Table des matières

Introduction

Les probabilités de passage de la frontière interviennent dans beaucoup de domaines : en statistique non paramétrique ((Durbin(1971), Sen(1981)), en analyse séquentielle (Sen(1981), Siegmund(1985), (1986)), en économétrie (Krämer et al.(1988)), en biologie et épidémiologie (Martin-löf(1998)) et en mathématiques financières (Robert et Shortland(1997), Lin(1998)).

L'objectif de ce travail est d'évaluer la probabilité pour qu'un mouvement brownien traverse une ou deux frontières données.
Ce mémoire est composé de deux chapitres.
Aprés avoir dans le chapitre 1 rappelé les concepts de base du mouvement brownien, dans le chapitre 2, nous nous intéresserons *à* la partie principale de ce mémoire qui portera sur l'étude de la probabilité de passage de la frontière pour le mouvement brownien.
Dans ce chapitre, on suppose que $W(t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard avec $E(W(t)) = 0$ et $E(W(s), W(t)) = min(t, s)$. Nous considérons aussi l'intervalle $[0, T]$ et nous notons $(t_i)_{i=1}^n$, $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = T$ la partition de l'intervalle $[0, T]$ de taille $n \geq 1$.
Nous sommes intéressés par les deux probabilités suivantes :

$$P_1 = Q(b(t), T) = P\{W(t) \geq b(t); t \in [0, T]\}$$

avec b une fonction continue sur $[0, T]$ et vérifiant $b(0) > 0$.

$$P_2 = Q(a(t), b(t), T) = 1 - P\{a(t) < W(t) < b(t); t \in [0, T]\}$$

avec a et b des fonctions continues sur $[0, T]$ et vérifient $a(t) < b(t)$ $\forall t \in [0, T]$; $a(0) < 0 < b(0)$.
Alors la probabilité de passage pour le mouvement brownien dans le cas d'une seule frontière est donnée par P_1 et celle de deux frontières par P_2.
Nous calculerons d'abord ces probabilités de passage pour des frontières linéaires par morceaux et *à* partir de ces résultats nous proposerons des méthodes afin d'approximer ces probabilités dans le cas des frontières quelconques.
Nous étudierons ensuite les erreurs d'approximations.
Enfin nous procéderont *à* des études numériques de ces probabilités de passage *à* partir des méthodes de Monté Carlo et du logiciel *R*.

Le mouvement brownien

1.1 Rappels sur les processus stochastiques

1.1.1 Filtration

On va s'intéresser *à* des phénomènes dépendant du temps. ce qui est connu *à* la date t est rassemblée dans une tribu $\mathcal{F}$, c'est l'information *à* la date t.

Définition 1.1. *Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$. c 'est à dire que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout t tel que $t \leq s$; t, $s \in [0, +\infty)$.*

On suppose souvent que les ensembles négligeables soient contenus dans $\mathcal{F}_0$.
La filtration est continue *à* droite au sens o*ù* $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$.
Une filtration G est dite plus grosse que F si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ $\forall t$.

1.1.2 Processus

Définition 1.2. *Un processus stochastique ou (fonction aléatoire) est une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0, +\infty[)$ définis sur le même espace probabilisé.*

Définition 1.3. *Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit adapté par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$ si X_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable pour tout t.*

Définition 1.4. *On dit que le processus est à trajectoire continue (ou est continue) si les applications $t \longrightarrow X_t(w)$ sont continues avec w fixé.*
Un processus est dit càdlàg (continue à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvu de limites à gauche. Même définition pour càglàd.
A tout processus stochastiques $X = (X_t, t \geq 0)$, on associe sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$.
On utilise souvent des processus prévisibles . La définition est la suivante : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$. On appelle tribu des prévisibles la tribu sur $[0, \infty[\times \Omega$ engendrés par les rectangles de la forme $]s, t] \times A$, $0 \leq s \leq t$, $A \in (\mathcal{F}_s)$.
Un processus est prévisible si et seulement si l'application $(t, w) \longrightarrow X_t(w)$ est mesurable par rapport à la tribu des prévisibles. Notons que les processus càg sont prévisibles.
On dit que deux processsus X et Y sont égaux à une modification près si $X_t = Y_t$ ps $\forall t$.
Deux processus sont égaux en loi $X = Y$ (en loi) si pour tous $(t_1, t_2, ..., t_n)$ et pour tout n on a

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) = (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n})$$

1.1.3 Processus croissant

Définition 1.5. *Un processus $X = (X_t, t \geq 0)$ est un processus croissant si $A_0 = 0$ et la fonction $t \longrightarrow A_t$ est une fonction croissante. c 'est à dire $A_t(w) \leq A_s(w)$ $\forall$ $t \leq s$ p.s.*

Les processus croissants sont souvent pris continus *à* droite.
Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit *à* variation bornée sur $[0, T]$ si

$$\sup_{t_i} \sum_i | V_{t_{i+1}} - V_{t_i} | \leq K.$$

Le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.
Un procéssus est dit *à* variation finie sur $[0, T]$ si

$$\sup_{t_i} \sum_i | V_{t_{i+1}} - V_{t_i} | < \infty.$$

Le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$.
Un processus $V = (V_t, t \geq 0)$ est dit *à* variation finie s'il est *à* variation finie sur $[0, T]$ pour tout t.

1.1.4 Processus gaussien

Définition 1.6. *Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit gaussien si toute combinaison linéaire finie de $X = (X_t, t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne. c 'est à dire $\forall$ n, $\forall$ t_i, $1 \leq i \leq n$, $\forall$ a_i $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ est une variable aléatoire gaussienne.*

Notons qu'un processus gaussien est caracterisé par son espérance $E(X_t X_s)$ et sa covariance $cov(X_t X_s)$. L'espace gaussien engendré par un processus gausssien est le sous espace de $L^2(\Omega)$ formée par des variables aléatoires gaussiennes centrées.
L 'espace gaussien engendré par un processus gaussien est le sous espace de $L^2(\Omega)$ engendrées par les variables aléatoires centrées $(X_t - E(X_t), t \geq 0)$. c 'est à dire le sous espace formé par les combinaisons linéaires de ces variables centrées et leurs limites en moyenne quadratique .

1.2 Rappels sur les martingales

1.2.1 Cas discret

On se donne une filtration $\mathcal{F}_n$ $(\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1})$.
On suppose que $\mathcal{F}_0$ contient les ensembles négligeables.

Définition 1.7. *Une suite de variables aléatoires $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une $\mathcal{F}_n$ martingale si*
- *X_n est intégrable, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$. c'est à dire que $E \mid X_n \mid < +\infty$.*
- *X_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.*
- *$E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.*

Propriété 1.1. *$E(X_{n+p}/\mathcal{F}_n) = X_n$, $\forall$ n, $p \in \mathbb{N}$.*

<u>Cas multidimensionnel</u>

Une famille de vecteurs $(S_n, n \geq 0)$ tel que (s_n) est *à* valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est une martingale si les familles $(s_n^i), n \in \mathbb{N}$ sont des martingales $\forall$ i ; $1 \leq i \leq d$.

1.2.2 Cas continu

On se donne une filtration $(\mathcal{F}_t)$ $(\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t)$ $\forall s \leq t$.

Définition 1.8. *Une famille de variables aléatoires* $(X_t, t \in [0, +\infty[)$ *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si* X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *- mesurable et intégrable pour tout* t *et* $E(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s \ \forall s \leq t$.

Propriété 1.2. *si* $(X_t, t \leq T)$ *est une martingale alors* $E(X_t) = E(X_0) \ \forall \ t$.
si $(X_t, t \in [0, +\infty[)$ *est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale* $X_t = E(X_T/\mathcal{F}_t$.

Définition 1.9. *Une famille de variables aléatoires* $(X_t, t \in [0, +\infty[)$ *est une surmartingale (respectivement sousmartingale) par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_t$ *si :*

- X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *- mesurable et intégrable pour tout* t.
- $E(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s \ \forall s \leq t$ *(respectivement* $E(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s$*).*

Propriété 1.3. *Inégalité de Doob*
Si $(X_t, t \in [0, +\infty[)$ *est une martingale continue alors*

$$E(\sup_{s \leq T} {X_s}^2) \leq 4E({X_T}^2).$$

1.3 Rappels sur les temps d'arrêt

1.3.1 Définition

Dans ce qui suit $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration et $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$.

Définition 1.10. *Un temps d'arrêt est une variable aléatoire* τ *à valeurs dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tel que* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall \ t \in \mathbb{R}$.
Une constante positive est un temps d'arrêt. On associe à un temps d'arrêt τ *la tribu* $(\mathcal{F}_\tau)$ *dite des évènements antérieures à* τ *définis par*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty / A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

1.3.2 Propriétés

Propriété 1.4.

- *Si* T *est un temps d'arrêt,* T *est* $\mathcal{F}_T$ *mesurable.*
- *Si* S *et* T *sont des temps d'arrêt,* $\inf(T, S)$ *est un temps d'arrêt.*
- *Si* S *et* T *sont des temps d'arrêt tel que* $S \leq T$*, on a alors* $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus et T un temps d'arrêt fini. On définit $X_T(w) = X_{T(w)}(w)$.
Si un processus X est continue et adapté, alors X_T est $\mathcal{F}_T$ mesurable.

1.3.3 Théorème d'arrêt

Theoréme 1.1. *Si* T *est un temps d'arrêt et* M *une* $(\mathcal{F}_t)$ *martingale, le processus* Z *défini par* $Z_t = M_{\inf(t,T)}$ *est une* $(\mathcal{F}_t)$ *martingale. En particulier on a* $E(M_{\inf(t,T)}) = E(M_0)$.

Theoréme 1.2. *théorème d'arrêt de Doob*
Si M *est une* $(\mathcal{F}_t)$ *martingale continue et* S *et* T *sont deux temps d'arrêts tel que* $S \leq T \leq K$ *,* K *étant une constante finie,* M_T *est intégrable et* $E(M_T/\mathcal{F}_S) = M_S$.

Propriété 1.5. *Si pour tout temps d'arrêt borné* T*, On a* $E(X_T) = E(X_0)$*, le procéssus* (X_t) *est une martingale.*

Remarque 1.1. *Si $E(X_t) = E(X_0)$ pour tout t le processus X n'est pas nécéssairement une martingale. Si M est une surmartingale positive et τ un temps d'arrêt, $E(M_t) \leq E(M_0)$ en posant $M_\infty = 0$*

Définition 1.11. *Un processus M adapté càglàd est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts τ_n telle que $\tau_n \longrightarrow \infty$ et $(M_{\inf(t,\tau_n)}, t \geq 0)$ est une martingale pour tout n.*
Une martingale locale positive est une surmartingale .
Une martingale locale uniformément intégrable est une martingale.

1.3.4 Processus de Markov

Définition 1.12. *Soit X un processus et $\mathcal{F}_t$ sa filtration canonique. On dit que le processus est de Markov si pour tout t et pour toute variable $Y \in \mathcal{F}_\infty$ on a*

$$E(Yo\theta_t/\mathcal{F}_t) = E(Yo\theta_t/X_t)$$

avec θ l'opérateur de translation défini sur les applications coordonnées par $X_u o\theta_s = X_{u+s}$.

Donnons une autre définition.

Définition 1.13. *Soit X un processus et $\mathcal{F}_t$ sa filtration canonique. on dit que le processus est de Markov si pour tout n, pour toute fonction bornée F définie sur $\mathbb{R}^n$, pour tout $t_1 < t_2 < ... < t_n$*

$$E(F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, ..., X_{s+t_n})/\mathcal{F}_s) = E(F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, ..., X_{s+t_n})/X_s.$$

ceci implique en particulier que pour toute fonction borélienne f bornée

$$E(f(X_t)/\mathcal{F}_s) = E(f(X_t)/X_s) \ \forall t \geq s.$$

1.4 Rappels sur les variables aléatoires gaussiennes

Une variable aléatoire X *à* valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite gaussienne (normale) centrée réduite o*ù* normale standard si elle admet pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$. On note $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
La transformée de Laplace de X est donnée par

$$E\left(e^{ZX}\right) = e^{\frac{z^2}{2}} \ \forall z \in \mathbb{C}$$

$$E\left(e^{\lambda X}\right) = e^{\frac{\lambda^2}{2}} \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

On a $E(X) = 0$, $E(X^2) = 1$, $E(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.
Pour $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$,on dit qu'une variable aléatoire réelle Y suit une loi gaussienne (m, σ^2) si Y vérifie l 'une des conditions suivantes :

1. $Y = \sigma X + m$ où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
2. la densité de Y est
$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}.$$
3. la fonction caractéristique de Y est
$$E\left(e^{itY}\right) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

4. Sa transformée de Laplace est
$$E\left(e^{\lambda X}\right) = e^{\lambda m + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}.$$

On a alors $E(Y) = m$, $Var(Y) = \sigma^2$.

1.5 Le mouvement brownien

1.5.1 Historique

Le botaniste Robert Brown observe en 1828 le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. En 1877, Delsaux explique les changements incéssants de direction de trajectoires par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau. Un mouvement de ce type est qualifié de" mouvement au hasard".

En 1900, Bachelier, en vue d'étudier les cours de la Bourse met en évidence le caractère "markovien" du mouvement brownien : la position d'une particule *à* l'instant $t + s$ dépend de sa position en t et ne dépend pas de sa position avant t. Il convient d'insister sur le caractère précurseur de Bachelier et le fait que la théorie du mouvement brownien a été développée pour la Bourse avant de l'être pour la Physique.

En 1905, Einstein détermine la densité de transition du mouvement brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement brownien et les équations aux dérivée partielles. La même année, Smoluchowski décrit le mouvement brownien comme une limite de promenades aléatoires.

La premère étude mathématique rigoureuse est faite par N.Wiener qui exhibe également une démonstration de l' existence du brownien. P.Levy (1948) s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du brownien.

Depuis, le mouvement brownien continue de passionner les probabilistes, aussi bien que pour l'étude de ses trajectoires que pour la théorie de l'intégration stochastique (Wiener,Ito ,...).

1.5.2 Définitions et premières propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et un processus $B = (B_t, t \geq 0)$.

Définition 1.14. *Un processus stochastique réel $(B_t, t \geq 0)$ est appelé mouvement brownien standard si les cinq conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $P(B_0 = 0) = 1$ *(le mouvement brownien est isssu de l 'origine).*
2. *Le processus B est à accroissements indépendants. c'est à dire pour n-uple $0 \leq t_1 \leq t_2 ... \leq t_n$ d' instants, les variables aléatoires B_{t_1}, $B_{t_2} - B_{t_1}$, ... , $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ qu'on appelle les accroissements de B sont indépendants.*
3. *Pour tout $t_{i-1} \leq t_i$, $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$*
4. *Pour chaque t la variable B_t suit la loi $\mathcal{N}(0, t)$.*
5. *Les trajectoires $t \longrightarrow B_t(w)$ sont continues pour presque tout w.*

Proposition 1.1. *Un processus $(B_t, t \geq 0)$ dont les trajectoires sont p.s continues est un mouvement brownien si et seulement si c'est un processus gaussien centré de convariance $inf(s,t)$. De plus les accroissements $B_t - B_s$, $s < t \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ et $B_t - B_s$ indépendant de $\sigma(X_s, s \leq t)$.*

Preuve.
Supposons que B satisfait aux conditions de la définition 2.11, à cause de (4) et de l'indépendance , la relation $B_t = B_s + (B_t - B_s)$ se traduit an niveau des fonctions caractéristiques par

$$\exp\left(-\frac{u^2 t}{2}\right) = \exp\left(-\frac{u^2 s}{s}\right) \phi_{B_t - B_s}(u)$$

d'où il suit que la fonction caractéristique de $B_t - B_s$ est $\exp\left(-\frac{u^2(t-s)}{2}\right)$.
Pour montrer que B est gaussien, il faut montrer que pour des instants $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et des scalaires a_i quelconques la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} a_i B(t_i)$ est gausienne mais en remplaçent B_{t_i} par $\sum_{k=1}^{i}(B_{t_k} - B_{t_k - 1})$ on voit que cette variable est une combinaison linéaire de gaussiens indépendantes et est donc gaussienne.
Finalement pour $s \leq t$

$$Cov(B_t, B_s) = E[B_s(B_s + B_t - B_s] = E[{B_s}^2] = s$$

ce qui démontre l 'implication directe .
Réciproquement, on peut d'abord constater que si B est un processus gaussien centré de covariance $\inf(s,t)$, B_t suit une loi $\mathcal{N}(0,t)$ et il reste à montrer que les accroissements sont indépendants Comme le processus est centré gaussien, il suffit de montrer que les accroissements sont orthogonaux, soit que pour $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ $Cov(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_4} - B_{t_3}) = 0$ or ceci résulte facilement de l'hypothése. ■

Proposition 1.2. *(loi temporelle du mouvement brownien)*
Soit $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$.
La loi temporelle du vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2}, ...B_{t_n})$ est une loi normale à n dimensions dont la densité conjointe $f(x_1, x_2, ...x_n)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, ...x_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{t_1(t_2 - t_1)...(t_n - t_{n-1})}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + ... + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right)\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left[-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right]
\end{aligned}$$

Preuve. Soit g une fonction borélienne nous avons :

$$\begin{aligned}
E[g(B_{t_1}, B_{t_2}, ..., B_{t_n})] &= E[g(B_{t_1}, (B_{t_2} - B_{t_1}) + B_{t_1}, ..., (Bt_n + (B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}) + ... + B_{t_1})] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y_1, y_2 + y_1, ..., y_n + y_{n-1} + ... + y_1) \\
&\times \quad \frac{e^{-\frac{{y_1}^2}{t_1}}}{\sqrt{2\pi t_1}} \times \frac{e^{-\frac{{y_2}^2}{t_2 - t_1}}}{\sqrt{2\pi t_2 - t_1}} \times ... \times \frac{e^{-\frac{{y_n}^2}{t_n - t_{n-1}}}}{\sqrt{2\pi t_n - t_{n-1}}} \\
&= \frac{g(x_1, x_2, ...x_n)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{t_1(t_2 - t_1)...(t_n - t_{n-1})}} \\
&\times \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + ... + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right)\right]
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient par le changement de variables : $x_k = y_1 + y_2 + ... + y_k, k = 1, 2, ..., n$
■

Proposition 1.3. *Le vecteur* $(B_{t_1}, B_{t_2}, ...B_{t_n})$ *est centré et sa matrice de convariance est donnée*

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

1.5.3 Généralisation

• Le processus $X_t = a + B_t$ est un mouvement brownien issue de a.
• X est un mouvement brownien de drift μ si $X_t = x + \mu t + \sigma B_t$ où B est un mouvement brownien.
La variable X_t est alors une variable gaussienne d 'espérance $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$.

1.5.4 Construction du mouvement brownien

construction basée sur la promenade aléatoire

On peut montrer que le mouvement brownien s'obtient comme limite de promenade aléatoire renormalisée.
Cette propriété est exploitée pour des simulations.
Soit, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une famille de variables aléatoire de Bernouille indépendantes équidistribués avec $i \in \mathbb{N}^*$ et

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

On associe $à$ cette famille la suite $(S_n, n \geq 0)$ définie par

$$S_0 = 0 \text{ et } S_n = \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

On dit que la suite S_n est une promenade aléatoire (Jeu de pile ou face).
On a $E(s_n) = 0$ et $Var(S_n) = n$.
On remarque que la suite $(S_m - S_n, m \geq n)$ est indépendante de $(S_0, S_1, ..., S_n)$ et que $S_m - S_n$ a même loi que S_{m-n}.
On procède alors $à$ une double renormalisation.
Soit N fixé
*On ramène l'intervalle de temps $[0, N]$ $à$ $[0, 1]$.
* On change l'echelle des valeurs prises par S_n.
Plus précisément, on définit une famille de variables aléatoires indexées par les réels de la forme $\frac{k}{N}$, $k \in \mathbb{N}$, par $U_{\frac{k}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} S_k$
On a $E(U_{\frac{k}{N}}) = 0$ et $Var(U_{\frac{k}{N}}) = \frac{k}{N}$.
Les propriétés d'indépendance et de stationarité de la promenade aléatoire restent vérifiées soit
- Si $k \geq k'$, $U_{\frac{k}{N}} - U_{\frac{k'}{N}}$ est indépendant de $(U_{\frac{p}{N}}; p \leq k')$.
- Si $k \geq k'$, $U_{\frac{k}{N}} - U_{\frac{k'}{N}}$ a même loi que $U_{\frac{k-k'}{N}}$.

on définit un processus $à$ temps continue $(U_t, t > 0)$ $à$ partir de $U_{\frac{k}{N}}$ en imposant $à$
la fonction $t \longrightarrow U_t$ d'être affine entre $\frac{k}{N}$ et $\frac{k+1}{N}$. Pour cela N étant fixé, on remarque pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, il existe $k(t) \in \mathbb{N}$ tel

que $\frac{k(t)}{N} \leq t \leq \frac{k(t)+1}{N}$ et on pose

$$U_t^N = U_{\frac{k}{N}} + N(t - \frac{k}{N})(U_{\frac{k+1}{N}} - U_{\frac{k}{N}})$$

avec $k = k(t)$
Pour $t = 1$, on a $U_1^N = \frac{1}{\sqrt{N}} S_N$. Le théorème central limite implique alors que U_1^N converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.
On montre alors que le processus U_t^N converge en loi vers un mouvement brownien.
En particulier $U_t^N \xmapsto{\mathcal{L}} B_t$ et $(U_{t_1}^N, ..., U_{t_k}^N) \xmapsto{\mathcal{L}} (B_{t_1}, B_{t_2}, ..., B_{t_k})$ pour tout k-uplé $(t_1, t_2, ...t_k)$

Construction basée sur les séries de Fourier

L'idée isssue de la construction éffectuée par Wiener est de décomposer le mouvement brownien en séries de Fourier. On va décrire ici la construction d'un mouvement brownien sur $[0, T]$. On utilise pour cela la famille suivante ($t \in [0, T]$).

$$g_{1,0}(t) = 1$$

$$g_{k,n}(t) = \begin{cases} 2^{(n-1)/2} & \text{si } \frac{k-1}{2^n} < t \leq \frac{k}{2^n} \\ -2^{(n-1)/2} & \text{si } \frac{k}{2^n} < t \leq \frac{k+1}{2^n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $n \geq 1$, k impaire
On notera ainsi pour simplifier l'ensemble des indices

$$: \begin{cases} S_n = \{(k, n), k \text{ impaire }, k \leq 2^n \\ S = \cup_n S_n \end{cases}$$

Lemma 1.1. $(g_{k,n})_{(k,n)\in S}$ *est une base orthogonale de* $L^2[0, 1]$.

Preuve. On vérifie l'orthogonalité. Pour $n \leq n'$

$$\int_0^1 g_{k,n}(t) g_{k',n'}(t) dt = 2^n \left(\int_{(k-1)/2^n)}^{k/2^n} g_{k',n'}(t) dt - \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} dt \right) = 0$$

car $g_{k',n'}$ est d'intégrale nulle.
Pour montrer la complétude, on considère une fonction $f \in L^2[0, 1]$ avec $f \perp (g_{k,n})_{(k,n)\in S}$
Notons $F(t) = \int_0^1 f(u) du$
• Par définition $F(0) = 0$
• comme $f \perp g_{1,0}$ $F(1) = 0$
• comme $f \perp g_{1,1}$ $F(\frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f = 0$ d'aprés le lemme précédant
• De même $F(\frac{1}{4}) = F(\frac{3}{4})$
On a ainsi montré que $F = 0$ p.p. On ainsi $f = 0$ p.p (f est positive) ■

Définition 1.15. *Pour* $(k, n) \in S$, $t \in [0, 1]$, *on note*

$$f_{k,n}(t) = \int_0^t g_{k,n}(u) du.$$

On a également une famille $(Z_{k,n})_{(k,n)\in S}$ *de variables aléatoires identiquement équidistribuées de loi* $\mathcal{N}(0, 1)$. *On définit alors*

$$B_n(t) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{(k,n)\in S_m} Z_{k,m} f_{k,m}(t)$$

Lemma 1.2. (B_n) *converge uniformément p.s sur* $[0, 1]$.

Preuve. On va montrer que p.s $(B_n)_n$ ne varie pas beaucoup. Soit $(a_n)_n$ une suite dont nous fixerons la valeur ultérieurement.

$$\begin{aligned}
P\left(\sup_{0\le t\le 1} |B_n(t) - B_{n-1}(t)| > a_n\right) &= P\left(\sup_{0\le t\le 1} \left|\sum_k Z_{k,n} f_{k,n}(t)\right| > a_n\right) \\
&= P\left(\sup_k |Z_{k,n}| > 2^{(n+1)/2} a_n\right) \\
&\le 2^{n-1} P\left(|Z_{1,n}| > 2^{(n+1)/2} a_n\right) \\
&\le \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2^{n/2}}{a_n} e^{-a_n^2 2^n}
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité obtenue par intégration par partie. $\int_x^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \le \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$
On cherche alors *à* choisir la suite (a_n) de manière *à* obtenir
• $\sum_n \frac{2^{n/2}}{a_n} e^{-a_n^2 2^n} < \infty$ car d'aprés le lemme de Borel -Cantelli, On aura alors

$$\sup_{0\le t\le 1} |B_n(t) - B_{n-1}(t)| \le a_n$$

• $\sum_n a_n < \infty$ car on aura alors B_n converge uniformément p.s.
Il suffit ainsi de choisir $a_n = \sqrt{\frac{n}{2^n}}$
Notant B la limite des B_n, montrons que B est bien un mouvement brownien. Ceci équivaut *à* montrer que B est un processus gaussien centré de covariance $E(B_t B_s) = t \wedge s = inf(t, s)$
(la continuité du procéssus est une conséquence de la convergence uniforme et de la continuité des $(f_{k,n})$).
Pour $0 \le t_1 \le t_2 \le ...t_k \le t_n$ $(B_n(t_1), ..., B_n(t_k))$ est un processus gaussien centré. Il en va donc de même de la limite.
Regardons ce qui se passe pour la variance :

$$\begin{aligned}
E[B_n(s)B_n(t)] &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{m'=0}^{n} \sum_{(k,m)\in S_m} \sum_{(k',m')\in S'_m} E[Z_{k,m} Z_{k',m'}] f_{k,m}(s) f_{k',m'}(t) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \sum_{(k,m)\in S_m} f_{k,m}(s) f_{k,m}(t)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
E(B_s B_t) &= \sum_{(k,m)\in S_m} f_{k,m}(s) f_{k,m}(t) \\
&\overset{\text{Parsevalle}}{=} \int_0^1 1_{[0,s]}(u) 1_{[0,t]}(u) du \\
&= s \wedge t
\end{aligned}$$

■

1.5.5 Propriétés

Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien et $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$ sa filtration naturelle.

Propriété 1.6. *Etant donné $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien, les processus suivants sont également des mouvements browniens :*

- $(-B_t)_{t\geq 0}$ *(propriété de symétrie)*
- $(B_{t+a} - B_a)_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien issue de* $0 \ \forall\ a \in \mathbb{R}$ *(propriété de Markov faible).*
- $(cB_{\frac{t}{c^2}})_{t\geq 0}\ \forall\ c \neq 0$ *(propriété de SCALING)*
- *Le procéssus B^* défini par*

$$\begin{cases} B_0^* = 0 \\ B_t^* = tB_{\frac{1}{t}} \end{cases}$$

Propriété 1.7. *(Propriété de Markov simple)*
Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien et $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$ sa filtration naturelle. Pour toute fonction borélienne bornée et pour tout $s \leq t$

$$E[f(B_t)/\mathcal{F}_s^B] = E[f(B_t)/B_s] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-(y-B_s)^2/2(t-s)} dy$$

Preuve. On utilise les propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle

$$E[f(B_t)/\mathcal{F}_s^B = E[f(B_s + B_t - B_s)/\mathcal{F}_s^B] = E[f(x + B_t - B_s)]_{x=B_s}$$

car B_s est $\mathcal{F}_s^B$ mesurable et $(B_t - B_s)$ indépendant de $\mathcal{F}_s^B$.
Comme $(B_t - B_s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ on peut calculer :

$$\begin{aligned} E[f(x + B_t - B_s)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) e^{-y^2/2(t-s)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-(y-x)^2/2(t-s)} dy \end{aligned}$$

■

Propriété 1.8. *(Propriété forte de Markov) Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien et T un temps d'arrêt à valeurs finies. Pour toute fonction borélienne f bornée et pour tout $t \geq 0$*

$$E[f(B_{T+t})/\mathcal{F}_T] = E[f(B_{T+t})/B_T] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-(x-B_t)^2/2t} dx$$

En particulier, pour tout temps d'arrêt fini T le processus $\{B_t^T = B_{T+t} - B_T, t \geq 0\}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T^B$.

Propriété 1.9. *Soit (B_t) un mouvement brownien et $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ sa filtration naturelle,*
$(B_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Preuve.

- Par définition (B_t) est $\mathcal{F}_t$ mesurable.

- $Var(B_t) = E(B_t)^2 - [E(B_t)]^2 = t$ donc $E(|B_t|^2) = t < \infty \Rightarrow E(|B_t|) < \infty$ car $L^2 \subset L^1$ donc B_t est intégrable.
- On va montrer que $\forall\ s \leq t\ E(B_t/\mathcal{F}_s) = B_s$
  Soit $s \leq t$.
  $E[(B_t - B_s)/\mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s]$ car $B_t - B_s$ indépendant de $\mathcal{F}_s$. Puisque $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ on a $E[(B_t - B_s)/\mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s] = 0$. ce qui entraine que :
  $E[B_t/\mathcal{F}_s = E[B_s/\mathcal{F}_s] = B_s$

■

Propriété 1.10. $({B_t}^2 - t)_{t\geq 0}$ *est une martingale.*

Preuve.

- (B_t) est $\mathcal{F}_t$ mesurable donc $(B_t^2 - t^2)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable.
- $E(|B_t^2 - t^2|) \leq E(|B_t^2|) + t$ or $E(|B_t^2|) = E(|B_t|^2) = t$ donc $E(|B_t^2 - t^2|) \leq 2t < \infty$ donc $(B_t^2 - t^2)$ est intégrable.
- soit $s \leq t$
  on a $E[(B_t - B_s)^2/\mathcal{F}_s] = E[(B_t - B_s)^2] = t - s$
  D'autre part, on a : $E[(B_t - B_s)^2/\mathcal{F}_s] = E[{B_t}^2/\mathcal{F}_s] - 2B_sE[B_t/\mathcal{F}_s] + {B_s}^2$
  or $E[B_t/\mathcal{F}_s] = B_s$ car $(B_t)_{t\geq 0}$ est une martingale donc
  $$E[(B_t - B_s)^2/\mathcal{F}_s] = E[{B_t}^2/\mathcal{F}_s] - {B_s}^2 = t - s.$$
  d'ou $E[{B_t}^2 - t/\mathcal{F}_s] = {B_s}^2 - s$

■

Propriété 1.11. *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, $(e^{\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t})$ *est une martingale.*

Preuve. Posons $Y_t = e^{\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2}}$.

- $\forall\ t \geq 0$,$\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2}$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable donc $Y_t = e^{\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2}}$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable.
- $E(|Y_t|) = E\left(\left|e^{\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2}}\right|\right) = E\left(\left|e^{\theta B_t}\right|\left|e^{-\frac{\theta^2 t}{2}}\right|\right) = e^{-\frac{\theta^2 t}{2}}E(e^{\theta B_t})$
  $E(e^{\theta B_t})$ est la tranformée de Laplace de la variable aléatoire $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ donc $E(e^{\theta B_t}) = e^{\frac{\theta^2 t}{2}}$ Finalement on a $E(|Y_t|) = 1 < \infty$. Ce qui signifie que Y_t est intégrable.
- soit $s \leq t$ $E\left(e^{\theta(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\theta^2(t-s)}/\mathcal{F}_s\right) = E\left(e^{\theta(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\theta^2(t-s)}\right)$ car $(B_t - B_s)$ indépendant de $\mathcal{F}_s$.
  $E\left(e^{\theta(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\theta^2(t-s)}\right) = e^{-\frac{\theta^2}{2}(t-s)}e^{\theta(B_t - B_s)}$
  $E\left(e^{\theta(B_t - B_s)}\right)$ est la tranformée de Laplace de la variable aléatoire $B_t - B_s$ donc $E\left(e^{\theta(B_t - B_s)}\right) = e^{\frac{\theta^2}{2}(t-s)}$
  donc $E\left(e^{\theta(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\theta^2(t-s)}\right) = 1$
  $\Longrightarrow E\left(e^{\theta(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\theta^2(t-s)}/\mathcal{F}_s\right) = 1 \Longrightarrow E\left(e^{\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2}}e^{-[\theta B_s - \frac{\theta^2 s}{2}]}/\mathcal{F}_s\right) = 1$ or $e^{-[\theta B_s - \frac{\theta^2 s}{2}]}$ est $\mathcal{F}_s$ mesurable
  $\Longrightarrow e^{-[\theta B_s - \frac{\theta^2 s}{2}]}E\left(e^{\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2}}/\mathcal{F}_s\right) = 1 \Longrightarrow E\left(e^{\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2}}/\mathcal{F}_s\right) = e^{\theta B_s - \frac{\theta^2 s}{2}}$

■

1.5.6 Régularité du mouvement brownien

variation quadratique du mouvement brownien

Propriété 1.12. *$\forall\ s,t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq t$, $(\Delta_k)_k$ est une suite de subdivision de $[s,t]$ telle que le pas de ces subdivisions tend vers 0 alors les expréssions $T^{\Delta_k} = \sum_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2$ converge en moyenne quadratique vers $(t-s)$.*

Preuve. Nous devons montrer que $E[(T^{\Delta_k} - (t-s)^2] \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow 0$.
En se servant du fait que pour une variable $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, le moment d'ordre 4 est égal *à* $3\sigma^4$ et que les accroissements $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$ sont indépendants on a :

$$E[(T^{\Delta_k} - (t-s)^2] = 2\sum_i (t_i - t_{i-1})^2 \leq 2|\Delta_k|(t-s)$$

et cette dernière tend vers 0 quand k tend vers ∞.

■

Maintenant choisissons des subdivisions de telle sorte que $\forall\ k$, Δ_{k+1} soit plus fine que Δ_k. Dans ce cas l*à* on obtient la convergence presque sure de T^{Δ_k}.
Pour simplifier on choisit $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \Delta_n = \left\{0, \frac{t}{2^n}, ...\frac{tk}{2^n}, ..., t\right\}$

Propriété 1.13. *Supposons que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \Delta_n = \left\{0, \frac{t}{2^n}, ...\frac{tk}{2^n}, ..., t\right\}$ et soit*

$$T^{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{2^n} \left(B_{\frac{it}{2^n}} - B_{\frac{t(i-1)}{2^n}}\right)^2$$

alors T^{Δ_n} converge vers t P.p.s.

Preuve.

$$\begin{aligned} E(T^{\Delta_n}) = \sum_{i=1}^{2^n} E\left(B_{\frac{it}{2^n}} - B_{\frac{t(i-1)}{2^n}}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{2^n} Var\left(B_{\frac{it}{2^n}} - B_{\frac{t(i-1)}{2^n}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{it}{2^n} - \frac{t(i-1)}{2^n}\right) = \sum_{i=1}^{2^n} \times \frac{t}{2^n} = t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(T^{\Delta_n}) &= \sum_{i=1}^{2^n} var\left(\left(B_{\frac{it}{2^n}} - B_{\frac{t(i-1)}{2^n}}\right)^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} 3\left(\frac{t}{2^n}\right)^2 = \frac{3t^2}{2^n} \end{aligned}$$

D'aprés l 'inégalité de Tchebycheff, on a :

$$P\left(|T^{\Delta_n} - t| \geq \frac{1}{k}\right) \leq k^2 Var(T^{\Delta_n}) = \frac{3t^2}{2^n}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, on peut utiliser le lemme de Borel -Cantelli qui assure que

$$P\left(\limsup_n \left\{|T^{\Delta_n} - t| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0.$$

On obtient ainsi

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \limsup_n \left\{|T^{\Delta_n} - t| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$$

et ceci assure que T^{Δ_n} converge P.p.s vers t. ■

Non-différentiabilité

Propriété 1.14. *Presque toutes les trajectoires du mouvement brownien ne sont nulle part différentiables sur $\mathbb{R}^+$.*

Propriété 1.15. *(Propriété de Hölder)*
$\forall\ \alpha < \frac{1}{2}$ *presque toutes les trajectoires du mouvement brownien sont α hölderiennes sur tout sous ensemble compact de $\mathbb{R}$. c'est à dire $\forall\ T > 0$*

$$\sup_{s,t\in[0,T];0<|t-s|<h} \frac{|B_t - B_s|}{|t-s|^\alpha} \Longrightarrow 0 \ P.p.s \ \ lorsque\ h \longrightarrow 0$$

Propriété 1.16. *Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, $\forall\ T > 0$ presque toutes les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas α-hölderiennes sur l'intervalle $[0, T]$.*

Propriété 1.17. *Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ presque toutes les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas α-hölderiennes.*

Pour la démonstration ces propriétés voir [5]

1.5.7 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Theoréme 1.3. *Soit $(B_t)s_{t\geq 0}$ un mouvement brownien alors on a :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \ P.ps\ .$$

Preuve. Soit $[t]$ la partie entière de t on a $\forall\ t > 0$ $\frac{B_t}{t} = \frac{B_{[t]}}{[t]}\frac{[t]}{t} + \frac{B_t - B_{[t]}}{t}$
D'aprés la loi des grands nombres on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{B_t}{[t]} = \lim_{t\to+\infty} \sum_{k=1}^{[t]} \frac{B_k - B_{k-1}}{[t]} = E(B_1) = 0$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\xi_n = \sup_{s\in[n,n+1]} |B_s - B_{[s]}|$
On obtient ainsi $\forall\ t \geq 0$ $\left|\frac{B_t - B_{[t]}}{t}\right| \leq \frac{\xi_{[t]}}{[t]}$
Comme les variables sont identiquement équidistribuées et intégrables alors d'aprés la loi des grands nombres, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\xi_n}{n} = 0$$

P.ps d'où le résultat. ■

Theoréme 1.4. *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien alors on a ;*

$$\lim_{x\to+\infty} \sup \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \ P.ps$$

$$\lim_{x\to+\infty} \inf \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \ P.ps\ .$$

Preuve.

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\limsup_t \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty\right\}\right) &\geq P\left(\left\{\limsup_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} = +\infty\right\}\right) \\ &= P\left(\bigcap_{M\in\mathbb{N}} \left\{\limsup_n \frac{B_t}{\sqrt{t}} \geq M\right\}\right) \end{aligned}$$

or $\forall M \in \mathbb{N}$

$$P\left(\left\{\limsup_n \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq M\right\}\right) \geq \limsup_n P\left(B_n \geq M\sqrt{n}\right)$$

et

$$P\left(B_n \geq M\sqrt{n}\right) = P\left(B_1 \geq M\right) 0$$

D'autres part $\left\{\limsup \frac{B_n}{\sqrt{n}} \geq M\right\}$ est un événèment de la tribu asymptotique des variables aléatoires $(B_n - B_{n-1})$ qui sont indépendants donc a pour probabilité 0 ou 1 et d'aprés ce qui précède cela vaut 1 ■

Theoréme 1.5. *(loi du logarithme itéré)*
Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien alors on a :

$$P\left(\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)}} = 1\right) = 1$$

et

$$P\left(\liminf_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)}} = -1\right) = 1$$

1.5.8 TEMPS D' ATTEINTE

Theoréme 1.6. *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. $\forall\ t \geq 0$ a, $b \in \mathbb{R}$ $(a < 0, b > 0)$ posons :*

$$\begin{aligned} S_{ab} &= \inf\{t \in \mathbb{R}^+; B_t \notin [a,b]\} \\ T_a &= \inf\{t \in \mathbb{R}^+; B_t < a\} \\ T_b &= \inf\{t \in \mathbb{R}^+; B_t > a\} \end{aligned}$$

Alors S_{ab}, T_a, T_b sont des temps d'arrêt qui sont fini P.ps.

Preuve.

$$\begin{aligned} P(S_{ab} = +\infty) &= P(\{\forall t \geq 0; B_t \in [a;b]\}) \\ &\leq P(\{\forall n \geq 0; B_n \in [a;b]\}) \\ &= P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{B_1 + (B_2 - B_1) + \ldots.. + (B_n - B_{n-1})}{\sqrt{n}} \in \left[\frac{a}{\sqrt{n}}; \frac{b}{\sqrt{n}}\right]\right\}\right) \\ &\longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty \text{ d'aprés le theoreme centrale limite} \end{aligned}$$

et ceci nous donne $P(S_{ab)=+\infty}) = 0$.

D'autres part $e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}$ est une $\mathcal{F}_t$ martingale. En appliquant le théorème d'arrêt au temps d'arrêt borné $\inf(T_b, t) = t \wedge T_b$ on a

$$E\left(e^{\lambda B_{t\wedge T_b} - \frac{\lambda^2(t\wedge T_b)}{2}}\right) = 1$$

or $B_{t\wedge T_b} \leq b$ donc on a $\forall \lambda \geq 0$

$$E\left(e^{-\frac{\lambda^2(t\wedge T_b)}{2}}\right) \geq e^{-\lambda b}$$

En utilisant le théorème de Lebesgue on a $\forall \lambda \geq 0$

$$E\left(e^{-\frac{\lambda^2 T_b}{2}}\right) \geq e^{-\lambda b}$$

et comme

$$1_{\{T_b<\infty\}} \geq e^{-\frac{\lambda^2 T_b}{2}}$$

donc en prenant l'espérence on obtient :

$$P(T_b < \infty) \geq e^{-\lambda b}, \forall \lambda \geq 0$$

En faisant tendre λ vers 0 on obtient $P(T_b < +\infty) = 1$ et pour des raisons de symétrie du mouvement brownien on a $P(T_a < +\infty) = 1$.

■

Nous terminons ce chapitre par l'intégrale de Wiener.

1.5.9 Intégrale de Wiener

On note $L(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des (classes d'équivalence) fonctions boréliennes f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable c'est *à* dire $\int_0^{+\infty} |f(s)|^2 ds < \infty$.

C'est un espace de Hilbert pour la norme $\|f\|_2 = \left(\int_0^{\infty} f^2(s)\right)^{\frac{1}{2}}$

Cas d'une fonction en escalier

: Pour $f = \mathbf{1}_{\,]u,v]}$ on pose $\int_0^{+\infty} f(s)dB_s = B_v - B_s$

Soit f une fonction en escalier de la forme $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1} 1_{]t_{i-1},t_i]}$.

on pose

$$\int_0^{+\infty} f(s)dB_s = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

La variable aléatoire $I(f) = \int_0^{+\infty} f(s)dB_s$ est une variable aléatoire gausienne d'espérance nulle et de variance $\int_0^{+\infty} f^2(s)ds$. En effet $I(f)$ est gausienne et

$$\begin{aligned} E[I(f)] = E\left[\int_0^{+\infty} f(s)dB_s\right] &= E\left(\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}E(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $E(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = 0 \ \forall\ i = 1, 2, ..., n$

$$Var[I(f)] = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^2 Var(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1}) = \int_0^{+\infty} f^2(s)ds$$

Si f et g sont des fonctions en escalier on a : $I(f+g) = I(f) + I(g)$ et $E[I(f)I(g)] = \int_{\mathbb{R}^+} f(s)ds$
En effet

$$\begin{aligned} I(f+g) &= \int_0^{+\infty} (f+g)(s)dB_s \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f_{i-1} + g_{i-1})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \sum_{i=1}^{n} g_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= I(f) + I(g) \end{aligned}$$

$$Var[I(f+g)] = Var[I(f) + I(g)] = Var[I(f)] + Var[I(g)] + 2E[I(f)I(g)]$$

or

$$Var[I(f+g)] = \int_0^{+\infty} (f+g)^2(s)ds = \int_0^{+\infty} f^2(s)ds + \int_0^{+\infty} g^2(s)ds + 2\int_0^{+\infty} f(s)g(s)$$

Cas général

On utilise un résultat trés connue en analyse : si $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, il existe une suite de fonctions en escalier qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ vers f c'est *à* dire qui vérifie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} |f_n - f|^2 dx = 0$$

Dans ce cas, la suite f_n est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. La suite de variable aléatoire $F_n = \int_0^{+\infty} f_n(s)dB_s$ est une suite de Cauchy dans l 'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+)$(en effet $\|F_n - F_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \longrightarrow 0$ quand $(n, m \longrightarrow \infty)$ donc cette suite est convergente.
La limite ne dépend que de f et non de la suite choisie.
On pose

$$I(f) = \int_0^{+\infty} f(s)dB_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(s)dB_s$$

La limite étant prise dans $L^2(\mathbb{R}^+)$.
On dit que $I(f)$ est l 'intégrale de Wiener de f par rapport *à* B.
Le sous espace de $L^2(\mathbb{R}^+)$ formé par les variables aléatoires $\int_0^{+\infty} f(s)dB_s$ coincide avec l'espace gaussien engendré par le mouvement brownien.

Propriété

L'application $f \longrightarrow I(f)$ est linéaire et isométrique de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2(\omega)$: la linéarité signifie que $I(f+g) = I(f) + I(g)$ et l 'isométrie que la norme de $I(f)$ est égale norme de f. Autrement dit $\|I(f)\|^2 = E[(I(f))^2] = \|f\|^2 = \int_0^{+\infty} f^2(s)ds$.
La propriété isométrique implique que $E(I(f)I(g)) = \int_{\mathbb{R}^+} f(s)g(s)ds$.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$, la variable $I((f)$ est variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\int_{\mathbb{R}^+} f^2(s)ds$ appartenant *à* gaussien engendré par $(B_t, t \geq 0)$ et elle vérifie pour tout t

$$E\left(B_t \int_{\mathbb{R}^+} f(s)dB_s\right) = \int_0^t f(s)ds$$

Probabilite de passage de la frontiere pour le mouvement brownien

Dans ce chapitre, les frontières seront désignées par des fonctions.
Nous utiliserons les notations suivantes : $\beta_i = b(t_i)$, $\alpha_i = a(t_i)$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $d_i = \beta_i - \alpha_i$, et $(t_i)_{i=1}^n$, $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = T$ la partition de l'intervalle $[0, T]$ de taille $n \geq 1$.
on considére aussi les fonctions a et b vues dans l'introduction.

2.1 Formules explicites de la probabilité de passage

2.1.1 Cas d'une frontière linéaire

nous allons étudier la probabilité

$$P_1 = Q(b(t), T) = P\{W(t) \geq b(t); t \in [0, T]\}$$

où b est une fonction linéaire sur l'intervalle $[0, T]$.
Nous avons le théorème suivant :

Theoréme 2.1. *Soit b une fonction linéaire définie sur $[0, T]$. C'est à dire que $b(t) = ut + v$, $v > 0$, $t \in [0, T]$ alors la probabilité de passage est donnée par*

$$Q(b(t), T) = P\{W(t) \geq b(t), 0 \leq t \leq T\} = 1 - \Phi\left(\frac{uT + v}{\sqrt{T}}\right) + \exp[-2uv]\Phi\left(\frac{uT - v}{\sqrt{T}}\right) \tag{2.1}$$

où $\Phi = P(X \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp(-\frac{t^2}{2})dt$ est la fonction de répartion de la loi normale standard.

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants.

Lemma 2.1. *Soit c une fonction linéaire définie sur $[0, T]$ alors on a*

$$P\left[W(t) \geq c(t), t < T / W(T) = x\right] = \exp\left[-\frac{2c(0)[c(T) - x]}{T}\right]. \tag{2.2}$$

formule de Siegmund (1986, p.375) (voir[14])

Lemma 2.2. *Soit X et Y deux variables aléatoires tel que $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et σ^2, $m \in \mathbb{R}$. Si $Y = \sigma X + m$ alors $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.*

Preuve. Soit F_Y la fonction de répartition de X et F_X celle de X
Posons $Y = \sigma X + m$.
$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\sigma X + m < y) = P(X < \frac{y-m}{\sigma}) = F_X\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)$
ce qui entraine que :

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{y - m}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]$ qui est la densité de la loi normale standard . ∎

Preuve. (du théorème)

Introduisons d'abord le résultat suivant :

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \int_{A_1} P(X_2 \in A_2/X_1 = x_1) dP_{X_1}(x_1)$$

avec A_1 et A_2 appartenant aux tribus respectives $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$ et X_1, X_2 les variables aléatoires associées. D'autres part on a

$$\begin{aligned} \{W(t) < ut+v, 0 \le t \le T\} &= \{W(t) < ut+v, t < T; W(t) < ut+v, t = T\} \\ &= \{W(t) < ut+v, t < T; W(T) < uT+v\} \end{aligned}$$

Ainsi d'aprés ce qui précéde on obtient

$$\begin{aligned} P\{W(t) \ge ut+v, 0 \le t \le T\} &= 1 - P\{W(t) < ut+v, 0 \le t \le T\} \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{uT+v} P\{W(t) < ut+v, t < T/W(T) = x\} dP_T(x) \end{aligned}$$

avec

$$\frac{dP_T(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left[-\frac{x^2}{2T}\right]$$
$$(W(T) \sim \mathcal{N}(0,T))$$

or d'aprés le lemme 3.1

$$\begin{aligned} P\{W(t) < ut+v, t < T/W(T) = x\} &= 1 - P\{W(t) \ge ut+v, t < T/W(T) = x\} \\ &= \left(1 - \exp\left[-\frac{2v[uT+v-x]}{T}\right]\right) \end{aligned}$$

(On a posé $c(t) = ut+v$ donc $c(0) = v$ et $c(T) = uT+v$)

Ce qui entraine que :

$$\begin{aligned} P\{W(t) \ge ut+v, 0 \le t \le T\} &= 1 - \int_{-\infty}^{uT+v} \left(1 - \exp\left[-\frac{2v[uT+v-x]}{T}\right]\right) dP_T(x) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{uT+v} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left[-\frac{x^2}{2T}\right] dx \\ &+ \int_{-\infty}^{uT+v} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left[-\frac{x^2}{2T}\right] \exp\left[-\frac{2uvT + 2v^2 - 2vx}{T}\right] dx \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{uT+v} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left[-\frac{x^2}{2T}\right] dx \\ &+ \exp(-2uv) \int_{-\infty}^{uT+v} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left[-\frac{(x-2v)^2}{2T}\right] dx \end{aligned}$$

Puisque $W(T) \sim \mathcal{N}(0,T)$ donc d'aprés le lemme 3.2

$W(T) = \sqrt{T}X$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

ainsi $\frac{W(T)}{\sqrt{T}} = X \sim \mathcal{N}(0,1)$
Soit la variable aléatoire Z_T suivant la loi $\mathcal{N}(2v,T)$ et $f_{Z_T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left[-\frac{(x-2v)^2}{2T}\right]$ sa densité. D'aprés le lemme 3.2

$Z_T = \sqrt{T}X + 2v \Longleftrightarrow \frac{Z_T - 2v}{\sqrt{T}} = X \sim \mathcal{N}(0,1)$
En notant ϕ, ϕ_{Z_T} et ϕ_{W_T} les fonctions de répartition respectives de $X = \frac{W(T)}{\sqrt{T}}$, Z_T, et $W(T)$, la probabilitéde passage peut s' écrire

$$\begin{aligned}
P\{W(t) \geq b(t), 0 \leq t \leq T\} &= 1 - \phi_{W_T}(uT+v) + \exp(-2uv)\phi_{Z_T}(uT+v) \\
&= 1 - P[W(T) < uT+v] + \exp(-2uv)P[Z_T < uT+v] \\
&= 1 - P\left[\frac{W(T)}{\sqrt{T}} < \frac{uT+v}{\sqrt{T}}\right] + \exp(-2uv)P[\sqrt{T}X + 2v < uT+v] \\
&= 1 - P\left[X < \frac{uT+v}{\sqrt{T}}\right] + \exp(-2uv)P\left[X < \frac{uT-v}{\sqrt{T}}\right] \\
&= 1 - P\left[X < \frac{uT+v}{\sqrt{T}}\right] + \exp(-2uv)P\left[X < \frac{uT-v}{\sqrt{T}}\right] \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{uT+v}{\sqrt{T}}\right) + \exp[-2uv]\Phi\left(\frac{uT-v}{\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

■

2.1.2 Cas d'une frontière linéaire par morceaux

Définition 2.1. *Soit $(t_i)_{i=1}^n$ une partition de l 'intervalle $[0,T]$. On dit que la fonction b est linéaire par morceaux sur $[0,T]$ si b est linéaire sur chaque intervalle $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1,2,...,n$.*

nous avons le résultat suivant :

Theoréme 2.2. *Si b est une fonction linéaire par morceaux sur $[0,T]$ et $(t_i)_{i=1}^n$ une partition de l'intervalle $[0,T]$ alors la probabilité de passage de la frontière est donnée par*

$$Q(b(t),T) = P\{W(t) \geq b(t); t \in [0;t]\} = 1 - Eg[W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n)] \tag{2.3}$$

où

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{]-\infty,\ \beta_i[}(x_i)\left(1 - \exp\left[-\frac{2}{\Delta t_i}(\beta_{i-1} - x_{i-1})(\beta_i - x_i)\right]\right)$$

*avec $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $x_0 = 0$, et **1(.)** la fonction indicatrice.*

Preuve. soit b une fonction linéaire par morceaux sur $[0,T]$.
D'aprés la propriété forte de Markov sur le mouvement brownien (Billingsley 1986,section 37) on a :

$$\begin{aligned}
P\{W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T\} &= \int_{-\infty}^{\beta_1} P\{W(t) < b(t), t_1 \neq t \leq T / W(t_1) = x_1\} dP_{t_1}(x_1) \\
&= \int_{-\infty}^{\beta_1} P\{W(t) < b(t), t < t_1 / W(t_1) = x_1\} \\
&\times \ P\{W(t) < b(t), t_1 < t \leq T / W(t_1) = x_1\} dP_{t_1}(x_1)
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{dPt_1(x_1)}{dx_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{{x_1}^2}{2t_1}\right]$$

Puisque b est linéaire sur $[t_0, t_1] = [0, t_1]$, D 'aprés 2.2 le premier facteur du dernier intégrale donne :

$$P\{W(t) < b(t), t < t_1/W(t_1) = x\} = 1 - \exp\left[-\frac{2\beta_0(\beta_1 - x_1)}{t_1}\right]$$

De plus en posant $W(t_1) = x_1$, le procéssus $W(t+t_1) - W(t_1) = W(t+t_1) - x_1$ (propriété de Markov faible) est un mouvement brownien issu de l 'origine. Ainsi le deuxième facteur du dernier intégrale donne :

$P\{W(t) < b(t), t_1 < t \leq T/W(t_1) = x_1\} = P\{(W(t) < b(t+t_1) - x_1, t \leq T - t_1\}$

$= \int_{-\infty}^{\beta_2 - x_1} \left(1 - \exp\left[-\frac{2(\beta_1 - x_1)(\beta_2 - x_2)}{t_2 - t_1}\right]\right)$

$\times P\{W(t) < b(t+t_1) - x_1, t_2 - t_1 < t \leq T - t_1/W(t_2 - t_1) = x_2\} dP_{t_2 - t_1}(x_2)$

$= \int_{-\infty}^{\beta_2} \left(1 - \exp\left[-\frac{2(\beta_1 - x_1)(\beta_2 - x_2)}{t_2 - t_1}\right]\right)$

$\times P\{W(t) < b(t+t_1) - x_1, t_2 - t_1 < t \leq T - t_1/W(t_2 - t_1) = x_2 - x_1\} dP_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1)$

$= \int_{-\infty}^{\beta_2} \left(1 - \exp\left[-\frac{2(\beta_1 - x_1)(\beta_2 - x_2)}{t_2 - t_1}\right]\right)$

$\times P\{W(t) < b(t+t_2) - x_2, t \leq T - t_2\} dP_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1)$

On obtient :

$P\{W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T\}$

$= \int_{\mathbb{R}} 1_{]-\infty, \beta_1[}(x_1) \left(1 - \exp\left[-\frac{2\beta_0(\beta_1 - x_1)}{t_1}\right]\right)$

$\times \left[\int_{\mathbb{R}} 1_{]-\infty, \beta_2[}(x_2) \left(1 - \exp\left[-\frac{2(\beta_1 - x_1)(\beta_2 - x_2)}{t_2 - t_1}\right]\right) \times P\{W(t) < b(t+t_2) - x_2, t \leq T - t_2\} dP_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1)\right] dP_{t_1}(x_1)$

avec

$$dP_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \exp\left[-\frac{(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)}\right] dx_2$$

D'aprés Fubini ceci est équivalent $\grave{a}$

$P\{W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T\}$

$= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{]-\infty, \beta_1[}(x_1) \left(1 - \exp\left[-\frac{2\beta_0(\beta_1 - x_1)}{t_1}\right]\right) 1_{]-\infty, \beta_2[}(x_2) \left(1 - \exp\left[-\frac{2(\beta_1 - x_1)(\beta_2 - x_2)}{t_2 - t_1}\right]\right)$

$\times P\{W(t) < b(t+t_2) - x_2, t \leq T - t_2\} dP_{t_1}(x_1) dP_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1)$.

En appliquant les mêmes étapes $\grave{a}$ la probabilité

$$P\{W(t) < b(t + t_2 - x_2, t \leq T - t_2\}$$

et en répétant la procédure on obtient :

$P\{W(t) < b(t + t_{n-1}) - x_{n-1}, t \leq t_n - t_{n-1}\}$

$= \int_{-\infty}^{\beta_n - x_{n-1}} P\{W(t) < b(t + t_{n-1}) - x_{n-1}, t < t_n - t_{n-1}/W(t_n - t_{n-1}) = x_n\} dP_{t_n - t_{n-1}}(x_n)$

$= \int_{-\infty}^{\beta_n} P[W(t) < b(t + t_{n-1}) - x_{n-1}, t < t_n - t_{n-1}/W(t_n - t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}] dP_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})$

$= \int_{-\infty}^{\beta_n} \left(1 - \exp\left[-\frac{2(\beta_{n-1} - x_{n-1})(\beta_n - x_n)}{t_n - t_{n-1}}\right]\right) dP_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})$

$= \int_{\mathbb{R}} 1_{]-\infty, \beta_n[} \left(1 - \exp\left[-\frac{2(\beta_{n-1} - x_{n-1})(\beta_n - x_n)}{t_n - t_{n-1}}\right]\right) dP_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})$

donc

$P\{W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T\}$
$= \int_{\mathbb{R}^n} 1_{]-\infty,\beta_1[}(x_1)\left(1-\exp\left[-\frac{2\beta_0(\beta_1-x_1)}{t_1}\right]\right) 1_{]-\infty,\beta_2[}(x_2)\left(1-\exp\left[-\frac{2(\beta_1-x_1)(\beta_2-x_2)}{t_2-t_1}\right]\right)$
$\times ... \times 1_{]-\infty,\beta_n[}\left(1-\exp\left[-\frac{2(\beta_{n-1}-x_{n-1})(\beta_n-x_n)}{t_n-t_{n-1}}\right]\right) dP_{t_1}(x_1)dP_{t_2-t_1}(x_2-x_1)...dP_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1})$
$= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\prod_{i=1}^n 1_{]-\infty,\beta_i[}(x_i)\left(1-\exp\left[-\frac{2}{\Delta t_i}(\beta_{i-1}-x_{i-1})(\beta_i-x_i)\right]\right)\right]\prod_{i=1}^n dP_{t_i-t_{i-1}}(x_i-x_{i-1})$
$= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\prod_{i=1}^n 1_{]-\infty,\beta_i[}(x_i)\left(1-\exp\left[-\frac{2}{\Delta t_i}(\beta_{i-1}-x_{i-1})(\beta_i-x_i)\right]\right)\right]\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}}\exp\left[-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right] dx_i$

On reconnait la densité du vecteur $(W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n))$ donnée par

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}}\exp\left[-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right]$$

(voir proposition 1.2 chap1)

Ceci entraine que

$$\begin{aligned} P\{W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T\} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\prod_{i=1}^n 1_{]-\infty,\beta_i[}(x_i)\left(1-\exp\left[-\frac{2}{\Delta t_i}(\beta_{i-1}-x_{i-1})(\beta_i-x_i)\right]\right)\right] \\ &\times\ f(x_1, x_2, ..x_n)dx_1dx_2...dx_n \\ &= E[g(W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n)] \end{aligned}$$

avec

$$g(x) = \prod_{i=1}^n 1_{]-\infty,\beta_i[}(x_i)\left(1-\exp\left[-\frac{2}{\Delta t_i}(\beta_{i-1}-x_{i-1})(\beta_i-x_i)\right]\right)$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned} Q(b(t), T) = P\{W(t) \geq b(t); t \in [0;t]\} &= 1 - P\{W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T\} \\ &= 1 - E[g(W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n)] \end{aligned}$$

■

2.1.3 Cas de deux frontières linéaires par moceaux

Dans cette partie, nous considérons la probabilité suivante :

$$P_2 = Q(a(t), b(t), T) = 1 - P\{a(t) < W(t) < b(t); t \in [0, T]\}$$

avec a et b des fonctions continues sur $[0, T]$ et vérifient $a(t) < b(t)\ \forall t \in [0, T]$; $a(0) < 0 < b(0)$.

Theoréme 2.3. *Si les fonctions a, $b \in \mathcal{C}[0, T]$ (ensemble des fonctions continues sur $[0, T]$) alors la probabilité de passage est donnée par*

$$Q(a(t), b(t), T) = 1 - P\{a(t) < W(t) < b(t); t \in [0, T]\} = 1 - Eg[W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n)], \quad (2.4)$$

où

$$g(x) = \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{]\alpha_i,\ \beta_i[}(x_i) \times P[a(t+t_{i-1}) - x_{i-1} < W(t) < b(t+t_{i-1}) - x_{i-1}, t < \Delta t_i / W(\Delta t_i) = \Delta x_i]. \quad (2.5)$$

Preuve. D'aprés la propriété forte de Markov sur le mouvement brownien(Billingsley 1986, section 37)

$$P[a(t) < W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T] \quad = \quad \int_{\alpha_1}^{\beta_1} P[a(t) < W(t) < b(t), t_1 \neq t \leq T/W(t_1) = x_1]dP_{t_1}(x_1)$$

or

$$P[a(t) < W(t) < b(t), t_1 \neq t \leq T] = P[a(t) < W(t) < b(t), t < t_1 \leq T] \times P[a(t) < W(t) < b(t), t_1 < t \leq T]$$

donc on a

$P[a(t) < W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T]$

$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} P[a(t) < W(t) < b(t), t < t_1 \leq T/W(t_1) = x_1]$

$\times P[a(t) < W(t) < b(t), t_1 < t \leq T/W(t_1) = x_1]dP_{t_1}(x_1)$

$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} P[a(t+t_0) - x_0 < W(t) < b(t+t_0) - x_0, t < t_1 - t_0 \leq T/W(t_1 - t_0) = x_1 - x_0]$

$\times P[a(t) < W(t) < b(t), t_1 < t \leq T/W(t_1) = x_1]dP_{t_1}(x_1)$

Posons $W(t_1) = x_1$, le procéssus $W(t+t_1) - W(t_1) = W(t+t_1) - x_1$ est un mouvement brownien issue de l'origine.

$P[a(t) < W(t) < b(t), t_1 < t \leq T/W(t_1) = x_1]$

$= P[a(t+t_1) - x_1) < W(t) < b(t+t_1) - x_1, t \leq T - t_1]$

$= \int_{\alpha_2 - x_1}^{\beta_2 - x_1} P[a(t+t_1) - x_1 < W(t) < b(t+t_1) - x_1, t < t_2 - t_1/W(t_2 - t_1) = x_2]$

$\times P[a(t+t_1) - x_1 < W(t) < b(t+t_1) - x_1, t_2 - t_1 < t \leq T - t_1/W(t_2 - t_1) = x_2]dP_{t_2 - t_1}(x_2)$

$= \int_{\alpha_2}^{\beta_2} P[a(t+t_1) - x_1 < W(t) < b(t+t_1) - x_1, t < t_2 - t_1/W(t_2 - t_1) = x_2 - x_1]$

$\times P[a(t+t_1) - x_1 < W(t) < b(t+t_1) - x_1, t_2 - t_1 < t \leq T - t_1/W(t_2 - t_1) = x_2 - x_1]dP_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1)$

on a donc

$P[a(t) < W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T]$

$= \int_{\mathbb{R}} 1_{]\alpha_1, \beta_1[}(x_1) P[a(t+t_0) - x_0 < W(t) < b(t+t_0) - x_0, t < t_1 - t_0 \leq T/W(t_1 - t_0) = x_1 - x_0]$

$\times \int_{\mathbb{R}} 1_{]\alpha_2, \beta_2[}(x_2) P[a(t+t_1) - x_1 < W(t) < b(t+t_1) - x_1, t < t_2 - t_1/W(t_2 - t_1) = x_2 - x_1]$

$P[a(t+t_1) - x_1 < W(t) < b(t+t_1) - x_1, t_2 - t_1 < t \leq T - t_1/W(t_2 - t_1) = x_2 - x_1]dP_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1)dP_{t_1}(x_1)$

avec $x_0 = 0$ et $t_0 = 0$

d'apres Fubini on a

$P[a(t) < W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T]$

$= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{]\alpha_1,\beta_1[}(x_1) P[a(t+t_0) - x_0 < W(t) < b(t+t_0) - x_0, t < t_1 - t_0 \leq T / W(t_1 - t_0) = x_1 - x_0]$

$\times 1_{]\alpha_2,\beta_2[}(x_2) P[a(t+t_1) - x_1 < W(t) < b(t+t_1) - x_1, t < t_2 - t_1 / W(t_2 - t_1) = x_2 - x_1]$

$\times P[a(t+t_1) - x_1 < W(t) < b(t+t_1) - x_1, t_2 - t_1 < t \leq T - t_1 / W(t_2 - t_1) = x_2 - x_1] dP_{t_1}(x_1) dP_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1)$

Posons $W(t_2 - t_1) = x_2 - x_1$
Le procéssus $W(t+t_2) - W(t_2 - t_1) = W(t+t_2) - (x_2 - x_1)$ est un mouvement brownien issue de l'origine.
En substituant t par $t + t_2 - t_1$
on a $P[a(t+t_1) - x_1 < W(t) < b(t+t_1) - x_1, t_2 - t_1 < t \leq T - t_1 / W(t_2 - t_1) = x_2 - x_1]$

$= P[a(t+t_2-t_1+t_1) - x_1 - x_2 + x_1 < W(t) < b(t+t_2-t_1+t_1) - x_1 - x_2 + x_1, t_2 - t_1 < (t+t_2-t_1) \leq T - t_1]$

$= P[a(t+t_2) - x_2 < W(t) < b(t+t_2) - x_2, t \leq T - t_2]$

$= \int_{\alpha_3 - x_2}^{\beta_3 - x_2} P[a(t+t_2) - x_2 < W(t) < b(t+t_2) - x_2, t < t_3 - t_2 / W(t_3 - t_2) = x_3]$

$\times P[a(t+t_2) - x_2 < W(t) < b(t+t_2) - x_2, t_3 - t_2 < t \leq T - t_3 / W(t_3 - t_2) = x_3] dP_{t_3 - t_2}(x_3)$

$= \int_{\alpha_3}^{\beta_3} P[a(t+t_2) - x_2 < W(t) < b(t+t_2) - x_2, t < t_3 - t_2 / W(t_3 - t_2) = x_3 - x_2]$

$\times P[a(t+t_2) - x_2 < W(t) < b(t+t_2) - x_2, t_3 - t_2 < t \leq T - t_3 / W(t_3 - t_2) = x_3 - x_2] dP_{t_3 - t_2}(x_3 - x_2)$

En appliquant les mêmes étapes précédentes on obtient
$P[a(t) < W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T]$
$= \int_{\mathbb{R}^3} 1_{]\alpha_1,\beta_1[}(x_1) P[a(t+t_0) - x_0 < W(t) < b(t+t_0) - x_0, t < t_1 - t_0 \leq T / W(t_1 - t_0) = x_1 - x_0]$

$\times 1_{]\alpha_2,\beta_2[}(x_2) P[a(t+t_1) - x_1 < W(t) < b(t+t_1) - x_1, t < t_2 - t_1 / W(t_2 - t_1) = x_2 - x_1]$

$\times 1_{]\alpha_3,\beta_3[}(x_3) P[a(t+t_2) - x_2 < W(t) < b(t+t_2) - x_2, t < t_3 - t_2 / W(t_3 - t_2) = x_3 - x_2]$

$\times P[a(t+t_2) - x_2 < W(t) < b(t+t_2) - x_2, t_3 - t_2 < t \leq T - t_3 / W(t_3 - t_2) = x_3 - x_2]$

$dP_{t_1}(x_1) dP_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) dP_{t_3 - t_2}(x_3 - x_2)$

En répétant la procédure jusqu'*à* $n-1$ on obtient :
$P[a(t+t_{n-2}) - x_{n-2} < W(t) < b(t+t_{n-2}) - x_{n-2})], t \leq T - t_{n-2}]$

$= \int_{\alpha_{n-1} - x_{n-2}}^{\beta_{n-1} - x_{n-2}} P[a(t+t_{n-2}) - x_{n-2} < W(t) < b(t+t_{n-2}) - x_{n-2}, t < t_{n-1} - t_{n-2} / W(t_{n-1} - t_{n-2}) = x_{n-1}]$

$\times P[a(t+t_{n-2}) - x_{n-2} < W(t) < b(t+t_{n-2}) - x_{n-2}, t \leq T - t_{n-2} / W(t_{n-1} - t_{n-2}) = x_{n-1}] dP_{t_{n-1} - t_{n-2}}(x_{n-1})$

$= \int_{\alpha_{n-1}}^{\beta_{n-1}} P[a(t+t_{n-2}) - x_{n-2} < W(t) < b(t+t_{n-2}) - x_{n-2}, t < t_{n-1} - t_{n-2} / W(t_{n-1} - t_{n-2}) = x_{n-1} - x_{n-2}]$

$\times P[a(t+t_{n-2}) - x_{n-2} < W(t) < b(t+t_{n-2}) - x_{n-2}, t \leq T - t_{n-2} / W(t_{n-1} - t_{n-2}) = x_{n-1} - x_{n-2}] dP_{t_{n-1} - t_{n-2}}(x_{n-1} - x_{n-2})$

Ce qui entraine
$P[a(t) < W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T]$

$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_{]\alpha_1,\beta_1[}(x_1)P[a(t+t_0)-x_0 < W(t) < b(t+t_0)-x_0, t < t_1-t_0 \leq T/W(t_1-t_0) = x_1-x_0]$

$\times 1_{]\alpha_2,\beta_2[}(x_2)P[a(t+t_1)-x_1 < W(t) < b(t+t_1)-x_1, t < t_2-t_1/W(t_2-t_1) = x_2-x_1]$

$\times 1_{]\alpha_3,\beta_3[}(x_3)P[a(t+t_2)-x_2 < W(t) < b(t+t_2)-x_2, t < t_3-t_2/W(t_3-t_2) = x_3-x_2]$

$\times \ ...\times$
$1_{]\alpha_{n-1},\beta_{n-1}[}(x_{n-1})P[a(t+t_{n-2})-x_{n-2} < W(t) < b(t+t_{n-2})-x_{n-2}, t < t_{n-1}-t_{n-2}/W(t_{n-1}-t_{n-2}) = x_{n-1}-x_{n-2}]$
$\times P[a(t+t_{n-2})-x_{n-2} < W(t) < b(t+t_{n-2})-x_{n-2}, t \leq T-t_{n-2}/W(t_{n-1}-t_{n-2}) = x_{n-1}-x_{n-2}]dP_{t_{n-1}-t_{n-2}}(x_{n-1}-x_{n-2})$

$\times dP_{t_1}(x_1)dP_{t_2-t_1}(x_2-x_1)dP_{t_3-t_2}(x_3-x_2).......dP_{t_{n-1}-t_{n-2}}(x_{n-1}-x_{n-2})$

En posant $W(t_{n-1}-t_{n-2}) = x_{n-1}-x_{n-2}$, le procéssus

$$W(t+t_{n-1}-t_{n-2}) - W(t_{n-1}-t_{n-2}) = W(t+t_{n-1}-t_{n-2}) - (x_{n-1}-x_{n-2})$$

est un mouvement brownien isssue de l'origine .En substituant t par $t+t_{n-1}-t_{n-2}$ on obtient
$P[a(t+t_{n-2})-x_{n-2} < W(t) < b(t+t_{n-2})-x_{n-2}, t \leq T-t_{n-2}/W(t_{n-1}-t_{n-2}) = x_{n-1}-x_{n-2}]$

$= P[a(t+t_{n-1})-x_{n-1} < W(t) < b(t+t_{n-1})-x_{n-1}, t \leq T-t_{n-1}]$

$= P[a(t+t_{n-1})-x_{n-1} < W(t) < b(t+t_{n-1})-x_{n-1}, t \leq t_n-t_{n-1}]$

$= \int_{\alpha_n-x_{n-1}}^{\beta_n-x_{n-1}} P[a(t+t_{n-1})-x_{n-1} < W(t) < b(t+t_{n-1})-x_{n-1}, t < t_n-t_{n-1}/W(t_n-t_{n-1}) = x_n]dP_{t_n-t_{n-1}}(x_n)$

$= \int_{\alpha_n}^{\beta_n} P[a(t+t_{n-1})-x_{n-1} < W(t) < b(t+t_{n-1})-x_{n-1}, t < t_n-t_{n-1}/W(t_n-t_{n-1}) = x_n-x_{n-1}]$

$dP_{t_{n-}-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1})$
Finalement nous obtenons :

$P[a(t) < W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T]$
$= \int_{\mathbb{R}^n} 1_{]\alpha_1,\beta_1[}(x_1)P[a(t+t_0)-x_0 < W(t) < b(t+t_0)-x_0, t < t_1-t_0 \leq T/W(t_1-t_0) = x_1-x_0]$

$\times 1_{]\alpha_2,\beta_2[}(x_2)P[a(t+t_1)-x_1 < W(t) < b(t+t_1)-x_1, t < t_2-t_1/W(t_2-t_1) = x_2-x_1]$

$\times 1_{]\alpha_3,\beta_3[}(x_3)P[a(t+t_2)-x_2 < W(t) < b(t+t_2)-x_2, t < t_3-t_2/W(t_3-t_2) = x_3-x_2]$

$\times \ ...\times$

$1_{]\alpha_{n-1},\beta_{n-1}[}(x_{n-1})P[a(t+t_{n-2})-x_{n-2} < W(t) < b(t+t_{n-2})-x_{n-2}, t < t_{n-1}-t_{n-2}/W(t_{n-1}-t_{n-2}) = x_{n-1}-x_{n-2}]$
$\times 1_{]\alpha_n,\beta_n[}(x_n)P[a(t+t_{n-1})-x_{n-1} < W(t) < b(t+t_{n-1})-x_{n-1}, t < t_n-t_{n-1}/W(t_n-t_{n-1}) = x_n-x_{n-1}]$

$\times dP_{t_1}(x_1)dP_{t_2-t_1}(x_2-x_1)dP_{t_3-t_2}(x_3-x_2).......dP_{t_{n-1}-t_{n-2}}(x_{n-1}-x_{n-2})dP_{t_{n-}-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1})$

En posant $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ et $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$P[a(t) < W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T]$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n 1_{]\alpha_i,\beta_i[}(x_i)P[a(t+t_{i-1})-x_{i-1} < W(t) < b(t+t_{i-1})-x_{i-1}, t < \Delta t_i/W(\Delta t_i) = \Delta x_i]$

$\times \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left[-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right] dx_1 dx_2 ... dx_n$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} 1_{]\alpha_i, \beta_i[}(x_i) P[a(t + t_{i-1}) - x_{i-1} < W(t) < b(t + t_{i-1}) - x_{i-1}, t < \Delta t_i / W(\Delta t_i) = \Delta x_i]$

$\times f(x_1, x_2, ...x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n$

$= Eg[W(t_1), W(t_2), ...W(t_n)]$
avec

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n} 1_{(\alpha_i < x_i < \beta_i)} P[a(t + t_{i-1}) - x_{i-1} < W(t) < b(t + t_{i-1}) - x_{i-1}, t < \Delta t_i / W(\Delta t_i) = \Delta x_i]$$

D'où

$$\begin{aligned} Q(a(t), b(t), T) &= 1 - P\{a(t) < W(t) < b(t); t \in [0, T]\} \\ &= 1 - Eg[W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n)] \end{aligned}$$

■

Maintenant on considère le cas où les fonctions a et b sont linéaires par morceaux.

Theoréme 2.4. *Si a et b sont des fonctions linéaires par morceaux sur $[0, T]$ avec $(t_i)_{i=1}^{n}$ une partition de l'intervalle $[0, T]$ alors la probabilite de passage est donnée par*

$$Q(a(t), b(t), T) = 1 - Eg[(W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n)] \tag{2.6}$$

où

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{]\alpha_i,\ \beta_i[}(x_i) \left[1 - \sum_{j=1}^{\infty} q(i, j)\right] \tag{2.7}$$

avec

$$\begin{aligned} q(i,j) &= \exp\left\{-\frac{2}{\Delta t_i}\left[jd_{i-1} + (\alpha_{i-1} - x_{i-1}][jd_i + (\alpha_i - x_i)]\right\} \\ &- \exp\left\{-\frac{2j}{\Delta t_i}[jd_{i-1}d_i + d_{i-1}(\alpha_i - x_i) - d_i(\alpha_{i-1} - x_{i-1})]\right\} \\ &+ \exp\left\{-\frac{2}{\Delta t_i}\left[jd_{i-1} - (\beta_{i-1} - x_{i-1}][jd_i - (\beta_i - x_i)]\right\} \\ &- \exp\left\{-\frac{2j}{\Delta t_i}\left[jd_{i-1}d_i - d_{i-1}(\beta_i - x_i) + d_i(\beta_{i-1} - x_{i-1})\right]\right\}. \end{aligned}$$

2.2 Calcul approché de la probabilité de passage dans le cas des frontières quelconques

2.2.1 Cas d'une frontière

On suppose que la fonction b est non linéaire. Notre but est d'approximer la probabilité

$$Q(b(t), T) = P\{W(t) \geq b(t); t \in [0, T]\}$$

Nous allons utiliser deux approches : La première approche est basée sur l 'idée suivante :

Soit $0 < t_1 < t_2 ... < t_n = T$ une partition de l'intervalle $[0, T]$ et b_n une suite de fonctions linéaires par morceaux sur $[0, T]$ tel que $b_n(t_i) = b(t_i)$ aux points t_i, $i = 1, 2, ..., n$.
Nous avons alors le résultat suivant :

Theoréme 2.5. *Si b_n converge uniformément vers b lorque $n \to +\infty$ sur $[0, T]$ alors*

$$Q(b(t), T) = 1 - \lim_{n \to +\infty} Eg(W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n)) \tag{2.8}$$

avec

$$\begin{aligned} g(x) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{]-\infty,\ \beta_i[}(x_i) \left(1 - \exp\left[-\frac{2}{\Delta t_i}(\beta_{i-1} - x_{i-1})(\beta_i - x_i)\right]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{]-\infty,\ b_n(t_i)[}(x_i) \left(1 - \exp\left[-\frac{2}{\Delta t_i}(b_n(t_{i-1}) - x_{i-1})(b_n(t_i) - x_i)\right]\right). \end{aligned}$$

Preuve.
Le résultat est une conséquence immédiate de la convergence uniforme de $b_n(t)$ vers $b(t)$ et de la propriété de continuité de la mesure de probabilité.
■

La seconde approche consiste *à* encadrer la probabilite $Q(b(t), T)$ par deux probabilités de passages définies par des fonctions linéaires par morceaux. Nous considérons le cas spécial o*ù* b est concave ou convexe sur $[0, T]$.
Soit b_n une suite de fonctions linéaires par morceaux sur $[0, T]$ tel que $b_n(t_i) = b(t_i)$ et b_n^* une suite de fonctions linéaires par morceaux sur $[0, T]$ definie par

$$b_n^*(t) = \begin{cases} b_n(t) + \sup_{0 \le t \le T} \mid b(t) - b_n(t) \mid & \text{si b est concave} \\ b_n(t) - \sup_{0 \le t \le T} \mid b(t) - b_n(t) \mid & \text{si b est convexe} \end{cases}$$

Les suites de fonctions b_n et b_n^* définies ci dessus sont continues et linéaires par morceaux sur $[0, T]$.
De plus b_n et b_n^* convergent uniformément vers b respectivement en dessous et dessus si b est concave et en dessus et dessous si b est convexe.
Nous avons le théorème suivant :

Theoréme 2.6. – *Si la fonction b est concave alors $Q(b(t), T)$ vérifie*

$$Q(b_n^*(t), T) \le Q(b(t), T) \le Q(b_n(t), T).$$

– *Si b est convexe alors $Q(b(t), T)$ vérifie*

$$Q(b_n(t), T) \le Q(b(t), T) \le Q(b_n^*, T).$$

$Q(b_n(t), T)$ et $Q(b_n^*(t), T)$ sont données par (2.3).

Preuve. Notons que si la fonction b est concave sur l'intervalle $[0, T]$ alors $b_n(t) \le b(t)$.
Cette inégalité devient une égalité aux points $t_i; i = 1, 2, ..., n$.
D'autres part puisque $b_n^*(t) = b_n(t) + \sup_{0 \le t \le T} \mid b(t) - b_n(t) \mid$
On a alors

$$b_n(t) \le b(t) \le b_n^*(t),$$

En posant : $P_x = P\{W(t) < b_n(t), t \in [0, T]\}$; $P_y = P\{W(t) < b_n^*(t), t \in [0, T]\}$
Par la monotonie de la mesure de probabilité$(A \subset B \Leftrightarrow P(A) \le P(B))$ On obtient :

$$\begin{aligned} P_x \le P\{W(t) < b(t), t \in [0, T]\} \le P_y \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - P_y \le 1 - P\{W(t) < b(t), t \in [0, T]\} \le 1 - P_x \\ &\Leftrightarrow \quad Q(b_n^*(t), T) \le Q(b(t), T) \le Q(b_n(t), T) \end{aligned}$$

■

On démontre de la même manière le cas où b est convexe sauf qu'ici on aura $b(t) \leq b_n(t)$.
La précision de l 'approximation est donnée dans chaque cas par

$$\mid Q(b_n(t), T) - Q(b_n^*(t), T) \mid .$$

Cependant il exixste une méthode tel que la précision de l'approximation soit bornée. L'idée consiste *à* déterminer l 'entier n tel que $\mid Q(b(t), T) - Q(b_n(t), T) \mid$ soit bornée par une fonction.
Nous introduisons le théorème suivant :

Theoréme 2.7. *Soit b_n une suite de fonctions linéaires par morceaux tel que $b_n(t_i) = b(t_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ avec b une fonction concave.*
Pour tout $\varepsilon > 0$ et entier n, si

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mid b(t) - b_n(t) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

alors on a

$$\mid Q(b(t), T) - Q(b_n(t), T) \mid \leq \psi(\varepsilon, \eta)$$

où $0 < \eta < \eta_0$, $\psi(\varepsilon, \eta) = 4\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right) - 2\Phi\left(\frac{c_*}{\sqrt{n}}\right)$, $\eta_0 \in [0, T]$ est donnée et $c_* = \inf_{0 \leq t \leq T} c(t) > 0$.

Preuve. Définissons :$d(t) = b(t) - \frac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \mid Q(b(t), T) - Q(b_n(t), T) \mid \\
&= \mid P[W(t) < b(t), t \leq T] - P[W(t) < b_n(t), t \leq T] \mid \\
&\leq \mid P[W(t) < d(t) + \varepsilon, t \leq T] - P[W(t) < d(t), t \leq T] \mid \\
&\leq \mid P[W(t) < d(t) + \varepsilon, t \leq \eta] - P[W(t) < d(t), t \leq \eta] \mid \\
&+ \mid P[W(t) < d(t) + \varepsilon, \eta \leq t \leq T] - P[W(t) < d(t), \eta \leq t \leq T] \mid \\
&= \Delta_1 + \Delta_2
\end{aligned}$$

Pour tout η tel que $0 < \eta \leq \eta_0$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \mid Q(d(t) + \varepsilon, \eta) - Q(d(t), \eta) \mid \\
&\leq Q(d(t) + \varepsilon, \eta) \\
&\leq P(\sup_{0 \leq t \leq \eta} W(t) \geq c_*) \\
&= 2\left[1 - \Phi\left(\frac{c_*}{\sqrt{n}}\right)\right]
\end{aligned}$$

avec

$$c_* = \inf_{0 \leq t \leq \eta_0} c(t) > 0$$

et Φ la fonction de repartition de la loi normale standard.
Pour Δ_2 notons que le procéssus $W(t) - \varepsilon$ est aussi un mouvement brownien issue de $-\varepsilon$ et alors si

$$q(u) = P[W(t) < d(t), \eta \leq t \leq T / W(\eta) = u]$$

alors

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mid q(u) \mid \mid \phi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{u+\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \mid du \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mid \phi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{u+\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \mid du \\
&= \int_{-\frac{3\varepsilon}{2}}^{-\frac{\varepsilon}{2}} \phi\left(\frac{u+\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) du + \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \phi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) du \\
&= 2\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= 2\left[2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right) - 1\right]
\end{aligned}$$

ϕ étant la densité de la loi normale standard.
Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\Delta_2 &\leq 2 - 2\Phi\left(\frac{c_*}{\sqrt{n}}\right) + 4\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right) - 2 \\ &= 4\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}\right) - 2\Phi\left(\frac{c_*}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

■
cependant on peut trouver l 'entier n tel que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mid b(t) - b_n(t) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

soit verifié.
Nous considérons le cas òu la partition de l'intervalle $[0, T]$ est uniforme ($t_i = \frac{iT}{n}$). Nous avons alors le théorème suivant :

Theoréme 2.8. *Supposons que le fonction $b(t) \in C^1[0, T]$ et que la dérivée première satisfait à la condition de Lipschitz $\mid b'(t) - b'(s) \mid < L \mid t - s \mid \forall\ s,\ t \in [0, T]$. Si $b_n(t_i) = b(t_i)$, $t_i = \frac{iT}{n}$ $i = 0, 1, ..., n$ alors la condition*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mid b(t) - b_n(t) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

est verifiée pour tout $n \geq \frac{T}{2}\sqrt{\frac{L}{\varepsilon}}$.
De plus si $b(t) \in C^2([0, T])$ alors la constante de Lipschitz est donnée par

$$L = \|c''(.)\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq T} \mid c''(t) \mid.$$

Preuve. on a

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mid b(t) - b_n(t) \mid \leq \frac{L}{8}\left(\frac{T}{n}\right)^2$$

On veut montrer que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mid b(t) - b_n(t) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $n \geq \frac{T}{2}\sqrt{\frac{L}{\varepsilon}}$.
supposons qu'on a $n \geq \frac{T}{2}\sqrt{\frac{L}{\varepsilon}} \Rightarrow n \geq \frac{T^2}{4}\frac{L}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{T^2}{n^2} \geq \frac{4\varepsilon}{L} \Rightarrow \sup_{0\leq t\leq T} \mid b(t) - b_n(t) \mid \leq \frac{L}{8} \times \frac{4\varepsilon}{L} = \frac{\varepsilon}{2}$
■

2.2.2 Cas de deux frontières

Nous voulons approximer la probabilité

$$Q(a(t), b(t), T) = 1 - P\{a(t) < W(t) < b(t), t \in [0, T]\}$$

où a et b sont supposées non linéaires sur $[0, T]$.
Nous avons le théorème suivant :

Theoréme 2.9. *Soit a_n et b_n des suites de fonctions linéaires par morceaux sur $[0, T]$ convergeant respectivement de manière uniforme vers a et b. Alors on a*

$$Q(a(t), b(t), T) = 1 - \lim_{n\to\infty} P\{a_n(t) < W(t) < b_n(t), t \in [0, T]\}, \tag{2.9}$$

avec

$$P\{a_n(t) < W(t) < b_n(t), t \in [0,T]\} = Eg[(W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n)]$$

où

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{]a_n(t_i),\ b_n(t_i)[}(x_i) \left[1 - \sum_{j=1}^{\infty} q(i,j)\right]$$

Preuve. Le résultat est une conséquence immédiate de la convergence uniforme de $a_n(t)$ vers $a(t)$ et de $b_n(t)$ vers $b(t)$ et de la propriété de continuité de la mesure de probabilité.

■

On peut utiliser la deuxième approche de la section précédente pour approximer cette probabilité. On définit ainsi de nouvelles fonctions $a_n^*(t)$ et $a_n(t)$.
Considérons les fonctions $b_n^*(t)$, $b_n(t)$ définies précédamment.
Soit $a_n^*(t)$, $a_n(t)$ tel que

$$a_n(t_i) = a(t_i)$$

et

$$a_n^*(t) = \begin{cases} a_n(t) + \sup_{0 \le t \le T} \mid a(t) - a_n(t) \mid & \text{si a est concave} \\ a_n(t) - \sup_{0 \le t \le T} \mid a(t) - a_n(t) \mid & \text{si a est convexe} \end{cases}$$

Alors $b_n^*(t)$,$b_n(t)$, $a_n^*(t)$,$a_n(t)$ s'approchent de $b(t)$ et $a(t)$ *à* l 'intérieur et *à* l'extérieur si b est concave et a convexe.

Theoréme 2.10. *La probabilité de passage $Q(a(t), b(t), T)$ vérifie*

$$Q(a_n^*(t), b_n^*(t), T) \le Q(a(t), b(t), T) \le Q(a_n(t), b_n(t), T)$$

où $Q(a_n^*(t), b_n^*(t), T)$ et $Q(a_n(t), b_n(t), T)$ sont donnée par (2.6).
La précision de l'approximation est donnée par

$$\mid Q(a_n^*(t), b_n^*(t), T) - Q(a_n(t), b_n(t), T) \mid .$$

Pour terminer cette partie nous proposons une autre méthode pour approximer $Q(a(t), b(t), T)$. cette méthode est basée sur l'idée suivante : Puisque $Var[W(t)] = t$, si $[t_{i-1}, t_i]$ est suffisament petit tel que $\Delta t_i \le$ c $\inf_{t_{i-1} \le t \le t_i} \mid b(t) - a(t) \mid$ pour une constante $c > 0$, alors la probabilité pour que $W(t)$ franchit les deux frontières $a(t)$ et $b(t)$ sur $[t_{i-1}, t_i]$ est trés petit et est sensiblement égal *à* 0 quand $\Delta t_i \to 0$.
Ainsi la probabilité conditionnelle

$$P[a(t + t_{i-1}) - x_{i-1}) < W(t) < b(t + t_{i-1}) - x_{i-1}), t < \Delta t_i / W(\Delta t_i) = \Delta x_i]$$

peut être approximée par

$$1 - P\left[W(t) \le \frac{\Delta \alpha_i}{\Delta t_i} t + \alpha_{i-1} - x_{i-1}, t < \Delta t_i / W(\Delta t_i) = \Delta x_i\right]$$

$$-P\left[W(t) \ge \frac{\Delta \beta_i}{\Delta t_i} t + \beta_{i-1} - x_{i-1}, t < \Delta t_i / W(\Delta t_i) = \Delta x_i\right]$$

$$= 1 - \exp\left[-\frac{2}{\Delta t_i}(\alpha_{i-1} - x_{i-1})(\alpha_i - x_i)\right] - \exp\left[-\frac{2}{\Delta t_i}(\beta_{i-1} - x_{i-1})(\beta_i - x_i)\right].$$

d'aprés la formule de Siegmund(1986, p.375).
Ceci conduit au théorème suivant :

Theoréme 2.11. *Si a, $b \in \mathbb{C}[0,T]$ et $max_{1\leq i\leq n}\Delta t_i \to 0$ quand $n \to 0$ alors on a*

$$Q(a(t), b(t), T) = 1 - \lim_{n\to+\infty} E[h(W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n))], \tag{2.10}$$

où

$$h(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{]\alpha_i,\ \beta_i[}(x_i) \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{2}{\Delta t_i}(\alpha_{i-1} - x_{i-1})(\alpha_i - x_i)\right] - \exp[-\frac{2}{\Delta t_i}(\beta_{i-1} - x_{i-1})(\beta_i - x_i)\right]\right\}.$$

Avant de passer au calcul d'erreurs d'approximations nous allons donner quelques remarques.

Remarque 2.1. *comme nous l 'avons vu précédemment, les fonctions a et b sont supposées continues. cependant tous les résultats restent vrais si un ou deux des fonctions a et b sont discontinues en un nombre fini de points sur $[0,T]$ et tel que pour tout point de discontinuité t^* on a :*

$$\lim_{t\to(t^*)^-} b(t) < \lim_{t\to(t^*)^+} b(t)$$

$$\lim_{t\to(t^*)^-} a(t) > \lim_{t\to(t^*)^+} a(t)$$

Dans ce cas nous avons seulement besoin d'inclure les points de discontinuité dans la partition et de définir les valeurs α_i et β_i respectivement comme la limite à gauche et la limite à droite de a et b α_i = limite à gauche de a en t_i
β_i = limite à droite de b en t_i
t_i étant un point de discontinuité

2.3 Erreurs d'approximations

Dans cette section, nous allons proposer une règle pour choisir une partition optimale tel que les erreurs d'approximations notées Δ_n convergent vers 0 avec une vitesse de $0(\frac{1}{n^2})$. Ensuite nous étudierons la lim sup de la suite $n^2\Delta_n$.

2.3.1 Cas d' une frontière

Soit $b : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament continue par morceaux avec $b(0) > 0$, deux fois différentiables et soit $b_n : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions linéaires par morceaux sur $[0,T]$ tel que $b_n(t_i) = b(t_i)$ avec $(t_i)_{i=1}^n$ une partition de l 'intervalle $[0,T]$.
Etant donné une partition $(t_i)_{i=1}^n$, les t_i sont appelés noeuds de la partition.
Les erreurs d'approximations sont données par :

$$\Delta_n =\mid Q(b(t),T) - Q(b_n(t),T) \mid =\mid P\{W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T\} - P\{W(t) < b_n(t), 0 \leq t \leq T\} \mid .$$

Maintenant fixons une fonction différentiable $\phi : [0,T] \longrightarrow [0,+\infty[$ avec $\phi(0) = 0$.
Soit $\varepsilon \in [0,+\infty[$ une constante. On suppose que b_n vérifie $\mid b(t) - b_n(t) \mid \leq \varepsilon\phi(t)$ pour tout $t \in [0,T]$.
Nous avons le théorème suivant :

Theoréme 2.12. *On peut trouver la partition $(t_i)_{i=1}^n$ tel que*

$$\Delta_n \leq \frac{1}{n^2}\frac{A(\phi)}{4\sqrt{2\pi}} + 0(\frac{1}{n^2})$$

avec

$$A(\phi) = \left(\int_0^T \sqrt{\frac{\mid b"(u) \mid}{\phi(u)}}du\right)^2 \left(\int_0^T \phi'(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons besoin du lemme suivant pour la démonstration.

Lemma 2.3. *Soit u_1,u_2 des fonctions différentiables par morceaux avec $u_1(0) = u_2(0)$. Soit $X_i(t) = W(t) - u_i(t)$ et P_i la loi du processus $X_i(t)_{t\in[0,T]}$ alors on a*

$$\|P_1 - P_2\| = 2\Phi(\frac{2}{\sigma}) - 1$$

avec Φ la fonction de répartition de la loi normale standard et $\sigma^2 = \int_0^T (u_1'(t) - u_2'(t))^2 dt$.

Preuve.
Soit P la loi du procéessus $(W(t)_{t\in[0,T]})$ alors $P_i << P$ et la derivee de Radon-Nikodym est donnée par

$$\frac{dP_i}{dP} = \exp\left(\int_0^T u_i'(t)dW(t) - \int_0^T \frac{1}{2}u_i'(t)^2 dt\right).$$

Soit $Z_i = \int_0^T u_i'(t)dW(t)$, $\sigma_i{}^2 = \int_0^T u_i'(t)^2 dt$ et $\sigma_{12} = \int_0^T u_1'(t)u_2'(t)dt$ alors Z_1 et Z_2 sont conjointement normalement distribuée avec $E(Z_i) = 0$, $Var(Z_i) = \sigma_i{}^2$ et $Cov(Z_i) = \int_0^T u_1'(t)u_2'(t)dt$.Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\|P_1 - P_2\| &= \frac{1}{2}E\left(\mid \exp(Z_1 - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2) - \exp(Z_2 - \frac{1}{2}\sigma_2{}^2) \mid\right) \\ &= 2\Phi(\frac{2}{\sigma}) - 1\end{aligned}$$

avec $\sigma^2 = \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 - 2\sigma_{12} = \int_0^T (u_1'(t) - u_2'(t))^2 dt$
■ **Preuve.** (du théorème)
Soit $\phi : [0,T] \longrightarrow [0,+\infty[$ une fonction différentiable avec $\phi(0) = 0$ et une constante $\varepsilon \in [0,+\infty[$.
Nous avons besoin de trouver la partition $(t_i)_{i=1}^n$.
Supposons que pour tout $t \in [0,T]$, b_n satisfait $\mid b(t) - b_n(t) \mid \leq \varepsilon\phi(t)$ (1).
Posons $u_1(t) = b(t) - \varepsilon\phi(t)$; $u_2(t) = b(t) + \varepsilon\phi(t)$ et $X_i(t) = W(t) - u_i(t)$
donc d 'aprés le lemme précédant on a :

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \mid P\{W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T\} - P\{W(t) < b_n(t), 0 \leq t \leq T\} \mid \\ &\leq \mid P\{W(t) < u_1(t), 0 \leq t \leq T\} - P\{W(t) < u_2(t), 0 \leq t \leq T\} \mid \\ &= \mid P(\exists t \in [0,T] : W(t) > u_1(t)) - P(\exists t \in [0,T] : W(t) > u_2(t)) \mid \\ &= \mid P\{\exists t \in [0,T] : X_1(t) > 0\} - P\{\exists t \in [0,T] : X_2(t) > 0\} \mid \\ &\leq \|P_1 - P_2\| = 2\Phi(\frac{1}{2}\sigma) - 1 \\ &\leq \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\varepsilon\left(\int_0^T \phi'(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)\end{aligned}$$

La derniére égalité découle $\sigma^2 = \int_0^T (u_1'(t) - u_2'(t))^2 dt = 4\varepsilon^2 \int_0^T \phi'(t)^2 dt$.
Dans la suite nous utiliserons les symboles $\approx$ (qui signifie approximativement égal) et $\propto$ (qui signifie proportionnel $\grave{a}$).
Puisque b est une fonction deux fois différentiables alors pour tout $t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\begin{aligned} \mid b(t) - b_n(t) \mid &\leq \frac{1}{8} \mid b"(t_{i-1}) \mid {\Delta t_i}^2 + 0({\Delta t_i}^2) \\ &\approx \frac{1}{8} \mid b"(t_{i-1}) \mid {\Delta t_i}^2 \end{aligned}$$

Donc d'aprés (1) Nous avons : $\frac{1}{8} \mid b"(t_{i-1}) \mid {\Delta t_i}^2 \leq \varepsilon\phi(t_{i-1}) + 0({\Delta t_i}^2)$ et donc

$$\Delta t_i \approx \left(\frac{8\varepsilon\phi(t_{i-1})}{\mid b"(t_{i-1}) \mid}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Les noeuds t_i, $i = 1, 2, ..., n$ sont choisis comme quantiles de la variable aléatoire de fonction de répartition F et de densité f tel que $t_i = F^{-1}(\frac{i}{n})$.
Par concéquent

$$\Delta t_i \approx \frac{1}{nf(t_{i-1})}$$

combiné avec (3) cela donne

$$\frac{1}{n^2 f^2(t_{i-1})} \frac{\mid b"(t_{i-1}) \mid}{\phi(t_{i-1})} \approx 8\varepsilon$$

Ce qui implique que :

$$f(t) \propto \sqrt{\frac{\mid b"(t_{i-1}) \mid}{\phi(t)}}$$

Donc

$$f(t) = \frac{\sqrt{\mid b"(t) \mid / \phi(t)}}{\int \sqrt{\mid b"(u) \mid / \phi(u)} du} \tag{4}$$

et par concéquent

$$\varepsilon \approx \frac{1}{8n^2} \left(\int_0^T \sqrt{\frac{\mid b"(u) \mid}{\phi(u)}} du \right)^2$$

Il s'ensuit que de (2) on a

$$\Delta_n \leq \frac{1}{n^2} \frac{A(\phi)}{4\sqrt{2\pi}} + 0(\frac{1}{n^2}) \tag{5}$$

avec

$$A(\phi) = \left(\int_0^T \sqrt{\frac{\mid b"(u) \mid}{\phi(u)}} du \right)^2 \left(\int_0^T \phi'(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

D'apr'es ce qui précéde Δ_n est majorée par une expréssion dépendant de la fonction ϕ.
Il est claire que Δ_n converge vers 0 avec une vitesse de $0(\frac{1}{n^2})$ quand n devient de plus en plus grand. ∎
Maintenant nous allons nous intéresser $\grave{a}$ la limite supérieure de la suite $n^2\Delta_n$.
Nous allons d'abord donner une définition.

Définition 2.2. *Soit f une densité de probabilité sur $[0, T]$, F la fonction de répartition assocée, F^{-1} sa reciproque .*
Une partition de l'intervalle $[0, T]$ ayant pour noeuds $t_i = F^{-1}(\frac{i}{n})$, $i = 1, 2, ..., n$ est appelée partition régulière de taille n générée par f.

Une partition régulière est appelée partition uniforme si elle est générée par une distribution uniforme sur $[0,T]$.
Notons que les noeuds d'une partition uniforme sont equidistants.

Theoréme 2.13. *Soit $b : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continument différentiable avec $b"(0) \neq 0$. On se donne une fonction $\phi : [0,T] \longrightarrow [0,+\infty[$ différentiable avec $\phi(0)=0$.*
On suppose que $\mid \frac{b"}{\phi} \mid^{\frac{1}{2}}$ est intégrable et qu 'il existe $t^* \in [0,T]$ et $B>0$ tel que la fonction ϕ est non décroissante sur $[0,t^*]$ et $\phi > B$ sur $[t^*,T]$.

Si $b" \neq 0$ sur $[0,T]$ alors pour une partition régulière $(t_i)_{i=1}^n$ générée par $f \propto \mid \frac{b"}{\phi} \mid^{\frac{1}{2}}$ on a

$$\limsup_{n\to+\infty} n^2 \Delta_n \leq \frac{A(\phi)}{4\sqrt{2\pi}} \tag{7}$$

avec $A(\phi)$ défini par (6).
Si b" a seulement un nombre fini de racines sur $[0,T]$ alors pour chaque $\delta > 0$ la densité f peut être modifiée dans un voisinage d 'un de ses racines tel que l 'on ait :

$$\limsup_{n\to+\infty} n^2 \Delta_n \leq \frac{A(\phi)}{4\sqrt{2\pi}} + \delta$$

Remarque 2.2. *Le theorème 2.13 peut être étendu à une fonction linéaire par morceaux qui n'est pas continue . En effet soit $(t_i)_{i=1}^n$ une partition régulière de taille n et b_n une fonction qui est linéaire sur chaque intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ tel que pour tout $t \in [0,T]$*

$$|b(t) - b_n(t)| \leq \sup_{t\in[0,T]} \left| b(t) - b(t_{i-1}) - (t - t_{i-1})\frac{\Delta b_i}{\Delta t_i} \right|$$

alors (7) est verifié.

La preuve du theorème 2.13 est basée sur le lemme suivant :

Lemma 2.4. *Soit b une fonction deux fois continument différentiables, $\phi : [0,T] \longrightarrow [0,+\infty[$ une fonction continue avec $\phi(0)=0$ et f une densité sur $[0,T]$.*
Soit $(t_i)_{i=1}^n$ une partition régulière générée par f.
Supposons qu'il existe des constantes A_1, A_2, t^* et $B>0$ tel que $b" \neq 0$ sur $[0,t^*]$, ϕ est non décroissante sur $[0,t^*]$, $\phi > B$ sur $[t^*,T]$, $f \geq A_1$ sur $[0,T]$ et $f^2 \geq A_2 \frac{|b"|}{\phi}$ sur $[0,t^*]$.
Posons :$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ et $\Delta b_i = b(t_i) - b(t_{i-1})$ alors

$$\limsup_{n\to+\infty} \sup_{t\in[0,T]} \frac{n^2}{\phi(t)} \left| b(t) - b(t_{i-1}) - (t-t_{i-1})\frac{\Delta b_i}{\Delta t_i} \right| < \infty$$

Preuve. Il existe un entier n_0 et une constante A tel que pour tout $n \geq n_0$ et $t \in [t_{i-1}, t_i]$ avec $t_i \geq t^*$,

$$\frac{n^2}{\phi(t)} \left| b(t) - b(t_{i-1}) - (t-t_{i-1})\frac{\Delta b_i}{\Delta t_i} \right| \leq A$$

D'autre part il existe une fonction ω avec $\omega(0)=1$ qui est continue en 0 tel que pour tout u,$v \in [t_{i-1}, t_i] \subseteq [0,t^*]$ on a

$$\frac{|b"(u)|}{|b"(v)|} \leq \omega(\Delta t_i)$$

Soit $t \in [t_{i-1}, t_i] \subseteq [0,t^*]$ alors il existe $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ et $\theta_i' = \theta_i'(v) \in [t_{i-1}, t_i]$ tel que

$$\begin{aligned} b(t) - b(t_{i-1}) - (t-t_{i-1})\frac{\Delta b_i}{\Delta t_i} &= \int_{t_{i-1}}^{t} \left(b'(v) - \frac{\Delta b_i}{\Delta t_i} \right) dv \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t} \left(b'(v) - b'(\theta_i) \right) dv \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t} (v - \theta_i) b"(\theta_i') dv \end{aligned}$$

donc

$$\left|b(t)-b(t_{i-1})-(t-t_{i-1})\frac{\Delta b_i}{\Delta t_i}\right| \leq \int_{t_{i-1}}^{t} |v-\theta_i||b"(v)|dv\omega(\Delta t_i)$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} &= \int_{t_{i-1}}^{t} f(v)dv \\
&\geq A_2{}^{\frac{1}{2}} \int_{t_{i-1}}^{t} \frac{|b"(v)|^{\frac{1}{2}}}{\phi(v)^{\frac{1}{2}}} dv \\
&\geq \frac{A_2{}^{\frac{1}{2}}}{\phi(t)^{\frac{1}{2}}} \int_{t_{i-1}}^{t} |b"(v)|^{\frac{1}{2}} dv
\end{aligned}$$

Ainsi pour $t \in [t_{i-1}, t_i] \subseteq [0, t^*]$

$$\begin{aligned}
\frac{n^2}{\phi(t)}\left|b(t)-b(t_{i-1})-(t-t_{i-1})\frac{\Delta b_i}{\Delta t_i}\right| &\leq A_2{}^{-1}\omega(\Delta t_i)\frac{\int_{t_{i-1}}^{t}|v-\theta_i||b"(v)|dv}{\left(\int_{t_{i-1}}^{t}|b"(v)|^{\frac{1}{2}}dv\right)^2} \\
&\leq A_2{}^{-1}\omega(\Delta t_i)\frac{\sup_{v\in[0,t^*]}|b"(v)|}{\inf_{v\in[0,t^*]}|b"(v)|}
\end{aligned}$$

■ **Preuve.** (théorème) Supposons que $b" \neq 0$ sur $[0, T]$
Il résulte du lemme précédant qu'il existe une constante $M > 0$ et un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$ et pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$|b(t) - b_n(t)| \leq \phi(t)\frac{M}{n^2}$$

Par ailleurs, pour tout $t \in [0, T]$

$$\limsup_{n\to+\infty} n^2|b(t)-b_n(t)| \leq \frac{\phi(t)}{8}\left(\int_0^T \sqrt{\frac{|b"(u)|}{\phi(u)}}du\right)^2$$

Soit $\delta > 0$, $t^{**} < t$ et définissons :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{M}{n^2} & \text{si } t \leq t^{**} \\ \left[\frac{1}{8}\left(\int_0^T \sqrt{\frac{|b"(u)|}{\phi(u)}}du\right)^2 + \delta\right] & \text{si } t > t^{**} \end{cases}$$

Alors pour n assez grand on a :

$$|b(t) - b_n(t)| \leq \phi(t)\varepsilon(t)$$

donc

$$\limsup_{n\to+\infty} n^2\Delta_n \leq \frac{2\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{n^2}\left[\left(\frac{1}{8}\left(\int_0^T \sqrt{\frac{|b"(u)|}{\phi(u)}}du\right)^2 + \delta\right)^2 \int_{t^{**}}^{T} \phi'(t)^2 dt + M^2 \int_0^{t^{**}} \phi'(t)^2 dt\right]^2$$

ainsi pour t^{**} très petit (7) est verifié ■

2.3.2 Cas de deux frontiéres

On se donne deux fonctions a et b $[0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffissament continue par morceaux avec $a(0) < 0 < b(0)$. Soit a_n et b_n deux fonction linéaire par morceaux sur $[0,T]$ tel que $a_n(s_i) = a(s_i)$, $b_n(t_i) = b(t_i)$ avec $(s_i)_{i=1}^n$ et $(t_i)_{i=1}^n$ deux partitions de l'intervalle $[0,T]$.
Les erreurs d'approximations sont données par

$$\begin{aligned}\Delta_n &= |Q(a(t),b(t),T) - Q(a_n(t),b_n(t),T)| \\ &= |P\{a(t) < W(t) < b(t), 0 \leq t \leq T\} - P\{a_n(t) < W(t) < b_n(t), 0 \leq t \leq T\}|.\end{aligned}$$

Considérons les fonctions différentiables ϕ_a, ϕ_b définies comme suit :
$\phi_a : [0,T] \longrightarrow [0,+\infty[$ avec $\phi_a(0) = 0$; $\phi_b : [0,T] \longrightarrow [0,+\infty[$ avec $\phi_b(0) = 0$.

Nous voulons trouver les partitions $(s_i)_{i=1}^n$ et $(t_i)_{i=1}^n$ de l'intervalle $[0,T]$ tel que a_n et b_n soient linéaire respectivement sur $[s_{i-1}, s_i]$ et sur $[t_{i-1}, t_i]$.
D'autres part soient les fonctions ϕ_a et ϕ_b des fonctions différentiables définies comme suit $\phi_a : [0,T] \longrightarrow [0,+\infty[$ avec $\phi_a(0) = 0$;$\phi_b : [0,T] \longrightarrow [0,+\infty[$ avec $\phi_b(0) = 0$
Soient ε_a et ε_b des constantes positives.
Ces deux fonctions vérifient respectivement

$$|a(t) - a_n(t)| \leq \varepsilon_a \phi_a(t),$$

$$|b(t) - b_n(t)| \leq \varepsilon_b \phi_b(t).$$

On pose $\sigma_a = 2\varepsilon_a \Big(\int_0^T \phi_a'(t)^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}$ et $\sigma_b = 2\varepsilon_b \Big(\int_0^T \phi_a'(t)^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}$.
Ainsi nous avons

$$\Delta_n \leq \Big(2\Phi(\frac{2}{\sigma_a}) - 1\Big) + \Big(2\Phi(\frac{2}{\sigma_b}) - 1\Big).$$

On peut choisir une partition régulière $(s_i)_{i=1}^n$ générée par la densité $f_a \propto \left|\frac{a"}{\phi_a}\right|^{\frac{1}{2}}$ et $(t_i)_{i=1}^n$ générée par $f_b \propto \left|\frac{b"}{\phi_b}\right|^{\frac{1}{2}}$.
Nous avons alors le théorème suivant :

Theoréme 2.14. *Supposons les hypothèses du théorème* 2.13 *pour* a, b ,ϕ_a *et* ϕ_b.
Soit $(s_i)_{i=1}^n$ *et* $(t_i)_{i=1}^n$ *des partitions régulière générées par* $f_a \propto \left|\frac{a"}{\phi_a}\right|^{\frac{1}{2}}$ *et* $f_b \propto \left|\frac{b"}{\phi_b}\right|^{\frac{1}{2}}$ *respectivement alors*

$$\limsup_{n\to+\infty} n^2 \Delta_n \leq \frac{A(\phi_a) + A(\phi_b)}{4\sqrt{2\pi}}$$

avec $A(\phi_a) = \Big(\int_0^T \sqrt{\frac{|a"(u)|}{\phi_a(u)}} du\Big)^2 \Big(\int_0^T \phi_a'(t)^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}$ *et* $A(\phi_b) = \Big(\int_0^T \sqrt{\frac{|b"(u)|}{\phi_b(u)}} du\Big)^2 \Big(\int_0^T \phi_b'(t)^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}$.

2.4 Calculs numériques

Dans cette section, nous proposons des algorithmes afin d'obtenir la valeur numérique de la probabilité $Q(b(t),T) = P\{W(t) \geq b(t), t \in [0,T]\}$.
On supposera que $T = 1$.

2.4.1 Cas d'une frontière linéaire

Nous avons montré que si b est linéaire sur $[0,T]$, on a

$$Q(b(t),T) = P\{W(t) \geq b(t), 0 \leq t \leq T\} = 1 - \Phi\left(\frac{uT+v}{\sqrt{T}}\right) + \exp[-2uv]\Phi\left(\frac{uT-v}{\sqrt{T}}\right).$$

Donc pour obtenir la valeur numérique de cette probabilité, il suffit de calculer la valeur prise par la fonction de répartition au point x.
En application, nous considérons les quatre fonctions suivantes : $0,5t+1$; $-t+0,1$; $t+0,5$; $-0,1t+0,5$.
La probabilité de passage pour chacune de ces fonctions est donnée dans le tableau suivant.
Le code est exposé dans la partie annexe.

$Q(0,5t+1;T)$	$\approx 0,1803118$
$Q(-t+0,1;T)$	$\approx 0,9816428$
$Q(t+0,5;T)$	$\approx 0,321182$
$Q(-0,1t+0,5;T)$	$\approx 0,6476748$

TABLE 2.1 – *Probabilité de passage de la frontière dans le cas d'une frontière linéaire*

2.4.2 Cas d'une frontière quelconque

On suppose ici que la partition de l'intervalle $[0,T]$ est uniforme. c'est *à* dire que $t_i = \frac{iT}{n}$, $i = 1,2,...,n$. Soit b_n une fonction continue linéaire par morceaux sur $[0,T]$ tel que $b_n(t_i) = b(t_i)$. Nous avons montré précédemment(théorème 3.2) que

$$Q(b_n(t),T) = P\{W(t) \geq b_n(t), t \in [0,T]\} = 1 - Eg[W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n)] = 1 - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x)dx,$$

où

$$\begin{aligned} g(x) &= \prod_{i=1}^{n} 1_{]-\infty,b_n(t_i)[}(x_i)\left(1 - \exp\left[-\frac{2}{\Delta t_i}(b_n(t_{i-1}) - x_{i-1})(b_n(t_i) - x_i)\right]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} 1_{]-\infty,b(t_i)[}(x_i)\left(1 - \exp\left[-\frac{2}{\Delta t_i}(b(t_{i-1}) - x_{i-1})(b(t_i) - x_i)\right]\right) \end{aligned}$$

et

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left[-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right]$$

qui est la densité du vecteur $(W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n))$.
Nous utilisons les méthodes de Monte Carlo pour approximer cette probabilité.

Rappels sur les méthodes de Monte Carlo

Pour utiliser une méthode de Monte Carlo, on doit tout d'abord mettre sous la forme d'une espérance la quantité que l 'on cherche *à* calculer.
A l'issue de cette étape, il reste *à* calculer une quantité de la forme $E(X)$. Pour calculer $E(X)$,

il convient de savoir simuler une variable aléatoire selon la loi de X. On dispose alors d'une suite $(X_i)_{1\leq i\leq N}$ de N réalisation de la variable aléatoire X. Souvent on cherche $\grave{a}$ évaluer une intégrale plus générale

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, x_2, ..., x_d)f(x_1, x_2, ...x_d)dx_1dx_2......dx_d \end{aligned}$$

avec f positive, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = 1$ alors $I = E(g(X))$ o$\grave{u}$ X est une variable aléatoire $\grave{a}$ valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi de densité f.
Ainsi on approche I par $I \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$ avec (X_i) une suite de variables aléatoires indépendants de loi de densité f. Par exemple Soit ϕ la fonction de répartition de la loi normale standard . Calculons

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Posons

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} 1_{]-\infty,t]}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx$$

avec $g(x) = 1_{]-\infty,t]}(x)$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ alors

$$\phi \approx \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} 1_{]-\infty,t]}(X_i)$$

avec $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$
Ainsi en nous basant sur ces méthodes on a :

$$Q(b_n(t), T) \approx 1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{g(w_k)}{N}$$

òu w_k suit la même loi que le vecteur $(W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n))$
Considérons le vecteur $Y = (y(t_1), y(t_2), ..., y(t_n))$ avec $y(t_i) = y(t_{i-1}) + \sqrt{h}Z_i$ où $h = t_i - t_{i-1} = \frac{T}{n}$ et $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
On a : $y(t_i) - y(t_{i-1}) = \sqrt{h}Z_i \sim \mathcal{N}(0, h = t_i - t_{i-1})$
On en déduit que le procéssus $(y(t_i))$ est un mouvement brownien donc Y a même loi que $(W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n))$.
Nous exposons maintenant les étapes pour obtenir la valeur de $Q(b_n(t), T)$.

1. générer $w_k = (y(t_1), y(t_2), ..., y(t_n))$.
2. évaluer la valeur $g(y(t_1), y(t_2), ..., y(t_n))$.cette valeur est notée p_k.
3. Répéter les étapes (1) $\grave{a}$ (2) pour $k = 1, ..., N$ et calculer $\widetilde{P}(b_n(t), T) = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k}{N}$.

Alors $Q(b_n(t), T)$ peut être approximée par $\widetilde{Q}(b_n(t), T) = 1 - \widetilde{P}(b_n(t), T)$
En se basant sur ces résultat d'aprés le théorème 3.5 pour n assez grand

$$Q(b(t), T) \approx \widetilde{Q}(b_n(t), T)$$

En application nous considérons les quatres fonctions suivantes : $\exp(-t)$; $\sqrt{1+t}$; $1 + \ln(1 + t)$; $1 + t^2$.

Pour chacune de ces fonctions, nous calculons leur probabilite de passage $Q(b(t), T)$. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant avec $N = 10000$, $T = 1$ et n prenant les valeurs 100, 500, 1000 ; 5000.
On rapelle que N est le nombre de répititions, n la taille de partition et $T = t_n = 1$
Le code avec R est exposé dans la partie annexe.

	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 5000$
$Q(\exp(-t), T)$	$0,5554882$	$0,5631744$	$0,5614876$	$0,5639812$
$Q(\sqrt{1+t}, T)$	$0,1945352$	$0,1895688$	$0,199754$	$0,2033459$
$Q(1 + \ln(1+t), T)$	$0,1251605$	$0,1292357$	$0,1270915$	$0,1257384$
$Q(1 + t^2, T)$	$0,1456093$	$0,1449586$	$0,1501727$	$0,1429993$

TABLE 2.2 – *Probabilité de passage de la frontière dans le cas d'une frontière quelconque*

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié en premier lieu un exemple de processus stochastique qui est le mouvement brownien. Cette étude nous a permis de connaitre certaines propriétés classiques du mouvement brownien et particulièrement la densité du vecteur $(W(t_1), W(t_2), ..., W(t_n))$ qui nous a servi beaucoup dans le chapitre 2.

La probabilité de passage de la frontière pour le mouvement brownien a constitué le point le plus important de notre travail.
En considérant une fonction continue qui est soit linéaire sur un intervalle $[0, T]$, soit linéaire par morceaux sur $[0, T]$ de partition $t_0 < t_1 < ... < t_n$, nous avons pu obtenir une formule explicite de la probabilité de passage correspondant *à* chaque situation.
Pour le cas de deux fonctions continues linéaires par morceaux et satisfaisant *à* certaines conditions, une formule explicite a été proposée.
Nous sommes parvenus *à* donner une approximation de la probabilité de passage au cas *où* les frontières étaient quelconques (fonction concave, fonction convexe) en utilisant certaines propriétés classiques en analyse (convergence uniforme) et en théorie des probabilités (propriété de la monotonie sur la mesure de probabilité).
Nous avons montré que les erreurs d'approximations Δ_n convergeaient avec une vitesse de $0(\frac{1}{n^2})$ et que la lim sup de la suite $n^2\Delta_n$ était finie.
Enfin nous avons terminé ce travail par des calculs numériques rendus accessibles grâce aux méthodes de Monte Carlo programmées sous le language R.
Les probabilités de passage de la frontières continuent de nos jours de passsionner les probabilistes. Citons les travaux récents de

- James C. fu sur le théme Linear and non-linear boundary crossing probabilities for brownien motion and its application in Predicting Bankrupptcy publié le 25 ao*ù*t 2011.

- Jinghai shao and Liqun Wang sur "Nonlinear boundary crossing probabilities of brownien motion with random jumps" publié le 16 Mai 2012

Ainsi il serait trés intéressant d'étendre ces résultats dans le cas des autres processus comme les processus de diffusion, les processus de Poisson etc...

Annexe

Nous présentons ici les codes qui nous ont permis d'obtenir les deux tableaux. Les codes sont rédigés avec le logiciel R.

code qui a permis de construire le tableau 2.1

Pour $b(t) = 0.5t + 1$

```
x<- pnorm(1.5, 0, 1)
y<- pnorm(-0.5, 0, 1)
Q<- 1-x+exp(-1)*y
```

Pour $b(t) = -t + 0,1$

```
x<- pnorm(-0.9, 0, 1)
y<- pnorm(-1.1, 0, 1)
Q<- 1-x+exp(0.2)*y
```

Pour $b(t) = t + 0,5$

```
x<- pnorm(1.5, 0, 1)
y<- pnorm(0.5, 0, 1)
Q<- 1-x+exp(-1)*y
```

Pour $b(t) = -0,1t + 0,5$

```
x<- pnorm(0.4, 0,1)
y<- pnorm(-0.6,0, 1)
Q<- 1-x+exp(0.1)*y
```

La fonction $pnorm(x, 0, 1)$ donne la valeur de la fonction de répartition au point x.

code qui a permis d'obtenir le tableau 2.2

ALGO1

```
kepi1=function(t)exp(-t)
ALG11 <- function (n, T, N) {
h <- T/n ;
time <- seq(from = 0, to = T, by = h) ;
b <- sapply(time, kepi1) ;
p <- rep(0, times = N) ;
f <- rep(1, times = n) ;
```

```
y <- 0 ;
for (k in 1 :N) {
Ind <- 1 ;
for (i in 2 :(n+1)) {
y[i] <- y[i-1] + sqrt(h)*rnorm(1) ;

    if (y[i] > b[i]) {
Ind <- 0 ; break ;
}
f[i-1] <- 1- exp(- 2*(b[i-1] - y[i-1])*(b[i] - y[i])/h) ;
}
p[k] <- prod(Ind*f) ;
}
Q <- 1 - sum(p)/N ; Q
}
ALGO2
kepi2=function(t)sqrt(1+t)
ALG22 <- function (n, T, N) {
h <- T/n ;
time <- seq(from = 0, to = T, by = h) ;
b <- sapply(time, kepi2) ;
p <- rep(0, times = N) ;
f <- rep(1, times = n) ;
y <- 0 ;
for (k in 1 :N) {
Ind <- 1 ;
for (i in 2 :(n+1)) {
y[i] <- y[i-1] + sqrt(h)*rnorm(1) ;
if (y[i] > b[i]) {
Ind <- 0 ; break ;
}
f[i-1] <- 1- exp(- 2*(b[i-1] - y[i-1])*(b[i] - y[i])/h) ;
}
p[k] <- prod(Ind*f) ;
}
Q <- 1 - sum(p)/N ; Q
}

    ALGO3

    kepi3<-function(t)1+log(1+t)
ALG33 <- function (n, T, N) {
h <- T/n ;
time <- seq(from = 0, to = T, by = h) ;
b <- sapply(time, kepi3) ;
p <- rep(0, times = N) ;
f <- rep(1, times = n) ;
y <- 0 ;
for (k in 1 :N) {
Ind <- 1 ;
for (i in 2 :(n+1)) {
y[i] <- y[i-1] + sqrt(h)*rnorm(1) ;
```

```
if (y[i] > b[i]) {
Ind <- 0; break;
}
f[i-1] <- 1- exp(- 2*(b[i-1] - y[i-1])*(b[i] - y[i])/h);
}
p[k] <- prod(Ind*f);
}
Q <- 1 - sum(p)/N; Q
}
```

ALGO4

kepi4<-function(t)1+t^2

```
ALG44 <- function (n, T, N) {
h <- T/n;
time <- seq(from = 0, to = T, by = h);
b <- sapply(time, kepi4);
p <- rep(0, times = N);
f <- rep(1, times = n);
y <- 0;
for (k in 1 :N) {
Ind <- 1;
for (i in 2 :(n+1)) {
y[i] <- y[i-1] + sqrt(h)*rnorm(1);
if (y[i] > b[i]) {

Ind <- 0; break;
}
f[i-1] <- 1- exp(- 2*(b[i-1] - y[i-1])*(b[i] - y[i])/h);
}
p[k] <- prod(Ind*f);
}
Q <- 1 - sum(p)/N; Q
}
```

Pour obtenir la valeur de la probabilité de passage $Q(-\infty, \exp(-t))$ pour $n = 100$, $N = 200000$, $T = 1$, on fait appel *à* la fonction ALG11(100, 1, 200000)

Bibliographie

[1] Monique Jeanblan. *Cours de calcul stochastique.* Master 2IF EVRY, septembre 2006.

[2] Alain Camanes. *Le mouvement brownien.* cours, 06 novembre 2006.

[3] Monique Jeanblan,Thomas Simon. *élément de calcul stochastique.* cours, IRBID, septembre 2005.

[4] Jean -François Le Gall. *Mouvement brownien et calcul stochastique.* Notes de cours de MASTER2, Universite Paris-sud, octobre 2008.

[5] Jean Jacod. *Mouvement brownien et calcul stochastique.* Université Pierre et Marie Curie, cours de master 2, specialité : Probabilités et Applications, 2006-2007.

[6] N Bouleau. *Probabilité de l'ingénieur, variable aléatoire et simulation.* Herman, 2002, chap4.

[7] Reuven Y. Rubinstein. *Simulation and the monte carlo method.John Wiley and Sons, Inc,2009.*

[8] George S. Fishman. *A first course in monte carlo,Cengage Learning, 2005 chap2.*

[9] J.R.Lobry. *Programmation statistique avec R, les bases du language.* université Claude Bernard Lyon 1-france, Biologie et modélisation, cours, 2007-2008 (saison2).

[10] Laure Elie ,Bernard lapeyre. *Introduction aux méthodes de monte carlo.* cours, Septembre 2001.

[11] Liqun Wang, Klaus Potzelberger. *boundary crossing probability for brownien motion and general boundaries.* J.Appl.prob. 34. 54-65 (1997), Printed in israel, Applied Probability.

[12] Klaus Potzelberger ,Liqun Wang. *boundary crossing probability for the brownien motion.* J.Appl.prob. 38.152-164 (2001), Printed in israel, Applied Probability.

[13] Christian P.Robert, George Casella. *Méthodes de Monte Carlo avec R*, Springer-Verlag France, 2011.

[14] David Siegmund, *Boundary crossing probabilities and statistical application.* Ann. statist. 14, 361-404 (1986).

[15] Patrick Billingsley, *Probability and mesure.* 2nd edn. Wiley, 1986, New york.