

DEDICACES.....	1
REMERCIEMENTS.....	2
RESUME.....	54
NOMENCLATURE.....	5
LISTE DES TABLEAUX.....	8
LISTE DES FIGURES.....	9
INTRODUCTION GENERALE.....	10
CHAPITRE 1 : MODELISATION MATHEMATIQUE.....	13
Introduction	14
1.1. Description et position du problème.....	14
1.2. Comportement de l'écoulement dans la zone de mélange.....	16
1.2.1. Vitesse barycentrique et concentration massique.....	16
1.2.2. Equation de continuité et de l'impulsion barycentrique.....	16
1.2.3. Equation du bilan des constituants ou de diffusion.....	17
1.3. Conditions aux limites dans la zone de mélange.....	18
1.4. Adimensionalisation des équations dans la zone de mélange.....	21
1.5. Nombres adimensionnels.....	23
1.6. Conditions aux limites adimensionnelles.....	25
1.7. Coefficient de frottement.....	26
1.8. Vecteur vorticité et fonction de courant.....	27
1.8.1. Vecteur vorticité.....	27

1.8.2. Fonction de courant.....	28
1.9. Conditions aux limites pour ω et Ψ	31
Conclusion.....	38
CHAPITRE 2: MODELISATION NUMERIQUE.....	39
Introduction.....	40
2.1. Forme conservative adimensionnelle des équations.....	40
2.2. Discrétisation.....	41
2.2.1. Discrétisation du domaine – Maillage.....	41
2.2.2. Discrétisation des équations.....	43
2.2.3. Discrétisation des équations de la vorticité et de la fonction de courant...	45
2.2.4. Discrétisation des conditions aux limites adimensionnelles.....	46
2.3. Méthode de résolution.....	49
2.3.1. Technique de sous relaxation	49
2.3.2. Convergence.....	50
Conclusion.....	50
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....	51
BIBLIOGRAPHIE.....	53

NOMENCLATURE

Lettres latines

a	Coefficient de discrétisation	-
b	Coefficient de discrétisation	-
C	Fraction massique	-
D	Diamètre d'une conduite	(m)
D	Conductance	$(kg.m^{-1}.s^{-1})$
$f(x)$	Fonction de x dérivant de l'intégration de la pression	(Pa)
F	Flux convectif	$(kg.m^{-1}.s^{-1})$
g	Accélération de la pesanteur	$(m.s^{-2})$
\vec{J}	Vecteur densité de flux de diffusion	$(Kg.m^{-2}.s^{-1})$
L_o	Longueur du cylindre intérieur	(m)
L_e	Longueur du cylindre extérieur	(m)
P	Pression hydrodynamique	(Pa)
R	Rayon d'une conduite	(m)
S	Terme source	-
t	temps	(s)
V	Vitesse barycentrique du mélange	$(m.s^{-1})$
V_r	Composante normale de la vitesse barycentrique	$(m.s^{-1})$
V_x	Composante tangentielle de la vitesse barycentrique	$(m.s^{-1})$
V_{10}	Vitesse du fluide 1 à l'entrée de la zone de mélange	$(m.s^{-1})$

V_{20} Vitesse du fluide 2 à l'entrée de la zone de mélange $(m.s^{-1})$

$x ; r$ Coordonnées d'espace cylindriques (m)

Lettres grecques

δr Pas d'espace suivant l'axe radiale (m)

δx Pas d'espace suivant l'axe des x (m)

μ Viscosité dynamique $(Kg.m^{-1}.s^{-1})$

ν Viscosité cinématique $(m^2.s^{-1})$

ρ Masse volumique $(kg.m^{-3})$

σ Coefficient de diffusion ou diffusivité massique $(m^2.s^{-1})$

τ_{ij} Taux de production du constituant i dans la réaction chimique j (s^{-1})

ω Vorticité (s^{-1})

Ψ Fonction de courant $(m^2.s^{-1})$

ϕ Fonction de courant ou Vorticité -

Γ Coefficient de diffusion -

ε Coefficient de frottement -

Nombres caractéristiques

Eu Nombre d'Euler $= \frac{P_{ref}}{\rho V_{ref}^2}$

Re	Nombre de Reynolds	$= \frac{V_{ref} D}{\nu}$
Fr	Nombre de Froude	$= \frac{V_{ref}}{\sqrt{g D}}$
Pem	Nombre de Peclet massique	$= \frac{V_{ref} D}{\sigma_1}$
Sc	Nombre de Schmidt	$= \frac{\nu}{\sigma_1}$

Indice

i	Relatif au fluide i
k	Relatif aux points cardinaux (Est, West, Nord, Sud)
$1 ; 2$	Relatif au fluide 1 et 2
P	Relatif au centre d'une maille
ref	Relatif aux grandeurs de référence
$*$	Relatif aux grandeurs sans dimensions

LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU 2.1: Expressions des variables ϕ , des termes de diffusion Γ et des termes sources d'équations de conservation

TABLEAU 2.2: Schémas numériques d'interpolation

LISTE DES FIGURES

FIGURE 1.1: Modélisation de l'écoulement Bi-fluide

FIGURE 2.1. : Schéma de la distribution de maillage

FIGURE 2.2. : Schéma d'interpolation

FIGURE 2. 3.: Schéma de différence finie aval

FIGURE 2.4. : Schéma différence fini amont

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION

La mécanique des milieux continus est une discipline scientifique où l'on souhaite construire un modèle cohérent pour prédire l'évolution d'un milieu (ici, le fluide considéré). D'un point de vue historique, l'étude des écoulements bi fluide est un parfait exemple de recherche conduite par les applications. Aujourd'hui, elle offre une palette d'applications extrêmement diversifiée en mécanique des fluides.

Ces études de mélange en géométrie confinée de canaux allongés ont des applications dans de nombreux domaines :

- Réactions chimiques entre les fluides de densités différentes dans des récipients de grande longueur ou des réacteurs tubulaires.
- Dispersion de polluants denses dans des couches d'eau profonde.
- Océanographie : mélange d'eau douce et d'eau salée ou d'eaux de salinités différentes.

Nous nous intéressons dans le présent mémoire à l'étude locale de l'écoulement du mélange de deux fluides de densités différentes initialement séparés dans la géométrie confinée d'un tube horizontal. Contrairement à beaucoup d'opérations de mélange industriel, les deux fluides ne sont pas agités, le mélange est ici induit par l'autodiffusion de ces derniers et la différence de densité entre les deux fluides. Les équations de notre modèle d'étude sont d'une part les équations de conservations qui s'appliquent dans tous les milieux, et d'autre part les équations de comportement (ou de constitution) qui sont spécifiques au comportement particulier du matériau considéré. Les conditions aux limites sont, en général, classées en condition initiales et en conditions aux frontières. Les configurations simplifiées envisagées conduisent à des solutions exactes des équations de **Navier-Stokes**. Il s'agit en fait des situations très spéciales qui permettent une résolution analytique complète.

Cependant dans la plupart des cas, la solution analytique des équations spécifiques est inaccessible et il faut utiliser des méthodes approchées à savoir des méthodes de résolution numérique. Ces méthodes sont plus anciennes mais leur utilité subsiste car elles apportent souvent des informations théoriques qui complètent et expliquent les résultats obtenus par la simulation numérique.

Les méthodes numériques applicables aux équations de **Navier-Stokes** ont fait l'objet de développements intensifs au cours de ces dernières années (voir par exemple **Pantakar 1980, Tannehill et al 1997, Tneer et al 2005....**).

Une fois que les modèles sont validés du point de vue de leur consistance physique, nous prescrivons une discrétisation des équations qui leurs sont associées afin de pouvoir effectuer des simulations numériques. Dans tous les problèmes posés dans ce mémoire, l'approche envisagée est de discrétiser les équations avec un maillage régulier. Ce choix se justifie principalement par la rapidité de résolution qu'offre la discrétisation sur grille cartésienne, les conditionnements de tous les systèmes approchés ainsi construits étant généralement meilleurs que si l'on discrétisait les équations sur des maillages non structurés. .

Pour mener à bien cette étude, le mémoire est subdivisé en deux parties :

- ✓ Dans le premier chapitre intitulé **Modélisation Mathématique**, on va d'abord décrire le système étudié puis formuler mathématiquement le problème en s'appuyant sur des théorèmes généraux. Cette première partie sera alors consacrée à l'étude des écoulements bi fluides Newtoniens dans une géométrie cylindrique ou l'on va introduire des modèles de calcul classiques qui permettent d'étudier des mélanges de fluides de viscosités différentes.
- ✓ Le deuxième chapitre, intitulé **Modélisation Numérique**, est relatif à l'exposé de la méthode numérique utilisée et aux résultats issus des simulations numériques. Le mémoire se termine par une conclusion générale et des perspectives.

CHAPITRE 1 :

MODELISATION MATHEMATIQUE

CHAPITRE 1. – MODELISATION MATHEMATIQUE

Introduction :

Le but de ce chapitre est de présenter un des différents modèles existant pour la description des écoulements de mélanges de fluides Newtoniens. Avant de parler d'hydrodynamique, il convient de définir ce qu'est un mélange. Lorsque deux espèces dites miscibles sont mises en présence l'une de l'autre, intervient un phénomène appelé autodiffusion. Cette autodiffusion est fortement liée à l'agitation thermique dans le fluide.

A l'échelle microscopique, les molécules constituant le fluide circulent et s'entrechoquent en permanence, même si la vitesse moyenne de ces particules sur un élément de volume, c'est à dire la vitesse dont on décrit l'évolution à l'échelle macroscopique est nulle ou négligeable. Cette circulation permanente des particules est appelée mouvement Brownien, d'après le botaniste Robert Brown, qui fut le premier, en 1827 à le constater en observant au microscope le mouvement chaotique d'un fluide contenu à l'intérieur de grains de pollen. Le premier à avoir donné une loi empirique permettant de d'écrire l'autodiffusion fut Adolph Fick en 1855 (**Glasgow 2010**). Cette loi précise que le flux de matière à travers une surface est proportionnel, via un coefficient de diffusion, au gradient de concentration normal à cette surface. Autrement dit, plus deux espèces miscibles sont "séparées" plus elles auront tendance à se mélanger. Il faudra attendre 1905 avec les travaux d'Albert Einstein pour obtenir une justification théorique de la loi de Fick.

Dans ce chapitre on traite des mélanges de fluides Newtoniens et incompressibles. Tout d'abord on rappelle brièvement les équations pour décrivant l'évolution de notre modèle d'étude.

1.1.Description et position du problème

Considérons comme nous le montre le schéma ci-dessous un fluide 1 qui s'écoule dans un cylindre de rayon R_1 et de longueur L_e et d'axe horizontal (Ox). Soit aussi un autre fluide 2 qui s'écoule dans un autre cylindre de même axe que le premier avec un rayon R_2 plus petit et de longueur L_o ($L_e > L_o$).

Entre L_e et L_0 nous avons une zone où les deux fluides s'écoulent ensemble : c'est la zone de mélange. Dans cette zone où le régime n'est pas encore établi nous nous proposons de déterminer les champs des vitesses (figure 1).

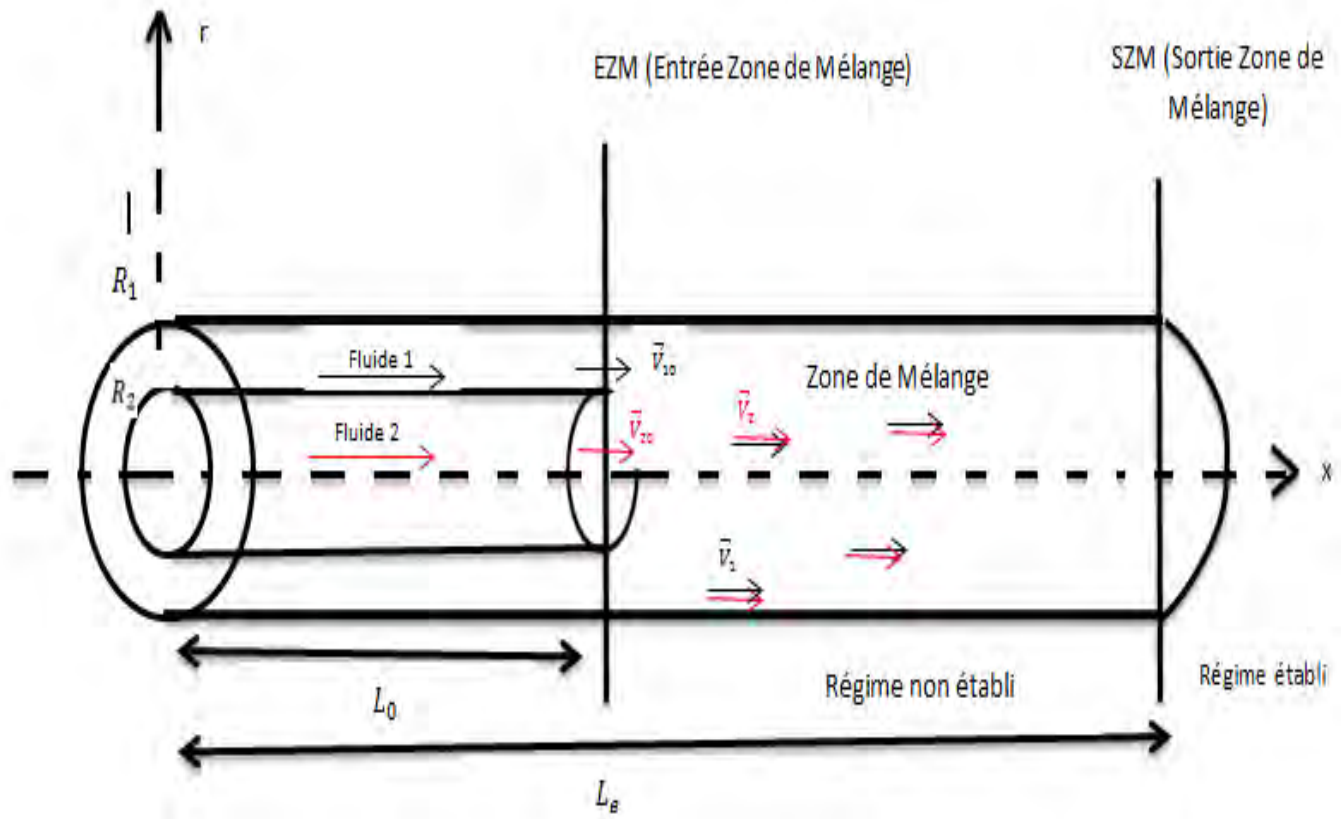


Figure 1.1 : Modélisation de l'écoulement bi – fluide

Notre zone de mélange est une zone où nous avons un écoulement de bifluide newtonien. L'écoulement bifluide peut être défini comme étant un écoulement de deux fluides ou de fluide à deux constituants. Le mélange est ici obtenu par autodiffusion des fluides en présence et par la différence de densité qui existe entre ces derniers.

Nous allons utiliser comme outil deux équations de la mécanique des fluides ; celles de la continuité et de Navier-Stokes pour donner le profil du champ de la vitesse barycentrique du mélange. Les hypothèses d'écoulement laminaire, bidimensionnel, visqueux, incompressible et rotationnel nous permettront de simplifier l'étude des équations que nous aurons à étudier dans la suite du travail. Nous supposons aussi que le régime est permanent.

1.2. Comportement de l'écoulement dans la zone de mélange

1.2.1. Vitesse barycentrique du mélange et concentration massique

Supposons que nous ayons dans cette zone, l'écoulement d'un mélange de fluide à deux constituants : fluide 1 et fluide 2. Chaque fluide s'écoule dans cette zone avec une vitesse $\vec{V}_i \neq \vec{V}_{i0}$ avec \vec{V}_{i0} les vitesses des fluides 1 et 2 à l'entrée de la zone de mélange. L'ensemble se déplace avec une vitesse barycentrique \vec{V}_m qui est telle que :

$$\vec{V} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^2 \rho_i \vec{V}_i \quad (1.1)$$

Soit C_i la fraction massique du constituant (i), qui est telle que :

$$C_i = \frac{\rho_i}{\rho}$$

Avec $\rho = \sum_{i=1}^2 \rho_i$ et $\sum_i C_i = 1$

Nous allons aussi considérer que $\rho_1 > \rho_2$, d'où dans la zone de mélange, le fluide 1 va diffuser avec la plus petite vitesse. Ecrivons ainsi les principales équations dans la zone de mélange dans le système de coordonnées cylindriques

1.2.2. Equation de continuité et de l'impulsion barycentrique

Si nous posons

$$\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_x \vec{e}_x$$

alors l'équation de continuité est donnée par :

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (1.2)$$

d'où

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

Ecrivons l'équation du mouvement dans la zone de mélange des deux fluides :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad} P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{g} \quad (1.4)$$

En projetant l'équation du mouvement dans le système de coordonnées cylindrique, et en considérant qu'on a un régime permanent on obtient, avec l'équation de continuité le système suivant :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$$

Suivant l'axe or :

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} \right) - g \quad (1.5)$$

Suivant l'axe ox :

$$V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right) \quad (1.6)$$

1.2.3. Equation du bilan des constituants ou de diffusion massique

Le suivi d'un mélange est donné par la convection et par un flux diffusif proportionnel au gradient de densité (Loi de Fick) :

$$\vec{J}_i = -\rho \sigma_i \overrightarrow{grad} (C_i / \rho) \quad (1.7)$$

Soit σ_i le coefficient de diffusion massique du constituant (i) ; l'équation de diffusion de chaque constituant est donné par :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) C_i = \sigma_i \Delta C_i + \varsigma_{ij} \quad (1.8)$$

avec ς_{ij} le taux de production volumique du constituant (i) dans la réaction chimique (j). On peut se limiter de donner l'expression du constituant 1 et ensuite en déduire celle du constituant 2 d'après la relation $\sum_i C_i = 1$.

On obtient alors en régime permanent :

$$V_r \frac{\partial C_1}{\partial r} + V_x \frac{\partial C_1}{\partial x} = \sigma_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_1}{\partial r} \right) + \sigma_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \varsigma_{1j} \quad (1.9)$$

En résumé, nous obtenons dans la zone de mélange les équations suivantes :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$$

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} \right) - g$$

$$V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right)$$

$$V_r \frac{\partial C_1}{\partial r} + V_x \frac{\partial C_1}{\partial x} = \sigma_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_1}{\partial r} \right) + \sigma_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \zeta_{1j}$$

Ce système est fermé par des conditions aux limites pour la vitesse barycentrique et pour les fractions massiques.

1.3. Conditions aux limites dans la zone de mélange

1.3.1. Conditions aux limites à l'entrée de la zone de mélange : $X = L_0$

a. Pour les fractions massiques :

D'après la relation $\sum_i C_i = 1$, nous pouvons écrire la condition suivante :

Pour $0 < r < R_2$: $C_2 = 1$, $C_1 = 0$

Pour $R_2 < r < R_1$: $C_2 = 0$, $C_1 = 1$

b. Pour la vitesse barycentrique :

A l'entrée de la zone de mélange la vitesse barycentrique tangentielle correspond à celle du fluide 1 dans l'espace annulaire et du fluide 2 dans le cylindre intérieur. Pour avoir les profils de ces vitesses nous allons projeter l'équation du mouvement ci-dessous en régime stationnaire suivant Ox et Or :

$$(\vec{V}_{i0} \cdot \vec{grad}) \vec{V}_{i0} = -\frac{1}{\rho_i} \vec{grad} P_i + \nu_i \Delta \vec{V}_{i0} + \vec{g} \quad (1.10)$$

en admettant que les écoulements en amont sont unidirectionnels et en en posant :

$$\vec{V}_{i0} = \vec{e}_x \cdot V_{i0}(r)$$

on obtient les systèmes suivants :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_{i0}}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial P_i}{\partial x} \quad (a)$$

$$-\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial P_i}{\partial r} - g = 0 \quad (b)$$

Après intégration de (b) on obtient le champ de pression qui est donné par

$$P_i(x, r) = -\rho_i g r + f_i(x)$$

d'où

$$\frac{\partial P_i}{\partial x} = \frac{df_i(x)}{dx}$$

comme $f_i(x)$ n'est fonction que de r alors V_{i0} ne dépend que de r ; ainsi :

$$\frac{\partial P_i}{\partial x} = cte$$

On posera alors par la suite :

$$\frac{1}{\mu_i} \frac{\partial P_i}{\partial x} = \alpha_i$$

L'intégration de (a) nous donne donc le profil de vitesse :

$$V_{i0}(r) = K_i r^2 + \beta_i \ln r + \gamma_i \quad (1.11)$$

avec $K_i = \frac{\alpha_i}{4}$

Les constantes β_i et γ_i sont déterminées à partir des conditions aux limites pour chaque fluide.

- Pour le fluide 1 :

En supposant immobiles les deux cylindres nous obtenons la condition aux limites sur les parois suivante :

$$V_{10}(r = R_1) = 0 \quad \text{et} \quad V_{10}(r = R_2) = 0$$

d'où les constantes sont données par :

$$\beta_1 = K_1 \ln \frac{R_1}{R_2} (R_1^2 - R_2^2) \quad (1.12)$$

$$\gamma_1 = K_1 \left[-R_1^2 - \ln R_1 \cdot \ln \frac{R_1}{R_2} (R_1^2 - R_2^2) \right] \quad (1.13)$$

d'où

$$V_{10}(r) = -K_1 \left[(R_1^2 - r^2) + (R_1^2 - R_2^2) \cdot \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_1/R_2)} \right] \quad (1.14)$$

- Pour le fluide 2 :

Avec la condition aux limites sur la paroi $V_{20}(r = R_2) = 0$ et la condition de symétrie

$\frac{\partial V_{20}}{\partial r}(r = 0) = 0$; les constantes β_2 et γ_2 sont données par :

$$\beta_2 = 0 \quad (1.15)$$

$$\gamma_2 = -K_2 R_2^2 \quad (1.16)$$

donc

$$V_{20} = K_2 (r^2 - R_2^2) \quad (1.17)$$

En résumé les conditions aux limites pour la vitesse barycentrique s'écrivent comme suit :

$$V_x(R_2 < r < R_1 ; x = L_0) = V_{10}$$

$$V_x(0 < r < R_2 ; x = L_0) = V_{20}$$

1.3.2. Conditions d'adhérence :

Sur les parois la vitesse tangentielle du mélange est égale à celle du cylindre 1. En le considérant immobile il vient :

$$V_x(r = R_1) = 0$$

1.3.3. Condition de non pénétration :

En considérant que le cylindre 1 est imperméable alors les dérivées partielles de la vitesse normale du mélange et des fractions massiques par rapport à la normale sont nulles au niveau des parois. Il vient alors :

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} = \frac{\partial c_2}{\partial r} = \frac{\partial V_r}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } r = R_1$$

aussi : $V_r(r = R_1) = 0$

1.3.4. Conditions aux limites sur l'axe de symétrie $r=0$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} = \frac{\partial V_x}{\partial r} = \frac{\partial c_1}{\partial r} = \frac{\partial c_2}{\partial r} \quad \text{pour } r = 0$$

1.3.5. Conditions aux limites à la sortie de la zone de mélange : $x \geq L_e$

En admettant que le régime est établi il vient

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial c_1}{\partial x} = \frac{\partial c_2}{\partial x} = 0$$

1.4. Adimensionalisation des équations dans la zone de mélange

Les équations générales établies doivent permettre, en théorie, de résoudre tous les problèmes de transferts relatifs aux fluides newtoniens. En pratique cependant, il y a une quasi-impossibilité à résoudre complètement ces équations à chaque instant et en tout point de l'écoulement, sauf dans quelques cas particuliers. Il est donc indispensable de procéder à une simplification, en établissant une méthode de travail plus opérationnelle, et en élaborant des modèles schématisés qui constituent cependant une description aussi fidèle que possible de la réalité observable. On pourra ainsi établir des lois phénoménologiques d'un usage beaucoup plus commode. Dans ce but, et vu la multiplicité des paramètres qui interviennent dans l'ensemble des équations de bilans, il peut paraître judicieux de les agglomérer sous forme de groupements adimensionnels, pour faciliter l'interprétation et la comparaison des résultats expérimentaux. Pour ce faire, la méthode la plus naturelle consiste à implanter des grandeurs sans dimension dans les équations.

Afin d'adimensionnaliser ces équations, il convient d'abord de donner les grandeurs caractéristiques et sans dimensions du problème :

1.4.1 Grandeurs de référence

Les grandeurs de référence sont les grandeurs qui sont caractéristiques à l'écoulement.

P_{ref} : Pression caractéristique dans la zone de mélange.

D : Longueur de référence (avec D étant le diamètre du cylindre extérieur).

V_{ref} : vitesse de référence pouvant être considérée comme la vitesse maximale du fluide 2.

Ainsi :

$$V_{ref} = -K_2 R_2^2 \quad (1.18)$$

La vitesse de référence peut aussi être écrite en fonction de la longueur caractéristique de l'écoulement ; nous avons ainsi :

$$V_{ref} = -\frac{1}{4} K_2 D^2 \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \quad (1.19)$$

1.4.2. Grandeurs adimensionnelles

A chaque grandeur des équations qui régissent l'écoulement, on peut correspondre une grandeur adimensionnelle à partir des grandeurs caractéristiques. En effet nous avons :

$$r = r^* \cdot D ; \quad x = x^* \cdot D ; \quad V_r = V_r^* \cdot V_{ref} ; \quad V_x = V_x^* \cdot V_{ref} ; \quad P = P^* \cdot P_{ref}$$

Ainsi, en adimensionnalisant les équations précédemment obtenues dans la zone de mélange, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) + \frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} &= 0 \\ V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} + V_x^* \frac{\partial V_r^*}{\partial x^*} &= -\frac{P_{ref}}{\rho V_{ref}^2} \frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{\nu}{V_{ref} D} \left\{ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 V_r^*}{\partial x^{*2}} - \frac{V_r^*}{r^{*2}} \right\} - \frac{g D}{V_{ref}^2} \\ V_r^* \frac{\partial V_x^*}{\partial r^*} + V_x^* \frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} &= -\frac{P_{ref}}{\rho V_{ref}^2} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{V_{ref} D} \left\{ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial V_x^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 V_x^*}{\partial x^{*2}} \right\} \end{aligned}$$

$$V_r^* \frac{\partial C_1}{\partial r^*} + V_x^* \frac{\partial C_1}{\partial x^*} = \frac{\sigma_1}{V_{ref}} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial C_1}{\partial r^*}) + \frac{\sigma_1}{V_{ref}} \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^{*2}} + \frac{\mathbf{D}}{V_{ref}} \tau_{1j}$$

1.5. Nombres adimensionnels

Dans la plupart des problèmes d'écoulement des fluides, la pesanteur, la viscosité et l'élasticité sont prépondérantes, mais pas toujours simultanément. L'importance relative des différentes forces agissant sur un fluide est calculée par des nombres adimensionnels représentant les rapports entre ces forces. L'analyse dimensionnelle étudiée au paragraphe précédent permet de simplifier ces rapports. A partir des équations ci-dessus, on peut déterminer quelques nombres adimensionnels :

a. Nombre d'EULER : Eu

Le nombre d'Euler est le rapport entre les forces d'inertie et les forces de pression

$$Eu = \frac{P_{ref}}{\rho V_{ref}^2}$$

b. Nombre de REYNOLDS : Re

Le nombre de Reynolds est le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité.

$$Re = \frac{V_{ref} \mathbf{D}}{\nu}$$

c. Nombres de FROUDE : Fr

Le nombre de Froude est le rapport entre les forces d'inertie et les forces de pesanteur.

$$Fr = \frac{V_{ref}}{\sqrt{g \mathbf{D}}}$$

d. Nombres de PECLET massique : Pem

Ce nombre représente le rapport entre les forces d'inertie et la diffusivité

$$Pem = \frac{V_{ref} \mathbf{D}}{\sigma_1}$$

e. Nombres de SCHMIDT : Sc

Ce nombre est déduit à partir des nombres de Reynolds et de Péclet massique. En effet :

$$Pem = \frac{V_{ref} D}{\sigma_1}$$

Or

$$Re = \frac{V_{ref} D}{\nu} \rightarrow V_{ref} D = Re \nu$$

d'où

$$Pem = \frac{Re \nu}{\sigma_1} \rightarrow Pem = Re \cdot \frac{\nu}{\sigma_1}$$

enfin nous avons :

$$Pem = Re \cdot Sc \quad \text{avec}$$

$$Sc = \frac{\nu}{\sigma_1}$$

Ce nombre adimensionnel représente le rapport entre la viscosité et la diffusivité massique.

Ainsi les équations précédentes peuvent être écrites avec ces nombres adimensionnels :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) + \frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} = 0$$

$$V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} + V_x^* \frac{\partial V_r^*}{\partial x^*} = -Eu \frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*}) + \frac{\partial^2 V_r^*}{\partial x^{*2}} - \frac{V_r^*}{r^{*2}} \right\} - \frac{1}{Fr^2}$$

$$V_r^* \frac{\partial V_x^*}{\partial r^*} + V_x^* \frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} = -Eu \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial V_x^*}{\partial r^*}) + \frac{\partial^2 V_x^*}{\partial x^{*2}} \right\}$$

$$V_r^* \frac{\partial C_1}{\partial r^*} + V_x^* \frac{\partial C_1}{\partial x^*} = \frac{1}{P_{em}} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial C_1}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{P_{em}} \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^{*2}} + \frac{\mathbf{D}}{V_{ref}} \tau_{1j}$$

1.6. Conditions aux limites adimensionnelles

1.6.1. Conditions à l'entrée

$$V_x^*(R_2^* < r^* < R_1^*; x^* = L_0^*) = V_{10}^*$$

$$V_x^*(0 < r^* < R_1^*; x^* = L_0^*) = V_{20}^*$$

Avec :

$$V_{10}^* = \frac{V_{10}}{V_{ref}} ; V_{20}^* = \frac{V_{20}}{V_{ref}}$$

Réécrivons les vitesses du fluide 1 et du fluide 2 à l'entrée de la zone de mélange en fonction de la longueur caractéristique de l'écoulement ; on obtient ainsi :

$$V_{10} = -K_1 \mathbf{D}^2 \left[\left(\frac{1}{4} - r^{*2} \right) + \frac{1}{4 \ln(R_1/R_2)} \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \right] \quad (1.20)$$

$$V_{20} = -K_2 \mathbf{D}^2 \left(r^{*2} - \frac{1}{4} \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \quad (1.21)$$

Ainsi, en posant :

$$R^* = R_2/R_1$$

Nous obtenons donc les vitesses d'entrée adimensionnelles :

$$V_{10}^* = \frac{4}{R^{*2}} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} \left[\left(\frac{1}{4} - r^{*2} \right) - \frac{1}{4} \frac{\ln(2r^*)}{\ln(R^*)} (1 - R^{*2}) \right] \quad (1.22)$$

$$V_{20}^* = 1 - 4 \frac{r^{*2}}{R^{*2}} \quad (1.23)$$

1.6.2. Condition d'adhérence :

$$V_x^* \left(r^* = \frac{1}{2} \right) = 0$$

1.6.3. Condition de non pénétration :

$$\frac{\partial C_1}{\partial r^*} = \frac{\partial C_2}{\partial r^*} = \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} = 0 \quad \text{pour } r^* = R_1^*$$

aussi $V_r^* \left(r^* = \frac{1}{2} \right) = 0$

1.6.4. Condition de symétrie :

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} = \frac{\partial V_x^*}{\partial r^*} = \frac{\partial c_1}{\partial r^*} = \frac{\partial C_2}{\partial r^*} \quad \text{pour } r^* = 0$$

1.6.5. Condition à la sortie :

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial x^*} = \frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} = \frac{\partial c_1}{\partial x^*} = \frac{\partial C_2}{\partial x^*} = 0 \quad \text{pour } x^* = \frac{L_e}{D}$$

1.7. Coefficient de frottement

Le coefficient de frottement sur la paroi i.e. $r = R_1$ est donné par l'expression suivante :

$$\mathcal{E} = \frac{2\mu \cdot \frac{\partial V_x}{\partial r}}{\rho V_{ref}^2} \quad \text{pour } r = R_1 \quad (1.24)$$

En adimensionnalisant \mathcal{E} on obtient ainsi :

$$\mathcal{E}^* = \frac{2\mu \frac{V_{ref}}{D}}{\rho V_{ref}^2} \cdot \frac{\partial V_x^*}{\partial r^*}$$

Or, $\nu = \frac{\mu}{\rho} \rightarrow$

$$\mathcal{E}^* = \frac{2\nu \frac{V_{ref}}{D}}{V_{ref}^2} \frac{\partial V_x^*}{\partial r^*}$$

$$\mathcal{E}^* = \frac{2\nu}{D V_{ref}} \frac{\partial V_x^*}{\partial r^*}$$

avec $Re = \frac{V_{ref} D}{\nu}$

donc: $\mathcal{E}^* = \frac{2}{Re} \frac{\partial V_x^*}{\partial r^*} \quad \text{pour } r^* = \frac{1}{2} \quad (1.25)$

1.8. Vorticité et Fonction de courant :

La résolution des équations de quantité de mouvement est souvent compliquée par la présence des termes de pression et de leur forte non-linéarité. Dans certaines circonstances, il est cependant possible de s'en débarrasser et de les rendre faiblement non-linéaire, en s'appuyant sur d'autres paramètres du mouvement comme la vorticité et la fonction de courant.

1.8.1. Vecteur vorticité :

Dans la zone de mélange, l'écoulement de l'ensemble des deux fluides est rotationnel.

Nous allons ainsi définir le vecteur $\vec{\omega}$ comme étant le vecteur vorticité. Il est tel que :

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{rot} \vec{V} \quad (1.26)$$

$\vec{\omega}$ est porté par le vecteur perpendiculaire au plan de l'écoulement ($\vec{e}_r; \vec{e}_x$) i.e. \vec{e}_θ .

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\theta$$

en exprimant \vec{V} dans le système de coordonnées cylindrique, nous obtenons ainsi :

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta \quad (1.27)$$

L'équation du mouvement peut se présenter comme un bilan local de vorticité avec un terme source qui s'identifie à un mécanisme de diffusion visqueuse et elle porte le nom d'équation de vorticité.

Compte tenu de :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{V} = \overrightarrow{grad} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

en appliquant le rotationnel dans les deux membres de l'équation ci-dessous ; nous obtenons ainsi :

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{\omega} = \nu \Delta \vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{V} \quad (1.28)$$

En projetant cette équation nous obtenons :

$$V_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + V_x \frac{\partial \omega}{\partial x} = \nu \left(\Delta \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) + \frac{\omega V_r}{r} \quad (a)$$

$$\frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = 0 \quad (b)$$

L'équation (b) nous montre que ω ne dépend pas de θ .

En négligeant le terme d'étirement ou de basculement i.e. $\frac{\omega V_r}{r}$; l'équation (a) donne ainsi l'équation de conservation de la vorticité :

$$V_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + V_x \frac{\partial \omega}{\partial x} = \nu \left(\Delta \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) \quad (1.29)$$

Cette équation (1.22) peut aussi être écrite sous une forme adimensionnelle. Ainsi ; l'écoulement étant permanent dans notre problème, on peut choisir comme grandeur de référence pour le champ vorticité (qui a la dimension de l'inverse d'un temps) l'expression suivante :

$$\omega_{ref} = \frac{V_{ref}}{\mathbf{D}}$$

$$\omega_{ref} = -\frac{K_2}{4} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \mathbf{D}$$

en posant

$$\omega^* = \frac{\omega}{\omega_{ref}}$$

Nous obtenons ainsi l'équation adimensionnelle suivante :

$$V_r^* \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + V_x^* \frac{\partial \omega^*}{\partial x^*} = \frac{1}{Re} \left(\Delta^* \omega^* - \frac{\omega^*}{r^{*2}} \right) \quad (1.30)$$

1.8.2. Fonction de courant :

L'opération effectuée au paragraphe précédent nous a permis de s'affranchir de la pression, et simultanément de réduire de deux à une les équations dynamiques qui représentent la projection de l'équation du mouvement (1.4). Le système à résoudre est donc maintenant composé de l'équation (1.29) et de l'équation de continuité.

Pour des raisons pratiques, il peut être avantageux d'introduire, en plus de la vorticité, une seconde fonction des composantes de la vitesse, la fonction de courant.

Ainsi, dans la zone de mélange ; nous avons, d'après (1.2) ; la propriété suivante :

$$\exists \vec{\Psi} \quad / \quad \vec{V} = \overrightarrow{rot} \vec{\Psi} \quad (1.31)$$

$$\vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi) \vec{e}_x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \vec{e}_r \quad (1.32)$$

Les composantes de la vitesse dans le mélange sont données alors par les expressions suivantes :

$$V_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.33)$$

$$V_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi) \quad (1.34)$$

En appliquant le rotationnel dans chaque membre de l'équation (1.31), nous obtenons :

$$\overrightarrow{rot} \vec{V} = \overrightarrow{rot} (\overrightarrow{rot} \vec{\Psi})$$

D'après (1.26) ; on a :

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{grad}(\text{div} \vec{\Psi}) - \Delta \vec{\Psi}$$

Etant donné que $\overrightarrow{grad}(\text{div} \vec{\Psi}) = \vec{0}$; nous obtenons, il vient:

$$\vec{\omega} = -\Delta \vec{\Psi} \quad (1.35)$$

Cette équation est donnée sous la forme vectorielle ; néanmoins elle peut être écrite sous une forme scalaire. En effet :

$$\omega = \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial r}$$

En remplaçant V_r et V_x par (1.33) et (1.34) ; on obtient :

$$\omega = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi) \right)$$

$$\omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\Psi}{r^2}$$

Enfin nous obtenons (1.35) sous forme scalaire :

$$\omega = -\Delta \Psi + \frac{\Psi}{r^2} \quad (1.36)$$

Cette équation peut être considérée comme celle de la continuité puisque la fonction de courant satisfait à l'équation (1.2).

En résumé la résolution des équations du mouvement et de la continuité peut se réduire à celle des équations (1.29) et (1.36).

Comme précédemment les équations obtenues par étude de la fonction de courant peuvent être aussi réécrite sous une forme adimensionnelle. Comme nous l'avons fait pour le champ vorticité, nous allons poser :

$$\Psi^* = \frac{\Psi}{\Psi_{ref}}$$

avec

$$\Psi_{ref} = V_{ref} \mathbf{D} = -\frac{K_2}{4} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \mathbf{D}^3$$

Ainsi nous obtenons respectivement, pour (1.33), (1.34) et (1.36), les équations adimensionnelles suivantes :

$$V_r^* = -\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*}$$

$$V_x^* = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \Psi^*)$$

$$\omega^* = -\Delta^* \Psi^* + \frac{\Psi^*}{r^{*2}}$$

Le système d'équation (1.36) et (1.29) est fermé par des conditions aux limites pour ω et Ψ .

1.9. Conditions aux limites pour ω et Ψ

Les conditions aux limites des champs vorticité et fonction de courant se déduisent directement des conditions aux limites de la vitesse barycentrique.

1.9.1. Conditions d'entrée

- Nous allons dans un premier temps donner la condition du champ- fonction courant.

A l'entrée de la zone de mélange nous avons un écoulement unidirectionnel suivant l'axe des x.

Ainsi, nous avons :

$$V_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

D'où
$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad \forall r \text{ et } x = l_0$$

Cette relation nous informe de la non dépendance de la fonction de courant de par rapport à x.
Nous avons à l'entrée de la zone de mélange :

$$V_x = V_{i0} \quad \text{avec } i = 1, 2$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi_{i0}) = K_i r^2 + \beta_i \ln r + \gamma_i$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \Psi_{i0}) = K_i r^3 + \beta_i r \ln r + \gamma_i r$$

En intégrant cette expression nous obtenons :

$$\Psi_{i0} = \frac{K_i r^3}{4} + \frac{\gamma_i r}{2} + \beta_i \left[\frac{r \ln r}{2} - \frac{r}{4} \right] + \frac{C_i}{r} \quad (1.37)$$

Dans le cylindre intérieur où s'écoule le fluide 2 la fonction de courant doit partout exister pour cela on prend la constante C_2 comme étant nulle.

La constante C_1 peut alors être déterminée à partir de la continuité de la fonction Ψ_{i0} en $r = R_2$.

Ainsi en posant :

$$\Psi_{10}(R_2, L_0) = \Psi_{20}(R_2, L_0)$$

avec :

$$\Psi_{10}(R_2, L_0) = \frac{K_1 R_2^3}{4} + \frac{\gamma_1 R_2}{2} + \beta_1 \left[\frac{R_2 \ln R_2}{2} - \frac{R_2}{4} \right] + \frac{C_1}{R_2} \quad (1.38)$$

$$\Psi_{20}(R_2, L_0) = \frac{K_2 R_2^3}{4} + \frac{\gamma_2 R_2}{2}, \quad \beta_2 = C_2 = 0 \quad (1.39)$$

On obtient ainsi :

$$C_1 = \frac{R_2^4}{4} (K_2 - K_1) + \frac{R_2^2}{2} (\gamma_2 - \gamma_1) - \beta_1 R_2^2 \left(\frac{\ln R_2}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad (1.40)$$

alors :

$$\Psi(R_2 < r < R_1, L_0) = \Psi_{10}$$

$$\Psi(r < R_2, L_0) = \Psi_{20}$$

avec :

$$\Psi_{10} = \frac{K_1 r^3}{4} + \frac{\gamma_1 r}{2} + \beta_1 \left[\frac{r \ln r}{2} - \frac{r}{4} \right] + \frac{C_1}{r}$$

$$\Psi_{i0} = \frac{K_2 r^3}{4} + \frac{\gamma_2 r}{2}$$

Les conditions aux limites adimensionnelles sont données par les expressions suivantes :

$$\Psi^* \left(R_2^* < r^* < \frac{1}{2}, L_o^* \right) = \Psi_{10}^*$$

$$\Psi^* (r^* < R_2^*, L_o^*) = \Psi_{20}^*$$

avec :

$$\Psi_{10}^* = \frac{K_1^* r^{*3}}{4} + \frac{\gamma_1^* r^*}{2} + \beta_1^* \left[\frac{r^* \ln r^*}{2} - \frac{r^*}{4} \right] + \frac{C_1^*}{r^*} \quad (1.41)$$

$$\Psi_{20}^* = \frac{K_2^* r^{*3}}{4} + \frac{\gamma_2^* r^*}{2} \quad (1.42)$$

- Nous allons aussi donner la condition d'entrée du champ-vorticité

Elle est déduite de l'expression suivante :

$$\omega = \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial r} \right)$$

A l'entrée de la zone de mélange, nous avons $V_r = 0$ alors :

$$\omega = - \frac{\partial V_x}{\partial r}$$

Comme pour le champ -fonction de courant, le champ- vorticité prend les expressions ω_{10} et ω_{20} respectivement pour les fluides 1 et 2. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \omega_{i0} &= - \frac{\partial}{\partial r} (V_{i0}) \\ \omega_{i0} &= -2K_i r - \frac{\beta_i}{r} \end{aligned} \quad (1.43)$$

d'où

$$\begin{aligned} \omega_{10} &= -2K_1 r - \frac{\beta_1}{r} \\ \omega_{20} &= -2K_2 r \end{aligned}$$

avec

$$\omega_{10} = \omega(R_2 < r < R_1, L_0)$$

$$\omega_{20} = \omega(r < R_2, L_0)$$

De même nous avons les conditions aux limites adimensionnelles qui sont données par :

$$\omega_{10}^* = \omega^*(R_2^* < r^* < \frac{1}{2}, L_0^*)$$

$$\omega_{20}^* = \omega^*(r^* < R_2^*, L_0^*)$$

avec :

$$\omega_{10}^* = -2K_1^* r^* - \frac{\beta_1^*}{r^*} \quad (1.44)$$

$$\omega_{20}^* = -2K_2^* r^* \quad (1.45)$$

1.9.2. Condition d'adhérence :

La vitesse tangentielle est nulle partout sur l'axe des x au niveau des parois

$$V_x(R_1; x) = 0$$

- Ainsi la condition d'adhérence pour le champ fonction de courant est donnée d'après (1.27) par l'équation suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) = 0$$

d'où

$$\frac{\psi}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

avec ψ étant une constante sur la paroi.

La condition adimensionnelle est donnée par :

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} + \frac{\psi^*}{r^*} = 0 \quad \text{pour } r^* = \frac{1}{2}$$

- La condition pour le champ vorticité se déduit toujours de l'expression suivante

$$\omega = \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial r} \right)$$

Comme que la vitesse tangentielle ne varie pas suivant l'axe des x ; alors toute dérivée partielle par rapport à cet axe est nulle. Ainsi nous obtenons comme condition l'expression suivante :

$$\omega = - \frac{\partial V_x}{\partial r}$$

d'où d'après (1.27)

$$\omega = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right)$$

La condition adimensionnelle associée est donnée par :

$$\omega^* = - \frac{\partial}{\partial r^*} \left\{ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \psi^*) \right\} \quad \text{pour } r^* = \frac{1}{2}$$

1.9.3. Conditions sur l'axe de symétrie

Sur l'axe de symétrie nous avons les conditions de la vitesse du mélange qui sont :

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} = \frac{\partial V_x}{\partial r} = 0$$

D'après ces expressions, nous pourrions ainsi facilement donner les conditions aux limites des champs -fonction de courant et vorticité

- Pour le champ-fonction de courant ; nous avons :

$$\frac{\partial V_x}{\partial r} = 0$$

alors nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right\} = 0 \quad \text{pour } x = r = 0$$

d'où la condition adimensionnelle associée est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial r^*} \left\{ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \Psi^*) \right\} = 0 \text{ pour } x^* = r^* = 0$$

- Pour le champ-vorticité, nous obtenons sa condition aux limites suivant l'axe de symétrie à partir de l'expression suivante :

$$\omega = \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial r} \right)$$

ainsi :

$$\omega = \frac{\partial V_r}{\partial x}$$

Finalement la condition aux limites du champ-vorticité suivant l'axe de symétrie est donnée par :

$$\omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \text{ pour } x = r = 0$$

La condition adimensionnelle associée est :

$$\omega^* = \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^{*2}} \text{ pour } x^* = r^* = 0$$

1.9.4. Condition de sortie

A la sortie de la zone de mélange, nous avons les dérivées partielles des composantes de la vitesse du mélange par rapport à la l'axe de symétrie qui sont nulles.

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$$

Ainsi nous pourrons en déduire les conditions aux limites des champs fonction de courant et vorticité.

- La condition aux limites du champ fonction de courant s'écrit alors comme suit :

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} = 0$$

d'où
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

Finalement nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } 0 < r < R_1, x = L_e$$

La condition adimensionnelle associée est donnée d'après par l'expression suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad \text{pour } 0 < r^* < \frac{1}{2}, x^* = \frac{L_e}{2R_1}$$

- La condition aux limites du champ-vorticité se déduit aussi de l'expression suivante :

$$\omega = \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial r} \right)$$

Puisque : $\frac{\partial V_r}{\partial x} = 0$

Nous avons :

$$\omega = \left(-\frac{\partial V_x}{\partial r} \right)$$

Alors nous obtenons comme condition à la sortie de la zone de mélange l'expression suivante :

$$\omega = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) \quad \text{pour } 0 < r < R_1, x = L_e$$

De même ; d'après la condition adimensionnelle associée est :

$$\omega^* = -\frac{\partial}{\partial r^*} \left\{ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \psi^*) \right\} \quad \text{pour } 0 < r^* < \frac{1}{2}, x^* = \frac{L_e}{2R_1}$$

Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre l'écoulement forcé de deux fluides dans une conduite horizontale. Nous avons utilisé les équations de Navier Stokes pour régir l'écoulement de notre mélange

puis nous les avons adimensionnaliser afin de réduire les paramètres de calcul et d'introduire certains nombres caractéristiques de l'écoulement.

Finalement, nous avons utilisé d'autres paramètres du de l'écoulement à savoir la vorticité et la fonction de courant afin de rendre quasi linéaires les équations les équations de Navier-Stokes et d'éliminer les termes de pressions dans celles-ci pour diminuer la difficulté de résolution.

Cependant, la non linéarité subsiste toujours. C'est pour cela nous avons utilisé une méthode approchée à savoir une méthode numérique.

CHAPITRE 2 : MODELISATION NUMERIQUE

CHAPITRE 2. – MODELISATION NUMERIQUE

Introduction

La formulation mathématique de notre problème a conduit à un système d'équations aux dérivées partielles fortement non linéaires et couplées dont la solution analytique est inaccessible

directement. Pour résoudre un tel système nous devons donc recourir à une méthode approchée. Parmi les méthodes approchées les méthodes numériques sont de nos jours les plus utilisées car les calculateurs ont de grosses capacités mémoire et peuvent nous donner des résultats quasi-instantanés et l'expérience numérique peut être reproduite à l'infini.

La résolution numérique de notre système d'équations établi dans le chapitre précédent, nécessite leur transformation en des systèmes d'équations algébriques par l'une des méthodes de discrétisation les plus utilisées dans la simulation numérique des problèmes de la mécanique des fluides à savoir la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis ou la méthode des éléments finis. Nous avons choisi la méthode des volumes finis, du fait de sa robustesse numérique et de son formalisme très proche de la réalité physique. En outre elle garantit la conservation des flux globaux et aux interfaces des volumes de contrôle. La formulation numérique de notre problème et la description des techniques de résolution des équations discrétisées sont l'essence de cette présente partie.

Pour ne pas alourdir les écritures nous avons omis les astérisques.

2.1. Forme conservative adimensionnelle des équations

Le système d'équations de la vorticité et de la fonction de courant adimensionnelles peut être écrit sous la forme générale d'équation de transport suivante :

$$\text{div}\{\vec{V}\phi - \Gamma.\overrightarrow{\text{grad}}\phi\} = S \quad (2.1)$$

$\text{div}\{\vec{V}\phi\}$ et $\text{div}\{\Gamma.\overrightarrow{\text{grad}}\phi\}$ représentent les transports de la quantité ϕ par convection et par diffusion. S est le terme source.

Après identification avec le système d'équations précédent, on peut établir le tableau dans lequel nous donnons pour chaque équation les coefficients relatif à la variable ϕ .

Tableau 2.1 : Expressions des variables ϕ , des termes de diffusion Γ et des termes sources d'équations de conservation S

Equations	ϕ	Γ	S
-----------	--------	----------	-----

Continuité vorticité	ω	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{1}{Re} \cdot \frac{\omega}{r^2}$
Fonction courant	ψ	-1	$\frac{\psi}{r^2} - \omega$

2. 2.Discrétisations

2.2. 1. Discrétisation du domaine - Maillage

Pour simplifier le traitement numérique nous allons prendre l'entrée de la zone de mélange comme origine des abscisses x. La longueur adimensionnelle de notre domaine d'étude devient dès lors $(L_e/D) - (L_o/D)$

Pour formuler numériquement notre problème, nous allons d'abord ramener notre domaine continu en un domaine discret formé de nœuds. Pour ce faire nous adoptons un maillage régulier suivant les deux directions (voir figure 2.1). Nous avons donc :

$$r_i = \delta r(i - 1) \quad (2.2)$$

$$x_j = \delta x(j - 1) \quad (2.3)$$

avec

$$\delta r = \frac{1}{2(i_{max}-1)} \quad \text{et} \quad \delta x = \frac{(L_e/D)-(L_o/D)}{j_{max}-1} \quad (2.4)$$

i_{max} et j_{max} sont les nombres de nœuds respectivement suivant les direction 0r et 0x

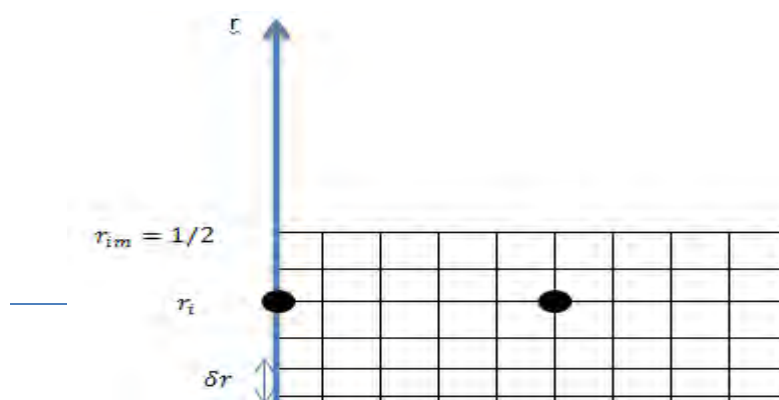


Figure 2.1: Schéma de la distribution du maillage

En outre nous posons

$$\delta r_n = r(i+1) - r(i) ; \delta r_s = r(i) - r(i-1) \quad (2.5)$$

$$\delta x_e = x(j+1) - x(j) ; \delta x_w = x(j) - x(j-1) \quad (2.6)$$

Le domaine d'étude est subdivisé en un réseau de volumes finis de dimensions $dv = \Delta r_i \times \Delta x_j$ (Voir figure 2.2) tel que

$$\Delta r_i = 0.5 \times [r(i+1) - r(i-1)] \quad \text{et} \quad \Delta x_j = 0.5 \times [x(j+1) - x(j-1)] \quad (2.7)$$

Puisque le maillage est régulier alors nous avons

$$\delta r_n = \delta r_s = \delta r_i = \delta r$$

$$\delta x_e = \delta x_w = \delta x_j = \delta x$$

Au centre de chaque volume de contrôle sont stockées les quantités scalaires ω et Ψ et les composantes du champ des vitesses (V_r et V_x) sont localisées aux faces de volume de contrôle e, w, n et s (figure 2.2).

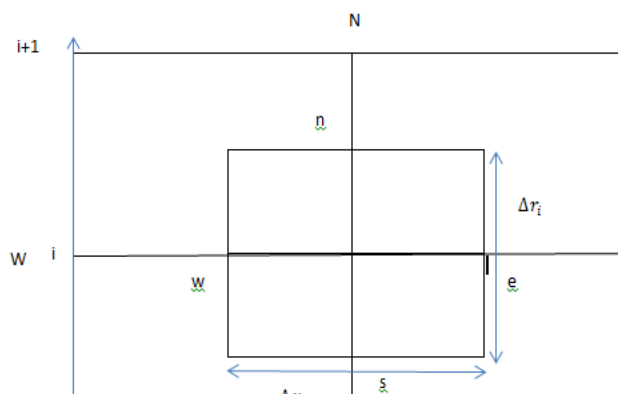


Figure 2.2 : Schéma d'interpolation

La méthode des volumes finis, consiste à échantillonner le domaine de calcul à un nombre finis d'éléments appelés volumes de contrôle où chaque volume entoure un nœud. L'intégration des éléments des équations aux dérivées partielles de départ sur chacun de ces volumes de contrôle donne les équations algébriques discrétisées, l'ouvrage de **S. V. Patankar** (Patankar, 1980) constitue un excellent guide.

2.2.2. Discrétisation des équations

L'équation finale discrétisée est une relation algébrique entre les valeurs de la variable ϕ , au centre de la maille et celles aux nœuds voisins repérés aux points cardinaux E (Est), W (Ouest), S (Sud) et N (Nord). On aboutit à l'équation discrétisée générale suivante :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (2.8)$$

Les coefficients $a_P, a_E, a_W, a_N, a_S, b$ s'expriment ainsi :

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0]; \quad a_W = D_w A(|P_w|) + [F_w, 0] \quad (2.9)$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0]; \quad a_S = D_s A(|P_s|) + [F_s, 0] \quad (2.10)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (2.11)$$

$$b = S \cdot \Delta r \cdot \Delta x \quad (2.12)$$

$$D_e = \frac{r_e \Delta x}{\delta r}; \quad F_e = \rho V_{xe} \Delta x; \quad P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad (2.13)$$

$$D_w = \frac{r_w \Delta x}{\delta r}; F_w = \rho V_{xw} \Delta x; P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad (2.14)$$

$$D_n = \frac{r_n \Delta r}{\delta x}; F_n = \rho V_{rn} \Delta r; P_n = \frac{F_n}{D_n} \quad (2.15)$$

$$D_s = \frac{r_s \Delta r}{\delta x}; F_s = \rho V_{rs} \Delta r; P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (2.16)$$

F_k , D_k et P_k sont respectivement le flux convectif, la conductance et le nombre de *Peclet* numérique à l'interface k .

La fonction $A(|P_k|)$ (k représente e, w, n ou s.) peut être calculée par l'un des schémas numériques d'interpolation du tableau suivant :

Tableau 2.2 : Schémas numériques d'interpolation

Schéma	$A(P)$
Différences centrées	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Hybrid	$Max[0, 1 - 0.5 P]$
Power law	$Max[0, (1 - 0.5 P)^5]$
Exponentiel	$ P /[exp P - 1]$

Nous avons choisi le schéma de **Power-Law** de **Patankar** pour calculer $A(|P_k|)$. Ce schéma est une version très proche du schéma exponentiel et est plus précis que le schéma hybride. Néanmoins en approchant les coefficients a_E , a_W , a_N et a_S par une fonction polynomiale de Pe (nombre de péclet) par morceaux, le schéma Power – Law va exiger un temps de calcul relativement plus long que celui du schéma hybride. Nous prenons donc :

$$A(|P_k|) = Max \left\{ 0, \left(1 - \frac{0.1|F_k|}{D_k} \right)^5 \right\} \quad (2.17)$$

2.2.3. Discrétisation des équations de la vorticité et de la fonction de courant

Les différents termes des équations de la vorticité et de la fonction de courant sont calculés en l'intégrant sur le volume de contrôle décalé

- Si $\phi = \omega$

Les coefficients a_k de l'équation de la vorticité sont

$$a_E = a_{i,j+1} ; a_W = a_{i,j-1} ; a_N = a_{i+1,j} ; a_S = a_{i-1,j}$$

avec:

$$a_P = a_{i,j} = a_{i,j+1} + a_{i,j-1} + a_{i+1,j} + a_{i-1,j}$$

$$b = -\frac{1}{Re} \cdot \frac{\omega}{r^2} \Delta r \cdot \Delta x$$

$$\Gamma_e = \Gamma_w = \Gamma_n = \Gamma_s = \frac{1}{Re}$$

Les flux convectifs aux interfaces sont donnés par

$$F_e = V_{xe} \Delta x ; F_w = V_{xw} \Delta x ; F_n = V_{rn} \Delta r ; F_s = V_{rs} \Delta r \quad (2.18)$$

En approchant les vitesses aux interfaces par des valeurs moyennes il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{xe} = \frac{V_{xE} + V_{xP}}{2} \\ V_{xw} = \frac{V_{xW} + V_{xP}}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{rn} = \frac{V_{rN} + V_{rP}}{2} \\ V_{rs} = \frac{V_{rS} + V_{rP}}{2} \end{array} \right. \quad (2.19)$$

- Si $\phi = \psi$

ici on a

$$A(|P_k|) = 1$$

Donc les coefficients a_k deviennent

$$a_E = a_{i,j+1} = D_e \text{ et } a_W = a_{i,j-1} = D_w$$

$$a_N = a_{i+1,j} = D_n \text{ et } a_S = a_{i-1,j} = D_s$$

$$b = \left(\frac{\Psi}{r^2} - \omega \right) \cdot \Delta r \cdot \Delta x$$

$$\Gamma_e = \Gamma_w = \Gamma_n = \Gamma_s = -1$$

2.2.4. Discrétisation des conditions aux limites adimensionnelles

Les dérivées partielles sont approchées par un schéma de différence finie classique décentré en aval pour l'axe de symétrie et l'entrée de la zone de mélange et par un schéma de différence finie classique décentré en amont pour la paroi et la sortie du cylindre. Si f est une fonction définie au nœud i_p , ses dérivées première et seconde par rapport à la variable \mathcal{Y} (\mathcal{Y} représente r ou x) sont approchées par

- Le schéma de différence fini décentré en aval

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_p} = \frac{1}{2 \cdot \Delta_1} \left\{ -f_{i_p+2} + 4 \cdot f_{i_p+1} - 3 \cdot f_{i_p} \right\} + O(\Delta_1^2) \quad (2.20)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{y_p} = \frac{1}{\Delta_1^2} \left\{ f_{i_p+2} - 2 \cdot f_{i_p+1} + f_{i_p} \right\} + O(\Delta_1^2) \quad (2.21)$$

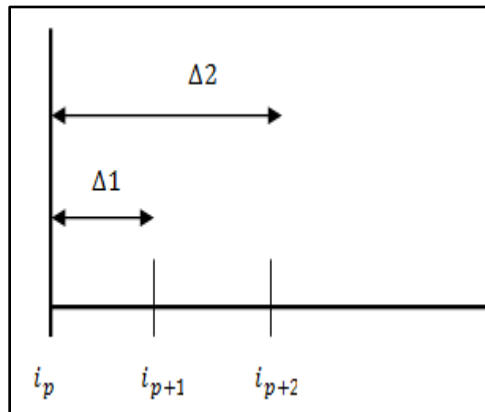


Figure 2.3: Schéma de différence fini en aval

- Le schéma de différence fini décentré en amont

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_p} = \frac{f_{i_p-2} - 4.f_{i_p-1} + 3.f_{i_p}}{2.\Delta_1} + 0[(\Delta_1)^2] \quad (2.22)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{y_p} = \frac{f_{i_p-2} - 2.f_{i_p-1} + f_{i_p}}{(\Delta_1)^2} + 0[(\Delta_1)^2] \quad (2.23)$$

Nous avons posé dans ces relations :

$$\Delta_1 = \delta y ; \Delta_2 = 2.\delta y \quad (2.24)$$

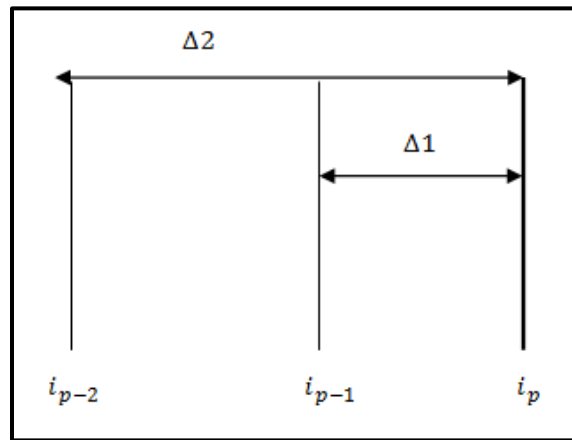


Figure 2. 4:Schéma de différence fini en amont

La grandeur f représente V_r , V_x , ω ou Ψ et y représente r ou x

i_p dans le schéma aval est égal à 1 et en amont est égal à i_m ou j_m

✓ A l'entrée : $j = 1$ ($x = L_0$)

$$V_{ri,1} = 0 \quad \forall i$$

○ Dans le cylindre de rayon R_2 : $1 \leq i \leq i_2$ ($0 < r \leq R_2$)

$$V_{xi,1} = V_{20}$$

$$\Psi_{i,1} = \Psi_{20}$$

$$\omega_{i,1} = \omega_{20}$$

- Dans l'espace annulaire : $i_2 \leq i \leq i_m$ ($R_2 < r \leq \frac{1}{2}$)

$$V_{xi,1} = V_{10}$$

$$\Psi_{i,1} = \Psi_{20}$$

$$\omega_{i,1} = \omega_{20}$$

- ✓ À la paroi $i = i_{max}$ ($r = \frac{1}{2}$)

$$V_{xi_{m,j}} = 0$$

$$\Psi_{i_m-2,j} - 4.\Psi_{i_m-1,j} + (3+4.\Delta r).\Psi_{i_m,j} = 0$$

$$(\Delta r)^2 \omega_{i_m,j} = (8(\Delta r)^2 - 1)\Psi_{i_m,j} - \Psi_{i_m-2,j} + 2\Psi_{i_m-1,j}$$

- ✓ A la sortie $j = j_{max}$ ($x = \frac{L_e}{D}$)

$$\frac{\partial V_{rjm,i}}{\partial x} = \frac{\partial V_{xjm,i}}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_{jm,i}}{\partial x} = \frac{\partial \omega_{jm,i}}{\partial x} = 0$$

Nous aurons alors:

$$f_{i,j_m-2} - 4.f_{i,j_m-1} + 3.f_{i,j_m} = 0$$

avec

$$f_{i,j} = \Psi_{i,j}, \quad \omega_{i,j}, \quad V_{xi,j} \quad \text{ou} \quad V_{ri,j}$$

- ✓ Sur l'axe de symétrie $i=1$

Le caractère axisymétrique de l'écoulement se traduit par

$$\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{1,j} = 0$$

Ce qui entraîne

$$-f_{3,j} + 4.f_{2,j} - 3.f_{1,j} = 0$$

Avec $f_{i,j} = \Psi_{i,j}, \omega_{i,j}, V_{xi,j} \text{ ou } V_{ri,j}$

2.3. Méthode de résolution

Pour résoudre le système d'équations discrétisées, nous faisons appel à des méthodes itératives qui sont basées sur l'application répétée d'un simple algorithme menant à la convergence désirée après un nombre fini de répétitions (itérations). Nous ferons dans ce travail appel à la méthode itérative de relaxation *ligne par ligne* de Gauss-Siedel. L'algorithme de calcul comprend les étapes suivantes :

1. Initier les champs de vitesse (On donne un champ arbitraire des vitesses).
2. Calculer les coefficients de l'équation de la vorticité.
3. Calculer le champ de vorticité.
4. On résout l'équation de la fonction de courant par une méthode itérative de type Gauss Siedel et on en déduit le nouveau champ des vitesses
5. On compare le champ des vitesses calculées avec celui qui a été initié.
6. Si le test est satisfaisant, on arrête les calculs sinon on remplace les anciennes valeurs des vitesses par les nouvelles et on retourne à l'étape 2

2.3.1. Technique de relaxation

La relaxation est régulièrement utilisée dans les problèmes fortement non linéaires pour éviter que le processus itératif ne diverge (S. Samarsky, 1980). Elle consiste à diminuer la variation de la grandeur physique ϕ d'une itération à une autre par l'introduction d'un coefficient de sous relaxation α_ϕ . Soit ϕ^{old} la valeur de variation ϕ à l'itération précédente et ϕ^{calc} la valeur calculée au cours de l'itération. La nouvelle valeur de la variable ϕ est calculée par :

$$\phi_p^{new} = \alpha_\phi \phi_p^{calc} + (1 - \alpha_\phi) \phi_p^{old} \quad (2.23)$$

Le coefficient de relaxation α_ϕ étant choisi tel que $0 < \alpha_\phi < 2$. La valeur optimale de α_ϕ est très difficile à obtenir analytiquement (sauf pour des cas triviaux) car elle dépend de la nature du problème physique, du type de maillage utilisé et la méthode itérative de résolution. C'est pourquoi on la détermine habituellement à partir de tests numériques.

2.3.2. Convergence

La convergence est satisfaite si

$$\frac{\sum_{i,j} |\Psi_{i,j}^{k+1} - \Psi_{i,j}^k|}{\sum_{i,j} |\Psi_{i,j}^k|} < \varepsilon_\Psi \quad (2.24)$$

Avec k le numéro d'itération et ε_Ψ est le critère d'erreur fixé.

Conclusion

Dans le but de résoudre les bilans du modèle théorique, un traitement numérique est jugé nécessaire. Après le choix du maillage nous avons discrétisé spatialement les équations et les conditions aux limites associées par la méthode de volume fini sur un maillage régulier et décalé. Un schéma de *Power – Law* de *Patankar* a été choisi pour approcher les coefficients des équations algébriques.

Par la suite le processus de résolution passe par différentes méthodes itératives (méthode ligne par ligne de Gauss –Siedel, Elimination de Gauss, algorithme de Thomas). Un critère de convergence a été défini pour arrêter le processus itératif.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons étudié dans ce chapitre l'écoulement forcé de deux fluides dans une conduite horizontale. Nous avons eu d'une part à utiliser les équations de Navier Stokes pour régir l'écoulement de notre mélange et d'autre part à les adimensionnaliser afin de réduire les paramètres de calcul et d'introduire certains nombres caractéristiques de l'écoulement.

Finalement, nous avons utilisé d'autres paramètres de l'écoulement à savoir la vorticité et la fonction de courant afin de rendre quasi linéaires les équations les équations de Navier-Stokes et d'éliminer les termes de pressions dans celles-ci pour diminuer la difficulté de résolution.

Cependant, la non linéarité subsiste toujours ; c'est pour cette raison que nous avons utilisé une méthode approchée à savoir une méthode numérique

Les équations obtenues étant fortement non linéaires nous avons les avons alors modélisées numériquement. Elles ont été d'abord discrétisées avec leurs conditions aux limites associées spatialement par la méthode de volume fini sur un maillage régulier et décalé. Un schéma de *Power – Law* de *Patankar* a été choisi pour approcher les coefficients des équations algébriques. Afin de les traiter nous avons mis au point un processus de résolution qui passe par différentes méthodes itératives. Un critère de convergence a été précisé pour arrêter le processus itératif.

La suite logique de ce travail consiste à mettre au point un code de calcul et de comparer les résultats issus de notre modèle à ceux donnés par des expériences afin de le valider. Par la suite nous pourrions alors envisager, afin de s'approcher davantage de la réalité physique

- De tenir compte du régime instationnaire
- De calculer les espèces diffusantes dans le mélange
- D'utiliser des fluides plus complexes
- D'étudier le problème turbulent car les phénomènes de mélange sont en majorité turbulents.

Références Bibliographiques

BAUJARD C. (2005). – Modélisation de l'écoulement de deux fluides non miscibles dans des milieux fracturés ; application à l'injection d'eau à grande profondeur et à la recherche d'eau douce en milieu côtier. Thèse de Doctorat, Ecole National supérieur des mines de Paris.

CONAN C. (2007). – Etude expérimentale et modélisation des écoulements liquide-liquide en conduite horizontale. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse.

GLASGOW L.A. (2010). - Transport phenomena, an introduction to advanced topics, John Willey and sons, New-Jersey.

PATANKAR S. V. (1980) Numerical Heat transfer and Fluid Flow, Hemisphere Corporation, Mac Graw- Hill Company, New York.

SARMARSKY A.A, NIKOLAEIV. (1980).- Résolution des équations aux mailles, traduit russe, Edition Mir, Moscou.

TANNE HILL J.C, ANDERSON D.A, FLETCHER R.H. (1997). – Computational Fluids Mechanics and Heat Transfer, 2nd Edition Francis and Taylor

TUNEER C., SHAO J.P, KAFYERE F. (2005). - Computational Fluids Dynamics for Engineers, Springer Horizons Publishing New York.

VIOLET P.L, CHABARD J.P. (1998). – Mécanique des fluides à masse volumique variable, Presses des ponts et chaussées.

ZHACIN J. (2009). – Etude locale du mélange induit par gravité de deux fluides dans la géométrie confinée d'un tube incliné. Thèse de Doctorat, Université de Paris sud 11.

**ETUDE DE L'ÉCOULEMENT FORCÉ D'UN BI-FLUIDE NEWTONNIEN DANS UNE CONDUITE CYLINDRIQUE
D'AXE HORIZONTAL : APPLICATION LONGUEUR DE MÉLANGE**

Mémoire présenté par Monsieur Alpha Malick NDIAYE

