

## **Nomenclature principale**

### **Liste des lettres utilisées**

$B$ : largeur au miroir (m)	$Q_e(t)$ : Débit entrant à l'instant $t$ ( $m^3/s$ )
$C_0$ : Coefficient de Muskingum	$Q_e(t + \Delta t)$ : Débit entrant à l'instant $t + \Delta t$ ( $m^3/s$ )
$C_1$ : Coefficient de Muskingum	$Q_s(t)$ : Débit sortant à l'instant $t$ ( $m^3/s$ )
$C_2$ : Coefficient de Muskingum	$Q_s(t + \Delta t)$ : Débit sortant à l'instant $t + \Delta t$ ( $m^3/s$ )
$C_{01}$ : Coefficient de Muskingum	$Q_o(t)$ : Débit amont observé à l'instant $t$ ( $m^3/s$ )
$C_{11}$ : Coefficient de Muskingum	$Q(i)$ : Débit pondérée ( $m^3/s$ )
$C_{21}$ : Coefficient de Muskingum	$Q_{am}(i)$ : Débit amont à l'instant $i$ ( $m^3/s$ )
$E$ : Somme des résidus au carré	$Q_{am}(i + 1)$ : Débit amont à l'instant $i + 1$ ( $m^3/s$ )
$e$ : Fonction objectif	$Q_{av}(i)$ : Débit aval à l'instant $i$ ( $m^3/s$ )
$I$ : Pente du canal	$Q_{av}(i + 1)$ : Débit aval à l'instant $i + 1$ ( $m^3/s$ )
$K$ : Paramètre du modèle Muskingum (s)	$t$ : temps (s)
$Kms$ : Coefficient de Manning-Strickler	$\Delta t$ : Pas de temps (s)
$L(x, \lambda)$ : Fonction transformée	$V_s(t)$ : Volume stocké ( $m^3$ )
$L$ : Longueur du canal (m)	$V_{s(p)}(t)$ : Volume stocké dans le prisme ( $m^3$ )
$n$ : Nombre total d'observations	$V_{s(t)}(t)$ : Volume stocké dans le triangle ( $m^3$ )
$Nmax$ : Nombre total d'itération sur $X$	$V_{s(total)}(t)$ : Volume total stocké ( $m^3$ )
$i$ : Indice d'espace	$\Delta V(i)$ : Variation du stockage ( $m^3$ )
$l$ : Indice du multiplicateur de Lagrange	$X$ : Paramètre de pondération

### **Liste des lettres grecques**

$\varepsilon_i$ : résidus	$\lambda$ : Multiplicateur de Lagrange
$\varphi(x)$ : Fonction à optimiser	$\Psi(x)$ : contrainte de la fonction à optimiser

### **Les abréviations**

FAO: Food and Agricultural Organization (organisation des nations unies pour l'alimentation et l'agriculture)

FST : Faculté des Sciences et Techniques

LHMF : Laboratoire d'Hydraulique et Mécanique des Fluides

UCAD: Université Cheikh Anta Diop

## **Liste des figures**

Figure 1 : Principe du modèle Muskingum (Boubakeur 2011).....	5
Figure 2 : Evaluation de la variation de stockage d'eau dans un bief (Muzy & Higy, 1998). ...	6
Figure 3 : Représentation graphique de $\Delta V$ en fonction de $Q$ .....	8
Figure 4 : La méthode des multiplicateurs de Lagrange permettant de trouver un optimum (Wikipedia).....	16
Figure 5 : Calage de la méthode de Muskingum sur l'hydrogramme de Cémagref. ....	27
Figure 6 : Calage de la méthode de Muskingum sur l'hydrogramme triangulaire.....	27
Figure 7 : Calage de la méthode de Muskingum sur l'hydrogramme henderson.....	28
Figure 8 : Calage de la méthode de Muskingum sur l'hydrogramme perumal.....	28
Figure 9 : représentation graphique de l'hydrogramme entrant calculé.....	30
Figure 10 : comparaison des hydrogrammes entrants calculés .....	31

### **Liste des tableaux**

Tableau 1 : caractéristique des canaux 1 et 2. ....	25
Tableau 2 : Valeur optimal de K et X des hydrogrammes simples dans le canal 1. ....	26
Tableau 3 : Valeur optimal de K et X des hydrogrammes simples dans le canal 2. ....	26
Tableau 4 : valeurs des paramètres K et X des premiers d'études. ....	29
Tableau 5 : valeurs des paramètres K et X et des coefficients $C_{01}$ , $C_{11}$ , $C_{21}$ de la présente étude. ....	29
Tableau 6 : valeurs des hydrogrammes de la présente d'étude. ....	30
Tableau 7 : comparaison entre la présente d'étude et les premières études ....	31



**Liste des sites web**

[www.fr.wikipedia.org/wiki/multiplicateur\\_d\\_Lagrange](http://www.fr.wikipedia.org/wiki/multiplicateur_d_Lagrange)

[http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00520785/file/1988Th\\_KOVACS\\_Y\\_NS14698.pdf](http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00520785/file/1988Th_KOVACS_Y_NS14698.pdf)

[hydrologie.org/BIB/manuels/Musy1\\_HGA.pdf](http://hydrologie.org/BIB/manuels/Musy1_HGA.pdf)

[http://these.univ-batna.dz/index.PHP?option=com\\_docman&task](http://these.univ-batna.dz/index.PHP?option=com_docman&task)

## **Table des matières**

Remerciements.....	ii
Dédicaces .....	iii
Nomenclature principale .....	iv
Liste des figures .....	v
Liste des tableaux.....	vi
Liste des sites web .....	vii
Table des matières.....	viii
INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE 1: MODELISATION DIRECTE DES ECOULEMENTS : DE L'AMONT VERS L'AVAL PAR LA METHODE MUSKINGUM .....	3
I. LA METHODE DE MUSKINGUM .....	4
I.1. Introduction .....	4
I.2. L'équation de continuité.....	4
I.3. Loi empirique de stockage linéaire .....	4
II. ESTIMATION DES PARAMETRES K ET X PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES .....	7
III. ORGANIGRAMME DE LA METHODE DE MUSKINGUM DIRECT .....	10
CHAPITRE 2: MODELISATION INVERSE DES ECOULEMENTS : DE L'AVAL VERS L'AMONT PAR LA METHODE MUSKINGUM.....	12
I. INTRODUCTION .....	13
I.1. Synthèse bibliographique sur la modélisation inverse .....	13
I.2. Synthèse des travaux .....	14
II. ESTIMATION DES PARAMETRES DE MUSKINGUM K ET X .....	15
II. 1. Rappel de la méthode de multiplicateur de Lagrange.....	15
II. 1. a. Dimension finie .....	15
II. 1. b. Cas généralisé.....	16
II. 1. c. Application de la méthode de multiplicateur de Lagrange.....	17
III. ORGANIGRAMME DE LA METHODE DE MUSKINGUM INVERSE.....	22
CHAPITRE 3 : APPLICATIONS ET RESULTATS .....	24
I. INTRODUCTION .....	25
II. APPLICATIONS ET RESULTATS POUR LA METHODE DIRECTE .....	25

III. APPLICATIONS ET RESULTATS POUR LA METHODE INVERSE .....	29
CONCLUSION GENERALE .....	32
BIBLIOGRAPHIE .....	34

## INTRODUCTION GENERALE

Depuis plusieurs décennies et notamment en lien avec la perspective du changement climatique, l'eau est considérée comme une ressource rare dans de nombreuses régions du monde du fait de la concurrence entre ses différents usages (agriculture irriguée, industrie, utilisation domestique et loisirs). L'agriculture représente environ 70 % des prélèvements d'eau douce, chiffre pouvant atteindre 95 % dans certains pays en voie de développement (source FAO). De ce fait, l'amélioration de l'utilisation de l'eau en agriculture irriguée est devenue une préoccupation majeure. Il convient à la fois de tirer la meilleure partie de l'eau disponible pour des raisons économiques et de préserver l'environnement en adoptant des pratiques qui sauvegardent la qualité de la ressource en eau, en limitant les transferts des eaux souvent chargées de fertilisants et de pesticides vers les nappes.

Dans les réseaux d'irrigation l'eau s'écoule généralement par gravité dans des canaux. Une utilisation rationnelle de l'eau pour une satisfaction des différents usages est impérative. Cet aspect du problème nécessite généralement une maîtrise des processus qui gouvernent les écoulements à surface libre tels qu'ils se déroulent dans les canaux. L'étude mathématique de la propagation des écoulements dans les canaux naturels ou artificiels a été formulée par Barré de Saint-Venant (1871) à travers le système d'équations aux dérivées différentielles qui porte son nom. Ce système repose sur la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Compte tenu de la complexité de ces équations, une solution simplifiée est recherchée chaque fois que cela est possible. C'est ainsi qu'on est passé de l'équation de l'onde diffusante, à la méthode Muskingum. En matière de contrôle des plans d'eau pour l'irrigation, et particulièrement dans la gestion et la planification des ressources en eaux la répartition spatiale et temporelle des besoins est généralement connue. Il s'agit alors de calculer la répartition des volumes qui leurs sont associés. Le problème qui se pose est celui de la modélisation inverse : pour une condition aval fixée en une section du canal, il faut déterminer la condition associée à l'amont. Ce problème a été traité par différentes approches : équations de Saint – Venant (Wojciech & Romuald, 2009); équation de l'onde diffusante (Koussis, Mazi, Lykoudis, & Argiriou, 2012); équation d'Hayami (Dooge & Bruen, 2005); méthode Muskingum (Das, 2009). La méthode Muskingum a été initialement développée par McCarthy (1939), dans des travaux de planification (contrôle) dans la rivière Muskingum (Ohio) aux USA. Elle repose sur l'équation de continuité associée à une loi de stockage linéaire.

L'objectif de notre travail est d'utiliser la méthode Muskingum dans un problème de modélisation inverse des écoulements dans un canal rectangulaire d'irrigation en nous basant sur le travail de Das (2009). Notre étude s'articule autour de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappellerons la modélisation directe des écoulements dans un canal par la méthode Muskingum, calculer l'hydrogramme aval connaissant l'hydrogramme amont.

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons la modélisation inverse des écoulements dans un canal à l'aide du modèle Muskingum, c'est-à-dire calculer l'hydrogramme amont connaissant l'hydrogramme aval.

Le troisième chapitre sera consacré à l'application de la méthode Muskingum directe à la simulation de la propagation d'hydrogrammes de crues simples dans un canal rectangulaire en utilisant l'équation de Henderson et de la méthode de Muskingum inverse à partir de l'hydrogramme proposé par Wilson et déjà utilisé par Das.



# **CHAPITRE 1: MODELISATION DIRECTE DES ECOULEMENTS : DE L'AMONT VERS L'AVAL PAR LA METHODE MUSKINGUM**

## I. LA METHODE DE MUSKINGUM

### I.1. Introduction

La méthode de Muskingum est classée parmi les modèles hydrologiques les plus utilisés dans le calcul des propagations des crues, dites à coefficients. Elle est caractérisée par des procédés qui approchent par de simples relations, les fonctions complexes qui existent entre le volume d'eau contenu dans un bief et les facteurs hydrauliques tels que le débit d'entrée, le débit de sortie, la hauteur d'eau et la pente. Un bief est une section d'un canal ou d'un cours d'eau comprise entre deux écluses ou entre deux chutes. L'équation de Muskingum peut être déterminée à partir de deux équations que sont l'équation de continuité et l'équation de stockage ou loi empirique de stockage linéaire (Boubakeur, 2011).

### I.2. L'équation de continuité

La méthode de Muskingum est basée sur les équations différentielles. La variation du volume stocké dans un bief est égale aux différences entre le débit entrant et le débit sortant exprimer par (1.1) (Boubakeur, 2011).

$$\frac{dV_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t) \quad (1.1)$$

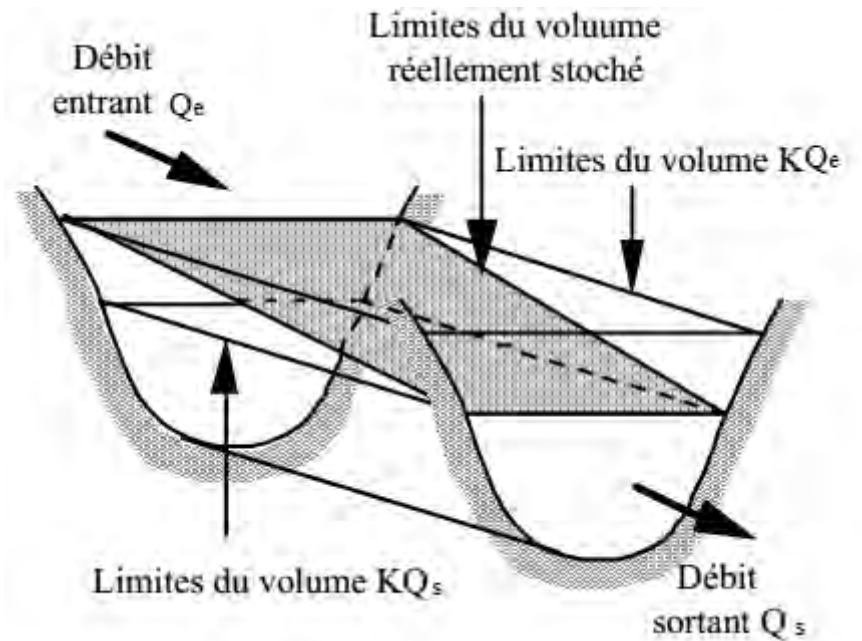
### I.3. Loi empirique de stockage linéaire

Dans un canal, le volume stocké est une fonction des débits entrants et des débits sortants. Dans la méthode de Muskingum, le volume stocké est une fonction linéaire des débits entrants et des débits sortants illustré par la figure 1, d'où nous avons l'expression (1.2) suivantes (Kovacs, 1988).

$$V_s(t) = K[XQ_e(t) + (1 - X)Q_s(t)] \quad (1.2)$$

K : Temps de propagation de l'onde dans le canal ou paramètre du modèle Muskingum (s)

X : Paramètres de pondération sans dimension



**Figure 1 : Principe du modèle Muskingum (Boubakeur 2011).**

Le stockage  $V_s$  et le débit sortant  $Q_s$  sont les inconnus d'un système à deux équations (1.1) et (1.2). Nous allons discrétiser ces deux équations et pour ce faire nous recourons au principe des différences finies et selon les formules (Ly, 2013), (Wagne, 2013):

$$\frac{df}{dt} = \frac{f^{n+\Delta t} - f^n}{\Delta t} \quad (1.3)$$

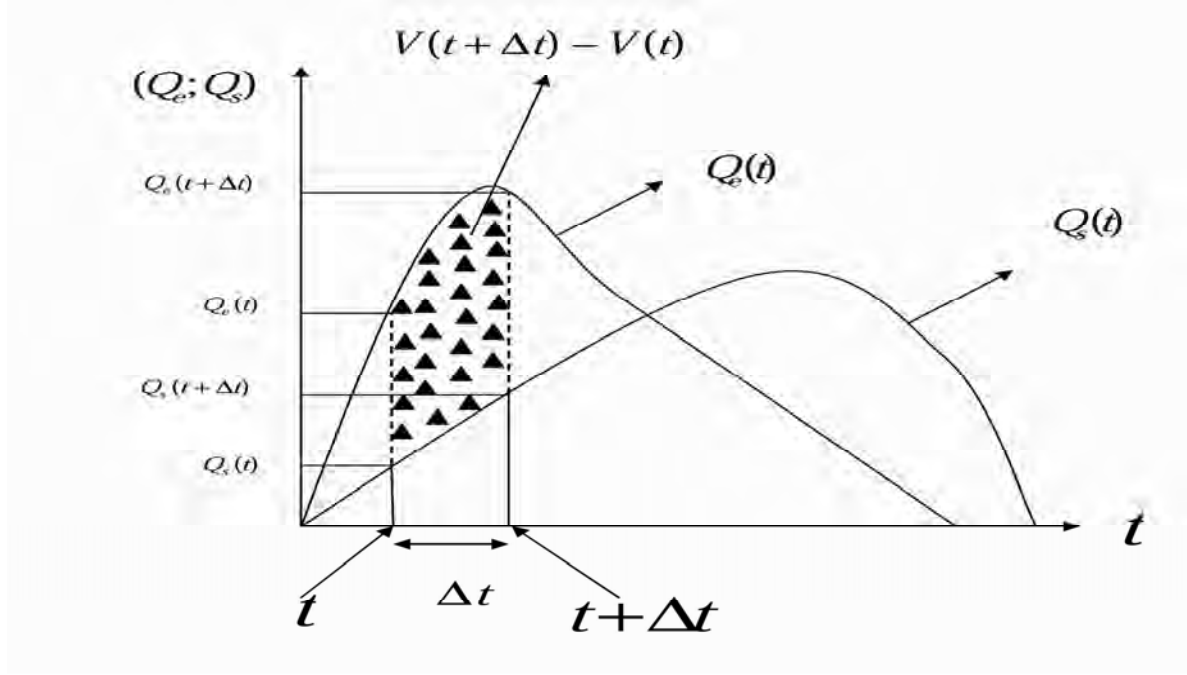
$$f = \frac{f^{n+\Delta t} + f^n}{2} \quad (1.4)$$

D'abord nous allons intégrer l'équation (1.1) entre deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  et nous obtenons l'expression suivante :

$$\int_t^{t+\Delta t} dV_s(t) = \int_t^{t+\Delta t} [Q_e(t) - Q_s(t)] dt \quad (1.5)$$

Utilisation de la méthode des trapèzes illustrés par la figure 2 ci-dessous ou le principe des différences finies donne l'équation (1.6) suivante :

$$V_s(t + \Delta t) - V_s(t) = \left( \frac{Q_e(t) + Q_e(t + \Delta t)}{2} \right) \Delta t - \left( \frac{Q_s(t) + Q_s(t + \Delta t)}{2} \right) \Delta t \quad (1.6)$$



**Figure 2 : Evaluation de la variation de stockage d'eau dans un bief (Muzy & Higy, 1998).**

Nous dérivons l'équation (1.6) suivant  $t$  nous obtenons l'expression suivante :

$$\frac{dV_s(t)}{dt} = K \left[ X \frac{dQ_e(t)}{dt} + (1 - X) \frac{dQ_s(t)}{dt} \right] \quad (1.7)$$

L'utilisation de l'équation (1.7) des différences finies donne l'expression (1.8) :

$$\frac{V_s(t + \Delta t) - V_s(t)}{\Delta t} = \frac{K[X(Q_e(t + \Delta t) - Q_e(t)) + (1 - X)(Q_s(t + \Delta t) - Q_s(t))]}{\Delta t} \quad (1.8)$$

Puis simplifions l'expression (1.8) par  $\Delta t$  donc nous obtenons l'équation (1.9) suivante :

$$V_s(t + \Delta t) - V_s(t) = K[X(Q_e(t + \Delta t) - Q_e(t)) + (1 - X)(Q_s(t + \Delta t) - Q_s(t))] \quad (1.9)$$

Par indentation entre les équations (1.6) et (1.9) nous obtenons l'expression suivante :

$$\left[ \left( \frac{Q_e(t) + Q_e(t + \Delta t)}{2} \right) - \left( \frac{Q_s(t) + Q_s(t + \Delta t)}{2} \right) \right] \Delta t = K[X(Q_e(t + \Delta t) - Q_e(t)) + (1 - X)(Q_s(t + \Delta t) - Q_s(t))] \quad (1.10)$$

Nous divisons l'expression (1.10) par  $\Delta t$  nous obtenons l'équation (1.11) suivante :

$$\left( \frac{Q_e(t) + Q_e(t + \Delta t)}{2} \right) - \left( \frac{Q_s(t) + Q_s(t + \Delta t)}{2} \right) = \frac{K}{\Delta t} \{ X[Q_e(t + \Delta t) - Q_e(t)] + (1 - X)[Q_s(t + \Delta t) - Q_s(t)] \} \quad (1.11)$$

Après développement de l'équation (1.11) nous aboutissons au résultat suivant :

$$\begin{aligned} [0,5\Delta t + K - KX]Q_s(t + \Delta t) \\ = [0,5\Delta t + KX]Q_e(t) + [0,5\Delta t - KX]Q_e(t + \Delta t) \\ + [-0,5\Delta t + K - KX]Q_s(t) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Nous divisons par  $[0,5\Delta t + K - KX]$  l'équation (1.12) nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} Q_s(t + \Delta t) \\ = \frac{[0,5\Delta t + KX]Q_e(t) + [0,5\Delta t - KX]Q_e(t + \Delta t) + [-0,5\Delta t + K - KX]Q_s(t)}{[0,5\Delta t + K - KX]} \end{aligned} \quad (1.13)$$

D'où

$$Q_s(t + \Delta t) = C_0 Q_e(t) + C_1 Q_e(t + \Delta t) + C_2 Q_s(t) \quad (1.14)$$

Avec :

$$C_0 = \frac{[0,5\Delta t + KX]}{[0,5\Delta t + K - KX]} ; C_1 = \frac{[0,5\Delta t - KX]}{[0,5\Delta t + K - KX]} ; C_2 = \frac{[-0,5\Delta t + K - KX]}{[0,5\Delta t + K - KX]} \quad (1.15)$$

Avec :

$$C_0 + C_1 + C_2 = 1 \quad (1.16)$$

Dans lequel  $C_0$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont les coefficients de propagation des crues définie à partir des termes  $\Delta t$ ,  $K$  et  $X$ . La connaissant, de l'hydrogramme d'entrée, de la condition initial, de l'intervalle de temps  $\Delta t$ , des paramètres  $K$  et  $X$  estimés et des coefficients nous permet de calculer l'hydrogramme de sortie à partir de l'équation (1.14).

## II. ESTIMATION DES PARAMETRES K ET X PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES

La détermination de  $K$  et  $X$  nécessite un couple d'hydrogramme observé à l'amont et à l'aval d'un bief. Plusieurs méthodes de calcul sont possibles : la méthode graphique, classique, la méthode des moindres carrés. La méthode des moindres carrés consiste à rechercher une relation entre un couple de deux variables  $\{(x_i, y_i)\}$  de population  $i=1, \dots, n$ .

Soit l'équation de Muskingum suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{2} [(Q_e(t) + Q_e(t + \Delta t)) - (Q_s(t) + Q_s(t + \Delta t))] \\ = K[X(Q_e(t + \Delta t) - Q_e(t)) + (1 - X)(Q_s(t + \Delta t) - Q_s(t))] \end{aligned} \quad (2.1)$$

On pose

$$\Delta V(i) = \frac{\Delta t}{2} [(Q_{am}(i) + Q_{am}(i + 1)) - (Q_{av}(i) + Q_{av}(i + 1))] \quad (2.2)$$

Et

$$Q(i) = [X(Q_{am}(i+1) - Q_{am}(i)) + (1-X)(Q_{av}(i+1) - Q_{av}(i))] \quad (2.3)$$

Avec

$$Q_e(t + \Delta t) = Q_{am}(i+1) \quad (2.4)$$

$$Q_e(t) = Q_{am}(i) \quad (2.5)$$

$$Q_s(t + \Delta t) = Q_{av}(i+1) \quad (2.6)$$

$$Q_s(t) = Q_{av}(i) \quad (2.7)$$

D'où

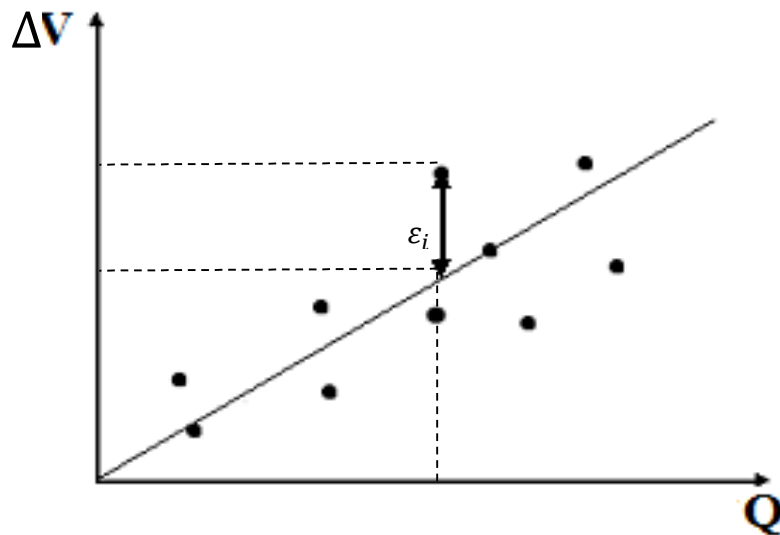
$$\Delta V(i) = K \cdot Q(i) \quad (2.8)$$

$\Delta V(i)$  : Variation du stockage ( $m^3$ )

$Q(i)$  : Débit pondéré ( $m^3/s$ )

Avec  $\{[\Delta V(i), Q(i)]\}$  le couple de variable

Nous remarquons que l'équation (2.8) est sous la forme d'une équation d'une droite donc nous pouvons faire un ajustement en représentant  $\Delta V(i)$  et  $Q(i)$  par un nuage de point.



**Figure 3 : Représentation graphique de  $\Delta V$  en fonction de  $Q$ .**

L'objectif de cette méthode est de rechercher la droite qui ajuste au mieux ce nuage de point, on remarque qu'il y a des écarts entre les points de l'espace et la droite  $\Delta V(i) = K \cdot Q(i)$ . Nous notons ces écarts par  $\varepsilon_i$ , appelés les résidus donc nous obtenons l'expression de ces écarts représenté par (2.9):

$$\varepsilon_i = \Delta V(i) - K \cdot Q(i) \quad (2.9)$$

La somme de ces écarts est donnée par l'équation (2.10)

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n [\Delta V(i) - K \cdot Q(i)] \quad (2.10)$$

Le but de la méthode est de déterminer la droite  $\Delta V(i) = K \cdot Q(i)$  pour laquelle la somme des  $\varepsilon_i$  au carré soit minimale nous avons:

$$E = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [\Delta V(i) - K \cdot Q(i)]^2 \quad (2.11)$$

Pour minimiser on cherche la dérivée partielle de E par rapport à K :

$$\frac{\partial E}{\partial K} = \sum_{i=1}^n 2(\Delta V(i) - K \cdot Q(i))(-Q(i)) \quad (2.12)$$

On pose :

$$\frac{\partial E}{\partial K} = 0 \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^n 2(\Delta V(i) - K \cdot Q(i))(-Q(i)) = 0 \quad (2.14)$$

$$2\left\{-\sum_{i=1}^n \Delta V(i)Q(i) + K \sum_{i=1}^n Q(i)^2\right\} = 0 \quad (2.15)$$

$$-\sum_{i=1}^n \Delta V(i)Q(i) + K \sum_{i=1}^n Q(i)^2 = 0 \quad (2.16)$$

$$K \sum_{i=1}^n Q(i)^2 = \sum_{i=1}^n \Delta V(i)Q(i) \quad (2.17)$$

$$K = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta V(i)Q(i)}{\sum_{i=1}^n Q(i)^2} \quad (2.18)$$

Dans la méthode de Muskingum, X est interprété comme un facteur de pondération et sa valeur est comprise entre 0,0 et 0,5. Une valeur de X supérieure à 0,5 conduit à un hydrogramme aval supérieure à l'hydrogramme amont (Muzy & Higy, 1998). La détermination des paramètres K et X par calage nécessite une série de couple d'hydrogramme d'entrée  $Q_e(t)$  et de sortie  $Q_s(t)$  observé et en respectant les conditions de stabilités défini par  $\Delta t > 2KX$  et  $\Delta t < K$  (Wagne, 2013). Le paramètre X est calculé par la relation :

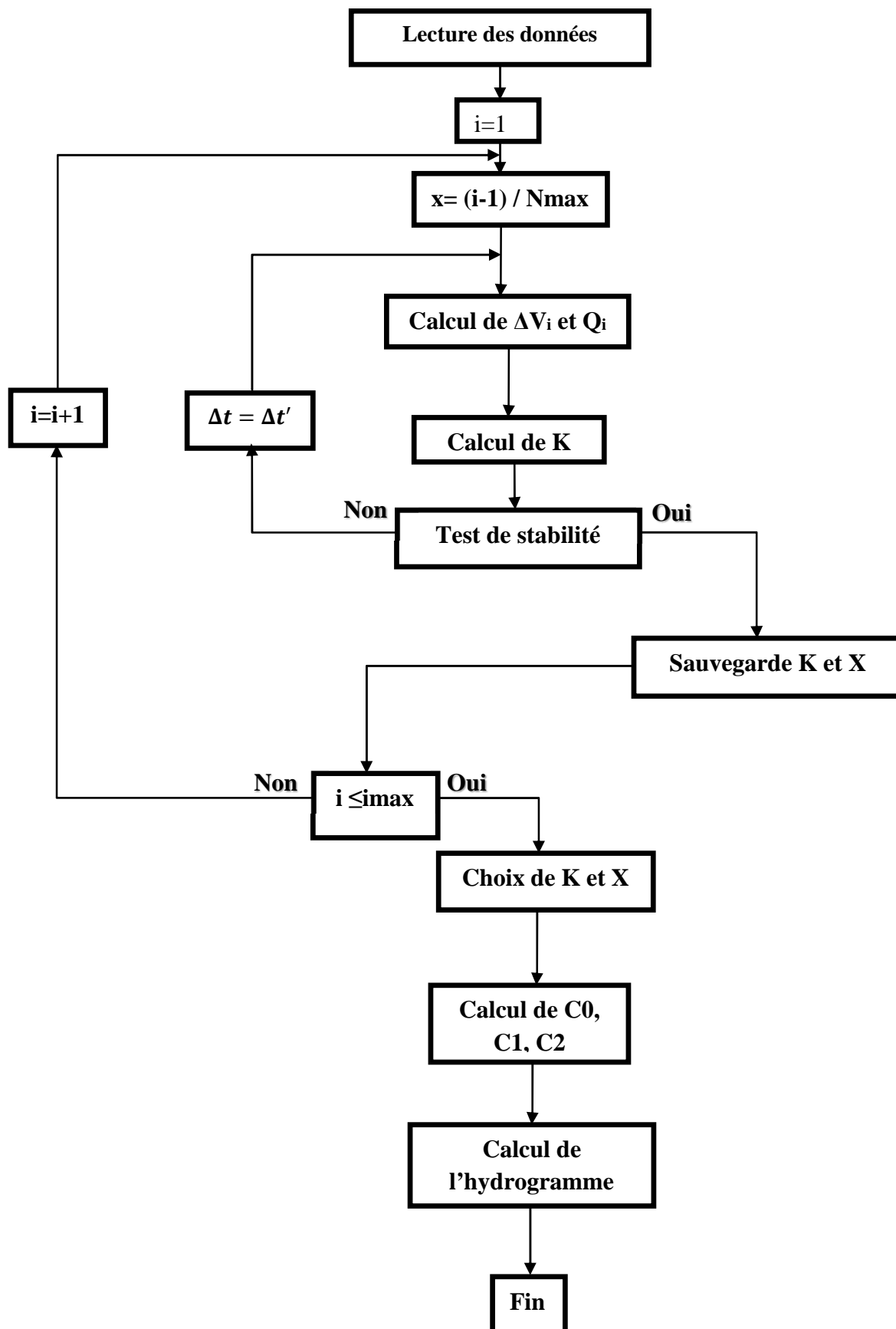
$$X = \frac{i - 1}{N_{max}} \quad (2.19)$$

### III. ORGANIGRAMME DE LA METHODE DE MUSKINGUM DIRECT

Après avoir introduit les données dates, débits amont et débits aval, on procède comme suit :

- K et X sont obtenus par calage à partir des observations
- Vérification des conditions de stabilité  $\Delta t > 2KX$  et  $\Delta t < K$
- Calcul des coefficients de Muskingum
- Calcul de l'hydrogramme aval
- Simulation et présentation des hydrogrammes amont et aval





## **CHAPITRE 2: MODELISATION INVERSE DES ECOULEMENTS : DE L'AVAL VERS L'AMONT PAR LA METHODE MUSKINGUM**

## I. INTRODUCTION

Dans l'écoulement naturel tel qu'il se produit dans les cours d'eau, le frottement pariétal (à la paroi) provoque l'atténuation des hydrogrammes. La modélisation inverse des écoulements est une procédure visant à déterminer l'hydrogramme amont connaissant l'hydrogramme aval atténué par l'utilisation de la méthode Muskingum. Dans l'application classique de la méthode Muskingum, il y'a deux étapes : une étape de calage des paramètres (ou calibration du modèle) et une étape de validation du modèle. L'étape de calage doit précéder celle de la validation car c'est lors de cette étape que nous estimons les paramètres du modèle. De manière générale, le calage du modèle consiste à estimer ses paramètres inconnus de manière à simuler des réponses qui soient aussi proches que possibles des observations (Muzy & Higby, 1998). L'équation de Muskingum pour la méthode inverse est exprimée par l'équation (3.1), qui est déterminée à partir de l'équation de continuité et de l'équation de stockage linéaire:

$$Q_e(t) = \frac{\left(KX - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\left(KX + \frac{\Delta t}{2}\right)} Q_e(t + \Delta t) + \frac{\left(-K + KX + \frac{\Delta t}{2}\right)}{\left(KX + \frac{\Delta t}{2}\right)} Q_s(t) + \frac{\left(K - KX + \frac{\Delta t}{2}\right)}{\left(KX + \frac{\Delta t}{2}\right)} Q_s(t + \Delta t) \quad (3.1)$$

Nous posons :

$$C_{01} = \frac{(KX - 0,5\Delta t)}{(KX + 0,5\Delta t)} \quad C_{11} = \frac{(-K + KX + 0,5\Delta t)}{(KX + 0,5\Delta t)} \quad C_{21} = \frac{(K - KX + 0,5\Delta t)}{(KX + 0,5\Delta t)} \quad (3.2)$$

Donc nous obtenons :

$$Q_e(t) = C_{01}Q_e(t + \Delta t) + C_{11}Q_s(t) + C_{21}Q_s(t + \Delta t) \quad (3.3)$$

Avec

$$C_{01} + C_{11} + C_{21} = 1 \quad (3.4)$$

### I.1. Synthèse bibliographique sur la modélisation inverse

La modélisation inverse des écoulements est le processus de calcul de l'hydrogramme entrant connaissant l'hydrogramme sortant le long d'un canal. Elle peut être faite en utilisant aussi bien les méthodes hydrauliques que les méthodes hydrologiques. Certains chercheurs ont eu à travailler sur la modélisation inverse et nous pouvons citer :

Das (2009) a travaillé sur la modélisation inverse des écoulements par l'utilisation du modèle Muskingum. Les équations de Muskingum qu'il a utilisées sont obtenues à partir de trois équations de continuités (deux non-linéaires et un linéaire) et la loi de stockage, ses équations sont en fonction de trois paramètres K, X et m pour l'équation non-linéaire et deux paramètres K et X pour l'équation linéaire. Les paramètres sont déterminés par estimation. Dans son travail le modèle d'estimation utilisé consiste à minimiser la somme des écarts normalisés entre les débits d'entrées observés et calculés avec comme contrainte l'égalité entre la variation du stockage et la variation de l'équation de continuité. L'optimisation de ces paramètres par la méthode des multiplicateurs de Lagrange donne un grand nombre d'équations qui sont résolues numériquement par les méthodes itératives dont la méthode de la bisection. Les résultats de

ses tests montrent que ces trois modèles de Muskingum décrivent bien ce phénomène qui est la diffusion de l'onde.

Dooge et Bruen (2005) ont étudié le problème de l'utilisation de la modélisation inverse dans l'irrigation en évitant une inondation à la sortie quand le débit lâché à l'entrée d'un réservoir est modifié. Leur travail porte dans un premier temps le problème de la modélisation directe et dans un deuxième temps le problème inverse en utilisant le système de Saint-Venant. Le système de Saint-Venant qui ne peut pas être résolu analytiquement et l'intégration de l'équation de continuité du système donne une équation de stockage mais le système de Saint-Venant peut aboutir à une solution analytique. Cette solution analytique s'exprime à l'aide d'un produit de convolution. Les résultats obtenus après un bon nombre de tests montrent que la modélisation inverse dans le cas non-linéaire est instable.

Koussis, Mazi, Lykoudis et Argiriou (2012) ont traité la modélisation inverse des écoulements dans le but d'identifier le débit entrant connaissant le débit sortant par utilisation de la méthode Muskingum dans la propagation d'onde de crue. Ils mettent en œuvre les principales méthodes de résolution des modèles de crue diffusante, de l'onde cinématique et des modèles conceptuels de type Muskingum pour décrire la modélisation inverse. La comparaison de ces méthodes leur a permis de conclure que dans la modélisation inverse le modèle Muskingum est efficace d'où la robustesse de son calcul numérique.

Wojciech et Romuald (2009) ont traité le problème de la modélisation inverse, en utilisant le système de Saint-Venant et l'équation de stockage. Le système de Saint-Venant est résolu numériquement soit par la méthode des caractéristiques ou soit par la méthode des différences finies et dans ce travail ils ont utilisé la méthode des différences finies. La résolution numérique de ce système aboutit à une équation qui permet de déterminer l'hydrogramme amont. Pour l'équation de stockage, la discrétisation de cette équation en  $N$  réservoir et l'utilisation de la formule de Manning permettent d'obtenir l'hydrogramme amont. Les résultats de ces tests faits par ces deux méthodes montrent que le système de Saint-Venant est plus approprié pour décrire la modélisation inverse.

## **1.2. Synthèse des travaux**

Nous avons rassemblé un bon nombre de travail trouvé dans la littérature qui traite le problème de la modélisation inverse des écoulements. Das (2009) a montré que la modélisation inverse peut être étudiée en utilisant l'un des modèles Muskingum qui sont les deux équations non-linéaire et l'équation linéaire. Dooge et Bruen (2005), en étudiant les deux méthodes, ils ont trouvé que la forme non-linéaire est moins stable que la forme linéaire. Koussis, Mazi, Lykoudis et Argiriou (2012) ont comparé les différentes méthodes pour modéliser un écoulement à savoir le modèle de l'onde diffusante, le modèle de résolution de l'onde cinématique et le modèle Muskingum. Wojciech et Romuald (2009) ont montré que la modélisation inverse avec l'utilisation du système de Saint-Venant donne une translation et une atténuation de l'hydrogramme alors que l'utilisation de l'équation de stockage donne une simple translation de l'hydrogramme.

## II. ESTIMATION DES PARAMETRES DE MUSKINGUM K ET X

Les méthodes d'estimations des paramètres relèvent d'un aspect particulier des statistiques. Les difficultés particulières à la modélisation hydrologie sont entre autres (Muzy & Higy, 1998):

- L'indépendance des paramètres n'est pas toujours assurée.
- Les données hydrométéorologiques qui servent au calage du modèle sont entachées d'erreurs.
- Un modèle hydrologique est souvent surdéterminé, il y a moins inconnues (paramètre) que équations pour les calculer (les équations aux erreurs).
- Ce modèle devient en effet fastidieux dès que le nombre de paramètres est supérieur à trois.

Ces limites particulières incitent à adopter une méthode de calage plus rigoureuse et automatique. Dans cette méthode deux éléments sont nécessaires : une fonction objective et un algorithme d'optimisation.

La fonction objective s'écrit sous la forme :

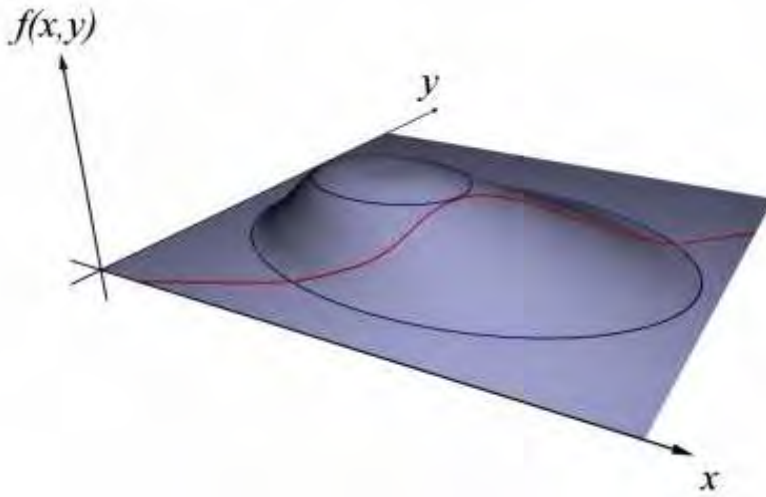
$$e = \sum_{t=1}^{n+1} [Q_o(t) - Q_e(t)]^2 \quad (4.1)$$

Avec  $Q_o(t)$  est l'entrée observée au pas de temps  $t$  et  $Q_e(t)$  est l'entrée calculée au pas de temps  $t$ . Cette fonction présente l'avantage de caler le modèle sur l'ensemble de l'hydrogramme. Toutefois, il peut paraître souhaitable de donner plus de poids aux pointes qu'aux autres ordonnées. Nous remarquons que l'équation (4.1) est non linéaire et pour la linéariser nous utilisons l'équation (2.1). Donc nous obtenons les problèmes optimisations avec contrainte. Utilisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange transforme le problème d'optimisation avec contrainte en un problème d'optimisation sans contrainte.

### II. 1. Rappel de la méthode de multiplicateur de Lagrange

#### II. 1. a. Dimension finie

Le multiplicateur de Lagrange est une méthode permettant de trouver les points stationnaires (maximum, minimum...) d'une fonction dérivable d'une ou plusieurs variables, sous contraintes. Visuellement, la méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de trouver un optimum, sur la figure ci-dessous le point le plus élevé possible, tout en satisfaisant une contrainte, sur la figure un point de la ligne rouge. Le théorème clé se conçoit aisément dans un exemple de dimension 2. Le point recherché est celui où la courbe ni ne monte ni ne descend.



**Figure 4 : La méthode des multiplicateurs de Lagrange permettant de trouver un optimum (Wikipedia).**

- **Théorème du multiplicateur de Lagrange** : Si le point  $x_0$  est un extremum local de  $\varphi$  dans l'ensemble  $G$  alors le noyau de la différentielle de  $\psi$  au point  $x_0$  est orthogonal au gradient de  $\varphi$  en ce point.

Donc nous cherchons à trouver le minimum suivant :

$$\forall x \in E \min_{x \in G} \varphi(x) \quad \text{avec } G = \{x \in E, \psi(x) = 0\} \quad (4.2)$$

- **Corollaire 1** : Si le point  $x_0$  est un extremum local de  $\varphi$  dans l'ensemble  $G$  et si la différentielle de  $\psi$  au point  $x_0$  est surjective, il existe un vecteur  $\lambda_0$  de  $F$  tel que la somme de l'image de  $\lambda_0$  par la transposée de la différentielle de  $\psi$  au point  $x_0$  du gradient de  $\varphi$  en ce point soit nulle :

$$\exists \lambda_0 \in F \quad \text{grad} \varphi(x_0) + D^t \psi_{x_0}(\lambda_0) = 0 \quad (4.3)$$

- **Corollaire 2** : Si le point  $x_0$  est un extremum local de  $\varphi$  dans l'ensemble  $G$  et si la différentielle de  $\psi$  au point  $x_0$  est surjective, il existe un vecteur  $\lambda_0$  de  $F$  tel que la fonction  $L$  de  $E \times F$  dans  $\mathbb{R}$  admet un gradient nul en  $(x_0, \lambda_0)$  :

$$\forall (x, \lambda) \in E \times F \quad L(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda \cdot \psi(x) \quad \text{et} \quad DL_{x_0, \lambda_0} = 0 \quad (4.4)$$

Avec  $x$  les variables de contrôle figurant dans la fonction à maximiser ou à minimiser,  $\varphi(x)$  est la fonction à optimiser,  $\lambda$  le multiplicateur de Lagrange et  $\psi(x)$  la contrainte du programme d'optimisation.

### II. 1. b. Cas généralisé

Si l'écriture condensée permet de mieux comprendre la structure du théorème, les notations développées sont plus utiles pour une résolution effective. Dans la pratique, on considère souvent une fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  et  $m$  fonctions  $\psi_j$ , avec  $j$  variant de 1 à  $m$ , aussi

de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . L'entier  $m$  est nécessairement plus petit que  $n$  pour pouvoir appliquer les théorèmes du paragraphe précédent. On cherche à trouver un  $n$ -uplet  $(a_1, \dots, a_n)$  tel que :

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \min_{x_i \in G} \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ avec } G = \{(x_i) \in \mathbb{R}^n, \forall j \in [1, m] \psi_j(x_1, \dots, x_n) = 0\} \quad (4.5)$$

Pour cela, on définit la fonction  $L$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall (x_i) \in \mathbb{R}^n, \forall (\lambda_j) \in \mathbb{R}^m \quad L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \varphi(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \psi_j(x_1, \dots, x_n) \quad (4.6)$$

La résolution des équations suivantes offre une condition nécessaire pour élucider le problème d'optimisation. Le  $n$ -uplet  $(a_1, \dots, a_n)$  est une solution de (4.3) seulement s'il existe un  $m$ -uplet  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  tel que le  $n+m$ -uplet  $(a_1, \dots, a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$  soit solution des  $n+m$  équations :

$$\forall i \in [1, n] \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ et } \forall j \in [1, m] \psi_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (4.7)$$

### II. 1. c. Application de la méthode de multiplicateur de Lagrange

La fonction transformée de Lagrange sous contrainte s'écrit sous la forme :

$$L = \sum_{t=1}^{n+1} [Q_o(t) - Q_e(t)]^2 + \sum_{t=1}^n \left[ K[XQ_e(t+1) + (1-X)Q_s(t+1)] - K[XQ_e(t) + (1-X)Q_s(t)] - \frac{\Delta t}{2} \{ [Q_e(t+1) + Q_e(t)] - [Q_s(t+1) + Q_s(t)] \} \right] \lambda_t \quad (4.8)$$

Avec

$$\sum_{t=1}^{n+1} [Q_o(t) - Q_e(t)]^2 \text{ la fonction objective} \quad (4.9)$$

$$\sum_{t=1}^n \left[ K[XQ_e(t+1) + (1-X)Q_s(t+1)] - K[XQ_e(t) + (1-X)Q_s(t)] - \frac{\Delta t}{2} \{ [Q_e(t+1) + Q_e(t)] - [Q_s(t+1) + Q_s(t)] \} \right] = 0 \text{ la contrainte} \quad (4.10)$$

$\lambda_t$ : Le multiplicateur de Lagrange correspondant à la  $t$ 'ème contrainte. Les multiplicateurs de Lagrange indiquent l'effet d'un changement d'unité du vecteur latéral des contraintes sur la

fonction objective. Les  $\lambda_t$  sont supérieurs à zéro, parce que les contraintes représentent les équations d'acheminements. Pour obtenir les solutions optimales, les conditions de dériver du premier ordre sont employées pour les optimums (Das, 2009).

Nous avons dérivé les dérivées de L par rapport à  $Q_e$  (équation 4.11), par rapport à  $\lambda_i$  équation (4.12), par rapport à K équation (4.13), par rapport à X équation (4.14).

$$\frac{\partial L}{\partial Q_e(t)} = 0 \text{ dérivé par rapport à } Q_e(t) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \text{ dérivé par rapport à } \lambda_i \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial K} = 0 \text{ dérivé par rapport à } K \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \text{ dérivé par rapport à } X \quad (4.14)$$

Nous allons développer L au n-ième rang et nous obtenons l'expression (4.15):

$$\begin{aligned} L = & [Q_o(1) - Q_e(1)]^2 + [Q_o(2) - Q_e(2)]^2 + [Q_o(3) - Q_e(3)]^2 + \dots + [Q_o(n) - Q_e(n)]^2 \\ & + [Q_o(n+1) - Q_e(n+1)]^2 \\ & + \left[ K[XQ_e(2) + (1-X)Q_s(2)] - K[XQ_e(1) + (1-X)Q_s(1)] \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{2} \{ [Q_e(2) + Q_e(1)] - [Q_s(2) + Q_s(1)] \} \right] \lambda_1 \\ & + \left[ K[XQ_e(3) + (1-X)Q_s(3)] - K[XQ_e(2) + (1-X)Q_s(2)] \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{2} \{ [Q_e(3) + Q_e(2)] - [Q_s(3) + Q_s(2)] \} \right] \lambda_2 \\ & + \left[ K[XQ_e(4) + (1-X)Q_s(4)] - K[XQ_e(3) + (1-X)Q_s(3)] \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{2} \{ [Q_e(4) + Q_e(3)] - [Q_s(4) + Q_s(3)] \} \right] \lambda_3 + \dots \\ & + \left[ K[XQ_e(n+1) + (1-X)Q_s(n+1)] - K[XQ_e(n) + (1-X)Q_s(n)] \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{2} \{ [Q_e(n+1) + Q_e(n)] \right. \\ & \left. - [Q_s(n+1) + Q_s(n)] \} \right] \lambda_n \end{aligned} \quad (4.15)$$



❖ Les valeurs des  $\lambda_t$  sont déterminées à partir de la condition suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial Q_e(t)} = 0 \quad (4.16)$$

Soit :

$$\frac{\partial L}{\partial Q_e(1)} = -2[Q_o(1) - Q_e(1)] + \left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)\lambda_1 = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_e(2)} = -2[Q_o(2) - Q_e(2)] + \left(KX - \frac{\Delta t}{2}\right)\lambda_1 + \left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)\lambda_2 = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_e(3)} = -2[Q_o(3) - Q_e(3)] + \left(KX - \frac{\Delta t}{2}\right)\lambda_2 + \left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)\lambda_3 = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_e(n)} = -2[Q_o(n) - Q_e(n)] + \left(KX - \frac{\Delta t}{2}\right)\lambda_{n-1} + \left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)\lambda_n = 0 \quad (4.20)$$

Donc nous avons :

$$\lambda_1 = \frac{2[Q_o(1) - Q_e(1)]}{\left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)} \quad (4.21)$$

$$\lambda_2 = \frac{2[Q_o(2) - Q_e(2)]}{\left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)} - \frac{2[Q_o(1) - Q_e(1)]\left(KX - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)^2} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 = & \frac{2[Q_o(3) - Q_e(3)]}{\left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)} - \frac{2[Q_o(2) - Q_e(2)]\left(KX - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)^2} \\ & + \frac{2[Q_o(1) - Q_e(1)]\left(KX - \frac{\Delta t}{2}\right)^2}{\left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)^3} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \lambda_n = & \frac{2[Q_o(n) - Q_e(n)]}{\left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)} - \frac{2[Q_o(n-1) - Q_e(n-1)]\left(KX - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)^2} \\ & + \frac{2[Q_o(n-2) - Q_e(n-2)]\left(KX - \frac{\Delta t}{2}\right)^2}{\left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)^3} + \dots \\ & + \frac{2[Q_o(2) - Q_e(2)]\left(KX - \frac{\Delta t}{2}\right)^{n-2}}{\left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)^{n-1}} + \frac{2[Q_o(1) - Q_e(1)]\left(KX - \frac{\Delta t}{2}\right)^{n-1}}{\left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)^n} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Donc nous pouvons écrire l'expression des  $\lambda_t$  sous la forme :

$$\lambda_t = \sum_{l=1}^t \frac{2(-1)^{l-1} [Q_o(t - (l - 1)) - Q_e(t - (l - 1))] \left(KX - \frac{\Delta t}{2}\right)^{l-1}}{\left(-KX - \frac{\Delta t}{2}\right)^l} \quad (4.25)$$

Avec  $l = 1, 2, \dots, t$  et  $t = 1, 2, \dots, n$

❖ Le dérivé qui donne l'équation de Muskingum est exprimé comme suit :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = 0 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = & \sum_{t=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial \lambda_t} [Q_o(t) - Q_e(t)]^2 \\ & + \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda_t} \left[ K[XQ_e(t+1) + (1-X)Q_s(t+1)] - K[XQ_e(t) + (1-X)Q_s(t)] \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{2} \{ [Q_e(t) + Q_e(t+1)] - [Q_s(t) + Q_s(t+1)] \} \right] \lambda_t \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n & \left( K[XQ_e(t+1) + (1-X)Q_s(t+1)] - K[XQ_e(t) + (1-X)Q_s(t)] \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{2} \{ [Q_e(t) + Q_e(t+1)] - [Q_s(t) + Q_s(t+1)] \} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

❖ Pour déterminer les valeurs de K, la condition nécessaire exigée est exprimée comme suit :

$$\frac{\partial L}{\partial K} = 0 \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial K} = & \sum_{t=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial K} [Q_o(t) - Q_e(t)]^2 \\ & + \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial K} \left[ K[XQ_e(t+1) + (1-X)Q_s(t+1)] - K[XQ_e(t) + (1-X)Q_s(t)] \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{2} \{ [Q_e(t) + Q_e(t+1)] - [Q_s(t) + Q_s(t+1)] \} \right] \lambda_t \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\sum_{t=1}^n \{ [XQ_e(t+1) + (1-X)Q_s(t+1)] - [XQ_e(t) + (1-X)Q_s(t)] \} \lambda_t = 0 \quad (4.31)$$

❖ Pour déterminer les valeurs de X la condition nécessaire est exprimée comme suit :

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X} = & \sum_{t=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial X} [Q_o(t) - Q_e(t)]^2 \\ & + \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial X} \left[ K[XQ_e(t+1) + (1-X)Q_s(t+1)] - K[XQ_e(t) + (1-X)Q_s(t)] \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{2} \{ [Q_e(t) + Q_e(t+1)] - [Q_s(t) + Q_s(t+1)] \} \right] \lambda_t \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\sum_{t=1}^n K \{ [Q_e(t+1) - Q_s(t+1)] - [Q_e(t) - Q_s(t)] \} \lambda_t = 0 \quad (4.34)$$

Si nous remplaçons l'expression des  $\lambda_t$  dans l'équation (4.31) et (4.34) nous obtenons un système de deux équations à deux inconnues K et X:

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^n \{ [XQ_e(t+1) + (1-X)Q_s(t+1)] - [XQ_e(t) + (1-X)Q_s(t)] \} \\ & \times \sum_{l=1}^t \frac{2(-1)^{l-1} [Q_o(t-(l-1)) - Q_e(t-(l-1))] \left( KX - \frac{\Delta t}{2} \right)^{l-1}}{\left( -KX - \frac{\Delta t}{2} \right)^l} = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

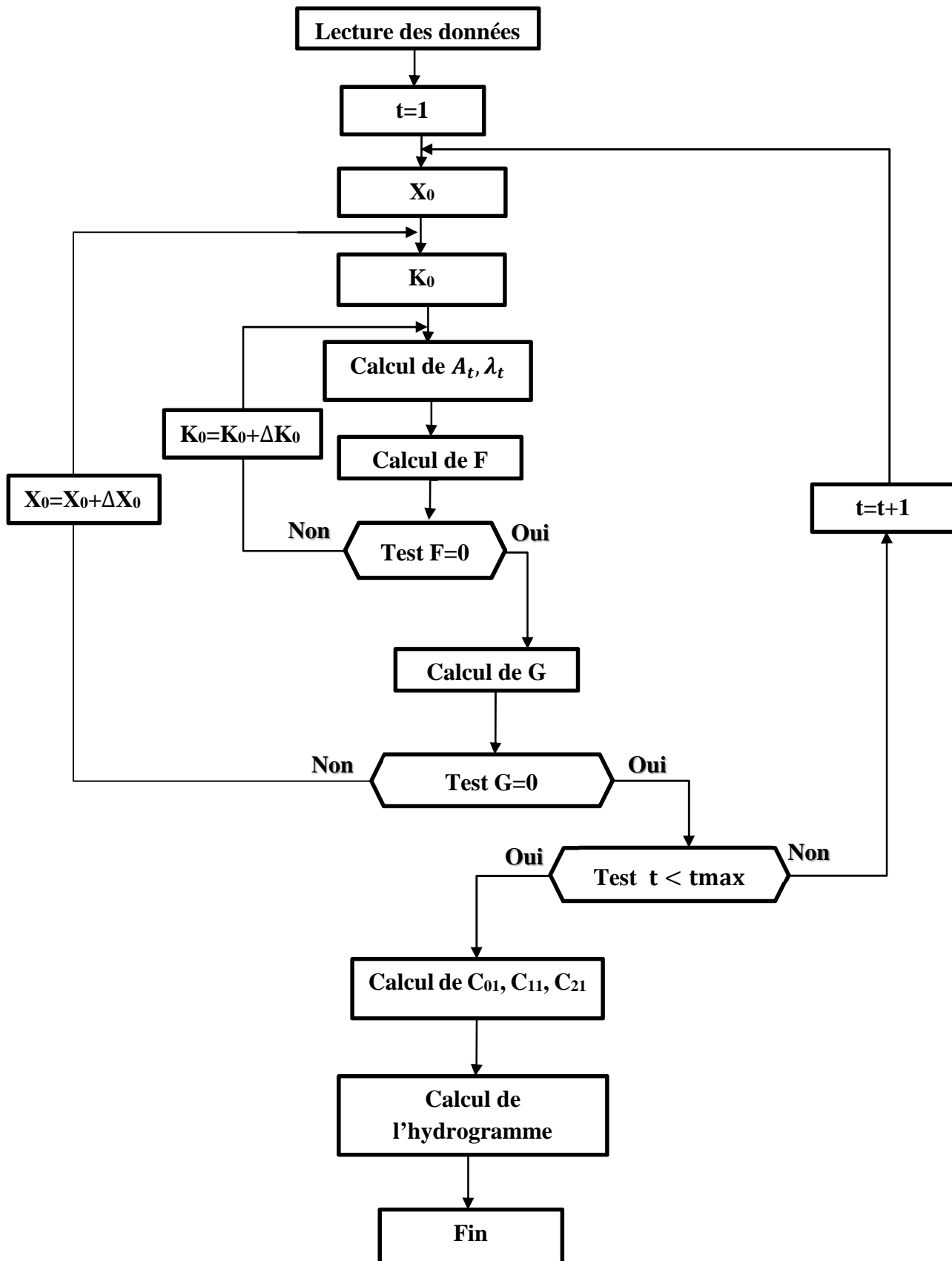
$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^n K \{ [Q_e(t+1) - Q_s(t+1)] - [Q_e(t) - Q_s(t)] \} \\ & \times \sum_{l=1}^t \frac{2(-1)^{l-1} [Q_o(t-(l-1)) - Q_e(t-(l-1))] \left( KX - \frac{\Delta t}{2} \right)^{l-1}}{\left( -KX - \frac{\Delta t}{2} \right)^l} = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Pour déterminer les valeurs optimaux des paramètres de Muskingum K et X, l'équation (4.35) et (4.36) doivent être résolus itérativement. La méthode itérative est en général la plus longue à appliquer, mais souvent la plus précise donc nous allons utiliser la méthode itérative à point fixe.

### III. ORGANIGRAMME DE LA METHODE DE MUSKINGUM INVERSE

Après avoir introduit les données : dates, débits aval et débits amont, on procède comme suit.

- 1. On se donne  $\Delta K$  et  $\Delta X$
- 2. On fixe  $X_0$
- 3. On fixe  $K_0$
- 4. On calcule  $F$  l'équation (4.35)
- 5. On teste  $F = 0$  si non on remplace  $K_0$  par  $K_0 + \Delta K_0$  on retourne à 4
- 6. Si oui, on calcule  $G$  l'équation (4.36)
- 7. On teste  $G = 0$  si non on remplace  $X_0$  par  $X_0 + \Delta X_0$ , on retourne à 2
- 8. Si oui on calcule les coefficients de Muskingum  $C_{01}$ ,  $C_{11}$  et  $C_{21}$
- 9. On calcule l'hydrogramme amont  $Q_e(t)$
- 10. Simulation et présentation des hydrogrammes amont et aval observé et l'hydrogramme amont calculé



## **CHAPITRE 3 : APPLICATIONS ET RESULTATS**

## I. INTRODUCTION

Dans les deux chapitres précédents nous avons établi les équations de la méthode de Muskingum et la méthode de calcul, des coefficients  $K$ ,  $X$ ,  $C_0$ ,  $C_1$ , et  $C_2$  pour la méthode directe et des coefficients  $K$ ,  $X$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{11}$  et  $C_{21}$  pour la méthode inverse.

Dans ce chapitre, nous allons faire dans un premier temps une application de la méthode de Muskingum directe à la simulation de la propagation d'ondes de crues simples Cémagref, Triangulaire, Henderson et Perumal (Badji, 2013) en utilisant le compilateur FORTRAN 95, dans deux canaux rectangulaire de grande largeur au miroir  $B$ , de grande longueur  $L$ , de pente très faible  $I$ , et de coefficient de Manning-Strickler  $K_{ms}$  ; et dans un deuxième temps une application de la méthode de Muskingum inverse à la simulation de la propagation d'ondes de crues en utilisant le compilateur FORTRAN 95, avec des données proposés par Wilson (1974).

**Tableau 1 : caractéristique des canaux 1 et 2.**

	Longueur(m)	Largeur (m)	$K_{ms}$	Pente I
Caractéristiques du canal 1	15000	120	50	0.00061
Caractéristiques du canal 2	15000	120	16	0.00061

## II. APPLICATIONS ET RESULTATS POUR LA METHODE DIRECTE

Estimation des valeurs optimales de  $K$  et  $X$  obtenus par calage par la méthode Muskingum à partir des hydrogrammes simples obtenus par la méthode du double balayage. Nous allons représenter les résultats des valeurs optimaux des hydrogrammes simples, du canal 1 dans le tableau 2 et du canal 2 dans le tableau 3. Nous notons que les pas de temps utilisés pour obtenir les paramètres optimaux à partir des hydrogrammes simples sont égaux pour l'hydrogramme Triangulaire et Henderson avec un pas de temps égal à 1800 secondes pour le canal 1 et 3600 secondes pour le canal 2 ; pour l'hydrogramme de Cémagref les pas de temps sont de 900 secondes pour le canal 1 et de 1800 secondes pour le canal 2 ; pour l'hydrogramme de Perumal les pas de temps sont de 3600 secondes pour le canal 1 et de 6300 secondes pour le canal 2 et ces pas de temps sont obtenus de telles sortes que le critère de stabilité soit respecté (avec  $\Delta t < K$  et  $\Delta t > 2.K.X$ ). Nous remarquons aussi que le coefficient  $C_2$  a un poids plus fort que les coefficients  $C_0$  et  $C_1$  pour les hydrogrammes de, Cémagref, Triangulaire et d'Henderson dans les canaux 1 et 2 ; mais pour l'hydrogramme de Perumal le coefficient  $C_0$  l'emporte sur les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  pour les deux canaux. Les valeurs du paramètre  $K$  des hydrogrammes (Cémagref, Triangulaire, Henderson, Perumal) sont plus petites pour le canal 1 que pour le canal 2, ce qui montre que le débit se propage plus vite dans le canal 1 que dans le canal 2. Nous pouvons noter aussi que les valeurs du paramètre  $X$  dans les deux canaux sont inférieure à 0.5 d'où une atténuation des hydrogrammes sortants.

Nous avons présenté les hydrogrammes de Cémagref, Triangulaire, Henderson et Perumal respectivement dans la figure 5, figure 6, figure 7 et figure 8 pour les deux canaux 1 et 2. Nous notons que les hydrogrammes sortants observés et calculés sont presque confondus. Nous constatons que, plus le frottement est important (canal 2) plus la propagation de la crue

est lente. Cela correspond aux résultats attendus : Le frottement ralentit l'écoulement. Nous remarquons aussi que plus le frottement est important et plus l'onde s'atténue : le débit de pointe diminue et le temps de montée augmente due à la diffusion de l'énergie causée par le frottement. On retrouve les cas des ondes diffusantes. Nous avons les mêmes observations pour tous les hydrogrammes.

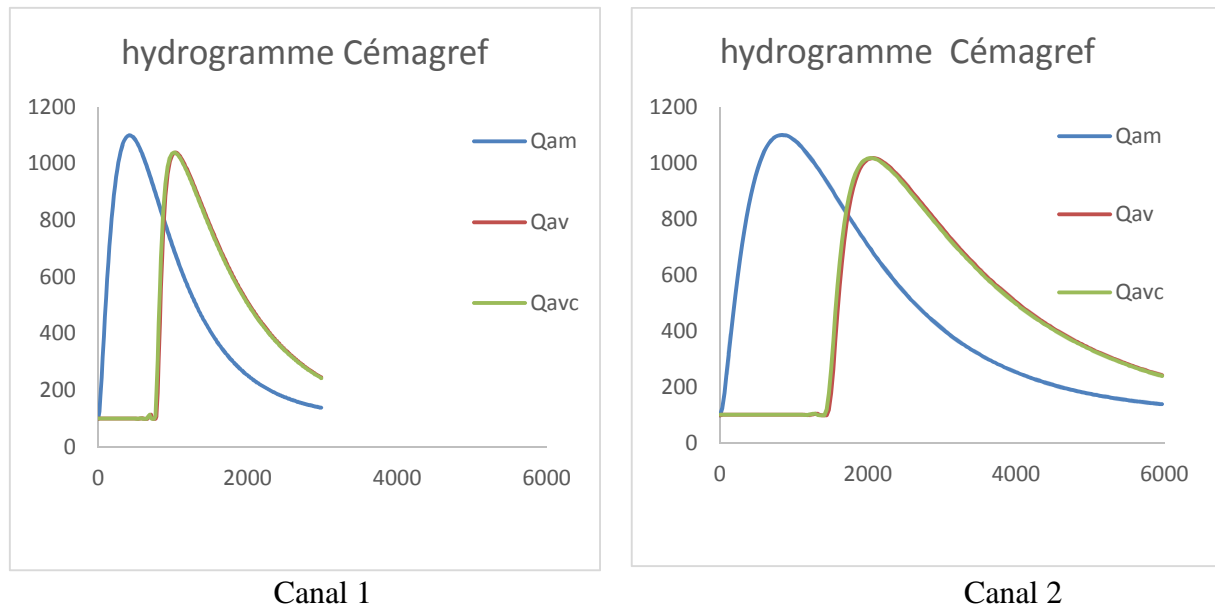
**Tableau 2 : Valeur optimal de K et X des hydrogrammes simples dans le canal 1.**

<b>HYDRO COEF</b>	<b>CEMAGREF</b>	<b>TRIANGULAIRE</b>	<b>HENDERSON</b>	<b>PERUMAL</b>
K en seconde	5552.69	9886.21	14740.73	4130.33
X	0.07	0.08	0.05	0.19
C <sub>0</sub>	0.149392	0.169169	0.109841	0.502328
C <sub>1</sub>	0.010921	0.010954	0.019344	0.197304
C <sub>2</sub>	0.839687	0.819916	0.879225	0.300368
C <sub>0</sub> +C <sub>1</sub> +C <sub>2</sub>	1	1	1	1
Δt en seconde	900	1800	1800	3600

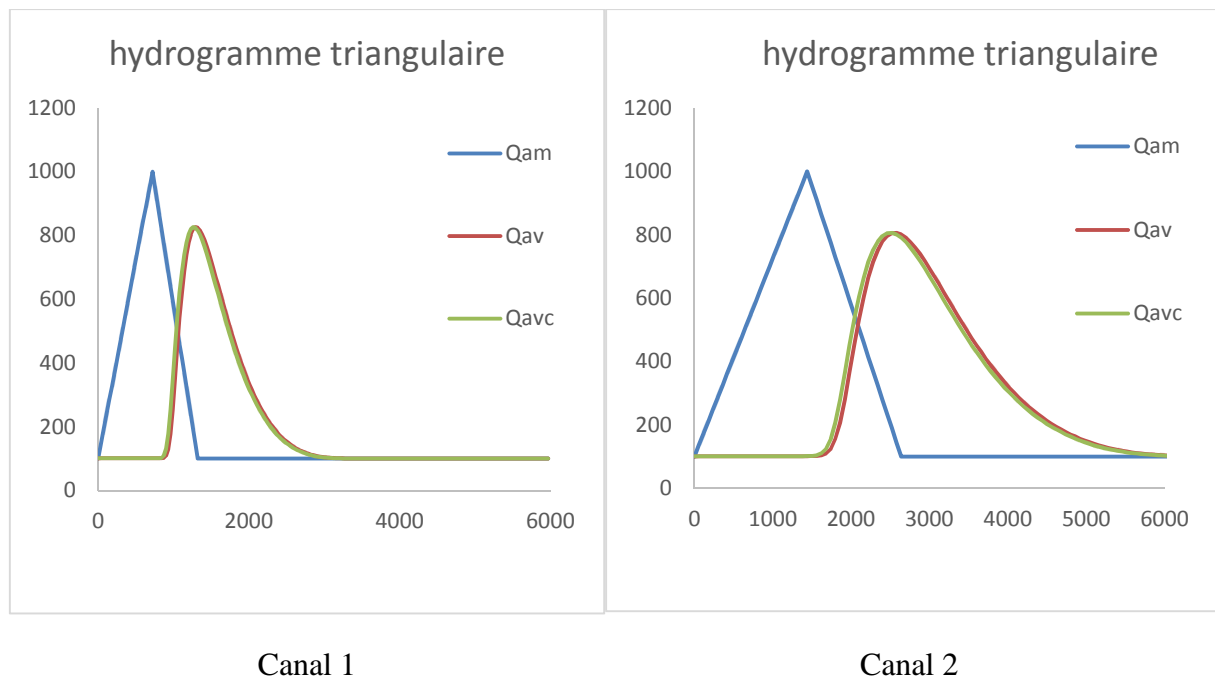
**Tableau 3 : Valeur optimal de K et X des hydrogrammes simples dans le canal 2.**

<b>HYDRO COEF</b>	<b>CEMAGREF</b>	<b>TRIANGULAIRE</b>	<b>HENDERSON</b>	<b>PERUMAL</b>
K en seconde	14338.44	24538.88	34368.95	5367.26
X	0.06	0.07	0.05	0.14
C <sub>0</sub>	0.1224	0.1429	0.1021	0.5024
C <sub>1</sub>	0.0028	0.0033	0.0024	0.3089
C <sub>2</sub>	0.8748	0.8538	0.8955	0.1888
C <sub>0</sub> +C <sub>1</sub> +C <sub>2</sub>	1	1	1	1
Δt en seconde	1800	3600	3600	6300

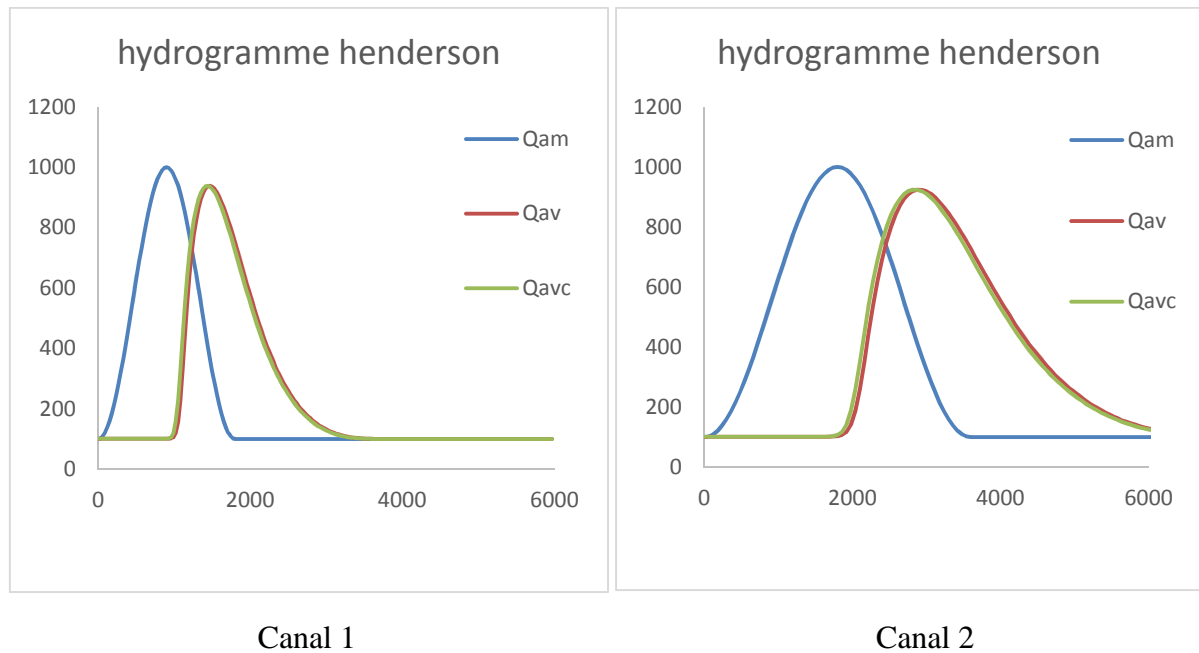




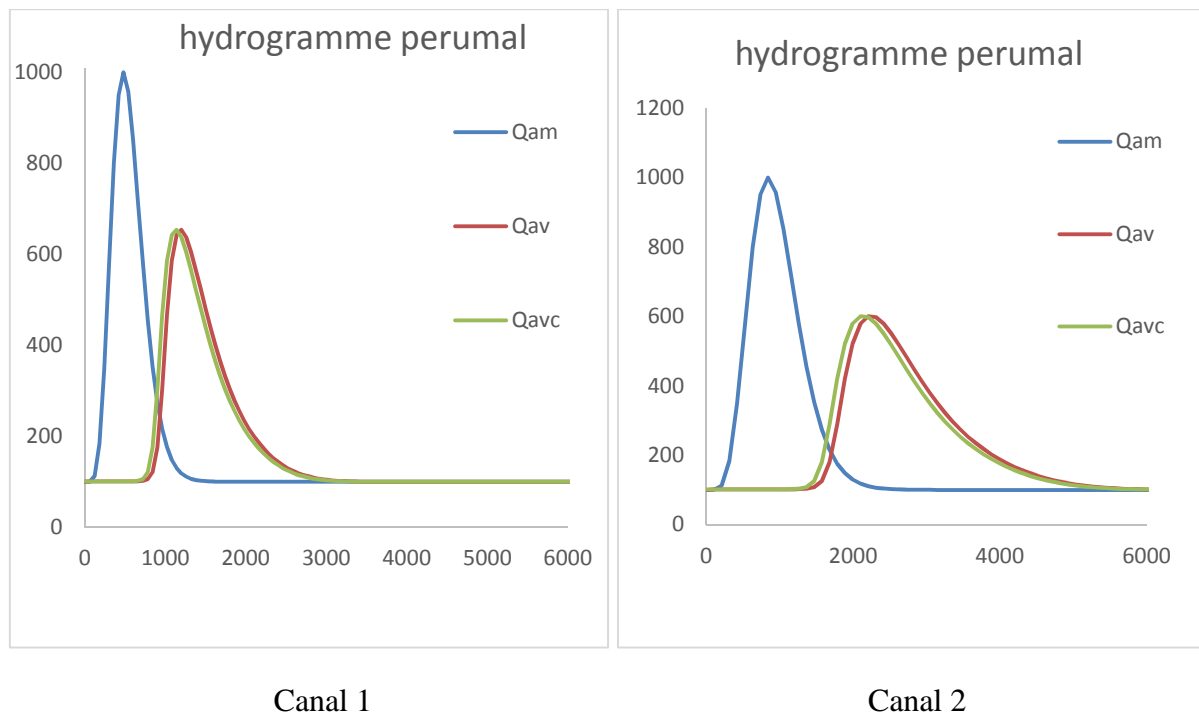
**Figure 5 : Calage de la méthode de Muskingum sur l'hydrogramme de Cémagref.**



**Figure 6 : Calage de la méthode de Muskingum sur l'hydrogramme triangulaire.**



**Figure 7 : Calage de la méthode de Muskingum sur l'hydrogramme henderson.**



**Figure 8 : Calage de la méthode de Muskingum sur l'hydrogramme perumal.**

### III. APPLICATIONS ET RESULTATS POUR LA METHODE INVERSE

Dans cette travail, nous avons adopté une seule série de donnée hydrogramme entrant-sortant donné par Wilson (1974) pour les techniques estimations de paramètre et nous avons trouvé dans la littérature une série de valeurs de paramètre représenté dans le tableau 4 (Das, 2009). Identique à la précédente approche, la présente d'étude qui étudie la modélisation inverse utilise aussi 100% des données d'hydrogramme d'entrée et de sortie donné par Wilson (1974). Les principes d'estimation des paramètres Muskingum utilisant les données de Wilson (1974) qui sont utilisées dans cette étude et dans les premières études que nous avons trouvé dans la littérature sont au loin des principes traditionnels de calibrations et de validations utilisé dans la modélisation des systèmes de gestion des eaux. Dans la modélisation traditionnelle une partie des données observées (généralement 50 à 75%) est utilisé pour la calibration et le reste pour la validation. Mais dans la recherche de l'estimation des paramètres dans le modèle Muskingum, toutes les données sont utilisées pour la calibration. La procédure de calibration génère numériquement les données de l'hydrogramme entrant et sortant. Nous allons présenter les valeurs estimés de notre présente étude dans le tableau 5. Nous allons aussi présenter les valeurs de l'hydrogramme entrant calculé à partir des hydrogrammes observés dans le tableau 6. Les valeurs de la comparaison entre l'hydrogramme de la présente d'étude et les premières études sont représentées dans le tableau 7. Nous remarquons que la valeur de K est plus importante pour celui de Wilson mais la valeur de X est plus importante pour la présente d'étude. Nous remarquons aussi que la valeur du coefficient  $C_{21}$  est plus importante que  $C_{11}$  et  $C_{01}$  avec  $C_{11}$  qui est négatif. Nous remarquons aussi que dans la période de crue et de décrue, nous obtenons de très bonnes valeurs par rapport aux valeurs observés. C'est en période de point que nous avons des valeurs inférieure à ceux obtenus par Wilson.

La représentation graphique de hydrogramme obtenu est représentée dans la figure 9 et nous remarquons qu'en période de crue et en période de décrue les deux hydrogrammes entrant calculé et observé sont presque confondus mais c'est au niveau du débit de point que nous avons une légère différence des hydrogrammes. Nous remarquons aussi la présence d'une diffusion et d'une atténuation de l'onde. La comparaison entre l'hydrogramme obtenu et ceux trouvés dans la littérature représenté par la figure 10 montre que l'hydrogramme entrant calculé est plus centré dans la zone de débit de point de l'hydrogramme entrant observé.

**Tableau 4 : valeurs des paramètres K et X des premiers d'études.**

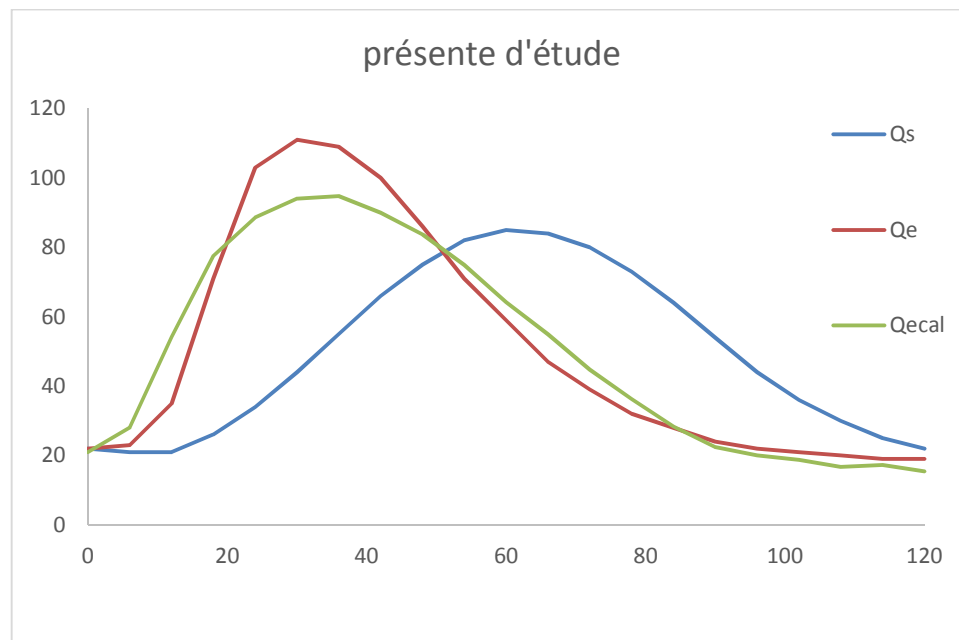
Méthode	K (heure)	X
Wilson	36.0000	0.2500
Das 2004	24.3804	0.2010
Das 2009	22.0011	0.3396

**Tableau 5 : valeurs des paramètres K et X et des coefficients  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{21}$  de la présente étude.**

K (heure)	X	$C_{01}$	$C_{11}$	$C_{21}$	$C_{01} + C_{11} + C_{21}$
25.0000	0.3700	0.5102	-1.0408	1.5306	1

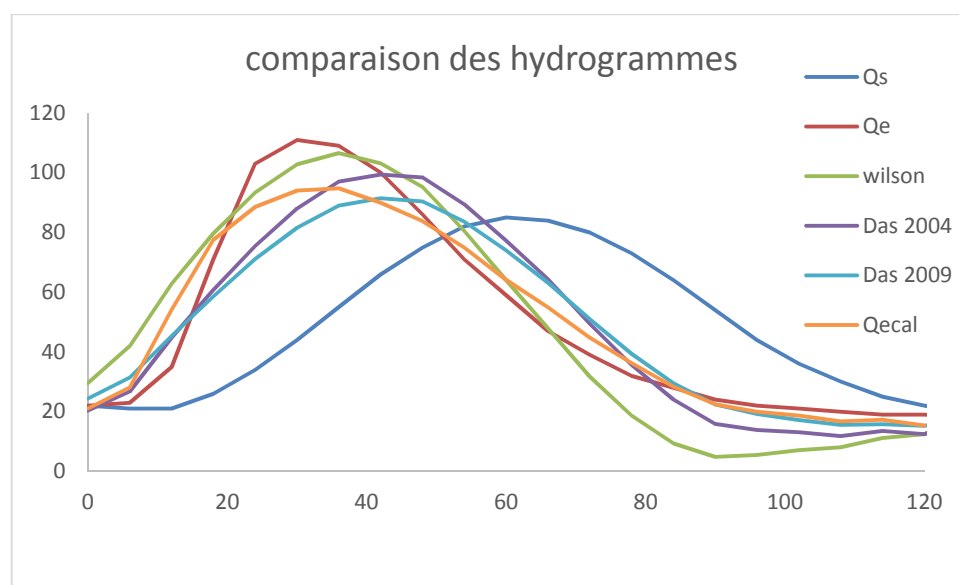
**Tableau 6 : valeurs des hydrogrammes de la présente d'étude.**

Date (heure)	Hydrogramme observé de Wilson (m <sup>3</sup> /s)		Hydrogramme entrant calculé (m <sup>3</sup> /s)
	$Q_s$	$Q_e$	$Q_{ecal}$
0	22	22	21
6	21	23	28,1
12	21	35	54,2
18	26	71	77,5
24	34	103	88,6
30	44	111	94
36	55	109	94,8
42	66	100	90
48	75	86	83,7
54	82	71	74,9
60	85	59	64,1
66	84	47	54,9
72	80	39	44,8
78	73	32	36,3
84	64	28	28,3
90	54	24	22,4
96	44	22	20
102	36	21	18,7
108	30	20	16,7
114	25	19	17,3
120	22	19	15,4


**Figure 9 : représentation graphique de l'hydrogramme entrant calculé.**

**Tableau 7 : comparaison entre la présente d'étude et les premières études**

Date (heure)	Hydrogramme observé de Wilson (m <sup>3</sup> /s)		Hydrogramme entrant calculé (m <sup>3</sup> /s)			
	$Q_s$	$Q_e$	Wilson	Das 2004	Das 2009	Présente d'étude
0	22	22	29,5	20,3	24,4	21
6	21	23	41,9	26,7	31,4	28,1
12	21	35	62,8	44,8	45,4	54,2
18	26	71	79,7	60,7	58,6	77,5
24	34	103	93,4	75,5	71,1	88,6
30	44	111	102,8	88	81,6	94
36	55	109	106,6	97	89	94,8
42	66	100	103,1	99,4	91,5	90
48	75	86	95,2	98,4	90,4	83,7
54	82	71	80,5	89,4	83,6	74,9
60	85	59	64	77,2	74	64,1
66	84	47	47,9	64,3	63,2	54,9
72	80	39	31,8	49,4	50,9	44,8
78	73	32	18,7	35,6	39,4	36,3
84	64	28	9,4	24	29,5	28,3
90	54	24	4,8	15,9	22,4	22,4
96	44	22	5,5	13,8	19,2	20
102	36	21	7,1	13,1	17,2	18,7
108	30	20	8,1	11,8	15,6	16,7
114	25	19	11,2	13,5	15,8	17,3
120	22	19	12,5	12,5	15,3	15,4
126	19	18	18	18	18	


**Figure 10 : comparaison des hydrogrammes entrants calculés**

## **CONCLUSION GENERALE**

L'objectif de ce travail a été d'utiliser la modélisation inverse pour calculer l'hydrogramme amont connaissant l'hydrogramme aval en une section d'un canal rectangulaire.

En partant des travaux de Kovacs (1988), de Ly (2013) et de Wagne (2013), nous avons repris la détermination de l'équation de Muskingum pour la méthode directe en utilisant l'équation de continuité combinée à une loi de stockage linéaire. Les paramètres  $K$  et  $X$  ont été déterminés par la méthode des moindres carrés. Pour la méthode inverse, nous avons repris le travail de Das (2009), qui a utilisé la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour déterminer les paramètres  $K$  et  $X$ . Nous avons introduit dans les équations trouvées par cet auteur l'expression analytique des multiplicateurs de Lagrange. Nous avons ainsi obtenu un système de deux équations non linéaires. Nous avons mis au point une procédure itérative fondée sur la minimisation de la somme des carrés des écarts pour résoudre numériquement ce système. Les résultats que nous avons obtenus en utilisant les mêmes données que Das (2009), même s'ils présentent quelques différences, peuvent être considérés comme satisfaisants.

Nous envisageons d'améliorer la procédure itérative utilisée, et d'utiliser la méthode ainsi mise au point pour étudier le problème de la satisfaction des besoins en eau dans des réseaux d'irrigation.

## **BIBLIOGRAPHIE**



- Badji, Y. (2013). *Approche conceptuelle de la propagation des ondes de crues simples et complexes dans un canal rectangulaire par résolution de l'équation de l'onde diffusante*. Sénégal: mémoire de Master 2 université cheikh anta Diop.
- Boubakeur, M. (2011). *Simulation de la propagation des ondes de crues dans les canaux naturels*. Algérie: Mémoire de magister en hydraulique, université de Batna.
- Das, A. (2004). Parameter estimation for Muskingum models. *J. Irrigation and drainage Eng. ASCE* 130(2), 140-147.
- Das, A. (2009). Reverse stream flow routing by using Muskingum models. *sādhanā*, Vol. 34, Part 3, pp. 483-499.
- Dooge, J., & Bruen, M. (2005). Problems in reverse routing. *Acta geophysica Polonica*, vol. 53, no. 4, pp. 357-371.
- Koussis, A. D., Mazi, K., Lykoudis, S., & Argiriou, A. A. (2012). Reverse flood routing with the inverted Muskingum storage routing scheme. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 217-227.
- Kovacs, Y. (1988). *Modèle de simulation d'écoulement transitoire en réseau d'assainissement*. Paris: Thèse de doctorat, école nationale des ponts et chaussées.
- Ly, D. K. (2013). *Utilisation de la méthode Muskingum-Cunge pour la simulation de la propagation des ondes de crues complexes dans un canal rectangulaire*. Sénégal: mémoire de master, université Cheikh Anta Diop de Dakar.
- Muzy, A., & Higby, C. (1998). *Hydrologie appliquée*. Suisse: Gestion et protection de la ressource en eau, office fédéral de l'éducation et de la science. édition \*H\*G\*A\*, Bucarest.
- Wagne, M. (2013). *Utilisation de la méthode de Muskingum avec paramètre constante pour la simulation de la propagation des ondes de crues simples et complexe dans un canal rectangulaire*. Sénégal: Mémoire de master, université Cheikh Anta Diop de Dakar.
- Wilson, E. M. (1974). *Engineering Hydrology*. (Hampshire, U.K.: MacMillan Education Ltd.).
- Wojciech, A., & Romuald, S. (2009). Inverse Integration of the Open Channel Flow Equations. *International Symposium on Water Management and Hydraulic Engineering* (pp. 89-96). Macedonia: Ohrid.