la tension récupéré sont représentées à la **Fig. 4.05**.



**Figure 4.05 :** Résultats obtenus au milieu d'un pont de 35m, (a) : courbe de la déflexion du pont, (b) : tension récupéré en mode DC standard.

#### 4.6.3 Résultat pour le récupérateur SSHI-Parallèle

Le **tableau 4.05** donne le résultat de l'énergie récupérée dans le cas d'un récupérateur continu SSHI-Parallèle.



**Tableau 4.05 : Tableau de la puissance obtenue en mode SSHI-Parallèle**

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 25 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	10.243	20.487	15.380	10.243
54	4.5 71	9.1541	6.8722	4.5771
72	12.020	24.040	18.047	12.020
90	44.361	88.721	66.605	44.361

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 30 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	9.3092	18.618	13.964	9.3092
54	27.954	55.907	41.931	27.95
72	51.576	103.15	77.364	51.576
90	50.979	101.96	76.468	50.979

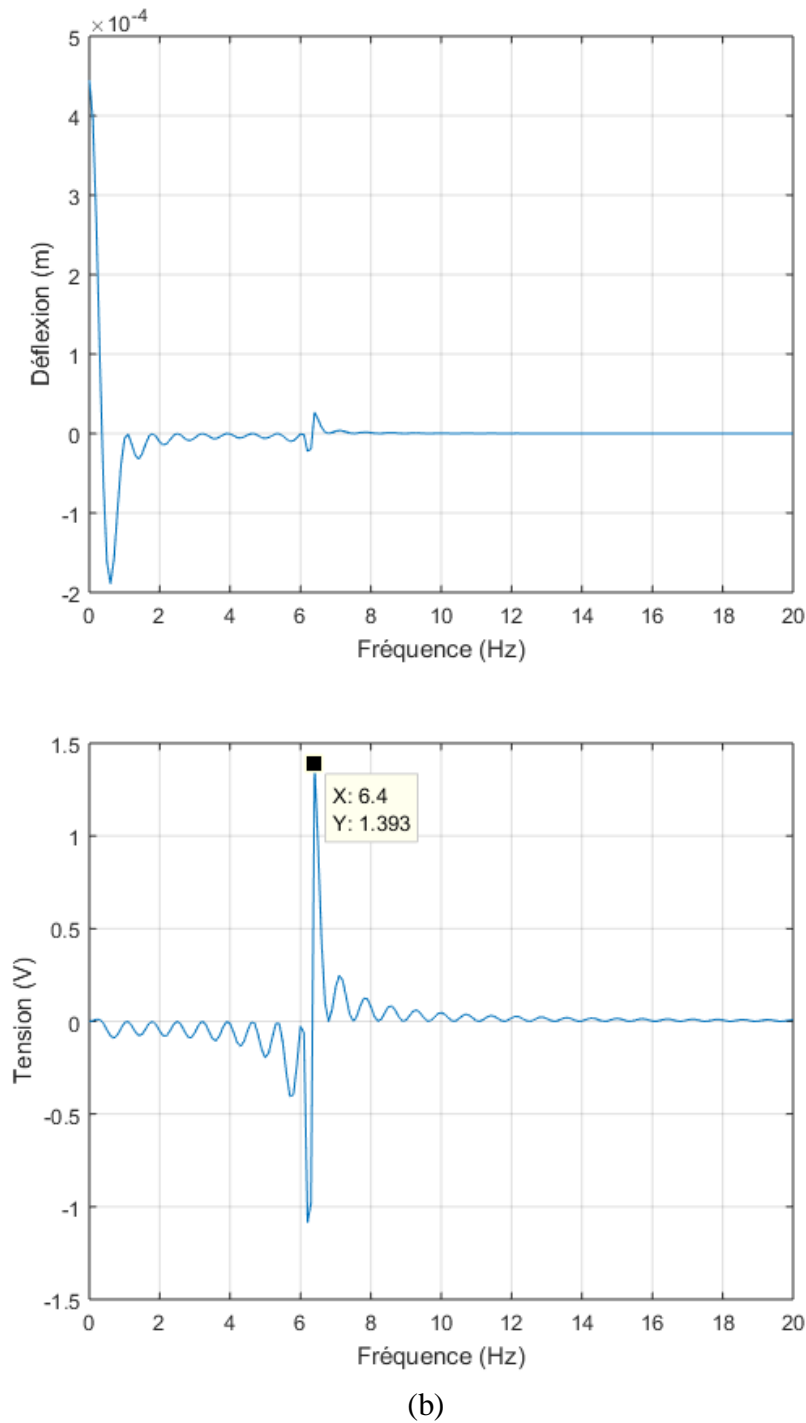
Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 35 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	19.929	39.857	29.903	19.929
54	15.901	31.801	23.859	15.901
72	81.463	162.93	12 .24	81.463
90	91.514	183.03	137.32	91.514

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 50 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	8.0871	16.174	12.134	8.0871
54	18.247	36.493	27.377	18.247
72	37.454	75.013	56.273	37.454
90	77.076	54.15	115.64	77.076

Les résultats du récupérateur continu SSHI-Parallèle montrent que :

- Pour un pont de longueur 25 m, une puissance maximale 88,721  $\mu W$  est obtenue. Le récupérateur est placé à moitié du pont et la vitesse du véhicule est 90 km/h.
- Pour un pont de longueur 30 m, un récupérateur placé au milieu donne une puissance maximale de 103,15  $\mu W$  avec une vitesse du véhicule à 72 km/h.
- Pour un pont de longueur 35 m, un véhicule roule à 90 km/h donne une puissance optimale de 183,03  $\mu W$  pour un récupérateur placé au milieu.
- Pour un pont de longueur 50 m, une puissance maximale 154,15  $\mu W$  est obtenue. Le récupérateur est placé à moitié du pont et la vitesse du véhicule est 90 km/h.

Parmi les différents cas considérés, une puissance maximale de 183, 03  $\mu W$  est récupérée pour la technique continue SSHI-Parallèle. Cette puissance est obtenue pour un récupérateur placé au milieu d'un pont de 35 m avec une charge mobile à vitesse constante de 90 km/h. L'allure de la déflexion du pont à cette position et la tension récupérée sont représentées à la **Fig. 4.06**.



**Figure 4.06 :** Résultats obtenus au milieu d'un pont de 35m, (a) : courbe de la déflexion du pont, (b) : tension récupéré en mode SSHI-parallèle.

#### 4.6.4 Résultat pour le récupérateur SSHI-Série

Le **tableau 4.06** donne le résultat de l'énergie récupérée dans le cas d'un récupérateur continue SSHI-Série.

**Tableau 4.06 : Tableau de la puissance obtenue en mode SSHI- Série.**

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{v^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 25 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x= 3/4
36	9.3973	18.795	14.110	9.3973
54	4.1981	8.3961	6.3032	4.1981
72	11.027	22.054	16.557	11.027
90	40.696	81.393	61.104	40.696

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{v^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 30 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	8.6914	17.383	11.037	8.6914
54	26.118	52.236	39.177	26.118
72	48.153	96.306	72.230	48.153
90	47.631	95.262	71.446	47.631

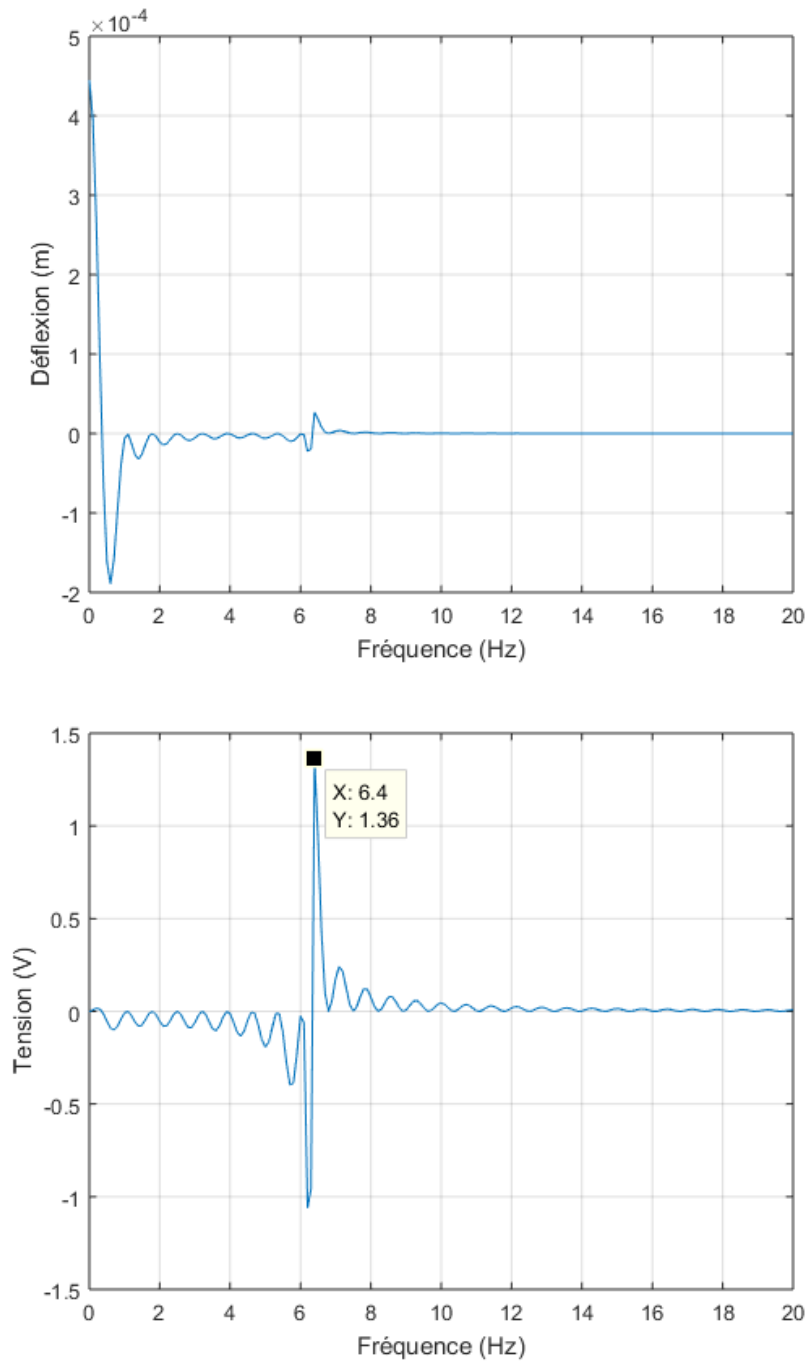
Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{v^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 35 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	19.016	38.031	28.533	19.016
54	15.17	30.345	22.766	15.172
72	77.731	155.46	116.64	77.731
90	87.322	174.64	131.03	87.322

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{v^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 50 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	8.1973	16.395	12.299	8.1973
54	18.495	36.991	27.750	18.495
72	37.732	75.813	56.874	37.732
90	77.898	155.80	116.87	77.898

Les résultats du récupérateur continu SSHI-série montrent que :

- Pour un pont de longueur 25 m, une puissance maximale 81,393  $\mu W$  est obtenue. Le récupérateur est placé à moitié du pont et la vitesse du véhicule est 90 km/h.
- Pour un pont de longueur 30 m, un récupérateur placé au milieu donne une puissance maximale de 96,306  $\mu W$  avec une vitesse du véhicule à 72 km/h.
- Pour un pont de longueur 35 m, un véhicule qui roule à 90 km/h donne une puissance optimale de 174,64  $\mu W$  pour un récupérateur placé à son milieu.
- Pour un pont de longueur 50 m, une puissance maximale 155,80  $\mu W$  est obtenue. Le récupérateur est placé à moitié du pont et la vitesse du véhicule est 90 km/h.

Parmi les différents cas considérés, une puissance maximale de 155,80  $\mu W$  est récupérée pour la technique continue SSHI-Série. Cette puissance est obtenue pour un récupérateur placé au milieu d'un pont de 35 m avec une charge mobile à vitesse constante de 90 km/h. L'allure de la déflexion du pont à cette position et la tension récupérée sont représentées à la **Fig. 4.07**.



(b)

**Figure 4.07 :** Résultats obtenus au milieu d'un pont de 35m, (a) : courbe de la déflexion du pont, (b) : tension récupéré en mode SSHI-série.

#### 4.6.5 Résumé des résultats

Plusieurs points importants ont été observés pendant les tests avec les paramètres choisis.

- Parmi les paramètres utilisés, seule la position ou l'endroit d'un récupérateur peut être spécifié pour obtenir la puissance maximale générée. L'emplacement du récupérateur à 1/2 de la

longueur du pont est considéré comme lieu d'application potentielle pour une largeur de bande considérable de vitesses. De même pour les diverses techniques utilisées, AC, DC standard et SSHI, c'est toujours à  $\frac{1}{2}$  du pont qu'on aura le maximum d'énergie récupérée.

- Dans tous les cas considérés, l'emplacement du récupérateur pour récolter un maximum d'énergie est classé dans l'ordre suivant : un récupérateur placé à  $\frac{1}{2}$  du pont, ensuite au  $\frac{2}{3}$  de la longueur du pont, et enfin au  $\frac{3}{4}$  et  $\frac{1}{4}$  qui donnent des résultats sensiblement égaux.

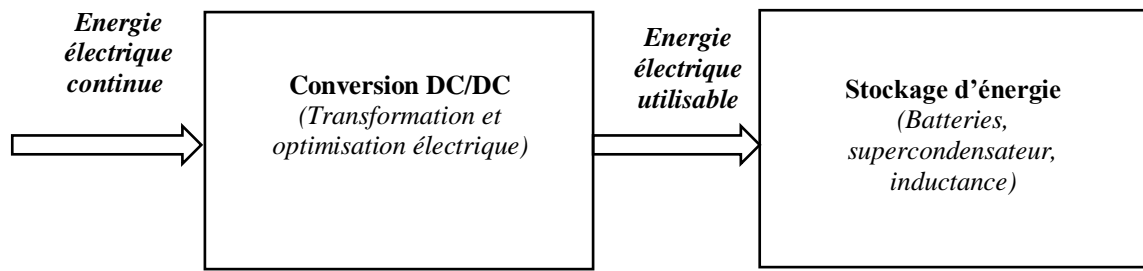
- Un pont de longueur assez long (35 m) s'avère être la plus prometteuse pour les paramètres du module considéré. Quel que soit la variation de la vitesse, la puissance de sortie est assez bonne de l'ordre de 100  $\mu$ W.

- La vitesse ne peut être spécifiée pour obtenir la puissance maximale générée, elle dépend toujours de la longueur du pont. On ne peut pas dire qu'une vitesse plus grande ou plus petite donne une meilleure énergie.

- Pour les quatre techniques de récupération utilisées, c'est la technique continue standard qui donne un meilleur résultat pour un pont de 35 m. La puissance obtenue est de 185,76  $\mu$ W avec une vitesse de 90 km/h. Avec la même longueur et vitesse, cette technique est suivie par la technique SSHI parallèle, puis la technique alternative et la technique continue standard.

#### **4.7 Stockage de l'énergie récupérée**

Le stockage d'énergie est utilisé pour répondre aux multiples besoins. Dans le cas de la conversion de la vibration d'un pont en énergie électrique par un module piézoélectrique, il y a deux raisons pour stocker l'énergie extraite. En premier, la quantité d'énergie générée par les matériaux piézoélectriques est bien inférieure à celle requise par la plupart des appareils électroniques. Il est de l'ordre de 100  $\mu$ W dans le résultat du test théorique effectué avec les paramètres choisis. Par conséquent, des méthodes d'accumulation et de stockage de l'énergie générée doivent être mises en place. De plus, l'énergie récupérée à partir du module piézoélectrique n'existe pas continuellement dans le temps. Elle est évaluée juste pendant la période de passage du véhicule sur le pont. L'accumulation et le stockage de l'énergie sont alors utilisés pour compenser le décalage temporel entre la demande en énergie et la production de l'énergie. Le circuit de stockage constitue l'étape finale d'un cycle de conversion d'énergie vibratoire. Il est représenté à la **Fig. 4.08**.



**Figure 4.08 :** Structure d'un stockage d'énergie.

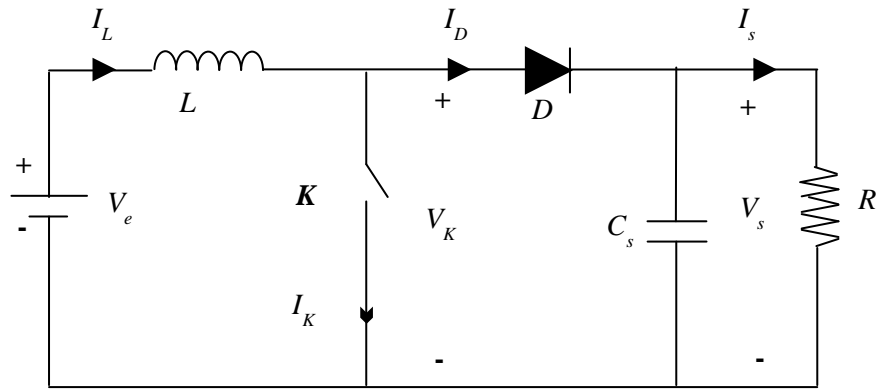
Après l'étage de conversion alternative continue (AC/DC), une mise en série d'un étage de conversion DC/DC est importante dans la chaîne de conversion avant le stockage d'énergie dans un support approprié (**Fig. 4.08**).

#### 4.7.1 Conversion DC/DC

Le convertisseur DC/DC est une classe d'alimentation électrique qui convertit une tension continue en une tension continue de différente valeur. Dans la littérature, il y a trois types de convertisseur DC/DC.

- Un convertisseur « **Buck** » qui convertit une tension continue en une autre tension continue de plus faible valeur.
- Un convertisseur « **Boost** » qui convertit une tension continue en une autre tension continue de plus forte valeur.
- Un convertisseur « **Buck-Boost** » qui prend les deux fonctions en même temps. C'est-à-dire qu'il convertit une tension continue en une autre tension continue de plus faible ou plus grande valeur mais de polarité inverse.

Le but dans le stockage d'énergie est d'accumuler un maximum d'énergie. Parmi les trois type de convertisseurs DC/DC classiques utilisés, le convertisseur « **Boost** » est le plus utilisé grâce à sa simplicité et à son rendement élevé. Le choix d'un convertisseur est alors orienté sur le type « **Boost** » qui augmente la tension de sortie. Le circuit de ce convertisseur est alimenté par une tension d'entrée continue  $V_e$  qui n'est d'autre que la tension piézoélectrique redressée. Il est composé d'une inductance  $L$ , d'un interrupteur  $K$ , d'une diode  $D$ , d'un condensateur  $C_s$  et d'une résistance  $R$  à la sortie. Le circuit électronique d'un convertisseur « Boost » est représentée à la **Fig. 4.09**.



**Figure 4.09 :** Structure du convertisseur « Boost ».

#### 4.7.1.1 Rapport cyclique

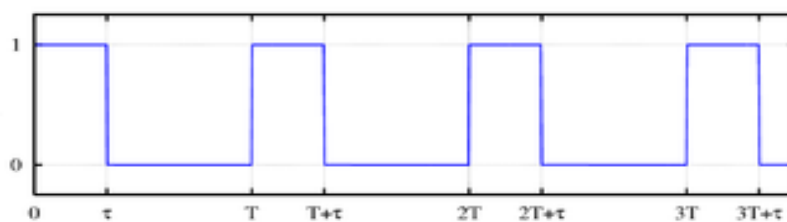
Le rapport cyclique, noté  $\alpha$ , pour un phénomène périodique désigne le ratio entre la durée pendant laquelle un phénomène est considéré dans une période et la durée de cette même période. Ce rapport est compris entre 0 et 1 ou 0% à 100% en pourcentage. On parle souvent de rapport cyclique dans un signal rectangulaire présenté à la **Fig. 4.10**. La valeur du rapport cyclique est donnée par :

$$\alpha = \frac{\tau}{T}$$

$\alpha$  : Rapport cyclique

$\tau$  : Temps à l'état haut dans une période

$T$  : Période



**Figure 4.10 :** Signale rectangulaire de période  $T$ .

On peut écrire que,  $\tau = \alpha T$ , et si la tension vaut  $V$  à l'état haut et 0 à l'état bas, on a la tension moyenne  $\bar{V} = \alpha V$ .

#### 4.7.1.2 Hypothèse

L'interrupteur  $K$ , est rendu périodiquement conducteur avec un rapport cyclique  $\alpha$  dans une période  $T$ . Tous les composants sont considérés parfaits dans l'étude théorique. C'est-à-dire qu'il n'y aura pas de pertes. La capacité du condensateur de sortie  $C_s$  sera supposée suffisamment grande pour que la tension à ses bornes puisse être considérée comme constante au cours de la période.

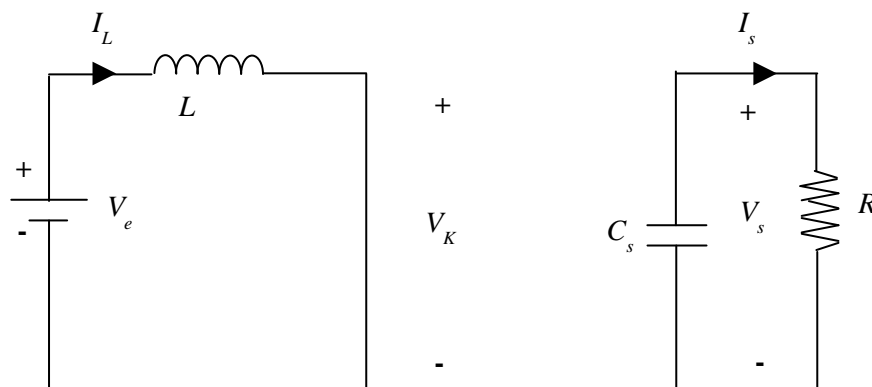
#### 4.7.1.3 Fonctionnement d'un convertisseur « Boost »

Il existe deux modes de fonctionnement d'un convertisseur « Boost » selon le courant circulant dans l'inductance  $L$ . Il y a mode de conduction continue. Dans ce mode, le courant  $I_L$  circulant dans l'inductance ne s'annule pas au cours de la période. Dans le cas d'un mode de conduction discontinue, le courant traversant l'inducteur s'annule pendant une partie de la période. Le mode conduction continue étant le plus intéressant et c'est son fonctionnement qui va être étudié dans la suite.

Le fonctionnement d'un convertisseur « Boost » peut être divisé en deux phases distinctes selon l'état de l'interrupteur  $K$ .

- Phase 1 ou ( $0 < t < \alpha T$ )

C'est une phase d'accumulation d'énergie. L'interrupteur  $K$  est fermé ou on parle d'état ON. Cette fermeture entraîne l'augmentation du courant dans l'inductance. Ce qui veut dire qu'il y a un stockage d'une quantité d'énergie sous forme d'énergie magnétique. La diode  $D$  est alors dans l'état OFF et la charge est alors déconnectée de l'alimentation. La **figure 4.11** représente le schéma équivalent du circuit.



**Figure 4.11 :** Circuit équivalent d'un convertisseur « Boost » à l'état passant.



Durant cet état passant, le courant  $I_L$  augmente suivant la relation :

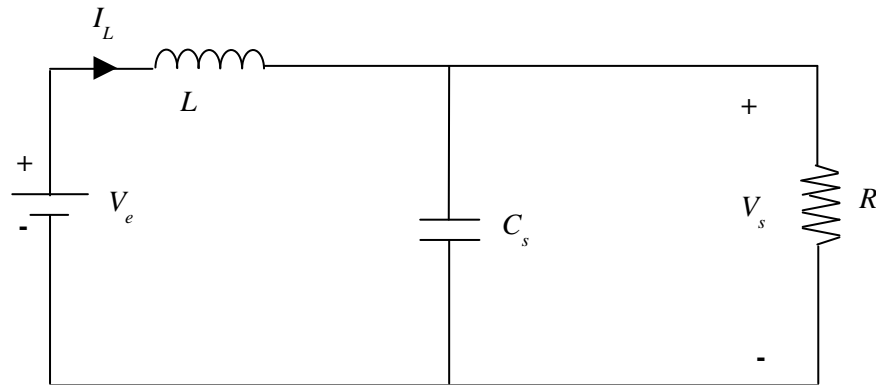
$$V_e = L \frac{dI_L}{dt}$$

À la fin de l'état ON, c'est-à-dire à l'instant  $t$  avec  $t = \alpha T$ , le courant  $I_L$  de l'inductance a augmenté de  $\Delta I_{Lp}$ .

$$\Delta I_{Lp} = \int_0^{\alpha T} dI_L = \int_0^{\alpha T} \frac{V_e}{L} dt = \frac{V_e}{L} \alpha T$$

- Phase 2 ou ( $\alpha T < t < T$ )

Dans cette phase qui commence à l'instant  $t = \alpha T$ , l'interrupteur  $K$  est ouvert. Par conséquent, l'inductance se trouve en série avec le générateur et sa force électromotrice s'additionne à celle du générateur. Ce qui détermine la nomination de l'effet « survolteur ». La diode  $D$  se met à l'état ON et le courant qui traverse l'inductance traverse la diode, le condensateur  $C_s$  ainsi que la charge  $R$ . Il en résulte un transfert de l'énergie accumulée dans l'inductance vers la capacité  $C_s$ . La **figure 4.12** représente le schéma équivalent du circuit.



**Figure 4.12 :** Circuit équivalent d'un convertisseur « Boost » à l'état OFF.

Pendant l'analyse du circuit, on considère que la chute de tension aux bornes de la diode est nulle et le condensateur  $C_s$  suffisamment grand pour garder une tension  $V_s$  constante à ses bornes. L'évaluation du courant  $I_L$  donne :

$$V_e - V_s = L \frac{dI_L}{dt} \quad \text{ou} \quad V_s - V_e = -L \frac{dI_L}{dt}$$

Par conséquent, la variation de  $I_L$  durant l'état OFF est :

$$\Delta I_{Lb} = \int_0^{T-\alpha T} dI_L = \int_0^{(1-\alpha)T} \frac{V_e - V_s}{L} dt = \frac{V_e - V_s}{L} (1 - \alpha)T$$

Quand le convertisseur a atteint son régime permanent, la quantité d'énergie stockée dans chacun des composants est la même au début et à la fin d'un cycle de fonctionnement.

En conséquence, le courant traversant l'inductance est le même au début et à la fin de chaque cycle de commutation. Ce qui implique que la somme des variations des courants dans l'inductance est nulle. On peut écrire cette relation par l'équation suivante :

$$\Delta I_{Lp} + \Delta I_{Lp} = 0$$

En remplaçant  $\Delta I_{Lp}$  et  $\Delta I_{Lp}$  par ses expressions, on obtient :

$$\Delta I_{Lp} + \Delta I_{Lp} = \frac{V_e}{L} \alpha T + \frac{V_e - V_s}{L} (1 - \alpha) T = 0$$

$$\Delta I_{Lp} + \Delta I_{Lp} = \frac{\alpha TV_e + TV_e - \alpha TV_e - TV_s + \alpha TV_s}{L} = 0$$

$$\frac{TV_e - TV_s + \alpha TV_s}{L} = 0$$

$$V_e - V_s + \alpha V_s = 0$$

Ce qui donne le rapport entre la tension d'entrée et la tension de sortie (gain en tension) suivant :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{(1 - \alpha)} \quad (4.26)$$

Grâce à cette dernière expression, on peut voir que la tension de sortie est toujours supérieure à celle d'entrée. Elle ne dépend que de la tension d'entrée et du rapport cyclique  $\alpha$ . Celui-ci est toujours entre 0 et 1. Elle augmente avec la valeur  $\alpha$ , et théoriquement elle peut être infinie lorsque  $\alpha$  se rapproche de 1. Le convertisseur est toujours un convertisseur Boost (survolteur). On constate aussi que théoriquement la tension de sortie est indépendante de la charge.

#### 4.7.2 Moyen de stockage de l'énergie électrique

L'énergie électrique extraite à partir de l'élément piézoélectrique peut être récupérée dans un support de stockage par l'intermédiaire d'un convertisseur « Boost ». Il existe différentes moyens de stockage d'énergie.

##### 4.7.2.1 Les batteries

La batterie est le moyen le plus utilisé et le plus connu par le public en matière de stockage. On les trouve dans des nombreuses applications comme dans les téléphones mobiles, les automobiles et les systèmes embarqués ou isolés. La technologie de la batterie est multiple et possède des caractéristiques variables. Il y a par exemple les batteries au Plomb-Acide, les batteries au Nickel-Cadmium et les batteries au Lithium. L'inconvénient majeur d'une batterie est leur faible durée de

vie. Le nombre de cycle de charge et décharge est limité entre 100 et 1000. Il est aussi difficile de connaître la quantité d'électricité indiquant la charge de la batterie [4.14]. L'énergie est stockée sous forme chimique pour la batterie. Sa formule est donnée par l'**Eq. 4.27**.

$$W_{stock} = Q_{el} * V \quad (4.27)$$

- $W_{stock}$  : Energie stockée ou capacité de la batterie (en Watt Heure ou Wh)
- $Q_{el}$  : Quantité d'électricité (en Ampère ou A)
- $V$  : La tension aux bornes de la batterie (en Volts ou V)

#### 4.7.2.2 Les supercondensateurs

Le stockage par condensateurs est utilisé principalement en électronique, c'est-à-dire en basse tension et en faible énergie. Tandis que le supercondensateur est un nouveau procédé qui a permis d'atteindre des capacités de plusieurs centaines de Farads. Pour les condensateurs usuels, les capacités varient entre le picofarad ( $10^{-12}$ ) à quelques milliers de microfarads ( $10^{-3}$ ). L'énergie est stockée sous forme électrostatique pour le supercondensateur et non pas électrochimique. Le nombre de cycle de charge et décharge est entre 500 000 à 1 000 000 [4.14]. La formule d'énergie stockée dans le supercondensateur est donnée par l'**Eq. 4.28**.

$$W_{stock} = \frac{1}{2} * C * V^2 \quad (4.28)$$

- $W_{stock}$  : Energie stockée dans le supercondensateur (en Joule ou J)
- $C$  : Capacité du condensateur (en Farad ou F)
- $V$  : La tension aux bornes du condensateur (en Volts ou V)

Avec des puissances massiques élevées (d'ordre de 10 kW/kg), on les retrouve beaucoup dans les applications embarquées.

#### 4.7.2.3 Les inductances superconductrices

Dans l'inductance supraconductrice ou SMES (Superconductor Magnétic Energy Storage), l'énergie est stockée par l'intermédiaire d'un courant électrique envoyé dans une bobine constituée d'un fil supraconducteur. Une fois la bobine court-circuitée (fermée), le courant circule sans perte d'énergie car il n'y a pas de frottement (les électrons circulent en continu). Il y a alors production d'un champ magnétique dans les bobines. L'énergie est donc stockée dans la bobine sous une forme magnétique et électrique, et peut être récupérée dans un très court laps de temps [4.14].

### 4.7.3 Choix de moyen de stockage et calcul estimatif

La sélection d'un système de stockage sur une application donnée dépend de plusieurs critères de choix qui sont :

- la Quantité et nature d'énergie disponible
- la Puissance disponible
- la Densité de stockage en énergie et puissance, qui conditionne le volume et le poids du système
- le Nombre de cycle de charge et décharge

L'application d'un récupérateur d'énergie piézoélectrique sur la vibration d'un pont est une application à basse tension et à faible énergie. Par contre, le but est de stocker un maximum d'énergie. Le choix est alors orienté vers le supercondensateur ou la batterie. Une comparaison de ces deux techniques est donnée dans le **tableau 4.07**.

**Tableau 4.07 :** Comparaison des caractéristiques entre la batterie et le supercondensateur [4.15]

Caractéristique	Batterie Li-ion	Supercondensateur
Energie massique (Wh/kg)	100 - 265	4 - 10
Energie volumique (Wh/l)	220 - 400	4 - 14
Puissance en pointe (W/kg)	1500	3000 - 40 000
Nombre de cycle	500 - 1000	500 000 - 20 000 000
Durée de vie	5 - 10 ans	10 - 15 ans
Risque d'explosion	oui	aucun

La puissance maximale obtenue à partir de la vibration d'un pont avec le module décrit à la page 85, section 3.4.2, est de 185,76  $\mu$ W théoriquement. Ce qui correspond à une tension continue de 3.71 V et un courant continu 0.7 mA.

Le résultat obtenu ne peut charger qu'une batterie qui alimente un circuit électronique macroscopique. C'est une batterie de type « *pile button* » rechargeable représenté à la **Fig. 4.13**.

Avec la tension continue 3.71 V et un courant continu 0.7 mA, on a choisi une batterie Panasonic « *pile button* » de 3 V avec une capacité nominale de 5 mAh (ML621) [4.16]. Les caractéristiques de la batterie est donnée dans le **tableau 4.08**.

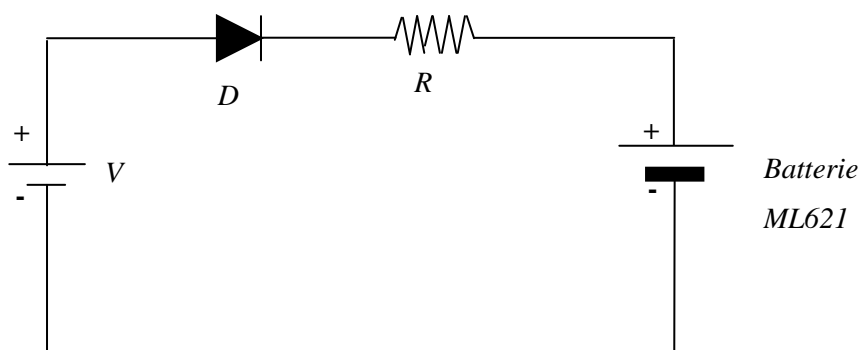


**Figure 4.13 :** Batterie panasonic « Pile bouton » [4.16].

**Tableau 4.08 :** Caractéristique de la batterie panasonic 3 V [4.16]

Propriétés	Valeurs
Fabricant	Panasonic
Catégorie	Pile bouton
Tension de sortie nominale	3 V
Capacité nominale	5 mAh
Température de fonctionnement	-20 °C à 60 °C
Rechargeable	Oui
Type	Lithium

Pour charger la batterie, on doit installer un circuit de charge entre la source et la batterie. Le circuit de charge est représenté à la **Fig. 4.14**. Il est composé d'une diode et d'une résistance.



**Figure 4.14 :** Circuit de charge de la batterie

- La diode  $D$  est utilisé comme arrêt de charge de la batterie quand sa tension nominale est atteint ou plus précisément supérieur à la tension de charge  $V$ . La tension de charge  $V$  doit être alors réglé pour être égale à la tension nominale de la batterie.

- La résistance  $R$  est utilisée pour régler le courant de charge.

Le temps de charge d'une batterie est donné par la formule de l'**Eq. 4.29**.

$$T_{charge} = \frac{\text{Capacité nominale}}{\text{Intensité de charge}} \quad (4.29)$$

Ce qui donne que la batterie ML621 peut être chargée en **7 h** de temps avec une intensité de charge de 0,7 mA. C'est le temps nécessaire si la batterie est totalement déchargée.

Par contre la tension obtenue à partir de la vibration d'un pont n'est pas permanent. Elle existe juste au passage d'un véhicule.

Supposons que le passage d'un véhicule à 90 km/h sur un pont 35 m va créer une intensité de charge 0,7 mA pendant 4 secondes. Ce qui veut dire qu'il faut 6 300 véhicules qui traversent le pont pour charger initialement la batterie ML621.

Dans le cas où la batterie est chargée initialement et c'est la plupart des cas, chaque passage d'un véhicule peut le charger si sa tension nominale est en dessous de la tension obtenue par le module de récupérateur.

## 4.8 Conclusion

L'étude analytique de la déflexion d'un pont sous une charge mobile à vitesse constante est développée dans ce chapitre. La résolution de l'équation d'un pont est traitée à partir de la superposition des modes propres. La solution est alors considérée comme une forme de série constituée de la forme de vibration avec une amplitude modale. Une équation différentielle de second ordre de l'amplitude modale est alors obtenue. Deux méthodes sont considérées pour résoudre l'équation différentielle : étude dans le domaine fréquentiel et étude dans le domaine temporel. La méthode de Laplace est utilisée pour résoudre l'équation différentielle de l'amplitude modale dans le domaine fréquentiel. Ce qui donne le résultat de la déflexion d'un pont en un point  $x$ . La deuxième méthode consiste à résoudre l'équation différentielle de l'amplitude modale dans le domaine temporel. La déflexion d'un pont en un point  $x$  est aussi obtenue dans ce domaine après la résolution.

L'équation de la déflexion d'un pont est ensuite utilisée dans l'équation de la piézoélectricité. Elle est considérée comme une équation d'excitation de l'équation piézoélectrique. L'équation de la tension aux bornes de l'élément piézoélectrique est alors obtenue dans le domaine fréquentiel. Une série de tests théorique est effectuée pour comprendre le système développé. Les valeurs des paramètres utilisés sont des valeurs extraites de la littérature. Le résultat a montré qu'une

puissance maximale de 185,76  $\mu\text{W}$  est obtenue pour un pont de longueur 35 m avec une vitesse de charge mobile à 90 km/h. Ce résultat est obtenu pour la technique récupération continue standard. Une méthode de stockage d'énergie par l'intermédiaire d'un convertisseur « Boost » est discutée à la fin de ce chapitre. La technologie de stockage utilisée est basée sur la batterie. Le calcul estimatif donne que le passage de 6300 voitures peut charger une batterie ML621 à partir de 0 V jusqu'à une charge nominale. Pour un éclairage autonome d'un pont, il faut une installation en série du module développé.

## **CHAPITRE 5**

### **SIMULATION NUMERIQUE DE LA CONVERSION DE LA VIBRATION D'UN PONT EN ENERGIE ELECTRIQUE PAR L'INTERMEDIAIRE D'UN MATERIAU PIEZOELECTRIQUE**

#### **5.1 Introduction**

Il a été étudié analytiquement que la vibration d'un pont peut être exploitée pour obtenir de l'électricité. C'est le matériau piézoélectrique qui est utilisé pour convertir cette vibration mécanique en énergie électrique. La structure du système considéré est composée d'un pont qui joue le rôle d'une source vibratoire, un matériau piézoélectrique qui convertit la vibration en énergie électrique et un circuit de récupération. Les grandeurs de la vitesse et de la puissance ont été obtenues théoriquement dans l'étude analytique de la structure. Des exemples des données numériques sur les caractéristiques du pont et du matériau piézoélectrique ont permis d'obtenir une valeur de l'énergie extraite. Une simulation de cette même structure va être étudiée dans ce chapitre. La simulation est découpée en plusieurs parties. La simulation de la vibration du pont sous le passage d'un véhicule à vitesse constante est d'abord étudiée dans la première partie. Ensuite dans la deuxième partie, le module piézoélectrique sera étudié en considérant une source vibratoire harmonique. Et dans la troisième partie, on étudiera la combinaison des deux systèmes. C'est-à-dire que le module pont va être considéré comme la source vibratoire du module piézoélectrique. La simulation est effectuée sous SIMULINK et Symbolic Math qui sont des ToolBox intégrés dans MATLAB [5.01] [5.02].

La modélisation d'un système pont piézoélectrique est publiée dans le Journal Scientifique de notoriété internationale IJARIIE:

- « Mathematical modelling of piezoelectric harvesting from bridge vibration under moving load », ISSN(Online):2395-4396, Vol-4, Issue-5 2018, Réf : 9184, Pages : 788- 796, [www.ijariie.com](http://www.ijariie.com) (Annexe A1.3).

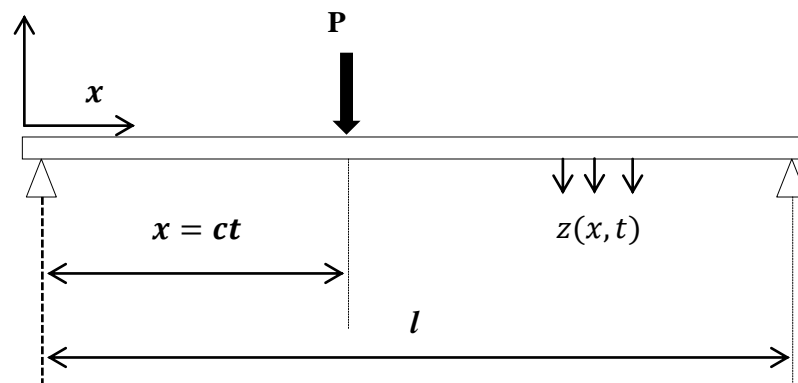
#### **5.2 Simulation de la vibration d'un pont sous une charge mobile**

La simulation qui va être effectuée dans cette section se base sur la théorie dans le chapitre 4. Le pont est modélisé comme une poutre de Bernoulli qui est traversée par une force constante avec un déplacement uniforme.



### 5.2.1 Définition du système

Une force constante  $\mathbf{P}$  roule de gauche vers la droite sur le pont modélisé comme un tablier, de longueur  $l$ , avec une vitesse uniforme  $c$  qui sont représentées à la **Fig.5.01**. La déflexion du pont est notée par  $z(x, t)$ , en un temps  $t$ , et en un point  $x$  donné. Cette déflexion est mesurée à partir de l'extrémité gauche du pont et à partir de la position d'équilibre avec le poids propre du système. Le pont est caractérisé par le module d'Young du tablier,  $E_Y$ , le moment d'inertie constant de la surface du tablier,  $J$ , la masse par unité de surface du tablier,  $\mu$ , la fréquence propre du tablier pour le mode  $n$ ,  $\omega_n$ , et le coefficient d'amortissement du tablier,  $\zeta_n$ .



**Figure 5.01 :** *Modèle d'un pont sous une force constante  $P$ .*

### 5.2.2 Rappel sur les hypothèses posées

Les hypothèses adoptées pour le modèle sont détaillées comme suit :

- (i) Le comportement de la plaque est décrit par l'équation différentielle de Bernoulli-Euler déduite de l'hypothèse que la théorie des petites déformations, la loi de Hooke, l'hypothèse de Navier et le principe de Saint-Venant peuvent être appliquées. La plaque a une section constante et une masse constante par unité de longueur.
- (ii) Un seul véhicule en mouvement à la fois est autorisé à traverser le pont.
- (iii) La masse de la charge mobile est plus petite par rapport à la masse de la poutre. Cela signifie que seul l'effet gravitationnel de la charge est considéré tandis que l'effet d'inertie est négligé.
- (iv) La charge se déplace à vitesse constante, de gauche à droite.
- (v) L'amortissement de la plaque est proportionnel à la vitesse de vibration qui est de type Rayleigh.

(vi) Le calcul sera effectué pour une simple plaque, c'est-à-dire une plaque avec une déflexion nulle et un moment de flexion nul aux deux extrémités. En outre, au moment de l'arrivée de la charge mobile, la plaque est au repos. Cela veut dire qu'il ne possède ni déflexion ni vitesse.

A partir de ces hypothèses, Le déplacement ou déflexion, noté  $z(x, t)$  à tout instant  $t$ , en tout point  $x$  du pont est donné par l'**Eq. 4.01** rappelée ici :

$$E_Y I \frac{\partial^4 z(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + 2\mu \zeta_n \omega_n \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} = p(x, t) \quad (5.01)$$

Dans le cas d'une charge concentré mobile qui roule avec une vitesse constante  $c$ , la deuxième partie de l'**Eq. 5.01** peut s'écrire :

$$p(x, t) = \begin{cases} \delta(x - ct)P, & 0 \leq t \leq t_d \text{ avec } t_d = l/c \\ 0, & t_d > 0 \end{cases} \quad (5.02)$$

Avec,  $t_d = l/c$  est le temps nécessaire à la charge pour traverser le pont de longueur  $l$ .

L'équation 5.01 est maintenant résolue pour la charge  $p(x, t)$  dans l'**Eq. 5.02** en utilisant la superposition modale. Une transformation est faite à partir des coordonnées de déplacement  $z(x, t)$  vers une coordonnée modale  $Z_n(t)$ .

Une solution de l'**Eq. 5.01** est considérée comme suit :

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (5.03)$$

Après les manipulations détaillées dans le chapitre 4, on aura l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{Z}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{Z}_n(t) + \omega_n^2 Z_n(t) = \frac{2P}{l\mu} \sin(n\Omega t) \quad (5.04)$$

Avec,  $\Omega = \frac{\pi c}{l}$ ,  $\omega_n^2 = \frac{E_Y I}{\mu} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$

L'équation 5.04 est une équation différentielle de second ordre que l'on peut résoudre avec le logiciel SIMULINK de MATLAB.

### 5.2.3 Résolution de l'équation différentielle du pont par SIMULINK

Le but de la simulation du système pont est de pouvoir étudier sa déflexion en une position  $x$  située sur sa longueur. Cette déflexion dépend aussi d'autres paramètres comme la longueur du pont et la vitesse du véhicule qui la traverse.

Le logiciel Simulink de MATLAB permet de modéliser des équations différentielles en schéma blocs. En général, il permet de représenter les fonctions mathématiques et les systèmes sous forme

de diagrammes en blocs, et de simuler le fonctionnement de ces systèmes. Autrement dit, c'est une plate-forme de simulation multi- domaine et de modélisation de systèmes dynamiques.

L'équation différentielle d'un pont peut être résolue en utilisant Simulink. La solution de l'équation est visualisable directement par l'outil Oscilloscope. De même, la valeur moyenne, le maximum, le minimum et la valeur de crête à crête de la solution sont obtenus par cet outil.

Les données utilisées pour la simulation sont semblables à celles utilisées dans la théorie. Le **tableau 5.01** ci-dessous montre les paramètres de pont.

**Tableau 5.01 : Paramètres de pont [4.13].**

Paramètre de pont	valeur
Masse par unité de longueur, $\mu$	4406.78 kg/m
Rigidité à la flexion, $E_Y J$	106 GN/ m2
Section transversale, $S_p$	4 m2
Amortissement du pont $\zeta$	0.02

La force  $P$  appliquée au pont est de 30 kN (chois libre).

La simulation est effectuée à la première mode de vibration du pont, c'est-à-dire que  $n=1$ .

L'équation 5.04 peut être écrite comme suit après quelque modification en utilisant les valeurs citées ci-dessus:

$$\ddot{Z}(t) = \frac{1}{\mu} \left( \frac{2P}{l} \sin\left(\frac{\pi c}{l} t\right) - 2\zeta \mu \sqrt{\frac{E_Y J}{\mu}} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \dot{Z}(t) - E_Y J \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 Z(t) \right) \quad (5.05)$$

*Démonstration :*

♣

$$\ddot{Z}(t) = \frac{2P}{l\mu} \sin(\Omega t) - 2\zeta \omega \dot{Z}(t) - \omega^2 Z(t)$$

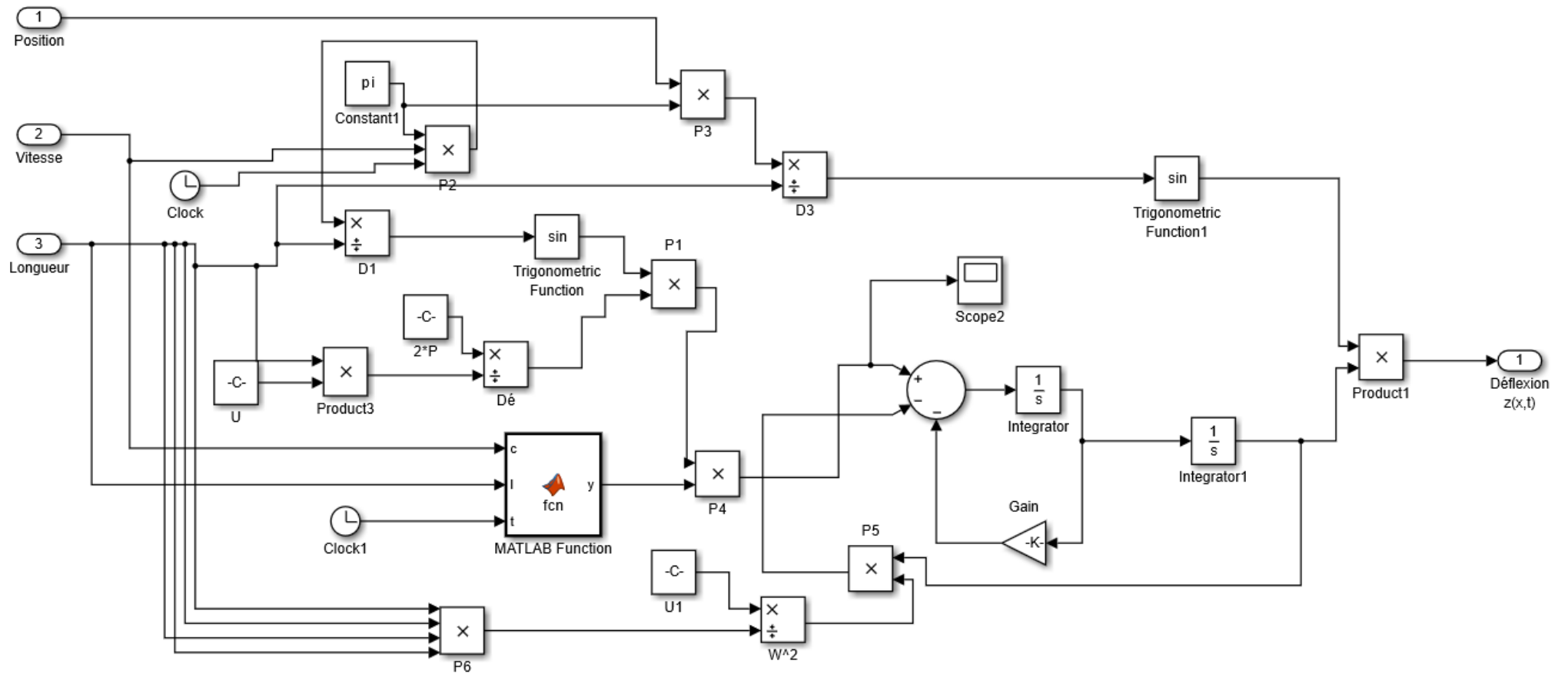
- Avec,  $\Omega = \frac{\pi c}{l}$ ,  $\omega_n^2 = \frac{E_Y J}{\mu} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$

$$\ddot{Z}(t) = \frac{2P}{l\mu} \sin\left(\frac{\pi c}{l} t\right) - 2\zeta \sqrt{\frac{E_Y J}{\mu}} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \dot{Z}(t) - \frac{E_Y J}{\mu} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 Z(t)$$

$$\ddot{Z}(t) = \frac{1}{\mu} \left( \frac{2P}{l} \sin\left(\frac{\pi c}{l} t\right) - 2\zeta \mu \sqrt{\frac{E_Y J}{\mu}} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \dot{Z}(t) - E_Y J \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 Z(t) \right)$$

♦

La modélisation de l'**Eq.5.05** sous Simulink est représentée à la **Fig. 5.02**.



**Figure 5.02 :** Réalisation Simulink du modèle mathématique d'un pont sous une force constante  $P$ .

Pour étudier la déflexion d'un pont en un point  $x$  au temps  $t$ , il faut varier certains paramètres.

- La longueur du pont  $l$
- La vitesse de la charge roulant  $c$
- La position  $x$

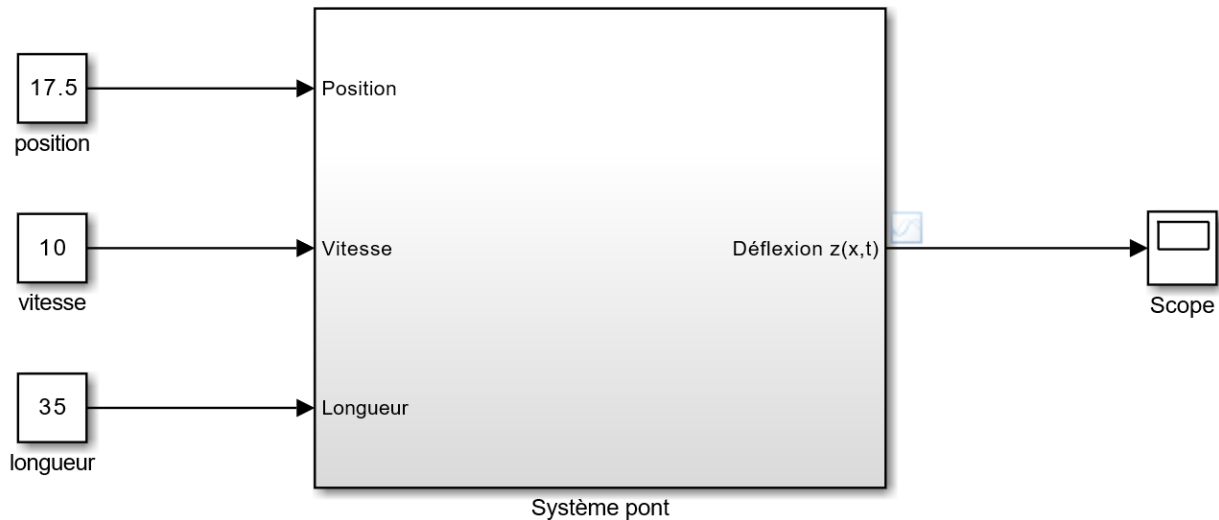
On doit lancer plusieurs fois la simulation pour examiner les résultats de la déflexion en changeant les paramètres à chaque simulation. Le **tableau 5.02** montre les valeurs du paramètre choisis.

**Tableau 5.02** : Paramètres de simulation de la déflexion d'un pont.

Longueur du pont (en m)	Vitesse de la charge roulante (en km/h)	Position $x$ (m)
25	36, 54, 72, 90	1/4 de la longueur ; 1/2 de la longueur ; 2/3 de la longueur ; 3/4 de la longueur
35	36, 54, 72, 90	1/4 de la longueur ; 1/2 de la longueur ; 2/3 de la longueur ; 3/4 de la longueur
50	36, 54, 72, 90	1/4 de la longueur ; 1/2 de la longueur ; 2/3 de la longueur ; 3/4 de la longueur

Grace à l'existence d'un outil « Subsystem » dans Simulink, le nombre de simulation peut être réduit. L'outil « Subsystem » permet de réduire plusieurs blocs en un seul bloc de sous-système. Au fur et à mesure qu'un module augmente en taille et en complexité, on peut le simplifier en regroupant les blocs en sous-systèmes. On peut spécifier plusieurs entrées et sorties dans ce sous système. De plus, l'existence d'une variable matrice dans Matlab peut aider pour réduire le nombre de simulation. Si on choisit par exemple une longueur du pont fixe 25 m et une position  $x = 1/4$  de la longueur, la variation de la vitesse peut être introduite par la matrice [36, 54, 72, 90]. Dans ce cas, la simulation est lancée une seule fois mais le résultat pour les différentes valeurs de la vitesse est obtenu à la sortie.

Ainsi, les blocs qui constituent le module pont peuvent être regroupés dans un seul bloc avec quatre entrées et une sortie. Les entrées sont la vitesse de la charge mobile, la longueur du pont, la position  $x$  à étudier et le temps. La sortie est la déflexion du pont à la position  $x$  et à l'instant  $t$ . La **figure 5.03** montre le sous-système du module pont avec les entrées et la sortie.



**Figure 5.03 :** Module mathématique d'un pont groupé en sous-système sous Simulink.

#### 5.2.4 Résultat pour la longueur $l=50m$

Dans cette série de test, la longueur du pont est fixée à 50 m. Les vitesses et les positions sont variées selon le **tableau 5.02**. Les résultats sont listés au **tableau 5.03**.

**Tableau 5.03 :** Résultats de test sur un pont de 50m.

Vitesse (km/h)	Déflexion maximale ( $10^{-6}$ m)			
	Pour $l = 50$ m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	<b>519</b>	<b>735</b>	<b>636</b>	<b>519</b>
54	<b>525</b>	<b>743</b>	<b>643</b>	<b>525</b>
72	<b>536</b>	<b>758</b>	<b>656</b>	<b>536</b>
90	<b>536</b>	<b>758</b>	<b>656</b>	<b>536</b>

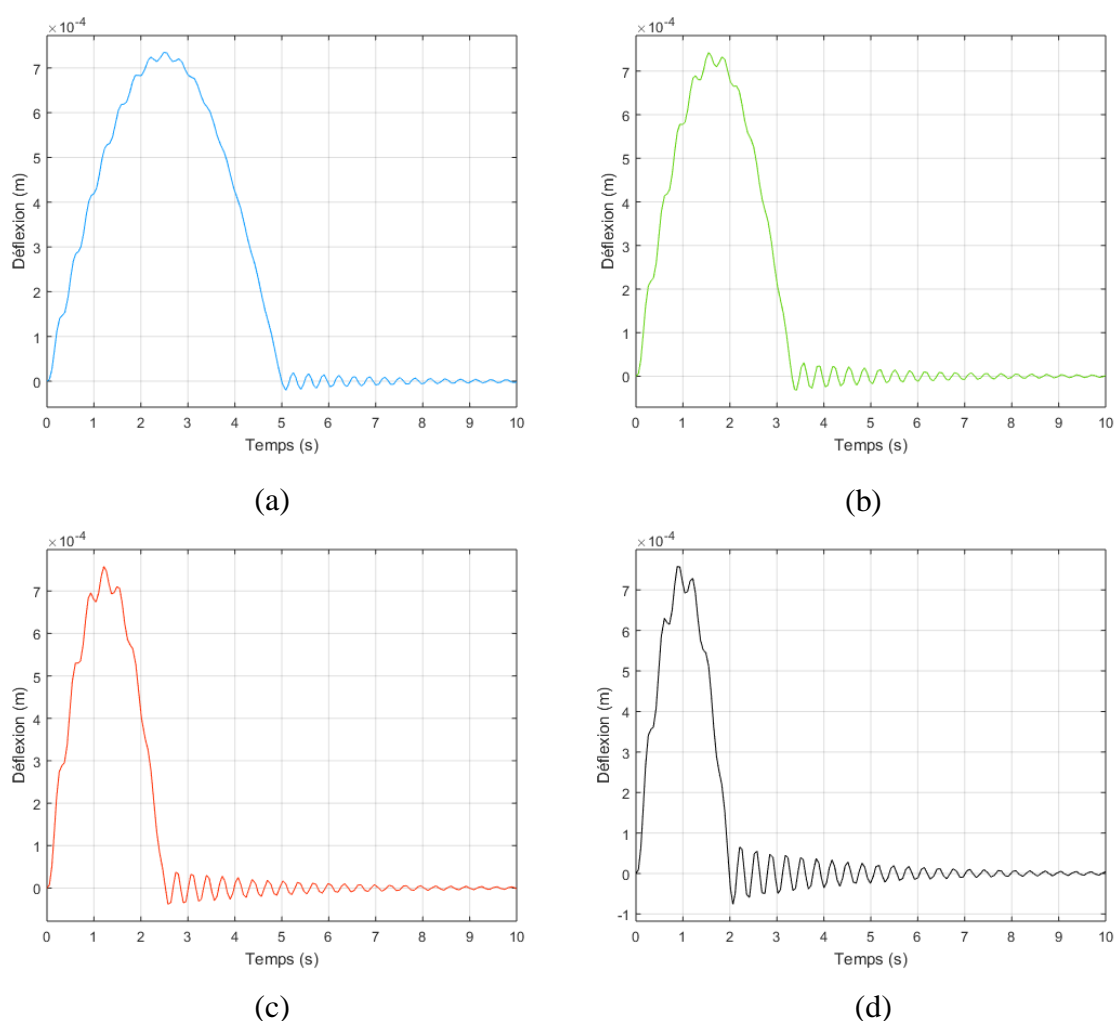
#### Interprétation de résultat

Les résultats obtenus montrent que :

- La déflexion est maximale à une position située au milieu du pont pour toutes les vitesses considérées.
- A une position donnée, la déflexion est plus élevée avec une vitesse plus élevée et elle devient moins importante quand la vitesse diminue. Ce qui veut dire que la déflexion est proportionnelle à la vitesse à une position donnée.

- Les déflexions sur les deux positions qui se situent à 1/4 et 3/4 de la longueur du pont sont presque la même.

La **figure 5.04** montre les différentes courbes de déflexion située au bon milieu du pont selon la longueur en fonction de la vitesse de la charge mobile. C'est la position où la déflexion d'un pont est maximale. Les courbes montrent que le mouvement de la déflexion s'amortie une fois la charge mobile quitte le pont.

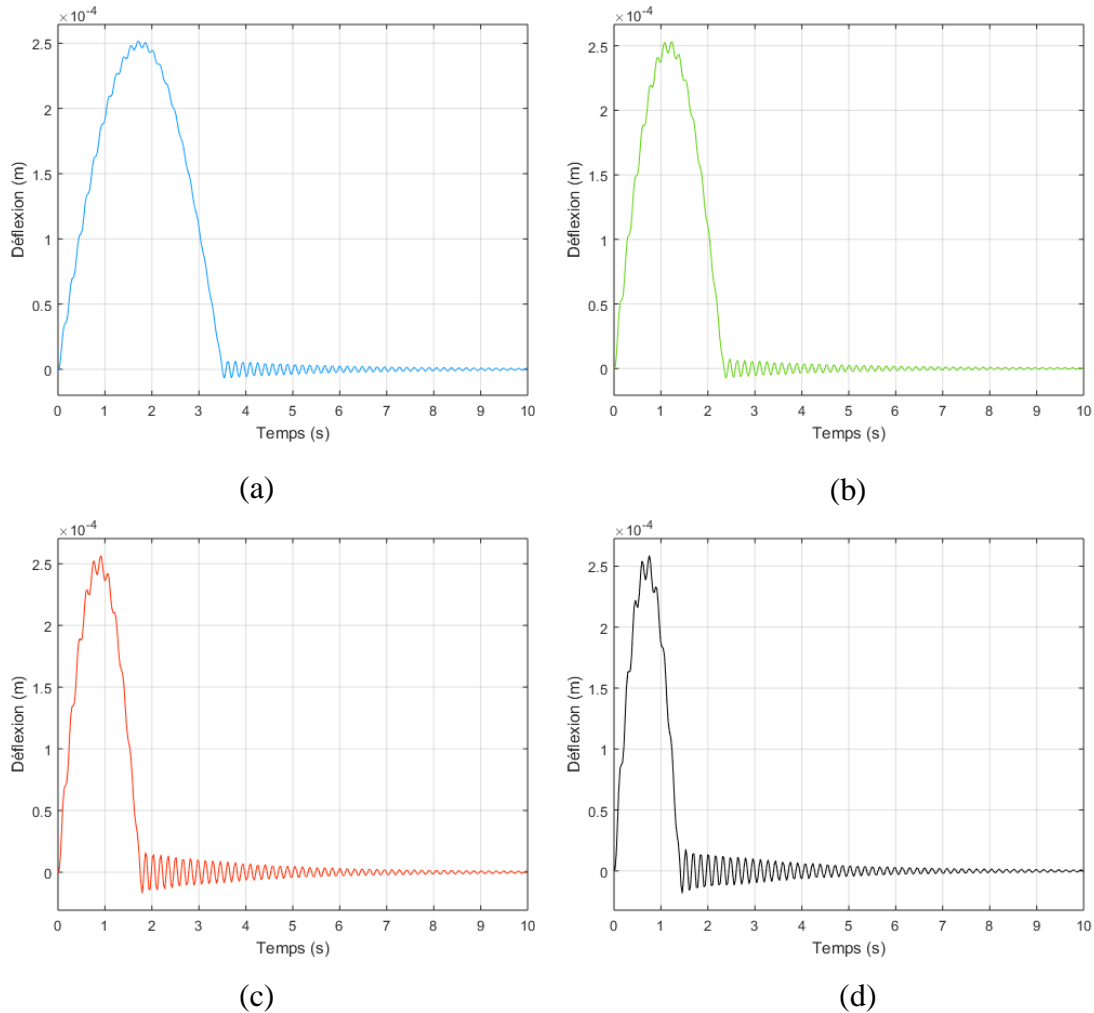


**Figure 5.04 :** Courbes de déflexion au point  $x= 50\text{ m}$  pour un pont de  $50\text{m}$  : (a) vitesse =  $36\text{ km/h}$ , (b) vitesse =  $54\text{ km/h}$ , (c) vitesse =  $72\text{ km/h}$ , (d) vitesse =  $90\text{ km/h}$ .

### 5.2.5 Résultat pour la longueur $l=35\text{m}$

Dans cette série de test, la longueur du pont est fixée à  $35\text{ m}$ . Les vitesses et les positions sont variées selon le **tableau 5.02**.

La **figure 5.05** montre les différentes courbes de déflexion située à 1/2 de la longueur du pont selon la vitesse de la charge mobile qui sont la déflexion maximale d'un pont. Les courbes montrent que le mouvement de la déflexion s'amortit une fois la charge mobile quitte le pont.



**Figure 5.05 :** Courbes de déflexion située à 1/2 de la longueur du pont de 35 m, (a) vitesse = 36 km/h, (b) vitesse = 54 km/h, (c) vitesse = 72 km/h, (d) vitesse = 90 km/h.

### **Interprétation de résultat**

Les résultats obtenus montrent le même profil que les résultats obtenus pour le pont de 50 m. c'est-à-dire que :

- La déflexion est maximale à une position située au milieu du pont pour toutes les vitesses considérées.
- A une position donnée, la déflexion est plus élevée avec une vitesse plus élevée et elle devient moins importante quand la vitesse diminue. Ce qui veut dire que la déflexion est proportionnelle à la vitesse en une position donnée.



- Les déflexions sur les deux positions situées à 1/4 et 3/4 de la longueur du pont sont presque la même.

Les résultats sont listés au **tableau 5.04**.

**Tableau 5.04 : Résultats de test sur un pont de 35m.**

Vitesse (km/h)	Déflexion maximale ( $10^{-6}$ m) Pour $l = 35$ m			
	$x = \frac{1}{4}l$	$x = \frac{1}{2}l$	$x = \frac{2}{3}l$	$x = \frac{3}{4}l$
36	<b>178</b>	<b>251</b>	<b>219</b>	<b>178</b>
54	<b>179</b>	<b>253</b>	<b>220</b>	<b>179</b>
72	<b>181</b>	<b>256</b>	<b>223</b>	<b>181</b>
90	<b>183</b>	<b>258</b>	<b>225</b>	<b>183</b>

#### 5.2.6 Résultat pour la longueur $l=25$ m

Dans cette série de test, la longueur du pont est fixée à 25 m. Les vitesses et les positions sont variées selon le **tableau 5.02**. Les résultats sont listés au **tableau 5.05**.

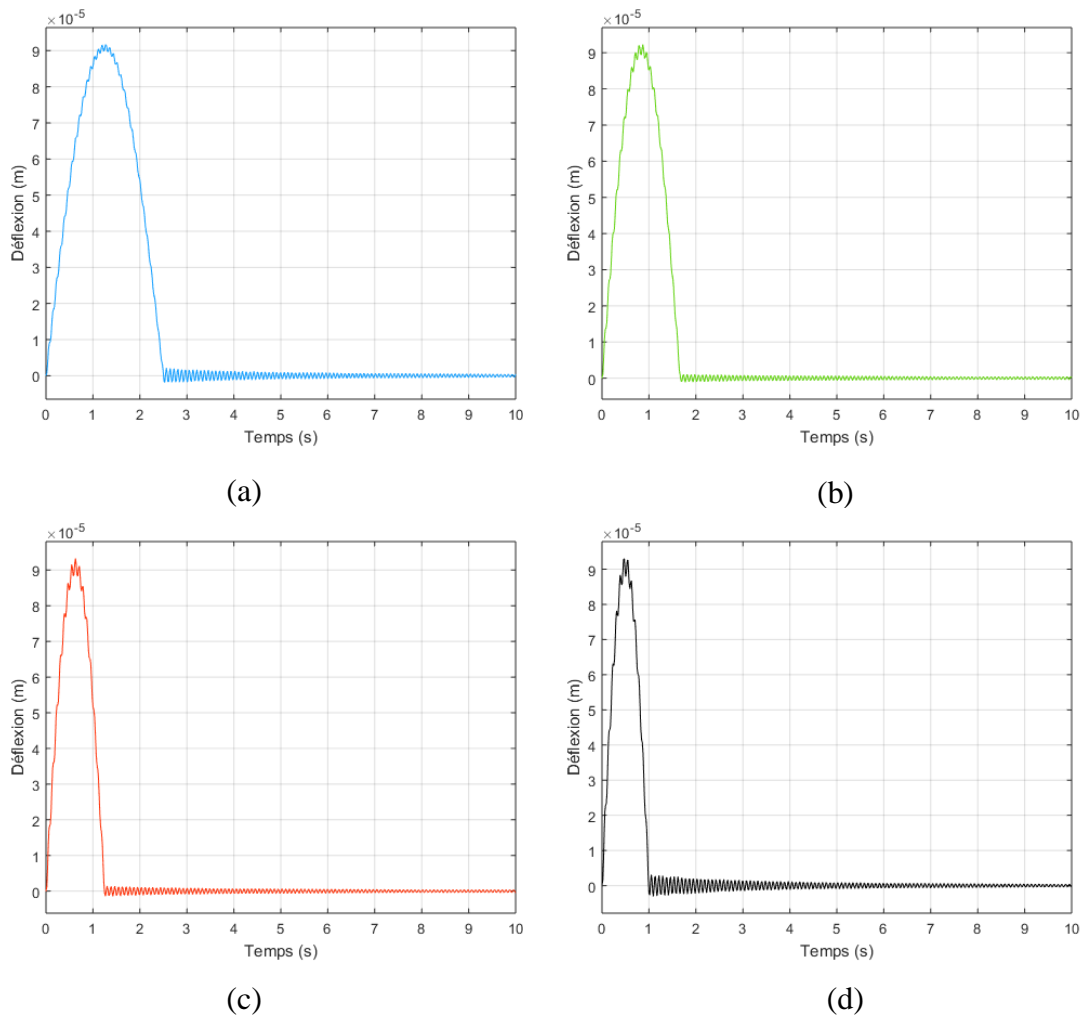
**Tableau 5.05 : Résultats de test sur un pont de 25 m.**

Vitesse (km/h)	Déflexion maximale ( $10^{-6}$ m) Pour $l = 25$ m			
	$x = \frac{1}{4}l$	$x = \frac{1}{2}l$	$x = \frac{2}{3}l$	$x = \frac{3}{4}l$
36	<b>64</b>	<b>92</b>	<b>79</b>	<b>64</b>
54	<b>65</b>	<b>92</b>	<b>80</b>	<b>65</b>
72	<b>66</b>	<b>93</b>	<b>81</b>	<b>66</b>
90	<b>66</b>	<b>93</b>	<b>81</b>	<b>66</b>

#### Interprétation des résultats

Les résultats obtenus sont similaires aux résultats obtenus dans les longueurs du pont 50 m et 35 m, seules les grandeurs des valeurs font la différence.

La **figure 5.06** montre les différentes courbes de déflexion située à 1/2 de la longueur du pont selon la vitesse de la charge mobile. Les courbes montrent que le mouvement de la déflexion s'amortie une fois la charge mobile quitte le pont.



**Figure 5.06 :** Courbes de déflexion située à 1/2 de la longueur du pont de 25 m, (a) vitesse = 36 km/h, (b) vitesse = 54 km/h, (c) vitesse = 72 km/h, (d) vitesse = 90 km/h.

### 5.2.7 Résumé des résultats pour les différents tests

Les différents tests effectués sur un pont de longueur 50 m, 35 m et 25 m avec une variation de la vitesse et une variation de la position où les mesures sont effectuées peuvent être interprétés comme suit :

- Une meilleure vibration ou déflexion maximale peut être identifiée sur des ponts avec une longueur importante. C'est-à-dire qu'un pont plus long donne une meilleure vibration quel que soit la vitesse de la charge mobile et la position étudiée.
- Quel que soit la longueur du pont et la vitesse de la charge mobile on aura toujours une déflexion maximale à une position située à 1/2 de la longueur du pont.

- Quel que soit la longueur du pont et la position étudiée, la déflexion est proportionnelle à la vitesse. C'est-à-dire qu'à une vitesse plus grande la déflexion est plus importante. Dans le cas contraire, la déflexion est moins importante dès que la vitesse diminue.
- Quel que soit la longueur du pont, les déflexions à la position située à 1/2 et à 3/4 de la longueur sont quasiment égales avec la même vitesse.
- Pour une longueur du pont assez courte, la déflexion est quasiment égale en une position donnée quel que soit la vitesse de la charge mobile.

### 5.3 Simulation du modèle piézoélectrique

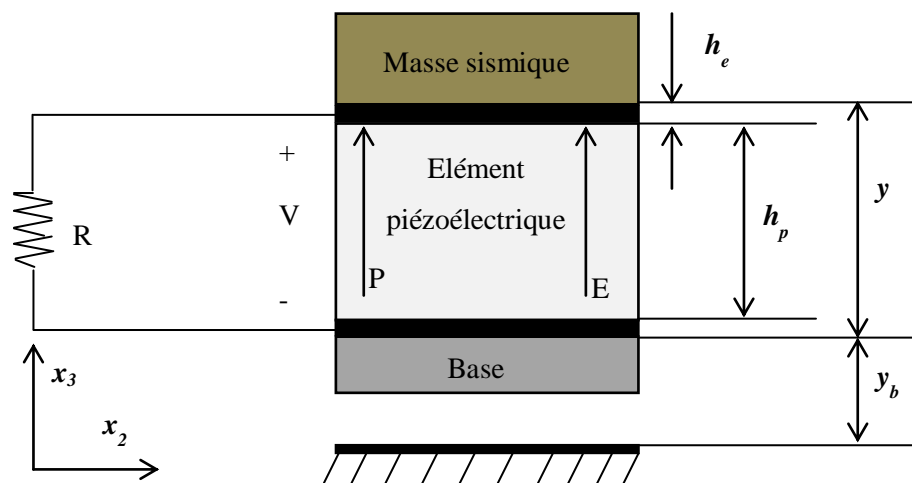
Les équations constitutives des matériaux piézoélectriques sont données par les expressions données par le système d'**Eq. 5.06**:

$$\begin{aligned} \text{Effet direct : } D &= e \cdot S + \varepsilon^S \cdot E \\ \text{Effet inverse : } T &= C^E \cdot S - e^T \cdot E \end{aligned} \quad (5.06)$$

Les études sont toujours basées sur ces équations mais des équations dérivées de ces derniers sont aussi disponibles.

#### 5.3.1 Présentation du module piézoélectrique

Le module utilisé dans la simulation est le même que celui utilisé dans la théorie. Le module a été développé dans le chapitre 3. C'est un système à un degré de liberté (1D) dont le détail est présenté à la **Fig 5.07**.



**Figure 5.07 :** Module d'un récupérateur piézoélectrique à 1D.

L'élément piézoélectrique est excité par un déplacement d'entrée de base  $y_b$ . Il a une masse  $M_p$  et l'élément est connecté à un circuit de récupération d'énergie, modélisé simplement comme une résistance. Une masse sismique,  $M$ , est également considérée. La masse totale du système est notée par  $M_T$ .

À partir d'une analyse d'équilibre des forces sur la masse  $M$ , les équations directrices peuvent être trouvées en termes de relations constitutives et de paramètres de dispositifs. L'élément piézoélectrique est polarisé dans la direction  $x_3$  ainsi que sa déformation. Ce qui conduit l'étude en mode de déformation longitudinale ou mode  $d_{33}$ . C'est une des modes de déformation d'un matériau piézoélectrique cité dans le chapitre 2.

### 5.3.2 Formulation de l'équation électromécanique du module piézoélectrique

Selon la déformation longitudinale ou mode  $d_{33}$ , l'**Eq. 5.06** peut être écrite comme :

$$D_3 = e_{33} \cdot S_3 + \varepsilon_{33}^S \cdot E_3 \quad (5.07)$$

$$T_3 = C_{33}^E \cdot S_3 - e_{33}^t \cdot E_{33} \quad (5.08)$$

Selon l'hypothèse et les formules énoncées dans le chapitre 3, on peut écrire les **Eqs. 5.07** et **5.08** par :

$$M_T \ddot{y} + C_{33}^E \frac{y}{t_p} + e_{33} \frac{v}{t_p} = -M_T \ddot{y}_b \quad (5.10)$$

$$D_3 = e_{33} \frac{x}{t_p} - \varepsilon_{33}^S \frac{v}{t_p} = \frac{q}{A_p} \quad (5.11)$$

En introduisant les paramètres :

- couplage électromécanique  $\theta = \frac{e_{33} A_p}{t_p}$ ,
- rigidité  $k = \frac{C_{33}^E A_p}{t_p}$ ,
- contrainte de permittivité  $C_p = \frac{\varepsilon_{33}^S A_p}{t_p}$ , et
- amortissement visqueux  $c_d$  (proportionnel à la vitesse  $\dot{y}$ )

L'équation différentielle définitive du système piézoélectrique ou équation du couple électromécanique devient :

$$M_T \ddot{y} + c_d \dot{y} + ky + \theta v = -M_T \ddot{y}_b \quad (5.12)$$

$$\theta \dot{y} - C_p \dot{v} = \frac{1}{R} v \quad (5.13)$$

Le système d'équations peut être encore exprimé sous d'autre forme avec les grandeurs suivantes :

- La fréquence naturelle ou fréquence de résonnance du système

$$\omega_h = \sqrt{\frac{k}{M_T}}$$

- Le coefficient d'amortissement mécanique du système :

$$\zeta_h = \frac{c_d}{2M_T\omega_h}$$

$$\ddot{y} + 2\zeta_h\omega_h\dot{y} + \omega_h^2 y + \frac{\theta}{M_T}v = -\ddot{y}_b \quad (5.14)$$

$$\theta\dot{y} - C_p\dot{v} = \frac{1}{R}v \quad (5.15)$$

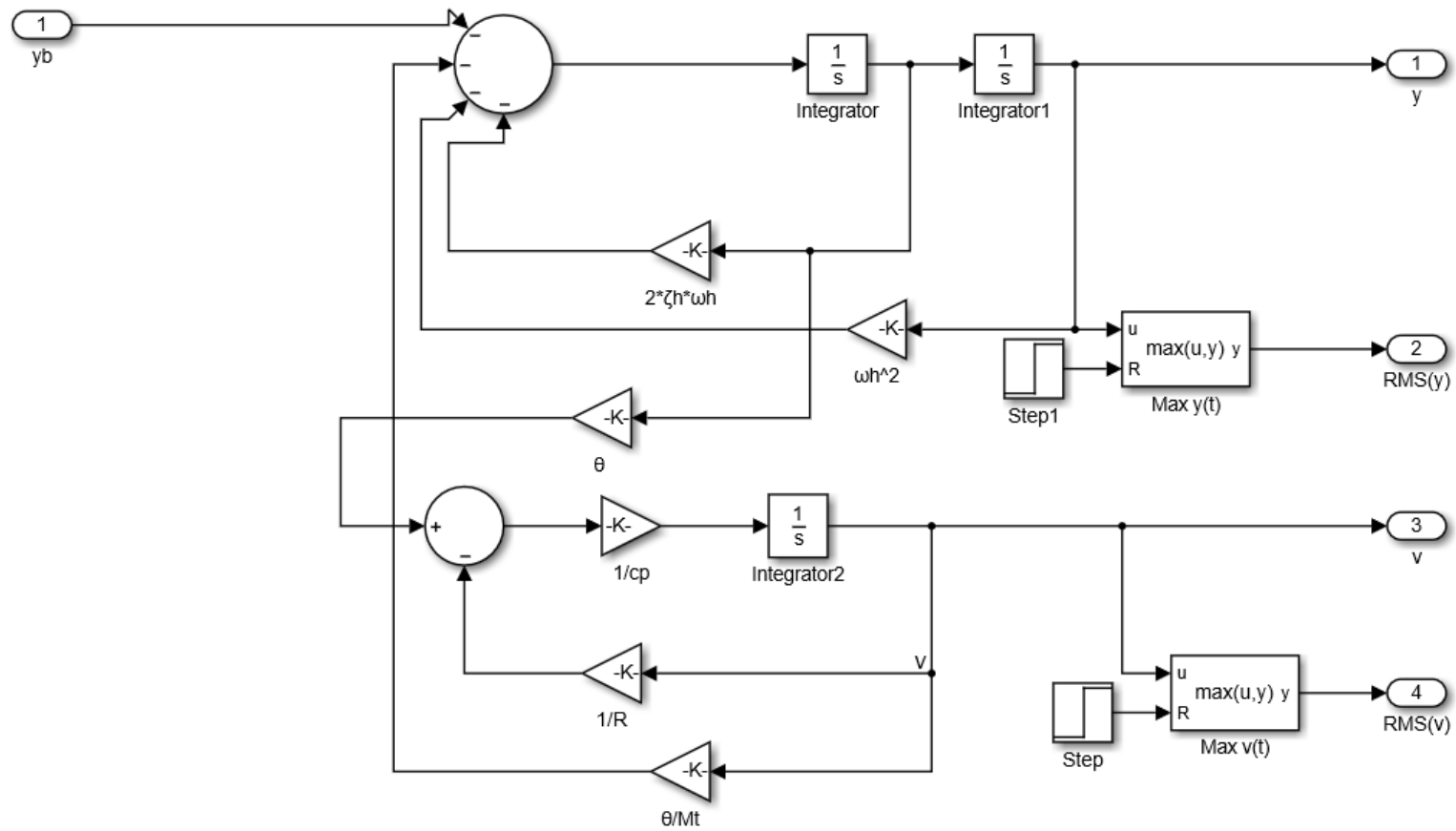
### 5.3.3 Simulation de l'équation électromécanique par Simulink

A L'équation électromécanique est composée de deux équations. Comme son nom l'indique, c'est une association de l'équation mécanique et de l'équation électrique. La résolution de l'équation devrait résoudre en même temps l'équation mécanique et l'équation électrique. La solution attendue est le déplacement relatif  $y$  de l'élément piézoélectrique et la tension aux bornes des électrodes. Le système est considéré excité par un mouvement harmonique de base  $y_b$ .

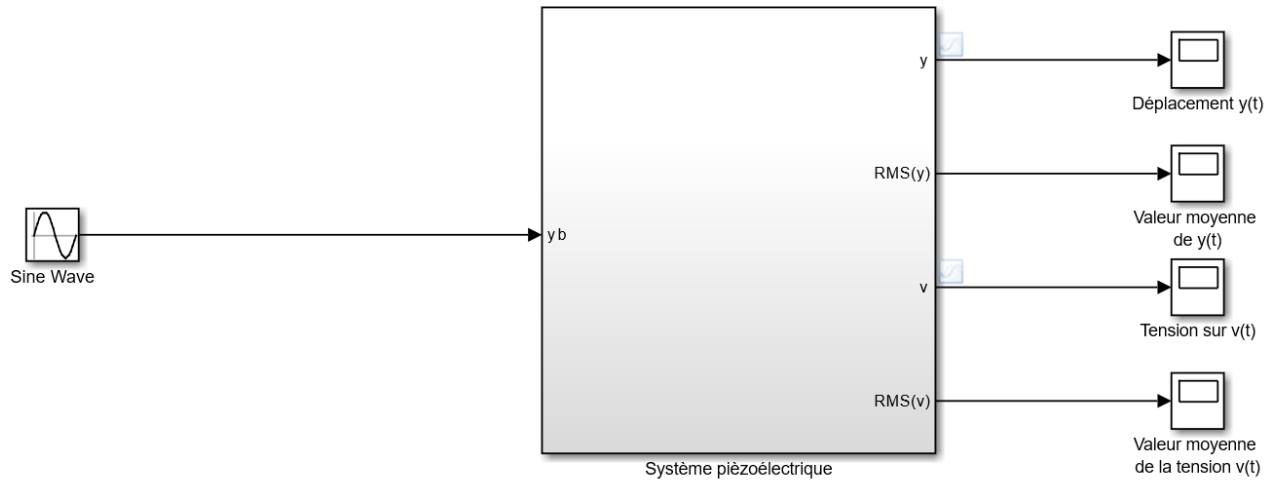
On peut encore modifier l'écriture des **Eqs. 5.14** et **5.15** pour faciliter sa conversion dans le modèle Simulink. :

$$\ddot{y} = -\ddot{y}_b - 2\zeta_h\omega_h\dot{y} - \omega_h^2 y - \frac{\theta}{M_T}v$$

$$\dot{v} = \frac{1}{C_p} \left( \theta\dot{y} - \frac{1}{R}v \right)$$



**Figure 5.08 :** *Modèle mathématique du système piézoélectrique sous Simulink.*



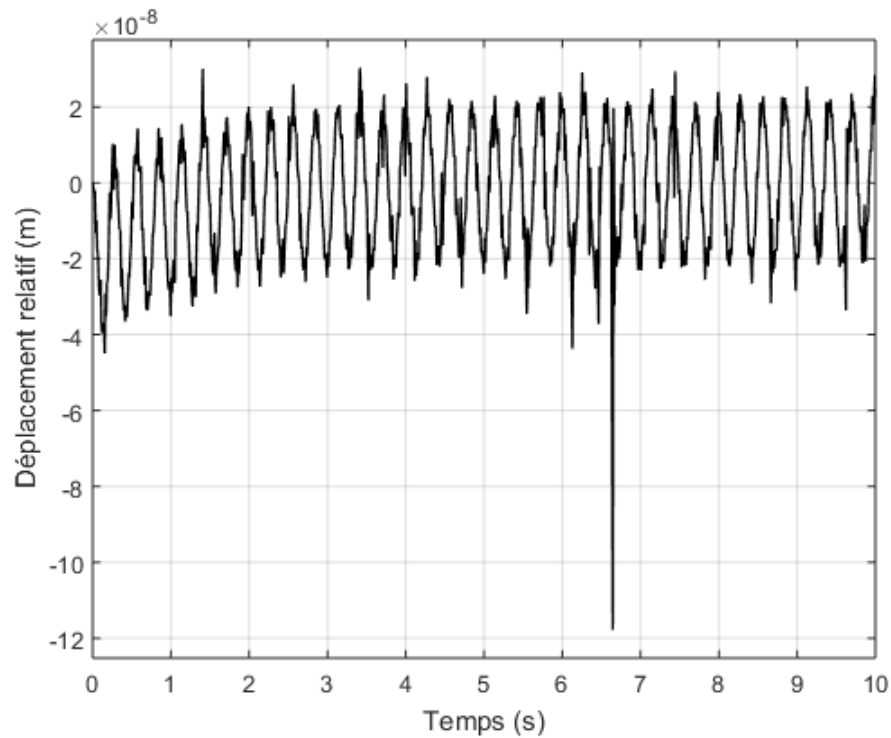
**Figure 5.09 :** *Modèle mathématique du système piézoélectrique groupé en sous-système Simulink.*

Les **figures 5.08** et **5.09** représentent la modélisation de l'équation électromécanique du module piézoélectrique sous Simulink. La **figure 5.09** représente le sous-système du module piézoélectrique et la deuxième montre les différents blocs qui le constituent. Le système a comme entrée l'excitation de base  $y_b$  assimilé à un mouvement harmonique qui a une amplitude de 258  $\mu\text{m}$ . Les quatre sorties sont respectivement le déplacement relatif  $y$  de l'élément piézoélectrique, la valeur moyenne de déplacement, la tension aux bornes des électrodes et la valeur moyenne de la tension extraite.

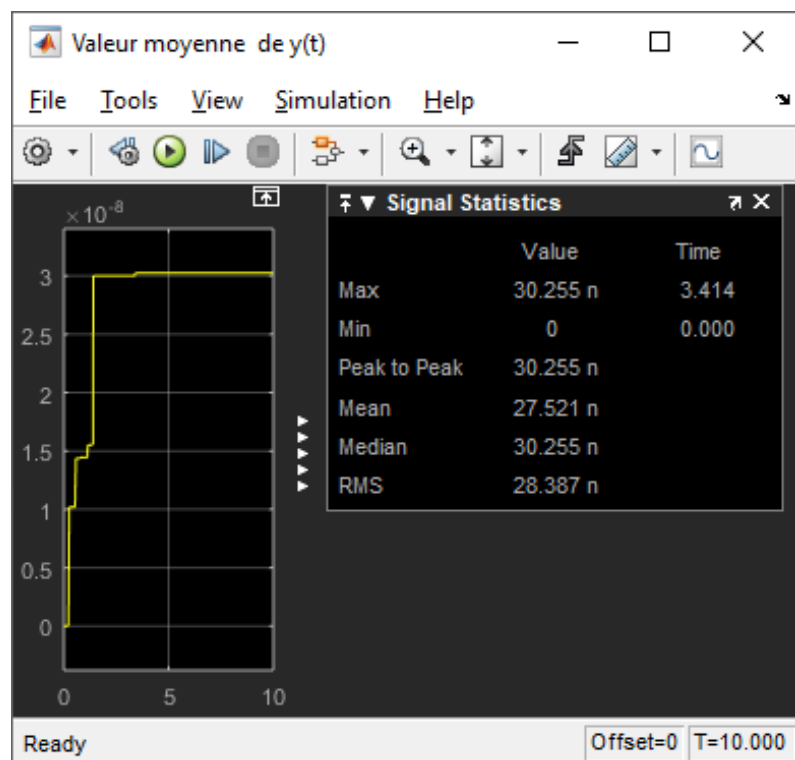
Les données utilisées pour la simulation sont semblables à celles utilisées dans la théorie. Ils sont représentés dans le **tableau 3.02** du chapitre 3.

#### **5.3.4 Résultats de la simulation**

Les différents résultats sont visualisés directement à partir des oscilloscopes. L'allure du déplacement relatif  $y$  est représentée sur la **Fig. 5.10**. La figure montre un pic qui correspond à la fréquence naturel du système. La **figure 5.101** représente les valeurs caractéristiques de ce déplacement relatif. D'après le résultat, la valeur moyenne du déplacement relatif de l'élément piézoélectrique est de 20 nm.

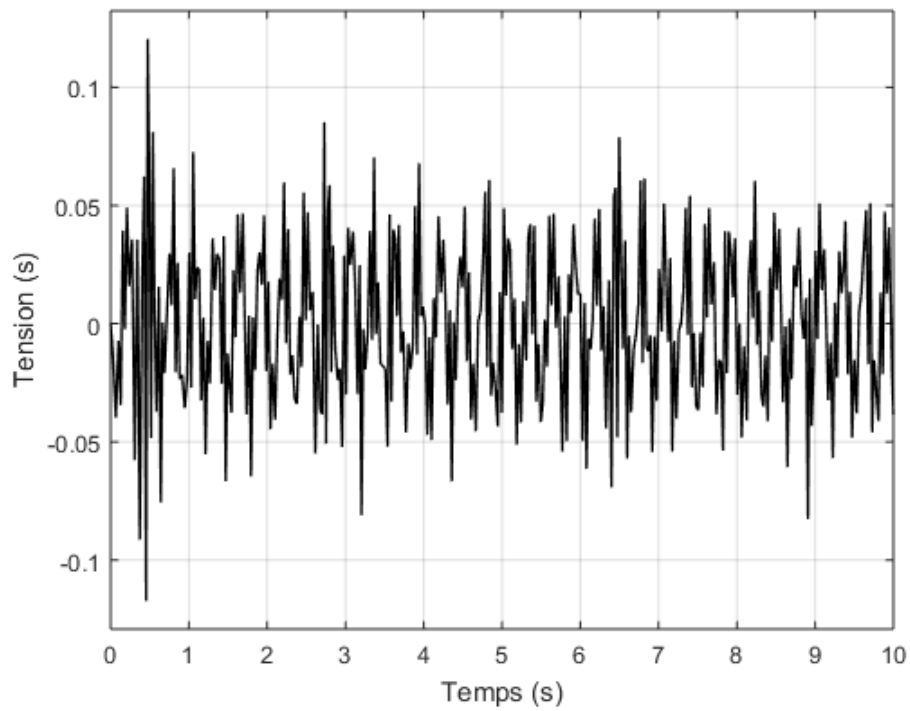


**Figure 5.10 :** *Courbe du déplacement relatif de l'élément piézoélectrique sous une excitation vibratoire avec Simulink.*

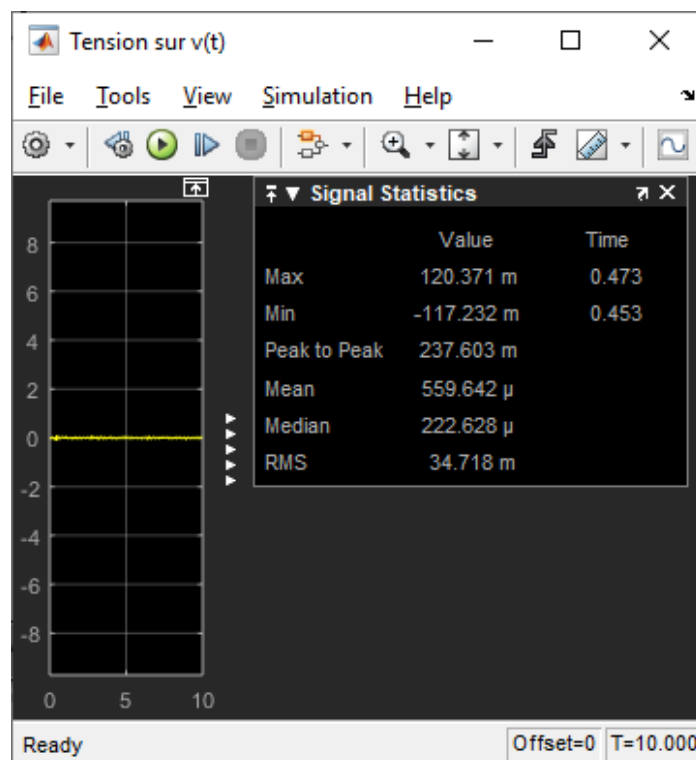


**Figure 5.11 :** *Valeurs caractéristiques du déplacement relatif de l'élément piézoélectrique avec Simulink.*





**Figure 5.12 :** *Courbe de la tension extraite aux bornes de l'élément piézoélectrique avec Simulink.*



**Figure 5.13 :** *Valeurs caractéristiques de la tension extraite aux bornes de l'élément piézoélectrique.*

Les **figures 5.12** et **5.13** montrent respectivement la courbe de la tension extraite aux bornes de l'élément piézoélectrique et ses caractéristiques. Le résultat montre que la valeur maximale de la tension extraite est de 34 mV.

### 5.3.5 Interprétation du résultat

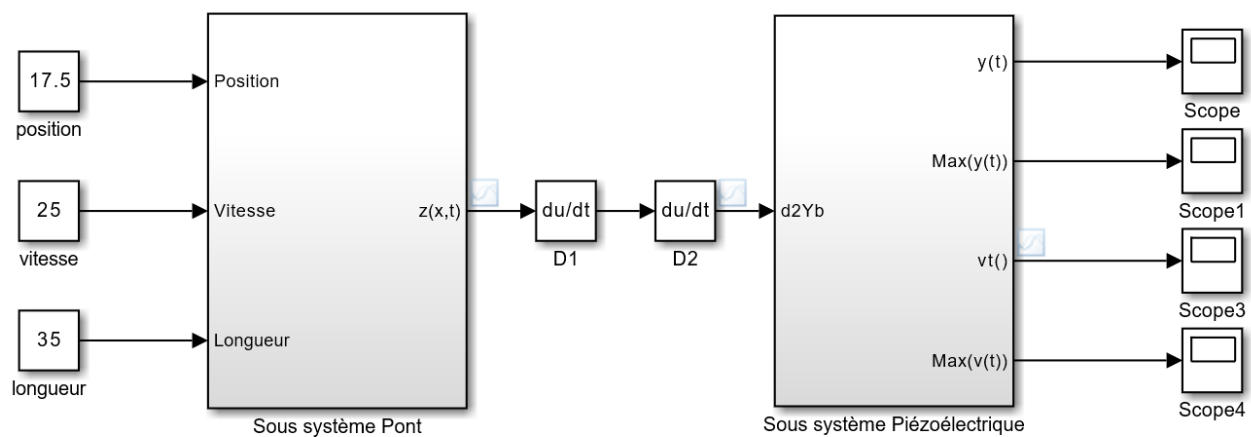
Les résultats obtenus montrent que :

- La déformation du matériau piézoélectrique est aux alentours de 20 nm avec les données qu'on a choisies.
- La tension obtenue aux bornes de l'électrode est à 34 mV.

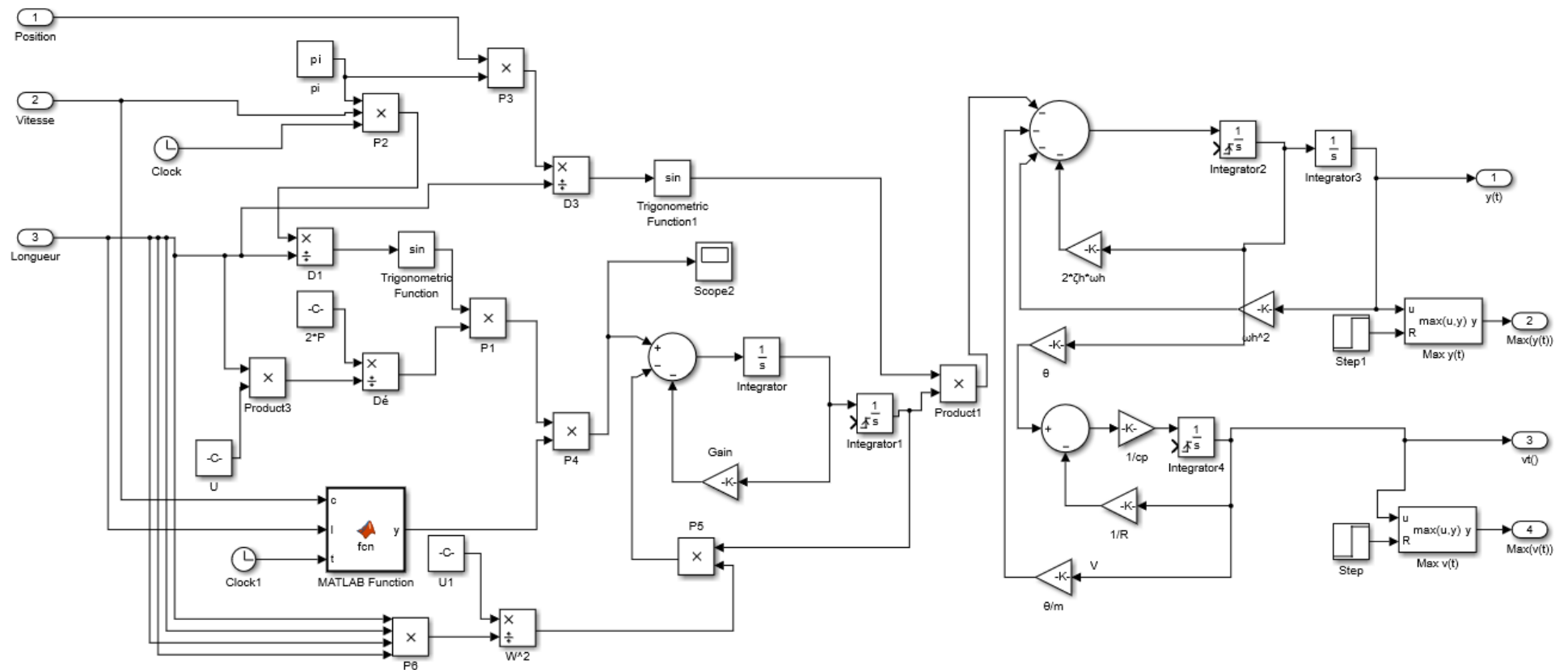
## 5.4 Simulation de la conversion de la vibration d'un pont en énergie électrique

Cette partie va combiner les deux modules construits dans les sections précédentes. C'est-à-dire le modèle pont et le modèle piézoélectrique.

La **figure 5.15** montre le modèle en schéma bloc sous Simulink de l'association (pont – piézoélectrique). Il peut être converti en sous-système représenté à la **Fig.5.14**.



**Figure 5.14 :** Module pont - piézoélectrique groupé en sous-système sous Simulink.



**Figure 5.15 :** Schéma bloc d'un système piézoélectrique excité par la vibration d'un pont sous Simulink.

### 5.4.1 Résultats de la simulation et interprétation

La simulation est lancée plusieurs fois en changeant les diverses paramètres comme ce qui est faite dans la théorie. Il s'agit de la position du récupérateur piézoélectrique, la vitesse du véhicule et la longueur du pont. La simulation est faite dans le domaine temporel et donne un résultat en mode alternatif. Les résultats sont représentés au **tableau 5.06**.

**Tableau 5.06 : Résultat de la simulation sous Simulink**

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 25 m				Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 30 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4		x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	<b>38.032</b>	<b>37.997</b>	<b>37.538</b>	<b>38.032</b>	36	<b>38.032</b>	<b>37.977</b>	<b>38.032</b>	<b>38.032</b>
54	<b>37.922</b>	<b>49.928</b>	<b>41.472</b>	<b>37.922</b>	54	<b>47.740</b>	<b>77.067</b>	<b>63.012</b>	<b>47.740</b>
72	<b>46.818</b>	<b>75.504</b>	<b>61.250</b>	<b>46.818</b>	72	<b>71.215</b>	<b>116.74</b>	<b>94.873</b>	<b>71.215</b>
90	<b>63.867</b>	<b>96.800</b>	<b>84.872</b>	<b>63.867</b>	90	<b>72.048</b>	<b>118.19</b>	<b>96.009</b>	<b>72.048</b>

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 35 m				Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour l = 50 m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4		x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	<b>38.088</b>	<b>38.530</b>	<b>38.032</b>	<b>38.088</b>	36	<b>38.143</b>	<b>38.088</b>	<b>38.088</b>	<b>38.143</b>
54	<b>37.977</b>	<b>49.360</b>	<b>40.726</b>	<b>37.977</b>	54	<b>38.088</b>	<b>47.001</b>	<b>38.808</b>	<b>38.088</b>
72	<b>79.440</b>	<b>128.62</b>	<b>106.16</b>	<b>79.440</b>	72	<b>44.045</b>	<b>70.838</b>	<b>58.004</b>	<b>44.045</b>
90	<b>89.295</b>	<b>139.70</b>	<b>119.56</b>	<b>89.295</b>	90	<b>83.313</b>	<b>134.47</b>	<b>112.52</b>	<b>83.313</b>

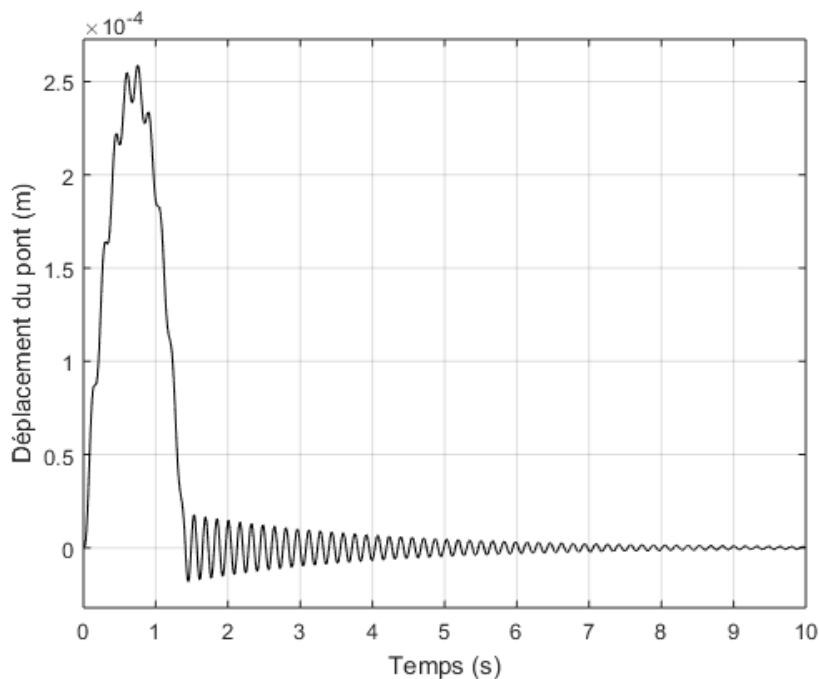
Les résultants d'une série de tests avec la variation de la longueur du pont, la vitesse de la charge mobile et la position du module piézoélectrique sont présentés dans le **tableau 5.06**. Plusieurs points ont été observés sur les données récupérées.

- Pour toutes les différentes longueurs du pont, la puissance maximale récoltée se trouve au milieu.
- Parmi les vitesses considérées, c'est l'allure à 90 km/h qui donne un meilleur résultat quel que soit la longueur du pont et la position du module piézoélectrique.

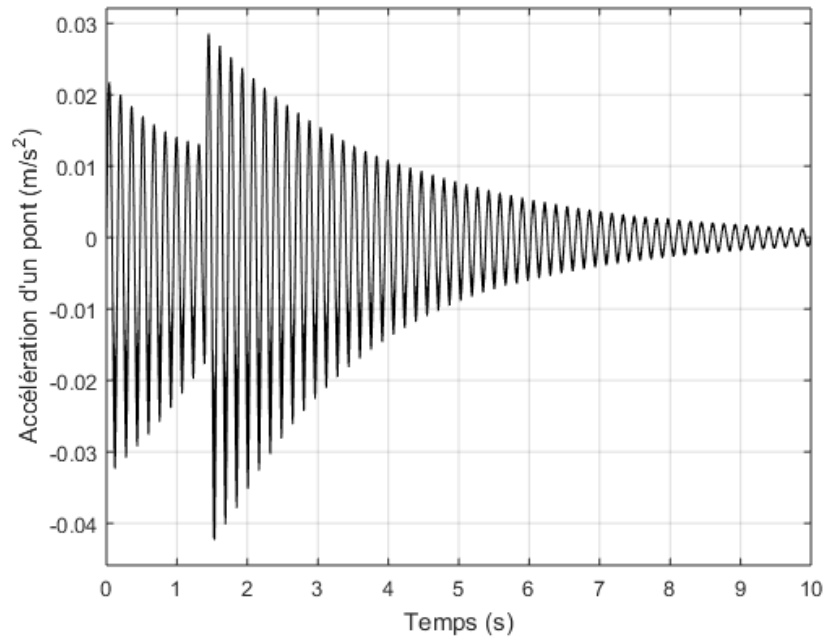
- Dans le cas général, la puissance extraite est proportionnelle à la vitesse. C'est-à-dire qu'elle est plus importante avec une vitesse plus rapide.
- On remarque qu'avec une vitesse assez lente, la valeur de la puissance est plus ou moins égale pour toute la longueur considérée et la position considérée. C'est la vitesse égale à 36 km/h.
- Pour toute longueur du pont, les positions  $x = \frac{1}{4}l$  et  $x = \frac{3}{4}l$  donnent le même résultat avec la même vitesse.
- Un pont de longueur assez long (35 m) s'avère être le plus prometteur pour les paramètres du module considéré. Une puissance maximale de 139.70  $\mu\text{W}$  est récoltée au milieu de ce pont sous une vitesse de 90 km/h.

La moyenne de la puissance récupérée pour un module placé au milieu d'un pont montre que le pont de 35 m qui est la plus prometteuse, suivi du 30 m, 50 m et 25 m.

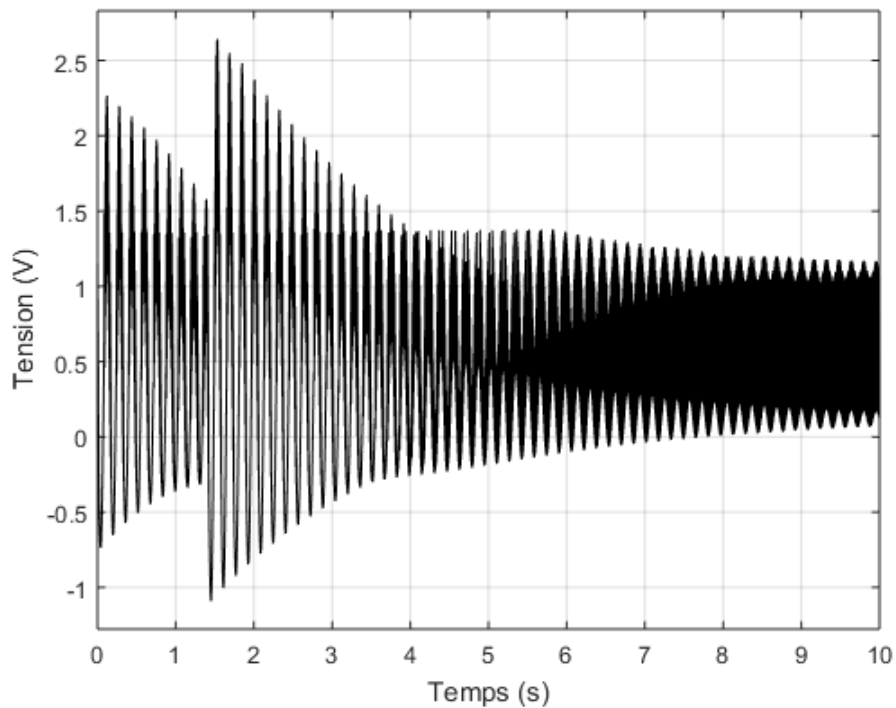
#### 5.4.2 Présentation graphique des résultats



**Figure 5.16 :** *Vibration en un point  $x$  au milieu d'un pont de longueur 35 m sous une charge mobile avec une vitesse 90 km/h traité par Simulink.*



**Figure 5.17 :** *Accélération en un point  $x$  au milieu d'un pont de longueur 35 m sous une charge mobile avec une vitesse 90 km/h traité par Simulink.*



**Figure 5.18 :** *Courbe de la tension extraite au milieu d'un pont de longueur 35 m sous une charge mobile avec une vitesse 90 km/h traité par Simulink.*

Pour la représentation graphique, on a choisi les critères les plus prometteurs. Ce qui veut dire qu'on va présenter la vibration d'un point  $x$  qui se trouve au milieu d'un pont de longueur 35 m. Les **figure 5.16** montre la courbe de déflexion d'un pont. On constate que la courbe s'affaiblit au moment où la charge mobile quitte le pont et tend vers zéro. La **figure 5.17** montre l'accélération en cette position étudiée. Une valeur maximale est constatée et qui correspond à l'amplitude maximale de la déflexion. La tension extraite en ce point  $x$  est la tension maximale obtenue pour tous les cas considérés. Son allure est représentée dans la **Fig. 5.18**. On constate de même que la valeur est maximale au moment où la déflexion du pont est maximale.

## 5.5 Simulation du modèle pont piézoélectrique par « Symbolic Math Toolbox »

«Symbolic Math» est une Toolbox dans MATLAB qui fournit des fonctions dans les domaines mathématiques permettant de résoudre, de présenter graphiquement et de manipuler des équations mathématiques symboliques. Il peut être utilisé pour faire une résolution analytique des équations comme la différentiation, l'intégration, calcul des limites, la transformation et les résolutions d'équations.

### 5.5.1 Résolution du modèle pont par Symbolic Math

L'équation différentielle de l'amplitude modale d'un pont est une équation différentielle donnée par l'**Eq. 5.03**. Elle est de la forme :

$$\ddot{Z}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n \dot{Z}_n(t) + \omega_n^2 Z_n(t) = \frac{2P}{l\mu} \sin(n\Omega t)$$

C'est une équation différentielle du second ordre qui peut être résolue avec la fonction ***dsolve*** de Symbolic Math. L'amplitude modale  $Z_n(t)$  obtenue par la résolution de l'équation différentielle forme ensuite la solution de la déflexion d'un pont en un point  $x$  à l'instant  $t$ . En prenant la première mode de déformation du pont, l'expression de la déflexion est donnée par :

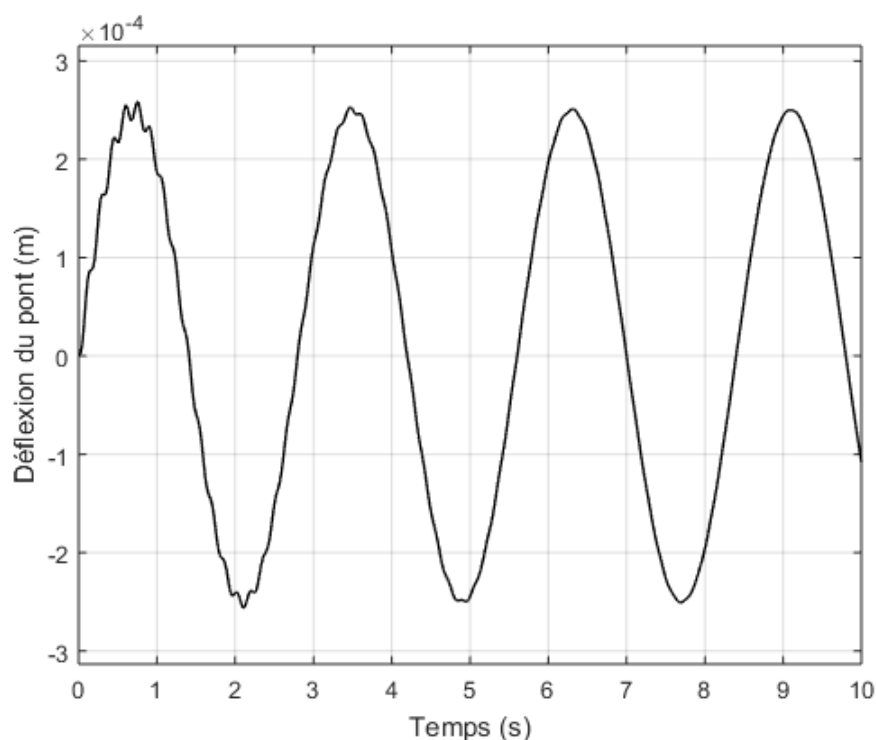
$$z(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) Z(t)$$

Le programme Matlab de la résolution de l'équation du pont par Symbolic Math est détaillé dans l'Annexe 3. Le résultat obtenu est donné dans le **tableau 5.07**. On a choisi de montrer le résultat d'un pont de 35 m avec la variation de la vitesse et la position.

**Tableau 5.07 :** Résultat de déflexion d'un pont de 35 m par Symbolic Math

Vitesse (km/h)	Déflexion maximale ( $10^{-6}$ m)			
	Pour $l = 35$ m			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	<b>178.4</b>	<b>252.3</b>	<b>219.7</b>	<b>178.4</b>
54	<b>179.5</b>	<b>253.9</b>	<b>220.5</b>	<b>179.5</b>
72	<b>181.4</b>	<b>256.5</b>	<b>223.3</b>	<b>181.4</b>
90	<b>182.5</b>	<b>258.2</b>	<b>224.8</b>	<b>182.5</b>

La **figure 5.19** montre la courbe de la déflexion maximale. Elle est donnée par une position située au milieu d'un pont de 35 m avec une vitesse de véhicule à 90 km/h.



**Figure 5.19 :** Courbe de la déflexion maximale au milieu d'un pont de 35 m avec une vitesse de 90 km/h par Symbolic Math.

### 5.5.2 Résolution du modèle piézoélectrique par Symbolic Math

L'équation du couple électromécanique du modèle piézoélectrique est donnée par l'**Eq. 5.14** et l'**Eq. 5.15**. C'est une couple d'équation différentielle à deux inconnues  $y(t)$  et  $v(t)$  qui sont



respectivement le déplacement relatif de l'élément piézoélectrique et la tension extraite à ses bornes. L'équation est rappelée ci-dessous.

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 2\zeta_h\omega_h\dot{y}(t) + \omega_h^2 y(t) + \frac{\theta}{M_T} v(t) = -\ddot{y}_b(t) \\ \theta\dot{y}(t) - C_p\dot{v}(t) = \frac{1}{R}v(t) \end{cases}$$

L'excitation  $y_b(t)$  est considérée comme un mouvement sinusoïdale représenté par  $\sin(t)$ .

On peut utiliser la transformée de Laplace et la transformée de Laplace inverse dans Symbolic Math pour résoudre l'équation différentielle du modèle. Les étapes de résolution de l'équation sous forme symbolique sont listées ci-dessous.

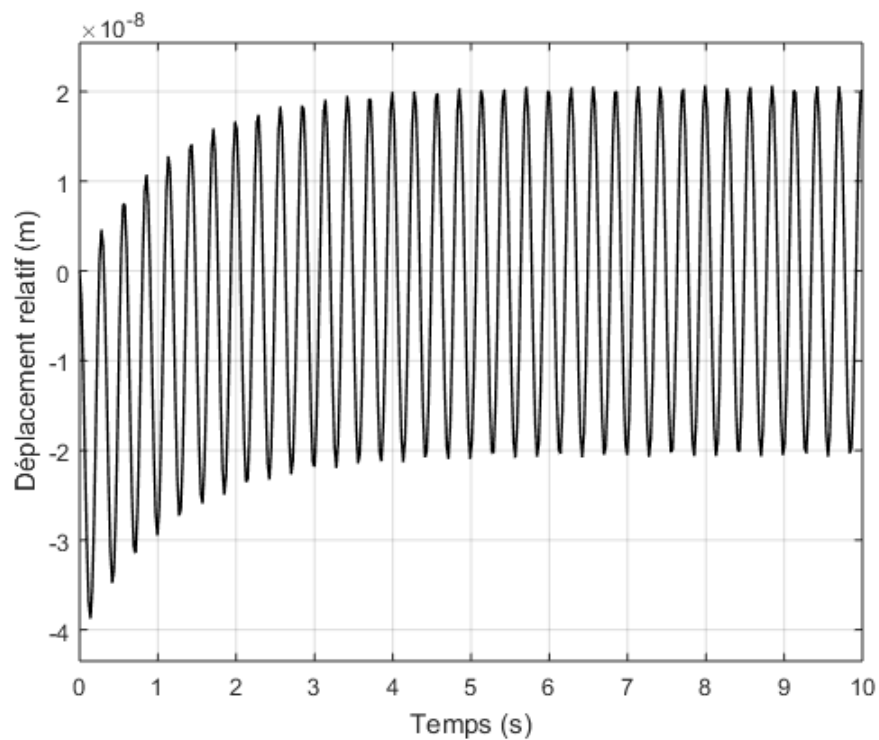
- **Présentation de l'équation** : on déclare tous les variables symboliques dans cette partie, puis les deux équations différentielles et les conditions initiales de chaque inconnue ( $y(t)$  et  $v(t)$ ).
- **Solution de l'équation** : on applique la transformée de Laplace pour chaque équation à partir de l'instruction « *laplace* » de Symbolic Math. Ensuite, fait appel à la fonction « *solve* » pour résoudre l'équation.
- **Changement des valeurs** : pour avoir des résultats numériques, on doit maintenant changer les variables symboliques par leurs valeurs numériques.
- **Représentation graphique** : cette partie permet d'observer le résultat de chaque inconnu

Le programme Matlab de chaque étape est détaillé dans l'Annexe 3.

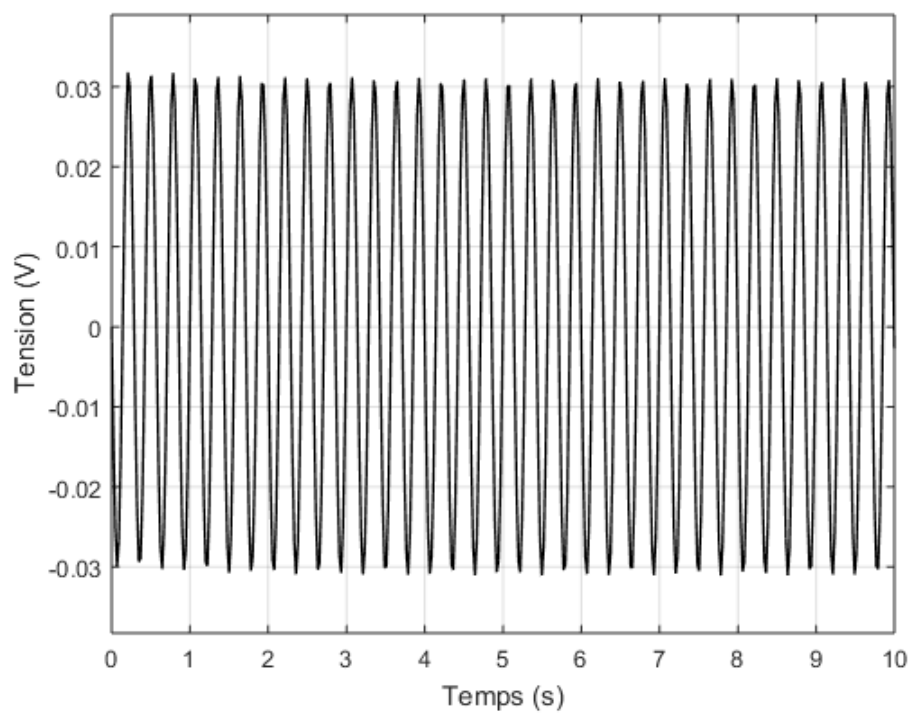
Le déplacement relatif de l'élément piézoélectrique et à la tension obtenue aux bornes des électrodes sont respectivement représentés à la **Fig. 5.20** et la **Fig. 5.21**. L'excitation est une signal sinusoïdale avec une amplitude de 258  $\mu\text{m}$  et une fréquence de 22 rad/s.

Le résultat montre que :

- La valeur du déplacement relatif de l'élément piézoélectrique est environ à 20 nm.
- La valeur de la tension extraite est d'ordre de 30 mV.



**Figure 5.20 :** *Courbe de déplacement relatif de l'élément piézoélectrique sous une excitation sinusoïdale traité par Symbolic Math.*



**Figure 5.21 :** *Courbe de la tension extraite de l'élément piézoélectrique par Symbolic Math.*

### 5.5.3 Résolution du système pont-piézoélectrique par Symbolic Math

Le système pont-piézoélectrique est l'ensemble des systèmes traités dans les deux sections précédentes. La déflexion du pont est considérée comme force d'excitation appliquée à l'élément piézoélectrique. Le programme Matlab qui résout le système par l'utilisation de « Symbolic Math » est détaillé dans l'Annexe 3.

**Tableau 5.08 : Résultat de la simulation par Symbolic Math**

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour $l = 25 \text{ m}$				Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour $l = 30 \text{ m}$			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4		x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	12.330	24.200	18.432	12.330	36	11.160	22.050	16.562	11.160
54	27.848	55.112	41.472	27.848	54	25.088	50.562	37.538	25.088
72	49.298	78.963	74.498	49.298	72	45.000	90.567	67.932	45.000
90	72.200	93.312	81.608	72.200	90	71.440	122.01	91.592	71.440

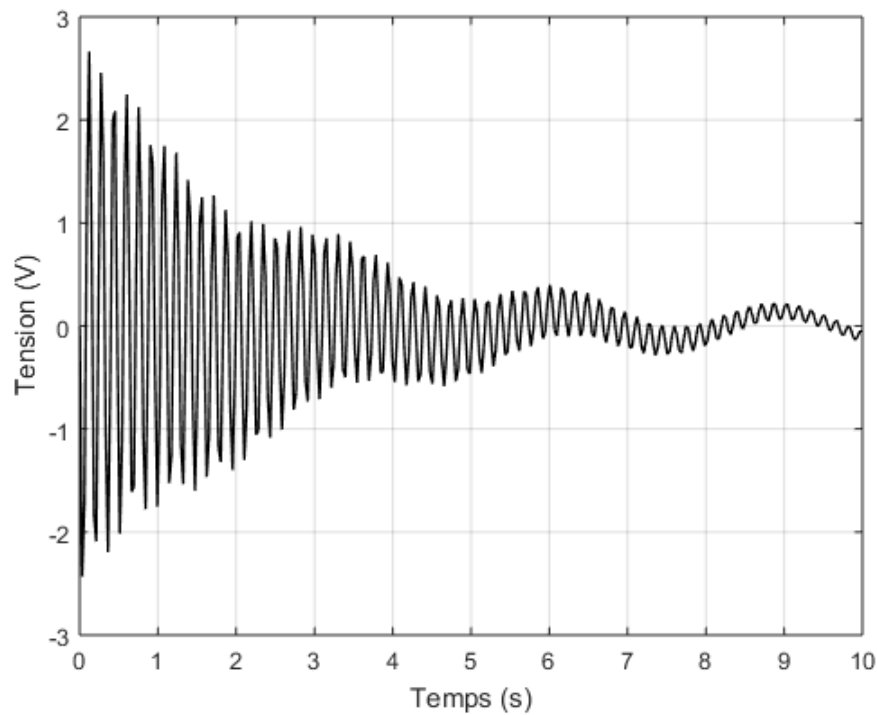
  

Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour $l = 35 \text{ m}$				Vitesse (km/h)	Puissance maximum $\frac{V^2}{R}, (10^{-6} W)$ Pour $l = 50 \text{ m}$			
	x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4		x=1/4	x=1/2	x=2/3	x=3/4
36	11.735	20.402	16.817	11.735	36	10.284	20.563	15.417	10.284
54	24.642	49.928	36.990	24.642	54	23.457	46.940	35.218	23.457
72	43.218	86.520	64.800	43.218	72	42.515	85.036	63.795	42.515
90	70.913	141.83	106.44	70.913	90	68.080	136.24	102.15	68.080

Le **tableau 5.08** montre les résultats de la simulation par l'utilisation de Symbolic Math

Les résultats montrent qu'une puissance maximale de 141.83  $\mu W$  est obtenue au milieu d'un pont de longueur 35 m avec une vitesse de véhicule à 90 km/h.

L'allure de la courbe de tension extraite aux bornes de l'élément piézoélectrique est représentée dans la **Fig. 5.22**. On voit que la courbe donne une valeur maximale de 2,6 V et va s'amortir jusqu'à 0 V.



**Figure 5.22 :** *Courbe de la tension extraite sur le module piézoélectrique traité par Symbolic Math.*

## 5.6 Comparaison des résultats et discussion

Les résultats obtenus à partir des deux types de simulation sont des résultats dans le domaine temporel et dans le domaine alternatif. Pour les comparer avec les résultats dans l'étude théorique, il faut choisir les résultats du même domaine. C'est-à-dire en mode alternatif. Les différents résultats obtenus par la méthode de récupération alternatif, Simulink et Symbolic Math vont être récapitulés dans le **tableau 5.09**.

Visiblement sur tous les résultats obtenus à chaque méthode, c'est le module piézoélectrique placé au milieu d'un pont qui génère plus d'énergie. De même, c'est une charge mobile qui roule à vitesse constante de 90 km/h qui donne un meilleur résultat. Les données présentées dans le **tableau 5.09** sont alors les puissances maximales récoltées pour chaque longueur du pont et chaque méthode considérés.

**Tableau 5.09 : Récapitulation des résultats obtenus au milieu d'un pont pour la théorie et la simulation.**

Longueur du pont (m)	Vitesse du véhicule (km/h)	Valeur théorique		Simulink		Symbolic Math	
		Tension (V)	Puissance ( $10^{-6}$ W)	Tension (V)	Puissance ( $10^{-6}$ W)	Tension (V)	Puissance ( $10^{-6}$ W)
25	36	0.99	19.87	1.37	37.997	1.10	24.200
	54	0.66	8.8818	1.58	49.928	1.66	55.112
	72	1.07	23.317	1.94	75.504	1.98	78.963
	90	2.07	86.055	2.20	96.800	2.16	93.312
30	36	0.948	18.009	1.37	37.977	1.05	22.050
	54	1.64	54.088	1.96	77.067	1.59	50.562
	72	2.23	99.778	2.41	116.74	2.12	90.567
	90	2.22	98.639	2.43	118.19	2.46	122.01
35	<b>36</b>	<b>1.39</b>	<b>38.858</b>	<b>1.38</b>	<b>38.530</b>	<b>1.36</b>	<b>36.992</b>
	<b>54</b>	<b>1.24</b>	<b>31.004</b>	<b>1.57</b>	<b>49.360</b>	<b>1.58</b>	<b>49.928</b>
	<b>72</b>	<b>2.81</b>	<b>158.84</b>	<b>2.53</b>	<b>128.62</b>	<b>2.43</b>	<b>119.07</b>
	<b>90</b>	<b>2.98</b>	<b>178.44</b>	<b>2.64</b>	<b>139.70</b>	<b>2.66</b>	<b>141.83</b>
50	36	0.90	16.300	1.38	38.088	1.01	20.563
	54	1.35	36.777	1.53	47.001	1.53	46.940
	72	1.94	75.464	1.88	70.838	2.06	85.036
	90	2.78	155.08	2.59	134.47	2.60	136.24

### **Discussion entre les résultats**

- L'énergie obtenue par les deux méthodes de simulation est plus ou moins égale à chaque longueur du pont et vitesse du véhicule considérés. La marge constatée est de l'ordre de  $\pm 0.3 V$ .
- L'énergie obtenue entre la théorie et la simulation montre une légère différence pour un pont plus court et une vitesse moins élevée. Elle se ressemble avec un pont de longueur supérieur ou égale à 35 m. La marge constatée est de  $\pm 0.3 V$  pour ce dernier. La différence peut être due par la méthode de calcul utilisé dans la théorie et celle de simulation.
- Les trois méthodes utilisées indiquent que la puissance maximale est récoltée pour la module piézoélectrique placé au milieu d'un pont de longueur 35 m. En plus, les différentes

valeurs de la tension obtenue pour les trois méthodes sont équivalentes dans ce cas. La marge est de  $\pm 0.3 V$  pour toutes les vitesses considérées. Ce résultat peut être expliqué par le phénomène de résonance entre le pont et le module piézoélectrique. C'est-à-dire que le système est plus ou moins couplé, la fréquence naturelle du pont est plus proche de la fréquence naturelle du module piézoélectrique.

## 5.7 Conclusion

Deux méthodes de simulation sont utilisées dans ce chapitre. Ce sont le Toolbox Simulink et le Toolbox Symbolic Math de Matlab.

Simulink consiste à mettre en schéma bloc les modèles mathématiques du système pont piézoélectrique. La simulation est subdivisée en trois parties. Le modèle mathématique du pont est simulé en premier. Le résultat montre que la déflexion maximale d'un pont se trouve toujours au milieu. Sa valeur est proportionnelle à sa longueur et à la vitesse du véhicule qui la traverse. La simulation du modèle analytique de l'élément piézoélectrique est ensuite effectuée. Le résultat indique un déplacement relatif de 20 nm et une tension aux bornes des électrodes de 34 mV. Ce résultat est obtenu avec une excitation sinusoïdale d'amplitude 258  $\mu\text{m}$  et de fréquence 22 rad/s. Les deux modèles sont associés et traités sous Simulink. Une série de tests est effectuée en variant la longueur du pont, la vitesse et la position du module. Parmi le résultat, une tension maximale de 2.64 V est obtenue au milieu d'un pont de 35m avec une vitesse de 90 km/h. Ce qui est équivalent à une puissance maximale de 139.70  $\mu\text{W}$ .

La deuxième simulation est faite sous Symbolic Math. Elle consiste à résoudre les équations différentielles du système pont piézoélectrique par une méthode symbolique. La résolution du système est subdivisée en trois parties de la même façon que ce effectué dans Simulink. L'équation différentielle du pont est traitée en premier par la méthode « *dsolve* » de Symbolic Math. L'équation du couple électromécanique est ensuite traitée par la méthode de Laplace et Laplace inverse dans Symbolic Math. Avec la même série de test, une tension maximale de 2.66 V est obtenue au milieu d'un pont de 35 m avec une vitesse de 90 km/h. Ce qui correspond à une puissance maximale de 141,83  $\mu\text{W}$ . On a constaté que la différente valeur obtenue pour les deux simulations se ressemble en général. La marge constatée est de  $\pm 0.3 V$ . Une comparaison sur les résultats théorique est effectuée. On a observé que le résultat théorique et le résultat de la simulation se ressemblent pour un pont de 35 m. C'est à ce même longueur du pont qu'on obtient aussi les valeurs maximales quel que soit la variation de la vitesse et la position. Ce ci indique le

phénomène de résonnance entre le pont et le module piézoélectrique. C'est-à-dire que la fréquence naturelle du pont est plus proche de la fréquence naturelle du module piézoélectrique.

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce travail contribue à l'étude analytique de la conversion d'énergie vibratoire en énergie électrique. On a choisi le matériau piézoélectrique comme moyen de conversion et le pont routier en tant que source vibratoire.

Dans le premier chapitre, on a développé le principe de base de conversion de l'énergie vibratoire en énergie électrique. Elle est assimilée à un système masse, ressort et amortissement. Tout le système de récupération d'énergie est basé sur ce système. L'expression de la puissance générée par la conversion est exprimée. Trois types de conversion d'énergie ont été donnés par la bibliographie : la conversion électromagnétique, la conversion électrostatique et la conversion piézoélectrique. Une recherche et comparaison des résultats sur ces trois types ont été effectuées. C'est la conversion piézoélectrique qu'on a choisi parmi les types de conversion. Les principes d'extraction d'énergie convertie en énergie utilisable sont aussi expliqués dans ce chapitre. On a choisi de considérer la technique d'extraction en courant continu standard et la technique non linéaire SSHI (Synchronized Switch Harvesting on Inductor).

Dans le deuxième chapitre, on a étudié le phénomène et les caractéristiques des matériaux piézoélectriques. La première *innovation et originalité* de cette thèse consiste à développer un modèle à un degré de liberté pour expliquer le phénomène macroscopique de la création d'électricité dans les matériaux piézoélectriques. L'étude est menée à partir de la structure de base d'une molécule qui compose les cristaux piézoélectriques. Il est conclu que les molécules polaires (présente une polarisation intrinsèque) et la molécule apolaire (ne présente pas de polarisation intrinsèque) sont tous les deux piézoélectriques. C'est la variation des charges à l'état d'équilibre ou à l'état naturelle après une compression qui modifie les potentiels et crée de l'électricité aux bornes du cristal piézoélectrique. Les propriétés et les types des matériaux piézoélectriques sont aussi parlés dans ce chapitre.

Le troisième chapitre est consacré au développement d'un modèle analytique d'un convertisseur d'énergie vibratoire en énergie électrique par l'intermédiaire d'un matériau piézoélectrique. On a conçu un modèle de générateur piézoélectrique de 10 cm x 20 cm dans ce chapitre. Le développement de l'équation de la piézoélectricité a donné un système d'équation mécanique et électrique. La résolution de cette équation de couple électromécanique par la méthode de Laplace



donne les grandeurs de déplacement relatif de l'élément piézoélectrique, la tension aux bornes et la puissance extraite en mode alternatif. Des grandeurs adimensionnelles par rapport à la force appliquée au modèle construit sont obtenues dans ce chapitre. L'optimisation en mode alternatif montre qu'on peut extraire deux valeurs maximales de la puissance selon la résistance de charge. C'est la résonance et l'antirésonance qui correspondent respectivement à un court-circuit et un circuit ouvert. L'expression de la puissance est aussi étudiée et analysée graphiquement en mode continu standard et mode SSHI. Les résultats permettent de conclure qu'on peut extraire un maximum de puissance à une certaine valeur de la résistance de charge.

Dans le chapitre quatre, on a couplé le module piézoélectrique développé avec un pont routier. L'étude analytique de la déflexion d'un pont sous une charge mobile à vitesse constant est d'abord effectuée. La résolution est faite à partir de la superposition des modes propres. La méthode de Laplace est utilisée pour résoudre l'équation différentielle de l'amplitude modale dans le domaine fréquentiel. L'équation de la déflexion ou plus précisément le mouvement du pont dans une position  $x$  est la source de vibration mécanique appliquée au module piézoélectrique. Une série de tests théorique est effectuée pour chaque technique de récupération en variant la longueur du pont, la vitesse de la charge mobile et la position ou emplacement du module piézoélectrique. Parmi les résultats, une puissance maximale de  $185,76 \mu\text{W}$  est obtenue au milieu d'un pont de longueur 35 m avec une vitesse de charge mobile à 90 km/h. Ce résultat est obtenu pour la technique de récupération continue standard.

Dans le chapitre cinq, on a fait des simulations du système composé d'un pont et d'un module piézoélectrique avec les Toolbox Simulink et Symbolic Math dans le logiciel Matlab. Parmi le résultat de Simulink, une tension maximale de 2.64 V est obtenue au milieu d'un pont de 35m avec une vitesse de 90 km/h. Ce qui est équivalent à une puissance maximale de  $139.70 \mu\text{W}$ . Pour Symbolic Math, une tension maximale de 2.66 V est obtenue au milieu d'un pont de 35 m avec une vitesse de 90 km/h. Ce qui correspond à une puissance maximale de  $141,83 \mu\text{W}$ . La comparaison des données montre que les résultats obtenus sur un pont de longueur 35 m sont maximales. De plus les valeurs sur la théorie et la simulation sont quasiment égales avec une tolérance de  $\pm 0.3 \text{ V}$ . Ce qui signifie qu'il y a un phénomène de résonance ou proche de la résonance.

L'apport personnel dans ce travail contribue à l'innovation d'un générateur piézoélectrique autonome pour un pont routier. Le module conçu est un module macroscopique et les résultats obtenus sont faits à partir de la théorie et la simulation. Ce qui nous amène sur les perspectives suivantes :

- Faire une teste pratique du module conçu pour valider la théorie et la simulation.
- Concevoir un module à grande échelle pour un éclairage autonome d'un pont.

## ANNEXES

### Annexe 1 : Publications de notoriété internationales

#### A1.1 Certificats des publications internationales



**INTERNATIONAL JOURNAL OF ADVANCE  
RESEARCH AND INNOVATIVE IDEAS IN EDUCATION**

**CERTIFICATE**



*The Board of International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education  
is hereby Awarding this Certificate to*  
**RAMASOMBOHITRA NIVONJY NOMEN'AHY**  
*In Recognition of the Publication of the Paper Entitled*  
**MATHEMATICAL MODELLING OF PIEZOELECTRIC HARVESTING FROM BRIDGE VIBRATION  
UNDER MOVING LOAD**

*Published in E-Journal  
Volume-4 Issue-5 2018*

Paper Id : 9184  
ISSN(O) : 2395-4396



[www.ijariie.com](http://www.ijariie.com)

Editor In Chief





## Model for the Creation of Electricity within a Piezoelectric Material under Strain

Ramasombohitra NivonjyNomenAhy

Laboratoire de Recherche Systèmes Embarqués, Instrumentation  
et Modélisation des Systèmes et Dispositifs Electroniques Ecole  
Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de  
l'Innovation, Madagascar  
nomen\_ahy@yahoo.fr

Rastefano Elisée

Laboratoire de Recherche Systèmes Embarqués, Instrumentation  
et Modélisation des Systèmes et Dispositifs Electroniques Ecole  
Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de  
l'Innovation, Madagascar  
rastefano\_el@yahoo.fr

**Abstract**—This paper introduces the basis about piezoelectric effect. The reason why electricity is created in piezoelectric material under an external constrain is discussed in detail. The investigation is based on the basic structure of a molecule that composes piezoelectric crystals.

**Keywords** – Molecule, polarity, electrical potential, electrostatic field, electrostatic dipole, piezoelectricity.etc.

### I. INTRODUCTION

The term "Piezoelectricity" was used long time ago. It was the Curie brothers, Pierre and Jacques who brought it to light in Paris in 1880 [1]. This is a phenomenon found in some crystals under external excitation. An appearance of the charges occurs at the terminals of the crystals when a mechanical constrain is applied on it. Many practical applications have already been utilized since its discovery. In this paper, we will see the reasons for the appearance of charges in these crystals and the amount of charges that can be produced on one given structure. The study finds its basis from the bonding of atoms in the molecular structure.

### II. MOLECULAR POLARITY

Molecules are built on atoms made of negatively charged electrons and positively charged nucleus. The distribution of these charges, positive and negative in a dipole, represents the polarity of a molecule. The latter is due to (i)the difference in electro negativity between the chemical elements that compose it, (ii)the differences in induced charges, and (iii)their distribution in space.

#### 1. Electro negativity of Atoms and Bounds

The electro negativity of an atom [2] is a number that measures its ability to attract to itself an electron pair involved in a chemical bond. Its value can be evaluated from the periodic table of elements. From the Pauling scale, it ranges from 4.0 (fluorine) to 0.7 (caesium and francium) [3].

The electro negativity difference between two atoms determines the type of a bond: "pure" covalent bond (for two identical atoms), polar bond (covalent bond in which one of the two atoms is slightly more electronegative than the other one), nonpolar bond (the

difference in electro negativity is small) Consider a bond between two atoms A and B. If atom B is slightly more electronegative than atom A, atom B will attract the electron pair rather more than atom A. The end of the bond at A will then become slightly positive with charge  $\delta+$ , and the other end at B slightly negative with charge  $\delta-$ . This results in a polar bond, that is a covalent bond in which there is a separation of charge between one end and the other.

#### 2. Nonpolar Molecule

A molecule is nonpolar if the difference in electro negativity between the atoms is very small. So we have a uniform distribution of electrons. The "barycentre" of the charges  $\delta-$  and that of the charges  $\delta+$  coincide.

Silicon dioxide ( $\text{SiO}_2$ ) is an example of a nonpolar molecule. It is formed of tetrahedral  $\text{SiO}_4$  units bonded to each other by the oxygen atoms in a regular manner, as in quartz. Fig. 1 shows that the centroid of the molecule coincide with the middle of the silicon atom.

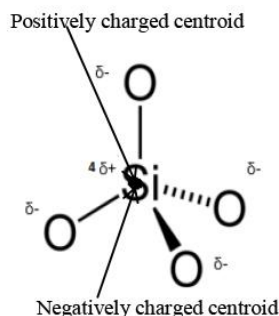


Fig.1 Molecular Structure of  $\text{SiO}_2$

### 3. Polar molecule

The molecule is polar if the electronegativity difference between atoms is greater than 0.4 [4]. The greater the difference between two atoms, the more electrons will be relocated to the most electronegative atom, and thus, the bond will be polarized. There is even an appearance of a positive partial charge and a negative partial charge which forms an instantaneous dipole or intrinsic polarization. Water which is symbolized by the formula  $H_2O$  is a polar molecule. The centre of the negative partial charges does not coincide with that of the positive partial charge, which is shown in Fig.2. The negative centre is located in the oxygen atom and the positive center is in the middle of the two hydrogen atoms.

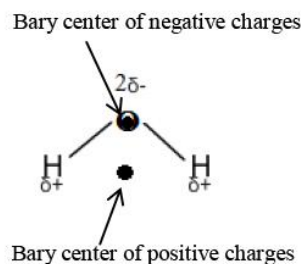


Fig. 2 Molecular Structure of  $H_2O$ .

### III. PIEZOELECTRICITY PHENOMENON

An explanation in molecular scale can be given to the piezoelectric effect. This phenomenon is mainly due to the spontaneous polarization of atoms in a molecule or in a crystal. Both types of molecule, polar and nonpolar can be piezoelectric.

If a crystal does not have intrinsic polarization (that is to say non polar), but the meshes of the lattice are such that the positive and/or negative ions are more abundant on one side than the other, then a compression can shift the barycentres of positive charges and negative charges. The electronic clouds of atoms move in relation to their natural position.

As it is a displacement compared to the electrically neutral situation, it appears as "mini-dipole". All these dipoles will create charges of the same sign on one side and opposite charges on the other side of the crystal [5]. These will create a global potential difference in the crystal. Figure 3 shows this phenomenon.

The crystals whose mesh has intrinsic or polar polarization can also have the phenomenon of

piezoelectricity. The mechanism is analogous to those of crystals that have no intrinsic polarization.

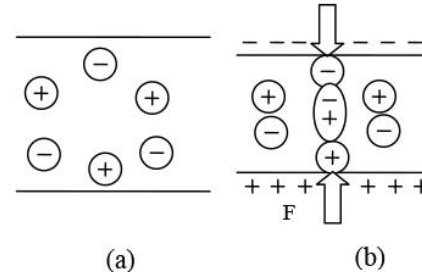


Fig.3(a) Molecule in the natural state, (b) Molecule under stress, appearance of opposite charges on both sides of the plate.

A compression or a mechanical expansion modifies the balance of the charges, which makes appear on the faces concerned a difference of potential. Figure 4 represents this case.

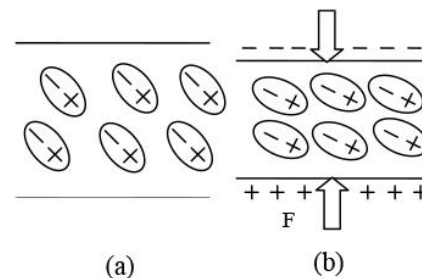


Fig.4(a) Molecule with intrinsic polarization in the natural state, (b) Molecule with intrinsic bias under stress, appearance of opposite charges on both sides of the plate.

In summary, the phenomenon of piezoelectricity is obtained by the creation or by the variation of an electrostatic dipole in the molecular structure of a crystal. The amount of charge obtained must be proportional to the sum of the potentials created by each electrostatic dipole in the crystal

### IV. POTENTIAL AND FIELD CREATED BY A DIPOLE

An electrostatic dipole is defined by a set of distinct charges arranged in such a way that the centroid of the positive charges does not coincide with that of the negative charges. A simplest dipole consists of a set of two opposite point electric charges  $+q$  and  $-q$ , separated by a distance  $a$  which is very small compared to the distance  $r$  to the point  $M$  where their effects are to be observed [6].

### 1. Potential Created by a Dipole

Consider a dipole consisting of two opposite charges,  $-q$  and  $+q$ , located respectively at a point A and B with  $AB = a$ .

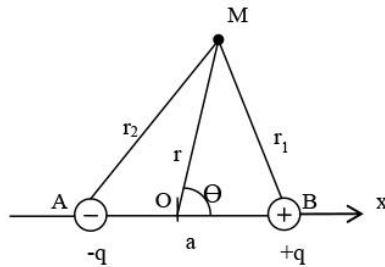


Fig.5 Presentation of a dipole with charge separation  $a$ .

One defines :

- O as the point in the middle of AB.
- $r$  as the distance between O and M.
- $r_2$  as the distance between A and M.
- $r_1$  as the distance between B and M.
- $\theta$  as the angle (Ox, OM).
- $r \gg a$ .

The potential  $V$  created at a point M by the dipole is:

$$\begin{aligned} V(M) &= V_A(M) + V_B(M) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{AM} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+q}{BM} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right) \end{aligned}$$

According to Pythagoras

$$\begin{aligned} BM^2 &= (BO + OM)^2 = (OM + OB)^2 \\ &= OM^2 + OB^2 + 2OB \cdot OM \cos \theta \\ &= r^2 + \frac{a^2}{4} - ar \cos \theta \end{aligned}$$

Let,

$$BM = r \cdot \sqrt{1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$

If  $\theta$  is replaced by  $(\theta - \pi)$ ,

$$AM = r \cdot \sqrt{1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$

From where

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \left( 1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left( 1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (1)$$

As  $r \gg a$ , it means that  $a/r \ll 1$

Using the development of  $(1+x)^n$  or  $(1-x)^n$  limited to the first order, one obtains :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \left( 1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right) - \left( 1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \right] \quad (2)$$

If  $\vec{p} = q\vec{AB}$  is the dipole moment directed from  $-q$  to  $+q$  and  $\vec{e}_r$  the unit vector of  $\vec{OM}$ , then we have

$$\begin{aligned} V &= \frac{q \cdot a \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3) \end{aligned}$$

### 2. Dipolar Field

The field is calculated from the potential. We use the field-potential relationship:

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V(M)$$

Since  $V$  does not depend on  $\theta$  and  $r$ , only the components  $E_\theta$  and  $E_r$  of  $\vec{E}$  will be not zero. So we have:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \cdot \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

The field created by a dipole is therefore proportional to  $\frac{1}{r^3}$  and the potential to  $\frac{1}{r^2}$ , whereas for a point load,  $\vec{E}$  which is created is proportional to  $\frac{1}{r^2}$  and  $V$  to  $\frac{1}{r}$ .

For a distant point M,  $\vec{E}$  and  $V$  that are created by a dipole will be negligible compared to  $\vec{E}$  and  $V$  created by a nearby dipole.

To explain the origin of the basic equation of piezoelectricity, a simple uni dimensional representation is used.

### V. EQUATIONS OF PIEZOELECTRICITY

Figure 6 shows an ionic structure between two atoms.

In the presence of an electric field  $\vec{E}$ , the negatively charged ions and the positively charged ions come



together in pairs. This movement displaces the electric centroids initially at the same position (when  $E = 0$ ) and forms electric dipoles which naturally oppose the external disturbing field.

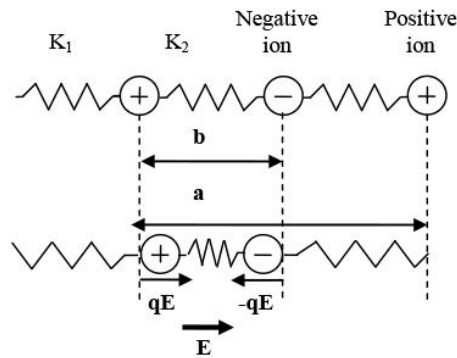


Fig.6 Deformation of a crystalline mesh of a piezoelectric material.

This ionic movement on the whole crystal subjected to the field produces a macroscopic deformation. This phenomenon is reversible since a mechanical contraction causes a similar displacement of the ions and the creation of dipoles (through the different stiffness constants  $K_1$  and  $K_2$ ). The appearance of an electric field occurs and then opposes the movement by electrostatic forces on the formed electric dipoles.

The charges  $-q$  and  $+q$  are connected by springs which symbolizes the ionic bonds. The difference between  $K_1$  and  $K_2$  introduces the dissymmetry of the crystal mesh. An elementary cell of length  $a$  has two electric dipoles of moments  $\frac{q}{2(a-b)}$  and  $\frac{-q}{2 \cdot b}$ . Hence a dipole moment  $P_0$ :

$$P_0 = \frac{q}{2(a-b)} - \frac{q}{2b} \quad (5)$$

Then, the chain has the following properties:

- The polarization of the volume is different of zero if  $b$  is different from  $\frac{a}{2}$ .
- Under the effect of a constraint, the chain deforms the variation of the distances  $a$  and  $b$  cause a variation of the polarization (direct effect).
- Positive and negative ions moving in opposite directions under the action of an electric field and the ionic bonds not having the same stiffness, it results a deformation (converse effect).

The mechanical stresses  $T$  and strain  $S$  are related to the electrical field  $E$  and the induced polarization  $P$  (or induction  $D = \epsilon_0 + P$ ).

The static equilibrium of each ion gives:

$$-qE + K_1(\Delta(a) - \Delta(b)) - K_2\Delta(b) = 0 \quad (6)$$

The force exerted by the right part of the chain on the left part is according to whether one is placed on the spring of stiffness  $K_1$  or  $K_2$ :

$$F_1 = K_1(\Delta(a) - \Delta(b))$$

$$F_2 = K_2\Delta(b)$$

A section  $S$  of the material has a large number of  $N$  chains per unit area. The mechanical tension  $T$  is therefore:

$$T = \frac{N}{2} K_1(\Delta(a) - \Delta(b)) - \frac{N}{2} K_2\Delta(b) \quad (7)$$

The induced polarization  $P$  is the polarization variation  $P_0$  with  $n$  density of the molecule  $N = n \cdot a$ :

$$P = \Delta P_0 = \frac{nq}{2} K_1(\Delta(a) - 2\Delta(b)) = -\frac{Nq}{2a} K_1(\Delta(a) - 2\Delta(b))$$

By introducing the equilibrium relation (6), we obtain:

$$P = \Delta P_0 = \frac{qN}{2a} \left( \frac{2qE}{K_1 + K_2} + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \Delta(a) \right) \quad (8)$$

$P$  is the sum of two terms, the first proportional to the electric field  $E$  (dielectric effect) and the second proportional to the strain  $S = \frac{\Delta(a)}{a}$  (piezoelectric effect). By plotting the expression of the polarization  $P$  as a function of the electrical displacement  $D$ , we find a typical equation for piezoelectricity:

$$D = \epsilon E + eS \quad (9)$$

From Equation (7), we deduce the second fundamental equation of piezoelectricity:

$$T = \epsilon E - cS \quad (10)$$

Piezoelectricity is generally transcribed in the form of these two equations, but under a tensor approach to the coupling between electrical and mechanical systems. It involves the electric displacement vectors  $D$  and the electric field  $E$  and the tensors of strain  $S$  and stress  $T$ :

$$\begin{cases} S = s^E T + d^t E \\ D = \epsilon^T E + d T \end{cases} \quad (11)$$

Concretely, these equations express the direct piezoelectricity effect, it is the electric polarization of a ceramic subjected to a mechanical stress or the opposite effect by the deformation of a ceramic subjected to an electric field. These equations reflect well the linear



character of the piezoelectric effect and its dependence on the sign of the field and its amplitude. The choice of different input parameters makes it possible to define other characteristic equations [7]:

$$\begin{cases} T = C^D S - h^t D \\ E = \beta^S D - h S \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} S = s^D T + g^t D \\ E = \beta^T D - g T \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} T = c^E S - e^t E \\ D = \varepsilon^S E + e S \end{cases} \quad (14)$$

## VI. CONCLUSION

The piezoelectric effect is a phenomenon that was discovered a long time ago. The phenomenon is generally based on the molecular structure of a crystal. Whatever the type of polar molecules whose centroid of the negative and positive partial charges does not coincide and has an instant dipole, or non polar with a bary center confused and has no intrinsic polarization, they may both be piezoelectric. A pressure subjected to a piezoelectric crystal causes a dissociation of the centroid of the positive and negative charges in the case of the nonpolar molecules, mini dipoles will be created and which will cause a potential difference across the crystal (which gives electricity). In the case of the polar molecule, the pressure will reorient the intrinsic dipoles in the opposite direction. This will give the difference of potential at the terminals.

One-dimensional modeling was done to explain the properties of piezoelectric materials. The ionic bond between positive and negative ion is replaced by a spring of stiffness  $K$ . The study shows that the polarization  $P$  which is a function of the electric displacement  $D$  can be represented by the sum of two terms  $E$  (dielectric effect) and  $S$  (deformation).

$$D = \varepsilon E + e S$$

And the mechanical stress  $T$  can be presented by:

$$T = \varepsilon E - c S$$

The other basic equations for piezoelectricity can then be deduced. They are presented in equation (11), (12), (13) and (14).

## REFERENCES

- [1]. Michel Brissaud, "Matériaux piézoélectriques : Caractérisation, Modélisation et Vibration", 1ère Edition", Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), Lausanne, 2007.
- [2]. Frédéric Elie, "Électronégativité des atomes", Août 2004.
- [3]. Pierre-Alexis Gauchard, "La classification périodique des éléments", Université Joseph Fourier de Grenoble, 2011-2012.
- [4]. Jacques Moutte, "Notions de Chimie Générale", Géochimie, Ecole des Mines de Saint Etienne, 2002.

- [5]. Jiashi Yang, "An introduction to the theory of piezoelectricity", University of Nebraska-Lincoln, U.S.A, 2005.
- [6]. Emiliano Ippoliti, "Basic Electrostatics", German Research School for Simulation Sciences, October 2011.
- [7]. Walter Heywang, Karl Lubitz, Wolfram Wersing, "Piezo electricity Evolution and Future of a Technology", Springer Series in Materials Science, 2008.

## A1.3 : Mathematical modelling of piezoelectric harvesting from bridge vibration under moving load.

Article sur IJARIE, ISSN : 2395-4396, Vol.4 Issue 5, 2018, [www.ijarrie.com](http://www.ijarrie.com).

Vol-4 Issue-5 2018

IJARIE-ISSN(O)-2395-4396

# MATHEMATICAL MODELLING OF PIEZOELECTRIC HARVESTING FROM BRIDGE VIBRATION UNDER MOVING LOAD

Ramasombohitra Nivonjy Nomen<sup>1</sup>, Ratsimba Mamy Nirina<sup>2</sup>, Rastefano Elisée<sup>3</sup>

<sup>1</sup>PhD student, SE-I-MSDE, ED-STII, Antananarivo, Madagascar

<sup>2</sup>Thesis co director SE-I-MSDE, ED-STII, Antananarivo, Madagascar

<sup>3</sup>Thesis director, SE-I-MSDE, ED-STII, Antananarivo, Madagascar

## ABSTRACT

This paper shows a possibility of harvesting electrical energy from mechanical vibration. In this way, a piezoelectric material is used to harvest energy from bridge vibration under a moving load. The response of bridge under moving load is studied first, and second the energy harvesting with a piezoelectric element, and third the combination of the two phenomena. The bridge is modelled as a simple beam with length  $l$ , supported at both the ends, and traversed by a force  $P$  moving with a constant velocity  $c$ . Its behaviour is described by the Euler-Bernoulli differential equation. Modal superposition is used to solve this equation, and a transformation is made from displacement coordinate to modal coordinate. A new differential equation is obtained and a resolution in the frequency domain by Fourier transform and Laplace transform is used to study the deflection of the bridge. A piezoelectric model in one dimension is also considered. The model is composed of a seismic mass that compresses all area of piezoelectric material. This means that the model is studied in longitudinal mode or mode 33. The piezoelectric element is connected to a power harvesting circuit modelled as a single resistor  $R$ . A transformation in piezoelectric constitutive equation gives a differential equation of the electromechanical system. Laplace transform is used to solve the equation in frequency domain. The displacement and the generated voltage for the piezoelectric harvester are obtained. A mathematical study was done by combining the two models. The idea is to put a piezoelectric element directly under the bridge with glue. In this case, the deflection of the bridge is considered as a stress applied to the piezoelectric element. Numerical application is chosen for bridge and piezoelectric parameters. Results are obtained by varying the position of the harvester, the speed of the moving load and the length of the bridge. A maximum power between  $99.9 \mu W$  and  $438.20 \mu W$  is obtained with the bridge length between 25 m and 50 m.

**Keyword:** Piezoelectric, Bridge vibration, Energy harvesting, Electrical energy, Fourier and Laplace transform.

## 1. INTRODUCTION

Any small vibrations are present around us every day and they are just wasted if not exploited. The idea of this work is to look for a way to convert this vibratory energy into usable electrical energy. More sources of the vibratory energy are possible, such as mechanical energy caused by industrial machines, cars, and trains. There are also vibrations from large infrastructures such as bridge and building. Human movement like foot movement and the joints movement are also to be mentioned. A piezoelectricity is one phenomenon capable of converting the small vibrations to electrical energy. Research works were already made in this area. Modelling of the stress distribution in the power generation module under the traffic in roadway was investigated by Papagiannakis et al. [1]. The results show that the energy obtains can drive LED traffic lights and wireless sensors built into the pavement structure. Gao, Wang, Cao, Chen and Liu [2] have analysed a piezoelectric harvester placed on a rail to generate electrical energy from the acceleration of the rail. They use a cantilevered piezoelectric beam to visualize voltage and power. Jingjing Zhao and Zheng You [3] have made use of human motion to obtain electrical energy for a power portable sensor. The piezoelectric element is placed in the man's shoe. The energy harvesting under bridge vibration has also been the subject of several works. Jacopo Bonari and Paolo Valvo [4] have studied possibility of

using of piezoelectric material to harvest the energy under a vibrations induced in bridges when vehicles go across. They considered a cantilever beam of a piezoelectric element with the same first frequency of a bridge in numerical studies. Ye Zang [5] worked on the piezoelectric harvesting in infrastructures of a particular bridge structures. He use a harvester based on cantilever for the simulation. The results show the interests of using energy harvester in the field of civil engineering. In this work, a mathematical resolution of piezoelectric harvesting under bridge vibration is studied. The bridge model and piezoelectric harvesting model are studied separately first. The bridge is modelled as a simple beam with a vehicle moving with a constant speed crossing it. And then a piezoelectric harvester model is used to investigate the longitudinal deformation mode for one degree of freedom. And finally, the two models are combined to constitute the harvesting system.

## 2. MATHEMATICAL MODELLING OF THE BRIDGE RESPONSE UNDER CONSTANT SPEED MOVING LOAD

The bridge is modelled as a simple beam supported at both the end. The bridge has a length  $l$  and a load is moving across it with a constant speed  $c$ , from left to right. Only gravitational effect is considered because the weight of load is small compared to that of the beam. The beam has zero displacement at both ends. With this assumption, the governing differential equation of the model is described by of Bernoulli-Euler equation. The model is shown in Figure 1.

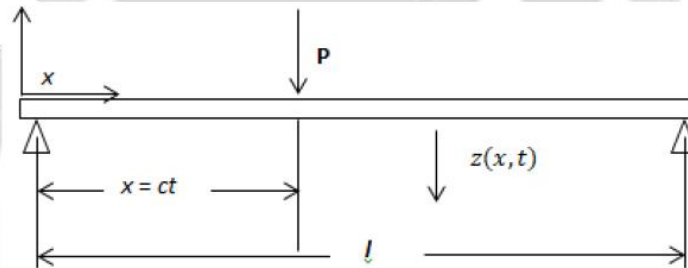


Fig -1: Bridge under a force P

At the time  $t$  and at the position  $x$ , the displacement or deflection  $z(x, t)$  of the bridge is giving by equation:

$$EI \frac{\partial^4 z(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + 2\mu\zeta_n\omega_n \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} = p(x, t) \quad (1)$$

Where  $E$ ,  $I$ ,  $\mu$ ,  $\zeta_n$ ,  $\omega_n$  are respectively the Young's modulus, the moment of inertia of the beam cross section, the mass per unit length, the damping coefficient of the beam and the natural frequency of the beam for  $n^{th}$  mode.

$p(x, t)$  can considered as :

$$p(x, t) = \begin{cases} \delta(x - ct)P, & 0 \leq t \leq t_d \text{ avec } t_d = l/c \\ 0, & t_d > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Using modal superposition, the solution of equation (1) can resolve with series form as:

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3)$$

It is a transformation from displacement coordinates  $z(x, t)$  to the modal coordinates  $Z_n(t)$ , where  $Z_n(t)$  is the undamped deflection mode shape  $n$  in the case of undamped free vibration.

The use of equation (3) in (1) and a mathematic manipulation [7] give differential equation in modal coordinates.

$$\ddot{Z}_n(t) + 2\zeta_n\omega_n \dot{Z}_n(t) + \omega_n^2 Z_n(t) = \frac{2P}{\mu l} \sin(n\phi t) = f_n(t) \quad (4)$$

Where  $\omega_n^2 = \frac{EI}{\mu} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$ ,  $\phi = \frac{\pi c}{l}$  witch are respectively the natural frequency and the excitation frequency.



### 2.1 Frequency domain solution

Laplace transform of equation (4) with zero as the initial conditions give [7]:

$$(s^2 Z_n(p) - s Z_n(0) - \dot{Z}_n(0)) + 2\zeta_n \omega_n (s Z_n(p) - Z_n(0)) + \omega_n^2 (Z_n(s)) = F_n(s)$$

$$Z_n(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2)} * F_n(s)$$

with  $s = j\omega$

$$Z(\omega) = \frac{1}{(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)} * F_n(\omega)$$

The Fourier transforms  $F_n(\omega)$  in the right hand side of equation (4) is:

$$\begin{aligned} F_n(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f_n(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} \left( \frac{e^{j(n\phi - \omega)T}}{j(n\phi - \omega)} + \frac{e^{j(n\phi + \omega)T}}{j(n\phi + \omega)} - \frac{1}{j(n\phi - \omega)} + \frac{1}{j(n\phi + \omega)} \right) \end{aligned}$$

The solution of equation (1) in frequency domain is:

$$\begin{aligned} z(x, \omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} \\ &\quad * \left( \frac{e^{j(n\phi - \omega)T}}{j(n\phi - \omega)} + \frac{e^{j(n\phi + \omega)T}}{j(n\phi + \omega)} - \frac{1}{j(n\phi - \omega)} + \frac{1}{j(n\phi + \omega)} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

### 3. MATHEMATICAL MODELLING OF PIEZOELECTRIC

A piezoelectric model in one dimension shown in Figure 2 is considered. The model is composed of a seismic mass that compresses all area of piezoelectric material. The deformation of piezoelectric element has a same direction of applied electric field. This means that the model is studied in longitudinal mode or mode33 [6]. The piezoelectric element is connected to a power harvesting circuit modelled as a single resistor R.

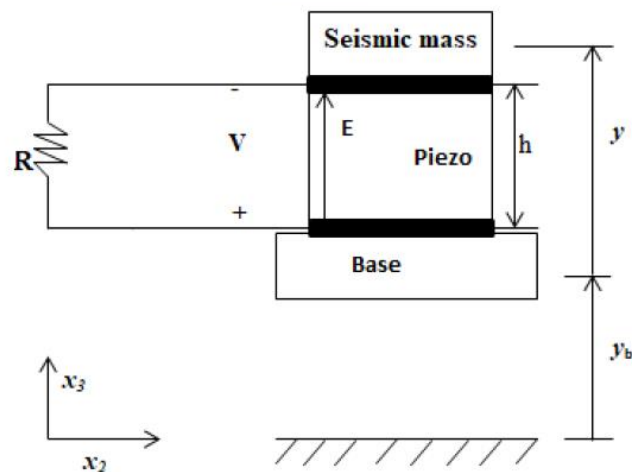


Fig -2: Electromechanical model of piezoelectric harvesting in 1D

For this model, the piezoelectric constitutive equation [6] in direct and inverse piezoelectric effects can be written as:

$$\begin{cases} T_3 = C_{33}^E \cdot S_3 - e_{33}^t \cdot E_{33} \\ D_3 = e_{33} \cdot S_3 + \varepsilon_{33}^S \cdot E_{33} \end{cases} \quad (6)$$

$D, E, S, T, e, \varepsilon, C^E$ , are respectively : the electric displacement which is produced, the applied electric field, the applied strain, the developed stress, the piezoelectric stress constant, the electric permittivity and the stiffness matrix. The superscript  $E$  and  $S$  are parameters at a constant electric field and strain.

Equation (6) can be transformed with a following definition:

- strain related to  $y$  and the thickness  $h$  :  $S_3 = \frac{y}{h}$
- electric field related to voltage  $v$  and the thickness  $h$  :  $E_3 = \frac{v}{h}$
- mass per cross section:  $m_t = \frac{m}{A}$ , where  $m$  is a total mass of the system
- stress which is the force per area :  $T_3 = -\frac{m(\ddot{y} + \ddot{y}_b)}{A} = -m_t(\ddot{y} + \ddot{y}_b)$
- electric displacement of the charge per unit area :  $D_3 = \frac{q}{A}$

Equation (6) can be rewritten as:

$$\begin{cases} m_t \ddot{y} + C_{33}^E \frac{y}{h} + e_{33} \frac{v}{h} = -m_t \ddot{y}_b \\ D_3 = e_{33} \frac{y}{h} - \varepsilon_{33}^S \frac{v}{h} = \frac{q}{A} \end{cases} \quad (7)$$

With other definitions of parameters:

- the *electromechanical* coupling  $\theta = \frac{e_{33} A}{h}$
- the *stiffness*  $k = \frac{C_{33}^E A}{h}$
- the *capacitance*  $C_p = \frac{\varepsilon_{33}^S A}{h}$
- the developed voltage  $v = i R = \frac{dq}{dt} R$
- the viscous damping  $c_d$  proportional to velocity  $\dot{y}$

Using the last parameters in (7), the final piezoelectric model equation is:

$$\begin{cases} m \ddot{y} + c_d \dot{y} + ky - \theta v = -m \ddot{y}_b \\ \theta \dot{y} + C_p \dot{v} + \frac{1}{R} v = 0 \end{cases} \quad (8)$$

### 3.1 Frequency domain solution of piezoelectric model

Laplace transform [7] of the first equation in (8) with the initial condition give:

$$m [s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + c_d [sY(s) - y(0)] + kY(s) - \theta V(s) = -m [s^2 Y_b(s) - sy_b(0) - \dot{y}_b(0)]$$

With

- $s = j\omega$
- *natural* frequency:  $\omega_h = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- the *damping*:  $\zeta_h = \frac{c_d}{2m\omega_h}$ ,

The equation can be rewritten as:

$$(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_h\omega_h + \omega_h^2)Y(\omega) - \frac{\theta}{m}V(\omega) = \omega^2 Y_b(\omega)$$

Dividing by  $\omega_h^2$ , and  $\Phi_h = \frac{\omega}{\omega_h}$ , the equation take the form :

$$[(1 - \Phi_h^2) + 2j\zeta_h\Phi_h]Y(\omega) - \frac{\theta}{k}V(\omega) = \Phi_h^2 Y_b(\omega) \quad (9)$$

Laplace transform for the second equation with the initial condition give [7]:

$$\theta s[sY(s) - y(0)] + C_p[sV(s) - v(0)] + \frac{1}{R}V(s) = 0$$

Let  $s = j\omega$ , and dividing by  $C_p\omega_h$  :

$$j\frac{\omega}{\omega_h}\frac{\theta}{C_p}Y(\omega) + \left(j\frac{\omega}{\omega_h} + \frac{1}{\omega_h C_p R}\right)V(\omega) = 0$$

Let  $\beta = \omega_h C_p R$

$$j\Phi_h\frac{\beta\theta}{C_p}Y(\omega) + (j\Phi_h\beta + 1)V(\omega) = 0 \quad (10)$$

Equations (9) and (10) can be written in the matrix form:

$$\begin{bmatrix} (1 - \Phi_h^2) + 2j\zeta_h\Phi_h & -\frac{\theta}{k} \\ j\Phi_h\frac{\beta\theta}{C_p} & (j\Phi_h\beta + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(\omega) \\ V(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_h^2 Y_b(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

This equation gives respectively the displacement  $y$  and the voltage developed  $v$  with  $Y(\omega)$  and  $V(\omega)$  in frequency domain. In other words, this is the matrix form of piezoelectric harvesting in frequency domain for one dimension.

#### 4. MATHEMATICAL MODELLING FOR THE TWO MODELS: PIEZOELECTRIC ELEMENT MOUNTED UNDER THE BRIDGE

The system studied here is the combination of two models previously discussed. The idea is to use a vibration of the bridge which is obtained with the moving load in it. This vibration is considered as the input stress to the piezoelectric energy harvester put under the bridge. The system is shown in Figure 3.

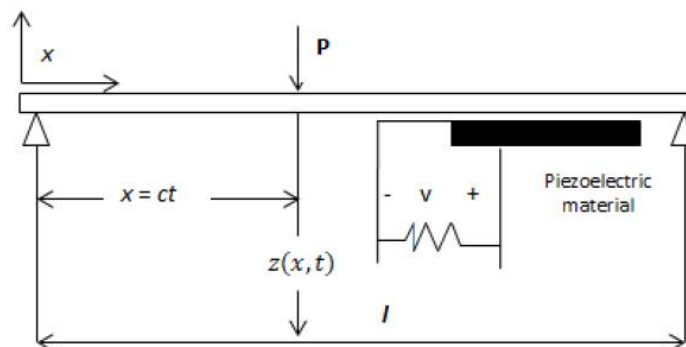


Fig - 3: Model « bridge piezoelectric harvesting »

##### 4.1 Equation for the model

The displacement of the bridge  $z(x, \omega)$  presented in equation (5) is nothing else than the base movement  $Y_b(\omega)$  in the piezoelectric harvesting presented in equation (11).

$$z(x, \omega) \approx Y_b(\omega) \quad (12)$$

$Y_b(\omega)$  is obtained by matrix calculation using the equation (11). Let M be the matrix.

$$M = \begin{bmatrix} (1 - \Phi_h^2) + 2j\zeta_h\Phi_h & -\frac{\theta}{k} \\ j\Phi_h\frac{\beta\theta}{C_p} & (j\Phi_h\beta + 1) \end{bmatrix}$$

$$\det M = (j\Phi_h)^3\beta + (2\zeta_h\beta + 1)(j\Phi_h)^2 + \left(\beta + \frac{\theta^2}{kC_p}\beta + 2\zeta_h\right)(j\Phi_h) + 1 = d_M(j\omega)$$

Where  $\det M \neq 0$ , equation (11) can be writing by:

$$MM^{-1} \begin{bmatrix} Y(\omega) \\ V(\omega) \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_h^2 Y_b(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{d_M} \begin{bmatrix} (j\Phi_h\beta + 1) & \frac{\theta}{k} \\ -j\Phi_h\frac{\beta\theta}{C_p} & (1 - \Phi_h^2) + 2j\zeta_h\Phi_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_h^2 Y_b(\omega) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Y(\omega) = (j\Phi_h\beta + 1)\Phi_h^2 Y_b(\omega)/d_M \\ V(\omega) = -j\Phi_h^3\frac{\beta\theta}{C_p} Y_b(\omega)/d_M \end{cases}$$

$Y_b(\omega)$  can give by:

$$Y_b(\omega) = -\frac{C_p d_M}{j\Phi_h^3\beta\theta} V(\omega)$$

Taking the superposition of the first three vibration modes of the bridge as solution, the equation (12) becomes:

$$-\frac{C_p d_M}{j\Phi_h^3\beta\theta} V(\omega) = \sum_{n=1}^3 \frac{1}{(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} \left( \frac{e^{j(n\Phi - \omega)T}}{j(n\Phi - \omega)} + \frac{e^{j(n\Phi + \omega)T}}{j(n\Phi + \omega)} - \frac{1}{j(n\Phi - \omega)} + \frac{1}{j(n\Phi + \omega)} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (13)$$

#### 4.2 Recovered energy

The energy obtained here is the power output giving by the formula:

$$|P| = \frac{|V|^2}{R}$$

- $V$  is the voltage obtained in the piezoelectric element with equation (13). It is expressed by:

$$V(\omega) = -\frac{j\Phi_h^3\beta\theta}{C_p d_M} \sum_{n=1}^3 \frac{1}{(-\omega^2 + 2j\omega\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2P}{l\mu} \frac{1}{2j} \left( \frac{e^{j(n\Phi - \omega)T}}{j(n\Phi - \omega)} + \frac{e^{j(n\Phi + \omega)T}}{j(n\Phi + \omega)} - \frac{1}{j(n\Phi - \omega)} + \frac{1}{j(n\Phi + \omega)} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (14)$$

- $R$  is a resistor set on the power harvesting circuit.

### 5. APPLICATION

#### 5.1 Data examples

The bridge is considered a under a moving load of 30000 N. Table 1 shows several bridge parameters.

For the harvester, the characteristics of a PVDF are adopted and listed in Table 2 [9]. The resistance of the power harvester circuit has been set at 50 kΩ.



Table - 1: Bridge parameters [8]

Bridge parameters	values
Mass per unit length, $\mu$	4406.78 kg/m
Bending stiffness, $EJ$	106 GN/m <sup>2</sup>

Table - 2: PVDF characteristics [9]

Properties	Symbol	Values	Units
Young's modulus	$Y_{33}$	0.9	10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup>
Stiffness	$c_{33}$	1.05	10 <sup>9</sup> Pa
Piezoelectric charge constant	$d_{33}$	-34	10 <sup>-12</sup> C/N
Piezoelectric stress constant	$e_{33}$	35.7	10 <sup>-3</sup> C/m <sup>2</sup>
Area of piezoelectric element	$A$	0,2 x 0,1	m <sup>2</sup>
Thickness	$h$	515	10 <sup>-6</sup> m
Capacitance	$C_p$	2.6	10 <sup>-9</sup> F
Damping ratio	$\zeta$	0.15	
Density	$\rho$	1470	kg/m <sup>3</sup>
Relative dielectric constant	$k$	7.6	
Frequency	$\omega_h$	22	rad/s

### 5.1 Results

The use of these parameters values in equation (14) can give the power output as a function of the position of the harvester, the velocity of the vehicle and the length of the bridge. Four types of bridge with a various vehicle speeds are studied. The results are shown in Table 3.

Table - 3: Table of power with parameters considered

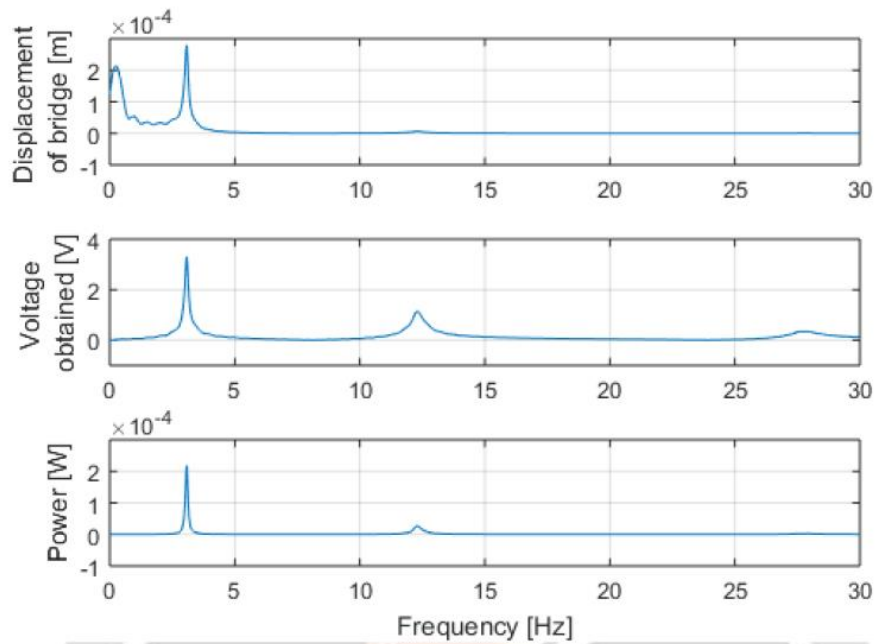
Speed (km/h)	Maximum power $\frac{V^2}{R}, (10^{-6}W)$ For $l = 25$ m				Speed (km/h)	Maximum power $\frac{V^2}{R}, (10^{-6}W)$ For $l = 30$ m			
	$x=1/4$	$x=1/2$	$x=2/3$	$x=3/4$		$x=1/4$	$x=1/2$	$x=2/3$	$x=3/4$
36	49.951	99.915	75.004	49.951	36	69.886	139.77	104.83	69.886
54	47.030	94.053	70.602	47.021	54	74.476	148.95	111.71	74.476
72	46.940	93.867	70.479	46.946	72	74.244	148.49	111.37	74.244
90	48.005	96.010	72.105	48.036	90	71.085	142.17	106.63	71.085

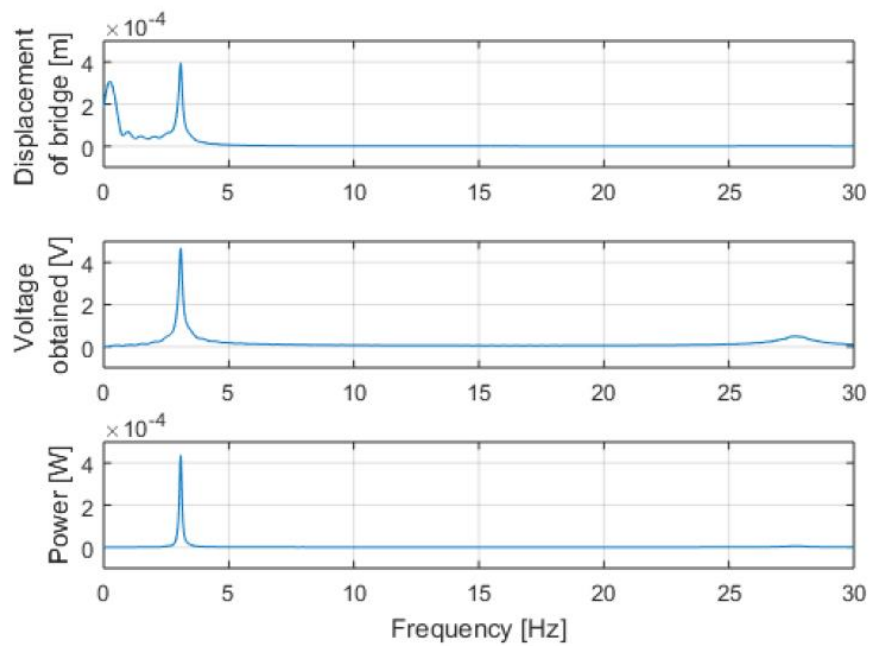
Speed (km/h)	Maximum power $\frac{V^2}{R}, (10^{-6}W)$ For $l = 35$ m				Speed (km/h)	Maximum power $\frac{V^2}{R}, (10^{-6}W)$ For $l = 50$ m			
	$x=1/4$	$x=1/2$	$x=2/3$	$x=3/4$		$x=1/4$	$x=1/2$	$x=2/3$	$x=3/4$
36	101.18	202.36	151.82	96.638	36	187.83	375.61	281.82	187.86
54	93.938	187.88	140.96	89.723	54	197.41	394.90	296.41	197.63
72	106.05	212.11	159.14	101.30	72	192.57	384.86	288.44	192.15
90	101.26	202.52	151.95	96.719	90	218.97	438.20	329.03	219.41

Figure 4 and Figure 5 shows a voltage obtained, a maximum power and the displacement plots of the corresponding bridge. The example considered is in the quarter and half position of bridge. His length is  $l = 50$  m and the vehicle speed is 90 km/h.





**Fig - 4:** Displacement of bridge, voltage obtained and power output  
with  $l = 50 \text{ m}$ ,  $x = 12.5 \text{ m}$  and  $v = 90 \text{ km/h}$ .



**Fig - 5:** Displacement of bridge, voltage obtained and power output  
with  $l = 50 \text{ m}$ ,  $x = 25 \text{ m}$  and  $v = 90 \text{ km/h}$ .

## 5.2 Interpretation of results

From the obtained results, it is found that:

- The power output is the best in the half length of the bridge regardless of the length and speed of the vehicle.
- The power value increases as the length of the bridge increases. It means that the power is proportional to the speed.
- On the one hand, a shorter bridge is more promising with a slower speed and on the other hand, a longer bridge gives more energy with a faster speed. Example for the length  $l = 25$  m, the maximum power of  $99.9 \mu W$  is obtained at a speed  $c = 36$  km/h, and for the length  $l = 50$  m, the maximum power is  $438.20 \mu W$  with a speed  $c = 90$  km/h.

## 5. CONCLUSION

Piezoelectric energy harvester from bridge vibrations caused by a constant moving load is shown in this work. The response of bridge under moving load and the piezoelectric harvester are studied separately in frequency domain. Then the two models are combined to make up a harvesting system. Mathematical resolutions of this model in frequency domain show that an electric energy can be obtained. Numerical application is done to know the order of power output. For the displacement of bridge, the superposition of the first three mode of vibration is choosing. The voltage obtained in power harvester circuit with a fixe resistor  $50 \text{ K}\Omega$  is 2,2351 at 4,6808 volts. Which means that the power output is between  $99.9 \mu W$  and  $438.20 \mu W$ . This energy can be processed and storage to power a LED traffic light in the bridge for future works.

## 5. REFERENCES

- [1]. A.T. Papagiannakis, S. Dessouky, A. Montoya et H. Roshani, «Energy Harvesting from Roadways », International Conference on Sustainable Energy Information Technology, Procedia Computer Science 83 :758 - 765, 2016.
- [2]. M. Y. Gao, P. Wang, Y. Cao, R. Chen, C. Liu, « A rail-borne piezoelectric transducer for energy harvesting of railway vibration », Journal of vibroengineering. nov 2016, vol. 18, issue 7. ISSN 1392-8716.
- [3]. Jingjing Zhao, Zheng You, « A Shoe-Embedded Piezoelectric Energy Harvester for Wearable Sensors», Sensors 2014, 14, 12497-12510.
- [4]. Paolo S. Valvo, Jacopo Bonari, Davide Colonna, Ramazan-Ali Jafari-Talookolaei et Maryam Abedi, « energy harvesting from bridge vibrations with piezoelectric devices – a feasibility study », The Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics, Salerno, Italy, 4–7 September 2017.
- [5]. Ye Zhang, «Piezoelectric based energy harvesting on low frequency vibrations of civil infrastructures », Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College, 2014.
- [6]. Pieter Hilbrand de Jong, « Power harvesting using piezoelectric materials, applications in helicopter rotors », University of Twente, Enschede, The Netherlands, February 2013.
- [7]. Kreiszig,E, John Wiley and Sons Inc, « Advanced Engineering Mathematics. », U.S.A., 2006.
- [8]. T. Nagayama, A. P. Rekswardojo, D. Su, T. Mizutani, C. Zhang, « Bridge Natural Frequency Estimation by Extracting the Common Vibration Component From the Responses of Two Vehicles », International Conference on Advances in Experimental Structural Engineering, August 1-2, 2015.
- [9]. Airmar Technology Corporation, « Piezoelectric Polymer, Polyvinylidene Fluoride (PVDF) », <http://www.airmar.com/>.

## Annexe 2 : Propriété d'un PVDF

### Properties of **AIRMAR** PiezofLEX™ Piezoelectric Polymer

Polyvinylidene Fluoride (PVDF) (Produced under license from Raytheon)

#### Properties

Relative dielectric constant ( $\kappa'$ )	7.6
Permittivity ( $\epsilon' = \kappa' \epsilon_0$ )	$67.3 \times 10^{-12}$ Farad/meter
Loss tangent ( $\tan \delta$ ) @ 1 kHz	0.015
Thickness (t)	$515 \times 10^{-6}$ meter (20 mils)
Electrical capacitance (c)	$130 \times 10^{-9}$ Farad/meter <sup>2</sup> ( $83 \times 10^{-12}$ Farad/inch <sup>2</sup> )
Density of bare PVDF ( $\rho$ )	$1.47 \times 10^3$ kg/m <sup>3</sup>

#### Output voltage for 20 mil thick PVDF

$V_{31}$	$+107 \times 10^{-6}$ Volt/Pascal
$V_{32}$	$+15 \times 10^{-6}$ Volt/Pascal
$V_{33}$	$-260 \times 10^{-6}$ Volt/Pascal
$V_{3h}$ (hydrostatic)	$-138 \times 10^{-6}$ Volt/Pascal (-197.2 dB re 1 V/ $\mu$ Pa)

#### Intrinsic piezoelectric properties

Charge sensitivity:

$d_{31}$	$+14 \times 10^{-12}$ Coulomb/Newton
$d_{32}$	$+2 \times 10^{-12}$ Coulomb/Newton
$d_{33}$	$-34 \times 10^{-12}$ Coulomb/Newton
$d_{3h}$ (hydrostatic)	$-18 \times 10^{-12}$ Coulomb/Newton

Voltage sensitivity:

$g_{31}$	$+0.21$ Volt-meter/Newton
$g_{32}$	$+0.03$ Volt-meter/Newton
$g_{33}$	$-0.50$ Volt-meter/Newton
$g_{3h}$ (hydrostatic)	$-0.27$ Volt-meter/Newton
$g_{3h} \times d_{3h}$ (~energy)	$4.8 \times 10^{-12}$ (C/N) (Vm/N) = (Pa) <sup>-1</sup>

#### Elastic constants

Young's modulus:

$Y_{11}$	$2.5 \times 10^9$ Pascal
$Y_{22}$	$2.1 \times 10^9$ Pascal
$Y_{33}$	$0.9 \times 10^9$ Pascal

For comparison, Young's modulus of copper is:

$Y_{11Cu}$	$100 \times 10^9$ Pascal
------------	--------------------------

#### Miscellaneous properties in 3-direction

Thickness coupling constant ( $k_t$ )	$\sim 0.10$
Stiffness ( $c_{33}$ )	$1.05 \times 10^9$ Pascal
Speed of sound ( $v_3$ )	830 meter/sec

#### Acoustic impedance

PVDF "3" thickness direction	$1.2 \times 10^6$ kg/ (sec m <sup>2</sup> )
Sea water	$1.5 \times 10^6$ kg/ (sec m <sup>2</sup> )

PiezofLEX™  
Polymer

**AIRMAR**  
TECHNOLOGY CORPORATION

35 Meadowbrook Drive, Milford, New Hampshire 03055-4613 USA  
Tel (603) 673-9570 • Fax (603) 673-4624  
e-mail: sales@airmar.com • <http://www.airmar.com>

17-244-01 rev. 02 7/99

### Annexe 3 : Programme de résolution du système pont piézoélectrique par Symbolic Math

```
%déclaration des variables syboliques
syms FN WN P L V X z t CVP E J U;
syms z(t)
Dz = diff(z);
L = 50;
V = 10;
X = 25;
WN = (((E*J)/U)*((pi/L)^4))^(1/2);
FN = CVP/(2*U*WN);
%résolution de l'équation différentielle de l'amplitude modale
zs = dsolve(diff(z,t,2) + 2*FN*WN*diff(z) + WN^2*z ==
(2*P/(L*U))*sin(pi*V*t/L), z(0)==0,Dz(0)==0,t);
%équation de la déflexion du pont en mode 1
zt = zs*sin(pi*X/L);
ztx = subs(zt,{P,U,CVP,E,J},{3e4,4406.78,3412.61,27.5e9,3.85});
ztx = vpa(ztx);

syms A F M R T C;
syms t s;
syms y(t) v(t);

dy = diff(y(t),t);
d2y = diff(y(t),t,2);
dv = diff(v(t),t);

%équation du couple électromécanique
eq1 = d2y + A*dy + F*y(t) + M*v(t) == - diff(ztx,t,2);
eq2 = R*v == T*dy - C*dv;
%transformé de laplace
L1 = laplace(eq1,t,s);
L2 = laplace(eq2,t,s);

syms Ly Lv;
%changer la variable symbolique en numérique
Ny = subs(L1,{A,F,M,R,T,C,'y(0)','v(0)','D(y)(0)'},{6.6,484,0.0082,2e-
5,1.38,130e-9,0,0,0});
Nv = subs(L2,{A,F,M,R,T,C,'y(0)','v(0)'},{6.6,484,0.0082,2e-5,1.38,130e-
9,0,0});

Ny = subs(Ny,{'laplace(y(t), t, s)','laplace(v(t), t, s)'},{Ly,Lv});
Ny = collect(Ny,Ly);

Nv = subs(Nv,{'laplace(y(t), t, s)','laplace(v(t), t, s)'},{Ly,Lv});
Nv = collect(Nv,Lv);
%résolution de l'équation
[Ly,Lv] = solve(Ny,Nv,Ly,Lv);
%transformé de laplace inverse
y = ilaplace(Ly,s,t);
pretty(y);
v = ilaplace(Lv,s,t);
pretty(v)
%tracer la tension obtenu
ezplot(vpa(v),[0,10,-3,3]);
```

## REFERENCES

- [1.01] C. R. Bowen, H. A. Kim, P. M. Weaver, S. Dunn, « *Piezoelectric and ferroelectric materials and structures for energy harvesting applications* », Journal of Energy & Environmental Science, Issue 1, January 2014.
- [1.02] J. Briscoe, S. Dunn, « *Piezoelectric nanogenerators – a review of nanostructured piezoelectric energy harvesters* », Nano Energy, Vol. 14, pp. 15-29, May 2015.
- [1.03] X. Wang, « *Piezoelectric nanogenerators—Harvesting ambient mechanical energy at the nanometer scale* », Nano Energy, Vol. 1, Issue 1, pp. 13-24, January 2012.
- [1.04] T. Starner, « *Human-powered wearable computing* », IBM Systems Journal, Vol. 35, Nos 3&4, 1996.
- [1.05] R. Amirtharajah, A. P. Chandrakasan, « *Self-powered signal processing using vibration-base power generation* », IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol 33, pp. 687 – 695, June 1998.
- [1.06] S. Roundy, P. K. Wright, J. Rabaey, « *A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes* », Computer Communications, Vol. 26, Issue 11, pp. 1131-1144, July 2003.
- [1.07] S. R. Anton, H. A. Sodano, « *A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006)* », Smart Materials and Structures, Volume 16, Number 3, May 2007.
- [1.08] J. Mistral, S. Basrour, « *Récupération de l'énergie des vibrations mécaniques pour générer de l'électricité* », Edition T.I, 2010.
- [1.09] L. H. Fang, S. I. S. Hassan, R.B. A. Rahim et M. F. A. Malek, « *A study of vibration energy harvester* », ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, vol. 11, no. 8, April 2016.
- [1.10] Dr. R. Belakroum, « *Introduction aux Vibrations Mécaniques* », Université Kasdi Merbah, Ouargla Faculté des Sciences Appliquées, Avril 2016.

- [1.11] Z. Ye, Y. Lu, L. Wang, « *Investigating the Pavement Vibration Response for Roadway Service Condition Evaluation* », *Advances in Civil Engineering*, Volume 2018, Article ID 2714657, February 2018.
- [1.12] M. Mhanna, « *Analyse des vibrations induites par le trafic routier et étude de l'efficacité des système de réduction de ces vibrations* », Université des Sciences et Technologies de Lille, 2012.
- [1.13] A.T. Papagiannakis, S. Dessouky, A. Montoya, H. Roshani, « *Energy Harvesting from Roadways* », *ScienceDirect, Procedia Computer Science* vol. 83, pp : 758 – 765, 2016.
- [1.14] M. Y. Gao<sup>1</sup>, P. Wang, Y. Cao, R. Chen, C. Liu, « *A rail-borne piezoelectric transducer for energy harvesting of railway vibration* », *Journal of Vibroengineering*, Vol. 18, Issue 7, p. 4647-4663, 2016.
- [1.15] V. G. Cleante, M. J. Brennan, G. Gatti, D. J. Thompson, « *Energy harvesting from the vibrations of a passing train: effect of speed variability* », *Journal of Physics: Conference Series* 744 012080, 2016.
- [1.16] M. Peigney, D. Siegert, « *Piezoelectric energy harvesting from traffic-induced bridge vibrations* », *Smart Materials and Structures*, IOP Publishing, 22, pp.095019, Septembre 2013.
- [1.17] A. Godfrey, R. Conway, D. Meagher, G. ÓLaighin, « *Direct measurement of human movement by accelerometry* », *Medical Engineering & Physics*, Vol.30, Issue 10, p. 1364-1386, December 2008.
- [1.18] V. S.Shirokov, I. S.Kholopov, A. V. Solovejv, « *Determination of the frequency of natural vibrations of a modular building* », *Procedia Engineering*, Vol. 153, p. 655-661, 2016.
- [1.19] I. Mekjavic, « *Damage identification of bridges from vibration frequencies* », *Technical Gazette*, Vol.20, p. 155-160, 2013.



- [1.20] A. González, E. Covián et J. Madera, « *Determination of Bridge Natural Frequencies Using a Moving Vehicle Instrumented with Accelerometers and a Geographical Positioning System* », Civil-Comp Proceedings, 2008.
- [1.21] C.B.Williams, R.B.Yates, « *Analysis of a micro-electric generator for microsystems* », Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 52, Issues 1-3, p. 8-11, March–April 1996.
- [1.22] P D Mitcheson, T C Green, E M Yeatman et A S Holmes, « *Analysis of Optimized Micro-Generator Architectures for Self-Powered Ubiquitous Computers* », Imperial College of Science Technology and Medicine Exhibition Road, London, SW7 2BT, Vol. 56, no. 2, p. 1980 – 1985, 2004.
- [1.23] A. A. Telba, « *Modeling of Piezoelectric Energy Harvesting for Low Power Generation* », Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science, Vol. I, San Francisco, USA, October 2016.
- [1.24] W. G. Ali, S. W. Ibrahim, « *Power Analysis for Piezoelectric Energy Harvester* », Energy and Power Engineering, Vol.4, no.6, Article ID:25084, p. 496-505, 2012.
- [1.25] P. G.-Jones, M.J. Tudor, S.P. Beeby, N.M. White, « *An electromagnetic, vibration-powered generator for intelligent sensor systems* », Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 110, p. 344-349, February 2004.
- [1.26] S. P. Beeby, R. N. Torah, M. J. Tudor, P. G.Jones, T. O'Donnell, C. R. Saha et S. Roy, « *A micro electromagnetic generator for vibration energy harvesting* », Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol. 17, p. 1257-1265, 2007.
- [1.27] A. Haroun, I. Yamada, S. Warisawa, « *Micro electromagnetic vibration energy harvester based on free/impact motion for low frequency–large amplitude operation* », Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 224, p. 87-98, April 2015.
- [1.28] C.R. Saha, T. O'Donnell, N.Wang, P. McCloskey, « *Electromagnetic generator for harvesting energy from human motion* », Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 147, p. 248-253, 2008.

- [1.29] A. Haroun, I. Yamada, S. Warisawa, « *Investigation of Kinetic Energy Harvesting from Human Body Motion Activities using Free/Impact Based Micro Electromagnetic Generator* », Diabetes Cholest metabol, Vol. 1, p. 12-16, 2016.
- [1.30] A. Delnavaz, J. Voix, « *Electromagnetic Micro-power Generator for Energy Harvesting from Respiration* », Conference on IEEE Industrial Electronics Society, Canada, 2012.
- [1.31] F. U. Khan, M. Iqbal, « *Electromagnetic Bridge Energy Harvester Utilizing Bridge's Vibrations and Ambient Wind for Wireless Sensor Node Application* », Journal of Sensors, Vol. 2018, Article ID 3849683, p. 1-18, 2018.
- [1.32] S. Meninger, J.O. Mur-Miranda, R. Amirtharajah, A. Chandrakasan, J.H. Lang, « *Vibration-to-electric energy conversion* », IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems, Vol. 9, Issue 1, p. 64-76, 2001.
- [1.33] S. Boisseau, G. Despesse, B. Ahmed Seddik, « *Electrostatic Conversion for Vibration Energy Harvesting* », Small-Scale Energy Harvesting, October 2012.
- [1.34] S. Roundy, P. K. Wright, K. S. J. Pister, « *Micro-electrostatic vibration-to-electricity converters* », International Mechanical Engineering Congress & Exposition, New Orleans, Louisiana, 2002.
- [1.35] T. Sterken, K. Baert, R. Puers, S. Borghs, « *Power Extraction from Ambient Vibration* », Proceedings of SAFE-ProRISC-SeSens, Veldhoven, the Netherlands, 2001.
- [1.36] G. Despesse, « *Étude des phénomènes physiques utilisables pour alimenter en énergie électrique des micro-systèmes communicants* », Institut National Polytechnique de Grenoble, Juin 2005.
- [1.37] P. Basset, D. Galayko, A. M. Paracha, F. Marty, A. Dudka, T. Bourouina, « *A batch-fabricated and electret-free silicon electrostatic vibration energy harvester* », Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol.19, no.11, 12 p, 2009.



- [1.38] S. Boisseau, G. Despesse, A. Sylvestre, « *Electret-based cantilever energy harvester: design and optimization* », Classical Physics, Proc. PowerMEMS, p.327-330, 2010.
- [1.39] R.Guillemet, « *Etude et réalisation d'un récupérateur d'énergie vibratoire par transduction électrostatique en technologie MEMS silicium* », Université Paris-Est, ED-MSTIC, Octobre 2012.
- [1.40] F. Giraud, « *Modélisation causale et commande d'un actionneur piézo-électrique à onde progressive* », Université Lille I, Juillet 2002.
- [1.41] M. Bullo, « *Modélisation et commande du moteur piézoélectrique à onde progressive* », Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.
- [1.42] A. Benayad, « *Matériaux monocristallins à forte activité piézoélectrique : élaboration, caractérisation et application* », Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Décembre 2005.
- [1.43] C. Nadal, « *Contribution à la modélisation et la conception de transformateurs piézoélectriques dédiés à la génération de plasma* », Institut National Polytechnique de Toulouse, ED-GEET, Juillet 2011.
- [1.44] C. Keawbooncliny, T. G. Engel, « *Electrical Power Generation Characteristics of Piezoelectric Generator Under Quasi-Static and Dynamic Stress Conditions* », IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol.50, no.10, p. 1377-1382, 2003.
- [1.45] H. W. Kim, S. Priya, K. Uchino, R. E. Newnham, « *Piezoelectric Energy Harvesting under High Pre-Stressed Cyclic Vibrations* », Journal of Electroceramics, Vol.15, p. 27-34, 2005.
- [1.46] J. Kymissis, C. Kendall, J. Paradiso, N. Gershenfeld, « *Parasitic Power Harvesting in Shoes* », Physics and Media Group, MIT Media Laboratory E15-410, USA, 1998.

- [1.47] Clyde Jake Kendall, « *Parasitic Power Collection in Shoe Mounted Devices* », Massachusetts Institute of Technology, June 1998.
- [1.48] N. S. Shenck, J. A. Paradiso, « *Energy Scavenging with Shoe-Mounted Piezoelectrics* », IEEE Micro, Vol.21, Issue 3, June 2001.
- [1.49] J. Zhao, Z.You, « *A Shoe-Embedded Piezoelectric Energy Harvester for Wearable Sensors* », Sensors, Vol.14, p. 12497-12510, 2014.
- [1.50] L. Xie, M. Cai, « *Increased piezoelectric energy harvesting from human footstep motion by using an amplification mechanism* », Applied Physics Letters, Vol.105, Issue 14, September 2014.
- [1.51] M. Marzencki, S. Basrour, B. Charlot, S. Spirkovich, M. Colin, « *A MEMS piezoelectric vibration energy harvesting device* », Micro and Nanotechnology for Power Generation and Energy Conversion Applications, Tokyo, Japan, p. 45-48, 2005.
- [1.52] W. J. Choi, Y. Jeon, J.-H. Jeong, R. Sood, S. G. Kim, « *Energy harvesting MEMS device based on thin film piezoelectric cantilevers* », Journal of Electroceramics, Vol.17, Issue 2-4, p. 543-548, 2006.
- [1.53] A. Khalid, A. K. Redhewal, M. Kumar, A. Srivastav, « *Piezoelectric Vibration Harvesters Based on Vibrations of Cantilevered Bimorphs: A Review* », Materials Sciences and Applications, Vol.6, p. 818-827, 2015.
- [1.54] A. T. Mineto, M. Pereira, H. A. Navarro, P. S. Varoto, « *Modeling of a cantilever beam for piezoelectric energy harvesting* », 9th Brazillian Conference on Dynamic Control and their Applications, June 2010.
- [1.55] R. Patel, « *Modelling, analysis and optimisation of cantilever piezoelectric energy harvesters* », University of Nottingham, December 2012.
- [1.56] C. K. Thein, B. L. Ooi, J. S. Liu, J. M. Gilbert, « *Modelling and optimisation of a bimorph piezoelectric cantilever beam in an energy harvesting application* », Journal of Engineering Science and Technology, Vol. 11, No. 2, p. 212 – 227, 2016.

- [1.57] S. Roundy, V. Sundararajan, « *Improving Power Output for Vibration-Based Energy Scavengers* », IEEE CS and IEEE ComSoc, Vol. 05, p. 1536-1268, 2005.
- [1.58] D. Zhu, S. P. Beeby, M. J. Tudor, N. R. Harris, « *A credit card sized self powered smart sensor node* », Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 169, Issue 2, p. 317-325, October 2011.
- [1.59] H. Yu, J. Zhou, L. Deng, Z. Wen, « *A Vibration-Based MEMS Piezoelectric Energy Harvester and Power Conditioning Circuit* », Sensors, Vol. 14, p. 3323-3341, February 2014.
- [1.60] H. G. Çetina, B. Sümera, « *A Flexible Piezoelectric Energy Harvesting System for Broadband and Low-frequency Vibrations* », Procedia Engineering, Vol. 120, p. 345 – 348, 2015.
- [1.61] <http://www.pavegen.com>
- [1.62] <http://www.jreast.co.jp/e/development/press/20080111.pdf>, East Japan Railway Company, « *Demonstration Experiment of the “Power-Generating Floor” at Tokyo Station* », 2008.
- [1.63] S. J. Roundy, « *Energy Scavenging for Wireless Sensor Nodes with a Focus on Vibration to Electricity Conversion* », University of California, Berkeley, 2003.
- [1.64] S. Boisseau, « *Récupération d'énergie vibratoire à électrets* », Université de Grenoble, ED-EEATS, 2006.
- [2.01] J. Curie, P. Curie, « *Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres faces inclinées* », C R Acad Sci Gen 91, p. 294–295, 1880.
- [2.02] J. Curie, P. Curie, « *Sur l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres faces inclinées* », C R Acad Sci Gen 91, p. 383–386, 1880.
- [2.03] G. Lippman, « *Principe de la conservation de l'électricité* », Ann Chimie Physique, 24, p. 145, 1881.

- [2.04] A. V. Carazo, « *Piezoelectric Transformers: An Historical Review* », Actuator MDPI, 2016.
- [2.05] F. Boukazouha, « *Conception, Réalisation, Modélisation et Caractérisation Expérimentale d'un Transformateur de Tension de Type Rosen* », Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, Algérie, 17 Janvier 2016.
- [2.06] F. Elie, « *Électronégativité des atomes* », Août 2004.
- [2.07] P. A. Gauchard, « *La classification périodique des éléments* », Université Joseph Fourier de Grenoble, 2011-2012.
- [2.08] J. Moutte, « *Notions de Chimie Général* », Géochimie, Ecole des Mines de Saint Etienne, 2002.
- [2.09] J. Yang, « *An introduction to the theory of piezoelectricity* », University of Nebraska-Lincoln, U.S.A, 2005.
- [2.10] [http://femto-physique.fr/electromagnetisme/dipole\\_electrique.php](http://femto-physique.fr/electromagnetisme/dipole_electrique.php), *LE DIPÔLE ÉLECTRIQUE*.
- [2.11] W. Heywang, K. Lubitz, W. Wersing, « *Piezoelectricity Evolution and Future of a Technology* », Springer Series in Materials Science, 2008.
- [2.12] A. Hajjaji, « *Caractérisation multi échelle et lois de comportement dans les matériaux ferroélectriques* », Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2007.
- [2.13] Z. Sadoune, « *Modélisation et simulation des matériaux composites Piézoélectriques Cas du SiO<sub>2</sub>* », Faculté des Sciences Rabat, 2013.
- [2.14] A. Benayad, « *Matériaux monocristallins à forte activité piézoélectrique : élaboration, caractérisation et application* », Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2005.

- [2.15] C. Castille, «*Etude de MEMS piézoélectriques libérés et microstructurés par sérigraphie. Application à la détection en milieu gazeux et en milieu liquide* », Ecole doctorale de Sciences Physiques et de l'Ingénieur, Bordeaux I.
- [2.16] G. Sebald, «*Nouveau monocristaux à forte conversion piézoélectrique : croissance, modélisation et croissance*», Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2004.
- [2.17] E. Boucher, «*Elaboration et caractérisation de céramiques PZT bi-substituées et modélisation non-linéaire de leur comportement en contrainte et en champ électrique*», Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2002.
- [2.18] S. Abdoun, «*Conception et Modélisation d'un Capteur Acoustique*», Université des Sciences et de la Technologie d'Oran, 2010.
- [2.19] J. F. Lopez, «*Modeling and optimization of ultrasonic linear motors*», Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2006.
- [2.20] M. Bullo, «*Modélisation et commande du moteur piézoélectrique à onde progressive*», Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.
- [2.21] L. Garbuio, «*Etude du phénomène de lubrification électroactive à l'aide d'actionneurs piézoélectriques : application à la réduction des forces de frottement sec dans un moteur à combustion interne*», Institut National Polytechnique de Toulouse, France, Juin 2006.
- [2.22] T. Ritter, K. K. Shung, W. Cao, T. R. Shrout, «*Electromechanical properties of thin strip piezoelectric vibrators at high frequency*», Journal of Applied Physics, Vol. 88, No. 1, pp.394-397, USA, July 2000.
- [2.23] T. Martin, «*Contribution à l'étude des générateurs piézoélectriques pour la génération des décharges plasmas*», Université Toulouse III Paul Sabatier, Janvier 2015.
- [2.24] L. Hamza, «*Etude, élaboration et caractérisation de céramiques piézoélectriques*», Université Mentouri-Constantine, Faculté des sciences de l'ingénieur, 2011.

- [2.25] A. M. A. Fattah, M .G. S .Ali, N. Z. Elsyed, G. A. Ali, «*Piezoceramic materials for ultrasonic probes*», J. Solids, Vol. 28, No. 2, Egypt, 2005.
- [2.26] J. Fraden, «*Handbook of modern sensors : physics, designs, and applications*», Springer-Verlag, New York, USA, 2004.
- [2.27] G. M. Sessler, «*Piezoelectricity in polyvinylidenefluoride*», Technische Hochschule Darmstadt, 6100 Darmstadt, West Germany, September 1981.
- [2.28] L. Ruan, X. Yao, Y. Chang, L. Zhou, G. Qin et X. Zhang, «*Properties and Applications of the  $\beta$  Phase Poly (vinylidene fluoride)*», Review MDPI, December 2017.
- [2.29] F. Cottone, «*Introduction to Vibration Energy Harvesting*», NiPS Energy Harvesting Summer School, Erice, Italy, July 2012.
- [3.01] A. Badel, «*Récupération d'énergie et contrôle vibratoire par éléments piézoélectriques suivant une approche non linéaire* », Ecole Doctorale de l'Université de Savoie, Juillet 2008.
- [3.02] P. J. Cottinet, «*Actionnement et récupération d'énergie à l'aide de polymères électro-actifs* », Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, ED-MEGCA, Novembre 2010.
- [3.03] D. Poria<sup>1</sup>, «*Modeling and simulation of vibration energy harvesting of MEMS Device Based on Epitaxial Piezoelectric Thin Film* », International Journal of Research, Volume 2, Issue 10, pp 20-25, October 2012.
- [3.04] J.Gong, Y. Xu, «*Modeling and analysis of piezoelectric bimorph cantilever for vibration energy harvesting*», Advanced Materials Research ISSN: 1662-8985, Vols. 610-613, pp 2583-2588, December 2012.
- [3.05] C. K. Thein, B. L. Ooi, «*Modelling and optimisation of a bimorph piezoelectric cantilever beam in an energy harvesting application*», Journal of Engineering Science and Technology , Vol. 11, No. 2, pp 212 – 227, 2016.

- [3.06] A. Lebled, B. Necib, M. Sahli, «*Analytical modeling of a piezoelectric bimorph beam*», Journal of Mechanical Engineering, Vol. 4, No. 1, pp 7-10, USA, 2016.
- [3.07] N. Chen, V. Bedekar, «*Modeling, simulation and optimization of piezoelectric bimorph transducer for broadband vibration energy harvesting*», Journal of materials science research; Vol. 6, No. 4; 2017.
- [3.08] O. Bilgen, M. A. Karami, «*The actuation characterization of cantilevered unimorph beams with single crystal piezoelectric materials*», Smart Materials and Structures, IOP Publishing 20, 055024, p. 9, 2011.
- [3.09] V. Tiwari, R. Sharma, «*Optimizing the Design of Polymer Based Unimorph Actuator using COMSOL Multiphysics*», Jaypee Institute of Information Technology, India, 2013.
- [3.10] A. A. Athavale, «*An analytical model for piezoelectric unimorph cantilever subjected to an impulse load*», the State University of New Jersey, 2015.
- [3.11] J. Mei, M. Tao, «*Analytical simulation of the cantilever-type energy harvester*», Advances in Mechanical Engineering, Vol. 8(1), pp 1–11, 2016.
- [3.12] T. Schlinquer, A. M. ousaid, «*Optimal design of a unimorph piezoelectric cantilever devoted to energy harvesting to supply animal tracking devices*», Univ. Bourgogne Franche-Comté, FEMTO-ST Institute, July 2017.
- [3.13] G. S. Ohm, «*Galvanische kette, mathematisch bearbeitet*», Berlin, 1827.
- [3.14] J. C. Maxwell, «*A Dynamical theory of the electromagnetic field*», 155, pp 459-512, Lond, January 1865.
- [3.15] W. Shockley, «*pn junction : the shockley model*», University of Saskatchewan, Canada, 2001.
- [3.16] T. Schlinquer, A. Mohand ousaid, «*Revisit of series-SSHI with comparisons to other interfacing circuits in piezoelectric energy harvesting* », Smart Materials and Structures, IOP Publishing 19,125009, pp. 12, 2010.

- [3.17] E. Lefeuvre, A. Badel, «*A comparison between several approaches of piezoelectric energy harvesting*», INSA de Lyon, France, 2005.
- [3.18] J. Liang, W. H. Liao, «*Energy flow in piezoelectric energy harvesting systems*», Smart Materials and Structures, IOP Publishing 20,015005, pp. 11, 2011.
- [3.19] Y C Shu, I C Lien, «*An improved analysis of the SSHI interface in piezoelectric energy harvesting*», Smart Materials and Structures, IOP Publishing 16, pp. 2253–2264, 2007.
- [4.01] P. K. Chatterjee, T. K. Datta, C. S. Surana, «*Vibration of Continuous Bridges Under Moving Vehicles* », Journal of Sound and Vibration, Vol. 169, Issue 5, p. 619-632, February 1994.
- [4.02] T. C. Chen, M. H. Lee, «*Research on Moving Force Estimation of the Bridge Structure using the Adaptive Input Estimation Method* », Electronic Journal of Engineering, Vol. 8, p.20-28, 2008.
- [4.03] B. Boua, M. Bensaïbi, «*Détermination de la déflexion d'un tablier de pont dalle sous charge roulante* », Nature & Technologie, Vol. 8 p. 41-49, 2013.
- [4.04] G. Lombaert, J. P. Conte, «*Random Vibration Analysis of Dynamic Vehicle -Bridge Interaction Due to Road Unevenness* », Journal of Engineering Mechanics, Vol. 138, Issue 7, July 2012.
- [4.05] H. Ouyang, «*Moving-load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview)* », Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 25, Issue 6, p. 2039–2060, August 2011.
- [4.06] H. Ouyang, «*Dynamic impact analysis of vehicle bridge interaction system*», Journal of mechanical and production engineering, ISSN: 2320-2092, Vol. 4, Issue-5, May 2016.
- [4.07] T. Vaidya, A. Chatterjee, «*Vibration of road bridges under moving vehicles: a comparative study between single contact point and two contact point models*», Visvesvaraya National Institute of Technology, Nagpur, India, October 2016.



- [4.08] L. Fryba, «*Vibration of solids and structures under moving loads*», Rescarche Institute of Transport, Prague, 1999.
- [4.09] Y. B. Yang, J. D. Yau, Y. S. Wu, «*Vehicle-bridge interaction dynamics with applications to high-speed railways*», Word scientific publishing, Singapore, 2004.
- [4.10] X. Q .Zhu, S. S. Law, «*Identification of moving loads on a rectangular orthotropic plate from strains*», The Hong Kong Polytechnic University, 1999.
- [4.11] T. Chan, S. Law, « *Field study on moving force identification*», The Hong Kong Polytechnic University, December 2014.
- [4.12] E. kreyszig, « *Advanced engineering mathematics* », John Wiley & Sons, Inc, USA, 2006.
- [4.13] T. Nagayama, A. P. Reksowardojo, « *Bridge Natural Frequency Estimation by Extracting the Common Vibration Component From the Responses of Two Vehicles*», University of Tokyo, Japan, August, 2015.
- [4.14] T. Laeser, « *Le stockage stationnaire de l'énergie*», Dossier de presse : CEA, Octobre, 2012.
- [4.15] <http://www.supercondensateur.com/batterie-vs-supercondensateur>, « *Batterie VS Supercondensateur* ».
- [4.16] Panasonic, « *Manganese Lithium Coin Batteries (ML series): Individual Specifications* », Lithium handbook, August 2005.
- [5.01] Matlab, « *Simulink User's Guide* », The MathWorks, Inc, 3 Apple Hill Drive,Natick, MA 01760-2098, Copyright 1993–2018.
- [5.02] Matlab, « *Symbolic Math Toolbox User's Guide* », The MathWorks, Inc, 3 Apple Hill Drive,Natick, MA 01760-2098, Copyright 1993–2018.

## RESUME ET MOTS CLES

Ce travail contribue à la modélisation d'un générateur autonome d'électricité à partir d'un pont routier. La conception du générateur est basée sur l'utilisation d'un matériau piézoélectrique qui est classé comme matériau intelligent. Ce matériau crée de l'électricité sur sa surface quand on lui applique une vibration mécanique. Le générateur piézoélectrique est modélisé à partir d'une étude analytique de l'équation de la piézoélectricité. La méthode de Laplace est utilisée pour résoudre l'équation. Des grandeurs qui caractérisent le générateur piézoélectrique sont obtenues. Ce sont la tension aux bornes de l'élément piézoélectrique et la puissance récoltée. Le module est collé directement en dessous d'un pont routier pour convertir la vibration ambiante de ce dernier en énergie électrique utilisable. Une série de test théorique est effectuée en considérant trois paramètres variables. Ce sont la longueur du pont, la vitesse d'un véhicule qui traverse le pont et l'endroit où l'on place le module piézoélectrique. Parmi les résultats, une tension maximale de 3,04 V est obtenue au milieu d'un pont de 35 m avec une vitesse de 90 km/h. Ce qui correspond à une puissance maximale de 185,76  $\mu$ W.

**Mots clés :** Générateur autonome, matériau piézoélectrique, vibration mécanique, pont routier, Transformée de Laplace.

## ABSTRACT AND KEYS WORDS

A model for an autonomous electrical generator from a bridge is developed in this work. The generator design is based on use of a piezoelectric material that is classified as intelligent material. This material generate electricity on its surface when a mechanical vibration is applied on it. The piezoelectric generator model is established from an analytical study of the piezoelectricity equation. Laplace transform is used to solve the equation. The magnitude of the voltage and electrical power that are harvested then be determined. The piezoelectric module is glued directly under the bridge to convert the ambient vibration of the bridge into usable electrical energy. A series of theoretical testing is done with three variable parameters. They are the length of the bridge, the speed of the vehicle crossing the bridge, and the location of the piezoelectric model. Among the results, a maximum voltage of 3.04 V is obtained in the middle of a 35 m bridge with a speed of 90 km/h. This corresponds to a maximum power of 185.76  $\mu$ W.

**Keys words :** Autonomous generator, piezoelectric material, mechanical vibration, road bridge, Laplace transform.