

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Liste des abréviations .....</b>   | <b>5</b>  |
| <b>Liste des notations .....</b>  | <b>7</b>  |
| <b>Avant propos .....</b>   | <b>11</b> |
| <b>Chapitre 1 : Introduction : contexte général des travaux et principaux résultats antérieurs .....</b>  | <b>14</b> |
| 1.1    LA TRAJECTOGRAPHIE PAR MESURES D'ANGLE CONVENTIONNELLE .....   | 15        |
| 1.1.1    Définition .....   | 15        |
| 1.1.2    Manœuvre de l'observateur et observabilité .....   | 16        |
| 1.1.3    Manœuvre de l'observateur et précision de la position estimée .....  | 18        |
| 1.1.4    Algorithmes employés en trajectographie par mesures d'angle conventionnelle .....  | 20        |
| 1.2    COMMENT EVITER A L'OBSERVATEUR DE MANŒUVRER .....  | 21        |
| 1.2.1    Contraintes résultant de la nécessité de manœuvrer .....   | 21        |
| 1.2.2    Apport de mesures additionnelles de fréquence .....  | 22        |
| 1.2.3    Trajectographie par mesures d'angle d'une source parcourant à vitesse constante une trajectoire composée de deux legs .....  | 23        |
| 1.2.4    Méthodes investiguées ici : changement du modèle de cinématique de la source .....   | 24        |
| 1.3    COMMENT MINIMISER LES PROBLÈMES POSES PAR LES BIAIS DE MESURES D'ANGLE .....   | 26        |
| 1.3.1    Robustification de la trajectographie par mesures d'angle conventionnelle vis-à-vis des biais de mesure .....  | 26        |
| 1.3.2    Autre approche : calibration de l'antenne à l'aide de trajectographie par mesures de distance ..   | 28        |
| 1.4    BILAN DE CE CHAPITRE : PRÉSENTATION DU CONTENU DU MANUSCRIT .....  | 30        |
| <b>Chapitre 2 : Trajectographie par mesures d'azimut et/ou de fréquence : source en mouvement circulaire uniforme et observateur en mouvement rectiligne uniforme .....</b> | <b>31</b> |
| 2.1    TRAJECTOGRAPHIE PAR MESURES D'ANGLE SEUL D'UNE SOURCE EN MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME .....   | 32        |
| 2.1.1    Hypothèses et notations utilisées .....  | 32        |
| 2.1.2    Observabilité et autres propriétés .....   | 34        |
| 2.1.3    Estimateur et performances .....   | 48        |
| 2.2    TRAJECTOGRAPHIE PAR MESURES D'ANGLE ET DE FREQUENCE D'UNE SOURCE EN MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME .....  | 61        |
| 2.2.1    Cas mono fréquence .....   | 62        |
| 2.2.2    Cas multi fréquences .....   | 65        |
| 2.2.3    Estimation en mono et multi fréquences .....   | 70        |
| 2.3    EST-IL NECESSAIRE DE MANŒUVRER ? .....   | 72        |
| 2.3.1    Scénario avec mesures d'angle seul .....   | 72        |
| 2.3.2    Scénario avec mesures d'angle et de fréquence .....  | 74        |
| 2.4    BILAN DU CHAPITRE .....  | 76        |
| 2.5    ANNEXES .....  | 78        |
| 2.5.1    Matrice des dérivées secondes en trajectographie par mesures d'angle seul d'une source en mouvement circulaire uniforme .....                                      | 78        |
| 2.5.2    Gradient en trajectographie par mesures d'angle et de fréquence : cas mono fréquence .....   | 79        |
| 2.5.3    Algorithme de recherche du vecteur d'initialisation .....  | 80        |
| 2.5.4    Test d'arrêt de la procédure de minimisation .....   | 84        |
| <b>Chapitre 3 : Trajectographie par mesures de distance seule : source en mouvement rectiligne uniforme et observateur manœuvrant .....</b>                                 | <b>85</b> |
| 3.1    NOTATIONS ET HYPOTHESES .....  | 86        |
| 3.2    ANALYSE DE L'OBSERVABILITÉ .....   | 87        |
| 3.2.1    Trajectoire de l'observateur composée d'un seul leg .....  | 88        |
| 3.2.2    Trajectoire de l'observateur composée de deux legs .....   | 88        |
| 3.2.3    Trajectoire de l'observateur en trois legs .....   | 92        |
| 3.2.4    Observateur en mouvement circulaire uniforme .....   | 94        |
| 3.2.5    Trajectoire de l'observateur composée de tronçons dont l'un au moins est un arc de cercle .....  | 96        |
| 3.3    BORNE DE CRAMER-RAO ET ESTIMATEUR .....  | 96        |
| 3.3.1    FIM en RO-TMA et FIM en BO-TMA .....   | 96        |

|   |  |            |
|---|--|------------|
| 3.3.2   | <i>Estimateur du maximum de vraisemblance</i> .....  | 99         |
| 3.4   | SIMULATIONS DE MONTE-CARLO.....  | 100        |
| 3.4.1   | <i>Trajectoire de l'observateur en deux legs.....</i>  | 100        |
| 3.4.2   | <i>Trajectoire de l'observateur composée de 3 legs .....</i>   | 106        |
| 3.4.3   | <i>Observateur en mouvement circulaire uniforme.....</i>   | 107        |
| 3.4.4   | <i>Observateur parcourant une trajectoire composée de deux legs reliés par un arc de cercle .....</i>  | 109        |
| 3.5   | EXEMPLE DE L'UTILISATION DE LA RO-TMA : CALIBRATION D'ANTENNE .....  | 110        |
| 3.6   | BILAN DU CHAPITRE.....   | 112        |
| 3.7   | ANNEXE .....   | 113        |
| 3.7.1   | <i>Rappels sur les matrices d'isométries linéaires .....</i>   | 113        |
| 3.7.2   | <i>Analyse de l'observabilité d'une source en mouvement rectiligne uniforme, lorsque l'observateur parcourt une trajectoire composée d'un ou deux legs .....</i>                                 | 113        |
| 3.7.3   | <i>Caractérisation de la trajectoire d'une source en mouvement rectiligne uniforme à azimut constant lorsque l'observateur a une trajectoire en deux legs (ou défilement angulaire nul). ...</i> | 125        |
| <b>Chapitre 4 : Trajectographie par mesures de distance seule : source manoeuvrante et observateur en mouvement rectiligne uniforme .....</b> |  | <b>126</b> |
| 4.1   | SOURCE EN MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME .....  | 127        |
| 4.1.1   | <i>Hypothèses.....</i>   | 127        |
| 4.1.2   | <i>Analyse de l'observabilité.....</i>   | 128        |
| 4.1.3   | <i>Borne de Cramér-Rao, semi-observabilité et estimateur .....</i>   | 132        |
| 4.2   | TRAJECTOIRE D'UNE SOURCE COMPOSEE DE DEUX LEGS RELIES PAR UN ARC DE CERCLE .....   | 145        |
| 4.2.1   | <i>Notations et hypothèses.....</i>  | 145        |
| 4.2.2   | <i>Observabilité .....</i>   | 147        |
| 4.2.3   | <i>Borne de Cramér-Rao, semi-observabilité et estimateur .....</i>   | 149        |
| 4.3   | BILAN DU CHAPITRE.....   | 155        |
| 4.4   | ANNEXE .....   | 156        |
| 4.4.1   | <i>Expressions des coefficients <math>c_k</math>, <math>d_k</math>, <math>e_k</math> et <math>f_k</math> .....</i>   | 156        |
| 4.4.2   | <i>Algorithme de recherche du ou des vecteurs d'initialisations .....</i>  | 156        |
| <b>Conclusions et perspectives .....</b>  |  | <b>159</b> |
| <b>Références bibliographiques .....</b>  |  | <b>164</b> |

# Liste des abréviations

## Généralités :

- CRLB : Cramér-Rao lower bound ou *borne de Cramér-Rao*.  
CT : constant-turn motion ou *mouvement circulaire uniforme*.  
CV : constant-velocity motion ou *mouvement rectiligne uniforme*.  
FIM : Fisher information matrix ou *matrice d'information de Fisher*.  
MLE : maximum likelihood estimator ou *estimateur du maximum de vraisemblance*.  
SNR : signal to noise ratio ou *rapport signal sur bruit*.  
TMA : target motion analysis ou *trajectographie passive*.

## Trajectographie par mesures d'angle seul :

- BO-CTTMA : bearings-only constant-turn target motion analysis ou *trajectographie par mesures d'angle seul d'une source en mouvement circulaire uniforme*.  
BO-MTMA : bearings-only maneuvering target motion analysis ou *trajectographie par mesures d'angle seul d'une source manœuvrante* (trajectoire, parcourue à vitesse constante, composée de deux legs qui peuvent éventuellement être reliés par un arc de cercle).  
BO-TMA : bearings-only target motion analysis ou *trajectographie par mesures d'angle seul* (la source est supposée être en mouvement rectiligne uniforme).

## Trajectographie par mesures d'angle et de fréquence :

- FB-CTTMA : frequency and bearings constant-turn target motion analysis ou *trajectographie par mesures d'angle et de fréquence d'une source en mouvement circulaire uniforme*.  
FB-TMA : frequency and bearings target motion analysis ou *trajectographie par mesures d'angle et de fréquence* (la source est supposée être en mouvement rectiligne uniforme).  
MFB-CTTMA : multi frequency and bearings constant-turn target motion analysis ou *trajectographie par mesures d'angle et de plusieurs fréquences d'une source en mouvement circulaire uniforme*.  
MFB-TMA : multi frequency and bearings target motion analysis ou *trajectographie par mesures d'angle et de plusieurs fréquences* (la source est supposée être en mouvement rectiligne uniforme).

## **Trajectographie par mesures de distance :**

RO-CTTMA : range-only constant-turn target motion analysis ou *trajectographie par mesures de distance seule d'une source en mouvement circulaire uniforme*.

RO-MTMA : range-only maneuvering target motion analysis ou *trajectographie par mesures de distance seule d'une source manœuvrante* (trajectoire, parcourue à vitesse constante, composée de deux legs qui peuvent éventuellement être reliés par un arc de cercle).

RO-TMA : range-only target motion analysis ou *trajectographie par mesures de distance seule* (la source est supposée être en mouvement rectiligne uniforme).

# Liste des notations

$\mathbb{R}$  : espace des Réels.

$A^{-1}$  : inverse de la matrice  $A$ .

$A^T$  : transposée de la matrice  $A$ .

$\det$  : déterminant d'une matrice.

$\dim$  : dimension du vecteur ou de la matrice.

$E(\dots)$  : espérance d'un vecteur ou d'une variable aléatoire.

$Var(\dots)$  : matrice de variance-covariance d'un vecteur aléatoire et variance d'une variable aléatoire.

$b$  : biais d'un estimateur ou d'une mesure.

$\frac{\partial f}{\partial x}$  : dérivée partielle du premier ordre.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  : dérivée partielle du second ordre.

$rang$  : rang d'une matrice.

$\|\dots\|$  : module d'un vecteur.

$|\dots|$  : valeur absolue d'un scalaire.

$\arg$  : argument d'un vecteur.

$card$  : nombre d'éléments d'un vecteur ou d'un ensemble.

$diag(a_k)$  : matrice diagonale d'éléments  $a_k$ .

$\mathbf{R}_\varphi$  : matrice de rotation d'angle  $\varphi$ .

$\mathbf{S}_\varphi$  : matrice de symétrie par rapport à la droite d'angle  $\frac{\varphi}{2}$ .

$\mathbf{H}$  : matrice d'isométrie.

$\mathbf{I}$  : matrice identité.

$\chi^2_\nu$  : loi du chi-deux à  $\nu$  degrés de liberté.

$C$  : célérité de l'onde dans le milieu.

$\mu$  : coefficient d'homothétie.

$T$  : durée d'acquisition du signal (ou du scénario).

$\Delta t$  : période d'acquisition des mesures.

$N$  : nombre de mesures disponibles.

$t_k$  : date de la mesure n°  $k = 1, \dots, N$ .

$t_N$  : instant final.

$t_M$  : instant de manœuvre.

$t^*$  : instant de référence.

$O$  : observateur.

$P_O(t) = [x_O(t) \ y_O(t)]^T$  : position de l'observateur  $O$  (ou porteur) à l'instant  $t$ .

$V_O = [\dot{x}_O \ \dot{y}_O]^T$  : vecteur vitesse (constant) de l'observateur en CV.

$V_i = [\dot{x}_i \ \dot{y}_i]^T$  : vecteur vitesse (constant) du mobile au cours du  $i^{\text{ème}}$  leg.

$S$  : source.

$P_S(t) = [x_S(t) \ y_S(t)]^T$  : position de la source  $S$  (ou cible) à l'instant  $t$ .

$V_S = [\dot{x}_S \ \dot{y}_S]^T$  : vecteur vitesse (constant) de la source en mouvement rectiligne uniforme (CV).

$V_S(t) = [\dot{x}_S(t) \ \dot{y}_S(t)]^T$  : vecteur vitesse de la source à l'instant  $t$ .

$v_S$  : module de la vitesse de la source.

$P_r(t) = [x_r(t) \ y_r(t)]^T$  : vecteur position relative à l'instant  $t$ .

$V_r(t) = [\dot{x}_r(t) \ \dot{y}_r(t)]^T$  : vecteur vitesse relative à l'instant  $t$ .

$P_C = [x_C \ y_C]^T$  : position du centre du cercle décrivant la trajectoire d'une source en mouvement circulaire uniforme (CT).

$\omega$  : vitesse angulaire d'une source en CT.

$\varphi$  : angle initial relatif au Nord d'une source en CT.

$\rho_C$  : rayon du cercle décrivant la trajectoire d'une source en CT.

$X$  : vecteur d'état définissant la trajectoire d'une source en CV.

$\tilde{X}$  : vecteur d'état définissant la trajectoire d'une source « fantôme » en CV.

$\hat{X}$  : estimateur du vecteur  $X$ .

$Y$  : vecteur d'état définissant la cinématique et les fréquences d'une source dans le cas trajectographie par mesures d'angle et de fréquence.

$\hat{Y}$  : estimateur du vecteur  $Y$ .

$Z$  : vecteur d'état définissant la trajectoire d'une source manoeuvrante.

$\hat{Z}$  : estimateur du vecteur  $Z$ .

$\check{Z}$  : vecteur d'état relatif à un « artefact ».

$\hat{\check{Z}}$  : estimateur du vecteur  $\check{Z}$ .

$C(\dots)$  : critère des moindres carrés pondérés.

$\nabla_Z$  : gradient d'une fonction par rapport au vecteur  $Z$ .

$F$  : matrice d'information de Fisher (FIM).

$J$  : matrice de transformation de la FIM.

$\Phi(t_k, t^*)$  : matrice de transition de l'instant  $t_k$  à  $t^*$ .

$B$  : Borne de Cramér-Rao (CRLB).

$\theta(t)$  : azimut à l'instant  $t$ .

$\theta(Z, t_k)$  : azimut à l'instant  $t$  relatif à la trajectoire de  $Z$  définie par  $Z$ .

$\theta_m(t_k)$  : mesure bruitée de l'azimut à l'instant  $t_k$ .

$\theta_N$  : azimut à l'instant final.

$\hat{\theta}_N$  : estimateur de l'azimut final  $\theta_N$ .

$\Delta\theta(t_k)$  : différence à l'instant  $t_k$  entre  $\theta(Z, t_k)$  et  $\theta(\hat{X}, t_k)$ .

$f_0$  : fréquence stable émise par la source dans le cas mono fréquence.

$f(t)$  : fréquence à l'instant  $t$  (cas mono fréquence).

$f(Y, t)$  : fréquence reçue à l'instant  $t$  fonction de  $Y$ , définissant la trajectoire de la source et la fréquence émise.

$f_m(t_k)$  : mesure bruitée de fréquence à l'instant  $t_k$ .

$P$  : nombre de fréquences stables émises par la source.

$f_p$  : fréquence stable n°  $p$  émise par la source dans le cas multi fréquences.

$f_p(Y, t)$  : fréquence n°  $p$  reçue à l'instant  $t$  fonction du vecteur d'état  $Y$  (cas multi fréquences), définissant la trajectoire de la source et la fréquence n°  $p$  émise.

$f_{p,m}(t_k)$  : mesure bruitée de la fréquence n°  $p$  à l'instant  $t_k$ .

$R(t)$  : distance de la source à l'observateur à l'instant  $t$ .

$R(Z, t)$  : distance sans bruit à l'instant  $t$  relativ à la trajectoire de  $S$  définie par  $Z$ .

$R_m(t_k)$  : mesure bruitée de la distance séparant la source de l'observateur à l'instant  $t_k$ .

$R_N$  : distance séparant la source de l'observateur à l'instant final.

$\hat{R}_N$  : estimateur de la distance  $R_N$ .

$\dot{R}(t)$  : vitesse radiale à l'instant  $t$  (dérivée de la distance).

$\Delta R(t_k)$  : différence à l'instant  $t_k$  entre  $R(Z, t_k)$  et  $R(\bar{Z}, t_k)$ .

$\overline{\Delta R}$  : différence moyenne entre  $R(Z, t_k)$  et  $R(\bar{Z}, t_k)$  pour  $k = 1, \dots, N$ .

$\sigma_{CRLB}$  : racine carrée des éléments de la diagonale de la borne de Cramér-Rao (CRLB).

$\sigma_{R_N}$  : écart-type de  $\hat{R}_N$  calculé à partir de la CRLB.

$\sigma_{\theta_N}$  : écart-type de  $\hat{\theta}_N$  calculé à partir de la CRLB.

$\hat{\sigma}$  : écart-type empirique.

$eq$  : erreur quadratique moyenne empirique du lot d'estimations renvoyé par l'algorithme de minimisation.

$req$  : racine carrée de  $eq$ .

$\varepsilon_\theta(t_k)$  : bruit de mesure d'angle à l'instant  $t_k$ .

$\sigma_\theta(t_k)$  : écart-type du bruit de mesure d'angle à l'instant  $t_k$ .

$\varepsilon_f(t_k)$  : bruit de mesure de fréquence (cas mono fréquence) à l'instant  $t_k$ .

$\sigma_f(t_k)$  : écart-type du bruit de mesure de fréquence à l'instant  $t_k$ .

$\varepsilon_{f_p}(t_k)$  : bruit de mesure de la fréquence n°  $p$  (cas multi fréquences) à l'instant  $t_k$ .

$\sigma_{f_p}$  : écart-type du bruit de mesure de la fréquence  $p$ .

$\varepsilon_R(t_k)$  : bruit de mesure de distance à l'instant  $t_k$ .

$\sigma_R(t_k)$  : écart-type du bruit de mesure de distance à l'instant  $t_k$ .

# Avant-propos

Un peu comme certains des vingt-trois problèmes de Hilbert ou comme le dernier théorème de Fermat - mais sans bien sûr être aussi médiatique -, le sujet de cette thèse peut s'exprimer d'une façon très simple, compréhensible par tout un chacun :

« *Soit un observateur  $O$  et une source  $S$  tous deux mobiles.  $O$  peut-il estimer la trajectoire de  $S$  uniquement à partir des lignes de visée et si oui, comment ?* ».

Cette formulation de la trajectographie passive, ne faisant appel à aucune connaissance approfondie en mathématique, explique sans doute la très abondante littérature dont elle a fait et fait encore l'objet. Cette masse de travaux est d'autant plus importante que ce problème est ancien : en effet, comme il est rappelé dans [Clavard11b], déjà Gauss et Laplace à la fin du 18<sup>ème</sup> siècle avaient résolu ce problème dans le cadre de l'astronomie. C'est d'ailleurs à cette occasion que fut élaborée la méthode des moindres carrés et que fut introduite la notion d'observabilité (même si ce terme n'apparut que beaucoup plus tard avec les travaux de Kalman [Kalman60]).

Plus de deux siècles plus tard, on peut constater que les recherches dans le domaine du TMA (Target Motion Analysis, terminologie<sup>1</sup> anglo-saxonne pour trajectographie passive) demeurent très actives : une bibliographie exhaustive des 20 dernières années comprendrait sans doute plus d'un millier de références ce qui est beaucoup vu la relative étroitesse du problème par rapport à d'autres grandes thématiques en traitement du signal et de l'information comme les méthodes haute-résolution, la déconvolution, le pistage, etc... A ce critère quantitatif, il faut ajouter que le TMA est aussi un sujet ayant apporté de façon plus ou moins directe des résultats fondamentaux dépassant largement le cadre strict du problème. Cette thèse et les publications qu'elle a entraînées ([Clavard11a], [Clavard11b], [Clavard11c], [Clavard12] et [Clavard12A]) sont d'ailleurs une preuve à la fois de la vitalité du domaine et de son impact sur la théorie statistique de l'estimation.

Revenons maintenant sur l'exceptionnelle longévité du problème. Un candide peut légitimement se poser la question suivante : si Gauss ou Laplace ont résolu, il y a belle lurette, un cas assez complexe de TMA, alors pourquoi tant de matière grise a été dépensée depuis ? Deux points expliquent cela. D'une part, il n'existe pas de solution universelle à la sibylline formulation générale du TMA que l'on a donné précédemment. Chaque type de trajectoire possède ses spécificités concernant l'observabilité ou l'algorithme à employer.

---

<sup>1</sup> Nous utiliserons ici les dénominations anglo-saxonnes car la plupart des publications dans ce domaine sont dans la langue de Shakespeare (voir la liste des abréviations disponible plus haut).

Ainsi, la trajectographie de planètes en orbites képlériennes par Gauss n'a quasiment aucun point commun avec celle d'une source en mouvement rectiligne uniforme sur un plan. D'autre part, l'intérêt du TMA perdure du fait des avancées technologiques des capteurs et des capacités de traitement. Par exemple, les senseurs optroniques couvrent maintenant un très large spectre et sont suffisamment compact pour être embarqués sur des satellites ou des drones. En sonar passif, les antennes sont de plus en plus grandes et dotées de traitements améliorant la résolution spatiale : ainsi, la précision de mesure d'angle s'accroît au fil des ans. De plus, certains systèmes d'écoute passive peuvent délivrer en complément d'une mesure d'angle, des mesures de fréquences provenant de la source ou des indications de manœuvre de cette dernière. Enfin, les intercepteurs électromagnétiques embarqués à bord des avions de guerre ne cessent de voir leur sensibilité augmenter et leur volume diminuer.

Nous tiendrons d'ailleurs ici compte de l'évolution des capacités des senseurs puisque nous évaluerons, pour certains cas, l'apport de la mesure additionnelle de la fréquence. Nous traiterons aussi de senseurs ne mesurant que la distance. Certes, nous n'avons alors plus à faire à un problème passif *stricto sensu* car l'obtention de la distance requière le plus souvent l'émission d'une impulsion. Mais néanmoins, cela reste un problème de trajectographie car la position géographique de la source n'est pas directement fournie par le senseur. D'autre part, cette méthode sert dans les étapes préalables au TMA (calibration d'antenne) comme nous le présenterons au cours du chapitre introductif suivant (§1.3.2, p. 28). Enfin, sur le plan théorique, nous montrerons que ce problème est fortement lié au cas avec mesures d'angle seul.

Tout au long de cette thèse, de nombreux résultats de simulations permettront au lecteur de juger de l'intérêt opérationnel et pratique de ces nouvelles méthodes de trajectographie, et ce, pour de nombreux scénarios. Mais nous illustrerons aussi des aspects théoriques assez peu connus comme ceux ayant trait à la relation entre l'observabilité (*i.e.* l'unicité de la solution du système déterministe) et la borne de Cramér-Rao (relative à la variance minimale de l'estimateur). Par exemple, nous démontrerons l'observabilité de certains scénarios alors que la variance minimale calculée à l'aide de la borne est infinie. Nous présenterons aussi des cas où, à l'inverse, la borne à une valeur finie mais où le problème est inobservé. Ces résultats sont parfaitement justifiés sur le plan mathématique bien qu'ils heurtent un peu le bon sens. Mais Albert Einstein ne disait-t-il pas que « *le bon sens est en fait l'ensemble des idées reçues qu'on nous a inculquées jusqu'à 18 ans* ».

Le chapitre suivant est une introduction présentant le contexte de ces travaux et les résultats nécessaires à la compréhension de la suite. Nous avons placé suffisamment de références bibliographiques pour les lecteurs désireux d'approfondir certains points particuliers. Nous ne

détaillerons pas, dans ce chapitre introductif, les formulations mathématiques des problèmes et des résultats car nous le faisons de façon complète au cours des chapitres suivants. La présentation du contenu du manuscrit clôt le premier chapitre.

# **Chapitre 1**

***Introduction : contexte général des travaux et principaux résultats antérieurs***

## 1.1 La trajectographie par mesures d'angle conventionnelle

### 1.1.1 Définition

Rappelons tout d'abord la distinction entre le terme de localisation et celui de trajectographie. La localisation passive correspond au cas où la source  $S$  est fixe : c'est ce que font les géomètres lorsqu'ils lèvent des cartes par triangulations successives ou lorsqu'un observateur  $O$  a une vitesse relative très importante par rapport à la source (par exemple, un avion vis-à-vis d'un véhicule terrestre). Mais, dans de nombreuses situations, la source et l'observateur sont en mouvement dans la même plage de vitesse et les techniques de localisation deviennent inopérantes. Il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes de trajectographie exploitant un modèle paramétrique de la cinématique de la cible.

Le plus courant de ces problèmes de trajectographie est celui dit de « BO-TMA » (Bearings-Only TMA). Sa formulation dite « conventionnelle », correspond au cas où les deux mobiles ( $O$  et  $S$ ) se déplacent dans un même plan,  $S$  étant en mouvement à cap et vitesse constants ( $CV^2$ ) et où la mesure effectuée par  $O$  est l'azimut (*i.e.* l'angle de la direction de  $S$  par rapport au nord compté positivement dans le sens des aiguilles d'une montre, voir Figure 1). Ce problème clef, notamment en guerre sous-marine, a fait l'objet de travaux considérables et continus depuis plus d'un demi-siècle (voir la synthèse dans [Pillon05] et [Jauffret08a]).

Un certain lot d'hypothèses accompagne cette formulation :

- $O$  connaît parfaitement sa position tout au long de son déplacement.
- Le délai de propagation du signal de  $S$  vers  $O$  est supposé négligeable.
- Le bruit de mesure de l'azimut est centré, normal et de matrice de variance-covariance connue.
- La vitesse de la source est non nulle (sinon, ce serait un simple problème de localisation).

En pratique, les mesures sont délivrées le plus souvent à une cadence régulière, typiquement entre 1 s et 4 s en sonar passif. On dispose donc de  $N$  mesures d'angle pour estimer les 4 composantes du vecteur d'état définissant la cinématique de la source, dans un repère cartésien orthonormé, à savoir :

- ses coordonnées  $[x_s(t^*) \ y_s(t^*)]^T$  à un instant de référence arbitraire  $t^*$ ,

---

<sup>2</sup> Le mouvement rectiligne uniforme ou  $CV$  signifie dans ce manuscrit que la plate-forme se déplace et donc que sa vitesse n'est pas nulle, sinon elle est considérée immobile (*i.e.* fixe).

- ses deux composantes du vecteur vitesse  $[\dot{x}_s \quad \dot{y}_s]^T$ .

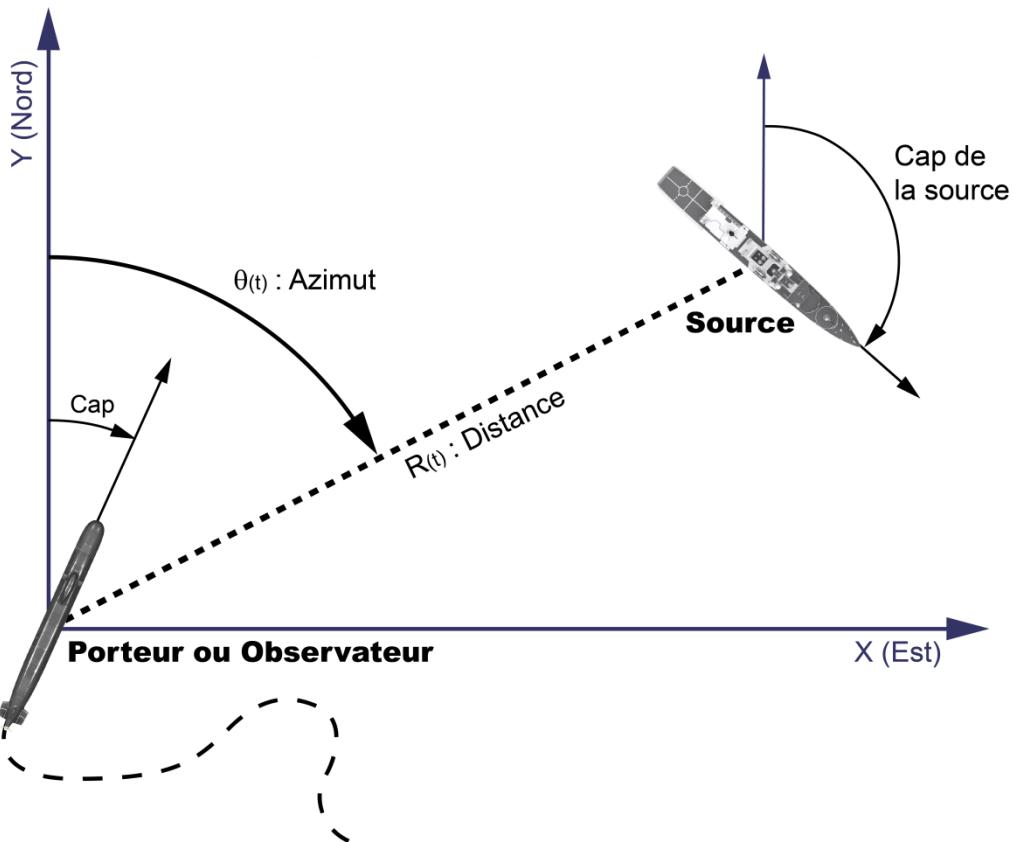
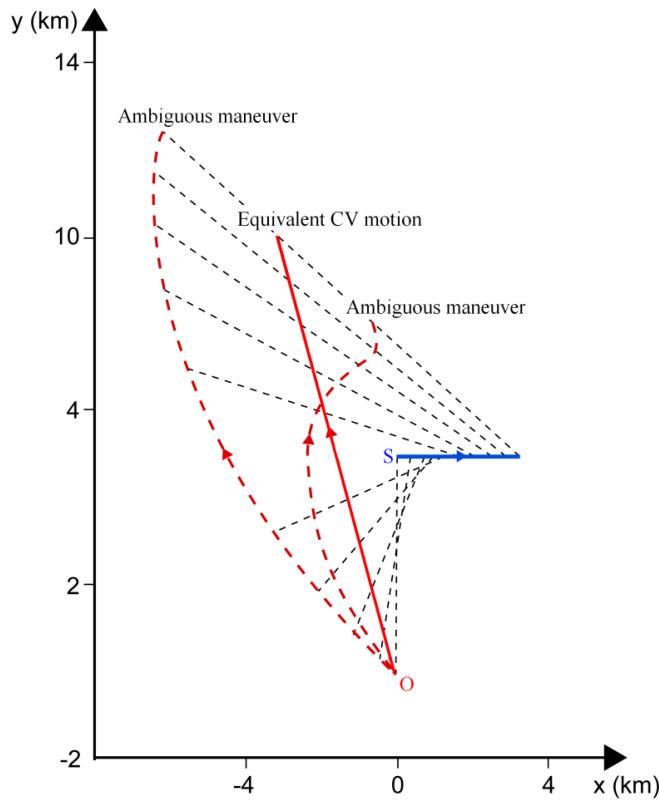


Figure 1 : Géométrie des deux plates-formes en BO-TMA conventionnel.

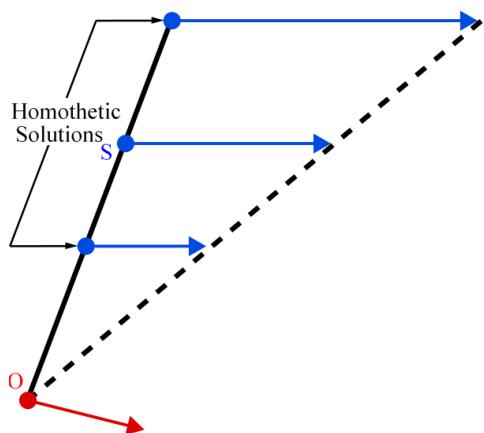
### 1.1.2 Manœuvre de l'observateur et observabilité

Une question maintenant parfaitement résolue dans le cadre du BO-TMA conventionnel est celle de l'observabilité. En effet, il a été démontré dans [Nardone81], [Payne89] et [Jauffret96] que l'observateur doit manœuvrer pour assurer l'observabilité mais cela ne suffit pas : il existe des manœuvres laissant le système inobservable comme par exemple, celle de la Figure 2 (tirée de [Pillon91]). La méthode ayant permis de démontrer ces résultats consiste à mettre sous forme linéaire équivalente l'équation de mesure et à utiliser ensuite les théorèmes relatifs à l'observabilité des systèmes linéaires non-stationnaires. Nous ne pourrons pas utiliser cette démarche pour les problèmes d'observabilité traités dans cette thèse (les équations de mesure auxquelles nous aurons affaire n'ayant pas d'équivalent linéaire) et nous devrons donc utiliser d'autres approches mathématiques.



**Figure 2 : Manœuvre n'assurant pas l'observabilité en BO-TMA conventionnel.**

En cas de situation inobservable et si l'azimut n'est pas constant, alors seuls les paramètres de la famille des solutions homothétiques, dans un repère relatif lié à l'observateur, pourront être estimés (Figure 3 tirée de [Clavard11a]). Ce n'est autre que le théorème de Thalès.



**Figure 3 : Solutions homothétiques dans le repère relatif à l'observateur.**

Dans un repère fixe, la famille des solutions a une allure différente suivant les vitesses relatives de  $S$  et  $O$  (Figure 4, tirée de [Jauffret11]).  $S$  ne va pas toujours dans « le même sens ».

Cette famille est définie par trois paramètres seulement par exemple : l'azimut à un instant donné et ses deux premières dérivées. Comme le vecteur d'état est quadridimensionnel, il

suffit alors d'une mesure additionnelle sur la cible pour lever l'inobservabilité : ce peut être une mesure ponctuelle de distance, une mesure de vitesse (en module) ou de cap.

Mentionnons pour mémoire un cas dégénéré où la cible ne défile pas et où alors seulement deux paramètres peuvent être estimés, l'azimut (qui est constant) et sa dérivée première (qui est nulle d'ailleurs). Enfin, on éliminera dans cette thèse le cas où  $O$  et  $S$  sont, à un instant donné, à la même position : il n'y a d'ailleurs plus de problème de localisation.

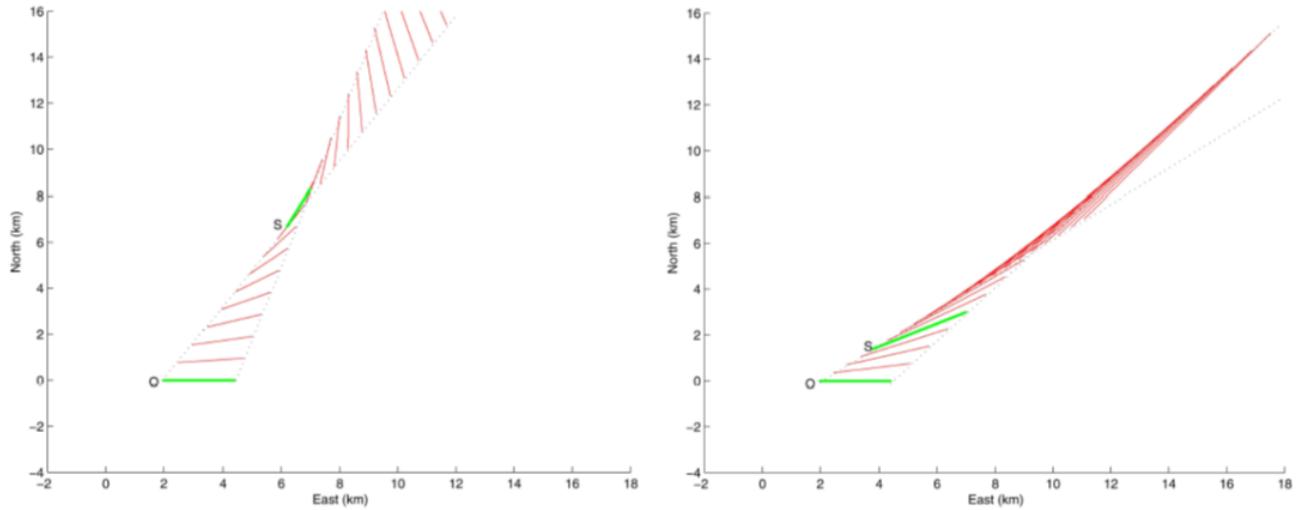
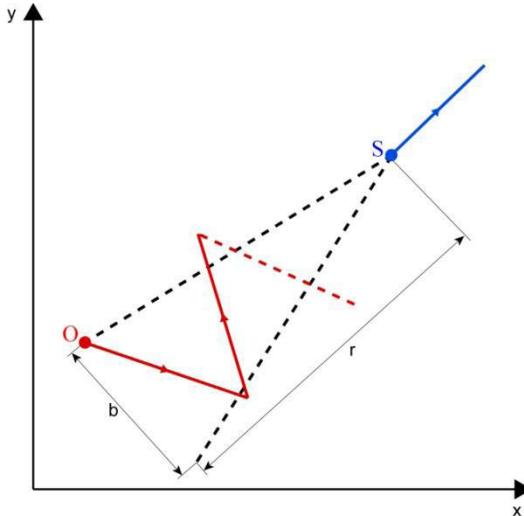


Figure 4 : famille de solutions homothétiques dans le repère absolu.

### 1.1.3 Manœuvre de l'observateur et précision de la position estimée

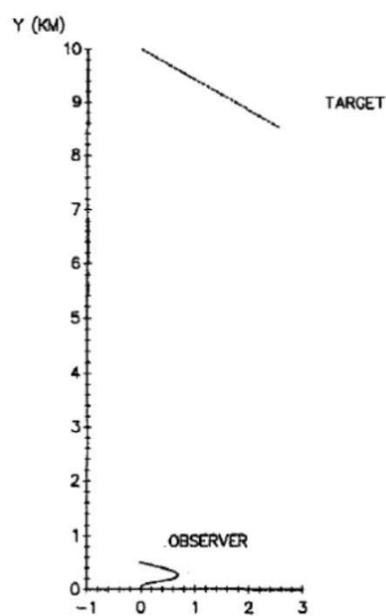
La manœuvre de l'observateur intervient aussi dans la précision du résultat (à bruit de mesure identique). Tout d'abord, dans [Nardone84], les auteurs vont prouver que si l'on considère une trajectoire de l'observateur constituée de legs<sup>3</sup> parcourus à vitesse constante, alors le zigzag présenté à la Figure 5 (tirée de [Nardone84]) permettra d'obtenir la meilleure précision relative de l'estimation de la distance à l'instant final. Il s'agit pour l'observateur de parcourir des legs quasiment perpendiculaires à la trajectoire de la source tout en veillant à ce que la distance relative ne s'accroisse pas trop. Le nombre de zigzags, leur amplitude et la vitesse de l'observateur dépendent des paramètres cinématique de la trajectoire de la source.

<sup>3</sup> Jambes ou segments rectilignes en français.



**Figure 5 : Mancœuvre de l'observateur amenant une bonne précision sur l'estimation de la distance à l'instant final.**

Ce résultat a été obtenu pour des cibles suffisamment lointaines et à l'aide d'approximations. Mais on peut optimiser la manœuvre de l'observateur de façon numérique au cas par cas comme présenté dans [Passerieux98] et [LeCadre99]. Par exemple, la Figure 6 (tirée de [Passerieux98]) présente le résultat d'une optimisation de la précision relative de l'estimation de la distance à l'instant final. Cette trajectoire en forme de S, d'ailleurs assez proche du zigzag précédemment évoqué, a été obtenue pour un observateur à vitesse constante (en module). Evidemment, en réalité, l'observateur ne connaît pas la trajectoire de la cible et l'on ne peut donc pas directement appliquer ces algorithmes d'optimisation. Mais en analysant les résultats obtenus pour un très grand nombre de cas, il est possible de déduire des règles de manœuvres qui, bien que sous-optimales, permettent à l'observateur d'atteindre un certain objectif de performance comme par exemple, obtenir pour une durée d'acquisition donnée la précision la plus élevée possible.



**Figure 6 : Mancœuvre optimisée en BO-TMA conventionnel.**

#### **1.1.4 Algorithmes employés en trajectographie par mesures d'angle conventionnelle**

Une autre grande catégorie de résultats concernant les travaux en BO-TMA est relative aux algorithmes d'estimation et au test d'acceptation du résultat.

Les premières méthodes utilisées en BO-TMA furent des filtres de Kalman étendus (EKF) car les calculateurs dans les années 70 étaient peu puissants et surtout parce que ces algorithmes étaient particulièrement en vogue. Une grande variété de tels procédés de filtrages non-linéaires fut développée mais toutes ces méthodes étaient pénalisées par des problèmes de convergence liés à l'observabilité variable du problème.

En effet, avant que l'observateur ne manœuvre, la linéarisation de l'EKF ne peut se faire que pour un vecteur d'état incomplet (*i.e.* 3D) mais observable et donc a priori, très éloigné du vecteur caractérisant la trajectoire de la source. Lors de la manœuvre, le cumul des erreurs de linéarisation rend en quelque sorte la situation irrécupérable et le filtre diverge. Un autre problème peut être que le filtre récursif converge de façon précoce avant toute manœuvre de l'observateur [Aidala79]. Certaines parades ont été développées comme l'élaboration d'un système de coordonnées spécifiques (par exemple les coordonnées « polaires modifiées » [Aidala83], [Brehard06]) ou utilisant des formes dites « pseudo linéaires » [Aidala79], [Lindgren78] ou en utilisant des initialisations multiples [Barbagelata75] - ce qui n'est pas sans rappeler le filtrage particulaire actuel [Arulampalam04] - . Mais toutes ces approches ne font que repousser les problèmes d'instabilité intrinsèque aux méthodes récursives en BO-TMA.

Dès les années 80, sous l'impulsion des travaux fondamentaux du NUSC et grâce à l'augmentation des performances des calculateurs, ces pis-aller furent abandonnés au profit de l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE). Les méthodes de calcul du MLE (dites batch) utilisent des algorithmes du type gradient permettant de minimiser un critère quadratique et des procédés d'initialisation astucieux. Cela permit d'obtenir des solutions de grande qualité statistique<sup>4</sup> que les méthodes récursives étaient dans l'incapacité de fournir. L'autre avantage des procédés non-récurrents est que les pistes d'azimut peuvent être lacunaires, c'est-à-dire comporter des « trous » durant des laps de temps importants. Ceci se rencontre couramment dans le domaine de la détection sous-marine à cause des spécificités de la propagation (zones d'ombres) ou de phénomènes de masquage sectoriel des antennes par des superstructures proches. La plupart du temps, lors d'une interruption de la piste, les méthodes récursives divergent pour les mêmes raisons que celles évoquées plus haut ce qui est rédhibitoire. Ce constat nous a conduits, dans le cadre de cette thèse, à l'utilisation

---

<sup>4</sup> C'est-à-dire atteignant la borne de Cramér-Rao.

exclusive des méthodes batch. Remarquons que la puissance actuelle des calculateurs relativise l'avantage « temps réel » des méthodes récursives sur les méthodes batch.

D'autres outils algorithmiques ont dû être développés dans le but de tester si l'une des hypothèses de base précédemment listées (§1.1.1, p. 15) n'a pas été mise en défaut durant le batch d'estimation ce qui invaliderait la solution obtenue. Par exemple, la source peut avoir manœuvré durant l'observation. Pour détecter un tel changement de cap, un certain nombre de tests statistiques ont été proposés, tous exploitant les résidus<sup>5</sup> d'estimation [Blanc-Benon89] et [Jauffret08a] : si ces derniers ne sont pas centrés, c'est qu'il y a eu une éventuelle manœuvre de la source. Cette information peut alors être prise en compte dans une certaine mesure en modifiant le modèle paramétrique de cinématique. Ces outils de validation de la solution relèvent de la théorie de la décision et ne sont pas abordés dans cette thèse laquelle est essentiellement consacrée à l'aspect estimation. Le seul critère d'acceptation qui est employé ici est la valeur du critère quadratique obtenu en fin de minimisation (ce n'est autre que la somme des carrés des résidus). C'est ce critère, commode d'emploi, qui nous permet d'éliminer les quelques solutions aberrantes éventuellement issues de l'algorithme de minimisation, phénomène qui peut se produire même lors de l'emploi du modèle exact (accroche à un minimum local).

## 1.2 Comment éviter à l'observateur de manœuvrer

### 1.2.1 *Contraintes résultant de la nécessité de manœuvrer*

En BO-TMA conventionnel, l'observateur doit donc manœuvrer (cf. §1.1.2, p. 16) et pas n'importe comment. Cela représente une contrainte importante pour un bateau de surface ou un sous-marin.

En effet, sur le plan tactique, si la mission de l'observateur est, par exemple, de rejoindre un point donné en un temps minimum, il n'aura guère le loisir de manœuvrer à sa guise. Plus généralement, l'optimisation de la manœuvre pour maximiser la précision d'estimation, n'est pas toujours une opération compatible avec d'autres contraintes tactiques liées à la mission du bateau (comme la protection d'une unité précieuse).

Des obstacles de navigation (côtes, hauts fonds, trafic maritime) sont aussi autant d'obstacles entravant la liberté de manœuvre. Si le bateau tracte une antenne remorquée, celle-ci sera déstabilisée lors d'une manœuvre franche ce qui peut avoir comme

---

<sup>5</sup> Les résidus sont l'équivalent des innovations utilisées en filtrage récursif, écart entre la mesure réelle et la prédicta ; Il y en donc un par mesure d'angle. On exploite aussi un lot de N résidus qui sont corrélés [Jauffret08a] contrairement aux innovations.

conséquence la perte de la détection de la cible. Si l'on veut garder le contact, alors il faudra rester en CV. Il existe aussi des plates-formes peu manœuvrantes comme les gliders (*i.e.* planeurs sous-marins) ou autres plates-formes dérivantes.

Mais surtout, pour un sous-marin, les manœuvres sont synonymes d'indiscrétion sur le plan du bruit rayonné. Autrement dit, si l'observateur veut rester discret, il devra privilégier le mouvement rectiligne uniforme.

Toutes ces raisons expliquent pourquoi depuis plus de deux décennies, de nombreux travaux seront consacrés à l'étude des moyens permettant de s'affranchir de la nécessité de la manœuvre de l'observateur, ceci conduisant nécessairement à sortir de la définition stricte du BO-TMA conventionnel telle que donnée précédemment au §1.1.1 (p. 15).

### **1.2.2 Apport de mesures additionnelles de fréquence**

La façon la plus courante pour remédier à l'inobservabilité lorsque l'observateur ne manœuvre pas<sup>6</sup>, est d'utiliser en complément de l'azimut, la mesure d'une ou plusieurs fréquences provenant de la source. Ces raies bande étroite sont générées par les machines tournantes équipant le bateau : hélices, pompes, arbres, etc... Si celles-ci n'ont pas de balourd, alors les raies émises seront stables et subiront l'effet doppler lié au mouvement relatif entre la source et l'observateur. Les deux mesures simultanées d'angle et de fréquence sont alors exploitées par des méthodes dites de FB-TMA (frequency and bearing TMA). Le vecteur d'état devient pentadimensionnel car la valeur de la fréquence émise, qui est inconnue de l'observateur, s'ajoute aux paramètres habituels de ceux de la BO-TMA.

L'observabilité est alors assurée comme cela a été démontré dans [Jauffret96] si l'observateur reste en CV. Seul le cas dégénéré à azimut constant demeure toujours inobservable. Comme en BO-TMA, c'est la mise sous forme linéaire équivalente qui permet d'obtenir ces résultats concernant l'observabilité en FB-TMA. Les algorithmes d'estimation opérationnels sont, comme précédemment, batch. Une extension au cas où la source émet plusieurs raies stables (MFB-TMA) a permis de montrer que plus le nombre de raies est important, plus la précision de localisation s'améliore [Jauffret08b]. Dans cette thèse, au §2.2.2.2 (p. 68), nous allons d'ailleurs reprendre l'analyse de l'apport de la mesure d'une ou plusieurs fréquences mais pour une cinématique source différente, celle d'une cible en mouvement circulaire uniforme (CT).

---

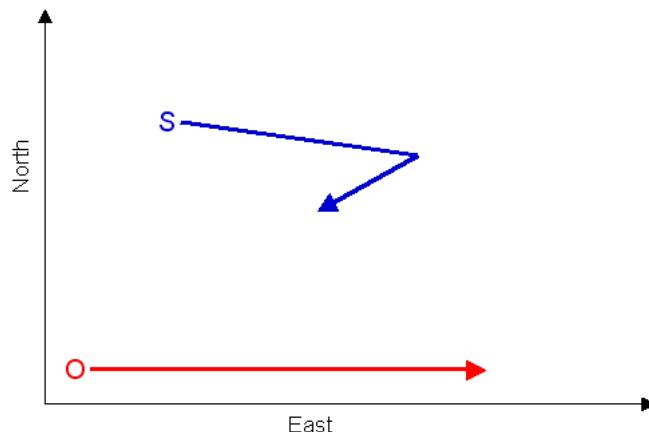
<sup>6</sup> Nous restons ici toujours dans le cas mono-senseur : ainsi nous excluons l'emploi d'un second senseur géographiquement distant permettant de localiser la source par triangulation.

Néanmoins, il existe deux principales limitations à ces méthodes de TMA utilisant les raies bandes étroites : d'une part, il existe des sources particulièrement silencieuses comme les sous-marins qui n'émettent aucune raie détectable dans la bande de réception du sonar ; d'autre part, les signatures de certains bruiteurs ont une évolution erratique et indéterminée, ce qui correspond à une source mécaniquement instable.

Ainsi, a-t-il fallu élaborer des méthodes n'exploitant que des mesures d'angle et ne nécessitant pas de manœuvre de l'observateur, méthodes que nous allons maintenant rapidement décrire.

### **1.2.3 Trajectographie par mesures d'angle d'une source parcourant à vitesse constante une trajectoire composée de deux legs**

Dans cette approche (BO-MTMA), deux hypothèses supplémentaires sont ajoutées à celle du BO-TMA conventionnel. D'une part, la source doit manœuvrer<sup>7</sup> de façon franche à un instant qui peut être inconnu, d'autre part, elle est supposée conserver en permanence une vitesse constante en module (Figure 7 tirée de [Clavard12]). Autrement dit, elle parcourt deux legs à vitesse constante. C'est en quelque sorte la situation inverse du BO-TMA.



**Figure 7 : Scénario de BO-MTMA.**

Sous ces deux hypothèses supplémentaires, il a alors été démontré analytiquement dans [Jauffret8b] que le problème est observable sans manœuvre de l'observateur, sauf si la bissectrice de l'angle fait par les deux legs est perpendiculaire à la trajectoire de l'observateur (Figure 8, tirée de [Clavard12]).

<sup>7</sup> D'où le M pour « manœuvre » dans le sigle BO-MTMA.

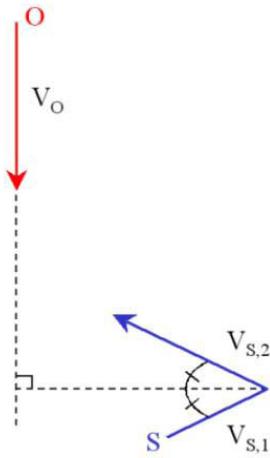


Figure 8 : Cas inobservable en BO-MTMA.

Ainsi, dans le scénario présenté à la Figure 5,  $S$  (qui ne manœuvre pas) ne peut pas trajectographier  $O$  (qui zigzague). Cette manœuvre en zigzag est donc doublement bénéfique pour  $O$  : D'une part, comme nous l'avons dit, elle confère la meilleure précision possible au BO-TMA effectué par  $O$  ; et d'autre part, elle interdit à  $S$  de trajectographier  $O$ . L'acteur  $O$  est gagnant sur les deux tableaux.

D'une façon plus générale, cette asymétrie entre les deux protagonistes, l'un en CV, l'autre effectuant une succession de legs, a été analysée pour de nombreuses situations [Jauffret10] sans qu'il apparaisse une stratégie l'emportant systématiquement pour l'un ou pour l'autre. Nous nous reposerons ici cette question d'équilibre des performances entre une plate-forme non-manœuvrante et l'autre parcourant un arc de cercle à vitesse constante (§2.3, p. 72).

#### 1.2.4 Méthodes investiguées ici : changement du modèle de cinématique de la source

Afin de supprimer la nécessité de manœuvre de l'observateur, nous allons ici investiguer un autre type de modèle de cinématique de la source, celui correspondant à un arc de cercle parcouru à vitesse constante (CT), l'observateur acquérant des mesures d'angle seulement. Le vecteur d'état devient 5D : il contient les coordonnées du centre du cercle, son rayon, l'angle initial et la vitesse de rotation de la susdite rotation.

En pratique, ce type de trajectoire se rencontre lorsqu'un bateau effectue des girations lentes entre deux legs (Figure 9, tirée de [Jauffret10]). Il existe aussi des véhicules sous-marins particuliers (les torpilles légères par exemple) qui durant certaines phases de leur parcours effectuent ce type de mouvement. D'autres applications en TMA de ce modèle de cinématique se trouvent en optronique dans l'espace tridimensionnel [Li06] et [Li07]. Mais

tous ces travaux sont incomplets : entre autre, ils n'abordent pas le problème de l'observabilité.

Ainsi nous aborderons les points suivants au cours de l'analyse des méthodes de TMA proposées au chapitre 2 :

- Dans quelles conditions la trajectoire d'une source en mouvement circulaire uniforme est-elle observable par un observateur passif en mouvement rectiligne uniforme ?
- Quelles sont les performances effectives des méthodes proposées et sont-elles suffisantes pour avoir un intérêt pratique ? En effet, comme souvent en TMA, il est difficile de déterminer les principaux paramètres influençant les performances, l'ensemble des scénarios possibles étant indénombrable (seul le cas du BO-TMA conventionnel à longue distance échappe à ce constat, [Nardone84]). Ici, il s'agira surtout de centrer nos analyses sur des cas dignes d'intérêts opérationnels.
- Qu'apporte la fréquence dans ce contexte à la fois sur le plan de l'observabilité et en termes de performance ?

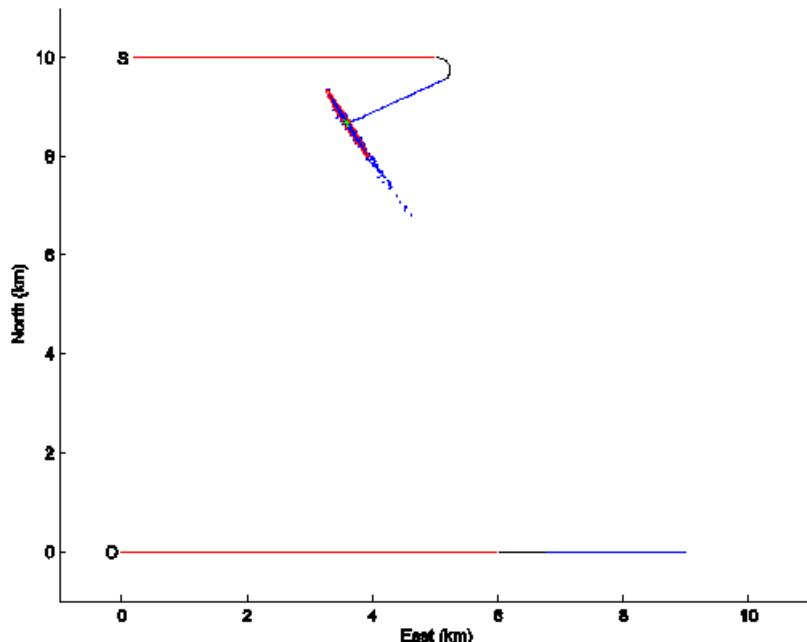


Figure 9 : BO-MTMA avec changement de cap non-abrupte de la source.

## 1.3 Comment minimiser les problèmes posés par les biais de mesures d'angle

### 1.3.1 Robustification de la trajectographie par mesures d'angle conventionnelle vis-à-vis des biais de mesure

Les perturbations ayant le plus d'impact sur la précision des résultats sont celles relatives aux biais sur les mesures angulaires, d'autant plus que cette anomalie est difficilement détectable via les tests exploitant les résidus. Evidemment, si le biais est indépendant du gisement et d'amplitude limitée (typiquement  $<5^\circ$ ), l'effet n'est pas important : l'ensemble des figures subit une rotation avec un impact négligeable sur la distance estimée. Par contre, ces biais sont particulièrement nocifs lorsqu'ils évoluent avec le gisement<sup>8</sup> de la source : ceci est dû au fait que l'on exploite indirectement la parallaxe entre des lignes de visées.

Le premier phénomène qui peut entraîner la présence de tels biais est la discrimination spatiale limitée du sonar : une source puissante peut alors perturber la mesure d'angle d'une source faible et angulairement proche. La figure suivante représente un tel phénomène pour un cas à fort contraste (20dB d'écart de SNR). Néanmoins, cette perturbation peut être atténuée par l'emploi d'un traitement adaptatif (voir Figure 10 à droite). Ces biais ne peuvent apparaître que lors du croisement de pistes en azimut. Ces mesures perturbées peuvent être relativement peu nombreuses si l'une des sources défile rapidement en angle et peuvent éventuellement être mises de côté : ainsi la BO-TMA exploitera ce qui est disponible avant et après le croisement. Bien que perturbateur, ce problème de biais est donc, dans une certaine mesure gérable à bord.

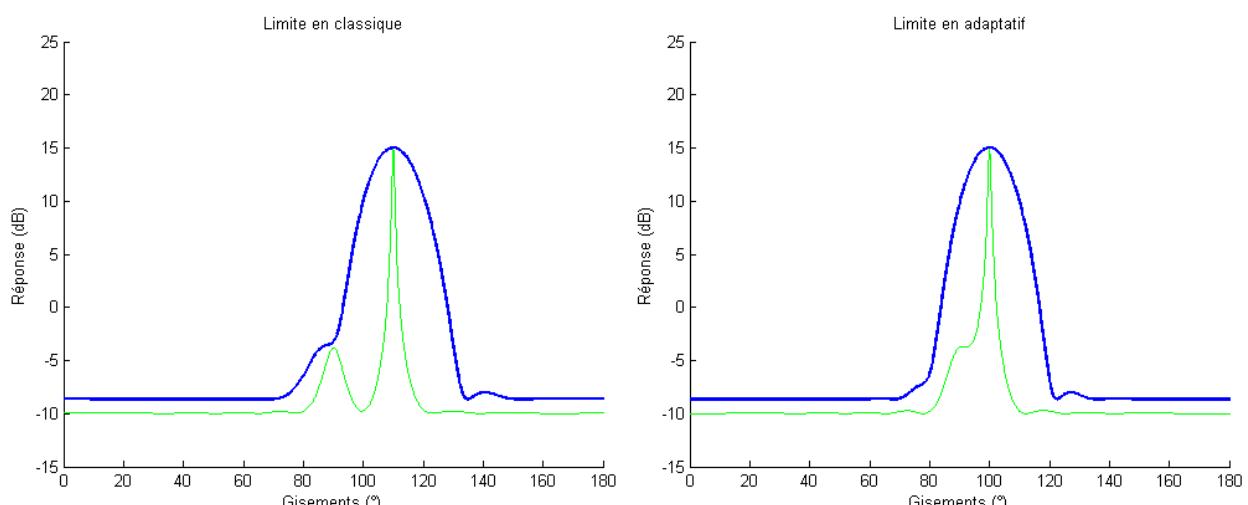


Figure 10 : Pouvoir séparateur limite des traitements classique (en bleu) et adaptatif (en vert), cas fort contraste.

<sup>8</sup> Le gisement correspond à la direction de la source par rapport à l'axe du bateau, avec comme référence  $0^\circ$ , l'avant.

Par contre, le problème des biais dus aux aberrations d'antenne (*i.e.* des biais variables avec le gisement) n'est pas aussi facile à maîtriser car ces biais sont moins aisément appréhendables par l'opérateur. Ces aberrations d'antenne sont dues à des dispersions des caractéristiques des hydrophones, d'éventuelles pannes ou à des interférences produites par les structures à proximité de la base acoustique.

La première façon de lutter contre l'effet de ces aberrations est de chercher à robustifier les algorithmes vis-à-vis des biais lentement variables sur l'horizon. Si cette condition est vérifiée, alors, pour un observateur effectuant une manœuvre en zigzag, le biais sera à peu près constant sur chaque leg, la cible restant dans un secteur étroit en gisement<sup>9</sup>. C'est cette propriété qu'exploite la première méthode de robustification développé par Ekelund [Pillon05]. Elle nécessite d'effectuer une manœuvre spécifique en deux legs en forme d'épingle à cheveux (Figure 11 tirée de [Pillon05]). Elle utilise la mesure de la dérivée de l'azimut (donc indépendante d'un biais constant) à deux instants, l'un sur le premier leg, l'autre sur le second. Une simple règle de trois permet alors d'obtenir la distance de la source. Bien que sous-optimale et soumise à de nombreuses contraintes, cette méthode a eu du succès car elle fut longtemps la seule méthode robuste aux aberrations.

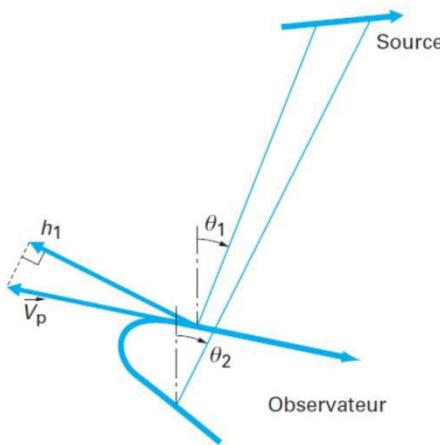


Figure 11 : Scénario type Ekelund.

Pour s'affranchir de la contrainte d'Ekelund sur la manœuvre de l'observateur, il a été développé dans [Passerieux91] un algorithme prenant toujours en compte un modèle de biais constant par leg, avec comme hypothèse que ces biais suivent une certaine répartition statistique (par exemple, uniforme entre  $+/- 3^\circ$ ). Cet estimateur s'est révélé efficace comme le montrent les résultats présentés sur la Figure 12 tirée de [Passerieux90] (la distance séparant les deux plates-formes est de l'ordre de 18 km).

<sup>9</sup> de ce point de vue, les méthodes sans manœuvre de l'observateur sont "naturellement" plus robustes.

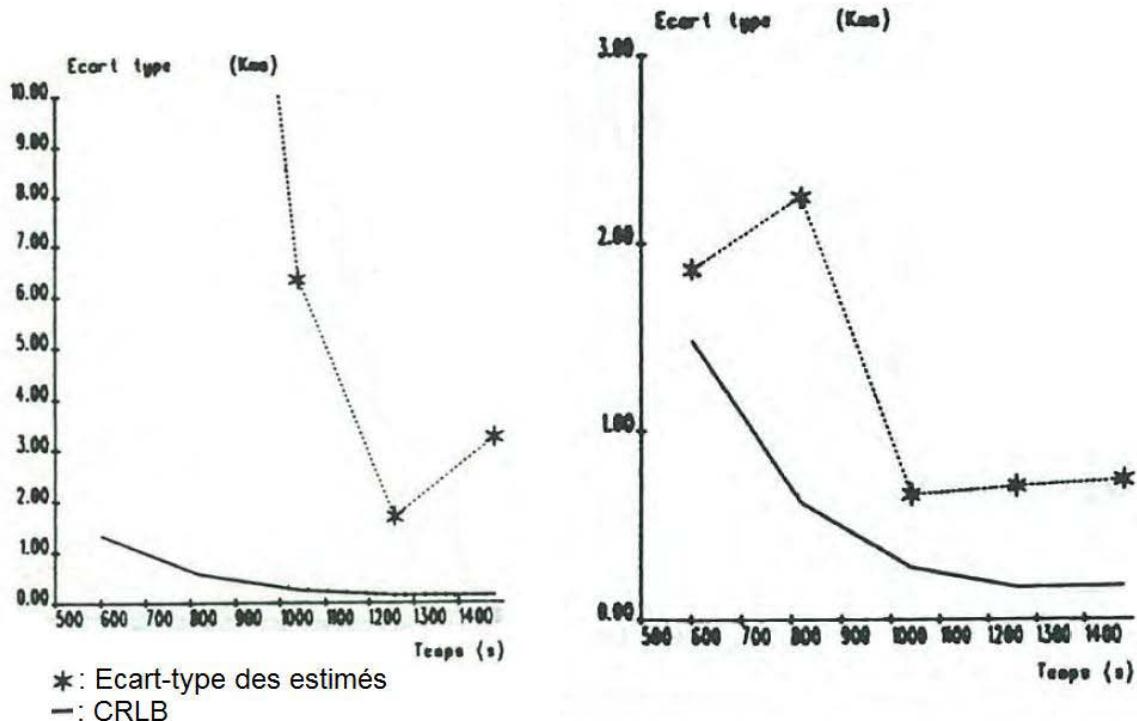


Figure 12 : Impact du biais sur les performances des estimateurs.

### 1.3.2 Autre approche : calibration de l'antenne à l'aide de trajectographie par mesures de distance

Malgré tout, il reste de nombreux cas non couverts par les méthodes de robustification, notamment si la manœuvre n'est pas en zigzag ou si le biais évolue rapidement dans certains secteurs en gisement. Sur le papier, il semble aisément d'éviter ces problèmes en calibrant les antennes. Mais en pratique, cette opération peut se révéler très longue, difficile à mettre en œuvre pour un sous-marin et inadéquate. Les premières pages du brevet [Pillon06], retracant l'état de l'art des méthodes de calibration, présentent ces limitations.

C'est pourquoi ce brevet propose d'utiliser l'estimation de la cinématique d'un concours via la trajectographie par mesures de distance, puis de comparer les angles estimés via cette méthode à ceux issus du sonar, ceci permettant d'établir directement à bord les tables d'aberrations angulaires, et ce, quelle que soit l'immersion. Cette opération demande bien sûr des trajectoires adéquates du bruiteur et du porteur mais surtout que la précision des mesures de distance soit suffisamment bonne, ce qui est assez facile à obtenir en sonar.

En effet, le principe de cette mesure est que le concours émet une impulsion à intervalles de temps réguliers (par exemple, toutes les 10 secondes). A bord du sous-marin une horloge précise (atomique par exemple) est synchronisée avec celle pilotant l'émission et permettant

ainsi de mesurer le temps de propagation du pulse (dit aussi « temps de vol »). La mesure de l'instant d'arrivée se fait à l'aide du filtrage adapté. Typiquement, on peut ainsi obtenir une mesure à la milliseconde près si la bande du code émis est d'au moins 1 kHz. A cela, on peut rajouter les imprécisions dues à la non-maîtrise de la propagation ou d'autres erreurs dues à l'instrumentation. Au total, pour ce type de situation bien contrôlée à relativement courte distance (entre 5 et 10 km), on peut s'attendre à des écarts-types de l'ordre de 2 ms sur les mesures de ce temps de vol. Ceci correspond à un écart-type, sur les mesures de distance, de 3 m, soit une précision relative très élevée. Cette précision rend l'exploitation de la distance viable dans le cadre de cette application spécifique (un exemple illustrant l'intérêt de cette application est donné au §3.5, p. 110).

Les autres applications exploitant la mesure de distance correspondent à des sonars actifs omnidirectionnels en émission et réception. C'est par exemple ce que peut embarquer un petit drone sous-marin. Ce peut être aussi des sonars actifs où la mesure d'angle est de très mauvaise qualité comme sur certaines antennes remorquées (effet de pseudo-gisement) ou des émetteurs très basse fréquence dotés d'une petite base de réception (en nombre de longueur d'onde). Il existe aussi des moyens en sonar passif de déterminer la distance en utilisant la présence de trajets multiples. Cette localisation exploite par exemple, les mesures de retard entre le trajet direct, celui réfléchi par le fond et celui réfléchi par la surface. Certaines antennes verticales délivrent de plus des mesures du site (ou angle d'élévation) d'arrivée de ces rayons sonores. Néanmoins, ces cas demeurent bien moins répandus que celui du sonar habituel, c'est-à-dire doté d'une formation de voies lui permettant de fournir des gisements.

L'autre domaine confronté à des senseurs ne délivrant que des mesures de distance, est celui des radars transhorizon, problème sur lequel une équipe australienne a effectuée des recherches en RO-TMA (Trajectographie par mesures de distance d'une source en CV : Range-Only TMA) [Ristic02] et [Clark11]. Toutefois, il existera peut être un jour d'autres applications du RO-TMA. Citons la réplique de Faraday au ministre des finances de l'époque lui demandant l'intérêt pratique de l'électricité : « *Un jour peut-être, vous pourrez le taxer* ». Peut-être qu'il existera dans le futur une taxe due à chaque émission sonar ?

Mentionnons pour finir que ces méthodes de trajectographie par mesures de distance, objet des chapitres 3 et 4, ont été peu abordées dans la littérature ouverte : les publications sur ce sujet se comptent sur les doigts d'une seule main et, de plus, sont incomplètes. Par exemple, la plus citée [Song99] n'aborde que très partiellement l'aspect de l'observabilité. Il faut reconnaître que les applications de la trajectographie par mesures de distance, hormis celle de calibration précédemment évoquée, ne sont pas pléthores.

## 1.4 Bilan de ce chapitre : présentation du contenu du manuscrit

Après cette introduction présentant le problème du TMA, nous allons détailler un peu plus avant le contenu des travaux présentés dans chacun des chapitres de ce manuscrit.

- Le second chapitre est dédié au problème de trajectographie d'une source en mouvement circulaire uniforme lorsque l'observateur non-maneuvrant mesure des angles et/ou des fréquences. Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité de la trajectoire de la source sont établies et l'estimateur du maximum de vraisemblance est proposé. Les résultats de simulation obtenus sont détaillés et analysés.
- Le troisième chapitre introduit la trajectographie par mesures de distance seule pour une source supposée en mouvement rectiligne uniforme (RO-TMA). Nous montrons que l'observateur doit manœuvrer afin d'assurer l'observabilité de la trajectoire de la source. Néanmoins, ceci n'est qu'une condition nécessaire : nous identifions quelques types de manœuvres qui n'apportent pas l'observabilité. L'estimateur du maximum de vraisemblance s'avère efficace pour les scénarios présentés et pour lesquels l'observabilité est garantie.
- Le quatrième et dernier chapitre est lui aussi consacré à la trajectographie par mesures de distance seule. Nous nous focalisons sur des scénarios pour lesquels l'observateur n'a pas à manœuvrer pour assurer l'observabilité de la trajectoire de la source : c'est la source qui est alors manœuvrante. Les conditions nécessaires et suffisantes sont établies. L'estimateur du maximum de vraisemblance retenu est efficace pour les scénarios choisis.

Nous terminons par une synthèse des résultats présentés et évoquons quelques pistes pour de futurs travaux, en lien direct avec ceux entrepris au cours de cette thèse.

La trame des chapitres 2, 3 et 4 est la suivante :

- Notations.
- Analyse de l'observabilité.
- Mise au point de l'estimateur et comparaison de ses performances à la borne de Cramér-Rao.

## **Chapitre 2**

***Trajectographie par mesures d'azimut et/ou de fréquence : source en mouvement circulaire uniforme et observateur en mouvement rectiligne uniforme***

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la faisabilité de trajectographier une source en mouvement circulaire uniforme (CT) par un observateur en mouvement rectiligne uniforme (CV). L'observateur acquiert des mesures d'angle et éventuellement des mesures de fréquence.

Ce chapitre comporte trois parties :

- La trajectographie passive par mesures d'angle seul : la méthode développée pour ce cas sera désignée par le sigle BO-CTTMA (pour bearings-only constant turn target motion analysis) ;
- La trajectographie par mesures d'angle et de fréquence(s) : la méthode s'appelle alors FB-CTTMA (pour frequency and bearing constant turn target motion analysis) lorsque l'on ne dispose que d'une seule raie bande étroite ou MFB-CTTMA (pour multi frequency and bearing constant turn target motion analysis), lorsque plusieurs fréquences sont exploitées ;
- Une étude sur l'avantage tactique en termes de trajectographie entre deux protagonistes, l'un manœuvrant et l'autre non-manœuvrant.

## 2.1 Trajectographie par mesures d'angle seul d'une source en mouvement circulaire uniforme

Ce paragraphe débute par la présentation des notations employées tout au long de ce chapitre. L'observabilité de la trajectoire de la source est ensuite analysée ainsi que les performances attendues en termes de borne de Cramér-Rao (CRLB). L'estimateur proposé est l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) dont les performances (selon les matrices de variance-covariance) sont évaluées à l'aide de simulations de type Monte Carlo et comparées à la CRLB.

### 2.1.1 Hypothèses et notations utilisées

La position de la source  $S$  (en CT) est donnée dans un repère orthonormé, à l'instant  $t \in [0, T]$ , par

$$P_s(t) = \begin{bmatrix} x_s(t) \\ y_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + \rho_c \begin{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) \\ \cos(\omega t + \varphi) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

où

- $\omega \neq 0$  est la vitesse angulaire, considérée constante,
- $P_c = [x_c \ y_c]^T$  sont les coordonnées du centre du cercle,
- $\varphi$  est l'angle initial relatif au Nord,
- et  $\rho_c$  est le rayon du cercle de la trajectoire source, non nul.

La vitesse (constante) de la source  $v_s$ , liée à la vitesse angulaire et au rayon du cercle, est donnée par la relation :  $v_s = |\omega| \rho_c$ . La source est considérée en sens de rotation « horaire » lorsque  $\omega$  est positif et en sens « anti-horaire » pour  $\omega$  négatif.

La position de l'observateur  $O$  (en CV), à l'instant  $t \in [0, T]$ , est définie par :

$$P_o(t) = \begin{bmatrix} x_o(t) \\ y_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o(0) \\ y_o(0) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{y}_o \end{bmatrix}, \quad (2)$$

avec  $V = [\dot{x}_o \quad \dot{y}_o]^T$  son vecteur vitesse (constant).

La mesure sans bruit de l'azimut à l'instant  $t$  est donnée par :

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left[ \frac{x_s(t) - x_o(t)}{y_s(t) - y_o(t)} \right]. \quad (3)$$

Nous utiliserons aussi l'expression équivalente suivante :

$$\theta(t) = \arg[P_s(t) - P_o(t)]. \quad (4)$$

La distance séparant la source de l'observateur, à l'instant  $t$ , est donnée par :

$$R(t) = \|P_s(t) - P_o(t)\| = \sqrt{(x_s(t) - x_o(t))^2 + (y_s(t) - y_o(t))^2}. \quad (5)$$

La Figure 13 illustre le jeu de notation venant d'être introduit.

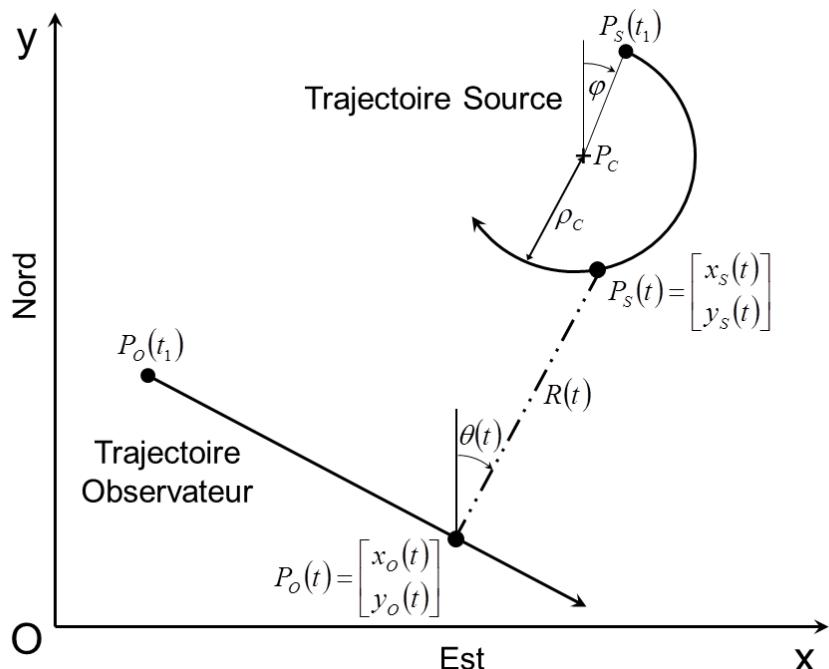


Figure 13 : Exemple de scénario en BO-CTTMA.

L'observateur acquiert les azimuts  $\theta_m(t_k)$  mesurés aux instants  $t_k = (k-1)\Delta t$ , pour  $k=1, 2, \dots, N$  et définis par :

$$\theta_m(t_k) = \theta(t_k) + \varepsilon_\theta(t_k).$$

Le vecteur additif de bruit  $[\varepsilon_\theta(t_1) \ \dots \ \varepsilon_\theta(t_N)]^T$  est supposé gaussien centré de matrice de variance-covariance connue égale à  $\text{diag}[\sigma_\theta^2(t_k)]$ .

La trajectoire de la source est définie par le vecteur d'état  $Z = [x_C \ y_C \ \rho_C \ \varphi \ \omega]^T$ . Mentionnons qu'un second vecteur d'état sera employé lors de l'analyse des performances (cf. §2.1.3, p. 48). Afin d'indiquer que l'expression des azimuts  $\theta(t_k)$  est fonction du vecteur d'état  $Z$ , nous utiliserons la notation  $\theta(Z, t_k)$ . Le système à étudier est donc constitué des équations d'état (1) et (2) et de l'équation de mesure (3).

Le problème à résoudre ici est de permettre à un observateur, se déplaçant en CV et mesurant les azimuts  $\theta_m = \{\theta_m(t_1), \theta_m(t_2), \dots, \theta_m(t_N)\}$ , d'estimer la trajectoire de la source en CT et donc de façon équivalente  $Z$ . Nous allons maintenant déterminer sous quelles conditions l'observabilité du système est assurée. Rappelons que cela consiste à vérifier qu'il n'existe qu'une seule et unique solution correspondant au lot de mesures sans bruit collectées par l'observateur.

### 2.1.2 Observabilité et autres propriétés

Toute l'étude effectuée dans ce paragraphe est faite en temps continu. Trois résultats vont être établis concernant :

- l'observabilité d'une source en CT dont la démonstration se base sur une propriété des fonctions analytiques (dite de prolongement analytique, §2.1.2.1),
- la possibilité de déterminer si une source est en CT ou en CV (§2.1.2.2),
- l'observabilité d'une source dont la trajectoire est composée d'un ou plusieurs legs et d'arcs de cercles parcourus à vitesse constante (§2.1.2.3).

Afin de simplifier la démonstration et sans perte de généralité, nous supposons ici que l'observateur est positionné à l'origine du repère au début du scénario. L'observateur va :

- soit se déplacer à vitesse constante sur l'axe des abscisses, i.e.
- $$\begin{bmatrix} x_o(t) \\ y_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \dot{x}_o \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pendant } [0, T],$$
- soit rester immobile  $\dot{x}_o = 0$ .

Il s'agit donc de déterminer s'il existe une autre source, notée  $S'$ , détectée dans les mêmes azimuts  $\theta(t)$  que ceux de la source  $S$ , durant  $[0, T]$ . Le système sera donc observable si  $S = S'$  et inobservable dans le cas contraire.

La position de  $S'$  à l'instant  $t$  étant notée  $\begin{bmatrix} x_{S'}(t) \\ y_{S'}(t) \end{bmatrix}$ , l'azimut  $\theta(t)$  doit satisfaire la double égalité :

$$\theta(t) = \arg\left(\frac{x_S(t) - x_O(t)}{y_S(t)}\right) = \arg\left(\frac{x_{S'}(t) - x_O(t)}{y_{S'}(t)}\right), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6)$$

### 2.1.2.1 Observabilité d'une source en mouvement circulaire uniforme

#### 2.1.2.1.1 Caractérisation des trajectoires ambiguës de $S'$

Nous supposons donc que l'autre source  $S'$  suit un CT, défini de la même façon que (1) (cf. p. 32), soit :

$$\begin{bmatrix} x_{S'}(t) \\ y_{S'}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} + \rho_C \begin{bmatrix} \sin(\omega't + \varphi') \\ \cos(\omega't + \varphi') \end{bmatrix}. \quad (7)$$

L'équation(6) est équivalente à

$$\frac{x_S(t) - t \dot{x}_O}{y_S(t)} = \frac{\lambda(t)[x_{S'}(t) - t \dot{x}_O]}{\lambda(t)y_{S'}(t)}, \quad \forall t \in [0, T],$$

avec  $\lambda(t)$ , un scalaire strictement positif.

D'où :

$$\begin{aligned} [x_S(t) - t \dot{x}_O]y_{S'}(t) &= [x_{S'}(t) - t \dot{x}_O]y_S(t), \quad \forall t \in [0, T] \\ \Leftrightarrow x_S(t)y_{S'}(t) - t \dot{x}_O y_{S'}(t) &= x_{S'}(t)y_S(t) - t \dot{x}_O y_S(t), \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (8)$$

En reportant dans l'équation (8) les expressions (1), (2) et (7), on obtient l'égalité équivalente suivante :

$$\begin{aligned} &[\rho_C \sin(\omega t + \varphi) + x_C][\rho_{C'} \cos(\omega't + \varphi') + y_{C'}] - t \dot{x}_O [\rho_{C'} \cos(\omega't + \varphi') + y_{C'}] \\ &= [\rho_{C'} \sin(\omega't + \varphi') + x_{C'}][\rho_C \cos(\omega t + \varphi) + y_C] - t \dot{x}_O [\rho_C \cos(\omega t + \varphi) + y_C], \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (9)$$

Afin d'améliorer la lisibilité dans la suite de la démonstration, définissons deux variables intermédiaires :

- $G(t) = \rho_C \rho_{C'} \sin[(\omega - \omega')t + \varphi - \varphi'] + \rho_C y_{C'} \sin(\omega t + \varphi)$

$$+ \rho_{C'} x_C \cos(\omega't + \varphi') - \rho_{C'} y_C \sin(\omega't + \varphi') - \rho_C x_{C'} \cos(\omega t + \varphi) + x_C y_{C'} - x_{C'} y_C, \quad (10)$$

- $H(t) = t\dot{x}_o[\rho_{C'} \cos(\omega't + \varphi') - \rho_C \cos(\omega t + \varphi)] + t\dot{x}_o(y_{C'} - y_C)$ . (11)

L'expression (9) s'écrit alors de manière équivalente :

$$G(t) = H(t), \forall t \in [0, T].$$

Les deux fonctions  $G(t)$  et  $H(t)$  étant analytiques<sup>10</sup>, il nous est alors permis d'exploiter le théorème dit de prolongement analytique :

*Soient  $g$  et  $h$  deux fonctions analytiques sur  $\mathbb{R}$  et  $U$  un intervalle ouvert dans  $\mathbb{R}$ .*

*Si  $g(x) = h(x) \forall x \in U$ , alors  $g(x) = h(x) \forall x \in \mathbb{R}$*

Ce théorème implique que  $G(t) = H(t), \forall t$  et par conséquent  $\frac{G(t)}{t} = \frac{H(t)}{t}, \forall t > 0$ .

D'après (11),  $\frac{H(t)}{t}$  s'écrit :

$$\frac{H(t)}{t} = \dot{x}_o[\rho_{C'} \cos(\omega't + \varphi') - \rho_C \cos(\omega t + \varphi)] + \dot{x}_o(y_{C'} - y_C). \quad (12)$$

Etudions la convergence de cette quantité quand  $t \rightarrow \infty$ . Puisque  $|G(t)|$  est borné, nous avons :

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(t)}{t} = 0$ , donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = 0$ . Or  $\frac{H(t)}{t}$  est une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques et d'un terme constant, d'après (12). La convergence vers 0 n'est possible que si  $\frac{H(t)}{t} = 0, \forall t \neq 0$ , ou encore  $H(t) = 0, \forall t > 0$ .

Deux cas se présentent alors :

- soit  $\dot{x}_o \neq 0$  alors  $H(t) = 0$  implique, d'après (12), que :

$$\rho_{C'} \cos(\omega't + \varphi') - \rho_C \cos(\omega t + \varphi) + (y_{C'} - y_C) = 0. \quad (13)$$

Ce cas est traité au paragraphe 2.1.2.1.2.

- soit  $\dot{x}_o = 0$ , alors l'observateur est fixe et ce cas est traité au §2.1.2.1.3.

### 2.1.2.1.2 Cas de l'observateur en mouvement rectiligne uniforme

L'équation (13) implique :

$$\begin{cases} y_{C'} = y_C \\ \rho_{C'} \cos(\omega't + \varphi') - \rho_C \cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{cases}.$$

<sup>10</sup> Les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions analytiques car égales à leur développement infini de Taylor. Une fonction polynomiale l'est par construction. De plus, la somme et le produit de deux fonctions analytiques sont des fonctions analytiques (voir [Spiegel84]).

Développons le second terme du système précédent, qui devient :

$$\rho_C \cos \varphi' \cos \omega' t - \rho_C \sin \varphi' \sin \omega' t - \rho_C \cos \varphi \cos \omega t + \rho_C \sin \varphi \sin \omega t = 0. \quad (14)$$

Si  $\omega \neq \omega'$ , alors  $\rho_C = \rho_{C'} = 0$  et ce cas doit donc être écarté, car contraire aux hypothèses.

A contrario, si  $\omega = \omega'$ , alors (14) devient :

$$\begin{aligned} & [\rho_C \cos \varphi' - \rho_C \cos \varphi] \cos \omega t - [\rho_{C'} \sin \varphi' - \rho_C \sin \varphi] \sin \omega t = 0, \quad \forall t \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_{C'} \cos \varphi' = \rho_C \cos \varphi \\ \rho_{C'} \sin \varphi' = \rho_C \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_{C'} = \rho_C \\ \varphi' = \varphi \end{cases}. \end{aligned}$$

Nous venons de montrer que si  $S'$  existe alors sa trajectoire a un rayon et un angle initial identique à ceux de  $S$ . Nous allons maintenant exploiter l'expression de  $G(t)$  tirée de (10) (cf. p. 35) :

$$G(t) = (x_C - x_{C'})[\rho_C \cos(\omega t + \varphi) + y_C]. \quad (15)$$

Comme  $G(t) = H(t) = 0, \forall t$  (c.f. §2.1.2.1.1, p. 35), (15) implique que  $x_C = x_{C'}$ . Donc  $S'$  a les mêmes centre, rayon, angle initial et vitesse angulaire que la source  $S$ . Les sources  $S'$  et  $S$  sont donc identiques.

Ce résultat nous permet d'énoncer la propriété suivante :

**Propriété 1:**

*Si l'observateur est en CV, alors la trajectoire de n'importe quelle source en CT est observable par mesures d'azimut  $\theta(t)$ , pour  $t \in [0, T]$ .*

**2.1.2.1.3 Cas de l'observateur fixe**

Développons l'expression (10) de  $G(t)$  :

$$\begin{aligned} G(t) &= \rho_C \rho_{C'} \cos(\varphi - \varphi') \sin[(\omega - \omega') t] + \rho_C \rho_{C'} \sin(\varphi - \varphi') \cos[(\omega - \omega') t] \\ &+ \rho_C (x_{C'} \sin \varphi + y_{C'} \cos \varphi) \sin \omega t + \rho_{C'} (-x_{C'} \cos \varphi + y_{C'} \sin \varphi) \cos \omega t \\ &- \rho_{C'} (x_C \sin \varphi' + y_C \cos \varphi') \sin \omega' t + \rho_{C'} (x_C \cos \varphi' - y_C \sin \varphi') \cos \omega' t \\ &+ x_C y_{C'} - x_{C'} y_C = 0, \quad \forall t. \end{aligned} \quad (16)$$

Si maintenant,  $\omega = \omega'$ , alors l'expression (16) se simplifie en :

$$\begin{aligned} G(t) &= \rho_C \rho_{C'} \sin(\varphi - \varphi') + [\rho_C (x_{C'} \sin \varphi + y_{C'} \cos \varphi) - \rho_{C'} (x_C \sin \varphi' + y_C \cos \varphi')] \sin \omega t \\ &+ [\rho_C (-x_{C'} \cos \varphi + y_{C'} \sin \varphi) + \rho_{C'} (x_C \cos \varphi' - y_C \sin \varphi')] \cos \omega t + x_C y_{C'} - x_{C'} y_C = 0, \quad \forall t. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_C \rho_{C'} \sin(\varphi - \varphi') + x_C y_{C'} - x_{C'} y_C = 0 \\ \rho_C (x_{C'} \sin \varphi + y_{C'} \cos \varphi) - \rho_{C'} (x_C \sin \varphi' + y_C \cos \varphi') = 0 \\ \rho_C (-x_{C'} \cos \varphi + y_{C'} \sin \varphi) + \rho_{C'} (x_C \cos \varphi' - y_C \sin \varphi') = 0 \end{cases}$$

Notons  $[R_C \ \theta_C]$  et  $[R_{C'} \ \theta_{C'}]$  les coordonnées polaires des centres des arcs de cercle  $P_C = [x_C \ y_C]^T$  et  $P_{C'} = [x_{C'} \ y_{C'}]^T$ , respectivement suivis par  $S$  et  $S'$ .

Le système précédent est équivalent à :

$$\begin{cases} \rho_C \rho_{C'} \sin(\varphi - \varphi') + R_C R_{C'} \sin(\theta_C - \theta_{C'}) = 0 \\ \rho_C R_{C'} \cos(\varphi - \theta_{C'}) = \rho_{C'} R_C \cos(\varphi' - \theta_C) \\ \rho_C R_{C'} \sin(\varphi - \theta_{C'}) = \rho_{C'} R_C \sin(\varphi' - \theta_C) \end{cases} \quad (17)$$

Des deux dernières relations du système (17), nous déduisons les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} \rho_C R_{C'} = \rho_{C'} R_C \\ \varphi - \theta_{C'} = \varphi' - \theta_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_C R_{C'} = \rho_C R_C \\ \varphi - \varphi' = \theta_{C'} - \theta_C \end{cases} \quad (18)$$

Définissons maintenant la constante positive  $\mu = \frac{\rho_C}{\rho_{C'}} = \frac{R_C}{R_{C'}}$  (le coefficient d'homothétie).

Réinjectons cette double égalité dans la première expression du système (17) :

$$\rho_C \rho_{C'} \sin(\varphi - \varphi') + R_C R_{C'} \sin(\theta_C - \theta_{C'}) = 0 \Leftrightarrow \mu (\rho_C^2 - R_C^2) \sin(\varphi - \varphi') = 0.$$

Cette dernière égalité est satisfaite si et seulement si  $\sin(\varphi - \varphi') = 0$  ou  $\rho_C = R_C$ .

Intéressons-nous dans un premier temps à l'annulation du terme  $\sin(\varphi - \varphi')$ , qui implique soit  $\varphi = \varphi'$ , soit  $\varphi' = \varphi + \pi$ .

Si  $\varphi = \varphi'$ , alors dans ce cas  $\theta_{C'} = \theta_C$  et cela entraîne  $\begin{cases} x_{C'} = \mu x_C \\ y_{C'} = \mu y_C \end{cases}$ .

D'après l'égalité (6) (c.f. p. 35), on en déduit que la source  $S'$  dont la position est donnée à l'instant  $t$  par

$$\begin{bmatrix} x_{S'}(t) \\ y_{S'}(t) \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) \\ \cos(\omega t + \varphi) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

est détectée aux mêmes azimuts  $\theta(t)$  que la source  $S$  pour  $t \in [0, T]$ .

Si  $\varphi' = \varphi + \pi$ , alors dans ce cas  $\theta_{C'} = \theta_C + \pi$  et cela entraîne  $\begin{cases} x_{C'} = -\mu x_C \\ y_{C'} = -\mu y_C \end{cases}$ .

La position de la source  $S'$  est alors donnée à l'instant  $t$  par

$$\begin{bmatrix} x_{S'}(t) \\ y_{S'}(t) \end{bmatrix} = -\mu \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi + \pi) \\ \cos(\omega t + \varphi + \pi) \end{bmatrix} = -\mu \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) \\ \cos(\omega t + \varphi) \end{bmatrix},$$

ce qui signifie que les sources  $S$  et  $S'$  sont détectées dans des azimuts opposés.

L'équation (6) n'est plus satisfaite, ce cas doit donc être écarté.

Nous en concluons donc que, lorsque l'observateur reste immobile et qu'il n'est pas situé sur le cercle parcouru par la source  $S$  ( $\rho_C \neq R_C$ ), les trajectoires des sources en CT générant les mêmes mesures d'azimut, pendant  $[0, T]$ , sont toutes homothétiques, d'après la relation (19).

Exploitons ensuite l'égalité  $\rho_C = R_C$ , nous déduisons immédiatement de la première égalité de (18) que  $\rho_{C'} = R_{C'}$ . L'observateur est donc situé sur les cercles parcourus par les sources  $S$  et  $S'$ .

Les positions des sources  $S$  et  $S'$  sont respectivement données par

$$\begin{bmatrix} x_S(t) \\ y_S(t) \end{bmatrix} = R_C \begin{bmatrix} \sin(\theta_C) + \sin(\omega t + \varphi) \\ \cos(\theta_C) + \cos(\omega t + \varphi) \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} x_{S'}(t) \\ y_{S'}(t) \end{bmatrix} = R_{C'} \begin{bmatrix} \sin(\theta_{C'}) + \sin(\omega t + \varphi') \\ \cos(\theta_{C'}) + \cos(\omega t + \varphi') \end{bmatrix}.$$

Où par équivalence,

$$\begin{bmatrix} x_S(t) \\ y_S(t) \end{bmatrix} = 2R_C \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\omega t + \varphi + \theta_C}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t + \varphi - \theta_C}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega t + \varphi + \theta_C}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t + \varphi - \theta_C}{2}\right) \end{bmatrix} = 2R_C \cos\left(\frac{\omega t + \varphi - \theta_C}{2}\right) \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\omega t + \varphi + \theta_C}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega t + \varphi + \theta_C}{2}\right) \end{bmatrix},$$

et en appliquant les mêmes formules,

$$\begin{bmatrix} x_{S'}(t) \\ y_{S'}(t) \end{bmatrix} = 2R_{C'} \cos\left(\frac{\omega t + \varphi' - \theta_{C'}}{2}\right) \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\omega t + \varphi' + \theta_{C'}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega t + \varphi' + \theta_{C'}}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Comme  $\varphi - \varphi' = \theta_{C'} - \theta_C$  (c.f. système (18)), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} x_{S'}(t) \\ y_{S'}(t) \end{bmatrix} = 2R_{C'} \cos\left(\frac{\omega t + \varphi + \theta_C - 2\theta_{C'}}{2}\right) \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\omega t + \varphi + \theta_C}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega t + \varphi + \theta_C}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Ainsi, les sources  $S$  et  $S'$  seront détectées dans les mêmes azimuts si et seulement si les signes de  $\cos\left(\frac{\omega t + \varphi - \theta_C}{2}\right)$  et  $\cos\left(\frac{\omega t + \varphi + \theta_C - 2\theta_C}{2}\right)$  sont identiques. Comme il n'est pas possible que l'observateur et la source soient à la même position, alors  $\cos\left(\frac{\omega t + \varphi - \theta_C}{2}\right)$  est soit positif, soit négatif.

Quand  $\cos\left(\frac{\omega t + \varphi - \theta_C}{2}\right) > 0$ , alors  $-\frac{\pi}{2} < \frac{\omega t + \varphi + \theta_C - 2\theta_C}{2} < \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , ce qui est équivalent à  $\frac{\omega t + \varphi + \theta_C - \pi}{2} < \theta_C < \frac{\omega t + \varphi + \theta_C + \pi}{2}$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .  
Dans ce cas  $\theta(t) = \frac{\omega t + \varphi + \theta_C}{2}$ , ce qui implique que

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\{ \frac{\omega t + \varphi + \theta_C - \pi}{2} \right\} < \theta_C < \inf_{t \in [0, T]} \left\{ \frac{\omega t + \varphi + \theta_C + \pi}{2} \right\}.$$

Le sens de rotation de la source pouvant être « horaire » ou « anti-horaire », il est nécessaire d'analyser les deux cas suivants :

- Si  $\omega > 0$ , cette double inégalité est équivalente à

$$\frac{\omega T + \varphi - \theta_C - \pi}{2} < \theta_C - \theta_C < \frac{\varphi - \theta_C + \pi}{2} \Leftrightarrow \theta(T) - \theta_C - \frac{\pi}{2} < \theta_C - \theta_C < \theta(0) - \theta_C + \frac{\pi}{2}.$$

- Si  $\omega < 0$ , dans ce cas la double inégalité précédente est équivalente à

$$\theta(0) - \theta_C - \frac{\pi}{2} < \theta_C - \theta_C < \theta(T) - \theta_C + \frac{\pi}{2}.$$

Quand  $\cos\left(\frac{\omega t + \varphi - \theta_C}{2}\right) < 0$ , alors  $\theta(t) = \frac{\omega t + \varphi + \theta_C}{2} + \pi$ .

Des calculs similaires à ceux menés dans le cas  $\cos\left(\frac{\omega t + \varphi - \theta_C}{2}\right) > 0$  nous font aboutir aux mêmes contraintes, à savoir que :

- Si  $\omega > 0$ , alors  $\theta(T) - \theta_C - \frac{\pi}{2} < \theta_C - \theta_C < \theta(0) - \theta_C + \frac{\pi}{2}$ .
- Si  $\omega < 0$ , alors  $\theta(0) - \theta_C - \frac{\pi}{2} < \theta_C - \theta_C < \theta(T) - \theta_C + \frac{\pi}{2}$ .

Nous en concluons donc que, lorsque l'observateur reste immobile sur le cercle parcouru par la source  $S$  ( $\rho_C = R_C$ ), les trajectoires des sources en CT générant les mêmes mesures d'azimut, pendant  $[0, T]$ , sont définies comme l'intersection du secteur angulaire

$[\theta(0), \theta(T)]$  et des cercles similaires. Le centre de rotation d'angle  $\psi = \theta_{C'} - \theta_C$  de la similitude directe<sup>11</sup> correspond à la position de l'observateur et la vitesse angulaire  $\omega$  est identique pour les deux sources.

Afin de s'assurer que l'intersection du secteur angulaire  $[\theta(0), \theta(T)]$  et du cercle similaire ne soit pas vide, l'angle de rotation  $\psi$  de la similitude directe est soumis aux contraintes suivantes :

- Si  $\omega > 0$ , alors  $\theta(T) - \theta_C - \frac{\pi}{2} < \psi < \theta(0) - \theta_C + \frac{\pi}{2}$ .
- Si  $\omega < 0$ , alors  $\theta(0) - \theta_C - \frac{\pi}{2} < \psi < \theta(T) - \theta_C + \frac{\pi}{2}$ .

En résumé, les résultats obtenus dans ce paragraphe, permettent d'énoncer les deux propriétés suivantes :

**Propriété 2:**

*Si l'observateur est immobile, alors la trajectoire de n'importe quelle source en CT n'est pas observable par mesures d'azimut.*

**Propriété 3:**

*Si l'observateur est immobile et positionné en  $[x_o \ y_o]^T$ , alors la famille de trajectoires source générant les mêmes mesures d'azimut  $\theta(t)$ , pour  $t \in [0, T]$ , sont homothétiques tant que l'observateur n'est pas situé sur le cercle parcouru par la source.*

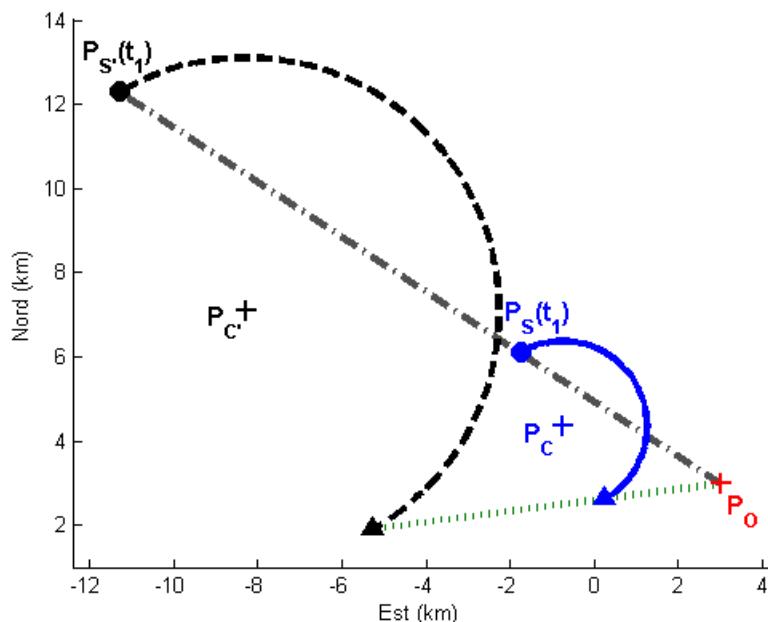
*Plus précisément, si  $Z = [x_c \ y_c \ \rho_c \ \varphi \ \omega]^T$  est le vecteur d'état définissant la trajectoire de la source (d'intérêt)  $S$ , toute autre trajectoire homothétique est alors définie par  $Z' = [\mu(x_c - x_o) + x_o \ \mu(y_c - y_o) + y_o \ \mu\rho_c \ \varphi \ \omega]^T$ , avec  $\mu (> 0)$  le coefficient d'homothétie.*

*Si l'observateur est immobile et situé sur le cercle parcouru par la source, alors la famille de trajectoires source inobservables est augmentée par les trajectoires définies comme l'intersection du secteur angulaire  $[\theta(0), \theta(T)]$  et des cercles similaires. Le centre de rotation de la similitude directe correspond à la position de l'observateur  $[x_o \ y_o]^T$  et la vitesse angulaire est identique pour les deux sources.*

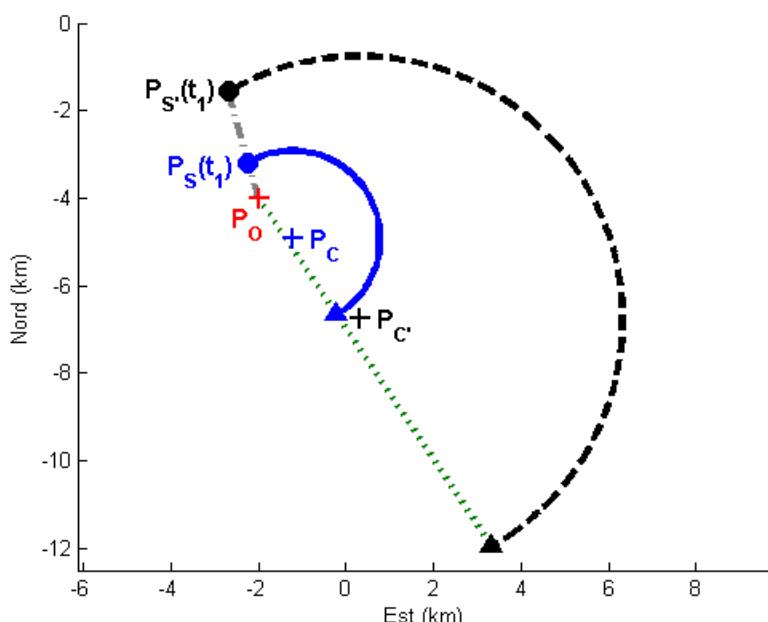
---

<sup>11</sup> Une similitude directe est composée d'une rotation d'angle  $\psi$  et d'une homothétie de coefficient  $\mu$ .

La Figure 14 et la Figure 15 illustrent ces solutions homothétiques lorsque l'observateur est situé à l'extérieur et à l'intérieur du cercle décrivant la trajectoire source d'intérêt (représentée en trait plein). Le coefficient d'homothétie  $\mu$  est égal à 3 pour ces deux figures.



**Figure 14 : Solutions homothétiques : observateur situé à l'extérieur du cercle décrivant la trajectoire de la source d'intérêt.**



**Figure 15 : Solutions homothétiques : observateur situé à l'intérieur du cercle décrivant la trajectoire de la source d'intérêt.**

La Figure 16 et la Figure 17 présentent deux exemples où l'observateur est situé sur le cercle parcouru par la source d'intérêt, le coefficient d'homothétie  $\mu$  est égal à 2 et l'angle de rotation d'angle  $\psi$  de la similitude directe est de  $30^\circ$ . Pour la Figure 16, la source est en sens « horaire » et pour la Figure 17 la source est en sens « anti-horaire ».

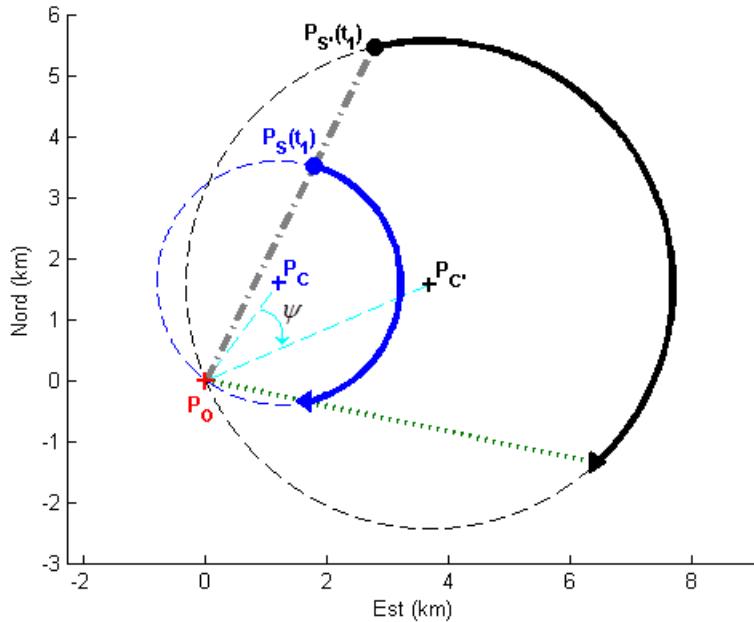


Figure 16 : tracé de la similitude directe lorsque la source est en sens « horaire ».

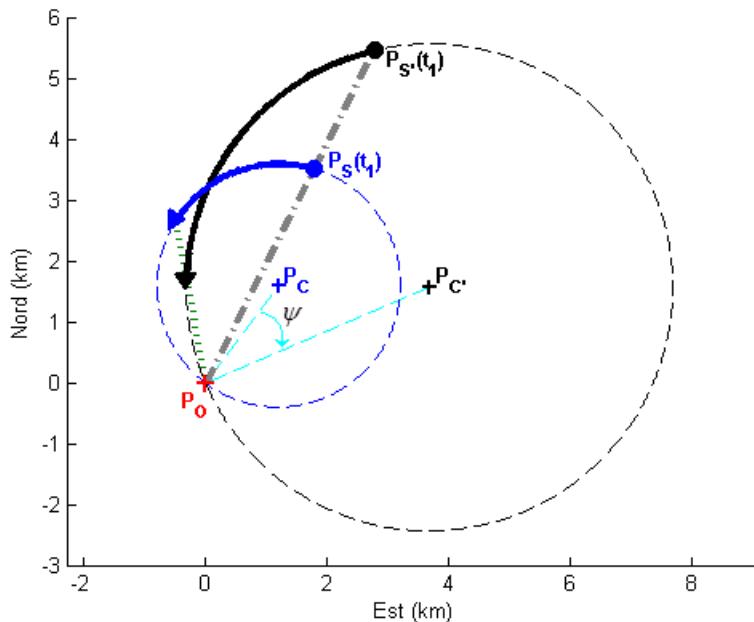


Figure 17 : tracé de la similitude directe lorsque la source est en sens « anti-horaire ».

### Remarques :

- Lorsque l'observateur est fixe, il est possible de rendre la trajectoire source observable grâce à la connaissance de l'une des informations additionnelles suivantes :
  - la vitesse  $v_s$ ,
  - le rayon  $\rho_c$ ,
  - la position  $P_c$  du centre du cercle.

Ces informations sur la trajectoire source peuvent être obtenues à l'aide d'autres senseurs, ou bien déterminées à l'aide d'autres méthodes de TMA.

- Cette situation d'inobservabilité a été traitée dans le passé dans le cas de la trajectographie par mesures d'angle conventionnelle d'une source en CV : la méthode développée dénommée « partial bearings-only TMA » permet d'estimer la trajectoire source (à une homothétie près) tant que le porteur ne manœuvre pas, comme nous l'avons rappelé au paragraphe 1.1.2 (p. 16).
- Notons que la vitesse angulaire  $\omega$  est observable même si le porteur reste immobile.
- Si l'observateur immobile n'est pas positionné sur le cercle parcouru par la source, alors l'angle initial  $\varphi$  est lui aussi observable.
- L'observateur est situé sur le cercle (parcouru par la source) si et seulement si  $\theta(t)$  est affine, *i.e.*  $\theta(t) = at + b$ . Dans ce cas,  $a = \frac{\omega}{2}$  et  $b = \frac{\varphi + \theta_c}{2}$ , où  $\theta_c$  est l'azimut du centre du cercle.

#### 2.1.2.2 Distinguabilité d'une source en mouvement rectiligne uniforme d'une autre en mouvement circulaire uniforme

Nous allons d'abord donner la définition de la distinguabilité entre modèles.

##### Définition

Soit un observateur acquérant un ensemble de mesures noté ici  $\beta = \{\beta(t), t \in [0, T]\}$  (non bruitées) relatif à une source  $S$ .

La source se déplace, soit selon le modèle  $\mathcal{M}$  (par exemple un CT), soit selon le modèle  $\mathcal{M}'$  (par exemple un CV).

Les deux modèles  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  sont dits distinguables à partir de  $\beta$ , si un seul des deux est à l'origine de  $\beta$ .

Nous allons montrer que les mesures d'azimut  $\theta(t)$ , collectées depuis une plate-forme en CV, sont distinctes suivant que la source suit un CV (à vitesse non-nulle) ou bien un CT, et ainsi établir la distinguabilité de ces deux modèles de cinématique.

Nous considérons toujours la source d'intérêt  $S$  en CT, tandis que la source  $S'$  est supposée, cette fois-ci, être en CV, l'observateur suivant la même cinématique (CV) que dans le paragraphe 2.1.2.1 (p. 35).

Alors l'équation régissant le déplacement de  $S'$  est du même type que (2) (cf. p. 33) :

$$\begin{bmatrix} x_{S'}(t) \\ y_{S'}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{S'}(0) \\ y_{S'}(0) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \dot{x}_{S'} \\ \dot{y}_{S'} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

En reportant (20) dans (8) (cf. p. 35), on obtient :

$$\begin{aligned} [x_C + \rho_C \sin(\omega t + \varphi) - t \dot{x}_O](y_{S'}(0) + t \dot{y}_{S'}) &= [x_{S'}(0) + t(\dot{x}_{S'} - \dot{x}_O)][y_C + \rho_C \cos(\omega t + \varphi)], \quad \forall t \\ \Leftrightarrow x_C y_{S'}(0) + t(x_C \dot{y}_{S'} - \dot{x}_O y_{S'}(0)) + \rho_C y_{S'}(0) \sin(\omega t + \varphi) + t \rho_C \dot{y}_{S'} \sin(\omega t + \varphi) - t^2 \dot{x}_O \dot{y}_{S'} &= x_{S'}(0) y_C + x_{S'}(0) \rho_C \cos(\omega t + \varphi) + t(\dot{x}_{S'} - \dot{x}_O) y_C + t \rho_C (\dot{x}_{S'} - \dot{x}_O) \cos(\omega t + \varphi), \quad \forall t. \end{aligned}$$

Cette dernière équation peut être ré-agencée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_C y_{S'}(0) - x_{S'}(0) y_C + t(x_C \dot{y}_{S'} - \dot{x}_S y_C - \dot{x}_O y_{S'}(0) + \dot{x}_O y_C) - t^2 \dot{x}_O \dot{y}_{S'} \\ = \rho_C [x_{S'}(0) \cos(\omega t + \varphi) - y_{S'}(0) \sin(\omega t + \varphi) - t \dot{y}_{S'} \sin(\omega t + \varphi) + t(\dot{x}_{S'} - \dot{x}_O) \cos(\omega t + \varphi)], \quad \forall t. \end{aligned}$$

Cette égalité entre le premier membre (un polynôme) et le second membre (composé de fonctions sinus et cosinus) est impossible.

Ce résultat permet d'énoncer la propriété suivante :

**Propriété 4:**

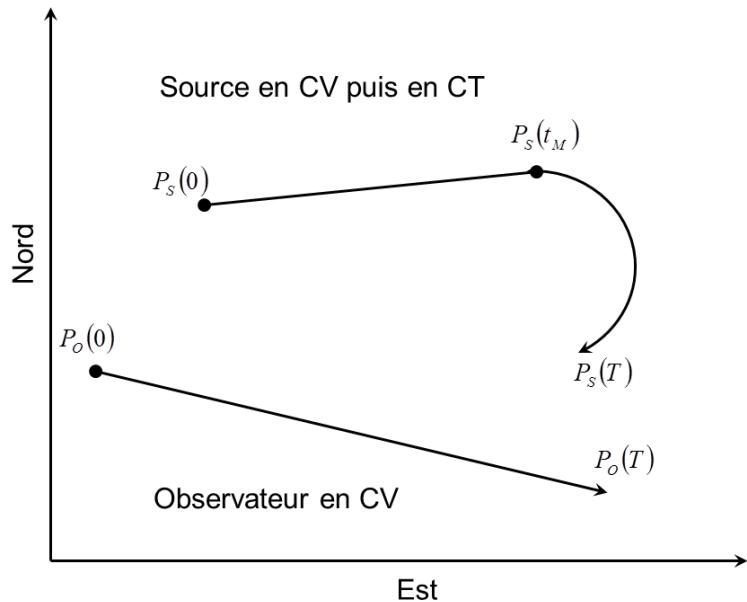
*Soit un observateur en CV ou éventuellement immobile et une source d'intérêt en CT.*

*Alors, il n'existe pas de source en CV détectée dans les mêmes azimuts que la source (d'intérêt) en CT. Les deux modèles sont alors distinguables.*

**Remarque :** Au chapitre 4, nous analyserons à nouveau la distinguabilité de ces deux modèles de cinématique source lorsque l'observateur acquiert des mesures de distance.

### 2.1.2.3 Observabilité d'une trajectoire composée de tronçons dont l'un au moins est un arc de cercle à vitesse constante

Les propriétés précédemment démontrées vont nous permettre d'établir maintenant la preuve de l'observabilité de trajectoires plus complexes (et plus réalistes) de sources. Cette démonstration adopte une approche similaire à celle de la preuve de l'observabilité de l'instant de manœuvre en BO-MTMA ([Jauffret10]).



**Figure 18 : Observateur en CV et source successivement en CV puis en CT.**

L'observateur est en CV (à vitesse non-nulle) pendant  $[0, T]$  alors que la source d'intérêt  $S$  est en CV pendant  $[0, t_M]$  [ , et en CT au cours de  $[t_M, T]$  (voir Figure 18).

Montrons que l'instant  $t_M$  est observable et que l'observabilité de la trajectoire proposée est effective. Pour cela, considérons une éventuelle autre source, notée  $S'$ , en CV pendant  $[0, t'_M]$  [ et en CT au cours de  $[t'_M, T]$ .

De deux choses l'une :

- Soit  $t_M = t'_M$  ; alors pendant  $[t_M, T]$ ,  $S$  et  $S'$  sont en CT. D'après la propriété 1, nous pouvons en conclure que les trajectoires des deux sources sont identiques.
- Soit  $t_M \neq t'_M$ , par exemple  $t_M < t'_M$  ; alors pendant  $[t_M, t'_M]$  [  $S$  est en CT, tandis que  $S'$  est en CV. Ceci est contraire au résultat de la propriété 4.

Ainsi nous venons d'établir que lorsque la source parcourt, à vitesse constante, une trajectoire successivement composée d'un leg et d'un arc de cercle (CV-CT ou l'inverse CT-CV), alors cette trajectoire est observable par mesures d'azimut lorsque l'observateur est en CV.

Etendons maintenant ce résultat pour des trajectoires de la source composées de trois tronçons (voir Figure 19), toujours avec l'observateur en CV. Nous notons  $t_{M_2}$  l'instant relatif au passage du second au troisième tronçon.

Si le dernier tronçon est un CT, alors il est observable (propriété 1, p. 37) et le cercle décrivant cette portion sera tangent au second tronçon (CT ou CV) en un seul point correspondant à  $t_{M_2}$ . Ainsi, l'observabilité des trajectoires CV-CT-CT ou CT-CV-CT est assurée (soit respectivement les trajectoires a et b de la Figure 19).

Si le dernier tronçon est un CV, alors :

- Soit le second tronçon est un CV. D'après [Jauffret10], nous savons que l'instant  $t_{M_2}$  (de manœuvre) est observable puisque la première partie de la trajectoire (CT-CV) l'est et donc la position  $P_S(t_{M_2})$  est connue. L'ambiguité liée à la famille de solutions homothétiques correspondant au dernier tronçon (BO-TMA partielle, cf. Figure 3, p. 17) est levée puisqu'une seule passera par  $P_S(t_{M_2})$ .
- Soit le second tronçon est un CT, alors nous sommes à nouveau dans le cas CT-CV que nous savons observable (propriété 4).

Ainsi, l'observabilité des trajectoires CT-CV-CV et CV-CT-CV est assurée (soit respectivement les trajectoires c et d de la Figure 19).

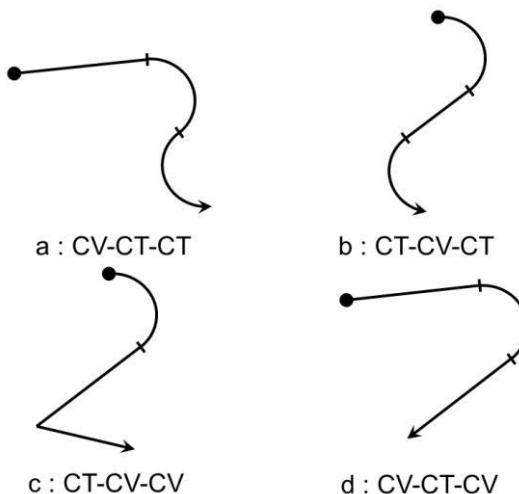


Figure 19 : Exemple de trajectoires composées de 3 tronçons.

Ce dernier résultat (Figure 19.d) va nous permettre de considérer un cas particulier : soit une source dont la trajectoire est composée de deux legs parcourus à vitesse constante. D'après [Jauffret10] (voir §II.E.), ce cas est observable si et seulement si  $(V_2 - V_1)^T V_O \neq 0$ , avec  $V_i$  la vitesse de la source au cours du  $i^{\text{ème}}$  leg ( $i = 1, 2$ ) et  $V_O$  la vitesse de l'observateur. Si ces deux legs sont reliés par un arc de cercle, la trajectoire de la source est observable, pourvu que l'observateur ne soit pas immobile (ce que nous venons juste de démontrer).

La Figure 20 illustre cette propriété pour ce cas particulier de BO-MTMA, cette modélisation plus réaliste confère donc la propriété d'observabilité.

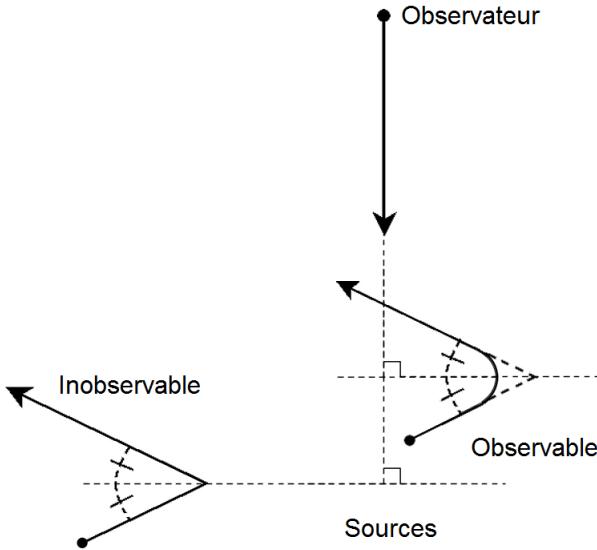


Figure 20 : trajectoires inobservable et observable en BO-MTMA.

En résumé, la propriété suivante.

**Propriété 5 :**

*La trajectoire d'une source composée de tronçons dont l'un au moins est un arc de cercle est observable à partir de mesures d'azimut acquises par un observateur en CV.*

Remarquons que l'observabilité de la trajectoire reste acquise même si le nombre de tronçons est supérieur à 3, si l'observateur est en CV et si au moins un de ces tronçons est un arc de cercle.

### 2.1.3 Estimateur et performances

L'analyse de l'observabilité étant achevée, nous allons maintenant présenter un outil important en théorie de l'estimation et indispensable en trajectographie : la borne de Cramér-Rao (CRLB, voir [Nardone81], [Nardone84] et [Jauffret07]). Elle permet de calculer les performances asymptotiques de tout estimateur sans biais : en effet, la CRLB est une matrice symétrique définie positive qui est une borne inférieure de la matrice de variance-covariance<sup>12</sup>. Il est donc important de comparer la CRLB à la matrice de variance-covariance de l'estimateur que nous choisirons. En trajectographie par mesures d'angle, le paramètre le plus intéressant du point de vue opérationnel est la distance à l'instant final entre

<sup>12</sup> Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux matrices symétriques non négatives. La matrice  $S_1$  est dite inférieure à  $S_2$  si  $S_2 - S_1$  est définie non négative. On note  $S_1 \preceq S_2$ . Cet ordre est partiel.

l'observateur et la source. C'est la raison pour laquelle l'analyse se focalisera sur les performances de l'estimateur de ce paramètre.

La CRLB étant l'inverse de la matrice d'information de Fisher (FIM), le premier paragraphe est consacré au calcul de cette dernière. Le second présente l'estimateur du type MLE que nous proposons. Les performances des estimations relatives à la distance finale sont ensuite comparées à leurs CRLB respectives pour un jeu de scénarios décrit au paragraphe 2.1.3.3 (p. 51). Pour finir, nous analyserons finement des estimations renvoyées par l'algorithme, pour deux scénarios particuliers.

### 2.1.3.1 Calcul de la borne de Cramér-Rao

Sous les hypothèses données au §2.1.1 (p. 32), la FIM est calculée à partir de la relation classique suivante (voir [Nardone84]) :

$$F(Z|\theta_m) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_\theta^2(t_k)} \nabla_Z \theta(Z, t_k) \nabla_Z^T \theta(Z, t_k),$$

où,  $\nabla_Z \theta(Z, t_k)$  est le gradient de l'équation de mesure par rapport au vecteur d'état  $Z$ , égal à :

$$\nabla_Z \theta(Z, t_k) = \left[ \frac{\cos(\theta(Z, t_k))}{R(t_k)} \quad \frac{-\sin(\theta(Z, t_k))}{R(t_k)} \quad \frac{\sin(\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k))}{R(t_k)} \quad \frac{\rho_C \cos(\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k))}{R(t_k)} \quad \frac{t_k \rho_C \cos(\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k))}{R(t_k)} \right]^T.$$

Comme nous l'avons mentionné, c'est la position de la source à l'instant courant (soit le dernier instant de mesure) qui est intéressante : nous emploierons donc un autre vecteur d'état  $Z_N = [x_s(t_N) \quad y_s(t_N) \quad \rho_C \quad \varphi \quad \omega]^T$  qui est relatif à la position finale de l'observateur et non plus au centre du cercle décrivant la trajectoire de la source, ce vecteur d'état étant relié de façon bijective à  $Z$ .

La FIM relative à  $Z_N$  est calculée grâce à la relation liant les deux FIM :

$$F(Z_N|\theta_m) = J_{Z, Z_N}^T F(Z|\theta_m) J_{Z, Z_N}, \quad (21)$$

$$\text{avec } J_{Z, Z_N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\omega t_N + \varphi) & -\rho_C \cos(\omega t_N + \varphi) & -t_N \rho_C \cos(\omega t_N + \varphi) \\ 0 & 1 & -\cos(\omega t_N + \varphi) & \rho_C \sin(\omega t_N + \varphi) & t_N \rho_C \sin(\omega t_N + \varphi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La CRLB est respectivement notée  $B(Z|\theta_m)$  et  $B(Z_N|\theta_m)$  pour les vecteurs d'état  $Z$  et  $Z_N$ .

Le déterminant de la matrice de transformation étant égal à 1 ( $\det[J_{Z, Z_N}] = 1$ ), nous obtenons alors  $\det[B(Z_N|\theta_m)] = \det[B(Z|\theta_m)]$  : cela signifie que les variances généralisées sont identiques. Nous en concluons donc que les volumes des ellipsoïdes de confiance, calculés à partir des CRLB, sont égaux et ce, quel que soit le vecteur d'état retenu ( $Z_N$  ou  $Z$ ). Seule l'orientation de ces ellipsoïdes va différer en fonction du vecteur d'état considéré. Des remarques similaires ont déjà été faites dans le cas de la BO-TMA dans [Nardone84].

### 2.1.3.2 Algorithme d'estimation

Les bruits de mesure étant additifs et gaussiens, le MLE revient à minimiser le critère des moindres carrés pondérés (similaire à celui de la BO-TMA [Nardone84]), donné par :

$$C(Z) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_\theta^2(t_k)} [\theta_m(t_k) - \theta(Z, t_k)]^2.$$

Notre stratégie de minimisation est la suivante : l'algorithme de Gauss-Newton est lancé pendant les dix premières itérations, ensuite c'est celui de Newton-Raphson qui prend le relais jusqu'à satisfaire le test d'arrêt (nombre d'itérations maximal atteint ou évolution du critère négligeable, voir annexe §2.5.4, p. 84 ; voir [Jauffret08a] et [Dennis84] pour le détail de l'algorithme). L'expression analytique de la matrice des dérivées seconde, utilisée par l'algorithme de Newton-Raphson, est disponible en annexe (§2.5.1, p. 78).

Il est nécessaire de fournir un vecteur d'initialisation  $Z_{Init}$  à l'algorithme. Pour cela, un maillage adéquat dans l'espace des solutions est d'abord réalisé. Le vecteur  $Z_{Init}$  est le nœud de ce maillage renvoyant le plus petit critère (cf. §2.5.3, p. 80).

Il peut arriver que l'algorithme de minimisation échoue (par exemple il peut rester bloqué sur un minimum local). Dans ce cas, le résultat n'a pas de signification statistique et il convient de ne pas en tenir compte dans notre analyse. L'estimateur retourné par l'algorithme  $\hat{Z}$  est donc soumis à un test d'acceptation, consistant à vérifier que le critère  $C(\hat{Z})$  est inférieur au seuil  $N - 5 + 3\sqrt{2N - 10}$ <sup>13</sup>. Ce test nous renseigne aussi sur le taux de réussite de nos algorithmes. Le taux d'acceptation « à bon escient » de ce test est de 99.5%

---

<sup>13</sup> On utilise l'approximation  $\chi^2_\nu \sim G(\nu, 2\nu)$  admise pour  $\nu \geq 30$  ( $\nu = N - d$  avec  $\dim(Z) = d$ ).

### 2.1.3.3 Etude de l'efficacité statistique de l'estimateur proposé

Comme dans la majorité des problèmes de trajectographie passive (sauf cas particulier du zigzag en BO-TMA §1.1.3, p. 18), l'établissement d'une formule analytique du calcul des performances attendues en BO-CTTMA se révèle impossible dans le cas général. Cette impossibilité résulte directement de la forte non-linéarité des équations régissant le système.

Ici, en BO-CTTMA, nous avons donc eu recours à des simulations de type Monte Carlo. De nombreux scénarios nous ont permis d'analyser l'impact des trois paramètres suivants sur la précision de l'estimateur de la distance :

- l'azimut final au §2.1.3.3.1,
- la distance finale au §2.1.3.3.2
- et la durée du scénario au §2.1.3.3.3

et ce, pour les deux sens de rotation de la source (« horaire » et « anti-horaire »).

Nous allons comparer la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne empirique  $req_{\hat{R}_N}$  (obtenue à partir des résultats des simulations de Monte Carlo) à l'écart-type minimal  $\sigma_{R_N}$  calculé à partir de la CRLB. L'erreur quadratique moyenne de l'estimateur  $\hat{R}_N$  est par définition  $Eq_{\hat{R}_N} \triangleq E\left[\left(\hat{R}_N - R_N\right)^2\right]$ . Elle est aussi égale à  $Eq_{\hat{R}_N} = Var(\hat{R}_N) + b^2(\hat{R}_N)$ , où  $b(\hat{R}_N)$  est le biais de  $\hat{R}_N$ . L'erreur quadratique moyenne empirique est  $eq_{\hat{R}_N} \triangleq \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(\hat{R}_{N,l} - R_N\right)^2$ , où  $L$  est le nombre de résultats acceptés par le test, avec  $\hat{R}_{N,l}$  le  $l^{\text{ème}}$  résultat retenu. Cette erreur quadratique est aussi égale à la somme de la variance empirique et du carré du biais empirique. Nous avons donc  $req_{\hat{R}_N} \triangleq \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(\hat{R}_{N,l} - R_N\right)^2}$ .

Ces deux critères de performance, l'un empirique, l'autre théorique, seront exprimés en pourcentage, c'est-à-dire normalisés par la vraie valeur de  $R_N$  ; c'est la raison pour laquelle

nous présentons les résultats relatifs aux grandeurs  $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  et  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$ .

Nous avons tracé dans un premier temps l'évolution de  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$  en fonction des paramètres

précédemment énoncés. Puis avons choisi d'évaluer les valeurs de  $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  pour des valeurs

particulières de ces trois paramètres correspondant à des points « intéressants » des tracés donnés par la CRLB (optima locaux, intersections des courbes,...).

Pour tous les scénarios présentés dans ce paragraphe, l'observateur démarre à l'origine ; sa vitesse et son cap sont respectivement égaux à 6 m/s et 90°. La trajectoire source est située dans le demi-plan supérieur ( $y \geq 0$ ).

Pour toutes les figures de ce paragraphe, les symboles + et o représentent les valeurs de

$\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  respectivement pour les scénarios « horaires » et « anti-horaires ». Les tracés de

$\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$  sont en ligne continue et en pointillé respectivement pour les scénarios « horaires » et « anti-horaires ».

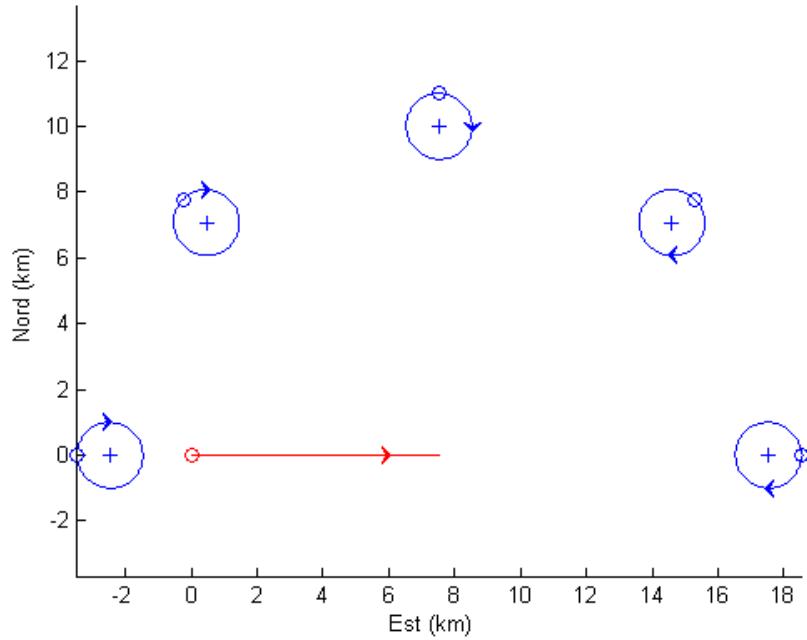
L'écart type de mesure d'angle est égal à 0.5° ; la période d'échantillonnage  $\Delta t$  est égale à 1 s et le nombre de tirages de Monte Carlo est fixé à 500.

#### 2.1.3.3.1 *Impact de l'azimut final sur les performances*

Cette analyse va être effectuée sur le jeu de cinématique de la source tel que :

- la vitesse des sources est égale à  $v_s = 5$  m/s,
- leurs trajectoires sont identiques à une rotation près autour de la position finale de l'observateur, l'angle de cette rotation autour de la position finale de l'observateur est directement égal à  $\theta(t_N)$ ,
- la distance entre le centre des trajectoires source et la position finale de l'observateur est de 10 km, le rayon  $\rho_C$  étant égal à 1 km,
- l'angle initial  $\varphi$  est choisi identique à l'azimut final, soit  $\varphi = \theta(t_N)$ ,
- la source effectue une rotation complète, correspondant à une durée totale du scénario d'environ 21 minutes (plus précisément 1255 secondes, soit  $N = 1256$  mesures).

Par exemple, la Figure 21 présente cinq scénarios lorsque le sens de rotation de la source est « horaire » et  $\varphi$  appartient à  $\{-90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ\}$ . Pour les simulations dont les résultats sont présentés à la Figure 22, les valeurs choisies d'azimut final  $\theta(t_N)$  (ou  $\varphi$ ) sont prises dans  $\{-90^\circ, -83^\circ, -72^\circ, -45^\circ, 10^\circ, 45^\circ, 65^\circ, 80^\circ, 90^\circ\}$  (ces valeurs nous semblent intéressantes au vu des courbes données par la CRLB). Les résultats sont présentés pour les deux sens de rotation de la source.

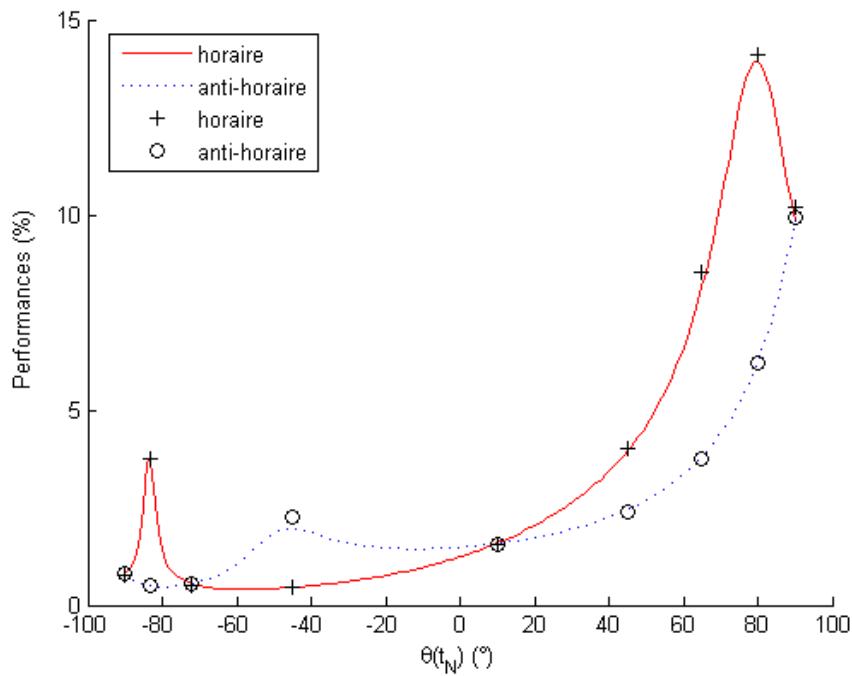


**Figure 21 : 5 scénarios avec  $v_S = 5$  m/s (sens « horaire »).**

Nous constatons que les valeurs de  $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  sont très proches de celles de  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$ , quel que soit le sens de rotation. L'algorithme apparaît donc efficace pour ce premier jeu de scénarios.

**Remarques :**

- Ces premiers résultats mettent en avant l'intérêt pratique de la BO-CTTMA.
- Soulignons également l'importance du sens de rotation sur les performances (sauf dans les cas où l'azimut final est égal à  $90^\circ$  et  $-90^\circ$ ). Néanmoins, aucun des deux sens de rotation ne semble l'emporter franchement.

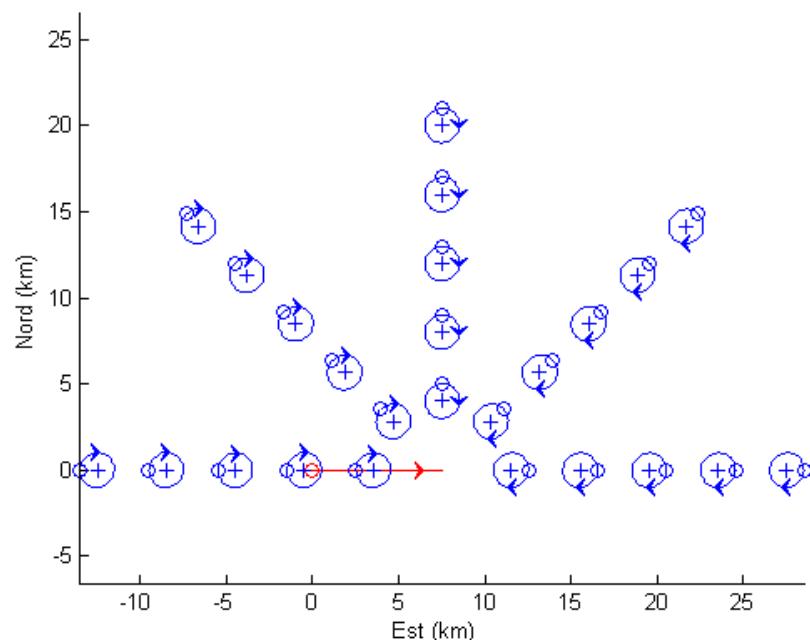


**Figure 22 :**  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$  et  $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  en fonction de l'azimut final.

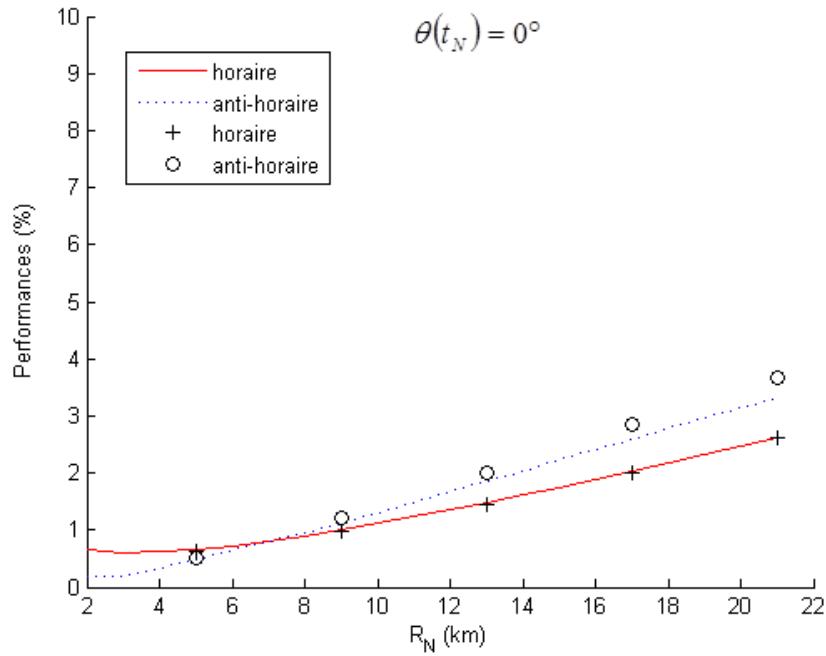
#### 2.1.3.3.2 Effet de la distance finale sur les performances

Le jeu de scénarios retenu pour cette analyse est similaire à celui décrit dans le précédent paragraphe (voir Figure 23), mais pour  $\theta(t_N)$  (ou  $\varphi$ ) dans  $\{-90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ\}$ . La distance finale prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{5, 9, 13, 17, 21\}$  (km).

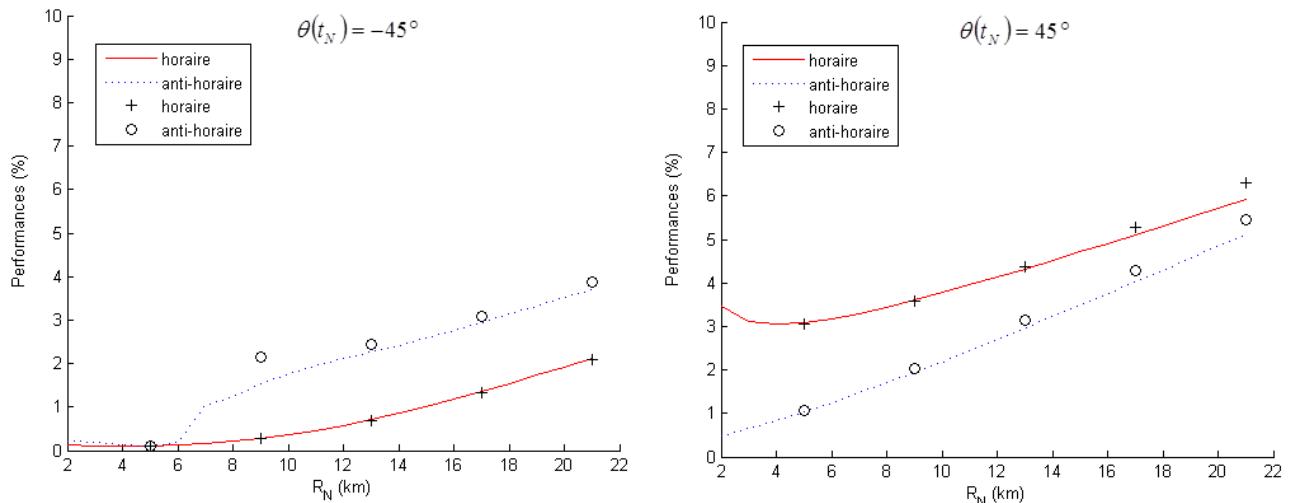
Les résultats sont illustrés par les figures 22.



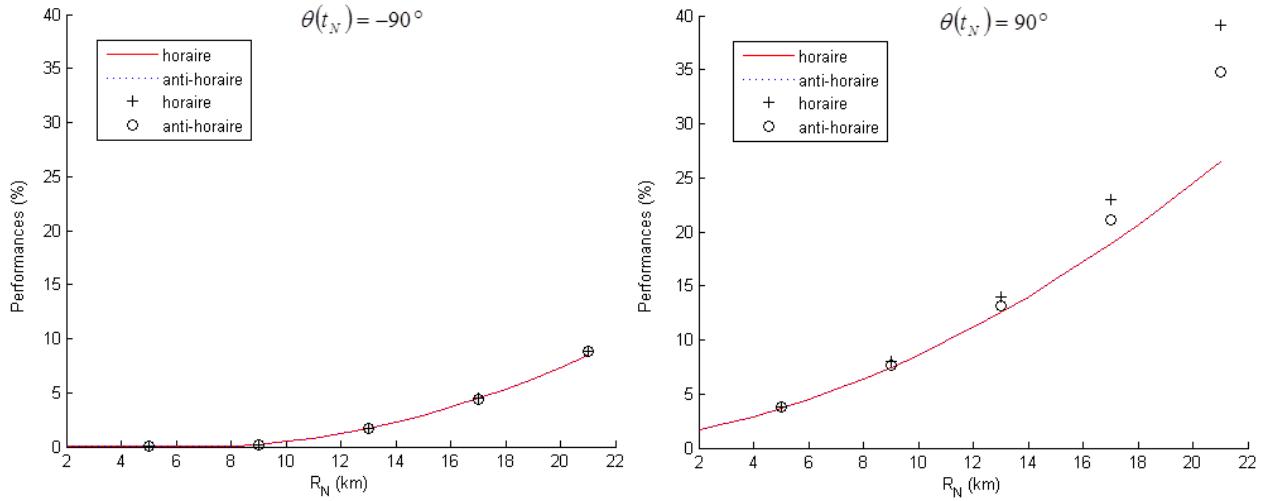
**Figure 23 :** Scénarios pour lesquels la distance finale varie (sens « horaire »).



**Figure 24 (a) :**  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$  et  $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  en fonction de la distance finale pour  $\theta(t_N) = 0^\circ$ .



**Figure 24 (b) :**  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$  et  $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  en fonction de la distance finale pour  $\theta(t_N) = -45^\circ$  à gauche et  $\theta(t_N) = 45^\circ$  à droite.



**Figure 24 (c) :**  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$  et  $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  en fonction de la distance finale pour  $\theta(t_N) = -90^\circ$  à gauche et  $\theta(t_N) = 90^\circ$  à droite.

Nous constatons de nouveau que les valeurs de  $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  et celles de  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$  sont très proches, voire confondues, sauf pour le cas où l'azimut final vaut  $90^\circ$  et la distance finale est supérieure à 15 km.

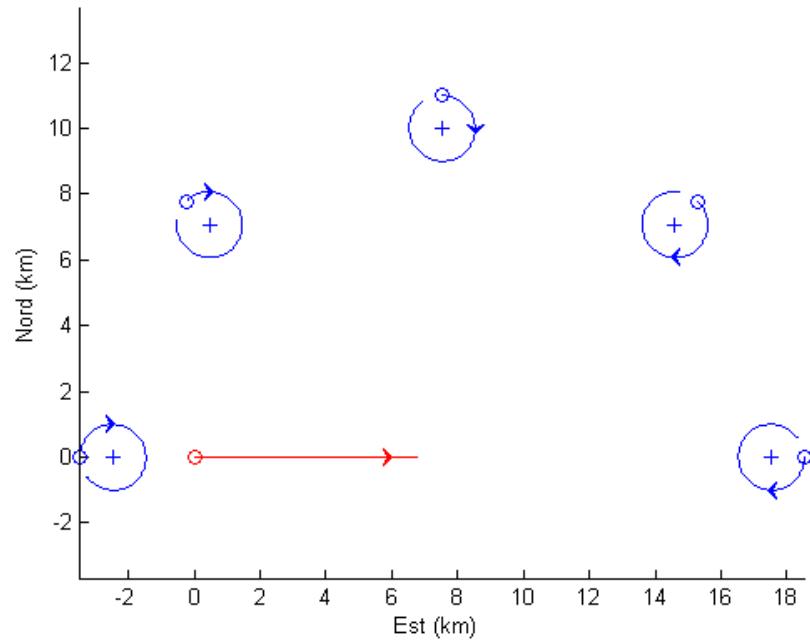
De plus, la précision relative de l'estimation de cette distance est inférieure à 10 % pour le jeu de scénarios retenus, exception faite du cas azimut final égal à  $90^\circ$ , ce qui est une confirmation de l'intérêt de cette méthode de TMA.

**Remarque :** Les tracés de  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$  sont confondus pour les deux sens de rotation dans la

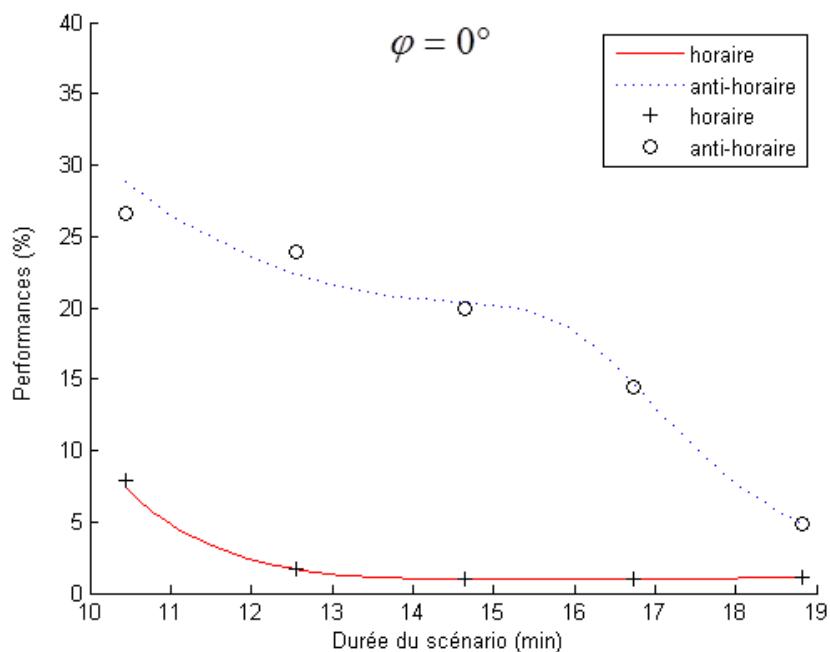
Figure 24 (c), cela s'explique par le fait que les deux trajectoires (sens « horaire » et « anti-horaire ») sont symétriques par rapport à l'axe portant la trajectoire de l'observateur.

#### 2.1.3.3.3 Effet de la durée du scénario sur les performances

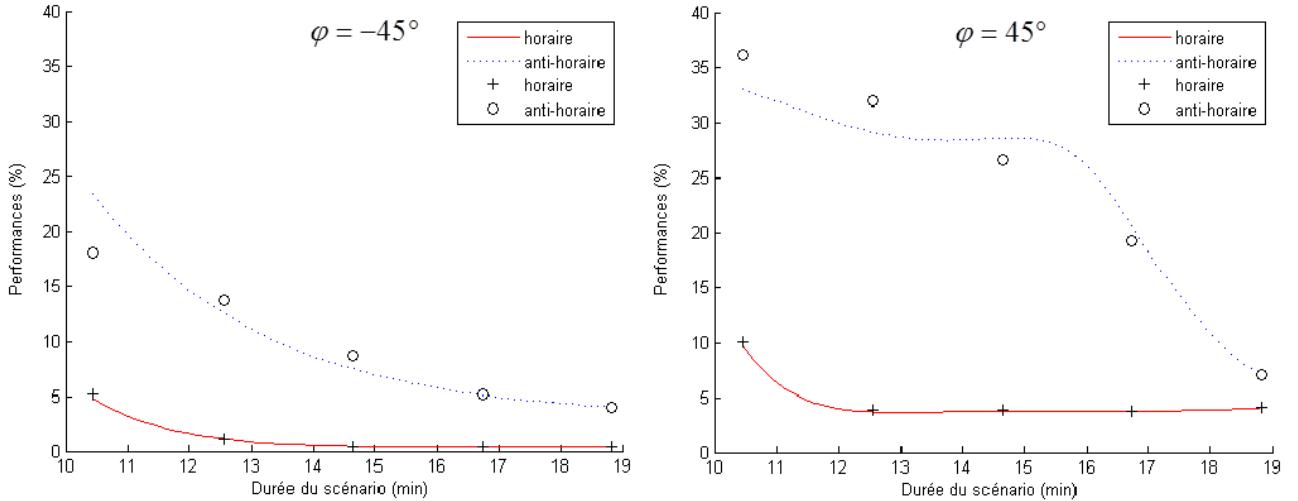
Les scénarios sélectionnés sont similaires à ceux déjà présentés au paragraphe 2.1.3.3.1 (p. 52), mais dans ce paragraphe la durée va varier : la durée minimale  $t_N$  choisie est de 627 secondes (correspondant à un demi-tour), et la maximale est égale à 1130 secondes (équivalent à 90 % d'un tour complet). Une partie du jeu de scénarios est présentée sur la Figure 25 pour une durée  $t_N = 1130$  secondes et un sens de rotation « horaire », avec  $\varphi$  pris dans  $\{-90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ\}$ . Il est à noter ici que, comme  $t_N$  varie alors  $\varphi \neq \theta(t_N)$  contrairement aux scénarios présentés dans les deux précédents paragraphes.



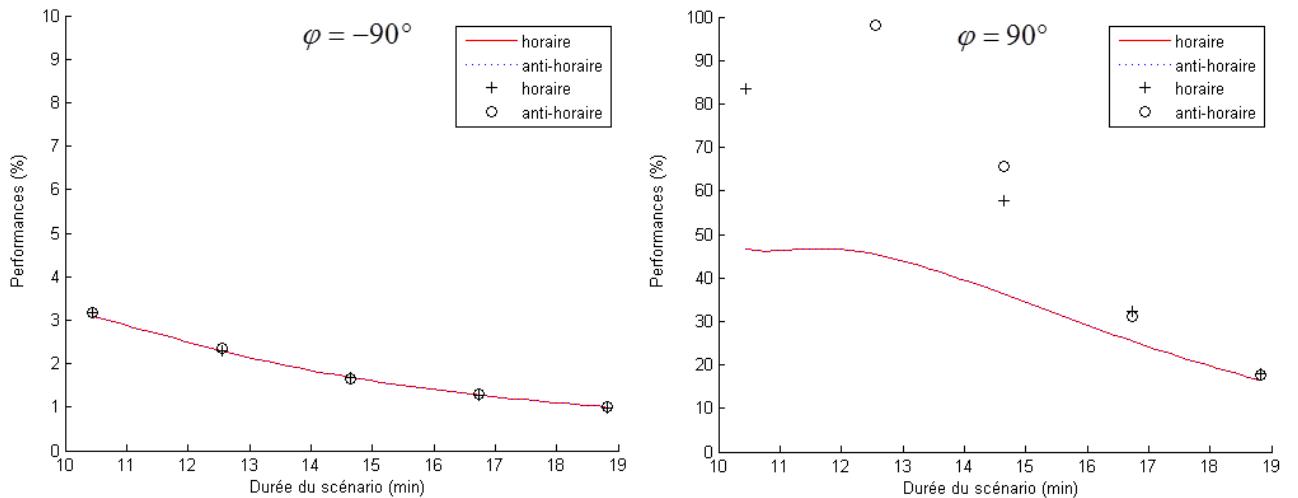
**Figure 25 : Exemples de scénarios choisis afin d'évaluer l'effet de la durée du scénario.**



**Figure 26 (a) :**  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$  et  $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  en fonction de la durée pour  $\varphi = 0^\circ$ .



**Figure 26 (b) :**  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$  et  $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  en fonction de la durée pour  $\varphi = -45^\circ$  à gauche et  $\varphi = 45^\circ$  à droite.



**Figure 26 (c) :**  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$  et  $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  en fonction de la durée pour  $\varphi = -90^\circ$  à gauche et  $\varphi = 90^\circ$  à droite.

Ici encore, les valeurs empiriques de  $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  sont proches des courbes théoriques  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$ ,

excepté le cas où l'angle initial est égal à  $+90^\circ$  (l'estimateur s'y révèle inconsistant).

Nous observons que les valeurs des critères de performances de la méthode pour les scénarios « horaires » sont en moyenne cinq fois inférieures à celles des scénarios « anti-horaires » (excepté les cas  $-90^\circ$  et  $+90^\circ$ , résultant des symétries signalées auparavant).

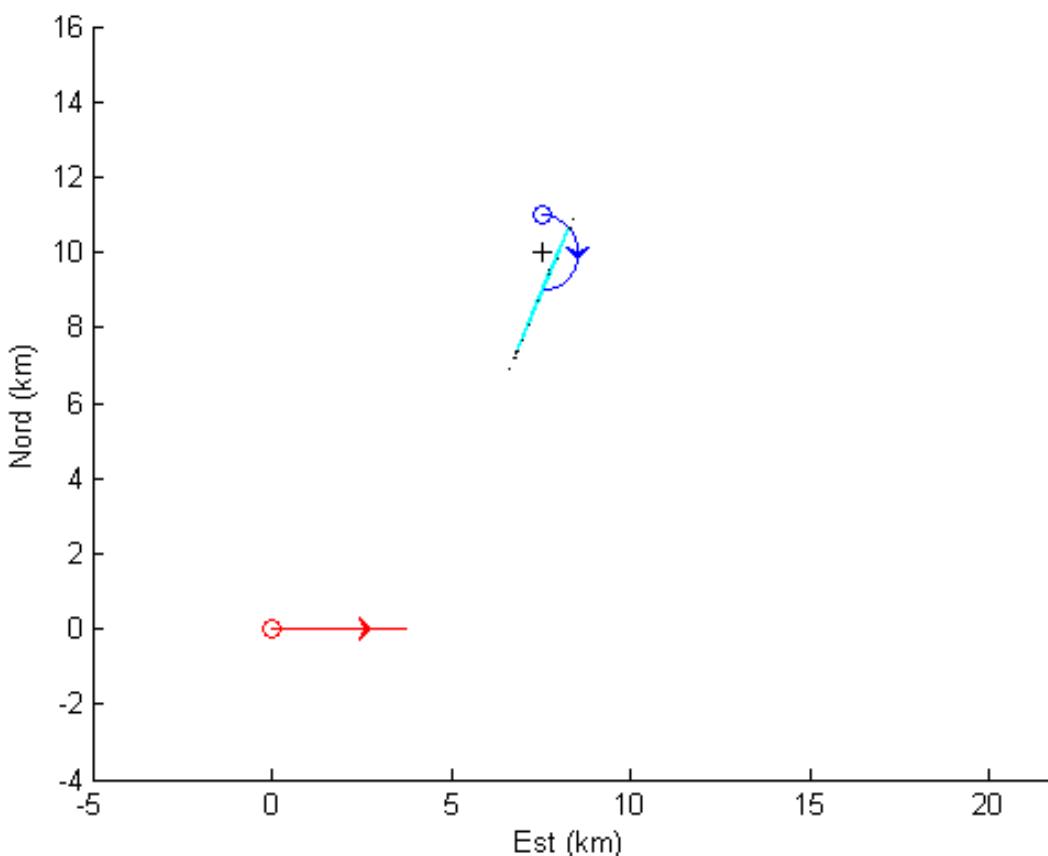
**Remarque :** Dans toutes nos simulations, le taux d'acceptation est de l'ordre de 100%, excepté les cas suivants :

- $\varphi = -45^\circ$  et  $t_N = 754$  secondes et sens « horaire »,
- $\varphi = 90^\circ$  et  $t_N = 627$  secondes, sens « horaire » et « anti-horaire »,

pour lesquels ce taux chute à 96%.

#### 2.1.3.3.4 *Evaluation des performances d'estimation du vecteur d'état complet*

Les performances du MLE viennent d'être évaluées, mais uniquement en termes de précision sur la distance finale estimée. Maintenant, nous allons nous intéresser à la totalité des composantes du vecteur d'état  $Z_N$  sur deux scénarios, présentés à la Figure 27 et la Figure 28. Leur durée est de 10 minutes et 27 secondes (soit la moitié d'un tour complet) et le cercle est parcouru en sens « horaire » et « anti-horaire » par la source. La vitesse de la source, ainsi que le rayon du cercle restent identiques à ceux définis dans les précédents paragraphes, soit :  $v_s = 5$  m/s et  $\rho_C = 1$  km. Mentionnons que ces scénarios seront aussi utilisés dans le paragraphe consacré à l'apport des mesures de fréquence (voir paragraphe 2.2.3.2, p. 70).

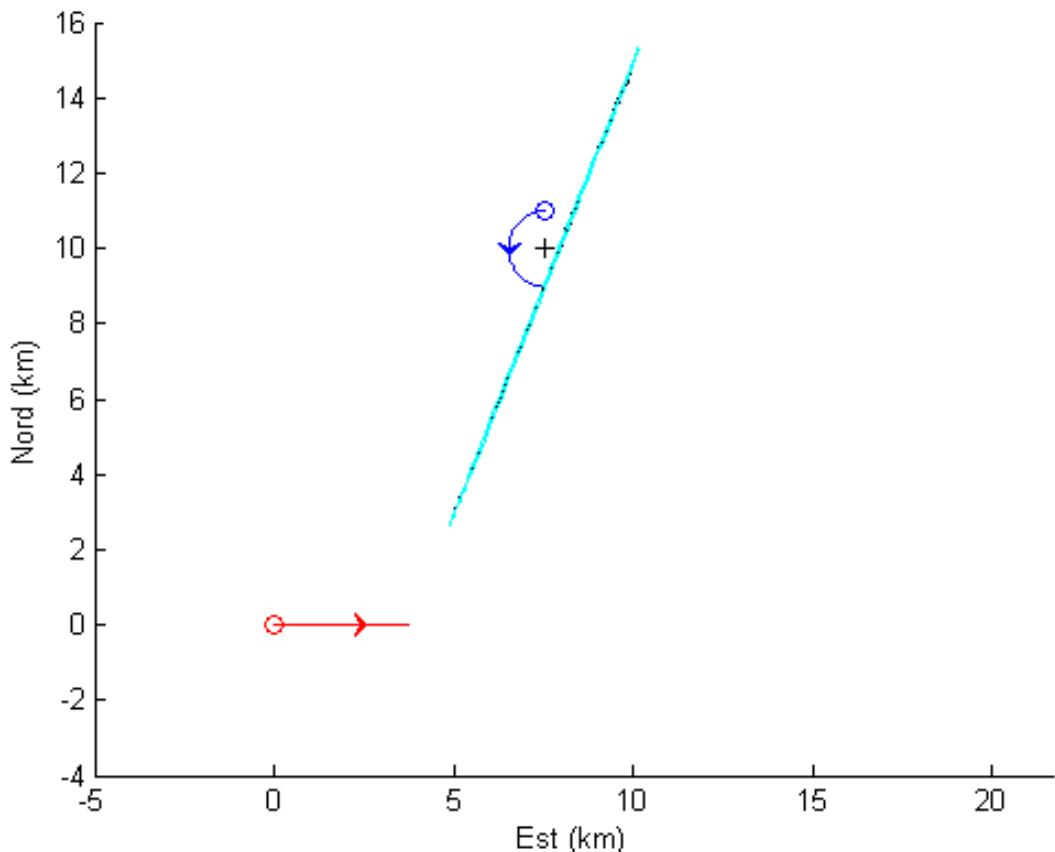


**Figure 27 : Scénario avec les positions estimées (sens « horaire »).**

Les résultats de l'estimation de la position de la source, à l'instant final, sont représentés pour le scénario « horaire » dans la Figure 27 et pour celui « anti-horaire » dans la Figure 28. Nous avons effectué 500 simulations de Monte Carlo. Un seul résultat a été rejeté par le test pour le scénario « horaire » et 7 pour celui « anti-horaire ». Les statistiques données dans la Table 1 et la Table 2 ont été obtenues à partir des résultats retenus pour chacun des scénarios. La colonne nommée  $\sigma_{CRLB}$  contient la racine carrée des éléments de la diagonale de la CRLB.

**Table 1 : Performances à l'instant final, sens « horaire ».**

|            | Unités | Vrai  | Moyen | Biais | $\sigma_{CRLB}$ | $\hat{\sigma}$ |
|------------|--------|-------|-------|-------|-----------------|----------------|
| $x_S(t_N)$ | km     | 7.54  | 7.52  | 0.02  | 0.29            | 0.29           |
| $y_S(t_N)$ | km     | 9.00  | 8.97  | 0.03  | 0.65            | 0.66           |
| $\rho_C$   | km     | 1.00  | 1.04  | 0.04  | 0.09            | 0.10           |
| $\varphi$  | °      | 0.00  | 0.47  | 0.47  | 7.28            | 7.35           |
| $\omega$   | °/s    | 0.287 | 0.285 | 0.002 | 0.025           | 0.026          |
| $R_N$      | km     | 9.76  | 9.73  | 0.03  | 0.71            | 0.72           |



**Figure 28 : Scénario avec les positions estimées (sens « anti-horaire »).**

**Table 2 : Performances à l'instant final, sens « anti-horaire ».**

|            | Unités | Vrai   | Moyen  | Biais | $\sigma_{CRLB}$ | $\hat{\sigma}$ |
|------------|--------|--------|--------|-------|-----------------|----------------|
| $x_s(t_N)$ | km     | 7.52   | 7.74   | 0.22  | 1.08            | 1.22           |
| $y_s(t_N)$ | km     | 9.00   | 9.52   | 0.52  | 2.59            | 2.92           |
| $\rho_c$   | km     | 1.00   | 1.04   | 0.04  | 0.25            | 0.23           |
| $\varphi$  | °      | 0.00   | -32.7  | 32.7  | 28.5            | 60.7           |
| $\omega$   | °/s    | -0.287 | -0.164 | 0.123 | 0.06            | 0.236          |
| $R_N$      | km     | 9.76   | 10.32  | 0.57  | 2.81            | 3.22           |

Typiquement 11 à 15 itérations sont nécessaires pour assurer la convergence de l'algorithme. Nous constatons que pour les estimations validées pour le scénario « horaire », le biais sur toutes les composantes est négligeable ; les variances empiriques calculées à partir de ces estimations sont très proches de la CRLB ; cela nous permet de confirmer l'efficacité du MLE (pour ce scénario). A l'inverse pour le scénario « anti-horaire », les performances de l'estimateur relatives à l'angle initial et à la vitesse angulaire s'éloignent de façon sensible de la CRLB.

## 2.2 Trajectographie par mesures d'angle et de fréquence d'une source en mouvement circulaire uniforme

Lorsque les performances en BO-CTTMA sont insuffisantes ou lorsque la trajectoire est inobservable, il est nécessaire d'exploiter d'autres informations pour rendre la trajectographie possible. Dans ce paragraphe, nous allons analyser la prise en compte des mesures de fréquence en plus de celles d'azimut déjà collectées. Le choix de la fréquence comme mesure additionnelle est motivé par le fait qu'elle peut être disponible dans les sonars passifs. Les mesures fréquentielles vont alors apporter une information sur la trajectoire de la source au travers du glissement fréquentiel (effet Doppler).

Cette seconde partie est donc une extension de la méthode précédente, lorsque l'observateur collecte une ou plusieurs mesures fréquentielles en plus de la mesure angulaire. Cette nouvelle méthode, est appelée

- FB-CTTMA (pour « frequency and bearing constant turn TMA »), lorsqu'une seule fréquence est traitée
- et MFB-CTTMA (pour « multi frequency and bearing constant turn TMA ») lorsque plusieurs fréquences sont prises en compte simultanément.

Comme au §2.1.1 (p. 32), nous débutons par la présentation des notations et nous rappelons le calcul des CRLB. La structure particulière des FIM permet d'établir une propriété intéressante concernant les performances d'estimation en MFB-CTTMA. C'est une extension de celle établie dans [Jauffret08b] en « multi frequency and bearing TMA » ou

MFB-TMA, lorsque la source est en CV. Finalement, un estimateur du type MLE est présenté et ses performances sont évaluées lorsqu'une, deux ou quatre fréquences sont traitées.

Commençons par le cas mono fréquence.

### 2.2.1 Cas mono fréquence

#### 2.2.1.1 Notations

Les cinématiques des deux plates-formes restent identiques à celles déjà présentées dans le paragraphe 2.1.1 (p. 32) : l'observateur suit un CV ou est immobile, pendant que la source suit un CT. Dans ce paragraphe, la source est supposée émettre une fréquence stable, notée  $f_0$ , inconnue. Le vecteur d'état devient alors :

$$Y = [f_0 \quad x_C \quad y_C \quad \rho_C \quad \varphi \quad \omega]^T = [f_0 \quad Z^T]^T. \quad (22)$$

La mesure de fréquence sans bruit acquise par l'observateur à l'instant  $t$  est :

$$f(t) = f_0 [1 - \dot{R}(t)/C], \quad (23)$$

avec  $\dot{R}(t)$ , la vitesse radiale à l'instant  $t$  et  $C$  la célérité du son (environ 1500 m/s dans l'eau). La vitesse radiale est donnée par (voir [Jauffret08a]) :

$$\dot{R}(t) = [\dot{x}_s(t) - \dot{x}_o] \sin \theta(Z, t) + [\dot{y}_s(t) - \dot{y}_o] \cos \theta(Z, t),$$

où  $[\dot{x}_o \quad \dot{y}_o]^T$  est le vecteur vitesse de l'observateur et  $[\dot{x}_s(t) \quad \dot{y}_s(t)]^T$  est celui de la source à l'instant  $t$ , avec  $\dot{x}_s(t) = \rho_C \omega \cos(\omega t + \varphi)$  et  $\dot{y}_s(t) = -\rho_C \omega \sin(\omega t + \varphi)$ .

Afin de mettre en avant la dépendance de la mesure de fréquence au vecteur d'état  $Y$ , nous employons la notation  $f(Y, t)$  à la place de  $f(t)$ .

Sous ces hypothèses, la FB-CTTMA consiste à estimer le vecteur d'état  $Y$  à partir du couple de mesures collectées par l'observateur :

$$\begin{cases} \theta_m(t_k) = \theta(Y, t_k) + \varepsilon_\theta(t_k) \\ f_m(t_k) = f(Y, t_k) + \varepsilon_f(t_k) \end{cases}, \text{ pour } k = 1, \dots, N.$$

Le vecteur additif de bruit des mesures de fréquence  $[\varepsilon_f(t_1) \quad \dots \quad \varepsilon_f(t_N)]^T$  est gaussien centré de matrice de variance-covariance égale à  $\text{diag}(\sigma_f^2(t_k))$  (supposée connue). Il est statistiquement indépendant de  $[\varepsilon_\theta(t_1) \quad \dots \quad \varepsilon_\theta(t_N)]^T$ .

### Remarques :

- L'équation de mesure (23) traduisant l'effet Doppler est une approximation du premier ordre. Cette approximation est acceptable tant que la vitesse de la source (en CV) est très petite devant  $C$ , ce qui est le cas en sonar.
- Ici, la source est en CT. Cependant, durant la récurrence sur laquelle est faite l'analyse spectrale, le déplacement de la source est assimilable à un long parcours à vitesse constante.
- Dans le contexte de la trajectographie,  $f_0$  est un paramètre de nuisance, puisque c'est la trajectoire de la source qui en pratique nous intéresse (c'est-à-dire  $Z$ ).

#### 2.2.1.2 Observabilité

Rappelons que dans le cas BO-CTTMA, le seul cas pour lequel la trajectoire reste inobservable est celui où l'observateur est immobile (cf. §2.1.2.1.3, p. 37). Aussi, dans ce paragraphe, allons-nous répondre à la question suivante :

*En dépit de l'immobilité de l'observateur, la prise en compte de mesures de fréquence va-t-elle rendre observable la trajectoire de la source en CT ?*

La réponse est donnée par la

#### Propriété 6 :

*N'importe quelle source en CT est observable par mesures d'angle et de fréquence tant que l'observateur (immobile) ne se situe pas au centre du cercle décrivant la trajectoire de cette source.*

#### Preuve :

Comme au paragraphe 2.1.2 (p. 34), l'observateur est positionné à l'origine. Considérons deux sources en CT  $S$  et  $S'$  toutes deux détectées dans les mêmes azimuts. Les positions de ces deux sources sont données par les équations (1) et (7) (cf. p. 32 et p. 35). Les fréquences émises par les sources  $S$  et  $S'$  sont notées  $f_0$  et  $f'_0$ , respectivement.

Sous ces hypothèses, la mesure de fréquence sans bruit doit satisfaire la double égalité

$$f(t) = f_0 \left[ 1 - \dot{R}(t)/C \right] = f'_0 \left[ 1 - \dot{R}'(t)/C \right]. \quad (24)$$

Comme l'observateur est immobile, la vitesse radiale est donnée par :

- $\dot{R}(t) = \dot{x}_S(t) \sin \theta(t) + \dot{y}_S(t) \cos \theta(t)$  pour  $S$ ,
- et  $\dot{R}'(t) = \dot{x}_{S'}(t) \sin \theta(t) + \dot{y}_{S'}(t) \cos \theta(t)$  pour  $S'$ .

Par ailleurs, les vitesses des sources sont égales à :

- $\dot{x}_S(t) = \rho_C \omega \cos(\omega t + \varphi)$  et  $\dot{y}_S(t) = -\rho_C \omega \sin(\omega t + \varphi)$ ,
- $\dot{x}_{S'}(t) = \rho_C' \omega' \cos(\omega' t + \varphi')$  et  $\dot{y}_{S'}(t) = -\rho_C' \omega' \sin(\omega' t + \varphi')$ .

D'après la propriété 3 (c.f. p. 41), nous savons que pour un coefficient d'homothétie  $\mu$  donné, les rayons  $\rho_C$  et  $\rho_C'$  sont liés par l'égalité  $\rho_C' = \mu \rho_C$ .

De plus, la vitesse angulaire et l'angle initial de la source  $S'$  sont respectivement égales à :  $\omega' = \omega$  et  $\varphi' = \varphi + \alpha$ , avec  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \theta_C - \theta_{C'}$  (où  $\theta_C$  et  $\theta_{C'}$  sont les azimuts du centre des cercles respectivement parcourus par les sources  $S$  et  $S'$ ).

Les vitesses de la source  $S'$  deviennent alors égales à :

$$\dot{x}_{S'}(t) = \mu \rho_C \omega \cos(\omega t + \varphi + \alpha) \text{ et } \dot{y}_{S'}(t) = -\mu \rho_C \omega \sin(\omega t + \varphi + \alpha).$$

Nous en déduisons les vitesses radiales :

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = \rho_C \omega \sin(\theta(t) - \omega t - \varphi) \\ \dot{R}'(t) = \mu \rho_C \omega \sin(\theta(t) - \omega t - \varphi - \alpha) \end{cases}.$$

L'égalité (24) est alors équivalente à :

$$f(t) = f_0 \left[ 1 - \frac{\rho_C \omega}{C} \sin(\theta(t) - \omega t - \varphi) \right] = f'_0 \left[ 1 - \frac{\mu \rho_C \omega}{C} \sin(\theta(t) - \omega t - \varphi - \alpha) \right].$$

Cette égalité se vérifie dans deux cas :

- Soit l'observateur est situé au centre du cercle et dans ce cas l'effet Doppler est nul. La mesure de fréquence n'apporte donc rien de plus par rapport au cas angle seul et la trajectoire de la source n'est pas observable car  $\rho_C$  n'est pas déterminable.
- Soit lorsque  $f_0 = f'_0$  et  $\sin(\theta(t) - \omega t - \varphi) = \mu \sin(\theta(t) - \omega t - \varphi - \alpha)$ , ce qui implique  $\alpha = 0$  et  $\mu = 1$  et signifie donc que la source  $S'$  est identique à la source  $S$ .

■

### 2.2.1.3 Expression de la matrice d'information de Fisher

La matrice d'information de Fisher relative au vecteur  $Y$  (voir [Jauffret08a]) est donnée par :

$$F(Y | \theta_m, f_m) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_\theta^2(t_k)} \nabla_Y \theta(Z, t_k) \nabla_Y^T \theta(Z, t_k) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_f^2(t_k)} \nabla_Y f(Y, t_k) \nabla_Y^T f(Y, t_k).$$

Nous allons exprimer la FIM sous une forme particulière. La structure du vecteur d'état (22) (cf. p. 62) nous permet de décomposer la FIM en quatre blocs :

$$F(Y|\theta_m, f_m) = \begin{bmatrix} \gamma_0 & c_0^T \\ c_0 & F(Z|\theta_m) + F(Z|f_m) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

avec :

$$F(Z|\theta_m) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_\theta^2(t_k)} \nabla_Z \theta(Z, t_k) \nabla_Z^T \theta(Z, t_k).$$

Cette dernière matrice étant la FIM relative au vecteur d'état  $Z$ , correspondant au cas « azimuts seuls ».

La FIM, relative aux mesures de fréquences et à  $Z$  uniquement, est la matrice  $(5 \times 5)$  suivante :

$$F(Z|f_m) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_f^2(t_k)} \nabla_Z f(Y, t_k) \nabla_Z^T f(Y, t_k).$$

L'élément  $c_0$  est un vecteur  $(5 \times 1)$  égal à

$$c_0 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_f^2(t_k)} \left[ \frac{\partial f(Y, t_k)}{\partial f_0} \right] \nabla_Z f(Y, t_k), \quad (26)$$

et  $\gamma_0$  est un scalaire égal à

$$\gamma_0 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_f^2(t_k)} \left[ \frac{\partial f(Y, t_k)}{\partial f_0} \right]^2. \quad (27)$$

**Remarques :**

- Le détail du gradient  $\nabla_Y f(Y, t_k)$  est disponible en annexe 2.5.2 (p. 79).
- Cette façon de structurer  $F(Y|\theta_m, f_m)$  sera étendue dans le prochain paragraphe au cas multi fréquences.

## 2.2.2 Cas multi fréquences

Considérons le cas où la source émet plusieurs fréquences stables et collectées simultanément aux mesures d'azimut. L'analyse de l'observabilité n'étant plus à faire, nous présenterons la structure de la FIM qui nous permettra d'établir une propriété intéressante. En effet, nous prouverons que la prise en compte de plusieurs mesures de fréquences ne peut qu'améliorer la précision de l'estimateur de la trajectoire seule, malgré l'augmentation du nombre d'inconnues (que sont les fréquences émises).

### 2.2.2.1 Notations

Dans ce paragraphe, la source est supposée émettre  $P$  fréquences distinctes constantes et inconnues, notées  $f_0, f_1, \dots, f_{P-1}$ . Le vecteur d'état devient alors :

$$Y = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_p & \dots & f_{P-1} & Z^T \end{bmatrix}^T.$$

Les  $P$  mesures de fréquences sont données par

$$f_{p,m}(t_k) = f_p(Y, t_k) + \varepsilon_{f_p}(t_k), \text{ pour } p = 0, 1, \dots, P-1,$$

avec les fréquences définies, d'après (23) (cf. p. 62), par :

$$f_p(Y, t_k) = f_p \left[ 1 - \dot{R}(t_k) / C \right].$$

Les vecteurs additifs de bruit des mesures de fréquence  $[\varepsilon_{f_p}(t_1) \ \dots \ \varepsilon_{f_p}(t_N)]^T$  sont gaussiens centrés de matrice de variance-covariance égale à  $\text{diag}[\sigma_{f_p}^2(t_k)]$  (supposée connue). Tous les vecteurs bruit sont indépendants entre eux.

Le lot de mesures relatif à la fréquence fixe  $f_p$  est noté :

$$f_{p,m} = \{f_{p,m}(t_1), f_{p,m}(t_2), f_{p,m}(t_3), \dots, f_{p,m}(t_N)\}.$$

### 2.2.2.2 Propriétés de la borne de Cramér-Rao dans le cas multi fréquences

Nous supposerons dans la suite que l'observabilité est assurée (i.e. l'observateur est en CV ou ne reste pas immobile au centre de la trajectoire de la source).

#### 2.2.2.2.1 Expression de la matrice d'information de Fisher

Comme précédemment pour (25) (cf. p. 65) en FB-CTTMA, la FIM peut être divisée en quatre blocs :

$$F(Y|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-1,m}) = \left[ \begin{array}{ccc|c} \gamma_0 & 0 & 0 & c_0^T \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \gamma_{P-1} & c_{P-1}^T \\ \hline c_0 & \dots & c_{P-1} & F(Z|\theta_m) + F(Z|f_{0,m}) + \dots + F(Z|f_{P-1,m}) \end{array} \right].$$

Les vecteurs  $c_p$  et les scalaires  $\gamma_p$  sont respectivement définis de la même manière que  $c_0$  (26) et  $\gamma_0$  (27) (cf. p. 65).

Nous utilisons la propriété classique d'algèbre linéaire suivante (voir [FrankAyres62]) :

**Lemme:**

Soit  $A = \begin{bmatrix} A_{11}(p \times p) & | & A_{12}(p \times q) \\ \hline A_{21}(q \times p) & | & A_{22}(q \times q) \end{bmatrix}$  une matrice non-singulière, partitionnée en quatre

blocs. Son inverse  $A^{-1}$  peut être partitionnées en quatre blocs :

$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11}(p \times p) & | & B_{12}(p \times q) \\ \hline B_{21}(q \times p) & | & B_{22}(q \times q) \end{bmatrix}$  avec  $B_{22}^{-1} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ , à condition que  $A_{11}$  soit

non-singulière.

Nous identifions  $A_{11}$  à  $\begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{P-1} \end{bmatrix}$ ,  $A_{22}$  à  $F(Z|\theta_m) + F(Z|f_{0,m}) + \dots + F(Z|f_{P-1,m})$ ,

$A_{12}$  à  $\begin{bmatrix} c_0^T \\ \vdots \\ c_{P-1}^T \end{bmatrix}$  et  $A_{21}$  à  $[c_0 \dots c_{P-1}]$ .

Comme le défilement angulaire est non-nul, le glissement fréquentiel l'est aussi et cela implique que la matrice  $A_{11}$  est non-singulière. Le lemme peut alors être appliqué et nous avons donc  $B_{22} = B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-1,m})$  donnée par

$$B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-1,m})^{-1} = F(Z|\theta_m) + F(Z|f_{0,m}) + \dots + F(Z|f_{P-1,m}) - [c_0 \dots c_{P-1}] \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{P-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_0^T \\ \vdots \\ c_{P-1}^T \end{bmatrix}.$$

Or

$$\begin{bmatrix} & & \\ [c_0 \dots c_{P-1}] & \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{P-1} \end{bmatrix}^{-1} & \begin{bmatrix} c_0^T \\ \vdots \\ c_{P-1}^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \sum_{p=0}^{P-1} \gamma_p^{-1} c_p c_p^T.$$

Donc

$$B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-1,m})^{-1} = F(Z|\theta_m) + F(Z|f_{0,m}) + \dots + F(Z|f_{P-1,m}) - \sum_{p=0}^{P-1} \gamma_p^{-1} c_p c_p^T. \quad (28)$$

Cette dernière relation va nous permettre d'établir la propriété présentée au paragraphe suivant.

#### 2.2.2.2 Propriété concernant la borne de Cramér-Rao dans le cas multi fréquences

La prise en compte de mesures additionnelles (les fréquences) entraîne une augmentation du nombre d'inconnues, les fréquences émises  $f_0, \dots, f_{P-1}$  que l'on qualifiera comme précédemment de paramètres de nuisance.

La question à se poser est donc la suivante :

*Est-ce que l'exploitation des mesures de fréquence est susceptible de dégrader la précision de l'estimation des paramètres concernant uniquement la trajectoire, et en conséquence celle de la distance estimée ?*

Nous allons démontrer que bien au contraire, plus le nombre de fréquences est grand, meilleure sera la précision sur l'estimation de la trajectoire. Pour cela, nous allons établir la double inégalité suivante

$$B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-2,m}, f_{P-1,m}) \preceq B(Z|\theta_m, f_{0,m}) \preceq B(Z|\theta_m) \quad (29)$$

Au préalable, faisons quelques remarques :

- Nous supposons implicitement qu'il n'y a qu'une seule mesure d'angle, identique pour toutes les fréquences, à chaque instant de mesure. En pratique, une mesure de fréquence est toujours associée à une mesure d'angle. Nous devrions donc avoir autant de mesures d'angles que de mesures de fréquences. Mais comme tous ces angles correspondent à la même ligne de visée, ils vont être moyennés permettant ainsi d'obtenir une unique mesure d'angle plus précise. Afin de pouvoir évaluer de manière impartiale l'impact des pistes fréquentielles, nous allons utiliser un  $\sigma_\theta(t_k)$  invariant (même lors de l'augmentation du nombre de pistes fréquentielles traitées).
- La numérotation des pistes fréquentielles traitées est fixée arbitrairement.

#### Propriété 7:

*Les performances d'estimation du sous-vecteur d'état  $Z$  (relatif à la trajectoire uniquement) sont améliorées avec l'augmentation du nombre de pistes de fréquence utilisées pour cette estimation. Cette propriété peut se résumer, en termes de CRLB, par la relation suivante :*

$$B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-2,m}, f_{P-1,m}) \preceq B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-2,m}) \preceq \dots \preceq B(Z|\theta_m, f_{0,m}) \preceq B(Z|\theta_m).$$

Preuve :

- Montrons l'inégalité de gauche :
- $$B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-2,m}, f_{P-1,m}) \preceq B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-2,m}) :$$

Il est possible de réécrire l'expression (28), de la manière suivante :

$$B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-2,m}, f_{P-1,m})^{-1} = B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-2,m})^{-1} + F(Z|f_{P-1,m}) - \gamma_{P-1}^{-1} c_{P-1} c_{P-1}^T.$$

Il s'avère que la matrice  $F(Z|f_{P-1,m}) - \gamma_{P-1}^{-1} c_{P-1} c_{P-1}^T$  est définie semi-positive, car la

matrice  $\begin{bmatrix} \gamma_{P-1} & c_{P-1}^T \\ c_{P-1} & F(Z|f_{P-1,m}) \end{bmatrix}$  est la matrice d'Information de Fisher  $F(Y|f_{P-1,m})$ , dans

le cas où seules les fréquences  $f_{P-1,m}$  sont acquises.

Alors  $B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-2,m}, f_{P-1,m})^{-1} - B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-2,m})^{-1}$  est aussi définie semi-positive.

Nous obtenons finalement

$$B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-2,m}, f_{P-1,m}) \preceq B(Z|\theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-2,m}).$$

- Continuons avec l'inégalité de droite :  $B(Z|\theta_m, f_{0,m}) \preceq B(Z|\theta_m)$  :

Considérons la matrice  $F(Y|\theta_m, f_m) = \begin{bmatrix} \gamma_0 & c_0^T \\ c_0 & F(Z|\theta_m) + F(Z|f_m) \end{bmatrix}$  et employons à

nouveau le lemme, avec  $A_{11} = \gamma_0$ ,  $A_{22} = F(Z|\theta_m) + F(Z|f_m)$ ,  $A_{12} = c_0^T$  et  $A_{21} = c_0$ .

De manière directe, nous obtenons

$$B(Z|\theta_m, f_m)^{-1} = F(Z|\theta_m) + F(Z|f_m) - \gamma_0^{-1} c_0 c_0^T.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, nous obtenons

$$F(Z|\theta_m) + F(Z|f_m) - \gamma_0^{-1} c_0 c_0^T \succeq F(Z|\theta_m),$$

alors

$$B(Z|\theta_m, f_m) \preceq B(Z|\theta_m).$$

**Remarque :** Lors de la présentation des performances, que ce soit en mono ou multi fréquences, nous nous intéresserons uniquement aux sous matrices  $B(Z_N|\theta_m, f_m)$  et

$B(Z_N | \theta_m, f_{0,m}, \dots, f_{P-2,m}, f_{P-1,m})$ . Il est donc nécessaire d'évaluer les FIM relatives à ces deux bornes, pour cela nous exploitons la relation (21) présentée au §2.1.3.1 (p. 49).

### 2.2.3 Estimation en mono et multi fréquences

A l'instar de ce que nous avons présenté auparavant en BO-CTTMA, nous proposons ici d'utiliser le MLE. Nous en évaluons ensuite le comportement sur les deux scénarios du paragraphe 2.1.3.3.4 (p. 59).

En effet, pour le scénario « anti-horaire », la CRLB prévoit des précisions incompatibles avec l'exploitation opérationnelle et de plus, l'estimateur de la BO-CTTMA est inconsistant. Il est donc intéressant d'évaluer l'amélioration des résultats apportée par la prise en compte d'une ou plusieurs fréquences.

Nous traiterons également le cas du scénario « horaire » pour montrer que cette amélioration est payante même quand la BO-CTTMA fonctionne correctement.

#### 2.2.3.1 Estimateur

Tout comme dans le cas angle seul, le MLE pour la MFB-CTTMA est le vecteur  $\hat{Y}$  qui minimise le critère quadratique (voir [Jauffret08b]) :

$$C(Y) = \sum_{k=1}^N \left[ \frac{\theta_m(t_k) - \theta(Z, t_k)}{\sigma_\theta(t_k)} \right]^2 + \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{k=1}^N \left[ \frac{f_{p,m}(t_k) - f_p(Y, t_k)}{\sigma_{f_p}(t_k)} \right]^2.$$

Nous employons toujours l'algorithme de Gauss-Newton, mais cette fois il n'est plus nécessaire de basculer sur celui de Newton-Raphson après quelques itérations.

Le vecteur d'initialisation  $Y_{init} = [\bar{f}_0, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p, \dots, \bar{f}_{P-1}, Z_{init}^T]^T$  est défini comme suit :

- $Z_{init}$  est sélectionné de la même manière que dans le cas angle seul (voir §2.5.3, p. 80),
- chaque  $\bar{f}_p$  est égal à la moyenne du lot de mesures lui correspondant.

Là aussi, l'estimateur retourné  $\hat{Y}$  est accepté lorsque  $C(\hat{Y})$  est inférieur à un certain seuil égal à  $N - 5 + P(N-1) + 3\sqrt{2(N-1)P + 2N - 10}$ .

#### 2.2.3.2 Simulations de Monte Carlo

Les  $P$  fréquences émises par la source sont :

- Pour  $P=1$ :  $f_0 = 3000$  Hz.
- Pour  $P=2$ :  $f_0 = 3000$  Hz et  $f_1 = 3500$  Hz.

- Pour  $P=4$ :  $f_0 = 3000$  Hz,  $f_1 = 3500$  Hz,  $f_2 = 4000$  Hz et  $f_3 = 4500$  Hz.

L'écart type pour chaque mesure de fréquence est égal à  $\sigma_{f_p} = f_p / 1000$  Hz.

Les caractéristiques relatives aux mesures angulaires sont identiques à celles définies au paragraphe 2.1.3.3 (p. 51), soit un écart-type de mesures d'angle égal à  $0.5^\circ$ .

Les deux tables suivantes contiennent les performances du MLE pour chaque valeur de  $P$  :

- la Table 3 et la Table 5 sont dédiées aux écarts types,
- la Table 4 et la Table 6 contiennent la valeur moyenne des estimations validées,
- la colonne « angle seul » reprend les résultats déjà présentés au §2.1.3.3.4 (p. 59).

**Table 3 : Ecarts types théoriques et empiriques des estimations, sens « horaire ».**

|            |            | Angle seul      |                | $P=1$           |                | $P=2$           |                | $P=4$           |                |
|------------|------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|
|            | Unités     | $\sigma_{CRLB}$ | $\hat{\sigma}$ | $\sigma_{CRLB}$ | $\hat{\sigma}$ | $\sigma_{CRLB}$ | $\hat{\sigma}$ | $\sigma_{CRLB}$ | $\hat{\sigma}$ |
| $x_S(t_N)$ | km         | 0.29            | 0.29           | 0.09            | 0.09           | 0.07            | 0.73           | 0.06            | 0.06           |
| $y_S(t_N)$ | km         | 0.65            | 0.66           | 0.20            | 0.20           | 0.15            | 0.15           | 0.12            | 0.12           |
| $\rho_C$   | km         | 0.09            | 0.1            | 0.04            | 0.04           | 0.03            | 0.03           | 0.03            | 0.03           |
| $\varphi$  | $^\circ$   | 7.28            | 7.35           | 2.79            | 2.79           | 2.23            | 2.29           | 1.81            | 1.84           |
| $\omega$   | $^\circ/s$ | 0.026           | 0.026          | 0.008           | 0.008          | 0.006           | 0.006          | 0.005           | 0.005          |
| $R_N$      | km         | 0.71            | 0.72           | 0.21            | 0.21           | 0.17            | 0.17           | 0.13            | 0.13           |

**Table 4 : Biais et estimations moyennes, sens « horaire ».**

|            |            |       | Angle seul |       | $P=1$ |       | $P=2$ |       | $P=4$ |       |
|------------|------------|-------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|            | Unités     | Vrai  | Moyen      | Biais | Moyen | Biais | Moyen | Biais | Moyen | Biais |
| $x_S(t_N)$ | km         | 7.54  | 7.52       | 0.02  | 7.53  | 0.01  | 7.53  | 0.01  | 7.53  | 0.01  |
| $y_S(t_N)$ | km         | 9.00  | 8.97       | 0.03  | 9.00  | 0.00  | 9.00  | 0.00  | 9.00  | 0.00  |
| $\rho_C$   | km         | 1.00  | 1.04       | 0.04  | 1.00  | 0.00  | 1.00  | 0.00  | 1.00  | 0.00  |
| $\varphi$  | $^\circ$   | 0.00  | 0.47       | 0.47  | 0.06  | 0.06  | -0.04 | 0.04  | -0.06 | 0.06  |
| $\omega$   | $^\circ/s$ | 0.287 | 0.286      | 0.001 | 0.287 | 0.001 | 0.287 | 0.001 | 0.287 | 0.001 |
| $R_N$      | km         | 9.76  | 9.73       | 0.03  | 9.75  | 0.01  | 9.76  | 0.00  | 9.77  | 0.01  |

**Table 5 : Ecarts types théoriques et empiriques des estimations, sens « anti-horaire ».**

|            |            | Angle seul      |                | $P=1$           |                | $P=2$           |                | $P=4$           |                |
|------------|------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|
|            | Unités     | $\sigma_{CRLB}$ | $\hat{\sigma}$ | $\sigma_{CRLB}$ | $\hat{\sigma}$ | $\sigma_{CRLB}$ | $\hat{\sigma}$ | $\sigma_{CRLB}$ | $\hat{\sigma}$ |
| $x_S(t_N)$ | km         | 1.08            | 1.22           | 0.11            | 0.11           | 0.08            | 0.08           | 0.06            | 0.06           |
| $y_S(t_N)$ | km         | 2.59            | 2.92           | 0.26            | 0.26           | 0.19            | 0.19           | 0.15            | 0.15           |
| $\rho_C$   | km         | 0.248           | 0.227          | 0.046           | 0.048          | 0.038           | 0.038          | 0.033           | 0.034          |
| $\varphi$  | $^\circ$   | 28.5            | 60.7           | 3               | 3.1            | 2.2             | 2.3            | 1.6             | 1.6            |
| $\omega$   | $^\circ/s$ | 0.060           | 0.236          | 0.009           | 0.009          | 0.007           | 0.007          | 0.005           | 0.005          |
| $R_N$      | km         | 2.81            | 3.22           | 0.29            | 0.29           | 0.21            | 0.21           | 0.16            | 0.16           |

**Table 6 : Biais et estimations moyennes, sens « anti-horaire ».**

|            |        |        | Angle seul |       | P=1    |       | P=2    |       | P=4    |       |
|------------|--------|--------|------------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|
|            | Unités | Vrai   | Moyen      | Biais | Moyen  | Biais | Moyen  | Biais | Moyen  | Biais |
| $x_s(t_N)$ | km     | 7.52   | 7.74       | 0.22  | 7.53   | 0.01  | 7.53   | 0.01  | 7.53   | 0.01  |
| $y_s(t_N)$ | km     | 9.00   | 9.52       | 0.52  | 8.99   | 0.01  | 8.99   | 0.01  | 9.00   | 0.00  |
| $\rho_C$   | km     | 1.00   | 1.04       | 0.04  | 1.00   | 0.00  | 1.00   | 0.00  | 1.00   | 0.00  |
| $\varphi$  | °      | 0.00   | -32.7      | 32.7  | 0.05   | 0.05  | 0.09   | 0.09  | -0.04  | 0.04  |
| $\omega$   | °/s    | -0.287 | -0.164     | 0.123 | -0.287 | 0.000 | -0.287 | 0.000 | -0.287 | 0.000 |
| $R_N$      | km     | 9.76   | 10.32      | 0.566 | 9.76   | 0.00  | 9.76   | 0.00  | 9.76   | 0.00  |

Sur les 500 simulations effectuées aucune n'a été rejetée par le test d'acceptation, quel que soit le nombre  $P$  de fréquences collectées. L'estimateur a convergé après seulement 8 itérations en moyenne (sens « horaire » et « anti-horaire »). Comme pour le cas angle seul, lorsque le sens de rotation de la source est « horaire », les performances du MLE sont très proches de celles calculées par la CRLB et le biais sur les estimations de chaque composante de  $Z_N$  est négligeable (voir Table 3 et Table 4). Le même constat peut être fait pour le sens « anti-horaire », alors que le MLE n'est pas consistant en BO-CTTMA (voir Table 5 et Table 6). De plus, nous pouvons observer que, plus le nombre de pistes fréquentielles est important, plus les estimations des composantes du vecteur  $Z_N$  sont précises, ce qui illustre et valide la propriété 7 établie dans le paragraphe 2.2.2.2.2 (p. 68).

## 2.3 Est-il nécessaire de manœuvrer ?

Cette dernière partie est consacrée à la comparaison des performances respectives de deux méthodes de trajectographie passive, lorsque deux adversaires tentent de se localiser mutuellement : une plate-forme est en CT tandis que la seconde est en CV. Dans le paragraphe ci-après, nous allons comparer les performances respectives des deux méthodes de trajectographie dans le cas angle seul. Puis le paragraphe 2.3.2 évalue l'apport de mesures additionnelles de fréquence.

### 2.3.1 Scénario avec mesures d'angle seul

La motivation première de l'analyse suivante vient du fait que, dans un certain nombre de publications concernant la BO-TMA, les auteurs proposent une cinématique en CT pour l'observateur ([Bucy71], [Farina99]). En effet, ce type de déplacement assure l'observabilité quasiment dès le début du scénario (il faut toutefois acquérir au moins quatre mesures

[Jauffret93]) et cela est très intéressant lors de l'emploi d'algorithmes d'estimation récursifs, minimisant ainsi le risque de divergence de ce type d'algorithme (cf. §1.1.4, p. 20).

Le second point motivant cette comparaison est directement lié à l'emploi opérationnel de la BO-CTTMA. Soit par exemple, un sous-marin se déplaçant en CT afin de localiser, à l'aide de la BO-TMA<sup>14</sup>, une cible qu'elle détecte et qui se déplace en CV. Dans le même temps, cette cible en CV détecte le sous-marin et tente de localiser ce dernier à l'aide de la BO-CTTMA.

Dans ce cas, quelles sont les performances auxquelles peuvent s'attendre ces deux plates-formes, et l'une des deux prendra-t-elle un avantage décisif, en terme de précision de localisation, sur son adversaire ?

Le scénario choisi est similaire à celui utilisé dans le paragraphe 2.1.3.3.4 (p. 59) pour un sens de rotation « anti-horaire ». La durée des scénarios  $t_N$  va de 753 secondes (60% d'un tour complet) à 1130 secondes (soit 90% d'un tour complet). L'écart-type du bruit de mesures angulaire est égal à 0.5° pour les deux plate-formes.

La Figure 29 présente les positions estimées par les deux méthodes, avec leurs ellipses de confiance respectives, pour les différents instants précisés en Table 7. Les performances sont analysées uniquement en termes de précisions relatives de la distance estimée entre

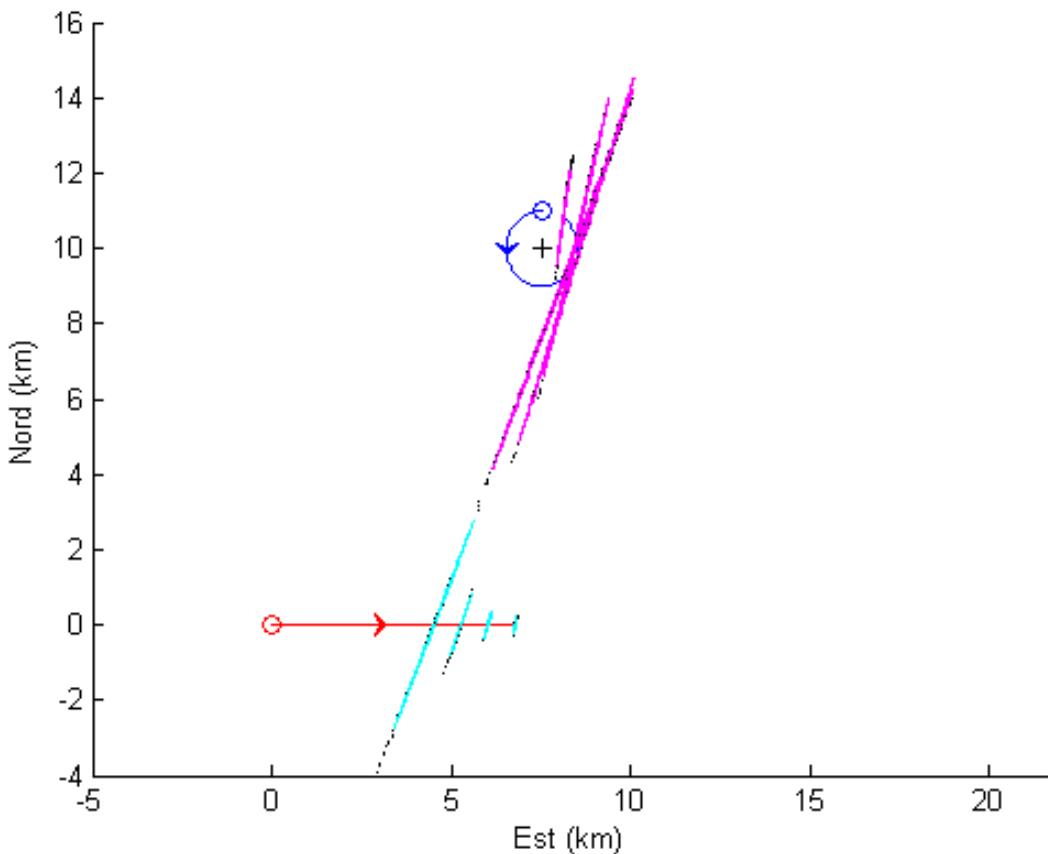
les deux plates-formes à l'instant final. Là aussi,  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$  est calculé à partir de la CRLB et

$\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  à partir des estimations.

**Table 7 : Performances des deux trajectographies.**

| $t_N$ (s)   | 753   | 879   | 1004  | 1130 |
|---|-------|-------|-------|------|
| $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$ (%) $S$ en CV et $O$ en CT (BO-TMA)      | 12.29 | 3.58  | 1.46  | 0.81 |
| $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$ (%) $S$ en CT et $O$ en CV (BO-CTTMA)    | 22.35 | 20.38 | 14.70 | 4.79 |
| $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$ (%) $S$ en CV et $O$ en CT (BO-TMA)   | 12.65 | 3.56  | 1.44  | 0.81 |
| $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$ (%) $S$ en CT et $O$ en CV (BO-CTTMA) | 28.33 | 22.54 | 16.66 | 6.26 |

<sup>14</sup> L'estimateur employé en BO-TMA est lui aussi un MLE [Nardone84].



**Figure 29 : Scénario pour la comparaison des performances respectives des deux trajectographies.**

D'après la Table 7 et la Figure 29, nous pouvons constater que les performances de la BO-CTTMA sont dans ce cas moins bonnes que celles de la BO-TMA. De plus, l'observateur non-maneuvrant doit attendre plus longtemps avant d'atteindre des précisions intéressantes : il faut attendre quasiment un tour complet pour que les performances de la BO-CTTMA deviennent acceptables (aux environs de 5%). Le taux d'acceptation des estimations renvoyées pour tous les scénarios présentés est de 100%.

### 2.3.2 Scénario avec mesures d'angle et de fréquence

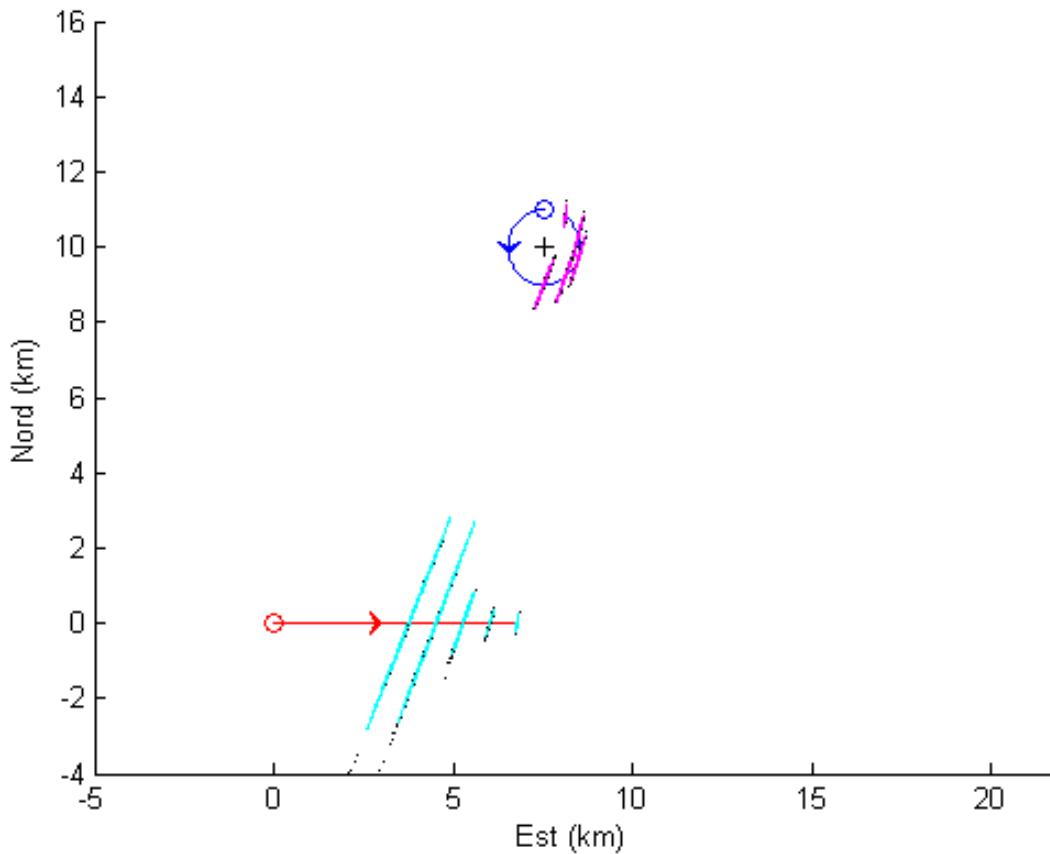
Nous venons de constater que la plate-forme utilisant la BO-TMA obtient de meilleures performances que celle employant la BO-CTTMA. Il apparaît donc judicieux de vérifier si ces constatations restent valables lorsque l'observateur collecte des mesures de fréquence en plus. Cette fois, la plate-forme en CT utilise la FB-TMA<sup>15</sup> et celle en CV la FB-CTTMA. Le scénario reste identique à celui exploité au paragraphe précédent, sauf pour la durée des scénarios  $t_N$  démarrant cette fois à partir de 627 secondes (50% d'un tour complet). Nous limitons l'analyse au cas  $P=1$  avec  $f_0 = 3000$  Hz. De plus, là encore dans un souci

<sup>15</sup> L'estimateur utilisé en FB-TMA est du type MLE [Jauffret08b].

d'impartialité, nous supposons que les deux plates-formes émettent la même fréquence constante avec un écart type  $\sigma_{f_0} = f_0 / 1000 \text{ Hz}$  et celui sur le bruit des mesures angulaire reste égal à  $0.5^\circ$  (le même pour les deux plates-formes).

La Figure 30 présente les estimations des positions renvoyées par chacun des deux algorithmes avec leurs ellipses de confiance respectives. Les différents instants d'estimations  $t_N$  choisis sont donnés en Table 8. Comme dans le cas angle seul, nous allons

évaluer  $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$  (calculé à partir de la CRLB) et de  $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$  (obtenu à partir des estimations).



**Figure 30 : Scénario pour la comparaison des performances respectives des deux trajectographies.**

Les résultats présentés sur la figure ci-dessus et synthétisés dans la Table 8 montrent que la prise en compte de mesure de fréquence va inverser les conclusions précédentes : la FB-CTTMA va cette fois-ci prendre le pas sur la FB-TMA contrairement au cas angle seul (présentées au précédent paragraphe). Ceci confirme le fait que la prise en compte de mesures de fréquence est payante pour un observateur en CV qui trajectographie une source en CT.

**Table 8 : Performances des deux trajectographies lorsqu'une seule fréquence est collectée.**

| $t_N$ (s)   | 627   | 753   | 879  | 1004 | 1130 |
|---|-------|-------|------|------|------|
| $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$ (%) $S$ en CV et $O$ en CT (FB-TMA)      | 12.75 | 11.90 | 3.58 | 1.46 | 0.81 |
| $\frac{\sigma_{R_N}}{R_N}$ (%) $S$ en CT et $O$ en CV (FB-CTTMA)    | 2.86  | 2.73  | 2.60 | 2.04 | 1.13 |
| $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$ (%) $S$ en CV et $O$ en CT (FB-TMA)   | 12.71 | 11.65 | 3.75 | 1.41 | 0.82 |
| $\frac{req_{\hat{R}_N}}{R_N}$ (%) $S$ en CT et $O$ en CV (FB-CTTMA) | 2.99  | 2.78  | 2.63 | 1.85 | 1.03 |

**Remarque :** La comparaison des Table 7 et Table 8 permet de conclure que l'exploitation de mesures de fréquence additionnelles n'améliore pas significativement les performances de la trajectographie, lorsque l'observateur est en CT.

## 2.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons considéré un modèle de trajectoire de la source, peu étudié dans le domaine de la trajectographie passive (TMA) : le mouvement circulaire uniforme (ou CT).

L'observabilité de la trajectoire de la source a été analysée et plusieurs résultats théoriques ont été obtenus :

- une trajectoire composée d'un ou plusieurs tronçons dont l'un au moins est un arc de cercle est observable à partir de mesures d'angle seul lorsque l'observateur est en CV (*i.e.* à vitesse non-nulle) ;
- une trajectoire en arc de cercle est observable à partir de mesures d'angle et de fréquence lorsque l'observateur est immobile s'il n'est pas positionné au centre de ce cercle.

Un troisième résultat théorique a été établi concernant l'apport de mesures additionnelles de fréquence : plus le nombre de raies émises (inconnues) est élevé, plus la précision de l'estimateur de la trajectoire augmente.

Nous avons ensuite proposé l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) pour lequel il ressort que :

- Le MLE fonctionne correctement : il se révèle efficace sur tout un ensemble de simulations réalistes, aussi bien dans le cas angle seul que dans celui angle et fréquence(s). Le jeu de simulations, exploité dans le cas angle seul, est certes non

exhaustif mais cependant assez représentatif de situations opérationnelles. Il nous a permis de souligner la viabilité de ce type de trajectographie, excepté pour le cas « endfire », c'est-à-dire le cas où l'azimut final est proche de  $\pm 90^\circ$  ; la précision relative sur la distance finale est toujours inférieure à 30% pour tous les autres cas.

- Il est nécessaire de souligner l'influence du sens de rotation de la source sur ses performances, mais aussi des positions relatives de l'observateur et de la source.
- Les performances d'estimations sont améliorées lorsque des mesures de fréquences sont disponibles. Cependant, au-delà de quatre pistes fréquentielles prises en compte, l'amélioration est moins sensible.

Enfin, nous avons achevé notre étude par une comparaison, en termes d'avantage tactique, de la trajectographie par mesures d'angle et éventuellement de fréquence entre deux protagonistes qui se localisent réciproquement : l'un étant en CV l'autre en CT. Là encore, la prise en compte de mesure de fréquence se révèle payante car elle donne l'avantage tactique à l'observateur non-maneuvrant.

## 2.5 Annexes

### 2.5.1 Matrice des dérivées secondes en trajectographie par mesures d'angle seul d'une source en mouvement circulaire uniforme

Dans cette annexe, nous donnons le détail de la matrice des dérivées secondes utilisées dans l'algorithme de Newton-Raphson dans le cas BO-CTTMA (§2.1.3.2, p. 50). La matrice des dérivées secondes, symétrique et définie positive, est telle que :

$$\nabla_z \nabla_z \theta(Z, t_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial x_c^2} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial y_c x_c} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \rho_c \partial x_c} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \varphi \partial x_c} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \omega \partial x_c} \\ \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial x_c \partial y_c} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial y_c^2} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \rho_c \partial y_c} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \varphi \partial y_c} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \omega \partial y_c} \\ \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial x_c \partial \rho_c} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial y_c \partial \rho_c} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \rho_c^2} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \varphi \partial \rho_c} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \omega \partial \rho_c} \\ \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial x_c \partial \varphi} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial y_c \partial \varphi} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \rho_c \partial \varphi} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \varphi^2} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \omega \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial x_c \partial \omega} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial y_c \partial \omega} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \rho_c \partial \omega} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \varphi \partial \omega} & \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \omega^2} \end{bmatrix}$$

Le détail de chacun des termes est donné ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial x_c^2} &= \frac{-2 \sin[\theta(Z, t_k)] \cos[\theta(Z, t_k)]}{R(t_k)^2} \\ \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial y_c^2} &= \frac{2 \sin[\theta(Z, t_k)] \cos[\theta(Z, t_k)]}{R(t_k)^2} \\ \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \rho_c^2} &= \frac{-\sin[2(\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k))]}{R(t_k)^2} \\ \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \varphi^2} &= \frac{-\rho_c \sin[\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)]}{R(t_k)^2} [R(t_k) - 2\rho_c \cos(\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k))] \\ \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \omega^2} &= t_k^2 \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \varphi^2} \\ \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial x_c \partial y_c} &= \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial y_c \partial x_c} = \frac{1 - 2 \cos[\theta(Z, t_k)]^2}{R(t_k)^2} \\ \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial x_c \partial \rho_c} &= \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \rho_c \partial x_c} = \frac{-\cos[\omega t_k + \varphi - 2\theta(Z, t_k)]}{R(t_k)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial x_C \partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \varphi \partial x_C} = \frac{\rho_C}{R(t_k)^2} \sin[\omega t_k + \varphi - 2\theta(Z, t_k)]$$

$$\frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial x_C \partial \omega} = \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \omega \partial x_C} = t_k \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial x_C \partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial y_C \partial \rho_C} = \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \rho_C \partial y_C} = \frac{-\sin[\omega t_k + \varphi - 2\theta(Z, t_k)]}{R(t_k)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial y_C \partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \varphi \partial y_C} = \frac{-\rho_C}{R(t_k)^2} \cos[\omega t_k + \varphi - 2\theta(Z, t_k)]$$

$$\frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial y_C \partial \omega} = \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \omega \partial y_C} = t_k \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial y_C \partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \rho_C \partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \varphi \partial \rho_C} = \frac{[R(t_k) - \rho_C \cos(\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k))] \cos[\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)] + \rho_C \sin[\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)]^2}{R(t_k)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \rho_C \partial \omega} = \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \omega \partial \rho_C} = t_k \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \rho_C \partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \varphi \partial \omega} = \frac{\partial^2 \theta(Z, t_k)}{\partial \omega \partial \varphi} = \frac{-\rho_C t_k}{R(t_k)^2} [R(t_k) - 2\rho_C \cos(\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k))] \sin[\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)]$$

### 2.5.2 Gradient en trajectographie par mesures d'angle et de fréquence : cas mono fréquence

Nous rappelons que  $\dot{x}_r(t_k) = \dot{x}_S(t_k) - \dot{x}_O$  et  $\dot{y}_r(t_k) = \dot{y}_S(t_k) - \dot{y}_O$  sont les vitesses relatives entre les deux plates-formes et  $C$  est la célérité du son dans le milieu. Le détail du gradient  $\nabla_Y f(Y, t_k)$  nécessaire en FB-CTTMA pour le calcul de sa FIM (voir §2.2.1.3, p. 64) et la mise au point du MLE (cf. §2.2.3.1, p. 70) :

$$\frac{\partial f(Y, t_k)}{\partial x_C} = \frac{-f_0}{R(t_k) C} \cos[\theta(Z, t_k)] [\dot{x}_r(t_k) \cos(\theta(Z, t_k)) - \dot{y}_r(t_k) \sin(\theta(Z, t_k))]$$

$$\frac{\partial f(Y, t_k)}{\partial y_C} = \frac{-f_0}{R(t_k) C} \sin[\theta(Z, t_k)] [\dot{y}_r(t_k) \sin(\theta(Z, t_k)) - \dot{x}_r(t_k) \cos(\theta(Z, t_k))]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(Y, t_k)}{\partial \rho_C} = & \frac{-f_0}{C} \left\{ \omega \sin[\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)] \left[ \frac{\rho_C}{R(t_k)} \cos(\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)) - 1 \right] \right. \\ & \left. - \frac{\sin[\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)]}{R(t_k)} [\dot{x}_O \cos(\theta(Z, t_k)) - \dot{y}_O \sin(\theta(Z, t_k))] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(Y, t_k)}{\partial \varphi} &= \frac{-f_0 \rho_C}{C} \left\{ \omega \cos[\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)] \left[ \frac{\rho_C}{R(t_k)} \cos(\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)) - 1 \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos[\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)]}{R(t_k)} [\dot{x}_O \cos(\theta(Z, t_k)) - \dot{y}_O \sin(\theta(Z, t_k))] \right\} \\
\frac{\partial f(Y, t_k)}{\partial \omega} &= \frac{-f_0 \rho_C}{C} \left\{ \omega t_k \cos[\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)] \left[ \frac{\rho_C}{R(t_k)} \cos(\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)) - 1 \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{t_k \cos[\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)]}{R(t_k)} [\dot{x}_O \cos(\theta(Z, t_k)) - \dot{y}_O \sin(\theta(Z, t_k))] - \sin[\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)] \right\} \\
\frac{\partial f(Y, t_k)}{\partial f_0} &= 1 - \frac{\dot{x}_r(t_k) \sin[\theta(Z, t_k)] - \dot{y}_r(t_k) \cos[\theta(Z, t_k)]}{C}.
\end{aligned}$$

### 2.5.3 Algorithme de recherche du vecteur d'initialisation

Nous présentons dans cette annexe la procédure permettant la sélection du vecteur d'initialisation  $Z_{Init}$  nécessaire aux algorithmes de minimisation de ce chapitre (§2.1.3 p. 48, §2.2.3.1 p. 70 et §2.3 p. 72). Nous commençons par donner les relations permettant la construction du maillage, ces résultats sont aussi exploités dans les algorithmes de recherche du ou des vecteurs d'initialisations utilisés en trajectographie par mesures de distance d'une source manoeuvrante (voir chapitre 4).

#### 2.5.3.1 Préambule à la construction de l'algorithme de recherche de $Z_{Init}$ :

Pour rappel, la position de la source à l'instant initial est égale à :

$$P_s(t_1) = P_o(t_1) + R(t_1) \begin{bmatrix} \sin(\theta(t_1)) \\ \cos(\theta(t_1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + \rho_C \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix},$$

et celle à l'instant final :

$$P_s(t_N) = P_o(t_N) + R(t_N) \begin{bmatrix} \sin(\theta(t_N)) \\ \cos(\theta(t_N)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + \rho_C \begin{bmatrix} \sin(\omega t_N + \varphi) \\ \cos(\omega t_N + \varphi) \end{bmatrix},$$

Avec  $\theta(t)$  et  $R(t)$  respectivement donnés par les formules (4) et (5) (p. 33). La position de l'observateur  $P_o(t)$  est donnée par la relation (2) (voir p. 33).

Intéressons nous maintenant aux termes de droite de ces deux dernières égalités, nous pouvons ainsi en déduire l'égalité suivante :

$$P_s(t_N) - P_s(t_1) = \rho_C \left\{ \begin{bmatrix} \sin(\omega t_N + \varphi) \\ \cos(\omega t_N + \varphi) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix} \right\},$$

équivalente à :

$$P_S(t_N) - P_S(t_1) = 2\rho_C \sin\left(\frac{\omega t_N}{2}\right) \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\omega t_N}{2} + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega t_N}{2} + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

De cette dernière égalité, on tire :

- $\sin\left(\frac{\omega t_N}{2}\right) = \pm \frac{1}{2\rho_C} |P_S(t_N) - P_S(t_1)|$ ,
- et  $\frac{\omega t_N}{2} + \varphi + \frac{\pi}{2} = \arg[P_S(t_N) - P_S(t_1)]$ .

Posons  $P_S(t_N) - P_S(t_1) = [\Delta x \quad \Delta y]^T$ .

Cela permet de reécrire les deux expressions précédentes de la façon suivante :

- $\sin\left(\frac{\omega t_N}{2}\right) = \pm \frac{1}{2\rho_C} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ,
- et  $\frac{\omega t_N}{2} + \varphi + \frac{\pi}{2} = \tan^{-1}\left[\frac{\Delta x}{\Delta y}\right]$ .

La figure suivante présente le jeu de notations utilisé dans cette annexe.

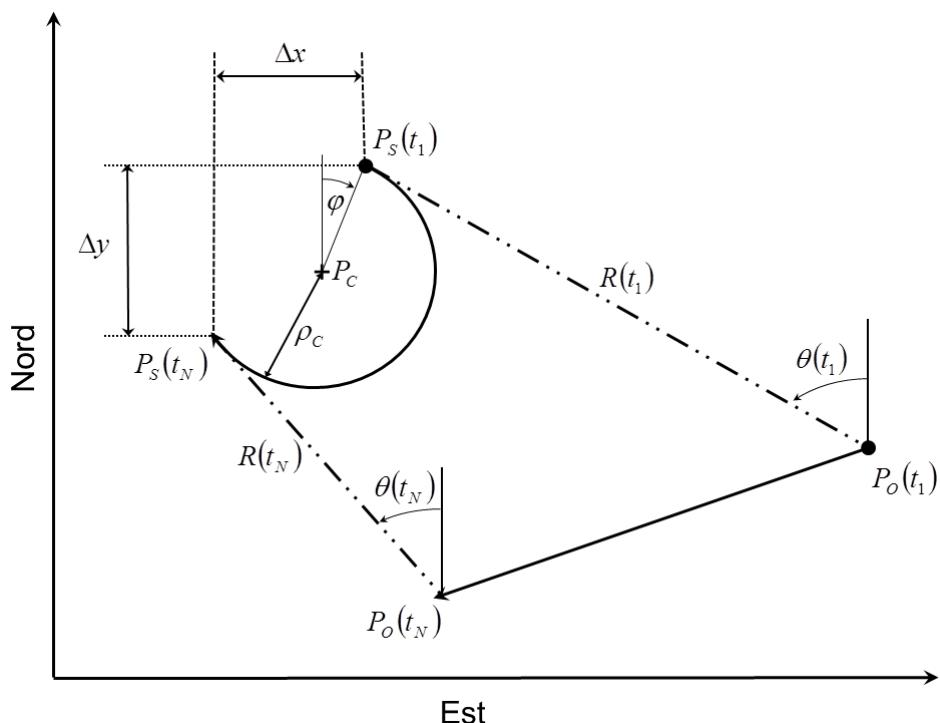


Figure 31 : Présentation des Notations de l'annexe du §2.5.3.1.

Maintenant, intéressons nous au signe de  $\sin\left(\frac{\omega t_N}{2}\right)$ , pour cela on définit la vitesse angulaire positive, notée  $\omega^+$ , par :

$$\sin\left(\frac{\omega^+ t_N}{2}\right) = +\frac{1}{2\rho_c} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

on en déduit :

$$\omega^+ = \frac{2}{t_N} \alpha, \text{ avec } \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{2\rho_c} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right).$$

L'angle initial correspondant, noté  $\varphi^+$ , est égal à :

$$\varphi^+ = \tan^{-1}\left[\frac{\Delta x}{\Delta y}\right] - \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

On définit ensuite  $\omega^-$  (la vitesse angulaire négative) par :

$$\omega^- = -\omega^+,$$

L'angle initial correspondant  $\varphi^-$  est alors :

$$\varphi^- = \tan^{-1}\left[\frac{\Delta x}{\Delta y}\right] - \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

équivalent à :

$$\varphi^- = \varphi^+ + 2\alpha.$$

Maintenant, vérifions s'il est possible de déterminer le signe de  $\sin\left(\frac{\omega t_N}{2}\right)$ . Pour cela, on

suppose que  $\omega^-$  a été choisi à tort. Cette situation revient à poser l'égalité suivante :

$$2\rho_c \sin\left(\frac{\omega^- t_N}{2}\right) \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\omega^- t_N}{2} + \varphi^- + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega^- t_N}{2} + \varphi^- + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = -2\rho_c \sin\left(\frac{\omega^+ t_N}{2}\right) \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{-\omega^+ t_N}{2} + \varphi^- + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{-\omega^+ t_N}{2} + \varphi^- + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Le terme de droite, de l'égalité précédente, peut être réécrit et est égal à :

$$-2\rho_c \sin\left(\frac{\omega^+ t_N}{2}\right) \begin{bmatrix} \sin\left(-\alpha + \varphi^+ + 2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(-\alpha + \varphi^+ + 2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = -[P_s(t_N) - P_s(t_1)],$$

Il en résulte l'égalité suivante :

$$2\rho_C \sin\left(\frac{\omega^- t_N}{2}\right) \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\omega^- t_N + \varphi^- + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega^- t_N + \varphi^- + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \end{bmatrix} = -[P_S(t_N) - P_S(t_1)].$$

On constate que les deux membres de cette égalité sont de signes opposés.

Si c'est  $\omega^+$  qui est choisi à tort, on aboutit par les mêmes calculs à l'égalité suivante :

$$2\rho_C \sin\left(\frac{\omega^+ t_N}{2}\right) \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\omega^+ t_N + \varphi^+ + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega^+ t_N + \varphi^+ + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \end{bmatrix} = -[P_S(t_N) - P_S(t_1)].$$

On en conclut donc que dans le cas où la « mauvaise » vitesse angulaire est choisie, les

vecteurs  $2\rho_C \sin\left(\frac{\omega t_N}{2}\right) \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\omega t_N + \varphi + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega t_N + \varphi + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \end{bmatrix}$  et  $[P_S(t_N) - P_S(t_1)]$  sont de signes opposés.

### 2.5.3.2 Procédure de sélection de $Z_{init}$ :

Comme en BO-CTTMA ce sont les azimuts qui sont mesurés, il faut donc « mailler » les distances relatives aux instants initial et final, que nous notons respectivement  $R_{Init,1}$  et

$R_{Init,N}$ . Ces deux distances sont choisies parmi les valeurs prises entre  $R_{min}$  et  $R_{max}$ , ces bornes sont arbitrairement choisies.

Il s'agit ensuite de calculer, pour chaque couple de distances  $R_{Init,1}$  et  $R_{Init,N}$ , la valeur du vecteur  $P_{S,Init}(t_N) - P_{S,Init}(t_1)$ , permettant d'obtenir :

- $\Delta x_{init} = R_{Init,N} \sin(\theta_m(t_N)) - R_{Init,1} \sin(\theta_m(t_1)) + x_O(t_N) - x_O(t_1)$ ,
- $\Delta y_{init} = R_{Init,N} \cos(\theta_m(t_N)) - R_{Init,1} \cos(\theta_m(t_1)) + y_O(t_N) - y_O(t_1)$ ,

avec  $\theta_m(t_1)$  et  $\theta_m(t_N)$ , l'azimut mesuré à l'instant initial et celui mesuré à l'instant final.

Il est aussi nécessaire de « mailler » les valeurs candidates du rayon du cercle, ce rayon est noté  $\rho_{C,Init}$ . Ces valeurs candidates sont prises dans un intervalle compris entre  $\rho_{C,min}$  et  $\rho_{C,max}$  (ces bornes sont choisies arbitrairement).

On obtient ainsi pour chaque valeur candidate de  $R_{Init,1}$ ,  $R_{Init,N}$  et  $\rho_{C,Init}$ , l'un des deux vecteurs d'états candidats notés  $Z_{Init+}$  et  $Z_{Init-}$  (on a vu à la fin de la première partie de l'annexe qu'il est possible d'écartier le « mauvais » sens de rotation de la source). Leurs composantes sont calculées grâce aux relations données en première partie de cette annexe §2.5.3.1, ils sont définis par :

- $Z_{Cand+} = [x_{C,Init} \quad y_{C,Init} \quad \rho_{C,Init} \quad \varphi^+ \quad \omega^+]^T$ ,
- et  $Z_{Cand-} = [x_{C,Init} \quad y_{C,Init} \quad \rho_{C,Init} \quad \varphi^- \quad \omega^-]^T$ .

Finalement, le vecteur  $Z_{Init}$  correspond au vecteur candidat  $Z_{Init+}$  ou  $Z_{Init-}$  renvoyant le critère des moindres carrés pondérés le plus faible.

#### 2.5.4 Test d'arrêt de la procédure de minimisation

Comme précisé au paragraphe 2.1.3.2 (p. 50), l'algorithme s'arrête soit lorsque le nombre maximal d'itérations est atteint, soit lorsque le critère ne varie plus depuis quelques itérations. Pour la totalité des simulations présentées dans ce manuscrit le nombre maximum d'itérations de la procédure de minimisation est fixé à 50.

Détaillons maintenant le test permettant de considérer que l'algorithme a « convergé » sur un minimum, il est défini tel que :

$$\text{si } \frac{|\hat{R}_{N,k} - \hat{R}_{N,k-l}|}{\hat{R}_{N,k}} \leq 0.5\% \text{ pour } l=1, 2, 3, 4 \text{ et } k \text{ le numéro de l'itération courante.}$$

## **Chapitre 3**

***Trajectographie par mesures de distance seule :  
source en mouvement rectiligne uniforme et  
observateur manœuvrant***

Les deux derniers chapitres de ce manuscrit sont consacrés à la trajectographie par mesures de distance seule. Au cours de l'étude et de la mise au point des techniques dédiées à ce type de trajectographie, les scénarios où la manœuvre de l'observateur est nécessaire et ceux où elle ne l'est pas, ont été identifiés.

Ce chapitre est consacré aux scénarios où l'observateur doit manœuvrer ; c'est un passage obligé pour parvenir à proposer une trajectographie par mesures de distance seule depuis une plate-forme non-manœuvrante qui sera développée au chapitre 4.

Dans un premier temps, nous analysons l'observabilité d'une source en fonction du mouvement de l'observateur. Nous prouvons qu'à l'instar de la trajectographie passive par mesure d'angles (BO-TMA), l'observateur doit manœuvrer pour prétendre trajectographier une source en CV. Nous menons cette étude pour quelques modèles de trajectoire simples, revisitant ainsi les cas traités dans la littérature de la BO-TMA.

Nous calculons ensuite les performances asymptotiques données par la borne de Cramér-Rao. Nous mettons en exergue à ce propos une curiosité statistique d'une trajectoire observable alors que la matrice d'information de Fisher (FIM), relative au vecteur d'état qui la définit, n'est pas inversible.

Puis, nous proposons l'estimateur du maximum de vraisemblance et détaillons la mise en œuvre des méthodes numériques permettant de le calculer. Nous vérifions enfin son efficacité statistique pour un ensemble de scénarios utilisant les différents modèles de cinématique de l'observateur introduits au cours de l'analyse de l'observabilité.

Dans les simulations de Monte-Carlo, nous avons généré des mesures exagérément bruitées : leurs écarts-types sont tous supérieurs ou égaux à 50 mètres, voire 200 mètres, alors que dans la réalité une telle mesure (faite par inter-corrélation) a un écart-type de l'ordre de quelques mètres<sup>16</sup>. Le but est ici de vérifier la « bonne tenue » de notre estimateur même si les bruits de mesures sont importants.

### 3.1 Notations et hypothèses

La position de la source (en CV) est donnée, à l'instant  $t \in [0, T]$ , par

$$P_s(t) = \begin{bmatrix} x_s(t) \\ y_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s(0) \\ y_s(0) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \end{bmatrix}, \quad (30)$$

avec  $V_s = [\dot{x}_s \quad \dot{y}_s]^T$  son vecteur vitesse constant.

---

<sup>16</sup> Notons à ce propos que dans [Song99] l'écart-type considéré est de l'ordre du centimètre, ce qui est aussi exagéré car trop optimiste.

La trajectoire de la source est parfaitement paramétrée (ou définie) par le vecteur d'état  $X = [x_s(t^*) \ y_s(t^*) \ \dot{x}_s \ \dot{y}_s]^T$ , où  $t^*$  est un instant de référence arbitrairement choisi.

La distance séparant les deux mobiles, à l'instant  $t$ , est donnée par la relation (5) (voir §2.1.1, p. 33).

La Figure 1 illustre les notations, cf. p. 16.

L'observateur va acquérir aux instants  $t_k = (k-1)\Delta t$ , pour  $k = 1, 2, \dots, N$ , les mesures de distance  $R_m(t_k)$  définies par :

$$R_m(t_k) = R(t_k) + \varepsilon_R(t_k). \quad (31)$$

Le vecteur additif de bruit  $[\varepsilon_R(t_1) \ \dots \ \varepsilon_R(t_N)]^T$  est gaussien centré de matrice de variance-covariance égale à  $\text{diag}[\sigma_R^2(t_k)]$  (supposée connue).

Comme au chapitre précédent, nous utilisons aussi la notation  $R(X, t_k)$  afin de souligner le lien fonctionnel de la distance au vecteur d'état  $X$ , à l'instant  $t_k$ .

La RO-TMA a pour objectif d'estimer la trajectoire d'une source en CV depuis une plate-forme à partir des distances mesurées  $R_m = \{R_m(t_1), R_m(t_2), \dots, R_m(t_N)\}$  (ce qui revient à estimer le vecteur d'état  $X$ ).

Nous débutons par l'analyse de l'observabilité de la trajectoire de la source en RO-TMA, pour différentes cinématiques suivies par l'observateur.

## 3.2 Analyse de l'observabilité

Nous énonçons ici plusieurs résultats concernant l'observabilité de la trajectoire d'une source en CV à partir d'un observateur suivant les différents types de trajectoires :

- le premier concerne les trajectoires composées d'un seul leg (nous en déduirons la nécessité pour l'observateur de manœuvrer) ;
- le second est relatif aux trajectoires composées de deux legs ;
- les trajectoires composées de trois legs sont examinées ensuite ;
- le cas d'une trajectoire en arc de cercle est traitée ;
- cette analyse se clôt sur le cas des trajectoires composées de deux legs reliés par un arc de cercle.

Les démonstrations des trois premières propriétés étant assez longues, nous avons pris le parti de les placer en annexe (§3.7.2, p. 113).

### 3.2.1 Trajectoire de l'observateur composée d'un seul leg

La démonstration de la propriété suivante est donnée en annexe 3.7.2.2 (p. 115).

#### Propriété 8

*Si la source  $S$  et l'observateur sont en CV, alors la trajectoire de la source n'est pas observable par mesures de distance seule. Il existe une infinité d'autres solutions. La position de toute autre source  $S'$  détectée par l'observateur aux mêmes distances que  $S$  est telle que  $P_{S'}(t) = \mathbf{H}[P_S(t) - P_O(t)] + P_O(t)$ ,  $\forall t$  où  $\mathbf{H}$  est une isométrie dans le plan.*

**Remarque :** l'ensemble des solutions est indénombrable.

### 3.2.2 Trajectoire de l'observateur composée de deux legs

Les vecteurs vitesse de l'observateur sur le leg 1 et sur le leg 2 sont respectivement notés  $V_1 = [\dot{x}_1 \quad \dot{y}_1]^T$  et  $V_2 = [\dot{x}_2 \quad \dot{y}_2]^T$  (la vitesse sur ces deux legs n'étant pas forcément identique,  $\|V_1\| \neq \|V_2\|$ ). L'instant de manœuvre est noté  $t_M$ . La position de l'observateur est donc donnée à l'instant  $t$  par :

$$P_O(t) = P_O(t_M) + (t - t_M)V_i, \quad (32)$$

avec  $i = 1$  si  $t \leq t_M$  et  $i = 2$  si  $t > t_M$ .

#### 3.2.2.1 Cas inobservable

#### Propriété 9

*Si l'observateur a une trajectoire composée de deux legs et qu'éventuellement le défilement angulaire pendant un seul de ces legs est nul, alors la trajectoire de la source en CV n'est pas observable.*

*En effet, il existe une seconde source  $S'$ , appelée source fantôme, « vue » aux mêmes distances que  $S$  dont la trajectoire est reliée à celle de  $S$  par  $P_{S'}(t) = \mathbf{S}_{V_2 - V_1}[P_S(t) - P_O(t)] + P_O(t)$ ,  $\forall t$  où  $\mathbf{S}_{V_2 - V_1}$  est la symétrie par rapport à la droite engendrée par le vecteur  $V_2 - V_1$ . Cette source fantôme est unique.*

La démonstration est donnée en annexe 3.7.2.3 (p. 117)

### Remarques :

- 1) L'ensemble des solutions ne comporte que deux éléments (ou trajectoires).
- 2) Le vecteur d'état relatif à la source fantôme  $S'$  noté  $\tilde{X} = [x_{S'}(t^*) \ y_{S'}(t^*) \ \dot{x}_{S'} \ \dot{y}_{S'}]^T$  est lié au vecteur d'état de la source d'intérêt  $S$  par

$$\tilde{X} = \Sigma [X - X_O(t^*)] + X_O(t^*) \quad (33)$$

Avec

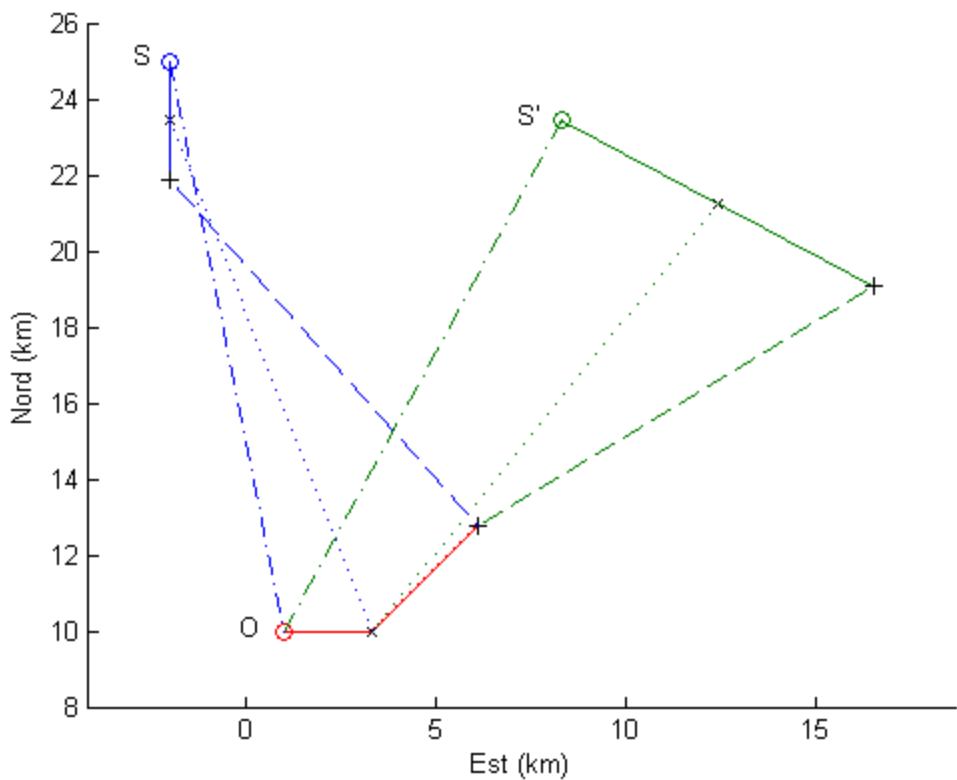
- $\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{V_2-V_1} & 0_2 \\ 0_2 & \mathbf{S}_{V_2-V_1} \end{bmatrix}, \quad (34)$
- $X_O(t^*) = [x_O(t^*) \ y_O(t^*) \ \dot{x}_i \ \dot{y}_i]^T \quad (i = 1 \text{ si } t^* \leq t_M \text{ et } i = 2 \text{ sinon}),$
- et  $\mathbf{S}_{V_2-V_1} = \frac{1}{\dot{x}_{21}^2 + \dot{y}_{21}^2} \begin{bmatrix} \dot{x}_{21}^2 - \dot{y}_{21}^2 & 2\dot{x}_{21}\dot{y}_{21} \\ 2\dot{x}_{21}\dot{y}_{21} & \dot{y}_{21}^2 - \dot{x}_{21}^2 \end{bmatrix}$  avec  $\begin{bmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{y}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \end{bmatrix}.$

Illustrons la propriété 9 au travers des deux exemples suivants.

Premier exemple : Le défilement angulaire n'est jamais nul (voir Figure 32) :

- L'observateur a deux vitesses différentes sur chaque leg et le défilement angulaire n'est jamais nul.
- La durée totale du scénario est de 26 minutes.
- L'observateur  $O$  part du point  $[1 \ 10]^T$  km avec une vitesse de 3 m/s et un cap initial de  $90^\circ$ . Au bout de 13 minutes, il change de cap et de vitesse : sa vitesse passe à 5 m/s et son cap est désormais de  $45^\circ$ .
- La source  $S$  en CV démarre à la position  $[-2 \ 25]^T$  km ; sa vitesse est de 2 m/s et son cap est de  $180^\circ$ .
- La source fantôme  $S'$  démarre à la position  $[8.31 \ 23.44]^T$  km ; sa vitesse est 5.96 m/s et son cap est de  $117.96^\circ$ .

La figure suivante présente ce scénario.



**Figure 32 : Le défilement angulaire n'est jamais nul.**

Deuxième exemple : le défilement angulaire est nul au cours du premier leg (voir Figure 33) :

- Le scénario dure 26 minutes.
- L'observateur  $O$  part de la position de coordonnées  $[-1.576 \quad 8.128]^T$  km avec une vitesse de 4 m/s et un cap initial de  $54^\circ$ . Au bout de 13 minutes, il change de cap qui vaut alors  $-15^\circ$ .
- La source d'intérêt  $S$  en CV part du point  $[4.612 \quad 8.128]^T$  km avec une vitesse de 3.81 m/s et un cap de  $51.91^\circ$ .
- La source fantôme  $S'$  en CV part du point  $[3.233 \quad 4.234]^T$  km avec une vitesse de 3.95 m/s et
- un cap de  $50.69^\circ$ .

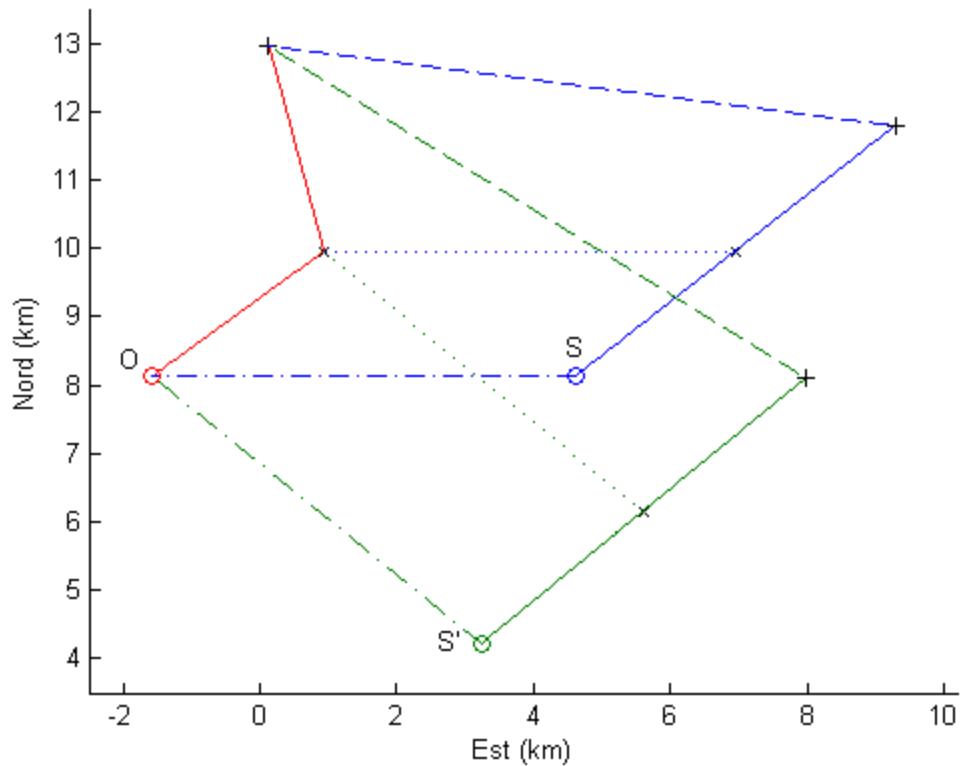


Figure 33 : Défilement angulaire nul au cours du premier leg.

### 3.2.2.2 Cas observable

La propriété suivante détaille les conditions nécessaires à l'observabilité de la trajectoire source et sa démonstration se trouve en annexe 3.7.2.4 (p. 124).

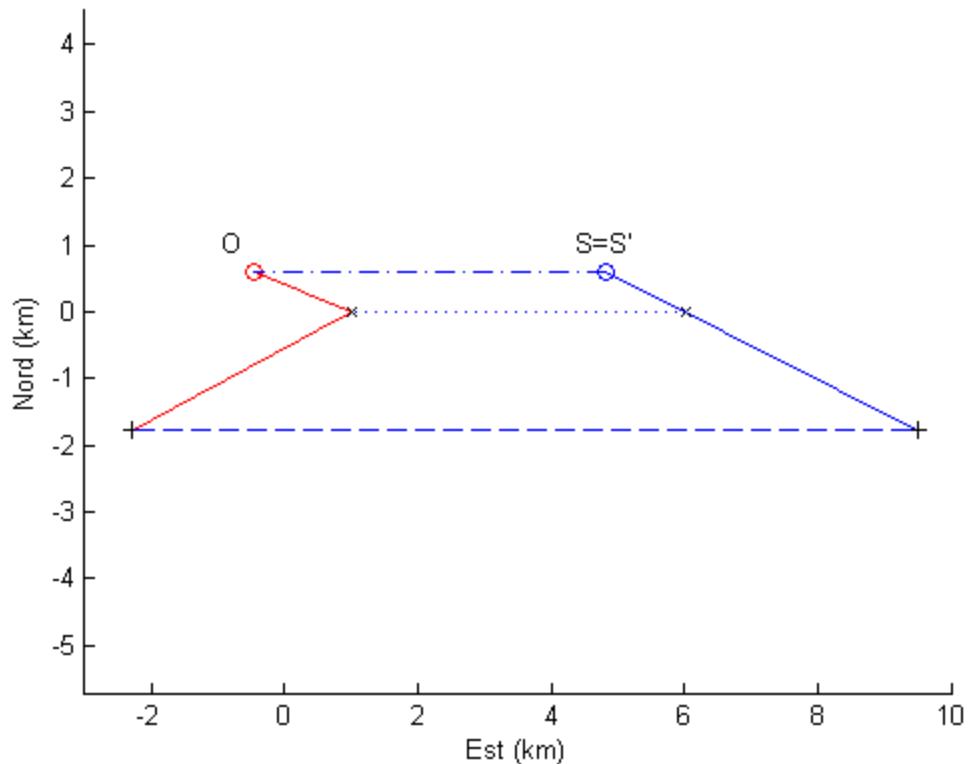
#### Propriété 10

*Si un observateur parcourt une trajectoire composée de deux legs et que le défilement angulaire vis-à-vis d'une source en CV est nul pendant toute la durée du scénario, alors la trajectoire de cette source est observable par mesures de distance.*

Dans le scénario suivant, donné à titre d'illustration, le défilement angulaire est toujours nul :

- L'observateur  $O$  suit un premier leg durant 6mn 40 s et le second pendant 19 mn 20 s. La durée totale du scénario est donc de 26 minutes.
- Sa position initiale est  $[-0.463 \quad 0.606]^T$  km. Sur le premier leg, l'observateur a une vitesse de 4 m/s et son cap initial est de 112.5°. Sur le second leg, sa vitesse est égale à 3.21m/s et son cap est de 241.6°.
- La source  $S$  en CV démarre à la position  $[4.812 \quad 0.606]^T$  km ; sa vitesse est de 3,37 m/s et son cap est de 117°.

La Figure 34 présente ce scénario.



**Figure 34 : Défilement angulaire nul pendant toute la durée du scénario, cas observable.**

Ces deux dernières propriétés mettent en exergue la différence fondamentale entre la BO-TMA et la RO-TMA. En effet, en BO-TMA,

- si l'observateur a une trajectoire composée de deux legs et que le défilement angulaire est nul au cours d'un seul de ces legs, alors la trajectoire de la source est observable.
- si l'observateur parcourt une trajectoire composée de deux legs et que le défilement angulaire est nul pendant toute la durée du scénario, alors la trajectoire de la source n'est pas observable.

La présentation de la dualité entre BO-TMA et RO-TMA sera complétée lors de l'étude de la matrice d'information de Fisher (voir §3.3.1.3, p. 98).

### **3.2.3 Trajectoire de l'observateur en trois legs**

La trajectoire de l'observateur est maintenant composée d'un troisième leg parcouru à vitesse constante. Le vecteur vitesse de l'observateur durant ce troisième leg est noté  $V_3$ .

### Propriété 11

Si l'observateur parcourt une trajectoire composée de trois legs, alors la trajectoire de toute source en CV est observable par mesures de distance pourvu qu'il n'existe pas de nombre réel  $a$  tel que  $V_3 = a V_1 + (1-a) V_2$ .

#### Remarques :

- Le cas  $a=0$  est forcément à écarter.
- Si  $\|V_1\| = \|V_2\| = \|V_3\|$ , la condition  $V_3 = a V_1 + (1-a) V_2$  n'est remplie que si  $a=1$ , c'est-à-dire si  $V_3 = V_1$ . Un exemple de scénario pour ce cas est donné sur la Figure 35. Il est décrit ci-après :

L'observateur suit une trajectoire composée de trois legs, à vitesse constante et débute à l'origine, telle que :

- les instants de manœuvre  $t_{M1}$  et  $t_{M2}$  sont respectivement égaux à 600 secondes et 1200 secondes,
- les caps successivement suivis par l'observateur sont  $110^\circ$ ,  $240^\circ$  et  $110^\circ$ ,
- la vitesse de l'observateur est de 3 m/s.

La source  $S$  d'intérêt démarre au point  $[-2 \ 15]^T$  km pour suivre un CV à une vitesse de 4 m/s et un cap de  $190^\circ$ .

La source fantôme  $S'$  part du point  $[0.63 \ -15.10]^T$  km avec une vitesse de 1.68 m/s et un cap de  $-42.94^\circ$ .

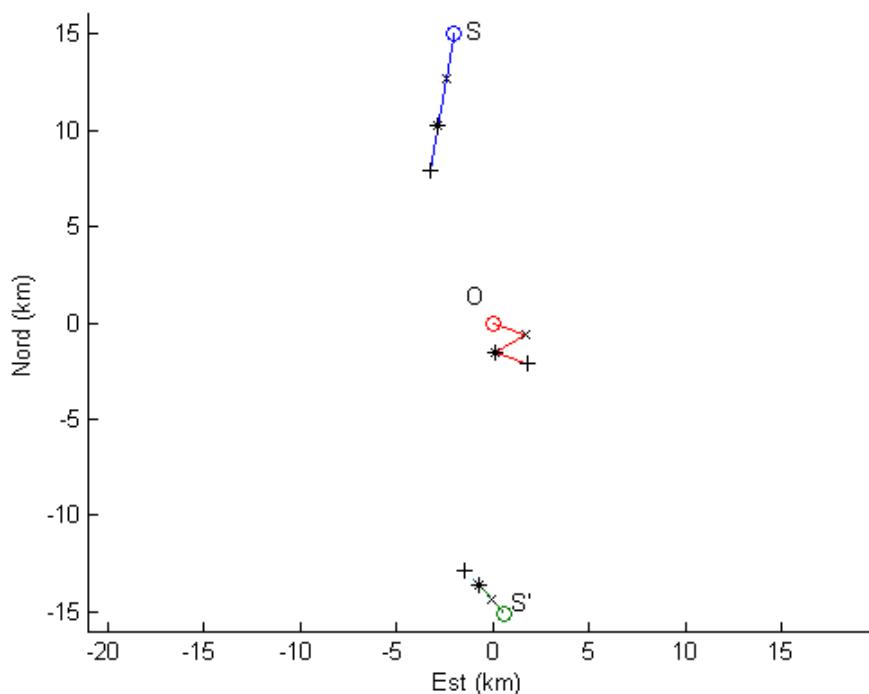


Figure 35 : Cas inobservable ( $V_3 = V_1$ ).

### 3.2.4 Observateur en mouvement circulaire uniforme

La trajectoire de l'observateur ici considérée est définie par la relation (1) (cf. p. 32).

#### Propriété 12

*Si l'observateur est en CT, alors la trajectoire de toute source en CV est observable par mesures de distance.*

#### Preuve :

Soient  $S$  la source d'intérêt et  $S'$  une éventuelle seconde source détectée aux mêmes distances. Les positions respectives de l'observateur, de la source  $S$  et de la source  $S'$  à l'instant  $t$  sont données par :

$$P_o(t) = \begin{bmatrix} x_o(t) \\ y_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + \rho_c \begin{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) \\ \cos(\omega t + \varphi) \end{bmatrix},$$

$$P_s(t) = \begin{bmatrix} x_s(t) \\ y_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s(0) \\ y_s(0) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \end{bmatrix} \text{ et } P_{s'}(t) = \begin{bmatrix} x_{s'}(t) \\ y_{s'}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{s'}(0) \\ y_{s'}(0) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \dot{x}_{s'} \\ \dot{y}_{s'} \end{bmatrix}.$$

Pour simplifier la démonstration et sans perte de généralité, nous nous plaçons dans le cas

où  $\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Nous avons,  $\forall t$  :

- $R^2(t) = [x_s(t) - x_o(t)]^2 + [y_s(t) - y_o(t)]^2$  pour  $S$ ,
- et  $R^2(t) = [x_{s'}(t) - x_o(t)]^2 + [y_{s'}(t) - y_o(t)]^2$  pour  $S'$ .

L'observateur étant en CT, le membre relatif à  $S$  est :

$$R^2(t) = [x_s(0) + t \dot{x}_s - \rho_c \sin(\omega t + \varphi)]^2 + [y_s(0) + t \dot{y}_s - \rho_c \cos(\omega t + \varphi)]^2, \forall t.$$

Celui relatif à  $S'$  est identique.

Développons ensuite ces deux membres, nous obtenons respectivement pour  $S$  et  $S'$  :

- $x_s^2(0) + y_s^2(0) + \rho_c^2 + t^2(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + 2t[\dot{x}_s x_s(0) + \dot{y}_s y_s(0)] - 2\rho_c[x_s(0) \sin(\omega t + \varphi) + y_s(0) \cos(\omega t + \varphi)] - 2t\rho_c[\dot{x}_s \sin(\omega t + \varphi) + \dot{y}_s \cos(\omega t + \varphi)], \forall t.$
- $x_{s'}^2(0) + y_{s'}^2(0) + \rho_c^2 + t^2(\dot{x}_{s'}^2 + \dot{y}_{s'}^2) + 2t[\dot{x}_{s'} x_{s'}(0) + \dot{y}_{s'} y_{s'}(0)] - 2\rho_c[x_{s'}(0) \sin(\omega t + \varphi) + y_{s'}(0) \cos(\omega t + \varphi)] - 2t\rho_c[\dot{x}_{s'} \sin(\omega t + \varphi) + \dot{y}_{s'} \cos(\omega t + \varphi)], \forall t.$

Comme  $\rho_C \neq 0$ , cette égalité est vérifiée  $\forall t$  si les conditions suivantes le sont :

$$\begin{cases} x_{S'}^2(0) + y_{S'}^2(0) = x_S^2(0) + y_S^2(0) \\ \dot{x}_{S'}^2 + \dot{y}_{S'}^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 \neq 0 \\ \dot{x}_{S'} x_{S'}(0) + \dot{y}_{S'} y_{S'}(0) = \dot{x}_S x_S(0) + \dot{y}_S y_S(0) \\ x_{S'}(0) \sin(\omega t + \varphi) + y_{S'}(0) \cos(\omega t + \varphi) = x_S(0) \sin(\omega t + \varphi) + y_S(0) \cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{x}_{S'} \sin(\omega t + \varphi) + \dot{y}_{S'} \cos(\omega t + \varphi) = \dot{x}_S \sin(\omega t + \varphi) + \dot{y}_S \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}, \forall t. \quad (35)$$

La première égalité du système (35) implique que  $\|P_S(0)\|^2 = \|P_{S'}(0)\|^2$ , et nous permet d'obtenir les positions à l'instant initial des sources  $S$  et  $S'$  :

$$P_S(0) = \|P_S(0)\| \begin{bmatrix} \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \text{ et } P_{S'}(0) = \|P_S(0)\| \begin{bmatrix} \sin \gamma' \\ \cos \gamma' \end{bmatrix}.$$

La seconde égalité du système (35) entraîne  $\|V_S\|^2 = \|V_{S'}\|^2$ , et nous permet d'exprimer la vitesse de  $S$  et  $S'$  :

$$V_S = \|V_S\| \begin{bmatrix} \sin h \\ \cos h \end{bmatrix} \text{ et } V_{S'} = \|V_S\| \begin{bmatrix} \sin h' \\ \cos h' \end{bmatrix}.$$

La quatrième égalité du système (35) peut alors s'exprimer de la manière suivante

$$\begin{cases} \sin \gamma' \sin(\omega t + \varphi) + \cos \gamma' \cos(\omega t + \varphi) = \sin \gamma \sin(\omega t + \varphi) + \cos \gamma \cos(\omega t + \varphi) \\ \cos(\omega t + \varphi - \gamma') = \cos(\omega t + \varphi - \gamma) \end{cases}, \forall t.$$

Dans ce cas, il existe deux possibilités :

- Soit  $\omega t + \varphi - \gamma' = \omega t + \varphi - \gamma$  et alors  $\gamma' = \gamma$ , ce qui implique que  $P_{S'}(0) = P_S(0)$ .
- Soit  $\omega t + \varphi - \gamma' = -\omega t - \varphi + \gamma$ , ce qui est impossible.

La cinquième égalité du système (35) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{cases} \sin h' \sin(\omega t + \varphi) + \cos h' \cos(\omega t + \varphi) = \sin h \sin(\omega t + \varphi) + \cos h \cos(\omega t + \varphi) \\ \cos(\omega t + \varphi - h') = \cos(\omega t + \varphi - h) \end{cases}, \forall t.$$

De la même manière que précédemment, on en déduit  $h' = h$ , soit  $V_S = V_{S'}$ .

Par conséquent les trajectoires de  $S$  et  $S'$  sont identiques.

■

### 3.2.5 Trajectoire de l'observateur composée de tronçons dont l'un au moins est un arc de cercle

La propriété qui suit est une conséquence immédiate de la propriété 12 (§3.2.4, p. 94).

#### Propriété 13

*Si l'observateur a une trajectoire composée de tronçons, chacun parcouru à vitesse constante, dont l'un au moins est un arc de cercle alors la trajectoire de toute source en CV est observable par mesures de distance.*

**Remarque :** une trajectoire composée d'un premier leg, suivi par un arc de cercle puis d'un second leg (les 3 tronçons sont parcourus à une même vitesse) assure donc l'observabilité de la trajectoire de n'importe quelle source en CV. En outre, ce modèle de cinématique s'apparente d'avantage à celle suivie dans la réalité par les plates-formes, contrairement au premier modèle que nous avons proposé au §3.2.2 ,p. 88.

## 3.3 Borne de Cramér-Rao et estimateur

Nous débutons par la présentation du calcul de la FIM en RO-TMA et rappelons celui en BO-TMA. Ensuite, nous établissons le lien existant entre ces deux FIM. Nous montrons que la singularité de la FIM en RO-TMA n'entraîne pas l'inobservabilité de la trajectoire source, contrairement au cas de la BO-TMA. Nous terminons par la présentation de l'algorithme d'estimation permettant de calculer le MLE que nous avons retenu.

### 3.3.1 FIM en RO-TMA et FIM en BO-TMA

#### 3.3.1.1 FIM en RO-TMA

En RO-TMA, la FIM relative à  $X$  est donnée par la formule suivante :

$$F(X|R_m) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_R^2(t_k)} \Phi^T(t_k, t^*) \nabla_{X_k} R(X, t_k) \nabla_{X_k}^T R(X, t_k) \Phi(t_k, t^*),$$

avec

$$\bullet \quad \Phi(t_k, t^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (t_k - t^*) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (t_k - t^*) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (la matrice de transition), aussi notée } \Phi_k,$$

- $\nabla_{X_k} R(X, t_k) = [\sin \theta(t_k) \quad \cos \theta(t_k) \quad 0 \quad 0]^T$  le gradient de la mesure sans bruit de la distance par rapport au vecteur  $X_k = [x_s(t_k) \quad y_s(t_k) \quad \dot{x}_s \quad \dot{y}_s]^T$ ,
- et  $\sigma_R^2(t_k)$  la variance du bruit des mesures de distance.

Elle s'écrit sous la forme compacte suivante

$$F(X|R_m) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_R^2(t_k)} \Phi_k^T W_k W_k^T \Phi_k,$$

avec  $W_k = [\sin \theta(t_k) \quad \cos \theta(t_k) \quad 0 \quad 0]^T$ .

**Remarque :** Dans le cas où il existe une source fantôme, la matrice d'information de Fisher relative à  $\tilde{X}$  (définissant la trajectoire de la source fantôme) est donnée par une formule similaire. Les bornes de Cramér-Rao de  $X$  et de  $\tilde{X}$ , notées respectivement  $B(X|R_m)$  et  $B(\tilde{X}|R_m)$ , sont les matrices inverses de ces FIM. Elles sont liées par :

$$B(\tilde{X}|R_m) = \Sigma B(X|R_m) \Sigma,$$

avec  $\Sigma$  définie par la formule (34) (cf. p. 89).

### 3.3.1.2 FIM en BO-TMA

Nous rappelons que la FIM relative à  $X$ , pour la BO-TMA [Nardone84], est donnée par la formule suivante :

$$F(X|\theta_m) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_\theta^2(t_k)} \Phi^T(t_k, t^*) \nabla_{X_k} \theta(X, t_k) \nabla_{X_k}^T \theta(X, t_k) \Phi(t_k, t^*),$$

avec

- $\nabla_{X_k} \theta(X, t_k) = \frac{1}{R(t_k)} [\cos \theta(t_k) \quad -\sin \theta(t_k) \quad 0 \quad 0]^T$  le gradient de l'équation de mesure par rapport au vecteur  $X_k$ , que l'on peut mettre sous la forme :

$$\nabla_{X_k} \theta(X, t_k) = \frac{1}{R(t_k)} V_k, \text{ avec } V_k = [\cos \theta(t_k) \quad -\sin \theta(t_k) \quad 0 \quad 0]^T,$$

- et  $\sigma_\theta^2(t_k)$ , la variance du bruit des mesures d'azimut.

La FIM s'écrit alors sous la forme compacte

$$F(X|\theta_m) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_\theta^2(t_k) R^2(t_k)} \Phi_k^T V_k V_k^T \Phi_k.$$

### 3.3.1.3 Lien entre les deux FIM

Les expressions compactes des deux FIM nous permettent d'établir le résultat suivant :

**Proposition**

$$\text{Rang}\{F(X|\theta_m)\} = \text{Rang}\{F(X|R_m)\}.$$

**Preuve :**

La preuve se déroule en deux étapes :

- Etape n°1 :

Nous introduisons les deux matrices auxiliaires :

$$F_B = \sum_{k=1}^N \Phi_k^T V_k V_k^T \Phi_k \quad \text{et} \quad F_R = \sum_{k=1}^N \Phi_k^T W_k W_k^T \Phi_k.$$

$$\text{On vérifie que } F_B = \Pi F_R \Pi^T, \text{ avec } \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque  $\Pi$  est inversible,  $F_B$  et  $F_R$  sont de même rang.

- Etape n°2 :

On montre que  $\text{Rang}\{F(X|\theta_m)\} = \text{Rang}(F_B)$  et que  $\text{Rang}\{F(X|R_m)\} = \text{Rang}(F_R)$ .

D'où la proposition.

■

De cette proposition, nous tirons la propriété suivante :

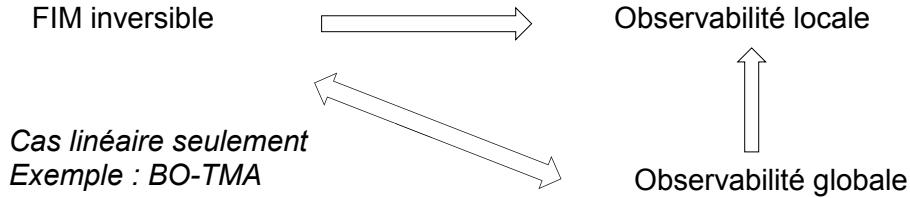
**Propriété 14**

*En RO-TMA, lorsque l'observateur a une trajectoire composée de deux legs et que les azimuts sont constants au cours de ce scénario, la matrice d'information de Fisher n'est pas inversible (alors que la trajectoire de la source en CV est observable).*

**Remarque :** On sait que l'inversibilité de la FIM n'est pas une preuve d'observabilité *en toute généralité*. En effet, si la FIM est inversible, alors le système est localement observable, mais la réciproque est fausse. A l'inverse, si le système est observable, la FIM peut être singulière localement.

Dans le cas linéaire seul, inversibilité de la FIM et observabilité sont équivalentes, car la FIM est semblable au grammien d'observabilité.

La situation se résume par le schéma suivant :



En BO-TMA, le système peut se mettre sous une forme linéaire. Donc, l'analyse de l'observabilité peut se faire en étudiant la FIM (voir [LeCadre97]).

En RO-TMA, il n'existe pas une telle transformation. Donc les conclusions quant à l'observabilité ne sont pas liées à l'inversibilité de la FIM.

C'est la raison pour laquelle la différence entre les conclusions relatives à l'observabilité en BO-TMA et RO-TMA n'est pas en contradiction avec le fait que  $\text{Rang}\{F(X|\theta_m)\} = \text{Rang}\{F(X|R_m)\}$ .

### 3.3.2 Estimateur du maximum de vraisemblance

Comme nous l'avons déjà rappelé auparavant, c'est la position de la source à l'instant de la dernière mesure qui intéresse l'utilisateur de trajectographie, nous prenons donc comme instant de référence  $t^* = t_N$ .

Là aussi, nous avons choisi l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) [Nardone84], qui est l'argument minimal du critère quadratique suivant :

$$C(X) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_R^2(t_k)} [R_m(t_k) - R(X, t_k)]^2.$$

La procédure numérique employée afin de calculer l'estimé dans le cadre de la RO-TMA est la méthode de Gauss-Newton. La valeur du critère  $C(\hat{X})$  est soumise au test de validation défini au chapitre précédent (à savoir que  $\hat{X}$  est accepté si  $C(\hat{X})$  est inférieur à  $(N-4) + 3\sqrt{2N-8}$ ).

Le choix d'un point de départ  $X_{init}$  de l'algorithme de minimisation est fait de la façon suivante :

- Un premier cercle de rayon  $R_m(t_1)$  est défini par rapport à la position initiale de l'observateur  $P_O(t_1)$ ,

- Un second cercle de rayon  $R_m(t_N)$  est défini par rapport à la position finale de l'observateur  $P_O(t_N)$ ,
- $K$  points sont retenus sur chacun des deux cercles, à savoir les positions-candidates de la source sur ces deux cercles données par :
$$P_{Init,n}(t_1) = P_O(t_1) + R_m(t_1) \begin{bmatrix} \sin(2n\pi/K) \\ \cos(2n\pi/K) \end{bmatrix} \text{ et } P_{Init,n}(t_N) = P_O(t_N) + R_m(t_N) \begin{bmatrix} \sin(-2n\pi/K) \\ \cos(-2n\pi/K) \end{bmatrix}$$
avec  $n=1, \dots, K$ ,
- A chacune des trajectoires passant par ces deux positions, correspond un vecteur d'état  $X_{Init}$  candidat à servir de vecteur d'initialisation.
- Parmi ces  $K^2$  vecteurs-candidats, ceux qui ne respectent pas le test
$$\sum_{k=1}^N \text{card} \{ |R(X_{Init}, t_k) - R_m(t_k)| < 3\sigma_R \} < 0.05N$$
sont écartés.
- Enfin, pour tous les vecteurs  $X_{Init}$  restants, le critère  $C(X_{Init})$  est calculé et finalement celui pour lequel la valeur du critère est la plus faible est le point de départ de l'algorithme.

Nous avons choisi  $K=18$  pour la majorité des exemples présentés au prochain paragraphe. Seul le cas observable en RO-TMA (voir §3.4.1.3, p. 105) nécessite une valeur différente, nous avons alors eu besoin de fixer  $K=144$ .

## 3.4 Simulations de Monte-Carlo

Dans ce paragraphe, nous évaluons les performances de l'estimateur au moyen de simulations de Monte Carlo (1000 tirages). Les scénarios proposés correspondent aux cinq types de situations envisagées dans l'étude de l'observabilité.

### 3.4.1 Trajectoire de l'observateur en deux legs

Le premier exemple correspond à la propriété 9 (cf. p. 88), où l'existence d'une source fantôme est établie. Le second est quant à lui consacré à un cas observable défini par la propriété 10 (azimuts constant pendant toute la durée du scénario, cf. p. 91).

### 3.4.1.1 Premier exemple : cas où il existe une source fantôme

Nous allons présenter des résultats de simulation de Monte-Carlo pour le scénario suivant :

- L'observateur démarre à l'origine du repère et se déplace à une vitesse de 3 m/s. Il suit un cap de 110° pendant 20 minutes puis un cap de 240° pendant les 10 minutes restantes. L'instant de manœuvre  $t_M$  est donc égal à 1200 secondes.
- La source d'intérêt démarre au point  $[-2 \ 15]^T$  km pour suivre un CV à une vitesse de 4 m/s et un cap de 190°.
- $N = 450$  mesures avec une période d'échantillonnage  $\Delta t = 4$  secondes.
- L'écart type de mesure  $\sigma_R(t_k)$  est fixé à 200 mètres.

Puisque dans un tel scénario, il existe une source fantôme, nous avons systématiquement calculé le symétrique de la solution retournée par l'algorithme<sup>17</sup> (à l'aide de la relation (33), p. 89) de façon à disposer de deux nuages de points : celui constitué des estimés  $\hat{X}$  de la source d'intérêt et celui constitué des estimés  $\hat{\tilde{X}}$  de la source fantôme.

Ces deux nuages de positions estimées sont représentés dans la Figure 36. La discrimination entre le nuage des estimés de  $\hat{X}$  et celui des estimés de  $\hat{\tilde{X}}$  a été réalisé au moyen des vecteurs vitesses estimées<sup>18</sup>.

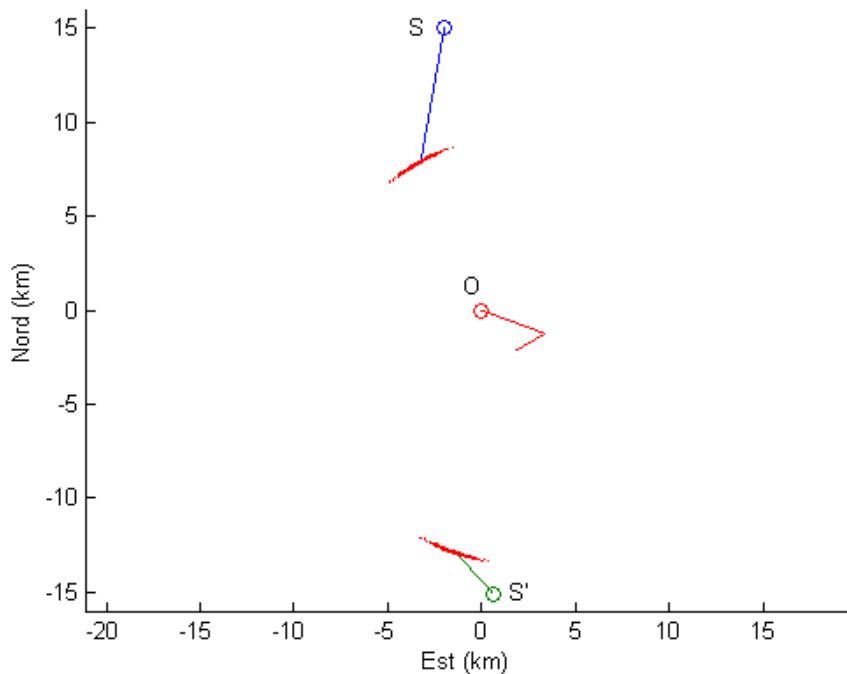


Figure 36 : Scénario avec les positions estimées et reconstruites (en rouge).

<sup>17</sup> Il est impossible de savoir si l'algorithme retourne le vecteur d'état relatif à la source d'intérêt ou celui relatif à la source fantôme.

<sup>18</sup> Il existe des scénarios pour lesquels il est impossible de séparer à 100% les deux lots d'estimateurs, comme par exemple pour celui présenté à la Figure 33.

Les performances statistiques relatives à la source d'intérêt  $S$  sont synthétisées dans la Table 9. Dans le cadre de cette étude, les statistiques de l'estimateur de l'azimut  $\theta_N$  et celui de la distance  $R_N$  à l'instant final sont dans la table.

Nous ne présentons pas les performances relatives à la source fantôme  $\tilde{X}$ , car il suffit de les évaluer à l'aide de la relation (33) (comme pour le calcul de la CRLB associée au symétrique, dont la relation est donnée au paragraphe 3.3.1.1, p. 96).

**Table 9 : Performance du MLE  $\hat{X}$  (premier exemple).**

|             | Unités | Vrai   | Moyen  | Biais | $\sigma_{CRLB}$ | $\hat{\sigma}$ |
|-------------|--------|--------|--------|-------|-----------------|----------------|
| $x_S(t_N)$  | km     | -3.25  | -3.28  | 0.03  | 0.49            | 0.48           |
| $y_S(t_N)$  | km     | 7.91   | 7.88   | 0.03  | 0.27            | 0.27           |
| $\dot{x}_S$ | m/s    | -0.70  | -0.69  | 0.01  | 0.24            | 0.24           |
| $\dot{y}_S$ | m/s    | -3.94  | -3.95  | 0.01  | 0.15            | 0.15           |
| $R_N$       | km     | 11.24  | 11.04  | 0.20  | 0.031           | 0.032          |
| $\theta_N$  | °      | -26.77 | -26.99 | 0.22  | 1.98            | 2.82           |

L'algorithme converge en moyenne après 8 itérations et la totalité des estimations renvoyées par l'algorithme ont été retenues. Nous pouvons observer que le biais sur toutes les composantes est négligeable et que l'écart-type empirique pour chacune des composantes est proche de celui calculé à partir de la CRLB. Nous pouvons donc en conclure que l'estimateur est efficace pour ce scénario.

### 3.4.1.2 Construction de la région de confiance :

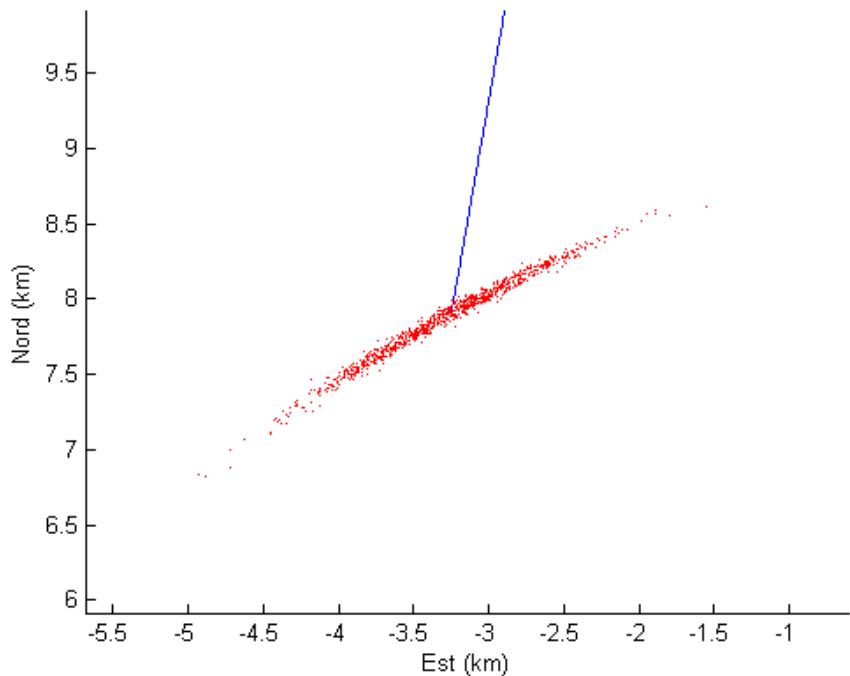
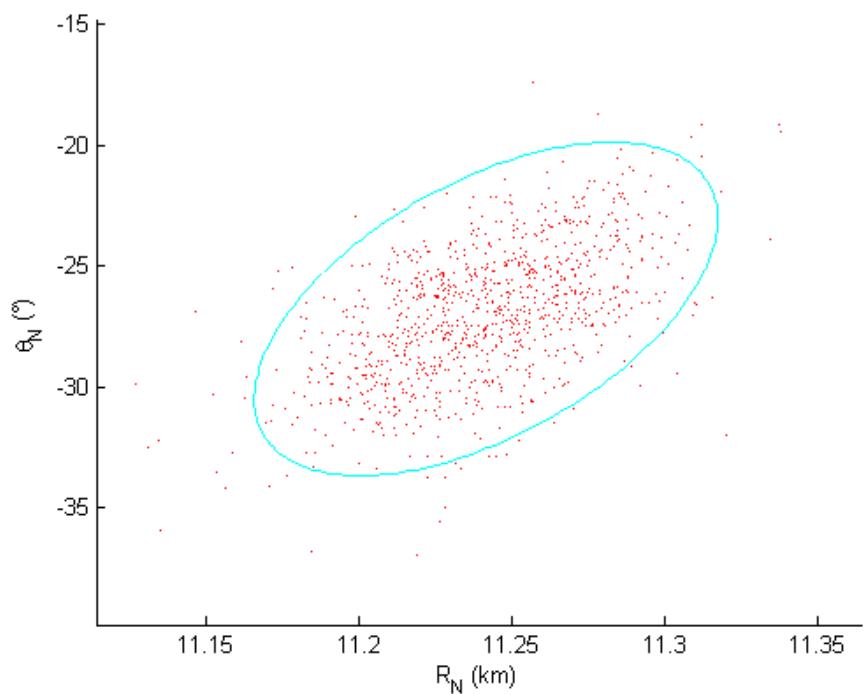
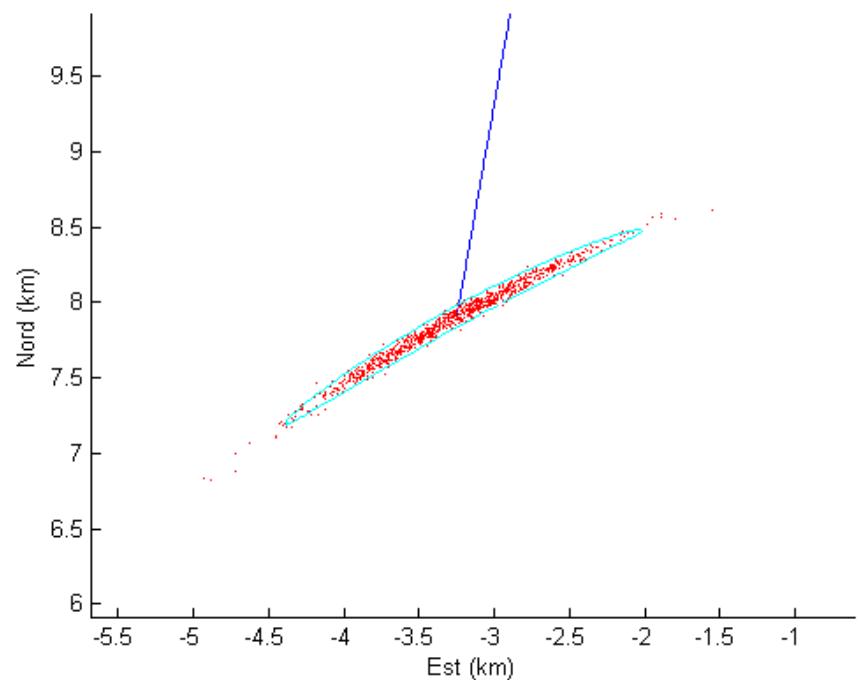


Figure 37 : Zoom sur le nuage de points relatifs à  $\hat{X}$  de la Figure 36.

La Figure 37 nous permet de constater que la forme du nuage des estimés des positions à l'instant final ne s'inscrit manifestement pas dans une ellipse (un constat similaire a été fait dans le contexte de la trajectographie par mesures d'angle, voir [Passerieux95]). Aussi, avons-nous construit une région de confiance non elliptique, selon la méthode suivante : Ayant fait le constat qu'en coordonnées polaires, les estimés en position forment un nuage qui s'inscrit dans l'ellipse de confiance calculée à partir de la FIM (Figure 38), nous projetons dans le plan des coordonnées cartésiennes la frontière de cette ellipse et nous obtenons ainsi le domaine de confiance en forme de croissant de lune, présenté par la Figure 39, qui délimite très fidèlement 95% des estimés.



**Figure 38 : Ellipse de confiance et positions estimées, en coordonnées polaires.**



**Figure 39 : Région de confiance et positions estimées, en coordonnées cartésiennes.**

### 3.4.1.3 Deuxième exemple : cas observable

Dans cet exemple, le défilement angulaire est nul pendant la totalité du scénario (voir Figure 40), il est défini tel que:

- L'observateur suit un premier leg durant 6 mn 40 s et le second pendant 19 mn 20 s. La durée totale du scénario est donc de 26 minutes. L'instant de manœuvre  $t_M$  est égal à 400 secondes.
- Sa position initiale est  $[-0.463 \quad 0.606]^T$  km. Sur le premier leg, l'observateur a une vitesse de 4m/s et son cap initial est de 112.5 °. Sur le second leg, sa vitesse est de 3.21 m/s et son cap est de 241.6°.
- La source en CV démarre à la position  $[4.812 \quad 0.606]^T$  km ; sa vitesse est de 3,37 m/s et son cap est de 117°.
- $N = 390$  mesures avec une période d'échantillonnage  $\Delta t = 4$  secondes.
- L'écart type de mesure  $\sigma_R(t_k)$  est fixé à 50 mètres (un écart-type supérieur aurait conduit à un estimateur trop dispersé).

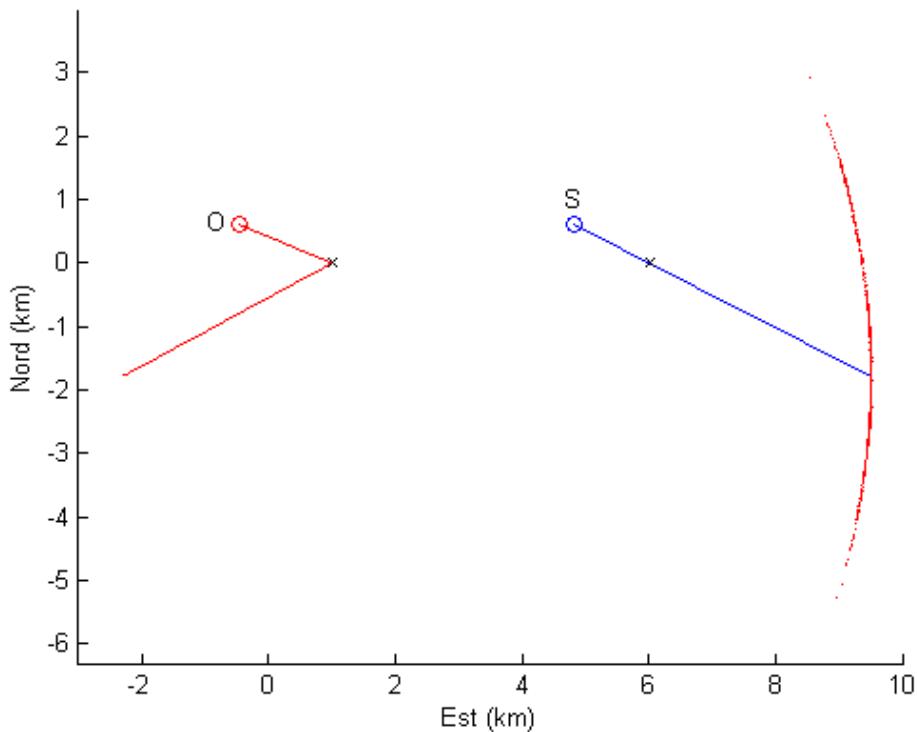


Figure 40 : Résultat d'estimation pour un cas observable.

La totalité des estimations renvoyées par l'algorithme ont été retenues par le test et la convergence a lieu après 17 itérations en moyenne. La FIM n'étant pas inversible, la CRLB n'est pas calculable : aucune région de confiance ne peut être établie à partir de celle-ci. La Table 10 résume les performances du MLE sur ce scénario.

**Table 10 : Performance du MLE  $\hat{X}$  (deuxième exemple).**

|             | Unités | Vrai  | Moyen | Biais | $\hat{\sigma}$ |
|-------------|--------|-------|-------|-------|----------------|
| $x_s(t_N)$  | km     | 9.49  | 9.41  | 0.08  | 0.14           |
| $y_s(t_N)$  | km     | -1.78 | -1.48 | 0.30  | 1.42           |
| $\dot{x}_s$ | m/s    | 3.00  | 2.96  | 0.04  | 0.97           |
| $\dot{y}_s$ | m/s    | -1.53 | -1.20 | 0.33  | 0.74           |
| $R_N$       | km     | 11.77 | 11.77 | 0.00  | 0.007          |
| $\theta_N$  | °      | 90.04 | 88.58 | 1.46  | 7.12           |

**Remarque :** l'algorithme simplex [Nelder65] a aussi été utilisé pour ce scénario et les résultats obtenus sont similaires à ceux présentés dans ce paragraphe.

### 3.4.2 Trajectoire de l'observateur composée de 3 legs

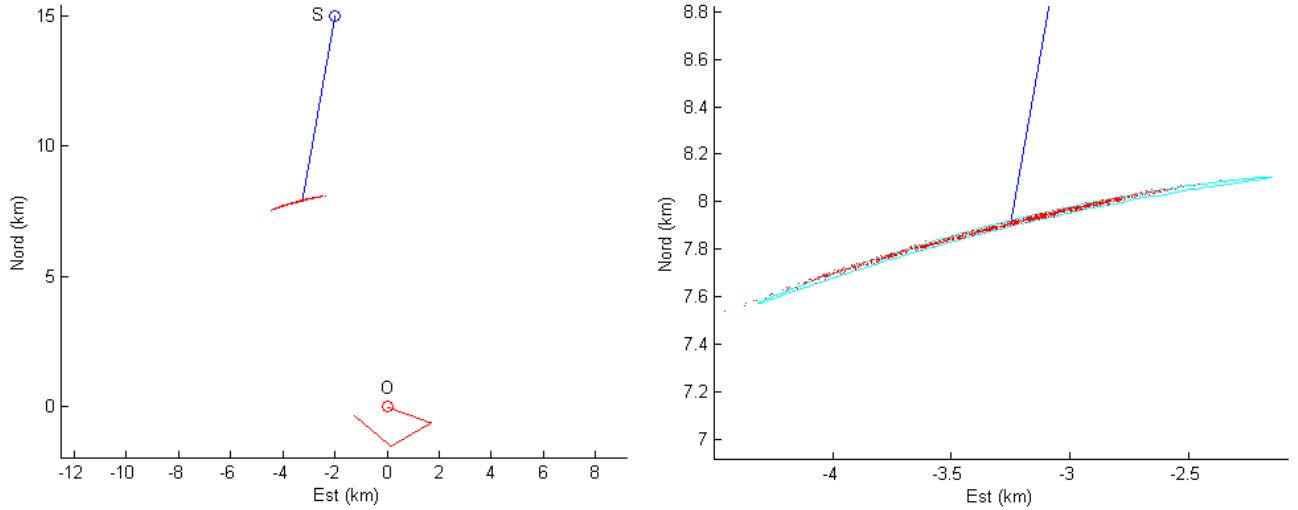
La trajectoire de la source est identique à celle définie au §3.4.1.1. L'observateur suit une trajectoire composée de trois legs et démarrant à l'origine, à vitesse constante, telle que :

- Les instants de manœuvre  $t_{M1}$  et  $t_{M2}$  sont respectivement égaux à 600 secondes et 1200 secondes,
- Les caps successivement suivis par l'observateur sont  $110^\circ$ ,  $240^\circ$  et  $310^\circ$ ,
- La vitesse de l'observateur est constante tout au long du scénario et vaut 3 m/s.

L'écart-type du bruit de mesure  $\sigma_R(t_k)$  est égal à 50 m, la durée du scénario est de 30 min et la période d'échantillonnage  $\Delta t$  reste égale à 4 secondes (soit  $N = 450$ ).

D'après la propriété 11 (cf. p. 92), l'observabilité de la trajectoire de la source pour ce scénario est assurée ( $V_1 \neq V_3$ ).

La Figure 41 illustre le scénario avec les estimés à gauche et à droite un agrandissement du tracé de la région de confiance et des estimés est donné.



**Figure 41 : Scénario avec les positions finales estimées (à droite) et zoom sur le tracé de la région de confiance (à gauche), l'observateur parcourt une trajectoire composée de 3 legs.**

Pour les 997 estimations retenues, l'algorithme converge après 12 itérations en moyenne.

**Table 11 : Performances du MLE  $\hat{X}$  (troisième exemple).**

|             | Unités | Vrai   | Moyen  | Biais | $\sigma_{BCR}$ | $\hat{\sigma}$ |
|-------------|--------|--------|--------|-------|----------------|----------------|
| $x_S(t_N)$  | km     | -3.25  | -3.29  | 0.04  | 0.44           | 0.39           |
| $y_S(t_N)$  | km     | 7.91   | 7.89   | 0.02  | 0.11           | 0.11           |
| $\dot{x}_S$ | m/s    | -0.70  | -0.71  | 0.01  | 0.27           | 0.31           |
| $\dot{y}_S$ | m/s    | -3.94  | -3.95  | 0.01  | 0.07           | 0.07           |
| $R_N$       | km     | 8.50   | 8.48   | 0.02  | 0.005          | 0.007          |
| $\theta_N$  | °      | -13.55 | -13.86 | 0.31  | 2.82           | 2.77           |

La Table 11 nous permet de constater que l'estimateur est efficace pour ce scénario.

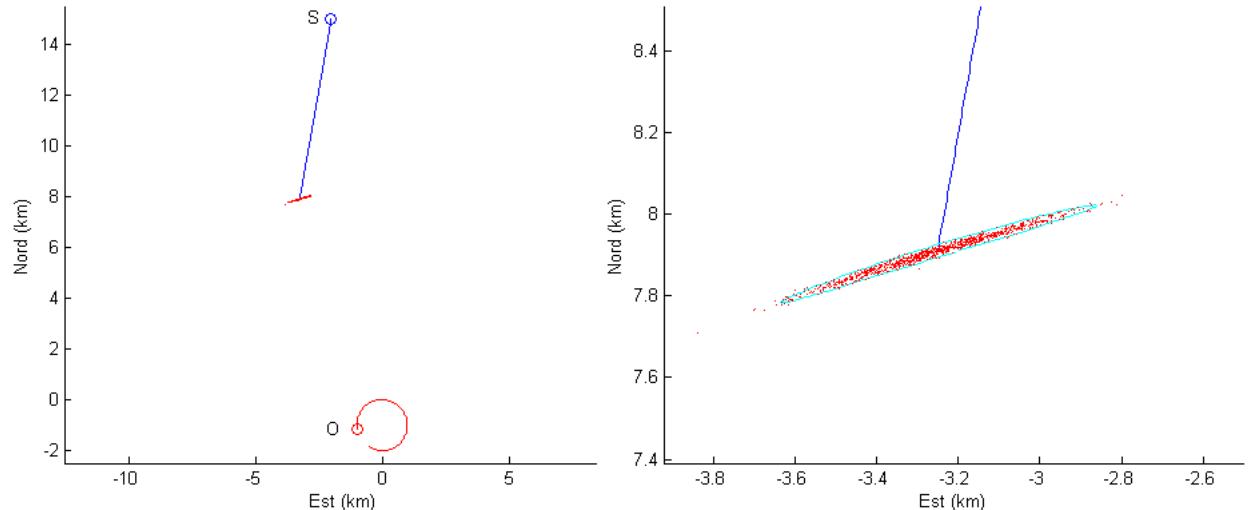
### 3.4.3 Observateur en mouvement circulaire uniforme

La source suit la même trajectoire que celle décrite dans le premier exemple (voir §3.4.1.1). Les paramètres de la trajectoire de l'observateur en mouvement circulaire uniforme sont les suivants :

- le centre de l'arc de cercle est situé aux coordonnées  $[0 \ -1]^T$  km,
- le rayon  $\rho_C$  est égal à 1 km,
- l'angle initial  $\varphi$  est égal à  $260^\circ$ ,
- le cercle est parcouru dans le sens « horaire » ( $\omega > 0$ ),
- la vitesse de l'observateur est constante égale à 3 m/s,
- le nombre de mesures  $N$  vaut 450. La période d'échantillonnage  $\Delta t$  reste égale à 4 secondes. La durée totale du scénario est de 30 minutes,

- l'écart-type du bruit des mesures  $\sigma_R(t_k)$  est égal à 50 m.

Dans la propriété 16 (cf. p. 94), il est établi que si l'observateur est en CT alors l'observabilité est assurée. La Figure 42 présente le scénario et les estimés renvoyés par l'algorithme.



**Figure 42 : Scénario avec les positions finales estimées (à droite) et zoom sur le tracé de la région de confiance (à gauche), l'observateur est en CT.**

L'algorithme converge après 9 itérations en moyenne ; la totalité des résultats ont été validés par le test d'acceptation. La Table 12 présente les performances du MLE, on peut en conclure qu'il est efficace pour ce scénario.

**Table 12 : Performances du MLE  $\hat{X}$  (quatrième exemple).**

|             | Unités | Vrai   | Moyen  | Biais | $\sigma_{BCR}$ | $\hat{\sigma}$ |
|-------------|--------|--------|--------|-------|----------------|----------------|
| $x_S(t_N)$  | km     | -3.25  | -3.26  | 0.01  | 0.16           | 0.16           |
| $y_S(t_N)$  | km     | 7.91   | 7.91   | 0.00  | 0.05           | 0.05           |
| $\dot{x}_S$ | m/s    | -0.70  | -0.70  | 0.00  | 0.10           | 0.10           |
| $\dot{y}_S$ | m/s    | -3.94  | -3.94  | 0.00  | 0.03           | 0.03           |
| $R_N$       | km     | 10.15  | 10.15  | 0.00  | 0.007          | 0.007          |
| $\theta_N$  | °      | -15.69 | -15.74 | 0.05  | 0.82           | 0.96           |

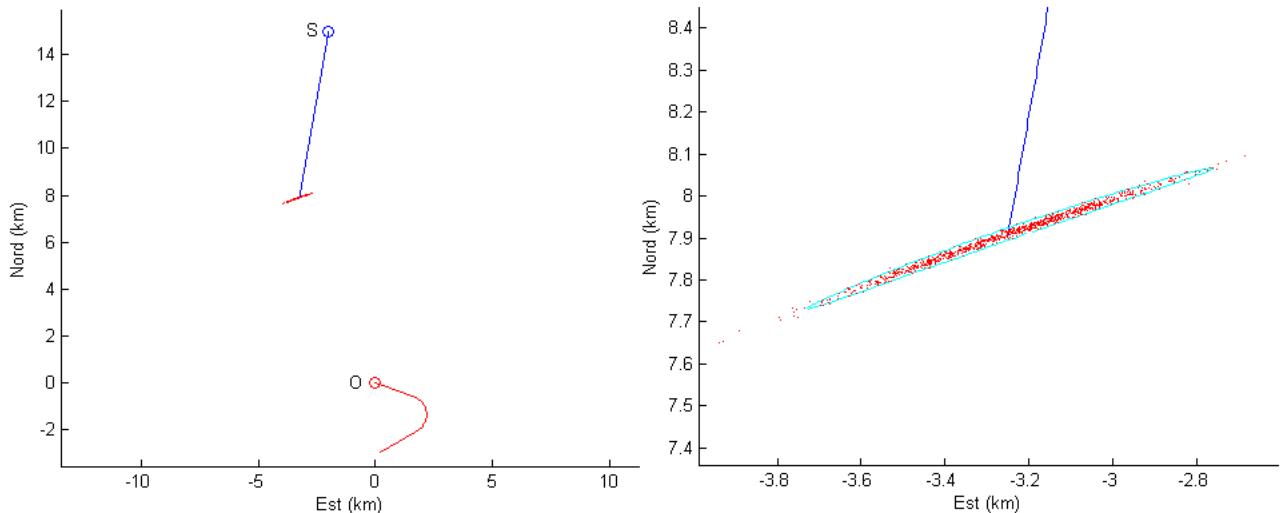
**Remarque :** Nous avons constaté que lorsque l'écart-type du bruit de mesure est plus important ( $\sigma_R(t_k) > 100 \text{ m}$ ), il peut arriver que des solutions relatives correspondant à des minima locaux apparaissent alors que l'observabilité est assurée (par exemple lorsque l'observateur est en CT ou que sa trajectoire est composée de trois legs).

### 3.4.4 Observateur parcourant une trajectoire composée de deux legs reliés par un arc de cercle

Pour ce dernier exemple, le scénario mis en œuvre est le suivant :

- l'observateur démarre à l'origine,
- sa vitesse est de 3 m/s et les caps qu'il suit sont  $h_{O,1} = 110^\circ$  puis  $h_{O,2} = 240^\circ$ ,
- les instants de manœuvre  $t_{M1}$  et  $t_{M2}$  sont égaux à 600 secondes et 1200 secondes, respectivement. La durée de sa manœuvre est donc de 600 secondes,
- la trajectoire source reste identique à celle définie pour le premier exemple (§3.4.1.1, p. 101),
- le nombre de mesures  $N$  vaut 450 et la période d'échantillonnage  $\Delta t$  est toujours égale à 4 secondes (le scénario dure donc 30 minutes).

Ce modèle de cinématique suivi par l'observateur assure l'observabilité de la trajectoire de la source (propriété 13, p. 96). La Figure 43 illustre les résultats obtenus pour un écart-type du bruit de mesure  $\sigma_R(t_k)$  égal à 50 m.



**Figure 43 : Scénario avec les positions finales estimées (à droite) et zoom sur le tracé de la région de confiance (à gauche), l'observateur suit une trajectoire composée de deux legs reliés par un arc de cercle.**

Cette fois, la procédure numérique nécessite 28 itérations avant de converger ; tous les estimés ont été acceptés. Nous constatons à la lecture de la Table 13 que l'estimateur est efficace pour ce scénario.

Table 13 : Performances du MLE  $\hat{X}$  (cinquième exemple).

|             | Unités | Vrai   | Moyen  | Biais | $\sigma_{BCR}$ | $\hat{\sigma}$ |
|-------------|--------|--------|--------|-------|----------------|----------------|
| $x_s(t_N)$  | km     | -3.25  | -3.25  | 0.00  | 0.19           | 0.20           |
| $y_s(t_N)$  | km     | 7.91   | 7.90   | 0.01  | 0.07           | 0.07           |
| $\dot{x}_s$ | m/s    | -0.70  | -0.69  | 0.01  | 0.13           | 0.14           |
| $\dot{y}_s$ | m/s    | -3.94  | -3.94  | 0.00  | 0.04           | 0.05           |
| $R_N$       | km     | 11.40  | 11.34  | 0.06  | 0.007          | 0.007          |
| $\theta_N$  | °      | -17.75 | -17.67 | 0.08  | 0.89           | 1.07           |

### 3.5 Exemple de l'utilisation de la RO-TMA : calibration d'antenne

Terminons ce chapitre avec un exemple d'application de la RO-TMA : la calibration d'une antenne. Le problème a été décrit au §1.3.2 (p. 28). Pour cela nous définissons le scénario présenté à la Figure 44, tel que :

- L'observateur suit un CT en sens « horaire », sa vitesse est de 4 m/s, le rayon du cercle  $\rho_C$  est égal à 1 km et l'angle initial  $\varphi$  est de  $0^\circ$ .
- La source (ici le concours) démarre aux coordonnées  $[-5 \ 10]^T$  km, sa vitesse et son cap sont respectivement égaux à 2 m/s et  $90^\circ$ .
- La cadence de mesure est de 4 secondes et la durée du scénario est de 3104 secondes (soit 52 minutes environ). Le nombre de mesure est donc de 777.
- L'écart-type du bruit des mesures  $\sigma_R(t_k)$  est égal à 5 m.

Nous avons effectué 1000 tirages de Monte-Carlo et 994 résultats ont été validés par le test d'acceptation. L'estimé  $\hat{X}_l$  est le  $l^{\text{ème}}$  résultat validé pour  $l = 1, 2, \dots, 994$ .

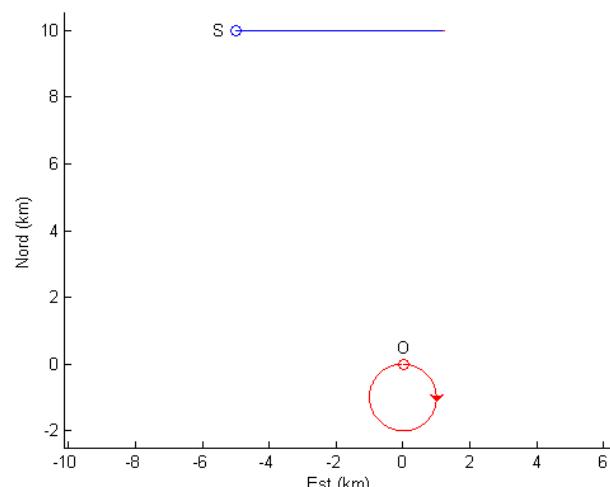


Figure 44 : Scénario de calibration d'antenne.

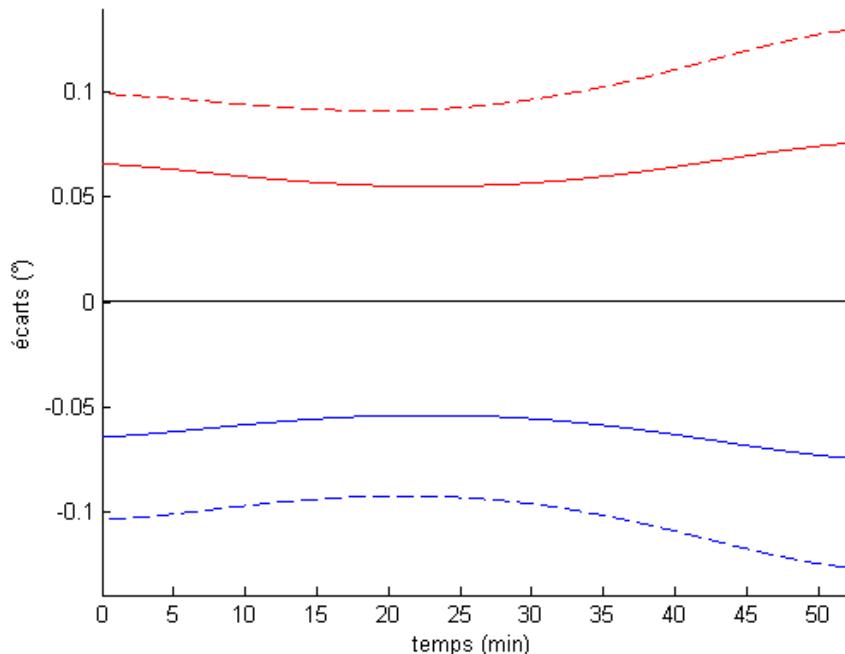
Pour chaque estimé  $\hat{X}_l$  et chaque instant  $t_k$ , nous calculons la différence :

$$\Delta\theta_l(t_k) = \theta(X, t_k) - \theta(\hat{X}_l, t_k), \quad k = 1, 2, \dots, 777.$$

Puis nous calculons la moyenne, l'écart-type empirique et les enveloppes supérieures et inférieures. Ces grandeurs sont respectivement définies, pour  $k = 1, 2, \dots, 777$ , par :

- $\overline{\Delta\theta(t_k)} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \Delta\theta_l(t_k),$
- $\hat{\sigma}(t_k) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L [\Delta\theta_l(t_k) - \overline{\Delta\theta(t_k)}]^2},$
- $M(t_k) = \text{Max}_l \{\Delta\theta_l(t_k)\},$
- $m(t_k) = \min_l \{\Delta\theta_l(t_k)\}.$

Nous traçons ensuite sur la Figure 45, les trois courbes  $\overline{\Delta\theta(t_k)}$ ,  $M(t_k)$ ,  $m(t_k)$  et les courbes à  $\pm 2\hat{\sigma}(t_k)$  en fonction de  $t_k$ .



**Figure 45 : Tracés de  $\overline{\Delta\theta(t_k)}$  (continue noire),  $M(t_k)$  (discontinue rouge),  $m(t_k)$  (discontinue bleue), écart moyen à  $+2\hat{\sigma}(t_k)$  et  $-2\hat{\sigma}(t_k)$  (continues respectivement rouge et bleue).**

Sur la totalité des résultats validés, il ressort que :

- La valeur moyenne de  $\overline{\Delta\theta(t_k)}$  pour  $k = 1, 2, \dots, 777$  est quasiment nulle,
- Les courbes  $M(t_k)$  et  $m(t_k)$ , pour  $k = 1, 2, \dots, 777$ , sont presque symétriques par rapport à  $\overline{\Delta\theta(t_k)}$ ,
- La différence maximale atteinte est de  $0.13^\circ$ ,
- la valeur maximale de l'écart-type  $\hat{\sigma}(t_k)$  est égale à  $0.0375^\circ$ .

Ces résultats confirment l'intérêt d'un tel procédé de calibration d'antenne basé sur la ROTMA, dont le but est de corriger le biais potentiellement existant sur les mesures d'azimut réalisées par  $O$ .

### 3.6 Bilan du chapitre

Nous venons de proposer dans ce chapitre une méthode non-réursive de trajectographie passive par mesures de distance. La question de l'observabilité de la trajectoire source a été étudiée et nous a permis de conclure que la manœuvre de l'observateur est nécessaire mais pas suffisante. En effet, sauf cas particulier, lorsque l'observateur suit une trajectoire composée de deux legs, il existe deux trajectoires correspondant aux distances mesurées. Ces deux solutions sont reliées par une symétrie qui s'apparente aux relations présentées dans le cas de mesures de fréquence seule (voir [Shensa81]).

Lorsque la trajectoire de l'observateur est composée de trois legs, il reste quelques cas particuliers où l'observabilité n'est pas assurée. Par contre, dès que la trajectoire de l'observateur contient au moins un arc de cercle, la trajectoire de la source est observable. Dans ces cas, la ROTMA se révèle efficace sur les scénarios présentés dans ce chapitre.

D'un point de vue théorique, cette étude a permis de construire des régions de confiance plus représentatives du comportement d'un estimateur qu'une simple ellipse. Elle a aussi pointé un paradoxe apparent pour le cas d'un vecteur à estimer observable alors que la matrice d'information de Fisher relative à ce dernier n'est pas inversible.

## 3.7 Annexe

### 3.7.1 Rappels sur les matrices d'isométries linéaires

Il existe deux types d'isométries linéaires dans le plan : les rotations et les symétries par rapport à une droite.

- La matrice de rotation d'angle  $\varphi$  s'écrit  $\mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$ . Son déterminant est égal à 1. L'inverse de  $\mathbf{R}_\varphi$  est sa transposée  $\mathbf{R}_\varphi^T$ .
- La matrice de symétrie par rapport à la droite d'angle  $\frac{\varphi}{2}$  s'écrit  $\mathbf{S}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}$ . Son déterminant vaut -1. L'inverse d'une matrice de symétrie est elle-même.

Enumérons quelques propriétés de ces isométries :

- Les matrices d'isométrie sont donc inversibles.
- Le produit de deux matrices de rotation est une matrice de rotation.
- Le produit de deux matrices de symétrie est une matrice de rotation.
- Le produit d'une matrice de rotation et d'une matrice de symétrie est une matrice de symétrie.
- De façon générale,  $\mathbf{S}_\varphi = \mathbf{R}_\varphi \mathbf{S}_0$ .
- Les matrices de symétrie ont deux valeurs propres réelles : -1 et +1 et deux axes propres.
- Les matrices de rotations n'ont pas de valeurs propres réelles.

### 3.7.2 Analyse de l'observabilité d'une source en mouvement rectiligne uniforme, lorsque l'observateur parcourt une trajectoire composée d'un ou deux legs

Nous utilisons pour cette étude le sens trigonométrique usuel.

Commençons par énoncer les hypothèses concernant la ou les cinématiques que peuvent adopter les mobiles et introduisons les quelques notations nécessaires.

La source est supposée rester en CV pendant toute la durée du scénario, l'équation (30) (cf. p. 86) de son mouvement peut être reformulée de la façon suivante :

$$P_S(t) = P_S(t_M) + (t - t_M)V_S .$$

Au cours de l'étude nous supposerons que l'observateur a :

- Soit une trajectoire composée d'un seul leg, définie par la relation (2) (voir p. 33), qu'il parcourt avec un vecteur vitesse constant  $V$ .
- Soit une trajectoire composée de deux legs, définie par l'équation (32) (cf. p. 88). Il est à noter que  $V_1 \neq V_2$ , ce qui signifie que soit leurs normes sont différentes, soit leurs directions le sont.

Nous définissons la position relative :  $P_r(t) = P_S(t) - P_O(t)$  soit en respectant la convention

$$\begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix} = R(t) \begin{bmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{bmatrix}, \text{ ainsi que le vecteur vitesse relative } V_r = V_S - V_O$$

(lorsque l'observateur parcourt deux legs, il y a deux vecteurs vitesse relative).

Dans la suite,  $\theta(t_M)$  (l'azimut à l'instant de manœuvre  $t_M$ ) est noté  $\theta_M$  et  $\alpha$  est l'argument du vecteur  $V_2 - V_1$  :

$$V_2 - V_1 = \|V_2 - V_1\| \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}.$$

**Remarque :**

$$R^2(t) = P_r(t)^T P_r(t).$$

### 3.7.2.1 Préambule

L'étude de l'observabilité consiste à vérifier que l'unicité de la solution de l'équation (5) (voir p. 33) est assurée, l'inconnue étant  $P_S(t)$ .

Supposons qu'il existe (éventuellement) une autre source  $S'$ , appelée source fantôme dans la suite, telle que :

$$R(t) = \|P_{S'}(t) - P_O(t)\|, \forall t \in [t_1, t_N].$$

Il nous faut donc dans un premier temps faire la liste de toutes les transformations possibles qui conservent les normes, autrement dit toutes les isométries possibles dans le plan.

Il existe deux types d'isométrie :

- les isométries non-linéaires.

Exemple : soit

$$h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2.$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \cos(x_1 - x_2) + x_2 \sin(x_1 - x_2) \\ x_1 \sin(x_1 - x_2) - x_2 \cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}.$$

L'application  $h$  est manifestement une isométrie, mais elle n'est pas linéaire.

- les isométries linéaires, qui sont les rotations ou les symétries par rapport à une droite.

Exemple :

- la rotation d'angle  $\varphi$  a pour matrice  $\mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$ .
- La symétrie par rapport à la droite d'angle  $\frac{\varphi}{2}$  a pour matrice  $\mathbf{S}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}$ . Nous noterons aussi cette symétrie par  $\mathbf{S}_w$  si  $w$  est un vecteur d'angle  $\frac{\varphi}{2}$ , il est aussi vecteur propre de  $\mathbf{S}_w$  associé à la valeur propre 1. Enfin,  $\mathbf{S}_w = \mathbf{S}_{-w}$ .

Dans le cadre de cette étude, la première question à laquelle il faut répondre est la suivante : les isométries qui échangent deux CV sont-elles linéaires ? C'est l'objet du paragraphe 3.7.2.2 dans lequel on se restreint au cas où l'observateur est lui-même en CV.

### 3.7.2.2 Cas où l'observateur est en mouvement rectiligne uniforme (preuve de la propriété 8)

Soient trois mobiles en CV : l'observateur, la source  $S$  et une autre source  $S'$ .

Soient  $P_r(t) = P_S(t) - P_O(t)$  et  $P'_r(t) = P_{S'}(t) - P_O(t)$  leurs positions respectives relatives à l'observateur, à l'instant  $t$ .

Les deux sources étant en CV, nous avons les deux vecteurs de position relative :

$$\begin{aligned} P_r(t) &= P_r(t_M) + (t - t_M)V_r, \\ P'_r(t) &= P'_r(t_M) + (t - t_M)V'_r. \end{aligned}$$

Considérons les quatre cas :

a)  $P_r(t_M)$  et  $V_r$  ne sont pas colinéaires et  $P'_r(t_M)$  et  $V'_r$  ne sont pas colinéaires.

Dans ce cas, il existe une unique matrice inversible  $\mathbf{H}$  telle que  $P'_r(t_M) = \mathbf{H}P_r(t_M)$  et  $V'_r = \mathbf{H}V_r$ . Par conséquent,  $P'_r(t) = \mathbf{H}P_r(t)$ .

En RO-TMA, nous avons

- $\|P'_r(t)\| = \|\mathbf{H}P_r(t)\| = \|P_r(t)\|$ ,
- l'ensemble des vecteurs  $\{P_r(t) = P_r(t_M) + (t - t_M)V_r, t\}$  engendre  $\mathbb{R}^2$ .

Donc la matrice  $\mathbf{H}$  est une matrice d'isométrie : c'est donc soit une rotation, soit une symétrie (Voir l'annexe 3.7.1 p. 113 pour un rappel sur les matrices d'isométrie).

b)  $P_r(t_M)$  et  $V_r$  sont colinéaires et  $P'_r(t_M)$  et  $V'_r$  sont colinéaires.

Il s'agit de deux CV engendrant un défilement angulaire nul :  $\exists t_C$  tel que  $P_r(t_C) = P'_r(t_C) = 0$ . Par conséquent,  $P_r(t) = (t - t_C)V_r$  et  $P'_r(t) = (t - t_C)V'_r$ . L'azimut est constant tout au long du scénario (voir §3.7.3, p. 125).

Dans ce cas, il existe un ensemble de matrices inversibles ou non  $\mathbf{H}$  telles que  $P'_r(t_M) = \mathbf{H}P_r(t_M)$  et  $V'_r = \mathbf{H}V_r$ . Par conséquent,  $P'_r(t) = \mathbf{H}P_r(t)$ .

Par ailleurs, nous avons  $\|P'_r(t)\| = \|P_r(t)\|$ , soit encore, après avoir élevé au carré les deux membres de cette égalité,  $\|P_r(t)\|^2 = (t - t_C)^2 \|V_r\|^2$  et  $\|P'_r(t)\|^2 = (t - t_C)^2 \|V'_r\|^2$ .

Donc  $\|V'_r\|^2 = \|V_r\|^2$ .

Ce qui est équivalent à :

$$V_r^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} V_r = V_r^T V_r.$$

Ou encore à  $V_r^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}^T \mathbf{H}) V_r = 0$ .

Posons  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , alors  $\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix}$ .

Et  $\mathbf{I} - \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 - a^2 - c^2 & ab + cd \\ ab + cd & 1 - b^2 - d^2 \end{bmatrix}$ .

Considérons le cas particulier,  $V_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  (il est toujours possible de s'y ramener par une rotation), alors  $V_r^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}^T \mathbf{H}) V_r = 0 \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 1$ .

Il existe  $\varphi$  tel que  $a = \cos \varphi$  et  $c = \sin \varphi$ .

La matrice  $\mathbf{H}$  est donc du type  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & b \\ \sin \varphi & d \end{bmatrix}$ .

c)  $P_r(t_M)$  et  $V_r$  sont colinéaires mais  $P'_r(t_M)$  et  $V'_r$  ne le sont pas.

Dans ce cas, il n'existe pas de matrice  $\mathbf{H}$  telle que  $P'_r(t_M) = \mathbf{H}P_r(t_M)$  et  $V'_r = \mathbf{H}V_r$ .

Dans le cadre de la RO-TMA, ce cas n'est pas envisageable car si  $P_r(t_M)$  et  $V_r$  sont colinéaires, cela signifie que le défilement angulaire entre l'observateur et  $S$  est nul, i.e.  $\exists t_C$  tel que  $P_r(t_C) = 0$ , donc  $P'_r(t_C) = 0$ . Ce qui signifie que le défilement angulaire entre  $S'$  et l'observateur est lui aussi nul, donc que  $P'_r(t_M)$  et  $V'_r$  sont colinéaires.

d)  $P_r(t_M)$  et  $V_r$  ne sont pas colinéaires mais  $P'_r(t_M)$  et  $V'_r$  le sont.

Dans ce cas, il n'existe pas de matrice  $\mathbf{H}$  telle que  $P'_r(t_M) = \mathbf{H}P_r(t_M)$  et  $V'_r = \mathbf{H}V_r$ .

Pour les mêmes raisons qu'en c), ce cas n'est pas à envisager dans le cadre de la RO-TMA.

Nous pouvons donc conclure que si deux sources en CV sont vues à la même distance par un observateur lui-même en CV, alors il existe une isométrie linéaire qui les lie.

### 3.7.2.3 Cas où la trajectoire de l'observateur est constituée de deux legs avec au moins un leg à défilement non-nul (preuve de la propriété 9)

En toutes généralités, d'après l'analyse faite dans le paragraphe précédent, il existe deux matrices d'isométrie  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  telles que

- $P_{S'}(t) - P_O(t) = \mathbf{H}_1[P_S(t) - P_O(t)]$ , pour le leg #1,
- $P_{S'}(t) - P_O(t) = \mathbf{H}_2[P_S(t) - P_O(t)]$ , pour le leg #2.

Il n'y a aucune raison, a priori, pour que ces deux matrices soient de même nature (rotation ou symétrie par rapport à une droite). C'est ce que nous allons étudier dans ce qui suit.

La seconde source (ou source fantôme)  $S'$  doit vérifier les conditions suivantes :

- Egalité des positions en  $t_M$  :

$$\mathbf{H}_1[P_S(t_M) - P_O(t_M)] = \mathbf{H}_2[P_S(t_M) - P_O(t_M)] \text{ avec } P_S(t_M) \neq P_O(t_M). \quad (36)$$

- Egalité des vitesses :

$$\mathbf{H}_1(V_S - V_1) + V_1 = \mathbf{H}_2(V_S - V_2) + V_2. \quad (37)$$

L'équation (36) est équivalente à  $\mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{H}_2[P_S(t_M) - P_O(t_M)] = P_S(t_M) - P_O(t_M)$ .

Le vecteur  $P_S(t_M) - P_O(t_M)$  n'étant pas nul, il est vecteur propre de la matrice  $\mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{H}_2$  associé à la valeur propre 1. Or les seules isométries ayant une valeur propre égale à 1 sont les symétries ou l'identité (qui est une rotation particulière).

1<sup>o</sup> cas :  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  sont des rotations :

Dans ce cas,  $\mathbf{H}_1^{-1}\mathbf{H}_2$  est une rotation et comme dit ci-dessus, la seule rotation ayant une valeur propre égale à 1 est l'identité. On a donc  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = \mathbf{R}_0$ ,

Maintenant, réécrivons l'égalité des vitesses (équation (37)) :

$$\mathbf{R}_0(V_S - V_1) + V_1 = \mathbf{R}_0(V_S - V_2) + V_2,$$

équivalente à  $(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0)(V_1 - V_2) = 0$ .

Or puisque  $V_1 \neq V_2$ , la matrice  $\mathbf{I} - \mathbf{R}_0$  n'est pas inversible, i.e. son déterminant est nul  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0) = 0$ . L'unique rotation satisfaisant cette égalité est l'identité.

Conclusion : la source fantôme est confondue avec la source d'intérêt.

2<sup>o</sup> cas :  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  sont des symétries :

Nous savons que le produit de deux matrices de symétrie est une matrice de rotation. Pour les mêmes raisons que ci-dessus  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = \mathbf{S}_\varphi$ , pour un certain angle  $\varphi$ .

- L'égalité des vitesses (équation (37)) devient :

$$\mathbf{S}_\varphi(V_S - V_1) + V_1 = \mathbf{S}_\varphi(V_S - V_2) + V_2,$$

qui conduit à la relation :  $\mathbf{S}_\varphi(V_2 - V_1) = V_2 - V_1$ .

Donc le vecteur  $V_2 - V_1$  est vecteur propre de  $\mathbf{S}_\varphi$  associé à la valeur propre 1.

Il est donc vecteur directeur de la droite d'angle  $\frac{\varphi}{2}$ .

Notons  $V_2 - V_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \|V_2 - V_1\| \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$ . Nous en déduisons que  $\varphi = 2\alpha$ .

Conclusion : il existe une source fantôme S' déduite de S par  
 $P_S(t) = \mathbf{S}_{2\alpha}[P_{S'}(t) - P_O(t)] + P_O(t), \forall t$ .

**Remarque :** cette dernière formule est symétrique

$$P_{S'}(t) = \mathbf{S}_{2\alpha} [P_S(t) - P_O(t)] + P_O(t), \forall t.$$

3° cas :  $\mathbf{H}_1$  est une symétrie et  $\mathbf{H}_2$  est une rotation :

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{S}_{\varphi_1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{H}_2 = \mathbf{R}_{\varphi_2} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

On remarque que  $\det(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0$ .

Sans perte de généralité, nous nous plaçons dans le cas où  $\theta_M = 0$ , soit  $y_S(t_M) = y_O(t_M)$ .

- L'égalité des positions (équation (36)) à l'instant  $t_M$  est alors :

$$\mathbf{S}_{\varphi_1} [P_S(t_M) - P_O(t_M)] = \mathbf{R}_{\varphi_2} [P_S(t_M) - P_O(t_M)] \text{ avec } P_S(t_M) - P_O(t_M) = \begin{bmatrix} R(t_M) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

conduit à :  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ . Dans ce cas,  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{S}_\varphi = \mathbf{R}_\varphi \mathbf{S}_0$ , avec  $\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{R}_\varphi$ .

$\mathbf{H}_1$  est la matrice de la symétrie par rapport à la droite qui fait un angle de  $\frac{\varphi}{2}$  par rapport à l'axe des abscisses.

- L'égalité des vitesses (équation (37)) s'écrit :

$$\mathbf{R}_\varphi \mathbf{S}_0 (V_S - V_1) + V_1 = \mathbf{R}_\varphi (V_S - V_2) + V_2,$$

est équivalente à :

$$\mathbf{R}_\varphi \mathbf{S}_0 (V_S - V_1) - \mathbf{R}_\varphi (V_S - V_2) = V_2 - V_1. \quad (39)$$

On multiplie (39) par  $\mathbf{R}_\varphi^T$  :

$$\mathbf{S}_0 (V_S - V_1) - (V_S - V_2) = \mathbf{R}_\varphi^T (V_2 - V_1). \quad (40)$$

Puis, nous multiplions (40) par  $\mathbf{S}_0$  :

$$(V_S - V_1) - \mathbf{S}_0 (V_S - V_2) = \mathbf{S}_0 \mathbf{R}_\varphi^T (V_2 - V_1). \quad (41)$$

La somme de (40) et (41) nous donne :

$$-V_1 + \mathbf{S}_0 V_2 - \mathbf{S}_0 V_1 + V_2 = \mathbf{S}_0 \mathbf{R}_\varphi^T (V_2 - V_1) + \mathbf{R}_\varphi^T (V_2 - V_1),$$

ou encore :

$$(\mathbf{I} + \mathbf{S}_0)(V_2 - V_1) = (\mathbf{I} + \mathbf{S}_0)\mathbf{R}_\varphi^T (V_2 - V_1),$$

et finalement,

$$(\mathbf{I} + \mathbf{S}_0)(\mathbf{R}_\varphi^T - \mathbf{I})(V_2 - V_1) = 0. \quad (42)$$

L'égalité (42) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1+1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

soit  $\cos \alpha = \cos(\varphi - \alpha)$ .

D'où deux solutions :  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = 2\alpha$ .

1- Si  $\varphi = 0$ , alors  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Réinjectons ce résultat dans l'équation (39) – égalités des vitesses - :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_0(V_s - V_1) - (V_s - V_2) &= V_2 - V_1 \\ \Leftrightarrow \mathbf{S}_0(V_s - V_1) &= V_s - V_1 \\ \Leftrightarrow (\mathbf{S}_0 - I)(V_s - V_1) &= 0, \\ \text{i.e. } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} (V_s - V_1) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que  $\dot{y}_s = \dot{y}_1$ . Or cette condition est caractéristique d'un défilement angulaire nul pendant le 1<sup>er</sup> leg (voir annexe 3.7.3, p. 125).

Et puisque  $y_s(t_M) = y_o(t_M)$ , nous en concluons que  $y_s(t) = y_o(t), \forall t, t \leq t_M$ .

Nous exploitons ce résultat dans l'égalité des positions (38), ce qui donne :

▪ avant  $t_M$  :

$$\begin{aligned} \forall t, t \leq t_M, P_{s'}(t) &= \mathbf{S}_0[P_s(t) - P_o(t)] + P_o(t) \\ \Leftrightarrow P_{s'}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) - x_o(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_o(t) \\ y_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s(t) \\ y_o(t) \end{bmatrix} = P_s(t), \forall t, t \leq t_M. \end{aligned}$$

▪ et après  $t_M$  :

$$\forall t, t \geq t_M, P_{s'}(t) = P_s(t).$$

En conclusion, dans le cas où  $\varphi = 0$ , l'égalité des vitesses conduit à  $P_{s'}(t) = P_s(t), \forall t$ .

La source fantôme est confondue avec la source d'intérêt.

2- Si  $\varphi = 2\alpha$  alors  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{R}_{2\alpha}$  et  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{S}_{2\alpha} = \mathbf{R}_{2\alpha} \mathbf{S}_0$ .

L'égalité des vitesses, donnée par l'équation (39), devient :

$$\mathbf{R}_{2\alpha} \mathbf{S}_0 (V_S - V_1) + V_1 = \mathbf{R}_{2\alpha} (V_S - V_2) + V_2.$$

En multipliant cette dernière relation par  $\mathbf{R}_{2\alpha}^T$ , nous obtenons :

$$\mathbf{S}_0 (V_S - V_1) + \mathbf{R}_{2\alpha}^T V_1 = (V_S - V_2) + \mathbf{R}_{2\alpha}^T V_2.$$

ou de façon équivalente :

$$(\mathbf{S}_0 - \mathbf{I}) V_S = \mathbf{R}_{2\alpha}^T (V_2 - V_1) + \mathbf{S}_0 V_1 - V_2.$$

ou enfin,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \|V_2 - V_1\| (\cos 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \sin \alpha) + \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\ -2\dot{y}_S = \|V_2 - V_1\| (-\sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha) - \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \|V_2 - V_1\| \cos \alpha + \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\ -2\dot{y}_S = -\|V_2 - V_1\| \sin \alpha - \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 + \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\ -2\dot{y}_S = -(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \end{cases}.$$

La première équation n'apporte rien, la seconde entraîne  $\dot{y}_S = \dot{y}_2$ .

Cette condition est caractéristique d'un défilement angulaire nul pendant le second leg (voir § 3.7.3, p. 125). Puisque  $y_S(t_M) = y_O(t_M)$ , nous en concluons que  $y_S(t) = y_O(t), \forall t, t \geq t_M$ .

En conclusion, la position de la source fantôme est donnée :

- avant  $t_M$ , par :

$$\begin{aligned} \forall t, t \leq t_M, P_{S'}(t) &= \mathbf{S}_{2\alpha} [P_S(t) - P_O(t)] + P_O(t) \\ \Leftrightarrow P_{S'}(t) &= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_S(t) - x_O(t) \\ y_S(t) - y_O(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_O(t) \\ y_O(t) \end{bmatrix}, \forall t, t \leq t_M. \end{aligned}$$

- et après  $t_M$ , par :

$$\begin{aligned} \forall t, t \geq t_M, P_{S'}(t) &= \mathbf{R}_{2\alpha} [P_S(t) - P_O(t)] + P_O(t) \\ \Leftrightarrow P_{S'}(t) &= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_S(t) - x_O(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_O(t) \\ y_O(t) \end{bmatrix}, \forall t, t \geq t_M. \end{aligned}$$

Or cette source fantôme est identique à celle donnée par la symétrie  $\mathbf{S}_{2\alpha}$  (car  $\mathbf{S}_{2\alpha}$  ne diffère de  $\mathbf{R}_{2\alpha}$  que par sa seconde colonne).

Conclusion : Le cas «  $\mathbf{H}_1$  est une symétrie et  $\mathbf{H}_2$  est une rotation » se ramène au cas «  $\mathbf{H}_1$  est une symétrie et  $\mathbf{H}_2$  est une symétrie », autrement dit, au second cas.

*NB* : cette conclusion demeure valable dans le cas général où  $\theta_M \neq 0$  : il suffit de faire jouer la rotation d'angle  $-\theta_M$  pour se ramener à ce qui précède puis d'appliquer la rotation (inverse) d'angle  $\theta_M$ .

4° cas :  $\mathbf{H}_1$  est une rotation et  $\mathbf{H}_2$  est une symétrie :

C'est le cas similaire au précédent. L'analyse emprunte donc la même démarche et conduit à la même conclusion.

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{R}_{\varphi_1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{H}_2 = \mathbf{S}_{\varphi_2} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & -\cos \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

On remarque que  $\det(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0$ .

Sans perte de généralité, nous nous plaçons dans le cas où  $\theta_M = 0$ , soit  $y_S(t_M) = y_O(t_M)$ .

L'égalité des positions à l'instant  $t_M$  donnée par l'équation (36) (cf. p. 117) conduit à :

$$\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi.$$

Nous pouvons alors écrire  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{R}_\varphi$ , et  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{S}_\varphi = \mathbf{R}_\varphi \mathbf{S}_0$ .

Nous suivons la même démarche que lors du calcul de l'expression (42) (cf. p. 119).

Dans un premier temps, nous réécrivons l'égalité des vitesses (37) (voir p. 118) :

$$\mathbf{R}_\varphi(V_S - V_1) + V_1 = \mathbf{R}_\varphi \mathbf{S}_0(V_S - V_2) + V_2. \quad (43)$$

Puis, nous multiplions ses membres par  $\mathbf{R}_\varphi^T$  puis par  $\mathbf{S}_0$ , les deux équations ainsi obtenues sont ensuite sommées et nous retrouvons la relation (42). Cette dernière est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ce qui entraîne :

$$\cos \alpha = \cos(\varphi - \alpha),$$

d'où l'on tire deux solutions :  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = 2\alpha$ .

1- Si  $\varphi=0$  alors  $\mathbf{R}_\varphi=\mathbf{I}$ . Nous réinjectons cette matrice dans (43) qui se simplifie en

$$\begin{aligned} V_S &= \mathbf{S}_0(V_S - V_2) + V_2 \\ \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{S}_0)(V_S - V_2) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui entraîne que  $\dot{y}_S = \dot{y}_2$ .

Or cette condition est caractéristique d'un défilement angulaire nul pendant le 2<sup>nd</sup> leg (voir annexe 3.7.3, p. 125).

Nous en déduisons, puisque  $y_S(t_M) = y_O(t_M)$ , que  $y_S(t) = y_O(t), \forall t, t \geq t_M$ .

En résumé :

▪ avant  $t_M$  :

$$\forall t, t \leq t_M, P_{S'}(t) = P_S(t).$$

▪ après  $t_M$  :

$$\begin{aligned} \forall t, t \geq t_M, P_{S'}(t) &= \mathbf{S}_0[P_S(t) - P_O(t)] + P_O(t) \\ \Leftrightarrow P_{S'}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_S(t) - x_O(t) \\ y_O(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_S(t) \\ y_O(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S(t) \\ y_S(t) \end{bmatrix} = P_S(t), \forall t, t \geq t_M. \end{aligned}$$

La source fantôme est donc confondue avec la source d'intérêt.

2- Si  $\varphi=2\alpha$  alors  $\mathbf{H}_1=\mathbf{R}_{2\alpha}$ ,  $\mathbf{H}_2=\mathbf{S}_{2\alpha}=\mathbf{R}_{2\alpha}\mathbf{S}_0$

Comme précédemment l'égalité des vitesses (43) conduit à la relation :

$$\begin{aligned} V_S - V_1 + \mathbf{R}_\varphi^T V_1 &= \mathbf{S}_0(V_S - V_2) + \mathbf{R}_\varphi^T V_2 \\ \Leftrightarrow V_S - V_1 &= \mathbf{S}_0(V_S - V_2) + \mathbf{R}_\varphi^T V_2 - \mathbf{R}_\varphi^T V_1 \\ \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{S}_0)V_S &= \mathbf{R}_\varphi^T(V_2 - V_1) + V_1 - \mathbf{S}_0 V_2 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \|V_2 - V_1\|(\cos 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha \sin \alpha) + \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\ 2\dot{y}_S = \|V_2 - V_1\|(-\sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha) + \dot{y}_1 + \dot{y}_2 \end{cases} & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \|V_2 - V_1\| \cos \alpha + \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\ 2\dot{y}_S = -\|V_2 - V_1\| \sin \alpha + \dot{y}_1 + \dot{y}_2 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\ 2\dot{y}_S = -(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \dot{y}_1 + \dot{y}_2 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui entraîne  $\dot{y}_S = \dot{y}_1$ . Or cette condition est caractéristique d'un défilement angulaire nul sur le 1<sup>er</sup> leg (voir §3.7.3, p. 125).

Puisque  $y_S(t_M) = y_O(t_M)$ , nous concluons que  $\forall t, t \leq t_M, y_S(t) = y_O(t)$ .

En conclusion, la position de la source fantôme est donnée :

- avant  $t_M$ , par :

$$\begin{aligned} \forall t, t \leq t_M, P_{S'}(t) &= \mathbf{R}_{2\alpha}[P_S(t) - P_O(t)] + P_O(t) \\ \Leftrightarrow P_{S'}(t) &= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_S(t) - x_O(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_O(t) \\ y_O(t) \end{bmatrix}, \forall t, t \leq t_M. \end{aligned}$$

- et après  $t_M$ , par :

$$\begin{aligned} \forall t, t \geq t_M, P_{S'}(t) &= \mathbf{S}_{2\alpha}[P_S(t) - P_O(t)] + P_O(t) \\ \Leftrightarrow P_{S'}(t) &= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_S(t) - x_O(t) \\ y_S(t) - y_O(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_O(t) \\ y_O(t) \end{bmatrix}, \forall t, t \geq t_M. \end{aligned}$$

Or cette source fantôme est identique à celle donnée par la symétrie  $\mathbf{S}_{2\alpha}$  (car  $\mathbf{S}_{2\alpha}$  ne diffère de  $\mathbf{R}_{2\alpha}$  que par sa seconde colonne)

Conclusion : Le cas «  $\mathbf{H}_1$  est une rotation et  $\mathbf{H}_2$  est une symétrie » se ramène aussi au cas «  $\mathbf{H}_1$  est une symétrie et  $\mathbf{H}_2$  est une symétrie », autrement dit, au second cas.

### 3.7.2.4 Cas où la trajectoire de l'observateur est constituée de deux legs avec un défilement nul vis-à-vis de la source (preuve de la propriété 10)

Il vient d'être montré que la trajectoire de la source fantôme est donnée par

$$P_{S'}(t) = \mathbf{S}_{2\alpha}[P_S(t) - P_O(t)] + P_O(t),$$

quel que soit le scénario, lorsque l'observateur suit une trajectoire composée de deux legs.

La question est donc la suivante : dans quel cas a-t-on  $P_{S'}(t) = P_S(t), \forall t$  ?

Réponse : lorsque  $P_S(t) - P_O(t)$  est vecteur propre de  $\mathbf{S}_{2\alpha}$  associé à la valeur propre 1 ; il est donc sur la droite d'angle  $\alpha$ , c'est-à-dire que :

$$P_S(t) - P_O(t) = R(t) \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \text{ ou } P_S(t) - P_O(t) = R(t) \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \pi) \\ \sin(\alpha + \pi) \end{bmatrix}.$$

Ces deux cas sont caractéristiques d'un défilement angulaire nul tout au long du scénario (voir §3.7.3, p. 125). Ce qui est un cas peu intéressant en pratique.

Réciiproquement, si le défilement angulaire est nul pendant la totalité du scénario, la source fantôme est-elle confondue avec celle-ci ?

Pour répondre à cette question, nous nous plaçons dans le cas où  $\theta_M = 0$ , soit  $y_S(t_M) = y_O(t_M)$ .

Donc,  $P_r(t) = P_S(t) - P_O(t) = R(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . On en déduit que  $V_2 - V_1 = \|V_2 - V_1\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  - voir 3.7.3-.

Par conséquent,  $\alpha = 0$ .

Dans ces conditions,  $\mathbf{S}_{2\alpha}[P_S(t) - P_O(t)] = P_S(t) - P_O(t)$  sur les deux legs.

La source fantôme est donc confondue avec la source d'intérêt.

### 3.7.3 Caractérisation de la trajectoire d'une source en mouvement rectiligne uniforme à azimut constant lorsque l'observateur a une trajectoire en deux legs (ou défilement angulaire nul).

1- Soit  $P_S(t) - P_O(t) = R(t) \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$ .

Plaçons nous dans le cas où  $\theta = 0$  (il est toujours possible de se ramener à ce cas

par une rotation d'angle  $-\theta$ ) :  $P_S(t) - P_O(t) = R(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Sur le premier leg,  $V_S - V_1 = \dot{R}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{R}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \leq t_M$ .

Sur le second leg,  $V_S - V_2 = \dot{R}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{R}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t > t_M$ .

Donc,  $V_S = V_1 + \dot{R}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = V_2 + \dot{R}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Nous en déduisons que  $\dot{y}_S = \dot{y}_1 = \dot{y}_2$ .

2- Réciiproquement, si  $\dot{y}_S = \dot{y}_1 = \dot{y}_2$ , alors l'azimut est constant tout au long du scénario.

## Chapitre 4

***Trajectographie par mesures de distance seule :  
source manœuvrante et observateur en mouvement  
rectiligne uniforme***

Dans ce chapitre, est étudié le problème de la trajectographie par mesures de distance lorsque l'observateur est en mouvement rectiligne uniforme (CV) ou éventuellement immobile. Nous avons vu au chapitre précédent que la trajectoire de la source n'est pas observable si cette dernière est elle-même en CV. Nous avons considéré deux types de scénarios qui articulent ce chapitre :

- ceux dans lesquels la source est en CT : dans ce cas la méthode sera désignée par le sigle RO-CTTMA pour « range-only constant-turn TMA »,
- et ceux dans lesquels la source parcourt une trajectoire composée de deux legs reliés par un arc de cercle : la méthode s'intitule alors RO-MTMA pour « range-only maneuvering TMA ».

Dans chacun de ces paragraphes, nous établissons l'observabilité de la trajectoire de la source puis nous analysons le comportement de l'estimateur retenu.

## 4.1 Source en mouvement circulaire uniforme

Dans un premier temps, le jeu de notations est présenté, puis l'observabilité de la trajectoire de la source est analysée. Ensuite, la borne de Cramér-Rao est calculée, l'estimateur du maximum de vraisemblance proposé et la notion de « semi-observabilité » introduite. Ce premier paragraphe se termine par l'analyse des performances de l'estimateur.

### 4.1.1 Hypothèses

Les deux plates-formes ont les mêmes cinématiques que celles définies en BO-CTTMA au §2.1.1 (p. 32), à savoir une source en CT et un observateur en CV. Les positions de ces deux mobiles sont respectivement données par les équations (1) et (2) (cf. p. 32 et 33). L'équation de mesure sans bruit de la distance séparant les deux mobiles, à l'instant  $t$ , est donnée par la relation (5) (cf. p. 33). La Figure 13 du §2.1.1 illustre le jeu de notations employé.

L'observateur acquiert les mesures de distance  $R_m(t_k)$  définies par l'équation (31), donnée au paragraphe §3.1 (p. 86). Le vecteur additif de bruit  $[\varepsilon_R(t_1) \dots \varepsilon_R(t_N)]^T$  est gaussien centré de matrice de variance-covariance égale à  $diag[\sigma_R^2(t_k)]$  (supposée connue).

Comme au chapitre précédent, nous utilisons aussi la notation  $R(Z, t_k)$  afin de souligner la dépendance analytique de la mesure de distance au vecteur d'état  $Z = [x_C \ y_C \ \rho_C \ \varphi \ \omega]^T$ .

La RO-CTTMA a pour objectif d'estimer la trajectoire d'une source en CT depuis une plate-forme se déplaçant en CV à partir des mesures  $R_m = \{R_m(t_1), R_m(t_2), \dots, R_m(t_N)\}$  (ce qui revient à estimer le vecteur d'état  $Z$ ).

#### 4.1.2 Analyse de l'observabilité

Comme en BO-CTTMA (cf. §2.1.2, p. 34), l'étude est menée en temps continu et nous conservons les hypothèses concernant les cinématiques suivies par l'observateur (immobile à l'origine du repère ou en CV dont la trajectoire est confondue avec l'axe des abscisses).

Il s'agit de répondre à la question suivante : existe-t-il une autre source  $S'$  en CT se situant à la même distance  $R(t)$  que la source d'intérêt  $S$ , durant  $[0, T]$ ? La position de cette autre source  $S'$  est définie par la relation (7) (cf. p. 35).

Considérons le carré de la distance séparant l'observateur de ces deux sources :

$$\begin{aligned} R^2(t) &= [\rho_c \sin(\omega t + \varphi) + x_c - t \dot{x}_o]^2 + [\rho_c \cos(\omega t + \varphi) + y_c]^2 \\ &= [\rho_{c'} \sin(\omega' t + \varphi') + x_{c'} - t \dot{x}_o]^2 + [\rho_{c'} \cos(\omega' t + \varphi') + y_{c'}]^2, \forall t. \end{aligned} \quad (44)$$

Cette double égalité (44) est équivalente à

$$\begin{aligned} x_c^2 + y_c^2 + \rho_c^2 + 2\rho_c [x_c \sin(\omega t + \varphi) + y_c \cos(\omega t + \varphi)] - 2\rho_c \dot{x}_o t \sin(\omega t + \varphi) - 2t x_c \dot{x}_o &= \\ x_{c'}^2 + y_{c'}^2 + \rho_{c'}^2 + 2\rho_{c'} [x_{c'} \sin(\omega' t + \varphi') + y_{c'} \cos(\omega' t + \varphi')] - 2\rho_{c'} \dot{x}_o t \sin(\omega' t + \varphi') - 2t x_{c'} \dot{x}_o, \forall t. \end{aligned}$$

Nous en déduisons le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} t x_c \dot{x}_o = t x_{c'} \dot{x}_o \\ t \rho_c \dot{x}_o \sin(\omega t + \varphi) = t \rho_{c'} \dot{x}_o \sin(\omega' t + \varphi') \\ x_c^2 + y_c^2 + \rho_c^2 = x_{c'}^2 + y_{c'}^2 + \rho_{c'}^2 \\ \rho_c [x_c \sin(\omega t + \varphi) + y_c \cos(\omega t + \varphi)] = \rho_{c'} [x_{c'} \sin(\omega' t + \varphi') + y_{c'} \cos(\omega' t + \varphi')] \end{array} \right. , \forall t. \quad (45)$$

##### 4.1.2.1 Observateur immobile

Puisque l'observateur est immobile ( $\dot{x}_o = 0$ ), le carré de la distance Source-Observateur à l'instant  $t$  s'écrit :

$$R^2(t) = [\rho_c \sin(\omega t + \varphi) + x_c]^2 + [\rho_c \cos(\omega t + \varphi) + y_c]^2.$$

Si  $R(t)$  est constant alors il est égal à  $\rho_c$ , car  $[x_c \ y_c]^T = [0 \ 0]^T$ . L'observateur est donc positionné au centre du cercle décrivant la trajectoire de la source. La trajectoire de la source n'est pas observable.

Si  $R(t)$  n'est pas constant alors la source ne tourne pas autour de l'observateur ( $[x_C, y_C]^T \neq [0, 0]^T$ ). Dans ce cas le système (45) devient :

$$\begin{cases} x_C^2 + y_C^2 + \rho_C^2 = x_{C'}^2 + y_{C'}^2 + \rho_{C'}^2 \\ \rho_C [x_C \sin(\omega t + \varphi) + y_C \cos(\omega t + \varphi)] = \rho_{C'} [x_{C'} \sin(\omega' t + \varphi') + y_{C'} \cos(\omega' t + \varphi')] \end{cases}, \forall t. \quad (46)$$

Soient  $[R_C \ \theta_C]$  et  $[R_{C'} \ \theta_{C'}]$  les coordonnées polaires des centres des arcs de cercle respectivement suivis par  $S$  et  $S'$ . Remarquons que dans ce cas  $R_C \neq 0$ .

Le système (46) s'écrit alors :

$$\begin{cases} R_C^2 + \rho_C^2 = R_{C'}^2 + \rho_{C'}^2 \\ \rho_C R_C \cos(\omega t + \varphi - \theta_C) = \rho_{C'} R_{C'} \cos(\omega' t + \varphi' - \theta_{C'}) \end{cases}, \forall t. \quad (47)$$

La seconde équation du système (47), implique que :

$$\rho_C R_C = \rho_{C'} R_{C'}. \quad (48)$$

Cette dernière égalité combinée avec la première équation du système (47) donne :

$$R_C + \rho_C = R_{C'} + \rho_{C'}. \quad (49)$$

Les relations (48) et (49) sont vérifiées si :  $\begin{cases} R_C = R_{C'} \\ \rho_C = \rho_{C'} \end{cases}$  ou si  $\begin{cases} R_C = \rho_{C'} \\ \rho_C = R_{C'} \end{cases}$ .

De plus, de l'égalité des cosinus de la seconde équation du système (47) découlent deux possibilités :

- soit  $\omega' = \omega$  et  $\varphi' - \theta_{C'} = \varphi - \theta_C$ ,
- soit  $\omega' = -\omega$  et  $\varphi' - \theta_{C'} = -\varphi + \theta_C$ .

Les trajectoires de  $S'$  sont alors décrites par :

- $\begin{bmatrix} x_{S'}(t) \\ y_{S'}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{H} \left\{ R_C \begin{bmatrix} \sin \theta_C \\ \cos \theta_C \end{bmatrix} + \rho_C \begin{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) \\ \cos(\omega t + \varphi) \end{bmatrix} \right\},$
- ou par  $\begin{bmatrix} x_{S'}(t) \\ y_{S'}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{H} \left\{ \rho_C \begin{bmatrix} \sin \theta_C \\ \cos \theta_C \end{bmatrix} + R_C \begin{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) \\ \cos(\omega t + \varphi) \end{bmatrix} \right\},$

la matrice  $\mathbf{H}$  étant une matrice d'isométrie linéaire dans le plan (rotation ou symétrie axiale, voir le rappel en annexe 3.7.1, p. 113). Le système n'est donc pas observable.

### Propriété 15

Si l'observateur est immobile, alors la trajectoire de n'importe quelle source en CT n'est pas observable par mesures de distance. Il existe un ensemble non-dénombrable de solutions.

#### 4.1.2.2 Observateur en mouvement rectiligne uniforme

Puisque  $\dot{x}_O$  est non nulle, le système d'équations (45) (cf. p. 128) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} x_C = x_{C'} \\ \rho_C \sin(\omega t + \varphi) = \rho_{C'} \sin(\omega' t + \varphi') \\ x_C^2 + y_C^2 + \rho_C^2 = x_{C'}^2 + y_{C'}^2 + \rho_{C'}^2 \\ \rho_C [x_C \sin(\omega t + \varphi) + y_C \cos(\omega t + \varphi)] = \rho_{C'} [x_{C'} \sin(\omega' t + \varphi') + y_{C'} \cos(\omega' t + \varphi')] \end{cases}, \forall t.$$

De la seconde équation nous déduisons  $\rho_C = \rho_{C'}$  et le système d'équations (45) devient,

$$\begin{cases} x_C = x_{C'} \\ \rho_C = \rho_{C'} \\ \sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega' t + \varphi') \\ y_C^2 = y_{C'}^2 \\ x_C \sin(\omega t + \varphi) + y_C \cos(\omega t + \varphi) = x_{C'} \sin(\omega' t + \varphi') + y_{C'} \cos(\omega' t + \varphi') \end{cases}, \forall t. \quad (50)$$

Les quatre premières égalités du système précédent permettent de réécrire la cinquième qui devient :

$$y_C \cos(\omega t + \varphi) = y_{C'} \cos(\omega' t + \varphi'), \forall t.$$

Deux cas sont possibles :

- Premier cas,  $y_{C'} = y_C$  : la position des centres des deux cercles et leurs rayons sont identiques. Du système (50), nous tirons maintenant les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} \sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega' t + \varphi') \\ \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega' t + \varphi') \end{cases}, \forall t.$$

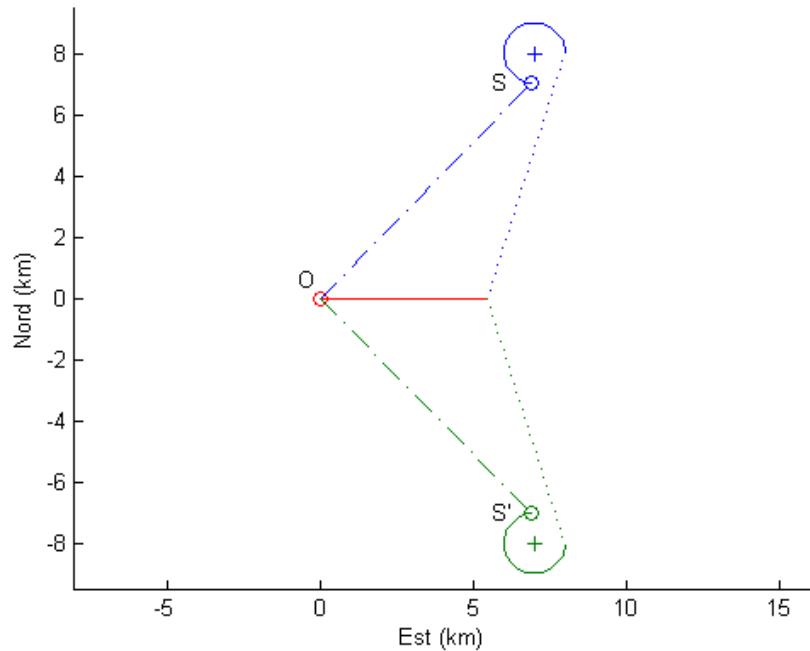
Nous en déduisons que  $\omega t + \varphi = \omega' t + \varphi'$  et finalement que la trajectoire de  $S'$  est donc identique à celle de  $S$ .

- Second cas,  $y_{C'} = -y_C$  : les positions des centres de ces deux cercles sont reliées par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses (les rayons des cercles sont égaux). Le système (50) devient alors :

$$\begin{cases} \sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega' t + \varphi') \\ \cos(\omega t + \varphi) = -\cos(\omega' t + \varphi') \end{cases}, \forall t.$$

Nous en déduisons que  $\omega t + \varphi = \pi - (\omega' t + \varphi')$ .

La trajectoire de  $S'$  est la trajectoire symétrique à  $S$  par rapport à la droite portée par la trajectoire de l'observateur (voir Figure 46).



**Figure 46 : Présentation des deux sources vues par l'observateur aux mêmes distances (symétrie).**

Le résultat venant d'être établi se résume par la propriété suivante :

**Propriété 16**

- Si l'observateur est en CV, alors la trajectoire d'une source en CT est observable par mesures de distance dans chaque demi-plan dont la frontière est la droite portant la trajectoire de l'observateur.
- La trajectoire de la deuxième source est symétrique par rapport à cette droite.

**Remarques :**

- Ceci n'est pas nécessairement très pénalisant en pratique car il existe de nombreuses technologies en sonar permettant de lever les ambiguïtés « gauche/droite ».
- Désormais nous travaillerons dans le demi-plan situé à gauche de l'observateur.

### 4.1.3 Borne de Cramér-Rao, semi-observabilité et estimateur

#### 4.1.3.1 Borne de Cramér-Rao

La matrice d'information de Fisher relative au vecteur d'état  $Z$  se calcule selon la formule classique (sous les hypothèses jusqu'ici considérées) :

$$F(Z|R_m) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_R^2(t_k)} \nabla_Z R(Z, t_k) \nabla_Z^T R(Z, t_k),$$

avec  $\nabla_Z R(Z, t_k)$  le gradient de l'équation de mesure par rapport au vecteur d'état  $Z$  égal à :

$$\nabla_Z R(Z, t_k) = [\sin(\theta(Z, t_k)) \quad \cos(\theta(Z, t_k)) \quad \cos(\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)) \quad -\rho_C \sin(\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k)) \quad -\rho_C t_k \sin(\omega t_k + \varphi - \theta(Z, t_k))]^T.$$

Comme en BO-CTTMA (voir chapitre 2), c'est l'estimation du vecteur d'état  $Z_N = [x_s(t_N) \quad y_s(t_N) \quad \rho_C \quad \varphi \quad \omega]^T$  qui nous intéresse ; il est donc nécessaire de calculer  $F(Z_N|R_m)$ . Pour cela, nous utilisons la relation (21), donnée au §2.1.3.1 (p. 49). Les CRLB correspondantes sont respectivement notées  $B(Z|R_m)$  et  $B(Z_N|R_m)$ .

#### 4.1.3.2 Semi-observabilité et estimateur

Sous l'hypothèse de bruit additif gaussien centré et de variance connue, la recherche du MLE consiste à minimiser le critère des moindres carrés pondérés :

$$C(Z) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_R^2(t_k)} [R_m(t_k) - R(Z, t_k)]^2,$$

La minimisation de  $C(Z)$  a été faite par l'algorithme de Gauss-Newton. Puis les performances de l'estimateur ont été évaluées au moyen de simulations de Monte-Carlo.

##### 4.1.3.2.1 Définition des scénarios utilisés :

L'ensemble des scénarios que nous avons utilisés dans notre étude est défini ainsi :

- L'observateur débute sa trajectoire aux coordonnées  $[2.626 \quad 0]^T$  et suit un cap de  $90^\circ$  avec une vitesse de 6 m/s.
- La position du centre du cercle sur lequel s'inscrit la trajectoire de la source est donnée par :
  - sa distance à la position finale de l'observateur ; elle est notée  $R_{C_N}$  et est égale à 10 km et 20 km,
  - son azimut relativement à la position finale de l'observateur ; nous avons choisi les valeurs  $\{-70^\circ, -45^\circ, -20^\circ, 0^\circ, 20^\circ, 45^\circ, 70^\circ\}$ . La source est donc située dans le demi-plan supérieur.

- Le rayon  $\rho_C$  est égal à 1 km.
- Les valeurs de  $\varphi$  (l'angle initial relatif au nord) sont égales à celles de l'azimut du centre du cercle relativement à la position finale de l'observateur.
- La vitesse de la source est égale à  $v_s = 5$  m/s ( $\omega = \pm 0.287^\circ/s$ ).
- La durée du scénario  $t_N$  est de 879 s (70% d'un tour complet).
- La période d'échantillonnage  $\Delta t$  est égale à 1s.

#### 4.1.3.2.2 Semi-observabilité :

L'algorithme de Gauss-Newton a, dans un premier temps, été utilisé sur un lot de mesures non-bruitées pour chaque scénario décrit ci-dessus, après avoir forcé les variances à 1 dans l'expression de  $C(Z)$ . Nous avons alors été confrontés au problème suivant : selon l'initialisation choisie, l'algorithme retourne un minimum local que nous notons  $\breve{Z}$ . Nous avons constaté que :

$$R(\breve{Z}, t) \equiv R(Z, t), \forall t \in [0, T].$$

Ce vecteur est appelé « artefact ». Par exemple, si le vecteur d'initialisation est  $Z_{-\omega} = [x_C \ y_C \ \rho_C \ \varphi \ -\omega]^T$ , alors le vecteur retourné est  $\breve{Z}$ .

Le vecteur est alors dit « semi-observable ».

L'ensemble des trajectoires définies par  $\breve{Z}$  et celles définies par  $Z$  est tracé aux Figure 47 et Figure 48 (en bleu les vraies trajectoires, en vert les trajectoires « artefact »).

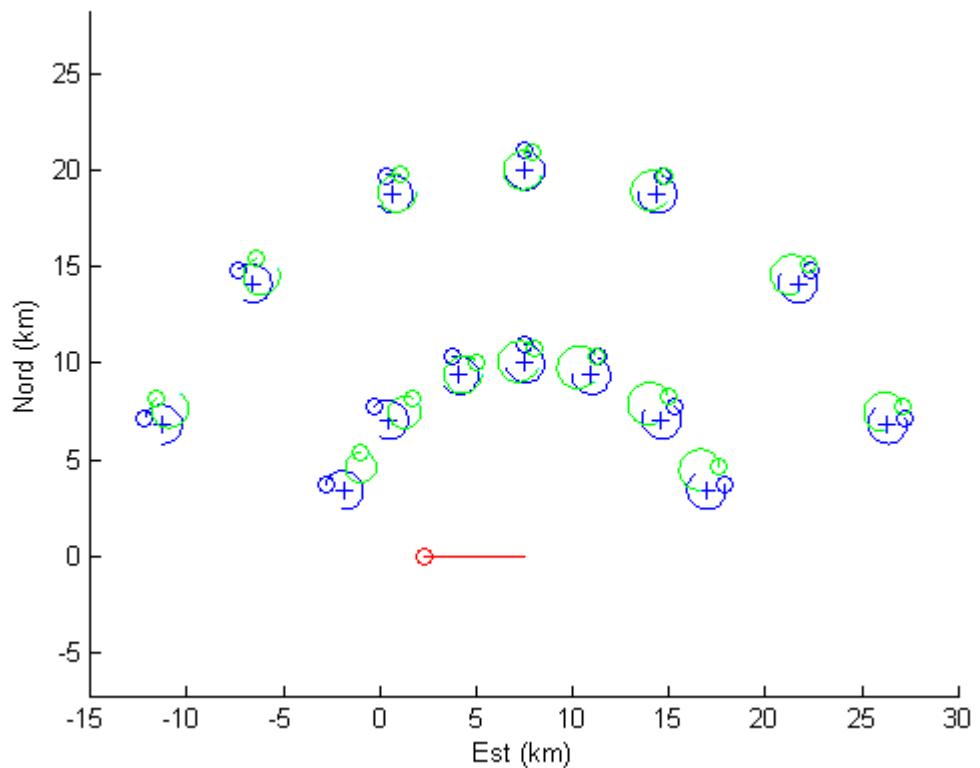


Figure 47 : Source d'intérêt en sens « horaire » et « artefact » en sens « anti-horaire ».

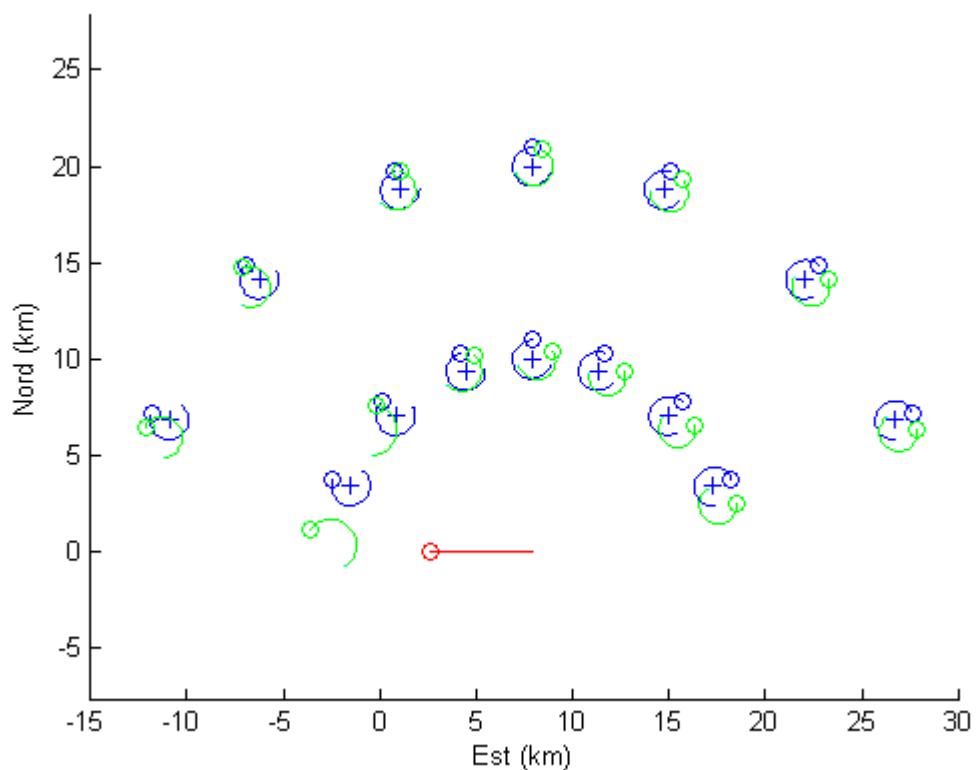


Figure 48 : Source d'intérêt en sens « anti-horaire » et « artefact » en sens « horaire ».

Nous constatons à l'examen de ces figures que pour tous ces scénarios :

- chaque trajectoire « artefact » est proche de la trajectoire « vraie » correspondante,
- elle est systématiquement parcourue dans le sens inverse,
- les rayons des cercles sont peu différents et leurs centres également.

Pour chacun des scénarios, nous évaluons la différence moyenne entre les mesures de distance  $R(Z, t_k)$  et  $R(\bar{Z}, t_k)$ , définie par :

$$\overline{\Delta R} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [R(Z, t_k) - R(\bar{Z}, t_k)]^2}. \quad (51)$$

La Table 14 donne les valeurs de  $\overline{\Delta R}$  pour les sens de parcours « horaire » et « anti-horaire ». Nous constatons les faibles valeurs de cet écart (de l'ordre de quelques mètres).

**Table 14 : écart moyen  $\overline{\Delta R}$  entre les distances.**

| $R_{CN}$ (km) → | Sens « horaire »            |                             | sens « anti-horaire »       |                             |
|-----------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
|                 | 10                          | 20                          | 10                          | 20                          |
| $\phi$ (°) ↓    | $\overline{\Delta R}$ (m) ↓ | $\overline{\Delta R}$ (m) ↓ | $\overline{\Delta R}$ (m) ↓ | $\overline{\Delta R}$ (m) ↓ |
| -70             | 8.5                         | 1.0                         | 3.5                         | 0.7                         |
| -45             | 5.5                         | 1.2                         | 2.8                         | 0.8                         |
| -20             | 0.3                         | 0.4                         | 0.2                         | 0.3                         |
| 0               | 2.1                         | 0.3                         | 1.1                         | 0.2                         |
| 20              | 2.7                         | 0.7                         | 1.6                         | 0.5                         |
| 45              | 2.2                         | 0.7                         | 1.4                         | 0.5                         |
| 70              | 1.1                         | 0.4                         | 0.7                         | 0.3                         |

Dans le cas de mesures bruitées, il faut donc s'attendre à une dégradation de la puissance du test d'acceptation qui peut se révéler totalement inefficace si les écarts-types des bruits de mesure sont de l'ordre de  $\overline{\Delta R}$ .

#### 4.1.3.2.3 Estimateur

Nous avons réalisé 500 simulations pour chacun des scénarios présentés ci-dessus pour les deux sens de rotation de la source. L'écart-type du bruit de mesure  $\sigma_R(t_k)$  est égal à 50 mètres pour tous ces cas.

##### a) Initialisation « clairvoyante »

Comme dans le cas de mesures non-bruitées et pour chaque simulation, nous avons initialisé l'algorithme :

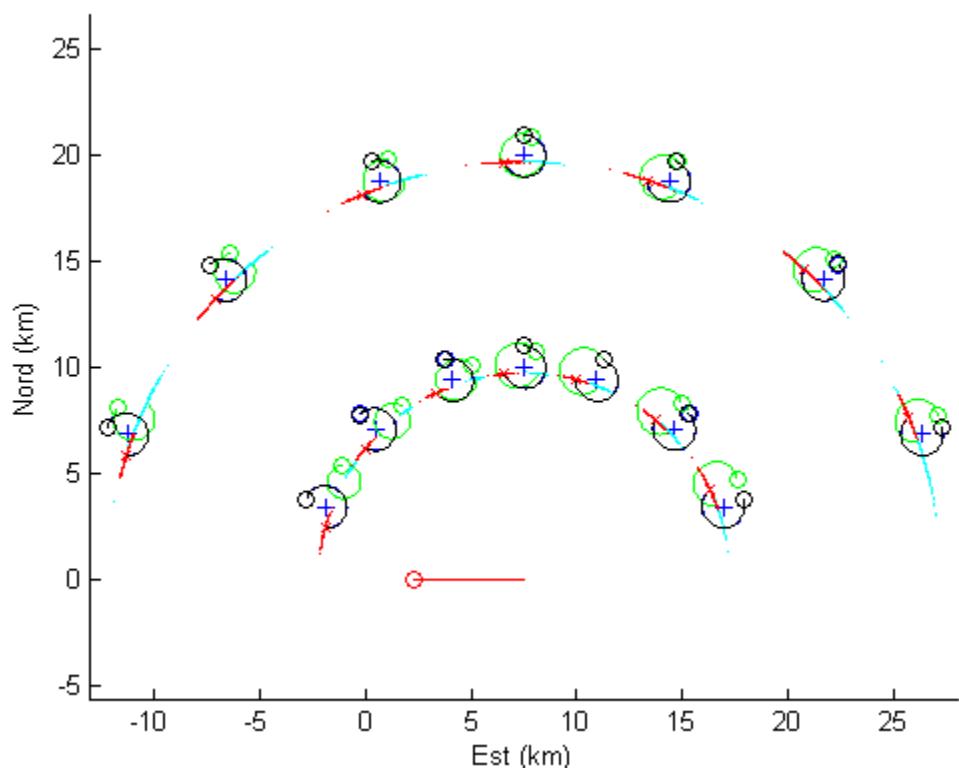
- une première fois sur  $Z$  : dans ce cas nous obtenons l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{Z}$ ,

- et une autre fois sur  $Z_{-\omega}$  : nous obtenons un autre estimateur relatif à l'artefact et noté  $\hat{Z}$ .

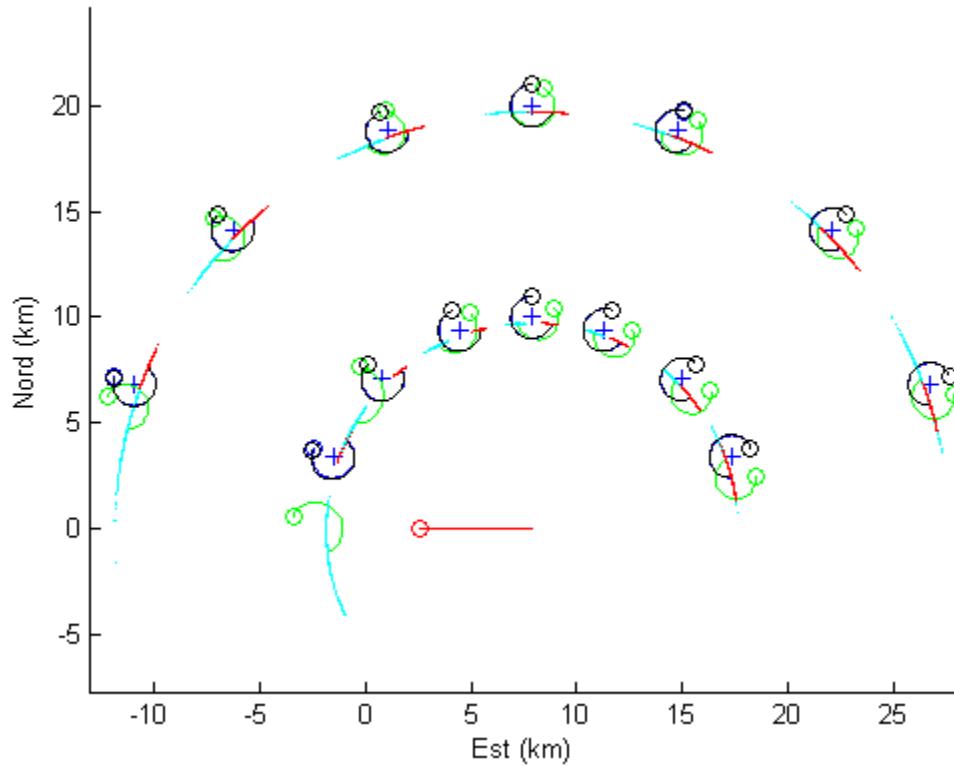
Les deux vecteurs sont soumis au test d'acceptation.

L'ensemble des résultats est présenté aux Figure 49 et Figure 50 pour chaque scénario :

- en bleu, la vraie trajectoire,
- en noir, la trajectoire reconstruite à partir de la moyenne des estimés  $\hat{Z}$ ,
- en vert, la trajectoire reconstruite à partir de la moyenne des vecteurs  $\hat{Z}$ ,
- par les points rouges, les positions estimées de la source à l'instant final relative à  $\hat{Z}$ ,
- en cyan, celles relatives à  $\hat{Z}$ .



**Figure 49 : Les trajectoires de la source d'intérêt en sens « horaire » et les estimés correspondants (initialisation « clairvoyante »).**



**Figure 50 : Les trajectoires de la source d'intérêt en sens « anti-horaire » et les estimés correspondants (initialisation « clairvoyante »).**

Les pourcentages des  $\hat{Z}$  et  $\hat{\tilde{Z}}$  validés par le test d'acceptation sont respectivement notés  $L_{\hat{Z}}$  et  $L_{\hat{\tilde{Z}}}$ . La Table 15 donne leurs valeurs pour chacun des scénarios et on constate que la quasi-totalité des résultats  $\hat{Z}$  et  $\hat{\tilde{Z}}$  sont validés par le test.

**Table 15 : Pourcentage d'estimés  $\hat{Z}$  et  $\hat{\tilde{Z}}$  validés.**

| Sens          | Sens « horaire » |               |                       |               | Sens « anti-horaire » |               |                       |               |                       |
|---------------|------------------|---------------|-----------------------|---------------|-----------------------|---------------|-----------------------|---------------|-----------------------|
|               | $R_{C_N}$ (km)   | 10            |                       | 20            |                       | 10            |                       | 20            |                       |
| $\varphi$ (°) |                  | $L_{\hat{Z}}$ | $L_{\hat{\tilde{Z}}}$ | $L_{\hat{Z}}$ | $L_{\hat{\tilde{Z}}}$ | $L_{\hat{Z}}$ | $L_{\hat{\tilde{Z}}}$ | $L_{\hat{Z}}$ | $L_{\hat{\tilde{Z}}}$ |
| -70           | 100%             | 99.4%         | 100%                  | 100%          | 100%                  | 99.4%         | 93%                   | 99.4%         | 99.2%                 |
| -45           | 100%             | 99.8%         | 100%                  | 100%          | 100%                  | 99.4%         | 99.4%                 | 99.4%         | 99.4%                 |
| -20           | 100%             | 100%          | 100%                  | 100%          | 100%                  | 99.4%         | 99.4%                 | 99.4%         | 99.4%                 |
| 0             | 100%             | 100%          | 100%                  | 100%          | 100%                  | 99.4%         | 99.4%                 | 99.4%         | 99.4%                 |
| 20            | 100%             | 100%          | 100%                  | 100%          | 100%                  | 99.4%         | 99.4%                 | 99.4%         | 99.4%                 |
| 45            | 100%             | 100%          | 100%                  | 100%          | 100%                  | 99.4%         | 99.4%                 | 99.4%         | 99.4%                 |
| 70            | 100%             | 100%          | 100%                  | 100%          | 100%                  | 99.4%         | 99.4%                 | 99.4%         | 99.4%                 |

Les résultats obtenus nous permettent de faire les remarques suivantes :

- Comme dans le cas non-bruité, la trajectoire définie par les  $\hat{Z}$  est toujours parcourue dans le sens opposé à celle définie par les  $\hat{\tilde{Z}}$ .

- Les rayons des cercles de ces trajectoires sont proches ainsi que leurs centres, excepté dans le cas où  $\varphi = -70^\circ$  et  $R_{C_N} = 10 \text{ km}$  en sens « anti-horaire ».

A terme, l'algorithme ne devra fournir qu'une seule solution validée par le test d'acceptation : celle dont le critère est le plus faible :

- soit  $C(\hat{Z}) < C(\hat{\hat{Z}})$ , dans ce cas  $\hat{Z}$  est retenu,
- soit  $C(\hat{\hat{Z}}) < C(\hat{Z})$ , dans ce cas  $\hat{\hat{Z}}$  est retenu.

Nous comptabilisons pour chaque scénario le nombre de cas vérifiant les conditions précédentes ; les résultats sont donnés en pourcentage sur les 500 simulations effectuées. La Table 16 et la Table 17 résument ces résultats pour les deux sens de rotations de la source.

**Table 16 : Source en sens « horaire » - pourcentages vérifiant les conditions (sur 500 simulations).**

| $R_{C_N}$ (km) | 10                                |                                 | 20                              |                                 |
|----------------|-----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
|                | $\downarrow \varphi$ ( $^\circ$ ) | $C(\hat{Z}) < C(\hat{\hat{Z}})$ | $C(\hat{\hat{Z}}) < C(\hat{Z})$ | $C(\hat{Z}) < C(\hat{\hat{Z}})$ |
| -70            | 99.4%                             | 0.6%                            | 45.4%                           | 54.6%                           |
| -45            | 94.2%                             | 5.8%                            | 62.4%                           | 37.6%                           |
| -20            | 52.4%                             | 47.6%                           | 53.4%                           | 46.6%                           |
| 0              | 74.4%                             | 25.6%                           | 54.8%                           | 45.2%                           |
| 20             | 78.8%                             | 21.2%                           | 57.8%                           | 42.2%                           |
| 45             | 74.2%                             | 25.8%                           | 55.8%                           | 44.2%                           |
| 70             | 57.8%                             | 42.2%                           | 33.8%                           | 66.2%                           |

**Table 17 : Source en sens « anti-horaire » - pourcentages vérifiant les conditions (sur 500 simulations).**

| $R_{C_N}$ (km) | 10                     |                                 | 20                              |                                 |
|----------------|------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
|                | $\varphi$ ( $^\circ$ ) | $C(\hat{Z}) < C(\hat{\hat{Z}})$ | $C(\hat{\hat{Z}}) < C(\hat{Z})$ | $C(\hat{Z}) < C(\hat{\hat{Z}})$ |
| -70            | 73%                    | 26.4%                           | 43.4%                           | 56%                             |
| -45            | 78.4%                  | 21%                             | 59.4%                           | 40%                             |
| -20            | 51.4%                  | 48%                             | 53%                             | 46.4%                           |
| 0              | 63.6%                  | 36%                             | 51.6%                           | 47.8%                           |
| 20             | 68.2%                  | 31.4%                           | 55.2%                           | 44.2%                           |
| 45             | 66%                    | 33.6%                           | 53.2%                           | 46.2%                           |
| 70             | 48.6%                  | 50.8%                           | 32%                             | 67.4%                           |

Il ressort à la lecture de ces deux tables que :

- Lorsque  $R_{C_N}$  est égale à 20 km, il y a une chance sur deux de choisir le bon estimé  $\hat{Z}$  (et ce pour les deux sens de rotation).

- Lorsque  $R_{C_N}$  est égale à 10 km, seuls les cas où la source est en sens « horaire » offrent un pourcentage favorable à  $\hat{Z}$  (ce pourcentage est supérieur à 74% dans 5 cas sur 7). Dans les cas où la source est en sens « anti-horaire », ce pourcentage est inférieur à 73% (sauf pour un seul des scénarios).

Ce constat nous laisse présager de la difficulté à choisir le bon estimateur avec une forte probabilité.

### b) Initialisation par maillage

En situation opérationnelle, il est évident que l'utilisateur n'est pas en mesure d'initialiser l'algorithme de minimisation avec  $Z$  ou  $Z_{-\omega}$ . Il est donc nécessaire d'avoir recours à un algorithme d'initialisation. Nous proposons d'utiliser à cette fin le maillage décrit en annexe 4.4.2.1 (p. 157). Compte tenu du problème soulevé par la « semi-observabilité », nous avons décidé de dédoubler ce maillage :

- un premier maillage concerne les trajectoires candidates dont le sens de rotation est « horaire »,
- le second maillage concerne les trajectoires candidates dont le sens de rotation est « anti-horaire ».

Nous choisissons dans chaque maillage le meilleur vecteur d'initialisation (au sens du critère des moindres carrés pondérés). Ces deux vecteurs sont notés  $Z_+$  et  $Z_-$ , le premier correspond à une trajectoire candidate dont le sens de rotation est positif et le second à une trajectoire candidate dont le sens de rotation est négatif.

L'algorithme de minimisation est ensuite lancé deux fois :

- d'abord avec  $Z_{Init} = Z_+$  ; il fournit le vecteur  $Z_{Est+}$ ,
- puis avec  $Z_{Init} = Z_-$  ; il fournit le vecteur  $Z_{Est-}$ .

Ces deux vecteurs sont ensuite soumis au test d'acceptation et trois cas peuvent alors se produire :

- Les deux vecteurs sont rejettés par le test : dans ce cas l'algorithme de minimisation a échoué.
- Un seul des deux vecteurs est validé par le test : ce vecteur est retenu, il est noté  $\hat{Z}_{Est}$ .
- Les deux vecteurs sont validés : dans ce cas, c'est le vecteur dont le critère est le plus petit qui est retenu. Il est aussi noté  $\hat{Z}_{Est}$ .

Compte tenu de la « fragilité numérique » du problème, il y a peu de raison a priori que  $\hat{Z}_{Est}$  soit égal à  $\hat{Z}$  ou à  $\hat{\bar{Z}}$  (ces deux vecteurs étant ceux obtenus lorsque l'algorithme de minimisation est initialisé de façon « clairvoyante »).

Pour analyser la qualité des résultats, nous avons séparé, pour chaque scénario, la population des  $\hat{Z}_{Est}$  en deux classes :

- celle pour laquelle, le sens de rotation estimé est le même que celui de la source d'intérêt,
- celle pour laquelle, le sens de rotation estimé est opposé à celui de la source d'intérêt.

Les pourcentages (sur les 500 simulations) de ces deux classes sont donnés dans la Table 18 et la Table 19. La première correspond aux cas où la source d'intérêt est en sens « horaire » et la seconde à ceux où la source est en sens « anti-horaire ».

**Table 18 : Source en sens « horaire » - pourcentages des  $\hat{Z}_{Est}$  en sens « horaire » et en sens « anti-horaire » (sur 500 simulations).**

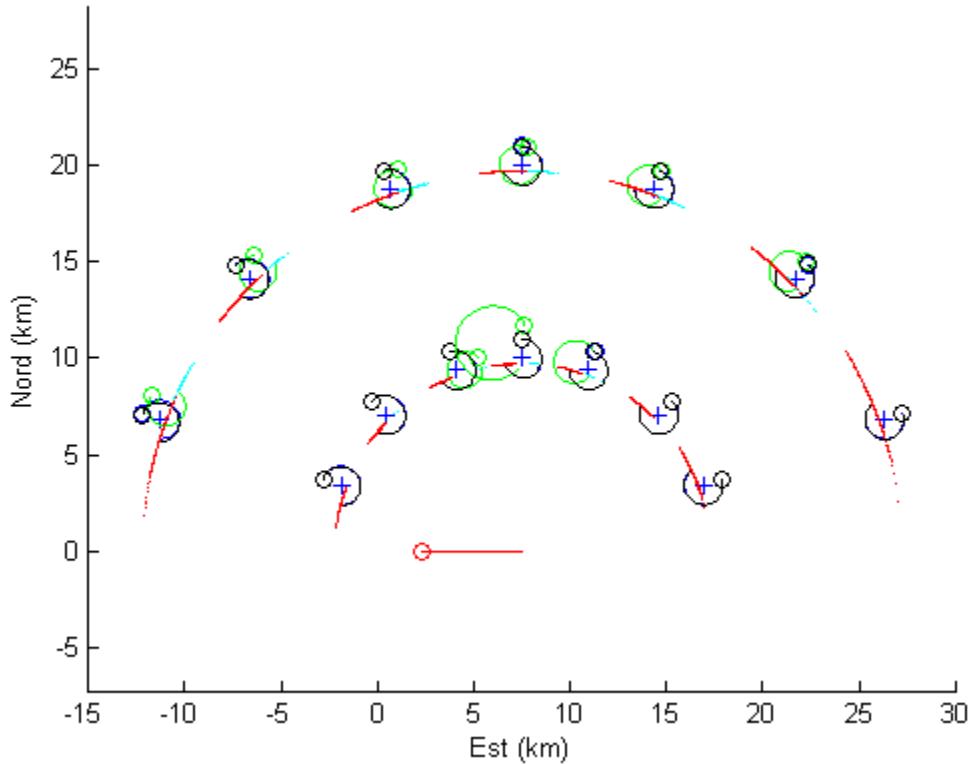
| $R_{CN}$ (km) | 10                               |                                       | 20                               |                                       |
|---------------|----------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|
|               | $\hat{Z}_{Est}$ sens « horaire » | $\hat{Z}_{Est}$ sens « anti-horaire » | $\hat{Z}_{Est}$ sens « horaire » | $\hat{Z}_{Est}$ sens « anti-horaire » |
| -70           | 100%                             | 0%                                    | 80.6%                            | 19.2%                                 |
| -45           | 100%                             | 0%                                    | 93.8%                            | 5.2%                                  |
| -20           | 99.6%                            | 0.4%                                  | 81.2%                            | 18.8%                                 |
| 0             | 96.4%                            | 3.6%                                  | 71.4%                            | 28.6%                                 |
| 20            | 91.2%                            | 8.8%                                  | 80%                              | 20%                                   |
| 45            | 100%                             | 0%                                    | 92%                              | 8%                                    |
| 70            | 100%                             | 0%                                    | 100%                             | 0%                                    |

**Table 19 : Source en sens « anti-horaire » - pourcentages des  $\hat{Z}_{Est}$  en sens « horaire » et en sens « anti-horaire » (sur 500 simulations).**

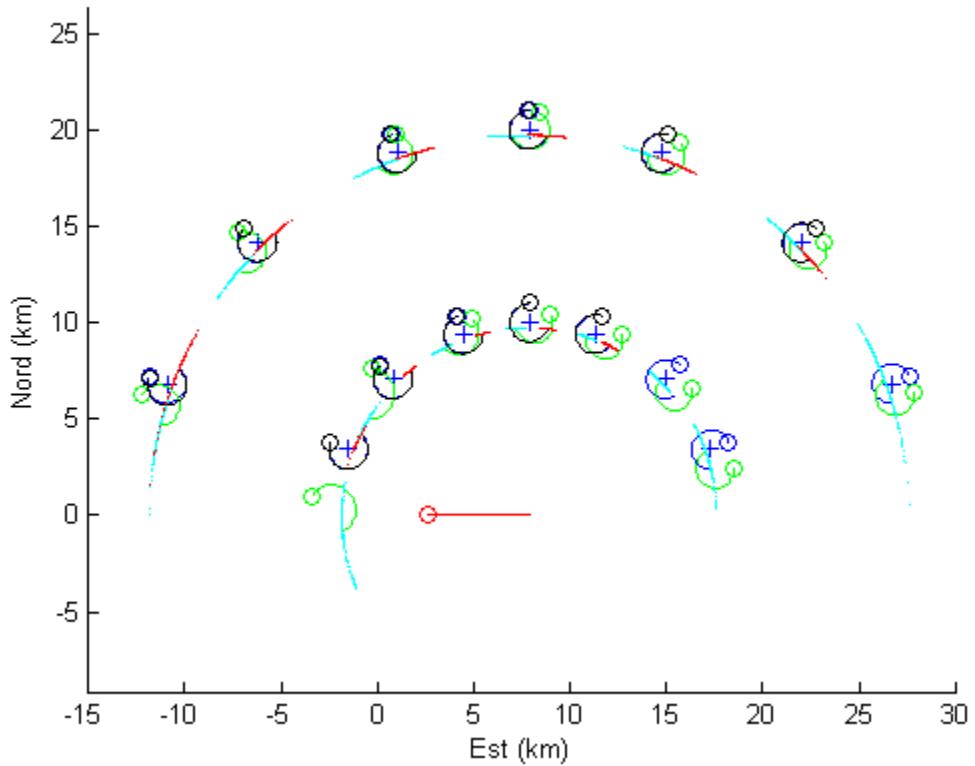
| $R_{CN}$ (km) | 10                               |                                       | 20                               |                                       |
|---------------|----------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|
|               | $\hat{Z}_{Est}$ sens « horaire » | $\hat{Z}_{Est}$ sens « anti-horaire » | $\hat{Z}_{Est}$ sens « horaire » | $\hat{Z}_{Est}$ sens « anti-horaire » |
| -70           | 44.6%                            | 54.8%                                 | 62.4%                            | 37.6%                                 |
| -45           | 20.2%                            | 79.8%                                 | 61.2%                            | 38.8%                                 |
| -20           | 48.6%                            | 51.4%                                 | 45%                              | 55%                                   |
| 0             | 39.2%                            | 60.8%                                 | 53.6%                            | 46.4%                                 |
| 20            | 38.6%                            | 61.4%                                 | 65.4%                            | 34.6%                                 |
| 45            | 100%                             | 0%                                    | 86%                              | 14%                                   |
| 70            | 99.6%                            | 0%                                    | 99.8%                            | 0%                                    |

L'ensemble des résultats est présenté à la Figure 51 et à la Figure 52 ; pour chaque scénario sont tracés :

- en bleu, la vraie trajectoire,
- en noir, la trajectoire reconstruite à partir de la moyenne des estimés  $\hat{Z}_{Est}$ , dont le sens de rotation est identique à celui de la source d'intérêt,
- en vert, la trajectoire reconstruite à partir de la moyenne des vecteurs  $\hat{Z}_{Est}$ , dont le sens de rotation est opposé à celui de la source d'intérêt,
- par les points rouges, les positions estimées de la source à l'instant final relative aux  $\hat{Z}_{Est}$ , dont le sens de rotation est identique à celui de la source d'intérêt,
- en cyan, celles relatives aux  $\hat{Z}_{Est}$ , dont le sens de rotation est opposé à celui de la source d'intérêt,



**Figure 51 : Les trajectoires de la source d'intérêt en sens « horaire » et les estimés correspondant (initialisation par maillage).**



**Figure 52 : Les trajectoires de la source d'intérêt en sens « anti-horaire » et les estimés correspondant (initialisation par maillage).**

Au vu des figures et des tables, nous pouvons en conclure que :

- Lorsque la source se déplace en sens « horaire », il y a plus de 80% de chance que l'algorithme fournisse un estimé définissant une trajectoire dans le même sens de rotation que la source. En outre, la comparaison de la Figure 49 à la Figure 51 nous permet de constater que ces trajectoires estimées sont identiques à celles définies par le nuage des  $\hat{Z}$  (obtenus lors de l'initialisation « clairvoyante »). On peut donc en conclure que l'ensemble des  $\hat{Z}_{Est}$  est peu différent de l'ensemble des  $\hat{Z}$ .
- Lorsque la source se déplace dans le sens « anti-horaire », les pourcentages des trajectoires estimées dans le même sens s'écroulent, au point de rendre la méthode totalement inexploitable pour ce type de scénario.

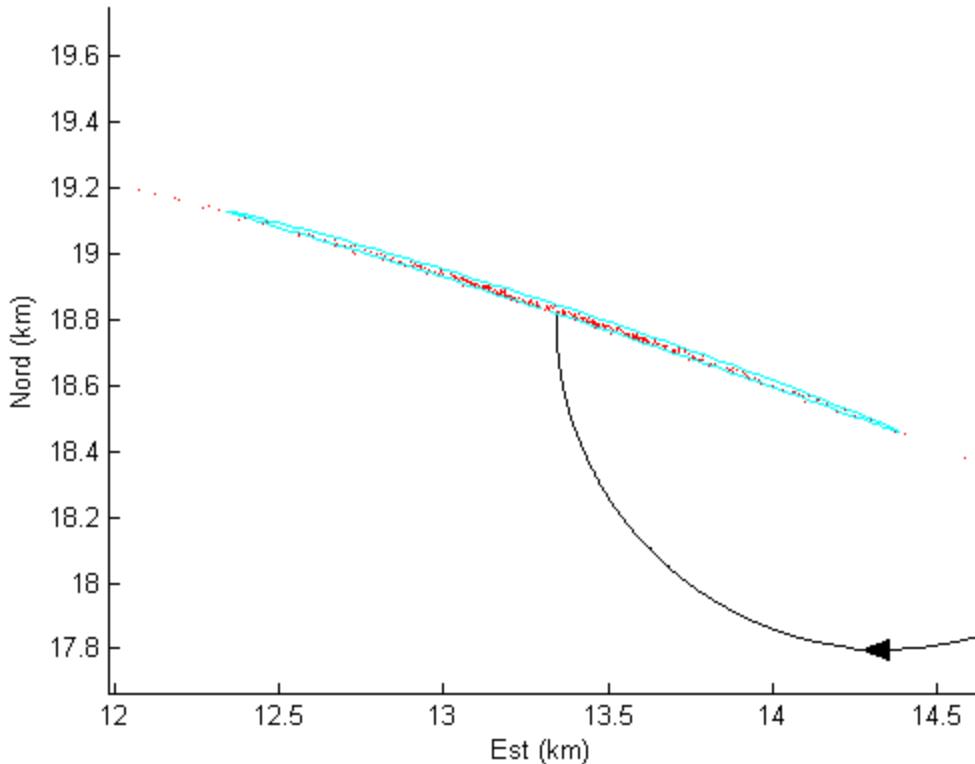
Nous détaillons à présent les performances de l'estimateur  $\hat{Z}_{Est}$  pour les deux scénarios relatifs au cas  $\{\varphi = 20^\circ, R_{C_N} = 10 \text{ km}, \text{source en sens « horaire » et source en sens « anti-horaire »}\}$ .

La Table 20 donne les statistiques des 400 résultats validés  $\hat{Z}_{Est}$  qui définissent les trajectoires dont le sens de parcours est identique à celui de la source d'intérêt (en sens « horaire »). L'algorithme de minimisation a convergé après 12 itérations en moyenne. La

Figure 53 présente un agrandissement du nuage de ces estimés et de la région de confiance associée.

**Table 20 : Source en sens « horaire » - Performances des  $\hat{Z}_{Est}$  en sens « horaire ».**

|            | Unités | Vrai  | Moyen | Biais | $\sigma_{BCR}$ | $\hat{\sigma}$ |
|------------|--------|-------|-------|-------|----------------|----------------|
| $x_S(t_N)$ | km     | 13.37 | 13.34 | 0.03  | 0.42           | 0.43           |
| $y_S(t_N)$ | km     | 18.83 | 18.82 | 0.01  | 0.14           | 0.14           |
| $\rho_C$   | km     | 1.00  | 1.00  | 0.00  | 0.03           | 0.03           |
| $\varphi$  | °      | 20.00 | 19.68 | 0.32  | 0.79           | 0.79           |
| $\omega$   | °/s    | 0.287 | 0.287 | 0.00  | 0.006          | 0.006          |
| $R_N$      | km     | 19.71 | 19.70 | 0.01  | 0.01           | 0.01           |
| $\theta_N$ | °      | 17.24 | 17.16 | 0.08  | 1.28           | 3.19           |

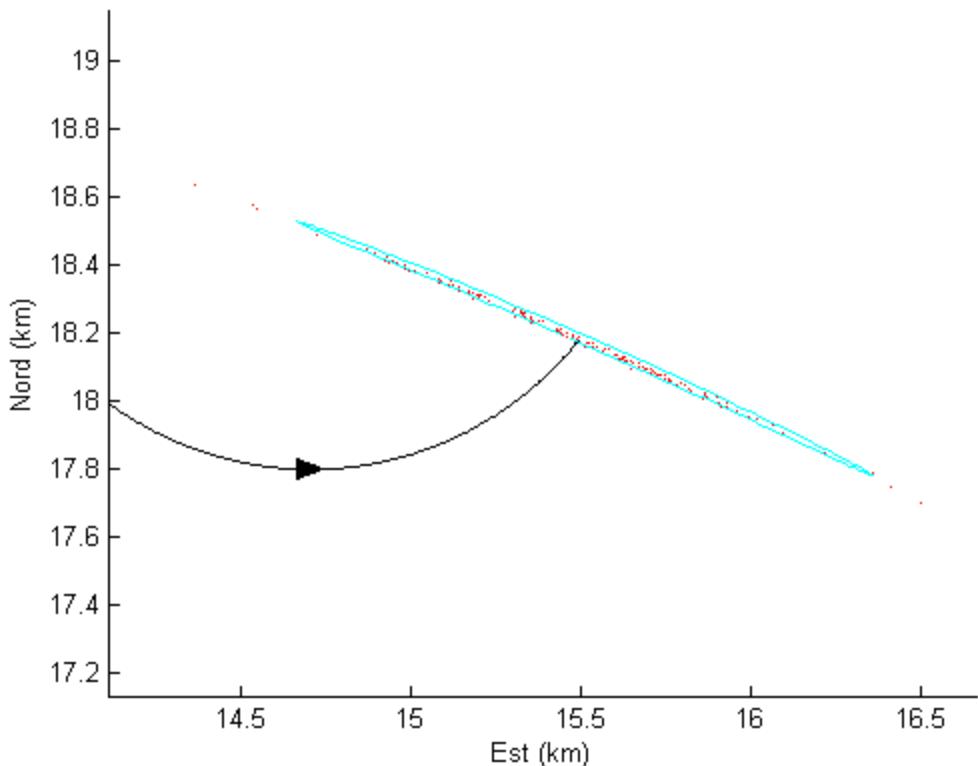


**Figure 53 : Zoom sur la région de confiance et les estimés  $\hat{Z}_{Est}$ , source et estimés en sens « horaire ».**

La Table 21 présente les statistiques des 173 résultats validés  $\hat{Z}_{Est}$  définissant les trajectoires en sens « anti-horaire » comme la source d'intérêt. L'algorithme de minimisation a convergé après 17 itérations en moyenne. Un zoom du nuage de ces estimés et de la région de confiance associée est donné à la Figure 54.

**Table 21 : Source en sens « anti-horaire » - Performances des  $\hat{Z}_{Est}$  en sens « anti-horaire ».**

|            | Unités | Vrai  | Moyen | Biais | $\sigma_{BCR}$ | $\hat{\sigma}$ |
|------------|--------|-------|-------|-------|----------------|----------------|
| $x_S(t_N)$ | km     | 15.52 | 13.49 | 0.03  | 0.35           | 0.38           |
| $y_S(t_N)$ | km     | 18.17 | 18.18 | 0.01  | 0.15           | 0.17           |
| $\rho_C$   | km     | 1.00  | 1.00  | 0.00  | 0.04           | 0.04           |
| $\varphi$  | °      | 20.00 | 20.17 | 0.17  | 2.76           | 2.99           |
| $\omega$   | °/s    | 0.287 | 0.287 | 0.00  | 0.006          | 0.006          |
| $R_N$      | km     | 19.71 | 19.70 | 0.01  | 0.01           | 0.01           |
| $\theta_N$ | °      | 22.76 | 22.68 | 0.10  | 1.01           | 1.21           |



**Figure 54 : Zoom sur la région de confiance et les estimés  $\hat{Z}_{Est}$ , source et estimés en sens « anti-horaire ».**

Manifestement,  $\hat{Z}_{Est}$  est efficace sur ces deux scénarios. Il s'agit donc bien de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

## 4.2 Trajectoire d'une source composée de deux legs reliés par un arc de cercle

Dans ce paragraphe, nous considérons que la source parcourt à vitesse constante une trajectoire composée de trois tronçons : deux legs (CV) reliés par un arc de cercle (CT). Ce modèle de trajectoire a été utilisé dans le cadre de la BO-MTMA [Jauffret10].

### 4.2.1 Notations et hypothèses

La cinématique de la source est définie telle que :

- $v_s$  est sa vitesse (constante),
- durant  $[t_1, t_{M_1}]$  elle suit un premier leg avec le cap  $h_{S,1}$  (CV),
- durant  $[t_{M_1}, t_{M_2}]$  son cap varie de façon linéaire de  $h_{S,1}$  jusqu'à atteindre  $h_{S,2}$  (CT),
- durant  $[t_{M_2}, t_N]$  elle suit un second leg avec le cap  $h_{S,2}$  (CV),
- sa position à l'instant final  $t_N$  est notée  $P_s(t_N) = [x_s(t_N) \ y_s(t_N)]^T$  ( $t_k = (k-1)\Delta t$  pour  $k = 1, 2, \dots, N$ ).

Reprendons les expressions donnant la position de la source à l'instant  $t_k$  (explicité de façon rétrograde relativement à la position finale) issues de [Jauffret10] :

1) si  $t_{M_2} \leq t_k \leq t_N$  (second leg) :

$$P_s(t_k) = \begin{bmatrix} x_s(t_k) \\ y_s(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s(t_N) \\ y_s(t_N) \end{bmatrix} + (k-N) \Delta t v_s \begin{bmatrix} \sin h_{S,2} \\ \cos h_{S,2} \end{bmatrix}. \quad (52)$$

2) si  $t_{M_1} \leq t_k < t_{M_2}$  (arc de cercle) :

$$P_s(t_k) = \begin{bmatrix} x_s(t_N) \\ y_s(t_N) \end{bmatrix} + \Delta t v_s \begin{bmatrix} (M_2 - N) \sin h_{S,2} - \sum_{i=1}^{M_2-k} \sin \left( h_{S,1} \frac{M_2 - k - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{S,2} \frac{k + i - M_1}{M_2 - M_1 + 1} \right) \\ (M_2 - N) \cos h_{S,2} - \sum_{i=1}^{M_2-k} \cos \left( h_{S,1} \frac{M_2 - k - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{S,2} \frac{k + i - M_1}{M_2 - M_1 + 1} \right) \end{bmatrix}.$$

3) si  $t_1 \leq t_k < t_{M_1}$  (premier leg) :

$$P_s(t_k) = \begin{bmatrix} x_s(t_N) \\ y_s(t_N) \end{bmatrix} + \Delta t v_s \begin{bmatrix} (M_2 - N) \sin h_{S,2} - \sum_{i=1}^{M_2-M_1} \sin \left( h_{S,1} \frac{M_2 - M_1 - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{S,2} \frac{i}{M_2 - M_1 + 1} \right) + (k - M_1) \sin h_{S,1} \\ (M_2 - N) \cos h_{S,2} - \sum_{i=1}^{M_2-M_1} \cos \left( h_{S,1} \frac{M_2 - M_1 - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{S,2} \frac{i}{M_2 - M_1 + 1} \right) + (k - M_1) \cos h_{S,1} \end{bmatrix}.$$

Les deux dernières expressions peuvent être réécrites de façon plus synthétique. Nous obtenons ainsi pour  $t_1 \leq t_k < t_{M_2}$  :

$$\begin{bmatrix} x_s(t_k) \\ y_s(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s(t_N) \\ y_s(t_N) \end{bmatrix} + \Delta t v_s \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  sont fonction du tronçon sur lequel se situe la source à l'instant  $t_k$ .

Ils sont définis par :

- pour  $t_{M_1} \leq t_k < t_{M_2}$ ,

$$a_k = (M_2 - N) \sin h_{s,2} - \sum_{i=1}^{M_2-k} \sin \left( h_{s,1} \frac{M_2 - k - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{s,2} \frac{k + i - M_1}{M_2 - M_1 + 1} \right),$$

$$b_k = (M_2 - N) \cos h_{s,2} - \sum_{i=1}^{M_2-k} \cos \left( h_{s,1} \frac{M_2 - k - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{s,2} \frac{k + i - M_1}{M_2 - M_1 + 1} \right).$$

- pour  $t_1 \leq t_k < t_{M_1}$ ,

$$a_k = (M_2 - N) \sin h_{s,2} - \sum_{i=1}^{M_2-M_1} \sin \left( h_{s,1} \frac{M_2 - M_1 - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{s,2} \frac{i}{M_2 - M_1 + 1} \right) + (k - M_1) \sin h_{s,1},$$

$$b_k = (M_2 - N) \cos h_{s,2} - \sum_{i=1}^{M_2-M_1} \cos \left( h_{s,1} \frac{M_2 - M_1 - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{s,2} \frac{i}{M_2 - M_1 + 1} \right) + (k - M_1) \cos h_{s,1}.$$

La Figure 55 présente le jeu de notations de la RO-MTMA.

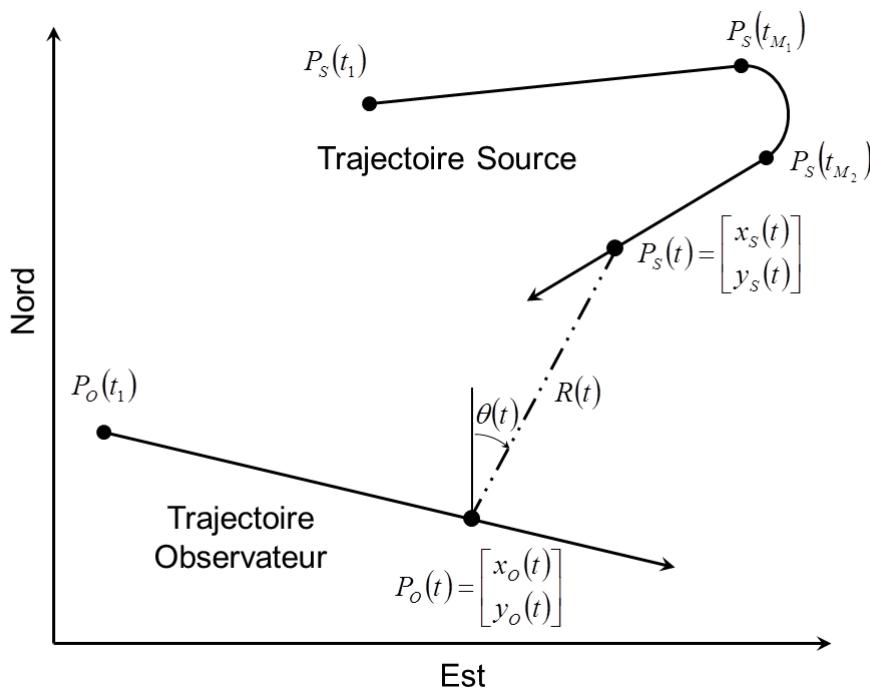


Figure 55 : Scénario de RO-MTMA.

Le vecteur définissant entièrement la trajectoire de la source est de dimension 7. Nous avons choisi :

$$[x_s(t_N) \ y_s(t_N) \ v_s \ h_{S,1} \ h_{S,2} \ t_{M_1} \ t_{M_2}]^T.$$

Les mesures de distance sans bruit  $R(t)$  sont données, à l'instant  $t$  par l'équation (5) (cf. p. 33) et les mesures bruitées  $R_m(t_k)$  par (31) (voir §3.1, p. 86).

### 4.2.2 Observabilité

Pour mener à bien l'analyse de l'observabilité, nous adoptons la même démarche que celle employée en BO-CTTMA (§2.1.2.3, p. 45), elle se décompose en 3 étapes :

- prouver qu'une source en CV est distinguable d'une autre en CT,
- établir l'observabilité des instants de manœuvre  $t_{M_1}$  et  $t_{M_2}$ ,
- montrer que toute trajectoire d'une source obéissant au modèle faisant l'objet de ce paragraphe est observable dans chaque demi-plan dont la frontière est la droite portant la trajectoire de l'observateur.

L'étude est faite en temps continu.

#### 4.2.2.1 Distinguabilité d'une source en CT d'une autre en CV

Démontrons que les distances  $R(t)$ , collectées depuis une plate-forme en CV, sont différentes suivant que la source suit un CV ou bien un CT. La source d'intérêt  $S$  est toujours considérée en CT, tandis qu'une autre source  $S'$  est supposée en CV.

La position de la source  $S$  est donnée par la relation (1) (cf. p. 32) et celle de la source  $S'$  par l'expression (20) (voir p. 45).

Le carré de la distance est :

- $R^2(t) = [\rho_c \sin(\omega t + \varphi) + x_c - t \dot{x}_o]^2 + [\rho_c \cos(\omega t + \varphi) + y_c]^2$  pour  $S$ ,
- $R^2(t) = [x_{S'}(0) + t \dot{x}_{S'} - t \dot{x}_o]^2 + [y_{S'}(0) + t \dot{y}_{S'}]^2$  pour  $S'$ .

Si  $S$  et  $S'$  sont détectées aux mêmes distances  $\forall t$ , alors :

$$\begin{aligned} x_c^2 + y_c^2 + \rho_c^2 + 2\rho_c[x_c \sin(\omega t + \varphi) + y_c \cos(\omega t + \varphi)] - 2t \dot{x}_o[x_c + \rho_c \sin(\omega t + \varphi)] \\ = x_{S'}^2(0) + y_{S'}^2(0) + t^2[\dot{x}_{S'}^2 + \dot{y}_{S'}^2] + 2t[\dot{x}_{S'}x_{S'}(0) + \dot{y}_{S'}y_{S'}(0)] - 2t \dot{x}_o[x_{S'}(0) + t \dot{x}_{S'}], \forall t \end{aligned}$$

égalité équivalente à :

$$2\rho_C[x_C \sin(\omega t + \varphi) + y_C \cos(\omega t + \varphi)] - 2t\dot{x}_o\rho_C \sin(\omega t + \varphi) \\ = x_{S'}^2(0) + y_{S'}^2(0) - x_C^2 - y_C^2 - \rho_C^2 + 2t[\dot{x}_o x_C + \dot{x}_{S'} x_{S'}(0) + \dot{y}_{S'} y_{S'} - \dot{x}_o x_{S'}(0)] + t^2[\dot{x}_o \dot{x}_{S'} + \dot{x}_{S'}^2 + \dot{y}_{S'}^2], \forall t$$

Il est impossible que les deux membres de cette dernière équation soient égaux. En effet, le membre de gauche comprend des fonctions sinus et cosinus, tandis que celui de droite est un polynôme.

Comme dans le cas angle seul, il n'existe donc pas de source  $S'$  pouvant être détectée aux mêmes distances  $R(t), \forall t$  que la source d'intérêt  $S$  depuis une plate-forme en CV (ou éventuellement immobile).

Nous tirons de cette conclusion la propriété suivante :

**Propriété 17**

*Soit un observateur en CV (ou éventuellement immobile) et une source d'intérêt en CT. Alors, il n'existe pas de source en CV détectée aux mêmes distances que la source en CT. Les deux modèles sont alors distinguables.*

**4.2.2.2 Observabilité d'une trajectoire, parcourue à vitesse constante, composée de deux legs reliés par un arc de cercle**

Pour montrer l'observabilité d'une telle trajectoire, il suffit de montrer que les instants  $t_{M_1}$  et  $t_{M_2}$  le sont. Considérons une éventuelle autre source  $S'$  dont la trajectoire est du même type :

- de  $[0, t'_{M_1}]$  elle est en CV,
- de  $[t'_{M_1}, t'_{M_2}]$  en CT
- et de  $[t'_{M_2}, T]$  en CV.

Si  $t'_{M_1}$  est différent de  $t_{M_1}$  (par exemple  $t_{M_1} < t'_{M_1}$ ) alors durant  $[t_{M_1}, t'_{M_1}]$  la source  $S$  est en CT tandis que la source  $S'$  est en CV, ce qui est contraire à la propriété précédente.

Donc  $t_{M_1} = t'_{M_1}$ , un raisonnement similaire nous permet de conclure que  $t_{M_2} = t'_{M_2}$ .

La propriété 16 (cf. §4.1.2.2, p. 131) nous permet de conclure que, sur chaque demi-plan, les deux arcs de cercles sont identiques et par conséquent les legs avant et après le sont aussi.

### Propriété 18

- Soient un observateur en CV et une source parcourant, à vitesse constante, une trajectoire composée de deux legs reliés par un arc de cercle. Alors la trajectoire de la source est observable par mesures de distance dans chaque demi-plan dont la frontière est la droite portant la trajectoire de l'observateur.
- La trajectoire de la deuxième source est symétrique par rapport à cette droite.

### 4.2.3 Borne de Cramér-Rao, semi-observabilité et estimateur

Désormais, nous supposerons les instants  $t_{M_1}$  et  $t_{M_2}$  connus. Aussi le vecteur d'état retenu est-il

$$Z = [x_s(t_N) \ y_s(t_N) \ v_s \ h_{s,1} \ h_{s,2}]^T.$$

#### 4.2.3.1 Matrice d'information de Fisher et borne de Cramér-Rao

La FIM s'exprime comme suit :

$$F(Z | R_m) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_R^2(t_k)} \Phi^T(t_k, t_N) \nabla_{Z_k} R(Z_k, t_k) \nabla_{Z_k}^T R(Z_k, t_k) \Phi(t_k, t_N)$$

où,

- $Z_k = [x_s(t_k) \ y_s(t_k) \ v_s \ h_{s,1} \ h_{s,2}]^T$ ,
- $\nabla_{Z_k} R(Z_k, t_k) = [\sin \theta(t_k) \ \cos \theta(t_k) \ 0 \ 0 \ 0]^T$  est le gradient de l'équation de mesures par rapport au vecteur d'état  $Z_k$ ,
- et  $\Phi(t_k, t_N)$  la matrice de transition de l'instant courant vers l'instant final.

Précisons les différentes expressions de la matrice de transition, chacune d'elles étant associées à un des tronçons de la trajectoire source. Elles sont telles que :

1) si  $t_{M_2} \leq t_k \leq t_N$ ,

$$\Phi(t_k, t_N) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (k-N)\Delta t \sin h_{s,2} & 0 & (k-N)\Delta t v_s \cos h_{s,2} \\ 0 & 1 & (k-N)\Delta t \cos h_{s,2} & 0 & (k-N)\Delta t v_s \sin h_{s,2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

2) si  $t_1 \leq t_k < t_{M_2}$ , d'après l'équation (53) définissant les deux premiers tronçons, la matrice de transition prend la forme :

$$\Phi(t_k, t_N) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t a_k & \Delta t v_s c_k & \Delta t v_s e_k \\ 0 & 1 & \Delta t b_k & \Delta t v_s d_k & \Delta t v_s f_k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  ont été définis au paragraphe 4.2.1 (p. 145). Les autres coefficients sont  $c_k = \frac{\partial a_k}{\partial h_{S,1}}$ ,  $d_k = \frac{\partial b_k}{\partial h_{S,1}}$ ,  $e_k = \frac{\partial a_k}{\partial h_{S,2}}$  et  $f_k = \frac{\partial b_k}{\partial h_{S,2}}$  dont le détail est disponible en annexe

#### 4.4.1.

La CRLB est notée  $B(Z|R_m)$ .

#### 4.2.3.2 Semi-observabilité et estimateur du maximum de vraisemblance

Le critère que minimise le MLE est toujours celui des moindres carrés pondérés :

$$C(Z) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_R^2(t_k)} [R_m(t_k) - R(Z, t_k)]^2.$$

La recherche du minimum du critère est effectuée par la procédure numérique de Gauss-Newton initialisée sur  $Z_{init}$ . Elle renvoie un vecteur qui est soumis au test de validation employé jusqu'à présent.

Le scénario sur lequel porte notre étude est le suivant :

- L'observateur démarre à l'origine, sa vitesse est de 5 m/s et son cap est égal à  $90^\circ$ .
- La source démarre sa trajectoire à la position  $[0 \ 10]^T$  km ; son premier cap  $h_{S,1}$  est de  $90^\circ$  et le second  $h_{S,2}$  est de  $240^\circ$  ; la manœuvre débute à l'instant  $t_{M1} = 1200$  secondes et se termine à l'instant  $t_{M2} = 1520$  secondes (la durée du tronçon en CT est donc de 320 secondes) ; la source conserve tout au long du scénario une vitesse de 4 m/s.
- La durée totale du scénario est de 30 minutes ; la période d'échantillonnage  $\Delta t$  est égale à 4 secondes ; le nombre de mesures  $N$  est donc 450.

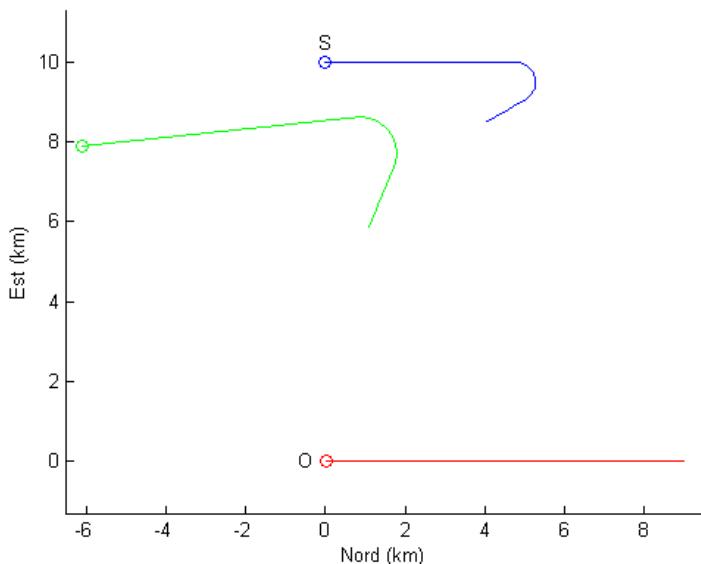
En résumé, La trajectoire de la source d'intérêt est donc définie par  $Z = [4.06 \ 8.52 \ 4 \ 90 \ 240]^T$ .

#### 4.2.3.2.1 Semi-observabilité

Comme en RO-CTTMA, nous sommes confrontés au problème de « semi-observabilité » : dans le cas de mesures non-bruitées pour le scénario décrit ci-dessus, nous mettons en évidence l'existence d'un minimum local  $\breve{Z}$  de  $C(Z)$ , nommé « artefact », tel que  $R(\breve{Z}, t) \approx R(Z, t), \forall t \in [0, T]$ .

Afin de calculer  $\breve{Z}$ , nous initialisons l'algorithme sur le vecteur  $Z_{init}$  choisi dans le maillage décrit en annexe au §4.4.2.2 (p. 157), après avoir forcé la variance à 1. Le vecteur  $\breve{Z}$  retourné est  $\breve{Z} = [1.09037 \ 5.87856 \ 5.80761 \ 83.99905 \ 202.71877]^T$ .

La trajectoire de la source d'intérêt est tracée en bleu et celle de « l'artefact » est tracée en vert sur la Figure 56.



**Figure 56 : La trajectoire de la source d'intérêt (en bleu) et la trajectoire définie par « l'artefact » (en vert).**

L'écart moyen  $\overline{\Delta R}$  (défini par la relation (51) au §4.1.3.2.2, p. 135) est de l'ordre de 1.5 m, alors que la trajectoire définie par « l'artefact » est éloignée à plus de 4 km de celle de la source.

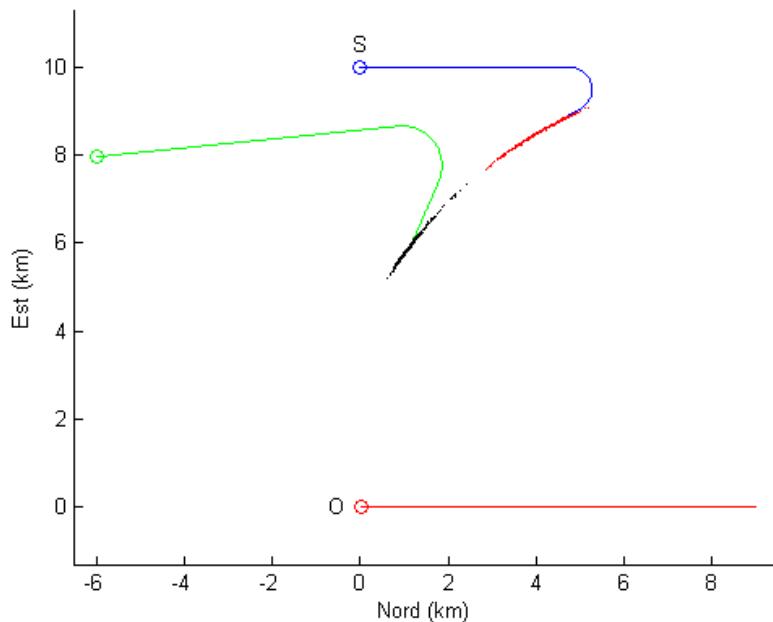
#### 4.2.3.2.2 Estimateur

Nous avons réalisé 500 tirages de Monte-Carlo avec un écart-type du bruit de mesure  $\sigma_R(t_k)$  égal à 50 m. On initialise l'algorithme avec soit  $Z_{init} = Z$  (initialisation « clairvoyante »), soit  $Z_{init}$  choisi dans le maillage décrit en annexe au §4.4.2.2 (p. 157).

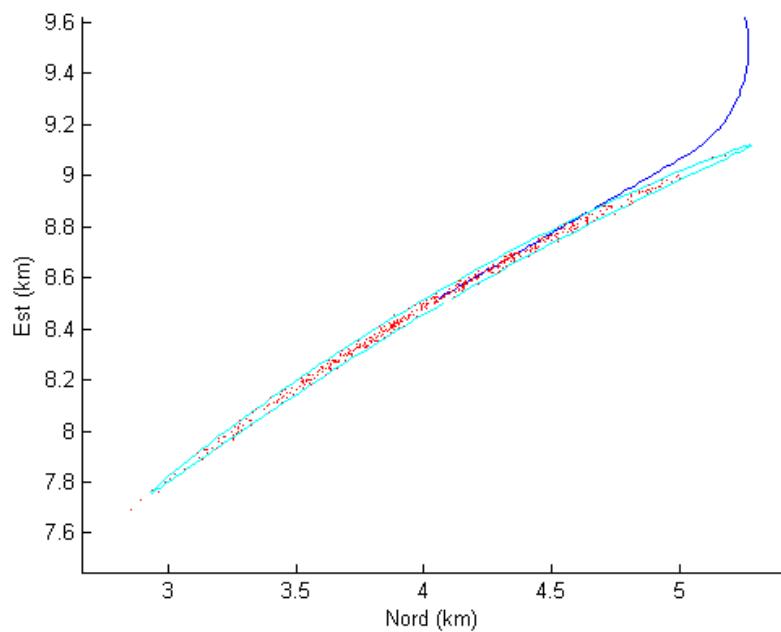
L'ensemble des résultats est représenté sur la Figure 57 :

- en rouge, le nuage d'estimés  $\hat{Z}$  avec la trajectoire de la source d'intérêt (en bleu),
- en noir, le nuage d'estimés  $\check{Z}$  avec la trajectoire définie par  $\check{Z}$  (en vert).

La Figure 58 présente un agrandissement du nuage des estimés  $\hat{Z}$  et du tracé de la région de confiance (dont la construction a été détaillé au §3.4.1.2, p. 103).



**Figure 57 : La trajectoire de la source d'intérêt, celle définie par l'artefact et les nuages d'estimés obtenus pour les deux initialisations.**



**Figure 58 : Zoom sur la région de confiance et les estimés  $\hat{Z}$ .**

D'une façon générale, on constate que :

- lorsque  $Z_{init} = Z$ , la procédure converge vers le résultat  $\hat{Z}$ ,
- lorsque  $Z_{init}$  est choisi dans le maillage, alors l'algorithme converge vers  $\hat{\tilde{Z}}$ .

La Table 22 présente les statistiques relatives aux 490 résultats  $\hat{Z}$  validés par le test et la Table 23 présente celles relatives aux 498 résultats  $\hat{\tilde{Z}}$  validés.

**Table 22 : Performances de  $\hat{Z}$ .**

|            | Unités | Vrai   | Moyen  | Biais | $\sigma_{BCR}$ | $\hat{\sigma}$ |
|------------|--------|--------|--------|-------|----------------|----------------|
| $x_S(t_N)$ | km     | 4.06   | 4.04   | 0.02  | 0.48           | 0.47           |
| $y_S(t_N)$ | km     | 8.52   | 8.49   | 0.03  | 0.28           | 0.28           |
| $v_S$      | m/s    | 4.00   | 4.02   | 0.02  | 0.22           | 0.22           |
| $h_{S,1}$  | °      | 90.00  | 89.81  | 0.19  | 0.78           | 0.78           |
| $h_{S,2}$  | °      | 240.00 | 239.83 | 0.17  | 6.62           | 6.47           |
| $R_N$      | km     | 9.85   | 9.85   | 0.00  | 0.01           | 0.01           |
| $\theta_N$ | °      | -30.10 | -30.31 | 0.21  | 2.14           | 3.19           |

**Table 23 : Performances de  $\hat{\tilde{Z}}$ .**

|            | Unités | $\check{Z}_N$ | Moyen  | Biais | $\hat{\sigma}$ |
|------------|--------|---------------|--------|-------|----------------|
| $x_S(t_N)$ | km     | 1.09          | 1.15   | 0.06  | 0.26           |
| $y_S(t_N)$ | km     | 5.88          | 5.94   | 0.06  | 0.33           |
| $v_S$      | m/s    | 5.81          | 5.77   | 0.04  | 0.20           |
| $h_{S,1}$  | °      | 82.88         | 84.19  | 0.69  | 1.57           |
| $h_{S,2}$  | °      | 202.72        | 203.44 | 0.72  | 3.38           |
| $R_N$      | km     | 9.85          | 9.86   | 0.01  | 0.013          |
| $\theta_N$ | °      | -53.38        | -52.91 | 0.47  | -              |

Sur la Figure 59 et la Figure 60, les histogrammes des critères  $C(\hat{Z})$  et  $C(\hat{\tilde{Z}})$  illustrent leurs dispersions et nous ne constatons pas de différence flagrante entre leur répartition.

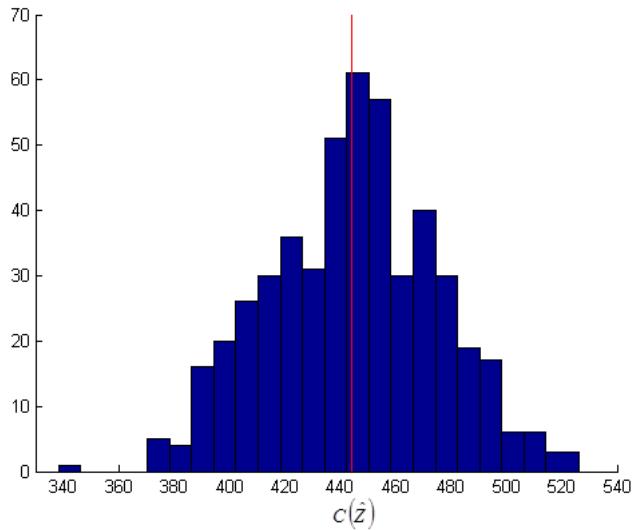


Figure 59 : Histogramme du critère  $C(\hat{Z})$ .

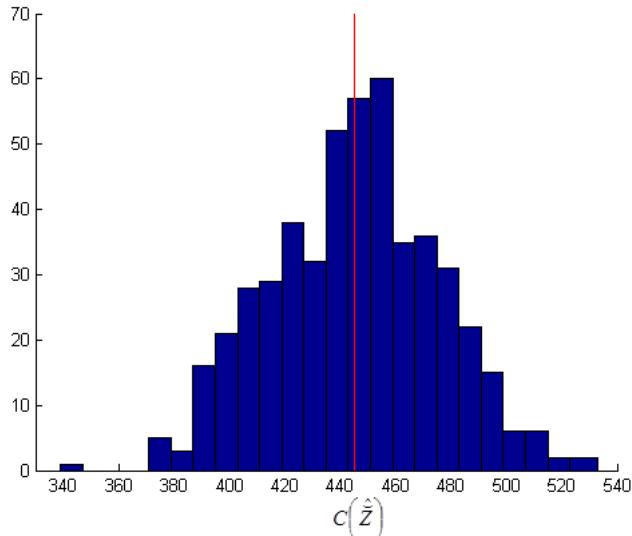


Figure 60 : Histogramme du critère  $C(\hat{\hat{Z}})$ .

La moyenne du critère  $C(\hat{Z})$  est égale à 444.41 et celle de  $C(\hat{\hat{Z}})$  à 445.18 (indiquées en rouge sur les deux histogrammes). L'écart-type de  $C(\hat{Z})$  est égal à 30.22 et celui de  $C(\hat{\hat{Z}})$  à 30.36. Le critère  $C(\hat{Z})$  (lorsque  $\hat{Z}$  est validé) est inférieur à  $C(\hat{\hat{Z}})$  pour 60.6% des 500 simulations. Le critère  $C(\hat{\hat{Z}})$  (lorsque  $\hat{Z}$  est validé) est inférieur à  $C(\hat{Z})$  pour 38.6% des 500 simulations.

Enfin, concernant le nombre moyen d'itérations nécessaire à l'algorithme, il est de l'ordre de 11 lorsqu'il est initialisé sur la vraie valeur et de 14 lorsque le vecteur d'initialisation est sélectionné dans le maillage.

Du point de vue statistique, le MLE s'avère efficace sur ce scénario (voir Table 22).

## 4.3 Bilan du chapitre

L'objectif de ce chapitre était d'étudier la faisabilité de la trajectographie, à partir de mesures de distance seules, d'une source manœuvrante depuis un observateur en mouvement rectiligne uniforme. Pour deux types de trajectoire de la source considérés (arc de cercle seul et trajectoire en épingle), l'observabilité a été prouvée.

Cependant, la méthode est victime de l'existence d'une trajectoire « artefact ». En effet, pour chaque scénario, il existe une autre trajectoire, éventuellement très éloignée de celle de la source d'intérêt, à des distances quasi-identiques de l'observateur. Ce fait a une conséquence négative sur la trajectographie : même si l'estimateur du maximum de vraisemblance est efficace, la probabilité de l'atteindre est peu souvent supérieure à 50%. Ce n'est malheureusement pas un problème numérique : la trajectoire « artefact » estimée est quelquefois plus vraisemblable que la trajectoire d'intérêt estimée.

Cette étude permet donc de conclure que l'observateur, ne disposant que de mesures de distance, doit nécessairement manœuvrer.

## 4.4 Annexe

### 4.4.1 Expressions des coefficients $c_k$ , $d_k$ , $e_k$ et $f_k$ .

Les coefficients  $c_k = \frac{\partial a_k}{\partial h_{S,1}}$ ,  $d_k = \frac{\partial b_k}{\partial h_{S,1}}$ ,  $e_k = \frac{\partial a_k}{\partial h_{S,2}}$  et  $f_k = \frac{\partial b_k}{\partial h_{S,2}}$  sont donnés par les

relations suivantes :

- pour  $t_{M_1} \leq t_k < t_{M_2}$ ,

$$c_k = - \sum_{i=1}^{M_2-k} \frac{M_2 - k - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} \cos \left( h_{S,1} \frac{M_2 - k - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{S,2} \frac{k + i - M_1}{M_2 - M_1 + 1} \right),$$

$$d_k = \sum_{i=1}^{M_2-k} \frac{M_2 - k - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} \sin \left( h_{S,1} \frac{M_2 - k - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{S,2} \frac{k + i - M_1}{M_2 - M_1 + 1} \right),$$

$$e_k = (M_2 - N) \cos h_{S,2} - \sum_{i=1}^{M_2-k} \frac{k + i - M_1}{M_2 - M_1 + 1} \cos \left( h_{S,1} \frac{M_2 - k - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{S,2} \frac{k + i - M_1}{M_2 - M_1 + 1} \right),$$

$$f_k = -(M_2 - N) \sin h_{S,2} + \sum_{i=1}^{M_2-k} \frac{k + i - M_1}{M_2 - M_1 + 1} \sin \left( h_{S,1} \frac{M_2 - k - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{S,2} \frac{k + i - M_1}{M_2 - M_1 + 1} \right).$$

- pour  $t_1 \leq t_k < t_{M_1}$ ,

$$c_k = - \sum_{i=1}^{M_2-M_1} \frac{M_2 - M_1 - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} \cos \left( h_{S,1} \frac{M_2 - M_1 - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{S,2} \frac{i}{M_2 - M_1 + 1} \right) + (k - M_1) \cos h_{S,1},$$

$$d_k = \sum_{i=1}^{M_2-M_1} \frac{M_2 - M_1 - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} \sin \left( h_{S,1} \frac{M_2 - M_1 - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{S,2} \frac{i}{M_2 - M_1 + 1} \right) - (k - M_1) \sin h_{S,1},$$

$$e_k = (M_2 - N) \cos h_{S,2} - \sum_{i=1}^{M_2-M_1} \frac{i}{M_2 - M_1 + 1} \cos \left( h_{S,1} \frac{M_2 - M_1 - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{S,2} \frac{i}{M_2 - M_1 + 1} \right),$$

$$f_k = -(M_2 - N) \sin h_{S,2} + \sum_{i=1}^{M_2-M_1} \frac{i}{M_2 - M_1 + 1} \sin \left( h_{S,1} \frac{M_2 - M_1 - i + 1}{M_2 - M_1 + 1} + h_{S,2} \frac{i}{M_2 - M_1 + 1} \right).$$

### 4.4.2 Algorithme de recherche du ou des vecteurs d'initialisations

Dans cette annexe, nous donnons les grandes lignes des algorithmes permettant la sélection du ou des vecteurs d'initialisations nécessaires aux procédures de minimisation utilisées dans ce chapitre.

#### 4.4.2.1 Cas de la RO-CTTMA :

Au paragraphe 4.1.3.2.3 (cf. p. 135), nous avons systématiquement besoin des deux vecteurs d'initialisations  $Z_+$  et  $Z_-$  lorsque nous initialisons par maillage l'algorithme de minimisation. La procédure permettant leur sélection est décrite dans ce paragraphe.

Il est important de noter que cet algorithme est dérivé de celui défini dans le cadre de la BO-CTTMA (voir §2.5.3.1, p. 80), nous présentons seulement les modifications nécessaires à l'adaptation de ce dernier au problème de la RO-CTTMA.

Cette fois ce sont les distances qui sont mesurées, il faut donc « mailler » les azimuts relatifs aux instants initial et final, que nous notons respectivement  $\theta_{Init,1}$  et  $\theta_{Init,N}$ . Ces deux azimuts sont choisis dans l'intervalle compris entre  $\theta_{\min}$  et  $\theta_{\max}$  (le choix de ces bornes reste arbitraire).

Il s'agit ensuite de calculer, pour chaque couple  $\theta_{Init,1}$  et  $\theta_{Init,N}$ , la valeur du vecteur

$P_{S,Init}(t_N) - P_{S,Init}(t_1)$ , permettant d'obtenir :

- $\Delta x_{Init} = R_m(t_N) \sin(\theta_{Init,N}) - R_m(t_1) \sin(\theta_{Init,1}) + x_O(t_N) - x_O(t_1)$ ,
- $\Delta y_{Init} = R_m(t_N) \cos(\theta_{Init,N}) - R_m(t_1) \cos(\theta_{Init,1}) + y_O(t_N) - y_O(t_1)$ ,

avec  $R_m(t_1)$  et  $R_m(t_N)$ , la distance mesurée à l'instant initial et celle mesurée à l'instant final.

Nous rappelons qu'il est aussi nécessaire de « mailler »  $\rho_{C,Init}$  (valeur candidate du rayon du cercle).

On obtient ainsi pour chaque valeur candidate de  $\theta_{Init,1}$ ,  $\theta_{Init,N}$  et  $\rho_{C,Init}$ , les deux vecteurs d'états candidats  $Z_{Init+}$  et  $Z_{Init-}$  (leur calcul est détaillé au §2.5.3.2, p. 80).

Finalement, deux vecteurs d'initialisations sont retenus de la façon suivante :

- le vecteur  $Z_+$  est égal au vecteur candidat  $Z_{Init+}$  dont le critère des moindres carrés pondérés est le plus faible,
- et  $Z_-$  correspond au vecteur candidat  $Z_{Init-}$  renvoyant le critère le plus faible.

#### 4.4.2.2 Cas de la RO-MTMA :

Nous présentons dans ce paragraphe la procédure permettant l'obtention du vecteur  $Z_{Init}$ , nécessaire à l'algorithme de minimisation présenté au §4.2.3.2.2 (p.151).

Cette fois, les deux vecteurs d'états candidats, relatifs au cas de la RO-MTMA, sont notés  $Z_{Init+,Bis}$  et  $Z_{Init-,Bis}$ . Ils sont définis par :

$$\begin{aligned} - \quad Z_{Init+,Bis} &= \begin{bmatrix} x_{S,Init+}(t_N) & y_{S,Init+}(t_N) & v_{S,Init+} & h_{S,1Init+} & h_{S,2Init+} \end{bmatrix}^T, \\ - \quad Z_{Init-,Bis} &= \begin{bmatrix} x_{S,Init-}(t_N) & y_{S,Init-}(t_N) & v_{S,Init-} & h_{S,1Init-} & h_{S,2Init-} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Nous suivons les étapes suivantes afin de calculer les composantes de ces deux vecteurs candidats. Rappelons d'abord que le tronçon relatif à la manœuvre de la source est un CT, cette manœuvre débute à l'instant  $t_{M_1}$  et se termine à l'instant  $t_{M_2}$  (voir §4.2.1, p. 145).

Nous avons décidé d'utiliser sur ce tronçon la procédure de recherche de vecteur d'initialisation employée en RO-CTTMA.

Ainsi, nous obtenons les deux vecteurs candidats  $Z_{Init+}$  et  $Z_{Init-}$  en considérant que dans ce cas l'instant initial est  $t_{M_1}$  et l'instant final  $t_{M_2}$ . Cela nous permet ensuite de déduire chacune des composantes des vecteurs  $Z_{Init+,Bis}$  et  $Z_{Init-,Bis}$ , respectivement calculée à partir des vecteurs  $Z_{Init+}$  et  $Z_{Init-}$ .

Finalement, le vecteur  $Z_{Init}$  retenu est égal au vecteur  $Z_{Init+,Bis}$  ou  $Z_{Init-,Bis}$  renvoyant le critère des moindres carrés pondérés le plus faible.

## ***Conclusions et perspectives***

L'objectif de cette thèse était d'étudier et de proposer des techniques de trajectographie à partir d'un observateur unique, non-manœuvrant et ne mesurant pas directement la position de la cible. Nous avons considéré les cas où les mesures sont des angles (azimuts), des angles et des fréquences, ou encore des distances. Nous nous sommes restreints à des observateurs et des sources se déplaçant à vitesses constantes (hypothèse peu contraignante).

La première difficulté a été d'établir rigoureusement les conditions d'observabilité dans chaque cas.

Nous nous sommes rapidement rendu compte que la faisabilité de ce type de trajectographie n'était envisageable que pour des sources manœuvrantes sauf dans le cas où l'on dispose de mesures d'angle et de fréquence.

Le type de mesure a finalement imposé l'articulation de ce manuscrit.

Dans le **chapitre 1**, nous avons rappelé le contexte dans lequel se placent nos travaux et les notions de base nécessaires à la compréhension de ces travaux.

Le **chapitre 2** a été consacré au problème de la trajectographie d'une source manœuvrante par mesures d'azimut et éventuellement de fréquence depuis un observateur non-manœuvrant (fixe ou en mouvement rectiligne uniforme).

Lorsque l'observateur ne mesure que des azimuts, la trajectoire de la source composée d'un ou plusieurs tronçons dont l'un au moins est un arc de cercle est observable, si l'observateur n'est pas immobile. La prise en compte d'une piste de fréquence garantit l'observabilité lorsque l'observateur est immobile pourvu qu'il ne soit pas au centre du cercle portant la trajectoire de la source.

L'estimateur du maximum de vraisemblance se révèle efficace pour la majorité des scénarios envisagés à l'exception de quelques scénarios « limites » (« endfire » de l'antenne ou courte durée d'acquisition des mesures).

Nous avons montré en outre que plus le nombre de pistes de fréquence est élevé, plus la trajectographie est précise.

L'exploitation de cette méthode dans un contexte opérationnel est envisageable. En effet, la précision relative de l'estimation de la distance finale est inférieure à 30%, sauf pour les quelques scénarios « limites ».

Cette étude nous a conduits à poser un problème de tactique : lorsque deux protagonistes, l'un manœuvrant et l'autre pas, se « trajectographient » mutuellement, quel est celui qui obtient le meilleur résultat ?

La réponse doit être nuancée selon la disponibilité des mesures :

- Si les mesures ne sont que des azimuts, alors la plateforme manoeuvrante a l'avantage tactique (i.e. elle obtient la meilleure précision de localisation).
- Si les mesures sont des couples d'azimut et de fréquence, c'est la plateforme non manoeuvrante qui l'emporte.

Dans le **chapitre 3**, nous avons considéré le problème de la trajectographie d'une source en mouvement rectiligne uniforme par mesures de distance seules.

Nous avons établi dans un premier temps une condition nécessaire d'observabilité : il faut que l'observateur manœuvre (donc change de route). Cette condition est suffisante si l'observateur se déplace sur un arc de cercle (le reste de sa trajectoire pouvant être des segments rectilignes parcourus chacun à vitesse constante ou d'autres types de cinématique). Par contre, les trajectoires en ligne brisée (à deux ou trois segments) n'assurent pas nécessairement l'observabilité.

Nous avons également établi une propriété intéressante concernant la matrice d'information de Fisher : elle est toujours du même rang que celle qui serait calculée si l'observateur ne mesurait que des azimuts. Cette propriété nous a permis de dégager des exemples de problèmes d'estimation où la matrice d'information de Fisher est inversible alors que l'observabilité n'est pas assurée et réciproquement, des cas où cette matrice est singulière pour des paramètres observables.

L'estimateur du maximum de vraisemblance se révèle efficace pour la totalité des scénarios considérés si l'écart-type de mesure a des valeurs de l'ordre de quelques mètres (ce qui est le cas en acoustique sous-marine). De nouvelles régions de confiance adaptées au comportement de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le repère cartésien ont été proposées.

L'intérêt opérationnel immédiat de ce type de trajectographie est la calibration d'antenne qui fut l'objet du dépôt d'un brevet, antérieurement à nos travaux.

C'est au **dernier chapitre** que nous avons abordé la trajectographie par mesures de distance à partir d'un observateur non manoeuvrant. Ici encore l'analyse de l'observabilité a été conduite : La trajectoire d'une source (à vitesse constante) en mouvement circulaire uniforme ou composée de deux legs reliés par un arc de cercle est observable, dans chaque demi-plan de frontière la droite portant la trajectoire de l'observateur. Cependant, nous nous trouvons dans une situation inédite en trajectographie : dans chaque demi-plan, il existe une autre trajectoire à une distance presque égale à celle de la trajectoire d'intérêt, définie par un vecteur d'état différent de celui de la source.

Malgré cela, l'estimateur du maximum de vraisemblance s'est comporté de façon efficace pour tous les scénarios étudiés. Mais la difficulté réside dans la capacité à « attraper » cet estimateur, ce qui n'est finalement pas garanti à plus de 50% dans la plupart des scénarios

considérés. Dans le domaine de la lutte sous-marine, ce type de trajectographie sera donc utilisé avec beaucoup de précaution, contrairement au domaine électromagnétique (où les précisions de mesure peuvent être de l'ordre du centimètre).

Les travaux réalisés au cours de cette thèse suggèrent de poursuivre l'effort de recherche dans cette veine. Les études à venir sont à deux échéances :

1) Le court terme :

- Il faudrait confronter les algorithmes que nous avons développés à des jeux de données réelles. En général, l'exploitation de données réelles met en évidence les problèmes suivants :
  - l'interruption temporaire d'acquisition des mesures,
  - le problème de l'estimation de l'écart-type du bruit de mesure,
  - ou encore le fait que le bruit de mesure n'est qu'approximativement gaussien.
- La recherche de manœuvre optimale en RO-TMA : Comme nous l'avons montré, la matrice d'information de Fisher est liée à celle calculée en BO-TMA. On peut donc envisager de réutiliser les outils présentés dans [Passerieux98] et [LeCadre99] pour proposer une manœuvre optimale.
- L'estimateur du maximum de vraisemblance est apparu efficace pour la très grande majorité des scénarios envisagés dans ce manuscrit. Néanmoins, il est indispensable de vérifier que, lorsque les hypothèses ne sont pas rigoureusement vérifiées, ses performances demeurent satisfaisantes ou si ce n'est pas le cas, de proposer une alternative. Il serait donc intéressant de prendre en compte les deux problématiques suivantes :
  - L'étude de l'impact des « erreurs de modèles » sur les performances de ces algorithmes de trajectographie passive. Par « erreurs de modèles », nous désignons les situations où le modèle supposé n'est pas exactement le modèle réel, par exemple, lorsque la source est considérée en mouvement circulaire uniforme tandis qu'elle suit en réalité une trajectoire décrite par un pentagone ou un hexagone.
  - La présence de biais dans les mesures est une question à traiter. On pourra s'inspirer des travaux présentés dans [Passerieux91] pour tenter de les estimer.

## 2) Le long terme :

La question de rupture et d'identification de modèles doit être posée. Il s'agit là d'un problème de longue haleine. Quelques pistes de réflexion ont déjà été explorées:

- Par exemple, en BO-MTMA, nous avons construit un détecteur à base de Cusum (précédé d'un filtre de Kalman étendu) [Holst91]. Ce détecteur a fourni des résultats peu satisfaisants. Un moyen d'augmenter la puissance de ce détecteur serait, par exemple, de remplacer le filtre par l'estimateur du maximum de vraisemblance, afin de mettre en place un test de type « cross-résidus » [Blanc-Benon89].
- Dans le cadre de la trajectographie par mesures d'angle seules, nous avons construit un test de choix de modèles de cinématique suivie par la source lorsque deux cinématiques sont candidates : le mouvement rectiligne uniforme et le mouvement circulaire uniforme. Le test proposé se base sur le rapport de vraisemblance généralisé [Clavard11b]. Cette solution s'est révélée peu efficace, car fortement dépendante du scénario. Il serait intéressant de vérifier si la prise en compte de mesures de fréquence peut augmenter le pouvoir discriminant de ce test.

Enfin, les travaux présentés dans ce manuscrit ont été développés en partie chez Thales Underwater Systems. Nous avons participé à des projets de recherche connexes comme par exemple la trajectographie par multistatisme en acoustique sous-marine, exploitant un réseau de bouées supposées fixes, des résultats sont disponibles dans [Blanc-Benon12]. Une étude complète de l'observabilité de ce type de trajectographie reste à faire. Une autre piste d'étude serait de considérer le cas plus réaliste de bouées dérivantes.

## ***Références bibliographiques***

[Aidala79] Aidala, V.J., *Kalman Filter Behavior in Bearings-Only Tracking Applications*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-15, 1 (Jan. 1979), pp. 29-39.

[Aidala83] Aidala, V.J. and Hammel, S., *Utilization of Modified Polar Coordinates for Bearings-Only Tracking*, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-28, 3 (Mar. 1983), pp. 283-294.

[Arulampalam04] Arulampalam, S., Ristic, B., Gordon, N. and Mansell, T., *Bearings-Only Tracking of Manoeuvring Targets Using Particle Filters*, EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 15 (Jan. 2004), pp. 2351-2365.

[Barbagelata75] Barbagelata, B. and Bozzo, C., *Estimation des Mouvements de deux Mobiles dans un Plan à partir de Mesures Bruitées et Echantillonées*, GRETSI, 5<sup>ème</sup> Colloque Groupe de Recherche et d'Etude de Traitement du Signal et des Images, Nice (FR), 16-21 (Jun. 1975), pp. 653-663.

[Blanc-Benon89] Blanc-Benon, P. and Passerieux, J.M., *Trajectographie Passive en Présence d'Erreur de Modèle : Utilisation des Résidus*, GRETSI, 12<sup>ème</sup> Colloque Groupe de Recherche et d'Etude de Traitement du Signal et des Images, Juan-les-Pins (FR), 12-16 (Jun. 1989), pp. 419-422.

[Blanc-Benon12] Blanc-Benon, P., Pillon, D. and Clavard, J., *CAS TMA applied for sonobuoys in MPA context*, UDT, Underwater Defence Technology Conference 2012, IFA Spain, 29-31 May.

[Brehard06] Brehard, T. and Le Cadre, J.-P., *Closed-Form Posterior Cramér-Rao Bounds for Bearings-Only Tracking*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-42, 4 (Oct. 2006), pp. 1198-1223.

[Bucy71] Bucy, R.S. and Sene, K.D., *Digital Synthesis of Non-linear Filters*, Automatica, Vol. 7 (1971), pp. 287-298.

[Clark11] Clark, J.M.C., Kountouriotis, P.A. and Vinter, R.B., *A Gaussian Mixture Filter For Range-Only Tracking*, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-56, 3 (Mar. 2011), pp. 602-613.

[Clavard11a] Clavard, J., Pignol, A.C., Pillon, D. and Jauffret, C., *Trajectory Estimation Of A Maneuvering Target From A Non-Maneuvering Platform, Using Bearings Only*, MAST, Maritime Systems and Technology Europe 2011, Marseille, 27-29 June.

[Clavard11b] Clavard, J. , Pillon, D., Pignol, A.C. and Jauffret, C., *Bearings-Only Target Motion Analysis of a Source in a Circular Constant Speed Motion from a Non-maneuvering Platform*, Fusion 2011, 14<sup>th</sup> International Conference on Information Fusion, Chicago, 5-8 Jul. 2011.

[Clavard11c] Clavard, J., Pignol, A.C., Pillon, D. and Jauffret, C., *Trajectographie par Mesures de Distance Seules*, GRETSI, 23<sup>ème</sup> Colloque Groupe de Recherche et d'Etude de Traitement du Signal et des Images, Bordeaux, 5-8 Sep. 2011.

[Clavard12] Clavard, J., Pignol, A.C., Pillon, D. and Jauffret, C., *Bearings-Only Target Motion Analysis of a Maneuvering Target by a Non Maneuvering Observer*, UDT, Underwater Defence Technology Conference 2012, IFA Spain, 29-31 May.

[Clavard12A] Clavard, J. , Pillon, D., Pignol, A.C. and Jauffret, C., *Passive Target Motion Analysis of a Source in Constant Turn from a Non-Maneuvering Observer*, accepté pour publication dans la revue IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems.

[Dennis84] Dennis, J.E., *A User's Guide to Nonlinear Optimization Algorithms*, In Proceedings of IEEE, Vol. 72, 12 (Dec. 1984), pp. 1165-1176.

[Farina99] Farina, A., *Target Tracking with Bearings-Only Measurements*, Signal Processing, Vol. 78, (1999), pp. 61-78.

[FrankAyres62] Frank Ayres, JR., *Schaum's Outline Series Theory and Problems of Matrices*, pp 55-57, 1962.

[Holst91] Holst, J. and Holtsberg, A., *On target Manoeuvres in Bearings Only Tracking*, 20<sup>th</sup> Asilomar Conference on signals, systems and computers, Pacific grove (Ca) USA, Vol.1, 1991, pp. 272-277.

[Jauffret93] Jauffret C., *Trajectographie passive, observabilité et prise en compte des fausses alertes*, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Université de Toulon et du Var, février 1993.

[Jauffret96] Jauffret, C. and Pillon, D., *Observability in Passive Target Motion Analysis*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-32, 4 (Oct. 1996), pp. 1290-1300.

[Jauffret07] Jauffret, C., *Observability and Fisher Information Matrix in Nonlinear Regression*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-43, 2 (Apr. 2007), pp. 756-759.

[Jauffret08a] Jauffret, C., et Pillon, D., *Trajectographie passive à partir d'angles et d'autres mesures*, Technique de l'ingénieur, TE 6 707, Feb. 2008, pp. 1-18.

[Jauffret08b] Jauffret, C., Blanc-Benon, P. and Pillon, D., *Multi Frequencies And Bearing Target Motion Analysis : Properties and Sonar Applications*, Fusion 2008, 11<sup>th</sup> International Conference on Information Fusion, Cologne, 1-3 Jul. 2008.

[Jauffret10] Jauffret, C., Pillon, D. and Pignol, A.C., *Bearings-Only Maneuvering Target Motion Analysis from a Nonmaneuvering Platform*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-46, 4 (Oct. 2010), pp. 1934-1948.

[Jauffret11] Jauffret, C., Pillon, D. and Pignol, A.C., *Leg-by-leg Bearings-Only TMA without Observer Maneuver*, Journal of Advances Information Fusion, JAIF-6, 1 (June 2011), pp. 24-38.

[Kalman60] Kalman, R.E., *On the General Theory of Control Systems*, Proceedings 1<sup>st</sup> IFAC, Moscow, 1960, pp. 481-492.

[LeCadre97] Le Cadre, J.-P. et Jauffret, C., *Discrete-Time Observability and Estimability Analysis for Bearings-Only Target Motion Analysis*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-33, 1, (Jan. 1997), pp. 178-201.

[LeCadre99] Le Cadre, J.-P. and Laurent-Michel, S., *Optimizing the Receiver Maneuvers for Bearings-Only Tracking*, Automatica 35, 4 (Apr. 1999), pp. 591-606.

[Li06] Li, Q., Guo, F.C., Li, J. and Zhou, Y., *Research of Satellite-to-Satellite Passive Tracking Using Bearings-Only Measurements In J2000 ECI Frame*, IEEE International conference on Radar 2006, ICR-2006, Shanghai, 16-19 Oct. 2006.

[Li07] Li, Q., Guo, F.C., Zhou, Y. and Jiang W., *Observability of Satellite to Satellite Passive Tracking from Angle Measurements*, IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA-2007, Guangzhou, May 30 to 1 June 2007.

[Lindgren78] Lindgren, A.G. and Gong, K.F., *Position and Velocity Estimation via Bearing Observations*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-14, 4 (Jul. 1978), pp. 564-577.

[Nardone81] Nardone, S.C. and Aidala, V.J., *Observability Criteria for Bearings-Only Target Motion Analysis*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-17, 2 (Mar. 1981), pp. 162-166.

[Nardone84] Nardone, S.C., Lindgren, A.G. and Gong, K.F., *Fundamental Properties and Performance of Conventional Bearings-Only Target Motion Analysis*, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-29, 9 (Sept. 1984), pp. 775-787.

[Nelder65] Nelder, J.A. and Mead, R., *A Simplex Method for Function Minimization*, The Computer Journal, Vol. 7, 4 (January. 1965), pp. 308-313.

[Passerieux90] Passerieux, J.M., *Méthodes de TPA Robustes aux Biais d'Azimuts*, Thomson Sintra activités sous-marines, ASM 90/C570/213 JMP-SB/MFF, 1990.

[Passerieux91] Passerieux, J.M., Pillon, D., Van Cappel, D. and Blanc-Benon, P., *Bearings-Only Tracking in Passive Sonar: from Operator Graphical Plots to Efficient Computer Aided Techniques*, UDT, Underwater Defence Technology Conference 1991, Paris, 23-25 April, pp. 685-692.

[Passerieux95] Passerieux, J.M., *Estimation par Régions de Confiance en Trajectographie Passive*, GRETSI, 15<sup>ème</sup> Colloque Groupe de Recherche et d'Etude de Traitement du Signal et des Images, Juan-les-Pins (FR), 18-21 (Sep. 1995), pp. 1153-1156.

[Passerieux98] Passerieux, J.M. and Van Cappel, D., *Optimal Observer Maneuver for Bearings-Only Tracking*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-34, 3 (Jul. 1998), pp. 777-788.

[Payne89] Payne, A. N., *Observability Problem for Bearings-Only Tracking*, International Journal of Control, Vol. 49, 3 (Mar. 1989), pp. 761-768.

[Pillon91] Pillon, D. et Jauffret, C., *Nouveaux résultats concernant l'observabilité en trajectographie par mesure d'angles*, GRETSI, 13<sup>ème</sup> Colloque Groupe de Recherche et d'Etude de Traitement du Signal et des Images, Juan-les-Pins(FR), 16-20 (Sept. 1991), pp. 281-284.

[Pillon05] Pillon, D. et Jauffret, C., *Trajectographie passive par mesure d'angle*, Technique de l'ingénieur, TE 6 705, Feb. 2005, pp. 1-17.

[Pillon06] Pillon, D., *Method for Antenna Angular Calibration by Relative Distance Measuring*, Brevet WO 2006/013136, 09.02.2006.

[Ristic02] Ristic, B., Arulampalam, S. and McCarthy, J., *Target Motion Analysis using Range-Only Measurements: Algorithms, Performance and Application to ISAR Data*, Signal Processing, SP-82, 2 (Feb. 2002), pp.273-296.

[Shensa81] Shensa, M. J., *On the Uniqueness of Doppler Tracking*, Journal of the Acoustical Society of America, JASA-70, 4 (Oct. 1981), pp. 1062-1064.

[Song99] Song, T.L., *Observability of Target Tracking with Range-Only Measurements*, IEEE Journal of Oceanic Engineering, OES-24, 3 (July 1999), pp. 383-387.

[Spiegel84] Spiegel, M. R., *Variables Complexes : Cours et Problèmes*, McGraw-Hill (New York), série Schaum, 1984.

**Trajectographie Passive sans manœuvre de l'observateur.**

Les méthodes de trajectographie conventionnelles par mesures d'angle supposent que la source est en mouvement rectiligne uniforme tandis que l'observateur est manœuvrant. Dans cette thèse, nous remettons en cause cette hypothèse en proposant un autre modèle de cinématique de la source : le mouvement circulaire uniforme. Nous prouvons qu'une telle trajectoire est observable à partir d'un observateur en mouvement rectiligne uniforme. Puis, nous étudions l'apport de mesures additionnelles de fréquence ou la faisabilité de la trajectographie par mesures de distances. Le cas d'une source en mouvement rectiligne uniforme et d'un observateur manœuvrant est étudié pour ce dernier type de mesures. Chaque cas donne lieu à une analyse de l'observabilité de la trajectoire de la source et à la mise au point de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Nous montrons que ce dernier s'avère le plus souvent efficace.

**Mots clés :** trajectographie passive, estimateur, borne de Cramér-Rao, observabilité, manœuvre.

**Target motion analysis without maneuver of the observer.**

The conventional bearings-only target motion analysis methods assume that the source is in constant velocity motion (constant speed and heading) while the observer maneuvers. In this thesis, we reassess this hypothesis and propose another model of the kinematics of the source: the constant turn motion (an arc of circle followed at constant speed). We prove that this kind of trajectory is observable by an observer in constant velocity motion. Then, we study the contribution of the addition of frequency measurements or the feasibility of target motion analysis methods that use range only measurements. The case of a source in constant velocity motion with a maneuvering observer is examined for this last type of measurements. Each case leads to an analysis of the observability of the trajectory of the source and to the development of the associated maximum likelihood estimator. We show that this estimator often appears to be efficient.

**Keywords :** Target motion analysis. Cramér-Rao lower bound, maximum likelihood estimator, observability, maneuver.