

Table des matières

| | |
|---|------|
| Résumé | iii |
| Abstract | iv |
| Table des matières | v |
| Liste des tableaux | vii |
| Liste des figures | viii |
| Liste des acronymes et notations | xii |
| Liste des symboles | xiii |
| Remerciements | xvi |
| 1 Introduction | 1 |
| 1.1 Détection de cibles | 1 |
| 1.2 Système de pistage de cibles | 2 |
| 1.3 Problématique et objectifs du projet | 3 |
| 1.4 Structure du mémoire | 4 |
| 2 Revue de la littérature | 5 |
| 2.1 Méthodes de pistage pour lidar | 5 |
| 2.2 Filtre de Kalman | 7 |
| 2.3 Estimation d'états pour mesures discrètes | 14 |
| 2.4 Transformée de Hough | 17 |
| 2.5 Conclusion | 22 |
| 3 Transformée de Hough | 24 |
| 3.1 Conversion pour des mesures en coordonnées polaires | 24 |
| 3.2 Espace de Hough et matrice des votes | 26 |
| 3.3 Minimisation des calculs | 32 |
| 3.4 Résultats préliminaires | 39 |
| 3.5 Conclusion | 51 |
| 4 Filtre de Kalman assisté par transformée de Hough | 53 |
| 4.1 États d'une cible | 54 |
| 4.2 Projection des mesures | 54 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.3 | Application d'une contrainte relaxée | 58 |
| 4.4 | Filtre de Kalman étendu assisté par projection des mesures | 61 |
| 4.5 | Filtre de Kalman classique assisté par projection des mesures | 64 |
| 4.6 | Filtre de Kalman étendu assisté par contrainte relaxée | 65 |
| 4.7 | Filtre de Kalman non parfumé assisté par contrainte relaxée | 67 |
| 4.8 | Zone morte sur l'innovation | 67 |
| 4.9 | Matrices de covariance du bruit | 69 |
| 4.10 | Initialisation du filtre de Kalman | 71 |
| 4.11 | Conclusion | 71 |
| 5 | Résultats pour cible de taille piéton | 73 |
| 5.1 | Paramètres | 73 |
| 5.2 | Données expérimentales | 73 |
| 5.3 | Simulations de trajectoires rectilignes | 74 |
| 5.4 | Conclusion | 88 |
| 6 | Résultats pour cible de taille voiture | 89 |
| 6.1 | Simulations pour trajectoires rectilignes | 89 |
| 6.2 | Simulations pour trajectoires courbes | 92 |
| 6.3 | Conclusion | 94 |
| 7 | Conclusion | 95 |
| 7.1 | Travaux futurs | 96 |
| A | Déivation du filtre de Kalman | 98 |
| A.1 | Propagation de l'erreur | 98 |
| A.2 | Covariance de l'innovation | 98 |
| A.3 | Approche du moindre carré | 99 |
| A.4 | Approche du maximum <i>a posteriori</i> | 100 |
| B | Filtre de Kalman assisté modèle polaire | 103 |
| C | Caractérisation de l'erreur sur l'estimation des paramètres de trajectoire | 105 |
| C.1 | Erreur sur l'estimation de la transformée de Hough | 106 |
| | Bibliographie | 112 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|--|-----|
| 3.1 | Comparaison de la complexité algorithme des trois transformées de Hough proposées | 38 |
| 3.2 | Paramètres de la transformée de Hough choisis. | 47 |
| 4.1 | Étapes résumées du filtre de Kalman étendu avec mesures projetées. | 64 |
| 4.2 | Étapes résumées du filtre de Kalman classique avec mesures projetées. | 65 |
| 4.3 | Étapes résumées du filtre de Kalman étendu contraint par la transformée de Hough. | 67 |
| 4.4 | Étapes résumées du filtre de Kalman non parfumé contraint par la transformée de Hough. | 68 |
| C.1 | Paramètres de la transformée de Hough et résultats pour des trajectoires rectilignes simulées. | 105 |

Liste des figures

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Schéma du système de détection et de pistage envisagé. | 3 |
| 2.1 | Exemples de droites pour les quatre quadrants du plan cartésien. a) $\rho \geq 0$ et $0 \geq \theta \geq \pi/2$, b) $\rho \geq 0$ et $\pi/2 \geq \theta \geq \pi$, c) $\rho \leq 0$ et $0 \geq \theta \geq \pi/2$ et d) $\rho \leq 0$ et $\pi/2 \geq \theta \geq \pi$ | 19 |
| 2.2 | Transformation des droites dans les quatre quadrants du plan cartésien vers l'espace de Hough. | 19 |
| 2.3 | Exemple des étapes de la transformée de Hough pour une droite dissimulée dans un ensemble de points aléatoires. La matrice des votes montre la valeur des pixels, le maximum étant en blanc. | 21 |
| 3.1 | Schéma des conventions pour les paramètres de la transformée de Hough et les mesures du lidar. | 25 |
| 3.2 | Ensemble des droites décrites par les paramètres de Hough \mathbf{h} passant par les mesures \mathbf{y}_k | 26 |
| 3.3 | Schéma de l'espace de Hough pour les paramètres $\mathbf{h} = (\rho, \theta)$ et les mesures illustrées à la figure 3.2. | 27 |
| 3.4 | Schéma de la matrice des votes pour les deux conditions d'évaluation. | 28 |
| 3.5 | Exemple de matrice des votes binaire. Haut : matrice binaire représentant chaque instant ; bas : accumulation. Le plus pâle correspond au maximum. | 30 |
| 3.6 | Étapes itératives de construction de la PDF du bruit de mesure gaussien. | 32 |
| 3.7 | Exemple de matrice des votes considérant le bruit gaussien sur les mesures. Haut : matrice représentant chaque instant ; bas : accumulation. Le plus pâle correspond au maximum. | 33 |
| 3.8 | Étapes itératives de construction de la PDF du bruit de mesure gaussien avec une incrémentation unitaire. | 34 |
| 3.9 | Exemple de trajectoires rectilignes possibles pour des mesures dans un même élément lidar. | 37 |
| 3.10 | Temps d'exécution moyen relatif à chaque évaluation de la transformée de Hough en fonction du nombre de mesures contenues dans une piste et pour différents paramètres de calcul (taille de l'historique et nombre de points sur la PDF). Le temps de référence est celui du calcul de la transformée de Hough binaire avec historique limité (N_{mes} , binaire) pour $k = 57$ mesures. | 40 |
| 3.11 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la trajectoire pour différentes variances σ_r^2 de bruit gaussien et pour différentes valeurs de N_{PDF} | 42 |
| 3.12 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la trajectoire en variant le nombre de rangées N_ρ de la matrice des votes. | 43 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.13 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la trajectoire en variant le nombre de colonnes N_θ de la matrice des votes. | 43 |
| 3.14 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la trajectoire avec et sans suivi du maximum. | 44 |
| 3.15 | Exemple simulation de détections vues par le lidar pour une cible rectangulaire. | 45 |
| 3.16 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de la trajectoire pour des cibles rectangulaires de différentes tailles (largeur $l \times$ longueur L). | 45 |
| 3.17 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de la trajectoire pour différentes tailles d'historique (N_{ch}) et deux tailles de cibles rectangulaires (piéton, voiture). | 46 |
| 3.18 | Comparaison de l'erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de la trajectoire pour les algorithmes 1 et 3 et pour deux tailles de cibles rectangulaires (piéton, voiture). | 47 |
| 3.19 | Comparaison de l'erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de la trajectoire pour trois configurations lidars à N éléments et un champ de vue de $\Delta\phi$ par élément. | 48 |
| 3.20 | Trajectoires simulées pour des trajectoires courbes. | 49 |
| 3.21 | Exemples de traces des trajectoires courbes simulées vues par un lidar en mouvement à 50 km/h (haut) ou immobile (bas). | 49 |
| 3.22 | Structure de la matrice des résultats. Les rangées correspondent aux différentes trajectoires et vitesses du lidar et les colonnes correspondent au nombre de changements d'éléments lors de l'évaluation de la transformée de Hough. | 50 |
| 3.23 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de la tangente à la trajectoire pour les trajectoires courbes simulées (haut). Variation instantanée des paramètres de la tangente à la trajectoire (bas). Cible de format voiture. | 51 |
| 3.24 | Zoom sur l'erreur quadratique moyenne pour les trajectoires courbes simulées (haut). Cible de format voiture. | 51 |
| 3.25 | Droites estimées par la transformée au fil du temps pour une trajectoire non rectiligne. | 52 |
| 4.1 | Points d'intersection entre un cercle (mesures de position radiale r_1 et r_2) et une droite. Pour le cercle de rayon r_1 , les points d'intersection sont très éloignés. Pour le cercle de rayon r_2 qui est plus petit, les points d'intersection sont plus rapprochés. | 55 |
| 4.2 | Erreur sur la projection de la position angulaire en fonction du rapport ρ sur r | 56 |
| 4.3 | Erreur sur la projection angulaire et rapport ρ sur r pour deux trajectoires : une trajectoire rectiligne avec ρ à 15 m et θ à 90° (gauche) et une trajectoire rectiligne avec ρ à 19 m et θ à 68° (droite). | 58 |
| 4.4 | Distribution de l'erreur sur la projection angulaire (tout élément confondu) et de l'erreur sur la mesure de position pour une cible de 0.5 m \times 0.25 m et 81 trajectoires rectilignes différentes. Lidar de 9 éléments ayant chacun 10° de champ de vue. | 59 |
| 4.5 | Schéma des relations entre les états (position et vitesse en coordonnées cartésiennes) et les paramètres de la trajectoire estimés avec la transformée de Hough, ρ et θ | 60 |
| 4.6 | Points aléatoires autour d'une mesure à 20 m et 65°. Gauche : générés selon un bruit à la fois gaussien en r ($\sigma_r = 0.1$ m) et uniforme en ϕ ($\Delta\phi = 10^\circ$). Droite : générés selon un bruit gaussien en x et y par la matrice (4.42). | 70 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.1 | Données expérimentales d'un piéton se déplaçant en ligne droite devant le lidar. Illustration de la trajectoire estimée par la transformée de Hough et des états estimés par les filtres de Kalman à trois instants différents. | 75 |
| 5.2 | Données expérimentales d'un piéton se déplaçant en arc de cercle devant le lidar. Illustration de la trajectoire estimée par la transformée de Hough et des états estimés par les filtres de Kalman à trois instants différents. | 76 |
| 5.3 | Erreur quadratique des états estimés moyennée pour toutes les trajectoires rectilignes testées (cible $0.5 \text{ m} \times 0.25 \text{ m}$). Pour la configuration lidar $N = 16$ et $\Delta\phi = 2.8^\circ$ | 77 |
| 5.4 | Erreur quadratique des états estimés moyennée pour toutes les trajectoires rectilignes testées (cible $0.5 \text{ m} \times 0.25 \text{ m}$). Pour la configuration lidar $N = 8$ et $\Delta\phi = 5^\circ$ | 78 |
| 5.5 | Erreur quadratique des états estimés moyennée pour toutes les trajectoires rectilignes testées (cible $0.5 \text{ m} \times 0.25 \text{ m}$). Pour la configuration lidar $N = 9$ et $\Delta\phi = 10^\circ$ | 79 |
| 5.6 | Schéma des paramètres utilisés pour la simulation des trajectoires rectilignes. | 80 |
| 5.7 | Représentation de la structure de la matrice des résultats résumant toutes les trajectoires simulées. | 80 |
| 5.8 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la position radiale pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 9$ du lidar). | 81 |
| 5.9 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la position angulaire pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 4$ du lidar). | 82 |
| 5.10 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la position angulaire pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 9$ du lidar). | 82 |
| 5.11 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la direction du vecteur vitesse pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 4$ du lidar). | 83 |
| 5.12 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la direction du vecteur vitesse pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 9$ du lidar). | 84 |
| 5.13 | Exemple de situation où le filtre de Kalman avec transformée de Hough est particulièrement plus performant (au dernier élément de droite du lidar). | 84 |
| 5.14 | Exemple de situation où le filtre de Kalman avec transformée de Hough est particulièrement plus performant (au centre du lidar). | 85 |
| 5.15 | Vitesse en x estimée en fonction du temps pour les filtres UKF et UKF_H . Les instants où la moyenne de la position angulaire des mesures change sont indiqués en pointillés. Trajectoire illustrée à la figure 5.14. | 85 |
| 5.16 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation du module du vecteur vitesse pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 4$ du lidar). | 86 |
| 5.17 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation du module du vecteur vitesse pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 9$ du lidar). | 86 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.18 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de la trajectoire par transformée de Hough (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 3$ du lidar). L'erreur sur le paramètre θ est exprimée en degrés et celle sur le paramètre ρ en mètres. | 87 |
| 5.19 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation des états de la cible en fonction du nombre d'éléments traversés et pour l'ensemble des filtres testés. | 87 |
| 6.1 | Erreur quadratique des états estimés moyennée pour toutes les trajectoires rectilignes testées (cible $2.5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$). Configuration lidar $N = 16$ et $\Delta\phi = 2.8^\circ$ | 90 |
| 6.2 | Erreur quadratique des états estimés moyennée pour toutes les trajectoires rectilignes testées (cible $2.5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$). Configuration lidar $N = 8$ et $\Delta\phi = 5^\circ$ | 91 |
| 6.3 | Erreur quadratique des états estimés moyennée pour toutes les trajectoires rectilignes testées (cible $2.5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$). Configuration lidar $N = 9$ et $\Delta\phi = 10^\circ$ | 91 |
| 6.4 | Exemple de situation où les filtres de Kalman avec projection des mesures sont peu performants en raison de la propagation de l'erreur sur la mesure projetée. | 92 |
| 6.5 | Déférence $\text{UKF}_H - \text{UKF}$ de l'erreur quadratique moyenne pour une série de trajectoires courbes en fonction du nombre de changements d'éléments. Voir les figures 3.21 et 3.22 pour une description des trajectoires. | 93 |
| C.1 | Caractéristiques (erreur quadratique moyenne, biais et écart-type) de l'erreur sur l'estimation des paramètres de trajectoires ρ et θ | 106 |
| C.2 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de trajectoires, pour différentes tailles de cibles, en fonction du nombre d'éléments lidar traversés. | 107 |
| C.3 | Erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de trajectoires après avoir traversé au moins 3 éléments, en fonction de la taille de la cible. | 108 |
| C.4 | Caractéristiques (erreur quadratique moyenne, biais et écart-type) de l'erreur sur la projection de la mesure angulaire. Gauche : projection simple (en utilisant r directement). Droite : projection en considérant le bruit gaussien (en utilisant $r \pm \delta r_i$). | 109 |
| C.5 | Erreur quadratique moyenne sur la projection de la mesure angulaire, pour différentes tailles de cibles, en fonction du nombre d'éléments lidar traversés. Haut : projection simple (en utilisant r directement). Bas : projection en considérant le bruit gaussien (en utilisant $r \pm \delta r_i$). | 110 |
| C.6 | Erreur quadratique moyenne sur la projection de la mesure angulaire après avoir traversé au moins 3 éléments, en fonction de la taille de la cible. Haut : projection simple (en utilisant r directement). Bas : projection en considérant le bruit gaussien (en utilisant $r \pm \delta r_i$). | 111 |

Liste des acronymes et notations

Acronymes

| Abréviation | Définition |
|-------------|--|
| EKF | Extended Kalman Filter |
| EKF_H | EKF avec projection des mesures sur la droite estimée par la transformée de Hough |
| FHT | Fast Hough Transform |
| KF | Kalman Filter |
| KF_H | KF avec projection des mesures sur la droite estimée par la transformée de Hough |
| MAP | Maximum <i>a posteriori</i> |
| ML | Maximum Likelihood |
| MSE | Mean Square Error |
| PDF | Probability Density Function |
| PHT | Probabilistic Hough Transform |
| RFID | Radio Frequency IDentification |
| RMS | Root Mean Square |
| UKF | Unscented Kalman Filter |
| UKF_H | UKF avec transformée de Hough en contrainte relaxée dans le vecteur d'observations |

Notations mathématiques

| Notation | Définition |
|-------------|---|
| x | Vecteur |
| X | Matrice |
| x_k | Valeur à l'instant k |
| $x_{k k-1}$ | Valeur prédicté à l'instant k sachant la valeur à l'instant précédent |
| \top | Transposée |
| $E[x]$ | Espérance de x |

Liste des symboles

| Symbol | Définition |
|--------------------------|---|
| α | Coefficient déterminant la répartition des points sigma |
| β | Coefficient déterminant la répartition des points sigma |
| $\Delta\theta$ | Largeur du suivi angulaire dans le calcul de la transformée de Hough |
| $\Delta\phi$ | Largeur d'un élément (récepteur) lidar |
| Δr | Variation de la valeur de position radiale mesurée |
| Δt | Intervalle de temps entre deux acquisitions du lidar |
| κ | Coefficient déterminant la répartition des points sigma |
| θ | Angle entre la perpendiculaire à la droite estimée par la transformée de Hough et l'axe x |
| $\boldsymbol{\theta}$ | Vecteur contenant les valeurs de θ balayées par la transformée de Hough |
| λ | Coefficient déterminant la répartition des points sigma |
| ρ | Distance entre la droite estimée par la transformée de Hough et l'origine |
| σ_θ | Écart-type du bruit de mesure gaussien sur le paramètre θ estimé |
| σ_ρ | Écart-type du bruit de mesure gaussien sur le paramètre ρ estimé |
| σ_r | Écart-type du bruit de mesure gaussien sur la position radiale |
| ϕ | Position angulaire |
| $\dot{\phi}$ | Dérivée dans le temps de la position angulaire ϕ |
| $\boldsymbol{\chi}$ | Matrice contenant les points sigmas représentant la densité de probabilité de l'état estimé |
| \boldsymbol{A} | Matrice jacobienne de la relation entre l'état actuel et l'état précédent |
| \boldsymbol{B} | Matrice jacobienne de la relation entre l'état et la commande d'entrée |
| \boldsymbol{e}_k | Vecteur d'erreur sur l'état estimé <i>a posteriori</i> |
| $\boldsymbol{e}_{k k-1}$ | Vecteur d'erreur sur l'état estimé <i>a priori</i> |
| \boldsymbol{h} | Couple de paramètres ρ et θ évalué par la transformée de Hough |
| \boldsymbol{H} | Matrice jacobienne de la relation entre l'état et les observations |
| \boldsymbol{I} | Matrice identité |
| \boldsymbol{i}_k | Vecteur d'innovation |

| | |
|----------------------------|---|
| k | Instant actuel |
| \mathbf{K} | Matrice du gain de Kalman |
| l | Largeur de la cible rectangulaire |
| L | Longueur de la cible rectangulaire |
| \mathbf{M} | Matrice de masque sur l'innovation pour la zone morte |
| N | Nombre d'éléments (récepteurs) composant le lidar |
| N_θ | Nombre de colonnes de la matrice des votes de la transformée de Hough |
| N_ρ | Nombre de rangées de la matrice des votes de la transformée de Hough |
| N_{ch} | Taille de l'historique en terme de changements d'éléments dans le calcul de la transformée de Hough |
| N_{mes} | Taille de l'historique en terme de nombre de mesures dans le calcul de la transformée de Hough |
| N_{PDF} | Nombre de points sur la PDF considérant le bruit de mesure radiale dans la transformée de Hough |
| P | Intervalle d'exécution du calcul de la transformée de Hough |
| \mathbf{P} | Matrice contenant les valeurs de ρ balayées par la transformée de Hough |
| \mathbf{P}_k | Matrice de covariance de l'erreur <i>a posteriori</i> |
| $\mathbf{P}_{k k-1}$ | Matrice de covariance de l'erreur <i>a priori</i> |
| $\mathbf{P}_{yx,k k-1}$ | Matrice de covariance croisée de l'espérance de l'observation et de l'estimation <i>a priori</i> |
| \mathbf{Q} | Matrice de covariance du bruit de procédé |
| r | Position radiale |
| \dot{r} | Dérivée dans le temps de la position radiale r |
| \tilde{r} | Valeur de position radiale balayée par la transformée de Hough |
| \mathbf{R} | Matrice de covariance du bruit de mesures |
| \mathbf{S} | Matrice de covariance de l'innovation |
| \mathbf{u} | Vecteur de commandes en entrée du système |
| \mathbf{v} | Vecteur du bruit de mesure |
| \mathbf{V} | Matrice des votes de la transformée de Hough |
| \mathbf{w} | Vecteur du bruit de procédé |
| \mathbf{W}_{cov} | Matrice des poids des points sigma pour le calcul de la covariance |
| \mathbf{W}_{moy} | Matrice des poids des points sigma pour le calcul de l'espérance |
| \mathbf{x} | Vecteur d'états |
| x | Position sur l'axe x |
| \dot{x} | Vitesse en x |
| $\hat{\mathbf{x}}_{k k-1}$ | Vecteur d'état estimé <i>a priori</i> |
| $\hat{\mathbf{x}}_k$ | Vecteur d'état estimé <i>a posteriori</i> |
| \mathbf{y} | Vecteur des observations ou mesures |

| | |
|----------------------------|--|
| y | Position sur l'axe y |
| \dot{y} | Vitesse en y |
| $\hat{\mathbf{y}}_{k k-1}$ | Vecteur d'état estimé <i>a priori</i> transformé en observations |
| $\mathbf{Y}_{k k-1}$ | Matrice contenant les points sigmas représentant la densité de probabilité de l'état estimé <i>a priori</i> transformé en observations |

Remerciements

Je tiens d'abord et avant tout à remercier mon directeur de recherche, Dominic Grenier, pour ses judicieux conseils et recommandations. Il a fait de ma maîtrise une expérience à la fois enrichissante, en me guidant au fil du projet, et agréable, par sa bonne humeur et son dynamisme. Je le remercie également de m'avoir supporté dans mes activités hors recherche, dépannages, cours supplémentaires et projets étudiants, qui sont très importantes pour moi.

Je tiens à souligner l'apport de Vincent Renaud, qui m'a permis de me concentrer sur le développement et la rédaction en se chargeant de l'acquisition des données expérimentales pour ce projet. Je souhaite remercier le FRQNT et le programme de bourses de leadership et de développement durable de l'Université Laval qui ont financé ce projet et l'équipe de notre partenaire industriel pour leur support technique et matériel.

Mes amis et collègues de bureau, Marc-André et Maude, qui ont grandement contribué, par nos marches et discussions, à faire de ma maîtrise une expérience agréable, merci ! Remerciement tout spécial à mon partenaire, Sébastien, qui m'a soutenu tout au long de cette péripétie et à mes parents, mes modèles, qui m'ont transmis le goût de l'effort.

Merci beaucoup !

Chapitre 1

Introduction

Les lidars, *light detection and ranging*, sont appelés être de plus en plus utilisés dans l'industrie automobile pour la prévention des accidents de la route et pour la conduite autonome. Cependant, les lidars rotatifs employés jusqu'à maintenant pour le développement de ces applications sont trop chers et encombrants pour être implantés à grande échelle.

Ce projet de maîtrise s'effectue en collaboration avec un partenaire industriel qui se concentre plutôt sur la nouvelle technologie du lidar à état solide (*solid-state lidar*). Ces lidars sont prometteurs : ils sont une fraction du prix des modèles rotatifs, nécessitent moins d'entretien, car aucune pièce mécanique n'est en mouvement et sont plus petits. Par contre, pour le moment ils n'atteignent pas la résolution angulaire des modèles rotatifs.

1.1 Détection de cibles

Un lidar émet un pulse laser, habituellement dans l'infrarouge, qui est réfléchi sur les obstacles placés devant lui. Les capteurs infrarouges du lidar, les éléments, enregistrent alors des A-scans, *amplitude-scan*, représentant les échos de ce pulse laser. En utilisant un algorithme d'estimation du temps de vol, comme développé dans [1], la distance parcourue par chaque écho du pulse est calculée. On peut ensuite représenter l'emplacement des échos détectés, les détections, pour tous les éléments dans un S-scan, *sectorial-scan*, qui est une vue de haut de l'environnement. Une seule cible peut être associée à plusieurs détections si elle se retrouve dans le champ de vue de plusieurs éléments.

Les lidars à état solide sont formés de plusieurs éléments et d'une ou plusieurs sources émettrices fixes. Le nombre de sources émettrices n'est pas nécessairement égal au nombre d'éléments. Le compromis de ces lidars se situe dans le nombre d'éléments, le champ de vue et la portée de détection. Plus le secteur couvert par chaque élément est large, moins la portée de détection est grande. Pour augmenter la largeur du champ de vue, il faut augmenter le nombre d'éléments ou augmenter le secteur couvert par chaque élément. Comme les lidars à état solide

actuels se limitent à quelques capteurs, la résolution angulaire atteinte est de quelques degrés (3° à 10° sont visés par le partenaire industriel). En comparaison, la résolution des lidars rotatifs peut atteindre deux ordres de grandeur inférieurs. À une distance de 20 mètres, cela correspond à une incertitude de ± 44 cm pour une résolution de 5° et une incertitude de ± 1 cm pour une résolution de 0.08° . Dans le cadre de ce projet, il n'y a pas de recouvrement entre les éléments. Le champ de vue du lidar est donc la somme des champs de vue de chaque élément.

Malgré cette imprécision sur les mesures angulaires, les lidars du partenaire industriel sont très précis quant à la mesure de position radiale grâce à un algorithme de détection de deuxième ordre développé lors d'un projet de maîtrise précédent [1].

Ainsi, les mesures du lidar ont les caractéristiques suivantes :

- Elles s'inscrivent dans un système de coordonnées non-linéaire (polaire) ;
- Le bruit de mesure pour les coordonnées radiales est gaussien et sa covariance dépend de plusieurs facteurs comme la largeur du pulse laser envoyé, de l'algorithme de détection utilisé, de la présence d'objets secondaires dans un capteur près d'une détection ;
- Le bruit de mesure pour les coordonnées angulaires est uniforme et dépend du champ de vue observé par un élément. La seule information donnée par le lidar est l'élément dans lequel se trouve un objet.

1.2 Système de pistage de cibles

Afin de prévoir les collisions potentielles sur la route, un système permettant d'estimer l'état des obstacles de manière fiable et précise est nécessaire. Ce système est séparé en deux parties interdépendantes : le pistage multi cibles et le pistage pour une cible unique (l'estimation d'états).

Le pistage multi cibles s'occupe d'associer les nouvelles détections à une piste existante ou à une nouvelle piste. Il forme donc la trace de chaque cible, soit l'ensemble des détections au fil du temps pour cette cible.

Habituellement et surtout étant donné la résolution angulaire grossière des lidars à état solide, utiliser directement les positions des détections telles qu'observées par le lidar pour cette étape d'association n'est pas suffisant. Le pistage multi cibles a besoin d'informations supplémentaires comme la position, la vitesse et l'allure de la trajectoire. Ce sont ces variables, pour chaque cible, qui sont évaluées par l'étape d'estimation d'états et qui constituent une piste. L'étape d'estimation d'états se sert donc de la trace d'une seule cible évaluée par le pistage multi cibles et l'étape de pistage multi cibles se sert de chaque piste évaluée par l'étape d'estimation d'états. Un schéma du système de pistage complet est illustré à la figure 1.1.

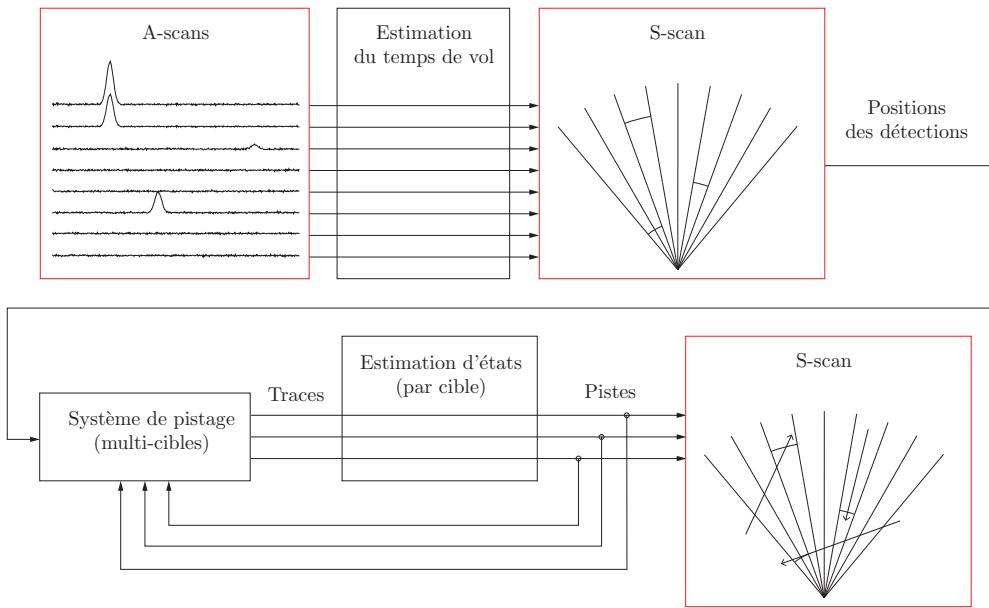


FIGURE 1.1 – Schéma du système de détection et de pistage envisagé.

Au final, ce sont les états estimés qui sont utilisés pour la prévision des collisions. Il s'agit donc d'une étape cruciale qui doit être pensée afin de bien performer dans les contraintes des lidars à état solide.

1.3 Problématique et objectifs du projet

Ce projet de maîtrise se concentre en particulier sur l'élaboration d'un algorithme d'estimation d'état adapté à la géométrie particulière des lidars à état solide.

En effet, pour les lidars rotatifs qui ont une résolution angulaire élevée, un filtre de Kalman sans modification est suffisant pour obtenir des performances optimales d'estimation d'états, car le bruit de mesure peut être considéré comme gaussien. Le filtre de Kalman (qu'il soit classique ou étendu) est le filtre linéaire optimal pour des bruits de mesures et de procédé qui sont gaussiens. Cependant, pour les lidars à état solide, le bruit de mesure sur la position angulaire des détections est un bruit uniforme sur la largeur d'un élément.

Il s'agit donc de développer un algorithme permettant d'estimer avec précision la position et la vitesse d'une cible en considérant :

- Un bruit de mesure gaussien pour la position radiale ;
- Un bruit de mesure uniforme pour la position angulaire ;
- Un système non linéaire en raison des mesures qui sont en coordonnées polaires.

Pour ce faire, un estimateur d'état en deux parties est proposé. D'abord, une estimation de la meilleure droite représentant la trajectoire est estimée par une transformée de Hough. Ensuite, cette estimation est combinée aux mesures lidars dans un filtre de Kalman qui évalue la position et la vitesse de la cible.

On considère que l'étape d'association des détections aux pistes est déjà faite, donc qu'il s'agit d'un pistage à une seule cible.

1.4 Structure du mémoire

Le présent mémoire débute, au chapitre 2, par une revue des algorithmes présents dans la littérature concernant le pistage lidar. Comme le développement des lidars à état solide dans l'industrie est nouveau, peu d'articles concernent la problématique du pistage et de l'estimation d'états actuellement. Ainsi, une revue des filtres de Kalman et des filtres élaborés jusqu'à maintenant pour des mesures quantifiées ou pour des contraintes sur les états est également faite à ce chapitre. La transformée de Hough est aussi abordée puisqu'elle est utilisée dans ce projet pour estimer la trajectoire d'une cible.

Par la suite, dans le chapitre 3, la transformée de Hough est adaptée à la géométrie polaire du lidar et aux considérations de bruit de mesure. Des stratégies pour réduire la complexité algorithmique de la transformée sont proposées.

Puis, dans le chapitre 4, plusieurs stratégies sont élaborées afin d'intégrer la transformée de Hough au filtre de Kalman.

Finalement, dans les chapitres 5 et 6, ces stratégies sont évaluées pour des cibles qui sont de la taille d'un piéton et de la taille d'une voiture, respectivement. Dans le chapitre 5 en particulier, des données expérimentales permettent de vérifier l'allure générale du pistage. Dans les deux chapitres, des simulations sont utilisées pour évaluer la précision de l'estimation d'états pour de nombreuses trajectoires.

Chapitre 2

Revue de la littérature

Le présent chapitre débute par un survol de la littérature concernant les méthodes appliquées pour le pistage lidar jusqu'à ce jour. Une revue en détails des outils mathématiques utilisés dans ce mémoire suit.

D'abord, le filtre de Kalman est présenté et son lien avec la nature gaussienne du bruit est mis en évidence par le principe du moindre carré et du maximum *a posteriori*. L'effet de la non-linéarité du système est aussi discuté pour introduire les filtres de Kalman étendu et non parfumé.

Puis, des solutions possibles pour estimer l'état d'un système en considérant des mesures discrétisées grossièrement sont présentées. Deux façons générales de représenter le problème sont montrées : considérer un bruit de quantification non gaussien ou convertir les mesures discrètes en contraintes sur les états. Bien entendu, ces solutions doivent être réfléchies et adaptées pour le problème spécifique du pistage de cibles par lidar, où le bruit est partiellement gaussien, les contraintes sont des inégalités et le système d'observations est non linéaire.

Finalement, la transformée de Hough, une manière de diminuer sa complexité algorithmique et sa ressemblance avec le maximum de vraisemblance sont discutées.

2.1 Méthodes de pistage pour lidar

À la différence des lidars de notre partenaire industriel, les lidars rotatifs possèdent une grande résolution angulaire pouvant amener à une incertitude sur la position de quelques centimètres seulement. La nouvelle technologie des lidars à état solide est beaucoup plus abordable et ainsi est très prometteuse pour être intégrée aux systèmes de conduite intelligents. Par contre, leur résolution angulaire est pour l'instant beaucoup moins intéressante : le secteur couvert par un élément est entre 3° et 10° pour les lidars sur le marché actuellement. Néanmoins, ils demeurent précis pour ce qui est de la mesure en distance radiale.

Cette caractéristique signifie que les détections faites par l'appareil ne peuvent pas être approximées comme des coordonnées cartésiennes : le système de mesures est polaire, et ainsi, la covariance sur la mesure angulaire augmente en fonction de la distance. Surtout, le bruit de mesure sur la position radiale des détections est gaussien, alors que celui sur la position angulaire, fortement discréétisée, est plutôt uniforme sur le champ de vue d'un élément.

Récemment, de nombreux travaux s'intéressent au pistage pour des lidars haute résolution en utilisant conjointement un filtre de Kalman avec un algorithme d'association de détections. Par exemple, dans [2], le pistage à hypothèses multiples [3] est appliqué aux données lidar pour séparer des trajectoires de piétons. De manière similaire, [4] fait une estimation de la position et de la vitesse d'objets observés par un lidar en utilisant le principe des hypothèses multiples pour initialiser pour chaque cible plusieurs filtres de Kalman à différentes vitesses. Également, [5] estime l'état du lidar, des cibles dynamiques et de l'environnement statique simultanément en utilisant un filtre de Kalman et propose un algorithme pour classifier les données lidar (les associer à une cible statique, à une nouvelle cible dynamique ou à une cible dynamique existante).

L'estimation d'état doit donc prendre en compte la géométrie particulière de la nouvelle technologie lidar à état solide : en plus d'affecter l'estimation de la position angulaire, cette configuration faible résolution nuit à la première étape du pistage qui consiste à associer les détections aux pistes. En effet, les algorithmes d'association, notamment ceux dans [2; 4; 5], utilisent tous les informations extraites au fil du temps (au moins la position et vitesse estimée des cibles) par des observateurs. Cependant, jusqu'à maintenant, la littérature concernant le pistage lidar se concentre presque exclusivement sur les lidars rotatifs haute résolution pour lesquels ces informations sont estimées avec une grande précision.

Toutefois, un article en particulier se penche sur l'amélioration de l'estimation de la position d'un objet passant au travers du champ de vue d'éléments lidar faible résolution [6]. Ces éléments possèdent un champ de 2° chacun, sont espacés de plusieurs degrés entre eux (plusieurs zones non couvertes par le lidar) et sont fixes. L'observateur proposé tente de réduire l'erreur en se fiant sur le sens d'arrivée de la détection et une estimation de la vitesse angulaire selon le temps passé dans le capteur. Il utilise ces données comme mesures supplémentaires dans un filtre de Kalman. Le modèle considère que la vitesse est constante ; une étude pour des trajectoires courbes ou avec accélération non nulle n'a pas été faite pour l'instant.

Dans la prochaine section, les filtres de Kalman (classique, étendu et non parfumé, tous utilisés dans ce mémoire) sont développés. La nécessité d'une adaptation pour des mesures angulaires discrètes est abordée en s'appuyant sur la relation du filtre avec le bruit gaussien.

2.2 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un observateur communément appliqué au pistage de cibles, en deux et trois dimensions, pour de nombreux systèmes de mesures (lidar, radar, caméras, etc.). Depuis sa proposition par R. E. Kalman dans [7], le filtre de Kalman a continué d'évoluer dans la littérature afin d'élargir ses limites : système non linéaire, bruits non gaussiens, ajout de contraintes sur les états et plus encore. Il demeure le meilleur estimateur pour un système linéaire avec bruits gaussiens et le meilleur estimateur linéaire pour un système non linéaire.

Dans cette section, les développements pour les systèmes linéaires (filtre de Kalman classique) et non linéaires (filtres de Kalman étendu et non parfumé) sont abordés en particulier. La nécessité d'avoir un bruit qui est gaussien pour obtenir les performances optimales est également expliquée par deux approches, soit le moindre carré et le maximum *a posteriori*. D'abord, dans les prochains paragraphes, la notation mathématique relative au filtre de Kalman employée dans ce travail est établie.

L'état d'un système \mathbf{x}_k peut être exprimé en fonction de son état précédent \mathbf{x}_{k-1} , de la commande en entrée \mathbf{u}_k et d'un bruit de procédé \mathbf{w}_k . L'indice représente l'instant : k étant l'instant actuel et $k - 1$ étant l'instant précédent. L'équation aux différences générale pour cette relation est la suivante :

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k, \quad (2.1)$$

où $f(\cdot)$ est une fonction qui peut être non linéaire.

De la même manière, les observations \mathbf{y}_k à l'instant k peuvent être exprimées selon l'état du système et le bruit de mesure \mathbf{v}_k .

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (2.2)$$

où $h(\cdot)$ est une fonction qui peut, encore une fois, être non linéaire.

Le filtre de Kalman est un observateur stochastique et s'exprime donc à partir de l'équation générale d'un observateur :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left[\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \right], \quad (2.3)$$

où l'état estimé *a priori* $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ et l'observation correspondante $\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}$ sont évaluées par :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k), \quad (2.4)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}). \quad (2.5)$$

Le terme $(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})$ est appelé l'innovation. Le filtre de Kalman est habituellement divisé en deux étapes principales : la prédiction ou l'estimation *a priori* et la correction par l'innovation ou estimation *a posteriori*.

Le gain du filtre permet de mettre plus ou moins d'importance sur la correction par l'innovation par rapport à la prédition. Le gain du filtre de Kalman \mathbf{K}_k est par conséquent fonction de la matrice de covariance de l'erreur *a priori* $\mathbf{e}_{k|k-1} = (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$ et de la matrice de covariance de l'innovation. Lorsque les bruits de procédé et de mesure sont gaussiens et que les fonctions $f(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont linéaires, le filtre de Kalman est l'estimateur optimal.

Puisqu'un système est rarement linéaire, des extensions au filtre de Kalman, telles que le filtre de Kalman étendu et le filtre de Kalman non parfumé, ont été développées. Que ce soit le filtre de Kalman classique, étendu ou non parfumé, il suppose toujours un bruit gaussien à la fois sur le procédé et les mesures. La différence entre ces trois filtres se situe plutôt dans la linéarisation du modèle de transition $f(\cdot)$ et du modèle de l'état vers les observations $h(\cdot)$.

2.2.1 Filtre de Kalman classique

Le filtre de Kalman classique suppose un système linéaire, de telle sorte qu'il peut être représenté par les opérations matricielles suivantes :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad (2.6)$$

où \mathbf{A} est une matrice représentant la transition de l'état précédent à l'état actuel, \mathbf{B} est une matrice représentant la transformation de la commande à l'entrée du système vers l'état actuel. Le bruit de procédé \mathbf{w}_k est supposé gaussien et de moyenne nulle. La matrice de covariance de ce bruit, $E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top]$, de procédé est nommée \mathbf{Q} .

La relation entre l'état et l'observation est aussi supposée linéaire et est représentée par la matrice \mathbf{H} :

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (2.7)$$

Tout comme le bruit de procédé, le bruit de mesure \mathbf{v}_k est supposé gaussien et de moyenne nulle. Sa matrice de covariance, $E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\top]$, est nommée \mathbf{R} .

À la section A.1 en annexe, la matrice de covariance de l'erreur *a priori* $\mathbf{e}_{k|k-1}$ est développée pour obtenir la relation suivante :

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q}, \quad (2.8)$$

où \mathbf{P}_{k-1} est la matrice de covariance de l'erreur de l'estimation *a posteriori* à instant précédent. Cette relation exprime donc la propagation de la matrice de covariance de l'erreur dans le temps.

À la section A.2 en annexe, la matrice de covariance de l'innovation est également développée et la relation suivante est obtenue :

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^\top + \mathbf{R}. \quad (2.9)$$

Le calcul du gain de Kalman, soit la matrice \mathbf{K}_k , est développé dans la littérature de multiples façons. À l'origine, le filtre de Kalman a été développé en utilisant la projection orthogonale de l'erreur dans l'espace d'Hilbert [7]. Cependant, afin de mettre en évidence l'implication du bruit gaussien, les prochaines sections expliquent les grandes lignes du développement par l'approche du moindre carré, puis par l'approche du maximum *a posteriori*.

Approche du moindre carré

Le gain de Kalman est souvent développé dans la littérature en passant par la minimisation de l'erreur quadratique moyenne (MSE), par exemple [8]. L'erreur quadratique moyenne est définie par la variance et le biais de l'estimateur :

$$\text{MSE} = \text{Var}(\hat{\mathbf{x}}) + \text{Biais}^2(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.10)$$

L'estimateur optimal est dérivé à partir de deux hypothèses de départ.

La première est que, lorsque l'estimateur est optimal, le biais est nul. Par conséquent, il faut trouver l'estimateur pour lequel la variance de $\hat{\mathbf{x}}$ est minimale. Cette estimation optimale correspond en fait, puisqu'elle est sans biais, à l'espérance conditionnelle de l'état sachant les observations obtenues à l'instant actuel et aux instants précédents.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k] \quad (2.11)$$

Dans de nombreux cas, la distribution de cette probabilité conditionnelle *a posteriori* n'est pas évidente à calculer. Cependant, lorsqu'à la fois le bruit de mesures et le bruit de procédé sont gaussiens, cette densité de probabilité se résume également à une densité gaussienne (qui ne possède qu'un seul mode).

La deuxième hypothèse est donc de considérer un bruit de nature normal. Le filtre de Kalman se base entièrement sur cette propriété, car une densité de probabilité normale peut être totalement représentée par son espérance et sa covariance. La matrice de covariance de l'erreur et le vecteur d'état estimé (*a posteriori*) sont donc suffisants pour représenter la densité de probabilité de $\{\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$.

Pour ces raisons, minimiser l'erreur quadratique moyenne sur $\hat{\mathbf{x}}$ revient à minimiser la variance de l'estimation *a posteriori*. Dans une matrice de covariance, la variance est située sur la diagonale principale. Par conséquent, il s'agit de minimiser la trace de la matrice de covariance de l'erreur *a posteriori* :

$$E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^2] = \text{Tr}(E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^\top]) = \text{Tr}(E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top]) = \text{Tr}(\mathbf{P}_k) \quad (2.12)$$

Le vecteur d'erreur, $(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)$, est renommé \mathbf{e}_k afin de simplifier la notation.

En remplaçant par l'équation générale d'un observateur, le vecteur d'erreur à l'instant présent peut être exprimé en fonction du vecteur d'erreur *a priori* :

$$\mathbf{e}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{e}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \quad (2.13)$$

La matrice de covariance de l'erreur *a posteriori* déduite de cette expression est donc :

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^\top - \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^\top \quad (2.14)$$

La valeur du gain minimisant cette variance correspond à la valeur pour laquelle la dérivée de la trace est nulle. Cette dérivation est faite en annexe à la sous-section A.3. Le gain de Kalman ainsi obtenu est le suivant :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{S}_k^{-1} \quad (2.15)$$

En remplaçant le gain de Kalman dans (2.14), la covariance *a posteriori* est simplifiée à :

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (2.16)$$

Une seconde approche permettant d'arriver au même résultat, en raison de la nature gaussienne du bruit, est celle du maximum *a posteriori*.

Approche du maximum *a posteriori*

L'estimateur optimal bayésien est de trouver $\hat{\mathbf{x}}_k$ qui maximise la probabilité conditionnelle d'obtenir l'état estimé $\hat{\mathbf{x}}_k$ connaissant l'observation \mathbf{y}_k et la densité de probabilité des estimations précédentes. Autrement dit, l'estimateur optimal est celui du maximum *a posteriori*. Or, pour des bruits de mesure et de procédé gaussiens, le maximum *a posteriori* (MAP) est l'estimation faite par le filtre de Kalman.

La formulation du MAP dépend de la fonction de vraisemblance $\max p(\mathbf{y}_k|\hat{\mathbf{x}}_k)$ et de la distribution *a priori* $p(\hat{\mathbf{x}}_k|\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$:

$$\max p(\hat{\mathbf{x}}_k|\mathbf{y}_k) = \max p(\mathbf{y}_k|\hat{\mathbf{x}}_k)p(\hat{\mathbf{x}}_k|\hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \quad (2.17)$$

Le développement fait ici est semblable à celui dans [9]. Cependant, ce dernier associe le filtre de Kalman au maximum de vraisemblance, malgré la présence de la distribution *a priori*, et des étapes importantes du développement, notamment l'explication du passage de la fonction de vraisemblance vers la densité *a posteriori*, sont omises ou non explicites. Le développement ici et à la section A.4 en annexe est direct et plus approfondi et se base sur les prochaines affirmations.

Lorsque le bruit est gaussien, la fonction de vraisemblance ainsi que la distribution *a priori* sont également gaussiennes :

$$p(\mathbf{y}_k|\hat{\mathbf{x}}_k) = \frac{\exp(-(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k)\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k)^\top)}{\sqrt{|2\pi\mathbf{R}|}}, \quad (2.18)$$

$$p(\hat{\mathbf{x}}_k|\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) = \frac{\exp(-(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^\top)}{\sqrt{|2\pi\mathbf{P}_{k|k-1}|}}. \quad (2.19)$$

Le modèle récursif du système est considéré dans la distribution *a priori*. Comme la multiplication de distributions gaussiennes équivaut également une distribution gaussienne, l'expression de la distribution *a priori* selon $\mathbf{P}_{k|k-1}$ est possible.

Une seconde simplification importante, grâce à la nature gaussienne de ces distributions, est appliquée sur la distribution *a posteriori*. Il est possible de minimiser le logarithme de la distribution *a posteriori*, plutôt que maximiser la distribution elle-même, pour trouver le MAP :

$$\log p(\hat{\mathbf{x}}_k | \mathbf{y}_k) \propto -(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k)\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k)^\top - (\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^\top. \quad (2.20)$$

À la section A.4 en annexe, le développement pour trouver la valeur de $\hat{\mathbf{x}}_k$ minimisant (2.20) est détaillé. Il est alors démontré, en utilisant le lemme de l'inversion matricielle, que la forme obtenue en passant par cette démarche équivaut à celle trouvée par l'approche du moindre carré :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \left[\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \right]^{-1} \left[\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k + \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top + \mathbf{R})^{-1} [\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le filtre de Kalman est donc optimal, car il minimise l'erreur quadratique moyenne et maximise la probabilité *a posteriori*. Ces deux affirmations sont respectées et sont équivalentes en raison de la nature gaussienne du bruit de mesure et de procédé : la densité de probabilité de l'état *a posteriori* est une gaussienne également et possède donc un seul mode qui est situé à l'espérance.

Étapes résumées de prédition et correction

L'application du filtre de Kalman peut se résumer en deux étapes : la prédition à partir des états précédents (estimation *a priori*), et la correction en comparant les états aux observations (estimation *a posteriori*). Les calculs relatifs à ces étapes sont les suivants :

Prédiction

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Correction

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k &= \mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^\top + \mathbf{R} \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^\top \mathbf{S}_k^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{P}_{k|k-1}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.2.2 Filtre de Kalman étendu

Le filtre de Kalman étendu permet de linéariser un modèle ($f(\cdot)$ et $h(\cdot)$) non linéaire autour du vecteur d'état estimé. Il se base sur la série de Taylor de premier ordre, et se limite donc à des fonctions continues qui sont presque linéaires. La première approximation faite pour ce filtre est celle sur le modèle de transition d'un état au suivant :

$$f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \approx f(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{e}_k \frac{\delta f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_k)}{\delta \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k}, \quad (2.24)$$

où $\frac{\delta f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_k)}{\delta \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k}$ est la matrice Jacobienne évaluée au vecteur d'état estimé *a posteriori*. Afin de garder la même syntaxe que pour le filtre de Kalman classique, cette matrice Jacobienne est renommée \mathbf{A}_k de telle sorte que :

$$f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \approx f(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{A}_k \mathbf{e}_k. \quad (2.25)$$

L'erreur *a priori* se retranscrit donc :

$$\mathbf{e}_{k|k-1} = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_{k-1} - f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k) \approx \mathbf{A}_k \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (2.26)$$

ce qui revient aux équations vues dans la sous-section 2.2.1 pour le filtre de Kalman classique.

De la même manière, une seconde approximation est faite pour le modèle de transformation des états en observations :

$$h(\mathbf{x}_k) \approx h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{H}_{k|k-1} \mathbf{e}_{k|k-1}, \quad (2.27)$$

où $\mathbf{H}_{k|k-1}$ est la matrice Jacobienne de $h(\cdot)$ évaluée au vecteur d'état estimé *a priori*. Le vecteur d'innovation se retranscrit donc :

$$\mathbf{i}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \approx \mathbf{H}_{k|k-1} \mathbf{e}_{k|k-1} + \mathbf{v}_k. \quad (2.28)$$

Le filtre de Kalman étendu suppose que les termes d'ordres supérieurs de la série de Taylor pour $h(\cdot)$ et $f(\cdot)$ sont négligeables. Dans les cas où les termes d'ordres supérieurs sont importants, il est préférable d'utiliser le filtre de Kalman non parfumé présenté à la prochaine sous-section.

2.2.3 Filtre de Kalman non parfumé

Le filtre de Kalman non parfumé (*Unscented Kalman Filter*, UKF), développé dans [10; 11], est basé sur la prémissse qu'une densité de probabilité est plus facile à estimer en général qu'une fonction non linéaire. Ce filtre utilise donc plutôt une transformation non parfumée [12] pour estimer la densité de probabilité après l'insertion dans une fonction non linéaire.

Cette transformation non parfumée est la suivante.

D'abord, des points sigma χ_{k-1} sont générés pour représenter la densité de probabilité gaussienne de l'état estimé $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$. Contrairement à un filtre particulaire, les points générés ne sont pas aléatoires, ils sont déterministes et choisis pour que leur covariance et que leur moyenne corresponde respectivement à \mathbf{P}_{k-1} et $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$. Les $2n+1$ points sigma sont générés de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\chi_{0, k-1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \chi_{i, k-1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + (\sqrt{(n+\lambda)\mathbf{P}_{k-1}})_i \\ \chi_{i+n, k-1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - (\sqrt{(n+\lambda)\mathbf{P}_{k-1}})_{i+n}\end{aligned}\quad (2.29)$$

où n est la longueur du vecteur d'états, l'opérateur $(\cdot)_i$ correspond à la i^{e} colonne ou rangée de la matrice évaluée et $\lambda = \alpha^2(n+\kappa) - n$ est un coefficient à choisir permettant un réglage sur les points sigma. Plus α est grand, plus les points sigma sont éloignés. En général, il est suggéré d'évaluer la racine carrée de la matrice de covariance avec la factorisation de Cholesky [10; 13].

Les poids associés à chacun des points sigma sont :

$$\begin{aligned}W_{0, \text{moy}} &= \frac{\lambda}{n+\lambda} \\ W_{0, \text{cov}} &= \frac{\lambda}{n+\lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_{1:2n, \text{moy}} &= W_{1:2n, \text{cov}} = \frac{1}{2(n+\lambda)}\end{aligned}\quad (2.30)$$

Ensuite, dans le filtre de Kalman non parfumé, les points sigma sont propagés dans la fonction $f(\cdot) : \chi_{k|k-1} = f(\chi_{k-1}, \mathbf{u}_k)$. La covariance *a priori*, $\mathbf{P}_{k|k-1}$ correspond alors à la covariance des points sigma propagés et pondérés par \mathbf{W}_{cov} , additionnée de la covariance bruit de procédé.

Puis, les points sigma *a priori* sont transformés par la fonction $h(\cdot)$ pour estimer l'espérance de l'observation : $\mathbf{Y}_{k|k-1} = h(\chi_{k|k-1})$. L'espérance de l'observation est alors la moyenne pondérée par \mathbf{W}_{moy} de $\mathbf{Y}_{k|k-1}$. La covariance de l'innovation, \mathbf{S}_k est donc évaluée par :

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{Y}_{k|k-1} \text{diag}(\mathbf{W}_{\text{cov}}) \mathbf{Y}_{k|k-1}^\top + \mathbf{R}. \quad (2.31)$$

La covariance croisée de l'espérance de l'observation et de l'estimation *a priori*, soit $\mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}$ dans le gain de Kalman, correspond à :

$$\mathbf{P}_{yx, k|k-1} = \mathbf{Y}_{k|k-1} \text{diag}(\mathbf{W}_{\text{cov}}) \chi_{k|k-1}^\top. \quad (2.32)$$

Le gain de Kalman et la matrice de covariance *a posteriori* se résument donc à :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{yx, k|k-1} \mathbf{S}_k^{-1}. \quad (2.33)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{K}_k^\top. \quad (2.34)$$

Cette méthode pour approximer les matrices de covariance n'est valide que lorsque le bruit est additif. Lorsque le bruit le procédé n'est pas additif, il faut augmenter le vecteur d'état par le bruit de procédé. Lorsque le bruit de mesures n'est pas additif, il faut augmenter le vecteur d'état à la fois par le bruit de mesures et par le bruit de procédé.

Pour générer les points sigma, la taille du vecteur d'état est alors augmentée par des vecteurs nuls de la taille du bruit de procédé et du bruit de processus. Le vecteur d'état augmenté, noté $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a$, est alors :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^\top & \mathbf{0}_v^\top & \mathbf{0}_w^\top \end{bmatrix}^\top. \quad (2.35)$$

De la même manière, la matrice de covariance de l'erreur \mathbf{P}_{k-1} est augmentée par les matrices de covariance des bruits :

$$\mathbf{P}_{k-1}^a = \text{diag}(\mathbf{P}_{k-1}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}). \quad (2.36)$$

Avec cet espace augmenté, $2n + 1$, où n est la longueur du vecteur d'état augmenté, points sigma sont générés : $\boldsymbol{\chi}_{k-1}^a = [\boldsymbol{\chi}_{k-1}^x, \boldsymbol{\chi}_{k-1}^v, \boldsymbol{\chi}_{k-1}^w]^\top$. Les bruits de procédé et de mesures non additifs sont donc pris en compte : $\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^x = f(\boldsymbol{\chi}_{k-1}^x, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\chi}_{k-1}^v)$ et $\mathbf{Y}_{k|k-1}^x = h(\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^x, \boldsymbol{\chi}_{k-1}^w)$. Les covariances des points sigma pondérés $\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^x$ et $\mathbf{Y}_{k|k-1}^x$ correspondent alors directement aux covariances avec le bruit de procédé et de mesure.

Puisque la densité de probabilité est propagée dans la fonction non linéaire, le filtre de Kalman non parfumé permet d'atteindre une plus grande précision que le filtre de Kalman étendu. En fait, l'estimation du filtre Kalman non parfumé atteint l'approximation du 3^e ordre de la série de Taylor, alors que le filtre de Kalman étendu n'atteint que le premier ordre. Ces deux filtres sont également de même complexité algorithmique [11].

Comme expliqué dans la présente section, les deux façons de traiter la non-linéarité d'un système avec le filtre de Kalman sont l'utilisation du filtre de Kalman étendu pour un système presque linéaire, et du filtre de Kalman non parfumé autrement. La prochaine section étalement plutôt les observateurs et les adaptations du filtre de Kalman développés dans la littérature qui pourraient s'appliquer, après modification, au traitement de mesures lidar fortement discrètes.

2.3 Estimation d'états pour mesures discrètes

Considérons une mesure z ayant une incertitude de $\pm \frac{\Delta z}{2}$. Cette mesure peut être exprimée comme le résultat d'une fonction de quantification $Q(\cdot)$ appliquée sur la mesure parfaite y :

$$z = Q(y) = \Delta z \text{ round} \left(\frac{y - C}{\Delta z} \right) + C, \quad (2.37)$$

où C est une constante pour centrer le zéro de l'arrondi à la valeur voulue.

Lorsque les niveaux de quantifications sont petits, il est possible d'approximer un bruit de quantification comme un bruit gaussien [14; 15]. Le bruit gaussien (thermique par exemple)

sur les mesures est alors plus important ou équivalent au bruit de quantification, où la variance du bruit de quantification correspond à :

$$\sigma_z^2 = \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} z^2 \frac{1}{\Delta z} dz = \frac{\Delta z^2}{12}. \quad (2.38)$$

Cependant, lorsque les niveaux de quantifications sont larges, cette approximation tend à diminuer de manière importante les performances des observateurs comme le filtre de Kalman.

Il y a deux grandes catégories de techniques pour traiter ce problème : considérer un bruit de mesure uniforme, considérer les mesures comme étant des contraintes sur les états. Le filtre de Kalman tel que développé initialement doit être adapté pour ces deux cas.

Ce sont par ailleurs ces deux astuces qui sont employées et comparées dans [15] afin de localiser précisément un robot avec des mesures RFID (*radio frequency identification*) fortement discrétisées. Il y est vu que la deuxième méthode, par contraintes, est plus précise que la première, considération d'un bruit uniforme, pour cette application.

La littérature disponible pour ces deux techniques est abordée dans les deux prochaines sous-sections.

2.3.1 Considération du bruit de quantification

La première façon de représenter le problème d'une mesure angulaire faible résolution est de lui donner un bruit de quantification : un bruit de densité uniforme dans l'intervalle angulaire couvert par un élément lidar.

Par conséquent, une solution plus exacte pour des mesures fortement discrétisées est d'utiliser un filtre particulaire plutôt qu'un filtre de Kalman. Un filtre particulaire est une méthode de Monte-Carlo et permet de modéliser un bruit qui n'est pas gaussien. Il s'agit de générer des particules aléatoires représentant les états du système. Le poids de chaque particule est ensuite évalué selon la probabilité conditionnelle d'obtenir l'observation actuelle connaissant la particule d'état. Selon le poids des particules, un rééchantillonnage aléatoire est fait pour obtenir les particules *a posteriori*. Ces particules sont propagées dans le modèle du système afin de prédire l'état suivant. La moyenne des particules pondérées correspond alors à l'espérance de l'état.

Dans [16] par exemple, un filtre à particules est comparé au filtre de Kalman pour des mesures quantifiées et il est montré que le filtre à particules est plus performant. Cependant, le filtre à particules nécessite de loin plus de calculs que le filtre de Kalman : comme toute simulation Monte-Carlo, il faut générer une grande quantité de particules aléatoires (des centaines, voire des milliers) et les propager pour bien représenter la PDF. Si une quantité insuffisante de particules est générée, le filtre peut diverger. Pour le cas particulier du bruit de mesure uniforme, les particules pourraient être entièrement à l'extérieur de la région non nulle de la distribution

uniforme correspondant à la mesure, le rééchantillonnage aléatoire serait problématique. Ainsi, pour une application en temps réel, le filtre particulaire est moins intéressant.

Pour cette raison, de nombreuses solutions alternatives ont été développées.

Par exemple, l'article [14] se concentre sur le cas où les niveaux de quantifications sont très larges et où l'échantillonnage est rapide : les mesures quantifiées changent peu souvent de niveau, sauf lorsqu'elles sont près d'une frontière entre deux niveaux. Il s'appuie sur l'information contenue dans le changement de niveau en proposant deux méthodes récursives, notamment le maximum de vraisemblance, pour estimer l'état. La gigue présente entre deux niveaux, lorsqu'une mesure est près d'une frontière de quantification, est à la base de ces deux méthodes. Cette gigue n'est toutefois pas présente dans de nombreuses applications, comme celle du pistage lidar.

Dans [17], un estimateur d'état récursif est développé. L'algorithme développé propage les coins de la région non nulle de la PDF du vecteur d'état. Lorsqu'une nouvelle mesure s'ajoute, les coins de la PDF sont recalculés et leur nombre peut augmenter. L'algorithme nécessite cependant que la région non nulle de la PDF des états soit convexe, ce qui n'est pas toujours le cas, surtout lorsque la relation entre les mesures et les états n'est pas linéaire.

Dans [18], un algorithme numérique est développé pour estimer l'état à partir d'une approximation de moindre carré. Plus précisément, les états sont calculés de manière similaire au filtre de Kalman, jusqu'à l'étape de correction. Ensuite, l'espérance $E[\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k}]$ et la covariance $\text{Cov}[\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k}]$ de la mesure (non discrétisée) \mathbf{y}_k sont évaluées numériquement par rapport aux mesures quantifiées $\mathbf{z}_{1:k}$ et de manière récursive. Ces deux termes sont calculés numériquement en intégrant sur une grille la densité de probabilité :

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k}) = \begin{cases} \frac{1}{C\sqrt{|2\pi\mathbf{S}_k|}} \exp^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^\top \mathbf{S}_k^{-1}(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})} & \text{si } \mathbf{y}_k \in \mathbf{Z}_k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad (2.39)$$

où C est une constante de normalisation qui n'est pas fonction des valeurs de \mathbf{y}_k et \mathbf{Z}_k correspond à l'intervalle de la mesure quantifiée \mathbf{z}_k . La qualité de l'approximation du moindre carré dépend alors de la taille de la grille d'intégration.

Dans [19], le filtre de Kalman est adapté pour une innovation qui est quantifiée. Pour une innovation nulle (espérance de la mesure contenue dans l'incertitude de la mesure), seulement l'étape de prédiction du filtre de Kalman est prise en compte. Lorsque le nombre de niveaux du quantificateur est augmenté à l'infini, ce filtre de Kalman modifié tend vers le filtre de Kalman classique ou étendu. Une limitation de ce filtre est qu'il s'agit de l'innovation dans ce cas qui est quantifiée plutôt que les observations. L'article traite en effet d'un cas où l'innovation est calculée directement au capteur avec une bonne précision et que l'information pouvant être transmise au filtre est limitée et est donc quantifiée. De plus, pour toutes les observations,

l'innovation est quantifiée avec le même quantificateur, ce qui n'est pas le cas pour un lidar à état solide puisque le bruit sur la mesure de position radiale est gaussien.

2.3.2 Application de contraintes sur les états

Une autre façon de voir l'incertitude sur la mesure angulaire est de la voir comme une contrainte sur l'état. De nombreuses techniques ont été développées pour pouvoir inclure des contraintes sur les états dans les filtres de Kalman. Une revue extensive de ces techniques est faite dans [20].

Les contraintes peuvent être sous forme d'égalité ou d'inégalité. Dans le cas d'une égalité, une façon commune et versatile d'appliquer la contrainte est d'augmenter le vecteur d'observations : la contrainte est ajoutée au vecteur des observations comme étant une mesure parfaite dont la covariance du bruit de mesure est nulle. Ainsi, le gain du filtre de Kalman accorde tout le poids à cette contrainte, sans considérer l'estimation de l'état *a priori* qui pourrait être contradictoire. Cependant, pour beaucoup d'applications, il est préférable d'appliquer des contraintes moins strictes. Cela est d'ailleurs le cas lorsqu'on suppose une contrainte de vitesse pour le pistage de cibles [21]. Pour relaxer les contraintes, il faut tout simplement lui accorder une covariance de bruit de mesure non nulle.

Une technique qui s'étend aux inégalités est la projection des états sur les contraintes. Il s'agit de trouver l'état sur l'espace constraint permettant de minimiser la «variance» pondérée de l'erreur :

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{W} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k) \quad (2.40)$$

où \mathbf{W} est une matrice de poids définie positive, \mathbf{x} correspond aux états possibles selon les contraintes, $\tilde{\mathbf{x}}_k$ correspond aux états contraints et $\hat{\mathbf{x}}_k$ correspond aux états tel qu'estimés sans contrainte. Le choix de la matrice de poids permet d'obtenir par exemple l'estimation correspondant au maximum de probabilité ($\mathbf{W} = \mathbf{P}_k^T$) ou au moindre carré ($\mathbf{W} = \mathbf{I}$), lorsque le bruit est gaussien.

Lorsque les contraintes sur l'état et le modèle sont non linéaires, le filtre de Kalman non parfumé en deux étapes est une option [22]. La première étape consiste à projeter les points sigma sur les contraintes et à évaluer leur espérance et covariance. La deuxième étape est d'appliquer une seconde fois les contraintes par projection sur l'espérance des points sigma. Pour l'espérance projetée, il faut également réévaluer la matrice de covariance.

2.4 Transformée de Hough

La transformée de Hough est un outil utilisé dans le pistage radar pour initialiser des pistes en estimant des trajectoires rectilignes. Pour cette application, la transformée de Hough permet le mieux lorsqu'une cible est de géométrie simple et de petite taille, car la position de ses

surfaces de réfléchissantes tend à moins varier [23]. Pour un lidar à état solide, cette caractéristique est très avantageuse, car la difficulté est d'estimer avec précision la position angulaire (et par extension la vitesse) de petites cibles contenues dans un élément. Lorsqu'une cible est grande et contenue dans plusieurs éléments, son centre peut être estimé en moyennant : le filtre de Kalman est plus efficace, car la quantification est moins importante sur le bruit de mesure.

Appliquée pour la conduite intelligente, la transformée de Hough permettrait donc d'estimer la trajectoire de piétons, de cyclistes ou d'animaux et ainsi d'évaluer les collisions potentielles. De plus, la connaissance de la trajectoire peut aussi aider l'estimation de l'état d'une cible, et c'est sur cette théorie que se base ce projet de maîtrise.

Telle que définie à l'origine, la transformée de Hough permet de détecter des droites dans un ensemble de points ou dans une image. Elle représente une droite dans un espace cartésien par un point dans l'espace de Hough. Pour ce faire, elle utilise l'équation paramétrique qui prend en entrée un point (x, y) :

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta. \quad (2.41)$$

Le paramètre ρ correspond à la distance minimale entre l'origine et la droite \mathbf{d} . À la figure 2.1, il correspond à la norme du segment \overline{OH} et il est négatif lorsque le point H est dessous l'axe des x . Le paramètre θ correspond à l'orientation du vecteur perpendiculaire à la droite, soit l'orientation de \overline{OH} (entre 0 et π radians). Selon la relation (2.41), l'espace de Hough est borné : il se répète en θ et le point en entrée le plus éloigné de l'origine (distance de r_{\max}) détermine les valeurs extrêmes de ρ . En comparant la figure 2.1 avec la figure 2.2, on remarque que toutes les droites possibles sont comprises dans cet espace de Hough borné.

Il s'agit de la représentation la plus utilisée pour décrire l'espace de Hough d'une droite. Certains utilisent également les paramètres m et b correspondants à la pente et à la valeur initiale de la droite ($y = mx + b$). Cependant, dans cette représentation, les paramètres ne sont pas bornés : la pente et la valeur initiale tendent vers l'infini pour une droite verticale par exemple.

Une accumulation (ou des votes) est faite dans une matrice de taille $[N_\rho \times N_\theta]$ représentant l'espace de Hough discrétilisé. Le pixel dans la matrice où le nombre de votes est maximal correspond alors à la droite (ρ, θ) qui passe par le plus de points (x, y) .

La transformée de Hough a été généralisée afin de permettre la reconnaissance de formes autres que des droites [24; 25]. Dans ces cas, il peut y avoir plus de deux paramètres décrivant l'espace de Hough. Il est alors discrétilisé en une série d'hypercubes dans un tenseur.

La figure 2.3 illustre un exemple du procédé pour la transformée de Hough détectant une droite.

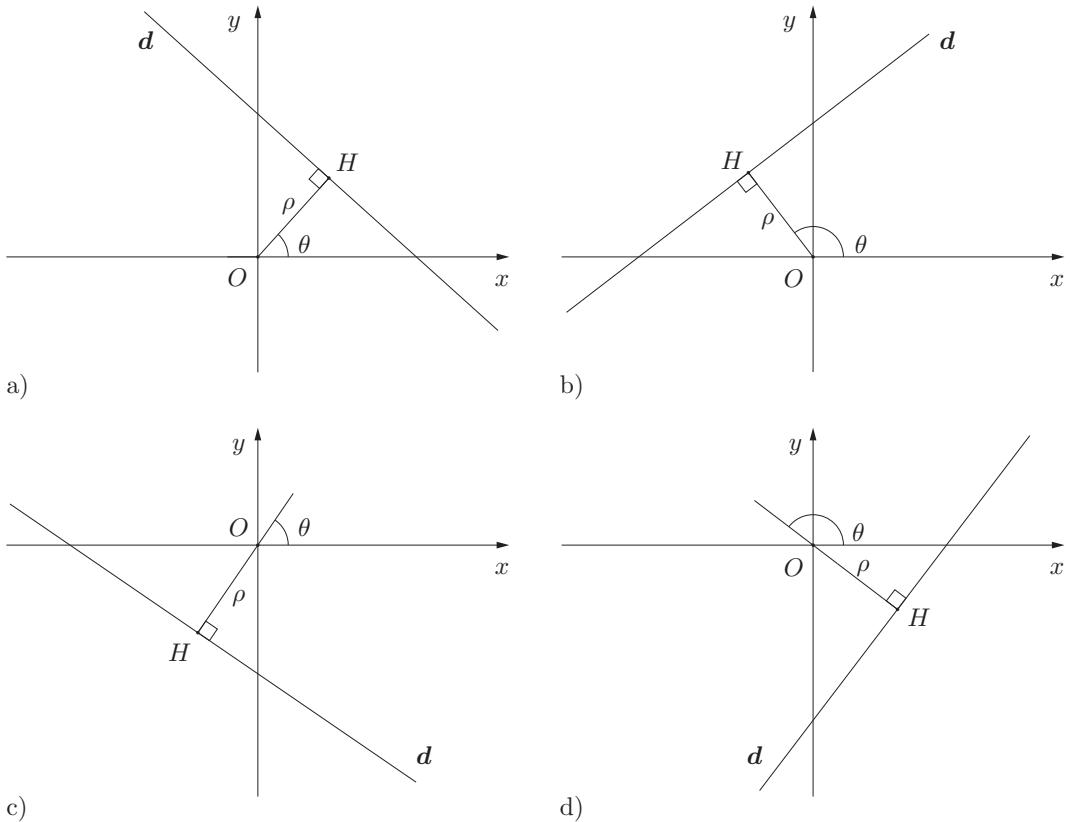


FIGURE 2.1 – Exemples de droites pour les quatre quadrants du plan cartésien. a) $\rho \geq 0$ et $0 \geq \theta \geq \pi/2$, b) $\rho \geq 0$ et $\pi/2 \geq \theta \geq \pi$, c) $\rho \leq 0$ et $0 \geq \theta \geq \pi/2$ et d) $\rho \leq 0$ et $\pi/2 \geq \theta \geq \pi$.

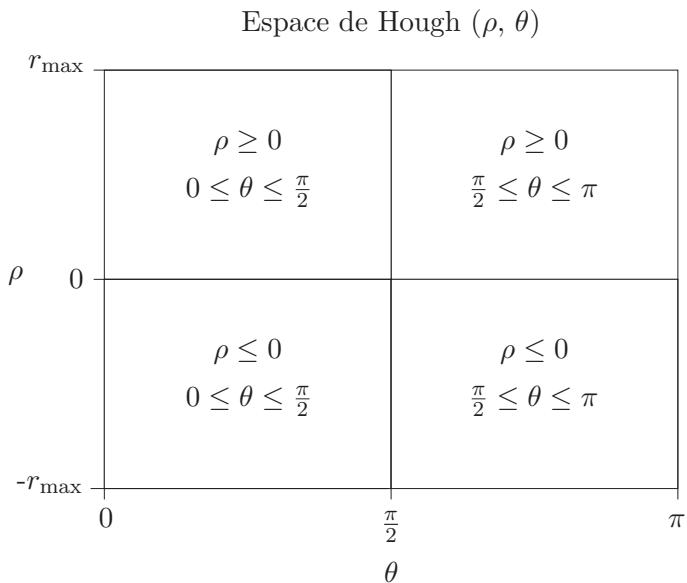


FIGURE 2.2 – Transformation des droites dans les quatre quadrants du plan cartésien vers l'espace de Hough.

Tel qu'illustré dans l'espace de Hough, chaque point correspond à une courbe représentant l'ensemble des droites passant par ce point. Pour toutes les valeurs d'orientation θ , il existe une droite ayant une valeur unique en ρ . L'intersection entre deux courbes correspond donc à la droite passant par deux points. L'accumulation des votes dans la matrice illustre le nombre de points passant par chaque pixel dans l'espace de Hough discréétisé.

Le quatrième graphique montre d'ailleurs l'effet de la discréétisation de l'espace sur le résultat de la transformée. Lors de l'accumulation, le résultat de l'équation (2.41) est comparé aux extreimums (arêtes) en ρ de chaque pixel. Plus les extreimums sont éloignés ($\Delta\rho = \frac{\max(\rho) - \min(\rho)}{N_\rho}$), plus l'intervalle de la droite rejoignant le plus de points sera grand ($\rho \pm \frac{\Delta\rho}{2}, \theta$). Ainsi, pour avoir une grande précision sur la droite estimée, il faut diminuer le pas $\Delta\rho$ et donc augmenter la taille de la matrice des votes. De la même manière, pour augmenter la précision en θ , il faut augmenter la taille de la matrice. Cependant, cela augmente du même facteur la complexité algorithmique du calcul de la transformée de Hough.

La FHT (*Fast Hough transform*) a été développée dans le but d'atteindre une grande résolution tout en ayant une complexité algorithmique moindre [26; 25]. Le principe est de calculer récursivement la transformée en augmentant la résolution dans les zones dont le nombre de votes dépasse un certain niveau. La taille de chaque hypercube du tenseur de votes n'est donc plus fixe. Pour un tenseur de votes de petite taille, il est possible d'obtenir une résolution intéressante en augmentant celle-ci progressivement dans la ou les régions d'intérêt.

2.4.1 Similarité avec le maximum de vraisemblance

Tel que discuté dans [27], il y a une relation importante, même de la similarité, entre le maximum de vraisemblance (*maximum likelihood*, ML), le maximum *a posteriori* (MAP) et la transformée de Hough. En effet, la densité de probabilité *a posteriori* correspondant aux paramètres de Hough \mathbf{h} s'écrit :

$$f(\mathbf{h}|\mathbf{y}_{1:k}) = \frac{f(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{h})f(\mathbf{h})}{f(\mathbf{y}_{1:k})}, \quad (2.42)$$

où la PDF $f(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{h})$ est la fonction de vraisemblance de \mathbf{h} par rapport à toutes les mesures de position \mathbf{y} . Puisque la PDF $f(\mathbf{y}_{1:k})$ ne dépend pas des paramètres \mathbf{h} et que la PDF des paramètres de Hough, $f(\mathbf{h})$, correspond à une densité uniforme pour les paramètres possibles de Hough, les paramètres de Hough maximisant la probabilité *a posteriori* sont aussi ceux qui maximisent la vraisemblance :

$$\arg \max_{\mathbf{h}} f(\mathbf{h}|\mathbf{y}_{1:k}) = \arg \max_{\mathbf{h}} f(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{h}) = \arg \max_{\mathbf{h}} \prod_i^k f(\mathbf{y}_i|\mathbf{h}). \quad (2.43)$$

En utilisant le logarithme de la vraisemblance, on peut retrouver la forme suivante :

$$\arg \max_{\mathbf{h}} \log f(\mathbf{h}|\mathbf{y}_{1:k}) = \arg \max_{\mathbf{h}} \sum_i^k \log f(\mathbf{y}_i|\mathbf{h}), \quad (2.44)$$

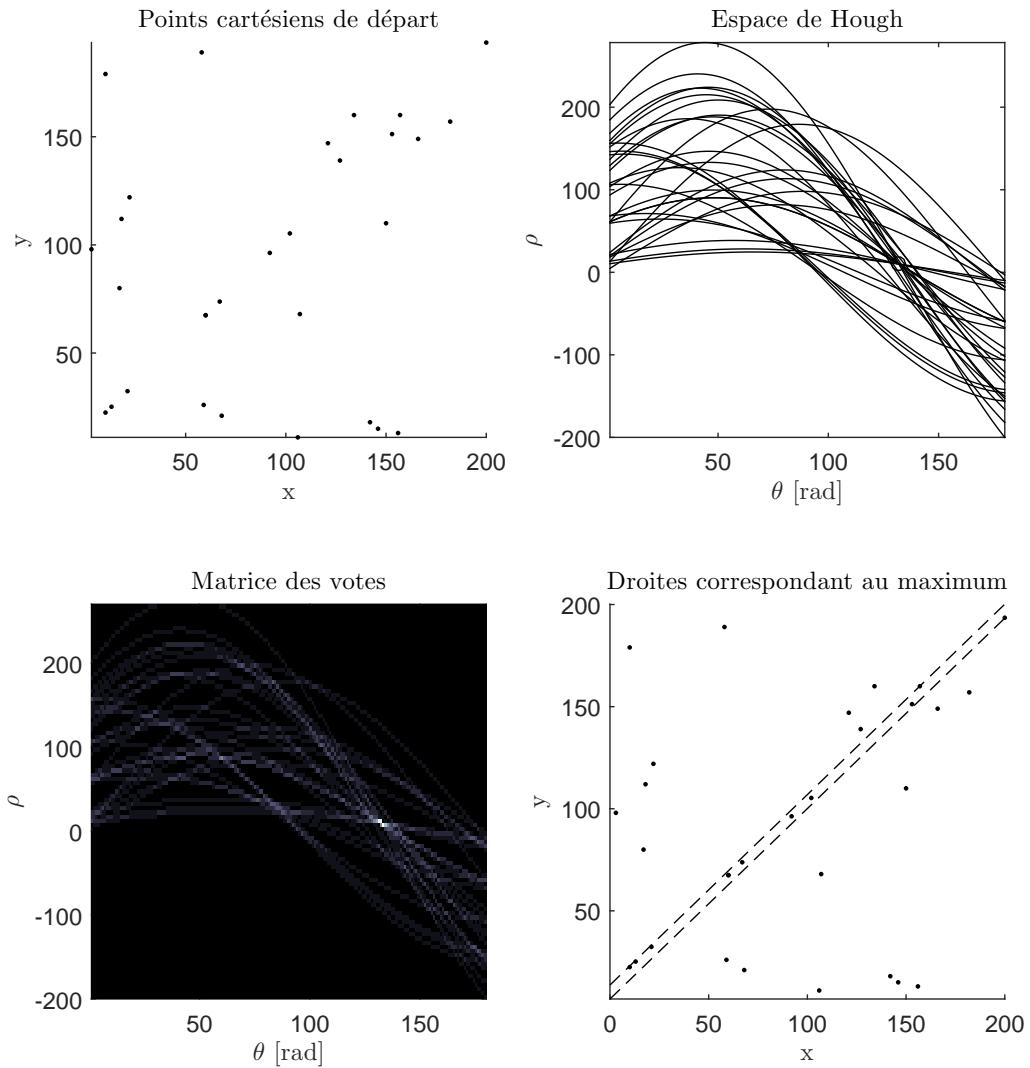


FIGURE 2.3 – Exemple des étapes de la transformée de Hough pour une droite dissimulée dans un ensemble de points aléatoires. La matrice des votes montre la valeur des pixels, le maximum étant en blanc.

ce qui ressemble à la transformée de Hough. En effet, les votes binaires de la transformée de Hough représentent les régions où il est possible d'associer la mesure de position \mathbf{y}_i aux paramètres \mathbf{h} discrétilisés. Les votes pour chaque mesure sont donc similaires au logarithme de la PDF $f(\mathbf{y}_i|\mathbf{h})$. Puis, les votes sont accumulés dans la matrice des votes comme pour le logarithme de vraisemblance.

L'article [27] propose des corrections à la transformée de Hough afin qu'elle corresponde exactement à la fonction de vraisemblance : il s'agit de la transformée de Hough probabiliste (*Probabilistic Hough Transform*, PHF). L'application proposée est pour la reconnaissance de formes dans une image. Une différence notable avec la transformée de Hough classique est que la PDF, soit la matrice de votes, est évaluée comme étant une densité gaussienne limitée par une densité uniforme. Lorsqu'il est possible qu'un pixel de contour soit associé avec une certaine forme, la probabilité d'être associé avec cette forme est gaussienne. Lorsqu'un pixel est trop éloigné, la probabilité d'être associée à la forme est nulle. Bref, les votes ne sont plus binaires.

2.5 Conclusion

Ce chapitre débute par une revue des méthodes de pistage appliquées aux lidars présentes dans la littérature. La nécessité d'estimer les états de manière efficace et précise y est mise en évidence : ces états sont à la base des algorithmes d'association détections-pistes. Toutefois, peu de travaux se sont penchés jusqu'à ce jour sur le problème particulier que cause la faible de résolution angulaire des lidars à état solide.

Afin de supporter les hypothèses et modifications faites dans les prochains chapitres, une revue en détails des outils et pistes de solutions applicables dans la littérature est élaborée.

D'abord, le filtre de Kalman classique est présenté. Les filtres de Kalman étendu et non parfumé et leurs limites quant à la non-linéarité des systèmes sont ensuite abordés. Les conditions de bruits pour lesquelles le filtre est optimal sont expliquées par le principe du MSE et du MAP. Il est alors évident que des mesures quantifiées, comme celles d'un lidar à état solide, ne remplissent pas ces conditions.

Puis, deux catégories de solutions sont présentées pour estimer l'état d'un système dont les mesures sont discrétilisées. La première est de considérer un bruit de quantification non gaussien et la deuxième est de convertir les mesures discrètes en contraintes sur les états. Dans tous les cas, les solutions vues dans la littérature doivent être adaptées au pistage par lidar faible résolution angulaire.

Finalement, la transformée de Hough est discutée. Cette transformée est couramment utilisée dans le pistage par radar afin d'initialiser les pistes. Son utilisation dans un algorithme d'association de détections-pistes est donc envisagée pour un futur projet. Dans ce travail, il

s'agit de l'allier avec un observateur linéaire afin d'améliorer l'estimation des états des cibles. Ainsi, une manière de diminuer sa complexité algorithme et sa ressemblance avec le ML et le MAP sont discutées.

Dans le prochain chapitre, le calcul de la transformée de Hough est modifié afin de s'appliquer à la géométrie des lidars à état solide et de considérer les bruits à la fois gaussien et uniforme des mesures de position. Les techniques pour réduire la complexité algorithme présentées dans le présent chapitre y sont également adaptées pour des détections prises au fil du temps.

Chapitre 3

Transformée de Hough

La transformée de Hough est la première opération qui est appliquée aux données du lidar dans ce mémoire. Elle est utilisée de manière à estimer la meilleure trajectoire rectiligne correspondant au mouvement au fil du temps d'une seule cible. Comme discuté dans la section 2.4.1, cette estimation est très similaire à celle du maximum de vraisemblance (ML), et par extension, car la distribution *a priori* est uniforme, au maximum *a posteriori* (MAP). Dans ce chapitre, afin de tendre vers le ML, la transformée de Hough est modifiée pour considérer le bruit de mesure (gaussien et uniforme).

Ainsi, les modifications apportées à la transformée de Hough sont les suivantes. D'abord, la transformée de Hough est convertie en coordonnées polaires pour y entrer les mesures du lidar directement. Puis, deux méthodes de calcul de la matrice des votes sont proposées : une première avec des votes binaires et une seconde qui considère le bruit gaussien sur la mesure radiale en donnant une amplitude aux votes. Dans les deux cas, la transformée de Hough est adaptée à l'incertitude sur la mesure angulaire.

La transformée de Hough développée est différente de celle dans [27]. En effet, [27] propose une distribution par rapport à l'erreur sur l'estimation des paramètres de Hough. Ici, elle est plutôt par rapport à l'erreur sur les mesures du lidar, soit l'entrée de la transformée.

La complexité algorithmique de la transformée est discutée et des stratégies pour la réduire sont développées. Finalement, des résultats sont présentés à la fin de ce chapitre pour montrer les performances de la transformée développée.

3.1 Conversion pour des mesures en coordonnées polaires

Les mesures du lidar sont en coordonnées polaires. Pour utiliser la transformée de Hough, il faut donc traduire la relation entre un point (x, y) et une droite (ρ, θ) en exprimant le point comme une coordonnée polaire (r, ϕ) . Les conventions utilisées pour définir les angles sont définies à la figure 3.1. De plus, la convention décrite à la section 2.4 est celle utilisée pour les

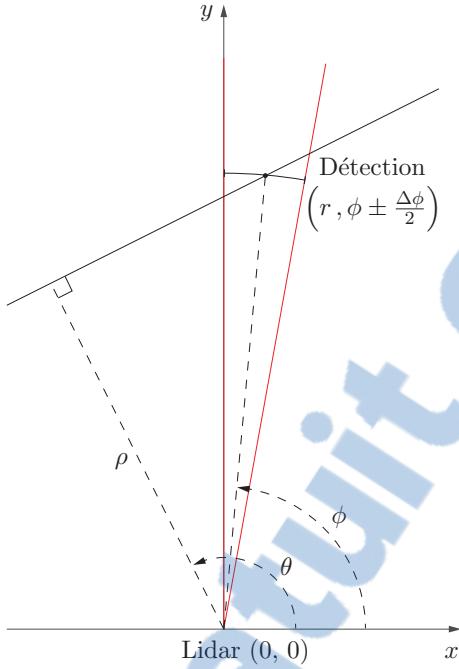


FIGURE 3.1 – Schéma des conventions pour les paramètres de la transformée de Hough et les mesures du lidar.

paramètres de la transformée. La valeur de ρ peut donc être négative lorsque le point sur la droite le plus près du lidar est en dessous de l'axe des x et la valeur de θ varie entre 0 et π radians.

La conversion en coordonnées polaires est faite de la façon suivante. Les équations paramétriques ($x = r \cos \phi$ et $y = r \sin \phi$) sont insérées dans la relation (2.41). Cette dernière devient alors :

$$\rho = r (\cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta) . \quad (3.1)$$

Elle peut être simplifiée par la suite à la relation :

$$\rho = r \cos(\theta - \phi) . \quad (3.2)$$

Lorsque l'incertitude sur la position angulaire est considérée, l'aire correspondante dans l'espace de Hough est complètement caractérisée par deux cosinus de même amplitude et déphasés par la largeur du champ de vue d'un élément lidar $\Delta\phi$. Ces deux courbes sont nommées ρ_+ et ρ_- :

$$\begin{aligned} \rho_+ &= r \cos \left(\theta - \phi + \frac{\Delta\phi}{2} \right) \\ \rho_- &= r \cos \left(\theta - \phi - \frac{\Delta\phi}{2} \right) . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dans la prochaine section, des méthodes de calcul de la matrice des votes, en lien avec la zone délimitée par ces deux cosinus, sont proposées.

3.2 Espace de Hough et matrice des votes

Tel que discuté dans la sous-section 2.4.1, la similarité entre le maximum de vraisemblance et la transformée de Hough se retrouve lors de la construction de la matrice des votes. Cette matrice permet d'identifier quelles sont les droites les plus probables dans un ensemble de mesures en accumulant des votes. Les paramètres ρ et θ maximisant les votes correspondent alors aux paramètres représentant la meilleure droite, soit celle passant par le plus grand nombre de mesures.

Pour construire cette matrice, il faut donc dans un premier temps représenter l'ensemble des droites possibles passant par une mesure dans l'espace de Hough. Cet ensemble doit prendre en considération l'incertitude angulaire sur la mesure (bruit de mesure uniforme) et possiblement le bruit de mesure gaussien sur la distance radiale. Pour une seule mesure, l'ensemble des droites prend la forme d'une région située entre les deux cosinus déphasés à l'équation (3.3). Pour une série de mesures, étant donné l'incertitude sur la mesure angulaire, le maximum peut donc correspondre à une région dans l'espace de Hough.

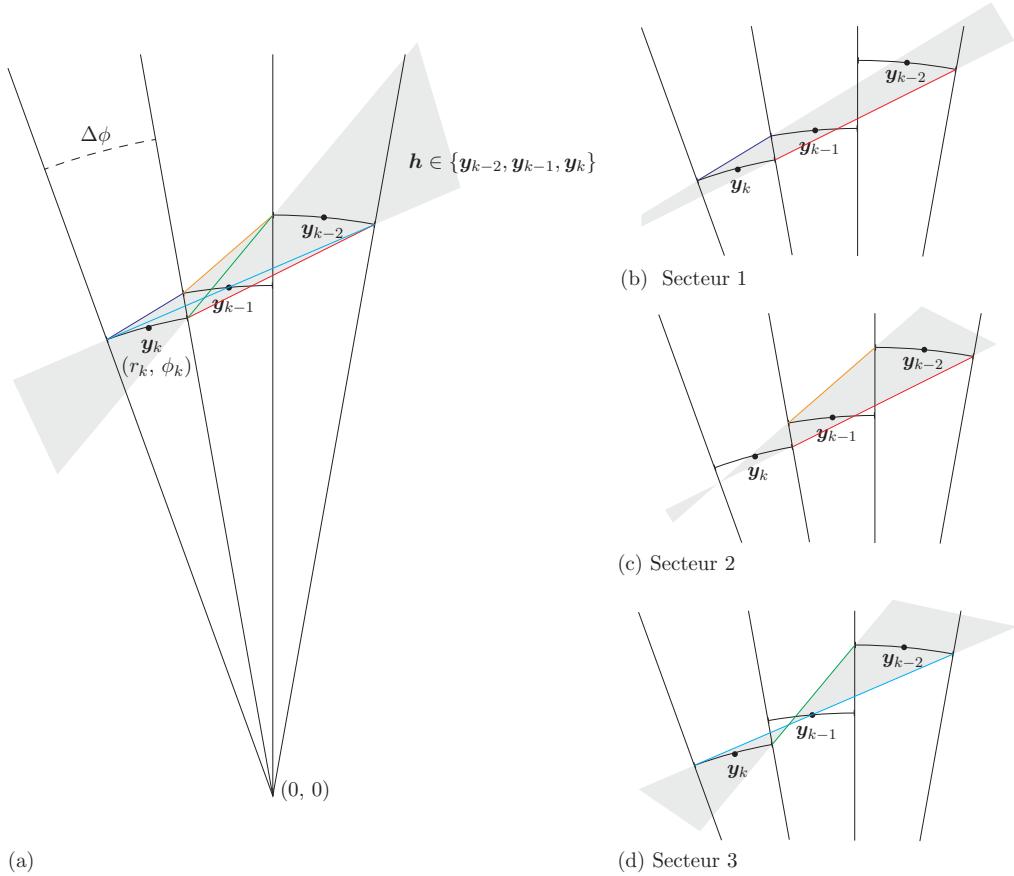


FIGURE 3.2 – Ensemble des droites décris par les paramètres de Hough \mathbf{h} passant par les mesures \mathbf{y}_k .

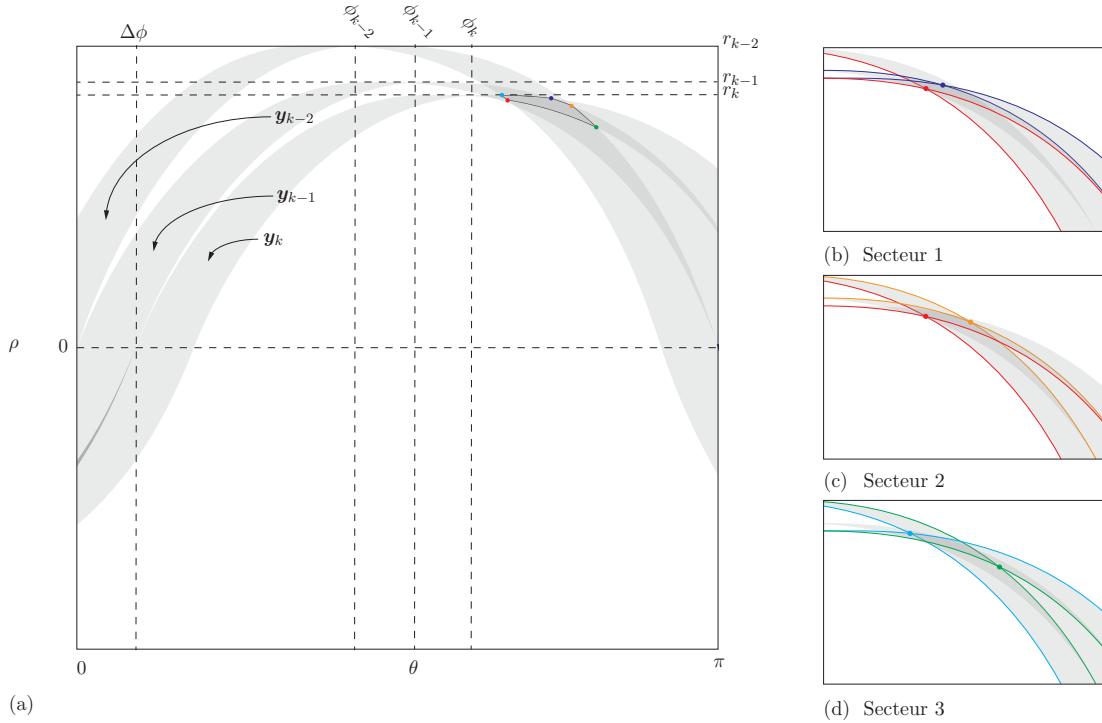


FIGURE 3.3 – Schéma de l'espace de Hough pour les paramètres $\mathbf{h} = (\rho, \theta)$ et les mesures illustrées à la figure 3.2.

Un exemple de régions pour une série de mesures est illustré aux figures 3.2 et 3.3. À la figure 3.2, la région dans la matrice des votes est illustrée dans l'espace cartésien par les secteurs en gris. La région est limitée dans l'espace cartésien par le volume concave décrivant la trace des mesures. Dans ce cas précis, il y a cinq droites aux extrémités de la région maximale dans l'espace de Hough. Ces droites sont illustrées en couleurs.

À la figure 3.3, l'espace de Hough pour le même ensemble de trois mesures est illustré. En gris, il s'agit de la région bornée par les cosinus déphasés pour chacune des mesures. La région maximale est la région qui est encadrée et la plus foncée (schéma 3.3 (a)). Les droites extrêmes de la figure 3.2 sont représentées par les points colorés sur le contour la région maximale et les points dans l'espace polaire associés à chacune des extrémités de la région maximale sont représentées par les courbes colorés qui forment le contour (schémas 3.3 (b), (c) et (d)).

Pour construire la matrice des votes, ces régions sont discréétisées et additionnées. Cette section propose des stratégies dans ce but.

3.2.1 Évaluation de l'intersection

Il y a plusieurs façons d'évaluer la région d'incertitude sur la mesure angulaire dans l'espace de Hough. Cependant, il est préférable de la surévaluer que de la sous-évaluer : comme ρ_+ et

ρ_- sont deux cosinus déphasés, les valeurs de ρ_+ et ρ_- peuvent être très près pour certaines valeurs de θ . Si la zone d'intersection discrétisée plus petite que celle en théorie, il est possible d'induire une erreur sur le maximum de la matrice des votes.

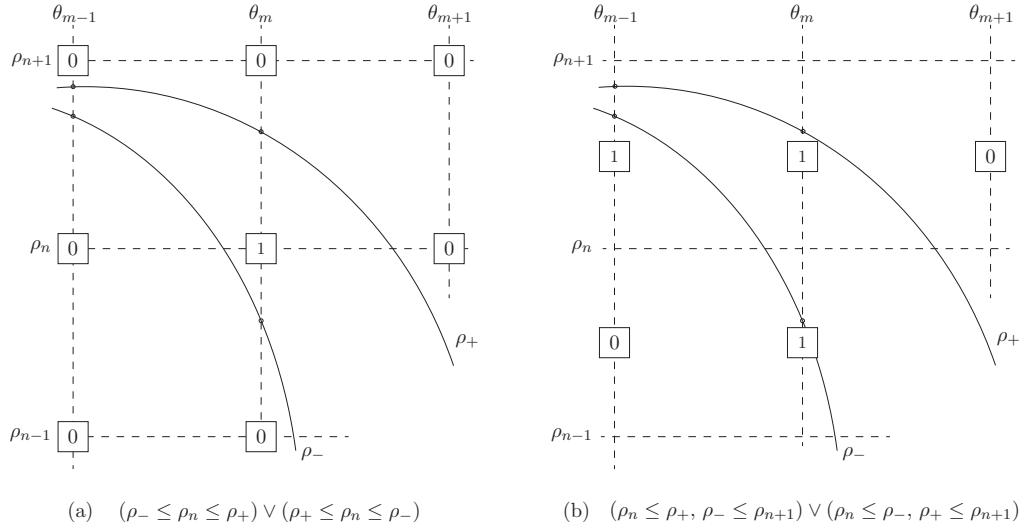


FIGURE 3.4 – Schéma de la matrice des votes pour les deux conditions d'évaluation.

Ce problème est illustré à la figure 3.4. À gauche, la valeur ρ_n d'un pixel (ρ_n, θ_m) de la matrice des votes est comparée aux valeurs ρ_+ et ρ_- évaluées à θ_m . Si ρ_n se situe entre ρ_+ et ρ_- , le vote est non-nul. S'il est à l'extérieur, le vote est de zéro. Mathématiquement, la condition se résume à :

$$\text{Condition a} = (\rho_+ \leq \rho_n \leq \rho_-) \vee (\rho_- \leq \rho_n \leq \rho_+). \quad (3.4)$$

À droite, les valeurs de ρ_+ et ρ_- sont comparées aux valeurs de deux pixels adjacents (ρ_n, θ_m) et (ρ_{n+1}, θ_m) . La valeur ρ estimée est la moyenne des deux pixels adjacents, $(\rho_n + \rho_{n+1})/2$, lorsque l'accumulation est maximale au pixel (ρ_n, θ_m) . Ceci est représenté par l'emplacement du vote.

Pour cette condition, si ρ_+ ou ρ_- encadrent ou sont comprises entre ρ_n et ρ_{n+1} , le vote est non-nul. Si ρ_+ et ρ_- sont supérieurs ou inférieurs aux deux pixels, le vote est nul. L'expression mathématique de la condition est donc :

$$\text{Condition b} = (\rho_n \leq \rho_+, \rho_- \leq \rho_{n+1}) \vee (\rho_n \leq \rho_-, \rho_+ \leq \rho_{n+1}). \quad (3.5)$$

Tel que vu à la figure 3.4, la première condition est plus contraignante que la deuxième. Pour la suite, c'est donc la deuxième condition, celle illustrée à droite, qui est utilisée.

3.2.2 Matrice des votes binaires

La façon la plus simple d'accumuler les votes est d'employer des votes binaires. Chaque pixel de la matrice des votes est calculé de la façon suivante :

$$V_{n,m} = \sum_{i=1}^k v(\mathbf{y}_i | \mathbf{h}_{n,m}), \quad (3.6)$$

où $\mathbf{h}_{n,m}$ est le couple de paramètres de la transformée de Hough balayé. La fonction de votes binaires correspond à :

$$v(\mathbf{y}_i | \mathbf{h}_{n,m}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\rho_n \leq \rho_+, \rho_- \leq \rho_{n+1}) \vee (\rho_n \leq \rho_-, \rho_+ \leq \rho_{n+1}) \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Donc, lorsque la condition d'intersection est respectée, le vote est unitaire. Sinon, il est nul. Cette fonction de vote se rapporte à la fonction de vote binaire habituellement utilisée pour la transformée de Hough qui est la suivante :

$$f(\mathbf{y}_i | \mathbf{h}_{n,m}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\rho_n \leq \rho \leq \rho_{n+1}) \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (3.8)$$

et à la densité de probabilité représentant le bruit uniforme sur la position angulaire :

$$f(\phi_i) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta\phi} & \text{si } |\phi_i - \phi_{i,\text{exact}}| \leq \frac{\Delta\phi}{2} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.9)$$

La combinaison des deux conditions où la fonction de vote et la densité de probabilité sont non nulles correspond à la région délimitée par les deux cosinus déphasés. Il s'agit donc de la condition d'intersection développée à la sous-section précédente.

L'algorithme 1 correspond au calcul des votes pour toutes les mesures et les paramètres de Hough balayés. Un exemple d'évaluation de la fonction de votes et de matrice des votes résultante pour une accumulation de trois mesures est illustré à la figure 3.5. Il est alors évident, pour cet exemple, qu'il existe une région, un ensemble de droites, pour laquelle les votes sont maximaux (en blanc). Plus le nombre de mesures est important lors de l'accumulation des votes, plus cette région se précise.

L'accumulation présentée ici considère le bruit sur la mesure angulaire avec une densité uniforme, mais ne considère pas le bruit sur la mesure radiale. Pour considérer ce dernier, il faut procéder comme indiqué à la prochaine sous-section.

3.2.3 Matrice des votes considérant le bruit gaussien

En s'inspirant de la PHT [27], il est possible d'inclure à la fois l'incertitude sur la mesure angulaire et le bruit gaussien sur la mesure de position radiale dans le calcul de la transformée de Hough. Cette adaptation se base sur les densités de probabilités du bruit de mesure

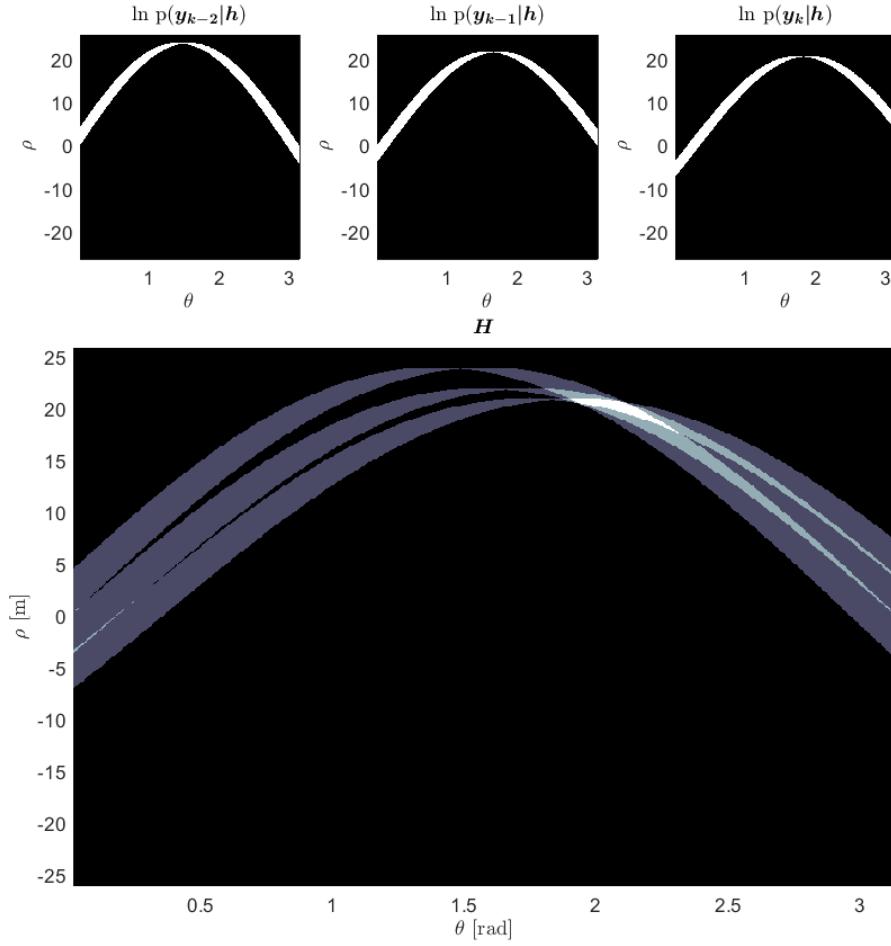


FIGURE 3.5 – Exemple de matrice des votes binaire. Haut : matrice binaire représentant chaque instant ; bas : accumulation. Le plus pâle correspond au maximum.

(gaussien et uniforme, qui sont indépendants) et sur la densité de probabilité conditionnelle qu'une mesure appartienne à une droite donnée (fonction de vote, aussi indépendante).

D'abord, le bruit sur la mesure radiale est un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance σ_r^2 , avec la densité de probabilité suivante :

$$f(\tilde{r}_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r} \exp\left(-\frac{(\tilde{r}_j - r)^2}{2\sigma_r^2}\right). \quad (3.10)$$

La fonction de vote binaire proposée à l'équation (3.7) correspond déjà à la fonction de vote en considérant le bruit uniforme sur la mesure angulaire. Le bruit sur la position radiale est incorporé en multipliant (car indépendant) la densité de probabilité du bruit avec la fonction

Algorithme 1 Calcul et accumulation des votes binaires.

Pour $\mathbf{h}_{n,m}$ où $m = [0, 1, \dots, N_\theta - 1]$, $n = [0, 1, \dots, N_\rho - 1]$ **faire**

$$\rho_n = -r_k + 2 \frac{r_k}{N_\rho} n$$

$$\rho_{n+1} = -r_k + 2 \frac{r_k}{N_\rho} (n + 1)$$

$$\theta_m = \frac{\pi}{N_\theta - 1} m$$

$$V_{n,m} = 0$$

Pour \mathbf{y}_i où $i = [1, 2, \dots, k]$ **faire**

Évaluer ρ_+ et ρ_- avec (3.3).

Si $\rho_n \leq \rho_+$, $\rho_- \leq \rho_{n+1}$ ou $\rho_n \leq \rho_-$, $\rho_+ \leq \rho_{n+1}$ **alors**

$$V_{n,m} = V_{n,m} + 1.$$

Fin Si

Fin Pour

Fin Pour

de vote (3.7). Finalement, la densité de probabilité obtenue est proportionnelle à :

$$f(\mathbf{y}_i, \tilde{r}_j | \mathbf{h}_{n,m}) \propto \begin{cases} \exp\left(-\frac{(\tilde{r}_j - r_i)^2}{2\sigma_r^2}\right) & \text{si } (\rho_n \leq \rho_+, \rho_- \leq \rho_{n+1}) \vee (\rho_n \leq \rho_-, \rho_+ \leq \rho_{n+1}) \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.11)$$

où \tilde{r}_j correspond à une valeur autour de la mesure r_i qui pourrait être la position exacte de la cible.

Pour calculer la transformée de Hough, cette densité de probabilité est évaluée pour N_{PDF} valeurs de \tilde{r}_j . Le logarithme du maximum de vraisemblance est approximé à :

$$V_{n,m} = \sum_{i=1}^k \log p(\mathbf{y}_i | \mathbf{h}_{n,m}), \quad (3.12)$$

où $\log p(\mathbf{y}_i | \mathbf{h}_{n,m})$ est la fonction de votes, soit une adaptation du logarithme de la densité de probabilité conjointe des bruits de mesure (3.11).

$$\log p(\mathbf{y}_i, \Delta r_j | \mathbf{h}_{n,m}) = \begin{cases} \frac{\Delta r_{\max}^2 - \Delta r_j^2}{\sigma_r^2} & \text{si } \rho_n \leq \rho_{\max}, \rho_{\min} \leq \rho_{n+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.13)$$

Le résultat de ce logarithme modifié est positif pour toute valeur de $\Delta r_j = (\tilde{r}_j - r_i)$.

L'algorithme 2 correspond au calcul des votes pour chaque mesure \mathbf{y}_i et chaque pixel de la matrices de votes. Le principe, illustré à la figure 3.6, est de construire la densité en réduisant l'écart entre r et \tilde{r} au fur et à mesure. La valeur de $\log p(\mathbf{y}_i | \mathbf{h}_{n,m})$ est remplacée par celle de (3.13) si l'on se trouve dans la région non nulle des votes.

De plus, un terme, $\frac{\Delta r_{\max}^2}{\sigma_r^2}$, est ajouté au logarithme pour que les votes soient positifs : la fonction de votes tend vers zéro lorsque l'erreur s'approche de l'écart maximal souhaité et tend vers $\frac{\Delta r_{\max}^2}{\sigma_r^2}$ lorsqu'on évalue très près de la mesure r_i . L'écart maximal proposé ici est de $3\sigma_r$ afin de considérer l'ensemble de la gaussienne du bruit de mesure radiale de variance σ_r^2 .

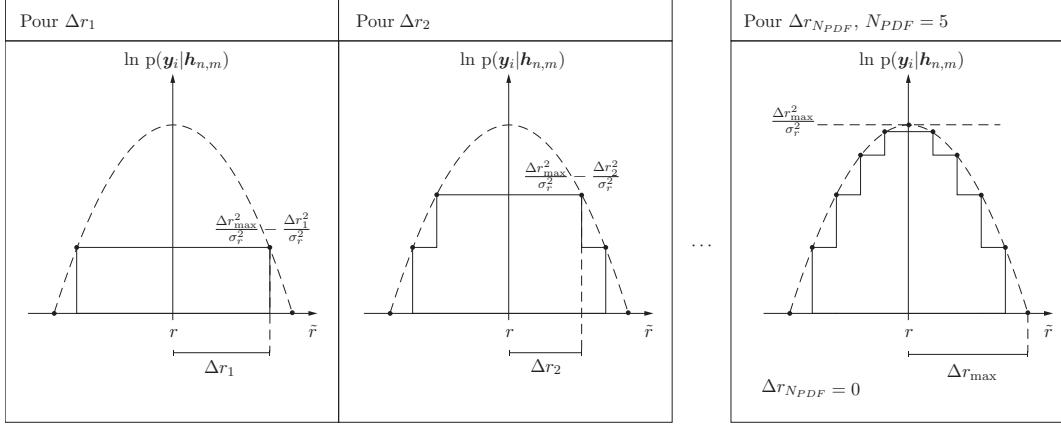


FIGURE 3.6 – Étapes itératives de construction de la PDF du bruit de mesure gaussien.

La condition pour évaluer un vote non nul décrite à la sous-section 3.2.1 est modifiée. On évalue ici une aire délimitée par quatre cosinus déphasés et d'amplitudes différentes. En effet, les valeurs ρ_{\max} et ρ_{\min} correspondent à ρ_+ et ρ_- en considérant une erreur radiale de $\delta\tilde{r}_j$. Il s'agit d'évaluer le maximum et le minimum entre les quatre valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 \rho_{++} &= (r_i + \Delta r_j) \cos(\theta_m - \phi_i + \Delta\phi/2) \\
 \rho_{+-} &= (r_i + \Delta r_j) \cos(\theta_m - \phi_i - \Delta\phi/2) \\
 \rho_{-+} &= (r_i - \Delta r_j) \cos(\theta_m - \phi_i + \Delta\phi/2) \\
 \rho_{--} &= (r_i - \Delta r_j) \cos(\theta_m - \phi_i - \Delta\phi/2).
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Un exemple de matrice des votes résultante est illustré à la figure 3.7. En comparant avec la figure 3.5, cette façon de calculer la transformée de Hough est plus permissive : la zone claire, de valeur élevée, est plus large. Un désavantage de cette méthode est que sa complexité algorithmique est plus élevée. En plus de calculer des votes non entiers, le nombre d'opérations est multiplié par un facteur N_{PDF} .

3.3 Minimisation des calculs

Pour le partenaire industriel, il est important d'avoir la possibilité d'implanter en temps réel la transformée de Hough dans leur système. Comme elle est présentée dans l'algorithme 2, cela est peu envisageable. Ainsi, dans cette section, des solutions pour diminuer la complexité algorithmique sont présentées. Ces solutions s'exposent en trois grandes catégories : simplifier le calcul des votes, diminuer la taille de la matrice des votes et diminuer la taille de l'historique.

3.3.1 Votes binaires

Tel que mentionné dans [27], un désavantage de la transformée de Hough probabiliste est sa complexité algorithmique plus élevée. Tout comme pour la transformée de Hough développée

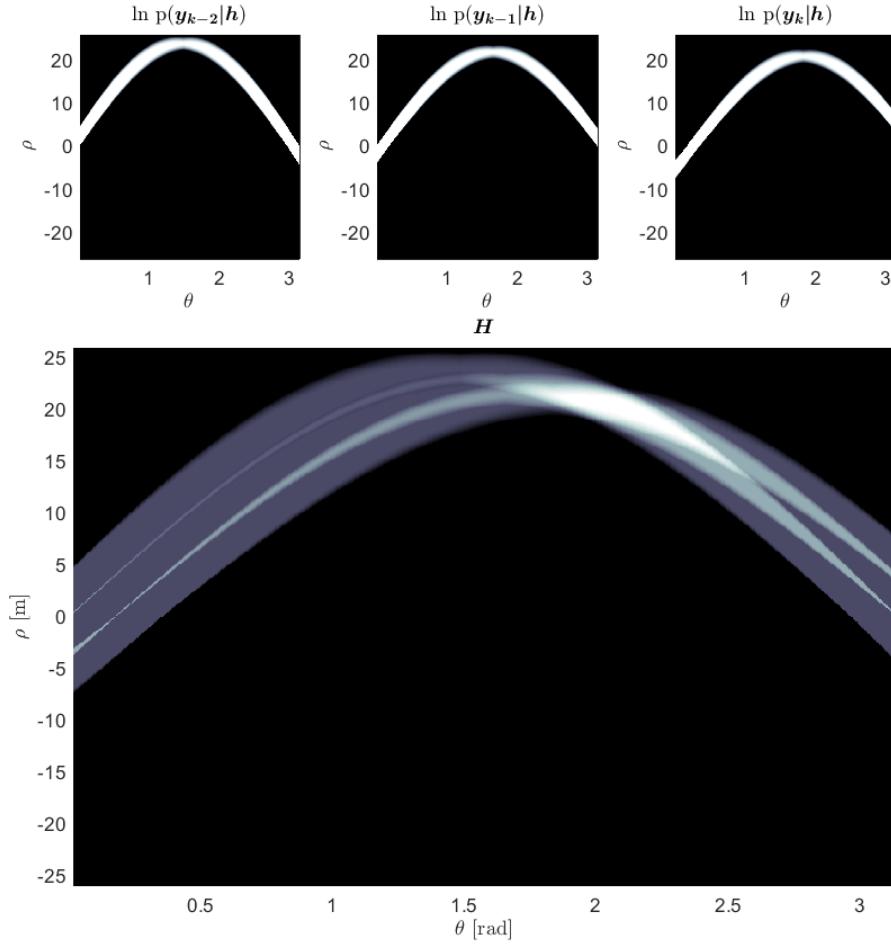


FIGURE 3.7 – Exemple de matrice des votes considérant le bruit gaussien sur les mesures. Haut : matrice représentant chaque instant ; bas : accumulation. Le plus pâle correspond au maximum.

dans ce travail, un facteur important est l'utilisation de votes qui ne sont pas des entiers. Dans cette section, l'accumulation des votes en considérant le bruit gaussien sur la mesure radiale est simplifiée de manière à incrémenter des votes unitaires.

La modification proposée est de choisir les valeurs de $\delta\tilde{r}$ pour générer des sauts de valeur fixe dans la fonction de votes (3.13). À la différence de la figure 3.6 où les votes ne sont pas entiers, la figure 3.8 montre l'accumulation de votes unitaires pour chaque valeur de $\delta\tilde{r}$. Sous forme d'équation :

$$\Delta r = \sqrt{\Delta r_{\max}^2 - \sigma_r^2 \log p}, \quad (3.15)$$

où $\log p$ est une valeur qu'il faut faire varier de manière constante entre 0 et $\frac{\Delta r_{\max}^2}{\sigma_r^2}$. Ces variations de l'erreur sur la position radiale peuvent être précalculées, car elles sont fixes.

Algorithme 2 Calcul des votes en considérant le bruit de mesure radial gaussien.

Pour $\mathbf{h}_{n,m}$ où $m = [0, 1, \dots, N_\theta - 1]$, $n = [0, 1, \dots, N_\rho - 1]$ faire

$$\rho_n = -r_k + 2 \frac{r_k}{N_\rho} n$$

$$\rho_{n+1} = -r_k + 2 \frac{r_k}{N_\rho} (n + 1)$$

$$\theta_m = \frac{\pi}{N_\theta - 1} m$$

$$V_{n,m} = 0$$

Pour \mathbf{y}_i où $i = [1, 2, \dots, k]$ faire

Pour $\delta\tilde{r}_j = [\Delta r_{\max}, \dots, \Delta r_{N_{PDF}-1}, 0]$ faire

Évaluer ρ_{++} , ρ_{+-} , ρ_{-+} et ρ_{--} avec (3.14).

Évaluer le maximum tel que : $\rho_{\max} = \max(\rho_{++}, \rho_{+-}, \rho_{-+}, \rho_{--})$

Évaluer le minimum tel que : $\rho_{\min} = \min(\rho_{++}, \rho_{+-}, \rho_{-+}, \rho_{--})$

Si $\rho_n \leq \rho_{\max}$, $\rho_{\min} \leq \rho_{n+1}$ **alors**

Évaluer la fonction de vote (3.13).

Sinon

Garder le vote tel qu'évalué auparavant.

Fin Si

Fin Pour

Fin Pour

Évaluer la matrice des votes (3.12).

Fin Pour

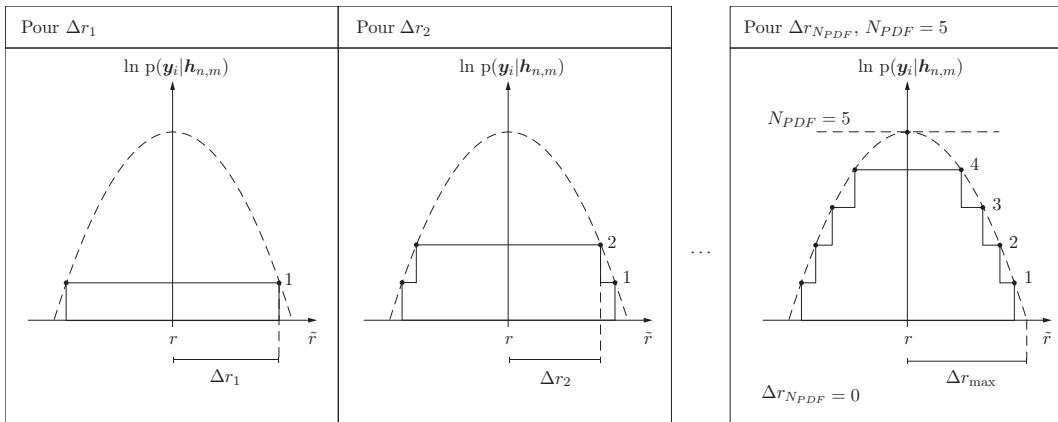


FIGURE 3.8 – Étapes itératives de construction de la PDF du bruit de mesure gaussien avec une incrémentation unitaire.

Par la suite, chaque pixel de la matrice des votes est calculé ainsi :

$$V_{n,m} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_{PDF}} \log p(\mathbf{y}_i, \Delta r_j | \mathbf{h}_{n,m}), \quad (3.16)$$

Plutôt que de remplacer les valeurs de la fonction de vote en diminuant $\delta\tilde{r}$, il s'agit d'une addition des votes pour chaque $\delta\tilde{r}$. Cette nouvelle fonction de vote est simplement :

$$\log p(\mathbf{y}_i, \Delta r_j | \mathbf{h}_{n,m}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_n \leq \rho_{\max}, \rho_{\min} \leq \rho_{n+1} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.17)$$

3.3.2 Taille de la matrice des votes

La complexité algorithmique de la transformée de Hough dépend linéairement de la taille (N_ρ rangées par N_θ colonnes) de sa matrice des votes : le même calcul des votes est fait pour chaque pixel de la matrice.

Jusqu'à maintenant, la matrice des votes est calculée pour toutes les valeurs possibles de ρ et θ : ρ est limité par la mesure radiale actuelle tel que $\rho \in [-r_k, r_k]$ et $\theta \in [0, \pi]$. Cela implique que, pour estimer la direction de la trajectoire avec une résolution au degré près, il faut avoir au moins 180 colonnes à la matrice des votes, ce qui représente beaucoup de calculs. Dans cette section, la méthode de la FHT [26] est modifiée pour s'appliquer au problème spécifique de l'estimation au fil du temps de la trajectoire. Le principe est de limiter la taille de la matrice des votes, mais de zoomer autour de la région maximale de la transformée qui se précise en ajoutant de nouvelles mesures.

Pour le paramètre ρ en particulier, la matrice des votes peut être limitée dans l'aire correspondant à l'espace de Hough pour la dernière mesure reçue. Cette aire est limitée par les quatre cosinus décrits en (3.14). Ils sont évalués pour $\mathbf{y}_k = (r_k, \phi_k)$ et une erreur $\delta\tilde{r}$ correspondant au Δr_{\max} choisi ($3\sigma_r$ dans le cas présent). Puisqu'il faut déjà calculer ces valeurs pour la fonction de votes, cela n'ajoute pas d'étapes à la transformée. Cependant, les paramètres ρ varient selon le paramètre θ . Il faut donc garder en mémoire une matrice \mathbf{P} de taille $[N_\rho \times N_\theta]$ contenant les valeurs de ρ , plutôt qu'un vecteur $[N_\rho \times 1]$. La grille des paramètres ρ à analyser est :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}(\theta_1) & \boldsymbol{\rho}(\theta_2) & \cdots & \boldsymbol{\rho}(\theta_m) & \cdots & \boldsymbol{\rho}(\theta_{N_\theta}) \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

où $\boldsymbol{\rho}(\theta_m)$ est un vecteur espacé linéairement entre les deux points extrêmes de l'ensemble $\{\rho_{++}, \rho_{-+}, \rho_{+-}, \rho_{--}\}$ calculé à partir de (3.14) pour chaque θ_m . Chaque élément de \mathbf{P} est donc nommé $\rho_{n,m}$.

Pour le paramètre θ , la matrice des votes peut être limitée au fur et à mesure que la trajectoire se définit. Lors des premiers instants du pistage d'une cible, il n'y a que peu d'information concernant sa trajectoire. De plus, étant donné l'incertitude sur la mesure angulaire, la transformée de Hough ne sera pas maximale pour un seul point, mais sur une région. Lorsque la cible se déplace, cette région maximale devient de plus en plus petite.

Ainsi, pour initialiser une piste, il n'est pas nécessaire d'estimer la trajectoire avec une grande précision. Lorsque la cible n'a pas encore changé d'élément lidar, le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ est donc initialisé entre 0 et π radians. Par la suite, le vecteur, toujours de taille $[1 \times N_\theta]$, va suivre la région maximale de la transformée de Hough. Par exemple, en supposant que la région maximale de la transformée de Hough précédente soit entre $\hat{\theta}_{\min,k-1}$ et $\hat{\theta}_{\max,k-1}$, l'élément m du vecteur $\boldsymbol{\theta}$

correspondant pour l'instant actuel est :

$$\theta_m = \hat{\theta}_{\min, k-1} - \frac{\Delta\theta}{2} + \left(\frac{\hat{\theta}_{\max, k-1} - \hat{\theta}_{\min, k-1} + \Delta\theta}{N_\theta - 1} \right) m, \quad (3.19)$$

où $\Delta\theta$ est la largeur minimale de la région observée par la matrice des votes. Ce paramètre permet de suivre un maximum qui se déplace dans l'espace de Hough au fil de temps (pour une trajectoire courbe par exemple). Il permet également d'éviter de rester centré sur un faux maximum, ou un maximum temporaire de la transformée. Il peut en effet y avoir plusieurs régions maximales qui ne sont pas adjacentes. Au fil du temps, la trajectoire se définit et la véritable zone maximale est mise en évidence.

En procédant de cette manière, la taille de la matrice de Hough peut être réduite tout en obtenant les mêmes résultats. Par exemple, une matrice de $N_\theta = 20$ colonnes permet d'atteindre une résolution de 1° , lorsque la largeur observée est $(\hat{\theta}_{\max, k-1} - \hat{\theta}_{\min, k-1} + \Delta\theta) = 20^\circ$. Le nombre de rangées peut aussi être réduit drastiquement puisque la largeur du balayage du paramètre ρ passe de $2r_k$ à un maximum de $2\Delta r_{\max}$ ($6\sigma_r$).

3.3.3 Taille de l'historique

Tout comme [14], cette section se base sur le fait qu'une partie importante de l'information concernant une mesure discrète se retrouve dans le changement de niveau de quantification. Appliqué à la transformée de Hough, cela permet d'éliminer la redondance des mesures du lidar et ainsi réduire le nombre de calculs de votes.

Soit une cible se déplace devant un lidar qui la détecte dans un seul élément. Pendant ce déplacement (instant i à instant k), toutes les mesures possèdent la même valeur angulaire ϕ , mais varient en distance r . Autrement dit, les mesures de distance radiales, soit l'ensemble $\{r_i, r_{i+1}, \dots, r_k\}$, sont comprises dans l'intervalle $[\min(r_i, r_k), \max(r_i, r_k)]$, tandis que les mesures angulaires, soit l'ensemble $\{\phi_i, \phi_{i+1}, \dots, \phi_k\}$, sont toutes égales à ϕ_k .

Tel qu'illustré à la figure 3.9, toutes les droites possibles passant par cet ensemble de mesures sont celles passant par les deux mesures extrêmes. L'ensemble des droites en teintes de gris passent par toutes les mesures, mais est délimité par les mesures extrêmes seulement.

La transformée de Hough peut être effectuée en utilisant uniquement les mesures limites pour chaque changement d'élément lidar ainsi que la mesure actuelle.

Une autre façon de diminuer davantage la taille de l'historique est de fixer une quantité maximale de changements d'éléments lidar dans l'historique. La taille de l'historique, soit le nombre de mesures utilisé dans la transformée, est alors déterminée par :

$$N_{mes} = 2N_{ch} + 2. \quad (3.20)$$

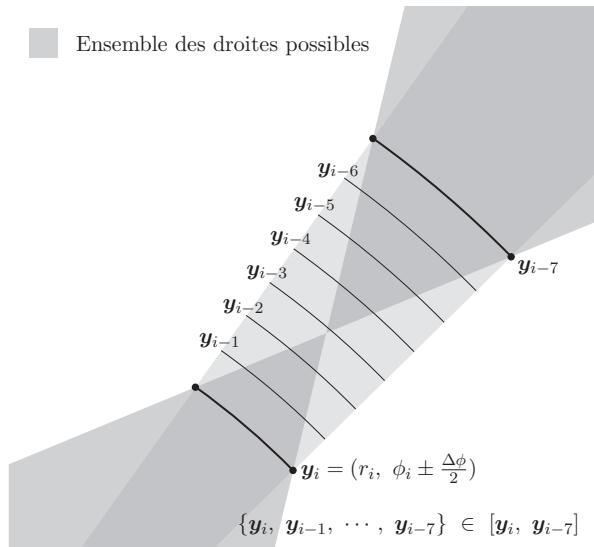


FIGURE 3.9 – Exemple de trajectoires rectilignes possibles pour des mesures dans un même élément lidar.

Il s'agit donc de deux mesures par changement d'élément lidar, jusqu'à une concurrence de N_{ch} changements, de la mesure actuelle et de la mesure la plus ancienne.

L'algorithme 3 détaille l'implémentation de la transformée de Hough selon les simplifications abordées dans cette section.

Également, le calcul de ρ avec l'incertitude angulaire et le bruit gaussien est séparé en deux parties afin d'éviter les calculs inutiles. D'abord, à chaque mesure dans l'historique, les deux cosinus comprenant la mesure angulaire et son incertitude sont calculés :

$$\begin{aligned}\cos_+ &= \cos(\theta - \phi + \Delta\phi/2) \\ \cos_- &= \cos(\theta - \phi - \Delta\phi/2).\end{aligned}\tag{3.21}$$

Ensuite, pour chaque point dans la PDF du bruit de mesure, les cosinus sont multipliés aux mesures radiales :

$$\begin{aligned}\rho_{++} &= (r + \Delta r/2) \cos_+ \\ \rho_{+-} &= (r + \Delta r/2) \cos_- \\ \rho_{-+} &= (r - \Delta r/2) \cos_+ \\ \rho_{--} &= (r - \Delta r/2) \cos_-.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Les différences entre les complexités des trois méthodes proposées (1, 2 et 3) sont résumées dans le tableau 3.1.

Tel que discuté précédemment, la quantité de calculs pour une seule mesure est plus importante ($\times N_{PDF}$) en considérant le bruit gaussien. À première vue, l'algorithme 1 semble donc avoir une complexité algorithmique inférieure. Cependant, il faut se rappeler, d'une part, que la

taille de la matrice dans l'algorithme 3 est inférieure en raison du suivi du maximum. D'autre part, le nombre de mesures dans l'historique est également inférieur : un historique de N_{mes} mesures pour l'algorithme 3 et un historique complet des mesures avec les k instants pour les algorithmes 1 et 2.

À titre de référence, supposons un lidar de 9 éléments avec un champ de vue total de 90° échantillonnant à une fréquence de 30 Hz et une cible traversant tous les éléments à une vitesse de 30 km/h et en parcourant une distance de 20 m dans le champ de vue du lidar :

$$N_{mes} = 2N_{ch} + 2 = 2 * 8 + 2 = 18 \text{ mesures} \quad (3.23)$$

$$k = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{vitesse cible}} \times \text{fréquence} = \frac{20 \text{ m}}{30 \text{ km/h}} \times 30 \text{ Hz} = 72 \text{ mesures} \quad (3.24)$$

De plus, la valeur maximale de k n'est pas constante ni connue puisqu'elle reflète le temps passé par la cible dans le champ de vue du lidar, alors que le nombre de changements d'éléments N_{ch} est fixé à l'avance et dépend de la configuration géométrique du lidar.

Pour les algorithmes 2 et 3, le nombre de comparaisons est calculé de la façon suivante :

- Pour trouver le maximum et le minimum entre les quatre valeurs de ρ évaluées, quatre comparaisons sont nécessaires : $(\rho_{++} < \rho_{+-})$, $(\rho_{--} < \rho_{-+})$, comparaison des deux minimums et comparaison des deux maximums ;
- Pour comparer avec les paramètres balayés, deux comparaisons supplémentaires sont nécessaires.

Il faut donc 6 comparaisons par pixel de la matrice des votes et par vote.

TABLE 3.1 – Comparaison de la complexité algorithmique des trois transformées de Hough proposées

| | Algorithme 1 | Algorithme 2 | Algorithme 3 |
|---|------------------|--|---------------------------------------|
| Formation de la grille | | | |
| θ | Précalculé | Précalculé | N_θ |
| ρ | N_ρ | N_ρ | $N_\rho \times N_\theta$ |
| Calcul de la transformée ($\times N_\theta \times N_\rho$) | | | |
| Cosinus | $2 \times k$ | $4 \times k \times N_{PDF}$ | $2 \times N_{mes}$ |
| Multiplication | $2 \times k$ | $4 \times k \times N_{PDF}$ | $4 \times N_{mes} \times N_{PDF}$ |
| Discrétisation de la transformée ($\times N_\theta \times N_\rho$) | | | |
| Comparaison | $4 \times k$ | $6 \times k \times N_{PDF}$ | $6 \times N_{mes} \times N_{PDF}$ |
| $H_{n,m}$ | k additions | mettre au carré soustraction division (virgule flottante) | $N_{mes} \times N_{PDF}$ additions |

Algorithme 3 Calcul des votes en considérant le bruit de mesure radial gaussien après simplification.

Pour θ_m où $m = [0, 1, \dots, N_\theta - 1]$ **faire**

 Évaluer θ_m avec (3.19).

 Évaluer ρ_{++} , ρ_{+-} , ρ_{-+} et ρ_{--} de la mesure \mathbf{y}_k pour θ_m avec (3.14).

 Évaluer le maximum tel que : $\rho_{\max} = \max(\rho_{++}, \rho_{+-}, \rho_{-+}, \rho_{--})$.

 Évaluer le minimum tel que : $\rho_{\min} = \min(\rho_{++}, \rho_{+-}, \rho_{-+}, \rho_{--})$.

Pour $\rho_{n,m}$ où $n = [0, 1, \dots, N_\rho - 1]$ **faire**

$$\rho_{n,m} = \rho_{\min} + \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{N_\rho} n$$

$$\rho_{n+1,m} = \rho_{\min} + \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{N_\rho} (n + 1)$$

$$V_{n,m} = 0$$

Pour chaque mesure extrémum \mathbf{y}_i où $i = [1, 2, \dots, N_{mes}]$ **faire**

 Évaluer \cos_+ et \cos_- de la mesure \mathbf{y}_i avec (3.21).

Pour $\Delta r_j = \sigma_r \sqrt{-\ln(j/N_{PDF})}$ où $j = [1, 2, \dots, N_{PDF}]$ **faire**

 Évaluer ρ_{++} , ρ_{+-} , ρ_{-+} et ρ_{--} avec (3.22).

 Évaluer le maximum tel que : $\rho_{\max} = \max(\rho_{++}, \rho_{+-}, \rho_{-+}, \rho_{--})$.

 Évaluer le minimum tel que : $\rho_{\min} = \min(\rho_{++}, \rho_{+-}, \rho_{-+}, \rho_{--})$.

Si $\rho_n \leq \rho_{\max}$, $\rho_{\min} \leq \rho_{n+1}$ **alors**

$$V_{n,m} = V_{n,m} + 1$$

Fin Si

Fin Pour

Fin Pour

Fin Pour

Fin Pour

3.4 Résultats préliminaires

Les résultats présentés sont divisés en deux catégories : trajectoires rectilignes et trajectoires courbes. Pour ces deux catégories, des simulations sur Matlab de l'algorithme 3 sont faites afin de représenter des cibles de différentes tailles. Les résultats obtenus sont utilisés pour déterminer les paramètres concernant la transformée de Hough pour la suite des travaux. Sauf si indiqué, les simulations sont exécutées pour un lidar de $N = 9$ éléments et un champ de vue de $\Delta\phi = 10^\circ$ pour chaque élément.

3.4.1 Temps d'exécution

Dans cette sous-section, le temps d'exécution de la transformée de Hough de l'algorithme 3 est analysé selon les paramètres N_{PDF} et la taille de l'historique (fixée à N_{mes} mesures ou avec un historique complet de k mesures). Les temps d'exécution présentés à la figure 3.10 sont calculés pour une matrice des votes de taille $[20 \times 20]$. Il s'agit du temps d'exécution moyen, pour chaque nouvelle mesure. Le fait de limiter l'historique permet de fixer un temps de calcul de la transformée qui ne dépend pas du temps passé par la cible dans un lidar.

Le calcul de la transformée pourrait donc être implanté en temps réel dans un système em-

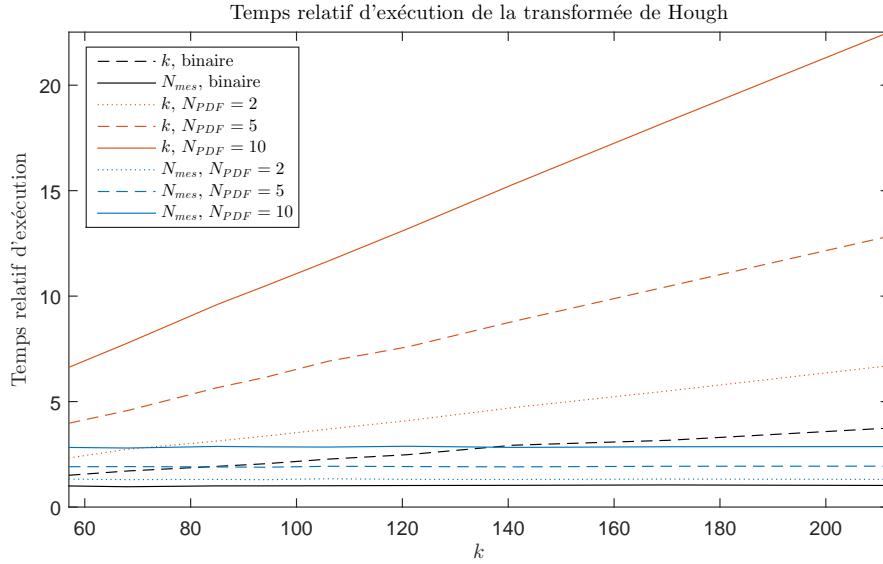


FIGURE 3.10 – Temps d'exécution moyen relatif à chaque évaluation de la transformée de Hough en fonction du nombre de mesures contenues dans une piste et pour différents paramètres de calcul (taille de l'historique et nombre de points sur la PDF). Le temps de référence est celui du calcul de la transformée de Hough binaire avec historique limité (N_{mes} , binaire) pour $k = 57$ mesures.

barqué sur le lidar. Si le calcul, après implémentation, s'avère trop lent pour la fréquence d'acquisition des trames du lidar, il est aussi possible de calculer la transformée à une fréquence inférieure. Le paramètre P , soit l'intervalle d'exécution, représente le facteur entre la période d'exécution de la transformée par rapport à celle d'acquisition :

$$P = \frac{\text{fréquence des trames}}{\text{fréquence de calcul de la transformée}}. \quad (3.25)$$

Comme la variation de la trajectoire est lente pour la plupart des trajectoires, la transformée de Hough varie aussi lentement. Calculer la transformée de Hough avec un facteur P de 2 ou plus, double le temps de calcul alloué sans avoir d'effet sur la performance de la transformée.

3.4.2 Trajectoire rectiligne

Les trajectoires rectilignes testées sont des trajectoires traversant le champ de vue de tous les éléments du lidar. Le point d'entrée et le point de sortie de la cible dans le champ de vision se situent à des distances variant entre 10 et 50 m du lidar. Dans chacun des graphiques présentés, les résultats sont moyennés pour 81 trajectoires (9 points d'entrées et 9 points de sortie différents). Les graphiques présentés dans cette sous-section représentent l'erreur moyenne quadratique sur les paramètres de trajectoire estimés en fonction du nombre d'éléments lidar traversés.

Ainsi, l'erreur sur l'estimation est très importante dans le premier élément (0 à 1 élément traversé), car il n'y a aucune information concernant sa trajectoire autre que son déplacement radial. L'erreur sur l'estimation est due d'une part à l'incertitude elle-même sur la trajectoire possible (la région maximale dans la matrice des votes est large). D'autre part, plusieurs régions distinctes dans la matrice des votes peuvent être maximales. Les paramètres estimés, soit l'emplacement moyen de ces régions, sont donc plutôt entre les régions maximales, ce qui augmente d'autant plus l'erreur. Étant donné la forme qui est non convexe de la zone dans l'espace de Hough délimitée par la mesure actuelle, cet emplacement moyen peut se retrouver à l'extérieur de cette zone et ainsi ne pas respecter la mesure actuelle.

Cependant, cet effet n'est que temporaire. Plus la cible traverse des éléments, plus l'estimation par la transformée de Hough est précise. Dans la plupart des graphiques présentés, l'estimation se définit rapidement après 2 éléments traversés. Des graphiques présentant cette période en particulier sont donc fournis.

Objet ponctuel

Dans cette sous-section, les simulations effectuées concernent exclusivement une cible ponctuelle (de dimension nulle). Comme le lidar ne possède pas de recouvrement entre ses éléments, il ne peut y avoir qu'une seule détection à chaque instant. Un bruit gaussien d'écart-type $\sigma_r = 0.1$ m (ou tel que précisé) est ajouté sur la distance radiale mesurée. Les paramètres de transformée ici analysés sont le nombre de points sur la PDF (N_{PDF}), le suivi du maximum de la transformée au fil du temps et la taille de la matrice des votes [$N_\rho \times N_\theta$].

Le nombre de points minimal sur la PDF du bruit gaussien de mesure dépend de la variance du bruit. En fait, s'il n'y avait aucun bruit, des votes binaires dans la transformée de Hough, telle que proposée dans l'algorithme 1, seraient suffisants.

La figure 3.11 illustre l'effet du nombre de points sur la PDF du bruit de mesure (coordonnée radiale, r) et de la variance de ce bruit sur l'estimation des paramètres de la trajectoire. Il est possible de remarquer que, pour un bruit faible, le nombre de points sur la PDF importe peu. Plus le bruit est important, plus l'écart entre les courbes d'erreur à 2, 5 et 10 points s'agrandit. Pour un bruit dont l'écart-type est de 0.5 m, la différence entre les courbes de 5 et 10 points est négligeable pour le paramètre ρ et de moins de 1° pour le paramètre θ . Comme l'écart-type du bruit de mesure de distance radiale du lidar se situe autour de 0.1 m [1], mais varie selon plusieurs paramètres (distance de la cible, proximité avec une autre détection, système lidar, algorithme de détection utilisé, etc.), le nombre de points dans la PDF est fixé à 5.

La taille minimale de la matrice des votes choisie est un compromis entre la complexité algorithmique et la qualité de l'estimation des paramètres de trajectoires. Ainsi, aux figures 3.12 et 3.13, l'erreur quadratique moyenne sur les paramètres estimés est calculée en variant le nombre de rangées N_ρ , et par la suite, le nombre de colonnes N_θ .

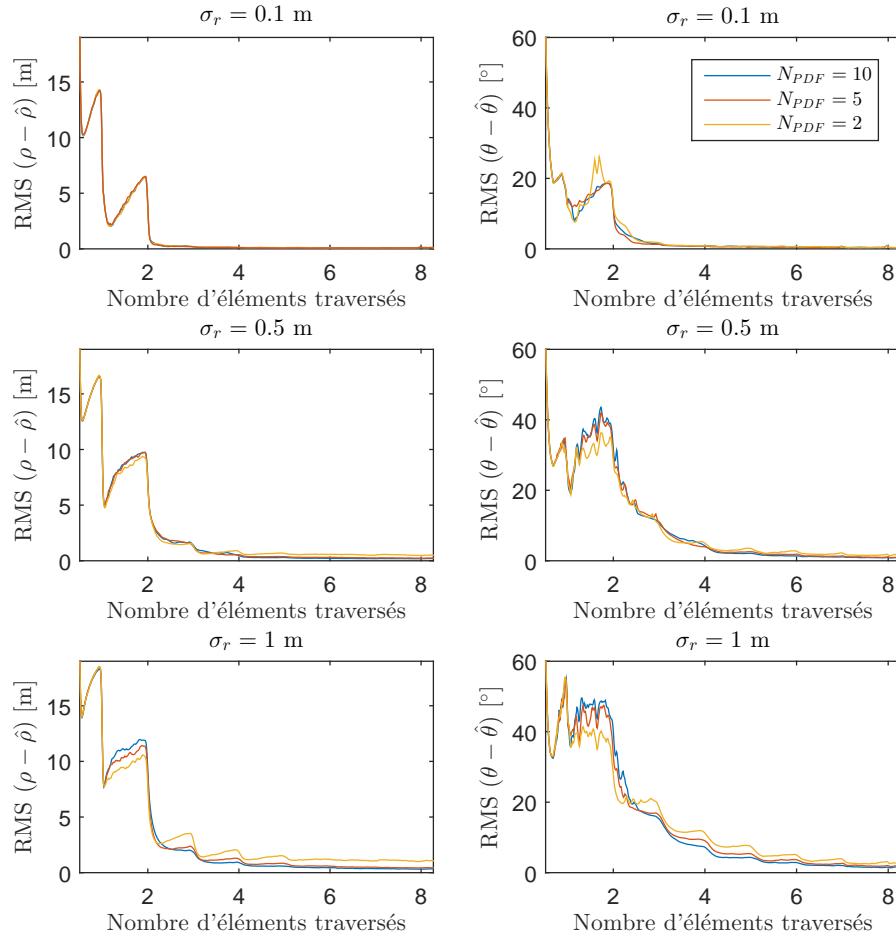


FIGURE 3.11 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la trajectoire pour différentes variances σ_r^2 de bruit gaussien et pour différentes valeurs de N_{PDF} .

D'abord, l'effet de la variation du nombre de rangées est observé à la figure 3.12. Pour un nombre de rangées N_ρ inférieur à 10, l'erreur des deux paramètres de trajectoire augmente lorsque la cible traverse un élément et diminue drastiquement lorsqu'elle change d'élément. Ce comportement montre que la résolution de la matrice des votes n'est pas suffisante pour le suivi du maximum de la transformée : il diverge légèrement lors du déplacement de la cible dans un élément. Pour un nombre de rangées N_ρ de 10 et plus, ce comportement disparaît. L'effet du nombre de pas en ρ sur l'erreur en θ peut être expliquée par le fait que les valeurs balayées dans la matrice des votes en ρ ne sont pas uniformes : elles varient en fonction de θ .

Ensuite, l'effet du nombre de colonnes N_θ est observé à la figure 3.13. Cette fois-ci, la différence n'est visible que pour l'estimation du paramètre θ , les valeurs balayées en θ étant uniformément distribuées. La différence entre les courbes pour 15 et 20 colonnes est négligeable, alors que

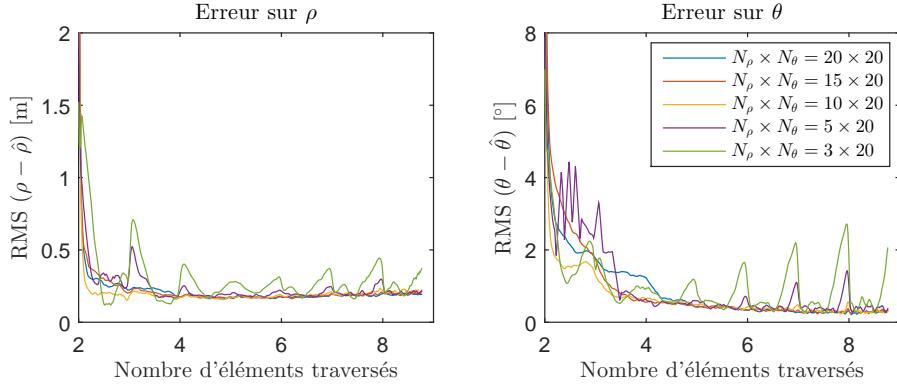


FIGURE 3.12 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la trajectoire en variant le nombre de rangées N_ρ de la matrice des votes.

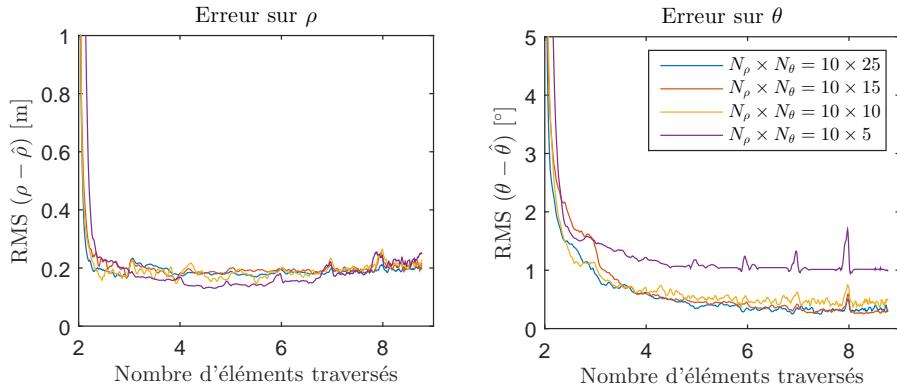


FIGURE 3.13 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la trajectoire en variant le nombre de colonnes N_θ de la matrice des votes.

la courbe d'erreur se déplace vers le haut pour 10 colonnes et moins. En effet, alors que l'estimation atteint une erreur quadratique moyenne de 0.3° pour 15 colonnes et plus, elle atteint une erreur de 0.4° pour 10 colonnes et 1° pour 5 colonnes. C'est donc une matrice des votes de taille $[10 \times 15]$ qui est choisie pour la suite.

Une autre modification apportée à la transformée de Hough dans ce travail est le suivi au fil du temps de la zone maximale de la transformée. Jumelé avec la limitation du paramètre ρ par la mesure actuelle, c'est cela qui permet de diminuer la taille de la matrice des votes, et par conséquent, la complexité algorithmique de la transformée. À la figure 3.14, l'erreur sur l'estimation des paramètres de trajectoire est illustrée avec et sans suivi et pour différentes tailles de matrices de votes. On peut alors remarquer que le suivi, avec une matrice $[10 \times 15]$, est similaire, même meilleur, que la transformée sans suivi avec une matrice significativement plus grande ($[100 \times 100]$).

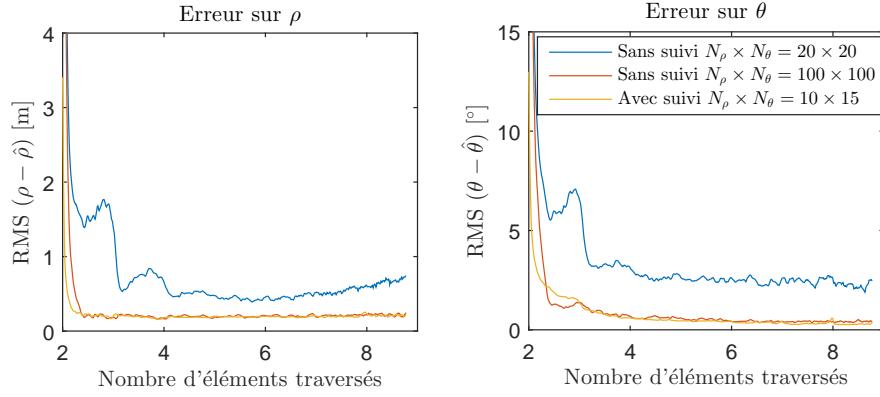


FIGURE 3.14 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la trajectoire avec et sans suivi du maximum.

Objet rectangulaire

Dans cette sous-section, les simulations considèrent un objet non ponctuel rectangulaire de largeur l et de longueur L . Le déplacement s'effectue de sorte que l'axe de longueur de l'objet est toujours parallèle à sa direction, tel qu'illustré à la figure 3.15.

Pour calculer l'emplacement de la détection telle que vue par le lidar, les étapes suivantes sont effectuées :

- Les points extrema (en coordonnées angulaires, ϕ) de la cible sont sélectionnés.
- Les segments les plus rapprochés (en coordonnées radiales, r) au lidar reliant ces points sont gardés.
- Une interpolation linéaire est effectuée sur les segments sélectionnés pour obtenir 50 points uniformément distribués en ϕ .
- Pour chaque élément lidar, la moyenne des r des points contenus dans l'élément est calculée pour déterminer la distance mesurée par le lidar. Si aucun point n'est contenu dans un élément, il n'y a pas de détection dans cet élément.

Un bruit gaussien d'écart-type $\sigma_r = 0.1$ m est ajouté sur la distance radiale par la suite.

La figure 3.15 illustre un exemple de détections obtenues par cette méthode pour des cibles de différentes tailles. Lorsqu'il y a plusieurs détections simultanées, la mesure qui est fournie dans la transformée de Hough est la mesure moyenne. L'algorithme 3 est ensuite appliqué de la même manière qu'auparavant. Les deux tailles de cibles testées dans cette sous-section ont été sélectionnées pour correspondre approximativement à la taille d'une voiture (largeur de 2.5 m et longueur de 5 m) et à la taille d'un piéton (largeur de 0.5 m et longueur de 0.25 m) vu de haut.

Le paramètre de la transformée de Hough observé dans cette sous-section est la taille de l'historique en terme de quantité de changements d'éléments N_{ch} . Une comparaison des performances

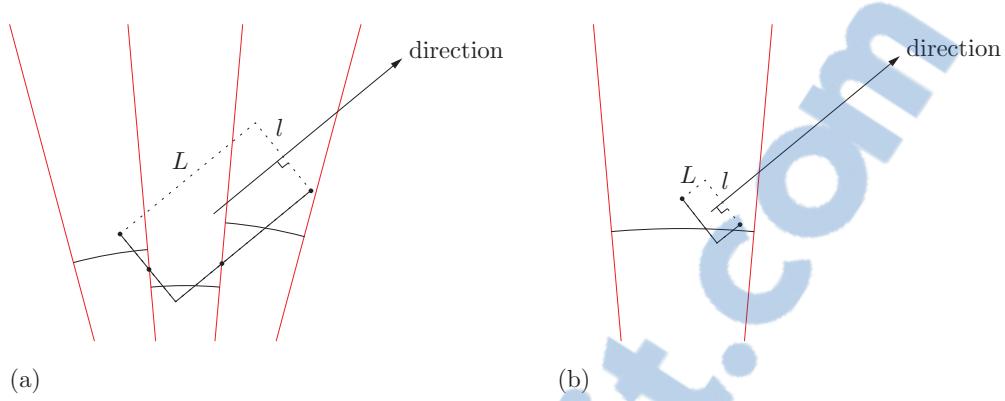


FIGURE 3.15 – Exemple simulation de détections vues par le lidar pour une cible rectangulaire.

de l’algorithme 1 avec celui finalement utilisé (algorithme 3) est également faite. Des résultats sont illustrés pour différentes configurations de lidars : en variant le nombre d’éléments N et le champ de vue d’un élément $\Delta\phi$. Les paramètres de la transformée de Hough utilisés pour ces simulations sont ceux indiqués au tableau 3.2, à moins d’indications contraires.

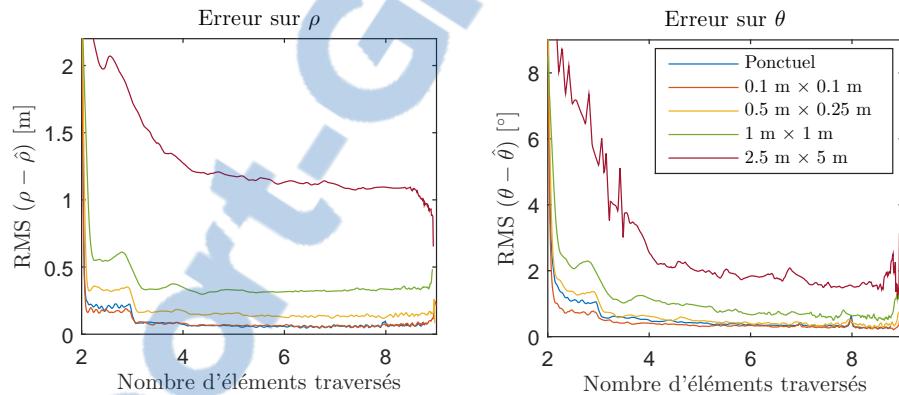


FIGURE 3.16 – Erreur quadratique moyenne sur l’estimation des paramètres de la trajectoire pour des cibles rectangulaires de différentes tailles (largeur $l \times$ longueur L).

Pour une cible de grande dimension, les détections lidar, en réalité comme en simulation, ne correspondent pas au centre de masse de l’objet. La position moyenne des détections est plus rapprochée du lidar que le centre de masse. On doit donc s’attendre à ce que l’erreur, en particulier sur le paramètre ρ de la transformée de Hough, soit plus importante lorsque la taille de la cible augmente. Le même phénomène s’observe lorsque la transformée de Hough est appliquée aux radars [23].

Cette augmentation de l’erreur est observée à la figure 3.16, où différentes tailles d’objet sont simulées. L’erreur angulaire atteint un régime permanent après davantage de changements

d'éléments et demeure plus élevée pour une cible de la taille d'une voiture que pour une petite cible. Cependant, dans les deux cas, la précision en ρ atteinte est inférieure à la demie-largeur ($l/2$) de la cible.

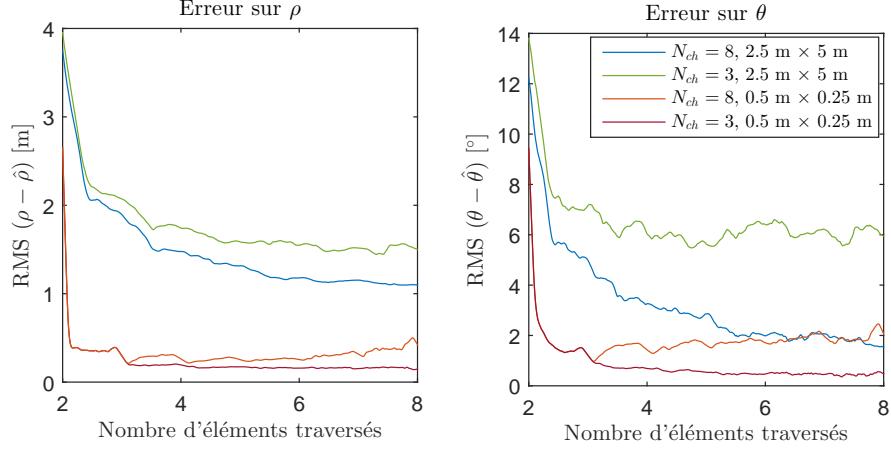


FIGURE 3.17 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de la trajectoire pour différentes tailles d'historique (N_{ch}) et deux tailles de cibles rectangulaires (piéton, voiture).

Le dernier paramètre de la transformée de Hough à analyser est la profondeur de l'historique N_{ch} . Dans la figure 3.17, il est possible de remarquer pour la courbe $N_{ch} = 3$ qu'une fois l'historique rempli, l'erreur sur l'estimation ne diminue plus. En fait, pour une cible de petite taille, l'erreur semble même augmenter. Dans ce cas, l'historique ne contient pas assez de mesures, ce qui fait que la zone maximale de la transformée est soit trop grande ou mal définie. Une façon de comprendre ce comportement est que l'intégration de la densité de chaque mesure dans la transformée réduit l'importance du bruit et de l'incertitude dans la matrice des votes. La profondeur de l'historique de la transformée de Hough choisie est donc de 8 changements d'éléments.

La figure 3.18 compare l'erreur sur l'estimation des algorithmes 1 et 3. Il est alors évident que la transformée de Hough exécutée par l'algorithme 3 est aussi performante, sinon plus performante lors des premiers changements d'éléments, que l'algorithme 1 qui nécessite plus d'opérations. Le gain entre les deux courbes est d'ailleurs plus important pour une cible de grande taille.

Finalement, des simulations sont faites pour différentes configurations lidar : un lidar avec large champ de vue $N = 9$ éléments de $\Delta\phi = 10^\circ$, un lidar avec une meilleure précision angulaire sur les mesures ($N = 16$ éléments de $\Delta\phi = 2.8^\circ$) et un lidar intermédiaire ($N = 8$ éléments de $\Delta\phi = 5^\circ$). Les résultats de ces simulations sont présentés à la figure 3.19. On peut alors observer que les mêmes erreurs quadratiques moyennes sont atteintes, peu importe la

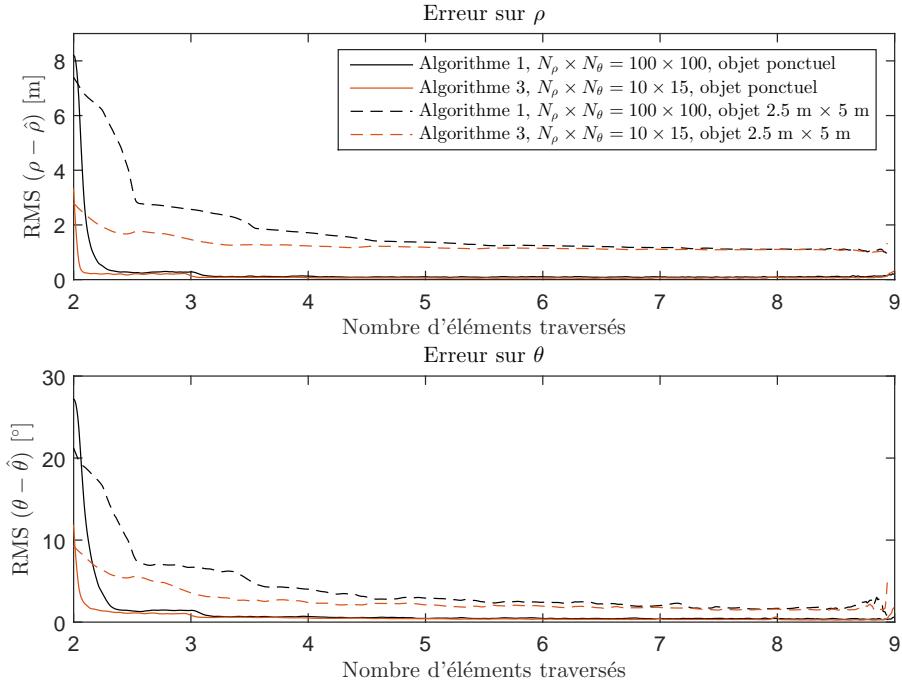


FIGURE 3.18 – Comparaison de l'erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de la trajectoire pour les algorithmes 1 et 3 et pour deux tailles de cibles rectangulaires (piéton, voiture).

configuration du lidar. Le régime transitoire est cependant plus long lorsque les éléments du lidar sont plus étroits, ce qui est attendu puisque la distance parcourue par la cible pour le même nombre d'éléments traversés est plus petite.

TABLE 3.2 – Paramètres de la transformée de Hough choisis.

| | | |
|--------------------------------|--------------------------|------------------|
| Taille de la matrice des votes | $N_\rho \times N_\theta$ | $[10 \times 15]$ |
| Largeur du suivi angulaire | $\Delta\theta$ | 20° |
| Taille de l'historique | N_{ch} | 8 |
| Nombre de points sur la PDF | N_{PDF} | 5 |
| Intervalle d'exécution | P | 1 |

3.4.3 Trajectoire courbe

Dans cette sous-section, l'effet de la courbure d'une trajectoire sur la transformée de Hough est évalué. Deux types de trajectoires sont testés, soit une cible se déplaçant vers le lidar en tournant à gauche ou en tournant à droite. Les trajectoires et les paramètres sont décrits à la figure 3.20. Un bruit gaussien d'écart-type $\sigma_r = 0.1$ m est ajouté sur la distance radiale mesurée.

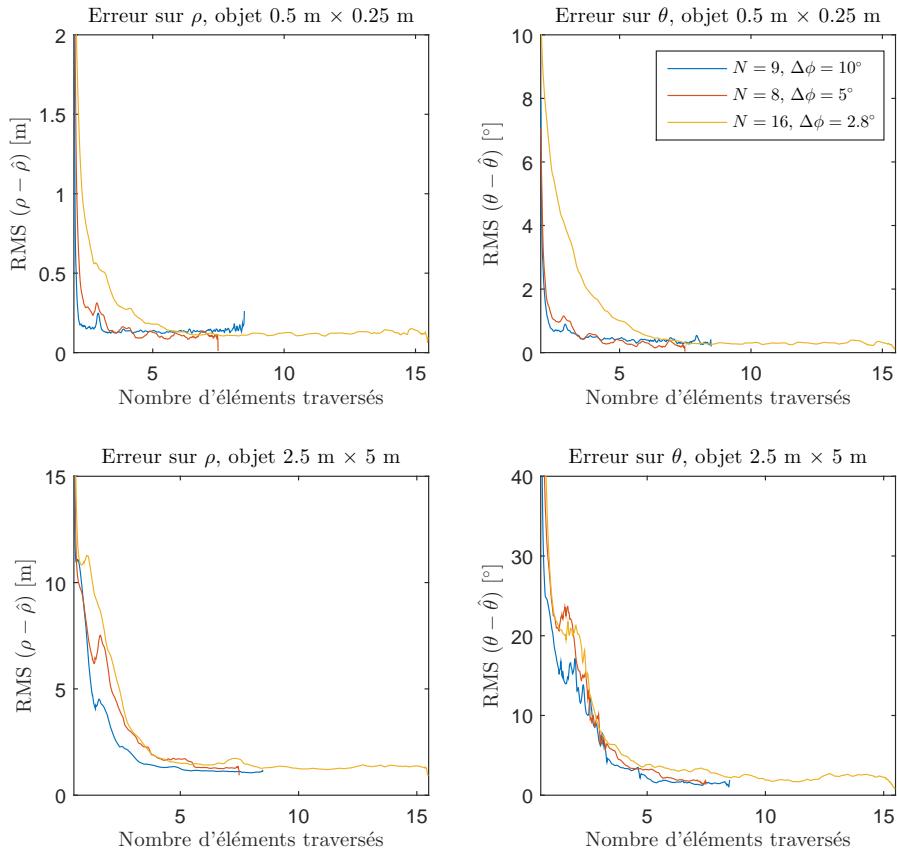


FIGURE 3.19 – Comparaison de l'erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de la trajectoire pour trois configurations lidars à N éléments et un champ de vue de $\Delta\phi$ par élément.

Afin de créer des trajectoires de courbures variées, la vitesse du lidar varie entre 0 et 100 km/h. Plus la vitesse est grande, plus le rayon de courbure de la trajectoire est grand et le virage effectué près du lidar. C'est ce qui est illustré à la figure 3.21. Pour une vitesse initiale nulle, la trace de la trajectoire forme un angle droit : le rayon de courbure est très petit et le virage est effectué au plus loin du lidar. C'est cette situation qui est problématique pour la transformée de Hough, car la droite tangente à la trajectoire change très rapidement.

Les résultats obtenus sont présentés sous la forme d'une matrice de l'erreur quadratique moyenne où les rangées représentent les différentes trajectoires et les colonnes représentent le nombre de fois où une mesure change d'élément lidar. Un changement d'élément lidar correspond ici au moment où la valeur angulaire moyenne des détections change (donc lorsque la cible apparaît ou disparaît d'un élément). Le format de la matrice des résultats est expliqué à la figure 3.22 et les exemples de trajectoires associées à certaines rangées sont illustrés.

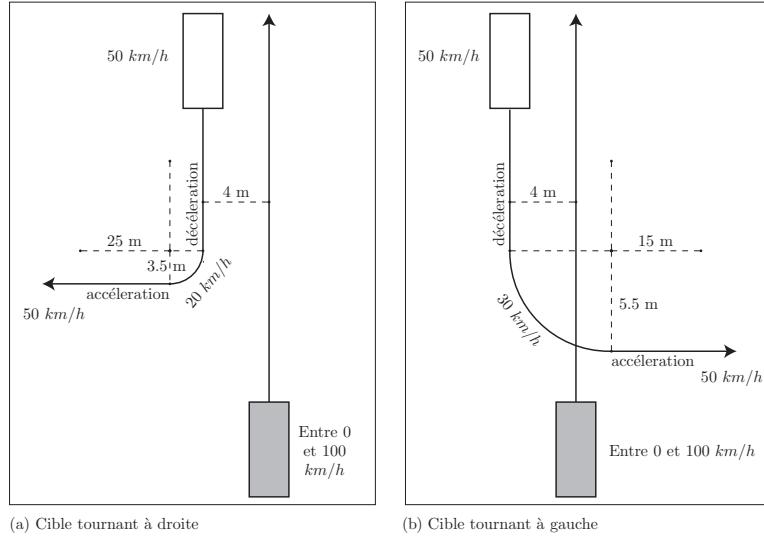


FIGURE 3.20 – Trajectoires simulées pour des trajectoires courbes.

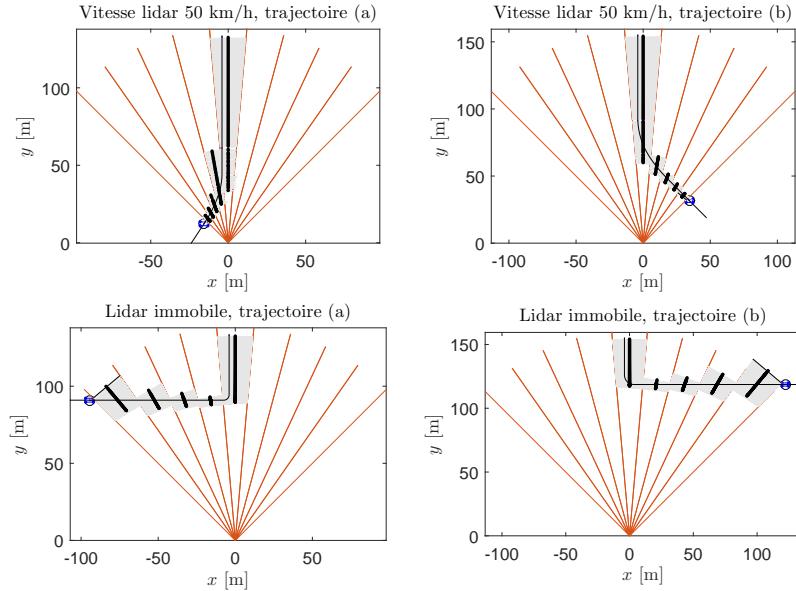


FIGURE 3.21 – Exemples de traces des trajectoires courbes simulées vues par un lidar en mouvement à 50 km/h (haut) ou immobile (bas).

Ces matrices de résultats sont construites pour une cible rectangulaire de la taille d'une voiture ($2.5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$). Les simulations sont exécutées dans Matlab avec la même méthode que celle décrite à la sous-section 3.4.2. Les paramètres de la transformée de Hough sont inscrits dans le tableau 3.2.

Les figures 3.23 et 3.24 illustrent l'erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la droite

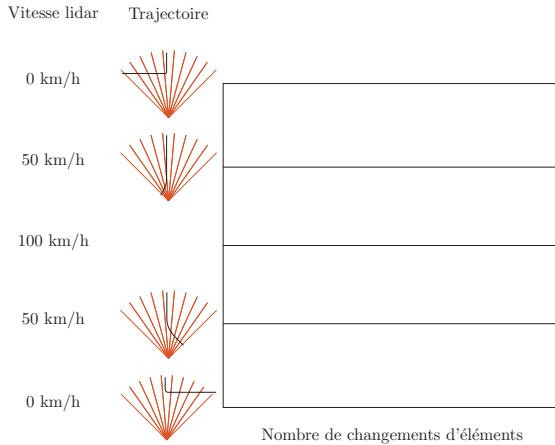


FIGURE 3.22 – Structure de la matrice des résultats. Les rangées correspondent aux différentes trajectoires et vitesses du lidar et les colonnes correspondent au nombre de changements d’éléments lors de l’évaluation de la transformée de Hough.

tangente à la trajectoire pour une cible de la taille d’une voiture.

Tel que vu à la figure 3.23, l’erreur est importante (graphiques du haut) lorsque les paramètres exacts de la tangente à la trajectoire présentent une grande variation instantanée (graphique du bas). Par la suite, dans la figure 3.24, l’erreur pour les trajectoires extrêmes (lidar immobile) diminue, car la trajectoire est rectiligne après le virage. On peut voir que l’erreur est très faible également pour les trajectoires centrales, car la cible effectue une trajectoire presque rectiligne en passant à gauche du lidar qui se déplace rapidement (autour de 100 km/h). Pour les autres trajectoires de part et d’autre du centre, l’erreur à la fin est plus élevée, car le virage est moins prononcé et l’effet des mesures avant le virage est encore pris en compte dans la transformée de Hough.

Pour les trajectoires correspondant à celle de la figure 3.21 (a), l’erreur est plus élevée, car le virage possède un rayon de courbure plus petit. La variation instantanée de la tangente à la trajectoire y est donc plus importante. L’erreur est plus importante que celle remarquée pour une trajectoire rectiligne, particulièrement pour l’erreur sur le paramètre θ décrivant la direction de la trajectoire. Cependant, il faut se rappeler que l’incertitude sur la mesure angulaire empêche de bien distinguer une trajectoire qui est rectiligne d’une trajectoire qui est courbe. Un exemple typique de l’évolution du résultat de la transformée au fil du temps est illustré à la figure 3.25. L’estimation de la droite s’ajuste avec l’ajout de nouvelles mesures, mais sa variation est très conservatrice. La transformée estime la droite qui passe par le plus de mesures possibles en priorisant les mesures récentes. Il s’agit donc, même si l’erreur est importante, d’une estimation qui pourrait tout à fait être exacte étant donné l’incertitude sur la position angulaire de chaque mesure. L’erreur obtenue est donc plutôt une limite du

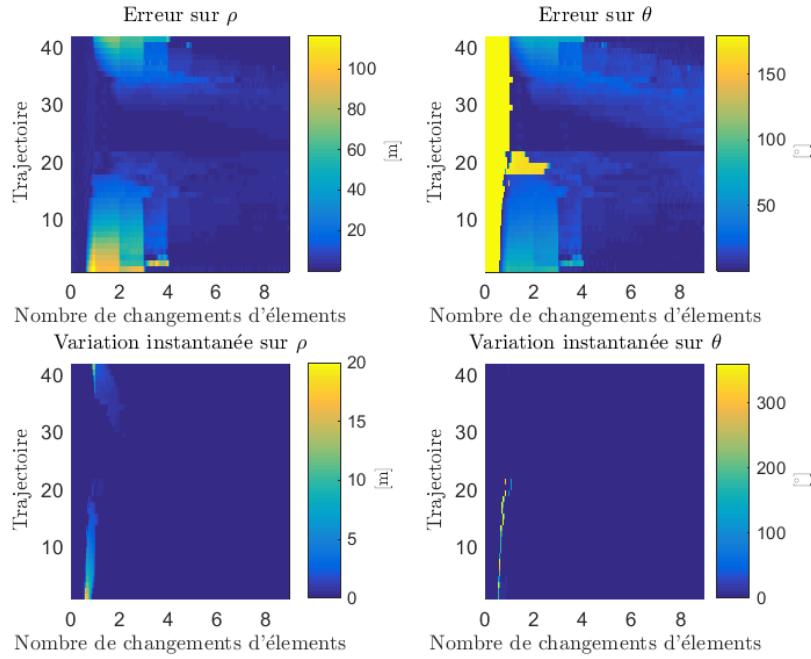


FIGURE 3.23 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de la tangente à la trajectoire pour les trajectoires courbes simulées (haut). Variation instantanée des paramètres de la tangente à la trajectoire (bas). Cible de format voiture.

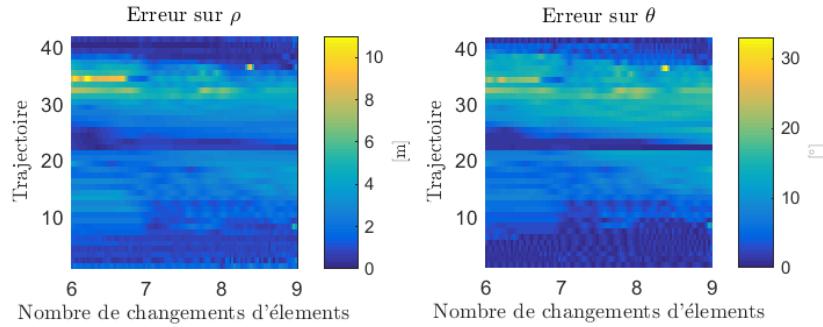


FIGURE 3.24 – Zoom sur l'erreur quadratique moyenne pour les trajectoires courbes simulées (haut). Cible de format voiture.

système, due à la résolution angulaire du lidar.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la transformée de Hough a été adaptée à la géométrie des lidars à état solide. Cette adaptation s'est fait en trois étapes : la traduction de l'espace de Hough pour des mesures en coordonnées polaires, l'introduction de l'incertitude angulaire par la définition de la région des votes non nuls et la considération du bruit gaussien sur la position radiale.

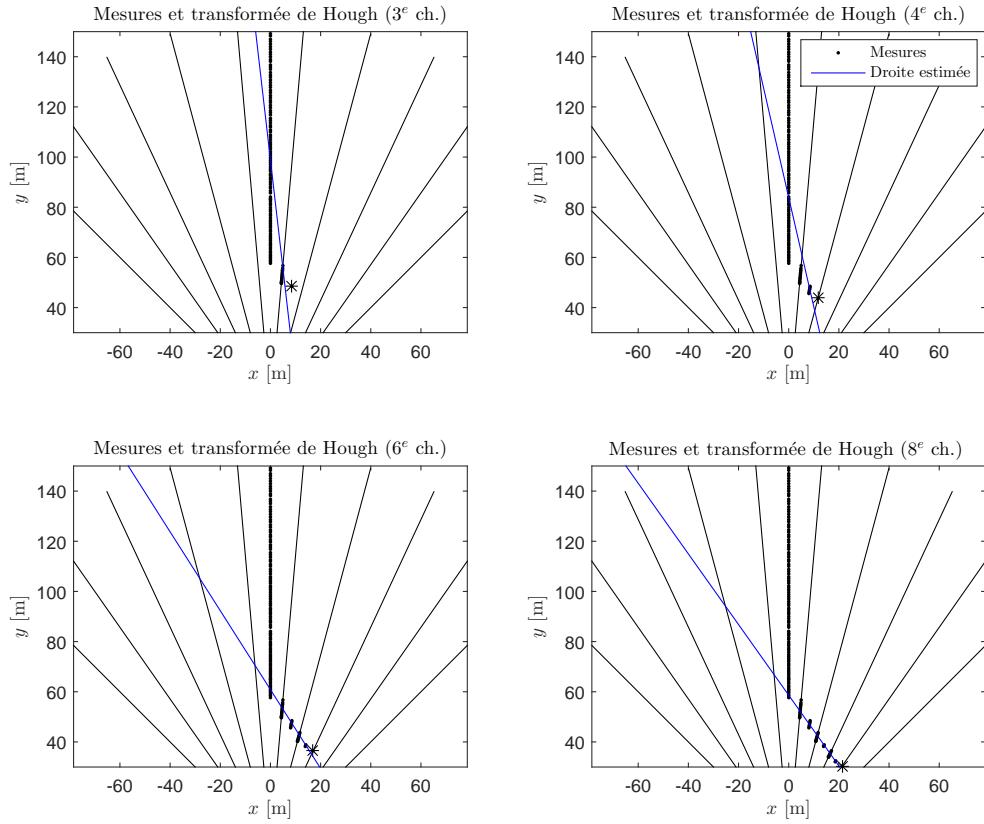


FIGURE 3.25 – Droites estimées par la transformée au fil du temps pour une trajectoire non rectiligne.

Le but de cette adaptation est de se rapprocher de la PHT [27] pour une meilleure estimation des paramètres de trajectoire.

Puis, afin de réduire la complexité algorithmique de la transformée proposée, des pistes de solutions sont proposées : simplifier le calcul des votes, réduire la taille de la matrice des votes en s'inspirant de la FHT [26] et réduire la taille de l'historique.

Finalement, les paramètres de calcul de la transformée de Hough sont analysés par des simulations Matlab afin de définir leurs valeurs pour la suite.

Dans le prochain chapitre, cette transformée, en estimant la direction et la position de la trajectoire, est employée à aider des filtres de Kalman dans l'estimation des états d'une cible.

Chapitre 4

Filtre de Kalman assisté par transformée de Hough

Dans ce chapitre, la transformée de Hough telle que développée précédemment est employée conjointement avec le filtre de Kalman avec d'améliorer l'estimation d'états. Étant donné le bruit sur la mesure de la position angulaire qui est majoritairement uniforme, le filtre de Kalman ne peut être optimal. L'utilisation de la transformée de Hough pour estimer la trajectoire de la cible, qui s'approche du maximum *a posteriori*, aide le filtre de Kalman à estimer la direction de la cible (reliée au vecteur vitesse de celle-ci) et la position angulaire. Un principe similaire est retrouvé dans [6], mais celui-ci propose plutôt d'utiliser une estimation de la vitesse angulaire déduite du temps passé dans un élément et du champ de vue de cet élément.

D'abord, deux catégories de méthodes sont proposées dans ce chapitre afin d'incorporer la transformée de Hough au filtre de Kalman : projeter les mesures sur la droite estimée ou ajouter une contrainte relaxée représentant la droite estimée dans le vecteur d'observations. Dans ces deux catégories, plusieurs filtres de Kalman (étendu, classique et non parfumé) sont proposés dans le but d'améliorer la précision de l'estimation ou de réduire la complexité algorithmique.

Puis, une troisième alternative, qui peut être complémentaire à l'ajout d'une contrainte, est proposée. Cette dernière s'inspire de [19] en appliquant une zone morte sur l'innovation.

Finalement, l'initialisation des filtres de Kalman et la structure des matrices de covariance sont discutées.

4.1 États d'une cible

Les états à estimer sont les vitesses et les positions pour les deux degrés de liberté de déplacement observés. Les états, à l'instant actuel k , peuvent être exprimés en coordonnées polaires :

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} r_k & \dot{r}_k & \phi_k & \dot{\phi}_k \end{bmatrix}^\top, \quad (4.1)$$

ou en coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k & \dot{x}_k & y_k & \dot{y}_k \end{bmatrix}^\top. \quad (4.2)$$

Pour aider au pistage multi cibles, des informations concernant la trajectoire, comme les paramètres ρ et θ de la transformée de Hough, peuvent être utiles. De plus, le paramètre ρ correspond à la distance entre la droite de la trajectoire et le lidar, ce qui peut être intéressant à estimer afin de prévoir les collisions : une petite valeur de ρ correspond à une cible qui pourrait entrer en collision avec le véhicule portant le lidar.

Comme la transformée de Hough développée et analysée au chapitre 3 (algorithme 3) considère à la fois le bruit de mesure uniforme (incertitude sur la mesure angulaire) et le bruit de mesure gaussien (sur la mesure de distance radiale), l'estimation des paramètres de la trajectoire s'approche du maximum de vraisemblance et du maximum *a posteriori* par extension. En effet, la distribution *a priori* pour la transformée de Hough est habituellement considérée comme uniforme [27], ce qui fait que le maximum de vraisemblance et le maximum *a posteriori* sont égaux.

Similairement, tel que discuté en 2.2.1, l'estimation du filtre de Kalman correspond à l'estimation du moindre carré et par extension, pour un bruit de mesure gaussien, au maximum *a posteriori*. Cependant, le filtre de Kalman suppose un bruit gaussien et est optimal pour ce type de bruit seulement.

L'estimation des paramètres de trajectoires ρ et θ peut donc être utilisée à trois moments dans le traitement des données du lidar : lors de l'association des détections aux cibles (pistage multi cibles), lors du calcul des collisions potentielles, et ce qui est d'intérêt dans le présent chapitre, lors de l'estimation des états (pistage cible unique) en assistance au filtre de Kalman.

4.2 Projection des mesures

Dans la littérature, une manière de traiter une contrainte sur un état à estimer est de projeter les états sur les contraintes et de sélectionner ceux minimisant l'erreur [28]. Autrement dit, en balayant parmi les états bornés par les contraintes, l'état qui satisfait un critère donné (moindre carré ou maximum de probabilité *a posteriori*, par exemple) est sélectionné.

Ici, ce principe est appliqué pour aider à l'estimation d'états étant donné l'incertitude angulaire des mesures du lidar. Les contraintes d'incertitudes sont traitées en deux étapes. D'abord, la

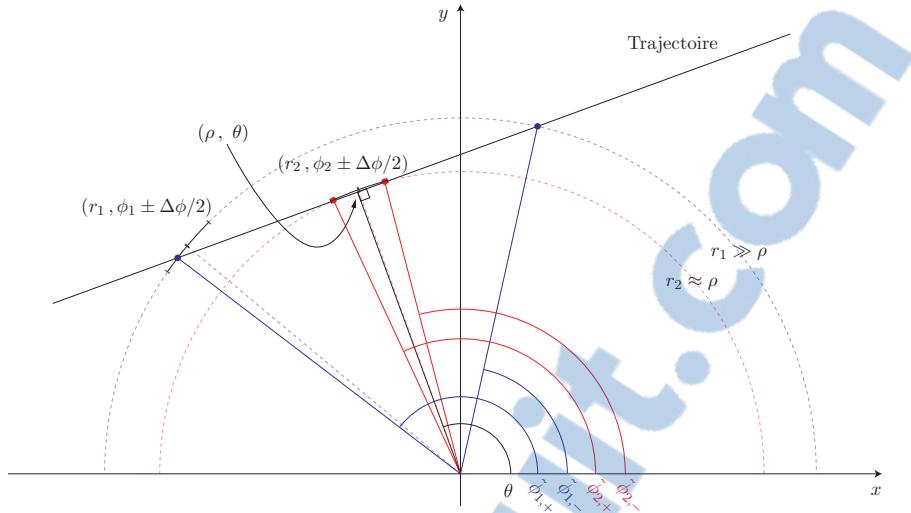


FIGURE 4.1 – Points d’intersection entre un cercle (mesures de position radiale r_1 et r_2) et une droite. Pour le cercle de rayon r_1 , les points d’intersection sont très éloignés. Pour le cercle de rayon r_2 qui est plus petit, les points d’intersection sont plus rapprochés.

meilleure trajectoire rectiligne est estimée en utilisant la transformée de Hough proposée au chapitre 3 (algorithme 3). Cette trajectoire rectiligne est celle qui maximise la probabilité *a posteriori* et elle est calculée en balayant parmi les mesures possibles bornées par les contraintes angulaires. Puis, il s’agit de projeter la mesure de la position angulaire actuelle sur la contrainte de cette droite estimée.

À la différence de ce qui est discuté dans [28], la projection remplace ensuite les mesures lidar dans le filtre de Kalman. Elle n’est pas appliquée directement sur les états, car l’on souhaite considérer l’erreur sur la projection également.

Cette projection est effectuée en calculant les deux points d’intersection entre un cercle de rayon r (mesure angulaire) et la trajectoire décrite par les paramètres de Hough ρ et θ . Les angles d’intersection sont les suivants :

$$\tilde{\phi} = \theta \pm \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right). \quad (4.3)$$

Il faut donc sélectionner l’angle pour lequel l’erreur par rapport à l’état prédict est minimale.

Comme vu à la figure 4.1, les deux points d’intersection peuvent être très rapprochés lorsque le paramètre θ s’approche de la mesure angulaire ϕ ou encore lorsque le paramètre ρ s’approche de la mesure radiale r . À ce moment, la projection devient moins précise. Deux raisons expliquent cela. D’abord, le mauvais angle projeté $\tilde{\phi}$ peut être choisi, car l’erreur par rapport à l’état prédict est similaire pour les deux points d’intersection. Ensuite, une petite erreur sur le paramètre de trajectoire ρ ou la mesure radiale r crée une grande erreur sur la position angulaire du point d’intersection. Mathématiquement, l’erreur angulaire, développée à partir de la dérivée

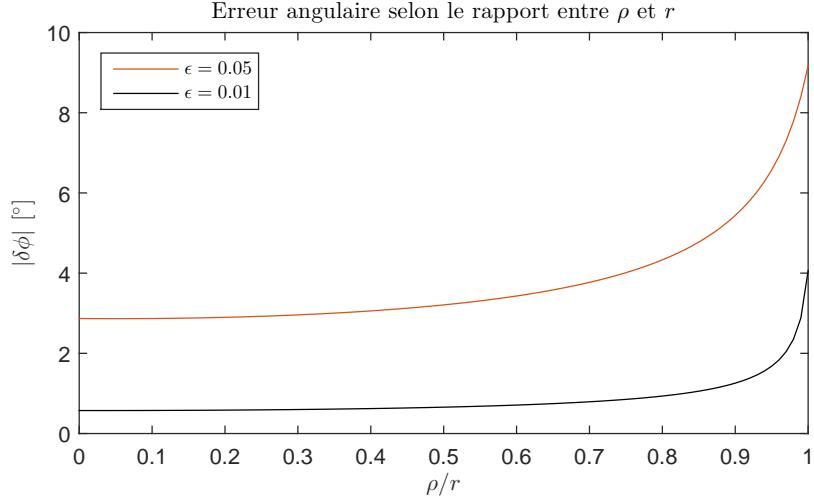


FIGURE 4.2 – Erreur sur la projection de la position angulaire en fonction du rapport ρ sur r .

de l'équation (4.3) par rapport à une erreur sur le rapport ρ/r , nommée ϵ , est la suivante :

$$\delta\tilde{\phi} = \frac{\delta}{\delta\epsilon} \left[\theta \pm \arccos \left(\frac{\rho}{r} + \epsilon \right) \right] \epsilon, \quad (4.4)$$

ce qui correspond à :

$$\delta\tilde{\phi} = \pm \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - (\frac{\rho}{r} + \epsilon)^2}}. \quad (4.5)$$

La figure 4.2 illustre cette relation et montre que lorsque la valeur de ρ s'approche de la position radiale mesurée ($\rho \approx r$), l'erreur sur la projection de la position angulaire augmente rapidement.

Une façon de réduire cet effet est de considérer le bruit gaussien sur la mesure de position radiale lors de la projection en plus de la transformée de Hough. Plus précisément, il s'agit de balayer sur plusieurs valeurs de position radiale r , et de sélectionner les valeurs de ϕ projetées qui sont situées dans l'élément lidar actuel. Un poids gaussien est appliqué pour moyenner les valeurs de r et ϕ sélectionnées.

En continuant avec la transformée de Hough décrite à l'algorithme 3, les valeurs de distances radiales balayées sont déterminées par :

$$\tilde{r}_i = \begin{cases} r + \Delta r_i & i \in 1, 2, \dots, N_{PDF} \\ r - \Delta r_i & i \in N_{PDF} + 1, N_{PDF} + 2, \dots, 2N_{PDF} \end{cases}, \quad (4.6)$$

où les Δr_i peuvent être les mêmes que pour la transformée de Hough. Les valeurs de ϕ projetées sont donc les suivantes :

$$\tilde{\phi}_i = \theta \pm \arccos \left(\frac{\rho}{\tilde{r}_i} \right), \quad (4.7)$$

où l'on doit, encore une fois, sélectionner l'angle pour lequel l'erreur par rapport à l'état prédit est minimale. Les poids associés à chaque couple de position projetée $(\tilde{r}_i, \tilde{\phi}_i)$ sont les suivants :

$$w_i = \begin{cases} \exp(-\frac{\Delta r_i^2}{2\sigma_r^2}) & |\phi - \phi_i| \leq \frac{\Delta\phi}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}. \quad (4.8)$$

Les deux façons de projeter les mesures, soit en utilisant tout simplement la mesure de position radiale ou en considérant un bruit gaussien sur cette mesure, sont comparées en simulation dans la prochaine sous-section.

Une autre possibilité serait de ne pas faire de projection lorsque r s'approche de ρ . Cette troisième méthode n'est pas évaluée dans ce mémoire.

4.2.1 Résultats préliminaires

Des simulations Monte-Carlo sont faites pour les mêmes paramètres que ceux dans la section 3.4.2 : un objet rectangulaire de largeur 0.5 m par une longueur de 0.25 m (taille d'un piéton), un lidar de $M = 9$ éléments avec un champ de vue de $\Delta\phi = 10^\circ$ pour chaque élément. Un bruit gaussien sur la mesure de position radiale avec un écart-type de 0.1 m est ajouté. Les paramètres de la transformée de Hough sont décrits dans le tableau 3.2.

La variable Monte-Carlo est le bruit sur la mesure de position radiale. Les simulations sont exécutées 100 fois pour deux trajectoires rectilignes différentes. La figure 4.3 compare l'erreur sur la mesure donnée par le lidar (mesures moyennées lorsqu'il y en a plusieurs simultanément) avec l'erreur sur la projection en considérant ou non le bruit gaussien sur la mesure angulaire. L'augmentation de l'erreur lorsque r s'approche de ρ est alors évidente. La considération du bruit gaussien de mesure radiale ne semble pas apporter pas un gain important par rapport à la simple projection. En fait, pour les deux méthodes, les mesures projetées possèdent une erreur supérieure dans cette zone que les mesures sans projection.

Cependant, lorsque le rapport ρ sur r est réduit, l'erreur diminue également. Dans ces zones, l'utilisation de la projection est très avantageuse (entre 3 et 4° de réduction d'erreur, pour une erreur sur la mesure maximale de $\Delta\phi/2 = 5^\circ$).

Davantage de résultats concernant la projection de la mesure angulaire sont présentés dans la sous-section C.1.1 en annexe. On démontre que la méthode de projection considérant le bruit gaussien (utilisant $r \pm \delta r_i$) possède un régime transitoire plus court en terme de changements d'éléments que la méthode plus simple (utilisant r directement).

Un autre avantage de la projection (pour les deux méthodes proposées) est qu'elle transforme le bruit de mesure angulaire qui est uniforme en un bruit qui s'approche d'un bruit gaussien. La figure 4.4 illustre la densité de l'erreur angulaire sur la projection de la position et la mesure initiale de la position. La densité de l'erreur angulaire sur la projection de la mesure de position ressemble davantage à une gaussienne qu'à une distribution uniforme.

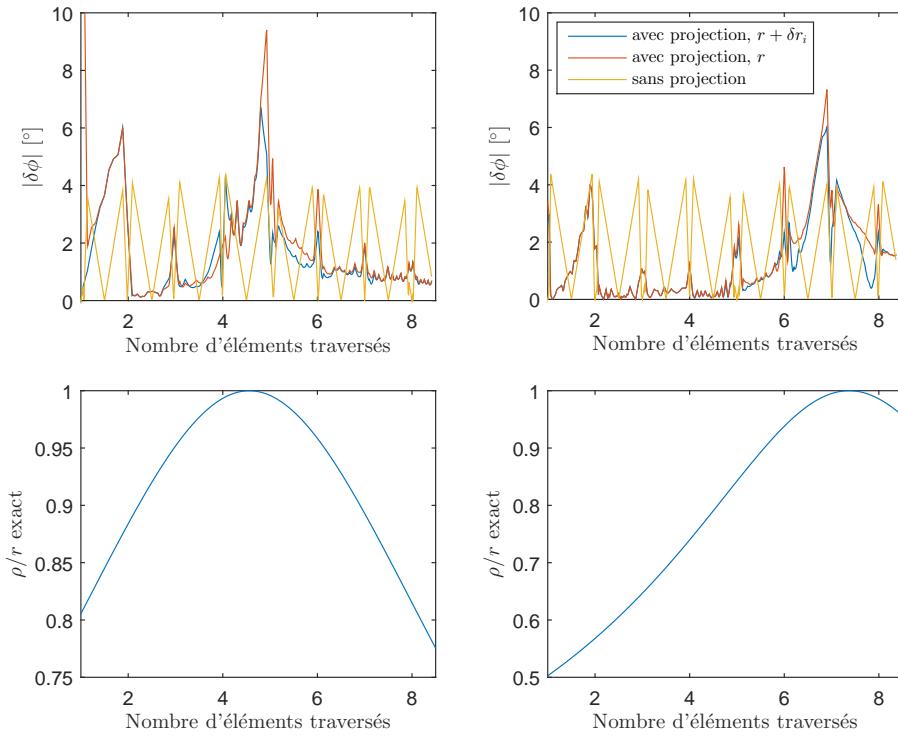


FIGURE 4.3 – Erreur sur la projection angulaire et rapport ρ sur r pour deux trajectoires : une trajectoire rectiligne avec ρ à 15 m et θ à 90° (gauche) et une trajectoire rectiligne avec ρ à 19 m et θ à 68° (droite).

Il est possible de remarquer aussi que la distribution de l'erreur sur la mesure sans projection n'est pas parfaitement uniforme, car lorsque la cible produit des détections dans plusieurs éléments, ses mesures sont moyennées. De cela, il est également possible de déduire que plus le nombre d'éléments lidar détectant une cible augmente, plus le bruit sur sa mesure de position moyennée s'approche d'une distribution gaussienne. Ainsi, plus une cible lidar est grande, plus le filtre de Kalman appliqué directement sur les mesures du lidar sans projection sera performant.

Étant donné les résultats médiocres de la projection lorsque la mesure (r, ϕ) est près des paramètres de Hough (ρ, θ) , une seconde méthode pour introduire la transformée de Hough au filtre de Kalman est proposée dans la prochaine section.

4.3 Application d'une contrainte relaxée

Une seconde façon, dans la littérature, d'appliquer une contrainte sur des états est d'ajouter ces contraintes dans le vecteur des mesures du filtre de Kalman. En fixant la covariance de

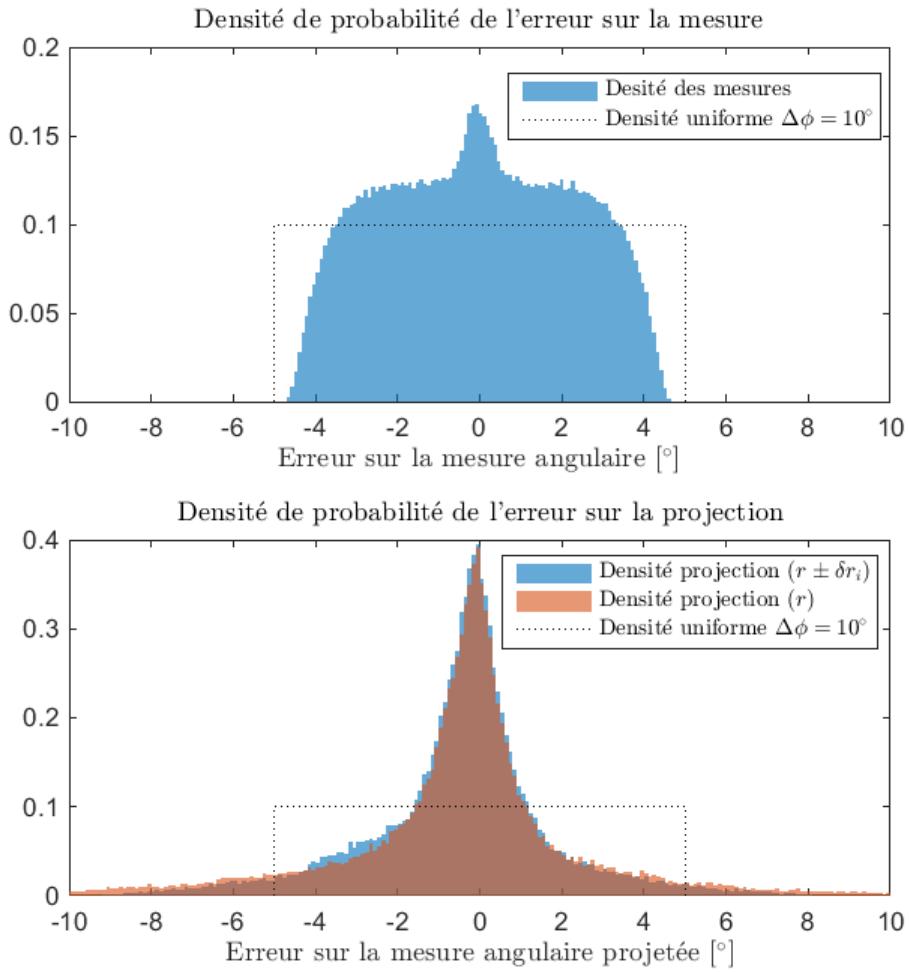


FIGURE 4.4 – Distribution de l'erreur sur la projection angulaire (tout élément confondu) et de l'erreur sur la mesure de position pour une cible de $0.5 \text{ m} \times 0.25 \text{ m}$ et 81 trajectoires rectilignes différentes. Lidar de 9 éléments ayant chacun 10° de champ de vue.

ces nouvelles mesures à zéro, les contraintes sont considérées comme parfaites. Dans le cas de contraintes appliquées au mouvement d'une cible, il est préférable de relaxer les contraintes [21]. Il suffit alors d'augmenter la variance sur les contraintes du vecteur des observations.

Cependant, ce principe ne s'applique pas directement aux données lidar, car les contraintes sur la position angulaire sont des inégalités plutôt que des égalités : la position estimée de la cible doit être située dans le ou les éléments lidar qui détectent la cible. Par exemple, si la cible est observée dans les éléments centrés à 75° et à 85° ayant un champ de vue de $\Delta\phi = 10^\circ$ chacun, la contrainte sur la position angulaire de l'état estimé, $\hat{\phi}$, est : $70^\circ < \hat{\phi} < 90^\circ$.

Une façon de procéder qui considère la géométrie du lidar est d'utiliser la transformée de Hough comme une contrainte d'égalité relaxée (variance non nulle). Un principe similaire est

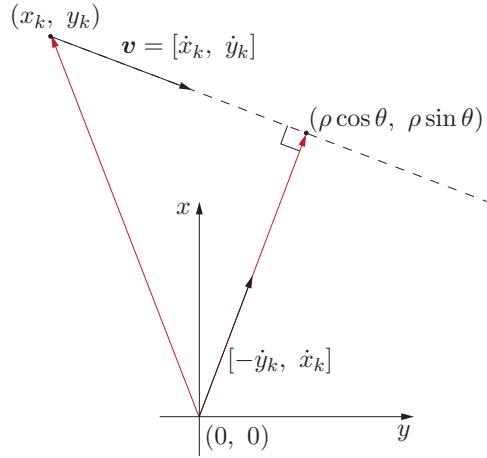


FIGURE 4.5 – Schéma des relations entre les états (position et vitesse en coordonnées cartésiennes) et les paramètres de la trajectoire estimés avec la transformée de Hough, ρ et θ .

utilisé dans [6], sauf que ce dernier utilise plutôt une estimation de la vitesse angulaire évaluée par le temps passé dans un élément lidar et le sens d'arrivée comme mesures ajoutées dans le filtre de Kalman. La transformée de Hough, proposée dans ce travail, est un indice de la trajectoire de la cible et est liée à la fois aux états de position (distance entre la trajectoire et le lidar ρ) et de vitesse (direction donnée par θ).

Ainsi, une façon d'exprimer la transformée de Hough dans le vecteur des observations \mathbf{y} est tout simplement par les paramètres ρ et θ . Ces paramètres correspondent au point sur la trajectoire le plus près du lidar, en coordonnées polaires :

$$\mathbf{y} = [r \ \phi \ \rho \ \theta]^T. \quad (4.9)$$

Les relations entre les états (en coordonnées cartésiennes) et ces mesures sont illustrées dans la figure 4.5. Les fonctions exprimant les paramètres de trajectoire en fonction des états sont les suivantes :

$$\rho = \frac{(y\dot{x} - x\dot{y})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad (4.10)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) + \frac{\pi}{2}. \quad (4.11)$$

Un désavantage de l'expression en coordonnées polaires ρ et θ est que le calcul de l'innovation est moins direct : θ est une valeur entre 0 et π radians, ρ peut être négatif ou positif.

Modifier ces paramètres pour qu'ils appartiennent au même espace que r (positif) et ϕ ($-\pi$ à π ou 0 à 2π) est possible, mais les fonctions établies précédemment devraient être modifiées également :

$$\rho = \frac{|y\dot{x} - x\dot{y}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad (4.12)$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) + \frac{3\pi}{2} & \text{si } (y\dot{x} - x\dot{y}) < 0 \\ \arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) + \frac{\pi}{2} & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad (4.13)$$

où θ est enroulé autour de 2π .

Les dérivées de ces fonctions par rapport aux états contiennent alors des valeurs absolues et des fonctions signes. L'innovation peut cependant être calculée simplement par la différence entre les observations (paramètres de la transformée de Hough) et l'estimation des observations par ces dernières relations. La différence sur l'observation θ (et ϕ) doit être ensuite enroulée autour de π , soit la valeur maximale pour une erreur angulaire. Par exemple, une erreur de 181° revient à une erreur équivalente de 179° .

Une seconde manière, plus simple, d'exprimer la transformée de Hough dans le vecteur des observations \mathbf{y} est par le point sur la trajectoire le plus près du lidar, mais en coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{y} = [r \quad \phi \quad \rho \cos \theta \quad \rho \sin \theta]^\top \quad (4.14)$$

Les équations reliant ces observations aux états sont développées à partir du produit scalaire de la perpendiculaire à la vitesse avec la position (x, y) (voir figure 4.5) :

$$\rho \cos \theta = -\frac{\dot{y}(y\dot{x} - x\dot{y})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (4.15)$$

$$\rho \sin \theta = \frac{\dot{x}(y\dot{x} - x\dot{y})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \quad (4.16)$$

L'innovation peut alors être calculée directement comme la différence entre les observations (paramètres de la transformée de Hough) et l'estimation des observations par ces dernières. Aucune modification n'est nécessaire sur l'innovation concernant la trajectoire. De plus, les dérivées sont continues. C'est donc ce qui est utilisé pour la suite.

Puisqu'une cible immobile génère une transformée de Hough uniforme (toutes les droites sont possibles et équiprobales), lorsque la vitesse est nulle, $\rho \cos \theta$ et $\rho \sin \theta$ sont mis à zéro.

Les prochaines sections présentent l'intégration des filtres de Kalman (étendu, classique, puis non parfumé) avec la transformée de Hough d'abord par la projection des mesures du lidar et ensuite par l'ajout d'une contrainte de trajectoire dans le vecteur des observations.

4.4 Filtre de Kalman étendu assisté par projection des mesures

Le modèle utilisé pour l'évolution temporelle des états est celui à vitesse constante : le bruit de procédé gaussien sur la vitesse correspond à l'accélération de la cible. Étant donné qu'un conducteur sur la route a tendance à vouloir garder une vitesse constante lorsque possible et qu'un véhicule est soumis à différentes accélérations et décélérations au fil du temps, le modèle

de vitesse constante est souvent utilisé pour le pistage de véhicule sur la route [4; 5]. Il est aussi possible d'augmenter le vecteur d'états en ajoutant les accélérations et utiliser un modèle à accélération constante. Dans [29], les deux modèles (vitesse ou accélération constante) sont d'ailleurs utilisés conjointement pour le pistage de piétons par un lidar.

Pour le modèle à vitesse constante, les états sont les positions et vitesses tels qu'écrits dans les équations (4.1) ou (4.2). Les sous-sections suivantes présentent les relations temporelles ainsi que les relations avec les observations pour ces deux vecteurs d'états.

4.4.1 États en coordonnées polaires

Pour un vecteur d'état en coordonnées polaires (position et vitesse radiale et angulaire), la relation entre les observations, $\mathbf{y} = [r, \phi]^T$, et les états est linéaire :

$$\hat{\mathbf{y}} = h(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}, \quad (4.17)$$

où la \mathbf{H} est la matrice Jacobienne suivante :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

La matrice Jacobienne peut donc être précalculée, ce qui est un avantage pour une implantation temps réel.

Par contre, la relation temporelle sur les états est loin d'être linéaire. La fonction $f(\cdot)$ représentant la relation entre l'état actuel et l'état précédent est la suivante et est développée en détail dans l'annexe B :

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) = \begin{pmatrix} \sqrt{(r + \dot{r}\Delta t)^2 + (r\dot{\phi}\Delta t)^2} \\ \frac{(r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2)\Delta t + r\dot{r}}{\sqrt{(r + \dot{r}\Delta t)^2 + (r\dot{\phi}\Delta t)^2}} \\ -\arctan\left(\frac{r\dot{\phi}\Delta t \cos(\phi) + (r + \dot{r}\Delta t)\sin(\phi)}{r\dot{\phi}\Delta t \sin(\phi) - (r + \dot{r}\Delta t)\cos(\phi)}\right) \\ \frac{r^2\dot{\phi}}{(r + \dot{r}\Delta t)^2 + (r\dot{\phi}\Delta t)^2} \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

De manière évidente, l'évaluation de la matrice Jacobienne de $f(\hat{\mathbf{x}})$ n'est pas un calcul simple et doit être fait à chaque instant en temps réel. Pour cette raison, le vecteur d'état utilisé dans ce travail est plutôt celui en coordonnées cartésiennes présenté à la prochaine sous-section.

4.4.2 États en coordonnées cartésiennes

Étant donné le modèle à vitesse constante (ou même pour accélération constante), la relation temporelle des états est linéaire en coordonnées cartésiennes. Ainsi, le déplacement sur l'axe x est décrit par les relations suivantes entre l'état actuel et l'état précédent :

$$x_k = x_{k-1} + \dot{x}_{k-1}\Delta t, \quad (4.20)$$

$$\dot{x}_k = \dot{x}_{k-1}, \quad (4.21)$$

où Δt est l'intervalle de temps écoulé depuis l'instant précédent. Le déplacement sur l'axe y est décrit par les relations suivantes équivalentes :

$$y_k = y_{k-1} + \dot{y}_{k-1} \Delta t, \quad (4.22)$$

$$\dot{y}_k = \dot{y}_{k-1}. \quad (4.23)$$

Il s'agit donc d'un modèle exprimé par la fonction $f(\cdot)$:

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}, \quad (4.24)$$

où \mathbf{A} est la matrice Jacobienne du modèle de transition des états :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Pour l'implantation en temps réel du filtre de Kalman, cette matrice peut être précalculée.

Par contre, comme les mesures sont en coordonnées polaires et les états en coordonnées cartésiennes, le modèle de l'observation est non linéaire. Le vecteur d'observations est le suivant :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} r & \tilde{\phi} \end{bmatrix}^\top \quad (4.26)$$

où r est la mesure de position radiale donnée par le lidar et $\tilde{\phi}$ est la projection de la mesure angulaire sur la droite calculée par la transformée de Hough.

Le modèle non linéaire entre ces observations et états est décrit par la fonction $h(\cdot)$ qui traduit les états en mesures de position :

$$h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

La matrice Jacobienne de ce modèle, \mathbf{H} , est la suivante :

$$\mathbf{H}_{k|k-1} = \left. \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ \frac{y}{x^2+y^2} & 0 & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{bmatrix} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{(k|k-1)}}. \quad (4.28)$$

Cette matrice Jacobienne doit donc être évaluée à chaque instant, selon l'estimation *a priori* de l'état.

L'implantation du filtre de Kalman étendu assisté par transformée de Hough proposée est la suivante :

- La transformée de Hough telle que proposée à l'algorithme 3 est calculée. Le maximum de la transformée correspond alors à la droite la plus probable pour les mesures observées.
- L'étape de prédiction du filtre de Kalman est exécutée telle qu'écrite aux équations (2.22).
- La matrice Jacobienne \mathbf{H} est évaluée pour les états prédits (*a priori*).
- Les états *a priori* sont transformés en observations par le système d'équation (4.27).
- La mesure de position angulaire observée par le lidar est projetée sur la droite trouvée par la transformée de Hough par l'équation (4.3). Deux solutions sont possibles. La projection choisie est celle qui est la plus près de la position angulaire *a priori*.
- L'étape de correction du filtre de Kalman est exécutée telle qu'écrite aux équations (2.23). L'innovation sur ϕ est enroulée autour de π .

L'ensemble de ces étapes est résumé dans le tableau 4.1 de façon mathématique.

Une amélioration qui est intéressante pour l'implantation en temps réel du filtre de Kalman est de rendre le système complètement linéaire, et ainsi, de pouvoir précalculer les deux matrices Jacobiennes \mathbf{H} et \mathbf{A} . Une stratégie pour y arriver est proposée à la section suivante.

TABLE 4.1 – Étapes résumées du filtre de Kalman étendu avec mesures projetées.

| | |
|-------------------------------------|---|
| Estimation de la trajectoire | Estimer la trajectoire (ρ, θ) par l'algorithme 3. |
| Prédiction des états | $\mathbf{x}_{k k-1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}$ avec (4.25) $\mathbf{P}_{k k-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q}$ |
| Observations <i>a priori</i> | Évaluation de $\mathbf{H}_{k k-1}$ par (4.28) $\hat{\mathbf{y}}_{k k-1} = h(\mathbf{x}_{k k-1})$ par (4.27) |
| Projection des mesures lidar | $\tilde{\phi} = \theta \pm \arccos(\rho/r)$ $ \tilde{\phi} - \hat{\phi} $ minimal (différence enroulée autour de π) |
| Correction des états | $\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k k-1}$ enroulé autour de π pour ϕ $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_{k k-1}\mathbf{P}_{k k-1}\mathbf{H}_{k k-1}^\top + \mathbf{R}$ $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k k-1}\mathbf{H}_{k k-1}^\top \mathbf{S}_k^{-1}$ $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{i}_k$ $\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_{k k-1})\mathbf{P}_{k k-1}$ |

4.5 Filtre de Kalman classique assisté par projection des mesures

Étant donné la géométrie du lidar à faible résolution angulaire, la représentation des mesures dans le filtre de Kalman doit à première vue rester polaire : le bruit sur la mesure angulaire est plus important que le bruit sur la mesure radiale, et surtout, il n'est pas gaussien.

Toutefois, puisque la projection des mesures lidar transforme le bruit uniforme sur la position angulaire en un bruit plus gaussien, il n'est plus nécessaire que les observations dans le filtre de

Kalman soient en coordonnées polaires. La différence avec le filtre de Kalman étendu proposé précédemment est le vecteur d'observations qui devient plutôt :

$$\mathbf{y} = [r \cos \tilde{\phi} \quad r \sin \tilde{\phi}]^\top, \quad (4.29)$$

ce qui correspond aux mesures lidar projetées en coordonnées cartésiennes. La relation entre les états et les observations est alors linéaire :

$$\hat{\mathbf{y}} = h(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}, \quad (4.30)$$

où \mathbf{H} est la matrice Jacobienne de $h(\hat{\mathbf{x}})$ telle que :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Les deux matrices Jacobiennes \mathbf{H} et \mathbf{A} peuvent donc être précalculées.

L'implantation du filtre de Kalman classique assisté par transformée de Hough est la même que celle pour le filtre de Kalman étendu proposé dans la section précédente, à l'exception de la matrice Jacobienne qui n'est plus évaluée et de la transformation des observations projetées en coordonnées cartésiennes (voir le tableau 4.2 pour un résumé des étapes).

TABLE 4.2 – Étapes résumées du filtre de Kalman classique avec mesures projetées.

| | |
|-------------------------------------|---|
| Estimation de la trajectoire | Estimer la trajectoire (ρ, θ) par l'algorithme 3. |
| Prédiction des états | $\mathbf{x}_{k k-1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}$ avec (4.25) $\mathbf{P}_{k k-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q}$ |
| Observations <i>a priori</i> | $\hat{\mathbf{y}}_{k k-1} = \mathbf{H}\mathbf{x}_{k k-1}$ avec (4.31) |
| Projection des mesures lidar | $\tilde{\phi} = \theta \pm \arccos(\rho/r)$ $ \tilde{\phi} - \hat{\phi} $ minimal (différence enroulée autour de π) $\mathbf{y}_k = [r \cos \tilde{\phi}, r \sin \tilde{\phi}]$ |
| Correction des états | $\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k k-1}$ $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}\mathbf{P}_{k k-1}\mathbf{H}^\top + \mathbf{R}$ $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k k-1}\mathbf{H}^\top \mathbf{S}_k^{-1}$ $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{i}_k$ $\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})\mathbf{P}_{k k-1}$ |

4.6 Filtre de Kalman étendu assisté par contrainte relaxée

Pour les filtres de Kalman proposés dans les sections précédentes, seule la projection des mesures lidar a été introduite. Un désavantage de cette méthode est l'erreur sur la position projetée qui peut devenir supérieure à celle sur la mesure du lidar lorsque la mesure s'approche du point (ρ, θ) sur la trajectoire.

Afin d'éviter cette problématique, l'ajout d'une contrainte relaxée aux observations est proposée dans la présente section. La contrainte est que les états doivent coïncider avec la trajectoire

évaluée par la transformée de Hough. Les états estimés, au fil du temps, suivent donc à la fois les mesures du lidar et la trajectoire rectiligne évaluée par la transformée de Hough qui considère la géométrie du lidar. Cette contrainte est décrite dans la section 4.3.

Le vecteur d'observations du filtre de Kalman est donc :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} r & \phi & \rho \cos \theta & \rho \sin \theta \end{bmatrix}^\top \quad (4.32)$$

Les relations entre les observations et les états se traduisent à :

$$h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ -\frac{\dot{y}(y\dot{x} - x\dot{y})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \frac{\dot{x}(y\dot{x} - x\dot{y})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Par conséquent, la matrice Jacobienne de ce modèle, \mathbf{H} , est la suivante :

$$\mathbf{H}_{k|k-1} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & 0 & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ \frac{\dot{y}(y\dot{x}^2 - 2x\dot{x}\dot{y} - y\dot{y}^2)}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{\dot{x}\dot{y}}{x^2+y^2} & -\frac{\dot{x}(y\dot{x}^2 - 2x\dot{x}\dot{y} - y\dot{y}^2)}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{\dot{x}(x\dot{x}^2 + 2y\dot{x}\dot{y} - x\dot{y}^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{\dot{x}\dot{y}}{x^2+y^2} & \frac{\dot{y}(x\dot{x}^2 + 2y\dot{x}\dot{y} - x\dot{y}^2)}{(x^2+y^2)^2} & \frac{\dot{x}^2}{x^2+y^2} & -\frac{\dot{x}(x\dot{x}^2 + 2y\dot{x}\dot{y} - x\dot{y}^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{array} \right] \Bigg|_{\hat{\mathbf{x}}_{(k|k-1)}}. \quad (4.34)$$

Cette matrice doit être évaluée à chaque instant pour les états prédits. L'implémentation est alors :

- La transformée de Hough telle que proposée à l'algorithme 3 est calculée. Le maximum de la transformée correspond alors à la droite la plus probable pour les mesures observées.
- L'étape de prédiction du filtre de Kalman est exécutée telle qu'écrite aux équations (2.22).
- La matrice Jacobienne \mathbf{H} est évaluée pour les états prédits (*a priori*) par (4.34).
- Le vecteur des observations est mis à jour avec les mesures lidar et les paramètres de la transformée de Hough (en coordonnées cartésiennes).
- L'étape de correction du filtre de Kalman est exécutée telle qu'écrite aux équations (2.23). L'innovation sur ϕ est enroulée autour de π .

Un résumé des opérations mathématiques en étapes est présenté dans le tableau 4.3.

Que ce soit pour les mesures du lidar ou pour les paramètres de la transformée de Hough, le système d'équations entre les observations et les états n'est pas linéaire et est d'ordre plus élevé que du deuxième ordre. Dans ce cas, un filtre de Kalman non parfumé peut apporter de meilleurs résultats (approximation par une série de Taylor du troisième ordre) que le filtre de Kalman étendu (approximation par une série de Taylor du premier ordre), et ce, pour une complexité algorithmique similaire [11]. La prochaine section propose une solution en ce sens.

TABLE 4.3 – Étapes résumées du filtre de Kalman étendu contraint par la transformée de Hough.

| | |
|-------------------------------------|---|
| Estimation de la trajectoire | Estime la trajectoire (ρ, θ) par l'algorithme 3. |
| Prédiction des états | $\mathbf{x}_{k k-1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}$ avec (4.25) $\mathbf{P}_{k k-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q}$ |
| Observations <i>a priori</i> | Évaluation de $\mathbf{H}_{k k-1}$ par (4.34) $\hat{\mathbf{y}}_{k k-1} = h(\mathbf{x}_{k k-1})$ par (4.33) |
| Ajout de la contrainte | $\mathbf{y}_k = [r, \phi, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta]$ |
| Correction des états | $\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k k-1}$ enroulé autour de π pour ϕ $\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_{k k-1}\mathbf{P}_{k k-1}\mathbf{H}_{k k-1}^\top + \mathbf{R}$ $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k k-1}\mathbf{H}_{k k-1}^\top \mathbf{S}_k^{-1}$ $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{i}_k$ $\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_{k k-1})\mathbf{P}_{k k-1}$ |

4.7 Filtre de Kalman non parfumé assisté par contrainte relaxée

Comme le modèle temporel des états est linéaire, la première partie du filtre de Kalman, soit l'étape de prédiction, peut être exécutée par la méthode du filtre de Kalman classique. Les points sigma sont donc générés à partir de l'estimation *a priori* de l'état et de sa matrice de covariance. Les $(2 \times n + 1)$ points sigma, pour les $n = 4$ états du vecteur, sont générés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{0, k|k-1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ \mathbf{x}_{i, k|k-1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \left(\sqrt{(4 + \lambda)\mathbf{P}_{k|k-1}} \right)_i . \\ \mathbf{x}_{i+4, k|k-1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \left(\sqrt{(4 + \lambda)\mathbf{P}_{k|k-1}} \right)_{i+4} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Ces neuf points sigmas sont ensuite propagés dans le modèle $h(\cdot)$ (4.27) qui estime *a priori* les observations.

Ensuite, l'espérance des observations *a priori* et la covariance de l'innovation sont évaluées en appliquant la pondération décrite dans (2.30). Ces vecteurs poids peuvent être précalculés, selon les paramètres α , β et κ choisis. Le gain du filtre de Kalman et la matrice de covariance de l'erreur *a posteriori* sont calculés par les équations (2.33) et (2.34) respectivement.

Un résumé de ces étapes est présenté dans le tableau 4.4.

4.8 Zone morte sur l'innovation

Lorsque la mesure angulaire estimée à l'instant actuel $\hat{\phi}_k$ se retrouve dans l'intervalle d'incertitude de la mesure angulaire de la détection ϕ_k , on peut déduire que la mesure angulaire estimée pourrait être exacte. Autrement dit, lorsque l'innovation sur la mesure angulaire est

TABLE 4.4 – Étapes résumées du filtre de Kalman non parfumé contraint par la transformée de Hough.

| | |
|-------------------------------------|---|
| Estimation de la trajectoire | Estimer la trajectoire (ρ, θ) par l'algorithme 3 |
| Prédiction des états | $\mathbf{x}_{k k-1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}$ avec (4.25) $\mathbf{P}_{k k-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q}$ |
| Génération des points sigma | $\mathbf{\chi}_{k k-1}$ par (4.35) \mathbf{W}_{moy} et \mathbf{W}_{cov} par (2.30) |
| Observations <i>a priori</i> | $\hat{\mathbf{Y}}_{k k-1} = h(\mathbf{\chi}_{k k-1})$ par (4.33) $\hat{\mathbf{y}}_{k k-1} = \mathbf{Y}_{k k-1} \text{diag}(\mathbf{W}_{moy}) \mathbf{Y}_{k k-1}^\top$ |
| Ajout de la contrainte | $\mathbf{y}_k = [r, \phi, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta]$ |
| Correction des états | $\mathbf{i}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k k-1}$ enroulé autour de π pour ϕ $\mathbf{S}_k = \mathbf{Y}_{k k-1} \text{diag}(\mathbf{W}_{cov}) \mathbf{Y}_{k k-1}^\top + \mathbf{R}$ $\mathbf{K}_k = (\mathbf{Y}_{k k-1} \text{diag}(\mathbf{W}_{cov}) \mathbf{\chi}_{k k-1}^\top) \mathbf{S}_k^{-1}$ $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{i}_k$ $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{K}_k^\top$ |

inférieure en valeur absolue à l'incertitude sur la mesure angulaire, cette innovation peut être mise à zéro, ou encore mieux, ignorée [30]. Ce principe est utilisé dans [19], où l'étape de correction du filtre de Kalman est sautée lorsque l'innovation est nulle. À la différence de [19], l'étape de correction est partiellement ignorée et l'innovation reçue au filtre de Kalman n'est pas discrétisée par le capteur. Il s'agit plutôt d'appliquer une zone morte sur l'innovation et sur l'étape de correction pour la mesure angulaire seulement. Cette modification au filtre de Kalman peut être utilisée en complément avec la contrainte ajoutée dans le vecteur d'observations ou seule dans un filtre de Kalman sans contrainte.

La condition utilisée pour caractériser la zone morte de l'innovation est la suivante :

$$|\phi - \hat{\phi}| \leq \frac{\Delta\phi}{2}. \quad (4.36)$$

Lorsque cette condition est atteinte, soit lorsque l'innovation est dans sa zone morte, la matrice Jacobienne de la transformation des états en mesure est réduite de la manière suivante :

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{M} \mathbf{S}_k \mathbf{M}^\top, \quad (4.37)$$

et

$$\mathbf{i}_k = \mathbf{M} \mathbf{i}_k. \quad (4.38)$$

Lorsque l'innovation est sur les mesures r et ϕ (filtre de Kalman sans contrainte), la matrice \mathbf{M} est la suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Lorsque l'innovation est sur le vecteur d'observations à l'équation (4.14) (filtre de Kalman

avec une contrainte relaxée), elle est exprimée :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

En appliquant cette modification, l'étape de correction ne prend plus en compte l'innovation sur la mesure angulaire et la matrice de covariance de l'erreur \mathbf{P}_k ne dépend temporairement plus de la mesure angulaire également.

4.9 Matrices de covariance du bruit

Cette section aborde l'évaluation des matrices de covariances du bruit de mesures et du bruit de procédé. Une bonne évaluation du rapport entre ces deux covariances est très importante, car c'est ce qui détermine, avec la covariance de l'erreur sur l'estimation initiale, l'importance donnée aux observations par rapport au modèle.

Si la matrice de covariance du bruit de mesure est surévaluée, le gain de Kalman diminue, ce qui laisse une plus grande importance aux états estimés *a priori*. Au contraire, si la matrice de covariance du bruit de procédé est surévaluée, le gain de Kalman augmente et le filtre se fie trop aux observations.

Comme vu au chapitre 3, la transformée de Hough prend un certain temps (entre 2 et 3 changements d'éléments lidar) avant d'atteindre son régime permanent. En régime transitoire, lorsque l'erreur sur les paramètres de la trajectoire est grande, l'erreur sur la projection de la mesure angulaire est également grande. Il s'agit donc d'appliquer la projection seulement lorsque le régime permanent est atteint. La première matrice de covariance du bruit de mesure abordée dans cette section est donc celle des mesures du lidar sans projection.

La covariance du bruit de mesure doit représenter le bruit gaussien sur la position radiale et le bruit uniforme sur la position angulaire. Comme le filtre de Kalman ne considère qu'un bruit gaussien, le bruit uniforme est approximé comme étant normal. L'équivalence du bruit est faite par la matrice de covariance suivante basée sur l'équation (2.38) :

$$\mathbf{R}_{r,\phi} = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta\phi^2}{12} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

La figure 4.6 montre la différence entre un bruit à la fois gaussien et uniforme et un bruit équivalent, mais complètement gaussien, sur une mesure lidar. En coordonnées cartésiennes, une approximation peut être calculée en effectuant une transformation de rotation sur la matrice de covariance $\mathbf{R}_{x,y}$ obtenue avec $\phi = 0$, ce qui donne :

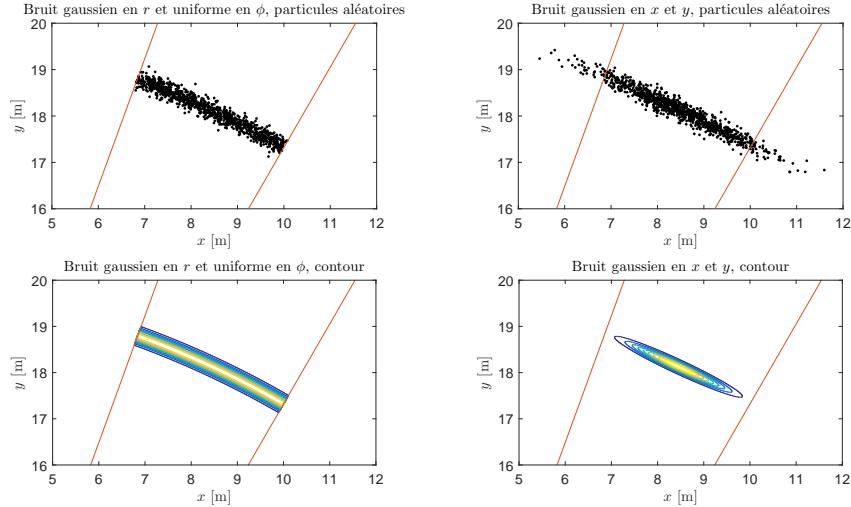


FIGURE 4.6 – Points aléatoires autour d’une mesure à 20 m et 65° . Gauche : générés selon un bruit à la fois gaussien en r ($\sigma_r = 0.1$ m) et uniforme en ϕ ($\Delta\phi = 10^\circ$). Droite : générés selon un bruit gaussien en x et y par la matrice (4.42).

$$\mathbf{R}_{x,y}(r, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}(2r \sin(\frac{\Delta\phi}{2}))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}^\top \quad (4.42)$$

Par la suite, il faut évaluer la matrice de covariance du bruit lorsque les mesures angulaires sont projetées. Cela peut être déduit des graphiques de la figure C.6 en annexe. La matrice de covariance devient :

$$\mathbf{R}_{r,\tilde{\phi}} = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\tilde{\phi}}^2 \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

où $\sigma_{\tilde{\phi}}$ est l’écart-type estimé, tiré des graphiques de la figure C.6.

Pour les filtres assistés par une contrainte relaxée, la matrice de covariance est la suivante :

$$\mathbf{R}_{r,\phi,\text{Hough}} = \text{diag}(\mathbf{R}_{r,\phi}, \mathbf{R}_{\rho \cos \theta, \rho \sin \theta}(\rho, \theta)), \quad (4.44)$$

où la matrice de covariance des paramètres de trajectoire est approximée par :

$$\mathbf{R}_{\rho \cos \theta, \rho \sin \theta}(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\rho^2 & 0 \\ 0 & (\rho \tan \sigma_\theta)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^\top. \quad (4.45)$$

Les valeurs de σ_ρ et σ_θ peuvent être extraites de la figure C.3 dans la sous-section C.1 en annexe. Puisque le biais sur l’estimation des paramètres ρ et θ augmente lorsque la taille de la cible augmente, l’erreur quadratique moyenne, qui comprend ce biais, est utilisée pour σ_ρ et σ_θ plutôt que l’écart-type de l’erreur.

La matrice de covariance du procédé est fixée pour tous les filtres (en simulation) à :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Dans le cas présent, étant donné le choix du modèle à vitesse constante, la variance sur les états doit considérer l'accélération maximale des cibles devant le lidar. En simulation, pour une fréquence d'acquisition à 30 Hz, soit celle visée par le partenaire industriel, si l'accélération maximale (relative au lidar) considérée est de 9 m/s^2 , la variation maximale de la vitesse entre deux échantillons correspond à 0.3 m/s . Une variance de 10^{-2} est donc choisie ($(0.3/3)^2$, règle des trois sigmas). Pour les données expérimentales, la fréquence d'acquisition est de 50 Hz ; la matrice de covariance est donc ajustée en conséquence.

4.10 Initialisation du filtre de Kalman

Afin de réduire la durée du régime transitoire du filtre de Kalman, il faut bien initialiser le vecteur d'état et la matrice de covariance de l'erreur sur ces états. Une option possible, dans le cas où les états initiaux sont totalement inconnus, est d'initialiser la covariance de l'erreur avec de grandes valeurs. Ainsi, dans les premiers instants, le filtre de Kalman se fie davantage sur les mesures que sur les états propagés *a priori*.

Dans le cas du pistage de données lidar, les initialisations des états et de la matrice de covariance de l'erreur sont faites à partir des déductions suivantes.

D'abord, la position est initialisée en utilisant la mesure de position du lidar traduite en coordonnées cartésiennes. La covariance de l'erreur sur l'estimation en position doit alors refléter la géométrie polaire du bruit de mesure. L'approximation à l'équation (4.42) est donc utilisée.

Pour l'initialisation de la vitesse, une possibilité est de simplement l'initialiser à zéro. Dans ce cas, la covariance de l'erreur du vecteur vitesse doit être élevée. Par exemple, la variance choisie peut être celle d'une distribution uniforme entre la vitesse maximale attendue positive et négative ($\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = v_{\max}^2/3$).

4.11 Conclusion

Dans ce chapitre, plusieurs filtres de Kalman ont été adaptés pour le pistage par lidar faible résolution angulaire. Les solutions proposées se séparent en deux catégories principales : la projection des mesures de position angulaire sur la droite estimée par la transformée de Hough ou l'ajout d'une contrainte relaxée dans le vecteur d'observations qui correspond aux paramètres de la droite estimée.

Dans ces deux catégories, plusieurs filtres de Kalman sont proposés. D'abord, les mesures projetées sont incorporées par un filtre de Kalman étendu. Puis, le filtre est simplifié en un filtre de Kalman classique, de complexité algorithmique inférieure, en transformant les mesures projetées en coordonnées cartésiennes. Ensuite, la contrainte relaxée de la transformée de Hough est ajoutée au vecteur des observations d'un filtre de Kalman étendu. Finalement, puisque le filtre de Kalman non parfumé est de même complexité, mais offre des performances supérieures pour les non-linéarités, ce dernier est également employé conjointement avec la contrainte de la transformée de Hough.

L'ajout d'une zone morte sur l'innovation est également introduit afin de considérer un bruit de position angulaire uniforme dans un élément lidar. Finalement, l'évaluation et l'initialisation des matrices de covariances sont abordées.

Dans le prochain chapitre, les filtres de Kalman étendu et classique avec projection ainsi que le filtre de Kalman non parfumé avec contrainte relaxée sont testés en simulation et comparés avec les filtres de Kalman étendu et non parfumé ordinaires. L'effet de la zone morte sur l'innovation est également analysé.

Chapitre 5

Résultats pour cible de taille piéton

Dans ce chapitre, les différents filtres de Kalman proposés sont testés en simulation et avec des données expérimentales. Les filtres évalués sont les filtres de Kalman étendu et classique avec projection des mesures (EKF_H , KF_H) ainsi que le filtre de Kalman non parfumé dont le vecteur d'observations a été augmenté par une contrainte de trajectoire (UKF_H). L'effet de la zone morte sur l'innovation est également analysé pour le filtre UKF_H et pour les filtres de Kalman étendu (EKF) et non parfumé (UKF) sans transformée de Hough.

D'abord, des résultats sur des données expérimentales sont présentées afin de montrer l'allure générale du pistage, la vérité-terrain n'étant pas assez précise pour évaluer et comparer les performances des algorithmes. Ces données expérimentales permettent aussi de confirmer les résultats de simulation avec un système réel.

Ainsi, des simulations sont par la suite analysées afin d'évaluer et de comparer la précision des algorithmes proposés pour des trajectoires rectilignes.

5.1 Paramètres

Pour les données expérimentales et pour les simulations, les paramètres utilisés pour le calcul de la transformée de Hough sont ceux décrits dans le tableau 3.2 et l'initialisation des filtres de Kalman ainsi que les valeurs des matrices de covariances sont faites tel qu'expliqué dans les sections 4.9 et 4.10.

Les coefficients pour la génération des points sigma dans les filtres de Kalman non parfumés sont les suivants : $\alpha = 0.001$, $\beta = 2$ et $\kappa = 0$ [11].

5.2 Données expérimentales

Dans cette section, quelques séquences réelles d'acquisition avec un système lidar sont présentées. Les données du lidar sont traitées par la suite avec les filtres de Kalman proposés : KF_H

(projection des mesures) et UKF_H (ajout d'une contrainte dans le vecteur des observations). En référence, ces résultats sont comparés avec ceux des filtres de Kalman étendu et non parfumé de référence, soit sans transformée de Hough ni zone morte. L'objectif de cette section est de valider les filtres proposés avec des données réelles. L'évaluation de la performance est plutôt faite dans la prochaine section.

Les mesures expérimentales sont prises avec un système lidar possédant la configuration suivante : $N = 16$ éléments, $\Delta\phi = 2.8^\circ$ pour chaque élément et les trames sont acquises à une fréquence de 50 Hz. Il s'agit d'un lidar disponible qui n'est pas celui finalement déployé par notre partenaire industriel. En simulation, davantage de configurations sont testées, notamment la configuration souhaitée, avec des éléments plus larges, est analysée en détail.

Comme la vitesse et position réelles de la cible ne sont pas connues, seulement l'allure de la trajectoire filtrée est comparée avec celle mesurée. L'évaluation de la précision sur l'estimation de la position et de la vitesse est plutôt évaluée dans la prochaine section. Ici, deux situations sont présentées : une trajectoire rectiligne traversant tous les éléments du lidar (comme un piéton qui traverse une intersection) et une trajectoire courbe.

À la figure 5.1, un piéton traverse en diagonale devant le lidar. À la figure 5.2, le piéton traverse en effectuant plutôt un arc de cercle. Aux trois instants illustrés pour les deux situations, la droite estimée par la transformée de Hough, ainsi que les positions et vecteurs vitesses estimés par les filtres de Kalman sont montrés. Il est possible de remarquer que, malgré la courbure de la trajectoire dans la figure 5.2, l'estimation de la droite par la transformée de Hough réussit à suivre la tangente aux mesures les plus récentes (considérant une incertitude de la largeur d'un élément sur les mesures angulaires).

5.3 Simulations de trajectoires rectilignes

Dans cette section, les filtres de Kalman proposés (EKF_H , KF_H et UKF_H) sont évalués selon la précision de l'estimation pour différentes configurations lidars et différentes trajectoires rectilignes. Pour ce faire, des trajectoires rectilignes sont simulées dans Matlab, de la même façon que présentée dans la section 3.4.2.

L'évaluation de la performance des filtres proposés se base sur la précision de l'estimation des états suivants :

- la position radiale ;
- la position angulaire ;
- la direction de la vitesse ;
- le module de la vitesse.

Les états estimés par les filtres proposés sont cependant en coordonnées cartésiennes tel que discuté précédemment, et convertis par après. Le choix de représenter l'erreur en coordonnées

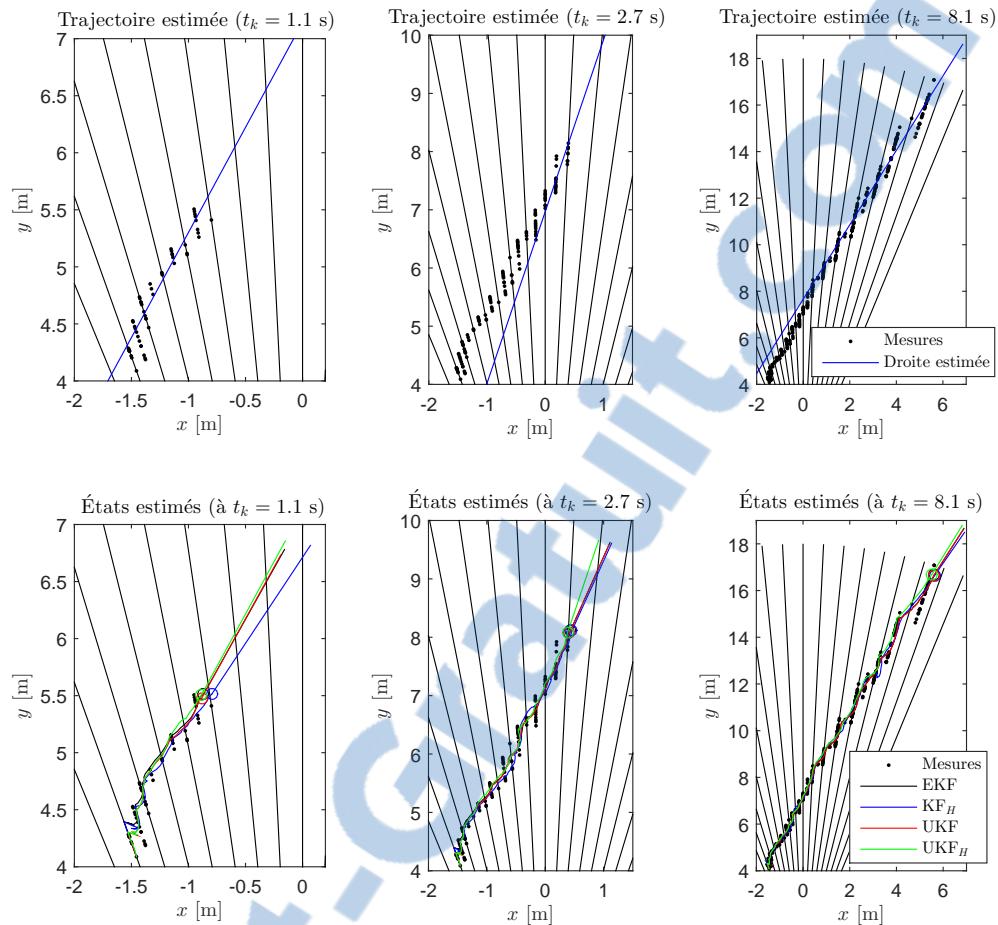


FIGURE 5.1 – Données expérimentales d'un piéton se déplaçant en ligne droite devant le lidar. Illustration de la trajectoire estimée par la transformée de Hough et des états estimés par les filtres de Kalman à trois instants différents.

polaires plutôt que cartésiennes est motivé par la facilité de visualisation pour un lecteur. Aussi, il est plus facile de comparer ces résultats avec les caractéristiques géométriques initiales du lidar.

L'évaluation de la précision se fait en calculant l'erreur quadratique moyenne sur le paramètre observé par rapport à la valeur exacte. La position exacte de la cible correspond à son centre de masse.

5.3.1 Résultats pour différentes configurations lidars

Les courbes d'erreurs quadratiques moyennes présentées dans cette section sont moyennées pour 18^2 trajectoires rectilignes différentes pour une cible de taille $0.5 \text{ m} \times 0.25 \text{ m}$. La cible

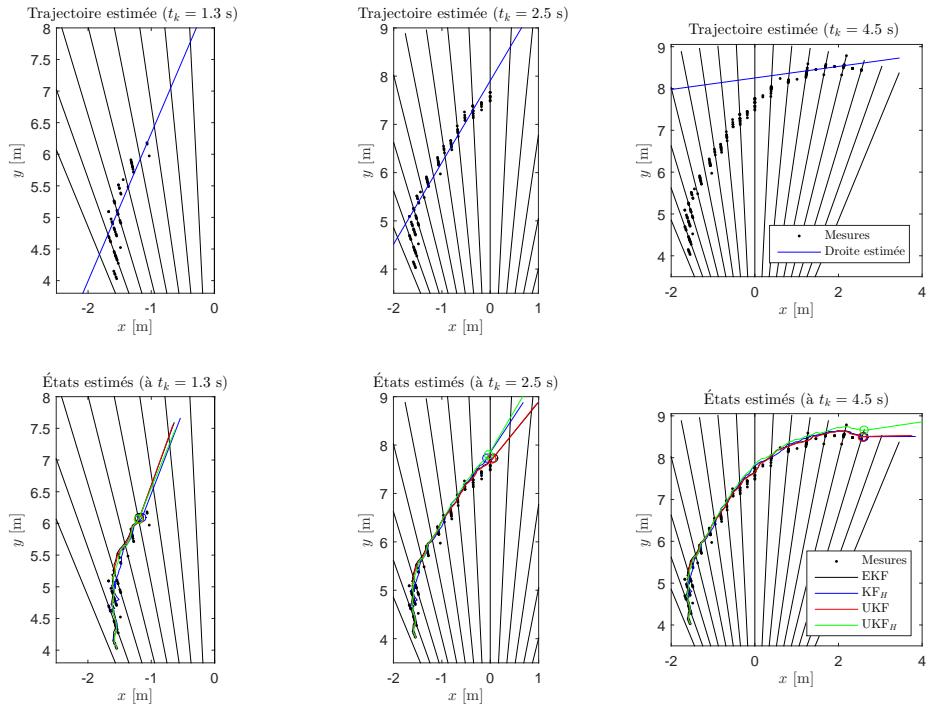


FIGURE 5.2 – Données expérimentales d'un piéton se déplaçant en arc de cercle devant le lidar. Illustration de la trajectoire estimée par la transformée de Hough et des états estimés par les filtres de Kalman à trois instants différents.

traverse tous les éléments et les points d'entrée et de sortie de la cible dans le lidar sont situés à des distances variant par bonds de 5 m entre 10 et 100 m du lidar. La vitesse relative de la cible est constante et fixée à 36 km/h et un bruit d'écart-type de 0.1 m est ajouté à la position radiale mesurée.

Les filtres de Kalman comparés sont les suivants : étendu sans modification (EKF), non parfumé sans modification (UKF), étendu avec mesures projetées (EKF_H , 4.4), classique avec mesures projetées (KF_H , 4.5) et non parfumé avec contrainte dans le vecteur d'état (UKF_H , 4.7).

Pour la traversée des deux premiers éléments, l'estimation de la trajectoire par la transformée de Hough n'est pas utilisée, car l'erreur, due à l'incertitude sur la position angulaire, est très importante.

La première configuration lidar testée est la même que pour les mesures expérimentales : soit $N = 16$ éléments avec un champ de vue de $\Delta\phi = 2.8^\circ$ chacun. Pour ce qui est de l'estimation de la position radiale et angulaire, les filtres de Kalman non parfumés, que ce soit avec ou sans transformée de Hough, donnent une erreur inférieure aux autres en raison de l'approximation

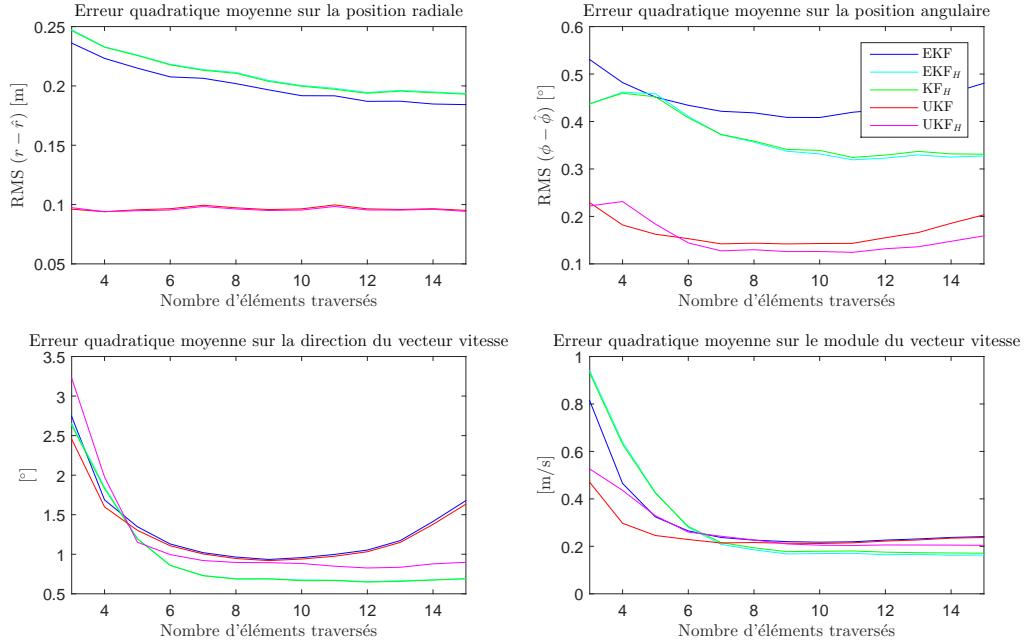


FIGURE 5.3 – Erreur quadratique des états estimés moyennée pour toutes les trajectoires rectilignes testées (cible $0.5 \text{ m} \times 0.25 \text{ m}$). Pour la configuration lidar $N = 16$ et $\Delta\phi = 2.8^\circ$.

par la série de Taylor qui est d'ordre supérieur pour le non parfumé.

Pour cette configuration lidar, comme chaque élément a un champ de vue de 2.8° seulement, le gain de l'utilisation de la transformée de Hough est faible. La position angulaire est déjà estimée avec une erreur inférieure au degré, quel que soit le filtre utilisé.

Le gain le plus important observé est celui sur l'estimation de la direction de la cible (orientation de son vecteur vitesse) : dans les derniers éléments, un gain sur l'erreur de presque 1° en moyenne est observé entre les filtres de référence (EKF, UKF) et les filtres avec mesures projetées (EKF_H, KF_H).

Une observation importante à faire est que pour les filtres de référence, l'erreur quadratique sur la direction augmente en moyenne lors de la traversée des derniers éléments. Cela est dû aux situations où la trajectoire commence près du lidar et se termine à une distance plus importante ($r_1 < r_N$) : à la fin, les mesures demeurent longtemps dans les mêmes éléments. Alors que les filtres avec transformée de Hough ont déterminé avec certitude la trajectoire de la cible, les filtres de référence se fient uniquement aux mesures du lidar qui, lorsque la cible s'éloigne, sont de moins en moins précises. Ces situations sont discutées et représentées plus en détail dans la prochaine section.

La seconde configuration lidar évaluée est composée de 8 éléments avec un champ de vue de $\Delta\phi = 5^\circ$ chacun. Pour cette configuration, étant donné l'incertitude sur la mesure angulaire

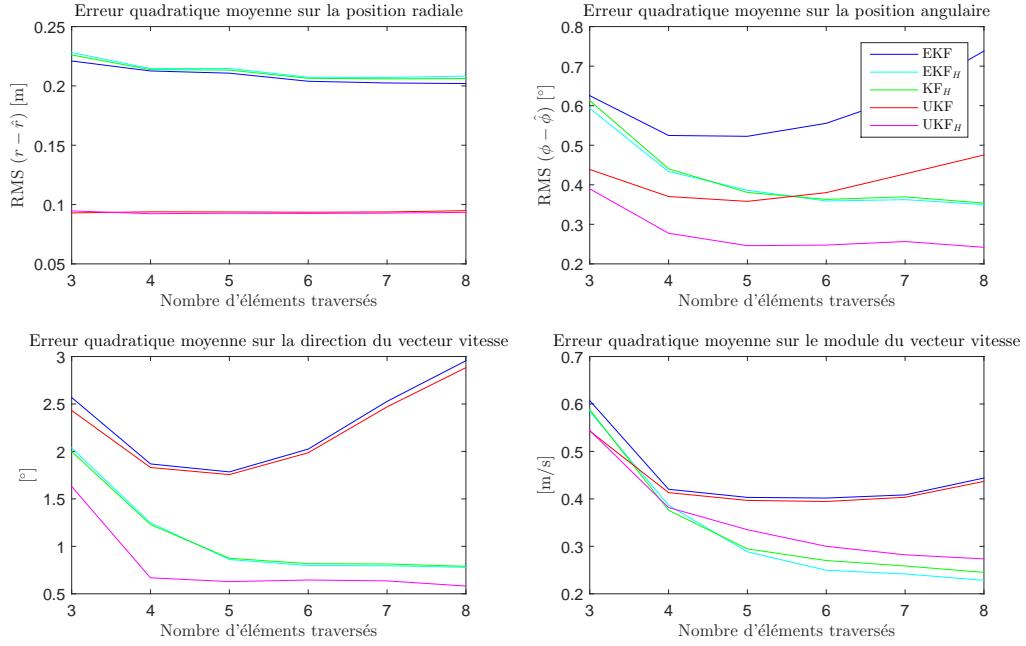


FIGURE 5.4 – Erreur quadratique des états estimés moyennée pour toutes les trajectoires rectilignes testées (cible $0.5 \text{ m} \times 0.25 \text{ m}$). Pour la configuration lidar $N = 8$ et $\Delta\phi = 5^\circ$.

qui est plus élevée, le gain entre les filtres proposés et ceux de référence est plus important. Notamment, pour le filtre UKF_H , l'erreur quadratique moyenne sur la direction, après 3 éléments traversés, est de moins de 1° , alors que ceux de référence augmentent au fil du temps de 2 à 3° .

Finalement, la dernière configuration lidar testée est celle à 9 éléments avec un champ de vue de $\Delta\phi = 10^\circ$ pour chaque élément. On peut remarquer en comparant avec les autres configurations testées que le gain lié à l'utilisation de la transformée de Hough augmente lorsque l'incertitude sur la mesure angulaire augmente. Pourtant, à la section 3.4.2, il est vu que les performances de la transformée de Hough restent similaires entre ces configurations lidars. Il s'agit plutôt de la performance du filtre de Kalman (étendu ou non parfumé) qui se dégrade lorsque l'incertitude, ou le bruit uniforme par rapport au bruit gaussien, sur la mesure angulaire augmente. Dans cette configuration, soit celle visée pour le déploiement du lidar de notre partenaire industriel, l'erreur quadratique moyenne sur tous les états est inférieure (ou égale en \hat{r}) pour le filtre UKF_H . De plus, il est vu dans la prochaine section, que les performances du filtre UKF_H sont plus égales selon toutes les trajectoires également, alors que les performances des autres filtres varient selon le rapport entre r_1 et r_N .

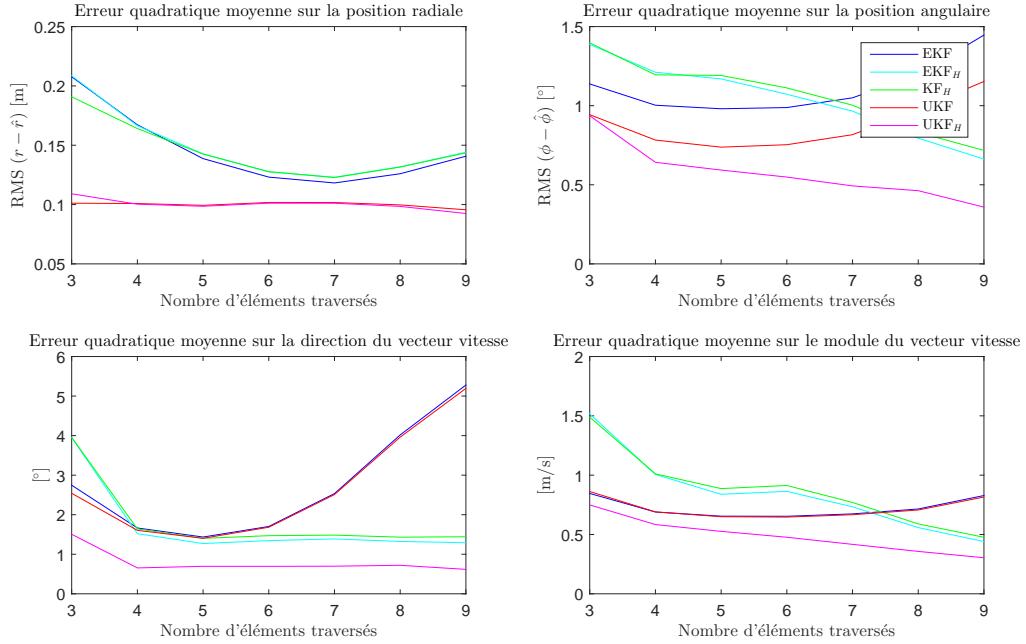


FIGURE 5.5 – Erreur quadratique des états estimés moyennée pour toutes les trajectoires rectilignes testées (cible $0.5 \text{ m} \times 0.25 \text{ m}$). Pour la configuration lidar $N = 9$ et $\Delta\phi = 10^\circ$.

5.3.2 Résultats pour différentes trajectoires

Dans cette section, les résultats sont analysés en fonction de la trajectoire de la cible, et ce pour une seule configuration lidar, soit celle visée par le partenaire industriel. Il s'agit de celle avec des éléments dont le champ de vue est de $\Delta\phi = 10^\circ$.

Les figures présentées dans cette sous-section illustrent, pour 280^2 trajectoires rectilignes uniformes différentes, l'erreur quadratique moyennée pendant que le centre de masse de la cible traverse un élément lidar. La cible traverse tous les éléments du lidar et les points d'entrée (r_1) et de sortie (r_9) de la cible dans le lidar sont situés à des distances variant par bonds de 0.5 m entre 10 et 150 m du lidar. La vitesse relative de la cible est fixée à 36 km/h et un bruit d'écart-type de 0.1 m est ajouté à la position radiale mesurée, comme à la sous-section précédente.

Les filtres de Kalman comparés sont les suivants : étendu sans modification (EKF), étendu avec zone morte (EKF_{dz}), non parfumé sans modification (UKF), non parfumé avec zone morte (UKF_{dz}), étendu avec mesures projetées (EKF_H , 4.4), classique avec mesures projetées (KF_H , 4.5), non parfumé avec contrainte dans le vecteur d'état (UKF_H , 4.7) et non parfumé avec contrainte dans le vecteur d'état et zone morte ($\text{UKF}_{H,dz}$).

Avant les trois premiers changements d'éléments, l'estimation de la trajectoire par la transformée de Hough (paramètres de distance ρ et de direction θ) ainsi que la zone morte sur

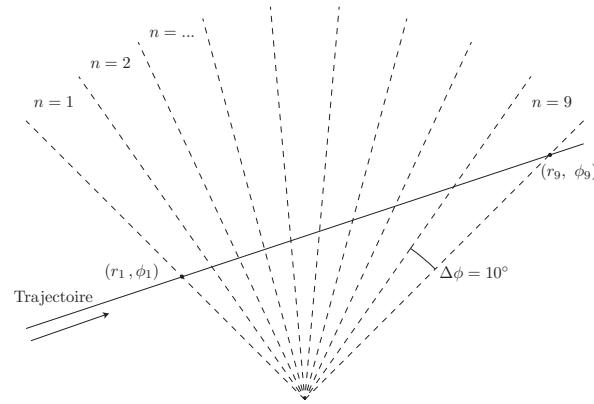


FIGURE 5.6 – Schéma des paramètres utilisés pour la simulation des trajectoires rectilignes.

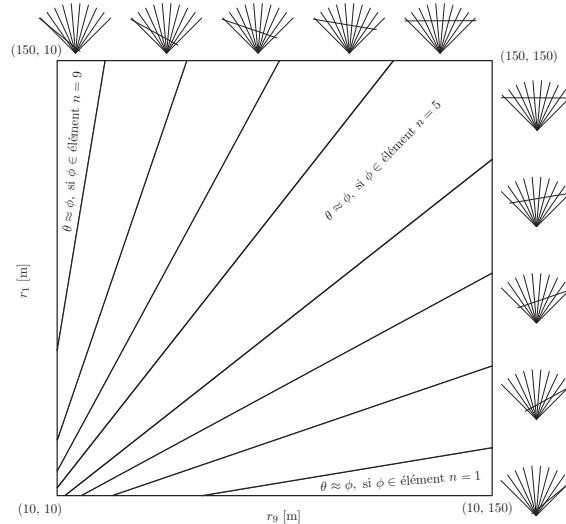


FIGURE 5.7 – Représentation de la structure de la matrice des résultats résumant toutes les trajectoires simulées.

l'innovation ne sont pas utilisées, car l'erreur sur l'estimation de la trajectoire est très importante et la zone morte augmente l'erreur lorsqu'elle est utilisée dès le début.

Un exemple de trajectoire est illustré à la figure 5.6 et la structure de la matrice des résultats, qui résume pour toutes les trajectoires, est représentée à la figure 5.7. Les zones où $\theta \approx \phi$, qui sont problématiques pour la projection des mesures (EKF_H et KF_H) sont mises en évidence. Ainsi, dans la matrice des résultats pour l'élément n , les filtres utilisant la projection devraient avoir une erreur plus grande dans la région $\theta \approx \phi$ où ϕ est un angle correspondant à l'élément n . Par exemple, pour l'intervalle de temps où la cible traverse le 5^e élément lidar, l'erreur pour les filtres avec projection devrait être plus importante autour de la diagonale principale.

La figure 5.8 illustre l'erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la position radiale lorsque la cible traverse le dernier élément lidar. Il est alors évident que les filtres de Kalman

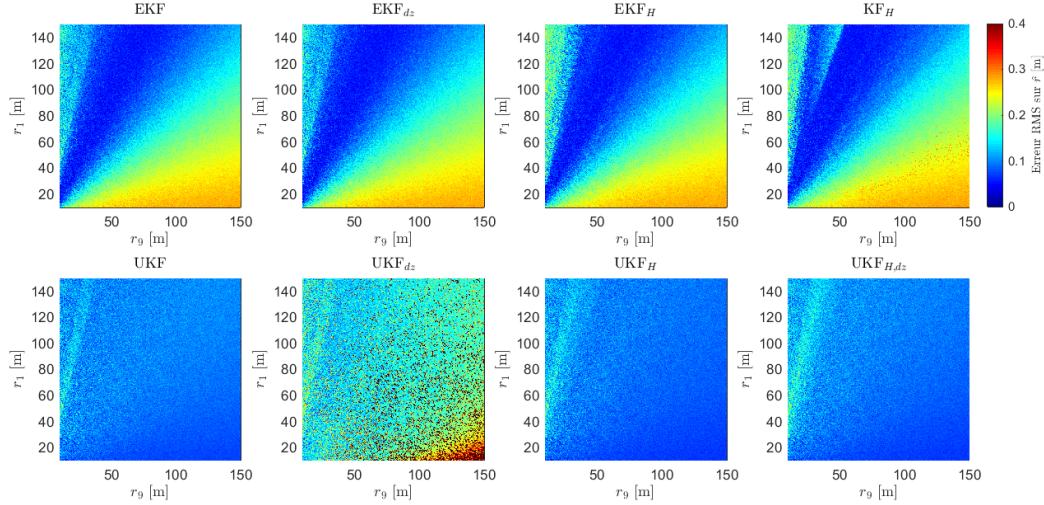


FIGURE 5.8 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la position radiale pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 9$ du lidar).

de type UKF (avec et sans transformée de Hough) sont plus performants, et leur performance est plus égale selon les trajectoires, que les filtres EKF ou KF. Cela peut être expliqué par la non-linéarité de la fonction $h(\cdot)$ qui transforme les états prédicts en mesures en coordonnées polaires : le filtre de Kalman non parfumé fait une approximation d'ordre supérieure que le filtre étendu. Même si l'échantillonnage est rapide (la cible se déplace peu entre deux mesures), on voit que la différence entre le UKF et le EKF s'accentue dans les zones où le bruit sur les mesures est plus élevé¹. Le filtre de Kalman classique KF_H fait également une approximation de la densité de probabilité qui réduit la géométrie polaire en cartésienne.

Aussi, il est possible de voir que l'erreur est plus importante et inégale pour le filtre UKF_{dz} (avec zone morte). Il est préférable d'avoir une erreur dont l'ordre de grandeur est connu, soit un filtre dont le résultat est prédictible, surtout lorsque la sortie de ce filtre est une information utilisée pour la détection de collisions sur la route. Dans le cas du filtre UKF_{dz} , l'erreur sur l'estimation de la position radiale de la cible serait difficile à prévoir, car elle varie beaucoup selon les trajectoires, et cela, sans tendance apparente (voir la variation d'intensité aléatoire pour des pixels adjacents dans le graphique UKF_{dz} de la figure 5.8).

La figure 5.9 représente l'erreur quadratique moyenne pour l'estimation de la position angulaire lorsque la cible traverse l'élément $n = 4$. Pareillement, la figure 5.9 montre cette erreur quadratique moyenne lorsque la cible traverse le dernier élément.

Les graphiques concernant les filtres EKF_H et KF_H démontrent que l'erreur est effectivement plus importante dans la zone $\theta \approx \phi$, en raison de la méthode de projection des mesures qui y

1. C'est-à-dire lorsque la cible est loin du lidar (grande incertitude angulaire) et lorsque l'estimation de Hough est moins bonne ($r \approx \rho$ ou $\theta \approx \phi$).

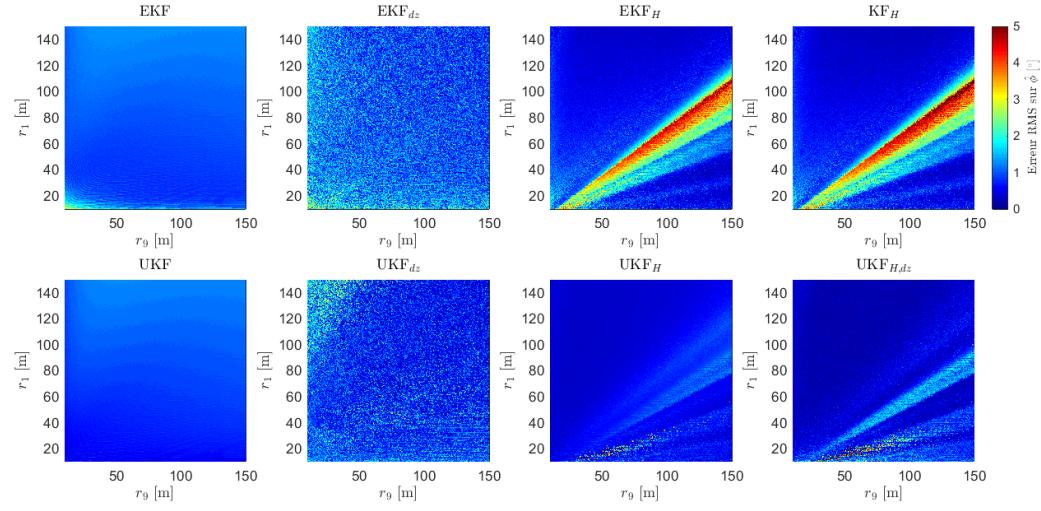


FIGURE 5.9 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la position angulaire pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 4$ du lidar).

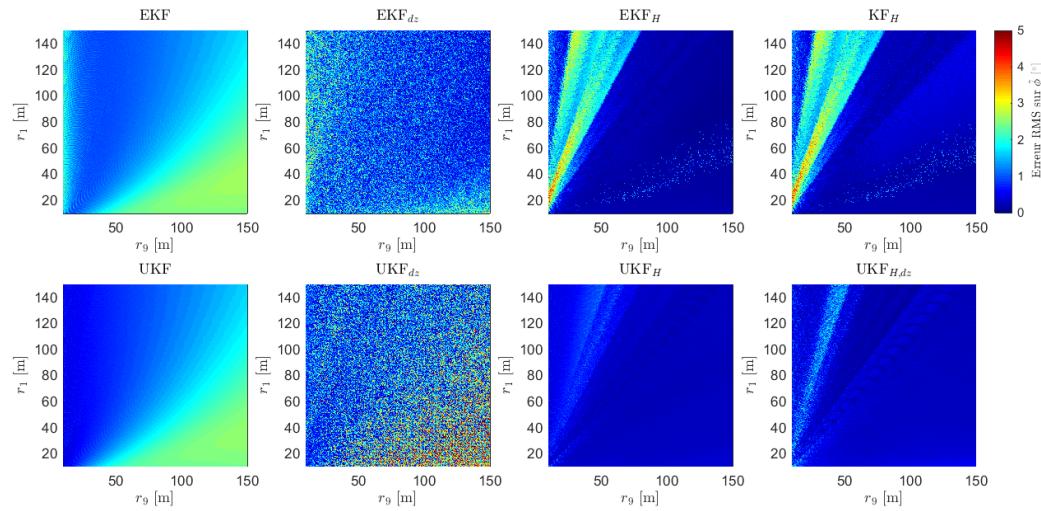


FIGURE 5.10 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la position angulaire pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 9$ du lidar).

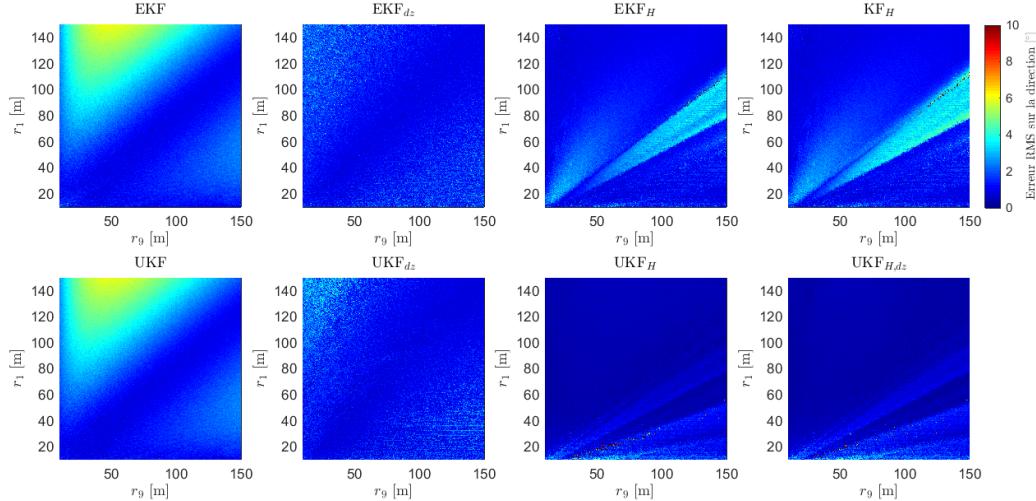


FIGURE 5.11 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la direction du vecteur vitesse pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 4$ du lidar).

est inefficace comme discuté dans la section 4.2.1. En dehors de cette zone, l'erreur quadratique moyenne est toutefois inférieure à celle des filtres de référence EKF et UKF. Ce problème est beaucoup moins présent pour le filtre UKF_H .

En comparant les deux figures 5.9 et 5.10 pour les filtres de référence, l'augmentation de l'erreur dans les derniers éléments lorsque la cible s'éloigne du lidar devient évidente. Il s'agit des trajectoires dans le triangle inférieur de la matrice des résultats (séparé par la diagonale principale $r_1 = r_9$), où $r_1 < r_9$. Pour les filtres proposés, cette augmentation globale de l'erreur quadratique moyenne n'existe pas.

Comme pour la position radiale, les résultats pour les filtres avec zone mortes donnent des résultats très variables d'une trajectoire à l'autre, même pour des trajectoires similaires (pixels adjacents).

C'est plutôt dans les figures 5.11 et 5.12 concernant la direction du vecteur de vitesse estimé que l'on voit l'effet positif de la zone morte. La réduction de l'erreur dans les zones où l'erreur est importante pour les filtres de référence est alors évidente. Cependant, même pour ces états, le filtre non parfumé avec transformée de Hough (UKF_H) présente une erreur inférieure.

Il est d'ailleurs très intéressant de remarquer que le filtre UKF_H présente ses meilleures performances surtout dans la zone où les filtres de Kalman de référence sont les moins performants. En pratique, cela correspond à la situation où la cible est à mi-parcours et qu'elle s'approche du lidar en traversant les capteurs (voir la trajectoire à la figure 5.14 et sa variation de la vitesse estimée à la figure 5.15) ; ou encore à la situation où la cible est à la fin de son parcours dans le lidar et qu'elle s'éloigne du lidar (voir la position estimée à la figure 5.13). En fait,

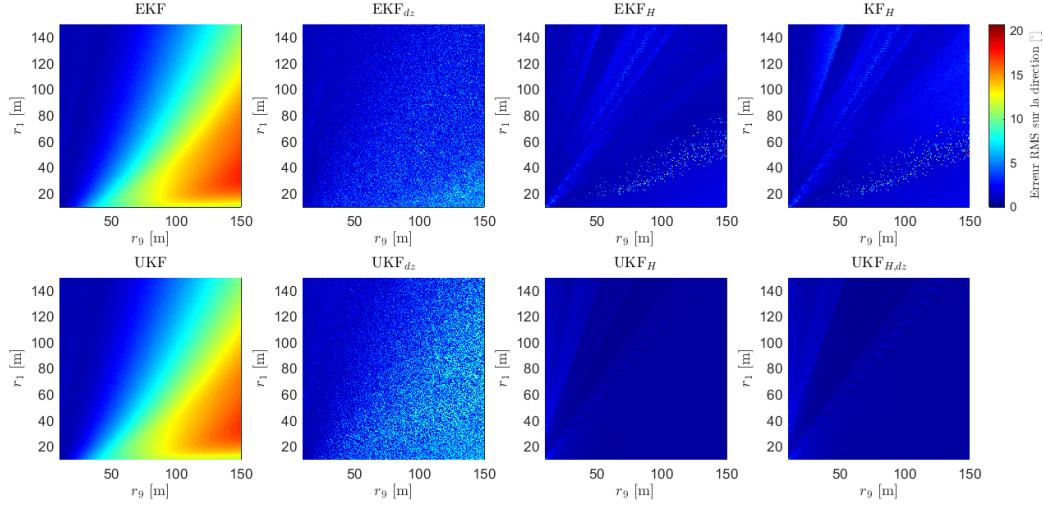


FIGURE 5.12 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation de la direction du vecteur vitesse pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 9$ du lidar).

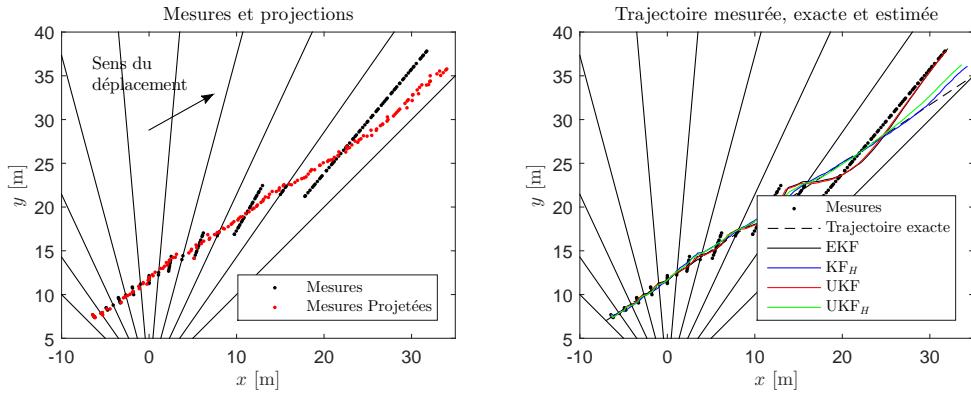


FIGURE 5.13 – Exemple de situation où le filtre de Kalman avec transformée de Hough est particulièrement plus performant (au dernier élément de droite du lidar).

les filtres de référence performent bien lorsque la cible traverse plusieurs éléments en peu de mesures, car ils n'ont pas le temps de converger sur des mesures angulaires stationnaires.

Pour que le filtre de référence se fie moins aux mesures, il faudrait diminuer la matrice de covariance du modèle (\mathbf{Q}). Cependant, garder un équilibre entre le poids des mesures et du modèle est important : si la cible effectue un changement de direction rapide ou une accélération importante, seulement les mesures en témoignent.

L'avantage de la transformée de Hough est qu'elle estime la meilleure droite correspondant à la trajectoire en prenant en compte l'incertitude sur la position angulaire des mesures. Cette estimation est faite en se limitant aux droites passant par la mesure actuelle et elle s'approche du maximum de vraisemblance. De plus, la transformée de Hough n'est pas affectée

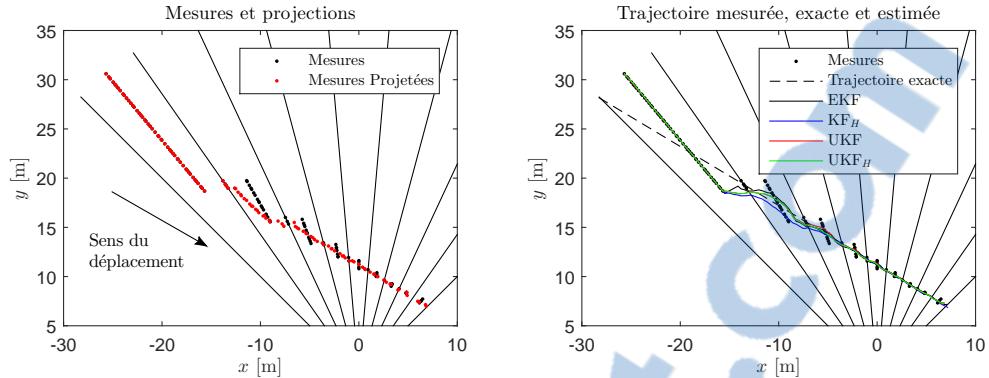


FIGURE 5.14 – Exemple de situation où le filtre de Kalman avec transformée de Hough est particulièrement plus performant (au centre du lidar).

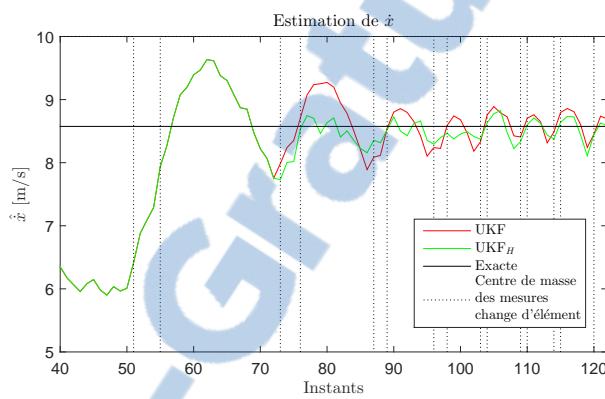


FIGURE 5.15 – Vitesse en x estimée en fonction du temps pour les filtres UKF et UKF_H. Les instants où la moyenne de la position angulaire des mesures change sont indiqués en pointillés. Trajectoire illustrée à la figure 5.14.

par l'accélération de la cible : elle ne considère que la trace des mesures dans le lidar. Ainsi, le pire résultat possible, soit lorsque la cible effectue un changement de direction avec un rayon de courbure très petit, est d'être trop conservateur sur le changement de direction. La contrainte ajoutée dans le vecteur des observations respecte néanmoins la mesure actuelle. En fait, tel que vu à la figure 3.25, l'estimation faite par la transformée de Hough pour une trajectoire courbe pourrait être tout à fait exacte étant donné l'incertitude sur la mesure de position angulaire.

Pour ce qui est du module de la vitesse aux figures 5.16 et 5.17, les filtres de Kalman de référence (EKF, UKF) présentent une erreur augmentant en fonction de la distance de la cible par rapport au lidar. La zone morte ainsi que le filtre UKF_H, comme pour la direction, améliorent grandement l'estimation du module de la vitesse. Cependant, dans l'élément $n = 4$, il est possible de remarquer pour le filtre UKF_H une zone où la performance varie beaucoup. Cette variation est due à l'estimation de ρ et θ qui est mauvaise dans cette zone pendant le

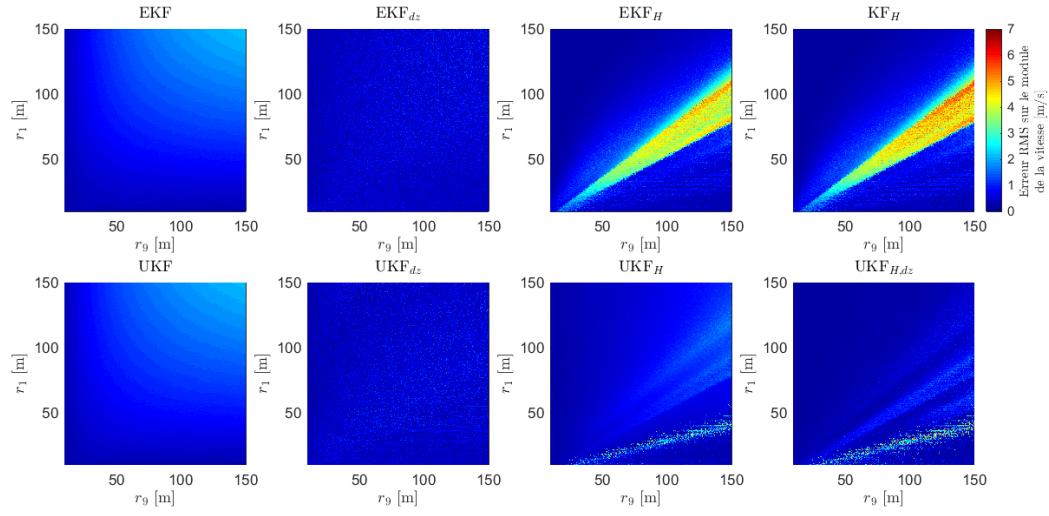


FIGURE 5.16 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation du module du vecteur vitesse pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 4$ du lidar).

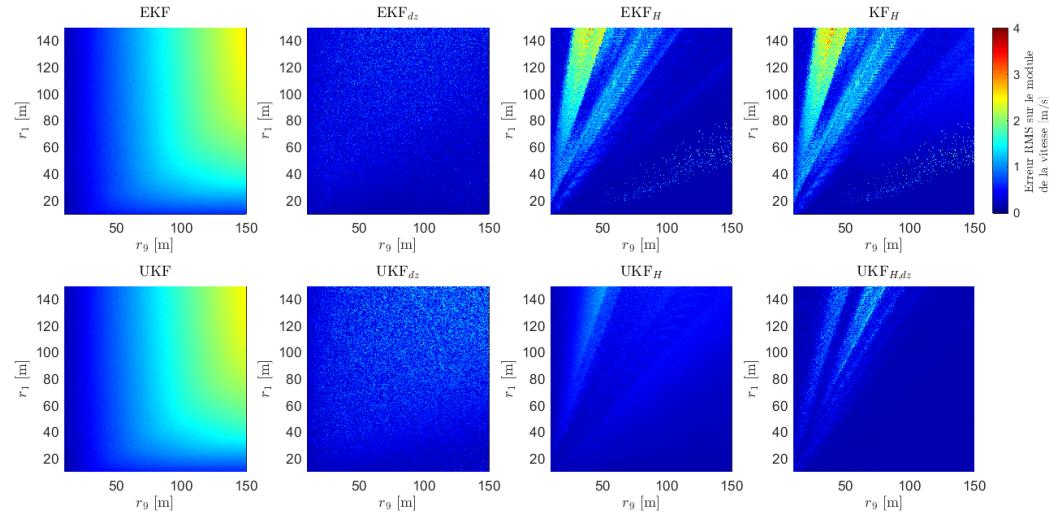


FIGURE 5.17 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation du module du vecteur vitesse pour les huit filtres testés (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 9$ du lidar).

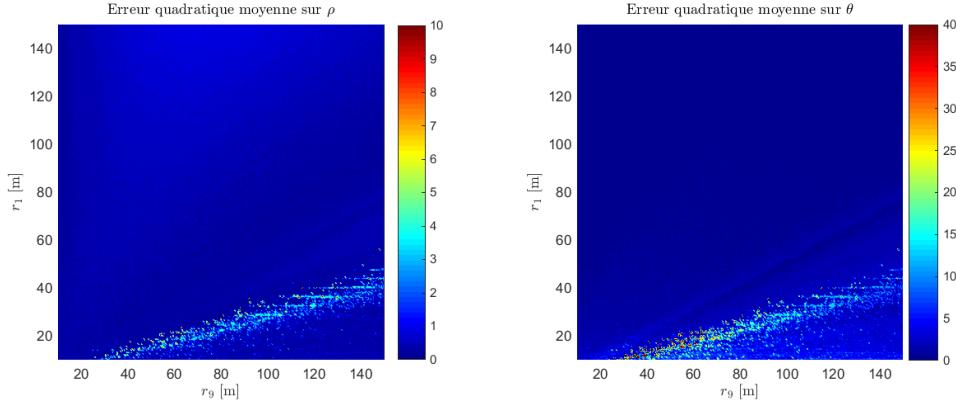


FIGURE 5.18 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de la trajectoire par transformée de Hough (moyennée pendant que la cible traverse l'élément $n = 3$ du lidar). L'erreur sur le paramètre θ est exprimée en degrés et celle sur le paramètre ρ en mètres.

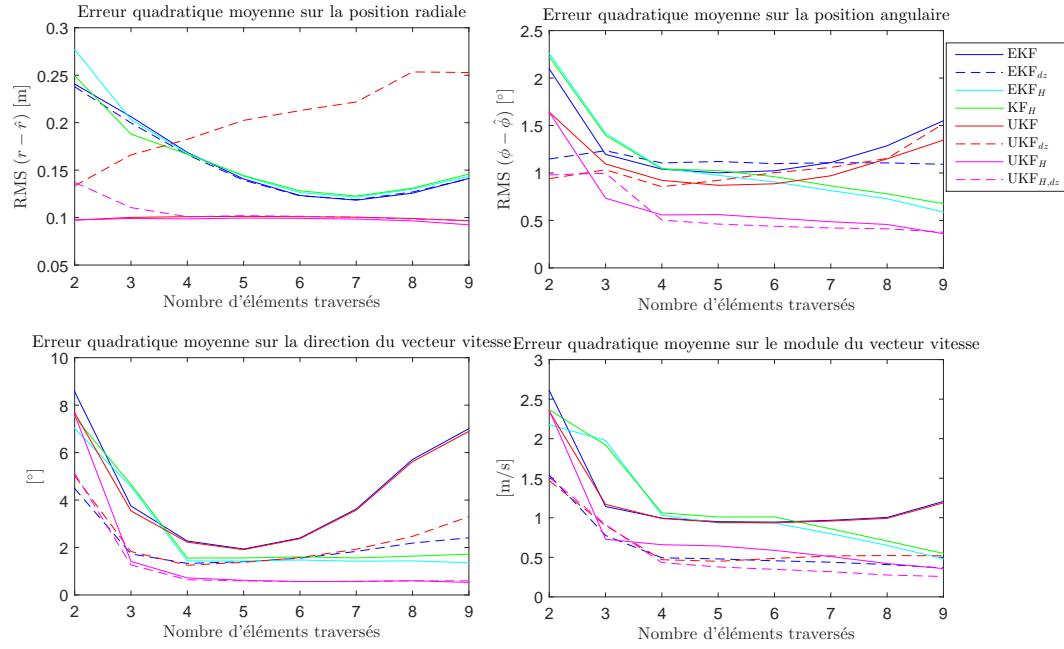


FIGURE 5.19 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation des états de la cible en fonction du nombre d'éléments traversés et pour l'ensemble des filtres testés.

passage de la cible dans l'élément précédent $n = 3$ (voir 5.18). Cette mauvaise estimation est due à l'ambiguïté entre deux régions maximales dans la matrice des votes de la transformée de Hough. Cette ambiguïté disparaît pour l'estimation de la trajectoire dans l'élément $n = 4$ et pour l'estimation des états dans les éléments suivants $n = 4$.

Les courbes en fonction du nombre d'éléments traversés moyennées pour toutes les trajectoires sont illustrées à la figure 5.19.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les filtres proposés sont testés pour le pistage de piétons avec des données expérimentales ainsi que des simulations. Les données expérimentales permettent de voir comment la transformée de Hough et les filtres de Kalman se comportent pour une trajectoire rectiligne et une trajectoire courbe. La transformée de Hough semble bien estimer la tangente à la trajectoire même si cette dernière varie au fil du temps (comme pour une trajectoire courbe). Il est aussi possible d'observer que la transformée priorise les mesures récentes dans l'estimation de la tangente.

Les simulations permettent de conclure que le filtre de Kalman non parfumé dont le vecteur d'observation est augmenté par la droite estimée, UKF_H , est celui qui présente les meilleures performances pour des trajectoires rectilignes. De plus, il est celui dont les performances sont les plus constantes (similaires pour toutes les trajectoires testées) et produit même ses meilleurs résultats dans les conditions où les filtres de référence, EKF et UKF ordinaires, sont les moins bons. Alors que l'erreur sur l'estimation de la position angulaire et de la direction pour les filtres ordinaires augmente lorsque la cible s'éloigne, celle du filtre UKF_H demeure constante et inférieure. Le module de la vitesse est également affecté par la distance de la cible pour les filtres ordinaires, ce qui n'est pas le cas pour le filtre UKF_H .

Pour ce qui est de la zone morte, même si en moyenne elle semble aider l'estimation de la vitesse, elle produit des résultats très variables et difficiles à prévoir.

Dans le prochain chapitre, les filtres de Kalman sont testés pour le pistage de cibles de la taille de voitures.

Chapitre 6

Résultats pour cible de taille voiture

Ce chapitre se concentre sur l'évaluation de la performance des filtres de Kalman assistés par transformée de Hough (EKF_H , KF_H et UKF_H) pour des cibles de la taille d'une voiture. Des trajectoires rectilignes et courbes sont analysées.

6.1 Simulations pour trajectoires rectilignes

Cette section étudie la performance des filtres proposés EKF_H , KF_H et UKF_H pour une cible de grande taille et des trajectoires rectilignes. Tel que discuté dans la section 3.4.2, l'erreur sur l'estimation de la trajectoire par la transformée de Hough est plus importante dans les circonstances d'une cible plus grande. Cela est dû en partie au fait que le centre de masse de la cible est décalé du centre de masse des mesures observées par le lidar, qui ne voit que les surfaces des cibles.

Afin de considérer ce décalage, la position exacte de la cible utilisée dans cette section pour évaluer l'erreur est celle du centre de masse des surfaces vues par le lidar. Pour une forme rectangulaire, cela se traduit comme la position moyenne des côtés (un ou deux) les plus rapprochés du lidar.

Les filtres proposés sont comparés entre eux et aux filtres de référence EKF et UKF en terme d'erreur quadratique moyenne sur l'estimation des états (exprimés en r , ϕ , direction et module du vecteur vitesse). Les simulations effectuées pour obtenir les résultats illustrés sont les mêmes que dans le chapitre précédent, sauf pour la taille de la cible rectangulaire qui est fixée à 2.5 m \times 5 m. Les graphiques de l'erreur quadratique moyenne sont moyennés pour 18^2 trajectoires différentes dont le point d'entrée, r_1 et de sortie, r_N , varient par bonds de 5 m entre 10 et 100 m. L'initialisation des filtres de Kalman et la matrice de covariance du procédé sont les mêmes que précédemment.

Encore une fois, la transformée de Hough n'est incorporée dans les filtres de Kalman qu'après la traversée de 2 éléments.

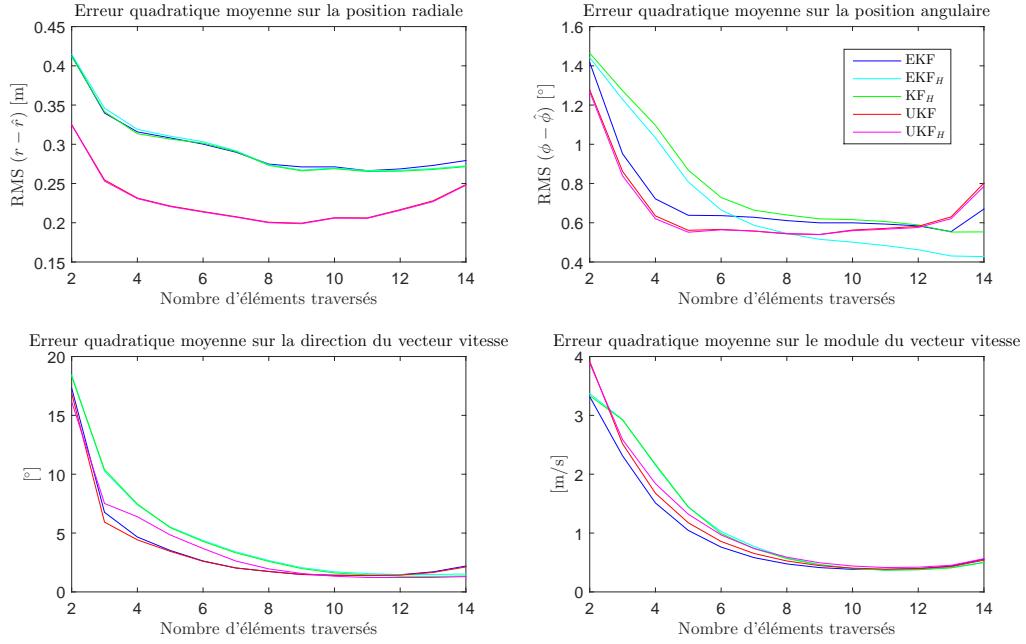


FIGURE 6.1 – Erreur quadratique des états estimés moyennée pour toutes les trajectoires rectilignes testées (cible $2.5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$). Configuration lidar $N = 16$ et $\Delta\phi = 2.8^\circ$.

Trois configurations lidars sont testées, soit celle utilisée pour l’acquisition de données expérimentales ($\Delta\phi = 2.8^\circ$), celle qui sera déployée par le partenaire industriel ($\Delta\phi = 10^\circ$) et une configuration intermédiaire ($\Delta\phi = 5^\circ$).

Pour la configuration du lidar $N = 16$ et $\Delta\phi = 2.8^\circ$ à la figure 6.1, il n’y a pas de gain à l’utilisation de la transformée de Hough. La taille de la cible étant grande et les éléments ayant un petit champ de vue, le bruit uniforme est d’importance moindre par rapport au bruit gaussien sur la position angulaire de la moyenne des mesures. Ainsi, les filtres de Kalman de référence, optimaux pour un bruit gaussien, performent déjà bien.

En augmentant $\Delta\phi$, on augmente l’importance du bruit uniforme par rapport au bruit gaussien sur la mesure de position angulaire. Ainsi, à la figure 6.2, il est possible de remarquer un gain croissant de plusieurs degrés sur l’estimation de la direction du vecteur vitesse dans les derniers éléments du lidar entre le UKF_H comparativement aux filtres de référence.

Pour la figure 6.3, soit celle concernant la configuration lidar qui sera déployée, le gain de l’utilisation du filtre UKF_H par rapport au simple UKF se remarque davantage pour l’estimation de la direction ainsi que pour la position angulaire. Cependant, les autres filtres proposés, soit ceux utilisant la projection des mesures sur la droite estimée, sont moins intéressants. Cela est dû aux mesures qui varient de manière plus importante en r autour de la position exacte lorsqu’une cible de grande taille est observée par un lidar. Comme la projection est calculée

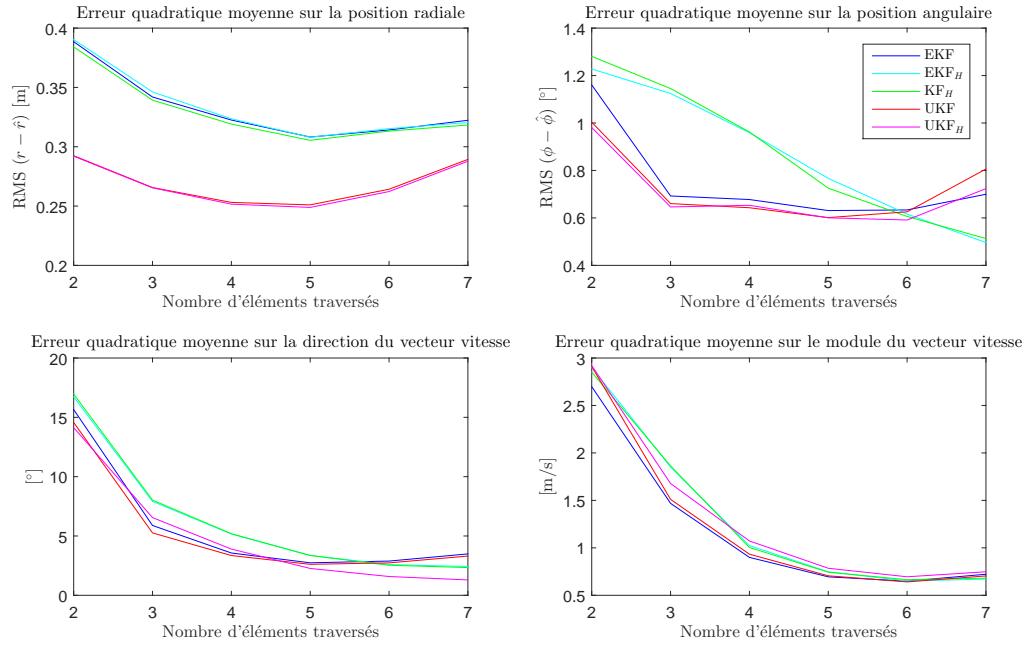


FIGURE 6.2 – Erreur quadratique des états estimés moyennée pour toutes les trajectoires rectilignes testées (cible $2.5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$). Configuration lidar $N = 8$ et $\Delta\phi = 5^\circ$.

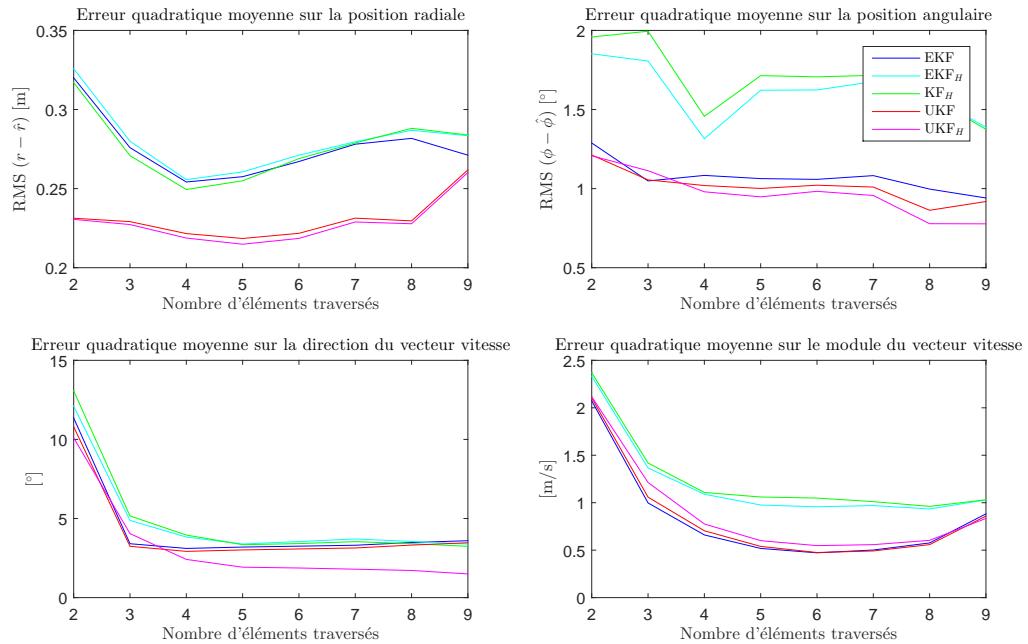


FIGURE 6.3 – Erreur quadratique des états estimés moyennée pour toutes les trajectoires rectilignes testées (cible $2.5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$). Configuration lidar $N = 9$ et $\Delta\phi = 10^\circ$.

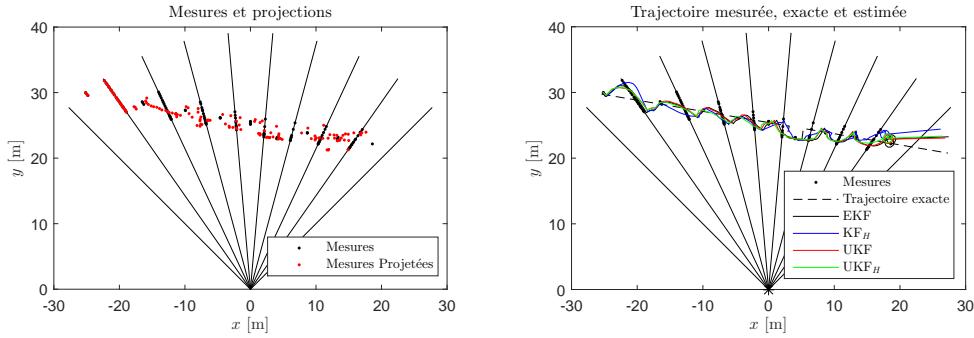


FIGURE 6.4 – Exemple de situation où les filtres de Kalman avec projection des mesures sont peu performants en raison de la propagation de l'erreur sur la mesure projetée.

à partir de la mesure radiale, l'erreur se propage dans la mesure projetée (voir l'exemple à la figure 6.4). L'erreur sur la projection de la mesure angulaire augmente donc avec la taille de la cible (voir figure C.6).

6.2 Simulations pour trajectoires courbes

La présente section s'intéresse à la performance du filtre de Kalman proposé UKF_H pour des trajectoires courbes. Il s'agit des mêmes situations simulées à la section 3.4.3 pour évaluer les performances de la transformée de Hough. La figure 3.21 décrit donc les paramètres des trajectoires étudiées et la figure 3.22 illustre la structure des matrices de résultats.

Les performances du filtre de Kalman UKF_H sont comparées dans la figure 6.5 à celle du filtre de Kalman UKF (de référence). Il s'agit en fait de la différence entre les erreurs quadratiques sur l'estimation des états. Lorsque la différence est positive (jaune vers rouge), le filtre UKF_H possède une erreur quadratique inférieure. Lorsque la différence est négative (jaune vers bleu), le filtre UKF_H possède une erreur quadratique supérieure. Pour les trois premiers changements d'éléments, les deux filtres sont égaux (différence autour de zéro, en jaune), car la transformée de Hough n'est prise en compte qu'après le 2^e changement d'élément (comme dans le chapitre précédent).

Il est possible de remarquer une corrélation entre les zones où l'erreur sur l'estimation de la trajectoire est plus importante à la figure 3.23 et les zones où l'erreur du filtre UKF_H est supérieure (zones vert bleu). En effet, il est attendu que le filtre UKF_H soit moins performant lorsque l'estimation sur les paramètres de trajectoire ρ et θ est moins précise, ce qui est le cas dans ces zones. Cependant, cela est surtout dû aux limites du système : pour cette résolution angulaire, deux trajectoires avec une courbure différente pourraient donner les mêmes mesures lidar. Ainsi, il est difficile d'estimer la bonne courbure en ne connaissant que les positions

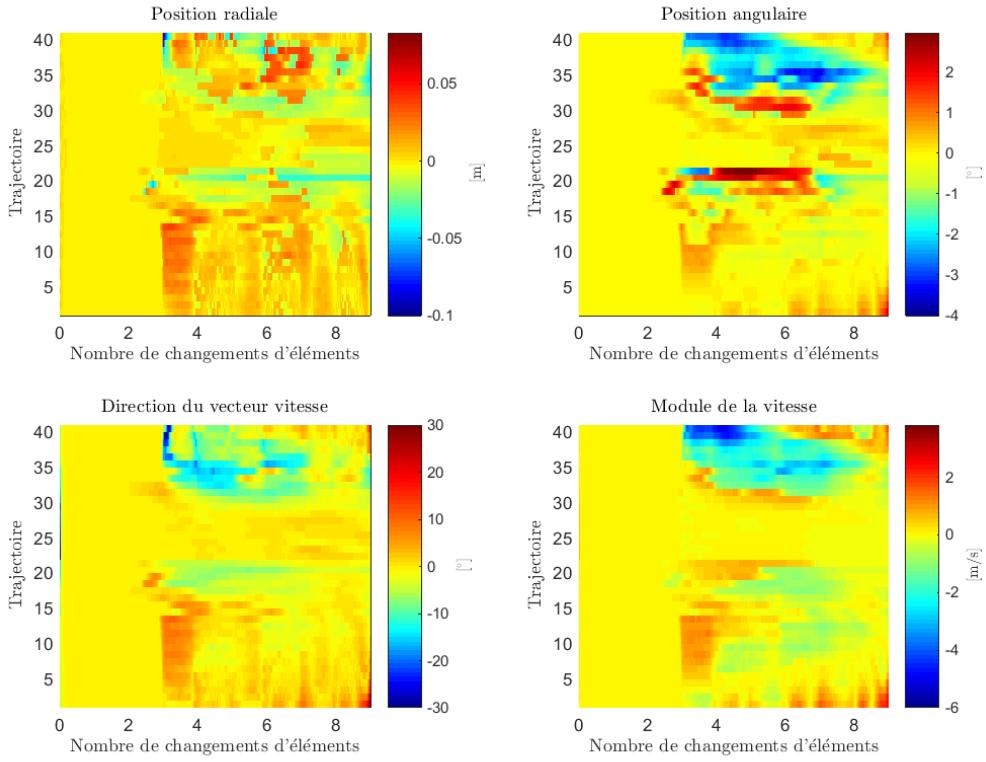


FIGURE 6.5 – Différence $UKF_H - UKF$ de l'erreur quadratique moyenne pour une série de trajectoires courbes en fonction du nombre de changements d'éléments. Voir les figures 3.21 et 3.22 pour une description des trajectoires.

renvoyées par le lidar. La transformée de Hough est cependant conservatrice : elle vise à estimer la droite qui passe par le plus de mesures possible en priorisant les plus récentes (voir l'exemple à la figure 3.25).

Dans les zones où l'erreur sur les paramètres de trajectoire estimés est petite, le filtre UKF_H est cependant meilleur que celui de référence (coins hauts et bas à droite, figure 3.23). Pour les zones où le filtre UKF_H est également meilleur au centre de la matrice de résultats, il s'agit de situations pour lesquelles la cible s'approche du lidar avec une trajectoire dont le rayon de courbure est grand (variation lente des paramètres de trajectoire). Il s'agit également de situations pour lesquelles les mesures représentant la cible restent plus longtemps dans les mêmes éléments. Comme pour les trajectoires rectilignes, ces situations sont mieux gérées par le filtre UKF_H proposé, car sans l'estimation de la trajectoire, le filtre de référence converge vers le centre des mesures qui est immobile en position angulaire.

6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, les filtres de Kalman proposés sont appliqués au pistage de cibles de grande taille et leurs performances dans ces conditions sont étudiées. Des trajectoires rectilignes, pour trois configurations lidars, ainsi que des trajectoires courbes avec accélération et décélération sont simulées.

Il est vu qu'étant donné la taille de la cible, le gain entre l'utilisation des filtres de Kalman ordinaires et ceux développés est moins important que pour une cible de petite taille. Ceci est expliqué par le ratio entre la taille de la cible et le champ de vue des éléments : la cible est moyennée dans un plus grand nombre d'éléments, ce qui diminue l'importance du bruit uniforme par rapport au bruit gaussien sur la mesure angulaire. Néanmoins, le filtre de Kalman UKF assisté par transformée de Hough est tout de même celui qui performe le mieux pour la configuration lidar souhaitée par le partenaire industriel.

Chapitre 7

Conclusion

Ce projet de maîtrise traite la problématique du pistage à une seule cible, ou de l'estimation d'états, pour la technologie lidar à état solide. À la différence des lidars rotatifs, la résolution angulaire des lidars à état solide est pour le moment limitée : les éléments (récepteurs lidar) possèdent un champ de vue de plusieurs degrés. Le défi est donc de considérer un bruit de mesure qui est à la fois gaussien (pour la position radiale) et uniforme (pour la position angulaire) et un système qui est non-linéaire en raison des mesures polaires.

Dans le chapitre 2, une revue de la littérature concernant le pistage pour lidar est faite. Peu d'articles traitent cependant de la problématique reliée à la résolution angulaire des lidars à état solide. Ce survol traite donc aussi les filtres de Kalman classique, étendu et non parfumé. La nécessité d'un bruit gaussien pour le filtre de Kalman est expliquée par deux manières soit par le principe du MSE et du MAP. Puis, les adaptations existantes des filtres pour des mesures qui sont discrétisées et pour l'application de contraintes sur des états sont présentées. Puisqu'elle est utilisée dans ce travail, la transformée de Hough y est également introduite. La PHT, qui fait un rapprochement entre la transformée et le ML, et par extension le MAP, est présentée. La FHT, qui permet de réduire la complexité algorithmique de la transformée, est abordée.

C'est au chapitre 3 que l'adaptation de la transformée de Hough pour la géométrie polaire et la nature du bruit sur les mesures du lidar est développée. La transformée de Hough proposée souhaite s'approcher du MAP comme la PHT. Étant donné que la transformée est l'étape avec la complexité algorithmique la plus importante, des façons de la réduire sont aussi proposées.

Puis, au chapitre 4, plusieurs stratégies d'intégration de la transformée de Hough avec le filtre de Kalman sont présentées. Les deux types de stratégies sont les suivantes : 1) projeter les mesures sur la droite estimée par la transformée de Hough, 2) ajouter une contrainte relaxée de trajectoire dans le vecteur des observations du filtre de Kalman. Pour la projection des mesures, un EKF est d'abord proposé, EKF_H . Il est ensuite simplifié à un filtre de Kalman classique en transformant les mesures en coordonnées cartésiennes, KF_H . La projection des

mesures transforme le bruit uniforme sur la mesure de position angulaire en un bruit gaussien. Par contre, lorsque la mesure actuelle est sur le point le plus rapproché entre la droite de la trajectoire et le lidar, l'erreur sur la mesure projetée augmente significativement. Pour éviter ce problème, un UKF avec contrainte de trajectoire relaxée est élaboré, UKF_H . Une dernière approche est adaptée, soit celle d'appliquer une zone morte sur l'innovation.

Dans le chapitre 5, les trois filtres de Kalman présentés, EKF_H , KF_H et UKF_H sont comparés entre eux et aux filtres EKF et UKF en référence pour une cible de la taille d'un piéton. La technique de la zone morte sur l'innovation est également comparée. Des données expérimentales permettent de vérifier le simulateur et les filtres développés avec un système lidar réel. Des simulations sont utilisées pour évaluer la précision de l'estimation d'états pour de nombreuses trajectoires rectilignes. Il est alors évident que le filtre UKF_H développé est plus performant que les autres filtres développés et de référence. Plus précisément, les améliorations suivantes sont observées par rapport au filtre de référence UKF :

- L'erreur quadratique moyenne de la position angulaire et de la direction de la vitesse est constante, que la cible s'approche ou s'éloigne du lidar. Elle est particulièrement inférieure au filtre de référence lorsque la cible s'éloigne et qu'elle est loin du lidar : dans ces cas, l'erreur d'estimation du filtre UKF augmente, car le filtre converge sur une mesure de position angulaire qui demeure constante.
- L'erreur quadratique moyenne du module de la vitesse est constante, que la cible soit près ou loin du lidar. Celle associée au filtre UKF de référence augmente en fonction de la distance de la cible.

De plus, la performance est similaire pour les deux filtres pour ce qui est de la position radiale. L'erreur quadratique moyenne pour la position radiale est d'ailleurs inférieure à l'écart-type du bruit de mesure et plus constante pour toutes les trajectoires lorsque le filtre non parfumé est utilisé, puisqu'il permet une approximation d'ordre supérieure que le filtre de Kalman étendu.

Le chapitre 6 montre des résultats de simulation pour des cibles de la taille d'une voiture et des trajectoires linéaires et courbes. On peut alors observer que l'augmentation de la taille des cibles par rapport à la taille des éléments rend le bruit de mesure davantage gaussien. Ainsi, le gain de l'utilisation de la transformée de Hough est moins important, malgré que le UKF demeure celui avec l'erreur sur l'estimation la plus faible en moyenne. Le même phénomène est observé lorsque la configuration du lidar est changée, de sorte que le gain devient plus intéressant pour une résolution de 5° et plus par élément lidar.

7.1 Travaux futurs

Dans ce travail, un algorithme d'estimation d'état est développé en considérant une seule piste lidar à la fois. La prochaine étape est donc de développer un algorithme pour associer les nouvelles détections aux pistes existantes ou à de nouvelles pistes. Dans [2], le principe du

pistage à hypothèses multiples (MHT, *multiple hypothesis tracking*) est utilisé pour pister des cibles devant un lidar rotatif. Un principe similaire pourrait être développé en se servant des informations de l'estimateur d'état développé dans ce mémoire (UKF_H) : position et vitesse filtrées et droite estimée par la transformée de Hough. En effet, en plus d'être directement utilisée dans le filtre de Kalman, l'estimation de la droite par la transformée de Hough peut également servir à associer de nouvelles détections aux pistes existantes.

Ensuite, il serait bien entendu très intéressant d'implanter en temps réel le système de pistage complet. Puisqu'il faut calculer les états pour chaque cible vue par le lidar, la transformée de Hough doit être calculée pour chaque cible également, ce qui peut devenir lourd. Plusieurs stratégies ont été abordées dans ce mémoire pour réduire la complexité algorithmique de la transformée, mais il reste du travail à faire pour une implantation sur un FPGA et un microcontrôleur.

Afin de réduire davantage la complexité et le temps d'exécution, il serait possible de ne pas calculer la transformée à chaque instant, de diminuer la taille de la matrice des votes, la profondeur de l'historique ou encore le nombre de points sur la PDF du bruit gaussien de mesure de position radiale. Réduire ces paramètres à des valeurs inférieures à celles proposées pourrait diminuer les performances de la transformée de Hough. Il faut donc les optimiser selon la précision de l'estimation souhaitée.

Une autre façon de réduire la complexité serait de décider, selon la trajectoire que suit une cible et sa taille, si la transformée de Hough doit être utilisée ou non. En effet, pour lorsque le rapport entre la taille de la cible sur la largeur d'un élément est très grand, l'utilisation de la transformée de Hough n'entraîne pas un gain important sur l'estimation des états. Dans ces situations, il serait possible d'utiliser simplement le filtre de Kalman UKF sans l'ajout des contraintes. Il s'agit alors de la même structure, mais le vecteur d'observations est réduit en taille temporairement.

Annexe A

Dérivation du filtre de Kalman

A.1 Propagation de l'erreur

L'erreur *a priori*, sachant l'état estimé précédent, est l'erreur sur l'estimation à l'étape de prédiction du filtre Kalman. Elle est définie par :

$$\mathbf{e}_{k|k-1} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}. \quad (\text{A.1})$$

En exprimant l'état actuel en fonction de l'état précédent, il est possible de récupérer l'équation à récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k|k-1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{w}_k \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

La propagation de la matrice de covariance de l'erreur à l'état précédent, soit la matrice de covariance de l'erreur *a priori*, est donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} &= E \left[\mathbf{e}_{k|k-1} \mathbf{e}_{k|k-1}^\top \right] \\ &= E \left[(\mathbf{A}\mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{w}_k)(\mathbf{A}\mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{w}_k)^\top \right] \\ &= E \left[\mathbf{A}\mathbf{e}_{k-1} \mathbf{e}_{k-1}^\top \mathbf{A}^\top + \mathbf{A}\mathbf{e}_{k-1} \mathbf{w}_k^\top + (\mathbf{A}\mathbf{e}_{k-1} \mathbf{w}_k)^\top + \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Le bruit de procédé à l'instant k est indépendant de l'erreur à l'instant $k-1$, puisqu'elle n'est fonction que du bruit de procédé à l'instant $k-1$. L'espérance de $\mathbf{A}\mathbf{e}_{k-1} \mathbf{w}_k^\top$ et de son transposé est par conséquent nulle. La covariance de l'erreur *a priori* est simplifiée à :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{A}E \left[\mathbf{e}_{k-1} \mathbf{e}_{k-1}^\top \right] \mathbf{A}^\top + E \left[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top \right] \\ &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.2 Covariance de l'innovation

L'innovation est l'erreur sur l'estimation *a priori* par rapport aux observations et dans l'espace des observations. En l'exprimant en fonction des états du système, il est possible de formuler

l'innovation selon l'erreur *a priori* :

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_k &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ &= \mathbf{H}\mathbf{e}_{k|k-1} + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{A.5}$$

La covariance de l'innovation devient donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_k &= E\left[\mathbf{i}_{k|k-1}\mathbf{i}_{k|k-1}^\top\right] \\ &= E\left[(\mathbf{H}\mathbf{e}_{k|k-1} + \mathbf{v}_k)(\mathbf{H}\mathbf{e}_{k|k-1} + \mathbf{v}_k)^\top\right] \\ &= E\left[\mathbf{H}\mathbf{e}_{k|k-1}(\mathbf{H}\mathbf{e}_{k|k-1})^\top + \mathbf{H}\mathbf{e}_{k|k-1}\mathbf{v}_k^\top + \mathbf{v}_k(\mathbf{H}\mathbf{e}_{k|k-1})^\top + \mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^\top\right].\end{aligned}\tag{A.6}$$

Le bruit de mesure à l'instant k est indépendant de l'erreur *a priori*, puisqu'à l'instant k , elle n'est fonction que du bruit de procédé. L'espérance de $\mathbf{H}\mathbf{e}_{k|k-1}\mathbf{v}_k^\top$ et de son transposé est par conséquent nulle. La covariance de l'innovation est simplifiée à :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_k &= \mathbf{H}E\left[\mathbf{e}_{k|k-1}\mathbf{e}_{k|k-1}^\top\right]\mathbf{H}^\top + E\left[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^\top\right] \\ &= \mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^\top + \mathbf{R}.\end{aligned}\tag{A.7}$$

A.3 Approche du moindre carré

Le développement détaillé ici est basé sur [8].

L'erreur en fonction du vecteur d'état et de l'estimation *a priori* est développée à partir de l'équation générale d'un observateur.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_k &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] \\ &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k [\mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{e}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{A.8}$$

La covariance de l'erreur *a posteriori* est déduite pour un bruit de mesure \mathbf{v}_k non corrélé avec l'estimation *a priori* ($\mathbf{e}_{k|k-1}$ est plutôt fonction de \mathbf{v}_{k-1}) :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k &= E\left[\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^\top\right] \\ &= E\left[\left((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{e}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k\right)\left((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{e}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k\right)^\top\right] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})E\left[\mathbf{e}_{k|k-1}\mathbf{e}_{k|k-1}^\top\right](\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})^\top + \mathbf{K}_kE\left[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^\top\right]\mathbf{K}_k^\top \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})\mathbf{P}_{k|k-1}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H})^\top + \mathbf{K}_k\mathbf{R}\mathbf{K}_k^\top\end{aligned}\tag{A.9}$$

La trace de \mathbf{P}_k est donc la suivante :

$$\begin{aligned}Tr(\mathbf{P}_k) &= Tr(\mathbf{P}_{k|k-1}) - Tr(\mathbf{K}_k\mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}) - Tr(\mathbf{P}_{k|k-1}(\mathbf{K}_k\mathbf{H})^\top) + Tr(\mathbf{K}_k(\mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^\top + \mathbf{R})\mathbf{K}_k^\top) \\ &= Tr(\mathbf{P}_{k|k-1}) - 2Tr(\mathbf{P}_{k|k-1}(\mathbf{K}_k\mathbf{H})^\top) + Tr(\mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^\top)\end{aligned}\tag{A.10}$$

Pour trouver la valeur de \mathbf{K}_k pour laquelle la somme quadratique des erreurs est minimale, la trace est dérivée et mise à zéro :

$$\begin{aligned}\frac{\delta \text{Tr}(\mathbf{P}_k)}{\delta \mathbf{K}_k} &= \frac{\delta \text{Tr}(\mathbf{P}_{k|k-1})}{\delta \mathbf{K}_k} - 2 \frac{\delta (\text{Tr}(\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{S}_k))}{\delta \mathbf{K}_k} + \frac{\delta (\text{Tr}(\mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^\top))}{\delta \mathbf{K}_k} = 0 \\ &= 0 - 2(\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1})^\top + (\mathbf{S}_k \mathbf{K}_k)^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \\ 0 &= -2\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top + 2\mathbf{K}_k \mathbf{S}_k\end{aligned}\tag{A.11}$$

Le gain minimisant la variance de l'erreur est donc :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{S}_k^{-1}\tag{A.12}$$

La covariance de l'erreur *a posteriori* (A.9) est ainsi simplifiée à :

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k|k-1}\tag{A.13}$$

A.4 Approche du maximum *a posteriori*

Le développement dans cette section est basé sur [9], à la différence de la formulation de départ par rapport à la densité de probabilité *a priori* plutôt qu'à la fonction de vraisemblance.

Le maximum *a posteriori* $\max p(\hat{\mathbf{x}}_k | \mathbf{y}_k)$ est calculé par la relation suivante :

$$\max_{\hat{\mathbf{x}}_k} (p(\hat{\mathbf{x}}_k | \mathbf{y}_k)) = \max_{\hat{\mathbf{x}}_k} (p(\mathbf{y}_k | \hat{\mathbf{x}}_k) p(\hat{\mathbf{x}}_k | \hat{\mathbf{x}}_{k-1}))\tag{A.14}$$

ou encore, sous forme de logarithme :

$$\max_{\hat{\mathbf{x}}_k} (\log p(\hat{\mathbf{x}}_k | \mathbf{y}_k)) = \max_{\hat{\mathbf{x}}_k} (\log p(\mathbf{y}_k | \hat{\mathbf{x}}_k) + \log p(\hat{\mathbf{x}}_k | \hat{\mathbf{x}}_{k-1}))\tag{A.15}$$

où le logarithme de la fonction de vraisemblance, déduit de (2.18), est proportionnel à :

$$\log p(\mathbf{y}_k | \hat{\mathbf{x}}_k) \propto -[\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k] \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k]^\top\tag{A.16}$$

et le logarithme de la densité de probabilité *a priori*, déduit de (2.19), est proportionnel à :

$$\log p(\hat{\mathbf{x}}_k | \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \propto -[\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} [\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]^\top\tag{A.17}$$

Pour trouver la valeur de $\hat{\mathbf{x}}_k$ qui maximise la fonction de vraisemblance et la distribution *a priori*, il faut dériver ces deux termes et les mettre à zéro. La dérivation de (A.16) est d'abord effectuée.

$$\begin{aligned}\log p(\mathbf{y}_k | \hat{\mathbf{x}}_k) &\propto -(\mathbf{y}_k \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k^\top + (\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k)^\top - (\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k^\top - \mathbf{y}_k \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k)^\top) \\ \frac{\delta \log p(\mathbf{y}_k | \hat{\mathbf{x}}_k)}{\delta \hat{\mathbf{x}}_k} &= -2\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k + 2\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k\end{aligned}\tag{A.18}$$

Puis, la dérivation de (A.17) est faite :

$$\begin{aligned} \log p(\hat{\mathbf{x}}_k | \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) &= -(\hat{\mathbf{x}}_k \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_k^\top + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^\top - \hat{\mathbf{x}}_k \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^\top - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_k^\top) \\ \frac{\delta \log p(\hat{\mathbf{x}}_k | \hat{\mathbf{x}}_{k-1})}{\delta \hat{\mathbf{x}}_k} &= -2\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_k + 2\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Les résultats de ces dérivations sont sommés et le total est mis à zéro.

$$\begin{aligned} \frac{\delta \log p(\mathbf{y}_k | \hat{\mathbf{x}}_k)}{\delta \hat{\mathbf{x}}_k} &= \frac{\delta \log p(\mathbf{y}_k | \hat{\mathbf{x}}_k)}{\delta \hat{\mathbf{x}}_k} + \frac{\delta \log p(\hat{\mathbf{x}}_k | \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})}{\delta \hat{\mathbf{x}}_k} = 0 \\ &= -2\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k + 2\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k - 2\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_k + 2\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ 0 &= (\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1}) \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k - \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

La valeur qui maximise la probabilité *a posteriori* est isolée dans la dernière expression :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \left[\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \right]^{-1} \left[\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k + \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] \quad (\text{A.21})$$

La forme classique du filtre de Kalman n'est pas immédiatement reconnue dans cette expression, mais elle est équivalente. Pour le démontrer, le lemme de l'inversion matricielle est utilisé afin de développer le premier terme de la multiplication.

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \right]^{-1} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \\ &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \\ &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

où \mathbf{K}_k correspond au gain Kalman ($\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{S}_k^{-1}$). La multiplication de ce nouveau terme est insérée dans l'expression (A.21) et est ensuite développée en deux parties :

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}) \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}_k &= (\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{y}_k \\ &= \mathbf{K}_k (\mathbf{K}_k^{-1} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{K}_k^{-1} \mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{y}_k \\ &= \mathbf{K}_k (\mathbf{S}_k (\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top)^{-1} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{y}_k \\ &= \mathbf{K}_k (\mathbf{S}_k \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{y}_k \\ &= \mathbf{K}_k (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1} + \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{y}_k \\ &= \mathbf{K}_k \mathbf{y}_k \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}) \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= (\mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1}) \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

En regroupant ces résultats, il est possible de réexprimer l'estimation *a posteriori* sous la forme de l'équation générale d'un observateur :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{K}_k \mathbf{y}_k + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]\end{aligned}\quad (\text{A.25})$$

où \mathbf{K}_k correspond bien au gain Kalman : $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{S}_k^{-1}$.

Annexe B

Filtre de Kalman assisté modèle polaire

Dans cette section, le modèle temporel de propagation des états (à vitesse constante) en coordonnées polaires est développé. Les équations paramétriques du passage de l'espace polaire à l'espace cartésien sont les suivantes :

$$x = r \cos(\phi), \quad (B.1)$$

$$y = r \sin(\phi). \quad (B.2)$$

Les dérivées de ces équations en fonction du temps sont :

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\phi) - r \dot{\phi} \sin(\phi), \quad (B.3)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin(\phi) + r \dot{\phi} \cos(\phi). \quad (B.4)$$

Inversement, les équations paramétriques du passage de l'espace cartésien à l'espace polaire sont les suivantes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (B.5)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (B.6)$$

Leurs dérivées en fonction du temps sont donc :

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (B.7)$$

$$\dot{\phi} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (B.8)$$

Il faut ensuite remplacer les coordonnées cartésiennes dans ces quatre dernières équations par le modèle temporel à vitesse constante suivant :

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + \dot{x}_{k-1} \Delta t \\ \dot{x}_k &= \dot{x}_{k-1} \\ y_k &= y_{k-1} + \dot{y}_{k-1} \Delta t \\ \dot{y}_k &= \dot{y}_{k-1}. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Finalement, en remplaçant les coordonnées cartésiennes par les équations paramétriques et leurs dérivées en polaire, on obtient :

$$r_k = \sqrt{(r_{k-1} + \dot{r}_{k-1} \Delta t)^2 + (r_{k-1} \dot{\phi}_{k-1} \Delta t)^2}, \tag{B.10}$$

$$\dot{r}_k = \frac{(r_{k-1}^2 \dot{\phi}_{k-1}^2 + \dot{r}_{k-1}^2) \Delta t + r \dot{r}}{r_k}, \tag{B.11}$$

$$\phi_k = -\arctan \left(\frac{r_{k-1} \dot{\phi}_{k-1} \Delta t \cos(\phi_{k-1}) + (r_{k-1} + \dot{r}_{k-1} \Delta t) \sin(\phi_{k-1})}{r_{k-1} \dot{\phi}_{k-1} \Delta t \sin(\phi_{k-1}) - (r_{k-1} + \dot{r}_{k-1} \Delta t) \cos(\phi_{k-1})} \right), \tag{B.12}$$

$$\dot{\phi}_k = \frac{r_{k-1}^2 \dot{\phi}_{k-1}}{r_k^2}. \tag{B.13}$$

Annexe C

Caractérisation de l'erreur sur l'estimation des paramètres de trajectoire

Des simulations supplémentaires concernant la transformée de Hough sont présentées dans cette section. Les paramètres des simulations sont présentés dans le tableau C.1. Il s'agit de simulations pour des trajectoires rectilignes (droites) dont les points d'entrée et de sortie se situent entre 10 et 50 m du lidar (variations par pas de 5 m, pour 81 trajectoires différentes au total). Un bruit gaussien d'écart-type σ_r est ajouté aux positions radiales des détections.

L'objectif de ces simulations est de caractériser l'erreur sur les paramètres estimés par la transformée de Hough et sur la projection de la mesure de position angulaire. Les mesures présentées sont donc l'erreur quadratique moyenne, l'écart-type de l'erreur ainsi que le biais sur l'erreur (moyenne de l'erreur).

TABLE C.1 – Paramètres de la transformée de Hough et résultats pour des trajectoires rectilignes simulées.

Paramètres de la transformée de Hough

| | | |
|--------------------------------|--------------------------|-----------|
| Taille de la matrice des votes | $N_\rho \times N_\theta$ | [10 × 15] |
| Largeur du suivi angulaire | $\Delta\theta$ | 20° |
| Taille de l'historique | N_{ch} | 8 |
| Nombre de points sur la PDF | N_{PDF} | 5 |
| Intervalle d'exécution | P | 1 |

Paramètres de simulations

| | | |
|--------------------------------|--------------|----------------|
| Taille de l'objet | $L \times l$ | 0.5 m × 0.25 m |
| Nombre d'éléments lidar | M | 9 |
| Champ de vue de chaque élément | $\Delta\phi$ | 10° |
| Nombre de trajectoires testées | | 81 |
| Bruit position radiale | σ_r | 0.1 m |

C.1 Erreur sur l'estimation de la transformée de Hough

Cette sous-section présente les résultats des simulations concernant l'estimation des paramètres de la trajectoire. À la figure C.1, l'erreur quadratique moyenne, l'erreur moyenne (biais) et l'écart-type de l'erreur en fonction de la taille d'une cible carrée et du nombre d'éléments traversés dans le lidar sont illustrés.

Il est possible de remarquer qu'un biais est introduit dans l'estimation lorsque la taille de la cible augmente. Cela est dû au biais sur les mesures elles-mêmes : les mesures faites par le lidar ne sont pas centrées autour du centre de masse de la cible, elles sont plus rapprochées du lidar. De plus, une autre observation est que l'écart-type sur l'orientation de la trajectoire θ augmente avec la taille de la cible, alors que l'écart-type de la position de la trajectoire par rapport au lidar ρ reste constante.

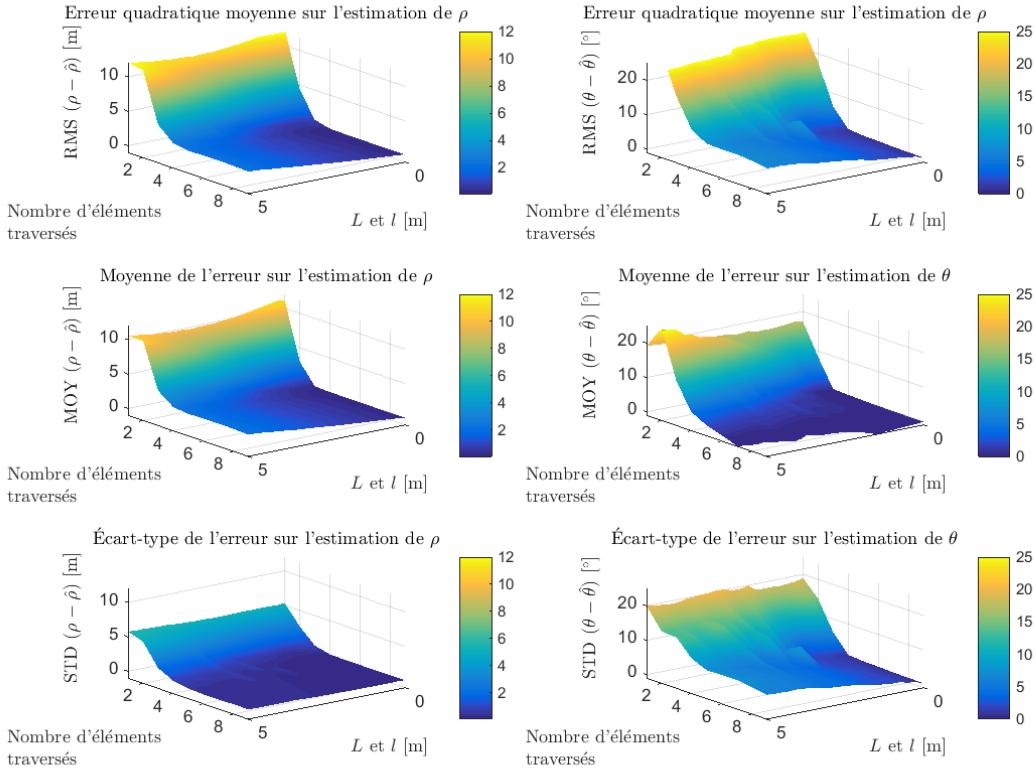


FIGURE C.1 – Caractéristiques (erreur quadratique moyenne, biais et écart-type) de l'erreur sur l'estimation des paramètres de trajectoires ρ et θ .

La figure C.2 présente l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre d'éléments lidar traversés pour l'ensemble des tailles de cibles simulées. Il est possible de remarquer l'augmentation de l'erreur lorsque la taille de la cible augmente également. Aussi, l'atteinte du régime

permanent ($\pm 5\%$) se fait entre 3 ou 4 changements d'éléments, selon la taille de la cible.

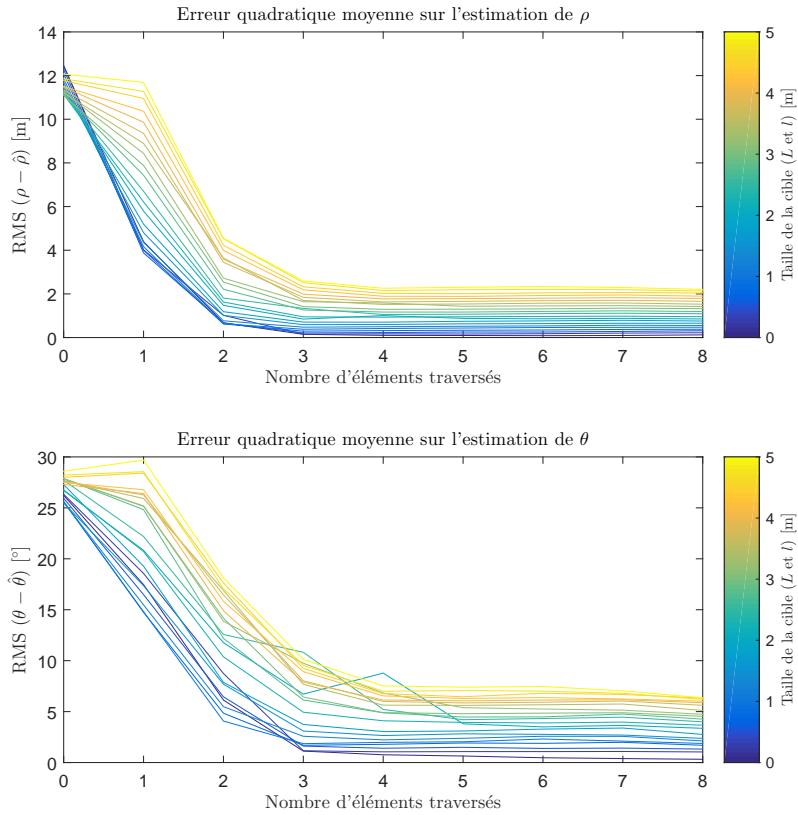


FIGURE C.2 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de trajectoires, pour différentes tailles de cibles, en fonction du nombre d'éléments lidar traversés.

La figure C.3 présente l'erreur quadratique moyenne pour 3 éléments lidars et plus traversés en fonction de la taille de la cible. Cette erreur semble augmenter linéairement en fonction de la taille de la cible. Une régression linéaire est donc faite sur les valeurs recueillies afin d'en déduire une équation à utiliser lors de l'évaluation de matrice de covariance du bruit de mesure (4.45). La valeur initiale concernant l'erreur quadratique sur ρ est fixée à 0.1 m (moyenne des erreurs quadratiques mesurées pour trois éléments et plus traversés), car la régression linéaire tend vers une valeur initiale négative (presque nulle) sinon, ce qui n'est pas possible.

C.1.1 Erreur sur la projection de la mesure de position angulaire

Cette sous-section présente les résultats des simulations concernant la projection de la mesure de position angulaire sur la droite estimée par la transformée de Hough. À la figure C.1, l'erreur quadratique moyenne, l'erreur moyenne (biais) et l'écart-type de l'erreur en fonction de la taille d'une cible carrée et du nombre d'éléments traversés dans le lidar sont illustrés

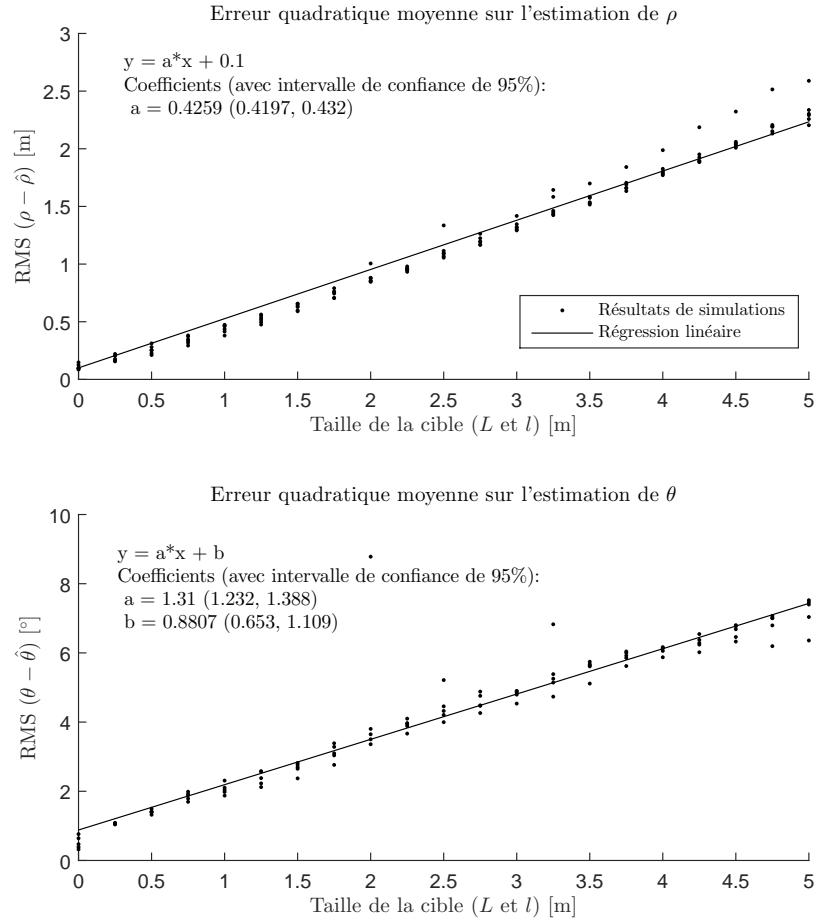


FIGURE C.3 – Erreur quadratique moyenne sur l'estimation des paramètres de trajectoires après avoir traversé au moins 3 éléments, en fonction de la taille de la cible.

pour les deux méthodes de projection (en considérant ou non le bruit de mesure gaussien sur la position radiale).

En comparant les deux méthodes de projection, il est évident que l'erreur en général est inférieure dans les premiers éléments lidars pour la méthode considérant le bruit gaussien ($r \pm \delta r_i$). De plus, comme vu à la figure C.4, le régime transitoire est plus court pour cette méthode également.

La figure C.6 présente l'erreur quadratique moyenne de la projection pour 3 éléments lidar et plus traversés en fonction de la taille de la cible. Encore une fois, une régression linéaire est faite sur les valeurs recueillies afin d'en déduire une équation à utiliser lors de l'évaluation de matrice de covariance du bruit de mesure (4.43).

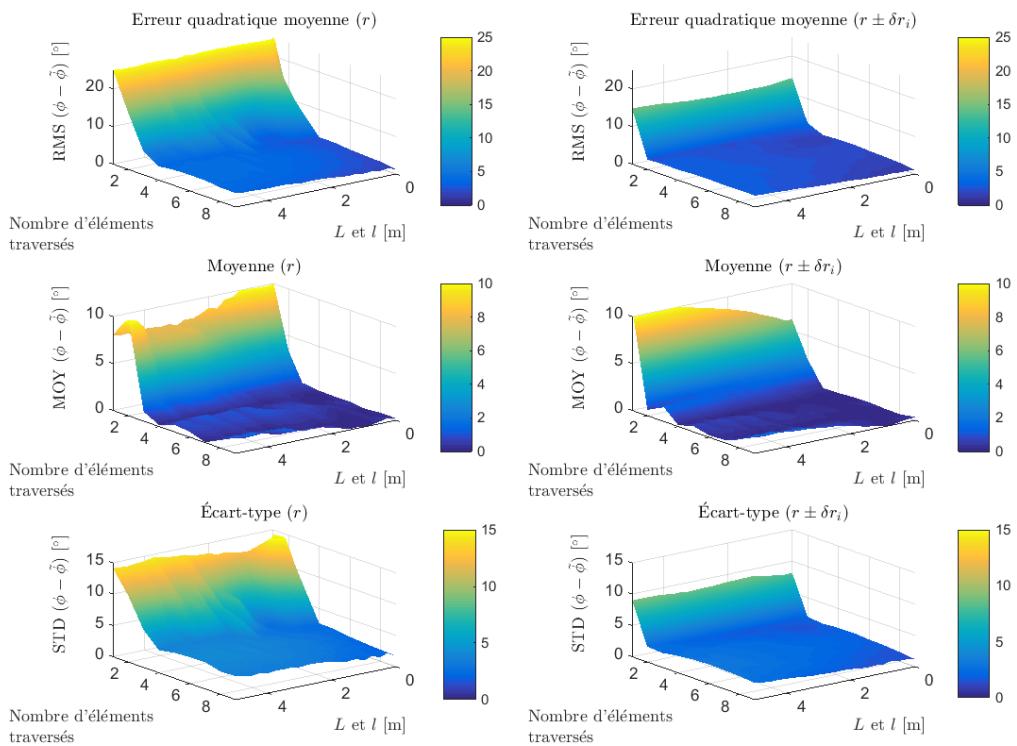


FIGURE C.4 – Caractéristiques (erreur quadratique moyenne, biais et écart-type) de l'erreur sur la projection de la mesure angulaire. Gauche : projection simple (en utilisant r directement). Droite : projection en considérant le bruit gaussien (en utilisant $r \pm \delta r_i$).

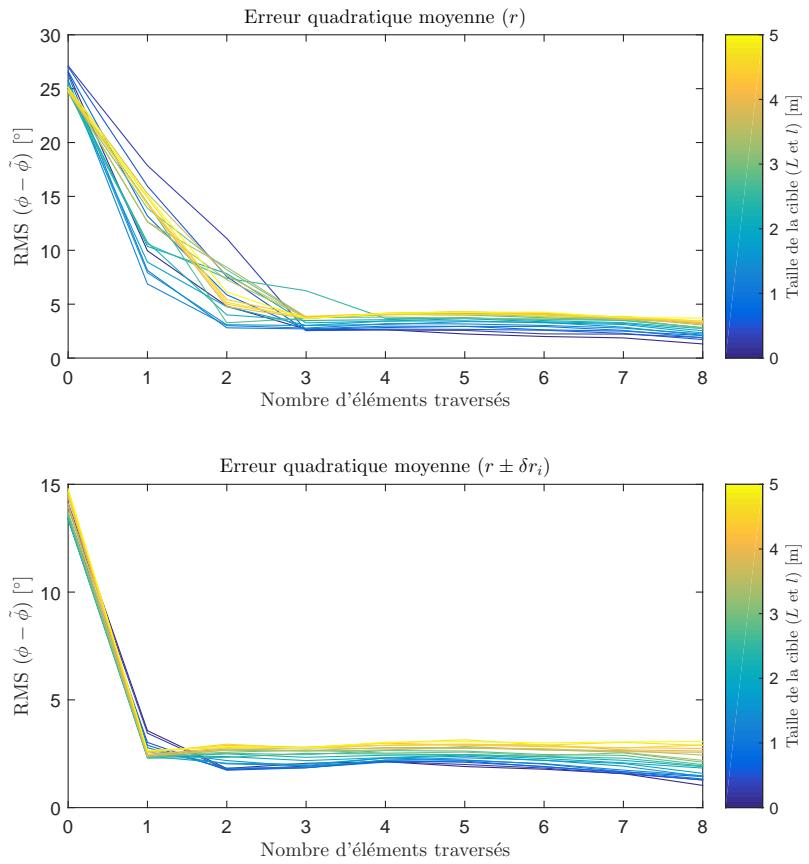


FIGURE C.5 – Erreur quadratique moyenne sur la projection de la mesure angulaire, pour différentes tailles de cibles, en fonction du nombre d’éléments lidar traversés. Haut : projection simple (en utilisant r directement). Bas : projection en considérant le bruit gaussien (en utilisant $r \pm \delta r_i$).

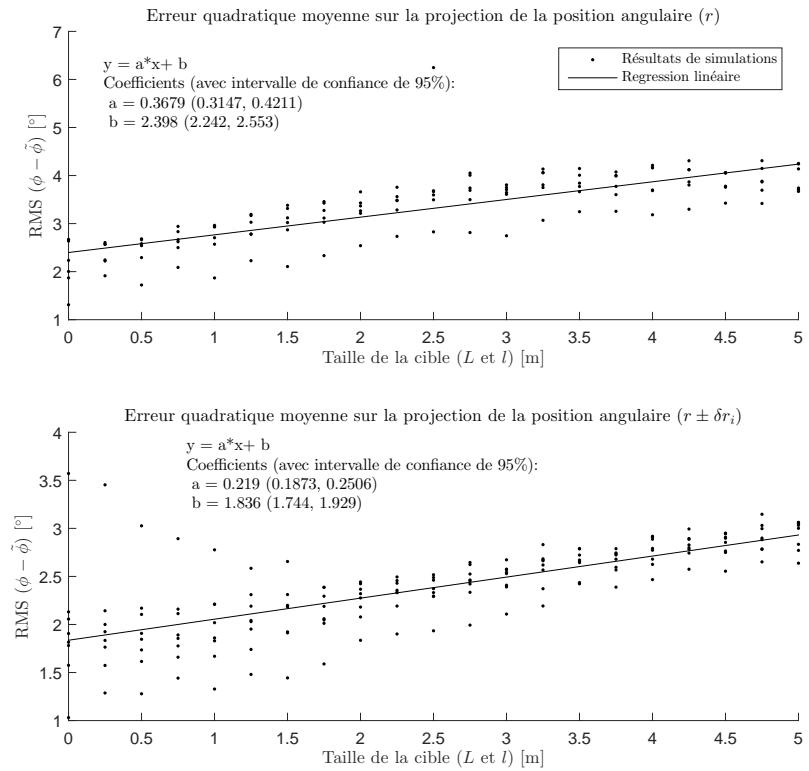


FIGURE C.6 – Erreurs quadratiques moyennes sur la projection de la mesure angulaire après avoir traversé au moins 3 éléments, en fonction de la taille de la cible. Haut : projection simple (en utilisant r directement). Bas : projection en considérant le bruit gaussien (en utilisant $r \pm \delta r_i$).

Bibliographie

- [1] S. E. Lavoie, “Adaptation d’un algorithme de deuxième ordre pour la détection de pulse sans information de quadrature par le principe du temps de vol,” Master’s thesis, Université Laval, Québec, 2015.
- [2] D. Gruyer, S. Demmel, V. Magnier, and R. Belaroussi, “Multi-Hypotheses Tracking using the Dempster-Shafer Theory, application to ambiguous road context,” *Information Fusion*, vol. 29, pp. 40–56, 2016.
- [3] S. S. Blackman, “Multiple hypothesis tracking for multiple target tracking,” *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, vol. 19, no. 1, pp. 5–18, 2004.
- [4] E. Dayangac, F. Baumann, J. Aulinas, and M. Zobel, “Target Position and Speed Estimation Using LiDAR,” in *International Conference Image Analysis and Recognition*, pp. 470–477, Springer, 2016.
- [5] D. Z. Wang, I. Posner, and P. Newman, “A new approach to model-free tracking with 2D lidar,” in *Robotics Research*, pp. 557–573, Springer, 2016.
- [6] K. Wenzl, H. Ruser, and C. Kargel, “Reduction of the lateral localization error of targets moving through a LIDAR beam,” in *Videometrics, Range Imaging, and Applications XII; and Automated Visual Inspection*, vol. 8791, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2013.
- [7] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Journal of basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.
- [8] R. G. Brown and P. Y. C. Hwang, *Introduction to random signals and applied Kalman filtering : with MATLAB exercises and solutions*. John Wiley & Sons, Inc., 4th edition ed., 2012.
- [9] N. A. Thacker and A. J. Lacey, “Tutorial : The Likelihood Interpretation of the Kalman Filter..” Tina Memo No. 1996-002, 1996.

- [10] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, “New extension of the Kalman filter to nonlinear systems,” in *Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI*, vol. 3068, pp. 182–193, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 1997.
- [11] E. A. Wan and R. Van Der Merwe, “The unscented Kalman filter for nonlinear estimation,” in *The IEEE Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*, pp. 153–158, IEEE, 2000.
- [12] S. J. Julier, “The scaled unscented transformation,” in *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 6, pp. 4555–4559, IEEE, 2002.
- [13] O. Straka, J. Duník, M. Šimandl, and J. Havlik, “Aspects and comparison of matrix decompositions in unscented Kalman filter,” in *American Control Conference*, pp. 3075–3080, IEEE, 2013.
- [14] R. E. Curry, P. Mirchandani, and C. F. Price, “State estimation with coarsely quantized, high-data-rate measurements,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, no. 4, pp. 613–621, 1975.
- [15] M. Boccadoro, F. Martinelli, and S. Pagnottelli, “Constrained and quantized Kalman filtering for an RFID robot localization problem,” *Autonomous Robots*, vol. 29, no. 3, pp. 235–251, 2010.
- [16] R. Karlsson and F. Gustafsson, “Particle filtering for quantized sensor information,” in *13th European Signal Processing Conference*, pp. 1–4, IEEE, 2005.
- [17] E. Sviestins and T. Wigren, “Optimal recursive state estimation with quantized measurements,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 4, pp. 762–767, 2000.
- [18] Z. Duan, V. P. Jilkov, and X. R. Li, “State estimation with quantized measurements : Approximate MMSE approach,” in *International Conference on Information Fusion*, pp. 1–6, IEEE, 2008.
- [19] K. You, L. Xie, S. Sun, and W. Xiao, “Multiple-level quantized innovation Kalman filter,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 41, no. 2, pp. 1420–1425, 2008.
- [20] D. Simon, “Kalman filtering with state constraints : a survey of linear and nonlinear algorithms,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 8, pp. 1303–1318, 2010.
- [21] A. Alouani and W. Blair, “Use of a kinematic constraint in tracking constant speed, maneuvering targets,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 7, pp. 1107–1111, 1993.
- [22] S. J. Julier and J. J. LaViola, “On Kalman filtering with nonlinear equality constraints,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 6, pp. 2774–2784, 2007.

- [23] B. Carlson, E. Evans, and S. Wilson, “Search radar detection and track with the Hough transform. III. Detection performance with binary integration,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 30, no. 1, pp. 116–125, 1994.
- [24] D. H. Ballard, “Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes,” *Pattern recognition*, vol. 13, no. 2, pp. 111–122, 1981.
- [25] N. Guil, J. Villalba, and E. L. Zapata, “A fast Hough transform for segment detection,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 4, no. 11, pp. 1541–1548, 1995.
- [26] H. Li, M. A. Lavin, and R. J. Le Master, “Fast Hough transform : A hierarchical approach,” *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 36, no. 2-3, pp. 139–161, 1986.
- [27] R. S. Stephens, “Probabilistic approach to the Hough transform,” *Image and vision computing*, vol. 9, no. 1, pp. 66–71, 1991.
- [28] D. Simon and T. L. Chia, “Kalman filtering with state equality constraints,” *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 38, no. 1, pp. 128–136, 2002.
- [29] T. Ogawa, H. Sakai, Y. Suzuki, K. Takagi, and K. Morikawa, “Pedestrian detection and tracking using in-vehicle lidar for automotive application,” in *IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, pp. 734–739, IEEE, 2011.
- [30] K. You, N. Xiao, and L. Xie, *Analysis and Design of Networked Control Systems*. Springer, 2015. (page 19).