

**SOMMAIRE**

<b>Remerciements</b> .....	2
<b>Nomenclature</b> .....	3
<b>Introduction Générale</b> .....	6
<b>Chapitre 1 : Modélisation Mathématique</b> .....	8
<b>1. Equations générales de transfert</b> .....	10
-Equation de continuité	
-Equation de mouvement	
-Equation de l'énergie	
<b>2. Modélisation Mathématique</b> .....	10
2-a. Description du problème.....	10
2-b. Hypothèses simplificatrices.....	11
2-c. Equations du modèle.....	12
2-d. Transformation homotypique.....	14
<b>3. Equation adimensionnelle</b> .....	19
 <b>Chapitre 2: Modélisation Numérique</b> .....	23
<b>1. Schéma de discrétisation temporelle – Méthode de projection</b> .....	24
<b>2. Schéma de discrétisation spatiale</b> .....	26
2. 1. Discrétisation du domaine physique.....	26
2. 2. Discrétisation spatiale des équations.....	28
<b>3. Méthodes de résolution</b> .....	30
 <b>Conclusion et Perspectives</b> .....	32



# Remerciements

.Je tiens sincèrement à remercier **Dr. Cheikh MBOW** pour la confiance qu'il m'a accordé, ainsi que pour les précieux conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués. Je le remercie pour sa contribution hautement distinguée dans la réalisation de ce travail. Son sens d'appréciation scientifique, sa rigueur pour le travail bien fait, ses suggestions pertinentes, son humour et surtout sa disponibilité à me recevoir sans hésitation dans son bureau à maintes reprises pour m'éclairer sur mes idées farfelues. Merci également pour tout le temps qu'il a consacré à la lecture régulière de ce travail.

Mes remerciements sont destinés à :

- ✓ **Monsieur Joseph SARR** Professeur titulaire au département de physique pour avoir accepté de participer à ce jury et de le présider par la même occasion, pour ses conseils, ses orientations et pour m'avoir rendu service à plusieurs reprises ;
- ✓ **Monsieur SOUSOU SAMBOU** Maître de conférences au département de physique pour avoir accepté de participer à ce jury et d'avoir consulté ce document ;
- ✓ **Monsieur Mamadou Lamine Sow** Maître de conférences au département de physique pour avoir accepté d'être membre de ce jury et pour avoir consulté ce document

A mon père **Amory** et ma mère **Amy Barry**

Vos conseils me servent encore dans les moindres détails de ma vie spirituelle. Leur échos se répercuteront toujours dans mon cœur et mon âme .Puisse Allah vous récompenser pour le droit chemin que vous avez tracé non seulement pour mes frères (Ahmadoune,Alassane et Mamadou ),mes sœurs (Adama,Awa,Astou et khady Seck) et moi-même .

A mes cousins et cousines : Pape sylama,Papis Faye ,Ismaila,Tapha,Coumba Ndiaye, Khady Diop,Ablaye , Sofi ,Maman Diatta....

Mes pensées vont à mes amis :Alya , Mbaye Ciss, souleye,Tamsir,Chiékh,MbayeMbengue Moussé, Cheikh Fadel ,Babacar, Papalaye,Cheikh Ka, Mame Bosse... pour tout ceux qu'ils m'ont apporté comme soutien, mais surtout pour leur amitié .

# Nomenclature

## - Lettres latines

$a$ : vitesse du son .....	$(ms^{-1})$
$e$ : énergie interne .....	$(J)$
$F$ : force extérieure.....	$(N)$
$k$ : vecteur d'onde.....	$(jK^{-1})$
$h$ :enthalpie .....	$(J)$
$h_0$ : écartement maximale.....	$(m)$
$h_r$ : enthalpie de référence	
$L$ : la longueur du canal.....	$(m)$
$M$ : masse molaire de l'air	
$M$ : masse .....	$(kg)$
$P$ : la puissance thermique .....	$(W)$
$p$ :pression.....	$(Pa)$
$R$ :constante universelle des gaz parfaits.....	$(J.mol^{-1}.K^{-1})$
$r$ : constante du gaz considéré	
$t$ :temps.....	$(s)$
$t_r$ : temps de référence .....	$(s)$
$T_e$ : température d'équilibre .....	$(K)$

$T_p$ : température de la paroi .....	(K)
$Ve$ : vitesse à l'entrée du canal.....	( $ms^{-1}$ )
$v_x$ : vitesse longitudinale.....	( $ms^{-1}$ )
$v_y$ : vitesse transversale.....	( $ms^{-1}$ )
$x$ et $y$ : coordonnée de l'espace.....	(m)

## - Symboles grecs

$\alpha_r$ :diffusivité thermique.....	( $m^2s^{-1}$ )
$\beta$ : le coefficient de dilation volumique à pression constante $K^{-1}$	
$\gamma$ : indice adiabatique	
$\eta$ : variable primitive	
$\theta_r$ : température de référence	
$\lambda, \mu$ : les coefficients de viscosité.....	( $Kg.m^{-1}.s^{-1}$ )
$\lambda_r$ : Conductivité thermique .....	$W.m^{-1}K^{-1}$
$\nu$ : viscosité cinématique.....	( $m^2s^{-1}$ )
$\xi$ : variable primitive	
$\rho$ : masse volumique .....	( $kgm^{-3}$ )
$\varphi_r$ : le rayonnement absorbé au niveau de S, si le milieu est semi-transparent	

$\emptyset$ :L'énergie mécanique dissipée par les frottements visqueux

## - Exposants

\* : relatif à grandeurs adimensionnelles

## - Nombres caractéristiques

$Eu$ : Nombre d'Euler

$Fr$ : nombre de Froude

$Ma$  : nombre de Mach

$Pr_T$  : nombre de Péclet

$Pr$  : nombre de Prandtl

$Re$ : nombre de Reynolds

## **-Liste des figures**

Figure 1 : Trace d'un canal

Figure 2 : Domaine de système de coordonnées ( $O \xi$ ) et ( $O \eta$ )

Figure 2.1:Maillage du domaine

Figure 2.2 Maillage structuré décalé

## Introduction Générale

Le traitement de surface est une opération effectuée sur un matériau qui a pour conséquence de modifier son aspect (texture, propriétés électriques ou optiques, etc.) ou sa fonction (principalement en termes de durabilité, tenue en température, réduction des frottements, etc.) afin de l'adapter à des conditions d'utilisation imposées. Pour se faire, la fonction du traitement de surface est : soit de déposer un revêtement sur un matériau (qui est alors appelé *substrat*), soit de retirer un revêtement sur un matériau (on parle alors généralement d'une opération de *nettoyage*), soit de modifier directement les caractéristiques de la surface du matériau. La nature même de l'opération peut être mécanique, chimique, électrochimique ou physique. Le traitement de surface fait partie intégrante des procédés industriels de fabrication d'objets divers. Il permet de lutter contre la corrosion des métaux, l'usure (par frottements par exemple) des matériaux, ou simplement d'améliorer l'aspect d'une surface (opération de polissage, par exemple). En réponse à des problématiques techniques, économiques ou environnementales, de plus en plus de nouvelles fonctions sont ajoutées aux surfaces des objets et de nouveaux procédés sont mis au point pour assurer des fonctions déjà existantes. Le développement des procédés de traitement de surface est alors directement lié à ces problématiques (par exemple, l'évolution des procédés jusqu'ici inadaptés car trop onéreux, polluants, nocifs, etc.). Ces procédés de traitement de surface sont extrêmement variés et font intervenir des technologies telles que la pulvérisation par plasma (éventuellement assistée par laser), l'attaque chimique sèche (*Chemical Vapor Deposition*, utilisation de plasmas) ou humide (dépôt chimique dynamique), les dépôts de poudre par voie électrostatique, etc. Par exemple, le dépôt d'un revêtement anti-usure est une opération de traitement de surface classique qui joue un rôle prépondérant dans le domaine de la tribologie. Pour les opérations de nettoyage (décapage) en particulier, des techniques traditionnelles de préparation de surface existent depuis quelques décennies. Les techniques les plus répandues sont à base de jet d'eau (voir par exemple Louis et Schikorr [1] pour des aspects phénoménologiques mis en jeu dans le procédé, Leu *et al.* [2] pour une analyse mathématique et expérimentale de l'efficacité du procédé). Mais il existe également des systèmes thermiques (comme le cold spray, voir Alkhimov *et al.* [3] pour la présentation du procédé et Dykhuizen et Smith [4] pour les caractéristiques de l'écoulement). Des systèmes

chimiques (bains acides, solvants), ou des systèmes mécaniques (via les techniques de sablage ou de grenaillage qui utilisent des particules abrasives) se trouvent aussi dans les procédés de préparation de surface. De plus récentes technologies à base de jets cryogéniques permettent d'allier à l'effet mécanique d'arrachement (dû à l'énergie d'impact délivrée par le jet), un effet de choc thermique (cristallisation du dépôt à décaper), et un effet mécanique supplémentaire d'arrachement dû à la très forte détente de ces substances qui sont gazeuses à l'état naturel pour la plupart (voir par exemple Charbit *et al.* [5], Toscano et Ahmadi [6]). D'autre part lors de dépôt de substance sur une surface réactive il est souhaitable que la densité de flux de diffusion soit partout constante : on parlera de surface uniformément constante. Les surfaces qui présentent cette propriété remarquable sont très rares. Le fameux disque tournant et quelques paraboloides de révolution ont cette propriété. Du point de vue thermique ces surfaces ont la particularité de posséder d'« offrir » la plus petite résistance à la conduction. En convection forcée, il faut donc que la longueur d'entrée soit la plus petite.

C'est pourquoi nous nous proposons d'étudier l'écoulement d'un fluide compressible à haute température appliqué aux dépôts de substance dans un canal convergent. Pour se faire, nous divisons notre manuscrit en deux chapitres :

Dans le premier chapitre intitulé **Modélisation Mathématique**, on va d'abord décrire le système étudié puis formuler mathématiquement le problème en s'appuyant sur des théorèmes généraux. Ensuite nous allons expliquer la méthode analytique de résolution .

Le deuxième chapitre, intitulé **Modélisation Numérique**, est relatif à l'exposé de la méthode numérique utilisée. Le mémoire se termine par une conclusion générale et de perspectives.

# **Chapitre 1 : Modélisation Mathématique**



## Introduction

Un fluide compressible est généralement défini comme un fluide au sein duquel la masse volumique peut varier. Des variations de la masse volumique influencent naturellement les écoulements. L'origine physique d'une variation de la masse volumique peut-être diverse. Par exemple, des inhomogénéités de la température ou de la pression dans l'écoulement. Cependant, un écoulement peut être considéré comme incompressible bien que la masse volumique du fluide qui s'écoule peut varier. Ce type d'écoulement entre dans le cadre de l'approximation de Boussinesq où les variations de la masse volumique sont négligées partout sauf là où les effets de la gravité apparaissent (comme dans le gradient de pression au sein de l'écoulement). Le nombre de Mach est le nombre adimensionnel permettant de distinguer un écoulement compressible d'un écoulement incompressible. Il permet de caractériser les effets de compressibilité intrinsèque liés à la propagation d'ondes acoustiques (ondes de pression).

Le nombre de Mach  $Ma$  est défini comme étant le rapport entre la vitesse locale dans l'écoulement  $v$  et la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans le fluide considéré (*i.e.* la vitesse de propagation du son)  $a$ :

$$Ma = \frac{v}{a}$$

Il est communément admis que les effets de compression peuvent être négligés pour les nombres de Mach inférieurs à 0,3.

Dans un écoulement incompressible, les perturbations de pression se déplacent avec une vitesse infinie dans le fluide, conduisant à un nombre de Mach nul quelle que soit la vitesse locale du fluide. Par opposition, dans un écoulement compressible, une perturbation de pression ponctuelle se propage dans toutes les directions à la vitesse locale du son (qui est finie). Trois principales configurations d'écoulement compressible sont distinguées suivant les valeurs du nombre de Mach : le régime subsonique ( $Ma < 1$ ), sonique ( $Ma = 1$ ) et

supersonique ( $Ma > 1$ ). Pour illustrer les phénomènes liés à ces régimes, considérons un point matériel  $p$  se déplaçant à une vitesse  $v$  dans un fluide. Au cours de son mouvement, le point matériel engendre au sein du fluide des perturbations de pression (*i.e.* il est la source d'émission d'ondes acoustiques), qui engendrent elles-mêmes des variations de masse volumique, etc. En fonction du régime d'écoulement, ces perturbations se propagent différemment.

Dans ce travail nous nous proposons de modéliser l'écoulement confiné d'un fluide compressible chaud en convection forcé. En partant des équations de transferts d'impulsion, de chaleur et de conservation de masse.

## 1. Equations générales de transfert

Les équations de transferts données par

- L'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad 1.1$$

- L'équation du mouvement

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \rho \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \text{div} [\mu \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}] + \overrightarrow{\text{grad}} \{ (\lambda + \mu) \text{div} \vec{v} \} \quad 1.2$$

- L'équation de l'énergie

Elle s'obtient aisément à partir de la définition de la densité d'enthalpie:  $h = e + P/\rho$  mise sous la forme différentielle

$$\rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} h \right) = \beta T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p \right) + P + \phi + \text{div} (\lambda_r \overrightarrow{\text{grad}} T) - \text{div} \vec{\phi}_r \quad 1.3$$

## 2. Modélisation Mathématique

### 2-a. Description du problème

On considère l'écoulement d'un fluide newtonien dans un canal convergent délimité par :

- Une plaque inférieure, plane, horizontale et maintenue à une température constante  $T_p$

- Une paroi supérieure adiabatique qui est une nappe hyperbolique de trace

$$y_p = h_0 \frac{b}{x+b} \quad 2.1$$

$$\text{avec } b = \frac{h_s \cdot L}{h_0 - h_s} \quad 2.2$$

où  $h_s$  est la hauteur à la sortie

- Le fluide initialement au repos et à la température  $T_0$  est injecté à l'entrée du canal avec une vitesse  $v_e$  à partir d'un instant  $t_0$ .

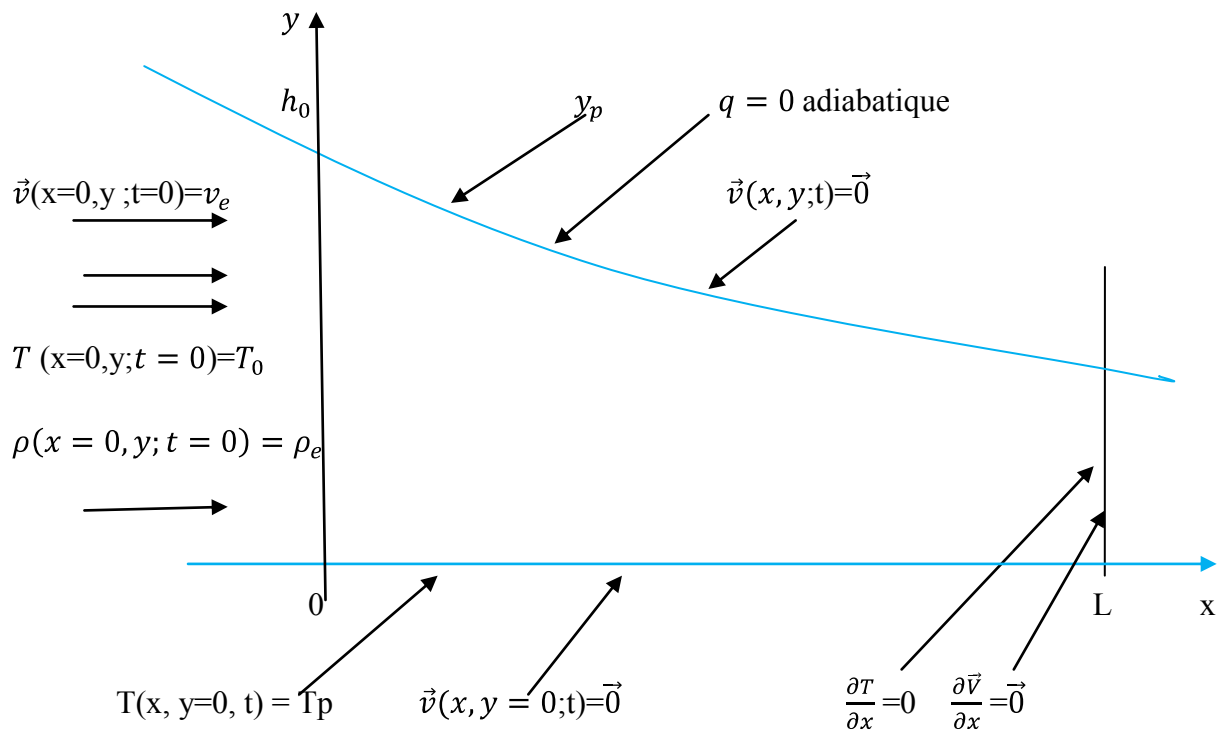


Figure 1 : Schématisation du domaine physique- Trace du canal

## 2-b. Hypothèses simplificatrices

Nous admettons que :

- toutes les propriétés physiques à l'exception de la masse volumique ( $\rho$ ) ne varie pas en fonction du temps ( $t$ ) sont supposées constantes
- le fluide est Newtonien
- dans le cas de l'équation de l'énergie on néglige la puissance thermique  $P$ , l'énergie mécanique dissipée par les frottements visqueux  $\phi$ , le rayonnement  $\varphi_r$  et le travail des forces visqueuses.
- les transferts sont supposés bidimensionnels

## 2-c. Equations du modèle

En tenant compte des hypothèses de travail ci-dessus les équations de transfert deviennent

- **L'équation de continuité**

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad 2.3$$

- **L'équation du mouvement**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \nu \cdot \text{div}[\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}] \\ - \frac{\nu}{3} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \{ \overrightarrow{\text{grad}} [\ln(\rho)] \cdot \vec{v} \} \end{aligned} \quad 2.4$$

- **L'équation de l'énergie**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \overrightarrow{\text{grad}} T = \alpha_r \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} T) \quad 2.5$$

En les projetant dans le système de coordonnées cartésiennes et en tenant compte de l'hypothèse de bidimensionnalité nous avons

- **Equation de continuité**

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0 \quad 2.6$$

- **Equations du mouvement suivant Ox**

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ - \frac{\nu}{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ v_x \cdot \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right) + v_y \cdot \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \right) \right\} \right\} \end{aligned} \quad 2.7$$

- **Equations du mouvement suivant Oy**

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \\ - \frac{\nu}{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v_x \cdot \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right) + v_y \cdot \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \right) \right\} \right\} \end{aligned} \quad 2.8$$

- **Equation du bilan de l'enthalpie**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_r \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad 2.9$$

- **Condition aux limites et initiales**

- **Condition initiales**

$$\vec{v}(x, y; t = 0) = \vec{0} \quad 2.10$$

$$\rho(x, y; t = 0) = \rho_0 \quad 2.11$$

$$P(x, y; t = 0) = 0 \quad 2.12$$

$$T(x, y; t = 0) = T_0 \quad 2.13$$

- **Condition aux limites**

Conditions à l'entrée  $x = 0$

$$\vec{v}(x = 0, y; t) = \vec{v}_e \quad 2.14$$

$$\rho(x = 0, y) = \rho_e \quad 2.15$$

$$P(x = 0, y; t) = P_e \quad 2.16$$

$$T(x = 0, y; t) = T_0 \quad 2.17$$

Conditions à la sortie  $x = L$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \text{ avec } F = (\vec{v}, \rho, P, T) \quad 2.18$$

Sur la paroi plane inférieure  $y = 0$

$$\vec{v}(x, y = 0; t) = \vec{0} \quad 2.19$$

$$T(x, y=0, t) = T_p \quad 2.20$$

Sur la paroi supérieure  $y = y_p$

$$\vec{v}(x, y = y_p; t) = \vec{0} \quad 2.21$$

Si nous désignons par le vecteur unitaire normale à la paroi au point  $M(x, y_p)$  alors la condition d'adiabaticité se traduit par

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad 2.22$$

Ce qui conduit à

$$n_x \frac{\partial T}{\partial x} + n_y \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad 2.23$$

avec  $n_x$  et  $n_y$  les composantes du vecteur unitaire normal à la paroi au point considéré définies par

$$n_x = \frac{1}{\sqrt{1+(y_p')^2}} \cdot y_p' \quad 2.24$$

$$n_y = \frac{1}{\sqrt{1+(y_p')^2}} \quad 2.25$$

### Conditions sur le champ des pressions au niveau des parois solides

L'établissement des conditions aux limites sur la pression pose des problèmes car on ne peut pas sur une paroi solide imposer des conditions intrinsèques sur la pression. C'est pourquoi on les déduit à partir des équations du mouvement. Ainsi en particulierisant les équations du mouvement au niveau des frontières et compte tenu des conditions de non pénétration et d'adhérence, on a

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{g} - \frac{\nu}{3} \overrightarrow{\text{grad}}(\ln \rho) \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \quad 2.26$$

Donc sur la paroi plane  $y=0$  nous avons

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g - \frac{\nu}{3} \cdot \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad 2.27$$

Au niveau de la paroi supérieure on écrit

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = -g - \frac{\nu}{3} [\text{grad}(\ln \rho)]_\tau \cdot \frac{\partial v_\tau}{\partial n} \quad 2.28$$

### 2-d Transformation homotopique

Notre domaine étant à frontières curvilignes, il va de soi que la traduction des conditions aux limites n'est pas aisée dans de telles configurations (voir les formules donnant la température

et la pression au niveau de la paroi supérieure). D'un autre côté lors de la discrétisation il nous sera difficile de capter tous les nœuds sur la paroi.

C'est donc pourquoi il est utile de transformer notre domaine curviligne en un domaine rectangulaire. Pour cela nous allons utiliser la transformation homotopique suivante

$$\begin{cases} x = \xi \\ y = \eta \cdot y_p(\xi) \end{cases} \quad 2.2$$



**Figure 2 :** Domaine d'étude dans le nouveau système de coordonnées  $(O \xi)$  et  $(O \eta)$

Le domaine ainsi transformé est schématisé sur la figure 2. Si la fonction est non nulle dans son domaine de définition alors la transformation réciproque donne

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = \frac{y}{y_p(x)} \end{cases} \quad 2.30$$

### Transformation des composantes des vecteurs

Si nous posons

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y \quad 2.31$$

Il vient

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y = \vec{v} = v_\xi \cdot \vec{e}_\xi^0 + v_\eta \cdot \vec{e}_\eta^0 \quad 2.32$$

$v_\eta$  et  $v_\xi$  composantes physiques de  $\vec{v}$  dans la base normée  $(\vec{e}_\xi^0, \vec{e}_\eta^0)$ . Si

$$\vec{OM} = \vec{e}_x \cdot x + \vec{e}_y \cdot y \quad 2.33$$

Alors les vecteurs de base covariantes sont donnés par

$$\vec{e}_\xi = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \xi} = \vec{e}_\xi = \vec{e}_x + y'_p(\xi) \vec{e}_y \quad 2.34$$

$$\vec{e}_\eta = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \eta} = \vec{e}_x \frac{\partial x}{\partial \eta} + \vec{e}_y \frac{\partial y}{\partial \eta} = \vec{e}_y * y_p(\xi) \quad 2.35$$

Les vecteurs de base qui nous permettent d'avoir les composantes physiques de la vitesse sont alors définis par

$$\vec{e}_\xi^0 = \frac{1}{|\vec{e}_\xi|} \cdot \vec{e}_\xi = \frac{1}{|\vec{e}_\xi|} (\vec{e}_x + y'_p(\xi) \vec{e}_y) \quad 2.36$$

$$\vec{e}_\eta^0 = \frac{1}{|\vec{e}_\eta|} \cdot \vec{e}_\eta = \vec{e}_y \quad 2.37$$

Comme

$$\vec{e}_x v_x + \vec{e}_y v_y = \vec{e}_\xi^0 v_\xi + \vec{e}_\eta^0 v_\eta \quad 2.38$$

alors il vient après calcul

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi \\ v_y = \frac{y_p(\xi)'}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi + v_\eta \end{cases} \quad 2.39$$

où

$$\begin{cases} |\vec{e}_\eta^0| = |y_p| \\ |\vec{e}_\xi^0| = \sqrt{1 + (y_p')^2} \end{cases} \quad 2.40$$



## Expressions des opérateurs différentiels

### Calcul de $\frac{\partial}{\partial x}$

On a

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad 2.41$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{y'_p}{y_p} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \quad 2.42$$

### Calcul de $\frac{\partial}{\partial y}$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad 2.43$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{y_p} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad 2.44$$

Expression de  $\overrightarrow{grad}F$

$$\overrightarrow{grad}F = \vec{e}_\xi^0 \left\{ |\vec{e}_\xi| \left( \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{y'_p}{y_p} \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \right\} + \vec{e}_\eta^0 \cdot \frac{1}{y_p} \left[ (1 + \eta(y'_p)^2) \frac{\partial F}{\partial \eta} - y_p y'_p \frac{\partial F}{\partial \xi} \right] \quad 2.45$$

Expression de  $div(\vec{v})$

$$div(\vec{v}) = \frac{1}{y_p} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{y_p}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} [v_\eta] \right\} \quad 2.46$$

Expression de  $\vec{v} \overrightarrow{grad}$

$$\vec{v} \overrightarrow{grad} = \frac{y_p}{|\vec{e}_\xi|} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{v_\eta}{y_p} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad 2.47$$

Expression de  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Après calcul et arrangement nous obtenons



$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{y_p^2} \left\{ A_1 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_2 \frac{\partial}{\partial \eta \partial \xi} + A_3 \frac{\partial}{\partial \eta} + A_4 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right\} \quad 2.48$$

Avec les coefficients donnés par

$$A_1 = y_p^2 \quad 2.49$$

$$A_2 = \eta (y'_p)^2 \quad 2.50$$

$$A_3 = \eta \left[ 2(y'_p)^2 - y_p y''_p \right] \quad 2.51$$

$$A_4 = \left[ 1 + (\eta y'_p)^2 \right] \quad 2.52$$

Equations de transferts dans le nouveau système de coordonnées.

En remplaçant les composantes du champ des vitesses et les dérivées par rapport x et y par leurs expressions les équations de transfert ci-dessus nous obtenons.

#### Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{y_p}{|\vec{e}_\xi|} \rho \cdot v_\xi \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} [\rho \cdot v_\eta] = 0 \quad 2.53$$

#### Equation de la composante $v_\xi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\xi}{\partial t} + \left\{ \frac{v_\eta}{y_p} \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + \frac{v_\xi}{|\vec{e}_\xi|} \left( \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - v_\xi \cdot \frac{\partial \ln |\vec{e}_\xi|}{\partial \xi} \right) \right\} = -\frac{1}{\rho} \cdot |\vec{e}_\xi| \left( -\frac{y'_p}{y_p} \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + \\ v \frac{1}{y_p^2} \left( A_1 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_2 \frac{\partial}{\partial \eta \partial \xi} + A_3 \frac{\partial}{\partial \eta} + A_4 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left( \frac{1}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi \right) - \\ \frac{v}{3} \left\{ \left( -\frac{y'_p}{y_p} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left\{ \left( \frac{1}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi \right) \cdot \left( -\frac{y'_p}{y_p} \eta \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} + \frac{\partial \ln \rho}{\partial \xi} \right) + \left( \frac{y_p(\xi)'}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi + v_\eta \right) \cdot \left( \frac{1}{y_p} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} \right) \right\} \right\} \end{aligned} \quad 2.54$$

#### Equation de la composante $v_\eta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\eta}{\partial t} + \left\{ \frac{v_\eta}{y_p} \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + \frac{v_\xi}{|\vec{e}_\xi|} \left( \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + v_\xi \cdot \frac{y''_p}{|\vec{e}_\xi|} \right) \right\} = -g - \frac{1}{y_p} \left[ (1 + \eta (y'_p)^2) \frac{\partial p}{\partial \eta} - y_p y'_p \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] + \\ v \left( \frac{1}{y_p^2} \left( A_1 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_2 \frac{\partial}{\partial \eta \partial \xi} + A_3 \frac{\partial}{\partial \eta} + A_4 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left( \frac{y'_p}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi + v_\eta \right) \right) - \\ \frac{v}{3} \left\{ \frac{1}{y_p} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} \left\{ \left( \frac{1}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi \right) \cdot \left( -\frac{y'_p}{y_p} \eta \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} + \frac{\partial \ln \rho}{\partial \xi} \right) + \left( \frac{y_p(\xi)'}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi + v_\eta \right) \cdot \left( \frac{1}{y_p} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} \right) \right\} \right\} \end{aligned} \quad 2.55$$

### Equation du bilan de l'enthalpie massique

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi \left( -\frac{y'_p}{y_p} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) T + \left( \frac{y'_p}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi + v_\eta \right) \frac{1}{y_p} \frac{\partial T}{\partial \eta} =$$

$$\alpha_r \frac{1}{y_p^2} \left( A_1 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - A_2 \frac{\partial T}{\partial \eta \partial \xi} + A_3 \frac{\partial T}{\partial \eta} + A_4 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \right) \quad 2.56$$

### 3. Equations adimensionnelle

L'intérêt de faire apparaître des nombres sans dimension est de pouvoir comparer différents écoulements tout en s'affranchissant des effets d'échelle, ou d'unités. On fait ainsi apparaître des classes d'écoulements caractérisées par ces nombres sans dimension.

De plus, ces nombres sont bien plus représentatifs du régime et du comportement de l'écoulement que les véritables grandeurs physiques. En effet, ces nombres nous permettent de comparer les ordres de grandeur des différents termes : la vitesse par rapport à la vitesse du son.

Nous choisissons la longueur L de la plaque inférieure comme longueur de référence. Il vient alors

$$x^* = \frac{x}{L} \Rightarrow x = x^* L = L \cdot \xi^* \quad 3.1$$

$$y = y^* L \Rightarrow L y^* = \eta y_p \Rightarrow y^* = \eta \cdot y_p^*(\xi^*) \quad 3.2$$

Nous avons posé

$$y_p^*(\xi^*) = h_0^* \frac{b^*}{\xi^* + b^*} \quad 3.3$$

$$\text{avec } b^* = \frac{h_s}{h_0 - h_s} \quad \text{et} \quad h_0^* = \frac{h_0}{L} \quad 3.4$$

Nous poserons aussi dans ce qui suit

$$y_p^{*'} = \frac{dy_p^*(\xi^*)}{d\xi^*} \quad \text{et} \quad y_p^{*''} = \frac{d^2 y_p^*(\xi^*)}{d\xi^{*2}} \quad 3.5$$

Nous prenons comme vitesse et écart de température de référence respectivement la vitesse à l'entrée de la conduite  $V_e$  et la différence de températures entre le fluide à l'entrée et la plaque. A partir de ce jeu de paramètres nous construisons d'autres grandeurs de référence. Ainsi nous avons

$$v_r = v_r \text{ vitesse de référence} \quad 3.6$$

$$t_r = \frac{L}{v_e} \text{ temps de référence} \quad 3.7$$

$$\theta_r = T_0 - T_p \text{ écart de température de référence} \quad 3.8$$

$$p_r = p(T_0) \text{ pression de référence} \quad 3.9$$

$$\rho = \rho(T_0) \text{ masse volumique référence} \quad 3.10$$

Si nous désignons par  $F^*$  la grandeur adimensionnelle associée à  $F$  alors les équations du modèle sous forme adimensionnelle s'écrivent

### Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial \xi^*} \left[ \frac{y_p^{*'} \rho^*}{|\vec{e}_\xi|} \cdot v_\xi^* \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} [\rho^* v_\eta^*] = 0 \quad 3.11$$

### Equations du mouvement

#### Equation du mouvement adimensionnelle suivant $O\xi^*$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\xi^*}{\partial t^*} + \left\{ \frac{v_\eta^*}{y_p^*} \frac{\partial v_\xi^*}{\partial \eta} + \frac{v_\xi^*}{|\vec{e}_\xi|} \left( \frac{\partial v_\xi^*}{\partial \xi^*} - v_\xi^* \cdot \frac{\partial \ln |\vec{e}_\xi|}{\partial \xi^*} \right) \right\} = - \frac{Eu}{\rho^*} |\vec{e}_\xi| \left( - \frac{y_p^{*'}}{y_p^*} \eta \frac{\partial p^*}{\partial \eta} + \frac{\partial p^*}{\partial \xi^*} \right) + \\ \frac{1}{Re} \frac{1}{y_p^{*2}} (A_1^* \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_2^* \frac{\partial}{\partial \eta \partial \xi^*} + A_3^* \frac{\partial}{\partial \eta} + A_4^* \frac{\partial^2}{\partial \xi^{*2}}) \left( \frac{1}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi^* \right) \\ - \frac{1}{3Re} \left\{ \left( - \frac{y_p^{*'}}{y_p^*} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \rho^*}{\partial \xi^*} \right) \left\{ \left( \frac{1}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi^* \right) \cdot \left( - \frac{y_p^{*'}}{y_p^*} \eta \frac{\partial \ln \rho^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \ln \rho^*}{\partial \xi^*} \right) + \left( \frac{y_p^{*'}}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi^* + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. v_\eta^* \right) \right\} \right\} \cdot \frac{1}{y_p^*} \frac{\partial \ln \rho^*}{\partial \eta} \end{aligned} \quad 3.12$$

#### Equation du mouvement adimensionnelle suivant $O\eta^*$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\eta^*}{\partial t^*} + \left\{ \frac{v_\eta^*}{y_p^*} \frac{\partial v_\eta^*}{\partial \eta} + \frac{v_\xi^*}{|\vec{e}_\xi|} \left( \frac{\partial v_\eta^*}{\partial \xi^*} + \frac{v_\xi^* y_p^{*''}}{|\vec{e}_\xi|} \right) \right\} = - \frac{1}{\sqrt{Fr}} - \frac{Eu}{y_p^*} \left[ (1 + \eta (y_p^{*'})^2) \frac{\partial p^*}{\partial \eta} - y_p^* y_p^{*'} \frac{\partial p^*}{\partial \xi^*} \right] + \\ \frac{1}{Re y_p^{*2}} (A_1^* \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - A_2^* \frac{\partial}{\partial \eta \partial \xi^*} + A_3^* \frac{\partial}{\partial \eta} + A_4^* \frac{\partial^2}{\partial \xi^{*2}}) \left( \frac{y_p^{*'}}{|\vec{e}_\xi|} v_\xi^* + v_\eta^* \right) - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3Re} \left\{ \frac{1}{y_p^*} \rho_r \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} \left\{ \left( \frac{1}{|\bar{e}_\xi|} v_{\xi^*} \right) \cdot \left( -\frac{y_p'^*}{y_p^*} \eta \frac{\rho_r \partial \ln \rho^*}{\partial \eta} + \frac{\rho_r \partial \ln \rho^*}{\partial \xi^*} \right) + \left( \frac{y_p'^*}{|\bar{e}_\xi|} v_{\xi^*} + v_{\eta^*} \right) \cdot \frac{1}{y_p^*} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right\} \right.$$

$$\left. + \left( \frac{1}{|\bar{e}_\xi|} v_{\xi^*} + v_{\eta^*} \right) \cdot \frac{1}{y_p^*} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right\} \quad (3.13)$$

### Equation de l'énergie

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + \frac{1}{|\bar{e}_\xi|} v_{\xi^*} \left( -\frac{y_p'^*}{y_p^*} \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi^*} \right) + \left( \frac{y_p'^*}{|\bar{e}_\xi|} v_{\xi^*} + v_{\eta^*} \right) \frac{1}{y_p^*} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} =$$

$$\frac{1}{Re \cdot Pr} \left( \frac{1}{y_p^{*2}} \left( A_1^* \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - A_2^* \frac{\partial \theta}{\partial \eta \partial \xi} + A_3^* \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + A_4^* \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) \right) \quad (3.14)$$

L'adimensionnalisation des équations a réduit le nombre de paramètres et a fait apparaître des groupements qui caractérisent les transferts. Ainsi nous avons

$Re = \frac{v_r L}{\nu}$  C'est le nombre de Reynolds qui compare les effets d'inertie et les effets de viscosité. Il nous renseigne sur le régime de l'écoulement.

$Fr = \frac{v_r}{\sqrt{gL}}$  C'est le nombre de Froude. Dans ces deux équations à trois inconnues, l'exposant 1 est choisi arbitrairement pour la vitesse, ce qui conduit au nombre de Froude.

$Pe_T = Re \cdot Pr$  C'est le Nombre de Péclet qui compare le transfert par convection et le transfert par diffusion ou conduction

$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$  C'est le Nombre de Prandtl qui compare la diffusivité de moment et la diffusivité thermique

$Eu = \frac{p_r}{\rho \cdot (v_r)^2}$  C'est le Nombre d'Euler qui compare la force de pression et force d'inertie

$Ma = \frac{v_r}{a}$  C'est le Nombre Mach : Si on considère l'écoulement d'un fluide dont la caractéristique essentielle est la compressibilité, l'expérience montre que les deux seuls paramètres significatifs, en plus de la géométrie, sont la vitesse  $v$  de l'écoulement non perturbé et un paramètre lié à la compressibilité, le plus simple étant la célérité du son dans le fluide notée  $a$ . Ces deux grandeurs ayant la même dimension, le nombre sans dimension à conserver s'en déduit immédiatement, c'est le nombre de Mach.

Dans ce premier chapitre nous avons présenté les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide compressible à haute température sous forme vectorielle. Ensuite nous les avons présentés avec les hypothèses simplificatrices en coordonnée cartésienne. Ces équations sont encore transformées dans un nouveau système coordonné  $(O\xi)$  et  $(O\eta)$ . Et enfin nous avons adimensionnalisé les équations obtenus afin de réduire les paramètres de calcul et d'introduire certains nombres caractéristiques de l'écoulement.

Cependant, la non linéarité subsiste toujours, c'est pour cela nous avons utilisé une méthode approchée à savoir une méthode numérique.

## **Chapitre 2: Modélisation Numérique**

Les équations de notre modèle mathématique sont fortement non linéaires et très compliquées. Pour un tel système une résolution par voie numérique s'impose. Ce chapitre est consacré à la présentation des méthodes numériques qui vont nous permettre de résoudre nos équations. La première partie est consacrée à la description de la méthode de projection et la seconde à la discrétisation spatiale.

Nous avons volontairement omis les astérisques (\*) pour ne pas alourdir les écritures.

## 1. Schémas de discrétisation temporelle – Méthode de projection

### Traitement des équations du mouvement – Méthode de projection

Les équations de Navier- Stokes écrites en variables primitives sont très difficiles à résoudre numériquement à cause du couplage des effets et de la non linéarité du terme d'advection. Pour résoudre les équations de Navier- Stokes bidimensionnelles il est d'usage d'utiliser le formalisme vorticité fonction de courant afin de rendre les équations quasi linéaires et de s'affranchir du terme de pression. Cependant au niveau des parois la vorticité à cause des frottements prend des valeurs très grandes ce qui peut générer des artefacts numériques et rompre la stabilité numérique. La méthode de projection a été initialement introduite par Chorin [9] et Tenam [10]. Il s'agit d'un schéma de type prédicteur- correcteur et l'idée de base est de découpler dans les équations de Navier- Stokes les termes advectifs/diffusifs et la contrainte de pression. Ces méthodes de type projection sont maintenant couramment utilisées au sein de la communauté scientifique en raison de leur simplicité et de leur robustesse.

### Principe de la méthode

Tout d'abord réécrivons les équations de continuité et du mouvement adimensionnelles sous les formes suivantes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{e} \frac{1}{\sqrt{Fr}} - \frac{Eu}{\rho} \overrightarrow{grad} p + \frac{1}{Re} \cdot \left\{ div[\overrightarrow{grad} \vec{v}] - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{grad} \{ \overrightarrow{grad} [\ln(\rho)] \cdot \vec{v} \} \right\} \quad 1.1$$

$$div(\rho \vec{v}) = 0 \quad 1.2$$



Pour résoudre les équations du mouvement nous allons utiliser le schéma d'*Adams – Bashforth* d'ordre deux en temps et centré au nœud temporel  $n + \frac{1}{2}$ . La version semi-discrète s'écrit :

$$\frac{\vec{v}^{n+1} - \vec{v}^n}{\Delta t} + \frac{3}{2} \cdot \{[\vec{v} \cdot \vec{\nabla}] \vec{v}\}^n - \frac{1}{2} \{[\vec{v} \cdot \vec{\nabla}] \vec{v}\}^{n-1} + \frac{Eu}{\rho} \{\vec{\nabla} p\}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{Fr}} + \frac{1}{2.Re} \cdot \left\{ \left\{ \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \vec{v}] - \frac{1}{3} \cdot \vec{\nabla} \{ \vec{\nabla} [\ln(\rho)] \cdot \vec{v} \} \right\}^{n+1} + \left\{ \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \vec{v}] - \frac{1}{3} \cdot \vec{\nabla} \{ \vec{\nabla} [\ln(\rho)] \cdot \vec{v} \} \right\}^n \right\} \quad 1.3$$

$$\{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})\}^{n+1} = 0 \quad 1.4$$

Dans ce système d'équations et dans tout ce qui suit  $\Delta t$  désigne le pas de temps. L'exposant ( $n$ ) repère l'instant  $t$ .

Dans ce schéma l'évaluation du terme non linéaire est explicite et est effectuée grâce un développement de Taylor du style :

$$a(n) = a(n + \frac{1}{2}) - \frac{\nabla t}{2} \left( \frac{\partial a}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O\nabla t^2 \quad 1.5$$

$$a(n-1) = a(n + \frac{1}{2}) - \frac{3\nabla t}{2} \left( \frac{\partial a}{\partial t} \right)^{n+\frac{1}{2}} + O\nabla t^2 \quad 1.6$$

$$a(n) - \frac{1}{2} a(n-1) = a\left(n + \frac{1}{2}\right) + O\nabla t^2$$

1.7

L'évaluation du terme visqueux est normalement soumise à des restrictions sévères.

Pour la résolution, on utilise une méthode de *splitting* (pas fractionnaires à plusieurs couches). Dans ce travail nous avons opté pour un schéma à trois pas

#### - Etape 1 : Prédiction

On calcule d'abord un champ de vitesse  $\vec{v}^*$  solution du schéma explicite suivant

$$\frac{\vec{v}^* - \vec{v}^n}{\Delta t} + \frac{3}{2} \cdot \{[\vec{v} \cdot \vec{\nabla}] \vec{v}\}^n - \frac{1}{2} \{[\vec{v} \cdot \vec{\nabla}] \vec{v}\}^{n-1} = \vec{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{Fr}} + \frac{1}{2.Re} \cdot \left\{ \left\{ \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \vec{v}] - \frac{1}{3} \cdot \vec{\nabla} \{ \vec{\nabla} [\ln(\rho)] \cdot \vec{v} \} \right\}^n \right\} \quad 1.8$$

Ce champ de vitesse  $\vec{v}^*$  ne vérifie pas l'équation de continuité et les vitesses  $\vec{v}^n$  sont arbitraires.

#### - Etape 2

En faisant la différence membre à membre entre les équations (1.3) et (1.8) et en tenant compte de l'équation de continuité on obtient

En calculant la divergence des deux membres il vient

$$\vec{\nabla} \cdot \{\vec{\nabla} p\}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}^*)}{Eu \cdot \Delta t} \quad 1.9$$

Cette équation est fermée par les conditions aux limites aux parois de la forme

$$\left. \frac{Eu}{\rho} \frac{\partial p^{n+\frac{1}{2}}}{\partial n} \right|_{\text{parois}} = \left\{ \vec{e} \frac{1}{\sqrt{Fr}} + \frac{1}{2.Re} \left\{ \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \vec{v}] - \frac{1}{3} \cdot \vec{\nabla} \{ \vec{\nabla} [\ln(\rho)] \cdot \vec{v} \} \right\}^{n+1} \right\} \cdot \vec{n} \quad 1.10$$

### - Etape 3 : Projection

On effectue la correction du champ des vitesses en résolvant

$$\frac{\vec{v}^{n+1} - \vec{v}^*}{\Delta t} = -\frac{Eu}{\rho} \{\vec{\nabla} p\}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2.Re} \cdot \left\{ \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \vec{v}] - \frac{1}{3} \cdot \vec{\nabla} \{ \vec{\nabla} [\ln(\rho)] \cdot \vec{v} \} \right\}^{n+1} \quad 1.11$$

### Traitement de l'équation de la chaleur

Pour discrétiser temporellement l'équation de la chaleur, nous prenons un schéma implicite d'Euler à un pas décentré aval. En réécrivant l'équation 3.14 du chapitre précédent sous la forme

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \theta = \frac{1}{Pe_T} \cdot \{ \text{div} [\overrightarrow{\text{grad}} \theta] \} \quad 1.12$$

il vient

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} + \vec{v}^{n+1} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \theta^{n+1} = \frac{1}{Pe_T} \cdot \{ \text{div} [\overrightarrow{\text{grad}} \theta^{n+1}] \} \quad 1.13$$

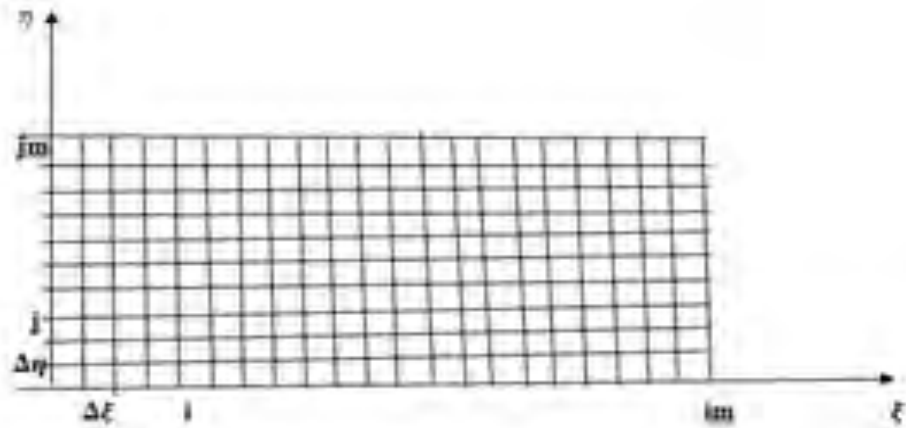
## 2. Schémas de discrétisation spatiale

### 2. 1. Discrétisation du domaine physique

Pour résoudre nos équations dans le domaine physique nous allons ramener notre domaine continu en un domaine discret formé d'un réseau de nœuds régulièrement espacés (voir figure 2.1). A cet effet nous posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \Delta \xi * (i - 1) \quad \text{avec} \quad \Delta \xi = \frac{1}{jm - 1} \end{array} \right. \quad 2.1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \Delta \eta * (j - 1) \quad \text{avec} \quad \Delta \eta = \frac{1}{im - 1} \end{array} \right. \quad 2.2$$



**Figure 2.1: Maillage du domaine**

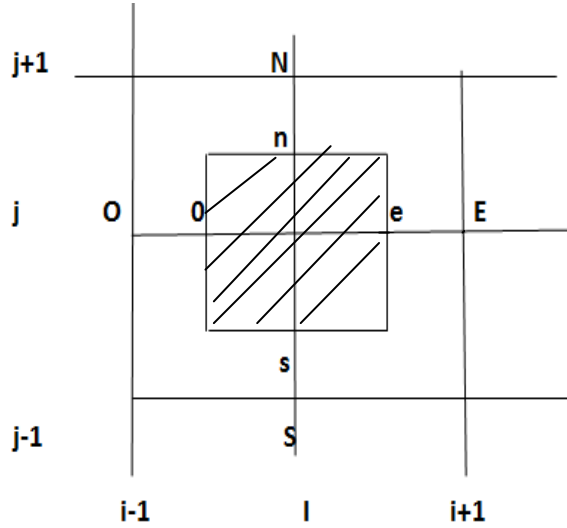
Un grand problème associé à la résolution des équations de Navier- Stokes est lié aux espaces de discrétisations des champs des vitesses et de la pression. Si ces espaces ne sont pas choisis judicieusement, la pression ne sera pas définie de façon unique. Dans certains cas, la solution numérique présentera d'importantes oscillations qui ne sont pas physiquement réalistes. Ce sont de faux modes de pression appelés modes parasites. Ce problème est causé par les dérivées premières de  $\vec{v}$  et de  $p$  qui sont présentes dans les équations du mouvement et de continuité. Si les espaces ne sont pas adéquats, il est possible de construire une fonction  $p$  (ou  $\vec{v}$ ) non nulle telle que  $\vec{\nabla} p = 0$ .

Pour résoudre ce problème, on peut utiliser des maillages différents pour la pression et la vitesse. Ces maillages sont appelés maillages décalés. Dans notre cas de maillage structuré, la construction est illustrée sur la figure 2.2. Si on repère le centre  $M$  par  $M(i, j)$ , alors on aura

$$E = (i + 1, j) ; \quad O = (i - 1, j) ; \quad N = (i, j + 1) ; \quad S = (i, j - 1)$$

$$e = (i + \frac{1}{2}, j) ; \quad o = (i - \frac{1}{2}, j) ; \quad n = (i, j + \frac{1}{2}) ; \quad s = (i, j - \frac{1}{2})$$

Les vitesses sont calculées aux interfaces  $(e, o, n, s)$  et les champs de pression et de température évalués au centre des interfaces  $(E, O, N, S)$ .



**Figure 2.2 Maillage structuré décalé**

## 2. 2. Discrétisation spatiale des équations

Pour intégrer dans le domaine physique les équations de transferts réécrivons les équations 3.12-3.14 du chapitre précédent sous les formes suivantes

$$\frac{\partial v_{\xi}}{\partial t} + a_1 \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \eta} = a_3 \frac{\partial^2 v_{\xi}}{\partial \xi^2} + a_4 \frac{\partial^2 v_{\xi}}{\partial \eta^2} + S_{\xi} \quad 2.3$$

$$\frac{\partial v_{\eta}}{\partial t} + b_1 \frac{\partial v_{\eta}}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial v_{\eta}}{\partial \eta} = b_3 \frac{\partial^2 v_{\eta}}{\partial \xi^2} + b_4 \frac{\partial^2 v_{\eta}}{\partial \eta^2} + S_{\eta} \quad 2.4$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + c_1 \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = c_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + c_4 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + S_{\theta} \quad 2.5$$

Les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ , et les grandeurs  $S_i$  sont des fonctions des composantes de la vitesse et des variables d'espace. En utilisant un schéma centré, les dérivées premières et secondes sont approchées par

$$\frac{\partial v_{\xi}}{\partial \xi} = \frac{v_{\xi i+3/2,j} - v_{\xi i+1/2,j}}{2\Delta \xi} \quad 2.6$$

$$\frac{\partial v_{\eta}}{\partial \eta} = \frac{v_{\eta i,j+3/2} - v_{\eta i,j-1/2}}{2\Delta \eta} \quad 2.7$$

$$\frac{\partial^2 v_{\xi}}{\partial \xi^2} = \frac{v_{\xi i+3/2,j} - 2v_{\xi i+1/2,j} + v_{\xi i-1/2,j}}{\Delta \xi^2} \quad 2.8$$

$$\frac{\partial^2 v_{\eta}}{\partial \eta^2} = \frac{v_{\eta i,j+3/2} - 2v_{\eta i,j+1/2} + v_{\eta i,j-1/2}}{\Delta \eta^2} \quad 2.9$$

Les interpolations des composantes  $v_{\xi i+1/2,j}$  et  $v_{\eta i+1/2,j}$  sont données par

$$v_{\xi i+1/2,j} = \frac{1}{4} \left[ v_{\xi i+1/2,j+1} + v_{\xi i-1/2,j+1} + v_{\xi i+1/2,j-1} + v_{\xi i-1/2,j-1} \right] \quad 2.10$$

$$v_{\eta i+1/2,j} = \frac{1}{4} \left[ v_{\eta i+1,j+1/2} + v_{\eta i+1,j-1/2} + v_{\eta i-1,j+1/2} + v_{\eta i-1,j-1/2} \right] \quad 2.11$$

### Discretisations spatiales de l'équation de la chaleur et de la pression

Les champs de température et de pression sont calculés aux nœuds situés au centre des volumes de contrôle. Les dérivées sont approchées par des schémas centrés

#### Discretisation spatiale de l'équation de la chaleur

L'équation 2.5 discrétisée conduit au système algébrique suivant

$$a_P \cdot \theta_{i,j}^{n+1} = a_E \cdot \theta_{i+1,j}^{n+1} + a_W \cdot \theta_{i-1,j}^{n+1} + a_N \cdot \theta_{i,j+1}^{n+1} + a_S \cdot \theta_{i,j-1}^{n+1} + S_{i,j}^{n+1} \quad 2.12$$

Avec

$$a_P = \left( \Delta \xi \cdot \Delta \eta + \frac{2\Delta t \cdot \Delta \eta}{\Delta \xi \cdot Pe_T} c_{\xi i,j}^{n+1} + \frac{2\Delta t \cdot \Delta \xi}{\Delta \eta \cdot Pe_T} c_{\eta i,j}^{n+1} \right) \quad 2.13$$

$$a_E = -\Delta t \cdot \Delta \eta \cdot \frac{c_{1i,j}^{n+1}}{2} + \frac{\Delta t \cdot \Delta \eta}{\Delta \xi \cdot Pe_T} \cdot c_{\xi i,j}^{n+1} \quad 2.14$$

$$a_W = \Delta t \cdot \Delta \eta \cdot \frac{c_{1i,j}^{n+1}}{2} + \frac{\Delta t \cdot \Delta \eta}{\Delta \xi \cdot Pe_T} \cdot c_{\xi i,j}^{n+1} \quad 2.15$$

$$a_N = -\Delta t \cdot \Delta \xi \cdot \frac{c_{2i,j}^{n+1}}{2} + \frac{\Delta t \cdot \Delta \xi}{\Delta \eta \cdot Pe_T} \cdot c_{\eta i,j}^{n+1} \quad 2.16$$

$$a_S = \Delta t \cdot \Delta \xi \cdot \frac{c_{2i,j}^{n+1}}{2} + \frac{\Delta t \cdot \Delta \xi}{\Delta \eta \cdot Pe_T} \cdot c_{\eta i,j}^{n+1} \quad 2.17$$

$$S_{i,j}^{n+1} = \Delta \xi \cdot \Delta \eta \cdot \{ \theta_{i,j}^n + \Delta t \cdot S_\theta \} \quad 2.18$$

#### Discretisation de l'équation de la pression

En explicitant les opérateurs différentiels, nous pouvons mettre l'équation 1.9 sous la forme

$$d_1 \frac{\partial P^{n+\frac{1}{2}}}{\partial \xi} + d_2 \frac{\partial P^{n+\frac{1}{2}}}{\partial \eta} + d_3 \frac{\partial^2 P^{n+\frac{1}{2}}}{\partial \xi^2} + d_4 \frac{\partial^2 P^{n+\frac{1}{2}}}{\partial \eta^2} = S_P \left( P^{n+\frac{1}{2}}, \rho, \vec{v}^* \right) \quad 2.19$$

Après calcul il vient

$$a_P.P_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = a_E.P_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + a_W.P_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + a_N.P_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + a_S.P_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} + S_{Pi,j} \quad 2.20$$

Les coefficients sont donnés par les relations suivantes

$$a_P = \left( \frac{2\Delta\eta}{\Delta\xi} d_{\xi i,j} + \frac{2\Delta\xi}{\Delta\eta} d_{\eta i,j} \right) \quad 2.21$$

$$a_E = -\Delta\eta \left( \frac{1}{\Delta\xi} d_{\xi i,j} + \frac{d_{1i,j}}{2} \right) \quad 2.22$$

$$a_W = -\Delta\eta \left( \frac{1}{\Delta\xi} d_{\xi i,j} - \frac{d_{1i,j}}{2} \right) \quad 2.23$$

$$a_N = -\Delta\xi \left( \frac{1}{\Delta\eta} d_{\eta i,j} + \frac{d_{2i,j}}{2} \right) \quad 2.24$$

$$a_S = -\Delta\xi \left( \frac{1}{\Delta\eta} d_{\eta i,j} - \frac{d_{2i,j}}{2} \right) \quad 2.25$$

$$S_{i,j} = \Delta\eta \Delta\xi . S_P(P^{n+\frac{1}{2}}, \rho, \vec{v}^*) \quad 2.26$$

Ces systèmes d'équations sont fermés par leurs conditions initiales, leurs conditions aux limites et l'équation d'état du fluide.

### 3. Méthodes de résolution

Les équations du modèle mathématique discrétisées ont conduit à des systèmes algébriques fortement couplés qu'il faut maintenant résoudre. Dès lors l'utilisation de méthodes itératives s'impose. Dans cette partie nous allons donner le processus des calculs qui permet de trouver les champs de vitesses et de température.

Les systèmes matriciels issus des discrétisations peuvent être résolus en utilisant une méthode aux directions alternées combinée avec des schémas itératifs ligne par ligne.

#### Processus de calcul

1. On initialise les grandeurs
2. On donne un champ arbitraire de  $\rho$
3. On détermine les composantes de la pseudo- vitesses  $\vec{v}^*$
4. On résout l'équation de la pression
5. On détermine le champ de vitesse en résolvant l'équation de l'étape de correction

6. On calcule la nouvelle valeur de la masse volumique à partir de l'équation de continuité
7. On effectue un test sur  $\rho$ . Si le test est satisfaisant on continue les calculs sinon on retourne à l'étape 2 avec la nouvelle valeur de  $\rho$  trouvée
8. On détermine le champ de température, on augmente le temps puis on retourne à l'étape 2.
9. On arrête les calculs si le critère d'arrêt temporel est satisfait.

## **Conclusion et Perspectives**



Nous avons étudié l'écoulement d'un fluide compressible à haute température dans canal convergent. Nous avons présenté d'abord les différentes équations qui régissent l'écoulement d'un fluide compressible sous forme vectorielle puis nous les avons présentées avec les hypothèses simplificatrices en coordonnées cartésiennes. A cause de la forme curviligne de la trace de la paroi supérieure nous avons, grâce à une transformation homotopique, ramené notre domaine d'étude en un domaine rectangulaire. Cela nous permet de traduire plus simplement les conditions aux limites au niveau de la paroi supérieure. Les équations projetées dans le nouveau système de coordonnées sont adimensionnalisées afin de généraliser l'étude, de réduire les paramètres de calcul et pour faire apparaître des nombres qui caractérisent l'écoulement. Malgré la non linéarité des équations nous avons opté pour une formulation en variables primitives. Pour résoudre alors nos systèmes d'équations nous avons opté pour une résolution numérique.

Les équations d'évolution sont discrétisées temporellement grâce à une méthode de projection de type prédicteur- correcteur de second ordre en temps. Un schéma aux différences finies centrée de second ordre est utilisé pour approximer les dérivées premières et secondes. Afin le processus de résolution est présenté.

La suite logique de ce travail consiste à mettre au point un code de calcul et de comparer les résultats issus de notre modèle à ceux donnés par des expériences afin de le valider. Par la suite nous pourrions alors envisager, afin de le rapprocher de la réalité physique,

- ✓ utiliser un cas particulier de fluide compressible
- ✓ tenir compte des propriétés chimiques afin d'étudier les dépôts de substance.
- ✓ Chercher le profil optimum de la paroi supérieure qui confère à la surface réactive le caractère d'accessibilité uniforme

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] H. Louis, W. Schikorr – Fundamental Aspects in Cleaning with High- Speed Water Jets. *Papers Presented at the International Symposium on Jet Cutting Technology*, pp.217-228, 1982.
- [2] M. C. Leu, P. Meng, E. S. Geskin, L. Tismeneskiy - Mathematical modeling and experimental verification of stationary waterjet cleaning process. *Journal of manufacturing science and engineering*, vol. 120 (3), pp. 571-579, 1998.
- [3] A.P. Alkhimov, V.F. Kosareve, A.N. Papyrin - A Method of Cold Gas-Dynamic Deposition. *Dokl. Akad.Nauk SSSR*, vol. 315 (5), pp. 1062-1065, 1990.
- [4] R.C. Dykhuizen, M.F. Smith - Gas Dynamic Principles of Cold Spray. *Journal of Thermal Spray Technology*, vol. 7 (2), pp. 205-212, 1998.
- [5] G. Charbit, E. Badens, O. Boutin - Applications industrielles des technologies supercritiques :
- [6] C. Toscano, G. Ahmadi - Particle removal mechanisms in cryogenic surface cleaning. *Journal of Adhesion*, vol. 79 (2), pp. 175-201, 2003.
- [7] Jacques PADET : Fluides en Ecoulement Méthodes et modèles ,190pages,(1990)
- [8] Rémy SART: Etude de problèmes liés aux fluides compressibles et aux plasmas,170 pages,(2007)
- [9] Chorin A.J.1968 Numerical Solution of the Navier-Stokes Equation, *Mathematics of computation* 22,n°104,pp.745-762
- [9] Chorin A.J.1968 Numerical Solution of Navier-Stokes Equation *Mathematics of Computation* 96,pp 341-353
- [10] Tenam S.1968 On the Convergence of discrete approximations of the Navier Stokes equations, *Mathematics of Computation* 96,pp341-353
- [11] Versteeg S ;Malalasekeraw(1995)An introduction to Computational Fluid Dynamics John Wiley and Sons Inc New York

